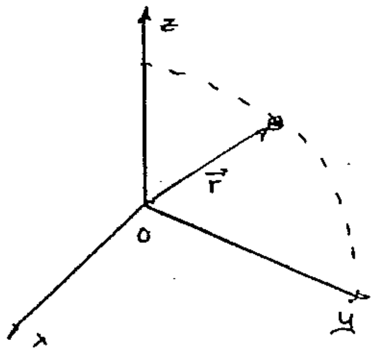
FIS1

Teoría, ejercicios y exámenes
Parte 1/2: Mecánica

CINEMATICA

* CONCEPTOS BÁSICOS

- Vector Posición: vector que une la partícula con el origen de coordenadas en un instante de tiempo t.
- Ecuaciones de movimiento: describen el movimiento de la partícula en función del tiempo (PARÁMETRO). Si despejamos el tiempo, obtenemos la/s ecuación/es de la trayectoria.



$$\vec{r} = \vec{r}(t) \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ ECUACIONES DE MOVIMIENTO

$$x = x(y, z)$$
$$y = y(x, z)$$ ECUACIONES DE LA TRAYECTORIA

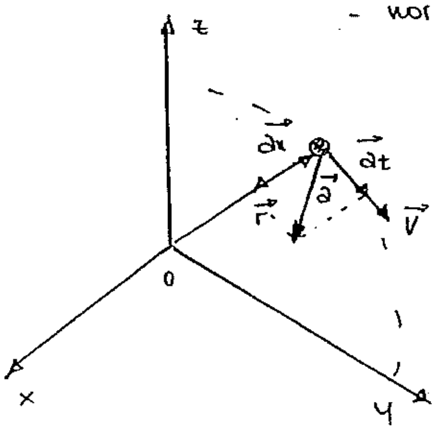
- Velocidad: derivada del vector posición respecto al tiempo.

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{r}} \quad \| \quad \boxed{\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{u_t}}$$

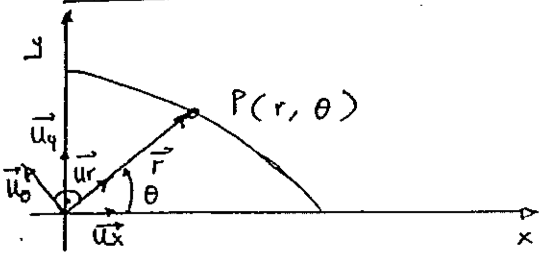
- Aceleración: derivada del vector velocidad respecto al tiempo.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}}$$

tiene dos componentes:
- tangencial: $\boxed{\frac{dv}{dt}\vec{u_t}}$
- normal: $\boxed{V\frac{d\vec{u_t}}{dt}(\vec{u_n})}$



* TRAYECTORIA PLANA (COORD. POLARES)



$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_y$$
$$\vec{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \frac{d}{dt}\vec{u}_r = -\operatorname{sen}\theta\cdot\dot{\theta}\,\vec{u}_x + \cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\vec{u}_y = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$
$$\dot{\vec{u}}_\theta = \frac{d}{dt}\vec{u}_\theta = -\cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\vec{u}_x - \operatorname{sen}\theta\cdot\dot{\theta}\,\vec{u}_y = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$$
$$\dot{\vec{u}}_x = 0$$
$$\dot{\vec{u}}_y = 0$$

- VELOCIDAD:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\,r\,\vec{u}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{V}_r = \dfrac{dr}{dt}\,\vec{u}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r \\ \vec{V}_\theta = r\cdot\dfrac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta = r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \end{cases}$$

- ACELERACION

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(V_r\,\vec{u}_r + V_\theta\,\vec{u}_\theta\right) = \dot{V}_r\,\vec{u}_r + V_r\,\dot{\vec{u}}_r + \dot{V}_\theta\,\vec{u}_\theta + V_\theta\,\dot{\vec{u}}_\theta$$

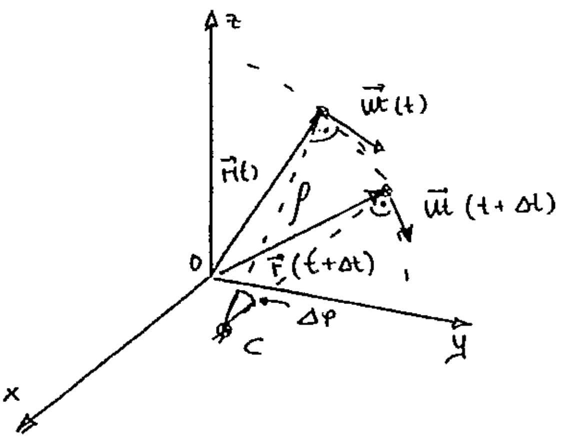
$$= \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{r}\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\vec{u}_r\right) =$$

$$= \left[\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right]\vec{u}_r + \left(\dot{r}\,\dot{\theta} + \dot{r}\,\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \begin{cases} \vec{a}_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\ \ \vec{u}_r \\ \vec{a}_\theta = 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\ \ \vec{u}_\theta \end{cases}$$

* COORDENADAS INTRINSECAS

$- \ \vec{u}_t = \dfrac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert}$	(VECTOR UNITARIO TANGENCIAL)
$- \ \vec{u}_n = \dfrac{\dot{\vec{u}}_t}{\lvert\dot{\vec{u}}_t\rvert}$	(VECTOR UNITARIO NORMAL)
$- \ \vec{u}_b = \vec{u}_n \wedge \vec{u}_t$	(VECTOR UNITARIO BINORMAL)

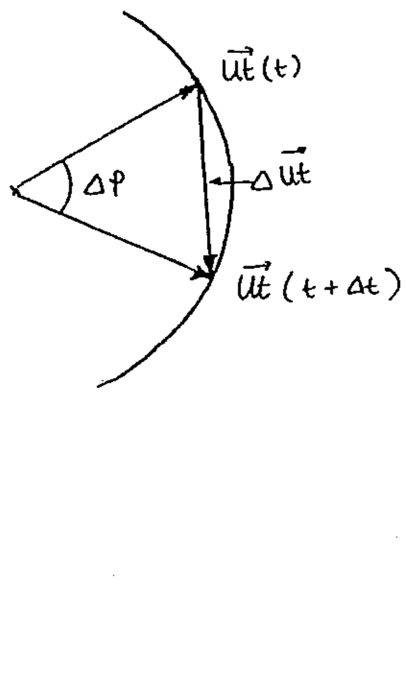


$$\Delta S = \rho \, \Delta\varphi$$

$$\frac{d\,\vec{u}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}_t}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{u}_t = \vec{u}_t(t+\Delta t) - \vec{u}_t(t)$$

$$\lvert \Delta \vec{u}_t \rvert \simeq \Delta\varphi$$



$$\frac{\lvert\Delta \vec{u}_t\rvert}{\Delta t} = \frac{\lvert\Delta \vec{u}_t\rvert}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \simeq$$

$$\simeq \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

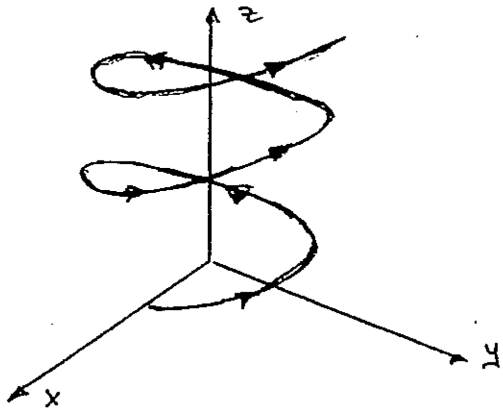
$$\Rightarrow \boxed{\left\lvert \frac{d\,\vec{u}_t}{dt} \right\rvert = \frac{1}{\rho} \, \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} v}$$

$$\vec{u}_n = \frac{\dot{\vec{u}}_t}{\lvert\dot{\vec{u}}_t\rvert} = \frac{\dot{\vec{u}}_t \cdot \rho}{v}$$

$$* \ \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \, \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \begin{cases} \vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt} \vec{u}_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = \dfrac{d}{dt} \lvert\vec{v}\rvert \\ \vec{a}_n = v^2/\rho \ \vec{u}_n = \vec{a} \cdot \vec{u}_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \\ \vec{a}_b = 0 \end{cases}$$

- EJEMPLO: CALCULAR EL VECTOR $\vec{ut}(t)$ DE UNA PARTICULA QUE DESCRIBE UNA TRAYECTORIA DE LA FORMA:

$$\vec{r}\begin{cases} x = 3\cos\pi t \\ y = 4\operatorname{sen}\pi t \\ z = 5t \end{cases}$$



1° Calculamos la <u>velocidad</u>

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \begin{cases} \dot{x} = -3\pi\operatorname{sen}\pi t \\ \dot{y} = 4\pi\cos\pi t \\ \dot{z} = 5 \end{cases}$$

2° Calculamos <u>$\vec{ut}(t)$</u>

$$\boxed{\vec{ut}(t) =} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} =$$

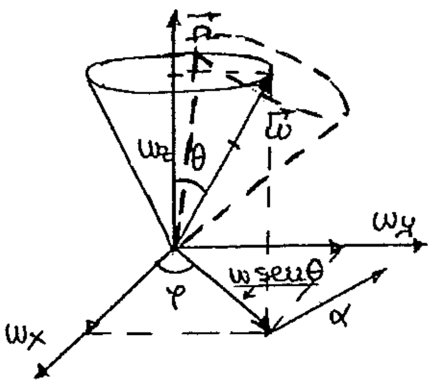
$$= \boxed{\frac{(-3\pi\operatorname{sen}\pi t,\ 4\pi\cos\pi t,\ 5)}{\sqrt{(-3\pi\operatorname{sen}\pi t)^2 + (4\pi\cos\pi t)^2 + (5)^2}}}$$

* MOVIMIENTO CIRCULAR

- VELOCIDAD ANGULAR

$$\vec{w}\begin{cases}\text{Dirección} \rightarrow \text{la del eje}\\ \text{Sentido} \rightarrow \text{giro del tornillo}\\ \text{Módulo} \rightarrow \dfrac{d(\varphi)}{dt}\ (\text{ángulo barrido})\end{cases}$$

- ACELERACION ANGULAR



La peonza realiza un movimiento de precesión (cabecea)

$|\vec{w}| = \text{constante} \Rightarrow \theta = \text{cte}$

$$\vec{w}\begin{cases} w_x = w \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ w_y = w \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ w_z = w\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{\alpha}\begin{cases} \alpha_x = w \operatorname{sen}\theta\, (-\operatorname{sen}\varphi)\, \Omega \\ \alpha_y = w \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\, \Omega \\ \alpha_z = 0 \end{cases}$$

- $\vec{w}\cdot\vec{\alpha} = -w^2 \Omega \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + w^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi\, \Omega + 0 = 0$

- Como $\vec{w}$ es un vector de módulo constante, su derivada $\vec{\alpha}$ es perpendicular a él.

$$\boxed{|\vec{w}| = \text{cte} \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{w}}$$

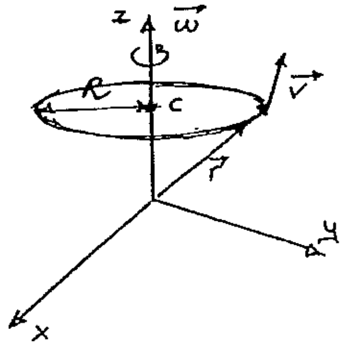
(1) · Si $|\omega| = cte \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\alpha} \cdot \bar{\omega} = 0$ $(\bar{\alpha} \perp \bar{\omega})$

(2) · Si $\bar{u} = cte \overset{*}{\Rightarrow} \bar{\alpha} \wedge \bar{\omega} = 0$ $(\bar{\alpha} \parallel \bar{\omega})$

· Si (1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow \bar{\omega} = cte \Rightarrow \bar{\alpha} = \bar{0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega} = \omega \cdot \bar{u} \\ \bar{\alpha} = \dot{\omega} \cdot \bar{u} + \omega \cdot \dot{\bar{u}} \\ \text{si } \omega = cte \Rightarrow \dot{\omega} = 0 \\ \text{si } \bar{u} = cte \Rightarrow \dot{\bar{u}} = 0 \end{array} \right.$$

- En la mayoría de los casos $\vec{\omega}$ es perpendicular a $\vec{\alpha}$

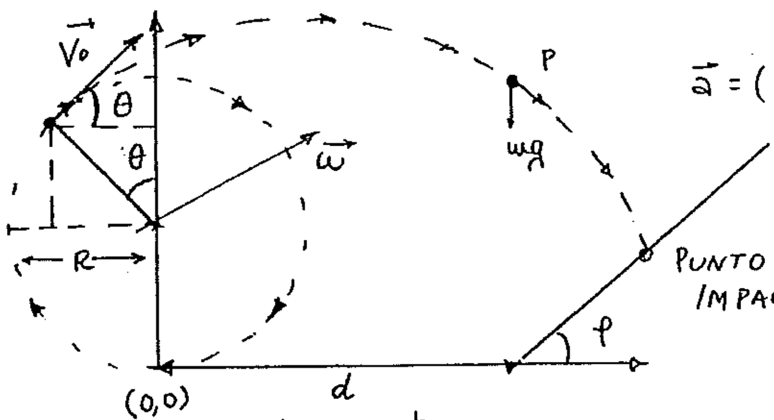


$\rho = cte = R$

$\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{r}$

$d\vec{v} = \vec{a} = (\vec{\alpha} \wedge \vec{r}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = a_t \vec{u_t} + a_n \vec{u_n}$

* TIRO PARABOLICO



$\vec{a} = (0, -g)$

- VELOCIDAD

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{V_0 \cos\theta}^{V_x} dV_x = \int_0^t a_x \, dt \Rightarrow V_x = V_0 \cos\theta \\ \displaystyle\int_{V_0 \sin\theta}^{V_y} dV_y = \int_0^t a_y \, dt \Rightarrow V_y = V_0 \sin\theta - gt \end{array} \right.$$

- ESPACIO

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-R\sin\theta}^{x} dx = \int_0^t V_x \, dt \Rightarrow x = -R\sin\theta + V_0 t \cos\theta \\ \displaystyle\int_{R+R\cos\theta}^{y} dy = \int_0^t V_y \, dt \Rightarrow y = R + R\cos\theta + V_0 t \sin\theta - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{array} \right.$$

- ALTURA MAXIMA $(V_y = 0)$

$$V_0 \operatorname{sen}\theta - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$ (instante de h max)

$$\boxed{h_{max}} = y(t) = R + R\cos\theta + V_0 \cdot \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \cdot \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} g \left[\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right]^2$$

$$= R + R\cos\theta + \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g} - \frac{1}{2}\frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g} =$$

$$= \boxed{R + R\cos\theta + \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}}$$

- TRAYECTORIA: (eliminación del tiempo)

$$t = \frac{x + R\operatorname{sen}\theta}{V_0\cos\theta}$$

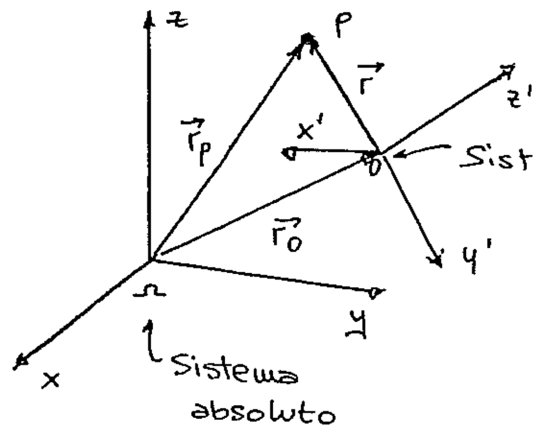
$$\boxed{y = R + R\cos\theta + V_0\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{x + R\operatorname{sen}\theta}{V_0\cos\theta} - \frac{1}{2} g \left[\frac{x + R\operatorname{sen}\theta}{V_0\cos\theta}\right]^2}$$

- ALCANCE MAXIMO (punto de corte con una recta)

$$\begin{cases} y = R + R\cos\theta + V_0\operatorname{sen}\theta \cdot \dfrac{x + R\operatorname{sen}\theta}{V_0\cos\theta} - \dfrac{1}{2} g \left[\dfrac{x + R\operatorname{sen}\theta}{V_0\cos\theta}\right]^2 \\ y = \operatorname{tg}\varphi\, x - \operatorname{tg}\varphi \cdot d \end{cases}$$

Resolver el sistema de ecuaciones. Saldrán dos soluciones. La negativa en el eje y es la mala.

* MOVIMIENTO RELATIVO



$$\boxed{\vec{r}_p = \vec{r}_o + \vec{r}}$$

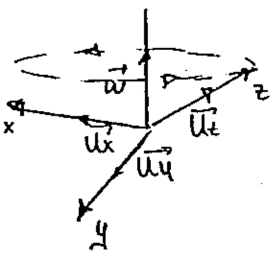
Velocidad: $\dfrac{d}{dt}\vec{r}_p = \dfrac{d}{dt}\vec{r}_o + \dfrac{d}{dt}\vec{r}$

$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \dfrac{d}{dt}\vec{r}$ (los ejes del sis. móvil se mueven rto al absoluto)

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z) + (x\dot{\vec{u}}_x + y\dot{\vec{u}}_y + z\dot{\vec{u}}_z)$$

- Si analizamos el mov. circular:



$$\vec{w} \wedge \vec{r} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$* \left\{ \begin{array}{l} \vec{w} \wedge \vec{u}_x = \dfrac{d}{dt}\vec{u}_x = \dot{\vec{u}}_x \\ \vec{w} \wedge \vec{u}_y = \dfrac{d}{dt}\vec{u}_y = \dot{\vec{u}}_y \\ \vec{w} \wedge \vec{u}_z = \dfrac{d}{dt}\vec{u}_z = \dot{\vec{u}}_z \end{array} \right.$$

$\vec{w}$ (velocidad de giro de los ejes)

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z + \vec{w} \wedge \vec{r} = \vec{v}_r + \vec{w} \wedge \vec{r}}$$

- Por tanto la velocidad de una partícula en un sistema móvil será:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{V_P} = \vec{V}_{rel} + \vec{V_o} + (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ \hline \vec{V_P} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{ARRASTRE} \end{array}}$$

Aceleración:

$$\frac{d}{dt}\vec{V_P} = \frac{d}{dt}\vec{V}_{rel} + \frac{d}{dt}\vec{V_o} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_{rel} = \ddot{x}\,\vec{U_x} + \ddot{y}\,\vec{U_y} + \ddot{z}\,\vec{U_z} + \dot{x}\,\dot{\vec{U_x}} + \dot{y}\,\dot{\vec{U_y}} + \dot{z}\,\dot{\vec{U_z}} =$$

$$= \vec{a}_{rel} + (\vec{\omega} \wedge \vec{V_r})$$

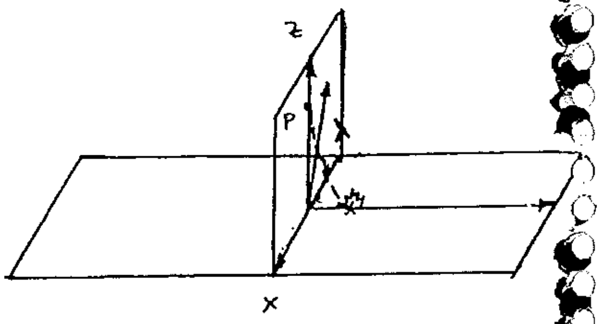
$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = (\vec{\alpha} \wedge \vec{r}) + \left(\vec{\omega} \wedge \left(\vec{V_r} + (\vec{\omega} \wedge \vec{r})\right)\right)$$

$$= (\vec{\alpha} \wedge \vec{r}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}) + (\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}))$$

- Por tanto la aceleración de una partícula en un sistema movil será:

$$\boxed{\vec{a_P} = \vec{a}_{rel} + \vec{a_o} + \underbrace{2(\vec{\omega} \wedge \vec{V_r})}_{\text{A. Coriolis}} + \underbrace{(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}))}_{\text{Acel. Centrípeta}} + \underbrace{(\vec{\alpha} \wedge \vec{r})}_{\text{A. COMPLEM.}}}$$

EJEMPLO: ¿CÓMO INFLUYE EL TÉRMINO DE CORIOLIS A UNA PARTICULA QUE CAE?



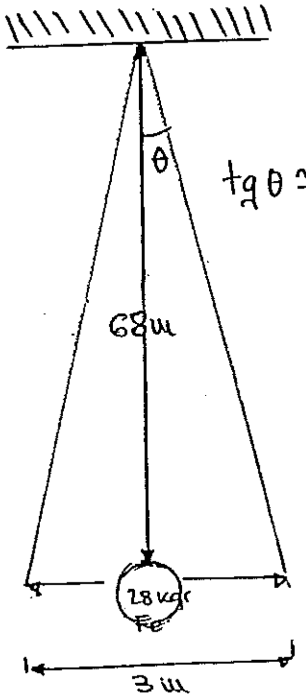
$$\vec{V_r} = (0, 0, -gt)$$

$$\vec{\omega} = (-\omega\cos\lambda, 0, \omega\,\mathrm{sen}\lambda)$$

$$\boxed{a_{coriolis} = +2\,\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos\lambda & 0 & \mathrm{sen}\lambda \\ 0 & 0 & +1 \end{vmatrix} 2\omega gt = \boxed{(0, \cos\lambda, 0)\cdot 2\omega gt}$$

$$(T^{\underline{o}}\ \text{coriolis}:\ \vec{F} = -m\cdot 2\,(\vec{\omega}\wedge\vec{V_r}))$$

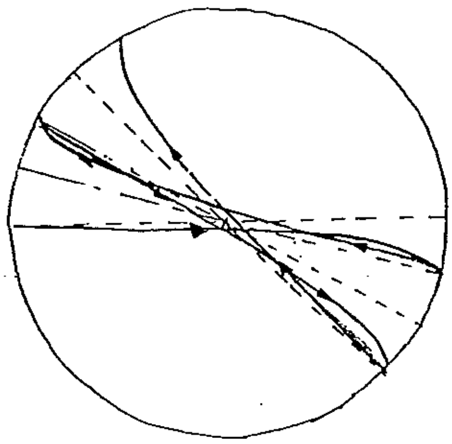
- FOUCOULT (EXPERIMENTO DEL PÉNDULO)



$$tg\,\theta \simeq \mathrm{sen}\,\theta \simeq 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- el péndulo, desviado por la aceleración de Coriolis, dibujaró al cabo de un tiempo una circunferencia.

