10

ELMG 1ª entrega de ejercicios

Javier Rodríguez Herráiz

① Partiendo de $\vec{r}$ en cilíndricas: Hallar $d\vec{l}$

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} = \rho[\cos(\varphi)\hat{x} + \text{sen}(\varphi)\hat{y}] + z\hat{z}$$

3/3

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos(\varphi)\hat{x} + \text{sen}(\varphi)\hat{y} \qquad d\vec{r}_\rho = [\cos(\varphi)\hat{x} + \text{sen}(\varphi)\hat{y}]\,d\rho$$

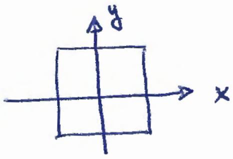
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \rho[-\text{sen}(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}] \qquad d\vec{r}_\varphi = \rho[-\text{sen}(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}]\,d\varphi$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = 1\,\hat{z} \qquad d\vec{r}_z = dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{l} = \underbrace{[\cos(\varphi)\hat{x}+\text{sen}(\varphi)\hat{y}]}_{\hat{\rho}}d\rho + \rho\underbrace{[-\text{sen}(\varphi)\hat{x}+\cos(\varphi)\hat{y}]}_{\hat{\varphi}}d\varphi + dz\,\hat{z} =$$

$$= d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{z}$$

② Siendo lado $= 2L$



$(z=0)$ $\oint d\vec{l}$ y $\oint dl$

$$\rightarrow \oint d\vec{l} = \int_{c_1} d\vec{l} + \int_{c_2} d\vec{l} + \int_{c_3} d\vec{l} + \int_{c_4} d\vec{l} = \left\{\begin{array}{l} dz = 0 \\ d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}\end{array}\right\} =$$

$$= \int_{y=-L}^{L} dy\,\hat{y} + \int_{x=L}^{-L} dx\,\hat{x} + \int_{y=L}^{-L} dy\,\hat{y} + \int_{x=-L}^{L} dx\,\hat{x} = y\Big|_{-L}^{L}\hat{y} + x\Big|_{L}^{-L}\hat{x} + y\Big|_{L}^{-L}\hat{y} + x\Big|_{-L}^{L}\hat{x} =$$

$$= 2L\,\hat{y} + (-2L)\,\hat{x} + (-2L)\,\hat{y} + 2L\,\hat{x} = 0\,\hat{y} + 0\,\hat{x} = \vec{0}$$

5/5

$$\rightarrow \oint dl = \int_{c_1} dl + \int_{c_2} dl + \int_{c_3} dl + \int_{c_4} dl = \left\{ dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \right\} =$$

$$= 2\cdot\int_{x=-L}^{L} dx + 2\cdot\int_{y=-L}^{L} dy = 2\cdot x\Big|_{-L}^{L} + 2\cdot y\Big|_{-L}^{L} = 2\cdot 2L + 2\cdot 2L = 8L$$

2/2

ELMG 2ª entrega de ejercicios

10

Javier Rodríguez Herráiz

① Sobre una superficie esférica de radio R, hallar:

$$\int dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta\, d\varphi = R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = R^2 \cos(\theta)\Big|_{\pi}^{0} \cdot 2\pi$$

$$= 4\pi R^2$$

5/5

② Idem:

$$\int d\vec{S} = \int dS\,\hat{r} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r} = \iint r^2 \mathrm{sen}(\theta) \cdot \big[\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi)\,\hat{x} +$$

$$+ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\hat{y} + \cos(\theta)\,\hat{z}\big]\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= R^2 \iint \big[\mathrm{sen}^2(\theta)\cos(\varphi)\,\hat{x} + \mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)\,\hat{y} + \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\,\hat{z}\big]\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= R^2 \Big[\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2(\theta)\, d\theta \cdot \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\, d\varphi}}_{0}\,\hat{x} + \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2(\theta)\, d\theta \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(\varphi)\, d\varphi}}_{0}\,\hat{y} +$$

$$+ \underbrace{\cancel{\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\, d\theta}}_{0} \int_0^{2\pi} d\varphi\,\hat{z}\Big] = R^2 \cdot \big[0\,\hat{x} + 0\,\hat{y} + 0\,\hat{z}\big] = \vec{0}$$

5/5

ELMG

3ª entrega de ejercicios

Javier Rodríguez Herráiz

① Demostrar que $\nabla \times (\nabla \phi) = \vec{0}$

$$\iint_S [\nabla \times (\nabla \phi)] \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = \vec{0}$$

escalar!

Aplicando el teorema de Stokes: $\left[\iint (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}\right]$

5/5

$$\oint \nabla \phi \cdot d\vec{l} = \vec{0}$$ (siendo la curva cerrada)

ojo, es un escalar!

sí

por ser una curva cerrada: $\oint_c dx = X_{final} - X_{inicial} = 0$

pues $X_{final} = X_{inicial}$

$\nabla \phi \cdot d\vec{l} = d\phi$ por la definición de $\nabla \phi$

② Demostrar que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

$$\iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})\, dV = \iiint_V 0\, dV = 0$$

Aplicando el teorema de Gauss: $\left[\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{D}\, dV\right]$

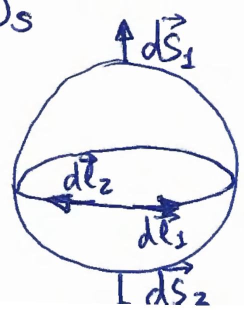
$$\oiint (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = 0$$

5/5

La superficie para poder aplicar Gauss ha de ser cerrada, y así es, por lo que podemos aplicar el teorema.

