Apuntes de 1°GITI

María Ballesteros

FISICA I JC

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.
Comparte tus apuntes
En indusbol.com o simplyjarod.com

Estos apuntes incluyen todos los temas que se tratan en la asignatura a excepción de:

- Análisis dimensional. Teorema π
- Incertidumbre de medida
- Dinámica de sistemas

Al final de cada tema se incluye una versión ampliada de la teoría del mismo proporcionada por la academia JC

Además, se incluyen ejercicios propuestos en la evaluación continua del plan 2000, al final del todo.

FÓRMULAS ÚTILES

Indusbol.com

VECTORES

- Doble producto vectorial $\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}}$
- Momento $\boxed{\vec{M}_O^{\vec{v}} = \vec{OP}\times\vec{v}} \Longrightarrow \boxed{|\vec{M}_O^{\vec{v}}| = \text{brazo}\cdot|\vec{v}|}$ $\quad |\vec{M}_{min}| = \vec{M}_P \cdot \vec{U}_R$ (en la dirección de $\vec{R}$)
- Cambio de momentos $\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA}\times\vec{R}}$
- Eje central $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_P + \frac{\vec{R}\times\vec{M}_P}{|\vec{R}|^2} + \lambda\vec{R}}$
- Coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) $\boxed{\begin{aligned} d\vec{U}_\rho &= \vec{U}_\varphi\, d\varphi \\ d\vec{U}_\varphi &= -\vec{U}_\rho\, d\varphi \end{aligned}}$
- Proyectar en plano un vector $\boxed{\text{Proy.}\vec{v} = (\vec{n}_n \times \vec{v})\times\vec{n}_n}$

GEOMETRÍA DE MASAS I

- Centro de masas
$$\left\{\boxed{\begin{aligned} x_G &= \frac{\sum m_i x_i}{M} \equiv x_G = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \\ y_G &= \frac{\sum m_i y_i}{M} \equiv y_G = \frac{\int y\, dm}{\int dm} \\ z_G &= \frac{\sum m_i z_i}{M} \equiv z_G = \frac{\int z\, dm}{\int dm} \end{aligned}}\right.$$

- Guldin 1º $\boxed{d_G = \frac{A}{2\pi L}}$ 2º $\boxed{d_G = \frac{V}{2\pi A}}$

- Esfera $\boxed{\begin{aligned} S &= 4\pi r^2 \\ V &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}}$
- Elipse $\boxed{S = \pi a b}$
- Elipsoide $\boxed{V = \tfrac{4}{3}\pi a b c}$
- Cono $\boxed{\begin{aligned} S &= \pi r g + \pi r^2 \\ V &= \frac{\pi r^2 h}{3} \end{aligned}}$

ESTÁTICA

Condiciones equilibrio $\boxed{\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{O\,ext} &= \vec{0} \end{aligned}}$

F. Roz.al deslizamiento $|F_{max}| = \mu N$

Froz a la rodadura $|M_{r\,max}| = \delta N$

Froz al pivotamiento $|M_{p\,max}| = \varepsilon N$

Física

Vectores ✓
G.M I ✓
Estática
Cinemática del punto
" sistemas ✓
" relativa ✓
Dinámica punto ✓
" relativa
Trab. energ. I
Trab. energ. II ✓
Mov. centrales ✓
Geom. Masas II ✓
Dinámica sistemas
Medios deformables

FÓRMULAS ÚTILES

Indusbol .com

CINEMÁTICA DEL PUNTO

- Formulas de Frenet

1°) $\boxed{\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho_c}}$

2°) $\boxed{\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{\rho_c} + \frac{\vec{b}}{\rho_\tau}}$

3°) $\boxed{\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\rho_\tau}}$

- Aceleración (componentes) $\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$ $\boxed{\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{t} \quad \vec{a}_n = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho_c}\vec{n}}$

- Posición – cilíndricas $\boxed{\vec{r} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{U}_z}$

- Velocidad – cilíndricas $\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}U_\varphi + \dot{z}U_z}$

- Aceleración – cilíndricas $\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{U}_\rho + [2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}]U_\varphi + \ddot{z}U_z}$

- Armónico simple $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \longrightarrow \boxed{x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)}$

- Ecuación hélice circular: $\boxed{x = R\cos\varphi\,;\ y = R\,\text{sen}\,\varphi\,;\ z = \frac{P}{2\pi}\varphi}$

