ISAL

Resúmenes
(Hechos en 2011)

ISAL

TEMA 1: TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

COMBINATORIA

- Conjunto de n elementos distintos y vamos a contar cuántos grupos de m elementos se pueden formar:

	NO SE PUEDEN REPETIR LOS ELEMENTOS	SÍ SE PUEDEN REPETIR LOS ELEMENTOS
COMBINACIONES (NO importa el orden)	$C_{n,m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$	$CR_{n,m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}$
VARIACIONES (SÍ importa el orden)	$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$	$VR_{n,m} = n^m$

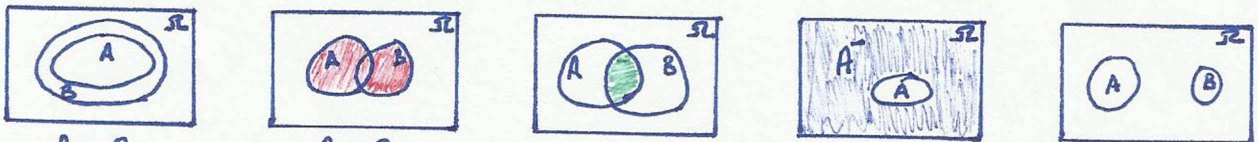
- Conjunto de n elementos distintos y queremos saber todas las posibles ordenaciones:

	NO SE PUEDEN REPETIR LOS ELEMENTOS	SE REPITE CADA ELEMENTO n_i VECES	CADA ELEMENTO SE PUEDE REPETIR "n" VECES
PERMUTACIONES	$P_n = n!$	$P_n^{n_1,\dots,n_i} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_i!}$ $\;n_1+\dots+n_i=n$	$PR_n = n^n$

PROBABILIDAD

Ω = ESPACIO MUESTRAL: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

SUCESO: conjunto de resultados de un experimento. Relación entre sucesos:



$A \subset B$ $\quad$ $A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $\bar{A}$ = CONTRARIO DE A $\quad$ SUCESOS DISJUNTOS ($A \cap B = \emptyset$)

PROPIEDADES:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ [Si A, B disjuntos $\Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B)$] ($A \cap B = \emptyset$)
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(\Omega) = 1$

$\emptyset$ = SUCESO IMPOSIBLE
$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
$P(\emptyset) = 0$

LAPLACE: Ω finito y resultados equiprobables

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{CASOS FAVORABLES}}{\text{CASOS POSIBLES}}}$$

$|\Omega|$ = cardinal del espacio muestral

PROBABILIDAD CONDICIONAL: verificado el suceso B, probabilidad de verificarse A

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

- $P(A|\Omega) = P(A)$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A|B) = P(B|A) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow P(A|B) \geq P(A)$

TEOREMA DE LA MULTIPLICACIÓN:

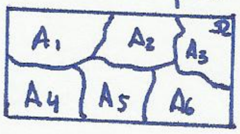
$$\boxed{P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

"extracciones sin devolución"

PARTICIÓN DEL ESPACIO MUESTRAL: $\{A_1, \dots, A_n\}$ es partición de Ω si cumple:

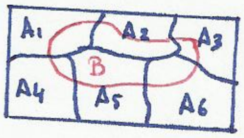
a) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ (mutuamente excluyentes)

b) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (exhaustivos)



TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL: siendo $A_1, \dots A_n$ una partición de Ω

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$



TEOREMA DE BAYES: siendo $A_1, \dots, A_n$ una partición del espacio muestral (Ω)

$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \ P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)} = \frac{P(A_i) P(B/A_i)}{P(B)}}$$

SUCESOS INDEPENDIENTES: cuando la ocurrencia de uno no afecta a la ocurrencia de otro.

A, B independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Leftrightarrow P(A/B) = P(A) \mid P(B/A) = P(B)$

A, B disjuntos $(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow A, B$ dependientes

EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES:

ξ_1, ξ_2 independientes $\Leftrightarrow$ la ocurrencia de sucesos de uno no influye en la ocurrencia de sucesos del otro.

EXPERIMENTOS COMPUESTOS: si dos experimentos son independientes podemos definir el experimento compuesto $\xi = \xi_1 \times \xi_2$ que consistiría en realizar ξ_1 y ξ_2 con espacio muestral $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ y con probabilidad $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$.

ENSAYOS DE BERNOUILLE:

- Experimento compuesto de n ensayos independientes en el que cada ensayo sólo tiene dos resultados posibles (A y $\bar{A}$).
- Queremos calcular la probabilidad de que $\underbrace{\text{A ocurra exactamente K veces}}_{\equiv B}$ en cualquier orden de los n ensayos.

$$\boxed{P(B) = \binom{n}{k} [P(A)]^k \cdot [1 - P(A)]^{n-k}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

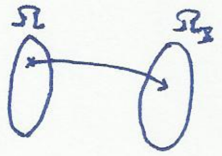
ISAL

TEMA 2: VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONALES

Dado un experimento aleatorio $\xi(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una variable aleatoria (va) es una aplicación:

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\omega \in \Omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$



· Una va X es una función que asigna un nº real a cada resultado del experimento aleatorio.

· El conjunto de valores que puede tomar X se denomina rango.

<u>Tipos de variables aleatorias:</u>

- <u>Discretas</u>: Ω_X discreto, $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ (Rango finito).
- <u>Continuas</u>: rango infinito no numerable ; $\Omega_X = (x_1, x_2)$.
- <u>Mixtas</u>: rango continuo con puntos discretos.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Sea X va

$$\boxed{F_X = P(X \leq x)}$$

F_X nos informa de la cantidad de probabilidad que hay a la izquierda de cualquier punto del eje X.