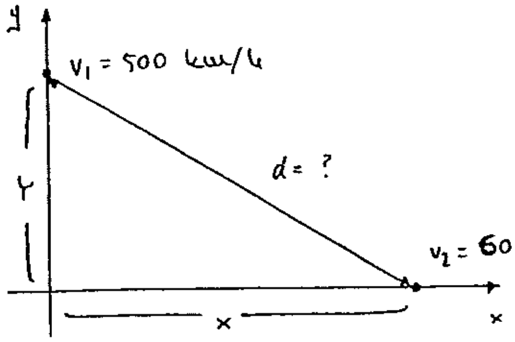


trayectoria rectilinea (la que debería seguir el pendulo)

trayectoria a causa de la fuerza de Coriolis

EJERCICIO 35: Dos aviones parten simultáneamente desde un punto en direcciones mutuamente perpendiculares. Sus velocidades son $V_1 = 500$ km/h y $V_2 = 600$ km/h.

a) Hallar la distancia que los separa en función del tiempo.



$$x = \int_0^t V_2 = \int_0^t 600 = 600t \text{ km}$$

$$y = \int_0^t V_1 = \int_0^t 500 = 500t \text{ km}$$

$$\boxed{d = \sqrt{(500t)^2 + (600t)^2} = \sqrt{610000\,t^2} = 781'02\,t \text{ km}}$$

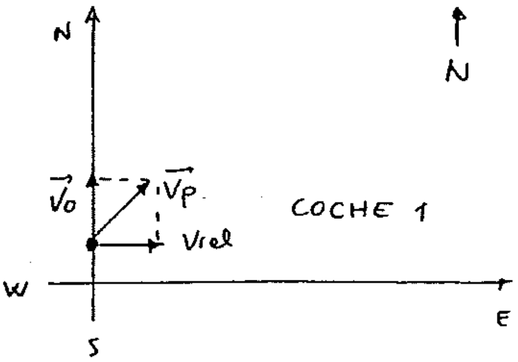
b) Hallar dicha distancia en el instante en que el primer avión ha recorrido 1500 km.

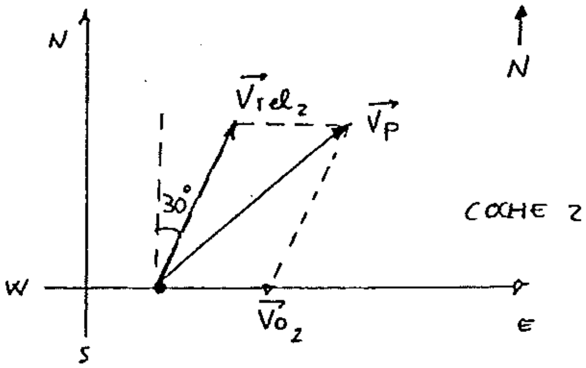
$$V_1 = 500 \text{ km/h} \rightarrow t = \frac{1500}{500} = 3\text{ h}$$

$$x = 600 \cdot 3 = 1800 \text{ km}$$

$$\boxed{d = \sqrt{1500^2 + 1800^2} = \sqrt{549000} = 2343'07 \text{ km}}$$

EJERCICIO 34: Al conductor de un coche que se dirige exactamente hacia el norte con una velocidad de V_0 km/h le parece que el viento procede exactamente del oeste. El conductor de otro coche que se dirige al este con una velocidad de $\frac{2V_0}{\sqrt{3}}$ km/h aprecia la dirección del viento como procedente de 30° suroeste. Calcular la dirección del viento respecto a tierra y el módulo de su velocidad.





$$\vec{V_p} = \vec{V_0} + \vec{V_{rel}} + \cancel{(\omega \wedge \vec{r})}^{\,0}$$

$$V_p \begin{cases} V_x = V_{0_2} + V_{rel_2} \cos 60 = V_{rel_1} \\ V_y = V_{0_1} = V_{r_2} \operatorname{sen} 60 \end{cases}$$

$$V_{r_2} = \frac{V_{01}}{\operatorname{sen} 60} = \frac{V_0}{\sqrt{3}/2} = \frac{2V_0}{\sqrt{3}}$$

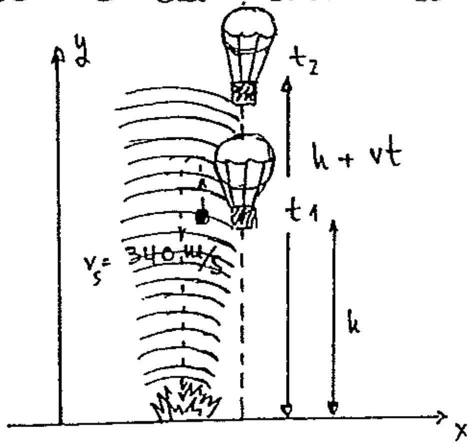
$$V_{r_1} = \frac{2V_0}{\sqrt{3}} + \frac{2V_0}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}\, V_0$$

$$\boxed{\vec{V_v}\,(\sqrt{3}V_0, V_0)}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_0}{\sqrt{3}V_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{|V_v| = \sqrt{3V_0^2 + V_0^2} = 2V_0}$$

EJERCICIO 27: Desde un globo que sube con velocidad constante de 24 m/s se deja caer una bomba que explota al llegar al suelo. Si el sonido de la explosión se oye en el globo 12 seg después del lanzamiento. ¿Cuál era la altura del globo sobre el suelo en el momento del lanzamiento? La velocidad del sonido es de 340 m/s, $g = 9'8\ ms^{-2}$



El tiempo total se emplea en bajar y subir:

$$t = t_1 + t_2$$

En el movimiento de bajada:

$$\boxed{h = \underbrace{-24 t_1}_{\text{sale con velocidad inicial (la del globo)}} + \frac{1}{2} g t_1^2 \overset{\circledast}{=} -24 \cdot 10'34 + \frac{1}{2} \cdot 9'8 (10'34)^2 = 276\ m}$$

En el movimiento de subida:

$$h + \underbrace{24(t_2 + t_1)}_{\text{altura que gana en 12 sg}} = 340\, t_2$$

$$\Rightarrow -24 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = t_2 \cdot 340 - \underbrace{288}_{24(t_2+t_1)}$$

$$-24 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = (12 - t_1)\, 340 - 288 = 4080 - 288 - 340 t_1$$

$$\frac{1}{2} g t_1^2 + 316 t_1 - 3792 = 0 \Rightarrow g t_1^2 + 632 t_1 - 7584 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-632 \pm \sqrt{632^2 + 4 \cdot 9'8 \cdot 7584}}{2 \cdot 9'8} = \frac{-632 \pm 834}{2 \cdot 9'8} \begin{cases} 10'34\ s \\ \cancel{-74'79\ s} \end{cases}$$

no tiene sentido

www.simplyjarod.com

www.simplyjarod.com

www.simplyjarod.com

www.simplyjarod.com

www.simplyjarod.com

www.simplyjarod.com

www.simplyjarod.com

www.simplyjarod.com

DINAMICA DE LA PARTICULA

CONCEPTOS BASICOS

- CANTIDAD DE MOVIMIENTO

DEF: $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$

- FUERZA

DEF: $\boxed{\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{p} = m \cdot \vec{a}}$

- MOMENTO ANGULAR O CINÉTICO

DEF: $\boxed{\vec{L_o} = \vec{r} \wedge \vec{p}}$

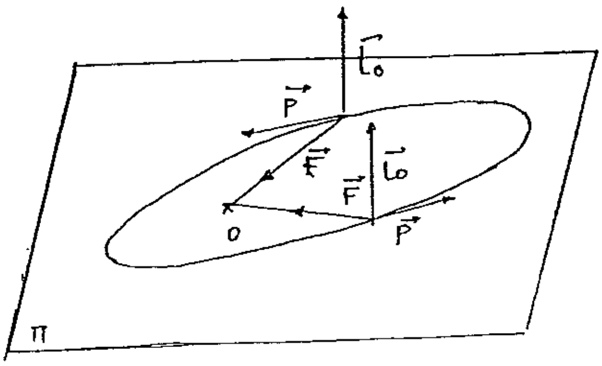
- MOMENTO

DEF: $\boxed{\vec{M_o} = \frac{\partial}{dt} \vec{L_o}}$

FUERZAS CENTRALES

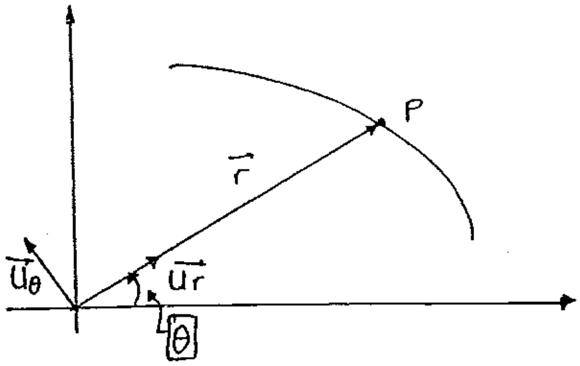
Las fuerzas centrales son una consecuencia del vector momento, cuando éste es nulo.

$$\boxed{\vec{M_o} = 0 \Leftrightarrow \vec{L_o} = cte} \Rightarrow \vec{r} \parallel \vec{F}$$



$\vec{L_o}$ es cte $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{DIRECCION} \\ \text{SENTIDO} \end{array}\right\} \text{TRAY. PLANA} \\ \text{MÓDULO}: \; R m V \operatorname{sen} \theta \end{array} \right.$

Si tomamos el sistema de <u>coordenadas polares</u>:



$$\vec{r} \parallel \vec{V_r} \quad 0$$

$$\vec{L_o} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (\cancel{\vec{r} \wedge m V_r \vec{u_r}}) + (\vec{r} \wedge m V_\theta \vec{u_\theta})$$

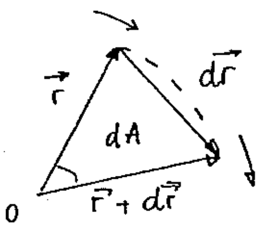
$\boxed{\text{Modulo}}$: $$r^2 m \dot{\theta} = r^2 m \cdot \dot{\theta} \cdot \operatorname{sen}(\underbrace{\vec{u_r} \cdot \vec{u_\theta}}_{90^\circ}) = \boxed{r^2 m \dot{\theta}} = r m V_\theta$$

LEYES DE KEPLER

1) Los planetas describen trayectorias elípticas y el sol está en uno de los focos.

2) A tiempos iguales, las áreas barridas son iguales.

DEMOSTRACION:



$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{dr}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}\, dt|$$

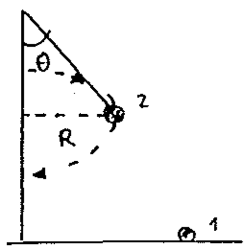
$$\Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}| = \frac{|\vec{L_o}|}{2m} = cte}$$

3) Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los radios mayores de sus orbitas.

$$\boxed{T^2 = k a^3}$$

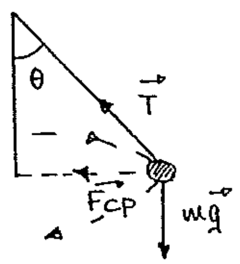
FUERZAS DE INERCIA

Supongamos el siguiente problema:



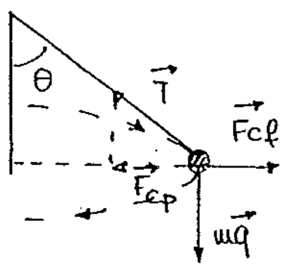
Podemos ver el sistema desde dos posiciones totalmente diferentes, desde el sistema absoluto (1) o desde el sistema relativo (2)

1) OBSERVADOR DEL SISTEMA ABSOLUTO (1)



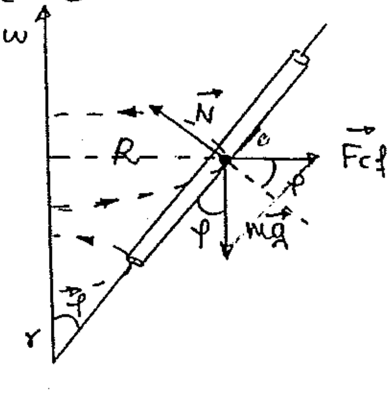
El observador del sistema absoluto ve al del sistema relativo moviéndose. La fuerza centrípeta no es una fuerza de inercia, sino que es la resultante del peso y la tensión. El cuerpo no está en equilibrio, sino que está en un estado dinámico

2) OBSERVADOR DEL SISTEMA RELATIVO (2)



El observador del sistema relativo ve que el resto del mundo dando vueltas pero él siente que está en equilibrio Existe una fuerza que es de igual magnitud pero de sentido contrario a la fuerza centrípeta (fuerza centrífuga). El cuerpo se encuentra, por tanto en un estado de equilibrio.

EJEMPLO: UNA BARRA HUECA GIRA ALREDEDOR DE UN EJE γ CON UNA VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE ω. Y UNA INCLINACIÓN φ. DETERMINAR EL ÁNGULO NECESARIO PARA QUE UNA BOLA DENTRO DEL TUBO SE MANTENGA EN EL CENTRO.



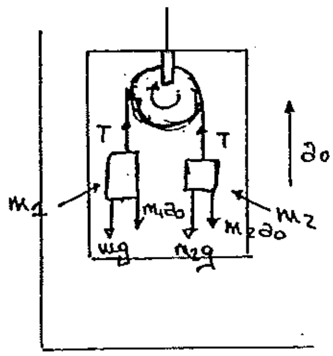
Para que se mantenga en el centro la resultante de las fuerzas debe ser nula.

$$\begin{cases} N = mg\,\text{sen}\,\varphi + F_{cf}\cos\varphi \\ F_{cf}\,\text{sen}\,\varphi = mg\cos\varphi \end{cases}$$

$$tg\,\varphi = \frac{mg}{F_{cf}} = \frac{\cancel{m}g}{\cancel{m}\cdot\omega^2 R} = \frac{g}{\omega^2 R}$$

$$\boxed{\varphi = \text{arctg}\,\frac{g}{\omega^2 R}}$$

EJEMPLO: EN UN ASCENSOR, QUE SUBE CON ACELERACIÓN HAY UNA POLEA QUE DESLIZA. COLGADOS DE LA POLEA HAY DOS CUERPOS DE MASA m_1 Y m_2. CALCULAR LA ACELERACIÓN CON LA QUE SE MOVERÁ EL SISTEMA.



$$m_1\cdot a = T - m_1 g - m_1 a_0$$

$$m_2\cdot a = m_2 g + m_2 a_0 - T$$

$$a(m_1+m_2) = m_2 g + m_2 a_0 - m_1 g - m_1 a_0$$

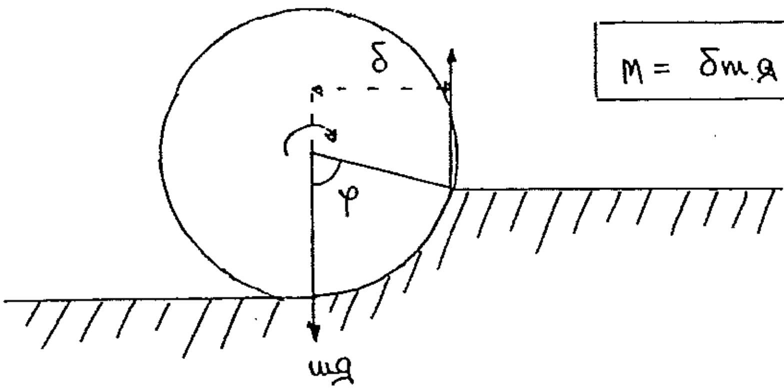
$$\boxed{a = \frac{(m_2-m_1)\,g + (m_2-m_1)\,a_0}{m_1+m_2}}$$

Al deslizar la cuerda en la polea la aceler. de los dos cuerp es igual

FUERZAS DE ROZAMIENTO

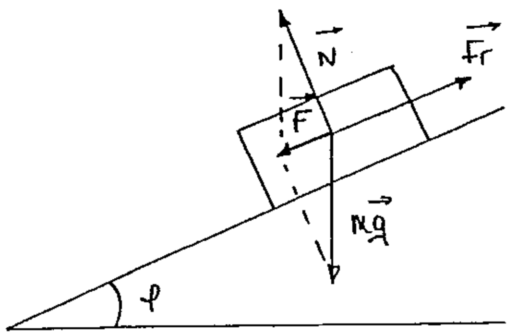
1) SÓLIDO SOBRE SÓLIDO

1.1) RODADURA (Deformación)



$$\boxed{M = \delta m g = mg R \operatorname{sen} \varphi}$$

1.2) DESLIZAMIENTO (Rugosidad)

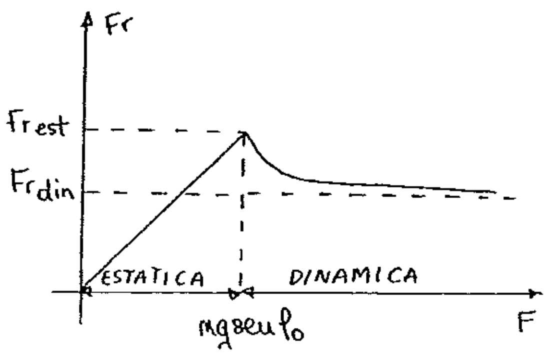


Supongamos una tiza sobre un plano inclinado. La tiza está en reposo y sigue en reposo porque hay una fuerza que impide el movimiento

$$\vec{Fr} \simeq -\vec{F}$$

$$\boxed{\vec{F} = mg \operatorname{sen} \varphi \, \vec{ut}}$$

Al aumentar el ángulo, aumenta F y la Fr también lo hará proporcionalmente, hasta un cierto punto donde la tiza comenzará a moverse y la fuerza será mayor que la de inercia.



COULOMB estudió las fuerzas de rozamiento y llegó a estas conclusiones:

- $\boxed{F_{roz} \simeq N} \Rightarrow \vec{F}_{roz} = -\mu N \vec{u}_t \Rightarrow \boxed{F_{roz} = \mu N}$

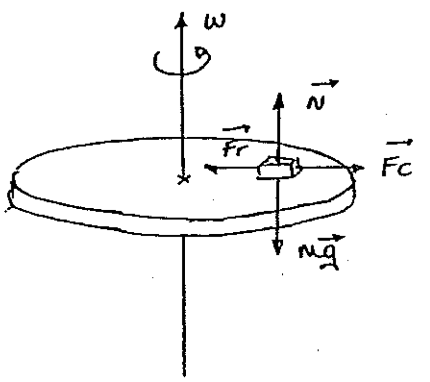
- μ DEPENDE DE
  - Naturaleza del solido
  - Estado de la superficie
  - * NO DEPENDE DE: Velocidad; Superficie de apoyo.

- AL ser una proporción lineal mientras el cuerpo está en reposo, podemos deducir que:

$$\boxed{F_{roz\ ESTAT} = mg \operatorname{sen} \varphi_0 = \mu_{est}\, mg \cos \varphi_0}$$

$$\boxed{\mu_{est} = tg\, \varphi_0}$$

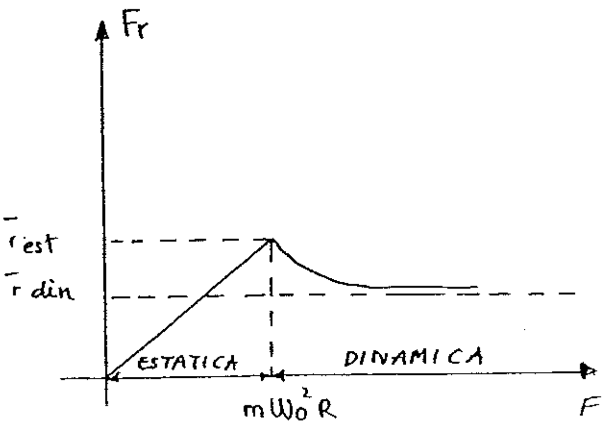
Si por el contrario, situamos la tiza en un disco que gira:



Ahora la fuerza que tiende a mover la tiza viene expresada por

$$\boxed{\vec{F}_c = m w^2 R\, \vec{u}_t}$$

Es el mismo fenómeno que en el plano, pero trasladado al disco.

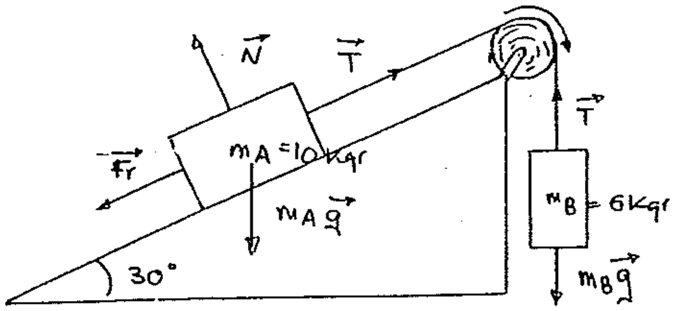


De aquí deducimos:

$$F_{r\,est} = mg\,\mu_{est} = m W_0^2 R$$

$$\boxed{\mu_{est} = \frac{W_0^2 R}{g}}$$

EJERCICIO 42: Si se desprecia el peso de la polea y el coeficiente de rozamiento entre la masa A y el plano es $\mu = 0'2$, calcular la tensión de la cuerda y la aceleración de los cuerpos en el sistema de la figura.



$$T - Fr - m_A g \operatorname{sen} 30 = m_A \cdot a$$

$$m_B g - T = m_B \cdot a$$

$$(m_A + m_B)\, a = m_B g - Fr - m_A g \operatorname{sen} 3$$

$$(m_A + m_B)\, a = m_B g - \mu N - m_A g \operatorname{sen} 30 = m_B g - \mu (m_A g \cos 30) - m_A g \operatorname{sen}$$

$$a = \frac{m_B g - \mu (m_A g \cos 30) - m_A g \operatorname{sen} 30}{m_A + m_B}$$

$$a = \frac{6 \cdot 9'8 - 0'2\,(10 \cdot 9'8 \cdot 0'86) - 10 \cdot 9'8 \cdot 0'5}{10 + 6} = \underline{-0'45 \ ms^{-2}}$$

* COMO HAY FUERZA DE ROZAMIENTO MIRO EN SENTIDO CONTRARIO

$$(m_A + m_B)\, a = (m_A \operatorname{sen} 30 - m_B) g - Fr_A = (m_A \operatorname{sen} - m_B) g - \mu m_A g \cos 30$$

$$a = \frac{(m_A \operatorname{sen} 30 - m_B)\, g - \mu m_A g \cos 30}{m_A + m_B} = \frac{(10 \cdot 0'5 - 6)\, 9'8 - 0'2 \cdot 10 \cdot 9'8 \cdot 0'8}{10 + 6}$$

$a = \underline{-1'67 \ ms^{-2}}$ $\Rightarrow$ Los cuerpos no se mueven. $\Rightarrow$ $\boxed{a = 0}$

$$\boxed{T = m_B g - \cancel{m_B a}^{\,0} = 6 \cdot 9'8 = 58'8 \ N}$$

2) SÓLIDO DENTRO DE UN FLUIDO

2.1) Velocidades pequeñas

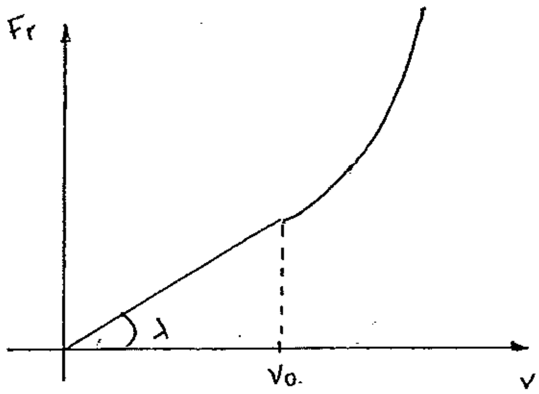
A velocidades pequeñas, la fuerza de rozamiento aumenta linealmente con la velocidad

$$\boxed{\vec{F}_{roz} = -\lambda \vec{v}}$$

2.2) Velocidades grandes

A velocidades mayores, la fuerza de rozamiento aumenta con el cuadrado de la velocidad

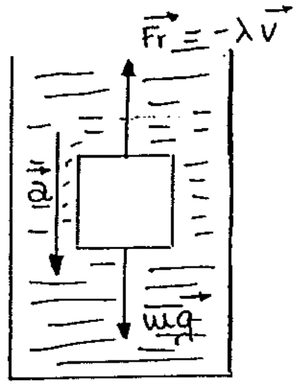
$$\boxed{\vec{F}_{roz} = -\lambda v^2 \vec{u}_t}$$



¿λ?

