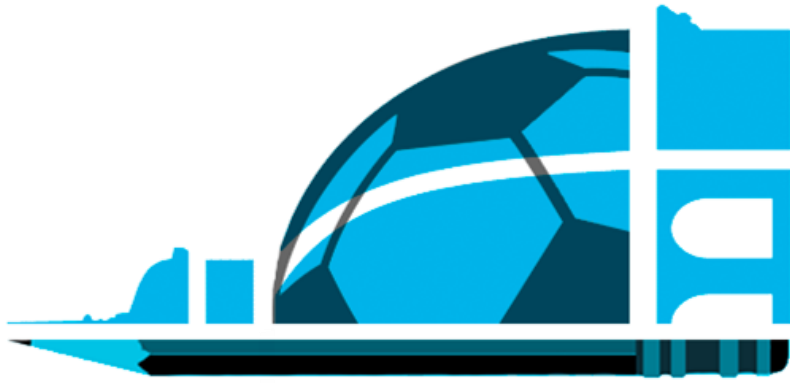




Indusbol
.com

Apuntes de 1ºGITI

María Ballesteros

ÁLGEBRA RUFFO

Si alguna vez estos
apuntes te sirvieron
de ayuda, piensa que
tus apuntes pueden
ayudar a muchas
otras personas.

Comparte tus apuntes
En indusbol.com o
simplyjarod.com

Homomorfismos - Aplicaciones Lineales



- Sean los espacios vectoriales de dimensión finita E_1 y E_2 . llamaremos aplicación lineal f de E_1 en E_2 , $f: E_1 \rightarrow E_2$ a la que cumple que:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E_1 & \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{array} \right. \longrightarrow f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Todo aplicación lineal se puede representar matricialmente

Sean dos espacios vectoriales con $\dim E_1 = n$ B_1 base de E_1
 $\dim E_2 = m$ B_2 base de E_2

La expresión matricial de la aplicación lineal $f: E_1 \rightarrow E_2$ en la base B_1 de E_1 y la base B_2 de E_2 es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_1}$$

Donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ representan las coordenadas de un elemento en la base B_1 del espacio E_1 y $y_1, y_2, \dots, y_m$ representan las coordenadas de un elemento en la base B_2 del espacio E_2

La matriz del medio es la matriz de la aplicación f en las bases B_1 y B_2

$$M_{B_2}^{B_1}(f) = M(f, B_1, B_2)$$

NOTA: Al espacio E_1 se le llama espacio inicial, origen, antiguo, aplicación, ... y al espacio E_2 se le llama espacio final, destino, imagen, nuevo, ...

EL NÚCLEO

llamaremos núcleo de una aplicación lineal, $N(f)$ o $\text{Ker}(f)$ al conjunto de elementos del espacio inicial que se transformen en el cero del final

$$f: E_1 \rightarrow E_2 \quad | \quad N(f) = \text{Ker}(f) = \{ x \in E_1 : f(x) = 0 \}$$

NOTA: El núcleo es un subespacio vectorial del espacio inicial

Demó después Pág. 5

LA IMAGEN

Llamaremos subespacio imagen o simplemente imagen de una aplicación lineal al conjunto de elementos del espacio final en los que se transforme algún elemento del inicial

$$\text{Im}(f) = \{ y \in E_2 \mid \exists x \in E_1, f(x) = y \}$$

• NOTA: La imagen es subespacio vectorial del espacio final Demo después Pág 5

TEOREMA

La dimensión del subespacio imagen coincide con el rango de la matriz de la aplicación

$$\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(M)$$

TEOREMA: Ecuación dimensional

La dimensión de la imagen más la dimensión del núcleo coincide con la dimensión del espacio inicial

$$\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim E_1$$

CLASIFICACIÓN DE LAS APLICACIONES LINEALES

- Inyectiva: f será inyectiva si $\dim \text{Ker}(f) = 0$
- Sobreyectiva: f será sobreyectiva si $\dim \text{Im}(f) = \dim E_2$
o Suprayectiva
- Biyectiva: f será biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

CLASIFICACIÓN DE LOS HOMOMORFISMOS

Monomorfismo: Aplicación lineal inyectiva

Epimorfismo: " " sobreyectiva

Isomorfismo: " " biyectiva (espacios con igual dimensión)

Endomorfismo: " " entre espacios iguales

Automorfismo: Un endomorfismo y, además, un isomorfismo

⇒ Verificar si la aplicación $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es aplicación lineal.

$$(x, y, z) \mapsto (x + 2y, x - y + z)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \\ u_2 &= (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad \text{COND. DE LINEALIDAD} \rightarrow f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha y_1 + \beta y_2), \alpha x_1 + \beta x_2 - (\alpha y_1 + \beta y_2) + \alpha z_1 + \beta z_2) =$$

$$= (\alpha(x_1 + 2y_1) + \beta(x_2 + 2y_2), \alpha(x_1 - y_1 + z_1) + \beta(x_2 - y_2 + z_2)) =$$

$$= \alpha(x_1 + 2y_1, x_1 - y_1 + z_1) + \beta(x_2 + 2y_2, x_2 - y_2 + z_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$$

Queda demostrado que es una aplicación lineal.

⊕ Dada la aplicación $\mathbb{R}_{10}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{10}[x]$
 $p \mapsto p'$

a) Clasifica la aplicación.

$$\dim \mathbb{R}_{10}[x] = 11, \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}_9[x]$$

$$\dim \text{Im}(f) = 10$$

$$\dim \text{Ker}(f) = 1$$

Como $\dim \text{Ker}(f) = 1 \neq 0 \rightarrow$ La aplicación no es inyectiva

Como $\dim \mathbb{R}_{10}[x] = 11 \neq \dim \text{Im}(f) = 10 \rightarrow$ La aplicación no es sobreyectiva

Por tanto, la aplicación tampoco es biyectiva.

b) Demostrar que es lineal

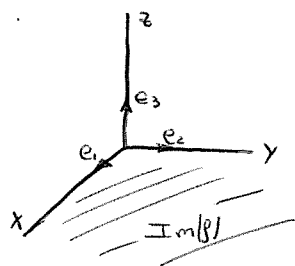
$$u \in \mathbb{R}_{10}[x] \rightarrow f(u) = u' \quad \text{Hay que demostrar que}$$

$$u \in \mathbb{R}_{10}[x] \rightarrow f(u) = u' \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

$$f(\lambda u + \mu v) = (\lambda u + \mu v)' = (\lambda u)' + (\mu v)' = \lambda u' + \mu v' = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Queda demostrada la linealidad de la aplicación

● APLICACIÓN PROYECCIÓN → MÁS TARDE EXPLICADO



Sea la aplicación $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ } Proyección en plano xy

$$P_{xy}(e_1) = e_1$$

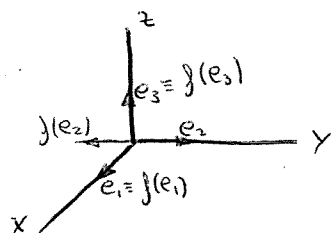
$$P_{xy}(e_2) = e_2$$

$$P_{xy}(e_3) = (0, 0, 0)$$

$$\text{Ker}(f) = \{(0, 0, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} \rightarrow \text{No inyectiva}$$

$$\text{Im}(f) = \{(\alpha, \beta, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \rightarrow \text{No sobreyectiva}$$

● APLICACIÓN SIMETRÍA → MÁS TARDE EXPLICADO



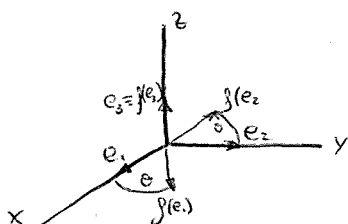
Sea la aplicación $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ } Simetría respecto al plano xz

$$\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\} \iff S_{xz} \text{ es inyectiva}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3 \iff S_{xz} \text{ es sobreyectiva}$$

Es, por tanto, biyectiva

● APLICACIÓN GIRO → MÁS TARDE EXPLICADO



Sea la aplicación $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x', y', z)$ } Giro en torno al eje z

$$\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\} \iff G_z \text{ es inyectiva}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3 \iff G_z \text{ es sobreyectiva}$$

Es, por tanto, biyectiva.

⊕ Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_1 - 2x_2)$$

Se pide:

a) Expresión matricial de la aplicación en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

El esquema matricial sería de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \{e_1(1,0), e_2(0,1)\}$$

$$B_2 = \{e_1'(1,0,0), e_2'(0,1,0), e_3'(0,0,1)\}$$

Expresamos la matriz con los transformados de una base del espacio inicial y estos transformados los expresamos en función de una base del espacio final

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, 0, 1) = 1e_1' + 0e_2' + 1e_3' \\ f(e_2) &= (0, 1, -2) = 0e_1' + 1e_2' - 2e_3' \end{aligned}$$

Exp. matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) Bases del núcleo y de la imagen

$$\dim \text{Im}(f) = r M_{B_1}^{B_2}(f) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \text{No es sobreyectiva}$$

$$B_{\text{Im}(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f); \quad 2 = 2 + \dim \text{Ker}(f); \quad \dim \text{Ker}(f) = 0 \Rightarrow \text{Es inyectiva}$$

Como $\dim \text{Ker}(f) = 0$ no hay base del núcleo

c) Clasificar la aplicación

Aplicación inyectiva no sobreyectiva y, por tanto, no biyectiva.

d) Calcular la expresión matricial de la aplicación en las bases

$$B_2' = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_3' = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$3 \times 1 \quad \quad 3 \times 2 \quad \quad 2 \times 1$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f(0, 2) = (0, 2, -4) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \\ f(v_2) &= f(1, -1) = (1, -1, 3) = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 = -6 + 4 = -2 \\ 2 = \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_2 = 2 + 4 = 6 \\ -4 = \alpha_3 & \alpha_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \beta_1 = 2 \\ -1 = \beta_2 + \beta_3 & \beta_2 = -4 \\ 3 = \beta_3 & \beta_3 = 3 \end{cases}$$

$$M_{B_3'}^{B_2'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Expresión matricial} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

e) Transformado del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \boxed{f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}}$$

⊕ Demo: El núcleo es sub vectorial del espacio inicial

$$f: E_1 \rightarrow E_2$$

$$\text{Ker } f = \{x \in E_1 / f(x) = 0\}$$

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Ker } f \quad \lambda [x_1 \in \text{Ker } f, f(x_1) = 0]$$

$$\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R} \quad \mu [x_2 \in \text{Ker } f, f(x_2) = 0]$$

$$\lambda x_1 + \mu x_2 ; \quad \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = 0 =$$

Por ser aplicación lineal f :

$$\downarrow f(\lambda x_1) + f(\mu x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) = 0 ; \text{ Por tanto } \lambda x_1 + \mu x_2 \in \text{Ker } f$$

Ker f es sub. vectorial de E_1

⊕ Demo: La imagen es sub. vectorial del espacio final

$$f: E_1 \rightarrow E_2$$

$$\text{Im } f = \{y \in E_2 \exists x \in E_1 / f(x) = y\}$$

$$\forall y_1, y_2 \in \text{Im } f \quad \lambda [y_1 \in \text{Im } f \exists x_1 \in E_1 / f(x_1) = y_1]$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \mu [y_2 \in \text{Im } f \exists x_2 \in E_1 / f(x_2) = y_2]$$

Por ser f aplicación lineal:

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2$$

$$\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1) + f(\mu x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2 \in \text{Im } f$$

Por tanto, Im f es sub. vectorial de E_2

3.3 Endomorfismo T en $\mathbb{R}^3$

Calcular $\dim \text{Ker } f$

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$$

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la exp matricial en la base canónica $B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$f(e_1) = (1, 0, 1)$$

$$f(e_2) = (1, 1, 0)$$

$$f(e_3) = (0, 1, 1)$$

$$M_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Expresión matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\dim \text{Im } f = r(M) = 3 ; \quad \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^3$$

$$3 + \dim \text{Ker } f = 3 ; \quad \boxed{\dim \text{Ker } f = 0}$$

La aplicación es inyectiva porque $\dim \text{Ker } f = 0$

" " " sobrees. porque $\dim \text{Im } f = \dim E_2 = 3$ } Aplic. biyectiva $\equiv$ Isomorfismo
Es endomorfismo
 $E_1 = E_2$ $\downarrow$
Automorfismo

3.4 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Hallar } f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

No podemos hacer $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sea combinación lineal de los vectores.

$\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right)^t, (1, 1, 1)$. Sin embargo $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Por tanto,

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 f\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

→ Sea la aplicación $f: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$
 $f(p(x)) \rightarrow p'(x)$

Se pide:

- Expresión matricial en bases canónicas
- Bases del núcleo y la imagen
- Caracterizar la aplicación

a) La expresión matricial tendrá la forma

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$B_{C_1} = \{1, x, x^2, x^3\}$$

$$B_{C_2} = \{1, x, x^2\}$$

Transformados de B_1 : $f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \rightarrow b_0 + b_1x + b_2x^2$

$$f(1) = 0 = (000)_{B_2}$$

$$f(x) = 1 = (100)_{B_2}$$

$$f(x^2) = 2x = (0, 2, 0)_{B_2}$$

$$f(x^3) = 3x^2 = (0, 0, 3)_{B_2}$$

Expresión

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \rightarrow b_0 + b_1x + b_2x^2$$

b) $\dim \text{Im} f = r M = 3$; $\dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = \dim E$
 $3 + \dim \text{Ker} f = 4$; $\dim \text{Ker} f = 1$

$$B_{\text{Im} f} = \{1, 2x, 3x^2\}$$

Base $\text{Ker} f$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$B_{\text{Ker} f} = \{1\}$$

c) La aplicación no es inyectiva porque $\dim \text{Ker} f = 1 \neq 0$

La aplicación es sobreyectiva pues $\dim \text{Im} f = \dim \mathbb{P}_2 = 3$

La aplicación no es biyectiva o, lo que es lo mismo, no es un isomorfismo

No es endomorfismo $\mathbb{P}_3 \neq \mathbb{P}_2 \rightarrow$ No automorfismo

3.7) Obtener bases del $\text{Ker} f$ y $\text{Im} f$ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Expresión matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\dim \text{Im} f = r M = 2$; $\dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3$; $\dim \text{Ker} f = 1$

$$B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Base $\text{Ker} f$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$$

$$B_{\text{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

➔ Sea la aplicación lineal $P_2 \Rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$P[p(x)] = \begin{pmatrix} 0 & p'(x) \\ 2p(x) & p'(x) \end{pmatrix} \text{ de } p \text{ de } p$$

a) Expresión matricial en las bases canónicas

b) Expresión matricial en las bases $B_3 = (1, 1+x, 1+x^2)$; $B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) Bases del Kerf y de la Imf

d) Clasificar la aplicación

a) $B_1 = \{1, x, x^2\}$ $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Transformados de B_1

$$f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = x \\ p'(x) = 1$$

$$p(x) = x^2 \\ p'(x) = 2x$$

Expresión

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

b) $B_3 = (1, 1+x, 1+x^2)$; $B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Transformados de B_3

$$f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ 1 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2 = -\alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = \alpha_4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = 2\alpha_2, \alpha_2 = \frac{3}{2} \\ \alpha_3 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(1+x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = 1+x \\ p'(x) = 1$$

$$\begin{cases} 0 = \beta_1 \\ 1 = \beta_2 + \beta_3 \\ 4 = \beta_2 - \beta_3 \\ 1 = \beta_4 \end{cases} \quad \begin{cases} 5 = 2\beta_2, \beta_2 = \frac{5}{2} \\ \beta_3 = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$f(1+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = 1+x^2 \\ p'(x) = 2x$$

$$\begin{cases} 0 = \gamma_1 \\ 1 = \gamma_2 + \gamma_3 \\ 4 = \gamma_2 - \gamma_3 \\ 0 = \gamma_4 \end{cases} \quad \begin{cases} 5 = 2\gamma_2, \gamma_2 = \frac{5}{2} \\ \gamma_3 = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Expresión $\rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 5/2 & 5/2 \\ -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

c)

$$\text{Base}_{\text{Im}f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} \dim \text{Im}f = 3 \\ \dim B_2 = 3 \end{matrix}$$

$$\dim \text{Im}f + \dim \text{Ker}f = \dim P_2$$

$$\dim \text{Ker}f = 0$$

El núcleo no tiene base

d)

$$\dim \text{Ker}f = 0 \rightarrow \text{Injective}$$

$$\dim \text{Im}f = 3 \neq \dim \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \text{No sobreyectivo} \quad \text{No injectivo / No isomorfismo}$$

$$f: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3 \quad [f(p(t))] = t^2 p''(t) + 2t p'(t) + p(t)$$

Se pide: a) Exp. matricial en la base canónica

- diferente al enunciado

b) Exp. matricial en la base

$$B_1 = \{1, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$$

$$B_2 = \{1, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$$

a) $B_c = \{1, t, t^2, t^3\}$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 & f(t) &= 2t + t = 3t & f(t^2) &= t^2 \cdot 2 + 2t \cdot 2t + t^2 = 7t^2 & f(t^3) &= 6t^3 + 6t^3 + t^3 = 13t^3 \\ p(t) &= 1 & p(t) &= t & p(t) &= t^2 & p(t) &= t^3 \\ p'(t) &= 0 & p'(t) &= 1 & p'(t) &= 2t & p'(t) &= 3t^2 \\ & & p''(t) &= 0 & p''(t) &= 2 & p''(t) &= 6t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\} \rightarrow \{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3\}$$

b) $B_c \xrightarrow{A} B_c$
 $B_1 \xrightarrow{C} B_2$

Coord. de los elementos de la base en función de la B_c

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = 1$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -13 \\ 0 & 3 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}$$

* La matriz de paso P , se forma con los elementos de la nueva base puestos en función de los de la base antigua.

Para calcular la matriz de expresión matricial con la nueva base usamos la

fórmula:

$$C = P^{-1} A P$$

$P \rightarrow$ Matriz de paso
 $A \rightarrow$ u exp. matricial anterior

SÓLO ENDOMORFISMOS

4.1 CUESTIONES

$$C = P^{-1}AP$$

$$f: \mathbb{R}_2(x) \rightarrow \mathbb{R}_2(x)$$

$$M_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = (-1, 1+x, 1+x^2) \quad \text{Se pide: Matriz de } f \text{ en la base } U = (1, x, x^2)$$

La matriz, C, pedida la calcularemos sabiendo que $C = P^{-1}MP$

Siendo P la matriz de paso de la base B a la U

Pondremos los elementos de la base U en función de los de la base B

$$1 = \alpha_1(-1) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x^2) \rightarrow \begin{cases} 1 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = \alpha_2 \\ 0 = \alpha_3 \end{cases} \quad \alpha_1 = -1 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \alpha_1(-1) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x^2) \rightarrow \begin{cases} 0 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 1 = \alpha_2 \\ 0 = \alpha_3 \end{cases} \quad \alpha_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \alpha_1(-1) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x^2) \rightarrow \begin{cases} 0 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = \alpha_2 \\ 1 = \alpha_3 \end{cases} \quad \alpha_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ calculamos } P^{-1}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (P^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$C = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

4.2 CUESTIONES

$$\varphi: \mathbb{R}_2(x) \rightarrow \mathbb{R}_2(x)$$

$$A_B^B; B = \{2, 1+x, x^2\}$$

$$C_U; U = \{3+x, 3-x, 1+x^2\} \quad \text{Hallar P.} \quad P^{-1}AP = C$$

Nos piden que hallamos la matriz de

Ponemos los elementos de la base U en función de los de la B.

$$3+x = \alpha_1(2) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(x^2) \rightarrow \begin{cases} 3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \alpha_2 \\ 0 = \alpha_3 \end{cases} \quad \alpha_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3-x = \beta_1(2) + \beta_2(1+x) + \beta_3(x^2) \rightarrow \begin{cases} 3 = 2\beta_1 + \beta_2 \\ -1 = \beta_2 \\ 0 = \beta_3 \end{cases} \quad \beta_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1+x^2 = \gamma_1(2) + \gamma_2(1+x) + \gamma_3(x^2) \rightarrow \begin{cases} 1 = 2\gamma_1 + \gamma_2 \\ 0 = \gamma_2 \\ 1 = \gamma_3 \end{cases} \quad \gamma_1 = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3 CUESTIONES

$$J: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2 \quad M_B^B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = (u_1, u_2)$$

Se pide la matriz de J respecto de la base $V = (u_1 - u_2, u_1 + u_2)$

Como se trata de un endomorfismo, la matriz C pedida será:

$$C = P^{-1} M P, \text{ donde } P \text{ es la matriz de paso de } \sigma \text{ a } B$$

Glubano $P_{\sigma \rightarrow B}$: Pondremos los elementos de σ en función de la

base B .

$$u_1 = a_1(u_1 + u_2) + a_2(u_1 - u_2) \quad \begin{cases} 1 = a_1 + a_2 \\ 0 = a_1 - a_2 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos P^{-1}

$$P^d = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, (P^d)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = +1 + 1 = +2, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C_v = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

5.4 CUESTIONES

$$\mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

Se pide: Expresión matricial en la base canónica

$$\varphi(p(x)) = p(2x+1) - p(2x-1) + p(x)$$

$$B_c = (1, x, x^2)$$

$$\varphi(1) = 1 - 1 + 1 = 1; \quad \varphi(x) = 2x+1 - (2x-1) + x = 2+x$$

$$p(x) = 1$$

$$p(x) = x$$

$$p(2x+1) = 1$$

$$p(2x+1) = 2x+1$$

$$p(2x-1) = 1$$

$$p(2x-1) = 2x-1$$

$$\varphi(x^2) = (2x+1)^2 - (2x-1)^2 + x^2 = 4x^2 + 1 + 4x - 4x^2 + 1 - 4x + x^2 = 8x + x^2$$

$$p(x) = x^2$$

$$p(2x+1) = (2x+1)^2$$

$$p(2x-1) = (2x-1)^2$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \rightarrow b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$\mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

$$\odot \quad J[p(x)] = x^2 p\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \text{Expresión matricial en la base } B = \{x^2, (x+1)^2, (x-1)^2\}$$

$$J(x^2) = x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 1; \quad J((x+1)^2) = x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2}{x} \right) = 1 + x^2 + 2x = (x+1)^2$$

$$p(x) = x^2$$

$$p(x) = (x+1)^2$$

$$p\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$$

$$p\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 = \frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2}{x}$$

$$J((x-1)^2) = x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{2}{x} \right) = 1 + x^2 - 2x = (x-1)^2$$

$$p(x) = (x-1)^2$$

$$p\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 = \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{2}{x}$$

Ponemos los transformados de la base como c.l de los elementos de la base del espacio final.

$$1 = \alpha_1(x^2) + \alpha_2(x+1)^2 + \alpha_3(x-1)^2$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = 2\alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 &= -\alpha_1; \alpha_1 = -1 \\ 2 &= 4\alpha_2; \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow$$

EXAMEN DICIEMBRE 1993 (2)

$$T: \Pi_2(x) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(\underbrace{2+x-3x^2}_{p_1}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; T(\underbrace{1-x^2}_{p_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; T(\underbrace{5-2x-7x^2}_{p_3}) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Matriz de la aplicación especificando la base

Si p_1, p_2, p_3 forman una base en $\mathbb{R}^3$ y tenemos sus transformados en la base canónica, podremos construir con ellos la matriz aplicación en las bases $B_1\{p_1, p_2, p_3\}$ y $B_2\{e_1, e_2, e_3\}$

Veamos si $\{p_1, p_2, p_3\}$ forman base



$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 6 - 5 + 7 - 4 = 4 \neq 0$$

Por tanto p_1, p_2 y p_3 forman base

$$M_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_1 = \{2+x-3x^2, 1-x^2, 5-2x-7x^2\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Hallar a y b en relación para que T sea inyectiva

T es inyectiva si $\dim \ker T = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim \text{Im} T + \dim \ker T = \dim \Pi_2(x); \quad \dim \text{Im} T = 3 - 0 = 3$$

$$\dim \text{Im} T = r(M) = 3; \quad |M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4b + a + 2 =$$

$$\text{si } |M| \neq 0 \rightarrow r(M) = 3$$

Por tanto la condición es: $4b + a + 2 \neq 0$

c) En ese caso, cuánto vale $\dim \text{Im}(T)$?

$$\boxed{\dim \text{Im } T = 3 = \text{rM}}$$

d) ¿Puede ser inyectiva cualquier aplicación en $\Pi_2(x) \rightarrow \mathbb{R}^2$?

Si una aplicación f es inyectiva $\rightarrow \dim \text{Ker } f = 0$

$$\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim \Pi_2(x); \dim \text{Im } f + 0 = 3 \Rightarrow \text{Imposible}$$

La $\dim \text{Im } f \leq 2 \rightarrow$ Por tanto la aplicación no será inyectiva

Si $\dim E_1 > \dim E_2$ las aplic. no serán inyectivas.

➔ Probar si es posible que una aplicación $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ sea sobreyectiva

Para que f sea sobreyectiva $\rightarrow \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^5 = 5$

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^2$$

No es posible pues $\dim \text{Im } f \geq 2$

Si $\dim E_1 < \dim E_2$
La aplicación nunca
será sobreyectiva.

➔ Dar una base del núcleo y de la imagen de la aplic. del ejercicio anterior de examen para valores que cumplen que $a+4b+2=0$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$1) \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim \Pi_2(x) \rightarrow 3$$

$$\dim \text{Im } f = \text{rg } M = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \quad \dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$$

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{Im } f} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

$\text{Ker } f$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } f = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathcal{B}_1$$

$$\begin{aligned} 2(p_1) - 2(p_2) - (p_3) &= 2(2+x^2-3x^2) - 2(1-x^2) - (5-2x-7x^2) = \\ &= 4-2-5+2x+2x-6x^2+2x^2+7x^2 = -3+4x+3x^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{Ker } f} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3+4x+3x^2 \end{pmatrix}}$$

$$f, g: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$f(A) = AJ \quad y \quad g(A) = JAJ$$

a) Estudiar si son lineales: $f, g, f+g, fg, gf, f \circ g, g \circ f$.

$$\boxed{f} \quad \begin{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}^{2 \times 2} & f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} & f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{CONDICIÓN} \\ \text{DE LINEALIDAD} \end{array} \right\}$$

$$f(x+y) = (x+y)J = xJ + yJ = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda xJ = \lambda f(x)$$

$\Rightarrow f$ es lineal

$$\boxed{g} \quad \begin{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}^{2 \times 2} & g(x+y) = g(x) + g(y) \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} & g(\lambda x) = \lambda g(x) \end{cases}$$

$$g(x+y) = J(x+y)J = (Jx + Jy)J = JxJ + JyJ = g(x) + g(y)$$

$$g(\lambda x) = J \lambda x J = \lambda JxJ = \lambda g(x)$$

$\Rightarrow g$ es lineal

$$\boxed{f+g} \quad \begin{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}^{2 \times 2} & h(A) = (f+g)(A) = f(A) + g(A) = AJ + JAJ = \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} & = (I + J)AJ \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x+y) = h(x) + h(y) \\ h(\lambda x) = \lambda h(x) \end{cases} \rightarrow$$

$$h(x+y) = (I+J)(x+y)J$$

$$h(x) + h(y) = (I+J)xJ + (I+J)yJ =$$

$$= (I+J)(xJ + yJ) = (I+J)(x+y)J = h(x+y)$$

$$h(\lambda x) = (I+J)\lambda xJ = \lambda(I+J)xJ = \lambda h(x)$$

La suma de aplicaciones lineales es aplicación lineal

$$\boxed{f \cdot g} \quad \begin{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}^{2 \times 2} & r(A) = (f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A) = \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} & = AJ \cdot JAJ = AJ^2AJ = A^2J \end{cases}$$

$$r(\lambda x) = (\lambda x)^2 J$$

$$\lambda r(x) = \lambda x^2 J$$

$\Rightarrow$ No es lineal el producto de aplicaciones lineales

g $Q(A) = (g \circ j)(A) = g(j(A)) = JAJ = JA$

$Q(\lambda x) = J \lambda x J = \lambda x J \rightarrow$ No es lineal
 $\lambda Q(x) = \lambda J x J$

g $S(A) = (j \circ g)(A) = j(g(A)) = j(JAJ) = JA \overset{I}{J} = JA$

$S(x+y) = S(x) + S(y)$; $S(x+y) = J(x+y) = Jx + Jy = S(x) + S(y)$
 $S(\lambda x) = \lambda S(x)$; $S(\lambda x) = J \lambda x = \lambda Jx = \lambda S(x)$

La composición de funciones lineales es una aplicación lineal

g $H(A) = (j \circ g)(A) = j(g(A)) = JAJ = JA$ Identica demo $\rightarrow$ es lineal

b) Esquema matricial de j .

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $j: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$
 $A \mapsto AJ$

$B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$j(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2$

$j(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1$

$j(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4$

$j(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3$

Exp. matricial

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$
 $M_{B_c}^{B_c} = \textcircled{F}$

Esquema matricial de g

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $g: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$
 $A \mapsto JAS$

B_c

$g(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4$

$g(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3$

$g(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2$

$g(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
 $M_{B_c}^{B_c} = \textcircled{G}$

Esquema matricial de $f+g$ $B_C \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$$h(a) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = AJ + JAJ = (I+J)AJ$$

$$I+J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 J = e_2$$

$$e_2 J = e_1$$

$$e_3 J = e_4$$

$$e_4 J = e_3$$

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$H_{B_C}^{B_C} = F + G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Esquema matricial de $f \circ g$

$$S(A) = (f \circ g)(A) = f(g(A)) = f(JAJ) = JAJJ = JA$$

$$S(e_1) = J e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3$$

$$S(e_2) = J e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4$$

$$S(e_3) = J e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$S(e_4) = J e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$S_{B_C}^{B_C}$$

Composición $x \xrightarrow{g} x' \xrightarrow{f} x'' = y$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

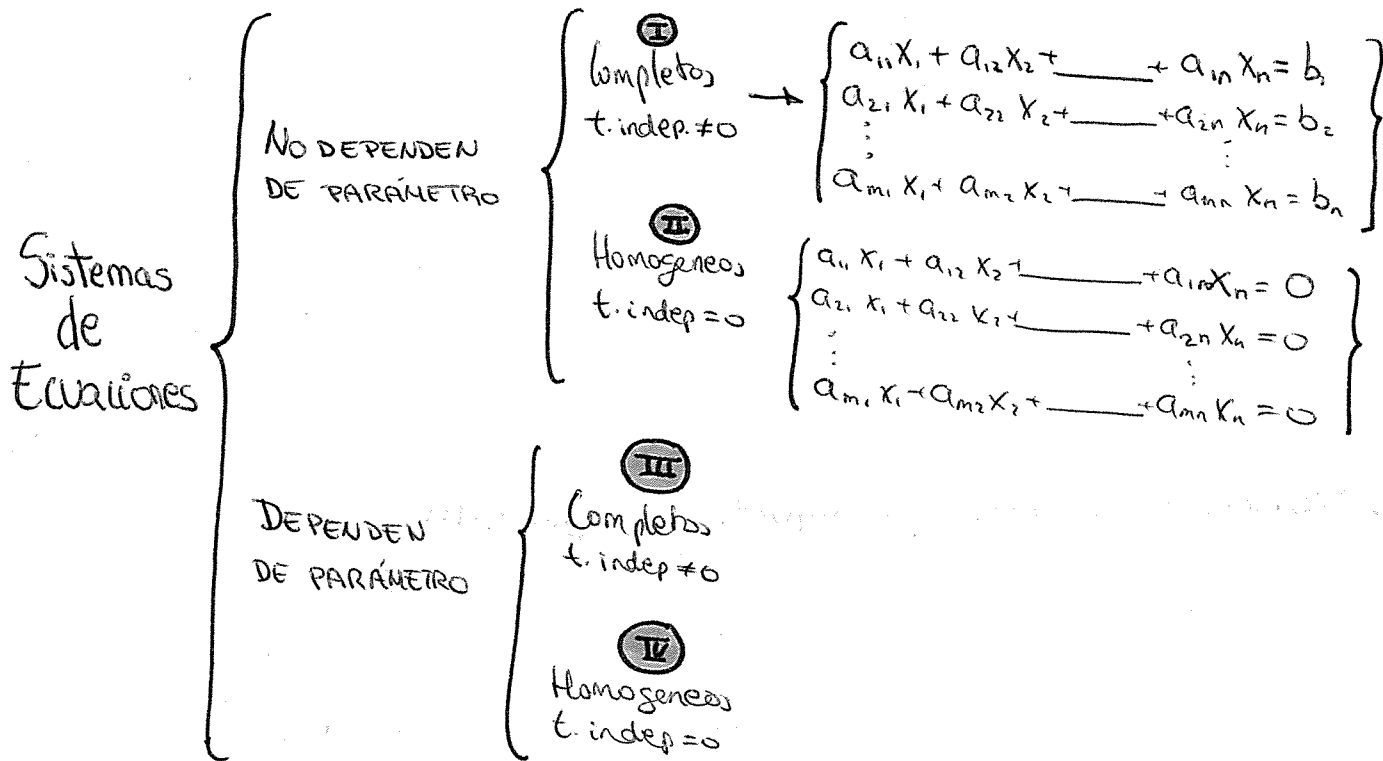
$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \\ x''_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \\ x''_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Comprobación

SISTEMAS DE ECUACIONES



I Discusión

Sistemas completos sin parámetro

Resolución

Teorema de Rouché:

- $r(A) = r(A') = n \rightarrow$ Sistema completo compatible determinado $\Rightarrow$ Gauss, Cramer, A^{-1} , LU, ...
 - $r(A) = r(A') < n \rightarrow$ Sistema completo compatible indeterminado $\Rightarrow$ Daremos valores arbitrarios a tantas incógnitas como me indique el valor $n - r(A)$ y dejamos el resto de incógnitas en función de esos parámetros.
 - $r(A) \neq r(A') \rightarrow$ Sistema incompatible
- No se resuelven pero podemos sacar una solución aproximada por el método de mínimos cuadrados

II Discusión

Sistemas homogéneos sin parámetro

Resolución

$\dim S = n - r(A)$

S es el subespacio generado por las soluciones

- $\dim S = 0 \rightarrow$ sólo admite la solución trivial $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$
 - $\dim S = 1$
 - $\dim S = 2$
- Sistemas compatibles indeterminados $\Rightarrow$ Damos a tantas incógnitas como sea $\dim S$, un valor arbitrario y dejamos el resto en función de ellas.

III Sistemas completos que dependen de parámetro

a) $\det(A) = 0$
 $\det(A') = 0$ $\Rightarrow$ Sacamos los valores del parámetro que hacen cero el determinante.
 Sustituyendo dichos valores en el sistema pasamos a un sistema del tipo $\textcircled{I}$, es decir, completo y sin parámetro.

b) Gauss $\Rightarrow$ Sacamos aquellos valores del parámetro que anulan los elementos de la diagonal principal o, en su defecto, que cambian el valor del rango.

Sustituyendo dichos valores en el sistema pasamos a un sistema del tipo $\textcircled{I}$, es decir, completo y sin parámetro.

IV Sistemas homogéneos que dependen de parámetro

Usamos uno de los dos métodos a, b anteriores y llegaremos a sistemas del tipo $\textcircled{II}$, es decir, homogéneos sin parámetro.

8.1 Cuestiones: Calcule a para que el sistema sea compatible $\oplus$ Discusión
Resolución

Tenemos un sistema completo con parámetro

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a^2 \end{cases}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+a & 2+a & 2+a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Resto la 1ª fila a todas Sumamos todos los k es a la 1ª

$$= (2+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2+a)(-1)(a-1)^2$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

① $\forall a \neq 1 \text{ y } a \neq -2$ $\begin{cases} r(A) = 3 \\ r(A') = 3 \\ n = 3 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema compatible determinado

Sol: $\forall a \in \mathbb{R} / a \neq -2, 1$

Resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(2+a)} = \frac{a+a^2+a^2-a^3-a-1}{-(a-1)^2(2+a)} = \frac{(a-1)(-a^2+a-1)}{-(a-1)^2(2+a)} = \frac{a^2-a+1}{(a-1)(a+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(2+a)} = \frac{a+a+a^3-a^3-1-a^2}{-(a-1)^2(2+a)} = \frac{a^3-2a+1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & a & a^2 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(2+a)} = \frac{a^3+a^2+1-a^2-a^2-a}{-(a-1)^2(2+a)} = \frac{(a-1)^2(a+1)}{-(a-1)^2(2+a)} = \frac{a+1}{-(2+a)}$$

② $a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 2$$

$$r(A') = 3$$

Sistema incompatible
 $a = -2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 2 - 1 - 16 + 2 = -9 \neq 0$$

③ $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 1$$

$$r(A') = 1$$

$$n = 3$$

Sistema compatible indeterminado $\rightarrow a = 1$

$3 - 1 = 2$ parámetros

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Solución general

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una solución particular + $\text{Ker}(A)$ o solución general del sistema homogéneo asociado

8.2) Discutir el sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 & x_1 \\ a & 1 & a & a^2 & x_2 \\ a^2 & a & 1 & a & x_3 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & x_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 & a^2-a^4 \\ 0 & a-a^3 & 1-a^4 & a-a^5 \\ 0 & a^2-a^4 & a-a^5 & 1-a^6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-a^2) & a(1-a^2) & a^2(1-a^2) \\ a(1-a^2) & (1+a^2)(1-a^2) & a(1+a^2)(1-a^2) \\ a^2(1-a^2) & a(1+a^2)(1-a^2) & (1+a^2)(1-a^2) \end{vmatrix} = (1-a^2)(1-a^2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1+a^2 & a+a^3 \\ a^2 & a-a^5 & 1-a^6 \end{vmatrix}$$

$$e_{21} \rightarrow a$$

$$e_{31} \rightarrow -a^2$$

$$e_{41} \rightarrow -a^3$$

$$= (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & a \\ 0 & a-a^3 & 1-a^4 \end{vmatrix} = (1-a)^2 [(1-a^4) - (a^2-a^4)] =$$

$$e_{21} \rightarrow -a$$

$$e_{31} \rightarrow a^2 + a^4$$

$$= (1-a)^2 (1-a^2) = (1-a^2)^3$$

$$\text{si } \det |A| = 0 \rightarrow 1-a^2 = 0, a = \pm 1$$

① $\forall a \neq \pm 1$

$r(A) = 4 = r(A') = n \rightarrow$ sistema compatible determinado

② si $a=1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} r(A)=1 \\ r(A')=1 \\ n=4 \end{matrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{sistema compatible indeterminado} \end{array} \right.$$

③ si $a=-1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A)=1 \\ r(A')=2 \end{matrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{sistema incompatible} \end{array} \right.$$

8.3) Discutir el sistema y resolver cuando sea posible

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 7 \\ 7x + 8y + \lambda z = N \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & \lambda & N \end{array} \right) \xrightarrow{e_2 \rightarrow -4, e_3 \rightarrow -7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & \lambda-21 & N-7 \end{array} \right) \xrightarrow{e_{23} \rightarrow -2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-9 & N-13 \end{array} \right)$$

$$\det |A| = -3(\lambda-9)$$

$$\lambda = 9$$

① $\forall \lambda \neq 9$ $r(A)=3 = r(A')=n \rightarrow$ Sistema compatible determinado
 $\forall N \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 6z = 7 \\ (\lambda-9)z = N \end{cases} \quad \begin{matrix} z = \frac{N}{\lambda-9} \\ y = \frac{7+6(\frac{N}{\lambda-9})}{-3} = \frac{7\lambda-63+6N}{-3} \\ x = 1 - 2\left(\frac{7\lambda-63+6N}{-3}\right) - 3\left(\frac{N}{\lambda-9}\right) \end{matrix}$$

$$x = 1 - 2\left(\frac{7\lambda-63+6N}{-3}\right) - 3\left(\frac{N}{\lambda-9}\right); \quad y = \frac{7\lambda-63+6N}{-3}; \quad z = \frac{N}{\lambda-9}$$

② $\lambda=9$ $r(A)=2$
 $\forall N \in \mathbb{R}$

$$r(A') = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & N \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menor de orden 3}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & N \end{pmatrix} = 12N + 168 + 45 - 48 - 15N - 126 = -3N + 39$$

si $-3N + 39 = 0 \rightarrow N = \frac{-39}{-3} = 13$

2.1 $\lambda=9$ $r(A)=2$ $\rightarrow$ sistema incompatible
 $N \neq 13$ $r(A')=3$

2.2 $\lambda=9$ $r(A)=2$ $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado
 $N=13$ $r(A')=2$ $\rightarrow$ parámetros $\rightarrow 3-2=1$
 $n=3$

Tomamos las operaciones de GAUSS $\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 6z = 3 \end{cases} \approx \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 2z = 1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x = \alpha + 3 \\ y = -2\alpha - 1 \\ z = \alpha \end{cases}}$$

$$x = 1 - 2y - 3z = 1 - 2(-2\alpha - 1) - 3\alpha = 1 + 4\alpha + 2 - 3\alpha = 3 + \alpha$$

SOLUCIÓN GENERAL

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

8.4) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 2 & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$. Decir si es verdadero o falso

a) Si el sistema $\vec{A}x = \vec{b}$ tiene solución entonces es indeterminado

Si el sistema es indeterminado $r(A) = r(A') \neq n$

$$(A) \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & \alpha & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & \alpha & \alpha & 2 & b_2 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha & b_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & \alpha & b_3 \\ 2 & \alpha & \alpha & 2 & b_2 \\ \alpha & \alpha & 2 & 2 & b_1 \end{array} \right) \xrightarrow{e_{21} \rightarrow -1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & \alpha & b_3 \\ 0 & \alpha-2 & \alpha-2 & 2-\alpha & b_2-b_3 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & 2-\frac{\alpha^2}{2} & b_1-\frac{\alpha b_3}{2} \end{array} \right)$$

$$2(\alpha-2)(2-\alpha) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 \end{array} \right.$$

$$e_{21} \rightarrow -1$$

$$e_{31} \rightarrow -\frac{\alpha}{2}$$

$\forall \alpha \neq 2 \rightarrow r(A) = 3 = r(A') \neq n = 4 \rightarrow$ compatible indeterminado

$\alpha = 2 \rightarrow r(A) = 1 \begin{cases} < r(A') \rightarrow \text{incompatible} \\ = r(A') \neq n = 4 \rightarrow \text{comp. indeterminado} \end{cases}$

Podemos decir que la proposición es cierta

b) Si $\alpha = 2 \exists \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $Av_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Familia } \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}}$$

$$\begin{cases} x_1 = +\lambda - \mu - \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \lambda \end{cases}$$

Hemos encontrado una familia por lo que la proposición es cierta

© $\vec{A}x = \vec{b}$ es compatible $\forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \neq 2$

Es falso Tomando la anterior discusión sabemos que

si $\alpha = 2 \rightarrow r(A) = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} r(A') = 2 \\ r(A') = 1 \end{array} \right.$

$\rightarrow$ En este caso el sist. seguiría siendo compatible

d) No existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $\vec{A}x = 0$ tenga solución única

$$\vec{A}x = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 2 & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dim S = n - r(A)$$

si $\alpha \neq 2 \rightarrow r(A) = 3$

$\dim S = 4 - 3 = 1 \Rightarrow$

El sub. generado por las soluciones tiene dim. 1 y el sistema es comp. indet.

si $\alpha = 2 \rightarrow r(A) = 1$

$\dim S = 4 - 1 = 3 \Rightarrow$ comp. indet.

Proposición cierta

8.5 Determinar los valores de a que hacen que el sistema tenga solución única

$$\begin{pmatrix} -3 & a & \dots & a \\ a & -3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3+a(n-1) & -3+a(n-1) & \dots & -3+a(n-1) \\ a & -3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & -3 \end{vmatrix} = [-3+a(n-1)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & -3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & -3 \end{vmatrix}$$

restamos a todas la 1ª

Sumamos todos a la 1ª. a

$$= [-3+a(n-1)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -3-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -3-a \end{vmatrix} = [-3+a(n-1)] (-3-a)(n-1), \text{ si } |A| = 0$$

$$\begin{cases} -3+a(n-1) = 0, & a = \frac{3}{n-1} \\ a = -3 \end{cases}$$

$\forall a \neq \left(-3, \frac{3}{n-1}\right)$

$r(A) = r(A') = n$

Sistema compatible determinado y, por tanto, solución única

Matrices

- Llamaremos matriz de dimensión $m \times n$ a un esquema de $m \times n$ números distribuidos en m filas y n columnas.

El conjunto de las matrices de dimensión $m \times n$ con un cuerpo conmutativo de escalares y las leyes de composición $(+)$ y $(\cdot)$ tiene estructura de espacio vectorial.

$[\mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{R}, +, \cdot]$ es el espacio vectorial.

OPERACIONES CON MATRICES

- RANGO: Llamaremos rango de una matriz A y lo representaremos como $\text{rg } A$ al n° de filas o columnas linealmente independientes. Propiedades:

- ① El rango por filas coincide con el rango por columnas.
- ② El rango de la suma $\rightarrow \text{rg}(A+B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$
- ③ El rango del producto $\rightarrow \text{rg}(A \cdot B) \leq \min[\text{rg}(A), \text{rg}(B)]$
- ④ Si B es invertible $\rightarrow \text{rg}(A \cdot B) = \text{rg}(A)$

- TRASPOSICIÓN DE MATRICES: Dada una matriz A , llamaremos matriz transpuesta A^t a la que resulta de cambiar sus filas por columnas.

Propiedades:

- ① $(A+B)^t = A^t + B^t$
- ② $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
- ③ $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- ④ $(A^t)^t = A$
- ⑤ $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

- SUMA Y RESTA DE MATRICES: Para poder sumar o restar dos matrices, éstas tienen que tener la misma dimensión, y se suman o restan elemento a elemento.

- PRODUCTO DE MATRICES: Para poder multiplicar dos matrices, el n° de columnas de la primera tiene que coincidir con el n° de filas de la segunda y la matriz producto tendrá tantas filas como la 1ª y tantas columnas como la segunda. $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$

NOTA: Por lo anterior el producto de matrices no es conmutativo:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

• COCIENTE DE MATRICES: No está definida la operación cociente entre matrices.
Solucionaremos este problema utilizando exponentes negativos.

Por tanto, dada una matriz B , llamaremos matriz inversa B^{-1} que cumple que $B B^{-1} = B^{-1} B = I$

● MÉTODOS PRÁCTICOS PARA INVERTIR MATRICES

① Regla de los tres pasos:

$$A \rightarrow A^t \rightarrow (A^t)^d \rightarrow \frac{(A^t)^d}{|A|} = A^{-1} \iff \text{Para que una matriz sea invertible } |A| \neq 0$$

➔ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; hallar A^{-1}

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; (A^t)^d = \begin{pmatrix} -6+1 & 16 \\ +8 & 3 & -4 \\ -4+5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -6 & 1 & 16 \\ 8 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 24 + 8 - 4 = 26$$

② Lagrange - Gauss

$$(A; I) \xrightarrow{\text{Gauss}} (I; A^{-1})$$

➔ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ Halla A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right); A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

③ Método de las ecuaciones

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n &= e_1 \\ x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n &= e_2 \\ x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n &= e_3 \\ \vdots & \\ x_{n-1} + x_n &= e_{n-1} \\ x_n &= e_n \end{aligned} \right\}$$

Resolvemos sistema

$$\begin{cases} x_1 = e_1 - e_2 \\ x_2 = e_2 - e_3 \\ x_3 = e_3 - e_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} = e_{n-1} - e_n \\ x_n = e_n \end{cases}$$

$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \rightarrow$ Base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Tipos de Matrices

• NULA $O = W = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

• DIAGONAL $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

• IDENTIDAD
UNIDAD $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

• TRIANGULAR SUPERIOR $U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

• ESCALAR $KI = \begin{pmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}$

• TRIANGULAR INFERIOR $L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

• SIMÉTRICA
 $S = S^t$
 $S = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$

• ANTISIMÉTRICA
 $A = -A^t$
 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

• HERMÍTICA
 $H = \overline{H}^t = H^h$
 $H = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -2i \\ 1-i & 0 & 3+3i \\ 2i & 3-3i & -2 \end{pmatrix}$

• ANTIHERMÍTICA
 $A = -\overline{A}^t = -A^h$
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 2i \\ -1-i & -i & 2+3i \\ 2i & -1+3i & 2i \end{pmatrix}$

NOTA! $S \oplus A = \mathbb{R}^{n \times n}$
 $H \oplus A = \mathbb{C}^{n \times n}$

• INVOLUCIÓN (Simetrías)

$A^2 = I$

• IDEMPOTENTE (Proyecciones)

$A^2 = A$

• NILPOTENTE DE ORDEN P

$A^p = 0$
 $A^{p-1} \neq 0$

• MATRIZ REGULAR $|A| \neq 0$

• MATRIZ SINGULAR $|A| = 0$

➔ En el espacio de las matrices reales de 2×2 se definen los subespacios

$S = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 - x_3 = 0 \right\}$

Se pide: a) Base, dimensión y ecuaciones cartesianas de $S, A, S+A, S \cap A$

b) Encontrar una base del suplementario de S

c) Encontrar una base del subespacio ortogonal a S .

d) ¿Son S y A suma directa de las matrices reales de 2×2 ? Si es así, calcular la proyección de la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ sobre S .

$A = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$

a) $\dim S = 3$; $B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim A = 1$; $B_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim(S+A) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$

$B_{S+A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$S+A = \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Ecuaciones de S
 $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Ec de A
 $\begin{cases} x_1 = 0, x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

S+A no tiene ecuaciones implícitas por coincidir con el esp total

$\dim S+A = \dim S + \dim A - \dim S \cap A$, $\dim S \cap A = 0$
 $4 = 3 + 1 - \dim S \cap A$

Como $\begin{cases} \dim S+A = \dim \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \dim S \cap A = 0 \end{cases} \rightarrow S \text{ y } A \text{ son suplementarios}$

b) y c)

Base del supl $\rightarrow B_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Base de $S^\perp \rightarrow B_{S^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

LAS MATRICES SIMÉTRICAS Y LAS ANTISIMÉTRICAS FORMAN DOS SUBESPACIOS ORTOGONALES

d)

$X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 3 = \beta - \delta \\ 5 = \beta + \gamma \\ -2 = \delta \end{cases} \quad \begin{cases} \delta = -2 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 5 - 4 = 1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$P_S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$P_{S^\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

⊕ Sean w_1 y w_2 subconjuntos de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ donde $w_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$

Demstrar:

a) w_1 y w_2 son subespacios

b) Base y dimensión de w_1 y w_2

c) Calcular bases de los subespacios suma e intersección

d) Calcular base del suplementario de w_2 .

w_1

$$\text{a) } \forall x, y \in w_1 \quad \begin{cases} x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / \begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{matrix} \\ y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} / \begin{matrix} y_1 - y_3 = 0 \\ y_2 - y_4 = 0 \end{matrix} \end{cases} ; \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} / \begin{matrix} (\lambda x_1 + \mu y_1) - (\lambda x_3 + \mu y_3) = 0 \\ (\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_4 + \mu y_4) = 0 \end{matrix}$$

$$\lambda x + \mu y \in w_1$$

Por tanto w_1 es subespacio

w_2

$$\forall x, y \in w_2 \quad \begin{cases} x = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \\ y = \begin{pmatrix} -\alpha' & \alpha' \\ \beta' & -\beta' \end{pmatrix} \end{cases} ; \quad \lambda x + \mu y = \begin{bmatrix} -(\lambda\alpha + \mu\alpha') & \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ \lambda\beta + \mu\beta' & -(\lambda\beta + \mu\beta') \end{bmatrix} \in w_2$$

Por tanto w_2 es subespacio

b)

$$w_1: \begin{matrix} \text{nec} \\ w_1 \end{matrix} = \dim \mathbb{R}^{2 \times 2} - \dim w_1$$

$$2 = 4 - \dim w_1 ; \quad \dim w_1 = 2$$

$$\text{Base}_{w_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w_2: \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = -\beta \end{cases} \rightarrow \text{ecuaciones} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \dim w_2 = 2$$

$$\text{Base}_{w_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$c) \quad w_1 + w_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Veamos si son linealmente independientes los vectores dados

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0 \rightarrow \text{Son linealmente dependientes}$$

$$\text{Extraemos 1} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow \text{Base}_{w_1 + w_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim w_1 \cap w_2 ; \quad \dim w_1 \cap w_2 = 1$$

$$3 = 2 + 2 - \dim w_1 \cap w_2$$

$$w_1 \cap w_2: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_4 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\text{Base}_{w_1 \cap w_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$d) \dim W_2 = 2 \rightarrow \dim S_{W_2} = 2$$

Buscamos el $W_2^\perp$
que sabemos que es
suplementario:

$$W_2 = \begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_3 + X_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{B_{W_2^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

GIROS, PROYECCIONES Y SIMETRÍAS

GIROS

Las matrices de giro respecto de los ejes Ox , Oy y Oz , de ángulo α :

$$G_{Ox} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad G_{Oy} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$G_{Oz} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTA!

Una matriz de giro es: $\begin{cases} \text{ortogonal} \rightarrow GG^t = G^tG = I \\ \det(G) = 1 \end{cases}$

Método para construir una matriz de giro con un vector U_1 .
El vector U_1 es el eje de giro.

① CONSTRUIMOS UNA BASE ORTONORMAL CON EL VECTOR
 $U_2 \perp U_1$

② HALLAMOS EL TERCER VECTOR DE LA BASE

$U_1 \times U_2 = U_3$ Además, así aseguramos que el sentido de giro es el
correcto

③ CONSTRUIMOS P

$$P = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

④

$$G_{U_1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} P^t$$

➔ Ejemplo Encontrar las coordenadas de un punto obtenido al girar un punto

$P(1, 1, 1)$ un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ alrededor de la recta $r = \begin{cases} x=0 \\ y=4\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}$

encontrar también la matriz de giro

eje $\rightarrow U_1 = (0, 4, 3)$ Base O.N. $\{U_1, U_2, U_3\}$

$$U_2 \perp U_1 \rightarrow \langle U_2, U_1 \rangle = 0 \rightarrow (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0, \quad 4x + 3z = 0$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_1 \times U_2 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{k} = (0, 3, -4)^t \Rightarrow \text{ORTONORMALIZO}$$

$$\|U_1\| = 5$$

$$\|U_2\| = 1$$

$$\|U_3\| = 5$$

$$B \left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \quad P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad P^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$G_u = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} P^t ; \quad G_u = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & -20 \\ -15 & 16 & 12 \\ 20 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Entonces $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & -20 \\ -15 & 16 & 12 \\ 20 & 12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 41 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1^{\text{a}} \text{ coordenada} \\ -5 \end{matrix}$$

➔ GARRILES

Fórmula de la matriz de giro respecto de un eje en función de la matriz de proyección de dicho eje

$$G = P + \cos \theta (I - P) + \sin \theta \tilde{U} (I - P)$$

Donde P es la matriz de proyección respecto del eje U

U es el eje $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $\tilde{U}$ es la matriz hermítica $\tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$

➔ En una matriz de giro calcularemos las ecuaciones del eje de giro buscando aquellos elementos que se transformen en sí mismos, o, lo que es lo mismo, calculando las ecuaciones de:

$$\text{Ker } (G - I)$$

y buscaremos el ángulo de giro:

$$\cos \theta = \frac{\text{traza } G - 1}{2}$$

PROYECCIONES

- Matriz proyección sobre una recta.

$$P = \frac{U U^t}{U^t U}$$

- Matriz proyección sobre un subespacio

Tomamos una base del subespacio y la colocamos por columnas

$$B = \{U_1, U_2, \dots, U_r\}$$

$$A = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_r \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$P = A(A^t A)^{-1} A^t$$

- Matriz proyección sobre subespacio dim: $n-1$

$$P = I - \frac{W W^t}{W^t W}$$

siendo W la dirección normal al subespacio

HOUSEHOLDER

➔ Ejercicio: Sea el plano $\pi \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0$ Calcular la matriz de proyección sobre dicho plano

$$P = I - \frac{W W^t}{W^t W}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (normal del plano)}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Otra fórmula → Genérica $P = A(A^t A)^{-1} A^t$

$$\text{Subespacio } \pi \rightarrow B_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & +1 \\ +1 & 2 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & +1 \\ +1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

Otro método:

NOTA! $P_S + P_{S^\perp} = I$

El sub. ortogonal a $\Pi = X_1 + X_2 + X_3 = 0$

es $\Pi^\perp = r = \begin{cases} X_1 = \lambda \\ X_2 = \lambda \\ X_3 = \lambda \end{cases} \quad P_r = \frac{U U^t}{U^t U} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como $P_S + P_{S^\perp} = I$, $P_\Pi = I - P_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

⊕ Si la matriz de proyección sobre una recta es $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular la recta

NOTA! Para calcular los subespacios de proyección, igual que con los ejes de giro, calculamos los elementos que se proyectan sobre sí mismos

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 = 0 \\ -X_1 + 2X_2 - X_3 = 0 \\ -X_1 - X_2 + 2X_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \frac{1}{3} X_3 \\ X_2 = \frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \frac{1}{3} X_3 \\ X_3 = \frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \frac{1}{3} X_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 = 0 \\ -X_1 + 2X_2 - X_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3X_1 - 3X_2 = 0 \\ X_1 = X_2 = \lambda \end{matrix} \quad X_3 = 2\lambda - \lambda = \lambda$

Paramétricos

$r = \begin{cases} X_1 = \lambda \\ X_2 = \lambda \\ X_3 = \lambda \end{cases}$

• Características de una matriz de proyección

① Son idempotentes $P^2 = P$

Demo: $P = A(A^t A)^{-1} A^t$; $P^2 = A(A^t A)^{-1} \underbrace{A^t A(A^t A)^{-1}}_I A^t = A(A^t A)^{-1} A^t = P$

② Son simétricas $P = P^t$

$P = A(A^t A)^{-1} A^t$

$P^t = (A(A^t A)^{-1} A^t)^t = (A^t)^t [(A^t A)^{-1}]^t A^t = A [(A^t A)^t]^{-1} A^t = A(A^t A)^{-1} A^t = P$

③ El $\det P = 0$

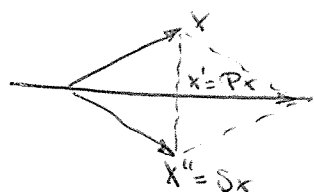
SIMETRÍAS

Que Odin nos proteja!

