MMT1

Carpeta de
Montero Espinosa
(resuelta en 2007)

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

Función compleja de variable compleja (1,5 cr.)

Definiciones generales. Principales funciones complejas. Límites y continuidad de funciones complejas univaluadas. Derivabilidad. Condiciones para la derivabilidad de una función de variable compleja: ecuaciones de Cauchy-Riemann. Teoremas sobre derivabilidad: condiciones necesarias y suficientes para la derivabilidad de una función de variable compleja. Derivabilidad de las principales funciones complejas. Funciones holomorfas. Concepto de función holomorfa. Función entera. Puntos regulares y puntos singulares. Puntos singulares aislados: primera clasificación. Operaciones con funciones holomorfas. Regla de L'Hopital. Holomorfía de las principales funciones complejas. Funciones armónicas. Propiedades de las funciones armónicas. Relación entre funciones armónicas y holomorfas. Construcción de la armónica conjugada. Reconstrucción de la función holomorfa a partir de su parte real o imaginaria. Derivadas formales. Función holomorfa y derivadas formales. Método de Milne-Thomson.

Integración compleja (0,6 cr.)

Integrales curvilíneas de funciones complejas continuas. Definición y principales propiedades. Integrales de funciones holomorfas. Teorema de Cauchy-Goursat. Generalización del teorema de Cauchy-Goursat al caso de abiertos múltiplemente conexos. Fórmula integral de Cauchy. Fórmula integral general de Cauchy. Derivadas de funciones holomorfas. Integral y primitiva: teorema de la primitiva. Teorema de Morera. Principales corolarios de la fórmula integral de Cauchy: principio de módulo máximo, teorema de Liouville y teorema fundamental del Álgebra.

Series complejas (0,9 cr.)

Series numéricas complejas. Convergencia y convergencia absoluta de series numéricas complejas. Operaciones con series numéricas complejas. Series de funciones complejas: definición. Convergencia y convergencia uniforme. Propiedades. Criterio suficiente de Weierstrass para la convergencia uniforme. Continuidad de la suma. Integración de series. Derivación de series de funciones holomorfas: teorema de Weierstrass. Series de potencias complejas. Series de Taylor. Relación entre función holomorfa y analítica. Propiedades de la suma de una serie de potencias. Teorema de Cauchy. Series de Laurent. Anillo de convergencia. Teorema de Laurent.

Residuos y algunas de sus aplicaciones (0,9 cr.)

Clasificación de singularidades aisladas de una función compleja de variable compleja. Puntos singulares evitables, polos simples y de orden $k > 1$ y puntos singulares esenciales. Relación entre polos y ceros de una función. Función meromorfa. Residuo de una función en un punto singular aislado. Teorema de los residuos. Cálculo de residuos en puntos singulares aislados. Residuo de una función en el punto del infinito. Aplicación del teorema de los residuos al cálculo de algunas integrales reales definidas. Lemas de Jordan.

Transformada de Laplace (0,6 cr.)

Definición. Teorema de convergencia de la transformada de Laplace: semiplano y abcisa de convergencia. Definición de transformada inversa de Laplace. Transformadas de funciones elementales. Teorema de convergencia de la transformada inversa de Laplace: fórmula de inversión compleja. Propiedades de la transformada de Laplace. Cálculo de la transformada inversa de Laplace mediante la utilización de tablas de transformadas y mediante el teorema de los residuos. Aplicación de la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales y a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Febrero 2007

Guía mmt 1

T0 → NÚMEROS COMPLEJOS

- Ej. clase T0 → 1 y 2

T1 → FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE COMPLEJA

- Junio 97 ej. 1 a, b, c
- Ejercicio 1 Sept. 96
- Ejercicio 1 clase (T1)
- " 2 " (T1)
- " 3 clase (T1)
- " 4 clase (T1)
- " 5 clase (T1)
- Febrero 99 ejercicio 1
- Ejercicio 6 clase (T1)
- Septiembre 98 ej. 1
- Febrero 98 ej. 1
- Junio 99 ej. 1
- Septiembre 04 ej. 1
- Septiembre 01 ej. 1

T2 → INTEGRACIÓN COMPLEJA

- Ejercicio 1 clase (T2)
- " 2 " (T2)
- " 3 " (T2)
- " 4 " (T2)
- Septiembre 01 ej. 2
- Ejercicio 5 clase (T2)
- Septiembre 96 ej. 2 (b)

- Febrero 05 ej. 4
- Septiembre 98 ej. 3
- Febrero 00 ej. 2

T3 → SERIES COMPLEJAS

- Ejercicio 1 clase (T3)
- Ejercicio 2 clase (T3)
- " 3 clase (T3)
- Septiembre 98 ej. 2
- Ejercicio 4 clase (T3)
- Febrero 99 ej. 2
- Ejercicio 5 clase (T3)
- " 6 " (T3)
- " 7 " (T3)
- Septiembre 96 ej. 2 a)
- " 96 ej. 2 b (otra forma)
- Febrero 03 ej. 2

T4 → RESIDUOS

- Ejercicio 1 clase (T4)
- " 3 " (T4)
- " 2 " (T4)
- Ejercicio 6 clase (T3) apdo extra
- Ejercicio 3 clase (T4) (otra forma)
- Febrero 00 ej. 3
- Febrero 99 ej. 3
- Junio 97 ej. 2

T5 → TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Ejercicio 1 clase (T5)
- " 2 " (T5)

- Ejercicio 3 clase (TS)
- Febrero 2001 ej. 3
- Septiembre 98 ej. 5
- Febrero 03 ej. 3
- Septiembre 01 ej. 3
- Junio 99 ej. 3
  (últimas hojas de teoría)
- Septiembre '04 ej. 3
- Ejercicio 4 clase (TS)
- Febrero 96 ej. 2
- Febrero 05 ej. 3
- Febrero 04 ej. 3

TEMA 0: NÚMEROS COMPLEJOS

0.1 Definiciones

- Un **número complejo** z es un par ordenado (a, b) de números reales donde,
  $a = \mathrm{Re}(z)$ = parte real de z
  $b = \mathrm{Im}(z)$ = parte imaginaria de z
- La **unidad imaginaria** (designada por j) es el número complejo (0,1). Además tenemos que $j = \sqrt{-1}$.
- El **afijo** de un complejo z es el punto del plano cartesiano de coordenadas (a, b).

En ingeniería se utiliza "j" en vez de "i"

0.2 Formas de representar un número complejo

- Forma cartesiana: $z = (a, b)$
- Forma binómica: $z = a + jb$
- Forma polar: $z = \rho_\theta$
- Forma exponencial: $z = \rho e^{j\theta}$
- Forma módulo-argumental: $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

Fíjate que en realidad son sólo dos formas:
- Representación con a y b
- Representación con ρ y θ

Usaremos principalmente la forma binómica y la exponencial

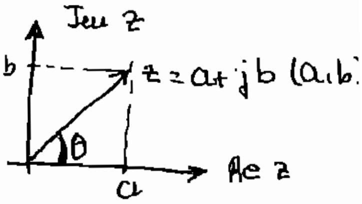
Para pasar de una a otra forma hacemos:

Forma binómica a forma polar

$$z = a + jb \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan(b/a) \end{array} \right\} \Rightarrow z = \rho \cdot e^{j\theta}$$

Forma polar a forma binómica

$$z = \rho \cdot e^{j\theta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array} \right\} \Rightarrow z = a + jb$$



0.3 Operaciones con número complejos

Suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

Resta: $z_1 - z_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = (\rho_1 \cdot \rho_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Recuerda que $j \cdot j = j^2 = -1$

División: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

No es necesario aprender de memoria esta fórmula. La regla práctica consiste en multiplicar y dividir la fracción por el conjugado del denominador

Elemento inverso: $$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + jb} = \frac{(a - jb)}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j\frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho e^{j\theta}} = (\rho^{-1}) e^{-j\theta}$$

Es útil recordar que: $\boxed{j^{-1} = \frac{1}{j} = -j}$

0.4 Complejo conjugado

Forma binómica: Sea $z = a + jb$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = z^* = a - jb$

Forma polar: Sea $z = \rho e^{j\theta}$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = z^* = \rho e^{-j\theta}$

Propiedades: i) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

iv) $\overline{\overline{z}} = z$

v) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2j}$

0.5 Modulo de un complejo

Sea $z = a + jb$, llamamos **módulo** de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propiedades: i) $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \Rightarrow z\overline{z} = |z|^2$

iii) $si \quad z \neq 0 \qquad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|}$

iv) $|z| \geq 0, \quad |z| = 0$ sólo si $z = 0$

v) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

vi) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

vii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \qquad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

viii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

0.6 Potencias y raíces complejas

Sea el número complejo $z = \rho \cdot e^{j\theta}$,

Fórmula de Moivre

- Potencia enésima:

$$z^n = \rho^n e^{jn\theta}$$

Un número complejo tiene n raíces enésimas

- Raíces enésimas:

$$\sqrt[n]{z} = re^{j\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Observación

Es conveniente manejar con soltura las potencias de la unidad imaginaria j:

$$j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1, j^5 = j$$

y en general : $j^{4n} = 1, j^{4n+1} = i, j^{4n+2} = -1, j^{4n+3} = -j$

TEMA 0: NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $|z| = \left| \dfrac{(3+5i)(-2+i)}{(2+i)(10-6i)} \right|$ b) $w = \dfrac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}}$ $= w_1$ $= w_2$ w_2

a)
Primero simplificamos la expresión del numerador y del denominador:

$$z = \frac{(3+5i)(-2+i)}{(2+i)(10-6i)} = \frac{-6+3i-10i+5i^2}{20-12i+10i-6i^2} = \frac{-6-7i-5}{20-2i+6} = \frac{-11-7i}{26-2i}$$

Ahora dividimos ambos complejos. Como están en forma binómica para dividir multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$z = \frac{(-11-7i)\ (26+2i)}{(26-2i)\ (26+2i)} = \frac{-286\ -22i\ -182i\ -14i^2}{676+52i-52i-4i^2} = \frac{-286-204i+14}{676+4} =$$

$$= \frac{-272-204i}{680} = -\frac{272}{680} - \frac{204}{680}i = -0,4-0,3i$$

y ahora sólo falta calcular el módulo del complejo z :

$$|z| = \sqrt{(-0,4)^2+(-0,3)^2} = \sqrt{0,16+0,09} = \sqrt{0,25} = 0,5$$

Solución : $|z| = 0,5$

b)
La única forma de realizar los cálculos del enunciado es pasar los números complejos a forma polar:

$$w_1 = 1+i \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \operatorname{atan}(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{matrix}\right\} \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

$$w_2 = i \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \rho = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \theta = \operatorname{atan}(1/0) = \pi/2 \quad (90^\circ) \end{matrix}\right\} \Rightarrow w_2 = 1_{\pi/2}$$

De esta forma la expresión queda:

Utilizamos la fórmula de De Moivre: $(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}} = \frac{\left(\sqrt{2}_{\pi/4}\right)^{100}}{1_0+(1_{\pi/2})^{100}} = \frac{\left(\sqrt{2}^{100}\right)_{100\cdot\pi/4}}{1_0+\left(1^{100}\right)_{100\cdot\pi/2}} = \frac{\left(2^{50}\right)_{25\pi}}{1_0+1_{50\pi}} =$$

$$= \frac{\left(2^{50}\right)_{\pi}}{1_0+1_0} = \frac{-2^{50}}{1+1} = -\frac{2^{50}}{2} = -2^{49}$$

Importante: hemos tenido en cuenta que $\left\{\begin{matrix} 25\pi = \pi \\ 50\pi = 0 \end{matrix}\right.$

Solución : $w = -2^{49}$

Ejercicio 2

Calcular las siguiente expresión: $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\cdot\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$

Lo primero que vamos a hacer es pasar los cuatro números complejos a forma polar:

$$z=\sqrt{3}-i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1}=2 \\ \theta = \operatorname{atan}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6 = 11\pi/6\ (-30^\circ = 330^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow z = 2_{11\pi/6}$$

$$z=\sqrt{3}+i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1}=2 \\ \theta = \operatorname{atan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6\ (30^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow z = 2_{\pi/6}$$

$$z=1+i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \operatorname{atan}(1/1) = \pi/4\quad (45^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

$$z=1-i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \operatorname{atan}(-1/1) = -\pi/4 = 7\pi/4\ (-45^\circ = 315)\end{array}\right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{7\pi/4}$$

Ahora utilizamos la fórmula para dividir números complejos en forma polar que es:

Recuerda: $\dfrac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\theta'}$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}} = \left(\frac{2}{2}\right)_{11\pi/6-\pi/6} = 1_{10\pi/6} = 1_{5\pi/3} = 1_{300^\circ}$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)_{\pi/4-7\pi/4} = 1_{-6\pi/4} = 1_{2\pi/4} = 1_{\pi/2} = 1_{90^\circ}$$

ahora utilizamos la fórmula de De Moivre para calcular las potencias:

Recuerda, la Fórmula de De Moivre es: $(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 = \left(\frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}}\right)^4 = \left(1_{5\pi/3}\right)^4 = (1^4)_{4\cdot 5\pi/3} = 1_{20\pi/3} = 1_{2\pi/3} = 1_{120^\circ}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}}\right)^5 = \left(1_{\pi/2}\right)^5 = (1^5)_{5\cdot\pi/2} = 1_{5\pi/2} = 1_{\pi/2} = 1_{90^\circ}$$

de forma que sustituyendo todo nos queda:

Recuerda: $\rho_\theta\cdot\rho'_{\theta'} = (\rho\cdot\rho')_{\theta+\theta'}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\cdot\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}}\right)^4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}}\right)^5 = \left(1_{5\pi/3}\right)^4\cdot\left(1_{\pi/2}\right)^5 = 1_{2\pi/3}\cdot 1_{\pi/2} =$$

$$= (1\cdot 1)_{\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}} = 1_{\frac{4\pi+3\pi}{6}} = 1_{\frac{7\pi}{6}} = 1_{210^\circ}$$

Por último, si queremos, podemos pasar el resultado a forma cartesiana:

$$z = 1_{210^\circ} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \rho\cos\theta = 1\cdot\cos 210^\circ = -\sqrt{3}/2 \\ b = \rho\operatorname{sen}\theta = 1\cdot\operatorname{sen}210^\circ = -1/2\end{array}\right\} \Rightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

1.1 Definiciones

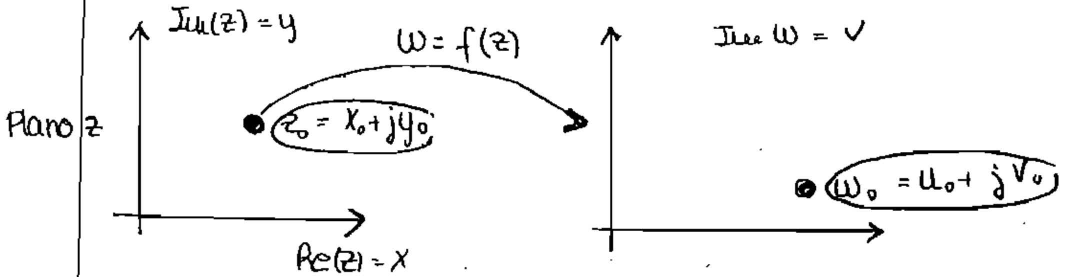
El objeto de estudio de este tema y de los siguientes van a ser las **funciones complejas de variable compleja**:

$$f: \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$z = x + jy \rightarrow f(z) = f(x+jy) = u(x,y) + v(x,y)j$$

donde tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son funciones reales de dos variables reales. Es decir:

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \rightarrow u(x,y) \qquad\qquad (x,y) \rightarrow v(x,y)$$

Si representamos los números complejos *z* como puntos de un plano Z) y los números complejos *w* como puntos de otro plano W), la función *w=f(z)* puede interpretarse como una **transformación** de puntos (x,y) del plano Z), en puntos (u,v) del plano W)



$z = x + jy$

$f(z_0) = w_0$

$f(x_0 + jy_0) = u_0 + jv_0$

1.2 Límites

Las funciones complejas de variable compleja cumplen las mismas propiedades en cuanto a límite de la suma (suma de los límites), producto (producto de los límites) y cociente (cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero), que las funciones reales. Aparece sin embargo una nueva propiedad relacionada con el módulo:

No existe una propiedad equivalente para el argumento

- Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = L \Rightarrow \lim_{z \to z_0} \underbrace{|f(z)|}_{\text{módulo de } f(z)} = |L|$

Relación con límites reales

Sea una función compleja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l = a + jb \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$$

$z_0 = x_0 + jy_0$

Ver apartado A.1 Apéndice

Los límites de las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se calculan con los procedimientos aprendidos en FMT2 para funciones de dos variables (límites por polares, radiales,...).

1.3 Continuidad

1.3.1 Definición

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, decimos que f es **continua** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ /\ \forall z \in \mathbb{C}\ ..\ |z - z_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

1.3.2 Teorema para estudiar la continuidad

Sea una función compleja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$:

Haciendo el límite directamente en variable compleja

f es **continua** en $z_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ (1)

Relacionándolo con funciones reales

f es **continua** en $z_0 = x_0 + y_0 j \Leftrightarrow u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en (x_0, y_0) (2)

Al igual que los límites, la continuidad de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se estudia con los procedimientos aprendidos en FMT2 para funciones de dos variables.

1.4 Diferenciabilidad

1.4.1 Definición de derivada

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, su **derivada** en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ viene dada por:

$$f'(z_0) = \overbrace{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}^{1^{\text{a}} \text{ forma}} = \overbrace{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}}^{2^{\text{a}} \text{ forma}}$$

supuesto que este límite exista. y sea un número finito.

1.4.2 Teoremas para estudiar la diferenciabilidad

Condición necesaria y suficiente de diferenciablilidad en el campo complejo

Sea una función compleja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$:

En las funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ decir que una función es derivable y es diferenciable es lo mismo

Para ver si u y v son diferenciables usaremos los teoremas del apartado A.2

$$f \text{ es \textbf{diferenciable} en } z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x,y) \text{ y } v(x,y) \text{ son diferenciables} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Las condiciones

$$\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}}^{u_x = v_y}, \quad \overbrace{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}^{u_y = -v_x}$$

se llaman condiciones de **Cauchy-Riemann**

Fíjate que si no se cumplen las condiciones de C-R puedes asegurar que la función no es derivable

③ Condición necesaria de diferenciabilidad en el campo complejo
Si $f(z)$ diferenciable en $z_0 \Rightarrow f(z)$ continua en z_0
Práctico: Si $f(z)$ no continua en $z_0 \Rightarrow f(z)$ no diferenciable en z_0

① **Condición suficiente de diferenciabilidad en el campo complejo**

Para que $f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$ sea derivable en un punto $z=x+jy$ es suficiente que existan y sean continuas las derivadas parciales de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ y que se cumplan en ese punto las condiciones de C-R

$\left.\begin{matrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{matrix}\right\} \in C^1$ y Se cumple C-R $\} \Rightarrow f(z)$ es diferenciable

② **Condición necesaria de diferenciabilidad en el campo complejo**

¡Cuidado! La condición enunciada es exclusiva del campo complejo y no tiene correspondencia en el campo real

Si $f(z)$ es diferenciable en $z = x_0 + y_0 j \Rightarrow u(x,y) \in C^\infty$ y $v(x,y) \in C^\infty$ en (x_0, y_0)

O lo que es lo mismo:

Si $u(x,y) \notin C^\infty$ ó $v(x,y) \notin C^\infty$ en $(x_0,y_0) \Rightarrow f(z)$ no es diferenciable en $z = x_0 + y_0 j$

La forma práctica de utilizar esta última condición es la siguiente:

Estudiaremos la continuidad de las primeras derivadas parciales de $u(x,y)$ y de $v(x,y)$ y si alguna de las cuatro no es continua entonces podemos afirmar que $f(z)$ no es diferenciable pues se trata de una condición que, como acabamos de enunciar, es <u>necesario</u> que se cumpla para que $f(z)$ sea diferenciable.

1.4.4 Cálculo práctico de la derivada

Fíjate que al ser f derivable, u y v cumplen las condics. de CR:

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

Si la función viene definida como $f(z) = u + vj$ se puede demostrar que su derivada es:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} j = u_x + v_x j \quad \text{o bien} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} j = v_y - u_y j$$

Y todas las combinaciones existentes usando las condiciones de C-R

1.4.5 Coordenadas polares

En algunas ocasiones nos pueden dar la función $f(z)$ en coordenadas polares de forma que $f(z) = u(\rho,\theta) + jv(\rho,\theta)$ donde $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

En este caso se puede demostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}$$

y la derivada de $f(z)$ en este caso queda expresada de la siguiente manera:

$$f(z) = e^{-j\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + j\frac{\partial v}{\partial \rho}\right) = e^{-j\theta}(u_\rho + jv_\rho)$$

O expresada en forma de las otras posibles combinaciones que existen usando las condiciones de C-R

Estudio de analiticidad:

analítica ≡ holomorfa

(1) Condiciones de diferenciabilidad.

(2) Condiciones de C-R

(3) Armónicas

[redacted]

(1) U y V analíticas

(2) C-R

D abi[illegible]
(detrás)

...rfas o analíticas

...: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se dice que f es **holomorfa** o **analítica** en z_0 si ...l que f es diferenciable.

...ra que una determinada función sea holomorfa en z_0 no basta ... z_0. Tiene que serlo en todos los puntos de un entorno de z_0.

... $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ que son holomorfas en A se llama

... $\to \mathbb{C}$ / f es holomorfa en $A\}$

...vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Se dice que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es **entera** si es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$.

Veremos una clasificación más exhaustiva de los puntos singulares en el tema 3

Los puntos en los que una función es holomorfa se denominan puntos regulares, y aquellos en los que la función no es holomorfa se llaman puntos singulares.

Propiedades de las funciones holomorfas

Estas propiedades son muy importantes

- La suma, diferencia, producto, cociente (con denominador no nulo) y composición de funciones holomorfas es también una función holomorfa.

- Si *f(z)* es holomorfa $\Rightarrow$ se cumplen las condiciones de C-R para *u* y *v* $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

- Si *f(z)* es holomorfa $\Rightarrow$ $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, ... son holomorfas

- Si *f(z)* es holomorfa $\Rightarrow$ *f(z)* no depende de $\overline{z}$ (es decir $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$)

  O lo que es lo mismo:

  Si *f(z)* depende de $\overline{z}$ (es decir $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \neq 0$) $\Rightarrow$ *f(z)* no es holomorfa

Ej. de funciones que dependen de $\overline{z}$:

$\left.\begin{array}{l} f(z) = \overline{z} \\ f(z) = |z|^2 = z \cdot \overline{z} \end{array}\right\}$ no son holomorfas xq dependen de $\overline{z}$

Regla de L'Hopital

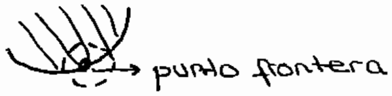
Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones holomorfas en un dominio D y si para $z_0 \in D$ $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$ y $f_2'(z_0) \neq 0$, se verifica:

Fíjate que no se puede aplicar al caso $\dfrac{\infty}{\infty}$ porque en ese caso las funciones no serían holomorfas en z_0

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

$\lim\limits_{z \to z_0}$

Si D es cerrado:



Un dominio es un conjunto abierto y conexo

1.6 Funciones armónicas y Armónicas conjugadas

1.6.1 Definiciones

- Sea $T(x,y)$ una función de dos variables reales definida en un dominio D y que admite primeras y segundas derivadas continuas en D. Se dice que $T(x,y)$ es una **función armónica** en D si se verifica la ecuación de Laplace:

y solo si

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad T_{xx}+T_{yy}=0$$

¡OJO! Si *S(x,y)* es una armónica conjugada de *T(x,y)*, no es cierto en general, que *T(x,y)* sea armónica conjugada de *S(x,y)*. Ver el siguiente ejemplo:

$T(x,y)=x^2-y^2$
$S(x,y)=2xy$
(detrás)

- Sean $T(x,y)$ y $S(x,y)$ dos funciones armónicas en D. Si se verifica que:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{\partial S}{\partial x} \qquad \forall (x,y)\in D$$

Entonces se dice que $S(x,y)$ es **armónica conjugada** de $T(x,y)$.

1.6.2 Propiedades

- Si $T(x,y)=k\in\mathbb{R}$ $\quad\forall (x,y)\in D$ entonces $T(x,y)$ es armónica en D.
- Si $T(x,y)$ es armónica en D entonces $k\cdot T(x,y)$ es armónica en D.
- Si $T_1(x,y)$ y $T_2(x,y)$ son armónicas en D entonces $T_1(x,y)+T_2(x,y)$ es armónica en D.
- Si $T_1(x,y)$ es armónica conjugada de $T_2(x,y)$ y, a su vez, $T_2(x,y)$ es armónica conjugada de $T_1(x,y)$ entonces tanto $T_1(x,y)$ como $T_2(x,y)$ son funciones constantes.