Ahora aplicamos Stokes, pero la curva obliga a tener una superficie abierta (dividimos la superficie)

$$\oiint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_2 = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l}_1 + \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}_2$$



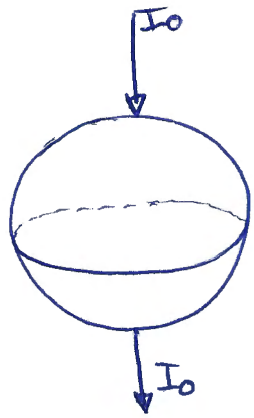
Las circulaciones son iguales en módulo pero $d\vec{l}_1$ y $d\vec{l}_2$ tienen sentidos opuestos, por lo que la suma resultante es nula

ELMG

4ª entrega de ejercicios

Javier Rodríguez Herráiz

Sea una esfera de radio a, metálica:
Se pide hallar sus densidades de corriente.



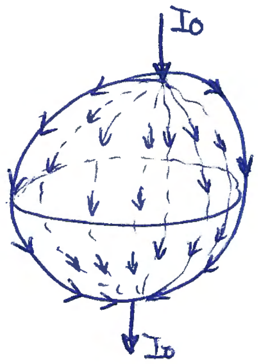
1) Volumétricas:

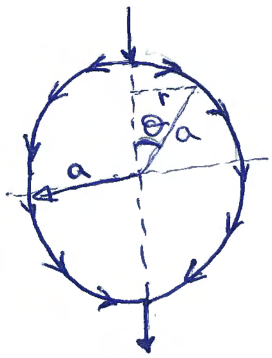
Por ser una esfera metálica, la corriente fluirá por su superficie, no por su interior.

Por tanto: $\vec{J}_v = \vec{0}$ (A/m^2) ✓

2) Superficiales:

Siguiendo con el apartado anterior, si la corriente no fluye por el interior lo hará por la superficie:





Por definición, sabemos que:

$$|\vec{J}_s| = \frac{I_0}{2\pi r} \ (A/m)$$

siendo: $r = a \cdot \text{sen}(\theta)$; $0 \leq \theta \leq \pi$

Así pues: $J_s = \dfrac{I_0}{2\pi a\, \text{sen}(\theta)}$

La dirección del vector y su sentido es $\hat{\theta}$ positivo, como podemos ver en el gráfico.

Finalmente: $\vec{J}_s = \dfrac{I_0}{2\pi a \ \text{sen}(\theta)} \hat{\theta}$ (A/m) ✓

¿Podrías hacerlo con $I = \int \vec{J_s} \cdot \hat{n} \, dl$?

ELMG

5ª entrega de ejercicios 8

Javier Rodriguez Herráiz

Hallar las fuentes de:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{r\,sen(\theta)}\,\hat{\theta} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \frac{k}{r\,sen(\theta)}\,\hat{\theta}$$

1) Volumétricas:

$$\rho_v = \nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2 sen(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\cancel{r\,sen(\theta)}\,\frac{\varepsilon_0 k}{\cancel{r\,sen(\theta)}}\right] = \frac{1}{r^2 sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\varepsilon_0 k = 0\ (C/m^3)$$

No existen ρ_r

2) Superficiales:

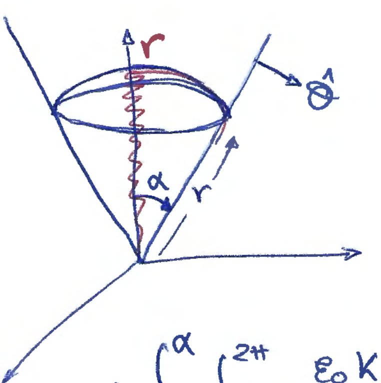
No existe ninguna discontinuidad del medio, ni del campo

Por tanto, no existe ninguna superficie sobre la que pueda existir ρ_s.

3) Lineales:

La linea z=0 $(\theta=0, \theta=\pi)$ hace el campo infinito.

3a) semirecta $\theta=0$:



$d\vec{S} = dS\,\hat{r}$

$$Q_{enc} = \int_L \lambda\, dl = \lambda\cdot \cancel{h}\ r$$

$$Q_{enc}' = \oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iint_{cono} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \iint_{casquete} \vec{D}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \int_{r=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varepsilon_0 k}{\cancel{r\,sen(\theta)}}\,\cancel{\hat{\theta}}\, dr\, \cancel{r\,sen(\theta)}\, d\varphi\, \cancel{\hat{\theta}} +$$

$$+ \int_{\theta=0}^{\alpha}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varepsilon_0 k}{r\,sen(\theta)}\,\cancel{\hat{\theta}}\, r^2 \overset{0}{\cancel{sen(\theta)}}\, d\theta\, d\varphi\, \overset{\hat{r}}{\cancel{\hat{\theta}}} = \varepsilon_0 k 2\pi r (1 + \cancel{\alpha})$$

$\hat{\theta}\cdot\hat{r} = 0$

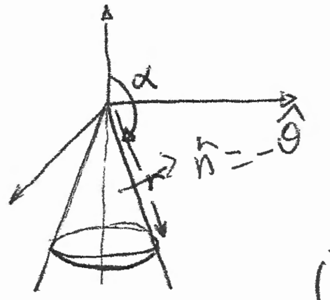
$$Q_{enc} = \lim_{\alpha\to 0}\left[Q_{enc}'\right] = \varepsilon_0 k 2\pi r\ ; \text{entonces } r\to h$$

si $\alpha \to 0$ $\Rightarrow$ $\lambda \cancel{h} r = \varepsilon_0 k 2\pi r$

$$\lambda = \varepsilon_0 k 2\pi\ (C/m)$$

Repasa bien los errores.

