

Indusbol.com

Apuntes de 1°GITI

María Ballesteros

CÁLCULO I RUFFO

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas. Comparte tus apuntes En indusbol.com o simplyjarod.com

Academia
RUFFO
Luchana, 31 – Tel. 91 447 69 26 – Madrid 28010
Luchana, 37 – Tel. 91 448 11 80 – Madrid 28010

Indusbel .com

CÁLCULO I

Tema 0
Introducción a los Números Reales

0.1 Axiomas de los Números Reales

Admitiremos la existencia de un conjunto R en el que definiremos dos operaciones "suma" (+) y "producto" (·), y una relación "ser menor que" (<) que cumple las siguientes propiedades:

Axioma 1: **(Axioma de cuerpo)** -$(R, +, \cdot)$ es un cuerpo

• $(x+y)+z = x+(y+z)$	Asociativa para (+)
• $x+y = y+x$	Conmutativa para (+)
• $\exists 0 \in R$ tal que $x+0=x \quad ; \quad \forall x \in R$	Elemento neutro de (+)
• $\forall x \in R \quad , \quad \exists(-x) \in R$ tal que $x+(-x)=0$	Elemento simétrico de (+)
• $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	Asociativa para (·)
• $x \cdot y = y \cdot x$	Conmutativa para (·)
• $\exists 1 \in R \quad ; \quad 1 \neq 0$ tal que $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in R$	Elemento neutro de (·)
• $\forall x \in R \quad x \neq 0 \quad ; \quad \exists x^{-1} \in R$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$	Elemento simétrico de (·)
• $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$	Distributiva de (·) respecto de (+)

Axioma 2: **(Axioma de orden)** - R está ordenado

• $\forall x, y \in R$ siempre se verifica una de estas tres condiciones (ley de tricotomía):

$$x < y \; ; \; x = y \; ; \; y < x$$

• Si $\begin{vmatrix} x < y \\ y < z \end{vmatrix} \Rightarrow x < z$

• Si $x < y \quad \Rightarrow \quad x+z < y+z \quad ; \quad \forall z \in R$

• Si $\begin{vmatrix} 0 < x \\ 0 < y \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad 0 < x \cdot y$

Axioma 3: **(Axioma del supremo)** - Todo subconjunto no vacío de R acotado superiormente admite extremo superior o supremo.

0.2 Definiciones y propiedades elementales

Definición 1: **(Cotas - Extremos)** - Sea $A \subset R \quad ; \quad A \neq \varnothing$

i) Diremos que $H \in R$ es cota superior de A si $x \leq H \quad \forall x \in A$

ii) Diremos que $h \in R$ es cota inferior de A si $h \leq x \quad \forall x \in A$

Un conjunto acotado superiormente es el que tiene al menos una cota superior.
Un conjunto acotado inferiormente es el que tiene al menos una cota inferior.

iii) A la menor de las cotas superiores, si existe, se le denomina Extremo Superior de A o Supremo de A *(Sup(A))*.

iv) A la mayor de las cotas inferiores, si existe, se le denomina Extremo Inferior de A o Infimo de A *Inf(A))*.

v) Cuando el Supremo y el Infimo pertenecen al conjunto reciben el nombre de Máximo y Mínimo del conjunto.

Definición 2: **(Valor absoluto)** - Llamaremos valor absoluto de $x \in R$ y lo representaremos por $|x|$ al máximo $\{x,-x\}$. Es decir,

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedad 1:

i) $|x| > 0$ si $x \neq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) Si $a > 0$; $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$

iv) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

v) $|x-y| \geq ||x| - |y||$

Teorema 1: R es un cuerpo arquimediano: $\forall x, y \in R,\ x > 0$, existe un número entero $n>0$ tal que $n \cdot x > y$.

Definición 3: **(Intervalos)** - Llamaremos intervalos de extremos $a,b \in R$ a los siguientes conjuntos:

$(a,b) = \{ x \in R / a < x < b \}$ Intervalo abierto

$[a,b] = \{ x \in R / a \leq x \leq b \}$ Intervalo cerrado

$[a,b) = \{ x \in R / a \leq x < b \}$ Intervalo semiabierto o semicerrado

$(a,b] = \{ x \in R / a < x \leq b \}$ Intervalo semiabierto o semicerrado

$[a,+\infty) = \{ x \in R / a \leq x \}$ Intervalo infinito cerrado

$(a,+\infty) = \{ x \in R / a < x \}$ Intervalo infinito abierto

$(-\infty,a] = \{ x \in R / x \leq a \}$ Intervalo infinito cerrado

$(-\infty,a) = \{ x \in R / x < a \}$ Intervalo infinito abierto

Tema 0: Introducción a los números reales

- **Conjuntos de números**

  - Naturales $\equiv \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$
  - Enteros $\equiv \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
  - Racionales $\equiv \mathbb{Q} = \{\frac{n}{n} : n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*$
  - Reales $\equiv \mathbb{R} = \{\mathbb{Q} \cup$ Irracionales $\rightarrow \sqrt{2}, \pi, e, \log 3$
  - Complejos $\equiv \mathbb{C} = \{a + bi ; a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$

  Evidentemente se cumple que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- **DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE LOS NÚMEROS REALES**

Admitiremos la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ en el que definiremos dos operaciones: "suma" $(+)$ y "producto" $(\cdot)$, y una relación "ser menor que" $(\leq)$ que cumple las siguientes propiedades:

AXIOMA 1: Axioma del cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo que verifica las siguientes propiedades:

- $(x+y)+z = x+(y+z)$ Asociativa de la suma
- $x+y = y+x$ Conmutativa de la suma
- $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tal que $x+0 = x$; $\forall x \in \mathbb{R}$ Elemento neutro de la suma
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, (-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ Elemento simétrico de la suma
- $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ Asociativa del producto
- $x \cdot y = y \cdot x$ Conmutativa del producto
- $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ tal que $x \cdot 1 = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ Elemento neutro del producto
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \neq 0$; $\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$ Elemento simétrico del producto
- $x \cdot (y+z) = xy + xz$ Distributiva del producto respecto de la suma

AXIOMA 2: Axioma del orden: $\mathbb{R}$ está ordenado

- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ siempre se verifica una de estas tres condiciones (ley tricotomía) $x < y$; $x = y$; $x > y$

- Si $\begin{cases} x < y \\ y < z \end{cases} \Rightarrow x < z$ Propiedad transitiva
- $a < b \iff b - a > 0$
- Si $x < y \Rightarrow x + z < y + z$; $\forall z \in \mathbb{R}$
- $\begin{cases} a < b, c > 0 \rightarrow ac < bc \\ a < b, c < 0 \rightarrow ac > bc \end{cases}$
- Si $\begin{cases} 0 < x \\ 0 < y \end{cases} \Rightarrow 0 < xy$
- $0 < a < b \rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Axioma 3: Axioma del supremo: Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente admite supremo o supremo. Idéntico para el ínfimo.

Definiciones y propiedades elementales

Definición 1 (cotas - extremos) Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$

1) Diremos que $H \in \mathbb{R}$ es cota superior de A si $x \leq H \quad \forall x \in A$
2) Diremos que $h \in \mathbb{R}$ es cota inferior de A si $h \leq x \quad \forall x \in A$

Un conjunto acotado superiormente es el que tiene al menos una cota superior

Un conjunto acotado inferiormente es el que tiene al menos una cota inferior.

3) A la menor de las cotas superiores, si existe, se le denomina extremo superior de A o supremo de A [$\sup(A)$]
4) A la mayor de las cotas inferiores, si existe, se le denomina extremo inferior de A o ínfimo de A [$\inf(A)$]
5) Cuando el supremo y el ínfimo pertenecen al conjunto reciben el nombre de máximo y mínimo del conjunto.

→ Calcular, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$

a) $A = (2, 3]$

$\sup(A) = 3$; $A \ni 3 \equiv$ máximo de A

$\inf(A) = 2$; No tiene mínimo

b) $B = (1, \infty)$ Como no hay cotas superiores, no hay supremo ni B tampoco tiene máximo

$\inf(B) = 1 \equiv$ Mínimo de B

c) $C = \{3, 3.3, 3.33, 3.333, \ldots\}$

$\inf(C) = 3 \equiv$ Mínimo de C

Supremo $C = 3.\widehat{3} = \frac{10}{3} \notin C$ por tanto no hay máximo

d) $D = \{x \in \mathbb{R}, \ x^2 + 4x - 5 \leq 0\}$



Si $x^2 + 4x - 5 = 0 = (x-1)(x+5)$

$(x-1)(x+5) \leq 0$

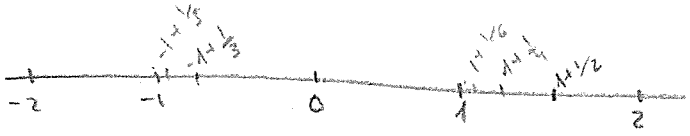
La solución de la inecuación es $[-5, 1]$

$\sup(D) = 1 \equiv$ Máximo de D

$\inf(D) = -5 \equiv$ Mínimo de D

e) $E = \{ x \in \mathbb{R} / x = (-1)^n + \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \}$

$E = \{0, 1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, -1+\frac{1}{5}, 1+\frac{1}{6}, -1+\frac{1}{7}, \dots\}$



$\sup(D) = 1+\frac{1}{2} \in E$; $1+\frac{1}{2}$ = Máximo de E

$\inf(D) = -1 \notin E$; E no tiene mínimo

Definición 2 (VALOR ABSOLUTO) Llamemos valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ y lo representaremos por $|x|$ al máximo $\{x, -x\}$, es decir:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

1) $|x| > 0$ si $x \neq 0$ $\quad |x| = 0 \iff x = 0$
2) si $a > 0$ $\quad |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
   - Consecuencia $|x-b| \leq a \Rightarrow -a \leq |x-b| \leq a \Rightarrow -a+b \leq x \leq a+b$
3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ Propiedad triangular
   - Consecuencia $|x-y| \leq |x| + |y|$
4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Teorema 1 $\mathbb{R}$ es un cuerpo arquimediano: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ existe un número entero $n > 0$ tal que $n \cdot x > y$

Definición 3 (INTERVALOS): Llamaremos intervalos de extremos $a, b \in \mathbb{R}$ a los siguientes conjuntos:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ Intervalo abierto

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ Intervalo cerrado

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$ Intervalo semiabierto o semicerrado

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$ Intervalo semiabierto o semicerrado

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$ Intervalo infinito cerrado

$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$ Intervalo infinito abierto

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ Intervalo infinito cerrado

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ Intervalo infinito abierto

Definición 4 (CONJUNTO SIMÉTRICO)

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad -A := \{x \in \mathbb{R}, -x \in A\}$

Si A admite ínfimo $\Longrightarrow -A$ admite supremo y $\inf(A) = -\sup(-A)$

Del mismo modo $\sup(A) = -\inf(-A)$.

→ Calcular de manera explícita el conjunto de los números que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$|x-1| + |x+1| > 2 \quad (*)$$

$$|x-1| \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si } x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad |x+1| \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si } x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

1er caso si $x \in (-\infty, -1)$ $\xrightarrow{(*)}$ $-x+1-x-1 > 2$; $-2x > 2$, $x < -1$.
por tanto, para todos los puntos $(-\infty, -1)$ se certifica la expresión dada

2° caso si $x \in (-1, 1)$ $\xrightarrow{(*)}$ $-x+1+x+1 \not> 2$; $2 \not> 2$, por tanto ningún punto de $(-1, 1)$ verifica la expresión dada

3er caso si $x \in (1, \infty)$ $\xrightarrow{(*)}$ $x-1+x+1 > 2$, $2x > 2$; $x > 1$
por tanto, para todos los puntos $(1, \infty)$ se certifica la expresión dada

4° caso si $x = 1$ $\xrightarrow{(*)}$ $0 + x+1 \not> 2$, $2 \not> 2$ No se cumple

5° caso si $x = -1$ $\xrightarrow{(*)}$ $-x-1+0 \not> 2$, $2 \not> 2$ No se cumple

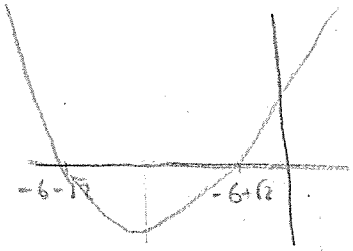
Por tanto, el conjunto de números reales que verifican la desigualdad dada son $\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

→ Calcule explícitamente el conjunto de puntos que verifican la desigualdad

$$|x^2 + 12x + 35| \leq 1 \qquad -1 \leq x^2 + 12x + 35 \leq 1$$

(2ª cond) (1ª cond)

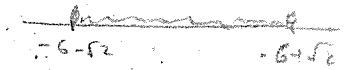
Por la propiedad $|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$ si $a > 0$

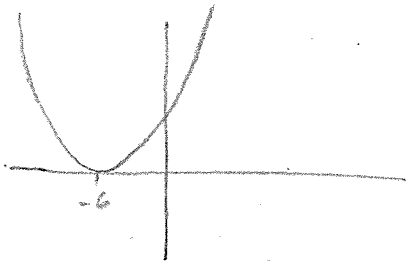


1ª condición $x^2 + 12x + 35 \leq 1 \rightarrow x^2 + 12x + 34 \leq 0$

si $x + 12x + 34 = 0$ $\begin{cases} x_1 = -6+\sqrt{2} \\ x_2 = -6-\sqrt{2} \end{cases}$

se cumple en $x \in [-6-\sqrt{2}, -6+\sqrt{2}]$





2ª condición

$x^2 + 12x + 35 \geq -1$; $x^2 + 12x + 36 \geq 0$

si $x^2 + 12x + 36 = 0 = (x+6)(x+6)$

se cumple en todo $\mathbb{R}$ $\longleftrightarrow$

Por tanto, la desigualdad inicial se cumple

$$\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \in [-6-\sqrt{2}, -6+\sqrt{2}]$$

→ Calcula explícitamente el conjunto de puntos que verifican la desigualdad:

$$|x+2| + |x-2| \leq 12$$

$$|x+2| \begin{cases} x+2 & \text{si } x > -2 \\ -x-2 & \text{si } x < -2 \\ 0 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad |x-2| \begin{cases} x-2 & \text{si } x > 2 \\ -x+2 & \text{si } x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

1er caso si $x \in (-\infty, -2)$ $\quad -x-2-x+2 \leq 12$; $-2x \leq 12$; $x \geq -6$



por tanto, para todos los puntos $[-6, 2)$ se verifica la expresión

2º caso si $x \in (-2, 2)$ $\quad x+2-x+2 \leq 12$; $4 \leq 12$; por tanto, para todos los puntos $(-2, 2)$ se verifica la desigualdad



3er caso si $x \in (2, \infty)$ $\quad x+2+x-2 \leq 12$; $2x \leq 12$; $x \leq 6$,



por tanto, para todos los puntos $(2, 6]$ se verifica la desigualdad

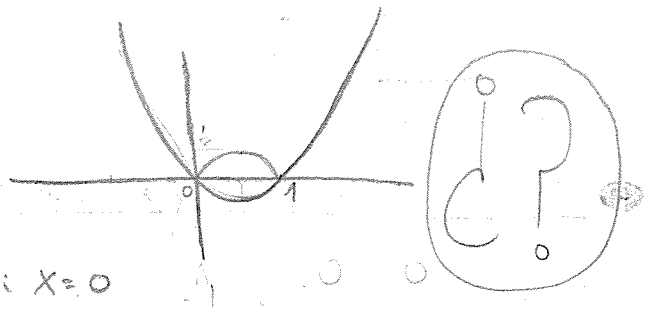
4º caso si $x = -2$ $\quad -x+2 \leq 12$; $4 \leq 12$, por tanto para $x = -2$ se cumple la desigualdad

5º caso si $x = 2$ $\quad x+2 \leq 12$; $4 \leq 12$, se cumple en $x = 2$

Por tanto, el conjunto de nº reales que verifican la desigualdad dada son $\forall x \in \mathbb{R} / x \in [-6, 6]$

→ Calcular explícitamente $|x(x-1)| < \frac{1}{2}$

$|x^2 - x| < \frac{1}{2}$; $x^2 - x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

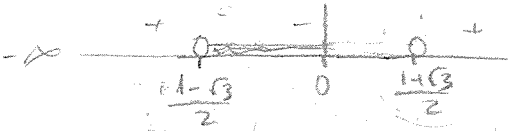


$$|x(x-1)| \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{matrix}$$

1er caso si $x \in (-\infty, 0)$ $\quad x^2 - x < \frac{1}{2}$; $x^2 - x - \frac{1}{2} < 0$;

$2x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$



se cumple en $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

2º caso si $x \in (0, 1)$ $\quad -x^2 + x < \frac{1}{2}$; $-x^2 + x - \frac{1}{2} < 0$;

$2x^2 - 2x + 1 = 0$

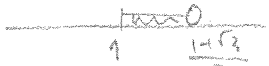
$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$



3er caso si $x = 0$ $\quad 0 < \frac{1}{2} \rightarrow$ pertenece

4º caso si $x = 1$ $\quad 0 < \frac{1}{2} \rightarrow$ pertenece

5º caso si $x \in (1, \infty)$



Solución

$\forall x \in \mathbb{R} / x \in \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

→ Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $\left|\frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{|x|+6}\right| \leq \frac{1}{2}$

Podemos quitar el modulo pues $\frac{1}{x^2+3} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{|x|+6} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{|x|+6} \leq \frac{1}{2}$

$x^2+3 \geq 3 \rightarrow \frac{1}{x^2+3} \leq \frac{1}{3}$

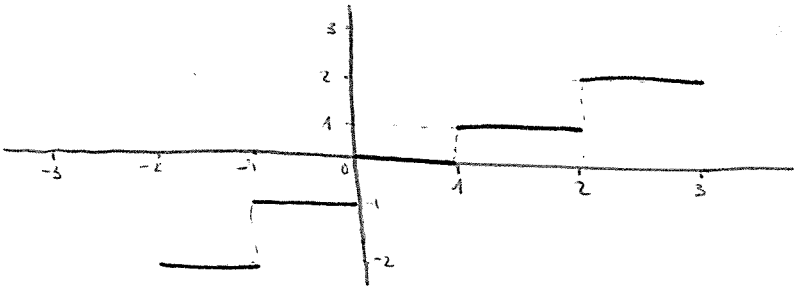
$|x|+6 \geq 6 \rightarrow \frac{1}{|x|+6} \leq \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Queda demostrado sumando las dos expresiones $\frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{|x|+6} \leq \frac{1}{2}$

Parte Entera de un número real

Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$. Por tanto n es la parte entera que se denota como $[x]$



$[1,2] = 1$ Pues $1 \leq 1,2 < 2$

$[-0,25] = -1$ Pues $-1 \leq -0'25 < 0$

Binomio de Newton y números combinatorios

$(a+b)^n \quad n \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \_\_\_\_ + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

Números combinatorios $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$

Ej: $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2}$ ← Tantos factores como número tenga debajo → 3!

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2}$

Pero si $n \notin \mathbb{N}$ podemos resolverlo

$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$

El Principio de Inducción

Sea p una proposición enunciada para los números naturales $\mathbb{N}$

$p(n)$ es verdadera para todo número natural si:

1º) $p(0)$ es verdadera (podemos usar el cero o, en su defecto, cualquier número natural)

2º) Suponemos cierta una hipótesis $p(n)$

Quedará demostrado por inducción la proposición si la implicación $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ es verdadera.

→ Demostrar por inducción las siguientes proposiciones

a) $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(n+1)n}{2}$; $n \geq 1$ → NO PODEMOS PROBAR CON EL CERO!

$p(1) \rightarrow 1 = \frac{(1+1)1}{2}$ es verdadera

Suponemos cierto para $n=k$ $\quad p(k) \rightarrow \sum_{j=1}^{k} j = \frac{(k+1)k}{2}$ } H.I.

Veamos si es verdadero para $k+1$

$$\sum_{j=1}^{k+1} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1-1)(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

$$\underbrace{1+2+3+\dots+k}_{\text{H.I}} + k+1 = \frac{(k+1)k}{2} + k+1 = \frac{(k+1)k + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ ☺

Por tanto la implicación $p(k) \rightarrow p(k+1)$ es verdadera

Así queda demostrado por inducción el enunciado $\sum_{j=1}^{n} = \frac{(n+1)n}{2}$

b) Desigualdad de Bernoulli { si $x > -1$ $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(1+x)^n \geq 1+nx$

Veamos si se cumple para $n=0$

$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$; $1 \geq 1$ Se cumple

Ahora suponemos la cierta para $n=k$

$(1+x)^k \geq 1 + kx$ } H.I

Veamos si es verdadera para $k+1 \rightarrow (1+x)^{k+1} \stackrel{?}{\geq} 1 + (k+1)x = 1 + kx + x$

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x) \overset{\text{HI}}{\geq} (1+kx)(1+x) = 1 + x + kx + kx^2 > 1 + kx + x$$

Se cumple que $p(k) \rightarrow p(k+1)$

Queda demostrada por inducción la desigualdad de Bernoulli

c) $n \in \mathbb{N}$ $\quad n^5 - n = 5^\circ$ (multiplo de 5)

Supongamos que se cumple para $n = 0$

$0 - 0 = 5^\circ$ $\quad p(0)$ es cierta

Supongamos cierto para $n = k$

$k^5 - k = 5^\circ$ $\}$ H.I.

Veamos si se cumple para $n = k+1 \longrightarrow (k+1)^5 - (k+1) \overset{?}{=} 5^\circ$

$$(k+1)^5 - (k-1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 =$$

$$= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \overset{H.I.}{=} k^5 - k + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) = 5^\circ$$

$p(k+1)$ es verdadera

Queda demostrada la proposición $n^5 - n = 5^\circ$ por inducción

d) $n \geq 1$ $\quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Supongamos que se cumple para $n = 1$

$1^2 = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$ $\quad p(1)$ es verdadera

Supongamos cierto para $n = k$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \_\_\_\_ + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ $\}$ H.I.

Veamos si se cumple para $n = k+1$ $\quad 2k^2 + 3k + 4k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \_\_\_\_ + k^2 + (k+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+2+1)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \_\_\_\_ + k^2 + (k+1)^2 \overset{H.I.}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \quad \text{(E)}$$

Por tanto $p(k+1)$ es verdadera. Queda demostrado por inducción la proposición

e) Demuestra por inducción $n \geq 1$;

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

Veamos si se cumple para $n=2$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$ $p(1)$ es verdadera

Suponemos cierto para $n=k$

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$ y H.I

Veamos si es cierto para $n=k+1$

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k+2} \overset{?}{>} \frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}}_{H.I} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}}_{H.I.} + \underbrace{\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)}}_{>0} > \frac{13}{24}$$

g) $2^{2n} > n^2 \quad n \in \mathbb{N}$

Veamos si se cumple para $n=0$

$2^0 > 0^2$ $p(0)$ es verdadero

Supongamos cierto para $n=k$

$2^{2k} > k^2$ y H.I.

Veamos si se cumple para $n=k+1 \longrightarrow 2^{2(k+1)} \overset{?}{>} (k+1)^2 = k^2 + 2k + 2$

$$2^{2(k+1)} = 2^{2k+2} = \underbrace{2^{2k}}_{H.I.} \cdot 2^2 > k^2 \cdot 4 = 4k^2 = (2k)^2 \geq (k+1)^2$$

si y sólo si $k \geq 1$

Se cumple para $k+1$ por tanto queda demostrada la proposición por inducción

Aplicaciones

Se denomina aplicación a toda correspondencia que cumple que todo elemento del conjunto inicial posee una imagen, y sólo una.

Rigurosamente se representa por la siguiente fórmula:

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Se denomina conjunto imagen de una aplicación a los elementos del conjunto final que son imagen de algún elemento del conjunto inicial

Esto es: $Im(f) = \{ y \in B \ / \ y = f(x) : x \in A \}$

También se denomina rango o recorrido.

Tipos de aplicaciones

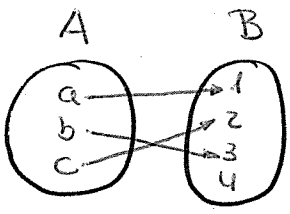
Inyectiva: Son aquellas aplicaciones que cumplen que elementos distintos del conjunto inicial poseen imagenes distintas

Si $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Por tanto,

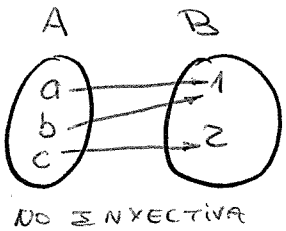
$f(x)$ es inyectiva si $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$

Sobreyectiva o suprayectiva: son aquellos en los que todo elemento del conjunto final posee original

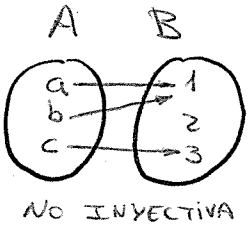
Biyectiva: Son aquellas que son suprayectivas e inyectivas al mismo tiempo.



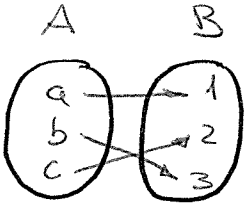
INYECTIVA
NO SUPRAYECTIVA



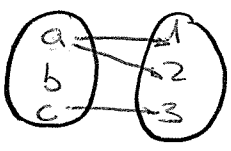
NO INYECTIVA
SUPRAYECTIVA



NO INYECTIVA
NO SUPRAYECTIVA



INYECTIVA
SUPRAYECTIVA → BIYECTIVA



NO ES APLICACIÓN!

Las únicas aplicaciones que rigurosamente hablando tienen inversa son las biyectivas.

Si $f: A \to B$ Si es biyectiva su aplicación inversa será

$x \longmapsto f(x)=y$ $f^{-1}\ B \to A$

$y \to f^{-1}(y)=x$

No obstante, si $f: A \to B$ es sólo inyectiva se puede definir su aplicación inversa como $f^{-1}: Im(f) \to A$

$y \longmapsto f^{-1}(y)=x$

→ Clasifica las siguientes aplicaciones

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x_1)=f(x_2)$; $x_1^2=x_2^2$; $1^2=(-1)^2$

$x \longmapsto f(x)=x^2$ No es inyectiva → No biyectiva

$Im(f)=(0,\infty) \neq$ Conjunto final → No es suprayectiva

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $f(2)=f(-2)=4 \to$ No inyectiva

$x \longmapsto f(x)=x^2$ $Im(f)=(0,\infty)=$ Conjunto final $\mathbb{R}^+$

Es suprayectiva

No biyectiva

c) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x_1)=f(x_2)$

$x \to f(x)=x^2$ $x_1^2=x_2^2 \to$ Al trabajar sólo en $\mathbb{R}^+$ $x_1=x_2$

Es inyectiva → No biyectiva

$Im(f)=(0,\infty)=\mathbb{R}^+ \neq$ Conjunto final → No suprayectiva

d) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $f(x_1)=f(x_2)$

$x_1^2=x_2^2 \to$ Al trabajar sólo en $\mathbb{R}^+$ $x_1=x_2$

Es inyectiva → Es biyectiva

$Im(f)=(0,\infty)=\mathbb{R}^+=$ Conjunto inicial → Es suprayectiva

→ Clasifica las siguientes aplicaciones

a) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$x \longmapsto f(x) = x+2$

$f(x_1) = f(x_2)$, $x_1+2 = x_2+2 \longrightarrow x_1 = x_2$ Es inyectiva

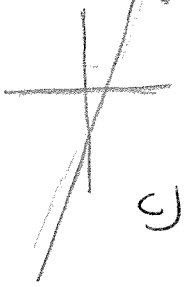
$Im(f) \{2, 3, 4, 5, \dots\} \neq$ Conjunto final $\mathbb{N}$ No es sobreyectiva

No es biyectiva

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = 3x-2$

$f(x_1) = f(x_2)$; $3x_1-2 = 3x_2-2 \longrightarrow x_1 = x_2$ Es inyectiva



$Im(f) = \mathbb{R}$ = conjunto final. Es sobreyectiva

Es biyectiva

c) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = e^x$

$f(x_1) = f(x_2)$, $e^{x_1} = e^{x_2}$; $x_1 = x_2$. Es inyectiva



$Im(f) = (0, \infty) \neq$ Conjunto final No es sobreyectiva

No biyectiva

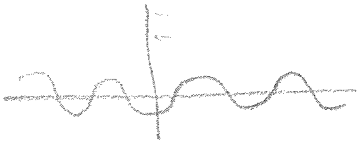
d) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \text{sen}(x)$

$f(x_1) = f(x_2)$ $\text{sen } x_1 = \text{sen } x_2$; $\text{sen } 0 = \text{sen } \pi$ No inyectiva

$Im(f) = [-1, 1] \neq$ Conjunto final No suprayectiva

No biyectiva



e) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2-1}$

Como $f(0) = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ f no es aplicación y por ello no cabe clasificarla

NOTA: Una función de una variable es inyectiva si y sólo si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente (sino, para un mismo valor de y coinciden varias x)

Tema 1: SUCESIONES

Punto límite de una sucesión

Definición: Sea G un conjunto de números. Se denomina sucesión en G al conjunto imagen de cualquier aplicación de la forma:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow G$$
$$n \longrightarrow f(n) = x_n$$

En la práctica se suele representar la sucesión por su término general $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, es decir, una sucesión de números no es más que infinitos números con un cierto orden.

Definición: Sea la sucesión $\{x_n\}$ en G se dice que $a \in G$ es punto límite de la sucesión x_n y se escribe $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Es decir, el punto límite es "a" si para cualquier ε que nos den, por muy pequeño que sea, somos capaces de encontrar un término de la sucesión a partir del cual todos los términos de la sucesión están a una distancia del punto límite menor que el ε dado.

- Si el punto límite existe, se dice que la sucesión es convergente
- Si el punto límite no existe no será convergente
- Si el límite tiende a $+\infty$ o $-\infty$ se dice que la sucesión es divergente

Ejemplos:

a) En $\mathbb{R}$; $x_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \in \mathbb{R}$ es convergente

b) En $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $x_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin \mathbb{R}^*$ no es convergente

c) En $\mathbb{R}$; $x_n = \{n^2\}$

$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ no convergente / divergente

d) En $\mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n$

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$ límite no convergente

e) En $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \_\_\_\_ + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \_\_\_\_ + b_1 q + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < q \rightarrow \text{Convergente} \\ +\infty \text{ o } -\infty & \text{si } p > q \text{ Divergente} \\ & \text{Depende de } a_p \text{ y } b_p \\ \frac{a_p}{b_p} & \text{si } p = q \end{cases}$$

$p, q \in \mathbb{R}$

f) En $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} a > 1, & \lim_{n\to\infty} a^n = \infty \quad \text{Divergente} \\ a = 1 & \lim_{n\to\infty} 1^\infty = 1 \quad \text{Convergente} \\ 0 < a < 1 & \lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{Convergente} \\ a = 0 & \lim_{n\to\infty} 0^\infty = 0 \quad \text{Convergente} \\ \text{si } -1 < a < 0 & \lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{Convergente} \\ \text{si } a = -1 & \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists \quad \text{No es convergente} \\ \text{si } a < -1 & \lim_{n\to\infty} (a)^n = \nexists \quad \text{No es convergente} \end{cases}$$

→ Demostrar aplicando la definición que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+4}{n+1}\right) = 2$$

Hay que demostrar que

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - 2| < \varepsilon$

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n+4}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+4-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \geq \frac{2}{n_0+1} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 < \varepsilon(n_0+1) \; ; \; \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n_0$$

Como he encontrado un $n_0(\varepsilon)$ queda terminada la demostración

PROPIEDADES DEL PUNTO LÍMITE

1º) El punto límite, si existe, es único

2º) Toda sucesión convergente está acotada. Lo contrario es falso, es decir, no toda sucesión acotada es siempre convergente. Veamos un ejemplo

$x_n = (-1)^n$ Está acotada $[-1, 1]$

Sin embargo $\nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n$, por tanto no converge

3º) Sea la sucesión $\{x_n\}$. Sea $\{n_k\}$ una sucesión de números naturales tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ entonces x_{n_k} se le denomina una subsucesión de $\{x_n\}$. Es decir, una subsucesión son infinitos términos de una sucesión, manteniendo su posición relativa.

Propiedad: Si una sucesión x_n es convergente, todas sus subsucesiones convergen al punto límite de x_n

Esta propiedad nos permite, en ocasiones, demostrar la NO existencia de límite. Para ello habrá que encontrar dos subsucesiones que converjan a valores distintos.

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ $\quad x_n = (-1)^n$

1ª subsucesión $\quad n = 2k \to (-1)^{2k} = 1 \; ; \lim_{k\to\infty} x^{2k} = 1$

$n = (2k+1) \quad (-1)^{2k+1} = -1 \; ; \lim_{k\to\infty} x^{(2k+1)} = -1$

$\nexists \lim x_n$ por ello no es convergente

SUCESIONES DE CAUCHY O FUNDAMENTALES

- **Definición:** Se dice que una sucesión x_n es de Cauchy o fundamental si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que si } \begin{matrix} n \geq n_0 \\ m \geq n_0 \end{matrix} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Es decir, una sucesión es de Cauchy si para cualquier ε que nos den, por muy pequeño que sea existe un término de la sucesión a partir del cual la distancia entre dos términos cualesquiera de la sucesión es menor que el ε dado.

- **Propiedades**

1º) Toda sucesión de Cauchy está acotada. Lo contrario no es cierto ya que hay sucesiones acotadas que no son de Cauchy

$$x_n = (-1)^n$$

2º) Toda sucesión convergente es sucesión de Cauchy. Lo contrario no es cierto, hay sucesiones de Cauchy que no son convergentes.

3º) No obstante, hay conjuntos donde se cumple que toda sucesión de Cauchy es convergente. A estos se les llama conjuntos completos o espacios completos. $\mathbb{R}$ es completo

$\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{Q}$ no son completos

Por tanto en $\mathbb{R}$ los conceptos de sucesión convergente y sucesión de Cauchy son totalmente equivalentes.

→ Demostrar que $\mathbb{R}^*$ no es un espacio completo utilizando la sucesión

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Se trata de demostrar que la sucesión dada es de Cauchy pero no convergente

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin \mathbb{R}^*$ No es convergente

Demostremos que es una sucesión de Cauchy

Hay que demostrar que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $\begin{matrix} n_0 \le n \\ n_0 \le m \end{matrix} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \le \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{-1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \le \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon;\ n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$$

Como hemos encontrado $n_0(\varepsilon)$, queda terminada la demostración

INDICACIONES TEÓRICO-PRÁCTICAS PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES DE SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

→ $\lim_{n\to\infty} 0 \cdot n = 0$

$\lim_{n\to\infty} n^0 = 1$

$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

} No son indeterminaciones

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

1 sí es indeterminación

• Comparación de infinitos

Cuando $n \to \infty$ $\quad \log_b n < n^p < a^n < n! < n^n$ $\quad \begin{matrix} p > 0 \\ a > 1 \\ b > 1 \end{matrix}$

Esto es, el infinito logarítmico es menor que el infinito potencial, que es menor que el exponencial, que es menor que el factorial, que es menor que el potencial-exponencial

Ejemplos

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^{0,0001}} = 0$ Pues el infinito logarítmico es menor que el potencial

$\lim \frac{(1,01)^n}{n^{20000}} = \infty$ Pues el infinito exponencial manda sobre el potencial

$\lim \frac{(20000)^n}{n!} = 0$ Pues el infinito factorial manda sobre el exponencial

Ejercicio 8 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+na)}{n} = \frac{\ln(na)}{n} = 0$ $a \in \mathbb{R}^+_*$ Pues el infinito potencial manda sobre el logarítmico

Más desarrollado

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\overset{\text{Despreciable}}{1}+na)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(na)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \overset{\text{Despreciable}}{\ln a}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

- Fórmula de Stirling

$$\lim_{n\to\infty} n! = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

Ejercicio 11

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n \sqrt{2\pi n}}{e^n} =$$ $\alpha \in \mathbb{R}^+_*$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} = \begin{cases} \text{si } \alpha > e & \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} = \infty \\ \text{si } \alpha = e & \lim_{n\to\infty} 1^n \sqrt{2\pi n} = \infty \\ \text{si } \alpha < e & \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{\alpha}{e}\right)^n}_{\text{cero}} \underbrace{\sqrt{2\pi n}}_{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{e}{\alpha}\right)^n} = 0 \end{cases}$$

Pues el ∞ exponencial manda sobre el potencial

- Criterio de Stolz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{s_n - s_{n-1}}$$

Si el segundo límite no existe no se puede decir nada del límite original.

Ejercicio 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \_\_\_ + n^p}{n^{p+1}}, \text{ donde } p \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \_\_\_ + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \_\_\_ + n^p - [1^p + 2^p + \_\_\_ + (n-1)^p]}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - \left[\binom{p+1}{0} n^{p+1} + \binom{p+1}{1} n^p (-1) + \underbrace{\_\_\_\_}_{\text{Despreciables}} + \binom{p+1}{p} n (-1)^p + \binom{p+1}{p+1} (-1)^{p+1}\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{\cancel{n^{p+1}} - \cancel{n^{p+1}} + (p+1)n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p+1} = ¿0?$$

CUIDADO. Si $p \in \mathbb{R}$ como $p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \nexists \lim \frac{1}{p+1}$ para $p = -1$

• Criterio raíz - cociente

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$$ si el segundo límite existe

Consecuencias

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \_\_\_ + a_1 n + a_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_p (n+1)^p + a_{p-1}(n+1)^{p-1} + \_\_\_ + a_1 (n+1) + a_0}{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \_\_\_ + a_1 n + a_0} =$$

(Despreciables)

(Despreciable)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_p (n+1)^p}{a_p n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p}{a_p n^p} = 1$$

Ejercicio (14)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n+2)(2n)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}} =$$

(anterior)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 //$$

• Criterio de acotación o de sandwich

$$a_n \le x_n \le b_n$$

$$\lim a_n = \lim b_n = L \longrightarrow \lim x_n = L$$

Ejercicio (15)

$$\ell_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n^3+1} + \frac{2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n}{n^3+n} \right] = \lim x_n$$

Hallamos $a_n \le x_n$: (max. den. y min numerador)

$$a_n = \left[\frac{1}{n^3+n} + \frac{1}{n^3+n} + \cdots + \frac{1}{n^3+n} \right] = \frac{n}{n^3+n}$$

Hallamos $b_n \ge x_n$: (min den. max num.)

$$b_n = \left[\frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^3+1} + \cdots + \frac{n}{n^3+1} \right] = \frac{n^2}{n^3+1}$$

$$\lim a_n = \lim \frac{n}{n^3+n} = 0$$

Como $a_n = \frac{n}{n^3+n} \le x_n \le \frac{n^2}{n^3+1} = b_n$

$$\lim b_n = \lim \frac{n^2}{n^3+1} = 0$$

y $\lim a_n = \lim b_n = 0 \Longrightarrow \lim x_n = 0$

$$\ell_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^3+1} + \frac{2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n}{n^3+n} \right] = 0 //$$

• El número e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ejercicio 9

$a_n = \frac{n^n}{n!}$; Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\,n!}{(n+1)n!\,n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} =$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ //

Criterio cociente $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

Ejercicio 12

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{5\cdot 8\cdot \ldots\cdot(3n+2)}} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{\frac{n!}{5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}} = \lim_{n\to\infty} 2\,\frac{\frac{(n+1)!}{5\cdot 8\cdot\ldots\cdot[3(n+1)+2]}}{\frac{n!}{5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\,\frac{(n+1)\,n!\,[5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)]}{n![5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+5)(3n+2)]} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{(n+1)}{(3n+5)} = \frac{2}{3}$$ //

Ejercicio 16

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{2n} - 2\sqrt[29]{n}\right]$$

Raíz enésima de polinomios

$\sqrt[n]{2n} \to 1$; $2\sqrt[29]{n} \to 2\cdot 1 = 2$

$= 1 - 2 = -1$ //

Ejercicio 19

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}\right] = \lim_{n\to\infty} x_n$$

→ $2n-1$ fracciones!

Hallamos $a_n \le x_n$; $a_n = \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}\right] = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}}$

$b_n \ge x_n$; $b_n = \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right] = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

$\lim a_n = 2$; $\lim b_n = 2$ } Aplicando el criterio de acotación, como $a_n \le x_n \le b_n$ y $\lim a_n = \lim b_n = 2$ → $\boxed{\lim x_n = 2}$

Ejercicio 37

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$$

Como el denominador es una sucesión monótona creciente podemos aplicar el criterio de Stolz

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}-(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n-1]{n-1})}{n-(n-1)} =$$

$= \lim\frac{\sqrt[n]{n}}{1}$ ↓ Raíz enésima de un polinomio $= 1$

Ejercicio (44)

Aplicamos criterio raíz-cociente

$2+n+1+4n^2+4+8n$

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\ln(2+n+4n^2)}{4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln[2+(n+1)+4(n+1)^2]}{4(n+1)}}{\frac{\ln(2+n+4n^2)}{4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n\ln(\overbrace{2+n+1}^{\text{Despreciable}}+4n^2+\overbrace{4+8n}^{\text{Despreciable}})}{(4n+\underbrace{4}_{\text{despreciable}})\ln(\underbrace{2+n}_{\text{despreciable}}+4n^2)} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n\ln(4n^2)}{4n\ln(4n^2)} = 1$

b) $\lim\left[\underbrace{\sqrt[n]{4n^3+3n^2+1}}_{1} \underbrace{-2\sqrt[2n]{3n+n}}_{-2}\right]^n = \lim(-1)^n = \underline{\text{No } \exists}$

Ejercicio (47)

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{4n}{n^3+2n^2}\right)}_{\text{tiende a } 1}^{\sqrt[n^2]{n^2+2}}$ → tiende a 1 (raíz enesima) $\quad n\in\mathbb{N}$ $\quad 1^1 = 1$

EJERCICIO CERO

EL LOGARITMO DE ALGO QUE TIENDE A UNO ES IGUAL A ESE ALGO MENOS UNO

$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ demuestra:

a) Si $\lim_{n\to\infty} U_n = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \ln(U_n) = \lim_{n\to\infty}(U_n - 1)$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \longrightarrow \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$; Tomamos logaritmos $\lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{1}{t}\ln(1+t) = \ln e = 1}_{\ln(1+t)=t}$

Cambio $\frac{1}{n} = t$; $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim t = 0$

Esto significa que cuando "$t\to 0$", "$\ln(1+t)$" es equivalente a t $\quad \ln(1+t)=1$

$1+t = U$; Por tanto cuando $U\to 1$; tendre que "$\ln U$" es equivalente a $(U-1)$

Es decir, el neperiano de algo que tiende a uno es igual a ese algo menos uno. Esto sólo es cierto si el neperiano está como factor.

b) Demostrar

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right]=\ln a\ ;\quad a>0$$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$; $\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a}-1$ (tiende a 1 por raíz enésimo de un polinomio)

→ El lim del ln de algo que tiende a 1 es igual a ese algo menos 1 !!! APARTADO a)

multiplicamos por n también todos

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty} n\ln\sqrt[n]{a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\ln a\ ;$$ Queda así demostrado la igualdad.

Ejercicio 45

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{2\sqrt{n^5+1}-\sqrt{3n^2}}{n^{3/2}}}=L \qquad a>0\ ;\ n\in\mathbb{N}$$

logaritmo de algo que tiende a 1 → ese algo menos 1

$$\ln L=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n^5+1}-\sqrt{3n^2}}{n^{3/2}}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n^5+1}-\sqrt{3n^2}}{n^{3/2}}\left(1+\frac{a}{n}-1\right)=$$

Despreciamos!

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{5/2}}{n^{3/2}}\left(\frac{a}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2n\left(\frac{a}{n}\right)=2a\ ;\quad \ln L=2a\ ;\quad L=e^{2a}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{2\sqrt{n^5+1}-\sqrt{3n^2}}{n^{3/2}}}=e^{2a}}$$

Ejercicio 40

Aplico criterio raíz cociente $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!\,(n!)^2}{[(n+1)n!]^2(2n)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{n+1}=4$$

Ejercicio 4 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{U_1}{1}+\frac{U_2}{2}+\cdots+\frac{U_n}{n}}{\ln(n)}=$ $\lim_{n\to\infty}U_n=a$

Como el denominador es una sucesión monótona creciente podemos aplicar el criterio de Stolz $\frac{r_n-r_{n-1}}{s_n-s_{n-1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{U_1}{1}+\frac{U_2}{2}+\cdots+\frac{U_n}{n}\right)-\left(\frac{U_1}{1}+\frac{U_2}{2}+\cdots+\frac{U_{n-1}}{n-1}\right)}{\ln(n)-\ln(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{U_n}{n}}{\ln\frac{n}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{U_n}{n}}{\frac{n}{n-1}-1}=$$

log. de algo que tiende a uno!

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{U_n}{n}}{\frac{n-n+1}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{U_n(n-1)}{n}=\lim_{n\to\infty}U_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=a$$

Ejercicio 22

Relación entre p y q para que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{pn^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+q}{n-q}\right)^{2n}$

Se trata simplemente de calcular los dos límites

$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{pn^2-1}$; tomamos logaritmos (log. de algo que tiende a 1)

$$\ln L = \lim_{n\to\infty}(pn^2-1)\ln\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}(pn^2-1)\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(pn^2-1)\left(\frac{3n^2-2-3n^2-1}{3n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}(pn^2-1)\left(\frac{-3}{3n^2+1}\right) = -p$$

$$L = e^{-p}$$

$M = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+q}{n-q}\right)^{2n}$; tomamos logaritmos de nuevo (los de algo que tiende a 1)

$$\ln M = \lim_{n\to\infty} 2n\ln\left(\frac{n+q}{n-q}\right) = \lim_{n\to\infty} 2n\left(\frac{n+q}{n-q}-1\right) = \lim_{n\to\infty} 2n\left(\frac{n+q-n+q}{n-q}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n(2q)}{n-q} = 4q, \quad M = e^{4q}$$

si $M = L \longrightarrow e^{-p} = e^{4q} \longrightarrow \boxed{-p = 4q}$

Ejercicio 10 !!!

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p ; \quad p\in\mathbb{R}$$

NOTA TEÓRICA: $(2n)!!$ (semifactorial) ; $(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 =$

$$= 2(n)\,2(n-1)\,2(n-2)\cdots 2(3)\cdot 2(2)\cdot 2(1) =$$

$$\boxed{(2n)!! = 2^n n!} \longleftarrow = 2^n n!$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

Obtenemos lo ec. anterior: $(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2$

$$\boxed{(2n)!!\,(2n-1)!! = (2n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p = \lim_{n\to\Delta}\left(\frac{\frac{(2n)!}{(2n)!!}}{(2n)!!}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{[(2n)!!]^2}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right)^p =$$

Aplico Stirling: $\lim n! = \lim \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$

$$= \lim_{n\to\Delta}\left(\frac{\sqrt{2\pi 2n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{2^{2n}\left(\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\right)^2}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4\pi n}\cdot 2^{2n}\cdot n^{2n}\,e^{-2n}}{2^{2n}(2\pi n)n^{2n}e^{-2n}}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi n}}{\pi n}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^p =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } p>0 \\ 1 & \text{si } p=0 \\ \infty & \text{si } p<0 \end{cases}$$

Ejercicio ⑤ $\lim_{n\to\infty} \frac{(1^p+2^p+\_\_\_+n^p)(p+1)-n^{p+1}}{n^p} =, \quad p\in\mathbb{N}$

Como el denominador es una sucesión monótona creciente, podemos aplicar el criterio de STOLZ $\frac{r_n-r_{n-1}}{s_n-s_{n-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[(1^p+2^p+\_\_\_+n^p)(p+1)-n^{p+1}\right]-\left[(1^p+2^p+\_\_\_+(n-1)^p)(p+1)-(n-1)^{p+1}\right]}{n^p-(n-1)^p} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p(p+1)-n^{p+1}+(n-1)^{p+1}}{n^p-(n-1)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p(p+1)-n^{p+1}+\binom{p+1}{0}n^{p+1}+\binom{p+1}{1}n^p(-1)+\binom{p+1}{2}n^{p-1}(-1)^2-\_\_\_}{n^p-\left[\binom{p}{0}n^p+\binom{p}{1}n^{p-1}(-1)+\_\_\_\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^p(p+1)-(p+1)n^p+\binom{p+1}{2}n^{p-1}}{+pn^{p-1}} = \frac{\binom{p+1}{2}}{p} = \frac{\frac{(p+1)(p)}{2!}}{p} = \frac{p+1}{2}$$

⊕ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{1+b}\right)^n = L; \quad \ln L = \lim_{n\to\infty}\left(n\ln\frac{\sqrt[n]{a}+b}{1+b}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{1+b}-1\right) =$ (TIENDE A UNO !!!)

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b-1-b}{1+b}\right) = \frac{1}{1+b}\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \frac{1}{1+b}\ln a = \ln a^{\frac{1}{1+b}}$$

(↑ Ejercicio cero-b)

$$\ln L = \ln a^{\frac{1}{1+b}}, \quad \boxed{L = a^{\frac{1}{1+b}}}$$

⊕ $\{U_n\}$ $\lim_{n\to\infty} U_n = L$. Aplico STOLZ pues el den es una sucesión monotona creciente

ⓘ $\lim_{n\to\infty} \frac{U_1+U_2+\_\_\_+U_n}{n} \overset{\text{STOLZ}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{U_1+U_2+\_\_\_+U_n-(U_1+U_2+\_\_\_+U_{n-1})}{n-n+1} = \lim_{n\to\infty} U_n = L$

ⓘⓘ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_1U_2\_\_\_U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_1U_2\_\_\_U_{n+1}}{U_1U_2\_\_\_U_n} = \lim U_{n+1} = \lim U_n = L$ (↑ Criterio raiz-cociente)

¿Qué podemos concluir?

Acabamos de demostrar que si una sucesión es convergente, las sucesiones media aritmética y media geométrica de sus elementos convergen al límite de la sucesión original

Indusbol.com

Ejercicio 4b

$\ln 1 = k$

$e^k = 1$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+6}{4n^2+1}\right)^{\frac{1}{3-5\ln(n)}} \overset{0^\circ}{=} L$

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-5\ln(n)} \ln\left(\frac{n+6}{4n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-5\ln(n)} \ln\frac{1}{4n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(-5\ln(n))}\left[\ln(1) - \ln(4n)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(4n)}{5\ln(n)} = \lim \frac{\ln 4 + \ln(n)}{5\ln(n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{5\ln(n)} = \frac{1}{5}\,; \quad \ln L = \frac{1}{5}\,; \quad L = e^{1/5}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+6}{4n^2+1}\right)^{\frac{1}{3-5\ln(n)}} = e^{1/5}}$$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n$ Empezaremos por los casos concretos.

a_1: $a=b=c-1=1$

$a=1$, $b=1$, $c=2$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{1}+1}{2}\right)^n = 1$

a_2: $a=1$; $b=2$; $c=3{,}01$ (la base es menor que 1)

$a=1$, $b=2$, $c=3{,}01$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{1}+2}{3{,}01}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{3{,}01}\right)^n = 0$

a_3: $a=2$, $b=1$, $c=1{,}99$

$a=2$, $b=1$, $c=1{,}99$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}+1}{1{,}99}\right)^n = \infty$ (la base es mayor que 1)

Calculemos ahora el límite en general

$\lim\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n = L$ → la base tiende a $\frac{1+b}{c}$

- si $\frac{1+b}{c} < 1$ → $\boxed{L=0}$
- si $\frac{1+b}{c} = 1$ → 1^∞ → $1+b \leftrightarrow c$ → $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{1+b}\right)^n = L$ (*)
- si $\frac{1+b}{c} > 1$ → $\boxed{L=\infty}$

(*) ej. cero!!!

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{1+b}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{1+b} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b-1-b}{1+b}\right) = \lim \frac{1}{1+b}\, n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) =$$

$$= \frac{1}{1+b}\ln(a) = \ln(a)^{\frac{1}{1+b}}\,; \quad \boxed{L = a^{\frac{1}{1+b}}}$$

INDETERMINACIÓN $\infty - \infty$ CON DIFERENCIA DE RAÍCES

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \_\_\_\_ + a_1 n + a_0} - \sqrt[r]{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \_\_\_\_ + b_1 n + b_0} \qquad a_p>0 \;/\; b_p>0$$

Si $\frac{p}{m} > \frac{q}{r} \rightarrow \lim_{n\to\infty}(\;) = \infty$; Ej: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^4+3n+1} - \sqrt[3]{n^3+4} = \lim_{n\to\infty} n^2 - n = \boxed{\infty}$

Si $\frac{p}{m} < \frac{q}{r} \rightarrow \lim_{n\to\infty}(\;) = -\infty$; Ej: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt[3]{n^6+4} = \lim_{n\to\infty}(n - n^4) = \boxed{-\infty}$

Si $\frac{p}{m} = \frac{q}{r}$

- $\sqrt[m]{a_p} > \sqrt[r]{b_q} \rightarrow \lim_{n\to\infty}(\;) = \boxed{\infty}$
- $\sqrt[m]{a_p} < \sqrt[r]{b_q} \rightarrow \lim_{n\to\infty}(\;) = \boxed{-\infty}$
- Si $\sqrt[m]{a_p} = \sqrt[r]{b_q}$ — En este caso estamos en la situación más complicada y para resolverla tendremos dos metodologías:

① Utilizar el desarrollo del binomio

$$(1+x)^r = \binom{r}{0}1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \_\_\_\_$$

$r \in \mathbb{R}$
$x \mapsto 0$

② Multiplicar y dividir por la expresión conjugada. La conjugada de una diferencia de raíces es el factor por el que hay que multiplicar para que desaparezcan las raíces.

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B}) \times (\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$$

$$(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \times (\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}) = A - B$$

$$(\sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B}) \times (\sqrt[4]{A^3} + \sqrt[4]{A^2B} + \sqrt[4]{AB^2} + \sqrt[4]{B^3}) = A - B$$

...

Estamos en la situación complicada en la que se nos anulan los términos de mayor grado → Método de la conjugada

④ $$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+6n-1} - n\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6n-1-n^2}{\sqrt{n^2+6n-1} + \sqrt{n^2}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[6]{(n^2+n)^3}-\sqrt[6]{(n^3-n)^2}\right)$$

↓ Volvemos al caso en el que se anulan términos de mayor grado.

MÉTODO CONJUGADA

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[6]{\underbrace{(n^2+n)^3}_{A}}-\sqrt[6]{\underbrace{(n^3-n)^2}_{B}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)^3-(n^3-n)^2}{\sqrt[6]{A^5}+\sqrt[6]{A^4B}+\sqrt[6]{A^3B^2}+\sqrt[6]{A^2B^3}+\sqrt[6]{AB^4}+\sqrt[6]{B^5}}=$$

En A mando: n^6

$A^5 \to n^{30}$

$\sqrt[6]{A^5} \to n^5$

$$\Rightarrow =\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+3n^4+3n^5+n^3-(n^6+n^2-2n^4)}{n^5+n^5+n^5+n^5+n^5+n^5}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

MÉTODO BINOMIO

Como $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2} \to 0$!!!

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)^{\frac{1}{2}}-(n^3-n)^{\frac{1}{3}}\right]=\lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[\binom{\frac{1}{2}}{0}1+\binom{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{n}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\dots\right]-n\left[\binom{\frac{1}{3}}{0}1+\binom{\frac{1}{3}}{1}\frac{(-1)}{n^2}+\binom{\frac{1}{3}}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2+\dots\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\frac{n}{n^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}-2n\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}n+n-2n\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{2}-1\right)=\boxed{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}-2n\right]=$$

↓ Estamos en la situación complicada en la que se anulan los términos de mayor grado

POR CONJUGADA

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+3n+1}-n\right)+\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1-n^2}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2}}+\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+n}+\frac{1}{n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

POR BINOMIO

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}-2n\right]=\lim_{n\to\infty}(n^2+3n+1)^{\frac{1}{2}}+(n^2+1)^{\frac{1}{2}}-2n=$$

$$n\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=n\left(1+\frac{3n+1}{n^2}\right)$$

$$n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{3n+1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}+n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-2n=\lim_{n\to\infty} n\left[\binom{\frac{1}{2}}{0}1+\binom{\frac{1}{2}}{1}\frac{3n+1}{n^2}+\dots\right]+$$

$$+n\left[\binom{\frac{1}{2}}{0}1+\binom{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{n^2}+\dots\right]-2n=\lim_{n\to\infty} n+\frac{3n^2+n}{2n^2}+n+\frac{n}{2n^2}-2n=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Ejercicio 24

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\sqrt[3]{27-\frac{1}{n}}-3\right] \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt[3]{27-\frac{1}{n}}-3n\right) =$$

Estamos ante el caso complicado en el que se anulan los términos de mayor grado

Indusbol .com

CONJUGADA

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt[3]{27n^3-n^2}}_{A}-\underbrace{\sqrt[3]{27n^3}}_{B}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{27n^3-n^2-27n^3}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}=$$

En A mando $27n^3$

$\sqrt[3]{A}\longrightarrow 3n$

$\sqrt[3]{A^2}\longrightarrow 9n^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{9n^2+9n^2+9n^2}=\boxed{\frac{-1}{27}}$$

BINOMIO

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(27-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}-3\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[27^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{27n}\right)^{\frac{1}{3}}-3\right]=\lim_{n\to\infty} n\left[3\left(1-\frac{1}{27n}\right)^{\frac{1}{3}}-3\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[3\left[\binom{\frac{1}{3}}{0}1+\binom{\frac{1}{3}}{1}\frac{(-1)}{27n}+\cdots\right]-3\right]=\lim_{n\to\infty} n\left(3+\frac{(-1)}{27n}-3\right)=\boxed{\frac{-1}{27}}$$

Dada la sucesión $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+16}+5\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+2}-3n}$; calcular, si existe, su límite.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+16}+5\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+2}-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5n^{1/2}}{n^{3/4}-3n}=\boxed{\frac{-1}{3}}$$

Sea $p(x)=8x^3+2x+1$; determinar razonadamente el límite de la sucesión definida por $x_n=\sqrt[3]{p(n+1)}-\sqrt[3]{p(n)}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\underbrace{8(n+1)^3+2(n+1)+1}_{A}}-\sqrt[3]{\underbrace{8n^3+2n+1}_{B}} \quad \infty-\infty$$

Estamos en el caso difícil en el que se anulan los términos de mayor grado

Por conjugada

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8(n+1)^3+2(n+1)+1-8n^3-2n-1}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}=$$

En A mando $8n^3$

En $\sqrt[3]{A}\longrightarrow 2n$

En $\sqrt[3]{A^2}\longrightarrow 4n^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8(n^3+3n+3n^2+1)+2n+2+1-8n^3-2n-1}{4n^2+4n^2+4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{24n^2}{12n^2}=\boxed{2}$$

Ejercicio 38

$U_{n+1} = U_n + \frac{9 - U_n^2}{2U_n}$, $U_0 > 0$ se pide: $U_{n+1} = \frac{2U_n^2 + 9 - U_n^2}{2U_n} = \frac{U_n^2 + 9}{2U_n}$

a) Demostrar por inducción que es una sucesión de términos positivos.

Nos dan la sucesión, no por su término general, sino mediante una ley de recurrencia, esto es, conocemos el término en función del anterior.

Tenemos que demostrar que $U_{n+1} > 0 \ \forall n$ sabemos que $U_0 > 0$

① Comp. para primer término

$U_1 = \frac{9 + U_0^2}{2U_0} > 0$ se cumple

② Hipótesis $U_n > 0$

③ Conclusión: $U_{n+1} = \frac{9 + U_n^2}{2U_n} > 0$ como queríamos demostrar

Por tanto, acabamos de demostrar que la sucesión está acotada inferiormente (el cero es cota inferior)

b) Demostrar que $U_n \geq 3 \ \forall n \in \mathbb{N} \iff U_n - 3 \geq 0 \ \forall n$

$U_n - 3 = \frac{9 + U_{n-1}^2}{2U_{n-1}} - 3 = \frac{9 + U_{n-1}^2 - 6U_{n-1}}{2U_{n-1}} = \frac{(U_{n-1} - 3)^2}{2U_{n-1}} \geq 0$

(U_n positivo; U_{n-1}^2 positivo)

$U_{n-1}^2 - 6U_{n-1} + 9 = 0$

$U_{n-1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3$

Por tanto, acabamos de demostrar que la sucesión está acotada inferiormente también por 3

c) Demostrar que $U_{n+1} - U_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \iff U_{n+1} \leq U_n \ \forall n$

Sabemos que $U_{n+1} = U_n + \frac{9 - U_n^2}{2U_n}$ (U_{n+1} positivo) $\rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{9 - U_n^2}{2U_n}$;

$U_{n+1} - U_n = \frac{(3 + U_n)(3 - U_n)}{2U_n} \leq 0$ (3 es cota inferior $\rightarrow$ sumando negativo !!!; $2U_n$ positivo) como queríamos demostrar

Acabamos de demostrar que la sucesión es monótona decreciente

d) Razonar porqué U_n es convergente y calcular su límite

U_n es una sucesión de números reales monótona decreciente y acotada inferiormente. Esto es, será convergente:

$\lim_{n \to \infty} U_n = L$ y pasando al límite en la ley de recurrencia:

$L = \frac{9 + L^2}{2L}$; $2L^2 = 9 + L^2$; $L^2 = 9$; $L = \sqrt{9} = \pm 3$ → 3 no válida por ser sucesión de nº positivos

$\lim U_n = 3$

¿Es de Cauchy?

COMO TODA SUCESIÓN CONVERGENTE, ES DE CAUCHY, CONCLUIMOS QUE U_n ES SUCESIÓN DE CAUCHY. NO OBSTANTE, RECORDAMOS QUE EN $\mathbb{R}$ LOS CONCEPTOS SUCESIÓN CONVERGENTE Y SUCESIÓN DE CAUCHY COINCIDEN.

Ejercicio 31 Demostrar que $\{U_n\}$ es monótona creciente y acotada superiormente

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n^2 + ab^2}{a+1}} \qquad a, b, U_0 \in \mathbb{R},\ 0 < U_0 < b,\ a > 0$$

a) Para demostrar que $\{U_n\}$ es monótona creciente $U_{n+1} \geq U_n\ \forall n \iff U_{n+1} - U_n \geq 0\ \forall n$

$$U_{n+1}^2 = \frac{U_n^2 + ab^2}{a+1}; \quad aU_{n+1}^2 + U_{n+1}^2 = U_n^2 + ab^2; \quad U_{n+1}^2 - U_n^2 = ab^2 - aU_{n+1}^2$$

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = a(b^2 - U_{n+1}^2); \quad (U_{n+1} + U_n)(U_{n+1} - U_n) = a(b + U_{n+1})(b - U_{n+1});$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{a(b+U_{n+1})(b-U_{n+1})}{U_{n+1} + U_n}$$

(positivo, positivo / positivos)

Para demostrar que la sucesión es monótona creciente tenemos que demostrar $b - U_{n+1} > 0 \iff b > U_{n+1}$

Por inducción

① Comprobar para 1er término $U_1 < b$

$$U_1 = \sqrt{\frac{U_0^2 + ab^2}{a+1}} < \sqrt{\frac{b^2 + ab^2}{a+1}} = \sqrt{\frac{b^2(1+a)}{1+a}} = b$$

② Hipótesis $U_n < b$

③ Conclusión $U_{n+1} < b$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n^2 + ab^2}{a+1}} < \sqrt{\frac{b^2 + ab^2}{a+1}} = \sqrt{b^2} = b$$

Como queríamos demostrar $\Rightarrow$ Además, b es cota superior!!

$U_{n+1} < b \iff b - U_{n+1} > 0$

Por tanto

$$U_{n+1} - U_n = \frac{a(b+U_{n+1})(b-U_{n+1})}{U_{n+1} + U_n} > 0$$

Por tanto la sucesión es monótona creciente ya que $U_{n+1} > U_n$

está acotada superiormente y es de números reales por tanto, será convergente

$\lim_{n\to\infty} U_n = L$ y pasando al límite en la ley de recurrencia $L = \sqrt{\frac{L^2 + ab^2}{a+1}}$; $L^2 = \frac{L^2 + ab^2}{a+1}$;

$aL^2 + L^2 = L^2 + ab^2$; $aL^2 = ab^2$; $L = \sqrt{b^2} = \pm b$ $\begin{cases} L = b \\ L = -b \rightarrow \text{no válido por ser sucesión de núm positivos} \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} U_n = b}$$

Ejercicio 33

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = \sqrt{1 + 2U_{n-1}} - 1,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ demostrar que:

1º) $U_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ Por inducción

① $U_1 = \sqrt{1 + 2U_0} - 1 = \sqrt{3} - 1 > 0$ Se cumple

② Hipótesis $U_{n-1} > 0$

③ $U_n = \sqrt{1 + 2U_{n-1}} - 1 > 0$ Como queríamos demostrar

Por tanto cero es cota inferior

a₂) Demostrar que $U_n < U_{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N} \iff U_n - U_{n-1} < 0$

$U_n + 1 = \sqrt{1+2U_{n-1}}$; $U_n^2 + 1 + 2U_n = 1 + 2U_{n-1}$;

$2U_n - 2U_{n-1} = 1 - U_n^2 - 1$; $U_n - U_{n-1} = \frac{-U_n^2}{2} < 0 \iff U_n < U_{n-1}$ (**)

Por tanto es una sucesión de números reales monótona decreciente y acotada inferiormente (cero es cota inferior)

Por tanto será convergente.

$\lim U_n = L$ y pasando al límite en la ley de recurrencia $L = \sqrt{1+2L} - 1$;

$L + 1 = \sqrt{1+2L}$; $L^2 + 1 + 2L = 1 + 2L$; $L^2 = 0$; $\boxed{L = 0}$

b) Hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2U_{n-1}} - 1}{U_{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{1+2U_{n-1}} + 1}{\sqrt{1+2U_{n-1}} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2U_{n-1} - 1}{U_{n-1}(\sqrt{1+2U_{n-1}} + 1)} =$ (CONJUGADA!)

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2U_{n-1}}{U_{n-1}(\sqrt{1+2U_{n-1}} + 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+2U_{n-1}} + 1} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$

$\sqrt{1+2U_{n-1}} \to 0$

Aplico STOLZ porque el den. es monótona creciente con lim. ∞

c) Hallar $\lim_{n\to\infty} n U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{U_n}} \overset{\text{STOLZ}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{U_{n-1} - U_n}{U_n U_{n-1}}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{U_n U_{n-1}}{U_{n-1} - U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_n U_{n-1}}{+\frac{U_n^2}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2U_n U_{n-1}}{+U_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2U_{n-1}}{U_n} =$

$U_{n-1} - U_n$ → sabemos que vale $\frac{+U_n^2}{2}$ por (**)

$= \lim_{n\to\infty} 2 \frac{U_{n-1}}{\sqrt{1+2U_{n-1}} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+2U_{n-1}} + 1}{\sqrt{1+2U_{n-1}} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left[U_{n-1}(\sqrt{1+2U_{n-1}} + 1)\right]}{1 + 2U_{n-1} - 1} = \boxed{2}$

SUCESIONES CONTRACTIVAS

Se dice que una sucesión $\{U_n\}$ es contractiva si existe una constante $K \in (0,1)$ tal que $|U_{n+1} - U_n| \leq K |U_n - U_{n-1}| \ \forall n$ con $K \in (0,1)$

- Propiedad: Toda sucesión contractiva es sucesión de Cauchy, por tanto, en los números reales, toda sucesión contractiva será convergente.

Conclusión: En consecuencia, cuando tengamos una sucesión de números reales definido por una ley de recurrencia, para demostrar que converge tendremos en principio dos métodos:

① Demostrar que es monótona creciente y acotada superiormente o monótona decreciente y acotada inferiormente

② Demostrar que es contractiva.

(+) Analizar si la siguiente sucesión es convergente y, en caso afirmativo calcular su límite.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3}{4} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Analicemos si es contractiva. Hay que ver si $|a_{n+1} - a_n| \leq K |a_n - a_{n-1}| \ \forall n$ con $K \in (0,1)$

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{2a_n + 3}{4} - \frac{2a_{n-1} + 3}{4} = \frac{2a_n + 3 - 2a_{n-1} - 3}{4} =$$

$$= \frac{2(a_n - a_{n-1})}{4} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) \longrightarrow K = \frac{1}{2} \in (0,1)$$

Se trata por tanto de una sucesión contractiva. En consecuencia es de Cauchy y, por ser de nº reales, convergente.

$\lim_{n \to \infty} a_n = L$ y pasando al límite en la ley de recurrencia $L = \dfrac{2L+3}{4}$; $4L = 2L + 3$

$2L = 3$; $L = \dfrac{3}{2}$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{2}}$$

(+) Analizar si la siguiente sucesión es convergente y, en caso afirmativo, calcular su límite.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Analicemos si es contractiva: Hay que ver si $|a_{n+1} - a_n| \leq K |a_n - a_{n-1}|$

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}} =$$

$$= \frac{2 + a_n - 2 - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2 + a_n}\sqrt{2 + a_{n-1}}}} (a_n - a_{n-1})$$

Para acotar superiormente la fracción recuadrada (ha de estar entre (0,1)) tenemos que cambiar el denominador por algo más pequeño (lo más pequeño posible), es decir, necesitamos una cota inferior de la sucesión que, en nuestro caso, será el cero, pues la sucesión es de términos no negativos por la def. de la ley de recurrencia

$$K \leq \frac{1}{\sqrt{2+0}\sqrt{2+0}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad K \in (0,1)$$

Por tanto la sucesión es contractiva y, por ello, también de Cauchy por ser de números reales, convergente.

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$; y pasando al límite en la ley de recurrencia

$L = \sqrt{2+L}$; $L^2 = 2+L$; $L^2 - L - 2 = 0$ $\begin{cases} L = 2 \\ L = -1 \rightarrow \text{No válida pues la sucesión es de nº positivos} \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$$

Nota: También podemos resolver el ejercicio por inducción!!

Como $a_1 = \sqrt{2+a_0} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} > 0 = a_0$

Vamos a demostrar que la sucesión es monótona creciente, es decir $a_{n+1} \geq a_n$

① Comprobación para 1er término

$a_1 = \sqrt{2} > a_0$

② Hipótesis $a_n > a_{n-1}$ $\forall n$

③ Conclusión $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \overset{H2}{>} \sqrt{2+a_{n-1}} = a_n$

Como queríamos demostrar

Como es monótona creciente, necesitamos encontrar una cota superior.

HOJA A PARTE

Calculemos supuesto límite

$L = \sqrt{2+L}$; $L^2 = 2+L$

$\begin{cases} L = 2 \\ L = -1 \rightarrow \text{No válida} \end{cases}$

Vamos a demostrar por inducción que $a_{n+1} \leq 2$

① Comp para primer término

$a_1 = \sqrt{2} < 2$ se cumple

② Hipótesis $a_n \leq 2$

③ Conclusión $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$

Como queríamos demostrar

Como la sucesión es de números reales, monótona creciente y acotada superiormente, pasamos a calcular su límite. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, y pasando al límite en la ley de recurrencia $L = \sqrt{2+L}$; $L^2 - L - 2 = 0$

$L = 2$ $L = -1$ no válido

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$$

→ Dada la sucesión definida por $U_{n+1} = 2 + \frac{1}{U_n^2}$

Demostrar que: a) Está acotada inferiormente por 2
b) Está acotada superiormente por $9/4$
c) Es contractiva

a) Hay que demostrar que $U_{n+1} \geq 2 \ \forall n \iff U_{n+1} - 2 \geq 0$

$U_{n+1} - 2 = \frac{1}{U_n^2} > 0$ Como queríamos demostrar $\Rightarrow$ Sucesión acotada inferiormente por 2

b) Hay que demostrar que $U_{n+1} \leq \frac{9}{4} \iff U_{n+1} - \frac{9}{4} \leq 0$

$$U_{n+1} - \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{U_n^2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{U_n^2} + \frac{8-9}{4} = \frac{1}{U_n^2} - \frac{1}{4} = \frac{4 - U_n^2}{4U_n^2} =$$

$$= \frac{\overbrace{(2+U_n)}^{\text{Positivo}}\underbrace{(2-U_n)}_{\text{Por apartado @ } 2-U_n<0 \text{ Es negativo}}}{\underbrace{4U_n^2}_{\text{Positivo}}} \leq 0$$; Como queríamos demostrar $\Rightarrow$ Sucesión acotada superiormente por $\frac{9}{4}$

c) Para ver si es contractiva tenemos que ver si

$$(U_{n+1} - U_n) \leq K(U_n - U_{n-1})$$

$$|U_{n+1} - U_n| = \left|2 + \frac{1}{U_n^2} - 2 - \frac{1}{U_{n-1}^2}\right| = \left|\frac{U_{n-1}^2 - U_n^2}{U_n^2 \ U_{n-1}^2}\right| = \left|\frac{(U_{n-1}+U_n)(U_{n-1}-U_n)}{U_n^2 U_{n-1}^2}\right| =$$

$$= \boxed{\frac{U_{n-1}+U_n}{U_n^2 U_{n-1}^2}} |U_n - U_{n-1}| = \frac{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}}{2^2 \ 2^2} |U_n - U_{n-1}| = \frac{18}{64} |U_n - U_{n-1}| \ ; \ \frac{18}{64} \in (0,1)$$

↳ Hay que acotarla superiormente / Num. más grande posible → con cota superior
\ Den. mas pequeño posible → con cota inferior

Por tanto, U_n es contractiva

→ Analizar si la sucesión es convergente y, en caso afirmativo, calcular su límite

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n} \end{cases}$$

Nos damos cuenta que la inducción puede funcionar para demostrar la monotonía ya que, si U_n crece, U_{n+1} tambien crece

$U_1 = \sqrt{2U_0} = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^3} > \sqrt{2} \Rightarrow$ Demostraremos que es monotona creciente, es decir, $U_{n+1} > U_n \ \forall n$

① Comprobación primer término: $U_1 = \sqrt[4]{2^3} > \sqrt{2} = U_0$ Se cumple

② Hipótesis Inductiva $U_n > U_{n-1}$

③ Conclusión: $U_{n+1} = \sqrt{2U_n} \geq \sqrt{2U_{n-1}} = U_n$ Como queríamos demostrar

Ahora necesitamos una cota superior para saber si está acotada la sucesión y poder calcular el límite.