· <u>PROPIEDADES</u>:

PROPIEDADES QUE DEBE CUMPLIR LA FD:

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2) $F_X(x)$ es <u>no decreciente</u> y <u>continua por la derecha</u>.
3) $F_x(+\infty) = 1$
   $F_x(-\infty) = 0$

4) $P(X = x) = F(x) - F(x^-)$

$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1^-)$

$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2^-) - F(x_1)$

$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2^-) - F(x_1^-)$

Mientras F_X sea continua la probabilidad de tomar ese valor es 0. Esto ocurre en las va continuas donde F_X es continua $\Rightarrow$ la prob. que hay en un punto concreto del eje x es 0. No es así para va discretas donde un punto puede tener prob. distinta de cero.

FUNCIÓN DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Sea X va

$$\boxed{f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}}$$

$f_X(x)$ informa sobre la cantidad de probabilidad que hay en un intervalo determinado del eje X.

$$\boxed{P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx}$$ (va continuas)

· <u>PROPIEDADES</u>:

1) $f_X(x) \geq 0$ (<u>función</u> <u>no negativa</u>)

2) $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1}$ (va continua) $\boxed{\sum_{K=-\infty}^{\infty} f_X(x=K) = 1}$ (va discreta)

$$\boxed{F_X(x) = \sum_{K=-\infty}^{X} f_X(x=K)}$$ (va discreta)

Relación entre $F_X(x)$ y $f_X(x)$: (va continua) $\boxed{f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx}$

VARIABLES ALEATORIAS	Ω_X	$F_X(x)$	$f_X(x)$
CONTINUAS	CONTINUO $\Omega_X = (x_1, x_2)$	CONTINUA CRECIENTE $\forall x \in \Omega_X$ CONSTANTE $\forall x \notin \Omega_X$	$>0,\ x \in \Omega_X$ $=0,\ x \notin \Omega_X$
DISCRETAS	DISCRETO $\Omega_X = \{x_1, \dots x_i\}$	ESCALONADA	TREN DE DELTAS EN LOS PUNTOS DISCRETOS DE PESO LA PROBABILIDAD EN ESE PUNTO
MIXTAS	$\Omega_X = (x_1, x_2) \cup \{x_3, x_4\}$		

MEDIA

X va

$$\boxed{E(X) = \eta = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx}$$ (va continua)

E (X) es una constante que indica el centro de gravedad de la va, indica donde con mayor prob. la va va a tomar valores

- Si tenemos una función $f_X(x)$ simétrica respecto a un punto, ese punto es la media de la va.

$$\boxed{E(X) = \sum_{\forall i} x_i\, p_i}$$ (va discreta)

VARIANZA

X va

$$\boxed{Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \eta^2}$$ (va continua)

$$Var(X) = \overbrace{E[x^2]}^{\text{valor cuadrático medio}} - E[x]^2$$

$$\boxed{\sigma^2 = \sum_{\forall i} x_i^2\, p_i - \eta^2}$$ (va discreta)

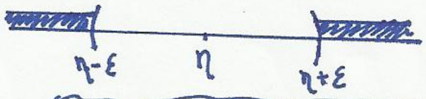
$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \equiv$ desviación estándar o típica, mide la dispersión en la misma unidad de medida que la media

DESIGUALDAD DE TCHEBYCHEFF

X va con η, σ^2

$$\boxed{P(|X - \eta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

Prob. de estar a una distancia mayor que ε de la media.



El intervalo que nos den debe estar centrado en la media

$$\boxed{P(|X - \eta| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

Utilizamos la desigualdad de Tchebycheff cuando solo conozcamos la media y la varianza de una va

Probabilidad de estar en un entorno (ε) de la media.

MOMENTOS

X va

- Momento no centrado de orden n: $\boxed{m_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx}$ $\boxed{m_n = \sum_{\forall x_i} x_i^n\, P(X = x_i)}$

- Momento centrado de orden n: $\boxed{\mu_n = E[(X - \eta)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta)^n f_X(x)\, dx}$ $\boxed{\mu_n = \sum_{\forall x_i} (x_i - \eta)^n\, P(X = x_i)}$

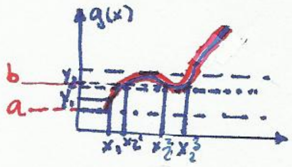
TRANSFORMACIONES DE VARIABLE ALEATORIA

a) CASO CONTINUO:

Sea X va continua y una función $y = g(x)$, transformamos la va y obtenemos una nueva va $Y = g(X)$.

1) Cálculo de la $F_Y(y)$:

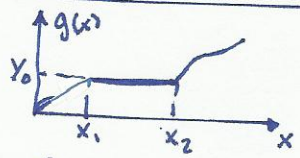
1.1.) Si $g(x)$ no es cte:



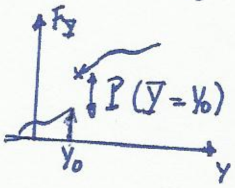
Buscamos dividir la función por trozos:

- $y_1 < a$: $F_Y(y_1) = P(Y \leq y_1) = P(X \leq x_1) = F_X(x_1)$ ⇒ Un valor de y, un valor de x.
- $y_2 \in (a, b)$: $F_Y(y_2) = P(Y \leq y_2) = P(\{X \leq x_2^1\} \cup \{x_2^2 < X \leq x_2^3\}) =$
$= F_X(x_2^1) + F_X(x_2^3) - F_X(x_2^2)$

1.2) g(x) cte en algún intervalo:



$P(Y = y_0) = P(x_1 < X < x_2)$



Cuando $g(x)$ es constante en algún intervalo ⇒

⇒ Y será una va mixta.