3b) semirecta $\theta = \pi$



$$Q_{enc} = \int_L \lambda \, dl = \lambda \cancel{k} r$$

$$Q'_{enc} = \oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iint_{cono} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \iint_{casquete} \vec{D}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \int_{r=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varepsilon_0 K}{\cancel{r\,sen(\theta)}} \cancel{\hat{\theta}}\, dr \,\cancel{r\,sen(\theta)}\, d\varphi \cancel{\hat{\theta}}\,(-\hat{\theta}) +$$

$$+ \int_{\theta=\alpha}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varepsilon_0 K}{\cancel{r\,sen(\theta)}} \cancel{\hat{\theta}}\, \cancel{r^2 sen(\theta)\, d\theta\, d\varphi}\, \cancel{\hat{r}}\; 0 = -\varepsilon_0 K\, 2\pi r + \cancel{\varepsilon_0 K\, r\, 2\pi(\pi-\alpha)}$$

$$Q_{enc} = \cancel{\lim_{\alpha\to\pi}}\left[Q'_{enc}\right] = \lim_{\alpha\to\pi}\left[\varepsilon_0 K\, 2\pi r + \cancel{\varepsilon_0 K 2\pi\,(\pi-\alpha)}\right] = \varepsilon_0 \cancel{K 2\pi}\, r$$

si $\alpha \to \pi \cancel{\Rightarrow r \to h}$ $\Rightarrow \lambda \cancel{h} r = \varepsilon_0 K 2\pi r \Rightarrow \lambda = (-)\varepsilon_0 K 2\pi \; (C/m)$

Podemos concluir que, para toda la recta $z=0$, la distribución es: $\lambda = \varepsilon_0 K 2\pi$ (C/m) pues obtenemos el mismo resultado en $z \geq 0$ y $z \leq 0$.

NO, si concluyes eso es imposible que $\bar{E} = E_0 \theta$

Sí

+ + + + + NO !!

4) Puntuales:

En $r\to 0$, $\vec{E} \to \infty$

No obstante, en el denominador tenemos un producto de infenitésimo por acotado (pues $0 \leq sen(\theta) \leq 1$, $r\to 0$)

Este producto resulta en un acotado $\Rightarrow \vec{E} \not\to \infty$

Además, por Gauss:

$$Q_{enc} = \lim_{r\to 0}\left[\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}\right] = \lim_{r\to 0}\left[\iint \frac{\varepsilon_0 K}{\cancel{r\,sen(\theta)}} \cancel{\hat{\theta}}\, \cancel{r\,sen(\theta)}\, dr\, d\cancel{\varphi}\right] =$$

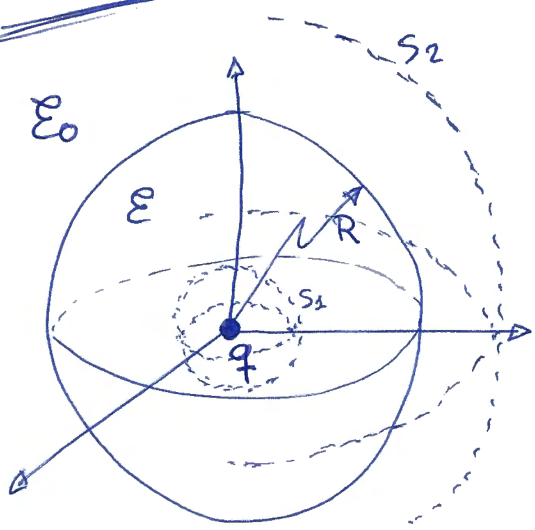
$$= \lim_{r\to 0}\left[\varepsilon_0 K \cdot r \cdot 2\pi\right] = 0 \; (C)$$

Por tanto, no existen cargas puntuales.

ELMG

6ª entrega de ejercicios

Javier Rodríguez Herraíz



Hallar el campo $\vec{E}$ en todo punto del espacio.