APARTE
$\lim U_n = L$; En la ley $L = \sqrt{2L}$
$L^2 = 2L$; $L = 2$ → $L = 0$ no vale

Demostraremos por inducción que U_n está acotado superiormente por 2
Es decir $U_{n+1} \leq 2$

① Comp. 1er término $U_1 = \sqrt{2U_0} = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^3} < 2$

② Hipótesis: $U_n \leq 2$

③ Conclusión $U_{n+1} = \sqrt{2U_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$ Como queríamos demostrar

Por tanto 2 es cota superior.
Ahora calculemos el límite: $\lim_{n\to\infty} U_n = L$; y pasando al límite en la ley de recurrencia → $L = \sqrt{2L}$; $L^2 = 2L$; → $L = 0$ → No valido por ser monótono creciente; → $L = 2$

Añadir! Es sucesión de num. reales, monótona creciente y acotado superiormente, por tanto, será convergente.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 2$$

Analicemos que hubiera pasado si hubieramos intentado resolverlo viendo si es contractiva:

Tenemos que ver si $|U_{n+1} - U_n| \leq K|U_n - U_{n-1}|$

$$|U_{n+1} - U_n| = \left|\sqrt{2U_n} - \sqrt{2U_{n-1}}\right| \cdot \frac{\sqrt{2U_n} + \sqrt{2U_{n-1}}}{\sqrt{2U_n} + \sqrt{2U_{n-1}}} = \left|\frac{2U_n - 2U_{n-1}}{\sqrt{2U_n} + \sqrt{2U_{n-1}}}\right| =$$

$$= \boxed{\frac{2}{\sqrt{2U_n} + \sqrt{2U_{n-1}}}} |U_n - U_{n-1}|$$

Necesitamos acotar la fracción recuadrada superiormente. Para ello tenemos que cambiar el denominador por algo más pequeño, una cota inferior. Debido a que la sucesión es de números positivos, podemos pensar en la cota inferior "cero", pero no nos vale porque la fracción se iría al infinito. Utilizaremos, por tanto, la cota inferior $\sqrt{2}$, pues $U_0 = \sqrt{2}$ y la sucesión es creciente. Esto es:

$$|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}} + \sqrt{2\sqrt{2}}} |U_n - U_{n-1}| = \frac{2}{2(\sqrt[4]{2^3})} |U_n - U_{n-1}| = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} |U_n - U_{n-1}|$$

$\in (0,1)$

Por tanto, la sucesión es contractiva

Dada la sucesión $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

a) Probar por inducción que es monótona y está acotada

Como $x_2 = \frac{1}{3}x_1 + 4 = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3} > 1 = x_1$, Demostraremos por inducción que la sucesión es monótona creciente

Tenemos que demostrar que $x_{n+1} \geq x_n$

① Comp. 1er término $x_2 = \frac{13}{3} > x_1$ se cumple

② Hip. inductiva $x_n \geq x_{n-1}$

③ Conclusión $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4 \geq \frac{1}{3}x_{n-1} + 4 = x_n$ Como queríamos demostrar.

Veamos ahora si está acotada superiormente, debido a que es monotona creciente

Demostraremos que está acotada superiormente por 6. Es decir $x_{n+1} \leq 6 \ \forall n$

① Comp. 1er término

$x_1 = 1 \leq 6$ se cumple

② Hip. inductiva $x_n \leq 6$

③ Conclusión: $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 4 \leq \frac{1}{3}6 + 4 = 6$

Como queríamos demostrar

APARTE

$\lim x_n = L$

En la ley $\rightarrow L = \frac{1}{3}L + 4$

$L - 4 = \frac{L}{3}$; $3L - 12 = L$

$2L = 12$, $L = 6$

b) Calcular límite

Como es una sucesión de números reales monotona creciente y acotada superiormente, será convergente.

$\lim_{n\to\infty} x_n = L$; y pasando al límite en la ley de recurrencia

$L = \frac{L}{3} + 4$; $3L = L + 12$, $L = 6 \rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 6$

c) Estudiar si es contractiva

Analicemos si es contractiva: Hay que ver si $|x_{n+1} - x_n| \leq K\,|x_n - x_{n-1}|$

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{1}{3}x_n + 4 - \frac{1}{3}x_{n-1} - 4\right| = \frac{1}{3}\,|x_n - x_{n-1}|\,; \quad \frac{1}{3} \in (0,1)$$

Se trata, por tanto, de una sucesión contractiva

Indusbol.com

Dada la sucesión $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n} \\ x_0 = 3 \end{cases}$

a) Demostrar que es convergente y calcular su límite.

La inducción no permite razonar su monotonía. Como $x_1 = \dfrac{x_0}{1+x_0} = \dfrac{3}{4} < 3 = x_0$

Demostraremos que es monótona decreciente, es decir:

$$x_{n+1} \leq x_n$$

① Comp 1er término $x_1 = \frac{3}{4} < 3 = x_0$

② Hip inductiva $x_n \leq x_{n-1}$

③ Conclusión $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n} \leq \dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = x_n$ Como queríamos demostrar

La sucesión es, por tanto, monótona decreciente. Tendremos que buscar una cota inferior para probar que está acotada

APARTE
$L = \frac{L}{1+L}$; $L+L^2 = L$
$L^2 = 0$; $L = 0$

Probaremos que $x_{n+1} \geq 0$, es decir, que cero es cota inferior.

① Comp. 1er término $x_0 = 3 > 0$

② Hip inductiva $x_n \geq 0$

③ Conclusión $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n} \geq \dfrac{0}{1+0} = 0$ Como queríamos demostrar.

Como es una sucesión de números reales, monótona decreciente y acotada inferiormente, será convergente. Esto es: $\lim_{n\to\infty} x_n = L$; y pasando al límite en la ley de recurrencia: $L = \dfrac{L}{1+L}$; $L+L^2 = L$; $L = 0$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$$

Debido a que el cero es una sucesión monótona creciente con límite ∞, puedo aplicar STOLZ

b) Calcula $\lim_{n\to\infty} n\,x_n \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\frac{1}{x_n}} \overset{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty} \dfrac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{x_{n-1}-x_n}{x_n x_{n-1}}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n-1}-x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}x_n}{x_{n-1}-x_n} = \boxed{1}$$

Despejando en la ley de recurrencia

$x_{n+1} + x_{n+1}x_n = x_n$; $x_{n+1}x_n = x_n - x_{n+1} \Rightarrow x_n \cdot x_{n-1} = x_{n-1} - x_n$

Inclusbol.com

Estudiar la convergencia y hallar el valor del límite en caso de que exista.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n^3 + 12}{13} \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

Veamos, por inducción, la monotonía de la sucesión:

$a_2 = \dfrac{a_1^3+12}{13} = \dfrac{8+12}{13} = \dfrac{20}{13} < 2 = a_1$; Vamos a demostrar que la sucesión es monótona decreciente. Esto es:

$$a_{n+1} \leq a_n$$

① Comp. 1er término $\longrightarrow$ $a_2 = \frac{20}{13} < 2 = a_1$ se cumple

② Hip. inductiva $\longrightarrow$ $a_n \leq a_{n-1}$

③ Conclusión. $a_{n+1} = \dfrac{a_n^3+12}{13} \overset{HI}{\leq} \dfrac{a_{n-1}^3+12}{13} = a_n$ Como queríamos demostrar.

∴ Como es una sucesión monótona decreciente, buscaremos una cota inferior para saber si está acotada.

Demostraremos por inducción que es una sucesión de términos positivos, por tanto, acotada inferiormente por el cero

$a_{n+1} > 0$; ① Comp. 1er término $\longrightarrow$ $a_1 = 2 > 0$

② Hip. $\longrightarrow$ $a_n > 0$

③ Conclusión; $a_{n+1} = \dfrac{a_n^3+12}{13} \overset{HI}{>} 0$ Como queríamos demostrar

Por tanto, como es una sucesión de números reales, monótona decreciente y acotada inferiormente, será convergente. Esto es:

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$, y pasando al límite en la ley de recurrencia: $L = \dfrac{L^3+12}{13}$

$L^3 - 13L + 12 = 0$;

	1	0	−13	12
1		1	1	−12
	1	1	−12	0

$(L-1)(L^2+L-12) = 0$

$L = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \begin{cases} L = 3 \\ L = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} L = 1 \\ L = 3 \longrightarrow \text{No válida por ser decreciente la sucesión} \\ L = -4 \longrightarrow \text{No válido por ser la sucesión de términos positivos} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$

$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n} \end{cases}$ Halla el término general y el límite.

Para hallar el término general de una sucesión dada por una ley de recurrencia iremos calculando los términos sucesivos hasta encontrar una ley de formación directa

$U_0 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$U_1 = \sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{3/4}$

$U_2 = \sqrt{2 \cdot 2^{3/4}} = \sqrt{2^{7/4}} = 2^{7/8}$

$U_3 = \sqrt{2\, 2^{7/8}} = \sqrt{2^{15/8}} = 2^{\frac{15}{16}}$

$U_n = 2^{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}$

$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}} = 2^1 = \boxed{2}$ ($\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \to$ despreciable)

Indusbol.com

Calcular el término general y hallar el límite

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 1 + q\,a_{n-1} \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad q > 0$$

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + q$

$a_3 = 1 + q + q^2$

$a_4 = 1 + q + q^2 + q^3$

$a_n = 1 + q + q^2 + \_\_\_\_ + q^{n-1}$

Por tanto en nuestro caso tendremos la suma de términos de una progresión geométrica

$$a_n = 1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Sólo es válido si $q \neq 1$

si $q = 1$

$a_n = 1 + 1 + 1^2 + \_\_\_\_ + 1^{n-1}$

$a_n = n$

NOTA TEÓRICA:

- Progresiones geométricas

Suma de términos de una P.G.

$$\text{Suma} := \text{Primer término} \cdot \frac{1 - (\text{Razón})^{n^\circ \text{términos}}}{1 - \text{Razón}}$$

- Progresiones aritméticas

Suma de términos de una P.A.

$$\text{Suma} := \frac{\text{primer término} + \text{Último término}}{2} \cdot n^\circ \text{de términos}$$

Cálculo del límite

si $q = 1$, $\lim_{n \to \infty} n = \infty$

si $q \neq 1$, $\lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim_{n \to \infty} q^n$ (tiende a cero)

- si $q < 1$ → $\lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$
- si $q > 1$ → $\lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \infty$

Ejercicio 35

Hallar el término general de una sucesión de términos positivos

$$U_0 = 0; \quad U_{n+1}^2 - U_n^2 = 8n + 5$$

Anteriores:

$U_n^2 - U_{n-1}^2 = 8(n-1) + 5$

$U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2 = 8(n-2) + 5$

$\vdots$

$U_2^2 - U_1^2 = 8(1) + 5$

$U_1^2 - U_0^2 = 8(0) + 5$

Sumamos

$$U_n^2 - U_0^2 = 8\left[1 + 2 + \_\_\_\_ + (n-2) + (n-1)\right] + 5n$$

Prog. arit. $\Rightarrow \frac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) = \frac{n^2 - n}{2}$

$$U_n^2 = 4(n^2 - n) + 5n = 4n^2 + n$$

$U_n = \pm\sqrt{4n^2 + n}$ → Jotonos quedamos con la positiva por ser sucesión de términos positivos

$$U_n = \sqrt{4n^2 + n}$$

MARÍA BALLESTEROS HERNANDO
nº 1003

1 $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\,\text{sen}(n!)}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\,\text{sen}(n!) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 0 \cdot \text{sen}(n!) = \boxed{0}$

Están desordenados

$|\text{sen}(n!)| \leq 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = 0$

El lim del producto de una sucesión acotada por otra suces. que converge a cero es cero.

$\infty - \infty$: Estamos en la situación complicada en la que se anulan los términos de mayor grado → Método de la conjugada

6 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\underbrace{\sqrt[3]{n^3+2n^2}}_{A} - \underbrace{\sqrt[3]{n^3-2n^2}}_{B} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}} =$

En A mando n^3, $\sqrt[3]{A} \to n$, $\sqrt[3]{A^2} \to n^2$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2-n^3+2n^2}{n^2+n^2+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2}{3n^2} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$ B

OTRO MÉTODO → como comprobación ⇒ Método binomio

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[(n^3+2n^2)^{1/3} - (n^3-2n^2)^{1/3} \right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{1/3} - n\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{1/3} \right] =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left[\binom{1/3}{0} 1 + \binom{1/3}{1} \dfrac{2}{n} + \dots \right] - n\left[\binom{1/3}{0} 1 + \binom{1/3}{1} \dfrac{(-2)}{n} + \dots \right] \right. =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(-2)}{n} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

7 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} =$

Aplicamos el criterio raíz-cociente

$\lim \sqrt[n]{u_n} / \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$

u_n a.u. >0

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = l$ ⇏

↑ Como el denominador es una sucesión monótona creciente con límite infinito, aplicamos el criterio de STOLZ

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \boxed{1} \Rightarrow \text{lo pedido es 1}$$

Alternativa:

$$1 \le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \le n$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \le \sqrt[n]{n} \to 1$$

9 $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$ ⇏ $\lim \frac{(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})-(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n-1]{n-1})}{n-(n-1)} =$

Aplicamos STOLZ pues el denominador es una sucesión monótona creciente con límite ∞

$u_n - u_{n-1}$ / $s_n - s_{n-1}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1} = \lim \sqrt[n]{n} \times \lim \frac{n+1}{n} = \boxed{1} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{n} = 1$$

Criterio raíz-cociente

Criterio de la media aritmética

$\lim \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \lim \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} =$

8 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{2n^2+4} = A$

tiende a 1 ⟹ El límite de un logaritmo neperiano de algo que tiende a uno es igual a ese algo menos uno

$$\ln A = \lim_{n\to\infty} (2n^2+4) \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right) = \lim_{n\to\infty} (2n^2+4)\left(\frac{n^2+1}{n^2-3}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n^2+4)\left(\frac{n^2+1-n^2+3}{n^2-3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+16}{n^2-3} = 8, \quad \ln A = 8; \; A = e^8$$

$$\boxed{\lim \left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{2n^2+4} = e^8}$$

β

María Ballesteros
nº 100[illegible]

5 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\text{———}+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=\lim_{n\to\infty} X_n$

Intentaremos resolver el límite por el método del sanwich

$a_n < X_n < b_n$

Buscamos una sucesión $a_n < X_n$ (hacemos grande el num.)

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+n}}+\frac{1}{\sqrt{n+n}}+\text{———}\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=\frac{n}{\sqrt{n+n}}<X_n$$

Buscamos ahora $b_n > X_n$ (hacemos pequeño el den)

$$b_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\text{———}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{n}{\sqrt{n+1}}>X_n$$

(X_n) está acotada inferiormente por una suces. que diverge a $+\infty$, y por tanto (X_n) diverge a $+\infty$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+n}}=\infty$; $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}=\infty \to \lim a_n=\lim b_n$

Como $a_n < X_n < b_n$ y $\lim a_n=\lim b_n=\infty \longrightarrow \boxed{\lim X_n=\infty}$

4 $\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right)$

Veamos a que tiende $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}=\operatorname{sen}0=\boxed{0}$$ B

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\underbrace{\sqrt{n+\sqrt{n}}}_{\text{Es despreciable por tener menor grado}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\boxed{1}$ b

2 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n}{3^n}=\boxed{3}$ b

Despreciable

$$\lim\frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=3$$

10 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \not= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} =$

Aplicando el criterio ratio-cociente

Mal: $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

Tema 2.-Límites de sucesiones.

2-1. Calcular los límites de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \dfrac{n^3+3n-1}{n^4-3n^2}$ b) $b_n = \sqrt{n^2+6n-1}-n$ c) $c_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3-n}$.

Solución: **a)** 0 **b)** 3 **c)** $\dfrac{1}{2}$

***2-2.** Calcular los límites de las sucesiones siguientes:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $(a,\ b>0)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1+2+\cdots+k}{1^3+2^3+\cdots+k^3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} a_k\sqrt{n+k}$, $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$.

Sugerencia: usar que $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Solución: **a)** máx(a , b) **b)** 2 **c)** $\dfrac{3}{2}$ **d)** 0

2-3. Si $p(n)$ es un polinomio, calcular los límites de las sucesiones definidas por:

a) $a_n = \dfrac{p(n)}{2^n}$ b) $b_n = \dfrac{2^n}{n!}$ c) $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Solución: **a)** 0 **b)** 0 **c)** 0

2-4. Probar que el producto de una sucesión acotada por otra convergente a 0, es una sucesión convergente a cero. Aplicando lo anterior, estudiar el límite de la sucesión $x_n = a^n \operatorname{sen}(n\sqrt{2})$, cuando $|a|<1$.

Solución: 0

***2-5.** Probar que la sucesión $a_n = \sqrt[n]{a}$ converge a 1, cualquiera que sea $a>0$.
Sugerencia: utilizar la descomposición $a_n = 1+d_n$ cuando $a>1$.

2-6. Si $n>2$, probar que $1<\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{2/n}$ y calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n+1)}$ aplicando lo anterior.

Solución: 1

2-7. Probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, con l finito o infinito, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = l$ y estudiar el recíproco. Utilizando lo anterior, determinar los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{n} + \frac{2-\sqrt{7}}{n} + \ldots + \frac{n-\sqrt{n^2+3}}{n} \right) \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2}{3n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \right).$$

Solución: **a)** 0 **b)** 1

2-8. Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos, tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ si $l < 1$, pero que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si $l > 1$.
En el caso $l = 1$ encontrar sucesiones (a_n) tales que su límite, cuando n tienda a ∞, sea respectivamente $0, 1$,o ∞.
Aplicando lo anterior, calcular los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^2}.$$

Solución: **a)** 0 **b)** ∞

2-9. Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos. Probar que si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, entonces el $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, donde $0 \leq l \leq +\infty$.
Aplicando lo anterior, calcular el $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Solución: ∞

2-10. Demostrar que las sucesiones siguientes, definidas recurrentemente, son convergentes y calcular sus límites.

$$\text{a) } \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3}{4} & \text{si} \quad n \geq 1 \\ a_1 \quad = 1 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} & \text{si} \quad n \geq 0 \\ a_0 \quad = 0 \end{cases}$$

Solución: **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** 2

2-11. Estudiar si son ciertos los enunciados siguientes, donde (x_n) es una sucesión de números reales positivos.
a) Si (x_n) es monótona y (x_{2n}) convergente, entonces (x_n) es convergente.
b) Si (x_{2n}) es decreciente y (x_n) está acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1}$.
c) Si (x_{2n}), (x_{2n+1}), (x_{3n}) son convergentes, entonces (x_n) es convergente.

Solución: **a)** V **b)** F **c)** V

2-12. Estudiar la veracidad de los enunciados siguientes, donde (a_n) es una sucesión real y l pertenece a $\mathbb{R}$.

a) La sucesión (a_n) converge, si $0 < l - a_{n+1} < l - a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) La sucesión (a_n) converge, si $0 < |l - a_{n+1}| < \frac{1}{2}|l - a_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) La sucesión (a_n) converge, si $|l - a_{n+1}| < |l - a_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) La sucesión (a_n) converge a l, entonces $|l - a_{n+1}| < |l - a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: **a)** V **b)** V **c)** F **d)** F

2-13. Se consideran las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas recurrentemente mediante:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad a_0 = a > 0, \quad b_0 = b > 0.$$

Probar que las dos sucesiones convergen al mismo límite, llamado media de Gauss de a y b.

2-14. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{n\to\infty} 2^n \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}$.

Solución: **a)** $e^{1/2}$ **b)** 0

***2-15.** Se dice que la función $f : [a,b] \to [a,b]$ es contractiva, si existe un $c \in (0,1)$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ cualesquiera que sean x e y en $[a,b]$. Consideremos ahora la sucesión engendrada recurrentemente por una función f contractiva en $[a,b]$, es decir $x_0 \in [a,b]$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Probar que:

a) La sucesión (x_n) es convergente.

b) Es cierta la acotación $|x_n - l| \leq \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0|$, donde l es el límite de (x_n).

c) La sucesión definida por $x_{n+1} = \frac{4x_n - 3}{x_n}$ y $x_0 = 2$ es convergente.

Sugerencia: probar en a) que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Academia
RUFFO
Luchana, 31 – Tel. 91 447 69 26 – Madrid 28010
Luchana, 37 – Tel. 91 448 11 80 – Madrid 28010
www.ruffo.es

Indusbol .com

CURSO
2009-2010

CÁLCULO - I

Ejercicios de Límites de Sucesiones

Academia Ruffo

Cauchy → acotada
converse → Cauchy

Academia
RUFFO
Luchana, 37 - Tel. 91 448 11 80 - Madrid 28010
Luchana, 31 - Tel. 91 447 69 26 - Madrid 28010

Indusbol .com

Cálculo I

LÍMITES DE SUCESIONES

Indicaciones Teórico-Prácticas para el Cálculo de Límites de Sucesiones de Números Reales (R,d_f)

- Definición: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
- Límites infinitos:
  $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in R \quad \exists n_0 \in N$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M$
  $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in R \quad \exists n_0 \in N$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow x_n < M$
- Sucesiones Monótonas
  $\{x_n\}$ es sucesión monótona creciente $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in N$
  $\{x_n\}$ es sucesión monótona decreciente $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in N$
  Propiedades: i) Toda sucesión monótona creciente acotada superiormente es convergente.
  ii) Toda sucesión monótona decreciente acotada inferiormente es convergente.
- Operaciones con límites:
  $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$. Indeterminación: $\infty - \infty$
  $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)$. Indeterminación: $0 \cdot \infty$
  $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, $(y_n \neq 0, \forall n \in N)$. Indeterminaciones: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$
- Otras indeterminaciones: $1^\infty, \infty^0, 0^0$. Tomando neperianos se transforman en $0 \cdot \infty$.
- Comparación de infinitos: $\log_b n < n^p < a^n < n! < n^n$ con $b > 1; p > 0; a > 1$
- Fórmula de Stirling: $\lim_{n\to\infty} n! = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$
- Criterio de Stolz: Si $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ son tales que $\{s_n\}$ es monótona creciente y con límite infinito, entonces: $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{s_n - s_{n-1}}$ si este segundo límite existe.
- Criterio raiz-cociente: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ si este segundo límite existe.
  Como consecuencia: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\text{Polinomio}} = 1$
- Criterio de acotación: Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{x_n\}$ son tres sucesiones que cumplen que: $a_n < x_n < b_n \quad \forall n > n_0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.
- Número e: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Indusbol.com

CÁLCULO - I

Ejercicios de límites de sucesiones reales

0. Sabiendo que el número $e=2.7182...$ se define como $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ demostrar las siguientes equivalencias:

Yuju!! Refrescos

a) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to\infty} (u_n - 1)$

MARIA ZAIKI TK MRS!

b) $\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right]=\ln a\ ,\ a>0$

Facilísimo

1. Discutir el valor de $\lim_{n\to\infty} a^n, a\in\Re$ en función de los valores de "a".

Solución: $+\infty$ ($a>1$); 1 ($a=1$); 0 ($|a|<1$); no $\exists$ ($a\le -1$)

Facil

2. Discutir el valor de $\lim_{n\to\infty} (\cos\theta)^n$ en función de los valores de "θ".

Solución: 1 ($\theta=2k\pi$, $k\in Z$); no $\exists$ ($\theta=(2k+1)\pi$, $k\in Z$); 0 ($\theta\neq k\pi$, $k\in Z$);

Facil

3. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, donde $p\in N$. *Solución: 1 / (p+1)*

Facil

4. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\ldots+\frac{u_n}{n}}{\ln(n)}$, sabiendo que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$.

Solución: a

Fácil

5. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{(1^p+2^p+\ldots+n^p)(p+1)-n^{p+1}}{n^p}, p\in N$. *Solución: (p+1) / 2*

Fácil

6. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{(a+\frac{1}{1})^2+2(a+\frac{1}{2})^2+\ldots+n(a+\frac{1}{n})^2}{n^2}$. *Solución: $a^2/2$*

??? Difícil

7. Calcular $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}$. *Solución: $\sqrt{e}$*

Facil

8. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+na)}{n}$, donde $a\in\Re_*^+$. *Solución: 0*

Es directo

Facil

9. Siendo $a_n=\frac{n^n}{n!}$, calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Solución: e*

Poder Factoriales

10. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$, donde $p\in\Re$.

Solución: 1 ($p=0$); 0 ($p>0$); $+\infty$ ($p<0$)

Difícil

11. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n n!}{n^n}$, donde $\alpha\in\Re_*^+$. *Solución: 0 ($\alpha<e$); $+\infty$ ($\alpha\ge e$)*

Facil

12. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{5\cdot 8\cdot\ \ldots\ \cdot(3n+2)}}$. *Solución: 2/3*

Academia Ruffo

Indusbol.com

13. Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}$. *Solución*: $+\infty$

14. Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot (2n)}}$. *Solución*: *1*

15. Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$. *Solución*: *4 / e*

16. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[n]{2n} - 2^{2\sqrt[n]{n}}\right]$. *Solución*: *-1*

17. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\ldots+\frac{n}{n^3+n}\right]$. *Solución*: *0*

18. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$ *Solución*: *1*

19. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}\right]$. *Solución*: *2*

20. Calcular $\lim_{n\to\infty} 2^n\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ *Solución*: $\sqrt{e}$

21. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n!+1}\right)^{(n!-1)}$ *Solución*: e

22. Qué relación deben verificar "*p*" y "*q*" para que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{pn^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+q}{n-q}\right)^{2n}.$$ *Solución*: $p = -4q$

23. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_p}}{p}\right]^n$, donde $p\in N$, $a_i\in\Re_*^+$, $i=1,2,\ldots p$.

Solución: $\sqrt[p]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_p}$

24. Calcular $\lim_{n\to\infty} n\left[\sqrt[3]{27-\frac{1}{n}}-3\right]$ *Solución*: *-1 / 27*

25. Calcular $\lim_{n\to\infty} n\left[\sqrt[3]{8+\frac{12}{n}+\frac{2}{n^2}}-2\right]$ *Solución*: *1*

26. Calcular $\lim_{n\to\infty} n\left[\sqrt[3]{n^3+6n^2+an+1}-\sqrt{n^2+4n+b}\right]$. *Solución*: *(2a-3b-12) / 6*

27. Hallar el término general y el límite de la sucesión $\{u_n\}$, si se cumple:

$u_0=1$, $u_1=1$, $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, $\forall n\geq 0$.

Solución: $u_n=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$; $+\infty$

Academia Rufo

28. Hallar el término general y el límite de la sucesión $\{u_n\}$, si se cumple:

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{4},\ \forall n \geq 0. \quad \textit{Solución: } u_n = \frac{n+1}{2^n};\ 0$$

29. Hallar el término general y el límite de una sucesión que cumple:
(a) cada término es la media aritmética de los dos anteriores, con $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

Solución: $\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, *5/3*

(b) cada término es la media geométrica de los dos anteriores; $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

Solución: $u_n = 4^{\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$; $4^{\frac{1}{3}}$

30. Estudiar la sucesión definida por:

$$u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a^2}{u_{n-1}}\right)$$

donde $u_1 > 0$, $a \in \Re_+^*$. *Solución: a*

31. Demostrar que la sucesión $\{u_n\}$ definida por la recurrencia:

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + ab^2}{a+1}}$$

donde $a, b, u_0 \in \Re$, $0 < u_0 < b$, $a > 0$
es monótona creciente y acotada superiormente. Calcular su límite.
Solución: b

32. Sea la sucesión definida por:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right),\ u_0 = 1$$

Se pide demostrar que:
a) $u_n \geq 2, \quad \forall n \in N$.
b) $\{u_n\}_{n \in N}$ es una sucesión monótona decreciente.
c) existe el límite $\lim_{n\to\infty} u_n$ y calcularlo. *Solución: 2*

33. Sea la sucesión definida por $u_0 = 1$ y:

$$u_n = \sqrt{1+2u_{n-1}} - 1 \ , \ \forall n \in N.$$

(a) demostrar que $u_n > 0; u_n < u_{n-1}, \ \forall n \in N$; demostrar que $\{u_n\}$ es convergente y hallar el límite. *Solución: 0*

(b) hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}$ y *Solución: 1*

(c) hallar $\lim_{n\to\infty} n \cdot u_n$ *Solución: 2*

Indusbol.com
Academia Rufo

34. Dada la sucesión de términos positivos $u_0 = \sqrt{2};\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, demostrar que es convergente y hallar su límite. Lo mismo para la sucesión $u_0 = \sqrt{2};\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Soluciones: 2

35. Hallar el término general de la sucesión de términos positivos dada por:

$$u_0 = 0\ ;\ u_{n+1}^2 - u_n^2 = 8n+5$$ *Solución*: $u_n = \sqrt{4n^2+n}$

36. Se considera la sucesión recurrente $u_{n+1} = a\,u_n + b\ ;\ u_0, a, b \in Q$.
   a) demostrar que la sucesión puede generar progresiones aritméticas y geométricas.
   b) expresar "u_n" en función de u_0, a, b y n.
   c) deducir para qué valores de los parámetros es convergente, y calcular su límite.

Solución: *b / (1-a)* para $|a| < 1$; u_0 *(a = 1 y b = 0);* divergente (resto de los casos)

37. Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$. *Solución*: *1*

Fail!

38. Sea la sucesión $\{u_n\}_{n\in N}$ de números reales, definida por la ley de recurrencia:

Normal

$$u_{n+1} = u_n + \frac{9-u_n^2}{2u_n},\ u_0 > 0$$ Se pide

a) Demostrar, por inducción, que $\{u_n\}_{n\in N}$ es una sucesión de términos positivos
b) Demostrar que $u_n \geq 3,\ \forall\ n \in N$.
c) Demostrar que $u_{n+1} - u_n \leq 0,\ \forall\ n \in N$.
d) Razonar por qué $\{u_n\}_{n\in N}$ es convergente y calcular su límite. *Solución*: 3
e) ¿Es $\{u_n\}_{n\in N}$ una sucesión de Cauchy en (R, d_f)?. *Solución*: Sí

(Cada apartado puede resolverse independientemente, suponiendo probados los apartados anteriores).

39. Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n^2}$; *Solución*: *a/2*

40. Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}$ *Solución*: *4*

Facil

41. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2n+2}\right)^{\sqrt{n}}$. *Solución*: *1*

42. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln(n+3)}{\ln(n+1)}\right)^{n\ln(n+1)}$. *Solución*: e^2

Academia Rito

Cuidado que me precipito!

43. Calcular, en $(\Re, d_f)$, los límites de las sucesiones siguientes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}}{\ln n} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)^n \quad , \quad n\in N\,;\ \textit{Soluciones: } 0\,;\,0$$

44. Calcular, en $(\Re, d_f)$, los límites de las sucesiones siguientes:

Fácil y medio

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln(2+n+4n^2)}{4n}} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{4n^3+3n^2+1}-2^2\sqrt[n]{3n+4}\right]^n \quad ; \quad n\in N$$

FÁCIL MEDIO

Soluciones: 1 ; No existe

45. Calcular, en $(\Re, d_f)$, los límites de las sucesiones siguientes:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)^{\frac{(-1)^n 2n}{\pi}}$, b) $\lim_{n\to\infty}\left[n-\sqrt[n]{n^{n+1}}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right]$, $a>1$; $n\in N$

Soluciones: $e^{1/\pi}$; $-\ln(\ln(a))$

46. En $(\Re, d_f)$, calcular los límites siguientes:

Difícil.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n$ *con* $a,b,c\in\Re_*^+$, distinguiendo en función de los valores de a, b y c.

Solución: - Si $c>1+b$, $L=0$. - Si $c<1+b$, $L=\infty$. - Si $c=1+b$, $L=a^{\frac{1}{1+b}}$

Calcular su valor en los casos concretos:

(a_1) $a=b=c-1=1$; (a_2) $a=1$, $b=2$, $c=3{,}01$, y (a_3) $a=2$, $b=1$, $c=1{,}99$

Solución: 1 ; 0 ; ∞

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+6}{4n^2+1}\right)^{\frac{1}{3-5\ln(n)}}$ *Solución*: $e^{1/5}$

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots.+\frac{1}{\sqrt{n+n}}}{\sqrt{n}}$ *Solución*: $2\sqrt{2}-2$

Fácil 47. Calcular en $(\Re, d_f)$: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{n^3+2n^2}\right)^{\sqrt[n^2]{n^2+2}}$, $n\in N$ *Solución*: 1

48. Calcular el siguiente límite en (R, df):

Fácil

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{2\sqrt{n^5+1}-\sqrt{3n^2}}{n^{3/2}}} \quad ; \quad a>0 \quad ; \quad n\in N$$

Solución: e^{2a}

Academia Ruiz

EJERCICIOS DE LA ASIGNATURA CÁLCULO I.

CURSO 2009-10.

Tema 1.-La recta real.

1-1. Demostrar la fórmula del binomio de Newton, a saber:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1-2. Demostrar por inducción la desigualdad de Bernouilli, a saber: si $x > -1$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple que: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

***1-3.** Las medias aritmética A_n y geométrica G_n de los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se define como:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Probar por inducción que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.

1-4. Expresar en forma de fracción los números racionales siguientes:

a) $16,42$ b) $4,\widehat{32}$ c) $25,22\widehat{63}$.

Solución: **a)** $\frac{821}{50}$ **b)** $\frac{428}{99}$ **c)** $\frac{27749}{1100}$

1-5.
a) Encontrar un número α tal que α^2 sea irracional y α^4 sea racional.
b) Encontrar dos números irracionales α y β tales que sean racionales su suma $\alpha + \beta$ y su producto $\alpha\beta$.

Solución:
a) $\alpha = \sqrt[4]{2}$ **b)** $\alpha = \sqrt{2}$ y $\beta = -\sqrt{2}$

1-6. Demostrar que $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ no es racional excepto si n es cuadrado perfecto.

1-7. Dos moviles puntuales parten de un punto A de una circunferencia de radio r. Uno de ellos recorre con velocidad de módulo v la circunferencia en sentido contrario a las agujas del reloj. El otro recorre con velocidad de módulo v el diametro AB y cuando llega al punto B, realiza el recorrido BA sobre dicho diámetro, y así sucesivamente. Demostrar que nunca colisionan.

1-8. Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si existen, de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ siguientes:

$$\text{a) } A = (2,3) \qquad \text{b) } B = \mathbb{N} \qquad \text{c) } C = \{3, 3.3, 3.33, 3.333, \ldots\}$$
$$\text{d) } D = \left\{x : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\right\} \qquad \text{e) } E = \left\{x : x^2 + 4x - 5 \leq 0\right\}.$$

Solución: **a)** $\sup A = 3$, $\inf A = 2$ **b)** $\min B = 0$ **c)** $\min C = 3$, $\sup C = \dfrac{30}{9}$
d) $\max D = \dfrac{3}{2}$, $\inf D = -1$ **e)** $\max E = 1$, $\min E = -5$

1-9. Sean A y B dos conjuntos numéricos acotados y no vacios tales que cualquier número de A es menor o igual que cualquier número de B. Probar que se cumple: $\sup(A) \leq \inf(B)$.

1-10. Dados A y B subconjuntos acotados y no vacios de $\mathbb{R}$, se definen los conjuntos:

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\} \qquad AB = \{xy : x \in A, y \in B\}$$

Demostrar que se cumple:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Estudiar la validez de las relaciones similares para el caso del producto.

1-11. Determinar de manera explícita los conjuntos de números reales que satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\text{a) } |x - 1| + |x + 1| > 2 \qquad \text{b) } \left|x^2 + 12x + 35\right| \leq 1.$$

Solución: **a)** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ **b)** $\left[-6 - \sqrt{2}, -6 + \sqrt{2}\right]$

1-12. Demostrar que para todo número real se cumple:

$$\left|\frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{|x| + 6}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Ejercicios Tablada

MARÍA BALLESTEROS
Indusbol.com
nº 10037

Demostrar por inducción $2^{2n} > n^2 \quad n \in \mathbb{N}$

Veamos si se cumple para $n=0$

$2^0 > 0^2$ $\quad p(0)$ es verdadera

Suponemos que se cumple para $n=k$

$2^{2k} > k^2$ $\quad$ Hip Induc.

Veamos si se cumple para $n = k+1$

$2^{2(k+1)} \overset{?}{>} (k+1)^2$

$$2^{2(k+1)} = 2^{2k+2} = 2^{2k} \cdot 2^2 = 4\,2^{2k} \overset{\text{H.I.}}{>} 4k^2 = (2k)^2 \geq (k+1)^2$$

$n = k+1 \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow$ Si $k \geq 1$ se cumple que $(2k)^2 \geq (k+1)^2$

$p(k+1)$ es verdadera por tanto queda demostrada la proposición por inducción $\quad \mathcal{B}$

Resuelve

$$\left|\frac{7x+2}{4x-3}\right| \leq 2$$

$\downarrow \frac{7x+2}{4x-3} \geq 0$

$\frac{7x+2}{4x-3} = 0 \rightarrow 7x+2=0 \quad x = \frac{-2}{7}$

$4x-3=0 \; ; \; x = \frac{3}{4}$

Num: $-$ en $(-\infty, \frac{-2}{7})$, $+$ en $(\frac{-2}{7}, +\infty)$

Den: $-$ en $(-\infty, \frac{3}{4})$, $+$ en $(\frac{3}{4}, +\infty)$

N/D: $+$ en $(-\infty, \frac{-2}{7})$, $-$ en $(\frac{-2}{7}, \frac{3}{4})$, $+$ en $(\frac{3}{4}, +\infty)$

Si $x < \frac{-2}{7} \longrightarrow -\frac{7x+2}{4x-3} \leq 2$

Si $x = \frac{-2}{7} \longrightarrow |0| \leq 2$

Si $\frac{-2}{7} < x < \frac{3}{4} \longrightarrow -\left(\frac{7x+2}{4x-3}\right) \leq 2$

Si $x = \frac{3}{4} \longrightarrow \nexists$ función

Si $x > \frac{3}{4} \longrightarrow \frac{7x+2}{4x-3} \leq 2$

1º) $\frac{7x+2}{4x-3} - 2 \leq 0 \; ; \; \frac{7x+2-2(4x-3)}{4x-3} \leq 0 \; ;$

$\frac{-x+8}{4x-3} \leq 0$

Num: $+$ en $(-\infty, 8)$, $-$ en $(8, +\infty)$

Den: $-$ en $(-\infty, \frac{3}{4})$, $+$ en $(\frac{3}{4}, +\infty)$

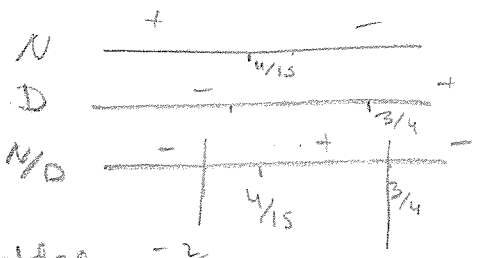
Num/Den: $-$ en $(-\infty, \frac{-2}{7})$, $+$ en $(\frac{-2}{7}, \frac{3}{4})$, $-$ en $(\frac{3}{4}, 8)$, $+$ en $(8, +\infty)$

En el intervalo $(-\infty, \frac{-2}{7})$ se cumple la desigualdad

2º) $x = \frac{-2}{7} \longrightarrow 0 \leq 2$ se cumple en $x = \frac{-2}{7}$

3°) $-\left(\frac{7x+2}{4x-3}\right) \leq 2 \;;\; \frac{-7x-2-2(4x-3)}{4x-3} \leq 0$

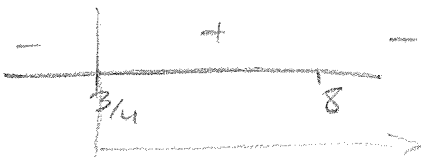
$\frac{-15x+4}{4x-3} \leq 0$



Se cumple la desigualdad en el intervalo $\left[\frac{-2}{7}, \frac{4}{15}\right]$ (-2/7)

4°) $x = \frac{3}{4}$ no existe función

5°) Igual que en el primer caso



Se cumple la desigualdad en el intervalo $[8, \infty)$

Por tanto se cumple la desigualdad

$$\forall x \in \mathbb{R} \;/\; x \in \left(-\infty, \frac{4}{15}\right) \cup (8, \infty)$$

B

Resuelve

$1 > 3\sqrt{|x| - x}$

Si $x > 0$ $\quad 1 > 3\sqrt{x - x} = 0$ se cumple $(0, \infty)$

Si $x = 0$ $\quad 1 > 3\sqrt{0} = 0$ se cumple en $x = 0$

Si $x < 0$ $\quad 1 > 3\sqrt{-2x}$

$1^2 > 9\sqrt{(-2x)^2}$? No acabado!

$1 > 9|-2x| = 9|-2||x| = 18(-x)$

$|x| = -x$ si $x < 0$

$1 > -18x \iff -1 < 18x$

$x > -\frac{1}{18}$

Sol $\left(-\frac{1}{18}, +\infty\right)$

María Ballesteros
nº 100
Inclusbol.com

Sea $A \subset \mathbb{R}$ $A = \{ n + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \}$

Hallar máximo, mínimo, ínfimo y supremo en caso de existir

Si $n = m$

$A_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$A_2 = 2.5$

$A_3 = 3.\overline{3}$

$\vdots$

$A_{100} = 100,01$

Supremo n
Máximo no tiene
Ínfimo $\equiv$ Mínimo $= 2$

Si $n < m$

$A_i = 1 + \frac{1}{100} \longrightarrow 1 \Rightarrow$ Ínfimo $= 1$
Mínimo no tiene

$n = 1$
$m = 100$

$A_i = n + \frac{1}{n+1} \longrightarrow n \Rightarrow$ Supremo $= n$
Máximo no tiene

$n = 0$
$m = n+1$

Si $n > m$

$A_i = n + \frac{1}{n+1} = n + 1$ Supremo $= n+1 \equiv$ Máximo

$n = 1$

$A_j = 2 + \frac{1}{1} = 3$ Ínfimo $= 3 \equiv$ Mínimo

$n = 2$
$m = 1$ → n no puede valer 1 pues m tendría que valer 0 y $m \in \mathbb{N}^*$; $0 \notin \mathbb{N}^*$

Si fijas $m = 1$ $\{ n + 1 : n \in \mathbb{N} \}$ no tiene supremo. pues los nºs naturales no están acot. superiorm.

Si fijas $n = 1$ $\{ 1 + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N} \}$.

tiene ínfimo: el 1

Límites de funciones reales de una variable real

TEMA 2

Definición

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que si } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

Ejercicio: Demostrar aplicando la definición de límite que $\lim_{x\to 2} = 4$

Hay que demostrar que $\forall \varepsilon > 0$ (Dado), $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ (Encontrarlo) tal que si $|x-2| < \delta$ (hipótesis) $\to |f(x)-4| < \varepsilon$ (lo que hay que cumplir)

$$|f(x)-4| = |x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |(x-2)(x-2+4)| = |(x-2)^2+4(x-2)| \leq$$

$$\leq |x-2|^2 + 4|x-2| < \delta^2 + 4\delta = \varepsilon \longrightarrow \delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$$

(Hipótesis)

$$\delta = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4\varepsilon}}{2} \to \text{Solo vale la raíz positiva } \varepsilon > 0 \longrightarrow \delta = \frac{-4+\sqrt{16+4\varepsilon}}{2}$$

Queda demostrado pues hemos encontrado

Propiedad

El límite, si existe, es único. Es decir, nos acerquemos como nos acerquemos al punto a, el límite es siempre el mismo.

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \nexists$ límite

Operaciones con límites. Indeterminaciones

(i) $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ — INDETERMINACIÓN = $\infty - \infty$

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$ — INDETERMINACIÓN = $0\cdot\infty$

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ — INDETERMINACIÓN = $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

(iiii) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$ — INDETERMINACIÓN = ∞^0, 0^0, 1^∞

Ejemplos:

$\lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} x^0 = 1$

$\lim_{x\to 0} 0^x = 0$

$\lim_{x\to \infty} 1^x = 1$

} No son indeterminados

PRIORIDAD

Cuando x tiende a ∞ mandan los términos de mayor grado

Cuando x tiende a 0 mandan los términos de menor grado.

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2+x}{3x^3+x^2-4x} = \frac{1}{3}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{3x^3+x^2-4x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-4x} = \frac{-1}{4}$

NOTA: Frecuentemente cuando tengamos un límite de la forma $\lim_{x\to a} f(x)$; $a \neq 0$ haremos el cambio de variable $x-a=t$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to 0} f(a+t)$$

SIMPLIFICACIÓN

En ocasiones podremos resolver una indeterminación simplificando por el factor que crea la indeterminación.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(1x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots+a^{n-1})}{(x-a)} =$$

↑ Como el polinomio numerador se anula para $x=a$, significa que será divisible por $x-a$.

	(n)	(n-1)	(n-2)	...	(1)	(0)
	1	0	0	.....	0	$-a^n$
a		a	a^2		a^{n-1}	a^n
	1	a	a^2		a^{n-1}	0

$$= \lim_{x\to a} n(x^{n-1}) = \boxed{n\,a^{n-1}}$$

$$\text{arc sen}(x) = x + \frac{1!!}{2!!}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5} + \frac{5!!}{6!!}\frac{x^7}{7} + \dots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{Arg Sh}(x) = x - \frac{1!!}{2!!}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5} - \frac{5!!}{6!!}\frac{x^7}{7} + \dots = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

DESARROLLOS DE TAYLOR

Cuando $X \to 0$ frecuentemente utilizaremos la lista de los desarrollos de Taylor.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots \quad (a > 0)$$

$$\operatorname{Sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

} VÁLIDAS $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots = \sum \frac{x}{i}$$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\operatorname{ArcTh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} 1 + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \dots$$

} VÁLIDAS si $|x| < 1$

Añadidos dos desarrollos en página anterior

Estos desarrollos nos interesará aplicarlos cuando tengamos límites con $X \to 0$ y lo haremos de la siguiente forma:

Si las funciones están como factores en productos y cocientes, cambiaremos la función por el primer término del desarrollo. Si las funciones aparecen como sumandos, habrá que escribir el desarrollo completo, y nos quedaremos con los términos que manden.

(27) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\text{sen}\,x}{\text{arctg}\,x\,\text{Sh}\,2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x\cdot 2x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

TAYLOR

TAYLOR

(28) $$\lim_{x\to 0}\frac{x+\text{arctg}(x)-\text{Sh}(x)}{x+2\,\text{sen}(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x+\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right]-\left[x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right]}{x+2\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+x-x}{x+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3x} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(26) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\text{arctg}(x)}{\text{Sh}(x)-\text{sen}(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right]}{\left[x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right]-\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{3!}} = \lim_{x\to 0}\frac{3!\,x^3}{3\cdot 2x^3} = 1$$

(18) $$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{\text{tg}^2 x-\text{sen}^2 x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}-\text{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2-2\cos x-x^2)\cos^2 x}{\text{sen}^2 x-\text{sen}^2 x\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\,(2-2\cos x-x^2)}{\text{sen}^2 x\,\underbrace{(1-\cos^2 x)}_{\text{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\,(2-2\cos x-x^2)}{\text{sen}^4 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1^2\left(2-2\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right]-x^2\right)}{\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right]^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x^4}{4!}}{x^4} = \lim\frac{-2x^4}{\underbrace{4!}_{4\cdot 3\cdot 2}\,x^4} = \boxed{\frac{-1}{12}}$$

(29) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\text{sen}\,x}{x(1-\cos x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right]}{x\left(1-\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right]\right.} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}}{\frac{x^3}{2!}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(32) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x^2}{x^4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right]^2 - \left[x^2 - \frac{(x^3)^2}{3!} + \frac{(x^5)^2}{5!} + \cdots\right]}{x^4} =$

doble del 1º para 2:

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left[x\cdot\left(-\frac{x^3}{3!}\right)\right] - \frac{x^6}{3!}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2x^4}{3!}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^4}{3!\,x^4} = \boxed{\frac{-1}{3}}$

(4) ✱✱✱

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$ ⇒ El desarrollo de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ es:

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1/x}{3!} + \frac{1/x}{5!} - \cdots$

Como, cuando $x\to 0$, $\frac{1}{x} \to \pm\infty$ no nos interesa aplicar desarrollos de Taylor ya que mandarían los términos de mayor grado y no sabemos cuáles son.

Por tanto, calcularemos el límite de la siguiente forma:

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}_{\text{Debido a que se trata de una función acotada multiplicada por cero!!}} = 0$

NOTA TEÓRICA

$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x) =$ No existe

$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} =$ No existe

$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} x = 0$; debido a que se trata de una función acotada multiplicada por cero.

(24) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^{\operatorname{sen} x} - \ln(1+x^2)}{\operatorname{sen} x - \operatorname{arctg} x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[1 + \frac{\operatorname{sen} x}{1!} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2!} + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3!} + \cdots\right] - \left[x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \cdots\right]}{\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right] - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right]} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\frac{-x^3}{3!} + \frac{x^3}{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\frac{-x^3 + 2x^3}{6}} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2 \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right] =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{6x}{x} = 6$

Hey Hey!

Comparación de Infinitos

Cuando $x \to \infty$; $\log_b x < x^n < a^x < [x]! < x^x$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{0,002}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 0$ PORQUE MANDA LA POTENCIA SOBRE EL LOGARITMO

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{(1,02)^x}{x^{2000}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \infty$ PORQUE MANDA LA EXPONENCIAL SOBRE LA POTENCIA

L'Hôpital

Si "$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$" es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un entorno $x=a$ se cumple que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ SI EL SEGUNDO LÍMITE EXISTE

Esto es, que si el segundo límite no existe, no sabemos nada sobre el límite original

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to a} \frac{n x^{n-1}}{1} = \boxed{n a^{n-1}}$$

(4) Hemos visto hace un ratito que el límite de este ejercicio valía cero. Como es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, vamos a intentar aplicar L'HÔPITAL.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}(x)} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x}^{0}\,\overbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}^{\text{No existe}} + \overbrace{x^2}^{0}\,\overbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}^{\text{No existe}}\overbrace{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}^{-\infty}}{\cos(x)}$$

$\rightarrow$ El segundo límite no existe y no nos sirve de nada L'Hôpital

(*) APRENDER LÍMITE DE MEMORIA PARA SABER PONER UN CONTRAEJEMPLO A LA REGLA DE L'HÔPITAL

● $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$

Cuando tengamos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ tendremos dos posibilidades: Desarrollos de Taylor o L'Hôpital (preferible desarrollos)

Cuando tengamos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ en principio tendremos dos posibilidades: Comparación de infinitos o L'Hôpital (preferible comparación de infinitos)

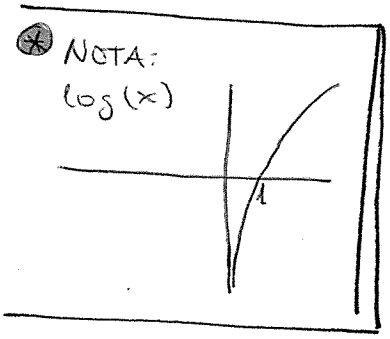
● $0\cdot\infty$ Indeterminación

Estas indeterminaciones siempre se pueden trasformar en indeterminaciones $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Esto es:

$$\lim_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{0}\underbrace{g(x)}_{\infty} = \overbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}^{\frac{0}{0}} = \overbrace{\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}}^{\frac{\infty}{\infty}}$$

⊕ $\lim_{x\to 0^+} x\log x \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{1} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0$

✱ NOTA:



$\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$ PORQUE LA POTENCIA MANDA SOBRE EL LOGARITMO

● 1^∞, 0^0 y ∞^0 Indeterminaciones

Estas indeterminaciones, tomando logaritmos neperianos, se transforman en indeterminaciones $0\cdot\infty$, que pueden transformarse a $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \xrightarrow{\ln} \lim g(x)\ln f(x)$$

1^∞	∞	$\ln 1 = 0$
0^0	0	$-\infty$
∞^0	0	∞

Además, cuando tengamos una indeterminación del tipo 1^∞ podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln[f(x)]} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln(1+f(x)-1)} =$$

(log nep. de algo que tiende a 1)

$$= e^{\lim g(x)(f(x)-1)}$$

30) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{sen}x - x}{x}\right)} =$

BASE: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$ (TAYLOR)

Por tanto la indeterminación es 1^∞

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x - x}{x^3}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right]-x}{x^3}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}}{x^3}} = e^{-\frac{1}{3!}} = \boxed{e^{-\frac{1}{6}}}$$

22) $\lim_{x\to 0}[\operatorname{Sen}(x)]^x \overset{0^\circ}{=} L$

$\ln L = \lim_{x\to 0} x\ln[\operatorname{sen}x] = 0$ Porque la potencia manda sobre el logaritmo $\rightarrow \ln L = 0,\ L = 1$

$\lim_{x\to 0}[\operatorname{sen}(x)]^x = \boxed{1}$

6) $\lim_{x\to 0} xe^{1/x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} \overset{0\cdot\infty}{=} +\infty \text{ PORQUE LA EXPONENCIAL MANDA SOBRE LA POTENCIA} \\ \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (x\to 0^-,\ e^{-\infty} = 0) \end{cases}$ $\nexists$ límite

19) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x) - \operatorname{sen}(x)}{\ln(x) + \cos(x)} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = 1$

Aplicando L'Hôp sería $\rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}-\cos(x)}{\frac{1}{x}-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-x\cos x}{x}}{\frac{1-x\operatorname{sen}x}{x}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-x\cos x}{1-x\operatorname{sen}x} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

Indusbol .com

11

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen}x}\right)^{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}\right)} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}\left(\frac{x}{\operatorname{sen}x}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}\cdot\frac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}} = \boxed{e}$$

Base

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

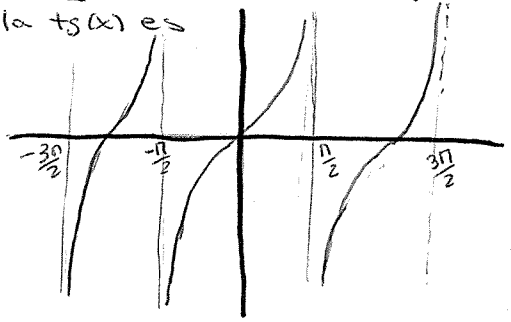
Exponente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x-\left[x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\dots\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{-x^3}{3!}} = \infty$$

15 (*) (*)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{+tg(x)}+1}{e^{+tg(x)}-1} =$$

NOTA: Sabemos que la gráfica de la $tg(x)$ es



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{+tg(x)}+1}{e^{+tg(x)}-1} \overset{\infty}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{+tg(x)}}{e^{+tg(x)}} = 1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{e^{+tg(x)}+1}{e^{(tg(x))}-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{0+1}{0-1} = -1$$

$\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

2

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^3+4x^2+5x+2} \quad \overset{\text{TAYLOR}}{\operatorname{sen}(x+1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^3+4x^2+5x+2}(x+1)$$

- Resolvemos por factorización

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^3+4x^2+5x+2}(x+1) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+3)(x+1)}{(x+2)(x+1)^2} = 2$$

$x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$

$x = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases}\frac{-2}{2}=-1\\ \frac{-6}{2}=-3\end{cases}$

$x^3+4x^2+5x+2 =$

	1	4	5	2
-1		-1	-3	-2
	1	3	2	0
-2		-2	-2	
	1	1	0	

- Resolvemos por L'HÔPITAL

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^3+4x^2+5x+2}(x+1) = \lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+4x^2+4x+3x+3}{x^3+4x^2+5x+2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to -1}\frac{3x^2+10x+7}{3x^2+8x+5} \overset{\text{L'Hôp.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{6x+10}{6x+8} = \frac{-6+10}{-6+8} = 2$$

- Resolvemos por cambio de variable $\begin{cases} \text{si } x \to -1 \\ x+1 \to 0 \end{cases}$ $t = x+1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+4x^2+5x+2} \quad |x+1| = \lim_{t\to 0} \frac{(t-1)^2+4(t-1)+3}{(t-1)^3+4(t-1)^2+5(t-1)+2} \quad (t-1+1) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2-2t+1+4t-4+3)\,t}{t^3-3t^2+3t-1+4t^2+4-8t+5t-5+2} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+2t)\,t}{t^3+t^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{t+2}{t} = \boxed{0}$$

(5) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-\operatorname{sen}(2x)\cdot 2}{-\operatorname{sen}(x)} = \frac{-2}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

Si no nos dejaran aplicar L'Hôpital habría que resolver la indeterminación simplificando el factor que la crea y, para ello, habría que jugar con las relaciones trigonométricas.

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\operatorname{Sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\cos x$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen}x \operatorname{sen} y$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$$tg(x+y) = \frac{tg(x)+tg(y)}{1-tg(x)\,tg(y)}$$

$$tg(2x) = \frac{2\,tg(x)}{1-tg^2(x)}$$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Resolvemos límite anterior $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}} =$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{(\sqrt{2}\cos x+1)(\sqrt{2}\cos x-1)}{\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{(\sqrt{2}\cos x+1)(\sqrt{2}\cos x-1)}{\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\,(\sqrt{2}\cos x+1) = \sqrt{2}+\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

∞ − ∞ Indeterminación

Frecuentemente, estas indeterminaciones se transforman, haciendo operaciones elementales en $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$

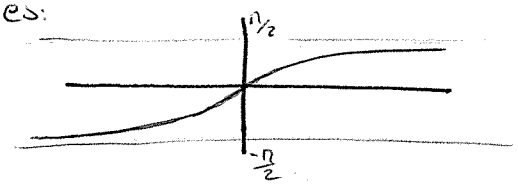
(14) ⊛⊛

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{\operatorname{arctg}(x^2)}\right)^{\frac{1}{0^+}-\frac{1}{0^+}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x^2)-\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{arctg}(x^2)}=$$

NOTA:

Sabemos que la gráfica de arctg(x) es:



$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{(x^2)^3}{3}+\frac{(x^2)^5}{5}-\dots\right]-\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right]^2}{x^2\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-2)\cdot\left(\frac{-x^3}{3!}\right)\cdot(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}}{x^4}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

Cuando tenemos ∞ − ∞ con diferencia de raíces se aplica exactamente la misma metodología que en el caso de los racionales.

(35) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+x+3}-\sqrt[3]{x^3+4x}$ $\overset{\infty-\infty}{=}$ ← Estamos en el caso complicado en el que se anulan los términos que mandan en un principio

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+x+3-x^3-4x}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x^2+x^2}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

En A manda x^3
$\sqrt[3]{A}\to x$; $\sqrt[3]{A^2}\to x^2$

$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right]\overset{\infty-\infty}{=}$ ← Volvemos a estar en el caso complicado en el que se anulan los términos que mandan en un principio

Resolvemos por binomio → $=\lim_{x\to\infty}\left[(x^2+x)^{1/2}-(x^3-x)^{1/3}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}-x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3}\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\binom{1/2}{0}1+\binom{1/2}{1}\frac{1}{x}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\dots\right]-x\left[\binom{1/3}{0}1+\binom{1/3}{1}\frac{1}{x^3}+\dots\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1/3}{x}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Aplicando conjugado → $\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{(x^2+x)^3}-\sqrt[6]{(x^3+x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)^3-(x^3+x)^2}{\sqrt[6]{A^5}+\sqrt[6]{A^4B}+\sqrt[6]{A^3B^2}+\sqrt[6]{A^2B^3}+\sqrt[6]{AB^4}+\sqrt[6]{B^5}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6+3x^4x+3x^2x^2+x^3-x^6-x^2-2x^3x}{x^5+x^5+x^5+x^5+x^5+x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5}{6x^5}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

En A manda x^6
$\sqrt[6]{A}\to x$
$\sqrt[6]{A^5}\to x^5$

Indusbol .com

(→) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{27x^3-x^2+1}-\sqrt[2]{4x^2-6x+7}-\sqrt[2]{2x^2+6}\right)=\lim_{x\to\infty}(3x-2x-\sqrt{2}x)=$

$=\lim_{x\to\infty} x(1-\sqrt{2})=\boxed{-\infty}$

(20) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^x-x}{x^2}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{ax}{1!}+\frac{(ax)^2}{2!}+\frac{(ax)^3}{3!}+\cdots\right)-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)-x}{x^2}=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{ax}{1!}+\frac{(ax)^2}{2!}-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x(a-2)+\frac{x^2(a^2-1)}{2}}{x^2}=$

$=\begin{cases}\text{si } a\neq 2;\ \lim_{x\to 0}\dfrac{x(a-2)}{x^2}=\lim\dfrac{a-2}{x}=\nexists\lim(x) \text{ pues los límites por la derecha y por la izquierda del 0 dan } \infty \text{ y } -\infty\\ \text{si } a=2;\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2 3}{2}}{x^2}=\boxed{\frac{3}{2}}\end{cases}$

(→) $\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x}=\boxed{\frac{1}{2}}$ PERO; $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{|2x|}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{|2x|}=\boxed{\frac{-1}{2}}$

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\ln(1+x)}-\sqrt{1-\ln(1+x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1+\ln(1+x)-(1-\ln(1+x))}{x\left[\sqrt{1+\ln(1+x)}+\sqrt{1-\ln(1+x)}\right]}=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2x}{2x}=\boxed{1}$

(8) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}(2x)\cot g\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\pi/4}\dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})}=[\tfrac{\infty}{\infty}\ \text{IND}]$

Aplicando l'Hôpital

$\lim_{x\to\pi/4}\dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})}\overset{\text{L'Hôp}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{2}{\cos^2(2x)}}{\frac{1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{4})}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos^2(x+\frac{\pi}{4})}{\cos^2(2x)}\overset{0/0}{\underset{\text{L'Hôp}}{=}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cdot 2\cos(x+\frac{\pi}{4})\left[-\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4})\right]}{2\cos(2x)\left[-\operatorname{sen}(2x)\cdot 2\right]}=$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos(2x)\operatorname{sen}(2x)}\overset{0/0}{\underset{\text{L'Hôp}}{=}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\left[-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]}{-\operatorname{sen}^2 2x\cdot 2+2\cos^2 2x}=\dfrac{-1}{-2\cdot 1}=\boxed{\frac{1}{2}}$

Aplicando fórmulas → Después del ej. (10)

$\frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$ No es $-\infty$ porque el coseno nunca valdría más de 1, por tanto, el denominador va a ser siempre positivo

(7) $\lim_{x\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{0} e^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} x\, e^{\frac{1}{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)}} = \lim_{x\to 0} x\, e^{\frac{1}{\frac{x^2}{2!}}} = \lim_{x\to 0} x\, e^{\frac{2}{x^2}} =$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} x\, e^{\frac{2}{x^2}} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} x\, e^{2/x^2} = \infty \end{cases} \Rightarrow \text{No existe el límite}$$

(10) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to\infty} x\ln(x)\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}-1\right)} =$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} x\ln(x)\left(\frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{\ln(x)}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\left[\ln(1+x)-\ln(x)\right]} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim x\cdot\frac{1}{x}} = \boxed{e}$$

Desarrollos

(8) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x)\cot g\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}}{\frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\operatorname{tg}(x)\left[1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\left(1-\operatorname{tg}^2(x)\right)\left(\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\left(1-\operatorname{tg}(x)\right)}{\left(1+\operatorname{tg}(x)\right)\left(1-\operatorname{tg}(x)\right)\left(\operatorname{tg}(x)+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2}{(1+\operatorname{tg}(x))^2} = \frac{2}{(1+1)^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(31) $\lim_{x\to 0} \frac{3x+|x|}{7x-5|x|} \overset{\frac{0}{0}}{=} \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{3x-x}{7x+5x} = \frac{2x}{12x} = \frac{1}{6} \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{3x+x}{7x-5x} = \frac{4x}{2x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \nexists$ límite

(21) $\lim_{x\to 0} \left(1+\underbrace{\frac{1}{1-\cos(x)}}_{\infty}\right)^{\operatorname{sen}x} \overset{\infty^0}{=} \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)}\right)^{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x^2}\right)^{x} = L$

Despreciable

$$\ln L = \lim_{x\to 0} x\ln\frac{2}{x^2} = \lim_{x\to 0} x\left(\ln 2 - \underbrace{\ln x^2}_{-\infty}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(-\ln x^2\right) = 0$$

∞

Porque manda la potencia sobre el log.

$\ln L = 0$; $\boxed{L = 1}$

Continuidad y Derivabilidad de las funciones reales de una variable real

Tema 3

Dominio e Imagen de una Función

Rigurosamente, una función o aplicación, se presenta de la siguiente forma:

$$f: A \longrightarrow B \qquad A = \text{conjunto inicial},\ B = \text{conjunto final}$$
$$x \longmapsto f(x) \qquad f(x) = \text{Expresión matemática}$$

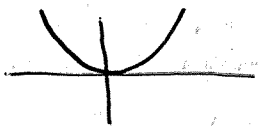
Se denomina conjunto imagen de f, $Im(f)$ a: $\longrightarrow Im(f) = \{y \in B / y = f(x);\ x \in A\}$

Es decir, son los elementos del conjunto final que son imagen de algún elemento del conjunto inicial. También se llama rango o recorrido de f.

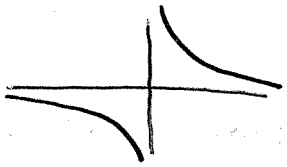
Cuando solamente nos den la expresión matemática $f(x)$ de la función, llamaremos $Dom(f)$ al conjunto de valores de x para los cuales existe función.

Ejercicio: Calcular el dominio y la imagen de las siguientes funciones

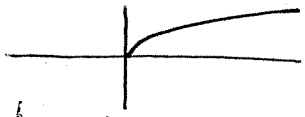
$f(x) = x^2$ — $Dom \equiv \mathbb{R}$, $Im(f) = [0, \infty)$



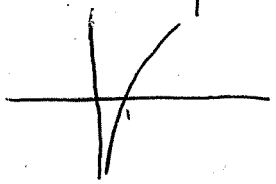
$f(x) = \frac{1}{x}$ — $Dom \equiv \mathbb{R} - \{0\}$, $Im(f) \equiv \mathbb{R} - \{0\}$



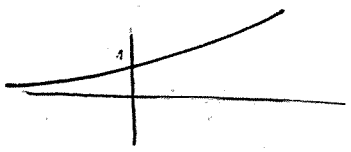
$f(x) = \sqrt{x}$ — $Dom \equiv [0, \infty)$, $Im(f) \equiv [0, \infty)$



$f(x) = \ln x$ — $Dom \equiv (0, \infty)$, $Im(f) \equiv \mathbb{R}$



$f(x) = e^x$ — $Dom \equiv \mathbb{R}$, $Im(f) = (0, \infty)$



Continuidad

Sea $f: A \longrightarrow B$ se dice que f es continua en $a \in A$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Es decir, f es continua en a si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{(\varepsilon, a)} > 0 \text{ tal que si } |x - a| < \delta \Longleftrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Cuando no sea continua diremos que posee una discontinuidad.

Clasificación de las discontinuidades:

- Si existe el límite y es finito pero distinto de $f(a)$ $\Rightarrow$ DISCONTINUIDAD EVITABLE
- En otro caso $\Rightarrow$ DISCONTINUIDAD ESENCIAL
  - Si existen y son finitos los límites $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ pero distintos entre sí la discontinuidad será esencial de 1ª especie o salto finito
  - En otro caso se dice que tenemos una discontinuidad esencial de 2ª especie

NOTA! Se dice que una función es continua en un conjunto si lo es en todos sus puntos. En particular, se dice que una función es continua en $[a,b]$ si:
- f es continua en (a,b)
- f es continua en a por la derecha
- f es continua en b por la izquierda

NOTA! Cuando solamente conozcamos la expresión matemática $f(x)$ de la función, para que sea continua en a tendrá que cumplirse: Que exista la función en a / Que exista el límite / Que ambos coincidad.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

i) La suma de funciones continuas es una función continua

ii) El producto " " " " " " " .

iii) El cociente " " " " " " " excepto en los puntos en los que se anule el denominador.

iiii) La composición de funciones continuas es una función continua

v) Toda función continua en un conjunto compacto, cerrado y acotado, alcanza máximo absoluto y mínimo absoluto → TEOREMA DE WEIERSTRASS

vi) Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto f(x)$ continua tal que $f(a)=A$, $f(b)=B$ $\Rightarrow$ entonces $\forall\, C\in[A,B]\ \exists\, c\in[a,b]$ tal que $f(c)=C$ → TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS

Un caso particular de este teorema sería el teorema de Bolzano. $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto f(x)$ continua tal que $f(a)\,f(b)<0 \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$

NOTA! Evidentemente, si una función es continua en un punto estará acotada en un entorno de dicho punto.

Indusbol .com

① e) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1-e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

(a) ¿Es $f(x)$ continua en $x=0$?

(b) ¿Es continua en el intervalo $(-\infty, 0]$?

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-e^{1/x}} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1-e^{1/x}} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1-e^{1/x}} = 1 \end{cases}$$

($e^{-\infty} = 0$)

$\Rightarrow \nexists$ límite $f(x) \Rightarrow f$ no es continua en $x=0$

Posee una discontinuidad esencial de 1ª especie o salto finito

b) f es continua en $(-\infty, 0)$ por ser operaciones elementales de funciones continuas y no anularse ningún denominador.

f es continua en 0 por la izquierda ya que $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-e^{1/x}} = 1 = f(0)$

Por tanto f es continua en el intervalo $(-\infty, 0]$

① g) Estudia la continuidad de f en $x=0$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{a e^{1/x} + b e^{-\frac{1}{x}}}{c e^{1/x} + d e^{-1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{a e^{1/x} + b e^{-1/x}}{c e^{1/x} + d e^{-1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{a e^{1/x}}{c e^{1/x}} = \dfrac{a}{c} \\ \lim_{x\to 0^-} \dfrac{a e^{1/x} + b e^{-1/x}}{c e^{1/x} + d e^{-1/x}} = \dfrac{b}{d} \end{cases}$$

Cuidado si d, c fueran 0 pero no pueden serlo porque $c, d \in \mathbb{R}^*$

1er caso:

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d} \Longrightarrow f(x)$ no es continua en $x=0 \Longrightarrow$ Discontinuidad esencial de 1ª especie o salto finito

2º caso:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq f(0) = 3 \Longrightarrow f(x)$ no es continua en $x=0 \Longrightarrow$ Discontinuidad evitable

3er caso:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = f(0) = 3 \Longrightarrow f(x)$ es continua en $x=0$

Indusbol .com

③ Sea $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a & x = 0 \end{cases}$ Hallar a para que $f(x)$ sea continua.

En $\mathbb{R} - \{0\}$ $f(x)$ es continua por ser operaciones elementales de funciones continuas y no anularse ningún denominador

f será continua en cero si $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$

Por tanto:

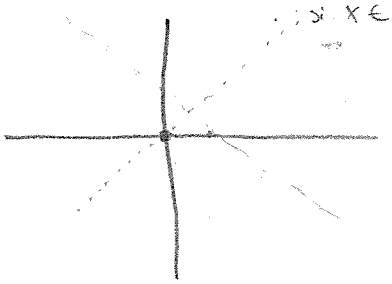
$$a = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{|x|} \overset{\text{Taylor}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)}{|x|} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{-x} = -2 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow$$

Por tanto, valga lo que valga a la función siempre será discontinua en el origen

→ Estudiar la continuidad de una función $\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

Sabemos que entre los números racionales hay infinitos irracionales y viceversa. Esto es, que junto a un número racional tenemos, tan próximos como queramos un irracional, y viceversa



Como se pide estudiar la continuidad en todo $\mathbb{R}$ cogemos un punto genérico a

Sea $a \in \mathbb{R}$ $\quad f(a) \begin{cases} a & \text{si } a \in \mathbb{Q} \\ 1 - a & \text{si } a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} \lim_{\substack{x\to a \\ x\in\mathbb{Q}}} x = a \\ \lim_{\substack{x\to a \\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} (1 - x) = 1 - a \end{cases} \Rightarrow \text{Igualamos} \Rightarrow a = 1 - a, \quad a = \frac{1}{2}$$

Por tanto f es continua solo en $x = \frac{1}{2}$

⊕ Demostrar que no existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ usando sucesiones

Para demostrar que un límite no existe utilizando sucesiones debemos encontrar dos sucesiones distintas que converjan a cero y que las sucesiones de las imágenes converjan a cosas distintas

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} = 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = 0$$

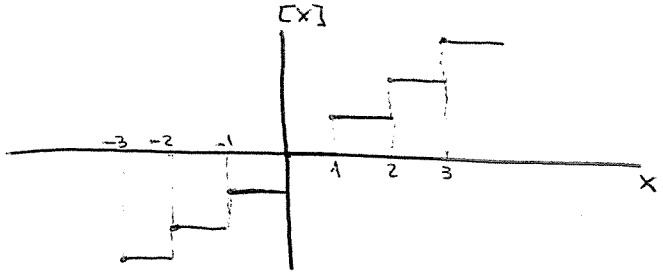
$$x_n' = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} = 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

Por tanto, no existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

⊕ $f(x) = x - [x]$ Estudiar la continuidad

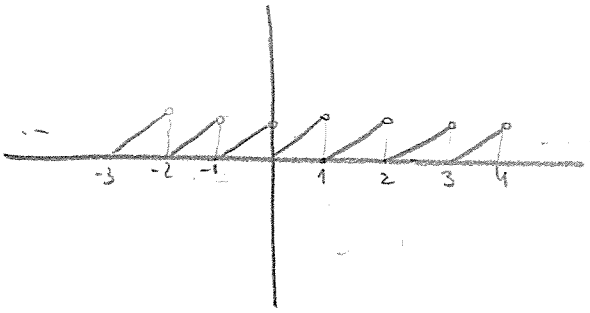
NOTA! $[x]$ es la función parte entera de x que se define como el mayor entero menor o igual a x.

