FIS2

Apuntes Crisser
(2010)

FÍSICA II

CRISSER
(SEPTIEMBRE 2010)

TEMARIO

1. TERMODINÁMICA
2. MOVIMIENTO ARMÓNICO
3. ONDAS MECÁNICAS
4. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS
5. ÓPTICA

EXAMEN (Miércoles 15 de Septiembre de 2010)

5 problemas

11/9/2010

FÍSICA II

Fórmulas.

* Termodinámica

$PV = nRT$

$\hookrightarrow R = \begin{cases} 8'314\ J/mol\ °K \\ 2\ cal/mol\ °K \\ 0'082\ atm \cdot L/mol\ °K \end{cases}$

$C_{m_p} - C_{m_v} = R$

$Q = C \cdot \Delta T$

$\hookrightarrow Q = m\ C_e \cdot \Delta T$

$\hookrightarrow Q = n \cdot C_m \cdot \Delta T$

$Q = m \cdot L_f$

$Q = m \cdot L_v$

→ Primer principio de la termodinámica:

$$\boxed{Q = \Delta U + W}$$

$$\boxed{\Delta U = n \cdot C_m \cdot \Delta T}$$

$$\boxed{W = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV}$$

→ Transformación isoterma: $\boxed{\Delta U = 0}$; $\boxed{Q_{12} = W_{12} = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$ (J).

→ Transformación isócora: $\boxed{W = 0}$ $\boxed{Q_{12} = \Delta U = n \cdot C_{m_v} (T_2 - T_1)}$

→ Transformación isóbara: $\boxed{W = P(T_2 - T_1)}$ $\boxed{Q_{12} = n \cdot C_{m_p} (T_2 - T_1)}$

→ Transformación adiabática: $\boxed{Q = 0}$ $\boxed{\gamma = \frac{C_{m_p}}{C_{m_v}}}$

$\hookrightarrow \gamma = \frac{7}{5}$ (diatómicos)

$\hookrightarrow \gamma = \frac{5}{3}$ (monoatómicos).

$$\boxed{P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}}$$

$$\boxed{T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_2^{\gamma - 1}}$$

$$\boxed{W_{12} = -\Delta U_{12} = -n C_{m_v} \Delta T = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1}}$$

⚠ Aquí el trabajo está en atm. L. Hay que transformarlo a Julios.

→ **Eficiencia:** $$\boxed{\varepsilon = \frac{Qf}{W} = \frac{Qf}{|Qc| - Qf}}$$

→ **Rendimiento:** $$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_c} = \frac{Q_c - |Qf|}{Q_c} = 1 - \frac{|Qf|}{Q_c}}$$

→ **Rendimiento de Carnot:** $$\boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}}$$

$$\boxed{\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}} \quad (J/K)$$

$$\boxed{\Delta S = n C_{mv} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \quad (J/K)$$

→ **adiabática:** $$\boxed{\Delta S = 0} \quad (J/K)$$

→ **isoterma:** $$\boxed{\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \quad (J/K)$$

→ **isócora:** $$\boxed{\Delta S = n \cdot C_{mv} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)} \quad (J/K)$$

→ **isóbara:** $$\boxed{\Delta S = n\, C_{mp} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)} \quad (J/K).$$

13/9/2010

FÍSICA II

FÓRMULAS

* Oscilador armónico.

$$\boxed{x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

↳ $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2(t))} \quad \boxed{E_{mec} = \frac{1}{2} k A^2}$$

↳ $v_{max} = A \cdot \omega_0$

→ Péndulo simple: $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)}$

↳ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T_0}$

→ Movimiento amortiguado: $\boxed{\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

↳ $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$ (rad/s)

↳ $\gamma = \frac{c}{2m}$ = amortiguamiento. (s^{-1})

↳ c = coef. de amortiguamiento (kg/s)

↳ Si $\gamma < \omega_0$: (Mov. subamort.) $\boxed{x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega_a t + \varphi)}$ (m)

↳ $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$

$$\boxed{\omega_a = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad \boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}} \quad \boxed{\tau = \frac{1}{\gamma}}$$

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T_a)}\right)}$$

→ Movimiento amortiguado y forzado: $\boxed{\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)}$

$$\boxed{x(t) = B(\sin \Omega t - \alpha)}$$

↳ $\Omega = \frac{2\pi}{T_f} = 2\pi f_f$

↳ $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$

$$\boxed{\Omega_{Resonancia} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

↳ $B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$

* Óptica

→ Espejos (Reflexión):

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

→ Amplificación:

$$m = \frac{-s'}{s} = \frac{y'}{y}$$

↳ $f = \frac{r}{2}$

→ Lentes (Refracción):

↳ Una sóla superficie:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

→ Amplificación:

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{-n_1 s'}{n_2 s}$$

↳ $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

$$n_1 \sin \hat{\theta}_{inc} = n_2 \sin \hat{\theta}_{ref}$$

$$\hat{\theta}_{critico} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

⚠ $n_2 > n_1$

↳ Lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

→ Amplificación:

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$P = \frac{1}{f}$$

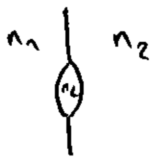
→ Div ≡ negativa

→ Conv ≡ positiva

↳ $P_{TOT} = P_1 + P_2$

↳ Generalización:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_L - n_1}{n_1 r_1} - \frac{n_L - n_2}{n_2 r_2}$$



14/9/2010

FÍSICA II

FÓRMULAS

* Ondas mecánicas.

$\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t)}$ (m)

$\boxed{\lambda = VT}$ $\boxed{V = \frac{\omega}{k}}$

$\boxed{V = \lambda \cdot \nu}$

↳ $\omega = \frac{2\pi}{T}$
↳ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

→ Intensidad (≡ Potencia por unidad de superficie):

↳ Ondas planas: $\boxed{I = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 \xi_0^2 = cte.}$ (W/m^2)

↳ Ondas cilíndricas: $\boxed{I = \frac{1}{2} \rho_0 V \omega^2 \xi_0^2 = \frac{Pot}{2\pi\rho \cdot h}}$ (W/m^2)

↳ Ondas esféricas: $\boxed{I = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 \xi_0^2 = \frac{Pot}{4\pi r^2}}$ (W/m^2)

↳ ρ_0 = densidad del medio.

→ Ondas sonoras:

$\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \alpha)}$ $\boxed{\Delta \rho = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}}$ ≡ Onda de densidad (kg/m^3)

$\boxed{p = -K \frac{\partial \xi}{\partial x}}$ ≡ Onda de presión (Pa)

↳ K ≡ módulo de compresibilidad
↳ $v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$

$\boxed{NI = 10 \log\left(\frac{I}{I_{ref}}\right)}$ siendo $\boxed{I_{ref} = 10^{-12}}$ (W/m^2)

→ Movimiento ondulatorio en cuerdas:

$\boxed{V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$ $\boxed{V = \lambda_n \nu_n}$

↳ $\mu = \frac{Masa}{L}$ $\boxed{V_s = \lambda_s \cdot \nu_s}$

$\{\nu_n = \nu_s\}$ y $\{\lambda_n \neq \lambda_s\}$

↳ Cuerda fija en ambos extremos: $\boxed{L = n \frac{\lambda_n}{2}}$

↳ Cuerda fija por un sólo extremo: $\boxed{L = (2n-1) \frac{\lambda_n}{4}}$

↳ Cuerda libre en ambos extremos: $\boxed{L = n \frac{\lambda_n}{2}}$

→ Efecto Doppler:

$$\boxed{f_R = f_T \left(\frac{v \pm v_O}{v \pm v_f} \right)}$$

$\Delta f \equiv$ pulsaciones percibidas

$$\boxed{\Delta f = \left| f_{R_A} - f_{R_B}' \right|} \quad (Hz)$$

→ Interferencias: $\boxed{\xi_{0_T} = \sqrt{\xi_{0_1}^2 + \xi_{0_2}^2 + 2 \xi_{0_1} \xi_{0_2} \cos \delta}}$

$$\boxed{I_{TOT} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta}$$

$$\boxed{\delta = k (r_1 - r_2) + \delta_{rel}}$$

↳ $\delta_{rel} = (\varphi_2 - \varphi_1)$

14/9/2010

FÍSICA II

FÓRMULAS

* Ondas electromagnéticas.

$$\boxed{\bar{E}(x,t) = c \cdot \bar{B}(x,t)}$$

↳ $E_0 = c\, B_0$

↳ $E_0 = v\, B_0$.

$$\boxed{\bar{S} = \frac{\bar{E} \times \bar{B}}{\mu}} \quad (W/m^2)$$

$$\boxed{|\bar{S}| = I_{inst} = \frac{E \cdot B}{\mu}}$$

$$\boxed{I_{med} = \langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0\, B_0}{\mu}}$$

$$\boxed{fem = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \bar{B} \cdot d\bar{A} \simeq -\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{B} \cdot \bar{A}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{B} \cdot A\, \hat{n}\right]} \quad (V)$$

$$\bar{E}_{trans}(x,t) = E_{0_{trans}} \cdot \sin(\omega t - k_2 x)$$

$$\bar{E}_{ref}(x,t) = E_{0_{ref}} \sin(\omega t + k_1 x)$$

Tema 1: TERMODINÁMICA

1.- DEFINICIONES BÁSICAS

- Sistema termodinámico: porción de universo objeto del estudio termodinámico. Al resto del universo se le denomina medio exterior.
- Sistema abierto: cuando a través de la superficie del mismo hay flujo de masa.
- Sistema cerrado: cuando no existe dicho flujo.
- Sistema aislado: no existe interacción alguna entre él y el medio exterior.
- Sistemas homogéneos y heterogéneos: se dice que un sistema es homogéneo cuando sus propiedades no varían de uno a otro de sus puntos; en caso contrario se denomina sistema heterogéneo. Muchos sistemas heterogéneos están formados por un conjunto de sistemas homogéneos, a cada uno de los cuales se denomina fase del sistema heterogéneo. Así, por ejemplo se puede tener un sistema heterogéneo con una sola especie química en tres fases (sólido, líquido y gaseoso), o también con una mezcla de gases perfectamente homogéneos cada uno.

- Variables termodinámicas, variables de estado o coordenadas termodinámicas: conjunto de propiedades independientes entre sí, a partir de las cuales pueden deducirse, mediante relaciones funcionales, las restantes propiedades del sistema. Son variables de estado la PRESIÓN, el VOLUMEN y la TEMPERATURA. A estas relaciones funcionales se les denomina funciones de estado.

- Funciones de estado: dependen del punto de comienzo y de finalización pero no del camino seguido; son funciones de estado:

$\Delta U \equiv$ Energía interna

$\Delta H \equiv$ Entalpía

$\Delta S \equiv$ Entropía

- Funciones de intercambio: dependen del camino seguido, y algunas son:

$Q \equiv$ Calor

$W \equiv$ Trabajo

- Estado de equilibrio: Cuando el estado de un sistema permanece constante con el tiempo, se dice que éste es un estado de equilibrio (las variables termodinámicas o de estado permanecen constantes durante el tiempo de equilibrio)
- Transformación o proceso: evolución de un sistema partiendo de un estado de equilibrio inicial a un estado de equilibrio final.
- Ciclo: Proceso en el que el estado de equilibrio final es igual que el inicial.
- Proceso reversible: es aquel que se realiza de tal modo, que una vez finalizado puede llevarse a cabo en sentido contrario, volviendo al estado inicial tanto el sistema como el medio exterior. (Todos los procesos reales son irreversibles)
- Proceso cuasiestático: es aquel que ocurre lentamente de forma que el sistema recorre una serie de estados de equilibrio.
- Proceso o transformación adiabático: aquel en el que el sistema no intercambia calor ni con el medio exterior ni con otro sistema.
- Proceso o transformación isoterma: aquel que se realiza a temperatura constante.
- Proceso o transformación isócora: aquel que se realiza a volumen constante.
- Proceso o transformación isóbara o isobárica: aquel que se realiza a presión constante.

2.- PRINCIPIO CERO. DEFINICIÓN DE TEMPERATURA.

"Si dos sistemas están en equilibrio térmico con un tercero, están en equilibrio térmico entre sí."

La temperatura de un sistema es la propiedad común entre varios sistemas que están en equilibrio térmico entre sí.

Relación entre las escalas de Temperaturas:

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$$

$$t_C = T - 273°$$

3.- ECUACIÓN DE ESTADO PARA LOS GASES PERFECTOS.

La ecuación de estado es la que relaciona las variables de estado, que como ya hemos comentado son la presión (P), el volumen (V) y la temperatura (T). Para los gases perfectos esta ecuación de estado se puede escribir de la siguiente forma, y se denomina también "Ley de los gases ideales":

$$PV = nRT$$

siendo

n = número de moles de la sustancia

R = constante universal de los gases, cuyo valor es

$R = 0.082\ atm \cdot l / mol \cdot K = 8.314\ J / mol \cdot K = 2\ cal / mol \cdot K$

Además se cumplen las siguientes relaciones:

$1\ atm = 101300\ Pa = 10333\ Kg / m^2 = 1{,}0333\ Kg / cm^2$ (Presión)

$\boxed{1\ atm \cdot l = 101{,}3\ J}$ (Trabajo)

$\boxed{1\ cal = 4{,}18\ Julios}$, $1\ Julio = 0{,}24\ cal$ (Equivalente mecánico del calor)

$N = n \cdot N_A$ = número de moléculas del gas

$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ moléculas / mol$ = Número de Avogadro

$R = k \cdot N_A$ siendo $K = 1{,}381 \times 10^{-23}\ J / K$ la constante de Boltzmann

La masa de 1 mol de un gas se denomina MASA MOLAR, PESO MOLECULAR o MASA MOLECULAR y si la representamos por la letra M, podemos calcular la masa de n moles de un gas como:

$$m = n \cdot M$$

Si tenemos una cantidad fija de un gas (n = cte) se cumple que:

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$$

Se denominan **condiciones estándar** a la temperatura de 0ºC = 273 K y a la presión de 1 atm.

EJERCICIO 1: ¿Qué volumen ocupa un mol de un gas en condiciones estándar?

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{1\,mol \cdot 0'082\,\frac{atm \cdot l}{mol \cdot {}^{\circ}K} \cdot 273\,{}^{\circ}K}{1\,atm} = 22'4\,L.$$

EJERCICIO 2: Cien gramos de CO_2 ocupan un volumen de 55 litros a una presión de 1 atm. Sabiendo que la masa molar del C es de 12 g/mol y del O de 16 g/mol, calcular: (a) la temperatura. (b) Si se aumenta el volumen a 80 litros y se mantiene constante la temperatura, ¿cuál es la nueva presión?

$m_{CO_2} = 100\,g$; $P_1 = 1\,atm$

$V_1 = 55\,L$; $M_{CO_2} = 44\,g/mol$

Solución:

a) $$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \left\{ n = \frac{100\,g}{44\,g/mol} = 2,27\,mol \right\} = \frac{1\,atm \cdot 55\,L}{2'27\,mol \cdot 0'082\,atm\,l/mol \cdot {}^{\circ}K} = 295\,{}^{\circ}K.$$

b) $$P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{2'27\,mol \cdot 0'082 \cdot 295\,{}^{\circ}K}{80\,L}$$

4.- CALOR. (o energía térmica)

El calor es la energía que se transfiere de un objeto a otro debido a una diferencia de temperatura entre ellos.

Así el calor o energía térmica (Q) que se necesita para que una sustancia de masa m cambie su temperatura desde T_1 hasta T_2 sin cambiar de fase, viene dada por:

$$Q = \int_{T1}^{T2} C \cdot dT = \int_{T1}^{T2} m \cdot c \cdot dT = \int_{T1}^{T2} n \cdot C_m \cdot dT \qquad \text{(Julios)}$$

siendo

$C = \dfrac{dQ}{dT}$ = Capacidad térmica o calorífica de la sustancia. (J/K)

$c = \dfrac{C}{m}$ = Calor específico de la sustancia o Capacidad térmica por unidad de masa. Es el calor o la energía térmica que se necesita, para aumentar un grado la temperatura de un kilogramo de masa de la sustancia. $(J/Kg \cdot K)$

$C_m = \dfrac{C}{n}$ = Capacidad térmica molar o calor molar. Es el calor o la energía térmica que se necesita, para aumentar un grado la temperatura de un mol de la sustancia. $(J/mol \cdot K)$

COMENTARIOS:

- Si la capacidad térmica es constante, la cantidad de calor necesaria para aumentar la temperatura de una sustancia se puede escribir:

$$Q = C \cdot \Delta T = m \cdot c \cdot \Delta T = n \cdot C_m \cdot \Delta T \qquad \text{(Julios)}$$

- Cuando se añade calor a un gas a presión o a volumen constante se escribe respectivamente:

$$Q_p = C_p \cdot \Delta T \qquad\qquad Q_V = C_V \cdot \Delta T$$

- La relación entre las capacidades térmicas a presión y a volumen constante en un gas viene dada por la Ley de Mayer:

$$C_p - C_V = n \cdot R \qquad\qquad C_{mp} - C_{mV} = R$$

En gases monoatómicos (He, gases nobles) $C_{mp} = \frac{5}{2}R$ y $C_{mv} = \frac{3}{2}R$

En gases biatómicos (N_2, H_2, O_2, CO y aire) $C_{mp} = \frac{7}{2}R$ y $C_{mv} = \frac{5}{2}R$

- El calor necesario para fundir una sustancia sólida es el producto de la masa de la sustancia por el calor latente de fusión (L_f)

$$Q = m \cdot L_f$$

- El calor necesario para vaporizar un líquido es el producto de la masa de la sustancia por el calor latente de vaporización (L_v)

$$Q = m \cdot L_V$$

TANTO LA FUSIÓN COMO LA VAPORIZACIÓN COMO CUALQUIER CAMBIO DE FASE SE PRODUCEN SIEMPRE A TEMPERATURA CONSTANTE.

En el caso del agua sabemos que:

$$L_f = 333{,}5\ KJ/Kg \qquad\qquad L_V = 2257\ KJ/Kg$$

CAMBIOS DE FASE:

Sólido $\xrightarrow{\text{fusión } L_f}$ Líquido $\xrightarrow[\text{evaporación/vaporización/ebullición}]{L_v}$ Gas.

Sólido $\xleftarrow[L_s = -L_f]{\text{solidificación}}$ Líquido $\xleftarrow[L_c = -L_v]{\text{condensación/licuefacción}}$ Gas

Sólido $\xrightarrow{\text{SUBLIMACIÓN}}$ Gas

Sólido $\xleftarrow{\text{SUBLIMACIÓN REGRESIVA}}$ Gas

El calor para pasar de una fase a otra es:

$$Q = m \cdot L_{\text{lopuesta}}$$

5.- PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

Es la forma de enunciar el PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA: "El calor neto añadido a un sistema es igual a la variación de la energía interna del mismo más el trabajo realizado por el sistema"

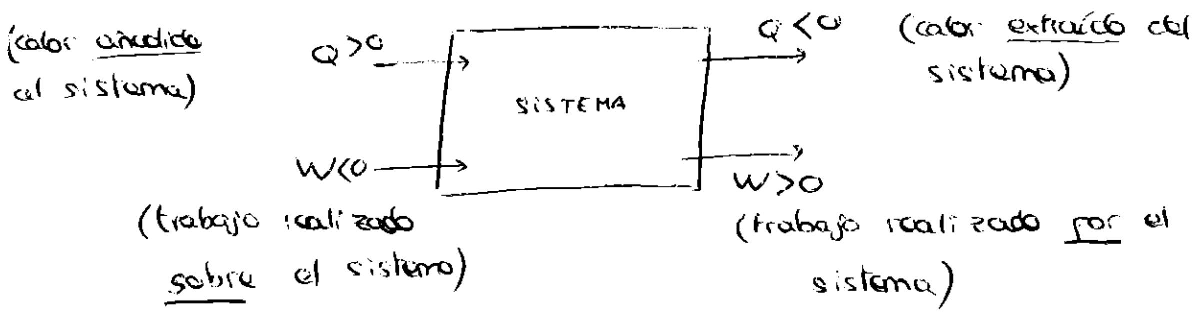
$$Q = \Delta U + W$$

En el caso en que las cantidades de calor añadidas, el trabajo realizado y la variación de energía interna sean muy pequeñas, la ecuación anterior se escribe:

$$dQ = dU + dW$$

NOTA: En esta ecuación, dU es el diferencial de la función energía interna del sistema pero ni dQ ni dW representan el diferencial de ninguna función, sino que representan pequeñas cantidades de calor añadido al sistema y de trabajo realizado por el sistema.

CONVENIO DE SIGNOS:



$$\boxed{\Delta U = n \cdot C_{mv} \cdot \Delta T}$$

EJERCICIO 3: Un sistema está compuesto por 3 Kg de agua a 80 °C. Sobre él se realiza un trabajo de 25 KJ agitándolo con una rueda de paletas, al mismo tiempo que se le extraen 15 Kcal de calor. Sabiendo que el calor específico del agua es de 4,18 KJ/Kg · C° se pide:

a) Variación de la energía interna del sistema.
b) ¿Cuál es su temperatura final?

$m_{H_2O} = 3$ kg ; $W = -25$ kJ. ⚠ No olvidar el negativo.

$T_1 = 80°C$ $\quad Q = -15$ kcal $= -62,7$ kJ $\quad$ (1 kcal = 4'18 kJ)

$Ce_{H_2O} = 4'18$ kJ/kg °C

Solución: a) Por el primer principio de la termodinámica:

$$Q = \Delta U + W$$

$$-62'7 \text{ kJ} = \Delta U + (-25 \text{ kJ})$$

$$\Delta U = -62'7 + 25 \text{ kJ} = -37'7 \text{ kJ}.$$

b) $\Delta U = n \cdot c_{mv} \cdot \Delta T = m \, c_{eH_2O} \, \Delta T = 3 \text{ kg} \cdot 4'18 \text{ kJ/kg} \cdot °C \cdot (T_f - 80 °C) = -37'7 \text{ kJ}$

$$T_f \simeq 77 °C.$$

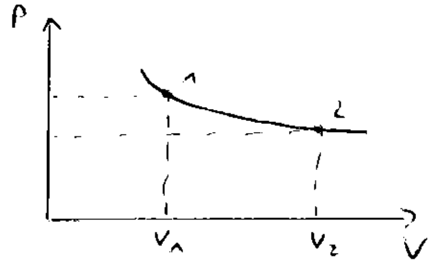
$$\Delta U = n \cdot C_{mv} \cdot \Delta T \quad (J)$$
$$W = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV \quad (J)$$

6.- TRANSFORMACIONES BÁSICAS.

6.1.- Transformación Isoterma (T = cte)
6.2.- Transformación Isócora (V = cte)
6.3.- Transformación Isóbara (P = cte)
6.4.- Transformación Adiabática (Q = 0)

6.1. Transformación isoterma.

De P_1, V_1 a $P_2 V_2$.



Como $T_1 = T_2$: $\boxed{\Delta U_{12} = n \cdot C_{mv} \cdot \Delta T = n \cdot C_{mv} (T_2 - T_1) = 0}$

$$Q_{12} = W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV$$

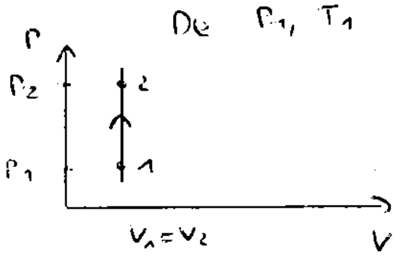
$$Q_{12} = nRT \ln (V_2/V_1) \quad (J)$$

Como $T_1 = T_2$: $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \Rightarrow \boxed{Q_{12} = W_{12} = nRT \ln (V_2/V_1) = nRT \ln \left(\frac{P_1}{P_2}\right)}$ (J)

⚠ Aquí $R = 8'314$ J/mol °K.

6.2. Transformación isócora

De P_1, T_1 a P_2, T_2.

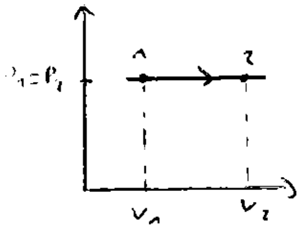


Como $V_1 = V_2$: $\boxed{W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV = 0.}$ (J)

Por tanto : $\boxed{Q_{12} = \Delta U_{12} = n C_{mv} \Delta T = n C_{mv} (T_2 - T_1)}$ (J)

6.3. Transformación isóbara

De V_1, T_1 a V_2, T_2.



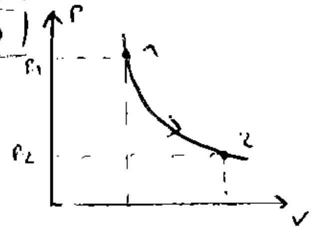
Tenemos: $\boxed{Q_{12} = n \cdot C_{mp} (T_2 - T_1) = n C_{mp} \Delta T.}$

$\boxed{W_{12} = P(V_2 - V_1)}$

Resumen:
- $T = cte \Rightarrow Q_{12} = W_{12} = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
- $V = cte \Rightarrow Q_{12} = n \cdot C_{mv} \Delta T = \Delta U_{12}$
- $P = cte \Rightarrow Q_{12} = n C_{mp} \Delta T.$

6.4. Transformación adiabática.

$\boxed{Q_{12} = 0}$



Tienen mayor pendiente que las isotermas

Se cumple que: $\boxed{Q_{12} = 0}$; $\gamma = \frac{C_{mp}}{C_{mv}} = \frac{c_p}{c_v}$ = coef. adiabático.

- monoatómicos : $\gamma = \frac{5}{3} = 1'66$
- diatómicos : $\gamma = \frac{7}{5} = 1'4$

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \cdot V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \\ T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \end{array}\right\} \quad \boxed{PV^{\gamma} = cte} \quad \boxed{TV^{\gamma-1} = cte}$$

$$\boxed{W_{12} = -\Delta U_{12} = -n\, C_{mv}\, \Delta T = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1}}$$

⚠ Cuidado con esta fórmula porque nos da el trabajo en atm · l. Hay que multiplicar por 101,3.

$$\boxed{W_{12} = \frac{nR}{\gamma - 1}\,(T_1 - T_2)}$$

7.- ENTALPÍA

Es una función de estado definida de la siguiente forma:

$$H = U + PV \quad \Rightarrow \quad dH = dU + P\cdot dV + V\cdot dP = dQ + V\cdot dP$$

Por tanto en procesos a presión constante se cumple que:

$$dQ = dH \quad \Rightarrow \quad Q_{12} = H_2 - H_1$$

En procesos a presión constante (isóbaros): $\boxed{\Delta H = Q}$

8.- SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

Con el primer principio de la termodinámica establecemos balances energéticos entre el calor, la energía interna de un sistema y el trabajo realizado por o sobre el sistema, pero este principio no matiza la dirección de estos flujos de energía, es decir, nos permite pasar calor del foco frío al foco caliente sin ninguna restricción, por lo que surge la necesidad del segundo principio de la Termodinámica, cuyo enunciado es:

CLAUSIUS: "Es imposible que un refrigerador funcione cíclicamente sin producir otro efecto que la transferencia de calor de un objeto frío a otro caliente".

Es decir:
"No se puede transferir calor de un foco frío a uno caliente sin aportar energía o trabajo del exterior".

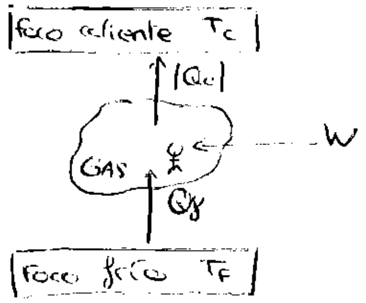
KELVIN-PLANK: "Es imposible que una máquina o motor térmico trabaje cíclicamente sin producir ningún otro efecto que extraer calor de un solo foco realizando una cantidad de trabajo exactamente equivalente".

Es decir:
"Para producir trabajo es necesario que existan al menos dos focos"

Ambos son equivalentes y vienen a decir que se puede transformar el trabajo o la energía interna en calor sin ningún otro cambio, pero es imposible extraer calor o energía interna de un sistema y convertirlo en trabajo mecánico sin ningún otro cambio, por lo que surge el concepto de eficiencia o rendimiento.

8.1.- MÁQUINAS REFRIGERADORAS O FRIGORÍFICAS.

La representación esquemática de una máquina frigorífica o refrigerador es:



Estas máquinas extraen energía térmica o calor Q_f de un foco frio a temperatura T_f, y ceden calor $|Q_c|$ a un foco caliente a temperatura T_c, para lo cual hay que realizar un trabajo W sobre ella.

El objetivo de estas máquinas es convertir la mayor cantidad de calor Q_f en calor $|Q_c|$, utilizando la menor cantidad posible de trabajo; así se define el **coeficiente de eficacia o eficiencia** de una máquina frigorífica como:

$$\varepsilon = \frac{Q_f}{W} = \{Como\ \ es\ un\ ciclo\ \Delta U = 0\} = \frac{Q_f}{|Q_c| - Q_f}$$

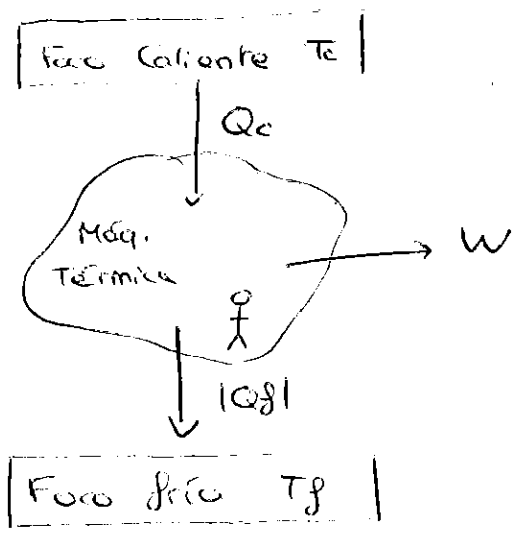
Esta eficacia puede ser mayor, menor o igual que 1, pero nunca ∞, es decir siempre debe ser W > 0.

Ejercicio 5:

Un refrigerador tiene una eficacia de 5.5. ¿cuánto trabajo necesita para fabricar cubitos de hielo a partir de 1 litro de agua a 10°C? Datos: $C_{e_{H2O}} = 4{,}18\ KJ/Kg \cdot K$ $\qquad CL_{fusión} = 333{,}5\ KJ/Kg$

8.2.- MÁQUINAS Y MOTORES TÉRMICOS

La representación esquemática de una máquina o motor térmico es:



Estas máquinas extraen energía térmica o calor Q_c de un foco caliente a temperatura T_c, realizan un trabajo W, y eliminan calor $|Q_f|$ a un foco frío a temperatura T_f.

El objetivo de estas máquinas es convertir la mayor cantidad de calor Q_c en trabajo W, por eso el **rendimiento** de un motor o máquina térmica es:

$$\eta = \frac{W}{Q_c} = \{Como\ \ es\ un\ ciclo\ \Delta U = 0\} = \frac{Q_c - |Q_f|}{Q_c} = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c}$$

Este rendimiento siempre será menor que 1, ya que no puede ser $|Q_f|$ = 0, es decir, si queremos extraer energía de un foco caliente para convertirla en trabajo, y hacerlo de forma cíclica, necesitamos un foco frío donde se pueda eliminar parte de esa energía.

Ejercicio 6:

Una máquina térmica tiene un rendimiento del 35%.

a) ¿Cuánto trabajo realiza en un ciclo si extrae 150 J de calor de un foco caliente por ciclo?
b) ¿Cuánto calor se elimina por ciclo?

8.3.- LA MÁQUINA DE CARNOT (o reversible)

Una máquina de Carnot es una máquina térmica REVERSIBLE, que trabaja entre dos focos térmicos.

El teorema de Carnot dice que:
"Ninguna máquina térmica que trabaje entre dos focos térmicos dados, puede tener un rendimiento mayor que el de una máquina térmica reversible o de Carnot que trabaje entre estos dos mismos focos."

Además todas las máquinas reversibles que trabajen entre los dos mismos focos T_c y T_f tienen el mismo rendimiento, que se denomina rendimiento de Carnot:

$$\eta_c = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$ (Las temperaturas en Kelvin)

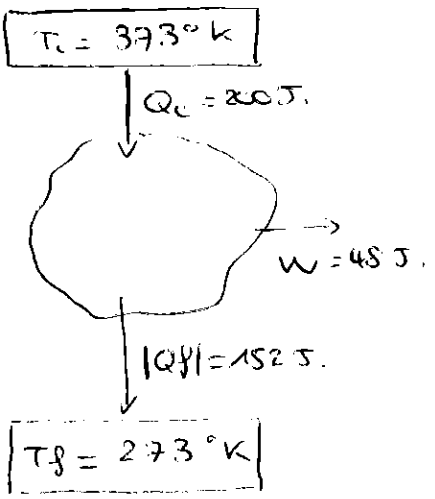
El cociente entre el rendimiento real de una máquina y el rendimiento de Carnot se denomina rendimiento del segundo principio:

$$\eta_{sp} = \frac{\eta}{\eta_c} < 1$$

Ejercicio 7:

Una máquina consume 200 J de un foco caliente a 373 K, realiza un trabajo de 48 J, y cede un calor de 152 J a un foco frío a 273 K.

¿cuánto trabajo se pierde por ciclo debido a la irreversibilidad de la máquina?



Solución: El rendimiento de esta máquina es:

$$\eta = \frac{W}{Q_c} = \frac{48}{200} = 0'24.$$

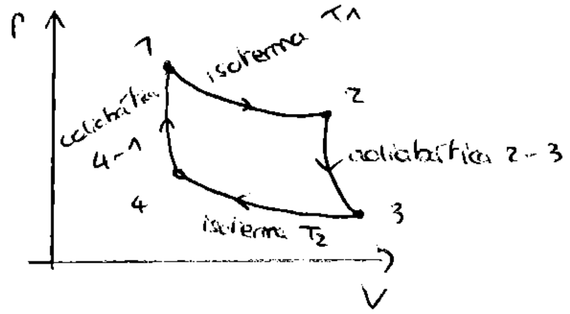
El rendimiento de una máquina reversible que trabajara entre esos focos es: $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{273}{373} = 0'268.$

$$\boxed{W_{max} = \eta_{max} \cdot Q_c = 0'268 \cdot 200 = 53'6\ J}$$

Por tanto, el trabajo que se pierde es de: $53'6 - 48 = 5'6\ J.$

9.- EL CICLO DE CARNOT

Está formado por 2 transformaciones isotermas y 2 adiabáticas, como indicamos a continuación:



Ejercicio 8:

Comprobar que el rendimiento de este ciclo es el rendimiento máximo entre 2 focos a temperaturas T_1 y T_2 siendo $T_1 > T_2$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c}$$

$V_2 > V_1$

isoterma T_1: $Q_{12} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$ (Calor que entra en la máquina)

adiabática 2-3: $Q_{23} = 0$.

isoterma T_2: $Q_{34} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) < 0$ (Calor que sale de la máquina).

$V_4 < V_3$.

adiabática 4-1: $Q_{41} = 0$.

¡ojo! es en valor absoluto

$$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c} = 1 - \frac{\cancel{nR}T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{\cancel{nR}T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}\frac{\ln(V_3/V_4)}{\ln(V_2/V_1)}$$

En las transformaciones adiabáticas se cumple: $\boxed{T \cdot V^{\gamma-1} = cte.}$

adiabática 2-3:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

adiabática 4-1:

$$T_2 \cdot V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}.$$

Dividiéndolas convenientemente:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Así pues:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$ como queríamos demostrar.

10.- ENTROPÍA

La entropía indica el grado de desorden; la entropía de un sistema puede aumentar, disminuir o no variar, pero la del universo nunca disminuye.

Es una función de estado como P,V, T, U y H, y al igual que ocurre con la energía interna y la entalpía lo importante son las variaciones de la misma, así la variación de la entropía de un sistema cuando pasa del estado 1 al estado 2 viene dada por:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (J/K)$$

siendo dQ el calor que debe añadirse o extraerse del sistema para pasar del estado 1 al estado 2. (Recordar el convenio de signos)

La fórmula para el cálculo de la variación de entropía de un proceso en el que interviene un gas ideal es:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dW}{T} = \int_1^2 \frac{C_v dT + PdV}{T} = \int_1^2 C_v \frac{dT}{T} + \int_1^2 nR\frac{dV}{V} = C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$= n \cdot C_{mv} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (J/K)$$

10.1- VARIACIÓN DE LA ENTROPÍA EN LOS DISTINTOS PROCESOS.

a) Transformación adiabática:

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = 0 \quad (J/K)$$

b) Transformación isoterma:

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q_{12}}{T} = \frac{nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{T} = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (J/K)$$

c) Transformación isócora:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{nC_{mv}\,dT}{T} = nC_{mv}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \quad (J/K)$$

d) Transformación isóbara:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{nC_{mp}\,dT}{T} = nC_{mp}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \quad (J/K)$$

10.2- RELACIÓN DE LA ENTROPÍA CON EL RESTO DE FUNCIONES DE ESTADO:

Como $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ podemos escribir $dS = \frac{dQ}{T} \quad \Rightarrow \quad dQ = T\,dS$

- Así pues por el primer principio de la termodinámica:

$$dQ = dU + dW = dU + PdV \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$$

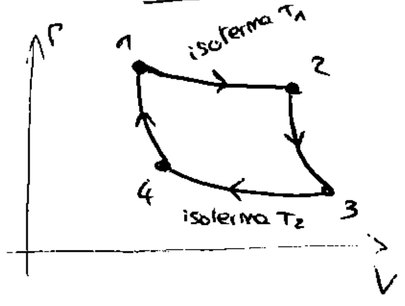
- Por la definición de entalpía:

$$dQ = dH - V\,dP \Rightarrow dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T}dP$$

10.3- ENTROPÍA Y CICLO DE CARNOT

Ejercicio 9:
Comprobar que la variación de entropía del ciclo de Carnot es cero y representar el diagrama T-S de dicho ciclo.

Solución



$$\Delta S_{ciclo} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41}$$

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{>0} \ (J/K)$$

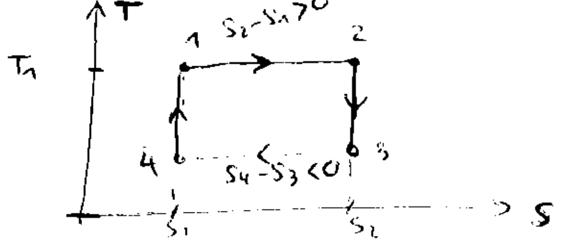
$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{dQ}{T} = 0 \quad (J/K)$$

$$\Delta S_{34} = \int_3^4 \frac{dQ}{T} = nR\ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

$$\Delta S_{41} = \int_4^1 \frac{dQ}{T} = 0 \quad (J/K)$$

$$\Delta S_{ciclo} = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\frac{V_4}{V_3}\right) = \left\{ \begin{array}{c} \text{VER DEMOSTRACIÓN DEL EJERCICIO 8} \\ \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow \frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} = 1 \end{array} \right\} = 0 \quad (J/K)$$

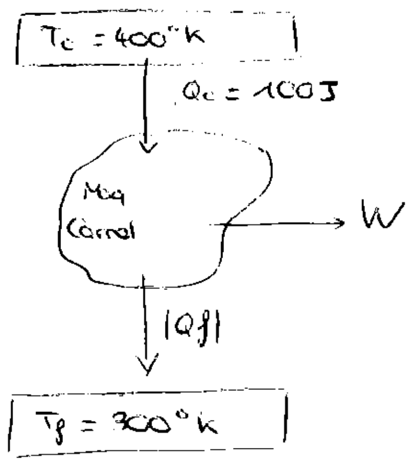
El diagrama T-S del ciclo es:



Ejercicio 10:

Durante cada ciclo una máquina de Carnot extrae 100 Julios de energía de un foco de 400 K, realiza un trabajo y elimina calor a otro foco a 300 K. Calcular la variación de entropía de cada foco en cada ciclo y demostrar que la variación de entropía del universo es cero.

Solución:



Como se trata de una máquina de Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{3}{4} = 0'25$$

Como extrae 100 J del foco caliente:

$$W = \eta \cdot Q_c = 0'25 \cdot 100\,J = 25\,J.$$

Por tanto cede 75 J al foco frío.

porque "sale"

$$\Delta S_{\text{foco caliente}} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como el foco tiene} \\ T^o \text{ constante} \end{array} \right\} = \frac{-Q_c}{T_c} = \frac{-100\,J}{400\,K}$$

$$\Delta S_{\text{foco caliente}} = -0'25 \;\; J/K.$$

$$\Delta S_{\text{foco frío}} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como el foco} \\ \text{tiene } T^o \\ \text{constante} \end{array} \right\} = \frac{|Q_f|}{T_f} = \frac{75\,J}{300\,°K} = +0'25 \;\; J/K.$$

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{maq}} + \Delta S_{\text{FOCO CALIENTE}} + \Delta S_{\text{FOCO FRÍO}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como es en cada} \\ \text{ciclo:} \\ \Delta S_{\text{maq}} = \Delta S_{\text{ciclo}} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= 0 - 0'25 + 0'25 = 0 \quad (J/K)$$

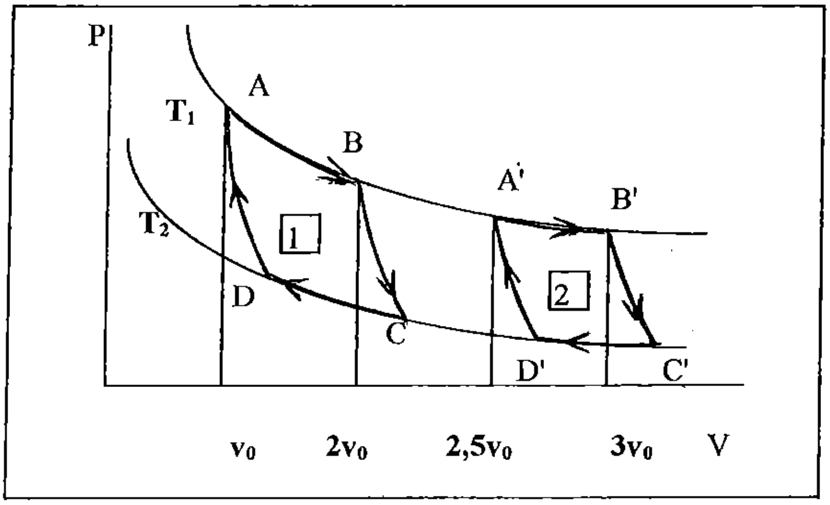
(Hacer problema 7.21)

TERMODINAMICA

II-1 Se consideran los ciclos de Carnot 1 y 2 de la figura, que realizan dos máquinas térmicas cuya sustancia de trabajo en ambas son n moles de un gas ideal. Se pide, en función de $\underline{v_0}$, $\underline{n}$, $\underline{R}$, el índice adiabático $\underline{\gamma}$, y de las temperaturas de las isotermas $\underline{T_1}$ y $\underline{T_2}$:

1) Calcular el volumen del gas en los puntos D, C, D' y C'.
   Obtener para cada una de las dos máquinas y para cada ciclo.
2) El calor absorbido del foco caliente.
3) El trabajo producido.
4) La variación de energía interna del gas.
5) Su rendimiento.
6) La variación de la entropía del gas en cada una de las transformaciones isotérmicas.
7) Teniendo en cuenta el segundo principio. ¿Cómo aumentaría el rendimiento de las máquinas si se puede variar tan sólo uno de los siguientes parámetros: v_0, n, γ, T_1 y T_2.?.

(Razónese).



Junio-95

II-2 Medio mol de un gas ideal se encuentra a la presión $P_1 = 8$ Atm. y temperatura $T_1 = 400$ K y se expansiona de forma adiabática hasta la temperatura $T_2 = 302$ K, luego se le somete a un proceso a volumen constante hasta reducir su presión a la atmosférica $P_3 = 1$ Atm., a continuación se le comprime manteniendo la presión constante hasta reducir su volumen al inicial $v_4 = v_1$ y finalmente se le somete a una compresión a volumen constante hasta alcanzar el estado inicial. Tomando $\gamma = 1.4$ y $R = 0{,}08 \dfrac{Atm\ ltr}{mol\,K} = 4.1 \dfrac{J}{mol\,K} = 2 \dfrac{Cal}{mol\,K}$, determinar:

1°) La representación del ciclo en el diagrama p-v.
2°) Temperaturas, volúmenes y presiones en cada vértice del ciclo.
3°) Trabajo realizado y consumido a lo largo de cada uno de los procesos, expresados en Julios.
4°) Calor intercambiado en cada uno de los procesos, expresado en calorías.
5°) Comprobar la verificación del Primer Principio para el ciclo completo.
6°) Variación de la energía interna en cada uno de los procesos.
7°) Variación de la entropía en cada uno de los procesos.

Junio-95

II-3 Una máquina reversible utiliza para funcionar 3.2 moles de un gas ideal, siguiendo el ciclo que se describe a continuación:

$A \rightarrow B$: Compresión adiabática desde $V_A = 25$ litros y $T_A = 27°$ C hasta $T_B = 177°$C.

$B \rightarrow C$: Enfriamiento isócoro desde T_B hasta T_A.

$C \rightarrow A$: Expansión isoterma.

1) Dibujar el ciclo descrito sobre un diagrama PV, y calcular las coordenadas termodinámicas (P, V, T) de los tres vértices.
2) Calcular: El calor intercambiado con el medio exterior, el trabajo realizado y la variación de energía interna del gas (con indicación del signo y de su significado físico) para cada uno de los tres procesos que determinan el ciclo. Hallar el balance de cada una de las tres magnitudes (Q, W y Δ U) a lo largo del ciclo completo.
3) A continuación se hace funcionar a la máquina realizando el ciclo en sentido inverso al propuesto en las cuestiones anteriores, es decir, en el sentido : $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$. Determinar el rendimiento de la misma. Determinar el rendimiento de una máquina de Carnot que trabaje entre los mismos focos.

Datos: $R = 8.314\ J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1} = 0.082\ atm{\cdot}\ell\cdot mol^{-1} = 1.987\ cal{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}$, $\gamma = 1.4$.

Septiembre-95

II-4 3.6 moles de un gas diatómico se expanden siguiendo la ley $P = k\,V^2$, donde k es una constante. Conociendo los valores iniciales $V_0 = 15\ l$, $P_0 = 1,2$ atm, y el volumen final $V_1 = 20\ l$, calcular numéricamente, para el gas:

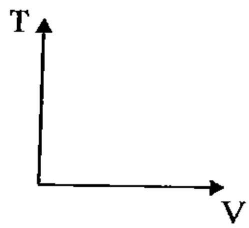
a) El trabajo realizado en la expansión.
b) la variación de energía interna sufrida,
c) el calor que se le ha suministrado, y
d) la variación de entropía

Datos: $R = 0.082$ atm $l\,K^{-1}\,mol^{-1}$, $C_V = 5/2\ R$.

Nota: Se recomienda calcular las magnitudes energéticas en atm l.

Febrero-96

II-5 Dibujar sobre un diagrama VT (ver la figura), y expresar analíticamente, empleando las variables V y T, las siguientes transformaciones correspondientes a un gas ideal:



a) Dos isobaras a P_1 y P_2 ($P_1 < P_2$).
b) Dos procesos a energía interna constante U_1 y U_2 ($U_1 < U_2$).
c) Dos adiabáticas.

A continuación:

d) Dibujar sobre el citado diagrama un ciclo de Carnot que trabaja entre dos temperaturas T_1 (fuente fría) y T_2 (fuente caliente).

e) Indicar sobre el ciclo de Carnot el sentido de recorrido para un motor térmico, así como los procesos donde el gas toma calor y cede calor.

f) Justificar analíticamente si el área encerrada por este ciclo de Carnot representa o no el trabajo realizado por el motor.

g) ¿Cuál es la variación de entropía del gas en un recorrido completo de este ciclo?

Junio-96

II-6 Un motor térmico funciona con n moles de un gas ideal diatómico que describe un ciclo formado por dos isobaras a P_0 y P_1 ($P_1 > P_0$) y dos isócoras a V_0 y V_1 ($V_1 > V_0$). Calcular:

a) Los calores intercambiados por el motor con el exterior en cada uno de los cuatro procesos del ciclo. Indíquese en cada caso si el calor es suministrado al gas o eliminado por éste.
b) El calor total suministrado al gas Q^+ y el calor total eliminado por el mismo, Q^-.
c) El rendimiento del motor.
d) La variación de entropía del gas en cada uno de los cuatro procesos del ciclo.
e) El rendimiento de un ciclo de Carnot que trabajara entre las dos temperaturas, máxima y mínima del ciclo dado.

Nota los resultados vendrán expresados exclusivamente en función de P_0, V_0, P_1, V_1, n y R.

Aplicación Numérica. Con los valores, $P_1=2.4\ P_0$, $V_1=8\ V_0$, **n=1.5 moles y R=8.314 j·mol^{-1}·K^{-1}**, calcular lo siguiente:

f) El rendimiento del motor obtenido en el apartado c).
g) Las variaciones de entropía obtenidas en los cuatro procesos del ciclo (apartado d)).
h) El rendimiento del ciclo de Carnot definido en el apartado e).

Septiembre-96

II-7 n moles de un gas ideal monoatómico que están a la temperatura T_0 y ocupan un volumen V_0, se enfrían en un proceso de expansión que consta de tres etapas sucesivas: (a) Adiabática de T_0 a T_i, (b) Isotérmica hasta V_i, y (c) Adiabática desde T_i hasta T_1 ($T_0 > T_i > T_1$). Se pide:

1) Dibujar el proceso en un diagrama **(P,V)** y en un diagrama **(T,S)**.
2) El volumen final del gas V_1,
3) El trabajo total desarrollado por el gas,
4) La variación total de le energía interna,
5) El calor total intercambiado con el exterior, indicando si ha sido suministrado al gas o eliminado por éste,
6) La variación total de entropía del gas, y.
7) Sugerir un proceso de enfriamiento alternativo del gas desde T_0 hasta T_1 que incluya solamente transformaciones isotérmicas y adiabáticas pero que realice el menor trabajo posible.

DATO: $C_V = 3/2$ R.

NOTA: *Los resultados vendrán dados exclusivamente en función de n,R, V_0, V_i, y de las temperaturas T_0, T_i, y T_1.*

Febrero-97

II-8 Una máquina térmica ideal utiliza como foco caliente una caldera a **400 °C** y como foco frío el agua de un río. Se sabe que en **invierno** el agua del río se encuentra a **8° C** y en verano a **17 ° C**. Si la temperatura de la caldera no varía a lo largo del año, y la potencia desarrollada por la máquina en invierno es de **600 kW**. Calcular:

1. La potencia desarrollada por la máquina en verano.
2. La variación de entropía del agua del río durante una hora en invierno.
3. La variación de entropía del agua del río durante una hora en verano.

Si la máquina realiza **1000 ciclos por minuto** calcular en invierno y en verano y para un ciclo completo :

4. El trabajo realizado.
5. El balance de calor.
6. El balance de entropia.

Junio-97

II-9 Una máquina térmica de cuatro tiempos, funciona 1º comprimiendo isotérmicamente hasta la mitad de su volumen inicial, **n** moles de un gas ideal diatómico que se encuentra inicialmente a una temperatura $\mathbf{T_1}$ y una opresión $\mathbf{P_1}$. A continuación y manteniendo el nuevo volumen constante, 2º, se duplica la presión. Posteriormente, 3º, se expande el gas adiabáticamente hasta adquirir la presión inicial. Y por último, 4º, se comprime a presión constante hasta el punto de partida.

a) Dibujar el diagrama **PV** del proceso
b) Determinar los valores de **P,V,T** en cada vértice del proceso, tomando como datos $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{P_1}$ y **n**
c) Calcular el rendimiento de este ciclo, y compararlo con un ciclo ideal que se realizase entre las temperaturas mayor y menor del mismo.

Septiembre-97

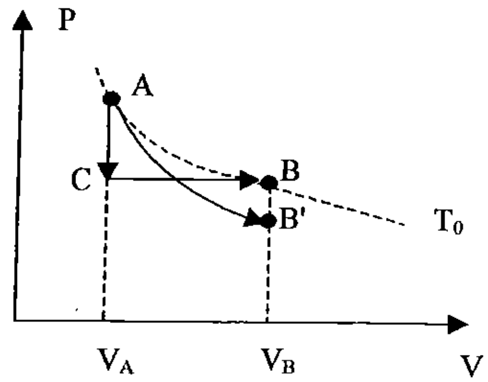
II-10 Una máquina de Carnot que funciona entre **227 °C y 27 °C,** toma calor del foco caliente a un ritmo de **2 kW.**

a) Hallar el rendimiento de la máquina, su potencia mecánica y el ritmo de transferencia de calor al foco frío.
b) ¿Qué originaría un mayor rendimiento de la máquina, aumentar en ΔT la temperatura del foco caliente, o disminuir en ΔT la temperatura del foco frío?. Justificar la respuesta.
c) Calcular la variación de entropía por unidad de tiempo en el foco caliente, y en el foco frío.

Junio-98

II-11 Se quieren realizar **dos expansiones** con **1 mol** de gas ideal según se indica en la figura. La expansión **I:** A →C → B, y la expansión **II**: A →B', que es **adiabática**.

1. Calcular para la expansión **I**:
El trabajo, el calor y la variación de entropía (indicando sus signos razonadamente), cuando:
   a) $\mathbf{V_A = 0.1\ V_B}$ y
   b) $\mathbf{V_A = 0{,}9\ V_B}$.
2. Repetir los cálculos de trabajo, calor y variación de entropía para la expansión **II**, en los mismos casos a) y b).
3. Indicar para cada expansión , en cuál de los citados casos el gas realiza más trabajo.



NOTA: Los resultados deben ir en función de T_0 y la constante de los gases R y r.

Septiembre-98

II-12 Para acondicionar el aire de una habitación se emplea una bomba de calor (máquina térmica reversible) que trabaja entre las temperaturas de la calle y de la habitación. Las condiciones de trabajo son las siguientes:

Potencia del motor **2kW** Duración del ciclo **0.25 seg.** Temperatura de la habitación: **22°C**
Temperatura de la calle: ***Verano, 37 °C; Invierno: 5°C.***

a) Calcular la variación de entropía del aire de la habitación por acción de la máquina durante una hora, **(a1) en verano; y (a2) en invierno,** justificando en ambos casos si hay aumento o disminución de entropía.
Suponiendo que la bomba describe un ciclo de Carnot en verano, y otro en invierno, que emplea como fluido un gas ideal y sabiendo que la presión de éste en el vértice en que la máquina comienza a tomar calor vale $\mathbf{P_o}$, tanto en verano como en invierno:
b) Dibujar en un mismo diagrama **(P,V)** los dos ciclos de Carnot.
c) Indicar claramente en cada uno de ellos el sentido del recorrido.
d) Indicar el valor del área por los dos ciclos explicando su sentido físico.
e) Indicar en qué procesos toma calor la máquina y en cuales lo elimina.

Junio-99

II-13 Una máquina térmica real que funciona entre dos focos, extrae en cada ciclo **250 J** de uno de los dos focos a **310°C** realizando un trabajo y cediendo calor al otro foco a **27°C** con un rendimiento de **13%**. Se pide en cada ciclo:

a) El trabajo realizado por la máquina y la variación de entropía de cada foco. De acuerdo con el 2° Principio, estas variaciones de entropia ¿deben ser positivas, negativas o cero?. Razónese.

b) La variación de entropía del universo para el conjunto máquina y focos. De acuerdo con el segundo principio, esta variación ¿debe ser positiva, negativa o cero? Razónese.

c) Calcular de nuevo los apartados a) y b) para una máquina de Carnot que funcionara entre las mismas temperaturas, extrayendo también **250 J** del foco a **310°C**.

Febrero-99

II-14 Se quiere producir **3000 W** de potencia calorífica a **50°C** de temperatura con una maquina frigorífica de Carnot que utiliza como foco frío un lago con el agua a **0°C**. Al extraer calor del agua se produce hielo (calor latente de fusión del hielo **80 cal/g**).

a) Determinar el rendimiento (o eficiencia) de la maquina.

b) La potencia mecánica que es preciso aportar a la misma.

c) Masa de hielo producida por hora.

Septiembre-99

II-15 Una central térmica de generación de energía eléctrica, funciona como una máquina de Carnot que utiliza como foco caliente una fuente de calor de 3000 MW de potencia y 300°C de temperatura. El calor que se intercambia con el foco frío se utiliza para elevar la temperatura de agua procedente del mar de 20°C a 100° C, pasándola a vapor de agua para producir agua potable, de modo que se puede considerar que la temperatura del foco frío es, 100°C.

a) ¿Qué potencia máxima se puede generar, cuál es el rendimiento de la maquina y cuántos litros de agua potable se pueden producir?. Calor latente de vaporización del agua 80 cal/g.

b) Si se decide generar únicamente energía ¿qué potencia máxima se puede producir suponiendo que se toma el agua del mar como foco frío?

c) En este último caso determinar la variación de entropía por segundo que se produce en ambos focos.

Junio-00

II-16 n moles de un gas ideal diatómico describen un ciclo $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Los procesos AB y CD son isobáricos a las presiones respectivas p_2 y p_1. Los procesos BC y DA son isócoros a los volúmenes respectivos V_2 y V_1. Sabiendo que $C_v = \frac{5}{2}R$ calcular:

1) Los calores puestos en juego en cada uno de los cuatro procesos Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{CD} y Q_{DA},

2) el rendimiento del ciclo,

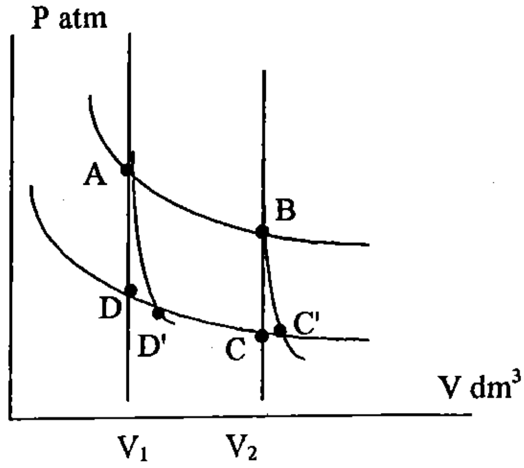
3) la variación de energía interna del gas al pasar de A a C y

4) la variación de entropía del gas al pasar de C a A.

NOTA: todos los resultados vendrán expresados exclusivamente en función de los datos: n, R, p_1, p_2, V_1 y V_2.

Septiembre-00

II-17 Una máquina reversible realiza diez ciclos por segundo con 3 moles de un gas perfecto monoatómico ($\gamma = 5/3$). Cuando la máquina trabaja como máquina térmica recorre un ciclo definido por dos isotermas 0°C y 100°C y dos procesos a volumen constante (isocoras) de $V_1 = 10$ y $V_2 = 20$ litros respectivamente, ciclo ABCDA. Cuando trabaja como máquina frigorífica recorre ciclos de Carnot con adiabáticas que nacen en la intersección de las isocoras con la isoterma de 100°C, ciclo AD'C'BA.



Determinar, para la maquina térmica:

a) El calor absorbido y el calor cedido, por ciclo, indicando en que zonas del ciclo absorbe o cede calor.

b) El trabajo producido y su rendimiento.

c) Suponiendo que el foco frío sea hielo fundente (a 0°C) la cantidad de hielo fundido en un hora y que trabajo producirá.

d) Si la máquina trabajase como frigorífica entre ambos focos y le aportamos el trabajo del apartado anterior ¿Qué masa de hielo congelará?

e) Dato: calor especifico de fusión del agua 80 cal/g, R = 8.3 J/(K.mol)

Junio-01

II-18 Dos moles de un gas ideal de calor específico molar, $C_{mv} = 5/2\ R$, evoluciona desde un estado inicial 1, de temperatura $T_1 = 300$ K y presión $P_1 = 1$ atm., hasta un estado final 2 de temperatura $T_2 = 525$K, siguiendo dos caminos diferentes:

1°.-Transformación a volumen constante hasta $P_3 = 1'5$ atmósferas seguido de otra a presión constante

2°.- Transformación siguiendo la recta desde 1 hasta 2.

a) Representación de los procesos en un diagrama P-V.
b) Volumen inicial y final.
c) El incremento en la energía interna del gas.
d) Calor y trabajo intercambiado en el camino 1.
e) Calor y trabajo intercambiado en el camino 2.
f) Calor molar medio del gas en la transformación por el camino 2.

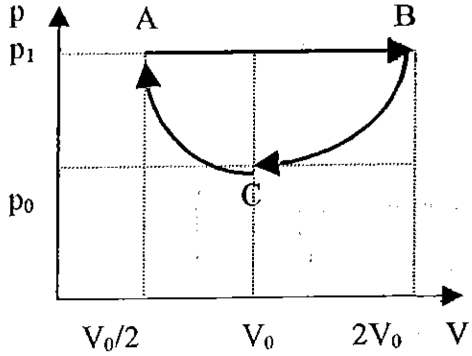
Datos: $R = 0'082\ \dfrac{\text{atm.l}}{\text{mol k}} = 2\dfrac{\text{cal}}{\text{mol k}} = 8'36\dfrac{\text{J}}{\text{mol k}}$

Septiembre-01

II-19 Un mol de gas ideal diatómico de coeficiente adiabático $\gamma = \mathbf{1.4}$, realiza el ciclo de la figura. La transformación **C →A** sigue la ley $\mathbf{pv^{\gamma} = k_1}$, mientras que la **B →C** sigue la ley $\mathbf{pv^{-\gamma} = k_2}$. Se pide:

1) La temperatura más alta y más baja del ciclo. Los calores intercambiados en cada etapa indicando si éste es absorbido o eliminado.
2) El trabajo producido por ciclo y su rendimiento.
3) Calcular ΔS en las etapas **B →C y C →A**, ¿contradice alguna de ellas el principio de aumento de entropía?. Razónese.

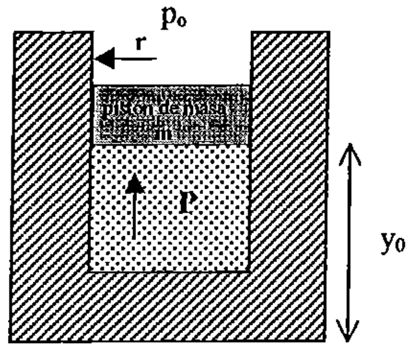
NOTA: Los resultados deben ir exclusivamente en función de $\mathbf{p_0}$, $\mathbf{v_0}$ y la constante de los gases **R**.



Septiembre-01

II-20 Disponemos de un cilindro de radio **r** colocado verticalmente, dotado con un pistón de masa **m** que contiene **n** moles de un gas ideal diatómico como se indica en la figura. El pistón puede moverse sin rozamiento y tanto él como las paredes del cilindro son aislantes térmicos. Sabiendo que la presión exterior es $\mathbf{p_o}$ y que el pistón se encuentra a una altura $\mathbf{y_0}$ de la base del cilindro, se pide:

a) Calcular la presión del gas.
En un momento dado, elevamos el pistón una pequeña altura **y** (comparada con $\mathbf{y_o}$), soltándolo a continuación. Calcular ahora:



b) La presión, temperatura del gas, así como el trabajo intercambiado con el exterior y la variación de energía interna en función de y (indicando sus signos razonadamente).

c) La fuerza neta sobre el pistón; justifíquese que el movimiento del pistón es un M.A.S. (para valores de y pequeños) y obténgase su frecuencia.

d) La variación de entropía del gas y la variación de entropía del universo. ¿Contradice el resultado el principio de aumento de entropía?. Justifíquese. ¿Es reversible o irreversible el proceso? ¿Por qué?.