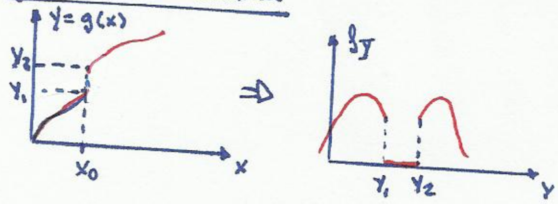
2) Cálculo de la $fdp_Y(y)$: TEOREMA FUNDAMENTAL

- X va continua
  $y = g(x)$ continua, derivable y no constante

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_{\forall x_i} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}}$$

Siendo x_i las raíces de $y = g(x)$
- Si para un valor de y hay un valor de x ⇒ 1 raíz.
- Si para un valor de y hay 2 valores de x ⇒ 2 raíces.

- g(x) discontinua

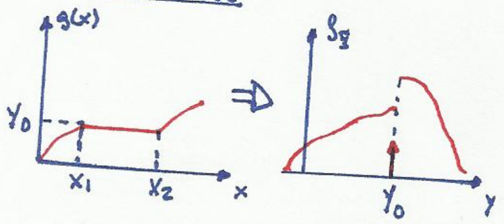


$y \in (-\infty, y_1)$: Aplico T.ª F.

$y \in (y_2, \infty)$: Aplico T.ª F.

$y \in (y_1, y_2) = 0$

- g(x) constante

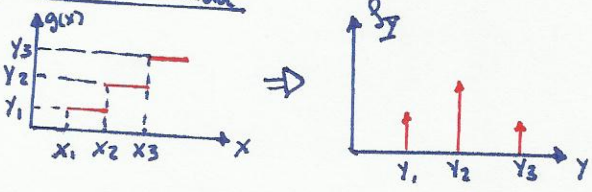


$y < y_0$: Aplico T.ª F.

$y > y_0$: Aplico T.ª F.

Delta en y_0 de peso : $P(Y = y_0) = P(x_1 < X < x_2)$

- g(x) escalonada



X va continua y g(x) escalonada ⇒

⇒ Y va discreta

f_Y esta compuesta por deltas en los puntos de salto de peso la probabilidad en ese punto ⇒

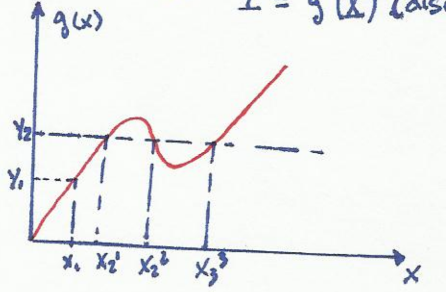
⇒ $P(Y = y_1) = P(x_1 < X < x_2)$

$P(Y = y_2) = P(x_2 < X < x_3)$

$\vdots$

b) CASO DISCRETO

Sea X va discreta y una función $y=g(x)$, transformamos la va y obtenemos una nueva va $Y=g(X)$ (discreta)



X discreta $\Rightarrow \Omega_X = \{x_1, \dots x_i\}, P_i$

Y discreta $\Rightarrow \Omega_Y = \{y_1, \dots y_j\}$

$P(Y=y_1) = P(X=x_1)$

$P(Y=y_2) = P(X=x_2^1) + P(X=x_2^2) + P(X=x_2^3)$

c) PARÁMETROS DE UNA TRANSFORMACIÓN DE VARIABLE ALEATORIA

$\left.\begin{matrix} X \text{ va} \\ y=g(x) \end{matrix}\right\}$

$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$	$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{\forall x_i} g(x_i) \cdot P(X=x_i)$
(va continua)	(va discreta)

PROPIEDADES

- $E(aX \pm b) = a\,E(X) \pm b$
- $Var(aX+b) = a^2\,Var(X)$

DISTRIBUCIONES IMPORTANTES

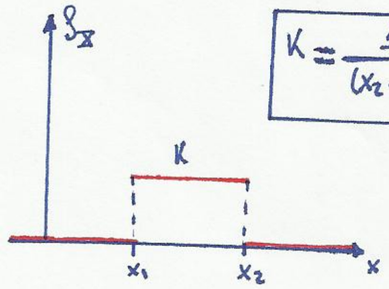
CONTINUAS

- DISTRIBUCIÓN UNIFORME

. X va $\longrightarrow U(x_1, x_2)$

. fdp $\boxed{f_X(x) = \begin{cases} K & , x \in (x_1, x_2) \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}}$

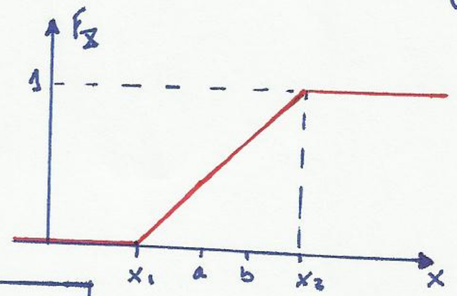
$\boxed{K = \frac{1}{(x_2 - x_1)}}$



* Se usa cuando todos los puntos del rango son equiprobables

. F_X

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < x_1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & , x_1 \leq x \leq x_2 \\ 1 & , x > x_2 \end{cases}}$$



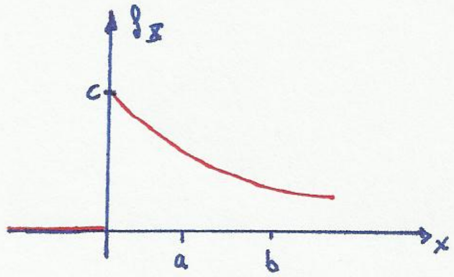
- $\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{x_2 - x_1}}$ Si $x_1 < a < b < x_2$