$[2,3] = 2$
$[5,8] = 5$
$[-1] = -1$
$[-1,3] = -2$



De la gráfica se deduce que $[x]$ es continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ y que en los enteros existe una discontinuidad esencial de 1ª especie o salto finito. Además, en los enteros la función $[x]$ es continua por la derecha

Pasamos a la gráfica del enunciado



De la gráfica se deduce que $f(x) = x - [x]$ es continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
Así mismo, en $\mathbb{Z}$ la función tiene discontinuidades esenciales de salto finito

⊕ Estudiar la continuidad de $f(x)=\begin{cases} \frac{tg(x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ e^{1/x} & \text{si } x<0 \end{cases}$ en $\mathbb{R}$

Indusbol.com

Analicemos el punto peligroso $x=0$

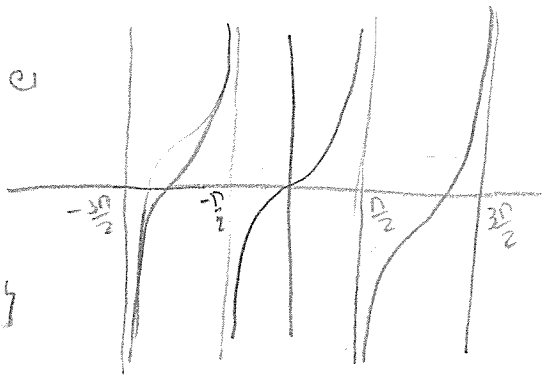
$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{tg(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sqrt{x}} \overset{\text{Taylor}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1\cdot\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ f(0)=0 \\ \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) \text{ es continua en } 0$$

PERO! Sabemos que la gráfica $tg(x)$ es

Es decir, $tg(x)$ es discontinua en

$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$ o lo que es lo mismo,

en $x=\frac{\pi}{2}(2k-1)$ con $k\in\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$



Por tanto, $f(x)$ es continua en

$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}(2n-1)\right\}$ con $n=1,2,3,\ldots$

⊕ Verdadero o falso

a) Si existe $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y existe $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ entonces f es continua en a

Respuesta: si los límites son finitos:

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[\text{y es finito}]{\text{existe}} \lim_{x\to a^-}(f(x)-f(a))=0 \Longrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[\text{es finito}]{\text{existe}} \lim(f(x)-f(a))=0 \Longrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Por tanto $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ y el enunciado sería verdadero.

Sin embargo, si los límites existen pero no son finitos, el enunciado sería falso.

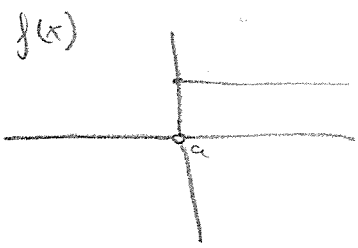
Tomemos el contraejemplo $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty \\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim\frac{1}{x^2} = \infty \end{cases} \Rightarrow \text{Existen los límites pero no son iguales a } f(a) \Longrightarrow \text{Por tanto el enunciado es falso}$$

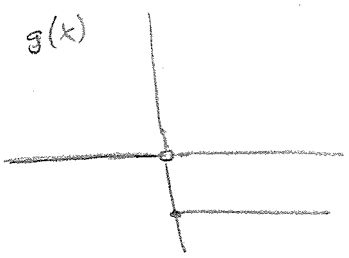
Indusbol.com

④ Razonar las siguientes cuestiones:

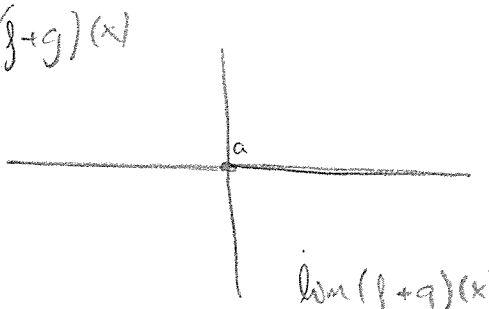
a) Si no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y no existe $\lim_{x\to a} g(x)$ puede existir el $\lim_{x\to a}(f+g)$



$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$



$g(x) = \begin{cases} -1 & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$



$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = a$

Por tanto existe y el verdadero el enunciado

b) Si el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y existe también $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$, debe de existir el $\lim_{x\to a} g(x)$

Tomamos $f(x) = \frac{1}{x^2} \to \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

$g(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x} \to \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} =$ No existe

Sin embargo: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \infty$

Por tanto, si los límites existen y son finitos, el enunciado sería verdadero pero si no, no es necesario como veíamos en el contraejemplo

c) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y existe $\lim (f\cdot g)(x)$, debe existir el límite $\lim_{x\to a} g(x)$.

Tomando las funciones $f(x) = x$, $\lim_{x\to 0} x = 0$

$g(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} =$ No existe

Sin embargo: $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$

Por tanto el enunciado es falso

d) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se verifica que $|x_n| > \frac{1}{2}$

Sabiendo la def. de límite: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t. q. si $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$

Si $l = 1$ esto queda $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t. q. si $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$

Tomando $\varepsilon = 0'1$ $\quad |x_n - 1| < 0'1$; $-0'1 < x_n - 1 < 0'1$

Es decir $\quad 0'9 < x_n < 1'1$, Por tanto $x_n > \frac{1}{2}$ y queda demostrado el enunciado

e) Sea a_n una sucesión convergente y $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ ¿Existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup A$? ¿Existe un $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta = \min A$?

Como a_n es convergente, el conjunto A está acotado y, por el axioma del supremo, todo subconjunto de números reales acotado admite supremo. Por tanto, la respuesta a la 1ª pregunta es sí.

Sin embargo, si tomamos $a_n = \frac{1}{n}$; $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

$\lim A = 0 \notin A$, por tanto A no tiene mínimo. La respuesta a la 2ª pregunta es No.

⊕ Verdadero o falso

a) Toda sucesión acotada es de Cauchy.

Es falso. $X_n = (-1)^n$ — Está acotada / No es de Cauchy

Def. sucesión de Cauchy: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $\begin{matrix} n \geq n_0 \\ m \geq n_0 \end{matrix} \Rightarrow |X_n - X_m| < \varepsilon$

$X_n = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$ $|(-1)^n - (-1)^m| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon$ → Por tanto la sucesión no es de Cauchy y está acotada

$n \to$ par, $m \to$ impar

b) Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < a_n < b_n$, b_n es de Cauchy, entonces a_n es de Cauchy.



$a_n > 0$ $a_n = n + (-1)^n$ → No es de Cauchy
$b_n > 0$ $b_n = 69$ $\forall n$ → Es de Cauchy

⇓ Es falso

c) El límite de una sucesión de números racionales es un número racional

Es falso Ej.: $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

d) Sea A un conjunto de números reales acotado superiormente, probar que: $\sup A = \alpha \iff \forall n \in \mathbb{N}$ $\alpha + \frac{1}{n}$ es cota superior y $\alpha - \frac{1}{n}$ no es cota superior de A.

Como α es el supremo, α es la menor de las cotas superiores.
Por tanto $\alpha + \frac{1}{n}$ es cota superior pero $\alpha - \frac{1}{n}$ no lo es pues $\alpha - \frac{1}{n} < \alpha$ y α es la menor de las cotas superiores.

(+) $f(x) = \dfrac{1}{\lambda x^2 - 2\lambda x + 1}$ a) Hallar λ para que f sea continua en $\mathbb{R}$ b) Hallar λ para que f sea continua en $[0,1]$

a) La función f será discontinua en los puntos que hacen 0 el denominador $\equiv \lambda x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$; $x = \dfrac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}$ (*) $\Longrightarrow$ Para que no se anule ningún denominador, esto es, para que f sea continua en $\mathbb{R}$ se tendrá que cumplir que $4\lambda^2 - 4\lambda < 0$

$\lambda \in (0,1) \Longleftarrow \lambda^2 - \lambda < 0$



OJO! La expresión (*) no tiene sentido si $\lambda = 0$, por tanto estudiamos este caso por separado. Si $\lambda = 0$, $f(x) = 1 \Longrightarrow f$ es continua si $\lambda = 0$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$ si $\lambda \in [0,1)$

b) Si $\lambda \in [0,1)$ $f(x)$ será continua en $[0,1]$ pues es un conjunto contenido en $\mathbb{R}$. Estudiamos si cuando $\lambda \notin [0,1)$ los puntos de discontinuidad caen dentro o fuera del intervalo dado.

1er caso $\lambda \in (-\infty, 0)$ Expresión (*)

$x_1 = \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda}}{\lambda} = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} > 2$

$x_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} < 0$

$\longrightarrow$ f es continua en $[0,1]$ para $\lambda \in (-\infty, 0)$

2ºcaso $\lambda \in (1, \infty)$

$x_1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} \in (1,2)$

$x_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} \in (0,1)$

$\Longrightarrow$ f no es continua en $[0,1]$ para $\lambda \in (1, \infty)$

3er caso $\lambda = 1$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$, f es discontinua en $1 \Longrightarrow$ no es continua en $[0,1]$ para $\lambda = 1$

Por tanto, los valores de λ que hacen que f sea continuan en $[0,1]$ son $\lambda \in (-\infty, 1)$

Continuidad Uniforme

Definición: Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$, se dice que f es uniformemente continua en A si: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ $x, y \in A$

NOTAS!
i) La continuidad uniforme se define en un conjunto, no en un punto
ii) Esto significa que el δ que hay que encontrar sólo puede depender de ε y nunca del punto o los puntos.
iii) Es evidente que si una función es uniformemente continua en un conjunto, será continua en él. Lo contrario no es cierto, hay funciones continuas que no son uniformemente continuas

Teorema de Heine

Toda función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua en dicho conjunto

NOTA! Un conjunto es compacto si y sólo si, es cerrado y acotado. Un conjunto es acotado si tiene cota superior y cota inferior. Un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a su frontera. Se dice que un punto es punto frontera de un conjunto si todo bola con centro en dicho punto tiene siempre elementos del conjunto y elementos que no son de dicho conjunto.

⊕ Ejemplos:

$A\,[2,3)$ - Está acotado
- Frontera de $A = \{2, 3\}$ no incluida en $A \Rightarrow$ No es cerrado

A no es compacto

$B\,[1,5]$ - Está acotado ⟹ B es compacto
- Frontera de $B = \{1, 5\} \in B \rightarrow$ B es cerrado ⇑

$C\,[2, +\infty)$ - No está acotado ⟹ C no es compacto
- Frontera $C = 2 \in C \Rightarrow$ C es cerrado

Indusbol.com

● **TEOREMA** Si f es uniformemente continua en I_1, I_2 y $I_1 \cap I_2$ es un intervalo cerrado, entonces f es uniformemente continua en $I_1 \cup I_2$

NOTA PRÁCTICA! Cuando tengamos que estudiar la continuidad uniforme de una función, en general daremos los siguientes pasos:

1. Si f no es continua, no será uniformemente continua
2. Si f es continua, intentaremos aplicar el Teorema de Heine
3. Si el Teorema de Heine no es aplicable habrá que aplicar la definición δ, ε. No obstante, si f tiene una asíntota vertical, sabremos apriori que f no será uniformemente continua.

➡ Estudiar la continuidad uniforme de $f(x) = x^2$ en los siguientes conjuntos

$\begin{cases} A = [1,3] \\ B = (2,4) \\ C = \mathbb{R} \end{cases}$ Evidentemente, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

① $A = [1,3]$ $\begin{cases} f \text{ es continua en } [1,3] \\ [1,3] \text{ es compacto por ser cerrado y acotado} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{T. Heine}}$ f es uniformemente continua en $[1,3]$

② $B = (2,4)$ $\begin{cases} f \text{ es continua en } [2,4] \\ [2,4] \text{ es cerrado y acotado esto es, el compacto} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{T. Heine}}$ f es continua en $[2,4]$ y lo es también en $(2,4)$ por ser la continuidad uniforme una propiedad de conjunto

③ $C = \mathbb{R}$

El conjunto C no es compacto pues no está acotado.
En este caso el T. Heine no es aplicable y no queda más remedio que aplicar la definición δ, ε

$\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{Dado}} \quad \underbrace{\exists \delta_{(\varepsilon)} > 0}_{\text{Hay que encontrarlo}}$ tal que si $\underbrace{|x-y| < \delta}_{\substack{x,y \in C \\ \text{Hip}}} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(y)| < \varepsilon}_{\substack{\text{Lo que hay} \\ \text{que cumplir}}}$

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |(x+y)(x-y)| < \delta|(x+y)|$$

Como no somos capaces de acotar superiormente $x+y$ pues $\in \mathbb{R}$ no podemos encontrar δ función exclusivamente de ε y $f(x)$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$

⇒ Estudiar la continuidad uniforme de $f(x)=\frac{1}{x}$ en $\begin{cases} A=[2,3] \\ B=(1,4) \\ C=[-1,1] \\ D=(2,\infty) \\ E=(0,1] \end{cases}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

① $A=[2,3]$ $\begin{cases} f \text{ es continua en } [2,3] \\ [2,3] \text{ es compacto por ser cerrado y acotado} \end{cases}$

Aplicando Heine, f será uniformemente continua en $[2,3]$

② $B=(1,4)$ $\begin{cases} f \text{ es continua en } [1,4] \\ [1,4] \text{ es compacto por ser cerrado y acotado} \end{cases}$

Aplicando Heine, f será uniformemente continua en $[1,4]$ y así misma lo será también en $(1,4)$ por ser la continuidad uniforme una propiedad de conjunto.

③ C $[-1,1]$ f no es continua en $[-1,1]$ por no serlo en $x=0$

Por tanto, tampoco será uniformemente continua en $[-1,1]$

④ $D=(2,\infty)$ f es continua en $(2,\infty)$ pero el intervalo no es compacto ya que no está acotado superiormente ni es cerrado

Por tanto, no podemos aplicar Heine y recurrimos a la definición δ,ε

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_{(\varepsilon)}>0 \text{ tal que si } |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon \quad (x,y\in(2,\infty))$$

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{y-x}{xy}\right|<\frac{\delta}{|xy|}<\frac{\delta}{4}=\varepsilon$$

($x>2$ y $y>2$ $\Rightarrow x,y\in(2,\infty)$)

Como hemos encontrado $\delta_{(\varepsilon)}=4\varepsilon$ queda demostrado que f es uniformemente continua en $(2,\infty)$

⑤ $(0,1]$

f es continua en $(0,1]$. Como el intervalo no es compacto no podemos aplicar Heine y recurrimos a la definición δ,ε

$$\forall \varepsilon>0, \ \exists \delta_{(\varepsilon)}>0 \text{ tal que si } |x-y|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon \quad (x,y\in(0,1])$$

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{y-x}{xy}\right|=\left|\frac{x-y}{xy}\right|<\frac{1}{|xy|}\delta$$

Como x e y pueden estar tan cerca del cero como queramos no somos capaces de acotar superiormente $\frac{1}{xy}$ y no podemos encontrar un δ función exclusivamente de ε.

En consecuencia, $f(x)=\frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0,1]$

→ Esto ya lo sabíamos antes pues $f(x)$ tiene en $x=0$ una asíntota vertical

Aplicaciones Lipschithanas

Definición: Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ se dice que es Lipchithana de razón $K>0$ si

$$|f(x)-f(y)| \leq K\,|x-y| \quad \forall\ x,y \in A$$

Si además $K<1$, se dice que f es una aplicación contractiva o contracción

Ejemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 2x$ $\quad |f(x)-f(y)| = |2x-2y| = 2|x-y|$ $\quad$ f es lipchithana de razón $K=2$ por tanto no es contractiva

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{x}{3}$ $\quad |f(x)-f(y)| = \left|\frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right| = \frac{1}{3}|x-y|$ $\quad$ f es lipchithana de razón $K=\frac{1}{3}$ por tanto es contractiva

Theorema "Toda aplicación lipchithana es uniformemente continua".

Demostración: Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ lipchiciana, es decir

$$|f(x)-f(y)| \leq K\,|x-y| \quad \forall\ x,y \in A \text{ con } K>0$$

Hay que demostrar que $\forall \varepsilon>0, \exists\ \delta_{(\varepsilon)}>0$ tal que si $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$, $x,y \in A$

$$|f(x)-f(y)| \overset{\text{Por sel lip.}}{\leq} K\,|x-y| < K\delta = \varepsilon \ ; \quad \delta = \frac{\varepsilon}{K}$$ y queda demostrado.

Dado $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ Demostrar que:

1. Es uniformemente continua en $[0,2]$
2. " lipchithana en $[1,\infty)$
3. " uniformemente continua en $[0,\infty)$

1. f es continua en $[0,2]$, $[0,2]$ es compacto $\xrightarrow{\text{Heine}}$ f es unif. continua en $[0,2]$

2. Aplic. lipchithana $\Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq K\,|x-y|$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \leq \overset{K}{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}\,|x-y| \overset{\substack{y\geq 1\\ x\geq 1}}{\leq} \frac{1}{2}|x-y|$$

Queda demostrado que es lipchithana de razón $K=\frac{1}{2}$ por tanto sería también contractiva.

③ f es unif continua en $[0,2] = I_1$
f es unif continua en $[1,\infty) = I_2$ por ser Lipschitziana
$I_1 \cap I_2 = [1,2]$ es compacto

f es uniformemente continua en $I_1 \cup I_2 = [0,\infty)$ como queríamos demostrar.

→ Por definición:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ $\quad x, y \in [0,\infty)$

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}|x-y| < \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\delta$$?

TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Definición: Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ se dice que a es un punto fijo de $f(x)$ si $f(a) = a$.

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$ $\quad f(a) = a^2$

$a^2 = a$; $a^2 - a = 0$; $\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$ → Puntos fijos

Sea $f: E \to E$, $x \mapsto f(x)$ si E es un conjunto cerrado y f una contracción, entonces f posee un único punto fijo

Este Teorema nos da condiciones suficientes pero no necesarias para que una función posea un único punto fijo.

④ $f: [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{5+x}$ Analizar si cumple las condiciones del T del punto fijo y, en caso afirmativo, calcularlo.

$E = [0,1]$ es un conjunto cerrado ya que contiene a su frontera

Analicemos si f es contractiva

$|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$ con $K \in (0,1)$ $\forall x, y \in [0,1]$

$$\left|\frac{1}{5+x} - \frac{1}{5+y}\right| = \left|\frac{5+y-5-x}{(5+x)(5+y)}\right| = \left|\frac{x-y}{(5+x)(5+y)}\right| \leq \frac{1}{25}|x-y|$$

$K = \frac{1}{25} \in (0,1)$ y f es contractiva

Se cumplen las 2 condiciones del teorema del punto fijo. Dicho punto, único, verificará $a = f(a)$

$f(a) = \frac{1}{5+a} = a$, $1 = a^2 + 5a$; $a^2 + 5a - 1 = 0$; $a = \frac{-5 \pm \sqrt{25+4}}{2} =$

$= \begin{cases} a_1 = \frac{-5+\sqrt{29}}{2} \in [0,1] \\ a_2 = \frac{-5-\sqrt{29}}{2} \notin [0,1] \rightarrow \text{no valida} \end{cases}$

$$\boxed{\text{Punto fijo} = a_1 = \frac{-5+\sqrt{29}}{2}}$$

DERIVABILIDAD

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ se dice que f es derivable en $a \in A$ si existe y es finito el siguiente límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

NOTA!

- Si en el límite anterior hacemos el cambio $x - a = h$ se obtiene

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h}$$

- Se dice que una función es derivable en un conjunto si y sólo si lo es en todos sus puntos. En concreto, f es derivable en $[a, b]$ si y sólo si:
  - f es derivable en (a,b)
  - f es derivable en a por la derecha
  - f es derivable en b por la izquierda

- Si f es derivable en $a \Rightarrow f$ será continua en a

Demo:

f derivable en $a \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe y es finito $\Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (Cond. de continuidad)

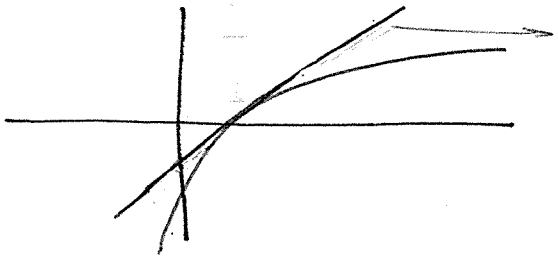
Lo contrario no es cierto. f puede ser continua y no ser derivable

Contraejemplo: $f(x) = |x|$



f es continua
f no es derivable

- Recordamos que la derivada $f'(a)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $[a, f(a)]$



$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Indusbol .com

(2) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

$$\begin{cases} f(x) = x^n \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Continuidad

$$\lim_{x\to 0}\left(x^n \cos\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \text{si } n \neq 0 \\ \lim_{x\to 0} x^n \cos\frac{1}{x} = 0 = f(0) \\ f \text{ es continua en } x=0 \\ \text{si } n = 0 \\ \lim_{x\to 0} x^0 \cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 1\cdot\cos\frac{1}{x} \text{ no existe} \\ f \text{ no es continua en } x=0 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $x=0$ si $n = 1, 2, 3, \ldots$

Derivabilidad

- Si $n=0$ f no es derivable en $x=0$ por no ser continua
- Si $n \neq 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n\cos\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\cos\frac{1}{x}$$

- Si $n=1 \longrightarrow \lim_{x\to 0} x^{n-1}\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ no existe $\Longrightarrow$ f no es derivable en $x=0$
- Si $n \neq 1 \rightarrow \lim_{x\to 0} x^{n-1}\cos\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f$ es derivable

$f(x)$ es derivable en $x=0$ si $n = 2, 3, 4\ldots$ y, además siempre tendremos que $f'(0)=0$

(5) $f(x) = |x^3| \longrightarrow \begin{cases} x^3 & \text{si } x>0 \\ -x^3 & \text{si } x<0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Calcular $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$

Continuidad

$$\lim_{x\to 0}|x^3| = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x^3 = 0 \\ \lim_{x\to 0^-}(-x^3) = 0 \end{cases} \Big\} \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \quad f \text{ es continua en } x=0$$

Derivabilidad

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-0}{x} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{-x^3-0}{x} = 0 \end{cases} \Big\} \boxed{f'(0)=0}$$

Sólo sabemos calcular derivadas primeras. La derivada segunda es la 1ª derivada de la derivada 1ª, por tanto, para calcular $f''(0)$ necesitamos conocer $f'(x)$

$$f'(x)\begin{cases} 3x^2 & \text{si } x>0 \\ -3x^2 & \text{si } x<0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3x^2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-3x^2}{x}=0\end{cases}$$

$$\boxed{f''(0)=0}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 6x & \text{si } x>0 \\ -6x & \text{si } x<0 \\ f''(0)=0 \end{cases}$$

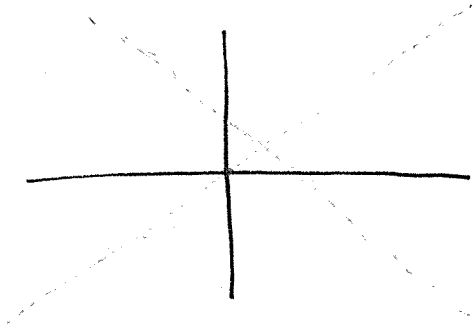
$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{6x}{x}=6\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-6x}{x}=-6\end{cases}$$

$\nexists\, f'''(0)$

⑥ Estudia la continuidad y la derivabilidad de

$f(x)=x$ si $x\in\mathbb{Q}$

$f(x)=1-x$ si $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$



Sabemos que entre dos números racionales hay infinitos irracionales y viceversa. Por tanto, junto a un número racional hay, tan próximo como queramos, un irracional y viceversa

Como queremos estudiar la continuidad en todo $\mathbb{R}$ tomamos un punto genérico $a\in\mathbb{R}$

$$f(a)\begin{cases} a & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ 1-a & \text{si } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} x=a\\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} 1-x=1-a\end{cases}\Longrightarrow \text{Igualando: } a=1-a\ ;\ a=\frac{1}{2}$$

f es continua sólo en $x=\frac{1}{2}$

Derivabilidad:

En $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ $f(x)$ no es derivable por no ser continua

En $x=\frac{1}{2}$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}\frac{1-x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\left(-x+\frac{1}{2}\right)}{-\left(-x+\frac{1}{2}\right)}=-1\end{cases}\longrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)\text{ no existe}$$

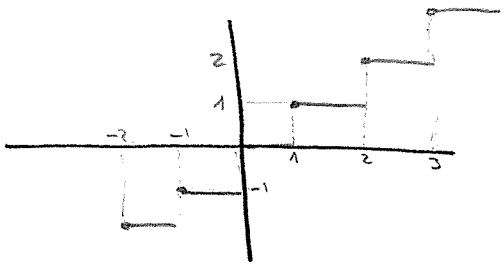
Por tanto $f(x)$ no es derivable en ningún punto de $\mathbb{R}$

④ Estudiar la continuidad y derivabilidad de:

a) $f_1(x) = [x]$

b) $f_2(x) = x[x]$

ⓐ Sabemos que la gráfica de $f_1(x) = [x]$ es:



Es evidente que la gráfica es continua y derivable en $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ y además, los puntos donde es derivable la derivada vale cero.

Hagamoslo con todo rigor

→ Continuidad

Sea $f_1(x)$ $\begin{cases} x = K \text{ con } K \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x\to K} f_1(x) = \begin{cases} \lim_{x\to K^+} f_1(x) = K \\ \lim_{x\to K^-} f_1(x) = K-1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{f_1(x) \text{ no es continua en } \mathbb{Z}} \\ x = a \quad \text{con } K < a < K+1 \text{ y } K \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = K = f(a) = K \Longrightarrow \boxed{f_1(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}-\mathbb{Z}}$

- Derivabilidad

$f_1(x)$ no es derivable en $\mathbb{Z}$ por no ser continua

Sea $x = a \notin \mathbb{Z}$ tal que $K < a < K+1$ con $K \in \mathbb{Z}$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{[x]-[a]}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{K-K}{x-a} = 0$$

Por tanto $f_1(x) = [x]$ es derivable en $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

ⓑ $f_2(x) = x[x]$

Sabemos que el producto de dos funciones continuas es una función continua. Como $\begin{cases} x \text{ es continua en } \mathbb{R} \\ [x] \text{ " " " } \mathbb{R}-\mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{f_2(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}-\mathbb{Z}}$

Analicemos lo que ocurre en $\mathbb{Z}$

Sea $x = K \in \mathbb{Z}$

$f_2(K) = K[K] = K^2$

$\lim_{x\to K} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to K^+} x[x] = K\,K = K^2 \\ \lim_{x\to K^-} x[x] = K[K-1] \end{cases}$ Igualemos $\Rightarrow K^2 = K[K-1]$;

$0 = -K$

$K = 0$

Por tanto, en los enteros sólo será continua en cero

→ Derivabilidad

Sabemos que el producto de funciones derivables es una función derivable

Como $\begin{cases} x \text{ es derivable en } \mathbb{R} \\ [x] \text{ es } \quad " \quad " \quad \mathbb{R}-\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow f_2(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Estudiamos qué ocurre en $\mathbb{Z}$

$f_2(x)$ no es derivable en $\mathbb{Z}-\{0\}$ por no ser continua

Por tanto, sólo queda analizar qué ocurre en cero

$$f_2'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x[x]-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} [x] = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{x[x]-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} [x] = -1 \end{cases} \quad \nexists f'(0)$$

Por tanto $f_2(x)$ sólo será derivable en $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

⊕ Estudiar la derivabilidad en $x=\pi$ de $f(x) = x^2 + [x] + \sqrt{x^2+[x]^2}$

Como π es un número irracional, sabemos que f será derivable en un entorno de dicho punto por ser f operaciones elementales de funciones continuas y derivables en $x=\pi$

En dicho punto

$$f'(x) = 2x + 0 + \frac{2x + 2[x]\cdot 0}{2\sqrt{x^2+[x]^2}}$$

$$f'(\pi) = 2\pi + \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+3^2}}$$

(39) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|2-x|}{x} & \text{si } x\in\mathbb{R}-\{0\}\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

Estudia

a) Continuidad y derivabilidad

b) Continuidad uniforme en el intervalo $[1,3]$

(a)

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-x}{x} & \text{si } x<2 \text{ y } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=2\\ \dfrac{-2+x}{x} & \text{si } x>2\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

Estudiamos la continuidad en:

$x=2$

$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}\dfrac{-2+x}{x}=0\\ \lim_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{x}=0\end{cases}\Rightarrow f$ es continua en $x=2$

$x=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{2-x}{x}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{-2+x}{x}=\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\dfrac{2-x}{x}=-\infty\end{cases}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)\Rightarrow f$ no es continua en $x=0$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

Derivabilidad

En $x=0$ $f(x)$ no es derivable por no ser continua

Estudiamos la derivabilidad en $x=2$

$f'(2)=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}\dfrac{\frac{-2+x}{x}-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)}{x(x-2)}=\dfrac{1}{2}\\ \lim_{x\to 2^-}\dfrac{\frac{2-x}{x}-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)}{x(x-2)}=\dfrac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow \nexists f'(2)$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{0,2\}$

(b) Cont. uniforme en $[1,3]$

$\begin{cases}f(x) \text{ es continua en } [1,3]\\ [1,3] \text{ es compacto por ser cerrado y acotado}\end{cases}\xrightarrow{\text{T. Heine}}$ $f(x)$ es uniformemente continua en $[1,3]$

(49)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ f(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

a) Continuidad de f en $\mathbb{R}$

En $\mathbb{R}-\{0\}$ f es continua por ser operaciones elementales de funciones continuas y no anularse ningún denominador

Analicemos el punto peligroso $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}}{x^2}=\frac{1}{2}=f(0)$$

Así $f(x)$ será continua en todo $\mathbb{R}$

b) Derivabilidad de f en $\mathbb{R}$

En $\mathbb{R}-\{0\}$ $f(x)$ será derivable por ser operaciones elementales de funciones derivables y no anularse ningún denominador

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2-2\cos x-x^2}{2x^2}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right]-x^2}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^4}{4!}}{2x^3}=0$$

$f(x)$ será derivable en todo $\mathbb{R}$

c) Calcular $f'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(\operatorname{sen}x)x^2-2x(1-\cos x)}{x^4}=\dfrac{x\left[x\operatorname{sen}x-2(1-\cos x)\right]}{x^4}=\dfrac{x\operatorname{sen}x-2(1-\cos x)}{x^3} & \text{si } x\neq 0\\ f'(0)=0\end{cases}$$

d) Estudiar la continuidad de $f'(x)$ en $x=0$

$$f'(x) \begin{cases} \dfrac{x\operatorname{sen}x - 2(1-\cos x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}x - 2(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) - 2\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3!} - 2\left(-\frac{x^4}{4!}\right)}{x^3} = 0 = f'(0)$$

$f'(x)$ es continua en $x=0$

DIFERENCIAL

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ derivable en $a \in A$, se denomina diferencial de f en $a \in A$ a la aplicación lineal $df(a;\cdot)$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h \to df(a;h) = f'(a)\cdot h$$

NOTA!

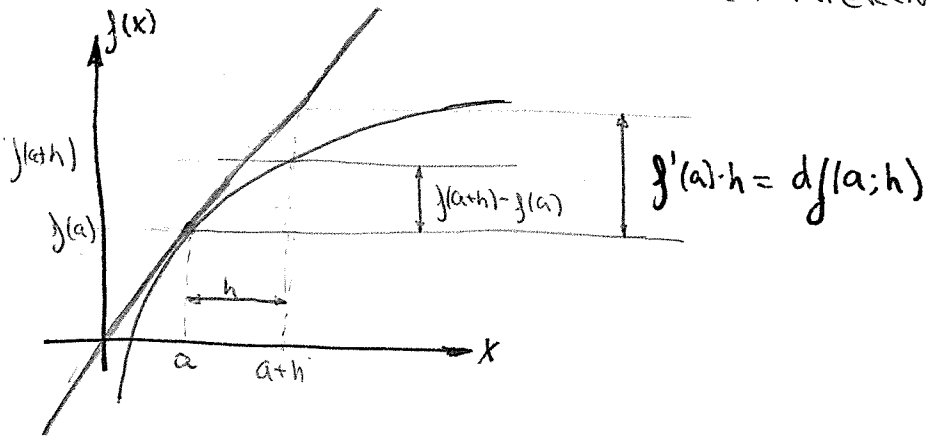
Una función es diferenciable en un punto si y sólo si es derivable en dicho punto. Esto no ocurrirá en funciones de varias variables.

NOTA!

Sabemos que $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$; esto es que, si "$h \to 0$" $\Rightarrow f(a+h) - f(a)$ que es el incremento de f será $f'(a)h = f(a+h) - f(a) = d(a,h)$

Esto significa que el diferencial se aproxima al incremento de la función si el incremento de la variable independiente es "pequeño".

NOTA! SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA DIFERENCIAL



Por tanto, la diferencial de $f(a;h)$ representa la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $[a, f(a)]$ pero referida a un sistema de referencia paralelo al original con origen en el punto $(a, f(a))$

NOTA! Si $g(x)=x \longrightarrow dg(x)=dx=1\cdot h$

Entonces $df(x)$ se podrá escribir como $df(x)=f'(x)\,1=f'(x)\,dx$

(8) Hallar el error en el area y $d(a,h)$

lado = 5 cm

0'001 cm error



$h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$A=\frac{1}{2}h\cdot x=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}\cdot x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x^2-x^2}{4}}\,x=$

$=\frac{1}{4}\sqrt{3x^2}\,x=\frac{x^2}{4}\sqrt{3}=f(x)$

$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

∴ Error ≡ Incremento de la función $= f(a+h)-f(a)=f(5,001)-f(5)=$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(5,001)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}5^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(0,010001)=4,33\cdot10^{-3}$

Sabemos que el diferencial se aproxima al incremento de la función si el incremento de la variable indep. es pequeño. Esto es,

$f(a+h)-f(a)\simeq df(a;h)=f'(a)\cdot h=\frac{2\sqrt{3}}{4}x=\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot5\cdot0'001=$

$=4,33\cdot10^{-3}$

Los resultados son practicamente iguales porque h es muy pequeño frente a a.

Repetir con $h=1$

$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\quad;\quad f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$f(a+h)-f(a)=f(6)-f(5)=\frac{\sqrt{3}}{4}6^2-\frac{\sqrt{3}}{4}5^2=4,76$

$df(a,h)=f'(a)\,h=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot5\cdot1=4,33$

} Los resultados no se parecen pues h no es pequeño frente a a

Propiedades de las funciones derivables

- La suma de funciones derivables es una función derivable
- El producto " " " " " " "
- El cociente " " " " " " " excepto en los puntos donde se anule el denominador
- La composición de funciones derivables es una función derivable

La derivada de la aplicación compuesta se halla aplicando la regla de la cadena que rigurosamente se enuncia en el siguiente teorema

Theorema: Sean $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ y $g: B \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$ tales que $\text{Im} f \subset B$, entonces podemos definir la aplicación f compuesta por g

$$g \circ f: A \to \mathbb{R}, \quad x \to (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Si f es derivable en $a \in A$ y g es derivable en $f(a) = b \in B$ entonces $g \circ f$ es derivable en a y se cumple que

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'[f(a)]\, f'(a)}$$

(19) Calcular $h'(1)$ sin evaluar $h(x)$ siendo $f(x) = x^6 + 4$, $g(x) = x^2 + 3x^3 + 2$, $h(x) = (g \circ f)(x)$

Como no nos dejan evaluar explícitamente $h(x)$, se trata de aplicar la regla de la cadena, es decir:

$$h'(1) = (g \circ f)(1) = g'[f(1)]\, f'(1) = g'(5)\, f'(1) = \boxed{6[7 \cdot 5^6 + 15 \cdot 5^2]}$$

$f(1) = 1^6 + 4 = 5$

$g'(x) = 7x^6 + 15x^2 \longrightarrow g'(5) = 7 \cdot 5^6 + 15 \cdot 5^2$

$f'(x) = 6x^5 \longrightarrow f'(1) = 6$

Indusbol .com

$f(x) = \sqrt{x - [x]}$ 1ª ec. ¿Es $g'(2) = 1$?

$g(2x+1) = f(x^2)$ 2ª ec

Derivamos la segunda ec. respecto de x

$g'(2x+1)\,2 = f'(x^2)\,2x$; Necesitamos que aparezca $g'(2) \longrightarrow 2x+1 = 2$, $x = \frac{1}{2}$

$g'(2)\cdot 2 = f'\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$; $g'(2) = \frac{f'(\frac{1}{4})}{2}$

Derivamos respecto de x la primera ecuación en un entorno de $x = \frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{1-0}{2\sqrt{x-[x]}}$; $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}-0}} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1$

$g'(2) = \frac{1}{2}\cdot 1 \neq 1 \longrightarrow$ $\boxed{g'(2) \neq 1}$

Calcular $g'(2)$ si $g(x) = f(x^2+2)$ ①

$f(e^x) = \ln(\sqrt{x})$ ②

Derivamos ① respecto de x

$g'(x) = f'(x^2+2)\,2x$; $x=2 \Longrightarrow g'(2) = f'(6)\,4$

Derivamos ahora ② respecto de x

$f'(e^x)\,e^x = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; $f'(e^x)\,e^x = \frac{1}{2x} \Longrightarrow e^x = 6$, $x = \ln 6$; $f'(6)\,6 = \frac{1}{12}$

$f'(6) = \frac{1}{12\ln 6}$

$g'(2) = \frac{1}{12\ln 6}\,4 = \frac{1}{3\ln 6}$ $\boxed{g'(2) = \frac{1}{3\ln 6}}$

Calcular $g'(-\frac{1}{2})$ si $g = f\circ f$ y $f(x) = \text{máx.}(x, x^2)$

$g'(-\frac{1}{2}) = (f\circ f)'(-\frac{1}{2}) = f'[f(-\frac{1}{2})]\,f'(-\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{4})\,f'(-\frac{1}{2})$

$f(-\frac{1}{2}) = \max(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$

En un entorno de $x=\frac{1}{4}$ $f(x) = \max(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}) = \frac{1}{4} \Longrightarrow f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $f'(\frac{1}{4}) = 1$

En un entorno de $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = \max(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \Longrightarrow f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$, $f'(-\frac{1}{2}) = -1$

$g'(-\frac{1}{2}) = 1\cdot(-1) = \boxed{-1}$

→ Calcular $g'(-3)$ si $g = f \circ f$ y $f(x) = |2|x| - x^2|$

$$g'(-3) = (f \circ g)'(-3) = f'(f(-3))\, f'(-3) = f'(3)\, f'(-3)$$

$$f(-3) = |2|-3| - (-3)^2| = |6 - 9| = 3$$

En un entorno de $x = 3 \Rightarrow f(3) = |2|3| - 3^2| = |2 \cdot 3 - 3^2| = -2 \cdot 3 + 3^2$

Por tanto $f_1(x) = -2x + x^2$; $f_1'(x) = -2 + 2x$; $f_1'(3) = 4$

En un entorno de $x = -3 \Rightarrow f(-3) = |2|-3| - (-3)^2| = |2 \cdot [-(-3)] - (-3)^2|$

Por tanto $f_2(x) = -2(-x) + x^2 = 2x + x^2$

$f_2'(x) = 2 + 2x$; $f_2'(-3) = 2 - 6 = -4$

$$g'(-3) = f'(3)\, f'(-3) = 4 \cdot (-4) = \boxed{-16}$$

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = y$ continua e inyectiva. Sea $a \in A$ tal que f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$ entonces la aplicación inversa

$f^{-1}: \text{Im } f \to A$, $y \to f^{-1}(y) = x$ es derivable en $b = f(a)$ y además:

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]} = \frac{1}{f'(a)}}$$

NOTA!

Cuando queramos aplicar el teorema de la función inversa habrá que comprobar previamente que la aplicación es inyectiva.

Indusbol .com

(20) Sea $f(x) = e^{4x+3}$, calcular $(f^{-1})'(1)$ sin evaluar la inversa

Como no nos dejan evaluar explícitamente la función inversa, se trata de aplicar el teorema de la función inversa

Analicemos si f es inyectiva, esto es:

Si $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$e^{4x_1+3} = e^{4x_2+3}$; $(4x_1+3)\ln e = (4x_2+3)\ln e$;

$4x_1+3 = 4x_2+3$; $x_1 = x_2 \Longrightarrow f$ es inyectiva

NOTA! La forma más rápida para comprobar si una función es inyectiva será comprobar si es estrictamente creciente o decreciente. Si la función es derivable, esto lo podemos ver estudiando el signo de la derivada.

$\Longrightarrow f'(x) = 4e^{4x+3} > 0$

f es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'[f^{-1}(1)]} = \frac{1}{f'(-\frac{3}{4})} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

($f'[f^{-1}(1)] = f'(a)$)

$f^{-1}(1) = a \Rightarrow f(a) = 1$; $f(a) = e^{4a+3} = 1$; $4a+3 = 0$

$a = -\frac{3}{4}$

$f'(x) = 4e^{4x+3}$; $f'(-\frac{3}{4}) = 4e^{-3+3} = 4$

(21) Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^3 + x + 1$

a) ¿Existe $f^{-1}(x)$?

Se trata de comprobar si f es inyectiva y continua en todo $\mathbb{R}$. Además, habrá que comprobar de dónde a dónde va f^{-1}

① Inyectiva: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ es estrictamente creciente $\Longrightarrow f$ es inyectiva

② $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R} \rightarrow f$ es sobreyectiva

↳ f es biyectiva

$\boxed{f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$

③ f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica

b) ¿f^{-1} es derivable en todo $\mathbb{R}$?

Como $f'(x)$ nunca se anula, el teorema de la función inversa no garantiza que f^{-1} es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(3)]} = \dfrac{1}{f'(1)} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

$f^{-1}(3) = a$; $f(a) = 3$; $f(a) = a^3 + a + 1 = 3$

A ojo vemos que $a = 1$ es solución y sabemos que sólo tenemos una solución

$f^{-1}(3) = a = 1$

$f'(x) = 3x^2 + 1$; $f'(1) = 3 + 1 = 4$

(22) Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 10$; Calcule $(f^{-1})'(16)$

Se trata de aplicar el teorema de la función inversa.

Veamos si f es inyectiva y continua.

→ f es continua por ser polinómica

→ $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3 = 0$; $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 36}}{6}$ No hay raíces

$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ f es estrictamente creciente $\Longrightarrow$ f es inyectiva

$(f^{-1})'(16) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(16)]} = \dfrac{1}{f'(1)} = \boxed{\dfrac{1}{10}}$

$f^{-1}(16) = a$; $f(a) = 16$; $f(a) = a^3 + 2a^2 + 3a + 10 = 16$

$f^{-1}(16) = 1 \Longleftarrow$ A ojo vemos que $a = 1$ es solución y sabemos que sólo hay una

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$; $f'(1) = 3 + 4 + 3 = 10$

Indusbol .com

(23) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ $\quad g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \ln(x)$ Calcule:

$$(f \circ g^{-1})'(0) = f'[g^{-1}(0)]\,(g^{-1})'(0) = f'(g^{-1}(0))\,\frac{1}{g'[g^{-1}(0)]}$$

↑ Regla de la cadena

↑ Como g es inyectiva por ser estrictamente creciente en todo su dominio, aplicamos → Teorema de la función inversa

$$g^{-1}(0) = a;\ g(a) = 0;\ g(a) = \ln a = 0,\ a = 1$$

$$(f \circ g^{-1})'(0) = f'[g^{-1}(0)]\,\frac{1}{g'[g^{-1}(0)]} = f'(1)\,\frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2};\ f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x};\ g'(1) = 1$$

⊕ Calcular $g'(1)$ si $\boxed{g(x) = f^{-1}[f^2(x)]}$ (*) $f'(x) > 0$ y $f(1) = 1$

$$g'(x) = (f^{-1})'[f^2(x)]\,2 f(x) f'(x)$$

$$g'(1) = (f^{-1})'[f^2(1)]\,2 f(1) f'(1) = (f^{-1})'(1)\,2 f'(1) = \frac{1}{f'[f^{-1}(1)]}\,2 f'(1) =$$

$f^{-1}(1) = a;\ f(a) = 1 \Rightarrow a = 1$

$$= \frac{1}{f'(1)}\,2 f'(1) = \boxed{2}$$

↑ Como $f' > 0$ f es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva ⇒ Podemos aplicar el teorema de la función inversa

Indusbol .com

⊕ Calcular $(f^{-1})''(0)$ si $f(x) = 2x + 7x^2 + 10x^3$

Se trata de aplicar el teorema de la función inversa, para lo que habrá que comprobar si: f es continua ⟹ lo es, por ser función polinomica; f es inyectiva

$f'(x) = 2 + 14x + 30x^2 = 0$

$15x^2 + 7x + 1 = 0$, $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-60}}{30}$ No hay raices

$f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ es estrictamente creciente $\Longrightarrow f$ es inyectiva

Aplicamos el de la función inversa en $f(x)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \Longrightarrow \text{Derivamos para sacar } (f^{-1})''(x)$$

$$(f^{-1})''(x) = \frac{-f''[f^{-1}(x)]\,(f^{-1})'(x)}{(f'[f^{-1}(x)])^2} = \frac{-f''[f^{-1}(x)]}{(f'[f^{-1}(x)])^3}$$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$

$$(f^{-1})''(0) = \frac{-f''[f^{-1}(0)]}{(f'[f^{-1}(0)])^3} = \frac{-f''[0]}{[f'(0)]^3} = \frac{-14}{(2)^3} = \frac{-7}{4}$$

$f^{-1}(0) = a$; $f(a) = 0$

$f(a) = 2a + 7a^2 + 10a^3 = 0 \Longrightarrow a = 0$

$f^{-1}(0) = 0$

$f'(x) = 2 + 14x + 30x^2$

$f''(x) = 14 + 60x$

$f'(0) = 2$

$f''(0) = 14$

Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^5 \operatorname{sen}\frac{1}{x}+x^2+x & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Calcular, si existe, $(f^{-1})''(0)$ donde f^{-1} es la inversa local de f para que $f^{-1}(0)=0$

NOTA! La inversa local de una función alrededor de un punto existirá si en un entorno de dicho punto la función es inyectiva. Por tanto, cuando queramos calcular la derivada de la inversa local de una función, no será preciso demostrar que es inyectiva

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}, \quad (f^{-1})''(x)=\frac{-f''[f^{-1}(x)]\,(f^{-1})'(x)}{(f'[f^{-1}(x)])^2}=\frac{-f''[f^{-1}(x)]}{(f'[f^{-1}(x)])^3}$$

($(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$)

$$(f^{-1})''(0)=\frac{-f''[f^{-1}(0)]}{(f'[f^{-1}(0)])^3}=\frac{-f''(0)}{(f'(0))^3}$$

($f^{-1}(0)=0$)

Ahora, como $x=0$ es punto peligroso, para calcular las derivadas aplicaremos la definición:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5\operatorname{sen}\frac{1}{x}+x^2+x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^4\operatorname{sen}\frac{1}{x}+x+1\right)=1$$

Para calcular $f''(0)$ necesitamos conocer $f'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases} 5x^4\operatorname{sen}\frac{1}{x}+x^5\cos\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)+2x+1 & \text{si } x\neq 0 \\ f'(0)=1 \end{cases}$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^4\operatorname{sen}\frac{1}{x}+x^5\cos\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)+2x+1-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(5x^3\operatorname{sen}\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}+2\right)=2$$

$$(f^{-1})''(0)=\frac{-f''(0)}{(f'(0))^3}=\frac{-2}{1^3}=\boxed{-2}$$

⊕ Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=f'(0)=0$ y $f''(0)=2$ y sea $g(x)\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & \\ g(0)=0\end{cases}$

Calcular $g'(0)$

Tradusbook.com

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\overset{\text{tanto}}{\underset{\downarrow}{=}}$$

Cuando nos dicen que f es derivable en cero, f será también continua por tanto $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=0$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}$$

↑ L'Hôpital

↑ $f'(x)$ es continua en cero pues nos dicen que existe $f''(0)$ $\Rightarrow$ Por tanto $f'(x)$ es derivable en cero y, por tanto, también es continua, esto es $\lim_{x\to0} f'(x)=f'(0)=0$

Por tanto volvemos a tener la indeterminación $\frac{0}{0}$ y aplicamos L'Hôpital $=$

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

↑ Este paso no podemos darle porque no podemos asegurar que $f''(x)$ sea continua en cero, por tanto, no sabemos si $\lim_{x\to0} f''(x)=f''(0)$

Este ejercicio se resuelve de la siguiente forma:

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}}_{f''(0)}=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}2=\boxed{1}$$

⊕ Si la función $f\in C^1([0,1])$ cumple que $\lim_{x\to0^+}\frac{f(2x^2)}{\sqrt{3}\,x^2}=1$ Calcular $\lim_{x\to0^+}\frac{(f\circ f)(x)}{f^{-1}(x)}$

NOTA! El conjunto C^1 es el conjunto de las funciones derivables cuya 1ª derivada es continua

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(f\circ f)(x)}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{f[f(x)]}{f^{-1}(x)}\overset{\uparrow}{=}\frac{f[f(0)]}{f^{-1}(0)}$$

↑ Por continuidad de f en 0^+

Tenemos que calcular $f(0)$ y $f^{-1}(0)$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(2x^2)}{\sqrt{3}\,x^2}=1\Rightarrow\lim f(2x^2)=0\overset{\uparrow}{=}f(0)\Longrightarrow\begin{matrix}f(0)=0\\ f^{-1}(0)=0\end{matrix}$$

↑ por continuidad de f en $x=0^+$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(f\circ f)(x)}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(f(x))}{f^{-1}(x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{f'[f(x)]\,f'(x)}{\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}}\overset{\uparrow}{=}\lim\frac{f'[f(0)]\,f'(0)}{\frac{1}{f'[f^{-1}(0)]}}=\lim_{x\to0^+}f'(0)\,f'(0)\,f'(0)=$$

↑ L'Hôpital

↑ Por continuidad de f en $x=0^+$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{f\circ f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x\to 0^+} [f'(0)]^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

El límite $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(2x^2)}{\sqrt{3}x^2} = \frac{0}{0}$ [ind.] podemos aplicarle L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(2x^2)}{\sqrt{3}x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(2x^2)\,4x}{2\sqrt{3}x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(2x^2)\,4}{2\sqrt{3}} \overset{\text{Por cont. de } f' \text{ en } x=0^+}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(0)\,4}{2\sqrt{3}} = 1$$

$$4f'(0) = 2\sqrt{3}\,; \quad f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

⊕ La ecuación $\begin{cases} \int e^{-f(x)} f' = 2 + \operatorname{tg}(x) \quad (*) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ define una función $f(x)$ uno a uno o biyectiva en $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ y derivable. Sea $g(x) = f^{-1}(x+1)$, Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-\operatorname{sen}(x)}}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-\operatorname{sen}x}}{f^{-1}(x+1)} \overset{\text{si } f(0)=1 \Rightarrow f^{-1}(1)=0 \text{ la indet es } \frac{0}{0} \text{ y podemos aplicar L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x\, e^{-\operatorname{sen}x}}{(f^{-1})'(x+1)\cdot 1} =$$

$$= \frac{2}{(f^{-1})'(1)} \overset{\text{de } (*) \text{ tenemos que } f'(x) \text{ es continua en } [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \text{ por ser operaciones elementales de funciones continuas (la tg es continua en el intervalo dado) y no anularse ningún denominador. Además, } f \text{ es inyectiva por ser biyectiva por lo que podemos aplicar el teorema de la función inversa}}{=} \frac{2}{\frac{1}{f'[f^{-1}(1)]}} = 2f'(0) = 2\cdot 2e = \boxed{4e}$$

Calculemos $f'(0)$

$$e^{-f} f' = 2 + \operatorname{tg}(x),\; e^{-f(0)} f'(0) = 2 + \operatorname{tg}(0)\,;\; f'(0) = \frac{2+0}{e^{-1}} = 2e$$

Derivación de la Función Implícita

Sea la curva en el plano dada por la ecuación $f(x,y)=0$ donde no es posible despejar la y en función de x. Por ello, esta ecuación se denomina ecuación implícita de la curva

Si consideramos a y como función de x tendremos $f(x,y)=0$

y derivando esta expresión respecto de x → $f[x, y(x)]=0$

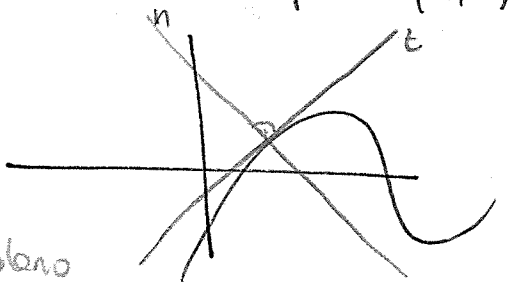
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Por tanto para que exista "$\frac{dy}{dx}$" tendrá que ocurrir que $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$

Hallar la recta tangente y la recta normal a la curva en el punto (1,2)

$f(x) = 4x^2 + 2xy - xy^3 = 0$

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}(1)$



Para escribir la ecuación de una recta en un plano necesitamos: $t \equiv \begin{cases} \text{Punto} : (1,2) \\ \text{Pendiente} : m = \frac{dy}{dx}(1) \end{cases}$

Derivamos $f(x)$ asumiendo que y es función de x

$$m = \frac{dy}{dx} = 8x + 2y + 2xy' - xy^3 - x\,3y^2y' \quad (*)(*)$$

$$\frac{dy}{dx}(1,2) = 8 + 4 + 2y'(1) - 8 - 12y'(1) = 0$$

$$-10y'(1) = -4 \;;\; y'(1) = \frac{2}{5}$$

$$t \equiv y - 2 = \frac{2}{5}(x-1)$$

Sabemos que las rectas perpendiculares en el plano poseen pendientes iguales y opuestas $n \perp t$

$$n \equiv y - 2 = -\frac{5}{2}(x-1)$$

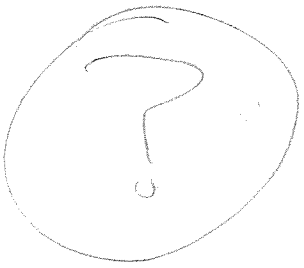
Queremos hallar $y''(1)$. Derivamos ⊛ € en función de x

$$8 + 2y' + 2y' + 2xy'' - y^3 - 3y^2y'x - 3y^2y' - 3x^2yy'y' - 3xy^2y' = 0$$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ y'(1)=\frac{2}{5} \end{cases}$ $8 + 2\cdot\frac{2}{5} + 2\frac{2}{5} + 2\cdot 1\cdot y''(1) - 8 - 3\cdot 4\frac{2}{5}\cdot 1 - 3\cdot 4\cdot\frac{2}{5} - 3\cdot 1\cdot 2^2\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} - 3\cdot 4y''(1) = 0$

$$\frac{8}{5} - \frac{24}{5} - \frac{24}{5} - 12\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 12y''(1) + 2y''(1) = 0$$

$$y''(1) = \frac{8 + \frac{48}{25}}{-10} =$$



Tema 4 Máximos y Mínimos Teoremas de derivación

0 Definición de Máximos y Mínimos

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ se dice que f alcanza en $a \in A$ un {máximo / mínimo} relativo (o local) si existe un entorno U de a tal que $\{f(x) \leq f(a) / f(x) \geq f(a)\}$ $\forall x \in U \cap A$

Se dice que f alcanza en $a \in A$ un {máximo / mínimo} absoluto (o global) si $\{f(x) \leq f(a) / f(x) \geq f(a)\}$ $\forall x \in A$

Recordemos que el supremo de f es la menor de las cotas superiores de Imf. Así mismo, el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores de Imf. Si el supremo y el ínfimo existen y se alcanzan en el conjunto coincidirán respectivamente con el máximo y el mínimo absoluto

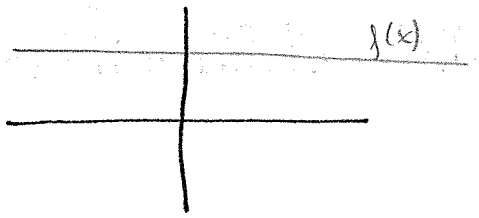
NOTA! Con la palabra extremos englobaremos conjuntamente a máximos y mínimos. Si en las definiciones anteriores hubiéramos utilizado los símbolos "$<$" y "$>$" hablaríamos de máximos y mínimos estrictos. Por tanto, una función constante alcanza en cada uno de sus puntos un máximo relativo y un mínimo relativo a la vez, pero no son estrictos.

NOTA! Los máximos y los mínimos son los valores que toma la función, no los puntos donde se alcanzan.

NOTA! El máximo absoluto y el mínimo absoluto, si existen, son únicos, aunque pueden alcanzarse en varios puntos.

Indusbol.com

④ Extremos relativos y absoluto de $f(x)=3$

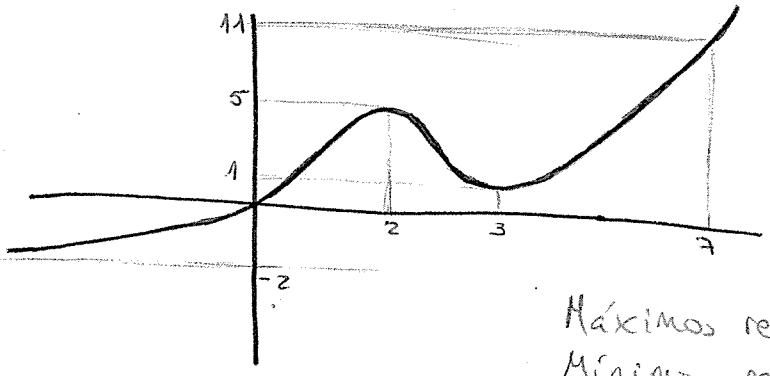


Esta función tiene en cada punto un máximo relativo y un mínimo relativo de valor 3.

El Max. absoluto es 3

El min. absoluto es 3

④ Calcular, si existen: supremo, ínfimo, extremos relativos y absolutos de la función representada en la figura en los siguientes conjuntos:



i) $\mathbb{R}$

No hay supremo y por tanto, no hay máximo absoluto

Ínfimo $= -2$. No hay mínimo absoluto

Máximos relativos $= 5$ que se alcanza en $x=2$

Mínimos relativos $= 1$ " " " " $x=3$

ii) $[0,+\infty)$

No hay supremo y, por tanto, no hay máximo relativo

Inf $= 0$. Mínimo absoluto $= 0$

Máximos relativos: 5 que se alcanza en $x=2$

Mínimos relativos: 0 " " " " $x=0$

1 " " " " $x=3$

iii $(0,+\infty)$

No hay supremo y, por tanto, no hay máximo relativo. Inf $=0$. No hay mínimo absoluto

Máx relativos: $f(2)=5$

Mín relativos: $f(3)=1$

iv $(0,7)$

Supremo $= 11$ No hay Máx absoluto

Ínfimo $= 0$ No hay Mín absoluto

Máx relativos $f(2)=5$

Mín relativos $f(3)=1$

v $[0,3)$

Supremo $=5$. Máx absoluto: $f(2)=5$

Ínfimo $=0$ Mín. absoluto $f(0)=0$

Máx relativos $f(2)=5$

Mín relativos $f(0)=0$

vi) $(-\infty, 0)$

Supremo $= 0$. No hay Máx absoluto. Máx relativos → No hay

Ínfimo $= -2$ No hay mín absoluto. Mín relativos → No hay

vii) $(-\infty, 0]$

Supremo $= 0$ Máx absoluto $\Rightarrow f(0) = 0$. Máx relativos: $f(0) = 0$

Ínfimo $= -2$. No hay mín absoluto ni mínimos relativos

○ Condiciones Necesarias y Condiciones Suficientes para la Existencia de Extremos Relativos

Teorema: Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ Si f alcanza en "a" $\in A$ un extremo relativo y f es derivable en $a \in A$, entonces obligatoriamente $f'(a) = 0$

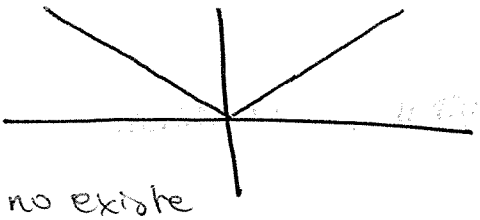
NOTA! Que $f'(a) = 0$ no es condición suficiente para que exista un extremo relativo. Ejemplo

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$

$f(0) = 0$, $\varepsilon > 0$ $\quad f(0+\varepsilon) = \varepsilon^3 > 0$, $f(0-\varepsilon) = (-\varepsilon)^3 < 0$ $\Longrightarrow f(0) = 0$ No es máximo ni mínimo y $f'(0) = 0$

NOTA! Una función puede alcanzar extremos relativos en puntos donde no sea derivable. Ejemplo

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = |x|$



$f(0) = 0$ es mínimo relativo y absoluto y $f'(0)$ no existe

Conclusión: En conjuntos abiertos una función sólo puede alcanzar extremos relativos en dos tipos de puntos

1. Donde la derivada vale cero
2. Donde no es derivable la función.

Teorema: Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ y sea $a \in A$

i) Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0 \Longrightarrow f(a)$ es mínimo relativo estricto

ii) Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0 \Longrightarrow f(a)$ es máximo relativo estricto

Este teorema nos da condiciones suficientes, pero no necesarias para la existencia de extremos relativos

CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO

Definición: Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ se dice que f es $\left\{\begin{array}{l}\text{creciente}\\ \text{decreciente}\end{array}\right\}$ si $\forall x_1, x_2 \in A$ tal que $x_1 > x_2$ se implica $\left\{\begin{array}{l} f(x_1) \geq f(x_2)\\ f(x_1) \leq f(x_2)\end{array}\right\}$

NOTA! Si en la definición anterior hubiéramos utilizado los símbolos "$>$" o "$<$" hablaríamos de funciones estrictamente crecientes o decrecientes.
Por tanto, una función constante es creciente y decreciente a la vez, pero no lo es estrictamente

Teorema: Sea $f(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$

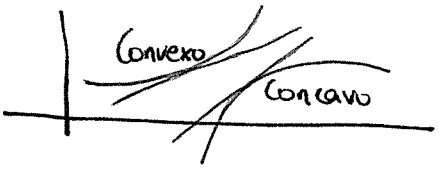
i) Si $f'(x)>0 \quad \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ es estrictamente creciente

ii) Si $f'(x)<0 \quad \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ es estrictamente decreciente

iii) Si $f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ es constante

iv) Si $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ es inyectiva (o estrictamente creciente o decreciente)

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD



Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ derivable en $a \in A$

Sea $y = t(x)$ la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$, se dice que $f(x)$ es $\left\{\begin{array}{l}\text{cóncava}\\ \text{convexa}\end{array}\right\}$ en $a \in A$ si existe un entorno U de a tal que $f(x) - t(x)$ es $\left\{\begin{array}{l}<0\\ >0\end{array}\right\}$ $\forall x \in (U - \{a\}) \cap A$

Se dice que $f(x)$ tiene en $a \in A$ un punto de inflexión si el signo de $f(x) - t(x)$ cambia al pasar de los puntos a la izquierda de "a" a los puntos a la derecha de "a".

Teorema: Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ y sea $a \in A$

Si $f''(a) > 0 \longrightarrow$ f es convexa en a

Si $f''(a) < 0 \longrightarrow$ f es cóncava en a

Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0 \longrightarrow$ f tiene un punto de inflexión en a.

Teorema:

Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ y sea $a \in A$ tal que:

$$f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{n-1}(a) = 0 \qquad f^n(a) \neq 0$$

Si n es impar $\Longrightarrow$ f tiene un punto de inflexión

Si n es par $\Longrightarrow$ { Si $f^n(a) > 0 \Rightarrow f$ es convexa en a ; Si $f^n(a) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en a

Teorema:

Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ y sea $a \in A$ tal que:

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{n-1}(a) = 0 \quad \text{y} \quad f^n(a) \neq 0$$

Si n es impar $\Longrightarrow$ f tiene un punto de inflexión de tangente horizontal

Si n es par $\Longrightarrow$ { Si $f^n(a) > 0 \Rightarrow$ Es mínimo relativo estricto y, por supuesto, f es convexa en a ; Si $f^n(a) < 0 \Rightarrow$ Es máximo relativo estricto y, por supuesto, f es cóncava en a.

○ REPRESENTACIÓN RÁPIDA DE CURVAS

Para pintar rápidamente una curva hay que estudiar fundamentalmente cuatro cosas:

① SIMETRÍAS

- Si al cambiar "x" por "$-x$" nada cambia $\Longrightarrow$ La función presenta simetría respecto del eje OY

Si al cambiar "y" por "$-y$" nada cambia $\Longrightarrow$ La función presenta simetría respecto del eje OX

Si al cambiar "x" por "$-x$", la función cambia de signo $\Longrightarrow$ La función presenta simetría respecto del origen

(2) REGIONES

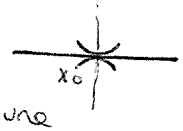
Para estudiar regiones comentaremos factorizando completamente la ecuación de la curva. Se dice que separan región los factores elevados a potencia impar una vez igualados a cero.

(3) CORTE CON EJES

Con $OY \Rightarrow$ se hace $X=0$ Con $OX \Rightarrow$ se hace $y=0$

Si $X=X_0$ es punto de corte con el eje OX y la ecuación de la curva puede escribirse como $y = \varphi(x)\,(X-X_0)^{\alpha}$ $\quad \alpha>0$, $\varphi(x_0)\neq 0$

- Si $\alpha > 1$ tendremos una tangente horizontal



- Si $\alpha < 1$ tendremos una tangente vertical



- Si $\alpha = 1$ tendremos una tangente oblicua

Si la curva pasa por el origen, el comportamiento en dicho punto vendrá dado por los términos de menor grado

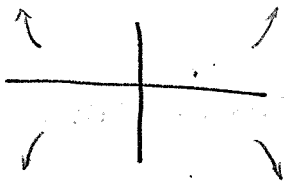
(4) ASÍNTOTAS Y RAMAS PARABÓLICAS

- Si $\lim_{x\to x_0} y = \pm\infty \longrightarrow$ Asíntota vertical $X = X_0$

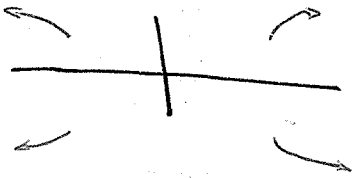
Si $\lim_{x\to\pm\infty} y = y_0 \longrightarrow$ Asíntota horizontal $y = y_0$

Si $\lim_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} =$

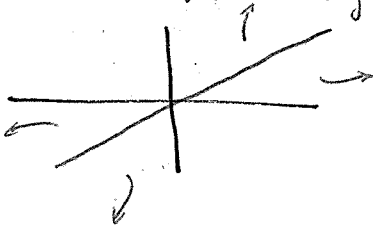
- $\pm\infty \Rightarrow$ Rama parabólica paralela a OY



- $0 \Rightarrow$ Rama parabólica paralela a OX

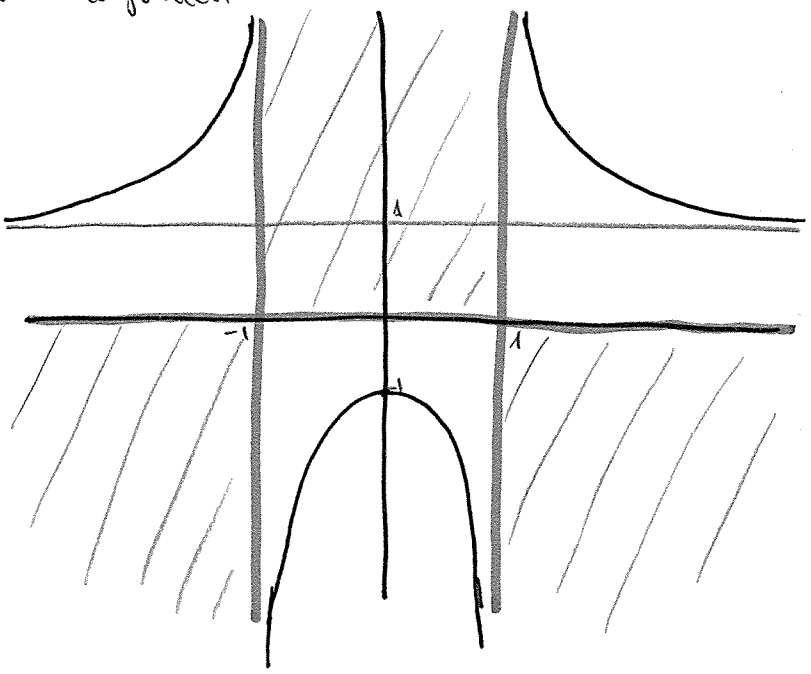


- $m \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}(y-mx) =$
  - $n \Rightarrow$ Asíntota oblicua $y = mx+n$
  - $\pm\infty \Rightarrow$ Rama parabólica paralela a $y=mx$



Indusbol .com

$y = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$ Representa la función



① Simetrías

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Simetría respecto del eje OY

② Regiones

$y = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$; separan región:

$y = 0$

$x+1 = 0$

$x-1 = 0$

$x^2+1 = 0 \Rightarrow$ Nunca

③ Puntos de corte

Eje OY $\longrightarrow x=0, y=-1$; $(0,-1)$

Eje OX $\longrightarrow y=0 \longrightarrow x^2+1=0 \rightarrow$ Nunca $\Rightarrow$ No hay puntos de corte con el eje OX

④ Asíntotas

Verticales $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ Horizontales: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \longrightarrow y = 1$

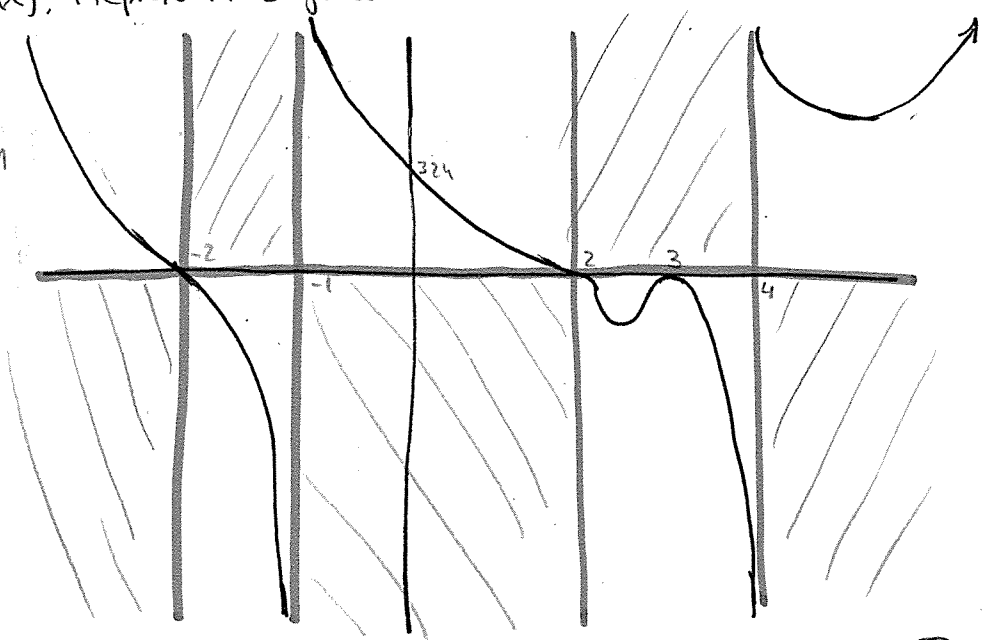
Podemos buscar más información analizando la derivada

$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2}$; Si $f'(x) = 0 \longrightarrow 2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x = 0$

$-4x = 0 \longrightarrow x = 0$

Como sólamente hay un candidato, podemos asegurar que $f(0) = 1$ es máximo relativo

$y = \frac{(x-2)^3 (x-3)^4 (x+2)}{(x+1)^3 (x-4)} = f(x)$. Representa la función



① Simetrías:

Como $f(-x) \neq f(x)$ $\neq -f(x)$ no hay simetrías

② Regiones:

Separan región

$y = 0$

$x-2 = 0$

$x+2 = 0$

$x+1 = 0$

$x-4 = 0$

③ Puntos de corte

Eje OY → $x=0$; $y=\frac{(-2)^3(-3)^4(2)}{1^3(-4)} = \frac{4\cdot 81}{-4} = -324 \longrightarrow (0,-324)$

Eje OX → $y=0 \Rightarrow (x-2)^3(x-3)^4(x+2)=0$

$\begin{cases} x=2 \to y=\varphi_1(x)(x-2)^3; & 3>1 \to \text{tangente horizontal} \\ x=3 \to y=\varphi_2(x)(x-3)^4; & 4>1 \to \text{tangente horiz} \\ x=-2 \to y=\varphi_3(x)(x+2); & \to \text{tangente oblicua} \end{cases}$

④ Asíntotas

Verticales $\begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$

Horizontales y oblicuas $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-2)^3(x-3)^4(x+2)}{(x+1)^3(x-4)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^8}{x^4} = \infty$

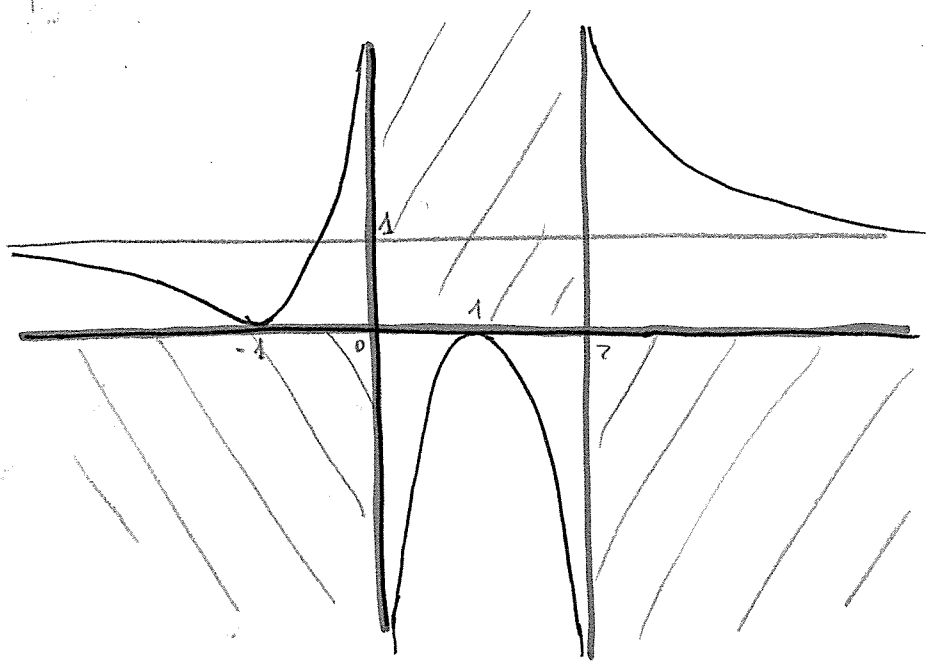
No hay asíntotas horizontales

Oblicuas → $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \infty \Rightarrow$ Rama parabólica paralela al eje OY

Del croquis rápido podemos asegurar que la curva tendrá:

Un máximo relativo en $x=3$
Un mínimo relativo para una x entre $(2,3)$
Un mínimo relativo para una $x>4$
Un punto de inflexión en $x=2$
Al menos dos puntos de inflexión para una x entre $(2,3)$
Un punto de inflexión para una $x<-1$

⑧ $y=\frac{(x^2-1)^2}{x(x-2)^3}$



① Simetrías:

Como $f(-x) \neq f(x)$, $-f(x)$ ⇒ No hay simetrías

② Regiones

$y=\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{x(x-2)^3}$, separan región:

$y=0$
$x=0$
$x-2=0$

③ Puntos de corte

Eje OY → $x=0$; $y=\frac{1}{0}$, No hay

Eje OX → $y=0 \Rightarrow (x^2-1)^2=0$

$\begin{cases} x=1 \to y=\varphi_1(x)(x-1)^2; & 2>1 \to \text{Tangente horizontal} \\ x=-1 \to y=\varphi_2(x)(x+1)^2; & 2>1 \to \end{cases}$

④ Asíntotas

Verticales $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ Horizontales $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2-2)^2}{x(x-2)^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^4} = 1 \longrightarrow y=1$

Ya sabemos, a priori, que y' se anulará en 1 y -1 al menos
Sacamos más información de la derivada

$$y = \frac{(x^2-1)^2}{x(x^3-3x^2+12x-8)} = \frac{(x^2-1)^2}{x^4-3x^3+12x^2-8x}$$

$$y' = \frac{2(x^2-1)2x-(4x^3-9x^2+24x-8)(x^2-1)^2}{(x^4-3x^3+12x^2-8x)^2} = 0$$

$$4x^3-4x-(4x^3-9x^2+24x-8)(x^4+1-2x^2)=0$$

$$4x^3-4x-(4x^7+4x^3-8x^5-9x^6-9x^2+18x^4+24x^5+24x-9x^3-8x^4-8+16x^2)=0$$

$$-4x^7+9x^6+8x^5-24x^5-18x^4+8x^4+4x^3-4x^3+48x^3+9x^2-16x^2-4x-24x+8=0$$

$$-4x^7+9x^6-16x^5-10x^4+48x^3-7x^2-28x+8=0$$

	−4	+9	−16	−10	+48	−7	−28	+8
1		−4	−5	−11	−21	27	20	−8
	−4	5	−11	−21	27	20	−8	0
−1		4	−9	20	1	−28	8	
	−4	9	−20	−1	28	−8	0	

$f(1)=0$
$f(-1)=0$ son extremos relativos

$$-4x^5+9x^4-20x^3-x^2+28x-8=0$$

???