Junio-02

II-21 Se tienen 3,2 gramos de oxígeno que inicialmente ocupan un volumen de 1 litro, a la presión de 1 atm. Se calienta el gas a presión constante hasta que se duplica el volumen. A continuación se calienta a volumen constante hasta que se duplica la presión y finalmente mediante una expansión adiabática, se vuelve a la temperatura inicial. Obtener:

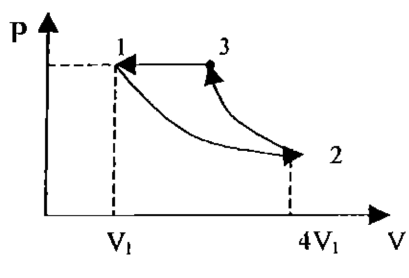
1) La presión, el volumen y la temperatura del gas en cada estado.
2) El calor intercambiado en cada proceso;
3) El trabajo en cada proceso;
4) La variación de entropia en cada proceso.

Tómese el gas como ideal,. Número atómico del oxigeno: 16;
$R = 2$ cal/°Kmol = 0,082 atm.l/°Kmol; $c_v = 5$ cal/°Kmol.

Junio-02

I-22 Un mol de un gas ideal monoatómico con un volumen inicial V_1 de 25 litros y una presión de 4 atmósferas, sigue el ciclo indicando en la figura (isobara, isoterma, adiabática). Hallar

a) Volumen, temperatura y presión de cada punto del ciclo.
b) El flujo de calor y la variación de entropía en cada tramo del ciclo, indicando su signo.
c) Razonar si es una máquina térmica o un refrigerador y calcular su rendimiento o su eficiencia.



Septiembre-02

II-23 Un proceso termodinámico sigue las siguientes transformaciones:

a) A P_{cte} hasta llegar a $2\cdot V_o$.
b) A V_{cte} hasta llegar a $2\cdot P_o$.
c) Adiabática hasta llegar a T_o.

Se pide para cada uno de los procesos:

1) P,V,T
2) Q
3) W
4) ΔS

DATOS: $P_o = 1$ atm; Mm = 16, $V_o = 1$ l ; m= 3'2 gr de O_2; $C_v = 5$ cal/K; R = 2 cal/K.

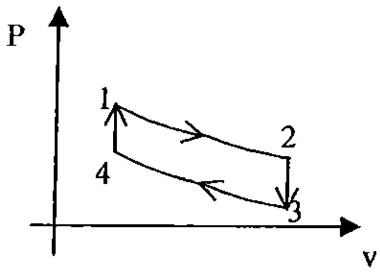
Junio-02

II-24 Sea el ciclo Stirling representado por el diagrama. Calcular:

a) Trabajos producido, consumido, neto dado por el motor.
b) Energía total consumida.
c) Rendimiento del motor
d) Particularizar los resultados anteriores para los siguiente datos: n = 0'05 moles; $T_1 = 420$K; $T_2 = 320$ K; $V_2 = 1$ l.

DATOS:

- 1-2: isoterma, T_1
- 3-4: isoterma, T_2
- 4-1 y 2-3 : isócoras a V_1 y V_2
- Gas perfecto
- C_v = cte
- $V_1 = 0'25$ l
- $C_v = 5$cal/mol·K
- R = 8'31 J/mol·K

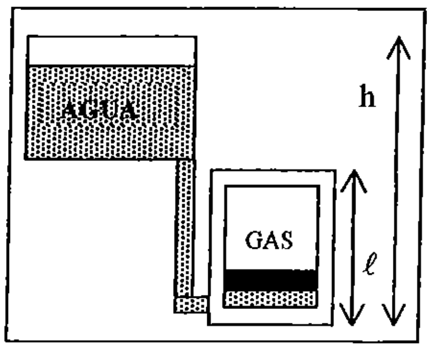


Septiembre-02

II-25 Con un depósito cerrado lleno de agua a temperatura To, situado a una altura , de 20 m, se acciona un pistón que comprime el gas ideal (monoatómico) de un cilindro, aislado térmicamente del exterior, de altura ℓ y superficie de la base del pistón 1 m^2.

Considérense las dos siguientes posibilidades:

a) Que el cilindro se llene muy lentamente (proceso isotermo a temperatura To)
b) Que le cilindro se llene muy rápidamente (proceso adiabático) y posteriormente se enfríe hasta To (proceso isobárico)



En cada uno de los procesos:

Dibujar los diagramas P,V y determinar: La altura que alcanzará el pistón, el trabajo realizado, el calor transferido al agua y la variación de entropía.

Suponer que la temperatura inicial del gas es To, su presión Po = 1 atm y que h >> ℓ.

Junio-03

II-26 Un mol de un gas ideal con un volumen inicial $V_1 = 25$ litros y una presión de 4 atmósferas sufre las siguientes transformaciones: 1° se expande a presión constante hasta duplicar el volumen inicial. 2° Se enfría con un proceso adiabático hasta la temperatura inicial. 3° Se comprime siguiendo la isoterma hasta el punto inicial cerrando ciclo.

a) Dibujar el diagrama PV del proceso y calcular:
b) El volumen , la presión y la temperatura en cada punto del ciclo.
c) El flujo del calor y la variación de entropía en cada tramo del ciclo.
d) El rendimiento de la máquina.

Septiembre-03

II-27 Un mol de aire en condiciones normales, T = 273 K y p = 1 atm se comporta como un gas ideal. Se somete a una compresión a temperatura constante hasta reducir su volumen a la mitad, luego se expande por vía adiabática hasta la presión inicial, finalmente llega al estado inicial a presión constante. Obtener:

a) La variación de entropía en cada transformación.
b) El trabajo en cada transformación.
c) Indicar si se trata del ciclo de una máquina térmica o el de una máquina frigorífica y calcular, en su caso, el rendimiento o la eficiencia.

DATOS: $\gamma = 1.4$. Calor molar a presión constante $C_{mp} = 7$ cal/(K mol), R = 2 cal (K mol).

Junio-04

II-28 Un pistón con n moles de un gas ideal monoatómico a Ti°C, situado al nivel del mar (1 atm de presión), se pone en contacto térmico con un bloque de hielo de masa m a 0°C. Si el émbolo se desplaza sin rozamiento y si el sistema pistón hielo están térmicamente aislados del exterior, determinar:

a) La masa de hielo que debe fundirse para que la temperatura del gas sea igual a la del hielo (el proceso se realiza a presión constante).
b) Trabajo realizado por el émbolo.
c) Variación de energía interna del gas y del hielo.

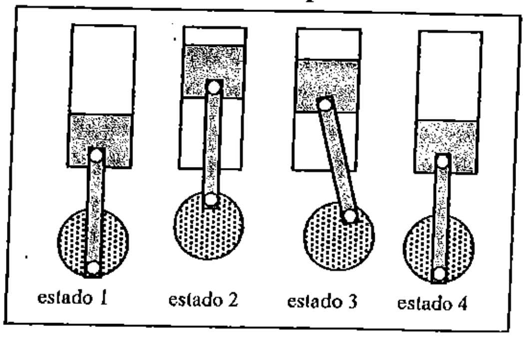
El resto del hielo se funde, pasando a agua a 0° C, aplicando una compresión muy rápida (proceso adiabático) y posteriormente dejando que el gas se enfríe a volumen constante.

d) Calcular el trabajo invertido en este proceso y el volumen final del gas.
e) Calcular la variación de entropía del hielo.
f) Suponer que el volumen del hielo es mucho más pequeño que el del gas.

DATOS: Ti = 20°°C, n = 0,5 M = 2g, $c_i = 80$ cal/g, R = 8,31 J/(Kmol).

Septiembre-04

II-29 Un motor diesel de un solo cilindro aspira aire a 1 atm de presión y 25° C de temperatura cuando el pistón está al comienzo de su recorrido, teniendo en este momento el volumen del cilindro su capacidad máxima 2120 cm^3 (estado 1). A continuación el aire es comprimido adiabáticamente hasta que el cilindro llega a su volumen mínimo 120 cm^3 (estado 2). En ese momento se inicia la inyección del combustible, que se inflama, produciéndose una expansión a presión constante hasta la décima del recorrido del pistón (volumen 320 cm^3), suponer que la composición del gas no ha cambiado (estado 3). A continuación el gas se expande adiabáticamente hasta el volumen inicial (estado 4). Por último se produce un proceso a volumen constante que lleva al sistema al estado 1.



(Continúa)

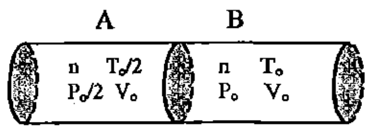
II-29 Continuación:

a) Determinar la presión y la temperatura del gas en los cuatro estados.
b) Dibujar un diagrama PV del ciclo.
c) Determinar el calor intercambiado y la variación de la energía entropía en cada proceso.
d) Determinar el trabajo realizado en un ciclo.
e) Determinar el rendimiento del motor.

Datos: $\gamma = 1,4$, $R = 0.082$ atm·l(°k·mol)) = 8.31 J /(°k·mol) = 1.98 cal/(°K·mol). Suponer que en todo momento el gas se comporta como ideal.

Septiembre-05

II-30 Los recintos A y B contienen n moles de un gas ideal monoatómico ocupan el mismo volumen V_0 cada uno, están aislados del exterior y separados por un pistón adiabático (situado en la posición y). El gas del recinto A está a una presión inicial $p_0/2$ y tiene una temperatura $T_0/2$. El recinto B tiene inicialmente una presión p_0 y una temperatura T_0. El pistón que estaba fijo en la posición y, se libera, comenzando a desplazarse lentamente y de modo reversible hasta que los recintos A y B alcanzan el equilibrio de presiones. Obtener para los dos recintos:



1) Sus coordenadas termodinámicas.
2) La variación de energía interna. (en cada recinto)
3) La variación de entropía indicando razonadamente los signos obtenidos.

Dato: $R = 8,31$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

Septiembre-05

II-31 Una máquina frigorífica funciona de modo cíclico utilizando un mol de gas ideal diatómico ocupando inicialmente un volumen de 5 litros a 0°C el cual sigue los siguientes procesos termodinámicos:

1) Calentamiento a V = cte hasta alcanzar una temperatura de 10°C.
2) Compresión adibática hasta alcanzar una temperatura de 23°C.
3) Enfriamiento a P = cte hasta alcanzar una temperatura de 0°C.
4) Expansión a T = cte hasta el punto inicial.

Se pide:

a) Dibujar el diagrama PV y determinar P, V, T al final de cada proceso.
b) Calor intercambiado en cada proceso indicando si es absorbido o cedido.
c) Variación energía interna y entropía en cada proceso.
d) Energía cinética necesaria para congelar con esta máquina 1 litro de agua a 0° C.

Datos: Calor latente de fusión del agua L_f= 80 cal/g; 1 at.l = 101,3 J; 1cal = 4,18.J

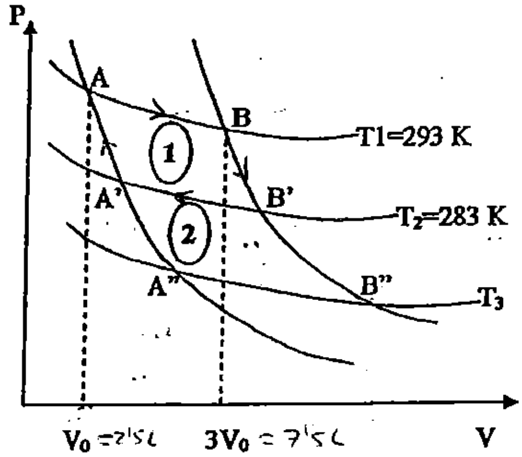
Junio-06

ETSIT
UPM

Examen de Física II

9 de Septiembre de 2006

1) Las dos máquinas de Carnot 1 y 2 de la figura trabajan acopladas de modo que el trabajo neto W_1 producido por la primera se aplica a la segunda para que funcione como frigorífico. Si la máquina 1 funciona con **0.25 moles** y la máquina 2 con **0.5 moles** del mismo *gas ideal monoatómico*, se pide:



Para el motor 1 :
1) Calcular trabajo neto W_1 producido y su rendimiento.

Para el frigorífico 2 :
2) La temperatura T_3.
3) En qué procesos *la máquina elimina calor* y en *cuáles realiza trabajo*, calculando los valores de calor y trabajo correspondientes a cada caso.
4) La variación de entropía de los focos indicando el signo razonadamente.
DATOS: V_0 =2,5 l ; R=0.082 (at.l)/(K.mol) ; 1 at.l =101,3 J.

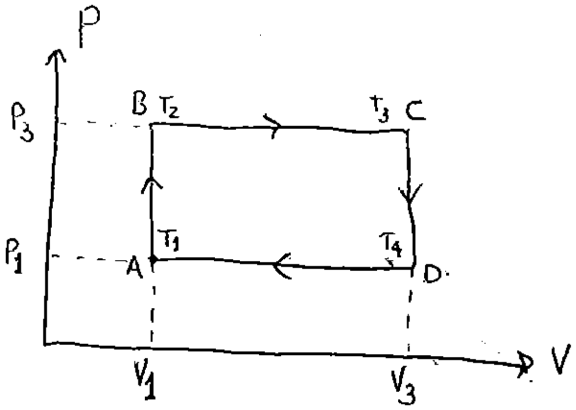
---

7 de Junio de 2007

1. Una máquina térmica describe un ciclo (A → B→ C→ D → A) formado por dos procesos ~~isóbaros~~ isócoros (A → B y C → D) y dos ~~isócoros~~ isóbaros (B → C y D → A). La máquina se alimenta con *n* moles de un *gas diatómico*, supuestamente *ideal*. Se conocen las coordenadas termodinámicas del punto A (V_1, p_1) y del C (V_3, p_3) y se verifica $p_3 > p_1$ y $V_3 > V_1$. Se pide:
a) dibujad el ciclo indicando las coordenadas (V, p) de los cuatro vértices, b) calculad las temperaturas T_1, T_2, T_3 y T_4 correspondientes a los cuatro vértices A, B, C y D en función de n, V_1, p_1, V_3 y p_3 y clasificadlas de mayor a menor.
Supuestos conocidos los valores de las temperaturas T_1, T_2, T_3 y T_4 obtened ahora:
c) los calores puestos en juego en cada uno de los cuatro procesos y expresadlos en función de n y de las temperaturas T_1, T_2, T_3 y T_4 indicando razonadamente si es entregado al sistema o es cedido por éste. d) Calculad el rendimiento del ciclo y expresadlo en función de las cuatro temperaturas citadas.

Prob 1 Junio 2007 | II.33

a)



n moles

$\gamma = 1'4$

$C_{mp} = \frac{7}{2}R$

$C_{mv} = \frac{5}{2}R$

b)

$T_1 = \frac{P_1 \cdot V_1}{n \cdot R}$

$T_2 = \frac{P_3 \cdot V_1}{n \cdot R} \overset{P_3 > P_1}{>} T_1$

$T_3 = \frac{P_3 \cdot V_3}{n \cdot R} \overset{V_3 > V_1}{>} T_2$

$T_4 = \frac{P_1 \cdot V_3}{n \cdot R}$

Observamos que $T_3 > T_2 > T_1$ y además: $T_4 > T_1$ y $T_4 < T_3$ pero NO tenemos datos suficientes para saber si $T_4 \gtreqless T_2$.

c)

$Q_{AB} = \left\{ \begin{matrix} \text{isócora} \\ W_{AB}=0 \end{matrix} \right\} = \Delta U_{AB} = n \cdot C_{mv} \cdot \Delta T = n \cdot \frac{5}{2} R \cdot (T_2 - T_1) = 2'5\, nR\, (T_2 - T_1) \overset{T_2 > T_1}{>} 0$ Calor añadido al sistema.

$Q_{BC} = \{\text{isóbara}\} = n \cdot C_{mp} \cdot (T_3 - T_2) = n \cdot \frac{7}{2} R\, (T_3 - T_2) = 3'5 \cdot nR (T_3 - T_2) \overset{T_3 > T_2}{>} 0$ Calor añadido al sistema.

$Q_{CD} = \left\{ \begin{matrix} \text{isócora} \\ W_{CD}=0 \end{matrix} \right\} = n \cdot C_{mv} (T_4 - T_3) = \quad = 2'5 \cdot nR\, (T_4 - T_3) \overset{T_4 < T_3}{<} 0$ Calor cedido por el sistema.

$Q_{DA} = \{\text{isóbara}\} = n \cdot C_{mp} (T_1 - T_4) = \quad = 3'5 \cdot nR\, (T_1 - T_4) \overset{T_1 < T_4}{<} 0$ Calor cedido por el sistema.

d) Rendimiento de motor o máquina térmica: $\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - |Q_c|}{Q_h} \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_{cedido}|}{(Q_{añadido})} = 1 - \frac{[nR(2'5(T_3 - T_4) + 3'5(T_4 - T_1))]}{[nR(2'5(T_2 - T_1) + 3'5(T_3 - T_2))]} =$

$= 1 - \frac{2'5 \cdot T_3 - 2'5 \cdot T_4 + 3'5\, T_4 - 3'5\, T_1}{2'5 \cdot T_2 - 2'5 \cdot T_1 + 3'5 \cdot T_3 - 3'5 \cdot T_2} = 1 - \frac{2'5 \cdot T_3 + 1 T_4 - 3'5 \cdot T_1}{3'5 \cdot T_3 - T_2 - 2'5 \cdot T_1} =$

$$\boxed{= 1 - \frac{2'5 \cdot T_3 + T_4 - 3'5 \cdot T_1}{3'5 \cdot T_3 - T_2 - 2'5 \cdot T_1}}$$

EXAMEN DE FÍSICA II

10 de Junio de 2008

1.- Se quiere mantener la temperatura de un vaso de agua, de 250 c.c. a 1°C por debajo de la temperatura ambiente, 24° C. Para ello se utiliza el aire encerrado en una jeringuilla que tiene obstruida su boquilla. Inicialmente el volumen del aire en la jeringuilla es 5cc a 1 at. y 23° C. Siendo, así mismo, la temperatura del liquido 23° C (estado A). 1º) Se comprime el aire con el embolo, fuera del líquido, en un proceso adiabático elevando la temperatura de su gas a 25° C (estado B). 2º) Se deja que el aire de la habitación enfríe el aire de la jeringuilla a volumen constante hasta 24° C (estado C) 3º) Se expansiona adiabáticamente hasta que su volumen vuelve a ser 5cc (estado D). 4º) Se introduce la jeringuilla en el agua del vaso y se deja que se caliente a volumen constante hasta 23° C volviendo al estado A y se repite el ciclo desde (A).

a) dibujar el diagrama P, V del proceso
b) determinar la presión y el volumen en cada vértice del ciclo
c) determinar el calor extraído del liquido y el cedido al aire y la bajada de temperatura que experimenta el liquido en un ciclo
d) el trabajo neto realizado por el pistón
e) el ~~rendimiento~~ de la máquina frigorífica.
eficiencia

Tomar Cv=3R/2, R=0.082 at l /K° mol

****

$V_{H_2O} = 0'25\,L$; $m_{H_2O} = 0'25\,kg$; $T_{amb} = 24°C$; $C_{mv} = \frac{3}{2}R$ (monoatómico)
; $C_{mp} = \frac{5}{2}R$

AIRE

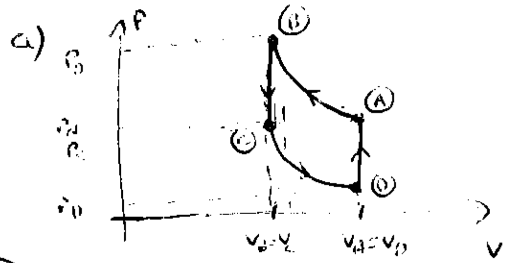
(A) $V_A = 0'005\,L$
$P_A = 1\,atm$
$T_A = 296°K$

(B) $T_B = 298°K$

(C) $T_C = 297°K$
$V_C = V_B$

(D) $V_D = 0'005\,L$

a)



Efectivamente el gas hace de máquina frigorífica

b) $\gamma = \frac{5}{3}$

(A) $n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = 0'00020$ moles.

(B) $V_B = 0'00495\,L$.
$P_B = 1'01082\,atm$

(C) $P_C = 1'01341\,atm$

(D) $P_4 = 0'99773\,atm$
$T_4 = 295'04\,°K$.

c) $Q_{AB} = 0$ (J)
(8'314 J/mol°K)
$Q_{BC} = n C_{mv} \Delta T = n \frac{3}{2} R (T_C - T) = -0'002492$ (J) (calor cedido por el gas)
$Q_{CD} = 0$ (J)
$Q_{DA} = n C_{mv} \Delta T = n \cdot \frac{3}{2} R \cdot (T_A - T_D) = 0'0023944$ (J) (calor añadido al gas)

Q_{DA} es también el calor cedido por el agua.

Sabemos que el calor cedido por el agua viene dado por:

$$Q_{H_2O} = 0'0023944 \text{ (J)} = m_{H_2O} \, c_{e_{H_2O}} \, \Delta T = 0'25 \text{ Kg} \cdot 4'18 \text{ KJ/Kg K} \, \Delta T.$$

$$\boxed{\Delta T = 2'3 \cdot 10^{-6} \text{ °K}}$$

d) $W_{ciclo} = W_{gas} = W_{motor} = |Q_{cedido}| - Q_{absorbido} = 0'0000976 \text{ (J)}$

e) $\boxed{\varepsilon = \dfrac{|Q_{cedido}|}{W_{ciclo}} \simeq 24}$

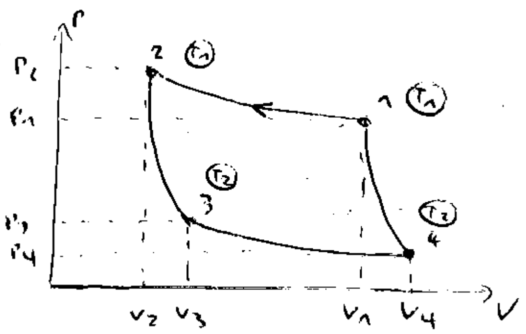
EXAMEN FINAL DE FÍSICA II
26 de junio 2009

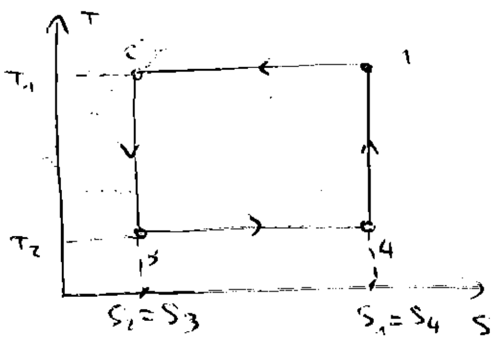
1°) Una máquina funciona con un gas ideal. El gas se encuentra inicialmente a P_1, V_1 y T_1. Se comprime isotérmicamente hasta unos valores P_2 y V_2. A continuación, se expande adiabáticamente hasta una temperatura T_2. Desde estas condiciones, se expande isotérmicamente hasta alcanzar P_4 y V_4, y por último se comprime adiabáticamente hasta volver al punto de partida.

a) Asumiendo que todas las etapas son cuasiestáticas, representa este ciclo en un diagrama PV y en un diagrama TS.
b) <u>En función de los datos</u> calcula los valores de los calores absorbido y cedido, indicando donde tiene lugar cada uno de ellos.
c) La máquina, ¿ es térmica o frigorífica? Justifica la respuesta.
d) Calcula el rendimiento (o la eficiencia) de la máquina.

---

a)





b) $Q_{12} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0$ (J) cedido

$Q_{34} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) > 0$ (J) Absorbido

¡¡ OJO V_3 no es dato !!

$Q_{23} = Q_{41} = 0$

$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$

$V_3 = V_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/\gamma-1}$

c) Es frigorífica porque el ciclo es antihorario y sabemos que debe ceder más calor que absorbe.

d) $\varepsilon = \frac{Q_{abs}}{W} = \frac{Q_{34}}{|Q_{12}| - Q_{34}} = \ldots$

EXAMEN DE FÍSICA II

15 de Septiembre de 2008

1.- En el fondo de un vaso de cerveza completamente lleno de altura h, se forma una burbuja de un gas ideal de radio r_0 que asciende hasta la superficie del líquido.

a) Si suponemos que durante el ascenso la temperatura del gas es igual a la del líquido, que suponemos constante en todo su volumen, determinar:

1) El radio de la burbuja al llegar a la superficie
2) El calor absorbido por el gas de la burbuja
3) la variación de entropía de la burbuja

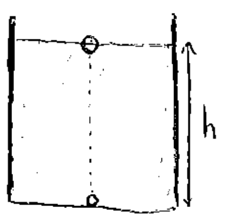
b) si suponemos que la burbuja asciende tan rápidamente que no intercambia calor con el líquido, determinar:

4) El radio de la burbuja al llegar a la superficie
5) La variación de energía interna del gas
6) la variación de entropía de la burbuja.

Datos: presión atmosférica P_0 ; densidad de la cerveza: ρ.

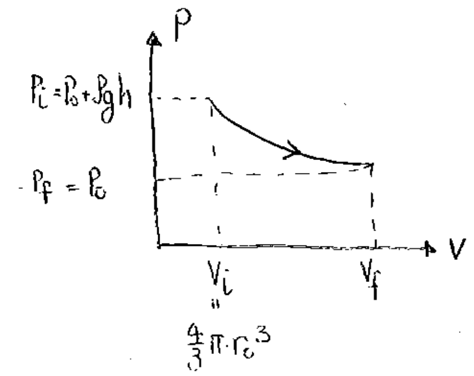
******

Solución:



$$\text{Situación inicial} \begin{cases} \text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3 = V_i \\ \text{Presión} = P_0 + \rho \cdot g \cdot h = P_i \\ \text{Temperatura} = T = \text{temperatura de la cerveza} = T_i \end{cases}$$

a) TRANSFORMACIÓN ISOTERMA $T_i = T_f = T$



1) Como es isoterma:

$$P_i \cdot V_i = P_f \cdot V_f \Rightarrow \boxed{V_f = \frac{P_i \cdot V_i}{P_f} = \frac{(P_0 + \rho \cdot g \cdot h) \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3}{P_0}}$$

Además:

$$\boxed{V_f = \frac{4}{3}\pi \cdot r_f^3}$$

Despejando $\boxed{r_f} = r_0 \cdot \sqrt[3]{\frac{P_0 + \rho g h}{P_0}} = r_0 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{\rho g h}{P_0}}$

2) $$\boxed{Q_{if}} = \begin{Bmatrix} T = cte \\ \Delta U = 0 \end{Bmatrix} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \left\{ P \cdot V = nRT \right\} =$$

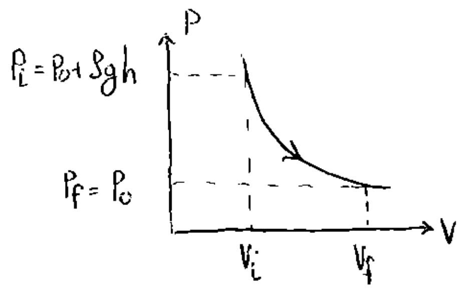
$$= P_i \cdot V_i \ln\left(\frac{\frac{4}{3}\pi r_f^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3}\right) = \boxed{(P_0 + \rho g h) \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3 \cdot \ln\left(1 + \frac{\rho g h}{P_0}\right)} \ (J)$$

↳ OJO CON LAS UNIDADES.

3) $$\boxed{\Delta S_{if}} = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \{\text{isoterma}\} = \frac{Q_{if}}{T} = n \cdot R \cdot \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \boxed{\frac{(P_0 + \rho g h)\frac{4}{3}\pi r_0^3 \ln\left(1 + \frac{\rho g h}{P_0}\right)}{T}} \ (J/K)$$

siendo T ℓ

b) TRANSFORMACIÓN ADIABÁTICA $Q_{if} = 0$



4) Como es adiabática:

$$P \cdot V^{\gamma} = cte \Rightarrow P_i \cdot V_i^{\gamma} = P_f \cdot V_f^{\gamma} \Rightarrow \boxed{V_f = V_i \cdot \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3 \left(1 + \frac{\rho g h}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Además $V_f = \frac{4}{3}\pi \cdot r_f^3 \Rightarrow \boxed{r_f = r_0 \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\rho g h}{P_0}\right)^{1/\gamma}}}$ (m) siendo: γ = coef. adiabático $\begin{cases} \text{Si gas monoatómico } \frac{5}{3} \\ \text{" " diatómico } \frac{7}{5} \end{cases}$

5) Como $Q_{if} = 0$

$$\boxed{\Delta U_{if}} = -W_{if} = + n \cdot C_{mv} \cdot \Delta T = - \frac{P_i \cdot V_i - P_f \cdot V_f}{\gamma - 1} = \frac{P_f \cdot V_f - P_i \cdot V_i}{\gamma - 1} =$$

$$= \frac{P_0 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3 \cdot \left(1 + \frac{\rho g h}{P_0}\right)^{1/\gamma} - (P_0 + \rho g h) \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3}{\gamma - 1} = \frac{P_0 \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3}{\gamma - 1}\left[\left(1 + \frac{\rho g h}{P_0}\right)^{1/\gamma} - \left(1 + \frac{\rho g h}{P_0}\right)\right] =$$

$$\boxed{= \frac{P_0 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3}{\gamma - 1} \cdot \left(1 + \frac{\rho g h}{P_0}\right) \cdot \left[\left(1 + \frac{\rho g h}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma} - 1} - 1\right]}$$

6) $\Delta S_{if} = 0$ (J/K) ya que el proceso es adiabático.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE FÍSICA II
10 de septiembre 2009

1. 1º) Una máquina térmica funciona con n moles de un gas ideal diatómico siguiendo un proceso cíclico que parte del punto A y pasa por las siguientes 3 etapas:
   - I (A→B) proceso PV^2=cte (no adiabático) en el que el gas duplica su volumen
   - II (B→C) proceso isotermo hasta llegar al volumen inicial
   - III (C→A) proceso isócoro hasta igualar la presión inicial

   Se pide:
   - a) dibujar el diagrama PV y determinar P, V y T al final de cada etapa del proceso
   - b) determinar los calores absorbidos en cada etapa
   - c) calcular la variación de entropía en el proceso I
   - d) calcular el rendimiento de la máquina térmica

   Nota: expresar los resultados en función de P_A, T_A, n y R.

n moles

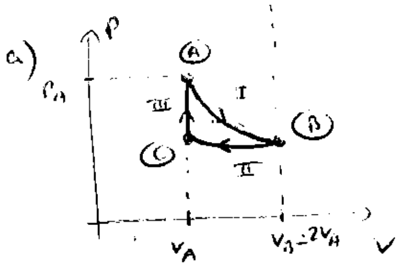
$\gamma = 1'4$

$C_{mp} = \frac{7}{2}R$

$C_{mv} = \frac{5}{2}R$

$P_A / T_A / n / R$ DATOS

a)



(A) P_A DATO; T_A DATO; $\boxed{V_A = \frac{nRT_A}{P_A}}$

(B) $V_B = 2V_A$; $P_B V_B^2 = P_A V_A^2$; $\boxed{P_B = P_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^2 = \frac{P_A}{4}}$; $\boxed{T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{T_A}{2}}$

(C) $\boxed{V_C = V_A = \frac{nRT_A}{P_A}}$ $\boxed{T_C = T_B = \frac{T_A}{2}}$ $\boxed{P_C = \frac{P_A}{2}}$

b) $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = nC_{mv}\Delta T + \int_A^B P\,dV = nC_{mv}\Delta T + \int_A^B \frac{cte}{V^2}\,dV = n\frac{5}{2}R(T_B - T_A) + cte\left(-\frac{1}{V}\right)\Big]_{V_A}^{V_B}$

$P = \frac{cte}{V^2}$

ni isócora, ni isóbara, ni adiabática, ni isoterma $\Rightarrow$ Def

$= n\frac{5}{2}R\left(\frac{T_A}{2} - T_A\right) + cte\left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B}\right) = \left\{ \begin{array}{l} PV^2 = cte \\ \text{entre A y B} \\ cte = P_A V_A^2 \end{array} \right\} =$

$= -\frac{3}{4}nRT_A$ (J) → Calor cedido por el gas.

$Q_{BC} = nRT\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = -0'34657\,nRT_A$ (J) → Cedido

$Q_{CA} = nC_{mv}\Delta T = n\frac{5}{2}R(T_A - T_C) = \frac{5}{4}nRT_A$ (J) → Calor absorbido por el gas

c) $\Delta S_I = \Delta S_{AB} = nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nC_{mv}\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = -1'04\,nR$ (J/K)

d) $\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{abs}} = \frac{W}{Q_{abs}} = \frac{Q_{abs} - |Q_{ced}|}{Q_{abs}} = 0'1227 \simeq 12'27\ \%$

ETSIT UPM **Examen de Física I**

Madrid 12 de junio 2010

1º) Cinco moles de gas ideal se encuentran inicialmente a una temperatura de 27ºC y ocupan un volumen V_1. Este gas sufre una compresión isoterma hasta reducir su volumen a la mitad. Posteriormente se expansiona a presión constante hasta que su volumen se hace $(2/3)V_1$ y finalmente vuelve al estado inicial, siguiendo una relación lineal entre la presión y el volumen.

a) Representad el diagrama P-V del ciclo.

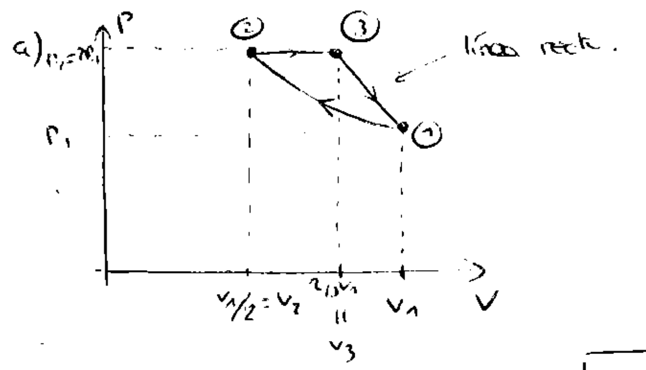
b) Calculad los valores de presión y temperatura en todos los puntos del ciclo.

c) Calculad el trabajo en cada etapa del ciclo y el trabajo total.

NOTA: los resultados vendrán dados en función de V_1 y de R.

$n = 5$ mol ; $T_1 = 300°K$; V_1 DATO ; R DATO

a)



b) ① V_1 DATO ; $T_1 = 300°K$; $\boxed{P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{1500R}{V_1}}$

② $\boxed{V_2 = \frac{V_1}{2}}$; $\boxed{T_2 = T_1 = 300°K}$; $\boxed{P_2 = 2P_1 = \frac{3000R}{V_1}}$

③ $\boxed{V_3 = \frac{2}{3}V_1}$; $\boxed{P_3 = P_2 = \frac{3000R}{V_1}}$; $\boxed{T_3 = \frac{P_3V_3}{nR} = 400°K}$

c) $W_{12} = Q_{12} = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 5 \cdot R \cdot 300 \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -1039'72\ R$ (J)
(Realizado sobre el gas)

$W_{23} = \int_{V_2}^{V_3} P\,dV = \underset{\underset{P_3}{\shortparallel}}{P_2}(V_3 - V_2) = 500R.$ (J) (Realizado por el gas)

$W_{31} = \int_{V_3}^{V_1} P\,dV = \left\{\begin{array}{l}\text{Área bajo}\\ \text{la curva del}\\ \text{diagrama P-V}\\ \text{¿Pos o neg?}\\ \text{Pos. ya que debe}\\ \text{ser máq. term.}\end{array}\right\} = P_1(V_1 - V_3) + \frac{1}{2}(V_1 - V_3)(P_3 - P_1) =$

$= (V_1 - V_3)\left[P_1 + \frac{1}{2}(P_3 - P_1)\right] = (V_1 - V_3)\frac{1}{2}(P_3 + P_1)$

$= 750\ R$ (J)

$\boxed{W_{total} = 210'28\ R}$ >0 { $W_{neto} > 0$ en máquina term. }

Hay otra forma de calcular W_{31}

$$W_{31} = \int_{V_3}^{V_1} P\,dV = \left\{ \begin{array}{l} \text{Escribir } P \text{ en función de } V \\ \dfrac{P - P_1}{P_3 - P_1} = \dfrac{V - V_1}{V_3 - V_1} \\ P = P_1 + \left(\dfrac{P_3 - P_1}{V_3 - V_1}\right)(V - V_1) \end{array} \right\} = \int_{V_3}^{V_1} \left[P_1 + \left(\dfrac{P_3 - P_1}{V_3 - V_1}\right)(V - V_1) \right] dV =$$

$$= \left[P_1 (V_1 - V_3) + \left(\dfrac{P_3 - P_1}{V_3 - V_1}\right) \dfrac{(V - V_1)^2}{2} \right]_{V_3}^{V_1} = P_1 (V - V_3) - \dfrac{1}{2} \dfrac{(P_3 - P_1)}{(V_3 - V_1)} (V_3 - V_1)^2 =$$

$$= (V_1 - V_3) \left[P_1 + \dfrac{1}{2}(P_3 - P_1) \right] = (V_1 - V_3) \dfrac{1}{2} (P_1 + P_3) = \boxed{750\ R}$$

COMENTARIO FINAL

Q_{12} = ya calculado

$Q_{23} = n C_{mp} \Delta T$

$$Q_{31} = \Delta U_{31} + W_{31} = n C_{mv} \Delta T + \underbrace{W_{31}}_{\text{"Chungo"}}$$

OSCILADORES ARMONICOS

IV-1 Una masa m puesta en el extremo de un resorte oscila en el vacío con un movimiento armónico simple de pulsación $w_0 = \sqrt{2}\times 10^3$ rad·s^{-1}. El mismo sistema puesto en el aire realiza un movimiento aperiódico crítico. Si encontrándose en el aire se sustituye la masa m por otra de valor 3m sin que se modifiquen los restantes parámetros del sistema, determinar:

1) La clase de movimiento descrito por la masa 3m justificado analíticamente. Según sea el caso,
2) El periodo o el seudoperiodo del movimiento y
3) El factor de calidad Q del oscilador.

Septiembre-95

IV-2 Un sistema mecánico está formado por una masa m = 10 g colocada en el extremo de un resorte de constante elástica k = 36 N.m^{-1}. Cuando la masa realiza un movimiento aparece una fuerza de fricción proporcional a la velocidad y de coeficiente c = 0.18 kg.s^{-1}.

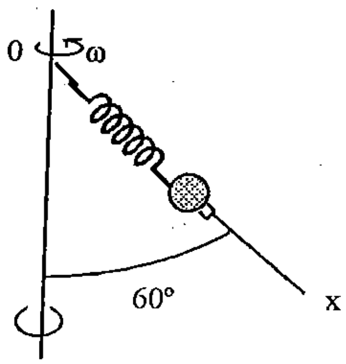
a) Obtener el Q del sistema.

Si sobre la masa se hace actuar una fuerza periódica F de frecuencia 12 Hz, el sistema responde con un m.a.s. de amplitud A = 4.4 cm. Calcular en estas condiciones:

b) La amplitud F_0 de F. Si se mantiene la misma F_0
c) Para qué frecuencias de F se obtendrá una amplitud A' = 10 cm.

Junio-96

IV-3 La cuenta de masa **m = 400 g** de la figura, desliza (sin rozamiento) sobre una varilla situada en el eje OX y está sujeta a un muelle de constante elástica **k = 12.5 N/m** y longitud de equilibrio $\mathbf{x_e}$ **= 1.5 m**. La varilla gira alrededor de la vertical formando un ángulo de **60°**, con una velocidad angular de **ω = 7/5 π rad/s**. Se pide:



a) Justificar analíticamente que el movimiento resultante de la cuenta a lo largo de la varilla es un M.A.S. y expresar su ley temporal.
b) Obtener su posición de equilibrio.
c) Calcular su pulsación.

Si en **t = 0** la velocidad a lo largo de la varilla es $\boldsymbol{v_0}$ **= 0 m/s**, y su posición medida desde O es $\mathbf{x_0}$ **= 0.25 m.**

d) Obtener la expresión completa de la ley del movimiento x(t).

Dato: **g = 9.8 m/s²**.

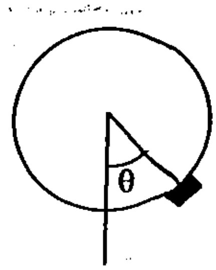
Septiembre-96

IV-4 Una partícula de **10 gr** de masa se encuentra sometida a la acción de dos **m.a.s.** aplicados en la misma dirección, cuyas ecuaciones son :$x_1 = 2\cos wt$ (cm) ; $x_2 = 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{11\pi}{14}\right)$ (cm).

a) Cuánto debe valer w para que el movimiento resultante sea armónico simple.
b) Calcular el periodo y la amplitud del movimiento resultante y escribir la ecuación de la elongación en función del tiempo.
c) Calcular las energías cinéticas y potencial de la partícula cuando se encuentra a una distancia de **2 cm** del origen.

Febrero-97

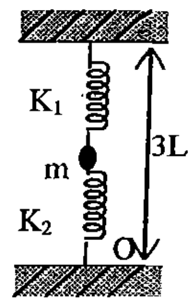
IV-5 Un disco de radio **R** y momento de inercia $\mathbf{I_0}$ puede girar libremente en torno a su eje situado horizontalmente. En un punto del borde y a un ángulo $\theta = \theta_0$ con la línea vertical que pasa por el eje del disco se adhiere un pequeño peso de masa **m** y se deja libre el sistema. Suponiendo θ_0 muy pequeño. Determinar:



1. El nuevo momento de inercia, **I**, y el par que actúa sobre el disco, en función de θ.
2. La ecuación diferencial del movimiento y el periodo de oscilación del sistema.
3. La energía cinética y la energía potencial del sistema en función del tiempo.
4. Si el borde del disco roza con un fluido que ejerce sobre el disco un par de frenado proporcional a la velocidad angular del disco con constante de proporcionalidad $(2RmgI)^{1/2}$. Determinar la nueva ecuación diferencial del movimiento y la ecuación del mismo $\theta = f(t)$.

Junio-97

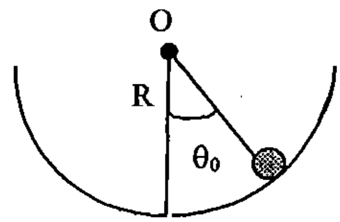
IV-6 Dos muelles constantes $K_1 = 3N/m$ y $K_2 = 7N/m$, de longitud natural **L = 12cm**, se encuentran unidos a una masa **m = 16 gr**, sobre una superficie horizontal sin rozamiento, manteniendo las relaciones que se indican en la figura.



a) Determinar la posición de equilibrio de la partícula medida respecto al punto O.
b) Si a partir de la posición de equilibrio, la partícula se desplaza **3 cm** hacia el muelle de constante K_1 y se deja oscilar libremente, determinar la ecuación del movimiento de la masa.
c) Cuando haya transcurrido un cuarto de periodo, calcular las Energías Cinética y Potencial de la partícula, suponiendo el origen de energías potenciales en la posición de equilibrio.

Septiembre-97

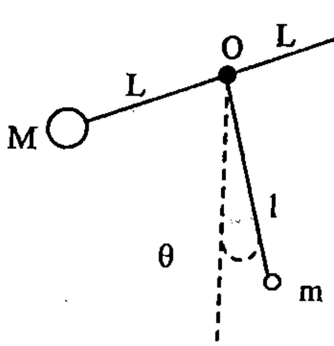
IV-7 Se deja caer libremente una pelota de tenis de pequeñas dimensiones y de masa **m** sobre la pista semicircular de la figura, formando un ángulo de θ_0 **pequeño** con la vertical. Si la pista tiene un radio **R**, se pide para pequeñas oscilaciones de la pelota:



a) La ecuación dinámica para el movimiento de la masa **m**.
b) La solución en el tiempo, $\theta(t)$.
c) La velocidad máxima de la pelota y en qué posición ocurre. La energía mecánica de ésta.

Junio-98

IV-8 Se dispone del péndulo físico de la figura que oscila en torno al punto O.



a) Determinar la ecuación diferencial del movimiento y el periodo de oscilación.

b) Si el instante inicial $\theta = \theta_1$ y $d\theta/dt = w_1$ escribir la solución en el tiempo.

c) Si al sistema se le aplicase un par $\Gamma = \Gamma_0$ sen (Ωt) ¿para qué valor de Ω la amplitud de la oscilación sería máxima? ¿Cuál sería para este valor de Ω, el desfase entre Γ y θ

NOTA: Se supone que los brazos del sistema no tiene masa y que θ **es siempre pequeño.**

Septiembre -98

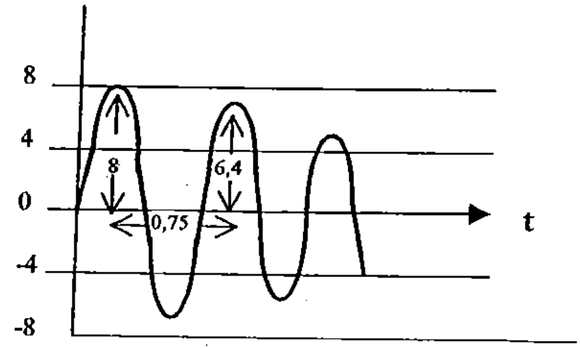
IV-9 Se hace oscilar una masa **m = 30 gr** en el extremo de un resorte, y sumergida en el seno de un medio viscoso. En la figura se muestra la ley descrita por la masa. Los dos primeros máximos presentan los valores **8 y 6,4 cm,** respectivamente , y entre ambos ha transcurrido un tiempo de **0,75 seg.** Calcular:

a) La pulsación propia del oscilador ω_o y la constante de amortiguamiento γ.

b) La constante recuperadora del resorte k y la constante de la fuerza de fricción c

c) El factor de calidad Q del sistema.

d) La velocidad inicial de la masa sabiendo que para t =0, pasa por la posición de equilibrio.



Junio-99

IV-10 Una partícula de **10 gr** de masa se encuentra sometida a la acción de dos **m.a.s.** en la misma dirección:

$$X_1 = 4\ \text{sen}(\omega t) \qquad X_2 = 4\ \text{sen}[(\pi t/4)+(2\pi/3)]$$

x expresado en **cm** y **t** en **seg.**

a) ¿Cuánto tiene que valer ω para que el movimiento resultante sea **m.a.s.**?

En estas condiciones:

b) Calcular el periodo, la amplitud y la expresión de la elongación del movimiento resultante.

c) Determinar la posición en que la Energía Cinética y la Energía Potencial tienen el mismo valor, y calcular dicho valor.

Si $\omega = (4/9)\pi$

d) ¿el nuevo movimiento resultante, es una **m.a.s.**? Justificar la respuesta.

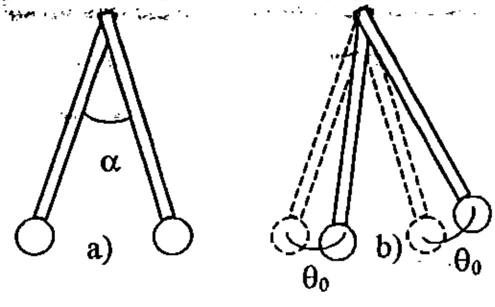
e) Sabiendo que el movimiento resultante responde a la expresión **X=A sen[(πt/4)+δ]** calcular el valor de **A**.

f) ¿Concuerda el resultado de **A**, con lo expresado en el punto d)?

Septiembre-99

IV-11 Un sólido rígido está formado por dos pequeñas esferas de masa M, adheridas en los extremos de sendas barras de masa despreciable de longitud, L, que a su vez, se hallan rígidamente unidas por sus extremos formando un ángulo α. El sistema se encuentra suspendido por el punto de unión de ambas barras (fig. a). Si el sistema se desplaza un ángulo, θ_0 (muy pequeño), de su posición de equilibrio (fig. b), determinar

a) El momento de las fuerzas actuantes sobre las esferas respecto del punto de suspensión del sólido.
b) La ecuación diferencial del movimiento.
c) La frecuencia de oscilación del sistema
d) La energía cinética máxima del mismo.



Junio-00

IV-12 Como resultado de la acción de dos **M.A.S.** perpendiculares sobre una partícula de 10g de masa, se obtiene un movimiento de trayectoria

$$\frac{x^2}{10^{-2}}+\frac{y^2}{2\,10^{-2}}+\frac{xy}{10^{-2}}=\frac{1}{2} \quad (x \text{ e } y \text{ en metros})$$

a) Determinar cada uno de los **M.A.S.** indicando su amplitud, fase y dirección.
b) ¿Cómo habría que modificar el **M.A.S.** que actúa en la dirección del eje Y para que la partícula se moviese en una línea recta de pendiente positiva?
c) Sabiendo que si la partícula estuviese únicamente sometida al **M.A.S.** que actúa en la dirección del eje X tendría una energía de 0,3 Julios, cual es la frecuencia de cada uno de los **M.A.S.**.

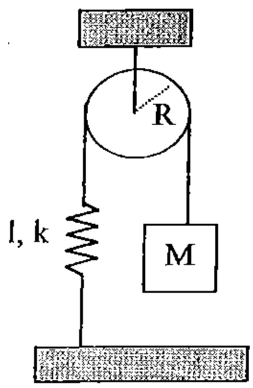
Septiembre-00

IV-13 En un movimiento armónico amortiguado se consideran dos máximos consecutivos del mismo signo. Se sabe que el cociente entre ambos vale 0.9 y que el tiempo transcurrido entre ambos es de 2.5 s. Calcular a) la constante γ de amortiguamiento , b) el Q del sistema y c) la expresión analítica completa x(t) del movimiento sabiendo que: para $t = 3$ s, $x(3) = 6$ cm y $v(3) = 0$

Junio-01

IV-14 Se considera el sistema de la figura donde la polea de radio *R*, tiene un momento de inercia *I* respecto de su eje. Inicialmente la masa *M* se encuentra pegada al suelo con el muelle (de constante *k*) estirado al doble de su longitud natural l. Si en $t = 0$ se deja a la masa *M* en libertad

1. ¿Cuál sería su posición de equilibrio final?
2. 2. Si gira la cuerda *desliza* sin rozamiento por la polea (la polea *no gira)*. Determinar la amplitud de la oscilación de la masa en torno a su punto de equilibrio y la frecuencia de la misma.
3. En el caso en que la cuerda *no deslice* y arrastre la polea
   a) Calcular las dos magnitudes pedidas en el apartado anterior
   b) Escribir la ecuación diferencial el movimiento, tomando como variable x la distancia de M al punto de equilibrio.
4. Si la masa M se moviese en un medio viscoso en ¿cuál de los dos casos (cuando *desliza* o cuando *no desliza* la cuerda sobre la polea) será mayor el decremento entre dos oscilaciones sucesivas?. Justificar el resultado.



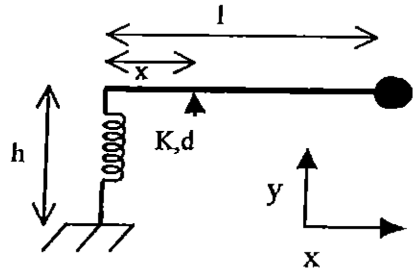
Septiembre-01

IV-15 Un oscilador amortiguado tiene una frecuencia w que es un 10 % menor que su frecuencia natural. Calcular:

a) en que factor disminuye su amplitud y su energía en cada oscilación
b) el factor de calidad del oscilador. ¿Se trata de un buen oscilador?. Razonar la respuesta.
c) Sabiendo que en el instante inicial, la amplitud de la oscilación es A_0, y la fase φ, escribir la expresión analítica del oscilador amortiguado.

Junio-02

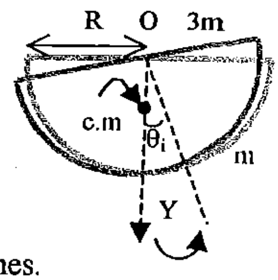
IV-16 Sea el sistema de la figura. Una barra de longitud l y masa despreciable con una masa M adherida rígidamente a uno de sus extremos (radio de la masa << 1), puede girar en torno a un punto que dista x (x< ½) de su otro extremo. A dicho extremo se encuentra sujeto un muelle (masa despreciable, longitud natural d, constante K) que tiene su otro extremo sujeto a un punto que puede ser fijado adecuadamente. Determinar:



a) La longitud h, que debemos darle al muelle para que en condiciones estáticas la barra se mantenga en posición horizontal.
b) Si una vez alcanzado el equilibrio desplazamos la barra un ángulo θ (muy pequeño) de dicha posición, escribir la ecuación dinámica del movimiento y determinar la frecuencia de su oscilación. Si en el instante inicial la masa se encuentra en la posición de equilibrio y con una velocidad $-v_0\mathbf{j}$, hallar la función $\theta = \theta(t)$ y determinar la máxima energía potencial del sistema (tomar como referencia de energía potencial $\theta = 0$)

Septiembre-02

IV-17 El péndulo de la figura consta de una *barra rígida semicircular* de masa m y radio R que está cerrada por su diámetro con una *barra recta y rígida* de longitud 2R y masa 3m, estando en un plano vertical. El péndulo puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular al papel que pasa por O. Si se gira desplazando su eje de simetría de la vertical un ángulo θ_i muy pequeño (0,14 radianes) y se suelta a continuación, se pide:



1) La ecuación diferencial del movimiento y la frecuencia de las oscilaciones.
Cómo el péndulo está en un medio resistente, éste le proporciona un par amortiguador $M_{dis} = -C\dot{\theta}$ siendo $C = mR^{3/2}(2g/\pi)^{1/2}$. Obtener con las condiciones iniciales anteriores:
2) El factor de calidad (indicando si eso no un buen oscilador) y la pseudopulsación del movimiento amortiguado.
3) La solución analítica completa del movimiento.

DATO : el c.m. del péndulo está en su eje de simetría y dista R/π de O.

Junio-03

IV-18 Un cuerpo puntual de masa m, se mueve, en torno al origen de coordenadas bajo la acción de dos M.A.S, uno en la dirección del eje x y el otro en la del eje y, la amplitud de los M.A.S, es Ao y su frecuencia f. Determinar:

a) ¿Cuál tendría que ser el desfase entre los M.A.S, para que la partícula se mueva con energía cinética constante? Justificar las respuestas. ¿Cuánto valdría dicha energía?
b) La constante de recuperación de ambos M.A.S. ¿cuánto valdría la energía potencial?
c) Si después de un tiempo 20 /f la energía cinética se reduce a un 25%, ¿cuánto vale el factor de calidad de ambos M.A.S?

Septiembre-03

IV-19 Un péndulo simple tiene un periodo de 0,5 segundos y una amplitud de oscilación de 0,1 radianes. Después de 10 oscilaciones completas, su amplitud se ha reducido a un 2% de la inicial.

1. Calcular la constante de amortiguamiento γ, y el pseudoperiodo.
2. Suponiendo que el movimiento se inicia con la máxima amplitud y velocidad inicial cero, escribir su expresión analítica.
3. Calcular el factor Q indicando si se trata de un buen o mal oscilador.

Junio-04

IV-20 Una partícula de masa m realiza un movimiento descrito por las ecuaciones: $x = A\cos(wt + \varphi_1)$; $y = B\ \text{sen}\ (wt + \varphi_2)$;.
Calcular:

1) La fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula.
2) La ecuación de la trayectoria, indicando que tipo de curva es.
3) Justificar si la partícula describe o no describe un M.A.S.

DATOS: $A = 0{,}6$ m $B = 0{,}5$ m, $w = 3$ rad.s^{-1}, $\varphi_1 = \pi/3$, $\varphi_2 = \pi/2$ y $m = 20$ g.
En caso de no describir un M.A.S. con los valores dados,

4) determinar la relación que debe existir entre φ_1 y φ_2 para que la partícula describa un M.A.S.

Septiembre-04

IV-21 Una partícula de masa M se mueve siguiendo un movimiento vibratorio, de forma que el logaritmo neperiano del cociente entre dos amplitudes consecutivas (decremento logarítmico) vale π siendo k la constante elástica. Obtener:

1) El tiempo de relajación (constante de tiempo), es decir, el tiempo que tarda la amplitud en reducirse en un factor igual a e;
2) El coeficiente de amortiguamiento.
3) El factor de calidad.
4) La amplitud y la fase del movimiento amortiguado, siendo en $t = 0$, la elongación x_0 y la velocidad nula.

Aplicación numérica: $M = 1$ Kg; $k = 2$ N/m; $x_0 = 0.5$ m.

Septiembre-05

IV-22 Una partícula de masa m se mueve alrededor del origen de coordenadas sometida a la acción simúltanea de dos movimientos armónicos simples de ecuaciones:
$X = A\ \text{Sen}\ wt$; $Y = B\ \text{Sen}\ (wt+\varphi)$
Siendo A y B las amplitudes obtener:

1) El valor de φ para que la velocidad de la partícula sea constante; y como han de ser A y B para que V = cte.
2) El valor de la energía cinética de la partícula en función de A, B, m y w.
3) El valor de la energía potencial de la partícula en función de los mismos datos que en el apartado 2).

Junio-06

Junio 2007.

2. a) Obtened la superposición $x = x_1 + x_2$ de los dos M.A.S. :

$$\begin{cases} x_1 = 2.5\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \quad cm \\ x_2 = 3.5\,sen(\omega t + \frac{\pi}{3}) \quad cm \end{cases}$$

expresándola en función de ω. Supuesto que los dos M.A.S. están descritos por una partícula de masa m colocada en el extremo de un resorte y que no hay rozamiento, b) calculad la energía mecánica total del sistema.
DATOS: para la parte b) $\omega = 12$ rad.s^{-1} y $m = 65$ g.

---

a) $x_1 = 2'5\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm)

$x_2 = 3'5\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ (cm)

ó $\sin\theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$x_{TOT} = A_{TOT}\cos(\omega t + \delta_{TOT}) = A_{TOT}\cos(\omega t)\cos\delta_{TOT} - A_{TOT}\sin(\omega t)\sin\delta_{TOT}$

$x_{TOT} = x_1 + x_2 = 2'5\boxed{\cos(\omega t)}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2'5\boxed{\sin(\omega t)}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3'5\boxed{\sin(\omega t)}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) +$

$+ 3'5\boxed{\cos(\omega t)}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Identificando: $A_{TOT}\cos\delta_{TOT} = 2'5\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 3'5\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

$-A_{TOT}\sin\delta_{TOT} = -2'5\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 3'5\cdot\frac{1}{2}$ (2)

$A_{TOT} \simeq 4'8$ cm $\qquad \delta_{TOT} = -3'7\cdot10^{-3}$ rad $\simeq 0$

$\boxed{x_{TOT} = 4'8\cos(\omega t)}$ (cm)

b) $m = 0'065$ kg ; $\omega = 12$ rad/s

$E_{mec} = \frac{1}{2}kA_{TOT}^2 = \frac{1}{2}\omega_o^2 m\left(4'8\cdot10^{-2}\right)^2 = 0'0108$ J $= 10'8$ mJ.

EXAMEN FINAL DE FÍSICA II

26 de junio 2009

2º) Dados los dos M.A.S. siguientes:

$$x_1 = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \quad cm \quad y$$

$$x_2 = B\, sen\left(\frac{\pi}{4} + \omega t\right) \quad cm,$$

calculad, a) la diferencia de fase del segundo M.A.S. con respecto al primero. Sabiendo que $A = \sqrt{3}\ cm \quad y \quad B = \sqrt{2}\ cm$, b) obtened la expresión de la amplitud y de la fase del M.A.S. resultante de la superposición $x = x_1 + x_2$. Por último, c) ¿cuál es la diferencia de fase entre x y x_1?

a) $x_1 = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm)

$x_2 = B\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm) $= B\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = B\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{12}}$$

b) $A = \sqrt{3}$ cm $= \sqrt{3}\cdot 10^{-2}$ (m)

$B = \sqrt{2}$ cm $= \sqrt{2}$ cm $= \sqrt{2}\cdot 10^{-2}$ (m)

$x_{TOT} = A_{TOT}\cos(\omega t + \delta_{TOT}) = A_{TOT}\cdot\cos(\omega t)\cos(\delta_{TOT}) - A_{TOT}\cdot\sin(\omega t)\sin(\delta_{TOT})$

$x_{TOT} = x_1 + x_2 = \dots$

Identificando:

$A_{TOT}\cdot\cos\delta_{TOT} = \frac{5}{2}$; $A_{TOT}\cdot\sin\delta_{TOT} = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$

$$\boxed{x_{TOT} = 2'5\cos(\omega t - 0'017\pi)} \text{ (cm)}$$

c) $\boxed{\Delta\varphi = \delta_{TOT} - \frac{\pi}{6} = -0'017\pi - \frac{\pi}{6} = 0'1095\pi}$ (rad)

$\boxed{IV.12}$ $m = 10gr = 0'01\ kg$

a) $X = A\cdot\cos(\omega t)$

$Y = B\cdot\cos(\omega t + \varphi)$

Se obtiene el mismo resultado si los M.A.S. perpendiculares son:

$X = A\cdot \text{sen}(\omega t)$

$Y = B\ \text{sen}(\omega t + \varphi)$

Se desarrolla $Y = B\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ teniendo en cuenta que $\cos(\omega t) = \frac{X}{A}$:

$$Y = B\cdot\cos(\omega t)\cdot\cos\varphi - B\cdot\text{sen}(\omega t)\cdot\text{sen}\,\varphi =$$

$$= B\cdot\cos(\omega t)\cdot\cos\varphi - B\cdot\sqrt{1-\cos^2(\omega t)}\cdot\text{sen}\,\varphi =$$

$$= B\cdot\frac{X}{A}\cdot\cos\varphi - B\cdot\sqrt{1-\frac{X^2}{A^2}}\cdot\text{sen}\,\varphi$$

$$Y - \frac{B}{A}\cdot\cos\varphi\cdot X = -B\cdot\sqrt{1-\frac{X^2}{A^2}}\cdot\text{sen}\,\varphi$$

Elevando al cuadrado:

$$Y^2 + \left(\frac{B}{A}\cos\varphi\right)^2\cdot X^2 - \frac{2B\cdot\cos\varphi}{A}\cdot XY = B^2\left(1-\frac{X^2}{A^2}\right)\cdot\text{sen}^2\varphi$$

Dividiendo entre B^2 y organizando términos:

$$\boxed{\frac{Y^2}{B^2} + \frac{X^2}{A^2} - \frac{2XY}{A\cdot B}\cos\varphi = \text{sen}^2\varphi}$$

Identificando términos:

$$B^2 = 2\cdot 10^{-2} \Rightarrow B = 0'1\cdot\sqrt{2}$$

$$A^2 = 10^{-2} \Rightarrow A = 0'1$$

$$\frac{-2\cos\varphi}{AB} = \frac{1}{10^{-2}} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} +135^\circ \approx \frac{3\pi}{4} \\ -135^\circ \approx \frac{-3\pi}{4} \end{cases}$$

Así pues:

$$\boxed{\begin{array}{ll} X = 0'1\cdot\cos(\omega t) & (m) \\ Y = 0'1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(\omega t \pm \frac{3\pi}{4}\right) & (m) \end{array}}$$

Como ya hemos dicho se obtiene lo mismo con "sen".

b) Si $\varphi = 0^\circ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = A\cdot\cos(\omega t) \\ y = B\cdot\cos(\omega t)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = \frac{B}{A}\cdot x}$ (m)

El desfase entre ellas debe ser 0

c) $x = A\cdot\cos(\omega t) = 0'1\cdot\cos(\omega t)$

$\dot{x} = -0'1\cdot\omega\cdot\operatorname{sen}(\omega t)$

$$E_{mec} = E_{c_{max}} = \frac{1}{2}m\cdot V_{max}^2 = \frac{1}{2}\,0'01\cdot(0'1\cdot\omega)^2 = 0'3 \text{ Julios} \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{0'3\cdot 2}{0'01\cdot(0'1)^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0'3\cdot 2}{10^{-2}\cdot 10^{-2}}} = 77'46 \text{ rad/seg}$$

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 12'33 \text{ Hz}}$$

2.- Un péndulo simple de masa m y longitud l puede oscilar libremente. Sin embargo, debido al rozamiento con el aire, la frecuencia de oscilación del péndulo se hace un 5% menor que su frecuencia sin amortiguamiento.

a) Escriba la expresión analítica del movimiento del péndulo amortiguado en función de los datos anteriores.
b) ¿Cuánto se reduce la amplitud del movimiento en un ciclo?
c) ¿Cuánto vale el factor de calidad?