1.6.3 Consecuencias en variable compleja

Sea una función compleja $f(z)=u(x,y)+v(x,y)j$. Se cumple que:

1. $f(z)$ holomorfa en D $\Rightarrow$ $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas

Esta será la que más utilicemos

2. $f(z)$ holomorfa en D $\Leftrightarrow$ $v(x,y)$ es armónica conjugada de $u(x,y)$
3. $f(z)$ holomorfa en D $\Leftrightarrow$ *-u(x,y)* es armónica conjugada de *v(x,y)*

o de manera equivalente:

$v(x,y)$ es armónica conj. de $u(x,y)$ en D $\Leftrightarrow$ *-u(x,y)* es armónica conj. de *v(x,y)* en D

Ejemplo:

Se puede comprobar que:

$T_{xx} + T_{yy} = 0$ T armónica

$S_{xx} + S_{yy} = 0$ S armónica

$$\begin{matrix} v & & u \\ \updownarrow & & \updownarrow \end{matrix}$$

¿S armónica conj. de T? Si

$$\left.\begin{matrix} T_x = S_y \\ T_y = -S_x \end{matrix}\right\} ? \qquad \left.\begin{matrix} T_x = 2x \\ T_y = -2y \\ S_x = 2y \\ S_y = 2x \end{matrix}\right| \quad \left.\begin{matrix} T_x = 2x = S_y \\ T_y = -2y = -S_x \end{matrix}\right\} \checkmark$$

f holomorfa $\Rightarrow$ u, v armónicas $\left.\begin{matrix} S_x = T_y \\ S_y = -T_x \end{matrix}\right\} ?$ $\quad \left.\begin{matrix} S_x = 2y \neq -2y = T_y \\ S_y = 2x \neq -2x = -T_x \end{matrix}\right|$

① Reconstrucción de f(z) donde f(z) es holomorfa

1.6.4 Construcción de la armónica conjugada

Para construir una armónica cónjugada de $u(x,y)$ en D se utiliza el **Método de Euler**:

$$v(x,y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + K$$

No hace falta memorizar esta fórmula. Veremos cómo utilizarla directamente en los ejemplos.

La utilidad de poder construir la armónica conjugada $v(x,y)$ a partir de $u(x,y)$ es que, de esta forma, siempre se puede reconstruir una función holomorfa $f(z)$ partiendo de su parte real o imaginaria:

$$f(z) = u(x,y) + v(x,y)\,j$$

además si queremos dejarla en función de z basta con hacer:

Esta formula sirve siempre que *f(z)* sea holomorfa

$$f(z) = u(z,0) + v(z,0)\,j$$

② Reconstrucción de f(z)

1.6.5 Fórmulas de Milne Thompson

Las fórmulas de Milne Thompson nos permiten reconstruir la función $f(z)$ conociendo sólo una de las partes, $u(x,y)$ ó $v(x,y)$, sin tener que calcular la otra.

- Suponemos conocido $\mathrm{Re}\left[f(z)\right] = u(x,y)$ y queremos reconstruir la función $f(z)$. Teniendo en cuenta que $f' = u_x - ju_y \rightarrow f'(z) = u_x(z,0) - ju_y(z,0)$, integrando:

$$f(z) = \int\left(u_x(z,0) - ju_y(z,0)\right)dz + C,\ C \in \mathbb{C}$$

- Suponemos conocido $\mathrm{Im}\left[f(z)\right] = v(x,y)$ y queremos reconstruir la función $f(z)$. Teniendo en cuenta que $f' = v_y + jv_x \rightarrow f'(z) = v_y(z,0) + jv_x(z,0)$, integrando:

$$f(z) = \int\left(v_y(z,0) + jv_x(z,0)\right)dz + C,\ C \in \mathbb{C}$$

Además, existen otras fórmulas en las que no es necesario integrar. Estas fórmulas tienen el inconveniente de que sólo se pueden usar si la función $f(z)$ está definida en $z = 0$

- Suponemos conocido $\mathrm{Re}\left[f(z)\right] = u(x,y)$ y queremos reconstruir la función $f(z)$:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2j}\right) + \alpha$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es una constante a determinar imponiendo que $u(x,y) = \mathrm{Re}\left[f(z)\right]$.

- Suponemos conocido $\mathrm{Im}\left[f(z)\right] = v(x,y)$ y queremos reconstruir la función $f(z)$:

$$f(z) = 2jv\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2j}\right) + \alpha$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es una constante a determinar imponiendo que $v(x,y) = \mathrm{Im}\left[f(z)\right]$.

1.7 Funciones elementales

1.7.1 Definiciones previas

Sea una función compleja $f(z)$. Si a cada valor de z le corresponde sólo un valor de $f(z)$ decimos que f es una **función univaluada o uniforme** (tal y como entendemos las funciones en cálculo de variable real).

Más adelante estudiaremos en más profundidad las funciones multiformes

Si a cada valor de z le corresponde más de un valor de $f(z)$ decimos que f es una **función multivaluada o multiforme.**

1.7.2 Función exponencial

La función exponencial del análisis complejo se define para todo z como:

$$e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x(\cos y + j\operatorname{sen} y)$$

- Es uniforme
- Está definida $\forall z \in \mathbb{C}$
- Es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$ (función entera)
- El recorrido de la función exponencial e^z es todo el plano complejo excepto el origen.
- La función exponencial compleja se reduce a la función exponencial real para números con parte imaginaria nula.
- Para número imaginarios puros la exponencial compleja coincide con la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + j\operatorname{sen}\theta$$

- La función exponencial es periódica de período imaginario puro $2\pi j$:

$$e^{z+2\pi j} = e^z \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- La función exponencial es entera (holomorfa en todo el plano complejo) y verifica que:

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

- Además se verifican las siguientes propiedades:

$$e^{z1} \cdot e^{z2} = e^{z1+z2}$$

$$e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathrm{C}$$

1.7.3 Polinomio de grado n

$$p_n(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Es uniforme
- Está definida y es holomorfa $\forall z \neq 0$ (entera)

1.7.4 Función racional

Es el cociente de dos polinomios

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

- Es uniforme
- Está definida y es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$ que cumpla que $Q_m(z) \neq 0$

1.7.5 Funciones trigonométricas circulares

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \qquad tg\ z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

- Son funciones uniformes
- Definidas y holomorfas $\forall z \in \mathbb{C}$ excepto la *tg z* que lo está para $\forall z \in \mathbb{C} \mid \cos z \neq 0$
- Las funciones sin z y cos z no están acotadas en módulo
- $\sin z = \sin(z + 2k\pi) \qquad \cos z = \cos(z + 2k\pi) \qquad tgz = tg(z + k\pi)$
- Tienen los mismos "ceros" que las funciones reales

1.7.6 Funciones trigonométricas hiperbólicas

$$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad th(z) = \frac{sh(z)}{ch(z)}$$

- Son funciones uniformes
- Definidas y holomorfas $\forall z \in \mathbb{C}$ excepto la *th(z)* que lo está para $\forall z \in \mathbb{C} \mid ch(z) \neq 0$
- $sh(z) = sh(z + j2k\pi) \qquad \text{ch}(z) = ch(z + j2k\pi) \qquad \text{th}(z) = th(z + jk\pi)$
- sh z y ch z tienen infinitos "ceros" (a diferencia del caso real)

Se cumplen las siguientes relaciones, que se pueden comprobar fácilmente:

$$\cos(jz) = ch(z)$$
$$ch(jz) = \cos z$$
$$sh(z) = j \sin z$$
$$\sin(jz) = jsh(z)$$

1.8 Funciones multiformes (o multivaluadas)

Ya hemos visto anteriormente el concepto de función multiforme. Escrito de una manera más rigurosa:

$$w = f(z) \text{ es multiforme} \Leftrightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} \mid f(z_0) \text{ no es único}$$

Por ejemplo, entre otras; son funciones multiformes las siguientes:

$f(z) = \ln z$ La función f toma infinitos valores para cada valor de z

$g(z) = \sqrt[n]{z}$ La función g toma n valores para cada valor de z

...

1.8.1 Función logaritmo

La función logaritmo se define en los puntos no nulos como:

$$f(z) = \ln z = \ln \rho e^{j\theta} = \ln \rho e^{j(\theta+2k\pi)} = \ln \rho + \ln e^{j(\theta+2k\pi)} = \ln \rho + j(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Observa que la función logaritmo es una función **multiforme** ya que para una misma preimagen z existe más de una imagen (de hecho, existen infinitas puesto que k puede tomar infinitos valores enteros).

Muchas veces interesa obtener una función uniforme a partir de una función multiforme. A cada una de las funciones uniformes en que podemos "separar" la función multiforme se le denomina **rama.**

A la rama que se obtiene al dar el valor $k=0$ se la denomina **rama principal**. Así, la rama principal del logaritmo neperiano tiene la siguiente expresión:

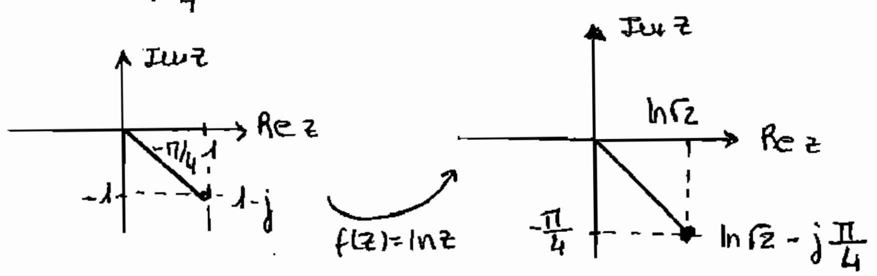
$$\ln z = \ln \rho + j(\theta + 2k\pi)|_{k=0} = \ln \rho + j\theta$$

Pero no basta con fijar el valor de k, a un número entero concreto para conseguir quedarnos con una función uniforme. Lo podemos ver en el siguiente ejemplo:

- Vamos a considerar $k=0$

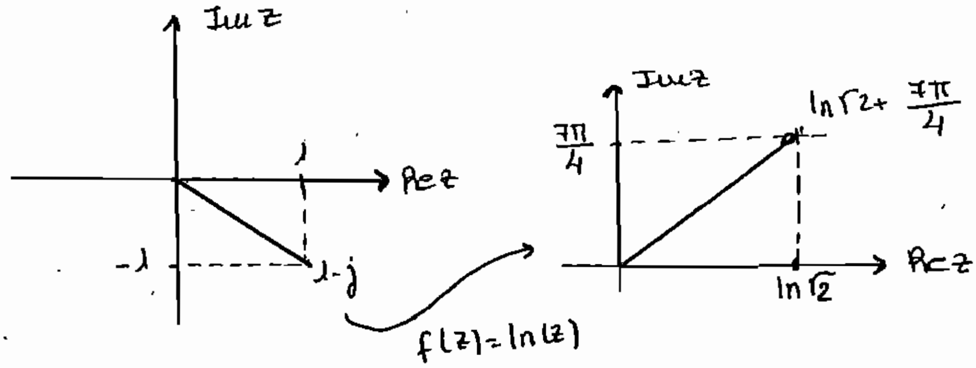
$$1-j = \sqrt{2}\, e^{-j\cdot\frac{\pi}{4}} \xrightarrow[\omega=f(z)]{} \ln(1-j) = \ln(\sqrt{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}) = \ln\sqrt{2} + j\left(-\frac{\pi}{4} + \cancel{2k\pi}^{\,0}\right) =$$

$$= \ln\sqrt{2} - j\frac{\pi}{4}$$



$$1-j = \sqrt{2}\, e^{j\frac{7\pi}{4}} \xrightarrow[\omega=f(z)]{} \ln(1-j) = \ln(\sqrt{2}\, e^{j\frac{7\pi}{4}}) = \ln\sqrt{2} + j\left(\frac{7\pi}{4} + \cancel{2k\pi}^{\,0}\right) =$$

$$= \ln\sqrt{2} + j\frac{7\pi}{4}$$



Im z
Re z
1
-1
1-j
f(z)=ln(z)
Im z
7π/4
ln√2 + 7π/4
Re z
ln√2

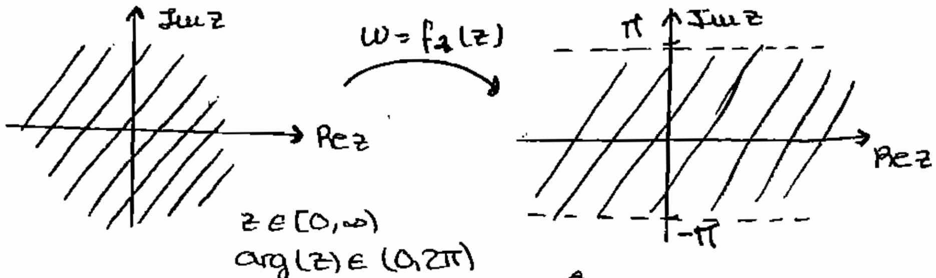
¡Esto es muy importante!

Es decir, que [redacted]

De esta forma podríamos definir varias ramas diferentes para un mismo valor de $k=0$. Así, en el ejemplo anterior, podemos fijar el margen de variación de $\theta = arg(z)$ de muchas formas, por ejemplo las siguientes:

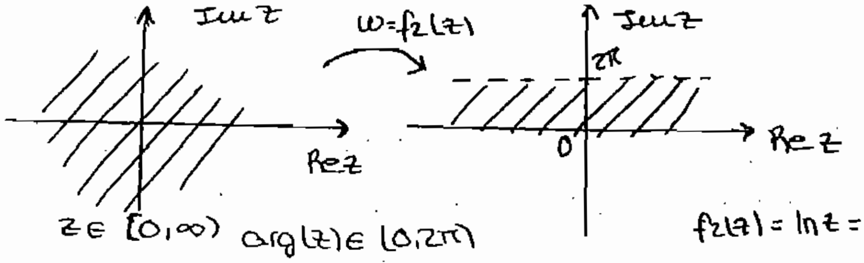
Fíjate que son aplicaciones distintas, porque tienen distinto conjunto imagen

(1) $f_1(z) = \ln z$ Rama definida por $k=0$ y $\arg(z) \in (-\pi,\pi)$



$f_1(z) = \ln z = \ln|z| + j(\underbrace{\arg(z)}_{(-\pi,\pi)} + \cancel{2k\pi}\,0)$

(2) $f_2(z) = \ln z$. Rama definida por $k=0$ y $\arg(z) \in (0,2\pi)$



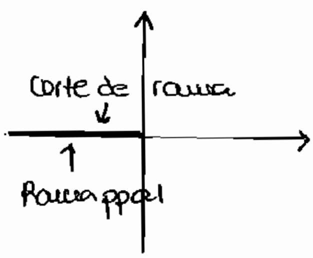
sigue x detrás

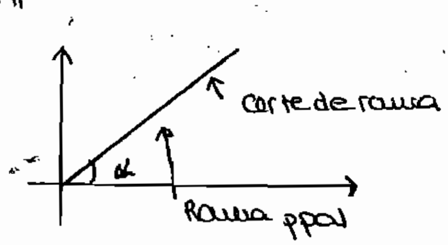
$f_2(z) = \ln z = \ln|z| + j(\arg(z) + \cancel{2k\pi}\,0)$

Al fijar el margen de variación de $\theta = arg(z)$ aparece lo que se llama **corte de rama**. En los ejemplos anteriores los cortes de rama serían:

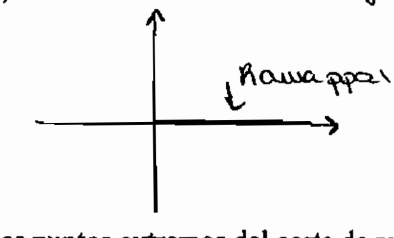
(1) $f_1(z) = \ln z$ ($k=0$, $\arg z \in (-\pi,\pi)$) (3)

Habitualmente los cortes de rama tienen forma de semirrectas o segmentos cuyos extremos son los puntos de ramificación





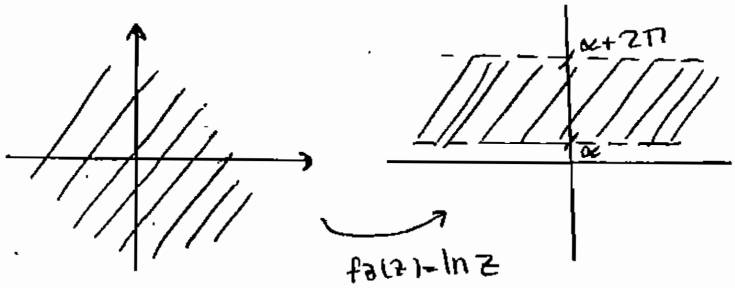
(2) $f_2(z) = \ln z$ ($k=0$, $\arg(z) \in (0,2\pi)$)



A los puntos extremos del corte de rama se les denominan **puntos de ramificación**

Todos los puntos del corte de rama (incluidos los puntos de ramificación) son puntos singulares no aislados esenciales. Lo vemos con un ejemplo. Por detrás (2)

b) $f_a(z) = \ln z$ Rama definida por $k=0$ y $\arg(z) \in (\alpha, \alpha+2\pi)$



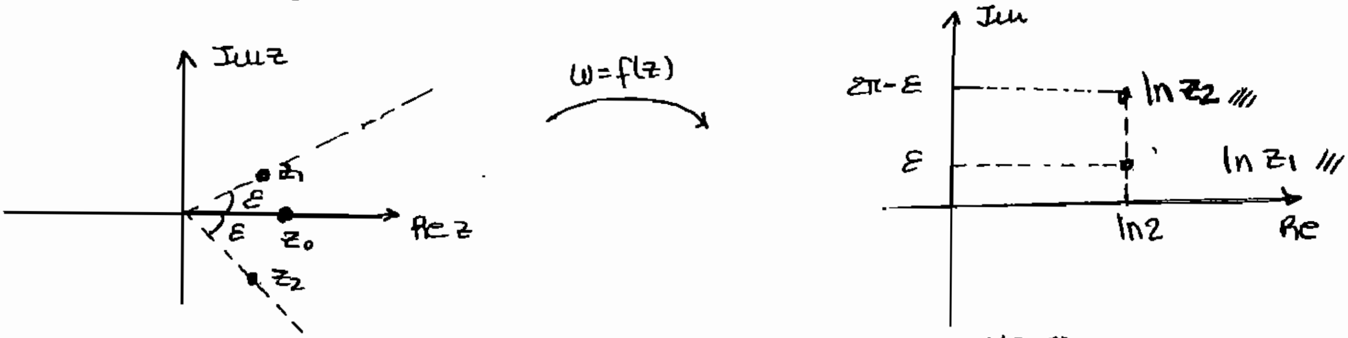
$f_a(z) = \ln z = \ln|z| + j(\arg(z) + 2k\pi)$, con $\arg(z) \in (\alpha, \alpha+2\pi)$

$|z| \in [0, \infty)$

$\arg(z) \in (\alpha, \alpha+2\pi)$

② Ejemplo 1

$f(z) = \ln z \quad (k=0, \arg(z) \in (0, 2\pi))$



$z_0 = 2 = 2 \cdot e^{j0}$

$z_1 = 2 \cdot e^{j(0+\varepsilon)}$

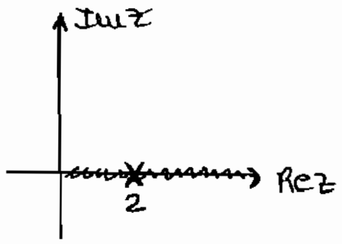
$z_2 = \cancel{2 \cdot e^{j(0-\varepsilon)}} = 2 \cdot e^{j(2\pi-\varepsilon)}$

$\ln z_1 = \ln(2 \cdot e^{j(0+\varepsilon)}) = \ln 2 + j\varepsilon$

$\ln z_2 = \ln(2 e^{j(2\pi-\varepsilon)}) = \ln 2 + j(2\pi - \varepsilon)$

Son puntos muy próximos al corte de rama, sin embargo sus imágenes están muy separados. Esto pasa con todos los puntos de corte de rama. Por eso son puntos singulares, no aislados y esenciales.

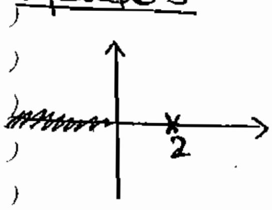
Ejemplo 2 $\quad f(z) = \dfrac{\ln z}{z-2} \quad (k=0, \arg(z) \in [0, 2\pi))$



¿$z=2$? $\displaystyle\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{\ln z}{z-2} = \frac{\ln 2}{0} = \frac{\nexists}{0} = \nexists$

$z=2$ es un punto singular esencial (no es un polo)

Ejemplo 3 $\quad f(z) = \dfrac{\ln z}{z-2} \quad (k=0, \arg(z) \in (-\pi, \pi))$



¿$z=2$? $\displaystyle\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{\ln z}{z-2} = \frac{\ln(2 \cdot e^{j0})}{2-2} = \frac{\ln 2 + j0}{0} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow z=2$ es un polo (simple)

1.8.2 Función raíz enésima

La función raíz enésima se define de la siguiente forma:

$$f(z)=(z)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho e^{j\theta}}=\sqrt[n]{\rho e^{j(\theta+2k\pi)}}=\sqrt[n]{\rho}\sqrt[n]{e^{j(\theta+2k\pi)}}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{\frac{j(\theta+2k\pi)}{n}},n\in\mathbb{N},k=0,1,...,n-1$$

Se trata de una función multiforme que toma n valores para cada valor de z.

De nuevo, para quedarse con una sola rama, se fija el valor de k, y el margen de variación de $arg(z)$.

1.8.3. Función potencia

Se define como:

$$f(z)=z^a\rightarrow\ln f(z)=\ln z^a\rightarrow\ln f(z)=a\ln z\rightarrow f(z)=e^{a\ln z},a\in\mathbb{C}$$

Se trata de una función multiforme que toma infinitos valores para cada valor de z.

De nuevo, para quedarse con una sola rama, se fija el valor de k, y el margen de variación de $arg(z)$.

APÉNDICE A: REPASO DE FUNCIONES REALES DE DOS VARIABLES.

A partir de aquí todo lo dicho para $u(x, y)$ es igualmente válido para $v(x, y)$

El estudio de la continuidad y la diferenciabilidad de una función $f(z)$ se basa en el estudio de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ y estas dos funciones son funciones reales de dos variables reales $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que se estudian siguiendo los métodos aprendidos en FMT2 para funciones de varias variables. Aquí hacemos un breve repaso de estos métodos de variable real

A.1 Continuidad de funciones reales de dos variables

Para calcular los límites de la forma $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y)$ se puede optar por varios procedimientos:

$(x,y) \to (a,b) \Rightarrow$ Cambio de variable
$(a,b) \neq (0,0)$

- Coordenadas polares.
  Se trata de hacer el siguiente cambio de variable:

  $$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta$$

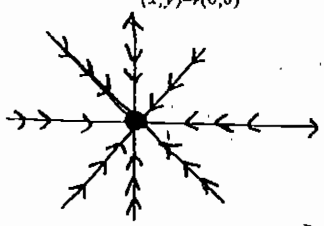
  de esta forma la expresión del límite pasa a ser:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = \lim_{\rho\to 0} u(\rho, \theta)$$

  que ya depende sólo de una variable y que, por tanto, ya podemos resolver utilizando las reglas usuales para límites de una variable.

- Límites radiales o direccionales. → $\boxed{\text{condición necesaria}}$
  Se trata de sustituir la variable y por $y = mx$ de forma que nos queda un límite de una sola variable que ya podemos resolver.

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} u(x, mx) = \lim_{x\to 0} u(x)$$



Nos acerquemos x la recta q nos acerquemos al pto (0,0) el límite tiene q ser igual. Si salen distintos el límite no existe, si salen iguales no hemos demostrado nada.

- Límites reiterados. → $\boxed{\text{condición necesaria}}$
  Se trata de calcular los siguientes límites:

  $$l_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) \qquad l_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right)$$

  De esta forma, si ambos límites existen y son distintos podemos asegurar la NO existencia de límite. En los demás casos tenemos un candidato al límite ya que de existir debe ser el que aparece al calcular los límites reiterados.