λ es una constante de proporcionalidad que depende de la naturaleza del fluido y de la forma del sólido.

EJERCICIO 46: Una partícula de masa m parte del reposo y cae bajo la acción de la gravedad a través de un medio viscoso que opone una resistencia λ Hallar la expresión de la velocidad y la velocidad en el instante τ (tiempo de relajación).



$$\boxed{ma = mg - \lambda v} \leftarrow \text{Ecuación de fuerzas}$$

$$m\frac{dv}{dt} + \lambda v = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \lambda v \Rightarrow \frac{m\,dv}{mg-\lambda v} = dt$$

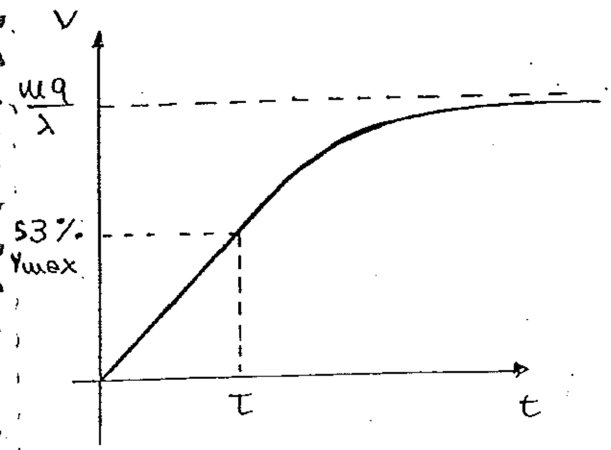
Ahora integro los dos miembros de la ecuación:

$$\int_0^v \frac{m\,dv}{mg-\lambda v} = \int_0^t dt \Longrightarrow \int_{mg}^{mg-\lambda v} \frac{m\,du}{u} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\left\{\begin{array}{l} mg - \lambda v = u \\ -\lambda dv = du \end{array}\right.$$

$$Ln\left(\frac{mg-\lambda v}{mg}\right) = -\frac{\lambda}{m}t \Rightarrow 1-\frac{\lambda v}{mg} = e^{-\lambda/m \cdot t}$$

$$1-e^{-\frac{\lambda}{m}\cdot t} = \frac{\lambda v}{mg} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{1-e^{-\frac{\lambda}{m}t}}{\lambda}\,mg}$$



La velocidad máxima se consigue cuando

$$\boxed{1-e^{-\frac{\lambda}{m}t} = 1}$$

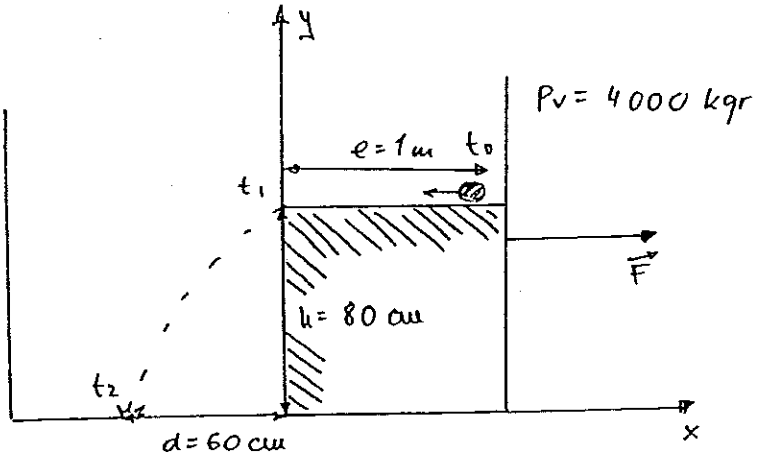
$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{mg}{\lambda}}$$

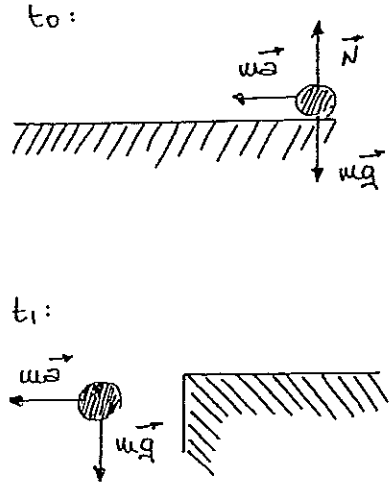
τ: tiempo de relajación: a partir de una velocidad la resistencia del fluido se hace constante. $\boxed{\tau = \frac{m}{\lambda}}$

$$\boxed{v = V_{max}\left(1-e^{-\tau/\tau}\right)} = V_{max}\left(1-e^{-1}\right) = V_{max}\cdot 0'63$$

$$= 63\%\ V_{max} \Rightarrow Fr_{oz} = cte.$$

EJERCICIO 44: Una mesa horizontal de $h = 80$ cm de altura, sobre la que se coloca una bola, está fijada en un vagón en reposo. Se pone el vagón en marcha y la bola cae sobre el piso del mismo a la distancia $d = 60$ cm de la proyección del borde de la mesa, sobre la cual ha recorrido la bola un espacio $e = 1$ m antes de caer. Despreciando el rozamiento y suponiendo que el arranque del vagón ha tenido lugar con aceleración constante, hallar la fuerza de tracción aplicada al mismo si su peso es de $P = 4$ Tm. ($g = 9'8\ ms^{-2}$)





Al llegar a t_1:

$a = cte$

$e = \frac{1}{2} a t_1^2$

$V_A = a t_1$

Al llegar a t_2

$x = -d$

$y = 0$

Entre t_1 y t_2:

$\vec{a_b} = (-a, -g)$

$\vec{V_b} = \begin{cases} \int_{-V_A}^{V_x} dV_x = \int_0^t a_x\, dt \rightarrow V_x = -V_A - at \\ \int_0^{V_y} dV_y = \int_0^t a_y\, dt \rightarrow V_y = -gt \end{cases}$

$\vec{r_b} = \begin{cases} \int_0^x dx = \int_0^t V_x\, dt \rightarrow x = -V_A t - a\frac{1}{2}t^2 \\ \int_h^y dy = \int_0^t V_y\, dt \rightarrow y = h - g\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$

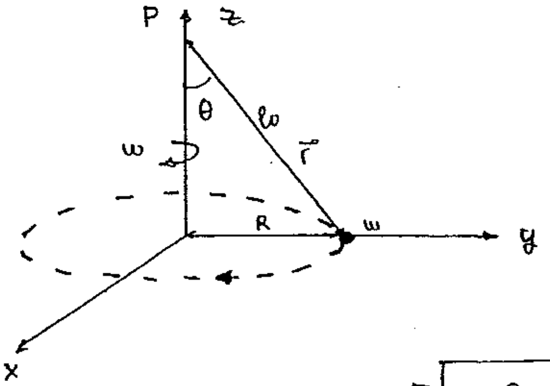
$$\Rightarrow \begin{cases} e = \frac{1}{2} a t^2 = 1 \\ V_A = a t_1 = \frac{2}{t_1} \\ x = -V_A t_2 - \frac{1}{2} a t_2^2 = -60 \cdot 10^{-2} \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \end{cases}$$

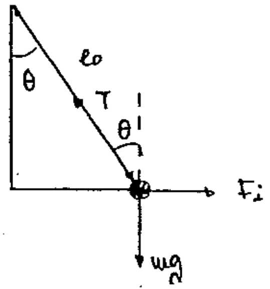
de aquí despejamos $\boxed{a = 0'89\ m/s^2}$

entonces $\boxed{F = 4000 \cdot 0'89 = 3555'6\ N}$

FEBRERO 2001: Una bola de masa m y pequeñas dimensiones, atada al extremo de una cuerda de longitud l_o, describe órbitas circulares en un plano horizontal con velocidad angular constante ω, según se indica en la figura. Calcular:

a) Ángulo θ que forma la cuerda con la vertical y tensión de la cuerda.





$$\begin{cases} T\cos\theta = mg \\ T\,\text{sen}\,\theta = F_i = m\omega^2 R \end{cases}$$

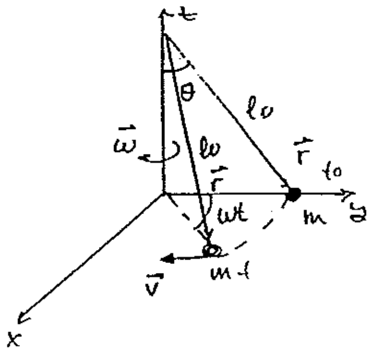
$$\Rightarrow \quad tg\,\theta = \frac{\cancel{m}\,\omega^2 R}{\cancel{m}g} = \frac{\omega^2 \cdot l_o \cdot \text{sen}\,\theta}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l_o} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 l_o}\right)}$$

$$\boxed{T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{m\cancel{g}}{\frac{\cancel{g}}{\omega^2 l_o}} \Rightarrow T = m\omega^2 l_o}$$

Supuesto que en el instante inicial la bola se halla encima del eje Y, según se muestra en la figura, calcular

b) Vector momento angular de la bola respecto al punto P en un instante de tiempo t.

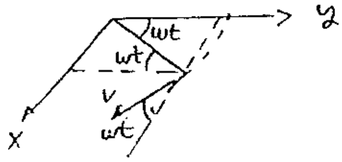


entonces: $\boxed{\vec{L_P} = \vec{r} \wedge m\vec{v}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{sen}\theta\,\text{sen}\omega t & \text{sen}\theta\cos\omega t & -\cos\theta \\ \cos\omega t & -\text{sen}\,\omega t & 0 \end{vmatrix} m l_o^2\,\text{sen}\theta\,\omega$

donde $\vec{v} = l_o\,\text{sen}\,\theta\,\omega\,\vec{u_t}$

$\vec{v} = l_o\,\text{sen}\theta\,\omega\,(\cos\omega t, -\text{sen}\,\omega t, 0)$

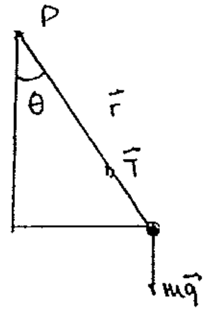
y $\vec{r} = (l_o\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\,\omega t,\ l_o\,\text{sen}\,\theta\cos\omega t,\ l_o\cos\theta)$



$* = \vec{L_P} = m l_o^2\,\text{sen}\theta\,\omega\,[-\text{sen}\,\omega t\cos\theta,\ -\cos\theta\cos\omega t,\ -\text{se}$

c) Demostrar que se verifica el teorema del momento angular:

$$\vec{M_P} = \frac{d\vec{L_P}}{dt}$$



$$\vec{M_P} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

donde $\vec{F} = m\vec{g}$ (porque $\vec{T} \parallel \vec{r}$)

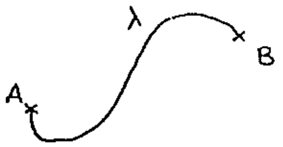
$$\Rightarrow \boxed{\vec{M_P} = \vec{r} \wedge m\vec{g} = -mg\,l_0 \operatorname{sen}\theta\ \vec{u_t} = -mg\,l_0 \operatorname{sen}\theta\,(\cos\omega t, -\operatorname{sen}\omega t)}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L_P}}{dt} = -m\omega^2 l_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\ \vec{u_t} = -mg\,l_0 \operatorname{sen}\theta\ \vec{u_t}}$$

TRABAJO Y ENERGIA

* TRABAJO.

DEF: $\boxed{dW = \vec{F} \cdot \vec{dl}}$



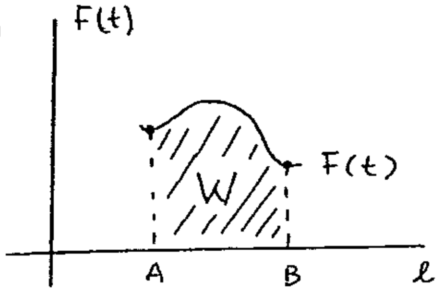
$$\boxed{W_{AB} = \int_{A\,(\lambda)}^{B} \vec{F} \cdot \vec{dl} \cdot \cos\varphi}$$

(λ) (¿Por dónde voy?)

- PROPIEDADES

1) Las fuerzas normales a la trayectoria no realizan trabajo $(\vec{F} \cdot \vec{dl} = F \cdot dl \cdot \cos\varphi = 0)$

2)



$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B F(t)\, dl}$$

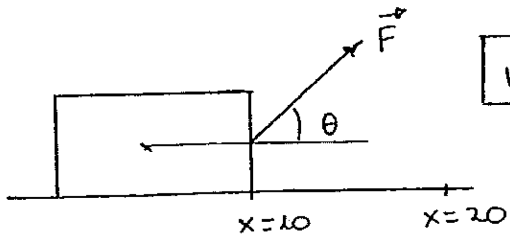
3) $\boxed{W_{AB}} = \int_A^B m \cdot a(t) \cdot dl = \int_{l_1}^{l_2} m \frac{dv}{dt}\, dl = \int_{V_1}^{V_2} m\, dv \frac{dl}{dt} =$

$= \int_{V_1}^{V_2} m v\, dv = m \int_{V_1}^{V_2} v\, dv = \frac{1}{2} m V^2 \Big]_{V_1}^{V_2} =$

$\boxed{= \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = \Delta E_c}$ (TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS)

- El trabajo realizado por la fuerza exterior sobre una partícula libre se transforma todo él en variar la ENERGIA CINETICA del sistema.

EJERCICIO 54: Un bloque de 20 kgr es empujado sobre una superficie horizontal sin rozamiento, por una fuerza F, que formá un ángulo θ con la trayectoria. Durante el movimiento la fuerza aumenta según la relación F = 5x, donde F está en newton y x en metros. El ángulo varía también según la ley: $\cos\theta = 0'70 - 0'02x$. ¿Cuánto trabajo habrá realizado la fuerza mientras el cuerpo se ha desplazado desde x = 10 m hasta x = 20 m?



$$\boxed{W =} \int \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int F \cdot d\ell \cdot \cos\theta =$$

$$= \int_{10}^{20} 5x\,(0'7 - 0'02x)\,dx =$$

$$= 5\int_{10}^{20} (0'7x - 0'02x^2)\,dx = 5\left[\frac{0'7}{2}x^2\Big]_{10}^{20} - \frac{0'02\,x^3}{3}\Big]_{10}^{20}\right] =$$

$$= 5\left[\frac{0'7}{2}(20^2 - 10^2) - \frac{0'02}{3}(20^3 - 10^3)\right] = 5\left[\frac{0'7}{2}\cdot 300 - \frac{0'02}{3}\,7000\right]$$

$$= 525 - 233'3 = \boxed{291'6\ J}$$

* FUERZAS CONSERVATIVAS

- Para que sean conservativas

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = 0 \iff \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \wedge \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \wedge \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}}$$

$$\iff \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \implies \exists\, \phi(x, y, z) \,/\, \vec{F} = \text{grad}\,\phi \implies$$

$$\boxed{\phi_B - \phi_A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

- $\exists\, E_p(x, y, z) \,/\, \vec{F} = \ominus\, \text{grad}\, E_p$

ϕ

$$\boxed{E_{p_B} - E_{p_A} = + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = - W_{AB}}$$

(NO IMPORTA EL CAMINO)

Fuerzas conservativas

- $\left.\begin{array}{l} \Delta E_p = - W \\ \Delta E_c = W \end{array}\right\} \implies \boxed{\Delta(E_c + E_p) = 0}$

Siempre

- TEOREMA DE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 = \Delta E_M$$

Energía mecánica o total

$$\frac{1}{2} \cdot m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_2 - m g h_1 = 0$$

CASO PARTICULAR
Superficie terrestre
Δh relativamente pequeño

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2}_{} = \underbrace{m g h_1 + \frac{1}{2} m v_1^2}_{}$$

$$\boxed{E_{M_1} = E_{M_2}}$$

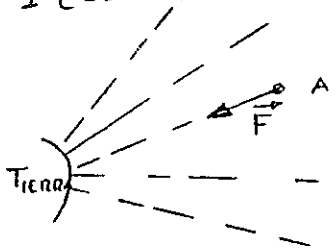
- En campos conservativos la energía mecánica es constante.

EJEMPLO: CALCULAR LA ENERGIA POTENCIAL DE UN PUNTO QUE ESTÁ SOMETIDO AL CAMPO DE FUERZAS TERRESTRE.

sólo indica el sentido.

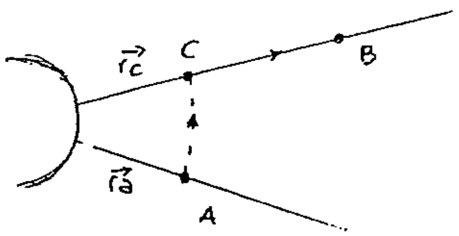
$$\boxed{\vec{F} = - \frac{k}{r^2}\,\vec{u_r}}$$

1° ¿Es conservativo el campo?



al ser un campo de geometría radial el $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0 \Rightarrow$ CAMPO CONSERVATIVO

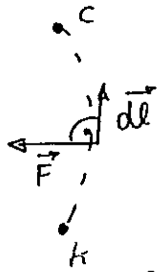
2° Energía Potencial



$$\boxed{E_p(B) - E_p(A) = -W = -\int_A^B \vec{F}\wedge d\vec{l}}$$

$$= -\int_A^C \vec{F}\wedge d\vec{l} - \int_C^B \vec{F}\wedge d\vec{l} =$$

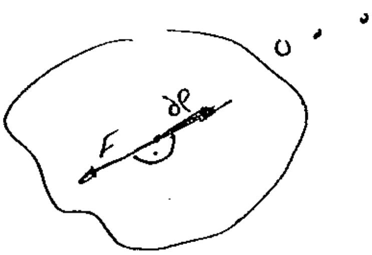
$\cos\theta = 0 \to 0$



$$= (+)\int_C^B F\,dl = \int_{r_C}^{r_B} \frac{k}{r^2}\,dr = -k\left[\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} =$$

el signo cambia gracias al $\cos\theta = -1$

$r_C = r_A$



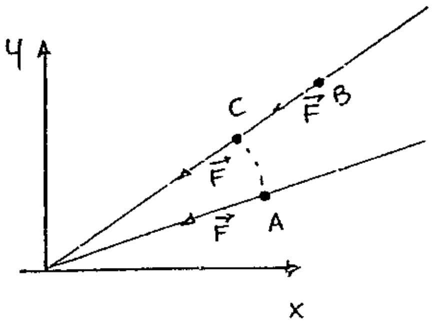
$$\boxed{= -k\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]}$$

CONVENIO:
$E_p(A) = 0 \Rightarrow r_A = \infty$
$E_p(B) \Rightarrow r_B = r_B$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(B) = -\frac{k}{r_B} \;;\; E_p(r) = -\frac{k}{r}}$$

– $\ominus$: Tienes k/r menos energía potencial que el punto referencia (∞).

PARCIAL (20-NOV-2001) : DADA LA FUERZA DIRIGIDA SIEMPRE HACIA EL ORIGEN, $\boxed{\vec{F} = -k\vec{r}}$ HALLAR SU ENERGIA POTENCIAL.



$$\boxed{Ep(B) - Ep(A) = -\int_A^B \vec{F}\,\vec{dl}} =$$

$$= -\cancel{\int_A^C \vec{F}\,\vec{dl}} - \int_C^B \vec{F}\,\vec{dl} =$$

0

$\vec{F} \perp \vec{dl}$

$$= \oplus \int_{r_C}^{r_B} F\,dr = K\int_{r_A}^{r_B} r\,dr = K\left.\frac{r^2}{2}\right]_{r_A}^{r_B} = \boxed{\frac{1}{2}k r_B^2 - \frac{1}{2}k r_A^2}$$

$\cos\theta = -1$

$r_C = r_A$

CONVENIO
$r_A = 0 \Rightarrow Ep(0) = 0$
$r_B = r \Rightarrow Ep(r) = \frac{1}{2}kr^2$

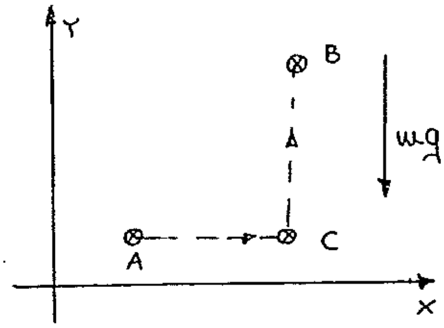
b) DADA LA FUERZA $\vec{F} = (y^2 - x^2)\,\vec{u_x} + 3xy\,\vec{u_y}$ DECIR SI ES CONSERVATIVA O NO.

$$\vec{F} = \underbrace{(y^2 - x^2)}_{F_x}\vec{u_x} + \underbrace{3xy}_{F_y}\vec{u_y}$$

$$\vec{F} \text{ es CONSERVATIVA} \Leftrightarrow \text{rot}\,\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \boxed{2y \neq 3y} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} \Rightarrow 0 = 0 \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ NO ES CONSERVATIVA

- CASO PARTICULAR (SUPERFICIE TERRESTRE)



$g \simeq cte$

$\vec{F} = -mg\,\vec{j}$

$$\boxed{Ep(B) - Ep(A) =} -\int_A^B \vec{F}\,\vec{dl} = -\int_A^C m\vec{g}\,\vec{dl} - \int_C^B m\vec{g}\,\vec{dl}$$

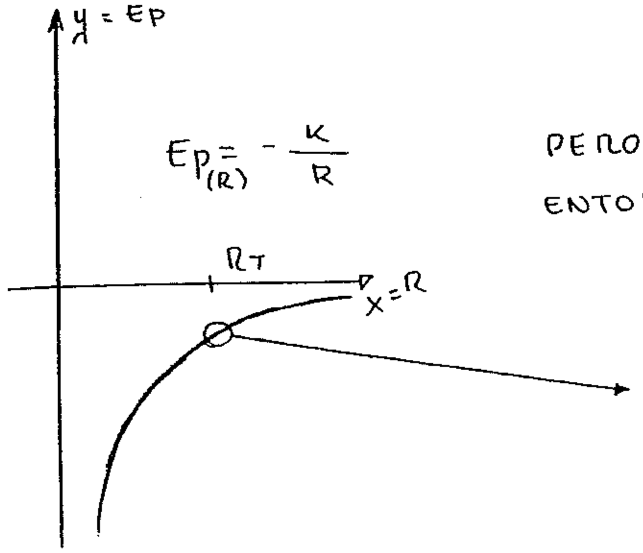
$\vec{dl} \perp \vec{g}$

$$= (+)mg \int_{y_C \,=\, y_A}^{y_B} dy = mg\,y\Big]_{y_A}^{y_B} = \boxed{mg\,[y_B - y_A]}$$

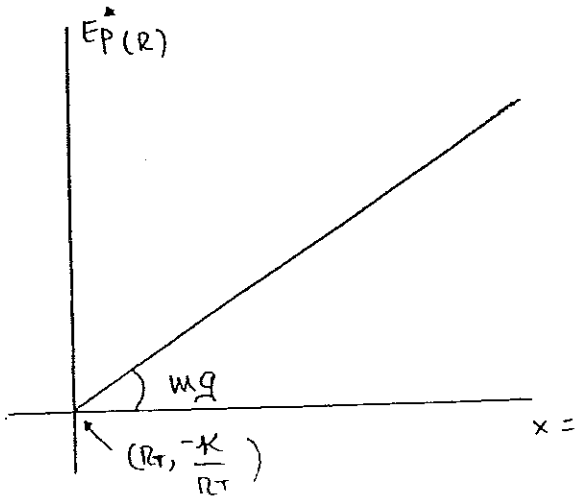
$\cos\theta = -1$

CONVENIO
$y_A = 0 \Rightarrow Ep(A) = 0$
$y_B = y \Rightarrow Ep(B) = mgh$

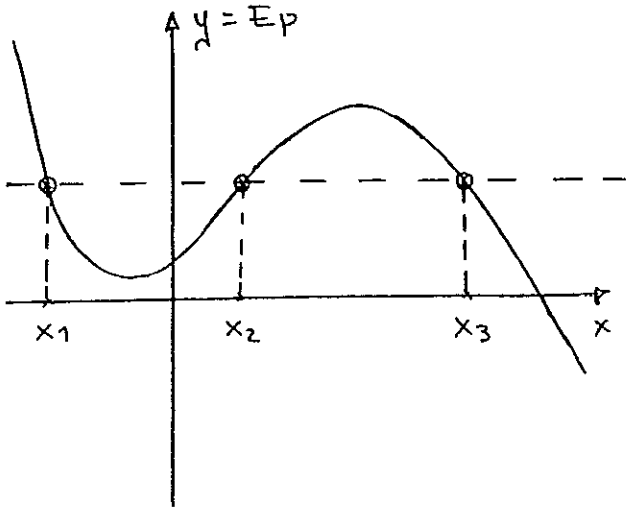
- esto es un caso particul al tomar g como consta siempre que Δh sea relativ pequeño



PERO SI PARTICULARIZAMOS, ENTONCES:



* DIAGRAMAS DE ENERGIAS



Dada una función que represente la energía potencial de un cuerpo, debemos saber interpretarla.
Tomamos una Et que es un dato. Entonces:

$$\boxed{Et = Ec + Ep}$$

si $Et = Ep \Rightarrow Ec = 0$,
pero si $Ep > Et \Rightarrow Ec < 0$

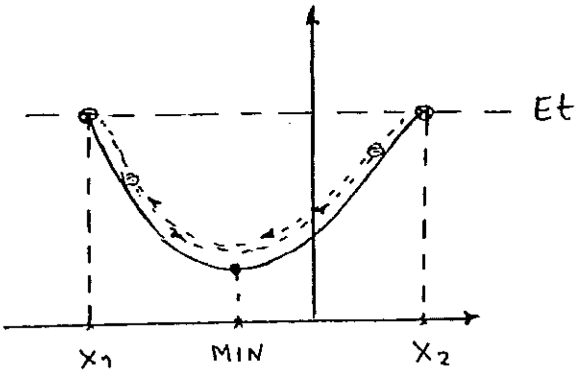
- Un cuerpo no puede tener Ec negativa, por lo que existen en la gráfica intervalos por los que la partícula no podría estar. Esto implica zonas prohibidas, que son:

$(-\infty, x_1)$ y (x_2, x_3). (EN NUESTRO EJEMPLO)

- Por el contrario la partícula podrá existir en los intervalos:

$[x_1, x_2]$ y $[x_3, \infty)$

- Si nos fijamos en el intervalo $[x_1, x_2]$; la partícula está atrapada en ese intervalo; (lo que se denomina POZO DE POTENCIAL).

