$\vec{A} = 3y\cdot\vec{U_x} + (5y - x)\vec{U_y} - 3\vec{U_z}$

A_x componente x del vector

A_y depende de y y x

A_z depende de nadie.

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

TEMA 1: Cinemática y movimiento relativo.

1ª parte: CINEMÁTICA

1.1.- Vector de posición.

Es un vector cuyo origen coincide siempre con el sistema de referencia y cuyo extremo está en el punto móvil.

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \quad = (x, y, z) \qquad \text{(m)}$$

NOTA: El vector de posición no es la ecuación de la trayectoria.

1.2.- Vector velocidad.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\,\vec{k}$$

$$|\vec{v}(t)| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{(m/s)}$$

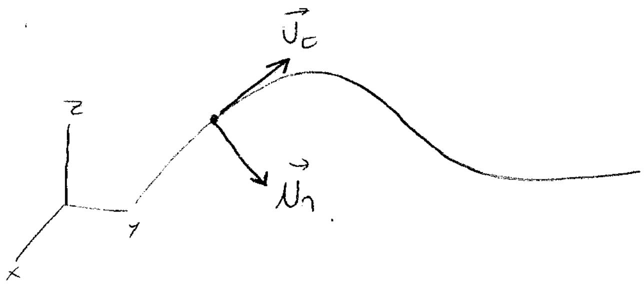
Comentario: "Triedro intrínseco de referencia"

Se define el triedro intrínseco como el sistema de referencia que tiene los siguientes 3 vectores unitarios:

Tangente unitario $= \hat{u}_t = \hat{u}_T = \hat{t} = \hat{T} = \hat{\tau}$

Normal unitario $= \hat{u}_n = \hat{u}_N = \hat{n} = \hat{N}$

~~Binormal unitario $= \hat{u}_b = \hat{u}_B = \hat{b} = \hat{B}$~~



El vector velocidad expresado en el triedro intrínseco es:

$$\vec{v}(t) = v \cdot \hat{u}_t$$

El vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria.

$V = \cancel{\frac{\vec{V}}{\hat{N}_t}}$ → ¡No sabemos dividir vectores!

1.3.- Vector aceleración.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} = a_x(t)\,\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j} + a_z(t)\,\vec{k} \qquad (m/s^2)$$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Esta es la aceleración expresada en el sistema cartesiano; expresada en el triedro intrínseco es:

$\hat{N}_n$ esta únicamente en esta fórmula

$$\boxed{\vec{a}(t) = a_T \cdot \hat{u}_t + a_N \cdot \hat{u}_n} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \hat{u}_n$$

siendo: $v \equiv$ *Módulo de la velocidad*
$\rho \equiv$ *radio de curvatura*

La velocidad solo tiene componente tangencial mientras que la aceleración tiene ~~acel~~ componente tangencial y normal.

- $a_T = \frac{dv}{dt}$ → módulo
- $a_N = \frac{v^2}{\rho}$ → radio de curvatura (únicamente esta en esta fórmula)

1.3.1.- Método práctico del cálculo de $a_T, a_N, \rho, \hat{u}_t$ y $\hat{u}_n$ dado el vector de posición de un punto móvil.

→ Nunca derivar algo particularizado
↳ $a_T = \frac{dv}{dt}$, dependerá de t
↳ pero se deriva y luego se particulariza

EJEMPLO: $\vec{r}(t) = t^2 \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} \quad (m)$
↳ si t en segundos

* $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2t\vec{i} + \vec{j} \quad (m/s)$
↳ si t en segundos

* $v = \sqrt{(2t)^2 + 1^2} = \sqrt{4t^2+1} \quad (m/s)$ si t en segundos

* $\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{2t\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{4t^2+1}}$ (adimensional)

* $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+1}} \quad (m/s^2)$ si t en segundos

* $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\vec{i} \quad (m/s^2)$ si t en segundos

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 2\ m/s^2$ si t en segundos

* $\vec{a} = a_T \vec{u}_t + a_N \vec{u}_N \Rightarrow a = |\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} \quad (m/s^2)$ si t en segundos

* $\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{1}{2}(1+4t^2)^{3/2}$ (m) si t en segundos

$\vec{U}_n = \dfrac{\bar{a} - a_t \cdot \vec{U}_t}{a_N}$

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

1.4.- Distintos tipos de movimiento.

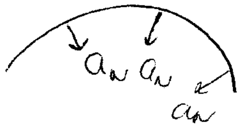
1.4.1.- Movimiento rectilíneo:

$\left\{ a_N = \dfrac{v^2}{\rho} \right\}$

$$a_N = 0 \quad ó \quad \rho = \infty$$

1.4.2.- Movimiento curvilíneo: (Resorte) (En cuanto algo describe una curva hay que ver la aceleración normal hacia dentro)

$$a_N \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_N = cte \Rightarrow movimiento \quad circular \\ a_N = a_N(t) \Rightarrow movimiento \quad curvilíneo \end{cases}$$



1.4.3.- Movimiento uniforme:

$\left\{ a_T = \dfrac{dv}{dt} \right\}$ →

$$a_T = 0 \quad ó \quad v = cte$$

1.4.4.- Movimiento uniformemente variado:

$$a_T = cte$$

1.4.5.- Movimiento variado:

$$a_T = a_T(t)$$

1.5.- Ecuaciones de los movimientos más importantes:

1.5.1.- Movimiento rectilíneo y uniforme:

Como es rectilíneo $a_N = 0$, y como es uniforme $a_T = 0$.

$$\vec{a} = 0$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t$$

1.5.2.- Movimiento rectilíneo uniformemente variado: → (Combina 1.4.1 con 1.4.3)

Como es rectilíneo $a_N = 0$, y como es uniformemente variado $a_T = cte = a_0$.

$$\vec{a} = \vec{a}_0$$

Integrando

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot t$$

Integrando

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{a}_0 \cdot \frac{t^2}{2}$$

Tiro vertical
Caída Libre
Tiro parabólico (aunque es más rectilí

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

1.5.3.- Movimiento circular:

MAGNITUDES ANGULARES:

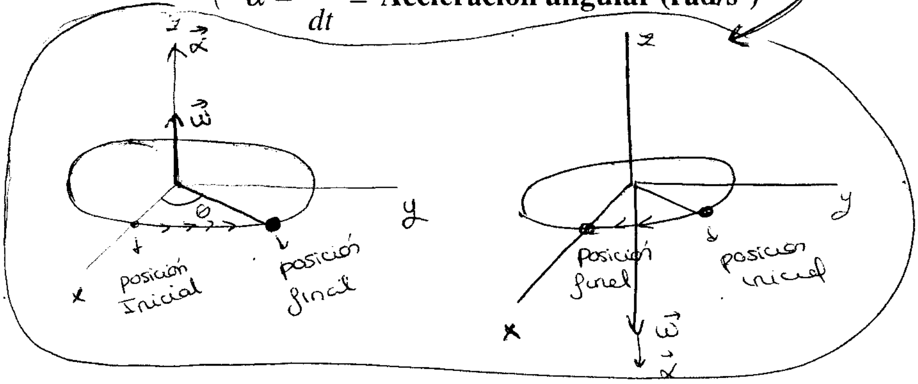
no vector $\left\{ \theta \equiv \right.$ **Ángulo recorrido por la partícula o posición angular (rad)**

vectores

$\vec{w} = \dfrac{d\theta}{dt} \hat{n} \equiv$ **Velocidad angular (rad/s)** $\left[\hat{n} \equiv \text{Re}\, gla\ mano\ derecha\right]$

No confundir con $\vec{U}_N$ de la aceleración.

$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{w}}{dt} \equiv$ **Aceleración angular (rad/s²)**



1.5.3.1.- Movimiento circular uniforme:

Como es circular $a_N \neq 0$**, y como es uniforme** $a_T = 0$.