A.2 Diferenciabilidad de funciones reales de dos variables

A.2.1 Derivadas parciales

Las derivadas parciales se calculan de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0, y_0+h) - u(x_0; y_0)}{h}$$

A.2.2 Condición necesaria de diferenciabilidad

Si $u(x,y)$ es diferenciable en $(x_0, y_0) \Rightarrow u(x,y)$ es continua (x_0, y_0)

Si $u(x,y)$ no es continua en $(x_0,y_0) \Rightarrow u(x,y)$ no es diferenciable en (x_0,y_0)

A.2.3 Condición suficiente de diferenciabilidad

Si $u(x,y) \in C^1$ en $(x_0, y_0) \Rightarrow u(x,y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0)

A.2.4 Funciones de clase C

En general, se dice que una función $f(x,y) \in C^r(A)$ si es continua en A, tiene derivadas parciales hasta de orden r y todas ellas son continuas en A.

En particular se dice que una función $f(x,y) \in C^1(A)$ si es continua en A, tiene sus dos primeras derivadas parciales y son ambas continuas en A.

Se dice que una función $f(x,y) \in C^\infty(A)$ si es continua en A, tiene derivadas parciales de todos los órdenes y son todas ellas continuas en A.

TEMA 1: FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

(funciones complejas de variable compleja)

1. F. COMPLEJA (DEF)

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$x+jy \longrightarrow f(x+jy) = f(z) = u(x,y) + j\, v(x,y)$$

2. LÍMITES

$T^{\underline{ma}}$: Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = L \Rightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = |L|$

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell = a + jb \quad \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$ donde $z_0 = x_0 + jy_0$

↳ estos límites se calculan por $\begin{cases} \text{polares} \\ \text{lím. radiales} \\ \text{lím. reiterados} \end{cases}$

3. CONTINUIDAD

- En complejos:

$$f \text{ es continua en } z_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

- Con reales

f es continua en $z_0 = x_0 + jy_0 \Leftrightarrow u(x,y), v(x,y)$ son continuas en (x_0, y_0)

4. DIFERENCIABILIDAD (en este tema diferenciabilidad = derivabilidad)

1. Definición de derivada

1. $$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

2. Usando u, v

$$f'(z) = u_x + v_x j = v_y - u_y j$$ (se cumple C-R)

2. Teoremas xa estudiar la diferenciabilidad

1| CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE → el q me tengo q aprender

f es diferenciable en z_0 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} ① \; u \text{ y } v \text{ diferenciables} \\ ② \text{ se cumple C-R } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \end{cases}$

si algo de esto no se cumple entonces f no es dif.

① Estudio de u, v diferenciables

• Cálculo de derivadas parciales $\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0,y_0)}{h} \\ u_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{u(x_0, y_0+h) - u(x_0,y_0)}{h} \end{cases}$

• Tmas xa estudiar diferenciab. de u y v:

1. Si $u(x,y)$ diferenciable en $(x_0,y_0) \Rightarrow u(x,y)$ continua en (x_0,y_0)
2. Si $u(x,y) \in C^1$ en $(x_0,y_0) \Rightarrow u(x,y)$ dif. en x_0,y_0
   ↳ (las primeras derivadas son continuas)

2| CONDICIÓN NECESARIA 1

si $f(z)$ diferenciable en $z_0 \Rightarrow f(z)$ continua en z_0

3| CONDICIÓN NECESARIA 2 (sale del 1|)

Si $u \notin C^\infty$ ó $v(x,y) \notin C^\infty$ en $(x_0,y_0) \Rightarrow f(z)$ no diferenciable en (x_0,y_0)
↳ estudiando continuidad de las 1as derivadas parciales

NOTA **f(z) en coordenadas polares**. $f(z) = u(\rho,\theta) + j\,v(\rho,\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

① C-R $\begin{cases} u_\rho = \dfrac{1}{\rho} v_\theta \\ \dfrac{1}{\rho} u_\theta = -v_\rho \end{cases}$

② Derivada de f(z):

$$f'(z) = e^{-j\theta}\left(u_\rho + j\,v_\rho\right)$$

T1 : Hoja 2

5. FUNCIONES HOLOMORFAS (holomorfa ≡ analítica)

1. Definición

f es holomorfa en z_0 si $\exists$ un entorno de z_0 en el q f es diferenciable.

Si f es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ f entera

ptos regulares $\Rightarrow$ f holomorfa
singulares $\Rightarrow$ f no holomorfa

2. Propiedades

① suma, dif, producto, cociente y composición de f holomorfas $\Rightarrow$ f holomorfa
② si f holomorfa $\Rightarrow$ C-R
③ si f holomorfa $\Rightarrow$ $f', f'', f''' \dots$ holomorfas
④ si f holomorfa $\Rightarrow$ f no depende de $\bar{z}$

3. L'Hopital

Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ holomorfas en D, $z_0 \in D$, $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$ y $f_2'(z_0) \neq$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

!!! no vale xa el caso $\frac{\infty}{\infty}$

6. FUNCIONES ARMÓNICAS Y ARMÓNICAS CONJUGADAS

- Armónica : $r(x,y)$ armónica $\Leftrightarrow r_{xx} + r_{yy} = 0$ (Laplace)
- Armónica conjugada : Sean r y s armónicas. Si $r_x = s_y$ y $r_y = -s_x \Rightarrow$ s armónica conjugada de r.

6.1 Propiedades

Si r_1 armónica conjugada de r_2 y r_2 armónica conjugada de $r_1 \Rightarrow r_1$ y r_2 son f. constantes

6.2 Relación con f holomorfas

1. f holomorfa $\Rightarrow$ u y v armónicas
2. " $\Leftrightarrow$ v armónica conjugada de u
3. " $\Leftrightarrow$ $-u$ " " de v

7. RECONSTRUCCIÓN DE F(Z)

1. MÉTODO 1 : solo válido pa f(z) holomorfas

Construimos la armónica conjugada por Euler (a partir de u o v $\Rightarrow$ dato), luego hacemos:

$$f(z) = u(z,0) + v(z,0)j$$

2. MÉTODO 2 : Milne Thompson (no hace falta calcular la otra parte)

1. Conocemos Re $f(z) = u$

$$f(z) = \int (u_x(z,0) - j\,u_y(z,0))\,dz + C \qquad C \in \mathbb{C}$$

2. Conocemos $v(x,y)$

$$f(z) = \int (v_y(z,0) + j\,v_x(z,0))\,dz + C \qquad C''$$

→ **Además si f(z) está definida en z=0 :**

1. Conocemos u $\Rightarrow$ $f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{C}$
2. Conocemos v $\Rightarrow$ $f(z) = 2iv\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{C}$

- Cálculo de la árмonica conjugada

MÉTODO DE EULER

DATO $\Rightarrow$ $u(x,y)$

$v(x,y)$ armónica conjugada de $u(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

① Hallo u_x derivando parcialmente $u(x,y)$ e igualo a v_y.

② Integro v_y respecto a y:

$$v(x,y) = \left(\int v_y \, dy \right) + \varphi(x)$$

③ Para hallar $\varphi(x)$

Hallo v_x derivando parcialmente $v(x,y)$

$v_x + \varphi'(x) = -u_y \Rightarrow \varphi(x) = \int -u_y - v_x \, dx + C_1$ donde $C_1 \in \mathbb{C}$

TEMA 1 : FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

- Ejercicio 1

Si f es una función entera, probar que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$$

teniendo en cuenta que se cumple que:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$$
$$v_{xx}(x,y)+v_{yy}(x,y)=0$$

f función entera $\equiv$ holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$

Como $f(z)$ es holomorfa $\Rightarrow$ se cumple C-R $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$f(z) = u(x,y) + j v(x,y) \longrightarrow |f(z)| = \sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)} \longrightarrow |f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y)$

$f'(z) = u_x(x,y) + j v_x(x,y) \Rightarrow$ por definición

- Calculamos el primer término de la igualdad:

$$\left(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2}_{①} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2}_{②}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[u^2(x,y)+v^2(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}u^2(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}v^2(x,y) \overset{\text{nota}}{=} 2u(x,y)u_x(x,y) + 2v(x,y)v_x(x,y).$$

nota: $\frac{d}{dx}g^2(x) = 2g(x)\cdot g'(x)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[2u(x,y)u_x(x,y) + 2v(x,y)v_x(x,y)\right] =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,y)u_x(x,y)\right] + 2\frac{\partial}{\partial x}\left[v(x,y)v_x(x,y)\right] = 2\left[u_x(x,y)u_x(x,y) + u_{xx}(x,y)\cdot u(x,y)\right] + 2\left[v_x(x,y)v_x(x,y) + v_{xx}(x,y)v(x,y)\right] = 2\left[u_x^2(x,y) + v_x^2(x,y) + u(x,y)u_{xx}(x,y) + v(x,y)\cdot v_{xx}(x,y)\right].$$

Análogamente

$$\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2} = 2\left[u_y^2(x,y) + v_y^2(x,y) + u(x,y)\cdot u_{yy}(x,y) + v(x,y)\cdot v_{yy}(x,y)\right]$$

Ahora sumando ① y ②:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 = 2u_x^2 + 2v_x^2 + \underline{2u\cdot u_{xx}} + \underline{2v\cdot v_{xx}} + 2u_y^2 + 2v_y^2 + \underline{2\cdot 2u\, u_{yy}} + \underline{2v\cdot v_{yy}} =$$

$$= 2u\cdot[\underbrace{u_{xx}+u_{yy}}_{0}] + 2v[\underbrace{v_{xx}+v_{yy}}_{0}] + 2[u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2] = 2[u_x^2 +$$

↳ nos lo dice el enunciado

C-R $\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right. \Rightarrow$ f es entera

$$+ (-v_x)^2 + v_x^2 + u_x^2] = 4(u_x^2+v_x^2) = \boxed{4\cdot|f'(z)|^2}$$

Duda!

- Ejercicio 2

Dada la función holomorfa $f = u + jv$ se pide probar que $f_1 = \dfrac{u^2 - v^2}{2} + juv$ es holomorfa.

$f = u + jv \longrightarrow f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$

$f_1 = \underbrace{\dfrac{u^2 - v^2}{2}}_{U} + j\,\underbrace{uv}_{V}$

pues $\mathbb{C}$ es abierto (cerrado también)

[DATO]: $f(z)$ holomorfa $\forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f(z)$ diferenciable $\forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x,y),\ v(x,y) \text{ diferenciables (DATO)} \\ u_x = v_y\ ,\ u_y = -v_x \end{cases}$

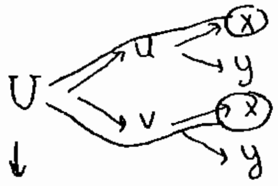
- Tenemos que demostrar que f_1 es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$

$f_1(z)$ holomorfa $\forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f_1$ diferenciable $\forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} U, V \text{ diferenciables } ① \\ U_x = V_y\ ,\ U_y = -V_x\ ② \end{cases}$

Si demostramos ① y ② queda demostrado que f_1 es holomorfa.

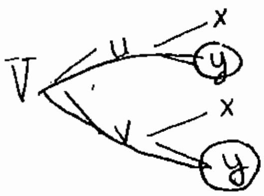
① U, V son funciones diferenciables por ser producto, resta, cociente con denominador no nulo de las funciones u y v que son diferenciables.

② Vemos si se cumple C-R



arbol de dependencias

$U_x = \dfrac{\partial U}{\partial u} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial u}{\partial x}}_{u_x} + \dfrac{\partial U}{\partial v} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial v}{\partial x}}_{v_x} = u \cdot u_x - v \cdot v_x$



$V_y = \dfrac{\partial V}{\partial u} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial u}{\partial y}}_{u_y} + \dfrac{\partial V}{\partial v} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial v}{\partial y}}_{v_y} = v \cdot u_y + u \cdot v_y =$

$= v(-v_x) + u \cdot u_x = u \cdot u_x - v \cdot v_x$ Así que $\boxed{U_x = V_y}$

$u_y = -v_x$
$v_y = u_x$

$$U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} = u \cdot u_y - v \cdot v_y$$

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \cdot u_x + u \cdot v_x = v \cdot v_y - u \cdot u_y$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Así que $\boxed{U_y = -V_x}$

Se cumplen ① y ② $\Leftrightarrow$ f_1 es diferenciable $\forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f_1$ es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$

Otra forma

- Propiedad: la suma, diferencia, producto, cociente (con denom. no nulo) y composición de funciones holomorfas es también una función holomorfa.

$$f = u + jv \Rightarrow \text{holomorfa}$$

$$f^2 = (u+jv)^2 = u^2 + \underbrace{j^2}_{-1} v^2 + 2ujv = u^2 - v^2 + 2ujv$$

$$f^2/2 = \frac{u^2 - v^2}{2} + juv$$

Si f es holomorfa $\Rightarrow f^2/2$ es holomorfa //

Ejercicio 3

Sea g una función compleja, de variable compleja y holomorfa en un abierto U. Sea f definida como

$$f(z) = \overline{z}\, g(z)$$

a.- Encontrar una condición necesaria y suficiente para que f sea holomorfa en U.
b.- Encontrar el conjunto de puntos en donde es holomorfa la función

$$f(z) = \overline{z}\,(sen z - \cos z)$$

$g(z)$ holomorfa en A (abierto)

$f(z) = \bar{z} \cdot g(z)$

DATO

g holomorfa en A (abierto)
$\Updownarrow$
g diferenciable (derivable) en A (abto)
$\Updownarrow$
$\begin{cases} u, v \text{ diferenciables en A} \\ C-R \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \end{cases}$

a) $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z = x+jy \longrightarrow g(z) = u(x,y) + jv(x,y)$

$z = x+jy \longrightarrow \bar{z} = x - jy$

$f(z) = \bar{z}\, g(z) = (x-jy)[u(x,y) + jv(x,y)] =$

$= xu(x,y) - jyu(x,y) + jxv(x,y) - \cancel{j^2}^{-1} yv(x,y) =$

$= \underbrace{xu(x,y) + yv(x,y)}_{U = Re[f(z)]} + j\underbrace{[xv(x,y) - yu(x,y)]}_{V = Im[f(z)]}$

• Obligamos a que: $f(z)$ holomorfa en A (ab) $\Leftrightarrow$ f diferenciable en A (ab) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} U, V \text{ diferenciables en A } (1) \\ C-R \begin{cases} U_x = V_y \\ U_y = -V_x \quad (2) \end{cases} \end{cases}$

(1) Se cumple que U y V son funciones diferenciables por ser suma y producto de funciones diferenciables: $x, y, \underbrace{u(x,y), v(x,y)}_{\text{DATO xq } g(z) \text{ es holomorfa}}$

(2) $U_x = \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[xu(x,y) + yv(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}[xu(x,y)] + \dfrac{\partial}{\partial x}[yv(x,y)]$

$= 1 \cdot u + u_x \cdot x + 0 \cdot v + v_x y = u + xu_x + yv_x$

$V_y = \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[xv(x,y) + yu(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}[xv(x,y)] + \dfrac{\partial}{\partial y}[yu(x,y)] =$

$= 0 \cdot v + v_y \cdot x - [1 \cdot u + u_y \cdot y] = xv_y - u_y \cdot y - u$

Se debe cumplir: $U_x = V_y \Rightarrow u + xu_x + yv_x = xv_y - u_y y - u \Rightarrow$

$\Rightarrow 2u + x\underbrace{(\cancel{u_x - v_y})}_{0} + y\underbrace{(\cancel{v_x + u_y})}_{0 \text{ (holomorfa)}} = 0 \Rightarrow 2u = 0 \Rightarrow u = 0$ //

$U_y = \dots = x u_y + v_y \cdot y + v$

$V_x = \dots = v + x v_x - u_x y$

- Se debe cumplir:

$U_y = -V_x \rightarrow x u_y + v_y y + v = -(v + x v_x - u_x y) \Rightarrow 2v = 0 \rightarrow v = 0$

Así que $g(z) = u(x,y) + j \cdot v(x,y) = 0 + j \cdot 0 = 0$ en el abierto $A \Leftrightarrow f(z)$ holomorfa en A.

Ejercicio 4 **Calcular la armónica conjugada de la función $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$. Obtener $f(z)$.**

$u(x,y) = y^3 - 3x^2y$

Suponga además que $f(j)=0$

- Comprobamos que u es armónica

$$\left.\begin{array}{l} u_x = -6xy \quad , u_{xx} = -6y \\ u_y = 3y^2 - 3x^2 \; , u_{yy} = 6y \end{array}\right\} u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0 \; ✓$$

$\boxed{1^a \text{ forma}}$: Calculamos $v(x,y)$ q es la armónica conjugada de $u(x,y)$ por el método de Euler.

$$V \text{ armónica conjugada de } u \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$u_x = -6xy \xrightarrow[u_x = v_y]{} v_y = -6xy \xrightarrow[\text{Int. respecto a } y]{} v(x,y) = -\int 6xy\,dy = -6x\frac{y^2}{2} + \varphi(x)$$

$$\rightarrow v(x,y) = -3xy^2 + \varphi(x)$$

- Ahora calculamos $\varphi(x)$. Para ello:

$$v_x = -3y^2 + \varphi'(x) \xrightarrow[u_y = -v_x]{} u_y = 3y^2 - \varphi'(x) \longrightarrow \cancel{3y^2} - 3x^2 = \cancel{3y^2} - \varphi'(x) \rightarrow \varphi'(x) = 3x^2 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C, \quad C \in \mathbb{C} \quad \text{Así que: } \boxed{v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C \quad C \in \mathbb{C}}$$

duda

$$f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y) = \underbrace{y^3 - 3x^2y}_{u(x,y)} + j\underbrace{(-3xy^2 + x^3 + C)}_{v(x,y)}, \quad C \in \mathbb{C}$$

- Para dejarla en función de z:

$$f(z) = u(z,0) + j\,v(z,0) = 0^3 - 3z^2 \cdot 0 + j(-3z \cdot 0^2 + z^3 + C) \longrightarrow f(z) = j(z^3 + C), \; C \in \mathbb{C}$$

(f holomorfa)

- Para sacar C usamos $f(j)=0$

$j^2 \cdot j = -j$

$$f(j)=0 \Rightarrow f(j) = j(j^3 + C) = 0 \Rightarrow \cancel{j^3} + C = 0 \Rightarrow C = j \Rightarrow f(z) = j(z^3 + j) = jz^3 + \cancel{j^2}^{-1} =$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = -1 + jz^3}$$

2ª forma

$f(z)$ holomorfa $\Rightarrow$ $f'(z)$ holomorfa

$f' = u_x + j v_x = u_x - j u_y \xrightarrow[f' \text{ holom.}]{} f'(z) = u_x(z,0) - j u_y(z,0) \rightarrow f(z) = \int [u_x(z,0) -$

$v_x = -u_y$ (CR)

$- j u_y(z,0)] dz + K; \quad K \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{aligned} u_x(x,y) &= -6xy \\ u_y(x,y) &= 3y^2 - 3x^2 \end{aligned}\right\} f(z) = \int [-6z \cdot 0 - j(3 \cdot 0^2 - 3z^2)] dz + K = j \int 3z^2 dz + K = j \cdot z^3 + K$$

$K \in \mathbb{C}$

- Obtenemos $v(x,y)$ armo. conj. de $u(x,y)$

$f = j \cdot z^3 + K = j(x+jy)^3 + \underbrace{A}_{\in \mathbb{R}} + j \underbrace{B}_{\in \mathbb{R}} = j(x+jy)(x+jy)^2 + A + jB = j(x+jy)(x^2 + j^2y^2 +$ ($z = x+jy$; $= K$)

$+ 2xyj + A + jB = j[x^3 - xy^2 + 2jx^2y + jx^2y - jy^3 - 2xy^2] + A + jB =$

$= jx^3 - jxy^2 - 2x^2y - x^2y + y^3 - 2jxy^2 + A + jB = \underbrace{y^3 - 3x^2y + A}_{u(x,y)} + j\underbrace{(x^3 - 3xy^2 + B)}_{v(x,y)}$

$\boxed{v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + B}$

- Usamos $f(j) = 0 \rightarrow f(j) = j \cdot j^3 + K = \cancel{j^4} + K = 0 \Rightarrow K = -1$

$j^2 j^2 = -1(-1) = 1$

$\boxed{f(z) = -1 + jz^3}$

3ª forma

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= y^3 - 3x^2y \text{ (DATO)} \\ f(z) &= 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2j}\right) + \alpha, \ \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}\right\} f(z) = 2\left[\left(\frac{z}{2j}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{2}\right)^2 \cdot \frac{z}{2j}\right] + \alpha = \frac{2z^3}{8}\left[\frac{1}{j^3} -\right.$$

$$\left. - \frac{3}{j}\right] + \alpha = \frac{z^3}{4}\left(-\frac{1}{j} - \frac{3}{j}\right) + \alpha = \frac{z^3}{j} + \alpha = jz^3 + \alpha$$

$1/j^3 = 1/j$

$1/j = -j$

Para calcular $v(x,y)$ se hace igual que en la 2ª forma:

Usamos $f(j) = 0 \rightarrow f(j) = j \cdot j^3 + \alpha = j^4 + \alpha = 1 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1$

$\boxed{f(z) = -1 + jz^3}$

Ejercicio 5

Sea $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Se pide:

a) Demostrar que $u(x, y)$ es armónica.
b) Calcular la armónica conjugada.
c) Calcular una función analítica $f(z)$ tal que u sea su parte real.

a) Tengo que probar que $u_{xx}+u_{yy}=0$

$$\left.\begin{array}{l} u_x=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_{xx}=\dfrac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3} \\[2ex] u_y=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_{yy}=\dfrac{2y^3-6yx^2}{(x^2+y^2)^3} \end{array}\right\} u_{xx}+u_{yy}=0 \ \checkmark$$

b) $v(x,y)$ armónica conjugada de $u(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$

$$u_x=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow[u_x=v_y]{} v_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow[\text{Int. resp. } y]{} v=-\int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy=$$

$$=-x\int 2y\,(x^2+y^2)^{-2}dy=-x\cdot\frac{(x^2+y^2)^{-1}}{-1}+\varphi(x)=\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi(x)$$

$$v_x=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x) \xrightarrow[u_y=-v_x]{} \underbrace{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{u_y}=\underbrace{-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\varphi'(x)}_{-v_x}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=\int 0\,dx=C$$

$$\boxed{v(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}+C}$$

c) $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}+j\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}+C\right)$ holomorfa

Como f holomorfa:

$$\boxed{f(z)=u(z,0)+jv(z,0)=\frac{0}{z^2+0^2}+j\left(\frac{z}{z^2+0^2}+C\right)=j\left(\frac{1}{z}+C\right)}$$

Ejercicio 6

a) Encontrar la forma general de las funciones armónicas $u(x, y)$ que son función de $x^2 - y^2$.

b) Hallar una función holomorfa f cuya parte real u sea una función de la familia hallada en el apartado anterior tal que verifique $f(0) = 0$, y $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

a) $u(x,y) \to$ armónica $\to$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$x^2 - y^2 = t$

$u(t)$. Árbol de dependencias: $u \to t \begin{smallmatrix} \nearrow x \\ \searrow y \end{smallmatrix}$

$$\begin{cases} u_x = u_t \cdot t_x \\ u_{xx} = (u_t \cdot t_x)_x = (u_t)_x \cdot t_x + t_{xx} \cdot u_t = u_{tt} \cdot t_x^2 + t_{xx} \cdot u_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_y = u_t \cdot t_y \\ u_{yy} = (u_t \cdot t_y)_y = (u_t)_y \cdot t_y + t_{yy} \cdot u_t = u_{tt} \cdot t_y^2 + t_{yy} \cdot u_t \end{cases}$$

- Calculamos derivadas parciales:

$t_x = 2x$; $t_{xx} = 2$

$t_y = -2y$; $t_{yy} = -2$

- Sustituimos en la ecuación de Laplace:

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_{tt} \cdot t_x^2 + t_{xx} \cdot u_t + u_{tt} \cdot t_y^2 + t_{yy} \cdot u_t = 0$

$u_{tt}(t_x^2 + t_y^2) + u_t(t_{xx} + t_{yy}) = 0 \Rightarrow u_{tt}(4x^2 + 4y^2) + u_t\cancel{(2-2)}^{0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{tt}(4x^2 + 4y^2) = 0 \Rightarrow u_{tt} = 0 \Rightarrow u_t \Rightarrow$ constante $\Rightarrow u_t = K$

$u(t) = \int K\,dt = K \cdot t + C_1 \Rightarrow$ rectas

- Deshacemos el cambio de variable: $t = x^2 - y^2$

$\boxed{u(x^2-y^2) = K(x^2-y^2) + C_1} \Rightarrow u(x,y) = K(x^2-y^2) + C_1$

b) $Re[f(z)] = u(x,y) = K(x^2-y^2) + C_1$

Utilizamos Milne Thompson para reconstruir $f(z)$

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + \alpha = 2\left(K\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2i}\right)^2\right) + G\right) + \alpha = 2\left(K\left(\frac{z^2}{4} + \frac{z^2}{4}\right) + G\right) =$$

$$= 2\left(\frac{2Kz^2}{4} + G\right) = Kz^2 + 2G$$

$$f(z) = Kz^2 + 2G$$

Tenemos que averiguar el valor de las constantes K y G

$f(0) = 0$

$2G = 0 \Rightarrow G = 0$

Ejercicio 7

Para las siguientes funciones discutir dónde existe $f'(z)$ y dónde son holomorfas:

a) $f(z) = x^2 + jy^2$

b) $f(z) = z\,\mathrm{Im}(z)$

c) $f(z) = xy + jy$

d) $f(z) = e^y e^{jx}$

e) $f(z) = \sqrt{\rho}\, e^{j\frac{\theta}{2}} \quad (\rho > 0, -\pi > \theta > \pi)$

Ejercicio 8

Contestar razonadamente las siguientes cuestiones:

a) Siendo $u = u(x, y)$ una función armónica, ¿lo será u^2?.

b) Si $u = u(x, y)$ es armónica, ¿cuándo lo será $f(u)$?.

c) Siendo $f(z)$ una función holomorfa, ¿serán armónicas las funciones $|f(z)|$, $\arg f(z)$, $\ln|f(z)|$?.