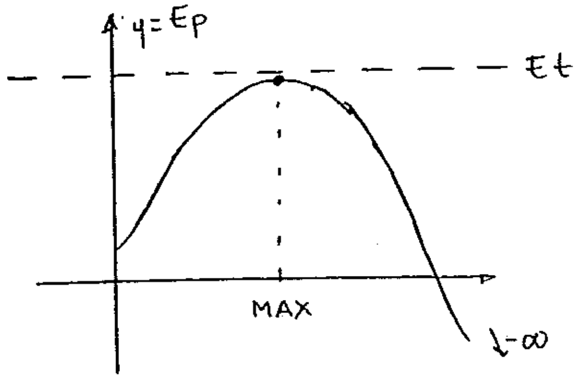


La partícula buscará su Ep mínima, pero nunca lo conseguirá, ya que realizará un movimiento oscilatorio alrededor del mínimo.

$$\boxed{MINIMO: \frac{dEp}{dx} = 0}$$

- Este punto es un punto de equilibrio estable, ya que si reducimos la Et, la partícula se estará cada vez más quieta.

- Si por el contrario aumentamos la Et, entonces la partícula tiene más libertad de movimiento y tendería a buscar su Ep mínima en el infinito.



El punto máximo es otro punto de equilibrio, pero esta vez es inestable, ya que a la mínima interacción exterior la partícula pierde el equilibrio.

EJERCICIO 71 : Una partícula de masa m=2kgr se mueve en un campo de fuerzas cuya energía potencial es:

$E_p = x^4 - 8x^2 - 1$, en unidades del S.I.

a) Calcular las posiciones de los puntos de equilibrio estable e inestable.

P. EQUILIBRIO $\Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{4}} = \pm 2$$

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \quad (0,-1)$

$x = 2 \Rightarrow y = 16 - 8 \cdot 4 - 1 = 16 - 32 - 1 = -17 \quad (2,-17)$

$x = -2 \Rightarrow y = 16 - 8 \cdot 4 - 1 = 16 - 32 - 1 = -17 \quad (-2,-17)$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = 12x^2 - 16$$

$x = 0 \Rightarrow -16 < 0 \Rightarrow$ MAXIMO

$x = 2 \Rightarrow 12 \cdot 4 - 16 > 0 \Rightarrow$ MINIMO

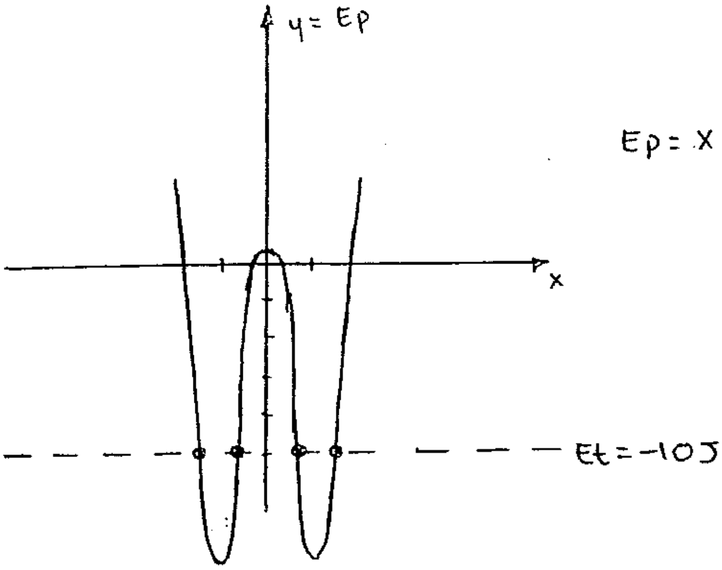
$x = -2 \Rightarrow 12 \cdot 4 - 16 > 0 \Rightarrow$ MINIMO

$P_1 (0,-1) \Rightarrow$ PUNTO DE EQUILIBRIO INESTABLE

$P_2 (2,-17) \Rightarrow$ PUNTO DE EQUILIBRIO ESTABLE

$P_3 (-2,-17) \Rightarrow$ PUNTO DE EQUILIBRIO ESTABLE

b) Si la energía total de la partícula es de $-10\,J$, obtener la velocidad máxima de la partícula y, gráficamente, identificar las zonas en las que puede moverse.



$$E_p = x^4 - 8x^2 - 1$$

CUANDO LA Ec SEA MAXIMA

$\Rightarrow$ Ep SERÁ MINIMA

$$E_t = E_p + E_c = -10$$

$$E_c = -10 - E_p = -10 - \underbrace{(-17)}_{E_p\ \text{min.}} = 7$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 7$$

$$v^2 = \frac{7 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{V_{MAX} = \sqrt{7}\ m/s}$$

$$E_p = x^4 - 8x^2 - 1 = -10$$

$$x^4 - 8x^2 = -9$$

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 8t + 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$$

$$x = \sqrt{t} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{4 + \sqrt{7}} \\ x_2 = \sqrt{4 - \sqrt{7}} \\ x_3 = -\sqrt{4 + \sqrt{7}} \\ x_4 = -\sqrt{4 - \sqrt{7}} \end{cases}$$

ZONAS PROHIBIDAS : $(-\infty, X_1) \cup (X_2, X_3) \cup (X_4, \infty)$

ZONAS PERMITIDAS: $(X_1, X_2] \cup [X_3, X_4]$

c) Determinar la aceleración de la partícula en el punto $x = 1$

$$E_p = x^4 - 8x^2 - 1$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \; ;$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -4x^3 + 16x \; \vec{u_x}$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \right)$$

$$\vec{F}(1) = -4 + 16 = 12 \, \vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = 6 \, \frac{m}{s^2} \, \vec{u_x}}$$

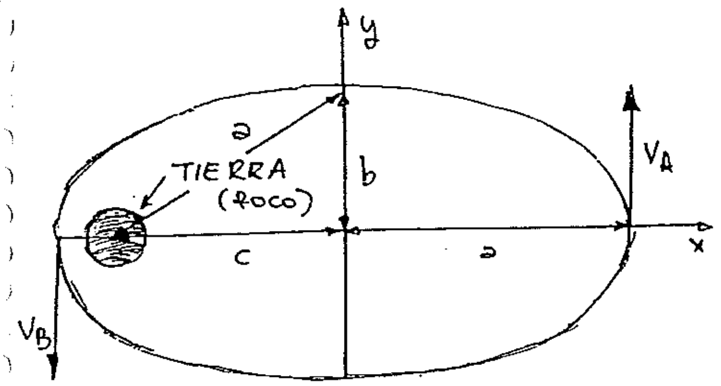
FEBRERO 1995: Se desea colocar un satelite artificial, de masa m ($<< M_T$), alrededor de la Tierra, de modo que describa una ecuación dada por:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = R_T^2$$

Sabiendo que el radio de la Tierra es, aproximadamente $R_T = 6400$ Km, que la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre $g = 9'8 \; ms^{-2}$, y que la Tierra se halla en un foco de la elipse, calcular:

a) velocidad V_A con la que debe pasar por A.

b) velocidad areolar (dS/dt) y periodo de movimiento del satélite (Area de la elipse $= \pi a b$)



Necesito saber la geometría de la elipse:

$$C\,(0,b) \rightarrow \frac{b^2}{9} = R_T^2$$

$$A\,(a,0) \rightarrow \frac{a^2}{16} = R_T^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16R_T^2 - 9R_T^2$$

a) Como la trayectoria es plana $\Rightarrow \vec{L_o} = cte$

$$L_o = m(\vec{r} \wedge \vec{v}) \Rightarrow \text{en A } L_T = m\, r_A V_A \cancel{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}^{\,1}$$

$$\text{en B } L_T = m\, r_B V_B \cancel{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}^{\,1}$$

por tanto: $\cancel{m}\, r_A V_A = \cancel{m}\, r_B V_B$

donde $\left.\begin{array}{l} r_A = a + c \\ r_B = a - c \end{array}\right\} (a+c)V_A = (a-c)V_B$

También se conserva la energía del sistema:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} V_A^2 - \frac{\cancel{m} G M_T}{R_A} = \frac{1}{2}\cancel{m} V_B^2 - \frac{\cancel{m} G M_T}{R_B}$$

como $g = \dfrac{G M_T}{R_T^2} \Rightarrow G M_T = g R_T^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} V_A^2 - \frac{g R_T^2}{R_A} = \frac{1}{2} V_B^2 - \frac{g R_T^2}{R_B}$$

donde $R_A = a + c = 4R_T + \sqrt{16R_T^2 - 9R_T^2} = 4R_T + \sqrt{7}R_T$

$R_B = a - c = 4R_T - \sqrt{7}R_T$

por tanto:

$$V_A^2 - \frac{2gR_T^{\cancel{2}}}{(4+\sqrt{7})\cancel{R_T}} = V_B^2 - \frac{2gR_T^{\cancel{2}}}{(4-\sqrt{7})\cancel{R_T}}$$

si sustituimos

$$V_A^2 - \frac{2g R_T}{4+\sqrt{7}} = \frac{(a+c)^2}{(a-c)^2} V_A^2 - \frac{2g R_T}{4-\sqrt{7}}$$

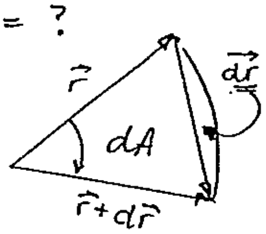
$$V_A^2 \left[1 - \frac{(a+c)^2}{(a-c)^2} \right] = 2g R_T \left(\frac{1}{4+\sqrt{7}} - \frac{1}{4-\sqrt{7}} \right)$$

$$V_A^2 \, (+23'08) = 2g R_T \, (+0'58)$$

$$\boxed{V_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 9'8 \cdot 6'4 \cdot 10^6 \cdot 0'58}{23'08}} = 1787'59 \ m s^{-1}}$$

b)

$$\frac{dS}{dt} = ?$$



$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v} dt|$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}| = \frac{|\vec{L_0}|}{2m} = cte}$$

$T = ?$

$$\frac{L_0}{2m} = \frac{dA}{dt} \quad ; \quad \text{si } dt = T, \text{ entonces}$$

$$\frac{A}{T} = \frac{L_0}{2m} \Rightarrow \boxed{T = \frac{A \cdot 2m}{L_0}} = \frac{\pi a b \cdot 2 \cdot m}{m R_A V_A} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 4 \cancel{R_T} \, 3 R_T \cdot 2 \cdot \cancel{m}}{\cancel{m} \, (4+\sqrt{7}) \cancel{R_T} \cdot V_A} = \boxed{40618'98 \text{ s} = 11'28 \text{ s}}$$

JUNIO 1995: Un campo de fuerzas en el plano XY está dado por:

$$\vec{F} = \frac{F_o}{r}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right) ; \quad F_o = 9N \; ; \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

a) Demostrar que el campo de fuerzas es perpendicular a la dirección radial: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

si son perpendiculares: $\boxed{\vec{F} \cdot \vec{r} = 0}$

$$\Rightarrow \frac{F_o}{r}\left[-y, x\right] \cdot \left[x, y\right] = \frac{F_o}{r}\left[-yx + xy\right] = \boxed{0}$$

b) Este campo de fuerzas ¿es, o no es, conservativo? Razónese la respuesta.

si es conservativo $\Rightarrow \boxed{\text{rot}\,\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}$

entonces:

$$F_x = -\frac{F_o}{r}\,y \Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y}} = -F_o\left[\sqrt{x^2+y^2} - y\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\right]\frac{1}{x^2+y^2}$$

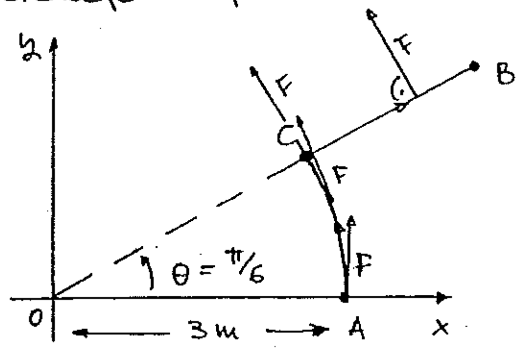
$$= -\frac{F_o}{x^2+y^2}\cdot\left[x^2+\cancel{y^2}-\cancel{y^2}\right]\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{F_o}{r^2}\,\frac{x^2}{r} = \boxed{-\frac{F_o x^2}{r^3}}$$

$$F_y = \frac{F_o}{r}\,x \Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_y}{\partial x}} = F_o\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{1}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{F_o}{x^2+y^2}\left(\cancel{x^2}+y^2-\cancel{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{F_o\,y^2}{r^2\cdot r} = \boxed{\frac{F_o y^2}{r^3}}$$

NO SON IGUALES ⇒ NO ES CONSERVATIVO

c) Calcular el trabajo realizado para llevar una partícula de la posición A a la B por el camino A-C-B ¿Este trabajo depende del camino elegido para ir de A a B?



$$W_{AB} = W_{AC} + W_{CB}$$

$$\begin{cases} W_{AC} = \int_A^C \vec{F}\,\vec{dl} = F_0 \int_A^C dl = F_0\, R\theta \\ W_{CB} = 0 \Leftarrow \vec{F} \perp \vec{dl} \end{cases}$$

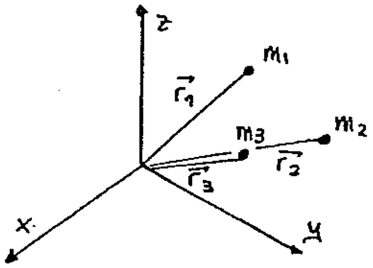
entonces $\boxed{W_{AB} = F_0 R\theta = 9 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{6} = 4'5\pi \text{ J}}$

Si depende del camino porque es un campo de fuerzas no conservativo.

SISTEMAS DE PARTICULAS

CENTRO DE MASAS

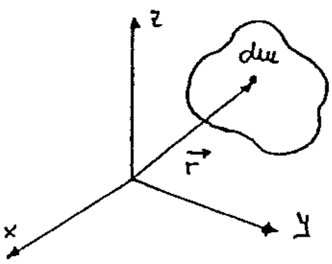
DEF: (PARTICULAS PUNTUALES).



$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m_t}}$$

donde $\boxed{m_t = \sum m_i}$

DEF: (CUERPO O DISTRIBUCION DE MASA CONTINUA)

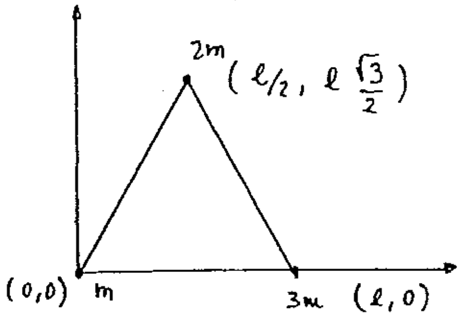


$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\, dm}{m_t}}$$

donde $\boxed{m_t = \int dm}$

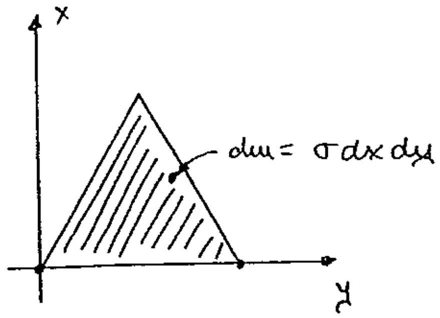
$$dm = \begin{cases} \lambda\, d\ell & \text{hilos} \\ \sigma\, dS & \text{superfies} \\ \rho\, d\tau & \text{volumen} \end{cases}$$

EJEMPLO: CALCULAR EL CENTRO DE MASAS DE LA SIGUIENTE FIGURA:



$$\vec{r}_G \begin{cases} \boxed{x_G} = \dfrac{m \cdot 0 + \ell/2 \cdot 2m + 3m \cdot \ell}{m + 2m + 3m} = \boxed{\dfrac{2}{3}\ell} \\ \boxed{y_G} = \dfrac{m \cdot 0 + \sqrt{3}/2\, \ell \cdot 2m + 3m \cdot 0}{m + 2m + 3m} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{6}\ell} \end{cases}$$

EJEMPLO: CALCULAR EL CENTRO DE MASAS DE LA SIGUIENTE FIGURA.



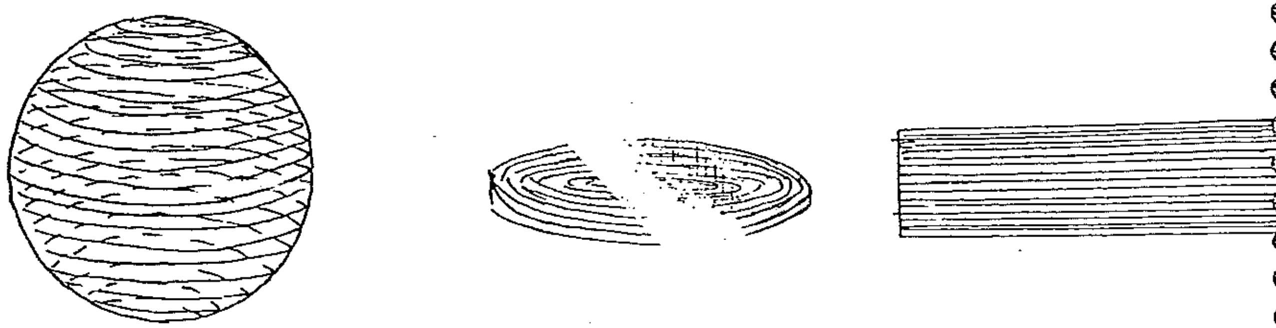
$$\vec{r}_G \begin{cases} x_G = \dfrac{\int x\,\sigma\,dx\,dy}{\sigma\,\frac{1}{2}\ell\cdot\ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = ?? \\ y_G = \dfrac{\int y\,\sigma\,dx\,dy}{\sigma\,\frac{1}{2}\ell\cdot\ell\,\frac{\sqrt{3}}{2}} = ?? \end{cases}$$

como todavía no sabemos resolver esas integrales tenemos que utilizar atajos.