SEPT. 2008

******

$\boxed{\text{IV. 9}}$ $m = 0'03$ kg

Ver gráfica.

a) $x(t) = A\cdot e^{-\gamma t}\cdot \text{sen}(\omega t + \alpha) = A\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot \text{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\cdot t + \alpha\right)$

Los dos primeros máximos están separados T segundos, tal que: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0'7$

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t+T)} = e^{+\frac{T}{\tau}} = e^{+\gamma\cdot T} = e^{\gamma\cdot 0'75} = \frac{8}{6'4} \Rightarrow$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\ln\left(\frac{8}{6'4}\right)}{0'75} = 0'2975 \text{ seg}^{-1}}$$

Por otro lado:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0'75 \text{ seg} \Rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = 0'75 \text{ seg} \Rightarrow \text{Operando: } \boxed{\omega_0 = 8'383 \text{ rad/seg}}$$

b) $k = m\cdot\omega_0^2 = 2'108 \text{ kg}\cdot\text{seg}^{-2}$

$c = 2m\cdot\gamma = 0'01785 \text{ kg}\cdot\text{seg}^{-1}$

c) $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = 14'089}$

d) Sabemos que $x(t=0) = 0 = A\cdot\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \alpha = 0$ ó $\alpha = \pi \Rightarrow$

$$\boxed{V(t=0)} = \dot{x}(t=0) = A\cdot e^{-\gamma t}\cdot\left[-\gamma\cdot\text{sen}(\omega t + \alpha) + \omega\cdot\cos(\omega t + \alpha)\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= \boxed{\pm A\cdot\omega} \text{ (m/s)}$$

Debemos determinar A:

$$x\left(t = \frac{T}{4} = \frac{0'75}{4}\right) = A\cdot e^{-\gamma\cdot\frac{0'75}{4}}\cdot 1 = 8 \text{ cm} \Rightarrow A = \frac{8}{e^{-0'2975\cdot\frac{0'75}{4}}} = 8'459 \text{ cm}$$

$$\boxed{V(t=0) = \pm A\cdot\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 70'865 \text{ cm/seg}}$$

$\boxed{IV.19}$ DATOS:

$T_0 = 0'5$ segundos ≡ ¡¡OJO!! Sabemos que este dato es T_0 y no T porque en el apartado 1) nos piden el pseudoperiodo T.

Después de 10 oscilaciones su amplitud se ha reducido a un 2% de la inicial.
Amplitud de la oscilación de 0'1 rad.

SOLUCIÓN

1) ¿ γ y T ?

$T_0 = 0'5$ seg $\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 4\pi}$ rad/seg

Como $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{(4\pi)^2 - \gamma^2} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{(4\pi)^2 - \gamma^2}}}$ Ec.(1)

Por otro lado:

$$\frac{x(t+10T)}{x(t)} = e^{-\gamma \cdot 10 \cdot T} = 0'02 \Rightarrow -10 \cdot \gamma \cdot T = \ln 0'02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma \cdot T = 0'3912} \text{ Ec.(2)}$$

Operando en Ec.(1) y Ec.(2) obtenemos:

$\gamma = 0'78$ seg^{-1}

$T = 0'501$ seg

2) ¿ $\theta(t)$?

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \theta_0 \, e^{-\gamma t}\left[-\gamma \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)\right]$$

Como el movimiento se inicia con la máxima amplitud y velocidad inicial nula:

$$\theta(t=0) = +0'1 \text{ rad} = \theta_0 \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$w(t=0) = 0 = \theta_0 \cdot \left[-\gamma \cdot \operatorname{sen} \varphi + \omega \cdot \cos \varphi \right] \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{2\pi}{\gamma \cdot T} = 16'06 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = 86'437^\circ \cong 1'5 \text{ rad}}$$

De la ec. anterior: $\boxed{\theta_0 = 0'1002 \text{ rad}}$

Así pues:

$$\boxed{\theta(t) = 0'1002 \cdot e^{-0'78 \cdot t} \cdot \operatorname{sen}(12'54\, t + 1'5) \text{ (rad)}}$$

3) $\boxed{Q} = \dfrac{\omega_0}{2\gamma} = \dfrac{2\pi}{2\gamma \cdot T_0} = \dfrac{\pi}{\gamma \cdot T_0} = \dfrac{\pi}{0'78 \cdot 0'5} = \boxed{8'055}$

Es un mal oscilador porque para que sea buen oscilador debe ser $Q \gg 1$.

$\boxed{\text{IV}.21}$ masa = $M = 1\,\text{kg}$

$\delta = \pi$

$K = 2\,\text{N/m}$

$X_0 = 0'5\,\text{m}$

<u>Solución:</u>

1) El decremento logarítmico es:

$$\delta = \pi = \gamma \cdot T = \frac{T}{\tau} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{T}{\pi}} \text{ Ec.(1) ó } \boxed{T = \tau \cdot \pi}$$

Por otro lado: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{K}{M} - \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Teniendo en cuenta la ec. 1 y que $\frac{K}{M} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\tau \cdot \pi}\right)^2 = 2 - \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \frac{4}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^2} = 2 \Rightarrow \tau^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{\tau = 1'5811}\,(\text{seg})$$

2) $\gamma = \frac{1}{\tau} = 0'6325\ (\text{seg}^{-1})$

3) $$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{K}{M}}}{2\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 0'6325} = 1'118}$$

4) $x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$ (m)

$v(t) = A \cdot e^{-\gamma t}\left[-\gamma \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)\right]$ (m/s)

siendo: $\gamma = 0'6325\ \text{seg}^{-1}$; $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{M} - \gamma^2} = \sqrt{2 - (0'6325)^2} = 1'265}\ \text{rad/seg}$

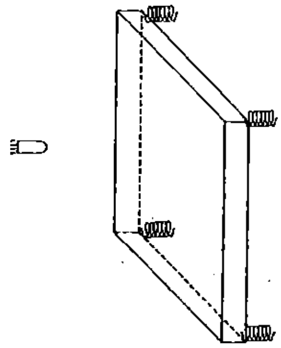
Como $v(t=0) = 0 \Rightarrow \text{tg}\,\varphi = \frac{\omega}{\gamma} \Rightarrow \boxed{\varphi = \text{arctg}\left(\frac{\omega}{\gamma}\right) = 63'43^\circ \cong 1'11\ \text{rad}}$

Como $x(t=0) = X_0 = 0'5 = A \cdot \text{sen}\,\varphi \Rightarrow \boxed{A = \frac{0'5}{\text{sen}\,\varphi} = 0'559}\,(\text{m})$

Septiembre 2006.

2) Un tablero de masa **M** está suspendido en posición vertical por 4 muelles de masa despreciable y constante elástica **K**. Se dispara una bala de masa **m** sobre el tablero de modo que la bala se incrusta en él y ambos comienzan a realizar un movimiento oscilatorio. Suponiendo despreciable la fricción con el aire durante el movimiento determinar:

a) ecuación diferencial del movimiento del tablero después del impacto y frecuencia natural de oscilación,



Se mide la frecuencia real de oscilación y se observa que es un 2% menor que la frecuencia calculada debido a la fricción con el aire. En esta situación se pide:

b) coeficiente de amortiguamiento y ecuación del movimiento teniendo en cuenta la fricción con el aire,

c) tiempo que tardará el tablero en disminuir su amplitud de oscilación a la mitad de la inicial.

Solución:

a) Los 4 muelles son equivalentes a 1 muelle con constante elástica:

$\boxed{K_{TOT} = 4K}$ (N/m) (Ya que están en paralelo)

Una vez que la bala se incrusta en el tablero la ecuación diferencial es:

$$M_{TOT} \cdot a = -K_{TOT} \cdot X \Rightarrow M_{TOT} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -K_{TOT} \cdot X \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K_{TOT}}{M_{TOT}} \cdot X = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{4K}{M+m} \cdot X = 0}$$ Ec. diferencial.

siendo: $\omega_0 = \sqrt{\frac{4K}{M+m}} \Rightarrow \boxed{\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{K}{M+m}}}$ (Hz)

b) $\omega = 0'98 \cdot \omega_0$

Como $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \boxed{\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} = \omega_0 \sqrt{1-(0'98)^2} = \omega_0 \cdot 0'199}$ (seg^{-1})

La ec. diferencial del movimiento amortiguado es:

$$M_{TOT} \cdot a = -C \cdot V - K_{TOT} \cdot X \Rightarrow \ddot{X} + \frac{C}{M_{TOT}} \dot{X} + \frac{K_{TOT}}{M_{TOT}} \cdot X = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{X} + 2\gamma \cdot \dot{X} + \omega_0^2 X = 0}$$ Ec. diferencial.

siendo: $\gamma = 0'199 \cdot \omega_0$ (seg^{-1})

$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{M+m}}$ (rad/seg)

Su solución es:

$\boxed{x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)}$ (m)

c) $0'5 = e^{-\gamma t} \Rightarrow t = \dfrac{\ln(0'5)}{-\gamma} = \boxed{\dfrac{\ln(0'5)}{-0'(5')\,\omega_0}}$ (seg)

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{4K}{M+m}}}$ (rad/s)

IV - 20

m: 0'02 kg.

$x = A\cos(\omega t + \varphi_1) = 0'6\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$

$y = B\sin(\omega t + \varphi_2) = 0'5\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) = 0'5\cos(3t)$

1) 1ª forma.

$$F = m\,a = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = m\frac{d^2(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j})}{dt^2} = m\left[-0'6\cdot 3^2\cdot\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)\vec{i} - 0'5\cdot 3^2\cos(3t)\right] =$$

$$= -0'18\left[0'6\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)\vec{i} + 0'5\cos(3t)\right] \quad (N)$$

2ª forma: Todo movimiento armónico simple tiene una fuerza inversamente proporcional a su desplazamiento:

$$\vec{F} = -k\vec{r}(t) = -k(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}) = -\omega^2 m\left(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}\right)$$

2) $y = 0'5\cos(3t) \Rightarrow \cos 3t = \dfrac{y}{0'5} \Rightarrow \sin(3t) = \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{(0'5)^2}} = \sqrt{1 - 4y^2}$

$x = 0'6\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) = 0'6\cos(3t)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 0'6\sin(3t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Quedando: $\boxed{x^2 + 1'44\,y^2 - 1'2\,x\,y = 0'27}$

3) No describe un M.A.S, porque las únicas formas en las que una masa m sometida a dos M.A.S. perpendiculares entre sí, describe un M.A.S., es cuando el desfase entre ellas es 0 ó π, y en este caso es $\frac{\pi}{3}$.

4) $x = A\cos(\omega t + \varphi_1)$

$y = B\cos\left(\omega t + \varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right)$

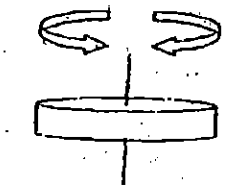
Para describir M.A.S.:

$\varphi_1 - \left(\varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$

$\varphi_1 - \left(\varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right) = \pi \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

2) Un disco de *momento de inercia* I_0 oscila, entorno a su eje, con *un periodo* T, debido al par recuperador proporcional al ángulo girado y producido por un resorte de *constante* K.

1. escribid la ecuación dinámica del movimiento,
2. determinad la constante de recuperación del muelle.
3. Se observa que debido al rozamiento con el aire al cabo de **5 oscilaciones completas,** la amplitud de oscilación se hace e veces, *más pequeña*, ¿en qué porcentaje este rozamiento modifica el periodo de la oscilación?.



4. Determinad el cociente entre la energía perdida en un periodo completo (de máximo de amplitud a máximo de amplitud) y la energía máxima del oscilador en dicho periodo.

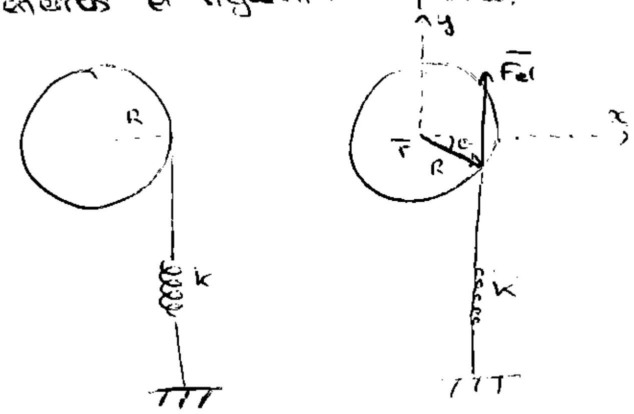
DATOS: I_0 y T; *e es la base de los logaritmos neperianos.*

SEPT 2007

I_0

T

a) Tenemos el siguiente esquema:



$\bar{M} = I\bar{\alpha}$

$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$

$\bar{M} = \left(R\cos\theta\,(\bar{i}) + R\sin\theta\,(-\bar{j})\right) \times \left(kR\sin\theta\,(\bar{j})\right) =$

$= \bar{k} \cdot R^2 \cos\theta \sin\theta$ (N/m)

Para pequeñas oscilaciones, $\sin\theta \simeq \theta$
$\cos\theta \simeq 1$.

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{kR^2}{I_0}\theta = 0}$$ Ecuación diferencial del movimiento

La solución de esta ecuación es:

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (rad) siendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{kR^2}{I_0}}$ (rad/s)

b) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{kR^2}{I_0}} \Rightarrow \boxed{k = \frac{I_0}{R^2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$ (N/m)

c) Si en 5 oscilaciones la amplitud se hace e veces más pequeña:

$e^{-\gamma T_a} = \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{\gamma\, 5 T_a = 1}$ (1) $\longrightarrow$

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T_a^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} - \frac{1}{25 T_a^2}$

Operando: $\boxed{T_a = 1'0005\, T}$ (seg) El periodo aumenta en un 0'05%.

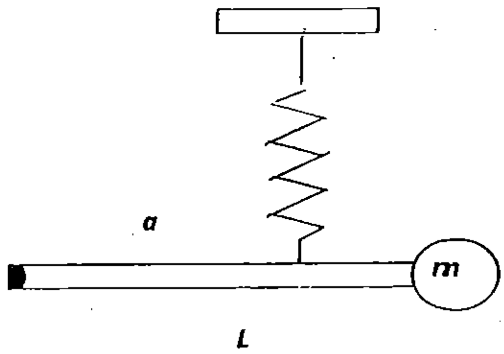
d)

$$\frac{E(t) - E(t+T_a)}{E_{max}} = \left\{ E_{max} = E(t) \right\} = 1 - \frac{E(t+T_a)}{E(t)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{la energía está} \\ \text{relacionada con la} \\ \text{amplitud al cuadrado} \end{array} \right\} = 1 - \left[\frac{\theta_0 e^{-\gamma (t+T_a)}}{\theta_0 e^{-\gamma t}} \right]^2$$

$$= 1 - e^{-2\gamma T_a} = \left\{ \gamma = \frac{1}{5 T_a} \right\} = 1 - e^{-\frac{2}{5}} = 0'3297.$$

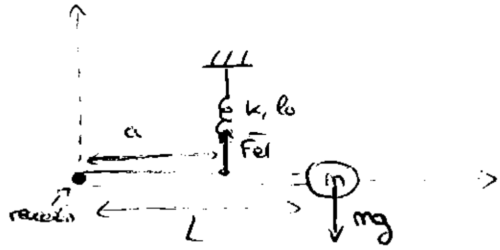
Junio 2010.

2º) Sea el sistema de la figura. Una barra sin masa, de longitud *L*, con una masa *m* en uno de sus extremos y que puede girar libremente alrededor del otro, está suspendida horizontalmente mediante un muelle, de constante ***k***, longitud natural ℓ_0 y masa despreciable, fijado verticalmente a una distancia , ***a***, del centro de giro.



1. Determinar la longitud del muelle para que la barra quede suspendida horizontalmente
2. Si la barra se gira un ángulo θ_0 , muy pequeño, y después se deja oscilar libremente¿ cuál sería la fuerza ejercida por el muelle sobre la barra?
3. Determinar la ecuación dinámica del movimiento, expresar θ en función del tiempo
4. Si después de 10 oscilaciones la amplitud inicial se redujese a la mitad, determinar la constante de amortiguamiento del péndulo

a) Para que esté en equilibrio: $\bar{M} = I\bar{\alpha} = \bar{0}$

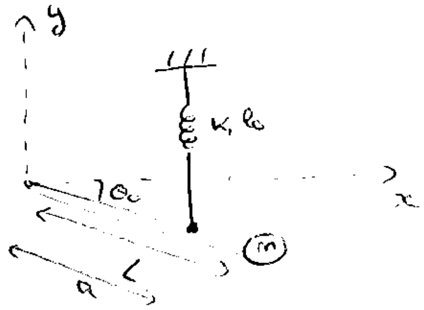


$\bar{M} = \bar{r}\times\bar{F} = \left[L\bar{i} \times Mg(-\bar{j})\right] + \left[a\bar{i} \times kd\,\bar{j}\right] + 0\times \bar{R}_{reacción} =$

↳ Lo que se estira el muelle respecto de ℓ_0.

$= -MgL\,\bar{k} + kda\,\bar{k} = \bar{0} \Rightarrow d = \frac{MgL}{a} \Rightarrow$ Por tanto la longitud del muelle es: $\boxed{\ell = \ell_0 + d}$ (m)

b)



$$\boxed{\bar{F}_{el} = k(d + a\sin\theta_0)\,\bar{j}\ (N)}$$

c) $\bar{M} = I\bar{\alpha}$

$\bar{M} = \bar{r}\times\bar{F} = \left[(L\cos\theta\,\bar{i} + L\sin\theta\,(-\bar{j}))\times Mg(-\bar{j})\right] + \left[(a\cos\theta\,\bar{i} + a\sin\theta\,(-\bar{j}))\times k(d+a\sin\theta)\,\bar{j}\right] =$

$= -MgL\cos\theta\,\bar{k} + k(d+a\sin\theta)\,a\cos\theta\,(\bar{k}) = \bar{k}\cos\theta\left[k(d+a\sin\theta)a - MgL\right] = \left\{\begin{array}{l}\text{Del apartado 1}\\ d = \frac{MgL}{a}\end{array}\right\} =$

$= \bar{k}\cos\theta\left[\frac{MgL}{a}a + ka^2\sin\theta - MgL\right] = ka^2\sin\theta\cos\theta\,\bar{k}$

$$I\bar{\alpha} = ML^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,(-\bar{k})$$

Así pues: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{ka^2}{ML^2}\sin\theta\cos\theta = 0 \rightarrow$ Para pequeñas oscilaciones $\left\{\begin{array}{l}\sin\theta \simeq \theta\\ \cos\theta \simeq 1\end{array}\right.$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{a^2}{L^2}\theta = 0}$$ Ecuación diferencial del M.A.S.

Su solución es: $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ rad.

θ_0 dato del enunciado.

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \frac{a^2}{l^2}} = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}} \ (\text{rad/s})$$

4. $$e^{-\gamma 10 T_a} = 0'5 \Rightarrow \boxed{T_a = \frac{\ln(1/2)}{-10\gamma} = \frac{\ln(2)}{10\gamma}} \ (s^{-1})$$

Por otro lado:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 = \left(\frac{k}{m}\frac{a^2}{l^2}\right) - \gamma^2$$

$$\left(\frac{20\pi\gamma}{\ln(2)}\right)^2 = \frac{k}{m} \cdot \frac{a^2}{l^2} - \gamma^2 \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{a}{l}}{\sqrt{1 + \frac{400\pi^2}{\ln^2(2)}}}} = 0'011\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{a}{l} \ (sg^{-1})$$

PROB 2 SEPT 2009

2º) Cuando colgamos un objeto de 200 g de un muelle suspendido verticalmente, se observa que la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas de éste es de 2 Hz, con una constante de tiempo de 10 s. Hacemos oscilar hacia arriba y hacia abajo el extremo superior del muelle, con un movimiento armónico simple, de amplitud 1 mm.

a) Determinar el valor de la constante elástica, *K*, del muelle y de la constante de amortiguamiento, λ, del sistema. ($\lambda = C$)

b) ¿Cuál deberá ser la frecuencia de las oscilaciones de dicho extremo superior para que sea máxima la amplitud de las oscilaciones del objeto? ¿Cuánto valdrá dicha amplitud máxima?

c) ¿Qué potencia media se disipa en el amortiguamiento?

DATOS:

$m = 0'2$ kg

$f_a = 2\,Hz \Rightarrow \omega_a = 4\pi = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\tau = 10\,seg \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\tau} = 0'1\ seg^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{\omega_0} = \sqrt{(4\pi)^2 + \gamma^2} = \sqrt{16\pi^2 + 0'01} = 12'566 = \boxed{4'000126649\,\pi}$ rad/s

$X_{st} = 10^{-3} \cdot \cos(\Omega t) \Rightarrow a_{ext} = -10^{-3} \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t) \Rightarrow F_{ext} = -m \cdot 10^{-3} \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t) \Rightarrow \boxed{F_0 = -m \cdot 10^{-3} \cdot \Omega^2}$

a) $K = m \cdot \omega_0^2 = 0'2 \cdot 4'000126649 \cdot \pi = 0'8\pi$ N/m

$\lambda = 2m \cdot \gamma = 2 \cdot 0'2 \cdot 0'1 = 0'04$ kg/seg

b) $\boxed{\Omega} = \Omega_{resonancia} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \approx \sqrt{16\pi^2 - 2 \cdot 0'01} = 12'5655 \approx \boxed{3'9997466689\pi \text{ rad/seg}}$

La solución en régimen permanente de un mov. forzado viene dada por:

$x(t) = A \cdot \cos(\Omega t - \delta)$

siendo: $\boxed{A} = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} = \dfrac{-10^{-3} \cdot \Omega^2}{2'512418542} = \dfrac{-(3'9997466689 \cdot \pi)^2}{2512'418542} = -0'062845 \approx -0'02\pi$ (m

He utilizado todos los decimales, pero sin utilizarlos sale: 2'513115

$\boxed{A_{max} \approx 62'84\ mm}$

c) $\boxed{P} = F \cdot v = F_0 \cdot \cos(\Omega t) \cdot (-A \cdot \Omega \cdot sen(\Omega t - \delta)) = m \cdot 10^{-3} \cdot \Omega^2 \cdot A \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t) \cdot sen(\Omega t - \delta) =$

$= 0'2 \cdot 10^{-3} \cdot (4\pi)^3 (-0'062845) \cdot \cos(\Omega t)(sen(\Omega t) \cdot \cos\delta - \cos(\Omega t) sen\delta) =$

$= +0'025 \cdot (\cos^2(\Omega t) \cdot sen\delta - \cos(\Omega t) \cdot sen(\Omega t) \cdot \cos\delta) = 0'025 \cdot sen\delta \cdot \cos^2(\Omega t) - 0'025 \cdot \frac{\cos\delta}{2} \cdot sen(2\Omega t)$

Esta era la potencia instantánea pero la media es: $\boxed{P_m} = \dfrac{0'025 \cdot sen\delta}{2} = \left\{ tg\delta = \dfrac{2\gamma\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)} \approx \infty \Rightarrow \delta \approx \frac{\pi}{2} \right\} = \boxed{= 0'0125}$ W

$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$

$\langle sen(2\omega t) \rangle = 0$

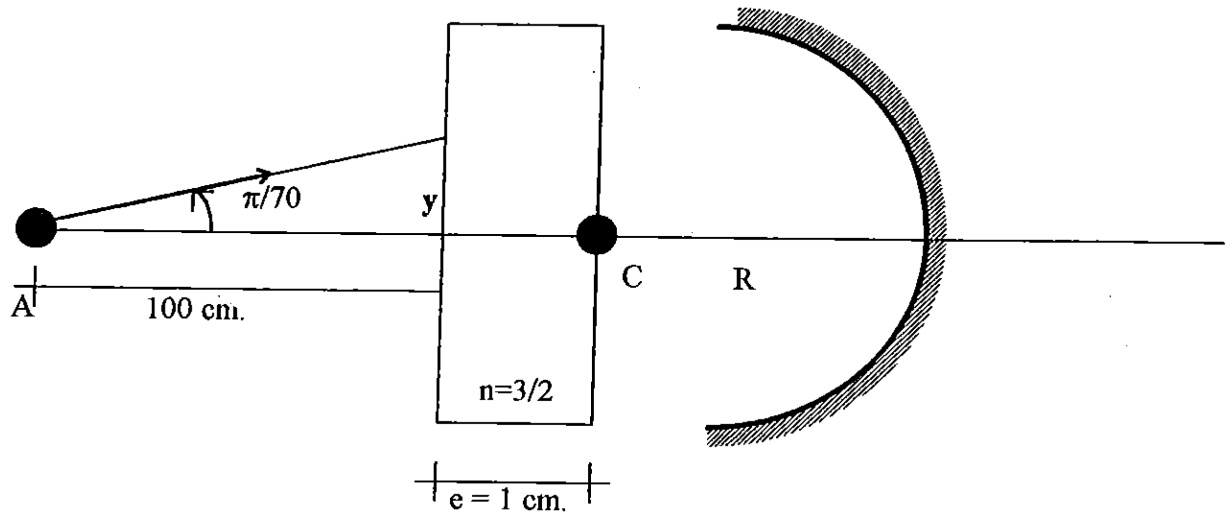
OPTICA

III-1 Un rayo de luz procedente de un punto A del eje óptico con el que forma un ángulo de $\pi / 70$ radianes, incide a una altura **y** sobre una lámina de caras paralelas situada en el aire, como se indica en la figura. El rayo emergente se refleja en un espejo cóncavo de radio R = 10 cm. cuyo centro de curvatura se encuentra en C. Siendo el espesor de la lámina e = 1 cm. y su índice de refracción n = 3/2, obtener:

1°) La marcha del rayo.
2°) La matriz de transferencia de la primera cara.
3°) La matriz de desplazamiento.
4°) La matriz de transferencia de la segunda cara.
5°) La matriz de transferencia de la lámina.
6°) La imagen del punto objeto A que, está a 100 cm. de la primera cara de la lámina, después de reflejarse en el espejo.

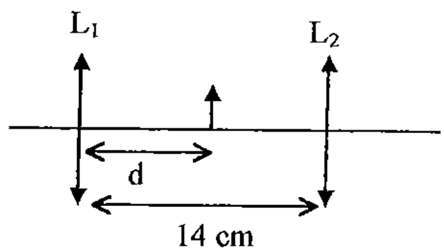
Considerando únicamente la lámina de caras paralelas obtener:

7°) La longitud de onda de la luz para que se produzca en ella un mínimo por interferencia de reflexión, suponiendo que la incidencia es normal a la cara de la lámina.



Junio-95

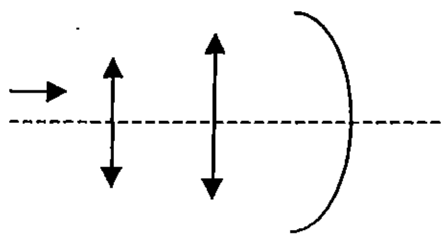
III-2 Se tienen dos lentes convergentes iguales L_1 y L_2 situadas a **14 cm** una de otra según se indica en la figura. Se sitúa un pequeño objeto en el segmento de eje óptico comprendido entre ellas y a una distancia **d** de L_1. Se sabe que a) cuando se tapa L_1, la imagen producida por L_2 se obtiene **6 cm** a la derecha de L_1 y b) cuando se tapa L_2 la imagen producida por L_1 se obtiene **40 cm** la la izquierda de L_1. Calcúlese:



1) La distancia d.
2) La potencia de las lentes.
3) Hágase una marcha de rayos de los casos a) y b).
4) Indíquese la naturaleza de las imágenes obtenidas en los casos a) y b) (derecha o invertida; real o virtual).

Junio-98

III-3 Se considera el sistema de lentes de la figura, formado por dos lentes convergentes de distancias focales **la primera de 10 cm y la segunda de 5 cm.** Si paralelamente el eje óptico y a **3mm** del mismo se envía un haz de luz **sobre la primera lente.**



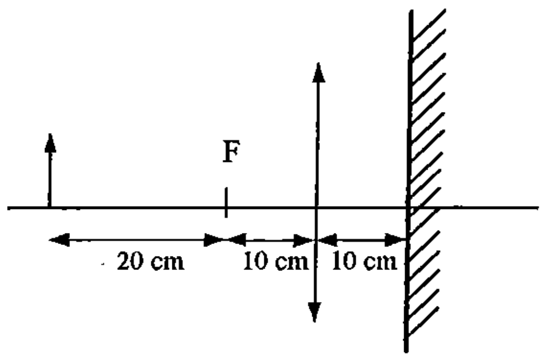
a) ¿Cuál tendría que ser la separación entre las lentes para que a la salida del sistema el haz fuera paralelo al eje óptico?.

b) ¿A qué distancia del eje saldría el haz?

c) Si el haz incide sobre un espejo esférico cóncavo de radio **100 cm** situado a **75 cm de la segunda lente** ¿dónde cortaría el haz reflejado al eje óptico?

Septiembre-98

III-4 Se coloca una lente convergente de distancia focal **f = 10 cm** y a continuación un espejo plano según se observa en la figura. El objeto tiene una altura de **15 mm** y está a **30 cm** de la lente convergente. Se pide:



c) Diagrama de rayos mostrando la imagen final (formada a través de la lente y de la posterior reflexión por el espejo)

d) La imagen final ¿es real, virtual, derecha o invertida.

c) Obtener la altura de la imagen final y la distancia a la que está del espejo.

Febrero-99

III-5 a) ¿A qué distancia de un objeto situado a 18 cm de una pantalla hay que situar una lente convergente de 4 cm de distancia focal para que se forme una imagen del objeto sobre dicha pantalla?

b) Determinar el aumento obtenido y las características de la imagen.

Si en lugar de pantalla situáramos el ojo de un observador que solo ve imágenes virtuales,

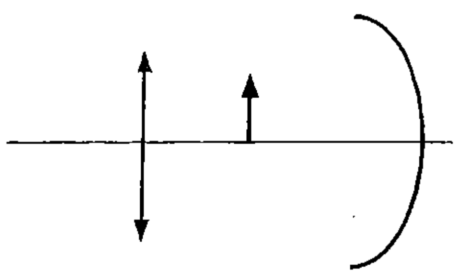
c) ¿dónde tendríamos que situar la lente para conseguir el mismo aumento?.

d) En ambos casos trazar la marcha de rayos.

Junio-99

III-6 Un sistema óptico, está formado por una lente de **P = 3** dioptrías y un espejo esférico de **r = 80 cm** situados a **170cm** el uno del otro.

Se coloca un objeto de **Y = 2 cm** a **50 cm** de la lente (y **120 cm** del espejo).



a) Mediante el dibujo de la marcha de rayos determinar cuantas imágenes se forman.

b) Calcular analíticamente la posición de las imágenes.

c) Caracterizar las imágenes indicando:

1) su tamaño,
2) si son derechas o invertidas,
3) si son reales o virtuales.

Septiembre-99

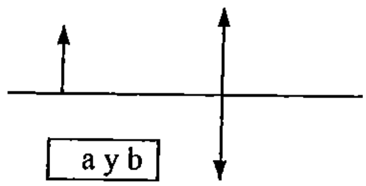
III-7 El diámetro del haz de luz de un láser es de 10mm (superficie del frente de ondas). Se pretende reducir la superficie del haz sin perder su paralelismo; para ello se dispone de dos lentes convergentes de 5 y 6.25 dioptrías respectivamente.

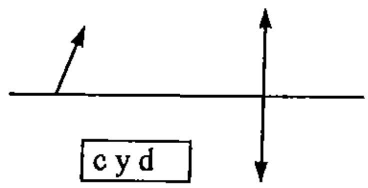
a) Indicar gráficamente como habría que colocar las lentes (orden y posición) y trazar la marcha de rayos.
b) Calcular la superficie del haz saliente.
c) Si la intensidad de los haces entrante y saliente es la misma, estimar el tanto por ciento de energía perdida en la superficie de las lentes por reflexión, tomando como patrón la energía del haz incidente.

Junio-00

III-8 Una barra de 4 cm de altura se encuentra situada perpendicularmente y sobre el eje óptico de una lente delgada convergente de 5 dioptrías, a 30 cm de la misma.

a) Dibujar la marcha de rayos.
b) Determinar a que distancia de la lente se forma la imagen, su tamaño y posición
c) Si el objeto se inclina 30° hacia la lente ¿dónde aparecerá la imagen, cual será su tamaño y que ángulo formará con el eje óptico?
d) Dibujar la marcha de rayos.



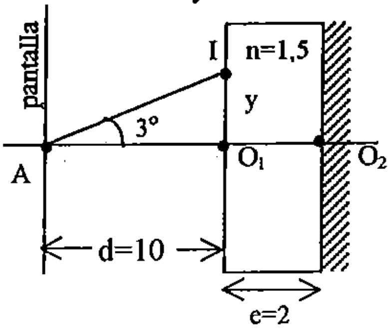


Septiembre-00

III-9 Un sistema está constituido por dos lentes: 1ª lente: planoconvexa $r_1 = 8$ cm, $n_1 = 1.55$, 2ª lente: planocóncava $r_2 = 12$ cm, $n_2 = 1.45$. Las dos lentes están colocadas a 18 cm una de la otra, con la lente planoconvexa a la izquierda y la lente planocóncava a la derecha.
Calcular a) dónde forma el sistema la imagen de un objeto colocado a 25 cm de la primera lente, b) el aumento conseguido por el sistema, c) justificar las características de la imagen obtenida (derecha, invertida, real o virtual) y d) trazar la marcha de rayos.
Ahora se ponen las dos lentes en contacto por su cara plana manteniendo el mismo eje óptico. Calcular e) la potencia de la lente compuesta así obtenida, f) a qué distancia s de la lente compuesta hay que colocar un objeto para conseguir un aumento $m = -2$, g) dibujar la marcha de rayos y h) Justificar las características de la imagen obtenida (derecha, invertida, real o virtual).

Junio-01

III-10 Una lámina de caras paralelas de espesor e = 2 cm. está formada por un material de índice de refracción n = 1'5 para la longitud de onda de trabajo. Una de las caras se comporta como un espejo perfecto. Desde un punto A, situado a la distancia d = 10 cm, como se indica en la figura, se envía un rayo de luz monocromática que forma un ángulo de 3° con la normal a la lámina.



a) La marcha del rayo hasta que es recogido por la pantalla.
b) La posición de A' de la imagen de A sobre la citada lámina.
c) Los puntos de incidencia (I) y emergencia (E), del rayo sobre la lámina.
d) La matriz de transformación de la citada lámina.
e) Aplique la citada matriz en la determinación del punto A'.

Septiembre-01

III-11 Se dispone de dos lentes delgadas, una convergente de P_1 **= 2 dioptrias** y otra divergente de P_2 **= -5 dioptrias** situada a la derecha de la anterior.

1) ¿Cuál debe ser la distancia entre ambas para que un haz de rayos paralelos al eje óptico, continúe paralelo después de pasar por las dos lentes?. Esta disposición de las lentes se mantiene el resto de los apartados.
2) Si inicialmente el haz dista **8 mm** del eje, ¿cuánto distará después de atravesar las dos lentes y qué sentido tendrá (derecho o invertido)?.
3) Dibujar los frentes de onda del haz **antes** (zona I), **en medio** (zona II) y **después** (zona III) de atravesar las dos lentes indicando la dependencia de la intensidad en cada zona con la distancia al foco derecho de la lente convergente (la luz va de izquierda a derecha).
4) Si se coloca un objeto a la izquierda y a **1 m** de la lente convergente, ¿Dónde formará la imagen?. Razónese.

Septiembre-01

III-12 Se ha tallado una lente delgada como la de la figura, con radios r_1 = 25 cm y r_2 = 50 cm respectivamente, en un material de $\varepsilon_r = 4$.

a) Calcular la potencia óptica de la lente e indicar si es convergente o divergente.

La lente se utiliza para unas gafas de sol por lo que se da un tratamiento de semiespejado que refleja una parte de la luz incidente. Si a una distancia de 10 cm se coloca un objeto determinar:

b) La marcha de rayos reflejado en la superficie semiespejada de la lente y la de la transmitida.
c) Características de ambas imágenes (posición, tamaño, virtual, real, derecha o invertida).

Junio-02

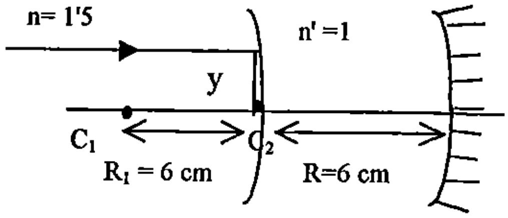
III-13 Sea un objeto de pequeña altura h, situado en el eje de una lente convergente de dos dioptrías.

a) Determinar el tamaño y distancia *a* al lente a la que se forma su imagen si el objeto se sitúa a 0.60 m de la misma, dibujar la marcha de rayos.
b) Determinar el tamaño y distancia *a* al lente a la que se forma su imagen si el objeto se sitúa a 0.40 de la misma, dibujar la marcha de rayos.
c) Si el objeto se desplazara desde el foco hacia el infinito a velocidad constante, v, calcular la velocidad con que se mueve el extremo de la imagen.

Septiembre-02

III-14 En el siguiente sistema óptico se pide:

a) Trazar la marcha del rayo hasta que corte al eje óptico.
b) Matrices del dióptrico, desplazamiento y espejo.
Utilizando las matrices:
c) Calcular "y" si y_1 = 0'5 cm (punto donde se refleja en el espejo).
d) Distancia del espejo al corte con el eje óptico.



Junio-02

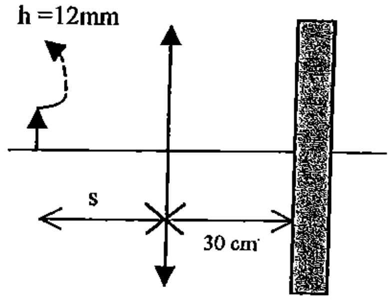
III-15 Un punto objeto está situado a la distancia AO = 8h de un espejo plano. Un haz de luz monocromática que parte de A forma con la normal al espejo un ángulo i = 0'05 rad. Calcule:

a) Distancia que debe desplazarse el espejo para que al reflejarse pase por P (P está por encima de A a h)
b) Angulo que debe girar el espejo para que pase por P.

Septiembre-02

III-16 El sistema óptico centrado de la figura está formado por una *lente delgada* de 5 dioptrías y una placa de vidrio de *caras paralelas* de 4 cm de espesor y n = 1.45, situada a 30 cm por detrás de la lente.

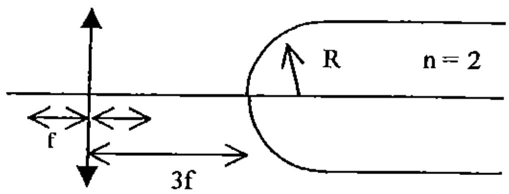
a) Calcular dónde se forma la imagen a través del sistema, y sus características (tamaño, posición, virtual o real) de un objeto de altura 12 mm y posición s = 25 cm.
b) Dibujar el diagrama de rayos.



Junio-03

III-17 Se ha tallado una lente delgada como la de la figura, con radios R_1 = 25 cm y R_2 = 50 cm en un material de $\varepsilon_r = 4$.

a) Calcular la potencia óptica de la lente. Se hace uso de esta lente para focalizar haces luminosos sobre un medio dieléctrico de índice de refracción n = 2, como se indica en la figura. Si se coloca un foco de luz en el foco de la lente, calcular:



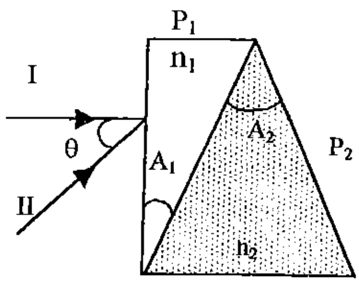
b) La posición de la imagen dentro del medio dieléctrico.
c) Si se aleja el dieléctrico a una distancia de 6 f de la lente (manteniendo en el foco de la lente la fuente de luz) en cuanto se desplaza la posición de la imagen.

Septiembre-03

III-18 Un sistema óptico está formado por dos prismas P_1 y P_2 puestos en contacto (ver la figura). Si se hace incidir un rayo (I) perpendicularmente a la cara de la izquierda de P_1, calcular:

1) El ángulo e con el que emerge por la cara de la derecha de P_2 y
2) dibujar la marcha de rayos.
3) Calcular con qué ángulo mínimo θ debe incidir un rayo (II) en la cara izquierda de P_1 para que no exista refracción a través de P_2 y
4) dibujar la marcha de rayos.

DATOS: $A_1 = 30^\circ$, n_1 = 1,61 , $A_2 = 60^\circ$ y n_2 = 1.46



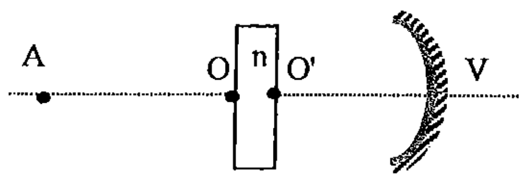
Junio-04

III-19 El centro de un cubo de alambre de lado $\ell = 3$ está situado a 30 cm de un espejo esférico de radio r = 20 cm y colocado en su eje de simetría, se pide:

1) Dibujar las imágenes, formadas por el espejo, de las caras delantera y trasera del cubo.
2) La distancia al espejo de las citadas imágenes, así como sus tamaños respectivos (altura y anchura).
3) La separación entre ambas imágenes y el carácter de las mismas (reales o virtuales, derechas o invertidas) de forma razonada.

Septiembre-04

III-20 Un haz de luz procedente de un punto A del eje óptico está a 100 cm. del punto O de la superficie de una lámina de caras paralelas cuyo índice de refracción es 3/2 y está situada en el aire. Se pide:



1) Representar la marcha de un rayo en la zona paraxial que atraviesa la lámina procedente de A;
2) El espesor de la lámina para que la imagen se forme en la mitad de la distancia entre A y O.

Suponiendo que se añade a la derecha de la lámina un espejo esférico cóncavo de 50 cm. de radio cuyo centro esta en O' (véase la figura):

3) Representar la marcha del rayo anterior al incidir y reflejarse en el espejo.
4) Obtener la distancia desde la imagen final de A al vértice del espejo.

Junio-06

PROBLEMA EXTRA

Dentro de una pecera esférica de radio 15 cm, llena de agua (índice de refracción 1,33), se encuentra un pez. El pez mira a través de la pecera y ve un gato sentado sobre la mesa, con su nariz a 10 cm de la pecera. ¿Dónde está la imagen de la nariz del gato y cual es su amplificación?
Nota: Despreciar la influencia de la delgada pared de vidrio de la pecera.

SOLUCIÓN:

Sabemos que para refracción en una sola superficie esférica:

$$\frac{n_1}{s}+\frac{n_2}{s'}=\frac{n_2-n_1}{r}$$

La distancia objeto entre el gato y la pecera es de 10 cm. (s =10 cm.)
Los índices de refracción son n_1=1 y n_2=1,33.
El radio de curvatura es de 15 cm. (r =15 cm.)

Por tanto despejando de la ecuación anterior s' obtenemos:

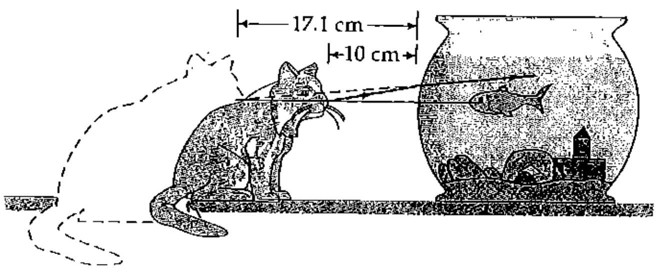
$$s'=-17{,}1 \quad cm$$

Esta distancia negativa significa que la imagen es virtual ya que está delante de la superficie refractora y por tanto en el mismo lado del objeto. (ver figura)

Por otro lado la amplificación de la imagen es:

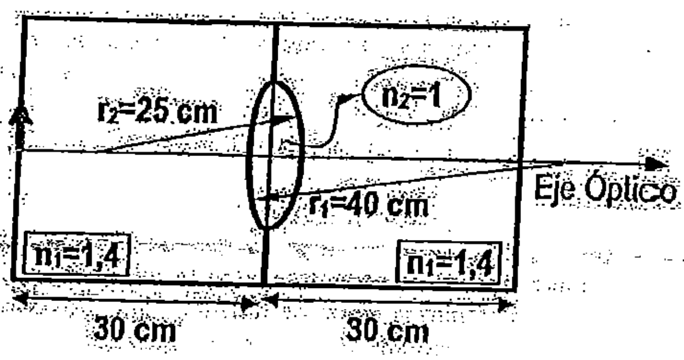
$$m=-\frac{n_1\cdot s'}{n_2\cdot s}=-\frac{-17{,}1\ cm}{1{,}33\cdot 10\ cm}=1{,}29$$

Así pues el gato parece estar más alejado y ser ligeramente mayor.(ver figura)



5) Se unen dos bloques de plástico transparente ($n_1 = 1.4$). En la superficie de contacto entre los dos queda tallada una *lente delgada* biconvexa de radios $r_1 = 40$ cm y $r_2 = 25$ cm. Se sabe que la cavidad queda rellena de aire ($n_2 = 1.0$). Las caras externas de los bloques quedan a 30 cm de la lente.

Si en la cara izquierda del bloque compuesto se coloca un objeto pequeño, calculad,



a) la posición de la imagen a través de *la lente*, indicando de forma razonada su naturaleza (real o virtual; derecha o invertida) y

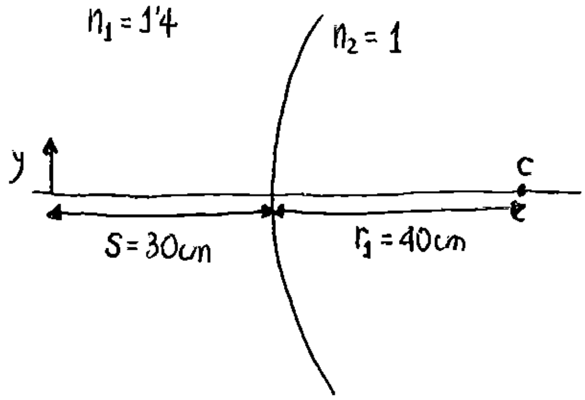
b) el aumento conseguido con la lente.

SUGERENCIA: resuelva el ejercicio por dioptrios.

SEPT 2007

SOLUCIÓN

a) Utilizamos la sugerencia y calculamos en primer lugar donde formaría la imagen el primer dioptrio:



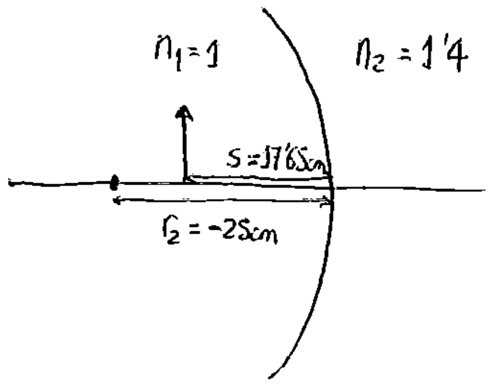
$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$$

$$\boxed{s'} = \frac{n_2}{\frac{n_2 - n_1}{r_1} - \frac{n_1}{s}} = \frac{1}{\frac{1-1'4}{40} - \frac{1'4}{30}} = \boxed{-17'65\,cm}$$

Así pues la imagen de y se forma en el lado de incidencia a 17'65cm de la superficie de separación.

La amplificación de esta imagen es: $\boxed{m = \frac{-n_1 \cdot s'}{n_2 \cdot s} = \frac{-(1'4)\cdot(-17'65)}{1 \cdot 30} = 0'824}$

Esta imagen no llega a formarse porque la luz se refracta de nuevo en la segunda lente, pero esta imagen es el objeto para la segunda lente, por tanto ahora el esquema es:



En este caso:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r_2}$$

$$\frac{1}{17'65} + \frac{1'4}{s'} = \frac{1'4 - 1}{-25cm} \Rightarrow \boxed{s' = -19'27 cm}$$

Así pues la imagen final se forma en el lado de incidencia a 19'27 cm de la superficie de separación.

La amplificación de esta imagen es: $\boxed{m = \frac{-n_1 \cdot s'}{n_2 \cdot s} = \frac{(-1)(-19'27)}{1'4 \cdot 17'65} = 0'78}$

Como la imagen se forma en el lado de incidencia se trata de una imagen virtual.

Como $\boxed{m_{TOT} = 0'824 \cdot 0'78 = 0'643}$ es positivo la imagen es derecha.

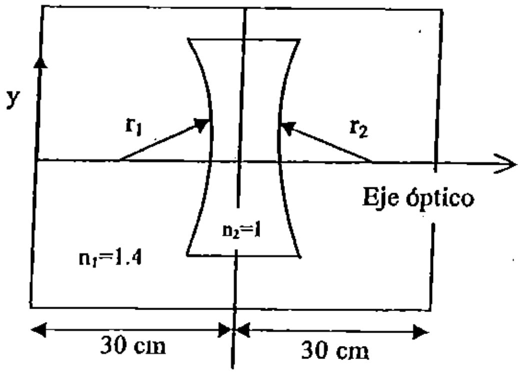
b) $\boxed{m_{TOT} = 0'643}$ es el aumento total conseguido por la lente.

5º) Se unen dos trozos de plástico transparente (n_1=1,4). En la superficie de contacto entre las dos queda tallada una lente delgada bicóncava de radios $r_1 = 9$ cm y $r_2 = 8$ cm. Se sabe que la cavidad queda rellena de aire. (n_2=1). Las caras externas de los bloques quedan a 30 cm de la lente.
Si en la cara izquierda del bloque compuesto se coloca un objeto pequeño, calculad:

a) La posición de la imagen a través de la lente, indicando de forma razonada su naturaleza (real o virtual, derecha o invertida.),

b) La potencia de la lente y

c) El aumento conseguido por la lente.



a) Como antes y después de la lente tenemos el mismo índice de refracción:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{0'3\,m} + \frac{1}{s'} = \frac{1 - 1'4}{1'4}\left(\frac{1}{-0'09} - \frac{1}{+0'08}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{s' = 29'29\ cm}$$

La imagen del objeto está situada a 29'29 cm del centro de la lente delgada y a la derecha (lado de transmisión)

(Imagen real)

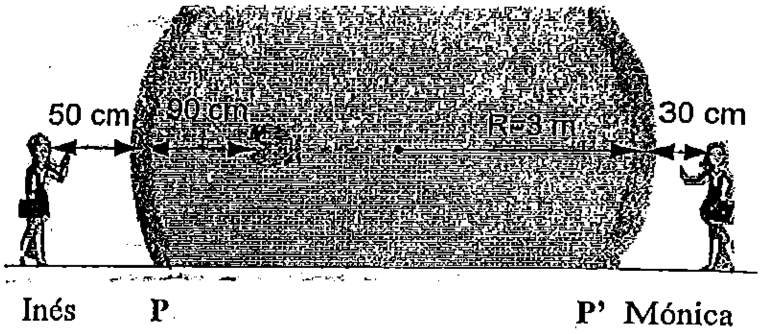
$$\boxed{m = \frac{s'}{s} = \frac{-29'29}{30} = -0'976}$$ (Imagen invertida).

b) $\boxed{P = \frac{1}{f} = 0'75\ D}$ (Convergente)

c) $|m| = 0'976$

La imagen es el 97'6% del objeto.

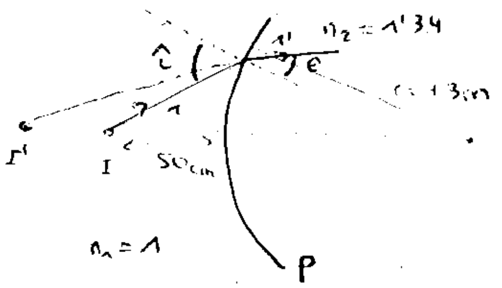
5- Un estanque esférico (R = 3 m) con paredes de vidrio está lleno de agua (n = 1.34) y contiene peces tropicales. Inés y Mónica, dos niñas de la misma estatura, observan los peces. Las niñas se sitúan en dos extremos opuestos del estanque con la vista en la dirección de un diámetro de la esfera. Inés se coloca a 50 cm de la esfera y Mónica a 30 cm. En un determinado instante una piraña se encuentra en la línea que une las visuales de Inés y de Mónica y a 90 cm de la pared esférica más próxima a Inés. Calculad: a) a qué distancia de la pared **P** ve la piraña la imagen de Inés, justificando si es real o virtual y dibujad la marcha de rayos; b) a qué distancia de la pared **P'** ve Mónica la imagen de Inés, justificando si es real o virtual y dibujad la marcha de rayos. NOTA: despreciad el espesor de vidrio de las paredes.



Jun 2008

****

a) Refracción en una superficie:



$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

$s = 0'5$ m, $r = 3$ m

$\left| s' = -0'71 = 71 \text{ m} \right|$

Como $s'<0$ se trata de una imagen virtual.

Para dibujar la marcha de los rayos hacemos uso de la ley de Snell:

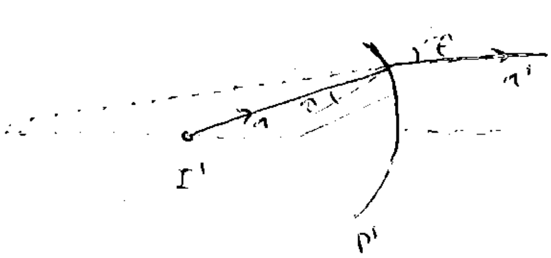
$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{e}.$$

Como $n_2 > n_1 \Rightarrow \hat{i} > \hat{e}$

La piraña ve a Inés a 71 cm de la pared P.

$$m = \frac{-n_1 s'}{n_2 s} = 1'06$$

b)



$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

siendo $n_1 = 1'34$

$n_2 = 1$

$r = -3\text{m} = -300$ cm

$S = 6'71$ m $= 671$ cm

Operando: $\left| s' = -11'58 \text{ m} < 0 \right|$ (imagen virtual)

Para la marcha de los rayos utilizamos.

$$n_1 \sin \hat{\imath} = n_2 \sin \hat{r}$$

Como $n_1 > n_2 \Rightarrow \hat{\imath} < \hat{r}$

Mónica ve a Inés a 11'58 m a la izquierda de la pared P'.

$$m = \frac{-n_1 s'}{n_2 s} = 2'31$$

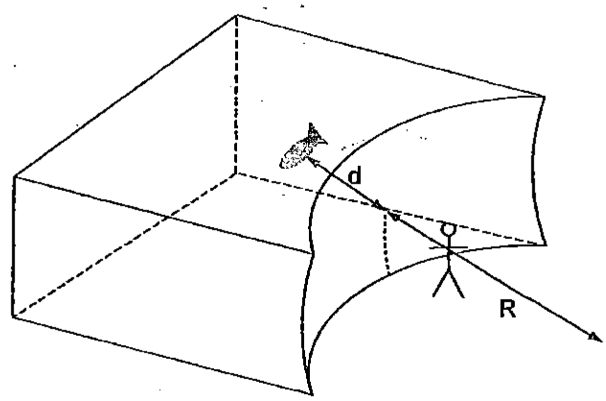
$$m_{tot} = 1'06 \cdot 2'31$$

5) Un acuario tiene una mampara de cristal cuya superficie frontal es esférica (ver figura) y tiene un radio de curvatura de **R=10m**. Los peces que contiene el acuario tienen un tamaño de **30cm** de longitud por **10cm** de altura. Determinar, desde el punto de vista de un observador exterior:

a) posición aparente de un pez que se encuentra a **d=1m** de la mampara,

b) diagrama del camino que siguen los rayos que forman la imagen del pez,

c) tamaño aparente del pez en horizontal y en vertical,

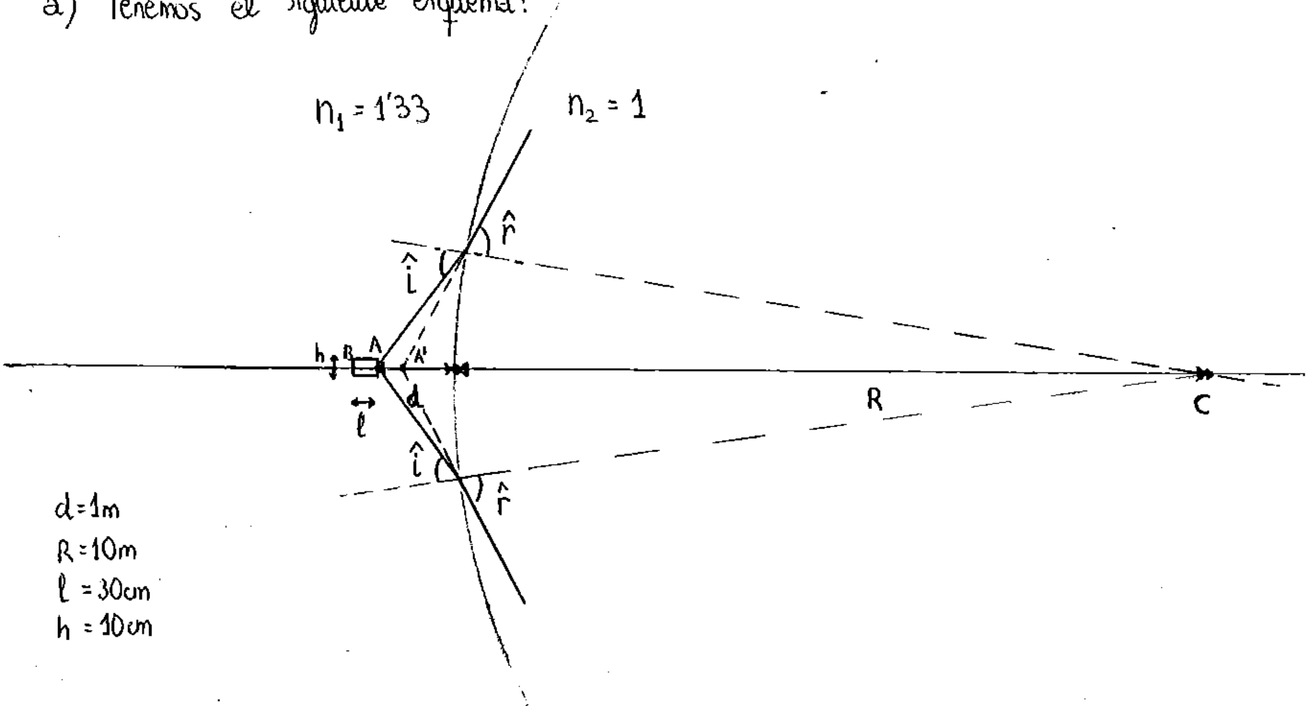


Considerar que el índice de refracción del vidrio de la mampara es igual al del agua, **n=1.33**.

SEPT 2006

SOLUCIÓN :

a) Tenemos el siguiente esquema:



$d = 1m$
$R = 10m$
$\ell = 30cm$
$h = 10cm$

Para calcular la profundidad aparente del pez utilizamos: $\frac{n_1}{S_A} + \frac{n_2}{S'_A} = \frac{n_2 - n_1}{r}$

$$\frac{1'33}{1\,\text{metro}} + \frac{1}{S'_A} = \frac{1 - 1'33}{10\,\text{metros}} \Rightarrow \boxed{S'_A = -0'734 \text{ metros} \cong -73'4 \text{ cm}} \text{ (Imagen virtual)}$$

Así pues un pez que está a un metro de profundidad, parece que está a 73'4 cm.

b) Los rayos que forman la imagen del pez, se refractan al pasar al aire según la ley de Snell de la refracción: $n_1 \cdot \text{sen}(\hat{i}) = n_2 \cdot \text{sen}(\hat{r})$ [Ver figura]

c) Veamos donde se forma la imagen de la parte trasera del pez, que llamamos punto B.

$$\frac{n_1}{S_B} + \frac{n_2}{S_B'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

$$\frac{1'33}{1+0'3} + \frac{1}{S_B'} = \frac{1-1'33}{10} \Rightarrow \boxed{S_B' = -0'947\ m \cong -94'7\ cm}$$

Por tanto el tamaño aparente del pez en horizontal es: $\boxed{\Delta S' = 94'7 - 73'4 = 21'3\ cm}$

Además la amplificación lateral del pez en su parte delantera A y en su parte trasera B es:

$$\boxed{m_A} = \frac{-n_1 \cdot S_A'}{n_2 \cdot S_A} = \frac{-1'33\,(-0'734)}{1 \cdot 1} = \boxed{0'976}$$

$$\boxed{m_B} = \frac{-n_1 \cdot S_B'}{n_2 \cdot S_B} = \frac{-1'33\,(-0'947)}{1 \cdot 1'3} = \boxed{0'9689}$$

Como los peces tienen 10 centímetros de altura, se ve a estos con 9'76 cm de altura en su parte delantera y con 9'689 cm de altura en su parte trasera.

5. En el aire, sobre un estanque hay un observador O que está a una altura de **1.2 metros** de la superficie del agua. Y sumergido en el estanque hay otro observador O′ situado a una profundidad de **0.8 metros** de la superficie. Calcúlese:

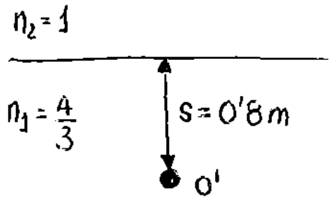
1) A qué distancia, medida respecto de él, el observador O ve al O′.
2) A qué distancia, medida respecto de él, el observador O′ ve al observador O.
3) El índice de refracción del líquido del estanque para que la imagen de O′ se forme a una profundidad que sea igual a la mitad de la de O′.

DATO: Índice de refracción del líquido del estanque n = 4/3.