MAGNITUDES ANGULARES	MAGNITUDES LINEALES
$\vec{\alpha} = 0$	$a = a_N = \dfrac{v^2}{R} = w^2 \cdot R$
$\vec{w} = \vec{w}_0$	$\boxed{v = w \cdot R}$ A mayor radio mayor velocidad
$\theta = \theta_0 + w_0 \cdot t$	$s = \theta \cdot R$ longitud de un arco de circunferencia

1.5.3.2.- Movimiento circular uniformemente variado: acelerado

Como es circular $a_N \neq 0$**, y como es uniformemente variado** $a_T \neq 0$.

MAGNITUDES ANGULARES	MAGNITUDES LINEALES
$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0$	$a_N = \dfrac{v^2}{R} = w^2 \cdot R$
Integro $\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{\alpha}_0 \cdot t$	$\boxed{a_T = \alpha \cdot R}$
Integro $\theta = \theta_0 + w_0 \cdot t + \dfrac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2$	$v = w \cdot R$
	$s = \theta \cdot R$

TEMA 2: DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

(con masa)

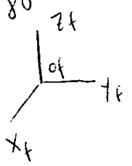
1.- Leyes de Newton

1ª Ley de Newton o ley de la inercia:

"Si sobre una partícula no actúa fuerza neta alguna, esta no toma aceleración, conservando su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme en que se encuentre".

Esta ley lleva implícito un sistema de referencia en reposo absoluto, como única forma de medir aceleraciones absolutas, y que denominaremos SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL. También serán inerciales todos los sistemas de referencia que se muevan respecto del anterior con movimiento de traslación rectilíneo y uniforme. Es decir, todo sistema de referencia cuya aceleración, respecto del considerado en reposo absoluto sea nula, es un sistema inercial.

(Sistema fijo)



2ª Ley de Newton o ley del movimiento:

$\sum \vec{F} = 0$; $\vec{P} =$ cte

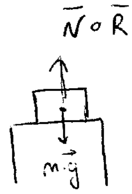
"Si sobre una partícula actúa una fuerza neta $\vec{F}$, aquella toma una aceleración $\vec{a}$, de la misma dirección y sentido, y cuyo módulo es el modulo de la fuerza dividido por una constante intrínseca de la partícula, llamada masa inercial".

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA.

3ª Ley de Newton o ley de acción-reacción:

"Si un cuerpo ejerce sobre otro una acción, $\vec{f}$, este ejerce sobre el primero una reacción igual y opuesta, $\vec{r} = -\vec{f}$.



2.- Ecuación fundamental de la dinámica en sistemas de referencia no inerciales (fuerzas de inercia)

En estos sistemas de referencia podemos considerar que, lo que el observador situado en ellos aprecia es la aceleración relativa de la partícula respecto de ese sistema no inercial, y la ecuación fundamental de la dinámica en este caso es la misma pero se escribe de la siguiente forma:

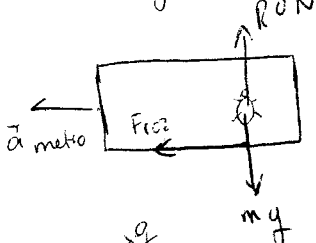
$$m\,(\vec{a}_r + \vec{a}_a + \vec{a}_c) = \sum \vec{F}$$

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_a - m \cdot \vec{a}_c$$

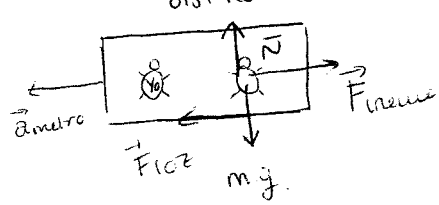
Se denomina fuerza de inercia de arrastre a $-m \cdot \vec{a}_a$ y fuerza de inercia complementaria o de Coriolis a $-m \cdot \vec{a}_c$. Ambas suman la denominada fuerza de inercia, y por tanto podemos escribir la ecuación anterior como:

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_i$$

Sist ref inercial.



Sist no inercial (sistema que se esta moviendo)



$SOT = m \cdot \vec{a}_a = \sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{roz}$

$m \cdot \vec{a}_r = \sum \vec{F} = m \cdot \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{roz} + \vec{F}_{inercia}$

En un sistema relativo No inercial sí que hay $\vec{F}_{inercia} = -m \cdot \vec{a}_{arrastre}$

Fuerza de inercia → la que experimentas por estar dentro de un sistema móvil

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

3.- Tipos de fuerzas.

a) Fuerzas de ligadura: Denominamos ligadura a todo elemento físico que condiciona el movimiento. La fuerza de ligadura es la que realiza ésta sobre la partícula para condicionar su movimiento. La fuerza **normal** es una fuerza de ligadura.

b) Fuerzas de rozamiento: Son fuerzas que se oponen al movimiento. $F_R = \mu \cdot N$

b1) Rozamiento sólido-sólido: es proporcional a la fuerza normal que actúa sobre el cuerpo, y está dirigida en sentido opuesto a la velocidad que lleva el mismo.

$$\vec{f}_r = -\mu \cdot N \cdot \vec{u}_v = -\mu \cdot \vec{N} \quad \neq cte$$

↳ coeficiente de rozamiento estático.

b2) Rozamiento fluído-sólido: es proporcional y opuesta a la velocidad relativa con que se mueve el sólido dentro del fluido. (Gas y líquido).

$\sum F = m \cdot a$

$m \cdot g - F_r = m \cdot a$

$m \cdot g - k \cdot v = m \cdot a$

$$\vec{f}_r = -c \cdot \vec{v}_v \quad c \neq cte$$

↳ coeficiente de roz dinámico

La V límite se obtiene cuando $a = 0$

$V_{lím} = \frac{mg}{c}$

c) Fuerzas elásticas: Es ejercida por los muelles o resortes (dinamómetros), y es proporcional a la variación de su longitud respecto de su estado natural, y siempre se opone a esa variación.

$$F_e = -K \cdot x \quad \text{(Ley de Hooke)}$$

$$\vec{F}_e = -k\, x \cdot \vec{U}_x$$

NOTA IMPORTANTE: Las fuerzas elásticas son fuerzas conservativas, por tanto se pueden obtener a partir de una función potencial que es la denominada energía potencial elástica, cuya expresión es:

$$E_{p_e} = \frac{1}{2} K \cdot x^2$$

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad}\, E_p = -\nabla E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{U}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{U}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{U}_z\right)}$$

4.- Trabajo y energía potencial.

El trabajo total producido por la fuerza $\vec{F}$ en un desplazamiento a lo largo de una trayectoria entre una posición A y otra B es:

$$W = \tau = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

100% → $E_{cB} - E_{cA}$ (siempre) ← Si son conservativas lo igualo.

99% → $= E_{pA} - E_{pB}$ (Si $\vec{F}$ son conservativas)

Aunque el trabajo en general depende del camino seguido entre A y B, si la fuerza que realiza el trabajo es conservativa, ésta puede escribirse como $\vec{F} = -\nabla E_p = -\nabla U$, y el trabajo realizado en este caso viene dado por:

$E_{cB} - E_{cA} = E_{pA} - E_{pB}$

$E_{mA} = E_{mB}$

$$W = \tau = E_p(A) - E_p(B) = U(A) - U(B)$$

Donde E_p o U es la denominada energía o función potencial de la fuerza $\vec{F}$.

Nota: La potencia es el trabajo o la energía por unidad de tiempo: $Potencia = \frac{Energía}{tiempo}$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow F = -\text{grad}\, E_p = -kx\, U_x$

$E_p = m \cdot g \cdot z \Rightarrow \bar{F} = -m \cdot g\, (\bar{U}_z)$

$E_p = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow F = -\frac{GMm}{r^2} (\bar{U}_r)$

Toda fuerza conservativa tiene su Ep (no rot)

$\vec{F} = -\nabla E_p \Rightarrow$ si $\vec{F}$ conservativa $E_p = -\int F\, d\vec{r}$ dirección en la que vaya.