- $\boxed{E(X) = \frac{x_1 + x_2}{2}}$

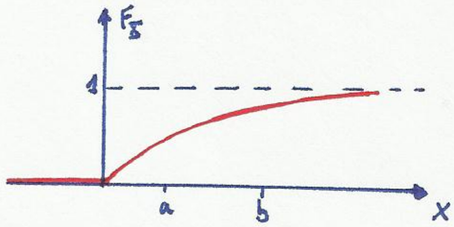
- $\boxed{Var(X) = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}}$

- EXPONENCIAL

X va $\longrightarrow$ $X \equiv exp(c)$, $c>0$



$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} c e^{-cx} & , x>0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}}$$



$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ 1-e^{-cx} & , x>0 \end{cases}}$$

$$\boxed{P(a<X\le b) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = e^{-ca} - e^{-cb}} \quad (0<a<b)$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{c}}$$

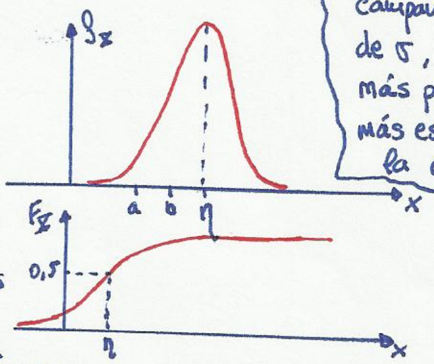
$$\boxed{Var(X) = \frac{1}{c^2}}$$

- NORMAL

X va $\longrightarrow N(\eta, \sigma)$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}}$$

$x \in (-\infty, \infty)$
$\eta \in (-\infty, \infty)$
$\sigma > 0$



*La anchura de la campana depende de σ, cuanto más pequeña sea, más estrecha es la campana.

$$\boxed{F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\varphi-\eta)^2}{2\sigma^2}}\, d\varphi}$$

$\Rightarrow$ Función no integrable $\Rightarrow$ utilizamos la relación con la NORMAL ESTÁNDAR para calcular probabilidades.

$$\boxed{E(X) = \eta}$$

$E(X^2) = (\eta^2 + \sigma^2)$

$$\boxed{Var(X) = \sigma^2}$$

RELACIÓN NORMAL $\rightarrow$ NORMAL ESTÁNDAR

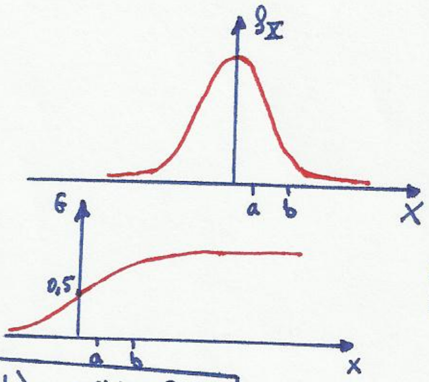
$$F_X(x) = G\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)$$

$$P(a<X\le b) = F(b) - F(a) = G\left(\frac{b-\eta}{\sigma}\right) - G\left(\frac{a-\eta}{\sigma}\right)$$

- NORMAL ESTÁNDAR

X va $\longrightarrow N(0,1)$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} \quad x \in (-\infty, \infty)$$



$$\boxed{G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varphi^2/2}\, d\varphi}$$

$\Rightarrow$ utilizamos TABULACIONES

$$\boxed{G(-x) = 1 - G(x)}$$

$$\boxed{E(X) = 0} \quad \boxed{Var(X) = 1} \quad \boxed{P(a<X\le b) = G(b) - G(a)}$$

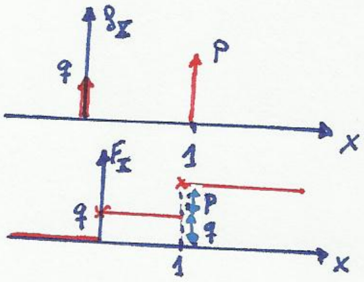
DISCRETAS

- BERNOUILLI

X va que puede tomar dos valores: $\begin{cases} 1 & \text{, si se verifica el suceso A} \\ 0 & \text{, si \underline{no} se verifica el suceso A} \end{cases}$

$P(A) = p \quad ; \quad P(\bar{A}) = q = 1-p$

$$\boxed{f_X(x) = q\,\delta(x) + p\,\delta(x-1)}$$



$$\boxed{F_X(x) = q\,u(x) + p \cdot u(x-1)}$$

$$\boxed{P(X=1) = p \quad ; \quad P(X=0) = q = 1-p}$$

$$\boxed{E(X) = p}$$

$$\boxed{Var(X) = pq}$$

La distribución de Bernouille es un caso particular de la distribución binomial con $n=1$.

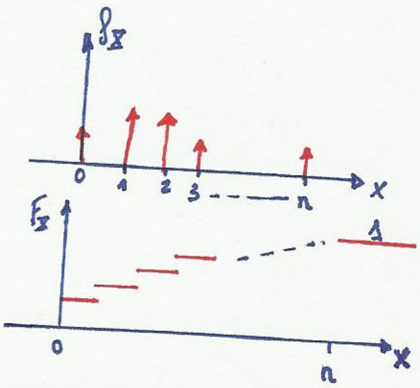
- BINOMIAL

X va $\equiv$ nº de verificaciones del suceso A tras n ensayos $\longrightarrow B(n, p)$