JUNIO 2007

SOLUCIÓN:

1) En este caso tenemos que:

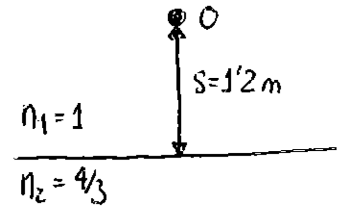


Vamos a utilizar $\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$; en este caso $r = \infty$ por tanto:

$$\boxed{s'} = \frac{-s \cdot n_2}{n_1} = \frac{-(0'8) \cdot 1}{(4/3)} = \boxed{-0'6 \text{ metros}}$$

Por tanto la distancia desde O donde se forma la imagen de O' es de 1'8 metros.

2) En este caso tenemos que:



Por tanto: $\frac{1}{1'2} + \frac{(4/3)}{s'} = 0 \Rightarrow \boxed{s'} = -1'2 \cdot (4/3) = \boxed{-1'6 \text{ metros}}$

Así pues la distancia desde O' donde se forma la imagen de O es de 2'4 metros.

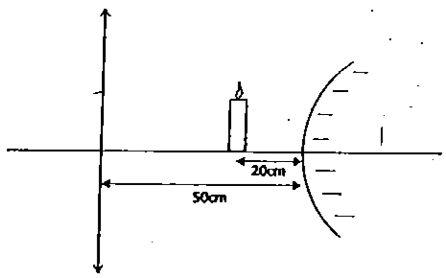
3) $\frac{n_{líquido}}{0'8} + \frac{n_{aire}}{-0'4} = 0 \Rightarrow \boxed{n_{líquido} = \frac{n_{aire}}{0'4} \cdot 0'8 = 2}$

5º) La luz de la llama de una vela de 5 cm de altura se refleja en un espejo esférico convexo de radio **100cm** situado a **20cm** de la vela. La luz reflejada pasa por una lente delgada convexa de potencia **+10 dioptrías** y situada a **50cm** del espejo . Se pide:

I. Dibujar un diagrama que muestre el camino seguido por los rayos procedentes de la llama de la vela, reflejados en el espejo y hasta que forman imagen más allá de la lente convexa,

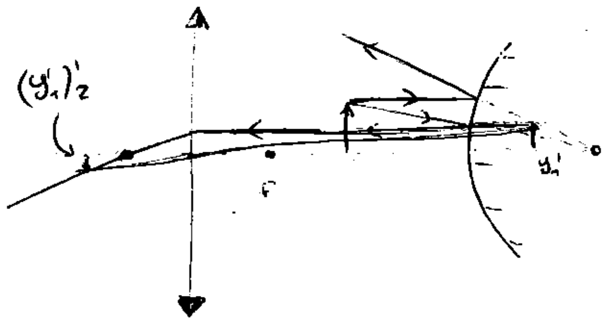
II. Calcular la distancia entre la imagen directa de la llama al otro lado de la lente y la imagen de su reflejo en el espejo.

III. Calcular el tamaño de la imagen de la vela después de reflejarse en el espejo y refractarse en la lente.



Junio 2009.

I.



II y III

Imagen de la vela a través del espejo: $y_1' = \begin{cases} \dfrac{1}{s_1}+\dfrac{1}{s_1'}=\dfrac{1}{f_1} \Rightarrow s_1' = \dfrac{20\cdot(-50)}{20-(-50)} = -14'2857 \text{ cm (Im. virtual)} \\ m_1 = \dfrac{-s_1'}{s_1} = \dfrac{-(-14'2857)}{20} = 0'714285 \text{ (Im. invert).} \end{cases}$

Imagen de y_1' a través de la lente:

$$(y_1')_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=\dfrac{1}{f} \Rightarrow s' = \dfrac{s\cdot f}{s-f} = \dfrac{64'2857\cdot 10}{64'2857-10} = 11'842 \text{ (Im. real)} \\ m = \dfrac{-s'}{s} = \dfrac{-11'842}{64'2857} = 0'18421 \text{ (Im. invertida)} \end{cases}$$

Imagen de la vela a través de la lente:

$$y_2' = \begin{cases} s_2' = \dfrac{s_2\cdot f}{s_2-f} = \dfrac{30\cdot 10}{30-10} = 15 \text{ cm (Im. real)} \\ m_2 = \dfrac{-s_2'}{s_2} = \dfrac{-15}{30} = -\dfrac{1}{2} \text{ (Im. invertida)} \end{cases}$$

La imagen entre las dos imágenes que forma la lente es:

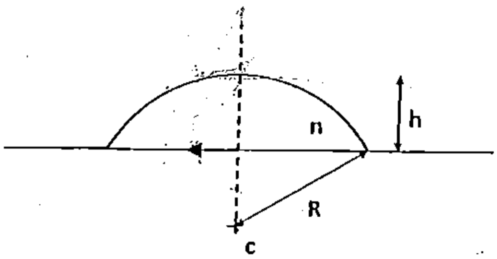
$$\boxed{d = 15 - 11'842 = 3'158 \text{ cm}}$$

El tamaño de $(y'_1)'_2$ es:

$$(y'_1)'_2 = 5 \text{ cm} \cdot m_{esp} \cdot m_{lent} = 5 \cdot (0'714285)(-0'18421) =$$

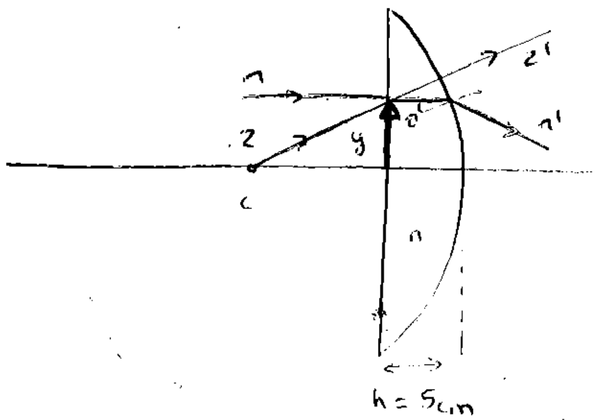
$$= -0'6579 \text{ cm} = \boxed{6'58 \text{ mm}}$$

5º) Una lupa constituida por un casquete esférico de radio $R = 10\ cm$ y altura $h = 5\ cm$ se encuentra apoyada sobre un papel en el que hay dibujada una flecha tal y como se indica en la figura. El material del que está fabricada la lupa tiene un índice de refracción de $n = 1.4$. Se pide:



a. Dibujar el diagrama de rayos que forman la imagen para un observador que mira el dibujo a través de ella.
b. Calcular la posición de dicha imagen
c. Calcular la potencia y el aumento de la lupa

a)



¿Lente delgada o dos dioptrios?

Lente:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s' = \frac{s \cdot f}{s - f} \overset{s=0}{=} 0$$

La lente no haría nada.

Lógicamente 2 diop.

b) 1er dioptrio:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \overset{r=\infty}{=} 0 \Rightarrow s' = \frac{-n_2 s}{n_1} \overset{s=0}{=} 0$$

2º dioptrio:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \Rightarrow \frac{1'4}{5cm} + \frac{1}{s'} = \frac{1 - 1'4}{-10cm}$$

$$\Rightarrow \boxed{s' = -4'166\ cm}$$

① Radio negativo

c) Aumento de la lupa:

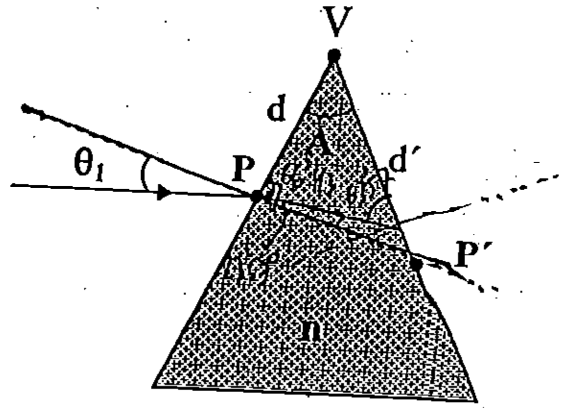
$$m = \frac{-n_1 s'}{n_2 s} = \frac{-1'4(-4'16)}{1 \cdot 5} = \boxed{1'166}$$

Potencia lupa:

$$P = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1'4 - 1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-0'1m}\right) = \boxed{4D}$$

Sept 2008

5.- Un rayo de luz incide con un ángulo de $\theta_1 = 36°$ en la cara izquierda de un prisma de ángulo $A = 50°$. a) Calculad el ángulo θ_2 con que emerge por la cara de la derecha. Se sabe que el punto **P** de incidencia del haz dista $d = 2$ cm del vértice **V** del prisma, b) calculad la distancia d' del punto de emergencia **P'** al mismo vértice. Si el rayo incidente transporta una intensidad de $I = 0.35$ W.cm^{-2} y en el paso del rayo por el prisma se produce una pérdida de 0.12 dB del nivel de intensidad, c) calculad la intensidad I' con que emerge el haz por la cara de la derecha. DATO: $n = 1.47$.



a) En la 1ª cara: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin \hat{r}_1$

$$\hat{r}_1 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{1 \sin 36°}{1'47}\right) = \boxed{23'57°}$$

$$\alpha_1 = 90° - \hat{r}_1 = 66'43°$$

$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1 - 50° = 63'57°$$

$$\boxed{\hat{i} = 90 - \alpha_2 = 26'43°}$$

En la 2ª cara: $1'47 \sin 26'43° = 1 \sin \hat{\theta}_2 \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_2 = 40'57°}$

b) Teorema del seno:

$$\frac{d}{\sin\alpha_2} = \frac{d'}{\sin\alpha_1} \Rightarrow \boxed{d' = d\,\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = 2'047 \text{ m}}$$

c) $I_{inc} = 0'35$ W/cm^2

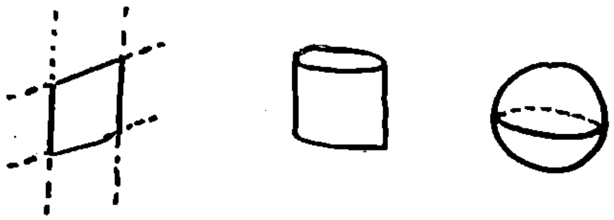
$$0'12\,dB = N\,I_{inc} - N\,I_{emergente} = 10 \log\frac{I_{inc}}{I_{ref}} - 10\log\frac{I_{ema}}{I_{ref}} =$$

$$= 10\log\frac{I_{inc}}{I_{ema}} \Longrightarrow \boxed{I_{emerg} = \frac{I_{inc}}{10^{\frac{0'12}{10}}} = 0'34046} \text{ W/cm}^2$$

Tema 3 : ONDAS.

1.- Introducción:

- Al fenómeno de propagación de una perturbación, es decir, de un movimiento vibratorio, se le denomina movimiento ondulatorio.
- Como las partículas vibran en torno a su posición de equilibrio no se propaga materia sino energía.
- Todos los puntos del medio a los cuales la perturbación les llega en el mismo instante forman un frente de onda ó superficie de onda.

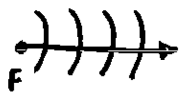


ONDAS PLANAS. ONDAS CILÍNDRICAS O CIRCULARES. ONDAS ESFÉRICAS.

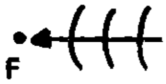
2.- Clasificación de las ondas:

- Según la dirección de propagación:

PROGRESIVAS : $f(x-vt)$ SE ALEJAN DEL FOCO



REGRESIVAS : $f(x+vt)$ SE ACERCAN AL FOCO



- Según el sentido de vibración, con respecto a la dirección de propagación:

TRANSVERSALES : La dirección en la cual varía la magnitud que define la perturbación (sentido de vibración) es perpendicular a la dirección de propagación de la misma.

LONGITUDINALES : Cuando es paralela.

3.- REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE UN MOVIMIENTO ONDULATORIO:

Para que una función ξ represente un movimiento ondulatorio debe cumplir la siguiente ec. de onda:

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{d^2\xi}{dy^2}+\frac{\partial^2\xi}{dz^2}=\frac{1}{v^2}\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

· EC. DIFERENCIAL DE ONDA
· EC. DE D'ALAMBERT.

En cartesianas.

La solución de esta ecuación es:

ONDA PLANA: $\boxed{\xi(x,t) = \xi_0\cdot \text{sen}\big(K(x\pm vt)\big) = \xi_0\cdot\text{sen}\,(Kx\pm\omega t)}$; (m)

$$\xi_0 = \xi_{0_{ini}} \quad (m)$$

ONDA CILÍNDRICA: $\boxed{\xi(\rho,t) = \xi_0\cdot\text{sen}\big(K(\rho\pm vt)\big) = \xi_0\cdot\text{sen}\,(K\cdot\rho\pm\omega t)}$; (m)

$$\xi_0 = \frac{\xi_{0_{ini}}}{\sqrt{\rho}} \quad (m)$$

OJO, ρ NO es la densidad del medio, sino la distancia del frente de onda al foco.

ONDA ESFÉRICA: $\boxed{\xi(r,t) = \xi_0\cdot\text{sen}\big(K(r\pm vt)\big) = \xi_0\cdot\text{sen}\,(K\cdot r\pm\omega t)}$; (m)

$$\xi_0 = \frac{\xi_{0_{ini}}}{r} \quad (m)$$

También se representan con $\cos(Kx\pm\omega t)$

siendo: $\xi = y \equiv$ ESTADO DE LA PERTURBACIÓN.

$x, \rho, r \equiv$ Distancia al foco de la perturbación (ojo en ondas planas)

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \equiv$ Pulsación de la onda:
- $\nu = f \equiv$ frecuencia de la onda. (Hz)
- $T = \frac{1}{\nu} \equiv$ Periodo de la onda (seg)

$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \equiv$ Nº de onda (rad/m) $\equiv$ Número de λ contenidas en 2π.

$\lambda = \frac{v}{\nu} = v\cdot T \equiv$ Long. de onda (m) $\equiv$ Distancia mínima, medida en la dirección de propagación, entre 2 puntos que en todo momento tienen la misma perturbación.

$v = \frac{\omega}{K} = \lambda\cdot\nu \equiv$ VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE LA ONDA (m/s)

$\vec{K} = K\cdot\hat{u} \equiv$ VECTOR DE ONDA o VECTOR DE PROPAGACIÓN.

3.1.- DEFINICIONES:

Suponemos una onda $y(x,t) = \xi(x,t) = \xi_0 \cdot \text{sen}(Kx - \omega t) = A \cdot \text{sen}(Kx - \omega t)$

- DOS PUNTOS DE UN MOVIMIENTO ONDULATORIO SE DICE QUE OSCILAN, VIBRAN O ESTÁN EN FASE, SI EN TODO INSTANTE TIENEN EL MISMO ESTADO DE PERTURBACIÓN, EN CUYO CASO LA SEPARACIÓN ENTRE ELLOS ES:

$$\boxed{x_2 - x_1 = n \cdot \lambda} \quad ,, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En ondas esféricas: $r_2 - r_1 = n\lambda$

- SE DICE QUE ESTÁN EN OPOSICIÓN DE FASE SI:

$$\boxed{x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}} \quad ,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En ondas esféricas: $r_2 - r_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

4.- INTENSIDAD, ENERGÍA Y POTENCIA DE UN MOVIMIENTO ONDULATORIO:

La intensidad de un mov. ondulatorio es la energía transportada por segundo a través de una superficie de un metro cuadrado, en una dirección perpendicular a la de propagación.

Es decir, como:

Potencia ≡ Energía por unidad de tiempo $\left(W = \frac{J}{seg}\right)$

Intensidad ≡ Potencia por unidad de superficie $\left(W/m^2\right)$ ó $\left(J/seg \cdot m^2\right)$

NOTA: Si suponemos medios sin pérdidas, la potencia y la energía de una onda es siempre la misma, pero la intensidad es variable excepto en ondas planas.

Así por ejemplo en una onda esférica de potencia P la intensidad es:

$$\boxed{I = \frac{P}{4\pi r^2}} \left(W/m^2\right)$$ donde r marca la distancia al foco.

ONDAS PLANAS: $I = \frac{1}{2}\rho_0 \cdot V \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2$ (W/m^2) (ES CONSTANTE) $\Rightarrow \xi_0$ es cte.
$\xi_0 = \xi_{0ini}$

ONDAS CILÍNDRICAS: $I = \frac{1}{2}\rho_0 \cdot V \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 = \frac{Pot}{2\pi\rho \cdot h}$ (W/m^2) (VARÍA CON $\frac{1}{\rho}$) $\Rightarrow \xi_0 = \frac{\xi_{0ini}}{\sqrt{\rho}}$

ONDAS ESFÉRICAS: $I = \frac{1}{2}\rho_0 \cdot V \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 = \frac{Pot}{4\pi r^2}$ (W/m^2) (VARÍA CON $\frac{1}{r^2}$) $\Rightarrow \xi_0 = \frac{\xi_{0ini}}{r}$

Siendo: $\rho_0 \equiv$ Densidad del medio por el que se propaga la onda (kg/m^3)

En cilíndricas NO confundir ρ con ρ_0.

Se define la densidad de energía de la onda como:

$$\boxed{e} = \frac{I}{V} = \boxed{\frac{1}{2}\rho_0 \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2} \, (J/m^3)$$

4.1.- ABSORCIÓN:

Es el fenómeno que marca la disminución de la intensidad o la amplitud de una onda.

Si denominamos $\gamma = \beta$ al coeficiente de absorción del medio:

$$I = I_0 \cdot e^{-\gamma x} = I_0 \cdot e^{-\beta x}$$ (W/m^2) donde I_0 es la intensidad "inicial".

$$\xi_{(x,t)} = \xi_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}x} \cdot \text{sen}(Kx - \omega t) = \xi_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{2}x} \cdot \text{sen}(Kx - \omega t) \; ; (m)$$

5.- ONDAS SONORAS (ACÚSTICA ≡ SONIDO)

La velocidad del sonido en el aire es: $V_S = 340\ m/s$ aprox.

Son ondas mecánicas (o de presión) longitudinales.

Relación entre la onda de desplazamiento, la onda de densidad y la onda de presión (ó presión acústica):

$$\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 \cdot \operatorname{sen}(Kx - \omega t + \alpha)} \ ;\ (m) \equiv \text{Onda de desplazamiento.}$$

$$\boxed{\Delta\rho} = -\rho_0 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\rho_0 \cdot \xi_0 \cdot K \cdot \cos(Kx - \omega t + \alpha) \ ;\ (kg/m^3) \equiv \text{Onda de densidad.}$$

siendo: $\rho_0 \equiv$ Densidad inicial del medio. (kg/m^3)

$$\boxed{P} = -\mathbf{K} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\mathbf{K} \cdot \xi_0 \cdot K \cdot \cos(Kx - \omega t + \alpha) \ ;\ (Pa) \equiv \text{Onda de presión o presión acústica.}$$

siendo: $\mathbf{K} \equiv$ Módulo de compresibilidad (Pa) $\mathbf{K} = v^2 \rho_0$

$P_{max} = \mathbf{K} \cdot \xi_0 \cdot K \equiv$ Presión máxima (Pa) ó amplitud de la onda de presión.

NOTA:

* La velocidad de propagación del sonido en medio es:

$$V = \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\rho_0}} \ (m/s)$$

* En los fluidos al módulo de compresibilidad se le denomina módulo de Young ($Y \equiv E$) $\Rightarrow$ $V = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}}$ (m/s)

* SE DEFINE NIVEL DE INTENSIDAD:

$$\boxed{L = NI = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)} \ (dB) \quad ó \quad L = NI = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) \ ;\ Np$$

siendo: $I_0 = 10^{-12}\ (W/m^2) \equiv$ Intensidad de referencia ó umbral.

* SE PUEDE CALCULAR L DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$L = NI = 20 \log\left(\frac{P}{P_0}\right) ;\ (dB) \quad ; \quad P_0 = 2 \cdot 10^{-5}\ Pa$$

7.- Mov. ondulatorio en cuerdas (ondas transversales):

El movimiento ondulatorio en cuerdas da lugar a ondas estacionarias.
Una onda estacionaria es aquella formada por dos ondas que se propagan en la misma dirección pero en sentidos opuestos.

$$y_1 = A \cdot \mathrm{sen}(\omega t - Kx) \quad + \hat{x}$$

$$y_2 = A \cdot \mathrm{sen}(\omega t + Kx + \alpha) \quad - \hat{x}$$

$$\boxed{y_T = y_1 + y_2 = 2A \cdot \cos\left(Kx + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right)} \ (m)$$

~~En los casos de interés: $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$~~

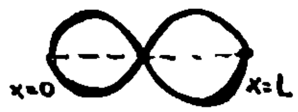
Tenemos 3 casos de interés:

a) Cuerda fija por ambos extremos:

Puede vibrar de las siguientes formas:

Primer armónico ó fundamental: $n = 1$

Segundo armónico: $n = 2$



Tercer armónico: $n = 3$

Se cumple que:

$$\boxed{L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}} \quad ó \quad \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$ Longitud de onda del armónico n-ésimo

$$\boxed{\nu_n = n \cdot \nu_1 = n \cdot \frac{v}{2L} = \frac{v}{\lambda_n}}$$ Frecuencia del armónico n-ésimo.

COMENTARIOS:

- La velocidad de la onda en la cuerda es la misma para todos los armónicos ($v = \lambda_n \cdot \nu_n$) y se puede calcular:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \ (m/s)$$ siendo: T = Tensión de la cuerda (N); $\mu = \frac{Masa}{L}$; (kg/m) = DENSIDAD MÁSICA Ó MASA POR UNIDAD DE LONGITUD.

- A la frecuencia de los diferentes armónicos se les denomina frecuencias de resonancia.
- Cuando la cuerda de un instrumento vibra a una frecuencia determinada emite un SONIDO A ESA FRECUENCIA, pero la λ y la V de ese sonido son distintas a la λ y la v de la onda en la cuerda.

$$v = \lambda_n f_n$$

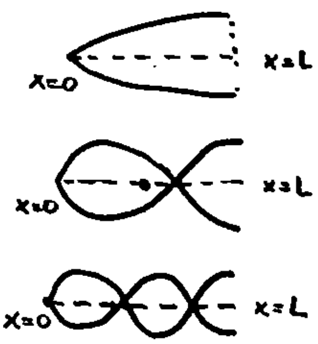
$$v_s = 340\,m/s = \lambda_s f_s \qquad \{f_n = f_s\} \text{ y } \{\lambda_n \neq \lambda_s\}$$

b) <u>Cuerda fija por un sólo extremo:</u>

Primer armónico o fundamental : $n = 1$

Segundo armónico : $n = 2$

Tercer armónico: $n = 3$



Se cumple que:

$\boxed{L = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4}}$ ó $\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}}$ Longitud de onda del armónico n-ésimo.

$\boxed{f_n} = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4L}(2n-1) = \boxed{f_1(2n-1)}$ Frecuencia del armónico n-ésimo.

Analogámente al caso anterior : $v = \lambda_n \cdot f_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ (m/s) es siempre la misma.

c) <u>Cuerda libre en ambos extremos:</u>

Mismas ecuaciones que en a) : $\boxed{L = n\frac{\lambda_n}{2}}$ y $\boxed{f_n = \frac{v}{\lambda_n}}$

<u>COMENTARIO FINAL PARA LOS TRES CASOS:</u>

La distancia entre un vientre y un nodo EN UNA ONDA ESTACIONARIA es:

$$\boxed{dist_{M-m} = \frac{\lambda_n}{4}}$$

7.1. ONDAS ESTACIONARIAS: ∘∘ cuerdas.

ESQUEMA O POSIBILIDAD ①

$$\left.\begin{array}{l}\xi_1 = \xi_0 \cdot \text{sen}(\omega t - Kx) \\ \xi_2 = \xi_0 \cdot \text{sen}(\omega t + Kx)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\xi_T = 2\xi_0 \cdot \cos(Kx) \cdot \text{sen}(\omega t)} \text{(m)}$$

CASO DE CUERDA LIBRE EN X=0.

Dentro de este esquema a su vez tenemos 2 posibilidades:

a) FIJA en $x=L$ $\Rightarrow \cos(K \cdot L) = 0 \Rightarrow K \cdot L = (2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{L = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4}}$ Longitud de cuerda fija en 1 extremo.

b) LIBRE en $x=L$ $\Rightarrow \cos(K \cdot L) = \pm 1 \Rightarrow KL = n\pi \Rightarrow \boxed{L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}}$ Longitud de cuerda libre en ambos extremos

ESQUEMA O POSIBILIDAD ②

$$\left.\begin{array}{l}\xi_1 = \xi_0 \cdot \text{sen}(Kx - \omega t) \\ \xi_2 = \xi_0 \, \text{sen}(Kx + \omega t)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\xi_T = 2\xi_0 \cdot \text{sen}(Kx) \cdot \cos(\omega t)} \text{(m)}$$

CASO DE CUERDA FIJA EN X=0.

Dentro de este esquema tenemos a su vez 2 posibilidades:

a) FIJA en $x=L$ $\Rightarrow \text{sen}(K \cdot L) = 0 \Rightarrow KL = n\pi \Rightarrow \boxed{L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}}$ Longitud de cuerda fija en ambos extremos.

b) LIBRE en $x=L$ $\Rightarrow \text{sen}(K \cdot L) = \pm 1 \Rightarrow KL = (2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{L = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4}}$ Longitud de cuerda fija en 1 extremo.

8.- EFECTO DOPPLER:

$$f_R' = f_T \left(\frac{V \pm V_O}{V \pm V_F} \right)$$

siendo:

$V_O \equiv$ Veloc. del observador EN LA DIRECCIÓN DEL FOCO

$+V_O$ si se acerca al foco.
$-V_O$ " " aleja del foco.

$V_F \equiv$ Veloc. del foco EN LA DIRECCIÓN DEL OBSERVADOR

$+V_F$ si se aleja del observador.
$-V_F$ " " acerca al observador.

$V \equiv$ Velocidad de propagación de la onda. → V_S en ACÚSTICA. → C en ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.

NOTA:

Cuando se produce un ECO hay que aplicar 2 veces Doppler.

- *Asomado sobre los abismos del infierno, el demonio observa como se precipita (con velocidad límite) y le sobrepasa un alumno de Teleco; la frecuencia del grito que da disminuye desde 842 a 820 hz. Calcular:*
  - *a) Velocidad con la que cae el alumno.*
  - *b) Frecuencia del grito.*
  - *c) Frecuencia de las pulsaciones que percibe el alumno al mezclarse su grito con el eco procedente de los abismos*

a) y b)

$$f_{R_{\text{demonio antes}}} = f_{T_A}\left(\frac{V_S \pm 0}{V_S - V_A}\right) \Rightarrow \boxed{842 = f_{T_A}\,\frac{340}{340 - V_A}} \quad (1)$$

$$f_{R_{\text{demonio después}}} = f_{T_A}\left(\frac{V_S \pm 0}{V_S + V_A}\right) \Rightarrow \boxed{820 = f_{T_A}\,\frac{340}{340 + V_A}} \quad Ec\ (2)$$

c) ECO: (2 veces doppler):

$$f_{R_{\text{Abismos}}} = f_{T_A}\left(\frac{V_S \pm 0}{V_S - V_A}\right) = 842\ Hz.$$

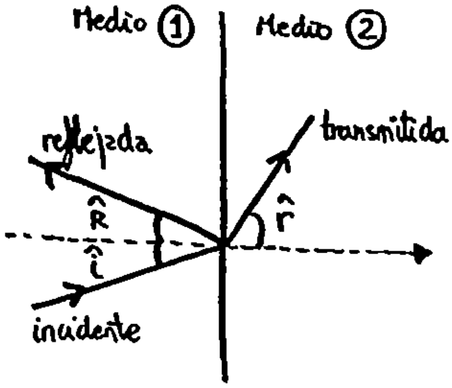
Se produce el eco: $f_{T_{\text{abismos}}} = 842\ Hz$.

$$f_{R_{\text{alumno}}} = f_{T_{\text{abismos}}}\left(\frac{V_S + V_A}{V_S \pm 0}\right) = 853'144\ Hz$$

Δf = Pulsaciones que percibe el alumno = $f_{R_{\text{alumno}}} - f_{T_{\text{alumno}}} = 853'144 - 830'55 =$

$$\boxed{= 22'29\ Hz}$$

9.- REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS:



En el plano que separa los 2 medios se cumple:

$$\boxed{\xi_{0_{incidente}} + \xi_{0_{reflejada}} = \xi_{0_{transmitida}}}$$

Denominamos:

$\hat{u}_i \equiv$ Dirección de propagación de la onda incidente.
$\hat{u}_R \equiv$ " " " " " " reflejada.
$\hat{u}_r \equiv$ " " " " " " refractada o transmitida.
$\hat{N} \equiv$ Vector unitario normal entrante del medio ① al medio ②.

LEYES DE SNELL

1) $\hat{u}_i, \hat{u}_R, \hat{u}_r$ y $\hat{N}$ son coplanarios.

2) $\boxed{\hat{i} = \hat{R}}$

3) $\boxed{\dfrac{\operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{r}} = \dfrac{V_1}{V_2}}$

$V_1 \equiv$ Velocidad de propagación de la onda incidente.
$V_2 \equiv$ " " " " " " refractada o transmitida.

COMENTARIO FINAL: ÁNGULO CRÍTICO O ÁNGULO DE INCIDENCIA LÍMITE.

$$\boxed{\hat{i}_c = \hat{i}_{lim} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}$$ SÓLO EXISTE SI $V_2 > V_1$

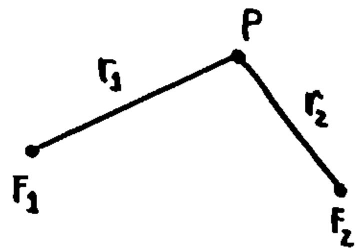
Si $\hat{i} \geq \hat{i}_c$ NO HABRÁ ONDA TRANSMITIDA (REFLEXIÓN TOTAL)

NOTA: La frecuencia es la misma en todos los medios.

10.- INTERFERENCIAS:

Se denomina interferencia a toda superposición de dos o más ondas.

10.1.- ONDAS DE LA MISMA FRECUENCIA:



$$\xi_1 = \xi_{01} \cdot \mathrm{sen}\left(\omega t - kr_1 + \varphi_1\right)$$

$$\xi_2 = \xi_{02} \cdot \mathrm{sen}\left(\omega t - kr_2 + \varphi_2\right)$$

$$\boxed{\xi_T = \xi_1 + \xi_2 = \xi_{0_T} \cdot \mathrm{sen}\left(\omega t - \alpha\right)}$$ (m) $\equiv$ Amplitud total de la onda en P. (Es un M.A.S.)

siendo:

$$\cancel{\alpha = \frac{r_1 + r_2}{\lambda} \cdot \pi} \quad (\text{rad})$$

$$\xi_{0_T} = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2 \cdot \xi_{01} \cdot \xi_{02} \cdot \cos\delta} \quad (\text{m})$$

$$\delta = k(r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) = \boxed{\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (\text{rad})$$

$\delta_{relativo} = \varphi_2 - \varphi_1 \equiv$ Desfase relativo entre los focos:

Si $\delta_{relativo} = 0 \Rightarrow$ Mov. ondulatorios en fase. (FOCOS COHERENTES)

Si " $= \pi \Rightarrow$ " " " oposición de fase.

Si " $= \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ " " " cuadratura de fase.

Además tenemos los siguientes casos importantes:

- Un punto presenta interferencia constructiva o amplitud máxima si:

$$\cos\delta = +1 \Rightarrow \begin{cases} \xi_{o_T} = \xi_{o1} + \xi_{o2} \\ \delta = 2n\pi \end{cases}$$

(VIENTRES, MÁXIMOS O SUPERFICIES VENTRALES)

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Si $\delta_{relativo} = 0$

$r_1 - r_2 = n\lambda$

- Un punto presenta interferencia destructiva o amplitud mínima si:

$$\cos\delta = -1 \Rightarrow \begin{cases} \xi_{o_T} = |\xi_{o1} - \xi_{o2}| \\ \delta = (2n+1)\pi \end{cases}$$

(NODOS, MÍNIMOS O SUPERFICIES NODALES)

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Si $\delta_{relativo} = 0$

$r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

NOTAS:

- El lugar geométrico de vientres y nodos son hipérbolas.
- Como la intensidad depende de la amplitud al cuadrado:

$$\boxed{I_T = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\delta} \; (W/m^2)$$

Sus máximos y mínimos coinciden con los de ξ_o.

- CASO PARTICULAR:

(1) Si $\xi_{o1} = \xi_{o2} \Rightarrow I_1 = I_2 \Rightarrow \begin{cases} \xi_{oT} = \xi_{o1} \cdot \sqrt{2(1+\cos\delta)} \\ I_T = 2 I_1 \cdot (1+\cos\delta) \end{cases}$

Si además $\delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_{oT} = 2 \cdot \xi_{o1} \\ I_T = 4 I_1 \end{cases}$

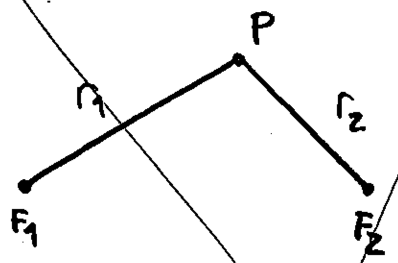
Generalizando para n fuentes iguales: $\xi_{oT} = n \cdot \xi_{o1}$ ¡¡IMPORTANTE!!

$I_T = n^2 \cdot I_1$

(2) Si $\xi_{o_1} = \xi_{o_2}$ ó $I_1 = I_2$

$\xi_{o_{T}} = 0$ $\quad I_{T} = 0$ en los mínimos

10.2.- ONDAS DE DISTINTA FRECUENCIA:



$$\xi_1 = \xi_{01} \cdot \text{sen}\left(\omega_1 t - k_1 \cdot r_1 + \varphi_1\right)$$

$$\xi_2 = \xi_{02} \cdot \text{sen}\left(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_2\right)$$

En el punto P la amplitud total de la perturbación es:

$$\xi_{0T} = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2 \cdot \xi_{01} \xi_{02} \cdot \cos \delta} \quad (m)$$ Va a depender de t

siendo:

$$\delta = \left(\omega_2 - \omega_1\right) t - \left(k_2 r_2 - k_1 r_1\right) + \left(\varphi_2 - \varphi_1\right) \; ; \; (rad)$$

ONDAS

I-1 El vector de Poynting asociado a una onda electromagnética plana que se propaga en el vacío es $\bar{S} = 3\cos^2(\omega t - ky)\bar{u}_y \ \ w.m^{-2}$

Calcular:

a) La intensidad (media) de dicha onda.

b) La potencia (media) que recibirá una antena receptora plana circular de 40 cm. de diámetro cuyo eje forma 30° con el eje Y.

c) La densidad de energía de la onda.

Si la onda está polarizada en un plano que forma 45° con el eje Z y además para t = 0, y = O las componentes de $\bar{E}$ son positivas,

d) Expresión vectorial del campo eléctrico asociado a la onda y.

e) Expresión vectorial del campo magnético asociado a la onda.

(**Datos:** $c = 3 \times 10^8$ m.s^{-1} ; $\varepsilon_0 = (36\,\pi\,10^9)^{-1}$ N^{-1}. m^{-2} C^2)

Junio-95

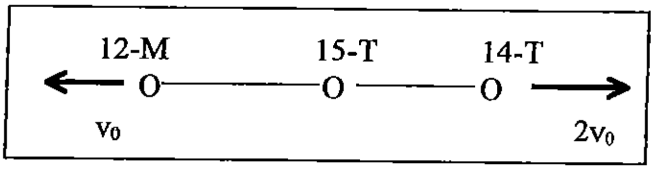
I-2 Dos alumnos (uno del 12-M y otro del 14-T) cada uno con un diapasón que vibra a una frecuencia de 220 Hz, están separados una distancia d = 10 m. Los diapasones comienzan a vibrar a la vez emitiendo ondas esféricas con la misma potencia $P = 3 \times 10^{-6}$ w y velocidad de propagación $v = 330$ m.s^{-1}. Se pide:

a) Calcular el número de máximos de intensidad que hay a lo largo del segmento que une a los alumnos.

b) Calcular la posición del máximo de intensidad más próximo al alumno del 12-M y el más próximo al alumno del 14-T y el valor de la intensidad en estas posiciones.

Los dos alumnos comienzan a correr, alejándose uno del otro con velocidades respectivas v_0 y $2v_0$ (ver la figura). Una alumna del 15-T en reposo y situada entre los dos, detecta pulsaciones con una frecuencia de pulsación de 2.2 Hz.

c) ¿Qué velocidad lleva cada alumno?.



Junio-95

I-3 Dos focos sonoros, separados una distancia de 68 m., emiten en oposición de fase ondas de la misma amplitud y frecuencia $\nu = 500$ Hz. Tomando para la velocidad del sonido en el aire el valor v = 340 m/s y admitiendo que la amplitud de cada onda se mantiene constante, expresar, para un punto genérico del segmento rectilíneo que une ambos focos:

1°) La expresión de la onda que llega de cada uno de ellos.

2°) La onda resultante como superposición de ambas.

3°) La amplitud de la onda resultante en función de la distancia al foco situado a la izquierda.

4°) La posición de máximos y mínimos de intensidad.

5°) El nivel de intensidad sonora en un punto de máximo, sabiendo que en él cuando emite un sólo foco es de 40 dB.

6°) El valor de la intensidad del sonido en un punto de máximo cuando emite un sólo foco y cuando emiten los dos, tomando como referencia $I_0 = 10^{-12}$ w/m^2.

7°) El valor de la amplitud de la onda cuando emite un sólo foco y cuando lo hacen los dos, ($\rho_0 = 1.28$ kg/m^3).

8°) La amplitud de la onda de presión acústica.

Junio-95

I-4 Tres ondas sonoras planas de frecuencia f = 500 KHz se propagan en el aire. Las expresiones para las ondas de desplazamiento son:

a) $\eta_a(x,t) = 1.5\text{x}10^{-6}\, sen(kx\text{-}\omega t - \frac{\pi}{6})\, m.$

b) $\eta_b(x,t) = 1.5\text{x}10^{-6}\, sen(kx\text{-}\omega t)\, m.$

c) $\eta_c(x,t) = 1.5\text{x}10^{-6}\, sen(kx\text{-}\omega t + \frac{\pi}{6})\, m.$

El aire está a una presión de 1 atm = $1.013\text{x}10^5$ P, su coeficiente adiabático es $\gamma = 1.4$ y la velocidad de propagación v = 330 $m.s^{-1}$.

1) Obtener para la onda a), la expresión de las ondas de presión y densidad en función de los datos numéricos del enunciado.
2) Calcular el nivel de intensidad sonora que producen por separado cada una de las ondas a), b) y c) (la intensidad umbral es $I_0 = 10^{-12}$ $w.m^{-2}$).

Calcular también:

3) La expresión de la onda resultante de la superposición de las tres ondas a), b) y c).
4) El nuevo nivel de intensidad sonora resultante.

Septiembre-95

I-5 Sobre el límite de separación entre dos medios, aire y vidrio, incide una onda electromagnética plana en el rango de frecuencias del espectro visible y cuyo vector de Poynting en el aire es:
$\mathbf{S} = 10^{-2}\,\mathbf{u}_y + \sqrt{3}\cdot 10^{-2}\,\mathbf{u}_z\ W\cdot m^{-2}$.
El medio incidente es el aire y la superficie de separación es el plano Z=0. Se supone que la onda se refracta en su totalidad. Obtener:

1) El tipo de polarización de la onda incidente (razónese), la intensidad de dicha onda.
2) La expresión de los vectores de onda **k** incidente y **k'** refractado.
3) La expresión del vector de Poynting refractado **S'** y la intensidad de la onda refractada.

Datos: Frecuencia de la onda incidente $f = 5x10^{14}$ Hz (verde); índice de refracción del vidrio $n=1.5$; $c=3x10^8\ m.s^{-1}$

Septiembre-95

I-6 Dos focos sonoros emiten ondas esféricas en el aire con una potencia de 40 W y una frecuencia de 400 Hz. Si ambos focos están separados por una distancia de 9 metros, y el foco F_2 emite adelantado en $\pi / 6$ respecto de F_1. Calcular en un punto A situado sobre la línea que une los focos, a una distancia de 3 metros de F_1.

a) La expresión del nivel de intensidad sonora debida a cada uno de los focos por separado; y para la emisión simultánea de los dos focos:
b) La expresión numérica completa de la perturbación, para la elongación y para la presión y
c) E l nivel de intensidad sonora.

Datos: velocidad del sonido en el aire V = 330 ms^{-1},
intensidad umbral: $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$,
densidad del aire: $\rho_0 = 1.293$ kg m^{-3}.

Febrero-96

I-7 Una onda electromagnética plana se propaga en un medio dieléctrico transparente de índice de refracción n=1.4. Sabiendo que la propagación tiene lugar en el sentido negativo del eje Y, que se encuentra polarizada en el plano Y-Z y que posee las siguientes características $v = 5.5x10^{14}$ Hz e $I = 3.6x10^{-8} Wm^{-2}$, obtener los siguiente:

a) La expresión del vector $\overline{k}$ de la misma.

b) El valor de la permitividad ε del medio, sabiendo que $\mu = \mu_0 = 4\pi x 10^{-7} C^{-2} m\,kg$.

c) La expresión vectorial ondulatoria completa del campo eléctrico.

d) La expresión vectorial ondulatoria completa del campo magnético.

Dato: $c = 3x10^8 m\,s^{-1}$.

Febrero-96

I-8 Un murciélago persigue una mariposa guiándose por medio de ultrasonidos que emite con una frecuencia de 55 kHz y una longitud de onda de 6.2 mm. La velocidad del murciélago es de 8 $m.s^{-1}$ y detecta máximos de intensidad cada 0.6 ms. Calcular:

a) La velocidad de propagación de las ondas.

b) La frecuencia de la onda que recibe reflejada el murciélago.

c) La velocidad con la que se mueve la mariposa.

d) La frecuencia de la onda que recibe la mariposa.

Junio-96

I-9 Una onda EM plana, linealmente polarizada se propaga por el interior de un dieléctrico de permitividad relativa 3.5 en el sentido positivo del eje OY. En el extremo del material dieléctrico existe un espejo normal al eje Y, que refleja totalmente la onda. Sabiendo que la onda está polarizada en el plano YZ y que en la reflexión se produce un cambio de fase $\delta=\pi$ para el campo eléctrico, obtener lo siguiente:

a) La expresión del vector campo eléctrico incidente.

b) La expresión del vector campo eléctrico reflejado.

c) La expresión del vector campo eléctrico resultante de la superposición.

d) La densidad de energía debida al campo eléctrico resultante. Determinar las posiciones para las que se anula siempre la citada densidad de energía.

e) La energía contenida en un cilindro de eje paralelo a Y, de longitud 25 cm y sección 12 cm^2 debida al campo eléctrico resultante.

f) La expresión del vector campo magnético resultante.

DATOS: $c = 3x10^8 m.s^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} N.A^{-2}$, $E_0 = 75 mV.cm^{-1}$, $f = 6x10^{13}$ Hz (IR)

Junio-96

I-10 Una onda electromagnética plana, polarizada en el plano XZ, viaja por el interior de un medio dieléctrico en el sentido positivo del eje Z y con una velocidad de $\mathbf{1.2x10^8\ m\ s^{-1}}$. La amplitud del campo magnético asociado en $\mathbf{B_0 = 6x10^{-8}\ T}$, y tiene una longitud de onda de $\mathbf{0.2x10^{-6}\ m}$.

a) Calcular la permitividad dieléctrica relativa del medio.

b) Escribir la expresión vectorial completa del campo magnético asociado a dicha onda.

c) Escribir la expresión vectorial completa del campo eléctrico.

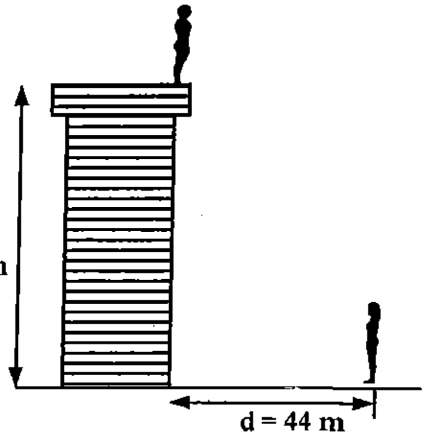
d) Escribir la expresión instantánea del vector de Poynting en el medio dieléctrico.

e) Calcular la potencia instantánea recibida por una antena circular de 45 cm de radio, cuyo eje forma un ángulo de 25° con la dirección de propagación de la onda.

f) Calcular la presión instantánea ejercida por la onda electromagnética sobre la antena.

Septiembre-96

I-11 Carmina se encuentra en lo alto de una torre de **54m** emitiendo ondas sonoras esféricas cuyo nivel sonoro a **1.5m** del punto de emisión es de **95 dB**. Javier, que se encuentra en el suelo a una distancia horizontal de **44 m** del pie de la torre, realiza medidas con un equipo receptor que se sitúa a **1 m** por encima del suelo. Se pide:



a) La expresión de las ondas de desplazamiento y de presión recibidas directamente por Javier.

Suponiendo que el suelo refleja completamente el sonido, Javier recibe en realidad la superposición de una onda directa y una onda reflejada en el suelo; en este caso,

b) Obtener la intensidad de la onda resultante que recibe Javier.

A continuación, Javier continúa en la misma posición pero sitúa el receptor a **0.5 m** del suelo

c) En esta situación obtener también la intensidad de la onda resultante, y

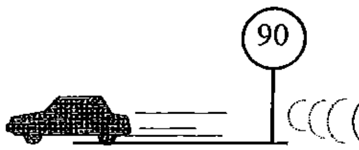
d) ¿Cuál es la diferencia de los niveles sonoros de b) y c)?

DATOS: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 ; f = 200 Hz ; v = 330 m/s ; ρ = 1'293 Kg/m^3

Septiembre-96

I-12 La Guardia Civil, monta un puesto de control de velocidad en una carretera en la que el límite máximo permitido es de 90 Km/h. El scanner que utilizan, trabaja emitiendo ondas planas ultrasónicas de 6 mm de longitud de onda y se sintoniza para que detecte señales en el rango de 50 a 75 kHz.

a) Sabiendo que a 2 metros del foco, la intensidad de la señal es de 10 $^{-5}$Wm^{-2}, determinar la densidad de energía y la amplitud de la onda ultrasónica.



b) Cómo habría que colocar el scanner para que sea operativo , enfocado a los coches que vienen o enfocado a los coches que van. Razonar la respuesta.

c) Si permiten un exceso de velocidad del 10% sobre la limitación, ¿Qué diferencia entre la frecuencia de la señal emitida y la recibida indica que el coche ha superado el límite de velocidad?

d) Calcular la velocidad, a partir de la cual el scanner no será capaz de determinar el exceso de velocidad

DATOS: Vsonido = 300 m/s, densidad del aire = 1.29 Kg./m^3.

Febrero-97

I-13 Una onda e.m. plana y linealmente polarizada en el plano **XY**, se propaga en el aire (ε_0, μ_0) a lo largo del **eje X**, siendo su vector de Poynting,
$\vec{S}_i = 0.96 \times 10^{-5} \cos^2 (2.42 \times 10^3 x - 7.25 \times 10^{11} t) \vec{u}_x \, w.m^{-2}$. La citada onda e.m., penetra perpendicularmente, en un dieléctrico (ε, μ_0) de forma que el vector de Poynting de la onda refractada es $\vec{S}_R = 0.88 \times 10^{-5} \cos^2(3.14 \times 10^3 x - 7.25 \times 10^{11} t) \vec{u}_x \, w.m^{-2}$. Sabiendo que el plano de polarización de la onda no cambia en la refracción, obtener lo siguiente:

1) El índice de refracción n y la constante dieléctrica ε del dieléctrico.
2) Las expresiones vectoriales completas del campo eléctrico y del campo magnético de la onda incidente.
3) Las expresiones vectoriales completas del campo eléctrico y del campo magnético de la onda refractada.
4) El vector de Poynting de la onda e.m. reflejada en la superficie del dieléctico y que se propaga nuevamente por el aire.

DATO: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (Tm\, A^{-1})$

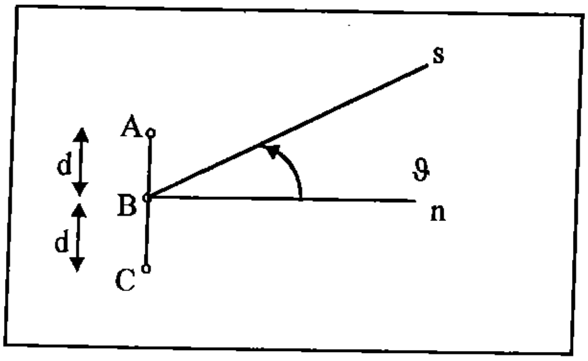
Febrero-97

I-14 Un sistema emisor está fomado por tres antenas iguales **A, B y C** distanciadas **d = 4 m** y se encuentra emitiendo señales de **λ = 3,5 m** en dirección a un avión espía. Sean ϑ el ángulo formado por la normal **n** al sistema y la dirección del avión espía s y $\mathbf{P_0}$ la potencia recibida por el avión cuando sólo emite una antena. Si sólo funcionan las antenas **A y C**, obtener:

1. La expresión analítica de la potencia P_1 recibida por el avión, en función de **ϑ**.
2. El valor numérico de P_0 sabiendo que $\mathbf{P_1 = 7.5\ \mu W}$ cuando **ϑ = 26°.**

Si las antenas que funcionan son **A y B** obtener:

3. La expresión analítica de la potencia P_2 recibida por el avión en función de **ϑ**.
4. EL valor numérico de P_2 para **ϑ = 26 °.**



Junio-97

I-15 Una onda E-M armónica plana y **linealmente polarizada** se propaga **en el interior** de una lámina de vidrio de caras paralelas e incide sobre una de las caras con aun ángulo de incidencia **ϑ = 60°**. El plano formado por la dirección incidente y la normal a la cara es **XZ**, siendo el eje **Z** la dirección de la normal. El medio tiene un índice de refracción **n = 1,85**, y la intensidad es de **I = 4,6 X 10^{-6} w.m^2**. La lámina está colocada en el aire y el plano de vibración del campo eléctrico de la onda es el **XZ.** Se pide obtener lo siguiente:

1. Los vectores de onda **incidente** $\mathbf{k_i}$ y el de onda **reflejada** $\mathbf{k_r}$ ¿Existe la onda refractada? Razónese.
2. Las expresiones vectoriales ondulatorias de los campos eléctricos y magnéticos **de la onda incidente.**
3. El vector de Poynting **incidente y el reflejado** de acuerdo con el resultado del apartado 1), y suponiendo que la onda reflejada también está linealmente polarizada.

DATOS: $f = 6.7 \times 10^{14}$ Hz ; $c = 3 \times 10^8\ m.s^{-1}$; $\mu_{vidrio} = 4\pi \times 10^{-7}$

Junio-97

I-16 Un ciclista que viaja a una velocidad inicial de **16.4 km/h** oye una ambulancia, y se para dejándola pasar. El ciclista comprueba que el cociente de las frecuencias antes de pasarle la ambulancia, (él se mueve) y después de pasarle la ambulancia (el ciclista está quieto) des de **6/5** y que el nivel de intensidad del sonido cuando la ambulancia está a una distancia de **3 metros**, es de **90dB**. A una distancia del ciclista de **511 m**, la ambulancia llega a un hospital, por lo que desconecta la sirena. El ciclista, todavía parado, deja de oír la sirena **18.7 segundos** después de haberle pasado la ambulancia. Se pide:

a) La potencia con que emite la ambulancia, suponiendo que la onda de propagación es esférica
b) La velocidad del sonido.
c) La velocidad de la ambulancia.
d) El nivel de intensidad detectado por el ciclista justo antes de apagar la sirena.

Dato: $\mathbf{I_0 = 10^{-12}\ W\ m^{-2}}$

Septiembre-97

I-17 Sea una onda electromagnética polarizada linealmente cuyo vector campo eléctrico es $E_0\cos[2\pi 3\cdot 10^7\left(t-\frac{z}{c}\right)]\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ donde $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son vectores unitarios, c es la velocidad de la luz y $\mathbf{E_0 = 0.1\mu V/m}$. Determinar:

a) Sus vectores campo magnético y de Poynting
b) Su intensidad o flujo de energía por m^2
c) Su longitud de onda
d) La f.e.m. inducida como función del tiempo, en un carrete circular de **0.1 m** de radio y **100 espiras** situado en el punto **(1,1,1)** y con su eje paralelo al eje x. Obsérvese que el carrete es muy pequeño comparado con la longitud de onda.

Septiembre-97

I-18 Una onda electromagnética plana, **linealmente polarizada,** se propaga por un medio dieléctrico, de constante magnética μ_0. El campo eléctrico de esta onda, expresado en microvoltios/m, responde a la expresión : $\vec{E}=\frac{3}{2}\text{sen}[2\pi 10^7(x+10^8 t]\vec{j}$. Determinar:

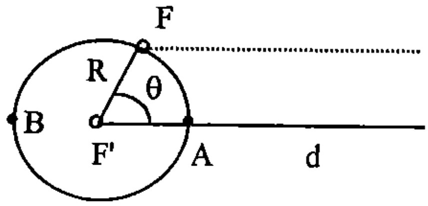
a) La constante dieléctrica relativa del medio. La velocidad, frecuencia y λ de la onda.
b) La expresión de los vectores **B** y **S** asociados.
La onda incide perpendicularmente sobre un medio dieléctrico de constante relativa $\varepsilon_r = 2.5$.
Si la amplitud del campo eléctrico de la onda transmitida se reduce a la mitad, determinar:
c) Las expresiones del vector de Poynting de las ondas reflejada y transmitida.
d) Si la onda no incide normalmente, ¿Existe un ángulo a partir del cual no hay señal transmitida?. Justificar la respuesta.

Datos: (En S.I.: $\mathbf{\mu_0 = 4\pi 10^{-7};\ c = 3\ 10^{8}}$**)**

Junio-98

I-19 Un foco emisor de sonido **F** gira en torno a otro foco emisor **F'** de la misma frecuencia, **f**, **fase**, Φ, y potencia de emisión, **P**. Se supone: que ambos focos emiten ondas perfectamente esféricas, que la velocidad de giro es muy pequeña frente a la velocidad de propagación del sonido, v, por lo que no hay que tener en cuenta el efecto Doppler.

a) ¿Cuál tiene que ser la frecuencia de emisión para que un observador situado a una distancia **d** del foco fijo (d>>R siendo **R** el radio de giro de un foco alrededor del otro) escuche dos mínimos cuando los focos estén en la línea que une el foco fijo con el observador (posiciones **A** y **B**)?.



b) Demostrar que, en una aproximación de primer orden, la intensidad de sonido percibido por el observador depende de d^{-4} y encontrar la expresión analítica completa.

c) ¿En qué punto tendría que situarse el foco móvil para que el observador escuchara un máximo?. ¿Cuál tendría que ser el desfase entre las señales para que en lugar de un máximo escuchara un mínimo?.

Junio-98

I-20 Una cuerda de longitud **1.8 m** y masa **65 g.** se encuentra fija por sus dos extremos y sometida a una tensión de **80 N**. Sabiendo que está vibrando en su quinto modo (n = 5) y con una amplitud en los vientres de **A = 33 mm**, obtener

a) La frecuencia de emisión.

b) La expresión analítica de la onda.

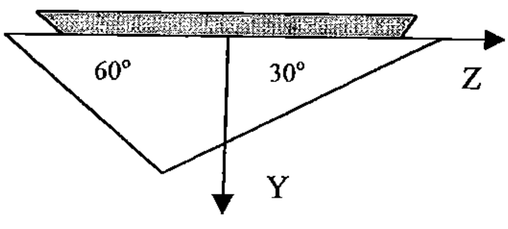
Suponiendo que la cuerda emita ondas esféricas en el aire:

c) Calcular la frecuencia y longitud de onda de la onda esférica correspondiente.

d) Obtener la expresión analítica de la onda de presión en un punto distante r_0 metros de la cuerda donde el nivel de intensidad es de **27 dB.** **DATOS:** $v_s = 340 m/s$; $\rho_0 = 1.273\ kg/m^3$; $I_0 = 10^{-12}\ w/m^2$; $I = p_0^2/2\rho_0 v_s$.

Septiembre-98

I-21 Una onda plana electromagnética de frecuencia **f=5.09x10^{14}Hz** se hace incidir normalmente sobre la cara más pequeña del prisma de la figura que tiene un índice de refracción **n = 1.56.** Al colocar una gota de liquido sobre la cara hipotenusa, como se indica en la figura, se observa que la onda se refleja totalmente. Si la onda en el prisma está **polarizada linealmente** con el campo eléctrico oscilando en dirección normal al plano de la figura y de amplitud **E$_0$ =3mV/m**



Se pide:

a) El índice de refracción máximo que puede tener el líquido para que la onda se refleje totalmente.

b) Los vectores **E, B** y **S** de la onda que incide sobre el plano de la hipotenusa del prisma.

c) El vector **S'** de la onda reflejada así como la densidad media de energía que transporta.

Dato: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ N/A^2$.

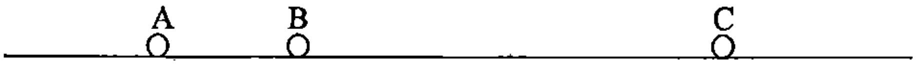
Septiembre-98

I-23 Dos fuentes sonoras, **A** y **B** de **36 π W** de potencia cada una, separadas una distancia **D = 17 cm**, emiten ondas esféricas de frecuencia **f = 1000Hz** siendo su velocidad de propagación **340 m/s.**

a) Si el desfase entre las señales emitidas por ambas fuentes es π, determinar la intensidad del sonido percibida por un observador situado en el punto **C** de la línea que une ambas fuentes y a una distancia **r = 10m** de la más cercana.

b) Demostrar que si las dos fuentes emiten en fase la intensidad percibida por el observador es $\mathbf{I \cong (9/r^4)D^2}$.

c) Determinar la diferencia del nivel sonoro en **C** para las dos situaciones anteriores.



Junio-99

I-24 Una onda electromagnética de frecuencia **f**, se propaga en el vacío, en la dirección del eje **x** positivo siendo la amplitud de su campo eléctrico $\mathbf{E_o}$. En el instante **t =0**, el campo eléctrico de la onda en el origen de coordenadas es $\mathbf{(0, 0, E_o)}$.

Escribir la expresión matemática de la onda (campo eléctrico, campo magnético, y vector de Poynting) en los dos casos siguientes:

a) Si es plano polarizada.

b) Si es circularmente polarizada.

Si en el origen de coordenadas se coloca una espira de radio **r** (**r<<λ**) con su vector superficie orientado paralelamente al eje **z**, y en el punto **(λ/ 4, 0, 0)** se coloca otra espira del mismo radio pero con su vector superficie orientado paralelamente al eje y.

c) Determinar, para los casos a) y b), la fuerza electromotriz inducida en cada espira, indicando su fase.

Junio-99

I-25 Una onda transversal se propaga en forma de ondas planas en una región del espacio de densidad volumétrica de masa **ρ=750 kg/m³**, de manera que el desplazamiento de las mismas respecto a la posición de equilibrio viene dado por: **Y=0.1 sen 2π [(x/4)-(t/0.02)] (mm)**, donde **x** está expresado en metros y **t** en segundos, se pide:

a) Escribir la ecuación diferencial de ondas de la cual es solución esta expresión.

b) Calcular los valores de longitud de onda, frecuencia angular y velocidad de propagación de la onda.

c) Calcular la densidad de energía cinética por unidad de volumen en la posición **t=0.8 seg.** y **x=4m**.

Si a una distancia de **50 m** del foco la onda incide en una superficie y rebota sin cambio de fase,

d) calcular la distancia entre un máximo y un mínimo consecutivos.

e) Calcular el número de nodos que aparecerán como consecuencia de la superposición de la onda y su eco.

Septiembre-99

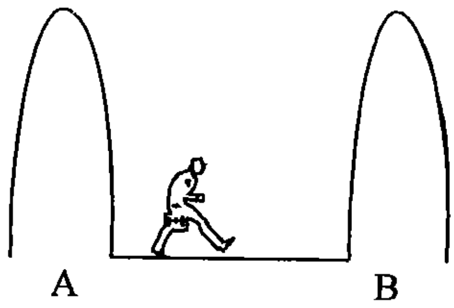
I-26 Una estación de FM emite una señal de **50 kW** de potencia a una frecuencia de **100 MHz**. Si suponemos que emite uniformemente en todas las direcciones:

a) Determinar las expresiones de los campos **E, B** y **S** en una región en que la onda se propaga en la dirección **j** a una distancia de 100 km de la estación emisora.

b) Si en esta posición incide normalmente sobre un medio dieléctrico de ε_r = **4** y se transmite el **64%** de la energía, determinar las expresiones de los campos **E** transmitido y reflejado.

Septiembre-99

I-27 Un alumno que se encuentra en un estrecho valle entre dos montañas A y B, se dirige hacia la B con una velocidad de **6 m/s** y lanza un grito de frecuencia **90 Hz**. Desde que lanza el grito hasta que recibe el primer eco (procedente de A) transcurren **2,20 s** y cuando recibe el segundo (procedente de B) han transcurrido **2,90 s**;



a) ¿A qué distancia está el alumno de cada montaña en el momento de gritar?

El alumno observa que como consecuencia de la superposición de las dos ondas que le llegan se producen pulsaciones.

b) ¿Cuál es la frecuencia del pulso?

DATO: $\mathbf{v_{sonido} = 330\ m/s}$.

Febrero-99

I-28 Un pulso laser tiene una energía de **45 J** y un radio de haz de **2 mm**. El pulso se propaga en el interior de un dieléctrico de permitividad eléctrica relativa $\varepsilon_r = 1.55$, Si la duración del pulso es de **30 ns**, se pide,

a) ¿Cuál es la longitud espacial del pulso?.

Se supone que el pulso de onda se puede aproximar por una onda plana de $\lambda = 660$ **nm**, que está polarizado circularmente y que avanza en la dirección del **eje Z**, calcular,

b) Los vectores campo eléctrico y campo magnético del pulso,

c) El vector de Poynting y la presión de radiación que ejerce el pulso sobre una superficie normal a la dirección de avance, que lo absorbe completamente. **Dato:** $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathbf{N.A^{-2}}$.

Febrero-99

I-29 Cuatro focos puntuales están colocados en cada uno de los vértices de un cuadrado de lado **a=90m**. Los cuatro emiten de forma isótropa y coherente ondas armónicas con una frecuencia de 10^8 **Hz** y la potencia de cada foco es de **6 kw**. Si las fases iniciales en cada foco son: $\alpha_A = 0$, $\alpha_B=\pi/2$, $\alpha_C = 5\ \pi/4$ y $\alpha_D = \pi/4$. Obtener en el centro del cuadrado, la intensidad de la onda resultante y la fase inicial del movimiento armónico que tiene lugar cuando:

a) Funcionan sólo los focos **A, B** y **D.**

b) Funcionan los **cuatro** focos.

c) Qué caso, **el a) o el b)**, utilizaría usted para reforzar la intensidad en el centro y por qué.

Febrero-99

I-30 Una lancha se aproxima perpendicularmente a un acantilado que puede asimilarse a un plano vertical. La sirena de la lancha emite un sonido con frecuencia f = 480 Hz, que después de reflejarse en el acantilado se percibe en la lancha con una frecuencia f = 250 Hz.

a) Determinar la velocidad de la lancha.

b) Conocida la velocidad anterior, determinar en función del tiempo la variación del nivel de intensidad de la onda recibida en el acantilado, conforme se va acercando la lancha.

