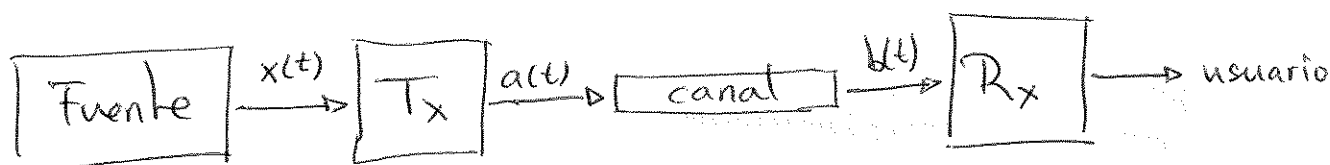


Tema 1: Introducción Sistemas de Comunicaciones.

- Estructura básica
- Multiplexación
- Calidad
- Recursos

1. Estructura básica



fuerate entrega $x(t)$ (analogica o digital)

T_x : transmisor: acondiciona la señal de la fuente al canal

↳ producirán sistemas } analógicos ↔ banda base
 modulos
 } digitales ↔ banda base
 modulos

si el canal es ideal: $b(t) = k \cdot a(t - t_0)$; $k < 1$

si el canal no es ideal: $b(t) = k \cdot a(t - t_0) + p(t)$; p =perturbación

perturbación = $p(t) = n(t) + i(t) + d(t)$
 ruido + interferencia + distorsión

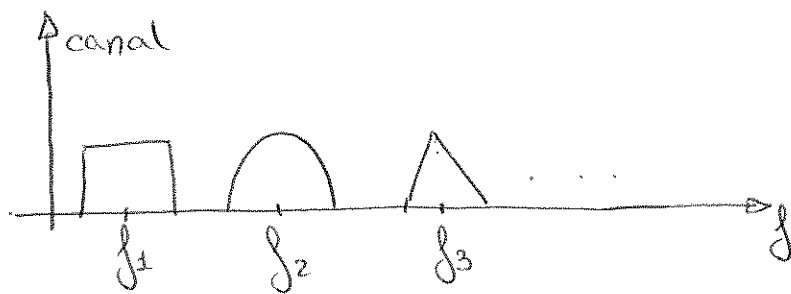
R_x : receptor: deshace la labor del transmisor y sanea la señal en la medida de lo posible

2. Multiplexación

Sean N fuentes, N usuarios y sólo 1 canal

→ FDMA: Acceso Múltiple por División en Frecuencia

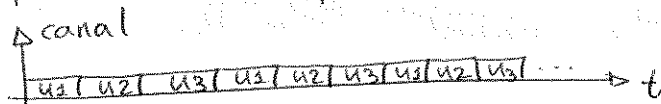
Se asigna a cada usuario unas frecuencias determinadas



Este sistema exige modulación para todas las fuentes. Es el único sistema que acepta las señales analógicas.

→ TDMA: Acceso Múltiple por División en el Tiempo

Se asigna a cada usuario todo el canal durante un periodo de tiempo



→ CDMA: Acceso Múltiple por División en Código

Cada fuente tiene un código asociado. Sólo el receptor con el mismo código podrá decodificar la info.

→ SDMA: Acceso Múltiple por División del Espacio

Tan sólo se emite en una (o más) zonas. Por ejemplo, la comunicación satélite.

3. Calidad

$$y(t) = ka(t - t_0) + p(t) \quad ; \quad p(t) = n(t) + i(t) + d(t)$$

$$\text{Calidad} = \frac{S}{P} = \frac{\text{Potencia de señal}}{\text{Potencia de perturbación}} = \frac{S}{N+I+D}$$

La potencia de señales sumadas no es la suma de las potencias de las señales excepto cuando:

- las señales no se solapan en frecuencias
- existen N procesos aleatorios independientes
- las señales están en cuadratura

En TECM usaremos:

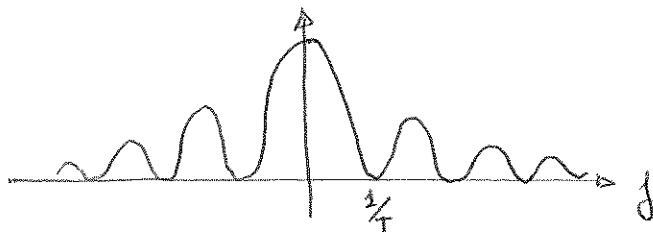
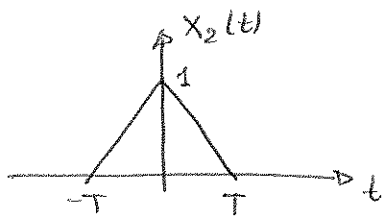
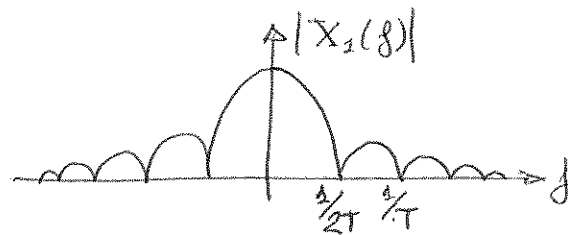
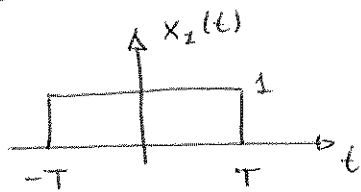
$$\text{Calidad} = \frac{S}{N} = \text{SNR} = \text{Signal to Noise Ratio}$$

$$\text{Probabilidad de error} = P_e = \frac{N^\circ \text{ símbolos erróneos}}{N^\circ \text{ símbolos totales}}$$

4. Recursos

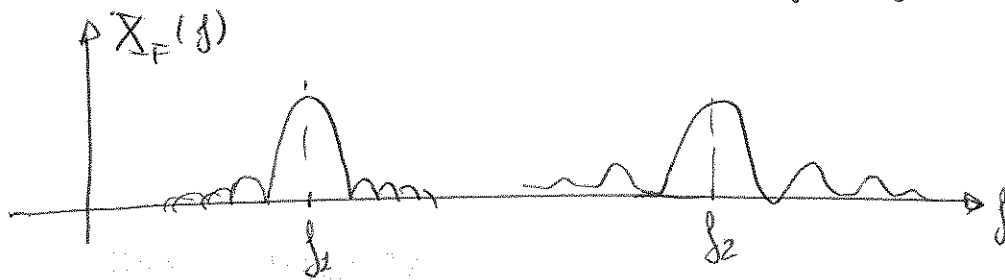
- Ancho de banda
 - Potencia
- { "mejor" será el sistema
cuanto menos se usen

P1: Calcular la transformada de Fourier de:

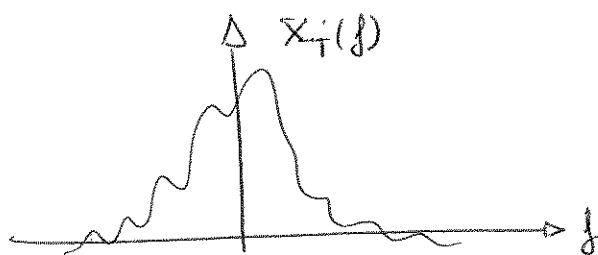


$$x_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \Rightarrow X_2(f) = X_1(f) \cdot \bar{X}_1(f)$$

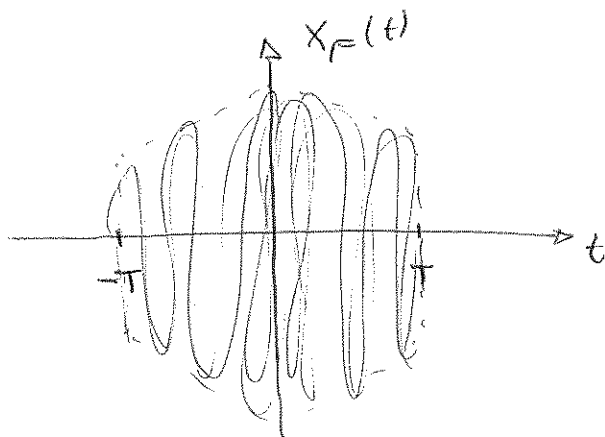
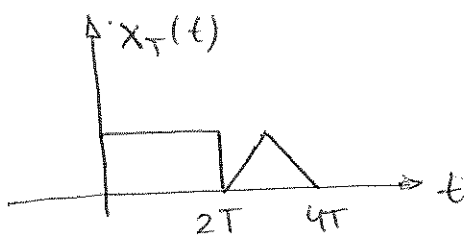
$$x_T(t) = x_1(t) \cdot \cos(2\pi f_1 t) + x_2(t) \cdot \cos(2\pi f_2 t); \quad f_2 - f_1 \gg \frac{1}{T}$$

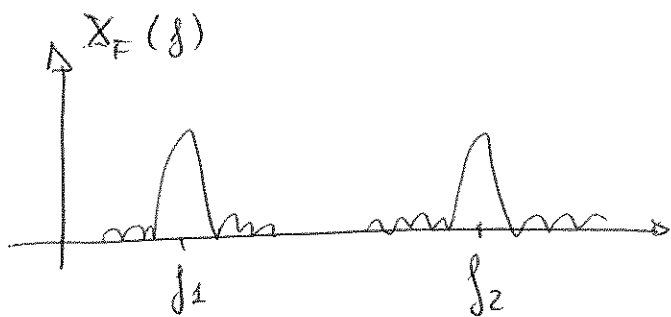
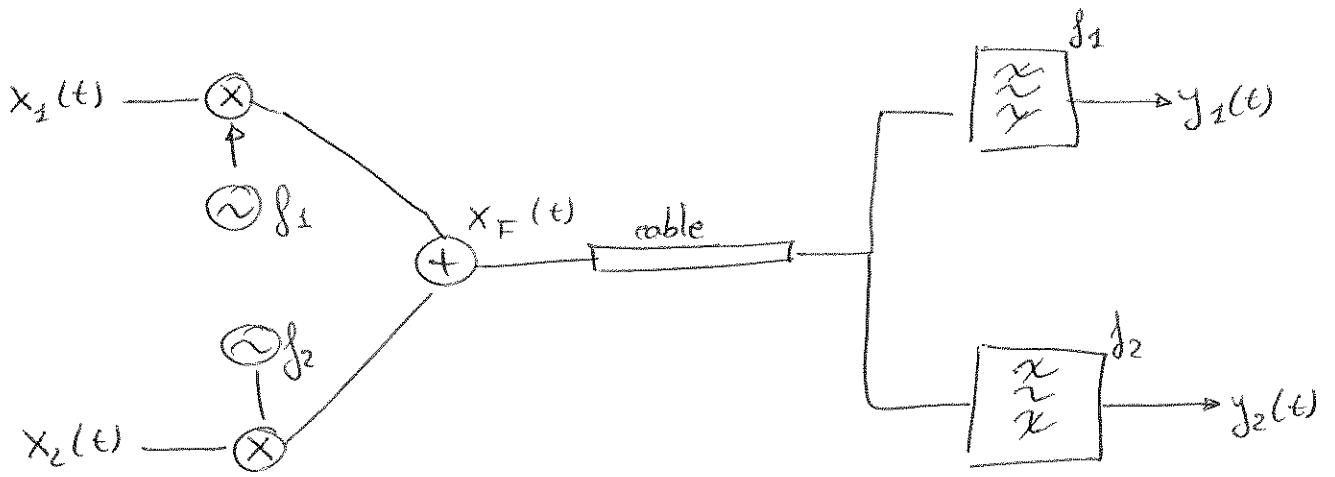


$$x_T(t) = x_1(t-T) + x_2(t-3T)$$

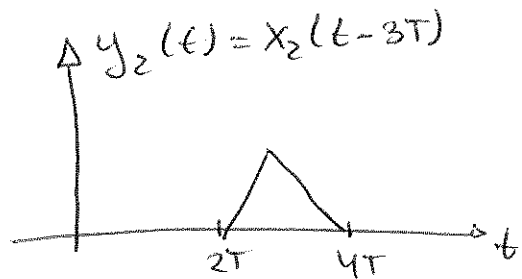
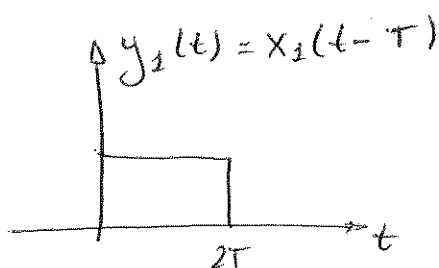
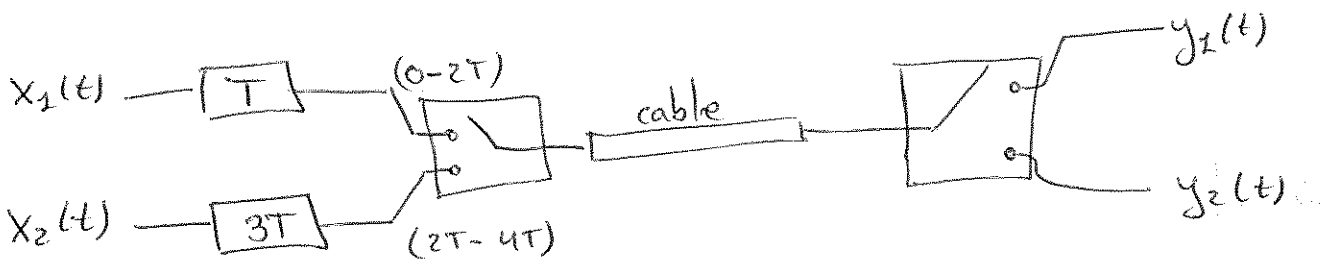
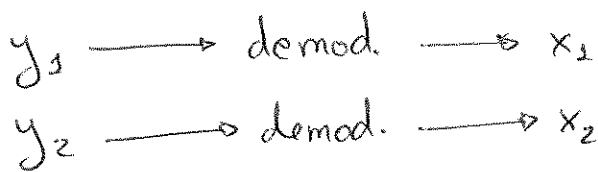


En el tiempo:

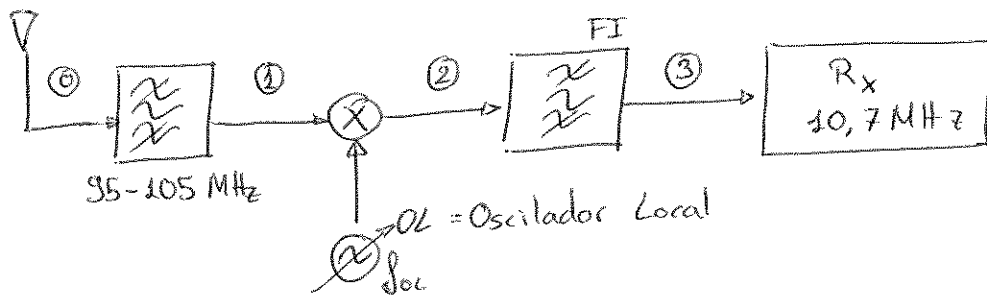




al filtrar, se obtiene las señales recuperadas correctamente, sólo que están moduladas



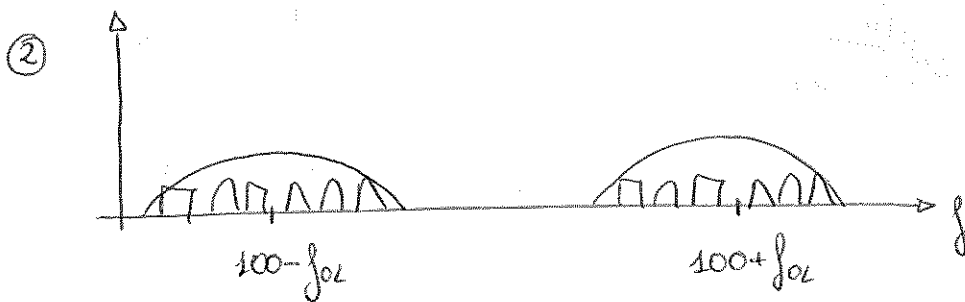
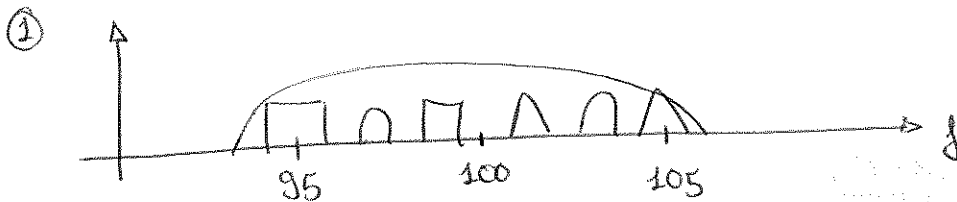
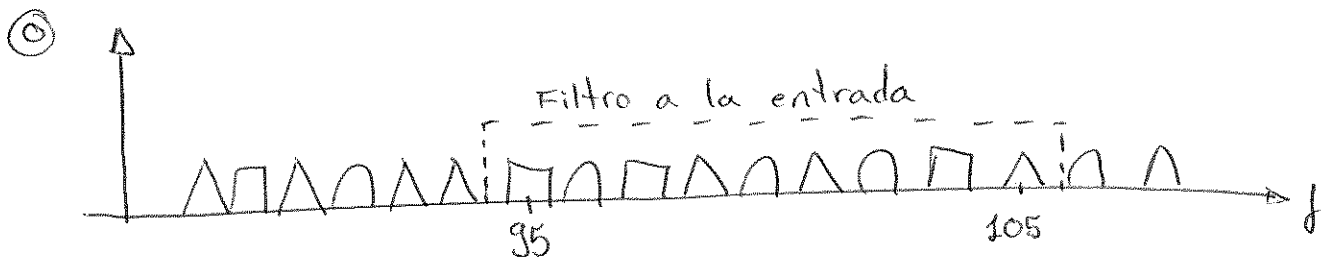
P2: Radio FM (FDMA)



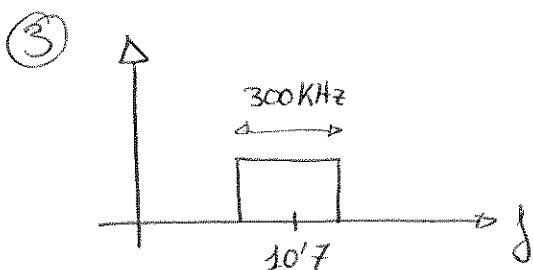
B_w de cada emisora = 300 kHz

B_w FM $\in (87,5, 108)$ MHz

a) Demostrar la recepción de cualquier emisora $\in (95, 105)$ MHz



Mi receptor sólo "escucha" 10,7 MHz. Para recibir la señal de 100 MHz necesitareé $100 - f_{OL} = 10,7 \Rightarrow f_{OL} = 89,3$ MHz

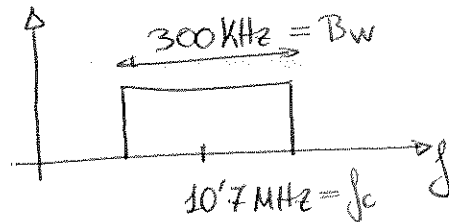
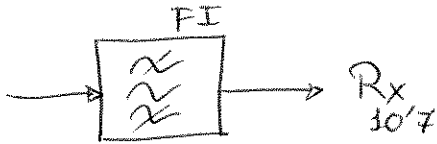


b) Margen del OL para captar todas las emisoras:

$$\text{limite inferior: } 95 - f_{OL} = 10^7 \Rightarrow f_{OL}^{inf} = 84,3 \text{ MHz}$$

$$\text{limite superior: } 105 - f_{OL} = 10^7 \Rightarrow f_{OL}^{sup} = 94,3 \text{ MHz}$$

c) Especificar el filtro FI y su Bw relativo



$$B_w^{rel} = \frac{Bw}{f_c} \times 100 = 2,8\%$$

d) B_w^{rel} de un filtro FI sin conversión de frecuencia

por ejemplo a 100 MHz

$$B_w^{rel} = \frac{300 \text{ kHz}}{100 \text{ MHz}} \cdot 100 = 0,3\%$$

Tema 2: Caracterización de señales, ruido y distorsión

1. Señales deterministas

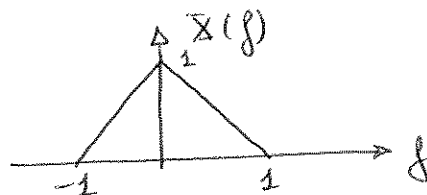
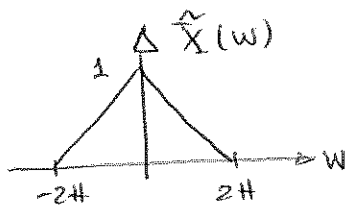
Transformada de Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\tilde{X}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt ; \omega = 2\pi f$$

$$\tilde{X}(w) = X(f) \Big|_{f = \frac{w}{2\pi}}$$

$$2\pi \tilde{X}(w) = X(f)$$



Normalización de impedancia:

sea: $v(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ y una resistencia de valor R

$$P_{\text{media}}^{\text{dissip.}} = \frac{A^2}{2R}$$

$$\bar{P}_m = P_{\text{media}}^{\text{normalizada}} = \frac{A^2}{2}, (R=1\Omega)$$

Unidades logarítmicas:

$$R(\text{dB}) = 10 \cdot \log\left(\frac{P_2(\text{W})}{P_1(\text{W})}\right) \Rightarrow \frac{P_2(\text{W})}{P_1(\text{W})} = 10^{\frac{R(\text{dB})}{10}}$$

$$P = \frac{V^2}{2R} \Rightarrow R(\text{dB}) = 10 \cdot \log\left(\frac{V_2^2}{V_1^2}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Ej: $V_1 = 1\text{V} \rightarrow G \rightarrow V_2 = 10\text{V}$

$$G_V = \frac{V_2}{V_1} = 10 \rightarrow G(\text{dB}) = 20 \cdot \log(10) = 20 \text{ dB}$$

$$G_P = \frac{V_2^2/2R}{V_1^2/2R} = 100 \rightarrow G(\text{dB}) = 10 \cdot \log(100) = 20 \text{ dB}$$

Ej: $P_1 \rightarrow G_1 \rightarrow P_2 \rightarrow G_2 \rightarrow P_3$

$$G_P = \frac{P_3}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} = G_{2P} \cdot G_{1P}$$

$$G(\text{dB}) = 10 \cdot \log\left(\frac{P_3}{P_1}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{P_3}{P_2}\right) + 10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = G_2(\text{dB}) + G_1(\text{dB})$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1 (\text{mW}) \\ P_{\text{ref}} = 1 \text{mW} \end{array} \right\} x(\text{dBm}) = 10 \cdot \log(P_1 (\text{mW}))$$

$$1 \text{nW} \rightarrow -60 \text{ dBm}$$

$$1 \mu\text{W} \rightarrow -30 \text{ dBm}$$

$$1 \text{mW} \rightarrow 0 \text{ dBm}$$

$$1 \text{W} \rightarrow 30 \text{ dBm}$$

$$1 \text{kW} \rightarrow 60 \text{ dBm}$$

$$1 \text{MW} \rightarrow 90 \text{ dBm}$$

$$\text{Si } P_{\text{ref}} = 1 \text{W} \Rightarrow x(\text{dBW}) = 10 \cdot \log(P(\text{W}))$$

$$x(\text{dBW}) = x(\text{dBm}) - 30$$

Operaciones posibles:



$$10 \cdot \log(P_1 + P_2) \neq 10 \cdot \log(P_1) + 10 \cdot \log(P_2) \Rightarrow \boxed{\text{dBm} + \text{dBm} \text{ imposible!}}$$

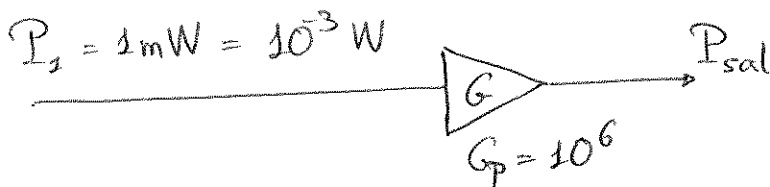
sin embargo:

$$10 \cdot \log(P_1 \cdot P_2) = 10 \cdot \log(P_1) + 10 \cdot \log(P_2)$$

pero la suma dB
No se corresponde
con la suma Natural

$$\boxed{\text{dB} + \text{dB} \text{ posible!}} \rightarrow \text{res: dB}$$

Ej:



$$P_{sal} = G_p \cdot P_1 = 10^6 \cdot 10^{-3} = 10^3 \text{ W}; \quad G_v = \sqrt{G_p} = 10^3$$

$$P_{sal}(\text{dBm}) = P_1(\text{dBm}) + G(\text{dB}) \Rightarrow G(\text{dB}) = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{sal}(\text{mW})}{P_1(\text{mW})}\right)$$

$$G(\text{dB}) = P_{sal}(\text{dBm}) - P_1(\text{dBm}) \Rightarrow P_{sal}(\text{dBm}) = P_1(\text{dBm}) + P_{sal}(\text{dB})$$

$$\boxed{\text{dB} + \text{dBm} \text{ posible!}} \rightarrow \text{resultado: dBm}$$

análogamente: $\boxed{\text{dBm} - \text{dBm} \text{ posible!}} \rightarrow \text{resultado: dB}$

Parámetros característicos:

• Valor medio: $x_{DC} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \langle x(t) \rangle$

• Energía: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ (sobre $R = 1 \Omega$) (Julios)

si $E_x = \text{finito} \Rightarrow$ señal definida en Energía

si $E_x = \text{infinito} \Rightarrow$ señal definida en Potencia

• Potencia media: $P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \langle x^2(t) \rangle$

si $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot x^* = |x|^2 = x^2$

si $x(t) \in \mathbb{C} \Rightarrow x \cdot x^* = |x|^2$

• Potencia continua: $P_{DC} = X_{DC}^2$

• Potencia alterna: $P_{AC} = P_m - P_{DC}$

• Valor cuadrático medio: $X_{rms} = \sqrt{P_m}$

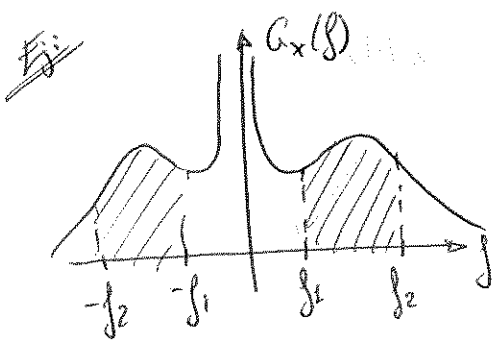
• Valor eficaz: $X_{ef} = \sqrt{P_{AC}}$

Densidades espectrales:

• Densidad Espectral de Energía (D.E.E.):

$$G_x(f) = |X(f)|^2$$

$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow X(f)$: par en módulo, impar en fase



$$E_x(f_1, f_2) = 2 \int_{f_1}^{f_2} G_x(f) df$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

Relación de Parseval

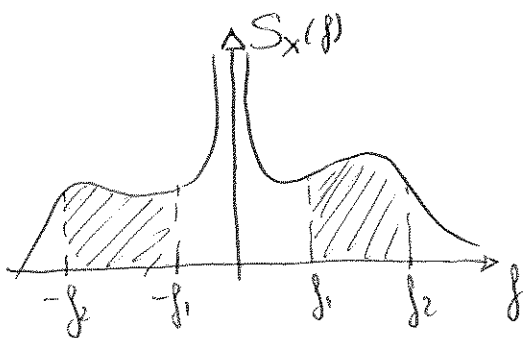
• Densidad Espectral de Potencia (D.E.P.)

$x(t)$ está definida en potencia \Rightarrow No existe $X(f)$

Sea $X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$

DEP = $S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$

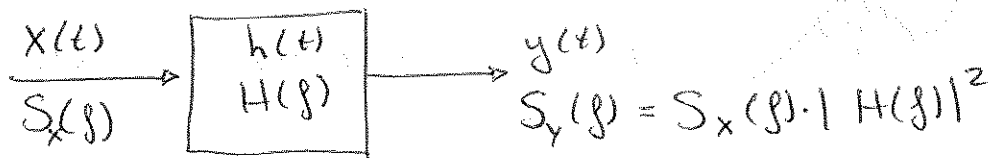
$P_{x(f_1, f_2)} = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_x(f) df$



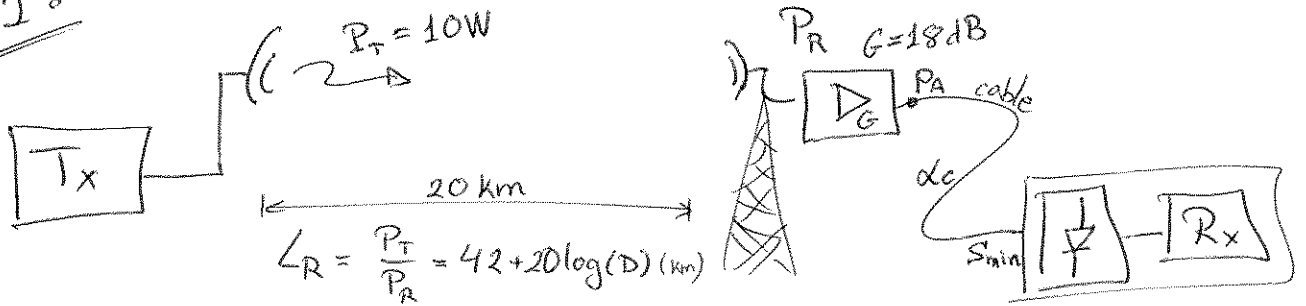
Sea una señal definida en energía: $x(t)$



Sea una señal definida en potencia: $x(t)$



P1:



$$\alpha_c = 0.2 \text{ dB/metro}$$

$$S_{\min} = -20 \text{ dBm}$$

S_{\min} = Sensibilidad mínima = Potencia mínima a la entrada del R_x
Obj: El sistema debe trabajar con un margen de 8dB
Calcular la longitud máxima del cable.

$$P_T = 10 \text{ W} = 40 \text{ dBm}$$

$$L_R = \frac{P_T}{P_R} \Rightarrow P_R^{\text{dBm}} = P_T^{\text{dBm}} - L_{R-\text{TOT}}^{\text{dB}}$$

$$P_A^{\text{dBm}} = P_R^{\text{dBm}} + G_A^{\text{dB}}$$

$$P_{R_x} = P_A - \alpha_c \cdot \text{long}_{\text{cable}}$$

$$L_{R-\text{TOT}} = 42 + 20 \cdot \log(20 \text{ km}) + \text{margen} = 42 + 26 + 8 \text{ dB} = 76 \text{ dB}$$

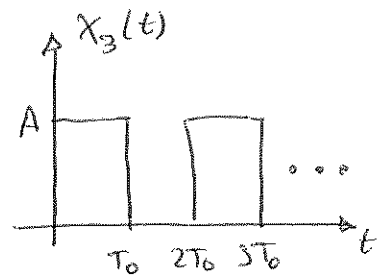
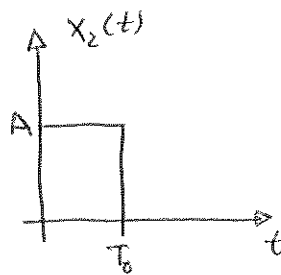
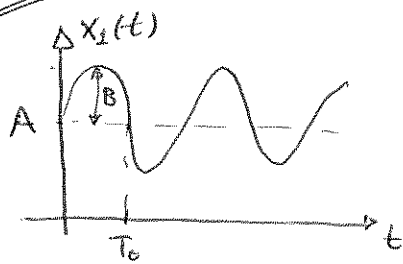
$$P_R = 40 \text{ dBm} - 76 \text{ dB} = -36 \text{ dBm}$$

$$P_A = -36 \text{ dBm} + 18 \text{ dB} = -18 \text{ dBm}$$

$$P_{R_x} \geq -20 \text{ dBm} = -18 \text{ dBm} - \alpha_c \cdot \text{long} = -18 \text{ dBm} - 0.2 \text{ dB/m} \cdot \text{long}$$

$$\text{long}_{\text{máx}} = 10 \text{ m}$$

P2:



a) Valor medio:

$$x_{1DC} = A$$

$$x_{2DC} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} A dt = \frac{A}{\infty} = 0$$

$$x_{3DC} = A/2$$

b) Definidas en Energía o Potencia?

x_1 : en Potencia

x_2 : en Energía

x_3 : en Potencia

c) Calcular Energía para x_2 .

$$E_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dt = A^2 T_0$$

d) Calcular V_{eff} , V_{rms} , P_m , P_{DC} y P_{AC} de x_1 y x_3 .

$$\textcircled{1} P_{DC} = x_{DC}^2 = A^2$$

$$P_{AC} = \left\{ \text{por ser sinusoidal} \right\} = \frac{B^2}{2}$$

$$x_{eff} = \sqrt{P_{AC}} = \frac{B}{\sqrt{2}}$$

$$x_{rms} = \sqrt{P_m} = \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{2}}$$

$$P_m = P_{DC} + P_{AC} = A^2 + \frac{B^2}{2}$$

$$\textcircled{3} P_{DC} = x_{DC}^2 = \frac{A^2}{4}$$

$$P_m = \frac{1}{2T_0} \int_0^{2T_0} x^2(t) dt = \frac{A^2 T_0}{2T_0} = \frac{A^2}{2}$$

$$P_{AC} = P_m - P_{DC} = \frac{A^2}{4}$$

$$x_{eff} = \sqrt{P_{AC}} = \frac{A}{2}$$

$$x_{rms} = \sqrt{P_m} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

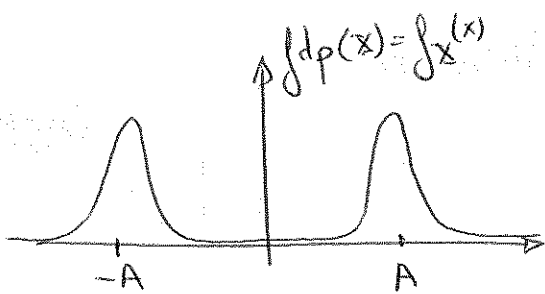
2. Señales Aleatorias:

Procesos estocásticos:

- Si particularizamos un proceso estocástico en un instante de tiempo t_0 : $X(t_0)$ obtendremos una variable aleatoria
- Si el proceso estocástico es estacionario, el valor de la medida en t_0 será igual que este. $X(t_0) = X(t_1)$
- Si el proceso estocástico es además ergódico, la media de las realizaciones del proceso (variable aleatoria) será igual a la media de una realización: $E(X_1(t_0)) = \langle X_1(t) \rangle$

Función Densidad de Probabilidad. (fdp)

fdp: representación del número de veces que se da un valor de una señal, normalizado de modo que su integral sume la unidad.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$
$$f_X(x) \geq 0$$

$$n_{DC}(t=t_1) = E[n(t=t_1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{estacionario} \\ \text{ergódico} \end{array} \right\} = n_{DC} = \langle n(t) \rangle$$

En TECM trabajaremos siempre con procesos estocásticos estacionarios y ergódicos $\Rightarrow n_{DC}(t=t_1) = \langle n(t) \rangle$

Potencia media = $P_m = N = E[n^2(t)] = E[n^2] = \langle n^2(t) \rangle$

\uparrow estacionario \uparrow ergódico

Potencia AC = $P_{AC} = E[(n - n_{DC})^2] = E[n^2] - n_{DC}^2 = N - P_{DC}$

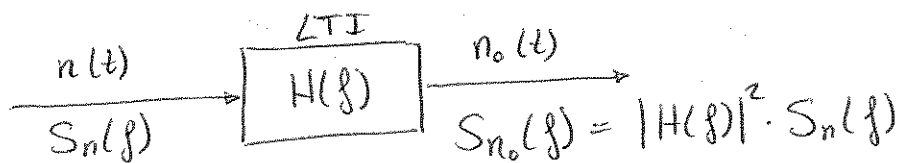
$n_{rms} = \sqrt{P_m}$; $n_{eff} = \sqrt{P_{AC}}$

Densidad Espectral de Potencia: DEP

definimos la autocorrelación como:

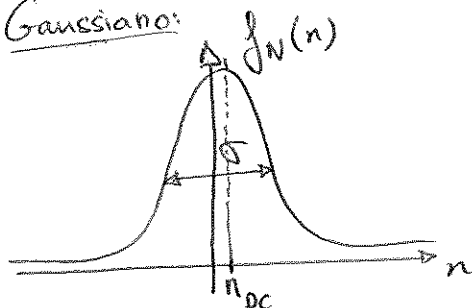
$R_n(\tau) = E[n(t) \cdot n(t+\tau)]$

DEP = $S_n(f) = TF[R_n(\tau)]$



Ruido Gaussiano y Ruido Blanco:

Gaussiano:



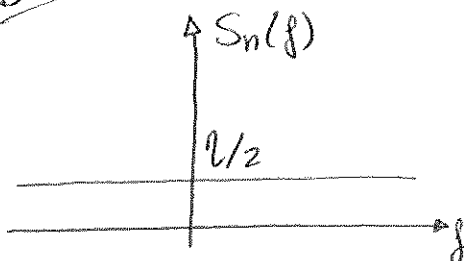
sigue la función: $f_N(n) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n - n_{DC})^2}{2\sigma^2}}$

$\sigma^2 = P_{AC}$

$N = n_{DC}^2 + \sigma^2$

distribución gaussiana \rightarrow $H(f)$ \rightarrow distribución gaussiana

Blanco:

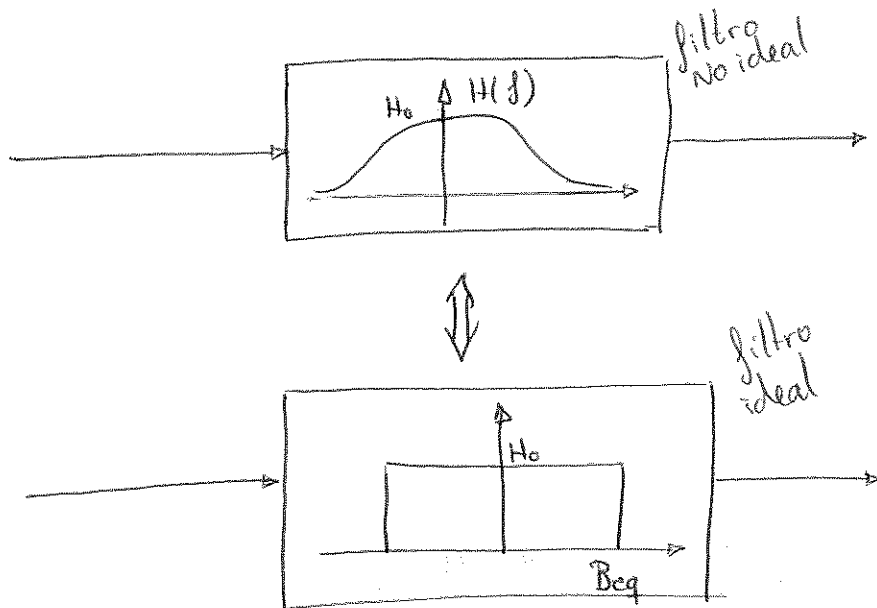


$S_n(f)$ tiene potencia infinita.
 En la realidad, $S_n(f)$ cae a valor 0 a frecuencias muy altas (despreciable)
 $1/2 \Rightarrow$ unilaterial, $1/2 \Rightarrow$ bilateral

Ancho de Banda equivalente de ruido:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_o}(f) df = 2 \frac{\eta}{2} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df = \eta |H_0|^2 B_{w eq}$$

$$B_{w eq} = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{|H_0|^2}$$



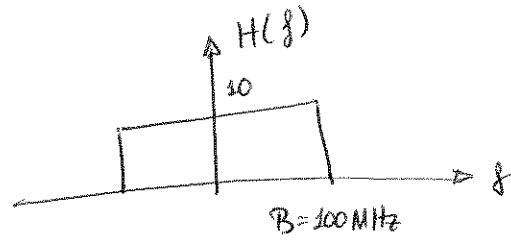
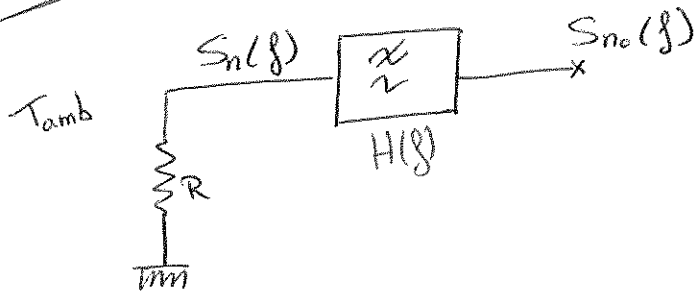
El segundo filtro (es ideal y tiene un ancho de banda B_{eq}) es idéntico al primer filtro (no ideal).