- No existe una sola expresión para la energía potencial (Hay tantas expresiones para la Ep como fuerzas conservativas existen)
- Una partícula puede tener, en un instante dado, distintos tipos de energías potenciales (Ej: gravitatoria y Elástica)
- La fuerza de rozamiento, es el típico ejemplo de fuerza no conservativa. Es decir, no tiene energía potencial asociada

5.- Energía cinética.

$$\left[E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \right]$$

TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA O DE LAS FUERZAS VIVAS: "La variación de la energía cinética de la partícula, es igual al trabajo producido por las fuerzas exteriores que actúan sobre la partícula":

$$E_c(B) - E_c(A) = W = \tau = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

6.- Conservación de la Energía mecánica.

La energía mecánica de una partícula siempre es la suma de las energías cinética y potencial (ya sea la potencial gravitatoria, la elástica, etc.) de la misma; pero sólo se conserva si las fuerzas que actúan sobre ella son fuerzas conservativas, y en este caso se cumple que:

$$E_m = cte = E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

NOTA: Si existen fuerzas NO conservativas que actúan sobre la partícula, como son las de rozamiento, la energía mecánica de ésta, se calcula de la misma forma pero no se conserva, y la fórmula que habrá que aplicar será:

$$E_{disipada} = E_{m_A} - E_{m_B}$$

Siendo, el primer término, la **energía disipada** por las fuerzas NO conservativas.

7.- Momento lineal o cantidad de movimiento.

Se denomina momento lineal o cantidad de movimiento de una partícula a:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad Kg \cdot \frac{m}{s}$$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL: "Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero el momento lineal se conserva" ya que:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \left[\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F} \right]$$

Si $\vec{F} = 0$ debe ser $\vec{p} = cte$.

8.- Momento angular o momento cinético.

Se denomina momento angular o cinético al momento de la cantidad de movimiento:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR: "Si el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nulo, el momento angular se conserva" ya que:

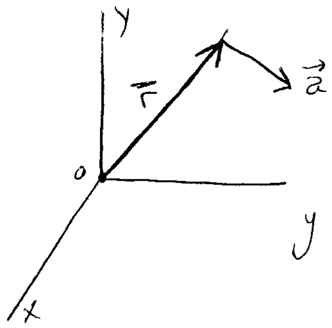
→ se deriva como un producto.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o = \frac{d(\bar{r} \times m\bar{v})}{dt} = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}\right) + \left(\bar{r} \times \frac{dm\bar{v}}{dt}\right) = \bar{r} \times \bar{F}$$

Si $\vec{M}_o = 0$ debe ser $\vec{L}_o = cte$.

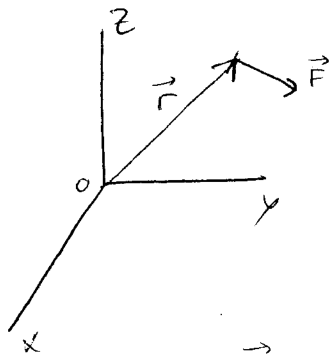
ADEMÁS EN ESTE CASO EL MOVIMIENTO SERÁ PLANO Y SE VERIFICARÁ LA LEY DE LAS ÁREAS. (Ver teoría de satélites)

Momento de un vector



$$\vec{M}_{o_{\vec{a}}} = \bar{r} \times \bar{a}$$

Momento de fuerzas



$$\vec{M}_{o_{\vec{F}}} = \bar{r} \times \bar{F}$$

Potencia:

$$P = \frac{dw}{dt} \quad \frac{[w]}{[t]} \Rightarrow \frac{J}{s} = \text{watio} \rightarrow w$$

SATÉLITES TEMA 2 (EXTRA)

CRISSER

9.- Fuerzas centrales. Movimiento de satélites.

Una fuerza se dice que es central cuando pasa siempre por un punto fijo. A este punto se le denomina centro de fuerzas. El momento de la fuerza respecto de este punto es nulo, por tanto el momento angular será constante y en consecuencia el movimiento será plano.

El movimiento de un planeta respecto del Sol o el de un satélite respecto a su planeta es de este tipo, porque la fuerza de gravitación es una fuerza central, y su valor es:

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{(R+h)^2} \cdot \hat{u}_r$$

Siendo:

$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ = Cte de gravitación universal $\frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$

M = Masa del planeta sobre el que gira el satélite de masa m

R = Radio del planeta de masa M

h = Altura a la que está situado el satélite de masa m sobre la superficie del planeta de masa M

$E_T = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{r}$

Por otro lado se denomina intensidad de campo gravitatorio a una altura "h" a:

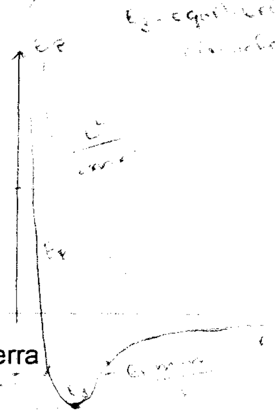
$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta$

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} \cdot \hat{u}_r$$

En la superficie de la Tierra este valor es:

$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^{\ 2}} = 9.8 \left(m/s^2\right)$$



La variación de la gravedad con la altura es:

$$g_h = g_o \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$$

Si tenemos el dato de la densidad de la tierra ρ podemos calcular la masa de la Tierra y la gravedad en su superficie de la siguiente forma:

$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times m (v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta)$

$E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$$M_T = \rho \cdot V_T = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^{\ 3}$$

$L = r m v_\theta \Rightarrow v_\theta = \frac{L}{r \cdot m}$

$E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2}$

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^{\ 2}} = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi R_T$$

$E_T = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} - G \frac{m_T m}{r}$

9.1.- Energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio:

La Energía Potencial Gravitatoria de una masa *m* en un punto del campo gravitatorio terrestre, es el trabajo que realiza el campo para trasladar la masa *m* desde dicho punto hasta el infinito. **Es una magnitud escalar**

$$E_p = -G\frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)}$$ Unidad el Julio

El Potencial Gravitatorio en un punto es el trabajo que realiza el campo para trasladar la unidad de masa desde ese punto al infinito. **Es una magnitud escalar**

$$V = -G\frac{M_T}{(R_T + h)}$$ Unidad el J / Kg

Relación entre Energía potencial y potencial gravitatorio $E_p = mV$

9.2.- Energía mecánica de un satélite:

Cuando un planeta o un satélite de masa m, recorre una órbita, sea circular o elíptica, alrededor de un planeta de masa Mp, la energía total que tiene o que hay que suministrarle es:

$$E_{órbita} = E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_p m}{r} \qquad (J)$$

COMENTARIOS IMPORTANTES:

- Trabajo para poner un satélite en órbita:

$$W_{Poner\ un\ satélite\ en\ órbita} = Em_{órbita} - Em_{superficie} \qquad (J)$$

- Trabajo para cambar de órbita a un satélite:

$$W = Em_{órbita\,2} - Em_{órbita\,1} \qquad (J)$$

- Energía cinética de escape y Velocidad de escape: Energía y Velocidad mínima respectivamente que hay que suministrar a un objeto para que se desligue de la acción gravitatoria. Esto ocurre cuando el satélite alcanza una energía mecánica igual a cero: $E_m = 0$.

$$Ec_{escaape} + Ep = 0 \Rightarrow Ec_{escaape} = -Ep \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{-Ep \cdot 2}{m}} = \sqrt{\frac{+2GM}{r}}$$

(infinito)