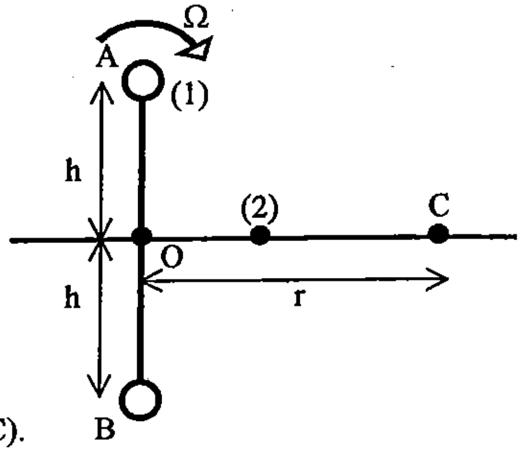
Nota; suponer que la lancha emite ondas esféricas y que la velocidad del sonido es 300 m/s.

Junio-00

I-31 Una onda e.m. se propaga por el interior de un dieléctrico. Sabiendo que su campo eléctrico obedece a la expresión $\vec{E} = (3.4406\vec{u}_x + 2.4091\vec{u}_y)$ cos $[2\pi(3.8240x\text{-}5.4613y\text{-}10^9t]x\ 10^{-4}\ V.m^{-1}$

calcular: 1) la frecuencia, 2) el vector $\vec{k}$, 3) la longitud de onda, 4) el plano de polarización, 5) el índice de refracción del dieléctrico, 6) el coeficiente dieléctrico del mismo, 7) la expresión del campo magnético y 8) el vector de Poynting. ($\mu_0 = 4\pi x10^{-7}$ S.I.)

Junio-00



I-32 Dos focos sonoros A y B emiten con la misma frecuencia (*f = 900 Hz*) y potencia (*P = 5 w*) pero con una diferencia de fase de *π/3*. Los focos se encuentran en los extremos de un vástago de longitud *2h* que puede girar alrededor de su centro O. Calcular la intensidad producida en un punto C distante *r = 2 m* de O en los casos siguientes:

1) cuando A está en la posición 1 (AB perpendicular a OC),
2) cuando A está en la posición 2 (AB en la dirección OC).

A continuación se hace girar el sistema en el plano de la figura con una velocidad angular *Ω* en torno a O. Se pide:

3) calcular *Ω* en el instante en que el foco A pasa por la posición 1 sabiendo que en puntos distantes (C muy alejado) se observan pulsaciones con una frecuencia de *75 Hz* (*datos*: h=3*λ*, $v_s = 330\ m.s^{-1}$).

Septiembre-00

I-33 Sea una onda electromagnética linealmente polarizada, cuyo vector campo eléctrico es:

$$\bar{E} = E_0 \cos\left[2\pi 3 10^7\left(t - \frac{z}{c}\right)\right](\bar{i} - \bar{j})$$

donde $\bar{i}$ y $\bar{j}$ son vectores unitarios, c es la velocidad de la luz y $E_0 = 0.1\ \mu V/m$.

Determinar:

a) Longitud de onda
b) Vector campo magnético
c) Vector de Poynting
d) Intensidad o flujo de energía por m^2
e) La f.e.m. inducida como función del tiempo, en un carrete circular de 0.1 m de radio y 100 espiras situado en el punto (1,1,1) y con su eje paralelo al vector $\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$ (obsérvese que el diámetro del carrete es muy pequeño frente a la longitud de la onda).

Septiembre-00

I-34 Los campos eléctricos de dos ondas E.M. planas en un vidrio (n = 1.45) son:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_0 \cos(kz - wt)\ \vec{j} \\ \vec{E}_2 = E_0\,\mathrm{sen}(kz - wt)\ \vec{j} \end{cases}$$, obtener para el movimiento ondulatorio resultante:

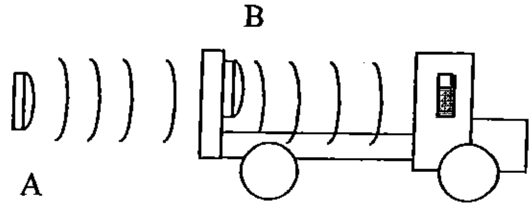
1) El vector campo eléctrico. ¿se trata de una onda plana E.M. progresiva?. Razónese.
2) El vector campo magnético;
3) El vector de Poynting instantáneo y promedio
4) La densidad de energía media de la onda.

DATOS: $f = 10^5$ Hz; $E_0 = 0.5\ \mu V.m^{-1}$; $\mu_0 c = 120\pi$

Junio-01

I-35 Mientras un altavoz, A, situado en el origen de coordenadas emite una onda plana sonora de frecuencia fija en la dirección del eje x positivo, un vehículo con otro altavoz, B, en su parte trasera, emite una onda plana de la misma amplitud, frecuencia y en la misma dirección que el primer altavoz. El vehículo se mueve muy despacio (0.1 m/s, de modo que es despreciable el efecto Doppler) alejándose del altavoz A, a lo largo del eje x. El conductor del vehículo situado a 5 m del segundo altavoz percibe intervalos de silencio (Intensidad nula) cada 5 s.

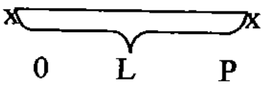
1) Determinar la frecuencia con que emiten los altavoces.
Si el vehículo acelera hasta una velocidad constante, v (suficiente para que el efecto Doppler sea apreciable). A dicha velocidad el conductor percibe intervalos de silencio cada 0.1s.



2) ¿Con que velocidad se mueve ahora el vehículo?
3) Si la intensidad del sonido emitido por cada altavoz es I ¿cuál será la máxima intensidad percibida por el conductor?
Dato: (velocidad del sonido en el aire 340 m/s)

Junio-01

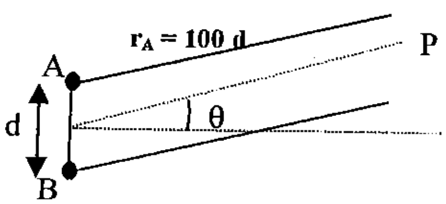
I-36 Una onda de ecuación $y_1 = A \text{ sen } (kx-wt)$ interfiere con otra cuyo foco emisor está en P, de la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda que se propaga en sentido contrario.



a) Expresión de la ecuación de la segunda onda y de las ondas estacionarias tomando como origen el punto 0.
b) Suponiendo que entre O y P, se forman cuatro nodos, obtener la longitud de onda en función de L.
c) Obtener la amplitud de las ondas en L/2.
d) Obtener la posición de los nodos respecto del origen O en función de L

Septiembre-01

I-37 Dos cuerdas de guitarra separadas una distancia **d = 3 m** (situadas en **A** y **B** en la figura) se hacen vibrar en su modo fundamental y emiten sonido uniforme en todas las direcciones con una potencia **P = 2 mW** cada una. Si la amplitud de las ondas en las cuerdas de las dos guitarras es de **A = 1.5 mm**, y su longitud **L = 70 cm**,



a) Escríbase la expresión analítica completa de la onda en la cuerda. Utilícese como eje de la cuerda el eje X.

Si las guitarras están sonando a la vez, calcular en un punto P alejado (**r_A = 100 d**):

b) La amplitud de la onda de presión, en función del ángulo θ así como la expresión analítica de dicha onda:
d) Los valores del ángulo θ para los que se producen máximos de intensidad y el valor de la amplitud de la onda de presión en dichos máximos.

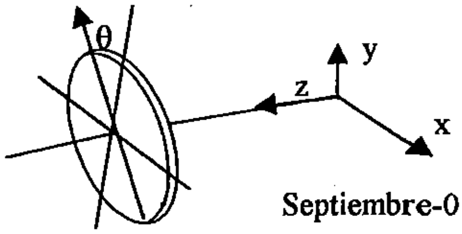
DATOS: **v_c (sonido en la cuerda)** = 630 m/s ; **v_A(sondido en el aire)** = 340 m/s;
$\rho_{aire} = 1.273$ kg.m^{-3} .. **I** = ½ $\rho_{aire} v_a (w\xi_0)^2$, siendo ξ_0 la amplitud de la onda de desplazamiento.

Septiembre-01

I-38 Una onda e.m. plana se propaga por el agua ($n = 1.33$). Sabiendo que la frecuencia es $f = 5\text{x}10^8$Hz y la expresión del campo eléctrico es:

$\vec{\mathbf{E}}$ **= 12 x 10^{-6} [sen(kz-wt) $\vec{\mathbf{u}}_y$ –cos(kz-wt) $\vec{\mathbf{u}}_x$] V.m^{-1}**. Calcular:

a) la expresión numérica completa del campo magnético y
b) la expresión numérica completa del vector de Poynting. Si se interpone un polarizador con su plano paralelo al (x,y) y con su eje de polarización formando un ángulo $\theta = \pi/4$ con el eje vertical como indica la figura, calcular para la onda e.m. <u>después</u> de atravesar el polarizador,
c) la expresión numérica completa del campo eléctrico
d) la expresión numérica completa del campo magnético,
e) la expresión numérica completa del vector de Poynting y
f) el tipo de polarización. DATO: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (S.I.)

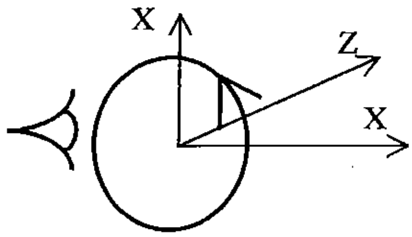


Septiembre-01

I-39 Un observador se encuentra en una posición equidistante entre dos altavoces (D y I) que emiten ondas planas monocromáticas de amplitud A_0, de frecuencias f y $f+\Delta f$ respectivamente, que se propagan con velocidad v.
Determinar:
a) La amplitud y frecuencia de la modulación de la señal sonora percibida por el observador.
b) Calcular la expresión analítica de la onda resultante de la superposición de ambas señales y determinar la velocidad del grupo.
c)¿Hacia qué altavoz y con que velocidad debe moverse el observador para percibir ambas señales con la misma frecuencia?.

Junio-02

I-40 Una onda electromagnética que se propaga en el vacío con su vector campo eléctrico dado por:
$\vec{E} = 1.5\,\text{sen}\left[2\pi\text{x}5.10^{14}\left(t - \dfrac{z}{c}\right)\right](\vec{i} + \vec{j})\text{mV.m}^{-1}$, atraviesa una lámina cuarto de onda colocada perpendicularmente a la dirección de avance. Sabiendo que se transmite un 60% de su intensidad y que la onda queda circularmente polarizada en sentido antihorario (mirando el avance de la onda por detrás. Véase el dibujo). Se pide:
1) Expresión de los vectores de campo eléctrico y magnético de la onda transmitida.
2) Vector de Poynting transmitido (su media).
3) Densidad de energía instantánea de la onda incidente.



Junio-02

I-41 Dos focos sonoros A y B separados la distancia de 100 m, emiten en el aire a la temperatura de 21°C, ondas armónicas de la misma frecuencia $v = 1103,3$ Hz.

1° La señal emitida por el foco A deja de oírse a 100 m de él. ¿Con qué potencia emite el foco de A?.

2° La señal emitida por el foco B crea un nivel sonoro de 60 dB a la distancia de 10 m del foco. ¿Con qué potencia emite B?

3° ¿Cuál es el número de onda de las ondas emitidas?

4° Sabiendo que en un punto M de la línea que une los focos, a la distancia de 40 m del A, hay un máximo de intensidad, determinar la diferencia de fase con que emite el B respecto del A, indicando si está adelantando o atrasado.

5° Calcule el valor de la intensidad física del sonido en M.

6° Calcule el valor de la amplitud de la señal resultante en M.

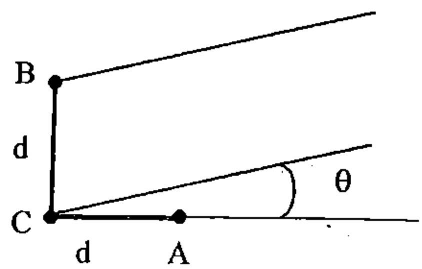
7° Calcule el nivel sonoro en M.

8° Un observador que parte de M y se dirige hacia B comprueba que la diferencia de frecuencias que percibe de uno y otro foco es de 115,4 Hz. Determine la velocidad del observador.

Datos: Densidad del aire $\rho = 1,28$ Kg/m^3
Velocidad del sonido en el aire a 273 K, $v_o = 334$ m/s.
Intensidad de referencia $I_o = 10^{-12}$ W/m^2.

Junio-02

I-42 Tres altavoces situados en las posiciones **A, B, C**, respectivamente, están emitiendo en fase y con una separación $\mathbf{d_{BC}} = \mathbf{d_{CA}} = \mathbf{d} = \lambda$, (veáse la figura).



Si funcionan sólo el **A** y el **C** (simultáneamente),

a) Obtener, en función de la orientación θ, la intensidad en un punto P lejos de las altavoces.

Si funcionan simultáneamente los tres, obtener:

b) valor de θ (llámese θ_0), para el que son iguales las diferencias de fase: $\delta_C - \delta_B = \delta_B - \delta_A$ y valor de su intensidad en P (lejos de los altavoces).

Septiembre-02

I-43 Un haz de ondas electromagnéticas planas de $3\cdot10^{14}$ Hz, 5mV de amplitud de campo eléctrico, linealmente polarizadas en el eje de las Y y que se propaga en la dirección del eje de las X, incide perpendicularmente sobre el interfase de dos medios dieléctricos de $n_1 = 2$ y $n_2 = 1.5$, respectivamente.

a) Calcular el valor de λ en cada uno de los medios.

b) Escribir las expresiones de los vectores **E, B** y **S** de la onda incidente.

c) Sabiendo que la incidencia se refleja un 25% de la señal, determinar la expresión del campo eléctrico transmitido al otro medio.

d) Variando el ángulo de incidencia, ¿existe la posibilidad de que se refleje toda la señal incidente?,. Justificar la respuesta y en caso afirmativo calcular el ángulo crítico.

Septiembre-02

I-44 Dos focos sonoros entre A y B separados 100 metros emiten ondas de $\nu = 1103'3$ Hz. Se pide, a la temperatura de 21 ° C:

a) Sabiendo que la señal emitida deja de oírse a 100 metros, hallar la potencia con que emite.
b) Si a 10 metros de B se tiene una L = 60 dB, calcular la potencia con que emite B.
c) Hallar el número de onda.
d) Hallar la diferencia de fase si en un punto M a 40 metros de A se detecta un máximo.
e) Hallar I_M
f) Hallar A_M
g) Hallar L en M.
h) Si un observador percibe que la diferencia de frecuencia de los dos focos es de $\Delta\nu = 115'9$ Hz moviéndose desde M hacia B, hallar la velocidad del observador.

Junio-02

I-45 Sea un foco sonoro que emite con una $\nu = 1980$ Hz. La ecuación asociada es $Y_i = A\cdot\cos(w\,t-k\,x)$. La onda se refleja en una pared vertical (tener en cuenta el desfase) y se forman ondas estacionarias.

DATOS: $T_{aire} = 20°C$; $V_{sonido\ en\ el\ aire\ a\ 0°\ C} = 331$ m/s.

Calcular:

a) La longitud d onda
b) La ecuación de las ondas estacionarias.
c) Distancias a la pared de los puntos nodales.
d) Numero de nodos en un metro.
e) Distancias a la pared de los puntos ventrales.

Si el foco emisor se desplaza a la pared a 30 Km/h, obtener:

f) La ν de las ondas reflejadas percibidas por un observador más distante de la pared que del foco emisor y que se aleja de ella a la misma velocidad que el foco.

Septiembre-02

I-46 Una fuente sonora emite isotrópicamente con una potencia P y frecuencia f ' mientras se mueve en torno al origen de coordenadas y en la dirección del eje x con un M.A.S de amplitud Ao y frecuencia f (suponer que la velocidad de la fuente sonora es mucho menor que la velocidad del sonido). Determinar:

a) La máxima diferencia de frecuencias de sonido percibido por un observador situado en el punto (x'0,0), ¿cuál será la situación de la fuente sonora en esta caso?
b) La intensidad que se percibe en x' en función del tiempo.
c) La diferencia de nivel de intensidad entre el valor máximo y mínimo percibidos en x'. Suponer que la velocidad de la fuente sonora, Vs, es mucho menor que la velocidad del sonido, V, y que x' >>Ao.

Junio-03

I-47 Una onda e.m polarizada circularmente se propaga por un dieléctrico con $\varepsilon_r = 2{,}5$ y se encuentra con su frontera, el plano Π_{xy} (z = 0) de la figura. Se sabe que el campo $\vec{B}$ de la onda incidente es: $\vec{B} = 6 \times 10^{-12}\,[\mathrm{sen}(\vec{k}_1 . \vec{r} - wt)\,\vec{u}_x + \cos(\vec{k}_1 . \vec{r} - wt)\,\vec{u}_2]$ T.

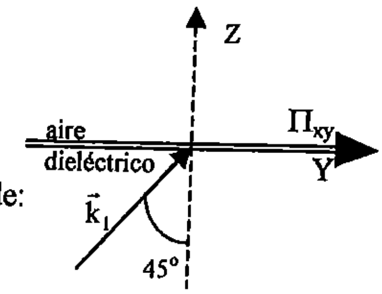
Se pide:

1) El vector $\vec{u}_2$ y el vector de onda incidente $\vec{k}_1$.
2) La expresión completa de los campos incidentes $\vec{E}_1$ y $\vec{S}_1$.

Al incidir sobre Π_{xy} y manteniendo la misma polarización, se pide:

3) Los vectores de Poynting reflejado y refractado.
4) Los campos $\vec{E}$ reflejado y refractado.

DATOS: $\mu_0 = 4\pi x 10^{-7}$, f = 82 Mhz.



Junio-03

I-48 Un excursionista marcha en una vagoneta por una vía de tren a una velocidad de 36 km/h en dirección a una pared de montaña. A su espalda oye el pitido de un tren detectando una frecuencia de 5 kHz.

a) ¿Con qué frecuencia oirá el eco del pitido en la montaña?

Si suponemos que el tren emite ondas planas, y que el rebote de las mismas en la montaña también son ondas planas.

b) Escribir la ecuación de onda resultante percibida por el excursionista.
c) ¿Cada cuanto tiempo observará el excursionista un máximo de intensidad?

DATO: velocidad del sonido 320 m/s

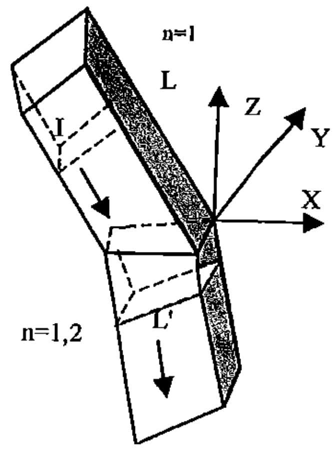
Septiembre-03

I-49 Sobre la superficie de separación entre dos medios dieléctricos (plano z= 0) de índices de refracción 1 y 1,2, incide un haz de luz de sección cuadrada (lado L) que se propaga en la dirección (1/2, 0, $-3^{1/2}/2$). Si la intensidad del haz es I, su frecuancia f y si está polarizado en el plano y = 0. Determinar:

a) La potencia transmtida por el haz.
b) El área de la sección recta del haz refractado (L.L').

Suponiendo que toda la luz se transmite, que el haz refractado sigue polarizado en el plano y = 0 y que la permeabilidad magnética de ambos medios es μ_0 determinar:

c) La intensidad y el vector de Poynting del haz refractado.
d) La expresión analítica de los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ del haz refractado.



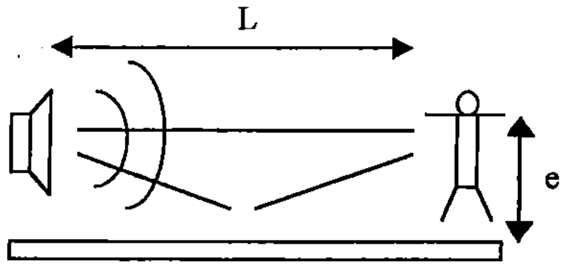
Septiembre-03

I-50 Dos altavoces emiten en fase y con una frecuencia de 2440 Hz, estando colocados en las posiciones (0, 1) y (0,-1) en metros. Un oyente está en la posición (100,0) en metros y se va moviendo muy lentamente paralelo al eje Y. Si el nivel de intensidad sonoro de cada foco por separado y lejos de la fuente vale 57 dB, obténgase:

1) La expresión de la intensidad que percibe el oyente debida a los dos focos para una dirección que forma un ángulo θ con el eje X.
2) La posición del oyente para que escuche el 3er máximo y el 2° mínimo. Valor de las intensidades respectivas.
3) ¿Cuántos máximos en total, podrá escuchar si sigue andando en la misma dirección y porqué?

DATO: $v_{sonido} = 340$ m/s

Septiembre-04



I-51 Un foco sonoro de potencia W situado a una altura e sobre el suelo emite ondas esféricas. Un observador situado a la misma altura del suelo y a una distancia L de la fuente sonora, percibe el sonido que llega directamente y el que llega tras reflejarse en el suelo.

Determinar, suponiendo que L es mucho mayor que e y que no hay cambios de fase en la reflexión en el suelo:

a) A qué frecuencias debe emitir el foco emisor para que el observador perciba máximos de sonido.

b) A qué frecuencias debe emitir el foco emisor para que el observador perciba mínimos de sonido.

c) Si no hay atenuación en la reflexión en el suelo cuál será la intensidad del sonido percibida en este último caso.

d) Si x <<1, $(1+x)^n$ puede aproximarse por 1 + nx, utilizando esta expresión, demostrar que la intensidad percibida es $\frac{W}{4\pi}\left(\frac{2e^2}{L^3}\right)^2$. Demostrar que si x <<1, $(1+x)^n$ puede aproximarse por 1 + nx.

DATOS: L = 100m, e = 5 m, v = 340 m/s, así mismo, tomar W como dato.

Junio-04

I-52 Dos ondas sonoras planas, ambas con un mismo nivel de intensidad NI_1 se propagan con una velocidad v a lo largo del eje x, sentido positivo. Las pulsaciones de las ondas son, respectivamente w_1 y w_2. Se pide:

a) Expresar analíticamente las dos ondas en forma de ondas de presión p_1 y p_2 y

b) En forma de ondas de elongación, ξ_1 y ξ_2.

Si se superponen las ondas de presión, expresar:

c) La onda resultante p y explicar claramente su naturaleza.

d) Calcular también el nivel máximo NI_2 de la onda resultante:

DATOS: NI_1 = 43 dB, $w_1 = 2565\ rad.s^{-1}$, $w_2 = 2560\ rad.s^{-1}$, $\rho = 1.23\ kg.m^{-3}$ y $v = 10\ m.s^{-1}$.

Septiembre-05

I-53 *Un observador* está situado en el origen de coordenadas. En el punto (d,0) se emplaza *un foco sonoro* que emite isótropamente. Queremos que al observador *no le llegue ningún sonido.* Para ello situamos en el punto (d-a, a) d > a *un segundo altavoz* que también emite isótropamente.

Determinar en función de la potencia y frecuencia de emisión del primer altavoz

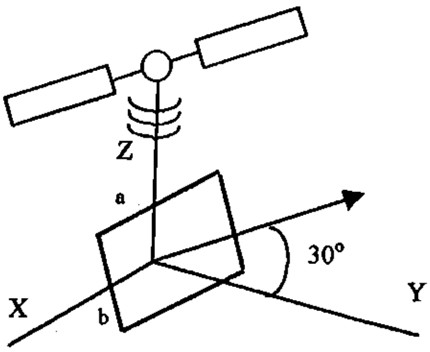
1) La potencia, frecuencia y fase con que ha de emitir el segundo para conseguir el efecto deseado.

En las condiciones de frecuencia y fase anteriores

2) ¿Qué relación debería existir entre las intensidades de sonido producidas por cada uno de los altavoces para que el observador situado en el origen de coordenadas perciba un nivel de intensidad de 10 dB?

Datos: Tomar v como velocidad de propagación del sonido; $I_o = 10^{-12} w/m^2$

Junio-06



I-54 Un satélite que orbita a una altura de 1000 km emite ondas electromagnéticas esféricas f_0 con una potencia de 100 w y polarización circular. Estas ondas son captadas en tierra por una antena rectangular de lados a y b (mucho menores que su longitud de onda) y cuyo vector de superficie está en el plano ZY formando un ángulo de 30° con el eje Y. Determinar en el centro de la antena:

a) Vectores campo eléctrico, campo magnético y de Poynting indicando su orientación,
b) f.e.m. inducida en la antena.

Datos: $c = 3\cdot10^8$ m/s, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ H/m.

Junio-06

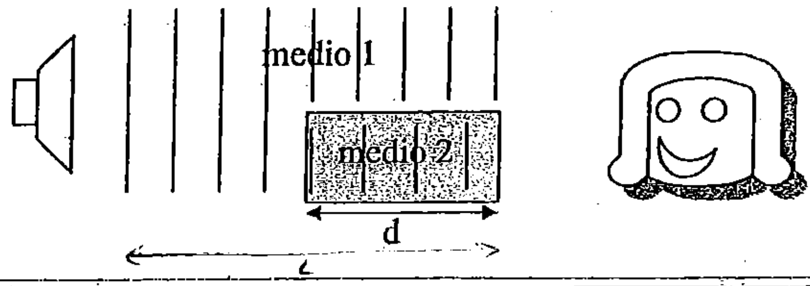
Junio 2007

3. El sonido emitido por un foco emisor de *ondas planas* de frecuencia **f** llega al observador por dos caminos:

- directamente a través de un *medio 1* donde las ondas se propagan con velocidad **v**,
- tras atravesar un *medio 2* de espesor **d** donde las ondas se propagan con una velocidad **2v** (el de la figura).

Por tanto, el observador percibe la composición de ambos sonidos. Se pide:

1. **Determinad *d* para que el observador perciba el primer mínimo de sonido.**
2. **Si al atravesar el *medio 2*, la onda pierde un 5% de su intensidad, determinad la intensidad percibida por el observador y la diferencia entre los niveles de intensidad de la onda emitida por el foco y la percibida por el observador.**



1) $I_{TOT} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$

Para que perciba mínimos: $\cos\delta = -1 \Rightarrow \boxed{\delta_{min} = (2n+1)\pi}$ (1)

Además sabemos que:

$$\delta = k_1 L - [k_1(L-d) + k_2 d] + \delta_{rel}^{\,0} = k_1 d - k_2 d + 0 =$$

$$= d(k_1 - k_2) = d\left(\frac{2\pi f}{v_1} - \frac{2\pi f}{v_2}\right) = 2\pi d f\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2v}\right) = \boxed{\frac{\pi d f}{v}} \quad (2)$$

Igualando: $(2n+1)\pi = \dfrac{\pi d f}{v}$

$$d = (2n+1)\frac{v}{f} \Rightarrow \boxed{d_{min} = \frac{v}{f}}$$

2) Suponemos el **d** calculado en 1) $\Rightarrow \cos\delta = -1$

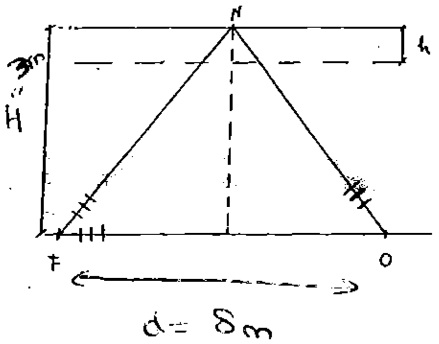
$$I_{TOT} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left\{\begin{array}{l} I_1 = I \\ I_2 = 0'95\,I \end{array}\right\} = \boxed{6'41 \cdot 10^{4} \cdot I} \quad (W/m^2)$$

$$NI_1 - NI_{TOT} = 10\log\left(\frac{I_1}{I_{ref}}\right) - 10\log\left(\frac{I_{TOT}}{I_{ref}}\right)$$

$$= 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) - 10\log\left(\frac{6'41\cdot 10^{-4} I}{10^{-12}}\right) = 10\log\left(\frac{1}{6'41\cdot 10^{-4}}\right) = 31'93\ dB$$

3.- Un foco F emisor de ondas planas está situado a una distancia d = 8 m. de un observador O, como indica la figura. Las ondas que llegan a O directamente desde F están en fase con las que llegan después de reflejarse en un plano horizontal que está situado a una altura H = 3 m. sobre el plano horizontal. Si el plano reflectante se desplaza hacia abajo y paralelamente a sí mismo una distancia h, entonces, el observador O no percibe ninguna señal.

1) Determinar cuál debe ser el valor mínimo de h para que eso ocurra, siendo la longitud de onda $\lambda = 0.5$ m.
2) Si la velocidad de propagación de las ondas es de 330 m/ s, y el observador se acerca a F con una velocidad de 30 Km/h, ¿cuál es la frecuencia aparente que recibe?



SEPT 2008

1) $\lambda = 0'5$ m

En la situación inicial:

$$\boxed{\delta = k(r_R - r_D) + \underbrace{\delta_{relativo}}_{=0} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2\sqrt{3^2+4^2} - 8\right) = \frac{4\pi}{\lambda} = 8\pi} \text{ rad}$$

Si bajamos una altura h, el desfase debe ser $\delta = 7\pi$ para que llegue un mínimo a O.

$$I_{TOT} = I_D + I_R + 2\sqrt{I_D I_R}\cos\delta$$

$\delta_{\text{situación inicial}} = 8\pi$
Si bajamos h se reduce r_R.

$$7\pi = k(r_R' - r_D) + \underbrace{\delta_{relativo}}_{=0} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2\sqrt{(3-h)^2+4^2} - 8\right) =$$

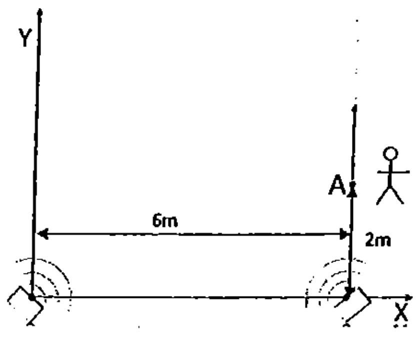
$$= 4\pi\left(2\sqrt{(3-h)^2+4^2} - 8\right) \Rightarrow \text{Operando} \quad \boxed{h = 0'2134 = 21'43 \text{ cm}}$$

b) $v = 330$ m/s $= \lambda f$

$$f_R = f_T\left(\frac{v_s \pm v_o}{v_s \pm v_f}\right) = f_T\left(\frac{330 + (30/3'6)\ \text{m/s}}{330 \pm 0}\right) = \frac{330}{0'5}\left(\frac{330 + (30/3'6)}{330}\right) = 676'66 \text{ Hz}$$

Sept. 2009.

3º) En un pequeño escenario se colocan dos altavoces de una potencia acústica de **0.1w** separados una distancia de **6m.** La primera fila de asientos se sitúa a una distancia de **2m** del escenario y por un lateral, a la altura de uno de los altavoces, se encuentra un pasillo. En unas pruebas de sonido los dos altavoces emiten en fase un tono de frecuencia **f=170 Hz**. Una persona comienza a caminar por el pasillo alejándose de los altavoces en dirección perpendicular al escenario. Se pide determinar:



a. El desfase entre las dos ondas sonoras en A (ver figura)

b. La posición del primer mínimo de intensidad sonora que encontrará al caminar por el pasillo,

c. El nivel de intensidad sonora en dicho punto

Nota: umbral de audición $I_0=10^{-12}$ w/m², v_{sonido}=340m/s

$Pot = 0'1 \, w$

$f = 170 \, Hz$

Emiten en fase $\Rightarrow \delta_{rel} = 0$.

$I_0 = 10^{-12} \, w/m^2$.

$v_s = 340 \, m/s$.

a) $\delta_A = K(r_1 - r_2) + \delta_{rel} = \frac{2\pi f}{v_s}\left(\sqrt{6^2+2^2} - 2\right) = \boxed{4'32\pi} \, rad$

$\boxed{\delta_A \simeq 0'32\pi}$

Los máximos más cercanos al punto A tendrán $\delta = 4\pi, \; 6\pi$

Los mínimos más cercanos al punto A tendrán $\delta = 5\pi, \; 3\pi$

b) La posición del primer mínimo se encuentra a una distancia d del punto A, en la que se cumple:

$$\delta = 3\pi = K\left(\sqrt{6^2+(2+d)^2} - (2+d)\right) + \delta_{rel} = \frac{2\pi f}{v_s}\left(\sqrt{36+4+d^2+4d} - 2 - d\right) =$$

Operando en una ec: $\boxed{d = 2'5 \, m}$

Comprobación con:

$$\delta = 5\pi = \frac{2\pi f}{v_s}\left(\sqrt{36+4+d^2+4d} - 2 - d\right) = 5\pi \Rightarrow \boxed{d = -0'5 \, m} \text{ No válido.}$$

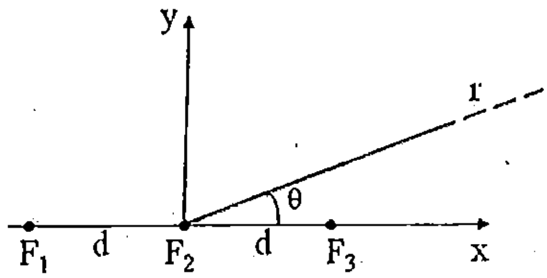
c) $$I_{TOT_{min}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(3\pi) = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2 =$$

(2'5m de A)

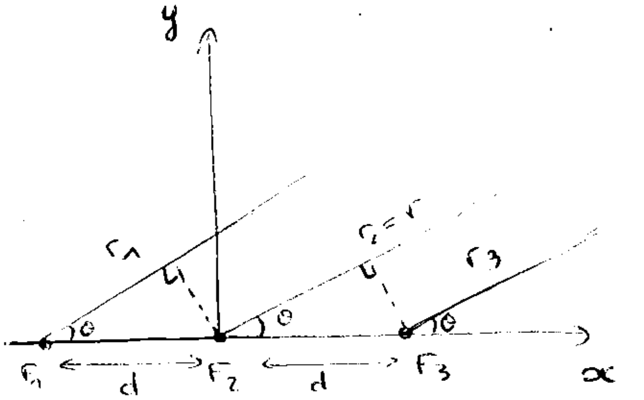
$$= \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \dfrac{Pot}{4\pi\left(6^2+(2+2'5)^2\right)} = 1'4147 \cdot 10^{-4} \ W/m^2 \\ \\ I_2 = \dfrac{Pot}{4\pi\,(2+2'5)^2} = 3'93 \cdot 10^{-4} \ W/m^2 \end{array} \right\} = 6'288 \cdot 10^{-5} \ W/m^2$$

$$\boxed{NI_{tot_{min}} = 10 \log\left(\frac{I_{TOT_{min}}}{I_{ref}}\right) = 77'98 \ dB}$$

3º) A lo largo del eje x existen tres focos coherentes emisores de ondas esféricas con la misma potencia. El primero F_2 se encuentra en $x = 0$ y lo hace con $\varphi = 0$, el segundo F_1 se encuentra en $x = -d$ y emite con una fase $\varphi = \pi / 6$ y el tercero F_3 se encuentra en $x = +d$ y emite con una fase $\varphi = -\pi / 6$. a) Obtened una expresión general para la intensidad obtenida en un punto genérico P de coordenadas (r, θ) para un $r >> d$, sabiendo que la intensidad recibida en P procedente de uno solo de los focos vale I_1 y b) aplicad la fórmula anterior para un punto alejado situado en el eje y



JUN 2010



$\varphi_1 = \frac{+\pi}{6}$ $\qquad \varphi_2 = 0$ $\qquad \varphi_3 = \frac{-\pi}{6}$

a) ¿ I_{TOT} sabiendo que $I_1(P) = I_2(P) = I_3(P) = I_1$?

$$\xi_1(r,t) = \xi_{01} \sin\left(kr_1 - \omega t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad (m)$$

$$\xi_2(r,t) = \xi_{02} \sin\left(kr_2 - \omega t\right)$$

$$\xi_3(r,t) = \xi_{03} \sin\left(kr_3 - \omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Las amplitudes $\xi_{01} = \xi_{02} = \xi_{03}$ son iguales ya que los 3 focos en el punto P, tienen la misma intensidad. $\left(I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 \xi_0^2 \right)$

observamos el esquema:

$r_2 = r$

$r_1 = r_2 + d\cos\theta = r + d\cos\theta$.

$r_3 = r_2 - d\cos\theta = r - d\cos\theta$.

$$\xi_{TOT}(r,t) = \xi_1(r,t) + \xi_2(r,t) + \xi_3(r,t) = \xi_0 \Big[\sin(kr - \omega t + kd\cos\theta + \frac{\pi}{6}) + \sin(kr-\omega t) +$$

$$+ \sin(kr - \omega t - kd\cos\theta + \frac{\pi}{6})\Big] =$$

$$= \xi_0 \Big[\sin(kr-\omega t)\cos(kd\cos\theta + \frac{\pi}{6}) + \cos(kr-\omega t)\sin(kd\cos\theta + \frac{\pi}{6}) + \sin(kr-\omega t) +$$

$$+ \sin(kr-\omega t)\cos(kd\cos\theta + \frac{\pi}{6}) - \cos(kr-\omega t)\sin(kd\cos\theta + \frac{\pi}{6})\Big] =$$

$$= \underbrace{\xi_0 \Big[1 + 2\cos(kd\cos\theta + \frac{\pi}{6})\Big]}_{\xi_{0_{TOT}}} \sin(kr - \omega t)$$

Finalmente:

$$I_{TOT} = \frac{1}{2}\rho_0 \cdot v \cdot \omega^2 \; \xi_{0_{TOT}}^2 = \frac{1}{2}\rho_0 \, v \, \omega^2 \xi_0^2 \Big[1 + 2\cos(kd\cos\theta + \frac{\pi}{6})\Big]^2 =$$

$$= I_1 \Big[1 + 2\cos\Big(\frac{2\pi}{\lambda} d\cos\theta + \frac{\pi}{6}\Big)\Big]^2 \; (W/m^2)$$

b) $$I_{TOT}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = I_1\Big[1 + 2\cos\frac{\pi}{6}\Big]^2 = I_1 (1+\sqrt{3})^2 \; (W/m^2)$$

3) *Las ondas sonoras de desplazamiento* que le llegan a un observador en la posición $x_0 = 0.5\text{m}$, son:

$$\eta_1 = \eta_0 \cos(kx_0 - \omega t) \quad y \quad \eta_2 = \eta_0\, sen(kx_0 - \omega t + \frac{\pi}{12})$$

Se pide:

1. El M.A.S. resultante de la superposición en x_0.
2. Las ondas de presión correspondientes a cada onda de desplazamiento y la onda de presión resultante, todo ello en x_0.

DATOS: η_0=0.20 μm, la frecuencia de ambas es f=170 Hz y ρ_{aire}= 1.273 kg/m^3.

SEPT 2007

$x = 0'5$ m.

$\eta_1 = \eta_0 \cos(kx_0 - \omega t)$

$\eta_2 = \eta_0 \sin(kx_0 - \omega t + \frac{\pi}{12})$

$\eta_0 = 0'2\ \mu m = 2\cdot 10^{-7}$ m

$f = 170$ Hz

$\rho_{aire} = 1'273$ (kg/m^3)

$I = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 \xi_0^2$

1. Suponemos que $v_s = 340$ m/s (aire)

$$\boxed{kx_0 = \frac{2\pi f}{v_s} x_0 = \frac{2\pi \cdot 170}{340} 0'5 = \frac{\pi}{2}} \text{ rad}$$

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) + \eta_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + \frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}\right\} = \eta_0 \sin(\omega t) + \eta_0 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\cos(\omega t) -$$

$$- \eta_0 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin(\omega t) =$$

$$= \eta_0 \left[1 - \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]\sin(\omega t) + \eta_0 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\cos(\omega t)$$

$$\eta_{TOT} = \eta_1 + \eta_2 = \eta_{0_{TOT}} \sin(\omega t + \alpha) = \eta_{0_{TOT}} \sin(\omega t)\cos\alpha + \eta_{0_{TOT}} \cos(\omega t)\sin\alpha$$

Igualando:

$$\eta_0 \left(1 - \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = \eta_{0_{TOT}} \cos\alpha$$

$$\eta_0 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \eta_{0_{TOT}} \sin\alpha$$

$\eta_0 = 2\cdot 10^{-7}$ (m)

Operando

$$\boxed{\eta_{0_{TOT}} = 1'587\ \eta_0} \qquad \boxed{\alpha = 0'21\pi} \text{ (rad)}$$

$$\boxed{\eta_{TOT}(x_0 = 0'5, t) = 0'317 \sin(340\pi t + 0'21\pi)}$$

2) ¿? Teoría

$$p = -\rho \cdot v^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (Pa)$$

$$P_1(x,t) = -\rho v^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = +\rho v^2 \eta_0 K \sin(Kx - \omega t) \quad (Pa)$$

$$P_2(x,t) = -\rho v^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = -\rho v^2 \eta_0 K \cos\left(Kx - \omega t + \frac{\pi}{12}\right) \quad (Pa)$$

En $x = x_0 = 0'5$ m.

$$\boxed{P_1(x_0,t) = 0'09246 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = 0'09246 \cos(\omega t)} \quad (Pa)$$

$$\boxed{P_2(x_0,t) = -0'09246 \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \omega t\right)} \quad (Pa)$$

$$\boxed{P_{TOT}(x_0,t) = P_{0_{TOT}} \cos(\omega t + \alpha) = P_{0_{TOT}} \cos\alpha \cos(\omega t) - P_{0_{TOT}} \sin\alpha \sin(\omega t)}$$

Igualando: $\left.\begin{array}{l} P_{0_{TOT}} \cos\alpha = 0'11639 \\ P_{0_{TOT}} \sin\alpha = 0'0893 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0'211 \text{ rad} \\ P_{0_{TOT}} = 0'6088 \ (Pa) \end{array}$

3.- Una onda sonora viene dada por la ecuación $Y = 10^{-5}$ Cos 2π 10^3 $(t - x/340)$; (en metros).

1) **Calcular en t = 6 s. cuánto vale el desplazamiento Y de la partícula situada a una distancia del origen que vale 1000 veces la longitud de onda.**
2) **Cuál es el sentido en el que se desplaza la onda**
3) **La velocidad máxima y la aceleración máxima que puede tener la partícula anterior.**
4) **Si en el origen O interfiere con otra onda de la misma frecuencia y amplitud triple que la primera y desfasada 90° respecto a ella, determinar el desplazamiento resultante en O, para t = 2 s.**

JUNIO 2008

****

Solución:

$$Y = 10^{-5} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^3 t - \frac{2\pi \cdot 10^3}{340} x\right)$$

Esta expresión se identifica con $Y(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - Kx)$

1) $\boxed{x = 1000 \cdot \lambda = 1000 \cdot \frac{2\pi}{K} = \frac{1000 \cdot 2\pi}{2\pi \cdot 10^3} \cdot 340 = 340\ m}$

$$\boxed{Y(x=340m, t=6\,sg) = 10^{-5} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^3 \cdot 6 - 2\pi \cdot 10^3\right) = 10^{-5} \cdot \cos\left(5 \cdot 2\pi \cdot 10^3\right) = 10^{-5}}\ (m)$$

2) Se desplaza hacia las x positivas.

3) La velocidad y la aceleración de una partícula de un movimiento ondulatorio, no es la velocidad de propagación de la onda, sino la de una partícula que se ve afectada por ese movimiento ondulatorio, por tanto:

$$V = \frac{dy}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t - Kx) \overset{\text{Con los datos del problema}}{=} -10^{-5} \cdot 2\pi \cdot 10^3 \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 10^3 t - \frac{2\pi \cdot 10^3}{340} x\right) \ (m/s)$$

La velocidad máxima de la partícula situada en x = 340 m es: $\boxed{V_{max} = 2\pi \cdot 10^{-2}\ m/s}$

$$a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t - Kx) = -10^{-5}(2\pi \cdot 10^3)^2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^3 t - \frac{2\pi \cdot 10^3}{340} x\right) \ (m/s^2)$$

La aceleración máxima de la partícula situada en x = 340 m es: $\boxed{a_{max} = 4\pi^2 \cdot 10\ m/s^2}$

4) $y_1(x,t) = 10^{-5} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^3 t - \frac{2\pi \cdot 10^3}{340} x\right)$ (m)

$y_2(x,t) = 3 \cdot 10^{-5} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^3 t \pm \frac{2\pi \cdot 10^3}{340} x \pm \frac{\pi}{2}\right)$ (m)

Queda ambiguo si la 2ª onda se desplaza hacia las X positivas o las negativas, y si el desfase de $\frac{\pi}{2}$ es positivo o negativo.

$y_1(x,t)\Big|_{x=0} = 10^{-5} \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot t)$ (m)

$y_2(x,t)\Big|_{x=0} = 3 \cdot 10^{-5} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^3 t \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp 3 \cdot 10^{-5} \cdot \text{sen}(\omega t)$ (m)

En $t = 2$ seg y $x = 0$ obtenemos: $y_1(x=0, t=2\text{seg}) = 10^{-5}$ (m)

$y_2(x=0, t=2\text{seg}) = 0$ (m)

$\omega t = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 2$

$$\boxed{y_{TOT}\Big|_{\substack{x=0 \\ t=2\text{seg}}} = 10^{-5} \text{ (m)}}$$

3) **Un hilo metálico de 80 cm de longitud está fijo por ambos extremos. Si se separa un poco el hilo de su posición horizontal y sabiendo que la velocidad de propagación de las ondas en él es v= 313,2 m/s. Se pide:**

1) **Las tres longitudes de onda y frecuencias más bajas.**
2) **Expresión analítica del modo más bajo, si su amplitud es de 6 mm y la velocidad de los puntos de la cuerda.**

Si un ciclista se acerca al hilo con una velocidad de 7 m/s y le llega un nivel de intensidad de 50 dB, estando la cuerda en su modo más bajo:

3) **obtener la frecuencia y la expresión de las ondas de presión que le llegan al ciclista.**

NOTA: Intensidad $I = \frac{p_m^2}{2\rho_0 v}$, siendo p_m la amplitud de la onda de presión.

DATOS: ρ_0 **=1, 293 kg/m³** densidad del aire; v_{aire}**= 340 m/s** velocidad del sonido en el aire.

$\boxed{1.55}$ Prob. 3 Sept 2006

$L = 0'8$ m

Fija por ambos extremos ∴ $\left\{ \begin{array}{ll} L = n\frac{\lambda_n}{2} & v = \lambda_n f_n \\ y(x,t) = 2A \sin(kx)\cos(\omega t) \end{array} \right.$

v. 313'2 m/s (velocidad de propagación de todos los armónicos).

$$I = \frac{P_m^2}{2\rho_0 v}$$

$P_m \equiv$ La amplitud de la onda presión.

$\rho_0 = 1'293$ kg/m³

$V_{s_{aire}} = 340$ m/s.

1) Como se trata de una cuerda fija en ambos extremos

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} = \begin{cases} \xrightarrow{1^{er}\text{ arm.}} \lambda_1 = \frac{2L}{1} = 1'6 \text{ m} \rightarrow f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{313'2}{1'6} = 195'75 \text{ Hz} \\ \xrightarrow{2^{\circ}\text{ arm.}} \lambda_2 = \frac{2L}{2} = 0'8 \text{ m} \longrightarrow f_2 = \frac{v}{\lambda_2} \dots = 391'5 \text{ Hz} \\ \xrightarrow{3^{er}\text{ arm.}} \lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{1'6}{3} \text{ m} \rightarrow f_3 = \frac{v}{\lambda_3} \dots = 587'25 \text{ Hz} \end{cases}$$

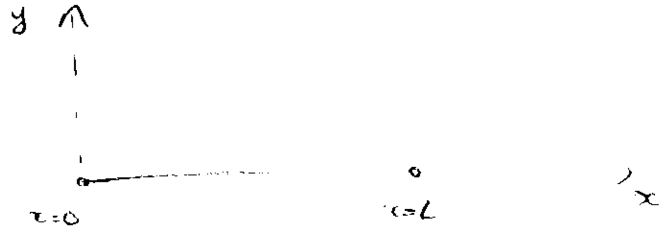
Comentarios:

- Si la cuerda estuviera libre en ambos extremos, las fórmulas anteriores serían iguales.

• Si la cuerda estuviera fija sólo en un extremo:

$$L = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4} \Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \begin{cases} \xrightarrow{n=1} \\ \xrightarrow{n=2} \\ \xrightarrow{n=3} \end{cases} [\ldots]$$

2) La expresión analítica de las ondas estacionarias en una cuerda FIJA por ambos extremos y fija al menos en $x=0$.



$$Y(x,t) = 2A \sin(Kx)\cos(\omega t) \quad (m)$$

La amplitud de esta onda es de 6 mm, por tanto:

$$2A = 6\cdot 10^{-3} \ (m)$$

Como se trata del modo más bajo:

$$K = K_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{0'8} \quad (rad/m)$$

$$\omega = \omega_1 = 2\pi f_1 = 1229'93 \quad (rad/s)$$

$$\boxed{Y(x,t) = 6\cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{0'8}x\right)\cos(1229'93\, t)} \quad (m)$$

La velocidad del movimiento de cada punto de la cuerda viene dada por:

$$\boxed{v(x,t) = \frac{dY(x,t)}{dt} = -6\cdot 10^{-3}\cdot 1229'93 \sin\left(\frac{\pi}{0'8}x\right)\sin(1229'93\, t)} \quad (m/s)$$

Comentarios:

• Si la cuerda hubiera estado fija sólo en $x=0$, la expresión de $Y(x,t)$ sería:

$$Y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$ pero K_1 y ω_1 habrían sido distintos. $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$

- Si la cuerda estuviera libre en $x=0$, la expresión de $y(x,t)$ sería:

$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos(kx)\sin(\omega t)}$$

3) $$f_{Recib} = f_{Fuente}\left(\frac{v_s \pm v_o}{v_s \pm v_f}\right) = 195'75\left(\frac{340+7}{340-0}\right) = \boxed{199'78 \text{ Hz}}$$

La expresión de la onda de presión recibida es:

$$P(r,t) = P_m \sin(Kr - \omega t)$$

siendo: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 199'78 = 1255'25 \ (\text{rad/s})$

$$K = \frac{\omega}{v_s} = \frac{1255'25}{340} = 3'692 \ (\text{rad/m})$$

$$\boxed{P_m = \sqrt{2\rho_0 v_s I} = 2 \cdot 1'293 \cdot 340 \cdot 10^{\frac{90}{10}} \cdot 10^{-12} = 0'01667} \ (P_a)$$

ver nota del enunciado

$$\boxed{P(r,t) = 0'01667 \sin(3'692r - 1255'25t)} \ (P_a)$$

3º) Dos alambres muy largos, de densidades de masa lineal distintas (μ_1 y μ_2) y de la misma sección S se sueldan uno a continuación del otro y después se estiran bajo una tensión T. La velocidad de una onda en el primer alambre es el doble que en el segundo. Cuando una onda armónica de pulsación ω que se transmite por el primer cable llega a la unión de los dos, la onda reflejada tiene la mitad de amplitud que la onda transmitida. Si la amplitud de la onda incidente es A_{in}, (a) ¿cuál es la intensidad de la onda incidente?, (b)¿cuáles son las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida? (c) ¿Qué fracción de la potencia incidente se refleja en la unión y qué fracción se transmite?

$\mu_1 \neq \mu_2$

$S \equiv$ sección

$T \equiv$ tensión

$\boxed{v_1 = 2v_2}$

NO DATO

$\omega \equiv$ pulsación

$A_{ref} = \frac{1}{2} A_{trans}$

$A_{in} \equiv$ dato

$v_{in} = v_1$ $\qquad$ $v_t = v_2 = \frac{1}{2} v_1$

μ_1 $\qquad$ μ_2

$v_r = v_1$

JUNIO 2009

a) $$I_{inc} = \frac{1}{2} \rho_{0_1} v_1 \omega^2 A_{inc}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \rho_{0_1} = \frac{\mu_1}{S} \\ v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \\ \omega \text{ , } A_{inc} \text{ son dato} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\mu_1}{S} \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \omega^2 A_{inc}^2 = \boxed{\frac{\sqrt{\mu_1 T}\, \omega^2 A_{inc}^2}{2S}} \; (W/m^2)$$

b) $\boxed{A_{ref} = \frac{1}{2} A_{trans}}$ Ec (1)

$\boxed{A_{inc} = A_{ref} + A_{trans}}$ Ec (2)

Operando: $\boxed{A_{ref} = \frac{1}{3} A_{inc}}$ (m)

$\boxed{A_{trans} = \frac{2}{3} A_{inc}}$ (m)

c) $$\boxed{I_{ref} = \frac{1}{2} \rho_{0_1} v_1 \omega^2 A_{ref}^2 = \frac{1}{2} \rho_{0_1} v_1 \omega^2 \frac{1}{9} A_{inc}^2 = \frac{1}{9} I_{inc}}$$

$$\frac{I_{ref}}{I_{inc}} = \frac{1}{9} \Longrightarrow \boxed{\frac{P_{ref}}{P_{inc}} = \frac{1}{9}}$$

$$P_{trans} = P_{inc} - P_{ref} = P_{inc}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9} P_{inc} \Longrightarrow \boxed{\frac{P_{trans}}{P_{inc}} = \frac{8}{9}}$$

Tema 4: Ondas electromagnéticas.

1.- Introducción:

Las ondas electromagnéticas son las ondas producidas por la oscilación o la aceleración de una carga eléctrica; de hecho, toda carga acelerada radia energía electromagnética, por ello se utiliza indistintamente los nombres de radiación electromagnética y ondas electromagnéticas.

La característica más peculiar de las ondas electromagnéticas es que pueden propagarse en el vacío, y por tanto pueden atravesar el espacio interplanetario e interestelar.

Otra característica de las ondas electromagnéticas es que son ondas transversales, es decir, la vibración de las partículas o de las cargas es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

2.- Campo electromagnético y características de los medios:

El campo electromagnético está definido por 4 campos:

$\vec{E}$ ≡ Intensidad de campo eléctrico o campo eléctrico (V/m) ó (N/C)

$\vec{D}$ ≡ Vector desplazamiento eléctrico, inducción eléctrica o densidad de flujo eléctrico (C/m^2)

$\vec{H}$ ≡ Intensidad de campo magnético (A/m)

$\vec{B}$ ≡ Campo magnético, inducción magnética o densidad de flujo magnético (T) ó (Wb/m^2)

2.1.- CARACTERÍSTICAS DE LOS MEDIOS:

Se cumple que:

* $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$

  ↳ $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ ≡ Permitividad o cte dieléctrica del medio (F/m)

  ↳ ε_0 ≡ " " " " " vacío $= \frac{10^{-9}}{36\pi}$ (F/m)

  ↳ ε_r ≡ " " " " relativa del medio. (ADIMENSIONAL) (⩾1 siempre)

Además se define $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ ≡ ÍNDICE DE REFRACCIÓN DEL MEDIO (Es adimensional y ⩾ 1)

* $\bar{B} = \mu \cdot \vec{H}$

  ↳ $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$ ≡ Permeabilidad o cte. magnética del medio (H/m)

  ↳ μ_0 ≡ " " " " " vacío $= 4\pi \cdot 10^{-7}$ (H/m)

  ↳ μ_r ≡ " " " " " relativa del medio. (ADIMENSIONAL)
  (Si no nos dicen lo contrario $\mu_r = 1$)

NOTA:

La velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en un medio es:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \ (m/s)$$

Así en el vacío: $\boxed{C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \ m/s}$

Por tanto suponiendo un medio NO magnético, es decir, $\mu = \mu_0$:

$$\boxed{V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}} \ (m/s)$$

Además: $V = \lambda \cdot f$

3.- ECUACIONES DE MAXWELL:

Las ecuaciones de Maxwell relacionan los vectores de $\vec{E}$ y $\bar{B}$ con sus fuentes, que son las cargas eléctricas, las corrientes y los campos variables.

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Ley de Gauss)}$$

$$\oint\!\!\oint_S \bar{B}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(Ley de Gauss del magnetismo)}$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\iint_S \bar{B}\cdot d\vec{A}\right] \qquad \text{(Ley de Faraday)}$$

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\cdot I + \mu_0\varepsilon_0\cdot\frac{\partial\phi_E}{\partial t} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\cdot\frac{d}{dt}\left[\iint_S \bar{E}\cdot d\vec{A}\right] \qquad \text{(Ley de Ampere)}$$

4.- REPRESENTACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA PLANA PROPAGÁNDOSE EN LA DIRECCIÓN POSITIVA DEL EJE X. (Ver hojas finales)

$\vec{E}(x,t) = \vec{E_0} \cdot \text{sen}(Kx - \omega t)$ ≡ Valor instantáneo del campo eléctrico.

$\vec{B}(x,t) = \vec{B_0} \cdot \text{sen}(Kx - \omega t)$ ≡ " " " " magnético.

Observamos que la dirección de propagación es $\hat{u_x}$ y que siempre los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están en fase.

Además se cumple que:

* $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son $\perp$ entre sí, y $\perp$ a la dirección de propagación, en este caso $\hat{u_x}$, cumpliéndose que

  $\vec{E} \times \vec{B}$ ó $\vec{E_0} \times \vec{B_0}$ siempre tiene la dirección de propagación de la onda.

  Así, podríamos escribir:

  $$\vec{E}(x,t) = E_0 \cdot \hat{u_y} \cdot \text{sen}(Kx - \omega t)$$
  $$\vec{B}(x,t) = B_0 \, \hat{u_z} \cdot \text{sen}(Kx - \omega t)$$

  ya que $\hat{u_y} \times \hat{u_z} = \hat{u_x}$

* El valor del campo eléctrico es c veces el del campo magnético:

  $\vec{E}(x,t) = c \cdot \vec{B}(x,t)$ ó $\boxed{E_0 = c \cdot B_0}$

  siendo E_0 y B_0 las amplitudes de los campos $\vec{E}(x,t)$ y $\vec{B}(x,t)$ respectivamente.

  <u>NOTA:</u> Si el medio <u>NO</u> es el vacío: $\boxed{E_0 = v \cdot B_0}$;; $v = \frac{c}{n}$

* Las ecuaciones de onda para los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ anteriores son:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \text{Ec. de onda para } \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \qquad \text{Ec de onda para } \vec{B}$$

Lógicamente si se transmiten en el vacío $v = c$, y si la dirección de propagación es $\hat{u}_z$, la primera derivada es $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

5.- VECTOR DE POYNTING. (ENERGÍA, INTENSIDAD Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS)

La densidad de energía almacenada en el campo eléctrico es:

$$\eta_e = u_e = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2 \qquad (J/m^3)$$

La densidad de energía almacenada en el campo magnético es:

$$\eta_m = u_m = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (J/m^3)$$

Teniendo en cuenta que $B = \frac{E}{v} = \sqrt{\mu\varepsilon} \cdot E \Rightarrow B^2 = \mu\varepsilon \cdot E^2$, por lo que:

$$\eta_m = u_m = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot E^2 = \eta_e = u_e \qquad \text{¡¡SON IGUALES!!}$$

Por tanto la densidad TOTAL de energía almacenada en una onda electromagnética es:

$$\boxed{\eta = u = \varepsilon \cdot E^2 = \frac{B^2}{\mu} = \frac{E \cdot B}{\mu \cdot V}} \quad (J/m^3)$$

Como vimos en el tema anterior la densidad de energía se puede calcular como la intensidad dividida entre la velocidad, por tanto la intensidad instantánea es:

$$\boxed{I_{instantánea} = \eta \cdot V = \frac{E \cdot B}{\mu}} \quad (W/m^2)$$

Este resultado se escribe vectorialmente mediante el VECTOR DE POYNTING:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu}} \quad (W/m^2)$$

COMENTARIOS:

* Como $\vec{E}$ es $\perp$ a $\vec{B}$ $\Rightarrow$ $|\vec{S}| = S = I_{instantánea} = \frac{E \cdot B}{\mu}$
* $\vec{S}$ es un vector cuya dirección es la de propagación de la onda.
* Para ondas planas armónicas como las siguientes:

$$\vec{E} = E_0 \cdot \hat{u}_y \cdot \operatorname{sen}(Kx - \omega t) \quad ; \quad \vec{B} = B_0 \cdot \hat{u}_z \cdot \operatorname{sen}(Kx - \omega t)$$

tenemos que el valor medio del vector de Poynting es:

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle = \overline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu} \cdot \hat{u}_x} \; ; \; (W/m^2)$$

Por tanto la intensidad media de una onda electromagnética vale:

$$\boxed{I_m = \frac{1}{2} \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu}} \quad (W/m^2) \quad ó \quad \boxed{I_m = \frac{E_{ef} \cdot B_{ef}}{\mu}} \quad (W/m^2)$$

Por otro lado:

$$p = \frac{u}{v} = \frac{\eta}{v}$$ ≡ Cantidad de movimiento transportada por la onda electromagnética.

$$P_r = \frac{I_m}{v}$$ ≡ Presión de radiación (Pa)

6.- ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO (La luz)

Las ondas electromagnéticas abarcan una gama muy amplia de longitudes de onda y frecuencias llamada espectro electromagnético (la luz o espectro visible, las ondas de radio, los rayos X, rayos gamma, microondas, ...)

La relación entre sus longitudes de onda y frecuencia es:

$$f = \frac{v}{\lambda} \quad \left(\text{Si suponemos el vacío: } f = \frac{c}{\lambda}\right)$$

<u>NOTA</u>: Recordar punto 9 del tema anterior.

6.1.- POLARIZACIÓN DE LA LUZ: (LEY DE MALUS)

La polarización es una característica de las ondas transversales, ya que las ondas longitudinales <u>NO</u> se polarizan.

En una onda luminosa tanto el $\vec{E}$ como el $\vec{B}$ son $\perp$ a la dirección de propagación de la misma.

SI LA VIBRACIÓN DE UNA ONDA TRANSVERSAL SE MANTIENE PARALELA A UNA LÍNEA FIJA EN EL ESPACIO, SE DICE QUE LA ONDA ESTÁ POLARIZADA LINEALMENTE.

(EXPLICAR CIRCULAR Y ELÍPTICA CON CUERDAS)

(EXPLICAR NO POLARIZADA CON CUERDAS.) ⇒ LA LUZ BLANCA Ó NATURAL ES UNA LUZ NO POLARIZADA.