MORTAL!!

Indusbol .com

⊖ $y = \dfrac{x^3 - 4x}{4x^2 - 1}$

① Simetría

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 4(-x)}{4x^2 - 1} = \frac{-(x^3 - 4x)}{4x^2 - 1} = -f(x)$$

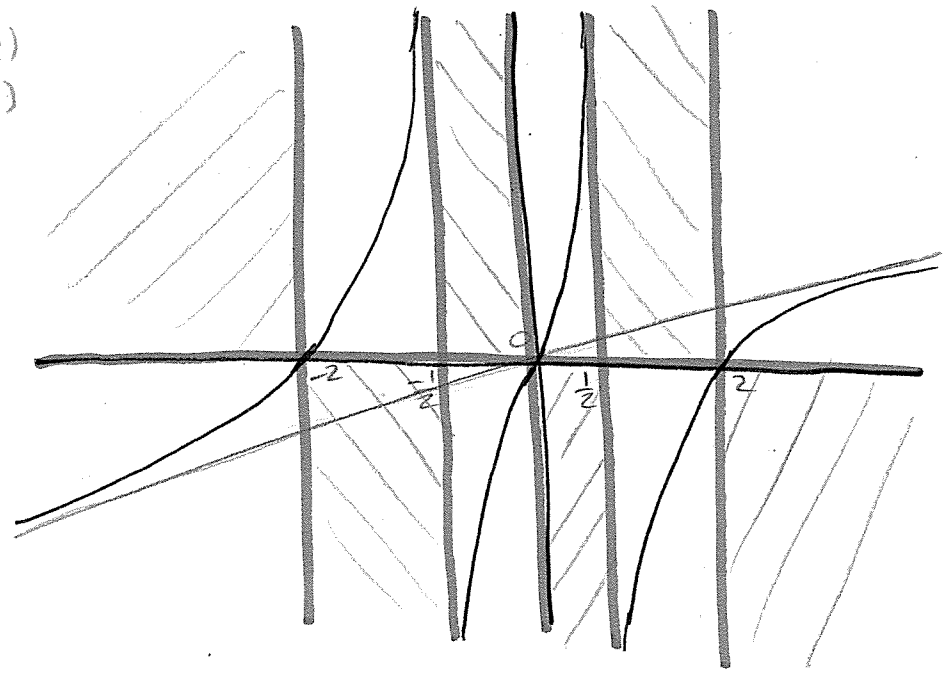
Simetría respecto del origen

② Regiones

$$y = \frac{x(x^2-4)}{4x^2-1} = \frac{x(x+2)(x-2)}{(2x+1)(2x-1)}$$

Separan región:

$y = 0$
$x = 0$
$x+2 = 0$
$x-2 = 0$
$2x+1 = 0$
$2x-1 = 0$



③ Puntos de corte

Eje OX → $x = 0$, $y = 0$

Eje OX → $y = 0$

$x^3 - 4x = 0$,
$x(x^2 - 4) = 0$
$x = 0$; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x = 0 \rightarrow y = \varphi_1(x)\,x$ — tangente oblicua
$x = 2 \rightarrow y = \varphi_2(x)(x-2)$ — " "
$x = -2 \rightarrow y = \varphi_3(x)(x+2)$ — " "

④ Asíntotas

Verticales $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Horiz y oblicuas $\begin{cases} \lim_{x \to \pm\infty} y = \infty \end{cases}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 4x}{4x^3 - x} = \frac{1}{4} = m \Longrightarrow$$

Tangente oblicua $y = \frac{1}{4}x$

$$\lim_{x \to \pm\infty} y - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 4x}{4x^2 - 1} - \frac{1}{4}x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^3 - 16x - 4x^3 + x}{(4x^2 - 1)4} = 0$$

Si este es el crecimiento de la curva, la derivada de y no se anulará en ningún punto. Lo comprobamos:

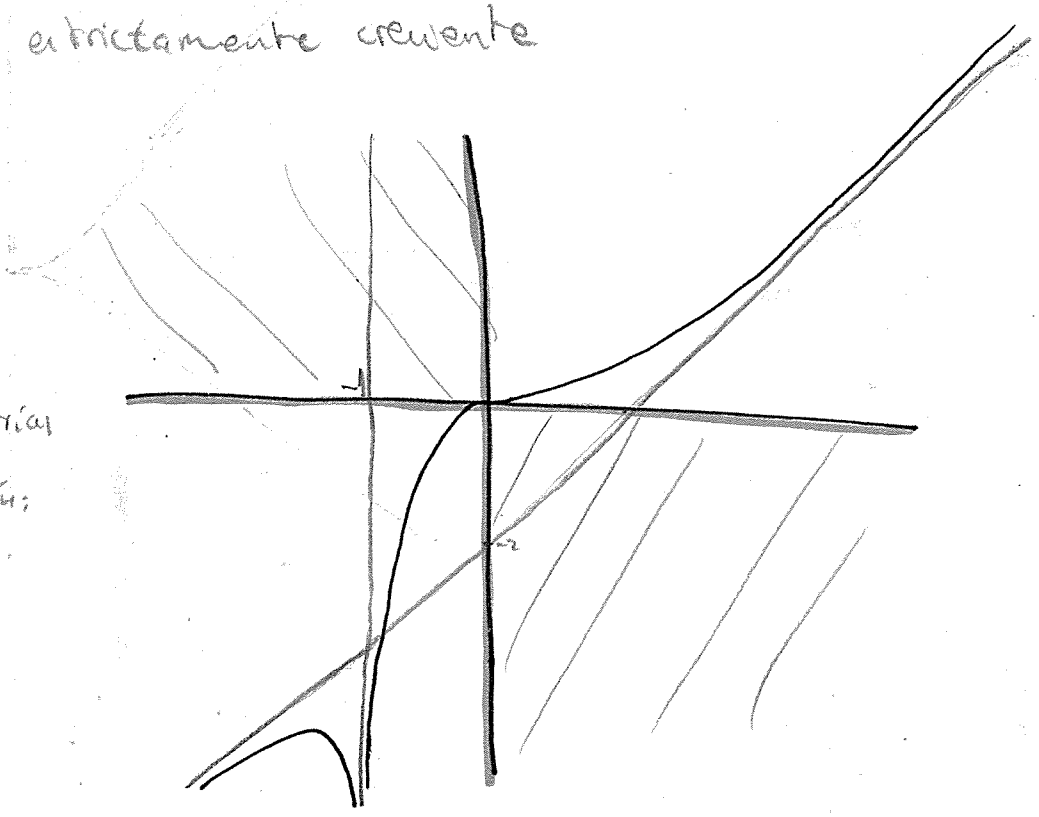
$$y' = \frac{(3x^2-4)(4x^2-1) - (x^3-4x)8x}{(4x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$12x^4 - 3x^2 - 16x^2 + 4 - 8x^4 + 32x^2 = 0 \; ; \; 4x^4 + 13x^2 + 4 = 0 \cdot \begin{cases} x^4 = t^2 \\ x^2 = t \end{cases}$$

$$4t^2 + 13t + 4 = 0 \; , \; t = \frac{-13 \pm \sqrt{169-64}}{8} = \frac{-13 \pm 10{,}25}{8} < 0$$

$x = \sqrt{t}$ y $t < 0 \Rightarrow$ No hay raíces

$y' > 0 \Rightarrow$ y es estrictamente creciente



$y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

① Simetrías:

Como $f(-x) \neq f(x)$ $\neq -f(x)$ → No hay simetrías

② Regiones: separan región:

$y = 0$

$x = 0$

③ Corte con ejes

Eje OY → $x = 0$, $y = 0$

Eje OX → $y = 0$; $x = 0$

$f(x) = \varphi_1(x)\, x^3$; $3 > 1$ tangente horizontal $\Rightarrow$ También podríamos haber estudiado el comportamiento en el origen estudiando los términos de menor grado.

$$y(x+2)^2 = x^3 \; ; \; y = 0$$

④ Asíntotas

Verticales $\{ x = -1$ Horizontales: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty$

Oblicuas

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = 1 = m$$

Asíntota oblicua $\Gamma \; y = x - 2$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

Ya sabemos que la derivada se anulará, al menos, en $x = 0$ y en un $x < -1$ → Derivamos:

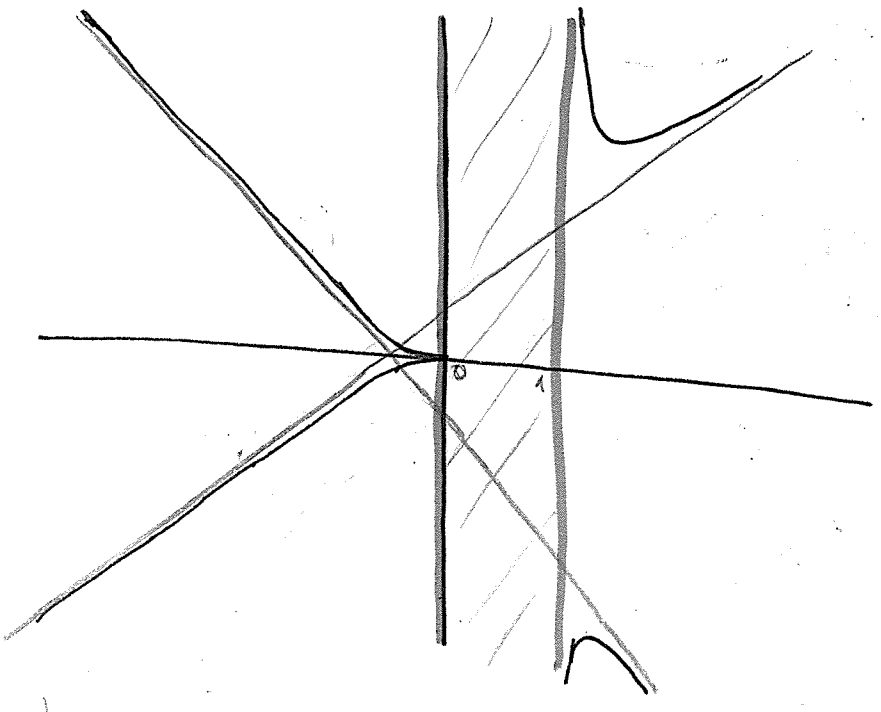
$$y'(x) = \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = 0$$

$$x^2(x+1)[3(x+1) - 2x] = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \longrightarrow f(0) \text{ es } P_2 \\ x = -1 \text{ ; } \nexists f(-1) \\ x = -3 \longrightarrow f(-3) \text{ es máximo relativo} \end{cases}$$

$3x+3-2x$
$x+3$

(7)

$$y^2 = \frac{x^3}{x-1}$$



① Simetría

La curva es simétrica respecto del eje OX. Es lógico ya que:

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

② Regiones. Separan región:

$x = 0$
$x - 1 = 0$

③ Corte con ejes

Eje OY → $x = 0 \to y = 0$
Eje OX → $y = 0 \to x = 0$

$y = \varphi(x)\, x^{3/2}$; $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ Tangente horizontal

También podríamos haber estudiado el comportamiento en el origen con los términos de menor grado

$y^2(x-1) = x^3$; $y^2 x - y^2 = x^3$
$-y^2 = 0$; $y = 0$

④ Asíntotas

Verticales: $x = 1$ Horizontales: $\lim_{x \to \infty} y = \infty$

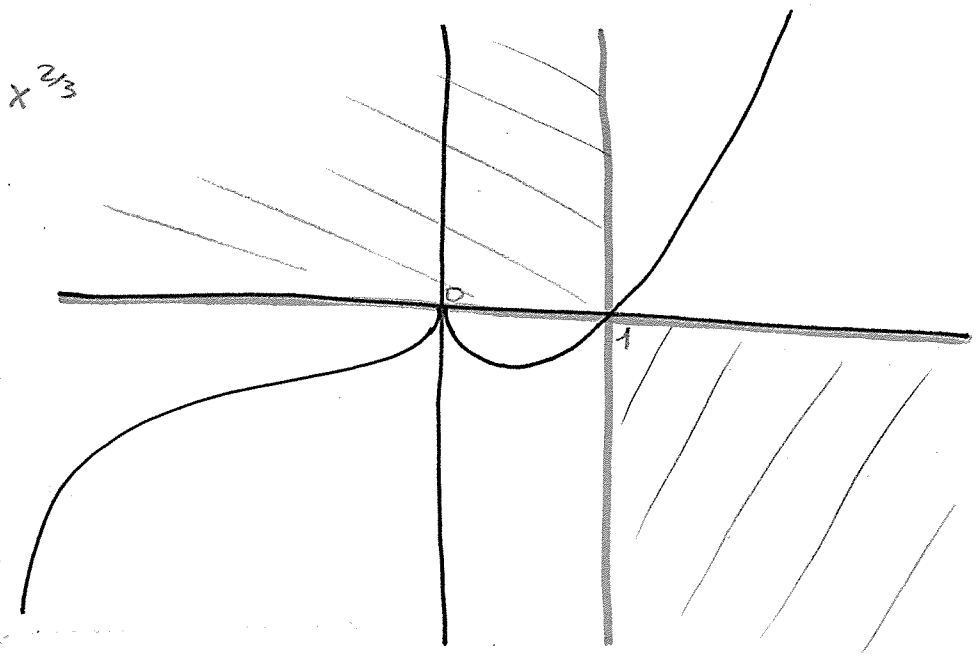
Oblicuas: $\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3(x-1)}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3}} = 1 = m$

$$\lim_{x \to \infty}(y - mx) = \lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + \sqrt{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(\frac{\frac{x^3 - x^3 + x^2}{x-1}}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + \sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-1)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Asíntota oblicua: $y = x + \frac{1}{2}$ y por simetría tenemos $y = -x - \frac{1}{2}$

Del croquis sabemos que y' se anulará al menos en dos puntos. $x=0$ y en uno $x>1$



$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$; $y=(x-1)x^{2/3}$

① Simetrías

Como $f(-x) \neq f(x)$ $\neq -f(x)$ No hay simetrías

② Regiones separan región

$y=0$

$x-1=0$

③ Puntos de corte

Eje OY → $x=0$, $y=0$

Eje OX → $y=0$ $\begin{cases} x=1 \rightarrow y=\varphi_1(x)(x-1) \rightarrow \text{tangente oblicua} \\ x=0 \rightarrow y=\varphi_2(x)x^{2/3} \rightarrow \frac{2}{3}<1 \rightarrow \text{tangente vertical} \end{cases}$

También podríamos haber estudiado el comportamiento en el origen analizando los términos de menor grado

$y=(x-1)x^{2/3}$

$-x^{1/3}=0$

y en $x=0$ el origen ↓

④ Asíntotas

Verticales: No hay

Horizontales: $\lim_{x\to\infty}(x-1)\sqrt[3]{x^2}=\infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)x^{2/3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{5/3}}{x}=\infty \rightarrow$ Rama parabólica paralela a OY

Por tanto, sabemos que la función tendrá un máximo relativo en $x=0$ donde $f'(0)$ no existe

Tendrá al menos un mínimo relativo de tangente horizontal para una x entre $(0,1)$

También tendrá, al menos, un punto de inflexión para una $x<0$

Derivamos:

$y'(x)=x^{2/3}+(x-1)\frac{2}{3}x^{-1/3}=0$; $y'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{2}{3}(x-1)}{x^{1/3}}=0$

$y'(x)=x^{1/3}\cdot x^{2/3}+\frac{2}{3}(x-1)=0$; $x+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}=0$, $\frac{5x}{3}=\frac{2}{3}$, $x=\frac{2}{5}$

$f(\frac{2}{5})$ es mínimo

Hay mínimo

Buscamos ahora el punto de inflexión

$$y'' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}(x-1)\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = 0$$

$$y'' = \frac{4}{3x^{1/3}} - \frac{2(x-1)}{9x^{4/3}} = 0; \quad \frac{4 \cdot 3x - 2(x-1)}{9x^{4/3}} = 0$$

$$10x + 2 = 0, \quad x = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$$

Como solamente hay un candidato, $f\left(\frac{-1}{5}\right)$ es punto de inflexión

① $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}} = f(x)$

① Simetrías

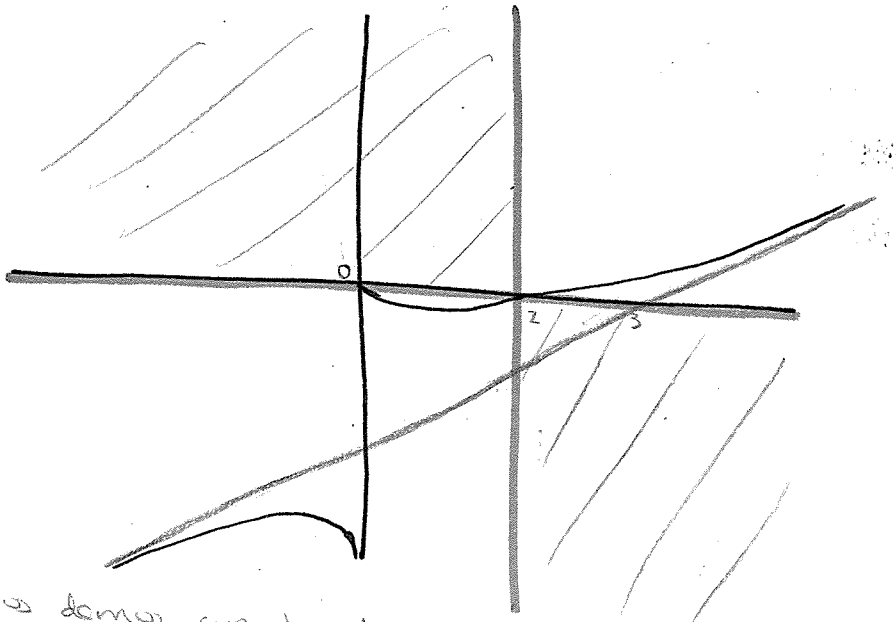
Como $f(-x) \neq f(x)$ $\neq -f(x)$ No hay simetría

② Regiones

Separan región

$y = 0$

$x - 2 = 0$



③ Puntos de corte

Eje OY → $x = 0$ → No hay pero nos damos cuenta de que $x = 0$ es punto peligroso

$$\lim_{x \to 0^+} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} = 0^-$$

$$\lim_{x \to 0^-} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

④ Asíntotas

Vertical: $x = 0$ por la izquierda

Horizontales y oblicuas:

$$\lim_{x \to \infty} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} = \infty \; ; \; \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} - x \underset{\text{Taylor}}{=} \lim_{x \to \infty} \left((x-2)\left[1 + \frac{-\frac{1}{x}}{1!} + \frac{\left(\frac{-1}{x}\right)^2}{2!} + \dots\right] - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} (-2 - 1) = -3 \Rightarrow \text{Asíntota oblícua } y = x - 3$$

Ya sabemos que la derivada se anulará al menos en dos puntos:

para un x entre $(0,2)$ y para uno $x < 0$

Derivamos

$$y' = e^{-1/x} + (x-2)e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$y' = e^{-1/x}\left[1 + (x-2)\frac{1}{x^2}\right] = 0 \rightarrow 1 + \frac{x-2}{x^2} = 0;\ x^2 + x - 2 = 0$$

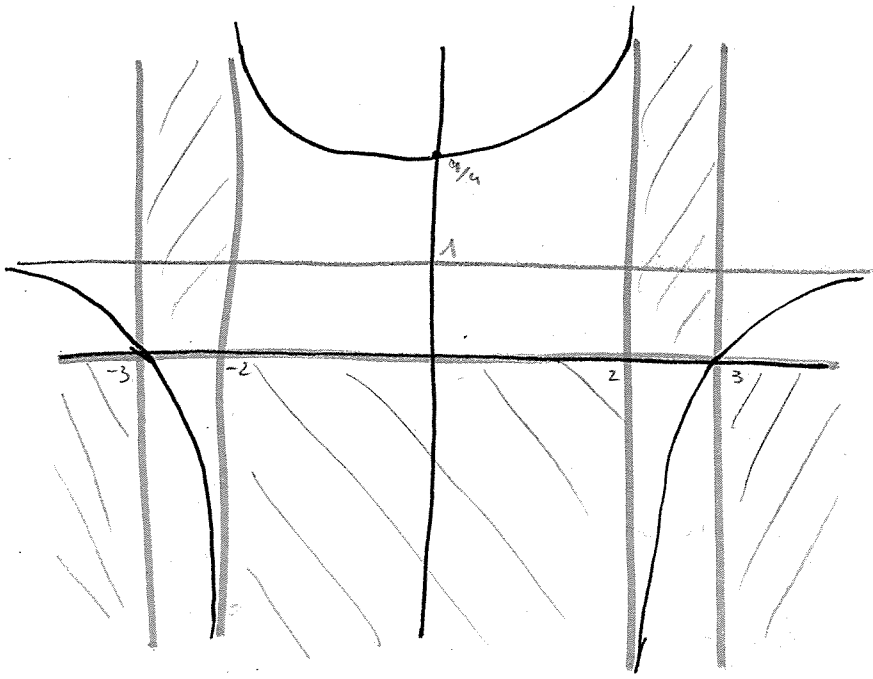
$x = 1$ $\quad$ $x = -2$

$f(1)$ es mínimo relativo

$f(-2)$ " máximo "

④ $f(x) = \max\left\{\frac{x^2-9}{x^2-4}, 0\right\}$

Comenzamos pintando $g(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$



① Simetría

Como $g(-x) = g(x)$ Hay simetría respecto del eje OY

② Regiones

$$g(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-2)}$$

Separan región:

$y = 0$; $x+2 = 0$

$x+3 = 0$; $x-2 = 0$

$x-3 = 0$

③ Puntos de corte

Eje OY → $x = 0$; $y = \frac{9}{4}$ $\quad$ Eje OX → $y = 0$; $x^2 - 9 = 0$ $\begin{cases} x = 3;\ g(x) = \varphi_1(x)(x-3) & \text{tang. oblic.} \\ x = -3;\ g(x) = \varphi_2(x)(x+3) & \text{tang. oblic.} \end{cases}$

④ Asíntotas

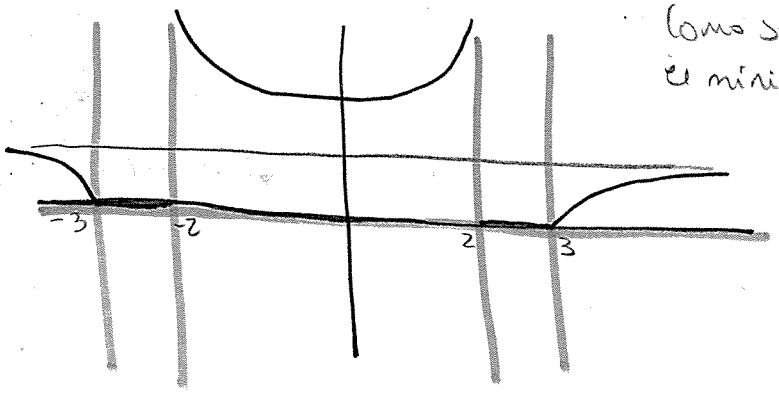
Verticales: $\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ $\quad$ Horizontales: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-9}{x^2-4} = 1 \rightarrow y = 1$

⑤ Deriv.

$$g'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2-9)}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 8x - 2x^3 + 18x = 0;\ 10x = 0$$

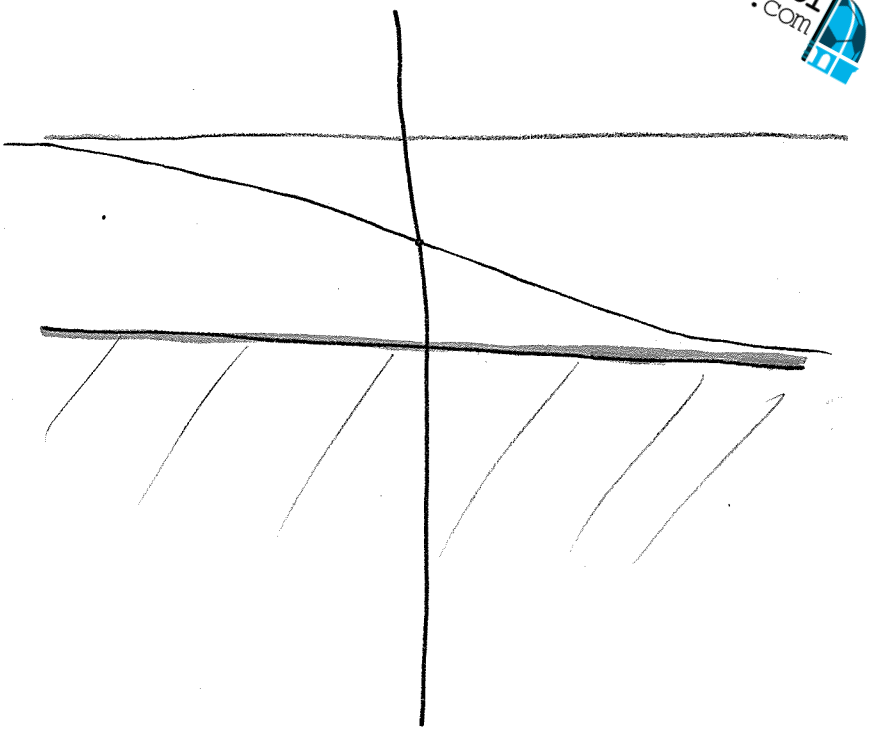
$x = 0$

Como sólo hay un candidato, $f(0) = \frac{9}{4}$ es mínimo relativo



⇐ El croquis de $f(x)$ es, por tanto

→ $f(x) = \frac{1}{1+e^x} = y$



① Simetrías

Como $f(-x) \neq f(x)$ $\neq -f(x)$ no hay simetría

② Regiones

Separan región: $y = 0$

$1 + e^x = 0$ ¿No

$e^x = -1$ separa región

Nunca

③ Puntos de corte

Eje OY → $x = 0$; $y = \frac{1}{2}$; $(0, \frac{1}{2})$

Eje OX → $1 \neq 0 \Rightarrow$ No hay

④ Asíntotas

Verticales: No hay ; Horizontales: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+e^x} = 0^+ \rightarrow y = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1 \rightarrow y = 1$

⑤ Derivadas

$y' = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \Rightarrow$ No hay máximos ni mínimos relativos.

Podemos asegurar que la función tiene un punto de inflexión

$y'' = \frac{-e^x(1+e^x)^2 + e^x 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = 0$

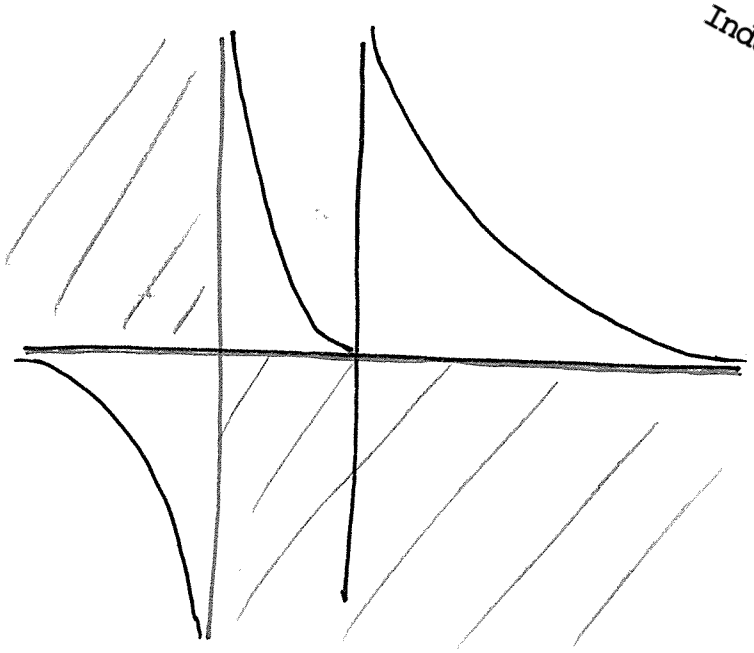
$e^x [2e^x(1+e^x) - (1+e^x)^2] = 0$; $e^x(1+e^x)[2e^x - 1 - e^x] = 0$

$e^x - 1 = 0$; $e^x = 1 \rightarrow x = 0$

$f(0) = \frac{1}{2}$ es punto de inflexión

⑥ $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+x} = y$ si $x \neq 0$

$f(0) = 0$



① Simetría

Como $f(-x) \neq f(x)$ $\neq -f(x)$ No hay simetría

② Regiones

Separan región: $y = 0$; $1+x = 0$

③ Puntos de corte: Eje OY — $x = 0$ → No hay pero no damos cuenta de que $x=0$ es punto peligroso

$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+x} = \infty$; $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+x} = 0^+$

④ Asíntotas

Verticales: $x = -1$; $x = 0^-$ por la derecha

Horizontales: $\lim_{x \to \infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+x} = 0^+$ $y = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+x} = 0^-$

Si realmente es este el croquis de la figura, la derivada no debería anularse nunca.

⑤ Derivamos

$g(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $\ln g(x) = \ln e^{\frac{1}{x}}$; $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{1}{x}\right)'$; $g'(x) = \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$

$y' = \dfrac{\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}(1+x) - e^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^2} = 0$; $\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)(1+x) - 1 = 0$; $\dfrac{-x-1-x^2}{x^2} = 0$

$x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow$ No tiene raíces reales

$y' < 0 \rightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente

Indusbol .com

④ Calcular extremos absolutos y relativos de $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1$; $x \in \mathbb{R}$

Frontera:

$\lim_{x \to \infty} (x^3 + x^2 - 5x + 1) = \infty \rightarrow$ No hay máximo absoluto

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2 - 5x + 1) = -\infty \rightarrow$ No hay mínimo absoluto

Como f es derivable en todo $\mathbb{R}$ los extremos relativos se alcanzarán donde $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} = \begin{cases} \frac{-2+8}{6} = 1 \\ \frac{-2-8}{6} = \frac{-5}{3} \end{cases}$

$f''(x) = 6x + 2$

$f''(1) = 8 > 0 \rightarrow f(1)$ es mínimo

$f''\left(\frac{-5}{3}\right) = -10 + 2 = -8 < 0 \rightarrow f\left(\frac{-5}{3}\right)$ es máximo

NOTA!

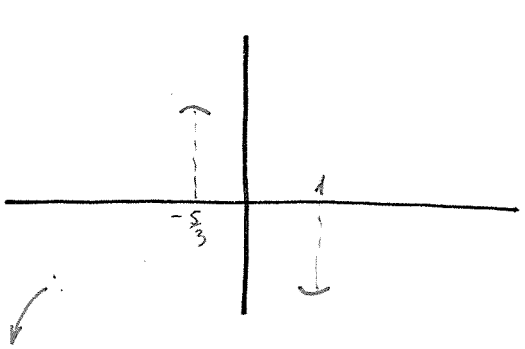
Los extremos absolutos y relativos de una función en un conjunto sólo se pueden alcanzar en tres tipos de puntos:

① En la frontera del conjunto donde trabajamos

② En los puntos donde la derivada se anule

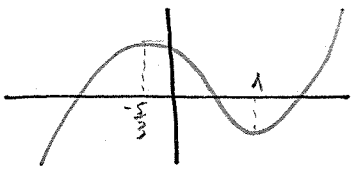
③ En los puntos donde $f(x)$ no es derivable

Cuando nos pidan extremos absolutos siempre comenzaremos estudiando el comportamiento en la frontera



Por el croquis de la figura y continuidad de f ya podemos asegurar que $f\left(\frac{-5}{3}\right)$ es máximo relativo y $f(1)$ es mínimo relativo

La gráfica de f, si la pidieran, sería



(10) Sea $f(x)=\begin{cases} x^3+2x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2-3x+2 & \text{si } x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}$ Se pide:

a) Continuidad y derivabilidad de f y calcular las sucesivas derivadas en $x=0$

f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ por ser operaciones elementales de funciones continuas y no anularse ningún denominador

Estudiamos la continuidad en $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} (x^2-3x+2) = 2 \\ \lim_{x\to 0^-} (x^3+2x+2) = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0) \rightarrow f \text{ es continua en } x=0$$

f es continua en todo $\mathbb{R}$

f es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ por ser operaciones elementales de funciones derivables y no anularse ningún denominador

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-3x+2-2}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x-3) = -3 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+2x+2-2}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x^2+2) = 2 \end{cases}$$

$\nexists f'(0) \rightarrow$ **f no es derivable en $x=0$**

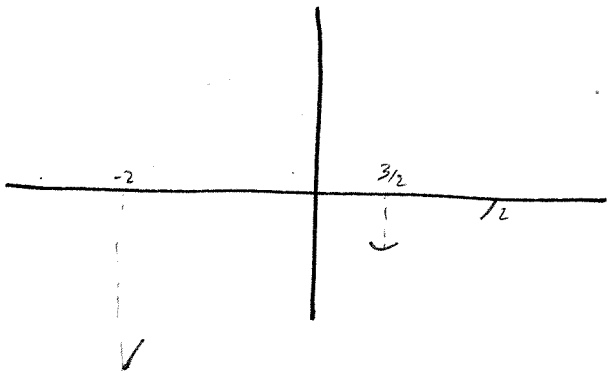
Como no existe la 1ª derivada, tampoco existirán las sucesivas

b) Máximos y mínimos de $f(x)$ en $[-2,2]$

Nos piden extremos relativos y absolutos. Como f es continua en $[-2,2]$ y el conjunto es compacto por ser cerrado y acotado sabemos a priori que el máximo absoluto y el mínimo absoluto existirán

Por otro lado, sabemos que los extremos relativos sólo se podrán alcanzar en: la frontera, los puntos donde la derivada vale cero y los puntos en los que $f(x)$ no es derivable

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2 & \text{si } x<0 \\ 2x-3 & \text{si } x>0 \\ f'(0) \text{ no existe} \end{cases}$$



Frontera:

$x=2 \rightarrow f'(2)=4-3=1>0 \rightarrow f$ es creciente

$f(2)=0$ es máximo relativo

$x=-2 \rightarrow f'(-2)=14>0 \rightarrow f$ es creciente

$f(-2)=-10$ es mínimo relativo

Puntos donde $f'(x)=0$

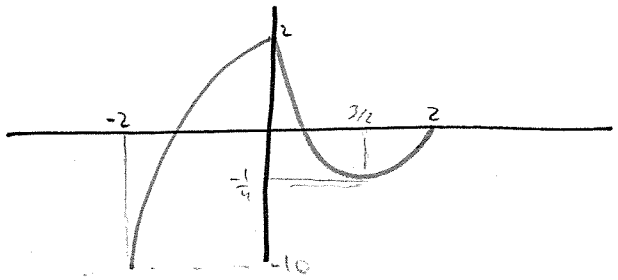
$x^2=-\frac{2}{3} \rightarrow$ No raíces reales

$x=\frac{3}{2}$; $f''(x)=2$ si $x>0$

$f''(\frac{3}{2})=3>0 \rightarrow f(\frac{3}{2})=\frac{-1}{4}$ es mínimo relativo

Por continuidad de f y el croquis de la figura, aseguramos que f tendrá, al menos, un máximo relativo. Solamente nos queda estudiar los puntos donde $f(x)$ no es derivable como posibles candidatos a extremos relativos. En nuestro caso, solo tenemos $x=0$, por tanto, aseguramos que $f(0)=2$ es máximo relativo.

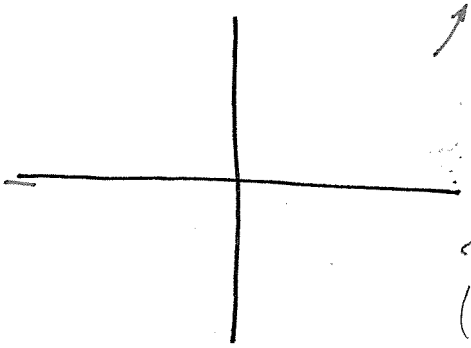
Si nos pidieran la gráfica de $f(x)$ sería:



Máx. absoluto = $f(0)=2$
Mín. absoluto = $f(-7)=-10$

Si $x<0$
$f''(x)=6x<0$
$f(x)$ es cóncava

(11) b) Extremos relativos y absolutos de $f(x)=(x+2)e^x$; $x\in\mathbb{R}$



Frontera:

$\lim_{x\to-\infty}(x+2)e^x=\infty$ → No hay máximo absoluto

$\lim_{x\to-\infty}(x+2)e^x=0^-$ | (*) Extra: como $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)e^x}{x}=\infty$ Rama para // OY

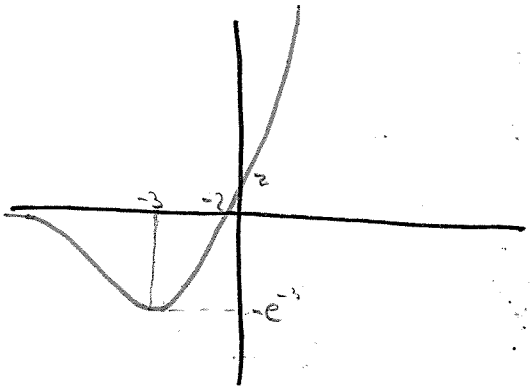
Por continuidad de f y el croquis de la figura (que no lo cambia ni San Apapucio) aseguramos que $f(x)$ alcanzará mínimo absoluto. Además, como f es derivable, lo alcanzará en un punto donde $f'(x)=0$

Derivamos:

$f'(x)=e^x+(x+2)e^x=e^x(1+x+2)=0 \rightarrow x=-3$

Como sólamente hay un candidato aseguramos que $f(-3)=-e^{-3}$ es mínimo absoluto

→ Si nos pidieran la gráfica de $f(x)$ haríamos



Corte → Eje OY → $x=0 \rightarrow y=2$
Eje OX → $y=0 \rightarrow x=-2$

Podemos asegurar que f tiene al menos un punto de inflexión para una $x<-3$

$f''(x)=e^x+e^x+(x+2)e^x=e^x[2+x+2]=0 \rightarrow x=-4$ → hay P_I

(11) c) $f(x) = 5 + (x-3)^{7/3}$ Extremos absolutos y relativos

$f(x) = 5 + \sqrt[3]{(x-3)^7}$

Frontera:

$\lim_{x\to\infty} \left(5 + \sqrt[3]{(x-3)^7}\right) = \infty \rightarrow$ No hay Máx. absoluto

Extra:

$\lim_{x\to\infty} \frac{5 + \sqrt[3]{(x-3)^7}}{x} = 0 \rightarrow$ Rama parabólica $\parallel Ox$

$\lim_{x\to-\infty} \left(5 + \sqrt[3]{(x-3)^7}\right) = -\infty$

Extra:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{5 + \sqrt[3]{(x-3)^7}}{x} = 0$

Rama parab. $\parallel Ox$

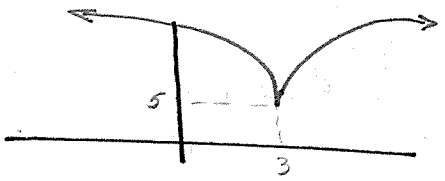
Por continuidad de f y el croquis de la figura, aseguramos que f alcanzará mín. absoluto

$f'(x) = \frac{7}{3}(x-3)^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3\sqrt[3]{(x-3)^4}} = 0 \rightarrow f'(x)$ no tiene raíces $\Rightarrow$ Por tanto, como la derivada nunca se anula, el mínimo absoluto tendrá que alcanzarse en un punto donde f no sea derivable

$\downarrow$

En nuestro caso, dicho punto sólo puede ser $f(3) = 5$

Si nos pidieran la gráfica de $f(x)$, ésta sería $\Rightarrow$

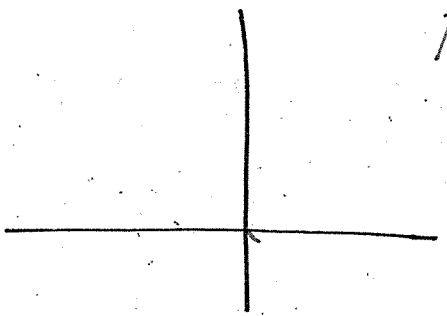


(11) e) $f(x) = x^2 \ln x \quad x \in \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow x \in (0,\infty)$ Calcular extremos

Frontera:

$\lim_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty \Rightarrow$ No hay máximo absoluto

$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln 0 = 0^-$



Por continuidad de f y el croquis de la figura, aseguramos que f alcanzará mínimo absoluto. Además, por ser f derivable, se alcanzará en un punto tal que $f'(x) = 0$

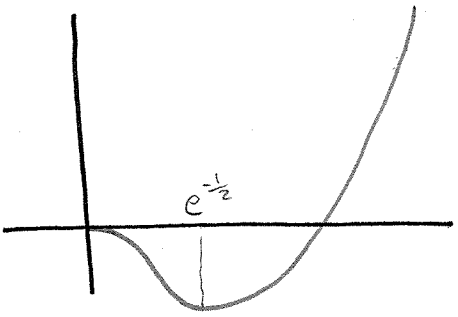
$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = 0$

$x(2\ln x + 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \notin (0,\infty) \\ \ln x = -\frac{1}{2}\ ;\ e^{-1/2} = x \end{cases} \Rightarrow$ Como solamente hay un candidato, $f(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2e}$ es el mínimo absoluto

Si nos pidieran dibujar la gráfica de $f(x)$ haríamos:

Analizamos el comportamiento en el origen calculando:

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} [x(2\ln x + 1)] = 0$ → tangente horizontal



$f''(x) = (2\ln x + 1) + x\left(2\frac{1}{x}\right) = 2\ln x + 3 = 0$

en $x = \frac{-3}{2}$; $x = e^{-3/2}$ ⟹ Como sólamente hay un candidato, aseguramos que $f(e^{-3/2})$ es punto de inflexión

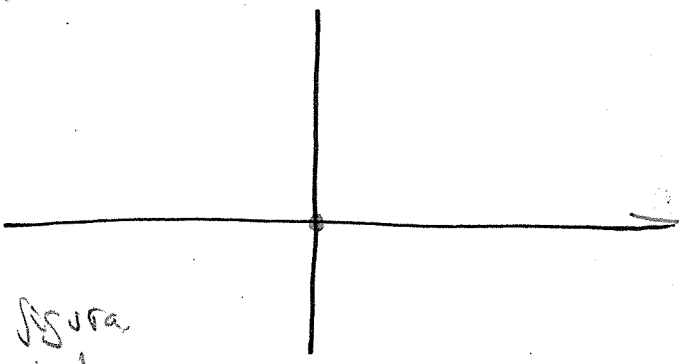
(11) d) Extremos de $f(x) = \frac{|ax|}{1+x^2}$; $a>0$, $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{1+x^2} & \text{si } x>0 \\ \frac{-ax}{1+x^2} & \text{si } x<0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Nos damos cuenta que $f(-x) = f(x)$, por tanto, como existe simetría respecto del eje OY. Esto nos permite centrarnos en el intervalo $[0,\infty)$

Así mismo, nos damos cuenta de que f nunca es negativa

$f(0) = 0$ es mínimo absoluto



Frontera:

$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{1+x^2} = 0^+$

Por continuidad de f y el croquis de la figura, aseguramos que f alcanzará máximo absoluto

Además, por ser f derivable en $(0,\infty)$, el máximo estará en un punto tal que $f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{a(1+x^2) - ax\,2x}{(1+x^2)^2} = 0$; $a[1+x^2-2x^2] = 0$, $x^2-1=0$, $x = \pm 1$

$x=1$ pues $x=-1$ no está en el intervalo $[0,+\infty)$ que estamos tratando.

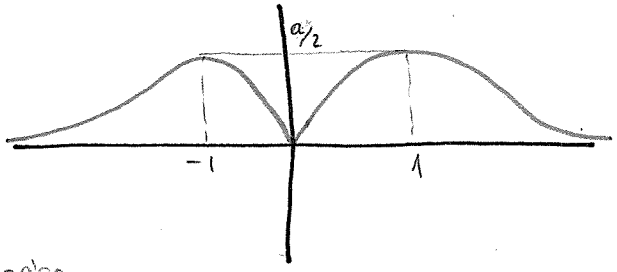
Por tanto, solo hay un candidato y podemos asegurar que $f(1) = \frac{a}{2}$ es el máximo absoluto

→ Si nos pidieran la gráfica de $f(x)$ haríamos:

El comportamiento en el origen nos lo dan los términos de menor grado

$y(1+x^2) = |ax|$; $y + yx^2 = |ax|$

$y = |ax|$ → tangente en el origen



(12) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, hallar el conjunto Im f

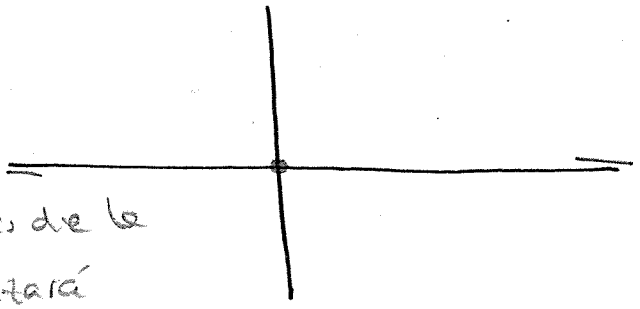
Para calcular el conjunto imagen de una función se sigue exactamente misma metodología que en el cálculo de extremos absolutos

Como $f(-x) = -f(x)$, la gráfica es simétrica respecto del origen, lo cual nos va a permitir centrarnos en el intervalo $x \in (0, +\infty)$

Frontera

$f(0) = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0^+$



Por continuidad de f y el croquis de la figura, aseguramos que f alcanzará máximo y mínimo absoluto. Además, como f es derivable se alcanzarán en un punto tal que $f'(x) = 0$

$y'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 0$; $1 + x^2 - 2x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$

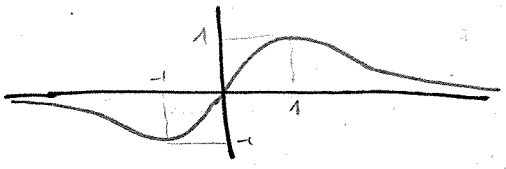
Como sólo hay dos candidatos, observamos que:

$f(-1) = -1$ es mínimo absoluto

$f(1) = 1$ es máximo absoluto

Conjunto Im f = [-1, 1]

→ Si nos pidieran la gráfica de f haríamos ⟶



f tendría al menos 3 puntos de inflexión, siendo uno de ellos $f(0) = 0$

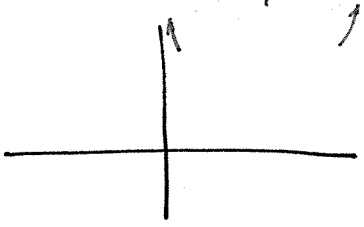
(13) a) $\lim_{n \to \infty} \left[\inf \left(\frac{e^x}{x^n} \right) \right]$ $x > 0$

Para calcular ínfimos y supremos se sigue la misma metodología que para el cálculo de extremos absolutos.

$f(x) = \frac{e^x}{x^n}$ $x \in (0, +\infty)$

Frontera

$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$; $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x^n} = \infty$



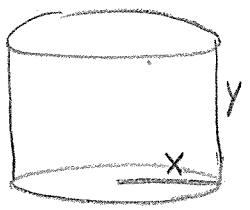
Por continuidad de f y el croquis de la figura aseguramos que f alcanza mínimo absoluto. Además, por ser f derivable, lo alcanzará en un punto donde $f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{e^x x^n - n x^{n-1} e^x}{x^{2n}} = 0$ $e^x (x^n - n x^{n-1}) = 0$, $x^{n-1}[x - n] = 0$

$x = 0 \notin (0, \infty)$ $x = n$

Como solamente hay un candidato aseguramos que $f(n) = \frac{e^n}{n^n}$ es mín absoluto y también ínfimo ⟶ $\lim_{n \to \infty} \frac{e^n}{n^n} = 0$

(15) Hallar la superficie mínima de un cilindro cuyo volumen es $27\ m^3$



$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy = f(x,y)$$

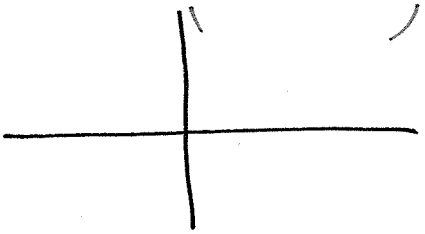
$$V = \pi x^2 y = 27\ m^3, \quad y = \frac{27}{\pi x^2}$$

$$f(x,y) = g(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{27}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{54}{x}, \quad x \in (0,\infty)$$

Frontera

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2\pi x + \frac{54}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\pi x^3 + 54}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2\pi x + \frac{54}{x}\right) = \infty$$

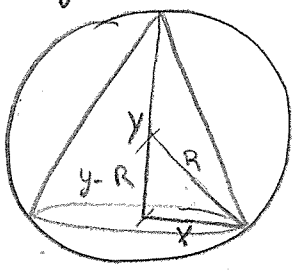


Por continuidad de f y el croquis de la figura aseguramos que $g(x)$ alcanza mínimo absoluto. Además, como g es derivable, lo alcanzará en un punto tal que $g'(x) = 0$

$$g'(x) = \frac{2\pi 3x \cdot x - (2\pi x^3 + 54)}{x^2} = 0, \quad 4\pi x^3 - 54 = 0; \quad x = \sqrt[3]{\frac{54}{4\pi}}$$

$$\text{Superficie} = g\left(\sqrt[3]{\frac{54}{4\pi}}\right) = \boxed{2\pi\sqrt[3]{\left(\frac{54}{4\pi}\right)^2} + \frac{54}{\sqrt[3]{\frac{54}{4\pi}}}\ m^2}$$

(16) Hallar la h y el r de un cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R



$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y = f(x,y)$$

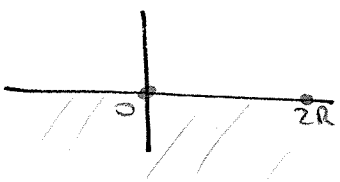
$$R^2 = x^2 + (y-R)^2; \quad x^2 = R^2 - y^2 - R^2 + 2yR = 2yR - y^2$$

$$f(x,y) = g(y) = \frac{1}{3}\pi(2yR - y^2)y = \frac{\pi}{3}(2Ry^2 - y^3)$$

$$y \in (0, 2R)$$

Frontera: $g(0) = 0$

$g(2R) + \frac{\pi}{3}(2R\,4R^2 - 8R^3) = 0$



Por continuidad de g, ser g siempre positiva y el croquis de la figura, aseguramos que g alcanza máximo absoluto en un punto, por ser g derivable, tal que $g'(y) = 0$

$$g'(y) = \frac{\pi}{3}(4Ry - 3y^2) = 0, \quad y(4R - 3y) = 0, \quad \rightarrow y = 0 \text{ no válida}$$

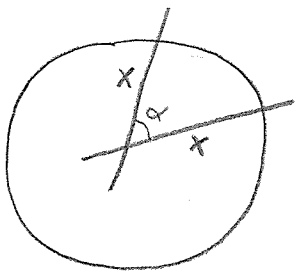
$$\rightarrow y = \frac{4R}{3}$$

Como sólo hay un candidato aseguramos que el cono inscrito de volumen máximo tendrá: Altura $\rightarrow h = y = \frac{4R}{3}$

Radio $\rightarrow r = x = \sqrt{2R\cdot\frac{4R}{3} - \left(\frac{4R}{3}\right)^2}$

Indusbol .com

Entre todos los sectores circulares de área = 1, hallar el de perímetro mínimo



$$P = x + x + \alpha x = f(x, \alpha)$$

$$A = \frac{\alpha x^2}{2} = 1 \; ; \; \alpha = \frac{2}{x^2}$$

$$f(x, \alpha) = g(x) = 2x + \frac{2}{x^2} x = 2x + \frac{2}{x} \qquad \alpha \in (0, \infty)$$

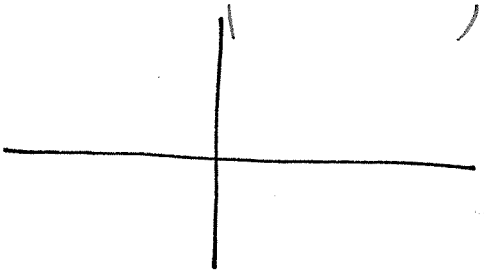
Perímetro	α	Área
$2\pi r$	2π	πr^2
αr	α	$\frac{\alpha r^2}{2}$

$$A = \frac{2\pi}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{?} \; ; \; \frac{\alpha \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\alpha r^2}{2}$$

Frontera

$$\lim_{x \to \infty} \left(2x + \frac{2}{x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(2x + \frac{2}{x}\right) = \infty$$



Por continuidad de g y el croquis de la figura, aseguramos que g alcanza mínimo absoluto, además, por ser g derivable, se alcanzará en un punto tal que $g'(x) = 0$

$$g'(x) = 2 + \frac{-2}{x^2} = 0 \; ; \; \frac{2x^2 - 2}{x^2} = 0 \; , \; x = \pm 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ no válida} \end{cases}$$

Como solamente hay un candidato, tendremos que el sector de perímetro mínimo tendrá $\begin{cases} \text{radio} = 1\,u \\ \alpha = 2\,\text{rad} \end{cases}$ cuyo perímetro será $P = 4\,u$

Teorema de Bolzano

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x)$

Si f es continua en $[a, b]$ y si $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\Longrightarrow \exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Nota!

1) Este teorema nos da condiciones suficientes pero no necesarias para la existencia de al menos un cero de una función

2) • Si f es continua en $[a, b]$
   • Si $f(a) \cdot f(b) < 0$
   • Si f es inyectiva
   $\Longrightarrow \exists! \, c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

($\exists!$: existe y es único)

Demostrar que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene un cero en $[1,2]$

Como es un problema de ceros, intentamos aplicar Bolzano:

f es continua en $[1,2]$
$f(1) = -5$
$f(2) = 14$
$\Rightarrow \exists!$ cero en $(1,2)$

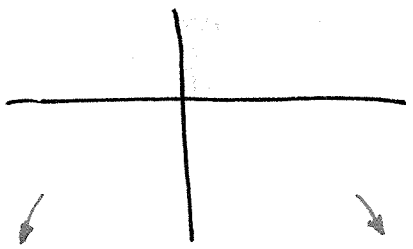
$f'(x) = 3x^2 + 8x = 0 \longrightarrow x(3x+8) = 0$

$x = 0$, $x = -\frac{8}{3}$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in [1,2]$, por tanto f es estrictamente creciente en $[1,2]$

Calcular el nº de raíces de la ecuación $\cos(x) + x\operatorname{sen}x - x^2 = 0$

Como no nos dan intervalos, estamos trabajando en todo $\mathbb{R}$



Front:

$$\lim_{x\to\infty} (\cos x + x\operatorname{sen}x - x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\cos x + x\operatorname{sen}x - x^2) = -\infty$$

Por continuidad de f y el croquis de la figura, aseguramos que f alcanzará máximo absoluto. Además, por ser f derivable, lo alcanzará en un punto tal que $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}x + x\cos x - 2x = 0 \ ; \ x(\cos x - 2) = 0$$

$x = 0$; $\cos x \neq 2$

Como sólo hay un candidato, aseguramos que $f(0) = 1$ es máximo absoluto

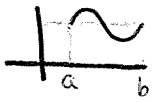
Por tanto, f tendrá dos ceros

Teorema de Rolle

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x)$

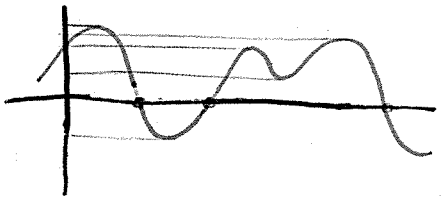
Si f es continua en $[a,b]$
Si f es derivable en (a,b)
Si: $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = 0$



NOTA! El teorema de Rolle nos da información sobre la existencia de ceros en la derivada de la función a la que se le aplica el teorema

NOTA! Si una función derivable tiene "n" ceros, su derivada tendrá, al menos "n-1" cero. La demostración es una consecuencia inmediata de aplicar el teorema de Rolle entre dos ceros consecutivos.

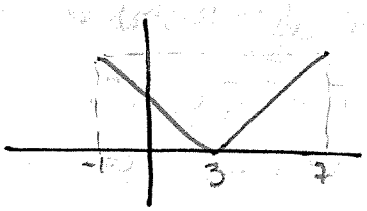


NOTA! Si un polinomio de grado "n" tiene "n" ceros, su derivada tendrá exactamente n-1 ceros.

(47) Calcular extremos absolutos y verificar si cumple el teorema de Rolle

$f: [-1,7] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = |x-3|$

$f(-1) = 4$
$f(7) = 4$



f es continua en $[-1,7]$

f no es derivable en $(-1,7)$ por no serlo en $x = 3$.

Por tanto, no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle

De la gráfica se concluye que $f(-1) = f(7) = 4$ es Máx. absoluto y $f(3) = 0$ el mínimo absoluto

Teorema de Cauchy o Teorema del Valor Medio Generalizado

Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces:

$\exists\, \xi \in (a,b)$ tal que $[f(b)-f(a)]g'(\xi) = [g(b)-g(a)]f'(\xi)$

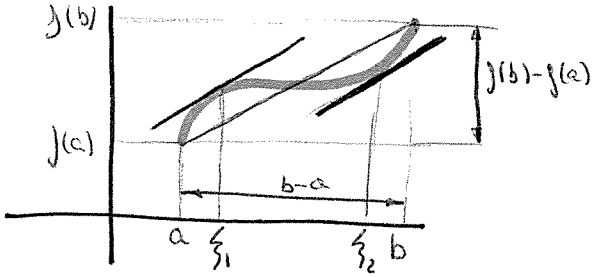
Teorema de Lagrange, de los Incrementos Finitos o del Valor Medio

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces

$\exists\, \xi \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

NOTA! Observamos que este teorema se puede considerar como un caso particular del teorema de Cauchy si $g(x)=x$

NOTA! Interpretación geométrica



Es decir, este teorema nos asegura que debe existir, al menos, un punto intermedio donde la pendiente de la tangente sea igual a la pendiente del segmento que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$

(26) Calcular en qué puntos se cumple el teorema de los incrementos finitos.

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 5$ con $x \in [-1,3]$

f es continua en $[-1,3]$
f es derivable en $(-1,3)$; aplicando el teorema de los incrementos finitos diremos que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \quad \text{con } \xi \in (a,b)$$

$f(3) = 27 + 9 - 3 + 5 = 38$

$f(-1) = -1 + 1 + 1 + 5 = 6$

$\dfrac{38-6}{3-(-1)} = f'(\xi)$; Nos están pidiendo los puntos ξ

$f'(\xi) = 8$, $\quad f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(\xi) = 3\xi^2 + 2\xi - 1 = 8$

$f'(\xi) = 3\xi^2 + 2\xi - 9 = 0$; $\quad \xi = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+108}}{6} = \dfrac{2(-1 \pm 2\sqrt{7})}{2 \cdot 3} = \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{-1+2\sqrt{7}}{3} \\ \xi_2 = \dfrac{-1-2\sqrt{7}}{3} \notin (-1,3) \text{ NO válida} \end{cases}$

$$\boxed{\xi = \frac{-1+2\sqrt{7}}{3}}$$

(25) Sea $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ una función polinómica con coeficientes reales. Demostrar que si

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\dots+\frac{a_n}{n+1}=0 \quad (*)$$

la ecuación $p(x)=0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0,1)$

Como es un problema de ceros, intentamos aplicar Bolzano

$p(x)$ es continua en $[0,1]$

$p(0)=a_0$

$p(1)=a_0+a_1+\dots+a_n$ } Como no sabemos el signo de estos dos valores no podemos aplicar el teorema de Bolzano

Como el teorema de Rolle nos da información sobre los ceros de la derivada de la función a la que aplicamos el teorema, intentaremos aplicar Rolle a una primitiva de $p(x)$, esto es, a $f(x)=\int p(x)\,dx$

$$f(x)=\int p(x)\,dx=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\dots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+G$$

f es continua en $[0,1]$

f es derivable en $(0,1)$

$f(0)=G$

$f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\dots+\frac{a_n}{n+1}+G$ ($a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\dots+\frac{a_n}{n+1}=0$ por $(*)$)

$\longrightarrow f(0)=f(1)$

Aplicando el teorema de Rolle afirmamos que $\exists\,\xi\in(a,b)$ tal que $f'(\xi)=0$

$\Downarrow$

$f'(\xi)=0 \longrightarrow p(\xi)=0$

Queda demostrado $\longleftarrow$

(27) Calcular una cota del error cometido al aprox. $\sqrt[5]{34}$ a 2 aplicando el teorema de los incrementos finitos

$\text{Error}\equiv\sqrt[5]{34}-2=\sqrt[5]{34}-\sqrt[5]{32}$

Ahora aplicamos el t. de los incrementos finitos a una función $f(x)=\sqrt[5]{x}$ en el intervalo $[32,34]$

f es continua en $[32,34]$

$f'(x)=\frac{1}{5}x^{-4/5}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\longrightarrow f$ es derivable en $(32,34)$

Aplicando el teorema diremos que $\frac{f(34)-f(32)}{34-32}=f'(\xi)$ con $\xi\in(32,34)$

$$\underbrace{f(34)-f(32)}_{\text{error}}=2\,\frac{1}{5\sqrt[5]{\xi^4}}<\frac{2}{5(2)^4}=\frac{1}{5\cdot2^3}=\boxed{\frac{1}{40}}$$

($\xi<32$)

(30) Siendo $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ calcular:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{f(x+1)} - \sqrt[3]{f(x)} \right]$$

Este límite es una indeterminación $\infty - \infty$ con diferencia de raíces. Lo podríamos calcular multiplicando y dividiendo por la conjugada. Pero, el día del examen, pedían resolverlo aplicando el teorema de los incrementos finitos

Sea $g(x) = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx + c}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{f(x+1)} - \sqrt[3]{f(x)} \right) = \lim_{x \to \infty} [g(x+1) - g(x)]$$

Intentaremos aplicar ahora el teorema de los incrementos finitos en el intervalo $[x, x+1]$

g es derivable en $[x, x+1]$

Como queremos calcular el límite cuando $x \to \infty$ tendremos que para una x suficientemente grande, el intervalo $[x, x+1]$ habrá dejado a la izquierda los puntos donde se anule el denominador de $f'(x)$

$$g'(x) = \frac{3x^2 + 2ax + b}{3\sqrt[3]{(x^3 + ax^2 + bx + c)^2}} \longrightarrow$$

Por tanto, g es continua en $[x, x+1]$ y derivable en $(x, x+1)$ para una x suficientemente grande

Aplicando el teorema de los incrementos finitos diremos:

$$\frac{g(x+1) - g(x)}{x+1-x} = g'(\xi) \text{ con } \xi \in (x, x+1) \longrightarrow g(x+1) - g(x) = g'(\xi)$$

Volvemos al límite inicial

como $\xi \in [x, x+1]$

$$\lim \left(\sqrt[3]{f(x+1)} - \sqrt[3]{f(x)} \right) = \lim_{x \to \infty} [g(x+1) - g(x)] = \lim_{x \to \infty} g'(\xi) \overset{\downarrow}{=} \lim_{\xi \to \infty} g'(\xi) =$$

$$= \lim_{\xi \to \infty} \frac{3\xi^2 + 2a\xi + b}{3\sqrt[3]{(\xi^3 + a\xi^2 + b\xi + c)^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3\xi^2}{3\xi^2} = \boxed{1}$$

(28) Calcular $\lim_{x\to\infty}\left[(1+x)^{\left(1+\frac{1}{1+x}\right)} - x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$;

Si llamamos $f(x) = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Vamos a intentar aplicar el teorema de los incrementos finitos en el intervalo $[x, x+1]$

Como queremos calcular el límite cuando $x\to\infty$ podemos asegurar que para una x suficientemente grande f es continua en $[x, x+1]$ y derivable en $(x, x+1)$. Aplicando el teorema de los incrementos finitos, diremos que

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f'(\xi) \quad \text{con } \xi \in (x, x+1)$$

$f(x) = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, $\ln f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x$, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\frac{-1}{x^2}\right)\ln x + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}$

$$f'(x) = \left[\left(\frac{-1}{x^2}\right)\ln x + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right] x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{-\ln x + x + 1}{x^2}\right] x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \left(-\ln x + x + 1\right) x^{\left(\frac{1}{x}-1\right)} \Rightarrow f'(\xi) = \left(-\ln\xi + \xi + 1\right)\xi^{\left(\frac{1}{\xi}-1\right)}$$

Volviendo al límite inicial: (como $\xi \in [x, x+1]$)

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right] = \lim_{x\to\infty} f'(\xi) \overset{!}{=} \lim_{\xi\to\infty} f'(\xi) = \lim_{\xi\to\infty}\left(\xi + 1 - \ln\xi\right)\xi^{\left(\frac{1}{\xi}-1\right)} =$$

$$= \lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi}{\xi} = \boxed{1}$$

NOTA! $F(x) = f(x)^{g(x)}$

$$F'(x) = g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x) + f(x)^{g(x)} g'(x) \ln[f(x)]$$

Podemos resolver estas derivadas por el método logarítmico

Indusbol .com

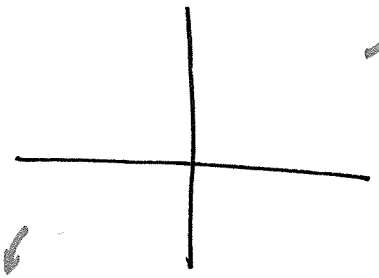
Hallar el nº de raíces de $e^x - x^2 = 0$

Se trata de hallar el nº de ceros de $f(x) = e^x - x^2$

$\lim_{x\to\infty} (e^x - x^2) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} (e^x - x^2) = -\infty$

Por continuidad de f y el croquis de la figura aseguramos que f tendrá, al menos, una raíz

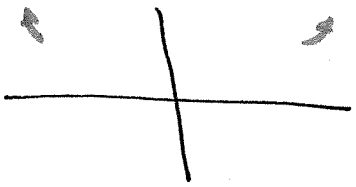


Necesitamos saber más información de los ceros de la derivada de f.

$f'(x) = e^x - 2x = g(x)$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$



Por continuidad de g y el croquis de la figura, aseguramos que g alcanzará mínimo absoluto. Además, por ser g derivable, el mínimo estará en un punto tal que $g'(x) = 0$

$g'(x) = e^x - 2 = 0;\ e^x = 2;\ x = \ln 2$

Como solamente hay un candidato, podemos asegurar que el mínimo absoluto es $g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$

Como el mín de g es mayor que cero tendremos $f'(x) = g(x) > 0$

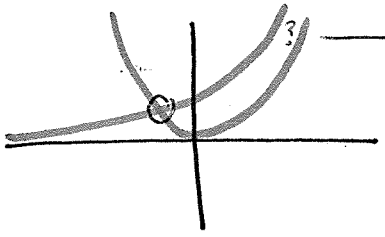
f es estrictamente creciente y, por tanto, **la ecuación tiene una única raíz**

NOTA! A veces los ejercicios de raíces de ecuaciones salen más fácilmente resolviéndolos de forma gráfica

En el caso del ejercicio anterior, el número de raíces de la ecuación $e^x = x^2$ es igual al número de puntos donde se cortan las curvas

$y = e^x$

$y = x^2$

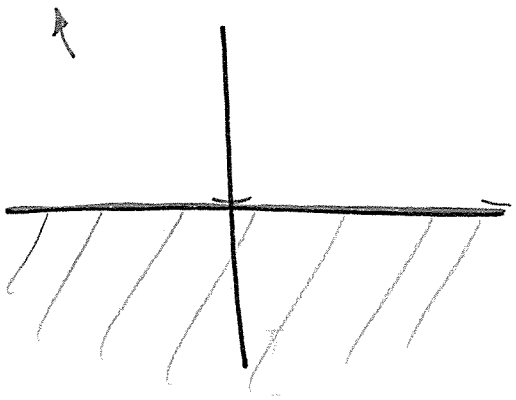


En este caso, no podemos aplicarlo pues no sabemos cuantas veces se cortan.