Ejercicio 9

Determinar la región de analiticidad de las siguientes funciones en las que se considera para el logaritmo la rama principal:

a) $f(z) = \ln(e^z + 1)$ b) $f(z) = \ln(z^2 - 1)$.

TEMA 2 INTEGRACIÓN COMPLEJA

En este tema vamos a estudiar algunas técnicas de integración en el campo complejo. Más adelante, en el tema 4, aprenderemos un importante teorema (Teorema de los residuos) que nos permitirá calcular integrales de forma más rápida y eficaz.

2.1 Definiciones

Todos estos conceptos son muy similares a los ya estudiados en integración curvilínea en el campo real

- Se denomina **curva continua en C** a la imagen de toda aplicación continua de la forma:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \to & \Gamma(t) = x(t) + y(t)j \end{array}$$

A los puntos $\Gamma(a)$ y $\Gamma(b)$ se los denomina **extremos** de la curva.
Al par de ecuaciones $x(t)$, $y(t)$ se le denomina **parametrización** de Γ.

- Se dice que Γ es una **curva cerrada** si $\Gamma(a) = \Gamma(b)$.

- Se dice que $z_0 \in \Gamma$ es un **punto múltiple** de la curva si existen dos valores del parámetro t con la misma imagen mediante Γ.

- Se dice que Γ es una **curva simple** si no tiene puntos múltiples.

- Se dice que Γ es una **curva suave** si tiene alguna parametrización que sea derivable.

- Se dice que Γ es una **curva suave a trozos** si se puede subdividir en un número finito de arcos suaves.

- ~~Se dice que Γ es una curva suave a trozos si se puede subdividir en un número finito de arcos suaves.~~

- Un dominio D es **simplemente conexo** si toda curva cerrada simple dentro de él encierra puntos sólo de D. Un dominio que no es simplemente conexo se llamará **múltiplemente conexo.**

2.2 Integración curvilínea en el campo complejo

Estas integrales se realizan de la misma forma que las curvilíneas de FMT3, y es el método general.

Sin embargo, se suelen usar otros métodos (cuando es posible) para resolverlas de manera más sencilla:
- Teoremas de los apartados 2.3 y 2.4
- Cálculo de residuos (Tema 4)

Sea una curva suave a trozos de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\Gamma : [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\to \Gamma(t) = x(t) + j \cdot y(t)\end{aligned}$$

y sea una función compleja $f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$ una función continua sobre Γ.

Se denomina integral de $f(z)$ a lo largo de Γ a la expresión:

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,dt}$$

2.3 Teoremas para dominios simplemente conexos

Teorema de Cauchy - Goursat

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y sea $\Gamma \subset D$ cualquier curva cerrada, suave a trozos. Se cumple que:

$$\boxed{f(z) \text{ es holomorfa en } D \Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = 0}$$

Fórmula integral de Cauchy

Los siguientes teoremas permiten obtener sin cálculos integrales con una determinada forma.

Sea $f(z)$ una función holomorfa en el abierto simplemente conexo D y sea Γ una curva simple, cerrada y suave a trozos recorrida en sentido positivo $\Gamma \subset D$, entonces se verifica que,

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi j\, f(z_0)}$$

Fórmula integral de Cauchy para contornos no simples

La anterior fórmula admite la siguiente generalización:

Sea $f(z)$ una función holomorfa en el abierto simplemente conexo D y sea Γ una curva no simple (que interseca consigo misma n veces, rodeando k veces al punto z_0) y $\Gamma \subset D$, entonces se verifica que,

Se deduce directamente de lo anterior. Sólo hay que descomponer la curva en n contornos simples cerrados y aplicar lo anterioir.

$$\boxed{kf(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi j k f(z_0)}$$

Fórmula integral generalizada de Cauchy

Sea $f(z)$ una función holomorfa en el abierto simplemente conexo D y sea Γ una curva simple, cerrada y suave a trozos $\Gamma \subset D$, entonces se verifica que,

$$\boxed{f^{k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi j}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz = \frac{2\pi j}{k!} f^{k)}(z_0)}$$

2.4 Teoremas para dominios múltiplemente conexos

Teorema General de Cauchy-Goursat

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto múltiplemente conexo y sea Γ cualquier curva simple, cerrada y suave a trozos, recorrida en sentido positivo que junto con $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ (curvas simples, cerradas y suaves a trozos, *recorridas en el mismo sentido que* Γ), forman la frontera de *D.* Se cumple que:

$f(z)$ es holomorfa en $D \quad \Rightarrow \qquad \int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + ... + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$

2.5 Otros teoremas

2.5.1 Acotación de la integral

Recuerda que la longitud de una curva parametrizada por $\Gamma(t)$ entre a y b, viene dada por: $L = \int_a^b |\Gamma'(t)|\, dt$

Sea Γ una curva suave a trozos y *f(z)* continua en Γ tal que $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Gamma$.
Entonces se cumple

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq ML$$

donde L es la longitud de Γ.

2.5.2 Teorema del valor medio de Gauss

El valor medio de una función holomorfa en cualquier punto z_0 de su dominio de holomorfía *D*, es el valor medio de sus valores sobre cualquier circunferencia *C* de centro z_0, contenida en *D* ella y su interior.

O dicho más matemáticamente:

Sea $f(z)$ holomorfa en el abierto simplemente conexo $D: |z - z_0| < \varepsilon$ que contiene a la circunferencia $c: |z - z_0| = \varphi \quad 0 < \varphi < \varepsilon$. Entonces el valor de $f(z)$ en el centro z_0 es igual a la media aritmética de $f(z)$ sobre *c*.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varphi e^{j\theta})d\theta \qquad 0 < \varphi < \varepsilon$$

2.5.1 Teorema de Morera

Sea $f(z)$ una función continua en un abierto simplemente conexo D y tal que:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

siendo C *cualquier* curva cerrada y suave a trozos que pertenecen a D. Entonces $f(z)$ es holomorfa en D.

2.5.4 Teorema de la primitiva

Esto quiere decir que si la función es holomorfa en un dominio simplemente conexo, el valor de la integral no depende de la curva concreta, sino sólo de los puntos inicial y final..

Sea $f(z)$ holomorfa en el abierto simplemente conexo D y $\Gamma \subset D$ una curva que une los puntos z_0 y z_1. Entonces se cumple que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

siendo $F(z)$ una primitiva de $f(z)$.

2.5.5 Principio de módulo máximo/mínimo

Estos son los más útiles para los problemas

1) Si $f(z)$ es continua en R (cerrado acotado) y es holomorfa y no constante en $\overset{o}{R}$ entonces $|f(z)|$ alcanza su máximo en ∂R, nunca en $\overset{o}{R}$.

2) Si $f(z)$ es continua en R (cerrado y acotado) tal que $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in R$ y es holomorfa y no constante en $\overset{o}{R}$ entonces $|f(z)|$ alcanza su mínimo en ∂R, nunca en $\overset{o}{R}$.

TEMA 3: SERIES COMPLEJAS

Ejercicio 1

Calcular la serie de Taylor de las siguientes funciones:

a) $f(z) = e^z$ en $z=0$ b) $f(z) = \operatorname{sen} z$ en $z=0$

c) $f(z) = L(1+z)$ en $z=0$ d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ en $z=1$

Forma general:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{con } a_n = \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}$$

a) $f(z) = e^z$ en $z=0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(z) = e^z \longrightarrow f'(0) = e^0 = 1$

$f''(z) = e^z \longrightarrow f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(z) = e^z \longrightarrow f'''(0) = e^0 = 1$

$\vdots$

$f^{n)}(z) = e^z \longrightarrow f^{n)}(0) = e^0 = 1$

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

$z_0 = 0$

• e^z no tiene singularidades xq es holomorfa en todo el plano complejo, así q el radio de su campo de convergencia es infinito ⇒ El desarrollo en serie es válido $\forall z \in \mathbb{C}$.

① Campo de convergencia $|z| < \infty$

② Radio de convergencia: $R = \infty$

b) $f(z) = \operatorname{sen} z$ en $z=0$

$f(z) = \operatorname{sen} z \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(z) = \cos z \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(z) = -\operatorname{sen} z \longrightarrow f''(0) = 0$

$f'''(z) = -\cos z \longrightarrow f'''(0) = -1$

$f^{IV}(z) = \operatorname{sen}(z) \longrightarrow f^{IV}(0) = 0$

En general:

$$\begin{cases} f^{2n)}(0) = 0 \\ f^{2n-1)}(0) = (-1)^{2n+1} \end{cases}$$

Nota

$0! = 1$

$$f(z) = \underbrace{\frac{f^{0)}(0)}{0!} z^0}_{n=0} + \underbrace{\frac{f'(0)}{1!} z^1}_{n=1} + \underbrace{\frac{f''(0)}{2!} z^2}_{n=2} + \dots = \cancel{\frac{0}{1}}^{0} + \frac{1}{1!} z + \cancel{\frac{0}{2!} z^2}^{0} + \frac{-1}{3!} z^3 +$$

$$+ \cancel{\frac{0}{4!} z^4}^{0} + \frac{1}{5!} z^5 + \dots = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \dots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1} (-1)^n}{(2n+1)!}}$$

- sen z no tiene singularidades xq es holomorfa en todo el plano complejo. La serie vale $\forall z \in \mathbb{C}$.

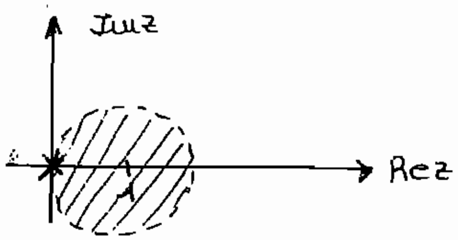
  ① Campo de convergencia: $|z| < \infty$

  ② Radio de convergencia: $R = \infty$

[redacted] $f(z) = \frac{1}{z}$ en $z_0 = 1$

$$f(z) = \frac{1}{z} \longrightarrow f(1) = \frac{1}{1} = 1$$
$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \longrightarrow f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$
$$f''(z) = \frac{2}{z^3} \longrightarrow f''(1) = \frac{2}{1} = 2!$$
$$f'''(z) = -\frac{6}{z^4} \longrightarrow f'''(1) = \frac{-6}{1} = -6 = -3!$$
$$f^{IV}(z) = \frac{24}{z^5} \longrightarrow f^{IV}(1) = \frac{24}{1^5} = 24 = 4!$$

$$f^{n)}(1) = (-1)^n n!$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(1)}{n!}(z-1)^n =$$
$(z_0 = 1)$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{n!}}{\cancel{n!}}(z-1)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n}$$



- $f(z)$ tiene una singularidad en $x = 0$

  ① Campo de convergencia $|z-1| < 1$

  ② Radio de convergencia $R = 1$ (distancia desde el centro de la serie al pto singular más cercano)

- si pidieran $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1/R = 1/1 = 1$

[redacted] $f(z) = L(1+z) \longrightarrow f(0) = 0$.

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \longrightarrow f'(0) = 1 \; (0!)$$
$$f''(z) = -1/(1+z)^2 \longrightarrow f''(0) = -1 \; (-1!)$$
$$f'''(z) = \frac{2(1+z)}{(1+z)^4} \longrightarrow f'''(0) = 2 \; (2!)$$
$$f^{IV}(z) = \frac{-6(1+z)^2}{(1+z)^6} = \frac{-6}{(1+z)^4} \longrightarrow f^{IV}(0) = -6 \; (-(3!))$$
$$f^{V}(z) = \frac{24(1+z)^3}{(1+z)^8} = \frac{24}{(1+z)^5} \longrightarrow f^{V}(0) = 24 \; (4!)$$

En general ↑ $\neq 0$ $n = 0$? duda!!

$$f^{n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$
$$f(z) = L(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}$$
$f^{(0)}(0) = 0$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cancel{(n-1)(n-2)\cdots 1}}{n\cancel{(n-1)(n-2)\cdots 1}} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n}$$

Ejercicio 2

Calcular la serie de Taylor de las siguientes funciones:

a) $f(z) = z^3 e^{2z^2}$ en $z=0$ b) $f(z) = \operatorname{sen}^2 z$ en $z=0$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ en $z=1$ d) $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z}$ en $z=0$

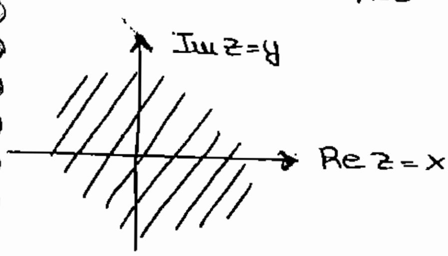
(a) $f(z) = z^3 e^{2z^2}$ en $z_0 = 0$

$f(z) = z^3 e^{g(z)}$ donde $g(z) = 2z^2$

• Conozco: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{[g(z)]^n}{n!}$

• En nuestro caso: $e^{\overset{g(z)}{(2z^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{[\overset{g(z)}{(2z^2)}]^n}{n!} = \sum_{n=0} \dfrac{2^n \cdot z^{2n}}{n!}$

$$f(z) = z^3 e^{2z^2} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{2n+3}$$



sen z =

(b) $f(z) = \operatorname{sen}^2 z$

(1ª opción): $f(z) = \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

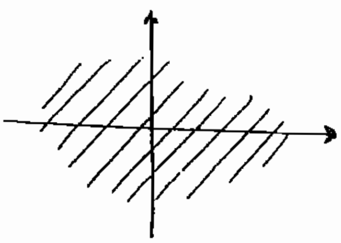
(2ª opción) (+ fácil): $f(z) = \operatorname{sen}^2 z = \dfrac{1 - \cos 2z}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2z$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \longrightarrow \cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} \cdot z^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} =$$

$$\frac{1}{2} - \underset{n=0}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}}$$

• $f(z)$ es entera



(1) Campo convergencia: $|z| < \infty$

(2) Radio de convergencia: $R = \infty$

$f(z) = 1/z^2$ en $z=1$ Dato: $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$

1º Opción: $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n = \ldots$

2º opción Derivando a ambos lados: $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \longrightarrow$

$\longrightarrow -\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n (z-1)^{n-1}$

- Las series de potencias cumplen el t$^{\underline{ma}}$ de Weierstrass $\Rightarrow$ la derivada de la suma de infinitos términos es la suma de las derivadas de infinitos términos.

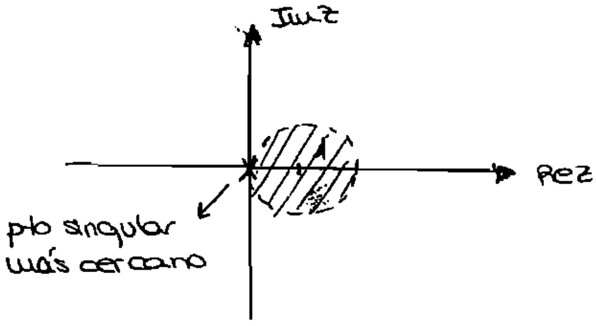
Así que: $\frac{1}{z^2} = -\sum (-1)^n n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n (z-1)^{n-1} = \sum (-1)^{n+1+1} (n+1)(z-1)^n =$

$n-1 \to n$
$n \to n+1$
$n=0 \to n+1=0$ $(n=-1)$

$= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+2} (n+1)(z-1)^n = \sum_{n=-1} (-1)^n (n+1)(z-1)^n =$

$(-1)^{n+2} = (-1)^n (-1)^2 = (-1)^n \cdot 1 = (-1)^n$

$= \underbrace{(-1)^{-1} \cancel{(-1+1)}^{0} (z-1)^{-1}}_{n=-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n}$



① Región de convergencia: $|z-1| < 1$

② Radio de convergencia: $R=1$

Ejercicio 3

Hallar el desarrollo de Taylor relativo al punto $z = 2$ de la función

$$f(z) = \frac{2z-4}{(z-3)^2}$$

así como su radio de convergencia.

- Cuando $z_0 \neq 0$, en general, haremos cambio de variable: $\omega = z-2 \Rightarrow z = \omega + 2$

Ahora: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$

$(a+b)^2 = (-a-b)^2$

$$f(\omega) = f(z)\Big|_{z=\omega+2} = \frac{2(\omega+2)-4}{(\omega+2-3)^2} = \frac{2\omega + \cancel{4} - \cancel{4}}{(\omega-1)^2} = \frac{2\omega}{(\omega-1)^2} = 2\omega \cdot \frac{1}{(-\omega+1)^2} =$$

$$= 2\omega \left[\frac{1}{1-\omega}\right]^2 = 2\omega \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\omega)^n\right]^2$$

serie geométrica

válido si $|\omega| < 1$

Obtenemos el término $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n = (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \dots) \cdot$

$\cdot (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \dots) = (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \dots) + (\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^5 + \dots) +$

$+ (\omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \dots) + (\omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \dots) + (\omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \dots) =$

$$= 1 + 2\omega + 3\omega^2 + 4\omega^3 + 5\omega^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\omega^n$$

Así que: $f(\omega) = 2\omega \left[\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n\right]^2 = 2\omega \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)\omega^{n+1}$ en $\omega = 0$

- Deshaciendo el cambio: $\omega = z-2$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(z-2)^{n+1}} \text{ en } z = 2$$

- Podemos hacer cambio de índices

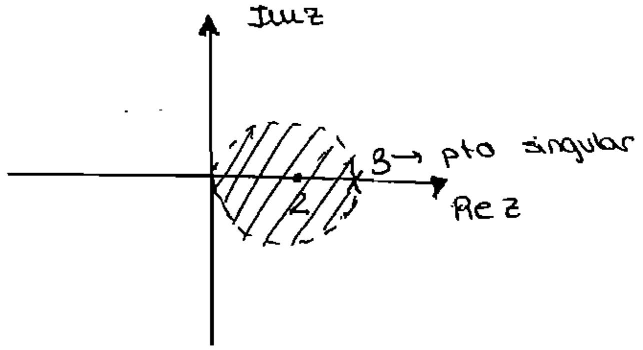
$n+1 \longrightarrow n$

$n \longrightarrow n-1$

$n=0 \longrightarrow n-1=0$

$(n=1)$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(z-2)^n, \quad |z-2| < 1}$$



Radio conv. = 1

Ejercicio 4

Determinar el desarrollo de Taylor entorno a $z = 1$ de la función:

$$f(z) = \left(\frac{z}{z+1}\right)^2$$

y dar el radio de convergencia.

No hacemos el cambio de variable $w = z-1$, pero es una excepción.

A cambio hacemos:

$$g(z) = \frac{z}{z+1} = \frac{z+1-1}{z+1} = \frac{z+1}{z+1} - \frac{1}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1+1-1} = 1 - \frac{1}{2+(z-1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{2(2+(z-1))}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left[-\frac{z-1}{2}\right]} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z-1}{2}\right]$$

esto se puede hacer si: $\left|-\frac{z-1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \frac{|z-1|}{2} < 1 \rightarrow |z-1| < 2$.

$$= 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}(z-1)^n$$

$$f(z) = \left(\frac{z}{z+1}\right)^2 = \left[1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}(z-1)^n\right]^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}(z-1)^n\right]^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}(z-1)^n$$

Ahora calculamos:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}(z-1)^n\right]^2 = \left(1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{4}\cdots\right)\left(1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{4}\cdots\right) =$$

$$= \boxed{1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} - \frac{(z-1)^3}{8} +}\cdots \boxed{-\frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} - \frac{(z-1)^3}{8} +}\cdots + \boxed{\frac{(z-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^3}{8} + \frac{(z-1)^4}{16}}$$

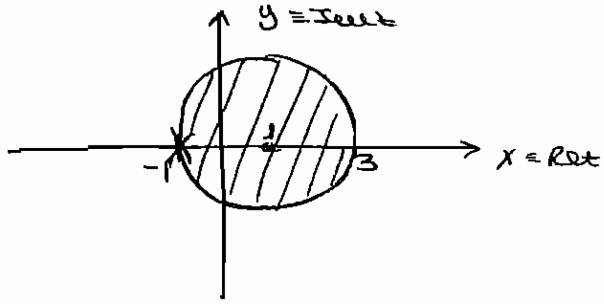
$$= 1 - 2\cdot\frac{z-1}{2} + 3\frac{(z-1)^2}{4} - 4\frac{(z-1)^3}{8}\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{(z-1)^n}{2^n}.$$

Así que:

$$f(z) = \left(\frac{z}{z+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}(z-1)^n\right] - 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(z-1)^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)}{2^n}(z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}\cdot(z-1)^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)}{2^{n+2}}(z-1)^n -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}(z-1)^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{n+1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right](z-1)^n \text{ ; válido para } |z-1| < 2.$$


y = Imz
x = Rez
-1
3

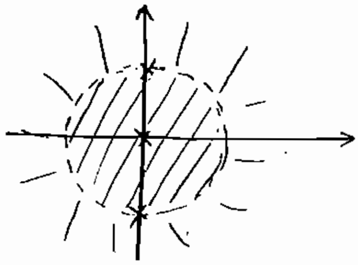
Ejercicio 5

Determinar el desarrollo en serie en entorno a $z=0$ de la función:

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$$

En torno a $z=0$ de la función en primera corona de convergencia

$$z^3+z^5 = z^3(1+z^2) = z^3(z+j)(z-j) \Rightarrow \text{Ptos sing.} \begin{cases} z=0 \\ z=\pm j \end{cases}$$



• 2ª corona.

• 1ª corona

Desarrollo de Laurent pq el centro es un punto singular.

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(\frac{1+2z^2}{1+z^2}\right) = \frac{1}{z^3}\cdot\left(\frac{1+2z^2+1-1}{1+z^2}\right) = \frac{1}{z^3}\left(\frac{2+2z^2-1}{1+z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{z^3}\left(\frac{2(1+z^2)}{1+z^2} - \frac{1}{1+z^2}\right) = \frac{1}{z^3}\left(2-\frac{1}{1+z^2}\right) = \frac{1}{z^3}\left(2-\frac{1}{1-(-z^2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{z^3}\left[2-\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n\right] = \frac{1}{z^3}\left[2-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{2n}\right] =$$

válido si: $|-z^2|<1 \rightarrow |z^2|<1 \Rightarrow |z\cdot z|<1 \Rightarrow |z|\cdot|z|<1 \rightarrow |z|^2<1 \rightarrow |z|<1$.

$$= \frac{1}{z^3}\left[2-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^{2n}\right] = \frac{2}{z^3} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-3} =$$

$$= \frac{2}{z^3} - \underbrace{\frac{1}{z^3}}_{n=0} + \underbrace{\frac{1}{z}}_{n=1} - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{2n-3} = \underbrace{\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}}_{\text{parte ppal}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1} z^{2n-3}}_{\text{parte regular}} = \leftarrow \begin{pmatrix} n\rightarrow n+1 \\ n=2\rightarrow n=1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+2} z^{2(n+1)-3} = \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{2n-1}\ ; \text{ válido } 0<|z|<1.$$

Ejercicio 6

Desarrollar la función $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ en los siguientes casos:

i) $|z|<1$ ii) $1<|z|<3$ iii) $|z|>3$ iv) $1<|z+1|<2$

- Las singularidades están en $z=-1$ y $z=-3$.