EXPRESIONES DE $\vec{E}, \vec{B}$ y $\vec{S}$ SEGÚN LA POLARIZACIÓN (lineal o circular), LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN Y EL TIPO DE ONDA (plana, esférica o cilíndrica)

- POLARIZACIÓN LINEAL Y DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN $\vec{u}_z$

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \vec{u}_x \; sen(wt - kz) \qquad (V/m)$$
$$\vec{B}(z,t) = B_0 \vec{u}_y \; sen(wt - kz) \qquad (T)$$
$$\vec{S}(z,t) = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu} \vec{u}_z \; sen^2(wt - kz) \qquad (W/m^2)$$
$$< \vec{S} > = \frac{E_0 \cdot B_0}{2\mu} \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad I_m = \frac{E_0 \cdot B_0}{2\mu} = \frac{E_0^{\,2}}{2\mu\, v}$$

NOTA:

- Si además es onda PLANA: $I_m = cte$
- Si además es onda ESFÉRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{4\pi r^2}$
- Si además es onda CILÍNDRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{2\pi\rho\, h}$

- POLARIZACIÓN LINEAL Y DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN $\vec{u}_y$

$$\vec{E}(y,t) = E_0 \vec{u}_z \; sen(wt - ky) \qquad (V/m)$$
$$\vec{B}(y,t) = B_0 \vec{u}_x \; sen(wt - ky) \qquad (T)$$
$$\vec{S}(y,t) = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu} \vec{u}_y \; sen^2(wt - ky) \qquad (W/m^2)$$
$$< \vec{S} > = \frac{E_0 \cdot B_0}{2\mu} \vec{u}_y \quad \Rightarrow \quad I_m = \frac{E_0 \cdot B_0}{2\mu} = \frac{E_0^{\,2}}{2\mu\, v}$$

NOTA:

- Si además es onda PLANA: $I_m = cte$
- Si además es onda ESFÉRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{4\pi r^2}$
- Si además es onda CILÍNDRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{2\pi\rho\, h}$

- POLARIZACIÓN LINEAL Y DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN $\vec{u}_x$

$$\vec{E}(x,t) = E_0\,\vec{u}_y\; sen(wt - kx) \qquad (V/m)$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0\,\vec{u}_z\; sen(wt - kx) \qquad (T)$$

$$\vec{S}(x,t) = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu}\vec{u}_x\; sen^2(wt - kx) \qquad (W/m^2)$$

$$<\vec{S}> = \frac{E_0 \cdot B_0}{2\mu}\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad I_m = \frac{E_0 \cdot B_0}{2\mu} = \frac{E_0^{\,2}}{2\mu\, v}$$

NOTA:

- Si además es onda PLANA: $I_m = cte$
- Si además es onda ESFÉRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{4\pi r^2}$
- Si además es onda CILÍNDRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{2\pi\rho h}$

- POLARIZACIÓN CIRCULAR Y DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN $\vec{u}_z$

$$\vec{E}(z,t) = E_0\,\vec{u}_x\; sen(wt - kz) + E_0\,\vec{u}_y\; \cos(wt - kz) \qquad (V/m)$$

$$\vec{B}(z,t) = B_0\,\vec{u}_y\; sen(wt - kz) - B_0\,\vec{u}_x\; \cos(wt - kz) \qquad (T)$$

$$\vec{S}(z,t) = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu}\vec{u}_z \qquad (W/m^2)$$

$$<\vec{S}> = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu}\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad I_m = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu} = \frac{E_0^{\,2}}{\mu\, v}$$

NOTA:

- Si además es onda PLANA: $I_m = cte$
- Si además es onda ESFÉRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{4\pi r^2}$
- Si además es onda CILÍNDRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{2\pi\rho h}$

➢ POLARIZACIÓN CIRCULAR Y DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN $\vec{u}_y$

$$\vec{E}(y,t) = E_0\,\vec{u}_z\ sen(wt - ky) + E_0\,\vec{u}_x\ \cos(wt - ky) \qquad (V/m)$$
$$\vec{B}(y,t) = B_0\,\vec{u}_x\ sen(wt - ky) - B_0\,\vec{u}_z\ \cos(wt - ky) \qquad (T)$$
$$\vec{S}(y,t) = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu}\vec{u}_y \qquad (W/m^2)$$
$$<\vec{S}> = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu}\vec{u}_y \quad \Rightarrow \quad I_m = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu} = \frac{E_0^{\ 2}}{\mu\, v}$$

NOTA:

- Si además es onda PLANA: $I_m = cte$
- Si además es onda ESFÉRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{4\pi r^2}$
- Si además es onda CILÍNDRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{2\pi\rho h}$

➢ POLARIZACIÓN CIRCULAR Y DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN $\vec{u}_x$

$$\vec{E}(x,t) = E_0\,\vec{u}_y\ sen(wt - kx) + E_0\,\vec{u}_z\ \cos(wt - kx) \qquad (V/m)$$
$$\vec{B}(x,t) = B_0\,\vec{u}_z\ sen(wt - kx) - B_0\,\vec{u}_y\ \cos(wt - kx) \qquad (T)$$
$$\vec{S}(x,t) = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu}\vec{u}_x \qquad (W/m^2)$$
$$<\vec{S}> = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu}\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad I_m = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu} = \frac{E_0^{\ 2}}{\mu\, v}$$

NOTA:

- Si además es onda PLANA: $I_m = cte$
- Si además es onda ESFÉRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{4\pi r^2}$
- Si además es onda CILÍNDRICA: $I_m = \dfrac{Pot}{2\pi\rho h}$

COMENTARIO FINAL:

En los problemas de examen además de escribir las expresiones de los campos anteriores nos suelen pedir lo siguiente:

* La fuerza electromotriz inducida en alguna antena de área A, orientada de alguna forma:

$$fem = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \vec{B}\cdot\vec{dA} \approx -\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B}\cdot\vec{A}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B}\cdot A\hat{n}\right] \qquad (V)$$

* Las ondas reflejadas y/o transmitidas cuando la onda inicial incide sobre la separación entre dos medios. (Ver problemas)

JUNIO 2011

4º) Un foco situado en el origen de coordenadas emite ondas electromagnéticas esféricas linealmente polarizadas y sinusoidales, cuyo vector campo eléctrico ***E*** varia en el plano OXZ, siendo ***E*** = 0 para z= 0 y t = 0. La potencia de emisión es de 5 kW y la frecuencia de 10 MHz. La onda se propaga en el sentido negativo del eje OZ, en un medio no magnético de índice de refracción ***n*** = 1.5. Determinar a una distancia de 10 km del foco:

1) Las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos en función del tiempo.
2) El vector ***S*** de Poynting.

DATO $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ (S.I.)

$$\bar{E}(z,t) = E_0 \cdot \hat{u}_y \cdot \sin(\omega t + kz)$$

$$\bar{B}(z,t) = B_0 \cdot \hat{u}_x \cdot \sin(\omega t + kz)$$

Siendo: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^6$ rad/s

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega \cdot n}{c} = \frac{\cancel{2}\pi \cdot 10^6 \cdot 1'5}{\cancel{3} \cdot 10^8} = 0{,}01\pi.$$

$$I_m = \frac{5 \cdot 10^3}{4\pi r^2} = \frac{5 \cdot 10^7}{4\pi \cdot 10^4} = \frac{5}{4\pi} \cdot 10^{-1}$$

a) $\bar{E}(z,t) = E_0\, \hat{u}_x \sin(\omega t - k$

Siendo: $\omega = 2\pi \cdot 10^7$ rad/s

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^7 \cdot 1'5}{3 \cdot 10^8} = \frac{\pi}{10} \quad (\text{rad/m})$$

$$I_m = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \cdot v} = \frac{E_0^2 \cdot 1'5}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{Pot}{4\pi (10^4)^2} = \frac{5 \cdot 10^3}{4\pi \cdot 10^8} \Rightarrow E_0 = \sqrt{2 \cdot 10^{-3}} \quad (\text{V/m})$$

Así pues:

$$\bar{E}(10^4, t) = \sqrt{2 \cdot 10^{-3}}\, \hat{u}_x \sin\left(2\pi \cdot 10^7 t + \frac{\pi}{10}\, 10^4\right) \quad (\text{V/m})$$

$$\bar{B}(10^4, t) = B_0 (-\hat{u}_y) \sin\left(\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \right) \quad (\text{T})$$

$$B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{E_0 \cdot n}{c} = \frac{\sqrt{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 1'5}{3 \cdot 10^8} \quad (\text{T})$$

b) $$\vec{S}(10^4, t) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} (-\hat{u}_z) \sin^2 (\;''\;) = \boxed{\frac{10^4}{4\pi} (-\hat{u}_z) \sin^2 \left(2\pi \cdot 10^7 t + 1000\pi \right)}$$

(W/m^2)

4) Una onda electromagnética plana **polarizada linealmente** en la dirección del eje z, con una frecuencia de $3*10^9$ **Hz**, viaja en un medio de índice de refracción 2, en la dirección negativa del eje de las Y, e incide perpendicularmente sobre una lámina de material no magnético, de permitividad relativa 9. Sabiendo que la lámina refleja el 24 % de la intensidad incidente, y que la amplitud del campo eléctrico asociado a la onda incidente es E_0, *calcular*

a) las expresiones vectoriales de *los campos eléctrico, magnético y de Poynting* de la onda reflejada.

b) las expresiones vectoriales de *los campos eléctrico, magnético y de Poynting* de la onda transmitida

SEPT 2006

4. Una onda electromagnética plana, *polarizada linealmente*, se propaga en la dirección **z>0** y su campo eléctrico es de la forma $\mathbf{E} = E_y\, \mathbf{u}_y$. El medio de propagación es un dieléctrico de constantes $\varepsilon = 16\, \varepsilon_0$ y $\mu = \mu_0$. Si la frecuencia de la onda es $f = 2 \cdot 10^8$ **Hz** y se observa que a **t=0** y **z= 0**, hay *un máximo* de **5 mV / m**, obtened:

1) la expresión completa de los vectores de campo eléctrico y magnético,
2) expresión completa del vector de Poynting y la intensidad de la onda.

DATO: $\mu_0 = 4\pi x 10^{-7}$ (S.I.).

JUNIO 2007

4) *Una fuente puntual* que emite ondas electromagnéticas *polarizadas circularmente* está situada en el origen de coordenadas, tiene una *frecuencia* de 10^6 **Hz** y una *potencia* de **180 w**. En la dirección positiva del eje **OZ** y en un punto *P* que está a una distancia correspondiente *al cuádruplo de su longitud de onda*, obtened:

1. Los vectores campo eléctrico y campo magnético.
2. El vector de Poynting.
3. La fuerza electromotriz inducida en una espira circular de radio r mucho menor que la longitud de onda, situada con su centro en *P* y *contenida en el plano OXZ*.

DATOS: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

SEPT 2007

SOLUCION SEPT 2006

a) En primer lugar calculamos $\vec{E}_{inc}$, $\vec{B}_{inc}$ y $\vec{S}_{inc}$:

$$\vec{E}_{inc} = E_o \cdot \hat{u}_z \cdot \text{sen}(K_y + \omega t)$$

siendo: E_o DATO DEL ENUNCIADO.

$$\boxed{K_1} = \frac{\omega}{V_1} = \frac{\omega}{c} n_1 = \frac{2\pi f}{c} \cdot n_1 = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot 2 = \boxed{40\pi} \; (rad/m)$$

$$\boxed{\vec{E}_{inc} = E_o \cdot \hat{u}_z \cdot \text{sen}\left(40\pi y + 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot t\right) \; ;(V/m)}$$

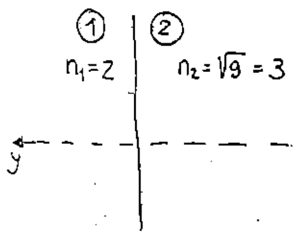
Como $\hat{u}_E \times \hat{u}_B = \hat{u}_{propagación} \Rightarrow \hat{u}_z \times \hat{u}_B = -\hat{u}_y \Rightarrow \boxed{\hat{u}_B} = -\hat{u}_y \times \hat{u}_z = \boxed{-\hat{u}_x}$

$$B_o = \frac{E_o}{V} = \frac{E_o}{c} \cdot n$$

$$\boxed{\vec{B}_{inc} = \frac{E_o \cdot 2}{3 \cdot 10^8} (-\hat{u}_x) \cdot \text{sen}\left(40\pi y + 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot t\right)} \; (T)$$

$$\boxed{\vec{S}_{inc}} = \frac{\vec{E}_{inc} \times \vec{B}_{inc}}{\mu} = \frac{2 E_o^2}{\mu_o \cdot 3 \cdot 10^8} (-\hat{u}_y) \cdot \text{sen}^2\left(40\pi y + 2\pi \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot t\right) = \left\{\mu_o \cdot c = 120\pi\right\} =$$

$$= \boxed{\frac{E_o^2}{60\pi} (-\hat{u}_y) \cdot \text{sen}^2\left(40\pi y + 2\pi \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot t\right)} \; (W/m^2)$$



$$I_{m_{inc}} = \frac{E_o^2}{120\pi}$$

$$I_{m_{ref}} = 0'24 \cdot I_{m_{inc}} = \frac{0'24 \cdot E_o^2}{120\pi}$$

Sabemos que en general, PARA UNA ONDA POLARIZADA LINEALMENTE,

$$I_m = \frac{E_o \cdot B_o}{2 \cdot \mu} = \frac{E_o^2}{2 \cdot \mu \cdot V} \Rightarrow \frac{0'24 \cdot E_o^2}{120\pi} = \frac{E_{o_{ref}}^2}{2 \cdot \mu_o \cdot V_1} = \frac{E_{o_{ref}}^2 \cdot n_1}{2 \cdot \mu_o C} = \frac{E_{o_{ref}}^2}{120\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{o_{ref}} = \sqrt{0'24} \cdot E_o = 0'49 \cdot E_o$$

Como la onda reflejada va en el mismo medio pero en dirección de las y positivas tenemos que:

$$\boxed{\vec{E}_{ref} = 0'49 \cdot E_o \cdot \hat{u}_z \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t - 40\pi \cdot y\right)} \; (V/m)$$

Como la dirección de propagación de la reflejada es $\hat{u}_y$ y el campo $\vec{E}_{ref}$ va en $\hat{u}_z$, el campo magnético reflejado va en $+\hat{u}_x$:

$$\boxed{\vec{B}_{ref}} = B_{o_{ref}} (+\hat{u}_x) \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t - 40\pi y\right) = \frac{E_{o_{ref}}}{V_1} \cdot \hat{u}_x \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t - 40\pi y\right) =$$

$$= \boxed{\frac{0'49 \cdot E_o \cdot 2}{3 \cdot 10^8} \cdot \hat{u}_x \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t - 40\pi y\right)} \; (T)$$

$$\boxed{\vec{S}_{ref}} = \frac{\vec{E}_{ref} \times \vec{B}_{ref}}{\mu} = \left\{\mu \cdot c = \mu_o \cdot c = 120\pi\right\} = \boxed{\frac{0'24 \cdot E_o^2}{60\pi} \cdot \hat{u}_y \cdot \text{sen}^2\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t - 40\pi y\right)} \; (W/m^2)$$

b) $\vec{E}_{trans} = E_{o_{trans}} \cdot \hat{u}_z \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t + K_2 \cdot y\right)$ (V/m)

$\vec{B}_{trans} = B_{o_{trans}} \cdot (-\hat{u}_x) \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t + K_2 y\right)$ (T)

$$\boxed{K_2} = \frac{\omega}{V_2} = \frac{2\pi f \cdot n_2}{c} = \boxed{60\pi} \; (rad/m)$$

$$B_{o_{trans}} = \frac{E_{o_{trans}}}{V_2}$$

$$I_{m_{trans}} = \frac{E_{o_{trans}} \cdot B_{o_{trans}}}{2 \cdot \mu_2} = \frac{E_{o_{trans}}^2 \cdot n_2}{2 \cdot \mu_o c} = \frac{E_{o_{trans}}^2 \cdot 3}{2 \cdot 120\pi} = 0'76 \cdot I_{m_{inc}} = 0'76 \cdot \frac{E_o^2}{120\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{o_{trans}} = E_o \cdot \sqrt{\frac{0'76 \cdot 2}{3}} = 0'712 \cdot E_o$$

$$B_{o_{trans}} = \frac{0'712 \cdot E_o}{(c/n_2)} = \frac{2'136 \cdot E_o}{3 \cdot 10^8}$$

$$\boxed{\vec{E}_{trans}} = 0'712 \cdot E_o \cdot \hat{u}_z \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t + 60\pi y\right) \; (V/m)$$

$$\boxed{\vec{B}_{trans}} = \frac{2'136 \cdot E_o}{3 \cdot 10^8} (-\hat{u}_x) \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t + 60\pi y\right) \; (T)$$

$$\boxed{\vec{S}_{trans}} = \frac{\vec{E}_{trans} \times \vec{B}_{trans}}{\mu_2} = \left\{\mu_2 \cdot c = 120\pi\right\} = \frac{0'712 \cdot 2'136 \cdot E_o^2}{120\pi} \cdot \text{sen}^2\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t + 60\pi y\right) \hat{u}_y =$$

$$= \boxed{\frac{1'52 \cdot E_o^2}{120\pi} \text{sen}^2\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t + 60\pi y\right) \cdot \hat{u}_y} \; (W/m^2)$$

SOLUCIÓN JUNIO 2007

1) $\vec{E} = E_y \cdot \hat{u}_y \cdot \cos(\omega t - Kz + \varphi)$

siendo: $\omega = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^8\ (s^{-1})$

$$\boxed{K = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega \cdot n}{c} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{16} = \frac{16\pi}{3}}\ m^{-1}$$

Como en $t=0$ y $z=0$ hay un maximo de $5\ mV/m \Rightarrow \vec{E}(t=0, z=0) = 5 \cdot 10^{-3}\ V/m$

Por tanto: $5 \cdot 10^{-3}\ (V/m) = E_y \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0\ (\text{MÁXIMO}) \\ E_y = 5 \cdot 10^{-3}\ (V/m) \end{cases}$

$$\boxed{\vec{E} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \hat{u}_y \cdot \cos\left(4\pi \cdot 10^8 t - \frac{16\pi}{3} z\right)}\ (V/m)$$

$$\vec{B} = B_0 \cdot \hat{u}_B \cdot \cos(\omega t - Kz) = \frac{E_0}{v} \cdot (-\hat{u}_x) \cdot \cos(\omega t - Kz) = \left\{ v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{16}} \right\} =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{16}}{3 \cdot 10^8} \cdot (-\hat{u}_x) \cdot \cos(\omega t - Kz) = \boxed{\frac{2}{3} \cdot 10^{-10} \cdot (-\hat{u}_x) \cdot \cos\left(4\pi \cdot 10^8 t - \frac{16\pi}{3} z\right)}\ (T)$$

2) $$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} = \frac{10^{-12}}{3 \cdot \mu_0} \cdot \hat{u}_z \cdot \cos^2(\omega t - Kz) = \boxed{\frac{10^{-5}}{3 \cdot 4\pi} \cdot \hat{u}_z \cdot \cos^2\left(4\pi \cdot 10^8 t - \frac{16\pi}{3} z\right)}\ (W/m^2)$$

La intensidad instantanea la da el vector de Poynting y su valor medio es:

$$I_m = \frac{10^{-5}}{2 \cdot 3 \cdot 4\pi} = \frac{10^{-5}}{24\pi}\ (W/m^2)$$

SOLUCIÓN SEPT 2007

DATOS:

ONDAS ESFÉRICAS: $I_m = \frac{\text{Potencia}}{4\pi d^2}$

POLARIZACIÓN CIRCULAR EN DIRECCIÓN POSITIVA DEL EJE Z.

$f = 10^6\ Hz$

Potencia $= 180\ W$

$d = 4\lambda$

SOLUCIÓN:

1.- Para que sea una onda con polarización circular propagándose en sentido del eje z positivo:

$$\vec{E} = E_0 \left[\hat{u}_x \cdot \text{sen}(\omega t - Kz) + \hat{u}_y \cdot \cos(\omega t - Kz)\right]\ (V/m)$$

siendo: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^6\ (rad/seg)$

$$K = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{300}\ (m^{-1}) \Rightarrow \lambda = 300\ m$$

Como se trata de una polarización circular:

$$I_m = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu} = \frac{E_0 \cdot E_0}{\mu \cdot v} = \frac{E_0^2}{120\pi} = \frac{\text{Potencia}}{4\pi (4\lambda)^2} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{30 \cdot \text{Potencia}}{16 \cdot \lambda^2}} \overset{\lambda = 300m}{=} 0'061\ (V/m)$$

Así pues: $B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{0'061}{3 \cdot 10^8} = 2'04 \cdot 10^{-10}\ (T)$

Finalmente: $$\boxed{\vec{E} = 0'061 \left[\hat{u}_x \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 10^6 t - \frac{2\pi}{300} z\right) + \hat{u}_y \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^6 t - \frac{2\pi}{300} z\right)\right]}\ (V/m)$$ $z = 4\lambda$.

Como $\hat{u}_E \times \hat{u}_B = \hat{u}_{propagación} = +\hat{u}_z$ tenemos que:

$$\boxed{\vec{B} = 2'04 \cdot 10^{-10} \left[\hat{u}_y \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 10^6 t - \frac{2\pi}{300} z\right) - \hat{u}_x \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^6 t - \frac{2\pi}{300} z\right)\right]}\ (T)$$ $z = 4\lambda$

2.- $$\boxed{\vec{S}(z,t) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{0'061 \cdot 2'04 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot \hat{u}_z = 9'9 \cdot 10^{-6} \cdot \hat{u}_z}\ (W/m^2)$$ $|\vec{S}| = I_m = \frac{Pot}{4\pi (4\lambda)^2}\ (W/m^2)$

3.- $$\boxed{fem} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot dS \cdot \hat{u}_y \approx -\frac{\partial}{\partial t} \left[2'04 \cdot 10^{-10} \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 10^6 t - 8\pi\right) \cdot \pi r^2\right] =$$

$$= \boxed{-2'04 \cdot 10^{-10} \cdot 2\pi \cdot 10^6 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^6 t - 8\pi\right) \cdot \pi r^2}\ (V)$$

Tema 1: Termodinámica.

1. Definiciones básicas.

(Ver hojas)

- P, V, T: Coordenadas o variables de estado
- ΔU U / ΔS S } Funciones de estado
- Q, W } Funciones de intercambio

2. Principio 0

(...)

3. Ecuaciones de los gases perfectos

$PV = nRT$

$\hookrightarrow R =$ 0,082 atm · ℓ/mol·°K ; 8,314 J/mol °K ; 1,98 cal/mol °K.

(Ver todo esta parte en hojas)

4. Calor.

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C\, dT = \int_{T_1}^{T_2} m \cdot C_e\, dT = \int_{T_1}^{T_2} n\, C_m\, dT \quad (J)$$

(!) $C = m \cdot C_e = n \cdot C_m$. Si C es cte, tenemos:

$$Q = C \cdot \Delta T = m\, C_e \cdot \Delta T = n \cdot C_m \cdot \Delta T.$$

$C = J/°K$; $C_e = J/kg\,°K$; $C_m = J/mol\,°K$.

$C_p = n \cdot C_{mp}$ (presión constante)

$C_v = n \cdot C_{mv}$ (volumen constante)

(Ver hojas)

- Ley de Mayer: $C_p - C_v = n \cdot R. \iff C_{mp} - C_{mv} = R.$

Tenemos:

① $Q = C \cdot \Delta T = m\, c_e\, \Delta T = n\, C_m \cdot \Delta T$.

② $Q = m \cdot L_f = m \cdot L_v$. (fórmula de cambio de fase. ¡se produce a temperatura constante!)

Usaremos las fórmulas así: de 10°C a -3°C (agua)

$10°C \xrightarrow{①} 0° \xrightarrow{②} \text{cambio} \xrightarrow{①} -3°C$

5. Primer principio.

(Ver hojas)

Ejercicio 4.

Una cierta cantidad de aire ($\gamma = 1'4$) se expande adiabáticamente desde una presión de 2 atm, volumen 2 litros y temperatura ambiente (20 °C), hasta duplicar su volumen. Se pide:

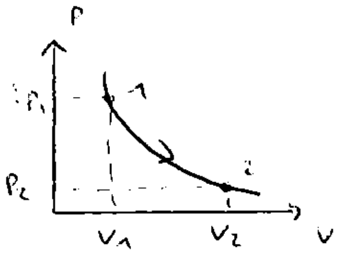
a) ¿Cuál es la presión final?

b) ¿Cuál es la temperatura final?

c) ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas?

Solución:

El diagrama P-V es:



$V_2 = 2 V_1$.

a) Como es adiabática:

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \Rightarrow P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \cdot P_1 = 2\,atm \left(\frac{1}{2}\right)^{1'4} = 0'758\ atm$$

b) Como es adiabática: $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 293°K \left(\frac{1}{2}\right)^{0'4} = 222°K \simeq -51°C$$

⚠ Las temperaturas siempre en kelvin a menos que se trate de la fórmula:
$\Delta T = T_2 - T_1$.
Ante la duda, kelvin.

No olvidar transformar a Celsius

c) $W_{12} = -\Delta U_{12} = \dfrac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1} = \dfrac{2\,atm \cdot 2\ell - 0'758\,atm\; 4\ell}{0'4} = 2'42\ atm\cdot\ell$

$= 245\ J.$

$1\ atm\,\ell = 101'3\ J.$

Ejercicio 5.

$\varepsilon = 5'5.$

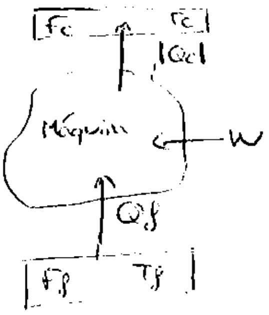
Solución.

¿Qué calor debemos extraer del agua?

1º paso: Bajar el H_2O a 0ºC: $Q_1 = m_{H_2O} \cdot ce_{H_2O} \cdot \Delta T = 1kg \cdot 4'18\ kJ/kg\,°K \cdot (0 - 10°C) = -41'8\ kJ.$

2º paso: Congelarlo: $Q_2 = m_{H_2O} \cdot CL_{solid} = -m_{H_2O} \cdot CL_{fusión} = -333'5\ kJ.$

Por tanto,
$Q_{extraer\,H_2O} = -375'3\ kJ. = Q_1 + Q_2.$ Este es el calor que hay que extraer del foco frío



$\varepsilon = \dfrac{Qf}{W} \Rightarrow W = \dfrac{Qf}{5'5} = 68'2\ kJ.$

Ejercicio 6.

$\eta = 0'35.$

a) $W = \eta \cdot Q_c = 0'35 \cdot 150\ J = 52'5\ J.$

b) $|Q_f| = Q_c - W = 150 - 52'5 = 97'5\ J.$

Tema 2: Oscilador armónico:

0. Introducción

Movimiento oscilatorio ≡ Movimiento vibratorio = "Una partícula oscila si se mueve en torno a una posición de equilibrio".

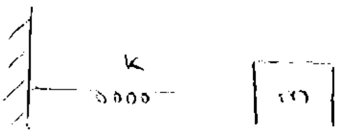
{ Se mueve pero no se desplaza }

Vamos a estudiar 3 tipos:

- → Movimiento armónico simple
- → Mov. amortiguado
- → Mov. amortiguado y forzado.

1. M.A.S.

1.1. Ecuación diferencial.



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\boxed{x(t) = A\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi)} \quad \text{siendo } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ (\text{rad/s})$$

⚠ ω_0 no es una velocidad angular sino una pulsación.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

$$\hookrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \ (s)$$

A: Amplitud del mov. oscilatorio

$\omega_0 t + \varphi$: Fase del movimiento

φ: Fase inicial del movimiento

$x(t)$ ≡ Elongación o desplazamiento respecto de la posición de equilibrio.

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ≡ Velocidad de la partícula que describe el M.A.S.

$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$ ≡ Aceleración (...).

1.2. Energía de un M.A.S.

La fuerza que provoca un M.A.S. es conservativa, por tanto tiene E_p:

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2} k\,(x(t))^2} \quad (J)$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} k\,(A^2 - x^2(t))} \quad (J)$$

$$\boxed{E_{mec} = \frac{1}{2} k A^2} \quad (J)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m\,(v(t))^2$$

NOTA: Cálculo de v_{max}:

1ª forma: $E_c = \frac{1}{2} k\,(A^2 - x^2(t))$

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m V_{max}^2 \Rightarrow \boxed{V_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = A \cdot \omega_0}$$

(Se produce en la posición de equilibrio $(x(t)=0)$).

$\boxed{x(t) = 0}$

2ª forma: $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$

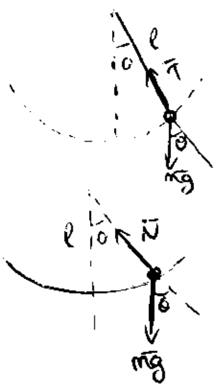
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \boxed{V_{max} = A \cdot \omega_0} \quad (m/s)$$

1.3. Péndulo simple

Siempre supondremos pequeñas oscilaciones:

$$\boxed{\sin\theta \simeq \theta} \quad y \quad \boxed{\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \simeq 1.}$$

Ejercicio: Calcular el periodo de un péndulo simple de longitud ℓ.



¿T? $\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$

En la dirección tangencial al movimiento:

$$m a_t = -mg \cdot \sin\theta$$

$$a_t = -g \sin\theta$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin\theta$$

$$\frac{d\omega\ell}{dt} = -g \sin\theta$$

Como $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \ell = -g \sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$$

Para pequeñas oscilaciones: $\sin\theta \simeq \theta$.

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

La solución de esta ecuación es:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

siendo:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \ (seg)$$

⚠ El periodo del péndulo simple es independiente de la masa.

* Comentarios:

→ En la solución $\theta(t)$, las constantes θ_0 y φ se obtienen por condiciones iniciales.

→ ω_n no es la velocidad angular de la masa m. La velocidad angular es:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \theta_0 \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi) \quad (rad/s)$$

$$v(t) = \omega(t) \cdot \ell$$

1.4. Péndulo compuesto

(Ver problemas) $(\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha})$
↳ $\vec{r} \times \vec{F}$

1.5. Composición de M.A.S.

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

1.5.1 Misma dirección y misma frecuencia.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_{TOT} = A_{TOT} \sin(\omega t + \varphi) = \dots \\ x_{TOT} = x_1 + x_2 = \dots \end{array}$$

El movimiento resultante (x_{tot}) también es M.A.S. ya que A_{TOT} no depende del tiempo.

Si $\varphi_1 = \varphi_2$ ⇒ mov en fase

Si $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \frac{\pi}{2}$ ⇒ mov. en cuadratura de fase.

Si $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$ ⇒ mov. en oposición de fase

1.5.2. Misma dirección pero distinta frecuencia.

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad \omega_1 \neq \omega_2$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_{tot} = A_{TOT} \cdot \sin(\Omega t + \varphi) \cdot \dots$$

$$x_{TOT} = x_1 + x_2 = \dots$$

El movimiento resultante **no** es MAS ya que A_{TOT} depende del tiempo.

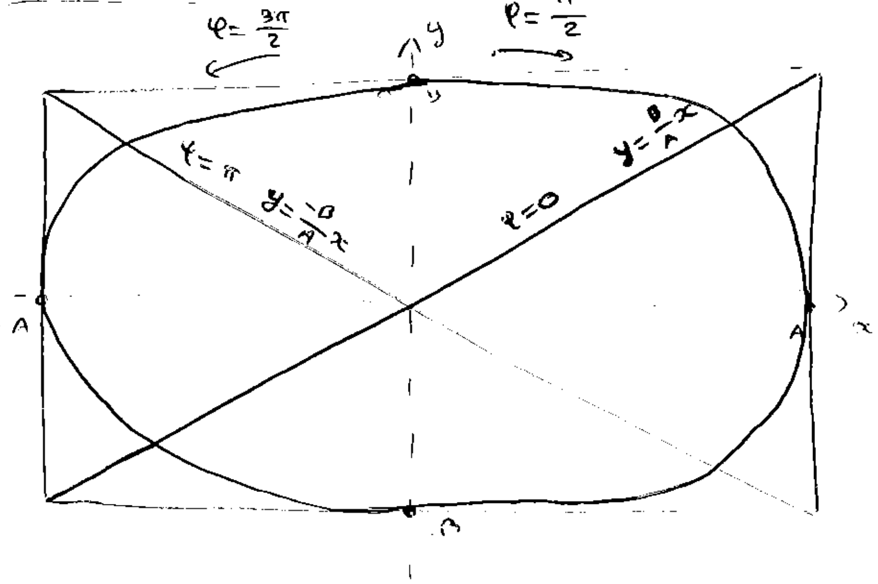
1.5.3. Distinta dirección y misma frecuencia.

$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t) \Rightarrow \sin(\omega t) = \dfrac{x}{A} \Rightarrow \cos(\omega t) = \sqrt{1-\sin^2(\omega t)} = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{A^2}} \\ y = B\sin(\omega t + \varphi) = B(\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi) \end{cases}$$

Se trata de despejar t entre las 2 ecuaciones para obtener la ecuación de la trayectoria:

$$\boxed{\left(y - \frac{B}{A}x\cos\varphi\right)^2 = B^2\sin^2\varphi\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)}$$ (Ecuación de la trayectoria).

*Casos particulares.



Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ó $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, la masa describe un movimiento circular uniforme.

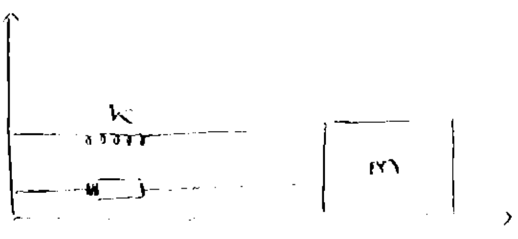
1.5.4. Distinta dirección y distinta frecuencia

NO SE ESTUDIA.

2. Movimiento armónico amortiguado.

→ Subamortiguado
→ Crítico
→ Sobreamortiguado

2.1. Ecuación diferencial.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-kx - cv = ma$$

$$-kx - c\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\vec{F}_{amort} = -c\vec{v}$

c = coef amortiguamiento $\left(\frac{kg}{s}\right)$

siendo.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rad/s) = Pulsación propia de las oscilaciones libres

$\gamma = \frac{c}{2m}$ (s^{-1}) = Amortiguamiento

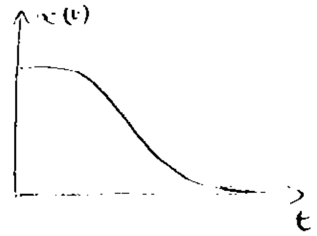
La solución de la ec. anterior depende de la relación γ - ω_0...

2.2. Solución de la ecuación diferencial.

a) $\gamma > \omega_0 \Leftrightarrow$ Movimiento sobreamortiguado
$(c > 2m\omega_0)$ Movimiento aperiódico
Movimiento supercrítico.

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t}\right]$$

Su representación es:

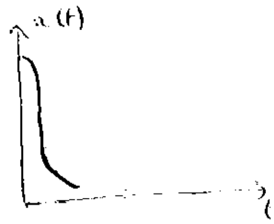


El sistema no oscila.

b) $\gamma = \omega_0 \Leftrightarrow$ Mov. crítico
$c = 2m\omega_0$

$$x(t) = (A + Bt)\,e^{-\gamma t}$$

Su representación es:



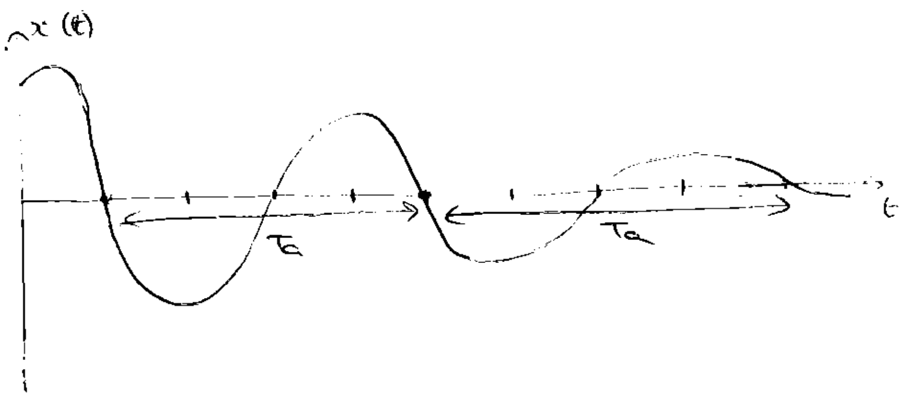
El sistema no oscila.

c) $\gamma < \omega_0 \Leftrightarrow$ Movimiento subamortiguado
$(c < 2m\omega_0)$ o amortiguado.
o subcrítico

$$\boxed{x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\omega_a t + \varphi)} \quad (m)$$

A y φ por condiciones iniciales

El sistema oscila con periodo T_a. Su representación es:



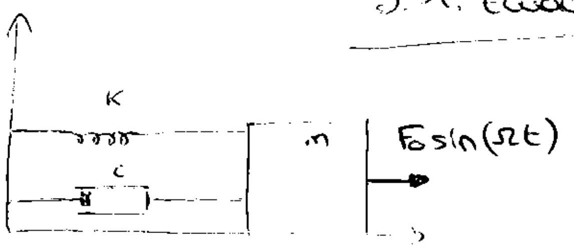
* Magnitudes del movimiento amortiguado.

- $\omega_a = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ≡ Pulsación impropia, pseudopulsación o pulsación del mov. amortiguado $\left(\frac{rad}{s}\right)$ ó (s^{-1}) ó (Hz)
- $f_a = \frac{\omega_a}{2\pi}$ ≡ Frecuencia impropia, pseudofrecuencia o frecuencia del mov. amortiguado (Hz)
- $T_a = \frac{1}{f_a} = \frac{2\pi}{\omega_a}$ ≡ Periodo impropio, pseudoperiodo o periodo del mov. amortiguado (s)
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$ ≡ Propia, natural o de las libres.
- $\delta = \frac{c}{2m}$ (s^{-1}) ó (Hz)
- $Ae^{-\delta t}$ ≡ Amplitud del mov. amortiguado.
- $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 m}{c}$ ≡ Factor de calidad (adimensional) ($Q > \frac{1}{2}$ en el amortiguado).
- $\tau = \frac{1}{\delta}$ ≡ Constante de tiempo o tiempo de relajación.
- Decremento logarítmico:

$$\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T_a)}\right) = \ln\left(\frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T_a)}}\right) = \ln\left(e^{+\delta T_a}\right) = \boxed{\delta T_a = \frac{T_a}{\tau}}$$

3. Movimiento amortiguado y forzado.

3.1. Ecuación diferencial.



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

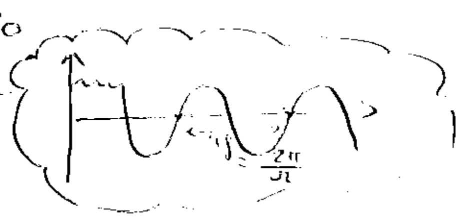
$$-kx - cv + F_0 \sin(\Omega t) = ma$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0 \sin(\Omega t)}{m} \\ \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t) \end{array}}$$

La solución de esta ecuación en régimen permanente:

$\boxed{x(t) = B\sin(\Omega t - \alpha)}$ (m)

siendo: $\Omega = \frac{2\pi}{T_f} = 2\pi f_f$ ≡ Frecuencia de la fuerza exterior.



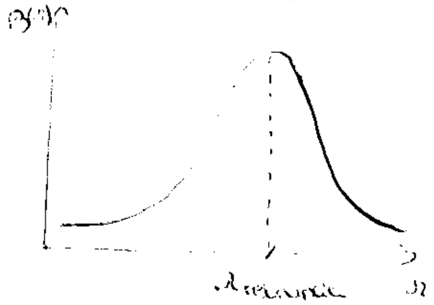
F_0: amplitud de la fuerza ext.

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

$$\boxed{B = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}}$$

3.2. Resonancia

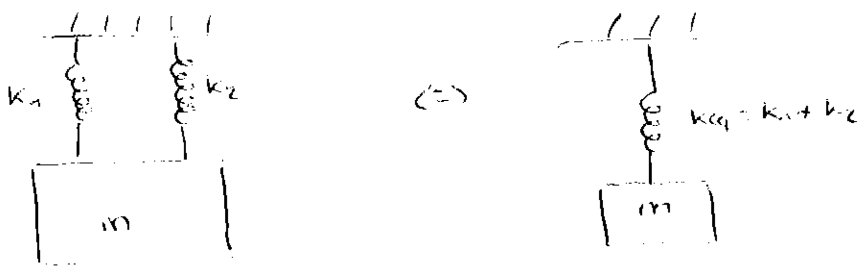
Se llama frecuencia de resonancia a la frecuencia de la fuerza exterior que hace que la amplitud B sea máxima.



$$\boxed{\Omega_{resonancia} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$$

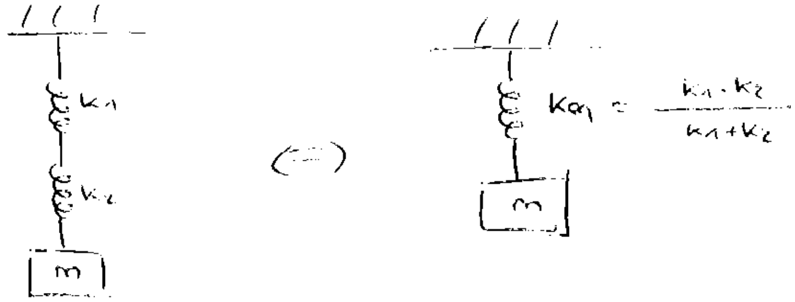
Comentario final: "Combinación de muelles".

a) Paralelo.



$k_{eq} = k_1 + k_2$

b) Serie



$k_{eq} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$

Resumen de Óptica.

* Espejos ≡ Reflexión

- **Ecuación del espejo:** $\boxed{\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{1}{f}}$ ‖ $f = \dfrac{r}{2}$ ≡ Distancia o longitud focal.
  r ≡ radio del espejo.

s ≡ distancia objeto { + si el objeto está delante del espejo (objeto real) / − si el objeto está detrás del espejo (objeto virtual) }

s' ≡ distancia imagen { + si la imagen está delante del espejo (imagen real) / − si la imagen está detrás del espejo (imagen virtual) }

f, r ≡ distancia focal, radio { + si el centro de curvatura (c) está delante del espejo (ESPEJO CÓNCAVO) / − si el centro de curvatura (c) está detrás del espejo (ESPEJO CONVEXO) }

- **Amplificación lateral de la imagen:** $\boxed{m = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{-s'}{s}}$

y ≡ tamaño del objeto.

y' ≡ tamaño de la imagen.

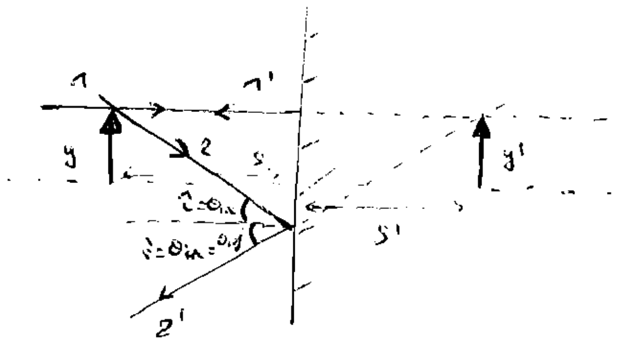
Comentarios:

- Si $m<0 \Rightarrow$ La imagen está invertida.
- Si $m>0 \Rightarrow$ La imagen es derecha.
- En un espejo plano $r=\infty \Rightarrow f=\infty \Rightarrow s'=-s \Rightarrow m=+1$, y en este caso la imagen es virtual, derecha y del mismo tamaño que el objeto.

- **Diagrama de rayos:**

rayo paralelo ≡ Es paralelo al eje óptico y se refleja "pasando" por el foco.
rayo focal ≡ Pasa por el punto focal y se refleja paralelo al eje.
rayo radial ≡ Pasa por el centro de curvatura y no cambia de sentido al reflejarse.
rayo central ≡ Dirigido hacia el vértice del espejo (Ley de Snell $\theta_i = \theta_r$)

Ejemplo ①: Espejo plano.



$r = \infty \Rightarrow f = \infty$.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = 0 \Rightarrow s' = -s < 0$$

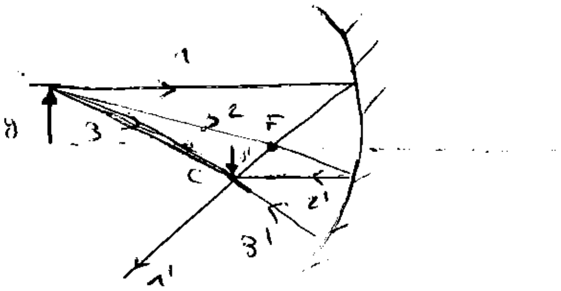
$$\boxed{m = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = +1}$$

$s' < 0$ (Imagen virtual)

$m > 0$ (" derecha)

$|m| = 1$ (Mismo tamaño que el objeto).

Ejemplo ②: Espejo cóncavo.



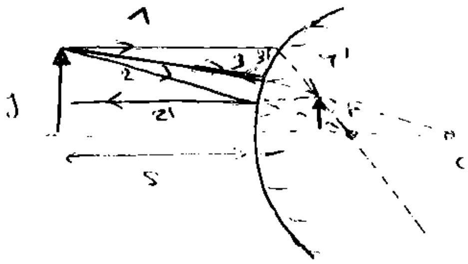
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad ; \quad r, f > 0$$

$s' > 0$ (Imagen real)

$m = -\frac{s'}{s} < 0$ (Imagen invertida)

$|m| < 1$ (De menor tamaño)

Ejemplo ③: Espejo convexo



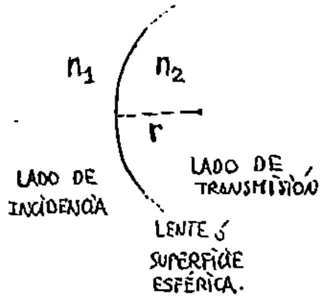
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad ; \quad r, f < 0$$

$s' < 0$ (Imagen virtual)

$m = \frac{-s'}{s} > 0$ (Imagen derecha)

$|m| < 1$ (De menor tamaño).

* LENTES ≡ REFRACCIÓN



◉ REFRACCIÓN EN UNA SÓLA SUPERFICIE ESFÉRICA DE RADIO r:

(Dióptrico)

$$\boxed{\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}}$$ si la superficie es plana $r = \infty$

$$\frac{y'}{y} = \boxed{m = -\frac{n_1 \cdot s'}{n_2 \cdot s}}$$ ≡ Amplificación de la imagen
- $m > 0$ (Imagen derecha)
- $m < 0$ (" invertida)

s ≡ distancia objeto
- + si el objeto está situado en el lado de incidencia (objeto real)
- − si el objeto está situado en el lado de transmisión (objeto virtual)

s' ≡ distancia imagen
- + si la imagen está situada en el lado de transmisión (imagen real)
- − si la imagen está situada en el lado de incidencia (imagen virtual)

f, r ≡ distancia focal, radio
- + si el centro de curvatura está en el lado de transmisión.
- − si el centro de curvatura está en el lado de incidencia.

COMENTARIOS:

$$\boxed{\hat{\theta}_{inc_c} = \hat{i}_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$
↳ crítico

- Si $\hat{\theta}_{inc} \geq \hat{\theta}_{inc_c}$ no hay onda transmitida (Reflexión total)
- Sólo existe si $n_2 < n_1$

- Si la superficie que separa ambos medios es plana se cumple que:

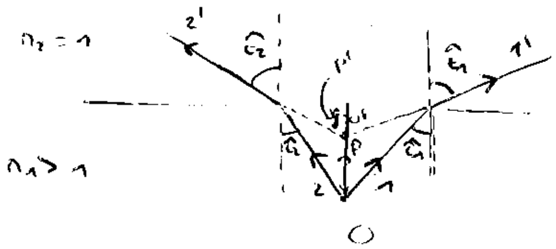
  $r = \infty \Rightarrow n_1 \cdot s' = -n_2 \cdot s \Rightarrow m = +1$ (Ejemplo: superficie del mar)

- En el aire: $\boxed{n = 1}$
- El índice de refracción de cualquier medio es: $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ ≡ (ADIMENSIONAL)
  Siendo ε_r la permitividad dieléctrica relativa del medio.
  Se cumple que $\varepsilon_r \geq 1$ siempre, por tanto $n \geq 1$ siempre.
- $$\boxed{\begin{aligned} n_1 \sin \theta_{inc} &= n_2 \sin \theta_t \\ n_1 \sin \hat{i} &= n_2 \sin \hat{t} \end{aligned}}$$
- Como la velocidad de la luz en un medio es: $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{n}$:

  $$\boxed{v_2 \sin \hat{i} = v_1 \sin \hat{t}}$$

Ejemplo ①: "Profundidad aparente"

$$\boxed{n_1 \sin \hat{c} = n_2 \sin \hat{i}}$$



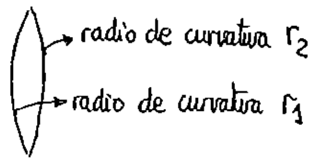
$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Como $r = \infty \Rightarrow \frac{n_1}{s} = \frac{-n_2}{s'} \Rightarrow \boxed{s' = \frac{-n_2}{n_1} s = \frac{-n_2}{n_1} P}$

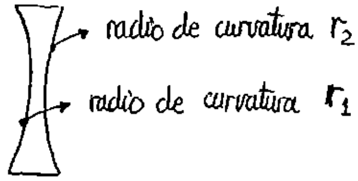
Como $n_1 > n_2 \Rightarrow s' < 0 \Rightarrow |s'| < |s|$

REFRACCIÓN EN LENTES DELGADAS:

- Los radios de curvatura r_1 y r_2 son los siguientes, SUPONIENDO QUE LA LUZ INCIDE DESDE LA IZQUIERDA:



LENTE CONVERGENTE Ó POSITIVA.



LENTE DIVERGENTE Ó NEGATIVA.

- ECUACIÓN DE LA LENTE DELGADA: $$\boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}}$$

Además en este caso sigue siendo la amplificación lateral: $$\boxed{m = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}}$$

- ECUACIÓN DEL CONSTRUCTOR DE LENTES: $$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$f \equiv$ distancia focal de una lente delgada.

$n \equiv$ índice de refracción de la lente.

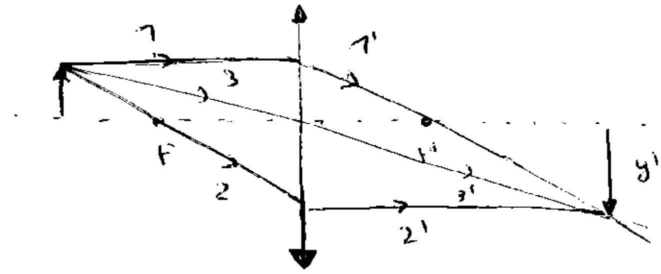
<u>NOTA IMPORTANTE:</u> El convenio de signos para s, s', f, r_1 y r_2 es el de la página 2.

- POTENCIA DE UNA LENTE: $\boxed{P = \frac{1}{f}}$ (Dioptrías) ¡¡OJO!! Puede ser negativa, de hecho en lentes divergentes es negativa. En las lentes convergentes es positiva.

- Si SE PONEN EN CONTACTO DOS LENTES DELGADAS, LA DISTANCIA FOCAL f EQUIVALENTE DE LA COMBINACIÓN ES:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}} \Rightarrow \boxed{P = P_1 + P_2}$$

Ejemplo ①: Lente convergente.

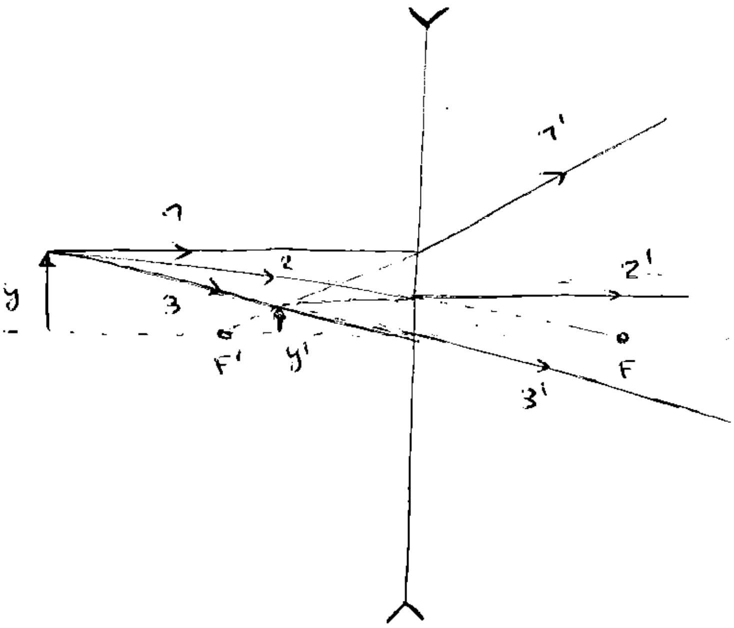


$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=\dfrac{1}{f}\\ s>0\\ f>0\end{array}\right\} \Rightarrow s'=\dfrac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{s}}>0 \quad \text{(Imagen Real)} \quad (s>f)$$

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{-s'}{s}<0 \quad \text{(Imagen invertida)}$$

$|m|>1$ (De mayor tamaño)

Ejemplo ②: Lente divergente.

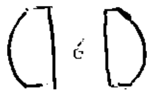
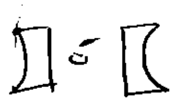


$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=\dfrac{1}{f}\\ s>0\\ f<0\end{array}\right\} \Rightarrow s'=\dfrac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{s}}<0 \quad \text{(Imagen virtual)}$$

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{-s'}{s}>0 \quad \text{(Imagen directa)}$$

$|m|<1$ (De menor tamaño).

COMENTARIO FINAL DE LENTES DELGADAS.

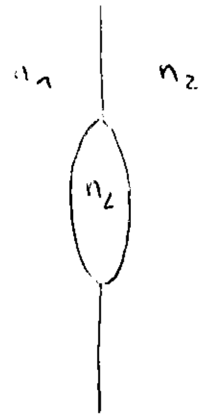
- Lente biconvexa: 
- Lente bicóncava: 
- Lente plano-convexa: 
- Lente plano-cóncava: 
- Lente convexa-cóncava: 
- Lente cóncava-convexa: 

FÍSICA II

NOTA TEÓRICA IMPORTANTÍSIMA:

¿Cómo se calcula la potencia de cualquier "lente delgada"?

¿Cuáles son las ecuaciones de cualquier lente delgada?



$$P = \frac{n_L - n_1}{n_1 r_1} - \frac{n_L - n_2}{n_2 r_2} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2}{f} \qquad m = \frac{-n_1 s'}{n_2 s}$$

* Si $n_1 = n_2$:

$$P = \frac{n_L - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad m = -\frac{s'}{s}$$

* Si $n_1 = n_2 = 1$

$$P = (n_L - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f}$$

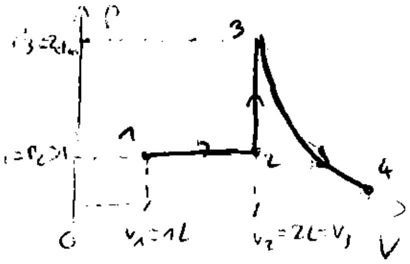
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad m = \frac{-s'}{s}$$

II-21.

$m_{O_2} = 3'2$ gr. $P_1 = 1$ atm $R = 0'082$ atm·L/mol°K

$V_1 = 1$ L $Z = 16$ g/mol $C_{mv} = 5$ cal/mol°K.

1) El diagrama P V:



Estado ①: $P_1 = 1$ atm

$V_1 = 1L$.

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{nR} = \left\{ n = \frac{3'2\,g}{32\,g/mol} = 0'1\,mol \right\}$$

$$T_1 = \frac{1\,atm \cdot 1L}{0'1\,mol \cdot 0'082\,atm\,L/mol°K} = 121'95\,°K.$$

Estado ②: $V_2 = 2L$ $P_2 = P_1 = 1$ atm.

$$T_2 = \frac{P_2V_2}{nR} = \frac{P_1V_1\cdot 2}{nR} = 2T_1 = 243'9\,°K.$$

Estado ③: $V_3 = V_2 = 2L$

$P_3 = 2P_2 = 2$ atm.

$T_3 = 487'8\,°K$.

Estado ④: Como es adiabática:

$P_4V_4^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma}$ $T_4 = T_1 = 121'95\,°K$.

$T_4V_4^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1}$

$\gamma = 1'4$, diatómico.

$$V_4^{\gamma-1} = \frac{T_3}{T_4}V_3^{\gamma-1} \Rightarrow V_4 = \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{1/(\gamma-1)} \cdot V_3 = 64\,L.$$

$$P_4 = \left\{ \frac{nRT_4}{V_4},\ \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma}\cdot P_3 \right\} \to 0'0156\,atm.$$

2) $Q_{12} = \{isóbara\} = n\,C_{mp}\Delta T = n\cdot\frac{7}{2}R(T_2-T_1)\cdot 8'314\,\frac{J}{mol°K}(T_2-T_1) =$

$= 356'82$ J.

↳ calor ganado por el gas.

$Q_{23} = \{isócora\} = n\,C_{mv}\Delta T = n\cdot\frac{5}{2}R(T_3-T_2) = \ldots = 509'754$. (+)

$Q_{34} = \{adiabática\} = 0$. (=)

3) $W_{12} = \{\text{isóbara}\} = P(V_2 - V_1) = 1\,atm\,(2-1)\,L = 1\,atm \cdot L = 101'3\ J$

$1\,atm\,L = 101,3\,J$.

$W_{23} = \{\text{isócora}\} = 0$.

$W_{34} = -\Delta U_{34} = -n\,C_{mv}(T_4 - T_3) = 764'62\ (J)$.

4) $\Delta S_{12} = \{\text{isóbara}\} = n\,C_{mp} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 2'024\ J/K$

$\Delta S_{23} = \{\text{isócora}\} = n\,C_{mv} \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = 1'44\ (J/K)$

$\Delta S_{34} = \{\text{adiabática}\} = 0$

II - 27

$n = 1$ mol

AIRE $\Rightarrow$ diatómico $\gamma = 1'4$.

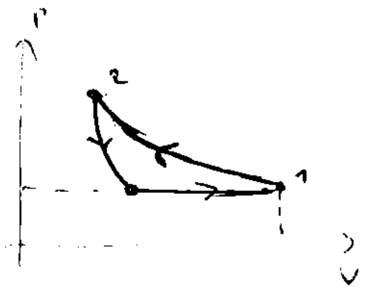
$T_1 = 273\,°K$.

$P_1 = 1\,atm$

$C_{mp} = 7\ \frac{cal}{mol\,°K}$.

$R = 2\ \frac{cal}{mol\,°K}$

El diagrama P-V es:



Estado ①: $P_1 = 1\,atm$; $T_1 = 273\,°K$; $V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$

$$V_1 = \frac{1 \cdot 0'082 \cdot 273\,°K}{1} = 22'4\,L.$$

Estado ②: $T_2 = T_1 = 273\,°K$; $V_2 = \frac{V_1}{2} = 11'2\,L$.

$P_2 = 2\,atm$.

Estado ③: $P_3 = P_1 = 1\,atm$ Como se trata de una adiabática: $P_2 V_2^{\gamma} = P_3 V_3^{\gamma}$

$$V_3 = \left(\frac{P_2}{P_3}\right)^{1/\gamma} V_2 = 18'37\,L.$$

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} = 224'094\,°K.$$

a) $\Delta S_{12} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -5'793\ J/K$

$\Delta S_{23} = 0\ J/K$

$\Delta S_{31} = n\,C_{mp} \ln\left(\frac{T_1}{T_3}\right) = +5'793\ J/K$

$\Delta S_{ciclo} = 0$.

b) $W_{12} = Q_{12} = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -1581'49\ (J)$ (sobre el gas)

$W_{23} = -\Delta U_3 = -n C_{mv} \Delta T = 1022'22$ (J) (por el gas)

$W_{31} = P(V_1 - V_3) = 406'66$ (J) (por el gas)

c)

Ciclo antihorario ⟺ ⟺ máq. frigorífica

$\boxed{Q_{12} = -1584'49 \text{ (J)}}$ (Calor cedido por el gas)

$Q_{23} = 0$ (J)

$\boxed{Q_{31} = n C_{mp} (T_1 - T_3) = 1406'23 \text{ (J)}}$ (Calor absorbido por el gas).

|Qcedido| > Qabsorbido ⟺ Máq. frigorífica.

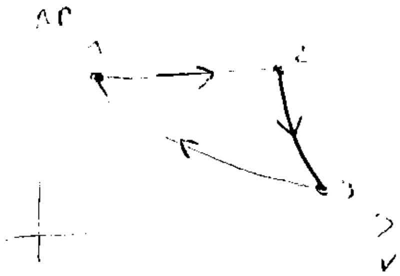
$$\varepsilon = \frac{Q}{W} = \frac{Q_{absorbido}}{|Q_{cedido}| - Q_{absorbido}} = \frac{1406'23}{1584'29 - 1406'23} = 8'02.$$

II-26.

$n = 1$ mol ; $P_1 = 4$ atm.

$V_1 = 25$ L

a)



b)

Estado	P(atm)	V(L)	T(K)
1	4	25	1219'5
2	4	50	2439
3	0'354	282'52	1219'5

c) $Q_{12} = 35465$ J

$Q_{23} = 0$ J.

$Q_{31} = -24585$ J.

$\Delta S_{12} = 20'1$ J/K

$\Delta S_{23} = 0$ J/K

$\Delta S_{31} = -20'1$ J/K

d) $\eta = 0'3068 \simeq 30\%$.

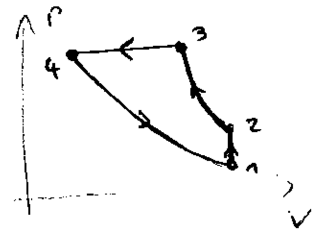
II - 31

{Ciclo P-V antihorario}

Máq frigo

$n = 1$ mol ; $\gamma = 1'4$; $V_1 = 5L$; $T_1 = 273\,°K$.

a)



Estado ①: $V_1 = 5L$; $T_1 = 273\,°K$.

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{1 \cdot 0'082 \cdot 273\,°K}{5L} = 4'48 \text{ atm.}$$

Estado ②: $V_2 = 5L$; $T_2 = 283\,°K$.

$P_2 = 4'64$ atm.

Estado ③: $T_3 = 296\,°K$.

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$$

$$\boxed{V_3 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 4'47\,L}$$

$$\boxed{P_3 = \frac{nRT_3}{V_3} = 5'43 \text{ atm.}}$$

Estado ④:

$P_4 = 5'43$ atm ; $T_4 = T_1 = 273\,°K$; $\boxed{V_4 = \frac{nRT_4}{P_4} = 4'12\,L.}$

b) $\boxed{Q_{12} = n C_{mv} \Delta T = \Delta U_{12} = 207'75}$ (J) Calor absorbido.

$Q_{23} = 0$

$Q_{34} = n C_{mp} \Delta T = -668'95$ (J) Calor cedido.