ATAJOS PARA CALCULAR r_G

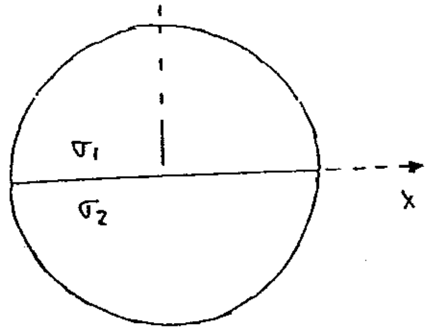
En sistemas homogeneos $\Rightarrow (\lambda, \sigma, \rho)$ son constantes

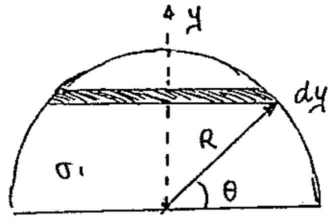
- Si existen ejes de simetria $\Rightarrow G \in$ eje simetría
- RECURSIVIDAD DE FIGURAS
  - Cinta: suma de hilos
  - Disco: suma de anillos
  - Esfera: suma de discos



EJEMPLO: CALCULAR EL CENTRO DE MASAS DE LA SIGUIENTE FIGURA

y = eje de simetría => $x_G = 0$





$$\boxed{y_{G_1}} = \frac{\int y\, dm}{m_t} = \frac{\int y\, \sigma\, dS}{\sigma \pi R^2/2} = *$$

$$m_t = \int dm = \sigma \int dS = \sigma S = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\boxed{\int dS} = \int \overbrace{2R\cos\theta}^{b}\, \overbrace{dy}^{h} = \int 2R^2 \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} 2R^2 \frac{(1+\cos 2\theta)}{2}\, d\theta =$$

$y = R\,\text{sen}\,\theta$

$dy = R\cos\theta\, d\theta$

$$= R^2 \frac{\pi}{2} + R^2 \cancel{\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\, d\theta}^{\,0} = \boxed{R^2 \frac{\pi}{2}}$$

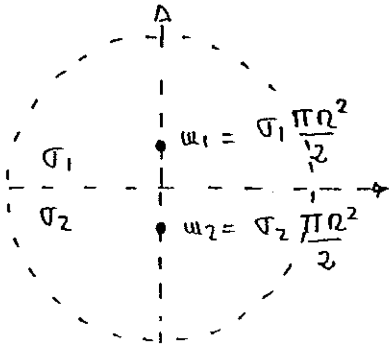
$$* = \boxed{y_{G_1}} = \frac{\int y\, \sigma\, dS}{\sigma \pi R^2/2} = \frac{\cancel{\sigma} \int_0^{\pi/2} R\,\text{sen}\,\theta \cdot 2R^{\cancel{2}} \cos^2\theta\, d\theta}{\cancel{\sigma}\, \pi \cancel{R^2}/2} = -\frac{4}{\pi} \cdot R \int_1^0 u^2\, du =$$

$\cos\theta = u$

$-\text{sen}\,\theta\, d\theta = du$

$$\boxed{= -\frac{4}{\pi} R \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^0 = \frac{4}{3\pi} R}$$

por simetría $\boxed{y_{G_2} = -\frac{4}{3\pi} R}$ y el problema se reduce ahora a dos masas puntuales



$$\vec{r}_G \begin{cases} \boxed{X_G = 0} \\ \boxed{y_G} = \dfrac{\sigma_1 \frac{\pi \cancel{R^2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{4}{3\pi} R + \sigma_2 \frac{\pi \cancel{R^2}}{\cancel{2}} \left(-\frac{4}{3\pi} R\right)}{\sigma_1 \frac{\pi \cancel{R^2}}{\cancel{2}} + \sigma_2 \frac{\pi \cancel{R^2}}{\cancel{2}}} = \end{cases}$$

$$\boxed{= \frac{4}{3\pi} R \; \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}}$$

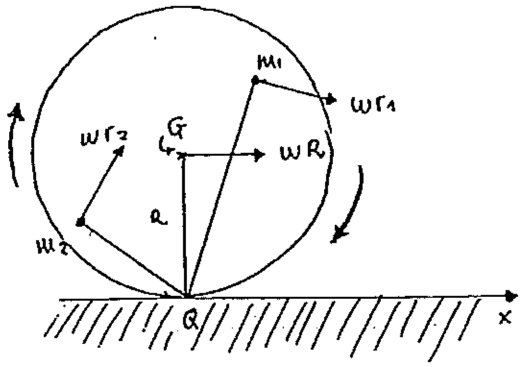
PROPIEDADES DEL CENTRO DE MASAS

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m_t} = \frac{1}{m_t} \sum m_i \vec{r}_i}$$

$$\vec{V}_G = \frac{d}{dt} \vec{r}_G = \frac{1}{m_t} \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{1}{m_t} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} =$$

$$= \frac{1}{m_t} \sum m_i \vec{v}_i = \boxed{\frac{\vec{P}_{total}}{m_t} = V_G}$$

EJEMPLO: CALCULAR LA VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASAS DE LA SIGUIENTE FIGURA.

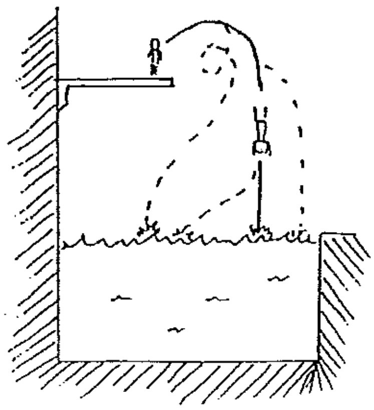


$$\boxed{\vec{p} = \int dm\, \vec{v} = m_t\, \omega R\, \vec{i}}$$

$$\vec{a}_G = \frac{d}{dt} \vec{V}_G = \frac{1}{m_t} \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m_t} \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} =$$

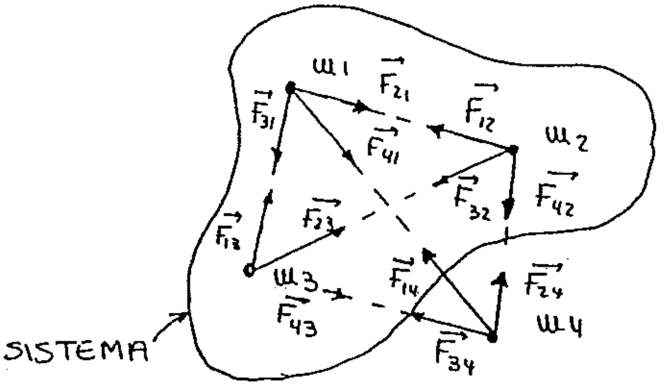
$$= \frac{1}{m_t} \sum m_i \vec{a}_i = \frac{\vec{F}_{TOTAL}}{m_t} = \boxed{\vec{a}_G = \frac{1}{m_t} \cdot R^{te}_{\text{FUERZAS EXTERNAS}}}$$

EJEMPLO: ¿PUEDE EL SALTADOR, POR SI MISMO, VARIAR SU TRAYECTORIA?



El saltador por si solo no puede variar la trayectoria de su caída. Podrá cambiar de posición, pero nunca podrá variar la trayectoria sin la ayuda de una fuerza exterior.

FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS



Si tenemos el sistema formado por las partículas m_1, m_2 y m_3 se producen las interacciones entre ellas y la partícula m_4 que no pertenece al sistema.

$$\boxed{\vec{F}_1 = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}}_{\text{F. INTERNAS}} + \underbrace{\vec{F}_{41}}_{\text{F. EXT.}} = \vec{F}_1^{\,int} + \vec{F}_1^{\,ext}}$$

$$\boxed{\vec{F}_2 = \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}}_{\text{F. INTERNAS}} + \underbrace{\vec{F}_{42}}_{\text{F. EXT.}} = \vec{F}_2^{\,int} + \vec{F}_2^{\,ext}}$$

$$\boxed{\vec{F}_3 = \underbrace{\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}}_{\text{F. INTERNAS}} + \underbrace{\vec{F}_{43}}_{\text{F. EXT}} = \vec{F}_3^{\,int} + \vec{F}_3^{\,ext}}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \underbrace{\cancel{\sum \vec{F}_i^{\,int}}}_{\substack{\text{FUERZAS DE} \\ \text{ACCION Y REACCION}}}{}^{\,0} + \sum \vec{F}_i^{\,ext}}$$

Al final deducimos que las únicas fuerzas que actúan en un sistema, son las fuerzas exteriores.

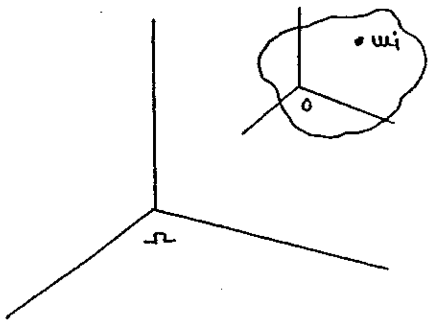
CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\boxed{\vec{P_G} = \sum \vec{p_i} = m_t \cdot \vec{V_G}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{P_G} = m_t \frac{d}{dt}\vec{V_G} = m_t \vec{a_G} = \vec{R}^{ext}}$$

Si el sistema, es un sistema aislado, entonces:

$$\boxed{\vec{R}^{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P_G} = cte}$$



Si consideramos el sistema en movimiento relativo, la velocidad de una particula sería:

$$\vec{V_i} = \vec{V_i}' + \vec{V_G}$$

$\vec{V_G}$ → velocidad de G

$\vec{V_i}'$ → velocidad relativa rto G

$\vec{V_i}$ → velocidad absoluta

Si ahora tomamos el centro de masas:

$$\boxed{\vec{p} = \sum m_i \vec{v_i} = \cancel{\sum m_i \vec{v_i}'}^{\,0} + \sum m_i \vec{V_G}}$$

$\sum m_i \vec{V_G}$ → cantidad de movimiento de G

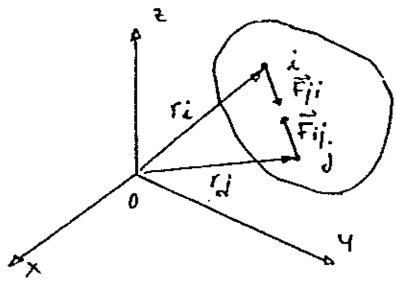
$\sum m_i \vec{v_i}'$ → Cantidad de movimiento relativa de G rto a G = 0

$\sum m_i \vec{v_i}$ → cantidad de movimiento total.

$$\boxed{\vec{p} = \sum m_i \vec{V_G}}$$

MOMENTO ANGULAR

Si consideramos el sistema formado por las partículas i y j:



el momento angular respecto al punto O será:

$$\boxed{\vec{L_O} = \sum \vec{L_{Oi}} = \sum (\vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i})}$$

y el momento será:

$$\boxed{\frac{d\vec{L_O}}{dt}} = \sum \frac{d}{dt}(\vec{r_i} \wedge \vec{p_i}) = \sum \cancelto{0 \;\; \vec{v} \parallel \vec{p}}{(\vec{v_i} \wedge \vec{p_i})} + \underbrace{\sum (\vec{r_i} \wedge \vec{F_i})}_{*} =$$

$$* \left\{ \begin{array}{l} \vec{r_i} \wedge \vec{F_i} = (\vec{r_i} \wedge \vec{F_i}^{ext}) + (\vec{r_i} \wedge \vec{F_i}^{int}) \\ + \\ \vec{r_j} \wedge \vec{F_j} = (\vec{r_j} \wedge \vec{F_j}^{ext}) + (\vec{r_j} \wedge \vec{F_j}^{int}) \end{array} \right\} = (\vec{r_i} \wedge \vec{F_i}^{ext}) + (\vec{r_j} \wedge \vec{F_j}^{ext})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{M_O}^{ext}}$$

el momento angular sólo depende del momento de las fuerzas externas.

Si consideramos un sistema aislado:

$$\boxed{\vec{M_O}^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L_O} = cte}$$

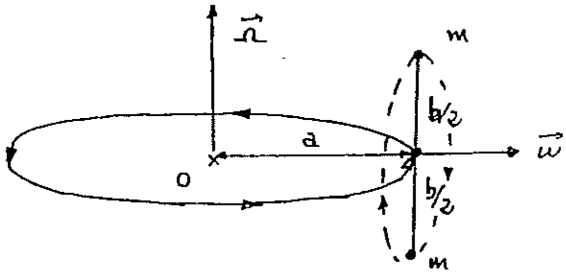
y aplicándolo al movimiento relativo.

$$\boxed{\vec{L_O}} = \underbrace{\sum (\vec{r_i}' \wedge m_i \vec{v_i}')}_{\text{momento angular del sistema rto de G}} + \underbrace{\cancelto{0}{\left(\sum m_i \vec{r_i}' \wedge \vec{V_G}\right) + \left(\vec{r_G} \wedge \sum m_i \vec{v_i}'\right)}}_{\text{momento angular de G rto a G = 0}} + \underbrace{\sum m_i (\vec{r_G} \wedge}_{\text{momento de G rto. del origen}}$$

$$= \boxed{\underbrace{\vec{L_G}}_{\text{SPIN}} + \underbrace{\vec{r_G} \wedge M_T \vec{V_G}}_{\text{ORBITAL}}} \leftarrow \text{TEOREMA DE KÖNIG}$$

$$= \boxed{\vec{L_G} + \vec{L_O}_G}$$

EJEMPLO: CUAL ES EL MOMENTO ANGULAR DEL SISTEMA RTO AL ORIGEN ?

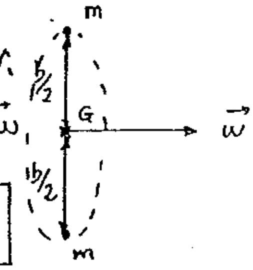


$\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}=\frac{b^2}{4}$ (creo ya)

$$\boxed{\vec{L}_G = \sum m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i}$$

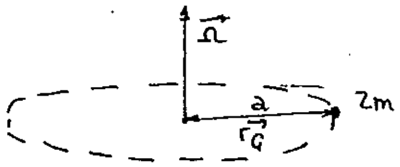
$$= m\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}\vec{\omega} + m\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}\vec{\omega}$$

$$\boxed{= 2m\frac{b^2}{2}\vec{\omega} = m b^2\vec{\omega}}$$



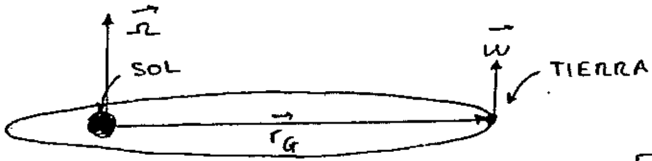
TEOREMA DE KÖNIG : $\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_G + m_T \vec{r}_G \wedge \vec{V}_G}$

$$\boxed{m_T \vec{r}_G \wedge \vec{V}_G = 2m\cdot a\cdot a\vec{\Omega} = 2ma^2\vec{\Omega}}$$



$$\boxed{\vec{L}_O = m b^2\vec{\omega} + 2ma^2\vec{\Omega}}$$

EJEMPLO: CUAL ES EL MOMENTO ANGULAR DE LA TIERRA RTO AL SOL



TEOREMA DE KÖNIG : $\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_G + m_T \vec{r}_G \wedge \vec{V}_G}$

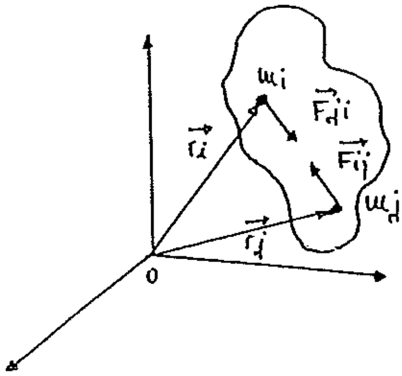
$$\boxed{\vec{L}_G = I\cdot\vec{\omega} = \tfrac{2}{5}M_T R_T^2\vec{\omega}}$$

$$\boxed{\vec{L}_O = \tfrac{2}{5}M_T R_T^2\vec{\omega} + M_T r_G^2\vec{\Omega}}$$

$$\boxed{m_T \vec{r}_G \wedge \vec{V}_G = M_T r_G^2\vec{\Omega}}$$

TRABAJO Y ENERGÍA

Dado el sistema:



$$\vec{F_i} = \vec{F_i}^{int} + \vec{F_i}^{ext}$$

$$\vec{F_j} = \vec{F_j}^{int} + \vec{F_j}^{ext}$$

$$\boxed{dW} = \vec{F_i}\cdot d\vec{r_i} + \vec{F_j}\cdot d\vec{r_j} =$$

$$= \vec{F_{ji}}\cdot d\vec{r_i} + \vec{F_i}^{ext}\cdot d\vec{r_i} + \vec{F_{ij}}\cdot d\vec{r_j} + \vec{F_j}^{ext}\cdot d\vec{r_j}$$

$$= \boxed{\vec{F_{ij}}\cdot d(\vec{r_j}-\vec{r_i}) + dW^{EXT}}$$

$$\begin{cases} \boxed{dW^{EXT} = \vec{F_i}^{ext}\cdot d\vec{r_i} + \vec{F_j}^{ext}\cdot d\vec{r_j}} \\ \boxed{dW^{INT} = \vec{F_{ij}}\, d\vec{r_{ij}}} \end{cases}$$ (no tiene por qué ser 0)

SOLO EN SÓLIDOS RÍGIDOS $dW^{INT} = 0$

* Generalizando a un sistema de n partículas

$$\begin{cases} dW^{EXT} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}^{EXT}\cdot d\vec{r_i} \\ dW^{INT} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i>j}}^{n} \vec{F_{ij}}\cdot d\vec{r_{ij}} \neq 0 \end{cases}$$

* TEOREMA DE LA ENERGIA CINETICA

$$\boxed{E_{ci}} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \rightarrow E_c = \sum_{i=1}^{n} E_{ci} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2}$$

$$\boxed{dE_c} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(d\vec{v_i}\cdot\vec{v_i} + d\vec{v_i}\,\vec{v_i}\right) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i}\, d\vec{v_i}}$$

$$\boxed{dW} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}\, d\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p_i}}{dt}\, d\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{n} d\vec{p_i}\, \frac{dr_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} d\vec{p_i}\cdot\vec{v_i}$$

$$= \sum m_i\, d\vec{v_i}\cdot\vec{v_i} = \boxed{dE_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \Delta E_c}$$

ENERGIA CINETICA EN SISTEMAS RELATIVOS

Partimos de un sistema aislado. Su momento angular es:

$$\boxed{\vec{L_O} = \vec{L}_{G_1} + (\vec{r_G} \wedge m_T \vec{V_G})}$$ TEOREMA DE KÖNIG

y su velocidad será:

$$\vec{V_i} = \vec{V_i}' + \vec{V_G}$$

entonces la energía cinética:

energía de G rto a G → 0

$$Ec = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i V_i'^2 + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{V_i}' \cdot \vec{V_G}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i V_G^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i V_i'^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i V_G^2 = \boxed{\underbrace{Ec'}_{\text{energía de las partículas respecto al centro de masas}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} m_T V_G^2}_{\text{energía del centro de masas}}}$$

$$\boxed{Ec = Ec' + Ec_G}$$

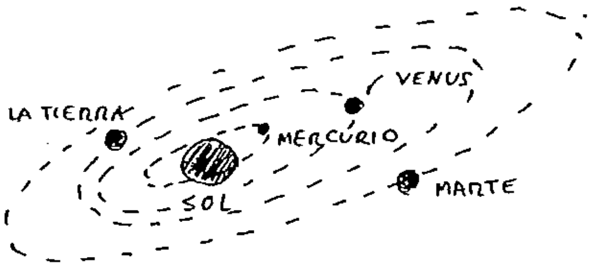
$$\underbrace{Ec'}_{\text{SPIN}} \quad \underbrace{Ec_G}_{\text{ORBITAL}}$$

FUERZAS DE INTERACCION ENTRE CUERPOS

Supongamos un campo de fuerzas, de la forma:

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u_r}}\text{, donde } \boxed{E_{P(r)} = -\frac{K}{r}} \text{ y } \boxed{E_{P(\infty)} = 0}$$

por ejemplo, el sistema solar:



Si nos fijamos en un planeta en concreto su energía sería:

$$\boxed{E_t = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r}}$$

Por ser un sistema de fuerzas centrales:

$$\boxed{\text{FUERZAS CENTRALES} \Rightarrow \vec{L_0}\text{ cte} \Rightarrow \text{TRAYECTORIA PLANA}}$$

Al ser la trayectoria plana, podemos expresar la velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{V} = V_r\vec{u_r} + V_\theta\vec{u_\theta}$$

y por tanto:

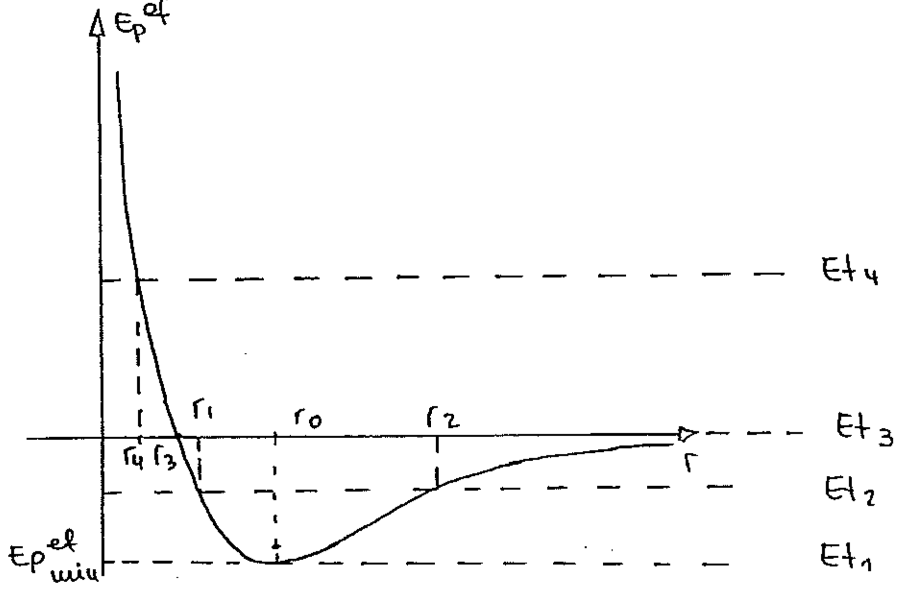
$$\boxed{E_t = \frac{1}{2}mV_r^2 + \frac{1}{2}mV_\theta^2 - \frac{K}{r}}$$

Ahora definimos la Energía Potencial Eficiente como:

$$\boxed{E_p^{ef} = \frac{1}{2}mV_\theta^2 - \frac{K}{r} = \frac{L_0^2}{2m}\cdot\frac{1}{r^2} - \frac{K}{r} = f(r)}$$

Nota: $V_\theta = r\frac{d\theta}{dr}$
$L_0 = cte = rmV_\theta$ $\Big\}$ $\boxed{V_\theta = \frac{L_0}{rm}}$

entonces si $f(r) = Ep^{ef} = \frac{Lo^2}{2m} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{K}{r}$, veamos su gráfica:



La mínima Ep^{el} se consigue cuando:

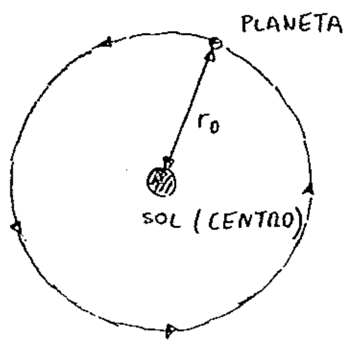
$$\boxed{\frac{d\,Ep^{ef}}{dr} = \frac{Lo^2}{\cancel{2}m}\left(-\cancel{2}r^{-3}\right) + k\,r^{-2} = 0} \Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{Lo^2}{m \cdot K}}$$

entonces $\boxed{Ep^{ef}_{min} = -\frac{1}{2}\frac{mk^2}{Lo}}$

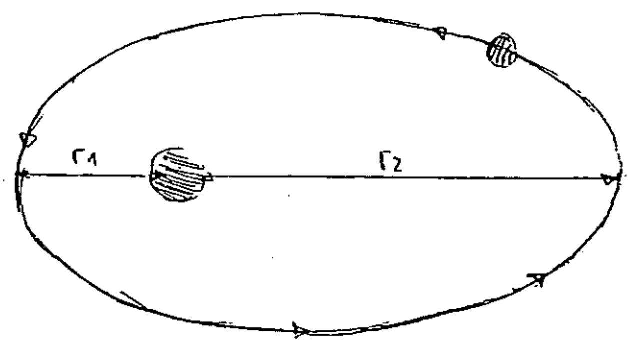
Ahora debemos dar la energía mecánica total al sistema; pueden ocurrir cuatro situaciones:

1) $Et_1 = Ep^{ef}_{min} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_r^2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = r_0 = cte \\ v = v_\theta \end{array} \right\}$

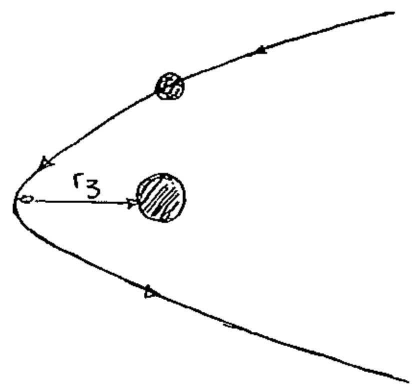
$\Rightarrow$ MOVIMIENTO CIRCULAR:



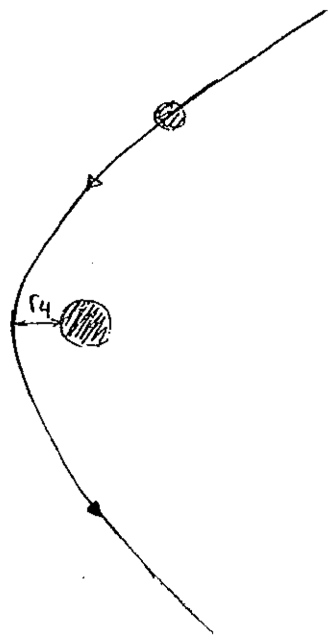
2) $E_{p\,min}^{ef} < Et_2 < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists\, r_1 \\ \exists\, r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$ MOVIMIENTO ELÍPTICO



3) $Et_3 = 0 \Rightarrow \exists\, r_3 \Rightarrow$ MOVIMIENTO PARABÓLICO (CERRADO)



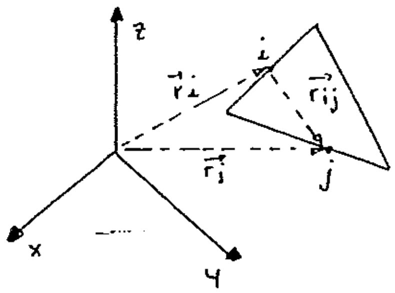
4) $Et_4 > 0 \Rightarrow \exists\, r_4 \Rightarrow$ MOVIMIENTO PARABÓLICO (ABIERTO)



ROTACION DEL SOLIDO RIGIDO

* SOLIDO RIGIDO

Def: $\boxed{|\vec{r_{ij}}| = cte}$



$\boxed{|\vec{r_{ij}}| = cte \Rightarrow \vec{r_{ij}} \perp d\vec{r_{ij}}}$

$dW_{int} = \sum \vec{F_{ij}} \cdot d\vec{r_{ij}} = 0$

- TRASLACION: La linea que une dos puntos cualesquiera se mantiene en todo momento paralela a sí misma. La velocidad se mantiene constante en todos los puntos, en un cierto espacio de tiempo. $\vec{V} = \vec{V}_G$

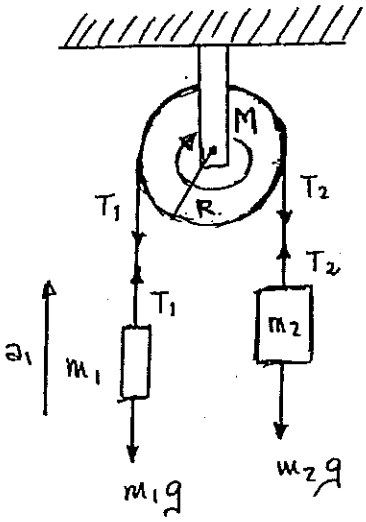
- ROTACION: Las partículas describen trayectorias circulares con centro en el eje de rotación. La velocidad angular es constante en todos los puntos, en un cierto espacio de tiempo. $\vec{w} = \vec{w}_G$

* TRASLACION Y ROTACION

Normalmente los movimientos de traslación y rotación no ocurren separados, sino que suceden conjuntamente. Para ello aplicamos conjuntamente las ecuaciones básicas de la traslación y la rotación.