Indusbol.com

Sea $f(x)=\frac{x^2e^{-x}}{1+x^2}$ determinar el nº de soluciones de $f(x)=a$ $a\in\mathbb{R}$

La forma más rápida de resolver el problema es analizar en cuantos puntos se corta la curva $y=f(x)$ con las rectas $y=a$



Pintamos $f(x)=\frac{x^2e^{-x}}{1+x^2}$

① Simetrías: No hay

② Regiones: $y=0$

③ Corte con ejes

OY → $x=0$ → $y=0$

OX → $y=0$ → $x=0$ $f(x)=\varphi(x)x^2$ → tangente horizontal

④ Asíntotas:

- Verticales: No hay - Horizontales: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{-x}}{1+x^2}=0^+\to y=0$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^{-x}}{1+x^2}=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x+x^3}=\infty\to$ Rama // OY

Ya podemos asegurar, por el croquis y por continuidad de f que la curva tendrá, al menos, un máximo relativo para una $x>0$. Como f es derivable, el máximo se alcanzará en un punto tal que $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{(2xe^{-x}-e^{-x}x^2)(1+x^2)-x^2e^{-x}2x}{(1+x^2)^2}=0;\quad e^{-x}(2x-x^2)(1+x^2)-e^{-x}(2x^3)=0$$

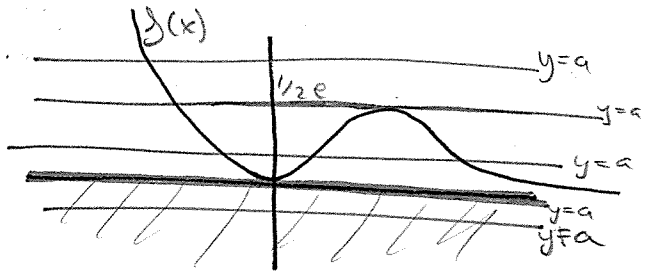
$$e^{-x}(-x^2-x^4+2x+2x^3-2x^3)=0;\quad x^4+x^2-2x=0;\quad x(x^3+x-2)=0$$

	1	0	1	-2
1		1	1	2
	1	1	2	0

$x(x-1)(x^2+x+2)=0$ → $x=0$ → Hay mínimo; $x=1$; $x^2+x+2=0$ No tiene raíces reales

Como sólo hay un candidato, $f(1)=\frac{1}{2e}$ es máximo relativo

La gráfica de $f(x)$ será junto con la de $y=a$ →



Por tanto, el nº de soluciones será

Si $a\in(-\infty,0)$ ⟶ 0 soluciones

Si $a=0$ ⟶ 1 solución

Si $a\in(0,\frac{1}{2e})$ ⟶ 3 soluciones

Si $a=\frac{1}{2e}$ ⟶ 2 soluciones

Si $a\in(\frac{1}{2e},+\infty)$ ⟶ 1 solución

Indusbol .com

5-1 Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) =$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{e} & \text{si } x < 0 \\ e^{\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \\ f(0) = \frac{1}{e} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Continuidad de f en $\mathbb{R}$

En $\mathbb{R} - \{0,1\}$ f es continua por ser operaciones elementales de funciones continuas y no anularse ningún denominador

Estudiamos la continuidad de f en $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} e^{\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x\to 0^-} \left(x + \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{e} = f(0)$$

f es continua en $x=0$

Estudiamos la continuidad en $x=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} 0 = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{-1}{1-x^2}} = e^{\frac{-1}{0^+}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1) \Rightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

Por tanto, f será continua en todo $\mathbb{R}$

b) Derivabilidad de f en $\mathbb{R}$

En $\mathbb{R} - \{0,1\}$ f es derivable por ser operaciones elementales de funciones derivables y no anularse ningún denominador

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{1-x^2}} - \frac{1}{e}}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{-2x}{(1-x^2)^2}\right) e^{\frac{-1}{1-x^2}}}{1} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{x + \frac{1}{e} - \frac{1}{e}}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists f'(0)$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=1$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{0 - 0}{x-1} = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{-1}{1-x^2}} - 0}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} 0 \end{cases}$$

porque la exponencial manda sobre la potencia

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

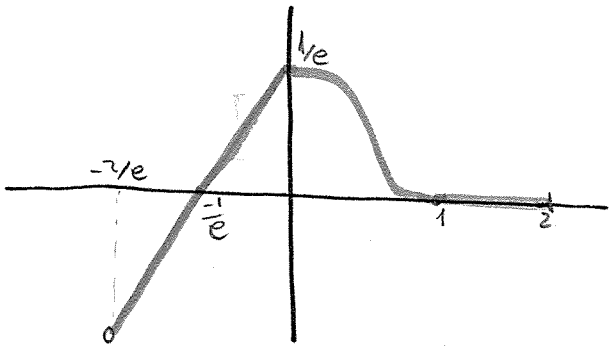
c) Razonar si $f(x)$ es uniformemente continua en $[-3,1]$

f es continua en $[-3,1]$
$[-3,1]$ es compacto por ser cerrado y acotado
$\Longrightarrow$ Aplicando el teorema de Heine podemos afirmar que:

> f es uniformemente continua en $[-3,1]$

d) Extremos de f en $\left[\frac{-2}{e}, 2\right]$ indicando dónde se alcanzan

El croquis de $f(x)$ es:



Máximos relativos:
- $1/e$ que se alcanza en $x=0$
- Infinitos máximos relativos que se alcanzan para una $x \in (1,2]$

Mínimos relativos:
- Infinitos mínimos relativos ~~que se alcanzan para una~~ $x \in [1,2]$

Máximo absoluto $= 1/e$, alcanzado en $x=0$

Mínimo absoluto $\Rightarrow$ No tiene

e) Considerando el intervalo $\left[\frac{-1}{e}, 0\right]$, calcular en qué puntos se satisface el teorema de los incrementos finitos

f es continua en $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$
f es derivable en $\left(\frac{-1}{e}, 0\right)$
$\longrightarrow$ Aplicando el teorema, diremos que

$$\frac{f(0) - f\left(\frac{-1}{e}\right)}{0 - \left(\frac{-1}{e}\right)} = f'(\xi) \text{ con } \xi \in \left(\frac{-1}{e}, 0\right)$$

Hay que calcular ξ:

$f'(x) = 1 \rightarrow f'(\xi) = 1$

$\frac{\frac{1}{e} - 0}{\frac{1}{e}} = 1 \rightarrow$ Por tanto, se cumple el teorema $\forall \xi \in \left[\frac{-1}{e}, 0\right]$, lo cual es totalmente lógico ya que la gráfica de f en el intervalo considerado es una recta

Indusbol.com

Cálculo de la Derivada n-ésima

⇨ Cálculo de la derivada n-ésima por búsqueda de una ley de formación

a) $f(x) = e^{ax}$

$f'(x) = a e^{ax}$

$f''(x) = a^2 e^{ax}$

$f'''(x) = a^3 e^{ax}$

$\vdots$

$$\boxed{f^{n)}(x) = a^n e^{ax}}$$

b) $f(x) = \operatorname{sen} ax$

$f'(x) = a\cos(ax) = a \operatorname{sen}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = a^2 \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \operatorname{sen}\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)$

$f'''(x) = a^3 \cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) = a^3 \operatorname{sen}\left(ax + 3\frac{\pi}{2}\right)$

$\vdots$

$$\boxed{f^{n)}(x) = a^n \operatorname{sen}\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

c) $f(x) = \cos ax$

$f'(x) = -a \operatorname{sen} ax = +a\cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = -a^2 \operatorname{sen}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)$

$f'''(x) = -a^3 \operatorname{sen}\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) = a^3 \cos\left(ax + 3\frac{\pi}{2}\right)$

$$\longrightarrow \boxed{f^{n'}(x) = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

d) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$; $f'(x) = 2 \operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x)$

$$\boxed{f^{n'}(x) = a^{n-1} \operatorname{sen}\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)}$$

⇨ Cálculo de derivadas n-ésimas de cocientes de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Habrá que comenzar obligando a que el grado del polinomio denominador sea mayor que el del numerador, para lo cual, si es preciso, habrá que dividir. Posteriormente descomponemos en fracciones simples y comenzamos a derivar.

(31) b) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{4-x^2}$, calcule derivada n-ésima

$$f(x) = \frac{-x^2-1}{x^2-4} = -1 + \frac{-5}{x^2-4} = -1 + \frac{-5}{(x+2)(x-2)} = -1 + \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\begin{array}{r|l} -x^2-1 & x^2-4 \\ x^2-4 & -1 \\ \hline -5 & \end{array}$$

$$-5 = A(x-2) + B(x+2)$$

$x = 2 \longrightarrow -5 = 4B$; $B = -\frac{5}{4}$

$x = -2 \longrightarrow -5 = -4B$; $A = \frac{5}{4}$

$$f(x) = -1 + \frac{5}{4}\left[(x+2)^{-1} - (x-2)^{-1}\right]$$

$$f'(x) = \frac{5}{4}\left[-(x+2)^{-2} + (x-2)^{-2}\right]$$

$$f''(x) = \frac{5}{4}\left[2(x+2)^{-3} - 2(x-2)^{-3}\right]$$

$$f'''(x) = \frac{5}{4}\left[-3\,2(x+2)^{-4} + 3\cdot 2(x-2)^{-4}\right]$$

$$f''''(x) = \frac{5}{4}\left[4!(x+2)^{-5} - 4!(x-2)^{-5}\right]$$

$$f^{n}(x) = (-1)^{n}\frac{5}{4}n!\left[(x+2)^{-(n+1)} - (x-2)^{-(n+1)}\right]$$

Comprobamos siempre el signo con este factor

(31) c) $f^{n}(x)$ de la función $f(x) = \ln(9-x^2)$

$$f'(x) = \frac{-2x}{9-x^2} = \frac{2x}{x^2-9} = \frac{2x}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$$

$$2x = A(x-3) + B(x+3) \begin{cases} x=3 \longrightarrow 6 = 6B \rightarrow B = 1 \\ x=-3 \longrightarrow -6 = -6A \rightarrow A = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = (x+3)^{-1} + (x-3)^{-1}$$

$$f''(x) = -(x+3)^{-2} - (x-3)^{-2}$$

$$f'''(x) = 2(x+3)^{-3} + 2(x-3)^{-3}$$

$$f''''(x) = -3!(x+3)^{-4} - 3!(x-3)^{-4}$$

$$f^{5}(x) = 4!(x+3)^{-5} + 4!(x-3)^{-5}$$

$$f^{n}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left[(x+3)^{-n} + (x-3)^{-n}\right]$$

NOTA! Este método solo es aconsejable si las raíces del polinomio denominador son reales

⇨ Cálculo de derivadas n-ésimas utilizando la fórmula de LEIBNIZ de la derivada de un producto de funciones

$$f(x) = u(x)v(x)$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$f''(x) = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)$$

$$f'''(x) = u'''(x)v(x) + 3u''(x)v'(x) + 3u'(x)v''(x) + u(x)v'''(x)$$

Nos damos cuenta de que estas expresiones son semejantes al Binomio de Newton cambiando los grados de las potencias por órdenes de derivación, por tanto:

$$f^{n}(x) = \left(u(x)v(x)\right)^{n} = \binom{n}{0}u^{n}(x)v(x) + \binom{n}{1}u^{n-1}(x)v'(x) + \binom{n}{2}u^{n-2}(x)v''(x) + \cdots + \binom{n}{n-1}u'(x)v^{n-1}(x) + \binom{n}{n}u(x)v^{n}(x)$$

NOTA! Esta fórmula nos permitirá calcular la derivada n-ésima de un producto de dos funciones si conocemos las derivadas n-ésimas de ambas.

NOTA! Esta fórmula es especialmente aconsejable cuando una de las funciones sea un polinomio

(31) a) Derivada n-ésima de $f(x) = \frac{x^2+x-1}{e^{5x}}$

$f(x) = \underbrace{(x^2+x-1)}_{v(x)}\underbrace{e^{-5x}}_{u(x)}$ $\qquad u^{n)}(x) = e^{-5x}(-5)^n$

$v'(x) = 2x+1$

$v''(x) = 2$

$v^{n)}(x) = 0$ con $n \geq 3$

Aplicando Liebniz

$$f^{n)}(x) = \binom{n}{0} e^{-5x}(-5)^n (x^2+x+1) + \binom{n}{1} e^{-5x}(-5)^{n-1}(2x+1) + \binom{n}{2} e^{-5x}(-5)^{n-2}\,2$$

$$f^{n)}(x) = e^{-5x}(-5)^{n-2}\left[25(x^2+x+1) - 5n(2x+1) + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\right]$$

b) $f(x) = xa^{-x}e^x$; con $a>0$

$f(x) = x\left(\frac{e}{a}\right)^x$ $\qquad u(x) = \left(\frac{e}{a}\right)^x$, $u'(x) = \left(\frac{e}{a}\right)^x \ln\left(\frac{e}{a}\right) = \left(\frac{e}{a}\right)^x (1-\ln a)$

$u''(x) = (1-\ln a)\left[\left(\frac{e}{a}\right)^x\right]' = (1-\ln a)^2\left(\frac{e}{a}\right)^x$

$\vdots$

$u^{n)}(x) = (1-\ln a)^n\left(\frac{e}{a}\right)^x$

$v(x) = x$

$v'(x) = 1$

$v^{n)}(x) = 0$ si $n \geq 2$

Ahora aplicamos LIEBNIZ

$$f^{n)}(x) = \binom{n}{0}\left(\frac{e}{a}\right)^x (1-\ln a)^n x + \binom{n}{1}\left(\frac{e}{a}\right)^x (1-\ln a)^{n-1}\cdot 1;$$

$$f^{n)}(x) = \left(\frac{e}{a}\right)^x (1-\ln a)^{n-1}\left[(1-\ln a)x + n\right]$$

Indusbol .com

$f^{n)}(x)$ de $f(x) = (x^2+x)\cos(3x)$

$u(x) = \cos(3x)$, $u^{n)}(x) = 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$v(x) = x^2+x$, $v'(x) = 2x+1$

$v''(x) = 2$

$v^{n)}(x) = 0 \quad$ si $n \geq 3$

$$f^{n)}(x) = \binom{n}{0} 3^n \cos\left(3x + n\tfrac{\pi}{2}\right)(x^2+x) + \binom{n}{1} 3^{n-1} \cos\left(3x+(n-1)\tfrac{\pi}{2}\right)(2x+1) + \binom{n}{2} 3^{n-2} \cos\left(3x+(n-2)\tfrac{\pi}{2}\right) 2$$

$f(x) = \operatorname{sen}(5x)\cos(3x)$

1er método:

$u^{n)}(x) = 5^n \operatorname{sen}\left(5x + n\frac{\pi}{2}\right)$ ⟶ Ahora aplicaríamos Liebnitz

$v^{n)}(x) = 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$

2º método: Utilizando las siguientes relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}A\cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\right]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\operatorname{sen}A \operatorname{sen}B = \frac{-1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right]$$

En nuestro caso tendremos

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}8x + \operatorname{sen}2x\right), \quad f^{n)} = \frac{1}{2}\left[8^n \operatorname{sen}\left(8x + n\tfrac{\pi}{2}\right) + 2^n \operatorname{sen}\left(2x + n\tfrac{\pi}{2}\right)\right]$$

$f^{n)}$ de $f(x) = \ln(x^2-6x+5)$

$$f'(x) = \frac{2x-6}{x^2-6x+5} = \frac{2x-6}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}$$

$$2x-6 = (x-5)A + (x-1)B$$

$x = 1 \longrightarrow A = \frac{-4}{-4} = 1$

$x = 5 \longrightarrow B = \frac{4}{4} = 1$

$f'(x) = (x-1)^{-1} + (x-5)^{-1}$

$f''(x) = -(x-1)^{-2} - (x-5)^{-2}$

$f'''(x) = 2(x-1)^{-3} + 2(x-5)^{-3}$

$f''''(x) = -3!(x-1)^{-4} - 3!(x-5)^{-4}$

$$f^{n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left[(x-1)^{-n} + (x-5)^{-n}\right]$$

EJERCICIOS REPASO PARCIAL II

- Determinar el nº de puntos fijos de la función $f(x) = \text{arctg}(x)$
- Dada la sucesión $a_{n+1} = f(a_n)$ analizar si es convergente y, en caso afirmativo, calcular su límite.

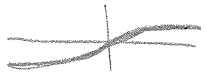
- Los puntos fijos de f cumplen que $f(x) = x$, en nuestro caso:

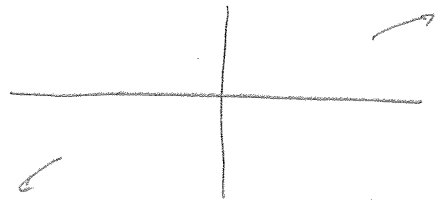
$\text{arctg}\, x = x \longrightarrow g(x) = x - \text{arctg}\, x$, se trata por tanto de ver cuantos ceros tiene $g(x)$

Recordamos gráfica de $\text{arctg}(x)$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$





Por continuidad de f y el croquis de la figura, aseguramos que f tiene, al menos 1 cero.

Veamos si es inyectiva

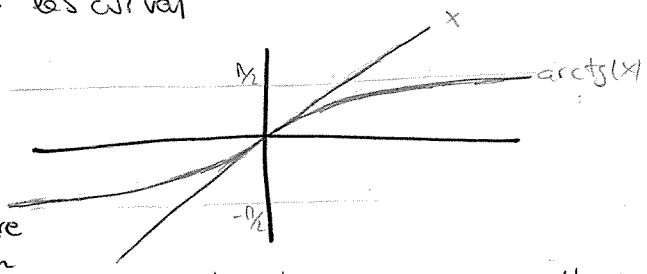
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow g(x) \text{ es estrictamente creciente}$$

Por tanto, $g(x)$ sólo tendrá un cero y **$f(x)$ tendrá un único punto fijo**

NOTA! También podríamos haber resuelto gráficamente el problema ya que se trataría de ver en cuantos puntos se cortan las curvas

$y = x$

$y = \text{arctg}\, x$



Como $f(x) = \text{arctg}\, x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $f'(0) = 1 \Rightarrow$ la pendiente en el origen es 1

$\Longrightarrow$ Por tanto, las dos curvas sólo se cortan 1 vez, esto es, sólo hay un punto fijo que es $x = 0$

- **NOTA!** Cuando tengamos una sucesión definida por $a_{n+1} = f(a_n)$, para demostrar que es convergente tendremos dos posibilidades:

1. Demostrar que f es contractiva para intentar demostrar que la sucesión es contractiva
2. Si f es monótona creciente, podemos asegurar que la sucesión será monótona (monótona creciente o monótona decreciente) y después intentamos demostrar que la sucesión está acotada.

En nuestro caso, $f(x)$ es monótona creciente.

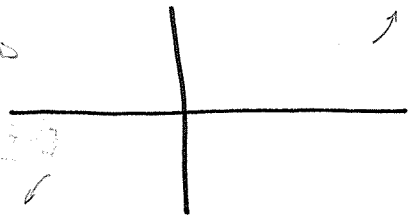
Evidentemente, la sucesión está acotada superiormente por $\frac{\pi}{2}$ e inferiormente por $-\frac{\pi}{2}$, por tanto, por ser una sucesión de números reales monótona y acotada, aseguramos que será convergente, esto es:

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y pasando al límite en la ley de recurrencia:

$L = f(L)$; por tanto L es un punto fijo y como sólo hay uno → $\boxed{L=0}$

➔ Determinar el nº de soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 15x + 3 = 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
} Por continuidad de f y el croquis de la figura, podemos asegurar que f tendrá, al menos, un punto de corte



$f'(x) = 3x^2 - 12x + 15 = 0$

$x^2 - 4x + 5 = 0 \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$ No tiene raíz real

$f'(x) > 0 \longrightarrow$ f es estrictamente creciente, por tanto, la ecuación tiene una única solución

➔ Dada la función $g(x) = \frac{6x^2-3}{x^2+15}$, se pide:

ⓐ Determinar el nº de puntos fijos de la función g en $\mathbb{R}$

Punto fijo $\Longrightarrow g(x) = x$; $\frac{6x^2-3}{x^2+15} = x$; $6x^2 - 3 = x^3 + 15x$

$x^3 - 6x^2 + 15x + 3 = 0 \longrightarrow$ ⇔ la ecuación del ejercicio anterior, por tanto el nº de puntos fijos es 1

ⓑ Probar que g es una función contractiva en $[-1,1]$

Hay que demostrar que $|g(x) - g(y)| \leq k\,|x-y| \quad \forall x, y \in [-1,1]$ con $k \in (0,1)$

$$\left|\frac{6x^2-3}{x^2+15} - \frac{6y^2-3}{y^2+15}\right| = \left|\frac{(y^2+15)(6x^2-3) - (x^2+15)(6y^2-3)}{(x^2+15)(y^2+15)}\right| =$$

$$= \left|\frac{6x^2y^2 - 3y^2 + 90x^2 - 45 - 6x^2y^2 + 3x^2 - 90y^2 + 45}{(x^2+15)(y^2+15)}\right| = \left|\frac{93x^2 - 93y^2}{(x^2+15)(y^2+15)}\right| =$$

$$= \left|\frac{93(x+y)(x-y)}{(x^2+15)(y^2+15)}\right| = \frac{93\,|x+y|}{(x^2+15)(y^2+15)}\,|x-y| \leq \frac{93 \cdot 2}{15^2}\,|x-y| = \frac{186}{225}\,|x-y|$$

$\frac{186}{225} \in (0,1) \longrightarrow$ $\boxed{g \text{ es contractiva } \forall x \in [-1,1]}$

Indusbol.com

⊕ Analizar la convergencia de la sucesión definida recurrentemente por:

$$\begin{cases} a_0 \in [-1,0] \\ a_{n+1} = g(a_n) \end{cases}$$; siendo g la sucesión del ejercicio anterior

Como hemos demostrado que g es contractiva, vamos a intentar demostrar si la sucesión es contractiva.

Recordemos que una sucesión es contractiva si cumple que:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq K |a_n - a_{n-1}| \text{ con } K \in (0,1); \forall n$$

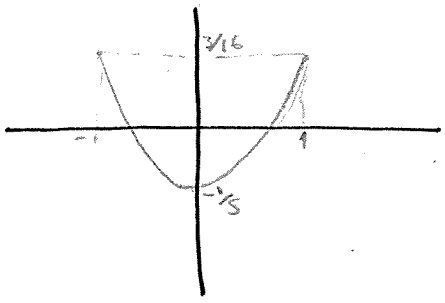
$$|a_{n+1} - a_n| = |g(a_n) - g(a_{n-1})| \overset{\circledast}{\leq} \frac{186}{225} |a_n - a_{n-1}|$$

Por tanto, la sucesión es contractiva, en consecuencia es una sucesión de Cauchy y, por ser de números reales, será convergente.

Pero, el paso $\circledast$ sólo lo podemos dar si a_n y $a_{n-1} \in [-1,1]$, esto es, como los términos de la sucesión se obtienen como imágenes de g, para dar el paso $\circledast$ habrá que demostrar que

$$\text{Im } g(x) \subset [-1,1]$$
$$x \in [-1,1]$$

$g(x) = \frac{6x^2-3}{x^2+15}$; la gráfica de g será simétrica respecto del eje vertical, por lo que nos centramos en el intervalo $[0,1]$



$g(0) = \frac{-1}{5}$

$g(1) = \frac{3}{16}$; $g'(x) = \frac{12x(x^2+15) - (6x^2-3)2x}{(x^2+15)^2} = 0$

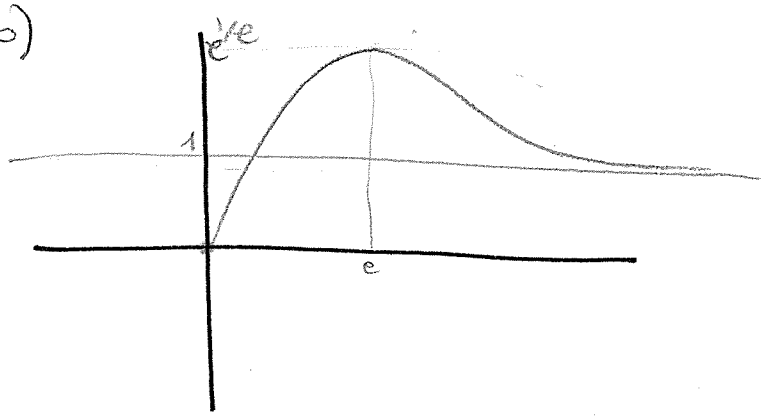
$12x^3 + 180x - 12x^3 + 6x = 0$; $186x > 0 \quad \forall x > 0$

Por tanto $\text{Im } g(x) = [\frac{-1}{5}, \frac{3}{16}] \subset [-1,1]$

Así queda demostrado.

Sea $f(x)=\begin{cases} x^{1/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

1) Estudiar el crecimiento en $[0,+\infty)$



Analicemos el punto peligroso $x=0$

$\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0 = f(0) \Rightarrow$ f es continua en el origen

$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = L$; $\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = 0$

$\ln L = 0 \longrightarrow L = 1$

$f(x)=x^{1/x}$; $\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x$; $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\frac{1}{x}$; $f'(x)=\left(\frac{-\ln x+1}{x^2}\right)x^{1/x}$

$f'(x)=0 \longrightarrow \frac{-\ln x+1}{x^2}\cdot x^{1/x}=0 \begin{cases} x=0 \\ -\ln x+1=0 \rightarrow \ln x=1,\ x=e \end{cases}$

$x>e \longrightarrow f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente
$x>e \longrightarrow f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente
$\Big\} f(e)=e^{1/e}$ es máximo

2) Deducir razonadamente cual de los siguientes números es mayor: $e^{1/e}$ ó $\left(\frac{e}{2}\right)^{2/e}$

De la gráfica se deduce que $f(e)=e^{1/e} > f\left(\frac{e}{2}\right)=\left(\frac{e}{2}\right)^{2/e}$; por tanto

$e^{1/e} > \left(\frac{e}{2}\right)^{2/e}$

3) Sea $\begin{cases} a_0 \in (0,1) \\ a_{n+1}=f(a_n) \end{cases}$, estudiar si a_n es convergente y, en caso afirmativo, calcular su límite:

Como $f(0)=0$ y $f(1)=1$ y la función f en dicho intervalo es creciente con $a_0 \in (0,1)$, la sucesión será monótona.

Por otro lado, la sucesión está acotada superior e inferiormente por tanto por ser de números reales, la sucesión será convergente, esto es:

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y pasando al límite en la ley de recurrencia:

$L=f(L) \longrightarrow$ L es punto fijo. Como hay dos puntos fijos, 0 y 1, necesitamos saber si la sucesión es creciente o decreciente.

$a_{n+1} = a_n^{1/a_n}$; si $a_n \in (0,1)$; $\frac{1}{a_n} > 1$; por tanto

$a_{n+1} = a_n^{1/a_n} < a_n$ → la sucesión es monótona decreciente y el $\lim a_n = 0$

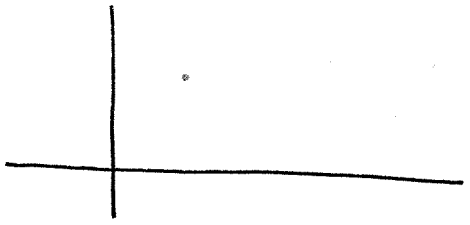
Sea $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

- Determinar el recorrido de f.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$f(1) = \frac{1}{2} + 1 = 3/2$



$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$; si $f'(x) = 0$; $\frac{x^2 - 2}{2x^2} = 0$; $x = \pm\sqrt{2}$ → $x = \sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2} \notin [1, \infty)$

$f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} > 0$ → $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ es mínimo relativo y abs.

Por tanto: $\boxed{\text{Im } f = [\sqrt{2}, \infty)}$

- Hallar, si existe Máx. $\{|g'(x)|,\ x \geq 1\}$

Como es un problema de extremos intentamos pintar la gráfica de la función $g'(x)$

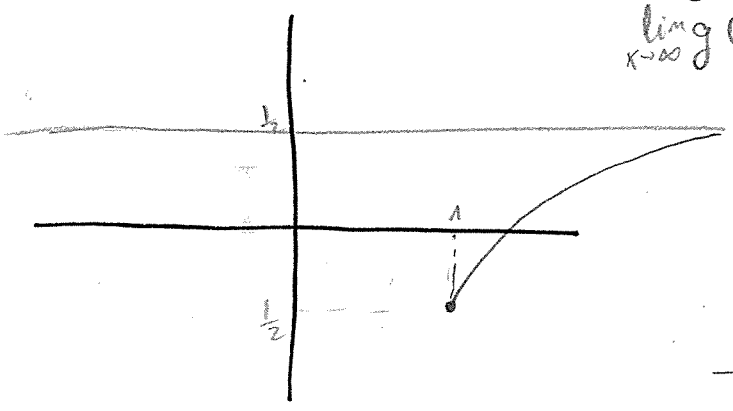
$g(x) = f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$

$g(1) = \frac{-1}{2}$

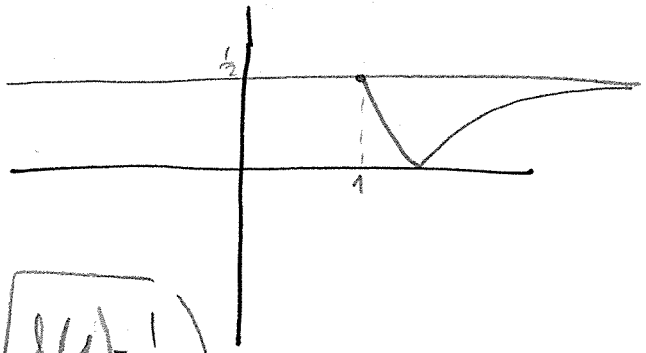
$\lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{1}{2}$

; $g'(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \ \forall x \geq 1$

g es estrictamente creciente



Por tanto, la gráfica de $|f'(x)| = |g(x)|$ será



Así el Máx $|f(x)|$ en $x \geq 1$ es $\boxed{f(1) = \frac{1}{2}}$

Indusbol .com

- Determinar el menor valor de K con la propiedad siguiente:

$$\forall x, y \geq 1 \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

Vamos a intentar aplicar el teorema de los incrementos finitos a la función f en el intervalo genérico $[y,x]$ con $x, y \geq 1$

f es continua en $[y,x]$ y derivable en (y,x) $\Big\}$ Th. incrementos finitos $\longrightarrow \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi)$ con $\xi \in (y,x)$

$$\Longrightarrow |f(x)-f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y| \longrightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}}$$

Por tanto, acabamos de demostrar que la función es contractiva en $[1,+\infty)$

- Sea $a_0 = \sqrt{3}$ y $a_{n+1} = f(a_n)$, calcular, si existe $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Vamos a intentar demostrar si la sucesión es contractiva

$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$$

El paso (*) sólo lo podemos dar si a_n y $a_{n-1} \in [1,\infty)$ y como los términos de la sucesión se calculaban como imágenes por f, para poder dar el paso (*) habrá que demostrar que:

$\text{Im} f \subset [1,\infty)$ $\forall x \in [1,\infty)$ y vimos en el 1er apartado que $\text{Im} f = [\sqrt{2},\infty) \subset [1,\infty)$, en conclusión, la sucesión es contractiva, esto es, es sucesión de Cauchy y, por ser de números reales, será convergente.

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$, y pasando al límite en la ley de recurrencia

$$L = f(L) \Longrightarrow L \text{ es punto fijo}$$

$$L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}, \quad L = \frac{L^2+2}{2L}, \quad 2L^2 - L^2 - 2 = 0, \quad \begin{cases} L = \sqrt{2} \\ L = -\sqrt{2} \text{ no válida por estar la sucesión acotada entre } [1,\infty) \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}}$$

Verdadero o Falso

a) Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $\forall x \in [a,b]$ $1 \leq f'(x) \leq 2$ entonces existe un único $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha)=0$

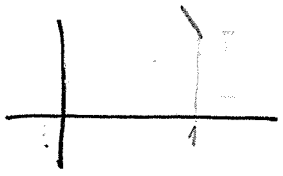
$f(x)=x$

$f'(x)=1 \in [1,2]$

$[a,b]=[69,169] \longrightarrow$ No existe ningún punto tal que $f(\alpha)=0$

Falsa

b) Sea $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(1)<0$ entonces f alcanza mínimo local en $x=1$



Como $f'(1)<0$, f será decreciente en un entorno de 1 y esto implica (ver gráfica) que, a la izquierda de $x=1$ la función será mayor que 1.

Verdadera

c) Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $\lim_{x \to +\infty} f'(x)=0$. Probar que se cumple que $\lim_{n \to \infty} [f(n+2)-f(n)]=0$

Vamos a aplicar el Th de los incrementos finitos en el intervalo $[n, n+2]$

f es continua en $[n,n+2]$ y es derivable en $(n,n+2)$ $\Big\}$ Th. de los incr. finitos $\Longrightarrow$ $\dfrac{f(n+2)-f(n)}{n+2-n} = f'(\xi)$ con $\xi \in (n, n+2)$

$$\lim_{n \to \infty} [f(n+2)-f(n)] = \lim_{n \to \infty} f'(\xi)\cdot 2 = \lim_{\xi \to \infty} f'(\xi)\cdot 2 = 0$$

Como queríamos demostrar

$\lim_{x \to \infty} f'(x)$

Verdadera

d) Sea g una función derivable tal que $g(0)=g'(0)=0$

Sea $f = \begin{cases} f(x)=g(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Entonces $f'(0)=0$

Veamos si f es continua en $x=0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0) \longrightarrow$ f es cont en $x=0$

↳ Tiende a cero por ser g continua en $x=0$

Veamos ahora si es derivable

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cos\frac{1}{x}-0}{x}\overset{\text{l'Hôp.}}{=}\overset{\downarrow}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[g'(x)\cos(x)+g(x)\left(-\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right]=\text{No podemos seguir}$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x}\cos\frac{1}{x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}}_{g'(0)=0}\cos\frac{1}{x}=0$$

Verdadero

● CONTINUACIÓN DERIVADAS N-ÉSIMAS

⊛⊛⊛ Hallar las derivadas n-ésimas de:

$$f(x)=e^{ax}\cos bx \qquad g(x)=e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$$

1er MÉTODO

$$u(x)=e^{ax}\Rightarrow u^{n)}(x)=a^n e^{ax}$$
$$v(x)=\operatorname{sen} bx\Rightarrow v^{n)}(x)=b^n\operatorname{sen}\left(bx+n\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$w(x)=\cos bx\Rightarrow w^{n)}(x)=b^n\cos\left(bx+n\tfrac{\pi}{2}\right)$$

} Ahora aplicaríamos Liebniz

2º MÉTODO

Sea $F(x)=f(x)+ig(x)=e^{ax}\left[\cos bx+i\operatorname{sen} bx\right]=e^{ax}e^{ibx}=e^{(a+ib)x}$

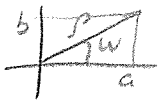
$$F^{n)}(x)=f^{n)}(x)+ig^{n)}(x)=(a+ib)^n e^{(a+ib)x}=$$

Escribiendo el complejo en forma módulo argumental

$a+ib=\rho e^{wi}$

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$

$w=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$



$$=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n e^{win}e^{(a+ib)x}=e^{ax}e^{i(bx+nw)}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n=$$
$$=e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\left[\cos(bx+nw)+i\operatorname{sen}(bx+nw)\right]$$

Ahora identificando la parte real y la compleja tendremos

$$f^{n)}(x)=e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\cos(bx+nw)$$
$$g^{n)}(x)=e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\operatorname{sen}(bx+nw)$$

(32) Deducir, a partir de $y = \frac{\text{Arg Sh}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$ la relación $(1+x^2)y' + xy - 1 = 0$.

Como aplicación de la fórmula de Liebniz, hallar la relación entre las derivadas de orden $n+1$ y $n-1$ para $x=0$

NOTA!

$$(\text{Arg Sh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\text{Arg}(\text{ch}\,x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\text{Arg Th}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\text{arc tg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arc sen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\text{arc cos}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\overbrace{\text{Arg Sh}\,x}^{y}}{1+x^2},$$

$$y'(1+x^2) = 1 - xy \;;\; y'(1+x^2) + xy - 1 = 0 \quad (*)$$

como queríamos demostrar

Vamos a derivar (*) respecto de x n veces

$$\binom{n}{0}y^{n+1}(1+x^2) + \binom{n}{1}y^{n}2x + \binom{n}{2}y^{n-1}2 + \binom{n}{0}y^{n}x + \binom{n}{1}y^{n-1} = 0$$

Particularizamos en $x=0$

$$y^{n+1}_{(0)} + \frac{n(n-1)}{2!}y^{n-1}_{(0)}2 + n\,y^{n-1}_{(0)} = 0$$

$$y^{n+1}_{(0)} + n^2 y^{n-1}_{(0)} - n\,y^{n-1}_{(0)} + n\,y^{n-1}_{(0)} = 0 \;;\; \boxed{y^{n+1}_{(0)} = -n^2 y^{n-1}_{(0)}}$$

(33) $f(x) = \text{arc sen}\,x$. Calcular f^{n} en $x=0$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \frac{-\frac{-2x\cdot 1}{2\sqrt{1-x^2}}y'}{1-x^2} \Rightarrow \overbrace{y''(1-x^2) = +y'x}^{(*)}$$

Derivamos (*) $n-2$ veces

$$\binom{n-2}{0}y^{n}(1-x^2) + \binom{n-2}{1}y^{n-1}(-2x) + \binom{n-2}{2}y^{n-2}(-2) = \binom{n-2}{0}y^{n-1}x + \binom{n-2}{1}y^{n-2}$$

Particularizamos en $x=0$

$$y^{n}_{(0)} - 2\frac{(n-2)(n-3)}{2!}y^{n-2}_{(0)} = (n-2)y^{n-2}_{(0)}$$

$$y^{n}_{(0)} = (n-2)y^{n-2}_{(0)} + (n-2)(n-3)y^{n-2}_{(0)} = y^{n-2}_{(0)}\overbrace{[(n-2)+(n-2)(n-3)]}^{(n-2)[1+n-3]=(n-2)^2}$$

$$\boxed{y^{n}(0) = y^{n-2}_{(0)}(n-2)^2}$$

Utilizando esta ley de recurrencia tendremos que

$y'(0) = 1$

$y''(0) = 0$

$y^{3'}(0) = y'(0)(3-2)^2 = 1^2$

$y^{4'}(0) = 0$

$y^{5'}(0) = y^{3'}(0)(3)^2 = 1^2 \cdot 3^2$

$y^{6'}(0) = 0$

$y^{7'}(0) = y^{5'}(0)\,5^2 = 1^2 3^2 \cdot 5^2$

$y^{8'}(0) = 0$

$$\begin{cases} y^{2k'}(0) = 0 \\ y^{2k+1)}(0) = [(2k-1)!!]^2 \end{cases}$$

(34) $y = e^{Arg\,Sh\,x}$ establecer una ley de recurrencia para el cálculo de derivadas n-ésimas en $x=0$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, e^{Arg\,Sh\,x} \;;\; y'' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, e^{Arg\,Sh\,x}}{1+x^2} - \frac{e^{Arg\,Sh\,x}\,\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \longrightarrow$$

$(1+x^2)\,y'' = y - xy' \Longrightarrow y''(1+x^2) + xy' - y = 0$ (*)

Derivamos (*) respecto de x "n-2" veces

$$\binom{n-2}{0} y^{n'}(1+x^2) + \binom{n-2}{1} y^{n-1)} 2x + \binom{n-2}{2} y^{n-2)} 2 + \binom{n-2}{0} y^{n-1)} x + \binom{n-2}{1} y^{n-2)} - \binom{n-2}{0} y^{n-2)} = 0$$

Particularizamos para $x=0$

$$y^{n'}_{(0)} + \frac{(n-2)(n-3)}{2!}\, 2\, y^{n-2)}_{(0)} + (n-2)\, y^{n-2)}_{(0)} - y^{n-2)}_{(0)} = 0$$

$$y^{n'}(0) = y^{n-2)}(0)\left[-(n-2)(n-3) - (n-2) + 1\right] \;;\; \boxed{y^{n'}(0) = y^{n-2)}(0)\left[1-(n-2)^2\right]}$$

Academia
RUFFO
Luchana, 31 – Tel. 91 447 69 26 – Madrid 28010
Luchana, 37 – Tel. 91 448 11 80 – Madrid 28010

CURSO
2010-2011

Indusbol .com

CÁLCULO - I

Ejercicios de Cálculo Diferencial de Funciones Reales de una Variable Real

Academia Ruffo

CÁLCULO - I

Ejercicios de límites de funciones reales de una variable real

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\ln(1+x)}-\sqrt{1-\ln(1+x)}}{x}$ — *Solución*: 1

2. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^3+4x^2+5x+2}\ \operatorname{sen}(x+1)$ — *Solución*: 2

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$ — *Solución*: -1 / 2

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ — *Solución*: 0

5. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ — *Solución*: $2\sqrt{2}$

6. $\lim_{x\to 0} x e^{1/x}$ — *Solución*: no $\exists$

7. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x\, e^{1/(1-\cos x)}$ — *Solución*: no $\exists$

8. $\lim_{x\to \pi/4} \operatorname{tg}(2x)\ \cot g(x+\pi/4)$ — *Solución*: 1 / 2

9. $\lim_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$ — *Solución*: 1 / e

10. $\lim_{x\to \infty} \left[\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]^{x \ln x}$ — *Solución*: e

11. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}\right)}$ — *Solución*: e

12. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$ — *Solución*: -1 / 2

13. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)$ — *Solución*: π^2 / 8

14. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x^2}\right)$ — *Solución*: 1 / 3

15. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x}+1}{e^{\operatorname{tg} x}-1}$ — *Solución*: no $\exists$

16. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}-x\right)$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Re_*^+$ — *Solución*: $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} a_i$

17. $\lim_{x\to \infty} x(\ln x)^2 \left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)-\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)\right]$ — *Solución*: 1

Academia Rufo

18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2-2\cos x - x^2}{\text{tg}^2 x - \text{sen}^2 x}$ — *Solución*: -1 / 12

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln x - \text{sen}\, x}{\ln x + \cos x}$ — *Solución*: 1

20. ¿ Cuánto debe valer "a" para que exista y sea finito el siguiente límite ?:

$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ — *Solución*: a=2

21. $\lim_{x\to 0} \left(1+\dfrac{1}{1-\cos x}\right)^{\text{sen}\, x}$ — *Solución*: 1

22. $\lim_{x\to 0} (\text{sen}\, x)^x$ — *Solución*: 1

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\ln x - 4\, tg\, x}{\ln x + 6\cos x}$ — *Solución*: 2

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 e^{\text{sen}\, x} - \ln(1+x^2)}{\text{sen}\, x - \text{arctg}\, x}$ — *Solución*: 6

25. $\lim_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}} \dfrac{e^x - \text{sen}\, x}{x - \text{sen}\, x}$ — *Solución*:No ∃

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \text{arctg}\, x}{Shx - \text{sen}\, x}$ — *Solución*: 1

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\, \text{sen}\, x}{\text{arctg}\, x\ Sh2x}$ — *Solución*: 1/2

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \text{arctg}\, x - Shx}{x + 2\,\text{sen}\, x}$ — *Solución*: 1/3

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \text{sen}\, x}{x(1-\cos x)}$ — *Solución*: 1/3

30. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\text{sen}\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ — *Solución*: $e^{\frac{-1}{6}}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$ — *Solución*:No ∃

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x^2}{x^4}$ — *Solución*: -1/3

33. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1} - 2x)$ — *Solución*: ∞

34. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1} - 2x)$ — *Solución*: 1/2

35. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 3} - \sqrt[3]{x^3 + 4x})$ — *Solución*: 1/3

Indusbol.com
Solución Rito
maria.bh@hotmail.com

CÁLCULO - I

Ejercicios de derivación de funciones reales de una variable real

1. Estudiar la continuidad en el origen de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ si $x\neq 0$; $f(0)=0$. *Solución*: discont. esen. 1ª esp.

b) $f(x)=sen(\dfrac{1}{x})$ si $x\neq 0$; $f(0)=0$. *Solución*: discont. esen. 2ª esp.

c) $f(x)=x\,sen(\dfrac{1}{x})$ si $x\neq 0$; $f(0)=0$. *Solución*: continua

d) $f(x)=\dfrac{sen\,x}{|x|}$ si $x\neq 0$; $f(0)=0$ *Solución*: discont. esen. 1ª esp.

e) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1/x}}$ si $x\neq 0$; $f(0)=1$. ¿Es f continua en $(-\infty,0]$?

Solución: discont. esen. 1ª esp.- Sí

f) $f(x)=\dfrac{a\,e^{1/x}+b\,e^{-1/x}}{c\,e^{1/x}+d\,e^{-1/x}}$ si $x\neq 0$; $f(0)=3$; $a,b,c,d\in R^*$.

2. Estudiar la continuidad y derivabilidad en el origen de la función

$$f(x)=x^n\cos(\frac{1}{x}) \quad \text{si } x\neq 0 \ ; \ f(0)=0$$

discutiendo según los valores de $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

3. Sea $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{|x|}$ si $x\neq 0$; $f(0)=a$. Hallar el valor de "a" para que "f" sea continua. *Solución*: siempre es discontinua.

4. Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f_1(x)=[x]$, $f_2(x)=x[x]$, y calcular la derivada de $f(x)=x^2+[x]+\sqrt{x^2+[x]^2}$ en $x=\pi$.

* Nota: $[x]$ representa la parte entera de x.

5. Sea $f(x)=|x^3|$. Hallar, si existen, $f'(0), f''(0), f'''(0)$.

Solución: f'(0)=0; f''(0)=0; f'''(0) no existe.

6. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$\begin{cases} f(x)=x & si\ x\in Q \\ f(x)=1-x & si\ x\in R-Q \end{cases}$$

Solución:continua en x=1/2. No es derivable en ningún punto.

7. Calcular, si existe, $f'(0)$ para la función $f(x)=x+\dfrac{x}{1-[x]}$.

Solución: f'(0) no existe

Academia Rito

8. Hallar, por el concepto de incremento y diferencial, el error cometido al calcular el área de un triángulo equilátero de lado 3 cm, si al medir su longitud se ha podido cometer un error de 0,001 cm.

Solución: $\Delta f = 0.00433056$; $df = 0.004330127$

9. Siendo $g(x) = x\,f(x)$ y sabiendo que $f(x)$ es continua en $x=0$, calcular $g'(0)$.

Solución: $g'(0)=f(0)$

10. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^3+2x+2 & si\ x<0 \\ x^2-3x+2 & si\ x\geq 0 \end{cases}$

(a) estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$, y calcular las sucesivas derivadas en $x = 0$ cuando existan. *Solución*: es continua y no es derivable.

(b) hallar máximos y mínimos de $f(x)$ en $[-2,2]$.

Solución: $m_r = -1/4, -10$; $M_r = 2, 0$; $m_a = -10$; $M_a = 2$

11. Calcular extremos relativos y absolutos de:

a) $f(x)=x^3+x^2-5x+1$; $x\in R$ *Solución*: $m_r=-2$; $M_r=202/27$

b) $f(x)=(x+2)e^x$; $x\in R$ *Solución*: $m_r = m_a = -e^{-3}$

c) $f(x)=5+(x-3)^{2/3}$; $x\in R$ *Solución*: $m_r = m_a = 5$

d) $f(x)=\dfrac{|ax|}{1+x^2}$; $a>0$; $x\in R$ *Solución*: $m_r = m_a = 0$; $M_r = M_a = a/2$

e) $f(x)=x^2 \ln x$; $x\in R_+^*$ *Solución*: $m_r = m_a = -1/(2e)$

f) $f(x)=\ln(1+x^2)-|x-2|$; $x\in[-2,3]$

Solución: $m_a = \ln 5 - 4$; $M_r = M_a = \ln 5$; $m_r = \ln 10 - 1, \ln 5 - 4$

12. Sea $f: R \to R$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. Hallar el conjunto $Im(f)$. *Solución*: $[-2,2]$

13. Calcular:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\limits_{x>0} \left(\dfrac{e^x}{x^n}\right)\right)$ *Solución*: 0

(b) $\sup\limits_{x\in\Re}(x^{2n}e^{-x^2})$; $n\geq 1$. *Solución*: $n^n e^{-n}$

14. Hallar la distancia mínima del origen a la parábola $y=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$.

Solución: $\sqrt{5}/2$

15. Hallar la superficie mínima de un cilindro cuyo volumen es 27 m^3.

Solución: $18\sqrt[3]{2\pi} + (18\pi / \sqrt[3]{4\pi^2})$ m^2

16. Hallar las dimensiones de un triángulo rectángulo de área máxima, sabiendo que su hipotenusa mide 5 cm. *Solución*: ambos catetos $= 5/\sqrt{2}$ cm

17. Hallar el área máxima de un triángulo isósceles cuya base une dos puntos de $y = x^2$ con $|x| \le 1$, y cuyo vértice superior es el punto $(0,1)$.
Solución: $2\sqrt{3}/9$

18. Si $f(x)$ es una función continua en $[1,4]$ y se cumple que $Im\,(f) \subset Q$, calcular $f(3)$ sabiendo que
$$\int_{3/2}^{3} f(x)dx = 1.$$
Solución: f(3)=2/3.

19. Siendo $f(x) = x^6 + 4$, $g(x) = x^7 + 5x^3 + 2$ y $h(x) = (g \circ f)(x)$, calcular $h'(1)$ sin evaluar explícitamente $h(x)$.
Solución: 658500

20. Siendo $f(x) = e^{4x+3}$, determinar $(f^{-1})'(1)$ sin evaluar explícitamente $f^{-1}(x)$.
Solución: 1/4

21. Dada la función $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + x + 1$, estudiar si existe función inversa $f^{-1}(x)$. ¿La función inversa admite derivada en todos los puntos?. Calcular $(f^{-1})'(3)$.
Solución: Sí; Sí; 1/4

22. Siendo $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 10$, calcular $(f^{-1})'(16)$.
Solución: 1/10

23. Dadas $f: R \to R$, $f(x) = arctg\ x$, y $g: R_+^* \to R$, $g(x) = ln\ x$. Calcular $(f \circ g^{-1})'(0)$.
Solución: 0.5

24. Dada $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 72$, indicar para qué valores de "x" no existe la derivada de la función inversa.
Solución: -2

25. Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ una función polinómica con coeficientes reales. Demostrar que si:
$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$
la ecuación $p(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0,1)$.

26. Hallar en qué puntos se verifica el teorema de los incrementos finitos para la función $f(x) = x^3 + x^2 - x + 5$ con $x \in [-1,3]$.
Solución: $(-1+2\sqrt{7})/3$

27. Calcular una cota del error cometido al aproximar $\sqrt[5]{34}$ por 2, aplicando el teorema de los incrementos finitos.
Solución: 1/40

28. Calcular $\lim_{x \to \infty} (1+x)^{\left(1+\frac{1}{1+x}\right)} - x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$
Solución: 1

Academia Rino

29. Demostrar que si f es una función derivable tal que $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^n$, $\forall x, y \in R$, $n \in N$, $n \ge 2$, entonces f es una función constante.

30. Siendo $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in R$, calcular:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{f(x+1)} - \sqrt[3]{f(x)}\right].$$

Solución: 1

31. Calcular la derivada n-ésima de la siguientes funciones en sus dominios de definición:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{e^{5x}}$ *Solución*: $(-5)^{n-2}\, e^{-5x}\left[25(x^2+x+1) - 5n(2x+1) + n(n-1)\right]$

b) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{4-x^2}$ *Solución*: $\dfrac{5(-1)^n n!}{4}\left[\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}\right]$

c) $f(x) = ln(9-x^2)$ *Solución*: $(-1)^{n+1}(n-1)!\left[(3+x)^{-n} + (x-3)^{-n}\right]$

d) $f(x) = sen\, x$ *Solución*: $\operatorname{sen}(x + (n\pi/2))$

e) $f(x) = sen^2 x$ *Solución*: $2^{n-1} sen\left[2x + (n-1)\pi/2\right]$

f) $f(x) = x\, a^{-x} e^x$ *Solución*: $(e/a)^x (1 - \ln a)^{n-1}\left[n + x(1-\ln a)\right]$

32. Deducir a partir de la expresión $y = \dfrac{ArgSh\, x}{\sqrt{1+x^2}}$, la relación $(1+x^2)y' + xy - 1 = 0$.

Como aplicación de la fórmula de Leibniz, hallar la relación entre las derivadas de orden $n+1$ y $n-1$ para x=0. *Solución*: $y^{(n+1)}(0) + n^2\, y^{(n-1)}(0) = 0$

33. Dada la función $f(x) = arcsen\, x$, calcular $f^{(n)}(0)$.

Solución: $f^{(2k+1)}(0) = \left[(2k-1)!!\right]^2$, $f^{(2k)}(0) = 0$

34. Dada la función $y = exp\,(ArgSh\, x)$, establecer una ley de recurrencia para el cálculo de las derivadas n-ésimas en $x = 0$. *Solución*: $y^{(n)}(0) = (1-(n-2)^2)\, y^{(n-2)}(0)$

35. Siendo $f(x)$ solución de $f''' + 3f' + 2f = 0$, con $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - sen\, x}{x^3}$. *Solución*: -1/3

36. Determinar la fórmula de Mc. Laurin de las funciones

a) e^x; b) $sen\, x$; c) $cos\, x$; d) $ln\,(1+x)$; $x > -1$; e) $(1+x)^r$; $x > -1$; $r \in R$

f) $Sh\, x$; g) $Ch\, x$; h) $arcsen\, x$; i) $arctg\, x$; j) $ArgSh\, x$; k) $ArgTh\, x$

37. Utilizando la fórmula de Mc. Laurin, determinar el valor de e, e^2, ln 2 y ln 3 con un error inferior a 10^{-3}.

38. Calcular máximos y mínimos relativos y absolutos de $f(x) = \dfrac{3x+4}{1+x^2}$, $x \in [-1,1]$.

Solución: m_a=1/2; M_r =M_a=9/2; m_r=1/2, 7/2

39. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|2-x|}{x} & si \quad x\in R-\{0\}\\ 1 & si \quad x=0\end{cases}$

(a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad en el punto $x=2$.

(b) Estudiar la continuidad uniforme en el intervalo [1,3].

Solución: Es continua- No es derivable- Es uniformemente continua.

40. Sea la función $f:R\to R,\quad f(x)=e^{|x|}$. Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x=0$. ¿Es la función f uniformemente continua en [-1,1]? Razonar la respuesta.

Solución: Es continua- No es derivable- Es uniformemente continua.

41. Estudiar la continuidad y la derivabilidad en el origen de la siguiente función: $f(x)=sen|x|$, siendo $|x|$ el valor absoluto de x.

Indicar razonar si $f(x)$ es uniformemente continua en el intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$.

Solución: Es continua- No es derivable- Es uniformemente continua.

42. Sea la función $f:R\to R,\quad f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2+2}$,

(a) Estudiar la continuidad de f en R.

(b) Estudiar la existencia de la derivada en el origen.

(c) Hallar el máximo y mínimo absolutos de $f(x)$ en el intervalo $\left[-\sqrt{8},\sqrt{8}\right]$.

(d) ¿Es $f(x)$ uniformemente continua en el intervalo [-3,5]?

Solución: Es continua en R- No existe f'(0)- $m_a=0$, $M_a=1/3$ - Es uniformemente continua.

43. Sean las funciones:

$f:\ R\to R$, $x\to f(x)=ArgSh(x)$; $g:\ R_*^+\to R$, $x\to g(x)=ln(x)$.

Calcular $(f\circ g^{-1})'(0)$

Solución: $2^{-1/2}$

44. Sea la función $f(x)=\begin{cases}x^2\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x\neq 0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$

(a) Estudiar si f es continua en $x=0$. *Solución*: Es continua.

(b) Estudiar la existencia de $f'(0)$, $f''(0)$. *Solución*: f'(0)=0-No existe f''(0)

(c) Indicar razonadamente si $f(x)$ y $f'(x)$ son uniformemente continuas en el intervalo $[-1,1]$. *Sol:* f es uniformemente continua y f' no lo es.

45. Sea la función $f(x)=x^2-xsen(x)-cos(x)$; $x\in R$. Se pide:

(a) Calcular los máximos y mínimos relativos y absolutos, si existen, de $f(x)$ en R, indicando en que puntos se alcanzan.

(b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

(c) Considerando las respuestas de los apartados anteriores, ¿puede saberse el número de ceros de la función $f(x)$?

(d) Calcular el máximo y mínimo absolutos, si existen, de $f(x)$ en $[\pi/2,\pi]$.

Solución: No hay máximos relativos ni absoluto. $m_a=m_r=-1$, se alcanza en x=0.

Intervalo de crecimiento: $(0,+\infty)$. Intervalo de decrecimiento: $(-\infty,0)$

Número de ceros = 2. $M_a=\pi^2+1$; $m_a=(\frac{\pi}{2})^2-\frac{\pi}{2}$

46. ¿Cuánto debe valer a para que la siguiente función sea continua en $\Re$?

$$f:\ \Re \rightarrow \Re$$

$$x \rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-\operatorname{sen}x)^2}{\left(e^x-1\right)x^5} & si \quad x\neq 0\\ a & si \quad x=0\end{cases}$$

Solución : 1/36

47. Analizar si la siguiente aplicación cumple el Teorema de Rolle y calcular sus extremos absolutos;

$$f:\ [-1,7] \rightarrow \Re$$

$$x \rightarrow f(x)=|x-3|$$

Solución : No se cumple. $M_a=4$; $m_a=0$

48. Calcular el conjunto imagen de la función:

$$f:\ (0,+\infty) \rightarrow \Re$$

$$x \rightarrow f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

Solución : [1/3,1)

49. Se considera la función

$$f:\ \Re \rightarrow \Re$$

$$x \rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & si \quad x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & si \quad x=0\end{cases}$$

Se pide :

a) Estudiar la continuidad de f en $\Re$. *Solución* : Sí

b) Estudiar la derivabilidad de f en $\Re$. *Solución* : Sí

c) Calcular $f'(x)$.

d) Estudiar la continuidad de $f'(x)$ en $x=0$. *Solución* : Sí

50. Se considera la función

$$f:\ [0,+\infty) \rightarrow \Re$$

$$x \rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{x^2} & si \quad x\neq 0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$$

Calcular los extremos relativos y absolutos de f. *Solución*: $m_r=2;0m_a=0$

51. Se considera la función :

$$f:\ \Re \rightarrow \Re$$

$$x \rightarrow f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{e} & si \quad x\leq 0\\ e^{\left(-1/(1-x^2)\right)} & si \quad 0<x<1\\ 0 & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

Academia Rufo

Se pide :

a) Estudiar la continuidad de f en $\Re$. *Solución* : Sí

b) Estudiar la derivabilidad de f en $\Re$. *Solución* : No

c) Razonar si $f(x)$ es uniformemente continua en $[-3,1]$. *Solución* : Sí

d) Calcular los extremos relativos y absolutos de $f(x)$ en $\left(\frac{-2}{e},2\right]$, indicando en que puntos se alcanzan. *Solución* : M_r =1/e en x=0;0 en $(1,2]$, M_a =1/e en x=0. m_r=0 en $[1,2]$

e) Considerando el intervalo $\left[\frac{-1}{e},0\right]$, calcular en que puntos se satisface el Teorema de los Incrementos Finitos. *Solución:* en $\left(\frac{-1}{e},0\right)$

52. Se considera la función:

$$\begin{array}{rccl} f: & (0,1)\cup(1,+\infty) & \to & \Re \\ & x & \to & f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1} \end{array}$$

(a) Demostrar que definiendo convenientemente f en x=0 y en x=1, la función f será continua en el intervalo [0,+∞) y derivable en (0,+∞).

(b) Demostrar que la función $h(x)=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}-\ln x$, es decreciente en (0,+∞). ¿Cuántos ceros posee h(x) en (0,+∞)? *Solución:* posee un único cero.

(c) Calcular los extremos relativos y absolutos de f en [0,+∞). *Solución:* $M_r=M_a=1/2$; $m_a=m_r=0$

53. Demostrar las desigualdades $\dfrac{a}{(n+1)^{1-a}} \le (n+1)^a - n^a \le \dfrac{a}{n^{1-a}}$; $a \in (0,1)$, $n \in N$, por aplicación del Teorema de los Incrementos Finitos a la función $f(x)=x^a$.

54. Sea la aplicación

$$\begin{array}{rccl} f: & ([-1,1],\, d_f) & \longrightarrow & (R,\, d_f) \\ & x & \longrightarrow & f(x)=\left\{\begin{array}{c} \dfrac{x\,e^{-x^2}-6\operatorname{sen}x+5x}{(\operatorname{sen}2x)^5} \;;\; x\neq 0 \\ f(0)=3 \end{array}\right\} \end{array}$$

Se pide:

(a)Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x=0$. *Solución:* No; No

(b)Razonar si f es uniformemente continua en los intervalos $[-1,1]$ y $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Solución: No; Sí

TAYLOR

Indusbol .com

1 FÓRMULA DE TAYLOR

Theorema: Sea $C \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto

Sea $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x)$ de clase C^{n+1} (esto es, f admite derivadas hasta el orden $n+1$ y todas son continuas)

Sea $a \in C$ entonces $\forall x \in C$ se cumple que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + f^{n}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}}_{(**)} + \underbrace{o(x-a)^n}_{(***)}$$

$(*)$ Fórmula de Taylor de la función f alrededor del punto "a".

$(**)$ El polinomio de Taylor de grado u orden n de la función f alrededor del punto "a"

$(***)$ El resto o término complementario con la notación infinitesimal o de LANDAU, que significa:

$$\lim_{x \to a} \frac{o(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0$$

NOTA! El resto o término complementario admite diferentes expresiones matemáticas. Las más importantes son:

i) Resto de LAGRANGE

$$o(x-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{con } \xi \in (a,x) \text{ ó } (x,a)$$

ii) Resto de CAUCHY

$$o(x-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n \quad \text{con } \xi \in (a,x) \text{ ó } (x,a)$$

iii) Resto de Schlömich

$$o(x-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,s}(x-a)^s(x-\xi)^{n+1-s} \quad \text{con } \xi \in (a,x) \text{ o } (x,a)$$

iiii) Resto integral

$$o(x-a)^n = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$ } Poco importante

NOTA! Obsérvese que si en el resto de Schlömich hacemos:

$s = n+1 \longrightarrow$ obtenemos el resto de Lagrange

$s = 1 \longrightarrow$ obtenemos el resto de Cauchy

NOTA! Si nos pidieran el desarrollo de Taylor alrededor del punto "a" escribiríamos

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{n!}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n!}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

NOTA! Cuando "a" es el origen, a la fórmula de Taylor se le denomina fórmula de Mc Laurin. Por tanto, la fórmula de McLauren con resto de Lagrange será:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{n!}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{n+1!}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

con $\xi \in (0,x)$ ó $(x,0)$

→ Calcular la fórmula de McLauren con resto de Lagrange de las siguientes funciones.

① $f(x) = e^x \rightarrow f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + f^{n+1!}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$f^{n!}(x) = e^x$

$f^{n!}(0) = 1$

con $\xi \in (0,x)$ ó $(x,0)$

$$e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

② $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$f^{n!}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$f^{n!}(0) = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ → si $n = 2k \rightarrow f^{2k!}(0) = 0$

→ si $n = 2k-1 \rightarrow f^{2k-1!}(0) = \operatorname{sen}\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{k+1}$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + f^{2k!}(\xi)\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

con $\xi \in (0,x)$ ó $(x,0)$

Resto:

$$\operatorname{sen}\left(\xi + 2k\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= \operatorname{sen}(\xi)\cos(k\pi)\frac{x^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= \operatorname{sen}(\xi)(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Indusbol .com

③ $f(x) = \cos(x)$

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$f^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ → Si $n = 2k \rightarrow f^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$

→ Si $n = 2k-1 \rightarrow f^{(2k-1)}(0) = \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{\int^{2k+1}(\xi)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\cos(\xi + (2k+1)\frac{\pi}{2})\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} \quad \text{con } \xi \in (x,0) \text{ ó } (0,x)$$

$$= -\operatorname{sen}(\xi)\underbrace{\operatorname{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{(-1)^k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

④ $f(x) = \ln(1+x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$

$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$

$f''''(x) = -2\cdot 3(1+x)^{-4}$

$f^{5}(x) = 2\,3\,4(1+x)^{-5}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$f(x) = \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underbrace{\int^{n+1}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Resto}}$$

$$= (-1)^n n!(1+\xi)^{-(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^n\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}$$

⑤ $f(x) = (1+x)^r \quad r \in \mathbb{R}$

$f'(x) = r(1+x)^{r-1}$

$f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2}$

$f'''(x) = r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3}$

$\vdots$

$f^{n}(x) = r(r-1)(r-2)\cdots(r-(n-1))(1+x)^{r-n} = n!\binom{r}{n}(1+x)^{r-n}$

$f^{n}(0) = n!\binom{r}{n}$

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-(n-1))}{n!}$$

$$f(x) = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \_\_\_\_ + \binom{r}{n}x^n + \underbrace{\int^{n+1}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{con } \xi \in (x,0) \text{ ó } (0,x)}$$

$$\text{Resto} \begin{cases} (n+1)!\binom{r}{n+1}(1+\xi)^{r-(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \\ \binom{r}{n+1}(1+\xi)^{r-(n+1)}x^{n+1} \end{cases}$$

⑥ $f(x) = Sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f'(x) = Ch(x)$

$f''(x) = Sh(x)$

$f^{2k)}(x) = Sh(x) \rightarrow f^{2k)}(0) = 0$

$f^{2k-1)}(x) = Ch(x) \rightarrow f^{2k-1)}(0) = 1$

$$f(x) = Sh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \int^{2k)}(\xi)\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

con $\xi \in (x,0)$ ó $(0,x)$

$$\text{Resto} = Sh(\xi)\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

⑦ $f(x) = Ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f'(x) = Sh(x)$

$f''(x) = Ch(x)$

$f^{2k)}(x) = Ch(x) \rightarrow f^{2k)}(0) = 1$

$f^{2k-1)}(x) = Sh(x) \rightarrow f^{2k-1)}(0) = 0$

$$f(x) = Ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int^{2k+1)}(\xi)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

con $\xi \in (x,0)$ ó $(0,x)$

$$\text{Resto} = Sh(\xi)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Calcular el desarrollo de Taylor en el origen, esto es desarrollo de McLaurin para las siguientes funciones.

① $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ Aunque podríamos calcular el desarrollo hallando $f^{n)}$, vamos a calcular el desarrollo dividiendo

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1+x \\ \hline -1-x & 1-x+x^2-x^3+\dots \\ \hline -x & \\ x+x^2 & \\ \hline x^2 & \\ -x^2-x^3 & \\ \hline -x^3 & \\ x^3+x^4 & \\ \hline \dots & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \_\_\_\_ + (-1)^n x^n + \_\_\_\_ =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

② $f(x)=\frac{1}{1-x}$ Podríamos obtener el desarrollo dividiendo o utilizando el desarrollo anterior cambiando x por $-x$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\_\_\_\_+x^n+\_\_\_\_=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

③ $f(x)=\text{arctg}(x)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ Aplicamos el desarrollo de "$\frac{1}{1+x}$" cambiando x por x^2

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\_\_\_\_+(-1)^n x^{2n}+\_\_\_\_$$

⟹ y ahora, integrando obtenemos $f(x)$ desarrollada

$$f(x)=C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\_\_\_\_+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\_\_\_\_$$

Por otro lado $f(0)=\text{arctg}(0)=0 \Rightarrow f(0)=C=0$

Así, $f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\_\_\_\_+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\_\_\_\_=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

④ $f(x)=\text{Arg Th}(x)$

$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ → Aplicamos el desarrollo de $\frac{1}{1-x}$

$$f'(x)=1+x^2+x^4+x^6+\_\_\_\_+x^{2n}+\_\_\_\_$$

y ahora integrando:

$$f(x)=C+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\_\_\_\_+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\_\_\_\_$$

$f(0)=\text{Arg Th}(0)=0 \longrightarrow C=0$

$$f(x)=\text{Arg Th}(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\_\_\_\_+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\_\_\_\_=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Indusbol .com

(5)

$f(x) = \text{arcsen}(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \underset{\text{Desarrollo del Binomio}}{1} \binom{-\frac{1}{2}}{0}1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-x^2) + \underbrace{\binom{-\frac{1}{2}}{2}(-x^2)^2}_{\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!} = \frac{3}{2\cdot 4}} + \underbrace{\binom{-\frac{1}{2}}{3}(-x^2)^3}_{\rightarrow \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!} =} + \dots =$

$= 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots \rightarrow \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \dots$

y ahora integrando:

$f(x) = \text{arcsen}(x) = C + x + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7} + \dots + \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

$f(0) = \text{arcsen}(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$f(x) = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7} + \dots + \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots =$

$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

(6) $f(x) = \text{Arg Sh}(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \binom{-\frac{1}{2}}{0}1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^4 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^6 + \dots$ Repetimos el proceso anterior

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots + (-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \dots$; Integrando

$f(x) = x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots =$

$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

NOTA! Los desarrollos 5 y 6 hay que conocerlos de memoria (añadidos en la lista de desarrollos del tema 2)

Indusbol .com

④ Calcular los polinomios de Taylor de orden 2 en el origen de las funciones siguientes

a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ El polinomio pedido será $P_2(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!}$

b) $f(x) = \ln(2+3x+x^2)$

ⓐ $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

$f(0) = 1$

$f'(x) = \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}$; $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^{\operatorname{sen} x}[-\operatorname{sen} x + \cos^2 x]$

$f''(0) = 1\,[1] = 1$

$$\boxed{P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

Podríamos resolverlo aplicando los desarrollos conocidos.

El desarrollo de Taylor de f alrededor del origen es:

$$f(x) = e^{\operatorname{sen} x} = 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{1!} + \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2!} + \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{3!} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right] + \frac{1}{2!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right]^3 + \dots$$

El polinomio pedido $P_2(x)$ será:

$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, el mismo obtenido antes

b) $f(x) = \ln(2+3x+x^2)$

$f(0) = \ln 2$

$f'(x) = \frac{3+2x}{2+3x+x^2}$; $f'(0) = \frac{3}{2}$

$f''(x) = \frac{2(2+3x+x^2) - (3+2x)(3+2x)}{(2+3x+x^2)^2}$; $f''(0) = \frac{-5}{4}$

$$P_2(x) = \ln 2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\frac{x^2}{2}$$

Indusbol .com

También podríamos resolverlo aplicando los desarrollos conocidos

$$f(x)=\ln(2+3x+x^2)=\ln\left[2\left(1+\frac{3x+x^2}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{3x+x^2}{2}\right)$$

Por tanto, el desarrollo de Taylor de f alrededor del origen es:

$$f(x)=\ln 2+\left(\frac{3x+x^2}{2}\right)-\frac{\left(\frac{3x+x^2}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{3x+x^2}{2}\right)^3}{3}\dots$$ Por tanto, el polinomio pedido será: $P_2(x)=\ln 2+\frac{3x+x^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{9x^2}{4}=\ln 2+\frac{12x+4x^2-9x^2}{8}$

$$P_2(x)=\ln 2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{8}x^2$$

→ Si f es la solución de la ecuación diferencial $y'=1+x^2+y^2$ que cumple la condición inicial de $f(0)=1$, calcular su polinomio de Taylor de orden 3 en el origen.

El polinomio pedido será $P_3(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}$

Por ser f solución de la ecuación diferencial, la verifica, esto es:

$$f'(x)=1+x^2+f^2(x)\ \circledast$$

$$f'(0)=1+0+f^2(0)\overset{f(0)=1}{=}1+1^2=2$$

$f(0)=1$ y $f'(0)=2$.

Derivando $\circledast$ respecto de x

$$f''(x)=2x+2f(x)f'(x)\ (\circledast\circledast);\quad f''(0)=2f(0)f'(0)\overset{!}{=}2\cdot1\cdot2=4$$

Derivando $\circledast\circledast$ respecto de x

$$f'''(x)=2+2f'(x)f'(x)+2f(x)f''(x);\quad f'''(0)=2+2(f'(0))^2+2f(0)f''(0)=$$

$$=2+2\cdot2^2+2\cdot1\cdot4=2+8+8=18$$

$$P_3(x)=1+2x+4\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}\Rightarrow\boxed{P_3(x)=1+2x+2x^2+3x^3}$$

Indusbol.com

Calcular el polinomio de Taylor de orden n en el punto "a" que se indica para las siguientes funciones.

a) $f(x) = xe^x$ con $a=0$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ con $a=-1$

El polinomio pedido será $P_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{n}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$

a) $f(x) = xe^x$ con $a=0$

El desarrollo de Taylor de f alrededor del origen es

$$f(x) = x\cdot\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right]$$

Por tanto, el polinomio pedido será:

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!}$$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ con $a=-1$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$f'''(x) = -2\cdot 3\, x^{-4}$

$f^{IV}(x) = 2\cdot 3\cdot 4\, x^{-5}$

$\vdots$

$f^{n}(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)}$;

$f^{n}(-1) = (-1)^n\, n!\, (-1)^{-(n+1)} = n!\,(-1)^{-1} = -n!$

Por tanto, el polinomio pedido será:

$$P_n(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 - \cdots - (x+1)^n$$

NOTA! También podíamos haber aplicado la lista de desarrollos (+ idea feliz)

$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1-1} = \frac{-1}{1-(x+1)}$; el desarrollo de Taylor de f alrededor del punto $a=-1$ será:

$$f(x) = -1\left[1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^n + \cdots\right]$$

Por tanto, el polinomio pedido será:

$$P_n(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots - (x+1)^n$$

Indusbol .com

Calcular la derivada 4ª en el origen de la función

$$f(x) = \frac{1+x^3+x^5}{1+x^4}$$

$f^{IV}(0)$; { La derivada 4ª aparecerá en el desarrollo de Taylor de f alrededor del origen en un término de la forma $f^{IV}(0)\frac{x^4}{4!}$

Por otro lado, el desarrollo de taylor de f alrededor del origen es

$$f(x) = (1+x^3+x^5)\left[1 - x^4 + (x^4)^2 - (x^4)^3 \text{ ——— }\right]$$

Ahora, identificando términos en x^4 obtenemos

$$\frac{f^{IV}(0)}{4!} = -1 \longrightarrow f^{IV}(0) = -4! = -4\cdot 3\cdot 2 = \boxed{-24}$$

Calcular la derivada octava en el origen de $f(x) = (1-x^3)\arcsen x$

$f^{VIII}(0)$ { La derivada octava aparecerá en el desarrollo de Taylor de f alrededor del origen en un término de la forma $f^{VIII}(0)\frac{x^8}{8!}$

Por otro lado, el desarrollo de Taylor de f alrededor del origen es:

$$f(x) = (1-x^3)\left[x + \frac{1!!}{2!!}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5} + \frac{5!!}{6!!}\frac{x^7}{7} + \text{ ——— }\right]$$

Identificando los términos en x^8 obtenemos:

$$\frac{f^{VIII}(0)}{8!} = -\frac{3!!}{4!!\,5} \longrightarrow f^{VIII}(0) = \frac{-3\cdot 1}{4\cdot 2\cdot 5}\,8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = \boxed{-7\cdot 6\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 3}$$

Indusbol .com

→ Calcular la derivada 4ª en el origen de $f(x) = \ln[1 + \operatorname{sen}(x)]$

$f^{IV}(0)$ | La derivada cuarta aparecerá en el desarrollo de Taylor de f alrededor del origen en un término de la forma $f^{IV}(0)\frac{x}{4!}$

Por otro lado, el desarrollo de Taylor de f alrededor del origen es:

$$f(x) = \operatorname{sen}x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} \dots =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right] - \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right]^2 + \frac{1}{3}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right]^3 - \frac{1}{4}\cdot\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right]^4 \dots$$

Identificando coeficientes en x^4 obtenemos:

$$\frac{f^{IV}(0)}{4!} = -\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{-1}{3!}\right)\right] - \frac{1}{4} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4} = \frac{4-3!}{3!\,4} = \frac{-2}{3!\,4} = \frac{-1}{12}$$

$$f^{IV}(0) = \frac{-1}{12}\cdot 4! = \boxed{-2}$$

→ Hallar el orden mínimo del polinomio de Taylor que aproxima en el intervalo $[-1,1]$ a la función exponencial con un error menor que 10^{-4}

¡NOTA! Cuando tengamos que acotar el error cometido al aproximar una función por un polinomio de Taylor, lo que tendremos que acotar será el resto de la fórmula de Taylor

La fórmula de Taylor de la función $f(x) = e^x$ alrededor del origen es:

$$f(x) = e^x = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

si $f(x) = e^x \rightarrow f^n(x) = e^x$

con $\xi \in (x,0)$ ó $(0,x)$

$$\text{Error absoluto} \equiv |e^x - P_n(x)| = \left|f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \left|e^{\xi}\frac{1}{(n+1)!}\right| < \left|e^{1}\frac{1}{(n+1)!}\right| \leq 10^{-4}$$

$x \in [-1,1]$; como $\xi \in (x,0)$ ó $(0,x)$; Una vez desaparecida la x, colocamos la cota del error.