Con el ancho de banda equivalente obtenemos una simplificación del modelado de filtros.

La ganancia del filtro equivalente es la amplitud del filtro original en $f=0$

P3

$$\eta = 4 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$



a) Potencia de ruido a la salida:

$$S_{no}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_n(f) = \frac{\eta}{2} \cdot |H_0|^2, \quad |f| \leq 10^8 \text{ Hz}$$

$$N_o = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{no}(f) df = \int_{-B}^B \frac{\eta}{2} |H_0|^2 df = 2 \cdot \frac{\eta}{2} \cdot |H_0|^2 B = 10^{-8} \text{ mW}$$

b) jdp de la señal de salida:

$$f_{no}(n) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n_o - n_{DC})^2}{2\sigma^2}}$$

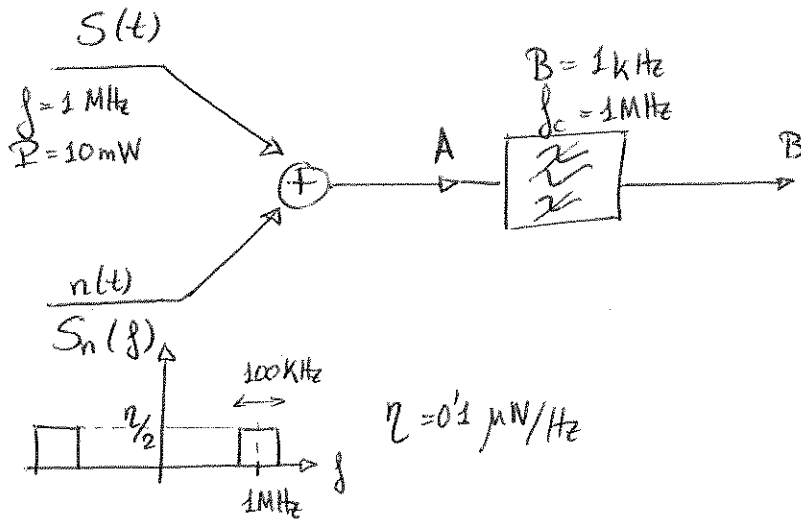
ruido térmico $\Rightarrow n_{DC}^{\text{entrada}} = 0$ siempre \rightarrow $\boxed{\text{LTI}}$ $\rightarrow n_{DC}^{\text{salida}} = 0$

$$N = P_m = P_{AC} + P_{DC} = \{P_{DC} = 0\} \Rightarrow P_{AC} = N = 10^{-8} \text{ mW} = \sigma^2$$

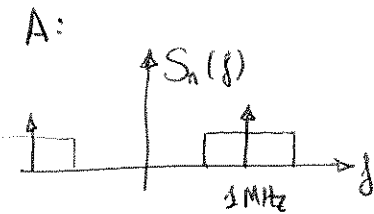
$\Leftrightarrow \sigma = 6.3 \mu\text{V}$

$$N = 2 \cdot \frac{\eta}{2} |H_0|^2 \cdot B \implies \frac{\eta}{2} \Leftrightarrow 2B \text{ (bilateral)}$$
$$N = \eta \cdot |H_0|^2 \cdot B \implies \eta \Leftrightarrow B \text{ (unilateral)}$$

P4:



a) SNR_A ?



$$S_A = 10 \text{ mW}$$

$$N_A = n \cdot B = 0.1 \mu\text{W}/\text{Hz} \cdot 10^5 = 10^{-2} \text{ W} = 10 \text{ mW}$$

$$SNR_A = \frac{S_A}{N_A} = \frac{10 \text{ mW}}{10 \text{ mW}} = 1 = 0 \text{ dB}$$

b) SNR_B ?

ganancia del filtro = 1

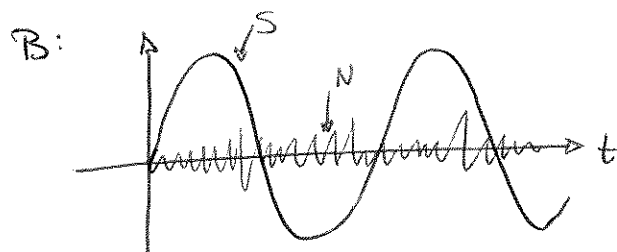
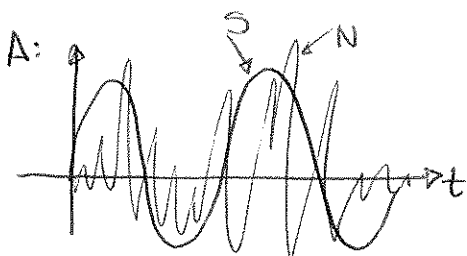
$$P_{SB} = P_{SA} \cdot 1 = 10 \text{ mW} = S_B$$

$$N_B = n \cdot B_{\text{Filtro}} = 0.1 \mu\text{W}/\text{Hz} \cdot 10^3 = 0.1 \text{ mW}$$

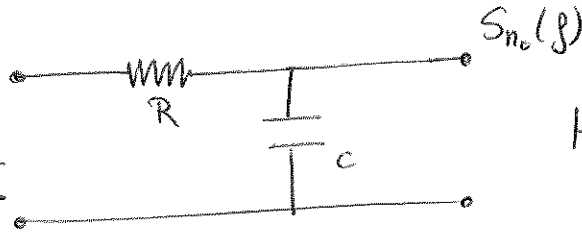
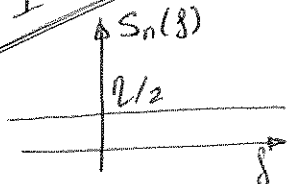
$$SNR_B = \frac{S_B}{N_B} = \frac{10 \text{ mW}}{0.1 \text{ mW}} = 100 = 20 \text{ dB}$$

$$SNR_A = 1 = \frac{A^2/2}{\sigma^2} \Rightarrow \sigma = A/\sqrt{2}$$

$$SNR_B = 100 = \frac{A^2/2}{\sigma^2} \Rightarrow \sigma = \frac{A}{10\sqrt{2}}$$



P5:



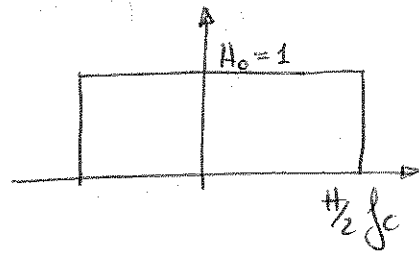
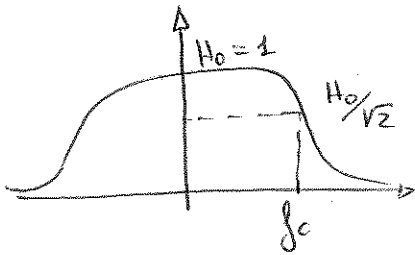
$$H(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}} ; f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

a) $S_{n_o}(f)$?

$$S_{n_o}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_n(f) = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{1 + (f/f_c)^2}$$

b) $B_{w_{eq}}$?

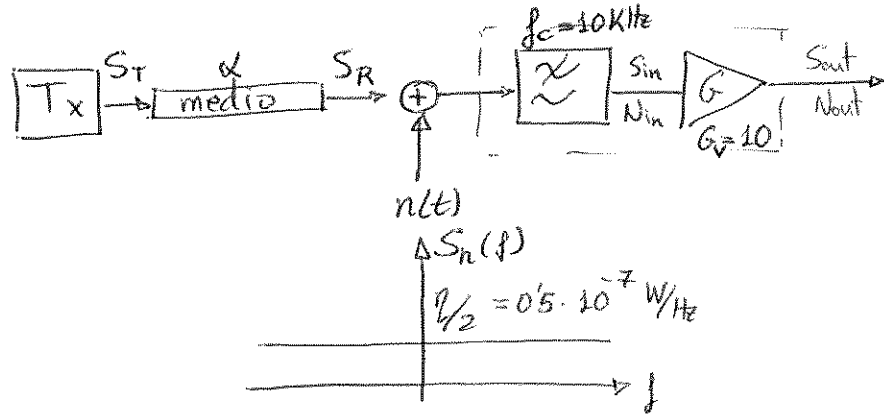
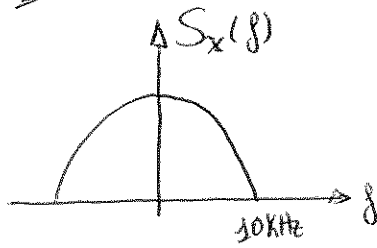
$$B_{w_{eq}} = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{|H_0|^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (f/f_c)^2} df = f_c \cdot \arctan\left(\frac{f}{f_c}\right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot f_c$$



c) N_o ?

$$N_o = 2 \cdot |H_0|^2 B_{w_{eq}} = 2 \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} f_c$$

PG:



a) $\frac{S}{N}|_{out} = 30 \text{ dB}$, máx distancia del Tx si $P_{max}^{Tx} = 10 \text{ W}$ y el medio físico tiene $\alpha = 2 \text{ dB/km}$ $\forall f$

$$\frac{S}{N}|_{out} = \frac{G_v^2 \cdot S_{in}}{G_v^2 \cdot N_{in}} = \frac{S_{in}}{N_{in}} = \frac{S}{N}|_{in} = 30 \text{ dB}$$

$$N_{in} = \int_{f=-\infty}^{+\infty} S_n(f) \cdot |H(f)|^2 df = \int_{-40k}^{10k} S_n(f) df = \frac{1}{2} \cdot 2B = 10^{-3} \text{ W} = 0 \text{ dBm}$$

$$S_{in} = 30 \text{ dB} + N_{in} = 30 \text{ dB} + 0 \text{ dBm} = 30 \text{ dBm}$$

$$S_T (\text{dBm}) - \alpha \left(\frac{\text{dB}}{\text{km}} \right) \cdot d (\text{km}) = 30 \text{ dBm}$$

$$10 \text{ W} = 40 \text{ dBm} \quad \alpha \cdot d = 10 \text{ dB} \Rightarrow \underline{d = \frac{10}{2} = 5 \text{ km}}$$

b) Sea $d = 3 \text{ km}$

Amplificador ideal $\Rightarrow V_{in} < 4 \text{ V}$, margen seguridad 10% en Voltaje

$$k_c = \frac{|V_{max}|}{V_{eff}} = 4; \quad \langle \bar{S} \rangle = 0$$

$$|V_{max}| = 0.9 \cdot 4 \text{ V} = 3.6 \text{ V} \Rightarrow \{k_c = 4\} \Rightarrow V_{eff} = \frac{3.6}{4} = 0.9 \text{ V}$$

$$S_{in} = S_{eff} + \langle \bar{S} \rangle = S_{eff} = V_{eff}^2 = 0.81 \text{ W} = 29.1 \text{ dBm}$$

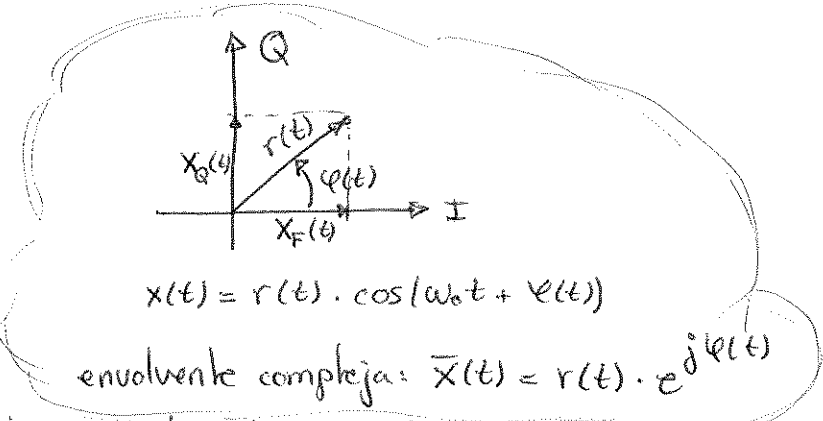
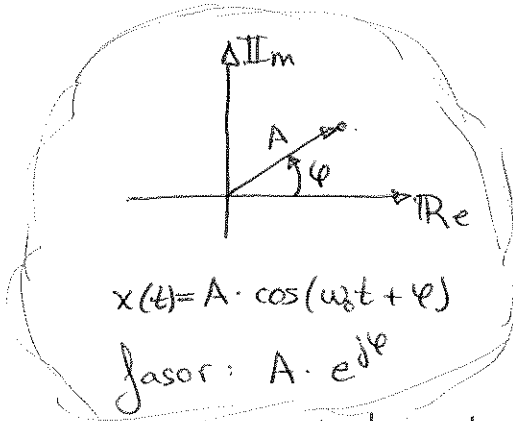
$$S_T (\text{dBm}) - \underbrace{\alpha \left(\frac{\text{dB}}{\text{km}} \right) \cdot d (\text{km})}_{6 \text{ dB}} = 29.1 \text{ dBm} \Rightarrow \underline{S_T = 35.1 \text{ dBm}}$$

$$\frac{S}{N}|_{out} = \frac{S}{N}|_{in} = 29.1 \text{ dBm} - 0 \text{ dBm} = \underline{29.1 \text{ dB}}$$

Señales Paso Banda: $x(t) = r(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$

→ Envolvente Compleja:

La información se transmite en $r(t)$ y $\varphi(t)$

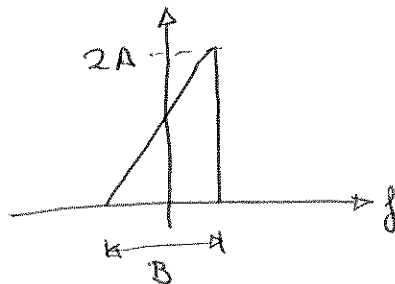
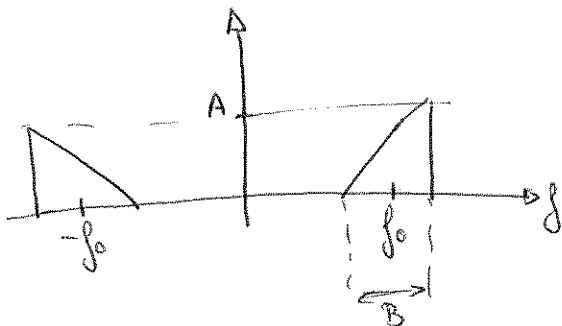


Propiedades de la envolvente compleja:

- * señal compleja
- * señal paso bajo ($r(t)$ y $\varphi(t)$ son lentas)
- * contiene toda la información de $x(t)$
- * $x(t) = \text{Re}[\bar{X}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}]$
- * $\bar{X}(t) = X_F(t) + j X_Q(t)$
 - ↑ componente en fase (I)
 - ↑ componente en cuadratura (Q)
- * $r(t) = \sqrt{X_F^2(t) + X_Q^2(t)}$; $\varphi(t) = \arctan\left(\frac{X_Q(t)}{X_F(t)}\right)$
- * $X_F(t) = r(t) \cdot \cos(\varphi(t))$; $X_Q(t) = r(t) \cdot \sin(\varphi(t))$
- * $x(t) = r(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = X_F(t) \cos(\omega_0 t) - X_Q(t) \sin(\omega_0 t)$

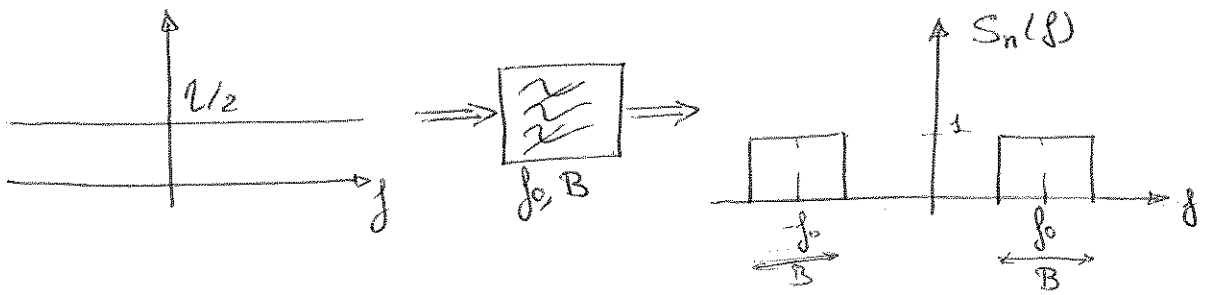
$$X(f) = \text{TF}(x(t))$$

$$\bar{X}(f) = \text{TF}(\bar{X}(t))$$



$$P_x = \langle P(t) \rangle = \left\langle \frac{r^2(t)}{2} \right\rangle = \frac{P_{X_F}}{2} + \frac{P_{X_Q}}{2} ; P_{\bar{X}} = \langle |\bar{X}(t)|^2 \rangle = P_{X_F} + P_{X_Q}$$

Ruido gaussiano paso banda:



$$P_n = N = \frac{\eta}{2} \cdot 2B = \eta \cdot B = \sigma^2$$

$$n(t) = r_n(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_n(t))$$

$$= n_F(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - n_Q(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{gaussianas} \\ \text{media nula} \end{array} \text{ e independientes}$

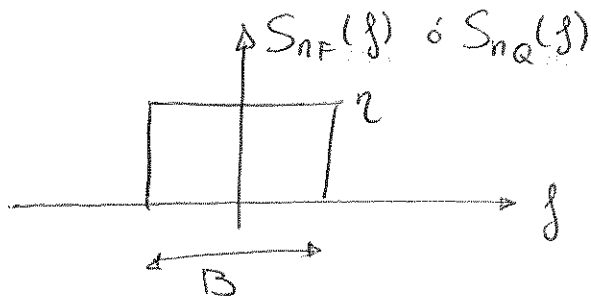
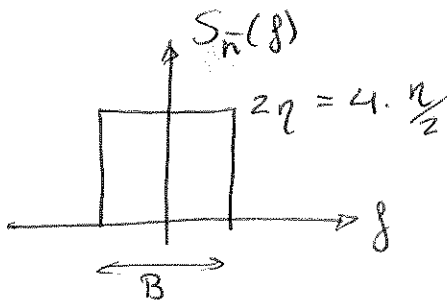
$r(t) \rightarrow$ fdp Rayleigh

$\varphi(t) \rightarrow$ fdp uniforme $(0, 2\pi)$

$$\bar{n}(t) = r_n(t) \cdot e^{j\varphi_n(t)} = n_F(t) + j n_Q(t)$$

$$P_{\bar{n}} = 2\sigma^2 = 2\eta B = P_{nF} + P_{nQ} \Rightarrow P_{nF} = P_{nQ} = \sigma^2$$

$$P_n = \sigma^2 = \eta B = P_{nF} + P_{nQ} \Rightarrow \frac{1}{2} P_{nF} + \frac{1}{2} P_{nQ} = \sigma^2$$



P7:

$$x(t) = A (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

$$\Delta = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2, \quad \omega_1 > \omega_2$$

Se quiere expresar $x(t)$ como una señal paso banda centrada en $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

a) $\bar{x}(t)$? $x_F(t)$? $x_Q(t)$?

$$\cos(a) + \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$x(t) = \underbrace{2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta}{2}t\right)}_{r(t)} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$r(t) = |2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta}{2}t\right)|$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2A \cos\left(\frac{\Delta}{2}t\right) > 0 \\ \pi & \text{si } 2A \cos\left(\frac{\Delta}{2}t\right) < 0 \end{cases}$$

$$x_F(t) = 2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta}{2}t\right)$$

$$x_Q(t) = 0$$

$$\bar{x}(t) = r(t) \cdot e^{j\varphi(t)}$$

La envolvente compleja de la suma de señales es igual a la suma de envolventes compl. de las señales



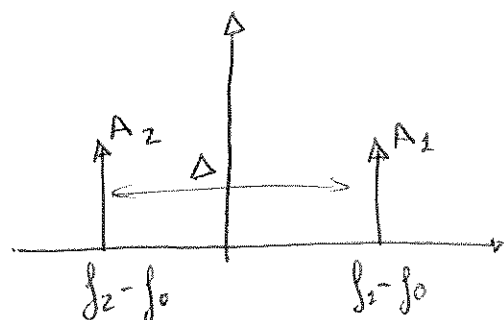
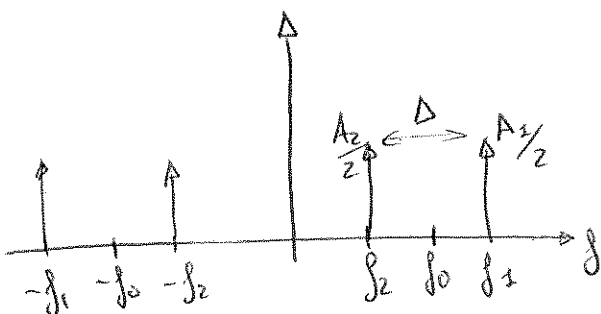
b) Ídem con $x(t) = \underbrace{A_1 \cos(\omega_1 t)}_{x_1(t)} + \underbrace{A_2 \cos(\omega_2 t)}_{x_2(t)}$

$$x_1(t) = \underbrace{A_1 \cos(\omega_0 t)}_{r(t)} + \underbrace{(\omega_1 - \omega_0)t}_{\varphi(t)} \Rightarrow \bar{x}_1(t) = A_1 \cdot e^{j\frac{\Delta}{2}t}$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) \Rightarrow \bar{x}_2(t) = A_2 \cdot e^{-j\frac{\Delta}{2}t}$$

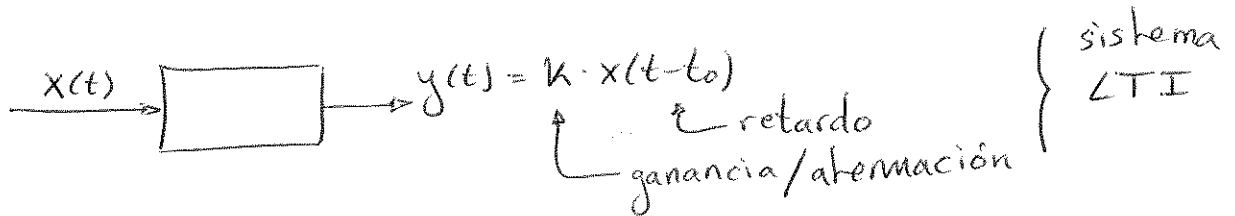
$$X(f) = \text{TF}(x(t))$$

$$\bar{X}(f) = \text{TF}(\bar{x}(t))$$



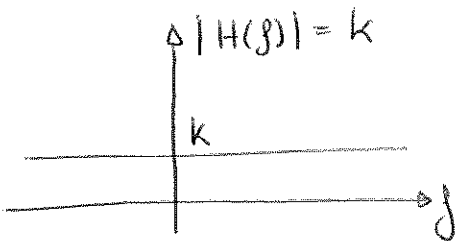
3. Distorsión

Sistema ideal sin distorsión:



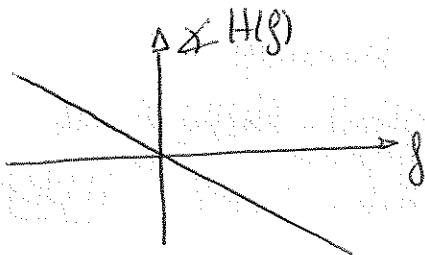
① si el sistema NO es LTI ⇒ existirá distorsión (No lineal)

$$\frac{Y(\beta)}{X(\beta)} = H(\beta) = k e^{-j\beta t_0}$$



② si el módulo NO es constante para todas las frecuencias existirá distorsión (lineal de amplitud)

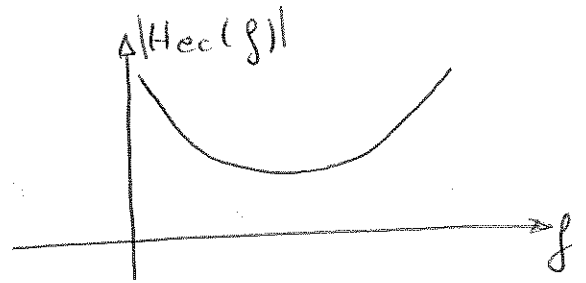
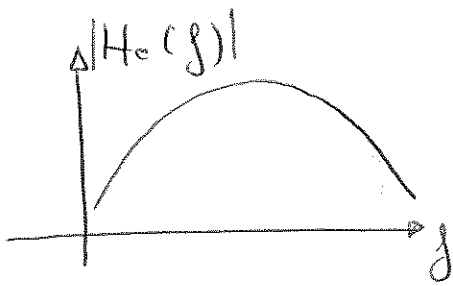
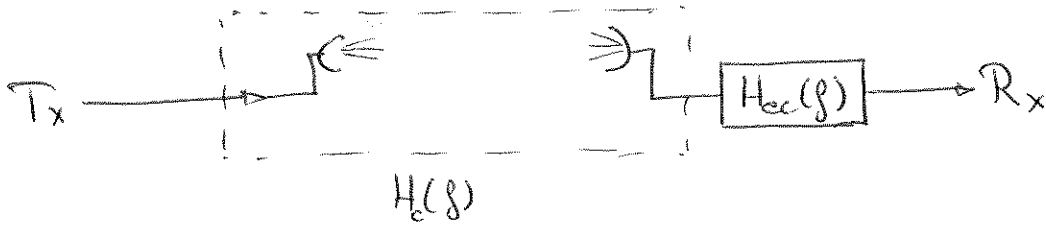
$$\angle H(\beta) = -\beta t_0$$



③ si la fase NO es lineal para todas las frecuencias existirá distorsión (lineal de fase)

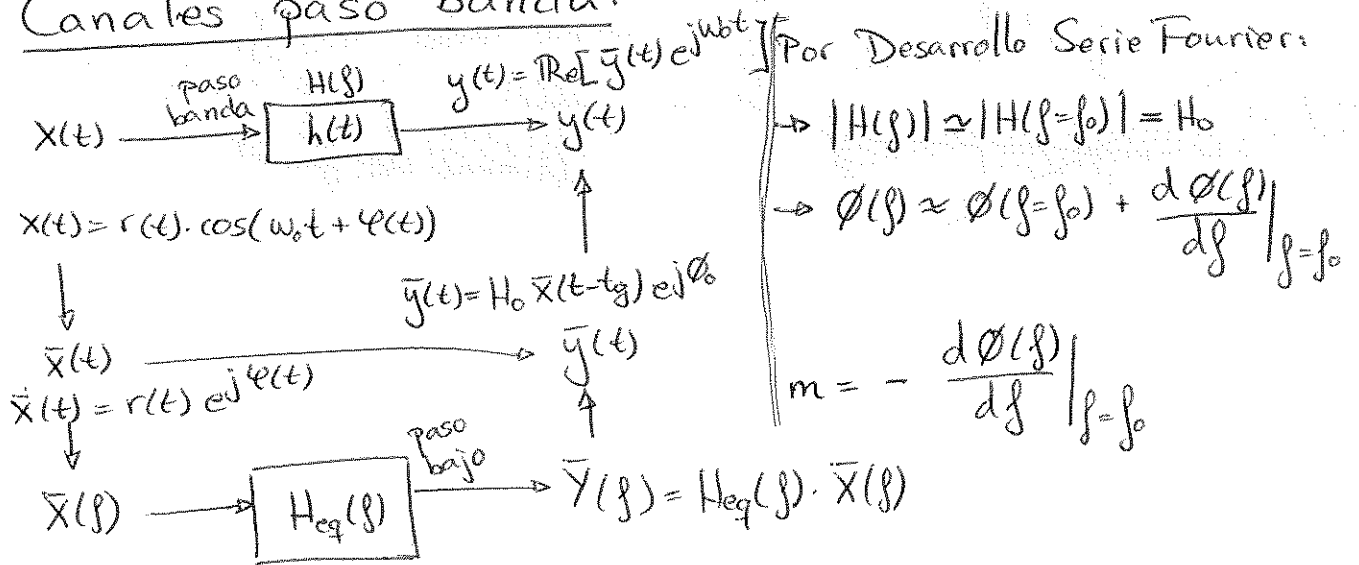
Ecuación:

Proceso por el cual se introduce un nuevo elemento en el sistema (ecualizador) para corregir la distorsión producida en la transmisión:



$$H_c(f) \cdot H_{ec}(f) = \begin{cases} \text{cte en módulo} \\ \text{lineal en fase} \end{cases}$$

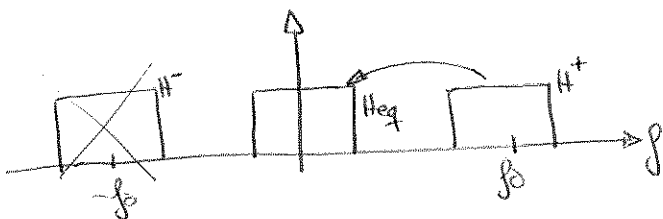
Canales paso banda:



Por Desarrollo Serie Fourier:

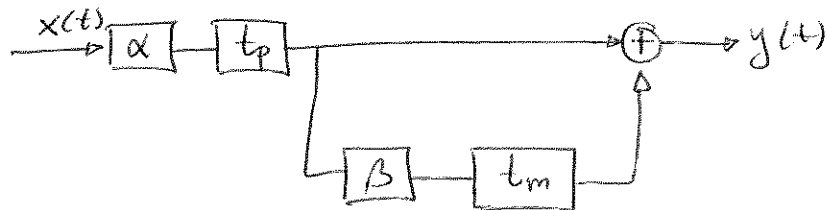
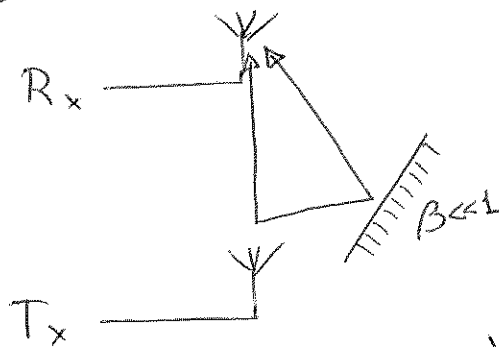
- $|H(f)| \approx |H(f=f_0)| = H_0$
- $\varphi(f) \approx \varphi(f=f_0) + \left. \frac{d\varphi(f)}{df} \right|_{f=f_0}$
- $m = - \left. \frac{d\varphi(f)}{df} \right|_{f=f_0}$

$$H_{eq}(f) = H^*(f+f_0) = H_0 \cdot e^{j(\varphi_0 - mf)}$$



$$\begin{cases} t_g = \text{retardo de grupo} = \frac{m}{2\pi} = \frac{-1}{2\pi} \left. \frac{d\varphi(f)}{df} \right|_{f_0} \\ t_p = \text{retardo de portadora} = \frac{-\varphi_0}{2\pi f_0} \end{cases}$$

P8: señal de banda estrecha centrada en f_0



$$y(t) = \alpha x(t - t_p) + \alpha \beta x(t - (t_p + t_m))$$

$$Y(f) = \alpha X(f) e^{-j2\pi f t_p} + \alpha \beta X(f) e^{-j2\pi f (t_p + t_m)}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \alpha e^{-j2\pi f t_p} + \alpha \beta e^{-j2\pi f (t_p + t_m)}$$

$$= \alpha e^{-j2\pi f t_p} \cdot (1 + \beta e^{-j2\pi f t_m})$$

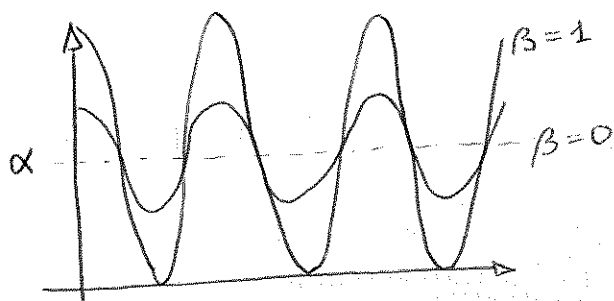
$$|H(f)| = \alpha \cdot \sqrt{[1 + \beta \cos(2\pi f t_m)]^2 + \beta^2 \sin^2(2\pi f t_m)}$$

$$= \alpha \cdot \sqrt{1 + \beta^2 + 2\beta \cos(2\pi f t_m)} \neq \text{cte} \Rightarrow \text{distorsión}$$

$$\text{si } \beta = 1 \Rightarrow |H(f)|^2 = \alpha \cdot (2 + 2\cos(2\pi f t_m))$$

$$\text{si } 2\pi f t_m = \pm \pi \Rightarrow |H(f)| = 0$$

$$f = \frac{1}{2t_m} \Rightarrow \underline{\underline{H(f) = 0}}$$



$$\angle H_c(f) = -2\pi f t_p + \arctg\left(\frac{-\beta \sin(2\pi f t_m)}{1 + \beta \cos(2\pi f t_m)}\right)$$

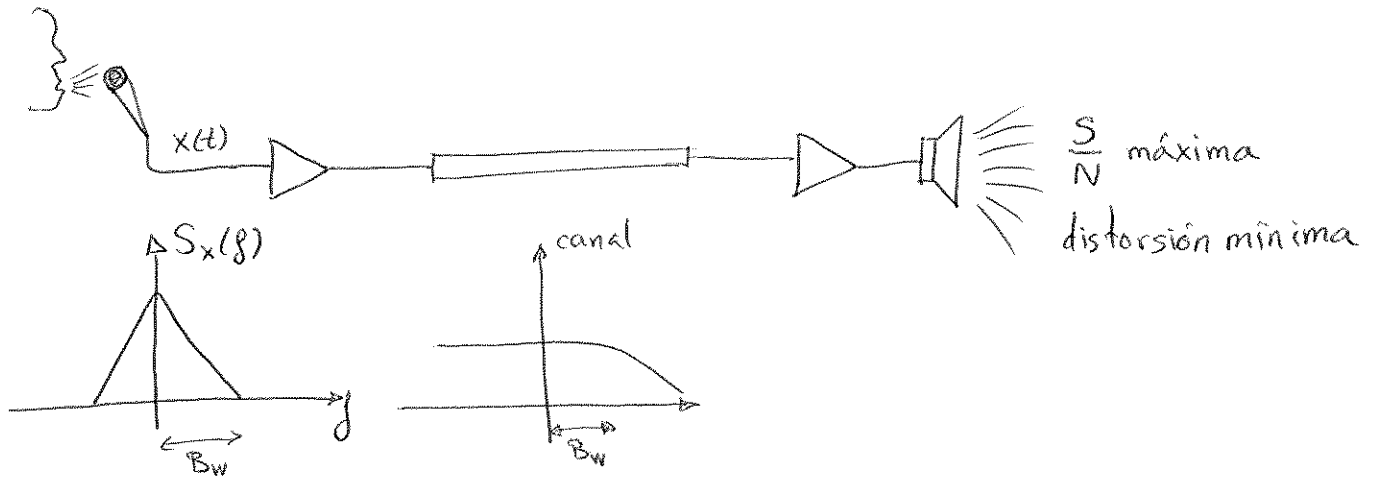
$$\text{si } \beta \rightarrow 0 : \angle H_c(f) = -2\pi f t_p + \arctg(-\beta \sin(2\pi f t_m))$$

No podemos decir $\arctg(\frac{0}{1})$ porque anularíamos la reflexión

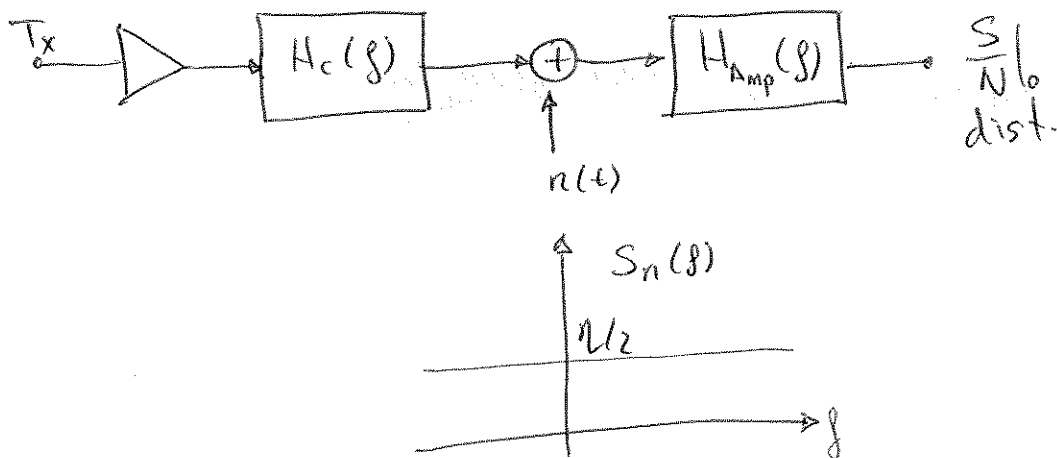
$$t_g = \frac{-1}{2\pi} \frac{d \angle H_c(f)}{df} = t_p + \beta t_m \cos(2\pi f t_m)$$

Tema 3: Comunicaciones analógicas

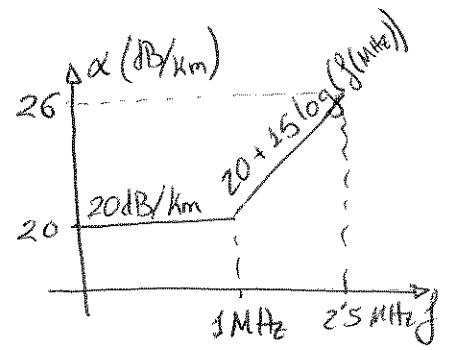
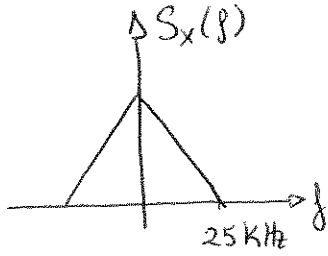
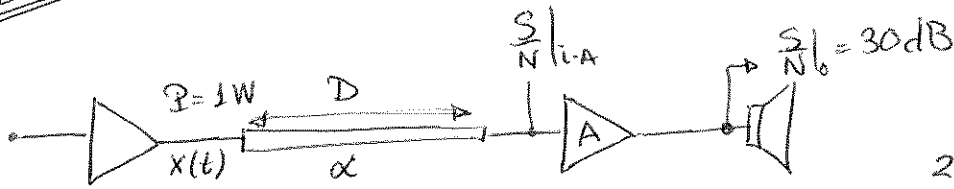
1. Transmisión en Banda Base:



Trataremos todos los componentes como perfectos, que no incluyen ruido. Para acercar el comportamiento del sistema a la realidad, introduciremos un ruido a la entrada del receptor, simulando así el ruido del sistema.



