TRANSFORMADAS DE FOURIER

Señales	Transformada de Fourier	Coeficientes de las series (si son periódicas)
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, para cualquier otro
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, para cualquier otro
$\operatorname{sen}\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, para cualquier otro
$x(t) = 1$	$2\pi\,\delta(\omega)$	$a_0 = 1 \quad a_k = 0, k \neq 0$ (representación de la serie de Fourier para cualquier opción de $T_0 > 0$)
Onda cuadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \le \frac{T_0}{2} \end{cases}$ $y \quad x(t+T_0) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T} \quad \forall k$
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2\operatorname{sen}\omega T_1}{\omega}$	
$\frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}$	$\begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	
$\delta(t)$	1	
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
$e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	
$te^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	

PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

Señales periódicas	Coeficientes de las series de Fourier
$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\}$ periódicas de periodo T_0 y frec. fundamental $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$	a_k b_k
$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0}$
$e^{jM(\frac{2\pi}{T_0})t}\, x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a^*_{-k}
$x(-t)$	a_{-k}
$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (periódico con periodo $\dfrac{T_0}{\alpha}$)	a_k
$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 a_k b_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$jk\dfrac{2\pi}{T_0}a_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (valor finito y periódico si $a_0 = 0$)	$\left(\dfrac{1}{jk(2\pi/T_0)}\right)a_k$
$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
$x_e(t) = Ev\{x(t)\} = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$ $[x(t)$ real$]$	$\Re e\{a_k\}$
$x_o(t) = Od\{x(t)\} = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$ $[x(t)$ real$]$	$j\Im m\{a_k\}$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$\Pi\left(\frac{t}{2\Delta}\right) \longleftrightarrow 2\Delta\, \mathrm{sinc}\left(\Delta \frac{\omega}{2\pi}\right)$

$k\, \mathrm{sinc}^2(Bt) \longleftrightarrow \frac{k}{B} \Lambda\left(\frac{1}{B}\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$\frac{W}{\pi}\, \mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \longleftrightarrow \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right)$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Señal	Transformada de Fourier
$x(t)$	$X(j\omega)$
$y(t)$	$Y(j\omega)$
$ax(t)+by(t)$	$aX(j\omega)+bY(j\omega)$
$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
$x(-t)$	$X(-j\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
$tx(t)$	$j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega)=X^*(-j\omega) \\ \Re e\{X(j\omega)\}=\Re e\{X(-j\omega)\} \\ \Im m\{X(j\omega)\}=-\Im m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert=\lvert X(-j\omega)\rvert \\ \angle X(j\omega)=-\angle X(-j\omega) \end{cases}$
$x_e(t)=Ev\{x(t)\}=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$ $[x(t)\text{ real}]$	$\Re e\{X(j\omega)\}$
$x_o(t)=Od\{x(t)\}=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$ $[x(t)\text{ real}]$	$j\Im m\{X(j\omega)\}$

Relación de Parseval para señales aperiódicas

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(j\omega)\rvert^2 d\omega$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER TIEMPO DISCRETO

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de las series (si son perió
$\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	$a)\ \omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & \text{k = m, m} \pm \text{N, m} \pm \text{2N,...} \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ $b)\ \frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es no periodica
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\right]$	$a)\ \omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2, & \text{k} = \pm\text{m}, \pm \text{m} \pm \text{N}, \pm \text{m} \pm \text{2N,} \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ $b)\ \frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es no periodica
$sen\, \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\right]$	$a)\ \omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2j, & \text{k = r, r} \pm \text{N, r} \pm \text{2N,...} \\ -1/2j, & \text{k = -r, -r} \pm \text{N, -r} \pm \text{2N,...} \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$ $b)\ \frac{\omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es no periodica
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, ... \\ 0, & \text{en cualquier otro valor} \end{cases}$
Onda periódica cuadrada $x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n \rvert \le N_1 \\ 0, & N_1 < \lvert n \rvert \le \frac{N}{2} \end{cases}$ $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{sen\left[(2\pi k/N)\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{N sen[2\pi k / 2N]},\ k \ne 0, \pm N, ...$ $a_k = (2N_1 + 1)/N \qquad , k = 0, \pm N, ...$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$	$a_k = \frac{1}{N}$ para toda k
$a^n u[n],\ \lvert a \rvert < 1$	$1/\left(1 - ae^{-j\omega}\right)$	
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n \rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n \rvert > N_1 \end{cases}$	$\frac{sen\left[\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{sen(\omega/2)}$	
$\frac{sen Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le \lvert \omega \rvert \le W \\ 0, & W < \lvert \omega \rvert \le \pi \end{cases}$ $X(e^{j\omega})$ periodica con periodo 2π	
$\delta[n]$	1	
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a \rvert < 1$	$1/\left(1 - ae^{-j\omega}\right)^2$	
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n],\ \lvert a \rvert < 1$	$1/\left(1 - ae^{-j\omega}\right)^r$	

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Señal	Transformada de Fourier
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$ periodica con periodo 2π
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$ periodica con periodo 2π
$ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[n/k], & \text{si n es multiplo de k} \\ 0, & \text{si n no es multiplo de k} \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$
$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$
$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re e\{X(e^{j\omega})\}=\Re e\{X(e^{-j\omega})\} \\ \Im m\{X(e^{j\omega})\}=-\Im m\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \angle X(e^{j\omega})=-\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
$x_e[n]=Ev\{x[n]\}=\frac{x[n]+x[-n]}{2}$ $\quad [x[n]\text{ real}]$	$\Re e\{X(e^{j\omega})\}$
$x_o[n]=Od\{x[n]\}=\frac{x[n]-x[-n]}{2}$ $\quad [x[n]\text{ real}]$	$j\Im m\{X(e^{j\omega})\}$

Realción de Parseval para señales aperiódicas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2\,d\omega$$

PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

Señales periódicas	Coeficientes de las series de Fourier
$\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$ periódicas de periodo N y frec. fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	a_k Periódica de periodo N b_k Periódica de periodo N
$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0}$
$e^{jM(\frac{2\pi}{N})n} x[n]$	a_{k-M}
$x^*[n]$	a^*_{-k}
$x[-n]$	a_{-k}
$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & n \text{ múltiplo de } m \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ Periódica de periodo mN	$\frac{1}{m} a_k$ Periódica de periodo mN
$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$
$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - e^{-jk(2\pi/N)}\right)a_k$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (valor finito y periódico si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}}\right)a_k$
$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
$x_e[n] = Ev\{x[n]\} = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$ $[x[n] \text{ real}]$	$\Re e\{a_k\}$
$x_o[n] = Od\{x[n]\} = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$ $[x[n] \text{ real}]$	$j\Im m\{a_k\}$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \lvert x[n] \rvert^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} \lvert a_k \rvert^2$$