En general obtendremos la matriz de simetría a través de la de proyección P.

$$S = 2P - I$$

Demo



$$\begin{aligned} x + x'' &= 2x' \\ x'' &= 2x' - x \\ Sx &= 2Px - x \\ Sx &= (2P - I)x \\ S &= 2P - I \end{aligned}$$

• Simetría sobre una recta de dirección U

$$P = \frac{UU^t}{U^t U} \quad ; \quad S = 2 \frac{UU^t}{U^t U} - I$$

• Simetría sobre un subespacio de dim n-1 y vector normal w

$$P = I - \frac{ww^t}{w^t w} \quad ; \quad S = 2 \left[I - \frac{ww^t}{w^t w} \right] - I = I - 2 \frac{ww^t}{w^t w}$$

➔ En $\mathbb{R}^n$, dado el subespacio de ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ encontrar la matriz de simetría

$$n_{ec} = \dim \mathbb{R}^n - \dim S, \quad 1 = n - \dim S \rightarrow \dim S = n-1 \quad ; \quad w = (1, 1, \dots, 1)$$

$$S = 2P - I = 2 \left[I - \frac{ww^t}{w^t w} \right] - I = I - 2 \frac{ww^t}{w^t w}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - 2 \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - 2 \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & n-2 & \dots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & \dots & n-2 \end{pmatrix} = S$$

• Propiedades de las matrices de simetría

① Son involuciones $S^2 = I$

$$\text{Demo } S^2 = (2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I^2 = 4P - 4P + I = I$$

por ser idempotente

② Son simétricas $S^t = S$

$$S^t = (2P - I)^t = 2P^t - I^t = 2P - I = S$$

demostrado

③ del $S = I - 1$

NOTA! Las giro y las simetrías son aplicaciones isométricas es decir, aplicaciones que conservan ángulos y distancias

➔ Calcular la ecuación de simetría de $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Sabemos que $S = 2P - I$

$$P = I - \frac{ww^t}{w^t w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|S| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{27} - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} = -1 \checkmark$$

➔ Calcular la matriz de simetría sobre la recta de dirección $\vec{v}(1, 1, 1)$

$$S = 2P - I = 2 \frac{vv^t}{v^t v} - I = 2 \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{3} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|S| = \frac{-1}{27} + \frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = 1 \checkmark$$

Determinantes

- Sean los espacios vectoriales $E_1, E_2, \dots, E_n, F$, diremos que f es una aplicación multilineal o n -lineal de $f: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ si cumple que:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Diremos que una aplicación multilineal es alternada si:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0 \quad (\text{Por ser dos argumentos iguales})$$

Diremos que una aplicación multilineal es antisimétrica si:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

(al permutar dos argumentos entre sí, la forma multilineal cambia de signo.)

NOTA! Toda forma multilineal alternada es antisimétrica y viceversa

PROPIEDADES DE LAS APLICACIONES MULTILINEALES ALTERNADAS

① Una aplicación multilineal con un argumento cero vale cero

$$f(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(0x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

② Una forma multilineal que tiene dos argumentos proporcionales vale cero
 $x_2 = \lambda x_1$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \lambda x_1, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot 0 = 0$$

③ Una aplicación multilineal no varía si a uno de sus argumentos le añadimos una combinación lineal del resto.

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, \lambda x_2 + w x_3, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + f(\lambda x_2, \cancel{x_2}, \cancel{x_3}, \dots, x_n) + f(w x_3, \cancel{x_2}, \cancel{x_3}, \dots, x_n) =$$

$$= f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

NOTA! Los determinantes son aplicaciones multilineales donde todos los espacios son $\mathbb{R}^n$ y F es $\mathbb{R}$. Cada argumento x_i de la forma multilineal representa una fila o columna del determinante.

○ TIPOS DE DETERMINANTES

≡ I) Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

≡ II)

Sumamos todas las filas a la 1ª

$$\begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ x & a & x & \dots & x \\ x & x & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a \end{vmatrix} \xrightarrow{+} \begin{vmatrix} a+(n-1)x & a+(n-1)x & \dots & a+(n-1)x \\ x & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a \end{vmatrix} =$$

$$= [a+(n-1)x] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & a & x & \dots & x \\ x & x & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a \end{vmatrix} \xrightarrow{+} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-x \end{vmatrix} [a+(n-1)x] =$$

Restamos a todas las filas la 1ª multiplicada por x

$$= [a+(n-1)x] [a-x]^{n-1}$$

○ MÉTODOS DE DESARROLLO DE UN DETERMINANTE

1) Desarrollo del determinante por los elementos de una fila (columna)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{+} 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

Desarrollo por adjuntos de la 1ª C

$$= 1 \cdot (-14) + 2 \cdot (-14) + 5 \cdot (-14) + 4 \cdot (0) = -112$$

NOTA! Se recomienda aplicar este método cuando tengamos muchos ceros en una fila. Si no tenemos los ceros, podemos hacer ceros mediante transformaciones elementales y después desarrollar por esa fila o columna.

2) Desarrollo del determinante por los elementos de dos filas (columnas) simultáneamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} M_{12}^{12} M_{34}^{34} + (-1)^{1+2+1+3} M_{12}^{13} M_{34}^{24} + (-1)^{1+2+1+4} M_{12}^{14} M_{34}^{23} + (-1)^{1+2+2+3} M_{12}^{23} M_{34}^{14} \\ + (-1)^{1+2+2+4} M_{12}^{24} M_{34}^{13} + (-1)^{1+2+3+4} M_{12}^{34} M_{34}^{12} =$$

Combinaciones 4x4

(1,2) ; (2,3)
(1,3) ; (2,4)
(1,4) ; (3,4)

$\left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 5 & -3 \\ -4 & 4 \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 5 & 0 \\ -4 & -1 \end{matrix} \right| +$

$\left| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{matrix} \right| = 6 - 42 - 6 - 16 - 54 = -112$

$\left| \begin{matrix} \text{Columnas} \\ \text{filas} \end{matrix} \right|$

NOTA! Se recomienda aplicar este método cuando el determinante tenga ceros coneros, o bien cuando, mediante transformaciones elementales, consigamos hacer ceros en ceros. En este supuesto, el valor del determinante es el producto de los determinantes contiguos a la caja de ceros.

→ Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+3+1+2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

→ Desarrollando por los 3 primeras filas, como hay una caja de ceros, el determinante es el producto de los determinantes contiguos a la caja de ceros.

3) Desarrollo del determinante por los elementos de una fila y una columna simultáneamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - (-1)(-2) \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (-1)(5) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)(4) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} -$$

Desarrollamos por 1ª fila y 1ª columna

$$- (2)(-2) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (2)(5) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (2)(4) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3(-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3(5) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3(4) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-6-8) - [2(-3) + 5(8) - 4(-6) + 4(7) + 10 \cdot 0 - 8 \cdot 0 - 6(-1) - 15(-2) + 12(-2)] =$$

$$= -14 - 98 = -112$$

NOTA! Se recomienda aplicar este método en los siguientes casos:

- Desarrollar por una fila y una columna con muchos ceros, haciendo cero antes de desarrollar si fuese necesario
- Cuando, al tachar una fila y una columna, no quede el determinante de una matriz diagonal

→ Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -8 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} - \left[2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 3 \cdot 6 \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + 4 \cdot 7 \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \right]$$

El resto son ceros!

9.7 Calcular el mayor raíz del polinomio

$$P_5(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} - \left[1 \cdot 1 \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} P_5(x) &= 2x P_4(x) - P_3(x) \\ P_4(x) &= 2x P_3(x) - P_2(x) \\ P_3(x) &= 2x P_2(x) - P_1(x) \\ P_2(x) &= 2x P_1(x) - P_0 \\ P_1(x) &= 2x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P_1(x) &= 2x \\ P_2(x) &= \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 - 1 \\ P_3(x) &= 2x(4x^2 - 1) - 2x = 8x^3 - 2x - 2x = 8x^3 - 4x \\ P_4(x) &= 2x(8x^3 - 4x) - (4x^2 - 1) = 16x^4 - 8x^2 - 4x^2 + 1 = 16x^4 - 12x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$P_5(x) = 2x(16x^4 - 12x^2 + 1) - (8x^3 - 4x) = 32x^5 - 24x^3 - 2x - 8x^3 + 4x = 32x^5 - 32x^3 + 2x = 2x(16x^4 - 16x^2 + 1)$$

$$P_5(x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 16x^4 - 16x^2 + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 = t \\ x^4 = t^2 \end{cases} \quad t = \frac{+16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 16}}{2 \cdot 16} = \frac{16 \pm 8\sqrt{3}}{2 \cdot 16} = \frac{8(2 \pm \sqrt{3})}{8 \cdot 4} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$$t_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

???

9.2 Calcular $|B|$

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & - & \\ -a_2 & - & \\ -a_3 & - & \end{pmatrix} \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad |A| = 7$$

$$B = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 - a_3 \\ a_2 - a_1 - a_3 \\ a_3 - a_1 - a_2 \end{pmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 - a_3 \\ -2a_3 \\ -2a_2 \end{vmatrix} = (-2)(-2) \begin{vmatrix} a_1 - a_2 - a_3 \\ a_3 \\ a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \left[\begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} -a_2 \\ a_3 \\ a_2 \end{vmatrix}} + \cancel{\begin{vmatrix} -a_3 \\ a_3 \\ a_2 \end{vmatrix}} \right] = 4 \begin{vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = -4 |A| = \boxed{-28}$$

9.3 Determinar el raíz múltiple de la ecuación en x

$$\begin{vmatrix} x & 1 & a & 1 \\ 1 & x & 1 & a \\ a & 1 & x & 1 \\ 1 & a & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+a+2 & x+a+2 & x+a+2 & x+a+2 \\ 1 & x & 1 & a \\ a & 1 & x & 1 \\ 1 & a & 1 & x \end{vmatrix} = (x+a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & a \\ a & 1 & x & 1 \\ 1 & a & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & a-1 \\ a & 1-a & x-a & 1-a \\ 1 & a-1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+a+2) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & a-1 \\ 1-a & x-a & 1-a \\ a-1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+2)(x-a) \begin{vmatrix} x-1 & a-1 \\ a-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x+a+2)(x-a) [(x-1)^2 - (a-1)^2] = 0$$

$$\begin{cases} x+a+2=0 \longrightarrow x_1 = -a-2 \quad (1) \\ x-a=0 \longrightarrow x_2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1+a-1)[x-1-(a-1)] = 0 \end{cases} \begin{cases} x+a-2=0 \longrightarrow x_3 = 2-a \\ x-a=0 \longrightarrow x_4 = a \end{cases}$$

$x=a$
es doble

9.4 Hallar $|A| \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $n \geq 3$ tal que $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} = 5 \\ a_{ii} = 0 & \forall i = 2, \dots, n \\ a_{nn} = 1 \end{cases}$

Restamos a todas las filas la última

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Restamos a todas las filas la última}} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 4(-1)^{n-2}$$

9.6 Calcular el determinante pedido

Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con columnas $\left\{ \begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{matrix} \right\}$ y $|A| = 2$

$$\begin{aligned} & (3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \mid \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \mid \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3) = \\ & = (4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \mid 2\vec{v}_1 \mid \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3) = (4\vec{v}_1 \mid 2\vec{v}_1 \mid \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3) + (\vec{v}_2 \mid 2\vec{v}_1 \mid \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3) \\ & = (\vec{v}_2 \mid 2\vec{v}_1 \mid \vec{v}_1) + (\vec{v}_2 \mid 2\vec{v}_1 \mid -\vec{v}_2) + (\vec{v}_2 \mid 2\vec{v}_1 \mid -\vec{v}_3) = (-2) (\vec{v}_2 \mid \vec{v}_1 \mid \vec{v}_3) = \\ & = -(-2) (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3) = 2 \cdot |A| = 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

9.8 Hallar el determinante Δ_n de una matriz Δ $\left\{ \begin{matrix} \text{Todos los elementos son} \\ 1 \text{ menos los de la} \\ \text{diagonal que son 3} \end{matrix} \right.$

$$\begin{aligned} |\Delta_n| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+n & 2+n & \dots & 2+n \\ 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 3 \\ 1 & 1 & \dots & 13 \end{vmatrix} = \\ & = (n+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \end{vmatrix} = (n+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (n+2) 2^{n-1} \end{aligned}$$

(9.9) Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 5 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 5 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -\sqrt{2} (\underline{54} + \underline{30} - \underline{60} - \underline{15}) =$$

$$= -\sqrt{2} (-6 + 15) = \boxed{-9\sqrt{2}}$$

Normas de vectores y Matrices

● Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K conmutativo. $\forall x \in E$ llamaremos norma de x a toda aplicación de la forma $\|x\|: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ que se define como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ y que cumple:

$$1) \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$2) \forall x \in E \begin{cases} \| \lambda x \| = |\lambda| \|x\| \\ \forall \lambda \in K \end{cases}$$

$$3) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

● Sea una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, llamaremos norma de A al supremo de la norma de Ax entre la norma de x .

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Tanto la norma de un vector como la norma de una matriz son números reales y, en normas de matrices, el cociente siempre existe.

NOTA! En la práctica, calcularemos la norma de una matriz como

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$$

La matriz $A^H A$ es siempre hermitica, y, por tanto, sus autovalores son números reales.

Demo: $(A^H A)^H = A^H A^{HH} = A^H A \implies (A^H A)^H = A^H A$; queda demostrado que $A^H A$ es hermitica

$$A^H A x = \lambda x; \quad x^H A^H A x = \lambda x^H x; \quad (Ax)^H Ax = \lambda x^H x; \quad \langle Ax, Ax \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$

$$\lambda = \frac{\langle Ax, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} > 0; \quad \text{queda demostrado que los autovalores son reales y positivos}$$

➤ Calcular la norma de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$$

$$A^H A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \chi_{A^H A}(\lambda) = |\lambda I - A^H A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)-1 =$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 4$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5} \rightarrow \lambda_{\max} = 3 + \sqrt{5}$$

$$\boxed{\|A\| = \sqrt{3 + \sqrt{5}}}$$

NOTA! Si la matriz A es hermitica (simétrica en $\mathbb{R}$) entonces la norma de la matriz A es el mayor de los autovalores en módulo

$$A = A^t \quad A \cdot A^t = A^2 \rightarrow \begin{cases} A \rightarrow \lambda \\ A^2 \rightarrow \lambda^2 \end{cases} \quad \|A\| = \sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$$

● DISTINTOS TIPOS DE NORMA

- Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, llamaremos norma de tipo 1 a la suma de los módulos de sus componentes $\boxed{\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}$

- Llamaremos norma de tipo 2 o norma euclídea o simplemente norma a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los módulos

$$\boxed{\|X\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}}$$

- Llamaremos norma subyinito al mayor valor entre los módulos de las coordenadas del vector.

$$\boxed{\|X\|_{\infty} = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)}$$

➔ Hallar las normas 1, 2, ∞ de $x \in \mathbb{C}^3$ siendo $a) x = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\|x\|_1 = |1| + |-5| + |3| = \underline{9}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 3^2} = \underline{\underline{\sqrt{35}}}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|1|, |-5|, |3|) = \underline{\underline{5}}$$

$$b) x = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2+3i \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\|x\|_1 = |1+i| + |-2+3i| + |-6| = \sqrt{2} + \sqrt{4+9} + 6 = \underline{\underline{\sqrt{2} + \sqrt{13} + 6}}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|1+i|^2 + |-2+3i|^2 + |-6|^2} = \sqrt{2 + 13 + 36} = \underline{\underline{\sqrt{51}}}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|1+i|, |-2+3i|, |-6|) = \max(\sqrt{2}, \sqrt{13}, 6) = \underline{\underline{6}}$$

• Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ llamaremos norma 1 de la matriz A

al mayor de los valores obtenidos al sumar los módulos de los elementos de cada columna

$$\|A\|_1 = \max(|\sum a_{1j}|, |\sum a_{2j}|, \dots, |\sum a_{nj}|)$$

• Llamaremos norma 2, norma euclídea o simplemente norma 2 a

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$$

• Llamaremos norma subinfinito al mayor de los valores obtenidos al sumar los módulos de los elementos de cada fila de A.

$$\|A\|_\infty = \max(|\sum a_{i1}|, |\sum a_{i2}|, \dots, |\sum a_{in}|)$$

➔ Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule sus normas

$$\|A\|_1 = \max(|2+1|, |-5+3|) = \max(3, 8) = \underline{\underline{8}}$$

$$\|A\|_\infty = \max(|2|+|-5|, |1|+|3|) = \max(7, 4) = \underline{\underline{7}}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^t A)}; A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A^t A}(\lambda) = |\lambda I - A^t A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -7 \\ -7 & \lambda - 34 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 39\lambda - 121 = 0$$

$$\lambda = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 484}}{2} = \frac{39 \pm \sqrt{1037}}{2} \rightarrow \lambda_{\max} = \frac{39 + \sqrt{1037}}{2}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{39 + \sqrt{1037}}{2}}$$

● RELACIÓN ENTRE 1, 2, ∞ (normas)

Dado el vector $X \in \mathbb{C}^n$

$$1) \frac{\|X\|_2}{\sqrt{n}} \leq \|X\|_\infty \leq \|X\|_2$$

$$2) \|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq \sqrt{n} \|X\|_2$$

$$3) \frac{\|X\|_1}{n} \leq \|X\|_\infty \leq \|X\|_1$$

$$\text{Demo} \begin{cases} \|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \\ \|X\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \\ \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = |x_i| \end{cases}$$

$$③ \text{ Si } \|X\|_\infty \leq \|X\|_1,$$

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_i| + \dots + |x_n| \xrightarrow{\quad} \|X\|_1 \geq \|X\|_\infty$$

$$\|X\|_\infty = |x_i|$$

$$\text{Si } \frac{\|X\|_1}{n} \leq \|X\|_\infty; \|X\|_1 = \underbrace{|x_1|}_{\leq |x_i|} + \underbrace{|x_2|}_{\leq |x_i|} + \dots + \underbrace{|x_i|}_{\leq |x_i|} + \dots + \underbrace{|x_n|}_{\leq |x_i|}$$

$$\|X\|_1 \leq n |x_i| = n \|X\|_\infty \rightarrow \frac{\|X\|_1}{n} \leq \|X\|_\infty \quad \text{Como queríamos demostrar}$$

Valores y Vectores propios

Diagonalización de matrices

● Dado un endomorfismo cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ llamaremos valor propio o autovector de la}$$

matriz A y lo representaremos por " λ " y vector propio o autovector asociado al autovector λ de la matriz A , y lo representaremos por " V " a aquellos que cumplen que $A \cdot V = \lambda V$

Analicemos la definición $\lambda \cdot V$: $A \cdot V = \lambda I \cdot V$; $\lambda I \cdot V - A \cdot V = 0$; $(\lambda I - A) \cdot V = 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + b_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + b_1 \lambda + b_0 = 0$$

$X_A(\lambda)$ es el polinomio característico o ecuación característico cuyas raíces son los autovectores

Al n° de veces que se repite cada autovector en la ecuación característica le llamaremos orden de multiplicidad algebraica.

Cada autovector, además del orden de multiplicidad algebraica posee el llamado orden de multiplicidad geométrica que para cada autovector $\lambda = \lambda_i$ definiremos como:

$$g_{\lambda_i} = n - \text{rg}(\lambda_i I - A)$$

NOTA! Si para cada autovector de una matriz, el orden de multiplicidad algebraica y el geométrico coinciden, se dice que la matriz es diagonalizable

NOTA! Diremos que una matriz A es diagonalizable (por semejanza) si podemos encontrar una matriz P regular tal que $P^{-1}AP = \text{Diagonal}$

NOTA! Diremos que una matriz A es diagonalizable si para cada autovalor podemos encontrar tantos vectores propios como me indique su orden de multiplicidad.

NOTA! Si una matriz es diagonalizable se puede encontrar una base formada por vectores propios respecto de la cual la matriz asociada sea diagonal.

En el sistema sustituimos con los autovalores

$$(\lambda I - A)U = 0 \rightarrow (\lambda_i I - A)U = \text{Ker}(\lambda_i I - A) \equiv \text{Subespacio propio asociado al autovalor } \lambda = \lambda_i$$

La solución de cada uno de estos sistemas (subespacios propios) nos darán los vectores propios asociados a cada autovalor.

Una vez obtenidos los diferentes vectores propios $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$, construiremos la matriz P , que cumple que $P^{-1}AP = D$, poniendo los vectores propios por columnas en dicha matriz.

➔ Sea endomorfismo en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ se pide}$$

- ① Polinomio característico
- ② Autovalores
- ③ Orden de multiplicidad algebraico
- ④ " " " " geométrico
- ⑤ Decir si la matriz es diagonalizable
- ⑥ Subespacios propios
- ⑦ Vectores propios
- ⑧ Matriz de paso
- ⑨ Base respecto de la cual la matriz es diagonal
- ⑩ Matriz diagonal

$$X_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$$

① Polinomio característico
 $X_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$

② Autovalores

$$X_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{o.m.a}} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{matrix}$$

Orden m. geométrico $r = n - \text{rg}(\lambda I - A)$

④ O.m.g

$$r_{\lambda=3} = 2 - \text{rg}(3I - A) = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = \textcircled{1}$$

$$r_{\lambda=2} = 2 - \text{rg}(2I - A) = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = \textcircled{1}$$

⑤ Como multiplicidad geométrica $\equiv$ multiplicidad algebraica $\rightarrow$ es diagonalizable Indusbol

⑥ NOTA! Una matriz que tiene todos sus autovalores con multiplicidad 1 es siempre diagonalizable

$$\lambda_1 = 3, \text{Ker}(3I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} \text{Subespacios propios} \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\lambda_2 = 2, \text{Ker}(2I - A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

⑦ Vectores propios

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⑧ Mat. Paso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑨

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

⑩ Mat. diagonal

$$P^{-1}AP = D$$

$$P^{-1} = \frac{(P^T)^t}{|P|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

⑪ En $\mathbb{R}^3$ se da $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calcular la matriz de proyección, simetría, valores y vectores propios de ambas matrices

$$P = I - \frac{ww^t}{w^t w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S = 2P - I = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vectores y autovalores propios de P

$$X_P(\lambda) = \text{Ker}(\lambda I - P) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \lambda - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \lambda - \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \frac{1}{3} & \lambda - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \lambda - \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \lambda - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \lambda - \frac{2}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda (\lambda - 1)^2; \quad \lambda (\lambda - 1)^2 = 0 \begin{cases} \lambda = 0 & (1) \\ \lambda = 1 & (2) \end{cases}$$

$$q_{\lambda=0} = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1; \quad q_{\lambda=1} = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Comiden las multiplicidades geométrica y algebraica

La matriz es, por tanto, diagonalizable

$$\boxed{\lambda=0} \rightarrow \text{Ker}(0I-P) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 = 1 \\ x_3 = 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda=1} \rightarrow \text{Ker}(I-P) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad \begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Por ser P diagonalizable $\Rightarrow \exists Q$ tal que $Q^{-1}PQ = D$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}, \quad Q^{-1} = \frac{(Q^d)^t}{|Q|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & +2 & 1 \\ +1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTA! MATRICES SIMÉTRICAS

Toda matriz simétrica es siempre diagonalizable

Los autovalores de una matriz simétrica son siempre números reales

Los vectores propios asociados a autovalores distintos son ortogonales

Sus autovalores serán $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

NOTA! MATRICES DE PROYECCIÓN

Son siempre diagonalizables por ser simétricas

Sus autovalores serán $\begin{cases} \lambda = 0 & \text{con multiplicidad igual a 6 dim del subespacio ortogonal al que estamos proyectando} \\ \lambda = 1 & \text{con multiplicidad igual a 6 dim del subespacio sobre el que proyectamos} \end{cases}$

NOTA! POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE LA MATRIZ EN 3×3

$$X_A(\lambda) = \lambda^3 - z_1 \lambda^2 + z_2 \lambda - z_3$$

$$z \text{ (invariantes de semejanza)} \begin{cases} z_1 \rightarrow \text{traza de la matriz } A \\ z_2 \rightarrow \text{Adj}_{11} + \text{Adj}_{22} + \text{Adj}_{33} \\ z_3 \rightarrow \det(A) \end{cases}$$

Valores y vectores propios de $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_S(\lambda) = |\lambda I - S| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 2 = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$z_1 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$z_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right] = \frac{1}{9} (-9) = -1$$

$$z_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} (1 - 8 - 8 - 4 - 4 - 4) = -1$$

$$X_S(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 & (2) \\ \lambda = -1 & (1) \end{cases}$$

orden de mult. algebraica

Por tratarse de una matriz simétrica, será siempre diagonalizable

$$\lambda_1 = -1$$

$$\text{Ker}(-I - S) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -6x_1 + 6x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 1 \\ x_3 = 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \text{Ker}(I - S) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\exists P \text{ tal que } P^{-1}SP = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \frac{(P^d)^t}{|P|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & +2 & 1 \\ +1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➔ Matriz de proyección y simetría sobre la recta cuyo vector director es el $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diagonalizar por semejanza dichas matrices

$$P = \frac{UU^t}{U^t U} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ -2 \ 1)}{(1 \ -2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_p(\lambda) = |\lambda I - P| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \lambda - \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \lambda - \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 2 = \lambda^3 - \lambda^2$$

$$z_1 = \frac{1}{6} [1 + 4 + 1] = 1$$

$$z_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left[\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 + 1 + 1 \right] = 0$$

$$z_3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 & (2) \\ \lambda = 1 & (1) \end{cases}$$

Por ser matriz simétrica será diagonalizable

$$\lambda_1 = 0; \quad \text{Ker } |0I - P| = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & -\frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1; \quad \text{Ker } |I - P| = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$6x_1 + 3x_2 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$\exists Q$ tal que $Q^{-1}PQ = D$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Q^{-1} = \frac{|Q|^t}{|Q|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1+2 & 1 \\ -2 & 2-2 \\ -5+2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ +2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ +2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\text{metria}}: S = 2P - I = 2 \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_S(\lambda) = |\lambda I - S| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \lambda + \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1_{(1)} \quad \lambda_2 = -1_{(2)}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ & & & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & -1 & -1 & -1 & \\ & & & 1 & 1 & 6 & \end{array}$$

$$z_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \right] = \frac{1}{9} (-9) = -1$$

$$z_3 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} (27) = 1$$

Por ser matriz simétrica será diagonalizable

$$\lambda_1 = 1_{(1)} \quad \text{Ker} |\lambda - S| = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\lambda_2 = -1_{(2)} \quad \text{Ker} |-\lambda - S| = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\exists P$ tal que $P^{-1}SP = D$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{(P^d)^t}{|P|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 6 & 15 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

⊖ Valores y vectores propios de una matriz de giro

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\chi_G(\lambda) = |\lambda I - G| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \lambda-\cos \varphi \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-\cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \lambda-\cos \varphi \end{vmatrix} = (\lambda-1) [(\lambda-\cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi] =$$

$$= (\lambda-1) (\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + \underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\lambda = \frac{2\cos \varphi \pm \sqrt{4\cos^2 \varphi - 4}}{2} = \cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi - 1} = \cos \varphi \pm \sqrt{-\sin^2 \varphi}$$

$$\lambda_2 = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\lambda_3 = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

$$\lambda_1 = 1, \text{ Ker } |I - G| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & 1-\cos \varphi \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (1-\cos \varphi)x_2 + (\sin \varphi)x_3 = 0 \\ (-\sin \varphi)x_2 + (1-\cos \varphi)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ll$$

$$\lambda_2 = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\text{Ker } |(\cos \varphi + i \sin \varphi)I - G| = \begin{vmatrix} \cos \varphi + i \sin \varphi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & i \sin \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & i \sin \varphi \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\cos \varphi + i \sin \varphi - 1)x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ (i \sin \varphi)x_2 + (\sin \varphi)x_3 = 0, (\sin \varphi)[ix_2 + x_3] = 0; \quad \begin{matrix} x_2 = i \\ x_3 = 1 \end{matrix} \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\lambda_3 = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

$$\text{Ker } |(\cos \varphi - i \sin \varphi)I - G| = \begin{vmatrix} \cos \varphi - i \sin \varphi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i \sin \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & -i \sin \varphi \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\cos \varphi - i \sin \varphi - 1)x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ (-i \sin \varphi)x_2 + \sin \varphi x_3 = 0 \rightarrow -ix_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como la matriz es diagonalizable, $\exists P$ tal que $P^{-1}GP = D$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta + i \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta - i \sin \theta \end{pmatrix}$$

NOTA! MATRICES DE GIRO

El determinante de una matriz de giro siempre vale 1 y los autovalores son, en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, 2 complejos conjugados de módulo 1 y el autovalor $\lambda = 1$

MATRICES EN $\mathbb{R}^3$

	AUTOVALORES	DETERMINANTE
Proyección sobre recta	$\lambda = 0$ (2) $\lambda = 1$ (1)	0
Proyección sobre plano	$\lambda = 0$ (1) $\lambda = 1$ (2)	0
Simetría en recta	$\lambda = 1$ (1) $\lambda = -1$ (2)	1
Simetría en plano	$\lambda = 1$ (2) $\lambda = -1$ (1)	-1
Giro	$\cos \theta + i \sin \theta$ $\cos \theta - i \sin \theta$ 1	1

PROPIEDADES DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS

① Los vectores propios asociados a autovalores conjugados son también conjugados

② Los vectores propios asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes

Demo $A \begin{cases} \lambda_1 \rightarrow V_1 \\ \lambda_2 \rightarrow V_2 \\ \lambda_3 \rightarrow V_3 \end{cases}$

$$\frac{x_1}{\alpha_1} V_1 + \frac{x_2}{\alpha_2} V_2 + \frac{x_3}{\alpha_3} V_3 = 0 \quad \text{Cond indep. lineal} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Multipliquemos por A

$$\alpha_1 A V_1 + \alpha_2 A V_2 + \alpha_3 A V_3 = 0$$

Como $A V_i = \lambda_i V_i$

$$\alpha_1 \lambda_1 V_1 + \alpha_2 \lambda_2 V_2 + \alpha_3 \lambda_3 V_3 = 0 \rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

Multipliquemos por A

$$\alpha_1 \lambda_1 A V_1 + \alpha_2 \lambda_2 A V_2 + \alpha_3 \lambda_3 A V_3 = 0$$

Como $A V_i = \lambda_i V_i$

$$\alpha_1 \lambda_1^2 V_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 V_2 + \alpha_3 \lambda_3^2 V_3 = 0 \rightarrow \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \lambda_3^2 x_3 = 0$$

Montamos el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \rightarrow \text{ya que los autovalores son diferentes}$$

Vandermonde

Si el determinante $\neq 0$ y el sistema es homogéneo la única solución será

$$\begin{cases} \alpha_1 v_1 = 0 \\ \alpha_2 v_2 = 0 \\ \alpha_3 v_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

→ Queda demostrado que son linealmente independientes los vectores ←

③ Dado la matriz A con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ y vectores propios $v_1, v_2, \dots, v_p$

La matriz A^n tendrá

$$\begin{matrix} \nearrow & \lambda_1^n & \rightarrow & v_1 \\ & \lambda_2^n & \rightarrow & v_2 \\ & \vdots & & \vdots \\ \searrow & \lambda_p^n & \rightarrow & v_p \end{matrix}$$

Demo

$$AV = \lambda V \xrightarrow{\cdot A} A^2V = \lambda AV = \lambda^2 V$$

$$A^2V = \lambda^2 V \xrightarrow{\cdot A} A^3V = \lambda^2 AV = \lambda^3 V$$

se cumple en los 1^{er} términos

Suponemos $A^n V = \lambda^n V$

$$A^{n+1} V = A^n AV = \lambda^n AV = \lambda^{n+1} V$$

queda demostrado por Inducción

④ Dado una matriz A con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ y vectores propios $v_1, v_2, \dots, v_p$, entonces la matriz $P(A)$ tendrá

$$\begin{matrix} \nearrow & \lambda_1 & \rightarrow & v_1 \\ & \lambda_2 & \rightarrow & v_2 \\ & \vdots & & \vdots \\ \searrow & \lambda_p & \rightarrow & v_p \end{matrix} \quad P(A) \begin{matrix} \nearrow & P(\lambda_1) & \rightarrow & v_1 \\ & P(\lambda_2) & \rightarrow & v_2 \\ & \vdots & & \vdots \\ \searrow & P(\lambda_p) & \rightarrow & v_p \end{matrix}$$

Demo $P(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$

$$a_0 (I V = 1 \cdot V)$$

$$a_1 (A V = \lambda V)$$

$$a_2 (A^2 V = \lambda A V = \lambda^2 V)$$

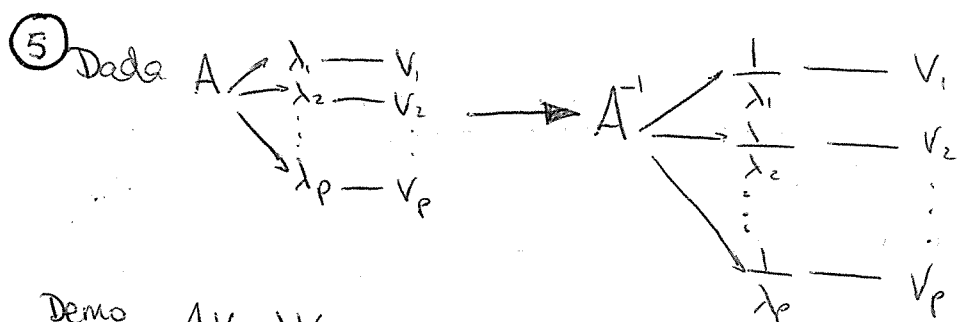
$$a_3 (A^3 V = \lambda^2 A V = \lambda^3 V)$$

$$a_n (A^n V = \lambda^n V)$$

$$\left. \begin{matrix} a_0 (I V = 1 \cdot V) \\ a_1 (A V = \lambda V) \\ a_2 (A^2 V = \lambda A V = \lambda^2 V) \\ a_3 (A^3 V = \lambda^2 A V = \lambda^3 V) \\ \vdots \\ a_n (A^n V = \lambda^n V) \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{sumando}} (a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n) V = (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n) V$$

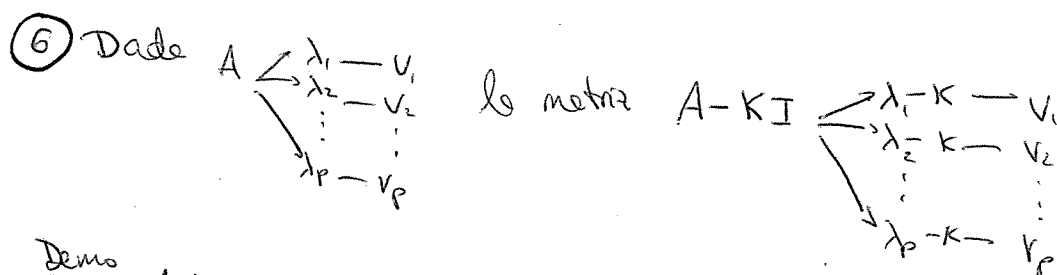
$$P(A) \cdot V = P(\lambda) V$$

Queda demostrado



Demo $AV = \lambda V$

$A^{-1}AV = \lambda A^{-1}V$; $IV = \lambda A^{-1}IV$; $\frac{1}{\lambda}V = A^{-1}V$; Queda demostrado



Demo $AV = \lambda V$

$IV = IV$; $K(IV) = KV \rightarrow AV - KIV = \lambda V - KV$; $(A - KI)V = (\lambda - K)V$

7) Una matriz y su transpuesta tienen los mismos autovalores pero distintos vectores propios
el determinante no cambia al transponer

$X_A(\lambda) = |\lambda I - A| = |\lambda I - A|^t = |(\lambda I - A)^t| = |\lambda I^t - A^t| = |\lambda I - A^t| = X_{A^t}(\lambda)$

Siendo las ec. características iguales, también lo son los polinomios

8) Si una matriz tiene el autovalor cero, su determinante vale cero

$X_A(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$; si $\lambda = 0 \rightarrow |\lambda I - A| = |0I - A| = |-A| = (-1)^n |A| = 0$

Por tanto, $|A| = 0$

9) Dos matrices A y B son semejantes si $\exists P$ tal que $P^{-1}AP = B$

10) Dos matrices semejantes tienen igual la ecuación característica, los autovalores, la traza, el determinante, dimensiones de subespacios propios, ...

Pero NO tienen iguales los vectores propios.

11) Dado una matriz A de autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, se trata de A coincidir con la suma de los autovalores y el determinante de A con el producto de los mismos

$$P^{-1}AP = D \begin{cases} \text{tr } A = \text{tr } D = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \\ \det A = \det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_p \end{cases}$$

TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

"Toda matriz verifica su ecuación característica"

Por ejemplo, $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \implies A^3 - 3A^2 + 2A - I = 0$

➔ Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se pide: a) Calcular A^2, A^3 y A^4 , además, generalizar un valor para A^n

b) Valores y vectores propios de A

c) Sea $B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$ expresar como combinación lineal de A y sus potencias

d) Calcular valores y vectores propios de B .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{estas matrices se denominan circulares a derechas (matriz unidad con columnas permutadas)}$$

NOTA! La ecuación característica de las matrices circulares es $\chi_{\text{arc}}(\lambda) = \lambda^n - 1 = 0$

$$A^n \begin{cases} A^1 = A^5 = A^9 = \dots = A^{4k-3} \\ A^2 = A^6 = A^{10} = \dots = A^{4k-2} \\ A^3 = A^7 = A^{11} = \dots = A^{4k-1} \\ A^4 = A^8 = A^{12} = \dots = A^{4k} \end{cases} \quad \text{con } k \geq 1$$

b)

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \left[\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (\lambda - 1) [\lambda^3 + 1 + \lambda^2 + \lambda] = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$$

La multiplicidad algebraica es 1 por ser raíces simples por tanto, coincidiendo con la geométrica y A será diagonalizable

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \text{Ker } |I - A| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow \text{Ker } |-I - A| = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = i \rightarrow \text{Ker } |iI - A| = \begin{pmatrix} i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ -1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} ix_1 - x_2 = 0 \\ ix_2 - x_3 = 0 \\ ix_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= i \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= -i \\ x_4 &= 1 \end{aligned} \quad V_3 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = -i \rightarrow \text{Ker } |-iI - A| = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ -ix_2 - x_3 = 0 \\ -ix_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -i \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= i \\ x_4 &= 1 \end{aligned} \quad V_4 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 = p(A)$$

d)

Si $B = p(A) \rightarrow$ Autovalores de B

$$\begin{cases} p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ p(i) = a_0 + ia_1 - a_2 - ia_3 \\ p(-i) = a_0 - ia_1 + a_2 + ia_3 \end{cases}$$

Vectores de B $\rightarrow$ los mismos que los de A

➔ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, decir cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

1) $\lambda = 3$ es siempre autovalor de A

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 4 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda - a) - 2(\lambda - 3) = (\lambda - 3)[(\lambda + 1)(\lambda - a) - 2] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = 3$ es siempre autovalor $\Rightarrow$ ENUNCIADO VERDADERO

2) Si $a = -2$ entonces $\lambda = 0$ no es autovalor

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)[(\lambda + 1)(\lambda + 2) - 2] = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda + \lambda + 2 - 2) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 3\lambda) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) \longrightarrow \lambda = 0 \text{ es autovalor} \Rightarrow \text{EL ENUNCIADO ES FALSO}$$

3) Para $a = 0$ la matriz no es diagonalizable

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)[(\lambda + 1)\lambda - 2] = (\lambda - 3)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + 3}{2} = 1 \\ \frac{-1 - 3}{2} = -2 \end{cases}$$

Todos los autovalores son simples por lo que A será diagonalizable.

ENUNCIADO FALSO

4) Para $a = 0$, A es semejante a la diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Si $a = 0 \rightarrow A \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$ por tanto será semejante a la diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

ENUNCIADO VERDADERO

➔ Indicar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -a+1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ sea semejante a la diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$A \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases} \rightarrow \chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 4)$$

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & a-1 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 1) - 6(\lambda - 1) = (\lambda - 1)[\lambda^2 + 3\lambda + 2 - 6] = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 4)$$

Veamos si los ordenes de multiplicidad algebraicos y geométricos coinciden

Para $\lambda = -4 \rightarrow$ o.m algebraico = 1 $\equiv$ o.m geométrico por ser raíz simple

$\lambda = 1 \rightarrow$ o.m algebraico = 2

$\rightarrow$ o.m geométrico = $q_{\lambda=1} = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

si $\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$
 $\Rightarrow q_{\lambda=1} = 3 - 1 = 2$

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 3 - 3 = 0$$

$$a = 2$$

si $\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$

$$\Rightarrow q_{\lambda=1} = 3 - 2 = 1$$

y A no será diagonalizable.

Por tanto $\boxed{a=2}$ es el único valor para el cual la matriz A es semejante a la matriz D

11.6) Determinar los valores de q para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3q+2 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$

$$X_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -3q-2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda(-3q-2) = 0; \quad \lambda(\lambda^2 - 3q - 2) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{3q+2}$$

si $q = -\frac{2}{3} \rightarrow \lambda = 0$ tiene multiplicidad algebraica 3 $\Rightarrow A$ no es diagonalizable

$$3q+2 > 0 \rightarrow q > -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{A \text{ será diagonalizable en } \mathbb{R} \forall q \in \mathbb{R} / q \in (-\frac{2}{3}, \infty)}$$

NOTA! Las matrices que tienen un único autovalor nunca son diagonalizables salvo que ya sean diagonales

11.4) Calcular b para que las matrices sean diagonalizables

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad X_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -b \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 2\lambda) + b = \lambda^2 - 2\lambda + b = 0$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4b}}{2} \Rightarrow \boxed{b < 1 \Rightarrow A \text{ es diagonalizable en } \mathbb{R}}$$

$b = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ doble $\Rightarrow A$ sólo tendrá un autovalor y no será diagonalizable

$b < 1 \Rightarrow A$ no es diagonalizable en $\mathbb{R}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ b & 4 \end{pmatrix} \quad X_B(\lambda) = |\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -b & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 2b = 0$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-8b}}{2} \Rightarrow b > 2 \rightarrow B \text{ no es diagonalizable en } \mathbb{R}$$

$b = 2 \rightarrow \lambda = 2$ doble $\Rightarrow B$ sólo tendrá un autovalor y no será diagonalizable

$$\boxed{b < 2 \rightarrow B \text{ es diagonalizable en } \mathbb{R}}$$

11.9) Determinar $m \in \mathbb{R}$ para que sea diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m+3 & m^2-10 \\ 1 & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - (m+3) & -(m^2-10) \\ -1 & \lambda - (m+1) \end{vmatrix} = [\lambda - (m+3)][\lambda - (m+1)] + (m^2-10) = 0$$

$$(\lambda - m - 3)(\lambda - m - 1) - m^2 + 10 = \lambda^2 - \lambda m - \lambda - \lambda m - 3\lambda + m + 3m + 10 + 3 - m^2 + 10 =$$

$$= \lambda^2 - \lambda m - \lambda - \lambda m - 3\lambda + m + 3m + 10 + 3 = \lambda^2 + \lambda(-m-1-m-3) + 4m+13 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-2m-4) + 4m+13 = 0; \quad \lambda = \frac{2m+4 \pm \sqrt{(-2m-4)^2 - 4(4m+13)}}{2}$$

$$\Delta = 4m^2 + 16 + 16m - 16m - 52 = 4m^2 - 36 > 0$$

$$4m^2 - 36 > 0; \quad 4m^2 - 36 = 0 \rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{36}{4}} = \pm \frac{6}{2} = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases}$$

Si $m = \pm 3$ la matriz A tendrá un único autovalor y no será diagonalizable

Si $m > 3 \rightarrow A$ es diagonalizable

Si $-3 < m < 3 \rightarrow A$ no es diagonalizable

Si $m < -3 \rightarrow A$ es diagonalizable

A es diagonalizable
 $\forall m \in \mathbb{R} / m \in (-3, 3) \cup (3, \infty)$

11.2) Sea A una matriz $\in \mathbb{C}^{n \times n}$, cuadrada de orden n . Decir si es verdadero o falso.

a) Si -8 es autovalor de A^3 , entonces -2 es autovalor de A

Sabemos que si $A \rightarrow \lambda \Rightarrow A^3 = \lambda^3$ por tanto $A^3 \rightarrow \lambda = -8$

$$A \rightarrow \lambda = \sqrt[3]{-8} = -2$$

VERDADERO

$$\text{Dado } A \rightarrow \lambda \rightarrow v \Rightarrow \textcircled{A} v = \lambda v$$

$$A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v$$

$$\textcircled{A^3} v = \lambda A^2 v = \lambda^3 v$$

b) A puede no tener ningún autovalor

FALSO Las matrices siempre tienen autovalores

c) Si A es diagonal, A^t también lo es.

$$\begin{matrix} A \rightarrow \lambda \rightarrow v \\ A^t \rightarrow \lambda \rightarrow w \end{matrix} \Rightarrow A^t \text{ no tiene por qué ser diagonal}$$

FAJJO

d) Si A es invertible y diagonalizable, A^{-1} también lo será

VERDADERO

$$\left. \begin{matrix} A \rightarrow \lambda \rightarrow v \\ A^{-1} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \rightarrow v \end{matrix} \right\} \rightarrow A^{-1} \text{ será diagonalizable. Demo:}$$

$$\begin{aligned} & \text{Si } AV = \lambda V \rightarrow A^{-1}AV = \lambda A^{-1}V \\ & \frac{1}{\lambda}V = A^{-1}V \Rightarrow A^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Autovalor } \frac{1}{\lambda} \\ \text{Vector propio } V \end{array} \right. \end{aligned}$$

11.3) Sabiendo que A es una matriz real cuadrada de orden 3, de rango unidad y diagonalizable, tal que $A^2 = A$, calcular sus valores propios indicando las multiplicidades de los mismos

$$A \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 \\ \rightarrow \lambda_2 \\ \searrow \lambda_3 \end{matrix} \quad \text{rg}(A) = 1 \Rightarrow |A| = 0 \rightarrow \lambda = 0 \text{ es autovalor}$$

$$q_{\lambda=0} = n - \text{rg}(0I - A) = 3 - \text{rg}(-A) = 3 - \text{rg}(A) = 3 - 1 = 2$$

$\lambda = 0$ es autovalor con multiplicidad 2

$$A^2 = A \rightarrow A^2 - A = 0 \Rightarrow \text{Por teorema de Cayley Hamilton}$$

$$X_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \quad (2) \\ \lambda = 1 \quad (1) \end{cases}$$

$\lambda = 1$ es autovalor con multiplicidad 1

→ A es una matriz cuadrada invertible de orden n . Probar que la matriz inversa de A se puede expresar como polinomio en A

Obtener este polinomio en el caso particular $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Comenzamos por el caso particular

$$X_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda - 3 & -1 \\ 2 & -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - z_1\lambda^2 + z_2\lambda - z_3 = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 13\lambda - 1$$

$$z_1 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$z_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11 + 1 + 1 = 13$$

$$z_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 4 + 8 - 12 - 10 - 4 = 1$$

$$p(A) = A^3 - 9A^2 + 13A - I = 0$$

$$A^{-1}(A^3 - 9A^2 + 13A - I) = A^{-1} \cdot 0$$

$$A^2 - 9A + 13 - A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = A^2 - 9A + 13$$

En el caso genérico

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Aplicando el teorema de Cayley Hamilton $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \dots + a_1A + a_0I = 0 \quad \xrightarrow{\text{multiplicando por } A^{-1}}$$

$$A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + a_{n-2}A^{n-3} + \dots + a_1I + a_0A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \dots - a_1I}{a_0} \quad \text{queda demostrado}$$

⊕ Diagonalizar la matriz calculando valores y vectores propios

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & 2 \\ 2 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3$$

$$z_1 = 3; \quad z_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 + 3 = 3; \quad z_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 6 - 6 = 1$$

$$A \rightarrow \boxed{\lambda = 1} \text{ con multiplicidad algebraica} = 3$$

$$\gamma_{\lambda=1} = n - \text{rg} |I - A| = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

No coinciden las multiplicidades por lo que A no es diagonalizable

NOTA! La diagonalización por semejanza responde a la fórmula

$$P^{-1}AP = D$$

Si la matriz P es una matriz unitaria (ortogonal en los reales) P cumplirá

$$\text{que } \begin{cases} P\bar{P}^t = \bar{P}^tP = I \\ \bar{P}^{-1} = \bar{P}^t \end{cases}$$

En este caso, a la diagonalización por semejanza se le llamará diagonalización ortogonal si estamos en $\mathbb{R}$ o bien diagonalización unitaria si estamos en $\mathbb{C}$

NOTA! MATRICES EN $\mathbb{C}^{n \times n}$

$$\mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$$

Simétricas $A = A^t$ $\longrightarrow$ Hermiticas $A = A^h$

Antisimétricos $A = -A^t \longrightarrow$ Antihermíticos $A = -A^h$

Orthogonal $PP^t = P^tP = I$
 $P^{-1} = P^t$ $\longrightarrow$ Unitarian $PP^h = P^hP = I$
 $P^{-1} = P^h$

Las matrices simétricas, antisimétricas y ortogonales son siempre diagonalizables en $\mathbb{R}$

Las matrices hermiticas, antikermiticas y unitarias son siempre diagonalizables en $\mathbb{C}$

● MATRICES NORMALES

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diremos que es normal si cumple que

$$A A^h = A^h A$$

Toda matriz normal es diagonalizable unitariamente, es decir, podemos encontrar una matriz P unitaria tal que $P^{-1}AP = D$, siendo D diagonal y P una matriz unitaria $\Rightarrow P^{-1} = P^H$

Las matrices simétricas, antisimétricas, ortogonales, hermiticas, antihermíticas y unitarias son matrices normales y, por tanto, diagonalizables unitariamente $\Rightarrow$ Demo↓

Por tanto

Diagonalización por semejanza	$\implies$	$\exists P$ regular tal que $P^{-1}AP = D$
Diagonalización unitaria (ortogonal)	$\implies$	$\exists P$ unitaria tal que $P^{-1}AP = D$ (ortogonal) $P = P^H$

↓ Demo

Matrix normal $\Rightarrow A A^h = A^h A$

- Una matriz simétrica es normal: $S = S^t$

$$SS^h = SS^t = S^tS = S^hS \implies E \text{ normal}$$

- Une matrice antisymétrique est normale: $A = -A^t$

$$(-A)^t(A) = A^t$$

$$AA^h = AA^t = (-A^t)(-A) = A^tA = A^hA \implies E \text{ normal}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $A = -A^t$

- Una matriz ortogonal es normal $PP^t = P^tP$

$$PP^h = PP^t = P^tP = P^hP \implies \text{normal}$$

$\uparrow$ por $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\uparrow$ $P^tP = PP^t$

Idénticas demostraciones para los hermiticos, antihermiticos y unitarios

● PROPIEDADES DE LAS MATRICES HERMITICAS $\rightarrow A = A^h$

1) $\forall X \in \mathbb{C}^n \quad X^h A X \in \mathbb{R}$

2) Sus autovalores $\in \mathbb{R}$

3) Los vectores propios asociados a autovalores distintos son ortogonales

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_i \rightarrow V_i \\ \lambda_j \rightarrow V_j \end{array} \right\} V_i \perp V_j \quad i \neq j$$

4) Las matrices hermiticas son diagonalizables

5) Toda matriz $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ se puede descomponer de forma única como suma de una hermitica y una antihermitica

$$\begin{cases} X = H + A \\ X^h = (H + A)^h = H^h + A^h = H - A \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = H + A \\ X^h = H - A \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X + X^h &= 2H \rightarrow H = \frac{1}{2}(X + X^h) \\ X - X^h &= 2A \rightarrow A = \frac{1}{2}(X - X^h) \end{aligned}$$

● PROPIEDADES DE LAS MATRICES ANTIHERMITICAS $\rightarrow A = -A^h$

1) Si A es antihermitica, entonces iA es hermitica

2) $\forall X \in \mathbb{C}^n \quad X^h A X$ es imaginario puro

3) Los autovalores de una matriz antihermitica son imaginarios puros

4) Los vectores propios asociados a autovalores distintos son entre si ortogonales

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_i \rightarrow V_i \\ \lambda_j \rightarrow V_j \end{array} \right\} V_i \perp V_j \quad i \neq j$$

5) Las matrices antihermiticas son diagonalizables

● PROPIEDADES DE LAS MATRICES UNITARIAS $\rightarrow UU^H = U^H U = I$

- 1) La matriz identidad es unitaria
- 2) El producto de dos matrices unitarias es otra matriz unitaria
- 3) La inversa de una matriz unitaria es también unitaria
- 4) La hermitica de una matriz unitaria es también unitaria
- 5) Los autovalores de una matriz unitaria tienen módulo 1
- 6) El determinante de una matriz unitaria tiene módulo 1
- 7) Los vectores fila de una matriz unitaria son ortonormales entre sí, al igual que los vectores columna

⊕ Diagonalizar por semejanza y unitariamente $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

$$A^H = \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A \Rightarrow \text{Por ser } A \text{ una matriz hermitica será diagonalizable unitariamente}$$

$$X_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -i \\ i & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \text{Ker } |I - A| = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_1 - ix_2 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow \text{Ker } |-I - A| = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -x_1 - ix_2 = 0 \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$P_{\text{regular}} \rightarrow P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Diagonalización por semejanza}$$

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

P unitaria

$$v_1 \perp v_2 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \bar{v}_1^t v_2 = (-i, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2}, \|v_2\| = \sqrt{2} \rightarrow P_{\text{unitaria}} \rightarrow P = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

⊛ Ejercicio examen: Siendo V una matriz unitaria calcular los valores complejos de q para los cuales la matriz $U = q \begin{pmatrix} V & V \\ V & -V \end{pmatrix}$ es también unitaria.