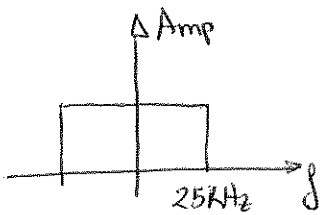
P1:



Para la señal $x(t)$ el canal no presenta distorsión, ya que la respuesta en 0-25kHz es plana. La distorsión se presentará a partir de 1MHz.

amplif. ideal $\Rightarrow \frac{S}{N}_o = \frac{S}{N}_{i-A} = 30\text{dB}$

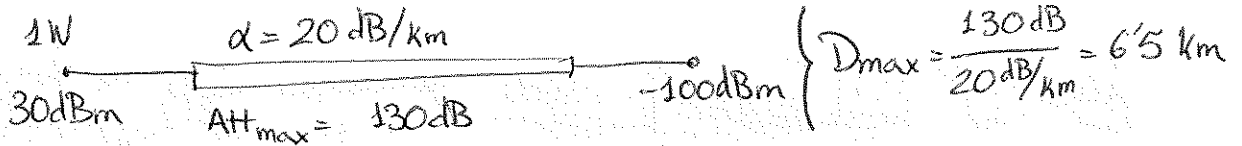
$P_T = 1\text{W} = 30\text{dBm}$



$\eta = -174\text{dBm}$

$N = \eta \cdot B = \eta (\text{dBm/Hz}) + 10 \log(B(\text{Hz})) = -130\text{dBm}$

$\frac{S}{N}_{i-A} = S_{i-A} (\text{dBm}) - N_{i-A} (\text{dBm}) = 30\text{dB} \Rightarrow S_{i-A} = -100\text{dBm}$



b) Y si se envía una señal de 2.5 MHz??

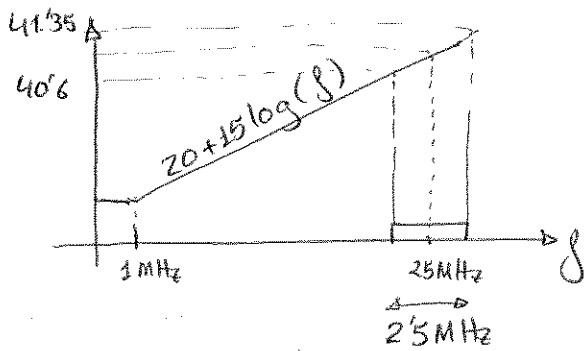
$N = -110\text{dBm}$
 $S_{i-A} = -80\text{dBm}$
 $P_T = 30\text{dBm}$

$A_{\text{att max}} = 110\text{dB}$
 $\hookrightarrow D_{\text{max}} = \frac{110\text{dB}}{26\text{dB/km}} = 4.2\text{ km (caso peor)}$
 distorsión = $A_{\text{att}}^{\text{max}} - A_{\text{att}}^{\text{min}} = 26 - 20 = 6\text{ dB/km}$

Distort = $6\text{ dB/km} \cdot 4.2\text{ km} = 25.2\text{ dB}$

Se exige distorsión $< 3\text{dB} \Rightarrow D_{\text{max}} = 0.5\text{ km}$

c) Y si ahora modulamos hasta 25 MHz??



análogo a los casos anteriores:

$$A_{TT \max} = 110 \text{ dB}$$

$$D_{\max} = \frac{110 \text{ dB}}{41 \text{ dB/km}} = 2.6 \text{ km}$$

Se exige distorsión $< 3 \text{ dB}$:

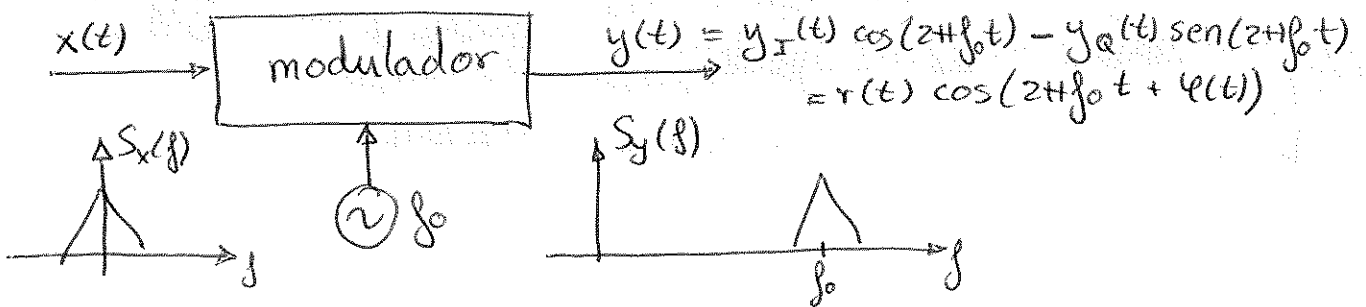
$$0.75 \cdot D_{\text{ist}} = D_{\max} \Rightarrow D_{\max} = 4 \text{ km}$$

2. Objetivos de la modulación

→ FDMA ⇒ múltiples usuarios sobre el mismo medio

→ $B_{W_{\text{eq}}} = \frac{B_w}{f_0} \ll \Rightarrow \ll \text{distorsión}$

→ canal: aire (o vacío) ⇒ no requiere instalación de cableados, ranjas, tendidos...



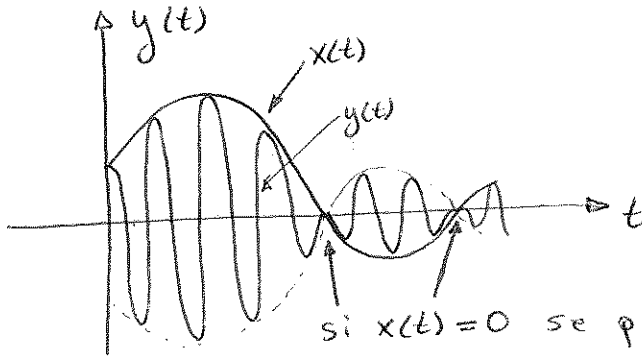
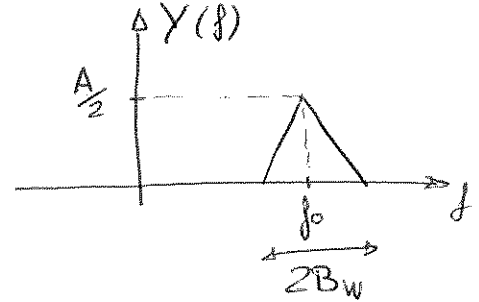
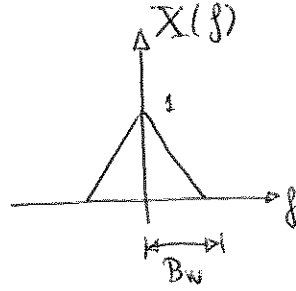
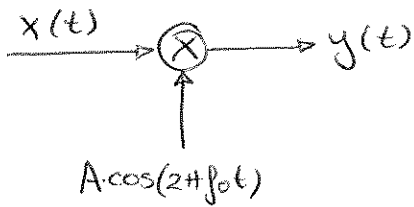
modulaciones lineales: $r(t)$ = envolvente (donde va la info)
 modulaciones angulares: $\varphi(t)$ (donde va la info)

3. Modulación DBL

Doble Banda Lateral

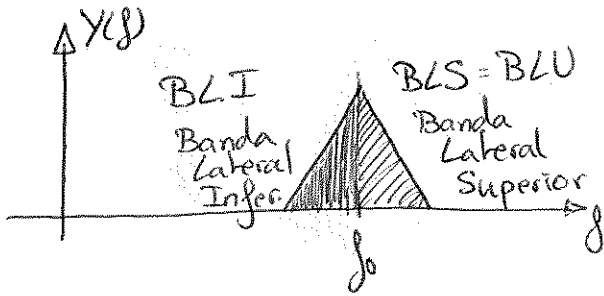
$$y(t) = \underbrace{A \cdot x(t)}_{y_F(t)} \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$y_0(t) = 0$$

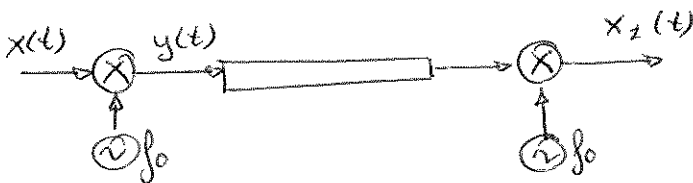


si $x(t) = 0$ se produce un cambio de fase en $y(t)$

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow X(f) = \begin{cases} \text{par en módulo} \\ \text{impar en fase} \end{cases}$$



Podemos transmitir sólo una de las dos bandas, ya que ambas bandas no hacen más que ocupar $2B_w$ y no añaden información.



$$\begin{aligned} x_2(t) &= y(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = A \cdot x(t) \cdot \cos^2(2\pi f_0 t) = A \cdot x(t) \frac{1 + \cos(2\pi \cdot 2f_0 t)}{2} \\ &= \frac{A}{2} x(t) + \frac{A}{2} x(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_0 t) \end{aligned}$$

si a la salida de $x_2(t)$ colocamos un filtro paso bajo, recuperaremos $\frac{A}{2} x(t)$. A esta recepción se llama demodulación coherente.

Eficiencia espectral y de potencia:

$$E_f \text{ espectral} = \frac{B_w \text{ original}}{B_w \text{ modulada}} (\%)$$

$$\text{En DBL: } E_f \text{ espectral} = \frac{1}{2} = 50\%$$

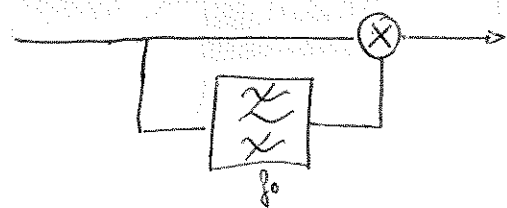
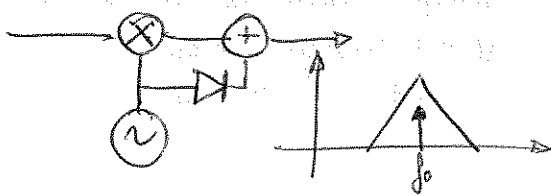
$$E_f \text{ potencia} = \frac{P \text{ información}}{P \text{ total}} (\%)$$

$$\text{En DBL: } E_f \text{ potencia} = \frac{1}{1} = 100\%$$

En las modulaciones DBL, la frecuencia del oscilador del transmisor y del receptor han de estar enganchados, es decir, que las diferencias de fase dependan sólo de una constante. En caso contrario (demodulación no coherente) no podremos recuperar la señal transmitida. La frec. de los osciladores ha de ser exactamente la misma.

Para lograr estas similitudes se utilizan:

- PLL = Phase Lock Loop, logran una señal sin los cambios de fase producidos cada cambio de signo
- Reinserción de portadora (disminuirá la E_f potencia)



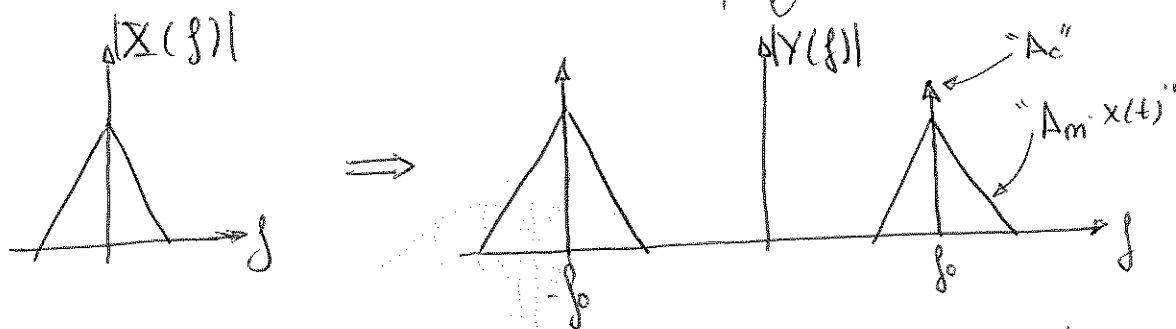
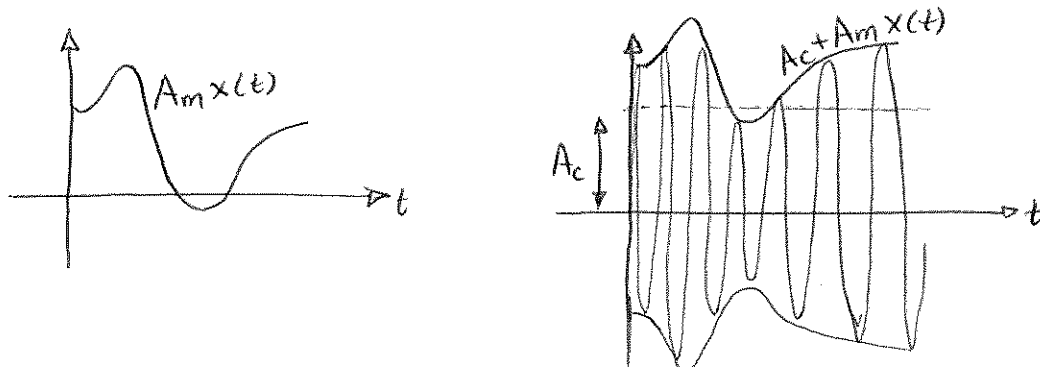
DBL con reinserción de portadora con suficiente portadora (delta en f_0) \Rightarrow AM

4. Modulación AM:

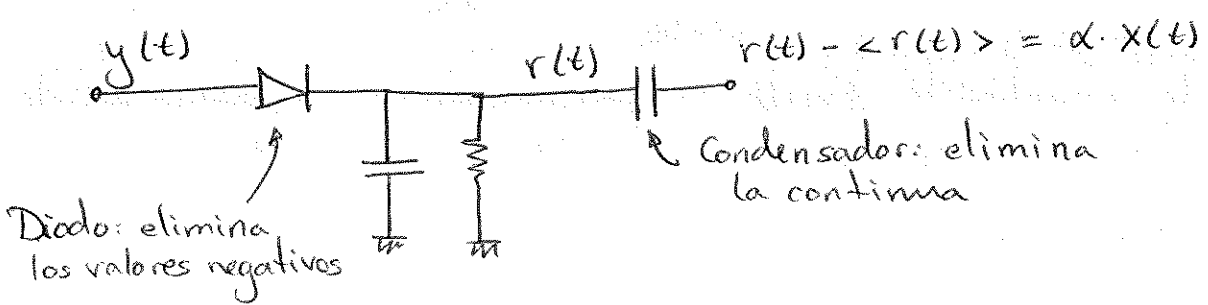
Amplitude Modulation

$$y(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_0 t) + A_m \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = (A_c + A_m x(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = r(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

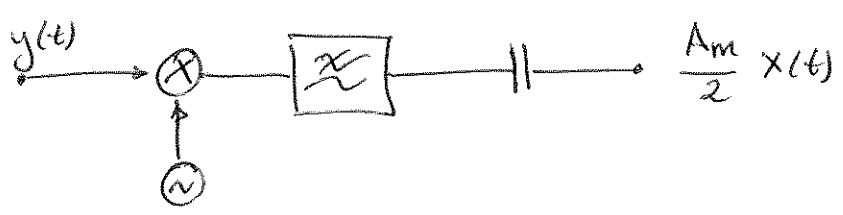
$$A_c + A_m x(t) \geq 0 \quad \forall t$$



Demodulación: NO coherente (sin oscilador local en Rx)



También acepta (como todas las modulaciones) coherente:



Índice de modulación:

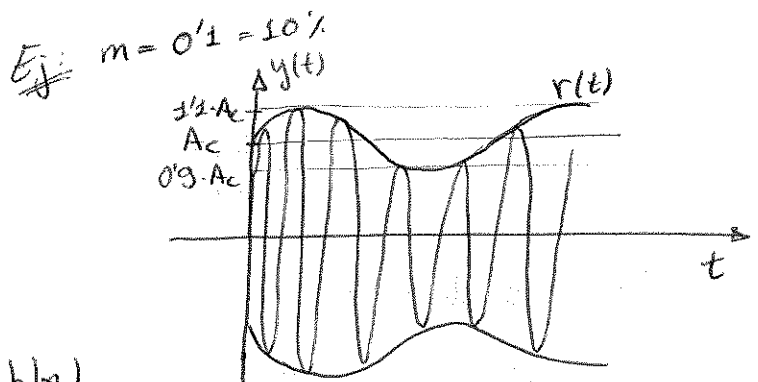
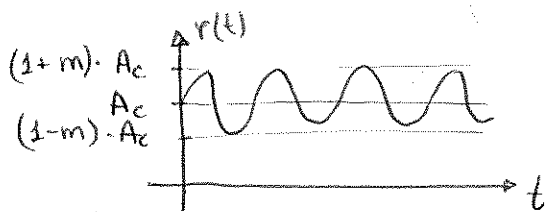
$$y(t) = (A_c + A_m x(t)) \cos(2\pi f_o t) = \\ = A_c \left(1 + \frac{A_m}{A_c} x(t) \right) \cos(2\pi f_o t)$$

Sea ahora la señal normalizada $x_N(t)$.

$$x_N(t) = \frac{x(t)}{x_{\max}} ; \quad -1 \leq x_N(t) \leq 1$$

$$\text{Entonces: } y(t) = A_c \left(1 + \frac{A_m}{A_c} x_{\max} x_N(t) \right) \cos(2\pi f_o t) \\ = A_c (1 + m x_N(t)) \cos(2\pi f_o t)$$

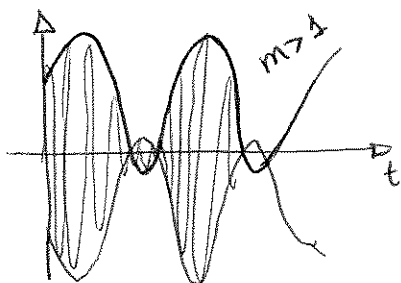
$$\text{Índice modulación: } m = \frac{A_m}{A_c} x_{\max} (\%)$$



si tuviera $m > 1$ (posible)

la envolvente $r(t)$ sería negativa en algún punto.

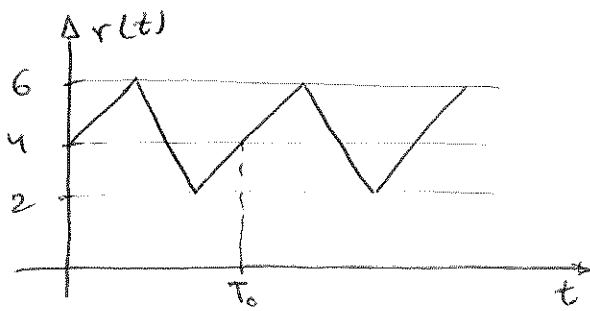
Esto hace que la demodulación NO pueda ser no coherente



Eficiencias:

$$\text{Ef. espectral} = \frac{B_{w \text{ orig}}}{B_{w \text{ mod}}} = 50\% , \quad \text{Ef. potencia} = \frac{P_{\text{info}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{m^2 \langle x_N^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_N^2 \rangle}$$
$$\text{Ef. pot} \leq 50\%$$

P3: envolvente de una AM.



$$y(t) = A_c(1 + m x_N(t)) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\begin{aligned} \langle r(t) \rangle &= A_c + A_c m \langle x_N(t) \rangle = A_c = 4 \\ r_{\max} &= A_c(1 + m) = 6 \\ r_{\min} &= A_c(1 - m) = 2 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} A_c = 4 \\ m = 0.5 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} P_{r(t)} = \frac{A_c^2}{2} = 8 \text{ W} \end{array} \right.$$

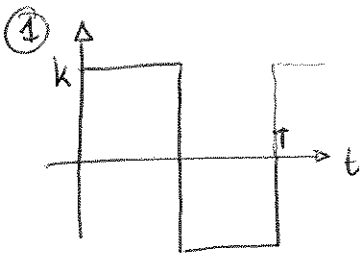
$$\text{Ef. pot} = \frac{m^2 \langle x_N^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_N^2 \rangle}$$

$$\langle x_N^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_N^2(t) dt = \frac{1}{T_0/2} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} x_N^2(t) dt = 2 \frac{1}{T_0/2} \int_0^{T_0/4} x_N^2(t) dt$$

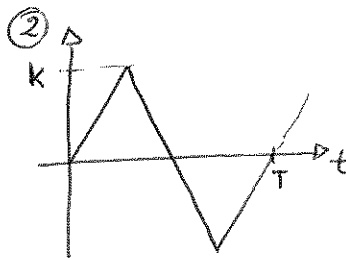
$$= \left. \left\{ x_N(t) \right|_{0 \leq t \leq \frac{T_0}{4}} = \frac{1}{T_0/4} t \right\} = \frac{1}{(T_0/4)^3} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{T_0/4} = \frac{1}{3}, \quad \forall x \text{ triangular}$$

$$\text{Ef. pot} = \frac{0.5^2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + 0.5^2 \cdot \frac{1}{3}} = 7.7\%$$

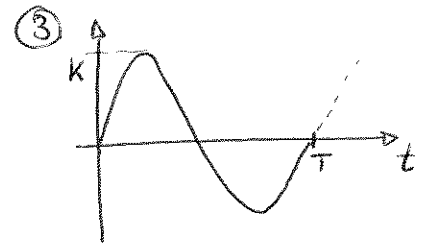
P4:



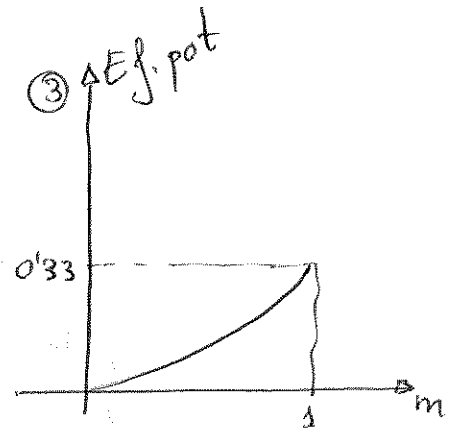
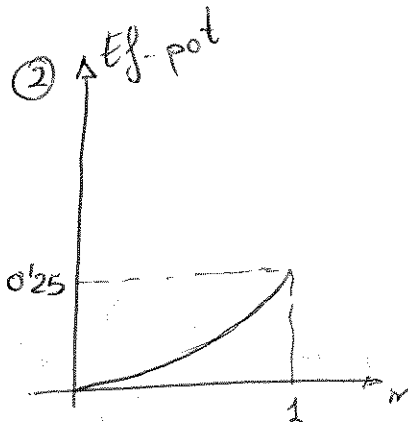
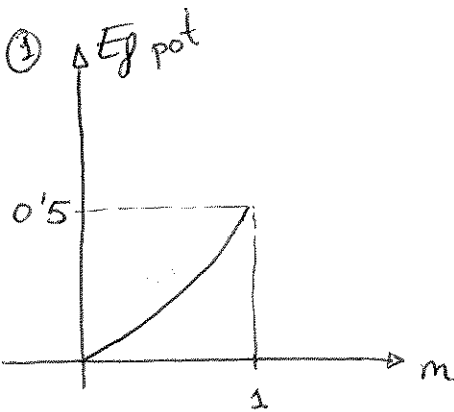
$$\langle X_{N1}^2 \rangle = 1$$



$$\langle X_{N2}^2 \rangle = 1/3$$



$$\langle X_{N3}^2 \rangle = 1/2$$



P2:
$$y(t) = \underbrace{100 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 10^6 t)}_{\text{portadora}} + \left[20 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 10^3 t) + 50 \text{sen}(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t) \right] \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 10^6 t)$$

buscamos:
$$y(t) = A_c \cdot (1 + m X_N(t)) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$= 100 \left(1 + \frac{1}{5} \text{sen}(2\pi f_2 t) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi f_2 t) \right) \cdot \text{sen}(2\pi f_0 t)$$

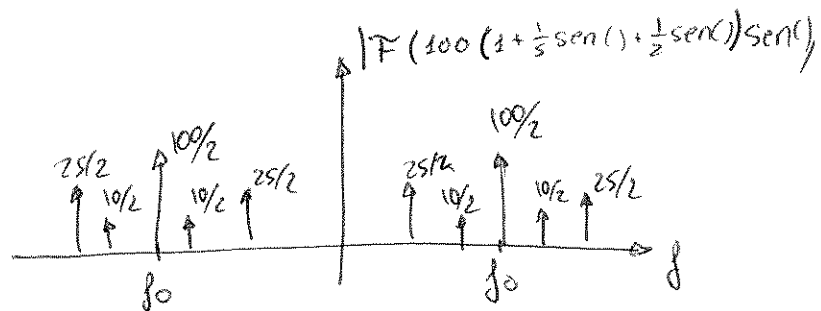
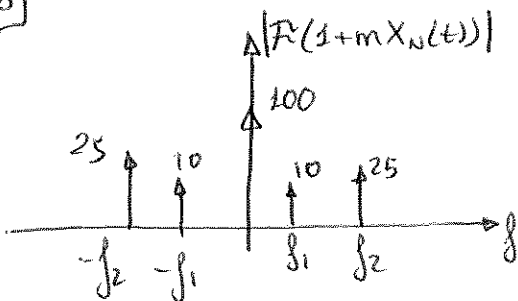
$1 + m X_N(t)$

$$m X_N(t) = \frac{1}{5} \text{sen}(2\pi f_2 t) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi f_2 t)$$

$$\max \{ m X_N(t) \} = m = 0.646, (t = 0.135 \text{ ms})$$

$$y(t) = 100 \left\{ 1 + 0.646 \cdot \frac{\frac{1}{5} \text{sen}(2\pi f_2 t) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi f_2 t)}{0.646} \right\} \text{sen}(2\pi f_0 t)$$

b)



$$e) P_{\text{cresta}}? R = 100 \Omega$$

$$P_{\text{cresta}} = PEP = \frac{1}{2} \frac{r_{\text{max}}^2}{R} = \frac{A_c^2}{2} \frac{(1+m)^2}{R} = 135 \text{ W}$$

$$d) P_m = \frac{A_c^2}{2R} \left\{ 1 + m^2 \langle X_N^2 \rangle \right\} =$$

50 W

$$\left\{ \begin{array}{l} X_N(t) = 0'31 \cdot \sin(2\pi f_1 t) + 0'77 \sin(2\pi f_2 t) \\ \langle X_N^2 \rangle = \frac{0'31^2}{2} + \frac{0'77^2}{2} \end{array} \right\}$$

$$P_m = 57,25 \text{ W}$$

5. Modulaciones angulares

envolvente de
no lineales

la información se transmite en la fase

$$y(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_0 t + x(t))$$

$$P_m = \frac{\langle r^2(t) \rangle}{2R} \Big|_{R=1\Omega} = \frac{A_c^2}{2} = \text{cte}$$

Garantiza un nivel de potencia constante, evitando distorsión en amplificadores.

Frecuencia instantánea:

$$y(t) = A_c \cdot \cos(\underbrace{2\pi f_0 t + \psi(t)}_{\theta(t)})$$

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(t)}{dt} = f_0 + f_d(t)$$

$$f_d(t) = \text{desviación instantánea} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\psi(t)}{dt}$$

Modulación PM: Phase Modulation

$$\varphi(t) = k_p \cdot x(t) = k_p x_{\max} \cdot \frac{x(t)}{x_{\max}} = \beta \cdot x_N(t)$$

$$\beta = k_p \cdot x_{\max} = \begin{cases} \text{índice de modulación} \\ \text{máxima desviación de fase} \end{cases} \quad \beta \leq \pi$$

$$y_{PM}(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \beta \cdot x_N(t))$$

Modulación FM: Frequency Modulation

$$f_d(t) = k_F \cdot x(t) = k_F \cdot x_{\max} \cdot \frac{x(t)}{x_{\max}} = f_D \cdot x_N(t)$$

$$f_D = k_F \cdot x_{\max} = \text{máxima desviación de frecuencia}$$

$$y_{FM}(t) = A \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi f_D \int_0^t x_N(\alpha) d\alpha\right)$$

Modulaciones de Banda Estrecha:

$$y(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

$$\tilde{y}(t) = A_c \cdot e^{j\varphi(t)} \approx A_c (1 + j\varphi(t)) = A_c (1 + j k_p x(t))$$

Taylor orden 1; $\varphi(t) \ll 1$

$$y(t) = \operatorname{Re}\left\{ \tilde{y}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} = A_c \cos(2\pi f_0 t) - A_c \varphi(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) =$$

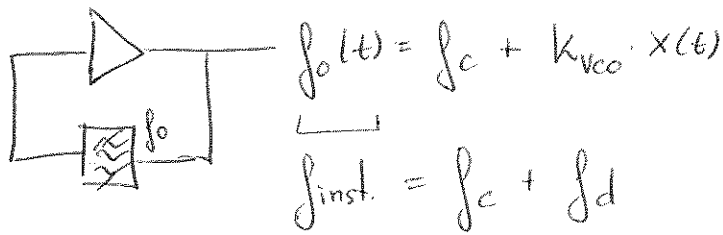
$$= A_c \left(\cos(2\pi f_0 t) - k_p x(t) \cdot \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \right) =$$

$$= \underbrace{A_c \cdot \cos(2\pi f_0 t)}_{\text{portadora}} - \underbrace{A_c k_p x(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)}_{\text{DBL}}$$

↙ No es una AM: la portadora y la DBL no están en fase, están en cuadratura!

VCOs = osciladores: controlados por tensión

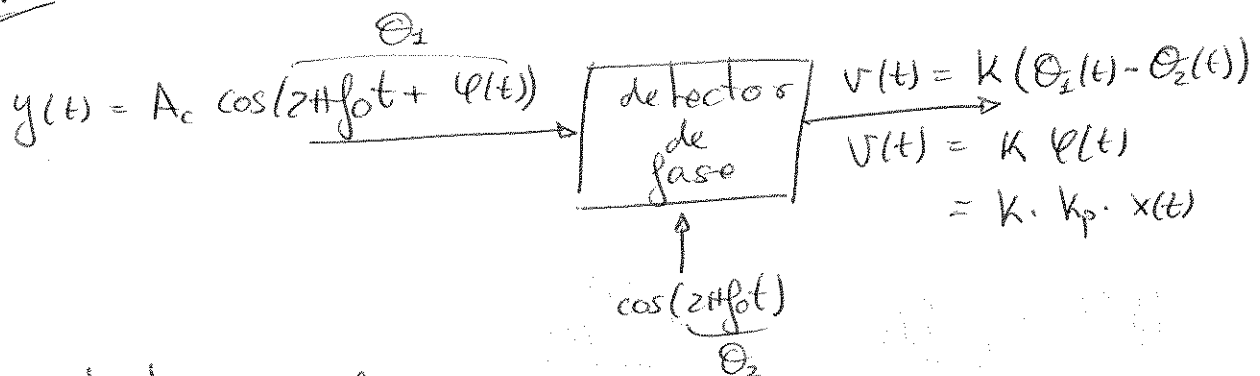
oscilador: sin entrada genera salida de f fija



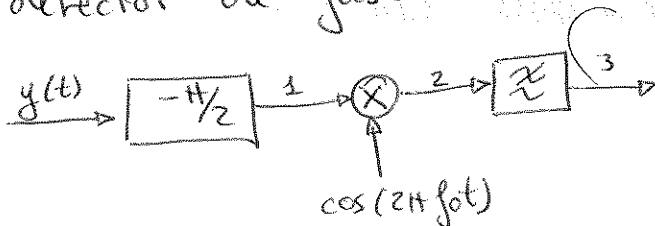
Demoduladores:

- de frec. (FM), también llamados discriminadores
- de fase (PM)

PM:



detector de fase:



$$y_1(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_o t + \varphi(t) - \pi/2) = A_c \cdot \sin(2\pi f_o t + \varphi(t))$$

$$y_2(t) = A_c \cdot \sin(2\pi f_o t + \varphi(t)) \cdot \cos(2\pi f_o t) =$$

$$= \frac{A_c}{2} (\sin(2\pi(2f_o)t + \varphi(t)) + \sin(\varphi(t)))$$

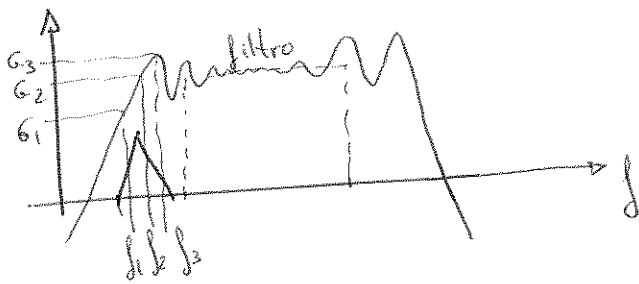
$$y_3(t) = \frac{A_c}{2} \sin(\varphi(t))$$

$$\text{si } \varphi(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t) \Rightarrow y_3(t) = \frac{A_c}{2} \varphi(t) = \frac{A_c}{2} k_p x(t)$$

si $\varphi(t) \neq 0 \Rightarrow$ calcular el $\arcsen(\)$

FM: $y(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) =$
 $= A_c \cdot \cos(2\pi f_0 t + 2\pi k_F \int_0^t x(\alpha) d\alpha)$

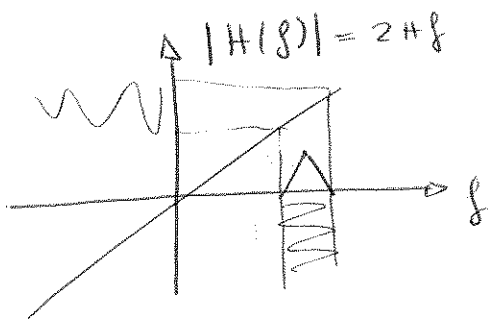
conversión FM \rightarrow AM \rightarrow detector AM (barato)



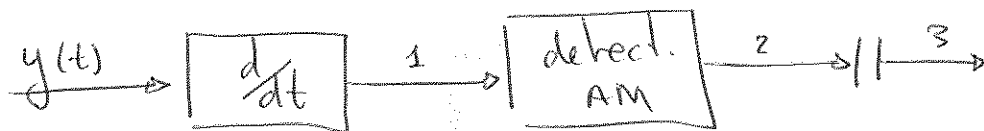
La señal FM varía su f a lo largo del tiempo.

Como a diferentes frec. el filtro tiene diferente ganancia... "cambias" la modulación FM por AM

El circuito buscado es un derivador:



$$\frac{d}{dt} \leftrightarrow j2\pi f$$

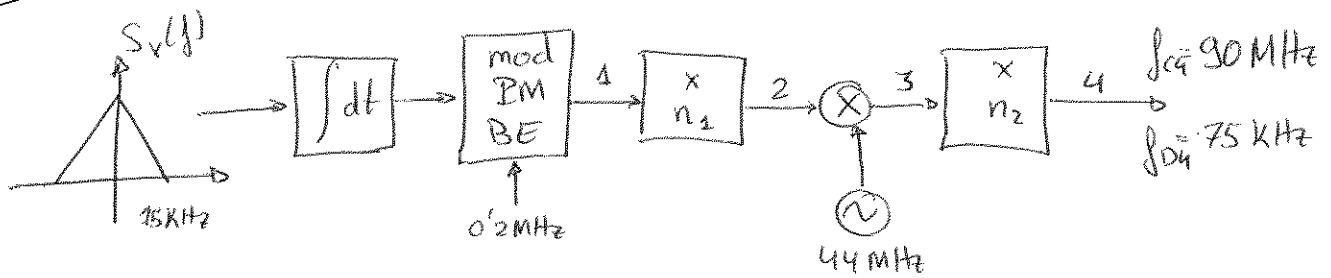


$$y_2(t) = -A_c \cdot \sin(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \cdot (2\pi f_0 + 2\pi k_F x(t))$$

$$y_3(t) = 2\pi f_0 + 2\pi k_F x(t)$$

$$y_3(t) = 2\pi k_F x(t)$$

P6:



a) salida mod.

$$\frac{f_{D1}}{W} = D_1 = 0.5 \Rightarrow \begin{cases} f_{D1} = 7.5 \text{ kHz} \\ f_{c1} = 0.2 \text{ MHz} \end{cases}$$

b) n_1, n_2

$$\begin{cases} f_{c2} = n_1 \cdot f_{c1} \\ f_{D2} = n_1 \cdot f_{D1} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} f_{c3} = f_{c2} + 44 \text{ MHz} \\ f_{D3} = f_{D2} \end{cases} \right. \quad \begin{cases} f_{c4} = n_2 \cdot f_{c3} \\ f_{D4} = n_2 \cdot f_{D3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{c4} = n_2 (44 \text{ M} + n_1 \cdot f_{c1}) = 90 \text{ MHz} \\ f_{D4} = n_2 n_1 f_{D1} = 75 \text{ kHz} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} n_1 = 5 \\ n_2 = 2 \end{array} \right\}$$

c) B_w

Carlson: $B_w = 2 \cdot (D+1) \cdot W$

$$D = \frac{f_{D4}}{W} = \frac{75}{15} = 5$$

$$B_w = 2 (5+1) \cdot 15 = 180$$

considero todo el conjunto como un único modulador

P5:

salida de un modulador FM:

$$y(t) = 40 \cdot \cos\left(\omega_0 t + 2\pi k_f \int_0^t x(\alpha) d\alpha\right); \quad k_f = 10 \text{ Hz/V}$$

$$x(t) = 5 \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ 5 \\ \hline \text{---} \\ \hline \downarrow \\ 1 \quad 2 \\ \rightarrow t \end{array}$$

a) P_{sal} ?

$$P = \frac{1}{2} \langle r^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \cdot 40^2 = 800 \text{ W}$$

b) $f_d(t)$, $f_{D \text{ max}}$?