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{A}{(z+1)}+\frac{B}{(z+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(z+1)}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{(z+3)}\right)$$

$A=1/2$
$B=-1/2$

- Desarrollos en serie de $\left(\dfrac{1}{z+1}\right)$

a) $$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n$$ válido si $|-z|<1 \Rightarrow |z|<1$

b) $$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z\cdot\frac{(z+1)}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}$$ válido si $\left|-\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>1$

- Desarrollos en serie de $\left(\dfrac{1}{z+3}\right)$

a) $$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3\cdot\frac{(z+3)}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{z}{3}+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^n}{3^{n+1}}$$ válido si $\left|-\frac{z}{3}\right|<1 \Rightarrow |z|<3$

b) $$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z\cdot\frac{(z+3)}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{z^{n+1}}$$, válido si $\left|-\frac{3}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>3$

- **En resumen:**

$$\frac{1}{z+1} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, & |z|<1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & |z|>1 \end{cases} \qquad \frac{1}{z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}}, & |z|<3 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{z^{n+1}}, & |z|>3 \end{cases}$$

i) $|z|<1$

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n}_{\text{válido si } |z|<1} - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}}}_{\text{válido si } |z|<3} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right] z^n}$$

válido en $(|z|<1) \cap (|z|<3) = (|z|<1)$

ii) $1<|z|<3$

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3} = \boxed{\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}}_{\text{válido si } |z|>1} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}}}_{\text{válido si } |z|<3}}$$

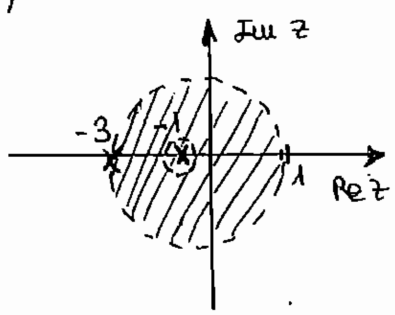
válido en $\{|z|>1\} \cap \{|z|<3\} = \{1<|z|<3\}$

iii) $|z|>3$

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3} = \boxed{\frac{1}{2}\cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}}_{\text{válido en } |z|>1} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{z^{n+1}}}_{\text{válido en } |z|>3}}$$

válido en : $\{|z|>1\} \cap \{|z|>3\} = \{|z|>3\}$

iv) $1<|z+1|<2$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z+1)^n \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot w^n$$

Cambio de variable : $w = z+1 \rightarrow z = w-1$

$$f(w) = \frac{1}{(w-1+1)(w-1+3)} = \frac{1}{w(w+2)}$$ Lo desarrollamos alrededor de $w=0$

$$f(w) = \frac{1}{w}\cdot\frac{1}{w+2} = \frac{1}{w}\,\frac{1}{2\,\frac{w+2}{2}} = \frac{1}{2w}\,\frac{1}{w/2+1} = \frac{1}{2w}\,\frac{1}{1-(-w/2)} = \frac{1}{2w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-w}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2w}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{w^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$ válido si $\left|-\frac{w}{2}\right|<1 \rightarrow |w|<2$

Ejercicio 6

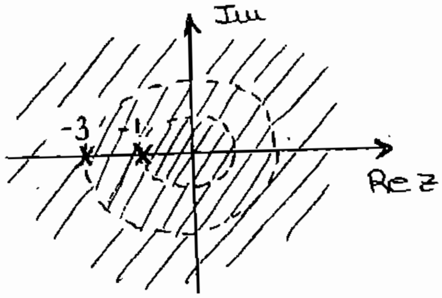
Deshacemos el cambio: $w = z+1$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} (z+1)^{n-1}} \quad \text{válido si } 0 < |z+1| < 2$$

Apartado adicional

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

Calcular $\text{Res}[f(z), z=\infty]$



Del apartado iii)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (-1)^n \left[1 - 3^n\right] \frac{1}{z^{n+1}} \quad , \underbrace{|z|>3}$$

última corona de convergencia

$$\underset{\substack{\downarrow \\ n=0}}{a_{-1}} = \frac{1}{2} (-1)^0 \left[1 - 3^0\right] = 0 \Rightarrow \text{Res}\left[f(z), z=\infty\right] = -a_{-1} = 0$$

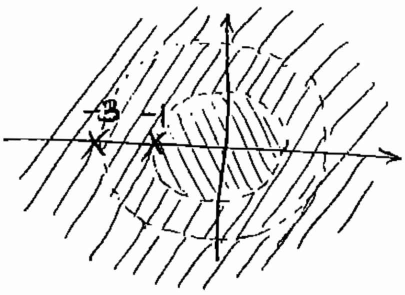
Ejercicio 6

Desarrollar la función $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ en los siguientes casos:

i) $|z| < 1$ ii) $1 < |z| < 3$ iii) $|z| > 3$ iv) $1 < |z+1| < 2$

$f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ Las singularidades están en $z=-1$ y $z=-3$.

$$f(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+3} \qquad \left(A = \frac{1}{2}\,;\ B = -\frac{1}{2}\right)$$



- Desarrollo en serie de $\frac{1}{z+1}$:

a) $\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n$ válido si $|-z|<1 \Rightarrow |z|<1$.

b) $\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{z\,\frac{z+1}{z}} = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{z}} = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{z}\right)^n = \dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{z^n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1}{z^{n+1}}$.

- Desarrollo en serie de $\frac{1}{z+3}$:

a) $\dfrac{1}{z+3} = \dfrac{1}{3\,\frac{z+3}{3}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\frac{z}{3}+1} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = \dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{z^n}{3^{n+1}}$

válido si $\left|-\frac{z}{3}\right|<1 \rightarrow |z|<3$.

b) $\dfrac{1}{z+3} = \dfrac{1}{z\,\frac{z+3}{z}} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{3}{z}} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\frac{3}{z}\right)} = \dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{3}{z}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{3^n}{z^{n+1}}$; válido si $\left|-\frac{3}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>3$.

En resumen:

$$\frac{1}{z+1} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n \ ; & |z|<1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1}{z^{n+1}} \ ; & |z|>1 \end{cases} \qquad \frac{1}{z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{z^n}{3^{n+1}} \ ; & |z|<3 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3^n}{z^{n+1}} \ ; & |z|>3 \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3}$$

i) $|z|<1$.

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n}_{\substack{\text{válido si}\\ |z|<1}} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^n}{3^{n+1}}}_{\substack{\text{válido si}\\ |z|<3.}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left[1-\frac{1}{3^{n+1}}\right]z^n \to \text{válido en } (|z|<1 \wedge |z|<3) = (|z|<1).$$

ii) $1<|z|<3$.

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{z^{n+1}}}_{\substack{\text{válido si}\\ |z|>1}} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^n}{3^{n+1}}}_{\substack{\text{válido si}\\ |z|<3.}}$$

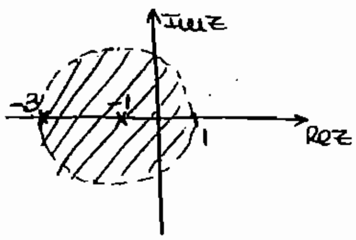
válido en $\{|z|>1\}\cap\{|z|<3\} = \{1<|z|<3\}$.

iii) $|z|>3$.

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{z^{n+1}}}_{\substack{\text{válido si}\\ |z|>1}} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{z^{n+1}}}_{\substack{\text{válido si}\\ |z|>3.}}$$

válido en $\{|z|>1\}\cap\{|z|>3\} = \{|z|>3\}$.

iv) $1<|z+1|<2$.



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z+1)^n \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\cdot w^n$$

Cambio de variable: $w = z+1 \to z = w-1$.

$$f(w) = \frac{1}{(w-1+3)(w-1+1)} = \frac{1}{w(w+2)}$$ Lo desarrollamos alrededor de $w=0$.

$$f(w) = \frac{1}{w}\cdot\frac{1}{w+2} = \frac{1}{w}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{w+2}{2}} = \frac{1}{2w}\cdot\frac{1}{\frac{w}{2}+1} = \frac{1}{2w}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{w}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2w}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{2}\right)^n = \frac{1}{2w}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{w^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{w^{n-1}}{2^{n+1}} \to \text{válido si } \left|-\frac{w}{2}\right|<1 \Rightarrow |w|<2$$

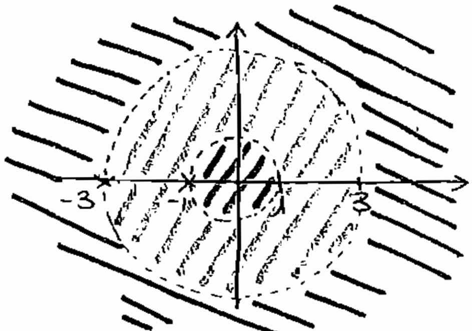
Deshacemos el cambio: $w = z+1$.

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1} \;;\; \text{válido si } 0<|z+1|<2.$$

- APARTADO ADICIONAL

→ calcular Res $[f(z), z=\infty]$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$



Del apartado iii) sabemos que:

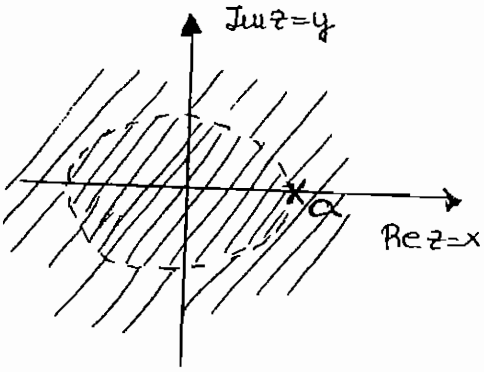
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^n \left[1-3^n\right] \frac{1}{z^{n+1}}, \quad \underbrace{|z|>3}_{\text{última corona de convergencia.}}$$

$$\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{a_{-1}} = \frac{1}{2}(-1)^0 \cdot [1-3^0] = 0 \Rightarrow \text{Res}[f(z), z=\infty] = a_{-1} = 0.$$

Ejercicio 7

Desarrollar la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^2}$, $a > 0$ en los siguientes casos:

i) $|z| < a$ ii) $|z| > a$



i) $|z|<a$ $\quad f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^2} = \left(\dfrac{1}{z-a}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{a\frac{(z-a)}{a}}\right)^2 = \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{\frac{z}{a}-1}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right]^2 = \frac{1}{a^2}\left[1+\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+\dots\right]\left[1+\frac{z}{a}+\right.$$

$(a-b)^2 = (b-a)^2$

válido si $\left|\frac{z}{a}\right| < 1 \Rightarrow |z| < a$

$$\left.+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+\dots\right] = \left[1+\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+\dots+\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+\dots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+\left(\frac{z}{a}\right)^4+\left(\frac{z}{a}\right)^5+\dots+\left(\frac{z}{a}\right)^3+\left(\frac{z}{a}\right)^4+\dots\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[1+2\left(\frac{z}{a}\right)+3\left(\frac{z}{a}\right)^2+4\left(\frac{z}{a}\right)^3+\dots\right] = \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{a}\right)^n =$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{a^{n+2}}}$$

• Desarrollo de Taylor válido xa $|z|<a$

válido si: $\left|\frac{a}{z}\right|<1$, $\frac{|a|}{|z|}<1$, $|z|>a$

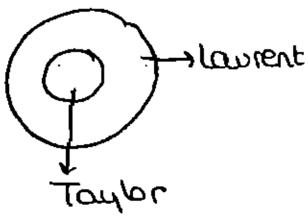
ii) $|z|>a$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^2} = \left(\frac{1}{z-a}\right)^2 = \left(\frac{1}{z\frac{(z-a)}{z}}\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right] = \frac{1}{z^2}\left[1+\frac{a}{z}+\left(\frac{a}{z}\right)^2+\left(\frac{a}{z}\right)^3\right]^2 = \dots =$$

$$= \frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{a}{z}\right)^n = \underbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{a^n}{z^{n+2}}}}_{\text{parte ppal (No tiene parte regular)}} \; ; \quad \text{válido xa } |z|>a$$

- ~~Si no tiene parte regular → Taylor (caso particular del Laurent)~~

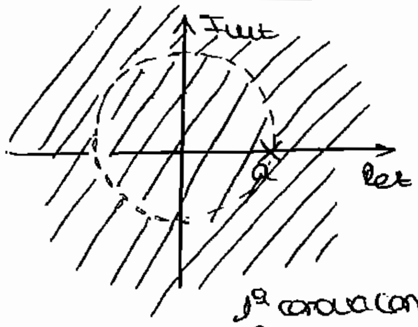


Ejercicio 7

Desarrollar la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^2}$, $a > 0$ en los siguientes casos:

i) $|z| < a$ ii) $|z| > a$

i) $|z| < a$



1ª corona conv.
2ª corona conv

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^2} = \left(\frac{1}{z-a}\right)^2 = \left(\frac{1}{a\cdot\frac{z-a}{a}}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\frac{z}{a}-1}\right)^2 =$$

$(a-b)^2 = (b-a)^2$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[1+\left(\frac{z}{a}\right)+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+\cdots\right]\left[1+\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+\cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\boxed{1+\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+}\ \boxed{+\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+}\cdots\boxed{+\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^3+}\cdots\boxed{+\left(\frac{z}{a}\right)^3+}\cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[1+2\left(\frac{z}{a}\right)+3\left(\frac{z}{a}\right)^2+4\left(\frac{z}{a}\right)^3+\cdots\right] = \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{a^{n+2}}z^n$$

Desarrollo de Taylor válido para módulo de z : ~~$|z|>2$~~ $|z|<a$.
¿xq?

ii) $|z| > a$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^2} = \left(\frac{1}{z-a}\right)^2 = \left(\frac{1}{z\,\frac{z-a}{z}}\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right]^2 =$$

válido si $\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > a$.

$$= \frac{1}{z^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right] = \frac{1}{z^2}\left[1+\frac{a}{z}+\left(\frac{a}{z}\right)^2+\left(\frac{a}{z}\right)^3\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[1+\frac{a}{z}+\left(\frac{a}{z}\right)^2+\left(\frac{a}{z}\right)^3+\cdots+\frac{a}{z}+\left(\frac{a}{z}\right)^2+\left(\frac{a}{z}\right)^3+\cdots+\left(\frac{a}{z}\right)^2+\left(\frac{a}{z}\right)^3+\cdots+\left(\frac{a}{z}\right)^3+\cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[1+2\frac{a}{z}+3\left(\frac{a}{z}\right)^2+4\left(\frac{a}{z}\right)^3+\cdot\right] = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{a^n}{z^{n+2}}.$$

Desarrollo de Laurent válido en $|z|>a$. (Parte ppal no tiene parte regular)
¿xq?

TEMA 4: RESIDUOS Y SUS APLICACIONES

4.1 Clasificación de singularidades

Una función f tiene una **singularidad aislada** en $z = z_0$ si f no es analítica en z_0 pero sí lo es en algún entorno perforado de z_0 (o sea, en un entorno de z_0 quitando z_0).

Las singularidades aisladas de una función se pueden clasificar en tres tipos: polos, singularidades esenciales y singularidades evitables. Para clasificar una singularidad basta con obtener el desarrollo de Laurent de f alrededor de la singularidad z_0 y observar la parte principal.

4.1.1 Singularidades polares (polos)

Decimos que una singularidad aislada $z = z_0$ de una función f es un **polo de orden m** si el desarrollo de Laurent de f alrededor de z_0 tiene una parte principal compuesta por términos de hasta orden m.

En un polo se cumple que $\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty}$.

4.1.2 Singularidades esenciales

Decimos que una singularidad aislada $z = z_0$ de una función f es una **singularidad esencial** si el desarrollo de Laurent de f alrededor de z_0 tiene una parte principal compuesta por infinitos términos.

En una singularidad esencial se cumple que $\boxed{\text{no existe } \lim_{z \to z_0} f(z)}$.

4.1.3 Singularidades evitables

Decimos que una singularidad aislada $z = z_0$ de una función f es una **singularidad evitable** si el desarrollo de Laurent de f alrededor de z_0 no tiene una parte principal.

En una singularidad evitable se cumple que $\boxed{\text{existe } \lim_{z \to z_0} f(z) \text{ y es finito}}$

4.1.4 Observaciones

- Recuerda que el desarrollo de Laurent hay que hacerlo alrededor de la singularidad que estemos estudiando para obtener el carácter de esa singularidad. Por ejemplo, si una función tiene tres singularidades distintas tendremos que hacer tres desarrollos de Laurent distintos, uno alrededor de cada singularidad, para clasificar cada una de ellas.
- Las singularidades evitable y polar, son siempre aisladas.
- La singularidad esencial puede ser aislada o no aislada.

4.1.5 Singularidades de una función en el punto del infinito

El comportamiento de una función $f(z)$ en $z=\infty$ se define como el de $f\left(\frac{1}{w}\right)$ en $w=0$, es decir, $f(z)$ será holomorfa o tendrá una singularidad en $z=\infty$ cuando $f\left(\frac{1}{w}\right)$ sea holomorfa o tenga una singularidad (del mismo tipo) en $w=0$.

cambio de variable

el tipo de sing. q salga es = q el de $z=\infty$

4.2 Definición de Residuo

Toda singularidad aislada z_0 de una función f tiene asociado un número al que llamamos **residuo** y que corresponde con el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent alrededor de z_0. Es decir, el residuo es el coeficiente del primer término de la parte principal $\dfrac{1}{z-z_0}$ de la serie de Laurent asociada a f alrededor de z_0 en primera corona de convergencia. Normalmente utilizaremos la siguiente notación para referirnos al residuo:

$$\boxed{a_{-1} = \text{Res}[f(z),\, z = z_0]}$$

4.3 Cálculo de residuos en puntos a distancia finita del origen

El método general para calcular el residuo de una singularidad z_0 es obtener el desarrollo de Laurent de f en primera corona de convergencia en ese punto y observar el coeficiente que acompaña al término $\dfrac{1}{z-z_0}$. Veamos otros procedimientos particulares para cada caso.

Singularidades evitables Singularidades evitables

En el caso de las singularidades evitables el residuo asociado siempre es cero. Por tanto, si tenemos la certeza de que estamos ante una singularidad evitable (porque lo dice el enunciado, porque hemos calculado el límite, ...) no hace falta calcular el desarrollo de Laurent ya que el residuo es nulo.

Singularidades esenciales

En el caso de las singularidades esenciales no hay otra manera de calcular el residuo que obteniendo el desarrollo de Laurent.

Polos de orden m

En el caso de los polos normalmente no hace falta calcular la serie de Laurent. A cambio se utilizan los siguientes resultados:

$z = z_0$ es un polo de orden m de f si y sólo si:

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) \quad \text{verifica} \quad \begin{cases} g(z_0) \neq 0 \\ g(z) \text{ es analitica en un entorno de } z_0 \end{cases}$$

y una vez que tenemos la certeza de que z_0 es un polo, para calcular el residuo asociado hacemos lo siguiente:

Si $z = z_0$ es un polo de orden uno: $\boxed{a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)}$

Si $z = z_0$ es un polo de orden m: $\boxed{a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{(m-1)!} \cdot \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)}$

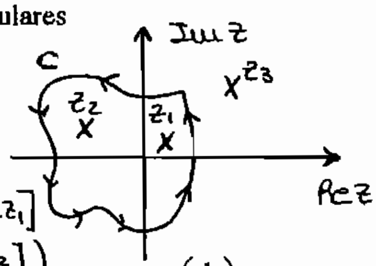
Este es uno de los teoremas más importantes de la teoría de variable compleja

Recuerda que en el Teorema de los residuos los que sumamos son los residuos de las singularidades que quedan <u>dentro</u> de la curva

4.4 Teorema de los residuos → muy importante!

Si C es un contorno cerrado simple orientado positivamente, dentro y sobre el cual una función f es analítica a excepción de un número finito de puntos singulares z_k $(k=1,2,\dots,n)$ interiores a C, entonces

$$\int_C f(z)dz \;=\; 2\pi j\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z=z_k]$$



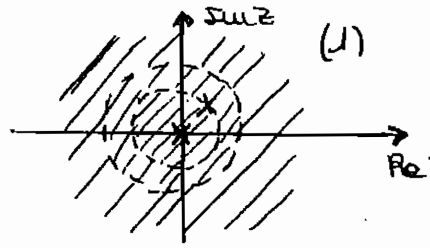
4.5 Residuos en el infinito

$$\int_C f(z)dz = 2\pi j\left(\mathrm{Res}[f(z),\ z=z_1] + \mathrm{Res}[f(z), z=z_2]\right)$$

Hemos visto que para ver si hay singularidad en el infinito se estudia si la función $f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ tiene una singularidad en $w=0$.

<u>Observación muy importante:</u>

- Los puntos "finitos" sólo pueden tener residuo asociado si son singulares (es decir, en ellos *f(z)* no es analítica)
- El punto $z=\infty$, sin embargo, aunque sea regular (es decir, que *f(z)* sea analítica en dicho punto), puede tener un residuo $\neq 0$ en el mismo



4.5.1 Cálculo del residuo en el infinito

<u>1ª forma</u>

¡Cuidado! Lleva un signo menos. Además se coge el término del desarrollo en última corona de convergencia alrdedor de $z=0$

Se puede demostrar que:

$$\boxed{\mathrm{Res}[f(z),\ z=\infty] \;=\; -a_{-1}}$$

del desarrollo en serie de Laurent de *f(z)* en *última corona de convergencia alrededor de z=0*

corona negra en (1) → es la q continua hasta el infinito.

<u>2ª forma</u>

Es decir, el residuo de $f(z)$ en $z=\infty$ se reduce a calcular el residuo de la nueva función $\dfrac{-1}{w^2}f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ en $w=0$.

El valor del residuo asociado al punto del infinito se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\mathrm{Res}[f(z),\ z=\infty] \;=\; \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right),\ w=0\right]$$

<u>3ª forma</u>

Fíjate que esta tercera forma no sirve para calcular residuos de singularidades esenciales en $z=\infty$. Además, es la menos usada

$$\mathrm{Res}[f(z),\ z=\infty] = -\frac{1}{(k+1)!}\lim_{w\to 0}\frac{d^{(k+1)}[w^k f(\frac{1}{w})]}{dw^{k+1}},\quad k=0,1,2,\dots$$

Donde k es el orden del polo que tiene *f(z)* en $z=\infty$ y se considera k=0 si $z=\infty$ es un punto regular o singularidad evitable de *f(z)*.

4.5.2 Observaciones

- *f(z)* tiene en $z=\infty$ la misma naturaleza que $f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ en w=0 pero en general

$$\mathrm{Res}[f(z),\ z=\infty] \;\neq\; \mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{w}\right),\ w=0\right]$$

- La naturaleza de los puntos $z=\infty$ para *f(z)* y de $w=0$ para la función $\dfrac{-1}{w^2}f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ no tiene porqué coincidir.

Teniendo en cuenta este nuevo residuo se cumple la siguiente propiedad:

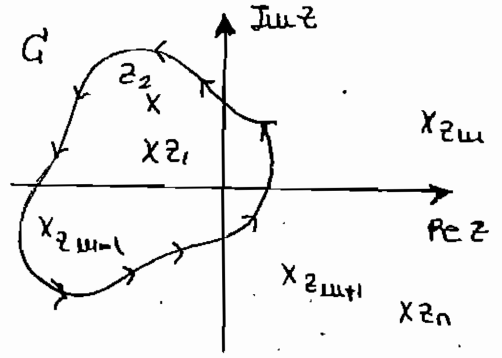
$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{2\pi j} \quad \text{(despejo y me da } (J)\text{)}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\, z=\infty] + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}\mathrm{Res}[f(z),\, z=z_k]}_{\text{residuos de las sing. dentro de la curva}} + \underbrace{\sum_{k=m}^{n}\mathrm{Res}[f(z),\, z=z_k]}_{\text{residuos de las sing. fuera de la curva}} = 0$$

donde z_k son las singularidades aisladas en puntos a distancia finita del origen.

De esta forma obtenemos un nuevo procedimiento de calcular integrales mediante el Teorema de los residuos. Este nuevo procedimiento consiste en sumar los residuos de las singularidades que quedan fuera de la curva cerrada C sobre la que estamos integrando (incluido, claro está, el residuo del punto del infinito que siempre queda fuera de C), es decir:

$$(J)\ \int_C f(z)\,dz = -2\pi j\left\{\sum_{k=m}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z=z_k] + \mathrm{Res}[f(z), z=\infty]\right\}$$



$$I = \int_C f(z)\,dz = 2\pi j \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}\mathrm{Res}[f(z), z=z_k]}_{T^{\text{ma}}\text{ residuos por dentro}} = -2\pi j\underbrace{\left\{\mathrm{Res}[f(z), z=\infty] + \sum_{k=m}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z=z_k]\right\}}_{T^{\text{ma}}\text{ residuos por fuera}}$$

Hay $z_1, \ldots, z_m, \ldots z_n$ singularidades. (Hay n)

4.7 Ceros de una función. Relación entre ceros y polos

4.7.1 Definición

Sea una función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Decimos que $z_0\in\mathbb{C}$ es un **cero de orden** m de f si $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{m-1)}(z_0) = 0$ pero $f^{m)}(z_0)\neq 0$.