$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 = -Ep.$

CRISSER

9.3.- Movimiento de los planetas o de los satélites:

9.3.1 ECUACIONES PARA ÓRBITA CIRCULAR

Cuando un planeta o un satélite de masa m, recorre una órbita circular de radio r, alrededor de otro planeta de masa Mp, la velocidad orbital que lleva, viene dada por la igualdad entre las fuerzas gravitatoria y centrífuga del mismo:

- Velocidad orbital en órbita circular:

$$F_c = F_g$$

$$m \cdot a_n = G\frac{M_p \cdot m}{r^2}$$

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_p \cdot m}{r^2}$$

$$v^2 = G\frac{M_p}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_p}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_p}{(R_p + h)}}$$

M_p = Masa de un planeta
m = Masa de un satélite que gira alrededor del planeta.
r = radio de la órbita (R_p+h)

- Periodo de revolución en órbita circular: Tiempo empleado por un satélite en dar una vuelta completa:

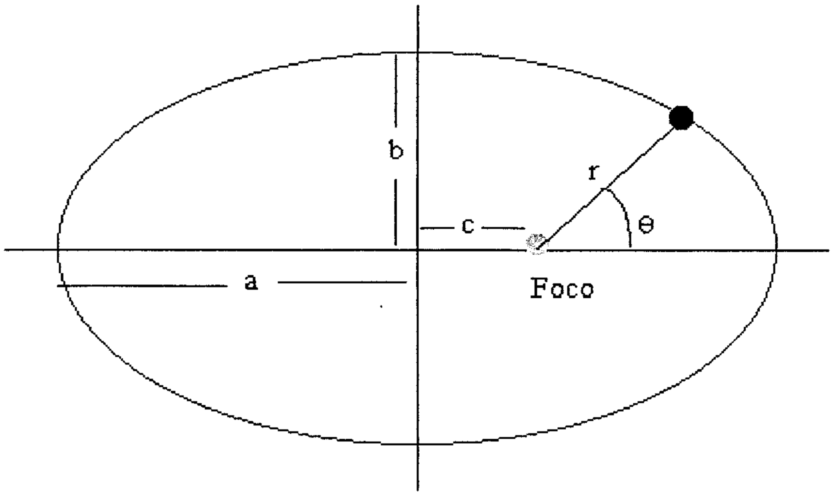
$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

- Energía de la órbita: Es la emergía mecánica de un satélite:

$$E_{órbita} = E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_p m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{GM_p}{r} - \frac{GM_p m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GM_p m}{r}$$

9.3.2 ECUACIONES PARA ÓRBITA ELÍPTICA

COMENTARIO: GEOMETRÍA DE UNA ELIPSE



r_p es la distancia más cercana al foco (cuando θ=0), también llamada perigeo, y r_a es la distancia más alejada del foco (cuando $\theta=\pi$), también llamada apogeo.

Una elipse es una figura geométrica que tiene las siguientes características:

- Semieje mayor $a = \dfrac{r_p + r_a}{2}$
- Semieje menor $b = \sqrt{r_p \cdot r_a}$
- Semidistancia focal $c = a - r_p = \dfrac{r_a - r_p}{2}$
- La relación entre los semiejes es $a^2 = b^2 + c^2$
- La excentricidad se define como el cociente $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$
- Área de una elipse: $A = \pi \cdot a \cdot b$

Al igual que en órbitas circulares, cuando un planeta o un satélite de masa m, recorre una órbita elíptica, el momento angular y la energía mecánica se conservan entre dos puntos cualesquiera de la trayectoria, por tanto se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\vec{L} = cte \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \quad \Rightarrow \quad r_1 \cdot m_1 v_1 \cdot sen\theta_1 = r_2 \cdot m_2 v_2 \cdot sen\theta_2$$

$$E_m = cte \quad \Rightarrow \quad E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}v_1^2 - G\frac{M_p}{r_1} = \frac{1}{2}v_2^2 - G\frac{M_p}{r_2}$$

En la mayoría de ocasiones las dos ecuaciones anteriores formarán un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y sabemos que en una órbita elíptica se denomina perigeo/perihelio r_p a la distancia más cercana respecto del planeta que hace de foco, y apogeo/afelio r_a a la más lejana.

9.3.2.1- Leyes de Kepler:

- <u>1ª ley o ley de las órbitas</u>: Los planetas describen órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos

- <u>2ª ley o ley de las áreas</u>: El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.

<u>NOTA</u>: No confundir el área de una elipse con el área barrida por un planeta en un tiempo t:

$$Area\,barrida\,en\,un\,tiempo\;t = \frac{|\vec{L}|\cdot t}{2m} = \frac{r_a \cdot v_a \cdot t}{2} = \frac{r_p \cdot v_p \cdot t}{2}$$

$\hookrightarrow |\vec{L}| = |\vec{r_a} \times m\vec{v_a}| = |\vec{r_b} \times m\vec{v_b}|$

siendo v_a y v_p las velocidades en el apogeo y el perigeo respectivamente.

Si $= \pi \cdot a \cdot b \Rightarrow \pi \cdot a \cdot b = \frac{|\vec{L}|T}{2m} = \frac{r_a v_a T}{2} = \frac{r_p v_p T}{2}$

- <u>3ª ley o ley de los periodos</u>: Los cuadrados de los periodos P de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la elipse.

El tiempo que tarda un satélite o planeta de masa m, en completar una orbita elíptica alrededor de un planeta de masa M es:

$$Periodo = \frac{2 \cdot \pi \cdot a^{3/2}}{\sqrt{G(M+m)}} \qquad 3^a \text{ ley de Kepler}$$

siendo a el semieje mayor de la elipse.

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

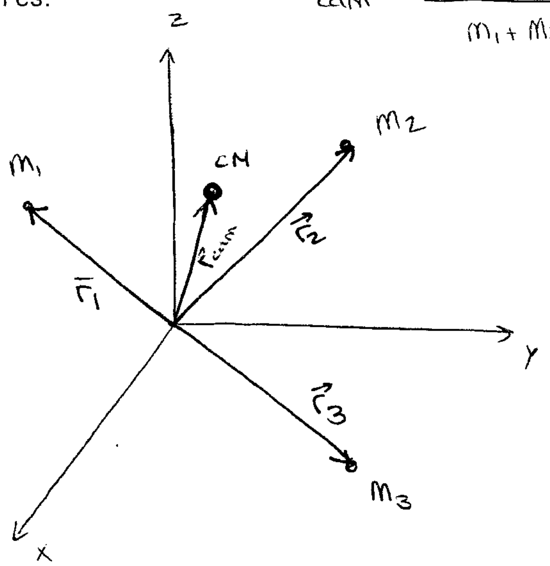
TEMA 3: DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

1.- Centro de masas de un sistema (c.d.m. ó c.m.)

Se denomina así al punto cuyo vector de posición es:

$$\vec{r}_{cdm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\vec{r}_{cdm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{M_T}$$



siendo:

m_i masa de la partícula i

$\vec{r}_i$ vector de posición de la partícula i

$M_T = \sum_{i=1}^{N} m_i$ masa total del sistema

2.- Movimiento del centro de masas.

El centro de masas de un sistema de partículas, se mueve como si fuera un punto material que tiene toda la masa del sistema, y sobre el cual actúan todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas que componen el sistema.

$$\vec{a}_{cdm} = \frac{\sum \vec{F}}{M_T}$$ (ecuación fundamental de la dinámica para el c.d.m.)

siendo:

$\sum \vec{F}$ la resultante de todás las fuerzas que actúan sobre el sistema, teniendo en cuenta que cuando se descompone un sistema en partículas, en el movimiento de cada partícula, deben considerarse además de las fuerzas exteriores que actúan sobre ella, las fuerzas que el resto de partículas del sistema ejercen sobre la misma, que serán las denominadas fuerzas interiores. Habitualmente las fuerzas interiores de un sistema de partículas son cero, porque se tratan de fuerzas de acción reacción y se cancelan unas con otras, o porque el sistema es rígido, por eso en muchas ocasiones diremos que el movimiento del c.d.m. depende únicamente de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema.