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + \underbrace{k_f x(t)}_{f_d(t)}$$

$$f_d(t) = 50 \cdot \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

$$f_{D \text{ max}} = \max\{f_d(t)\} = 50 \text{ Hz}$$

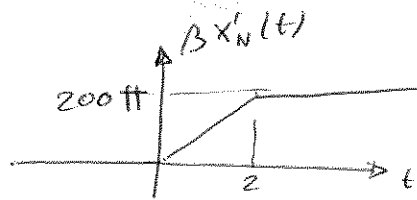
c) si la salida fuera de un PM, $x(t)$? β ?

$$y(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_0 t + \beta x'_N(t))$$

$$\text{identificando: } 2\pi k_f \int_0^t x(\alpha) d\alpha = \beta x'_N(t)$$

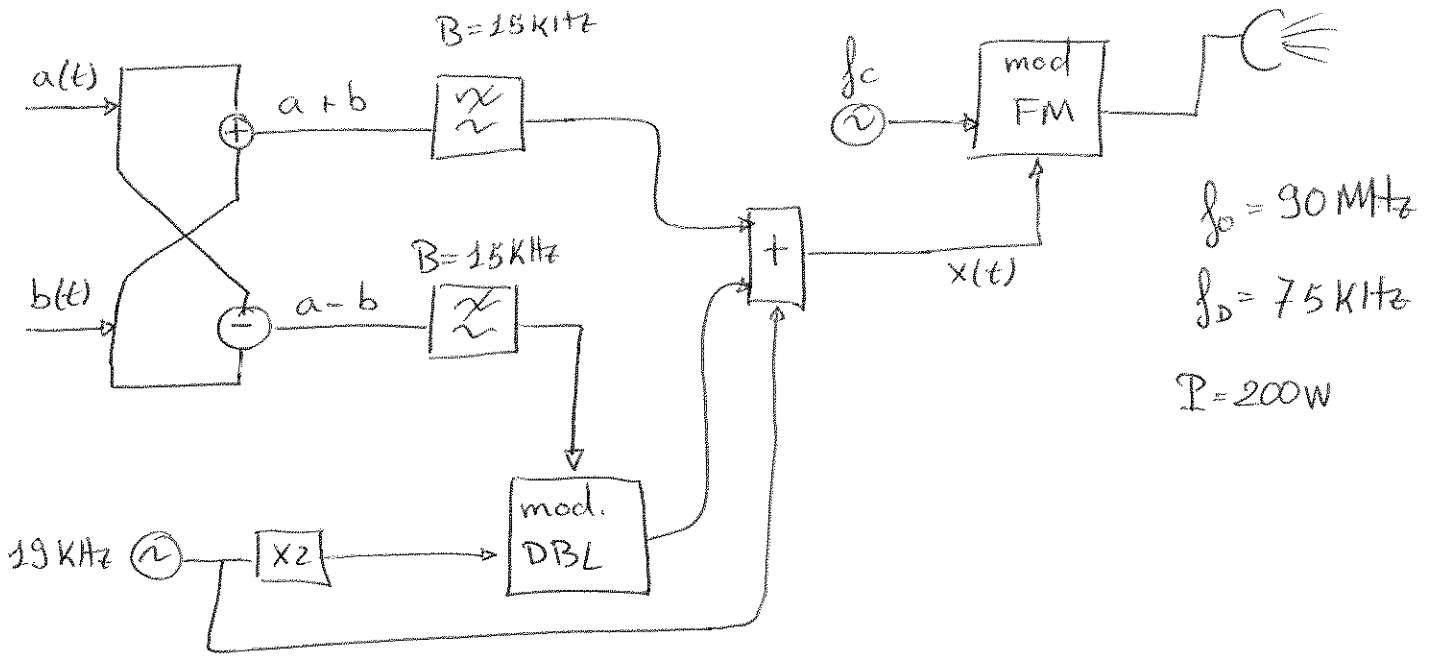
$$\int_0^t x(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 5t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 10, & t > 2 \end{cases}$$

$$\beta x'_N(t) = 2\pi \cdot 10 \begin{cases} 5t & 0 \leq t \leq 2 \\ 10 & t > 2 \end{cases}$$



$$0 < |x'_N| < 1 \Rightarrow \beta = 200\pi$$

Jun 97:



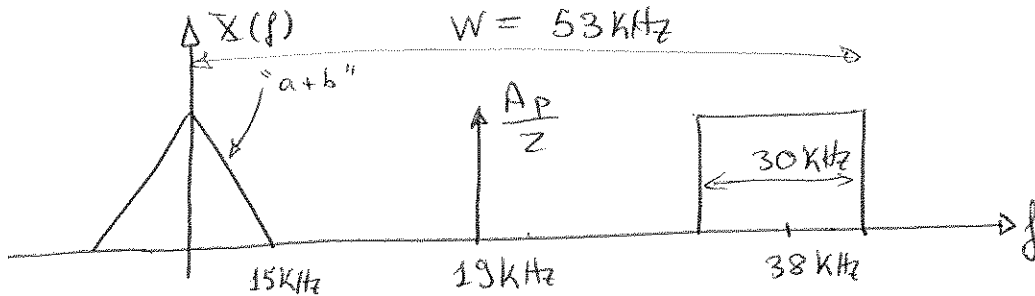
$$y_{\text{FM}}(t) = A_c \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi f_D \int_0^t x_N(\alpha) d\alpha\right)$$

$$P = 200 \Rightarrow A_c = 20$$

$$y(t) = 20 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 90 \cdot 10^6 t + 2\pi \cdot 75 \cdot 10^3 \int_0^t x_N(\alpha) d\alpha\right)$$

$$x(t) = (a(t) + b(t)) + A_1 (a(t) - b(t)) \cos(2\pi \cdot 38 \cdot 10^3 t) + A_p \cdot \cos(2\pi \cdot 19 \cdot 10^3 t)$$

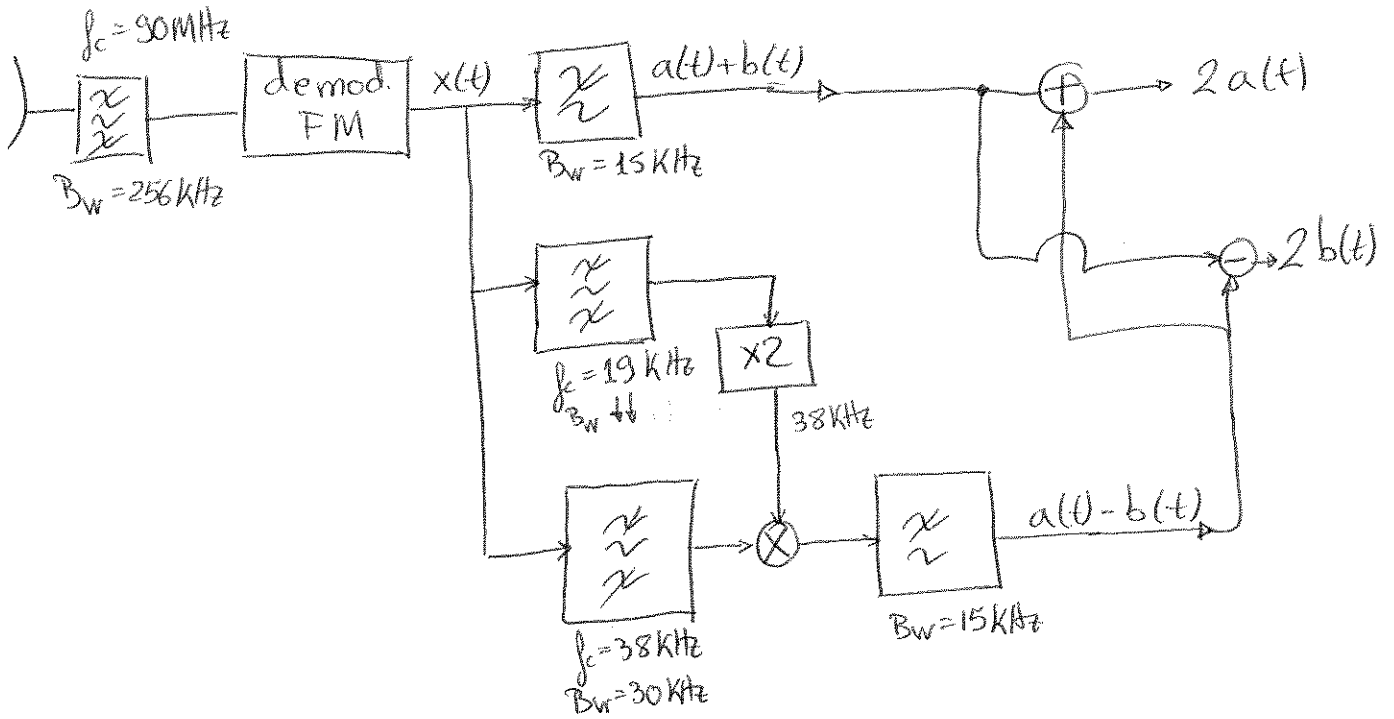
$$X_N(t) = \frac{x(t)}{\max\{x(t)\}}$$



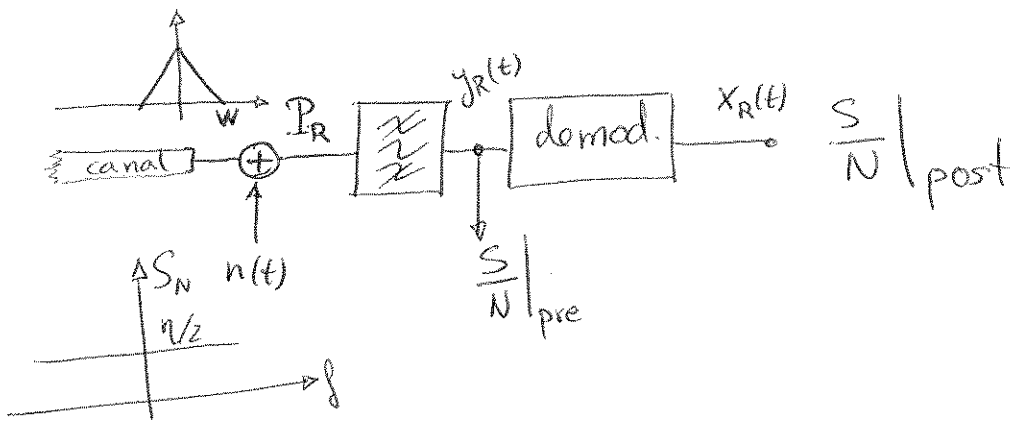
$$B_w = 2(D+L) \cdot W = 2\left(\frac{75}{53} + 1\right) \cdot 53 = 256\text{ kHz}$$

para el demodulador, disponemos de:

- 1 discriminador = demod. FM
- 1 multiplicador
- 1 doblador freq.
- 3 BPF, 2 LPF
- 1 sumador, 1 restador



6. Canales con ruido:



En Banda Base:

$$x(t) \rightarrow \oplus \begin{matrix} S \\ N \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{matrix} \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix} \right]_{Bw} \rightarrow \frac{S}{N} |_{\text{post}} = \frac{S}{N} = \frac{\langle x^2(t) \rangle}{\eta Bw} = Z$$

Z = nivel de comparación del resto de modulaciones

En DBL: $y(t) = A_c x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

$$y_R(t) = y(t) + n_s(t) = A_c x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + n_F(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_C(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\frac{S}{N} |_{\text{pre}} = \frac{\frac{1}{2} A_c^2 \langle x^2(t) \rangle}{2 \eta W} = \frac{Z}{2}$$

$$\begin{aligned} x_R(t) &= \text{LPF} \left\{ y_R(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \right\} = \\ &= \text{LPF} \left\{ A_c x(t) \cos^2(2\pi f_0 t) + n_F(t) \cos^2(2\pi f_0 t) - n_C(t) \sin(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \right\} \\ &= \text{LPF} \left\{ [A_c x(t) + n_F(t)] \cdot \frac{1 + \cos(2\pi f_0 t)}{2} - \frac{n_C(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t) \right\} \\ &= [A_c x(t) + n_F(t)] \cdot \frac{1}{2} = \frac{A_c}{2} x(t) + \frac{n_F(t)}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{S}{N} |_{\text{post}} = \frac{\left(\frac{A_c}{2}\right)^2 \langle x^2(t) \rangle}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \langle n_F^2(t) \rangle} = \frac{A_c^2 \langle x^2(t) \rangle}{2 \eta W} = Z \Rightarrow \text{misma calidad en DBL que en B.B.}$$

Otras modulaciones:

$$\text{DBL} \longrightarrow \frac{\frac{S}{N}|_{\text{post}}}{Z}$$

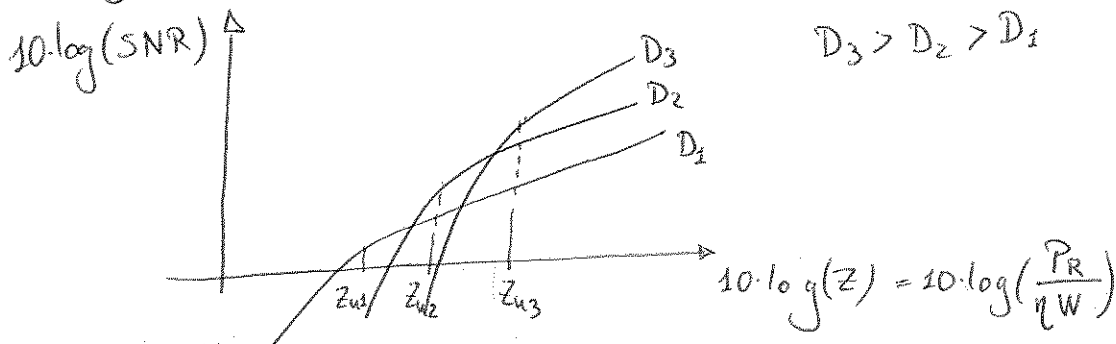
$$\text{AM (receptor coherente)} \longrightarrow E_{f,\text{pot}} \cdot Z \quad (E_{f,\text{pot}} \approx 0.5)$$

$$\text{AM (receptor no coherente)} \longrightarrow E_{f,\text{pot}} \cdot Z \Leftrightarrow \frac{S}{N}|_{\text{pre}} \geq 10 \text{ dB}$$

$$\text{PM} \longrightarrow \beta^2 \langle X_N^2 \rangle \cdot Z \Leftrightarrow Z \geq 20 \cdot \frac{B_R}{W} = Z_{\text{umbral}}$$

$$\text{FM} \longrightarrow 3D^2 \langle X_N^2 \rangle \cdot Z \Leftrightarrow Z \geq Z_{\text{umbral}} = 20 \cdot \frac{B_R}{W}$$

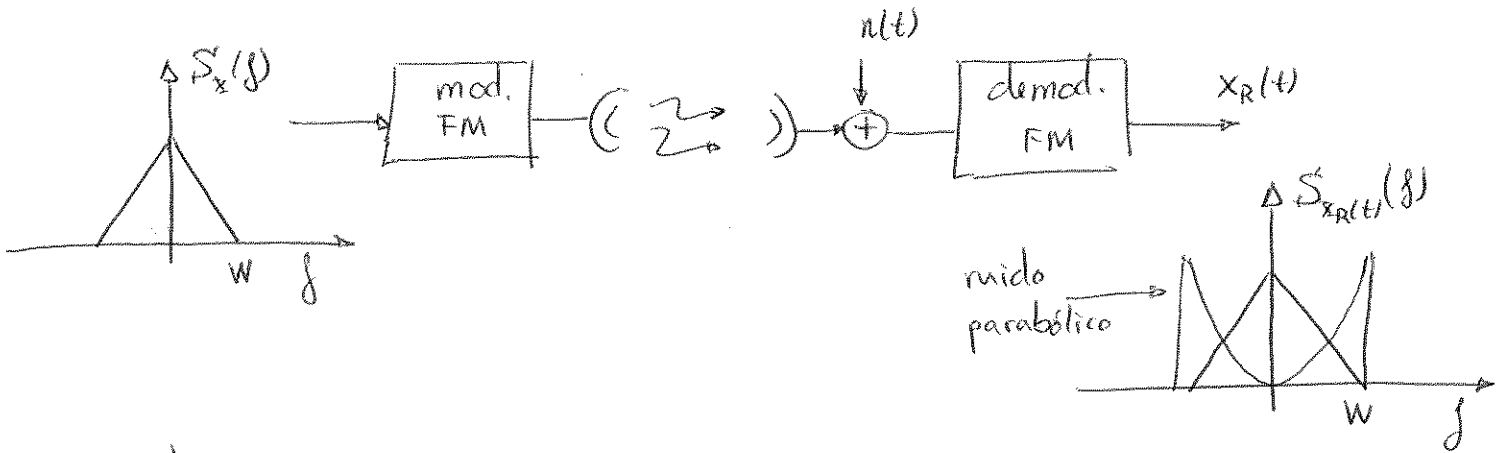
Efecto umbral en modulaciones angulares:



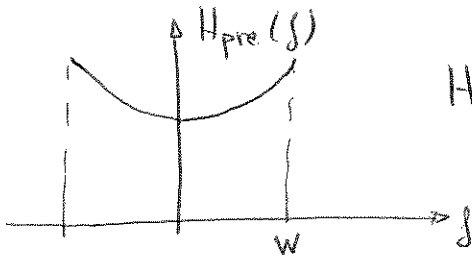
si $Z < Z_u \Rightarrow$ la expresión conocida para $\frac{S}{N}|_{\text{post}}$ No será válida

$$Z \geq Z_u = 20 \cdot \frac{B_R}{W} \Leftrightarrow \frac{S}{N}|_{\text{pred}} > 13 \text{ dB}$$

Técnicas de pre-énfasis y de-énfasis:

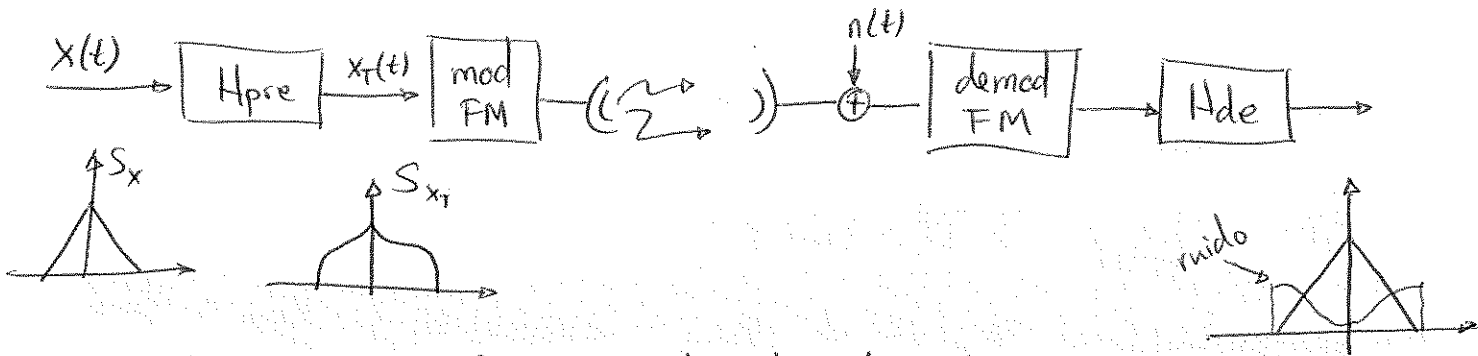
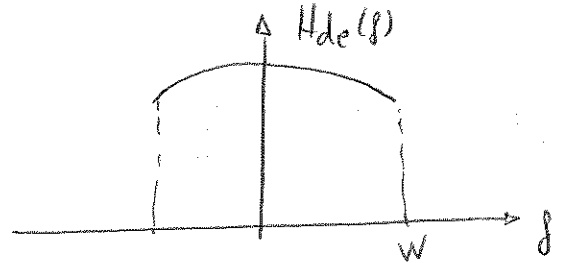


meteremos un H_{pre}



$$H_{pre} \cdot H_{de} = 1$$

meteremos un H_{de}



el filtro de de-énfasis "anula" la transformación hecha a la señal por el filtro de pre-énfasis, ya que uno es el inverso del otro. No obstante, el ruido sólo pasa por el filtro de de-énfasis, de carácter parabólico, que es atenuado en sus frecuencias más altas, haciendo que sea lo más plano posible.

$$G_{pre-de} = \frac{\frac{S}{N}|_{post-pre-de}}{\frac{S}{N}|_{post-sin}}$$

si filtro de-énfasis = RC:

$$G_{pre-de}|_{RC} = 20 \cdot \log\left(\frac{W}{f_c}\right) - 4.8$$

Ej: FM-comercial, $f_D = 75 \text{ kHz}$, $W = 15 \text{ kHz}$, $\langle X_N^2 \rangle = 0.1$
 $\frac{S}{N}|_{\text{post}} = f(z)?$ pre-de \Rightarrow circuito RC, $f_c = 2.1 \text{ kHz}$

$$\frac{S}{N}|_{\text{post}} = 3 \cdot D^2 \cdot \langle X_N^2 \rangle z \Big|_{D = \frac{f_D}{W} = 5} = 7.5 \cdot z \rightarrow z(\text{dB}) + 8.8 \text{ dB}$$

$$G_{\text{pre-de}} = 20 \cdot \log\left(\frac{W}{f_c}\right) - 4.8 = 12.2 \text{ dB}$$

mejora importante!

$$\frac{S}{N}|_{\text{post-pre-de}}^{\text{dB}} = \frac{S}{N}|_{\text{post}}^{\text{dB}} + G_{\text{pre-de}}^{\text{dB}} = z(\text{dB}) + 21 \text{ dB}$$

P7: PM: $\frac{S}{N}|_{\text{post}} = 30 \text{ dB}$

\hookrightarrow FM: sólo se mete un de-énfasis $f_c = W/10 \Rightarrow \frac{S}{N} ?$
 todo lo demás sigue constante

$$\text{PM: } \frac{S}{N}|_{\text{post}} = \beta^2 \langle X_N^2 \rangle z = 1000 = 30 \text{ dB}$$

$$\text{FM: } \frac{S}{N}|_{\text{post}} = 3 \cdot D^2 \langle X_N^2 \rangle z =$$

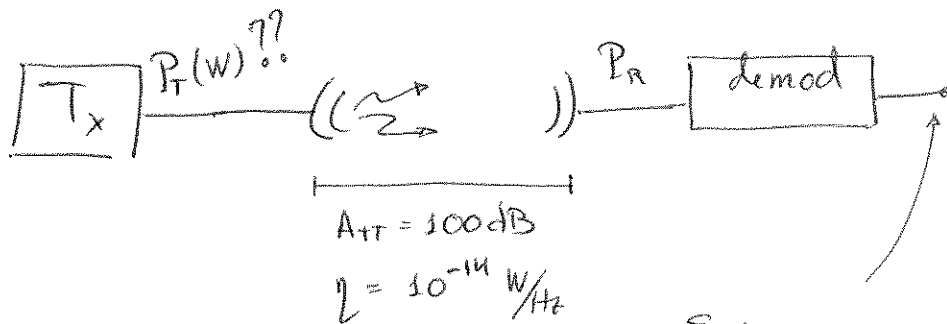
$$\text{por permanecer } B_w \text{ cte } \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B_{\text{PM}} = 2(\beta+1)W \\ B_{\text{FM}} = 2(D+1)W \end{array} \right\} \begin{array}{l} B_{\text{PM}} = B_{\text{FM}} \\ \beta = D \end{array}$$

$$\frac{\frac{S}{N}|_{\text{PM}}}{\beta^2} = \frac{\frac{S}{N}|_{\text{FM}}}{3D^2} \Rightarrow \frac{S}{N}|_{\text{FM}} = 3 \cdot \frac{S}{N}|_{\text{PM}} = 3000 = 35 \text{ dB}$$

$$G_{\text{pre-de}} = 20 \cdot \log\left(\frac{W}{f_c}\right) - 4.8 \text{ dB} = 15.2 \text{ dB}$$

$$\frac{S}{N}|_{\text{post-pre-de}}^{\text{FM}} = 35 + 15.2 = \underline{\underline{50.2 \text{ dB}}}$$

P8:



$$\langle X_N^2 \rangle = 1$$

$$W = 10 \text{ kHz}$$

$$\frac{S}{N} \Big|_{\text{post}} \geq 40 \text{ dB}$$

a) DBL

$$\frac{S}{N} = Z = \frac{P_R}{N W} = 10^4 = 40 \text{ dB} \Rightarrow P_R = 10^{-6} \text{ W} = -60 \text{ dBW}$$

$$P_T = P_R + 100 \text{ dB} = 40 \text{ dBW}$$

$$= \underline{10^4 \text{ W}}$$

b) AM, $m=1$ y $m=0.1$

$$\frac{S}{N} = E_{\text{pot}} \cdot Z = \frac{m^2 \langle X_N^2 \rangle}{1 + m^2 \langle X_N^2 \rangle} = \begin{cases} m=1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot Z \\ m=0.1 \Rightarrow 10^{-2} \cdot Z \end{cases}$$

$$m=1 \Rightarrow P_T = 2 P_R^{\text{DBL}} = 2 \cdot 10^4 \text{ W}; \quad \frac{S}{N} \Big|_{\text{AM}} = \frac{Z}{2} = \frac{P_R^{\text{AM}}}{2 W}$$

$$m=0.1 \Rightarrow P_T = 10^2 \cdot P_R^{\text{DBL}} = 10^2 \cdot 10^4 \text{ W} = \underline{1 \text{ MW}}$$

c) PM, $\beta = 11$

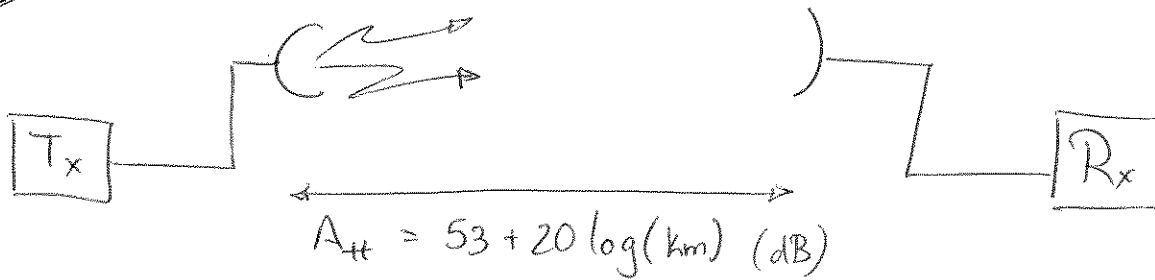
$$\frac{S}{N} = \beta^2 \langle X_N^2 \rangle Z \approx 10 Z \Rightarrow P_T = 0.1 \cdot P_T^{\text{DBL}} = \underline{10^3 \text{ W}}$$

d) FM, $f_D = 10, 50, 100 \text{ kHz}$

f_D	$D = \frac{f_D}{W}$	$Z_u = 20 \frac{B_R}{W}$	Z_0	P_T	SNR post
10	1	80	3333'3	3'3 kW ($Z = 3333'3$)	SNR post = 40 dB
50	5	240	133'3	240 W ($Z = 240$)	SNR post =
100	10	440	33'3	440 W ($Z = 440$)	SNR post = 50 dB

Entre Z_0 y Z_u necesitamos la $Z \gg Z_u$

Pg:



$$PEP = 100 \text{ W}$$

$$\text{alcance máximo} \rightarrow \frac{S}{N|_0} = 20 \text{ dB}$$

$$\langle x(t) \rangle = 0$$

$$|x(t)|_{\max} = 1$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{3}{4}$$

$$W = 3 \text{ kHz}$$

$$\eta = 10^{-14} \text{ W/Hz}$$

alcance máximo? si:

a) AM con $m=0.5$ y $m=0.9$ // $y_{AM}(t) = A_c(1+m x_N(t)) \cos(2\pi f_c t)$

$$\frac{S}{N|_0} = \frac{E_{\text{pot}}}{W} \cdot z = \frac{m^2 \langle x_N^2 \rangle}{1+m^2 \langle x_N^2 \rangle} \cdot \frac{P_R}{\eta W}$$

$$P_R = P_T - A_{\text{att}} (\text{dB}) \Rightarrow P_R = \frac{P_T}{a_{\text{att}}}; P_T = \frac{1}{2} \langle r^2(t) \rangle$$

$$PEP = P_{\text{sinusoidal}} |_{A_c=r_{\max}} = \frac{r_{\max}^2}{2} = \frac{1}{2} (A_c(1+m))^2$$

$$P_T = \frac{1}{2} A_c^2 (1+m^2 \langle x_N^2 \rangle)$$

$$\frac{S}{N|_0} = \frac{m^2 \langle x_N^2 \rangle}{1+m^2 \langle x_N^2 \rangle} \cdot \frac{A_c^2 (1+m^2 \langle x_N^2 \rangle)}{a_{\text{att}} \cdot \eta W} = m^2 \langle x_N^2 \rangle \cdot \frac{PEP / (1+m)^2}{a_{\text{att}} \eta W}$$

$$m=0.5: a_{\text{att}} = 2.8 \cdot 10^9 \rightarrow \text{dB} \rightarrow 94.4 \text{ dB} \Rightarrow d_{\max} = 118 \text{ km}$$

$$m=0.9: a_{\text{att}} =$$

$$d_{\max} = 166 \text{ km}$$

$$b) \text{ DBL} // y_{\text{DBL}}(t) = A_c \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$\frac{S}{N}_0 = Z = \frac{P_R}{2W} = \frac{P_T / a_{\text{att}}}{2W}$$

$$PEP = \frac{r_{\text{max}}^2}{2} \Big|_{r_{\text{max}} = A_c \cdot |x_{\text{max}}(t)| = A_c \cdot 1} = \frac{A_c^2}{2}$$

$$P_T = \frac{A_c^2}{2} \langle x^2(t) \rangle$$

$$\frac{S}{N}_0 = \frac{PEP \langle x^2(t) \rangle}{a_{\text{att}} \cdot 2W} \longrightarrow d_{\text{max}} = 357 \text{ km}$$

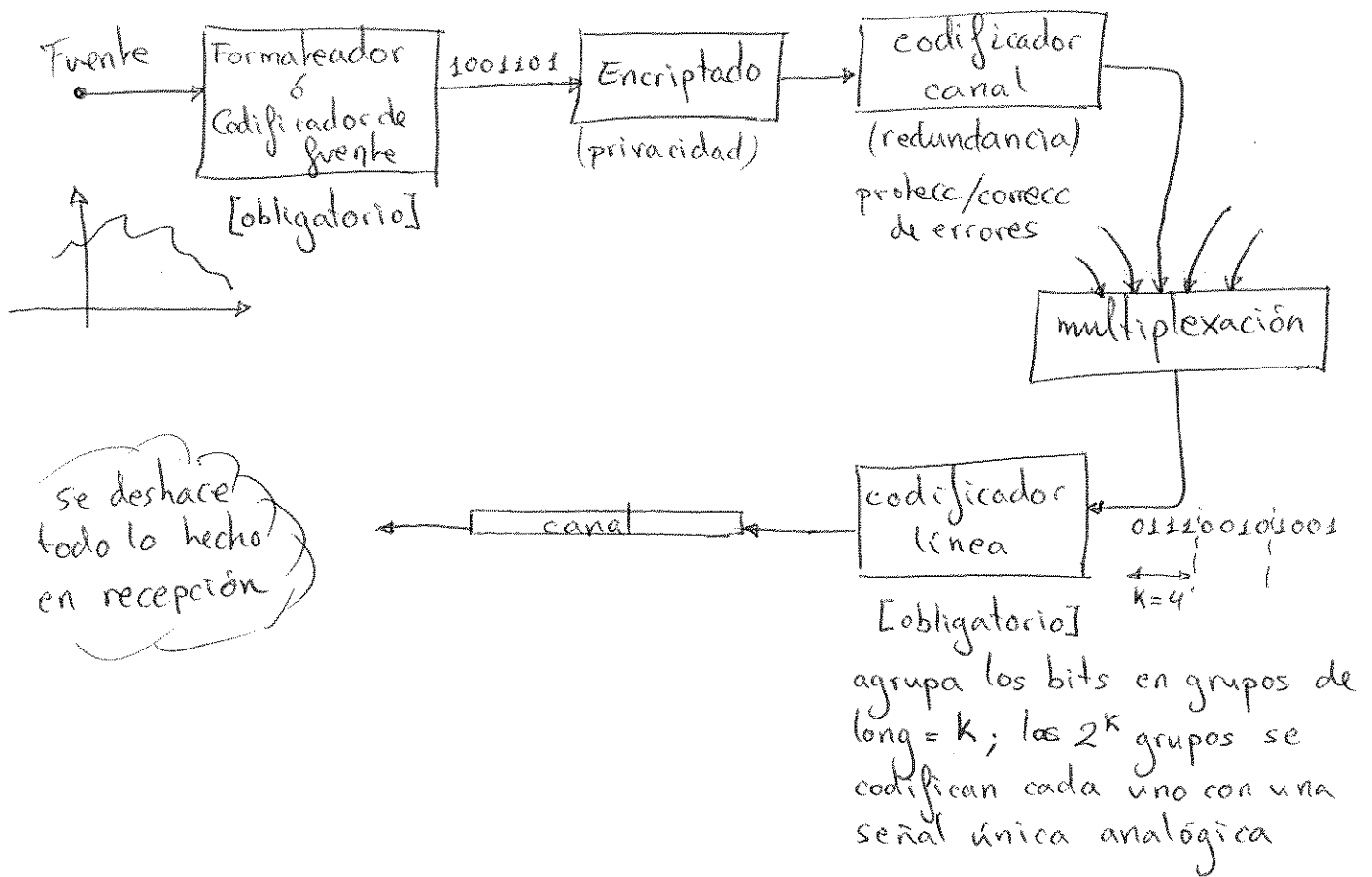
Tema 4: Comunicaciones digitales

1. Características

- * SINAD = Signal Interference Noise And Distorsion
$$\text{SINAD}_{\text{digital}} \ll \text{SINAD}_{\text{analógico}}$$

Ej: $TV_{\text{dig}} \geq 11\text{dB}$, $TV_{\text{analq}} \geq 43\text{dB}$
- * Existen circuitos decisores que permiten recuperar la señal original, eliminando las distorsiones, ruido e interferencias absorbidas.
- * Existen técnicas de detección y corrección de errores.
- * Circuitaría más simple, versátil y fiable. (robusted)
- * Información más fácilmente manipulable (criptografía)
- * Cualquier tipo de multiplexación es válido
- * Se necesita sincronizar Tx y Rx
- * El mundo es analógico: se necesita muestrear para pasar a digital y luego entregar la info en analógico
- * Anchos de banda inferiores en digital (compresión)
- * Sistemas sensibles a las degradaciones

2. Estructura de los sistemas



3. Información Digital

Fuente textual: **HOLA**
 carácter: ↓
 formateo: ↓
 secuencia bits: **{0,1}**

$\overbrace{010}^{k=3} \overbrace{011}^{k=3} \overbrace{100}^{k=3}$

cada agrupación de k bits será un símbolo

tamaño del alfabeto = $2^k = M =$ número de símbolos

asociaremos una forma de onda a cada símbolo: $S_n(t)$

Ej: HOLA \rightarrow ASCII 7 bits, $M = 16$ símbolos $\Rightarrow k = 4$ bits
16-QAM

HOLA

$\hookrightarrow 4$ caracteres $\times 7 \frac{\text{bits}}{\text{car.}} = 28$ bits

0 1 0 1 | 0 0 0 0 | 1 0 1 0 | 1 1 1 1 | 1 1 1 1 | 1 0 1 0 | 1 0 1 1
 $S_5(t)$ $S_0(t)$ $S_{10}(t)$ $S_{15}(t)$ $S_{15}(t)$ $S_{10}(t)$ $S_{11}(t)$

Velocidad de símbolo:

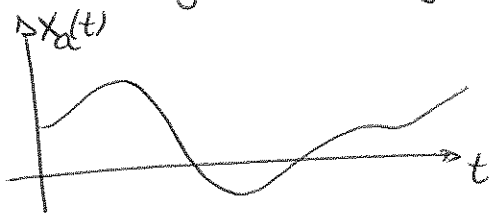
$$V_s = \frac{\text{número de símbolos}}{\text{unidad de tiempo}} = \frac{1}{T} \left(\frac{\text{símbolos}}{s} \right)$$

Velocidad de transmisión:

$$V_T = \frac{\text{número de bits}}{\text{unidad de tiempo}} = \frac{k}{T} = k \cdot V_s \quad (\text{bits/s})$$

4. Formateado de señales

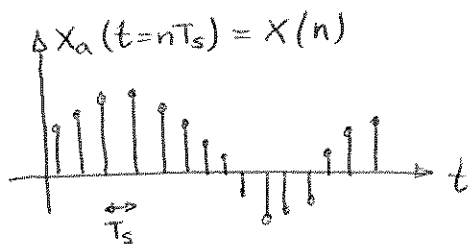
① señal original analógica



convertor analóg./digital

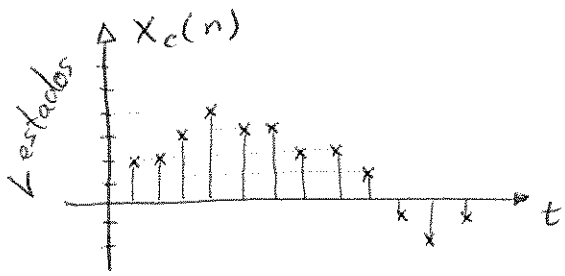
- \hookrightarrow muestreo
- \hookrightarrow cuantificación
- \hookrightarrow codificación

② muestreo:



si $\frac{1}{T_s} = f_s \geq 2 \text{Bw}\{X_a(t)\} \Rightarrow$ el muestreo no tendrá pérdidas podremos recuperar $X_a(t)$.

③ cuantificación: discretización de la amplitud



la cuantificación
sí distorsiona
la señal

④ codificación: conversión a bits de cada estado

Ej: si $L = 64 \Rightarrow n = \log_2(64) = 6$ bits/estado

cada estado será codificado con $n = \log_2(L)$ bits

$$\text{escalón de cuantificación} = \Delta = \frac{2V}{L-1} = \frac{2V}{2^n-1}; L = 2^n$$

siendo V la tensión máxima permitida a la entrada del cuantificador para evitar distorsión

Tras cuantificar cometemos un error de cuantificación (variación de la amplitud original y el valor cuantificado)

$$\text{luego: } x_c(n) = x(n) + \varepsilon(n)$$

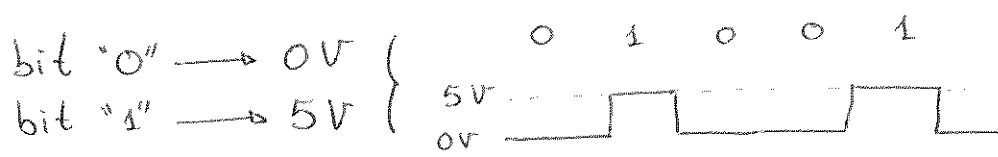
siendo $\varepsilon(n)$ ruido blanco uniforme $[-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}]$

$$\text{Varianza}_{\text{unif}} = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow \text{Var.}(\varepsilon(n)) = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\text{luego: } \left. \frac{S}{N} \right|_{\text{A/D}} = \frac{V^2/2}{\Delta^2/12} = 6 \frac{V^2}{\Delta^2} = \left\{ \Delta = \frac{2V}{L-1} \approx \frac{2V}{2^n} \right\} = \frac{3}{2} 2^{2n}$$

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{A/D}} (\text{dB}) = 1.76 + 6n$$

Sistemas PCM: Pulse Coded Modulation



siempre en PCM: $k=1$

P1: mensaje 100 caracteres en 2 segundos
ASCII 7bits + 1 bit paridad, $M=16=2^k \Rightarrow k=4$ bits/símbolo

$$100 \text{ caract} \times 8 \text{ bits/car.} = 800 \text{ bits}$$

$$\frac{800 \text{ bits}}{k=4} = 200 \text{ símbolos}$$

$$V_{\text{simb}} = \frac{200 \text{ simb}}{2 \text{ s}} = 100 \text{ simb/s}$$

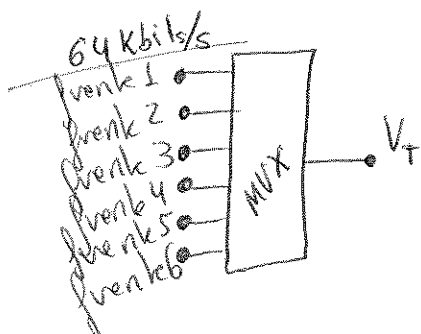
$$V_{\text{trans}} = k \cdot V_{\text{sim}} = 400 \text{ bits/s}$$

P2: TDMA, 6 frentes binarias, $f_s = 8 \text{ kHz}$, $L = 256$ niveles
trama: 6 bits (info) + 2 control = 8 bits/trama
cada 4 tramas de 8bits se mete señalización de 10 bits

$$L = 256 = 2^n \Rightarrow n = 8 \text{ bits}$$

$$V_{\text{trama i}} = \frac{n \text{ bits}}{\text{tiempo}} = \frac{n}{T_s} = n \cdot f_s = 64 \text{ kbits/s}$$

$$V_T = \frac{(4 \text{ tramas} \times 8 \text{ bits}) + 10 \text{ control}}{T} \times 2 = \frac{84 \text{ bits}}{125 \text{ ms}}$$



P3: $W = 20 \text{ kHz}$, $f_s = 44,1 \text{ kHz}$

cada canal (estéreo): $L = 65536 \text{ niveles} = 2^n \Rightarrow n = 16 \text{ bits}$

codificación: 3 bits redundancia por cada Byte

a) tamaño de fichero de un audio de 3 min?

$$N = \underbrace{(180 \text{ s} \cdot 44,1 \text{ kHz} \cdot n = 16 \text{ bits} \cdot \frac{11}{8})}_{3 \text{ min}} \cdot \underbrace{2 \text{ canales}}_{\text{redundancia}} = 180 \text{ s} \cdot 1,94 \text{ Mbits/s}$$

$$N = 349,272 \text{ Mbits}$$

b) se transmite a 2 Msimb/s , 8 niveles, tiempo de tx?

$$t_{\text{trans}} = \frac{N_{\text{bits}}}{V_T} = \frac{349,272 \text{ Mbits}}{V_{\text{simb}} \cdot k} \quad \hookrightarrow M=8 \Rightarrow k=3 \text{ bits/simbolo}$$

$$t_{\text{trans}} = \frac{349,272 \text{ Mbits}}{2 \cdot 10^6 \text{ sim/s} \cdot 3 \text{ bits/simb}} = 58,2 \text{ s}$$

P4: diseño de un ADC (Analog. Dig. Converter)

$$W \leq 10 \text{ kHz}$$

$$\text{SNR}_Q \Big|_{\substack{\text{simsoiales} \\ A=0,8V}} \geq 35 \text{ dB}$$

a) n bits?

$$\frac{S}{N} \Big|_{\substack{Q \\ A=V}} = 1,76 + 6 \cdot n \text{ (dB)}$$

$$\frac{S}{N} \Big|_Q = 1,76 + 6 \cdot n + 20 \cdot \log\left(\frac{A}{V}\right) \geq 35 \Rightarrow n > 5,86 \text{ bits} \\ n = 6 \text{ bits}$$

$$\frac{S}{N} \Big|_Q = 35,82 \text{ dB}$$

b) $V = \pm 2V$, Δ ?

$$\Delta = \frac{2V}{L-1} = \frac{2V}{2^n-1} \approx \frac{2V}{2^n} = \frac{4}{2^6} = 62,5 \text{ mV}$$

$$c) \frac{S}{N}|_Q = \frac{S_{\text{triang}}}{N_Q} = \frac{S_N \cdot \frac{2}{3}}{N_Q} \xrightarrow{\text{dB}} \frac{S}{N}|_Q = 34 \text{ dB}$$

d) senoide con ruido ya añadido

$$\frac{S}{N}|_{\text{in}} = 20 \text{ dB}, \quad \frac{S}{N}|_{\text{digitalizada}}?$$

$$\frac{S}{N}|_{\text{out}} = \frac{S}{N_T + N_Q} = \frac{1}{N_T/S + N_Q/S} = \frac{1}{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{IN}}^{-1} + \left(\frac{S}{N}\right)_Q^{-1}} = \frac{1}{10^{-2} + 10^{-3/58}}$$

$$= 19.89 \text{ dB}$$

e) V_T^{min} a la salida del ADC?