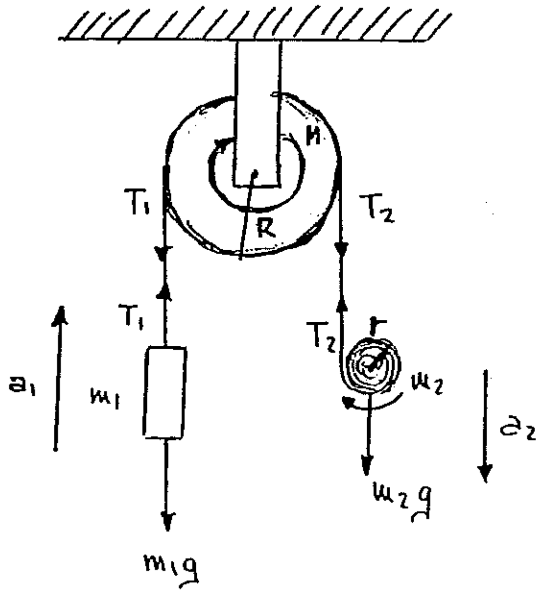
$$\boxed{\begin{cases} \vec{R}^{ext} = mt \cdot \vec{a_G} & (TRASLACION) \\ \vec{M_o}^{ext} = \dfrac{d\vec{L_o}}{dt} = I \cdot \vec{\alpha} & (ROTACION) \end{cases}}$$

EJEMPLO: DEDUCIR LAS ECUACIONES DE UNA POLEA QUE NO DESLIZA, A LA QUE ESTAN ASOCIADAS DOS MASAS.



$$\left.\begin{aligned} m_1 a_1 &= T_1 - m_1 g \\ R T_2 - R T_1 &= I \cdot \alpha \\ m_2 a_1 &= m_2 g - T_2 \\ a_1 &= \alpha \cdot R \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} ¿a_1? \\ ¿\alpha? \\ ¿T_1? \\ ¿T_2? \end{array}$$

EJEMPLO: DEDUCIR LAS ECUACIONES DE UNA POLEA QUE NO DESLIZA, A LA QUE ESTAN ASOCIADOS UNA MASA Y UN OVILLO



$$\left.\begin{aligned} m_1 a_1 &= T_1 - m_1 g \\ R T_2 - R T_1 &= I \cdot \alpha_1 \\ R \alpha_1 &= a_1 \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T_2 \\ a_2 &= a_1 + \alpha_2 \cdot r \\ I' \cdot \alpha_2 &= T_2 \cdot r \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} ¿a_1? \\ ¿T_2? \\ ¿T_1? \\ ¿\alpha_1? \\ ¿a_2? \\ ¿\alpha_2? \end{array}$$

ovillo.

* MOMENTO DE INERCIA

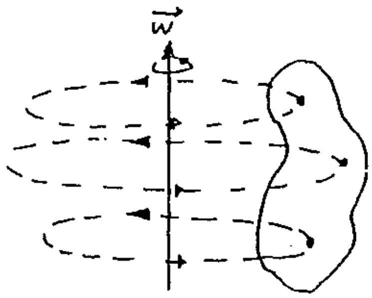
- Medida cuantitativa de la resistencia que ofrecen los cuerpos en el giro.

El momento de inercia puede estar referido a:

1) Un punto (I_o)

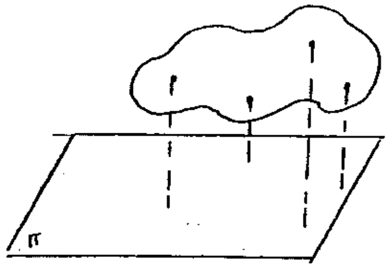
$I_o = \sum m_i r_i^2$	(PUNTOS)
$I_o = \int r^2\, dm$	(MASA CONTINUA)

2) Un eje (I_γ)



$I_\gamma = \sum m_i R_i^2$	(PUNTOS)
$I_\gamma = \int R^2\, dm$	(MASA CONTINUA)

3) Un plano. (I_π)



$I_\pi = \sum m_i d_i^2$	(PUNTOS)
$I_\pi = \int \lambda^2\, dm$	(MASA CONTINUA)

$$\boxed{dm = \rho\, d\tau = \sigma\, ds = \lambda\, dl}$$

Volumen   Planos   Hilos

- TEOREMA DE STEINER

- El momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje paralelo a otro eje que pase por el centro de masas es igual al momento de inercia del eje que pasa por el centro de masas más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia que hay entre ambos ejes.

$$\boxed{I_O = I_G + mt(OG)^2}$$

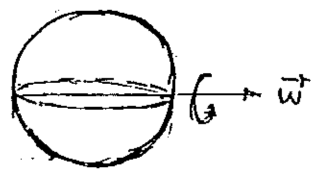
$$\boxed{I_\gamma = I_G + mt\,d^2}$$

$$\boxed{I_\eta = I_G + mt\,d^2}$$

PRINCIPALES MOMENTOS DE INERCIA

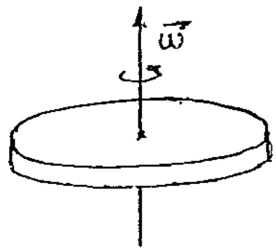
ESFERA:

$$\boxed{I_{DIAMETRO} = 2/5\, m R^2}$$



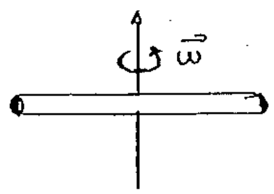
CILINDRO (DISCO):

$$\boxed{I_{EJE\perp} = 1/2\, m R^2}$$

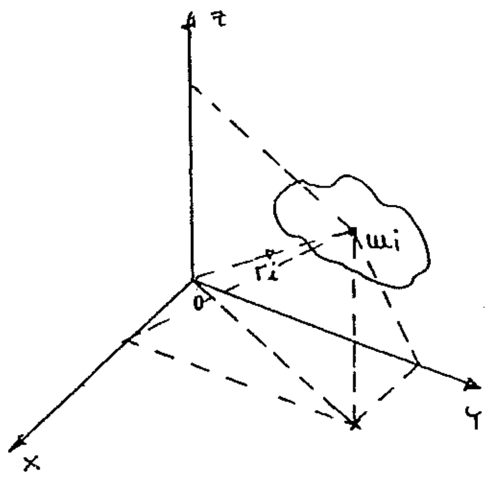


VARILLA:

$$\boxed{I_{EJE\ CENTRAL} = 1/12\, m \ell^2}$$



– RELACION ENTRE MOMENTOS DE INERCIA



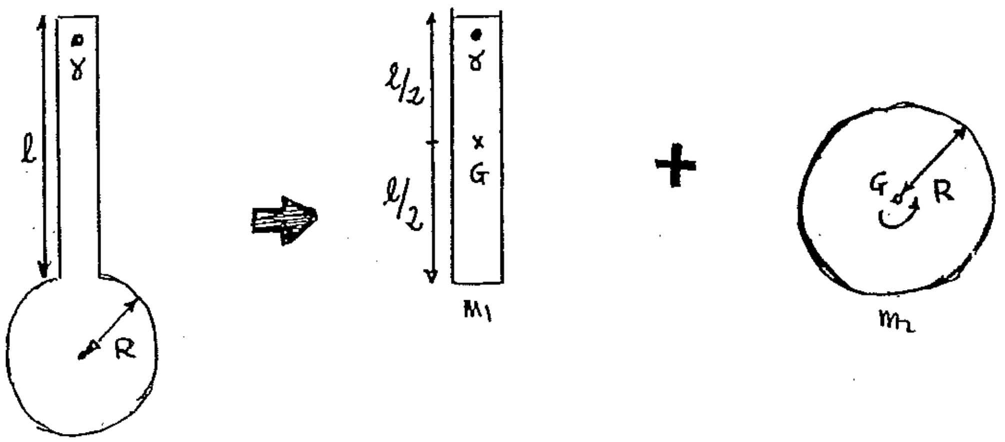
$$-I_0 = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$\text{EJES}\begin{cases} I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) \\ I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{cases}$$

$$\text{PLANOS}\begin{cases} I_{xy} = \sum m_i z_i^2 \\ I_{xz} = \sum m_i y_i^2 \\ I_{yz} = \sum m_i x_i^2 \end{cases}$$

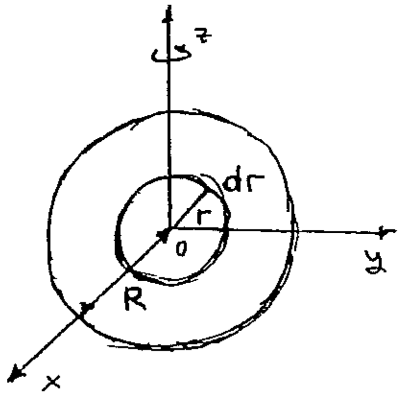
$$\boxed{I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)}$$

EJEMPLO: CALCULA EL MOMENTO DE INERCIA DE LA FIGURA RESPECTO AL EJE γ



$$\boxed{I_\gamma = \frac{1}{12} m_1 \ell^2 + m_1 \left[\frac{\ell}{2}\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 \left[\ell + R\right]^2}$$

EJEMPLO: CALCULAR EL MOMENTO DE INERCIA DE UNA ESFERA QUE GIRA RESPECTO A UNO DE SUS DIAMETROS



$$I_\gamma = \int r^2 dm = \iiint r^2 \rho \, d\tau = ??$$

– pero como $I_x = I_y = I_z$, calculo el momento de inercia respecto al punto 0

$$\int dI_o = \int r^2 dm = \int r^2 \rho \, d\tau$$

$$\tau = \frac{4}{3}\pi R^3 \; ; \; d\tau = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \pi R^2 dr$$

$$I_o = \int_0^R r^2 \rho \, 4\pi r^2 dr = \int_0^R \rho \, 4\pi r^4 dr =$$

$$= 4\pi\rho \int r^4 dr = 4\pi\rho \left.\frac{r^5}{5}\right]_0^R = 4\pi\rho \frac{R^5}{5} = \cancel{4\pi} \frac{m}{\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}\cancel{R^3}} \frac{R^{\cancel{5}\,2}}{5} =$$

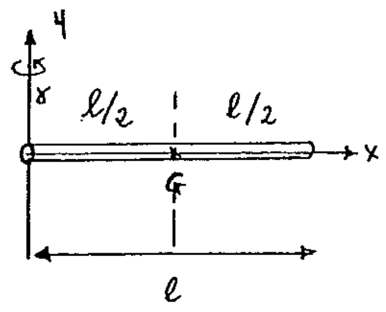
$$\rho = \frac{m}{\tau}$$

$$= \frac{3}{5} m R^2 = I_o$$

– entonces $I_o = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right) = \frac{1}{2} \cdot 3 I_z$

$$\Rightarrow \boxed{I_z = \frac{2}{3} I_o = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} m R^2 = \boxed{\frac{2}{5} m R^2}}$$

EJEMPLO: CALCULAR EL MOMENTO DE INERCIA DE UNA VARILLA QUE GIRA RESPECTO A UN EJE EN UNO DE SUS EXTREMOS

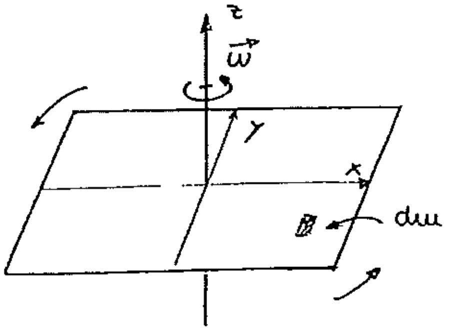


$$\boxed{I_\gamma} = I_G + m\left[\frac{\ell}{2}\right]^2 = \frac{1}{12} m \ell^2 + m \frac{\ell^2}{4}$$

STEINER

$$= \frac{1+3}{12}\left[m\ell^2\right] = \boxed{\frac{1}{3} m \ell^2}$$

EJEMPLO: CALCULAR EL MOMENTO DE INERCIA DE UNA PLACA RECTANGULAR QUE GIRA RESPECTO AL EJE QUE PASA PERPENDICULAR A ELLA POR SU CENTRO.

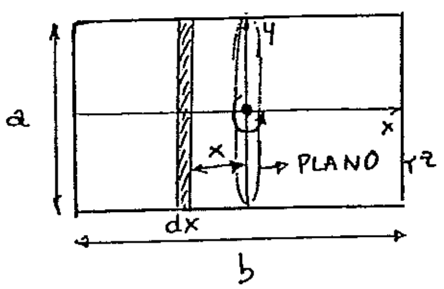


$dm = \sigma\, dx\, dy$

$I_z = \int r^2\, dm = \iint (x^2+y^2)\, \sigma\, dx\, dy = ??$

$I_z = I_{xz} + I_{yz}$

PLANTA:



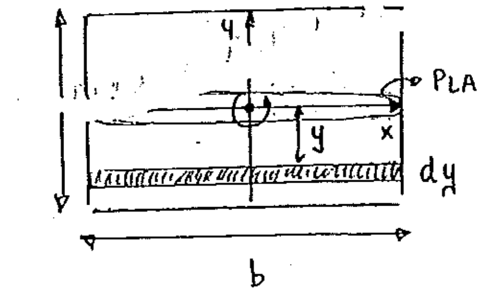
$\boxed{I_{yz} = I_y = \int r^2\, dm} = \int x^2\, dm = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \cdot \sigma \cdot a \cdot dx =$

$dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot a \cdot dx$

$S = x \cdot y = a \cdot x \;;\; dS = a\,dx$

$= \sigma a \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{\sigma a}{3}\left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8}\right) = \frac{\sigma a}{3} \cdot \frac{b^3}{4} = \frac{1}{12}\sigma a b^3$

$= \frac{1}{12}\frac{m}{a \cdot b} a b^3 = \boxed{\frac{1}{12} m b^2}$



$\boxed{I_{xz} = I_x = \int r^2\, dm} = \int y^2\, dm = \int_{-a/2}^{a/2} y^2 \sigma\, b\, dy =$

$dm = \sigma\, dS = \sigma\, b \cdot dy$

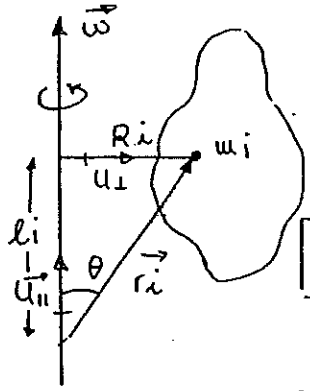
$S = x \cdot y = b \cdot y \;;\; dS = b\,dy$

$= \sigma \cdot b \left.\frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{\sigma b}{3}\left(\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8}\right) = \frac{\sigma b}{3} \frac{a^3}{4} = \frac{1}{12}\sigma b a^3$

$= \frac{1}{12}\frac{m}{a \cdot b} \cdot b \cdot a^3 = \boxed{\frac{1}{12} m a^2}$

$\boxed{I_z = I_{yz} + I_{xz} = \frac{1}{12} m b^2 + \frac{1}{12} m a^2 = \frac{1}{12} m (b^2 + a^2)}$

* MOMENTO ANGULAR



$$\left.\begin{array}{l}\vec{L_o} = \sum \vec{L_{o_i}} = \sum \vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i} \\ \vec{v_i} = \vec{\omega} \wedge \vec{r_i}\end{array}\right\} \vec{L_o} = \sum \vec{r_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge m_i \vec{r_i})$$

$$\boxed{\vec{L_o}} = \sum \left[\underbrace{(m_i r_i^2)\,\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r_i})\, m_i \vec{r_i}}_{\text{DESARROLLO DEL DOBLE PRODUCTO VECTORIAL}} \right] =$$

$$= \vec{\omega} \sum m_i r_i^2 - \sum \underbrace{\omega}_{\text{modulo (no vector)}} l_i\, m_i \vec{r_i}$$

$\vec{\omega}\cdot\vec{r_i} = r_i\,\omega\cdot\cos(\vec{\omega}\wedge\vec{r_i}) = \omega \cdot l_i$

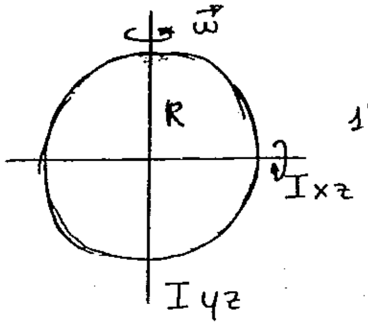
PROYECCION DE EN EL EJE.

$$= \vec{\omega}\sum m_i l_i^2 + \vec{\omega}\sum m_i R_i^2 - \cancel{\vec{\omega}\sum m_i l_i^2 \vec{u_{\parallel}}} - \omega \sum m_i l_i R_i \vec{u_{\perp i}}$$

$r_i^2 = l_i^2 + R_i^2$

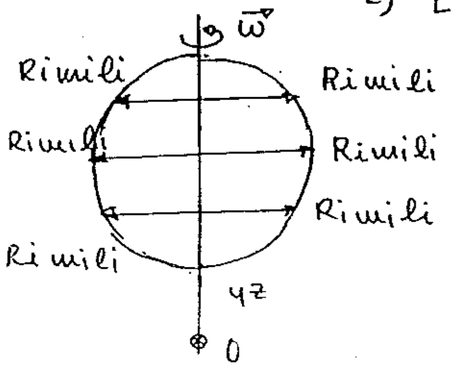
$$= \vec{\omega}\sum m_i R_i^2 - \omega \sum m_i l_i R_i \vec{u_\perp} = \boxed{\vec{\omega}\cdot I_\gamma - \omega \sum m_i l_i R_i \vec{u_{\perp i}}}$$

EJEMPLO: CALCULAR EL MOMENTO DE INERCIA DE UN DISCO QUE GIRA RTO A UNO DE SUS DIAMETROS Y CALCULAR SU MOMENTO ANGULAR.



1) $I_{xz} = I_{yz} \Rightarrow 2 I_{xz} = I_z$

$$\boxed{I_{xz} = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{4} m R^2}$$



2) - $\vec{L_o} = I_\gamma \vec{\omega} - \omega \sum m_i l_i R_i \vec{u_{\perp i}}$

$\Rightarrow \omega \sum m_i l_i R_i \vec{u_{\perp i}} = 0$

(Por la simetria del cuerpo, se anulan todos los sumandos)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L_o} = I_\gamma \vec{\omega}} = \boxed{\frac{1}{4} m R^2 \cdot \vec{\omega}}$$

- EJE PRINCIPAL DE INERCIA

$$\vec{L_o} = I_\gamma \vec{w} - w \sum m_i l_i R_i \vec{U_{\perp i}}$$

- Cuando $w \cdot \sum m_i l_i R_i \vec{U_{\perp i}} = 0$ se dice que el cuerpo gira respecto a un eje PRINCIPAL DE INERCIA (PDI).

Entonces $\boxed{\vec{L_o} = I_\gamma \vec{w}}$

- Todos los ejes de simetría son ejes PDI, aunque puede haber ejes PDI que no sean de simetría.

Todos los cuerpos tienen, al menos, tres ejes PDI ortonormales.

- Si el eje es PDI $\Rightarrow \vec{L_o} = I_\gamma \vec{w}$
- Si el eje no es PDI $\Rightarrow \vec{L_o} \neq I_\gamma \vec{w}$, pero...