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

2.1.- Momento lineal o cantidad de movimiento.

Se denomina momento lineal o cantidad de movimiento de un sistema de partículas a:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i = M_T \cdot \vec{v}_{cdm}$$

$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$

$M_{TOT} \cdot \vec{V}_{cdm}$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL: "Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas es cero, el momento lineal se conserva" ya que:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

Si $\quad \sum \vec{F} = 0 \quad$ debe ser $\quad \vec{p} = cte.$

2.2.- Momento angular o momento cinético.

Se denomina momento angular o cinético de un sistema de partículas RESPECTO DE UN PUNTO O, al momento de la cantidad de movimiento:

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{oi} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i$$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR: "Si el momento resultante, RESPECTO DEL ORIGEN, de las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas es nulo, el momento angular RESPECTO DEL ORIGEN se conserva" ya que:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o \, .$$

Si $\quad \vec{M}_o = 0 \quad$ debe ser $\quad \vec{L}_o = cte.$

2.3.- Energía cinética.

La energía cinética de un sistema, es igual a la suma de las energías cinéticas de cada partícula del sistema:

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} E_{ci} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2$$

TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA O DE LAS FUERZAS VIVAS:

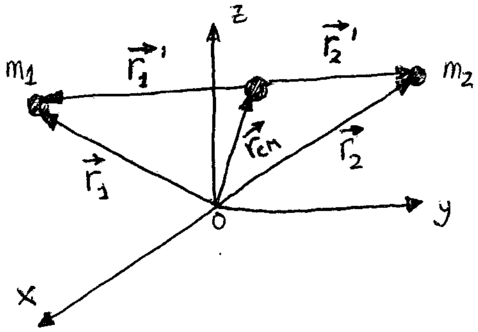
¡OJO si llaman a las partículas A y B! Por eso uso esta notación

$$W_{t1 \to t2} = \int_{t1}^{t2} \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_c(t2) - E_c(t1)$$

$$W_{AB} = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{l} = E_{cB} - E_{cA}.$$

3.- Movimiento del sitema RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

Se trata de estudiar el movimiento relativo de las partículas del sistema respecto del centro de masas, es decir, es como si situáramos el origen del sistema de referencia en el centro de masas; de hecho, es así, porque pasamos a estudiar el movimiento de las partículas respecto del sistema móvil, cuyo origen es el centro de masas, como observamos en el siguiente esquema:



Siendo: $\vec{r}_i'$ vector de posición de la partícula i respecto del c.d.m.

$\vec{v}_i'$ velocidad de la partícula i respecto del c.d.m.

Cumpliéndose que: $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{cdm}$

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}_{cdm}$$

3.1.- Momento lineal o cantidad de movimiento RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

El momento lineal de un sistema de partículas respecto de su c.d.m. es nulo:

$$\vec{p}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i' = \vec{0}$$

3.2.- Momento angular o cinético RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

$$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \cdot \vec{v}_i'$$

Se cumple que: $\vec{L}_C = \vec{L}_O - (\vec{r}_{cdm} \times \vec{p}) = \vec{L}_O - (\vec{r}_{cdm} \times M_T \cdot \vec{v}_{cdm})$ Teorema de König

COMENTARIO: también se cumplen las siguientes fórmulas:

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \cdot \vec{a}_i' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i'$$

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O - (\vec{r}_{cdm} \times M_T \cdot \vec{a}_{cdm}) = \vec{M}_O - (\vec{r}_{cdm} \times \vec{F})$$ Teorema de König

3.3.- Energía cinética del sistema RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

$$E_C' = \sum_{i=1}^{N} E_{ci}' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i'^2$$

Se cumple que:

$$E_C' = E_C - \frac{1}{2} M_T \cdot v_{cdm}^2$$ Teorema de König

4.- CHOQUES.

		Elástico	Inelástico
Sin ligadura	¿$\vec{p}$=cte?	Sí	Sí
	¿$\vec{L}$=cte?	Sí	Sí
	¿E=cte?	Sí	No
Con ligadura	¿$\vec{p}$=cte?	No	No
	¿$\vec{L}$=cte?	Sí	Sí
	¿E=cte?	Sí	No

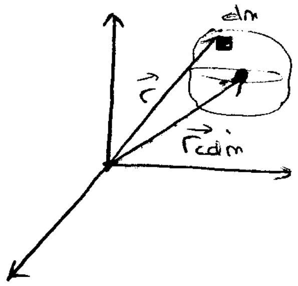
Choque elástico conservamos la energía $E_{antes} = E_{después}$

Choque inelástico no conservamos la energía

$E_{energía\ perdida} = E_{antes} - E_{después}$

TEMA 4: DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

1.- Centro de masas (c.d.m. ó c.m.)



Se denomina así al punto cuyo vector de posición es:

$$\vec{r}_{cdm} = \frac{\int_D \vec{r} \cdot dm}{M}$$

estando la integral extendida a todo dominio ocupado por la masa, y siendo:

M masa total del sólido (se cumple que $M = \int_D dm$)

dm masa elemental o masa puntual

$\vec{r}$ vector de posición del elemento de masa

Además debemos saber que:

$dm = \rho \cdot dV$ siendo $\rho = \dfrac{Masa\ total}{Volumen\ total} = \dfrac{M}{V}$ la densidad volumétrica de masa

$dm = \sigma \cdot dS$ siendo $\sigma = \dfrac{Masa\ total}{Superficie\ total} = \dfrac{M}{S}$ la densidad superficial de masa

$dm = \lambda \cdot dl$ siendo $\lambda = \dfrac{Masa\ total}{Longitud\ total} = \dfrac{M}{L}$ la densidad lineal de masa

2.- Movimiento del centro de masas.

El centro de masas de un sólido rígido, se mueve como si fuera un punto material que tiene toda la masa del mismo, y sobre el cual actúan todas las fuerzas exteriores que actúan sobre éste.

$$\vec{a}_{cdm} = \frac{\sum \vec{F}}{M}$$ (ecuación fundamental de la dinámica para el c.d.m.)

siendo $\sum \vec{F}$ la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido (en el sólido rígido no consideramos las fuerzas interiores).

NOTA: se denomina Impulso angular a:

$$\vec{I}_a = \int_{t1}^{t2} \vec{M}_o \cdot dt = \vec{L}_{o2} - \vec{L}_{o1}$$

Observamos que la variación del <u>momento angular</u> entre dos instantes de tiempo t1 y t2, es igual al <u>impulso angular</u> recibido.

2.3.- Energía cinética.

La energía cinética de un sólido es:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_D v^2 \cdot dm$$

TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA O DE LAS FUERZAS VIVAS: "La variación de la energía cinética de un sólido rígido, entre dos instantes de tiempo, es igual al trabajo producido por las fuerzas que actúan sobre el sólido":

$$E_c(t2) - E_c(t1) = W_{t1\to t2} = \tau_{t1\to t2} = \int_{t1}^{t2} \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

NOTA1: Se conserva la energía **<u>CINÉTICA</u>** entre dos instantes de tiempo cualesquiera, si el trabajo de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido es nulo.