U es unitaria $\Rightarrow UU^H = U^H U = I$

$$UU^H = q \begin{pmatrix} V & V \\ V & -V \end{pmatrix} \left[q \begin{pmatrix} V & V \\ V & -V \end{pmatrix} \right]^H = q \begin{pmatrix} V & V \\ V & -V \end{pmatrix} \bar{q} \begin{pmatrix} V^H & V^H \\ V^H & -V^H \end{pmatrix} =$$

$$= q \bar{q} \begin{pmatrix} 2VV^H & 0 \\ 0 & 2VV^H \end{pmatrix} \underset{VV^H = V^H V = I}{=} q \bar{q} \begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} = 2 q \bar{q} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}}_I \stackrel{\text{por ser unitaria}}{=} I \Rightarrow 2q\bar{q} = 1$$

$$q = a + bi$$

$$\bar{q} = a - bi$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{q\bar{q} = \frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} q\bar{q} = a^2 + b^2 \\ 2q\bar{q} = 1 \Rightarrow q\bar{q} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

⊛ Caracterizar las matrices A para las que $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ es diagonalizable unitariamente

B tiene que ser normal $\rightarrow BB^H = B^H B$

$$BB^H = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} 2AA^H & 2AA^H \\ 2AA^H & 2AA^H \end{pmatrix}$$

$$B^H B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A^H A & 2A^H A \\ 2A^H A & 2A^H A \end{pmatrix} \Rightarrow 2AA^H = 2A^H A \Rightarrow A \text{ tiene que ser normal } [AA^H = A^H A]$$

para que B sea diagonalizable unitariamente.

⊛ Diagonalizar unitariamente B efectuando el producto $U^H B U$ para una adecuada matriz unitaria U

$$U^H B U = \bar{q} \begin{pmatrix} V^H & V^H \\ V^H & -V^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} q \begin{pmatrix} V & V \\ V & -V \end{pmatrix} = q \bar{q} \begin{pmatrix} V^H & V^H \\ V^H & -V^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2AV & 0 \\ 2AV & 0 \end{pmatrix} = q \bar{q} \begin{pmatrix} 4V^H AV & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{q \bar{q} \begin{pmatrix} 4D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Por ser V unitaria y A una matriz normal $\rightarrow 4V^H AV = 4D$

⊙ Aplicar los apertados anteriores para diagonalizar unitariamente

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$U^H B U = D' \text{ y } B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} V & V \\ V & -V \end{pmatrix}$$

Sabemos que $V^H A V = D$

$$X_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \begin{cases} \lambda = i \\ \lambda = -i \end{cases}$$

$$\lambda_1 = i \rightarrow \text{Ker } |iI - A| = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ix_1 - x_2 = 0 \rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda_2 = -i \rightarrow \text{Ker } |-iI - A| = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ix_1 + x_2 = 0 \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto $\exists V$ tal que $V^H A V = D$, $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } U = \begin{pmatrix} V & V \\ V & -V \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Sabemos que

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para mod=1 $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

⊕ Ejercicio Examen: a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -1 & a & c \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ determinar los valores reales de a, b, c que hacen que A sea una matriz normal

b) Caracterizar de modo razonado los mtrices complejas normales que tienen: b.1 $\rightarrow$ valores propios reales
b.2 $\rightarrow$ valores propios imaginarios puros

c) Aplicar lo anterior al cálculo de los valores reales de a, b, c que hacen que: c.1 $\rightarrow A$ sea normal y sus valores propios sean reales
c.2 $\rightarrow A$ sea normal y sus valores propios sean imaginarios puros

Ⓐ

$$A \text{ es normal} \Rightarrow AA^h = A^hA \xrightarrow{\text{en } \mathbb{R}} AA^t = A^tA$$

$$AA^h = AA^t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -1 & a & c \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ b & a & 1 \\ 0 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab-a & b \\ ab-a & a^2+c^2+1 & a+ac \\ b & a+ac & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^hA = A^tA = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ b & a & 1 \\ 0 & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -1 & a & c \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & ab-a & -c \\ ab-a & b^2+a^2+1 & ac+a \\ -c & ac+c & c^2+a^2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Igualamos $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = a^2+1 \rightarrow b = \pm 1 \\ b = -c \\ a^2+c^2+1 = b^2+a^2+1 \\ 1+a^2 = c^2+a^2 \rightarrow c = \pm 1 \end{cases} \begin{cases} b=1 \rightarrow c=-1 \quad \forall a \\ b=-1 \rightarrow c=1 \quad \forall a \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \forall a \in \mathbb{R}, b=1, c=-1 \\ \forall a \in \mathbb{R}, b=-1, c=1 \end{matrix}}$$

Ⓑ

b.1) Las matrices hermiticas $\Rightarrow A = A^h$

b.2) Las matrices antihermiticas $\Rightarrow A = -A^h$

Ⓒ

$$\text{si } b=1, c=-1 \quad \forall a \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \text{si } a=0 \rightarrow A = -A^t = -A^h$$

$$\text{si } b=-1, c=1 \quad \forall a \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = A^t = A^h$$

c.1) $\forall a, b=-1, c=1$ A es hermitica $\Rightarrow$ valores propios reales

c.2) $a=0, b=1, c=-1$ A es antihermitica $\Rightarrow$ v. prop. imaginarios puros

Descomposición en valores singulares

● Sea el sistema incompatible $AX=b$ $\xrightarrow{\text{Min. cuadrados}}$ $A^t A X \cong A^t b$

Llamaremos matriz pseudoinversa $A^+ = A^\# = (A^t A)^{-1} A^t$

Por tanto $AX=b \rightarrow X = A^{-1}b$

$$X \cong \underbrace{(A^t A)^{-1} A^t}_{A^+ = A^\#} b$$

Tendremos un problema para calcular la pseudoinversa cuando la matriz $A^t A$ no tenga inversa, es decir, cuando el sistema de mínimos cuadrados sea compatible indeterminado.

En este caso, el único método aplicable para calcular la pseudoinversa es el llamado descomposición en valores singulares.

La matriz A se descompondrá en un producto de 3 matrices $A = U \Sigma V^h$ y la matriz pseudoinversa será $A^+ = A^\# = V \Sigma^+ U^h$

La matriz Σ es pseudodiagonal y las matrices U y V son matrices unitarias.

NOTA! Si trabajamos en $\mathbb{R}$ la descomposición en valores singulares de A será:

$$A = U \Sigma V^t \quad \text{y} \quad A^+ = V \Sigma^+ U^t$$

Como la matriz A , en general no será cuadrada, la matriz Σ tampoco lo será, pues tiene la misma dimensión que A . Tendrá, en la teoría diagonal principal, los valores singulares de la matriz A .

Llamaremos valores singulares de la matriz A , y los representaremos por σ_i , a la raíz cuadrada de los autovalores de $A^t A$.

$$A \rightarrow \sigma_i = \sqrt{\lambda_{(A^t A)}}$$

Los vectores propios de la matriz $A^t A$, forzando a que sean ortonormales, formarán las columnas de la matriz V , y calcularemos los vectores columna de U con la fórmula $U_i = \frac{A V_i}{\sigma_i}$.

NOTA! Si algún valor singular σ_i es cero, no podremos aplicar la fórmula anterior y, en este caso, calcularemos el U_i forzando a que dicho vector sea ortonormal con los U_i anteriormente calculados.

➔ Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, se pide: a) Descomposición en valores singulares de A
b) Calcular su pseudoinversa

a) $A = U \Sigma V^h$ Dim: $\begin{matrix} 3 \times 2 & 3 \times 3 & 3 \times 2 & 2 \times 2 \\ A & U & \Sigma & V \end{matrix}$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}; \chi(\lambda) = |\lambda I - A^t A| = \begin{vmatrix} \lambda - 9 & -9 \\ -9 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = (\lambda - 9)^2 - 81 =$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda = \lambda(\lambda - 18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 18 \end{array} \right.$$

Valores singulares $\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ordenados de mayor a menor la diagonal

Vectores propios de $A^t A$

$$\lambda = 18 \rightarrow \text{Ker} |18I - A^t A| = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortonormalizando $\rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda = 0 \rightarrow \text{Ker} | -A^t A| = \begin{pmatrix} -9 & -9 \\ -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ortonormalizando $\rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow U = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \quad v_i = \frac{A v_i}{\sigma_i}$$

$$u_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |u_1| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1 \checkmark$$

$$u_2 \perp u_1 \rightarrow \langle u_2, u_1 \rangle = u_1^t u_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

Ortonormalizando

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 \perp u_1 \rightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \rightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; x_1 = -2x_2 - 2x_3 = -4$$

$$u_3 \perp u_2 \rightarrow u_2^t u_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_2 = x_3 = 1$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{O.N} u_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la descomposición será:

$$A = U \Sigma V^h = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$A^+ = V \Sigma^+ U^h ; \quad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— trasponiendo } \Sigma \text{ e invirtiendo los autovalores}$$

$$A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{9\sqrt{2}} & \frac{2}{9\sqrt{2}} & \frac{2}{9\sqrt{2}} \\ \frac{1}{9\sqrt{2}} & \frac{2}{9\sqrt{2}} & \frac{2}{9\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Repetimos el problema, ahora con la matriz AA^t

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}; \quad \chi(\lambda) = |\lambda I - AA^t| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda - 8 & -8 \\ -4 & -8 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 2 =$$

$$= \lambda^3 - 18\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 18)$$

$$\begin{cases} \lambda = 18 \text{ (1)} \\ \lambda = 0 \text{ (2)} \end{cases}$$

$$z_1 = 18, \quad z_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$z_3 = 0$$

$$\lambda_1 = 18 \rightarrow \text{Ker } |18I - AA^t| = \begin{pmatrix} 16 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & -8 \\ -4 & -8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 18x_1 - 9x_3 = 0, 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ON}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = U_1$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_3 = 2 \\ x_2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow U_2 \perp U_1 \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ON}} U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$U_3 \perp U_1 \rightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -4$$

$$U_3 \perp U_2 \rightarrow \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_2 = x_3 = 1$$

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}; \text{ Sacamos } V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_i = \frac{A^t u_i}{\sigma_i} \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_2 \perp u_1 \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad x_1 + x_2 = 0 \\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Descomposición $\rightarrow A = U \Sigma V^h = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Sacamos A^t igual que antes.

⊕ Descomponer en valores singulares y calcular la pseudoinversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Descomposición $A = U \Sigma V^h$
 $3 \times 2 \rightarrow 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \quad 2 \times 2$

$$A^t A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$$

Sacamos $\lambda(A^t A) \rightarrow \chi_{A^t A}(\lambda) = |\lambda I - A^t A| = \begin{vmatrix} \lambda - 18 & 9 \\ 9 & \lambda - 18 \end{vmatrix} = (\lambda - 18)^2 - 81 = \lambda^2 - 36\lambda + 243 = 0$

$$\lambda = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 4 \cdot 243}}{2} = \frac{36 \pm 18}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 27 \rightarrow \sigma_1 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \\ \lambda_2 = 9 \rightarrow \sigma_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_1 = 27 \rightarrow \text{Ker } |27I - A^t A| = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge x_1 + x_2 = 0$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \rightarrow \text{Ker } |9I - A^t A| = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge x_1 = x_2$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$ $u_i = \frac{A v_i}{\sigma_i}$

$$u_1 = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 \rightarrow \perp u_1 \rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} = 1$$

$$\perp u_2 \rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 = x_3 = 1$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la descomposición será

$$A = U \Sigma V^h = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$A^+ = V \Sigma^+ U^h = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{9\sqrt{2}} & \frac{2}{9\sqrt{2}} & \frac{1}{9\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{4}{9\sqrt{2}} & \frac{2}{9\sqrt{2}} & \frac{2}{9\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{9\sqrt{2}} & \frac{-2}{9\sqrt{2}} & \frac{4}{9\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

➔ Un experimentador sospecha que una determinada magnitud C depende de dos variables X e Y de la forma $C = a_0 + a_1 X + a_2 Y$

Para comprobarlo obtiene la siguiente tabla

X	Y	C
2	1	4
2	2	6
2	-2	1
2	-1	2

a) Plantee el problema de mínimos cuadrados

b) Halle la descomposición en valores singulares de A

c) Calcule la pseudoinversa y , con ello, la solución del sistema

a) $C = a_0 + a_1 X + a_2 Y$

$\begin{cases} 4 = a_0 + 2X + Y \\ 6 = a_0 + 2X + 2Y \\ 1 = a_0 + 2X - 2Y \\ 2 = a_0 + 2X - Y \end{cases}$ Se trata de un sistema incompatible

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A X = b \quad \begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A') = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Sist. Incomp.}$$

$$A^t A X = A^t b$$

$$X \approx (A^t A)^{-1} A^t b \rightarrow \boxed{X \approx A^+ b}$$

b) Descomposición de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = U \Sigma V^t$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A^t A}(\lambda) = |\lambda I - A^t A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -8 & 0 \\ -8 & \lambda - 16 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 10 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 16)(\lambda - 10) - 64(\lambda - 10) =$$

$$= (\lambda - 10)(\lambda^2 - 20\lambda + 64 - 64) = \lambda(\lambda - 10)(\lambda - 20) \quad \begin{cases} \lambda = 20 \rightarrow \sigma_1 = \sqrt{20} \\ \lambda = 10 \rightarrow \sigma_2 = \sqrt{10} \\ \lambda = 0 \rightarrow \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{20} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 20 \rightarrow \text{Ker } |20I - A^*A| = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\lambda_2 = 10 \rightarrow \text{Ker } |10I - A^*A| = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 0 \\ -8 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_3 = 0 \rightarrow \text{Ker } |A^*A| = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 0 \\ -8 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcularmos $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$ $U_i = \frac{A V_i}{\sigma_i}$

$$\sigma_1 = \sqrt{20} \rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow U_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{20}} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{10} \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow U_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$U_3 \perp U_1 \rightarrow \langle U_1, U_3 \rangle = (1, 1, 1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$U_3 \perp U_2 \rightarrow \langle U_2, U_3 \rangle = (1, 2, -2, -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_4 = 1 - 4 = -3 \end{cases}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$U_4 \perp U_3 \rightarrow \langle U_3, U_4 \rangle = (1, 0, 2, -3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \rightarrow x_3 = 3 \\ x_1 = -3 \rightarrow x_1 = -9 \end{cases}$$

$$x_4 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -9 + 14 - 6 = -1$$

$$x_2 = \frac{x_3 - 2x_1}{3} = \frac{14 - 6}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow x_2 = \frac{8}{3}$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{140}}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{9}{\sqrt{140}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{140}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{140}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{140}} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la descomposición será

$$A = U \Sigma V^h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{9}{\sqrt{140}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-7}{\sqrt{140}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{140}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{140}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{20} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 0 \\ \sqrt{5} & 2 & 0 \\ \sqrt{5} & -2 & 0 \\ \sqrt{5} & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

c) Calculamos $A^+ = V \Sigma^+ U^h =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ \frac{9}{\sqrt{140}} & \frac{-7}{\sqrt{140}} & \frac{-3}{\sqrt{140}} & \frac{1}{\sqrt{140}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{20}} & \frac{1}{2\sqrt{20}} & \frac{1}{2\sqrt{20}} & \frac{1}{2\sqrt{20}} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{20}} & \frac{1}{2\sqrt{20}} & \frac{1}{2\sqrt{20}} & \frac{1}{2\sqrt{20}} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{2\sqrt{5}}{10} & \frac{-2\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = A^+$$

Solución del sistema

$$AX = b \longrightarrow X \approx A^+ b$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} X_1 = \frac{13}{20} \\ X_2 = \frac{13}{10} \\ X_3 = \frac{6}{5} \end{matrix}$$

➔ Para un sólido rígido rectangular sometido a las fuerzas F_1, F_2, M esté en equilibrio se debe cumplir que

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{\text{vert}} &= 0 \\ \sum F_{\text{horiz}} &= 0 \\ \sum M_{\text{cds}} &= 0 \end{aligned} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M \end{pmatrix}$$

Siendo v_1, v_2, h_1, h_2 las fuerzas de reacción y dado el sistema compatible indeterminado se pide:

- ① Encontrar una solución no nula del sistema homogéneo $AX=0$
- ② Determinar la descomposición en valores singulares de A
- ③ Supongase que $F_1=1, F_2=0, M=2$, determinar la solución X_0 de mínima norma, utilizando para ello la pseudoinversa A^+ . Hallar también la norma de $\|X_0\|^2$

① $AX=0$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \rightarrow X_2 = -X_1 \\ X_3 + X_4 = 0 \rightarrow X_4 = -X_3 \\ 2X_1 - 2X_2 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

$$2X_1 + 2X_1 - X_3 - X_3 = 0 \rightarrow 4X_1 = 2X_3 \rightarrow X_1 = 1 \rightarrow X_2 = -1$$

$$X_3 = 2 \rightarrow X_4 = -2$$

Solución no nula $\equiv$

$$\begin{bmatrix} X_1 = 1 \\ X_2 = -1 \\ X_3 = 2 \\ X_4 = -2 \end{bmatrix}$$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = U \Sigma V^h$

$$AA^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{AA^+}(\lambda) = |\lambda I - AA^+| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-10 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-10) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 10 \rightarrow \sigma_1 = \sqrt{10} \\ \lambda_2 = 2 \rightarrow \sigma_2 = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 10$

$$\text{Ker } |10I - AA^+| = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$ (2)

$$\text{Ker } |2I - AA^+| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$

$V_i = \frac{A^+ U_i}{\sigma_i}$

$\sigma_1 = \sqrt{10}$

$V_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 = \sqrt{2}$
 $V_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_3 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$U_4 \perp U_1 \rightarrow \langle U_1, U_4 \rangle = (2 -2 -1 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \rightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$

$U_4 \perp U_2 \rightarrow \langle U_2, U_4 \rangle = (1 1 0 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -x_1$

$U_4 \perp U_3 \rightarrow \langle U_3, U_4 \rangle = (0 0 1 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 = -x_3$

$U_4 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

Descomposición

$A = U \Sigma V^h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

③ $Ax_0 = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x_0 \approx A^+ b$

Calculamos $A^+ = V \Sigma^+ U^h = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{10} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = A^+$

Resolviendo el sistema $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix}$

$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$; Calculamos $\|X_0\|^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(-\frac{2}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$

➔ Dado la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, Calcule: a) Polinomio característico de B
b) Estudie si B es nilpotente
c) Calcule $\dim(\text{Ker } B)$

a)

$X_B(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ -2 & \lambda & 1 \\ 0 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 2 = \lambda^3 \rightarrow X_B(\lambda) = \lambda^3$
 $\lambda^3 = 0 \rightarrow \lambda = 0 \text{ (3)}$
 $z_1 = 0$
 $z_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$
 $z_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

b) Nilpotencia

$\lambda^p = 0$
 $\lambda^{p-1} \neq 0$

Th Cayley Hamilton

$X_B(\lambda) = \lambda^3 = 0 \Rightarrow B^3 = 0$

$B \neq 0$; $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$; $B^3 = 0 \Rightarrow$ B es nilpotente

c) $\dim \text{Ker}(B) = 3 - \text{rg}(B) = 3 - 2 = \boxed{1}$

➔ $A \in \mathbb{C}^{20 \times 20}$ es diagonal y $X_A(\lambda) = (\lambda - 3)^{13}(\lambda + 5)^7$. Hallar el polinomio característico de la matriz $A - 2I$

$A \rightarrow \begin{matrix} \lambda = 3 \text{ (13)} \\ \lambda = -5 \text{ (7)} \end{matrix}$

$A - 2I \Rightarrow \lambda_i = \lambda - 2 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ (13)} \\ \lambda_2 = -7 \text{ (7)} \end{cases}$

$X_{A-2I}(\lambda) = (\lambda - 1)^{13}(\lambda + 7)^7$


 Sea $B = (v, u, w)$ una base de $\mathbb{C}^3$. Sea f un endomorfismo
 $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que
 $f(v+u) = 2v+2u$
 $f(u-u) = -u+u$
 $f(w) = 3w$

Estudie si la matriz del endomorfismo f en la base B es diagonalizable

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} f(v) & f(u) & f(w) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(v) + f(u) = 2v + 2u \\ f(v) - f(u) = -u + u \\ f(w) = 3w \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2f(v) = v + 3u \\ f(v) = \frac{1}{2}v + \frac{3}{2}u \\ 2f(u) = 3v + u \\ f(u) = \frac{3}{2}v + \frac{1}{2}u \\ f(w) = 3w \end{array} \right.$$

$$\longrightarrow M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

M será diagonalizable por ser simétrica

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 (\lambda - 3) - \frac{9}{4} (\lambda - 3) = (\lambda - 3) \left[\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} \right] =$$

$$= (\lambda - 3) (\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \quad (1) \\ \lambda_2 = 2 \quad (1) \\ \lambda_3 = -1 \quad (1) \end{array} \right. \rightarrow \text{Las raíces son simples lo que confirma que } M \text{ es diagonalizable}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{2}v + \frac{3}{2}u \longrightarrow Mv = \frac{1}{2}v + \frac{3}{2}u \\ f(u) &= \frac{3}{2}v + \frac{1}{2}u \longrightarrow Mu = \frac{3}{2}v + \frac{1}{2}u \\ f(w) &= 3w \longrightarrow Mw = 3w \end{aligned}$$

Def. autovalor $\rightarrow M\lambda = V\lambda$
 $\hookrightarrow$ vector propio

$$Mw = 3w \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 3 \\ w \text{ es vector propio de } M \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} M(v+u) &= 2v+2u \\ M(v+u) &= 2(v+u) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ v+u \text{ es vec. propio} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} M(u-u) &= -u+u \\ M(u-u) &= -1(u-u) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ u-u \text{ es vec. propio} \end{array} \right.$$

$$M \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \rightarrow w \\ \lambda_2 = 2 \rightarrow v+u \\ \lambda_3 = -1 \rightarrow u-u \end{array} \right.$$

➔ Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con $\text{rg}(A) = \text{traza } A = 1$. Hallar los valores propios de A , así como sus multiplicidades algebraicas y geométricas. Decir si A es o no diagonalizable.



$$\text{rg}(A) = 1 \implies |A| = 0 \implies \lambda = 0 \text{ es autovalor}$$

$$\text{o. multiplicidad geométrica } \alpha_{\lambda=0} = n - \text{rg}(0I - A) = n - \text{rg}(-A) = n - \text{rg}(A) = n - 1$$

orden multiplicidad algebraica $\geq$ orden multiplicidad geométrica
 $\lambda = 0$

• Si o.m.a. = $n > n-1 = \text{o.m.g.} \implies A$ no será diagonalizable

$$\text{Pero } \text{tr} A = 1 = \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}}_0 + \lambda_n$$

$$\implies \lambda_n = 1$$

por tanto este caso no es posible

• Si o.m.a. = $n-1 = \text{o.m.g.} \implies A$ es siempre diagonalizable

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - 1)$$

Autovalores $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \text{ con orden de multiplicidad} = \underline{n-1} \\ \lambda = 1 \text{ con orden de multiplicidad} = 1 \end{array} \right.$

➔ Sea $B = (u, v, w)$ una base en $\mathbb{C}^3$ y $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tal que $Au = iu$
 $Av = -iv$
 $Aw = -w$
 Hallar los valores y vectores propios de la matriz A .

Def. autovalor $\rightarrow Av = \lambda v$
 $\left\{ \begin{array}{l} Au + Aiv = iu + v \rightarrow A(u + iv) = 1(u + iv) \rightarrow (u + iv) \text{ es vector propio } \lambda = 1 \text{ es autovalor} \\ Au - Aiv = iu - v \rightarrow A(u - iv) = -1(u - iv) \rightarrow (u - iv) \text{ es vector propio } \lambda = -1 \text{ es autovalor} \\ Aw = (-1)w \rightarrow w \text{ es vector propio } \lambda = -1 \text{ es autovalor} \end{array} \right.$

Autovalores $\rightarrow$ Vectores propios

➔ Sabiendo que el polinomio característico de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ con $c \neq 0$, escribir el polinomio característico de A^{-1} en función de a, b, c .

NOTA! RELACIONES DE CARDANO

• $\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}$

$-a = \lambda_1 + \lambda_2$

$b = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

• $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{cases}$

$-a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$b = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$

$-c = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

• $\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{cases}$

$-a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$

$b = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4$

$-c = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4$

$d = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$

$$A \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 \\ \searrow \lambda_2 \\ \downarrow \lambda_3 \end{matrix} \longrightarrow A^{-1} \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{\lambda_1} \\ \searrow \frac{1}{\lambda_2} \\ \downarrow \frac{1}{\lambda_3} \end{matrix}$$

$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{cases}$

Cardano!

$-a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$b = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$

$-c = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_3} \end{cases}$

$-A = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}$

$B = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{1}{\lambda_3}$

$-C = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$

$-A = \frac{\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{b}{-c} \longrightarrow A = \frac{b}{c}$

$B = \frac{\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{-a}{-c} \longrightarrow B = \frac{a}{c}$

$-C = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{1}{-c} \longrightarrow C = \frac{1}{c}$

$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \lambda^3 + \frac{b}{c}\lambda^2 + \frac{a}{c}\lambda + \frac{1}{c}$

Perturbación de sistemas de ecuaciones

Nº de Condición de una matriz

- Sea el sistema de ecuaciones $AX=b$ compatible determinado con $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $|A| \neq 0$, $b \in \mathbb{C}^n$,

En este tema vamos a analizar cómo varía la solución del sistema si modificamos (perturbamos) el término independiente, la matriz del sistema, o los dos simultáneamente

● CASO I: Perturbamos el término independiente

En este caso, se sustituye el término independiente b , por un nuevo término, b' . Siempre podremos relacionar b' con el término independiente anterior b de la forma $b' = b + \Delta b$

Al tener un nuevo término independiente, el sistema tendrá una nueva solución, x' , y ésta también se podría relacionar con la solución x de la forma $x' = x + \Delta x$

- ➔ Dado el sistema de ecuaciones, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

- 1) Resuelve
- 2) Resuelve con un nuevo término independiente $b' = b + \Delta b$ siendo $\Delta b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- 3) Calcula Δx

① $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow 2x_1 = 2 \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

② $b' = b + \Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow AX' = b' \rightarrow \begin{cases} x'_1 + x'_2 = 1 \\ x'_1 - x'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x'_1 = \frac{1}{2} \\ x'_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}$

$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

③ Δx ; $x' = x + \Delta x$; $\Delta x = x' - x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \Delta x$

● ERROR RELATIVO DE UN SISTEMA

El error relativo de un sistema es el error que se comete al sustituir la solución x de un sistema por la solución x' del sistema perturbado.

Se define como $E_r = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ y una cota superior del error relativo será

$$E_r = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

● NÚMERO DE CONDICIÓN DE UNA MATRIZ

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con $|A| \neq 0$, llamaremos n.º condición de la matriz A y lo representaremos por $C(A)$ a:

$$C(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Así, la cota del error queda $E_r \leq C(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

→ Dado el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ hallar el n.º de condición 1, 2, ∞ además del error relativo asociado a estos números de condición, siendo el vector b indep = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$C_A = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A^h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^d}{-2} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } C_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^h A)} = \sqrt{2}$$

$$A^h A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; |\lambda I - A^h A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 \rightarrow \lambda = 2 \quad (2)$$

$$(A^{-1})^h A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, |\lambda I - (A^{-1})^h A^{-1}| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}[(A^{-1})^h A^{-1}]} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$C_2(A) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \quad (\text{bien condicionada})$$

$$\epsilon_{r_2} \rightarrow \epsilon_{r_2} \leq C_2(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} = 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$b' = b + \Delta b, \Delta b = b' - b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \|\Delta b\|_2 = \sqrt{1+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\|b\|_2 = \sqrt{0+(-2)^2} = 2$$

Globales $C_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 \oplus \epsilon_{r_1}$

$$\|A\|_1 = \max\{1+1, 1+|-1|\} = 2$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \left|-\frac{1}{2}\right|\right\} = 1$$

$$C_1(A) = 2 \cdot 1 = \boxed{2} \left\{ \epsilon_{r_1} \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \boxed{3} \right.$$

$$\|\Delta b\|_1 = 1 + |-2| = 3, \|b\|_1 = 0 + |-2| = 2$$

Globales $C_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \oplus \epsilon_{r_\infty}$

$$\|A\|_\infty = \max\{1+1, 1+|-1|\} = 2$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1$$

$$C_\infty(A) = 2 \cdot 1 = \boxed{2}$$

$$\epsilon_{r_\infty} \leq \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = \boxed{2}$$

$$\|\Delta b\|_\infty = \max\{1, |-2|\} = 2, \|b\|_\infty = \max\{0, |-2|\} = 2$$

NOTA! 1º condición

Una matriz está bien condicionada cuando su num. de condición vale 2.

Estará peor condicionada cuanto más se aleje en nº de condición del valor 1.

NOTA! Si una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es simétrica/hermítica y tiene autovalores

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad 0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|, \quad A^{-1} \text{ tiene autovalores } \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$$

$$0 \leq \left| \frac{1}{\lambda_n} \right| \leq \left| \frac{1}{\lambda_{n-1}} \right| \leq \dots \leq \left| \frac{1}{\lambda_1} \right| \rightarrow \text{por ser hermíticos o simétricos}$$

$$C_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = |\lambda_n| \cdot \left| \frac{1}{\lambda_1} \right| = \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right|$$

NOTA! Sea $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz unitaria (ortogonal). El n° de condición de una matriz unitaria es siempre 1, es decir, una matriz unitaria estará siempre bien condicionada.

$$C(Q) = 1; C(Q^{-1}) = 1 \Rightarrow Q Q^{-1} = Q^{-1} Q = I$$

NOTA! Como $E_r \leq C(A) \frac{\| \Delta b \|}{\| b \|}$ y $C(A) = \| A \| \| A^{-1} \|$, tanto menor sea el número de condición de una matriz (tanto más se acerque a 1) menor será la cota del error que cometemos al sustituir la solución del sistema por la solución del sistema perturbado.

● CASO II: Perturbamos la matriz del sistema

Sea el sistema $AX = b$ con $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, con $b \in \mathbb{C}^n$ y $|A| \neq 0$, compatible determinado.

Perturbando este sistema con una matriz $A + \Delta A$ obtenemos un nuevo sistema $(A + \Delta A) X' = b$. La solución del sistema será una solución perturbada $X' = X + \Delta X$. En este caso, la cota del error será:

$$E_r = \frac{\| \Delta X \|}{\| X \|} \leq \frac{1}{1 - \alpha} C(A) \frac{\| \Delta A \|}{\| A \|} \rightarrow \text{siendo } \alpha = \| \Delta A \cdot A^{-1} \|$$

NOTA! En algunos casos se puede escribir $E_r = \frac{\| \Delta X \|}{\| X \|}$ refiriendo a la solución perturbada en vez de a ΔX .

Falta Jón de

Calcular una cota del error relativo que se comete en el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ cuando se perturba la matriz con } \Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A^h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A^h A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_r \leq \frac{1}{1-\alpha} C(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$$\chi_{A^h A}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 \\ -4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)^2 - 16 = 0 \rightarrow \lambda-5 = \sqrt{16} = \pm 4 \begin{cases} \lambda=9 \\ \lambda=1 \end{cases}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{9} = 3$$

$$A^{-1} = \frac{(A^h)^t}{|A|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; (A^{-1})^h = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow A^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{3}$$

$$C_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Calculamos $\|\Delta A\|$

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{por tanto} \\ \Delta A = (\Delta A)^h \end{array} \right. \Rightarrow \|\Delta A\| = |\lambda_{\max}| = 1$$

$$\chi_{\Delta A}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

$$\epsilon_r \leq \frac{1}{1-\alpha} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \|\Delta A \cdot A^{-1}\| = |\lambda_{\max}| = 1$$

$$\Delta A A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{por ser simétrica}} \left(\lambda - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0 \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \lambda = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

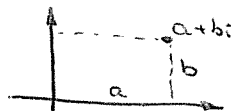
$$\epsilon_r \leq \frac{1}{1-\alpha} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

CAMPO COMPLEJO

Formas de expresión: $i = \sqrt{-1}$

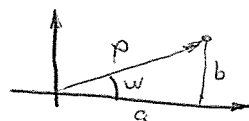
Los números complejos se pueden representar de dos formas diferentes.

a) FORMA BINÓMICA $z = a + bi$



b) FORMA MÓDULO ARGUMENTAL $z = \rho e^{i\omega}$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \omega &= \arctan \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= \rho \cos \omega \\ b &= \rho \sin \omega \end{aligned}$$



c) FORMA TRIGONOMÉTRICA

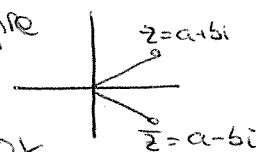
$$z = \rho (\cos \omega + i \sin \omega)$$

d) FORMA EXPONENCIAL

$$\left. \begin{aligned} \text{Euler } e^{i\omega} &= \cos \omega + i \sin \omega \\ e^{-i\omega} &= \cos \omega - i \sin \omega \end{aligned} \right\} z = \rho e^{i\omega}$$

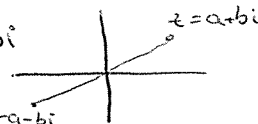
Dado un complejo $z = a + bi$, llamaremos complejo conjugado y lo representaremos por $\bar{z}$ a $\bar{z} = a - bi$

Un complejo y su conjugado definen una simetría respecto del eje OX



Dado el complejo $z = a + bi$, llamaremos complejo opuesto $-z = -a - bi$

Un complejo y su conjugado definen una simetría respecto del origen.



	z	$\bar{z}$	$-z$
Binómica	$a + bi$	$a - bi$	$-a - bi$
M. Argumental	$\rho e^{i\omega}$	$\rho e^{-i\omega}$	$-\rho e^{i\omega} = \rho e^{i(\omega+\pi)}$
Trigonométrica	$\rho(\cos \omega + i \sin \omega)$	$\rho(\cos \omega - i \sin \omega)$	$-\rho(\cos \omega + i \sin \omega)$
Exponencial	$\rho e^{i\omega}$	$\rho e^{-i\omega}$	$-\rho e^{i\omega} = \rho e^{i(\omega+\pi)}$

Operaciones con complejos

Operaremos con complejos como si fueran polinomios en la variable i .
Tendremos en cuenta lo que valen sus potencias

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= i \\ i^5 &= \sqrt{-1} \\ &\vdots \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad i^{237} = i^{59 \times 4 + 1} = i^1 = i$$

SUMA Y RESTA

Se recomienda operar en forma binómica y sumaremos y restaremos partes imaginarias.

$$\begin{aligned} E_j: \quad z_1 &= a+bi \\ z_2 &= c+di \\ z_1 + z_2 &= (a+c) + i(b+d) \\ z_1 - z_2 &= (a-c) + i(b-d) \end{aligned}$$

NOTA: Geométricamente la suma de complejos se resuelve como la suma de vectores, método del paralelogramo



PRODUCTO

Se recomienda operar en forma módulo argumental

$$z_1 = \rho_w = \rho e^{wi} \quad z_2 = \rho'_w = \rho' e^{w'i}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho \rho')_{w+w'} = \rho e^{wi} \rho' e^{w'i} = \rho \rho' e^{w+w'i} = \rho \rho' e^{(w+w')i}$$

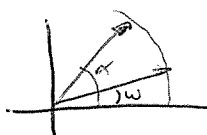
Si el producto no es muy complicado podemos hacerlo en la forma binómica

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Interpretación del producto de complejos (geométricamente)

$z_1 = \rho_w$ } si lo multiplicamos, estamos realizando sobre el complejo primero un
 $z_2 = 1_\alpha$ } giro de ángulo α .

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_w 1_\alpha = \rho_{w+\alpha}$$



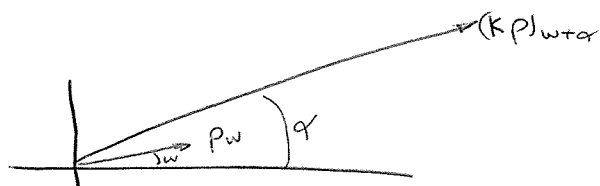
homotecias

Si a un complejo ρ_w lo multiplicamos por otro complejo K_α estaremos realizando una homotecia

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_w \cdot K_\alpha = (K\rho)_w$$



Si un complejo $z = p_w$ lo multiplicamos



COCIENTE

Se recomienda operar en la forma módulo argumental. El complejo cociente de dos complejos es otro complejo de módulo, el cociente de los módulos y de argumento la diferencia de los argumentos.

$$\begin{aligned} z_1 &= p_w \\ z_2 &= p'_w \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \left(\frac{p}{p'} \right)_{w-w'} ; & z_1 &= p e^{wi} & z_2 &= p' e^{w'i} ; & \frac{z_1}{z_2} &= \frac{p e^{wi}}{p' e^{w'i}} = \frac{p}{p'} e^{(w-w')i} \end{aligned} \right.$$

NOTA!

Si fuéramos que operar en forma binómica se recomienda eliminar el complejo del denominador multiplicando numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador

$$\begin{aligned} z_1 &= a+bi \\ z_2 &= c+di \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \end{aligned} \right.$$

POTENCIACIÓN DE COMPLEJOS

Se recomienda operar en forma módulo argumental y dado que la potenciación podríamos considerarle una generalización del producto

$$z = p_w$$

$$z^n = (p_w)^n = p_w \cdot p_w \cdot \dots \cdot p_w = p_{nw}$$

$$(p_w)^n = p_{nw}^n$$



$$z = p e^{wi}$$

$$[p(\cos w + i \sin w)]^n = p^n (\cos nw + i \sin nw)$$

$$z^n = (p e^{wi})^n = p^n e^{nwi}$$

$$p=1 \quad (\cos w + i \sin w)^n = \cos nw + i \sin nw$$

FÓRMULA DE MOIVRE

Con esto sacamos relaciones trigonométricas

$$(\cos w + i \sin w)^2 = \cos 2w + i \sin 2w$$

$$\cos^2 w + i 2 \sin w \cos w - \sin^2 w = \cos 2w + i \sin 2w$$

Relaciones:

$$\cos 2w = \cos^2 w - \sin^2 w$$

$$\sin 2w = 2 \sin w \cos w$$

$$\cos^2 w + \sin^2 w = 1$$

Si tuvieramos que operar en forma binómica desarrollaremos la potencia del complejo por el binomio de Newton y, una vez desarrollado, separaremos términos reales de términos imaginarios y sumaremos cada uno de las subseries obtenidos.

$$(a+bi)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^n}_{\mathbb{R}} + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}(ib)}_{\mathbb{C}} + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}(ib)^2}_{\mathbb{R}} + \dots + \binom{n}{n}(ib)^n$$

RADICACIÓN DE COMPLEJOS.

Operaremos en forma módulo argumental, y al ser la radicación operación inversa de la potenciación, lo consideraremos como una potencia de exponente inverso, pero, deberemos utilizar el argumento genérico $w+2ki$

$$z = \rho^w, \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho_{w+2k\pi}} = \sqrt[n]{\rho} \frac{w+2k\pi}{n}$$

y obtendremos los n raíces dando valores a k desde cero a " $n-1$ ".

Ejercicio $z^3 - 1 = 0$

$$z^3 = 1; z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_{0+2k\pi}} = \left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{0+2k\pi}{3}} = 1_{\frac{0+2k\pi}{3}}$$

$$k=0 \longrightarrow z_1 = 1_0 = 1$$

$$k=1 \longrightarrow z_2 = 1_{\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=2 \longrightarrow z_3 = 1_{\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

En caso

$$z = \sqrt[4]{1}$$

$$z = \sqrt[5]{1}$$

$$z = \sqrt[6]{1}$$

$$z = \sqrt[7]{1}$$

Nota: Las raíces enésimas de un complejo son los vértices de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio la raíz enésima del módulo y de ángulo al centro $\frac{2\pi}{n}$

LOGARITMO NEPERIANO DE UN COMPLEJO

El log. neperiano de un complejo en forma módulo argumental es un complejo en forma binómica de parte real el logaritmo del módulo y de parte imaginaria el argumento generalizado $w + 2k\pi$.

$$\angle p_w = \angle p + (w + 2k\pi)i$$

Euler

$$Ch_x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$Sh_x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$Th_x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$e^x = Ch_x + Sh_x$$

$$e^{-x} = Ch_x - Sh_x$$

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

$$\tan x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{i(e^{xi} + e^{-xi})}$$

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x$$

6.3

6.5

6.6

6.7

6.8

6.9

6.3

$$z = 4 - 4\sqrt{3}i \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \rho \omega \\ \rho = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8 \end{array} \right.$$

$$\omega = \arctg\left(\frac{-4\sqrt{3}}{4}\right) = \arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Sol: } 2 \left(\cos \frac{-\pi}{9} + i \sin \frac{-\pi}{9} \right)$$

$$z = \sqrt[3]{8 \frac{-\pi}{3} + 2k\pi} = \sqrt[3]{8 \frac{-\pi + 2k\pi}{3}} = 2 \frac{-\pi + 2k\pi}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k=0 \quad z_1 = 2 \frac{-\pi}{3} = 2 \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) \\ k=1 \quad z_2 = 2 \frac{\pi}{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ k=2 \quad z_3 = 2 \frac{4\pi}{3} = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \end{array} \right.$$

$$z_3 = 2 \frac{4\pi}{3} = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

6.5

Moivre

$$\cos n\phi + i \sin n\phi = (\cos \phi + i \sin \phi)^n$$

$$\frac{5-4}{3}$$

$$\cos 5\phi + i \sin 5\phi = (\cos \phi + i \sin \phi)^5$$

$$= \binom{5}{0} \cos^5 \phi + \binom{5}{1} \cos^4 \phi i \sin \phi + \binom{5}{2} \cos^3 \phi (i \sin \phi)^2 + \binom{5}{3} \cos^2 \phi (i \sin \phi)^3 + \binom{5}{4} \cos \phi (i \sin \phi)^4 + \binom{5}{5} (i \sin \phi)^5$$

$$= \cos^5 \phi + 5i \cos^4 \phi \sin \phi - 10 \cos^3 \phi \sin^2 \phi - 10i \cos^2 \phi \sin^3 \phi + 5 \cos \phi \sin^4 \phi + i \sin^5 \phi$$

6.6

$$z^2 + |z|^2 = 1+i$$

$$z = a+bi; \quad z^2 = a^2 + 2abi - b^2$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 - b^2 + 2abi + a^2 + b^2 = 1+i$$

$$2a^2 + 2abi = 1+i$$

$$\begin{cases} 2a^2 = 1 & a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = 1 & b = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff a = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & b = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

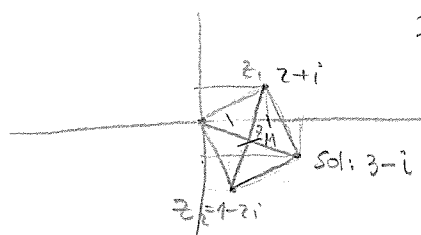
$$b = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solución:

$$z = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

6.7) Si $z+i$ y $1-2i$ son vertices opuestos de un cuadrado, determinar el 3^{er} distinto de los anteriores +. q. la parte imaginaria sea negativa



$$z_M = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_1 - z_M = (z+i) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)$$

$$z \cdot 1_{-\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) (-i) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \xrightarrow{\text{simetría}} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{6}{2} - i = \boxed{3-i}$$

Academia **RUFFO**

Luchana, 31 – Tel. 91 447 69 26 – Madrid 28010
Luchana, 37 – Tel. 91 448 11 80 – Madrid 28010

CURSO 2010-2011

CUESTIONES Y PROBLEMAS DE ÁLGEBRA I

TEMA 1.- ESPACIOS VECTORIALES

- 1.1.- Sean F y G dos subespacios de $\mathbf{R}^{100}$ de dimensiones 80 y 50 respectivamente. Determinar la mínima dimensión que puede tener el subespacio $F \cap G$.

Solución: 30

- 1.2.- Hallar el máximo número de polinomios del sistema

$$\frac{(x+1)(x-2)^2}{x(x+3)(x-1)}, \quad \frac{x(x+1)(x-2)^2}{x^2(x+2)(x-1)}, \quad (x+1)^2(x-2)^2$$

que son linealmente independientes.

Solución: 4

- 1.3.- Determinar la dimensión del subespacio de los polinomios reales de grado menor o igual que diez que toman los mismos valores en cinco puntos distintos.

Solución: 7

- 1.4.- Determinar el valor positivo del parámetro t para que el punto $(1, t, t^2)$ pertenezca al plano determinado por los puntos $(3, 1, 0)$, $(1, 0, 4)$ y $(0, 1, 12)$

Solución: $2 + 2\sqrt{3}$

- 1.5.- Escriba una base del subespacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 3 con integral nula en el intervalo $[-1, 1]$

Solución: $(x, x^3, 1-3x^2)$

- 1.6.- Si $(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}, \overline{v_5})$ es base de un espacio vectorial E , encontrar el vector de coordenadas de $\overline{v_5}$ respecto de la base $(\overline{v_1}, \overline{v_2} + \overline{v_1}, \overline{v_3} + \overline{v_2}, \overline{v_4} + \overline{v_3}, \overline{v_5} + \overline{v_4})$

Solución: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 1.8.- Dados los subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^5$

$$M = \begin{cases} x_1 = v \\ x_2 = \mu \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu, v \in \mathbf{R}; \quad N = \begin{cases} x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

hallar una base del subespacio $M \cap N$.

Solución: $(1, 1, 2, 0, 2)$

1.9.- Sean E un espacio vectorial y L_1, L_2, L_3 subespacios vectoriales de E . Decir cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

- a) $L_1 + L_2 + L_3$ es una suma directa $\Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = L_1 \cap L_3 = L_2 \cap L_3 = \{\bar{0}\}$
- b) Una condición necesaria para que $L_1 + L_2 + L_3$ sea suma directa es $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{\bar{0}\}$
- c) Una condición suficiente para que L_1, L_2, L_3 sea suma directa es que $L_1 \cap (L_2 + L_3) = L_2 \cap (L_1 + L_3) = L_3 \cap (L_1 + L_2) = \{\bar{0}\}$
- d) L_1, L_2, L_3 es una suma directa $\Leftrightarrow (L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_3) + (L_2 \cap L_3) = \{\bar{0}\}$

Solución: b, c

1.10.- Sean M y N subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$. Decir cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos:

- a) Si $\dim M = \dim N = 2$, entonces $\dim M \cap N = 1$
- b) Si $\dim M = 2$ y $\dim N = 1$, entonces $\mathbf{R}^3 = M \oplus N$
- c) Si $\dim M \cap N = 1$, entonces $M + N = \mathbf{R}^3$
- d) Si $\dim M \cap N = 1$, y M no está contenido en N ni N en M , entonces $\dim M = \dim N = 2$

Solución: d

1.11.- Dada una base $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{R}^4$ escribir los valores de a para los cuales $(v_1 - v_2 + (a+2)v_4, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1)$ es base de $\mathbf{R}^4$.

Solución: $a \neq -2$

1.12.- Sean $\mathbf{R}$ y $\mathbf{Q}$ los cuerpos de números reales y racionales respectivamente. Se considera el espacio vectorial $(\mathbf{R}^2, \mathbf{Q}, +, \cdot)$. Se pide determinar una base B del subespacio intersección de

$$M = L\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right] \text{ y } N = L\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}\right]$$

Solución: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.13.- Sea M el subespacio de $\mathbf{R}^6$ de ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

y N el engendrado por los vectores $(1, 2, 3, -3, -2, -1)^t$. Calcular la dimensión de $M + N$.

Solución: $\dim M + N = 6$

TEMA 2.- MATRICES

2.1.- Calcular la matriz:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 12 & 6 & 9 \\ -20 & -10 & -15 \end{bmatrix}^{101}$$

Solución: A

2.2.- Calcular la inversa de la matriz:

$$\begin{bmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} -i & i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.- Determinar la dimensión del subespacio de las matrices simétricas del sexto orden que tienen traza nula.

Solución: 20 2.4.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde $c \neq 0$, deducir la relación lineal entre los parámetros a , b y c que hace que su producto sea conmutativo.Solución: $\forall c, a = b$ 2.5.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ escribir una matriz U triangular superior tal que $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior invertible y con elementos diagonales iguales a la unidad.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.6.- Sea A, B matrices cuadradas de orden n . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a) Si $r(AB) = n$, entonces $r(A) = r(B)$.
- b) Si $r(A) = r(B)$, entonces $r(AB) = r(A)$.
- c) Si $r(B) = n$, entonces $r(AB) = r(A)$.
- d) Si $r(A) \leq r(B)$, entonces $r(AB) = r(A)$

Solución: a, c

2.7.- Hallar la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde i es la unidad imaginaria.

Solución:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2.8.- Hallar la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$ donde i es la unidad imaginaria.

Solución: $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & i/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

- 2.9.- Siendo A una matriz real cuadrada de orden n , cuáles de las siguientes proposiciones son falsas:

- a) A invertible $\Leftrightarrow$ rango de A es igual a n .
- b) $A\vec{x}=\vec{b}$ tiene solución $\Rightarrow A$ es invertible
- c) $\det A = 0 \Rightarrow \forall b \in \mathbb{R}^n$ ($A\vec{x}=\vec{b}$ es incompatible)
- d) rango de $A < n \Rightarrow \forall b \in \mathbb{R}^n$ ($A\vec{x}=\vec{b}$ tiene infinitas soluciones)

Solución: b, c, d

- 2.10.- Calcular la inversa en $\mathbb{Z}_5$ de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

- 2.11.- Escribir la segunda fila de la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $(1, -1, -1)$

- 2.13.- Sea A una matriz real de orden m , no diagonal y tal que se verifica $A^2 - A + 2I = 0$. Calcular la dimensión d del espacio vectorial formado por todas las combinaciones lineales finitas de potencias enteras de A .

Solución: $d = 2$

- 2.14.- Calcular la tercera columna de la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $(A^{-1})_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 2.15.- Calcular el factor de Choleski de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 13 & 5 \\ 1 & 5 & 27 \end{pmatrix}$

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

TEMA 3.- APLICACIONES LINEALES

- 3.1.- En el espacio de las matrices cuadradas reales de tercer orden se considera el endomorfismo definido por $L(X) = AX$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Hallar la dimensión del núcleo de este endomorfismo.

Solución: 3

- 3.2.- ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

- a) Una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita es inyectiva si y sólo si es suprayectiva.
- b) Si φ es un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita y $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$, entonces φ es suprayectivo.
- c) No existe ningún isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
- d) Sea $\varphi: K^3 \rightarrow K^2$ una aplicación lineal (K cuerpo); existe $\vec{u} \in K^3, \vec{u} \neq \vec{0}$ tal que $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$

Solución: b, c, d

- 3.3.- Dado el endomorfismo T en $\mathbb{R}^3$: $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$; calcular la dimensión de $\ker T$.

Solución: 0

- 3.4.- De la matriz A de una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ se sabe que transforma el vector $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^t$ en $(1, 0, 0, 3)^t$ y el vector $(1, 1, 1)^t$ en $(6, 0, 0, 2)^t$. Hallar el transformado por A del vector $(2, 2, 0)^t$.

Solución: $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

- 3.5.- Calcular la primera columna de la matriz (expresada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$) del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que transforma la base $((0, 0, 1)^t, (1, 1, 0)^t, (2, 3, 4)^t)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

- 3.6.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}^{2 \times 2}$, formado por las matrices reales de 2° orden, sobre el cuerpo $\mathbf{R}$, se considera la forma cuadrática $q(z) = f(z, z)$, asociada a la forma bilineal, para todo $\lambda, B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$:

$$f(\lambda, B) = \text{traza}((\lambda \cdot B) - (\text{traza } \lambda) \cdot (\text{traza } B))$$

Hallar la matriz Q, simétrica, correspondiente a dicha forma cuadrática $q(z)$, respecto de la base $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ formada por las matrices:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3.7.- Calcular una base del núcleo de la aplicación lineal $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$x \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

TEMA 4.- CAMBIOS DE BASE

✓ 4.1.- Se considera el endomorfismo f de $\mathbf{R}_2(x)$ cuya matriz respecto a la base

$$B = (-1, 1+x, 1+x^2) \text{ es } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Calcular la matriz de } f \text{ respecto a la base } v = (1, x, x^2).$$

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ 4.2.- Sea φ un endomorfismo en $\mathbf{R}_2(x)$ y A la matriz asociada a φ en la base $B = \{2, 1+x, x^2\}$. Hallar una matriz regular P tal que $P^{-1}AP = C$, donde C es la matriz asociada a φ en la base $V = \{3+x, 3-x, 1+x^2\}$.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ 4.3.- Se considera en $\mathbf{R}^2$ un endomorfismo f que, respecto de la base $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ tiene como matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de f respecto de la base $V = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_2)$.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

4.4.- Se considera en $\mathbf{R}^2$ el endomorfismo f cuya matriz respecto de la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matriz de f respecto de la base $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2)$

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.5.- Sea f la aplicación de $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Determinar su matriz respecto de la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1)$ siendo $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canónica de $\mathbf{R}^2$

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

TEMA 5.- APLICACIONES LINEALES CON POLINOMIOS

- 5.1.- En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2, se considera el endomorfismo definido por $f(p) = p - p'$, donde p' es la derivada de p . Determinar la expresión del endomorfismo inverso de f .

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 5.2.- Calcular el rango del endomorfismo f de $R_n(x)$ definido por $f(p(x)) = x^2 p''(x) - p(x)$.

$$\text{Solución: } n$$

- 5.3.- Sobre los polinomios reales de grado menor o igual que 2 se considera la aplicación que asocia a $p(x)$ el polinomio $x^2 p(1/x)$. Hallar la matriz de esta aplicación en la base formada por los polinomios $x^2, (x+1)^2$ y $(x-1)^2$.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 5.4.- En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2, se considera el endomorfismo φ definido por

$$\varphi(P(x)) = P(2x+1) - P(2x-1) + P(x)$$

Determinar la matriz de φ respecto de la base $(1, x, x^2)$.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 5.5.- En el espacio vectorial $R_2[x]$ de los polinomios reales de grado menor o igual que dos, se considera el endomorfismo φ tal que

$$\varphi[p(x)] = x^2 \cdot \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \quad \forall p(x) \in R_2[x].$$

Hallar una base del núcleo de dicho endomorfismo.

$$\text{Solución: } B_{\text{Ker } f} = \langle 1, x \rangle$$

- 5.6.- Sean $R[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales y φ el endomorfismo definido por:

$$\varphi(p(x)) = (x-7)p'(x).$$

Escribir un autovector mónico de φ asociado al autovalor 1.

$$\text{Solución: } (1, -1/7, 0, 0, 0, \dots, 0)'$$

- 5.7.- En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2, se considera el endomorfismo φ definido por $\varphi(P(x)) = P(2x + 2) - P(2x - 2) + 2P(x)$. Determinar la matriz A de φ respecto de la base $(1, x, x^2)$.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 5.8.- Calcular una base B del núcleo del endomorfismo φ definido en el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 3, que a cada polinomio $P(x)$ asigna el polinomio $\varphi(P(x)) = P(x + 1) - P(x)$.

$$\text{Solución: } \{1, x^2 - x\}$$

- 5.9.- Sea φ el endomorfismo del espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 que asigna a cada polinomio $p(x)$:

$$\varphi(p(x)) = \frac{1}{x} \int_0^x p(t+x) dt$$

Escribir la matriz A de φ respecto de la base $(1, x, x^2)$.

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}$$

TEMA 6.- CAMPO COMPLEJO

- 6.1.- Determinése el valor de a para que la ecuación $az + (2+i)\bar{z} = i$ represente una recta en el plano complejo.

Solución: $a = 2-i$

- 6.2.- Se consideran las raíces trigésimo octavas (de orden 38) del número complejo -1 . Calcular el producto de todas ellas, exceptuando la de menor parte imaginaria.

Solución: i

- 6.3.- Calcular la raíz cúbica de parte real positiva del número complejo $4-4\sqrt{3}i$, dando la solución en la forma $m(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$, donde m es un número real no negativo, y ϕ viene expresado en radianes.

Solución: $2\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{9}\right)$

- 6.4.- Calcular todas las raíces complejas del polinomio $x^3 - 2ix^2 + 3x - 6i$, sabiendo que el producto de dos de ellas vale 3.

Solución: $+2i, \pm \sqrt{3}i$

- 6.5.- Determinar el valor de $m - n$, siendo m, n y p números enteros que verifican la relación

$$\cos 5\phi = m \cos^5 \phi + n \cos^3 \phi \operatorname{sen}^2 \phi + p \cos \phi \operatorname{sen}^4 \phi.$$

Solución: 11

- 6.6.- Encontrar una raíz compleja de la ecuación $z^2 + |z|^2 = 1+i$ cuya parte real sea negativa.

Solución: $\frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$

- 6.7.- Si $2+i$ y $1-2i$ son dos vértices opuestos de un cuadrado, determinar el tercer vértice, distinto de los anteriores, tal que la parte imaginaria sea estrictamente negativa.