Una caracterización de cero de $f(z)$ muy útil en la práctica es la siguiente:

El punto $z = z_0$ es un cero de orden m de $f(z)$ cuando:

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z) \quad \text{verifica} \quad \begin{cases} g(z_0)\neq 0 \\ g(z) \text{ es analitica en un entorno de } z_0 \end{cases}$$

4.7.2 Relación entre ceros y polos de una función

Ceros y polos de orden m están estrechamente vinculados. En efecto, Se puede probar que:

Si dos funciones $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en un punto z_0 y, $p(z_0)\neq 0$, el cociente $p(z)/q(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y sólo si $q(z)$ tiene un cero de orden m en ese punto.

4.8 Aplicación del Teorema de los residuos a integrales reales

El Teorema de los residuos se puede aplicar para resolver algunas integrales definidas e impropias en el campo real.

Hay que tener en cuenta que lo que en realidad se calcula con este método, es el **valor principal** (VP) de la integral. Dicho valor principal sólo coincide con el valor de la integral si esta es convergente.

Además al resolver los ejercicios de este tipo, a menudo hay que hacer uso de los Lemas de Jordan, que se enuncian a continuación.

4.8.1 Lemas de Jordan

1er lema de Jordan

Permite calcular el valor de integrales sobre arcos de circunferencia cuyo radio tiende a 0

Sea $\widehat{AB}$ un arco de circunferencia de centro z_0 y radio ε

Si $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=k,\quad k\in\mathbb{C}, k\neq\infty \Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\widehat{AB}} f(z)dz = j(\theta_B-\theta_A)k$

2º lema de Jordan

Permite calcular el valor de integrales sobre arcos de circunferencia cuyo radio tiende a ∞

Sea $\widehat{AB}$ un arco de circunferencia de centro el origen y radio R

Si $\lim\limits_{z\to\infty} z\cdot f(z)=k,\quad k\in\mathbb{C}, k\neq\infty \Rightarrow \lim\limits_{R\to\infty}\int_{\widehat{AB}} f(z)dz = j(\theta_B-\theta_A)k$

3er lema de Jordan

Sea γ una semicircunferencia de centro el origen y radio R situada en el semiplano $\mathrm{Im}[z]\geq 0$

Si $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0 \Rightarrow \lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma} e^{jmz}f(z)dz=0, m>0$

Observaciones:

- El tercer lema de Jordan es válido también en caso de que γ sea cualquier arco contenido en la semicircunferencia considerada
- Para m<0, la curva γ debe tomarse en el semiplano $\mathrm{Im}[z]\leq 0$
- Si la exponencial es e^{mz}, se tendrá:

Esto podría servir para realizar integrales de tipo 3 pero con *sh(mx)* ó *ch(mx)*

4.8.2. Casos tipo

A continuación se exponen los tres casos más típicos:

- **Tipo 1:** Integrales del tipo $\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, d\theta$

Se realiza el cambio de variable:

$$z = e^{j\theta} \Rightarrow dz = j\, e^{j\theta} d\theta \Rightarrow dz = jz\, d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{jz}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \\ \cos\theta &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{z - z^{-1}}{2j} \\ \cos\theta &= \frac{z + z^{-1}}{2} \end{aligned}\right\}$$

entonces la integral se puede calcular haciendo:

$$\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, d\theta = \int_\Gamma R\left(\frac{z - z^{-1}}{2j}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{jz}$$

donde Γ es el contorno de la figura:

- **Tipo 2:** Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ siendo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $\operatorname{gr}(Q(x)) \geq 2 + \operatorname{gr}(P(x))$

Se puede deducir su valor "a partir de" la siguiente integral compleja:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz$$

¡OJO! En general no se cumple directamente que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_\Gamma f(z)\, dz$

donde Γ es el contorno de la figura:

Muchas veces habrá que evitar las singularidades sobre el contorno "esquivándolas" con pequeñas semicircunferencias

R será lo suficientemente grande como para incluir todas las singularidades de *f(z)* en el semiplano *Im[z]>0*

- **Tipo 3:** Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \operatorname{sen} mx\end{Bmatrix} dx$

Se puede deducir su valor "a partir de" la siguiente integral compleja:

$$\int_{\Gamma} f(z)\, e^{jmz}\, dz$$

donde Γ es el mismo contorno del caso anterior

Muchas veces habrá que evitar las singularidades sobre el contorno "esquivándolas" con pequeñas semicircunferencias

R será lo suficientemente grande como para incluir todas las singularidades de $f(z)\,e^{jmz}$ en el semiplano $Im[z]>0$

Observación general:

- A veces, nos pedirán integrar sobre contornos distintos a los típicos. Dado el contorno, que en ese caso será dato, nuestras herramientas serán principalmente los lemas de Jordan y la acotación de algunas integrales.

4.8.3 Acotación de integrales

En ocasiones es necesario demostrar que alguna integral tiende a 0 cuando $R \to \infty$. A veces es suficiente con aplicar el segundo o tercer lema de Jordan, pero en otras ocasiones, el contorno de la integral no permite aplicar dichos lemas. En estos casos es de gran utilidad el uso de condiciones de acotación. Normalmente usaremos las siguientes propiedades:

i) $\lim\limits_{R\to\infty} \int_C f(z)dz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{R\to\infty} \left| \int_C f(z)dz \right| = 0$

ii) $\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$, donde M cumple que $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in C$ y L es la longitud de C

Hoja 1 T4

TEMA 4: RESIDUOS Y SUS APLICACIONES

$|z-b|=R$
centro

~~!! se buscan singularidades que no son en cambio de variable~~

1. CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

Singularidad aislada en $z=z_0$ si f no analítica en z_0 pero sí en algún entorno perforado (quitando z_0) de z_0.

S. aislados $\begin{cases} \text{polos.} \\ \text{s. esenciales} \\ \text{s. evitables} \end{cases}$

1. polos

- Con Laurent: el DSL tiene una parte ppal compuesta x términos de hasta orden m. (DSL alrededor de z_0)
- Límites: $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

2. s. esenciales

- Laurent: parte ppal compuesta por ∞ términos.
- Límites: $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$

3. s. evitables

- Laurent: no tiene parte ppal
- Límites: $\exists \lim_{z \to z_0} f(z)$ y es finito

2. SINGULARIDADES EN EL INFINITO cambio variable $z = 1/w$

El comportamiento de $f(z)$ en $z=\infty$ es igual que el de $f\left(\frac{1}{w}\right)$ en $w=0$

si $w=0$ no es una sing. de $\frac{1}{w} \Rightarrow$
$\Rightarrow z=\infty$ es un pto regular

3. RESIDUOS

- Definición

Toda sing. aislada tiene asociada un nº llamado residuo q es el coeficiente de a_{-1} alrededor de $z_0 \Rightarrow$ 1er término de la parte ppal en 1ª corona de convergencia.

$$a_{-1} = \text{Res}[f(z), z=z_0]$$

- Cálculo de residuos en ptos a d. finita del origen

① S. evitables

El residuo es nulo.

② S. esenciales

Hay que hacer el DSL. (se coge a_{-1} en 1ª c. conv)
$\downarrow$
residuos x dentro.

③ Polos

No hace falta DSL

$z = z_0$ polo de orden m $\Leftrightarrow$

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) \text{ verifica } \begin{cases} g(z_0) \neq 0 \\ g(z) \text{ analítica en un entorno de } z_0 \end{cases}$$

- Si $z = z_0$ polo de orden uno : $a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

- $z = z_0$ polo de orden m : $a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right)$

4. RELACIÓN INTEGRALES - RESIDUOS $\Rightarrow$ TEOREMA DE LOS RESIDUOS

① $\int_C f(z) dz = (-) 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \text{Res} [f(z), \underbrace{z = z_k}_{\text{singularidades dentro de la curva}}]$

si C orientada en sent. horario (negativo)

5. RESIDUOS EN EL INFINITO

- Vemos si $z_0 = \infty$ pto singular estudiando $f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ en $\omega = 0$

Observaciones!!

1. Los ptos finitos solo pueden tener residuo si son singulares.
2. El pto $z_0 = \infty$ puede tener residuo aunque sea regular.

- Cálculo de residuos en el ∞ :

1ª forma:

$$\text{Res} [f(z), z = \infty] = \underbrace{-a_{-1}}_{\text{término de DSL en última corona de convergencia.}}$$

2ª forma:

$$Res[f(z), z=\infty] = Res\left[-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), w=0\right]$$

3ª forma: No vale xa sing. esenciales en $z=\infty$

$$Res[f(z), z=\infty] = -\frac{1}{(K+1)!} \lim_{w\to 0} \frac{d^{K+1}\left[w^K f\left(\frac{1}{w}\right)\right]}{dw^{K+1}} \qquad K=0,1,2,\dots$$

$K=$ orden del polo de $z=\infty$

$K=0$ si $z=\infty$ es regular !!

NOTA| se suele utilizar cuando $z=\infty$ es un punto regular de $f(z)$

6. TEOREMA DE LOS RESIDUOS GENERALIZADO

$$Res[f(z), z=\infty] + \underbrace{\sum_{K=1}^{m-1} Res[f(z), z=z_K]}_{\text{dentro de la curva}} + \underbrace{\sum_{m}^{n} Res[f(z), z=z_K]}_{\text{fuera de la curva}} = 0$$

② $\int_c f(z)\,dz = \underset{(+)}{-} 2\pi j \left\{ \sum_{K=m}^{n} Res[f(z), z=z_K] + Res[f(z), z=\infty] \right.$

↳ si c en sent. horario (negativo)

Resumen xa calcular 1 integral x residuos:

① Se puede hacer "por dentro" con ①

② Se puede hacer "x fuera" con ②

NOTA| ⇒ si me dicen: hallar y estudiar naturaleza del plano complejo ampliado entra el $\underline{\underline{\infty}}$.

TEMA 4 : RESIDUOS Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

Ejercicio 1

Hallar las singularidades de las siguientes aplicaciones y clasificarlas:

a) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+4)^2}$ b) $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$

c) $f(z)=(z-3)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{z+2}$ d) $f(z)=\dfrac{z-\text{sen}\,z}{z^3}$

d) $f(z)=\dfrac{z-\text{sen}z}{z^3}$ singularidad en $\boxed{z=0}$

1ª forma

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z-\text{sen}z}{z^3}\overset{0/0}{=}[L'H]=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{3z^2}\overset{0/0}{=}[L'H]=\lim_{z\to 0}\frac{\text{sen}z}{6z}=[L'H]=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{6}=\frac{1}{6}$$

$\exists \lim_{z\to 0} f(z)$ y es finito $\Leftrightarrow$ singularidad evitable

2ª forma : $f(z)=\dfrac{z}{z^3}-\dfrac{1}{z^3}\cdot\text{sen}z=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=$

$$=\frac{1}{z^2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}=$$

$$\text{sen}z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\dots=\underbrace{\frac{1}{3!}z^0-\frac{1}{5!}z^2+\frac{1}{7!}z^4-\dots}_{\text{parte regular}}$$

- No tiene parte principal $\Rightarrow$ $z=0$ es singularidad evitable.

$\text{Res}\,[f(z),z=0]=a_{-1}=0$ donde a_{-1} es el coef. del término $(z-z_0)^{-1}$ en el des. Laurent alrededor de z_0.

c) $f(z)=(z-3)\cdot\text{sen}\,\dfrac{1}{z+2}$ $\boxed{z=-2}$ punto singular

1ª forma : $\displaystyle\lim_{z\to -2} f(z)=\lim_{z\to -2}(z-3)\cdot\text{sen}\frac{1}{z+2}=-5\,\text{sen}\left(\frac{1}{0}\right)\nexists\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $z=-2$ es una singularidad esencial

2ª forma : Desarrollo de Laurent alrededor de $z_0=-2$. Cambio de variable: $\sum a_n(z-(-2))=\sum a_n(z+2)=\sum a_n(w-0)\Rightarrow\begin{cases}w=z+2\\ w-2=z\end{cases}$

Sustituyo z por ω.

$$f(\omega) = (\omega-2-3)\cdot \operatorname{sen} \frac{1}{\omega-2+2} = (\omega-5)\operatorname{sen}\frac{1}{\omega} = (\omega-5)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{2n+1} =$$

$$\operatorname{sen}\omega = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{\omega^{2n+1}} - 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{\omega^{2n+1}}$$

$\Rightarrow$ Deshacemos el cambio: $\omega = z+2$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{(z+2)^{2n}}}_{\text{pares}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{5}{(z+2)^{2n+1}}}_{\text{impares}}$$

Parte principal con infinitos términos $\Rightarrow$ $z=-2$ es sing. esencial

$$\operatorname{Res}[f(z), z=-2] = a_{-1} = -\frac{(-1)^0}{(2\cdot 0+1)!}\cdot 5 = -5$$

Para $n=0$ en el segundo sumatorio

pues $a_{-1} \Rightarrow$ coeficiente del término $(z+2)^{-1}$ en el des. Laurent.

b) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ singularidad en $\boxed{z=1}$

1ª forma: $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty \Leftrightarrow z=1$ es un polo

2ª forma: Des. Laurent alrededor de $z=1$. Cambio de variable:

$\omega = z-1 \Rightarrow z = \omega+1$

$$e^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}$$

$$f(\omega) = \frac{e^{2(\omega+1)}}{(\omega+1-1)^3} = \frac{1}{\omega^3}\cdot e^{2\omega}\cdot e^2 = \frac{e^2}{\omega^3}\,e^{2\omega} = \frac{e^2}{\omega^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\omega)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2 e^n}{n!}\,\omega^{n-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2\cdot 2^n}{n!}(z-1)^{n-3} = \underbrace{e^2(z-1)^{-3} + 2\cdot e^2(z-1)^{-2} + \frac{4e^2}{2!}\cdot(z-1)^{-1}}_{\text{Parte principal}} + \underbrace{\frac{8e^2}{3!}(z-1)^0 + \frac{16e^2}{4}(z-1) + \dots}_{\text{Parte regular}}$$

$\Rightarrow$ $z=1$ es un polo de orden 3.

$$\operatorname{Res}[f(z), z=1] = a_{-1} = \frac{4e^2}{2!} = 2e^2$$

a) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$

$(z^2+4)^2 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2j \Rightarrow (z^2+4)^2 = (z+2j)^2(z-2j)^2$

$f(z) = \dfrac{z}{(z-2j)^2(z+2j)^2} \Rightarrow$ Puntos singulares $\begin{cases} z = -2j \\ z = +2j \end{cases}$

- $\boxed{z = 2j} \Rightarrow \lim\limits_{z\to 2j} f(z) = \infty \Leftrightarrow z = 2j$ es polo

$g(z) = (z-z_0)^2 f(z) = \cancel{(z-2j)^2} \cdot \dfrac{z}{\cancel{(z-2j)^2}(z+2j)^2} = \dfrac{z}{(z+2j)^2}$

$\begin{cases} g(z_0) = g(2j) = \dfrac{2j}{(4j)^2} = -j/8 \neq 0 \\ g(z) \text{ analítica en } z_0 = 2j \end{cases}$

Así que $z = 2j$ es un polo de orden 2.

- $\boxed{z = -2j} \Rightarrow \lim\limits_{z\to -2j} f(z) = \infty \Leftrightarrow z = -2j$ es polo

$g(z) = (z-z_0)^2 f(z) = \cancel{(z+2j)^2} \cdot \dfrac{z}{\cancel{(z+2j)^2}(z-2j)^2} = \dfrac{z}{(z-2j)^2}$

$\begin{cases} g(z_0) = g(-2j) = \dfrac{j}{8} \neq 0 \\ g(z) \text{ analítica en } z_0 = -2j \end{cases}$

Así que $z = -2j$ es un polo de orden 2.

Ejercicio 2

Hallar las singularidades de las siguientes aplicaciones y clasificarlas:

a) $f(z) = e^{1/z^2}$ b) $f(z) = z \operatorname{sen} \dfrac{1}{z}$ c) $f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}}$

a) $f(z) = e^{1/z^2}$

1ª forma : $\lim_{z \to 0} e^{1/z^2} \Rightarrow \nexists$

- Caminos diferentes dan resultados distintos:

i) Por el eje real negativo : $\lim_{z \to 0^-} f(z) = e^{+\infty} = \infty$

ii) Por el eje imaginario positivo: $\lim_{z \to j0^+} f(z) = \lim_{z \to j0^+} e^{1/z^2} = e^{1/(j0^+)^2} = e^{-\infty} = 0$

2ª forma : desarrollo en serie

$a_{-1} = \operatorname{Res}[f(z), z=0]$

$$e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{2n}}} = 1 + 0 \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^6} + \dots$$

Parte ppal con ∞'s términos $\Rightarrow$ sing. esencial

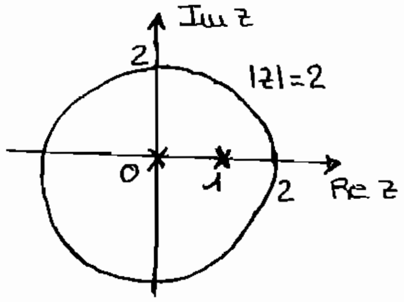
Como son términos pares $(0, 2, 4, \dots)$ $\underline{a_{-1} = 0}$ (su residuo)

Ejercicio 3

Calcular la siguiente integral utilizando el teorema de los residuos:

$$\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz$$

$$\int_{|z|=2} \underbrace{\frac{5z-2}{z(z+1)}}_{f(z)}\,dz \Rightarrow f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)} \Rightarrow \text{singularidades} \begin{cases} z=0 \\ z=1 \end{cases}$$



$$\int_{|z|=2} \frac{2z-2}{z(z-1)}\,dz = 2\pi j \left\{ \text{Res}\left[f(z), z=0\right] + \text{Res}\left[f(z), z=1\right] \right.$$

- Calculamos residuos:

$\boxed{z=0}$ $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty \Leftrightarrow z=0$ es un polo (orden 1)

$$a_{-1} = \text{Res}\left[f(z), z=0\right] = \lim_{z\to 0} (z-0)\,f(z) = \lim_{z\to 0} \cancel{z}\cdot\frac{5z-2}{\cancel{z}(z-1)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$\boxed{z=1}$ $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty \Leftrightarrow z=1$ es un polo (orden 1)

$$a_{-1} = \text{Res}\left[f(z), z=1\right] = \lim_{z\to 1} (z-1)\,f(z) = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)}\cdot\frac{5z-2}{z\cancel{(z-1)}} = \frac{3}{1} = 3$$

Por tanto:

$$I = 2\pi j\,(2+3) = 10\pi j$$

Otra forma

$$I = \int_{|z|=2} f(z)\,dz = \overbrace{2\pi j \left\{ \text{Res}\left[f(z), z=0\right] + \text{Res}\left[f(z), z=1\right] \right\}}^{\text{por dentro}} =$$

$$= \underbrace{-2\pi j\ \text{Res}\left[f(z), z=\infty\right]}_{\text{por fuera}}$$

Calculamos $\text{Res}\left[f(z), z=\infty\right] = \text{Res}\left[-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), w=0\right]$

$$-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2} \cdot \frac{5\frac{1}{w} - 2}{\frac{1}{w}\left(\frac{1}{w}-1\right)} = \frac{2w-5}{w(1-w)}$$

Sustituimos en $f(z)$

; $\frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$ tiene un polo simple en $w=0$ (Esto no significa q $f(z)$ tenga un polo simple en $z=\infty$ para eso habría q mirar $w=0$ en $f\left(\frac{1}{w}\right)$.)

$$\text{Res}\left[f(z), z=\infty\right] = \text{Res}\left[-\frac{1}{w^2} \cdot f\left(\frac{1}{w}\right), w=0\right] = \lim_{w\to 0} (w-0)\left[-\frac{1}{w^2} \cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right] =$$

$$= \lim_{w\to 0} w\left[\frac{2w-5}{w(1-w)}\right] = \lim_{w\to 0} \frac{2w-5}{1-w} = -\frac{5}{1} = -5$$

$$I = -2\pi j \,\text{Res}\left[f(z), z=\infty\right] = -2\pi j(-5) = 10\pi j$$

Ejercicio 4

Calcular la siguiente integral utilizando el teorema de los residuos:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z+z^2}}{z^5}\, dz$$

Ejercicio 6

Calcular en función del parámetro a la siguiente integral :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-j)(x^2+a^2)}$$

Ejercicio 7

I. Estudiar los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(z) = (z-2)^3 e^{2z}$ b) $f(z) = z(e^z - 1)$

II. Apoyándose en los resultados anteriores estudiar las singularidades de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \dfrac{e^z \operatorname{sen} z}{(z-2)^3 e^{2z}}$ b) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$

$arctg(\infty) = \pi/2$

TEMA 5: TRANSFORMADA DE LAPLACE

5.1 Definiciones

Nota x detrás

Definición de transformada

Fíjate que se trata de una integral paramé-trica de parámetro p

En general una transformada integral de una función $f(t)$ es:

$$F(p) = \int_a^b k(p,t)\cdot f(t)\,dt$$

Existen muchas transformadas integrales y todas ellas se diferencian en la elección del núcleo de la transformación $k(p, t)$. Los ejemplos más notables de transformadas son las de Laplace, Fourier, Hilbert, etc…

Definición de transformada de Laplace

En esta asignatura se usa la transformada de Laplace unilateral

Fíjate que en este caso se trata de una integral paramétrica impropia de parámetro s

Sea $f(t):[0,\infty)\to\mathbb{C}$ una función de variable real definida $\forall t\geq 0$

$$\boxed{\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}$$

Es decir, en nuestro caso se toma: $k(p,t)=e^{-st}$ siendo $s\in\mathbb{C}$.

$F(s)$ es una función de variable compleja $s\in\mathbb{C}$ que estará definida para aquellos valores de s para los que la integral converja.

Al tratarse de la transformada de Laplace unilateral, la región de convergencia de $F(s)$, siempre tendrá una forma semejante a $Re[s]>\sigma$. A esta región se la denomina **semiplano de convergencia**, y en él, la función $F(s)$ es holomorfa. A σ se la denomina **abscisa de convergencia**

Nota por detrás

$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$ converge si $p>0$

Propiedad: $\Gamma(p) = (p-1)!$

5.2 Propiedades de la Transformada de Laplace

Sean dos funciones $f(t):[0,\infty) \to \mathbb{C}$ y $g(t):[0,\infty) \to \mathbb{C}$ tales que sus transformadas son:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)),\ Re[s]>\alpha \quad \text{y} \quad G(s) = \mathcal{L}(g(t)),\ Re[s]>\beta$$

respectivamente.

$\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

$\cos x = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

5.2.1 Linealidad

$$\mathcal{L}(af(t) + b\,g(t)) = a\,\mathcal{L}(f(t)) + b\,\mathcal{L}(g(t))$$

5.2.2 Cambio de escala

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),\ \frac{\text{Re}[s]}{a} > \alpha$$

5.2.3 Desplazamiento en el dominio de t

$$\mathcal{L}(f(t-a)\,u(t-a)) = e^{-as} F(s) \qquad \mathcal{L}(u(t-a)) = \frac{1}{s} \cdot e^{-as}$$

5.2.4 Desplazamiento en el dominio de s

$$\mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right) = F(s-a),\ \text{Re}[s] > \alpha + a$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at} f(t)$$

5.2.5 Diferenciación en el dominio del t

La derivada de f es con respecto a t

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\,F(s) - f(0)$$

Generalizando lo anterior a la derivada n-ésima tenemos que:

$$\mathcal{L}(f^{n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \ldots - f^{n-1)}(0)$$

Particularizaciones para $n=2$ y $n=3$

$n=2 \quad \mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - s\,f(0) - f'(0)$

$n=3 \quad \mathcal{L}(f'''(t)) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s\,f'(0) - f''(0)$

$n=0 \quad \mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

5.2.6 Diferenciación en el dominio del s

La derivada de F es con respecto a s

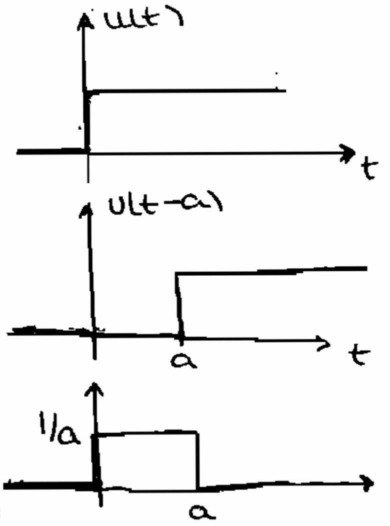
$$\mathcal{L}(t f(t)) = -F'(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -t f(t)$$

Cuando integras para hallar F(s) la integral no tiene límites de integración.