- Ecuación cicloide: $\boxed{x = R(\varphi - \text{sen}\,\varphi)\,;\ y = R(1 - \cos\varphi)}$

CINEMÁTICA DE SISTEMAS

- Campo de velocidades del sólido rígido $\boxed{v_P = v_O + \bar{\omega} \times \overline{OP}}$

- Campo de aceleraciones del sólido rígido $\boxed{a_P = a_O + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \overline{OP}] + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{OP}}$

- Tma. de las proyecciones $\boxed{\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} v_A = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} v_B}$

- Eje instantaneo de rotación $\boxed{\bar{r} = \bar{r}_P + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_P}{|\bar{\omega}|} + \lambda\bar{\omega}}$

CINEMÁTICA RELATIVA

Composición de velocidades $\boxed{\vec{v}_{21}^{\,P} = \vec{v}_{20}^{\,P} + \vec{v}_{01}^{\,P}}$ $\quad \vec{v}_{ABS} = \vec{v}_{REL} + \vec{v}_{ARR}$

Composición de aceleraciones $\boxed{\vec{a}_{21}^{\,P} = \vec{a}_{20}^{\,P} + \vec{a}_{01}^{\,P} + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^{\,P}}$ $\quad a_{ABS} = a_{REL} + a_{ARR} + a_{COR}$

Composición de ω $\boxed{\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_{20} + \bar{\omega}_{01}}$

Composición de ac. angulares $\boxed{\bar{\alpha}_{21} = \bar{\alpha}_{20} + \bar{\alpha}_{01} + \bar{\omega}_{01} \times \bar{\omega}_{20}}$

FÓRMULAS ÚTILES

Indusbol.com

DINÁMICA DEL PUNTO

- Ecuación fundamental de la dinámica $\boxed{\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}}$
- Cantidad de movimiento $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$ Th. cant. movimiento $\boxed{F = \frac{dp}{dt}}$
- Momento cinético $\boxed{L_o = \vec{r} \times \vec{p}}$ Th. mom. cinético $\boxed{\frac{dL_o}{dt} = r \times \frac{dp}{dt} = r \times \vec{F}}$
- Energía cinética $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ Th. energ. cinética $\boxed{T_{1,2} = \Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1}}$
- Trabajo $\boxed{d\tau = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz} \longrightarrow \boxed{\tau_{1,2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}}$

  $d\tau = F d\vec{r} = F \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = F v dt \longrightarrow \boxed{d\tau = \vec{F} \vec{v} dt}$
- Potencia $\boxed{W = \frac{d\tau}{dt}} \longrightarrow W = \frac{d\tau}{dt} = \frac{\vec{F} \vec{v} dt}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \longrightarrow \boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

DINÁMICA RELATIVA

Ecuación fundamental $\boxed{F - \overbrace{m(\vec{a}_{ARR} + \vec{a}_{COR})}^{F_{inercia}} = m\, a_{Rel}}$

Fuerzas de inercia-arrastre – $F = -m \vec{a}_{ARR} = -m(\overset{\circ}{a}_{ARR} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{OP}] + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP}]$

$F = -m\, \overset{\circ}{\vec{a}}_{ARR}$ ——— Inercial rotacional

$F = -m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}))$ – " centrífuga

$F = -m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP})$ ——— " azimutal

TRABAJO Y ENERGÍA I

- Circulación de un campo $\boxed{\int_A^B \vec{V} d\vec{r}}$
- Operador $\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}}$

Gradiente $= \nabla U$

Divergencia $= \nabla V$

Rotacional $= \nabla \times V = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$

- Propiedad Gradiente $\boxed{\nabla U dr = dU}$

  $\boxed{V = \text{grad}\, U}$

  $\boxed{F = -\nabla E_p}$
- Tma. Conserv. energía $\boxed{E_{mec} = cte}$

FÓRMULAS ÚTILES

- Fuerzas y potenciales

$F_{grav} = +G\frac{Mm}{r^2} \longrightarrow \boxed{U_{grav} = -G\frac{Mm}{r}}$

$Peso = mg(\vec{k}) \longrightarrow \boxed{U_g = mgz + cte}$

$F_{muelle} = -xK\vec{i} \longrightarrow \boxed{U_k = \frac{1}{2}Kx^2}$

TRABAJO Y ENERGÍA II

- $\boxed{\min E_p \Rightarrow \text{Equilibrio estable}}$
- $\boxed{\max E_p \Rightarrow \text{Equilibrio inestable}}$