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{10^4 \cdot e} \rightarrow (n+1)! \geq 10^4 \cdot e$$

Y ahora se trata de encontrar el 1er valor de n que cumple esta condición: $10^4 \cdot e \simeq 2'71 \cdot 10^4 = 27100$

$n = 5 \longrightarrow 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 30\cdot 24 = 720 \rightarrow$ NO

$n = 6 \longrightarrow 7! = 7\cdot 6! = 7\cdot 720 = 5040 \rightarrow$ NO

$n = 7 \longrightarrow 8! = 8\cdot 7! = 8\cdot 5040 = 40320 > e\,10^4 \rightarrow$ cumple

Por tanto, habrá que coger al menos el polinomio de Taylor de grado 7

Determinar el grado del polinomio de Taylor que debe usarse para aproximar $\cos 9^\circ$ con un error menor que 10^{-5}

La fórmula de Taylor para la función $f(x) = \cos x$ alrededor del origen es:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^n(0)\frac{x^n}{n!}}_{P_n(x)} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } \xi \in (x,0) \text{ ó } (0,x)$$

$\frac{9^\circ}{0} = \frac{180^\circ}{\pi}$, $0 = \frac{9\cdot\pi}{180} = \frac{\pi}{20}$; particularizamos para $x = \frac{\pi}{20}$

$$\cos\frac{\pi}{20} = P_n\left(\frac{\pi}{20}\right) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } \xi \in \left(0, \frac{\pi}{20}\right)$$

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Error absoluto} = \left|\cos\frac{\pi}{20} - P_n\left(\frac{\pi}{20}\right)\right| = \left|f^{(n+1)}(\xi)\frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| =$$

$$= \left|\cos\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5} = \frac{1}{100000}$$

Buscamos el 1er valor de n que cumple

$n=2 \longrightarrow \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^3}{3!} = \frac{\pi^3}{20^3 6} = 6\cdot10^{-4} > 10^{-5}$

$n=3 \longrightarrow \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^4}{4!} = \frac{\pi^4}{20^4\cdot 4!} = 2{,}5\cdot10^{-5} > 10^{-5}$

$n=4 \longrightarrow \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^5}{5!} = \frac{\pi^5}{20^5 5!} = 7{,}96\,10^{-7} < 10^{-5} \longrightarrow$ Cumple

Habrá que coger, al menos, el polinomio de grado 4

Indusbol

Determinar razonadamente un polinomio $P(x)$ con coeficientes racionales de tal manera que el valor de $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = p\left(\frac{1}{2}\right)$ con un error absoluto menor que 10^{-3}

La fórmula de Taylor para la función $f(x)=\ln(1+x)$ alrededor del origen es:

$$f(x) = \ln(1+x) = P_n(x) + f^{n+1)}(\xi)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } \xi \in (x,0) \text{ o } (0,x)$$

Particularizando en $x = \frac{1}{2}$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) = P_n\left(\tfrac{1}{2}\right) + f^{n+1)}(\xi)\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } \xi \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$$

Err. absoluto $=$

$$\left|\ln\left(\tfrac{3}{2}\right) - P_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = \left| f^{n+1)}(\xi)\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| =$$

Si $f(x)=\ln(1+x)$ ⟶

$$f'(x) = (1+x)^{-1}$$
$$f''(x) = -1\,(1+x)^{-2}$$
$$f'''(x) = 2\,(1+x)^{-3}$$
$$f^{(n+1)}(x) = -2\cdot 3\,(1+x)^{-4}$$
$$\vdots$$
$$f^{n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$$

$$= \left|(-1)^n n!\,(1+\xi)^{-(n+1)} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}\,2^{n+1}(n+1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(1)^{n+1}\,2^{n+1}(n+1)} < 10^{-3} \longrightarrow \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} < \frac{1}{10^3} \longrightarrow 2^{n+1}(n+1) > 10^3$$

$n=5 \longrightarrow 2^6 \cdot 6 = 64 \cdot 6 = 384 < 10^3$

$n=6 \longrightarrow 2^7 \cdot 7 = 128 \cdot 7 = 896 < 10^3$

$n=7 \longrightarrow 2^8 \cdot 8 = 256 \cdot 8 > 10^3$

Por tanto, el polinomio pedido tendrá que tener, almenos, grado 7

$$P_7(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} \cdots f^{7)}(0)\frac{x^7}{7!} \quad ; \text{ sabemos que } f^{n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\boxed{P_7(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}}$$

Desarrollos

Indusbol .com

Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x^2) - \operatorname{sen}^2(x)}{x^3 \operatorname{sen}(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 + \frac{1}{2}\frac{(x^2)^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{(x^2)^5}{5} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)^2}{x^3 \cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\left(2x\left(\frac{-x^3}{3!}\right)\right)}{x^4} = \frac{x^4}{3x^4} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

⊛⊛⊛ Sea $P(x)$ un polinomio de grado $2n$ tal que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - P(x)}{x^{2n}} = 0$

Hallar $P(x)$ y calcular las derivadas de orden n de $\operatorname{sen}^2(x)$ en $x = 0$

NOTA TEÓRICA! Sea una función infinitamente derivable y $P(x)$ un polinomio que cumple que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^m} = 0$ ⊛

⊛ implica que, por continuidad de f y P, $f(0) = P(0)$ y, aplicando L'Hôpital tendremos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P'(x)}{x^{n-1}} = 0$$

El mismo razonamiento nos llevaría a que $f'(0) = P'(0)$ y repitiendo el proceso n veces obtendríamos que $f^{n)}(0) = P^{n)}(0)$

Por tanto, el polinomio $P(x)$ que cumple es:
El polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x)$ alrededor del origen

En nuestro caso, el $P(x)$ es el polinomio de Taylor de grado $2n$ de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ alrededor del origen

$$P(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{2n)}(0)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Como nos piden las derivadas de orden n de $\operatorname{sen}^2(x)$ calculamos: $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$

$f'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos x = \operatorname{sen}(2x)$;

Solución:

$f^{n)}(x) = 2^{n-1}\operatorname{sen}\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$

$f^{n)}(0) = 2^{n-1}\operatorname{sen}\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$ → si $n = 2k$; $f^{2k)}(0) = 2^{2k-1}(-1)^{k+1}$

→ si $n = 2k+1$; $f^{2k+1)}(0) = 2^{2k}\operatorname{sen}(k\pi) = 0$

Por tanto, el polinomio pedido será:

$$P_{2n}(x) = 2\left(\frac{x^2}{2!}\right) - 2^3\left(\frac{x^4}{4!}\right) + 2^5\left(\frac{x^6}{6!}\right) + \text{———} + 2^{2n-1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

⊕ Se considera la aproximación de $\ln x$ por el polinomio de Taylor en potencias de $x-1$ de grado 2. Estimar el error cometido al realizar esta aproximación cuando $x \in (1, 1'1)$

La fórmula de Taylor para la función $f(x) = \ln(x)$ alrededor del punto $a=1$ usando el polinomio de grado 2 es:

$$f(x) = \ln x = \underbrace{f(1) + f'(1)\frac{(x-1)}{1!} + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!}}_{P_2(x)} + f'''(\xi)\frac{(x-1)^3}{3!} \quad \text{con } \xi \in (1,x) \text{ ó } (x,1)$$

$$\text{Error abs} = |\ln x - P_2(x)| = \left|f'''(\xi)\frac{(x-1)^3}{3!}\right| = \left|\frac{2}{\xi^3}\frac{(x-1)^3}{3!}\right| < \left|\frac{2}{\xi^3}\frac{(1{,}1-1)^3}{3!}\right| < 2\frac{0'1^3}{3!} = \frac{0'1^3}{3}$$

$f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = x^{-1}$; $f''(x) = -x^{-2}$; $f'''(x) = 2x^{-3}$

$x \in (1, 1'1)$ $\quad$ $\xi \in (1, 1'1)$

$$\text{Error abs} = \frac{0'1^3}{3}$$

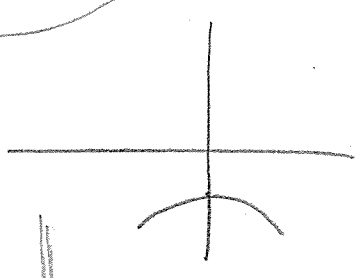
⊕ Si $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$ es el polinomio de taylor de orden 3 en $x=0$ de la función f, entonces f es cóncava y negativa en algún intervalo de $\mathbb{R}$. ¿Verdadero o falso?

Sabemos que el pol de Taylor de orden 3 en $x=0$ es:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!}$$

Identificando con el enunciado:

$$\begin{cases} -1 = f(0) \\ 0 = \frac{f'(0)}{1!} \rightarrow f'(0) = 0 \Longrightarrow f(0) = -1 \text{ es Máx relativo} \\ -2 = \frac{f''(0)}{2!} \rightarrow f''(0) = -4 \\ 3 = \frac{f'''(0)}{3!} \rightarrow f'''(0) = 18 \end{cases}$$



Verdadero

Indusbol.com

(→) Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x} = e^3$ (*), entonces el polinomio de Taylor de f en $a=0$ de orden dos es $P(x) = x + 2x^2$ ¿Verdadero o falso?

El polinomio pedido será: $P_2(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!}$

Para que se cumpla la condición (*) la base $\left[\frac{f(x)}{x}\right]$ tiene que tender a 1 $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$ (**) $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$

↑ Por ser f continua en $x=0$

Como el límite (**) es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, podemos aplicar L'Hôpital

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1} = 1 \Longrightarrow f'(0) = 1$

↑ Por ser $f'(x)$ continua en $x=1$

Como (*) es una indeterminación del tipo 1^∞, sabemos que

$e^3 = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{f(x)}{x} - 1\right]} \longrightarrow 3 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - 1}{2x} \overset{}{=}$

↑ L'Hôpital ↑ L'Hôpital

$= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = 3 \Longrightarrow f''(0) = 6$

↑ Por ser $f''(x)$ continua en $x=0$

Por tanto, $P_2(x) = 1\frac{x}{1!} + 6\frac{x^2}{2!} = \underline{x + 3x^2}$ $\longrightarrow$ El enunciado es falso

CÁLCULO DE PRIMITIVAS

→ Calcular las siguientes integrales inmediatas

$$\int \frac{e^{3x}}{2+e^{6x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{2+(e^{3x})^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{3e^{3x}}{1+\left(\frac{e^{3x}}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{6}\sqrt{2}\int \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}e^{3x}}{1+\left(\frac{e^{3x}}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{3x}}{\sqrt{2}}\right)+C}$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}\ln x^2 + C}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{2+e^{3x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{2+e^{3x}}\,dx = \boxed{\frac{1}{3}\ln\left|2+e^{3x}\right| + C}$$

$$\int \cos(\operatorname{sen} x)\cos(x)\,dx = \boxed{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + C}$$

$$\int \frac{3^{\operatorname{tg}(x)}}{\cos^2 x}\,dx = \boxed{\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\operatorname{tg}(x)} + C}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+(x^2)^2}}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{Arg\,Sh}(x^2) + C}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(\ln x)^2-2}} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln^2 x-2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)^2-1}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}x}}{\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)^2-1}\,dx =$$

$$= \boxed{\operatorname{Arg\,Ch}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(\ln x)\cos(\ln x)}{x}\,dx = \boxed{\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 \ln x + C}$$

$$\int tg(x^3+3x)(x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}\int tg(x^3+3x)(3x^2+3)\,dx = \boxed{\frac{-1}{3}\ln\left|\cos(x^3+3x)\right| + G}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\sqrt{4-9\cos^2(3x)}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\sqrt{1-\frac{9}{4}\left(\frac{\cos 3x}{2}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\frac{2}{9}\int \frac{\frac{3}{2}\cdot 3\operatorname{sen}(3x)}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}\cos(3x)\right)^2}}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{1}{9}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{2}\cos(3x)\right)^2 + G}$$

$$\int \frac{dx}{x - x(\ln x)^2} = \int \frac{\frac{1}{x}}{1-(\ln x)^2} = \boxed{\text{Arg Th}(\ln x) + G}$$

$$\int \frac{Ch(e^{-x}+1)}{e^x}\,dx = -\int \frac{-1}{e^x} Ch(e^{-x}+1) = \boxed{-Sh(e^{-x}+1) + G}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\operatorname{sen}^2(e^{2x})}\,dx = \boxed{-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(e^{2x}) + G}$$

● INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\boxed{\int U(x)\,U'(x)\,dx = U(x)\,U(x) - \int U(x)\,U'(x)\,dx}$$

① ALPES

$$I = \int \frac{x}{\underbrace{Sh(x)}_{\frac{e^x-e^{-x}}{2}} + \underbrace{Ch(x)}_{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{2e^x}{2} = e^x}\,dx = \int \frac{x}{e^x}\,dx = \int \underbrace{x}_{U}\,\underbrace{e^{-x}}_{U'\to \int e^{-x}dx = -e^{-x}}\,dx = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\,dx =$$

$$= -xe^{-x} + (-e^{-x}) + G = \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + G}$$

② ALPES

$$I = \int \underbrace{(x^2+1)}_{U'\to \frac{x^3}{3}+x}\,\underbrace{\ln x}_{U}\,dx = \ln x\left(\frac{x^3}{3}+x\right) - \int \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{1}{x}\,dx = \ln x\left(\frac{x^3}{3}+x\right) - \int \left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx =$$

$$= \boxed{\ln x\left(\frac{x^3}{3}+x\right) - \left(\frac{x^3}{9}+x\right) + G}$$

Indusbol.com

③ ALPES

$$I=\int \underbrace{(x^2+x+3)}_{u}\underbrace{\cos x}_{v'}\,dx=(x^2+x+3)\,\text{sen}\,x-\int \overbrace{\text{sen}\,x}^{v'}\,\overbrace{(2x+1)}^{u}\,dx=$$

$$=(x^2+x+3)\,\text{sen}\,x-\left[(2x+1)(-\cos x)-\int(-\cos x)\,2\,dx\right]=$$

$$=(x^2+x+3)\,\text{sen}\,x+(2x+1)\cos x-2\,\text{sen}\,x+C$$

⑤ ALPES

$$I=\int \underbrace{e^{ax}}_{u}\,\underbrace{\text{sen}(bx)}_{v'}\,dx=e^{ax}\left(\frac{-\cos(bx)}{b}\right)+\frac{1}{b}\int \overbrace{\cos(bx)}^{v'}\,a\,\overbrace{e^{ax}}^{u}\,dx=$$

$$=-e^{ax}\frac{\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\left[e^{ax}\left(\frac{\text{sen}\,bx}{b}\right)-\frac{1}{b}\int \text{sen}(bx)\,a\,e^{ax}\,dx\right]\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow I=-e^{ax}\frac{\cos bx}{b}+\frac{a}{b^2}e^{ax}\,\text{sen}(bx)-\frac{a^2}{b^2}\underbrace{\int \text{sen}(bx)\,e^{ax}\,dx}_{I}$$

$$I+\frac{a^2}{b^2}I=-e^{ax}\frac{\cos bx}{b}+\frac{a}{b^2}e^{ax}\,\text{sen}(bx);\qquad 1+\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2+a^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{b^2+a^2}{b^2}\right)I=-e^{ax}\frac{\cos bx}{b}+\frac{a}{b^2}e^{ax}\,\text{sen}\,bx\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I=\frac{-e^{ax}\cos(bx)\,b+a\,e^{ax}\,\text{sen}\,bx}{a^2+b^2}+C}$$

⑧ ALPES

$$I=\int\frac{\ln(x)}{x^2}\,dx=\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{v'}\,\underbrace{\ln x}_{u}\,dx=\ln x\,\frac{x^{-1}}{-1}-\int\frac{-1}{x}\,\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\frac{-\ln x}{x}+\frac{x^{-1}}{-1}+C=\boxed{-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C}$$

Indusbol.com

ⓐ $I=\int (\text{arcsen}\,x)^2\,dx \overset{\text{ALPES}}{=} (\text{arcsen}\,x)^2\,x-\int x\cdot 2\,\text{arcsen}\,x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$

$=(\text{arcsen}\,x)^2\,x-\int \underbrace{\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}_{v'}\ \underbrace{\text{arcsen}\,x}_{u}\,dx=$

$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}=-2\sqrt{1-x^2}$

$=(\text{arcsen}\,x)^2\,x-\left[\text{arcsen}\,x\,(-2\sqrt{1-x^2})-\int (-2\cancel{\sqrt{1-x^2}})\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\,dx\right.=$

$=\boxed{(\text{arcsen}\,x)^2\,x+2\,\text{arcsen}\,x\,(\sqrt{1-x^2})-2x+C}$

ⓑ $I=\int x^3\cos(x^2)\,dx \overset{x^2=t;\ 2x\,dx=dt}{=} \int x^2\cos(x^2)\cdot x\,dx=\int \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\cos t}_{v'}\cdot\frac{dt}{2}\overset{\text{ALPES}}{=}\frac{1}{2}\left[t\,\text{sen}\,t-\int \text{sen}\,t\,dt\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[t\,\text{sen}\,t+\cos t\right]+C=\boxed{\frac{1}{2}\left[x^2\,\text{sen}\,x^2+\cos x^2\right]+C}$

⑦ Dada $I_n=\int(\ln x)^n\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, hallar una fórmula de reducción y resolver para $n=4$

NOTA! Hallar una fórmula de reducción consiste en encontrar una ley de recurrencia que nos permita ir bajando el grado n. Cuando nos piden una fórmula de reducción se tratará de aplicar siempre integración por partes.

$I_n=\int \underbrace{(\ln x)^n}_{u}\,dx=(\ln x)^n\cdot x-\int x\,n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx=(\ln x)^n\,x-n\underbrace{\int(\ln x)^{n-1}\,dx}_{I_{n-1}}$ $\quad v'=1$

$\boxed{I_n=x(\ln x)^n-n\,I_{n-1},\ \text{con } I_0=\int 1\,dx=x+C}$

$I_4=\int(\ln x)^4\,dx=x(\ln x)^4-4I_3=x(\ln x)^4-4\left[x(\ln x)^3-3I_2\right]=$

$=x(\ln x)^4-4x(\ln x)^3+12\left[x(\ln x)^2-2I_1\right]=x(\ln x)^4-4x(\ln x)^3+12x(\ln x)^2-24\left[x\ln x-I_0\right]=$

$=\boxed{x(\ln x)^4-4x(\ln x)^3+12x(\ln x)^2-24x\ln x+24x+C}$

ALPES

$$\rightarrow I=\int \underbrace{e^{ax}}_{v'}\underbrace{\cos(bx)}_{u}\,dx=\cos(bx)\frac{e^{ax}}{a}-\frac{1}{a}\int e^{ax}(-\operatorname{sen} bx)\,b\,dx=$$

$$=\frac{\cos(bx)\,e^{ax}}{a}+\frac{b}{a}\int \underbrace{e^{ax}}_{v'}\underbrace{\operatorname{sen} bx}_{u}\,dx=\frac{\cos(bx)\,e^{ax}}{a}+\frac{b}{a}\left[\operatorname{sen} bx\,\frac{e^{ax}}{a}-\frac{1}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\cdot b\,dx\right]=$$

$$=\frac{\cos(bx)\,e^{ax}}{a}+\frac{b}{a^2}\operatorname{sen}(bx)\,e^{ax}-\frac{b^2}{a^2}\underbrace{\int e^{ax}\cos(bx)\,dx}_{I}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I=\frac{\cos(bx)\,e^{ax}}{a}+\frac{b\operatorname{sen}(bx)\,e^{ax}}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I;$$

$$I\underbrace{\left(1+\frac{b^2}{a}\right)}_{\frac{a+b^2}{a}}=\frac{a\cos(bx)e^{ax}+b\operatorname{sen}(bx)e^{ax}}{a^2};\quad I=\frac{e^{ax}\left[a\cos(bx)+b\operatorname{sen}(bx)\right]}{a^2+ab^2}$$

ALPES

$$\rightarrow (11)\quad I=\int \underbrace{x}_{v'}\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\,dx=\operatorname{arctg} x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\boxed{\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C}$$

$$\rightarrow (12)\quad (*)(*)(*)$$

$$I=\int x^2\operatorname{sen}^2(x)\,dx=\int x^2\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(x^2-x^2\cos 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\cos 2x}_{v'}\,dx\right]=\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2}\left[x^2\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}-\int\overbrace{\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cancel{2}}}^{v'}\overbrace{\cancel{2}x}^{u}\,dx\right]=$$

$$=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{1}{2}\left[x\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)+\int\frac{\cos 2x}{2}\,dx\right]=$$

$$=\boxed{\frac{x^3}{6}-\frac{x^2\operatorname{sen} 2x}{4}-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{8}+C}$$

$$\rightarrow (14)\quad \int \operatorname{ArgTh}(x)\,dx=\operatorname{ArgTh}(x)\,x-\int x\frac{1}{1-x^2}\,dx=x\operatorname{ArgTh}(x)-\frac{1}{-2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=$$

$$=\boxed{x\operatorname{ArgTh}(x)+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C}$$

RACIONALES - Raíces reales simples y múltiples

(21) $I=\int \frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int\frac{A}{(x-1)}dx+\int\frac{B}{(x+1)}dx+\int\frac{C}{(x+1)^2}dx$;

$x^2+3x+4=(x+1)^2A+(x-1)(x+1)B+(x-1)C$

$x=1 \longrightarrow 8=4A \rightarrow A=2$ || $x^2) \rightarrow 1=A+B$, $B=1-2=-1$

$x=-1 \longrightarrow 2=-2C \rightarrow C=-1$

$$\boxed{I=2\ln|x-1|-\ln|x+1|-\frac{(x+1)^{-1}}{(-1)}+K}$$

(23) $I=\int\frac{2x+1}{(x^2+5x+6)^2}dx=\int\frac{2x+1}{(x+2)^2(x+3)^2}dx=\int\frac{A}{(x+2)}dx+\int\frac{B}{(x+2)^2}dx+\int\frac{C}{(x+3)}dx+\int\frac{D}{(x+3)^2}dx=$

$x^2+5x+6=0 \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$; $2x+1=(x+2)(x+3)^2A+(x+3)^2B+(x+2)^2(x+3)C+(x+2)^2D$

$x=-2 \rightarrow -3=B \rightarrow B=-3$ $\quad C=-8$

$x=-3 \rightarrow -5=D \rightarrow D=-5$ $\quad A=8$

$x^3) \rightarrow 0=A+C$ $\quad A+C=0$ $\quad -3A-3C=0$

Indep) $\rightarrow 1=18A+\underbrace{9B}_{-27}+12C+\underbrace{4D}_{-20} \rightarrow 18A+12C=48$ $\quad 3A+2C=8$

$-C=8$

$$\boxed{I=8\ln|x+2|-3\frac{(x+2)^{-1}}{(-1)}-8\ln|x+3|-5\frac{(x+3)^{-1}}{(-1)}+K}$$

RACIONALES - Raíces imaginarias simples

(25) $I=\int\frac{x^5+4x^3+7x+4}{x^2+1}dx=\int\left[(x^3+3x)+\frac{4x+4}{x^2+1}\right]dx=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+4\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=$

$$\begin{array}{r|l} x^5+4x^3+7x+4 & x^2+1 \\ \hline -x^5-x^3 & x^3+3x \\ 3x^3+7x+4 & \\ -3x^3-3x & \\ 4x+4 & \end{array}$$

$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+4\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+1}dx=$

$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+2\ln|x^2+1|+4\int\frac{1}{x^2+1}dx=$

$$=\boxed{\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+2\ln|x^2+1|+4\,\mathrm{arctg}\,x+C}$$

Indusbol .com

(22) $I = \int \frac{3x+5}{x^2-x+4}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-1+\frac{5}{3}\cdot 2+1}{x^2-x+4}\,dx =$

$= \frac{3}{2}\ln|x^2-x+4| + \frac{3}{2}\cdot\frac{13}{3}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-x+4}\,dx}_{J};$

$J = \int \frac{dx}{x^2-x+4} = \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+4-\frac{1}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{15}{4}+(x-\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{15}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{15}{4}}}\right)^2} =$

$= \frac{4}{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{15}}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{15}}\right)^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{15}}\right) + C \longrightarrow$

$$\boxed{I = \frac{3}{2}\ln|x^2-x+4| + \frac{13}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{15}}\right) + K}$$

(16) $I = \int \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{v'}\underbrace{\ln x}_{u}\,dx = \ln x\cdot\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-1}}{(-1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int x(1+x^2)^{-2} = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-1}}{(-1)}$

$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\left[\int\left(\frac{A}{x}\,dx + \int\frac{Bx+C}{1+x^2}\right)dx\right] =$

$1 = A(1+x^2)+(Bx+C)x$

$x=0 \longrightarrow 1 = A$

$x^2)\ 0 = A+B;\ B=-1$

$x)\ 0 = C$

$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\left[\ln x - \int\frac{x}{1+x^2}\,dx\right] =$

$$= \boxed{-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\left[\ln(x) - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right] + K}$$

(18) $I = \int \underbrace{\ln(x^2+4x+5)}_{u}\,\underbrace{dx}_{v'=1} = \ln(x^2+4x+5)\,x - \int x \cdot \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx =$

$2x^2+4x$ | x^2+4x+5
$-2x^2-8x-10$ | 2
$-4x-10$

$= \ln(x^2+4x+5)\,x - \int \left(2 - \frac{2(2x+5)}{x^2+4x+5}\right) dx = x\ln(x^2+4x+5) - 2x + 2\underbrace{\int \frac{2x+5}{x^2+4x+5}\,dx}_{J} =$

$$J = \int \frac{2x+5}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{2x+4+1}{x^2+4x+5}\,dx = \ln|x^2+4x+5| + \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= \ln|x^2+4x+5| + \operatorname{arctg}(x+2) + C$$

$$\boxed{I = x\ln|x^2+4x+5| - 2x + 2\ln|x^2+4x+5| + 2\operatorname{arctg}(x+2) + K}$$

RACIONALES - Raíces imaginarias múltiples

(25) $I = \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} + \frac{Ex+F}{(1+x^2)^2}\right) dx$;

$$1 = Ax(1+x^2)^2 + B(1+x^2)^2 + (Cx+D)x^2(1+x^2) + (Ex+F)x^2$$

$x=0 \longrightarrow 1 = B$

$x^5 \longrightarrow 0 = A$

$x=1 \longrightarrow 1 = 4B + 2C + 2D + E + F \longrightarrow 2C + 2D + E + F = -3$

$x=-1 \longrightarrow -1 = 4B - 2C + 2D - E + F \longrightarrow -2C + 2D - E + F = -3$

$4D + 2F = -6$

$x=2 \longrightarrow 1 = 25B + 40C + 20D + 8E + 4F \longrightarrow 10C + 5D + 2E + F = -6$

$x=-2 \longrightarrow 1 = 25B - 40C + 20D - 8E + 4F \longrightarrow -10C + 5D - 2E + F = -6$

$10D + 2F = -12$

$$\begin{cases} 2D + F = -3 \\ -5F - F = +6 \end{cases}$$

$-3F = 3$, $F = -1$; $D = \frac{-3+1}{2} = -1$

$$\begin{cases} 2C + E = 0 \\ 10C + 2E = 0 \end{cases} \longrightarrow 6C = 0 \rightarrow C = 0, \quad E = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \\ E = 0 \\ F = -1 \end{cases}$$ Integrando:

$$I = \frac{-1}{x} - \operatorname{arctg} x - \underbrace{\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx}_{J}$$

$$J=\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx=\int\frac{1}{1+x^2}-\int\overset{u}{x}\overset{v'}{\frac{x}{(1+x^2)^2}}dx=$$

$$=\operatorname{arctg}x-\left[x\,\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-1}}{(-1)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx\right]=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

$$\Rightarrow\boxed{I=\frac{-1}{x}-\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+K}$$

● CAMBIO $x^2=t$

En una integral racional, si se cumple que la función subintegral se puede escribir como producto de una función par en "x" por una potencia impar de "x", el cambio $x^2=t$ es recomendable.

(26) $$I=\int\frac{\overbrace{x^3}^{\text{Impar}}}{\underbrace{x^4+x^2+1}_{\text{Par}}}dx=\int\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\cdot x\,dx\overset{[x^2=t,\ 2x\,dx=dt]}{=}\int\frac{t}{t^2+t+1}\cdot\frac{dt}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int\frac{(2t+1)-1}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{4}\ln|t^2+t+1|-\frac{1}{4}\underbrace{\int\frac{1}{t^2+t+1}dt}_{J},$$

$$J=\int\frac{1}{t^2+t+1}dt=\int\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\int\frac{1}{1+\left(\frac{t+1/2}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2}dt=$$

$$=\frac{4}{3}\frac{\sqrt3}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt3}}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)^2}dt=\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)+C\longrightarrow$$ Por tanto, deshaciendo el cambio:

$$\boxed{I=\frac{1}{4}\ln|x^4+x^2+1|-\frac{1}{2\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt3}\right)+C}$$

(32) $$I=\int\frac{\overbrace{x^5}^{\text{Impar}}}{\underbrace{1+x^4}_{\text{par}}}dx=\int\frac{x^4}{1+x^4}x\,dx\overset{[x^2=t\to x\,dx=dt]}{=}\int\frac{t^2}{1+t^2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$\frac{t^2}{-t^2-1}\ \frac{1+t^2}{1}$

$$=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C,\ \text{y deshaciendo el cambio}$$

$$\boxed{I=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C}$$

(28) ✱✱✱ Cambio $\begin{bmatrix} 1+x^3=t \\ 3x^2dx=dt \end{bmatrix}$

$$\int \frac{(2x^3-1)x^2}{(1+x^3)^3}dx \overset{\downarrow}{=} \int \frac{2(t-1)-1}{t^3}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{t^2}-\frac{3}{t^3}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-2}}{-2} + C = \boxed{\frac{-2}{3}\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^3)^2} + C}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\int \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)}dx$ { Es impar en $\operatorname{sen}x$ / No es impar en $\cos x$ / No es par en $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ simultaneamente

$\int \frac{\operatorname{sen}x\cos x}{1+\operatorname{sen}^4(x)}dx$ { Es impar en $\operatorname{sen}x$ / Es impar en $\cos x$ / Es par en $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ simultaneamente

Cambio genérico $\begin{cases} tg(x/2)=t \\ dx = 2\frac{dt}{1+tg^2(x/2)} \end{cases}$

$$\operatorname{sen}x = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} \qquad \cos(x) = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$$

Impar en $\operatorname{sen}x$ $\begin{cases} \cos x = t \\ -\operatorname{sen}x\,dx = dt \end{cases}$

Impar en $\cos x$ $\begin{cases} \operatorname{sen}x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{cases}$

Par en $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ simultaneamente $\begin{cases} tgx = t \\ (1+tg^2x)dx = dt \end{cases}$

$$\operatorname{sen}x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} \qquad \cos x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}$$

(61) $I = \int \operatorname{sen}^5x\,dx \overset{\text{impar en sen}x \to [\cos x=t,\ -\operatorname{sen}x\,dx=dt]}{=} \int \operatorname{sen}^4x\,\operatorname{sen}x\,dx = \int (1-t^2)^2(-dt) = -\int (t^4-2t^2+1)dt =$

$$= -\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} - t + C = \boxed{-\frac{\cos^5x}{5} + \frac{2}{3}\cos^3x - \cos x + C}$$

Podríamos haber evitado el cambio haciendo:

$$I = \int \operatorname{sen}^5x\,dx = \int \operatorname{sen}x\,\operatorname{sen}^4x\,dx = \int \operatorname{sen}x\,[1-\cos^2x]^2dx =$$

$$= \int \operatorname{sen}x\,[1-2\cos^2x+\cos^4x)\,dx =$$

$$= -\cos x - 2\int \operatorname{sen}x\cos^2x\,dx + \int \operatorname{sen}x\cos^4x\,dx =$$

$$= \boxed{-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3x - \frac{1}{5}\cos^5x + K}$$

Impar en $\cos x \to \{\operatorname{sen} x = t;\ \cos x\,dx = dt\}$

62 $$I = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2(t-1)^2} = \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2} \right) dt;$$

$$1 = A(t+1)(t-1)^2 + B(t-1)^2 + C(t+1)^2(t-1) + D(t+1)^2$$

$t=1 \longrightarrow 1 = 4D \longrightarrow D = \frac{1}{4}$ | $t^3)\ 0 = A + C$ $\quad A + C = 0$

$t=-1 \longrightarrow 1 = 4B \longrightarrow B = \frac{1}{4}$ | $t^0)\ 1 = A + B - C + D \longrightarrow A - C = \frac{1}{2}$

$2A = \frac{1}{2};\ A = \frac{1}{4}$

$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = \frac{-1}{4};\ D = \frac{1}{4}$

$$I = \frac{1}{4}\ln|t+1| + \frac{1}{4}\frac{(t+1)^{-1}}{(-1)} - \frac{1}{4}\ln|t-1| + \frac{1}{4}\frac{(t-1)^{-1}}{(-1)} + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} x + 1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\operatorname{sen} x + 1} - \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} x - 1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\operatorname{sen} x - 1} + C}$$

Impar $\operatorname{sen} x \to [\cos x = t;\ -\operatorname{sen} x\,dx = dt$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = -\int \frac{-\operatorname{sen} x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\int \left(\frac{A}{(1+t)} + \frac{B}{(t-1)} \right) dt;$$

$$1 = A(t-1) + B(t+1) \begin{cases} t=1 \longrightarrow 1 = 2B \longrightarrow B = 1/2 \\ t=-1 \longrightarrow 1 = -2A \longrightarrow A = -1/2 \end{cases}$$

$$I = +\frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + C = \boxed{\frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| - \frac{1}{2}\ln|\cos x - 1| + C}$$

NOTA! Esta integral la podríamos resolver con la siguiente idea feliz:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}} = \int \frac{dx}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = \boxed{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C}$$

$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \boxed{\frac{1}{2}\ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| + C}$$

Imp. $\cos x$ $\{t = \operatorname{sen} x,\ dt = \cos x\,dx$

NOTA! Esta integral la podríamos resolver con la siguiente idea feliz:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| + C}$$

(65) $I=\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}x\cos x} =$ Par en seno, coseno $\begin{cases} tgx=t;\ dt=(1+tg^2x)dx \\ \operatorname{sen}x=\frac{t}{\sqrt{1+tg^2x}}\ ;\ \cos x=\frac{tg\,x}{\sqrt{1+tg^2x}} \end{cases}$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{tgx}{1+tg^2x}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \int \frac{dt}{1+\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C =$$

$$= \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\,tgx+1}{\sqrt{3}}\right)+C}$$

$I=\int tg^3(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3x}{\cos^3x}dx =$ Integral impar en $\operatorname{sen}x$, impar en $\cos x$ y par en $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ simult.

(1) Imp $\operatorname{sen}x$ — Cambio → $\cos x = t$, $-\operatorname{sen}x\,dx = dt$

$$I=\int \frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^3x}\operatorname{sen}x\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^3}(-dt) = \int \frac{-1}{t^3}dt + \int \frac{t^2}{t^3}dt =$$

$$= \frac{t^{-2}}{2} + \ln|t| + C = \boxed{\frac{1}{2\cos^2x} + \ln(\cos x) + C}$$

(2) Impar en $\cos x$ — Camb → $\begin{cases} \operatorname{sen}x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{cases}$

$$I=\int \frac{\operatorname{sen}^3x}{\cos^4x}\cos x\,dx = \int \frac{t^3}{(1-t^2)^2}dt = \int \left(\frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{(t-1)^2}\right)dt =$$

$$t^3 = (1+t)(t-1)^2A + (t-1)^2B + (1+t)^2(t-1)C + (1+t)^2D$$

$x=1 \longrightarrow 4D=1 \rightarrow D=\frac{1}{4}$ $\quad t^3) \longrightarrow 1=A+C \longrightarrow A+C=1$

$x=-1 \longrightarrow 4B=-1 \rightarrow B=-\frac{1}{4}$ $\quad t^2) \longrightarrow 0=A+B-C+D \rightarrow A-C=0$

$A=\frac{1}{2};\ C=\frac{1}{2}$ $\}$ $2A=1$

Integrando y deshaciendo el cambio:

$$I = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}x+1| - \frac{1}{4}\frac{(\operatorname{sen}x+1)^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}x-1| + \frac{1}{4}\frac{(\operatorname{sen}x-1)^{-1}}{-1}$$

③ Par en $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ simultáneamente

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x}\,dx \overset{\left\{\operatorname{tg}x = t\,;\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = dt\right\}}{=} \int t^3 \frac{dt}{1+t^2} \overset{t^3 = t^3-t+t}{=} \int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \boxed{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| + C}$$

→ (66) $$I = \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}x+\cos x} \overset{\text{No es imp en sen}x \text{ ni en cos}x \text{ ni por en sen}x \text{ y cos}x \text{ simult}}{=} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio genérico}\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\,;\ \operatorname{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}\\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}\,/\,\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right\}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2+2t+1-t^2} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C =$$

$$= \boxed{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| + C}$$

→ (40) b) ✱✱✱ Hallar una fórmula de reducción

$$\int \operatorname{sen}^m x\,dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}^{m-1} x}_{u}\ \underbrace{\operatorname{sen}x}_{v'}\,dx = \operatorname{sen}^{m-1}(x)(-\cos x) + \int \cos x\,(m-1)(\operatorname{sen}x)^{m-2}\cos x\,dx =$$

$$= -\operatorname{sen}^{m-1}x\cos x + (m-1)\int (1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^{m-2}x\,dx = -\operatorname{sen}^{m-1}x\cos x + (m-1)\left[\int \operatorname{sen}^{m-2}x\,dx - \int \operatorname{sen}^m x\,dx\right];$$

Por tanto

$$I_m = -\operatorname{sen}^{m-1}x\cos x + (m-1)\left[I_{m-2} - I_m\right] \Longrightarrow$$

$$I_m + (m-1)I_m = -\operatorname{sen}^{m-1}(x)\cos(x) + (m-1)I_{m-2}$$

$$\boxed{I_m = \frac{-\operatorname{sen}^{m-1}(x)\cos(x)}{m} + (m-1)\frac{I_{m-2}}{m}}$$

$$\text{con } I_0 = \int \operatorname{sen}^0 x\,dx = x + C$$

$$I_1 = \int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x + K$$

Indusbol .com

(40) c) Holler fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\,dx = \int \underbrace{\cos^{n-1}x}_{u}\cdot\underbrace{\cos x}_{v'}\,dx = \cos^{n-1}x\,\operatorname{sen}x - \int \operatorname{sen}x\,(n-1)\cos^{n-2}(x)(-\operatorname{sen}x)\,dx$$

$$= \cos^{n-1}x\cdot\operatorname{sen}x + (n-1)\int(1-\cos^2x)\cos^{n-2}(x)\,dx =$$

$$= \cos^{n-1}x\,\operatorname{sen}x + (n-1)\left[\int\cos^{n-2}(x)dx - \int\cos^n(x)\,dx\right] \Longrightarrow$$

Por tanto

$$I_n = \cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x) + (n-1)\left[I_{n-2} - I_n\right] \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow I_n(1+n-1) = \cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x) + (n-1)I_{n-2}$$

$$\boxed{I_n = \frac{\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x)}{n} + (n-1)\frac{I_{n-2}}{n}}$$

con $I_0 = \int\cos^0 x\,dx = x + C$

con $I_1 = \int\cos^1 x\,dx = \operatorname{sen}x + k$

(40) a) Holler fórmula de reducción

$$I_{mn} = \int_{n,m\in\mathbb{N}} \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}^m x\cos x}_{v'}\underbrace{\cos^{n-1}x}_{u}\,dx =$$

$v = \int \operatorname{sen}^m x\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)}{m+1}$

$$= \cos^{n-1}(x)\frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int \operatorname{sen}^{m+1}(x)(n-1)\cos^{n-2}(x)(-\operatorname{sen}x)\,dx =$$

$$= \cos^{n-1}(x)\frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int\operatorname{sen}^m x\cos^{n-2}(1-\cos^2x)\,dx =$$

$$= \cos^{n-1}(x)\frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\left[I_{m,n-2} - I_{mn}\right]$$

$$\underbrace{I_{mn} + \frac{n-1}{m+1}I_{mn}}_{\frac{m+n}{m+1}} = \frac{\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}^{m+1}(x)}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}I_{m,n-2}$$

$$\boxed{I_{mn} = \frac{\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}^{m+1}(x)}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}}$$

con

$I_{m,0} = x + C$

$I_{0,1} = \int\cos x\,dx = \operatorname{sen}x + C$

$I_{1,0} = \int\operatorname{sen}x\,dx = -\cos x + C$

$I_{1,1} = \int\operatorname{sen}x\cos x\,dx =$

$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$

Esta fórmula anterior nos permite bajar el grado de la potencia del $\cos x$, si quisiéramos hallar una fórmula para disminuir la potencia del $\operatorname{sen} x$ integraríamos por partes de la siguiente forma:

$$I_{mn} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}^{m-1}(x)}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x \cos^n x}_{v'}\, dx =$$

$$= \operatorname{sen}^{m-1}(x)\frac{-\cos^{n+1}(x)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int \cos^{n+1}(x)(m-1)\operatorname{sen}^{m-2}(x)\cos x\, dx =$$

$$= \operatorname{sen}^{m-1}(x)\frac{(-\cos^{n+1}(x))}{n+1} - \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n}(x)\operatorname{sen}^{m-2}(x)(1-\operatorname{sen}^2 x)\, dx =$$

$$= \operatorname{sen}^{m-1}(x)\frac{(-\cos^{n+1}(x))}{n+1} - \frac{m-1}{n+1}\left(I_{m-2,n} - I_{mn}\right).$$

$$I_{mn}\underbrace{\left(1-\frac{m-1}{n+1}\right)}_{\frac{n-m+2}{n+1}} = \operatorname{sen}^{m-1}(x)\frac{(-\cos^{n+1}(x))}{n+1} - \left(\frac{m-1}{n+1}\right)I_{m-2,n}$$

$$\boxed{I_{mn} = \frac{-\operatorname{sen}^{m-1}(x)\cos^{n+1}(x) - (m-1)I_{m-2,n}}{n-m+2}}$$

Con $I_{00} = x + C$, $I_{01} = \operatorname{sen} x + C$; $I_{10} = -\cos x + C$, $I_{11} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$

→ $\int \operatorname{sen}^2(x)\, dx$
$\int \cos^2(x)\, dx$

Como ambas son pares en seno y coseno simultaneamente, podríamos aplicar el cambio $\operatorname{tg}(x) = t$ y transformarlas en racionales, pero se hace mucho más rápido con la siguiente fórmula

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\, dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx = \boxed{\frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right) + C}$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \boxed{\frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right) + C'}$$

→ $I = \int \operatorname{sen}^4(x)\, dx \Rightarrow$ Por ser par en seno y coseno simultaneamente, podríamos realizar el cambio $\operatorname{tg} x = t$ transformando la en racional pero también se puede resolver de la siguiente forma:

$$\int \operatorname{sen}^4(x)\, dx = \int (\operatorname{sen}^2(x))^2\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \underbrace{\cos^2 2x}_{\frac{1+\cos 4x}{2}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)\right] + C' = \boxed{\frac{1}{4}\left(x - \operatorname{sen} 2x + \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8}\right) + C}$$

Indusbol.com

(68) $I = \int \operatorname{sen}(7x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(9x) + \operatorname{sen}(5x)]\,dx = \boxed{\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 9x}{9} - \frac{\cos 5x}{5}\right) + C}$

(76) $I = \int \operatorname{sen}^2(x)\cos 5x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x - \cos 2x \cos 5x)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \int \cos 2x \cos 5x\,dx\right] = \frac{\operatorname{sen} 5x}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos 3x)\,dx =$

$= \boxed{\frac{\operatorname{sen} 5x}{10} - \frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sen} 7x}{7} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}\right] + C}$

(73) $I = \int tg^4(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{\cos^4(x)}\,dx =$ Como el par en seno y coseno simultaneamente hacemos el cambio $tg\,x = t \Rightarrow dt = (1+tg^2 x)\,dx$

$= \int t^4 \frac{dt}{1+t^2} =$ (división: $t^4 : (1+t^2) = t^2 - 1$, resto $-t^2$; $-t^2 : (1+t^2) = -1$, resto $+1$)

$= \int \left((t^2-1) + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C$

$\boxed{I = \frac{tg^3 x}{3} - tg\,x + x + C}$

$I = \int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$ Como no es ninguno de los tres casos, habrá que hacer el cambio general $\left[\begin{array}{l} tg(x/2) = t \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array}\right]$

$I = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(1 - \frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2-2t} = 2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = 2\,\frac{(t-1)^{-1}}{-1} + C =$

$= \boxed{-2\left(\frac{1}{tg\frac{x}{2} - 1}\right) + C}$

NOTA! También podríamos resolver la integral con la siguiente idea feliz: Multiplicamos numerador y denominador por $(1+\operatorname{sen} x) \Rightarrow$

$I = \int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = \int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx =$

$= \boxed{tg\,x + \frac{1}{\cos x} + C}$

$$I = \int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,dx \overset{\text{Cambio genérico}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad dt = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+2t+1}{\cancel{t^2}+1+1-\cancel{t^2}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \left(1+\frac{2t}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= t + \ln|t^2+1| + C = \boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right| + C}$$

NOTA!

También podríamos resolver la integral con la siguiente idea feliz: Multiplicamos numerador y denominador por $(1-\cos x)$

$$\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{(1+\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos x+\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx =$$

$$= \boxed{-\operatorname{cotg} x - \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x)}{-1} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\ln|\operatorname{sen}^2 x|}{2} + C}$$

INTEGRALES IRRACIONALES

36

$$I = \int \frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}+1)}\,dx \overset{\left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=1 \end{array} \right\}}{=}$$

$$= \int \frac{t^3-1}{\cancel{6}(t^2+1)} \cancel{6} t^5\,dt = \int \frac{t^8-t^5}{t^2+1}\,dt =$$

$$\begin{array}{l|l} t^8 - t^5 & t^2+1 \\ \hline -t^8 - t^6 & t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 \\ \quad -t^6 - t^5 & \\ \quad t^6 \quad t^4 & \\ \quad\quad -t^5 + t^4 & \\ \quad\quad t^5 \quad t^3 & \\ \quad\quad\quad t^4 + t^3 & \\ \quad\quad\quad -t^4 \quad -t^2 & \\ \quad\quad\quad\quad t^3 - t^2 & \\ \quad\quad\quad\quad -t^3 \quad -t & \\ \quad\quad\quad\quad\quad -t^2 - t & \\ \quad\quad\quad\quad\quad t^2 \quad 1 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad -t+1 & \end{array}$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \underbrace{\int \frac{t-1}{t^2+1}\,dt}_{J}$$

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2t-2}{t^2+1} = \frac{1}{2}\left[\ln|t^2+1| - 2\operatorname{arctg} t\right] + K$$

$$\boxed{I = \frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{1}{5} - \sqrt[6]{x^5} - \frac{1}{4}\sqrt[6]{x^4} + \frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3} + \frac{1}{2}\sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[6]{x^2}+1\right| + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C}$$

38) $I = \int \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \frac{-x+3}{x+3} = t^2 \;;\; -x+3 = 3t^2 + t^2x \;;\; x(t^2+1) = 3-3t^2 \\ x = \frac{3-3t^2}{t^2+1} \;;\; dx = \frac{-6t(t^2+1) - (3-3t^2)2t}{(t^2+1)^2}\,dt \end{array} \right.$

$= \int t\,\frac{-6t^3-6t-6t+6t^3}{(t^2+1)^2}\,dt = -\int t\,\frac{12t}{(t^2+1)^2} = -12\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt =$

$= -12\left[\int \left(\frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}\right)dx\right] = -12\int \left(\frac{1}{t^2+1} - \underbrace{\frac{1}{(t^2+1)^2}}_{J}\right)dt =$

$\left\{ \begin{array}{l} t^2 = (At+B)(t^2+1) + (Ct+D) \\ t^3)\;\; 0 = A \qquad t^2)\;\; 1 = B \qquad t)\;\; 0 = A + C \\ t^0)\;\; 0 = B + D \rightarrow D = -1 \qquad\qquad C = 0 \end{array} \right.$

$= -12\arctg(t) + 12\int \left(\frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}\right)dt =$

$\left\{ \begin{array}{l} 1 = (At+B)(t^2+1) + Ct + D \\ t^3)\;\; A = 0 \qquad t)\;\; A + C = 0 \\ t^2)\;\; B = 0 \qquad t^0)\;\; 1 = B + D \\ \quad\; C = 0 \qquad\quad D = 1 \end{array} \right.$

$= \boxed{-12\arctg(t) + 12\,J}$

NOTA! También podríamos resolver la integral mucho más fácilmente con la siguiente idea feliz → Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{3-x}$

$I = \int \frac{3-x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$

$= \frac{3}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx - \int x\,(9-x^2)^{-1/2}\,dx = 3\int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx + \frac{1}{2}\frac{(9-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} =$

$= \boxed{3\arcsen\frac{x}{3} + (9-x^2)^{1/2} + C}$

Binomia p → entero (binomio)

(39) $I=\int x^{-3/2}(1+x^{1/4})^2dx = \int \underbrace{x^{-3/2}(1+x^{1/2}+2x^{1/4})}_{x^{-3/2}+x^{-1}+2x^{-\frac{5}{4}}}dx =$

$$= \boxed{\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{-1}{2}\right)}+\ln|x|+2\frac{x^{-1/4}}{\left(\frac{-1}{4}\right)}+C}$$

(40) $I=\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Binomia } x^m(a+bx^n)^p \\ m=3 \quad p=\frac{-1}{2} \\ n=2 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{No } 1^{er} \\ \frac{m+1}{n}=\frac{4}{2}=2 \to 2^{o} \text{ tipo} \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} 1^{er} \text{ tipo} \\ \text{Cambio: } 1+x^2=t^2 \\ \cancel{2}x\,dx=\cancel{2}t\,dt \end{array} \right\}$

$$= \int \frac{(t^2-1)\,t\,dt}{t} = \frac{t^3}{3}-t+C = \boxed{\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}-\sqrt{1+x^2}+C}$$

NOTA! Esta integral también podemos hacerla por paso a trigonométrica

(caso b) → $x=a\,tg\,t$ con $a=1 \to x=tg\,t$, $dx=(1+tg^2t)dt$

$$I=\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{\frac{sen^3t}{cos^3t}}{\sqrt{sec^2t}}sec^2(x)\,dt = \int \frac{sen^3t}{cos^4t}dt =$$

→ Impar en sen t
$cos\,t=u$, $-sen\,t\,dt=du$

$$= -\int \frac{(1-u^2)\,du}{u^4} = -\int\left(\frac{1}{u^4}-\frac{1}{u^3}\right)du = -\frac{u^{-3}}{-3}+\frac{u^{-1}}{-1}+K =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{cos^3t}-\frac{1}{cos\,t}+K = \boxed{\frac{1}{3}\frac{1}{cos^3(arctg\,x)}-\frac{1}{cos(arctg\,x)}+K}$$

(41) $I=\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{\text{Binomia}}{=}$ $\left\{ \begin{array}{l} x^m(a+bx^n)^p \to m=2 \quad \frac{m+1}{n}+p=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1 \\ n=2 \\ p=\frac{-1}{2} \\ 2^{er} \text{ tipo} \xrightarrow{\text{cambio}} \frac{1-x^2}{x^2}=t^2,\ 1-x^2=t^2x^2 \\ x^2(t^2+1)=1,\ x^2=\frac{1}{t^2+1};\ x=(t^2+1)^{-1/2} \\ dx=\frac{-1}{\cancel{2}}(t^2+1)^{-3/2}\cancel{2}t\,dt \end{array} \right\}$

$$= \int \frac{\frac{1}{t^2+1}}{\sqrt{t^2\frac{1}{t^2+1}}}\left(\frac{-t\,dt}{(t^2+1)^{3/2}}\right) =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{t^2+1}(-t)}{t(t^2+1)}dt = -\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = -\int \frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^2}dt = -\int \frac{1}{1+t^2}+\int \frac{t\cdot t}{(t^2+1)^2}dt =$$

$$= -arctg\,t+\frac{1}{2}t\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \boxed{-\frac{1}{2}arctg\,t-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}+C}$$ (Deshaciendo el cambio)

Indusbol.com

NOTA! Podríamos hacer esta integral por paso a trigonométrica

Caso a) $x = \operatorname{sen} t$; $dx = +\cos t\, dt$

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}(+\cos t\, dt) = \int \operatorname{sen}^2 t\, dt = \int \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} 2 \operatorname{sen} t \cos t + C = \boxed{\frac{\operatorname{arcsen} x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C}$$

NOTA!!! Cuando tengamos una integral binomia que se pueda resolver también por paso a trigonométrica, si es de 1er tipo suele ser mejor el cambio a binomia y si es de segundo tipo conviene más pasar a trigonométrica

(49)

$$I = \int \sqrt{\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^3}}\,dx = \int x^{-3/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{1/2} dx \overset{\text{Binomia}}{=}$$

$m = \frac{-3}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{-3}{2}$; $\frac{m+1}{n} + p = -1$

2º tipo → Cambio

$\frac{1+x^{1/3}}{x^{1/3}} = t^2$

$1 + x^{1/3} = t^2 x^{1/3}$

$x^{1/3}(t^2-1) = 1$

$x^{1/3} = \frac{1}{t^2-1}$; $x = (t^2-1)^{-3}$

$dx = -3(t^2-1)^{-4}\, 2t\, dt$

$$= \int \left((t^2-1)^{-3}\right)^{-3/2}\left(t^2 \frac{1}{t^2-1}\right)^{1/2}(-6t)(t^2-1)^{-4} dt = \int (t^2-1)^{9/2} \frac{-6t^2}{(t^2-1)^{1/2}} \frac{1}{(t^2-1)^4} dt =$$

$$= \int (-6t^2)\, dt = -6\frac{t^3}{3} + C = \boxed{-2\left(\frac{1+x^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^{3/2} + C}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-2}(1+x^2)^{-1/2} dx =$$

Binomia
$m = -2$
$n = 2 \to \frac{-2+1}{2} = \frac{-1}{2} \to$ 2º tipo
$p = \frac{1}{2} \to \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

Cambio $\frac{1+x^2}{x^2} = t^2$; $1 + x^2 = t^2 x^2$; $x^2(t^2-1) = 1$; $x^2 = \frac{1}{t^2-1}$, $x = \left(\frac{1}{t^2-1}\right)^{1/2}$

$dx = -\frac{1}{\cancel{2}}(t^2-1)^{-3/2}\cancel{2}t\, dt$

$$I = \int \frac{-t\,(t^2-1)^{-3/2}}{\frac{1}{t^2-1}\sqrt{t^2\frac{1}{t^2-1}}}\,dt = \int \frac{-\cancel{t}\,\cancel{(t^2-1)^{-3/2}}\cdot\cancel{(t^2-1)^{1/2}}\,\cancel{(t^2-1)}}{\cancel{t}}\,dt = -t + C =$$

$$= \boxed{-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} + C}$$

Indusbol .com

También podríamos hacer el paso a trigonométrica:

$\cos \to x = tg\, t$, $dx = \frac{1}{\cos^2 t}\, dt$

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}\, dt}{tg^2 t \frac{1}{\cos x}} = \int \frac{1}{\cos t \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}\, dt = \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} t)^{-1}}{-1} + G = \boxed{-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + G}$$

Sabemos que $\operatorname{sen} t = \frac{tg(t)}{\sqrt{1+tg^2 t}}$

- $\boxed{I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

Se agrupará el radicando en forma de cuadrado perfecto, obteniéndose un Arg Sh ó Arg Ch (también arc sen y arc cos)

(51) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2+4-\frac{25}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\right)^2-1}} = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x-5}{3}\right)^2-1}} = \boxed{\text{Arg Ch}\left(\frac{2x-5}{3}\right) + G}$$

(57) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{13}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{4}}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{13}{4}}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{13}}\right)^2}} = \boxed{\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{13}}\right) + G}$$

(47) $I=\int \frac{x^q}{\sqrt{1+x^4}}\,dx \quad q\in[0,12]$ ¿Cuándo es integrable?

Se trata de una integral binomia con $m=q$, $n=4$ y $p=-\frac{1}{2}$

Sabemos que sólo podemos hallar la primitiva si es binomia de 1º o 2º tipo

- Será binomia de 1er tipo si: $\frac{q+1}{4}\in\mathbb{Z}$ → $q=3$, $q=7$, $q=11$

Se transformará en racional con el cambio $(1+x^4)=t^2$

- Será binomia de 2º tipo si $\frac{q+1}{4}-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}$ → $q=1$, $q=5$, $q=9$

Se transformará en racional con el cambio $\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)=t^2$

$I=\int \frac{e^{2x}+1}{e^x-2}\,dx = \int \frac{t^2+1}{t-2}\,\frac{dt}{t}$; $\begin{array}{r|l} t^2+1 & t^2-2t \\ -t^2+2t & 1 \\ \hline 2t+1 & \end{array}$

$e^x=t$; $dx e^x=dt$

$e^{2x}=t^2$ $dx=\frac{dt}{t}$

$A(t-2)+tB=2t+1$ → $\begin{cases} t=0 \\ 1=-2A \\ A=-\frac{1}{2} \\ t=2 \\ 5=2B \\ B=5/2 \end{cases}$

$$I=\int 1+\frac{2t+1}{t(t-2)}\,dt = t+\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t-2}\right)dt =$$

$$= t-\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{5}{2}\ln|t-2|+C=\boxed{e^x-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\ln|e^x-2|+C}$$

María Ballesteros Hernando

Indusbol .com

Academia
RUFFO
Luchana, 31 – Tel. 91 447 69 26 – Madrid 28010
Luchana, 37 – Tel. 91 448 11 80 – Madrid 28010

CURSO
2010-2011

CÁLCULO ELEMENTAL DE PRIMITIVAS

Cálculo I

Academia Ruffo

Métodos Elementales para el Cálculo de Primitivas

0. Introducción

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales de variable real. Si $f(x)=g'(x)$ se dice que $g(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y se representa por: $\int f(x)dx = g(x)+C\ ;\ C\in R$

Clasificaremos las funciones en dos tipos:

- Funciones algebraicas:
  - Racionales
  - Irracionales polinómicas
- Funciones trascendentes:
  - Logarítmicas
  - Exponenciales
  - Trigonométricas
  - Hiperbólicas
  - Inversas trigonométricas
  - Inversas hiperbólicas

1. Integrales inmediatas

$$\int f(x)^m f'(x)dx = \frac{f(x)^{m+1}}{m+1} + C\ ;\ m\neq -1$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C\ ;\ a>0\ ;\ a\neq 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int sen(f(x))\ f'(x)dx = -\cos(f(x)) + C$$

$$\int \cos(f(x))\ f'(x)dx = sen(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = arctg(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{Ch^2(f(x))}dx = Th(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}dx = ArgSh(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2-1}}dx = ArgCh(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}dx = tg(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{sen^2(f(x))}dx = -ctg(f(x)) + C$$

$$\int tg(f(x))f'(x)dx = -\ln|\cos(f(x))| + C$$

$$\int ctg(f(x))f'(x)dx = \ln|sen(f(x))| + C$$

$$\int Th(f(x))f'(x)dx = \ln(Ch(f(x))) + C$$

$$\int Sh(f(x))\ f'(x)dx = Ch(f(x)) + C$$

$$\int Ch(f(x))\ f'(x)dx = Sh(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1-(f(x))^2}dx = ArgTh(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = arcsen(f(x)) + C$$

QUITA MS USOS DE TÚ

Indusbol.com

2. Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Casos típicos de aplicación:

a) $u(x) \equiv \begin{cases} logaritmica \\ inversa\ trigonometrica \\ inversa\ hiperbólica \end{cases}$ $\quad v'(x) \equiv \begin{cases} P_n(x)\ polinomio \\ derivada\ de\ una\ función\ algebraica \end{cases}$

b) $u(x) \equiv P_n(x)\ polinomio$ $\quad v'(x) \equiv \begin{cases} sen(ax) \\ cos(ax) \\ e^{ax} \end{cases}$

c) $u(x) \equiv e^{ax}$ $\quad v'(x) \equiv \begin{cases} sen(bx) \\ cos(bx) \end{cases}$

3. Integración de funciones racionales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \quad con\ P(x)\ y\ Q(x)\ polinomios$$

3.1. Integración por descomposición en fracciones sencillas.

Se siguen los siguientes pasos:

1º) Se fuerza a que el grado del polinomio numerador sea menor que el grado del polinomio denominador para lo cual, si es preciso, se divide previamente.

2º) Se calculan las raíces del polinomio denominador separando por un lado las raíces reales y agrupando por otro, cada raíz imaginaria con su conjugada, en forma de trinomio de segundo grado.

3º) Se descompone el cociente de polinomios en fracciones simples, obteniéndose, según sean las raíces, cuatro tipos de integrales:

a) Raíces reales simples: $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$

b) Raíces reales múltiples: $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{-n+1}}{1-n}$

Ejemplo de descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{x^6-3x^2+2x+7}{(x+1)(x-1)^3(x^2+x+1)(x^2+1)^2}dx = \int\left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{Gx+H}{x^2+1} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

Ahora habría que reducir a común denominador e identificando los numeradores calcularíamos los coef. de la A a la J.

Academia Ruffo

c) Raíces imaginarias simples: $I=\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx \;;\; p^2-4q<0$

Para su resolución seguiremos los pasos siguientes:

Comenzamos buscando en el numerador la derivada del denominador

$$I=\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int \frac{2x+p+\frac{N}{M}2-p}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{M}{2}\left(\frac{N}{M}2-p\right)\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+px+q}}_{J}=$$

Buscamos en el denominador un cuadrado perfecto

$$J=\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{1}{q-\frac{p^2}{4}}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{q-\frac{p^2}{4}}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)+C_1$$

d) Raíces imaginarias múltiples:

$$I=\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx \;;\; p^2-4q<0$$

Para su resolución seguiremos los pasos siguientes:

Comenzamos buscando en el numerador la derivada de la base del numerador

$$I=\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{M}{2}\int \frac{2x+p+\frac{2N}{M}-p}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1}+\frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}}_{J}$$

Buscamos en la base del denominador un cuadrado perfecto

$$J=\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}=\frac{1}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^n}\int \frac{dx}{\left[1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2\right]^n}=$$

Hacemos el cambio de variable $\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}=t \;;\; dx=\sqrt{q-p^2/4}\,dt$

$$=\frac{1}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^n}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\underbrace{\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}}_{I_n}$$

Vamos a calcular la siguiente integral mediante una fórmula de reducción:

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}\,dt = I_{n-1} - \int t \overbrace{\frac{t}{(1+t^2)^n}}^{u'}\,dt =$$

$$= I_{n-1} - \left[t\frac{(1+t^2)^{-n+1}}{2(-n+1)} - \frac{1}{2(-n+1)} \underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\,dt}_{I_{n-1}} \right]$$

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2-2n}\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2-2n} I_{n-1};$$

$$I_n = \frac{3-2n}{2-2n} I_{n-1} - \frac{1}{2-2n}\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}; \quad \text{con } I_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C$$

Nota: si se quiere evitar la fórmula de reducción puede utilizarse el método de Hermite.

3.2. Método de Hermite.

Se aplica el método de Hermite para las integrales racionales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ cuando el polinomio $Q(x)$ posee raíces imaginarias múltiples.

En teoría, según el método de Hermite $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{X(x)}{D(x)} + \int \frac{Y(x)}{E(x)}dx$ **(*)**, siendo:

- $D(x)$ el máximo común divisor de $Q(x)$ y $Q'(x)$.
- $X(x)$ un polinomio de coeficientes indeterminados, de un grado inferior a $D(x)$.
- $E(x) = \frac{Q(x)}{D(x)}$
- $Y(x)$ un polinomio de coeficientes indeterminados, de un grado inferior a $E(x)$.

En la práctica, si se tiene el polinomio $Q(x)$ descompuesto en forma de producto de factores, podremos calcular directamente $D(x)$ y $E(x)$, siendo $D(x)$ una expresión formada por los mismos factores que $Q(x)$ pero con un grado de multiplicidad disminuido en una unidad. $E(x)$ estará formado por los mismos factores que $Q(x)$ pero todas ellos de multiplicidad 1.

Derivando **(*)** y reduciendo a común denominador, se calculan los coeficientes indeterminados de los polinomios $X(x)$ e $Y(x)$.

Nota: En una integral racional, si se cumple que la función subintegral se puede escribir como producto de una función par en "x" por una potencia impar de "x", el cambio $x^2 = t$ es recomendable.

4. Integración de funciones irracionales

4.1. Integrales del tipo $I = \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{u/v}\right] dx$

Se convierte en una integral racional haciendo el cambio de variable $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\mu}$ siendo μ el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes: $\mu = m.c.m.\{n,q,\ldots,v\}$.

4.2. Integrales binomias.

Son integrales de la forma: $I = \int x^m (a+b\,x^n)^p dx$, $a,b \in R^*$, $m,n,p \in Q$.

En general, no se puede calcular "I" para valores cualesquiera de "m", "n", y "p". Sólo se podrá integrar en los siguientes casos:

(a) Si "p" es un número entero, se realiza el cambio $x = t^r$ siendo "r" el mínimo comun múltiplo de los denominadores de "m" y "n".

Nota: Si "p", además de entero, es positivo es preferible desarrollar $(a+b\,x^n)^p$ por el binomio de Newton.

(b) Integrales binomias de 1ª tipo: si $\frac{m+1}{n}$ es un número entero, se realiza el cambio $a+b\,x^n = t^{\beta}$, siendo "β" el denominador de "p" ($p = \alpha/\beta$).

(c) Integrales binomias de 2º tipo: si $\frac{m+1}{n} + p$ es un número entero, se realiza el cambio $\frac{a+b\,x^n}{x^n} = t^{\beta}$, siendo "$\beta$" el denominador de "$p$" ($p = \alpha/\beta$).

4.3. Integración por paso a trigonométrica.

(a) $I = \int R\left[x, \sqrt{a^2 - x^2}\right] dx$. Se hace el cambio $x = a\,sen\,t$ ó $x = a\,cos\,t$

(b) $I = \int R\left[x, \sqrt{a^2 + x^2}\right] dx$. Se hace el cambio $x = a\,tg\,t$

(c) $I = \int R\left[x, \sqrt{x^2 - a^2}\right] dx$. Se hace el cambio $x = \frac{a}{sen\,t}$ ó $x = \frac{a}{cos\,t}$.

Nota: En el caso (b) también se puede realizar el cambio $x = a\,Sht$.
En el caso (c) también se puede realizar el cambio $x = a\,Cht$.

Sólo entra la integral amarilla

Indusbol .com

4.4. Integrales de la forma: $I = \int R\left[x, \sqrt{ax^2+bx+c} \right] dx$

Estas integrales pueden transformarse en integrales racionales con los siguientes cambios:

1º) Si $a>0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t$.

2º) Si $c>0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+xt$.

3º) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha_1)$ siendo α_1 una de las dos raíces reales (α_1,α_2) que posee el trinomio radicando.

El inconveniente de estos cambios estriba en que se obtienen integrales racionales complicadas, por lo que es preferible operar en la función subintegral para llegar a cuatro integrales tipo:

(a) $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Integración: es aconsejable agrupar el radicando en forma de un cuadrado perfecto, obteniéndose un *arcsen*, *ArgSh* ó *ArgCh*.

(b) $I_2 = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

Integración: se utiliza el denominado método Alemán.

$$I_2 = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (**)$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio con coeficientes indeterminados de un grado inferior a $P_n(x)$ y "k" es una constante. Derivando **(**)** y racionalizando se calculan los coeficientes indeterminados.

(c) $I_3 = \int \frac{P_n(x)}{(x-d)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \quad ; \quad n<m$

Integración: se realiza el cambio $(x-d) = \frac{1}{t}$ obteniéndose una integral del tipo I_1 ó I_2

(d) $I_4 = \int \frac{P_n(x)}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \quad ; \quad p^2-4q<0$

Integración: se debe hacer necesariamente alguno de los cambios 1º), 2º) ó 3º).

Indusbol.com

5. Integración de funciones trigonométricas

5.1. Integrales de la forma: $I = \int R[\ sen\,x, cos\,x\ ]\ dx$

Siempre se pueden racionalizar mediante el cambio $\begin{cases} tg(x/2) = t \\ dx = 2\dfrac{dt}{1+tg^2(x/2)} \end{cases}$

teniendo en cuenta que:

$$sen x = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} \qquad cos\,x = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$$

No obstante, en casos particulares son más convenientes otros cambios:

(a) Si R es impar en $sen\,x$ se realiza el cambio $\begin{cases} cos\,x = t \\ -sen\,x\,dx = dt \end{cases}$

(b) Si R es impar en $cos\,x$ se realiza el cambio $\begin{cases} sen\,x = t \\ cos\,x\,dx = dt \end{cases}$

simultaneamente

(c) Si R es par en $sen\,x$ y $cos\,x$ se realiza el cambio $\begin{cases} tg\,x = t \\ (1+tg^2 x)\,dx = dt \end{cases}$

siendo: $cos\,x = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$; $sen x = \dfrac{tg\,x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$

Nota: Una función $R(\lambda,\mu)$ es impar en λ cuando $R(-\lambda,\mu) = -R(\lambda,\mu)$.
Una función $R(\lambda,\mu)$ es par en λ y μ cuando $R(-\lambda,-\mu) = R(\lambda,\mu)$.

simultaneamente

5.2. Integración de productos de senos y cosenos de ángulos múltiplos de x:

$$\int sen(mx)\ cos(nx)\ dx = \int \frac{sen[(m+n)x] + sen[(m-n)x]}{2}\ dx$$

$$\int cos(mx)\ cos(nx)\ dx = \int \frac{cos[(m+n)x] + cos[(m-n)x]}{2}\ dx$$

$$\int sen(mx)\ sen(nx)\ dx = \int \frac{cos[(m+n)x] - cos[(m-n)x]}{-2}\ dx$$

resultando integrales inmediatas.

6. Integración de funciones trascendentes distintas de las trigonométricas

Normalmente se integran por partes, pero cuando no sea posible se transformarán en integrales racionales mediante el cambio

función trascendente (x) = t

Academia Ruffo

CÁLCULO I

Ejercicios de cálculo de primitivas

1. $I = \int \frac{x}{\text{Sh}\,x + \text{Ch}\,x}\,dx$ — *Solución*: $-(1+x)\,e^{-x} + C$

2. $I = \int (x^2+1)\,\ln x\,dx$ — *Solución*: $\frac{x}{3}(x^2+3)\ln x - \frac{x}{9}(x^2+9) + C$

3. $I = \int (x^2+x+3)\,\cos x\,dx$ — *Solución*: $(x^2+x+1)\,\text{sen}\,x + (2x+1)\cos x + C$

4. $I = \int 3^x (x^2+1)dx$ — *Solución*: $\frac{3^x}{(\ln 3)^3}\left[(x^2+1)(\ln 3)^2 - 2x\ln 3 + 2\right] + C$

5. $I = \int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx$ — *Solución*: $\frac{a\,\text{sen}\,bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$

6. $I = \int x\,e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx$

Solución: $\frac{\left[(ax-1)(a^2+1)+2\right]\text{sen}\,x + \left[(1-x)(a^2+1) - (a-1)^2\right]\cos x}{(a^2+1)^2}e^{ax} + C$

7. Dada $I_n = \int (\ln x)^n\,dx$, hallar una fórmula de reducción y resolver para $n=4$. $n \in \mathbb{N}$

Solución: $I_{n+1} + (n+1)\,I_n = x\,(\ln x)^{n+1}$

8. $I = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$ — *Solución*: $-(1+\ln x)/x + C$

9. $I = \int (\text{arcsen}\,x)^2\,dx$ — *Solución*: $((\text{arcsen}\,x)^2 - 2)x + 2\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}\,x + C$

10. $I = \int x^3\,\cos(x^2)\,dx$ — *Solución*: $0.5\,(x^2\,\text{sen}\,x^2 + \cos x^2) + C$

11. $I = \int x\,\text{arctg}\,x\,dx$ — *Solución*: $0.5\,((x^2+1)\,\text{arctg}\,x - x) + C$

12. $I = \int \frac{\ln x}{x}dx$ — *Solución*: $0.5\,(\ln x)^2 + C$

13. $I = \int x^2\,\text{sen}^2 x\,dx$ — *Solución*: $(4x^3 - 6x\cos 2x + 3(1-2x^2)\,\text{sen}\,2x)/24 + C$

14. $I = \int \text{ArgTh}\,x\,dx$ — *Solución*: $x\,\text{ArgTh}\,x + 0.5\ln(1-x^2) + C$

15. $I = \int x^2\,\text{sen}3x\,\cos 2x\,dx$.