10

a) $r<R$: $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$; $\vec{E} = E(r)\cdot\hat{r}$

$$Q_{enc} = q = \oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S}_1 = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \varepsilon E(r) \cancel{\hat{r}}\, r^2 \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta\, d\varphi\, \cancel{\hat{r}} =$$

cte en r

$$= \varepsilon E r^2 \cos(\theta)\Big|_{\pi}^{0} \cdot 2\pi = \varepsilon E r^2 (1+1)\, 2\pi = 4\pi \varepsilon E(r) r^2$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} \ (V/m) \quad (r<R)$$

b) $r>R$: $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$; $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

$$Q_{enc} = q = \oint_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S}_2 = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \varepsilon_0 E(r) \cancel{\hat{r}}\, r^2 \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta\, d\varphi\, \cancel{\hat{r}} =$$

cte en r

$$= \varepsilon_0 E(r) r^2 \cos(\theta)\Big|_{\pi}^{0} \cdot 2\pi = 4\pi\varepsilon_0 E(r) r^2$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \ (V/m) \quad (r>R)$$

Finalmente:

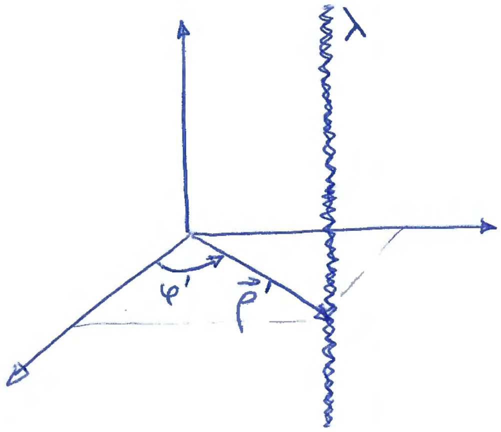
$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} \ (V/m) & r<R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \ (V/m) & r>R \end{cases}$$

Entregado fuera de plazo

ELMG

7ª entrega de ejercicios

Javier Rodríguez Herráiz



Hallar $\vec{E}$ en todo punto del espacio.

10

Sabemos que, para el mismo problema pero $\vec{\rho}' = 0$:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\rho}\hat{\rho}$$

Pero ahora tenemos:

$$|\vec{\rho} - \vec{\rho}'| = |\rho\hat{\rho} - \rho'\hat{\rho}'| = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho'\cos(\varphi - \varphi') + \rho'^2}$$

Y para el vector unitario:

$$\text{unitario}(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \frac{\vec{\rho} - \vec{\rho}'}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} = \frac{\vec{\rho} - \vec{\rho}'}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho'\cos(\varphi - \varphi') + \rho'^2}}$$

Finalmente:

$$\vec{E} = \frac{\lambda \quad (\vec{\rho} - \vec{\rho}')}{2\pi\varepsilon\left[\rho^2 - 2\rho\rho'\cos(\varphi - \varphi') + \rho'^2\right]} \quad (V/m)$$

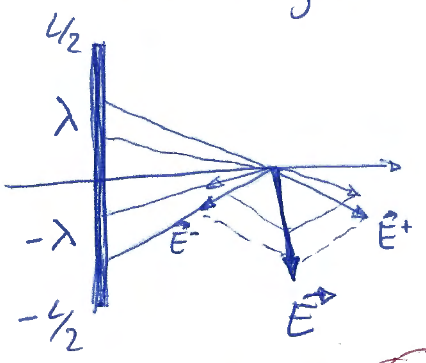
ELMG

8ª entrega de ejercicios

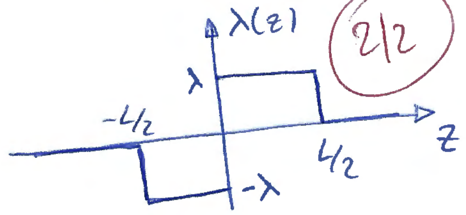
10

Javier Rodríguez Herraiz

$\lambda(z) = \lambda \cdot \text{signo}(z)$



$$d\vec{E} = \frac{dq'\,(\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon\,|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$



2/2

$$\begin{cases} dq' = \lambda(z')\cdot dz' \\ \vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \\ \vec{r}\,' = \cancel{\rho'\hat{\rho}'} + z'\hat{z}' = z'\hat{z}' \quad \Big| \quad \hat{z} = \hat{z}' \\ (\vec{r} - \vec{r}\,') = \rho\hat{\rho} - \cancel{\rho'\hat{\rho}'} + (z - z')\hat{z} = \rho\hat{\rho} + (z - z')\hat{z} \\ |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = \left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{3/2} \quad (\hat{\rho}\cdot\hat{z} = 0) \end{cases}$$

$\forall \vec{r}$:

$$\vec{E} = \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda(z')\cdot(\rho\hat{\rho} + (z - z')\hat{z})\,dz'}{4\pi\varepsilon\left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \; ; \quad \lambda(z') = \lambda\cdot\text{signo}(z')$$

1/1

Para puntos del plano $z = 0$:

$$\vec{E} = \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{L/2} \frac{\lambda(z')\,(\rho\hat{\rho} - z'\hat{z})}{4\pi\varepsilon\left[\rho^2 + z'^2\right]^{3/2}}\,dz' =$$

$\left\{ \text{ignoraremos la componente en } \hat{\rho}, \text{ pues como se ve en el dibujo, el campo } \vec{E} = E(z)\,(-\hat{z}) \right\}$

$$= \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{0} \frac{\lambda\, z'\,\hat{z}\,dz'}{4\pi\varepsilon\left[\rho^2 + z'^2\right]^{3/2}} - \int_{0}^{L/2} \frac{\lambda\, z'\,\hat{z}\,dz'}{4\pi\varepsilon\left[\rho^2 + z'^2\right]^{3/2}} = \left\{ \int \frac{(t - t')\,dt'}{\left[k^2 + (t - t')^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + (t - t')^2}} \right.$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\left[\left.\frac{-\hat{z}}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}\right|_{z'=-\frac{L}{2}}^{0} + \left.\frac{\hat{z}}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}\right|_{z'=0}^{L/2} \right] =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-1}{|\rho|} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{1}{|\rho|} \right]\hat{z} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{-1}{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} \right]\hat{z} \quad (V/m)$$