MOVIMIENTO BAJO FUERZAS CENTRALES

- Ley de gravitación universal $\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r}$
- Fuerza de la gravedad $\boxed{\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r}$
- Fórmulas de Binet

$$\boxed{v^2 = C^2\left[\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]}$$

$$\boxed{a = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right)}$$

- Parámetro cónicas $\boxed{p = \frac{b^2}{a}}$ (hipérbola y parábola)
- Ecuación cónicas en polares $\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}}$
- Mov. elíptico, periodo $\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{K}}$

FÓRMULAS ÚTILES

GEOMETRÍA DE MASAS II

- Momento de inercia $\boxed{I = \int r^2 dm}$

Relaciones $I_x = I_{xy} + I_{xz}$

$I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$

$I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$

- Steiner

$$\boxed{\begin{aligned} I_p &= I_{CM} + Ma^2 \\ I_S &= I_{SCM} + Ma^2 \\ I_n &= I_{nCM} + Ma^2 \end{aligned}}$$

Relaciona momentos de inercia

- Radio de giro $\boxed{I_{\#} = MK^2}$ siendo K el radio de giro

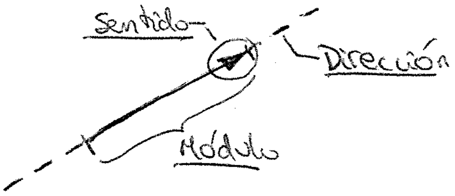
DINÁMICA DE SISTEMAS

FALTA

VECTORES Y SISTEMAS DE VECTORES

1 DEFINICIÓN

Un vector es un segmento orientado



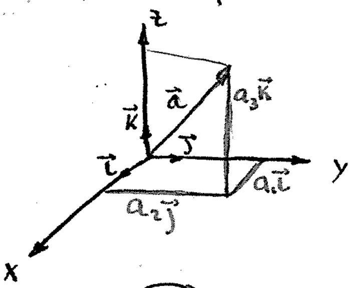
2 CLASIFICACIÓN

- Libres: Conservan módulo y sentido
- Deslizantes: Conservan módulo, sentido y recta soporte
- Ligados: Conservan módulo, sentido, recta soporte y punto de aplicación

3 OPERACIONES

El sistema de referencia será una base ortonormal, orientada a derechas.

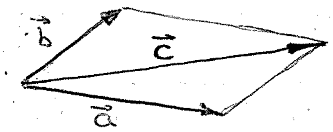
Así, las componentes ortonormales de un vector serán:



$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

3.1 SUMA

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) =$$
$$= (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$



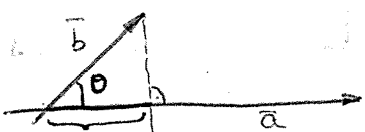
3.2 PRODUCTO POR ESCALAR

$$K \cdot \vec{a} = K\vec{a}$$

3.3 PRODUCTOS ENTRE VECTORES

3.3.1 Producto escalar entre dos vectores

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$ y en base ortonormal $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$



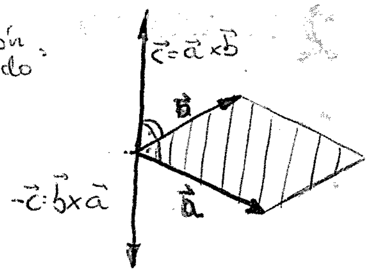
$|\vec{b}|\cos\theta \equiv$ proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

si $|\vec{a}| = 1 \Rightarrow a \cdot b = 1 \cdot |b| \cdot \cos\theta \equiv$ proyección

3.3.2 Producto vectorial de dos vectores

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ { Módulo: $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{sen}\,\theta$

Dirección y sentido



Regla de la mano derecha

NOTA PRÁCTICA!