Solución: $\frac{2-25x^2}{250}\cos 5x + \frac{2-x^2}{2}\cos x + \frac{x}{25}\text{sen}\,5x + x\,\text{sen}\,x + C$

16. $I = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\ln x\,dx$ — *Solución*: $\frac{x^2}{2(1+x^2)}\ln x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$

17. $I = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\text{arctg}\,x\,dx$ — *Solución*: $\frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{x^2-1}{4(1+x^2)}\text{arctg}\,x + C$

18. $I = \int \ln(x^2+4x+5)\,dx$ — *Solución*: $(x+2)\ln(x^2+4x+5) - 2x + 2\,\text{arctg}\,(x+2) + C$

19. $I = \int (1-x)\,\ln(1+x)\,dx$ — *Solución*: $0.5\,(3+2x-x^2)\ln(1+x) + 0.25\,(x^2-6x) + C$

20. $I = \int \frac{x^5+4x^3+7x+4}{x^2+1}dx$ *Solución*: 0.25 x^2 (x^2+6) + 2 ln (x^2+1) + 4 arctg x + C

21. $I = \int \frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x+1)^2}dx$ *Solución*: 2 ln |x-1| - ln |x+1| + 1/(x+1) + C

22. $I = \int \frac{3x+5}{x^2-x+4}dx$ *Solución*: $\frac{3}{2}\ln|x^2-x+4| + \frac{13}{\sqrt{15}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{15}} + C$

23. $I = \int \frac{2x+1}{(x^2+5x+6)^2}dx$ *Solución*: -8 ln |x+3| + 8 ln |x+2| + 5/(x+3) + 3/(x+2) + C

24. $I = \int \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx$ *Solución*: $\frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{8\sqrt{3}}{9}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

25. $I = \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$ *Solución*: $\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\text{arctg}\,x - \frac{x}{2(1+x^2)} + C$

26. $I = \int \frac{x^3}{x^4+x^2+1}dx$ *Solución*: $\frac{1}{4}\ln(x^4+x^2+1) - \frac{\sqrt{3}}{6}\text{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + C$

27. $I = \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ *Solución*: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right] + C$

28. $I = \int \frac{(2x^3-1)x^2}{(1+x^3)^3}dx$ *Solución*: $-\frac{4x^3+1}{6(1+x^3)^2} + C$

29. $I = \int \frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)}dx$ *Sol*: $\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

30. $I = \int \frac{x^4}{x^4-1}dx$ *Solución*: $x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\text{arctg}\,x + C$

31. $I = \int \frac{5x-1}{x^3+x^2-x-1}dx$ *Solución*: $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - 3\frac{1}{1+x} + C$

32. $I = \int \frac{x^5}{1+x^4}dx$ *Solución*: 0.5 (x^2 - arctg x^2) + C

33. $I = \int \frac{dx}{(1-x^3)^2}$ *Sol*: $\frac{x}{3(1-x^3)} - \frac{2}{9}\ln|1-x| + \frac{1}{9}\ln|x^2+x+1| + \frac{2\sqrt{3}}{9}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

34. $I = \int \frac{x(1+x)}{(1+2x+2x^2)^2}dx$ *Solución*: $-\frac{1}{4}\frac{1+2x}{1+2x+2x^2} + C$

35. $I = \int \frac{x^5+x^2-1}{x(x^2+3x+4)^2}dx$

Solución: $x - \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{95}{32}\ln|x^2+3x+4| + \frac{171\sqrt{7}}{112}\text{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}} - \frac{19x+25}{4(x^2+3x+4)} + C$

36. $I=\int \frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}+1)}dx$ *Solución*: $\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{4}\sqrt[6]{x^4}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt[6]{x^2}$ $-\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt[3]{x})+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$

37. $I=\int \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}dx$ *Solución*: $(2+x)\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}-5\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+C$

38. $I=\int \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}dx$ *Solución*: $\sqrt{9-x^2}+3\operatorname{arcsen}(x/3)+C$

39. $I=\int x^{-3/2}(1+x^{1/4})^2\,dx$ *Solución*: $-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{8}{\sqrt[4]{x}}+\ln|x|+C$

40. $I=\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ *Solución*: $\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}+C$

41. $I=\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *Solución*: $-\frac{1}{2}\left[\arccos x+x\sqrt{1-x^2}\right]+C$

42. $I=\int \frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}}$ *Sol.*: $-\frac{1}{7}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{7/2}+\frac{3}{5}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{5/2}-\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{3/2}+\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{1/2}+C$

43. $I=\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$

Solución: $\frac{1}{9}\,\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}-x}-\frac{1}{9}\,\frac{x(\sqrt[3]{1+x^3}-x)}{(1+x^3)^{2/3}+x(1+x^3)^{1/3}+x^2}-\frac{1}{9}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-x}{x}\right|+$

$+\frac{1}{18}\ln\left|\frac{(1+x^3)^{2/3}+x(1+x^3)^{1/3}+x^2}{x^2}\right|+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{3}x}+C$

44. $I=\int \frac{x^{-3/4}}{1+x^{1/3}}dx$

Sol: $\frac{3\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x^{1/6}-\sqrt{2}x^{1/12}+1}{x^{1/6}+\sqrt{2}x^{1/12}+1}\right|+3\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,x^{1/12}+1)+3\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,x^{1/12}-1)+C$

45. $I=\int \frac{3x-1+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}dx$

Solución: $2(x-2)^{3/2}+10\sqrt{x-2}+\frac{1}{4}\left[e^{2\operatorname{ArgCh}\sqrt{x-2}}-e^{-2\operatorname{ArgCh}\sqrt{x-2}}\right]-\operatorname{ArgCh}\sqrt{x-2}+C$

46. $I=\int x^2\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ *Solución*: *No existe primitiva.*

47. Dada $I=\int \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^4}}dx$, $\alpha\in[0,12]$, indicar cuándo es integrable y qué cambio de variable la transforma en racional.

48. $I=\int \frac{(1+x^4)^{3/2}}{x}dx$ *Solución*: $\frac{1}{6}(1+x^4)^{3/2}+\frac{1}{2}(1+x^4)^{1/2}-\frac{1}{2}\operatorname{ArgTh}(1+x^4)^{1/2}+C$

49. $I=\int \sqrt{\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^3}}dx$ *Solución*: $-2\frac{(1+x^{1/3})^{3/2}}{x^{1/2}}+C$

50. $I = \int x^2 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$ *Sol*: $\frac{1}{48}(-8x^5+14x^3-3x)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{16}\text{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

51. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$ *Solución*: ArgCh((2x-5)/3) + C

52. $I = \int \frac{x^3-4x^2+1}{\sqrt{x^2+5x+3}}dx$ *Sol.*: $\frac{8x^2-98x+687}{24}\sqrt{x^2+5x+3} - \frac{933}{16}\text{ArgCh}\frac{2x+5}{\sqrt{13}} + C$

53. $I = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{4x^2-2x+1}}$ *Solución*: $-\frac{3x+1}{2x^2}\sqrt{4x^2-2x+1} + \frac{1}{2}\text{ArgSh}\frac{1-x}{\sqrt{3x}} + C$

54. $I = \int \sqrt{x^2-5x+3}\,dx$ *Solución*: $\frac{2x-5}{4}\sqrt{x^2-5x+3} - \frac{13}{8}\text{ArgCh}\frac{2x-5}{\sqrt{13}} + C$

55. $I = \int \frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx$

Sol: $\frac{2x-3}{2}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{4}\text{ArgSh}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + 2\text{ArgSh}\frac{1-x}{\sqrt{3}(1+x)} - x^2+x-2\ln|x+1| + C$

56. $I = \int \frac{1+\sqrt{x^2-5x+4}}{(x-3)+\sqrt{x^2-5x+4}}dx$

Sol: $\frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x-5| - \frac{2x-1}{2}\sqrt{x^2-5x+4} - \frac{11}{8}\text{ArgCh}\frac{2x-5}{3} + 2\text{ArgCh}\frac{5x-17}{3x-15} + C$

57. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+3}}$ *Solución*: $\text{arcsen}\frac{2x-1}{\sqrt{13}} + C$

58. $I = \int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx$

59. $I = \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+1}}$ *Solución*: $-\frac{\sqrt{5}}{5}\text{ArgSh}\frac{2-x}{1+2x} + C$

60. $I = \int \frac{x\,dx}{(x^2-4)\sqrt{x^2+x+1}}$ *Sol*: $-\frac{\sqrt{3}}{6}\text{ArgSh}\frac{-\sqrt{3}x}{x+2} - \frac{\sqrt{7}}{14}\text{ArgSh}\frac{5x+4}{\sqrt{3}(x-2)} + C$

61. $I = \int \text{sen}^5 x\,dx$ *Solución*: $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

62. $I = \int \frac{dx}{\cos^3 x}$ *Solución*: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}\right| + \frac{\text{sen}\,x}{2\cos^2 x} + C$

63. $I = \int \text{tg}^3 x\,dx$ *Solución*: $0.5\,\text{tg}^2 x + \ln\cos x + C$

64. $I = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ *Solución*: $\frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\frac{\text{tg}\,x}{\sqrt{2}} + C$

65. $I = \int \frac{dx}{1+\text{sen}\,x\,\cos x}$ *Solución*: $\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2\,\text{tg}\,x+1}{\sqrt{3}} + C$

66. $I = \int \frac{dx}{1+\text{sen}\,x+\cos x}$ *Solución*: $\ln|1+\text{tg}\,(x/2)| + C$

67. $I = \int \frac{dx}{5+3\cos x}$ *Solución*: $\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{\text{tg}(x/2)}{2} + C$

68. $I = \int \operatorname{sen} 7x \cos 2x \, dx$ *Solución*: $-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 9x}{9} + \frac{\cos 5x}{5}\right] + C$

69. $I = \int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$ *Solución*: $\frac{1}{4}\left[x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{6}\right] + C$

70. Hallar una fórmula de reducción para las integrales siguientes:

a) $I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$. *Sol.*: $I_{m,n} = \frac{1}{m+n}\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$

$I_{m,n} = \frac{-1}{m+n}\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$

b) $I = \int \operatorname{sen}^m x \, dx$ *Solución*: $I_m = \frac{-1}{m}\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}$

c) $I = \int \cos^n x \, dx$ *Solución*: $I_n = \frac{1}{n}\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

71. $I = \int \operatorname{sen}^5 x \cos^4 x \, dx$ *Solución*: $\frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^9 x}{9} + C$

72. $I = \int \frac{dx}{a + b\operatorname{sen} x}$, a>b>0 *Solución*: $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{b + a\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C$

73. $I = \int \operatorname{tg}^4 x \, dx$ *Solución*: $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$

74. $I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$ *Solución*: $\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - x + C$

75. $I = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x \, dx$ *Solución*: (2 cos 6x + 3 cos 4x - 6 cos 2x) / 48 + C

76. $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos 5x \, dx$ *Solución*: $\frac{1}{10}\operatorname{sen} 5x - \frac{1}{28}\operatorname{sen} 7x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 3x + C$

77. $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}$ *Solución*: $\frac{1}{4\operatorname{tg}^2(x/2)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}(x/2)\right| + C$

78. $I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^4 x} dx$

Solución:

$\frac{1}{4}\ln\left|1 + \operatorname{tg} x\right| + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2\right| - \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{7}} + C$

79. $I = \int x \operatorname{arcsen} x \, dx$ *Solución*: $\frac{1}{4}(2x^2 - 1)\operatorname{arcsen}(x) + \frac{1}{4} x\sqrt{1 - x^2} + C$

80. $I = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen}^{1/2} x + \operatorname{sen}^{1/4} x}{\operatorname{sen}^{1/4} x - 1} \cos x \, dx$

Solución:

$\frac{1}{5}\operatorname{sen}^{5/4} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/4} x + \operatorname{sen}^{1/2} x + 2\operatorname{sen}^{1/4} x + 2\ln\left|\operatorname{sen}^{1/4} x - 1\right| + C$

81. Calcular a en función de α y β, para que I sea una función algebraica (es decir, sin logaritmos ni arcotangentes). Se considera $\alpha, \beta \in R$; $\alpha \neq \beta$.

$$I = \int \frac{(x-a)}{(x-\alpha)^2\ (x-\beta)^2} dx \qquad \textit{Solución: } a = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

82. Calcular las siguientes integrales

(a) $I = \frac{3}{2}\int \operatorname{sen}^5 x \sqrt{1+\operatorname{sen}^3 x}\cos x\, dx$

$$\textit{Solución: } \frac{1}{5}(1+\operatorname{sen}^3 x)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+\operatorname{sen}^3 x)^{3/2} + C$$

(b) $I = \int \frac{3-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\qquad \textit{Solución: } \frac{5}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$

83. (a) Obtener una fórmula de reducción para la siguiente integral

$I_n = \int x^3 (\ln(x))^n dx$ $\qquad \textit{Solución: } I_n = \frac{x^4}{4}(\ln(x))^n - \frac{n}{4} I_{n-1}$ con $I_0 = \frac{x^4}{4} + C$

(b) Calcular $I = \int \frac{1}{2+3\operatorname{tg}(x)} dx$ $\qquad S: \frac{3}{13}\ln|2+3\operatorname{tg} x| - \frac{3}{26}\ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| + \frac{2}{13}x + C$

84. (a) Calcular $I = \int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx$ $\qquad \textit{Solución: } \ln(x)\cdot\ln(\ln(x)) - \ln(x) + C$

(b) Calcular $I = \int \frac{x^3+3x^2+5x+2}{x^3+2x^2+2x} dx$ $\qquad \textit{Sol.: } x + \ln|x| + \operatorname{arctg}(x+1) + C$

(c) Sea la integral $I = \int x^5 (1+2x^n)^{\frac{1}{n}} dx$, $n \in N$. Calcular los valores de n para los que existe primitiva, e indicar, en cada caso, el cambio de variable que la convierte en una integral racional.

Solución: - n=1, no hay que hacer cambio de variable.

- n=2, 3 o 6; cambio: $1+2x^n = t^n$

- n=7; cambio: $\frac{1+2x^7}{x^7} = t^7$

85. Sea la integral $I = \int x^2\sqrt{1+x^\alpha}\, dx$, $\alpha \in N$. ¿Existe primitiva $\forall \alpha \in N$? Para aquellos casos en que exista indicar el cambio de variable que la convierte en una integral racional.

Solución: No. - α=1 o 3; cambio $1+x^\alpha = t^2$

- α=2 o 6; cambio: $\frac{1+x^\alpha}{x^\alpha} = t^2$

86. Integrar: $I = \int \ln(x^2+x+1) dx$.

$$\textit{Solución: } (x+\frac{1}{2})\ln(x^2+x+1) - 2x + \sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C$$

87. Integrar: $I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{a+b\operatorname{sen} x} dx$, $a > b$, $a, b \in \Re_*^+$.

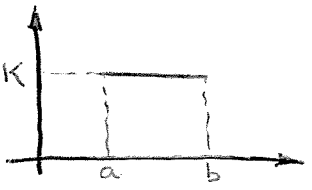
$$\textit{Solución: } \frac{x}{b} - \frac{2a}{b\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{b+a\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{a^2-b^2}} + C$$

INTEGRAL DE RIEMANN

TEMA Inqusbol .com

⊕ Analizar, aplicando la definición si las siguientes funciones son integrables según Riemann

a) $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f(x) = K \quad \forall x \in [a,b]$



Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n\}$ una partición de $[a,b]$

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} K \Delta x_i = K \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = K(b-a) \quad \forall P \in \mathcal{P}[a,b]$$

$M_i = \sup\{f(x), x \in (x_{i-1}, x_i)\} = K \ \forall i$ $\Longrightarrow$

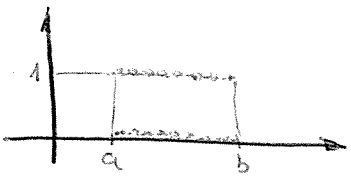
$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = K \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = K(b-a) \quad \forall P \in \mathcal{P}[a,b]$$

$m_i = \inf\{f(x), x \in (x_{i-1}, x_i)\} = K \ \forall i$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Luego $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = K(b-a)$ y $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = K(b-a)$

En consecuencia, $f \in \mathcal{R}[a,b]$, es decir, f es integrable según Riemann y, además, el valor de la integral es: $\int_a^b f(x)\,dx = K(b-a)$

b) $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = 1 \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = (b-a) \quad \forall P \in \mathcal{P}[a,b] \Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (b-a)$$

$M_i = \sup\{f(x), x \in (x_{i-1}, x_i)\} = 1 \ \forall i$

$$L(P,f) = \sum m_i \Delta_i = 0 \Longrightarrow \forall P \in \mathcal{P}[a,b] \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$$

$m_i = \inf\{f(x), x \in (x_{i-1}, x_i)\} = 0 \ \forall i$

En consecuencia la función no es integrable según Riemann

Indusbol .com

⑥ Deducir del valor de la integral $I = \int_1^n \ln(x)\,dx$, y de sus sumas de Darboux superior e inferior, las siguientes desigualdades.

- $(n-1)! \le n^n e^{-n+1} \le n!$ para la partición $P = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

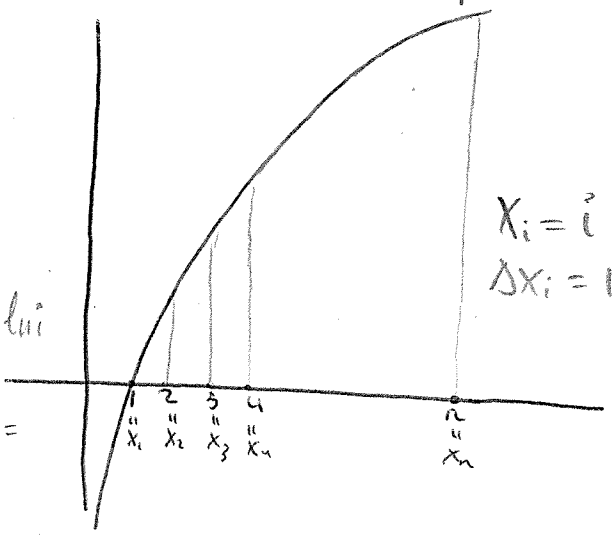
$$I = \ln(x)\,x - x \Big|_1^n = n\ln(n) - n + 1$$

$$U(P,f) = \sum_{i=2}^{n} M_i \Delta x_i =$$

$$M_i = \sup\{f(x), x \in (x_{i-1}, x_i)\} = \ln x_i = \ln i$$

$$U(P,f) = \sum_{i=2}^{n} \ln i = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n =$$

$$= \ln(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n) = \ln n!$$



$$L(P,f) = \sum_{i=2}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=2}^{n} \ln(i-1) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n-1) = \ln(n-1)!$$

$m_i = \inf\{f(x), x \in (x_{i-1}, x_i)\} = \ln(x_i - 1) = \ln(i-1)$

Sabemos que, si una función es integrable según Riemann, para cualquier partición se cumple que $L(P,f) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U(P,f)$

En nuestro caso tendremos:

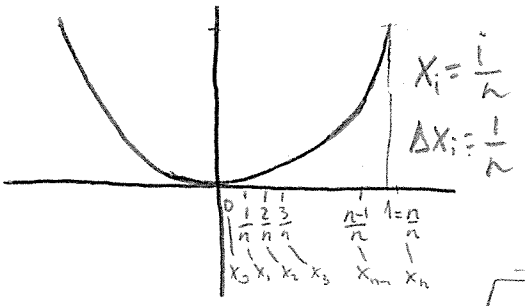
$$\ln(n-1)! \le n\ln(n) - n + 1 \le \ln(n!)$$

y tomando exponenciales:

$$(n-1)! \le n^n e^{n-1} \le n!, \text{ como queríamos demostrar}$$

a) Sea $f(x)=x^2$

Determinar la expresión de la suma superior e inferior de Darboux y una partición del intervalo $[0,1]$ en n intervalos iguales



$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 =$$

$$M_i=\sup\{f(x),\ x\in(x_{i-1},x_i)\}=x_i^2=\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$U(P,f)=\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2\right)$$

$$L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2\right)$$

$$m_i=\inf\{f(x),\ x\in(x_{i-1},x_i)\}=(x_{i-1})^2=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$$

b) Demostrar que $f(x)=x^2$ es integrable en $[0,1]$

Vamos a demostrar que $f(x)$ es integrable utilizando la condición necesaria y suficiente de integrabilidad de Rieman (Teorema 1)

Hay que demostrar que $\forall \varepsilon>0\ \exists P\in\mathcal{P}[a,b]$ tal que $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$

Usando la partición del 1º apartado:

$$U(P,f)-L(P,f)=\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}<\varepsilon \quad\longrightarrow\quad n>\frac{1}{\varepsilon}$$

Como, $\forall\varepsilon$ hemos encontrado la partición, queda demostrado que f es integrable en $[0,1]$

c) Deducir, a partir de los apartados anteriores el valor de $\int_0^1 x^2\,dx$

Sabemos que, si una función es integrable se cumple $\forall$ partición que:

$$L(P,f)\le\int_a^b f(x)\le U(P,f)\ ,\ \text{en nuestro caso:}$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}\le\int_0^1 x^2\,dx\le\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n)^2}{n^3}$$

y pasando al límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}\overset{\dagger}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2-(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2)}{n^3-(n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

$\dagger$ Aplicando Stolz por ser el den monotono creciente con límite ∞

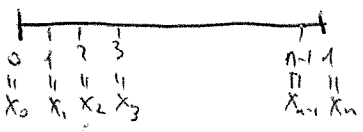
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3} \overset{\text{Stolz de nuevo}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2-(1^2+2^2+\cdots+(n-2)^2}{n^3-(n-1)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{3n^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$ y aplicando el criterio de acotación o sandwich:

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}}$$

Demostración Si $f \in \mathcal{R}[0,1]$, entonces $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

Consideramos la siguiente partición del intervalo $[0,1]$



$x_i = \frac{i}{n}$

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$

Utilizando la fórmula asociada a la propiedad II tendremos:

$$\int_0^1 f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Si hubiéramos elegido $t_{i-1} = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$, obtendríamos:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Estas dos fórmulas nos permiten calcular el límite de una sucesión mediante integrales

Calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctg x \Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

NOTA! Cuando tengamos que calcular el límite de una sucesión cuyo término general sea un sumatorio, antes de intentar aplicar el criterio de sandwich o acotación, intentaremos el paso a integral.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{e^{2i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} e^{2i/n} = \int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{e^2}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x\Big|_0^1 =$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{a}{n}\right) + \cos\left(\frac{2a}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{na}{n}\right)}{n} \overset{\downarrow}{=}$$

Podríamos aplicar Stolz pero el límite no mejora, por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{ia}{n}\right) = \int_0^1 \cos(ax)\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a}\Big|_0^1 =$$

$$= \boxed{\frac{\operatorname{sen} a}{a}, \text{ con } a \neq 0}$$

Si $a = 0 \Longrightarrow \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1+1+\cdots+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \boxed{1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} =$$

con $p \in \mathbb{N}$

Este límite se puede resolver aplicando el criterio de Stolz (ver tema 1). También lo podemos resolver de la siguiente forma:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^p =$$

$$= \int_0^1 x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{p+1}}$$

No hay problema pues $p \in \mathbb{N}$

④ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)} = L$

Este límite lo podríamos haber resuelto con el criterio raíz-cociente y otra forma sería lo siguiente:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \underbrace{\ln(1+x)}_{u}\,\underbrace{1}_{v'}\,dx =$$

$$= \ln(1+x)\,x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2 - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x}\,dx =$$

$$= \ln 2 - \left[x\right]_0^1 + \left[\ln|x+1|\right]_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - 1$$

$$L = e^{2\ln 2-1} = \frac{e^{2\ln 2}}{e} = \boxed{\frac{4}{e}}$$

④ $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{pn}+\frac{1}{pn+q}+\frac{1}{pn+2q}+\cdots+\frac{1}{pn+nq}\right] = \begin{cases}\text{con } p,q\in \\ \mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}\end{cases}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p+\frac{q}{n}}+\frac{1}{p+\frac{2q}{n}}+\cdots+\frac{1}{p+\frac{nq}{n}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{p+q\frac{i}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{pn}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{p+q\left(\frac{i}{n}\right)}\right]\right) =$$

$$= 0 + \int_0^1 \frac{1}{p+qx}\,dx = \frac{1}{q}\ln|p+qx|\Big|_0^1 = \frac{1}{q}\ln\left|\frac{p+q}{p}\right|$$

(K) No válido si $p+q=0$

Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ una función integrable tal que $\forall x\in[-1,1]$, $|f(x)|\le 1+x^2$.

De los números: $-3,-2,-1,2,3$, ¿cuáles pueden ser el valor de la integral

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \ ?$$

Sabemos que $|I|=\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right|\le\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\le\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,dx=$

$$=\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=1+\frac{1}{3}-\left[-1-\frac{1}{3}\right]=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

Tendremos que $\cdot\ |I|\le\frac{8}{3}\to -\frac{8}{3}<I<\frac{8}{3}$

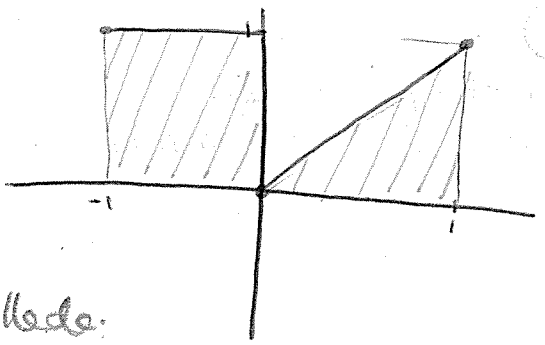
Por tanto, de los números dados solo serán solución $\boxed{\begin{array}{l}I=-2\\ I=-1\\ I=2\end{array}}$

Calcular $I=\int_{-1}^{1} f$ si f se define por $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|-x}{2|x|}+\max(x,0) & \text{si } x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$

si $x>0\to f(x)=\dfrac{x-x}{2x}+x=x$

si $x<0\to f(x)=\dfrac{-x-x}{-2x}+0=1$

$f(0)=0$.



El valor de la integral será igual al área rallada.

$I=1+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}$ Analíticamente: $\int_{-1}^{0}1\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}=\left(\frac{3}{2}\right)$

NOTA! Si el valor de la función f lo cambiamos en un nº finito de puntos, el valor de la integral seguirá siendo el mismo

$$I=\int_{0}^{\sqrt[4]{3}}\frac{x}{1+x^4}\,dx=\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{\frac{dt}{2}}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{2}\left(\arctg t\right)_{0}^{\sqrt{3}}=$$

Cambio $x^2=t\to x=\pm\sqrt{t}$, $2x\,dx=dt$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

Indusbol .com

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Con cambio $\sqrt{x^2-1} = t^2$ (binomia 1ºfino) $\rightarrow 2x\,dx = 2t\,dt$

$x = \pm\sqrt{t^2+1}$ {Podríamos tomar el signo que quisiéramos y el resultado no cambiaría}

1º) $x = \sqrt{t^2+1}$

$$I = \int_{1}^{0} \frac{t\,dt}{(t^2+1)\,t} = \operatorname{arctg} t \Big|_{1}^{0} = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

2º) $x = -\sqrt{t^2+1}$

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{t\,dt}{(t^2+1)(-t)} = -\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2+1} = -\operatorname{arctg} t \Big|_{-1}^{0} = \boxed{\frac{-\pi}{4}}$$

Hallar $f'(x)$ siendo $f(x) = \int_{x^2}^{e^x} \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}\,dt$

Como la función subintegral es continua en $\mathbb{R}$ y los límites de integración son derivables, el TFC nos asegura que $f(x)$ es derivable y, además:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} e^x}{1+e^{2x}}\,e^x - \frac{\operatorname{sen} x^2}{1+x^4}\,2x$$

Calcular, siendo $f(t)$ continua $\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x f(t)\,dt}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=}$ Como la función $f(t)$ es continua y los límites de integración son derivables, el TFC nos garantiza que el numerador es derivable. Podemos aplicar L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)\cdot 1 - f(1)\cdot 0}{1} = \boxed{f(1)}$$

Por ser f continua

Si f y g tienen derivadas acotadas en un entorno de $x=0$ y $f(0)=g(0)$, calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t^3)\,dt}{\int_0^{x^2} g(t)\,dt} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{g(x^2)2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x^3)3x^2}{g'(x^2)2x2x+g(x^2)2} = \frac{0}{0+g(0)\cdot 2}=0$$

Podemos aplicar L'Hôpital por ser f y g derivables en un entorno de cero

Como los límites de integración son funciones derivables y nos dicen que g y f son derivables en un entorno de cero, serán continuas en dicho entorno $\Longrightarrow$ Por tanto, el TFC nos garantiza que numerador y denominador son derivables en un entorno de cero y podemos aplicar L'Hôpital

Este paso sólo le podemos dar porque nos dicen que f y g tienen derivadas acotadas en un entorno de cero

Sea $f(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$, calcular $\lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} =$ Como la función subintegral es continua, podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral

$$=\lim_{x\to\infty} f(\xi)(2x-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{\xi^4+\xi^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{(\lambda x)^4+(\lambda x)^2+1}} = \boxed{0}$$

con $\xi\in[x,2x]$ $\longrightarrow$ $\xi=\lambda x$ con $\lambda\in[1,2]$

Calcular $f'(2)$ si $f(x)=\int_{\text{mín}(x^3-4x^2,-3x)}^{\text{máx}(x^3-4x^2,-3x)}(t^2+1)\,dt$

En un entorno de $x=2$: $\text{mín}(\underset{-8}{x^3-4x^2},\underset{-6}{-3x}) = x^3-4x^2$

$\text{máx}(x^3-4x^2,-3x)=-3x$

En consecuencia, en dicho entorno

$f(x)=\int_{x^3-4x^2}^{-3x}(t^2+1)\,dt$; Como la función subintegral es continua y los límites de integración son derivables, el TFC nos asegura que $f(x)$ es derivable en un entorno de $x=2$ y además se cumple que

$$f'(x)=\left((3x)^2+1\right)-3-\left((x^3-4x^2)^2+1\right)(3x^2-8)$$

$$\boxed{f'(2)=37(-3)-65\cdot 4}$$

Siendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\underbrace{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = f(x) + \cos(x)}_{(*)}$

Calcule $f'(0)$

No podemos derivar la expresión (*) porque no nos dicen que $f(x)$ sea derivable. Por tanto, vamos a aplicar la definición de límite

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dx - \cos(x) + 1}{x - 0} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) + f(-x) + \operatorname{sen} x}{1} = \frac{-1-1}{1} = -2$$

Particularizando (*) en $x=0$

$0 = f(0) + 1$; $f(0) = -1$

Como f es una función continua y los límites de integración son derivables, el TFC nos asegura que el denominador es derivable. Podemos aplicar L'Hôpital

También lo podríamos hacer con la siguiente idea feliz:

De (*) $f(x) = \underbrace{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}_{\text{Por TFC, es derivable}} - \underbrace{\cos x}_{\text{Derivable}}$ } Como la suma de funciones derivables, es una función derivable, acabamos de demostrar que $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$

$f'(x) = f(x) + f(-x) + \operatorname{sen} x$; $f'(0) = f(0) + f(0) + \operatorname{sen} 0 = 2f(0) = -2$

Calcular la recta tangente a la curva $y = \int_{x^2}^{\sqrt{\pi}/2} tg(t^2)\,dt$ en $x = \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}$

Para calcular la tangente necesitamos un punto y la pendiente

Punto: $x = \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}$; $y\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\pi}/2} tg(t^2)\,dt = 0$ $\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}, 0\right)$

$m = y'\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right) \Rightarrow y'(x) = -tg(x^4)\,2x$; $y'\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right) = -tg\frac{\pi}{4}\,2\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow$

Cuando x esta en un entorno de $\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}$, t esta en un entorno de $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, por tanto, t^2 está en un entorno de $\frac{\pi}{4}$ y la función tangente es continua en dicho entorno.

Por tanto, como los límites de integración son derivables, el TFC nos asegura que $y(x)$ es derivable en un entorno de $\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow$ Recta tangente $\boxed{y = -2\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\left(x - \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right)}$

Indusbol.com

① Calcular $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_{-x}^{x}|t|dt \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|-x|}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{2x} = 1$

Como la función subintegral es continua y los límites de integración derivables, el TFC nos asegura que el numerador es derivable y podemos aplicar L'Hôpital

② Para $x\geq 0$, sea $f(x)=\int_{x}^{2x}\frac{t}{t^3+1}dt$, justificar que alcanza un valor máximo en $[0,+\infty)$ y calcular el punto donde se alcanza.

Frontera.

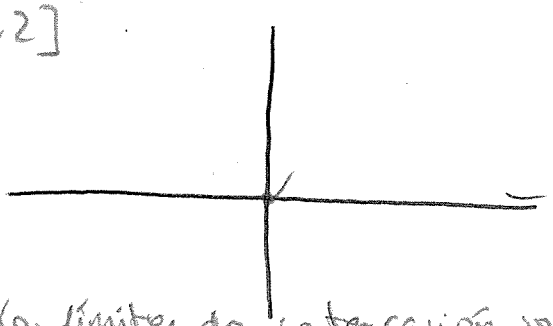
$f(0)=0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\int_{x}^{2x}\frac{t}{t^3+1}dt \overset{\downarrow}{=}$

Como, para $x\geq 0$ la función subintegral es continua, podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral

$= \lim_{x\to\infty}\frac{\xi}{\xi^3+1}(2x-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\lambda x}{(\lambda x)^3+1}x = 0$

con $\xi\in[x,2x] \longrightarrow \xi=\lambda x$ con $\lambda\in[1,2]$



Por continuidad de f y el croquis de la figura, ya podemos asegurar que f alcanza máximo global

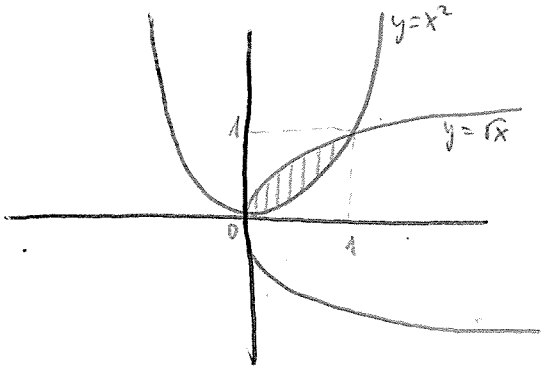
Como la función subintegral es continua y los límites de integración son derivables, el TFC nos garantiza que f es derivable $\forall x\in[0,+\infty)$ y, por tanto, el máximo se alcanzará en un punto tal que $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{2x}{(2x)^3+1}\cdot 2-\frac{x}{x^3+1}=\frac{4x(x^3+1)-x(8x^3+1)}{(8x^3+1)(x^3+1)}=0$$

$4x^4+4x-8x^3-x=0$; $4x^3-3x=0$ $\begin{cases} x=0 \rightarrow \text{el mín.} \\ 4x^3-3=0,\ x=\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \end{cases}$

Como solamente hay un candidato, podemos asegurar que el máximo absoluto de f se alcanza en $\boxed{x=\sqrt[3]{3/4}}$

→ Dadas las parábolas $y^2 = x$ e $y = x^2$, calcular el área engendrada por dichas curvas y el volumen que engendra dicho área al girar alrededor del eje OX.

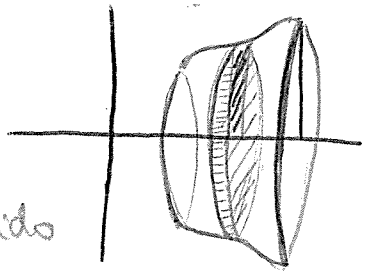


$$\text{Área} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

NOTA!! El volumen de revolución engendrado por el área plana de una figura al girar alrededor del eje X será:

$$V_c = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$$

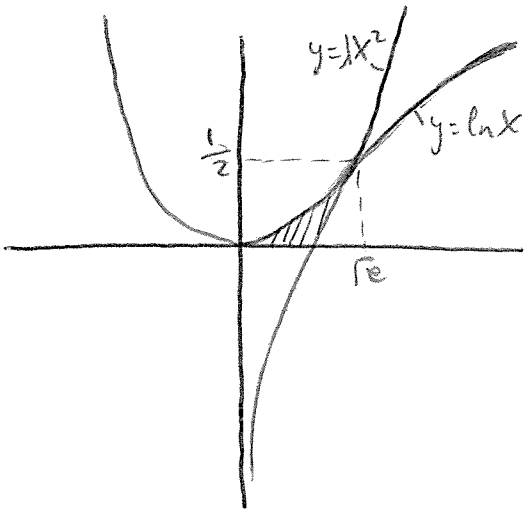


En nuestro caso, el volumen pedido será:

$$V_c = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2\,dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \boxed{\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right)}$$

→ Calcular el área encerrada por el eje OX y las curvas $y = \ln x$ y $y = \lambda x^2$ hallando previamente λ para que las curvas sean tangentes



Condición de tangencia:
En realidad son dos condiciones: que coincidad en el punto de contacto la función y la derivada

$$y_1 = \ln x = y_2 = \lambda x^2 \longrightarrow \lambda x^2 = \ln x$$

$$y_1' = \frac{1}{x} = y_2' = 2\lambda x \longrightarrow \frac{1}{x} = 2\lambda x$$

$$\begin{cases} 1/2 = \lambda x^2 \\ \lambda x^2 = \ln x \end{cases} \longrightarrow \ln x = \frac{1}{2};\ x = \sqrt{e}$$

$$\lambda = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}$$

$$\lambda = \frac{1}{2e}$$

$$\text{Area} = \int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2e}x^2 - \ln x\right)dx = \int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2e}x^2 - \ln x\right)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2e}\frac{x^3}{3} - (\ln(x)x - x)\right]_0^{\sqrt{e}} = \boxed{\frac{\sqrt{e}}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{e} + \sqrt{e}}$$

→ Calcular el volumen engendrado por dicho área al girar entorno al eje OX.

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2e}x^2\right)^2 dx - \pi\int_0^{\sqrt{e}} (\ln x)^2 dx = \left(\frac{1}{4e^2}\frac{x^5}{5}\right)\pi\Big|_0^{\sqrt{e}} - \left(\ln x^2 \cdot x\Big|_0^{\sqrt{e}} - \int_0^{\sqrt{e}} x\, 2\ln x \frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= \pi\frac{1}{4e^2}\frac{(\sqrt{e})^5}{5} - \sqrt{e} + 2\int_0^{\sqrt{e}} \ln x\,dx = \frac{\pi\sqrt{e}}{20} - \sqrt{e} + 2\left(\ln x \cdot x\Big|_0^{\sqrt{e}} - x\Big|_0^{\sqrt{e}}\right) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{e}}{20} - \sqrt{e} + 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e}\right) = \boxed{\frac{\pi\sqrt{e}}{20} - 2\sqrt{e}}$$

Sea $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{t^2}$ y $g(2x) = \underbrace{\int_0^x f(t)\,dx}_{(*)}$; $x \geq 0$

Calcular $I = \int_e^{e^4} (g \circ f^{-1})''(x)\,dx = (g \circ f^{-1})'(x)\Big|_e^{e^4} =$

$$= (g \circ f^{-1})'(e^4) - (g \circ f^{-1})'(e) = g'(f^{-1}(e^4))(f^{-1})'(e^4) - g'(f^{-1}(e))(f^{-1})'(e) =$$

$$= g'(2)\frac{1}{f'(f^{-1}(e^4))} - g'(1)\frac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \frac{g'(2)}{f'(2)} - \frac{g'(1)}{f'(1)} = \boxed{\frac{e^{1/2}}{4e^4} - \frac{e^{1/4}/2}{2e}}$$

Como $f'(t) = e^{t^2}2t \geq 0 \ \forall t \in [0,\infty)$ → f es estrictamente creciente ⇒ ⇒ f es inyectiva → f será invertible y podemos aplicar el teorema de la función inversa

$f^{-1}(e^4) = a$; $f(a) = e^4 \xrightarrow{4=t^2} a = 2$; $f^{-1}(e) = b$; $f(b) = e \xrightarrow{t^2=1} b = 1$

Como f es continua y los límites de integración derivables, el TFC nos asegura que podemos derivar (*):

$g'(2x)2 = f(x)$; $g'(2) = g'(2\cdot 1) = \frac{f(1)}{2} = e/2$

$g'(1) = g'(2\cdot\frac{1}{2}) = \frac{f(1/2)}{2} = \frac{e^{1/4}}{2}$

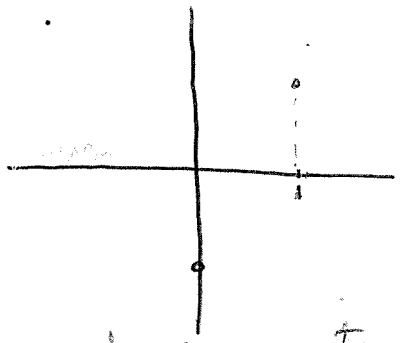
Sea f continua, estrictamente positiva en $[0,1]$. Hallar el nº de ceros de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^1 f(t)\,dt$ en $(0,1)$

Como es un problema de ceros, intentamos aplicar Bolzano

Como f es continua y los límites de integración son derivables, el TFC nos garantiza que $F(x)$ es derivable y, por tanto, continua, en $[0,1]$

$F(0) = -\int_0^1 f(t)\,dt < 0$ (como f es >0 su integral también lo será)

$F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt > 0$



Por el corte y por continuidad de F podemos decir que F tendrá, al menos, 1 cero

Por otro lado. $F'(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow$ F es estrictamente creciente y tendrá un único cero

Calcular $(f^{-1})'(0)$ siendo $f(x) = \int_0^x (1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t))\,dt$

Como la función subintegral es continua y los límites de integración son derivables, el TFC nos asegura que f es derivable y, además

$f'(x) = 1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f es estrictamente creciente, y por tanto inyectiva e invertible

Podemos aplicar el teorema de la función inversa

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

$f^{-1}(0) = a \longrightarrow f(a) = 0 \rightarrow a = 0$

Indusbol .com

④ La ecuación $\int_1^{f(x)} e^{-t^2}dt - 2x + \lg(\cos(x)) = 0$ (*) define una función f derivable y uno a uno en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

a) Calcular $f(0)$, $f'(0)$ y $(f^{-1})'(1)$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-\operatorname{sen} x}}{f^{-1}(x+1)}$

ⓐ Particularizamos (*) en $x=0$

$$\int_1^{f(0)} e^{-t^2}dt - 0 + \lg 1 = 0 \longrightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

Como $e^{-t^2} > 0$

Como e^{-t^2} es una función continua y nos dicen que los límites son derivables, el TFC nos asegura que podemos derivar (*) respecto de x:

$$e^{-(f(x))^2} \cdot f'(x) - 2 + \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \longrightarrow \boxed{f'(0) = 2e}$$

$$f'(0) = \frac{\frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} + 2}{e^{-(f(0))^2}} = 2e$$

Como f es inyectiva podemos aplicar el teorema de la función inversa

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \boxed{\frac{1}{2e}}$$

ⓑ

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-\operatorname{sen} x}}{f^{-1}(x+1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim \frac{e^x + \cos x\, e^{-\operatorname{sen} x}}{(f^{-1})'(x+1)} = \frac{2}{\frac{1}{2e}} = \boxed{4e}$$

L'Hôpital

Indusbol.com

(1) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ que cumple:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} & f(x) \neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} & f^2(x) = \int_0^x e^t \cdot t \cdot f(t)\, dt \end{cases} \quad (*)$$

a) Calcular explícitamente f

Obsérvese que, por $(*)$ $f(0) = 0$ por tanto es continua

Como f es derivable, la función subintegral también lo es y los límites de integración son derivables, el TFC nos permite derivar

$(*)$

$$2f(x)f'(x) = e^x x f(x)$$

Si $x \neq 0 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} e^x x \to f(x) = \frac{1}{2} \int e^x x\, dx =$ (ALPES: u' v)

pues $f(0) = 0$

$$= \frac{1}{2}\left[x e^x - \int e^x dx \right] = \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{2} e^x + C$$

Como f es continua en cero sabemos que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{2} e^x + C \right) = -\frac{1}{2} + C = 0 \to C = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{e^x}{2}(x-1) + \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

b) Sea $g(x) = e^{f(x)}$, calcular $I = \int_0^1 g''(x)\, dx$

$$I = g'(x)\Big|_0^1 = g'(1) - g'(0)$$

$$g'(x) = f'(x) e^{f(x)}, \quad g'(1) = f'(1) e^{f(1)} = \frac{e}{2} e^{1/2} = \frac{e^{3/2}}{2}$$

$$g'(0) = f'(0) e^{f(0)} = 0$$

$$\boxed{I = \frac{e^{3/2}}{2}}$$

Indusbol .com

④ $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, e^{x^2} dx$

La función subintegral es impar en x ya que $f(-x) = -f(x)$, lo que significa que es simétrica respecto del origen y, por tanto, $-\int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{sen} x\, e^{x^2} dx = \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, e^{x^2} dx$

Por tanto: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{sen} x\, e^{x^2} dx + \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, e^{x^2} dx = 0$ //

Indusbol .com

Academia
RUFFO
Luchana, 31 – Tel. 91 447 69 26 – Madrid 28010
Luchana, 37 – Tel. 91 448 11 80 – Madrid 28010

CURSO
2010-2011

INTEGRAL DE RIEMANN

DEFINICIÓN - EXISTENCIA

PROPIEDADES - TEOREMAS

Academia Ruffo

Integral de Riemann para funciones reales de variable real

1. Definición de la Integral de Riemann

Definición 1: **(Partición)** - Dado el intervalo $[a,b]$, llamaremos partición P de $[a,b]$ a cualquier conjunto finito de puntos $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Representaremos por $\wp[a,b]$ al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Diremos que la partición P' es un refinamiento de la partición P si todo punto de P es punto de P'.

Dadas las particiones P y P', diremos que P^* es su refinamiento común si $P^* = P \cup P'$.

Se denomina diámetro de P $|P| = \underset{i=1..n}{Max}\{\Delta x_i\}$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Es decir, el diametro de una partición es la longitud del subintervalo más grande de la partición

Definición 2: **(Integral de Riemann) -** Sea $f : [a,b] \to R$ una función acotada. Sea P una partición de $[a,b]$: $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$. Llamaremos:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$$

$$M_i = Sup\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i = Inf\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$ (Suma superior de Riemann-Darboux de f para la partición P).

$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$ (Suma inferior de Riemann-Darboux de f para la partición P).

Como $f(x)$ está acotada, se tiene que $m \le f(x) \le M \ ; \ \forall x \in [a,b]$. De tal modo que :

$$\forall P \in \wp[a,b] \quad , \quad m \cdot [b-a] \le L(P,f) \le U(P,f) \le M \cdot [b-a]$$

Por tanto, los conjuntos de las sumas superiores y de las sumas inferiores están acotados y admiten Supremo e Infimo. Entonces, definiremos:

- Integral Superior de Riemann de la función f en $[a,b]$ a:

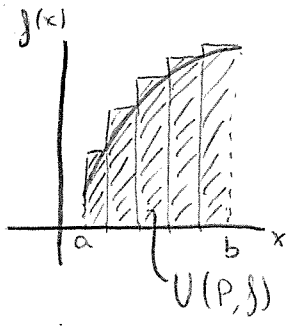
$$\overline{\int_a^b} f\,dx = Inf\{U(P,f); P \in \wp[a,b]\}$$

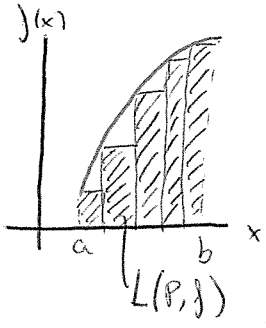
- Integral Inferior de Riemann de la función f en $[a,b]$ a:

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = Sup\{L(P,f); P \in \wp[a,b]\}$$

Si estos dos valores son iguales diremos que f es integrable según Riemann en $[a,b]$ y lo representaremos por $f \in \mathcal{R}[a,b]$. El valor de la integral lo representaremos por $\int_a^b f\,dx$.

Observamos que si hacemos un refinamiento, las sumas superiores disminuyen y las inferiores aumentan, de tal modo que si f es integrable al hacer refinamientos sucesivos, ambos tipos de sumas tenderán al valor del area encerrada por la curva $y = f(x)$ y el eje X entre a y b (si f es positiva).





Es decir, las sumas superiores representan areas de rectángulos que están por encima de la curva $y = f(x)$ y las sumas inferiores representan areas de rectangulos que se encuentran por debajo de la curva $y = f(x)$

Academia Pro

Indusbol .com

Propiedad 1: Sea $f:[a,b]\to R$ una función acotada. Entonces:

i) Si P' es un refinamiento de P se cumple que:

$$L(P,f)\le L(P',f)$$
$$U(P',f)\le U(P,f)$$

ii) Si P_1 y P_2 son dos particiones arbitrarias:

$$L(P_1,f)\le \underline{\int_a^b f\,dx}\le \overline{\int_a^b f\,dx}\le U(P_2,f)$$

2. Existencia de la Integral de Riemann

Condición necesaria y suficiente de integrabilidad según Riemann

Teorema 1: **(Teorema de existencia de la integral de Riemann)**
Sea $f:[a,b]\to R$ una función acotada. Entonces,

$f\in R[a,b]$ si y sólo si $\forall\varepsilon>0\ \ \exists P\in\wp[a,b]$ tal que $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$

Es decir, si una función es integrable según Riemann, siempre se puede conseguir una partición tal que la suma superior menos la suma inferior sea tan pequeña como queramos.

Propiedad 2: Sea $f\in R[a,b]$ y P una partición $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ que cumple que $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$. Si t_i $(i=1,2,\dots n)$ son puntos arbitrarios que cumplen $t_i\in[x_{i-1},x_i]$. Entonces,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i-\int_a^b f\,dx\right|<\varepsilon$$

$\ge L(P,f)$ y $\le U(P,f)$

Esta propiedad implica que la integral entre a-b $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$; $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ si $\lim_{n\to\infty}|P|=0$

Cada uno de estos tres teoremas nos da una condición suficiente para que una función sea integrable

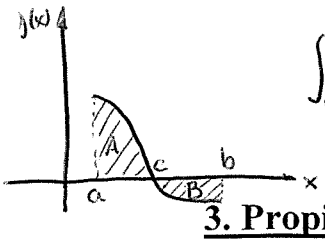
Teorema 2: **(Integrabilidad de funciones continuas)** - Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua. Entonces, $f\in R[a,b]$

Teorema 3: **(Integrabilidad de funciones monótonas)** - Sea $f:[a,b]\to R$ una función monótona. Entonces, $f\in R[a,b]$

Teorema 4: **(Integrabilidad de funciones con un número finito de puntos de discontinuidad)**
Sea $f:[a,b]\to R$ una función acotada. Si f posee un número finito de puntos de discontinuidad sobre $[a,b]$, entonces $f\in R[a,b]$.

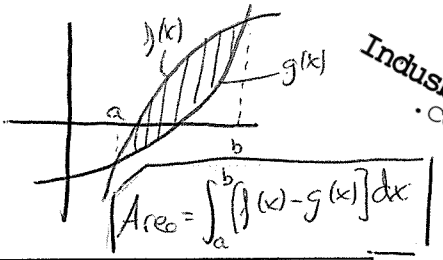
NOTA! Por tanto, una función con infinitos puntos de discontinuidad puede ser o no integrable

NOTA! La función $[x]$ es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$ y lo podemos justificar de dos formas:
- Por ser una función monótona creciente
- Por tener un nº finito de puntos de discontinuidad



$$\int_a^b f(x)dx = Area(A) - Area(B)$$

$$Area(A) + Area(B) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$



$$Area = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Incusbol .com

3. Propiedades de la Integral de Riemann

Propiedad 3:

i) Si $f_1, f_2 \in R[a,b] \Rightarrow f_1 + f_2 \in R[a,b]$ y se cumple

$$\int_a^b (f_1 + f_2)dx = \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx$$

ii) Si $f \in R[a,b]$ y $c \in R \Rightarrow c \cdot f \in R[a,b]$ y se cumple $\int_a^b c \cdot f\,dx = c\int_a^b f\,dx$

iii) Si $f_1, f_2 \in R[a,b] \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in R[a,b]$

iv) Si $f \in R[a,b]$ y $a < c < b \Rightarrow f \in R[a,c]$ y $f \in R[c,b]$ y se cumple que

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

v) Si $f_1, f_2 \in R[a,b]$ y $f_1(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f_1 dx \le \int_a^b f_2 dx$$

vi) Si $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$ y se cumple que

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|dx$$

vii) Si $f \in R[a,b]$ y $|f(x)| \le M \forall x \in [a,b] \Rightarrow \left|\int_a^b f\,dx\right| \le M[b-a]$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \overset{vi)}{\le} \int_a^b |f(x)|dx \overset{v)}{\le} \int_a^b M\,dx = Mx\Big]_a^b = M(b-a)$$

4. Teoremas de Integración

Teorema 5: **(Teorema del Cambio de Variable)** - Sea $f:[a,b] \to R$ una función continua. Sea $\varphi:[A,B] \to [a,b]$ de clase C^1, biyectiva y creciente. Entonces se cumple que:

$t \longrightarrow \varphi(t) = x$

$$\int_a^b f\,dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$x \longrightarrow f(x)$

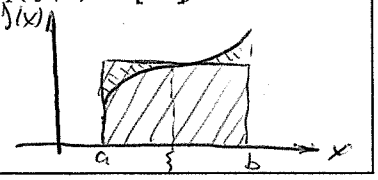
NOTA! Por tanto, cuando hacemos un cambio de variable en una integral de Riemann hay que cambiar:
1) Los límites de integración
2) La función subintegral
3) El diferencial

Teorema 6: **(Teorema del Valor Medio)**-Sea $f:[a,b] \to R$ una función acotada e integrable según Riemann. Sean $m = Inf\{f(x), x \in [a,b]\}$ y $M = Sup\{f(x), x \in [a,b]\}$.

Entonces $\exists C \in [m,M]$ tal que: $\int_a^b f\,dx = C(b-a)$

Si, además, f es una función continua, se cumplirá que

$$\int_a^b f\,dx = f(\xi)(b-a) \quad ; \quad \xi \in [a,b]$$



Este teorema nos asegura que existe al menos un punto (ξ) para el cual el área del rectángulo rayado es igual al valor de la integral

Teorema 7: **(Teorema Fundamental del Cálculo)** - Sea $f:[a,b] \to R$ una función acotada e integrable según Riemann en $[a,b]$. $\forall x \in [a,b]$ se define la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Entonces, F es continua en $[a,b]$. Además, si f es continua en $x_0 \in [a,b]$, se tiene que F es diferenciable en x_0 y se cumple que: $F'(x_0) = f(x_0)$.

Teorema 8: **(Regla de Barrow)** - Si f es integrable según Riemann en $[a,b]$ y existe una función diferenciable F sobre $[a,b]$ tal que $F' = f$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Corolario. $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$. Si f es continua, si g y h son derivables, entonces $F(x)$ es derivable y se cumple $F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x))\,g'(x)$

Carlos Ruiz

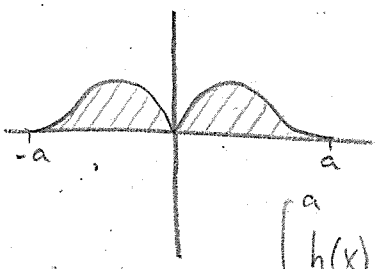
CÁLCULO I - General

REPASO GENERAL

Indusbol.com

a) • Demostrar que si $h(x)$ es una función par en X e integrable en $[-a,a]$ se cumple que $\int_{-a}^{a} h(x)dx = 2\int_{0}^{a} h(x)\,dx$.

$h(x)$ es par en $X \longrightarrow h(-x) = h(x)$, esto significa que su gráfica será simétrica respecto del eje OY



Nos damos cuenta de que, lo que nos piden demostrar, gráficamente significa que el área rallada es dos veces el área de la derecha

$$\int_{-a}^{a} h(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} h(x)\,dx}_{} + \int_{0}^{a} h(x)\,dx = \underbrace{\int_{a}^{0} h(-t)(-dt)}_{} + \int_{0}^{a} h(x)\,dx =$$

$x=-t \left\{ \begin{matrix} dx=-dt \\ \int_a^0 \end{matrix} \right.$

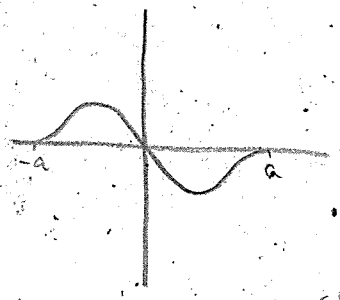
por ser h par en X

$$= \int_{0}^{a} h(t)\,dt + \int_{0}^{a} h(x)\,dx = \boxed{2\int_{0}^{a} h(x)\,dx}$$

Como queríamos demostrar

b) Demostrar que si $g(x)$ es una función impar en X e integrable en $[-a,a]$ se cumple que $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$

$g(x)$ impar en $X \longrightarrow g(-x) = -g(x)$, esto significa que la gráfica es simétrica respecto del origen



$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} g(x)\,dx}_{} + \int_{0}^{a} g(x)\,dx = \underbrace{\int_{a}^{0} g(-t)(-dt)}_{} + \int_{0}^{a} g(x)\,dx =$$

$x=-t \left\{ \begin{matrix} dx=-dt \\ \int_a^0 \end{matrix} \right.$

$$= -\int_{0}^{a} g(t)\,dt + \int_{0}^{a} g(x)\,dx = \underline{\underline{0}}$$

Como queríamos demostrar

c) Calcular el valor de la integral $I = \int_6^{10} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x-8)^3)\,dx$

Hacemos el cambio $x-8=t$

$$I = \int_{-2}^{2} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t^3)\,dx = 0$$

$g(-t) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(-t)^3) = \operatorname{sen}[-\operatorname{sen} t^3] = -\operatorname{sen}\operatorname{sen} t^3 = -g(t) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow g$ es impar en t y podemos concluir que el valor de la integral es nulo

- a) Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ tales que $\int_a^b f = \int_a^b g$, demostrar que la ecuación $f(x)=g(x)$ tiene alguna solución en $[a,b]$

Este ejercicio se hace mediante la aplicación del Th del Valor Medio.

Parto de $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \Longrightarrow \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = 0$

Como $f-g$ es continua podemos aplicar el teorema del valor medio:

$[f(\xi)-g(\xi)](b-a)=0 \Longrightarrow f(\xi)-g(\xi)=0$ con $\xi \in (a,b)$

$f(\xi)=g(\xi)$ Como queríamos demostrar

b) Sea $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ y $g(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$. Probar que si $x>0$ existe $C_x \in [x,2x]$ tal que $\frac{g(x)}{x} = f(C_x)$

Usar el resultado para calcular $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x}$

Como $x>0$, f es continua, por tanto, podemos aplicar el Th del Valor medio

$$g(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt = f(C_x)(2x-x) \Longrightarrow \frac{g(x)}{x} = f(C_x)$$

con $C_x \in [x,2x]$ Como queríamos demostrar.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(c_x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos c_x}{(c_x)^2}=\lim_{c_x\to 0}\frac{1-\cos c_x}{(c_x)^2}=$$

$c_x\in[x,2x]$ ↑

← Aplicamos el desarrollo del coseno alrededor del origen

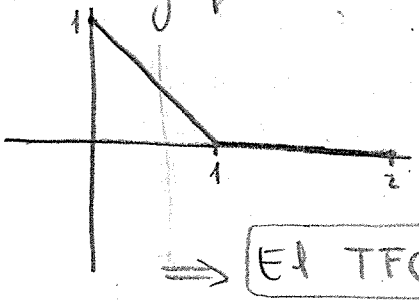
$$=\lim_{c_x\to 0}\frac{1-\left[1-\frac{c_x^2}{2!}+\frac{c_x^4}{4!}\cdots\right]}{c_x^2}=\lim_{c_x\to 0}\frac{\frac{c_x^2}{2!}}{c_x^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

● Se consideran las funciones f y g definidas en $[0,2]$: $f(x)=\int_0^x g(t)e^{t-2}dt$

a) Estudiar si f es derivable en $[0,2]$ y determinar $f'(x)$ cuando exista

$$g(x)\begin{cases}1-x & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$$

Pintamos g para ver si es continua



Como g es continua (ver gráfica), la función subintegral que define a f es continua y los límites de integración son derivables ⟹

⟹ El TFC nos asegura que f es derivable en $[0,2]$. Además:

$$f'(x)=g(x)e^{x-2}=\begin{cases}(1-x)e^{x-2} & \text{si } 0\le x<1\\ 0 & \text{si } x=1\\ 0 & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$$

b) Calcular, si existiera, $f''(1)$

$$f''(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{0}{x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x)e^{x-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(-e^{x-2})=-e^{-1}\end{cases}\Longrightarrow$$

⟹ $\boxed{f''(1)\text{ no existe}}$

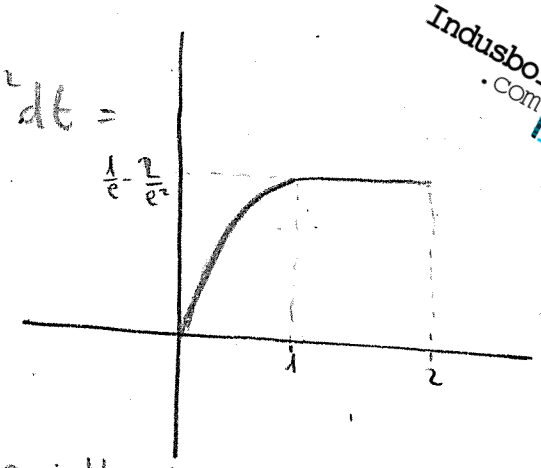
c) Calcular $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y pintar la gráfica de f.

$$f(0)=\int_0^0 g(t)e^{t-2}dt=0\ ,\quad f(1)=\int_0^1 g(t)e^{t-2}dt=\int_0^1\underbrace{(1-t)}_{u}\underbrace{e^{t-2}}_{v'\to v=e^{t-2}}dt=$$

$$=(1-t)e^{t-2}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{t-2}(-1)dt=-e^{-2}+e^{-1}-e^{-2}=\boxed{\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}}$$

$$f(2) = \int_0^2 g(t)e^{t-2}\,dt = \int_0^1 g(t)e^{t-2}\,dx + \int_1^2 g(t)e^{t-2}\,dt =$$

$$= f(1) + \int_1^2 0\,e^{t-2}\,dt = f(1)$$

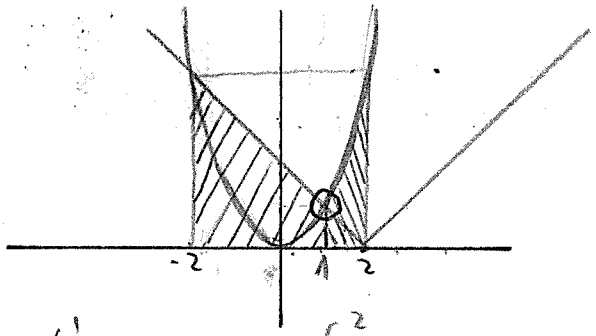


Como $g(x) > 0 \ \forall x \in [0,1)$, f será creciente en este intervalo. Veamos si tiene puntos de inflexión:

si $x \in [0,1)$ — $f''(x) = e^{x-2}\left[-1 + (1-x)\right] = -x\,e^{x-2} < 0 \rightarrow$ f es estrictamente cóncava en el intervalo.

- Calcular $I = \int_{-2}^{2} \text{máx.}\,(|x-2|, x^2)\,dx$

Pintamos las dos curvas para averiguar el máximo



Hay que hallar el punto de corte entre

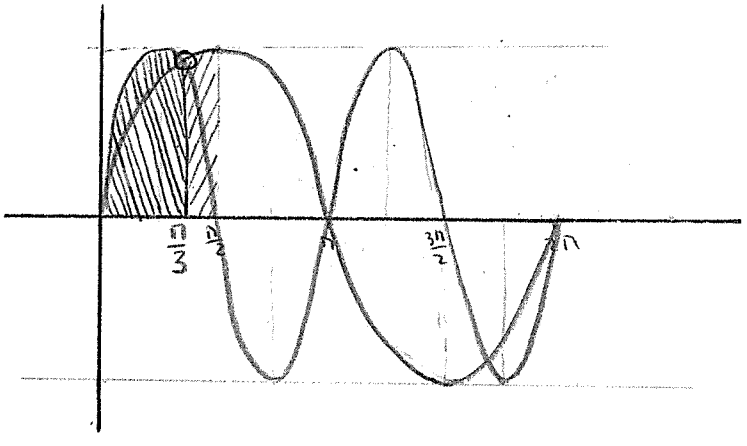
$y = x^2$, $y = |x-2| = -x+2$

$x^2 = -x+2$, $x^2 + x - 2 = 0$ $\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

$$I = \int_{-2}^{1} (-x+2)\,dx + \int_1^2 x^2\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{-1}{2} + 2 - \left(-2 - 4\right) + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{-3+16-2}{6} + 8 = \frac{11}{6} + 8 = \frac{59}{6}$$

- $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(\text{sen}\,x, \text{sen}\,2x)\,dx$



Hay que hallar el punto de corte marcado de las curvas

$y = \text{sen}\,x$, $y = \text{sen}\,2x$

$\text{sen}\,x = \text{sen}\,2x$

$\text{sen}\,x = 2\,\text{sen}\,x\cos x$

$\text{sen}\,x\,(1 - 2\cos x) = 0$

$\text{sen}\,x = 0$, NO

$1 = 2\cos x$

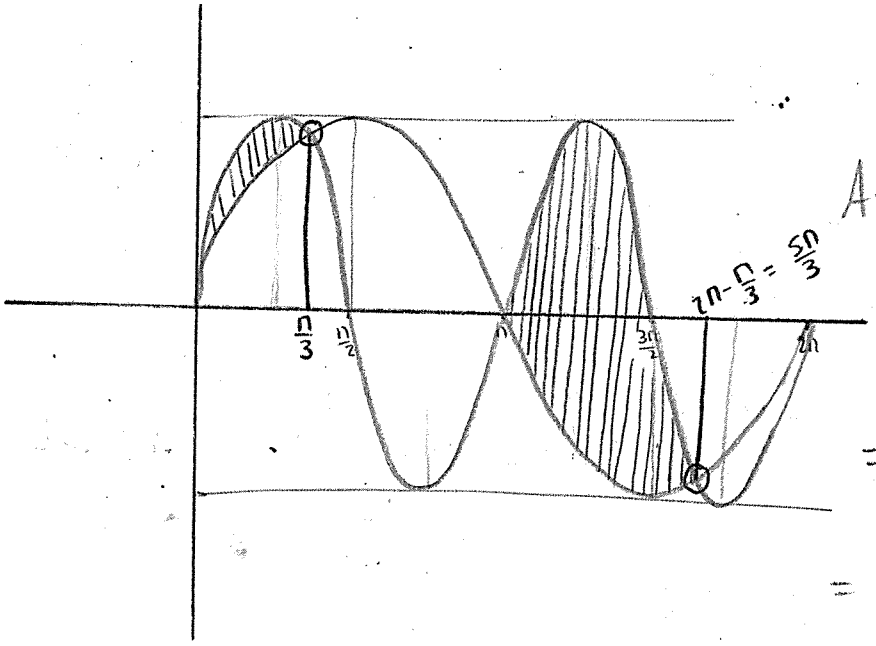
$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{-\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi/3} + \frac{-\cos x}{1}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

- Calcular el área de la región del plano determinada por las inecuaciones

$\operatorname{sen} x \leq y \leq \operatorname{sen} 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{3}} (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)\,dx =$$

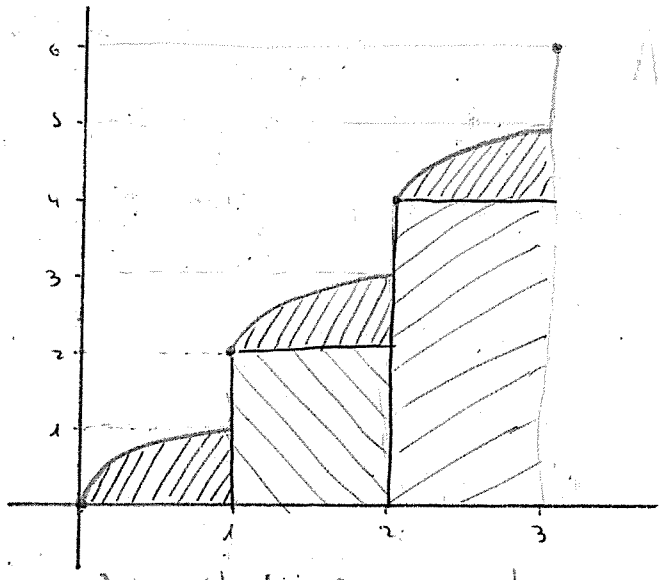
$$= \left(\frac{-\cos 2x}{2} + \cos x\right)\Big|_0^{\pi/3} + \left(\frac{-\cos 2x}{2} + \cos x\right)\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{3}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 =$$

$$= \frac{3}{2}$$

- Siendo $[x]$ la parte entera de x, se considera $f(x) = 2[x] + \sqrt[3]{x - [x]}$ con $x \geq 0$. Representar la gráfica de la restricción de esta función al intervalo $[0,3]$ señalando sus puntos de discontinuidad. Además, calcúlese el valor de la integral sobre este intervalo.

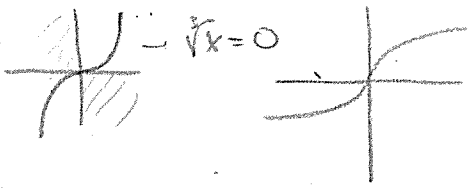


El valor de la integral del área de la figura será:

$$\text{Área} = 3\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx + 2\cdot 1 + 4\cdot 1 =$$

$$= 3\,\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 + 6 = \frac{9}{4} + 6$$

Si $x^3 = 0$ — $\sqrt[3]{x} = 0$



Indusbol .com

(*)(*)

- Sea f derivable en $\mathbb{R}$, con $f(1/2)=1$ y $\int_0^{1/2} f(x)\,dx=\pi$. Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,f'\left(\frac{k}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,f'\left(\frac{k}{2n}\right)=\int_0^1 x\,f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=$$

(x es u, $f'(x/2)$ es v')

$$=2x f\left(\tfrac{1}{2}\right)\Big|_0^1+\int_0^1 2f\left(\tfrac{x}{2}\right)dx=2f\left(\tfrac{1}{2}\right)-2\int_0^{1/2} f(t)\,2\,dt=\boxed{2-4\pi}$$

($x/2=t$, $\frac{1}{2}dx=dt$)

- Sean $f(x)\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x} & x>0\\ \frac{1}{2} & x<0\\ f(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$ y $F(x)=\int_6^x f(t)\,dt$

a) Comprobar si f es continua y derivable en $\mathbb{R}$

Continuidad

En $\mathbb{R}-\{0\}$ f es continua y derivable por ser operaciones elementales de funciones continuas y derivables y no anularse ningún denominador

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}\end{cases}$$

Aplicamos el desarrollo de Taylor del coseno alrededor del origen

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\left[1-\frac{(\sqrt{x})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{x})^4}{4!}\cdots\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{+\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\frac{1}{2}\Longrightarrow$ Por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}$

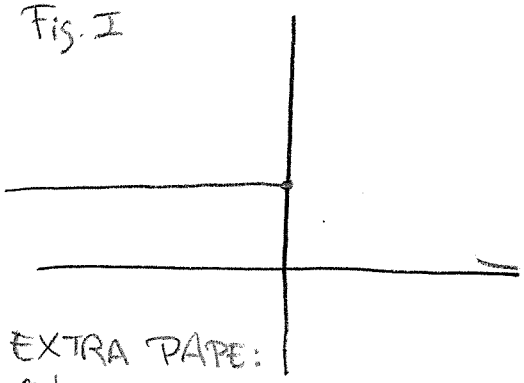
Derivabilidad

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-2\cos\sqrt{x}-x}{2x^2}\overset{\text{Taylor}}{=}\\ =\lim_{x\to 0^+}\frac{2-2\left[1-\frac{(\sqrt{x})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{x})^4}{4!}\cdots\right]-x}{2x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{4!}x^2}{2x^2}=\frac{-1}{4!}\end{cases}$$

$\nexists f'(0)\Longrightarrow f$ no derivable en $\mathbb{R}$

b) Probar que f está acotada en $\mathbb{R}$ y que alcanza en $\mathbb{R}$ máximo global

Fig. I



Frontera:

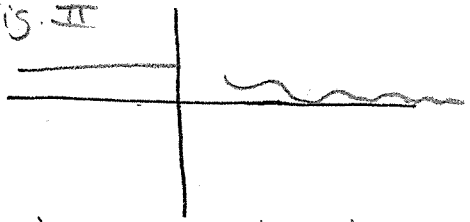
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} = 0^+$$

Por continuidad de f y el croquis de la figura podemos asegurar que f está acotada en $\mathbb{R}$ y alcanza máximo global

EXTRA PAPE:

Obsérvese que el croquis de f sería de la forma de la figura II. Por tanto sabríamos que el mínimo global de f es cero.

Fig. II



c) Estudiar si F admite inversa global en el intervalo $(0,\pi)$ y, en caso afirmativo, calcular $\left(F^{-1}\right)'\left[F\left(\pi^2/4\right)\right]$.

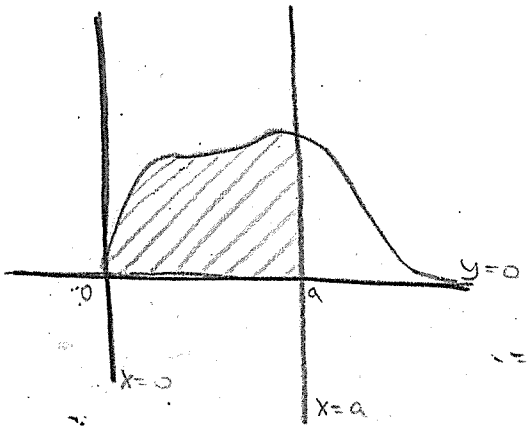
Para que F admita inversa global en $(0,\pi)$ tendrá que ser, al menos, inyectiva

Como f es continua en $\mathbb{R}$, el TFC nos garantiza que F es derivable en $\mathbb{R}$ y, además, $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F$ es estrictamente creciente $\rightarrow F$ es inyectiva $\rightarrow \exists$ inversa global en $(0,\pi)$

$$\left(F^{-1}\right)'\left[F\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right] = \frac{1}{F'\left[F^{-1}\left(F\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right)\right]} = \frac{1}{F'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1-\cos\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}}{\frac{\pi^2}{4}}} = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{1}{1-0} = \frac{\pi^2}{4}$$

Indusbol.com

● a) Calcular el area de recinto limitado por las rectas $x=0$; $x=a>0$ e $y=0$ y la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x+3}$



Como $f(x)>0$ si $x>0$ el area pedida será:

$$\text{Area}=\int_0^a\left(\frac{x}{x^2+4x+3}-0\right)dx = \quad \begin{cases} x^2+4x+3=0 \\ x=-1,\ x=-3 \end{cases}$$

$$=\int_0^a \frac{x}{(x+1)(x+3)}\,dx=\int_0^a\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x+3|\right)_0^a=\frac{-1}{2}\ln|a+1|+\frac{3}{2}\ln|a+3|-\frac{3}{2}\ln 3$$

$$\left\{(x+3)A+(x+1)B=x\right. \quad \begin{cases} x=-1 \to A=\frac{-1}{2} \\ x=-3 \to B=\frac{+3}{+2} \end{cases}$$

b) Estudiar si es finita el area encerrada entre la función f y la semirrecta del eje x que va $[0,\infty)$.

$$\text{Area}=\int_0^\infty f(x)\,dx=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\ln|a+1|+\frac{3}{2}\ln|a+3|-\frac{3}{2}\ln 3\right)=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{(a+3)^3}{(a+1)}\right)-\frac{3}{2}\ln 3\right]=\infty \Longrightarrow \underline{\text{El area pedida no es finita}}$$

● ⊛⊛⊛

Sea la sucesión $(J_n)_{n\geq 0}$ definida por $J_n=\int_0^{\pi/4}[tg(x)]^n dx$, estudiar si J_n es convergente y, en caso afirmativo, calcular su límite.

Si $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\to tg(x)\in(0,1)\to (tg(x))^{n+1}<(tg(x))^n \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4}(tg(x))^{n+1}dx<\int_0^{\pi/4}(tg(x))^n dx \Rightarrow J_{n+1}<J_n$$

Acabamos de demostrar que la sucesión es monotona decreciente

Por otro lado, como la función es siempre positiva, la integral de una función positiva también es positiva

Por tanto, la sucesión es de números reales, monotona decreciente y acotada inferiormente, esto es, es convergente.