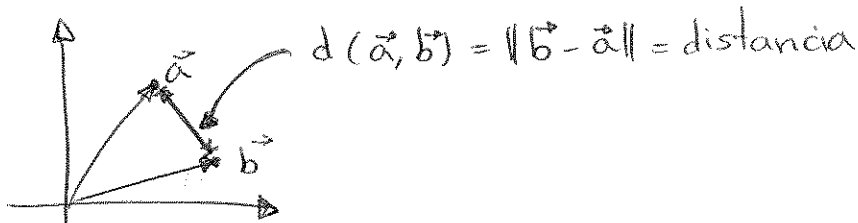
$$V_T = \frac{n^{\circ} \text{ bits}}{\text{tiempo}} = \frac{n}{T_s} = n \cdot f_s$$

$$V_T^{\text{min}} = n \cdot f_s^{\text{min}} \Rightarrow \{ f_s^{\text{min}} = 2W \} \Rightarrow V_T^{\text{min}} = n \cdot 2 \cdot W = 120 \text{ Kbits/s}$$

Tema 5: Codificación de línea y modulación digital

1. Espacio vectorial de señales

M símbolos \rightarrow M señales de código
distancia de vectores.



sobre el conjunto $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots\}$ sobre un cuerpo de números Reales se definen las operaciones:

\rightarrow suma \rightarrow $V + V = V$
(operación interna)

conmutativa asociativa elemento neutro ($\vec{0}$) elemento simétrico ($-\vec{a}$)

\rightarrow producto \rightarrow $\mathbb{R} \times V = V$
(operación externa)

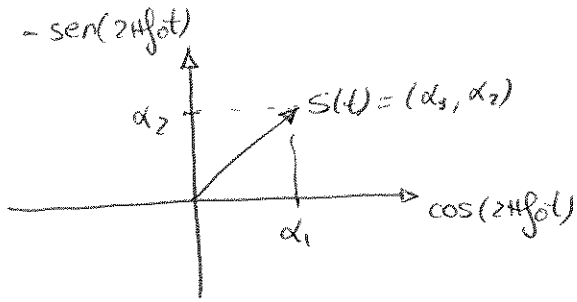
asociativa distributiva elemento unitario ($\vec{1}$)

V serán señales de energía finita ($0 \leq t \leq T$)

Base = $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ necesita tener el número mínimo de elementos y ser independientes, si esto no fuera así, en lugar de base hablaríamos de espacio generador.

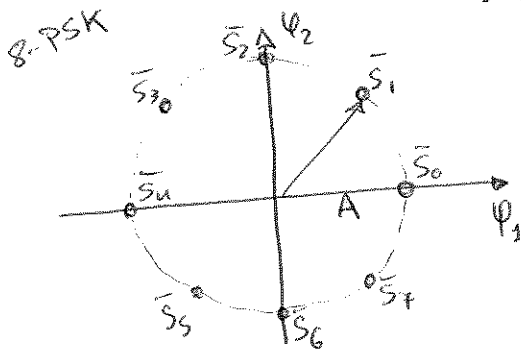
Supongamos la base: $B = \{ \cos(2\pi f_0 t), -\sin(2\pi f_0 t) \}$

luego: $s(t) = \alpha_1 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \alpha_2 (-\sin(2\pi f_0 t))$



representaremos cada vector como sus coordenadas

Constelación: conjunto de vectores representados por sus coordenadas



8 señales (vectores) para 8 símbolos

$$8 = 2^3 \Rightarrow 3 \text{ bits/símbolo}$$

$$M = 2^k$$

Para definir una distancia necesitamos hacer el espacio vectorial euclídeo, definiendo el producto escalar:

$$\langle \vec{s}_2(t), \vec{s}_1(t) \rangle = \int_0^T \vec{s}_2(t) \cdot \vec{s}_1(t) dt = \text{correlación entre señales}$$

$$d(\vec{s}_2, \vec{s}_1) = \|\vec{s}_2 - \vec{s}_1\| = \sqrt{\langle \vec{s}_2 - \vec{s}_1, \vec{s}_2 - \vec{s}_1 \rangle}$$

$$\langle \vec{s}_1, \vec{s}_1 \rangle = \|\vec{s}_1\|^2 = \int_0^T \vec{s}_1(t) \cdot \vec{s}_1(t) dt = E_{s_1}$$

$$d(\vec{s}_2, \vec{s}_1) = \|\vec{s}_2 - \vec{s}_1\| = \sqrt{\langle \vec{s}_2 - \vec{s}_1, \vec{s}_2 - \vec{s}_1 \rangle} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2(\vec{s}_2, \vec{s}_1) = \int_0^T (\vec{s}_2 - \vec{s}_1) \cdot (\vec{s}_2 - \vec{s}_1) dt = \underbrace{\int_0^T \vec{s}_2^2 dt}_{E_2} + \underbrace{\int_0^T \vec{s}_1^2 dt}_{E_1} - 2 \int_0^T \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 dt$$

coef. de correlación:

$$\rho_r = \frac{\int_0^T \vec{s}_2(t) \cdot \vec{s}_1(t) dt}{\sqrt{E_2 E_1}}$$

$$\Rightarrow d^2(s_2, s_1) = E_2 + E_1 - 2\rho_r \sqrt{E_2 E_1}$$

$$\rho_r = \cos(\theta) = \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{\|x_1\| \cdot \|x_2\|}$$

Caso sinusoidal:

sea: $B = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_D(t)\}$; $\dim(B) = D$

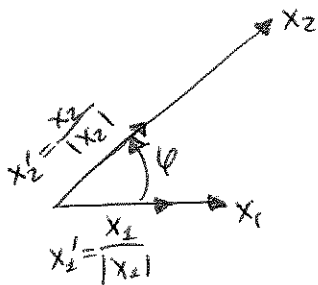
generalmente: $\varphi_1(t) = \cos(2\pi f_0 t)$
 $\varphi_2(t) = -\sin(2\pi f_0 t)$

así: $x = \alpha_1 \cdot \varphi_1(t) + \alpha_2 \cdot \varphi_2(t) = \alpha_1 \cos(2\pi f_0 t) + \alpha_2 (-\sin(2\pi f_0 t))$

permite construir cualquier sinusoidal de freq. f_0

$$\bar{x} = r(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)); \quad r(t) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}; \quad \varphi(t) = \arctan\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

Sea una constelación con señales de diferentes amplitudes o de amplitudes variantes con el tiempo. Para medir su distancia, normalizaremos previamente; así:



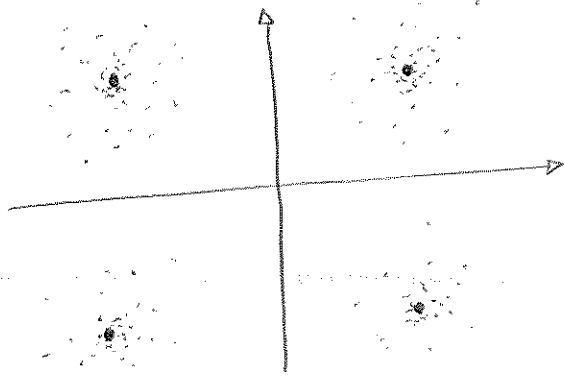
$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{|x_1| \cdot |x_2|}$$

marcará la distancia entre x_1 y x_2

Un receptor, que conoce el espacio de señales posibles (constelación), calculará la distancia entre la señal recibida y las posibles y optará por escoger aquella cuya distancia sea mínima. Esto permite una regeneración de señal, propio de sistemas digitales.

- si $p_r = -1 \Rightarrow$ señales antipodales \Rightarrow máxima distancia
- si $p_r = 0 \Rightarrow$ señales ortogonales \Rightarrow 1 señal al menos con $E=0$
ó no se solapan en el tiempo

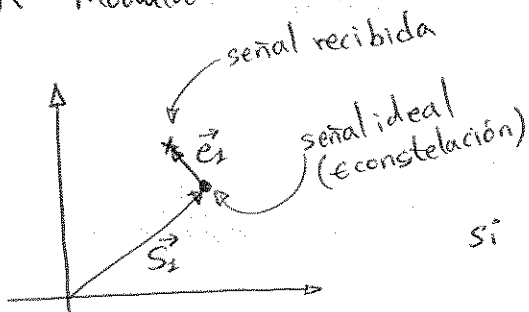
El ruido, como buena señal aleatoria que es, hará que recibamos:



la "nube" formada alrededor de una señal de la constelación formada por el conjunto de las realizaciones recibidas se denomina cluster

Una constelación óptima contra el ruido será aquella que tenga sus señales lo más separadas posible

$$MER = \text{Modulation Error Ratio} = 10 \cdot \log \left(\frac{\sum_{i=1}^N \|s_i\|^2}{\sum_{i=1}^N \|e_i\|^2} \right) \text{ (dB)}$$



si \vec{e} = ruido aditivo $\Rightarrow MER = \frac{S}{N}$

$$EVM = \text{Error Vector Magnitude} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|e_i\|^2}}{V_{\max}} \text{ (\%)}$$

$$V_{\max} = \max \{ \|s_i\| \}$$

2. Codificación de línea en Banda Base

* codificación binaria ó multinivel

bin: $s_0(t)$ $s_1(t)$ $M=2$

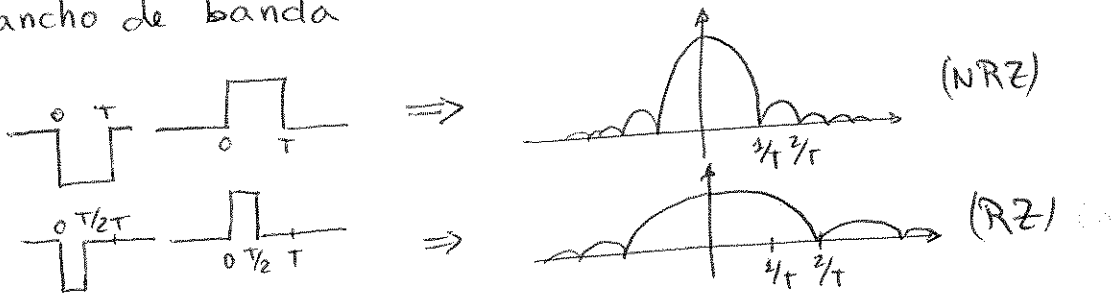
multi: $s_0(t)$ $s_1(t)$ $s_2(t)$ $s_3(t)$ $M=4$

* nivel de continua de los códigos

DC $\neq 0$: $s_0(t)$ $s_1(t)$ unipolar \Rightarrow señal $\in (0, A)$

DC = 0: $s_0(t)$ $s_1(t)$ bipolar \Rightarrow señal $\in (-A, A)$

* ancho de banda



* recuperación de reloj

necesitamos saber dónde tomar la decisión

los recuperadores de reloj se basan en las transiciones

los NRZ complican la recuperación

los RZ facilitan la recuperación



* robustez frente al ruido

* potencia media

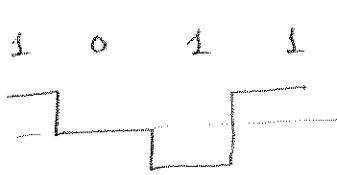
$$M \text{ símbolos en el alfabeto} \Rightarrow E_{\text{símb}} = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} E_{s_i}}{M} = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \|s_i\|^2}{M}$$

$$P_{\text{símbolo}} = \frac{E_{\text{símb}}}{T} = E_{\text{símb}} \cdot V_{\text{símb}} = E_{\text{bit}} \cdot k \cdot \frac{V_{\text{tran}}}{k} = E_{\text{bit}} \cdot V_{\text{tran}}$$

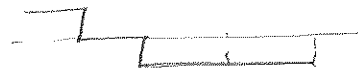
\uparrow
 $M=2^k$

* detección de errores (o excepciones)

P.Ej: código AMI: introduce cambio de nivel cada "1"



si recibe: 1 0 1 1



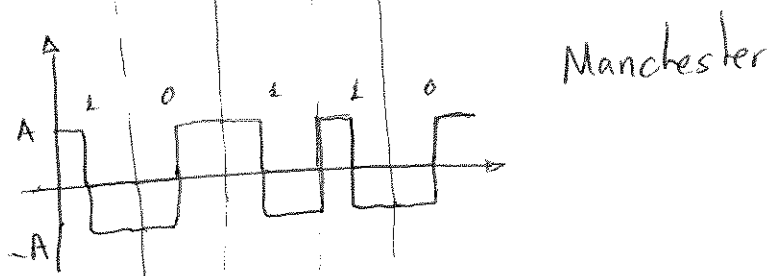
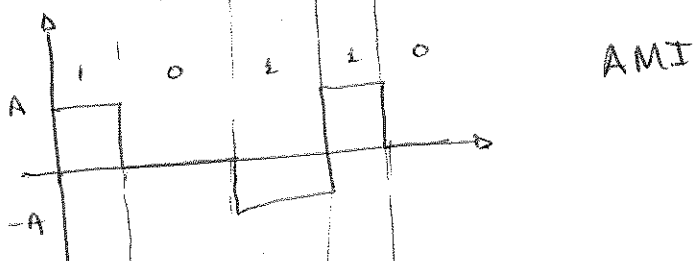
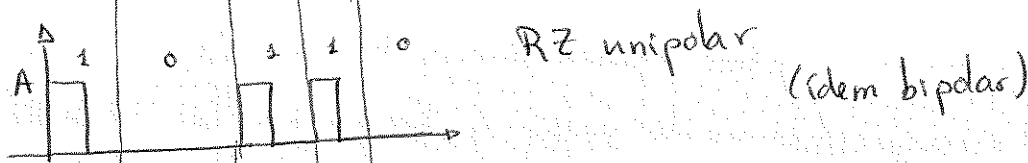
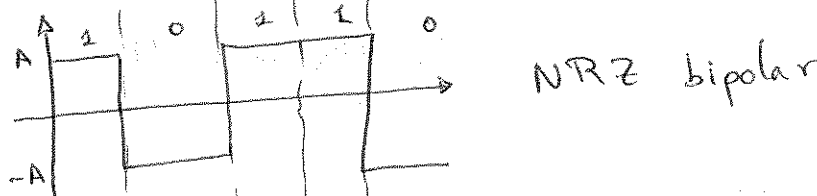
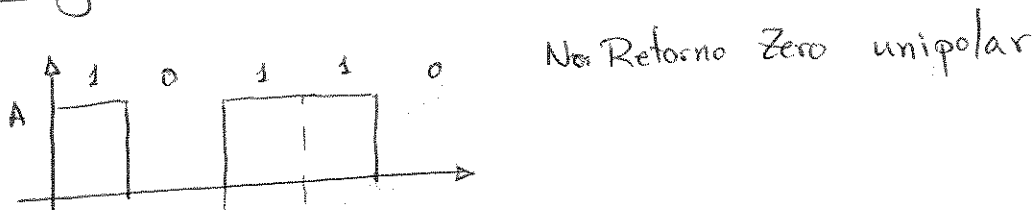
error! No puede haber dos niveles iguales consecutivos

* codificación diferencial

cada bit depende del anterior

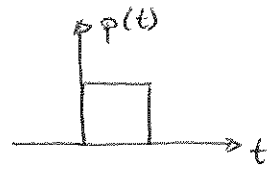
P.ej: "0" → mantiene nivel
"1" → cambia nivel

Códigos de línea típicos:



Codificación de línea BB multinivel: (PAM)

$$\vec{s}_k(t) = a_k \cdot \vec{p}(t)$$



$$a_k = \pm A, \pm 2A, \pm 3A, \pm 4A$$

$$M = 8 \text{ símbolos} = 2^k = 2^3 \Rightarrow 3 \text{ bits/simb}$$

constelación:



P1: sean $\vec{r}(t) \rightarrow (r_1, r_2)$ con base ortonormal $\{\vec{\psi}_1(t), \vec{\psi}_2(t)\}$
 $\vec{s}(t) \rightarrow (s_1, s_2)$

demostrar $\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle = r_1 s_1 + r_2 s_2$

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}, \vec{s} \rangle &= \int_0^T \vec{r}(t) \cdot \vec{s}(t) dt = \int_0^T (r_1 \vec{\psi}_1 + r_2 \vec{\psi}_2) (s_1 \vec{\psi}_1 + s_2 \vec{\psi}_2) dt = \\ &= \int_0^T r_1 s_1 \vec{\psi}_1 \vec{\psi}_1 + r_1 s_2 \vec{\psi}_1 \vec{\psi}_2 + r_2 s_1 \vec{\psi}_2 \vec{\psi}_1 + r_2 s_2 \vec{\psi}_2 \vec{\psi}_2 dt = \\ &\quad \underbrace{\int_0^T r_1 s_2 \vec{\psi}_1 \vec{\psi}_2 + r_2 s_1 \vec{\psi}_2 \vec{\psi}_1 dt}_0 \\ &= r_1 s_1 \int_0^T \vec{\psi}_1 \vec{\psi}_1 dt + r_2 s_2 \int_0^T \vec{\psi}_2 \vec{\psi}_2 dt = r_1 s_1 + r_2 s_2 \end{aligned}$$

ortonormal $\Rightarrow \vec{\psi}_1 \vec{\psi}_2 = 0$

P2: sean: $u_1(t) = \sqrt{2/T} \cos(2\pi t)$ $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ u_2(t) = \sqrt{2/T} \cos(4\pi t) \end{array} \right.$

forman un conjunto ortonormal? si...

a) $T=1$ b) $T=0.5$ c) $T=0.25$?

$$\begin{aligned} E_1 = \|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T 2 \cos^2(2\pi t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1 + \cos(4\pi t) dt \\ &= 1 + \frac{\text{sen}(4\pi t)}{4\pi} \Big|_0^T = 1 + \frac{\text{sen}(4\pi T)}{4\pi} \end{aligned}$$

$$E_2 = \|u_2\|^2 = \dots = 1 + \frac{\text{sen}(8\pi T)}{8\pi T}$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi t) \cos(4\pi t) dt = \frac{\text{sen}(6\pi T)}{6\pi T} + \frac{\text{sen}(2\pi T)}{2\pi T}$$



a) $T=1$

$$\left. \begin{array}{l} \|u_1\|=1 \\ \|u_2\|=1 \end{array} \right\} \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \Rightarrow \text{ortonormales}$$

b) $T=0.5$

$$\left. \begin{array}{l} \|u_1\|=1 \\ \|u_2\|=1 \end{array} \right\} \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \Rightarrow \text{ortonormales}$$

c) $T=0.25$

$$\left. \begin{array}{l} \|u_1\|=1 \\ \|u_2\|=1 \end{array} \right\} \langle u_1, u_2 \rangle = \frac{4}{3} \neq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{unitarios si} \\ \text{ortogonales no} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t) \\ u_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi \cdot 2 \cdot t) \end{array} \right\} \text{FSK} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{"0"} \Rightarrow u_1 \Rightarrow f_1 = 1 \text{ Hz} \\ \text{"1"} \Rightarrow u_2 \Rightarrow f_2 = 2 \text{ Hz} \end{array}$$

En FSK, si $\Delta f \geq (f_2 - f_1) = \frac{1}{2T} \Rightarrow \text{ortonormales}$

P3:

a) Determinar una base ortonormal para Manchester

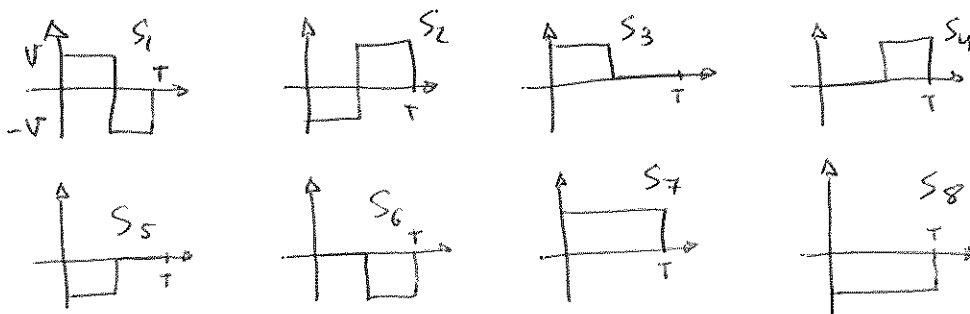


$S_0(t) = -S_1(t) \Rightarrow$ No independientes $\Rightarrow \text{dim} = 1$

normalicemos:

$$S_1(t) \Rightarrow E_{S_1}(t) = \langle S_1, S_1 \rangle = \frac{S_1(t)}{\|S_1\|} = \frac{S_1(t)}{A^2 T}$$

b) Ahora tenemos Manchester + 6 señales, ídem a)



Método Gram-Schmidt

cogemos S_3 (nos gusta, es sencillo):

$$S_3 \Rightarrow u_3 = \frac{S_3}{\|S_3\|} = \frac{S_3}{\sqrt{T/2}} \quad (\text{unitario})$$

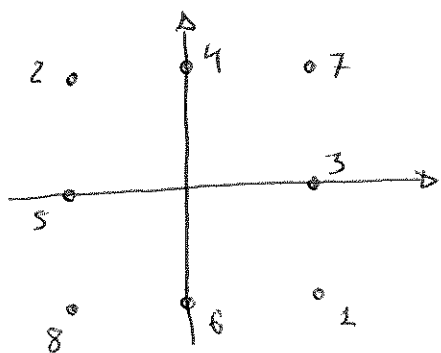
$S_4 \perp u_3$ (pues no se solapan temporalmente)

$$S_4 \rightarrow u_4 = \frac{S_4}{\|S_4\|} = \frac{S_4}{\sqrt{T/2}}$$

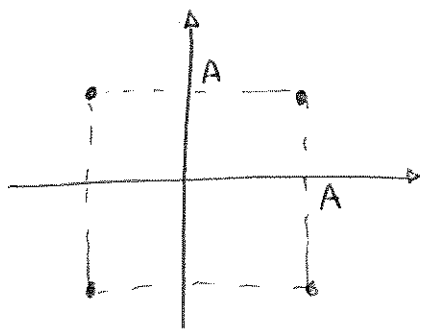
las demás señales son dependientes de u_3 y/o u_4

$$\dim = 2 \Rightarrow B = \{u_3, u_4\}$$

c) constelación ($T=2s$)

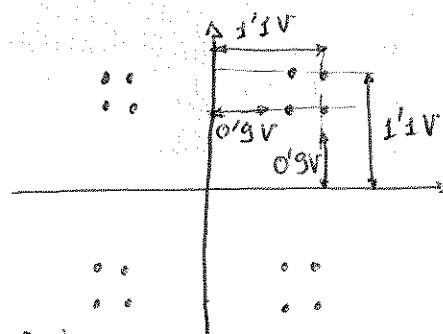


P4: se transmite:

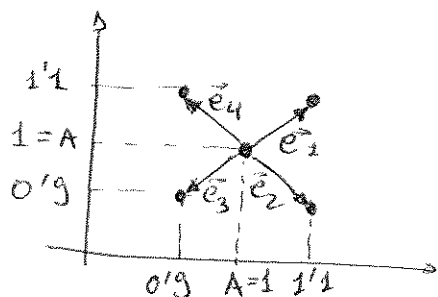


MER? si:

a) recibida:



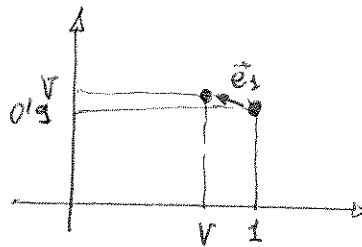
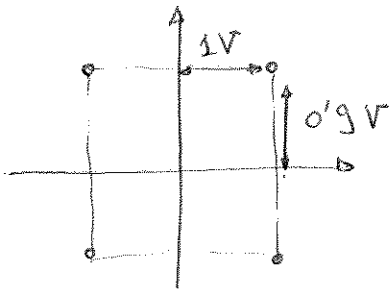
$$MER = 10 \cdot \log \left(\frac{\langle \|\vec{s}_k\|^2 \rangle}{\langle \|\vec{e}_k\|^2 \rangle} \right) = 10 \cdot \log \left(\frac{\sum_{k=1}^M \|\vec{s}_k\|^2}{\sum_{k=1}^M \|\vec{e}_k\|^2} \right) \quad (\text{dB})$$



$$\begin{aligned} \|\vec{e}_1\|^2 &= 0,1^2 + 0,1^2 = 0'02 \\ \|\vec{e}_2\|^2 &= 0,1^2 + (-0,1)^2 = 0'02 \\ \|\vec{e}_3\|^2 &= (-0,1)^2 + 0,1^2 = 0'02 \\ \|\vec{e}_4\|^2 &= (-0,1)^2 + 0,1^2 = 0'02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{s}_k\|^2 &= 1^2 + 1^2 = 2 \quad \forall k \\ MER &= 10 \cdot \log \left(\frac{2 \cdot 4}{0'02 \cdot 4} \right) = \\ &= 20 \text{ dB} \end{aligned}$$

b) recibida:



$$\|\vec{e}_1\|^2 = (V-1)^2 + (V-0,9)^2$$

nos piden la MER óptima, es decir, $\|\vec{e}_1\|$ min.

$$\frac{d\|\vec{e}_1\|^2}{dV} = \frac{d}{dV} (2V^2 - 3,8V + 1,81) = 4V - 3,8 = 0 \Leftrightarrow V = 0,95$$

MER óptima si $V = 0,95$; $\|\vec{s}_k\|^2 = (0,95)^2 + (0,95)^2 =$

$$\text{MER} = 10 \cdot \log \left(\frac{(0,95)^2 + (0,95)^2}{(0,05)^2 + (0,05)^2} \right) = 25,57 \text{ dB}$$

3. Codificación de línea paso banda (modulaciones digitales)

* codificación binaria o multinivel

binaria \Rightarrow 1 forma de onda transmite 1 bit (sólo hay 2 formas de onda)

multinivel \Rightarrow varios bits por cada forma de onda ($M = 2^k$)

* existencia de portadora

\rightarrow No tiene información

\rightarrow se desperdicia potencia

\rightarrow tiene ventajas en la demodulación

* ancho de banda (eficiencia espectral)

El Bw debe estar limitado, por lo que debemos filtrar

Existirá un B_w^{\min} proporcional a la Velocidad de símbolo $= \frac{1}{T}$

$$\text{Efic. espectral} = \frac{V_T \text{ (bit/s)}}{B_w^{\min} \text{ (Hz)}}; V_T = k \cdot V_s; k = \log_2(M)$$

$M \uparrow \Rightarrow \text{Efic. esp} \uparrow$ (excepto en FSK)

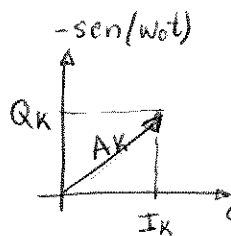
* facilidad en la recuperación de portadora
 dependiendo del código empleado variará la
 facilidad de la recuperación.
 sólo importa si hay demodulación coherente

* potencia media y robustez frente al ruido

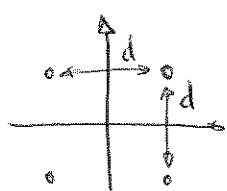
modulaciones lineales suelen usar como base: $B = \{\cos(\omega_0 t), -\sin(\omega_0 t)\}$
 B es ortogonal pero no ortonormal

$$P_k = \frac{A_k^2}{2} \Rightarrow P_m = \sum_{k=1}^M P_k \cdot p_{r_k} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k^2}{2} \cdot \frac{1}{M} = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M A_k^2$$

↑ probabilidad del símbolo k



$$P_m = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M A_k^2 = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (I_k^2 + Q_k^2)$$



↑↑ $d \Rightarrow \downarrow \downarrow$ BER ; BER = $f(d)$

↑↑ $P_m \Rightarrow \uparrow \uparrow d \Rightarrow \downarrow \downarrow$ BER

* detección de errores (o excepciones)

No se suelen usar técnicas de detección de errores

* codificación diferencial

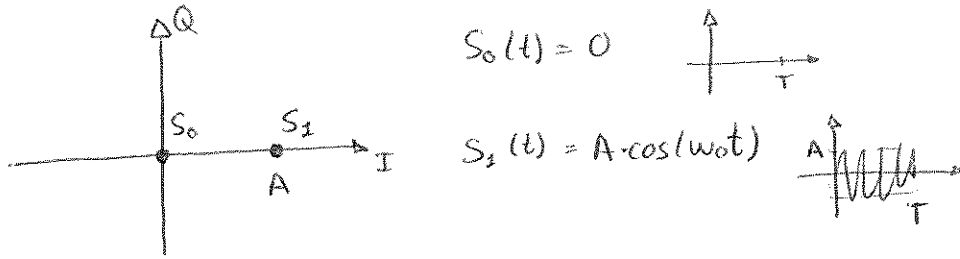
se aplica sobre la fase instantánea de la señal: DPSK

* envolvente constante

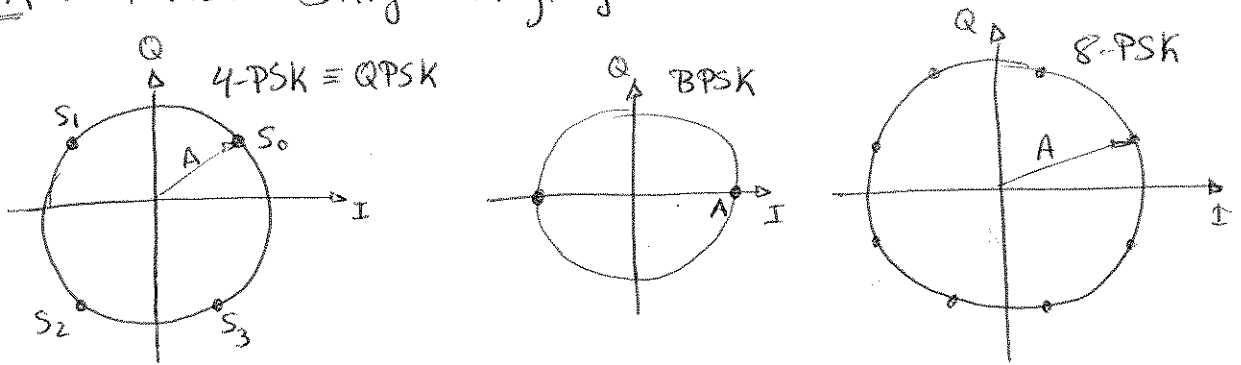
todas las señales tendrán la misma amplitud
 (la información va en la fase, ya que $f = f_0$)

Modulaciones:

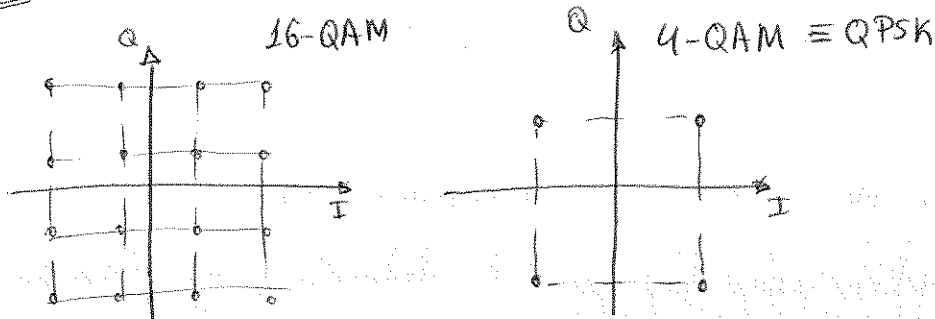
lineal ASK: Amplitude Shift Keying



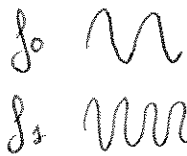
lineal PSK: Phase Shift Keying



lineal QAM: Quadrature Amplitude Modulation



No lineal FSK:

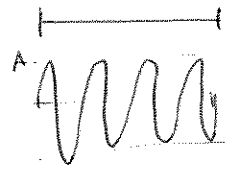


ASK :

$$S_i(t) = I_i \cos(2\pi f_0 t)$$

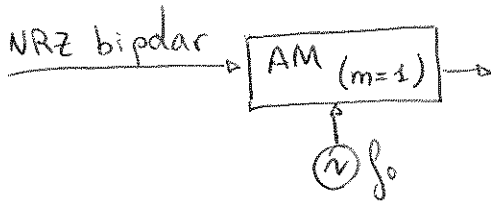
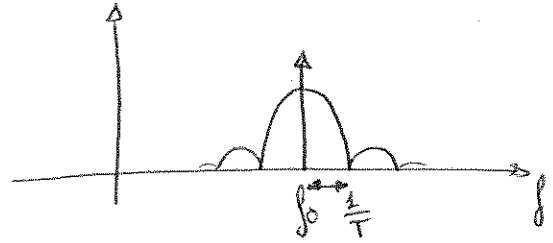
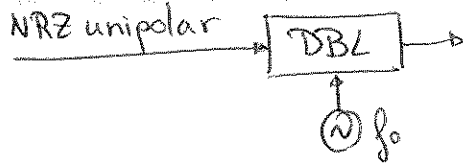
$$S_0(t) = 0$$

$$S_s(t) = A \cos(2\pi f_c t)$$



* se puede generar por:

↳ moduladores analógicos



↳ por conmutación:

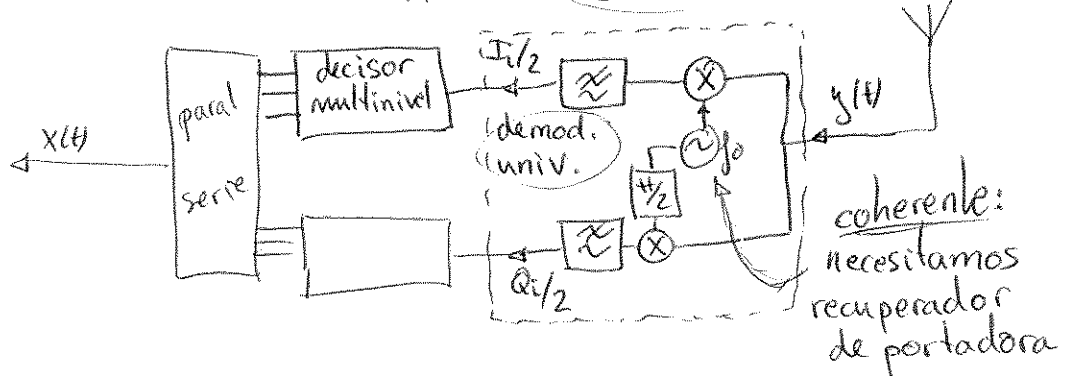
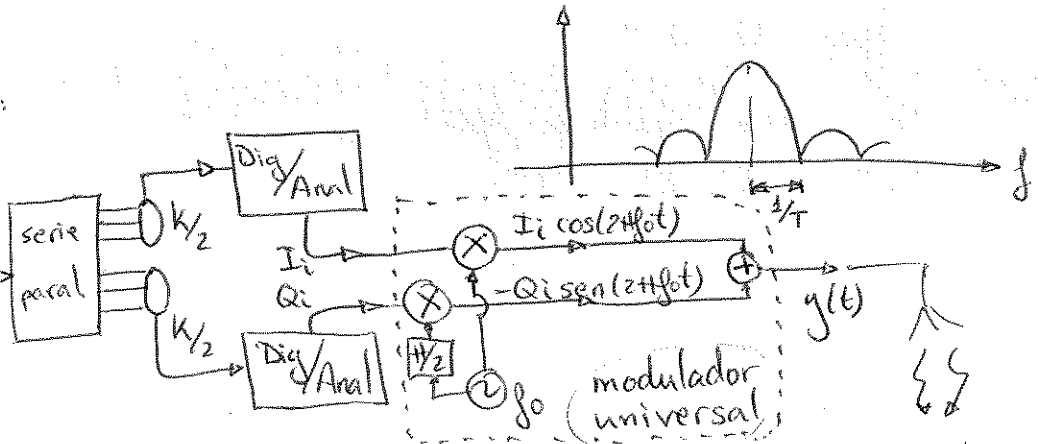


QAM:

$$S_i(t) = I_i \cos(2\pi f_0 t) - Q_i \sin(2\pi f_0 t)$$

* generación:

Ej: 64-QAM
 $k=6$
 100111010010
 $2^k = 64 = M$



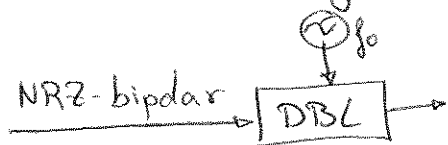
PSK:

si $M=2 \Rightarrow 2\text{-PSK} \equiv \text{BPSK}$

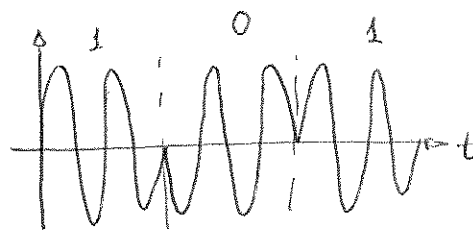
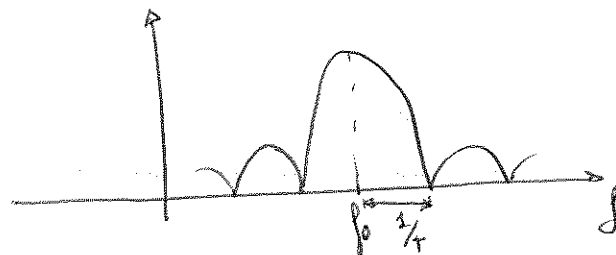
$$\begin{aligned} \rightarrow S_0(t) &= A \cos(2\pi f_0 t) \\ \rightarrow S_1(t) &= -A \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

* se puede generar por:

↳ moduladores analógicos.