Solución: $3-i$

- 6.8.- Encontrar el polinomio mónico cuyas raíces son las siete raíces octavas de la unidad distintas de 1.

Solución: $p(z) = z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$

- 6.9.- Sabiendo que el polinomio, de coeficientes reales: $p(z) = 4z^4 - 12z^3 + 13z^2 - 12z + 9$ tiene la raíz compleja $z_1 = i$. Calcular las restantes raíces, indicando si son múltiples o simples.

Solución: $z_2 = -i$ (simple)
 $z_3 = \frac{3}{2}$ (doble)

TEMA 7.- ESTRUCTURAS

- 7.1.- En el cuerpo de las clases de restos módulo 7, calcular la suma de las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} [5]x + [3]y &= [3] \\ [6]x - [4]y &= [1] \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} [x] = 5 \\ [y] = 2 \end{cases}$$

- 7.2.- Sea el espacio vectorial $(C, R, +, \cdot)$ y sea f la aplicación lineal que transforma $z \in C$ en $z - 2z^*$. Calcular la matriz de f respecto de la base $(1+i, 1-i)$.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 7.3.- Sea el espacio vectorial de los números complejos sobre el cuerpo de los reales. Calcular las coordenadas, respecto de la base $(-\sqrt{3}+i, \sqrt{3}+i)$, del número complejo $1+i$.

$$\text{Solución: } \left(\frac{-1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right)$$

- 7.4.- Sea el espacio vectorial $(C^2, Q, +, \cdot)$. Calcular una base del subespacio intersección de aquéllos cuyas bases son, respectivamente, $((\sqrt{3}, i)^t, (2, i)^t)$ y $((1+\sqrt{3}, 0)^t, (0, i)^t)$.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 7.5.- Decidir cuáles de los siguientes enunciados son ciertos:

- $\dim(C^{m \times n}, R, +, \cdot) = m \cdot n$.
- $\dim(C^{m \times n}, C, +, \cdot) = m \cdot n$.
- $\dim(C^{m \times n}, R, +, \cdot) = 2 \cdot m \cdot n$.

$$\text{Solución: } b, c$$

- 7.6.- Sea el espacio vectorial $E = (C^2, R, +, \cdot)$, y sean M y N dos subespacios de E tales que

$$M = L \left[(1+i, 1)^t, (1-i, \sqrt{2})^t \right]$$

$$N = L \left[(2, 1+\sqrt{2})^t, (2, 2-i)^t \right]$$

Encontrar una base de $M \cup N$.

$$\text{Solución: } (2, 1+\sqrt{2})^t$$

- 7.7.- Escribir el valor del determinante de una matriz de orden n cuyos elementos son todos iguales a 1, salvo los de la diagonal principal, que son nulos.

$$\text{Solución: } (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$$

7.8.- Calcular las raíces del siguiente polinomio:

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 3 & z \\ 1 & z & z & 3 \\ 3 & z & z & 1 \\ z & 3 & 1 & z \end{vmatrix}$$

Solución: $z = 2y - 2$

7.9.- Sea $(\mathbf{R}^2, +, \times)$ el anillo formado por los pares ordenados de números reales con las dos leyes de composición internas:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \quad \forall a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

Se pide, en caso de que exista, el elemento inverso del $(1, 1)$.

Solución: $1/2, -1/2$

7.10.- Sea el espacio vectorial $\mathbf{C}$ sobre el cuerpo $\mathbf{Q}$; calcular una base del subespacio intersección de aquellos cuyas bases son, respectivamente, $(3, -\sqrt{3} + i, \sqrt{2})$ y $(2i, \sqrt{3})$

Solución: $-\sqrt{3} + i$

7.11.- Sea $E = \{\vec{0}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ un conjunto formado por cuatro elementos diferentes tal que sobre el cuerpo $\mathbf{Z}_2$ tiene estructura de espacio vectorial. Se sabe que $\vec{0}$ es el vector nulo y que $(\vec{a}, \vec{b})$ es una base. Calcular las coordenadas –respecto de dicha base– del vector $\vec{b} + \vec{c}$.

Solución: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

7.12.- En el conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros se define la operación $a * b = P(a) + P(b)$ donde $P(x) = x + 1$. Determinar el elemento simétrico (respecto de $*$) de 4.

Solución: -8

7.13.- Se considera el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbf{Z}_7$. Hallar el resto $R(x)$ de dividir $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ entre $2x^2 + 3x + 1$.

Solución: $R(x) = 2x + 3$

7.14.- Sea $M = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2, b \neq 0\}$. Se define en M la operación $*$:

$$(a, b) * (c, d) = (a + c - 1, 3bd)$$

Calcular el elemento simétrico (respecto de $*$) del par $(4, 1/7)$.

Solución: $\left(-2, \frac{7}{9}\right)$

- 7.15.- Se considera el espacio hermítico $\mathbb{C}^2$ dotado del producto escalar $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \bar{x} \bar{y}$. Sea f el endomorfismo definido por: $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$

Determinar la matriz –respecto de la base canónica– del endomorfismo adjunto de f .

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$

- 7.16.-El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, con las definiciones ordinarias de suma de complejos y producto de un complejo por un número real tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales considerados como escalares. La aplicación f tal que para todo $z \in \mathbb{C}$; $f(z) = (1+i)z$ es lineal. Hallar la matriz de dicha aplicación respecto a la base $B \{1-i, i\}$

Solución: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- 7.17.-Siendo $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos, se consideran en el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$, el subespacio L , engendrado por los vectores $a = (1+i, 1-i, 2-i)'$ y $b = (3+i, 1-3i, 3-4i)'$ y el M de ecuación analítica respecto a la base canónica:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$

Hallar una base del subespacio $L \cap M$.

Solución: $B_{L \cap M} = (1+i, 1-i, 2-i)'$

- 7.18.-La cuaterna $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$, donde $\mathbb{R}$ representa el conjunto de los números reales, $\mathbb{Q}$ el de los racionales y los signos $(+)$ y $(\cdot)$ las operaciones de suma y producto ordinarios, dota a $\mathbb{R}$ de estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales considerados como escalares. Siendo L el subespacio vectorial engendrado por los vectores: $2, 3, 7, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$ y el M , el engendrado por los vectores: $1, 2, 5, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$. Hallar una base del subespacio $(L + M)$.

Solución: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{10}$

- 7.19.-Calcular la inversa, en $\mathbb{Z}_7$, de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

- 7.20.-Calcular $\frac{6x^2 - 5x^4}{3}$ en $\mathbb{Z}_7$

Solución: 2

- 7.21.- Sea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$. Determinar el elemento neutro del grupo $(M, *)$ donde $*$ representa el producto ordinario de las matrices.

Solución: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

TEMA 8.- SISTEMAS DE ECUACIONES

8.1.- Calcular el valor de a para que sea incompatible el sistema:

$$\begin{aligned}x + y + az &= 1 \\x + ay + z &= a \\ax + y + z &= a^2\end{aligned}$$

Solución: $a = -2$

8.2.- Hallar el valor del parámetro a para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a & 1 & a \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: -1

8.3.- Determinar el valor del parámetro μ para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 1 \\4x + 5y + 6z &= 7 \\7x + 8y + \lambda z &= \mu\end{aligned}$$

tenga infinitas soluciones

Solución: $\mu = 13$

8.4.- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 2 & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$. Decir cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas:

- (a) Si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución, entonces es indeterminado.
- (b) Si $\alpha = 2$, existe una familia libre $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ tal que $A\vec{u}_i = 0 \forall i = 1, 2, 3$.
- (c) $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \alpha \neq 2$.
- (d) No existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $A\vec{x} = 0$ tenga solución única.

Solución: $a, b, y d$

8.5.- Dado $n > 1$, calcular todos los valores del parámetro a que hacen que tenga solución única el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} -3 & a & \dots & a \\ a & -3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}$$

Solución: $a \neq \left(3, \frac{3}{n-1}\right)$

8.6.- Calcular los valores reales de a para que el siguiente sistema sea compatible:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+3y+az=1 \\ x+9y+a^2z=a \end{cases}$$

Solución: $a \neq (3, -1)$

8.7.- Para qué valores del número real a no existe solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + ay + az = 1 \\ ax + (2a-1)y + 2az = 1 \\ ax + ay + (2a+1)z = a+2 \end{cases}$$

Solución: $a = (1, 0)$

TEMA 9.- DETERMINANTES

9.1.- Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: 20

9.2.- El determinante de una matriz A de tercer orden vale 7. La matriz B se obtiene restando a cada fila de A la suma de las dos restantes. Calcular el determinante de B.

Solución: -28

9.3.- Determinar la raíz múltiple de la ecuación en x

$$\begin{vmatrix} x & 1 & a & 1 \\ 1 & x & 1 & a \\ a & 1 & x & 1 \\ 1 & a & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución: $x = a(2)$

9.4.- Hallar el determinante de la matriz $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$ tal que $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$; $a_{11} = 5$; $a_{ii} = 0$ para $i = 2, 2, \dots, n-1$; $a_{nn} = 1$.

Solución: $4(-1)^{n-2}$

9.5.- Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: 160.000

9.6.- Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ cuyas columnas son, ordenadamente, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, y cuyo determinante vale 2. Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 & \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 & \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

Solución: 4

9.7.- Calcular la raíz de mayor valor del polinomio:

$$P_5(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

Solución: $\sqrt{3}/2$

- 9.8.- Hallar el determinante Δ_n de una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos son todos iguales a 1 salvo los de la diagonal principal que son iguales a 3.

$$\text{Solución: } \Delta_n = (n+2)2^{n-1}$$

- 9.9.- Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 5 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\text{Solución: } -9\sqrt{2}$$

TEMA 10.- MATEMÁTICA DISCRETA

10.1.- Hallar los valores de a para que el siguiente sistema en $\mathbb{Z}_5$ sea compatible

$$\begin{aligned} ax + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a \end{aligned}$$

Solución: $a = 1$
 $a = 3$

10.2.- Sea P un polinomio mónico de grado 3. Calcúlese el valor no nulo de $P(0)$ sabiendo que cada raíz de P es producto de las otras dos.

Solución: -1

10.3.- Calcular el valor exacto de la suma de los infinitos términos de la sucesión $(x_n)_{n \geq 0}$ definida por

$$4x_{n+2} = x_n$$

$$x_0 = 8,$$

$$x_1 = 1$$

Solución: $x_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

10.4.- Hállese el resto de la división entre $x - 1$ del determinante

$$\begin{vmatrix} x^3 + 3x & 1 & 1 \\ x^2 + 5x & 3 & 0 \\ x^5 + 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: 6

10.5.- En el anillo $\mathbb{Z}/21$, calcular el elemento inverso del $\overline{10}$.

Solución: 19

10.6.- Los restos de la división de un polinomio entre $x - 1$ y $x + 1$ son 11 y 15 respectivamente. Determinar el resto de la división del polinomio entre $x^2 - 1$.

Solución: $-2x + 13$

10.7.- Calcular el resto de la división entera de 2^{100} entre 7.

Solución: 2

10.8.- Determinar a para que el polinomio $p(x) = x^4 - 8x^3 + ax^2 - 32x + 20$ tenga dos raíces cuyo producto sea igual a 2.

Solución: $a = 24$

10.9.- Hallar el máximo común divisor mónico de los polinomios

$$P(x) = x^3 - 3ix^2 + x - 3i \quad \text{y} \quad Q(x) = x^3 - 3ix^2 + 6x - 18i$$

Solución: $x - 3i$

10.10.- Calcular todas las raíces de la ecuación cúbica $x^3 - 2x - 4 = 0$.

Solución: $2, -1 + i, -1 - i$

10.11.- Calcular el valor de $a \in \mathbf{R}$ para que el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax - 2$ tenga dos raíces cuya suma sea 1.

Solución: $a = 3$

10.12.- Calcular un polinomio $P(x)$ de grado menos o igual que tres tal que $P(-1) = P(1) = 1$ y $P(0) = P(2) = -1$.

Solución: $-\frac{1}{6}(x-1)(x-2) \times -\frac{1}{2}(x+1)(x-2) - (x+1)(x-1)(x-2) + \frac{1}{6}(x+1)(x-1)x$

10.13.- Dado el polinomio $x^2 - \frac{a}{2}x + b$, donde a y b no son nulos, determinar los valores de a y b , en este orden, para que coincidan con las raíces de dicho polinomio.

Solución: $a = 1$
 $b = -\frac{1}{2}$

10.14.- Si $p(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange para los puntos $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,8)$, escribir, de forma totalmente simplificada, el valor de $p(5)$.

Solución: 10

10.15.- Hallar el valor de $P(0)$ totalmente simplificado, en forma de fracción racional irreducible, siendo $P(x)$ el polinomio de interpolación de grado ≤ 3 en los pares: $(1,1)$; $(2,4)$; $(3,9)$; $(-1,3)$.

Solución: $\frac{1}{2}$

10.16.- Determinar el resto $r(x)$ de dividir $x^{100} + x - 3$ entre $x^2 + 1$.

Solución: $r(x) = x - 2$

10.17.- Calcular $L(-2)$, siendo $L(x)$ el polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que 2, en los pares $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

Solución: $L(-2) = 4$

10.18.- Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange con grado ≤ 4 de la función $f(x) = \sin(x)$ en los puntos $-2\pi - \pi, 0, \pi, 2\pi$.

Solución: $p(x) = 0$

TEMA 11.- DIAGONALIZACIÓN

11.1.- Hallar el subespacio propio asociado al mayor autovalor de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Solución: } -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

11.2.- Sea A una matriz compleja, cuadrada de orden n . ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

- a) Si -8 es autovalor de A^3 , entonces -2 es autovalor de A .
- b) A puede no tener ningún autovalor.
- c) Si A es diagonalizable, A^t también lo es.
- d) Si A es invertible y diagonalizable, entonces A^{-1} también lo es.

$$\text{Solución: } a, c, d$$

11.3.- Sabiendo que A es una matriz real cuadrada de orden tres, de rango unidad y diagonalizable, tal que $A^2 = A$, calcular sus valores propios indicando las multiplicidades de los mismos.

$$\text{Solución: } 0(2), 1(1)$$

11.4.- Calcular los valores del parámetros b , para los cuales las siguientes matrices son diagonalizables.

$$a) \begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ b & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } \begin{aligned} a) & \quad b < 1 \\ b) & \quad b < 2 \end{aligned}$$

11.5.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}(x)$ de los polinomios reales, se considera el endomorfismo φ definido por $\varphi(P(x)) = xP'(x) + P(x)$. Determinar el conjunto σ de valores propios de φ .

$$\text{Solución: } \{1, 2, 3, \dots\}$$

11.6.- Determinar los valores reales de α para los cuales la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3\alpha + 2 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable en $\mathbf{R}$.

$$\text{Solución: } \alpha \in \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$$

11.7.-Dada la matriz compleja $A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & 2+i & -1 \\ 1 & 2 & -1+i \end{pmatrix}$, determinar su valor propio de mayor módulo.

Solución: $\lambda = 1+i$

11.8.- Determinar los valores propios de la siguiente matriz, indicando si son triples.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución: $\begin{cases} \lambda = 1(2) \\ \lambda = 3(1) \end{cases}$

11.9.- Determinar para qué valores de $m \in \mathbb{R}$ la siguiente matriz es diagonal real:

$$\begin{bmatrix} m+3 & m^2-10 \\ 1 & m+1 \end{bmatrix}$$

Solución: $\begin{cases} m > 9 \\ m < -9 \end{cases}$

EXAMEN FEBRERO 2004 → 2

$$\mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- a) Condición de α para que f quede definida por el enunciado

$$f(1, \overset{v_1}{\alpha}, 2) = (1, 0, \alpha)$$

$$f(1, \overset{v_2}{2}, 1) = (\alpha, 1, 0)$$

$$f(0, \overset{v_3}{1}, -1) = (1, \alpha, 0)$$

Para que f quede definida

los vectores v_1, v_2 y v_3 han de ser linealmente indep.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow -2 + 2 + \alpha - 1 \neq 0; \quad \boxed{\alpha \neq 1}$$

- b) Calcular α para $\begin{cases} \text{cumple cond. anterior} \\ (0, -1, 1) \in \text{Im} f \\ f \text{ no es biyectiva} \end{cases}$

f no es biyectiva $\begin{cases} f \text{ no es inject} \rightarrow \dim \text{Ker} f > 0 \\ f \text{ no es surject} \rightarrow \dim \text{Im} f < 3 \end{cases} \Rightarrow \text{r}(A) < 3$

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^3 - \alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha^2 - 1) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

- 1) $\alpha = 0$. Veamos si cumple que $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im} f$.

$$B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{ec.}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad x_3 = 0$$

No válida pues $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Im} f$

- 2) $\alpha = 1$ — no válida pues $\alpha \neq 1$

- 3) $\alpha = -1$; $B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{ec.}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad x_2 + x_3 + x_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im} f$$

Por tanto $\alpha = 1$
cumple las condiciones

MÉTODO MÍNIMO CUADRADOS

Este método sirve para resolver sistemas de ecuaciones incompatibles dando una solución aproximada. Diremos que

$$Ax = b \rightarrow A^t Ax \approx A^t b$$

Así, obtenemos un sistema compatible

⊕ Ejemplo → S. Incompatible ⇒ Sistema compatible determinado

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \\ 5x + 2y = 2 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \\ 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^t Ax = A^t b$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \\ 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 54 & -4 \\ -4 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 54x - 4y = 19 \\ -4x + 33y = -6 \end{cases}$$

→ Resolviendo el sistema llegamos a una única solución que es la de mínimo norma

⊕ Ejemplo: S. Incomp. ⇒ Sist. comp. indef. Buscar solución con mínima norma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A^t Ax = A^t b; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Sol. Genérica $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 9x_1 + 9x_2 = 45 \\ // \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución de mínima norma ha de $\in$ a $\text{Im } A^t$, $r(A^t) = 1$

$$B_{A^t} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{ec}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad x_1 - x_2 = 0$$

Metemos la sol. genérica $\rightarrow 5 - x_2 - x_2 = 0, \quad x_2 = \frac{5}{2}$

Solución de mínima norma

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

⊕ Hallar la inversa de la matriz por el método LAGRANGE - JORDAN = LAGRANGE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -22 & 5 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -49 & 22 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 50 & -22 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -49 & 22 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 58 & -26 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -49 & 22 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 58 & -26 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -49 & 22 & 1 \end{pmatrix}$$

Comp. → $A A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 58 & -26 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -49 & 22 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

→ En un estudio científico se demuestra que la variable z depende de las variables x e y : $z = a_0 + a_1 x + a_2 y$
Tenemos los sig. valores:

x	y	z
0	1	3
1	1	2
-1	-1	1
0	-1	0

Encontrar la solución de mínimos cuadrados para a_0, a_1, a_2 .

$$\begin{cases} 3 = a_0 + a_2 \\ 2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ 1 = a_0 - a_1 - a_2 \\ 0 = a_0 - a_2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t A x = A^t b; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a_0 = 6 \rightarrow a_0 = \frac{3}{2} \\ 2a_1 + 2a_2 = 1 \\ 2a_1 + 4a_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \frac{1}{2} \\ a_1 + 2a_2 = 2 \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{3}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

$$a_0 = \frac{3}{2}, a_1 = -1, a_2 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} iX_1 + iX_2 = 0 \\ iX_1 + (\alpha + i)X_2 + iX_3 = 2i \\ iX_1 + (\beta + i)X_2 + \beta X_3 = \beta + 2i \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & i & 0 & 0 \\ i & q+i & i & 2i \\ i & q+i & q & q+2i \end{array} \right) \xrightarrow{\text{① } C_2 \rightarrow -1} \left(\begin{array}{ccc|c} i & i & 0 & 0 \\ 0 & q & i & 2i \\ 0 & q & q & q+2i \end{array} \right) \xrightarrow{\text{② } C_3 \rightarrow -1} \left(\begin{array}{ccc|c} i & i & 0 & 0 \\ 0 & q & i & 2i \\ 0 & 0 & q-i & q \end{array} \right) \Rightarrow i q (q-i) = 0$$

$q=0$
 $q=i$

(2) $\alpha = 0$ $r(A) = 2$; $r(A') = 3 \rightarrow S$ incompatible

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r(A) = 2 \\ r(A') = 3 \end{array} \rightarrow \text{S incompatible}$$

$$\tau = 0, \tau = i$$
$$[49 = 10, 2]$$

Revolver systeme von dicke factorisation

$$A = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & 0 & i \\ i & 0 & -i \end{pmatrix} = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \quad \text{Factorización LU}$$

$$\det |A| = \det |L| \cdot \det |U|$$

LV

$$Ax = b \rightarrow Ly = b \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ i \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\quad} \quad 0x = y$$

$$\begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} \quad \begin{cases} ix_1 + ix_2 = 0 \\ -ix_2 + ix_3 = 2i \\ -2ix_3 = -i \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 2i \\ y_1 + y_2 + y_3 = i \end{cases}$$

④

③

$$\left[\begin{array}{l} w = \sqrt[4]{1} \neq 1 \\ a, b, c \in \mathbb{C} \\ \rightarrow w^4 = 1; w^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - w^0 = 0 \end{array} \right.$$

$$e_{21} \rightarrow -\omega$$
$$e_{31} \rightarrow -\omega^2$$
$$e_{41} \rightarrow -\omega^3$$

(a) valores de a, b, c para los que el sistema tiene solución
 No hay ningún valor

Para que el sist. sea comp. indet $\rightarrow a = w, b = w^2, c = w^3$

$$\begin{cases} x_1 + wx_2 + w^2x_3 + w^3x_4 = 1 \\ x_1 = 1 - w\delta - w^2\mu - w^3\lambda \\ x_2 = \delta \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \lambda \end{cases} \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

Solomon Jan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -w \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -w^2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -w^3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\exists$ valores de a, b, c tales que $\exists$ n° finito de soluciones.

No, el sistema solo puede ser $\rightarrow$ C. Indet $\rightarrow$ Infinitas sol.
 $\rightarrow$ Incompatible $\rightarrow$ No hay solución

d) Gauss factorización LU

$$A = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ w & 1 & 0 & 0 \\ w^2 & 0 & 1 & 0 \\ w^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1 $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$L(3,5) = (2, -4, 1)$ Hallar la matriz de L en las B_c y el transformado
 $L(1,2) = (-5, 3, 4)$ del vector $(2, -1)$

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{A} & B_c \\ \uparrow Q & & \uparrow P \\ B_c & \xrightarrow{C} & B_c \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Podemos formar la expresión matricial con los transformados de una base del espacio inicial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_1}^{B_c \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$P = I = P^{-1}$

Q es la matriz de peso de B_1 a $B_c \mathbb{R}^2$

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que

$C = P^{-1} A Q$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(Q^{-1})^d} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{((Q^{-1})^d)^t} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = Q$$

$|Q^{-1}| = 6 - 5 = 1$

$$C = P^{-1} A Q = I \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -17 \\ -23 & 13 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}; \quad M_{B_c}^{B_c} = \begin{pmatrix} 29 & -17 \\ -23 & 13 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}$$

$$L(2, -1) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -17 \\ -23 & 13 \\ -18 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ -59 \\ -47 \end{pmatrix} = L(2, -1)$$

3.2 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$T(3,2) = (9, 11)$

$T(2,1) = (5, 3)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$M_{B_1}^{B_c} = A$

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{A} & B_c \\ \uparrow Q & & \uparrow P \\ B_c & \xrightarrow{C} & B_c \end{array}$$

$P = I = P^{-1}$

Q es la matriz de peso de B_1 a B_c

Q^{-1} es la matriz de peso de B_c a B_1 , $Q^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; (Q^{-1})^d = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; ((Q^{-1})^d)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$|Q^{-1}| = 3 - 4 = -1$

$Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Sabemos que $C = P^{-1} A Q$

$$C = I \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 13 \end{pmatrix};$$

$$M_{B_c}^{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$$

3.3 $H_{\mathbb{R}}^{0,c} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$\dim \text{Im} f = r(A)$; menor 3×3 de $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 5 - 24 - 6 + 2 + 30 = 0$

menor 3×3 de $A = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 6 + 3a - 20 - 1 + 12a - 30 = 0$
 $15a - 50 + 5 = 0; a = \frac{45}{15} = 3$

① Si $a \neq 3$

$r(A) = 3 \rightarrow \dim \text{Im} f = 3$; $B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \text{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Im} f = 4 - 3 = 1$ $a = 9$ Valor arbitrario

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + a x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - 10x_2 - 6x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19x_2 + 15x_3 + 3x_4 = 0 \\ 19x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$10x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_3 = 9, x_4 = \frac{-10 \cdot 9}{2} = -59$$

$$x_2 = \frac{-59 + 59}{19} = 0$$

$$x_1 = 6 \cdot 9 + 59 = 119$$

Ec paramétricas del núcleo $\begin{cases} x_1 = 119 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 9 \\ x_4 = -59 \end{cases}$

② Si $a = 3$

$r(A) = 2 \rightarrow \dim f = 2 \rightarrow B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \text{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Im} f = 4 - 2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 7\lambda \\ x_4 = 7\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{7\lambda}{7} + \frac{5 \cdot 7\lambda}{7} = 5\lambda + \lambda \\ x_2 = 6\lambda \end{cases}$$

Ec por de Kerf $\begin{cases} x_1 = -89 - 17\lambda \\ x_2 = 59 + \lambda \\ x_3 = 7\lambda \\ x_4 = 7\lambda \end{cases}$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 \cdot 7\lambda + 79 - 3(59 + \lambda) = \\ &= -14\lambda + 79 - 177 - 3\lambda = \\ &= -89 - 17\lambda \end{aligned}$$

(34)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(111) = (123)$$

$$f(110) = (20-2)$$

$$f(100) = (321)$$

Se pide

- Matriz aplicación en B_c
- Base y ecuaciones cartesianas del $\text{Ker} f$ y $\text{Im} f$
- Dado sub. $M = L[(1,2,0), (2,1,1)]$ determinar una base de $f(M)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}^{B_c} = A$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{A} & B_c \\ Q \uparrow & & \uparrow P=I \\ B_c & \xrightarrow{C} & B_c \end{array}$$

$$P=I=P^{-1}$$

Q es la matriz de paso de la base B_1 a B_c

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} e_1 = v_3 \\ e_2 = v_2 - v_3 \\ e_3 = v_1 - v_2 \end{cases}$$

Sabemos que $C = P^{-1} A Q$

$$C = P^{-1} A Q = I \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = M_{B_c}^{B_c}$$

$$\dim \text{Im} f = r(A) = 2 \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_2 = 0$$

$$-4x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0$$

$$\text{Ec. Im} f \equiv x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$\dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3; \quad \dim \text{Ker} f = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$8x_1 - 4x_2 = 0 \quad -4x_1 + 4x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 = 0 \quad x_1 - x_3 = 0$$

$$\text{Ec. Ker} f \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$B_{\text{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

$$\textcircled{3} M = L[(1, 2, 0)^{m_1}, (2, 1, 1)^{m_2}]$$

$$f(M) = L[f(m_1), f(m_2)]$$

$$f(m_1) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$f(M) = L[(1, -2, -5), (4, 4, 4)]$$

$$f(m_2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B_{f(M)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\textcircled{3.5} f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$M_{B_C}^{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}; \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Se pede $M_{B_1}^{B_2}$

$$\begin{array}{ccc} B_{C_{R^3}} & \xrightarrow{(A)} & B_{C_{R^2}} \\ \downarrow Q & & \uparrow P \\ B_1 & \xrightarrow{(C)} & B_2 \end{array}$$

P é a matriz de peso de $B_{C_{R^2}}$ a B_2

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad |P| = 1$$

Q é a matriz de peso de $B_{C_{R^3}}$ a B_1

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = P^{-1} A Q; \quad P^d = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (P^d)^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -15 & -25 & -47 \\ 12 & 21 & 39 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$M_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -15 & -25 & -47 \\ 12 & 21 & 39 \end{pmatrix}$$

3.6 $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$M_{B_c}^{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar $M_{B_1}^{B_1}$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^2 \\ B_c & \xrightarrow{A} & B_c \\ Q \downarrow & & \downarrow P \\ B_1 & \xrightarrow{P} & B_1 \end{array}$$

Q es la matriz de paso de B_c a B_1

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$P = Q$ (endomorfismo)

$$C = P^{-1} A Q = P^{-1} A P$$

$$P^{-1} \equiv \begin{cases} P^d = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ (P)^t = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$|P| = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{2}(1-i) & \frac{1+i}{2} + \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} + \frac{1-i}{2} & -\frac{i}{2}(1+i) - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-i+i^2}{2} & \frac{1+2i}{2} \\ \frac{1-2i}{2} & \frac{-i-i^2-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1+2i}{2} \\ \frac{1-2i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} + i \frac{(1+2i)}{2} & \frac{i}{2} \cdot i + \frac{1+2i}{2} \\ \frac{1-2i}{2} - \frac{i^2}{2} & i \left(\frac{1-2i}{2} \right) - \frac{i}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-i+i+2i^2}{2} & \frac{-i^2+1+2i}{2} \\ \frac{1-2i+1}{2} & \frac{i-2i^2-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_{B_1}^{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

3.7

?

mmm... si, claro

zzzzz...

3.8

Determinar ecuaciones de las transformaciones siguientes, en $\mathbb{R}^3$:① Simetría respecto al origen, al eje oz y al plano xoy

S. origen:

$$S(x, y, z) = -(x, y, z)$$

S. eje oz

$$S = 2P - I$$

$$P = \frac{UV^t}{U^t U} \quad U_{oz} = (0, 0, 1)$$

$$P = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = 2P - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Plano OXY

$$S = 2P - I \quad P = I - \frac{W W^t}{W^t W} = I - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

② Proyección sobre el plano $z=0$ y el eje oz Plano $z=0 \Rightarrow OXY \rightarrow w = (0, 0, 1)$

$$P = I - \frac{W W^t}{W^t W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eje $OZ \rightarrow U = (0, 0, 1)$

$$P = \frac{U U^t}{U^t U} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

③ Giro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ en torno al eje Oz

Buscamos una base ortog. $\{V_1, V_2, V_3\}$

$V_1 = (0, 0, 1)$ - eje -

$$\langle V_1, V_2 \rangle = 0 \rightarrow (0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad z = 0 \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 \times V_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} = (-1, 0, 0)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \text{Giro positivo } |G| = 1 \\ \text{Giro negativo } |G| = -1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

$$G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix} \quad \text{Consideramos el sentido antihorario el positivo}$$

④ Traslación definida por el vector $(1, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix} \quad \boxed{T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix}}$$

⑤ Homotecia de centro el origen y $k=2$

$$\text{HOMOTECIA} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0(1-k) \\ b_0(1-k) \\ c_0(1-k) \end{pmatrix}$$

k = razón

(a_0, b_0, c_0) = Centro

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0(1-2) \\ 0(1-2) \\ 0(1-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}$$

Las simetrías son aplicaciones lineales

Las proyecciones " " "

Los giros " " "

Las traslaciones nunca son " "

Las homotecias sólo son " "

wando el centro es el origen

3.9

① Matriz de proyección sobre la recta $x=y=z$ y Matriz de simetría

$$P = \frac{UV^T}{V^T V} \quad r = \begin{cases} x=2\lambda \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad U = (2, 2, 1)$$

$$P = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x-y=0$$

$$y-z=0$$

Simetría

$$S = 2P - I = 2 \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

② Matriz de proyección y simetría del plano $2x+2y+z=0$

$$W = (2, 2, 1)^T, \quad P = I - \frac{WW^T}{W^T W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} = P$$

$$S = 2P - I = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} = S$$

③ Matriz proyección sobre el subespacio

$$S \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

$$\dim S = 2; \quad B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A^T A)^d = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = ((A^T A)^d)^T$$

$$|A^T A| = 4 \longrightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

④ Matriz de giro de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ en torno al vector $(1, 1, 1)$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2, u_3 \right\} \quad \langle u_1, u_2 \rangle = (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x + y + z = 0$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{j} - \bar{k} - \bar{k} \times \bar{i} = (1, 1, -2)$$

Normalizamos

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}; \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$G = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} P^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2-2\sqrt{3} & 2-2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} & 2 & 2-2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} & 2-2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

3.1. Ejercicios

- ✓ ~~3.1.~~— Una aplicación lineal L de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ viene determinada por las condiciones $L(3, 5) = (2, -4, 1)$ y $L(1, 2) = (-5, 3, 4)$. Hallar la matriz que representa a L en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Calcular la imagen por L del vector $(2, -1)$.
- ✓ ~~3.2.~~— Si T es el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que cumple $T(3, 2) = (9, 11)$ y $T(2, 1) = (5, 3)$, hállese la matriz de T en la base canónica del espacio.
- ✓ ~~3.3.~~— Para cada número real a se considera la aplicación lineal del espacio $\mathbb{R}^4$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ asociada a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar unas ecuaciones paramétricas del núcleo de la aplicación y una base del subespacio imagen de la misma.

- ✓ ~~3.4.~~— Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= (1, 2, 3); \\ f(1, 1, 0) &= (2, 0, -2); \\ f(1, 0, 0) &= (3, 2, 1). \end{aligned}$$

1. Escribir la matriz de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
2. Determinar unas bases de $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$, así como unas ecuaciones cartesianas de los mismos.
3. Dado el subespacio $M = L[(1, 2, 0), (2, 1, 1)]$ de $\mathbb{R}^3$, determinar una base de $f(M)$.

- ✓ ~~3.5.~~— Se considera la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ asociada a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determinar la matriz que representa a esta aplicación en las bases

$$((1, 1, 2), (1, 2, 4), (2, 4, 7)); \quad ((1, 1), (2, 3)).$$

- ~~3.6.~~— Dado la aplicación lineal del espacio $\mathbb{C}^2$ asociado a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix},$$

hallar la matriz que lo representa respecto a la base $((1, i), (i, 1))$.

3.7.- De una matriz $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ se sabe que $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t$ y que $\text{Im } A \subsetneq \ker A$.

1. Calcúlese el rango de A .
2. Calcúlese el vector suma de las columnas de A .

3.8.- Determinar las ecuaciones de las siguientes transformaciones del espacio $\mathbb{R}^3$, indicando cuáles de ellas son lineales:

1. La simetría respecto al origen, la simetría respecto al eje OZ y la simetría respecto al plano XOY .
2. La proyección sobre el plano $z = 0$ y la proyección sobre el eje OZ .
3. El giro positivo de un ángulo $\frac{\pi}{2}$ en torno al eje OZ .
4. La traslación definida por el vector $(1, 1, 1)$.
5. La homotecia de centro el origen y razón 2.

3.9.- Responder la siguientes cuestiones:

1. Hallar la matriz de proyección ortogonal sobre la recta $x = y = 2z$. Calcular asimismo la matriz de simetría respecto a esa misma recta.
2. Escribir la matriz de proyección ortogonal sobre el plano $2x + 2y + z = 0$ y la matriz de simetría respecto a dicho plano.
3. Hallar la matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio de $\mathbb{R}^4$ determinado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0, \\ x_3 + x_4 & = 0. \end{cases}$$

4. Calcular la matriz de giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en torno al vector $(1, 1, 1)$.

3.10.- Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Demostrar que $\ker A^h A = \ker A$ y deducir la igualdad $r(A^h A) = r(A)$. Probar también que $A^h A = O$ si y sólo si $A = O$.

3.11.- Responder la siguientes cuestiones:

1. Comprobar la fórmula

$$(I_m + UV^t)^{-1} = I_m - U(I_n + V^t U)^{-1} V^t; \quad U, V \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Mismo los hago

1. The first step in the process of creating a business plan is to conduct a market research.

2. The second step is to identify the target market and the competition.

3. The third step is to determine the business model and the revenue streams.

4. The fourth step is to estimate the costs and the break-even point.

5. The fifth step is to develop a marketing and sales strategy.

6. The sixth step is to create a financial forecast and a cash flow statement.

7. The seventh step is to write a business plan and to present it to investors.

8. The eighth step is to launch the business and to monitor its performance.

9. The ninth step is to evaluate the business plan and to make adjustments.

10. The tenth step is to continue to grow the business and to expand its reach.

11. The eleventh step is to maintain a good relationship with investors and stakeholders.

12. The twelfth step is to stay up-to-date with the latest market trends and technologies.

13. The thirteenth step is to be flexible and adaptable to changes in the market.

14. The fourteenth step is to be persistent and to not give up easily.

15. The fifteenth step is to be a good team player and to work well with others.

16. The sixteenth step is to be a good listener and to take feedback into account.

17. The seventeenth step is to be a good communicator and to be able to sell the business plan.

18. The eighteenth step is to be a good negotiator and to be able to reach agreements.

19. The nineteenth step is to be a good manager and to be able to lead a team.

20. The twentieth step is to be a good entrepreneur and to be able to create new opportunities.

21. The twenty-first step is to be a good investor and to be able to make wise decisions.

22. The twenty-second step is to be a good partner and to be able to build strong relationships.

23. The twenty-third step is to be a good leader and to be able to inspire others.

24. The twenty-fourth step is to be a good mentor and to be able to help others.

25. The twenty-fifth step is to be a good role model and to be able to set a good example.

M. E. Domínguez, P. Gómez

2. Utilizar la fórmula anterior para hallar la inversa de $\mathbf{M}$ cuando exista.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

Resultados.

3.1.- La matriz de L respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 29 & -17 \\ -23 & 13 \\ -18 & 11 \end{pmatrix},$$

y la imagen por L de $(2, -1)$ es

$$\begin{pmatrix} 29 & -17 \\ -23 & 13 \\ -18 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ -59 \\ 47 \end{pmatrix}.$$

3.2.- La matriz de T respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

3.3.- Para $a = 3$, $\dim \operatorname{Im} \mathbf{A} = r(\mathbf{A}) = 2$ y $\dim \ker \mathbf{A} = 4 - 2 = 2$. Unas ecuaciones paramétricas del núcleo son

$$\begin{cases} x_1 = -8\alpha - 17\beta \\ x_2 = 5\alpha + \beta \\ x_3 = 7\alpha \\ x_4 = 7\beta \end{cases}$$

y una base de la imagen es $((1, 2, 1), (2, 5, 1))$.

Para $a \neq 3$, $\dim \operatorname{Im} \mathbf{A} = r(\mathbf{A}) = 3$, $\dim \ker \mathbf{A} = 4 - 3 = 1$, la aplicación es suprayectiva, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es una base de $\operatorname{Im} \mathbf{A}$ y unas ecuaciones paramétricas del núcleo son:

$$\begin{cases} x_1 = 11\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = -5\alpha \end{cases}.$$

3.4.-

1. La matriz pedida es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Una base del núcleo es $((1, 2, 1))$ y una base de la imagen es $((3, 2, 1), (-1, -2, -3))$.
Unas ecuaciones cartesianas del núcleo son $2x - y = 0$; $y - 2z = 0$. Una ecuación cartesiana de la imagen es $x - 2y + z = 0$.
3. Una base de $f(M)$ es $((1, -2, -5), (4, 4, 4))$.

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

10/10/2017

M. E. Domínguez, P. Gómez

3.5.— La matriz pedida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -25 & -47 \\ 12 & 21 & 39 \end{pmatrix}.$$

3.6.— La matriz de paso de la base canónica de $\mathbb{C}^2$ a la base $((1, i), (i, 1))$ es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que la matriz buscada es

$$\mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7.—

1. Puesto que $4 = \dim(\ker \mathbf{A}) + \dim(\operatorname{Im} \mathbf{A})$ y $1 \leq \dim(\operatorname{Im} \mathbf{A}) < \dim(\ker \mathbf{A})$, la única posibilidad es $\dim(\operatorname{Im} \mathbf{A}) = 1$ y $\dim(\ker \mathbf{A}) = 3$, luego $r(\mathbf{A}) = 1$.
2. Observamos que $(1, 2, 3, 4) + (4, 3, 2, 1) = (5, 5, 5, 5)$ y $(4, 3, 2, 1) \in \ker \mathbf{A}$, luego

$$\mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_4 = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3.8.—

1. Simetría respecto al origen: $S_1(x, y, z) = -(x, y, z)$; simetría respecto al eje OZ : $S_2(x, y, z) = (-x, -y, z)$; simetría respecto al plano OXY : $S_3(x, y, z) = (x, y, -z)$.
2. Proyección sobre el plano $z = 0$ paralela al eje OZ : $P_1(x, y, z) = (x, y, 0)$; proyección sobre el eje Oz paralela al plano $z = 0$: $P_2(x, y, z) = (0, 0, z)$.
3. Giro de ángulo $\pi/2$ alrededor del eje OZ : $G(x, y, z) = (-y, x, z)$.
4. Traslación definida por $(1, 1, 1)$: $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$.
5. Homotecia de centro el origen y razón 2: $H(x, y, z) = 2(x, y, z)$.

Todas las transformaciones anteriores son lineales excepto la traslación.

3.9.—

1.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Puesto que el plano $2x + 2y + z = 0$ es ortogonal a la recta del apartado anterior, la matriz de proyección ortogonal sobre el plano es $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ y la matriz de simetría respecto a dicho plano es $2(\mathbf{I} - \mathbf{P}) - \mathbf{I} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}$.

3.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.10.— El contenido $\ker \mathbf{A} \subset \ker \mathbf{A}^h \mathbf{A}$ es trivial. El contenido $\ker \mathbf{A}^h \mathbf{A} \subset \ker \mathbf{A}$ se deduce de la siguiente proposición:

$$\mathbf{u} \in \ker \mathbf{A}^h \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}^h \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} \mathbf{u})^h (\mathbf{A} \mathbf{u}) = \mathbf{u}^h \mathbf{A}^h \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \ker \mathbf{A}.$$

Por tanto, $r(\mathbf{A}^h \mathbf{A}) = n - \dim \ker \mathbf{A}^h \mathbf{A} = n - \dim \ker \mathbf{A} = r(\mathbf{A})$, y

$$\mathbf{A}^h \mathbf{A} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \ker \mathbf{A}^h \mathbf{A} = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \ker \mathbf{A} = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

3.11.—

1. En caso de que la matriz $\mathbf{I}_n + \mathbf{V}^t \mathbf{U}$ sea invertible, basta multiplicar $\mathbf{I}_m + \mathbf{U} \mathbf{V}^t$ por $\mathbf{I}_m - \mathbf{U}(\mathbf{I}_n + \mathbf{V}^t \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^t$ y observar que el resultado es la matriz identidad.
2. La matriz $\mathbf{M}$ se puede escribir de la forma

$$\mathbf{M} = (a - b)\mathbf{I} + b\mathbf{u}\mathbf{u}^t = (a - b) \left(\mathbf{I} + \frac{b}{a - b} \mathbf{u}\mathbf{u}^t \right),$$

siendo $\mathbf{u}$ el vector columna cuyas componentes son todas iguales a 1. Aplicando la fórmula, la inversa es:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{a - b} \left(\mathbf{I} - \frac{b}{(a - b) + nb} \mathbf{u}\mathbf{u}^t \right),$$

lo cual pone de manifiesto que $\mathbf{M}$ es invertible si $a \neq b$ y $a + (n - 1)b \neq 0$.



(4.1) Resolver

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + u + 4v = 2 \\ 4x + y + 8z + u + 12v = 13 \\ -6x + 15z + 4z - 5u + v = 27 \end{cases}$$

Estamos ante un sistema completo
por tanto, aplicaremos Rouché
en su resolución
Tenemos 5 incógnitas y 3 ec $\rightarrow$ 2 parámetros

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 12 & 13 \\ -6 & 15 & 4 & -5 & 1 & 27 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 12 & -2 & -3 & -13 & 33 \end{array} \right|$$

$$e_{21} \rightarrow -2 \quad e_{32} \rightarrow -4$$

$$13 - 12v - 9z - 2(2 - 4v - 3z) = 13 - 4 - 12v + 8v - 8z + 6z = 9 - 4v - 2z$$

$$e_{31} \rightarrow 3$$

$$27 - v - 4z + 3(2 - 4v - 3z) = 27 + 6 - v - 12v - 4z - 9z = 33 - 13v - 13z$$

$$\sim \left| \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -13 & 33 \end{array} \right|$$

$$33 - 13v - 13z = 4(9 - 4v - 2z) = 33 - 36 - 13v + 16v - 13z + 8z = -3 + 3v - 5z$$

$$\begin{cases} 2x - y + u = 2 - 4v - 3z \\ 3y - v = 9 - 4v - 2z \\ 2v = -3 + 3v - 5z \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} y &= \frac{9 - 4v - 2z + u}{3} = \frac{9 - 4v - 2z - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}z + \frac{3}{2}v}{3} = \\ &= \frac{18 - 8v - 4z - 3 - 5z + 3v}{6} = \frac{15 - 5v - 9z}{6} = \frac{5}{2} - \frac{5}{6}v - \frac{3}{2}z \\ u &= -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}z + \frac{3}{2}v \end{aligned}$$

$$2x = 2 - 4v - 3z - u + y = 2 - 4v - 3z + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}z - \frac{3}{2}v + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z - \frac{5}{6}v =$$

$$= \frac{12 - 24v - 18z + 9 + 15z - 9v + 15 - 9z - 5v}{6} = \frac{36 - 38v - 12z}{6}$$

$$x = \frac{36}{12} - \frac{38}{12}v - \frac{12}{12}z = 3 - z - \frac{19}{6}v$$

$$\text{Solución} \begin{cases} x = 3 - z - \frac{19}{6}v \\ y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z - \frac{5}{6}v \\ z = z \\ u = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}z + \frac{3}{2}v \\ v = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 8z = 6 \\ 4x + y + 9z = 12 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ 5x - 4y + 6z = 15 \\ 3x + 5y + 11z = 9 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 4 & 1 & 9 & 12 \\ 5 & -4 & 6 & 15 \\ 3 & 5 & 11 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1, R_4 \rightarrow R_4 - 5R_1, R_5 \rightarrow R_5 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -14 & -14 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} e_{21} &\rightarrow -2 \\ e_{31} &\rightarrow -4 \\ e_{41} &\rightarrow -5 \\ e_{51} &\rightarrow -3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 3 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = y \\ z = -y \end{cases}$$

$$x = 3 - 2y - 4z = 3 - 2y + 4y = 3 + 2y$$

4.2) Dado:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b^2 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} a+2 & a+2 & a+2 & 1+b+b^2 \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b^2 \end{array} \right] \\ &= (a+2) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1+b+b^2}{a+2} \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b^2 \end{array} \right] = (a+2) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1+b+b^2}{a+2} \\ 0 & a-1 & 0 & b - \frac{1+b+b^2}{a+2} \\ 0 & 0 & a-1 & b^2 - \frac{1+b+b^2}{a+2} \end{array} \right] \\ &= (a+2) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{1+b+b^2}{a+2} \\ 0 & a-1 & 0 & b - \frac{1+b+b^2}{a+2} \\ 0 & 0 & a-1 & b^2 - \frac{1+b+b^2}{a+2} \end{array} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \forall a \neq (-2, 1) \\ \forall b \in \mathbb{R}$$

$$r(A) = 3 = r(A') = n \rightarrow$$

Sistema compatible determinado

$$\textcircled{2} a = -2 \\ \forall b \in \mathbb{R} \quad r(A) = 2 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2b+1 \\ 0 & 3 & -3 & 2b^2+1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2b^2+2b+2 \end{array} \right] \Rightarrow 2b^2+2b+2=0 \rightarrow b^2+b+1=0$$

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \forall b \in \mathbb{R} \quad r(A') = 3$$

$$r(A) = 2 < r(A') = 3 \rightarrow$$

Sistema incompatible

El sistema sería compatible indeterminado si $b^2+b+1=0$

Pues $r(A') = r(A) \neq n$

③ Si $a=1, \forall b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; r(A)=1 \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & b^2 \end{pmatrix}$$

③.1 Si $a=1$ y $b \neq 1$

$$r(A)=1 \rightarrow \text{sistema incompatible}$$

③.2 Si $a=1$ y $b=1$

$$r(A)=r(A')=1 \neq n=3 \rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} ax+y+bt=1 \\ x+ay+bt=1 \\ x+y+abt=b \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & ab & b \\ a & 1 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 0 & 1-a & ab-b & b-1 \\ 0 & 1-a^2 & b-ab & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 0 & 1-a & b(a-1) & b-1 \\ 0 & (1+a)(1-a) & b(1-a) & 1-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 0 & 1-a & b(a-1) & b-1 \\ 0 & 0 & b(1-a)(a+1) & 2-b(a+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a=1 \\ a=-2 \\ b=0 \end{matrix}$$

① Si $a \neq (1, -2)$
y $b \neq 0$

$$r(A)=3=r(A')=n \rightarrow \text{Sist. comp. determinado}$$

② Si $a=1, \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2b \end{pmatrix}$$

$$r(A)=1$$

$$\text{Si } 2-2b=0, b=1$$

②.1 Si $a=1$ y $b \neq (1, 0)$

$$r(A)=1 < r(A')=2 \Rightarrow \text{S. incompatible}$$

②.2 Si $a=1$ y $b=1$

$$r(A)=1=r(A') \neq n \rightarrow \text{Sist. comp. indeterminado}$$

③ Si $a=-2, \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & b & 1 \\ 0 & 3 & -3b & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+b \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Si } 2+b=0; b=-2$$

③.1 $a=-2$

$$\forall b \neq 0, -2$$

$$r(A)=2$$

$$r(A')=3$$

$$\left. \begin{matrix} r(A)=2 \\ r(A')=3 \end{matrix} \right\} \text{S. incompatible}$$

③.2 $a=-2$

$$b=-2$$

$$r(A)=2$$

$$r(A')=2$$

$$n=3$$

$$\left. \begin{matrix} r(A)=2 \\ r(A')=2 \\ n=3 \end{matrix} \right\} \text{Sistema comp. indeterminado}$$

④ $\forall a \in \mathbb{R}$
 $b=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

④.1 Si $a=1$

$$b=0$$

$$r(A)=1 < r(A')=2$$

$$\rightarrow \text{S. incompatible}$$

④.2 Si $a \neq 1$

$$b=0$$

$$r(A)=2 < r(A')=3$$

$$\rightarrow \text{Sist. incompatible}$$

4.7 Resolver por min. cuadrados

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \\ 5x + 2y = 2 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \\ 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}; \quad Ax = b$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \\ 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 54 & -4 \\ -4 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 54x - 4y = 19 \\ -4x + 33y = -6 \end{cases} \rightarrow \text{Resolvemos S. Compatible determinado}$$

4.10 ① Proyección ortogonal del vector (1 2 1) en el sub. $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$$w = (1, 1, -1)^T; \quad P = I - \frac{ww^T}{w^T w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P_v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

② Sol. de mínimos cuadrados de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \\ 2u_1 + u_2 = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Au = b$$

$$A^T A u = A^T b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6u_1 + 3u_2 = 5 \\ 3u_1 + 2u_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -u_2 = -1; u_2 = 1 \\ u_1 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Sol} \equiv u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = 1$$

4.12 Solución de min. cuadrados y min. norma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A x = b$$

$$A^t A x = A^t b;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$3 \times 4 \qquad 4 \times 3 = 3 \times 3$

$$\begin{cases} 10x = 10 \rightarrow x = 1 \\ 4y - 4z = 1 \rightarrow 4y - 4z = 1 \\ -4y + 4z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1+4\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

La solución de min. norma $\in \text{Im } A^t$

$$\text{r}(A^t) = 2 \rightarrow B_{A^t} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$y + z = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad -x - 2y + z - 2z + 4y + x = 0$$

$$-y - z = 0 \parallel y + z = 0$$

$$\frac{1+4\lambda}{4} + \lambda = 0, \quad \frac{1}{4} + 2\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{-1/4}{2} = -\frac{1}{8}$$

Solución de
mínimo norma

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\ z = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\boxed{x = 1, y = \frac{1}{8}, z = -\frac{1}{8}}$$

4.3. Ejercicios

~~4.1.~~ Resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\sqrt{\begin{cases} 2x - y + 3z + u + 4v = 2 \\ 4x + y + 8z + u + 12v = 13 \\ -6x + 15y + 4z - 5u + v = 27 \end{cases}} \quad \mathcal{J} \quad \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 6 \\ 4x + y + 9z = 12 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ 5x - 4y + 6z = 15 \\ 3x + 5y + 11z = 9 \end{cases}$$

~~4.2.~~ Discutir según los valores de los parámetros a y b los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\mathcal{J} \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = b^2 \end{cases} \quad \mathcal{J} \quad \begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + ay + bz = 1 \\ x + y + abz = b \end{cases}$$

4.3.— Encontrar los vértices de un triángulo cuyos lados tienen por puntos medios los puntos de coordenadas

$$(4, 1), (2, 3), (6, 2).$$

¿Quedan determinados los vértices de un cuadrilátero si se conocen los puntos medios de sus lados? Generalizar estos resultados al caso de un polígono con un número cualquiera de lados.

4.4.— Calcular, empleando el método de Gauss-Jordan, las inversas de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

4.5.— Hallar, usando el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que una matriz triangular es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal principal son distintos de cero y que, en ese caso, su inversa es una matriz triangular del mismo tipo.

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

4.6.— Calcular, mediante el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Generalizar el resultado obtenido a una matriz de orden n que tenga la misma estructura. Este ejemplo pone de manifiesto que la inversa de una matriz dispersa no tiene por qué ser ella misma dispersa.

~~4.7.~~— Determinar la solución de mínimos cuadrados del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \\ 5x + 2y = 2 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

hallando y resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones normales.

4.8.— Determinar la solución de mínima norma del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}.$$

4.9.— Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes. Para cada $\mathbf{v}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ se considera el sistema de ecuaciones

$$(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{v}) \mathbf{x} = \mathbf{b}. (*)$$

Se pide razonar para qué vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{b}$ la solución de $(*)$ es el conjunto

$$\{(0, 0, 2)^t + \alpha(5, -1, 1)^t, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

~~4.10.~~—

1. Determinése la proyección ortogonal del vector $(1, 2, 1)$ sobre el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

2. Calcúlese la solución de mínimos cuadrados del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4. Sistemas de ecuaciones lineales

4.1.- La solución del primer sistema es: $x = 3 - z - \frac{19}{6}v$, $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z - \frac{5}{6}v$, $u = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}z + \frac{3}{2}v$ $\forall z, v \in \mathbb{R}$. La del segundo resulta $x = 2y + 3$, $z = -y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

4.2.- Aplicando el método de Gauss, el primer sistema es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & b^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & b(1-b) \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 1+b-(a+1)b^2 \end{array} \right).$$

Por tanto, es compatible determinado si y sólo si $a \notin \{1, -2\}$. Si $a = 1$, obviamente el sistema tiene solución (no única) sólo cuando $b = 1$. Si $a = -2$, existe solución (indeterminada) cuando y sólo cuando $1 + b + b^2 = 0$, es decir, si b es una raíz cúbica de 1 distinta de 1.

Las mismas operaciones entre filas llevan el segundo sistema a la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & ab & b \\ 0 & a-1 & b(1-a) & 1-b \\ 0 & 0 & b(1-a)(a+2) & 2-(a+1)b \end{array} \right).$$

Se observa que tiene solución única si y sólo si $a \notin \{1, -2\}$ y $b \neq 0$ simultáneamente; posee infinitas soluciones si $a = b = 1$ o bien si $a = b = -2$, y en el resto de los casos es incompatible.

4.3.- Si denominamos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ los tres vértices incógnita, relacionándolos con sus puntos medios se llega a plantear los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 2 \\ y_2 + y_3 = 4 \\ y_1 + y_3 = 6 \end{cases}$$

que dan como solución los vértices $(0, 2)$, $(8, 0)$ y $(4, 4)$. La solución es única puesto que la matriz de coeficientes es invertible; sin embargo, para el problema del cuadrilátero, la matriz de coeficientes resulta ser

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que no es invertible pues no posee rango máximo, ya que la suma de las columnas pares es igual a la suma de las impares. En general, la matriz de orden n

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indusbol.com

es invertible si y sólo si n es impar (lo cual puede comprobarse, por ejemplo, desarrollando por la primera columna el determinante de dicha matriz). En resumen, el problema de calcular los vértices de un polígono de n lados a partir de sus puntos medios sólo tiene solución si n es impar.