NOTA2: Se conserva la energía **<u>MECÁNICA</u>** entre dos instantes de tiempo, si las fuerzas exteriores son conservativas, cumpliéndose que:

$$E_c(t2) - E_c(t1) = E_p(t1) - E_p(t2)$$

O lo que es lo mismo:

$$E_m = cte \qquad\qquad E_c(t1) + E_p(t1) = E_c(t2) + E_p(t2)$$

W_{AB} no conserv $= E_{mec\,B} - E_{mec\,A} < 0$

NOTA3: ***<u>NO</u>*** se conservará la energía **<u>MECÁNICA</u>** entre dos instantes de tiempo, si alguna de las fuerzas que actúan sobre el sólido es NO CONSERVATIVA, en cuyo caso se cumplirá que:

$$W_{disipNC} = \int_A^B \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} \qquad \text{y} \qquad W_{disipNC} = E_{mA} - E_{mB}$$

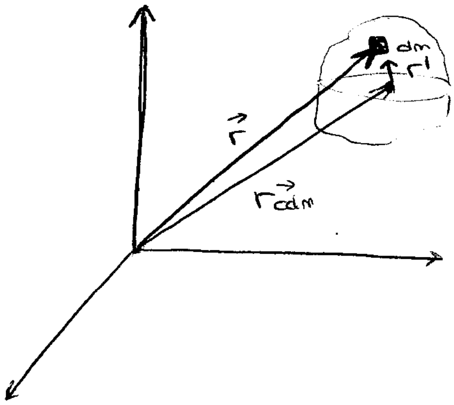
2.4.- Energía potencial.

La energía potencial de un sólido rígido viene dada por:

$$E_P = \int_D g \cdot h \cdot dm$$ donde h es la altura del dm al punto que estemos considerando como origen de potenciales.

3.- Movimiento del sólido RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

Se trata de estudiar el movimiento relativo de los distintos elementos diferenciales de masa dm del sólido respecto de su centro de masas, es decir, es como si situáramos el origen del sistema de referencia en el centro de masas.



$$\overline{r'} = \overline{r} - \overline{r}_{cdm}$$
$$\overline{v'} = \overline{v} - \overline{v}_{cdm}$$

Siendo: $\vec{r}\,'$ vector de posición del dm respecto del c.d.m.

$\vec{v}\,'$ velocidad del dm respecto del c.d.m.

Cumpliéndose que:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{cdm}$$

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{cdm}$$

3.1.- Momento lineal o cantidad de movimiento RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

El momento lineal de un sólido respecto de su c.d.m. es nulo:

$$\vec{p}\,' = \int_D \vec{v}\,' \cdot dm = \int_D \left(\vec{v} - \vec{v}_{cdm}\right) \cdot dm = \boxed{\vec{0}}$$

$$\int_D \overline{v}\, dm - \int_D \overline{V}_{cdm}\, dm = \vec{p} - \vec{V}_{cdm} \int_D dm =$$

$$= \vec{p} - M_{TOT} \cdot V_{cdm} = \vec{p} - \vec{p} = \boxed{0}.$$

3.2.- Momento angular o cinético RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

$$\vec{L}_C = \int_D (\vec{r}' \times \vec{v}')\, dm$$

Se cumple que:

$$\vec{L}_C = \vec{L}_O - (\vec{r}_{cdm} \times M_T \cdot \vec{v}_{cdm})$$ Teorema de König

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR: "Si el momento resultante, RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS, de las fuerzas que actúan sobre el sólido es nulo, el momento angular RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS se conserva" ya que:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C = \int_D (\vec{r}' \times \vec{a}') \cdot dm$$

Si $\vec{M}_C = \vec{0}$ debe ser $\vec{L}_C = cte$

O bien si $M_{C_j} = 0$ en alguna dirección, debe ser $L_{C_j} = cte$ (IMPORTANTE)

3.3.- Energía cinética del sistema RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

$$E'_c = \frac{1}{2} \int_D v'^2 \cdot dm$$

Se cumple que:

$$E'_C = E_C - \frac{1}{2} M_T \cdot v^2_{cdm}$$ Teorema de König

4.- ECUACIONES IMPORTANTES SEGÚN EL TIPO DE MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO.

- Si el sólido se traslada a velocidad lineal $\vec{v}$, pero no gira, todos los elementos diferenciales de masa dm tienen la misma velocidad, y se cumple que:

$$\sum \vec{F} = M_T \cdot \vec{a}_{cdm}$$

$$\vec{L}_C = \vec{L}_O - \left(\vec{r}_{cdm} \times M_T \cdot \vec{v}_{cdm}\right) = \vec{0} \quad ya\ que\ \vec{v}' = \vec{0}$$

y por tanto: $\vec{L}_O = \vec{r}_{cdm} \times M_T \cdot \vec{v}_{cdm}$

$E_C = \frac{1}{2} M_T \cdot v^2$ (Energía cinética de traslación)

- Si el sólido gira o rota alrededor de un eje a velocidad angular $\vec{w}$, pero no se traslada, NO todos los elementos diferenciales de masa dm tienen la misma velocidad, y se cumple que:

$\vec{L}_O = \int_D \left(\vec{r} \times \vec{v}\right) dm = I \cdot \vec{w}$ y además $\sum \vec{M}_{Oi} = \vec{M}_O = I \cdot \vec{\alpha}$

siendo I el momento de inercia del sólido respecto del eje de rotación y $\vec{\alpha}$ la aceleración angular del sólido.

$E_c = \frac{1}{2} \int_D v^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \int_D r^2 \cdot w^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot I \cdot w^2$ (Energía cinética de rotación)

- Si el sólido gira o rota alrededor de un eje a velocidad angular $\vec{w}$, y además se traslada, habrá que combinar los resultados anteriores, así por ejemplo:

$$E_C = \frac{1}{2} M_T \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot w^2$$

5.- Momentos de inercia.

El momento de inercia de un sólido respecto de un punto, una recta o un plano, es la suma de los productos de cada masa elemental del sólido dm, por su distancia al cuadrado al punto, recta o plano respectivamente.

$$I = \int_D r^2 \cdot dm \qquad \text{(Unidades } Kg \cdot m^2\text{)}$$

Por tanto r es la distancia del elemento de masa al punto, recta o plano considerado, y estando la integral extendida a todo el dominio ocupado por el sólido.

TEOREMAS DE STEINER

- El momento de inercia de un sólido respecto a un punto, es igual a su momento de inercia respecto a su c.d.m., más el producto de la masa total del sólido por la distancia al cuadrado entre el punto y el c.d.m.

$$I_P = I_{cdm} + M \cdot D^2$$

- El momento de inercia de un sólido respecto a un eje, es igual a su momento de inercia respecto a un eje paralelo que pasa por su c.d.m., más el producto de la masa total del sólido por la distancia al cuadrado entre los dos ejes.

$$I_E = I_{Eje\,cdm} + M \cdot d^2$$

- El momento de inercia de un sólido respecto a un plano, es igual a su momento de inercia respecto a un plano paralelo al anterior que pasa por su c.d.m., más el producto de la masa total del sólido por la distancia al cuadrado entre los dos planos.

$$I_\pi = I_{\pi\,cdm} + M \cdot dist^2$$

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

TEMA 5: ELECTROSTÁTICA

1.- DISTRIBUCIÓN O DENSIDAD DE CARGA:

Hay 4 tipos:

- VOLUMÉTRICAS
  $\rho_V = \dfrac{dq}{dV}$ (C/m³) $\Rightarrow$ $Q_{TOT} = \iiint_V \rho_V \cdot dV$ (C)
- SUPERFICIALES
  $\rho_S = \sigma_S = \dfrac{dq}{dS}$ (C/m²) $\Rightarrow$ $Q_{TOT} = \iint_S \rho_S \cdot dS$ (C)
- LINEALES
  $\rho_L = \lambda = \dfrac{dq}{dl}$ (C/m) $\Rightarrow$ $Q_{TOT} = \int_L \lambda \cdot dl$ (C)
- PUNTUALES
  q_i (C) $\Rightarrow$ $Q_{TOT} = \sum_i q_i$ (C)