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- Propiedades:
  - → Anticonmutativa $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
  - → $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

3.3.3 Producto mixto entre 3 vectores

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

- Representa el volumen del paralelepípedo definido por los vectores

- Propiedades

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot c$$
$$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})$$
$$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$$

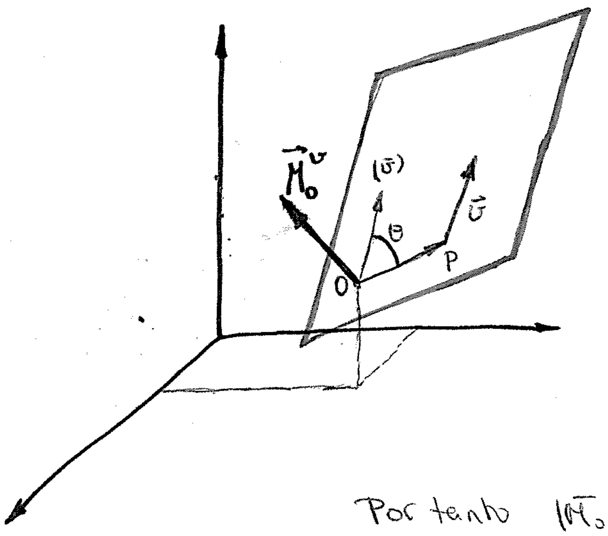
3.3.4 Doble producto vectorial

Se define como $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ y se opera mediante la fórmula de expulsión:

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}}$$

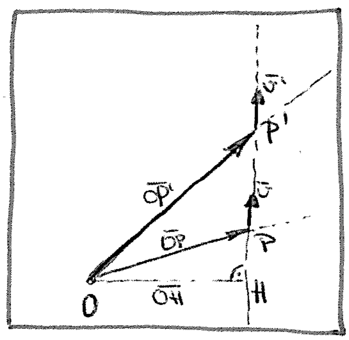
4 SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

4.1 MOMENTO RESPECTO DE UN PUNTO



$$\boxed{\vec{M}_O^{\vec{v}} = \vec{OP}\times\vec{v}}$$

$$\vec{M}_O^{\vec{v}} = \vec{OP'}\times\vec{v}' = (\vec{OP}+\vec{PP'})\times\vec{v} =$$
$$= \vec{OP}\times\vec{v} + \cancel{\vec{PP'}\times\vec{v}}^{\,0\,(//)}$$



$|\vec{M}_O^{\vec{v}}| = |\vec{OP}|\,|\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta$

$|\vec{M}_O^{\vec{v}'}| = |\vec{OP'}|\,|\vec{v}'|\,\text{sen}\,\theta$ ⟹ OH = brazo

$|\vec{M}_O^{\vec{v}}| = |\vec{OH}|\,|\vec{v}|\,\text{sen}\,90°$

Por tanto $|\vec{M}_O| = |\vec{OH}|\,|\vec{v}|\,\text{sen}\,90° = \boxed{|\vec{OH}|\cdot|\vec{v}| = |\vec{M}_O^{\vec{v}}|}$

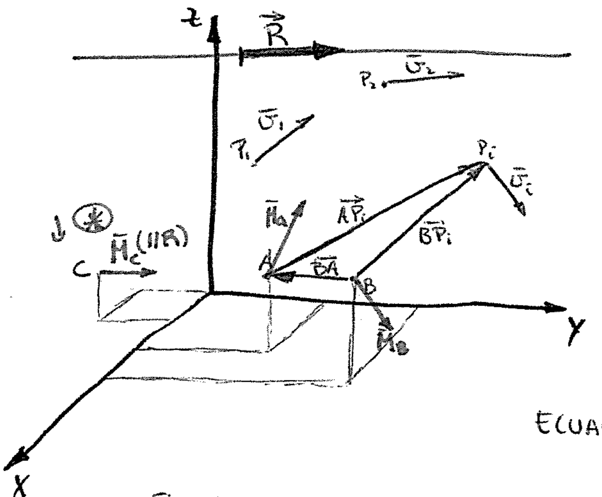
{brazo · módulo de $\vec{v}$}

4.2 MOMENTO ÁXICO

Es un escalar definido como la proyección ortogonal del momento de un vector sobre un eje

$$\boxed{M_e = \vec{M}_o \cdot \vec{U}_e}$$

4.3 RESULTANTE Y MOMENTO TORSOR



$$\vec{R} = \sum_i \vec{U}_i$$

$$\left.\begin{array}{l} M_A = \sum_i \vec{AP}_i \times \vec{U}_i \\ M_B = \sum_i \vec{BP}_i \times \vec{U}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{M}_B = \sum_i (\vec{BA} + \vec{AP}_i) \times \vec{U}_i =$$

$$= \sum \vec{BA} \times \vec{U}_i + \underbrace{\sum \vec{AP}_i \times \vec{U}_i}_{\vec{M}_A} =$$

$$= \vec{M}_A + \vec{BA} \times \underbrace{\sum \vec{U}_i}_{\vec{R}} = \vec{M}_A + \vec{BA} \times \vec{R}$$