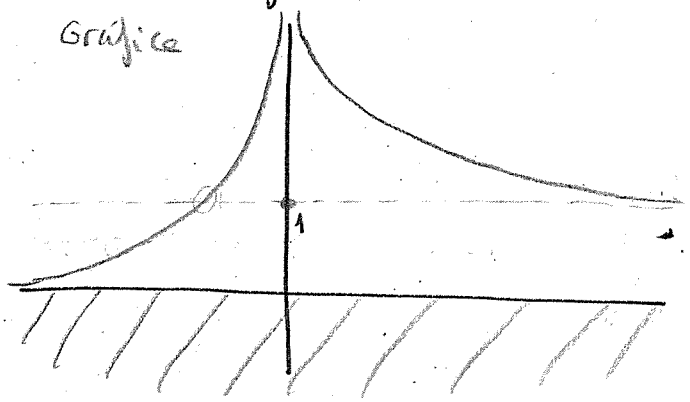
Si $x\in(0,\pi/4)$, $tg(x)\in(0,1)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(tg\,x)^n=0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} J_n=0}$

Indusbol .com

● Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{|e^x-1|} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}\longrightarrow f(x)\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^x-1} & \text{si } x>0\\ \dfrac{-e^x}{e^x-1} & \text{si } x<0\\ f(0)=1\end{cases}$

a) Estudiar crecimiento, convexidad y gráfica de f.

Gráfica



- Simetría → No hay
- Regiones → Separan región: $y=0$
  Es obvio que f es siempre positiva
- Corte con ejes
  Eje OX → $y\neq 0$ no hay
  Eje OY → $x=0 \rightarrow y=0$
  $(0,1)$
- Asíntotas

V) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x}{|e^x-1|}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{e^x-1}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\dfrac{-e^x}{e^x-1}=+\infty\end{cases}$

H) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=1^+$; $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-e^x}{e^x-1}=0^+$ $\begin{cases}y=1^+\\ y=0^+\end{cases}$

- Crecimiento

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x)}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}<0 \text{ si } x>0\\ \dfrac{-e^x(e^x-1)+e^xe^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}>0 \text{ si } x<0\\ \nexists f'(0)\end{cases}$$

si $x>0 \longrightarrow f'(x)<0 \longrightarrow$ Decreciente

si $x<0 \longrightarrow f'(x)>0 \longrightarrow$ Creciente

- Concavidad

$$f''(x)\begin{cases}\dfrac{-e^x(e^x-1)^2+e^x2(e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4}=\dfrac{e^x(-e^x+1+2e^x)}{(e^x-1)^3}=\dfrac{e^{2x}+e^x}{(e^x-1)^3}>0 & \text{si } x>0\\ -\left(\dfrac{e^{2x}+e^x}{(e^x-1)^3}\right)<0 \text{ si } x<0\\ \nexists f''(0)\end{cases}$$

si $x>0 \rightarrow f''(x)>0 \rightarrow f$ es convexa

si $x<0 \rightarrow f''(x)<0 \rightarrow f$ es cóncava

b) Determinar todas las soluciones de la ecuación $f(x)=1$

De la gráfica vemos que tendrá dos soluciones

$\boxed{x=0}$ y otra para una $x<0$. que se obtiene

$$\frac{-e^x}{e^x-1}=1;\quad -e^x=e^x-1;\quad 2e^x=1,\quad e^x=\frac{1}{2}\to x=\ln\frac{1}{2}=\ln 1-\ln 2$$

$$\boxed{x=-\ln 2}$$

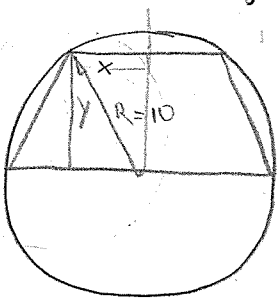
c) Si α es el mínimo del conjunto de soluciones de dicha ecuación, determinar, si es posible, el área de la región $\{(x,y)/-\infty<x\leq\alpha;\ 0<y\leq f(x)\}$

$\alpha=-\ln 2$

El area pedida será: $Area=\int_{-\infty}^{-\ln 2}\frac{-e^x}{e^x-1}dx=-\ln|e^x-1|\Big]_{-\infty}^{-\ln 2}=$

$$=-\left(\ln\underbrace{|e^{-\ln 2}-1|}-\lim_{x\to-\infty}\ln|e^x-1|\right)=-\ln\frac{1}{2}+\ln 1=-\ln 1-\ln 2=\boxed{\ln 2}$$

● Hallar el área máxima de un trapecio inscrito en una circunferencia de radio 10 cuya base mayor es el diámetro de dicha circunferencia



$$Area=\frac{1}{2}(B+b)\cdot h=\frac{1}{2}(20+2x)\,y=(10+x)\,y=f(x,y)$$

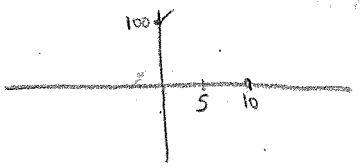
La condición de que el trapecio esté inscrito es:

$$x^2+y^2=10^2$$

$$f(x,y)=g(x)=(10+x)\sqrt{100-x^2}\quad \text{con } x\in[0,10)$$

$g(0)=100$

$g(10)=0$



$$g'(x)=\sqrt{100-x^2}+(10+x)\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}=$$

$$=\frac{100-x^2-x^2-10x}{\sqrt{100-x^2}}=0$$

$$x^2+5x-50=0 \longleftarrow -2x^2-10x+100=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+200}}{2}=\frac{-5\pm 15}{2}=\begin{cases}x=5\\ x=-10\ (\text{No válido})\ x\in[0,10)\end{cases}$$

$y=\sqrt{100-25}$

$g'(0)>0\Longrightarrow$ En $x=5$ hay máximo (ver croquis)

Por tanto, el area máxima será $\boxed{Area=15\sqrt{75}\ u^2}$

Indusbol .com

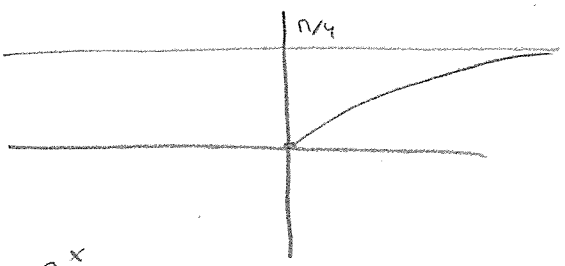
● Sea $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt$; Calcular si es cierto que: $f[0,+\infty) = [0, \frac{\pi}{4})$

Nos están pidiendo el conjunto imagen de $f(x)$ con $x \in [0,+\infty)$

Frontera $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} e^t \Big|_0^x = \lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



Como la función subintegral es continua y los límites de integración derivables, el TFC nos asegura que $f(x)$ es derivable y, además, $f'(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1} > 0 \ \forall x$ → f es estrictamente creciente

Por tanto, $Im(f) = [0, \frac{\pi}{4})$ — Enunciado Verdadero

● Se considera la función $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt$

a) Justificar la continuidad y derivabilidad de f en el intervalo $[1,\infty)$

Como $x \in [1,\infty)$, la función subintegral $\frac{e^t}{\sqrt{t}}$ es continua, y como los límites de integración son derivables, el TFC nos garantiza que $f(x)$ es derivable y, por tanto, continua, en $[1,\infty)$

b) Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^{x^3}}$ y justificar la existencia de extremos globales de $\frac{f(x)}{e^{x^3}}$ en $[1,+\infty)$

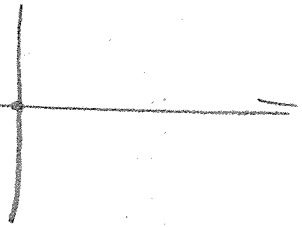
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^{x^3} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt}{e^{x^3}} =$$

Como $\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{\sqrt{t}} = +\infty$, la integral $\int_1^{\infty} \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt = \infty$. Estamos ante una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ y podemos aplicar L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^{x^3}}{\sqrt{x^3}} 3x^2}{e^{x^3} \cdot 3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 0$$

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^3}}$, $x \in [1,\infty)$ ⟹ Frontera $g(1) = \frac{f(1)}{e} = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0^+$

Por continuidad de f y el croquis de la figura podemos asegurar que g alcanza máximo absoluto o global.



Indusbol .com

(*)(*)(*)

● Sean $f, g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones que cumplen:

i) f es continua en $[0,1]$ y $\min_{x \in [0,1]} f(x) > 0$

ii) g es primitiva de f en $[0,1]$ con $g(0) = \frac{1}{3}$ y $g(1) = 1$

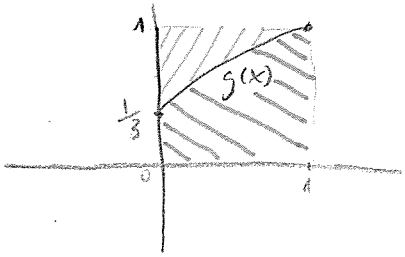
Estudiar si g es invertible en $[0,1]$ y, en caso afirmativo, hallar el dominio $[a,b]$ de g^{-1} y el valor de $\int_a^b g^{-1}$ en función de $\int_0^1 g$

Veamos si g es inyectiva.

$g'(x) = f(x)$ y, por ser $\min f(x) > 0$, podemos asegurar que $g'(x) = f(x) > 0$

Por tanto g es estrictamente creciente y será inyectiva, por lo que es invertible

El dominio de g^{-1} es la $Im(g(x))$ con $x \in [0,1]$



$$Im\, g(x) = \left[\frac{1}{3}, 1\right] \Longrightarrow Dom\, g^{-1}(x) = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

$g: [0,1] \longrightarrow \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

$g^{-1}: \left[\frac{1}{3}, 1\right] \longrightarrow [0,1]$

$y \longrightarrow g^{-1}(y) = x$

No están pidiendo hallar

$$I = \int_{1/3}^{1} g^{-1}(y)\,dy \text{ en función de } \int_0^1 g(x)\,dx = J$$

El valor de la integral I será el área azul rallada mientras que la integral J representaría el área verde. Por tanto, tomando el cuadrado que ambas áreas forman

$$\boxed{I = \int_{1/3}^{1} g^{-1}(y)\,dy = 1^2 - \int_0^1 g(x)\,dx}$$

● Sea a_n la sucesión definida por $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{4}{25}$

a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{5} \leq a_n \leq \frac{4}{5}$

Vamos a demostrar por inducción que $a_n \leq \frac{4}{5}$ $\forall n$

1º) Comprobamos para los primeros términos:

$a_1 = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ ✓ ; $a_2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{25} = \frac{41}{100} < \frac{4}{5}$ ✓

2º) Hipótesis $a_{n-1} \leq \frac{4}{5}$ } H.I

3º) Concluimos: $a_n = a_{n-1}^2 + \frac{4}{25} \leq \frac{16}{25} + \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ Como queríamos demostrar

Vamos a demostrar por inducción que $a_n \geq \frac{1}{5}$

1) Comprobamos para los 1ºs términos

$a_1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ ✓ ; $a_2 = \frac{41}{100} > \frac{1}{5}$ ✓

2º) Hipótesis: $a_{n-1} \geq \frac{1}{5}$ } H.I

3º) Concluimos: $a_n = a_{n-1}^2 + \frac{4}{25} \geq \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}$ Como queríamos demostrar

b) Demostrar que a_n es convergente y calcular su límite

Vamos a demostrar por inducción que $a_{n+1} < a_n$

1) $a_2 = \frac{41}{100} < \frac{1}{2} = a_1$; 2) Hipótesis $a_n < a_{n-1}$

3) $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{4}{25} \overset{H.I}{<} a_{n-1}^2 + \frac{4}{25} = a_n$ Como queríamos demostrar

Por tanto, como a_n es una sucesión de números reales, monótona decreciente y acotada inferiormente, será convergente. Esto es, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, y pasando al límite en la ley de recurrencia:

$L = L^2 + \frac{4}{25}$; $L^2 - L + \frac{4}{25} = 0$; $L = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{3}{5}}{2} = \begin{cases} \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \\ \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \end{cases}$

$L = \frac{1}{5}$ por ser sucesión decreciente

Indusbol .com

● Sea $f(x) = x^5 + ax + b$ tal que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x=1$ es $y = 10x - 6$

a) Calcular los valores de a y b

La recta tangente nos da dos condiciones

$f(1) = y(1) \longrightarrow a + b + 1 = 10 - 6 \longrightarrow b = 4 - a$

$f'(1) = y'(1) \longrightarrow \begin{cases} f'(x) = 5x^4 + a \\ y'(x) = 10 \end{cases} \longrightarrow 5 + a = 10 \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 5 \\ b = -2 \end{matrix}}$

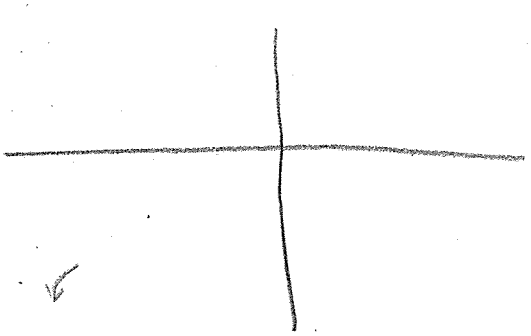
$f(x) = x^5 + 5x - 2$

b) Demostrar que f tiene un único cero real y determinar un intervalo cerrado de amplitud 1 en cuyo interior esté dicho cero.

Frontera

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



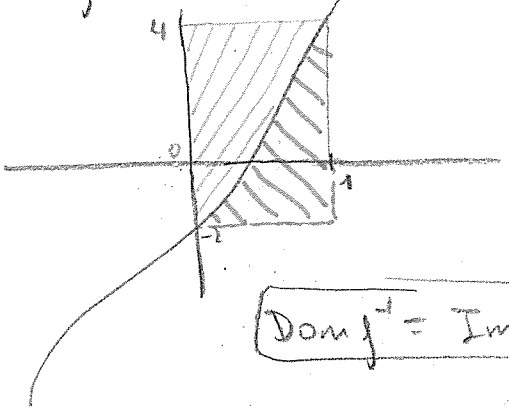
Por continuidad de f y el croquis de la figura, habrá, al menos, un cero

$f'(x) = 5x^4 + 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ f es estrictamente creciente y, por tanto, sólo tendrá 1 cero

$f(0) = -2 < 0$

$f(1) = 4 > 0$

$\Longrightarrow$ **El cero estará en el intervalo $[0, 1]$**



c) Probar la existencia de f^{-1}, calcular su dominio y determinar en qué puntos del dominio, $f^{-1} < 0$

Como f es inyectiva, existe la inversa global de f.

$\text{Dom } f^{-1} = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x)$

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longrightarrow f^{-1}(y) = x$

Por tanto, $f^{-1} < 0$ si $y \in (-\infty, 2)$

d) Calcular $(f^{-1})'(4)$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(1)} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

$f^{-1}(4) = a \longrightarrow f(a) = 4 \longrightarrow a = 1$; $f'(1) = 10$

e) Calcular $I = \int_{-2}^{4} f^{-1}$ La integral pedida es el área rallada en azul que será:

I = Área del rectángulo − Área verde, esto es:

$$I = 6 - \int_0^1 [f(x) - (-2)]\,dx = 6 - \int_0^1 (x^5 + 5x - 2 + 2)\,dx = 6 - \left[\frac{x^6}{6} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 6 - \left[\frac{1}{6} + \frac{5}{2}\right] = 6 - \frac{1+15}{6} = 6 - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

● Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x+2}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Calcular explícitamente la función f

- Si $x > 0 \to f(x) = \int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\, 2t\,dt = 2te^t - \int e^t 2\,dt = 2te^t - 2e^t + C$

$\begin{cases} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{cases}$; $u = t$, $dv = e^t dt$

Deshaciendo el cambio $\longrightarrow f(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$ si $x > 0$

Como f es continua en cero, $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) \Longrightarrow 0 = 2(-1) + C \longrightarrow C = 2$

$$\boxed{f(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + 2 \text{ si } x > 0}$$

- Si $x < 0 \to f(x) = \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 2\arctg x + K$$

y, de nuevo, por ser continua

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) \Longrightarrow 0 = K \longrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 2\arctg x}$$

b) Estudiar si f es derivable en $x=0$ y si existen las derivadas laterales en $x=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2e^{rx}(rx-1)+2}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}{}^{\text{l'Hôpital}}\lim_{x\to 0}e^{rx}=1\\ \lim_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+2\operatorname{arctg}x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}{}^{\text{l'Hôp}}\lim_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^2+1}=2\end{cases}$$

$f'(0)$ no existe, pero sí las derivadas laterales

c) Determinar el intervalo I de mayor amplitud en el cual la función es creciente. Sea g la función restringida al intervalo I, calcular $(g^{-1})'(2)$

Observamos que, si $x>0 \longrightarrow f'(x)>0$

si $x>-2 \longrightarrow f'(x)>0$ $\quad x\neq 0$

Por tanto, el intervalo será $\boxed{I=[-2,\infty)}$

Como g es estrictamente creciente, g será inyectiva y, por tanto, invertible. Aplicamos el teorema de la función inversa

$$(g^{-1})'(2)=\frac{1}{g'(g^{-1}(2))}=\frac{1}{g'(1)}=\boxed{\frac{1}{e}}$$

$g^{-1}(2)=a \longrightarrow g(a)=2 \longrightarrow$ A ojo vemos que $a=1$

- Sea f una función continua en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f=0$. ¿Verdadero o falso?

i) Existe $x\in[a,b]$ tal que $f(x)=0$

$\int_a^b f(x)dx=0$ Como f es continua, podemos aplicar el teorema del valor medio: $f(\xi)(b-a)=0 \longrightarrow f(\xi)=0$ $\quad \xi\in(a,b)$ **Verdadero**

ii) $\forall$ partición P del intervalo $[a,b]$, la suma superior de Riemann Darboux $S_f(P)\geq 0$

Verdadero. Por definición de suma superior de Riemann Darboux, cualquier suma superior es mayor o igual que el valor total

Indusbol .com

● Sea f una función continua en $(0,+\infty)$ tal que $\forall x>0$ $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$ y sea, para $x>0$, $F(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{1}{t}f(t)\,dt$

a) Probar que $\forall x>0$ $F(x)=2\log(x)$

Como, $x>0$ → los límites de integración son derivables y sabemos que f es continua, la función subintegral es continua. Por tanto, el TFC nos asegura que $F(x)$ es derivable y, además que

$$F'(x)=\frac{1}{x}f(x)-\frac{1}{1/x}f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{x}\left[f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=2\frac{1}{x}$$

$F(x)=\int 2\frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C$. Como $F(1)=0$ → $2\ln 1+C=0$ → $C=0$

$\boxed{F(x)=2\log|x|}$ como queríamos demostrar

b) Obtener el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de orden 3 en $x=1$ de $F(x)$

El polinomio pedido será $P_3(x)=f(1)+f'(1)\frac{x-1}{1!}+f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!}+f'''(1)\frac{(x-1)^3}{3!}$

$f(1)=0$; $f''(x)=2\frac{-1}{x^2}$, $f'''(x)=\frac{+2\cdot 2x}{x^4}$

$f'(1)=2$; $f''(1)=-2$, $f'''(1)=4$ → $P(x)=0+2\frac{(x-1)}{1!}-2\frac{(x-1)^2}{2!}+4\frac{(x-1)^3}{3!}$

$\boxed{P_3(x)=2(x-1)-(x-1)^2+\frac{2}{3}(x-1)^3}$

c) Calcular $P(1.1)$ y estimar el error cometido al tomar como valor de $f(1.1)$ el valor $P(1.1)$

$P(1.1)=2(0,1)-(0,1)^2+\frac{2}{3}(0,1)^3$

La fórmula de Taylor de $F(x)$ alrededor del punto $a=1$ utilizando el polinomio de grado 3 es:

$F(x)=P(x)+f^{4)}(\xi)\frac{(x-1)^4}{4!}$ $\quad \xi\in(1,x)$ ó $(x,1)$

Particularizando en $x=1.1$

$F(1.1)=P(1.1)+f^{4)}(\xi)\frac{(0,1)^4}{4!}$ $\quad \xi\in(1,1.1)$ → Por tanto, el error absoluto es:

$f^{4)}(x)=\frac{4x^4-4x\,4x^3}{x^8}=\frac{-12}{x^4}$

$$Err_{abs}=\left|F(1.1)-P(1.1)\right|=\left|f^{4)}(\xi)\frac{(0.1)^4}{4!}\right|=\left|\frac{-12}{\xi^4}\frac{(0,1)^4}{4!}\right|<\boxed{\frac{(0,1)^4}{2}}$$

$\xi>1$

Indusbook.com

- Sea $f(x) = \min\left(\frac{x^2}{2}, \frac{1}{1+x^2}\right)$. El valor de $(f \circ f)'(2) = \frac{-4}{125}$, ¿verdadero o falso?

$$(f \circ f)' = f'(f(2))\, f'(2) = f'\left(\tfrac{1}{5}\right) f'(2) = f_2'\left(\tfrac{1}{5}\right) f_1'(2) = \frac{1}{5}\cdot\frac{-4}{25} = \boxed{\frac{-4}{125}} \rightarrow \text{Verdadero}$$

$f(2) = \min\left(2, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$

En un entorno de $x=2 \rightarrow f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f_1'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

En un entorno de $x = \frac{1}{5} \rightarrow f_2(x) = \frac{x^2}{2} \rightarrow f_2'(x) = x$

- El valor del límite $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{n/n}}{n} = e-1$, ¿Verdadero o falso?

Podríamos aplicar el criterio de Stolz, pero el límite empeora.

Vamos a intentar aplicar el paso a integral

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{i/n} = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = \boxed{e-1} \rightarrow \text{Verdadero}$$

- Sea $f(x) = \int_x^1 t \ln|1+t^2|\, dt$ y $P(x)$ un polinomio de grado menor igual que "$2n-1$" tal que se cumple que: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^{2n+1}} = 0$ (*)

Calcular razonadamente $P(x)$

La condición (*) implica que (aplicando L'Hôpital "$2n+1$" vez) el polinomio $P(x)$ verifica que $f^{(k)}(0) = P^{(k)}(0)$ con $k = 0, 1, 2, \ldots 2n+1$

Por tanto, el polinomio pedido $P(x)$ es el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de $f(x)$ alrededor del punto $a=0$

Como la función subintegral es continua y los límites de integración son derivables, el TFC nos asegura que $f(x)$ es derivable y, además:

$f'(x) = -x\ln|1+x^2|$, en consecuencia, el desarrollo de Taylor alrededor del origen de $f'(x)$ es:

$$f'(x) = -x\left[x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \frac{(x^2)^4}{4} \cdots (-1)^{n+1}\frac{(x^2)^n}{n} \cdots\right] =$$

$$= -x^3 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^7}{3} + \frac{x^9}{4} \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n} \cdots$$

Integrando obtendremos:

$$f(x) = C + x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6\cdot 2} - \frac{x^8}{8\cdot 3} + \frac{x^{10}}{10\cdot 4} \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)n} \cdots$$

$$\frac{t^3}{-t^3+t} \quad \frac{t^2+1}{t}$$

$$f(0) = C \longrightarrow C = f(0) = \int_0^1 t \log(1+t^2)\,dt = \log|1+t^2|\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\,dt =$$

(1 c.p.s.)

$$= \frac{1}{2}\log 2 - \int_0^1 \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{\log 2}{2} - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{\log^2}{2} - \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2}\log|1+t^2|\right|_0^1 = \log 2 - \frac{1}{2}$$

Por tanto, el polinomio pedido será

$$P(x) = \log 2 - \frac{1}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6\cdot 2} - \frac{x^8}{3\cdot 8} + \frac{x^{10}}{4\cdot 10} \cdots (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(n-1)}$$

- Sea $P(x) = (1-|x|)(1-[x])$ Calcular $(f^{-1}\circ f)'(\frac{1}{2})$

$g(x) = (f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, por tanto, $g'(x) = 1$, luego el valor pedido $g'(\frac{1}{2}) = 1$

De otra forma, aplicaremos la regla de la cadena

$$(f^{-1}\circ f)'(\tfrac{1}{2}) = (f^{-1})'(f(\tfrac{1}{2}))\cdot f'(\tfrac{1}{2}) = (f^{-1})'(\tfrac{1}{2})\,f'(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{1}{2}))}\,f'(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})}\,f'(\tfrac{1}{2}) =$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = (1-\tfrac{1}{2})(1-0) = \tfrac{1}{2}$$

$$f^{-1}(\tfrac{1}{2}) = a \rightarrow f(a) = \tfrac{1}{2} \longrightarrow a = \tfrac{1}{2} \qquad = \boxed{1}$$

- Sea $f(x) = \ln(x^2)$, estudiar si verifica el teorema del valor medio del cálculo integral en el intervalo $[1,e]$ y, en caso afirmativo, hallar el punto del intervalo al que alude el teorema.

Como f es continua en $[1,e]$, se cumplen las condiciones del teorema del valor medio del calculo integral

$$\int_1^e \ln(x^2)\,dx = \ln(\xi^2)(e-1) \quad \text{con } \xi \in [1,e]$$

$$\underbrace{\int_1^e 2\ln|x|\,dx}_{2\ln(x)x - 2x\,\Big|_1^e = 2e-2e+2 = +2} = 2\ln(\xi)(e-1), \longrightarrow 2\ln(\xi)(e-1) = +2$$

$$\ln(\xi) = +\frac{1}{e-1}$$

$$\boxed{\xi = e^{\frac{1}{e-1}}}$$

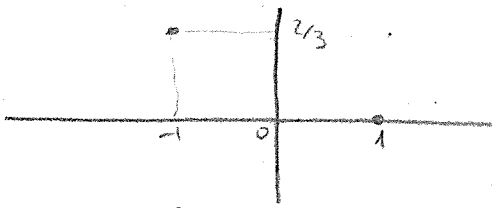
Indusbol .com

● Sea $f(x)=\int_x^1 (|t+1|-2t^2)\,dt$, hallar $f([-1,1])$

· Nos piden hallar el conjunto imagen cuando $x \in [-1,1]$

Frontera $f(1)=0$

$f(-1)=?$



$$f(-1)=\int_{-1}^{1}(|t+1|-2t^2)\,dt=\int_{-1}^{1}t+1-2t^2\,dt=-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{-2}{3}+\frac{1}{2}+1-\left(\frac{+2}{3}+\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3}$$

Como la función subintegral es continua en $[-1,1]$ y los límites de integración son derivables, el TFC nos asegura que $f(x)$ es derivable, y además $f'(x)=\frac{d}{dx}\left[|x+1|-2x^2\right]=-x-1+2x^2=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}1 \text{ (No)}\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

$f''(x)=4x-1 \Rightarrow f''\left(\frac{-1}{2}\right)=-2-1=-3<0 \longrightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right)$ es máximo relativo y, por no haber más candidatos, máximo absoluto

$$f([-1,1])=\left[0, f\left(\frac{-1}{2}\right)\right]$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}(|t+1|-2t^2)\,dt=\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}(-2t^2+t+1)\,dt=-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\Big|_{-1}^{\frac{-1}{2}}=$$

$$=\frac{-2}{3}+\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=2-\frac{8}{12}-\frac{1+3}{12}=2-1=1$$

$$\boxed{f([-1,1])=[0,1]}$$

Indusbol .com

● Sea $f \in C^2[\mathbb{R},\mathbb{R}]$ una función positiva que $\forall x \in \mathbb{R}$ cumple $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = 2$ (*), $f(0)=2$ y $f'(0)=0$

a) Determinar el valor de $f'(x)$ en función de x y $f(x)$

La expresión (*) se puede escribir como $(f'(x)f(x))' = 2$, e integrando, $f'(x)f(x) = 2x + C$

Particularizando en $x=0 \longrightarrow f'(0)f(0) = 0 = 2\cdot 0 + C \longrightarrow C = 0$

Por tanto, $\boxed{f'(x) = \frac{2x}{f(x)}}$

b) Calcular explícitamente f y estudiar su crecimiento

Si $x>0$, $f'(x)>0 \longrightarrow f$ es estrictamente creciente
Si $x<0$, $f'(x)<0 \longrightarrow f$ es estrictamente decreciente
Además, $f(0)=2$ es mínimo relativo y absoluto

$f(x)f'(x) = 2x$; $\frac{(f(x))^2}{2} = 2\frac{x^2}{2} + K$. Particularizamos en $x=0$

$K = \frac{f^2(0)}{2} = 2 \Longrightarrow f(x)^2 = 2x^2 + 4$; $\boxed{f(x) = \sqrt{2x^2+4}}$

c) Sea g la función f restringida al intervalo $(0,\infty)$, probar que $\exists$ y es derivable la inversa de g y calcular $(g^{-1})'(6)$

Como g es estrictamente creciente, es inyectiva, y por tanto, invertible. Además, como la derivada de g nunca se anula, el teorema de la función inversa nos garantiza que la inversa será derivable.

$$(g^{-1})'(6) = \frac{1}{g'(g^{-1}(6))} = \frac{1}{g'(4)} = \frac{1}{8/f(4)} = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$g^{-1}(6) = a \longrightarrow g(4) = 6 \Longrightarrow \sqrt{2a^2+4} = 6$

$2a^2+4 = 36$; $a^2 = \frac{36-4}{2} = 16$

$a = 4$

● Escribir las funciones inversas hiperbólicas mediante una expresión logarítmica equivalente

a) $y = \text{Arg Sh}(x) \Longrightarrow x = \text{Sh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$; $2x = e^y - e^{-y}$

$2xe^y = e^{2y} - 1$; $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1} \xrightarrow{\text{solo válida la positiva}} e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

$y = \ln|x + \sqrt{x^2+1}|$

$$\boxed{y = \text{Arg Sh}(x) = \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]}$$

b) $y = \text{Arg Ch}(x) \Longrightarrow x = \text{Ch}(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $2x = e^y + e^{-y}$

$2xe^y = e^{2y} + 1$; $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$

$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1} \xrightarrow{\text{solo válida la positiva}} e^y = x + \sqrt{x^2-1}$

$y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$$\boxed{y = \text{Arg Ch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})}$$

c) $y = \text{Arg Th}(x) \Longrightarrow x = \text{Th}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$; $x(e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y}$

$x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1$; $e^{2y}(x-1) = -1 - x$

$e^{2y} = \frac{-(x+1)}{x-1} = \frac{x+1}{1-x}$, $2y = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

$$\boxed{y = \text{Arg Th}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$$

17. 19

● Sea la función $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt$

a) Calcular explícitamente la función $f(x)$

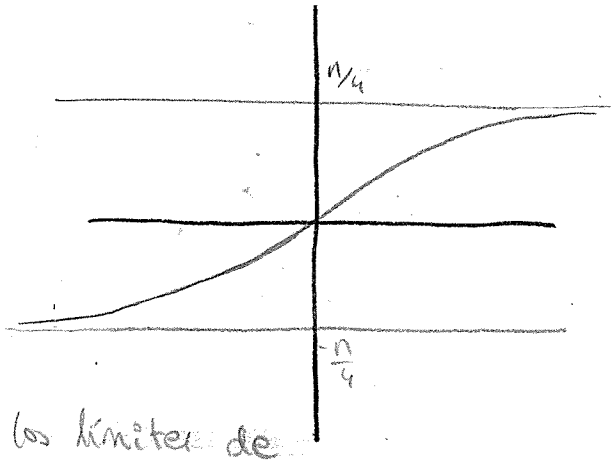
$$f(x) = \operatorname{arctg}(e^t)\Big|_0^x = \boxed{\operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{4}}$$

b) Hallar el recorrido de la función f

Frontera:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{4}$$



Como la función subintegral es continua y los límites de integración derivables, el TFC nos asegura que $f(x)$ es derivable. y además: $f'(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1} > 0 \longrightarrow f$ es estrictamente continua

Por tanto: $\boxed{Im(f) = \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}$

c) Hallar el polinomio de Taylor de grado dos en $x=0$ de la función f

El polinomio pedido será: $P_2(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!}$

$f(0) = 0$

$f'(0) = \frac{1}{2}$; $f''(x) = \frac{e^x(e^{2x}+1) - e^x 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$f''(0) = 0$

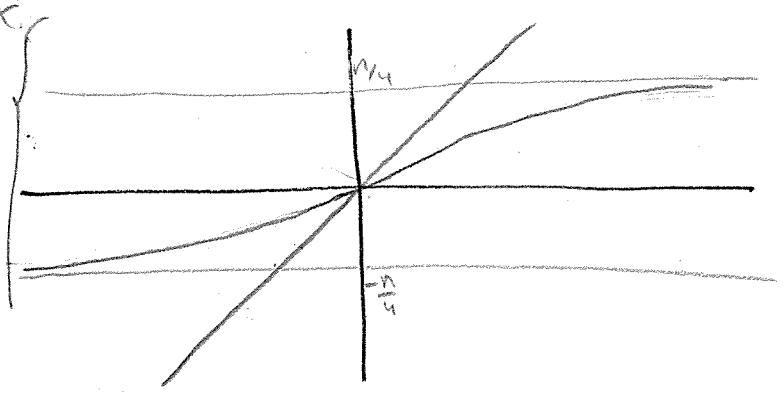
$\Longrightarrow$ El polinomio pedido será

$$\boxed{P_2(x) = \frac{1}{2}x}$$

d) Estudiar el nº de soluciones reales de las ecuaciones siguientes

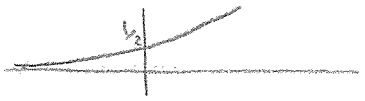
$f(x) = \frac{e^x}{2}$ y $f(x) = x$

Consideremos la ecuación $f(x) = x$. El nº de soluciones es igual al nº de puntos de corte de $y = f(x)$ con $y = x$. Como la derivada de f en el origen es $\frac{1}{2}$, tendremos el siguiente croquis $\longrightarrow$

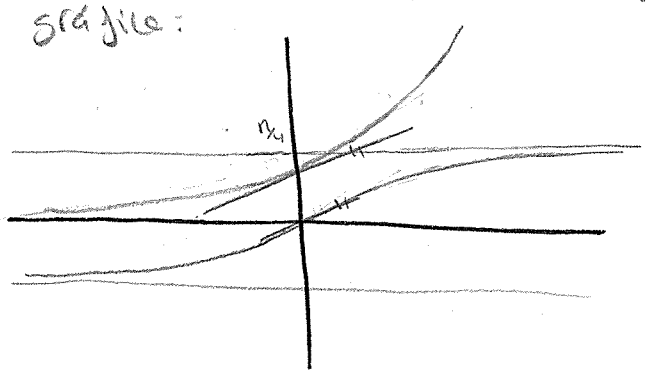


Por tanto, la ecuación $f(x) = x$ tiene una sola solución que además será $x = 0$

Consideremos la ecuación $f(x) = \frac{e^x}{2}$



La derivada de $\frac{e^x}{2}$ en el origen es $\frac{1}{2}$, por tanto tendremos la siguiente gráfica:



Por tanto, el nº de soluciones es cero

e) Sea $a_0 = \ln\sqrt{3}$ y $a_{n+1} = f(a_n)$, estudiar si la sucesión a_n es convergente y, en caso afirmativo, calcular su límite

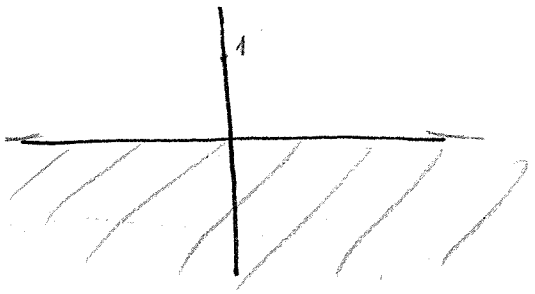
Como la función $f(x)$ es monótona creciente, ya podemos asegurar que la sucesión es monótona. Además, todos los términos de la sucesión estarán entre $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$, en consecuencia la sucesión está acotada tanto superior como inferiormente

Por tanto, como es una sucesión de números reales, monótona y acotada, será convergente. Esto es: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, y pasando al límite en la ley de recurrencia $L = f(L) \rightarrow L$ es punto fijo $\rightarrow$ $\boxed{L = 0}$

● Sea la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

a) Estudiar los extremos y la convexidad de f. Representar la función

Como $f(-x) = f(x)$, f es simétrica respecto del eje OY



Es evidente que f siempre es positiva

Corte con ejes: OY $\rightarrow$ $x = 0$, $y = 1$

OX $\rightarrow$ $y \neq 0$ No hay

Asíntotas

Verticales $\rightarrow$ No hay ; Horizontales: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1+x^2} = \frac{-x}{(x^2+1)^{3/2}} = 0 \rightarrow x = 0$$, $\boxed{f(0) \text{ es máximo relativo y absoluto}}$

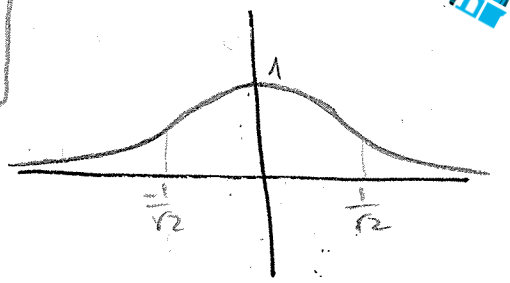
$$f''(x) = \frac{-(x^2+1)^{3/2} + x\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}2x}{(x^2+1)^3} = \frac{(x^2+1)^{1/2}\left[-(x^2+1) + 3x^2\right]}{(x^2+1)^{1/2}(x^2+1)} = 0 \rightarrow 2x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Como solamente hay dos candidatos y por el croquis de la figura, aseguramos que ambos son puntos de inflexión

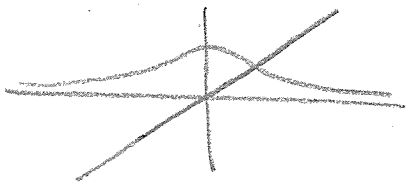
Extremos { No hay mínimos relativos ni absolutos
$f(0)=1$ es máximo relativo y absoluto

Gráfica



$f(x)$ es convexa en $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
$f(x)$ es cóncava en $[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

b) Probar que existe un único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha)=\alpha$
Es evidente que las curvas $y=f(x)$ e $y=\alpha$ se cortan sólo en un punto



c) Se considera la sucesión a_n definida por $a_{n+1}=f(a_n)$ con $a_0 \in (0,1]$
Probar que a_n es convergente y calcular su límite

Vamos a analizar si f es una función contractiva

Hay que ver si $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ con $K \in (0,1)$

Vamos a aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo genérico $[y,x]$. Podemos hacerlo porque f es continua en $[y,x]$, f es derivable en (y,x) ⟶ Aplicamos teorema del valor medio o de los incrementos finitos

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi) \text{ con } \xi \in (y,x)$$

$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)||x-y|$; Por tanto, nos interesa encontrar una cota superior del valor absoluto de la derivada de f

El máximo valor de esta derivada se alcanzará en los puntos de inflexión de f, por tanto:

$$|f'(\xi)| \leq \left|f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \left|\frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2}}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 1$$

Queda demostrado que $f(x)$ es una función contractiva, en consecuencia, es de Cauchy y, por ser de números reales, será convergente. Esto es $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y pasando al límite en la ley de recurrencia

$$L=f(L) \longrightarrow L=\frac{1}{\sqrt{1+L^2}}; \quad L^2(1+L^2)=1; \quad L^4+L^2-1=0$$

$$L^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \longrightarrow \boxed{L=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$$

d) Sea b_n la sucesión definida por $b_{n+1} = \frac{1}{[f(b_n)]^2} - 1$ con $b_0 \in [-1,1]$; probar que b_n es convergente y calcular su límite

$$b_{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+b_n^2}}\right)^2} - 1 \Longrightarrow b_{n+1} = b_n^2$$

Tenemos tres casos: Si $b_0 = 1 \rightarrow b_n = 1 \ \forall n \Rightarrow$ La sucesión es constante y $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$

Si $b_0 = -1 \rightarrow b_n = 1 \ \forall n \geq 1 \Rightarrow$ La sucesión es constante y $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$

Si $b_0 \in (-1,1) \rightarrow$ Tenemos que, como b_0 es un número entre $(-1,1)$, al elevarlo al cuadrado, se hará más pequeño. Por tanto la sucesión es monótona decreciente. Además, estará acotada inferiormente por cero a partir del b_1, por tanto, será convergente $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, y pasando al límite en la ley de recurrencia $\rightarrow L = L^2 \begin{cases} L = 0 \\ L = 1 \end{cases}$

El límite es cero por ser b_n monótona decreciente

● ¿Verdadero o falso? $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3+n^3}\right) = \frac{1}{3}\ln 2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^3} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^3} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^3}\right) = \lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^3}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right)dx = \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = (x^2-x+1)A + (x+1)(Bx+C) \\ x = -1 \rightarrow 1 = 3A \rightarrow A = \frac{1}{3} \\ x^2) \longrightarrow 0 = A + B; \ B = -\frac{1}{3} \\ x^0) \longrightarrow 1 = A + C; \ C = \frac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow = \frac{1}{3}\ln|x+1|\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}\left(\ln|x^2-x+1|\Big|_0^1 - 3\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}3\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}4\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \boxed{\frac{1}{3}\ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{3}}$$

Verdadero

$\rightarrow \arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$

Indusbol .com

● Sea $f(x) = \frac{1}{2^{[x]+1}}$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Analizar si las cuestiones son verdaderas o falsas, con $n \in \mathbb{N}$

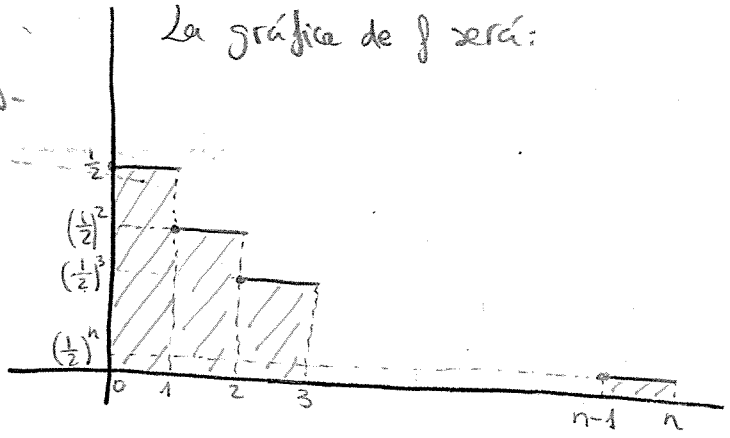
a) f es integrable en $[0,n]$

Es **verdadero** y lo podemos justificar de dos formas:

1º) Por ser f monotona decreciente

2º) Por tener un nº finito de puntos de discontinuidad

La gráfica de f será:



b) $\forall x \in (n-1,n)$, $f'(x) = 0$

Es **verdadera** ya que $\forall x \in (n-1,n)$, $f(x)$ es cte $\Rightarrow f'(x) = 0$

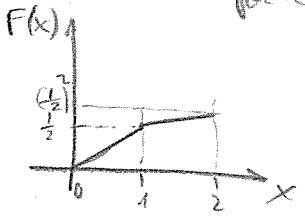
c) F es continua en $[0,n]$

Si f es continua $\rightarrow$ F es derivable $\rightarrow$ f no continua PERO

Si f es acotada $\rightarrow$ F es continua $\rightarrow$ como f es acotada, F es continua

d) F es derivable en $[0,2]$

No podemos aplicar el TFC pues no da condiciones suficientes pero no necesarias para que F sea derivable



Sabemos que, cuando F sea derivable, $F'(x) = f(x)$

Por tanto $F(x)$ no será derivable en $[0,2]$ por no serlo en $x=1$ ya que la derivada por la izquierda a $\frac{1}{2}$ y por la derecha $\frac{1}{4}$

FALSO

e) El $\lim_{n\to\infty} F(n) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(t)\,dt \overset{\text{El valor de la integral será el area rallada de la figura}}{=} \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n}_{\text{Areas de rectangulos}} \Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{1}$$

↑ Estamos ante una suma de terminos de una P.G = $\frac{(1^{er}\text{ termino})(1-\text{razon}^{n^{o}\text{ter}})}{1-\text{razón}}$

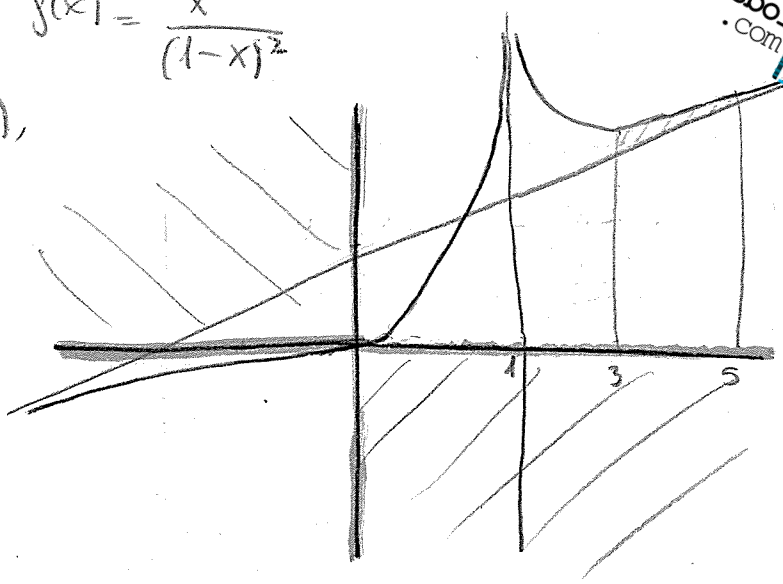
Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(1-x)^2}$

a)

Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, no hay simetrías

Como la curva está factorizada, habrá cambio de signo en los factores $x=0$, $y=0$

Y como, si x es grande y positiva, $f(x)$ se va al infinito, no habrá función en la región rallada



Corte con ejes $\begin{cases} \text{Eje OY} \rightarrow x=0;\ y=0 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y=0;\ x=0 \rightarrow y=\varphi(x)x^3 \rightarrow \text{Tangente horizontal} \end{cases}$ $3>1$

Asíntotas

verticales $\rightarrow x=1$; Horizontales $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

Oblicuas $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x(1-x^2)} = 1 = m$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2-2x+1)}{(1-x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 = n \longrightarrow y = x+2$$

Ya sabemos que $f'(x)$ se anula, al menos en dos puntos $\begin{cases} x=0 \\ \text{y para una } x>1 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x)^2 - x^3 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{\cancel{(1-x)}\left[3x^2(1-x)+2x^3\right]}{(1-x)^4} = 0$$

$$x^2(3-3x+2x) = 0 \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{Es punto de inflexión} \\ x=3 \end{cases}$$

Como solamente queda un candidato, $f(3) = \dfrac{27}{4}$ es mín. relativo

Veamos si corta a la asíntota

$f(3) = \dfrac{27}{4}$, $y = x+2 \rightarrow y(3) = 5 \Longrightarrow \dfrac{27}{4} > 5 \rightarrow$ No corta

b) Hallar el área comprendida entre la gráfica de la función y las rectas $y = x+2$, $x=3$, $x=5$

El área pedida es la rallada en la gráfica

$$I = \int_3^5 \left(f(x) - (x+2)\right)dx = \int_3^5 \left[\frac{x^3}{(1-x)^2} - (x+2)\right]dx = \int_3^5 \frac{x^3 - (x^2-2x+1)(x+2)}{(1-x)^2}dx =$$

$$= \int_3^5 \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 + 2x^2 + 4x - x - 2}{(1-x)^2}dx = \int_3^5 \frac{3x-2}{(1-x)^2}dx = \int_3^5 \left[\frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2}\right]dx =$$

$3x-2 = A(1-x) + B$

$x=1 \longrightarrow 1 = B$

$x=0 \longrightarrow 3 = -A \longrightarrow A=-3$

$$\Longrightarrow = \left[-3\ln|1-x| - \frac{(1-x)^{-1}}{(-1)}\right]_3^5 =$$

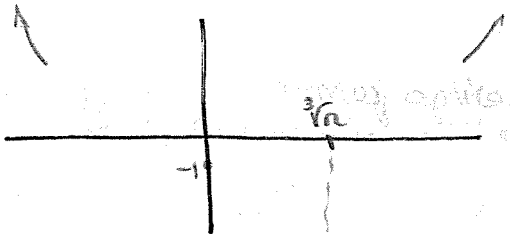
$$= \boxed{-3\ln 4 + \frac{1}{4} - 3\ln 2 + \frac{1}{2}}$$

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, esbozar la gráfica de la función $f_n(x) = x^4 - 4nx - 1$, $x \in \mathbb{R}$ indicando sus intervalos de crecimiento y sus extremos relativos

Puntos de corte

Eje OY $\rightarrow$ $x=0 \rightarrow y=-1$

Eje OX $\rightarrow$ $y=0 \rightarrow x^4 - 4nx - 1 = 0$



Asíntotas

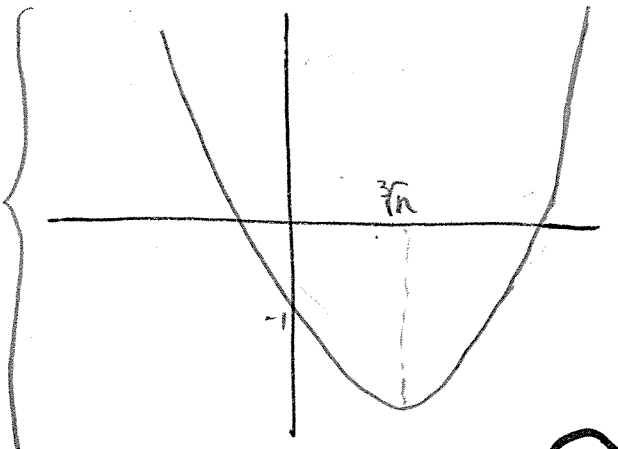
No hay verticales / Horizontales $\begin{cases} \lim_{x\to\infty}(x^4 - 4nx - 1) = \infty \\ \lim_{x\to-\infty}(x^4 - 4nx - 1) = \infty \end{cases}$

Ya sabemos que $f_n(x)$, por continuidad y el croquis de la figura tendrá seguro mínimo absoluto y, por ser f derivable se alcanzará en un punto tal que $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 4n = 0 \longrightarrow x = \sqrt[3]{n}$$

Como solamente hay un candidato, y por el croquis de la figura, podemos asegurar que $f_n(\sqrt[3]{n})$ es mínimo relativo y absoluto.

La gráfica de $f_n(x)$ será $\Longrightarrow$



$f_n(x)$ es creciente en $[\sqrt[3]{n}, \infty)$ y decreciente $(-\infty, \sqrt[3]{n}]$
No tiene máximos relativos ni por tanto absolutos
$f(\sqrt[3]{n})$ es mínimo relativo y absoluto

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^4 - 4nx - 1 = 0$ y cuántas de ellas son positivas?
De la gráfica se observa que esta ecuación siempre tendrá 2 soluciones. Una de ellas negativa y otra positiva y, además, más grande que $\sqrt[3]{n}$

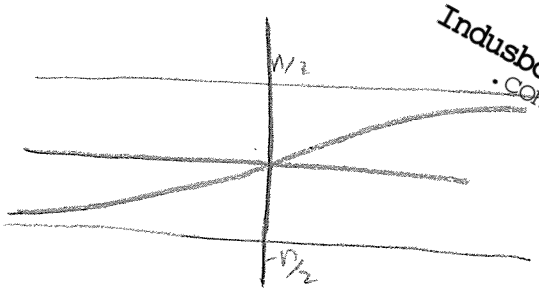
c) Si, para cada n, x_n es una solución positiva de la ecuación anterior, se considera la sucesión x_n. Calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$
Como x_n está a la derecha de $\sqrt[3]{n}$ y el $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} = \infty$ podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

d) Estudiar $\lim_{n\to\infty} ((x_n)^3 - 4n)$
Sabemos que x_n verifica la ecuación $x_n^4 - 4n x_n - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n(x_n^3 - 4n) = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n^3 - 4n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$

● Sea la función $f(x) = \int_x^{1/x} \operatorname{arctg} t \, dt$, se pide:

a) Determinar el dominio, los ceros y las simetrías de f
b) Estudiar la continuidad de f y determinar su comportamiento en el origen y en $\pm\infty$
c) Obtener una expresión de f calculando la integral
d) Estudiar la derivabilidad de f y hallar f'
e) Determinar los puntos estacionarios y los extremos locales y globales de f
f) Calcular el valor de la derivada en los ceros de f

Sabemos que la gráfica de arctg(t) es



a) $\boxed{Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}}$

Como la función subintegral es continua y los límites de integración derivables $\forall x \neq 0$, el TFC nos asegura que $\boxed{f(x) \text{ es derivable y, además: } f'(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) - \operatorname{arctg} x}$ d)

$$f(x) = \int_x^{1/x} \operatorname{arctg} t\, dt = \operatorname{arctg}(t)\, t \Big|_x^{1/x} - \int_x^{1/x} t \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}(x)\, x - \left(\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right)\Big|_x^{1/x} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x^2}\right| + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| = f(x)}$$ c)

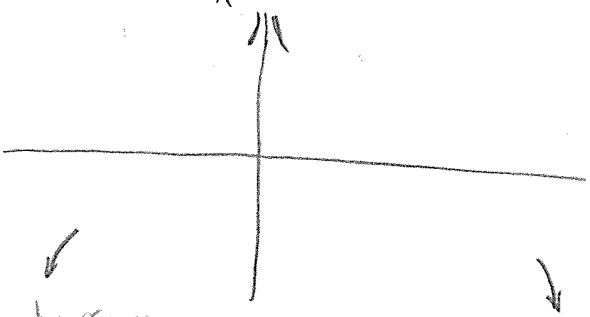
a) De la expresión tenemos que $f(-x) = f(x)$, por tanto, $f(x)$ tendrá simetría par, es decir, $\boxed{\text{será simétrica respecto del eje OY}}$

También lo podríamos haber hecho sin necesidad de calcular la integral

$$f(-x) = \int_{-x}^{-1/x} \operatorname{arctg} t\, dt \overset{\substack{t=-z \\ dt=-dz}}{=} \int_x^{1/x} \operatorname{arctg}(-z)(-dz) = \int_x^{1/x} \operatorname{arctg} z\, dz = f(x)$$

b) Comp origen

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} t\, dt = \boxed{\infty}$$



$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$ (por simetría)

Si no hubiéramos estudiado simetría haríamos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \int_0^{-\infty} \operatorname{arctg} t\, dt = -\int_{-\infty}^{0} \operatorname{arctg} t\, dt = \boxed{\infty}$$

b) Comp. $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_{\infty}^{0} \operatorname{arctg} t\, dt = -\int_0^{\infty} \operatorname{arctg} t\, dt = \boxed{-\infty}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (por simetría) Si no hubiéramos estudiado simetría haríamos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{0} \operatorname{arctg} t\, dt = \boxed{-\infty}$.

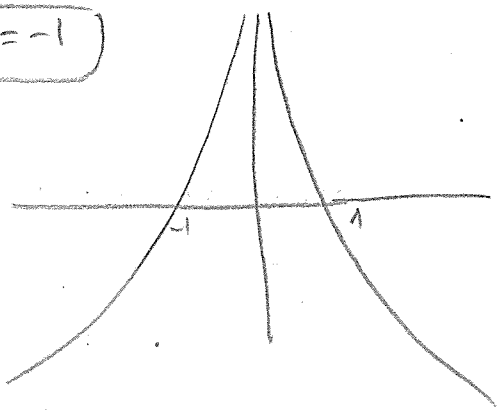
b) Como la función subintegral está acotada, $\boxed{f \text{ será continua en su Dominio } [0, +\infty]}$

Si $x > 0 \longrightarrow f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente

Si $x < 0 \longrightarrow f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es estrictamente creciente

e) En consecuencia, no habrá puntos estacionarios (p. inflexión), tampoco extremos locales ni globales.

a) La función f tendrá dos ceros en $x = 1$ y $x = -1$



Por último nos piden $f'(1)$ y $f'(-1)$

$$f'(1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

$$f'(-1) = -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{-6\pi}{4} = \frac{-3\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

* * *

- El valor del $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-(\cos x)^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$ es $\frac{-1}{2}$, ¿verdadero o falso?

Taylor en sen x y ln de algo que → 1

$$(\cos(x))^{\operatorname{sen} x} = e^{\ln(\cos x)^{\operatorname{sen} x}} = e^{\operatorname{sen} x \ln(\cos x)} = e^{x(\cos x - 1)} =$$

Taylor cos x

$$= e^{x\left[\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\right] - 1\right]} = e^{x\left(\frac{-x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\right)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{x\left(\frac{-x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\right)}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\right)}{1}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{+x^3}{2!\, x^3} = \boxed{\frac{+1}{2}}$$

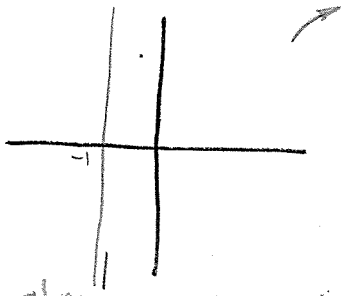
Indusbol .com

● Sean $f(x) = x + \ln(1+x)$ con $x > -1$ y $h(x) = \int_1^x (t + \ln(1+t))\,dt$

a) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en $(-1, +\infty)$

Frontera: $\lim_{x \to \infty} (x + \ln(1+x)) = \infty$

$\lim_{x \to -1^+} (x + \ln(1+x)) = -\infty$



Como f es continua en $(-1, \infty)$ y por el croquis de la figura, aseguramos que habrá, al menos, una solución

$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0 \quad \forall x \in (-1, \infty) \rightarrow f$ es estrictamente creciente

y, por tanto, sólo habrá una solución

b) Estudiar si existe una función g cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y tal que $\forall x \in (-1, +\infty)$ $(g \circ f)(x) = x$. En caso afirmativo, calcular $g'(0)$

La función g, si existe, es la inversa de f.

Como f es creciente, es inyectiva y, por tanto, invertible y existe su inversa $g = f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow (-1, \infty)$ $\quad f^{-1}(0) = a$; $f(a) = 0 \rightarrow a = 0$

$$g'(0) = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) Calcular $h(0)$, $h'(0)$ y $h''(0)$. Hallar la $h^{(n)}(0)$ para $n \geq 3$

Como la función subintegral es continua y los límites de integración son derivables, el TFC nos asegura que h es derivable y, además:

$h'(x) = x + \ln|1+x|$; $h'(0) = 0$

$h''(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$; $h''(0) = 2$

$h'''(x) = (1+x)^{-2}$

$h^{IV}(x) = 2(1+x)^{-3}$

$h^{V}(x) = -3!(1+x)^{-4}$

$h^{VI}(x) = 4!(1+x)^{-5}$

$\vdots$

$$\Rightarrow \boxed{h^{n}(x) = (-1)^n (n-2)! (1+x)^{-(n-1)}}$$

$$h(0) = \int_1^0 (t + \ln(1+t))\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^0 + \Big[\ln|1+t|\,t\Big]_1^0 - \int_1^0 t\,\frac{1}{t+1}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2} - \ln 2 + \int_1^0 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = -\frac{1}{2} - \ln 2 - 1 - \left(\log|t+1|\right)\Big|_1^0 =$$

$$= -\frac{3}{2} - \ln 2 + \ln 2 = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

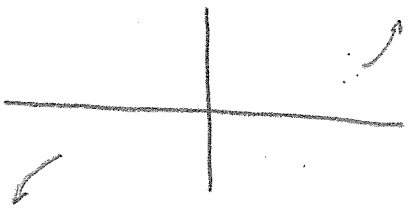
- Verdadero o falso

a) La ecuación $e^{x^3+7x+1} = 1$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

$f(x) = x^3 + 7x + 1 = 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



$f'(x) = 3x^2 + 7 > 0 \Longrightarrow$ f es estrictamente creciente y la ecuación tiene, por tanto, una sola solución (ver croquis) **Verdadero**

b) Sea $f(x) = \dfrac{4}{3(1+\ln(1+x))}$ y $g(x) = x + [x]$, el valor de $(g\circ f)''(0) = 4$

Supongamos que puedo aplicar la regla de la cadena:

$$(g\circ f)'(x) = g'[f(x)]\,f'(x)$$

$$(g\circ f)''(x) = g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))\,f''(x)$$

$$(g\circ f)''(0) = g''(f(0))(f'(0))^2 + g'(f(0))\,f''(0) =$$

$$f(0) = \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = \frac{-4\cdot 3\cdot \frac{1}{1+x}}{3^2(1+\ln(1+x))^2} =$$

$$= \frac{-4}{3(1+\ln(1+x))^2(1+x)}$$

$$f''(x) = \frac{4\left(2(1+\ln(1+x))\frac{1}{1+x}(3x+3) + (1+\ln(1+x))^2 3\right)}{3^2(1+\ln(1+x))^4(1+x)^2}$$

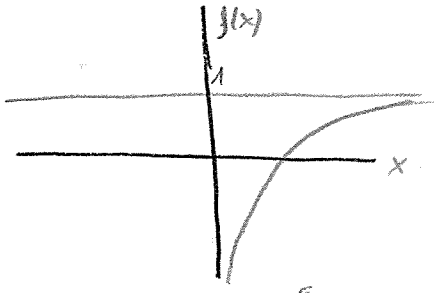
$$f''(0) = \frac{4\cdot(2\cdot 3+3)}{3^2} = 4$$

$$= g''\left(\frac{4}{3}\right)(f'(0))^2 + g'\left(\frac{4}{3}\right)f''(0) =$$

$$= f''(0) = 4 \rightarrow \text{Verdadero}$$

c) Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ una función tal que $\forall x\in(0,+\infty)$ $f'(x)>0$ y que verifica $f(0,+\infty)=(-\infty,1)$ entonces $\lim_{x\to 1^-} x f^{-1}(x)=\infty$

Como f es creciente y nos dan su dominio y su conjunto imagen un croquis de su gráfica sería:



Nos piden $\lim_{y\to 1^-} y f^{-1}(y)=\infty$ ($y\to 1^-$, $f^{-1}(y)\to\infty$)

Verdadero

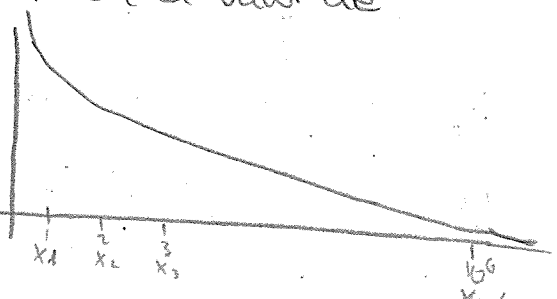
● Sea $\alpha=\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$

a) Calcular $\int_1^{10^6}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$I=\int_1^{10^6}(x)^{-1/2}dx=\left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_1^{10^6}=2\sqrt{10^6}-2\sqrt{1}=2(10^3-1)=2\cdot 999=1998$$

b) Sea $P\{1,2,3,\dots 10^6-1,10^6\}$ una partición del intervalo $[1,10^6]$ Calcular las sumas superior e inferior de Riemann Darboux de la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Relacionar dichas sumas con el valor de $\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$U[P,f]=\sum_{i=2}^{10^6} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{i-1}}\cdot 1\to$$



$$M=\sup\left\{\frac{1}{\sqrt{x}},\ x\in(x_{i-1},x_i)\right\}=\frac{1}{\sqrt{x_i-1}}=\frac{1}{\sqrt{i-1}}$$

$$\to U[P,f]=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{10^6-1}}$$

$$L[P,f]=\sum_{i=2}^{10^6} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{i}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

$$m=\inf\left\{\frac{1}{\sqrt{x}},\ x\in(x_{i-1},x_i)\right\}=\frac{1}{\sqrt{x_i}}=\frac{1}{\sqrt{i}}$$

Sabemos que, si la función es integrable se cumplirá que:

$$L(P,f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(P,f)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6}} \leq 1998 \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6-1}}}_{(*)}$$

c) Calcular $[q]$

De (*) sabemos que

$$\begin{cases} q-1 \leq 1998 \longrightarrow q \leq 1999 \\ q - \frac{1}{\sqrt{10^6}} \geq 1998 \longrightarrow q \geq 1998 + \frac{1}{10^3} \end{cases} \longrightarrow \boxed{[q] = 1998}$$

● Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

a) Justificar que F es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular $F'(x)$

Como f, función subintegral, es continua y los límites de integración son derivables, el TFC nos asegura que F es derivable y, además:

$$\boxed{F'(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+1) - f(x-1)\right]}$$

b) Si $\lim_{t\to\infty} f(t) = \ell$ y $\ell \in \mathbb{R}$, demostrar que $\lim_{x\to\infty} F(x) = \ell$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt \Longrightarrow$$ Como f es continua podemos aplicar el teorema del valor medio

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} f(\xi)\big((x+1)-(x-1)\big) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} f(\xi)\,2 = \ell$$ como queríamos demostrar

$$\xi \in (x-1, x+1)$$

c) Sea $f(t) = t \log(1+t^2)$, calcular $F(1)$

$$F(1) = \frac{1}{2}\int_0^2 (t \log(1+t^2))\,dt = \frac{1}{2}\left[\log|1+t^2|\frac{t^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^2 t^2 \frac{\cancel{2}t}{1+t^2}\right] =$$

$$= \log 5 - \int_0^2 \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \log 5 - 2 + \frac{1}{2}\log 5 = \boxed{\frac{3}{2}\log 5 - 2}$$

$t^3 \,|\, t^2+1$
$-t^3-t \quad t$

● Sea $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[-1,1]$ tal que $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 1$. Justifique si son verdaderos o falsos los enunciados siguientes:

a) Para toda partición P del intervalo $[-1,1]$, la suma superior de Riemann Darboux $S_1(P)$ es mayor o igual a 1.

Es $\boxed{\text{verdadero}}$ pues la propia definición de suma superior de Riemann Darboux establece que su valor es mayor o igual al valor de la integral

b) Existe $c \in [-1,1]$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 1$; como f es continua, aplicamos el teorema del valor medio $\longrightarrow$ $f(\xi)(1-(-1)) = 1$; $f(\xi) = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ Verdadero

con $\xi \in [-1,1]$

● Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} - e^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - e^{\left(\frac{1}{n} - \frac{(1/n)^3}{3!} + \frac{(1/n)^5}{5!} \cdots\right)}}{1 - n\left[\frac{1}{n} - \frac{(1/n)^3}{3!} + \frac{(1/n)^5}{5!} \cdots\right]} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}\left[1 - e^{\left(-\frac{(1/n)^3}{3!} + \frac{(1/n)^5}{5!} \cdots\right)}\right]}{+n\,\frac{1}{n^3\,3!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}\left[-\left[-\left(\frac{1}{n}\right)^3/3! + (1/n)^5/5! \cdots\right]\right.}{\frac{1}{n^2\,3!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot \frac{1}{\cancel{3!}\,n^3}}{\frac{1}{\cancel{3!}\,n^2}} = 0$$

● Sea la sucesión X_n $n \geq 1$ y $X_1 = X$; $X_{n+1} = \frac{X_n - 1}{2}$

MUY DIFÍCIL.com – no pedagógico –

a) Estudiar la monotonía y acotación de X_n dependiendo de los valores de X

$X_{n+1} = f(X_n)$ siendo $f(x) = \frac{x-1}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} > 0 \longrightarrow f$ es monótona creciente

Por tanto, podemos asegurar que la sucesión X_n será monótona y dependerá de como sea el X_2 frente al X_1 para saber si es creciente o decreciente

Por otro lado, sabemos que, si fuese convergente, el límite tendría que cumplir: $L = f(L)$

Por tanto, $L = \frac{L-1}{2}$; $2L - L + 1 = 0$; $L = -1$

Calculamos $X_2 = \frac{X_1 - 1}{2} = \frac{X-1}{2} \longrightarrow$ Por tanto

- La sucesión será <u>monótona creciente</u> si $\frac{X-1}{2} > X$; $X - 1 > 2X$

$\boxed{X < -1}$

- La sucesión será <u>monótona decreciente</u> si $\frac{X-1}{2} < X$, $X - 1 < 2X$

$\boxed{X > -1}$

Por tanto, si $X < -1$, la sucesión será monótona creciente acotada inferiormente por X y superiormente por $L = -1$

Si $X > -1$ la sucesión será monótona decreciente y acotada superiormente por X e inferiormente por $L = -1$

Si $X = -1$ la sucesión es constante con todos los términos $X_n = -1$ y $L = -1$

b) Hallar explícitamente X_n en función de X y calcular el límite

$X_1 = X$

$X_2 = \frac{X-1}{2}$

$X_3 = \frac{\frac{X-1}{2}-1}{2} = \frac{X-3}{2^2}$

$X_4 = \frac{\frac{X-3}{2^2}-1}{2} = \frac{X-7}{2^3}$

$X_5 = \frac{\frac{X-7}{2^3}-1}{2} = \frac{X-15}{2^4}$

$\Longrightarrow \boxed{X_n = \frac{X-(2^{n-1}-1)}{2^{n-1}}}$

$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{X-(2^{n-1}-1)}{2^{n-1}} =$

$= \boxed{-1}$

Despreciando lo despreciable

c) Determinar las funciones f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $x=-1$ que verifican $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(2x+1) = f(x)$. Sugerencia: Utilizar la caracterización de las funciones continuas por sucesiones. Este resultado se conoce como el teorema de la convergencia y continuidad.

NO REALIZADO!!

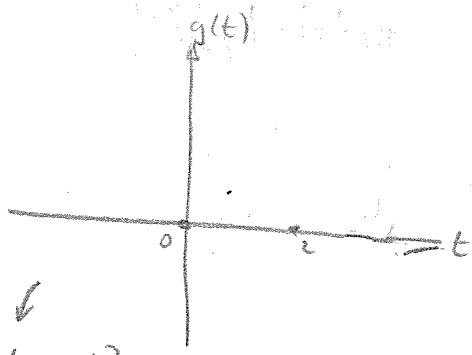
● Se sabe que $\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Sea $F(x) = \int_0^{x-1} g(t)\,dt$ con $g(t) = e^{-t^2} - e^{-2t}$

a) Estudiar el signo de g en $\mathbb{R}$

$g(t) = 0 \longrightarrow e^{-t^2} = e^{-2t}$; $t^2 = 2t$; $\begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases}$

$g(t) > 0 \longrightarrow e^{-t^2} - e^{-2t} > 0$; $e^{-t^2} > e^{-2t}$; $-t^2 > -2t$; $t^2 < 2t$

$t^2 - 2t < 0$



$g(t) > 0$ si $t \in (0,2)$

$g(t) < 0$ si $t \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

$g(t) = 0$ si $t = 0, 2$

b) Hallar $\lim_{t\to-\infty} g(t)$ y $\lim_{t\to\infty} g(t)$

$\lim_{t\to-\infty} g(t) = \lim_{t\to-\infty} \left(\underbrace{e^{-t^2}}_{0} - \underbrace{e^{-2t}}_{\infty}\right) = -\infty$

$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\underbrace{e^{-t^2}}_{0} - \underbrace{e^{-2t}}_{0}\right) = 0$

c) Analizar si existe $c \in (0,2)$ tal que $g'(c)=0$

Como g es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$, el teorema de Rolle nos asegura que $\exists\, c \in (0,2)$ tal que $g'(c)=0$

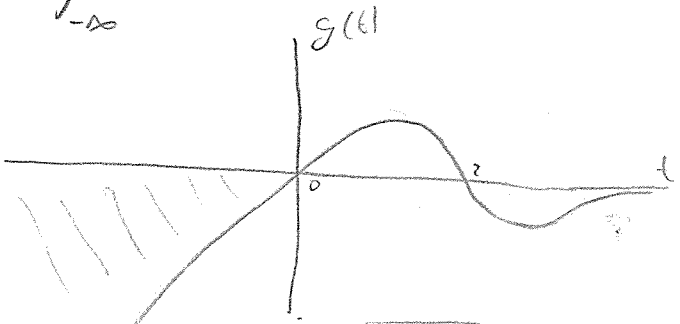
d) Estudiar si g alcanza máximo global en $\mathbb{R}$

Por continuidad de g y el croquis de la figura, podemos asegurar que g alcanza máximo global y que, además, éste estará en $\forall x \in [0,2]$

e) Calcular $\lim_{x\to-\infty} F(x)$, $\lim_{x\to\infty} F(x)$ $\quad F(x)=\int_0^{x-1}(e^{-t^2}-e^{-2t})\,dt$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \int_0^{-\infty}(e^{-t^2}-e^{-2t})\,dt = -\int_{-\infty}^{0}(e^{-t^2}-e^{-2t})\,dt = \infty$$

Porque el valor de esta integral representa "menos el área rallada de la figura"



$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^{\infty}(e^{-t^2}-e^{-2t})\,dt =$$

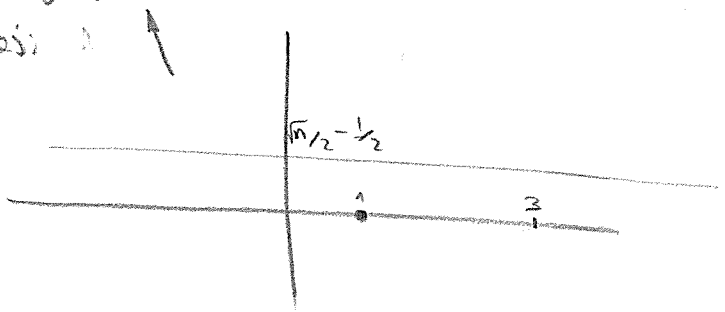
$$= \left(\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt - \int_0^{\infty} e^{-2t}\,dt\right) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}\Big|_0^{\infty}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2}$$

f) Calcular los puntos de extremos locales y globales de F en $\mathbb{R}$

Por el TFC, F es derivable y, además:

$$F'(x) = g(x-1) = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

No damos cuenta que $g(1)=0$



$F'(x)>0$ si $g(x-1)>0 \longrightarrow x \in (1,3) \rightarrow F$ es creciente en $(1,3)$

$F'(x)<0$ si $g(x-1)<0 \longrightarrow x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty) \rightarrow F$ es decreciente en $(-\infty,1) \cup (3,\infty)$

$F(1)$ es mínimo local y global
$F(3)$ es máximo local
No hay máximo global

Crecis