2.- LEY DE COULOMB: (Fuerza de atracción entre cargas)

El **campo eléctrico o intensidad de campo eléctrico** creado por una carga q_1 situada en el origen de coordenadas a una distancia **r** del mismo viene dado por:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r} = k_e \frac{q_1}{r^2}\hat{u}_r = 9\cdot 10^9 \frac{q_1}{r^2}\hat{u}_r \qquad (V/m)$$

de la carga al punto

La fuerza que actúa sobre una carga **q** que se encuentra dentro de un campo $\vec{E}$ es:

$$\boxed{\vec{F} = q\cdot\vec{E} \qquad (N)}$$

Así la fuerza de atracción entre dos cargas q_1 y q_2 que se encuentran a una distancia r es:

$$\vec{F} = \frac{q_1\cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r = k_e \frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\hat{u}_r = 9\cdot 10^9 \frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\hat{u}_r \qquad (N)$$

Comentario:

Si el medio en el que están las cargas no es el vacío (aire, espacio libre,...), se sustituye la permitividad eléctrica o constante dieléctrica del vacío $\varepsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36\pi}(F/m)$, por la permitividad eléctrica o constante dieléctrica del medio, que será:

$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0}$ (F/m) siendo siempre: $\boxed{\varepsilon_r \geq 1}$ (adimensional)

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

3.- POTENCIAL ELÉCTRICO: (V o ϕ)

El potencial eléctrico es una función que se mide en voltios y que cumple que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla V \\ V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} \end{array}}$$

(Campo eléctrico en una región) siendo: $\nabla V =$ (*)

(Potencial eléctrico en una región)

$$\boxed{V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

(Diferencial de potencial entre dos puntos)

COMENTARIOS:

- El trabajo necesario para llevar una carga q desde un punto A hasta otro punto B es INDEPENDIENTE DEL CAMINO y vale:

$$\boxed{W_{AB} = q\cdot(V_A - V_B)}$$ (Julios) Demostración !!! ...

- El potencial es una función continua incluso ante discontinuidades de medio.

- El **potencial eléctrico** creado por una carga $\mathbf{q_1}$ situada en el origen de coordenadas a una distancia **r** del mismo viene dado por:

$$\boxed{V = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = k_e\frac{q_1}{r} = 9\cdot 10^9\frac{q_1}{r}} \qquad (V)$$

(*) $\vec{E} = -\nabla V \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{u_y} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} \\ -\dfrac{dV}{dr}\vec{u_r} \end{cases}$

$\longrightarrow W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E}\,d\vec{l} = -\int_B^A q\cdot\vec{E}\,d\vec{l} = q\,(V_A - V_B)$ INDEPENDIENTE DEL CAMINO

4.- MÉTODOS PRÁCTICOS DE CÁLCULO DE $(\vec{E})$ Y DE (V):

4.1.- LEY DE GAUSS:

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{encerrada\ por\ S} \qquad \text{o} \qquad \boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada\ por\ S}}{\varepsilon}}$$

Aplicando Gauss se obtiene el vector $\vec{D}$ o $\vec{E}$, y después el potencial es:

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

4.2.- SUPERPOSICIÓN DE $\vec{E}$ y/o de V:

Para cargas puntuales:

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon \cdot r_i^2}\,\hat{u}_r \qquad (V/m)$$

$$V_{TOT}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon \cdot r_i} \qquad (V)$$

Para otras distribuciones:

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon \cdot r^2}\,\hat{u}_r \qquad (V/m)$$

siendo: dq =

$$V_{TOT}(\vec{r}) = \int dV = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon \cdot r} \qquad (V)$$

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

5.- CONDUCTORES:

Un conductor es un medio en el que las cargas tienen libertad de movimientos.

Se caracterizan por su CONDUCTIVIDAD:

$$\boxed{\sigma \equiv (S/m) \quad ó \quad (mho/m) \quad ó \quad (\Omega \cdot m)^{-1}}$$

En los conductores perfectos $\sigma = \infty$

En los conductores en situación electrostática se cumple que:

- $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ (El campo dentro de un conductor es nulo)
- El campo eléctrico en la superficie del conductor es siempre perpendicular al mismo.
- $\boxed{V = cte}$ (Los conductores son equipotenciales)
- **La carga se sitúa en su o sus superficies.**
- La carga de un conductor no puede abandonar el mismo si no es a través de otro.

DEFINICIONES:

Q = cte
- *Conductor aislado* = Es aquel conductor que no está conectado a nada; por tanto conserva la carga que tuviera inicialmente.

$Q_{TOT} = 0$
- *Conductor descargado* = Es aquel conductor cuya carga total es cero.

V = 0
- *Conductor conectado a tierra o a masa* = Es aquel conductor cuyo potencial es cero y tiene un camino para cargarse y/o descargarse.

6.- DIELÉCTRICOS:

Son medios en los que las cargas no se pueden mover ya que en ellos $\sigma = 0$

Se caracterizan por su PERMITIVIDAD O CONSTANTE DIELÉCTRICA:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \qquad (F / m)$$

En estos medios además tenemos el vector desplazamiento eléctrico:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}} \qquad (C/m^2)$$

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

7.- ENERGÍA Y DENSIDAD DE ENERGÍA ELECTROSTÁTICA:

La energía almacenada en un volumen donde existe un campo electrostático viene dada por:

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D}\cdot\vec{E}\ dV = \frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon\cdot\vec{E}^2\ dV} \quad \text{(J)}$$

La densidad de energía asociada a ese mismo campo electrostático es:

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon\cdot\vec{E}^2} \quad \text{(J/m}^3\text{)}$$

8.- CONDENSADORES:

8.1.- DEFINICIÓN DE CONDENSADOR:

Si dos conductores están separados por un dieléctrico descargado, y entre ellos se aplica una diferencia de potencial (V_0), uno se cargará con +Q culombios y el otro con –Q culombios, formándose así un condensador, cuya capacidad es:

$$C = \frac{Q}{V_0} \qquad \text{(Faradios)}$$

Símbolo:

Asociaciones:

NOTA 1: La energía almacenada en un condensador viene dada por:

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}C\cdot V_0^2 = \frac{Q^2}{2\cdot C} = \frac{1}{2}Q\cdot V_0} \quad \text{(Julios)}$$

NOTA 2: La capacidad de un condensador depende del **dieléctrico** con el que está formado y de la **geometría** del mismo, pero no de la carga ni de la diferencia de potencial aplicada entre sus armaduras.

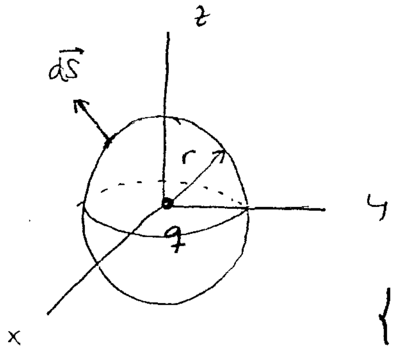
Así por ejemplo la capacidad de un condensador PLANO con placas de superficie S separadas una distancia d es:

$$C_{plano} = \varepsilon\cdot\frac{S}{d} \quad \text{(F)}$$

9.- CALCULO DE LOS $(\vec{E})$ MÁS IMPORTANTES:

9. CÁLCULO DE LOS $\vec{E}$ MAS IMPORTANTES

1. Carga Puntual



Aplicamos Gauss sobre la superficie esférica de radio r indicada en la figura:

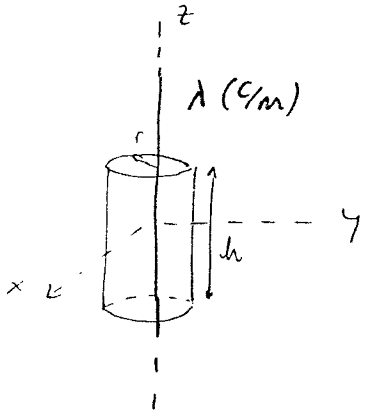
$$* \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \left\{ \begin{matrix} \text{Por simetría esférica} \\ \vec{E} = E(r)\cdot\vec{u_r} \end{matrix} \right\} = \oint_S (E(r)\,\vec{u_r})(dS\,\underbrace{\vec{u_r})}_{1} =$$

$$\left\{ E(r) \text{ es el mismo en todos los puntos de } S \right\} =$$

$$E(r)\cdot \oint_S dS = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

$$* \frac{Q_{enc}}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon} = E(r)\cdot 4\pi r^2 \longrightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \qquad \text{VECTORIAL} \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\vec{u_r}$$

2. Hilo indefinido cargado con λ (C/m)



Aplicamos Gauss sobre la superficie cerrada indicada en la figura:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon}$$

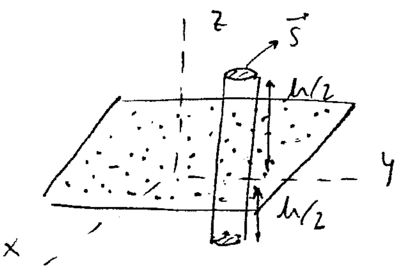
$$* \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \iint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{lat} + \iint_{S_{tsup}} \vec{E}\,d\vec{S}_{tsup} + \iint_{S_{tinf}} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{tinf} =$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Por sim cilíndrica} \\ \vec{E} = E(r)\cdot\vec{u_r} \end{matrix} \right\} = \iint_{S_{lat}} (E(r)\,\vec{u_r})\,\underbrace{(dS_{lat}\,\vec{u_r})}_{1} + \iint_{S_{tsup}} \underbrace{(E(r)\,\vec{u_r})\cdot(dS_{tsup}\cdot\vec{u_z})}_{0\ \perp} + \iint_{S_{tinf}} \underbrace{(E(r)\,\vec{u_r})(dS_{tinf}(-\vec{u_z}))}_{0\ \perp}$$

$$\iint_{S_{lat}} E(r)\cdot dS_{lat} + \underbrace{0 + 0}_{\vec{E}\perp d\vec{S}_{tapas}} = \left\{ \begin{matrix} E(r) \text{ es el mismo en} \\ \text{los puntos de la} \\ \text{sup lateral} \end{matrix} \right\} = E(r)\cdot\iint_{S_{lat}} dS_{lat} = E(r)\cdot 2\pi r h$$

$$* \frac{Q_{enc}}{\varepsilon} = \frac{\lambda h}{\varepsilon} = E(r)\cdot 2\pi r h \longrightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} \longrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\,\vec{u_r}$$

3. Plano indefinido cargado con σ_s (C/m^2)



$$* \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \iint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{lat} + \iint_{S_{tsup}} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{tsup} + \iint_{S_{tinf}} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{tinf} =$$

$$\left\{ \text{Por simetría plana} \quad \vec{E} = \begin{cases} E\vec{u_z} & z>0 \\ E(-\vec{u_z}) & z<0 \end{cases} \right\} =$$

$$\iint_{S_{tsup}} (E\vec{u_z})\cdot(dt_{sup}\,\vec{u_z}) + \iint_{S_{tinf}} (E(-\vec{u_z}))\,(dt_{inf}(-\vec{u_z})) = 2ES$$

* E toma el mismo valor en las dos sup

$$* \frac{Q_{enc}}{\varepsilon} = \frac{\sigma_s\cdot S}{\varepsilon} = 2ES \longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \longrightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{2\varepsilon}\,\vec{u_z} & z>0 \\ \frac{\sigma_s}{2\varepsilon}(-\vec{u_z}) & z<0 \end{cases} \quad (V/m)$$

CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

TEMA 6: MAGNETOSTÁTICA

(Corrientes estacionarias)

1.- Distribuciones o densidades de corriente

- VOLUMÉTRICAS: (Se denominan $\vec{J}_V$ y se miden en A/m^2)

$\vec{J}_V \, (A/m^2) \Rightarrow I_{tot} \, (A) = \int_S \vec{J}_V \cdot \vec{dS}$

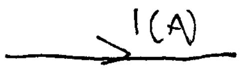
$$I_{TOT} = \iint_S J_V \cdot dS \qquad (A)$$

- SUPERFICIALES: (Se denominan $\vec{J}_S$ y se miden en A/m)

$\vec{J}_S \, (A/m) \Rightarrow I_{tot} = \int_L J_S \, dl$

$$I_{TOT} = \int_L J_S \cdot d\ell \qquad (A)$$

- LINEALES o FILIFORMES: (Se denominan $\vec{I}$ y se miden en A)



$$I_{TOT} = I \qquad (A)$$

2.- Fuerza de Lorentz

Si una carga q se mueve con velocidad $\vec{v}$ dentro de un campo electromagnético $(\vec{E} \quad y \quad \vec{B})$ la fuerza que este campo ejerce sobre ella es:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_M = q \cdot \vec{E} + q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{(N)}$$

siendo:

$q \equiv$ la carga CON SIGNO (C)
$\vec{v} \equiv$ la velocidad de la carga (m/s)
$\vec{E} \equiv$ el campo eléctrico donde está la carga (V/m) ó (N/C)
$\vec{B} \equiv$ el campo magnético donde está la carga (T) ó (Wb/m^2)

3.- Permeabilidad o constante magnética del medio: (μ)

Se denomina (μ) y se mide en (H/m)

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

siendo:

$\mu_r \equiv$ Permeabilidad o constante magnética RELATIVA del medio (adimensional)
$\mu_0 \equiv$ Permeabilidad o constante magnética del VACÍO ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad H/m$)

NOTA: Si no nos dicen lo contrario $\mu_r = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu_0$

Se denomina INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO al siguiente campo:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \qquad \text{(se mide en A/m)}$$

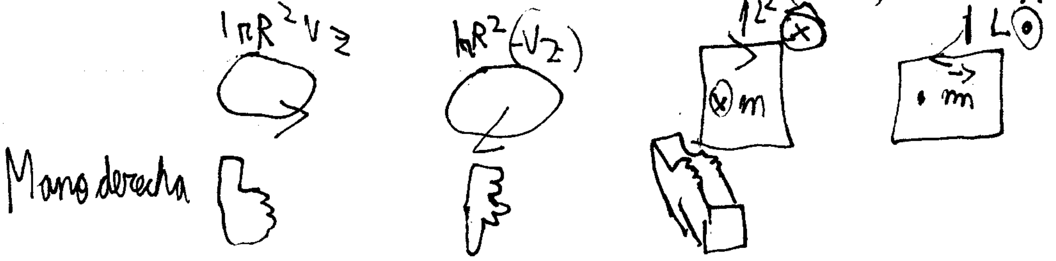
$\vec{B} = \mu \vec{H}$ (T) Wb/m² { Campo / Densidad de flujo magnético / Inducción magnética

4.- Momento magnético de una espira y momento de fuerzas:

DEFINICIÓN DE ESPIRA: Hilo de corriente que se cierra sobre sí mismo.

El momento magnético o momento dipolar magnético de una espira plana recorrida por una CORRIENTE I y que tiene un ÁREA S es:

$$\vec{m} = I \cdot S \ \hat{n} \qquad (A \cdot m^2)$$



Comentario: Si existe una espira plana de momento magnético $\vec{m}$ dentro de un campo magnético $\vec{B}$ se crea sobre ella un momento de fuerzas dado por:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \qquad \text{(se mide en N·m)}$$

Este momento de fuerzas hace que $\vec{m}$ se alinee con $\vec{B}$ provocando que el flujo sea máximo.