4.4.— Las inversas son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 58 & -26 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -49 & 22 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

4.5.— Si a cada fila se le resta la posterior multiplicada por a , se obtiene la matriz identidad; realizando el mismo proceso sobre las filas de la identidad se deduce la inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En general, toda matriz triangular proviene de realizar combinaciones lineales entre las filas de la matriz identidad, del tipo $a_{k,k}F_k + \sum_{m>k} a_{k,m}F_m$ (para triangulares superiores, por ejemplo), desde la primera fila ($k = 1$) hasta la última ($k = n$). La matriz es invertible si y sólo si dichas operaciones son reversibles, y para ello es necesario y suficiente que $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ (elementos de la diagonal principal) sean no nulos. En tal caso, las operaciones elementales inversas son del tipo $a_{k,k}^{-1}(F_k - \sum_{m>k} a_{k,m}F_m)$, desde la última fila ($k = n$) hasta la primera ($k = 1$). Efectuadas sobre las filas de la identidad, proporcionan la matriz inversa, que resulta ser triangular del mismo tipo (superior, en el caso del ejemplo indicado).

4.6.— Considerando desde la última fila hasta la segunda de la matriz del enunciado, si a cada fila se le suman todas sus anteriores, se obtiene una matriz bidiagonal (del tipo de la del ejercicio anterior, con $a = 1$); si a continuación a cada fila (desde la penúltima a la primera) se le suma su siguiente fila, se obtiene finalmente la matriz identidad. Ello indica que este tipo de matrices son invertibles, y sus inversas se obtienen efectuando esas mismas operaciones sobre las filas de la matriz identidad. De esta forma se calculan las respectivas inversas de las matrices de orden 6 y orden genérico n :

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.7.- Ecuaciones normales: $\begin{pmatrix} 54 & -4 \\ -4 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -6 \end{pmatrix}$,
cuya solución es $x = \frac{603}{1766}$, $y = -\frac{124}{883}$.

4.8.- Llamando $\mathbf{A}$ a la matriz del sistema, puesto que la solución de mínima norma ha de pertenecer a $\text{Im } \mathbf{A}^t$, tiene que ser de la forma $\mathbf{A}^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Por tanto, hacemos el cambio

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \\ -5 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ y resolvemos en primer lugar el sistema}$$

$$\begin{pmatrix} 39 & -22 \\ -22 & 54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ cuya solución es } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{92}{811} \\ \frac{105}{1622} \end{pmatrix},$$

que al premultiplicarla por la matriz transpuesta de $\mathbf{A}$ nos proporciona la solución de mínima norma que es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{381}{811}, -\frac{26}{811}, -\frac{605}{1622}, -\frac{341}{1622} \right).$$

4.9.- En primer lugar, el vector $(5, -1, 1)^t$ debe pertenecer al núcleo de la matriz:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{v})(5, -1, 1)^t = 5\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}, \text{ es decir, } \mathbf{v} = -5\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

Por otro lado, $(0, 0, 2)^t$ tiene que ser solución del sistema:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | -5\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)(0, 0, 2)^t = -10\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2.$$

4.10.-

1. Proyectamos primero sobre el suplemento ortogonal del subespacio dado, engendrado por el vector $(1, 1, -1)$:

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \left\langle (1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = \frac{2}{3}(1, 1, -1).$$

La proyección pedida será $\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \frac{1}{3}(1, 4, 5)$.

2. La solución de mínimos cuadrados de $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}$ es la solución del sistema compatible $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{v}$, en donde $\mathbf{P}\mathbf{v}$ representa la proyección ortogonal del término independiente sobre el subespacio columna de la matriz (calculada en el apartado anterior).

Así pues, resolvemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

4.11.- Obsérvese que

$$\sum_{k=1}^n (mx_k + p - y_k)^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \mathbf{A} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} - \mathbf{y} \right\|^2;$$

así pues, los valores m, p que minimizan esta expresión son las soluciones de mínimos cuadrados del sistema de matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ (de rango 2 pues las abscisas x_k no son todas iguales), y vector de términos independientes $\mathbf{y}$. Se calculan pasando a las correspondientes ecuaciones normales:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k \end{pmatrix};$$

para resolverlo, es cómodo utilizar la definiciones de media y varianza de un vector:

$$\text{media: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \text{varianza: } \sigma_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2;$$

y la correlación entre dos vectores: $\sigma_{x,y} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y}$. Se obtienen finalmente las soluciones

$$m = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x}, \quad p = \bar{y} - \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x} \bar{x}.$$

En Estadística, la recta de regresión suele escribirse como $y = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x} (x - \bar{x}) + \bar{y}$.

En nuestro ejemplo particular, el problema de mínimos cuadrados se plantea como

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix},$$

cuyas ecuaciones normales se reducen a $\begin{pmatrix} 220 & 30 \\ 30 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 306 \\ 40 \end{pmatrix}$, cuya solución es $m = \frac{33}{20}$, $p = -\frac{19}{40}$, obteniéndose la recta de regresión $y = \frac{33}{20}x - \frac{19}{40}$.

4.12.- La matriz tiene rango igual a 2 (menor que el número de incógnitas) y el sistema es incompatible. Planteamos y resolvemos el problema de mínimos cuadrados mediante las ecuaciones normales:

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sistema indeterminado para el que necesariamente $x = 1$. Para encontrar la solución de mínima norma de

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 1,$$

hacemos $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} u$ y resolvemos $\begin{pmatrix} 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} u = 1$, es decir, $32u = 1$, obteniendo $u_0 = \frac{1}{32}$ y por tanto $\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} u_0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, con lo que la solución pedida es

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right).$$

Academia **RUFFO**

Luchana, 31 – Tel. 91 447 69 26 – Madrid 28010
Luchana, 37 – Tel. 91 448 11 80 – Madrid 28010

CURSO 2010-2011

PROBLEMAS DE EXAMEN ALGEBRA I

INGENIERÍA INDUSTRIAL
EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL I

Viernes 8 de Febrero del 2008

PROBLEMA 1 (2.25 Puntos)

Sea t un parámetro real y la ecuación matricial $AX = B$ con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t \\ 1 & t^2 & 1 \\ t & t & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t+1 \\ t+2 \\ t^2+3 \end{bmatrix}.$$

1. (0.5 Puntos) Discuta la existencia y unicidad de soluciones del sistema en función de los valores de t .
2. (1 Punto) Calcule la factorización LU de A para todos los valores de $t \in \mathbb{R}$ para los que A es invertible.
3. (0.75 Puntos) Resuelva el sistema para $t = -1$, utilizando la factorización del apartado anterior.

PROBLEMA 2 (2.25 Puntos)

Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

donde α y β son números reales, sea $V = L[\{v_1, v_2\}]$ el subespacio generado por los vectores v_1 y v_2 y $B = \{v_1, v_2\}$ una base de V . Se pide:

1. (0.5 Puntos) ¿Pertenece v_3 al subespacio V ? Si es así, calcule las coordenadas de v_3 en la base B de V .
2. (0.5 Puntos) Estudie para qué valores de α y β se puede escribir w como combinación lineal de v_1 y v_2 .
3. (0.5 Puntos) Sea v_4 el vector w cuando α y β toman los valores del apartado anterior, calcule las coordenadas de v_4 en la base B de V .
4. (0.5 Puntos) Calcule la matriz de cambio de base de la base B a la base $B' = \{v_3, v_4\}$.
5. (0.25 Puntos) Siendo $[v_1 v_2], [v_3 v_4] \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ las matrices cuyas columnas son respectivamente v_1, v_2 y v_3, v_4 :

■ Calcule una matriz P tal que

$$[v_1 v_2] P = [v_3 v_4]$$

■ Calcule una matriz Q tal que

$$[v_3 v_4] Q = [v_1 v_2]$$

Álgebra I		Febrero de 2008	
Nombre:	Número de	NOTA	
1 ^{er} Apellido:	Matrícula		
2 ^o Apellido:			

Problema (4 puntos).

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cualquiera y $T_A : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por

$$T_A(X) = AX - XA.$$

Se pide:

1. Estudiar para qué matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es T_A una aplicación lineal.
2. Estudiar si el subconjunto de las matrices $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que conmutan con A es un subespacio vectorial.

Si $n = 3$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$:

3. Calcular los valores y vectores propios de la matriz A .
4. Calcular la matriz de T_A respecto a una base especificada de antemano por el alumno.
5. Calcular el núcleo y la imagen de T_A .
6. Calcular el conjunto de matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$ que conmutan con A .

Solución:

30. EXAMEN SEPTIEMBRE 2007

Problema 1. (2.25 puntos) Determinése el conjunto de números complejos, cuyos elementos satisfacen la siguiente igualdad

$$e^{iz} + e^{-iz} = e^{-\operatorname{Im}(z)},$$

donde para cada $z \in \mathbb{C}$, $\bar{z}$ representa su complejo conjugado y $\operatorname{Im}(z)$ su parte imaginaria.

Problema 2.

Sean Π_3 y Π_4 los espacios de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3 y 4 respectivamente y sea la aplicación $f: \Pi_3 \rightarrow \Pi_4$ tal que a cada polinomio $p(x) \in \Pi_3$ le hace corresponder:

$$f(p(x)) = xp(-x) - xp(x) \in \Pi_4$$

Se pide:

- (a) (0.5 puntos) Demuéstrese que f es lineal. ✓
- (b) (0.75 puntos) Hállese la matriz de f con respecto a las bases canónicas $B_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ de Π_3 y $B_4 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de Π_4 . ✓
- (c) (0.5 puntos) Hállese una base del núcleo y otra de la imagen de f . ¿Es inyectiva? ¿Y sobreyectiva? ✓
- (d) (0.25 puntos) Calcúlese un subespacio suplementario del núcleo de f en Π_3 .
- (d) (0.25 puntos) Calcúlese un subespacio suplementario de la imagen de f en Π_4 .

Problema 3. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) (0.75 puntos) Calcúlese el polinomio característico, los autovalores y los autovectores en $\mathbb{R}$. ¿Es diagonalizable? ✓
- (b) (1 punto) Si $A \in \mathbb{C}^{(3,3)}$ encuéntrase P no singular y D diagonal, tal que: $A = PDP^{-1}$. ✓
- (c) (0.5 puntos) Compruébese el apartado anterior. ✓

Problema 4. Un depósito contiene 60 l de agua pura. Una solución de salmuera, conteniendo 1 g de sal por l de agua comienza a entrar en el depósito a 2 l/min. y a la vez se permite salir a la mezcla resultante a 3 l/min. con lo que el depósito se vacía en 1 hora exactamente.

- (a) (1 punto) Encuéntrase la solución general de la ecuación diferencial que verifica la cantidad de sal presente en el depósito, que es

$$C'(t) = 2 - \frac{3C(t)}{60 - t}$$

PROBLEMA 3 (2.25 Puntos)

Sea $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la aplicación definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ -ix + iy \\ -x + y \end{bmatrix},$$

donde i es la unidad imaginaria compleja.

1. (0.5 Puntos) ¿Es f una aplicación lineal?
2. (0.5 Puntos) Calcule la matriz canónica de f , es decir la matriz de f con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}^3$.
3. (0.5 Puntos) Calcule una base del núcleo de f ($\text{Ker } f$) y otra de la imagen ($\text{Im } f$), así como las respectivas dimensiones de ambos subespacios.
4. (0.5 Puntos) Sean $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$ bases de $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}^3$ respectivamente. Se le pide que calcule $M_f(B', B)$, es decir, la matriz de f respecto a las bases B y B' .
5. (0.25 Puntos) ¿Es posible encontrar una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}^3$? ¿Y sobreyectiva? Razone sus respuestas, dando un ejemplo cuando la respuesta sea afirmativa.

PROBLEMA 4 (2.25 Puntos)

1. (1 Punto) Se sabe que cierta matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que tiene por polinomio mínimo $m_A(x) = x^2 - 4x + 4$ cumple que

$$\log A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\log 2 - 1 & -1 \\ 1 & 2\log 2 + 1 \end{bmatrix},$$

donde $\log$ denota el logaritmo neperiano. Calcular con estos datos las matrices componentes de A y la propia matriz A .

2. (0,25 Puntos) Encontrar una solución particular de la forma

$$x_p(t) = y_p(t) = a + bt,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = 2 - y(t) + x(t) \\ y'(t) = x(t) - 2 + 3y(t) - 8t \end{cases} \quad (1)$$

3. (0,75 Puntos) A partir de la solución particular del apartado anterior, calcular todas las soluciones reales $x(t), y(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del sistema (1).
4. (0,25 Puntos) ¿De todas las soluciones anteriores cuál es la que cumple $x(0) = y(0) = 2$?



INGENIERÍA INDUSTRIAL
EXAMEN DE ÁLGEBRA LINEAL I. 30 de enero de 2007.

Problema 1. Sea p un número real mayor que cero.

- (a) (1 punto) Hállese el conjunto M de los números complejos que tienen el módulo (o valor absoluto) de su parte real igual a 2 y su módulo igual a p . Discútaselo en función de los posibles valores de p cuántos elementos tiene dicho conjunto.
- (b) (0.75 puntos) Calcúlese todos los elementos de M para el valor $p = \sqrt{8}$ y exprese en la forma $re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.
- (c) (0.5 puntos) Calcúlese la potencia cuarta de todos los elementos de M obtenidos en el apartado 2. y exprese en forma binómica $a + bi$ con a y b números reales.

Problema 2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (0.75 puntos) Calcúlese los valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para los que A es no singular.
- (b) (1.5 puntos) Calcúlese A^{-1} cuando $\lambda = i$.

Problema 3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) (0.75 puntos) Calcúlese el polinomio característico de A y a partir de él determinense sus autovalores.
- (b) (1.25 puntos) Calcúlese los autovectores de A . ¿Es diagonalizable? $\rightarrow$ Sí
- (c) (0.25 puntos) Discútaselo, sin hacer ningún cálculo, para qué vectores $b \in \mathbb{R}^4$ el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene solución, y cuántas.

Problema 4. (2.25 puntos) Determinese la función $y : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones

$$\begin{cases} y'''(x) + y'(x) = \cos x, & x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ y(0) = 1, & y'(0) = 1, & y''(0) = 1. \end{cases}$$

Problema (4 puntos):

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular una base de $\text{Im } A$ cuyo primer vector sea $(1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$, y otra de $\ker A$. [0'8 puntos]
2. Razonar si los dos subespacios anteriores son o no suplementarios en $\mathbb{R}^6$. [0'4 puntos]

Se considera ahora el endomorfismo $f : \text{Im } A \rightarrow \text{Im } A$, definido por

$$\forall x \in \text{Im } A, f(x) = Ax.$$

3. Calcular la matriz B de f respecto a la base de $\text{Im } A$ encontrada en el apartado 1. [0'8 puntos]
4. Construir una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP$ sea igual a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. [0'5 puntos]
5. Diagonalizar, si es posible, la matriz B , calculando la matriz de paso. [0'8 puntos]
6. Utilizar los resultados de los apartados anteriores para diagonalizar la matriz A . [0'7 puntos]

Nota: La matriz de paso puede dejarse indicada como producto de dos matrices, sin necesidad de efectuar dicho producto.

Álgebra I

Febrero de 2006

Problema (4 puntos):

Sean $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas dos por dos, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $f, g : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ aplicaciones definidas, para cada $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, por

$$f(A) = AJ \quad \text{y} \quad g(A) = JAJ$$

Se pide:

1. Estudiar si f , g , $f+g$, fg , gf , $f \circ g$ y $g \circ f$ son aplicaciones lineales.
2. Hallar las matrices de las aplicaciones lineales del apartado 1 respecto de la base ordenada

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

3. Calcular los valores y vectores propios de las aplicaciones lineales del apartado 1.
4. Calcular los polinomios mínimos de las aplicaciones lineales del apartado 1.
5. Determinar las bases de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ respecto de las cuales las aplicaciones lineales anteriores tienen una matriz canónica de Jordan.

Solución:

28. EXAMEN SEPTIEMBRE 2006

Problema 1. Sea el sistema $AX = B$ dado por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & l & 1 \\ -1 & 2 & l-1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- I) [0.75 puntos] Discútase el sistema según los valores de l .
- II) [0.75 puntos] Para $l = 2$, factorícese $A = LU$ y, usando este resultado, resuélvase el sistema en este caso.
- III) [0.75 puntos] Resuélvase el sistema cuando sea determinado.

Problema 2. Sea $f: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ una aplicación lineal, siendo $\mathbb{P}_3$ el conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado 3 o menor, dada por

$$f[p(t)] = t^2 p''(t) + 2tp'(t) + p(t).$$

1. [0.75 puntos] Demuéstrese que f es lineal.
2. [0.25 puntos] Determinése la matriz de f respecto a la base canónica $B_c = \{1, t, t^2, t^3\}$.
3. [0.5 puntos] Demuéstrese que f es un isomorfismo.
4. [0.75 puntos] Hállese $\text{Im } f$.

Problema 3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. [0.6 puntos] Calcúlese su polinomio característico.
2. [1 punto] Determinése una base formada por los autovectores de A .
3. [0.25 puntos] Demuéstrese que 1 es autovalor de A^2 .
4. [0.4 puntos] Demuéstrese que A^2 es diagonalizable.

Problema 4. [0.9 puntos] Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Es diagonalizable en $\mathbb{R}$? ¿Y en $\mathbb{C}$?
2. [0.45 puntos] Pruébese que $x_0(t) = te^t$ es solución de la ecuación diferencial

$$x'' + 2x' + 5x = 4(2t + 1)e^t.$$

3. [0.9 puntos] Resuélvase la ecuación diferencial anterior para las condiciones iniciales

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Matrices compatibles? Derivadas

3. La matriz de rotación de ángulo α alrededor del eje Z en $\mathbb{R}^3$ es

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (1.25 puntos) Estudiar si la matriz R_α es diagonalizable en $\mathbb{C}$.
(b) (1 punto) En los casos afirmativos encontrar la base y escribir la relación entre la matriz R_α y la matriz diagonal.
4. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide,

- (a) (0.25 puntos) Polinomio mínimo de las matrices A_1 y A_2 .
(b) (1 punto) Calcular $e^{A_1 t}$ y $e^{A_2 t}$.
(c) (1 punto) Sea $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array} \right)$. Utilizando los apartados anteriores, o de cualquier otra manera, calcular el polinomio mínimo de la matriz A y hallar e^{At} .

Álgebra I

Septiembre de 2005

Ejercicio 2 (3 puntos).

Se consideran 3 números complejos a, b, c distintos de 1 y entre sí. Sea el polinomio en x

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1-a & 1-b & 1-c \\ 1-x^2 & 1-a^2 & 1-b^2 & 1-c^2 \\ 1-x^3 & 1-a^3 & 1-b^3 & 1-c^3 \\ 1-x^4 & 1-a^4 & 1-b^4 & 1-c^4 \end{vmatrix}.$$

1. Sin desarrollar el determinante, calcúlense razonadamente todas las raíces de D .
2. Calcúlese $D(x)$ para todo x .
3. Se considera el polinomio mónico $\tilde{D} = \frac{D}{\alpha}$, en donde α representa el coeficiente principal de D . Sabiendo que

$$\begin{aligned} a + b + c &= 5 \\ ab + ac + bc &= -2 \\ abc &= 4, \end{aligned}$$

calcúlense los coeficientes de $\tilde{D}$.

Álgebra I

Febrero de 2006

Ejercicio 2 (3 puntos):

Sea $\xi = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ (por tanto, $1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ son todas las raíces quintas de la unidad). Para cada $x \in \mathbb{C}$, se considera la matriz

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & x & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & \xi & x & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & \xi & \xi^2 & x & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & x & \xi^4 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 & x \end{pmatrix}$$

y el polinomio $P(x) = \det A(x)$.

1. Calcúlese el valor de x que hace que el vector $(1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$ pertenezca al núcleo de $A(x)$. Dedúzcase del resultado una raíz de P .
2. Encuéntrense los valores de x que hacen que $A(x)$ tenga dos filas o columnas iguales; dedúzcase de ahí las restantes raíces de P , y la expresión sin factorizar de dicho polinomio.
3. Calcúlense los valores de m que hacen que el polinomio $Q(x) = x^m - x$ sea divisible entre P .

Nota: Todos los apartados deberán resolverse de modo razonado.

INGENIERÍA INDUSTRIAL

ÁLGEBRA I

5 de Septiembre de 2005

INSTRUCCIONES

- La duración del examen es de 3 horas y media.
- La pregunta del laboratorio se recogerá pasada la primera media hora.
- Los Apellidos y el Nombre tienen que ir en mayúsculas.
- El alumno tiene que especificar el grupo al que pertenece.
- Los problemas se entregarán en hojas separadas.
- No se permite el uso de ninguna calculadora.
- No se podrá entregar el examen hasta transcurridos 30 minutos desde el comienzo del mismo.
- El alumno no podrá salir del aula antes de haber finalizado su examen.

1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu & \mu^2 \\ \bar{\mu} & 1 & \mu \\ \bar{\mu}^2 & \bar{\mu} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(\mu - \mu^2 \bar{\mu}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se pide,

(a) (1,25 puntos)

Discutir la compatibilidad del sistema en función de los parámetros $\beta, \mu \in \mathbb{C}$.

(b) (1 punto)

Resolver el sistema mediante la descomposición LU para $\mu = 2i$ y $\beta = 1$.

2. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y - 3z, x - y, x - z).$$

Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$.

Se pide,

(a) (0,5 puntos) Encontrar una base y la dimensión del $\text{Ker}(T)$.

(b) (1 punto) Encontrar una base para el espacio $W + \text{Im}(T)$.

(c) (0,25 puntos) ¿Es T un isomorfismo?. Justificar la respuesta.

(d) (0,5 puntos) ¿Es $W \cup \text{Im}(T)$ subespacio de $\mathbb{R}^3$?

3. 2,25 puntos

Sea $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (ax - y - z, z - x, by).$$

¿Para qué valores de $a, b \in \mathbb{C}$ se tiene $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ y la matriz de la aplicación no es diagonalizable?

4. (a) 1,25 puntos

Supongamos que la población de conejos (x) y lobos (y) satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= x + y\end{aligned}$$

(i) Halla la solución del sistema anterior.

(ii) Si la población actual es de 300 conejos y 200 lobos, ¿cuántos conejos y lobos habrá al cabo de 10 años?

(b) 1 punto

De una matriz $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, se conocen dos de sus autovalores $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = i$ y las matrices componentes correspondientes a estos autovalores que son, respectivamente,

$$Z_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}, \quad Z_{2,0} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{2+i}{10} & \frac{4-3i}{10} \\ -2i & \frac{3-i}{5} & \frac{1-7i}{5} \\ i & \frac{-3+i}{10} & \frac{-1+7i}{10} \end{pmatrix}.$$

Se pide,

(i) Determinar el tercer autovalor y su matriz componente correspondiente, justificando la respuesta.

(ii) Escribir la matriz A .

INGENIERÍA INDUSTRIAL

ÁLGEBRA I

3 de Febrero de 2005

INSTRUCCIONES

- La duración del examen es de 3 horas y media.
- La pregunta del laboratorio se recogerá pasada la primera media hora.
- Los Apellidos y el Nombre tienen que ir en mayúsculas.
- El alumno tiene que especificar el grupo al que pertenece.
- Los problemas se entregarán en hojas separadas.
- No se permite el uso de ninguna calculadora.
- No se podrá entregar el examen hasta transcurridos 20 minutos desde el comienzo del mismo.
- El alumno no podrá salir del aula antes de haber finalizado su examen.

1. (a) (0.75 puntos) Discutir el siguiente sistema según los valores de α y β en $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix}.$$

- (b) (1 punto) Estudiar para que valores de α la matriz del sistema

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

admite la descomposición LU y efectuar dicha descomposición.

- (c) (0.5 puntos) Resolver el sistema, para $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, usando la descomposición LU .

2. Sea $T : \mathbb{R}^{(2,2)} \mapsto \mathbb{R}^{(2,2)}$ definida por $T(A) := A + A^T$. Se pide,

- (a) (0.25 puntos) Demostrar que T es una aplicación lineal.
- (b) (0.5 puntos) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ que verifique $T(A) = B$ y $B = B^T$.
- (c) (0.5 puntos) Hallar la imagen de T .
- (d) (0.5 puntos) ¿Es T inyectiva? Justificar la respuesta.
- (e) (0.5 puntos) Demostrar que

$$\sum_{k=1}^m T^k(A) = (2^m - 1)T(A).$$

Ejercicio 2 (4 puntos).

En este problema a y b son números complejos, no simultáneamente nulos.

1. Calcúlese los polinomios característicos de las matrices $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ b & b & 0 \end{pmatrix}$.

2. Dada la matriz cuadrada de orden $n > 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ b & b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}$

- 2.1 Calcúlese la dimensión del núcleo de A según los valores de a y b .
 2.2 Calcúlese el polinomio característico de A . Estúdiense para qué valores de a y b es A diagonalizable.
 2.3 Calcúlese A^p , $p \in \mathbb{N}$, expresando sus elementos en función de a, b y n , y distinguiendo, cuando sea necesario, los casos de p par e impar.

Álgebra I		Febrero de 2005	
Nombre:	Número de	NOTA	
1er Apellido:	Matrícula		
2º Apellido:			

Ejercicio 2 (3 puntos):

En el espacio vectorial $\mathbb{C}_4[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 4, se considera la base

$$\mathcal{B} = (1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4)$$

y el subespacio

$$E = \{p \in \mathbb{C}_4[x] : p'(1) = p'''(1) = 0\}.$$

1. Expresese un polinomio genérico de E como combinación lineal de los polinomios de la base $\mathcal{B}$. Dedúzcanse de ello la dimensión y una base de E .
 2. Dada la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_4[x] &\rightarrow \mathbb{C}_4[x] \\ p(x) &\mapsto p(2-x), \end{aligned}$$

calcúlese la matriz de dicha aplicación respecto a la base $\mathcal{B}$.

3. Si $M = \{p \in \mathbb{C}_4[x] : p(x) = p(2-x)\}$, encuéntrase una base del subespacio $E \cap M$.
 4. Calcúlese las raíces del polinomio $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 5$.

Solución:

Álgebra I	Septiembre de 2004	
Nombre:	Número de	NOTA
1 ^{er} Apellido:	Matrícula	
2 ^o Apellido:		

Ejercicio 2 (3 puntos).

Dados $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ números complejos, se considera el polinomio

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

- Sumando a la primera columna todas las restantes, y utilizando las propiedades de los determinantes, dedúzcase una raíz de D_n .
- Efectuando operaciones elementales por filas sobre el determinante obtenido en el apartado anterior, dedúzcase la expresión de $D_n(x)$ como producto de factores irreducibles en $\mathbb{C}[x]$. ¿Cuánto vale el coeficiente en x^{n-1} de dicho polinomio?
- Calcúlense el polinomio en x

$$\begin{vmatrix} x^5 & 1 & -1 & i & -i \\ 1 & x^5 & -1 & i & -i \\ 1 & -1 & x^5 & i & -i \\ 1 & -1 & i & x^5 & -i \\ 1 & -1 & i & -i & x^5 \end{vmatrix}$$

y la suma de sus raíces de parte imaginaria no negativa.

Álgebra I	Septiembre de 2004	
Nombre:	Número de	NOTA
1 ^{er} Apellido:	Matrícula	
2 ^o Apellido:		

Ejercicio 1 (3 puntos): Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

- Calcúlese el rango de A y obténganse unas ecuaciones cartesianas de su subespacio columna $\text{Im}(A)$.

Álgebra 1

Febrero de 2004

Ejercicio 1 (3 puntos):

Consideramos la matriz cuadrada de orden 30 con coeficientes complejos

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

- 1) Calcular el determinante de B .
- 2) Escribir el conjunto S de los valores de a para los que B es singular.
- 3) Calcular la suma de aquellos elementos de S cuya parte imaginaria es positiva o nula.

(Se entregará esta hoja y, a lo sumo, una adicional)

Álgebra 1

Junio de 2004

Ejercicio 1 (3 puntos).

1.1 Sean E, F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo y $f: E \rightarrow F$ un homomorfismo. Sea M un subespacio de F , defínase su contraimagen $f^{-1}(M)$.

1.2 Sea $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1.2.1 Calcular una base del núcleo de f .

1.2.2 Sea M el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Calcular una base de $f^{-1}(M)$.

Solución:

1.- La imagen recíproca o contraimagen de un subespacio M del espacio final F se define como $f^{-1}(M) = \{u \in E, f(u) \in M\}$ y resulta ser un subespacio del espacio inicial E .

Álgebra I

Febrero de 2004

Ejercicio 2 (8 puntos):

Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que cumple que:

$$f(1, 0, 2) = (1, 0, \alpha);$$

$$f(1, 2, 1) = (\alpha, 1, 0);$$

$$f(0, 1, -1) = (1, \alpha, 0).$$

1. Determinar la condición que debe satisfacer α para que f quede completamente definido por las tres ecuaciones anteriores.
2. Calcular el valor de α para que, además de la condición anterior, se satisfagan simultáneamente las dos condiciones siguientes:
 - $(0, -1, 1) \in \text{Im } f$.
 - f no es biyectiva.
3. Para el valor de α obtenido, calcular una base del núcleo y otra de la imagen de f .

(Se entregará esta hoja y, a lo sumo, una adicional)

Álgebra I

Febrero de 2004

Problema (4 puntos):

Dada la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se define el endomorfismo f de $\mathbb{C}^{n \times n}$, tal que para toda matriz $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $f(X) = AX$.

1. Para el caso particular $n = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, determínese la matriz M de f respecto de la base

$$\left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Estúdiese si la matriz M es diagonalizable.

A partir del siguiente apartado se considerará el caso general, indicado al comienzo del enunciado.

2. Dada la base de $\mathbb{C}^{n \times n}$, $B = (E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{1n}, E_{2n}, \dots, E_{nn})$, donde E_{jk} ($j, k = 1, 2, \dots, n$) es la matriz cuyos elementos son todos nulos salvo el de la fila j columna k que vale la unidad, calcúlese la matriz M de f respecto de dicha base.
3. Establézcase la relación que existe entre los polinomios característicos de las matrices M y A .
4. Estúdiese si es cierta la siguiente proposición: "El endomorfismo f es diagonalizable si y sólo si la matriz A es diagonalizable". (Nota: un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita V es diagonalizable si y sólo si existe una base de V formada por vectores propios de dicho endomorfismo).

INGENIERÍA INDUSTRIAL. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

Universidad Carlos III de Madrid

EXAMEN DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA I. Septiembre 2004.

1. (2.5 puntos) Considérense los subespacios

$$U = \{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y, z = u \}, \quad V = \text{Lin}\{(1, 0, 0, 1), (1, -1, -1, 1), (1, 3, 3, 1), (0, 1, 1, 0)\}.$$

(a) Calcular bases y dimensiones de U y V . Calcular $U + V$, $U \cap V$.(b) Sea el subespacio W de $\mathbb{R}^4$ definido por $W = \ker A$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinar una base y su dimensión. Calcular $U \cap W$ y $V + W$.

(c) Demostrar si las siguientes igualdades son ciertas, en caso contrario dar un contraejemplo:

$$(U + V) \cap W = (U \cap W) + (V \cap W), \quad (U \cap V) + W = (U + W) \cap (V + W).$$

2. (2.5 puntos) Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ix_1 + ix_2 = 0, \\ ix_1 + (\alpha + i)x_2 + ix_3 = 2i, \\ ix_1 + (\alpha + i)x_2 + \alpha x_3 = \alpha + 2i. \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

donde i representa la unidad imaginaria.(a) Determinar para que valores de α el sistema es incompatible.(b) Determinar para que valores de α el sistema tiene solución.(c) Obtener la factorización LU de la matriz de coeficientes del sistema anterior cuando $\alpha = -i$. Resolver el sistema utilizando dicha factorización.3. (2.5 puntos) Sea E un espacio vectorial de dimensión 4 y $f: E \rightarrow E$ un endomorfismo (esto es una aplicación lineal de un espacio en sí mismo). El conjunto de vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es un sistema generador de E tal que verifica:

$$u_1, u_3 \in \ker f, \quad f(u_2) = u_1 + 2u_2 + u_4.$$

(a) Si $f^2 = f$, hallar la matriz asociada a f en el sistema de vectores anterior.(b) Determinar el rango de f .(c) Discutir la inyectividad y sobrevectividad de f .4. (2.5 puntos) Sea la matriz compleja $A = \begin{bmatrix} i-2 & 1 & 4 \\ -4 & i+2 & 8 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$.(a) Calcular los autovalores de A , así como los autovectores asociados.(b) Calcular el polinomio mínimo de A . ¿Es A diagonalizable?(c) Calcular $\exp(At)$.

(d) Resolver

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i-2 & 1 & 4 \\ -4 & i+2 & 8 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

(e) Dada una matriz cuadrada B , se sabe que $B^7 = 3B^2 - I$. Demostrar cuál de las siguientes afirmaciones se verifica siempre:(e.1) La dimensión de B es 7.(e.2) El polinomio característico de B es $x^7 - 3x^2 + 1$.(e.3) El polinomio $p(x) = x^7 - 3x^2 + 1$ es múltiplo del polinomio mínimo de B .

3:30 horas

INGENIERÍA INDUSTRIAL. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

Universidad Carlos III de Madrid

EXAMEN DE ÁLGEBRA I. Febrero 2003.

1. (2.25 puntos) Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$: $U = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid -a + b - c = 0, a + c = 0 \right\}, W = \{A \mid PA = 0\}, \text{ donde } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Demostrar que V y W son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(b) Hallar bases de U , W , $U \cap V$ y $V \cap W$.

(c) Hallar $U + V$.

(d) Sean tres subespacios U , V y W de un espacio vectorial E . Si $U \cap V = U \cap W = V \cap W = 0$ ¿Cuál es el valor de las dimensiones de los subespacios U , V y W para que sean suplementarios dos a dos?

2. (2.25 puntos) Sea la aplicación $f: \Pi_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(p) = (p(0) + p'(0), p''(0))$ para todo polinomio $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 \in \Pi_2(\mathbb{R})$.

(a) Probar que f es una aplicación lineal.

(b) Dada la base $B = \{1, x, x^2\}$ de $\Pi_2(\mathbb{R})$ y la base canónica $B_0 = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, calcular la matriz A de la aplicación lineal f respecto de dichas bases.

(c) Calcular una base de $\ker f$ y de $\text{Im} f$. ¿Es f inyectiva? ¿y suprayectiva?

(d) Dadas las bases $B' = \{1 - x, x, 1 - x^2\}$ de $\Pi_2(\mathbb{R})$ y $B'_0 = \{(1, 0), (1, 1)\}$. Calcular la matriz A' asociada a f en las bases B' y B'_0 . ¿Cuáles son los rangos de A y A' ?

(e) Sean $a \neq 0$, b números reales. Considérense la aplicación $T(p(x)) = ap(x - b)$. Comprobar que T es un isomorfismo.

3. (2.25 puntos) Considérense el sistema de ecuaciones:

$$x_1 + wx_2 + u^2x_3 + u^3x_4 = 1$$

$$ux_1 + u^2x_2 + u^3x_3 + x_4 = a$$

$$u^2x_1 + u^3x_2 + x_3 + wx_4 = b$$

$$u^3x_1 + x_2 + wx_3 + u^2x_4 = c$$

donde u es una raíz cuarta de 1 distinta de 1 y $a, b, c \in \mathbb{C}$.

(a) ¿Existen valores de a, b, c tales que el sistema anterior tenga una única solución?

(b) Estudiad las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema anterior tenga infinitas soluciones. En tal caso calculadlas.

(c) ¿Existen valores de a, b, c tales que exista un número finito mayor que uno de soluciones del sistema de ecuaciones?

(d) Calculad la factorización LU de la matriz A de los coeficientes del sistema.

(e) Estudiad la siguiente afirmación: " U es invertible si y solo si A es invertible", donde $A = LU$ es la factorización LU de A .

4. (2.25 puntos) Considérense la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calculad A^n , $E_n = (I + A/n)^n$ y $\exp A$.

(b) Si observamos el punto $P = (1, 0, 0)$ y sus imágenes $P_n = E_n(P)$, $n = 1, 2, \dots$ ¿qué le ocurre a esta sucesión?

(c) Hallad la solución general de la ecuación $dx/dt = -x + 2z$, $dy/dt = y + z$, $dz/dt = z$. ¿Cuál es la solución que verifica que $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ y $z(0) = 0$?

CLAVE: 163
0326

INGENIERÍA INDUSTRIAL. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

Universidad Carlos III de Madrid

EXAMEN DE ÁLGEBRA I. Septiembre 2003.

1. (2.25 puntos) Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$: $U = \mathcal{L}\{(-1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1), (-2, 0, 2)\}$,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}, \text{ y } W = \ker A \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
 (b) Hallar bases de U , V , W .
 (c) Hallar $U + V$, ¿es suma directa?
 (d) Calcula un suplementario de $U \cap W$ en U ¿qué dimensión tiene?
 (e) ¿Es posible hallar una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\ker f = V$ y $\text{Im} f = U$? Razónala respuesta.

2. (2.25 puntos) Sea la aplicación $f: \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ definida por $f(A) = [S, A] = SA - AS$ donde $S = \text{diag}(1, -1)$.

- (a) Probar que f es una aplicación lineal.
 (b) Calcular la matriz A de la aplicación lineal f respecto de la base standard de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, esto es la dada por las matrices

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) Calcular una base de $\ker f$ y de $\text{Im} f$. ¿Es f inyectiva? ¿y suprayectiva?
 (d) Consideremos ahora la base $B' = \left\{ I_2, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, S \right\}$ de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$. Calcular la matriz A' asociada a f en la base B' . ¿Cuales son los rangos de A y A' ?
 (e) Sea S una matriz cuadrada no singular y sea la aplicación $T: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ definida por $T(A) = S^{-1}AS$. Probar que T es un isomorfismo.

3. (2.25 puntos) Considérese el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 &= 1 \\ ax_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \\ ax_2 + x_3 + ax_4 &= 1 \\ ax_3 + x_4 &= b \end{aligned}$$

donde a, b son números reales.

- (a) Dad condiciones necesarias y suficientes para que el sistema anterior tenga una única solución. En tal caso calculadla.
 (b) ¿Existen valores de a, b tales que el sistema anterior tenga infinitas soluciones?
 (c) ¿Existen valores de a, b tales que existan exactamente dos soluciones de la ecuación?, ¿y un número finito mayor que uno de soluciones del sistema de ecuaciones?
 (d) Calculad la factorización LU de la matriz A de los coeficientes del sistema cuando $a = 7$.
4. (2.25 puntos) Considérese la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & w \\ w & w^2 \end{bmatrix}$, donde w es un número complejo solución de la ecuación $z^2 - z + 1 = 0$.
- (a) Calculad los autovalores y autovectores de A .
 (b) ¿Es A diagonalizable? Si lo fuera calculad la matriz del cambio de base que la hace diagonal.
 (c) Hallad la solución general de la ecuación $dx/dt = Ax$. ¿Cual es la solución que verifica que $x(0) = [1, 0]^T$?
 (d) Estudiad la siguiente afirmación: " A es diagonalizable si y solo si lo son todas sus potencias".

Álgebra I

Junio de 2003

Problema (4 puntos):

Dado un polinomio Q prefijado con coeficientes complejos, de grado n , definimos la aplicación

$$\Phi_Q : \mathbb{C}[z] \rightarrow \mathbb{C}_{n-1}[z]$$

que a cada polinomio P le asocia el resto de su división euclídea entre Q .

1. Demuéstrase que la aplicación Φ_Q es lineal.
2. Calcúlense razonadamente el núcleo y la imagen de Φ_Q .
3. Dados tres números complejos a, b, c , enúnciese y demuéstrase una condición sobre ellos que sea necesaria y suficiente para que los tres polinomios

$$(z-b)(z-c), (z-a)(z-c), (z-a)(z-b)$$

constituyan una base de $\mathbb{C}_2[z]$.

4. Para $Q(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$, donde a, b, c son tres números complejos que satisfacen la condición anterior, y dado cualquier polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$, calcúlense las coordenadas del polinomio $\Phi_Q(P)$ respecto a la base del apartado anterior. Relaciónese el polinomio $\Phi_Q(P)$ con el polinomio de interpolación de Lagrange de P en los puntos a, b, c .

Álgebra I

Septiembre de 2003

Ejercicio 2 (3 puntos):

Se considera una base (u, v, w, z) de $\mathbb{R}^4$ y una matriz $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ invertible tal que

$$A(u+v) = u,$$

$$A(u-v) = v,$$

$$A^{-1}(u+v) = u + v + 2u,$$

$$A^{-1}(v-z) = u + v + 2z.$$

- 2.1. Calcular las imágenes por A de los vectores de la base anterior.
- 2.2. Se dice que un subespacio H de $\mathbb{R}^4$ es A -invariante si $Ax \in H \forall x \in H$. Calcular sendas bases de dos subespacios A -invariantes de dimensión 2 y suplementarios en $\mathbb{R}^4$.
- 2.3. Razonar para qué valores de los parámetros reales $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ es compatible el sistema lineal

$$\left(A - \frac{1}{2}I\right)x = \alpha u + \beta v + \gamma w + \mu z,$$

y encontrar la solución general en ese caso.

Solución:

ra I

Febrero de 2003

Ejercicio 1:

el endomorfismo de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ definido por $T(X) = XA - AX$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hallarse la matriz de T respecto de la base

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Hallarse la forma general de las matrices de $\text{Ker } T$. Hállese el conjunto formado por todas las matrices que conmutan con la matriz A .

Hallarse la forma general de las matrices de $\text{Im } T$. Estúdiese si la ecuación $T(X) = A$ admite soluciones.

Ejercicio I

Junio de 2003

Nombre:

Apellido:

Apellido:

Número de
Matrícula

--	--	--	--	--

NOTA

Ejercicio 1 (3 puntos):

Sea $B = (u, v, w, z)$ una base genérica de $\mathbb{R}^4$. Sea A la matriz que deja fijos los vectores u y v e intercambia los vectores w y z . ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo, escribir una base de autovectores en función de los vectores de B .

1. Determinar los valores de a para que los vectores $u = (1, 2, 3, 4)^t$, $v = (1, 1, 1, 1)^t$, $w = (1, 0, a, 0)^t$, $z = (0, 0, 0, 1)^t$ formen base de $\mathbb{R}^4$.

2. Para a igual a las unidades de su número de matrícula, se define la matriz A del primer apartado. Estudiar si el sistema $Ax = (4, 3, 2, 1)^t$ tiene solución, y en tal caso calcularla.

(Nota: No es necesario calcular explícitamente la matriz A .)

Se entregará esta hoja y, a lo sumo, una adicional.

Álgebra I y Álgebra Lineal (Primer Cuatrimestre)

Junio de 2002

Problema: En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios F -generado por los vectores $(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, -1, 1, -1)$ - y G de ecuaciones cartesianas

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_2 - x_4 = 0.$$

- Calcúlense bases de F y G .
- Encuéntrese un subespacio suplementario de G cuyos vectores tengan las dos primeras componentes iguales; explícitese una base.
- Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuyo núcleo es G . ¿Es posible escogerlo de forma que su imagen sea F ? Razónese la respuesta.

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$; F y G subespacios de E .

- Enúnciase y demuéstrese una condición necesaria y suficiente para que exista un endomorfismo en E cuyos núcleo e imagen sean respectivamente G y F .
- Supóngase, adicionalmente, que F y G son suplementarios y sea f un endomorfismo tal que $\text{Im } f = F$, $\ker f = G$. Pruébese que $\ker f = \ker f^2$ e $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. ¿Es suficiente para afirmar $f = f^2$? (Nota: $f^2 = f \circ f$)

Solución:

Álgebra I

Febrero de 2003

Ejercicio 1:

Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ definido por $T(X) = XA - AX$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Hállese la matriz de T respecto de la base

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

- Determinése la forma general de las matrices de $\text{Ker } T$. Hállese el conjunto formado por todas las matrices que conmutan con la matriz A .
- Determinése la forma general de las matrices de $\text{Im } T$. Estúdiase si la ecuación $T(X) = A$ admite soluciones.

Solución:

$$1 \quad T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-c & a-d \\ a-b & c-d \end{pmatrix}$$



INGENIERÍA INDUSTRIAL

EXAMEN DE ÁLGEBRA LINEAL I

Febrero 2002

Problema 1 (2.25 puntos). Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. probándolas o dando un contraejemplo en cada caso:

- (a) Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ ($m \geq n$) y un vector $b \in \mathbb{K}^{(m,1)}$ el sistema lineal $Ax = b$ es compatible y determinado si y sólo si $\text{rang } A = \text{rang } (A|b) < n$, donde $(A|b)$ denota la matriz ampliada del sistema.
- (b) Sean $M, N \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ matrices equivalentes. Entonces, M y N poseen rangos diferentes por columna.
- (c) Si $\lambda \neq 0$ es un valor propio de la matriz $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, se verifica que λ^{-1} es valor propio de su transpuesta A^T .
- (d) La exponencial de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad I_2 .

Problema 2 (2.25 puntos). Sean E y F los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$E = L[(1, 1, 1), (1, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^3,$$

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.$$

- (a) Halle $E \cap F$.
- (b) Describa $E + F$ mediante clausura lineal. ¿Es suma directa?
- (c) Determine un subespacio suplementario de F .
- (d) Sean $B = \{b_1, b_2\}$, con $b_1 = (0, 1, -1)$, $b_2 = (1, 0, 1)$ y $A = \{a_1, a_2\}$ con $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$ bases de F y E , respectivamente. Se define la aplicación lineal

$$T : F \mapsto E,$$

$$T(x) = T(x_1, x_2, x_3) = x_1 a_1 + x_2 a_2.$$

Determine la matriz de la aplicación lineal T respecto a las bases $B \subset F$ y $A \subset E$.

- (e) Sea $\tilde{B} = \{(1, 0, 1), (2, 1, 1)\}$ otra base de F . Halle las matrices de cambio de base, esto es, de la base B a la base $\tilde{B}$ y viceversa.

Problema 3 (2.25 puntos). Sea la aplicación

$$h : \mathbb{P}_2 \mapsto \mathbb{P}_2, \\ h(p) = h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_2 - a_0)x^2 - a_1x + 2(a_2 - a_0), \quad \forall p \in \mathbb{P}_2.$$

Responda a los siguientes apartados:

- (a) Probar que la aplicación h es lineal.
- (b) Determine la dimensión y base de los subespacios $\ker h$ e $\operatorname{Im} h$ de $\mathbb{P}_2$. ¿Es h una aplicación inyectiva?
- (c) Halle la matriz de la aplicación h respecto a la base canónica $\{1, x, x^2\} \subset \mathbb{P}_2$.
- (d) ¿Es h un endomorfismo diagonalizable?
- (e) Determine una base de $\mathbb{P}_2$ respecto a la cual la aplicación h tiene asociada una matriz diagonal.

Problema 4 (2.25 puntos). Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Responda a los siguientes apartados:

- (a) Determine el polinomio mínimo de A . Basándose en las características de sus ceros (simples o múltiples) diga: ¿Es A diagonalizable?
- (b) Determine las matrices componentes de A .
- (c) Calcule $f(A) = \exp(At)$ y $g(A) = \sin A + A^{100}$.
- (d) Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = (0, 0, 1)^T.$$

Ejercicio 1: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$ donde a y b son reales, y el endomorfismo T en el espacio de las matrices cuadradas reales de orden dos, definido para toda matriz X por $T(X) = AXB$

- Determinéuse la matriz de T respecto de la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, el determinante de dicha matriz y los valores de a y b que lo anulan. Caléñlese la dimensión de $\text{Ker } T$ en función de los valores de a y b .
- Hállese las matrices X , soluciones de la ecuación $AXB = AB$, en función de los valores de a y b .

Solución:

- Para calcular la matriz del endomorfismo, procedemos a calcular las imágenes de los elementos

2002. 26

Álgebra II

Septiembre de 2001

Ejercicio 1 (2,5 puntos). Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ a & 2 & 0 \\ bi & 0 & b+2 \end{bmatrix}.$$

- Determinar los parámetros reales a y b para los cuales A es diagonalizable, y en tal caso construir una base de vectores propios de A .
- Estudiar para cuáles de esos valores A es diagonalizable unitariamente, y en tal caso hallar una base de vectores propios de $A^h A$.

Solución:

- El polinomio característico de A es $(\lambda - 2)^2(\lambda - b - 1)$ por lo que A tiene un valor propio triple e igual a 2 si $b = 1$ y un valor propio doble y uno simple si $b \neq 1$. En el primer caso A no es diagonalizable para ningún valor de a , ya que $A - 2I$ no es la matriz nula y por ello la dimensión del subespacio característico asociado a 2 es inferior a 3. En el segundo caso, si 2 es valor propio doble, A es diagonalizable si su subespacio característico es de dimensión 2 o, equivalentemente, el rango de $A - 2I$ tiene que ser 1, pero

$$\text{r} \begin{bmatrix} -1 & 0 & i \\ a & 0 & 0 \\ bi & 0 & b \end{bmatrix} = \begin{cases} 2, & a \neq 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}.$$

se concluye que A es diagonalizable si, y solo si, $a = 0$, $b \neq 1$. En este caso, el subespacio de vectores propios asociado a 2 es el plano $x_1 = ix_3$ del cual tomamos dos vectores independientes, por ejemplo $v_1 = (1, 0, -i)^t$, $v_2 = (0, 1, 0)^t$. Los vectores propios asociados a $b + 1$ son las soluciones no nulas de

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & i \\ 0 & 1-b & 0 \\ bi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

como b no es 1, $x_2 = 0$ y $bx_1 = ix_3$. Tomemos el vector $v_3 = (1, 0, -ib)^t$, (cualquier múltiplo no nulo es también válido); entonces (v_1, v_2, v_3) es una base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de A .

- Una condición necesaria y suficiente para que una matriz diagonalizable lo sea unitariamente es que sus subespacios característicos sean ortogonales; en nuestro caso basta imponer que el vector v_3 sea perpendicular a v_1 y v_2 :

$$v_3^h v_1 = (1, 0, -ib) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 1 + b = 0, \quad v_3^h v_2 = (1, 0, -ib) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Observamos que la condición necesaria y suficiente es que $b = -1$. Si A es diagonalizable unitariamente, sus vectores propios lo son también de $A^h A$ luego podemos escoger como base de vectores propios de $A^h A$ la calculada anteriormente, (v_1, v_2, v_3) con el parámetro $b = -1$.

Álgebra Lineal (Plan 76)	Septiembre de 2001	Primer Cuatrimestre
--------------------------	--------------------	---------------------

Ejercicio 1 (2,5 puntos)

1.1 En el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 se considera el endomorfismo p que a cada polinomio p asocia el polinomio

$$p(x+1) + p(x-1) + \alpha p'(x).$$

Determinar la matriz del endomorfismo respecto a la base natural de dicho espacio y estudiar para qué valores de α es invertible.

1.2 Estudiar si la ecuación funcional

$$q(x+1) + q(x-1) + xq'(x) = 1 + 2x + 3x^2$$

tiene solución, y en tal caso, resolverla.

Solución:

1.1 Los transformados de los vectores de la base canónica $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ resultan ser polinomios $2, (2+\alpha)x, (2+2\alpha)x^2 + 2, (2+3\alpha)x^3 + 6x$, así que la matriz del endomorfismo calcula fácilmente por columnas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2+\alpha & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2+2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+3\alpha \end{bmatrix}$$

Obviamente, deja de ser invertible cuando α anula algún elemento de la diagonal principal, así que es invertible si y sólo si $\alpha \notin \{-2, -1, -\frac{2}{3}\}$.

1.2 Se trata de estudiar si el polinomio $1 + 2x + 3x^2$ posee antíimagen según el endomorfismo anterior, cuando $\alpha = 1$. Para este valor de α se sabe que el endomorfismo es invertible, luego todo polinomio de grado menor o igual que 3 tiene una única antíimagen. De esto se deduce que el polinomio solución q existe y es único. Si se expresa $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, trabajando con los vectores de coordenadas respecto a B , se plantea el sistema (para $\alpha = 1$)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de donde inmediatamente $a_3 = 0$, $a_2 = 3/4$, $a_1 = 2/3$, $a_0 = -1/4$. Por tanto, la única solución es

$$q(x) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x^2.$$

- 2.1 En el espacio vectorial de las funciones reales continuas encuentre una base del subespacio vectorial V generado por el conjunto $\{1, \cos t, \sin t\}$.
- 2.2 Sea $f: V \rightarrow W$ la aplicación lineal definida por $f(1) = \cos t$, $f(\cos t) = \sin t$, $f(\sin t) = \cos t$. Pruebe que f es un endomorfismo y calcule su matriz respecto de la base hallada en el apartado anterior.

Ejercicio 2:

Álgebra I

Septiembre de 2001

INGENIERÍA INDUSTRIAL
EXAMEN DE ÁLGEBRA LINEAL I

31 de Enero de 2001

PROBLEMA 1. (2.25 puntos)

Analizar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, demostrando aquellas que sean ciertas y buscando un contraejemplo para las que sean falsas

1. Sean U_1, U_2 y U_3 tres subespacios vectoriales de un espacio vectorial E tales que $U_i \cap U_j = \{0\}$ si $i \neq j$. Entonces la suma $U_1 + U_2 + U_3$ es directa.
2. Sean F_1 y F_2 dos subespacios afines de $\mathbb{R}^3$, tales que $F_1 = a_1 + S$, $F_2 = a_2 + S$, $\dim(S) \neq 0$. Si $F_1 = F_2$ entonces $a_1 = a_2$.
3. Sea una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $m < n$. f no puede ser inyectiva.
4. Sea $f : E \rightarrow E$ una aplicación lineal tal que $f \circ f = -I$, siendo I la aplicación lineal identidad. f es necesariamente un isomorfismo (es decir, aplicación lineal biyectiva) y la dimensión de E ha de ser par.
5. Si A y B son matrices asociadas a un mismo endomorfismo respecto a distintas bases entonces A y B tienen los mismos valores propios.

PROBLEMA 2. (2.25 puntos)

Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{(2,2)}$ (conjunto de las matrices reales 2×2):

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{(2,2)} / A = \begin{pmatrix} 2a & a \\ b & a \end{pmatrix} \right\}; \quad \mathcal{A}_2 = \{ A \in \mathbb{R}^{(2,2)} / A = A^t \}$$

siendo A^t la traspuesta de A .

1. Demostrar que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{(2,2)}$.
2. Encontrar una base de $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ y otra de $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$
3. Obtener un subespacio vectorial B tal que $\mathbb{R}^{(2,2)} = \mathcal{A}_1 \oplus B$
4. Sea la aplicación $T : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{(2,2)}$ tal que

$$T \left[\begin{pmatrix} 2a & a \\ b & a \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & a-b \\ b-a & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Demostrar que T es lineal
- (b) Obtener $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$
- (c) Hallar la matriz asociada a T respecto de una base de $\mathcal{A}_1$ y la base canónica de $\mathbb{R}^{(2,2)}$.

(Continúa detrás)

Álgebra I	Junio de 2001							
Nombre:	Número de Matrícula <table border="1"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							NOTA
1º Apellido:								
2º Apellido:								

Ejercicio 2 (2,5 puntos): Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en el espacio de las funciones reales continuas que transforma el vector (x_1, x_2, x_3) en la función $x_1 \cos 2t + x_2 \sin^2 t + x_3$.

2.1 Calcúlense bases del núcleo y de la imagen de f .

2.2 Constrúyase una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$ contraimagen del subespacio de las funciones constantes.

Álgebra I. Ejercicio 2.

Álgebra Lineal	Septiembre de 2000	Primer Cuatrimestre
----------------	--------------------	---------------------

Ejercicio 1 (2,5 puntos).

En el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 3, se considera la base $B = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ y el endomorfismo f cuya matriz respecto de B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Calcular bases del núcleo y la imagen de f .
2. Decidir razonadamente si el núcleo y la imagen de f son subespacios suplementarios.

Solución:

1. En primer lugar, calcularemos el núcleo y la imagen de la matriz A del enunciado. El núcleo de A viene dado por las soluciones del sistema lineal homogéneo asociado. Realizando operaciones elementales entre filas de la matriz ($F_2 + F_1$ y $F_3 - 4F_1 - F_2$, por ejemplo), se obtienen como soluciones los vectores proporcionales a $(-3, 2, 1, 0)^t$, luego este vector constituye una base del núcleo de A .