Generalizando lo anterior a la derivada n-ésima tenemos que:

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^{n)}F(s)}{ds^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 1: Calcular $\mathcal{L}[I(t)]$ donde $I(t)=\frac{1}{a}[u(t)-u(t-a)]$



$$\mathcal{L}[I(t)]=\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}\left(u(t)-u(t-a)\right)\right]=$$

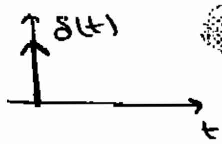
$$=\frac{1}{a}\left\{\mathcal{L}[u(t)]-\mathcal{L}[u(t-a)]\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{s}-e^{-as}\cdot\frac{1}{s}\right]=\frac{1}{as}\left[1-e^{-as}\right]$$

$\downarrow$

$\mathcal{L}[f(t-a)\ldots$

Ejemplo 2: Calcular $\mathcal{L}[\delta(t)]$, $\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$



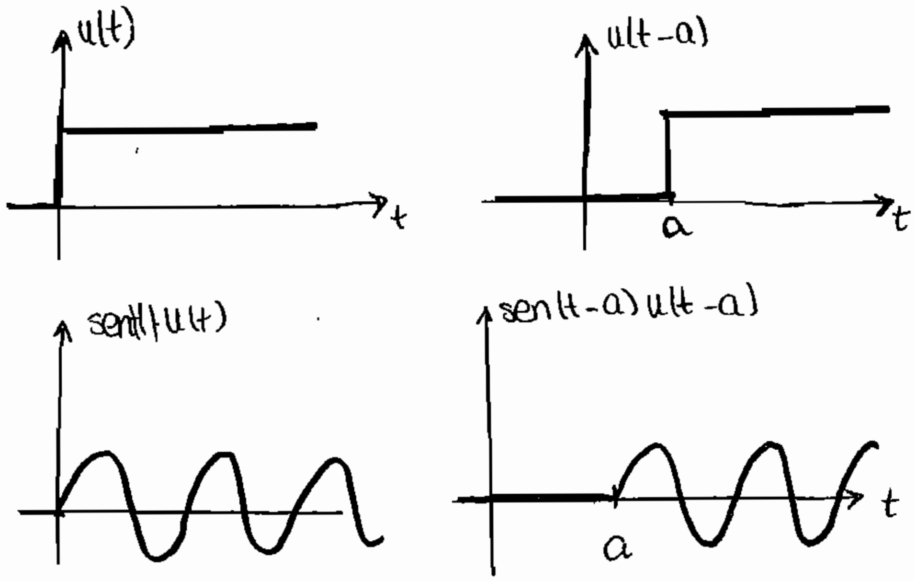
$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\lim_{a\to 0}\mathcal{L}[I(t)]=\lim_{a\to 0}\frac{1-e^{-as}}{as}=\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{[L'H]}=$$ ↳ derivamos respecto a "a"

$$=\lim_{a\to 0}\frac{s\cdot e^{-a\cdot s}}{s}=e^{-0}=1$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t)]=1}$$

5.2.3

$$\mathcal{L}[f(t-a)\cdot u(t-a)]=e^{-a\cdot s}F(s)$$



5.2.7 Integración en el dominio de t $\Rightarrow$ se utiliza cuando queremos hallar

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

¿otros límites de int?

$\int_0^t \underbrace{\ }_{\text{no depende del tiempo}}$

5.2.8 Integración en el dominio de s

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \underbrace{F(s)}_{\text{transformada de Laplace de } f(t)}\,ds \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty F(s)\,ds\right) = \frac{f(t)}{t}$$

5.2.9 Transformada de la convolución

Se define la operación de **convolución** entre dos funciones f y g como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau$$

La transformada de la convolución es:

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(s)\cdot G(s)$$

$$f(t) * g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)G(s)$$

Ejemplo:

$$X(s) = \mathcal{L}[\operatorname{sh}(t)]\cdot\mathcal{L}\left[\frac{1}{1+e^t}\right] \leftrightarrow x(t) = \operatorname{sh} t * \frac{1}{1+e^t}$$

<u>NOTA</u> se puede utilizar en EDOs cuando x ej. no sabemos hallar la transformada del término independiente.

5.3 Tranformada de Laplace de una función periódica

Sea $f(t)$ una función periódica de periodo $T > 0$. Entonces se cumple que $f(t)=f(t+T)$

Se puede demostrar:

Veremos la demostración en un ejercicio

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau}$$

$\downarrow$

demostración en Septiembre '04 ej. 3

5.4 Transformada inversa de Laplace

5.4.1 Definición

Sea $f(t):[0,\infty)\to\mathbb{C}$ y sea su transformada $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, $\mathrm{Re}(s) > \sigma$.
Se define la **transformada inversa de Laplace** de la siguiente manera:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{st}\,F(s)\,ds = \frac{1}{2\pi j}\lim_{w\to\infty}\int_{a-jw}^{a+jw} e^{st}\,F(s)\,ds$$

5.4.2 Cálculo efectivo de la transformada inversa

En este caso nos dan como dato una función en el dominio transformado $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ y nuestro objetivo es calcular $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F\ (s))$. Normalmente para conseguirlo no utilizaremos la definición dada más arriba. En su lugar tenemos dos métodos prácticos que son los siguientes:

Este método se basa en lo aprendido en el tema 4

a) <u>Mediante residuos</u>

Sea $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ analítica en $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ con un número finito de puntos singulares $s_1, s_2, \ldots, s_n$ y además $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$. Entonces se verifica que:

¡OJO! Fíjate que el sumatorio no está multiplicado por $2\pi j$

Además la función de la que se calculan los residuos no es F(s)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\lim_{w\to\infty}\int_{a-jw}^{a+jw} e^{st}\,F(s)\,ds = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st}; s=s_k\right]$$

$\sqrt[n]{z} = r\cdot e^{j\varphi} \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\theta+2k\pi}{n} \quad k=0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$

Caso particular:

Si $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ con $\mathrm{grad}(P(s)) < \mathrm{grad}(Q(s))$ y $s_1, s_2, \ldots, s_m$; $m \le n$ son polos simples de $F(s)$ entonces la anterior fórmula se puede simplificar como sigue:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st}; s=s_k\right] = \sum_{j=1}^{m}\frac{P(s_j)}{Q'(s_j)}e^{s_jt}$$

b) <u>Mediante descomposición en fracciones simples</u>

Lo más habitual es emplear los métodos b) y c) de manera combinada, como veremos en los ejercicios

Útil cuando F(s) es una función racional

c) <u>Mediante propiedades y tabla de transformadas</u>

Se trata de manipular algebraicamente la expresión $F(s)$ con el fin de atribuir las propiedades de la transformada de Laplace y poder aplicar algunas de las transformadas de la tabla.

Tabla de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$	
1	$\frac{1}{s}$	$Re\ s > 0$
e^{-zt}	$\frac{1}{s+z}$	$Re\ s > -Re\ z$
$t^n (n=1,2,..)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$Re\ s > 0$
$t^n e^{-zt} (n=1,2,..)$	$\frac{n!}{(s+z)^{n+1}}$	$Re\ s > -Re\ z$
$sen\ zt$	$\frac{z}{s^2+z^2}$	$Re\ s > \lvert Im\ z \rvert$
$cos\ zt$	$\frac{s}{s^2+z^2}$	$Re\ s > \lvert Im\ z \rvert$
$sh\ zt$	$\frac{z}{s^2-z^2}$	$Re\ s > \lvert Re\ z \rvert$
$ch\ zt$	$\frac{s}{s^2-z^2}$	$Re\ s > \lvert Re\ z \rvert$
$e^{-wt} sen\ zt$	$\frac{z}{(s+w)^2+z^2}$	$Re\ (s+w) > \lvert Im\ z \rvert$
$e^{-wt} cos\ zt$	$\frac{s+w}{(s+w)^2+z^2}$	$Re\ (s+w) > \lvert Im\ z \rvert$

Ref: W. R. Derrick, *Variable Compleja con Aplicaciones*, 1987.

TEMA 5 : TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ejercicio 1

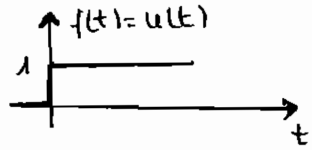
Calcular la transformada de Laplace de las siguientes [redacted] utilizando la definición de la transformada:

a) $f(t) = 1$

b) $f(t) = e^{-zt}$, $z \in \mathbb{C}$, z cte

c) $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$

a) $f(t) = 1$, $t \geq 0$



$f(t) = u(t)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot u(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty -s \cdot e^{-st} dt =$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left[e^{-[Re(s) + j\,Im(s)]\cdot t}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left[e^{-Re(s)\cdot t} \cdot e^{-j\,Im(s)\cdot t}\right]_0^\infty =$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\underbrace{e^{-Re(s)\cdot\infty}}_{\substack{\text{Tiende a 0} \\ \text{si } Re(s)>0}} \cdot \underbrace{e^{-j\cdot Im(s)\cdot\infty}}_{|e^{j0}|=1} - e^{-Re(s)\cdot 0} \cdot e^{-j\,Im(s)\cdot 0}\right] = -\frac{1}{s}\left[0 - e^0 e^0\right] =$$

$$= -\frac{1}{s}[0-1] = \boxed{\frac{1}{s} \;,\; Re(s) > 0}$$ (Reg. converg.)

(si $Re(s) < 0 \Rightarrow$ no converge)

$\underbrace{\qquad\qquad}_{0 \cdot \text{acotado} = 0}$

b) $f(t) = e^{-zt}$, $t \geq 0$, $z \in \mathbb{C}$, z cte   tb se puede poner $f(t) = e^{-zt} \cdot u(t)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-zt} \cdot u(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s+z)\cdot t} dt =$$

$$= -\frac{1}{s+z}\int_0^\infty -(s+z)\, e^{-(s+z)t} dt = -\frac{1}{s+z}\left[e^{-(s+z)t}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s+z}\cdot\Big[$$

$$\left[e^{-[Re(s) + j\,Im(s) + Re(z) + j\,Im(z)]t}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s+z}\left[e^{-[Re(s)+Re(z)]t} \cdot e^{-j[Im(s)+Im(z)]t}\right.$$

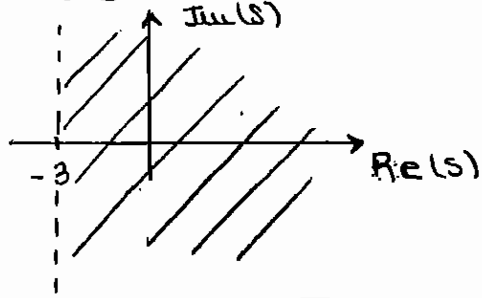
$$= -\frac{1}{s+z}\left[\underbrace{e^{-[Re(s)+Re(z)]\infty}}_{(1)} \cdot \underbrace{e^{-j[Im(s)+Im(z)]\infty}}_{(2)} - e^{-[Re(s)+Re(z)]\cdot 0} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, e^{-j[Im(s)+Im(z)]\cdot 0}\right] = -\frac{1}{s+z}[0-1] = \boxed{\frac{1}{s+z} \;,\; Re(s) > -Re(z)}$$

(región de convergencia)

(1) → tiende a 0 si $Re(s) + Re(z) > 0$
(2) → $|e^{j0}| = 1$ (acotado)
} 0 x acotado = cero

Ejemplo: $f(t) = e^{-3t}$, $z = 3$, $Re(z) = 3 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+3}$, $Re(s) > -3$



c) $f(t) = t^n$, $t \geq 0$

$f(t) = t^n \cdot u(t)$

$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-x}$

converge si $p > 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^n \cdot u(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^n\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x = st \to t = \frac{x}{s} \\ dx = s\,dt \to dt = \frac{dx}{s} \\ t = 0 \to x = 0 \\ t = \infty \to x = \infty \end{array}\right] = \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^n \cdot \frac{dx}{s} = \int_0^\infty \frac{x^n}{s^n} \cdot e^{-x} \cdot \frac{dx}{s} =$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \overbrace{\int_0^\infty x^n \cdot e^{-x}\,dx}^{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1) = \boxed{\frac{n!}{s^{n+1}}}$$

$p - 1 = n$
$p = n + 1$

$\Gamma(p) = (p-1)!$

Converge cuando:
$p > 0$
$n + 1 > 0$
$n > -1$

Ejercicio 2

Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones utilizando las propiedades de la transformada:

a) $f(t) = \operatorname{sen} zt$
b) $f(t) = \cos zt$
c) $f(t) = e^{-wt} \operatorname{sen} zt$
d) $f(t) = e^{-wt} \cos zt$

a) $f(t) = \operatorname{sen}(zt) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\operatorname{sen} zt) = \mathcal{L}\left(\dfrac{e^{jzt}-e^{-jzt}}{2j}\right) =$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$ $\quad$ $\mathcal{L}$ lineal

$$= \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{jzt}) - \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-jzt}) = \frac{1}{2j}\frac{1}{(s-jz)} - \frac{1}{2j}\frac{1}{(s+jz)} =$$

$e^{-zt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+z}$

$$= \frac{1}{2j}\frac{(s+jz)-(s-jz)}{(s-jz)(s+jz)} = \frac{1}{2j}\frac{2jz}{s^2-(jz)^2} = \frac{z}{s^2+z^2}$$

Estudio de la convergencia:

$e^{-zt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+z}$ $\quad Re(s) > -Re(z)$

$e^{jzt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s-jz}$ $\quad Re(s) > -Re(-jz)$

$e^{-jzt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+jz}$ $\quad Re(s) > -Re(jz)$

$\xrightarrow{z=a+jb}$

$-jz = -j(a+jb) = -ja-b^2j = b-ja$

$\boxed{Re(-jz) = Re(b-ja) = b = Im(z)}$

$jz = j(a+jb) = ja+bj^2 = -b+ja$

$\boxed{Re(jz) = Re(-b+ja) = -b = -Im(z)}$

Así que:

$Re(s) > -Im(z)$

$Re(s) > -(-Im(z)) = Im(z)$

$\boxed{Re(s) > |Im(z)|}$

Otra forma: por definición $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} zt = [$ Partes $] = \ldots$

b) $\cos zt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(\cos(zt)) = \mathcal{L}\left(\dfrac{e^{jzt}+e^{-jzt}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{jzt}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-jzt})$

$\cos x = \dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ $\quad$ $\mathcal{L}$ lineal

$e^{-zt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+z}$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-jz} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+jz} = \frac{1}{2}\frac{(s+jz)+(s-jz)}{(s-jz)(s+jz)} = \frac{2s}{2(s^2-j^2z^2)} = \frac{s}{s^2+z^2}$$

Estudio de la convergencia igual que en a)

c) $f(t)=e^{-\omega t}\operatorname{sen} zt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(e^{-\omega t}\operatorname{sen} zt) = \mathcal{L}\left(e^{-\omega t}\frac{e^{jzt}-e^{-jzt}}{2j}\right)=$

$\operatorname{sen} x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{e^{-\omega t+jzt}-e^{-\omega t-jzt}}{2j}\right)=\frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-(\omega-zj)t})-\frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-(\omega+jz)t})=$$

$e^{-zt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+z}$ $Re(s)>-Re(z)$

$$=\frac{1}{2j}\frac{1}{s+(\omega-zj)}-\frac{1}{2j}\frac{1}{s+(\omega+zj)}=\frac{1}{2j}\frac{s+\omega+jz-(s+\omega-jz)}{(s+\omega-jz)(s+\omega+jz)}=$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{2jz}{(s+\omega)^2+z^2}=\frac{z}{(s+\omega)^2+z^2}$$

Convergencia:

$e^{-zt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+z}$, $Re(s)>-Re(z)$

$e^{-(\omega-jz)t}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+(\omega-jz)}$, $Re(s)>-Re(\omega-jz)$

$e^{-(\omega+jz)t}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+(\omega+jz)}$, $Re(s)>-Re(\omega+jz)$

$z=a+jb$
$\omega=c+jd$

$\omega-jz=c+jd-j(a+jb)=c+jd-ja-j^2b=c+b+j(d-a)$

$\boxed{Re(\omega-jz)=c+b=Re(\omega)+Im(z)}$

$\omega+jz=c+jd+j(a+jb)=c+jd+ja+j^2b=c-b+j(a+d)$

$\boxed{Re(\omega+jz)=c-b=Re(\omega)-Im(z)}$

Así que:

$Re(s)>-Re(\omega-jz)=-Re(\omega)-Im(z)\rightarrow Re(s)+Re(\omega)>-Im(z)$

$Re(s+\omega)>-Im z$

$Re(s)>-Re(\omega+jz)=-Re(\omega)+Im(z)\rightarrow Re(s)+Re(\omega)>Im(z)$

$Re(s+\omega)>Im(z)$

$\rightarrow \boxed{Re(s+\omega)>|Im z|}$

d) Análogamente $e^{-\omega t}\cos zt\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{s+\omega}{(s+\omega)^2+z^2}$, $Re(s+\omega)>|Im z|$

Ejercicio 3

Resolver la EDO de segundo orden siguiente:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 2\cos t \quad t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\boxed{\text{PVI en } t} \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\text{Fmt } 4"'] & \boxed{\text{ecuación algebraica en } s} \arrow[d] \\
\boxed{\text{Solución en } t\ y(t)} & \boxed{\text{Solución en } s:\ Y(s)} \arrow[l, "\mathcal{L}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$y'' + y = 2\cos t \longrightarrow \mathcal{L}(y''(t)) + \mathcal{L}(y(t)) = 2\mathcal{L}(\cos t)$$

$$\underbrace{s^2 Y(s) - s^1 \overset{0}{\cancel{y(0)}} - s^0 \overset{1}{\cancel{y'(0)}}}_{\mathcal{L}[y''(t)]} + \underbrace{Y(s)}_{\mathcal{L}[y(t)]} = 2 \underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{\mathcal{L}[\cos t]}$$

• Hemos usado: $\mathcal{L}(y''(t)) = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)$

$$\cos(zt) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+z^2}, \quad z = 1$$

$$(s^2+1)\, Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{s^2+1}$$

• Por último $\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{s^2+1}\right] =$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\Bigg(\underbrace{\frac{2s}{(s^2+1)^2}}_{\to F'(s)}\Bigg) + \operatorname{sen} t =$$

$$\operatorname{sen} zt \longleftrightarrow \frac{z}{s^2+z^2}, \quad z = 1$$

$$F(s) = \frac{-1}{s^2+1} \longleftrightarrow -\operatorname{sen} t$$

$$F'(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \longleftrightarrow -t(-\operatorname{sen} t) = t\operatorname{sen} t$$

prop. $\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -tf(t$

$$= t\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t = (t+1)\operatorname{sen} t, \quad t \geq 0$$

o lo que es lo mismo: $\boxed{y(t) = (t+1)\operatorname{sen} t \cdot U(t)}$

Ejercicio 4 Calcular las siguientes transformadas inversas:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+2s+5}\right)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right)$ $\quad a<b \quad a,b\in\mathbb{R}$

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+2s+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s+1)^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+1-1}{(s+1)^2+4}\right) =$

$s^2+2s+5 = s^2+2s+1+4 = (s+1)^2+4.$

$= \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+1)^2+4}\right) = e^{-t}\cdot\cos(2t) - \dfrac{e^{-t}}{2}\cdot\operatorname{sen}(2t), \; t>0$

$e^{-\omega t}\cdot\operatorname{sen}(zt) \longleftrightarrow \dfrac{z}{(s+\omega)^2+z^2}$; $\omega=1$; $z=2$

$e^{-\omega t}\cdot\cos(zt) \longleftrightarrow \dfrac{s+\omega}{(s+\omega)^2+z^2}$; $\omega=1$; $z=2$.

- Forma general de manipular el denominador:

* $s^2+\alpha.s+\beta=0 \longrightarrow s=a\pm j.b \Rightarrow s^2+\alpha s+\beta = (s-a)^2+b^2$

En nuestro caso: $s^2+2s+5=0 \Rightarrow s=-1\pm 2j \longrightarrow$

$\longrightarrow s^2+2s+5 = (s-(-1))^2+2^2 = (s+1)^2+4$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+a^2).(s^2+b^2)}\right)$; $a<b$; $a,b\in\mathbb{R}$

Descomponemos en fracciones simples:

$\dfrac{s}{(s^2+a^2).(s^2+b^2)} = \dfrac{As+B}{s^2+a^2} + \dfrac{Cs+D}{s^2+b^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{s}{\cancel{(s^2+a^2).(s^2+b^2)}} = \dfrac{(As+B)(s^2+b^2)+(Cs+D)(s^2+a^2)}{\cancel{(s^2+a^2).(s^2+b^2)}} \Rightarrow$

$s = (As+B)(s^2+b^2)+(Cs+D)(s^2+a^2) \longrightarrow$

$\longrightarrow s = As^3+Ab^2.s+B.s^2+Bb^2+C.s^3+C.a^2s+Ds^2+Da^2$

$0s^3+0s^2+1s+0 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(Ab^2+C.a^2)s+(Bb^2+Da^2)$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ B+D=0 \\ Ab^2+C.a^2=1 \\ Bb^2+D.a^2=0 \end{array}\right\}$$ sist. ec. 4 ecuacs con 4 incog. ABCD

$$A=-C \Rightarrow 1=Ab^2+C.a^2 \Rightarrow 1=-C.b^2+C.a^2 \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{a^2-b^2}}$$

$$B=-D \Rightarrow 0=Bb^2+D.a^2 \Rightarrow -D.b^2+D.a^2=0$$

$$\Rightarrow D\underbrace{(a^2-b^2)}_{\neq 0 \text{ xq } b>a}=0 \Rightarrow \boxed{D=0} \quad \boxed{B=0} \qquad \boxed{A=\frac{1}{b^2-a^2}}$$

Así que: $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}=\overbrace{\left(\dfrac{1}{b^2-a^2}\right)}^{cte}\cdot\dfrac{s}{s^2+a^2}+\overbrace{\left(\dfrac{1}{a^2-b^2}\right)}^{cte.}\cdot\dfrac{s}{s^2+b^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{1}{b^2-a^2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]+\frac{1}{a^2-b^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+b^2}\right]=$$

$$\cos zt \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+z^2}$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\cos at+\frac{1}{a^2-b^2}\cos bt \;;\; t>0$$

duda

TEMA 5 : TRANSFORMADA DE LAPLACE

.Ejercicio 1

Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones utilizando la definición de la transformada:

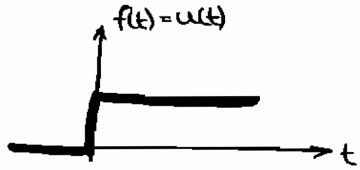
a) $f(t) = 1$

b) $f(t) = e^{-zt}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z$ cte

c) $f(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}$

a) $f(t) = 1 \; ; \; t \geq 0$

$f(t) = u(t)$



$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} u(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\,dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty -s\,e^{-st}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left[e^{[Re[s] - j\,Im[s]]t}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left[e^{-Re(s)t} \cdot e^{-j\,Im[s]t}\right]_0^\infty =$$

puede ser >0 ó <0 ¿barras de módulo?

$$= -\frac{1}{s}\Big[\underbrace{\underbrace{e^{-Re[s]\infty}}_{\substack{\text{tiende a cero si } Re[s]>0. \\ (\text{si } Re[s]<0 \text{ no conv.})}} \; \underbrace{e^{-j\,Im[s]\cdot\infty}}_{|e^{j\theta}|=1 \text{ acotado}}}_{0 \cdot \text{acotado} = 0.} - e^{-Re[s]\cdot 0} \cdot e^{-j\,Im[s]\cdot 0}\Big] =$$

$$= -\frac{1}{s}\left[0 - e^0 e^0\right] = -\frac{1}{s}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{s}, \quad Re[s] > 0 \text{ (Reg. de converg.)}$$

b) $f(t) = e^{-zt} \; ; \; t \geq 0$, $z \in \mathbb{C}$, z cte. también se puede poner

$f(t) = e^{-zt}\,u(t)$.