ELMG

9ª entrega de ejercicios

Javier Rodríguez Herraiz

10

Sabiendo que:

$$\phi(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\sqrt{\rho^2-(L/2)^2}+L/2}{\rho}\right)$$

siendo el infinito el punto de referencia del potencial, cambiando la referencia al punto ρ_0, obtenemos:

$$\phi(\rho)-\phi(\rho_0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left[\frac{\sqrt{\rho^2+(\frac{L}{2})^2}+L/2}{\rho}\right] - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left[\frac{\sqrt{\rho_0^2+(\frac{L}{2})^2}+L/2}{\rho_0}\right]$$

Como nuestra referencia ahora es $\phi(\rho_0)$, $\phi(\rho_0)=0$.
Así pues:

$$\phi(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left[\frac{\rho_0}{\rho}\cdot\frac{\sqrt{\rho^2+(L/2)^2}+L/2}{\sqrt{\rho_0^2+(L/2)^2}+L/2}\right]$$

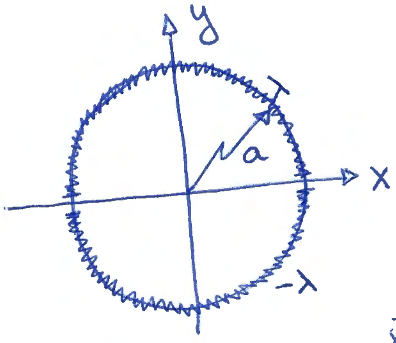
Cuando $L\to\infty$ nos encontramos con una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, la cual resolvemos derivando numerador y denominador por la regla de L'Hôpital.
Como numerador y denominador tienen ambos el mismo grado en la variable L, resulta que:

$$\phi(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left[\frac{\rho_0}{\rho}\right] \quad (V)$$ siendo $\phi(\rho_0)$ el origen de potencial.

✓

ELMG 10ª entrega de ejercicios 6

Javier Rodríguez Herráiz



$\vec{p} = \int_{L'} \vec{r}' \cdot \lambda' \cdot dl'$; $\vec{r}'$ = vector de posición de dq'

$\vec{r}' = \rho'\hat{\rho}' + z'\hat{z}' = \left\{ \begin{matrix} \rho' = a \\ z' = 0 \end{matrix} \right\} = a\hat{\rho}'$ ✓

$\vec{r}' = \vec{r}'^{+} + \vec{r}'^{-} = \begin{cases} \vec{r}'^{+} = a[\cos(\varphi')\hat{x} + \mathrm{sen}(\varphi')\hat{y}] & 0 \le \varphi' \le \pi \\ \vec{r}^{-} = a[\cos(\varphi')\hat{x} + \mathrm{sen}(\varphi')\hat{y}] & \pi \le \varphi' \le 2\pi \end{cases}$ ✓

$\vec{p}^{+} = \int_{\varphi'=0}^{\pi} a[\cos(\varphi')\hat{x} + \mathrm{sen}(\varphi')\hat{y}] \cdot \lambda \cdot d\varphi' = a\lambda[0\hat{x} + 2\hat{y}] = 2a\lambda\hat{y}$ (c.m) ✓

$\vec{p}^{-} = \int_{\varphi'=\pi}^{2\pi} a[\cos(\varphi')\hat{x} + \mathrm{sen}(\varphi')\hat{y}] \cdot (-\lambda) d\varphi' = -a\lambda[0\hat{x} - 2\hat{y}] = 2a\lambda\hat{y}$ (c.m) ✓

$\vec{p} = \vec{p}^{+} + \vec{p}^{-} = 4a\lambda\hat{y}$ (c.m) 3/3 ✓

mal operado. 0/3

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left[\frac{3\cdot \cancel{16}^{12} a^2\lambda^2 y^2\hat{y}}{r^2} - 4a\lambda\hat{y}\right] =$

$= \frac{1}{\pi\varepsilon r^5}[12a^2\lambda^2y^2 - a\lambda r^2]\hat{y}$ (V/m)

$\vec{p}\cdot\vec{r}$ es un escalar
$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$!

$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{4a\lambda y}{4\pi\varepsilon r^3}$ (V) 3/3

mezclas dos sistemas de coordenadas. Usa o esféricas o cartesianas.

$Q_{neta} = \oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \varepsilon\cdot\vec{D}\cdot r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\varphi\,d\theta\,\hat{r}$

esfera de radio a^{+}

$\hat{r} = \mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi)\hat{x} + \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z}$

$Q_{neta} = \frac{1}{\pi r^3}\int_{\theta=0}^{\pi}\mathrm{sen}^2(\theta)\,d\theta \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi}_{0} \cdot [12a^2\lambda^2y^2 - a\lambda r^2]$ ✓

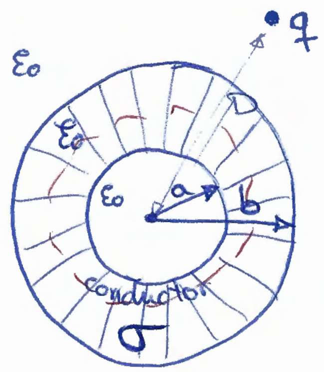
$Q_{neta} = 0$ (C)

Falta particularizar $\vec{E}(z\hat{z})$ y compararlo con el resultado obtenido en el examen, particularizado para punto alejado ($z \gg a$). 0/1

ELMG

11ª entrega de ejercicios 9,5

Javier Rodríguez Herráiz



El conductor se encuentra descargado ✓

¿Q VOLUMEN?