ECUACIÓN DE CAMBIO DE MOMENTOS $\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \times \vec{R}}$

- Se define el conjunto torsor en P como $\tau[\vec{R}, \vec{M}_P]$

4.4 INVARIANTES DEL SISTEMA (Resultante y momento mínimo)

1) Resultante $\equiv \boxed{\sum_i \vec{U}_i}$

2) Producto escalar $\boxed{\vec{M} \cdot \vec{R}}$

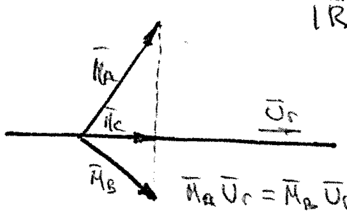
Demo ⇒ Ec. cambio de momentos: $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \times \vec{R}$

$$\vec{M}_B \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \vec{R} + \cancel{(\vec{BA} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}} = \vec{M}_A \cdot \vec{R}$$

$0 (\perp)$

Un invariante derivado es

$$\frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|} = \vec{M} \cdot \vec{U}_R \quad (\vec{U}_R \text{ unitario con dirección de } \vec{R})$$



$\vec{M}_A \vec{U}_r = \vec{M}_B \vec{U}_r = \vec{M}_C \cdot \vec{U}_r$

$\vec{M}_C \to M_{min}$
$\parallel R$

El momento tendrá módulo mínimo en todos los puntos en el que éste tenga la dirección de la resultante.

(4.5) EJE CENTRAL

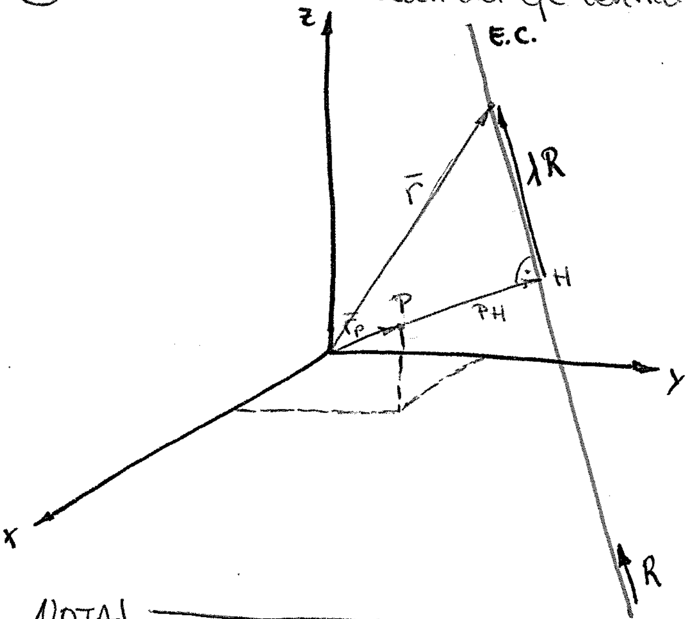
Lugar geométrico de los puntos del plano en los que el momento del sistema es mínimo

$$\boxed{\bar r = \bar r_p + \frac{\bar R \times \bar M_P}{|\bar R|^2} + \lambda \cdot \bar R}$$

⊖ Demo eje central $\parallel \bar R$: Sean C y D dos puntos con $M_C = M_D = M_{min}$. Por cambio de momento

$$\cancel{\bar M_C} = \cancel{\bar M_D} + \overline{CD} \times \bar R \Longrightarrow \overline{CD} \,//\, \bar R \begin{cases} \text{con } \bar R \neq 0 \\ \text{con } \overline{CD} \neq 0 \end{cases}$$