$Q_{41} = nRT \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right) = 439'7$ (J) Calor absorbido.

c) $\Delta U_{12} = 207'75$ (J)

$\Delta U_{23} = -W = -n C_{mv} (T_3 - T_2) = 270'24.$

$\Delta U_{34} = -477'99$ (J) → para cerrar ciclo

$\Delta U_{41} = 0$

$\Delta S_{12} = n C_{mv} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 0'7474$ (J/K)

$\Delta S_{23} = 0$

$\Delta S_{34} = n C_{mp} \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) = -2'35$ (J/K)

$\Delta S_{41} = 1'608$ (J/K)

22/7/2010 | FÍSICA II | (3)

d) El calor que hay que extraer al agua para congelarla es:

$$Q_{H_2O} = m_{H_2O} \cdot c_{e_{H_2O}} \cdot \Delta T + m_{H_2O} \, L_s = \{\text{Como ya está a } 0\,°C\}$$

$$= 1\ kg \cdot \left(-80 \frac{cal}{g}\right) = -8 \cdot 10^4\ cal = -334'4\ \underline{\underline{kJ}}$$

$(1\ cal = 4'18\ J)$

La eficacia de la máquina frigorífica es:

$$\varepsilon = \frac{Q_{absorbido}}{W} = \frac{Q_{absorbido}}{|Q_{cedido}| - Q_{absorbido}}$$

$$\varepsilon = \frac{207'75 + 439'7}{668'95 - (207'75 + 439'7)} = 29'36$$

El gas debe absorber $334'4\ kJ$, por tanto: $W = \dfrac{Q_{absorbido}}{\varepsilon} = \dfrac{334'4\ kJ}{29'36}$

$W = 11'39\ kJ$.

II - 30

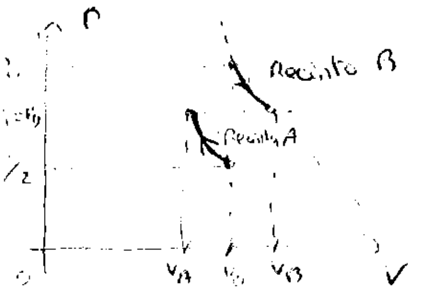
Posición inicial.

$\begin{pmatrix} P/2 \\ V_0 \\ T_0/2 \end{pmatrix}$ n (A) $\begin{pmatrix} P_0 \\ V_0 \\ T_0 \end{pmatrix}$ n (B)

Posición final.

$\begin{pmatrix} P_A \\ V_A \\ T_A \end{pmatrix}$ (A) $\begin{pmatrix} P_B \\ V_B \\ T_B \end{pmatrix}$ n (B)

1) El diagrama P-V es:



Incógnitas: $P_A, V_A, T_A, P_B, V_B, T_B$

Sabemos que: $\boxed{P_A = P_B}$ (1)

$\gamma = \dfrac{5}{3}$ (monoatómico)

$\dfrac{P_0}{2} V_0^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma}$	Compresión adiabática (A) (2)
$P_0 V_0^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma}$	Expansión adiabática (B) (3)
$V_A + V_B = 2V_0$	(4)

De (1), (2), (3):

$$\boxed{\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} = \frac{1}{2}}$$

Operando con $\gamma = \dfrac{5}{3}$ → $|V_A = 0'795\ V_0|$ → $|V_B = 1'205\ V_0|$

$|P_A = P_B = 0'732\ P_0|$ y $\left|T_A = \dfrac{P_A V_A}{nR} = 0'582\ T_0\right|$

$$\boxed{T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 0'882\, T_0}$$

2) $\Delta U_A = n\, C_{mv}\left(T_A - \frac{T_0}{2}\right) = n\,\frac{3}{2} R\,(0'882\, T_0 - 0'5\, T_0) = 0'123\; nRT_0$

$\Delta U_B = n\, C_{mv}\,(T_B - T_0) = n\,\frac{3}{2} R\,(0'882\, T_0 - T_0) = -0'177\; nRT_0$

$\Big\}$ (J) si $R = 8'314$ J/mol·K

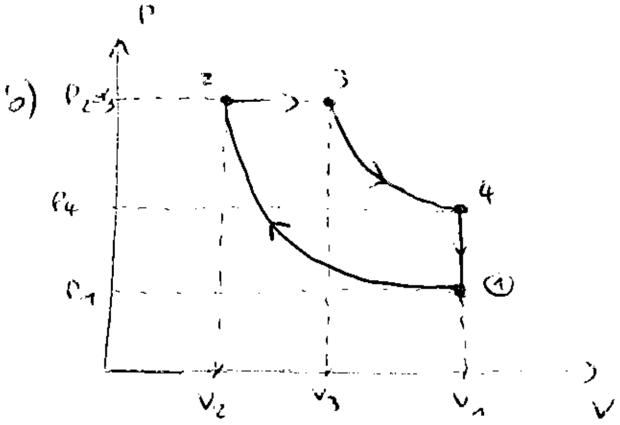
3) $\Delta S_A = \int \frac{dQ_A}{T} = 0 \;;\; \Delta S_B = \int \frac{dQ_B}{T} = 0$ ya que son procesos adiabáticos

II - 29.

a)

Coord. / estado	P (atm)	V (L)	T (°K)
1	1	2'12 L	298°K
2	55'72	0'12 L	940°K
3	55'72	0'32 L	2506'66°K
4	3'95	2'12 L	1177'1°K

b)



c) $Q_{12} = 0$ (J) ; $Q_{23} = 3964'3$ (J) ; $Q_{34} = 0$ (J) ; $Q_{41} = -1588'9$ (J)

$\Delta S_{12} = 0$ (J/K) ; $\Delta S_{23} = 2'48$ (J/K) ; $\Delta S_{34} = 0$ (J/K) ; $\Delta S_{41} = -2'48$ (J/K)

d) $W_{ciclo} = Q_{absorbido} - |Q_{cedido}| = 3964'3 - 1588'9 = 2375'4$ (J)

e) $\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{absorbido}} = \frac{2375'4}{3964'3} = 0'605 \simeq 60\%$

Ciclo Carnot

2 adiabáticas y 2 isotermas

Ciclo Stirling

2 isotermas y 2 isócoras

Ejercicio 1 de Sept. 2006.

$n = 0'25$ moles (ambas máquinas)

$\gamma = \frac{5}{3}$ (adim)

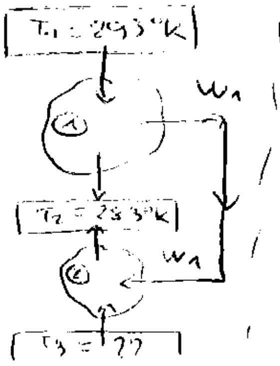
$C_{mp} = \frac{5}{2} R$ (J/mol°K)

$C_{mv} = \frac{3}{2} R$ (J/mol°K)

Ciclo Carnot:

$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{|Q_{cedido}|}{Q_{absorbido}} = \frac{W}{Q_{absorbido}}$

Solución: El esquema común es:



1) Como se trata de un ciclo de Carnot:

$\eta_1 = \eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{283'3°K}{293'3°K} = 0'034 \simeq 3'4\%$

Además: $\eta_1 = \frac{W_1}{Q_{absorbido}} \Rightarrow W_1 = \eta_1 Q_{absorbido} = 0'034 \cdot Q_{absorbido}$.

Calculamos las coordenadas de $ABB'A'$:

coord. / estado	P	V	T
A	2'4 atm	2'5 L	293°K
B	0'8 atm	7'5 L	293°K
B'	0'734 atm	7'901 L	283°K
A'	2'2 atm	2'63 L	283°K

$\boxed{Q_{AB} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 668'46}$ (J)

Calor absorbido.

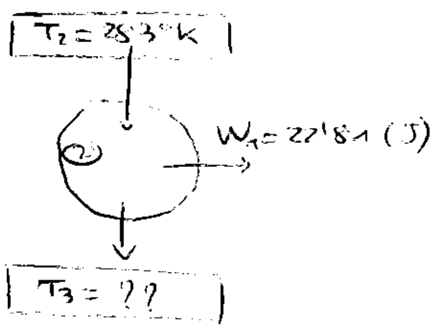
$Q_{BB'} = 0 \quad Q_{AA'}$

$\boxed{Q_{B'A'} = -646'46}$ (J)

Calor cedido.

Así pues: $\boxed{W_1 = 0'034 \cdot 668'46 = 22'81}$

2) idea feliz: La máquina frigorífica trabaja con el ciclo de Carnot, que es un ciclo reversible. Por tanto, podemos invertir el ciclo $(A'B'B''A'')$ y se obtienen los mismos calores y trabajos pero con los signos al revés.



$\eta_2 = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \frac{T_3}{283°K} = \frac{W_1}{Q_{absorbido}}$

$\boxed{W_1 = 22'81 \ (J)}$

$\boxed{Q_{abs} = Q_{A'B'} = 646'46 \ (J)}$

El único calor absorbido en el ciclo ② es el de A' a B'.

Despejamos: $\boxed{T_3 = 273°K}$

3) Como ya tenemos T_3, calculamos las coordenadas de A'' y B'':

$TV^{\gamma-1} = cte.$

$V_{B''} = 8'341 \ L$; $P_{B''} = 0'671 \ atm$; $T_{B''} = T_3 = 273°K$.

$V_{A''} = 2'77 L$; $P_{A''} = 2'016 \ atm$; $T_{A''} = T_3 = 273°K$.

⚠ OJO que la máquina 2 es frigorífica.

$Q_{A'A''} = 0$ (J)	$Q_{B''B'} = 0$ (J)	$Q > 0$ absorbido por el gas
$W_{A'A''} = -\Delta U_{A'A''} = 31'48$ J.	$W_{B''B'} = -\Delta U_{B''B'} = -31'48$ J	$Q < 0$ cedido por el gas
$Q_{A''B''} = W_{A''B''} = 625'43$ J	$Q_{B'A'} = W_{B'A'} = -646'46$ J	$W > 0$ realizado por el gas; $W < 0$ realizado sobre el gas

4) $\Delta S_{\text{foco } T_1} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{Q_{AB}}{T_1} = \frac{-668'46}{293} = -2'28 \ J/K.$

(ojo) desde el punto de vista de los focos

$$\Delta S_{\text{foco } T_3} = \frac{-Q_{A''B''}}{T_3} = -2'29 \ (J/K)$$

$$\boxed{\Delta S_{\text{foco } T_2} = \frac{+|Q_{B'A'}|}{T_2} + \frac{+|Q_{B''A''}|}{T_2} = 4'57 \ (J/K)}$$

Interior ejercicio 10 junio 2005

IV – 10

$m = 0'01$ kg

$x_1 = 4 \sin(\omega t)$ (cm)

$x_2 = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{2\pi}{3}\right)$ (cm)

a) Si los dos m.a.s. tienen la misma dirección, sólo se produce un m.a.s resultante si la frecuencia es la misma $\Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$.

b) $x_{tot} = A_{tot} \sin(\omega t + \varphi_{tot})$

$$\omega = \frac{\pi}{4} \text{ (rad/s)} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 8 \text{ seg.}}$$

$$x_{tot} = A_{tot} \sin(\omega t + \varphi_{tot}) = A_{tot} \boxed{\sin(\omega t)} \cos\varphi_{tot} + A_{tot} \boxed{\cos(\omega t)} \sin\varphi_{tot}.$$

$$x_{tot} = x_1 + x_2 = 4 \sin(\omega t) + 4 \sin(\omega t) \cos\frac{2\pi}{3} + 4 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \left[4 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \boxed{\sin(\omega t)} + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \boxed{\cos(\omega t)}$$

Identificando: $A_{tot} \cos\varphi_{tot} = \left[4 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ (1)

$A_{tot} \sin\varphi_{tot} = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (2)

Operando → $\varphi_{tot} = \frac{\pi}{3}$; $A_{tot} = 4$ cm.

$$\boxed{x_{tot} = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right)} \text{ (cm)}$$

c) $x_{tot} = 4 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right)$ (m)

$$V_{tot} = \frac{d x_{tot}}{dt} = \pi \cdot 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (m/s)}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k x_{tot}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 m x_{tot}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 m \left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{tot}^2 = \frac{1}{2} m \left(\pi \cdot 10^{-2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Igualándolas: $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$ si $\sin^2\theta = \cos^2\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\theta$.

Por tanto, la posición en la que son iguales es:

$$x_{tot}\Big|_{\sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pm 2\sqrt{2}$$

d) $\omega = \frac{4}{9}\pi$; $x_1 = 4 \sin\left(\frac{4}{9}\pi t\right)$; $x_2 = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{2\pi}{3}\right)$

El movimiento resultante ($x_{Tot} = A_{Tot} \sin(\Omega t + \varphi_{Tot})$) no es m.a.s. ya que

$A_{Tot} = A_{Tot}(t)$

e) $x_{Tot} = A \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \delta\right) = A \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)} \cos \delta + A \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{4} t\right)} \sin \delta$

$x_{Tot} = x_1 + x_2 = 4 \sin\left(\frac{4}{9} \pi t\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{2\pi}{3}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{9} \pi t = \frac{\pi}{4} t + \text{algo} \\ \text{algo} = \frac{7\pi}{36} t \end{array} \right\} =$

$= 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{7\pi}{36} t\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{2\pi}{3}\right) = 4 \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)} \cos\left(\frac{7\pi}{36} t\right) + 4 \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{4} t\right)} \sin\left(\frac{7\pi}{36} t\right) +$

$+ \boxed{4 \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4 \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{4} t\right)} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Identificando: $A \cos \delta = 4 \cos\left(\frac{7\pi}{36} t\right) + 4 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (1)

$A \sin \delta = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{36} t\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (2)

f) Que sí.

IV – 22

1) La única forma en que la composición de 2 M.A.S. perpendiculares, de un movimiento de v = cte ó a_c = cte, es cuando tienen la misma amplitud ($A = B$) y su desfase es $\pm \frac{\pi}{2}$.

Demostración:

$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} = A \sin(\omega t)\,\vec{i} + A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$

si $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{r}(t) = A\left[\sin(\omega t)\,\vec{i} + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right] = A\left[\sin(\omega t)\,\vec{i} + \cos(\omega t)\,\vec{j}\right]$

$|\vec{r}(t)| = A\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} = A$ (m) ¡¡Constante!!

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = A\omega\left[\cos(\omega t)\,\vec{i} - \sin(\omega t)\,\vec{j}\right]$

$|\vec{v}(t)| = A\omega$ (m/s) ¡¡CONSTANTE!!

Si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\vec{r}(t) = A\left[\sin(\omega t)\,\vec{i} + \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right] = A\left[\sin(\omega t)\,\vec{i} - \cos(\omega t)\,\vec{j}\right]$

$|\vec{r}(t)| = A$ (m) ¡¡CONSTANTE!!

$\vec{v}(t) = A\omega\left[\cos(\omega t)\,\vec{i} + \sin(\omega t)\,\vec{j}\right]$

$|\vec{v}(t)| = A\omega$ (m/s) ¡¡CONSTANTE!!

b) $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m |v(t)|^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2}$ (J)

c) $\boxed{E_p = \frac{1}{2} k |\vec{r}(t)|^2 = \frac{1}{2} \omega^2 m A^2 = E_c}$ (J)

$(k = \omega^2 m)$

COMENTARIO FINAL.

La superposición o composición de dos MAS perpendiculares entre sí y con desfase $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ da un mov. circular uniforme con las siguientes características:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A\cos(\omega t) \\ y(t) = A\cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} |\vec{r}(t)| = A \\ |\vec{v}(t)| = A\omega \end{array} \quad \begin{array}{l} E_p = \frac{1}{2} k |\vec{r}(t)|^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \\ E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \\ E_{mec} = E_c + E_p = 2E_c = m\omega^2 A^2 \end{array}$$

IV - 18.

m

$x(t) = A_0 \cos(2\pi f t)$

$y(t) = A_0 \sin(2\pi f t + \varphi)$ → no dato

a) Debe ser $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

(Ver problema anterior para justificación $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$)

$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m (|\vec{v}(t)|)^2 = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m A_0^2 (2\pi f)^2}$ (J)

b) $\boxed{k = \omega^2 m = (2\pi f)^2 m}$ (N/m)

$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k |\vec{r}(t)|^2 = E_c}$ (J)

c) Movimiento amortiguado.

$t = \frac{10}{f} = \frac{20}{f_a} = 20\ \text{ta}$

La expresión de un mov. amortiguado es:

$x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$ (m)

La amplitud de un mov. amortiguado es:

$A e^{-\delta t}$

Todas las energías dependen de la amplitud al cuadrado; por tanto como en un tiempo $t = 20\ \text{ta}$ la energía se reduce a un 25% de la inicial:

$E_c(t=0) \cdot 0'25 = E_c(t = 20\ \text{ta})$

$A^2 \cdot 0'25 = A^2 \left(e^{-\delta 20 \text{ta}}\right)^2$

$$e^{-\delta\, 20 T_a} = \sqrt{0'25} \Rightarrow \delta = \frac{\ln\left(\sqrt{0'25}\right)}{-20\, T_a}$$

Así pues:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ \omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 + \left(\frac{\ln\left(\sqrt{0'25}\right)}{-20\, T_a}\right)^2} = \frac{1}{T_a}\sqrt{4\pi^2 + \frac{\ln^2\left(\sqrt{0'25}\right)}{400}} \end{array} \right\}$$

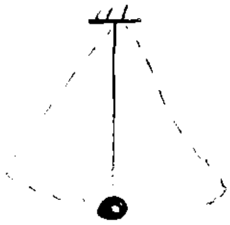
$$= \frac{\frac{1}{T_a}\sqrt{4\pi^2 + \frac{\ln^2\left(\sqrt{0'25}\right)}{400}}}{2\left(\frac{\ln\left(\sqrt{0'25}\right)}{-20\, T_a}\right)} = \boxed{90'64}$$

$Q \gg 10$ (Buen oscilador)

$Q \ll 10$ (Mal ")

$Q \simeq 10$ (Oscilador medio)

Septiembre 2008.



a) $\Theta(t) = \Theta_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)$ (rad) ; Θ_0 y φ se obtendrían por condiciones iniciales

Debemos determinar γ y ω

$$\omega = 0'95\,\omega_0 = \left\{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ \text{rad/s}\right\} = 0'95\sqrt{\frac{g}{l}}\ \text{rad/s}$$

$\omega_a = \omega = 0'95\,\omega_0$

¿γ?

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \Rightarrow \gamma = \sqrt{\omega_0^2-\omega^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 0'95^2\omega_0^2} = 0'312\,\omega_0$$

$$\boxed{\omega = 0'312\sqrt{\frac{g}{l}}}\ (\text{seg}^{-1})$$

b) $$\frac{A(t+T)}{A(t)} = \frac{A e^{-\gamma(t+T)}}{A e^{-\gamma t}} = e^{-\gamma T} = e^{-0'312\omega_0 \frac{2\pi}{\omega}} = e^{-0'312\omega_0 \frac{2\pi}{0'95\omega_0}} = 0'1268 \simeq 12'68\%$$

La amplitud se reduce a un 12'68% de la inicial, ó se reduce en 87'32% de la inicial.

c) $$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{2\cdot 0'312\,\omega_0} = \boxed{1'6}$$

Mal oscilador.

IV - 13.

a) $$\frac{A(t+T)}{A(t)} = \frac{A e^{-\gamma(t+T)}}{A e^{-\gamma t}} = e^{-\gamma T} = e^{-2'5\gamma} = 0'9 \Rightarrow \gamma = \frac{\ln(0'9)}{-2'5} = 0'04214\ (\text{seg}^{-1}).$$

b) $$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}{2\gamma} = \frac{\sqrt{\left(\frac{4\pi}{5}\right)^2+\gamma^2}}{2\gamma} = 29'82$$ (Buen oscilador).

c) $x(t) = A e^{-\gamma t}(\cos \omega t + \varphi)$ (cm) siendo: $\gamma = 0'04214\ \text{seg}^{-1}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{4\pi}{5}$ (rad/seg)

¿A y φ?

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A e^{-\gamma t}\left[-\gamma\cos(\omega t+\varphi) - \omega\sin(\omega t+\varphi)\right]$$

$$\boxed{x(t=3s) = 6\ \text{cm} = A e^{-3\gamma}\cos(3\omega+\varphi)}\quad \text{Ec. (1)}$$

$$v(t=3\omega) = 0 = A e^{-3\gamma} \underbrace{\left[-\gamma\cos(3\omega+\varphi) - \omega\sin(3\omega+\varphi)\right]}_{=0}$$

$$\operatorname{tg}(3\omega+\varphi) = -\frac{\gamma}{\omega} \Rightarrow \boxed{\varphi = 0'411} \text{ (rad)}$$

De la ecuación (1): $\boxed{A = 0'81 \text{ cm}}$

IV - 15

$\omega = 0'9\,\omega_0$

a) $$\frac{A(t+T)}{A(t)} = e^{-\gamma T} = e^{-\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}\,\frac{2\pi}{\omega}} = e^{-\sqrt{\omega_0^2-(0'9\omega_0)^2}\,\frac{2\pi}{0'9\omega_0}} = \exp\left[-\sqrt{1-0'81}\cdot\frac{2\pi}{0'9}\right]$$

$$= 4'97\cdot10^{-2} \simeq 5\%$$

La amplitud se reduce aprox un 95 %. La energía depende de la amplitud al cuadrado.

$$\frac{E(t+T)}{E(t)} = \left(e^{-\gamma T}\right)^2 = \left(4'97\cdot10^{-2}\right)^2 = 2'47\cdot10^{-3} \simeq \boxed{0'247\,\%}$$

b) $Q = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\omega_0^2-(0'9\omega_0)^2}} = 1'10 << 10$ (Muy mal oscilador).

c) $x(t) = A\,e^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi)$ (m) siendo $\gamma = \sqrt{\omega_0^2-\omega^2} = 0'43\,\omega_0$ (seg^{-1})

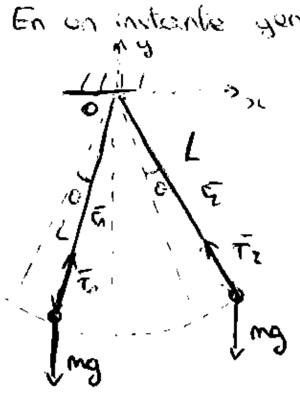
$\omega = 0'9\,\omega_0$ (rad/s)

$\boxed{x(t=0) = A\sin\varphi}$ → $\varphi = \varphi$ DATO (fase inicial); $A_0 = A\sin\varphi \Rightarrow A = \frac{A_0}{\sin\varphi}$

$$\boxed{x(t) = \frac{A_0}{\sin\varphi}\,e^{-0'43\omega_0 t}\sin(0'9\omega_0 t+\varphi)} \text{ (m)}$$

IV - 11.

a) En un instante genérico:



$$\vec M_0 = \begin{Bmatrix}\text{Las tensiones no}\\ \text{afectan porque}\\ \vec r_1 // \vec T_1 \text{ y } \vec r_2 // \vec T_2\end{Bmatrix} = \vec r_1\times\vec M_g + \vec r_2\times\vec M_g = \Big[L\cos(\tfrac{\alpha}{2}-\theta)(-\vec j) +$$

$$+ L\sin(\tfrac{\alpha}{2}-\theta)(-\vec i)\Big]\times Mg(-\vec j) +$$

$$+\Big[L\cos(\tfrac{\alpha}{2}+\theta)(-\vec j) + L\sin(\tfrac{\alpha}{2}+\theta)\vec i\Big]\times Mg(-\vec j) =$$

$$= \vec k\,MgL\sin(\tfrac{\alpha}{2}-\theta) - \vec k\,MgL\sin(\tfrac{\alpha}{2}+\theta) = MgL\left[\sin(\tfrac{\alpha}{2}-\theta) - \sin(\tfrac{\alpha}{2}+\theta)\right]\vec k$$

$$= \dots = \boxed{-2MgL\cos\tfrac{\alpha}{2}\sin\theta\,\vec k} \text{ (N/m)}$$

b) $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$

$$-2Mgl\cos\frac{\alpha}{2}\sin\Theta = I\frac{d^2\Theta}{dt^2} \quad ; \quad I = Ml^2 + Ml^2 = 2Ml^2.$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\cos\alpha\sin\Theta = 0 .$$ Para pequeñas oscilaciones: $\sin\Theta \simeq \Theta$.

$$\boxed{\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\cos\alpha \cdot \Theta = 0}$$

c) La solución de la ecuación diferencial es:

$$\Theta(t) = \Theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{rad}) \quad ; \text{ siendo } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}\cos\frac{\alpha}{2}} \; (\text{rad/s})$$

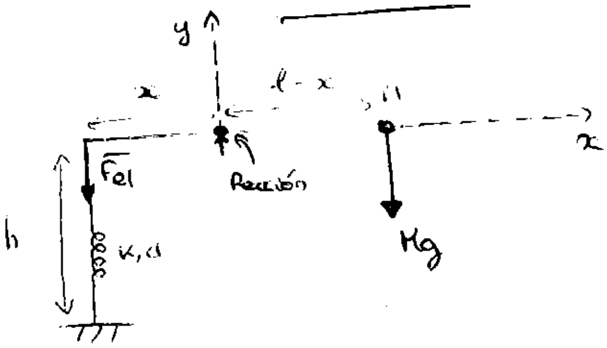
$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \; \text{Hz}}$$

d) $\omega(t) = \dfrac{d\Theta}{dt} = \Theta_0\,\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_{max} = \Theta_0\,\omega_0$$

$$Ec_{max} = \frac{1}{2}I\omega_{max}^2 = \frac{1}{2}Ml^2 \cdot 2\,\omega_{max}^2 = Ml^2\,\Theta_0^2\,\omega_0^2 = lMg\,\Theta_0^2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \; (\text{J})$$

IV-16



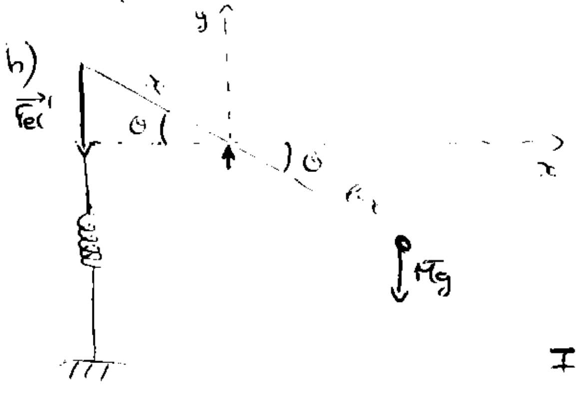
a) Para que el sistema esté en equilibrio:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{0}} \quad \text{ó} \quad \left(\Sigma\vec{F} = \vec{0}\right)$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \left[(l-x)\,\vec{i}\times Mg(-\vec{j})\right] + \left[x(-\vec{i})\times k(h-d)(\vec{j})\right] =$$

$$= -\vec{k}\,Mg(l-x) + \vec{k}\,k(h-d)x = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{Mg(l-x)}{kx} + d} \; (\text{m})$$



$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \left[\left((l-x)\cos\Theta\,\vec{i} + (l-x)\sin\Theta(-\vec{j})\right)\times\left(Mg(-\vec{j})\right)\right] +$$

$$\left[\left(x\cos\Theta(-\vec{i}) + x\sin\Theta\,\vec{j}\right)\times\left(k(h-d+x\sin\Theta)\right)(-\vec{j})\right] = \ldots$$

$$= \vec{k}\,x^2 k\sin\Theta\cos\Theta \; (\text{N}\cdot\text{m})$$

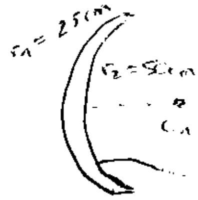
$$I\vec{\alpha} = M(l-x)^2\frac{d^2\Theta}{dt^2}(-\vec{k})$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{x^2 k}{(l-x)^2 M} \cdot \sin\theta \cos\theta = 0 \Rightarrow$ Para pequeñas oscilaciones: $\begin{cases} \sin\theta \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1 \end{cases}$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{x^2}{(l-x)^2} \cdot \theta = 0}$$

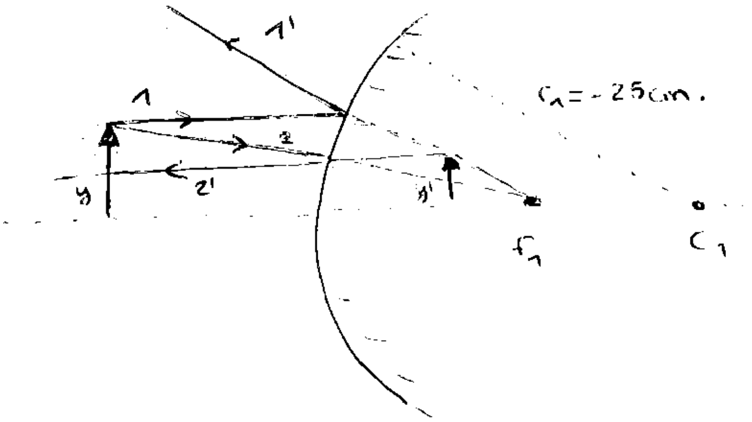
III – 12.

a) $P = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \left(\begin{matrix}\text{Ambos radios} \\ \text{son positivos}\end{matrix}\right\} = (2-1)\left(\frac{1}{0'25} - \frac{1}{0'5}\right) = 2$ Dioptrías.



$\varepsilon_r = 4 \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r} = 2$.

b) y c) Cuando funciona como espejo:

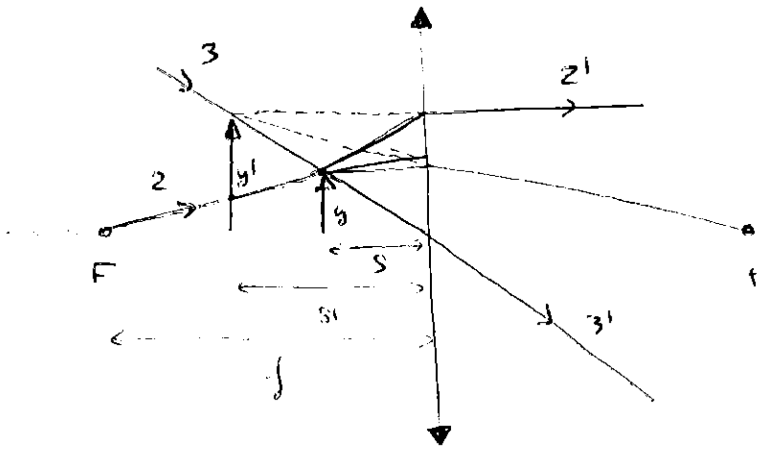


$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = -5'55cm}$

(Imagen virtual)

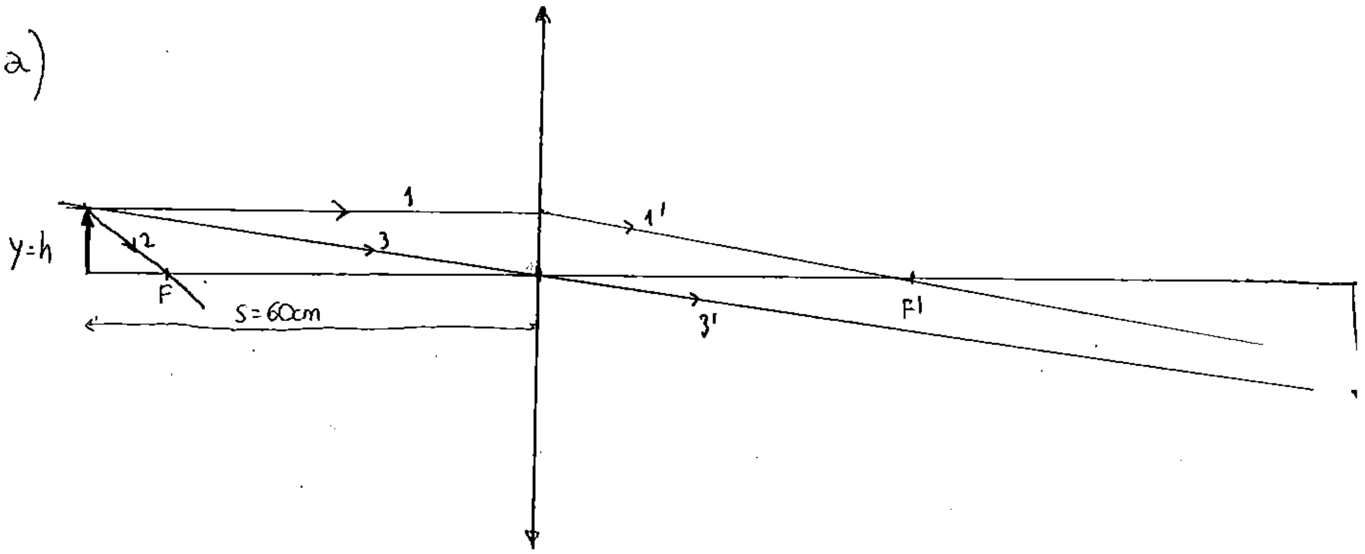
$m = \frac{-s'}{s} = 0'55$ (Imagen derecha y del 55% del tamaño del objeto).

Cuando funciona como lente delgada: $P = 2 = \frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2} = 0'5\,m = 50cm.}$



III.13

a)



Como $P = 2\ D \Rightarrow \boxed{f = 0'5\ m = 50cm} > 0$ ya que es convergente.

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{S'} = \frac{1}{50} - \frac{1}{60} = \frac{60-50}{3000} \Rightarrow \boxed{S' = \frac{3000}{10} = 300\ cm} \simeq 3\ metros.\ \text{(Imagen real)}$$

$$\boxed{m = \frac{-S'}{S} = \frac{-300}{60} = -5}\ \text{(Imagen invertida.)}$$

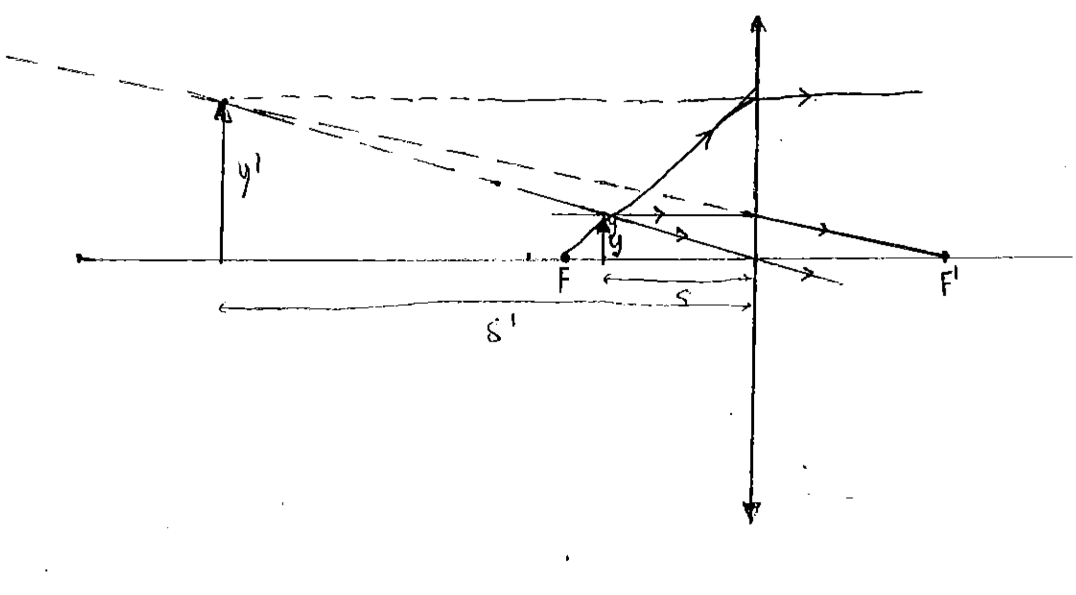
Se trata de una imagen real $(s'>0)$, invertida $(m<0)$ y de mayor tamaño. $(|m|>1)$

De hecho su tamaño es $m \cdot h = -5h$. (5 veces más grande e invertida)

b) Ahora sólo cambia $S = 40cm$.

$$\frac{1}{S'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{S} = \frac{1}{50} - \frac{1}{40} = \frac{40-50}{2000} \Rightarrow \boxed{S' = \frac{2000}{-10} = -200} \Rightarrow \boxed{S' = -2\ metros}\ \text{Imagen virtual.}$$

$$\boxed{m = \frac{-S'}{S} = \frac{-(-200)}{40} = 5}\ \text{(Imagen derecha de 5 veces su tamaño.}$$



c) $f = 0'5$ m

$s = 0'5 + vt$

$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{f \cdot s}{s - f} = 0'5 + \frac{0'25}{vt} \quad (m)$$

$$\boxed{v' = \frac{ds'}{dt} = -\frac{0'25}{vt^2}} \quad (m/s) \qquad \text{Velocidad de la imagen.}$$

III.17

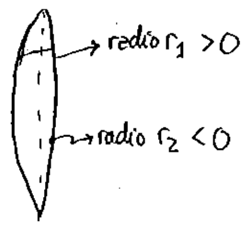
a) Observamos que se trata de una lente convergente con radios $r_1 = 25cm$ y $r_2 = 50cm$.

Sabemos que $n = \sqrt{\varepsilon_r} = 2$.

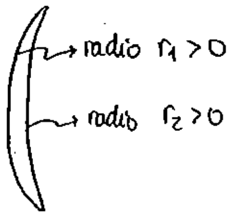
Por la ecuación del constructor de lentes:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

¡¡OJO!! La figura deja una ambigüedad en el posible diseño de la lente delgada convergente, porque para que sea convergente tenemos estas 2 posibilidades:



$$\Rightarrow \frac{1}{f} = 1\cdot\left(\frac{1}{0'25} - \frac{1}{-0'5}\right) = 6 \Rightarrow \boxed{P = 6 \text{ Dioptrías}}$$

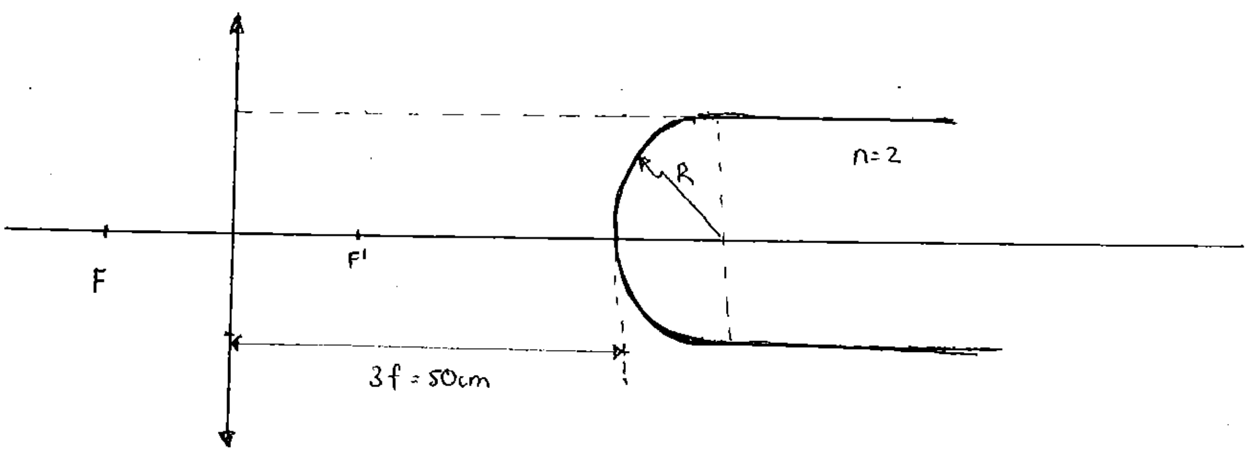


$$\Rightarrow \frac{1}{f} = 1\cdot\left(\frac{1}{0'25} - \frac{1}{0'5}\right) = 2 \Rightarrow \boxed{P = 2 \text{ Dioptrías}}$$

Idem problema III.12.

NOTA: Ellos en la solución dieron la $P = 6$ Dioptrías.

b) Sabemos que: $f = \frac{1}{6}$ metros $= 16'667$ cm



Todos los rayos procedentes del mismo punto llegan paralelos a la superficie del medio dieléctrico, y esto quiere decir que es como si el objeto estuviera situado en el ∞:

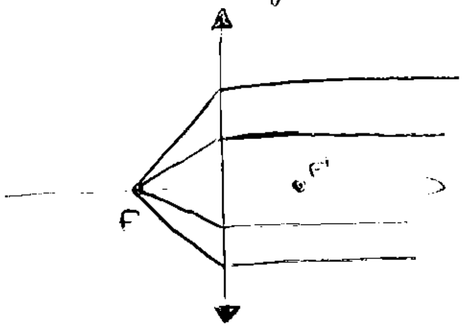
Si situamos un foco de luz en el foco de la lente su imagen

se formaría en:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \iff \frac{1}{f} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$\boxed{s' = +\infty}$$

Gráficamente:



Para saber la posición de la luz dentro del medio dieléctrico, aplicamos:

$$\boxed{\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}}$$

Siendo $n_1 = 1$
$n_2 = 2$
$r = +R$
$s = \infty$

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \Rightarrow \boxed{s' = 2R}$$

c) No se desplaza

III.9

1ª lente: $\left.\begin{array}{l} r_1 = \infty \\ r_2 = 8\,cm \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 0'55\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-0'08}\right) = \underline{6'875 \text{ dioptrías}}}$ CONVERGENTE.

$n = 1'55$

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{P_1} = \underline{14'55\,cm}}$$

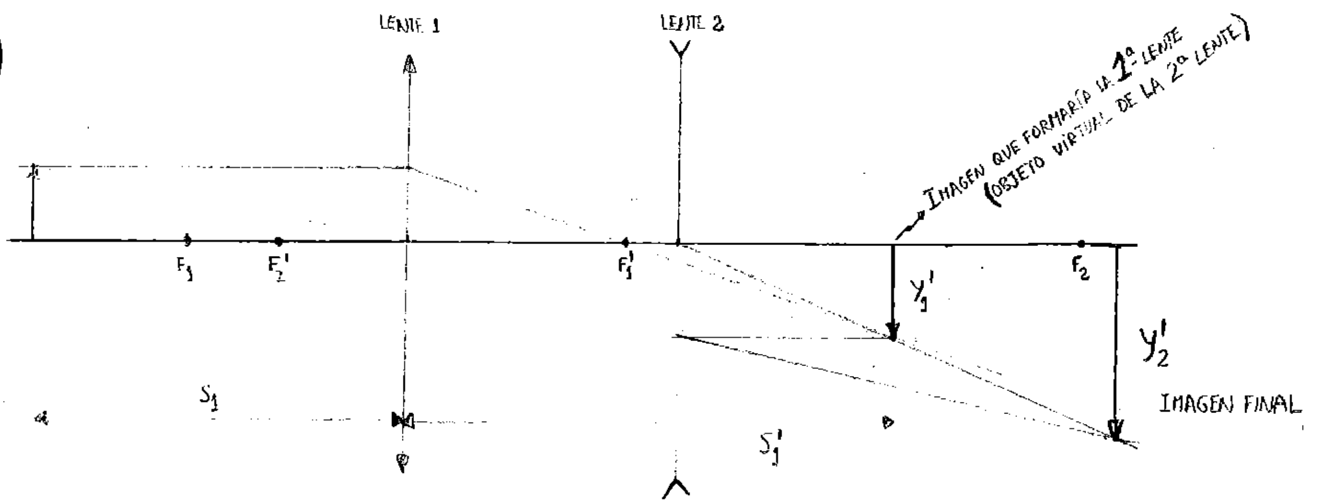
2ª. lente: $\left.\begin{array}{l} r_1 = \infty \\ r_2 = 12\,cm \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_2 = \frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 0'45\cdot\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0'12}\right) = \underline{-3'75 \text{ dioptrías}}}$ DIVERGENTE.

$n = 1'45$

$$\boxed{f_2 = \frac{1}{P_2} = \underline{-26'67\,cm}}$$

NOTA: Estos resultados son los mismos si las lentes están al revés:

d)



a) La imagen de la 1ª lente estaría situada en:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{25} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{14'55} \Rightarrow s_1' = +34'8\,cm$$

Como las lentes están colocadas a una distancia de 18cm, la imagen que forma la 1ª lente ESTARÍA a la derecha de la 2ª lente, por tanto esta imagen no se llega a formar, pero para nosotros se trata de un objeto VIRTUAL para la 2ª lente, que está colocado a una distancia:

$$\boxed{s_2 = -(34'8 - 18) = \underline{-16'8\,cm}}$$ OBJETO VIRTUAL PARA LA 2ª LENTE.

La imagen debida a la 2ª lente estaría situada en:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{-16'8} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{-26'67} \Rightarrow \boxed{s_2' = 45'45\ cm}$$

Imagen REAL porque está en el lado de transmisión de la 2ª lente.

b) El aumento conseguido por la 1ª lente es:

$$\boxed{m_1} = \frac{-s_1'}{s_1} = \frac{-34'8}{25} = \boxed{-1'392} \text{ (Imagen invertida)}$$

El aumento conseguido por la 2ª lente es:

$$\boxed{m_2} = \frac{-s_2'}{s_2} = \frac{-45'45}{-16'8} = \boxed{2'7} \text{ (Imagen derecha)}$$

El aumento conseguido por el sistema es: $\boxed{m = m_1 \cdot m_2 = -3'766}$ (IMAGEN INVERTIDA)

c) Como ya hemos visto se trata de una imagen REAL e INVERTIDA.

d) Ver figura inicial.

e) $\boxed{P = P_1 + P_2 = 6'875 - 3'75 = 3'125}$ Dioptrías. (LENTE CONVERGENTE)

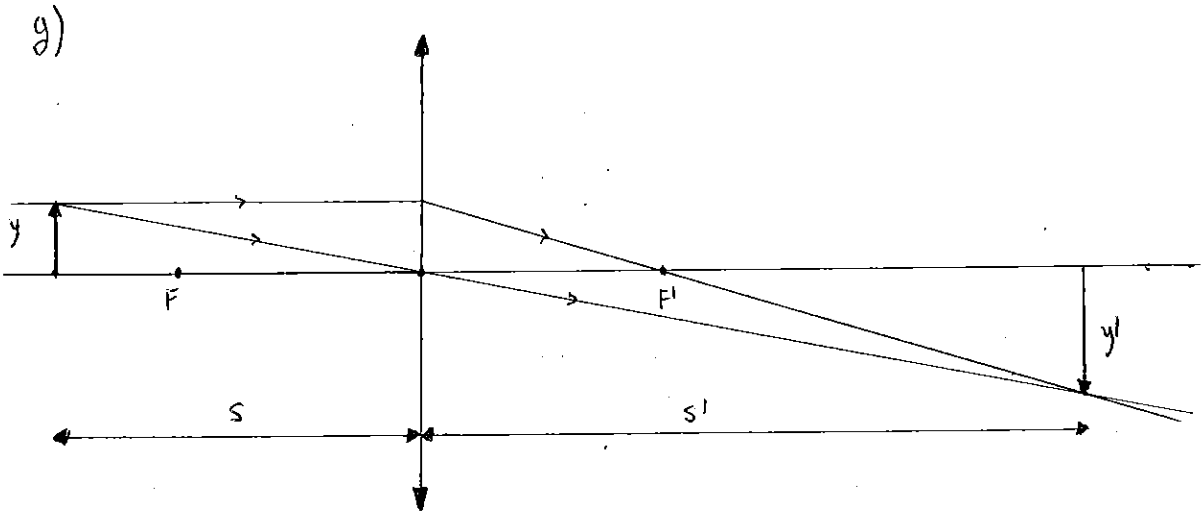
f) $P = \frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{3'125} = 0'32 \cong 32 \text{ cm}}$ Positivo ya que es convergente.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{32}} \text{ Ec.(1)}$$

$$m = \frac{-s'}{s} = -2 \Rightarrow \boxed{s' = 2s} \text{ Ec.(2)}$$

Operando se obtiene $\boxed{s = 48 \text{ cm}}$

g)



h) Imagen real ($s' > 0$) [Está en el lado de transmisión]

Imagen invertida ($m = -2$)

III - 6.

b) y c)

$$y_1' = \begin{cases} \frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f} \Rightarrow s_1' = \frac{1}{\frac{1}{f_1}-\frac{1}{s_1}} = \frac{s_1 f_1}{s_1-f_1} = \frac{120\cdot 40}{120-40} = 60\,\text{cm} \\ m_1 = \frac{-s_1'}{s_1} = \frac{-60}{120} = -\frac{1}{2} \text{ (Imagen invertida de tamaño 1 cm).} \end{cases}$$

Imagen de y a través del espejo.

(El objeto mide 2 cm)

$$y_2' = \begin{cases} \frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow s_2' = \frac{s_2 f_2}{s_2-f_2} = \frac{50\cdot 33}{50-33} = 100\,\text{cm} \text{ (Im. real).} \\ m_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = -2 \text{ (Imagen invertida y de tamaño 4cm)} \end{cases}$$

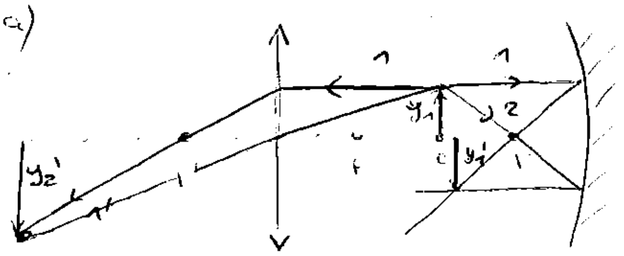
Imagen de y a través de la lente

$$(y_1')_2' = \begin{cases} \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \Rightarrow s' = \frac{s\cdot f}{s-f} = \frac{110\cdot 33'3}{110-33'3} = 47'83\,\text{cm} \text{ (Im. real)} \\ m = -\frac{s'}{s} = -\frac{47'83}{110} = -0'435 \text{ (Im. invertida)} \end{cases}$$

Imagen de y_1' a través de la lente.

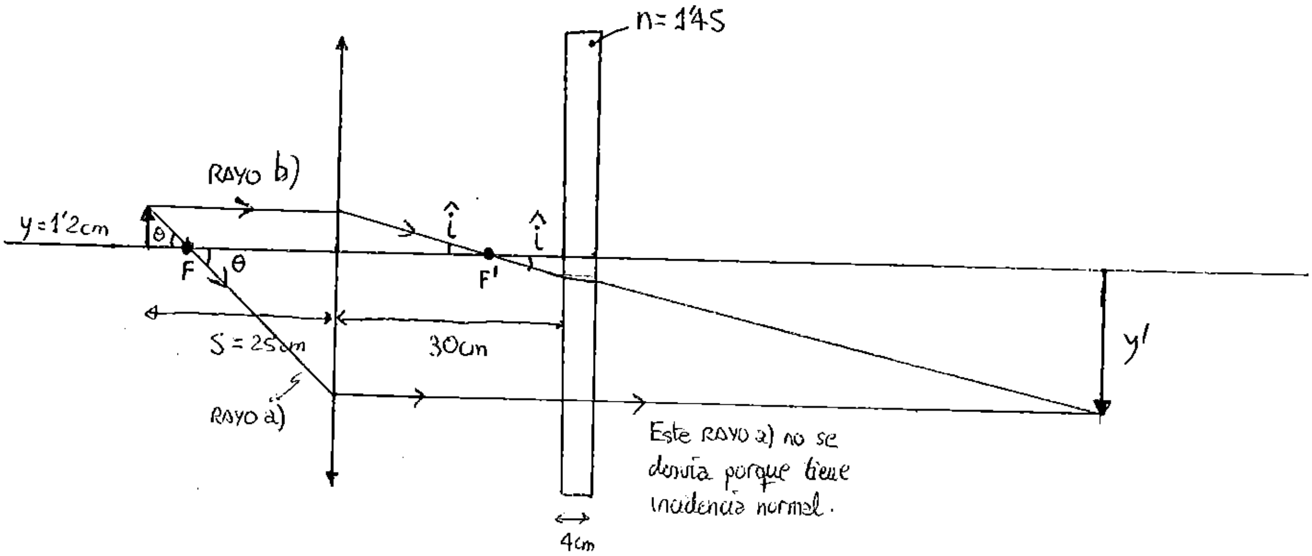
El tamaño de la última imagen es $(y_1')_2' = 0'435$ cm.

a)



III.16

$P = 5D \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{5} = 0'2\ m = 20 cm} > 0 \Rightarrow$ Lente convergente.



Debemos hacer un primer dibujo de la punta de la flecha (RAYO b)) para saber el ángulo con el que incide en la lámina (î), y otro dibujo de la punta de la flecha para saber la altura final de la imagen. (RAYO a))

RAYO a):

Determinamos el ángulo θ, ver dibujo. $tg\,\theta = \frac{y}{s-f} = \frac{1'2\ cm}{5\ cm} \Rightarrow \boxed{13'5° = \theta}$

Por tanto ya tenemos la altura o el tamaño final de la imagen.

$$tg\,\theta = \frac{|y'|}{f} \Rightarrow \boxed{|y'| = tg\,\theta \cdot f = 4'8\ cm}$$

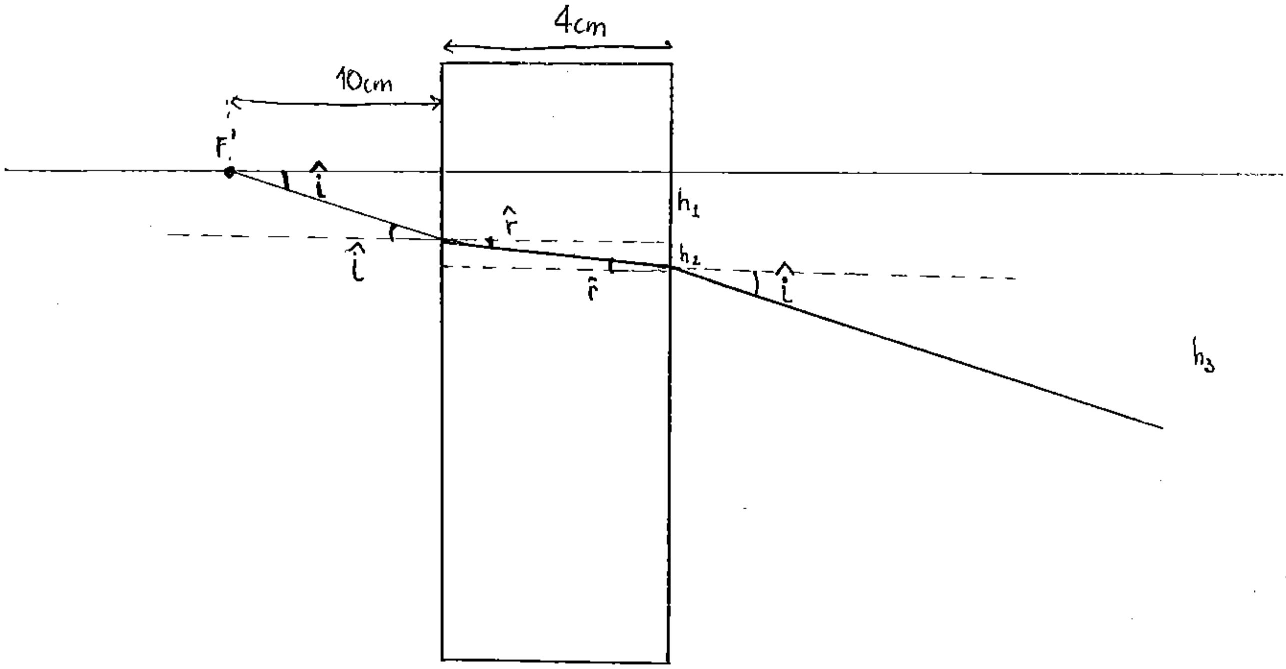
Observamos que será una imagen invertida amplificada en: $\boxed{m = \frac{y'}{y} = \frac{-4'8}{1'2} = -4}$

Rayo b):

Observamos que el ángulo con el que incide en la lámina es:

$$tg\,\hat{i} = \frac{1'2}{f} = \frac{1'2}{20} \Rightarrow \hat{i} = 3'43°$$

A partir de ahora es mejor utilizar el siguiente esquema:



Calculamos por la ley de Snell el ángulo de refracción:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \cdot \operatorname{sen} \hat{r} \Rightarrow \boxed{\hat{r} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_1 \cdot \operatorname{sen} \hat{i}}{n_2}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 \cdot \operatorname{sen}(3'43^\circ)}{1'45}\right) = 2'367^\circ}$$

Podemos calcular h_1, h_2 y h_3 ya que sabemos que su suma es $h = 4'8\,cm$.

$$tg\, \hat{i} = \frac{h_1}{10cm} \Rightarrow \boxed{h_1 = 10cm \cdot tg\, \hat{i} = 0'6\,cm}$$

$$tg\, \hat{r} = \frac{h_2}{4cm} \Rightarrow \boxed{h_2 = 4cm \cdot tg\, \hat{r} = 0'165\,cm}$$

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = 4'8cm \Rightarrow \boxed{h_3 = h - h_1 - h_2 = 4'035}$$

Por tanto la imagen se formará a una distancia d_3 de la cara derecha de la lámina que es:

$$tg\, \hat{i} = \frac{h_3}{d_3} \Rightarrow \boxed{d_3 = \frac{h_3}{tg\, \hat{i}} = 67'32\ cm}$$

Por tanto la imagen se forma a una distancia respecto de la lente dada por:

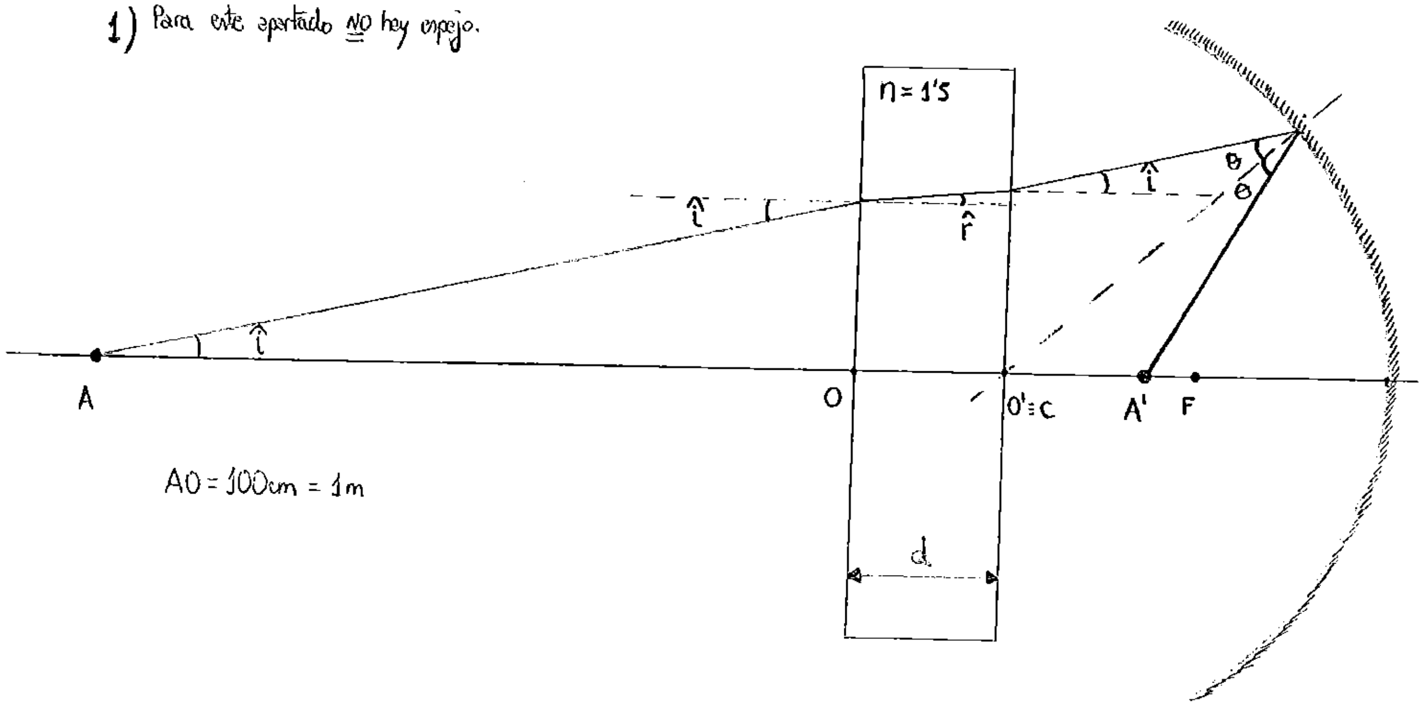
$$\boxed{S' = 30cm + 4cm + 67'32\,cm = 101'32\,cm}$$

Su tamaño es: $\boxed{y' = -4'8\,cm} \Rightarrow \boxed{m = \frac{+y'}{y} = -4}$

Se trata pues de una imagen real, invertida y 4 veces mayor que la original.

III.20

1) Para este apartado NO hay espejo.



Sabemos por la ley de Snell que: $n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\hat{r}$

Por tanto como $n_1 = 1 < n_2 = 1'5$ debe ser $\hat{i} > \hat{r}$ (Ver dibujo)

Además cuando un rayo incide sobre una lámina de caras plano-paralelas, sabemos que el rayo emergente por la segunda cara es paralelo al incidente (Ver dibujo)

$n_1 \sin \hat{i}_1 = n_2 \sin \hat{r}_1 =$ (observamos que $\hat{r}_1 = \hat{i}_2$; Volvemos a aplicar Snell) $= n_1 \sin \hat{r}_2 \Rightarrow \hat{i}_1 = \hat{r}_2$ (Rayo paralelo al incidente)

2) Veamos en primer lugar donde formaría imagen el rayo refractado por la primera superficie de la lámina; para ello utilizamos la ecuación de la refracción en una lente:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

- **1ª refracción:** $\frac{1}{AO} + \frac{1'5}{s'} = \frac{1'5 - 1}{\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{s' = -1'5 \cdot AO = -1'5 \text{ metros}}$

Esta imagen no se llega a formar porque se refracta de nuevo en la segunda superficie:

- **2ª refracción:** $\frac{1'5}{1'5 + d} + \frac{1}{\underbrace{-(0'5+d)}} = 0 \Rightarrow +1'5(0'5+d) = (1'5+d) \Rightarrow +0'75 + 1'5d = 1'5 + d \Rightarrow$

$\Rightarrow 0'5d = 0'75 \Rightarrow \boxed{d = 1'5 \text{ metros}}$

queremos que la imagen se forme a la mitad de distancia entre A y O.

3) Por la ley de Snell de la reflexión el ángulo con el que incide el rayo en la superficie del espejo, que lo hemos llamado θ (Ver dibujo) es el mismo con el que se refleja. Estos ángulos se miden con respecto a la normal al espejo, que es la recta dibujada en trazos discontinuos que pasa por $C \equiv O'$. (Ver figura)

4) Suponiendo el espesor d está calculado, la imagen que se obtendría de A estaría a la mitad de la distancia entre A y O, es decir, teniendo en cuenta que $d = 1'5$ metros y que $AO = 1$ metro (Ver enunciado), la distancia de esta imagen de A al vértice del espejo es:

$$\boxed{S_A = 0'5 + 1'5 + \underbrace{0'5}_{\text{radio del espejo}} = 2'5 \text{ metros}}$$

Distancia a la que está la imagen que ha creado la lámina del punto A.