En electrostática, $\cancel{Q^{int}_{cond} = 0}$ $\Rightarrow Q = Q_{r=a} + Q_{r=b}$

Si $Q = 0$ (dato) $\Rightarrow 0 = Q_{r=a} + Q_{r=b}$ ✓

Aplicamos Gauss en una esfera de radio $a < r < b$:

$$Q_{enc} = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \left\{ \vec{D}^{int}_{cond} = 0 \right\} = 0 \Rightarrow Q_{enc} = 0 \Rightarrow Q_{r=a} = 0$$ 2/2

pues en el dieléctrico interior NO existe ninguna carga ✓

Así pues, tenemos: $0 = 0 + Q_{r=b} \Rightarrow Q_{r=b} = 0$ 2/2

Al no haber Q en ~~el~~ interior del dieléctrico $\Rightarrow \vec{E}_{dielectr} = 0$ por esto por (*)

Al ser

Además, en electrostática, $\vec{E}^{int}_{cond} = 0$

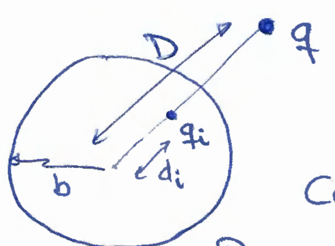
Por tanto: $\rho_{sa} = \hat{r} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \hat{r} \cdot (\vec{0} - \vec{0}) = 0$ $\frac{\int \phi(r=a) \cdot ds}{S} = \phi(r=a) \frac{S}{S} = \phi(r=a)$

$\phi(r=0) = \langle \phi(r=a) \rangle =$

Por el teorema de la media, sabemos que $\phi_{sup} = \phi_{diel} = cte$ (*)

Ya sabemos qué ocurre en el interior. Vamos al exterior. 2/2

Al ser $\phi = cte$ $(r<a) \Rightarrow$ (*) $\vec{E}(r<a) = 0$



$$\left| \begin{array}{l} q_i = -q \dfrac{b}{D} \\ d_i = \dfrac{b^2}{D} \end{array} \right.$$ 2,5/3

¿valor en $r = b$? calcúlalo.

Con esta carga q_i tenemos la esfera a 0V

Pero ese NO es nuestro ejercicio: la esfera NO está a masa

Introducimos una $q_{orig} = -q_i$ en el centro para situar el conductor a potencial V_0 (el que tenga el conductor), para descargar el conductor; ese es el dato.

El potencial resultante es: $\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r_1} + \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon r_2} - \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon r}$

Así se pone a $V = cte$.

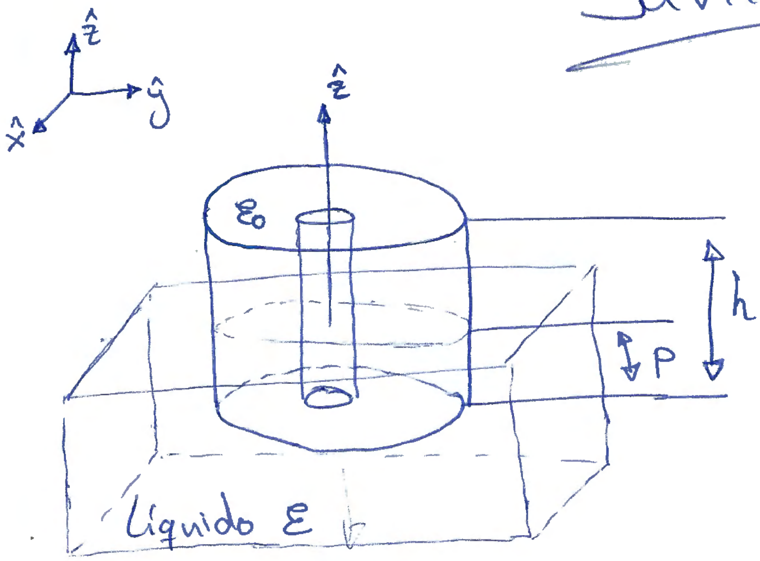
siendo: $\left| \begin{array}{l} \vec{r} = \text{vector posición del punto bajo estudio} \\ \vec{r}_1 = \text{vector entre } q \text{ y el punto de estudio} \\ \vec{r}_2 = \text{vector entre } q_i \text{ y el punto de estudio} \end{array} \right.$ 1/1

$(r \geq b)$

ELMG

12ª entrega de ejercicios

Javier Rodríguez Herraiz



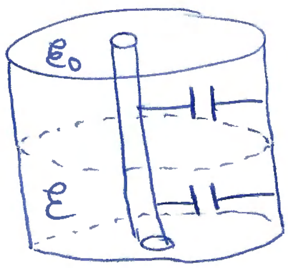
Estando las placas a $V = cte = V_0$

4

1) $W_e(p)$? valor de p que hace W_e mínima?