$n \equiv$ nº de ensayos

$p = P(A) \quad , \quad P(\bar{A}) = q = 1-p$

$$\boxed{f_X(x) = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} p^K \cdot q^{n-K}\,\delta(n-K)}$$



$$\boxed{F_X(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \binom{n}{K} p^K q^{n-K}\,u(x-K)}$$

$$\boxed{P(X=K) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K}} \quad 0 \leq K \leq n$$

$$\boxed{E(X) = n \cdot p} \qquad \boxed{Var(X) = npq}$$

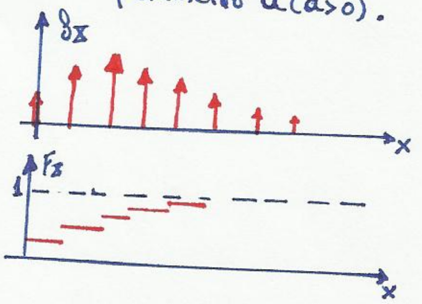
RELACIÓN BINOMIAL - POUISSON

Cuando se cumple que $\begin{Bmatrix} n \to \infty \\ p \to 0 \\ np = a \sim 1 \end{Bmatrix}$ $\begin{pmatrix} p \leq 0,1 \\ np < 5 \end{pmatrix}$ se puede aproximar la binomial por la de Pouisson

- POISSON

X va tiene una distribución de Pouisson de parámetro a $(a>0)$.

$$\boxed{f_X(x) = \sum_{K=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^K}{K!}\,\delta(x-K)}$$



$$\boxed{F_X(x) = \sum_{K=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^K}{K!}\,u(x-K)}$$

$$\boxed{P(X=K) = e^{-a} \frac{a^K}{K!}} \quad K = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{E(X) = a} \qquad \boxed{Var(X) = a}$$

Esta va modela la llegada de eventos a un sistema

- GEOMÉTRICA

X va geométrica se puede definir de dos formas diferentes:

1) $X \equiv$ nº de veces que se ha verificado el contrario de A hasta que se verifica A por primera vez. $P(A) = p$; $P(\bar{A}) = q = 1-p$

$\boxed{P(X=K) = q^K \cdot p}$ $K = 0, 1, 2, \dots$

$\bar{A}$ se verifica K veces
A se verifica una vez en la repetición K+1.

$\boxed{E(X) = \frac{q}{p}}$

$\boxed{Var(X) = \frac{q}{p^2}}$

2) $X \equiv$ nº de realizaciones del experimento necesarias para que A se verifique por primera vez. $P(A) = p$; $P(\bar{A}) = q = 1-p$.

$\boxed{P(X=K) = q^{K-1}\, p}$ $K = 1, 2, 3, \dots$

A se verifica en la repetición K por 1ª vez
$\bar{A}$ se verifica K−1 veces

$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$

$\boxed{Var(X) = \frac{q}{p^2}}$

TEMA 3 : VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL

Va bidimensional : $(X, Y): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\omega \longrightarrow (X(\omega), Y(\omega))$

Rango : $\Omega_{XY} = \{(X(\omega), Y(\omega)) : \forall \omega \in \Omega\}$

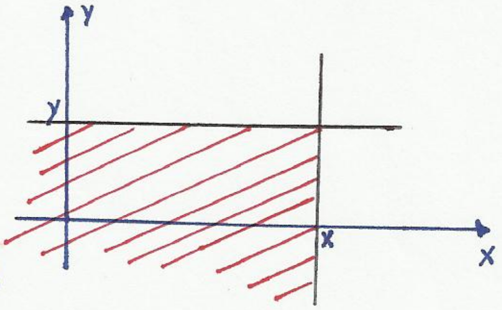
Tipos de vab :

- Discreta: si su recorrido Ω_{XY} es un subconjunto finito o infinito numerable del plano $\mathbb{R}^2$.
- Continua: si su recorrido Ω_{XY} es un subconjanto infinito no numerable del plano $\mathbb{R}^2$ y su función de distribución es una función continua.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA

(X, Y) vab

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)}$$



PROPIEDADES:

1) $0 \leq F_{XY}(x,y) \leq 1$

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \forall y \in \mathbb{R}$

$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2), \forall x \in \mathbb{R}$

2) $F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$ | $F_{XY}(-\infty, y) = 0$

$F_{XY}(-\infty, -\infty) = 0$ | $F_{XY}(x, -\infty) = 0$

3) $P(a \leq X \leq b, Y \leq d) = F(b,d) - F(a,d)$

$P(X \leq b, c \leq Y \leq d) = F(b,d) - F(b,c)$

$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$

FUNCIÓN DENSIDAD DE PROBABILIDAD CONJUNTA

(X, Y) vab

$$\boxed{f_{XY} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}}$$

$$\boxed{P[(X,Y) \in D] = \iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}$$

$$\boxed{P[(X,Y) \in D] = \sum_{\forall (x_i, y_j) \in D} \sum P_{ij}}$$

PROPIEDADES:

1.) $f_{XY}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2.) $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1}$ $\boxed{\sum_{\forall i} \sum_{\forall j} P_{ij} = 1}$

Relación entre $F_{XY}(x,y)$ y $f_{XY}(x,y)$: $\boxed{F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,du\,dv \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$

DISTRIBUCIONES MARGINALES

$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$	$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$	$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y)$
$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$	$f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x,y)$

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES

$f_X(x/Y=y_0) = \dfrac{f_{XY}(x,y_0)}{f_Y(y_0)}$	$F_X(x/Y=y_0) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u/Y=y_0)\,du$
$f_Y(y/X=x_0) = \dfrac{f_{XY}(x_0,y)}{f_X(x_0)}$	$F_Y(y/X=x_0) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u/X=x_0)\,du$

INDEPENDENCIA DE VAB

X, Y independientes $\Longleftrightarrow \boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)}$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow F_{XY}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow f_X(x/y) = f_X(x)$

$\Longleftrightarrow f_Y(y/x) = f_Y(y)$

$\Longleftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$

$\Longleftrightarrow P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$

Estas equivalencias deben cumplirse para todos los puntos, si no se cumple para un punto $\Rightarrow X, Y$ no son independientes.

$$\left.\begin{array}{l} X, \; Z = g(X) \\ Y, \; W = h(Y) \end{array}\right\}$$ Si X, Y son independientes $\Rightarrow Z, W$ son independientes