↳ por conmutación:



la codificación diferencial permite demodulación NO coherente

D-PSK: PSK Diferencial

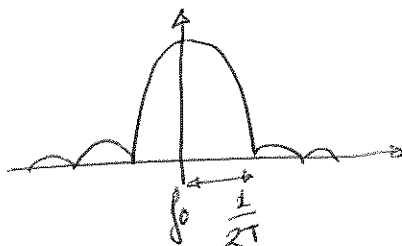
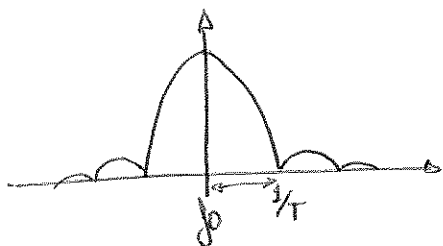
↳ admite demod. no coherente (la única PSK)

↳ No nos preocupa que el demodulador detecte fase 0 ó π

"0" \Rightarrow no cambia fase

"1" \Rightarrow cambia fase

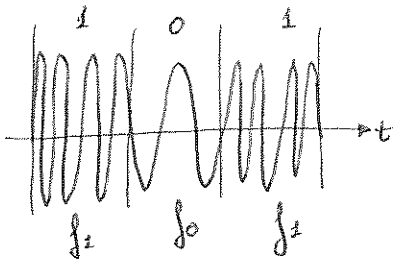
BPSK $\xleftrightarrow{\text{misma } V_T}$ QPSK



QPSK envía en el mismo Bw el doble de información
BPSK ocupa el doble de Bw que QPSK si tienen la misma V_T

FSK: una senoide de distinta frecuencia para cada simb.

2-FSK:



las señales de los M símbolos serán ortogonales si:

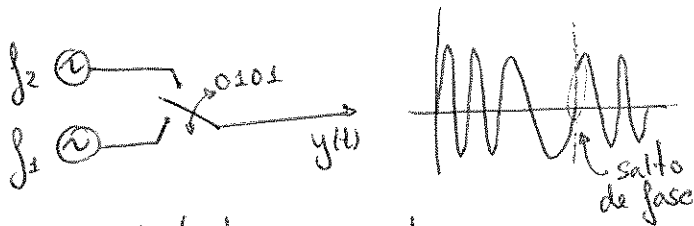
↳ \exists una separación mínima (Δf) entre las frecuencias

↳ $f_i = \frac{k}{2} v_s \Leftrightarrow \frac{1}{T_i} = \frac{k}{2} \frac{1}{T} \Leftrightarrow T_i = \frac{2T}{k}$

MSK: FSK con la mínima separación para que sus símbolos sean ortogonales (mínima probab. de error) $\Delta f \cdot T = \frac{1}{2}$

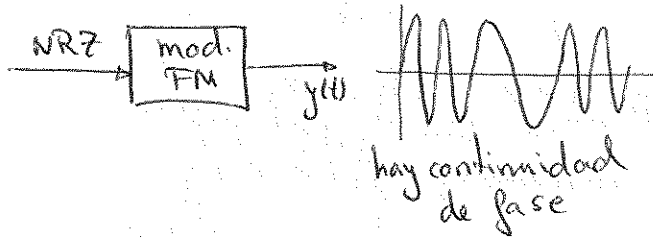
* se puede generar por:

↳ por conmutación:



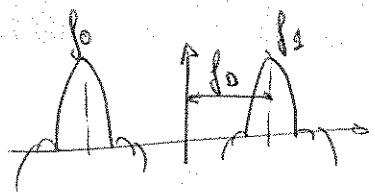
↳ moduladores analógicos:

CP-FSK: Continuous Phase -FSK

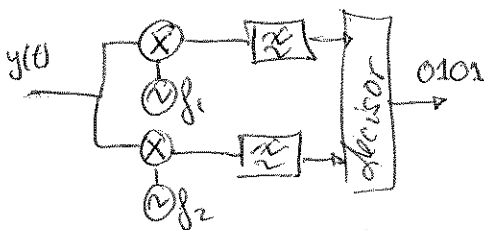


hay continuidad de fase

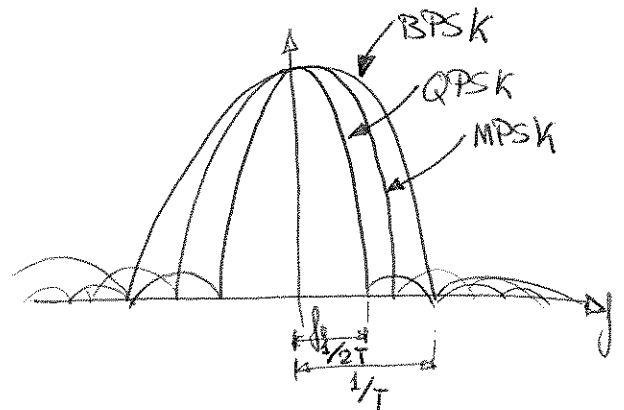
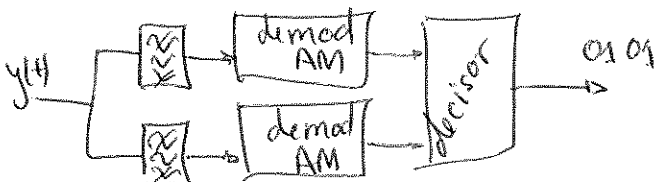
índice de modulación: $h = \Delta f \cdot T \geq \frac{1}{2}$



demod. coherente:

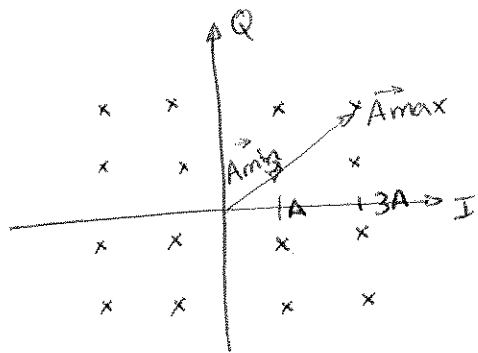


demod. No coherente:



P5: 16-QAM

a) relación entre A_{max} y A_{min}



$$|\vec{A}_{max}| = 3A\sqrt{2}$$

$$|\vec{A}_{min}| = A\sqrt{2}$$

$$rel = 20 \cdot \log\left(\frac{A_{max}}{A_{min}}\right) = 20 \log(3) = 9,54 \text{ dB}$$

b) A_{max} si su potencia es de 20 dBm ($R = 50 \Omega$)

$$P_m = 20 \text{ dBm} = 100 \text{ mW} = 0,1 \text{ W}$$

$$P_m = \frac{\sum P_i}{M} = \left\{ \text{1er cuadrante} \right\} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4}$$

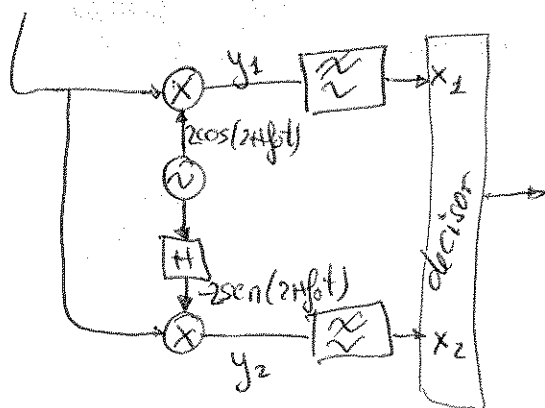
$$P_i = \frac{I_i^2 + Q_i^2}{2 \cdot R}$$

$$P_m = \frac{2A^2 + 10A^2 + 10A^2 + 18A^2}{4 \cdot 2 \cdot R} = 0,1 \cdot A^2 = P_m = 0,1 \text{ W} \Leftrightarrow \underline{A = 1 \text{ V}}$$

$$V_{max} = 3A\sqrt{2} = 4,24 \text{ V}$$

P6: dibuje en FO la señal recibida en mod. QPSK
reaperación de portadora en recep. \Rightarrow error $\varphi(t)$ aleatorio

$$S_i(t) = I_i \cos(2\pi f_0 t) - Q_i \sin(2\pi f_0 t)$$



$$y_i(t) = s_i(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t) = 2I_i \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) - 2Q_i \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

$$= \frac{1 + \cos(2\pi(2f_0)t)}{2} \cdot 2I_i \cos(\varphi(t)) - \frac{\sin(2\pi(2f_0)t)}{2} \cdot 2Q_i \sin(\varphi(t))$$

$$x_1 = \text{LPF} \{ y_1 \} = I_i$$

$$x_2 = \text{LPF} \{ y_2 \} = Q_i$$

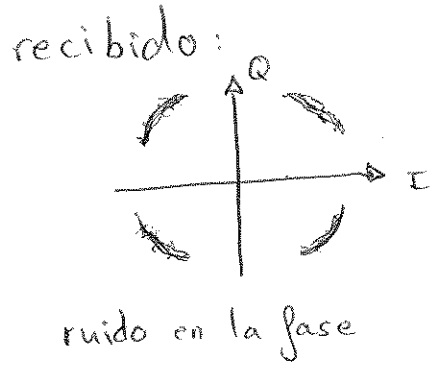
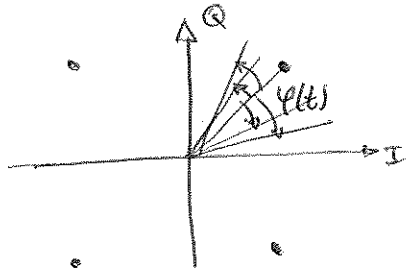
$$\text{si } \exists \varphi(t) \Rightarrow y_i(t) = 2I_i \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) - 2Q_i \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

$$= I_i [\cos(2\pi(2f_0)t + \varphi(t)) \cos(\varphi(t))] - Q_i [\sin(2\pi(2f_0)t + \varphi(t)) \sin(\varphi(t))]$$

$$\begin{cases} x_1 = \text{LPF} \{ y_1 \} = I_i \cos(\varphi(t)) + Q_i \sin(\varphi(t)) \\ x_2 = \text{LPF} \{ y_2 \} = -I_i \sin(\varphi(t)) + Q_i \cos(\varphi(t)) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{se mezclan} \\ \text{componentes} \end{array} \right. \Rightarrow$$

sea $x_1 = I_i R_x$ y $x_2 = Q_i R_x$

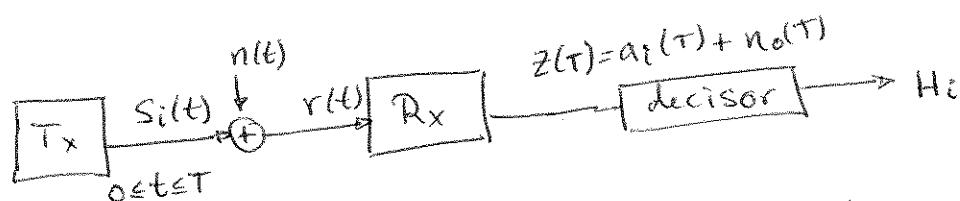
$$\begin{pmatrix} I_{Rx} \\ Q_{Rx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i \\ Q_i \end{pmatrix}$$



Tema 6: Detección de Señales Digitales

Ante la toma de una decisión:

- * hipótesis: definición del conjunto de estados posibles
- * test: observable
- * decisión (con un criterio)



hipótesis: $S_i(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_k(t)\}$; $M = 2^k$

a) criterios:

$$\text{Error-bit} = \frac{\text{Nº bits erróneos}}{\text{Nº bits totales}}$$

$D = \text{decisión}$
 $H = \text{hipótesis}$

→ MAP: Máximo a Posteriori

Elección de un símbolo D suponiendo cierto H :

$$D_j = H_j \text{ es verdadero} = \max \{P(s_i/z)\}; i, j \in (1, \dots, M)$$

$P(z/s_i)$ = Probab. de observar z habiéndose transmitido s_i

con $M=2$:

$$P(s_2/z) > P(s_1/z) \Rightarrow D_2 = H_2$$

$$P(s_2/z) < P(s_1/z) \Rightarrow D_2 = H_1$$

$$\text{Bayes: } P(s_i/z) = P(z/s_i) \cdot P(s_i)$$

discr.

$$\frac{P(z/s_2)}{P(z/s_1)} \stackrel{D_2}{>} \stackrel{D_1}{<} \frac{P(s_1)}{P(s_2)}$$

cont.

$$\frac{\int p(z/s_2)}{\int p(z/s_1)} \stackrel{D_2}{>} \stackrel{D_1}{<} \frac{P(s_1)}{P(s_2)}$$

supondremos siempre que los simb. se envían de forma equiprob.

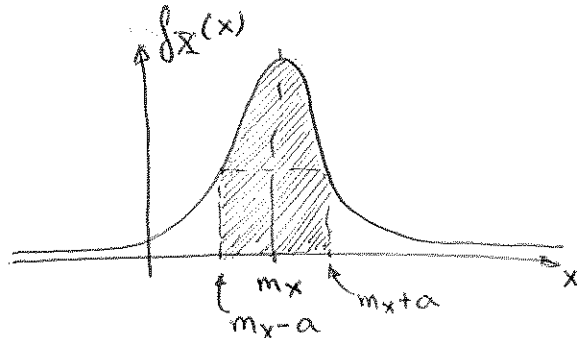
→ ML: máxima verosimilitud

↳ si no conocemos las probabilidades a priori $P(s_i)$ supondremos que son iguales

b) función erf:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$$



$$P[m_x - a \leq X \leq m_x + a] = \text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P[|X - m_x| \geq a] = \text{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 1 - \text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

función Q: $Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

2. Señales binarias en BB

$$\begin{aligned} s_1(t) &\Rightarrow P(s_1) = P_1 \\ s_2(t) &\Rightarrow P(s_2) = P_2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\text{error}} = P_{\text{error de bit}} = \text{BER} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} P_{e/H_1} &= P(H_2/H_1) = P(D_2/H_1) \\ P_{e/H_2} &= P(H_1/H_2) = P(D_1/H_2) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_e = P_{e/H_1} \cdot P_1 + P_{e/H_2} \cdot P_2 \\ \text{habitualmente } P_1 = P_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

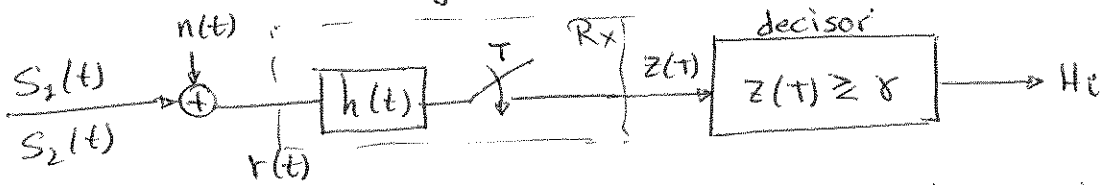
siendo:

P_{e/H_1} = Probabilidad de error al transmitir H_1

$P(H_2/H_1)$ = Probabilidad de recibir H_2 cuando se transmitió H_1

$P(D_2/H_1)$ = Probabilidad de decidirse por D_2 cuando se transmitió H_1

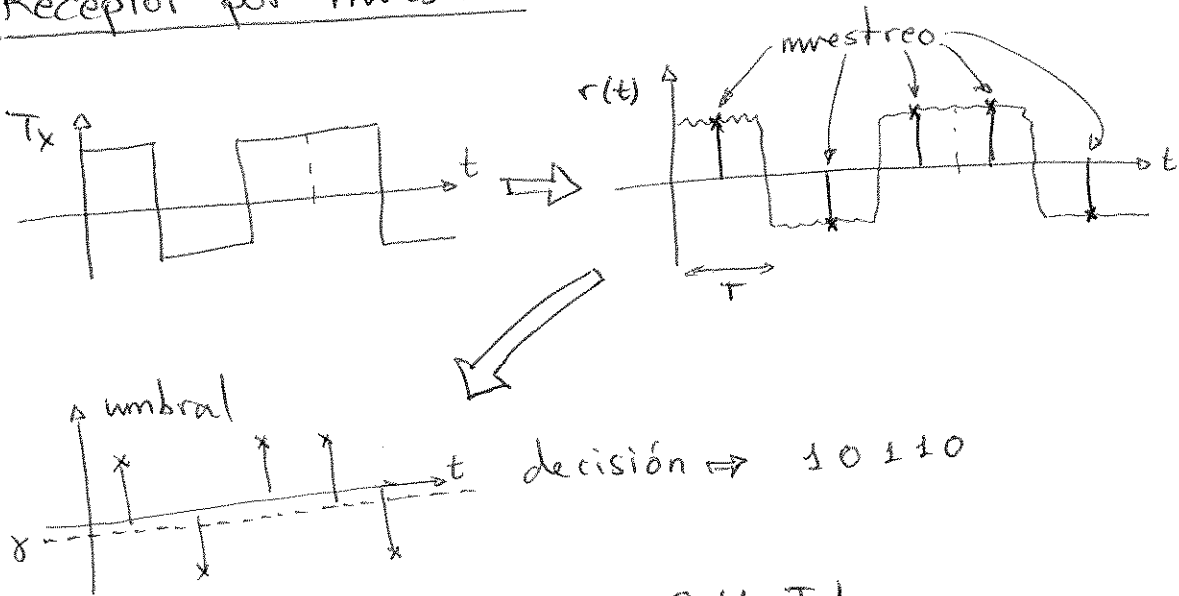
Receptor para códigos binarios en banda base:



$$r(t) = S_i(t) + n(t)$$

$\delta = \text{umbral} = Th = \text{tresshold}$

→ Receptor por muestreo:



$$a_1 = S_1(t = T_s)$$

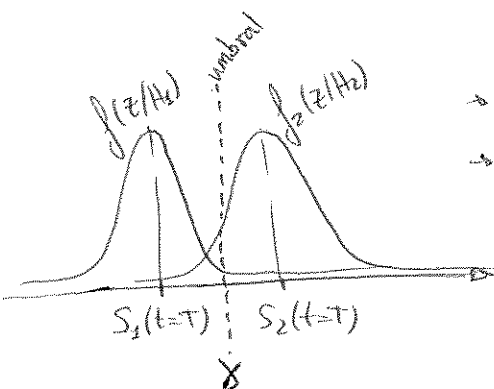
$$a_2 = S_2(t = T_s)$$

$$z(t) = a_i + n(t_s)$$

$n(t) = \text{ruido gaussiano}$ } media = 0
 desviación = σ ; var = σ^2

$z(t) = \text{V.A.} + \text{ruido} =$ } media = a_i
 desv = σ ; var = σ^2

$h(t)$ no distorsiona la salida, sólo limita la potencia de ruido a la salida.



MAP:

$$\rightarrow f(z/S_1(t)) = f(z/H_1)$$

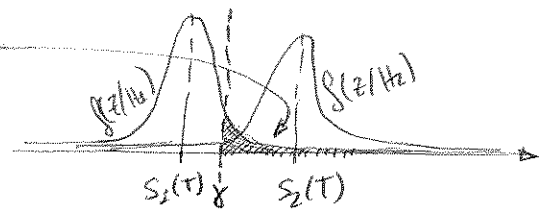
$$\rightarrow f(z/S_2(t)) = f(z/H_2)$$

Podemos cometer dos tipos de errores:

Error 1:

$$P_e/H_1 = \mathbb{P}(D_2/H_1) = \mathbb{P}(z > \gamma/H_1) \\ = \int_{\gamma}^{\infty} f(z/H_1) dz$$

$$z(t=T) \stackrel{D_2}{\geq} \gamma$$



Recordemos que:

$$\mathbb{P}[|m_x - x| > a] = \text{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$\text{luego: } P_e/H_1 = \int_{\gamma}^{\infty} f(z/H_1) dz = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\gamma - S_1(t=T)}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P_e/H_2 = \mathbb{P}(D_1/H_2) = \mathbb{P}(z < \gamma/H_2) = \int_{-\infty}^{\gamma} f(z/H_2) dz \\ = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{S_2(t=T) - \gamma}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P_e = P_{H_1} \cdot P_e/H_1 + P_{H_2} \cdot P_e/H_2 \quad \text{normalmente: } P_{H_1} = P_{H_2} = \frac{1}{2}$$

$$= P_{H_1} \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\gamma - S_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + P_{H_2} \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{S_2 - \gamma}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

↳ P_{H_1} y P_{H_2} están definidas por el transmisor

↳ σ no está en nuestras manos


↳ La única forma de reducir el ruido (minimizarlo) es escogiendo de forma óptima el umbral

$$\gamma_{\text{óptimo}} \Leftrightarrow P(H_1) \cdot f(z/H_1) = P(H_2) \cdot f(z/H_2)$$

$$P_e \Big|_{\substack{P_{H_1} = P_{H_2} = \frac{1}{2} \\ \gamma = \gamma_{\text{ópt}}}} = \frac{P_e/H_1 + P_e/H_2}{2} = P_e/H_1 = P_e/H_2 = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{S_1 + S_2 - S_1}{2\sqrt{2}\sigma}\right) = \\ = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{S_2 - S_1}{2\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

es decir: la probabilidad de error depende de la diferencia entre las señales!

(siempre y cuando el ruido sea gaussiano, $\gamma = \gamma_{\text{óptimo}}$ y las señales sean equiprobables.)

Sea un NRZ  :

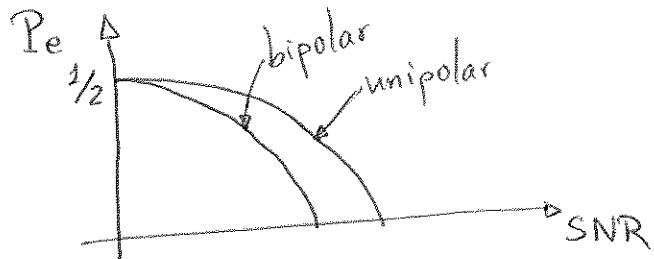
$$P_e = f(SNR) \left| \begin{array}{l} P_{H1} = P_{H2} = 1/2 \\ \delta_{opt} \\ \text{ruido gauss} \end{array} \right. ?$$

$$S = P_{H1} S_1 + P_{H2} S_2 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{A^2}{2} = \frac{\Delta^2}{2}$$

$$N = \sigma^2$$

$$\frac{S}{N} = \frac{A^2/2}{\sigma^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\sigma} \right)^2$$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{2 \operatorname{SNR}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{SNR}} \right)$$

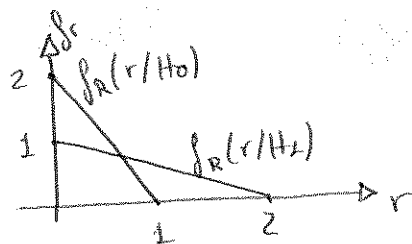


P1: se transmiten "0" y "1" con ruido, distorsión...
 r es V.A. con f_r :

$$f_r(r/H_0) = \begin{cases} 2(1-r) & ; 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases}$$

$$f_r(r/H_1) = \begin{cases} 1-r/2 & ; 0 \leq r < 2 \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases}$$

decisor: $r \begin{matrix} > D_1 \\ < D_0 \end{matrix}$



a) $P_{\text{falsa alarma}}??$ $P_{\text{pérdidas}}??$

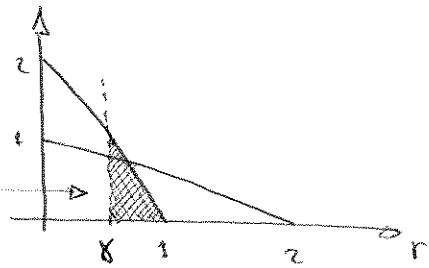
$$P_{\text{FA}} = P(\text{detecta un blanco} / \text{habiendo ruido}) = P(D_1/H_0)$$

$$P_{\text{pér}} = P(\text{detecta ruido} / \text{habiendo blanco}) = P(D_0/H_1)$$

blanco = objetivo (ejercicio pensado en radar)

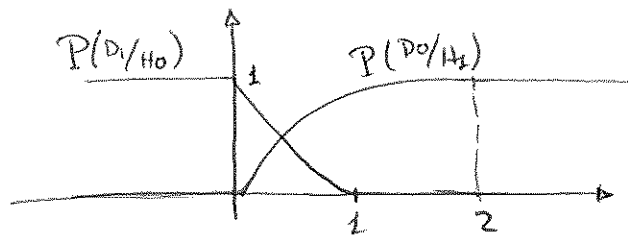
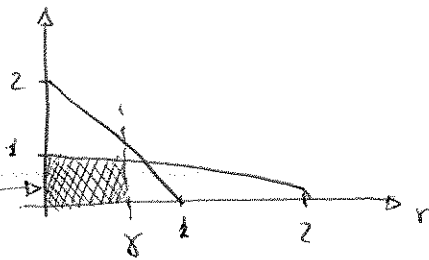
$$P_{FA} = P(D_1/H_0) = P(r > \delta/H_0)$$

$$= \begin{cases} 1 & \delta < 0 \\ \int_{\delta}^1 2(1-r) dr = (1-\delta)^2 & 0 \leq \delta \leq 1 \\ 0 & \delta \geq 1 \end{cases}$$



$$P_{pérd} = P(D_0/H_1) = P(r < \delta/H_1)$$

$$= \begin{cases} 0 & \delta < 0 \\ \int_0^{\delta} (1-r/2) dr = \delta - \delta^2/4 & 0 \leq \delta \leq 2 \\ 1 & \delta \geq 2 \end{cases}$$



b) suponiendo que $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$; P_e ?? δ_{opt} ??

$$P_e = P_{H_0} P_{e/H_0} + P_{H_1} P_{e/H_1}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 & ; \delta \leq 0 \\ \frac{1}{2} (1-\delta)^2 + \frac{1}{2} (\delta - \delta^2/4) & ; 0 \leq \delta \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} (\delta - \delta^2/4) & ; 1 \leq \delta \leq 2 \\ \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 & ; \delta \geq 2 \end{cases}$$

δ_{optimo} (siendo los símbolos equiprobables):

$$(1-\delta)^2 = (\delta - \frac{\delta^2}{4}) \Rightarrow \delta = \delta_{opt} = 0.666$$

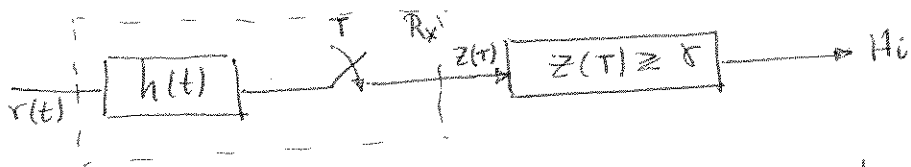
c) idem con $P(H_0) = 2/3$, $P(H_1) = 1/3$

$$P_e = P_{H_0} P_{e/H_0} + P_{H_1} P_{e/H_1} = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

δ_{optimo} :

$$P(H_0)(1-\delta)^2 = P(H_1)(\delta - \frac{\delta^2}{4})$$

→ Receptor basado en filtro adaptado

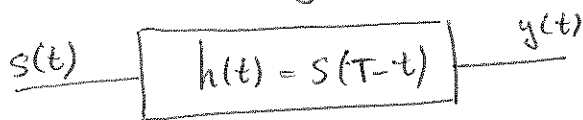


En este tipo de receptor, $h(t)$ maximiza la SNR en el momento de muestreo ($t=T$), es decir, minimiza P_e

$$\text{siendo } s(t) \Rightarrow h(t)_{\text{Filtro Adaptado}} = s(T-t) \Rightarrow \left. \frac{S}{N} \right|_{t=T} = \text{m\u00e1ximo}$$

$$S(f) \Rightarrow H(f)_{FA} = S^*(f) e^{-j2\pi f T}$$

$h(t)$ ser\u00e1 filtro adaptado a todas las se\u00f1ales proporcionales a $s(t)$, no a ninguna otra.



$$y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) s(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s(T-\tau) s(t-\tau) d\tau$$

$$y(t=T) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(T-\tau) d\tau = E \Rightarrow \left. \frac{S}{N} \right|_{t=T} = E^2$$

$$\left. \frac{N}{N} \right|_{t=T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} |H(f)|^2 df = \left\{ |H(f)|^2 = |S(f)|^2 \right\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df = \text{Parseval}$$

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{t=T} = \frac{E^2}{\frac{1}{2} E} = \frac{2E}{1} \quad (\text{m\u00e1x}) = \frac{1}{2} E$$

Sea un sistema con $M=2: \{s_1(t), s_2(t)\}$

si $s_1(t) = k s_2(t) \Rightarrow h(t)_{FA}$ es \u00fanico

en caso contrario ($s_1(t) \neq k \cdot s_2(t)$, no proporcionales) No existe un filtro adaptado \u00fanico, ya que podremos adaptarlo a $s_1(t)$ o $s_2(t)$ pero no a ambos. Entonces...



Buscaremos:

Fórmula válida si:
 ↳ ruido gaussiano
 ↳ señales equiprobables
 ↳ óptimo

$$P_e^{\min} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Delta}{\sigma} \right)_{\min} \Leftrightarrow \frac{\Delta}{\sigma} = \max$$

$$\frac{\Delta}{\sigma} = \frac{y_2 - y_1}{\sigma} \Big|_{t=T} \quad \begin{array}{c} S_2 - S_1 \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y_2 - y_1 \end{array}$$

$$\frac{S}{N} \Big|_{t=T} = \frac{(y_2 - y_1)^2}{\sigma^2} = \frac{\Delta^2}{\sigma^2} = \frac{2E_d}{\eta}; \quad E_d = \text{Energía de la señal diferencia}$$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Delta}{\sigma} \right) \Big|_{\frac{\Delta}{\sigma} = \sqrt{\frac{2E_d}{\eta}}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{E_d}}{\sqrt{\eta}} \right)$$

Entonces:

↳ si $\{S_1(t), S_2(t)\}$ proporcionales $\Rightarrow h(t)_{FA} = S_2(T-t)$

si $\{S_1(t), S_2(t)\}$ NO proporcionales $\Rightarrow h(t)_{FA} = S_2(T-t) - S_1(T-t)$

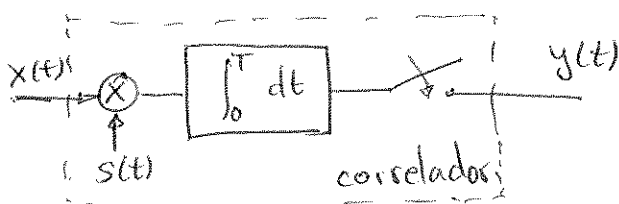
Correlador:

dispositivo que simula mi filtro adaptado $h(t)_{FA}$ sin necesidad de sintetizar el filtro. Es decir, nos "inventamos" un sistema que coincide con $h(t)_{FA}$ en los instantes $t=T$, que son los únicos que nos interesan.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) s(T-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^T x(t-\tau) s(T-\tau) d\tau \quad (s(t) \Leftrightarrow 0 \leq t \leq T)$$

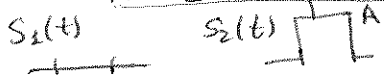
$$y(t=T) = \int_0^T x(T-\tau) s(T-\tau) d\tau = \left\{ T-\tau = \tau' \right\} = \int_0^T x(\tau') s(\tau') d\tau'$$



El correlador y el filtro adaptado No obtienen la misma $y(t)$, pero sí la misma $y(t=T)$, lo que es suficiente para nosotros.

P_e para los códigos:

• NRZ unipolar:



Para usar la fórmula necesitamos:

- ↳ γ_{opt}
- ↳ ruido gaussiano
- ↳ $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$

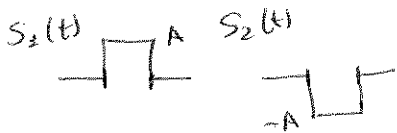
$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$$

$$s_d(t) = s_2(t) - s_1(t) = A \quad 0 < t < T$$

$$E_d = A^2 T$$

$$E_{bit} = P_1 \cdot E_1 + P_2 \cdot E_2 \Rightarrow \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{0 + A^2 T}{2} = \frac{E_d}{2}$$

• NRZ bipolar:



$$E_d = 4A^2 T$$

$$E_{bit} = \frac{A^2 T + A^2 T}{2} = \frac{E_d}{4}$$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4E_b}{\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{E_b}}{\eta}\right)$$

[NRZ unipolar tiene un coeficiente de correlación $\rho = 0$
 NRZ bipolar tiene $\rho = -1$ (antipodales)

$$E_d = E[s_2 - s_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} (s_2 - s_1)^2 dt = E_2 + E_1 - 2\rho \sqrt{E_2 E_1}$$

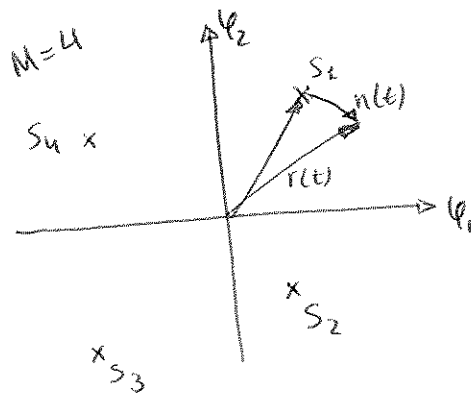
si $\rho = 0$ (unipolar) $\Rightarrow E_d = E_2 + E_1 = 2 E_{bit}$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2\eta}}\right)$$

si $\rho = -1$ (bipolar) $\Rightarrow E_d = 4 E_b$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

3. Detección de M-señales



recibo $r(t)$ y tendré que decidir qué símbolo se ha transmitido

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

MAP: $D_i = \max \{ P(s_i / r(t)) \}$

si $P_i = \frac{1}{M}$ (equiprobables) entonces:

MAP = ML:

$$D_i = \max \{ P(r(t) / s_i) \}$$

↕
minimizar la distancia entre $r(t)$ y s_i

Maximizar la probabilidad de que la señal recibida ($r(t)$) provenga de la señal transmitida s_i , es equivalente a minimizar la distancia entre $r(t)$ y $s_i(t)$, es decir, minimizar $n(t)$.

Así mismo, maximizar la probabilidad de escoger el símbolo s_i habiendo recibido $r(t)$ se basará también en minimizar el ruido ($n(t)$).

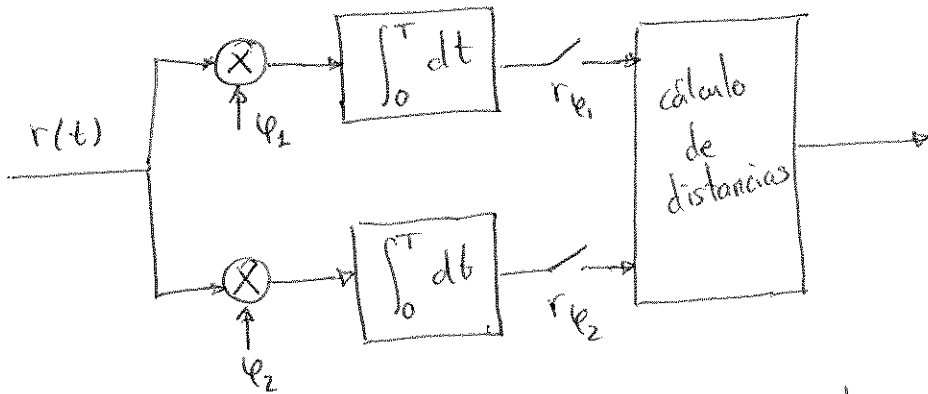
Si $P_i = \frac{1}{M}$ (símbolos equiprobables), los criterios MAP y ML coinciden y se basan en lo mismo: minimizar $\left. \begin{array}{l} \text{ruido } (n(t)) \\ \text{distancia} \end{array} \right\}$

tenemos: $r(t) = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$

$$s_i(t) = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$$

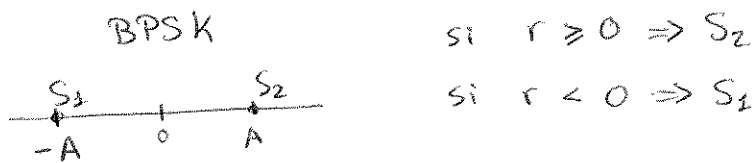
$$d^2(r, s_i) = (r_x - s_x)^2 + (r_y - s_y)^2 + (r_z - s_z)^2$$

para minimizar d necesitamos hallar las coordenadas:



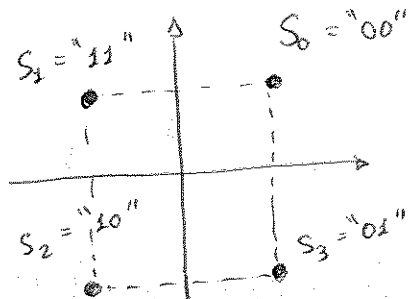
Las distancias son calculadas de antemano en el diseño del sistema, creándose así las regiones de decisión

Ej:



Probabilidad de error de símbolo y de bit

Sea:



Si al transmitir S_1 recibo S_0 (o decido tomar S_0), habré tenido 1 símbolo erróneo, pero 2 bits erróneos

$$\begin{cases} P_e^{\text{simb}} \\ P_e^{\text{bit}} = \text{BER} \end{cases}$$

$$\frac{P_e^{\text{simb}}}{k} \leq P_e^{\text{bit}} \leq P_e^{\text{simb}}$$

La codificación Gray asocia los bits a los símbolos de modo que las variaciones entre símbolos cercanos sean lo menor posible. Así, un error de un símbolo, minimizará el error de bit.