$\boxed{L_\gamma = I_\gamma w \text{ (SIEMPRE)}}$

$$\vec{L_o} = I_\gamma \cdot \vec{w} - w \sum m_i l_i R_i \vec{U_{\perp i}}$$

$$\vec{U_\gamma} \cdot \vec{L_o} = U_\gamma \cdot L_o \cdot \cos\theta = L_\gamma = I_\gamma \cdot w$$

* OTRAS MAGNITUDES DE LA ROTACION

- CANTIDAD DE MOVIMIENTO

- $\vec{p} = m_t \cdot \vec{V_G}$
- $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}^{EXT}$
- $\vec{p_i}' = 0$ (CANTIDAD DE MOV DE G RTO A SI MISMO)

- MOMENTO ANGULAR

- $\vec{L_o} = L_G + (\vec{r_G} \wedge m_t \vec{V_G})$
- $\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{M_o}^{EXT}$ $\Rightarrow$ Tma del momento angular

1) EJE PDI : $\vec{M_o}^{EXT} = I_\gamma \vec{\alpha}$ $(\vec{L_o} = I_\gamma \cdot \vec{w})$

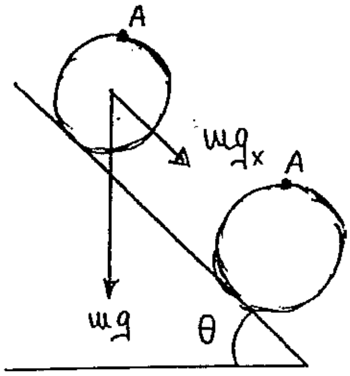
2) EJE NO PDI : $M_\gamma^{EXT} = I_\gamma \alpha$ $(L_\gamma = I_\gamma w)$

— ENERGIA Y TRABAJO

- $W = \Delta E_c \Rightarrow W^{EXT} = \Delta E_c$
- $E_c = E_c' + \frac{1}{2} m_t \vec{V_G}^2$
  - ROTACION: $\boxed{E_c} = \sum \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \boxed{\frac{1}{2} \omega^2 I_\gamma}$
  - TRASLACION: $E_c = \frac{1}{2} m_T \vec{V_G}^2$
  - R + T: $E_c = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} m_T V_G^2$

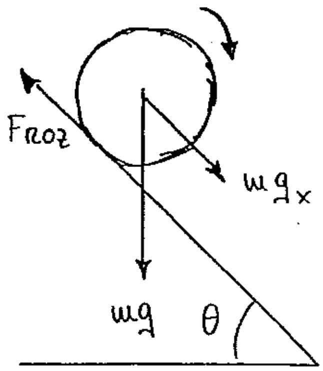
* RODADURA

1) DESLIZA $\Rightarrow \nexists$ F ROZAMIENTO



$$\cancel{m} g \operatorname{sen}\theta = \cancel{m} \cdot a_G$$
$$a_G = g \operatorname{sen}\theta$$

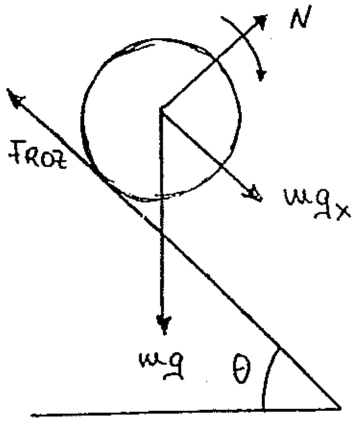
2) RUEDA SIN DESLIZAR $\Leftrightarrow \exists$ ROZAMIENTO (MUCHO)



$$\left.\begin{array}{l} m a_G = m g \operatorname{sen}\theta - F_{roz} \\ I_G \alpha = F_{roz} \cdot R \\ \underline{\underline{a_G = \alpha \cdot R}} \\ (F_{roz} \neq \mu N) \end{array}\right\} \begin{array}{l} ¿a_G? \\ ¿F_{roz}? \\ ¿\alpha? \end{array}$$

¿¿ porque es mucho rozamiento??

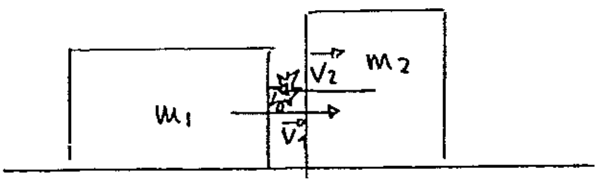
3) RUEDA Y DESLIZA $\Leftrightarrow \exists$ ROZAMIENTO (POCO)



$$\left.\begin{array}{l} m\cdot a_G = mg\,\text{sen}\,\theta - F_{ROZ} \\ I_G\cdot\alpha = F_{ROZ}\cdot R \\ F_{ROZ} = \mu\cdot N \\ \underline{(a_G \neq \alpha R)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} ¿a_G? \\ ¿F_{ROZ}? \\ ¿\alpha? \end{array}$$

* CHOQUES

1) CHOQUE UNIDIMENSIONAL



· $\nexists\ \vec{F}^{EXT} \Rightarrow \vec{P} = cte$

$$\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'}$$

1.1) CHOQUE ELÁSTICO $\Leftrightarrow E_{CIN} = cte$

$$\begin{cases} \boxed{\tfrac{1}{2} m_1 V_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 V_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 V_2'^2} \\ m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (V_1 - V_1') = m_2 (V_2' - V_2) \\ m_1 (V_1^2 - V_1'^2) = m_2 (V_2'^2 - V_2^2) \end{cases}$$

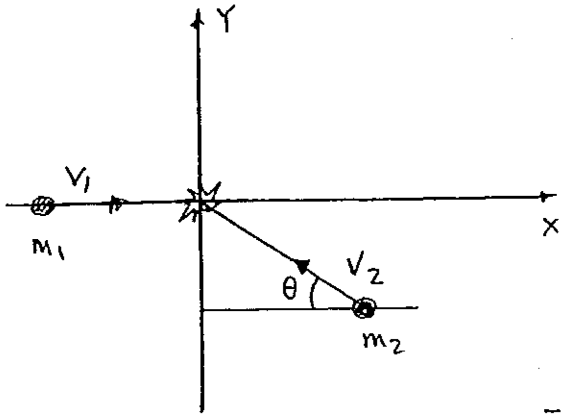
$$\boxed{\begin{cases} V_1 + V_1' = V_2' + V_2 \\ m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2' \end{cases}}$$

· Es mejor trabajar con esta expresión, es mucho más sencilla. Los signos + o − pueden variar según el sentido de las velocidades

1.2) CHOQUE INELÁSTICO (SE ADHIEREN) $\Leftrightarrow \vec{p} = cte$

$$\boxed{m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V_F}$$

2) CHOQUE EN EL PLANO (BIDIMENSIONAL)



$\nexists \vec{F}^{EXT} \Rightarrow \vec{p} = cte$

$$\boxed{m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V'_1 + m_2 V'_2}$$

$OX: m_1 V_1 + m_2 V_B \cos\theta = m_1 V'_{1x} + m_2 V'_{2x}$

$OY: m_2 V_2 \,\text{sen}\,\theta = m_1 V'_{1y} + m_2 V'_{2y}$

- (Los signos + o - dependen del sentido de las velocidades)

2.1) CHOQUE ELÁSTICO $\Leftrightarrow E_{CIN} = cte$

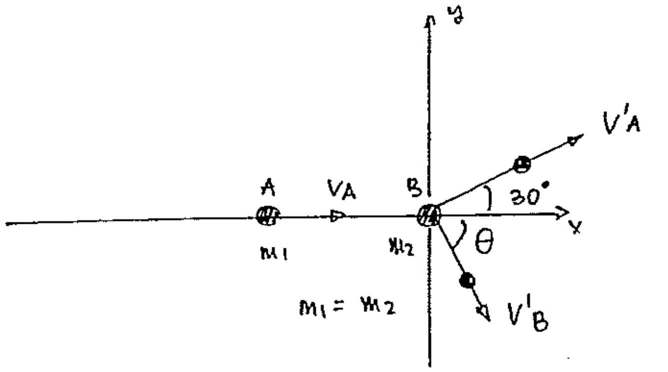
$$\frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} m V_2^2 = \frac{1}{2} m V_1'^2 + \frac{1}{2} m V_2'^2$$

- Además me tienen que dar algún dato más, como por ejemplo, el ángulo de salida.

2.2) CHOQUE INELÁSTICO (SE ADHIEREN) $\Leftrightarrow \vec{p} = cte$

$$\boxed{V_1' = V_2' \Rightarrow \begin{cases} V_1'x = V_2'x \\ V_1'y = V_2'y \end{cases}}$$

EJERCICIO Un jugador de billar lanza la bola A con una velocidad de 5 m/s sobre otra bola B en reposo. La bola A se desvia 30° de su dirección. Calcular las velocidades despues del choque y el angulo con el que se desvia la bola B.



$$\begin{cases} \nexists \vec{F}_{EXT} \Rightarrow \vec{p} \text{ cte} \\ \text{CHOQUE ELASTICO} \Rightarrow Em \text{ cte} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \vec{V_1} + m_2 \vec{V_2} = m_1 V_1' + m_2 V_2' \\ \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} OX: \ V_1 = V_1'x + V_2'x \\ OY: \ 0 = V_1'y + V_2'y \\ V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5 = V_1' \cos 30 + V_2' \cos \theta \\ 0 = V_1' \operatorname{sen} 30 + V_2' \operatorname{sen} \theta \\ 25 = V_1'^2 + V_2'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2' \cos\theta = 5 - V_1' \cos 30 \\ V_2' \operatorname{sen}\theta = V_1' \operatorname{sen} 30 \\ 25 = V_1'^2 + V_2'^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_2'^2 \cos^2\theta = 25 - 10 V_1' \cos 30 + V_1'^2 \cos^2 30 \\ V_2'^2 \operatorname{sen}^2\theta = V_1'^2 \operatorname{sen}^2 30 \end{cases}$$

$$V_2'^2 (\overbrace{\cancel{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}}^{1}) = 25 - 10 V_1' \cos 30 + V_1'^2 (\cancel{\cos^2 30 + \operatorname{sen}^2 30})$$

$$\left.\begin{cases} V_2'^2 = 25 - 10 V_1' \cos 30 + V_1'^2 \\ V_2'^2 = 25 - V_1'^2 \end{cases}\right\} \ -10 V_1' \cos 30 + V_1'^2 + V_1'^2 = 0 \ \begin{cases} V_1' = 0 \ (\text{FALSO}) \\ \boxed{V_1' = 5 \cos 30 = \frac{5}{2}\sqrt{3}} \end{cases}$$

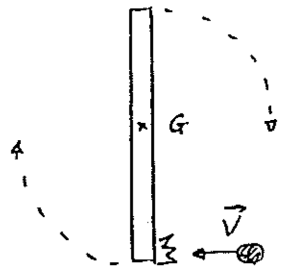
$$\boxed{V_2' = \pm \sqrt{25 - \left[\frac{5}{2}\sqrt{3}\right]^2} = \sqrt{\frac{100 - 75}{4}} = \frac{5}{2} \frac{m}{s}}$$

el menos no tiene sentido.

$$\boxed{\theta = \arcsen \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}}$$

3) CHOQUE ENTRE PARTÍCULA Y BARRA

3.1) BARRA EN LIBERTAD



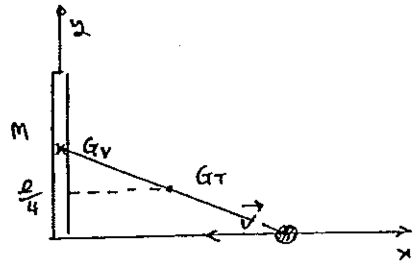
$\nexists \vec{F}^{ext} \Rightarrow \vec{p} = cte$

$\nexists \vec{F}ext \Rightarrow \underline{\underline{\vec{L}}} = cte$ ↳ en cualquier punto

la varilla comienza a girar respecto al centro de masas G

EJERCICIO 96 : Una varilla delgada de masa M y longitud L está colocada sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Una partícula de masa también M se acerca a la varilla con velocidad v dirigida normalmente a ella por uno de sus extremos.

a) Hallar la cantidad de movimiento del sistema varilla + partícula antes y después del choque.



$\nexists \vec{F}^{EXT} \Rightarrow p = cte$

$$\boxed{\vec{P}_A = \vec{P}_D = M \cdot \vec{V}}$$

b) Hallar la velocidad y la trayectoria del c.d.m. de ese sistema, antes y después del choque.

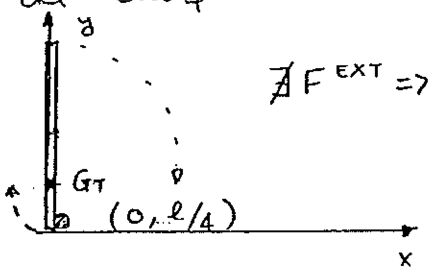
$$\boxed{\vec{V}_{GT} = \frac{\sum mi\vec{V}i}{m_T} = \frac{0 \cdot M + \vec{V} \cdot M}{M + M} = \frac{\vec{V}}{2} \ m/s}$$

d) Hallar el momento angular respecto al c.d.m. del sistema varilla + partícula, antes y después del choque

$\nexists F^{EXT} \Rightarrow \vec{L} = cte$

$$\boxed{L_{GT} = \vec{r_{G_T}} \wedge m_T \vec{V_{G_T}} = \frac{\ell}{4} \cdot 2M\frac{V}{2} = \frac{Mv\ell}{4} \vec{u_z}}$$

e) Si se supone que tras el choque, la partícula queda adherida a la varilla, calcular la velocidad angular con que el sistema gira alrededor del c.d.m después del choque.



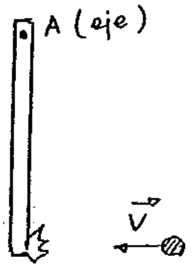
$$\nexists F^{EXT} \Rightarrow L_{G_T} = cte$$

$$\vec{L_{GT}} = I_{GT} \cdot \vec{\omega}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{\vec{L_{GT}}}{I_{GT}} = \frac{\frac{Mv\ell}{4}\vec{k}}{\frac{5M\ell^2}{24}} = \frac{6v}{5\ell} \text{ rad/s } \vec{k}}$$

$$\boxed{I_{GT}} = I_G + 2M\left(\ell/4\right)^2 = \frac{1}{12}M\left[\frac{\ell}{2}\right]^2 + 2M\left[\frac{\ell^2}{16}\right] = \boxed{\frac{5M\ell^2}{24}}$$

3.2) BARRA SUJETA A UN EJE EXTERIOR

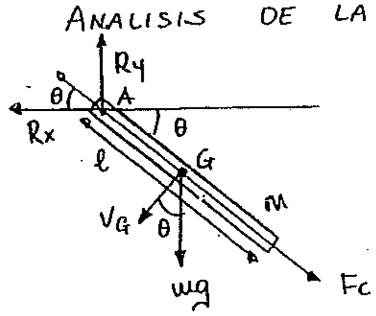


Existe una variación en la reacción en el eje

$$\boxed{\exists \vec{F}^{EXT} \Rightarrow \vec{p} \neq cte}$$

$$\boxed{\vec{M_A}^{EXT} = 0 \Rightarrow \vec{L_A} = cte}$$ (solo en el punto del eje)

ANALISIS DE LA VARILLA



$$\boxed{F_c = m \cdot \omega^2 \cdot \frac{\ell}{2} \text{ (Fc del c.d.m)}}$$

ECUACIONES

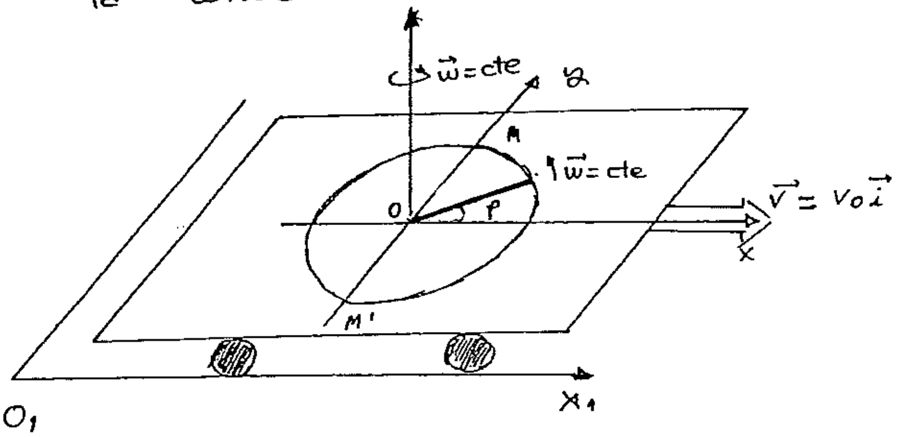
1-) $R_x \cos\theta + R_y \sin\theta = mg \sin\theta + F_c$: OX

2-) $R_x \sin\theta - R_y \cos\theta + mg\cos\theta = m \cdot a_G$: Rte $\vec{F}ext$

3-) $I_A \cdot \alpha = mg\cos\theta \cdot \frac{\ell}{2}$

4-) $a_G = \frac{\ell}{2} \cdot \alpha$

FEBRERO 1995: Una varilla de longitud lo y masa M está obligada a girar alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos (punto O), con velocidad angular constante ω. La varilla está colocada sobre una plataforma horizontal que se mueve con velocidad constante $\vec{v} = V_0 \vec{i}$. En el instante inicial, la varilla se halla en la posición $\varphi = 0$. Obtener:



a) En el instante en que la varilla pasa por las posiciones OM ($\varphi = \pi/2$) y OM' ($\varphi = 3\pi/2$):

a_1) El vector cantidad de movimiento de la varilla para un observador situado en tierra.

ESQUEMA

* ecuaciones del movimiento de la particula
* operar en sistema relativo

$\vec{r}_G = \frac{l_0}{2}$ (la varilla no es una particula).

$$\vec{r} = \begin{cases} \vec{x} = \frac{l_0}{2}\cos\omega t\,\vec{i} \\ \vec{y} = \frac{l_0}{2}\operatorname{sen}\omega t\,\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_x = -\frac{l_0}{2}\omega\operatorname{sen}\omega t\,\vec{i} \\ \vec{v}_y = \frac{l_0}{2}\omega\cos\omega t\,\vec{j} \end{cases}$$

entonces:

$$\boxed{\vec{P}} = m\vec{v} = m\left(\vec{V}_0 + \vec{V}_{rel} + (\underbrace{\cancel{\vec{w}_{ejes}\wedge\vec{r}}}_{0})\right)$$

0 (los ejes están quietos no giran)

$$= m\left(V_0\vec{i} - \frac{l_0}{2}\omega\operatorname{sen}\omega t\,\vec{i} + \frac{l_0}{2}\omega\cos\omega t\,\vec{j}\right) =$$

$$= \left(mV_0 - m\frac{l_0}{2}\omega\operatorname{sen}\omega t\right)\vec{i} + m\frac{l_0}{2}\omega\cos\omega t\,\vec{j}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$: $= mV_0 - m\frac{l_0}{2}$

$\varphi = \frac{3\pi}{2}$: $= mV_0 + m\frac{l_0}{2}$

a_2) El momento angular de la varilla respecto a O y respecto a su c.d.m..

Trayectoria plana $\Rightarrow \vec{L_O} = cte$

$$\boxed{\vec{L_O} = I_O\vec{\omega} = \frac{1}{3} m\, l_o^2 \omega\, \vec{k}}$$

$$\vec{L_G} = \vec{L_O} - (\vec{r_G} \wedge m\vec{V_G}) = \vec{L_O} - m\omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{l_o}{2}\cos\varphi & \frac{l_o}{2}\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\frac{l_o}{2}\operatorname{sen}\varphi & \frac{l_o}{2}\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

(Teorema de König)

$$= \frac{1}{3} m l_o^2 \omega - m\omega \left(\frac{l_o^2}{4}\cos^2\varphi + \frac{l_o^2}{4}\operatorname{sen}^2\varphi\right) = \frac{1}{3} m l_o^2 \omega - \frac{l_o^2}{4} m\omega\, (\cancel{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi})$$

$$= m\omega l_o^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{12} m l_o^2 \omega\, \vec{k}}$$

a_3) La energía cinética de la varilla respecto el sistema absoluto

$$E_c = \frac{1}{2} I_o \omega^2 + \frac{1}{2} M V_G^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} m\, l_o^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m V_o^2 =$$

$$\boxed{\frac{1}{6} m l_o^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m V_o^2}$$

Al cabo de un tiempo t:

b_1) El vector cantidad de movimiento de la varilla para un observador situado en tierra.

$$\boxed{\vec{P} = (mV_o - m\omega l_o \operatorname{sen}\underset{\omega t}{\varphi})\,\vec{i} + m\omega l_o \cos\underset{\omega t}{\varphi}\,\vec{j}}$$ (respondido en a_1)

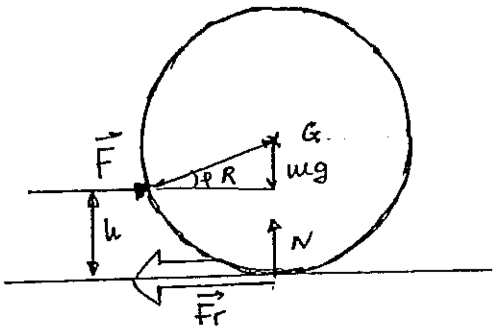
b_2) El momento angular de la varilla respecto a O y respecto a su cdm.

$$\vec{L_O} = cte \left\{ \begin{array}{l} \vec{L_O} = \frac{1}{3} m\, l_o^2 \omega\, \vec{k} \\ \vec{L_G} = \frac{1}{12} m\, l_o^2 \omega\, \vec{k} \end{array}\right.$$ (respondido en a_2)

JUNIO 1995: Una fuerza horizontal F actúa sobre una esfera homogenea de masa m y radio R.

Determinar:

a) altura h a la que debe estar aplicada la fuerza para que la esfera deslice sin rodar. ¿Con qué aceleración se mueve el centro de masas?



- Desliza sin rodar $\Rightarrow M^{ext} = 0$

$$\Rightarrow -Fr \cdot \cancel{R} + F \cdot \cancel{R} \cdot \operatorname{sen}\varphi = 0$$

$$\Rightarrow F \cdot \operatorname{sen}\varphi = Fr = \mu N = \mu mg$$

donde $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{R-h}{R}$

entonces $\dfrac{R-h}{R} = \dfrac{\mu mg}{F} \Rightarrow \boxed{h = R\left(1 - \dfrac{\mu mg}{F}\right)}$

- Aceleracion $\Rightarrow \vec{R}^{te}_{ext} = m\vec{a}_G$

$$\vec{F} + \vec{Fr} = m\vec{a}_G \Rightarrow F - Fr = ma_G$$

entonces $\boxed{a_G = \dfrac{F - \mu mg}{m} = \dfrac{F}{m} - \mu g}$

b) Si la fuerza F se aplica a una altura R, calcular el valor de la fuerza de rozamiento cuando la esfera rueda sin deslizar.

$$\text{Rueda sin deslizar} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}te^{ext} = ma_G & \rightarrow F - Fr = ma_G \\ \vec{M}^{ext} = I\alpha & \rightarrow Fr\,R = I\alpha \\ \alpha R = a_G & \rightarrow \alpha R = a_G \end{cases}$$

donde $Fr = F - ma_G$ y $Fr\,R = I\alpha = I\dfrac{a_G}{R} \Rightarrow a_G = \dfrac{FrR^2}{I}$

entonces: $Fr = F - m\dfrac{FrR^2}{I}$

donde $\boxed{Fr = \dfrac{F}{1 + \dfrac{mR^2}{I}} = \dfrac{F}{1 + \dfrac{mR^2}{\frac{2}{5}mR^2}} = \dfrac{F}{1 + \frac{5}{2}} = \dfrac{2}{7}F}$

c) En las condiciones del apartado anterior ¿ cual sería la fuerza F máxima que se podría aplicar sin que la esfera deslizase ?

para que no deslice tienen que cumplirse las ecuaciones del apartado anterior, luego

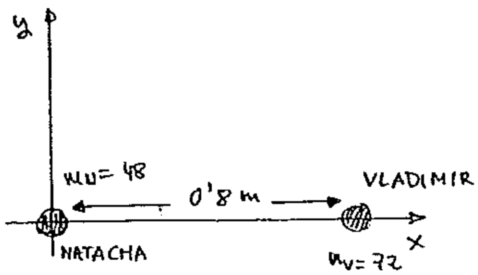
$$F_r = \frac{2}{7} F \quad \text{si la fuerza es máxima} \Rightarrow$$

$$F_r \simeq \mu m g$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{max} \simeq \frac{7}{2} \mu m g}$$

SEPTIEMBRRE 1995: Dos patinadores, Natacha y Vladimir, se encuentran cogidos por los brazos, separados una distancia de 80 cm. y girando en torno a un eje vertical que pasa por su centro de masas a razón de 60 vueltas por minuto. Calcular:

a) La distancia de cada uno de los patinadores al centro de masas.



$$x_{G} = \frac{48 \cdot 0 + 72 \cdot 0'8}{48 + 72} = \frac{72 \cdot 0'8}{120} = 0'48 \text{ m}$$

$y_G = 0$ (por simetría)

$$\Rightarrow \boxed{d_N = 0'48 \text{ m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_V = 0'8 - 0'48 = 0'32 \text{ m}}$$

b) La energía cinética de la pareja.