TRANSFORMACIONES DE V.A. BIDIMENSIONAL

1) DOS TRANSFORMACIONES. TEOREMA FUNDAMENTAL

- (X, Y) v.a. bidimensional continua, Ω_{XY}
- Transformación $\begin{cases} Z = g(x,y) \\ W = h(x,y) \end{cases}$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}$$

(x_i, y_i) raíces

$x_i = g_1(z,w)$

$y_i = g_2(z,w)$

$\sum_{\forall i} f_{XY}(x_i, y_i)$

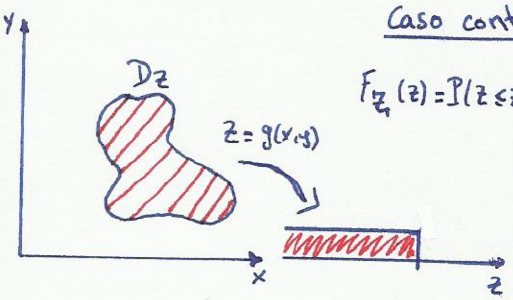
$$f_{ZW}(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x(z,w), y(z,w))}{|J(x(z,w), y(z,w))|} & \text{si } (z,w)\in \Omega_{ZW} \\ 0 & \text{si } (z,w)\notin \Omega_{ZW} \end{cases}$$

2) UNA TRANSFORMACIÓN

- (X, Y) v.a. bidimensional
- Transformación : $Z = g(X, Y)$

2.a) Cálculo de la función de distribución

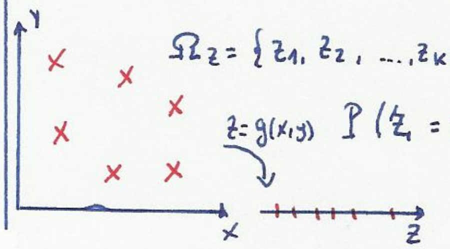
Caso continuo



$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P[g(x,y) \leq z] = $
$= P[(X,Y) \in D_z]$

Caso discreto

(X,Y) v.a.b. discretas
$Z = g(X,Y)$ v.a. discreta



$\Omega_Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots\}$

$P(Z = z_k) = \sum\sum P(X = x_i, Y = y_j)$

$z_k = g(x_i, y_j)$

2.b) Cálculo de la fdp (VA AUXILIAR)

- (X,Y) v.a.b. continua
- $Z = g(x,y)$

1º. Definimos otra v.a. ficticia y la igualamos a cualquiera de las dos ya definidas:

$Z = g(x,y)$
$W = X$

2º. Aplicamos el Tª fundamental y obtenemos $f_{ZW}(z,w)$.

3º. Calculamos la fdp marginal de Z y obtenemos $f_Z(z)$.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(z,w)\, dw$$

* Si la transformación es $Z = X + Y$ y X e Y son v.a. independientes $\Rightarrow$ la fdp de Z viene definida por:

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z)\, f_Y(y-z)\, dz$$

(Convolución de las fdp marginales)

Si $Z = aX + bY \Longrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{|ab|}\left[f_X\left(\frac{x}{a}\right) * f_Y\left(\frac{y}{b}\right)\right]$

TEOREMA DE LA MEDIA DE UNA TRANSFORMACIÓN DE V.A.

$\left.\begin{array}{l}(X,Y) \text{ v.a.b.}\\ Z = g(X,Y)\end{array}\right\}$

$$\boxed{E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy}$$ (Caso continuo)

$$\boxed{E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum\sum g(x_i, y_i)\, P(X = x_i, Y = y_j)}$$ (Caso discreto)

Propiedades:

- $E(aX + bY + c) = a\,E(X) + b\,E(Y) + c$
- $\left.\begin{array}{l} Z = aX + bY + c \\ X \to N(\eta_X, \sigma_X) \\ Y \to N(\eta_Y, \sigma_Y) \\ X, Y \text{ independientes}\end{array}\right\} \longrightarrow Z \to N(\eta_Z, \sigma_Z)$

$\eta_Z = a\eta_X + b\eta_Y + c$
$\sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$

PARÁMETROS DE UNA V.A. BIDIMENSIONAL

CORRELACIÓN

$$\boxed{R_{XY} = E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy}$$

X e Y son ortogonales $\Leftrightarrow E(XY) = 0$

X e Y independientes $\Rightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

COVARIANZA

$$\boxed{C_{XY} = E(XY) - E(X)\,E(Y)}$$

X e Y están incorreladas $\Leftrightarrow C_{XY} = 0 \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

$$\boxed{r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

X e Y indep $\Rightarrow r_{XY} = 0$

X e Y independientes $\Rightarrow X$ e Y incorreladas

X e Y ortogonales $\Rightarrow E[(aX + bY)^2] = a^2 E(X^2) + b^2 E(Y^2)$

X e Y incorreladas $\Rightarrow Var(aX + bY) = a^2\,Var(X) + b^2\,Var(Y)$

$-1 \leq r_{XY} \leq 1$

$r_{XY} = \pm 1 \Rightarrow$ Las v.a. están relacionadas de forma lineal $(Y = aX + b)$

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. continuas e independientes

Se define una nueva v.a.: $\underbrace{X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n}$ (v.a. continua)

$E(X) = \eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$

$Var(X) = \sigma^2 \underset{\text{incorreladas}}{=} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$

$f_X(x) = f_{X_1}(x_1) * f_{X_2}(x_2) * \ldots * f_{X_n}(x_n)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{T.L.C.: si } n >> 1 \Rightarrow X \rightsquigarrow N(\eta, \sigma) \\ f(x) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \quad ; -\infty < x < \infty \end{array}}$$

*Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son discretas e indep.