En un condensador cilíndrico: $C = 2\pi\varepsilon \dfrac{h}{\ln(b/a)}$ (F)

Al sumergirlo en un líquido y tener dos dieléctricos, se forman dos condensadores en paralelo.



$C_{tot} = C_1 + C_2$ (por estar en paralelo)

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{h-p}{\ln(b/a)} + 2\pi\varepsilon \frac{p}{\ln(b/a)} \quad (F)$$

$$W_e = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{\pi}{\ln(b/a)} \left[\varepsilon_0 (h-p) + \varepsilon p\right] V_0^2 \ (J)$$

W_e será mínimo cuando p sea máximo: si $p = h \Rightarrow W_e = min$

2) $$\vec{F}_e = \nabla \cdot W_e = \frac{\partial W_e}{\partial p}\hat{z} = \frac{\pi}{\ln(b/a)} \left[\varepsilon_0(-1) + \varepsilon\right] \cdot V_0^2 \, \hat{z} \ (N)$$

⊕ por estar a potencial constante

¿a dónde esto $\hat{z}$? Píntalo!

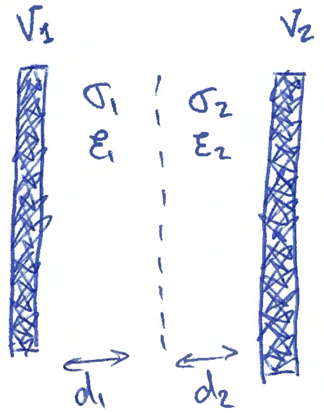
4/5

Te falló a Q = cte

ELMG 13ª entrega de ejercicios

Javier Rodríguez Herráiz

7



$\sigma_1 = \sigma_0(1+x)$
$\sigma_2 = cte$
placas de superficie S, $\sigma = \infty$

* Partiendo de $\nabla \cdot \vec{J} = 0$:

sabiendo que $\vec{J} = J\hat{x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} J_x^1 = 0 \Rightarrow J_x^1 = A_1 \Rightarrow \vec{J}_1 = A_1\hat{x} \quad (A/m^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{J}_x^2 = 0 \Rightarrow J_x^2 = A_2 \Rightarrow \vec{J}_2 = A_2\hat{x}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{J}_1}{\sigma_0(1+x)} = -\nabla\phi_1 = \frac{-d\phi_1}{\partial x}\hat{x} \Rightarrow \phi_1 = \frac{-A_1}{\sigma_0}\ln(1+x) + B_1 \quad (V/m)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{J}_2}{\sigma_2} = -\nabla\phi_2 = \frac{-d\phi_2}{dx}\hat{x} \Rightarrow \phi_2 = \frac{-A_2}{\sigma_2}x + B_2$$

* Condiciones para calcular constantes:

$$\phi_1(x=0) = V_1 = -\frac{A_1}{\sigma_0}\underbrace{\ln(1)}_{0} + B_1 \Rightarrow \underline{B_1 = V_1}$$

$$\phi_2(x=d_1+d_2) = V_2 = -\frac{A_2}{\sigma_2}(d_1+d_2) + B_2$$

$$\phi_1(x=d_1) = \phi_2(x=d_1) \Rightarrow -\frac{A_1}{\sigma_0}\ln(1+d_1) + V_1 = -\frac{A_2}{\sigma_2}d_1 + B_2$$

$$J_{1x}(x=d_1) = J_{2x}(x=d_2) \Rightarrow \underline{A_1 = A_2}$$

$$\underline{A_1 = A_2 = \frac{-V_2}{\frac{1}{\sigma_0}\ln(1+d_1) + \frac{d_2}{\sigma_2}}}$$

$$\underline{B_2 = V_2\left(1 - \frac{d_1+d_2}{\frac{\sigma_2}{\sigma_0}\ln(1+d_1)+d_2}\right)}$$

Repásalo. Te faltó V_1!

3

* Calculamos ahora las corrientes:

$$I_1 = \iint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \int_{y=0}^{h_1}\int_{z=0}^{h_2} (A_1 \hat{x}) \cdot \hat{x} \, dy dz = A_1 \cdot S_{\substack{up \\ placa}} \quad (A)$$

I_1 atraviesa toda la Resistencia

* Hallamos R:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{A_1 \cdot S} \; (\Omega) \; ; \quad A_1 = \frac{-V_2}{\frac{1}{\sigma_0}\ln(1+d_1) + \frac{d_2}{\sigma_2}}$$

Debería haber un "$V_1 - V_2$" en el numerador.

Repasa dónde está el error. Te lo dejaste al despejar. No multiplicaste el ϕ.

Cálculo de densidades de carga:

En bloque con σ_1, ε_1:

$$\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \left\{ \vec{E}_1 = \frac{A_1}{\sigma_0(1+x)} \hat{x} \right\} = \frac{\varepsilon_1 A_1}{\sigma_0} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \; (C/m^3)$$

En placa $x = 0^+$:

$$\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{x=0^+} = \hat{x} \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{A_1}{\sigma_0(1+x)} \hat{x} \Big|_{x=0^+} = \frac{\varepsilon_1 A_1}{\sigma_0(1+0)} = \frac{\varepsilon_1 A_1}{\sigma_0} \; (C/m^2)$$

En placa $x = d_1^-$:

$$\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{x=d_1^-} = \hat{x} \cdot \left(\varepsilon_2 \frac{A_2}{\sigma_2} \hat{x} - \varepsilon_1 \frac{A_1}{\sigma_0(1+x)} \hat{x} \right) \Big|_S = A \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_0(1+d_1)} \right) \; (C/m$$

$A_1 = A_2 = A$

Es lo mismo.