4. Detección de Modulaciones Digitales

Tenemos una PAM:

$$S_i(t) = I_i \cos(2\pi f_0 t) - Q_i \sin(2\pi f_0 t) \quad 0 \leq t \leq T$$

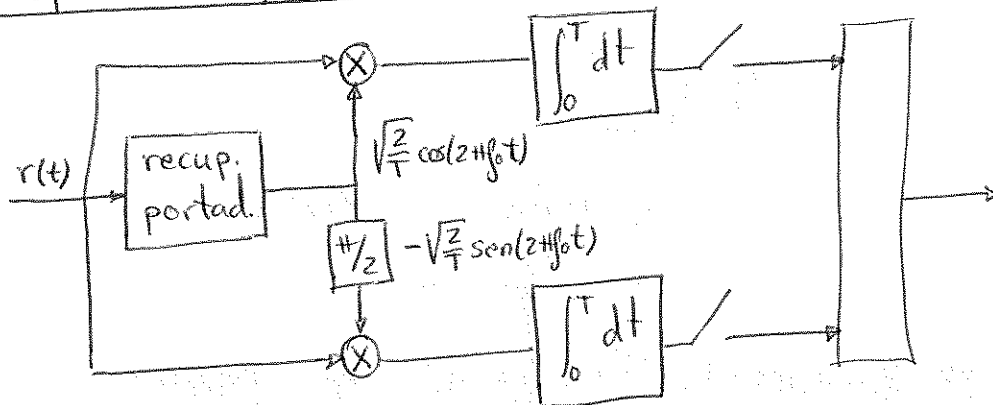
$$\cos(2\pi f_0 t) \rightarrow P_{ot} = \frac{1}{2}$$

si queremos una base ortonormal tendremos que normalizar:

$$\text{En } 0 \leq t \leq T : E(\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{2} T$$

$$B = \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t), -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t) \right\} \text{ base ortonormal}$$

a) Receptores óptimos (coherentes):



con $M=2$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ASK} \rightarrow \rho = 0 \\ \text{BPSK} \rightarrow \rho = -1 \\ \text{FSK} \rightarrow \rho = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{BER}|_{\text{ASK}} = \text{BER}|_{\text{FSK}} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2\eta}}\right) \\ \text{BER}|_{\text{BPSK}} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \end{array}$$

$$\text{BER}|_{\text{QPSK}} = \text{BER}|_{\text{BPSK}}$$

b) Receptores NO coherentes:

En el mundo analógico:

- * AM admite dem. coherente y No coherente
- * DBL admite dem. coherente
- * FM admite dem. coherente y No coherente

En el mundo digital:

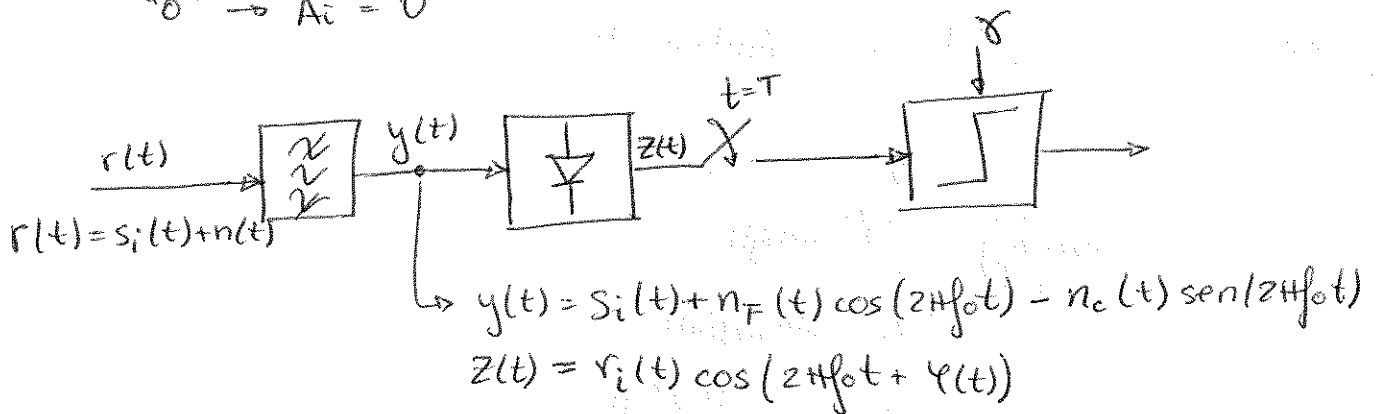
- * ASK ídem AM
- * BPSK ídem DBL
- * FSK ídem FM

Sea (en ASK):

$$s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_0 t)$$

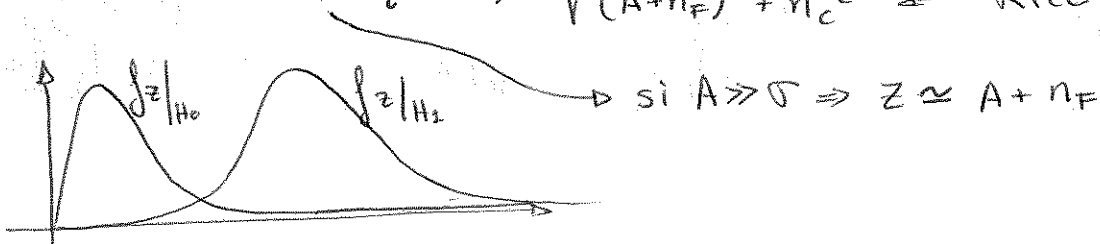
$$\text{"1"} \rightarrow A_i = A$$

$$\text{"0"} \rightarrow A_i = 0$$



$$\text{"0"} \Rightarrow z = r_i(t=T) = \sqrt{n_F^2 + n_c^2} \leftarrow \text{Rayleigh}$$

$$\text{"1"} \Rightarrow z = r_i(t=T) = \sqrt{(A+n_F)^2 + n_c^2} \leftarrow \text{Rice}$$



$$\text{BER} = P_{H_0} \cdot P_{e/H_0} + P_{H_1} \cdot P_{e/H_1}$$

$$\int z|_{H_0} = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{(z-0)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mu(z)$$

$$\int z|_{H_1} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-A)^2}{2\sigma^2}} ; A \gg \sigma \Rightarrow \frac{S}{N} \uparrow \uparrow ; \sigma_{\text{opt}} = \frac{A}{2}$$

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{A^2}{8\sigma^2}} \Leftrightarrow A \gg \sigma$$



$$E_{bit} = P_{H_1} \cdot E_{H_1} + P_{H_2} \cdot E_{H_2} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2 T}{2} = \frac{A^2 T}{4}$$

(ASK; "0" \Rightarrow 0, "1" \Rightarrow A)

$$N = \sigma^2 = \eta B_w ; B_w^{\min} \text{ sin interferencia entre símbolos} = \frac{1}{T}$$

luego: $E_{bit} = \frac{A^2 T}{4} \Rightarrow A^2 = \frac{4 E_{bit}}{T}$
 $N = \eta/T = \sigma^2$

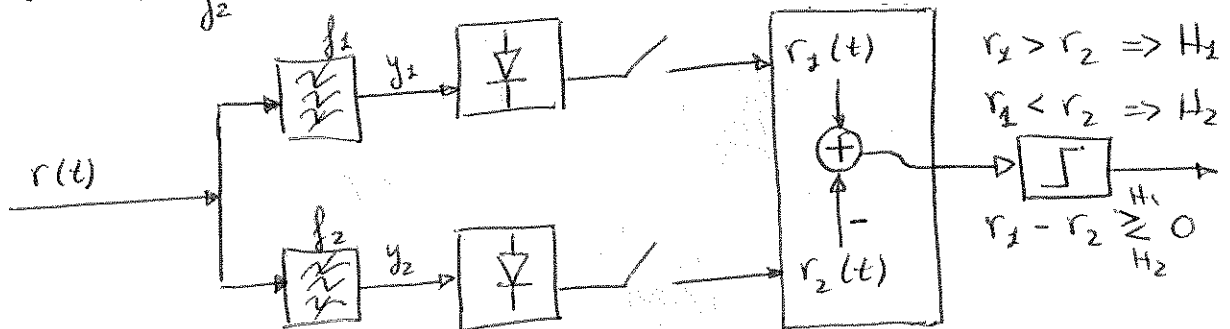
$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_{bit}}{2\eta}} \quad (\text{ASK})$$

- $\hookrightarrow \delta_{opt}$
- \hookrightarrow ruido gaussiano
- $\hookrightarrow P_1 = P_2$
- \hookrightarrow SNR $\uparrow\uparrow$

Sea (en FSK):

$$S_i(t) = A \cos(2\pi f_i t) ; 0 \leq t \leq T$$

"1" $\rightarrow f_1$
 "0" $\rightarrow f_2$



$$P_e = P_{H_1} \cdot P_{e/H_1} + P_{H_2} \cdot P_{e/H_2} = \frac{1}{2} e^{-\frac{A^2}{4\sigma^2}}$$

$$E_b = \frac{E_1 + E_2}{2} = \left\{ E_1 = E_2 \right\} = \frac{A^2 T}{2}$$

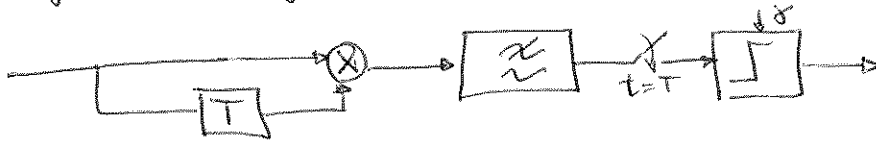
$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_{bit}}{2\eta}} \quad (\text{FSK})$$

$$N = \sigma^2 = \eta B_w ; B_w^{\min} = \frac{1}{T}$$

- $\hookrightarrow \delta_{opt}$
- \hookrightarrow ruido gaussiano
- $\hookrightarrow P_1 = P_2$
- $\hookrightarrow \sqrt{\text{SNR}}$

BPSK No permite demodulación NO coherente

↳ codificación diferencial: DPSK sí permite NO coherente



$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{\eta}}$$

Demod. coherente:

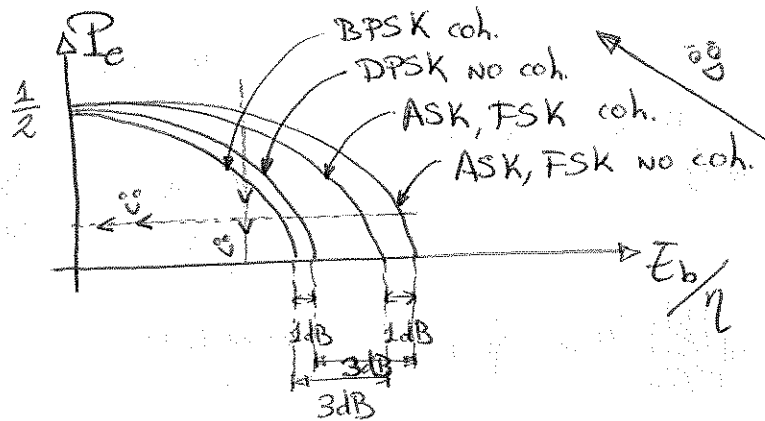
$$P_e|_{\text{ASK/FSK}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2\eta}}\right)$$

$$P_e|_{\text{BPSK}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

Demod. NO coherente:

$$P_e|_{\text{ASK/FSK}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2\eta}}$$

$$P_e|_{\text{DPSK}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{\eta}}$$



P4:

FSK coh. $\frac{E_b}{\eta} = 12 \text{ dB}$

FSK no coh $\frac{E_b}{\eta} = 13 \text{ dB}$

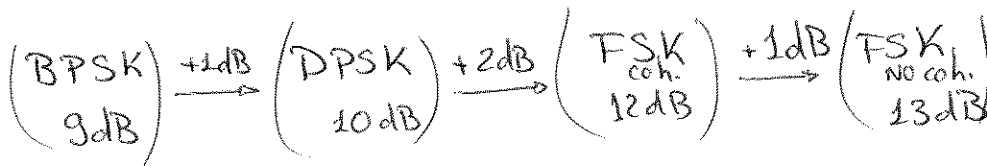
BPSK $\frac{E_b}{\eta} = 9 \text{ dB}$

DPSK no coh $\frac{E_b}{\eta} = 10 \text{ dB}$

cuál mínima

P_e ??

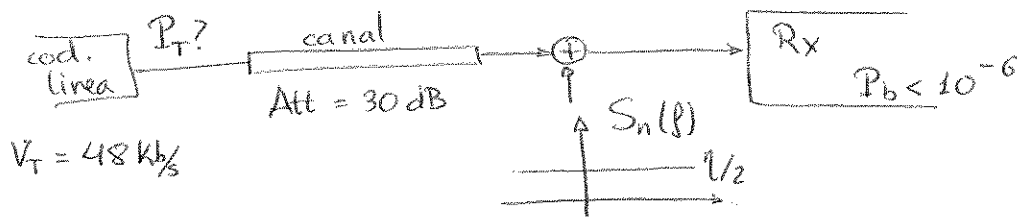
Ninguna!
son todas iguales!!



P_e constante!

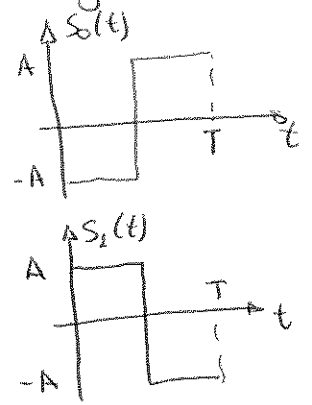
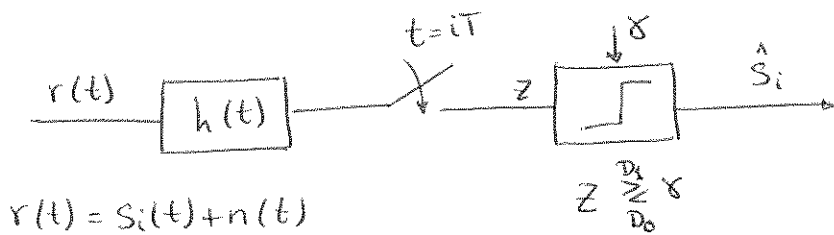
P2: Banda Base, Manchester

El canal añade AWGN $\eta = 10^{-8}$ W/Hz



a) Receptor óptimo?

Código Manchester:

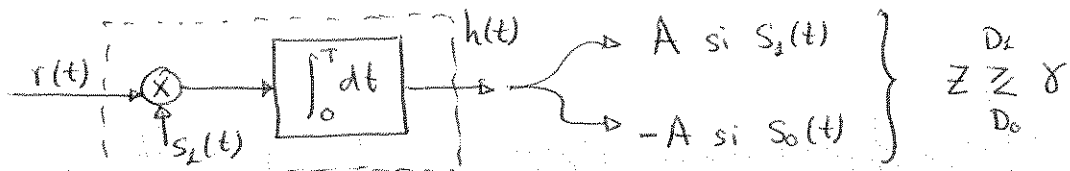


En Manchester: $S_1(t) = -S_0(t)$

Wego, como son proporcionales, $h(t)$ será $h_{FA}(t)$

haremos el filtro adaptado a $s_1(t)$

Podemos verlo como un correlador:



$$Z(t=T) = \int_0^T r(t) \cdot s_1(t) dt ; r(t) = s_i(t) + n(t)$$

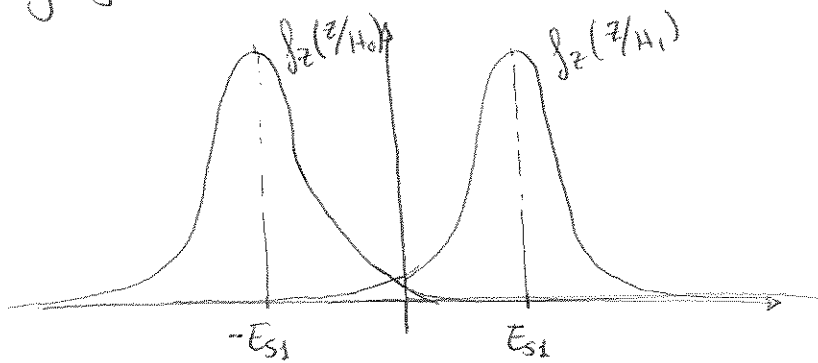
$$Z(t=T) \Big|_{H_1} = \int_0^T (s_1(t) + n(t)) s_1(t) dt = \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T s_1(t) \cdot n(t) dt$$

$$Z(t=T) \Big|_{H_0} = \int_0^T (s_0(t) + n(t)) s_1(t) dt = - \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T s_1(t) n(t) dt$$

$$Z(t=T) = \begin{cases} E_{S_1} + VA_{\text{gauss}} \Big|_{\text{media}=0} & \text{si } H_1 \\ -E_{S_1} + VA_{\text{gauss}} \Big|_{\text{media}=0} & \text{si } H_0 \end{cases}$$



gráficamente tenemos:



si los símbolos son equiprobables, el umbral óptimo será $\gamma_{opt} = 0$

b) P_T ? para recibir una $P_b \leq 10^{-6}$

$$E_d = E[s_2(t) - s_0(t)] = \{s_2(t) = -s_0(t)\} = E[2s_2(t)] = 4A_{RX}^2 T$$

$$P_b \Big|_{\substack{R_x \text{ ópt} \\ \text{F.A.}}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A_{RX}^2 T}{\eta}} \right) \leq 10^{-6}$$

sea: $x = A_{RX} \sqrt{\frac{T}{\eta}}$

mirando la gráfica: $\operatorname{erfc}(x) \leq 2 \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow x = A_{RX} \sqrt{\frac{T}{\eta}} = 3'361$

si $T = \frac{1}{k_T}$
 $\eta = 10^{-8}$ $\left\{ \begin{array}{l} A_{RX} \geq 0'073 \text{ (V)} \end{array} \right.$

$$A_{TT} = 30 \text{ dB} = 20 \log \left(\frac{A_{TX}}{A_{RX}} \right) \Rightarrow A_{TX} = 10^{\frac{A_{TT}}{20}} \cdot A_{RX} = \sqrt{1000} \cdot A_{RX} = 2'33 \text{ (V)}$$

así pues:

$$P_T = P_1 \cdot P_{H_1} + P_0 \cdot P_{H_0} = \left\{ \begin{array}{l} P_{H_1} = P_{H_0} = \frac{1}{2} \\ \text{equiprobables} \end{array} \right\} = \frac{P_1 + P_0}{2} =$$

$$= \left\{ P_1 = P_0 \right\} = P_1 = P_0 = A_{TX}^2 = 5,42 \text{ (W)}$$

P3:

$$M=2$$

$$V_T = 4 \text{ kbps}$$

$$\rightarrow \text{canal} \begin{cases} B_w = \infty \\ A_{tt} = 30 \text{ dB} \end{cases} \rightarrow R_x: \eta = -68 \text{ dBm/Hz}$$

a) BER para NRZ unipolar o bipolar con $A = 70 \text{ mV}$ R_x óptimo

$$\rightarrow \text{NRZ} \begin{cases} \text{bipolar} \\ R_x \text{ óptimo} \end{cases} \Rightarrow P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}} \right)$$

$$E_b|_{Tx} = P_{H_1} \cdot E_1 + P_{H_2} \cdot E_2 = \{ E_1 = E_2 \} = A^2 T$$

$$A_{tt} = 30 \text{ dB} \Leftrightarrow A_{tt} = 1000 \Rightarrow E_b|_{Rx} = \frac{E_b|_{Tx}}{1000} = \frac{A^2 T}{1000}; T = \frac{1}{V_T}$$

$$\eta = -98 \text{ dBm/Hz} \Leftrightarrow 10^{-9,8} \text{ W/Hz}$$

$$\text{luego: } \frac{E_b}{\eta} = \frac{A^2 T}{10^3 \cdot 10^{-9,8}} = 7,72 \Rightarrow P_e|_{\text{NRZ bip } R_x \text{ ópt}} = 4,7 \cdot 10^{-5}$$

$$\rightarrow \text{NRZ} \begin{cases} \text{unipolar} \\ R_x \text{ ópt} \end{cases} \Rightarrow P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2\eta}} \right)$$

$$E_b = P_{H_1} E_1 + P_{H_2} E_2 = \frac{A^2 T}{2} + \frac{0}{2} = \frac{A^2 T}{2} \Rightarrow P_e|_{\text{NRZ unipolar}} = 2,5 \cdot 10^{-2}$$

b) Idem ASK no coherente; $\frac{E_b}{\eta}|_{\text{ASK}} = \frac{E_b}{\eta}|_{\text{NRZ bipolar}}$

Potencia de portadora?? R_x : filtro ideal con $B_w = V_s = \frac{1}{T}$

$$P_b|_{\text{ASK No coh.}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2\eta}}; \quad \frac{E_b}{\eta}|_{\text{ASK}} = \frac{E_b}{\eta}|_{\text{NRZ bip}} = \frac{A^2 T}{10^{-9,8}} = 7,72$$

$$P_b|_{\text{ASK No coh.}} = 1,1 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{S}{N} = \frac{A^2 T / 2}{\sigma^2 T} \Rightarrow \frac{A}{\sigma} = 5,5$$

$\frac{S}{N}$ no es alta, por lo que esta expresión no es válida.

$$\frac{E_b}{\eta} = 7.72 \rightarrow E_b|_{R_x} \xrightarrow{A_{tx}} E_b|_{T_x} = E_b|_{R_x} \cdot 1000 = \frac{A_{T_x}^2 T}{2}$$

$$P_{T_x} = \frac{E_b|_{T_x}}{T} = E_b|_{T_x} \cdot V_T = 6.8 \text{ dBm} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se usa la mitad} \\ \text{de potencia en} \\ \text{enviar portadora} \end{array} \right.$$

$$P_c = 6.8 \text{ dBm} - 3 \text{ dBm} = 3.8 \text{ dBm}$$

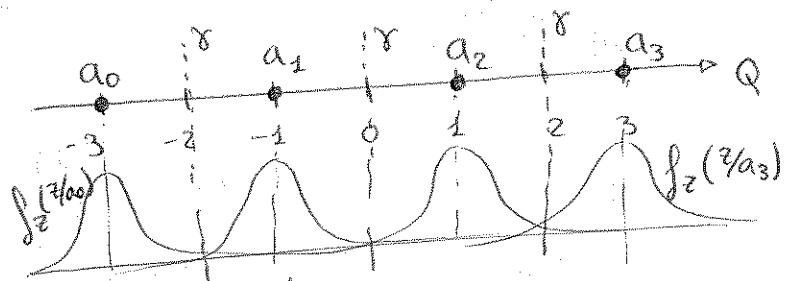
c) FSK no coh. y misma BER que NRZ bip. A_{T_x} ?

$$P_e|_{\text{FSK No coh}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2\eta}} = P_e|_{\text{NRZ bip}} \Rightarrow E_b|_{R_x} = -2\eta \ln(2) \cdot P_e|_{\text{NRZ bip}}$$

si $A_{tx} \rightarrow E_b|_{T_x} \rightarrow P_{T_x} \rightarrow A_{T_x}$

$$P_{T_x} = \frac{P_2 + P_1}{2} = \frac{A_{T_x}^2}{2} \Rightarrow A_{T_x} = 152 \text{ mV}$$

P5: Constelación:



a) P_e^{simb} ?

$$P_e^{\text{simb}} = \sum_{i=0}^3 P_{a_i} \cdot P_{e|a_i} = \left\{ \begin{array}{l} \text{simbolos} \\ \text{equiprobabl.} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$

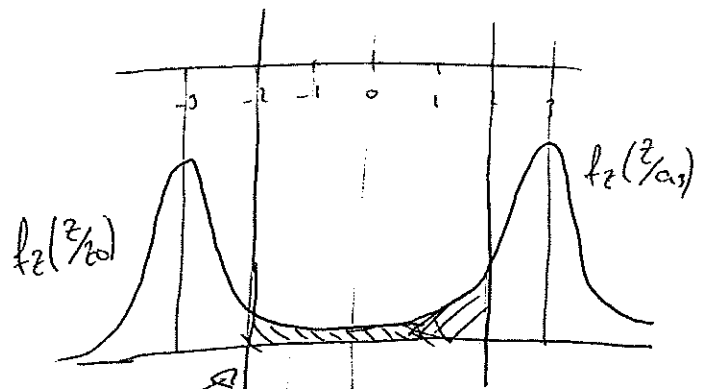
$$P_{e|a_0} = P_e[z \geq -2/a_0] = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad \begin{array}{l} \delta - S_0 = -2 - (-3) \\ = 1 \end{array}$$

$$P_{e|a_1} = 2 \cdot P_{e|a_0} = P_{e|a_2} \quad \leftarrow \text{gráficamente: área de las colas de las gaussianas}$$

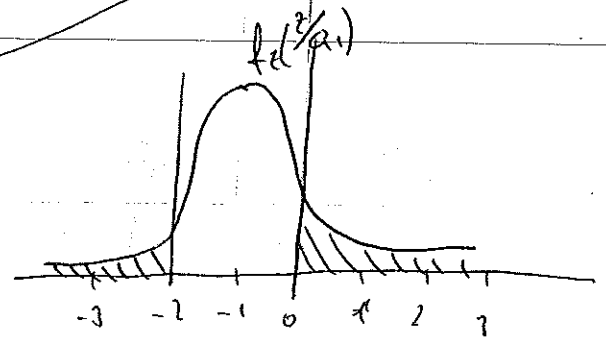
$$P_{e|a_i} = \frac{3}{4} \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P_e|_{a_0} = P_e[z \leq -2/a_0] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Sempre que $z \leq -2$ há equívoco.



$$P_e|_{a_0} = P_e|_{a_3}$$



$$P_e|_{a_1} = 2 \cdot P_e|_{a_0} = P_e|_{a_2}$$

$$P_e|_{a_i} = \frac{3}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

b)

$$P_{e-\text{bit}} = \sum_{i=0}^3 P_{B|s_i} \cdot P_{B|s_i}$$

11	00	10	01
a_0	a_1	a_2	a_3
-3	-1	1	3

$$P_{B|s_0} = \frac{1}{2} P[-2 \leq z \leq 0] + \frac{2}{2} P[0 \leq z \leq 2] + \frac{1}{2} P[z \geq 2]$$

$\frac{\text{nº bits errôneas}}{\text{nº bits possíveis}}$

$$P_e|_{s_0} = P[z \geq 2] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P[-2 \leq z \leq 0] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P[0 \leq z \leq 2] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{5}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P[z \geq 2] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{5}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$\left(P_{e-s} = \frac{3}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)?$$

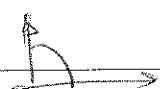
$$P_{eB} = \frac{5}{8} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \frac{1}{8} \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

c) usándose Gray

01	00	10	11
a_0	a_1	a_2	a_3

$$P_{e-B} = \sum_{i=0}^3 P_{|s_i} \cdot P_{b|s_i} = \frac{3}{8} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{8} \operatorname{erfc}\left(\frac{5}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

d) Conclusiones:

Simplificación ya que la curva  es muy rápida en caída

$$P_{e-b|a_1} \approx \frac{5}{8} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P_{e-b|a_2(\text{gray})} \approx \frac{3}{8} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

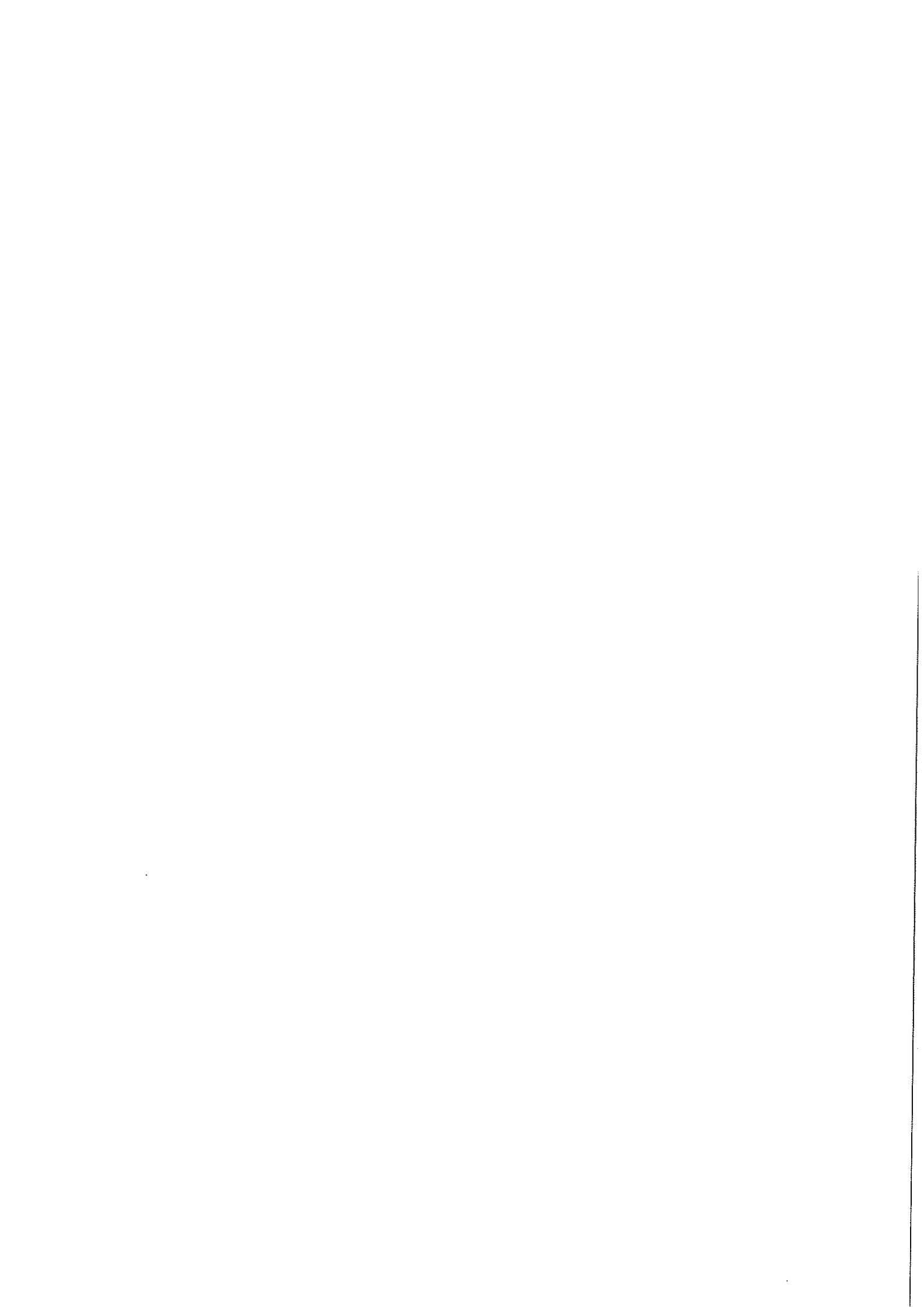
$$\text{Gray} \Rightarrow \frac{P_{e-s}}{k} \leq P_{e-\text{bit}}$$

$$\text{en } C_1 \Rightarrow P_{e-b} \leq P_{e-s}$$

$$\hookrightarrow \frac{3}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

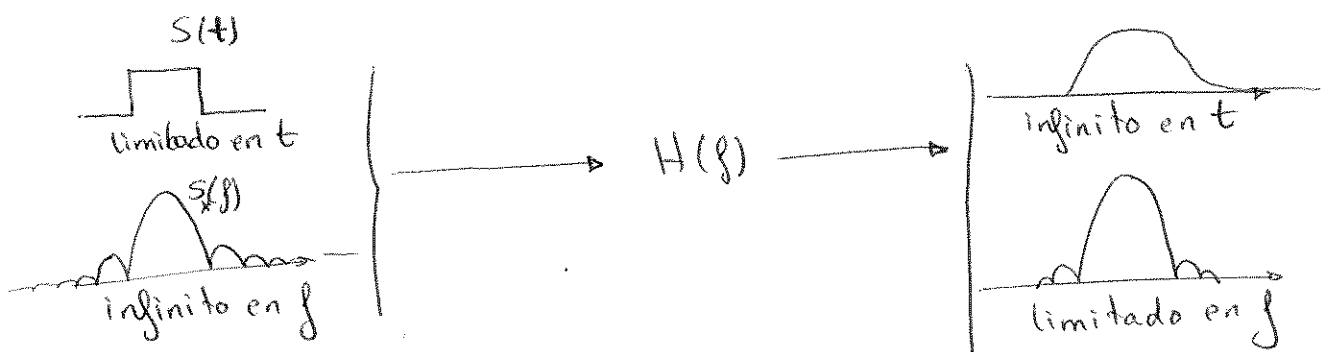
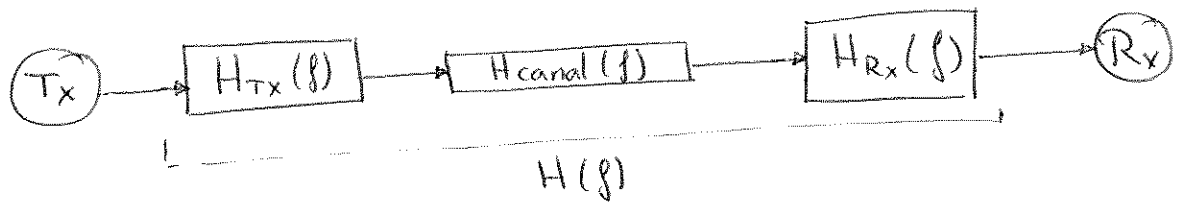
$$\frac{P_{e-s}}{k} \leq P_{e-b} \leq P_{e-s}$$

6/8



Tema 7: Transmisión digital en canales de banda limitada

1. Interferencia Entre Símbolos (IES)



Si en recepción, los símbolos son infinitos en t , se interferirán entre ellos, dejando residuos unos símbolos en otros símbolos cercanos.

2. PAM

PAM \Leftrightarrow codificaciones lineales $\Leftrightarrow S_{k(n)} = a_k \cdot p(t)$

por ejemplo: NRZ (unipolar y bipolar), RZ (uni, bip), Manchester, ASK, BPSK, QPSK, M-PSK, M-QAM

si se trata de señales paso bajo: $a_k \in \mathbb{R}$

si se trata de señales paso banda: $a_k \in \mathbb{C}$

* Canal transparente:

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{k(n)}(t-nT) = \{ \text{PAM} \} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k(n)} \cdot p(t-nT)$$

siendo $p(t) = \text{pulso}$

en canal transparente:

$$\begin{cases} |H(\beta)| = \text{cte} \\ \phi(\beta) = \text{lineal} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{---} |H(\beta)| \\ \text{---} \phi(\beta) \end{array} \right.$$

entonces: $r(t) \rightarrow [H(\beta)] \rightarrow y(t) \quad y(t) = \text{cte} \cdot r(t-\tau)$

$$r(t=iT) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k(n)} p(iT-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k(n)} p(T(i-n))$$

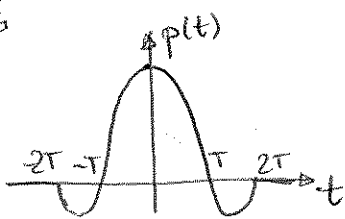
↑ instantes de muestreo

si NO hay IES, $r(t=iT) = a_{k(i)} \cdot p(t-iT) = a_{k(i)} \cdot p(0)$

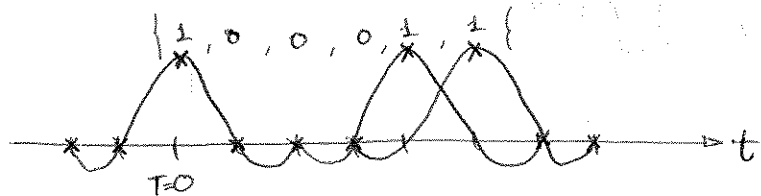
para que $r(t=iT) = r(t=iT) \Big|_{\substack{\sin \\ \text{IES}}}$ necesitamos:

$$\begin{cases} p((i-n)T) = 0, \quad i-n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \\ p(0) \neq 0 \end{cases}$$

Ej:



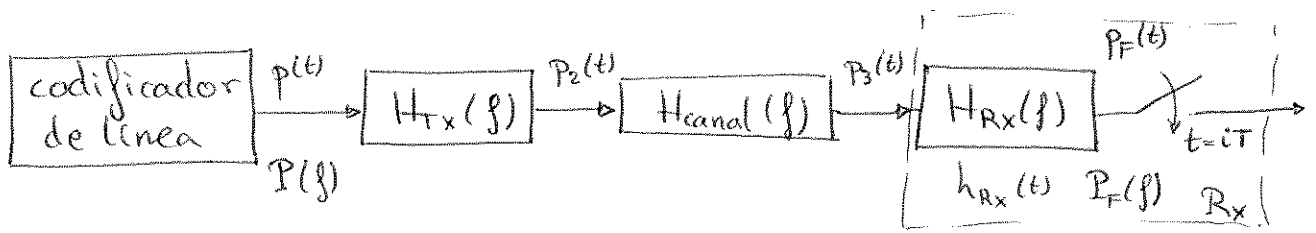
$$a_n = \{ 1, 0, 0, 0, 1, 1 \}$$



Respetar esta condición permite que, en el instante de muestreo ($T=0, 1, 2, 3, \dots$), la señal recibida sea libre de interferencia entre símbolos.

Fuera del instante de muestreo no podemos garantizar nada, ya que existe IES.

* Canal con filtros (real):



$$P(f) \cdot H_{Tx}(f) \cdot H_{canal}(f) \cdot H_{Rx}(f) = P_F(f)$$

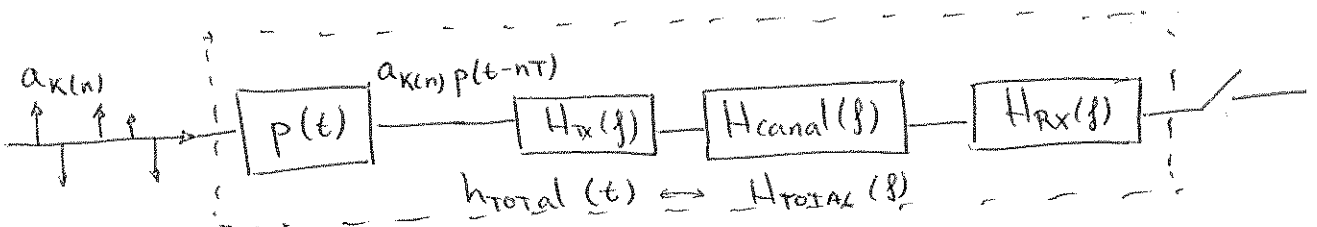
luego: $p_F(t) = TF^{-1}(P_F(f))$

necesitamos: $p_F(t) = 0$; $t = mT$; $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$

si $TF^{-1}(P_F(f)) = TF^{-1}(P(f) \cdot H_{Tx}(f) \cdot H_{canal}(f) \cdot H_{Rx}(f)) = TF^{-1}(H_{total}(f))$

$$p_F(t) = h_{total}(t)$$

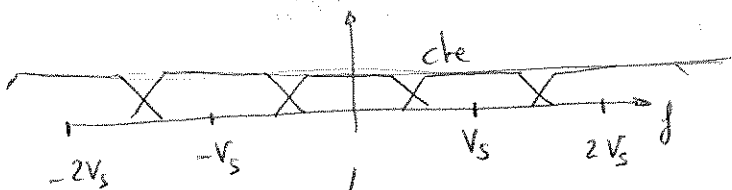
obtenemos un modelo:



$$h_{total}(t) = 0; t = mT; m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

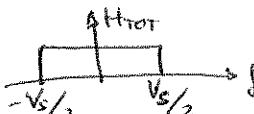
Nyquist:

si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{total}(f - \frac{n}{T}) = cte \Rightarrow$ No existirá interferencia entre símbolos




$$V_s = \frac{1}{T} = \text{Velocidad de símbolo}$$

en B.B.

necesitamos un H_{total} : 
 para lograr una respuesta cte $\Rightarrow B_w^{min} = \frac{V_s}{2}$

en P.B.