Por otro lado, una base de la imagen de A viene dada por sus columnas linealmente indepen-

JUNIO 2000

Algebra Lineal

Segundo Cuatrimestre

Problema

Este problema trata de la convergencia del método iterativo de Jacobi para un sistema cuya matriz de coeficientes sea definida positiva. Para cada par de números reales a y b se considera la matriz cuadrada de orden n

$$S(a,b) := \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}$$

y se pide:

- Calcular los valores propios de la matriz $S(1,1)$.
- Utilizando el resultado del apartado anterior, hallar los valores propios de la matriz $S(a,b)$. (Indicación: representarla como una combinación lineal de $S(1,1)$ y la matriz identidad).
- Hallar los valores de los parámetros a y b que la matriz $S(a,b)$ sea definida positiva.
- Idem para los valores que hacen convergente el método iterativo de Jacobi cuando se aplica a un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes sea $S(a,b)$.
- Sea A una matriz definida positiva y D la matriz diagonal determinada por la diagonal principal de A . Demostrar que el método de Jacobi para un sistema de matriz A converge si y sólo si una cierta combinación lineal de A y D es una matriz definida positiva. Mediante el resultado obtenido, reproducir las condiciones establecidas en el apartado anterior.

Solución:

- a) La matriz $S(1,1)$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

y tiene claramente rango unidad. Esto significa que el 0 es un valor propio de multiplicidad $n - 1$. Por otra parte el producto de esta matriz por un vector de unos reproduce este vector multiplicado por n . Se aprecia así que n es un valor propio, necesariamente simple, de la matriz.

Álgebra Lineal	Junio de 2000	Primer Cuatrimestre
----------------	---------------	---------------------

Ejercicio 2 (2,5 puntos): Sea J la matriz con todos los elementos iguales a 1, y sea I la matriz identidad de igual orden.

- Determinar los valores de a para los cuales $J + aI$ es invertible, y probar que para dichos valores su inversa es de la forma $cJ + dI$.
- Si ω es una raíz n -ésima de 1 distinta de 1, resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 1+\omega & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\omega & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\omega & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix},$$

escribiendo sus soluciones como expresiones polinómicas de ω .

Se entregará esta hoja y, a lo sumo, una adicional.

Solución:

1.

INGENIERÍA INDUSTRIAL
EXAMEN DE ÁLGEBRA LINEAL I

14 de Septiembre de 2000

PROBLEMA 1. (2.25 Puntos)

Sean W_1 y W_2 subconjuntos de $\mathbb{R}^{(2,2)}$ definidos de la forma

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} : x = z, y = t \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se pide:

- (a) Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de $\mathbb{R}^{(2,2)}$. Calcular una base de cada uno de dichos subespacios.
- (b) Calcular bases de $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$. Hallar sus respectivas dimensiones.
- (c) Calcular un subespacio suplementario de W_2 .
- (d) Comprobar que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

puede escribirse como $A = M_1 + M_2$ con $M_1 \in W_1$ y $M_2 \in W_2$.

PROBLEMA 2. (2.25 Puntos)

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$

- (a) ¿Cuáles de los conjuntos $\text{Col}(A)$ (subespacio columna), $\text{Fila}(A)$ (subespacio fila), $\text{Ker}(A)$ y $\text{Ker}(A^T)$ son subespacios de $\mathbb{R}^m$? ¿Cuáles lo son de $\mathbb{R}^n$?

[NOTA: Se definen $\text{Col}(A)$ y $\text{Fila}(A)$ como las envolventes lineales de (o subespacios generados por) las columnas y las filas de la matriz A , respectivamente.]

- (b) Demostrar las igualdades siguientes:

$$\dim \text{Fila}(A) + \dim \text{Ker}(A) = n$$

$$\dim \text{Col}(A) + \dim \text{Ker}(A^T) = m$$

- (c) Usar los apartados anteriores para demostrar que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ es compatible para todo vector $b \in \mathbb{R}^m$ si y sólo si el sistema $A^T x = 0$ tiene únicamente la solución trivial.

- (d) Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \Pi_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \Pi_2(\mathbb{R}) \\ p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 &\longrightarrow f[p(x)] = \alpha a_0(1+x)^2 + \beta a_1(1+x) + \gamma a_2 \end{aligned}$$

donde α, β, γ son ciertas constantes reales no nulas. Utilizar el apartado (c) para demostrar que f es sobreyectiva.

(Continúa detrás)

PROBLEMA 3. (2.25 Puntos)

(a) De un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se sabe que el núcleo de $f - id$ es el subespacio generado por los vectores $(1, 1, 0)^T$ y $(1, 0, 1)^T$, donde id es el endomorfismo identidad. Además, se sabe que la imagen del vector $(0, 2, 1)^T$ es el vector $(1, 1, 0)^T$.

- (1) ¿Es singular el endomorfismo f ?
- (2) Hallar los autovalores y autovectores de f .
- (3) Dado un vector cualquiera $x_0 \in \mathbb{R}^3$, se define la sucesión $x_{k+1} = f(x_k)$. Describir el comportamiento de la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

(b) Dada la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

se considera el endomorfismo $T : \mathbb{R}^{(2,2)} \rightarrow \mathbb{R}^{(2,2)}$ que a cada matriz $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ le hace corresponder $T(A) = AB - BA$.

- (1) Calcular la matriz de T con respecto a la base canónica

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de $\mathbb{R}^{(2,2)}$.

- (2) Hallar los autovalores y los autovectores de T

PROBLEMA 4. (2.25 Puntos)

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

se pide:

- (a) Hallar sus matrices componentes
- (b) Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{X}(t) = A X(t) + f(t), \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (c) Encontrar la solución particular del sistema anterior que cumple la condición inicial

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

INGENIERÍA INDUSTRIAL
EXAMEN DE ÁLGEBRA LINEAL I

9 de Febrero de 2000

PROBLEMA 1. (2.25 Puntos)

Se considera el espacio vectorial

$$\Pi_3 = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, 2, 3\}$$

- (a) Determinar (de forma razonada) cuáles de los siguientes subconjuntos de Π_3 son subespacios vectoriales:

$$P_1 = \{p(x) \in \Pi_3 : p(0) + p(1) = 1\}$$

$$P_2 = \{p(x) \in \Pi_3 : p(0) = p(1)\}$$

$$P_3 = \{p(x) \in \Pi_3 : p'(x) = p(x)\}.$$

[NOTA: $p'(x)$ denota la derivada de $p(x)$.]

- (b) Dados los subespacios vectoriales

$$V_1 = \left\{ p(x) \in \Pi_3 : \int_{-1}^1 p(x) dx = 0 \right\},$$

$$V_2 = \{p(x) \in \Pi_3 : p(-1) = 0\}$$

de Π_3 , se pide:

- Hallar una base de cada uno de los dos subespacios.
- Hallar una base de la intersección $V_1 \cap V_2$.
- Hallar la suma $V_1 + V_2$. ¿Es una suma directa?

PROBLEMA 2. (2.25 Puntos)

Sea $T : \mathbb{R}^{(2,2)} \rightarrow \mathbb{R}^{(2,2)}$ la aplicación definida por

$$T(A) = A + A^T,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ y A^T denota la traspuesta de A . Se pide:

- Demostrar que T es lineal.
- Si $B \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ es tal que $B = B^T$, determinar las matrices $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ tales que $T(A) = B$.
- Calcular la matriz de T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^{(2,2)}$.
- Hallar una base de cada uno de los subespacios $\text{im } T$ y $\text{Ker } T$.
- Encontrar una aplicación lineal $U : \mathbb{R}^{(2,2)} \rightarrow \mathbb{R}^{(2,2)}$ tal que

$$\text{Ker } U = \{A \in \mathbb{R}^{(2,2)} : T(A) = 2A\}.$$

(Continúa detrás)

Algebra Lineal		Septiembre 1999	2° Cuatrimestre
Nombre:			NOTA
1er Apellido:			
2° Apellido:			
		Número de Matrícula	

• Ejercicio 1 (2,5 puntos). Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

Calcúlense los valores propios de B y su polinomio mínimo.

Se entregará esta hoja y, a lo sumo, una adicional.

Álgebra Lineal	Febrero 1999	1 ^{er} Cuat. PROBLEMA
Nombre:	Número de	NOTA
1 ^{er} Apellido:	Matrícula	
2 ^o Apellido:		

(5 puntos) Dados dos números reales a y b , para cada $n = 2, 3, \dots$ se considera el polinomio real

$$p_n(x) := \det \begin{bmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ b & x & a & \dots & a & a \\ b & b & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & b & x \end{bmatrix}$$

siendo n el orden de la matriz empleada en la definición. Se pide:

- (1) Calcular los polinomios $p_2(x)$, $p_3(x)$ y $p_4(x)$. Determinar razonadamente el grado de cada polinomio $p_n(x)$.
- (2) Mediante operaciones elementales deducir la relación existente entre los polinomios $p_n(x)$ y $p_{n+1}(x)$.
- (3) Supóngase $a \neq b$. Deducir de la relación obtenida en el apartado anterior la expresión del polinomio $p_n(x)$. (Indicación: una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante). ¿Cómo se podría deducir a partir de esta última expresión de $p_n(x)$ la correspondiente al caso $a = b$?
- (4) Hallar la expresión de los ceros del polinomio $p_n(x)$ cuando $a = 1$ y $b = -1$.

Algebra Lineal	Febrero de 1998	Primer Cuatrimestre							
Nombre : 1 ^{er} Apellido: 2 ^o Apellido:	Número de Matricula <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								NOTA

Problema.

Este problema presenta la solución de una ecuación cúbica mediante la reducción a un problema discreto de momentos.

- 1) Comprobar que cualquier sucesión de números complejos de la forma

$$x_n = \lambda 2^n + \mu 3^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

es recurrente de segundo orden, determinando explícitamente los coeficientes de la recurrencia.

- 2) Una sucesión recurrente de segundo orden comienza del modo siguiente:

$$2, 3, 3, -3, \dots$$

Determinar la expresión del término general de la sucesión.

- 3) Determinar los ceros del polinomio $9x^3 - 78x^2 + 228x - 224$ expresándolo previamente como combinación lineal de dos polinomios de la forma $(x - c)^3$, con $c \in \mathbb{C}$.
- 4) Analizar la posibilidad de ampliar el método del apartado anterior a la resolución de una ecuación cúbica de coeficientes complejos arbitrarios.

Solución:

Algebra Lineal	Febrero de 1997	Primer Cuatrimestre						
Nombre :	Número de Matrícula <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>							NOTA
1 ^{er} Apellido:								
2 ^o Apellido:								

Problema.

Un polinomio trigonométrico de grado n es una función de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_n^2 + b_n^2 \neq 0$$

Este ejercicio estudia la determinación, es decir la existencia y unicidad de solución, del problema de interpolación con polinomios trigonométricos.

a) Determinar el polinomio trigonométrico de grado 1 que cumple

$$f(0) = 8, \quad f(\pi/2) = 10, \quad f(\pi) = -2.$$

b) Dados tres números reales a , b y c se consideran los determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos b & \sin b \\ 1 & \cos c & \sin c \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \bar{\alpha} \\ 1 & \beta & \bar{\beta} \\ 1 & \gamma & \bar{\gamma} \end{vmatrix}$$

en el segundo de los cuales se supone que

$$\alpha = \cos a + i \sin a, \quad \beta = \cos b + i \sin b, \quad \gamma = \cos c + i \sin c.$$

Expresar el valor de Δ' en términos de Δ . $\Delta' = -i \Delta$

- c) Relacionar Δ' con un determinante de Vandermonde. Enunciar con sencillez, en términos de α , β y γ , unas condiciones necesarias y suficientes para que $\Delta \neq 0$.
- d) Supongáanse dados los pares (x_k, y_k) , con $k = 0, 1, \dots, 2n$, de números reales en los cuales se supone que los x_k son distintos dos a dos y están situados en el intervalo $[0, 2\pi)$. Estudiar la existencia y unicidad de un polinomio trigonométrico $f(x)$ de grado menor o igual a n que cumpla

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

Solución:

Nombre:

No. Matrícula:

Álgebra Lineal. Curso 1993-94. Primer cuatrimestre.**Ejercicio 2. 11 de febrero de 1994.**

El presente ejercicio consta de dos opciones (un problema y una pregunta de teoría) de las cuales ha de elegirse solamente una.

Problema.— Sean a, b, c, d, e cinco números complejos, distintos dos a dos. Se pide calcular razonadamente la incógnita v en función de a, b, c, d, e , en el sistema algebraico lineal, de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, que sigue:

$$\begin{aligned}u + av + a^2w + a^3x + a^4y &= a^5 \\u + bv + b^2w + b^3x + b^4y &= b^5 \\u + cv + c^2w + c^3x + c^4y &= c^5 \\u + dv + d^2w + d^3x + d^4y &= d^5 \\u + ev + e^2w + e^3x + e^4y &= e^5\end{aligned}$$

Nota.— La no obtención correcta del resultado reduce mucho la calificación, sobre todo si el método elegido es puramente mecánico. Se sugiere considerar las relaciones de Cardano-Vieta, en forma conveniente.

Proposición 8 de los Teoremas de caracterización (p.284)

Teoría.— Sea A una matriz compleja de orden n , ($n \geq 2$). Supóngase que el número complejo α es raíz del polinomio característico de A de multiplicidad σ , (≥ 1). Sea M el subespacio característico de A asociado a α . Se pide:

Enunciar y demostrar la relación que existe entre σ y la dimensión de M .

Nota.— Se recogerá esta hoja de enunciado y sólo tres más. Las disquisiciones vacías, tendentes a ocultar la falta de conocimientos, se valorarán de forma muy negativa.

Opción elegida $\left\{ \begin{array}{l} \text{Problema} \\ \text{Teoría} \end{array} \right.$

En caso de tener aprobado el segundo cuatrimestre, indíquese en qué convocatoria:

Junio 93

Septiembre 93

INGENIERÍA INDUSTRIAL.

CONTROL DE ÁLGEBRA 1. 17-Diciembre-1993.

PROBLEMA 1.

Sean E, F subespacios vectoriales de C^3 :

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in C^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$
$$F = \langle (1, 0, i), (1, 0, 1) \rangle \equiv L[(1, 0, i), (1, 0, 1)]$$

1. Hallar $E \cap F$. (0.75 puntos)
2. Hallar $E + F$. (0.75 puntos)
3. ¿Es $E + F$ una suma directa? (0.25 puntos)
4. Supongamos que H es un espacio vectorial tal que: $\dim H < \infty$. Sean H_1, H_2 subespacios vectoriales de E que cumplen:

$$\dim H_1 + \dim H_2 > \dim H$$

Demostrar que $\exists x \neq 0, x \in H_1 \cap H_2$. (0.75 puntos)

PROBLEMA 2.

Sea T una aplicación lineal entre $\Pi_2(x)$ (polinomios de grado menor o igual que dos) y $\mathcal{R}^3$ definida por:

$$T(2 + x - 3x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(1 - x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(5 - 2x - 7x^2) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in \mathcal{R}$

1. Calcular la matriz de la aplicación especificando en qué bases. (0.75 puntos)
2. Hallar una condición necesaria y suficiente en términos de a y b para que T sea inyectiva. (1.0 punto)
3. En este caso ¿cuánto vale la dimensión de $\text{Im}(T)$? (0.25 puntos)
4. Una aplicación cualquiera entre $\Pi_2(x)$ y $\mathcal{R}^2$ ¿puede ser inyectiva? (contestar brevemente y razonar la respuesta). (0.5 puntos)

EXAMENES

ALGEBRA I

Álgebra I

Febrero de 2004

Ejercicio 1 (3 puntos):

Consideramos la matriz cuadrada de orden 30 con coeficientes complejos

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

- 1) Calcular el determinante de B .
- 2) Escribir el conjunto S de los valores de a para los que B es singular.
- 3) Calcular la suma de aquellos elementos de S cuya parte imaginaria es positiva o nula.

*(Se entregará esta hoja y, a lo sumo, una adicional)***Solución:**

- 1) Desarrollando el determinante por la primera columna y empleando que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal obtenemos:

$$|B| = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{30+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \end{vmatrix} = a^{30} - 1$$

Valor del apartado: (1 punto). Sólo se ha valorado el cálculo del determinante si aparece explicado y razonado debidamente. En caso de utilizar argumentos de recurrencia, se debe aplicar el principio de inducción rigurosamente y no de modo heurístico.

- 2) Los valores de a que hacen B singular son los que anulan su determinante, es decir, las raíces trigésimas de la unidad. De este modo:

$$S = \left\{ e^{\frac{k\pi}{15}i}, k = 0, 1, \dots, 29 \right\}$$

Valor del apartado: (1 punto).

- 3) Teniendo en cuenta que $e^{\frac{k\pi}{15}i} = \cos\left(\frac{k\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{15}\right)$, la parte imaginaria es positiva o nula si $0 \leq k \leq 15$. Por tanto, los elementos de S cuya parte imaginaria es positiva o nula son

$$\left\{ 1, e^{\frac{\pi}{15}i}, e^{\frac{2\pi}{15}i}, \dots, e^{\pi i} \right\},$$

que constituyen una progresión geométrica de razón $e^{\frac{\pi}{15}i}$ cuya suma es

$$\frac{(e^{\frac{\pi}{15}i})^{16} - 1}{e^{\frac{\pi}{15}i} - 1} = \frac{e^{\frac{8\pi}{15}i}}{e^{\frac{\pi}{30}i}} \cdot \frac{e^{\frac{8\pi}{15}i} - e^{\frac{-8\pi}{15}i}}{e^{\frac{\pi}{30}i} - e^{\frac{-\pi}{30}i}} = i \frac{\sin \frac{8\pi}{15}}{\sin \frac{\pi}{30}}$$

Valor del apartado: (1 punto)

Álgebra I

Febrero de 2004

*Ejercicio 2 (3 puntos):*Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que cumple que:

$$\begin{aligned}f(1, \alpha, 2) &= (1, 0, \alpha); \\f(1, 2, 1) &= (\alpha, 1, 0); \\f(0, 1, -1) &= (1, \alpha, 0).\end{aligned}$$

1. Determinar la condición que debe satisfacer α para que f quede completamente definido por las tres ecuaciones anteriores.
2. Calcular el valor de α para que, además de la condición anterior, se satisfagan simultáneamente las dos condiciones siguientes:
 - $(0, -1, 1) \in \text{Im } f$.
 - f no es biyectiva.
3. Para el valor de α obtenido, calcular una base del núcleo y otra de la imagen de f .

*(Se entregará esta hoja y, a lo sumo, una adicional)***Solución:**

1. Una aplicación lineal queda completamente determinada por las imágenes de los vectores de una base del espacio inicial; debemos, pues, estudiar para qué valores de α los tres vectores $(1, \alpha, 2), (1, 2, 1), (0, 1, -1)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^3$, lo cual equivale a su independencia lineal. Podemos hacerlo, por ejemplo, calculando el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \alpha - 1,$$

que será distinto de cero si y solo si $\alpha \neq 1$. Estos son los valores que satisfacen la condición pedida.

Observación.- Si $\alpha = 1$, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}f(1, 1, 2) &= (1, 0, 1); \\f(1, 2, 1) &= (1, 1, 0); \\f(0, 1, -1) &= (1, 1, 0).\end{aligned}$$

Si restamos la primera de la segunda y utilizamos la linealidad, obtenemos que $f(0, 1, -1) = (0, 1, -1)$, lo cual es contradictorio con la tercera igualdad. Así pues, no existe ninguna aplicación lineal f que satisfaga esas tres ecuaciones para $\alpha = 1$.

2. Conocemos las imágenes mediante f de los vectores de una base; dichas imágenes, que constituyen un sistema generador de $\text{Im } f$, serán linealmente independientes si y sólo si f es inyectiva. La no inyectividad de f equivale, pues, a la anulación del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1),$$

que se anula para los valores $0, 1, -1$. El caso $\alpha = 1$ lo tenemos excluido por el apartado anterior, pues hace que f no esté definida. Para los dos valores restantes, tenemos dos vectores linealmente independientes, digamos $(1, 0, \alpha)$ y $(\alpha, 1, 0)$, que generan $\text{Im } f$. Impongamos ahora la condición de que $(0, -1, 1)$ pertenezca a dicho subespacio:

- Si $\alpha = 0$, $\text{Im } f = \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, luego el vector $(0, -1, 1)$ no puede pertenecer a ella por no tener nula su tercera componente.
- Si $\alpha = -1$, $\text{Im } f = \mathcal{L}\{(1, 0, -1), (-1, 1, 0)\}$, y el vector $(0, -1, 1)$ sí es combinación lineal de los dos anteriores, pues es sencillamente el opuesto de su suma. También puede comprobarse, por ejemplo, observando que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

El único valor que satisface las condiciones es, por tanto, $\alpha = -1$.

Observación.- Llamemos $\mathcal{B}$ a la base considerada en el primer apartado, para $\alpha \neq 1$. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cuyas columnas son las imágenes de los vectores de $\mathcal{B}$, es la matriz de f respecto a dicha base $\mathcal{B}$ en el espacio inicial, y respecto a la base canónica en el espacio final. **No es la matriz de f respecto a una única base**, luego no es la matriz del endomorfismo f en el sentido habitual.

3. Para $\alpha = -1$, ya hemos visto que una base de la imagen es $((1, 0, -1), (-1, 1, 0))$. En cuanto al núcleo, y puesto que

$$\dim(\ker f) = 3 - \dim(\text{Im } f) = 1,$$

basta con que encontremos un vector no nulo cuya imagen sea $\mathbf{0}$. Como $f(1, 2, 1) = (-1, 1, 0)$ y $f(0, 1, -1) = (1, -1, 0)$, basta sumar dichas igualdades para obtener que

$$f(1, 3, 0) = (0, 0, 0),$$

siendo una base de $\ker f$ la constituida por el vector $(1, 3, 0)$.

Criterio de calificación: Cada apartado vale 1 punto. Los **disparates** penalizan severamente la **calificación global del ejercicio**.

1. Si se calcula el determinante, o se hace algo equivalente, **sin razonar** la relación con la condición pedida, la calificación se reduce a la mitad. Ídem si se plantea bien, pero se yerra en el cálculo.
2. Si se trabaja con la matriz mencionada en la observación del apdo. 2 como si fuera la matriz de f , la calificación es como máximo 0'8.
3. 0'5 por el núcleo y 0'5 por la imagen. Si se trabaja con un valor erróneo de α , la calificación se reduce a 0'3 cada subespacio.

Problema (4 puntos):

Dada la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se define el endomorfismo f de $\mathbb{C}^{n \times n}$, tal que para toda matriz $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $f(X) = AX$.

1. Para el caso particular $n = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, determínese la matriz M de f respecto de la base

$$\left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Estúdiase si la matriz M es diagonalizable.

A partir del siguiente apartado se considerará el caso general, indicado al comienzo del enunciado.

2. Dada la base de $\mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{1n}, E_{2n}, \dots, E_{nn})$, donde E_{jk} ($j, k = 1, 2, \dots, n$) es la matriz cuyos elementos son todos nulos salvo el de la fila j columna k que vale la unidad, calcúlese la matriz M de f respecto de dicha base.
3. Establézcase la relación que existe entre los polinomios característicos de las matrices M y A .
4. Estúdiase si es cierta la siguiente proposición: "El endomorfismo f es diagonalizable si y sólo si la matriz A es diagonalizable". (Nota: un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita es diagonalizable si y sólo si lo es su matriz respecto de cualquier base de dicho espacio vectorial).

Solución:

1. Se calculan las imágenes de los vectores de la base ($E_{11}, E_{11}, E_{11}, E_{11}$) :

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de f , respecto de dicha base es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos)

Los valores propios de la matriz A son -1 y 4 . Por tanto, al ser sus multiplicidades iguales a uno, A es diagonalizable. M es una matriz diagonal por bloques, que son matrices cuadradas de orden dos, por lo que es diagonalizable, al serlo A (véase apartado 4.).

(0,5 puntos)

2) En el caso general, se tiene:

$$f(E_{jk}) = AE_{jk} = (A_1 | \dots | A_{j-1} | A_j | A_{j+1} | \dots | A_n) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (O | \dots | O | \tilde{A}_j^k | O | \dots | O),$$

($j, k = 1, 2, \dots, n$)

Por tanto, $M = \text{diag}(A, A, \dots, A)$.

(1 punto)

3) El polinomio característico de M es

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_{n^2} - M) = \det(\lambda I_{n^2} - \text{diag}(A, \dots, A)) = \det(\text{diag}(\lambda I_n - A, \dots, \lambda I_n - A)) = (\chi_A(\lambda))^n$$

donde $\chi_A(\lambda)$ es el polinomio característico de A .

(1 punto)

4) M es diagonalizable si y sólo si A lo es. En efecto, una matriz diagonal por bloques, cuyos bloques son matrices cuadradas, es diagonalizable si y sólo si lo son los bloques diagonales.

Es fácil efectuar la demostración de la anterior afirmación para el caso del presente problema. Se denota p_λ la multiplicidad de cada valor propio λ de A . La dimensión del subespacio propio de A asociado a λ es igual a $n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$. Se tiene:

$$A \text{ diagonalizable} \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ valor propio de } A, n - \text{rango}(\lambda I_n - A) = p_\lambda$$

Del apartado 3. se deduce que dicho valor propio λ es valor propio de M de multiplicidad $n p_\lambda$. Como $\text{rango}(\lambda I_{n^2} - M) = n \text{ rango}(\lambda I_n - A)$, se tiene, sabiendo que la dimensión del subespacio propio de M , asociado a λ , es igual a $n^2 - \text{rango}(\lambda I_{n^2} - M)$, que

$$n^2 - \text{rango}(\lambda I_{n^2} - M) = n^2 - n \cdot \text{rango}(\lambda I_n - A) = n(n - \text{rango}(\lambda I_n - A))$$

Por tanto,

$$A \text{ diagonalizable} \Leftrightarrow M \text{ diagonalizable}$$

Finalmente

$$A \text{ diagonalizable} \Leftrightarrow M \text{ diagonalizable} \Leftrightarrow f \text{ diagonalizable}$$

(1 punto)

Ejercicio 1 (3 puntos).

1.1 Sean E, F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo y $f : E \rightarrow F$ un homomorfismo. Sea M un subespacio de F , defínase su contraimagen $f^{-1}(M)$.

1.2 Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1.2.1 Calcular una base del núcleo de f .

1.2.2 Sea M el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Calcular una base de $f^{-1}(M)$.

Solución:

1.- La imagen recíproca o contraimagen de un subespacio M del espacio final F se define como $f^{-1}(M) = \{u \in E, f(u) \in M\}$ y resulta ser un subespacio del espacio inicial E .

2.1 Para calcular una base del núcleo resolvemos por el método de Gauss el sistema $f(x) = 0$,

$$\begin{array}{cccc|cl} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & 1 & F_2 - F_1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 & F_3 - F_1 & \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Vemos que el rango de la matriz es dos –la dimensión de la imagen–. Al ser el espacio inicial de dimensión 4, el núcleo es de dimensión dos; dos vectores linealmente independientes que satisfacen

las ecuaciones del núcleo son, por ejemplo, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; valen también dos vectores

cualesquiera linealmente independientes y combinación lineal de v_1, v_2 . Tomamos como base $\mathcal{B}_{\ker f} = (v_1, v_2)$.

2.2 Llamemos e_j a los vectores canónicos de $\mathbb{R}^4$, las columnas de la matriz son los transformados de tales vectores; es inmediato comprobar que

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(e_2) + f(e_3) = f(e_2 + e_3).$$

Por otro lado, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ no pertenece a la imagen de f , podemos comprobarlo viendo que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

es decir, es independiente con los vectores de una base de la imagen de f . Se tiene entonces, $f^{-1}(M) = \{u \in E, f(u) \in L[w]\}$, o lo que es lo mismo,

$$f(u) = \lambda w = \lambda f(e_2 + e_3) \iff u - \lambda(e_2 + e_3) \in \ker f, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

se concluye que $u - \lambda(e_2 + e_3) = z$ para λ un escalar arbitrario y z un vector cualquiera del núcleo f , puede tomarse como base solicitada

$$\mathcal{B}_{f^{-1}(M)} = (e_2 + e_3, v_1, v_2).$$

Este apartado puede resolverse también como sigue: se buscan los x de $f^{-1}(M)$; entonces $f(x)$ pertenece a M y, por lo tanto, es combinación lineal de los dos vectores que generan M , estudiemos la compatibilidad del sistema $f(x) = a(1, -3, -1)^t + b(3, 4, 5)^t$ por el método de Gauss:

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & a+3b & \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -3a+4b & \\ 3 & 4 & 1 & 1 & -a+5b & \end{array} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_2 \end{array} \begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & a+3b & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4a+b & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2a+b & \end{array} \begin{array}{l} F_3 - F_2 \\ \end{array} \begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & a+3b & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4a+b & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6a & \end{array}$$

El sistema es compatible si $a = 0$ y b cualquiera, entonces unas ecuaciones paramétricas del subespacio $f^{-1}(M)$ son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \beta - b \\ x_2 &= -\alpha - \beta + 2b \\ x_3 &= \alpha \\ x_4 &= \beta \end{aligned}$$

y de ellas extraemos la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Obsérvese que los dos primeros vec-

tores constituyen una base del núcleo de f , y el tercero es una solución particular de $f(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, esta base es *distinta* de la calculada previamente.

Ejercicio 2 (3 puntos).

Dados los vectores columna $u = (1, 2, 1, 2, 1, 2)^t$ y $v = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$, se considera la matriz

$$A = uv^t - v^t u I,$$

en donde I denota la matriz identidad de orden 6.

1. Encontrar una base del núcleo de A , y deducir el rango de dicha matriz.
2. Encontrar una base del subespacio definido por

$$\{x \in \mathbb{C}^6 : v^t x = 0\}.$$

Calcular las imágenes mediante A de los vectores de dicha base, y construir una base de $\text{Im } A$.

3. Razonar si A es o no diagonalizable. En caso afirmativo, construir una base de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores propios de A .

Nota: No es necesario el cálculo explícito de la matriz A , y se recomienda **no efectuar** dicho cálculo.

Solución:

1. Los vectores del núcleo de A son aquellos x que satisfacen que $(uv^t - v^t u I)x = \mathbf{0}$, lo que equivale a

$$(v^t x)u = (v^t u)x.$$

Como el segundo miembro es un vector proporcional a u , también ha de serlo el primero: $x = \alpha u$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$. Esto nos da que

$$v^t(\alpha u)u = (v^t u)\alpha u,$$

con lo que todos los vectores x de dicha forma son solución. El núcleo está formado, por tanto, por todos los vectores proporcionales a u , es decir,

$$\ker A = \mathcal{L}\{u\},$$

que es un subespacio de dimensión 1. Consecuentemente,

$$r(A) = \dim(\text{Im } A) = 6 - \dim(\ker A) = 5.$$

Otra forma: La matriz $A = uv^t - 9I$ es suma de la matriz uv^t de rango 1 y un múltiplo de la identidad. Los vectores del núcleo de A son los autovectores de uv^t asociados al autovalor $v^t u = 9$. Se sabe que una tal matriz de rango 1 tiene precisamente los autovalores 0 y $v^t u$, siendo $n - 1 = 5$ y 1, respectivamente, las dimensiones de los correspondientes subespacios propios, y u un vector que genera $\ker(uv^t - 9I)$ y, por lo tanto, el núcleo de nuestra matriz A .

2. Un subespacio de $\mathbb{C}^6$ definido por una única ecuación implícita tiene dimensión 5, luego basta que encontremos 5 vectores linealmente independientes que satisfagan dicha ecuación, por ejemplo:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, una posible base es $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

Si transformamos mediante A cualquier vector y del subespacio anterior ($v^t y = 0$), obtenemos

$$Ay = uv^t y - v^t u y = 0 - (v^t u)y = -9y,$$

es decir, que todo vector de dicho subespacio es vector propio de A asociado al autovalor $-v^t u = -9$. En particular, $Au_j = -9u_j$ para $j = 1, \dots, 5$, lo que permite concluir que nuestros $u_1, \dots, u_5$ son vectores de $\text{Im } A$; como sabemos que la dimensión de este subespacio es 5 y tenemos 5 vectores linealmente independientes, podemos concluir que la base anterior también lo es de $\text{Im } A$, es decir, $\text{Im } A$ coincide con el subespacio definido en el enunciado.

3. Recapitulando los resultados obtenidos en los apartados anteriores, tenemos:
- Un vector u no nulo de $\ker A$, es decir, un vector propio asociado al autovalor 0.
 - Cinco vectores $u_1, \dots, u_5$ linealmente independientes, autovectores de A asociados al autovalor -9 .

Por lo tanto, tenemos 6 autovectores linealmente independientes, es decir, una base de autovectores de A : $(u, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. Considerando la matriz $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ cuyas columnas son los vectores anteriores, tenemos que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(0, -9, -9, -9, -9, -9).$$

Problema (4 puntos).

1. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, F , generado por los vectores $(1, -1, 1)^t$ y $(0, 0, -1)^t$, y G , generado por $(1, 1, 1)^t$, compruébese que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Dada la matriz $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, tal que $Q^2 = Q$, demuéstrese que $u \in \text{Im } Q$ implica que $Qu = u$. Aplíquese a la determinación de Q cuando

$$\text{Im } Q = F; \quad \text{Ker } Q = G.$$

2. Sean M y N subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$, tales que $M \oplus N = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times r}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$, matrices cuyas columnas constituyen bases de M y N , respectivamente, demuéstrese que la matriz

$$[1] \quad P = (A|B) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} (A|B)^{-1}$$

—donde I_r es la matriz unidad de orden r y O denota la matriz nula de dimensiones adecuadas en cada caja— cumple que $P^2 = P$. Determinense $\text{Im } P$ y $\text{Ker } P$ en función de M y N . Estúdiese si toda matriz P de $\mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $P^2 = P$, puede escribirse de la forma [1].

3. Calcúlense los valores propios de la matriz P del apartado anterior, así como los subespacios propios asociados a dichos valores propios.

Solución:

1. Los vectores $(1, -1, 1)^t$, $(0, 0, -1)^t$ y $(1, 1, 1)^t$ son linealmente independientes, ya el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es igual a 3. Constituyen, por tanto, una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que $F + G = \mathbb{R}^3$ y $F \cap G = \{(0, 0, 0)^t\}$. Finalmente, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

La matriz $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ cumple $Q^2 = Q$. Si $u \in \text{Im } Q$, existe $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $Qx = u$, de donde se deduce

$$Qu = Q^2x = Qx = u$$

Se sabe que $\text{Im } Q = F$; $\text{Ker } Q = G$. Por el resultado anterior, se tiene

$$Q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y, además, $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, $Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; es decir,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Como $P = (A|B) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} (A|B)^{-1} = (A|B)$ es una matriz regular, ya que sus columnas constituyen una base de $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$P^2 = (A|B) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} (A|B)^{-1} (A|B) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} (A|B)^{-1} = (A|B) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} (A|B)^{-1} = P$$

Por otra parte,

$$P(A|B) = (PA|PB) = (A|B) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = (A|O); \text{ es decir, } PA = A, PB = O$$

Por tanto, $M = \text{Im } A \subset \text{Im } P$ y $N = \text{Im } B \subset \text{Ker } P$. Al ser $\text{rango}(P) = r = \text{rango}(A)$, se deduce que $\text{Im } P = \text{Im } A = M$. De modo similar, $\dim \text{Ker } P = n - r = \text{rango}(B)$, y se tiene que $\text{Ker } P = \text{Im } B = N$.

Si P de $\mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $P^2 = P$, se cumple que $\text{Im } P \oplus \text{Ker } P = \mathbb{R}^n$. En efecto, si $x \in \text{Im } P \cap \text{Ker } P$, se tiene $0 = Px = x$; de donde se deduce que $\text{Im } P \cap \text{Ker } P = \{0\}$. Por otra parte, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x = x - Px + Px$, donde $Px \in \text{Im } P$ y $x - Px \in \text{Ker } P$.

En el supuesto de que $P \neq I_n$ y $P \neq O$, tomando $A \in \mathbb{R}^{n \times r}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$, matrices cuyas columnas constituyan bases de $\text{Im } P$ y $\text{Ker } P$, respectivamente, se cumple que $(A|B)$ es una matriz regular, $PA = A$ y $PB = O$. por tanto,

$$P(A|B) = (A|O) = (A|B) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}; P = (A|B) \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} (A|B)^{-1}$$

En el caso de que $P = I_n$, se tendría $P = A = I_n$ y $I_n = I_n I_n I_n^{-1}$. En el caso de que $P = O$, se tendría $P = O$, $B = I_n$ y $O = I_n O I_n^{-1}$.

3. En el supuesto de que $P \neq I_n$ y $P \neq O$, sea $r = \text{rango}(P)$, entonces, por el apartado anterior, P es semejante a $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ y sus valores propios son la unidad de orden de multiplicidad r y cero de orden $n - r$.

Los subespacios propios son: $\text{Im } P$, asociado al valor propio unidad, y $\text{Ker } P$, asociado al valor propio nulo.

Cuando $P = I_n$, su valor propio de orden n es la unidad y el subespacio propio asociado es $\mathbb{R}^n$; y cuando $P = O$, su valor propio de orden n es el cero y el subespacio propio asociado es $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 1 (3 puntos): Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

1. Calcúlese el rango de A y obténganse unas ecuaciones cartesianas de su subespacio columna $\text{Im}(A)$.
2. Determínese el rango de AB y dedúzcase la relación entre $\text{Im}(A)$ e $\text{Im}(AB)$.
3. Hállese el valor de a para el cual el sistema $ABx = (1, a, -a, -1)^t$ es compatible. Para dicho valor de a , ¿es única la solución?

Se recogerá esta hoja y, a lo sumo, otra adicional.

Solución:

1. Como $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$, podemos responder ambas preguntas calculando directamente $\text{Im}(A)$. Un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ pertenece al subespacio $\text{Im}(A)$ si y sólo si el sistema dado por la matriz ampliada $(A|\vec{x})$ tiene solución; dicha matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x_1 \\ 1 & 2 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & -2 & x_3 \\ 1 & 4 & -5 & x_4 \end{array} \right].$$

Realizaremos operaciones elementales de reducción gaussiana para resolver dicho sistema: a cada fila se le resta la anterior,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & -3 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & -3 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & -3 & x_4 - x_1 \end{array} \right]$$

y, nuevamente, restando a cada fila la anterior, se llega a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & -3 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - 2x_3 + x_2 \end{array} \right].$$

luego el sistema tiene solución si y sólo si el vector $\vec{x}$ cumple

$$\left. \begin{array}{l} x_3 - 2x_2 + x_1 = 0 \\ x_4 - 2x_3 + x_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (*)$$

que constituyen unas ecuaciones cartesianas de $\text{Im}(A)$. Obsérvese que, de paso, hemos obtenido que $\text{rg}(A) = 2$, puesto que, tras haber realizado las operaciones de reducción gaussiana sobre

las filas de A , hemos obtenido una matriz equivalente escalonada de rango 2. Además, esto confirma el hecho que $rg(A) = 2 = \dim(\text{Im}(A))$.

OTRA FORMA: Las columnas de A son vectores cuyas componentes forman progresión aritmética, y se sabe que dicho subespacio de vectores tiene dimensión 2 como máximo; dado que al menos hay 2 columnas independientes (por ejemplo, las dos primeras), y no puede haber más, podemos asegurar que $rg(A) = 2 = \dim(\text{Im}(A))$, y además $\text{Im}(A)$ es exactamente el subespacio de vectores cuyas componentes forman progresión aritmética. Todo vector $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ de dicho subespacio satisface, por definición,

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$$

y dichas ecuaciones son las mismas que (*).

2. Puesto que las columnas de AB son combinaciones lineales de las columnas de A , siempre se verifica que $\text{Im}(AB) \subseteq \text{Im}(A)$; pero si, además, B tiene filas independientes (como es el caso, puesto que B es una matriz de Van der Monde por filas), se tiene que B representa una aplicación suprayectiva, y ambos subespacios coinciden: $\text{Im}(AB) = \text{Im}(A)$. Además, $rg(AB) = \dim \text{Im}(AB) = \dim \text{Im}(A) = 2$.

OTRA FORMA: Se sabe que $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B)) = \min(2, 3) = 2$, luego el rango de AB podría ser 0, 1 ó 2. Aunque no es necesario, escribamos la matriz completa AB :

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 41 & 117 \\ 4 & 8 & 18 & 44 \\ 2 & 1 & -5 & -29 \\ 0 & -6 & -28 & -102 \end{bmatrix};$$

en realidad, basta calcular sólo algunos elementos (por ejemplo, las dos primeras filas), para observar que al menos hay 2 filas independientes, luego $rg(AB) = 2$. Esto quiere decir que $\dim \text{Im}(AB) = 2 = \dim \text{Im}(A)$, pero por otro lado se tiene siempre que $\text{Im}(AB) \subseteq \text{Im}(A)$; dos subespacios de igual dimensión finita, uno de ellos contenido en el otro, deben automáticamente coincidir, luego $\text{Im}(AB) = \text{Im}(A)$.

3. Para que el sistema sea compatible, el vector $(1, a, -a, -1)^t$ debe pertenecer a $\text{Im}(AB)$. De los apartados anteriores se deduce que $\text{Im}(AB) = \text{Im}(A)$, cuyas ecuaciones son (*), y sustituyendo en ellas las componentes del vector, debe ser

$$\begin{cases} -a - 2a + 1 = 0 \\ -1 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Para dicho valor de a , el sistema **tiene solución, pero no única**, pues la matriz de coeficientes AB no tiene rango igual a su número de columnas (su rango es 2, mientras que posee 4 columnas).

OTRA FORMA: Según lo dicho en el apartado 1, el vector $(1, a, -a, -1)^t$ pertenece a $\text{Im}(AB) = \text{Im}(A)$ cuando y sólo cuando sus componentes forman progresión aritmética, luego debe cumplirse simultáneamente $a - 1 = -2a = -1 + a$ de donde $a = \frac{1}{3}$; y para este valor de a , la solución no es única pues las cuatro columnas de AB no son independientes.

Ejercicio 2 (3 puntos).

Dados $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ números complejos, se considera el polinomio

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}.$$

1. Sumando a la primera columna todas las restantes, y utilizando las propiedades de los determinantes, dedúzcase una raíz de D_n .
2. Efectuando operaciones elementales por filas sobre el determinante obtenido en el apartado anterior, dedúzcase la expresión de $D_n(x)$ como producto de factores irreducibles en $\mathbb{C}[x]$. ¿Cuánto vale el coeficiente en x^{n-1} de dicho polinomio?
3. Calcúlense el polinomio en x

$$\begin{vmatrix} x^5 & 1 & -1 & i & -i \\ 1 & x^5 & -1 & i & -i \\ 1 & -1 & x^5 & i & -i \\ 1 & -1 & i & x^5 & -i \\ 1 & -1 & i & -i & x^5 \end{vmatrix}$$

y la suma de sus raíces de parte imaginaria no negativa.

Solución:

1.

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x + \sum a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ x + \sum a_k & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ x + \sum a_k & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x + \sum a_k & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_{n-1} \\ x + \sum a_k & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix} = \left(x + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix},$$

de donde se deduce que una raíz del polinomio es $-\sum_{k=1}^{n-1} a_k$.

2. En el determinante anterior, restamos a cada fila (excepto la primera) su fila inmediatamente superior, y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - x & x - a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - x & x - a_{n-1} \end{vmatrix},$$

que, al desarrollarlo por la primera columna, se reduce a un determinante de matriz triangular $(n-1) \times (n-1)$ que vale $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})$. Así pues,

$$D_n(x) = \left(x + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1}).$$

La primera relación de Cardano, para un polinomio mónico de grado n , nos dice que el coeficiente de grado $n-1$ es el opuesto de la suma de las raíces. En nuestro caso, dicho coeficiente tiene que valer

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 0.$$

3. El determinante que tenemos que calcular es $D_5(x^5)$ cuando $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, -1, i, -i)$; por lo tanto valdrá

$$(x^5 - 1 + 1 - i + i)(x^5 - 1)(x^5 + 1)(x^5 - i)(x^5 + i) = x^5(x^{10} - 1)(x^{10} + 1) = x^5(x^{20} - 1).$$

Sus raíces son, además del cero, las raíces vigésimas de la unidad, es decir, $\xi_k = e^{i\frac{k\pi}{10}}$, para $k = 0, 1, \dots, 19$. De ellas, tienen parte imaginaria no negativa aquellas cuyo argumento cae en $[0, \pi]$, es decir, para k entre 0 y 10; como están en progresión geométrica de razón $e^{i\frac{\pi}{10}}$, su suma vale

$$\sum_{k=0}^{10} e^{i\frac{k\pi}{10}} = \frac{e^{i\frac{10\pi}{10}} e^{i\frac{\pi}{10}} - 1}{e^{i\frac{\pi}{10}} - 1} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{10}} - 1}{e^{i\frac{\pi}{10}} - 1},$$

expresión que podemos simplificar a

$$-\frac{e^{i\frac{\pi}{20}} (e^{i\frac{\pi}{20}} + e^{-i\frac{\pi}{20}})}{e^{i\frac{\pi}{20}} (e^{i\frac{\pi}{20}} - e^{-i\frac{\pi}{20}})} = -\frac{2 \cos \frac{\pi}{20}}{2i \operatorname{sen} \frac{\pi}{20}} = i \cotg \frac{\pi}{20}.$$

[3]

Para determinar P se hace preciso, por tanto, calcular B y P_B tal como se supone en el enunciado. Tanto para A , como para B , los valores propios son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vectores propios de A

$$\lambda = 1 \quad \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1-\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 & -1 & 1-\sqrt{2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

De modo similar se obtiene el tercer vector propio de A y los tres de B resultando

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[La obtención correcta de cada uno de los 6 vectores propios se califica con 0.1 puntos. Total 0.6 puntos]

$$P = P_A \cdot P_B^{-1} = P_A \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & -4\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} & -1 & 2+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[La obtención de la matriz P se califica con 0.3 puntos] [4]

La matriz P indicada muy arriba no es única debido a que los vectores propios de A y de B podrían también expresarse como proporcionales a los expresados. La forma general de la matriz P es:

$$P = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ d & a-b & 2b-2d \\ b-d & -b & -a-b+2d \end{pmatrix}$$

[Cualquier solución de P aceptada a esta última forma se califica con los mismos criterios 0.3 puntos]

3.2.

La proposición es cierta ya que si existe P invertible tal que $P^{-1}AP = B$ ello implica que A y B sean semejantes.

[La afirmación de que la proposición es cierta se califica...

...incluyendo cuando no se aporta justificación, con 0.1 puntos]

La justificación reside en que P existe por tener A y B valores propios comunes y simples, lo que las hace diagonalizables dando lugar a una matriz diagonal común.

[La justificación detallada se califica con 0.4 puntos]

Ejercicio 1 (3 puntos): Este ejercicio consta de seis cuestiones, a las cuales hay que responder sólo en el espacio dejado al efecto. **Se recogerá transcurrida una hora desde el comienzo del examen.**

- 1.1 Si z es un número complejo no nulo y n un entero positivo, escríbase la expresión general de las raíces n -ésimas de z , expresando las partes real e imaginaria de dichas raíces.

Respuesta:

Si $z = |z|e^{i\theta}$, sus raíces n -ésimas son $z_k = |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$, siendo

$$\operatorname{Re}(z_k) = |z|^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad \operatorname{Im}(z_k) = |z|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Observación: No es correcto expresar θ como $\arctan \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$, pues esta fórmula solamente es válida para los complejos z con $\operatorname{Re} z \geq 0$.

- 1.2 Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, sea H un subconjunto no vacío de E . Enúnciese una condición necesaria y suficiente para que H sea subespacio de E (*caracterización de subespacios vectoriales*).

Respuesta:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in H.$$

Equivalentemente:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H;$$

$$\forall \mathbf{u} \in H, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \mathbf{u} \in H.$$

- 1.3 Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales, tal que $\ker f = \{\mathbf{0}\}$. Pruébese que f es inyectiva.

Respuesta:

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ tales que $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$. Entonces, por linealidad, $f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker f = \{\mathbf{0}\}$, por lo que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Observación: El razonamiento basado en la ecuación de dimensiones no es válido.

Este razonamiento sólo sería válido en dimensión finita, y además utiliza que, si $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$, entonces f es inyectiva, lo cual es consecuencia precisamente del resultado que se pretende demostrar.

1.4 Dado el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$, demuéstrese que dicho sistema es compatible si y sólo si $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$ (teorema de Rouché-Frobenius).

Respuesta:

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \dots + x_n\mathbf{A}_n$, en donde $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ representan las columnas de $\mathbf{A}$; así pues, el sistema tiene solución si y sólo si el vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$, lo cual equivale a que $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$.

Observación: También se puede hacer un razonamiento basado en reducción gaussiana.

1.5 Pruébese que, si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada diagonalizable, entonces $\mathbf{A}^t$ también lo es.

Respuesta:

Si existe P regular tal que $P^{-1}\mathbf{A}P = \mathbf{D}$ con $\mathbf{D}$ matriz diagonal, entonces

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^t = (P^{-1}\mathbf{A}P)^t = P^t\mathbf{A}^t(P^{-1})^t = P^t\mathbf{A}^t(P^t)^{-1},$$

luego $\mathbf{A}^t$ es semejante a la misma diagonal con matriz de paso $(P^t)^{-1}$.

Otra forma: Puesto que $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{A}^t - \lambda\mathbf{I}|$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^t$ tienen los mismos autovalores con iguales multiplicidades. Además, para cualquiera de dichos autovalores λ_0 ,

$$r(\mathbf{A}^t - \lambda_0\mathbf{I}) = r(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}),$$

lo que implica que las dimensiones de los correspondientes subespacios propios son también iguales para $\mathbf{A}$ y para $\mathbf{A}^t$. Así pues, una de ellas es diagonalizable si y sólo si lo es la otra.

Observación: Los “razonamientos” del tipo “ $\mathbf{A}^t$ es diagonalizable porque tiene los mismos autovalores (o el mismo polinomio característico, etc. que $\mathbf{A}$)” no son válidos.

1.6 La ecuación característica de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes reales es $(\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0$. Escribese la solución general de dicha ecuación.

Respuesta:

$$x(t) = (A + Bt)e^{3t} + Ce^{-t}, \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2 (3 puntos):

En el espacio vectorial $\mathbb{C}_4[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 4, se considera la base

$$\mathcal{B} = (1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4)$$

y el subespacio

$$E = \{p \in \mathbb{C}_4[x] : p'(1) = p'''(1) = 0\}.$$

1. Exprésese un polinomio genérico de E como combinación lineal de los polinomios de la base $\mathcal{B}$. Dedúzcanse de ello la dimensión y una base de E .
2. Dada la aplicación lineal

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_4[x] &\rightarrow \mathbb{C}_4[x] \\ p(x) &\mapsto p(2-x),\end{aligned}$$

calcúlese la matriz de dicha aplicación respecto a la base $\mathcal{B}$.

3. Si $M = \{p \in \mathbb{C}_4[x] : p(x) = p(2-x)\}$, encuéntrase una base del subespacio $E \cap M$.
4. Calcúlense las raíces del polinomio $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 5$.

Solución:

1. Todo polinomio p de $\mathbb{C}_4[X]$ puede expresarse como

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4.$$

Ahora bien, $p \in E$ si y sólo si $p'(1) = p'''(1) = 0$; imponiendo estas dos condiciones se tiene que $a_1 = a_3 = 0$, con lo que la expresión general de los polinomios de E es

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_2(x-1)^2 + a_4(x-1)^4, \quad a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{C}.$$

De aquí se deduce que $\dim(E) = 3$, y una base de E es

$$\mathcal{B}_E = (1, (x-1)^2, (x-1)^4). \quad (*)$$

OTRA FORMA: si desde el principio se identifica todo $p \in \mathbb{C}_4[X]$ con su desarrollo de Taylor de orden 4 alrededor de 1:

$$p(x) = p(1) \cdot 1 + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{p^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4$$

entonces p pertenece a E si y sólo si $p'(1) = p'''(1) = 0$, luego

$$p(x) = p(1) \cdot 1 + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4.$$

Por tanto, los polinomios de E vienen expresados en función de 3 parámetros independientes: $p(1)$, $p''(1)$ y $p^{IV}(1)$, con lo que $\dim(E) = 3$ y la base natural obtenida es la base $\mathcal{B}_E$ dada en (*).

2. La aplicación cambia la variable x por $2-x$; por ello, los polinomios de la base $\mathcal{B}$ se transforman así:

$$\begin{aligned} \text{Para } p(x) = 1 &\mapsto p(2-x) = 1 \text{ cuyas coordenadas respecto a } \mathcal{B} \text{ son: } (1, 0, 0, 0, 0) \\ \text{Para } p(x) = x-1 &\mapsto p(2-x) = (2-x) - 1 = 1-x = -(x-1) \\ &\text{cuyas coordenadas respecto a } \mathcal{B} \text{ son: } (0, -1, 0, 0, 0) \\ \text{Para } p(x) = (x-1)^2 &\mapsto p(2-x) = ((2-x) - 1)^2 = (1-x)^2 = (x-1)^2 \\ &\text{cuyas coordenadas respecto a } \mathcal{B} \text{ son: } (0, 0, 1, 0, 0) \\ \text{Para } p(x) = (x-1)^3 &\mapsto p(2-x) = ((2-x) - 1)^3 = (1-x)^3 = -(x-1)^3 \\ &\text{cuyas coordenadas respecto a } \mathcal{B} \text{ son: } (0, 0, 0, -1, 0) \\ \text{Para } p(x) = (x-1)^4 &\mapsto p(2-x) = ((2-x) - 1)^4 = (1-x)^4 = (x-1)^4 \\ &\text{cuyas coordenadas respecto a } \mathcal{B} \text{ son: } (0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

La matriz de la aplicación, referida a la base $\mathcal{B}$, es la que contiene por columnas dichos vectores de coordenadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Obviamente, el subespacio M es el conjunto de polinomios que quedan fijos por esta aplicación, es decir, los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$. Los polinomios de M , referidos a la base $\mathcal{B}$, tienen, por tanto, como vectores de coordenadas los de $\ker(A - I)$. Al calcular $\ker(A - I)$, se obtiene que está generado por el primer, el tercer y el quinto vector canónico. Pasando a polinomios, esto quiere decir que M está generado por el primer, tercer y quinto polinomio de $\mathcal{B}$. Por tanto, una base de M es $\mathcal{B}_E$ (*), luego $M = E$ ya que ambos subespacios tienen la misma base.

Como consecuencia, al coincidir M y E , se tiene que $E \cap M = E = M$, y una base de esta intersección es, por ejemplo, la ya calculada: $\mathcal{B}_E$ (*).

OTRA FORMA (sin recurrir al enfoque matricial): $E \cap M$ es el conjunto de polinomios p de E que además verifican $p(x) = p(2-x)$. Pero se observa que los 3 vectores de la base de E (*) quedan fijos por la aplicación definida en el apartado anterior; por tanto, cualquier polinomio p de E va a quedar fijo también por dicha aplicación lineal; es decir, todos los polinomios de E también pertenecen a M :

$$\forall p \in E, \quad p(x) = p(2-x) \Rightarrow E \subseteq M.$$

De aquí se deduce que $E \cap M = E$, y una base de esta intersección es, por ejemplo, la ya calculada: $\mathcal{B}_E$ (*).

4. El polinomio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 5$ pertenece a E , puesto que $p'(1) = p'''(1) = 0$. Por ello, puede expresarse como

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 5 = p(1) \cdot 1 + \frac{p''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{p^{IV}(1)}{4!} (x-1)^4 = -8 + 2(x-1)^2 + (x-1)^4.$$

Así pues, calcular sus raíces equivale a resolver la ecuación bicuadrada $-8 + 2(x-1)^2 + (x-1)^4 = 0$. Realizamos el cambio $y = (x-1)^2$ y resolvemos la ecuación de segundo grado

$y^2 + 2y - 8 = 0$, que tiene por soluciones $y_1 = 2$, $y_2 = -4$. Deshaciendo el cambio, se obtienen finalmente las cuatro raíces de p :

$$\begin{aligned}(x-1)^2 = 2 &\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2} \\(x-1)^2 = -4 = (\pm 2i)^2 &\Rightarrow x_3 = 1 + 2i, \quad x_4 = 1 - 2i.\end{aligned}$$

Problema (4 puntos):

En este problema a y b son números complejos, no simultáneamente nulos.

1. Calcúlense los polinomios característicos de las matrices $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ b & b & 0 \end{pmatrix}$.