⊖ Obtención de la ecuación del eje central



Conocidos P, $\bar M_P$ y $\bar R$, busco $H \in$ E.C. tal que $\overline{PH} \perp \begin{cases} \bar R \\ \text{E.C.} \end{cases}$, con $\bar M_H = \bar M_{min} \,//\, R$

Por cambio de momentos: $\bar M_H = \bar M_P + \overline{HP} \times \bar R$

$$\cancel{\bar M_H \times \bar R}^{\,0} = \bar M_P \times \bar R + (\overline{HP} \times R) \times R$$

$$\cancel{-}\bar M_P \times \bar R = \cancel{-} R \times (\overline{HP} \times R)$$

$$\bar M_P \times \bar R = (R \cdot R)\overline{HP} - \cancel{(R \cdot \overline{HP})}^{\,0(\perp)} R$$

$$\overline{HP} = \frac{M_P \times R}{|R|^2} \Longrightarrow \overline{PH} = \frac{R \times M_P}{|R|^2}$$

Por tanto E.C. $\bar r = \bar r_P + \overline{PH} + \lambda \bar R$

NOTA!

$$|\bar M_{min}| = \bar M_P \cdot \frac{\bar R}{|\bar R|}$$

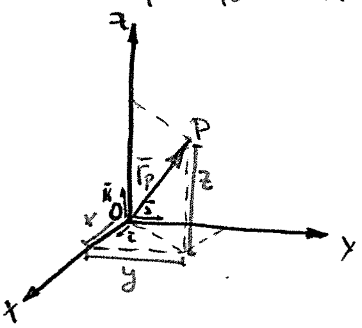
$$\bar M_{min} = \left[\bar M_P \frac{\bar R}{|\bar R|}\right] \frac{\bar R}{|\bar R|}$$

5 SISTEMAS DE COORDENADAS

Para situar un punto en el espacio se tienen tres grados de grados de libertad. Se necesitan tres parámetros y tres versores asociados.

5.1 COORDENADAS CARTESIANAS.

Son las principales. A ellos se referirán el resto de coordenadas



Parámetros ≡ x, y, z

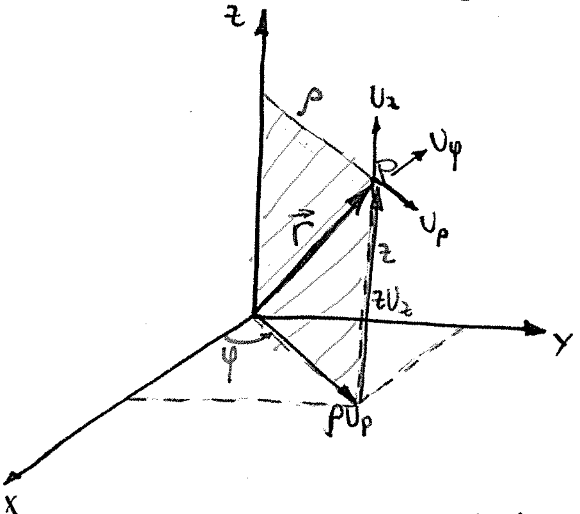
Versores ≡ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: Son ctes en módulo, dirección y sentido, es decir, no varían al cambiar el punto.

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ d\vec{r} = d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = dx\vec{i} + \cancel{x\,d\vec{i}}^{\,0\ cte} + dy\vec{j} + \cancel{y\,d\vec{j}}^{\,0\ cte} + dz\vec{k} + \cancel{z\,d\vec{k}}^{\,0\ cte} = \end{cases}$$

$$= dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

5.2 COORDENADAS CILÍNDRICAS.

Son las coordenadas que se varían para situar un punto de un cilindro macizo: Distancia al eje del cilindro (eje z, distancia ρ), ángulo que forma el plano que contiene al punto y al eje respecto a un plano fijo (plano fijo x, z, ángulo φ) y altura del punto sobre una base del cilindro (base x, y, altura z)



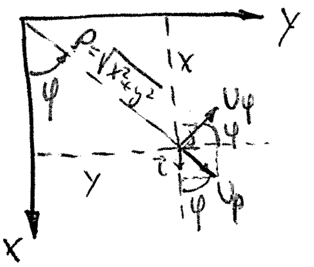
Parámetros: ρ, φ, z

Versores: $\bar{U}_\rho, \bar{U}_\varphi$ (no son ctes, varían su dirección al cambiar el punto en dirección radial