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ (va discreta)

$\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$

$P(X = x_k) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_k-\eta)^2}{2\sigma^2}}$

TEOREMA DE DEMOIVRE-LAPLACE

$X \rightarrow B(n, p)$, $\Omega_X = \{0, \ldots, n\}$, $E(X) = np$, $Var(X) = npq$

Si se cumple $\left\{\begin{array}{l} n >> 1 \\ np >> 1 \end{array}\right\} \Rightarrow X \rightsquigarrow N(np, \sqrt{npq})$

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \simeq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$

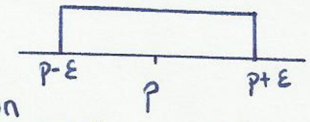
Se debe cumplir que: $|k - np| \leq \sqrt{npq}$

$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P(X = k) = F(k_2) - F(k_1) = G\left(\dfrac{k_2 - np}{npq}\right) - G\left(\dfrac{k_1 - np}{npq}\right)$

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P(|f_A - p| \leq \varepsilon) \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty}$$

$$\boxed{P(|f_A - p| \leq \varepsilon) = 2G\ \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} - 1}$$



Nos informa de cuántas veces hay que repetir un experimento para que se cumplan unas determinadas condiciones

COROLARIO

- X e Y son ortogonales $\Leftrightarrow E(XY) = 0$
- X e Y son independientes $\Rightarrow X$ e Y están incorreladas
- X e Y están incorreladas $\Leftrightarrow C_{XY} = 0$
- X e Y son independientes $\Rightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
- X e Y son independientes $\Rightarrow r_{XY} = 0$
- X e Y ortogonales $\Rightarrow E[(aX + bY)^2] = a^2 E(X^2) + b^2 E(Y^2)$
- X e Y incorreladas $\Rightarrow Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$

TEMA 4: PROCESOS ESTOCÁSTICOS

DEFINICIONES

Se denomina proceso estocástico (PE) a cualquier función de Ω sobre el conjunto {funciones de t} que asocia a cada suceso una función de t: $PE: \Omega \longrightarrow \{\text{función de } t\}$

P.E. $\equiv X(t)$ $\qquad \omega \longrightarrow X(\omega, t)$

Dependiendo si fijamos un suceso concreto, un instante concreto o ambos, tenemos:

- $X(\omega, t)$: Proceso estocástico
- $X(\omega_0, t)$: función de t (Realización del proceso)
- $X(\omega, t_1)$: Variable aleatoria unidimensional
- $X(\omega_0, t_1)$: punto, número real

*Si fijamos dos instantes de tiempo obtenemos una variable aleatoria bidimensional

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y FUNCIÓN DENSIDAD DE PROBABILIDAD

- DE PRIMER ORDEN

$$\boxed{F_X(x, t_1) = P[X(t_1) \le x]} \qquad \boxed{f_X(x, t_1) = \frac{\partial F_X(x, t_1)}{\partial x}}$$

Para cada instante de tiempo tenemos una va diferente ⇒ ⇒ tenemos un función de distr. diferente ⇒ tenemos una fdp diferente

- DE SEGUNDO ORDEN

$$\boxed{F_{X_1 X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = P[X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2]} \qquad \boxed{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \, \partial x_2}}$$

MEDIA O ESPERANZA

Sea $X(t)$,

$$\boxed{E[X(t)] = \eta_X(t) = \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x, t_1)\, dx}$$

Para cada instante de tiempo tenemos una va diferente ⇒ ⇒ tenemos una media diferente

VARIANZA

Sea $X(t)$,

$$\boxed{Var[X(t_1)] = E[X^2(t_1)] - E[X(t_1)]^2}$$

CORRELACIÓN

- Para un proceso: AUTOCORRELACIÓN

$$\boxed{R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1, x_2 \, f_X(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2}$$

Si igualamos $t_1 = t_2 = t \Rightarrow E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x, t)\, dx \Rightarrow$ VALOR CUADRÁTICO MEDIO

- Para dos procesos: CORRELACIÓN CRUZADA

$$\boxed{R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1) Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 \, f_{XY}(x_1, y_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dy_2}$$

$$\boxed{X(t) \text{ e } Y(t) \text{ son ortogonales} \Longleftrightarrow R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \ \forall t_1 \ne t_2}$$

COVARIANZA

- Para un proceso: AUTOCOVARIANZA

$$\boxed{C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - E[X(t_1)]\cdot E[X(t_2)]}$$

Si los dos instantes de tiempo coinciden $\Rightarrow C_X(t,t) = E[X^2(t)] - E[X(t)]^2 = \sigma_X^2(t) \Rightarrow$ VARIANZA

- Para dos procesos: COVARIANZA CRUZADA

$$\boxed{C_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) - E[X(t_1)]\cdot E[Y(t_2)]}$$

$X(t)$ e $Y(t)$ son incorrelados $\Leftrightarrow C_{XY}(t_1,t_2)=0$

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

- Para un proceso: COEF. DE AUTOCORRELACIÓN

$$\boxed{r_X(t_1,t_2) = \frac{C_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\,\sigma_X(t_2)}}$$

- Para dos procesos: COEF. DE CORRELACIÓN CRUZADA

$$\boxed{r_{XY}(t_1,t_2) = \frac{C_{XY}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\,\sigma_Y(t_2)}}$$

$X(t)$ e $Y(t)$ incorrelados $\Leftrightarrow r_{XY}(t_1,t_2)=0 \Leftrightarrow R_{XY}(t_1,t_2) = \eta_X(t_1)\,\eta_Y(t_2)$

INDEPENDENCIA

$X(t)$, $Y(t)$ son independientes $\Leftrightarrow f_{XY}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,t_1,\dots,t_n,t_1',\dots,t_m') = f_X(x_1\dots x_n,t_1\dots t_n)\cdot f_Y(y_1\dots y_n,t_1'\dots t_m')$ $(\forall n,m)$