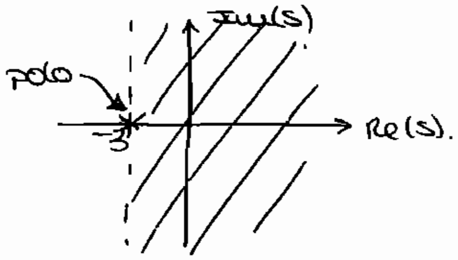
$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-zt} \cdot u(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+z)t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{s+z}\int_0^\infty -(s+z)\cdot e^{-(s+z)t}\,dt = -\frac{1}{s+z}\left[e^{-(s+z)t}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s+z}\left[e^{-[Re(s) + j\,Im(s) + Re(z) + j\,Im(z)]}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s+z}\left[e^{-[Re(s)+Re(z)]t}\, e^{-j[Im(s)+Im(z)]t}\right]_0^\infty =$$

$$= -\frac{1}{s+z}\left[\underbrace{e^{-[Re(s)+Re(z)]\infty}}_{\substack{\text{tiende a cero si} \\ Re(s)+Re(z)>0}} \cdot \underbrace{e^{-j[Im(s)+Im(z)]\cdot\infty}}_{\substack{|e^{j\theta}|=1 \\ \text{acotado.}}} - e^{-[Re(s)+Re(z)]0}\, e^{-j[Im(s)+Im(z)]0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{s+z}[0-1] = \frac{1}{s+z} \quad ; \quad Re(s) > -Re(z).$$

Ej: $f(t)=e^{-3t}$; $z=3$; $Re(z)=3 \rightarrow F(s)=\frac{1}{s+3}$; $Re(s)>-3$.



c) $f(t)=t^n$; $t \geq 0$.

$f(t)=t^n \cdot u(t)$.

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\cdot dx, \text{ converge si } p>0.$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\cdot t^n u(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\cdot t^n \cdot dt =$$

$x=st \rightarrow t=\frac{x}{s}$
$dx=s\,dt \rightarrow dt=\frac{dx}{s}$
$t=0 \rightarrow x=0$
$t=\infty \rightarrow x=\infty$

$$= \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-x}\cdot\left(\frac{x}{s}\right)^n \cdot \frac{dx}{s} = \int_0^\infty \frac{x^n}{s^n}\cdot e^{-x}\, \frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \underbrace{\int_0^\infty x^n \cdot e^{-x} dx}_{} = \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

$(p-1)! = \Gamma(p) \Rightarrow p-1$
$\Gamma(n+1) \rightarrow n$

converge cuando $n>-1$.
$p>0 \rightarrow n+1>0$

Ejercicio 2

Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones utilizando las propiedades de la transformada:

a) $f(t) = \text{sen}\, zt$
b) $f(t) = \cos zt$
c) $f(t) = e^{-wt}\,\text{sen}\, zt$
d) $f(t) = e^{-wt}\cos zt$

a) $f(t)=\text{sen}(zt) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(\text{sen}\,zt)=\mathcal{L}\left(\dfrac{e^{jzt}-e^{-jzt}}{2j}\right)=$

$\text{sen}\,x=\dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$ $\qquad$ $\mathcal{L}$ lineal

$$=\frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{jzt})-\frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-jzt})=\frac{1}{2j}\frac{1}{(s-jz)}-\frac{1}{2j}\frac{1}{(s+jz)}=$$

$e^{-zt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{1}{s+z}$ $\qquad$ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\epsilon t}\,e^{-st}\,dt=\frac{-1}{j\epsilon+s}$

$$=\frac{1}{2j}\frac{(s+jz)-(s-jz)}{(s-jz)(s+jz)}=\frac{1}{2j}\frac{2jz}{s^2-(jz)^2}=\frac{z}{s^2+z^2}$$

Estudio de la convergencia:

$e^{-zt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{1}{s+z}$ $\qquad Re(s)>-Re(z)$

$-jz=-j(a+jb)=-ja-bj^2=b-ja$

$e^{jzt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{1}{s-jz}$ $\qquad Re(s)>-Re(-jz)$ $\quad \xrightarrow{z=a+jb}$ $\boxed{Re(-jz)=Re(b-ja)=b=Im(z)}$

$jz=j(a+jb)=ja+bj^2=-b+ja$

$e^{-jzt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{1}{s+jz}$ $\qquad Re(s)>-Re(jz)$ $\quad$ $\boxed{Re(jz)=Re(-b+ja)=-b=-Im(z)}$

Así que:

$Re(s)>-Im(z)$

$Re(s)>-(-Im(z))=Im(z)$

$\boxed{Re(s)>|Im(z)|}$

Otra forma: por definición $\mathcal{L}[f(t)]=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen}\,zt=[\text{Partes}]=\dots$

b) $\cos zt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(\cos(zt))=\mathcal{L}\left(\dfrac{e^{jzt}+e^{-jzt}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{jzt})+\dfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-jzt})$

$\cos x=\dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ $\qquad$ $\mathcal{L}$ lineal

$e^{-zt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{1}{s+z}$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{s-jz}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+jz}=\frac{1}{2}\frac{(s+jz)+(s-jz)}{(s-jz)(s+jz)}=\frac{2s}{2(s^2-j^2z^2)}=\frac{s}{s^2+z^2}$$

Estudio de la convergencia igual que en a)

c) $f(t)=e^{-\omega t}\operatorname{sen} zt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(e^{-\omega t}\operatorname{sen} zt) = \mathcal{L}\left(e^{-\omega t}\frac{e^{jzt}-e^{-jzt}}{2j}\right)=$

$\operatorname{sen} x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

$$=\mathcal{L}\left(\frac{e^{-\omega t+jzt}-e^{-\omega t-jzt}}{2j}\right)=\frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-(\omega-zj)t})-\frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-(\omega+jz)t})=$$

$e^{-zt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+z}\quad Re(s)>-Re(z)$

$$=\frac{1}{2j}\frac{1}{s+(\omega-zj)}-\frac{1}{2j}\frac{1}{s+(\omega-zj)}=\frac{1}{2j}\frac{s+\omega+jz-(s+\omega-jz)}{(s+\omega-jz)(s+\omega+jz)}=$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{2jz}{(s+\omega)^2+z^2}=\frac{z}{(s+\omega)^2+z^2}$$

Convergencia

$e^{-zt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+z}\quad , Re(s)>-Re(z)$

$e^{-(\omega-jz)t}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+(\omega-jz)}\quad , Re(s)>-Re(\omega-jz)$

$e^{-(\omega+jz)t}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+(\omega+jz)}\quad , Re(s)>-Re(\omega+jz)$

$z=a+jb$
$\omega=c+jd$

$\omega-jz=c+jd-j(a+jb)=c+jd-ja-j^2b=c+b+j(d-a)$

$\boxed{Re(\omega-jz)=c+b=Re(\omega)+Im(z)}$

$\omega+jz=c+jd+j(a+jb)=c+jd+ja+j^2b=c-b+j(a+d)$

$\boxed{Re(\omega+jz)=c-b=Re(\omega)-Im(z)}$

Así que:

$Re(s)>-Re(\omega-jz)=-Re(\omega)-Im(z)\rightarrow Re(s)+Re(\omega)>-Im(z)$

$Re(s+\omega)>-Im\,z$

$\Rightarrow \boxed{Re(s+\omega)>|Im\,z|}$

$Re(s)>-Re(\omega+jz)=-Re(\omega)+Im(z)\rightarrow Re(s)+Re(\omega)>Im(z)$

$Re(s+\omega)>Im(z)$

d) Análogamente $e^{-\omega t}\cos zt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+\omega}{(s+\omega)^2+z^2}\quad , Re(s+\omega)>|Im\,z|$

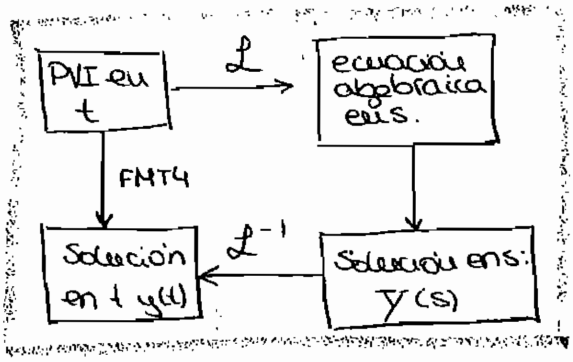
c) $f(t) = e^{-\omega t} \cdot \operatorname{sen} zt$

duda

Ejercicio 3. **Resolver la EDO de segundo orden siguiente:**

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 2\cos t & t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

P.V.I $\begin{cases} y''(t) + y(t) = 2\cos t \,;\, t > 0. \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$



$y'' + y = 2\cos t \longrightarrow \mathcal{L}(y''(t)) + \mathcal{L}(y(t)) = 2\,\mathcal{L}(\cos t)$

$$\underbrace{s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)}^{0} - s\cdot(\cancel{y'(0)}^{1})}_{\mathcal{L}[y''(t)]} + \underbrace{Y(s)}_{\mathcal{L}[y(t)]} = 2\cdot \underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{\mathcal{L}[\cos t]}.$$

Hemos usado: $\mathcal{L}(y''(t)) = s^2 \cdot Y(s) - s\, y(0) - y'(0).$

$\cos(zt) \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+z^2}\,;\, z = 1.$

$(s^2+1)Y(s) = \dfrac{2s}{s^2+1} + 1$

$Y(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2} + \dfrac{1}{s^2+1}$

Por último: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{(s^2+1)^2} + \dfrac{1}{s^2+1}\right] =$

$= \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}\right] + \operatorname{sen} t =$

$\boxed{\operatorname{sen} zt \longleftrightarrow \dfrac{z}{s^2+z^2};\, z = 1.}$

$F'(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}.$

$F(s) = \dfrac{-1}{s^2+1} \longleftrightarrow -\operatorname{sen} t$

$F'(s) \longleftrightarrow -t\cdot -\operatorname{sen} t = t\operatorname{sen} t$

$\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -t\cdot f(t)$

$= +t\cdot \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t = (t+1)\operatorname{sen} t. \;;\; t \geq 0$

o lo que es lo mismo:

$$\boxed{y(t) = (t+1)\operatorname{sen} t\; u(t)}$$

Ejercicio 4

Calcular las siguientes transformadas inversas:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+2s+5}\right)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right) \quad a<b \quad a,b\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} &s^2+2s+5 = \\ &= s^2+2s+1+4 = \\ &= (s+1)^2+4 \end{aligned}}$$

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+2s+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s+1)^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+1-1}{(s+1)^2+4}\right) =$

$= \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+1)^2+4}\right) = e^{-t}\cdot\cos(2t) - e^{-t}\operatorname{sen}(2t)\,\dfrac{1}{2}\cdot 2$

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{-\omega t}\cdot\operatorname{sen}(z t) \longleftrightarrow \frac{z}{(s+\omega)^2+z^2}\ ;\ \omega=1\ ;\ z=2 \\ &e^{-\omega t}\cdot\cos(z t) \longleftrightarrow \frac{s+\omega}{(s+\omega)^2+z^2}\ ;\ \omega=1\ ;\ z=2 \end{aligned}}$$

- <u>Forma general de manipular el denominador</u>:

$s^2+\alpha s+\beta = 0 \longrightarrow s = a\pm jb \Rightarrow s^2+\alpha s+\beta = (s-a)^2+b^2$

En nuestro caso: $s^2+2s+5=0 \Rightarrow s=-1\pm 2j \rightarrow$

$\rightarrow s^2+2s+5 = (s-(-1))^2+2^2 = (s+1)^2+4.$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right)$; $a<b$; $a,b\in\mathbb{R}$.

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} = \frac{As+B}{s^2+a^2} + \frac{Cs+D}{s^2+b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{s}{\cancel{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}} = \frac{(As+B)(s^2+b^2)+(Cs+D)(s^2+a^2)}{\cancel{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = (As+B)(s^2+b^2)+(Cs+D)(s^2+a^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = As^3+Ab^2s+Bs^2+Bb^2+Cs^3+Ca^2s+Ds^2+Da^2$$

$$0\cdot s^3+0\cdot s^2+1\cdot s+0 = (A+C)s^3+(B+D)s^2+(Ab^2+Ca^2)s+(Bb^2+Da^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ B+D=0 \\ Ab^2+Ca^2=1 \\ Bb^2+Da^2=0 \end{array}\right\}$$

Sist. ec. 4 ecuaciones con 4 incog. ABCD.

$$A=-C \Rightarrow 1=Ab^2+Ca^2 \Rightarrow 1=-Cb^2+Ca^2 \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{a^2-b^2}}$$

$$B=-D \Rightarrow 0=Bb^2+Da^2 \Rightarrow -Db^2+Da^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(\underbrace{a^2-b^2}_{\neq 0 \text{ pq } b>a})=0 \Rightarrow \boxed{D=0} \quad \boxed{B=0}. \qquad \boxed{A=\frac{1}{b^2-a^2}}$$

Así que: $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}=\dfrac{1}{b^2-a^2}\cdot\dfrac{s}{s^2+a^2}+\dfrac{1}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{s}{s^2+b^2}.$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{b^2-a^2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]+\frac{1}{a^2-b^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+b^2}\right]=$$

$\cos zt \longleftrightarrow \dfrac{s}{s^2+z^2}$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\cdot\cos at+\frac{1}{a^2-b^2}\cos bt \;;\; t>0.$$

Ejercicio 4

Calcular las siguientes integrales reales utilizando técnicas de variable compleja:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\operatorname{sen} x}$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$ c) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\operatorname{sen}x}$ es un ejemplo del tipo 1 $\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen}x, \cos x)\,dx$

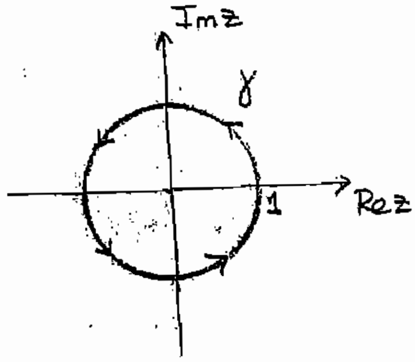
En estos casos el cambio de variable es: $z = e^{jx} \rightarrow dz = \underbrace{je^{jx}}_{z} dx \rightarrow$

$dx = \frac{dz}{jz}$

$\operatorname{sen}x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j} = \frac{z-z^{-1}}{2j}$

$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$

La curva sobre la que se integra en estos casos es



Así que:

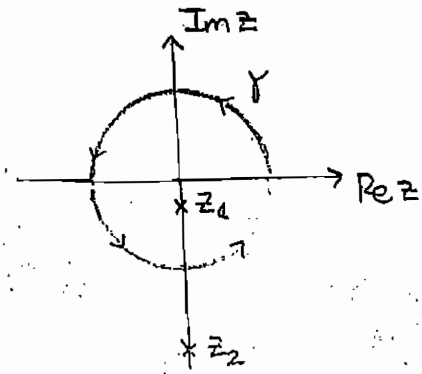
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\operatorname{sen}x} = \int_\gamma \frac{\frac{dz}{jz}}{2+\frac{z-z^{-1}}{2j}} = \int_\gamma \frac{2j}{4j+z+z^{-1}} \frac{dz}{jz} = \int_\gamma \overbrace{\frac{2}{z^2+4jz-1}}^{f(z)} dz =$$

$= 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z=z_k]$, donde z_k son los puntos singulares de $f(z)$ dentro de γ.

Los puntos sing. de $f(z)$ serán aquellos en los que se anule el denominador:

$$z^2+4jz-1=0 \rightarrow z = \frac{-4j \pm \sqrt{4^2j^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = -2j \pm \sqrt{-12} = -2j \pm \sqrt{12}\,\overbrace{\sqrt{-1}}^{j} =$$

$$= -2j \pm j\,2\sqrt{3} = \begin{cases} z_1 = (-2+\sqrt{3})j \rightsquigarrow \text{dentro de } \gamma \\ z_2 = (-2-\sqrt{3})j \rightsquigarrow \text{fuera de } \gamma \end{cases}$$



$f(z) = \frac{2}{[z-z_1][z-z_2]}$, z_1 y z_2 polos simples

Así que $I = 2\pi j \operatorname{Res}\left[f(z), z=z_1\right] = 2\pi j \lim_{z\to z_1} (z-z_1) f(z) =$

$$= 2\pi j \lim_{z\to z_1} \cancel{(z-z_1)} \cdot \frac{2}{\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)} = 2\pi j \lim_{z\to j(-2+\sqrt{3})} \frac{2}{z-j(-2-\sqrt{3})} =$$

$$= 2\pi j \cdot \frac{2}{j(-2+\sqrt{3})-j(-2-\sqrt{3})} = \cancel{2}\pi \cancel{j} \frac{2}{\cancel{2}\sqrt{3}\cancel{j}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

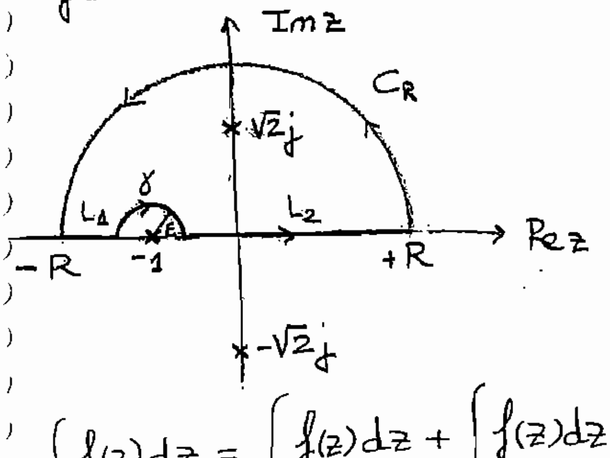
$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\operatorname{sen}x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$ es un ejemplo del tipo 2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

En estos casos se obtiene $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z^2+2)} = \dfrac{1}{(z+1)(z+\sqrt{2}j)(z-\sqrt{2}j)}$

Polos simples en $z_1=-1$, $z_2=\sqrt{2}j$ y $z_3=+\sqrt{2}j$ $\quad z^2+2=(z+\sqrt{2}j)(z-\sqrt{2}j)$

En estos casos el contorno de integración se escoge típicamente como una "semicircunferencia" de radio R en el semiplano superior, siendo R lo suficientemente grande para encerrar todas las singularidades que haya en $\operatorname{Im}(z)>0$. Las singularidades que aparezcan sobre el eje real se "evitarán" con pequeños contornos semicirculares.



Contorno de integración: $\Gamma = C_R \cup L_1 \cup \gamma \cup L_2$

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$$

(*) y (**): En L_1 y L_2 $z=x$

$$2\pi j \operatorname{Res}\left[f(z), z=\sqrt{2}j\right] = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)dx + \int_\gamma f(z)dz + \int_{-1+\varepsilon}^{+R} f(x)dx$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z=\sqrt{2}j\right] = \lim_{z\to\sqrt{2}j} (z-\sqrt{2}j)f(z) = \lim_{z\to\sqrt{2}j} \frac{1}{(z+1)(z+\sqrt{2}j)} = \frac{-2-\sqrt{2}j}{12}$$

Así que:

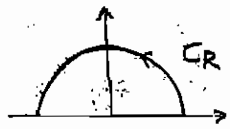
$$2\pi j\,\frac{-2-\sqrt{2}j}{12} = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{-1+\varepsilon}^{+R} f(x)dx$$

$$\int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{-1+\varepsilon}^{+R} f(x)dx = -\pi j\,\frac{1+\sqrt{2}j}{3} - \int_{C_R} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz$$

Tomando límites cuando $R\to\infty$ y $\varepsilon\to 0$:

$$\underbrace{\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{1+\varepsilon}^{+R} f(x)dx\right]}_{VP\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx} = -\pi j\,\frac{2+\sqrt{2}j}{6} - \underbrace{\overbrace{\cancel{\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz}}^{0}}_{\text{Aplicar 2º lema de Jordan}} - \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma} f(z)dz}_{\text{Aplicar 1er lema de Jordan}}$$

Aplicamos 2º lema de Jordan:



$\theta_B = \pi$

$\theta_A = 0$

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} z\,\frac{1}{(z+1)(z^2+2)} = 0 = K \Longrightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = j(\theta_B-\theta_A)K = 0$$

Aplicamos 1er lema de Jordan:

$\theta_A = \pi$

$\theta_B = 0$

$$\lim_{z\to -1} (z+1)f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{1}{z^2+2} = \frac{1}{3} = K \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma} f(z)dz = j(\theta_B-\theta_A)K = -j\frac{\pi}{3}$$

Así que:

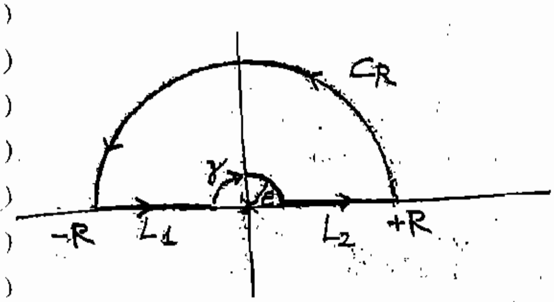
$$\boxed{VP\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -\pi j\,\frac{2+\sqrt{2}j}{6} - 0 + j\frac{\pi}{3} = (-j^2)\pi\,\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6}}$$

Nota: Recuerda que lo que se calcula con este método es el valor principal de la integral, que coincide con el valor de esta si es convergente.

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ es un ejemplo de tipo 3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left\{\begin{matrix}\operatorname{sen} mx\\ \cos mx\end{matrix}\right\}dx$

En estos casos se escoge $g(z)=f(z)e^{jz}$. En este caso, $g(z)=\frac{1}{z}e^{jz}$ ya que $f(x)=\frac{1}{x}$

El contorno de integración se escoge de la misma forma que en los de tipo 2 (ver apartado b) y se calcula $\displaystyle\int_\Gamma g(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)e^{jz}\,dz$



$g(z)$ sólo tiene como singularidad $z=0$ (polo simple). Lo "evitamos" con una pequeña semicircunferencia de radio ε

$\Gamma = C_R \cup L_1 \cup \gamma \cup L_2$

(*) y (**)
En L_1 y L_2
$z=x$

$$\int_\Gamma \frac{e^{jz}}{z}dz = \int_{C_R}\frac{e^{jz}}{z}dz + \int_{L_1}\frac{e^{jz}}{z}dz + \int_{\gamma}\frac{e^{jz}}{z}dz + \int_{L_2}\frac{e^{jz}}{z}dz$$

(*) (**)

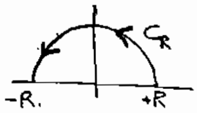
$$2\pi j \sum \operatorname{Res}\left[\cancel{f(z)}, z=z_k\right] = \int_{C_R}\frac{e^{jz}}{z}dz + \int_{-R}^{0-\varepsilon}\frac{e^{jx}}{x}dx + \int_{\gamma}\frac{e^{jz}}{z}dz + \int_{0+\varepsilon}^{+R}\frac{e^{jx}}{x}dx$$

0 pq no hay singularidades encerradas en Γ

$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{jx}}{x}dx + \int_{+\varepsilon}^{+R}\frac{e^{jx}}{x}dx = 0 - \int_{C_R}\frac{1}{z}e^{jz}dz - \int_{\gamma}\frac{e^{jz}}{z}dz$$

Tomando límites cuando $R\to\infty$ y $\varepsilon\to 0$

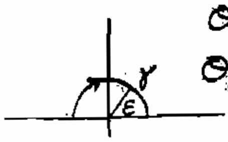
$$\underbrace{\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{jx}}{x}dx + \int_{+\varepsilon}^{+R}\frac{e^{jx}}{x}dx\right]}_{VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x}dx} = 0 - \underbrace{\overset{0}{\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z}e^{jz}dz}}_{\text{Aplicamos 3er lema de Jordan}} - \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{jz}}{z}dz}_{\text{Aplicamos el 1er lema de Jordan}}$$

Aplicamos 3^{er} lema de Jordan: 

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0 \Longrightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{jmz}\,dz=0$$

En nuestro caso:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0 \Longrightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z}e^{jz}\,dz=0$$

Aplicamos 1^{er} lema de Jordan: 

$\theta_A=\pi$

$\theta_B=0$

$$\lim_{z\to 0}\cancel{(z-0)}\frac{1}{\cancel{z}}e^{jz}=e^{j0}=1=k \Longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma}\frac{1}{z}e^{jz}\,dz=j(\theta_B-\theta_A)k=-j\pi$$

Así que:

$$VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x}\,dx = 0-0-(-j\pi)=0+j\pi$$

De esto se deduce:

$$VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x}\,dx = VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x+j\,\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx \Longrightarrow$$

$$VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx=\mathrm{Re}\left[VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x}\,dx\right]=0$$

$$VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx=\mathrm{Im}\left[VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jx}}{x}\,dx\right]=\pi$$

A nosotros nos pedían $\boxed{VP\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx=\frac{1}{2}VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{2}}$

$\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$ es par

Ejercicio 10

Calcular $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{z}}$

a) Utilizando la rama definida por $k=0$ y $-\pi < \arg(z) < \pi$

b) Utilizando la rama definida por $k=0$ y $0 < \arg(z) < 2\pi$