$U_z \equiv$ cte

$$\begin{cases} \vec{r} = \rho\bar{U}_\rho + z\bar{U}_z \\ d\vec{r} = d(\rho\bar{U}_\rho + z\bar{U}_z) = d\rho\bar{U}_\rho + \rho\, dU_\rho + dz\bar{U}_z + z\,\cancel{dU_z}^{\,0\ cte} = \end{cases}$$

$$= d\rho\,\bar{U}_\rho + \rho\, d\varphi\,\bar{U}_\varphi + dz\,\bar{U}_z$$



⊛ Relaciones cartesianas cilíndricas

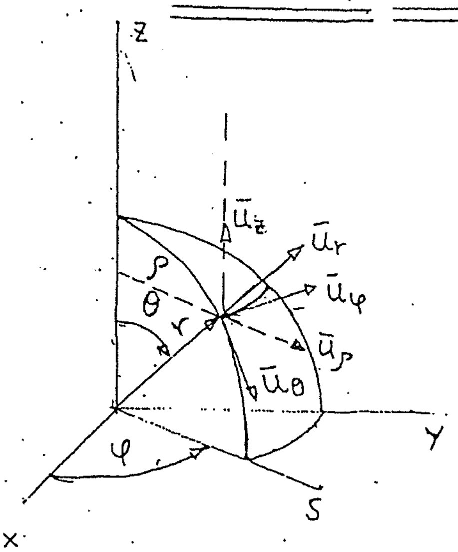
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

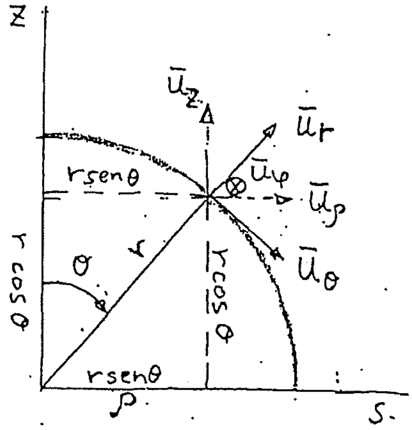
$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

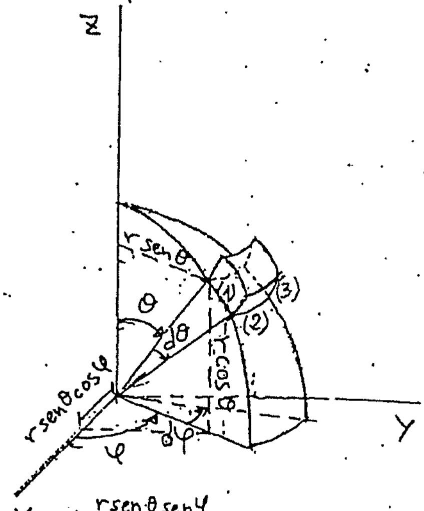
z = común

$$\left.\begin{aligned} \bar{U}_\rho &= \cos\varphi\,\vec{i} + \text{sen}\,\varphi\,\vec{j} \\ \bar{U}_\varphi &= -\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} dU_\rho &= \frac{dU_\rho}{d\varphi}\,d\varphi = (\overbrace{-\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}}^{\bar{U}_\varphi})\,d\varphi = \bar{U}_\varphi\,d\varphi \\ dU_\varphi &= \frac{dU_\varphi}{d\varphi}\,d\varphi = (\overbrace{-\cos\varphi\,\vec{i} - \text{sen}\,\varphi\,\vec{j}}^{-\bar{U}_\rho})\,d\varphi = -\bar{U}_\rho\,d\varphi \end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas



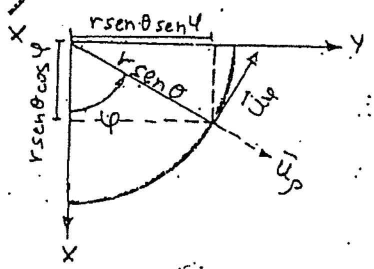




$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \text{arc.cos}\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\varphi = \text{arctg}\ \frac{y}{x}$$



- Parámetros : r, θ, φ
- Versores : $\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{u}_\varphi$
- Los giros en θ (ó $d\theta$) se hacen en torno al origen, con radio $\underline{r}$
- Los giros en φ (ó $d\varphi$) se hacen en torno al eje OZ, con radio $\underline{\underline{r\,\text{sen}\,\theta}}$