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} I_G \omega^2}$$

donde $\boxed{I_G = \sum m_i r_{Gi}^2 = m_N \cdot d_N^2 + m_V \cdot d_V^2 = 18'432}$

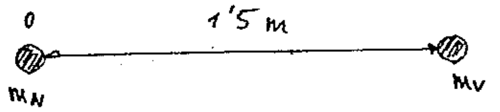
$$\Rightarrow \boxed{E_C = \frac{1}{2} \cdot 18'43 \cdot \left(\frac{60 \cdot 2\pi}{60}\right)^2 = 363'8 \text{ J}}$$

c) Su momento angular respecto al eje que pasa por el c.d.m

$$\boxed{L_G = I_G \cdot \omega = 18'432 \cdot 2\pi = 115'81 \text{ kgr m}^2 \text{s}^{-1}}$$

En un momento dado se separan, quedando cogidos por las manos, de manera que la nueva distancia entre ellos es de 150 cm. En estas condiciones, calcular:

d) La nueva distancia de cada patinador al eje de giro.



$$X_G = \frac{0 \cdot 48 + 1'5 \cdot 72}{48 + 72} = \frac{1'5 \cdot 72}{120} = 0'9 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \boxed{d'_N = 0'9 \text{ m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d'_V = 1'5 - 0'9 = 0'6 \text{ m}}$$

$Y_G = 0$ (por simetría)

e) La velocidad angular

El momento angular es constante $\Leftarrow$ trayectoria plana.
$\not\exists$ F externas

$$\boxed{L_G = I'_G \omega'} \Rightarrow \boxed{\omega' = \frac{L_G}{I'_G} = \frac{115'81}{64'8} = 1'78 \text{ rad s}^{-1}}$$

donde $\boxed{I'_G = \sum m_i d_{Gi}^2 = m_N \cdot d'^2_N + m_V \cdot d'^2_V = 48 \cdot 0'9^2 + 72 \cdot 0'6^2 =}$ 64,8

$v = \omega \cdot R \qquad a_n = \frac{v^2}{R} \qquad \frac{\omega^2 R^2}{R}$ $\omega^2 d$

f) La fuerza que deben soportar las manos para no soltarse.

Al girar aparece una fuerza centrífuga:

$$\boxed{F_C = m a_N = m \cdot \omega^2 d}$$

$$\boxed{F_{C_N} = F_{C_V} = m_N\, \omega^2 d_N = 48(1'78)^2 \cdot 0'9 = 136'87\ N}$$

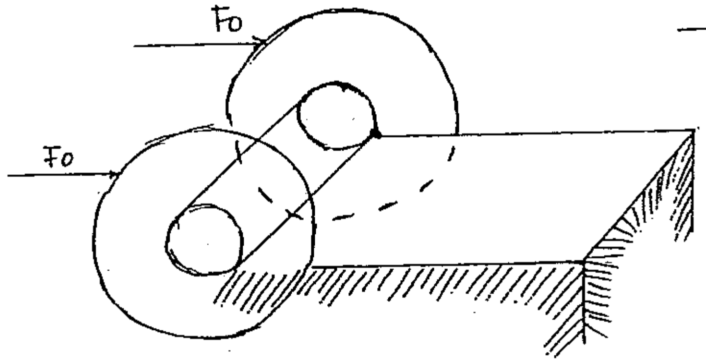
g) El trabajo hecho para separarse los patinadores desde una distancia de 80 cm a otra de 150 cm ¿Quién realiza el trabajo? Justifíquese.

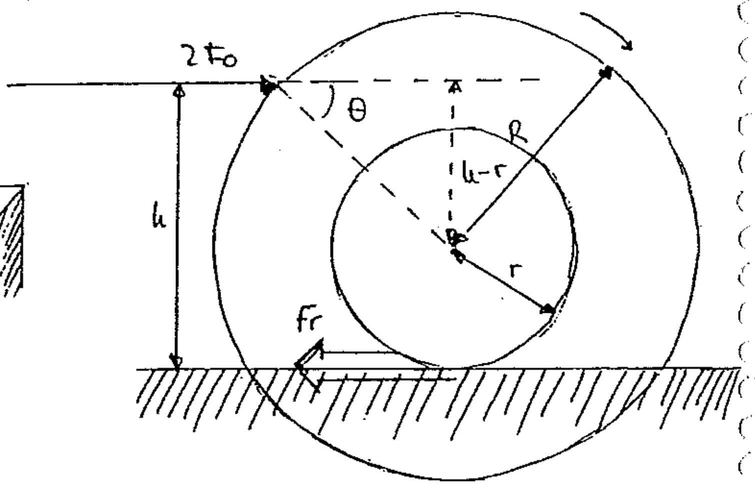
$$W = \Delta E_C = E_{C_2} - E_{C_1} = \frac{1}{2} I_G' \omega'^2 - E_{C_1} = \frac{1}{2}\, 64'8 (1'787)^2 - 363'8$$

$= -260'33$ $\Rightarrow$ El sistema pierde energía $\Rightarrow$ el sistema hace el trabajo.

FEBRERO 2000: Se dispone del carrete de masa M de la figura. El carrete consta de un eje de radio r en cuyos extremos están colocados dos discos de grosor despreciable, y de radio R cada uno. El carrete rueda sin deslizar por un plano horizontal y tiene aplicadas dos fuerzas de valor F_0 constante (ver figura) a una altura h del plano. Si el momento de inercia del carrete respecto de su eje es $I_E = \frac{5}{2} M r^2$ y en $t=0$ parte del reposo, se pide al cabo de un cierto tiempo t:

a) La velocidad angular del carrete y el espacio recorrido por su c.d.m. y la fuerza de rozamiento.





Rueda sin deslizar

$$\Rightarrow \begin{cases} M^{ext} = \alpha I_E \Rightarrow 2F_o R \operatorname{sen}\theta + F_r \cdot r = \alpha \cdot I_E \\ \Sigma F^{ext} = m a_G \Rightarrow 2F_o - F_r = m a_G \\ r\alpha = a_G \end{cases}$$

donde $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h-r}{R} \Rightarrow 2F_o \cancel{R} \dfrac{(h-r)}{\cancel{R}} + F_r \cdot r = \alpha I_E$

$$2F_o\,[h-r] + F_r \cdot r = \alpha I_E \Rightarrow \alpha = \frac{2F_o\,[h-r] + F_r \cdot r}{I_E}$$

como

$$2F_o - F_r = m a_G = m r \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2F_o - F_r}{mr}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2F_o(h-r) + F_r \cdot r}{I_E} \\ \alpha = \dfrac{2F_o - F_r}{mr} \end{cases}$$

$$[2F_o(h-r) + F_r \cdot r]\, m \cdot r = (2F_o - F_r)\, I$$

de donde: $F_r \cdot r^2 m + F_r I = 2F_o I - 2F_o m r\,[h-r]$

$$\boxed{F_r = \frac{2F_o\left(\frac{5}{2}\cancel{m} r^{\cancel{2}} - \cancel{m}\cancel{r}\,[h-r]\right)}{r^{\cancel{2}}\cancel{m} + \frac{5}{2}\cancel{m} r^{\cancel{2}}} = \frac{4F_o\left(\frac{5}{2}r - h + r\right)}{7r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_r = \frac{4F_o}{7r}\left[\frac{7}{2}r - h\right] = F_o\left(2 - \frac{4h}{7r}\right)}$$

por tanto:

$$\boxed{a_G = \frac{2F_o - F_r}{m} = \frac{2F_o - F_o\left(2 - \frac{4h}{7r}\right)}{m} = \frac{4F_o h}{7mr}}$$

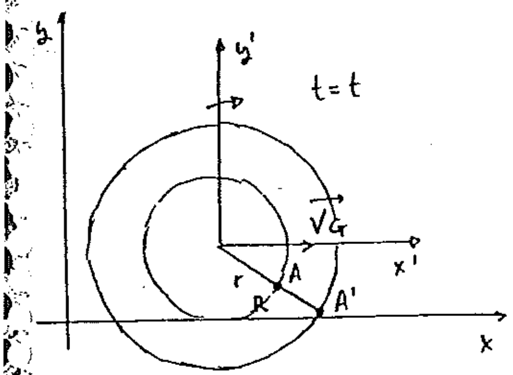
$$\boxed{\alpha = \frac{a_G}{r} = \frac{4F_o h}{7mr^2}}$$

entonces:

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{es cte.}}}{\omega = \alpha t} = \frac{4}{7}\frac{F_o h}{7mr^2}t}$$

y el espacio recorrido: $\boxed{S = \frac{1}{2}a_G t^2 = \frac{1}{2}\frac{4F_o h}{7mr}t^2 = \frac{2}{7}\frac{F_o h}{mr}t^2}$

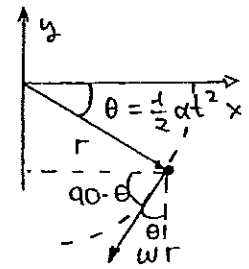
b) El vector velocidad lineal de los puntos A y A' que están en la misma horizontal, partiendo del centro del disco, respecto a un sistema de referencia ligado al plano.



PARA EL PUNTO A:

$$\vec{V}_{rel} + \vec{V}_G = \vec{V}_{ABS}$$ (los ejes no giran $\Rightarrow (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) =$

la trayectoria de A en los ejes móviles:



y su velocidad:

$$\vec{V}_A = \omega . r(-\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_{ABS} = [V_G - \omega r \operatorname{sen}\theta]\,\vec{i} - \omega r\cos\theta\,\vec{j}}$$

si queremos dejar el resultado en función del tiempo:

$$\boxed{\vec{V_{ABS}} = \left[a_G t - \alpha t r \operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}\alpha t^2\right]\right]\vec{i} - \alpha t r \cos\left[\tfrac{1}{2}\alpha t^2\right]\vec{j}}$$

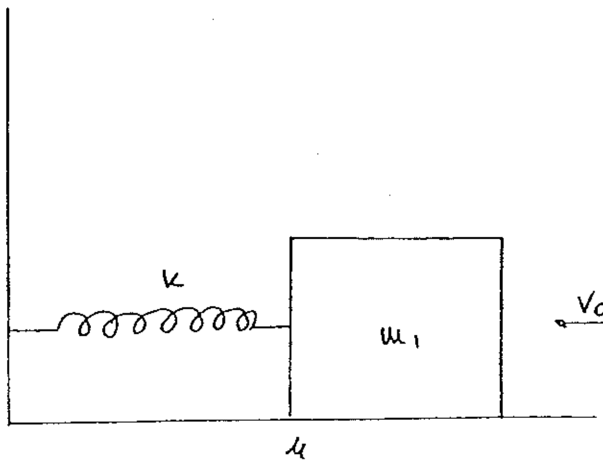
analogamente para A':

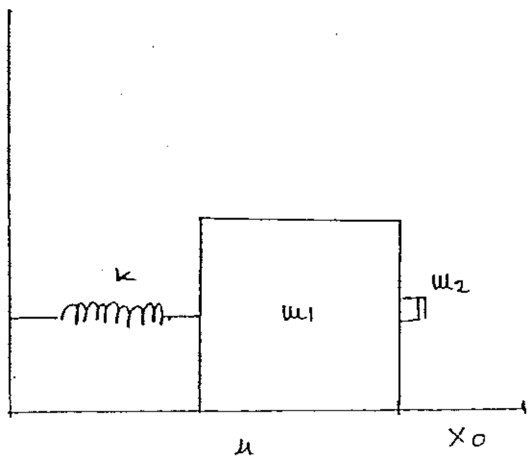
$$\boxed{\vec{V_{ABS}} = \left[a_G t - \alpha t R \operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}\alpha t^2\right]\right]\vec{i} - \alpha t R \cos\left[\tfrac{1}{2}\alpha t^2\right]\vec{j}}$$

c) Su energía mecánica:

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_E \omega^2 = \frac{1}{2} m\left(V_G^2 + \frac{5}{2} r^2 \omega^2\right)}$$

EJERCICIO 94: Un bloque de masa M_1 se halla en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento es μ. Entre el bloque y una pared vertical se fija un muelle de constante k, inicialmente no deformado. Una bala de masa m_2 alcanza el bloque y se incrusta en él. Hallar la velocidad inicial de la bala en función del desplazamiento máximo x_0 de la masa y de m_1, m_2, μ, k y g





El choque es inelástico ⇒ no se conserva la energía cinética, pero se conserva la cantidad de movimiento.

$$\vec{P}_{ANTES} = \vec{P}_{DESPUES}$$

$$m_2 V_0 = (m_1 + m_2) V$$

$$V = \frac{m_2 V_0}{(m_1 + m_2)}$$

Al impactar las dos masas, éstas se desplazan hasta que el muelle absorbe su energía cinética, pero como hay rozamiento:

$$E_c = E_p + W_{Roz}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 + Fr\, x_0$$

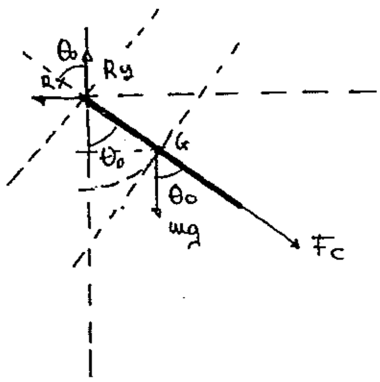
$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left[\frac{m_2 V_0}{(m_1 + m_2)} \right]^2 = \frac{1}{2} k X_0^2 + \mu N X_0$$

$$m_2^2 V_0^2 = \left[k X_0^2 + 2 \mu N X_0 \right] (m_1 + m_2)$$

$$\boxed{V_0 = \frac{\left[(m_1 + m_2) \left[k X_0^2 + 2 \mu N X_0 \right] \right]^{1/2}}{m_2}}$$

EJERCICIO 95: Una barra delgada de masa M y longitud L puede girar libremente en torno a un eje fijo horizontal que pasa por uno de sus extremos. Se suelta la barra desde una posición que forma un ángulo θ_0 con la vertical.

Hallar la velocidad angular de la barra cuando pasa por la posición vertical.



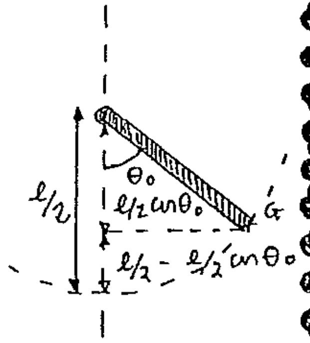
HORIZONTAL: $F_c + mg\cos\theta = R_y\cos\theta + R_x\sin\theta$

OY : $R^{te}\ \vec{F}_{ext}$: $mg\sin\theta + R_x\cos\theta - R_y\sin\theta = m\cdot a_G$

M^{ext} : $I_O\cdot\alpha = mg\sin\theta\cdot\frac{1}{2}l$

Gira sin deslizar: $a_G = \alpha\cdot\frac{1}{2}l$

Por conservación de la energía:



$$E_c = E_{p_1} - E_{p_2}$$

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = m\cdot g\cdot h - m\cdot g\cdot h'$$

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = mg\left(\cancel{h} - \cancel{h} - \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\theta_0\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = mg\,\frac{l}{2}\,(1-\cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega} = \left[\frac{\cancel{2}\,mgl(1-\cos\theta_0)}{\cancel{2}\,I_O}\right]^{1/2} = \left[\frac{3\cancel{mgl}}{\cancel{ml^2}}(1-\cos\theta_0\right.$$

$$\boxed{= \left[\frac{3g}{l}(1-\cos\theta_0)\right]^{1/2}}$$

b) Hallar la fuerza que ejerce el eje sobre la barra cuando ésta pasa por la posición vertical.

Con la ecuación de antes:

$$F_c + mg\cos\theta = R_y\cos\theta + R_x\,\text{sen}\,\theta$$

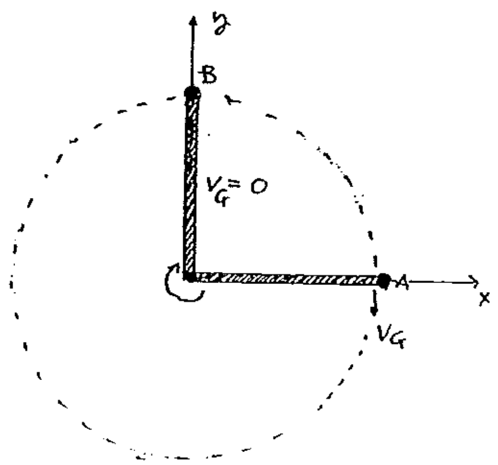
como $\theta = 0 \Rightarrow \boxed{F_c + mg = R_y} = m\omega^2 R + mg = m\left(\omega^2 \frac{\ell}{2} + g\right)$

$$= m\left(\frac{3g}{\cancel{\ell}}(1-\cos\theta_0)\frac{\cancel{\ell}}{2} + g\right) = \frac{mg}{2}\left[3 - 3\cos\theta_0 + 2\right]$$

$$\boxed{= \frac{mg}{2}\left[5 - 3\cos\theta_0\right)}$$

NOVIEMBRE 2001: La varilla de la figura de masa 3m y longitud ℓ tiene adherida en un extremo una partícula de masa m. El conjunto está dando vueltas en un plano vertical alrededor de un eje horizontal que pasa por O. Se inicia el movimiento de forma que el c.d.m. del sistema se sitúa en la posición A con una cierta velocidad (con sentido hacia abajo) y llega a la posición B con una velocidad $V_G = 0$.

Se desprecia el rozamiento. Calcular:



a) el valor de la velocidad del c.d.m. con la que inicia el movimiento y la velocidad angular inicial de la varilla.

Si al llegar a B la velocidad es 0 $\Rightarrow$ la energía cinética en B es 0 $\Rightarrow$

$$E_{C_A} + \cancel{E_{P_A}}^{0} = E_{P_B}$$

$$\frac{1}{2} I_O \omega_o^2 + \cancel{m_T g \cdot h}^{0} = m_T g \cdot h'$$

$$\frac{1}{2} I_O \omega_o^2 = m_T g \cdot h'$$

donde $I_O = I_o + I_{OP} = \cancel{\frac{1}{3}} m l_o^2 \cdot \cancel{3} + m l_o^2 = 2 m l_o^2$

y $r_G = \dfrac{\sum m_i r_i}{m_T} = \dfrac{3\cancel{m} \cdot l/2 + \cancel{m} \cdot l}{4\cancel{m}} = \dfrac{5}{8} l$ ↑ altura en B

$$\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}\cancel{m}\, l_o^{\cancel{2}} \omega_o^2 = \cancel{4}\cancel{m} \cdot g \cdot \frac{5}{\cancel{8}} \cancel{l_o}$$

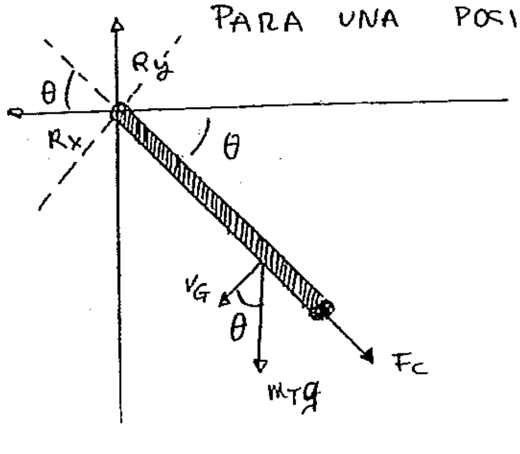
$$\omega_o^2 \cdot l_o = g \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{5g}{2l_o}} \ s^{-1}}$$

entonces:

$$\boxed{V_o = R \cdot \omega_o = \sqrt{\frac{5g}{2l_o}} \cdot \frac{5}{8} l_o \ \ ms^{-1}}$$

b) El vector fuerza de reacción del eje sobre la varilla en las posiciones A y B

PARA UNA POSICION GENERICA:



$$F_C + m_T g \,\text{sen}\,\theta = R_x \cos\theta + R_y \,\text{sen}\,\theta$$

$$m_T g \cos\theta + R_x \,\text{sen}\,\theta - R_y \cos\theta = m_T a_G$$

$$I_O \cdot \alpha = m_T g \frac{5}{8} l_o \cdot \cos\theta$$

$$a_G = \alpha \cdot \frac{5}{8} l_o$$

Si particularizamos:

$\theta = 0$

$$\boxed{F_c = R_x = 4m\,\omega_0^2 \frac{5}{8} l_0 = \frac{5}{2} m\omega_0^2 l_0}$$

$$m_T g - R_y = m_T a_G \Rightarrow m_T g - m_T a_G = R_y$$

$$2\cancel{m} l_0^{\cancel{2}}\,\alpha = 4\cancel{m} g \cdot \frac{5\cancel{l_0}}{8} \Rightarrow l_0\alpha = g\frac{5}{4}$$

$$a_G = \frac{5 l_0}{8}\alpha = \frac{5\cancel{l_0}}{8}\, g\,\frac{5}{4\cancel{l_0}} = \frac{25}{32} g$$

$$\Rightarrow \boxed{R_y = 4m\left(g - \frac{25}{32} g\right) = 4m\,\frac{7}{32} g = \frac{7}{8} mg}$$

$\theta = -\frac{\pi}{2}$

$$F_c - 4mg = -R_y \qquad \Rightarrow \boxed{R_y = 4mg - \cancel{F_c}^{\,0} = 4mg}$$

no se mueve

$$-R_x = m_T a_G = 0 \Rightarrow \boxed{R_x = 0}$$

c) El vector momento angular respecto de O y respecto del cdm en las posiciones A y B.

$\vec{L_0}$ = cte (es el único punto donde es cte)

$$\boxed{\vec{L_0} = I_0 \cdot \vec{\omega} = -2ml^2 \omega\, \vec{k}}$$ (por el sentido del giro)

$$\boxed{\vec{L_G}} = \vec{L_0} - \vec{r_G} \wedge m\vec{V_G} = -2ml^2\omega\,\vec{k} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{5}{8}\cos\theta & -\frac{5}{8}\operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\frac{5}{8}\omega\operatorname{sen}\theta & -\frac{5}{8}\omega\cos\theta & 0 \end{vmatrix} l_0^2 \cdot m =$$

$$= -2ml^2\omega + m\frac{25}{64} l_0^2\omega\left(+\underbrace{\cancel{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}}_{1}\right)\vec{k} = \boxed{-1'609\, m l_0^2 \omega\, \vec{k}}$$

PARTICULARIZANDO:

en A: $\boxed{\vec{L_O} = -2 m l_0^2 \omega_0 \vec{k}}$

$\boxed{\vec{L_G} = -1'609 m l_0^2 \omega_0 \vec{k}}$

en B: $\boxed{\vec{L_O} = \vec{L_G} = 0}$