2. Dada la matriz cuadrada de orden $n > 1$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ b & b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}$

2.1 Calcúlese la dimensión del núcleo de $\mathbf{A}$ según los valores de a y b .

2.2 Calcúlese el polinomio característico de $\mathbf{A}$. Estúdiense para qué valores de a y b es $\mathbf{A}$ diagonalizable.

2.3 Calcúlese $\mathbf{A}^p$, $p \in \mathbb{N}$, expresando sus elementos en función de a, b y n , y distinguiendo, cuando sea necesario, los casos de p par e impar.

Solución:

1. El polinomio característico de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ es igual al determinante $\begin{vmatrix} \lambda & -a \\ -b & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - ab$.

El de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ b & b & 0 \end{pmatrix}$ es igual a $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a \\ 0 & \lambda & -a \\ -b & -b & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2ab\lambda$.

2. Ahora se considera la matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden $n > 1$.

2.1 Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, el rango de la matriz $\mathbf{A}$ es igual a 2; de donde se deduce que la dimensión del núcleo de $\mathbf{A}$ es igual a $n - 2$.

Si $a = 0$ y $b \neq 0$, el rango de la matriz $\mathbf{A}$ es igual a 1; de donde se deduce que la dimensión del núcleo de $\mathbf{A}$ es igual a $n - 1$.

Si $a \neq 0$ y $b = 0$, el rango de la matriz $\mathbf{A}$ es igual a 1; de donde se deduce que la dimensión del núcleo de $\mathbf{A}$ es igual a $n - 1$.

2.2 Utilizando inducción en el orden n de la matriz y teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el apartado 1, se plantea la hipótesis de que el polinomio característico de la matriz sea $D_n(\lambda) = \lambda^n - (n-1)ab\lambda^{n-2}$. Dicha hipótesis queda confirmada obteniendo el polinomio característico de una matriz de orden $n+1$, desarrollando el siguiente determinante por los elementos de la primera fila (o de la primera columna):

$$D_{n+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -a \\ -b & -b & \cdots & -b & \lambda \end{vmatrix} = \lambda D_n(\lambda) - ab\lambda^{n-2} =$$

$$\lambda(\lambda^n - (n-1)ab\lambda^{n-2}) - ab\lambda^{n-2} = \lambda^{n+1} - nab\lambda^{n-1}$$

De modo alternativo, el polinomio característico puede obtenerse de acuerdo con las siguientes recurrencias:

$$\begin{cases} D_n(\lambda) = \lambda D_{n-1}(\lambda) - ab\lambda^{n-2} \\ D_{n-1}(\lambda) = \lambda D_{n-2}(\lambda) - ab\lambda^{n-3} \\ \dots\dots\dots \\ D_3(\lambda) = \lambda D_2(\lambda) - ab\lambda \\ D_2(\lambda) = \lambda^2 - ab \end{cases}$$

Multiplicando la segunda igualdad por λ , la tercera por λ^2 y, así sucesivamente, hasta la última que se multiplica por λ^{n-2} , y efectuando la suma de los primeros miembros y segundos miembros de todas ellas, se deduce $D_n(\lambda) = \lambda^n - (n-1)ab\lambda^{n-2}$.

También puede obtenerse desarrollando el determinante de $\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}$, sumando, en un primer paso, todas las filas a la primera, después, restando la primera columna a las restantes columnas, excluida la última, y, finalmente, desarrollando por la primera columna y luego por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -a \\ -b & -b & \cdots & -b & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - b & \lambda - b & \cdots & \lambda - b & \lambda - (n-1)a \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -a \\ -b & -b & \cdots & -b & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - b & 0 & \cdots & 0 & \lambda - (n-1)a \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -a \\ -b & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - b)\lambda^{n-1} + b(\lambda - (n-1)a)\lambda^{n-2} = \lambda^n - (n-1)ab\lambda^{n-2}$$

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 0$ de multiplicidad igual a $n-2$, igual a la dimension de su subespacio propio (que es el núcleo de $\mathbf{A}$) y $\lambda_2 = \sqrt{(n-1)ab}$, $\lambda_2 = -\sqrt{(n-1)ab}$, simples. Por tanto, $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Si $a = 0$ o $b = 0$, pero no nulos a la vez, el cero es valor propio de $\mathbf{A}$ de multiplicidad n , mientras que su subespacio propio (que es el núcleo de $\mathbf{A}$) tiene dimensión igual a $n-1$. Por tanto, $\mathbf{A}$ no es diagonalizable.

- (a) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, se ha visto que la matriz es diagonal, por lo que su polinomio mínimo

es $\mu(\lambda) = \lambda^3 - (n-1)ab\lambda$. En este caso, se tiene, para p número natural, efectuando la división euclídea de λ^p entre $\mu(\lambda)$, $\lambda^p = \mu(\lambda)q(\lambda) + c\lambda^2 + d\lambda + e$.

Teniendo en cuenta que el polinomio mínimo se anula para los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$, a partir del valor propio $\lambda = 0$, se deduce $e = 0$. Y, a partir de los otros dos valores propios $\pm\sqrt{(n-1)ab}$, se obtienen las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} (n-1)^{p/2}(ab)^{p/2} = c(n-1)ab + d(n-1)^{1/2}(ab)^{1/2} \\ (-1)^p(n-1)^{p/2}(ab)^{p/2} = c(n-1)ab - d(n-1)^{1/2}(ab)^{1/2} \end{cases}$$

de donde se deducen:

$$c = \frac{1}{2}(n-1)^{\frac{p}{2}-1}(ab)^{\frac{p}{2}}(1 + (-1)^p)$$

$$d = \frac{1}{2}(n-1)^{\frac{p-1}{2}}(ab)^{\frac{p-1}{2}}(1 - (-1)^p)$$

Por tanto,

$$\text{Para } p \text{ par, } \mathbf{A}^p = (n-1)^{\frac{p}{2}-1}(ab)^{\frac{p}{2}-1}\mathbf{A}^2 = (n-1)^{\frac{p}{2}-1}(ab)^{\frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } p \text{ impar, } \mathbf{A}^p = (n-1)^{\frac{p-1}{2}}(ab)^{\frac{p-1}{2}}\mathbf{A} = (n-1)^{\frac{p-1}{2}}(ab)^{\frac{p-1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ b & b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}$$

De modo alternativo, sabiendo que el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$, $\mu(\lambda) = \lambda^3 - (n-1)ab\lambda$, es anulador de $\mathbf{A}$, se tiene: $\mu(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - (n-1)ab\mathbf{A} = \mathbf{O}$; es decir, $\mathbf{A}^3 = (n-1)ab\mathbf{A}$, de modo que (incluso para p igual a 1 y a 2):

$$\mathbf{A}^p = (n-1)^{\frac{p}{2}-1}(ab)^{\frac{p}{2}-1}\mathbf{A}^2, \text{ para } p \text{ par}$$

$$\mathbf{A}^p = (n-1)^{\frac{p-1}{2}}(ab)^{\frac{p-1}{2}}\mathbf{A}, \text{ para } p \text{ impar.}$$

Para $a = 0$ o $b = 0$, pero no nulos a la vez, se tiene $\mathbf{A}^p = \mathbf{O}$, para $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

Álgebra I	Junio de 2005	
Nombre:	Número de Matrícula 	NOTA
1 ^{er} Apellido:		
2 ^o Apellido:		

Ejercicio 1 (3 puntos): Este ejercicio consta de seis cuestiones, a las cuales hay que responder sólo en el espacio dejado al efecto. **Se recogerá transcurrida una hora desde el comienzo del examen.**

- 1.1 Sea f una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$, tal que $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^n$. Escribanse las dimensiones de $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$, y la relación que existe entre m y n .

Respuesta:

$$\dim \text{Ker } f = 0 \qquad \dim \text{Im } f = m \qquad m < n$$

- 1.2 Escribase la fórmula de De Moivre.

Respuesta:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

- 1.3 Demuéstrese la siguiente proposición si es verdadera o dese un contraejemplo si es falsa: "Todo sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m < n$, y $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$, tal que el rango de $\mathbf{A}$ es igual a m , es compatible indeterminado".

Respuesta:

La proposición es verdadera. Se aplica el teorema de Rouché-Frobenius.

$$\text{rango } (\mathbf{A}) = m = \text{rango } (\mathbf{A}|\mathbf{b}) \Rightarrow \text{sistema compatible.}$$

Como, además, $m < n$, el sistema es compatible indeterminado

1.4 Sea F el espacio vectorial de las sucesiones reales $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cuyos términos cumplen la recurrencia

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} + 2ax_{n+1} + a^2x_n = 0$$

donde $a \in \mathbb{R}$, no nulo. Escribanse la dimensión del espacio F y el término general x_n de la sucesión de F que cumple $x_0 = x_1 = a$, en función de n y a .

Respuesta:

$$\dim F = 2 \quad x_n = (a - (1+a)n)(-a)^n = (-1)^{n+1}a^n(n + (n-1)a)$$

1.5 Sabiendo que el polinomio característico de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es $x^3 + ax^2 + bx + c$, $c \neq 0$, escribase el polinomio característico de $\mathbf{A}^{-1}$, expresando sus coeficientes en función de a, b, c .

Respuesta:

$$\text{Polinomio característico de } \mathbf{A}^{-1} = x^3 + \frac{b}{c}x^2 + \frac{a}{c}x + \frac{1}{c}$$

1.6 Dados el polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, y la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, defínase “evaluación de p en $\mathbf{A}$ ”. Defínanse “polinomio anulador” y “polinomio mínimo” de $\mathbf{A}$. Demuéstrese que todo polinomio anulador de $\mathbf{A}$ es múltiplo de su polinomio mínimo.

Respuesta:

$$\text{Evaluación de } p \text{ en } \mathbf{A}, p(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \dots + a_m\mathbf{A}^m$$

$$\text{Polinomio anulador de } \mathbf{A}: p \in \mathbb{C}[x] \text{ tal que } p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$$

$$\text{Polinomio mínimo de } \mathbf{A}: \text{Es el polinomio mónico anulador de } \mathbf{A} \text{ de grado mínimo}$$

Sean p un polinomio anulador de $\mathbf{A}$ y μ el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$. La división euclídea de p entre μ permite escribir

$$p = k\mu + \rho, \quad k, \rho \in \mathbb{C}[x], \quad \text{grado}(\rho) < \text{grado}(\mu)$$

Se tiene que $\rho = p - k\mu$, de donde se deduce: $\rho(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) - k(\mathbf{A})\mu(\mathbf{A}) = \mathbf{O} - k(\mathbf{A})\mathbf{O} = \mathbf{O}$. Si $\rho \neq 0$, se obtendría un polinomio anulador de grado inferior al de μ , en contradicción con que μ es un polinomio mónico y, por tanto no nulo, anulador de $\mathbf{A}$ de grado mínimo. Por consiguiente, $\rho = 0$; es decir, p es múltiplo de μ .

Álgebra I	Junio de 2005						
Nombre:	Número de Matrícula <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>						NOTA
1 ^{er} Apellido:							
2 ^o Apellido:							

Ejercicio 2 (3 puntos):

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.1 Calcúlense los valores propios de A .

2.2 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

demuéstrese que una solución del mismo viene dada por $x(t) = e^{\lambda t}u$, donde λ es un valor propio real de A y u un vector propio de A asociado a λ . Aplíquese este resultado al cálculo de una base del espacio vectorial de soluciones de dicho sistema.

2.3 Calcúlese $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, sabiendo que $x(0) = (3, 1, 2)^t$.

Se entregará esta hoja, y a lo sumo, una adicional.

Solución:

2.1 Los valores propios de A son los ceros del polinomio característico de dicha matriz. El polinomio característico es

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda$$

Como consecuencia, los valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$.

2.2 Si λ es un valor propio real de A y u un vector propio de A asociado a λ , se cumple $Au = \lambda u$. Por tanto,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(e^{\lambda t}u)}{dt} = \lambda e^{\lambda t}u = e^{\lambda t}\lambda u = e^{\lambda t}Au = A(e^{\lambda t}u) = Ax(t).$$

El espacio vectorial de soluciones del sistema $\frac{dx}{dt} = Ax$ tiene dimensión igual a tres. Como los tres valores propios de la matriz A son simples, bastará determinar tres vectores propios, u_1, u_2, u_3 , asociados a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$, respectivamente, para obtener las funciones $e^{\lambda_1 t}u_1, e^{\lambda_2 t}u_2, e^{\lambda_3 t}u_3$, que se demostrará que son linealmente independientes.

Para $\lambda_1 = 0$, se obtiene su subespacio propio asociado hallando el núcleo de $\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}$, cuyas ecuaciones son:

$$\left. \begin{array}{l} y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{array} \right\}, \text{ y se toma } \mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)^t.$$

Para $\lambda_2 = -1$, se obtiene su subespacio propio asociado hallando el núcleo de $\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}$, cuyas ecuaciones son:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}, \text{ y se toma } \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)^t.$$

Para $\lambda_3 = -2$, se obtiene su subespacio propio asociado hallando el núcleo de $\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A}$, cuyas ecuaciones son:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\}, \text{ y se toma } \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)^t.$$

$(\mathbf{u}_1, e^{-t}\mathbf{u}_2, e^{-3t}\mathbf{u}_3)$ es una base del espacio de soluciones, dado que las tres funciones son linealmente independientes. En efecto, $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 e^{-t}\mathbf{u}_2 + \alpha_3 e^{-3t}\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, implica, tomando $t = 0$, que $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ y, al ser los tres vectores, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, linealmente independientes ya que corresponden a valores propios distintos dos a dos, se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Como alternativa, aunque es un procedimiento más largo, podría calcularse $e^{t\mathbf{A}}$, dado que las soluciones del sistema pueden determinarse por $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}(0)$. Las columnas de $e^{t\mathbf{A}}$, matriz regular, constituyen, por tanto, un sistema generador del espacio de soluciones y, al ser éste de dimensión igual a tres, forman una base. El cálculo de la exponencial puede basarse en el hecho de que $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2e^{-t} - e^{-2t} & -1 + e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ -1 + 2e^{-t} - e^{-2t} & 1 + e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} & -1 + e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

2.3 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 e^{-t}\mathbf{u}_2 + a_3 e^{-3t}\mathbf{u}_3) = a_1 \mathbf{u}_1$, donde a_1, a_2, a_3 son las coordenadas de $\mathbf{x}(t)$ respecto de la base obtenida en el apartado anterior. Por otra parte, $\mathbf{x}(0) = (3, 1, 2)^t = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3$, de donde se deduce $a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

Se obtiene, finalmente, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = a_1 \mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)^t$.

En el caso de haber calculado $e^{t\mathbf{A}}$ se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\mathbf{A}} \right) \mathbf{x}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema (4 puntos).

Se consideran 4 números complejos a, b, c, d distintos dos a dos, y un polinomio complejo P de grado 3. Construimos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} P(a) & P'(a) & P''(a) & P'''(a) \\ P(b) & P'(b) & P''(b) & P'''(b) \\ P(c) & P'(c) & P''(c) & P'''(c) \\ P(d) & P'(d) & P''(d) & P'''(d) \end{pmatrix}.$$

Sea, ahora, el endomorfismo Φ de $\mathbb{C}_3[x]$, cuya matriz es A respecto a la base

$$(L_1, L_2, L_3, L_4),$$

formada por los polinomios elementales de interpolación de Lagrange en los puntos a, b, c, d .

Nota: Recuerdese que para cualquier polinomio $Q \in \mathbb{C}_3[x]$,

$$Q = Q(a)L_1 + Q(b)L_2 + Q(c)L_3 + Q(d)L_4.$$

No son necesarias las expresiones explícitas de los polinomios L_j , y no se puntuará su cálculo.

1. Calcúlense las imágenes mediante Φ de los polinomios de dicha base, expresando los resultados como combinaciones lineales de P y sus derivadas sucesivas.
2. ¿Son linealmente independientes las imágenes anteriores? Razónese la respuesta. Dedúzcase el valor del rango de A , e identifíquense los subespacios núcleo e imagen de Φ .
3. Calcúlese una base del subespacio $\Phi^{-1}(\mathbb{C}_1[x])$.
4. Calcúlese la matriz del endomorfismo Φ respecto a la base (P, P', P'', P''') de $\mathbb{C}_3[x]$.
5. Dados un espacio vectorial E de dimensión finita, dos bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ y $\mathcal{V} = (u_1, \dots, u_n)$ de E , y Φ un endomorfismo de E , demuéstrese el siguiente resultado:
 "Si $\Phi(e_j) = u_j$ para $j = 1, 2, \dots, n$, entonces las matrices de Φ respecto a $\mathcal{B}$ y respecto a $\mathcal{V}$ son iguales."
 ¿Es cierto el recíproco?

Solución:

1. La columna j -ésima de A es el vector de coordenadas de $\Phi(L_j)$ respecto a la base dada, es decir:

$$\Phi(L_j) = P^{(j-1)}(a)L_1 + P^{(j-1)}(b)L_2 + P^{(j-1)}(c)L_3 + P^{(j-1)}(d)L_4 = P^{(j-1)}.$$

2. Los polinomios P, P', P'', P''' son linealmente independientes por tener grado 3, 2, 1 y 0 (polinomio constante no nulo), respectivamente.

Al ser linealmente independientes las imágenes de una base, el endomorfismo es inyectivo y, por tanto, biyectivo; A tiene rango máximo igual a 4, $\ker \Phi = \{0\}$, $\text{Im } \Phi = \mathbb{C}_3[x]$.

3. $\mathbb{C}_1[x]$ está generado por los polinomios P'' y P''' , de grado 1 y constante, respectivamente, cuyas contraímagenes son $\Phi^{-1}(P'') = L_3$, $\Phi^{-1}(P''') = L_4$. Así pues, $\Phi^{-1}(\mathbb{C}_1[x]) = \mathcal{L}\{L_3, L_4\}$.
4. La columna j -ésima de la matriz pedida es el vector de coordenadas de $\Phi(P^{(j-1)})$ respecto a (P, P', P'', P''') :

$$\begin{aligned}\Phi(P^{(j-1)}) &= \Phi(P^{(j-1)}(a)L_1 + P^{(j-1)}(b)L_2 + P^{(j-1)}(c)L_3 + P^{(j-1)}(d)L_4) = \\ &= P^{(j-1)}(a)\Phi(L_1) + P^{(j-1)}(b)\Phi(L_2) + P^{(j-1)}(c)\Phi(L_3) + P^{(j-1)}(d)\Phi(L_4) = \\ &= P^{(j-1)}(a)P + P^{(j-1)}(b)P' + P^{(j-1)}(c)P'' + P^{(j-1)}(d)P''',\end{aligned}$$

lo que nos da el vector de coordenadas $(P^{(j-1)}(a), P^{(j-1)}(b), P^{(j-1)}(c), P^{(j-1)}(d))^t$, es decir, la columna j -ésima de $\mathbf{A}$. La matriz buscada coincide, por tanto, con $\mathbf{A}$.

Otra forma: Si llamamos $\mathcal{B} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ y $\mathcal{V} = (P, P', P'', P''')$, el resultado del apartado 1 nos dice que

$$I_4 = [\Phi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{V}} = [\Phi]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{V}},$$

$([I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{V}})$ representa la matriz de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$, de donde se concluye que

$$[\Phi]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} = ([I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{V}})^{-1} = [I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{A},$$

donde la última igualdad se deduce de que $P^{(j-1)} = P^{(j-1)}(a)L_1 + P^{(j-1)}(b)L_2 + P^{(j-1)}(c)L_3 + P^{(j-1)}(d)L_4$.

5. Sea $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^t$ la columna j -ésima de la matriz de Φ respecto a $\mathcal{B}$, es decir,

$$\mathbf{u}_j = \Phi(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{nj}\mathbf{e}_n.$$

Entonces, las imágenes de los vectores $\mathbf{u}_j$ se obtienen como

$$\Phi(\mathbf{u}_j) = a_{1j}\Phi(\mathbf{e}_1) + a_{2j}\Phi(\mathbf{e}_2) + \dots + a_{nj}\Phi(\mathbf{e}_n) = a_{1j}\mathbf{u}_1 + a_{2j}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{nj}\mathbf{u}_n,$$

lo que nos permite concluir que la columna j -ésima de la matriz de Φ respecto a $\mathcal{V}$ también es $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^t$.

El recíproco no es cierto: por ejemplo, el endomorfismo nulo tiene la misma matriz en cualquier base, y no transforma los vectores de una base en los de otra.

Otra forma: $\Phi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{u}_j$ significa que

$$[\Phi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ([\Phi(\mathbf{e}_1)]^{\mathcal{B}}, \dots, [\Phi(\mathbf{e}_n)]^{\mathcal{B}}) = ([\mathbf{u}_1]^{\mathcal{B}}, \dots, [\mathbf{u}_n]^{\mathcal{B}}) = [I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{B}},$$

y también que

$$I_n = [\Phi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{V}} = [\Phi]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{V}},$$

lo cual implica que

$$[\Phi]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} = ([I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{V}})^{-1} = [I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{B}}.$$

Así pues, $[\Phi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ y $[\Phi]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ son iguales.

Ejercicio 1 (3 puntos): Este ejercicio consta de seis cuestiones, a las cuales hay que responder solo en el espacio dejado al efecto. **Se recogerá transcurrida una hora desde el comienzo del examen.**

1.1 Sean A, B dos conjuntos y $g : A \rightarrow B$ una aplicación. Sea $C \subset B$. Demuéstrese que

$$g^{-1}(B \setminus C) = g^{-1}(B) \setminus g^{-1}(C).$$

Respuesta:

$$\begin{aligned} y \in g^{-1}(B \setminus C) &\Leftrightarrow g(y) \in B \setminus C \Leftrightarrow (g(y) \in B) \wedge (g(y) \notin C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y \in g^{-1}(B)) \wedge (y \notin g^{-1}(C)) \Leftrightarrow y \in (g^{-1}(B) \setminus g^{-1}(C)) \end{aligned}$$

Comentarios:

- Nada en el enunciado hace suponer que A, B sean espacios vectoriales ni que g sea una aplicación lineal entre espacios vectoriales.
 - La contraimagen g^{-1} existe siempre, *aunque g no sea inyectiva*.
-

1.2 Enúnciese el Teorema Fundamental del Álgebra.

Respuesta:

Todo polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ de *grado mayor o igual a uno* tiene, al menos, una raíz.

1.3 Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regular, con polinomio característico $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Escribese razonadamente el polinomio característico de A^{-1} .

Respuesta:

$$\begin{aligned} \chi_{A^{-1}}(\lambda) &= \det(\lambda I - A^{-1}) = \det((\lambda A - I) A^{-1}) = \det(A^{-1}) \det(-\lambda(\lambda^{-1}I - A)) = \\ &= \frac{(-\lambda)^n}{\det(A)} \chi_A(\lambda^{-1}) \end{aligned}$$

1.4 Sean E, F espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, y $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Demuéstrese que $\ker f$ es un subespacio vectorial de E .

Respuesta:

Empleando la caracterización de subespacios vectoriales, tenemos:

i) $\ker f \neq \emptyset$ porque $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.

ii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker f$,

$$f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{0}_F + \beta \cdot \mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F \Rightarrow \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in \ker f.$$

Luego $\ker f$ es subespacio vectorial de E .

1.5 Consideremos la aplicación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, que a cada polinomio p le asocia otro polinomio q definido por $q(x) = p(x-1)$. Calcúlese la matriz de la aplicación T en la base $(1, x, x^2)$.

Respuesta:

$$T(1) = 1; T(x) = x - 1; T(x^2) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.6 Calcúlese la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

Respuesta:

Su ecuación característica es

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

que tiene como única raíz $r = 2$ (doble). Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial del enunciado es:

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t},$$

donde C_1, C_2 son constantes.

Ejercicio 2 (3 puntos).

Se consideran 3 números complejos a, b, c distintos de 1 y entre sí. Sea el polinomio en x

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1-a & 1-b & 1-c \\ 1-x^2 & 1-a^2 & 1-b^2 & 1-c^2 \\ 1-x^3 & 1-a^3 & 1-b^3 & 1-c^3 \\ 1-x^4 & 1-a^4 & 1-b^4 & 1-c^4 \end{vmatrix}.$$

1. Sin desarrollar el determinante, calcúlense razonadamente todas las raíces de D .
2. Calcúlese $D(x)$ para todo x .
3. Se considera el polinomio mónico $\tilde{D} = \frac{D}{\alpha}$, en donde α representa el coeficiente principal de D . Sabiendo que

$$\begin{aligned} a+b+c &= 5 \\ ab+ac+bc &= -2 \\ abc &= 4, \end{aligned}$$

calcúlense los coeficientes de $\tilde{D}$.

Solución:

1. 1 es raíz, porque $x=1$ da una columna de ceros; a, b, c son raíces, porque $x \in \{a, b, c\}$ da dos columnas iguales.

Como la mayor potencia de x en la primera columna es 4, y las otras columnas no contienen la x , el polinomio es de grado 4 y no puede tener más raíces que las cuatro anteriores.

Así pues, será de la forma $D(x) = \alpha(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)$, siendo α un número complejo.

2. 1ª forma:

A la vista de lo anterior, basta calcular el valor de α ; para ello, hacemos $D(0) = \alpha abc$, y lo igualamos a

$$\begin{aligned} D(0) &= \begin{vmatrix} 1 & 1-a & 1-b & 1-c \\ 1 & 1-a^2 & 1-b^2 & 1-c^2 \\ 1 & 1-a^3 & 1-b^3 & 1-c^3 \\ 1 & 1-a^4 & 1-b^4 & 1-c^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -b & -c \\ 1 & -a^2 & -b^2 & -c^2 \\ 1 & -a^3 & -b^3 & -c^3 \\ 1 & -a^4 & -b^4 & -c^4 \end{vmatrix} = -abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \\ &= -abc V(1, a, b, c) = -abc(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)(c-b), \end{aligned}$$

en donde la primera igualdad se ha obtenido restandole la primera columna a las siguientes, y la V representa el determinante de Vandermonde de orden 4.

Si $abc \neq 0$, al igualar ambas expresiones para $D(0)$ obtenemos que $\alpha = -(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)(c-b)$ y el resultado final es, por tanto:

$$D(x) = (1-a)(1-b)(1-c)(b-a)(c-a)(c-b)(x-1)(x-a)(x-b)(x-c).$$

Si $abc = 0$ (por ejemplo: si $a = 0$), entonces el determinante se reduce a:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1-b & 1-c \\ 1-x^2 & 1 & 1-b^2 & 1-c^2 \\ 1-x^3 & 1 & 1-b^3 & 1-c^3 \\ 1-x^4 & 1 & 1-b^4 & 1-c^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1 & -b & -c \\ -x^2 & 1 & -b^2 & -c^2 \\ -x^3 & 1 & -b^3 & -c^3 \\ -x^4 & 1 & -b^4 & -c^4 \end{vmatrix} = bcx \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & b & c \\ 1 & x^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & x^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} =$$

$$= bcx V(1, x, b, c) = (b-1)(c-1)bc(c-b)x(x-1)(b-x)(c-x),$$

que coincide con el resultado de hacer $a = 0$ en la solución calculada antes. Dicha solución es, por tanto, válida en todos los casos.

2ª forma:

Desarrollando directamente $D(x)$, y teniendo en cuenta que $1-\omega^k = (1-\omega)(1+\omega+\dots+\omega^{k-1})$, podemos escribir:

$$D(x) =$$

$$= (1-x)(1-a)(1-b)(1-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+x & 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+x+x^2 & 1+a+a^2 & 1+b+b^2 & 1+c+c^2 \\ 1+x+x^2+x^3 & 1+a+a^2+a^3 & 1+b+b^2+b^3 & 1+c+c^2+c^3 \end{vmatrix}.$$

Si ahora restamos a cada fila la inmediata superior (empezando por la última), obtenemos:

$$D(x) = (1-x)(1-a)(1-b)(1-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (1-x)(1-a)(1-b)(1-c) V(x, a, b, c) =$$

$$= (1-a)(1-b)(1-c)(b-a)(c-a)(c-b)(1-x)(a-x)(b-x)(c-x).$$

3ª forma:

El coeficiente principal coincidirá, desarrollando por la primera columna, con el de $-(1-x^4)$, es decir, con el determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1-b & 1-c \\ 1-a^2 & 1-b^2 & 1-c^2 \\ 1-a^3 & 1-b^3 & 1-c^3 \end{vmatrix} = (1-a)(1-b)(1-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+a+a^2 & 1+b+b^2 & 1+c+c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-a)(1-b)(1-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (1-a)(1-b)(1-c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

3.

$$\tilde{D}(x) = (x-1)(x-a)(x-b)(x-c) = x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0.$$

Las relaciones de Cardano nos dicen:

$$d_3 = -(1+a+b+c) = -(1+5) = -6;$$

$$d_2 = 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c + ab + ac + bc = 5 - 2 = 3;$$

$$d_1 = -(1 \cdot ab + 1 \cdot ac + 1 \cdot bc + abc) = -(-2 + 4) = -2;$$

$$d_0 = 1 \cdot abc = 4.$$

Problema (4 puntos):

1. Sea $\mathbf{A}$ una matriz compleja cuadrada de orden n con valores propios simples.
 - 1.1 Demuéstrese que si la matriz compleja $\mathbf{B}$ conmuta con $\mathbf{A}$, entonces todo vector propio de $\mathbf{A}$ lo es también de $\mathbf{B}$.
 - 1.2 Demuéstrese que el conjunto F de las matrices complejas que conmutan con $\mathbf{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{n \times n}$. Aplíquese el resultado del apartado anterior para justificar que F está formado por las matrices $\mathbf{P} \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \mathbf{P}^{-1}$, donde $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ son números complejos y $\mathbf{P}$ una matriz que diagonaliza $\mathbf{A}$. Determínese, de modo razonado, la dimensión de F .
2. Hállese una base del espacio vectorial de las matrices complejas que conmutan con $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, formada por matrices de rango y traza iguales a la unidad.
3. Razónese sobre la veracidad o falsedad de la siguiente proposición: "Si $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tiene valores propios simples, entonces existe una base del espacio vectorial de las matrices complejas que conmutan con $\mathbf{A}$, formada por matrices de rango y traza iguales a la unidad, que está unívocamente determinada salvo el orden".

Solución:

1. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, con valores propios simples.
 - 1.1 Sea $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Se tiene $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{BAx} = \lambda \mathbf{Bx} \Rightarrow \mathbf{ABx} = \lambda \mathbf{Bx}$, de donde se deduce que, o bien $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$, en cuyo caso $\mathbf{x}$ es vector propio de $\mathbf{B}$, asociado al valor propio nulo, o bien $\mathbf{Bx} \neq \mathbf{0}$, en cuyo caso es un vector propio de $\mathbf{A}$. En este último caso, como los valores propios de $\mathbf{A}$ son simples y, consecuentemente sus subespacios propios asociados son de dimensión igual a 1, se tiene $\mathbf{Bx} = \mu \mathbf{x}$ ($\mu \neq 0$).
 - 1.2 $F = \{\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n} : \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{n \times n}$. En efecto,
 - i) $\mathbf{0} \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$
 - ii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{B}, \mathbf{C} \in F, \mathbf{A}(\alpha \mathbf{B} + \beta \mathbf{C}) = \alpha \mathbf{AB} + \beta \mathbf{AC} = \alpha \mathbf{BA} + \beta \mathbf{CA} = (\alpha \mathbf{B} + \beta \mathbf{C}) \mathbf{A} \Rightarrow \alpha \mathbf{B} + \beta \mathbf{C} \in F$
 Sea $\mathbf{P}$ una matriz regular (invertible) que diagonaliza $\mathbf{A}$. Por el apartado anterior, $\mathbf{P}$ diagonaliza también a $\mathbf{B} \in F$. Por tanto, $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{BP} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, de donde $\mathbf{B} = \mathbf{P} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \mathbf{P}^{-1}$.
 Recíprocamente, si $\mathbf{B} = \mathbf{P} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \mathbf{P}^{-1}$, entonces
 $\mathbf{AB} = \mathbf{P} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \mathbf{P}^{-1} =$
 $\mathbf{P} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{BA}$.

Por tanto, $\mathbf{B} \in F$.

$$\text{Finalmente, } \mathbf{B} = \mathbf{P} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^n \text{diag}(0, \dots, 0, \mu_j, 0, \dots, 0) \right) \mathbf{P}^{-1} =$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P} \text{diag}(0, \dots, 0, \mu_j, 0, \dots, 0) \mathbf{P}^{-1} = \sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{P} \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \mathbf{P}^{-1}$$

Es decir, las matrices $\mathbf{P} \text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0) \mathbf{P}^{-1}$ constituyen un sistema generador de

F . Además, son linealmente independientes, ya que $\sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{P} \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{O} \Rightarrow \mu_j = 0, j = 1, \dots, n$. Por tanto, $\dim F = n$.

2. Las matrices $\mathbf{P} \text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0) \mathbf{P}^{-1}$ son iguales a $\mathbf{P}_j (\mathbf{P}^{-1})^j$, donde $\mathbf{P}_j$ es la columna j -ésima de $\mathbf{P}$ y $(\mathbf{P}^{-1})^j$ es la fila j -ésima de $\mathbf{P}^{-1}$, las cuales tienen rango igual a 1 y $\text{traza}(\mathbf{P}_j (\mathbf{P}^{-1})^j) = (\mathbf{P}^{-1})^j \mathbf{P}_j = 1$, ya que $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{I}$.

La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene los valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, con vectores propios

asociados $(1, 0, 0)^t, (1, 1, 1)^t, (1, -1, 1)^t$, respectivamente. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Por tanto, la base del espacio vectorial de las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, for-

mada por matrices de rango y traza iguales a la unidad, es

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{es decir, } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

3. En el apartado 1.2 se ha visto que las matrices $\mathbf{P} \text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}_j (\mathbf{P}^{-1})^j$,

$j = 1, \dots, n$, constituyen una base del espacio vectorial de las matrices que conmutan con la matriz $\mathbf{A}$, y en el apartado 2 que dichas matrices son de rango y traza iguales a uno.

Para ver que dicha base está unívocamente determinada, salvo el orden de sus vectores, supóngase que $\mathbf{C}$ es una matriz de rango y traza iguales a la unidad, que conmuta con la matriz $\mathbf{A}$. Los valores propios de $\mathbf{C}$ son la unidad de multiplicidad igual a uno y el cero de multiplicidad igual a $n - 1$. Como la matriz $\mathbf{P}$ que diagonaliza a $\mathbf{A}$ también diagonaliza a $\mathbf{C}$, se tiene que $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} = \text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$ (la posición de la unidad en la diagonal dependerá de la matriz $\mathbf{C}$). Por tanto, $\mathbf{C} = \mathbf{P} \text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0) \mathbf{P}^{-1}$ es una de las matrices de la base anterior.

Álgebra I	Febrero de 2006						
Nombre:	Número de Matrícula <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>						NOTA
1 ^{er} Apellido:							
2 ^o Apellido:							

Ejercicio 1 (3 puntos): Este ejercicio consta de seis cuestiones, a las cuales hay que responder sólo en el espacio dejado al efecto. **Se recogerá transcurrida una hora desde el comienzo del examen.**

- 1.1 Escribanse, en forma binómica, los números complejos que son raíces cuartas de -1 .

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

0,5 puntos

- 1.2 Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, mónico de grado igual a $n+2$, $n > 1$, tal que p y sus $n-1$ primeras derivadas se anulan en $x=0$, su derivada enésima no se anula en $x=0$ y $p(1+i)=0$. Escribase dicho polinomio.

$$p(x) = x^{n+2} - 2x^{n+1} + 2x^n$$

0,5 puntos

- 1.3 Sean E y F espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, E de dimensión finita y $f: E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Escribase la relación que existe entre las dimensiones de E , $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

0,2 puntos

Suponiendo que $\dim E > \dim F$, indíquese, de forma razonada, si f podría ser inyectiva.

Respuesta:

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f > \dim F$$

De lo anterior se deduce que $\dim \text{Ker } f > \dim F - \dim \text{Im } f$. Como $\dim \text{Im } f \leq \dim F$, se obtiene $\dim \text{Ker } f > 0$ y, por tanto, f no es inyectiva.

0,3 puntos

- 1.4 Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$: L de ecuación $x+y+z=0$ y $M = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (3, -2, 1)\}$,
escribase una base de $L \cap M$.

$\{(2, -3, 1)\}$

0,5 puntos

- 1.5 Indíquense las proposiciones que son verdaderas y las que son falsas.

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0$, $m > n$:

- a) Si el rango de A es menor que n , entonces el sistema $Ax = b$ es incompatible.

FALSA

 0,1 puntos
- b) Si $Ax = 0$ admite una única solución, entonces $Ax = b$ es compatible y determinado.

FALSA

 0,1 puntos
- c) Si $Ax = b$ es compatible y determinado, entonces $Ax = 0$ admite una única solución.

VERDADERA

 0,1 puntos
- d) Si $Ax = 0$ admite infinitas soluciones, entonces $Ax = b$ es compatible e indeterminado.

FALSA

 0,1 puntos
- e) Si $\text{Ker}A = \{0\}$ y el rango de $(A|b)$ es igual a n , entonces $Ax = b$ es compatible y determinado.

VERDADERA

 0,1 puntos

Calificación: Cada respuesta incorrecta resta 0,1 puntos; las respuestas no contestadas no modifican la nota. La calificación total de esta cuestión será como mínimo cero puntos.

- 1.6 Demuéstrese la siguiente proposición si es verdadera o dese un contraejemplo si es falsa: "Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A , entonces para cada $p \in \mathbb{N}$, no nulo, λ^p es un valor propio de A^p ."

Respuesta:

Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A y $v \in \mathbb{C}^n$ un vector propio de A asociado a λ . Se cumple $Av = \lambda v$. Utilizando inducción completa sobre $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene que para $p = 1$ se cumple la proposición. Supóngase cierta para $p \in \mathbb{N}$, no nulo; es decir, $A^p v = \lambda^p v$. Se verifica:

$$A^{p+1}v = A(A^p v) = A(\lambda^p v) = \lambda^p Av = \lambda^p \lambda v = \lambda^{p+1}v$$

que confirma la hipótesis de inducción.

La proposición es verdadera.

0,5 puntos

Ejercicio 2 (3 puntos):

Sea $\xi = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ (por tanto, $1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ son todas las raíces quintas de la unidad).
Para cada $x \in \mathbb{C}$, se considera la matriz

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & x & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & \xi & x & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & \xi & \xi^2 & x & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & x & \xi^4 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 & x \end{pmatrix}$$

y el polinomio $P(x) = \det \mathbf{A}(x)$.

1. Calcúlese el valor de x que hace que el vector $(1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$ pertenezca al núcleo de $\mathbf{A}(x)$. Dedúzcase del resultado una raíz de P .
2. Encuéntrense los valores de x que hacen que $\mathbf{A}(x)$ tenga dos filas o columnas iguales; dedúzcanse de ahí las restantes raíces de P , y la expresión sin factorizar de dicho polinomio.
3. Calcúlense los valores de m que hacen que el polinomio $Q(x) = x^m - x$ sea divisible entre P .

Nota: Todos los apartados deberán resolverse de modo razonado.

Se recogerá esta hoja y, a lo sumo, otra adicional.

Solución:

1. Recuérdese que la suma de las raíces n -ésimas de cualquier número complejo vale 0. Como todas las filas de la matriz suman $x + 1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = x$, se tiene que

$$\mathbf{A}(x)(1, 1, 1, 1, 1, 1)^t = (x, x, x, x, x, x)^t,$$

luego

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1)^t \in \ker \mathbf{A}(x) \Leftrightarrow x = 0.$$

Puesto que el núcleo de la matriz $\mathbf{A}(0)$ no se reduce al subespacio nulo, dicha matriz no puede tener rango máximo, lo cual es equivalente a la anulación de su determinante, es decir, $P(0) = 0$. Así, concluimos que 0 es una raíz de P .

2. Es evidente que, dando a x cualquiera de los valores $1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, la matriz $\mathbf{A}(x)$ tiene dos filas consecutivas que son iguales y, consecuentemente, su determinante se anula. Así, hemos obtenido 5 raíces de P , que junto con el 0 del apartado anterior, nos dan 6 raíces distintas.

Como la x sólo aparece en los elementos diagonales, el término de mayor grado es el que se obtiene al multiplicar dichos elementos diagonales, x^6 . Luego P es un polinomio mónico de grado 6, cuya expresión será

$$P(x) = x(x-1)(x-\xi)(x-\xi^2)(x-\xi^3)(x-\xi^4).$$

El polinomio $(x-1)(x-\xi)(x-\xi^2)(x-\xi^3)(x-\xi^4)$ tiene por raíces las 5 raíces quintas de la unidad, así que es $x^5 - 1$. Concluimos que

$$P(x) = x^6 - x.$$

3. $x^m - x = x(x^{m-1} - 1)$ será divisible entre $x^5 - x = x(x^4 - 1)$ si y sólo si $x^{m-1} - 1$ lo es entre $x^4 - 1$. El primero de estos polinomios tiene por raíces las $(m-1)$ -ésimas de la unidad, es decir,

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{m-1}}\right)^k, \quad k = 0, 1, \dots, m-2,$$

mientras que las raíces del divisor son

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^l, \quad l = 0, 1, \dots, 4.$$

La condición pedida equivale, por tanto, a que las raíces quintas de la unidad (generadas por $e^{i\frac{2\pi}{5}}$) sean también raíces $(m-1)$ -ésimas; lo que a su vez equivale a que

$$e^{i\frac{2\pi}{5}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{m-1}}\right)^k \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Así pues,

$$\frac{2\pi}{5} = \frac{2k\pi}{m-1} \Leftrightarrow m-1 = 5k, \quad k \in \mathbb{Z}^+,$$

lo que equivale a decir que $m = 5k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.

Problema (4 puntos):

Sean $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas dos por dos, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $f, g : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ aplicaciones definidas, para cada $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, por

$$f(A) = AJ \quad \text{y} \quad g(A) = JAJ$$

Se pide:

1. Estudiar si f , g , $f + g$, fg , gf , $f \circ g$ y $g \circ f$ son aplicaciones lineales.
2. Hallar las matrices de las aplicaciones lineales del apartado 1 respecto de la base ordenada

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

3. Calcular los valores y vectores propios de las aplicaciones lineales del apartado 1.
4. Calcular los polinomios mínimos de las aplicaciones lineales del apartado 1.
5. Determinar las bases de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ respecto de las cuales las aplicaciones lineales anteriores tienen una matriz canónica de Jordan.

Solución:

1. Una aplicación entre espacios vectoriales es lineal si

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \text{y} \quad \forall u, v \in E \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

en nuestro caso para la función g

$$g(\lambda A + \mu B) = J(\lambda A + \mu B)J$$

por la propiedad distributiva del producto de matrices tanto por la izquierda como por la derecha

$$g(\lambda A + \mu B) = J(\lambda A + \mu B)J = J\lambda AJ + J\mu BJ$$

y por las propiedades del producto de matrices

$$g(\lambda A + \mu B) = J(\lambda A)J + J(\mu B)J = \lambda JAJ + \mu JBJ = \lambda g(A) + \mu g(B)$$

es decir g es una aplicación lineal.

Observando la demostración anterior se puede ver que la matriz J se puede sustituir por cualquier matriz dos por dos y no variar la demostración. Entonces

$$f(A) = AJ = IAJ$$

es también una aplicación lineal.

Como la suma de aplicaciones lineales es lineal y la composición de aplicaciones lineales también lo es

$$f + g, \quad f \circ g \quad y \quad g \circ f$$

son aplicaciones lineales.

Para la aplicación fg

$$fg(A) = AJJAJ = AAJ \Rightarrow fg(\lambda A) = \lambda A \lambda AJ = \lambda^2 AAJ = \lambda^2 fg(A)$$

fg no es lineal y análogamente

$$gf(A) = JAJAJ \Rightarrow gf(\lambda A) = J\lambda AJ\lambda AJ = \lambda^2 JAJAJ = \lambda^2 gf(A)$$

gf tampoco es lineal.

2.

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de f es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

la de g

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la de $f + g$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La composición de f con g es

$$f \circ g(A) = f(JAJ) = JAJJ = JA$$

$$g \circ f(A) = g(AJ) = JAJJ = JA$$

es decir los endomorfismos conmutan y su matriz es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$f(A) = \lambda A \Leftrightarrow AJ - \lambda A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A(J - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir los valores propios son los de J es decir

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

y los vectores propios son

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \mp x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 \mp x_2 = 0 \\ \mp x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 \mp x_4 = 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ son los vectores propios para } \lambda = \pm 1$$

$$g(A) = \lambda A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_4 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ x_2 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = \lambda^2 x_1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \\ x_3 = \lambda^2 x_2 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

es decir los valores propios son

$$\lambda = \pm 1$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ son los vectores propios para } \lambda = \pm 1$$

Para $f + g$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2 - 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 [(\lambda^2 - 1) + 1(-2) - 1] = \lambda^2 (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Los vectores propios en coordenadas con respecto a la base B , para $\lambda = 0$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim$$

$$\ker(f + g) = L([-1, 0, 1, 0], [0, -1, 0, 1])$$

claramente es diagonalizable.

para $\lambda = 2$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \sim$$

$$\ker(f + g - 2I) = L(1, 1, 1, 1)$$

para $\lambda = -2$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \sim$$

$$\ker(f + g + 2I) = L(-1, 1, -1, 1)$$

Para $g \circ f$

$$g \circ f(A) = \lambda A \Leftrightarrow JA - \lambda A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (J - \lambda I)A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir los valores propios son los de J es decir

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

y los vectores propios son

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \mp x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 \mp x_3 = 0 \\ \mp x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 \mp x_4 = 0 \end{array} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 1 \end{array} \right) &\text{son los vectores propios para } \lambda = \pm 1 \end{aligned}$$

4. Claramente son todas diagonalizables por tanto los valores propios tienen multiplicidad uno en su polinomios mínimos, estos son:

$$\begin{aligned}\mu_f(x) &= x^2 - 1 = \mu_g(x) = \mu_{g \circ f}(x) \\ \mu_{f+g}(x) &= x(x^2 - 4)\end{aligned}$$

5 Las bases son para f :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

y la forma canónica de Jordan es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

para g :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

y la forma canónica de Jordan es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

para $f \circ g$:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

y la forma canónica de Jordan es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

para $f + g$:

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

y la forma canónica de Jordan es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Alternativa para los apartados 3,4 y 5

Como la g es invertible se puede plantear el problema generalizado de valores propios

$$(f + \lambda g)(A) = 0$$

es decir

$$AJ + \lambda JAJ = 0 \Leftrightarrow (I + \lambda J)AJ = 0 \Rightarrow \det(I + \lambda J) = 0$$

$$\det(I + \lambda J) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

los espacios propios para

$$\lambda = \pm 1 \text{ es } \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \pm 1 \text{ es } \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ a_4 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \pm a_4 & a_1 \pm a_3 \\ \pm a_2 + a_4 & \pm a_1 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \pm 1 \quad M_\lambda = \left\{ A \in R^{2 \times 2} : A = \begin{bmatrix} a & b \\ \mp a & \mp b \end{bmatrix} \right\}$$

estos dos subespacios son invariantes con respecto a todas las aplicaciones lineales $f, g, f + g$ y $f \circ g$ ya que f y g conmutan

$$f(A) = AJ = \begin{bmatrix} a & b \\ \mp a & \mp b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ \mp b & \mp a \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} a & b \\ \mp a & \mp b \end{bmatrix} \Rightarrow b = \mu^2 b \Rightarrow \mu = \pm 1$$

Para $f, g, f + g, f \circ g$ los vectores propios son

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y las matrices con respecto a esta base son

$$[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

combinando los valores de λ y μ

$$[g]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[f + g]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[f \circ g]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Claramente todas las matrices son diagonalizables y entonces sus polinomios mínimos tienen todos sus ceros de multiplicidad uno.

Otra alternativa para los apartados 3,4 y 5

Las matrices de f , g , $f \circ g$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

claramente $L[(1 \ 0 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0 \ 0)]$ y $L[(0 \ 0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 0 \ 1)]$ son subespacios invariantes con respecto a f

$L[(1 \ 0 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 0 \ 1)]$ y $L[(0 \ 1 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1 \ 0)]$ son subespacios invariantes con respecto a g

$L[(1 \ 0 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1 \ 0)]$ y $L[(0 \ 1 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 0 \ 1)]$ son subespacios invariantes con respecto a $f \circ g$

La restricción de las aplicaciones a dichos subespacios es siempre la matriz J cuyos valores propios son 1 y -1 y vectores propios $(1 \ 1)$ y $(1 \ -1)$ entonces para f

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \quad v = (1 \ 1 \ 0 \ 0) \\ \lambda &= -1 \quad v = (1 \ -1 \ 0 \ 0) \\ \lambda &= 1 \quad v = (0 \ 0 \ 1 \ 1) \\ \lambda &= -1 \quad v = (0 \ 0 \ 1 \ -1) \end{aligned}$$

para g

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \quad v = (1 \ 0 \ 0 \ 1) \\ \lambda &= -1 \quad v = (1 \ 0 \ 0 \ -1) \\ \lambda &= 1 \quad v = (0 \ 1 \ 1 \ 0) \\ \lambda &= -1 \quad v = (0 \ 1 \ -1 \ 0) \end{aligned}$$

para $f \circ g$

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \quad v = (1 \ 0 \ 1 \ 0) \\ \lambda &= -1 \quad v = (1 \ 0 \ -1 \ 0) \\ \lambda &= 1 \quad v = (0 \ 1 \ 0 \ 1) \\ \lambda &= -1 \quad v = (0 \ 1 \ 0 \ -1) \end{aligned}$$

para $f + g$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

claramente a tener dos columnas iguales

$$\lambda = 0 \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sumando todas las columnas

$$\lambda = 2 \quad v = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

el otro valor propio es claramente -2 ya que la traza es cero y calculando el vector propio de la forma del primer método

$$\lambda = -2 \quad v = (1 \ -1 \ 1 \ -1)$$

Nota:

No se ha utilizado el carácter simétrico de todas las matrices para simplificar los cálculos, por ser tema de Álgebra II, pero esta característica permite detectar errores.

Álgebra I		Julio de 2006	
Nombre:	Número de Matrícula 	NOTA	
1 ^{er} Apellido:			
2 ^o Apellido:			

Ejercicio 1 (3 puntos): Este ejercicio consta de seis cuestiones, a las cuales hay que responder sólo en el espacio dejado al efecto. **Se recogerá transcurrida una hora desde el comienzo del examen.**

1. Calcúlese la longitud del lado del triángulo equilátero del plano complejo cuyos vértices satisfacen la ecuación

$$z^3 = (1 + 2i)^3.$$

Respuesta:

$\sqrt{15}$

2. Dado el polinomio $\frac{1}{21}x^{21} - x + 3$, demuéstrese que no puede tener ninguna raíz múltiple.

Respuesta:

Un número es raíz múltiple si y sólo es una raíz común al polinomio y a su derivada, que en este caso vale $x^{20} - 1$, y cuyas raíces son las raíces vigésimas de la unidad; si α es una cualquiera de esas raíces y evaluamos sobre ella el polinomio, obtenemos

$$\frac{1}{21}\alpha^{21} - \alpha + 3 = -\frac{20}{21}\alpha + 3 \neq 0,$$

de modo que no puede existir ninguna raíz común al polinomio y a su derivada.

3. Dada una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de un espacio vectorial real E , determínense los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ que hacen que

$$\mathcal{V} = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \dots, \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n - \alpha \mathbf{e}_1)$$

también sea base de E .

Para esos valores, calcúlese el determinante de la matriz de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$.

Respuestas:

Valores de α :

$\alpha \neq 1$

Determinante:

$1 - \alpha$

4. Razónese la veracidad o falsedad de la siguiente proposición, demostrándola o dando un contraejemplo, según proceda:

- Si E, F son espacios vectoriales, E de dimensión finita, y $f : E \rightarrow F$ es un isomorfismo, entonces $\dim E = \dim F$.

Respuesta:

La proposición es cierta. Demostración:

Utilizaremos la relación de Grassmann: $\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$.

Como f es inyectiva, $\dim(\ker f) = 0$ y por lo tanto $\dim E = \dim(\operatorname{Im} f)$. Como f es suprayectiva, $\operatorname{Im} f = F$. En consecuencia, $\dim E = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim F$.

5. Se considera un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en donde $A \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$. Indíquense las proposiciones que son verdaderas y las que son falsas:

	V	F
Si $r(A \mathbf{b}) = 5$, el sistema no puede tener solución	×	
Si $r(A \mathbf{b}) = 5$, el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única	×	
Si el sistema es compatible, entonces el determinante de la matriz $(A \mathbf{b})$ vale 0	×	
Si la solución general del sistema depende de 2 parámetros, entonces $r(A) = 3$		×
El sistema nunca puede tener solución única		×

Calificación: Respuesta correcta = +0,1; respuesta incorrecta = -0,1; en blanco = 0.

La calificación total de esta cuestión será como mínimo cero puntos.

6. Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\chi_A(\lambda) = |\lambda I - A|$. Demuéstrese la siguiente afirmación:

- Si existen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ linealmente independientes tales que $A\mathbf{u} = \lambda_0\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$, entonces $\chi_A(\lambda_0) = \chi'_A(\lambda_0) = 0$.

Respuesta:

Como existen dos vectores linealmente independientes que pertenecen a $\ker(A - \lambda_0 I)$, la dimensión de este subespacio es mayor o igual que 2; esto implica que λ_0 es un autovalor de A de multiplicidad algebraica 2 o mayor, o lo que es lo mismo, una raíz al menos doble de χ_A ; y a su vez esta condición equivale a que λ_0 anule a χ_A y a su primera derivada.

Álgebra I		Julio de 2006						
Nombre:	Número de Matrícula <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>						NOTA	
1 ^{er} Apellido:								
2 ^o Apellido:								

Ejercicio 2 (3 puntos):

Sea $p(z)$ un polinomio de coeficientes complejos. Sea $w = T(z)$ una transformación biyectiva de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Se pide:

1. En los casos particulares en los cuales T es una traslación o un giro de centro el origen, discutir si $q(w) = p(T^{-1}(w))$ es un polinomio y, en caso afirmativo, estudiar la relación entre los ceros de p y q .
2.
 - a) Encontrar la expresión de los coeficientes de un polinomio mónico cuyos ceros son los vértices de un triángulo equilátero, que tiene el centro de su circunferencia circunscrita en el origen y uno de sus vértices es real positivo.
 - b) Lo mismo que en **2.a)** para cualquier triángulo equilátero.
3.
 - a) Generalizar **2.** a cualquier polígono regular cuyos vértices cumplen la condición de **2.a)**.
 - b) Generalizar **2.** a cualquier polígono regular.

Solución:

Álgebra I		Julio de 2006	
Nombre:	Número de Matrícula 	NOTA	
1 ^{er} Apellido:			
2 ^o Apellido:			

Problema (4 puntos):

Este problema tiene como objetivo estudiar las matrices de $\mathbb{C}^{n \times n}$ que tienen como vectores propios los de una determinada base de $\mathbb{C}^n$.

1. Diagonalizar las matrices

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Qué relación existe entre los subespacios propios de ambas?

En los siguientes apartados, se considera una base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ de $\mathbb{C}^n$ y el conjunto

$$F_{\mathcal{B}} = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n} : \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \text{ son vectores propios de } \mathbf{A} \}.$$

2. Demostrar que $F_{\mathcal{B}}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{n \times n}$.
3.
 - a) Hallar la expresión general de las matrices de $F_{\mathcal{B}}$. (**Indicación:** estudiar si son diagonalizables y, en tal caso, diagonalizarlas).
 - b) A partir de ello, construir razonadamente una base de $F_{\mathcal{B}}$ formada por matrices de rango y traza iguales a 1.
4. Obtener condiciones necesarias y suficientes para que la matriz

$$P = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3 | \dots | \mathbf{u}_n]$$

pertenezca al conjunto $F_{\mathcal{B}}$, y deducir cómo es el conjunto $F_{\mathcal{B}}$ en ese caso.

Solución:

1. Los polinomios característicos son

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$\chi_N(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Los subespacios propios de M son $\mathcal{L}\{(1, 3)\}$ (asociado al autovalor $\lambda = 1$) y $\mathcal{L}\{(1, 4)^t\}$ (asociado al autovalor $\lambda = 2$).