 $\Rightarrow B_w^{min} = V_s$

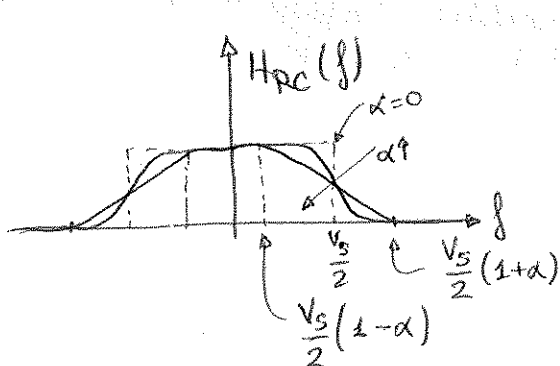
Eficiencia Espectral: $E_e = \frac{V_T}{B_w}$ queremos que sea máx

$$E_e \left| \begin{array}{l} B_w^{\min} \\ \sin IES \end{array} \right. = \frac{V_T}{B_{\min} \left| \begin{array}{l} \sin \\ IES \end{array} \right.} = \left. \begin{array}{l} \text{B.B.} \\ B_{\min} = \frac{V_s}{2} \\ \text{P.B.} \\ B_{\min} = V_s \end{array} \right\} E_e = \frac{V_T}{V_s/2} = \frac{kV_s}{V_s/2} = 2k$$

$$E_e = \frac{kV_s}{V_s} = k$$

códigos	E_e
NRZ (unip./bip.)	2
RZ ó Manchester	2
ASK ó BPSK	1
QPSK ($M=4 \Rightarrow k=2$)	2
M-PSK ($M=M \Rightarrow k=k$)	k
M-QAM	k

3. Filtro en coseno alzado



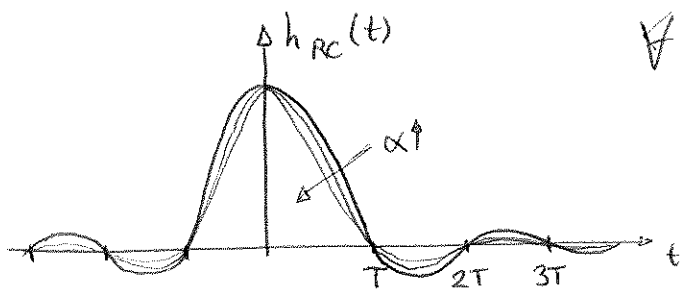
$$H_{RC}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{V_s}{2} (1-\alpha) \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{|f| - \frac{V_s}{2}(1-\alpha)}{\alpha}\right), & \frac{V_s}{2}(1-\alpha) < |f| < \frac{V_s}{2}(1+\alpha) \\ 0, & |f| \geq \frac{V_s}{2}(1+\alpha) \end{cases}$$

$$\alpha(r) = \text{roll-off}; \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Este filtro (no ideal) si es sintetizable en la vida real.

$$B_w^{RC} = \frac{V_s}{2} (1+\alpha) = B_w^{\min} \cdot (1+\alpha)$$

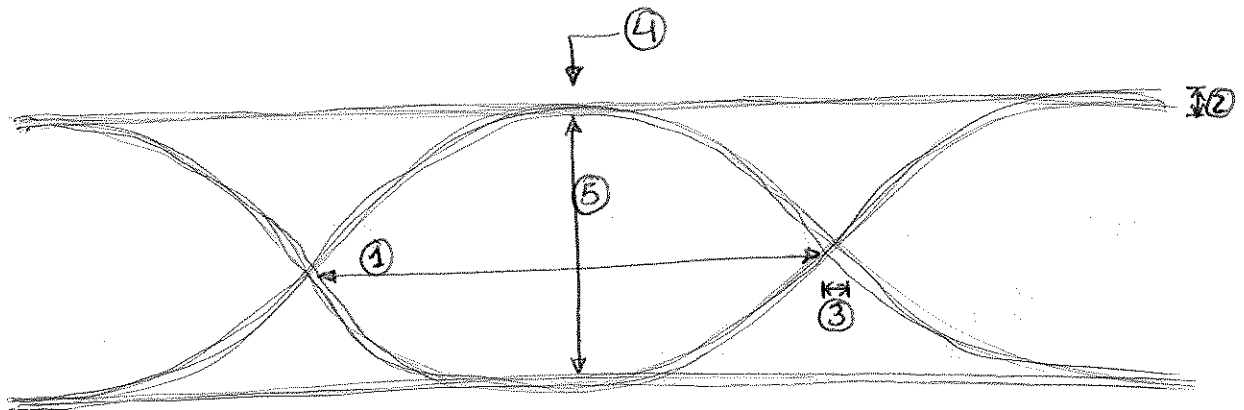
Aunque por ello tenemos un B_w mayor que el mínimo



$$\forall \alpha \Rightarrow h_{RC}(t) \Big|_{\substack{t=mT \\ m=\pm 1, \pm 2, \dots}} = 0$$

un valor más alto de α produce una respuesta más inmune a la interferencia entre símbolos

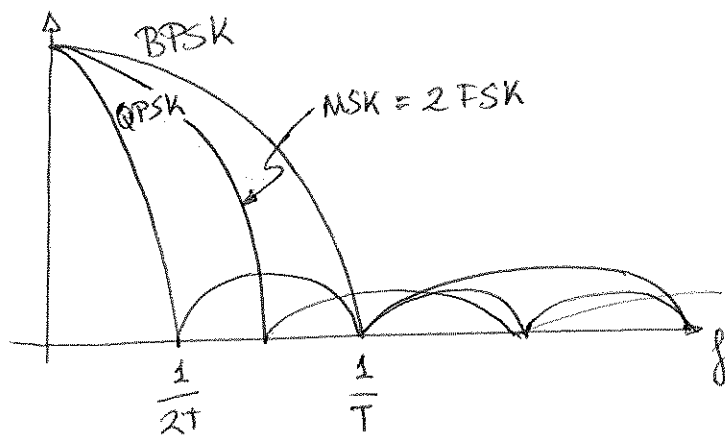
4. Diagrama de ojo



El diagrama de ojo es una representación gráfica de las transiciones de una señal superpuestas en el tiempo.

- 1: período de símbolo
- 2: interferencia entre símbolos
- 3: jitter: errores de temporización
- 4: instante óptimo de muestreo, donde 5 es máximo
- 5: apertura del ojo

5. Comparativa de modulaciones



$$E_e = \frac{V_T}{B}$$

$B_w^{\min} \Rightarrow \Delta f = \frac{V_s}{2}$ (Tma. Nyquist generalizado)
 M-FSK
 No IES
 Rx coherente

$$B_w^{\min} = M \cdot \frac{V_s}{2} \Rightarrow E_e = \frac{V_T}{M \frac{V_s}{2}} = \frac{k \cdot V_s}{M \cdot \frac{V_s}{2}} = \frac{2k}{M}$$

siendo $M = 2^k \Rightarrow E_e = \frac{2 \log_2(M)}{M}$

En PAM:

$$E_e = k = \log_2(M)$$

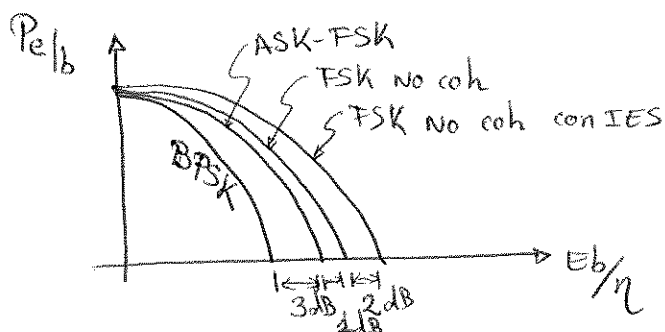
si $M=2 \Rightarrow E_e = 1$

En MSK:

$$E_e = \frac{2 \log_2(M)}{M}$$

si $M=2 \Rightarrow E_e = 1$

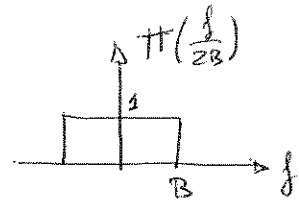
si R_x no coherente $\Rightarrow \Delta f = V_s \Rightarrow E_e|_{\text{no-coher.}} = \frac{\log_2(M)}{M}$



P1:

$$H(f) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{B}\right) \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$B = \frac{1}{2T}$$

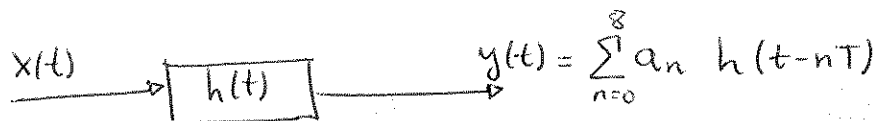


A la entrada del sistema se introduce:

$$x(t) = \sum_{n=0}^8 a_n \delta(t-nT) \quad ; \quad \begin{cases} a_0 = a_1 = a_4 = 1 \\ a_2 = a_3 = a_{5-8} = 0 \end{cases}$$

IES en los símbolos 1, 2, 3, 4??

IES ($t=iT$) = $y(iT)$ - valor sin IES



$$H(f) = H_3(f) \cdot H_2(f) \Rightarrow h(t) = h_2(t) * h_3(t)$$

$$h_2(t) = \text{TF}^{-1}\left(\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)\right) = \frac{\text{sen}(2\pi B t)}{\pi t}$$

$$h_3(t) = \text{TF}^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{f}{B}\right)\right) = \text{TF}^{-1}\left(\cos\left(2\pi f \frac{1}{4B}\right)\right) = \text{TF}^{-1}\left(\frac{e^{j2\pi f \frac{1}{4B}} + e^{-j2\pi f \frac{1}{4B}}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\delta\left(t - \frac{1}{4B}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{4B}\right) \right)$$

$$h(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}\left(2\pi B\left(t - \frac{1}{4B}\right)\right)}{\pi\left(t - \frac{1}{4B}\right)} + \frac{\text{sen}\left(2\pi B\left(t + \frac{1}{4B}\right)\right)}{\pi\left(t + \frac{1}{4B}\right)} \right] = \left\{ B = \frac{1}{2T} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi\left(t - \frac{T}{2}\right)}{T}\right)}{\pi\left(t - \frac{T}{2}\right)} + \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi\left(t + \frac{T}{2}\right)}{T}\right)}{\pi\left(t + \frac{T}{2}\right)} \right]$$

siendo: $y(t) = \sum_{n=0}^8 a_n h(t-nT)$; $h(0) = \frac{2}{HT}$

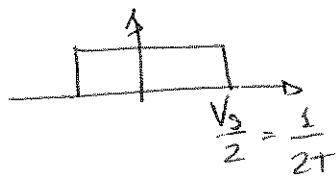
$y(T) = \frac{0'87}{T} \rightarrow \text{IES}|_{t=T} = y(T) - h(0) = \frac{0'23}{T}$

$y(2T) = \frac{0'127}{T} \rightarrow \text{IES}|_{t=2T} = y(2T) - 0 = \frac{0'127}{T}$

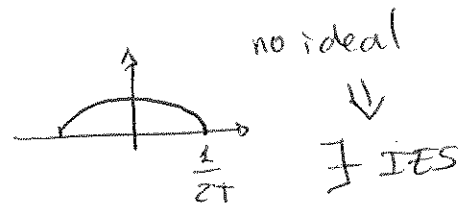
$y(3T) = \frac{0'188}{T} \rightarrow \text{IES}|_{t=3T} = y(3T) - 0 = \frac{0'188}{T}$

$y(4T) = \frac{0'6447}{T} \rightarrow \text{IES}|_{t=4T} = y(4T) - h(0) = \frac{0'0081}{T}$

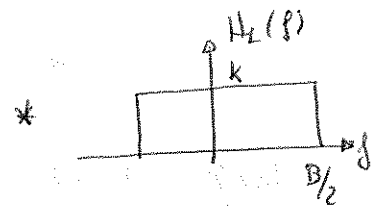
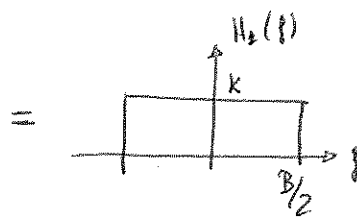
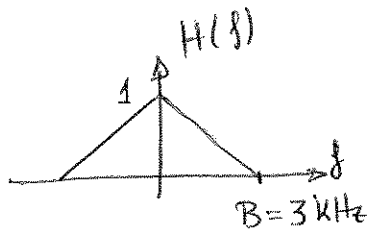
Nyquist dice: para que no exista IES necesitamos:



pero tenemos



P2:



a) $h(t) = h_1(t) \cdot h_2(t) = h_2^2(t)$

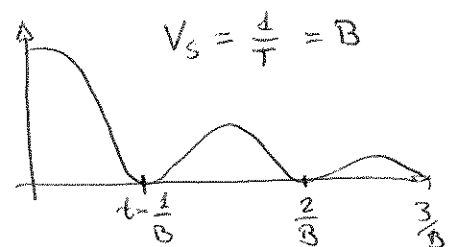
$\max \{ H_2(f) * H_2(f) \} = k^2 \cdot B = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{B}}$

$h_2(t) = k \cdot \frac{\text{sen}(2\pi \frac{B}{2} t)}{\pi t} \Rightarrow h_2^2(t) = h(t) = B \frac{\text{sen}^2(\pi B t)}{(\pi B t)^2}$

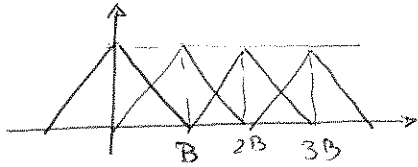
b) $\max V_T \sin \text{IES?}$

opc1: Nyquist: $h(mT) = 0, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$h(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(\pi B t) = 0 \\ \pi B t = k\pi; k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{k}{B}$



opc 2: En el dominio de la frecuencia:

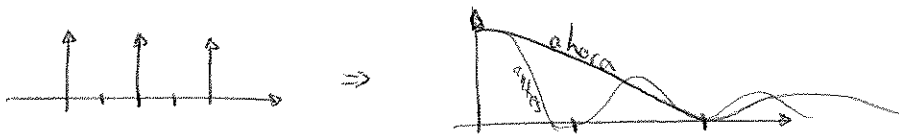


si $V_s = B \Rightarrow H = cte$

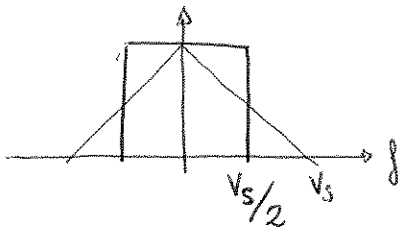
Nyquist: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(f - \frac{k}{T}) = cte$

c) ¿ otras V_s con IES nula? SÍ

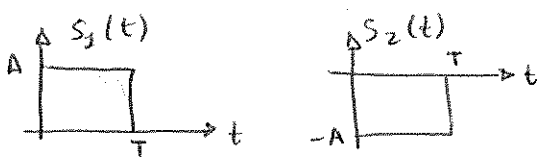
si envío:



d) Bw con respuesta ideal para la misma V_T



P3: Banda Base:



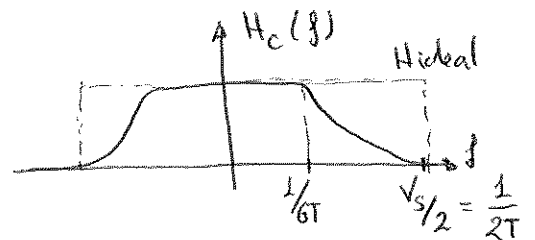
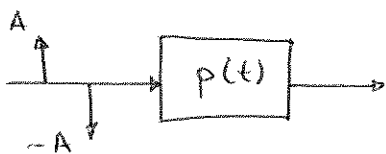
canal con $B_c = \frac{1}{2T}$

siendo:

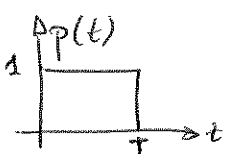
$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & |f| < \frac{1}{6T} \\ \cos^2\left(\frac{3fT}{2}\right) & \frac{1}{6T} < |f| < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

cual será el ecualizador $H_E(f)$ para no tener IES??

codificador de línea:



Nyquist dice que H_{ideal} ocupa $\frac{V_s}{2}$ y No produce IES, luego, todo filtro no ideal tendrá $B_w > \frac{V_s}{2}$



si $A\delta(t) \Rightarrow A p(t) = S_1(t)$
 si $-A\delta(t) \Rightarrow -A p(t) = S_2(t)$

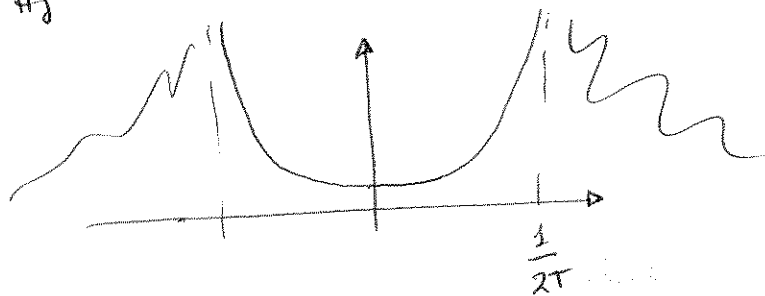
necesitamos:

$$\underbrace{P(f) \cdot H_c(f) \cdot H_E(f)} = H_{ideal} = \begin{cases} 1 & |f| \leq \frac{V_s}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\frac{\text{sen}(HfT)}{Hf}$$

$$H_E(f) = \begin{cases} \frac{1}{P(f) \cdot H_c(f)} & |f| \leq \frac{V_s}{2} \\ \text{cualquier cosa} & |f| \geq \frac{V_s}{2} \end{cases}$$

$$H_E(f) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{\text{sen}(2HfT)}{Hf}} & |f| \leq \frac{1}{6T} \\ \frac{1}{\frac{\text{sen}(HfT)}{Hf} \cos^2(\dots)} & \frac{1}{6T} \leq |f| \leq \frac{1}{2T} \end{cases}$$



P5: se muestrea con f_s^{\min} una señal analóg con $B = 4 \text{ kHz}$
se cuantifica con 256 niveles

a) ASK, QPSK, 4-FSK, 64-QAM $\Rightarrow B_w^{\min}??$

$$L = 256 \text{ niveles} \Rightarrow 8 \text{ bits} = n$$

$$V_T \longrightarrow V_s = k V_T \xrightarrow{E_e} B_{\min}$$

$$V_T = \frac{n}{T_{\text{muestr}}}} = n \cdot f_s = n \cdot (2 \cdot f_s^{\min}) = 8 \cdot 8 \text{ kHz} = 64 \text{ kbits/s}$$

$$E_e \left| \begin{array}{l} \text{PAM} \\ \text{No IES} \\ B_{\min} \end{array} \right. = k ; \quad E_c \left| \begin{array}{l} \text{FSK} \\ \text{ortog.} \\ \text{No IES} \end{array} \right. = 2 \frac{\log_2(M)}{m} ; \quad E_e = \frac{V_T}{B_{\min}}$$

$$\text{ASK} \rightarrow E_e = 1 \rightarrow B_w^{\min} = 64 \text{ kHz}$$

$$\text{QPSK} \rightarrow E_e = 2 \rightarrow B_w^{\min} = 32 \text{ kHz}$$

$$\text{4-FSK} \rightarrow E_e = 1 \rightarrow B_w^{\min} = 64 \text{ kHz}$$

$$\text{64-QAM} \rightarrow E_e = 6 \rightarrow B_w^{\min} = 107 \text{ kHz}$$

b) Si sólo se dispusiera de 25 KHz con un amplificador No lineal, qué modulación escogemos?

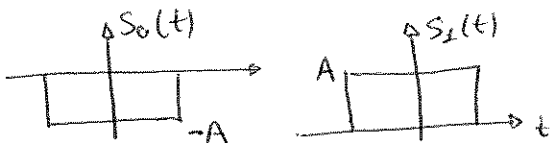
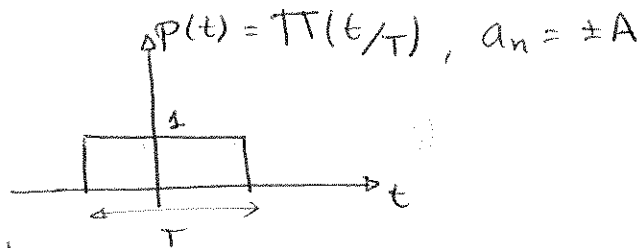
No lineal \Rightarrow necesitar modulación con envolvente constante

$$8\text{-PSK} \Rightarrow M = 8 \Rightarrow k = 3$$

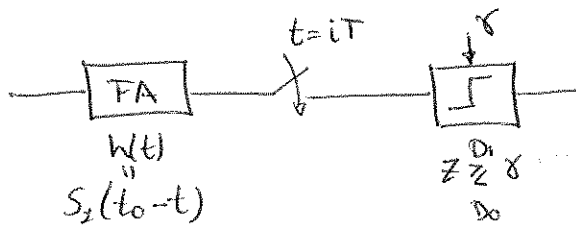
$$E_c = \frac{V_T = 64}{B = 25 \text{ KHz}} = 2.56$$

P4: PAM: $S_{Tx}(t) = \sum a_n \cdot p(t - nT)$

R_x es óptimo para BER mín

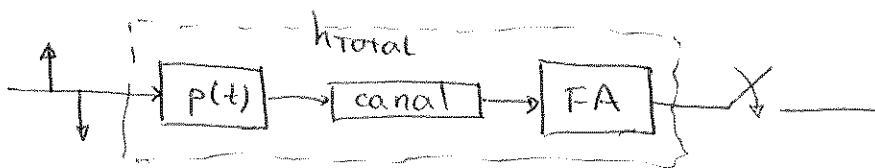


a) $h(t)$ del Filtro Adaptado

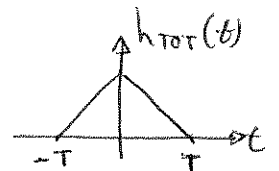


b) IES?

$$h_{TOTAL}(mT) = 0 ; m \in \mathbb{Z} - \{0\}$$



$$h_{TOT} = p(t) * h_{FA}(t) = p(t) * p(-t) = p(t) * p(t) =$$



$$h_{TOT}(t) = 0 \quad \forall t = \pm T, \pm 2T, \dots \Rightarrow \text{No IES}$$

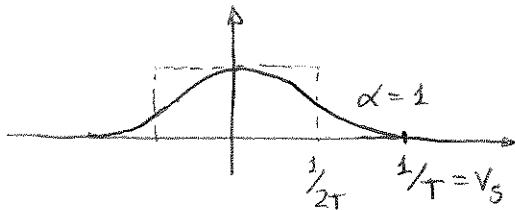
c) Ancho de Banda ocupado?

infinito, pues $TF(f) = \text{rect}(f) \Rightarrow B_W = \infty$

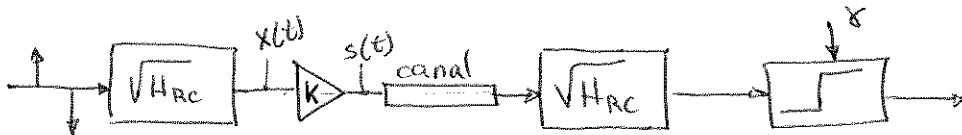
d) Rediseñar el sistema; misma V_s , no IES, misma Potencia
misma BER, $B_W = \frac{1}{T}$ Hz

Haremos ahora que $H_{TOTAL}(f) = H_{RC}(f)$

↳ Raised Cosine = Coseno Alzado



$$H_{RC}(f) = \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{f}{2V_s}\right)\right) \text{TT}\left(\frac{f}{2V_s}\right)$$



caso 1:

$$P_T = P_{N_0} \cdot P_0 + P_{N_1} \cdot P_1 = \frac{1}{2} P_0 + \frac{1}{2} P_1 = \frac{2P_0}{2} = \frac{2P_1}{2} = A^2$$

$$E = P_T \cdot T = A^2 T = E_s = E_b$$

caso 2:

$$E_s = E_b |_{\text{caso 1}} = A^2 T$$

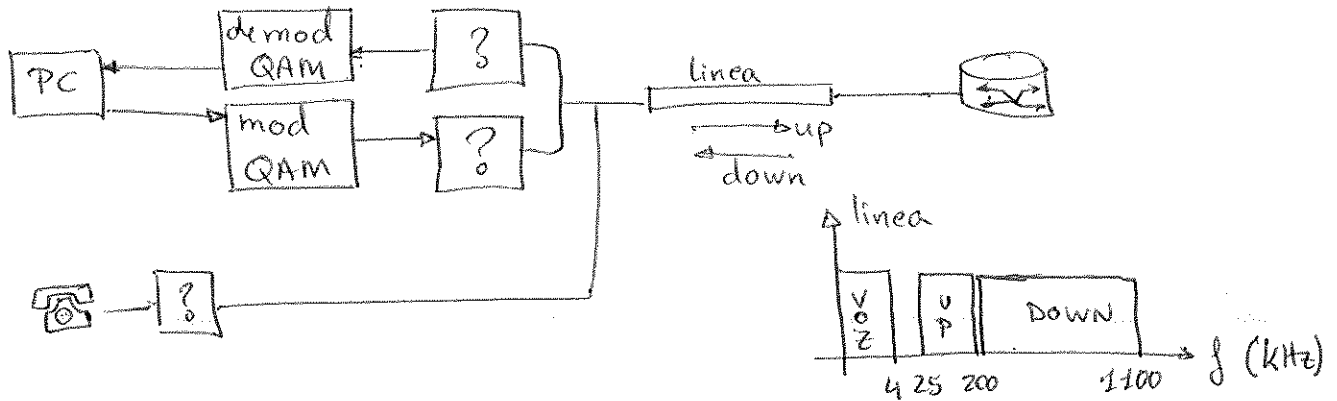
siendo k la ganancia en tensión:

$$E_s = k^2 \cdot E_x$$

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{RC}(f) df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi f}{2V_s}\right)\right) \text{TT}\left(\frac{f}{2V_s}\right) df = \int_{-V_s}^{V_s} 1 + \cos\left(\frac{2\pi f}{2V_s}\right) df = 2V_s = \frac{2}{T} \end{aligned}$$

$$E_s = k^2 \cdot E_x = k^2 \cdot \frac{2}{T} = A^2 T \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}} AT$$

Jun 2003 : P3



a) ?

? = filtros

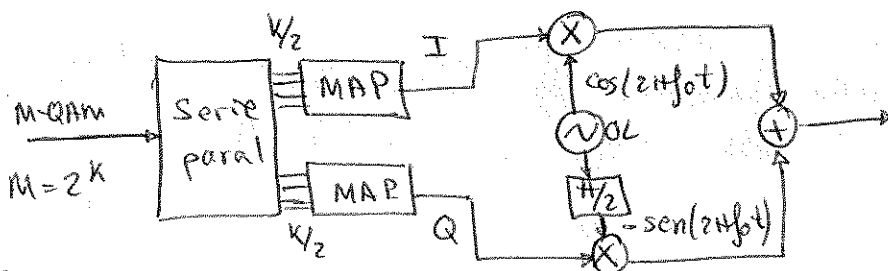
el del teléfono: $B_w = 4 \text{ kHz}$ paso bajo

el del modulador: $B_w = 175 \text{ kHz}$ $f_c = \frac{200 + 25}{2} \text{ kHz}$

el del demodulador: $B_w = 900 \text{ kHz}$ $f_c = \frac{1100 + 200}{2} \text{ kHz}$

b)

modulador universal IQ:



c)

Ahora. Los 900 kHz de bajada tiene 225 canales de 4 kHz con una modulación QAM cada canal. 4 kHz es el ancho de banda mínimo para la modulación.

$$SNR = \frac{k E_b}{\eta} = \frac{E_s / T_s}{\eta \cdot B_w} = \frac{E_b / T_b}{\eta \cdot B_w} = \frac{E_b / T_b}{\eta \cdot V_s} = \frac{E_b V_T}{\eta V_s} = \frac{k E_b}{\eta}$$

$$B_w^{\min} = \left. \begin{array}{l} \text{en banda} \\ \text{base } \frac{V_s}{2} \end{array} \right\} = V_s \quad (\text{pres estamos modulados})$$

d) canal 1-125: SNR = 27 dB
 canal 126-225: SNR = 20 dB } se elige una M-QAM para cada canal para obtener una BER 10^{-5}

En QAM: $BER \approx \frac{2}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3KEb}{2(M-1)\eta}} \right)$

probemos:

canal 1	M	k	X	BER	canal 2	M	k	X	BER
	4	2	15'8	~ 0		4	2	7'1	$2 \cdot 10^{-10}$
	16	4	7'1	~ 0	→	16	4	3'16	$3 \cdot 10^{-6}$ ←
→	64	6	3'45	$0'3 \cdot 10^{-6}$ ←		64	6	1'54	$8'5 \cdot 10^{-3}$
	256	8	1'71	$3'5 \cdot 10^{-3}$					

en canales 1-125: usaremos 64 QAM $\Rightarrow BER = 0'3 \cdot 10^{-6}$

en canales 126-225: usaremos 16 QAM $\Rightarrow BER = 3 \cdot 10^{-6}$

$$E_c = \frac{V_T}{B_w} \Big|_{B_w^{min}} = k$$

$$\begin{aligned} V_T &= N^{\circ} \text{canales 1} \cdot V_{T1} + N^{\circ} \text{canales 2} \cdot V_{T2} = \\ &= 126 \cdot k_1 \cdot B_w + 100 \cdot k_2 \cdot B_w = \\ &= 126 \cdot 6 \cdot 4 \text{ kHz} + 100 \cdot 4 \cdot 4 \text{ kHz} = 4'6 \text{ Mbits/s} \end{aligned}$$

e) Nos descargamos una canción de 3 minutos en analógico: $B_w = 15 \text{ kHz}$ ($f_s = \text{min}$, $n = 8 \text{ bits}$)
 codificación Reed-Solomon 32 \Rightarrow cada 32 bits mete +4 bits
 cuanto tardamos en descargarla?

$$t_{\text{bajada}} = \frac{\text{tamaño}}{V_{T \text{down}}} = 10'56 \text{ s}$$

$$\text{tamaño} = \left\{ f_s^{\text{min}} = 2 \cdot B_w = 30 \text{ kHz} \right\} = 30 \text{ kHz} \cdot 8 \text{ bits/muestra} \cdot 3 \text{ min} \cdot \frac{36}{32}$$

septiembre 2000: P3

$$H_0(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B} (1 + \cos(\frac{\pi f}{B})) & |f| < B \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad V_s = B$$

a) demostrar que no produce IES:

No habrá IES si: $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} H_0(f - \frac{i}{V_s}) = cte \quad \text{ó} \quad h_0(mT) = 0, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$

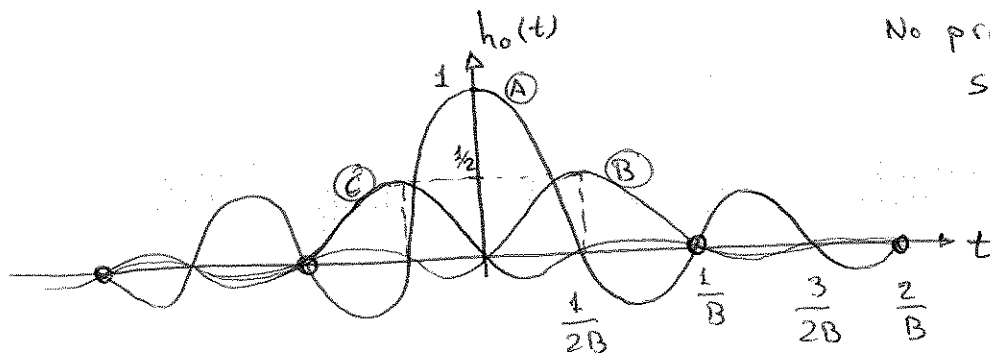
$$H_0(f) = \underbrace{\frac{1}{2B} (1 + \cos(\frac{\pi f}{B}))}_{H_1(f)} \underbrace{\Pi(\frac{f}{2B})}_{H_2(f)}$$

$$h_0(t) = h_1(t) * h_2(t) =$$

$$= \left[\delta(t) + \frac{1}{2} \delta(t - \frac{1}{2B}) + \frac{1}{2} \delta(t + \frac{1}{2B}) \right] * \frac{\text{sen}(2\pi B t)}{2\pi B t} =$$

$$= \underbrace{\frac{\text{sen}(2\pi B t)}{2\pi B t}}_{\textcircled{A}} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\text{sen}(2\pi B (t - \frac{1}{2B}))}{2\pi B (t - \frac{1}{2B})}}_{\textcircled{B}} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\text{sen}(2\pi B (t + \frac{1}{2B}))}{2\pi B (t + \frac{1}{2B})}}_{\textcircled{C}}$$

$$\textcircled{A} = 0 \Leftrightarrow 2\pi B t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k}{2B}$$



No producirá IES

$$\text{si } T_s = \frac{1}{B}$$

$$V_s = B$$

FORMULARIO OFICIAL DE TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN. Plan 2010.

TEMA II

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad P_{m,x} = \langle |x(t)|^2 \rangle \quad E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_{DC} = x_{DC}^2$$

$$P_{AC} = P_m - P_{DC} = x_{eff}^2 = x_{rms}^2 - x_{DC}^2$$

$$x_{rms} = \sqrt{P_m}$$

$$x_{eff} = \sqrt{P_{AC}}$$

$$G_x(f) = |X(f)|^2$$

$$Si : x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \exp(j2\pi f_n t) \rightarrow S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - f_n)$$

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$$

$$x(t) = r(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = x_F(t) \cdot \cos \omega_0 t - x_C(t) \cdot \sen \omega_0 t \rightarrow \bar{x}(t) = r(t) \cdot \exp[j\varphi(t)] = x_F(t) + jx_C(t)$$

$$PEP = \frac{1}{2} \cdot r_{max}^2$$

$$P_m = \frac{1}{2} \langle r^2(t) \rangle$$

$$H_{RC}(f) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{f}{f_c}\right)}$$

$$f.d.p.(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-n^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$B_{eq} = \frac{1}{H_0^2} \int_b^\infty |H_T(f)|^2 df$$

$$P_n = \sigma^2 = P_{n_f} = P_{n_c} = \eta \cdot B$$

$$P_{\bar{n}} = P_{n_f} + P_{n_c} = 2 \cdot \sigma^2$$

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_H(f)}{df} \Big|_{f=f_0}$$

$$t_p = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Phi_H(f)}{f} \Big|_{f=f_0}$$

TEMA III

$$DBL: y(t) = A_c x(t) \cdot \cos \omega_c t \quad AM: y(t) = [A_c + A_m x(t)] \cdot \cos \omega_c t$$

$$y(t) = A_c [1 + m x_N(t)] \cos \omega_c t \quad AM: E_p = \frac{m^2 \langle x_N^2(t) \rangle}{1 + m^2 \langle x_N^2(t) \rangle} (\times 100\%)$$

$$P_{T,AM} = \frac{A_c^2}{2} (1 + m^2 \langle x_N^2(t) \rangle) \quad f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = f_c + f_d(t)$$

$$PM: \phi(t) = K_p x(t) = \beta \cdot x_N(t) \quad FM: f_d(t) = K_F x(t) = f_D \cdot x_N(t)$$

$$PM: y_p(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta x_N(t)]$$

$$FM: y_f(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi f_D \int_{-\infty}^t x_N(\alpha) d\alpha\right]$$

$$D = f_D / W \quad B \cong 2(\beta + 1)W \quad (PM) \quad B \cong 2(D + 1)W \quad (FM)$$

$$z = \frac{P_R}{\eta \cdot W} \quad SNR_{lim} = E_p \cdot z$$

$$SNR_{PM} = \beta^2 \langle x_N^2(t) \rangle \cdot z \quad SNR_{FM} = 3D^2 \langle x_N^2(t) \rangle \cdot z \quad z_U = 20 \cdot \frac{B_R}{W}$$

$$Mejora(dB) = 20 \cdot \log\left(\frac{W}{f_c}\right) - 4,8$$

TEMA IV

$$v_s = \frac{1}{T} \text{ simb/s}$$

$$v_T = \frac{k}{T} \text{ bits/seg.} \quad k = \log_2 M$$

$$\Delta = \frac{2V}{L-1}$$

$$n = \log_2 L$$

$$N_Q = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$SNR_Q(\text{dB}) = 1.76 + 6 \cdot n$$

TEMA V

$$\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle = \int_b^f r(t) \cdot s(t) \cdot dt$$

$$E_s = \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{E_s} = \sqrt{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle}$$

$$d_{rs} = \|\vec{r} - \vec{s}\|$$

$$\vec{v}_i = \vec{s}_i - \sum_{e_j \in B} \langle \vec{s}_i, \vec{e}_j \rangle \cdot \vec{e}_j$$

$$\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle \triangleq \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \cos \varphi$$

$$\rho_{r,s} = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{E_r E_s}} \cdot \int_b^f r(t) \cdot s(t) \cdot dt$$

$$d_{r,s}^2 = \|\vec{r} - \vec{s}\|^2 = E_r + E_s - 2\rho_{r,s} \sqrt{E_r \cdot E_s}$$

$$MER(\text{dB}) = 10 \cdot \log \frac{\sum_{i=1}^N \|\vec{s}_{k,i}\|^2}{\sum_{i=1}^N \|\vec{e}_{k,i}\|^2}$$

$$EVM(\%) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\vec{e}_{k,i}\|^2}}{v_{MAX}}$$

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|s_k\|^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^L s_{kj}^2$$

$$P_m = E_s \cdot \nu_s = E_b \cdot \nu_T$$

$$e_f = \frac{V_T (\text{bit/seg.})}{B_{\text{necesario}} (\text{Hz})}$$

$$P_m = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (I_k^2 + Q_k^2)$$

PAM: $s_k(t)$ ó $\bar{s}_k(t) = a_k \cdot p(t)$

$$h = \frac{f_D}{(V_s/2)} = \Delta f \cdot T$$

TEMA VI

$$P(|x - m_x| > a) = \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2} \cdot \sigma_x}\right)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

$$P_I = P(D_1 / H_0)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P_{II} = P(D_0 / H_1)$$

$$P_I = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma - s_0(t_s)}{\sqrt{2} \cdot \sigma}\right)$$

$$P_B = \operatorname{BER} = P_I \cdot P(H_0) + P_{II} \cdot P(H_1)$$

$$P_{II} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{s_1(t_s) - \gamma}{\sqrt{2} \cdot \sigma}\right)$$

Umbral óptimo y símbolos equiprobables: $P_B = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$

$$H(f) = S^*(f) \cdot e^{-j2\pi fT} \leftrightarrow h(t) = s(T-t)$$

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{f=T} = \frac{2E}{\eta}$$

Receptor óptimo: $P_B = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{\eta}}\right]$

$$\left. \begin{array}{l} \text{NRZ unipolar} \\ \text{ASK} \\ \text{FSK} \end{array} \right\} \text{con receptor óptimo: } P_B = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{NRZ bipolar} \\ \text{BPSK} \end{array} \right\} \text{con receptor óptimo: } P_B = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

ASK con receptor incoherente y $B=1/T$: $P_B \approx \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{E_b}{2\eta}\right]$

FSK con receptor incoherente y $B=1/T$: $P_B = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{E_b}{2\eta}\right]$

DPSK con receptor incoherente y $B=1/T$: $P_B = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{E_b}{\eta}\right]$

BER vs Probabilidad de error de símbolo:

$$\frac{P_s}{k} \leq BER \leq P_s$$

BER para modulaciones QAM con codificación Gray:

$$P_B \approx \frac{2}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot E_b}{2(M-1) \cdot \eta}} \right]$$

TEMA VII

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{k(n)}(t - nT) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{TOT} \left(f - \frac{k}{T} \right) = cte.$$

$$\text{PAM BB: } B_{min} = \frac{v_s}{2}$$

$$\text{PAM BP: } B_{min} = v_s$$

$$H(f) = \begin{cases} 1 & ; |f| < (1-\alpha) \cdot v_s / 2 \\ \cos^2 \left[\frac{\pi}{4} \cdot \frac{|f / (v_s / 2)| + \alpha - 1}{\alpha} \right] & ; (1-\alpha) \cdot v_s / 2 < |f| < (1+\alpha) \cdot v_s / 2 \\ 0 & ; |f| > (1+\alpha) \cdot v_s / 2 \end{cases}$$

$$B = B_{min} \cdot (1 + \alpha)$$

$$\text{FSK: } B_{min} = M \cdot \frac{v_s}{2}$$

$$e_f = \frac{2 \cdot \log_2 M}{M}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\operatorname{sen} a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)]$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$$

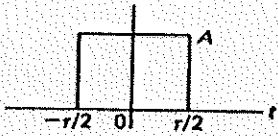
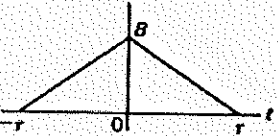
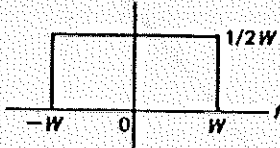
$$\cos x - \cos y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{y + x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{y - x}{2}$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

B.1 PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Señal	Transformada
1.  $\triangleq A\Pi(t/r)$	$A\tau \frac{\text{sen } \pi f\tau}{\pi f\tau} \triangleq A\tau \text{senc } f\tau$
2.  $\triangleq B\Lambda(t/r)$	$B\tau \frac{\text{sen}^2 \pi f\tau}{(\pi f\tau)^2} \triangleq B\tau \text{senc}^2 f\tau$
3. $e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$
4. $\exp(- t /\tau)$	$\frac{2\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2}$
5. $\exp[-\pi(t/\tau)^2]$	$\tau \exp[-\pi(f\tau)^2]$
6. $\frac{\text{sen } 2\pi Wt}{2\pi Wt} \triangleq \text{senc } 2Wt$	 $\triangleq \frac{\Pi(t/2W)}{2W}$
7. $\exp(j(\omega_c t + \phi))$	$\exp(j\phi)\delta(f - f_c)$
8. $\cos(\omega_c t + \phi)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_c)\exp(j\phi) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)\exp(-j\phi)$
9. $\delta(t - t_0)$	$\exp(-j\omega t_0)$
10. $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s)$	$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$
11. $\text{sgn } t = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$-\frac{j}{\pi f}$
12. $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
13. $\hat{x}(t)$	$-j \text{sgn}(f)X(f)$

Dualidad: Si $X(f) = \mathfrak{F}[x(t)]$ Entonces $\rightarrow x(t) = \mathfrak{F}\left[X(f)\right]_{f=-t}$

Modulación: Si $X(f) = \mathfrak{F}[x(t)]$ Entonces $\rightarrow \mathfrak{F}[x(t) \cdot \exp(j2\pi f_0 t)] = X(f - f_0)$