Así pues, la imagen final que el espejo crea del punto A, estará a una distancia del vértice del espejo dada por:

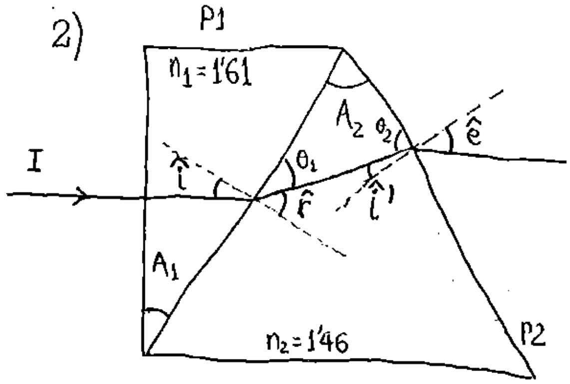
$$\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S'_A} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r} = \frac{1}{0'25}$$

$$\frac{1}{2'5} + \frac{1}{S'_A} = \frac{1}{0'25} \Rightarrow \frac{1}{S'_A} = \frac{1}{0'25} - \frac{1}{2'5} \Rightarrow \boxed{S'_A} = \frac{2'5 \cdot 0'25}{2'5 - 0'25} = \boxed{0'27\overline{7}\ m}$$

$$\boxed{S'_A = 0'27\overline{7}\ m \simeq 27'7\overline{7}\ cm}$$

III.18

2)



$A_1 = 30^\circ$

$A_2 = 60^\circ$

1) Como el rayo incide perpendicularmente en el prisma 1, este rayo no se desvía hasta que no llega al prisma 2, sobre el cual incide con un ángulo de incidencia que hemos representado con la letra $\hat{i}$.

Cómo $A_1 = 30^\circ$, observamos que $\hat{i} = 30^\circ$.

Aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \cdot \operatorname{sen} \hat{r} \Rightarrow \boxed{\hat{r}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_1 \cdot \operatorname{sen} \hat{i}}{n_2}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1'61 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{1'46}\right) = \boxed{33'46^\circ}$$

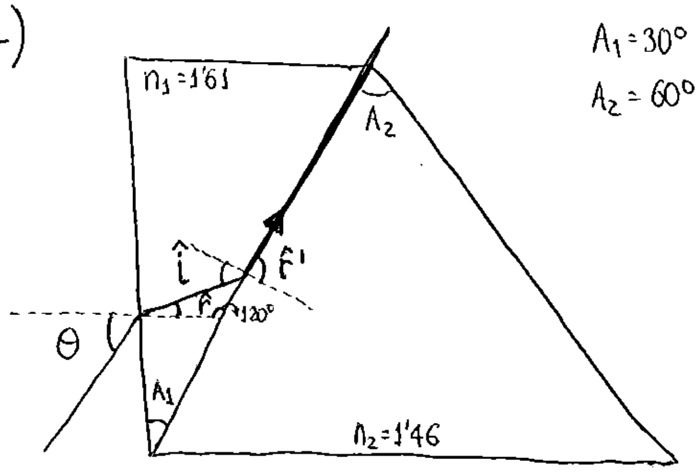
Sabiendo que los 3 ángulos de un triángulo suman 180° sabemos que:

$$\boxed{\theta_1} = 90^\circ - \hat{r} = \boxed{56'54^\circ} \Rightarrow \boxed{\theta_2} = 180^\circ - A_2 - \theta_1 = \boxed{63'46^\circ} \Rightarrow \boxed{\hat{i}'} = 90^\circ - \theta_2 = \boxed{26'54^\circ}$$

Así pues el ángulo con el que emerge por la cara de la derecha de P_2, suponiendo que fuera de los prismas el medio es el aire, es:

$$n_2 \cdot \operatorname{sen} \hat{i}' = n_{aire} \cdot \operatorname{sen} \hat{e} \Rightarrow \boxed{\hat{e}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_2 \cdot \operatorname{sen} \hat{i}'}{n_{aire}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(1'46 \cdot \operatorname{sen}(26'54^\circ)\right) = \boxed{40'72^\circ}$$

4)



$A_1 = 30°$
$A_2 = 60°$

3) Observamos que para que <u>no</u> exista refracción por la cara derecha de P_2 debe ser $\hat{r}' = 90°$ (Ver figura), por tanto:

$$n_1 \cdot \text{sen}\, \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\, 90° \Rightarrow \boxed{\hat{i} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 65'07°}$$

Por otro lado: $180° = \hat{r} + 120° + (90° - \hat{i}) \Rightarrow \boxed{\hat{r} = 35'07°}$

Finalmente:

$$1 \cdot \text{sen}\, \theta = n_1 \cdot \text{sen}\, \hat{r} \Rightarrow \boxed{\theta = \text{arcsen}\left(n_1 \cdot \text{sen}\, \hat{r}\right) = 67'68°}$$

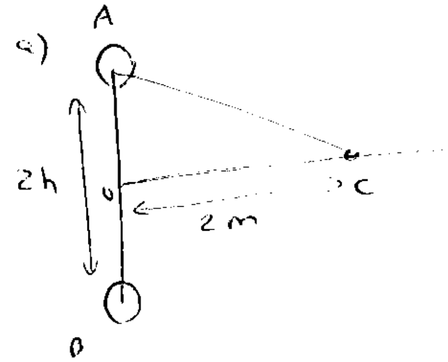
I - 32.

$f = 900 Hz$

$P = 5 W$ No es onda plana. esférica 99%!

$\delta_{relativo} = \frac{\pi}{3}$

a)



1) $I_{Tot_c} = I_{Ac} + I_{Bc} + 2\sqrt{I_{Ac} I_{Bc}} \cos\delta$

$$I_{Ac} = \frac{Pot}{sup} = \frac{5\,(W)}{4\pi\, dist^2_{Ac}} = \frac{5}{4\pi(h^2+r^2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} h = 3\lambda = \frac{3v_s}{f} = \frac{990}{900} = 1'1\ m \\ r = 2m \end{array} \right\} =$$

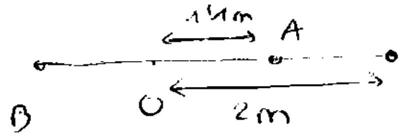
$$= \frac{5}{4\pi(1'1^2 + 2^2)} = I_{Bc}$$

Por la simetría del dibujo

$\delta = k(r_A - r_B) + \delta_{relativo} = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ (rad)

$$\boxed{I_{Tot_c} = 0'229\ W/m^2}$$

b)



$I'_{Tot_c} = I'_{Ac} + I'_{Bc} + 2\sqrt{I'_{Ac} I'_{Bc}} \cos\delta$

$$I'_{Ac} = \frac{Pot}{sup} = \frac{5\ (W)}{4\pi(2-1'1)^2} \quad (W/m^2)$$

$$I'_{Bc} = \frac{Pot}{sup} = \frac{5}{4\pi(2+1'1)^2} \quad (W/m^2)$$

$$\delta' = k(r_B - r_A) + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2+h-(2-h)\right) + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2h + \frac{\pi}{3} = 12\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$h = 3\lambda$

$$\boxed{I'_{Tot} = 0'675\ W/m^2}$$

3) $\Delta f = 75\ Hz = |f_{R_A} - f_{R_B}|$

Puntos lejanos

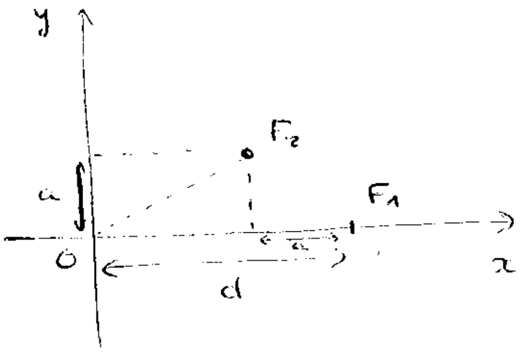
$$f_{R_A} = f_{T_A}\left(\frac{V_s \pm 0}{V_s - \Omega h}\right)$$

$$f_{R_B} = f_{T_B}\left(\frac{V_s \pm 0}{V_s + \Omega h}\right)$$

$$75\ Hz = f_{R_A} - f_{R_B} = 900\left[\left(\frac{330}{330 - 1'4\Omega}\right) - \left(\frac{330}{330 + 1'4\Omega}\right)\right]$$

Operando sale una Ec. de 2º grado y tomando la solución positiva: $\boxed{\Omega = 13'95}$ (rad/s)

I - 53.



Emisión isotrópica ≡ Ondas esféricas $\left(I = \frac{P}{4\pi r^2}\right)$

$v = 340\ m/s$

$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$.

Debemos tener como dato: P_1 ≡ Potencia emitida por el primero.

f_1 ≡ frecuencia de f_1

1) ¿P_2, f_2, φ_2?

Suponemos que el foco F_2 emite a la misma frecuencia. $(f_2 = f_1)$

Para que no se escuche esa frecuencia en el origen, debe ser:

$$I_{1_0} = I_{2_0} \quad y \quad \cos\delta = -1$$

Para que en O no se escuche ningún sonido debe ser:

$I_{1_0} = I_{2_0}$

$\cos\delta = -1$

$I_{TOT_0} = I_{1_0} + I_2 + 2\sqrt{I_2 I_{2_0}}\cos\delta = 0$

$$I_{1_0} = I_{2_0} \Rightarrow \frac{P_1}{4\pi d^2} = \frac{P_2}{4\pi(a^2 + (d-a)^2)}$$

$$\boxed{P_2 = P_1\left(\frac{a^2 + (d-a)^2}{d^2}\right)}\ (W)$$

26/8/2010

$$\cos\delta = -1 \Rightarrow \delta = (2n+1)\pi = K(r_2 - r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{a^2+(d-a)^2} - d\right) + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Supongamos $\varphi_1 = 0$

$$\boxed{\varphi_2 = 2n\pi + \pi - \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{a^2+(d-a)^2} - d\right) = 2n\pi + \pi + \frac{2\pi f_1}{340} \cdot \left(d - \sqrt{a^2+(d-a)^2}\right)}$$

2) $I'_{TOT_0} = I'_{1_0} + I'_{2_0} - 2\sqrt{I'_{1_0} I'_{2_0}} = \left(\sqrt{I'_{1_0}} - \sqrt{I'_{2_0}}\right)^2$

¿Sigue siendo $\cos\delta = -1$?

Para que esta intensidad total sea de 10 dB:

$$N I'_{TOT_0}(dB) = 10\log\left(\frac{I'_{TOT}}{I_{ref}}\right) = 10\ dB \Rightarrow I'_{TOT} = I_{ref}\cdot 10^{\frac{10}{10}} = 10^{-11}\ W/m^2.$$

Así pues: $\boxed{\left|\sqrt{I'_{1_0}} - \sqrt{I'_{2_0}}\right| = \sqrt{10^{-11}}\ (W/m^2)}$

E-I-35.

a) Como percibo nulos cada 5 segundos la pulsación que percibo por la mezcla de ambos sonidos es:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5}\ Hz = 0'2\ Hz$$

$$\Delta f = \left|f_{R_B} - f_{R_A}\right| = \left|f_{T_B}\left(\frac{V_S - V_{camión}}{V_S - V_{camión}}\right) - f_{T_A}\left(\frac{V_S - V_{camión}}{V_S \pm 0}\right)\right| = \left\{\text{Como } f_{T_B} = f_{T_A} = f_T\right\} =$$

$$= f_T\left|1 - \left(\frac{340 - 0'1}{340}\right)\right| = 0'2 \Rightarrow \boxed{f_T = 680\ Hz}$$

b) $\Delta f' = \frac{1}{0'1} = 10\ Hz = f_T\left(1 - \left(\frac{340 - V_{cam}}{340}\right)\right) = 680\left(1 - 1 + \frac{V_{cam}}{340}\right) = 2V_{cam}.$

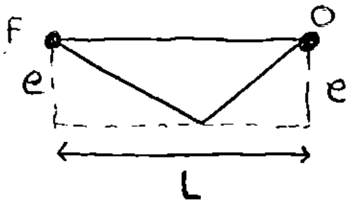
$V_{cam} = 5\ m/s$

c) Como se trata de ondas planas la intensidad no cambia:

$$I_{TOT} = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B}\cos\delta$$

$$\boxed{I_{TOT_{max}} = \left.\begin{cases}\cos\delta = +1 \\ I_A = I_B = I\end{cases}\right\} = 4I \quad (W/m^2)}$$

I.51



Potencia $\equiv W$ (DATO)

Ondas esféricas $\Rightarrow I = \frac{W}{4\pi r^2}$

$L \gg e$ ($L = 100m$ y $e = 5m$)

No hay cambios de fase en la reflexión en el suelo.

$V_s = 340\ m/s$.

a) $I_{TOT} = I_D + I_R + 2\sqrt{I_D \cdot I_R} \cdot \cos\delta$

siendo: $\boxed{\delta = k(r_R - r_D) + \delta_{relativo}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como no hay cambio} \\ \text{de fase en la reflexión} \\ \text{en el suelo } \delta_{relativo} = 0 \end{array} \right\} =$

$$= k(r_R - r_D) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{L^2 + (2e)^2} - L\right) =$$

$$= \boxed{\frac{2\pi f}{V_s}\left(\sqrt{L^2 + (2e)^2} - L\right)} \text{ (rad)}$$

Para percibir máximos: $\cos\delta = +1 \Rightarrow \delta = 2n\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 2n\pi = \frac{2\pi f}{V_s}\left(\sqrt{L^2 + (2e)^2} - L\right) \Rightarrow$ Despejando f:

$\boxed{f = n \cdot 681'7\ Hz}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Para percibir mínimos: $\cos\delta = -1 \Rightarrow \delta = (2n-1)\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow (2n-1)\pi = \frac{2\pi f}{V_s} \cdot \left(\sqrt{L^2 + (2e)^2} - L\right) \Rightarrow$ Despejando f:

$\boxed{f = (2n-1)\frac{681'7}{2} = (2n-1) \cdot 340'85\ Hz}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) En este último caso $\cos\delta = -1 \Rightarrow I_{TOT} = I_D + I_R - 2\sqrt{I_D \cdot I_R} \Rightarrow$

$$\boxed{I_{TOT}} = \left(\sqrt{I_D} - \sqrt{I_R}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{W}{4\pi L^2}} - \sqrt{\frac{W}{4\pi(L^2 + (2e)^2)}}\right)^2 =$$

$$= \frac{W}{4\pi L^2}\left(1 - \sqrt{\frac{L^2}{L^2 + (2e)^2}}\right)^2 = \frac{W}{4\pi \cdot 100^2}\left(1 - \sqrt{\frac{100^2}{100^2 + 10^2}}\right)^2 =$$

$$= \boxed{W \cdot 1'96 \cdot 10^{-10}} \text{ } (W/m^2)$$

$\boxed{I.41} = \boxed{I.44}$

$f = 1103'3$ Hz

$T^a = 21°C$

$\rho_0 = 1'28 \ kg/m^3$

$V_s\big|_{T^a=0°C} = 334 \ m/s$

$I_0 = 10^{-12} \ w/m^2$

NOTA TEÓRICA:

$$V = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}}$$ (m/s) = Velocidad del sonido en función de la temperatura T en Kelvin.

$R = 8'314 \ J/mol \cdot K$ = cte universal de los gases.

M = masa molar del gas (En el aire: $M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg/mol)

$\gamma = 1'4$ (Coef. adiabático del aire.)

Dada una velocidad a una temperatura T_1 en Kelvin, la velocidad a una temperatura T_2 es:

$$\boxed{V_2 = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T_2}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T_1 \cdot T_2}{M \cdot T_1}} = V_1 \cdot \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}$$

Así en nuestro problema, la velocidad a la temperatura $T_2 = 21°C = 294°K$ es:

$$\boxed{V = 334 \cdot \sqrt{\frac{294}{273}} = 346'6 \ m/s}$$

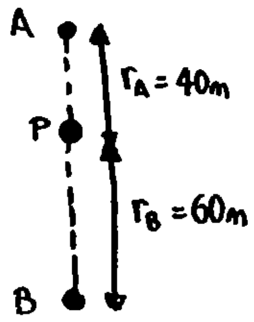
FIN NOTA TEÓRICA

1) $I_A\big|_{r=100m} = \dfrac{P_A}{4\pi \cdot (100)^2} = 10^{-12} \ w/m^2 \Rightarrow \boxed{P_A = 4\pi \cdot 10^{-8} \ W}$

2) $NI_B\big|_{r=10m} = 60 \ dB \Rightarrow I_B\big|_{r=10m} = I_0 \cdot 10^6 = 10^{-6} (w/m^2) \Rightarrow \boxed{P_B = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot 10^2 = 4\pi \cdot 10^{-4}} \ W$

3) $\boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 1103'3}{346'6} = 20}\ (\text{rad/m})$

4)



$$I_{TOT} = I_A + I_B + 2\cdot\sqrt{I_A \cdot I_B}\cdot \cos\delta$$

$$\delta = K(r_B - r_A) + \delta_{relativo} = k(r_B - r_A) + (\varphi_B - \varphi_A)$$

$$\xi_B = \xi_{0B}\cdot \operatorname{sen}(k r_B - \omega t + \varphi_B)$$
$$\xi_A = \xi_{0A}\cdot \operatorname{sen}(k\cdot r_A - \omega t + \varphi_A)$$

En un máximo: $\delta = 2n\pi = 20(60-40) + (\varphi_B - \varphi_A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(\varphi_B - \varphi_A) = 2n\pi - 400 = 2'12 \text{ rad}} \cong 121'68^\circ$$

para poner $\varphi_B - \varphi_A$ entre 0 y 2π debe ser: $n = 64$

B está adelantado 2'12 rad respecto de A.

5) $\boxed{[I_{TOT}]_M} = I_{A_M} + I_{B_M} + 2\cdot\sqrt{I_{A_M}\cdot I_{B_M}}\cdot 1 = \left(\sqrt{I_{A_M}} + \sqrt{I_{B_M}}\right)^2 =$

$$= \left(\sqrt{\frac{P_A}{4\pi\cdot(40)^2}} + \sqrt{\frac{P_B}{4\pi(60)^2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{4\pi\cdot 10^{-8}}{4\pi\cdot 16\cdot 10^2}} + \sqrt{\frac{4\pi\cdot 10^{-4}}{4\pi\cdot 36\cdot 10^2}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{10^{-5}}{4} + \frac{10^{-3}}{6}\right)^2 = \boxed{2'86\cdot 10^{-8}}\ (\text{W/m}^2)$$

6) $I_{TOT_M} = 2'86\cdot 10^{-8} = \frac{1}{2}\rho_0\cdot v\cdot \omega^2\cdot \xi_{0_{T_M}}^2 \Rightarrow \xi_{0_{T_M}}^2 = \frac{2\cdot 2'86\cdot 10^{-8}}{\rho_0\cdot v\cdot(2\pi f)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\xi_{0_{T_M}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2'86\cdot 10^{-8}}{1'28\cdot 346'6\,(2\pi\cdot 1103'3)^2}} = \frac{10^{-4}}{2\pi\cdot 1103'3}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 2'86}{1'28\cdot 346'6}} = \boxed{1'638\cdot 10^{-9}}\ (m)$$

7) $N I_M = 10 \log\left(\frac{I_{TOTM}}{I_{ref}}\right) = 10 \log\left(\frac{2'86\cdot 10^{-8}}{10^{-12}}\right) = 44'56$ dB.

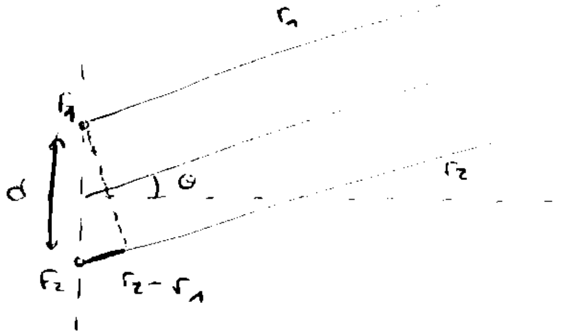
8) $\Delta f = 115'4\text{ Hz} = |f_{R_B} - f_{R_A}| = f_{T_B}\left(\frac{v_s + v_o}{v_s \mp 0}\right) - f_{T_A}\left(\frac{v_s - v_o}{v_s}\right) =$

$= f\left[\left(1 + \frac{v_o}{v_s}\right) - \left(1 - \frac{v_o}{v_s}\right)\right] = f\,\frac{2v_o}{v_s} \Rightarrow \boxed{v_o = \frac{115'4}{2f}\,v_s = 18'12}\ m/s$

I - 50

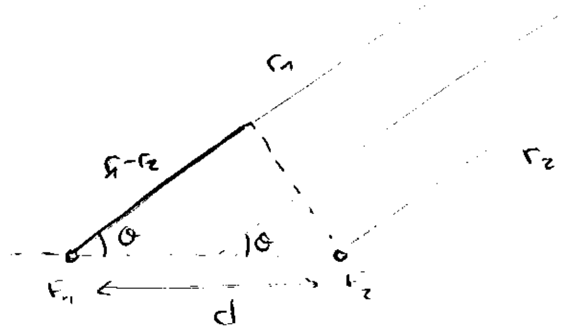
NOTA TEÓRICA | "Aproximación de puntos lejanos".

¿Cuál es la diferencia de caminos cuando el foco es lejano?



$$\delta_{\text{diferencia de cam.}} = K(r_2 - r_1) \simeq K \cdot d \cdot \sin\theta .$$

$$\sin\theta = \frac{r_2 - r_1}{d}$$



$$\boxed{\delta_{\text{dif. de caminos}} = K(r_1 - r_2) \simeq K d \cos\theta}$$

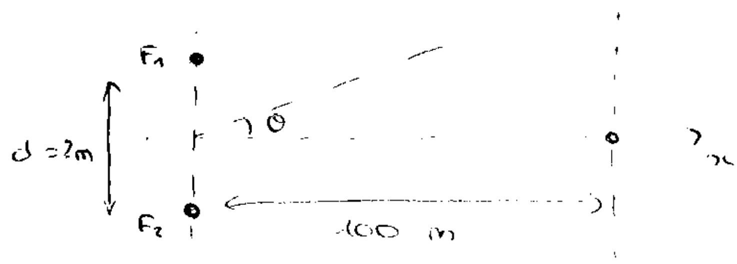
$$\cos\theta = \frac{r_1 - r_2}{d}$$

$\delta_{rel} = 0$

$f = 2440$ Hz

$$N I_1\Big]_{\text{puntos lejanos}} = N I_2\Big]_{\text{ptos lejanos}} = 57 \text{ dB} \Rightarrow \boxed{I_1\Big]_{\text{lejos}} = I_2\Big]_{\text{lejos}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{57}{10}}} =$$

$$\boxed{= 5 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2}$$



1) Ver esquema

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta = I_1(2 + 2\cos\delta) = 2 I_1(1 + \cos\delta) =$$

$5 \cdot 10^{-7}$ (W/m²)

$$\boxed{= 10^{-6}(1 + \cos\delta)} \text{ (W/m}^2)$$

siendo :

$$\delta = K(r_2 - r_1) + \delta_{(e)} \overset{\theta \text{ (chico)}}{\simeq} K d \sin\theta = \frac{2\pi f}{v_s} d \sin\theta = \frac{2\pi \cdot 2440}{340} 2 \sin\theta =$$

$$= \boxed{90'182 \sin\theta} \text{ (rad)}$$

Así pues: $\boxed{I_{TOT} = 10^{-6} \left[1 + \cos(90'182 \sin\theta)\right] (W/m^2)}$

2) $I_{TOT_{max}} = 2 \cdot 10^{-6}\ W/m^2$

$I_{TOT_{min}} = 0\ W/m^2$

• Posiciones de los máximos: $\cos(90'182 \sin\theta) = \cos\delta = +1$.

$90'182 \sin\theta = 2n\pi \Rightarrow \sin\theta_{max} = \dfrac{n\pi}{45'091}$ → 1º max →, 2º max →, 3º max →

$\longrightarrow \theta_{1^{\circ} max} = 0^{\circ}$

$\longrightarrow \theta_{2^{\circ} max} = \pm 4^{\circ}$

$\longrightarrow \boxed{\theta_{3^{\circ} max} = \pm 8^{\circ}} \Longrightarrow$ La posición del 3º máximo es

$$\boxed{Y_{3^{\circ} max} = 100 \operatorname{tg}(\pm 8^{\circ}) = \pm 14'07 \text{ m}}$$

$90'182 \sin\theta = (2n+1)\pi \Rightarrow \sin\theta_{min} = \dfrac{(2n+1)\pi}{90'182}$ → 1º min $\longrightarrow \theta = \pm 2^{\circ}$, 2º min $\longrightarrow \boxed{\theta = \pm 6^{\circ}}$, 3º min →

La posición del 2º mínimo es.

$$\boxed{Y_{2^{\circ} min} = 100 \operatorname{tg}(\pm 6^{\circ}) = \pm 10'51 \text{ m}}$$

3) $\theta_{max} = \pm \dfrac{\pi}{2} = \pm 90^{\circ}$

$-1 \leq \sin\theta_{max} \leq +1$

$\boxed{-1 \leq \dfrac{n\pi}{45'091} \leq +1}$ $\quad -14 \leq n \leq 14 \longrightarrow$ Hay 29 max, 14 en $y>0$, 14 en $y<0$ y el de $y=0$

I - 52.

Ondas planas (I cte)

$NI_1 = 43$ dB

$v = 340$ m/s

Hacia x positivo

$\omega_1 = 2565$ rad/s

$\omega_2 = 2560$ rad/s

$\rho = 1'23$ Kg/m^3

a) $P_1(x,t) = P_{0_1} \sin(k_1 x - \omega_1 t)$

$P_2(x,t) = P_{0_2} \sin(k_2 x - \omega_2 t)$

siendo: ω_1 y ω_2 datos

$$K_1 = \frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\omega_1}{v} = 7'544 \text{ rad/s}$$

$$K_2 = \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{\omega_2}{v} = 7'529 \text{ (rad/m)}$$

Sabemos que:

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \rho_0 \cdot v \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2} = \begin{cases} \xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t) \\ P(x,t) = -\rho_0 v^2 \cdot \frac{d\xi}{dx} = \rho_0 v^2 \cdot \xi_0 \, k \sin(kx - \omega t) \\ P_m = \rho_0 \cdot v^2 \cdot \xi_0 \cdot \underset{k=\frac{\omega}{v}}{K} = \rho_0 \cdot v \cdot \xi_0 \cdot \omega \end{cases} = \boxed{\frac{P_m^2}{2 \cdot v \cdot \rho_0}}$$

(W/m^2)

$$NI_1 = NI_2 = 43 \text{ dB} \Rightarrow I_1 = I_2 = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{43}{10}} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ (W/m}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{m_1} = P_{m_2} = \sqrt{2 \cdot \rho_0 v \cdot I_1} = 4'09 \cdot 10^{-3}} \text{ (Pa)}$$

los v son iguales

Así pues:

$$\left| \begin{array}{l} P_1(x,t) = 4'09 \cdot 10^{3} \sin(7'544x - 2565t) \\ P_2(x,t) = 4'09 \cdot 10^{3} \sin(7'529x - 2560t) \end{array} \right| \quad (Pa)$$

b) Como las ondas de presión varían con $\sin(Kx - \omega t)$ y $P(x,t) = -\rho v^2 \cdot \frac{d\xi}{dx}$

las ondas de elongación deben variar como:

$$\xi_1(x,t) = \xi_{0_1} \cos(K_1 x - \omega_1 t)$$
$$\xi_2(x,t) = \xi_{0_2} \cos(K_2 x - \omega_2 t) \quad (m)$$

$$\xi_{0_1} = \frac{P_{m1}}{\rho_0 v \omega_1} = 3'813 \cdot 10^{-9} \ (m)$$

$$\xi_{0_2} = \frac{P_{m2}}{\rho_0 v \omega_2} = 3'82 \cdot 10^{-9} \ (m) \qquad \text{o O O} \ \left(P_m = \rho_0 v^2 \xi_0 K \right)$$

I - 24.

f ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$; $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$; $v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s

$\bar{E}(0,0) = (0, 0, E_0) = E_0 \cdot \hat{u_z}$

a) Polarización lineal o plano polarizada:

$\bar{E}(x,t) = E_0 \, \hat{u_z} \cdot \cos(\omega t - kx)$ (V/m) $\rightarrow \omega = 2\pi f$ (rad/s) ; $\rightarrow k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi f}{3 \cdot 10^8}$ (rad/m)

$\bar{B}(x,t) = B_0 \cdot (-\hat{u_y}) \cos(\omega t - kx)$ (T) $\rightarrow B_0 = \frac{E_0}{V} = \frac{E_0}{3 \cdot 10^8}$ (T)

$\bar{S}(x,t) = \frac{\bar{E} \times \bar{B}}{\mu} = \frac{E_0^2}{\mu \cdot V} \hat{u_x} \cos^2(\omega t - kx) = \frac{E_0^2 \cdot \hat{u_x}}{120\pi} \cos^2(\omega t - kx)$ (W/m²)

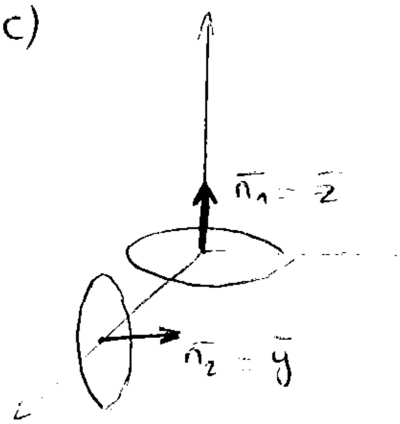
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$; $V = 3 \cdot 10^8$

b) $\bar{E}(x,t) = E_0 \cdot \hat{u_z} \cos(\omega t - kx) + E_0 \cdot \hat{u_y} \cdot \sin(\omega t - kx)$

$\bar{B}(x,t) = B_0 \cdot (-\hat{u_y}) \cos(\omega t - kx) + E_0 \, (\hat{u_z}) \sin(\omega t - kx)$

$\bar{S}(x,t) = \frac{\bar{E} \times \bar{B}}{\mu} = \frac{E_0 B_0}{\mu} \hat{u_x} = \frac{E_0^2}{\mu V} \hat{u_x} = \boxed{\frac{E_0^2}{120\pi} \hat{u_x}}$ (W/m²)

c)



$\boxed{r \ll \lambda}$

Este dato, si no nos lo dan, lo suponemos.

i) $fem_1 = -\frac{\partial \phi_{m}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1\right] \underset{r \ll \lambda}{\simeq} -\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{A_1} \vec{B}(0,t)\cdot d\vec{A}_1\right] =$

$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B}(0,t)\cdot A_1 \cdot \vec{n}_1\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E_0}{3\cdot 10^8}(-\hat{u}_y)\cos(\omega t - 0)\pi r^2 \cdot \hat{u}_z\right] = 0 \quad (V)$

$fem_2 \simeq -\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B}\left(\frac{\lambda}{4}, t\right) A_2 \cdot \vec{n}_2\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E_0}{3\cdot 10^8}(-\hat{u}_y)\cos\left(\omega t - k\frac{\lambda}{4}\right)\pi r^2 \hat{u}_y\right] =$

$= -\omega \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\right)\frac{E_0}{3\cdot 10^8}\pi r^2 = -\omega \pi r^2 \frac{E_0}{3\cdot 10^8}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (V)$

ii) $fem_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B}(0,t) A_1 \hat{n}_1\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E_0}{3\cdot 10^8}\pi r^2 \sin(\omega t - 0)\right] =$

$= -\omega \cos(\omega t)\cdot \frac{E_0}{3\cdot 10^8}\pi r^2 \quad (V)$

$fem_2 \simeq fem_2$ caso i)

I - 26

Pol = 50 kW = $5\cdot 10^4$ W (onda esférica)

$f = 10^8$ Hz.

a) $\vec{E}, \vec{B}$, y $\vec{S}$ con $\hat{d}_p = \hat{u}_y$ a 100 km de distancia.

$E(y,t) = E_0 \cdot \hat{u}_z \cdot \sin(\omega t - ky) \quad (V/m)$

$B(y,t) = B_0 \cdot \hat{u}_z \cdot \sin(\omega t - k\cdot y) \quad (T)$

$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu} = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu_0}\cdot \hat{u}_y \cdot \sin^2(\omega t - ky) \quad (W/m^2)$

Siendo: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^5$ (rad/s)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{3} \; (\text{rad/m})$$

$$I_m = \frac{E_0 \cdot B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0 \frac{E_0}{v}}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{240\pi}$$

$$I_m = \frac{P_{ot}}{4\pi r^2} = \frac{5 \cdot 10^4}{4\pi \cdot 10^5} = \frac{5}{40\pi \cdot 10^5}$$

$$\Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{5 \cdot 240\pi}{40\pi \cdot 10}} = 17'32 \cdot 10^{3} \; (\text{V/m})$$

$y = 10^5$ (m)

$$B_0 = \frac{E_0}{v} = 5'77 \cdot 10^{-11} \; (\text{T})$$

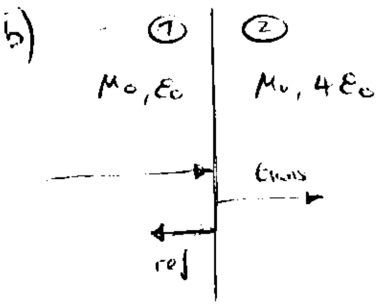
Así pues:

$$\overline{E}(10^5, t) = 17'32 \cdot 10^{-3} \, \hat{u}_z \sin\left(2\pi \cdot 10^5 t - \frac{2\pi}{3} 10^5\right) \; (\text{V/m})$$

$$\overline{B}(10^5, t) = 5'77 \cdot 10^{-11} \, \hat{u}_x \sin \left(\;\; " \;\;\;\; " \;\; \right) \; (\text{T})$$

$$\overline{S}(10^5, t) = 7'96 \cdot 10^{-7} \, \hat{u}_y \sin^2 \left(\;\; " \;\;\;\; " \;\; \right) \; (\text{W/m}^2)$$

b)



$$\overline{E}_{inc}(y,t) = 17'32 \cdot 10^{-3} \, \hat{u}_z \sin\left(2\pi \cdot 10^5 t - \frac{2\pi}{3} y\right) \; (\text{V/m})$$

NOTA!

$$\overline{E}_{trans}(y,t) = E_{0\,trans} \cdot \hat{u}_z \sin(\omega t - k_2 y)$$

$$\overline{E}_{ref}(y,t) = E_{0\,ref} \, \hat{u}_z \cdot \sin(\omega t + k_1 y)$$

$\overline{E}_{trans}(y,t) = E_{0_t} \cdot \hat{u}_z \cdot \sin(2\pi \cdot 10^5 t - k_2 y)$ siendo: $y = 10^5$ (m).

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{2\pi f \cdot n_2}{c} = \frac{2\pi f \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{c} = \frac{4\pi}{3} \; (\text{rad/m})$$

$$I_{m_{trans}} = 0'64 \cdot I_{m_{inc}}$$

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\frac{E_{0_t}^2}{2\mu_2 \cdot v_2} = 0'64 \; \frac{E_{0_{inc}}^2}{2\mu_1 \cdot v_1} \Rightarrow E_{0_t} = E_{0_{inc}} \sqrt{\frac{v_2}{v_1} \, 0'64} = 17'32 \cdot 10^{-3} \sqrt{0'64 \, \frac{1}{2}} =$$

$$= \boxed{9'798 \cdot 10^{-3}} \; (V/m)$$

Cálculo de $\bar{E}_{ref}(y,t)$:

$$\bar{E}_{ref}(y,t) = E_{0,ref} \, \hat{u}_z \cdot \sin\left(2\pi \cdot 10^5 t + \frac{2\pi}{3} y\right) \quad (V/m) \quad \text{siendo } y = 10^5 \, (m)$$

$$I_{m_{ref}} = 0'36 \; I_{inc} \Rightarrow \frac{E_{0\,ref}^2}{2\mu_1 v_1} = 0'36 \; \frac{E_{0\,inc}^2}{2\mu_1 v_1} \Rightarrow E_{0_{ref}} = E_{inc}\sqrt{0'36} =$$

$$= 10'392 \cdot 10^{-3} \; (V/m)$$

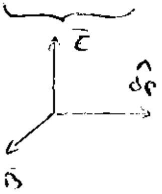
I - 33.

$$\boxed{\bar{E}(z,t) = \underset{\text{Dirección}}{\underset{\uparrow}{E_0\sqrt{2}\left(\frac{\bar{i} - \bar{j}}{\sqrt{2}}\right)}} \cos\left(2\pi 3 \cdot 10^7 t - \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} z\right) = E_0\sqrt{2}\left(\frac{\bar{i} - \bar{j}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^7 t - \frac{\pi}{5} z\right)} \; (V/m)$$

a) $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = \boxed{10 \; (m)}$

OTRA FORMA: $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^7} = 10 \; (m)$

b) $$\bar{B}(z,t) = B_0 \underbrace{\left(\frac{\bar{i} + \bar{j}}{\sqrt{2}}\right)}_{} \cos\left(2\pi \cdot 3 \cdot 10^7 t - \frac{\pi}{5} z\right)$$



$$\bar{k} \times \left(\frac{\bar{i} - \bar{j}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\bar{j} + \bar{i}}{\sqrt{2}}$$

siendo $$B_0 = \frac{E_0\sqrt{2}}{v} = \frac{E_0\sqrt{2}}{c} = \frac{E_0\sqrt{2}}{3 \cdot 10^8} \qquad (T)$$

c) $$\bar{S}(z,t) = \frac{\bar{E}\times\bar{B}}{\mu} = \frac{E_0^2 \cdot 2}{3\cdot 10^8 \mu_0}\,\bar{k}\cdot\cos^2\left(2\pi\, 3\cdot 10^7 t - \frac{\pi}{5}z\right) \quad (W/m^2)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (H/m)

d) Suponemos que nos piden la intensidad media:

$$I_m = \frac{E_0^2 \cdot 2}{3\cdot 10^8 \mu_0}\cdot\frac{1}{2} = \frac{E_0^2}{120\pi} \quad (W/m^2)$$

e) $$\varepsilon_{emi} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_A \bar{B}\, d\bar{A}\right] \approx -\frac{\partial}{\partial t}\left[100 \iint_{A_{espira}} \bar{B}(1,1,1)\, d\bar{A}\right] =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \bar{B} \text{ tiene la dirección } \frac{\bar{i}+\bar{j}}{\sqrt{2}} \\ \text{y } \quad \bar{n} = \frac{\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}}{\sqrt{3}}, \text{ por tanto } \bar{B}\cdot\bar{n} = 0 \end{array}\right\} = \boxed{0} \quad (V)$$

I.43 $f = 3\cdot 10^{14}$ Hz

ONDAS PLANAS

$E_0 = 5\cdot 10^{-3}$ V/m

Pol. lineal en $\hat{y} = \vec{j}$

$\hat{u}_p = \hat{u}_x = \vec{i} = \hat{x}$

① $n_1 = 2$ | ② $n_2 = 1'5$

a) $$\boxed{\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{c}{f\cdot n_1} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^{14}\cdot 2} = 0'5\cdot 10^{-6}\ m}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{c}{f\cdot n_2} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^{14}\cdot 1'5} = 0'667\cdot 10^{-6}\ m}$$

b) $$\boxed{\vec{E}_{inc}} = E_0\cdot\vec{j}\cdot\cos(k_1 x - \omega t) = 5\cdot 10^{-3}\cdot\vec{j}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\cdot x - \omega t\right) =$$

$$= \boxed{5\cdot 10^{-3}\cdot\vec{j}\cdot\cos\left(2\pi\left(2\cdot 10^6 x - 3\cdot 10^{14} t\right)\right)}\ (V/m)$$

$$\boxed{\vec{B}_{inc}} = B_0\cdot\hat{u}_B\cdot\cos(k_1 x - \omega t) = \left\{\begin{array}{l} \hat{u}_B = \hat{u}_p\times\hat{u}_E = \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \\ B_0 = \dfrac{E_0}{v_1} = \dfrac{5\cdot 10^{-3}}{\frac{3\cdot 10^8}{2}} = 0'333\cdot 10^{-10} \end{array}\right\} =$$

$$= \boxed{3'33\cdot 10^{-11}\cdot\vec{k}\cdot\cos\left(2\pi\left(2\cdot 10^6 x - 3\cdot 10^{14} t\right)\right)}\ (T)$$

$$\boxed{\vec{S}_{inc}} = \frac{\vec{E}_{inc}\times\vec{B}_{inc}}{\mu_1} = \frac{\vec{E}_{inc}\times\vec{B}_{inc}}{4\pi\cdot 10^{-7}} = \frac{5\cdot 10^{-3}\cdot 3'33\cdot 10^{-11}}{4\pi\cdot 10^{-7}}\cdot\vec{i}\cdot\cos^2(k_1 x - \omega t) =$$

$$= \boxed{1'326\cdot 10^{-7}\cdot\cos^2\left(2\pi\left(2\cdot 10^6 x - 3\cdot 10^{14} t\right)\right)\cdot\vec{i}}\ (W/m^2)$$

c) SUPONEMOS QUE SE REFIERE A QUE SE REFLEJA EL 25% DE LA INTENSIDAD, POR TANTO SE TRANSMITE EL 75% DE LA MISMA:

- ONDA TRANSMITIDA:

$$\vec{E}_t = E_{0t}\cdot\vec{j}\cdot\cos(k_2 x - \omega t)\ (V/m)$$

siendo:

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 9'42\cdot 10^6\ (rad/m)$$

$$I_t = 0'75 \cdot I_{inc}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{E_{0t} \cdot B_{0t}}{\mu_2} = 0'75 \cdot \frac{1}{2} \frac{E_{0inc} \cdot B_{0inc}}{\mu_1}$$

Como $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0 \Rightarrow E_{0t} \cdot B_{0t} = 0'75 \cdot E_{0inc} \cdot B_{0inc}$

Además: $B_{0t} = \frac{E_{0t}}{V_2} \Rightarrow \frac{E_{0t}^2}{V_2} = 0'75 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3'33 \cdot 10^{-11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E_{0t}} = \sqrt{V_2 \cdot 0'75 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3'33 \cdot 10^{-11}} = \sqrt{\frac{c}{n_2} \cdot 0'75 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3'33 \cdot 10^{-11}} =$$

$$= \boxed{5 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}}$$

d) Sí ya que $n_1 > n_2$:

¿ $\theta_{ic} = \hat{i}_c = \hat{i}_{lim} = ?$

$$\frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \quad \text{sen } \hat{i}_c = \frac{n_2}{n_1} = 0'75 \Rightarrow \boxed{\hat{i}_c = \text{arcsen}(0'75) = 48'59^\circ}$$

Si $\hat{i} \geq \hat{i}_c \Rightarrow$ Reflexión total.

$\boxed{I\text{-}33}$ Pol lineal

×

$$\vec{E} = E_0 \cos\left[2\pi\, 3\cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right] (\hat{i} - \hat{j})$$

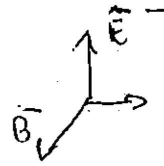
$$E_0 = 10^{-7}\ V/m$$

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \sqrt{2} \left(\frac{\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(2\pi\, 3\cdot 10^7 t - \frac{2\pi\, 3\cdot 10^7}{3\cdot 10^8} z\right) = E_0\sqrt{2}\left(\frac{\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(2\pi\, 3\cdot 10^7 t - \pi/5\, z\right)}$$

a) $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{\pi/5} = 10\,m}$

otra forma $\boxed{\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^7} = 10\,m}$.

b) $\vec{B}(z,t) = \underbrace{B_0\left(\frac{\hat{j}+\hat{i}}{\sqrt{2}}\right)}\cos\left(2\pi\cdot 3\cdot 10^7 t - \frac{\pi}{5} z\right)$



$$K \times \left(\frac{\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\hat{j}+\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{B_0 = \frac{E_0\sqrt{2}}{v} = \frac{E_0\sqrt{2}}{3\cdot 10^8}\ T}$$

c) $\boxed{\bar{S} = \frac{\bar{E}\times\bar{B}}{\mu} = \frac{E_0^2\, 2}{3\cdot 10^8 \mu_0} \bar{K} \cos^2\left(2\pi\cdot 3\cdot 10^7 t - \pi/5\, z\right)}$ W/m^2

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$

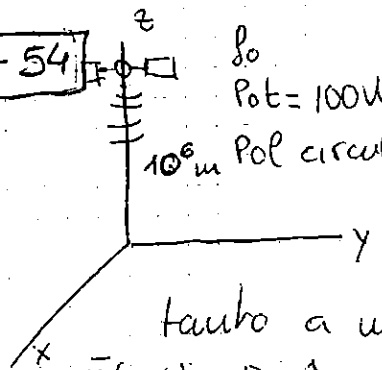
d) suponemos que nos piden I_m

$$\boxed{I_m = \frac{E_0^2}{3\cdot 10^8 \mu_0} = \frac{E_0^2}{120\pi}}\ W/m^2$$

e) $f_{emi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_A B\, d\bar{A}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[100 \iint_{A_{1 espira}} \bar{B}(1,1,1,t)\, d\bar{A}\right] =$

$= \left\{ \begin{array}{l} \bar{B} \text{ tiene dirección } \frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}} \\ \text{y } \hat{u} = \frac{\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{3}} \text{, por tanto } \bar{B}\cdot\bar{u} = 0 \end{array} \right\} = 0\ V$

$\boxed{\vec{I}\text{-}54}$



f_0

Pot = 100W

$c = 3\cdot 10^8\ m/s$

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ H/m$

$10^6\,m$ Pol circular

a) Observamos que la dirección de propagación del satélite es $(-\hat{u}_z)$, por tanto a una distancia de $10^6 m$ del satélite:

$$\bar{E}(z,t) = E_0\, \hat{u}_x \operatorname{sen}(\omega t + Kz) + E_0\, \hat{u}_y \cos(\omega t + Kz)\quad V/m$$

$$\bar{B}(z,t) = B_0 (-\hat{u}_y) \operatorname{sen}(\omega t + Kz) + B_0\, \hat{u}_x \cos(\omega t + Kz)\quad T$$

$$\boxed{\bar{S}(z,t) = \frac{\bar{E}\times\bar{B}}{\mu} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}(-\hat{u}_z) = \frac{E_0^2}{\mu_0 v}(-\hat{u}_z) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}(-\hat{u}_z) = \frac{E_0^2}{120\pi}(-\hat{u}_z)\ W/m^2}$$

siendo:

$\omega = 2\pi f_0$

$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f_0}{c} = \frac{2\pi f_0}{2\cdot 10^8}$ rad/m

$z = 10^6\ m$

$B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{E_0}{3\cdot 10^8}\ T$

PROB 4 SEPT 2009

1000 espejos de $0'25\ m^2 \equiv 250 m^2$ en total.

DATOS $\begin{cases} I_{sol} = 500\ W/m^2 \text{ (Intensidad del Sol en el campo)} \\ e = 0'8 \text{ (eficiencia de los espejos)} \\ Sup_{\text{árbitro}} = 0'75\ m^2 \text{ (Sup. del árbitro)} \end{cases}$

1.- La potencia de la onda reflejada por los espejos es:

$$P = I_{sol} \cdot 250 m^2 \cdot 0'8 = 10^5\ W$$

Si los espejos están bien orientados toda esta potencia se reflejará y llegará a la superficie del árbitro:

$$\boxed{I_{\text{árbitro}}} = \frac{P}{Sup_{\text{árbitro}}} = \frac{10^5}{0'75} = \boxed{\frac{4}{3} \cdot 10^5\ W/m^2}$$

3.- La capacidad calorífica del agua es $4'18\ kJ/kg\,°K$.

Para elevar su temperatura de 37°C a 100°C necesita absorber una energía térmica o calor de:

$$\boxed{Q} = \underbrace{4'18\ kJ/kg\,°K}_{ce_{H_2O}} \cdot \underbrace{80\ kg}_{m} \cdot \underbrace{(100-37)}_{\Delta T} = \boxed{21067'2\ kJ}$$

Ya sabemos que la potencia que le llega al árbitro es de: $10^5\ W = P$, por tanto:

$$\boxed{t} = \frac{Q}{P} = \frac{21067'2\ kJ}{10^5\ W} = \boxed{210'672\ seg} = 3 \text{ minutos y } 30'672 \text{ segundos}.$$

2.- Si suponemos que la intensidad que le llega al órbito es en la dirección $(1,1,-1)$ es decir, la dirección de propagación de la onda es:

$$\hat{d}_p = \frac{\hat{u}_x + \hat{u}_y - \hat{u}_z}{\sqrt{3}}$$ SÓLO FALTA SABER SÍ ES POLARIZACIÓN LINEAL Ó CIRCULAR.

• Si fuera polarización lineal, y sabiendo que el campo está polarizado en el plano $x=y$ debemos entender que todas las intensidades anteriores son en valor medio, por tanto:

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{8}{3}\cdot 10^5 \cdot \cos^2\left(\omega t - k\left(\frac{x+y-z}{\sqrt{3}}\right)\right)\cdot\left(\frac{\hat{u}_x + \hat{u}_y - \hat{u}_z}{\sqrt{3}}\right) \ (W/m^2)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cdot \cos\left(\omega t - k\left(\frac{x+y-z}{\sqrt{3}}\right)\right)\cdot\left(\frac{\hat{u}_x + \hat{u}_y + 2\hat{u}_z}{\sqrt{6}}\right) \ (V/m)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = B_0 \cdot \cos\left(\omega t - k\left(\frac{x+y-z}{\sqrt{3}}\right)\right)\cdot\left(\frac{\hat{u}_x - \hat{u}_y}{\sqrt{2}}\right) \ (T)$$

siendo

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{550\cdot 10^{-9}} = \frac{2\pi\cdot 10^8}{55} = 1'14\cdot 10^7 \ (m^{-1}) = 11'424\cdot 10^6 \ (m^{-1})$$

$$\omega = K\cdot V = 1'14\cdot 10^7\cdot 3\cdot 10^8 = 3'427\cdot 10^{15} \ (rad/sg) \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 5'4\overset{\frown}{5}\cdot 10^{14} \ Hz$$

$$I_m = \frac{4}{3}\cdot 10^5 = \frac{E_0\cdot B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 V} = \frac{E_0^2}{240\pi} \Rightarrow \boxed{E_0 = \sqrt{\frac{4}{3}10^5\cdot 240\pi} = 10026'51 \ V/m}$$

$$\boxed{B_0 = \frac{E_0}{V} = 3'34\cdot 10^{-5} \ (T)}$$

• Si fuera polarización circular, las intensidades anteriores son las medias, pero no vamos a poder hacer cumplir la condición de que el campo esté polarizado en el plano $x=y$, ya que en este caso:

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{4}{3}10^5\left(\frac{\hat{u}_x + \hat{u}_y - \hat{u}_z}{\sqrt{3}}\right) \ (W/m^2)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\cdot\left(\frac{\hat{u}_x + \hat{u}_y + 2\hat{u}_z}{\sqrt{6}}\right)\cdot\cos\left(\omega t - k\left(\frac{x+y-z}{\sqrt{3}}\right)\right) + E_0\left(\frac{\hat{u}_x - \hat{u}_y}{\sqrt{2}}\right)\cdot\text{sen}\left(\omega t - k\left(\frac{x+y-z}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = B_0\cdot\left(\frac{\hat{u}_x - \hat{u}_y}{\sqrt{2}}\right)\cdot\cos\left(\omega t - k\left(\frac{x+y-z}{\sqrt{3}}\right)\right) - B_0\cdot\left(\frac{\hat{u}_x + \hat{u}_y + 2\hat{u}_z}{\sqrt{6}}\right)\cdot\text{sen}\left(\omega t - k\left(\frac{x+y-z}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

siendo: ω y k los anteriores:

$$I_m = \frac{4}{3}10^5 = \frac{E_0\cdot B_0}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 V} = \frac{E_0^2}{120\pi} \Rightarrow \boxed{E_0 = \sqrt{\frac{4}{3}10^5\cdot 120\pi} = 7089'815 \ V/m}$$

$$\boxed{B_0 = \frac{E_0}{V} = 2'3632\cdot 10^{-5} \ (T)}$$

4- Una estación de radio emite una señal de frecuencia f_0=100 MHz que tiene un frente de onda esférico cuyo vector de Poynting a d_0=10km viene dado por la expresión S=S_0 u_x, donde S_0=1μw/m^2. A una distancia de d_1=20km se encuentra una pared delgada de un material que absorbe el 10% de la radiación incidente. Determinar a esa distancia d_1:

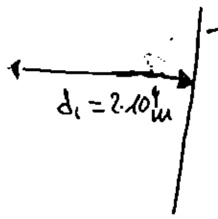
a) los vectores E, B y S de la señal justo antes y justo después de atravesar la pared (se supone que al atravesarla la señal no cambia de polarización ni sufre ningún desfase)

b) la energía de radiación recibida en t=1s por una superficie de 1cm^2 cuyo vector de superficie forma un ángulo de 30° con la dirección de propagación en ese punto.

$f_0 = 10^8$ Hz   ondas esféricas   *******   JUN 2008

$\left(I_m = \dfrac{Pot}{4\pi r^2} \right)$ $\bar{S}\Big]_{d_0=10^4 m} = 10^{-6}\,\hat{u}_x$ W/m^2 → la onda se propaga hacia $+\vec{u}_x$

→ como $\vec{S}$ no depende del tiempo la polarización es circular.



a) Como $\langle \bar{S} \rangle \Big]_{d_0=10^4 m} = 10^{-6}\,\hat{u}_x \Rightarrow I_m = 10^{-6}$ W/m^2 $= \dfrac{Pot}{4\pi(10^4)^2} \Rightarrow$

$\boxed{Pot = 4\pi\cdot 10^2 \text{ W}}$

• Justo antes de atravesar la pared delgada

$\bar{E}(x,t)\Big]_{x=2\cdot10^4 m} = E_0\,\hat{u}_y \,\mathrm{sen}(\omega t - Kx) + E_0\,\hat{u}_z \cos(\omega t - Kx)$ V/m

$\bar{B}(x,t) = B_0\,\hat{u}_z \,\mathrm{sen}(\omega t - Kx) + B_0(-\hat{u}_y)\cos(\omega t - Kx)$ T $B_0 = \dfrac{E_0}{v} = \dfrac{E_0}{3\cdot10^8}$ T

$\bar{S}(x,t) = \dfrac{E_0 B_0}{\mu_0}\hat{u}_x = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\hat{u}_x = \dfrac{E_0^2}{120\pi}\hat{u}_x$ W/m^2

siendo: $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot10^8$ rad/s

$K = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad/m

$x = 2\cdot10^4$ m

$I_m\Big]_{20 Km} = \dfrac{Pot}{4\pi(2\cdot10^4)^2} = \dfrac{E_0^2}{120\pi} \Rightarrow \boxed{E_0 = 9'7\cdot10^{-3} \text{ V/m}}$

$\boxed{B_0 = 3'236\cdot10^{-11} \text{ T}}$

• Justo después de atravesar la pared delgada

Suponemos que se transmite el 90% de la intensidad incidente.

Mismas expresiones anteriores con E_0' y B_0'

$I_m' = 0'9\, I_m = 0'9\cdot\dfrac{Pot}{4\pi(2\cdot10^4)^2} = \dfrac{E_0'^2}{120\pi} \Rightarrow E_0' = E_0\sqrt{0'9} = 9'21\cdot10^{-3}$ V/m

$B_0' = 3'07\cdot10^{-11}$ T

$\bar{S}(x,t) = 2'25\cdot10^{-7}\,\hat{u}_x$ W/m^2

b) Suponemos que la superficie de 1 cm² está justo antes de la pared delgada:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Energía}\\ \text{recibida}\end{matrix}} = \begin{matrix}\text{Potencia}\\ \text{recibida}\end{matrix} \cdot t = \langle \bar{S} \rangle \Big|_{d_1 = 2\cdot 10^4 m} \cdot \bar{A} \cdot t = \underbrace{\left(\frac{E_0^2}{120\pi}\right) \cdot (10^{-4} m^2) \cos 30° \cdot t}_{|I_m| \cdot \text{sup} \cdot \cos(\hat{\bar{S}, \bar{A}})} =$$

$$\boxed{= 2'165 \cdot 10^{-11} \text{ J}}$$

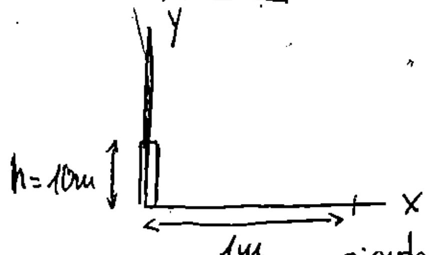
SEPT 2008.

4.- Una antena de comunicaciones de altura h=10m es capaz de emitir una señal de potencia P=1kW y longitud de onda λ=3m con un frente de onda cilíndrico. Suponiendo que la onda está linealmente polarizada con el vector **E** paralelo al eje de la antena (que coincide con OY), determinar a una distancia d=1m de la antena, tomada sobre el eje OX:

a) los valores de **E, B** y **S**

b) la orientación que debe tener una antena receptora de 100 espiras y 1cm^2 de sección para que la f.e.m. inducida en ella sea máxima y calcular dicha f.e.m.

Solución:



$Pot = 10^3 W$

$\lambda = 3m$

a) $\bar{E}(x,t) = E_0 \hat{u}_Y \operatorname{sen}(\omega t - Kx)$ V/m

$\bar{B}(x,t) = \frac{B_0}{c} \cdot \hat{u}_z \operatorname{sen}(\omega t - Kx)$ T

$\bar{S}(x,t) = \frac{\bar{E}\times\bar{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \hat{u}_x \operatorname{sen}^2(\omega t - Kx)$ W/m^2

siendo: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda} = 2\pi 10^8$ rad/s

$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}$ rad/m $\quad x = 1m$

$I_m = \frac{Pot}{2\pi \cdot 1 \cdot 10} = \frac{10^3}{2\pi\cdot 10} = \frac{50}{\pi} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \Rightarrow \boxed{E_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 50\,\mu_0 c}{\pi}} = 109'54 \text{ V/m}}$

$\bar{E}(1,t) = 109'54\, \hat{u}_Y \operatorname{sen}(2\pi 10^8 t - \frac{2\pi}{3})$ V/m

$\bar{B}(1,t) = 36'51\cdot 10^{-8} \hat{u}_z \operatorname{sen}(2\pi 10^8 t - \frac{2\pi}{3})$ T

$\bar{S}(1,t) = \frac{100}{\pi} \hat{u}_x \operatorname{sen}^2(2\pi\cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{3})$ W/m^2

b) $femi = -\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_A \bar{B} d\bar{A}\right] \approx -\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{B}\cdot\bar{A}\right]\cdot 100$

Para que el flujo sea máximo y por tanto la femi debe ser $\bar{B} \parallel \bar{A}$

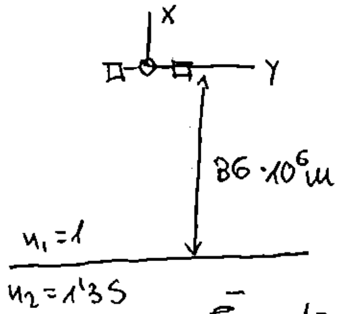
Por tanto la normal de la espira debe ser $\hat{u}_z$

$\boxed{femi} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[36'51\cdot 10^{-8} \operatorname{sen}(2\pi\cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{3})\, \hat{u}_z\cdot\hat{u}_z \cdot 10^{-2}\cdot 100\right] =$

$-2\pi\cdot 10^8 \cos(2\pi\cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{3})\, 36'51\cdot 10^{-8} = \boxed{-73'02\pi \cos(2\pi\cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{3})}$ V

$\boxed{femi_{max} = 73'02\pi \text{ V}}$

4º) Se diseña una base secreta de seguimiento de satélites espías. La base se encuentra bajo un lago de agua dulce con un índice de refracción de 1,35. El satélite se encuentra en una órbita geoestacionaria, a 36.000 km, y emite ondas electromagnéticas linealmente polarizadas a una frecuencia de 15 GHz. La posición del satélite se encuentra en la vertical del lago. Si la amplitud del campo eléctrico de la onda electromagnética en la superficie del lago es de 10^{-3} V/m, determinar a) el valor del vector de Poynting de la onda antes de entrar en el agua.
Debido a la reflexión en la superficie, la señal transmitida está atenuada en 5 dB. Determinar dentro del agua b) la expresión del vector de Poynting y c) la amplitud del campo magnético. ($\mu_0 / 4\pi = 10^{-7}$ S.I.)



$f_0 = 15$ GHz   Pol lineal $E_0 = 10^{-3}$ V/m (se supone que antes de entrar en el agua)

a) $\bar{E}_{inc}(z,t) = E_0 \, \hat{u}_x \, \text{sen}(\omega t + Kz)$ V/m

$\bar{B}_{inc}(z,t) = B_0(\hat{u}_y) \, \text{sen}(\omega t + Kz)$ T

$$\bar{S}_{inc}(z,t) = \frac{\bar{E}_{inc} \times \bar{B}_{inc}}{\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} (-\hat{u}_z) \, \text{sen}^2(\omega t + Kz) \quad W/m^2$$

siendo: $\omega = 2\pi f_0 = 3\pi \cdot 10^{10}$ rad/s $z = 3 \cdot 10^6$ m

$$K = \frac{\omega}{V} = \frac{\omega}{c} = 100\pi \text{ rad/m}$$

$$\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{E_0 E_0}{\mu_0 V} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{10^{-6}}{120\pi} = 2'65 \cdot 10^{-9} \quad W/m^2$$

$$\bar{S}_{inc} = 2'65 \cdot 10^{-9} (-\hat{u}_z) \, \text{sen}^2(3\pi 10^{10} t + 36\pi \cdot 10^8) \quad W/m^2$$

b) Como se atenúa 5dB:

$$NI_{inc} - NI_{tran} = 10 \log \frac{I_{m\,inc}}{I_{ref}} - 10 \log \frac{I_{m\,tran}}{I_{ref}} = 10 \log \frac{I_{m\,inc}}{I_{m\,tran}} = 5 dB \Rightarrow$$

$$I_{m\,trans} = \frac{I_{m\,inc}}{10^{5/10}} = \frac{\frac{1}{2} 2'65 \cdot 10^{-9}}{10^{1/2}} \quad W/m^2$$

Así pues:

$$\bar{S}_{trans} = \frac{2'65 \cdot 10^{-9}}{10^{1/2}} (-\hat{u}_z) \, \text{sen}^2(\omega t + K_2 z) \quad W/m^2$$

siendo $\omega = 3\pi 10^{10}$ rad/s $z = 36 \cdot 10^6$ m

$$\boxed{K_2} = \frac{\omega}{V_2} = \frac{\omega n_2}{c} = 100\pi \cdot 1'35 = \boxed{135\pi} \text{ rad/m}$$

c) $$\bar{S}_{trans} = \frac{2'65 \cdot 10^{-9}}{10^{1/2}} (-\hat{u}_z) \, \text{sen}^2(3\pi 10^{10} t + 135\pi \, 36 \cdot 10^6)$$

Observando $\bar{B}_{inc}$: $\bar{B}_{trans} = B_{0t}(-\hat{u}_y) \, \text{sen}(\omega t + K_2 z)$ T

Debemos calcular B_{0t}:

$$I_{m\,trans} = \frac{\frac{1}{2} 2'65 \cdot 10^{-9}}{10^{-9}} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 V_2} = \frac{E_{0t} B_{0t}}{2\mu_0} = \frac{B_{0t}^2 V_2}{2\mu_0} = \frac{B_{0t}^2 c}{2\mu_0 n_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{B_{0t} = \sqrt{\frac{2 I_{m\,trans}\, \mu_0 u_z}{c}} = 2'18 \cdot 10^{-12}\ T}$$