Los subespacios propios de N son $\mathcal{L}\{(1, 3)\}$ (asociado al autovalor $\lambda = 2$) y $\mathcal{L}\{(1, 4)\}$ (asociado al autovalor $\lambda = 3$).

Es decir, los subespacios propios de ambas matrices coinciden y la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

diagonaliza simultáneamente ambas matrices:

$$P^{-1}MP = \text{diag}(1, 2)$$

$$P^{-1}NP = \text{diag}(2, 3)$$

2. Para demostrar que F_B es subespacio vectorial, debemos comprobar:

i) Que es no vacío. Efectivamente, la matriz identidad $I_n \in F_B$ puesto que todo vector no nulo (y en particular los vectores $u_1, \dots, u_n$) es vector propio de I_n .

ii) Que cualquier combinación lineal de matrices de F_B pertenece a F_B . En efecto: sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $A, B \in F_B$. Entonces,

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \begin{cases} Au_j = \lambda_j u_j \\ Bu_j = \mu_j u_j \end{cases}$$

, y:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : (\alpha A + \beta B) u_j = (\alpha \lambda_j + \beta \mu_j) u_j$$

Es decir, los vectores $(u_1, \dots, u_n)$ son vectores propios de $\alpha A + \beta B$, que es, en consecuencia, miembro de F_B .

3. a) Sea A una matriz cualquiera de F_B . A es diagonalizable por la propia definición de F_B : la familia $B = (u_1, \dots, u_n)$ es una base de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores propios de A . Así, la matriz $P = [u_1 | u_2 | u_3 | \dots | u_n]$ diagonaliza A :

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

De este modo,

$$F_B = \{P \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^{-1} : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}\}$$

b) Teniendo en cuenta el apartado anterior y el hecho de que rango y traza son invariantes por semejanza, tenemos que

$$V = (P \text{diag}(1, 0, \dots, 0) P^{-1}, P \text{diag}(0, 1, 0, \dots, 0) P^{-1}, \dots, P \text{diag}(0, \dots, 0, 1) P^{-1})$$

es una base de F_B , que es, así, un espacio vectorial de dimensión n .

4. Teniendo en cuenta los apartados anteriores:

$$P \in F_B \Leftrightarrow P = P^{-1}PP \text{ es diagonal}$$

En este caso, F_B es el conjunto de las matrices diagonales y los vectores u_j son proporcionales a los vectores de la base canónica de $\mathbb{C}^n$.

Álgebra I		Septiembre de 2006	
Nombre:	Número de Matrícula 	NOTA	
1 ^{er} Apellido:			
2 ^o Apellido:			

Ejercicio 1 (3 puntos):

Este ejercicio consta de seis cuestiones, a las cuales hay que responder sólo en el espacio dejado al efecto. **Se recogerá transcurrida una hora desde el comienzo del examen.**

1. Hallar el área de la región compleja formada por los números z que verifican **simultáneamente** todas las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} |z| &\leq 1 \\ |\operatorname{Re} z| &\leq |\operatorname{Im} z| \\ \operatorname{Im} z &\leq 0 \end{aligned}$$

Respuesta: $\frac{\pi}{4}$

2. Calcular el determinante de la matriz de orden n

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta: $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

3. Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. Demuéstrese si es verdadera o dese un contraejemplo si es falsa la proposición siguiente:

$$(\dim E > \dim F) \Rightarrow f \text{ no es inyectiva.}$$

Respuesta:

Si el antecedente de la proposición es cierto, entonces:

$$\dim(\ker f) = \dim E - \dim(\operatorname{Im} f) \geq \dim E - \dim F > 0,$$

y en consecuencia f no es inyectiva (en la desigualdad se ha empleado que $\operatorname{Im} f \subset F$). En conclusión, la proposición es verdadera.

4. Expresar en forma binómica todas las raíces complejas del polinomio $p(z) = z^5 - z^{25}$, indicando sus multiplicidades.

Respuesta: Las raíces del polinomio p son $z = 0$ (quíntuple) y

$$z = \cos\left(\frac{\Pi k}{10}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi k}{10}\right), \quad k = 0, \dots, 19,$$

todas ellas simples.

5. Sea g un endomorfismo en un espacio vectorial E de dimensión finita. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

	V	F
El núcleo de g puede estar contenido en la imagen de g .	X	
La imagen de g puede ser el conjunto vacío.		X
La imagen de g puede ser idéntica al núcleo de g .	X	
La dimensión del núcleo de g puede ser menor que la dimensión de la imagen de g .	X	
La dimensión del núcleo de g puede ser mayor que la dimensión de la imagen de g .	X	

Puntuación: 0,1 puntos cada respuesta correcta, -0,1 puntos cada respuesta incorrecta y 0 puntos cada respuesta en blanco.

6. Sean $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Denotamos por $\chi_{\mathbf{A}}$ el polinomio característico de $\mathbf{A}$. Expresar el polinomio característico de la matriz $\alpha \mathbf{A}$ en función de α y de $\chi_{\mathbf{A}}$.

Respuesta:

$$\chi_{\alpha \mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det(\alpha^{-1} \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \alpha^n \chi_{\mathbf{A}}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

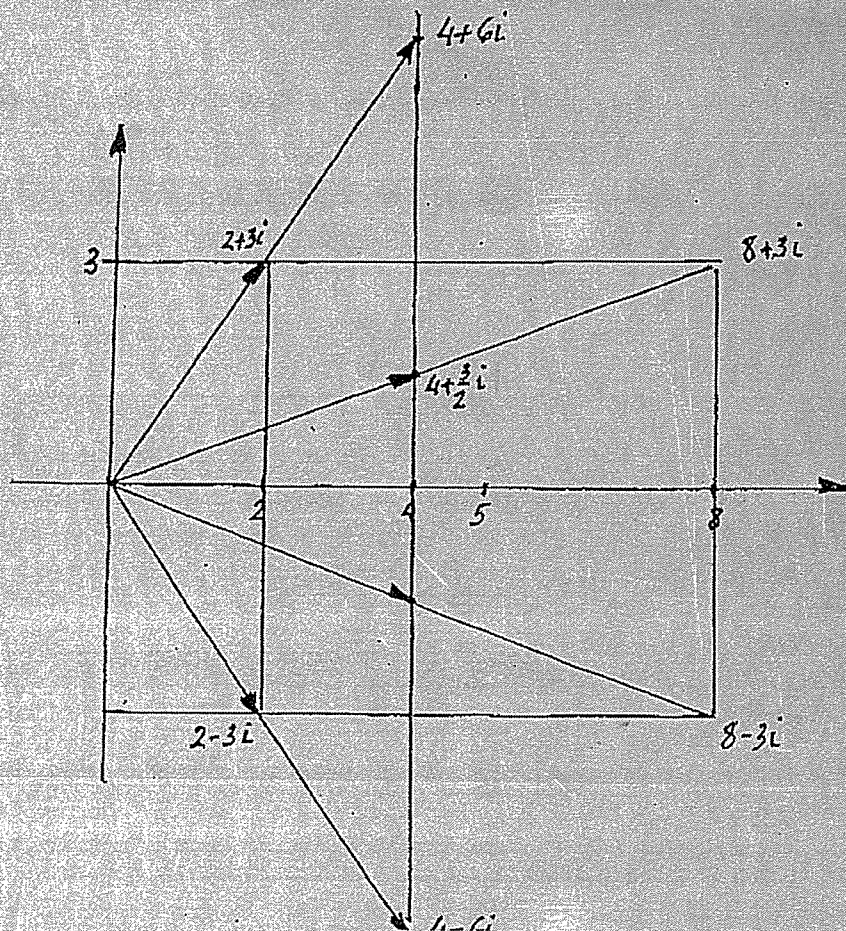
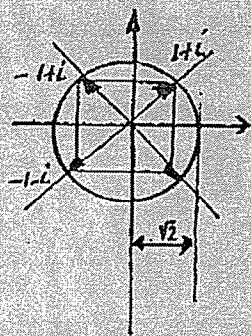
Álgebra I		Septiembre de 2006					
Nombre:	Número de Matrícula <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>					NOTA	
1 ^{er} Apellido:							
2 ^o Apellido:							

Ejercicio 2 (3 puntos):

- Hállense las raíces del polinomio $x^4 + 4$, así como su factorización en el producto de dos polinomios reales de segundo grado.
- Sea $p(x) = (x - 5)^4 + 324$. Determinéense los dos polinomios reales de segundo grado, $q_1(x)$ y $q_2(x)$, tales que $p(x) = q_1(x) q_2(x)$, de modo que los módulos de las raíces de $q_1(x)$ sean menores que los de las raíces de $q_2(x)$.
- Sea k un parámetro real mayor que la unidad. Determinéense el polinomio $r_1(x)$ cuyas raíces son las de $q_1(x)$ multiplicadas por k . Determinéense el polinomio $r_2(x)$ cuyas raíces son las de $q_2(x)$ divididas por k .
- Para $k = 2$, calcúlense las raíces del polinomio $s(x) = r_1(x)r_2(x)$.

Se entregará esta hoja, y a lo sumo, una adicional.

Solución:



1. Si hallamos las raíces de $x^4 + 4a^4 = 0$, habremos resuelto el primer apartado al dar a a el valor 1. Procedamos:
 $x^4 + 4a^4 = 0 \Rightarrow x^4 = -4a^4$. Se trata por tanto de hallar las raíces cuartas de $-4a^4$, número cuyo módulo es $4a^4$ y cuyo argumento es $\pi + 2k\pi$. Hallaremos la raíz principal (primer cuadrante) y deduciremos las otras tres de modo que las afijos formen un cuadrado centrado en el origen.
 El módulo de las raíces será: $\sqrt[4]{4a^4} = a\sqrt[4]{4} = a\sqrt{2}$
 El argumento de la raíz principal será: $\frac{\pi}{4}$

La raíz principal es pues: $a\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = a(1+i)$

Para $a=1$ las cuatro raíces serán

$$1+i, 1-i, -1+i, -1-i$$

Como los polinomios pedidos son reales asociaremos cada raíz con su conjugada y serán

$$(x-1+i)(x-1-i) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

$$(x+1+i)(x+1-i) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

A este mismo resultado se podría haber llegado así:

$$x^4 + 4a^4 = x^4 + 4a^4 + 4a^2x^2 - 4a^2x^2 = (x^2 + 2a^2)^2 - (2ax)^2 =$$

$$(x^2 + 2ax + 2a^2)(x^2 - 2ax + 2a^2) \text{ que para } a=1 \text{ es igual a } (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

$$2. (x-5)^4 + 324 = (x-5)^4 + 4 \cdot 3^4$$

En virtud de lo expuesto en el apartado 1 la raíz principal de $t^4 + 4 \cdot 3^4$ es $3(1+i)$. Las 4 raíces son, por tanto, $\pm 3 \pm 3i$ y las de $(x-5)^4 + 324$ serán entonces $5 \pm 3 \pm 3i$.

$$8+3i, 8-3i, 2+3i, 2-3i.$$

Son de mayor módulo las dos primeras, por lo que:

$$q_1(x) = (x-2-3i)(x-2+3i) = (x-2)^2 + 9 = x^2 - 4x + 13$$

$$q_2(x) = (x-8-3i)(x-8+3i) = (x-8)^2 + 9 = x^2 - 16x + 73$$

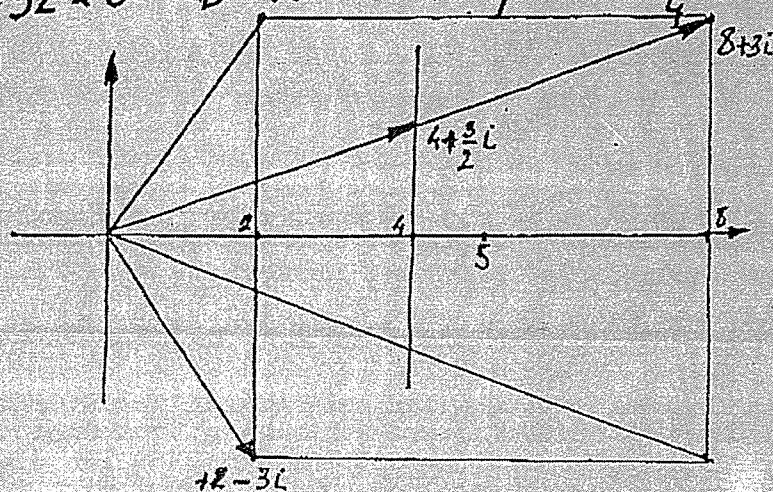
$$p(x) = (x-5)^4 + 324 = q_1(x) \cdot q_2(x) = (x^2 - 4x + 13)(x^2 - 16x + 73)$$

$$3. r_1(x) = (x-2K-3Ki)(x-2K+3Ki) = (x-2K)^2 + 9K^2 = x^2 - 4Kx + 13K^2$$

$$r_2(x) = \left(x - \frac{8}{K} - \frac{3}{K}i\right)\left(x - \frac{8}{K} + \frac{3}{K}i\right) = \left(x - \frac{8}{K}\right)^2 + \frac{9}{K^2} = x^2 - \frac{16}{K}x + \frac{73}{K^2}$$

$$4. s(x) = (x^2 - 8x + 52)\left(x^2 - 8x + \frac{73}{4}\right)$$

$$x^2 - 8x + 52 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm 6i; \quad x^2 - 8x + \frac{73}{4} = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \frac{3}{2}i$$



Álgebra I		Septiembre de 2006	
Nombre:		Número de Matrícula	NOTA
1 ^{er} Apellido:			
2 ^o Apellido:			

Problema (4 puntos):

1. a) Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcúlense sus valores y vectores propios. Si λ es un valor propio no real de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, es un vector propio de $\mathbf{A}$, asociado a λ , demuéstrese que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.
 - b) Determínese la ecuación implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, $F = L[\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}]$, y compruébese que dicho subespacio es $\mathbf{A}$ -invariante (es decir, para cada $\mathbf{x} \in F$ se cumple que $\mathbf{Ax} \in F$).
 - c) Hállese la matriz del endomorfismo $T : F \rightarrow F$, definido para cada $\mathbf{x} \in F$ por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, respecto de la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de F . Calcúlense los valores propios de dicha matriz.
2. Sea $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, uno de cuyos valores propios es real y los otros dos son complejos conjugados no reales.
 - a) Demuéstrese la existencia de un subespacio G de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{B}$ -invariante, de dimensión igual a dos.
 - b) Dado el endomorfismo $S : G \rightarrow G$, definido para cada $\mathbf{x} \in G$ por $S(\mathbf{x}) = \mathbf{Bx}$, relaciónense los valores propios de $\mathbf{B}$ con los valores propios de la matriz de S respecto de una base cualquiera de G .

Solución:

1. a) Su polinomio característico es $\lambda^3 - 2\lambda + 4$, que por Ruffini se factoriza fácilmente como $(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$ luego sus valores propios resultan ser $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$. Para cada autovalor λ , los autovectores asociados son los que forman el subespacio

$$\ker \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -4 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \{(x, y, z)^t : y = \lambda x, z = \lambda y\} = L[(1, \lambda, \lambda^2)^t].$$

Así pues

- los autovectores asociados a $\lambda_1 = -2$ son los proporcionales a $(1, -2, 4)^t$,
- los autovectores asociados a $\lambda_2 = 1 + i$ son los proporcionales a $(1, 1 + i, 2i)^t$,
- los autovectores asociados a $\lambda_3 = 1 - i$ son los proporcionales a $(1, 1 - i, -2i)^t$.

Para la segunda parte de este apartado, tomamos un vector propio asociado a un autovalor no real; por ejemplo:

$$(1, 1 + i, 2i)^t = (1, 1, 0)^t + i(0, 1, 2)^t = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

donde $\mathbf{u} = (1, 1, 0)^t$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2)^t$ son, siguiendo el enunciado, los vectores de $\mathbb{R}^3$ que corresponden a su parte real y su parte imaginaria, respectivamente. Se comprueba que estos dos vectores son independientes puesto que no son proporcionales. En caso de elegir un autovector asociado al autovalor conjugado, se tiene que $(1, 1 - i, -2i)^t = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ (puesto que a autovalores conjugados de una matriz real, corresponden autovectores conjugados), y estos mismos $\mathbf{u}$ y $-\mathbf{v}$ siguen siendo independientes.

- b) Un vector $(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$ pertenece a $F = L[\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}] = L[\{(1, 1, 0)^t, (0, 1, 2)^t\}]$ si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

luego ésta es la ecuación implícita que se pedía del subespacio F .

Tomemos ahora un vector genérico $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t \in F$ y veamos qué ocurre con su imagen $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

luego $2y_1 - 2y_2 + y_3 = 2x_2 - 2x_3 + (-4x_1 + 2x_2) = -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = (-2)(2x_1 - 2x_2 + x_3) = 0$. Es decir, si $\mathbf{x}$ satisface la ecuación de F , entonces $\mathbf{y}$ también la satisface, luego $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pertenece a F .

Otra forma de demostrarlo es comprobar que $\mathbf{A}\mathbf{u} = (1, 0, -2)^t$ y $\mathbf{A}\mathbf{v} = (1, 2, 2)^t$ son dos vectores de F .

- c) Se observa que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \\ \mathbf{A}\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

luego, por definición de matriz de una aplicación lineal T referida a la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, la matriz pedida es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Además, al calcular sus valores propios, éstos resultan ser $1 \pm i$.

2. a) Los autovalores de la matriz $\mathbf{B}$ son uno real, y los dos complejos no reales deben ser conjugados ($\lambda = a + bi$ y $\lambda^* = a - bi$), ya que $\mathbf{B}$ es real. Además, de nuevo por ser $\mathbf{B}$ real, a autovalores conjugados corresponden autovectores conjugados: si $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ está asociado a λ , entonces $\mathbf{w}^* = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ está asociado a λ^* .

Proponemos por tanto como subespacio a $G = L[\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}]$ ya que es subespacio de $\mathbb{R}^3$ (no de $\mathbb{C}^3$); falta demostrar dos cosas: que es $\mathbf{B}$ -invariante, y de dimensión 2.

- Veamos primero que es **B**-invariante: basta demostrar para ello que **Bu**, **Bv** siguen siendo vectores que son combinación lineal de **u**, **v**. Partiendo del hecho de que **w** es autovector, en la igualdad **Bw** = $\lambda \mathbf{w}$ identificamos partes reales por un lado y partes imaginarias por otro:

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) = (a+bi)(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) = (a\mathbf{u}-b\mathbf{v}) + i(b\mathbf{u}+a\mathbf{v})$$

se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Bu} = a\mathbf{u} - b\mathbf{v} \\ \mathbf{Bv} = b\mathbf{u} + a\mathbf{v} \end{array} \right\} \quad (*)$$

como se quería demostrar.

- Para la cuestión de la dimensión, demostraremos la independencia lineal de **u**, **v**: sabemos que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ pues **w** no es un vector de $\mathbb{R}^3$, ya que, si lo fuera, en la igualdad **Bw** = $\lambda \mathbf{w}$ el primer miembro sería un vector de componentes reales y el de la derecha no. Pues bien, si fuera $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ para algún α real, entonces $\mathbf{w} = (1 + \alpha i) \mathbf{v}$ sería autovector, y como $1 + \alpha i \neq 0$ (porque $\alpha \neq i$ pues α es real), entonces también sería autovector asociado a λ el vector **v**, que es real, y así se llega a contradicción. Por tanto, deben ser **u**, **v** independientes.

Otra demostración posible de la independencia lineal de **u**, **v** consiste en expresarlos en función de **w** y **w***; estos dos últimos vectores se sabe que son linealmente independientes puesto que son autovectores asociados a autovalores distintos ($\lambda \neq \lambda^*$ al ser λ no real). Partiendo, por tanto de una combinación lineal nula $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \alpha \left(\frac{\mathbf{w} + \mathbf{w}^*}{2} \right) + \beta \left(\frac{\mathbf{w} - \mathbf{w}^*}{2i} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i} \right) \mathbf{w} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i} \right) \mathbf{w}^* \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

(donde se ha utilizado que **w** y **w*** son independientes); por tanto, se ha deducido que los coeficientes α y β deben ser nulos, lo que demuestra que **u** y **v** son linealmente independientes.

- b) El endomorfismo **S** actúa igual que **B** pero **restringido a G**. Como base de **G** podemos considerar (**u**, **v**), y además las ecuaciones (??) nos dan sus imágenes por **B** referidas a la misma base (**u**, **v**). La matriz del endomorfismo respecto a dicha base se construye simplemente colocando por columnas las coordenadas de **Bu**, **Bv** respecto a (**u**, **v**), así que la matriz en cuestión es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

y calculando sus valores propios éstos resultan ser $a \pm bi$ (es decir, λ y su conjugado).

OBSERVACIÓN ADICIONAL: Este último resultado podía intuirse, ya que, **entendido como subespacio de $\mathbb{C}^3$** , $G = L[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = L[\mathbf{w}, \mathbf{w}^*] = L[\mathbf{w}] \oplus L[\mathbf{w}^*]$ que es suma directa de dos subespacios propios de la matriz **B** (asociados a λ y λ^*) y por ello es un subespacio **B**-invariante; además el endomorfismo **B** restringido a **G** (o sea **S**) por ello sólo tiene como valores propios λ y λ^* .

Examen de Álgebra I		Febrero de 2007					
Nombre:	Número de Matrícula <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>						NOTA
1 ^{er} Apellido:							
2 ^o Apellido:							

Cuestiones 1, 2 y 3 (3 puntos). Respóndase exclusivamente en los espacios dejados al efecto en esta hoja.

1. a) Escribanse el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz B “compañera” de dicho polinomio. (0,5 puntos)
- b) Determinense, de modo razonado, los valores reales de a para los cuales A y B son semejantes. (0,5 puntos)

Respuestas: a)

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - a) = \lambda^3 - (5 + a)\lambda^2 + (4 + 5a)\lambda - 4a$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4a & -(4 + 5a) & 5 + a \end{pmatrix}$$

b) Si $a \notin \{1, 4\}$, A es diagonalizable, y, como $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$, también lo es B . Al ser A y B semejantes a la matriz $\text{diag}(1, 4, a)$, son semejantes entre sí.

Si $a = 1$, el valor propio 1 es doble. Como el rango de $A - I_3$ es igual a 1, la dimensión del subespacio propio asociado a 1 es igual a 2, con lo que A , para $a = 1$, es diagonalizable. Si $a = 4$, el valor propio 4 es doble. Como el rango de $A - 4I_3$ es igual a 1, la dimensión del subespacio propio asociado a 4 es igual a 2, con lo que A , para $a = 4$, es diagonalizable. Sin embargo, la matriz B es diagonalizable si y sólo si sus valores propios son simples. Por tanto, tanto para $a = 1$ como para $a = 4$, B no es diagonalizable. Como consecuencia, no es semejante a A , ya que si fuera semejante a A , diagonalizable, también lo sería B .

Finalmente, A y B son semejantes si y sólo si a real es distinto de 1 y de 4.

Nota: Un resultado teórico afirma que la matriz B , “compañera” del polinomio característico de una matriz A , es semejante a esta última si y sólo si los polinomios característico y mínimo de A coinciden. Este resultado lleva inmediatamente a la solución anterior.

2. n es un número entero mayor o igual que 2. Escribanse:

- Las raíces complejas del polinomio $(z+1)^n - 1$. (0,3 puntos)
- Los números complejos que verifican simultaneamente las ecuaciones $|z| = 1$ y $|z+1| = 1$. (0,3 puntos)
- Los valores de n que hacen que el polinomio del apartado a) y el polinomio $z^n - 1$ tengan raíces comunes, indicando cuáles son. (0,4 puntos)

Respuestas:

$$a) \quad z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1 = \cos \frac{2k\pi}{n} - 1 + i \sin \frac{2k\pi}{n} = 2i \sin \frac{k\pi}{n} e^{\frac{k\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$b) \quad e^{\frac{\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{-\frac{\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c) \quad n = 6; \text{ raíces comunes: } -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^5$,

$$L \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad M : x_1 = \lambda + \mu, x_2 = \lambda, x_3 = \lambda + \mu, x_4 = \lambda - \mu, x_5 = \lambda \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

determinense, de modo razonado, una base del subespacio $L \cap M$ y la ecuación cartesiana de $L + M$. (1 punto)

Respuesta:

Como $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in L \cap M$ pertenece a L y a M , se tiene $0 = x_1 + x_2 = \lambda + \mu + \lambda = 2\lambda + \mu$ y $0 = x_2 + x_3 = \lambda + \lambda + \mu = 2\lambda + \mu$. Por tanto, $\mu = -2\lambda$, que se sustituye en las ecuaciones paramétricas de M .

$x_1 = \lambda + \mu = -\lambda, x_2 = \lambda, x_3 = \lambda + \mu = -\lambda, x_4 = \lambda - \mu = 3\lambda, x_5 = \lambda$ son las ecuaciones paramétricas de $L \cap M$. Como consecuencia, una base de $L \cap M$ es $\{(-1, 1, -1, 3, 1)\}$.

Un sistema generador de $L + M$ es la unión de las bases de L y de M . Pasando L a paramétricas se tiene: $x_1 = \delta, x_2 = -\delta, x_3 = \delta, x_4 = \gamma, x_5 = \varepsilon$; por tanto, una base de L es:

$\{(1, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$. Una base de M es $\{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, -1, 0)\}$. Cada vector $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $L + M$ es combinación lineal de los vectores del sistema generador indicado. Aplicando transformaciones elementales de filas a la matriz de los coeficientes del sistema lineal que se obtiene, orlada a la derecha con el vector de términos independientes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & x_5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

se obtiene la ecuación cartesiana de $L + M$: $x_1 - x_3 = 0$.

Examen de Álgebra I.		Febrero de 2007.				
Nombre:	Número de	NOTA				
1 ^{er} Apellido:	Matrícula					
2 ^o Apellido:	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table>					

Cuestiones 4, 5 y 6. (3 puntos). Respóndase exclusivamente en los espacios dejados al efecto en esta hoja.

4.- Sean $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ una base de $\mathbb{C}^3$ y $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tal que

$$A\mathbf{u} = i\mathbf{v}; \quad A\mathbf{v} = -i\mathbf{u}; \quad A\mathbf{w} = -\mathbf{w}.$$

(a) Hallar una base de $\mathbb{C}^3$ formada por vectores propios de A . (0,5 puntos).

Respuesta: Es trivial ver $A(u + iv) = u + iv$; $A(u - iv) = -(u - iv)$; $A(w) = -w$; luego $B = (u + iv, u - iv, w)$ es una base de $\mathbb{C}^3$ formada por vectores propios de A (y en consecuencia la matriz A es diagonalizable).

(b) Hallar razonadamente el polinomio mínimo $\mu_A(\lambda)$ y el característico $\chi_A(\lambda)$ de A .

(0,5 puntos). **Respuesta:** Del apartado anterior se deduce que el autovalor $\lambda = -1$ tiene multiplicidad 2 y que la matriz A es diagonalizable, y en conclusión $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$ y $\mu_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$.

5.- Consideramos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}_4[z] &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ p &\longmapsto (p(1), p(i)) \end{aligned}$$

(a) Hallar una base de $\ker f$. (Nota: expresar los polinomios **factorizados**). (0,5 puntos).

Respuesta: $B = ((z - 1)(z - i), z(z - 1)(z - i), z^2(z - 1)(z - i))$

(b) Descomponer el polinomio $q(z) = z^4$ como suma de un polinomio $q_1(z) \in \ker f$ y otro polinomio $q_2(z) \in \mathbb{C}_1[z]$. (0,5 puntos).

Respuesta: $q_1(z) = z^4 - 1 = (z - 1)(z - i)(z + 1)(z + i); q_2(z) = 1.$

- 6.- Sea $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un endomorfismo. Sean $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ vectores prefijados, con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Consideramos las dos ecuaciones siguientes, en las incógnitas $z_1, \dots, z_n$:

$$z_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + z_n f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{b} \quad (1)$$

$$z_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + z_n f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0} \quad (2)$$

La intención de esta cuestión es estudiar la relación existente entre las soluciones de la ecuación (1), las soluciones de la ecuación (2), y el endomorfismo f .

- (a) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

	V	F
Si (1) tiene más de una solución, entonces (2) tiene infinitas soluciones.	X	
Si (2) tiene más de una solución, entonces (1) tiene infinitas soluciones.		X
Si (1) tiene solución única, entonces la familia $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es libre.	X	
Si (1) tiene solución única, entonces f es inyectiva.	X	
Si (1) tiene solución única, entonces f es suprayectiva.	X	

Colocar una cruz en la casilla correspondiente. El criterio de calificación es: respuesta correcta = +0,1; respuesta en blanco = 0; **respuesta errónea** = -0,1. Las respuestas erróneas penalizan solamente dentro del apartado (a).

- (b) Demostrar la tercera afirmación si es cierta o dar un contraejemplo de ella si es falsa. (0.5 puntos).

Respuesta:

Es verdadera. Si la solución de (1) es única, entonces (2) solamente admite la solución trivial $\mathbf{z} = (0, \dots, 0)$. Así, la familia $\{f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}$ es libre. La familia $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ necesariamente ha de ser también libre, pues si fuera ligada existiría una n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ no nula tal que $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. Pero entonces, se verificaría $\alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_n f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}$, y la familia $\{f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}$ sería ligada.

Álgebra I		Febrero de 2007	
Nombre:	Número de	NOTA	
1 ^{er} Apellido:	Matrícula		
2 ^o Apellido:			

Problema (4 puntos):

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular una base de $\text{Im } A$ cuyo primer vector sea $(1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$, y otra de $\ker A$. [0'8 puntos]
2. Razonar si los dos subespacios anteriores son o no suplementarios en $\mathbb{R}^6$. [0'4 puntos]

Se considera ahora el endomorfismo $f : \text{Im } A \rightarrow \text{Im } A$, definido por

$$\forall \mathbf{x} \in \text{Im } A, f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

3. Calcular la matriz B de f respecto a la base de $\text{Im } A$ encontrada en el apartado 1. [0'8 puntos]
4. Construir una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP$ sea igual a $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & B \end{pmatrix}$. [0'5 puntos]
5. Diagonalizar, si es posible, la matriz B , calculando la matriz de paso. [0'8 puntos]
6. Utilizar los resultados de los apartados anteriores para diagonalizar la matriz A . [0'7 puntos]

Nota: La matriz de paso puede dejarse indicada como producto de dos matrices, sin necesidad de efectuar dicho producto.

Solución:

1. Llamando $\mathbf{a}_1$ a la primera columna de A y $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$, observamos que

$$A = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 + \mathbf{u} | \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{u} | \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{u} | \mathbf{a}_1 + 4\mathbf{u} | \mathbf{a}_1 + 5\mathbf{u}),$$

lo cual nos muestra que $\dim(\text{Im } A) = r(A) = 2$, siendo, por ejemplo,

$$\mathcal{V} = (\mathbf{u}, \mathbf{a}_1) = ((1, 1, 1, 1, 1, 1)^t, (1, -1, 2, -2, 3, -3)^t)$$

una base de $\text{Im } A$.

Como $\dim(\ker A) = 6 - 2 = 4$, el núcleo estará determinado por dos ecuaciones cartesianas independientes; por ejemplo, las determinadas por las dos primeras filas de A .

Podemos también obtener ecuaciones más sencillas: si a la tercera fila le restamos la primera, obtenemos

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0,$$

y si sumamos las dos primeras filas y dividimos el resultado entre 2, obtenemos

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 0,$$

ecuaciones que nos permiten encontrar fácilmente cuatro vectores linealmente independientes; por ejemplo, una base de $\ker A$ es:

$$((1, -2, 1, 0, 0, 0)^t, (2, -3, 0, 1, 0, 0)^t, (3, -4, 0, 0, 1, 0)^t, (4, -5, 0, 0, 0, 1)^t).$$

Otra forma: Como la columna j -ésima de A se obtiene sumándole a la primera $j - 1$ veces el vector $(1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$, podemos factorizar la matriz como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

constituyendo las columnas del primer factor una base de $\text{Im } A$, y determinando las filas del segundo factor unas ecuaciones cartesianas de $\ker A$.

2. Puesto que $\dim(\ker A) + \dim(\text{Im } A) = \dim(\mathbb{R}^6)$, basta comprobar si es $\ker A \cap \text{Im } A = \{0\}$. Para ello, tomamos un vector genérico de $\text{Im } A$ y forzamos a que pertenezca a $\ker A$. Imponemos, pues, las ecuaciones de $\ker A$ al vector

$$(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha + 2\beta, \alpha - 2\beta, \alpha + 3\beta, \alpha - 3\beta),$$

lo que nos da que $42\alpha - 6\beta = 0$, $9\alpha - 6\beta = 0$, lo cual implica que $\alpha = \beta = 0$.

Así pues, $\ker A \cap \text{Im } A = \{0\}$, lo que garantiza que dichos subespacios son suplementarios en $\mathbb{R}^6$.

3. Transformamos mediante A los dos vectores de la base $\mathcal{V}$:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ \vdots \end{pmatrix}; \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(obsérvese que, puesto que $\dim(\text{Im } A) = 2$, para dar las coordenadas de estos vectores respecto a los de la base de $\text{Im } A$, nos basta conocer dos componentes). Calculamos, pues, las coordenadas de estos vectores respecto a $\mathcal{V}$:

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 15, y = 6 \Rightarrow \text{La primera columna de } B \text{ es } \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -6, y = 0 \Rightarrow \text{La segunda columna de } B \text{ es } \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Como $\ker A$ e $\text{Im } A$ son subespacios suplementarios en $\mathbb{R}^6$, la reunión de sus bases constituirá una base de $\mathbb{R}^6$. Si tomamos, por tanto, la base de $\mathbb{R}^6$

$$\mathcal{W} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{u}, \mathbf{a}_1),$$

en donde los cuatro primeros vectores constituyen la base de $\ker A$ y los dos últimos la de $\text{Im } A$ (ambas calculadas en el apartado 1), la matriz respecto a $\mathcal{W}$ del endomorfismo de $\mathbb{R}^6$ determinado por A , tendrá nulas sus cuatro primeras columnas, mientras que las dos últimas estarán determinadas por

$$A\mathbf{u} = 15\mathbf{u} + 6\mathbf{a}_1, \quad A\mathbf{a}_1 = -6\mathbf{u}.$$

Es decir, que la matriz del endomorfismo en esa base es $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & B \end{pmatrix}$.

Así pues, si construimos la matriz P cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{W}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

obtenemos que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & B \end{pmatrix}$.

5.

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 15 - \lambda & -6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda - 36 = (\lambda - 12)(\lambda - 3).$$

$$\ker(B - 3I) = \ker \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\ker(B - 12I) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, si $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q^{-1}BQ = \text{diag}(3, 12)$.

6. Por el apartado anterior,

$$\begin{pmatrix} I_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \text{diag}(3, 12) \end{pmatrix},$$

es decir, tomando $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene que $\tilde{Q}^{-1}(P^{-1}AP)\tilde{Q} =$

$\text{diag}(0, 0, 0, 0, 3, 12)$, o lo que es lo mismo:

$$(\tilde{P}\tilde{Q})^{-1}A(\tilde{P}\tilde{Q}) = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 3, 12).$$

Álgebra I	Junio de 2007	
Nombre:	Número de Matrícula 	NOTA
1 ^{er} Apellido:		
2 ^o Apellido:		

Cuestiones 1, 2 y 3 (3 puntos). Respóndase exclusivamente en los espacios dejados al efecto en esta hoja.

1. a) Escribanse las raíces decimoquintas de -1 .
- b) Calcúlese la suma de las raíces anteriores que tienen parte real positiva, expresando el resultado como cociente de senos de ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{15}$.

Respuesta:

a) $e^{\frac{1+2k}{15}\pi i} = \cos \frac{1+2k}{15}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1+2k}{15}\pi, k = 0, 1, \dots, 14$ (0,5 puntos)

b) Las raíces anteriores que tienen parte real positiva vienen determinadas por $k = 0, 1, 2, 3$ ($0 < \frac{1+2k}{15}\pi < \frac{\pi}{2}$) y por $k = 11, 12, 13, 14$ ($\frac{3\pi}{2} < \frac{1+2k}{15}\pi < 2\pi$), siendo estas últimas conjugadas de las primeras.

La suma de las primeras es igual a

$$\frac{e^{\frac{7}{15}\pi i} e^{\frac{2}{15}\pi i} - e^{\frac{1}{15}\pi i}}{e^{\frac{2}{15}\pi i} - 1} = \frac{e^{\frac{8}{15}\pi i} - 1}{e^{\frac{2}{15}\pi i} - 1} e^{\frac{1}{15}\pi i} = \frac{e^{\frac{4}{15}\pi i} - e^{-\frac{4}{15}\pi i}}{e^{\frac{1}{15}\pi i} - e^{-\frac{1}{15}\pi i}} e^{\frac{4}{15}\pi i} = \frac{\operatorname{sen} \frac{4}{15}\pi}{\operatorname{sen} \frac{1}{15}\pi} \left(\cos \frac{4}{15}\pi + i \operatorname{sen} \frac{4}{15}\pi \right)$$

Como el resto de las raíces son conjugadas de las primeras, se tiene que la suma pedida es igual a

$$2 \frac{\operatorname{sen} \frac{4}{15}\pi}{\operatorname{sen} \frac{1}{15}\pi} \cos \frac{4}{15}\pi = \frac{\operatorname{sen} \frac{8}{15}\pi}{\operatorname{sen} \frac{1}{15}\pi}$$

(0,5 puntos)

2. Demuéstrese la siguiente proposición si es verdadera o dese un contraejemplo si es falsa.

“El producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica si y sólo si las matrices factores conmutan.”

Respuesta:

Sean A y B dos matrices simétricas; es decir, $A^t = A$ y $B^t = B$.

Si AB es simétrica, entonces $AB = (AB)^t = B^t A^t = BA$. (0,5 puntos)

Si A y B conmutan, entonces $AB = BA = B^t A^t = (AB)^t$.

Por tanto, la proposición es verdadera. (0,5 puntos)

3. a) Escribanse los polinomios elementales de interpolación de Lagrange en los puntos $-1, 0$ y 1 .
- b) Determinése la base del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios reales de grado menor o igual a 2, en la que las coordenadas de cada polinomio $p(x)$ son $p(-1), p(0)$ y $p(1)$.

Respuesta:

a) $L_1(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$, $L_2(x) = -(x+1)(x-1)$, $L_3(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$ (0,5 puntos)

b) Se sabe que, para cada polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$

$$p(x) = p(-1)L_1(x) + p(0)L_2(x) + p(1)L_3(x)$$

Por tanto, la base pedida es $\{L_1(x), L_2(x), L_3(x)\}$.

Por otra parte, puede demostrarse que dicha base está unívocamente determinada.

En efecto, sea $(q_1(x), q_2(x), q_3(x))$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ que cumpla las condiciones del enunciado. Es decir,

$$p(x) = p(-1)q_1(x) + p(0)q_2(x) + p(1)q_3(x)$$

En particular, se cumple $\begin{cases} 1 = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x) \\ x = -q_1(x) + q_3(x) \\ x^2 = q_1(x) + q_3(x) \end{cases}$; de donde se deduce

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ q_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

cuya matriz de coeficientes es de Vandermonde, con determinante no nulo, al ser los puntos distintos dos a dos. Por tanto:

$$\begin{pmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ q_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, $q_1(x), q_2(x)$ y $q_3(x)$ están unívocamente determinados. Por consiguiente, han de coincidir con los polinomios elementales de interpolación de Lagrange.

Obsérvese que el razonamiento final puede generalizarse a un conjunto de puntos $x_1, x_1, \dots, x_n$, distintos dos a dos, cuando se toma $\mathbb{R}_n[x]$. (0,5 puntos)

Álgebra I	Junio de 2007	
Nombre:	Número de Matrícula 	NOTA
1 ^{er} Apellido:		
2 ^o Apellido:		

Cuestiones 4, 5 y 6 (3 puntos). Respóndase exclusivamente en los espacios dejados al efecto en esta hoja.

4. Escribanse el polinomio característico y los valores propios, indicando sus multiplicidades, de la matriz $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y estúdiense si dicha matriz es diagonalizable.

Respuesta:

El polinomio característico es $\lambda^3 - 3\lambda - 2$. (0,3 puntos). Los valores propios son $\lambda_1 = -1$ doble y $\lambda_1 = 2$ simple. (0,2 puntos)

El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = -1$ tiene dimensión igual a $3 - \text{rango de } \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$. El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 2$ tiene dimensión igual a 1, por ser dicho valor propio simple. Al tener los subespacios propios dimensiones iguales a las multiplicidades de sus respectivos valores propios, la matriz es diagonalizable; es decir, semejante a $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (0,5 puntos)

5. Determínese la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, de rango igual a uno, cuya primera fila es proporcional al vector $(1, 2, 1)$, sabiendo que $(1, 2, 3)^t$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ que no pertenece a $\ker \mathbf{A}$ y que la traza de $\mathbf{A}$ es igual a 16.

Respuesta:

Al ser la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de rango igual a uno y su primera fila proporcional a $(1, 2, 1)$,

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha \\ \beta & 2\beta & \beta \\ \gamma & 2\gamma & \gamma \end{pmatrix}$, ya que α tiene que ser no nula, como se verá a continuación. Se tiene

$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es no nulo, ya que el vector propio no pertenece al núcleo de $\mathbf{A}$; y

de lo anterior se deduce que la primera fila de $\mathbf{A}$ no puede ser nula. Por tanto, $\begin{cases} \alpha + 4\alpha + 3\alpha = \lambda \\ \beta + 4\beta + 3\beta = 2\lambda \\ \gamma + 4\gamma + 3\gamma = 3\lambda \end{cases}$

de donde resultan $\alpha = \frac{1}{8}\lambda, \beta = \frac{1}{4}\lambda, \gamma = \frac{3}{8}\lambda$. Se tiene, además, $\text{traza}(\mathbf{A}) = \alpha + 2\beta + \gamma = \lambda$; $\lambda = 16$. Este resultado, por otra parte, tenía que coincidir con la traza de la matriz, ya que $\mathbf{A}$, al ser de rango igual a uno, tiene la traza no nula como valor propio simple y el cero como valor propio doble (el núcleo de $\mathbf{A}$ es un subespacio propio de dimensión igual a $3 - \text{rango}(\mathbf{A}) = 2$, dimensión menor o igual que el orden de multiplicidad del valor propio nulo).

Finalmente, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 6 \end{pmatrix}$. (1 punto)

6. Sean $A_1 = 1$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \ (n > 2).$

- Escribase, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\det(A_{n+2})$ en función de $\det(A_n)$ y $\det(A_{n+1})$.
- Se sabe que el espacio vectorial real de las sucesiones reales $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que satisfacen la recurrencia $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$, fijos, y $b \neq 0$), tiene dimensión igual a 2. En el supuesto de que el polinomio $r^2 + ar + b$ tenga raíces reales simples, r_1 y r_2 , demuéstrese que $\{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ es una base de dicho espacio.
- Calcúlese $\det(A_n)$ mediante la resolución de la recurrencia obtenida en el primer apartado.

Respuesta:

a) $\det(A_{n+2}) = \det(A_{n+1}) + 6 \det(A_n)$ (0,4 puntos)

b) Al ser $b \neq 0$ se tiene que las raíces r_1 y r_2 son distintas de cero. La sucesión $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifica la recurrencia $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$. En efecto, $r_1^{n+2} + ar_1^{n+1} + br_1^n = r_1^n(r_1^2 + ar_1 + b) = 0$. De modo similar se demuestra que $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ también la verifica.

Para λ y μ reales, $\lambda(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \lambda r_1^n + \mu r_2^n = 0$. Tomando $n = 0$ y $n = 1$, se tiene $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \end{cases}$, sistema compatible y determinado, cuya solución es $\lambda = \mu = 0$. Por tanto, $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ son linealmente independientes, y, al ser el espacio de dimensión igual a 2, constituyen una base de dicho espacio. (0,3 puntos)

c) La recurrencia del apartado a) conduce al polinomio $r^2 - r - 6$, cuyas raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = -2$. Por tanto, $\det(A_n) = 3^n \alpha + (-2)^n \beta$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para $n = 1$, $\det(A_1) = 1 = 3\alpha - 2\beta$, y para $n = 2$, $\det(A_2) = 7 = 9\alpha + 4\beta$. Resolviendo las dos ecuaciones lineales anteriores se obtiene $\alpha = \frac{3}{5}, \beta = \frac{2}{5}$.

Por consiguiente,

$$D_n = \frac{3}{5} 3^n + \frac{2}{5} (-2)^n = \frac{1}{5} (3^{n+1} - (-2)^{n+1})$$

(0,3 puntos).

Examen de Álgebra I.		Septiembre de 2007.	
Nombre:	Número de Matrícula 	NOTA	
1 ^{er} Apellido:			
2 ^o Apellido:			

Cuestiones 1, 2 y 3. (3 puntos). Respóndase exclusivamente en los espacios dejados al efecto en esta hoja.

1.- Sean $m, n \in \mathbb{N}, m, n > 1$, con m divisor de n .

(a) Hallar las soluciones comunes de las ecuaciones $z^m - 1 = 0$ y $z^n - 1 = 0$.

Respuesta: Puesto que $m|n$, si $z_0^m = 1$ entonces $z_0^n = (z_0^m)^{\frac{n}{m}} = 1$, por lo que las soluciones comunes de ambas ecuaciones coinciden con las soluciones de la primera, es decir

$$\left\{ \exp\left(\frac{2\pi i}{m}l\right), l = 0, 1, \dots, m-1. \right\}.$$

(b) Simplificar al máximo justificando la respuesta la expresión

$$\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) + \sin\left(2\frac{2\pi}{m}\right) + \dots + \sin\left(n\frac{2\pi}{m}\right).$$

Respuesta:

Sea $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$. La expresión del enunciado es la parte imaginaria de

$$\omega + \omega^2 + \dots + \omega^n = \omega \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0.$$

En consecuencia, la expresión es nula.

2.- Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

(a) Demostrar que $rg(A^2) = rg(A) \Rightarrow \ker(A^2) = \ker(A)$.

Respuesta:

$$\dim(\ker(A^2)) = n - rg(A^2) = n - rg(A) = \dim(\ker(A)).$$

Por otro lado, es conocido que dada cualquier matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se verifica $\ker(A) \subset \ker(A^2)$ (porque $u \in \ker(A) \Rightarrow Au = 0 \Rightarrow A^2u = 0 \Rightarrow u \in \ker(A^2)$). En consecuencia, $\ker(A^2) = \ker(A)$.

(b) Demuéstrese la siguiente proposición si es verdadera o dese un contraejemplo si es falsa:

$$rg(A^2) = rg(A) \Rightarrow \ker(A) \text{ e } \text{Im}(A) \text{ son suplementarios en } \mathbb{C}^n.$$

Respuesta:

La proposición es cierta. Por un lado, la ecuación de dimensiones proporciona $\dim(\mathbb{C}^n) = \dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}(A))$. Por otro lado, si $v \in \ker(A) \cap \text{Im}(A)$, se verifica

i. $\exists u \in \mathbb{C}^{n \times n} : Au = v$, porque $v \in \text{Im}(A)$.

ii. $Av = 0$, porque $v \in \ker(A)$.

En conclusión, $A^2u = A(Au) = Av = 0$, es decir, $u \in \ker(A^2) = \ker(A)$. Pero entonces, $v = Au = 0$. De este modo, hemos demostrado que $\ker(A) \cap \text{Im}(A) = \{0\}$ y los subespacios núcleo e imagen de A son suplementarios en $\mathbb{C}^n$.

3.- Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{C}_3[z]$:

$$L = \{p(z) \in \mathbb{C}_3[z] : \forall z \in \mathbb{C}, p(z) = p(4-z)\}.$$

$$M = \{p(z) \in \mathbb{C}_3[z] : \forall z \in \mathbb{C}, p(z) = -p(4-z)\}.$$

- (a) Decir a cuál de los subespacios anteriores pertenece el polinomio $(z-2)^k$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

Respuesta: Llamemos $p_k(z) = (z-2)^k$. Entonces,

$$p_k(4-z) = [(4-z)-2]^k = (2-z)^k = (-1)^k p_k(z), \text{ y}$$

$$p_0, p_2 \in L, \quad p_1, p_3 \in M.$$

- (b) Demostrar que L y M son suplementarios en $\mathbb{C}_3[z]$

Respuesta: La suma de L y M es directa, porque

$$p(z) \in L \cap M \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C} : p(4-z) = p(z) = -p(4-z) \Leftrightarrow p = 0.$$

Además, todo $q(z) \in \mathbb{C}_3[z]$ se puede descomponer como suma de un polinomio de L y otro de M de este modo:

$$q(z) = \frac{q(z) + q(4-z)}{2} + \frac{q(z) - q(4-z)}{2},$$

luego L y M son suplementarios en $\mathbb{C}_3[z]$.

- (c) Utilizando los apartados anteriores, hallar razonadamente una base de L y una base de M . *Nota: todos los polinomios de las bases deben darse totalmente factorizados.*

Respuesta:

Es claro que

$$B = (1, z-2, (z-2)^2, (z-2)^3)$$

es base de $\mathbb{C}_3[z]$. Por el apartado (a), tanto L como M contienen al menos dos elementos linealmente independientes y $\dim(L), \dim(M) \geq 2$. Por el apartado (b), L y M son suplementarios y $4 = \dim(\mathbb{C}_3[z]) = \dim(L \oplus M) = \dim(L) + \dim(M)$. En consecuencia, solo puede ser $\dim(L) = \dim(M) = 2$ y

$$B_L = (1, (z-2)^2) \quad B_M = (z-2, (z-2)^3)$$

son bases de L y M respectivamente.

Examen de Álgebra I.		Septiembre de 2007.						
Nombre:		Número de Matrícula <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>						NOTA
1 ^{er} Apellido:								
2 ^o Apellido:								

Cuestiones 4,5 y 6. (3 puntos). Respóndase exclusivamente en los espacios dejados al efecto en esta hoja.

4.- Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz cuyo polinomio mínimo es $\mu_A(z) = z^2 - 4z + 3$.

- (a) Demostrar que $\lambda = 0$ no es autovalor de A .

Respuesta:

$\mu_A(0) = 3 \neq 0$, luego $\lambda = 0$ no es raíz del polinomio mínimo. Es conocido que todas las raíces del polinomio característico lo son también del mínimo, luego $\lambda = 0$ no puede ser autovalor de A .

- (b) Expresar la inversa de A como combinación lineal de A e I .

Respuesta:

Por el apartado anterior, la matriz A es regular. Puesto que el polinomio mínimo es anulador,

$$[0] = \mu_A(A) = A^2 - 4A + 3I \Rightarrow A^{-1} = \frac{4}{3}I - \frac{1}{3}A.$$

5.- Sea $L : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación lineal definida por

$$L(p(x)) = xp'(x) + p''(x).$$

- (a) Hallar la matriz de L en la base canónica $B = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

Respuesta:

$$[L]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (b) Encontrar todos los polinomios de $\mathbb{R}_2[x]$ solución de

$$xp'(x) + p''(x) = 2x.$$

Respuesta:

Los polinomios p solución de la ecuación serán aquéllos cuyas coordenadas $[p]_B = (\alpha, \beta, \gamma)$ verifiquen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, las soluciones buscadas son los elementos del conjunto

$$\{\alpha + 2x, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

- 6.- (a) Sea $D = \text{diag}(1, 2, 3)$. Encontrar una matriz $P \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ regular y unos coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tales que:

$$\alpha_0 I + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2 = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} P$$

Respuesta:

$$\begin{array}{l} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{array} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Se considera ahora la extensión del apartado anterior a orden n . Sean $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ y $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ determinada. Encontrar, **justificando la respuesta**, una condición necesaria y suficiente para que existan $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ tales que

$$\alpha_0 I + \alpha_1 D + \dots + \alpha_{n-1} D^{n-1} = P^{-1} M P. (*)$$

Respuesta:

Llamemos $q(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1}$. La ecuación (*) se puede escribir como

$$q(D) = P^{-1} M P.$$

Si existen P y α_i como en el enunciado, entonces

$$P^{-1} M P = q(D) = \text{diag}(1, \dots, n),$$

luego M es diagonalizable.

Recíprocamente, si M es diagonalizable, entonces $P^{-1} M P = \hat{D}$ diagonal, y

$$q(D) = P^{-1} M P = \hat{D} \Leftrightarrow q(i) = \hat{D}_{ii}, \quad i = 1, \dots, n.$$

La última expresión constituye un problema de interpolación de Lagrange, cuya solución existe y es única. En consecuencia (*) admite solución.

Por tanto, una condición necesaria y suficiente para que existan $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y coeficientes $\alpha_i \in \mathbb{C}$ que verifiquen (*) es que M sea diagonalizable.

Álgebra I		Septiembre de 2007				
Nombre:		Número de Matrícula			NOTA	
1 ^{er} Apellido:						
2 ^o Apellido:						

Problema (4 puntos):

Sean $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ -1 & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$.

1. Estúdiense, según los valores del parámetro a , la compatibilidad del sistema $Ax = b$.
2. Justifíquese que A y B son diagonalizables y semejantes para todo valor de a .
3. Determínese una matriz regular P , respecto de la base canónica, asociada a una aplicación lineal que transforme cada subespacio propio de A en el subespacio propio de B asociado al mismo valor propio.
4. Estúdiense, según los valores de a , la compatibilidad del sistema $By = Pb$.
5. Sean M y N dos matrices complejas cuadradas de orden n diagonalizables y semejantes, $c \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ y K una matriz regular que transforme cada subespacio propio de M en el subespacio propio de N asociado al mismo valor propio. Demuéstrese que el sistema $Nw = Kc$ tiene solución si y sólo si el sistema $Mz = c$ tiene solución.

Solución:

1. $\det(A) = (a-1)a(a+1)$. El sistema es compatible determinado salvo cuando a es 1, 0 o -1.

Para $a = 1$ es $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2 < 3$ El sistema es compatible indeterminado.

Para $a = 0$ es $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2 < 3$ El sistema es compatible indeterminado.

Para $a = -1$ es $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|b) = 3$ El sistema es incompatible.

2. $X(A) = X(B) = (s-a-1)(s-a)(s-a+1)$

Como los 3 autovalores son distintos las matrices A y B son diagonalizables y como además sus polinomios característicos coinciden son semejantes.

3. Determinaremos las matrices de autovectores de A y de B que denominaremos respectivamente P_A y P_B . A partir de estas hallaremos la P pedida.

Vectores propios de A (Iguales a los de $U = A - aI$)

$$\text{Ker}(U-I) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{Ker}(U) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{Ker}(U+I) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; P_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vectores propios de B (Iguales a los de $V = B - aI$)

$$\text{Ker}(V-I) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{Ker}(V) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{Ker}(V+I) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1; P_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser P la matriz que transforma los vectores de P_a en los de P_b tendremos que :

$$P * P_a = P_b \rightarrow P = P_b * \text{inv}(P_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad P * b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; B y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \det(B) = (a-1)a(a+1) \text{ y el sistema es compatible determinado salvo si } a = 1, 0 \text{ o } -1.$$

Para $a = 1$ es $\text{rg}(B) = \text{rg}(B|P*b) = 2 < 3 \rightarrow$ Compatible indeterminado.

Para $a = 0$ es $\text{rg}(B) = \text{rg}(B|P*b) = 2 < 3 \rightarrow$ Compatible indeterminado.

Para $a = -1$ es $\text{rg}(B) = 2$ y $\text{rg}(B|P_b) = 3 \rightarrow$ Incompatible

Se repiten pues los resultados del apartado 1.

5. Por ser M y N de autovalores simples serán diagonalizables y por ser semejantes compartirán forma diagonal, de modo que $D = \text{inv}(P_m) * M * P_m = \text{inv}(P_n * N * P_n)$ de donde $P_n * \text{inv}(P_m) * M = N * P_n * \text{inv}(P_m)$

Si K transforma P_m en P_n será $K * P_m = P_n$ o sea $K = P_n * \text{inv}(P_m)$ por lo que tenemos las 3 relaciones siguientes:

$$M z = c \quad [1]; \quad N w = K c \quad [2]; \quad K M = N K \quad [3]$$

Si sustituimos c de [1] en [2] tenemos $N w = K M z$ [4]

Si sustituimos $K M$ de [3] en [4] queda $N w = N K z \rightarrow w = K z$

y al ser K regular por hipótesis w y z existen o no simultáneamente.