$X(t)$ e $Y(t)$ independientes $\Rightarrow X(t)$ e $Y(t)$ incorrelados

RUIDO BLANCO

- RB en sentido amplio:

$$\boxed{X(t)\ \text{R.B. (s.a.)} \Leftrightarrow X(t_1),\ X(t_2)\ \text{incorreladas}\ \forall t_1 \neq t_2}$$

- RB en sentido estricto:

$$\boxed{X(t)\ \text{R.B. (s.e.)} \Leftrightarrow X(t_1),\ X(t_2)\ \text{independientes}\ \forall t_1 \neq t_2}$$

Si $X(t)$ es R.B. (s.e.) $\Rightarrow F_X(x_1,x_2,t_1,t_2) = P[X(t_1)\le x_1,\ X(t_2)\le x_2] = F_X(x_1,t_1)\cdot F_X(x_2,t_2)$

ESTACIONARIEDAD

- En sentido estricto:
  - $X(t)$ es estacionario cuando todos sus estadísticos permanecen invariables ante un desplazamiento del origen de tiempos; cuando $X(t)$ y $X(t+\varepsilon)$ tienen los mismos estadísticos $\forall \varepsilon$.
  - Propiedades:
    - $f_X(x,t) = f_X(x) \Rightarrow$ todas las va's tienen la misma fdp
    - $f_{X_1X_2}(x_1,x_2,t_1,t_2) = f_{X_1X_2}(x_1,x_2,\tau)$, $[\tau = t_1-t_2] \Rightarrow$ solo depende de la diferencia
    - $\eta_X(t) = \eta_X$ (cte.)
    - $R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau)$
    - $C_X(t_1,t_2) = C_X(\tau) = R_X(\tau) - \eta_X^2$

* $X(t)$, $Y(t)$ son conjunt. estacionarios en sentido amplio si:
- $X(t)$ es est. en s.a.
- $Y(t)$ es est. en s.a.
- $R_{XY}(\tau)$

  - $X(t)$ es estacionario hasta orden n cuando los estadísticos hasta de orden n permanecen invariantes ante un desplazamiento del origen de tiempos.
    - Orden 1 si $f_X(x,t) = f_X(x)$
    - Orden 2 si $f_{XX}(x_1,x_2,t_1,t_2) = f_{XX}(x_1,x_2,\tau)$

- **En sentido amplio:**

$$\mathbf{X}(t) \text{ estacionario en s.a.} \iff \begin{cases} \eta_{\mathbf{X}}(t) = \eta_{\mathbf{X}} \\ R_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{X}}(\tau) \end{cases}$$

> * Si un proceso es RB, estacionario y de media nula:
> $R_{\mathbf{X}}[m] = \sigma^2 \delta[m]$
> $S_{\mathbf{X}}(\omega) = \sigma^2 \;;\; \omega \in (-\pi, \pi)$

DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Sea $\mathbf{X}(t)$ P.E. estacionario en sentido amplio y real, se define el espectro como:

$$\boxed{S_{\mathbf{X}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{X}}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = TF\left[R_{\mathbf{X}}(\tau)\right]}$$

$$\boxed{R_{\mathbf{X}}(\tau) = TF^{-1}\left[S_{\mathbf{X}}(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{X}}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega}$$

*Si el proceso es discreto $\mathbf{X}[n] \Rightarrow S_{\mathbf{X}}(\omega) = TF\left[R_{\mathbf{X}}[m]\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{X}}[m] \cdot e^{-j\omega m}$, función continua y de periodo 2π.

PROPIEDADES:

- $S(\omega) \geq 0, \ \forall \omega$
- $S(-\omega) = S(\omega)$, función par

PROPIEDADES DE LA TRANSF. DE FOURIER

1. $aX(t) + bY(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bY(\omega)$
2. $X(t - t_0) \longleftrightarrow X(\omega)\, e^{j\omega t_0}$
3. $X(-t) \longleftrightarrow X(\omega)$
4. $X(t)\, e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)$
5. $X(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
6. $\frac{dX(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(\omega)$
7. $t\, X(t) \longleftrightarrow j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$

TRANSFORMADAS DE FOURIER

1. $K \longleftrightarrow 2\pi K\, \delta(\omega)$
2. $\delta(t) \longleftrightarrow 1$
3. $K\delta(t) \longleftrightarrow K$
4. $u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega)$
5. $\cos(Kt) \longleftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - K) + \delta(\omega + K)\right]$
6. $\text{sen}(Kt) \longleftrightarrow j\pi\left[\delta(\omega + K) - \delta(\omega - K)\right]$

SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(\omega) \end{matrix}} \longrightarrow Y(t)$$

LTI

$$\boxed{Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot X(t - \tau)\, d\tau}$$

$$\boxed{Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)} \qquad \boxed{H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$$

Conocemos $\eta_{\mathbf{X}}$, $S_{\mathbf{X}}(\omega)$ y $R_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)$:

$$\boxed{E\left[\mathbf{Y}(t)\right] = \eta_{\mathbf{X}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, d\alpha = \eta_{\mathbf{X}} H(0)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\mathbf{YX}}(\tau) &= R_{\mathbf{X}}(\tau) * h(\tau) \\ S_{\mathbf{YX}}(\omega) &= S_{\mathbf{X}}(\omega) \cdot H(\omega) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\mathbf{XY}}(\tau) &= R_{\mathbf{X}}(\tau) * h(-\tau) \\ S_{\mathbf{XY}}(\omega) &= S_{\mathbf{X}}(\omega) \cdot H^*(\omega) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\mathbf{Y}}(\tau) &= R_{\mathbf{X}}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau) \\ S_{\mathbf{Y}}(\omega) &= S_{\mathbf{X}}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \end{aligned}}$$