En placa $x = d_1^+$:

$$\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{x=d_1^+} = \hat{x} \left(\varepsilon_2 \frac{A_2}{\sigma_2} \hat{x} - \varepsilon_1 \frac{A_1}{\sigma_0(1+x)} \hat{x} \right) \Big|_S = A \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_0(1+d_1)} \right) \; (C/m$$

En placa $x = (d_1 + d_2)^-$:

$$\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{x=(d_1+d_2)} = \hat{x} \cdot \left(-\varepsilon_1 \frac{A_1}{\sigma_0(1+x)} \right) \hat{x} \Big|_S = -\varepsilon_1 \frac{A_1}{\sigma_0(1+d_1+d_2)} \; (C/m^2)$$

ω.

NO

Repásalo !!

ϕ_2, E_2, J_2 !!

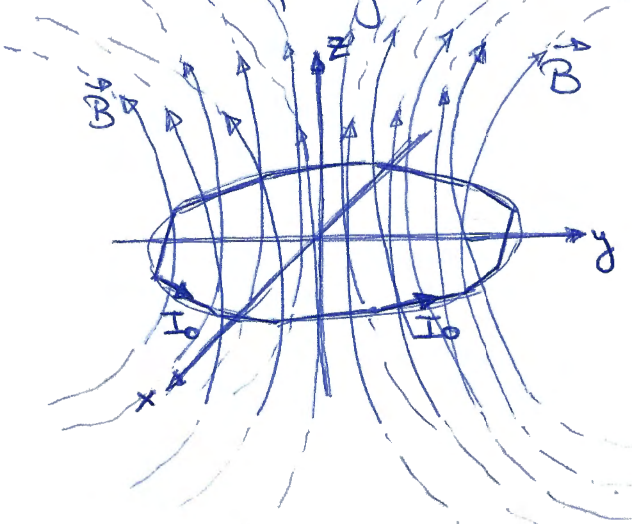
4

ELMG

14ª entrega de ejercicios

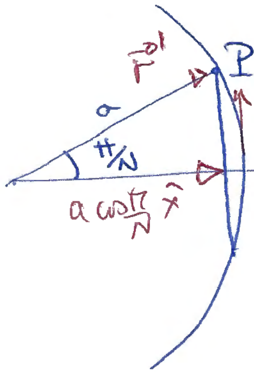
Javier Rodríguez Herráiz

Sea un polígono de N lados: con N par



Por la simetría de la figura observamos que el campo magnético $\vec{B}$ tendrá dirección $\hat{z}$ en puntos del eje z, pues las componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ quedan anuladas dos a dos.

3



$P = a\cos(\frac{\pi}{N})\hat{x} + a\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{N})\hat{y}$

$$\vec{B}^{1\,segmento}(0,0,z) = \frac{\mu I_o}{4\pi}\int_L \frac{\vec{dl}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}' = a\cos(\frac{\pi}{N})\hat{x} - y'\hat{y} \\ \vec{dl}' = dy'\hat{y} \\ (\vec{r}-\vec{r}') = z\hat{z} - a\cos(\frac{\pi}{N})\hat{x} \end{cases} \rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'|^3 = (z^2 + a^2\cos^2(\frac{\pi}{N}))^{3/2}$$

Repite la integral - ~~...~~ mal. tb el denominador.

$$\int \frac{dy'}{[a^2+y'^2]^{3/2}} = \frac{y'}{a^2\sqrt{a^2+y'^2}} + K$$

$$\vec{B}^{1\,segmento}(0,0,z) = \frac{\mu I_o}{4\pi}\int_{y=-a\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{N})}^{a\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{N})} \frac{dy\,\hat{y} \times (z\hat{z} - a\cos(\frac{\pi}{N})\hat{x})}{(z^2 + a^2\cos^2(\frac{\pi}{N}) + y'^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu I_o}{4\pi}\cdot\frac{1}{(z^2+a^2\cos^2(\frac{\pi}{N}))^{3/2}}\cdot\int_y z\hat{x} - a\cos(\frac{\pi}{N})(-\hat{z})\,dy =$$

$$= \frac{\mu I_o}{4\pi}\,\frac{1}{(z^2+a^2\cos^2(\frac{\pi}{N}))^{3/2}}\,(z\hat{x} + a\cos(\frac{\pi}{N})\hat{z})\cdot 2a\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{N})$$

Por simetría, la componente $\hat{x}$ queda anulado por su segmento homólogo, y la componente en $\hat{z}$ duplicada. Así pues:

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu I_o}{\pi}\cdot\frac{a^2\cos(\frac{\pi}{N})\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{N})\,\hat{z}}{(z^2+a^2\cos^2(\frac{\pi}{N}))^{3/2}}\cdot\frac{N}{2}(T)$$

multiplicamos por el número de parejas de segmentos que tendremos