Recordatorio de Cilíndricas

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varphi = \text{arctg}\ \frac{y}{x}$$
$$z = z$$
$$\bar{u}_\rho = \cos\varphi\ \bar{\imath} + \text{sen}\,\varphi\ \bar{\jmath}$$
$$\bar{u}_\varphi = -\text{sen}\,\varphi\ \bar{\imath} + \cos\varphi\ \bar{\jmath}$$
$$\bar{u}_z = \bar{k}$$

- $\bar{r} = r\,\bar{u}_r$

$$d\bar{r} = \underbrace{r\,d\theta\ \bar{u}_\theta}_{\substack{\text{Giro en } d\theta \\ (1)}} + \underbrace{r\,\text{sen}\,\theta\ d\varphi\ \bar{u}_\varphi}_{\substack{\text{Giro en } d\varphi \\ (2)}} + \underbrace{dr\ \bar{u}_r}_{\substack{\text{Incremento en } dr \\ (3)}}$$

$$dV_{OL} = r\,d\theta \cdot r\,\text{sen}\,\theta\ d\varphi \cdot dr$$

- Paso a coord. cartes :

1er Paso: a Cilíndricas:

$$\bar{u}_r = \text{sen}\,\theta\ \bar{u}_\rho + \cos\theta\ \bar{u}_z$$
$$\bar{u}_\theta = \cos\theta\ \bar{u}_\rho - \text{sen}\,\theta\ \bar{u}_z$$
$$\bar{u}_\varphi = \bar{u}_\varphi$$

2º Paso: a Cartes.

$$\bar{u}_r = \text{sen}\,\theta\ [\cos\varphi\ \bar{\imath} + \text{sen}\,\varphi\ \bar{\jmath}] + \cos\theta\ \bar{k}$$
$$\bar{u}_\theta = \cos\theta\ [\cos\varphi\ \bar{\imath} + \text{sen}\,\varphi\ \bar{\jmath}] - \text{sen}\,\theta\ \bar{k}$$
$$\bar{u}_\varphi = -\text{sen}\,\varphi\ \bar{\imath} + \cos\varphi\ \bar{\jmath}$$

Por tanto: $\bar{r} = r\,\bar{u}_r = \underbrace{(r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi)}_{x}\bar{\imath} + \underbrace{(r\,\text{sen}\,\theta\ \text{sen}\,\varphi)}_{y}\bar{\jmath} + \underbrace{(r\cos\theta)}_{z}\bar{k}$

6 PROBLEMAS

(1) Demostrar que $\bar{a} = (\bar{u} \times \bar{v}) \times (\bar{r} \times \bar{s}) \in$ intersección de los planos $\Pi_{u,v}$ y $\Pi_{r,s}$

¿ $\vec{a} \in \Pi_{u,v} \cap \Pi_{r,s}$? $\longrightarrow$

$\bar{u} \times \bar{v} = \bar{f} \Longrightarrow \bar{a} = \bar{f} \times (\bar{r} \times \bar{s}) = (\bar{f} \cdot \bar{s})\bar{r} - (\bar{f} \cdot \bar{r})\bar{s} \in \Pi_{r,s}$ por ser c.l. de los vectores $\bar{r}, \bar{s}$

$\bar{r} \times \bar{s} = \bar{g} \Longrightarrow \bar{a} = (\bar{u} \times \bar{v}) \times g = -\bar{g} \times (\bar{u} \times \bar{v}) = -[(g \cdot v)u - (g \cdot u)\bar{v}] =$

$= (g \cdot v)v - (g \cdot v)u \in \Pi_{u,v}$ por ser c.l. de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$

Por tanto $\vec{a} \in \Pi_{u,v}$ y a $\Pi_{r,s}$, esto es, $\in \Pi_{u,v} \cap \Pi_{r,s}$

(3) Dado un sistema cuyo torsor en el origen es $\mathcal{T} = (R, M_o) = [(0,0,1), (1,1,0)]$ determinar si existe algún punto cuyo momento sea nulo

$|\bar{M}_{min}| = \bar{M}_o \cdot \vec{U}_R = (1\,1\,0)(0\,0\,1) = 0 \Longrightarrow \exists\, \infty$ puntos con $|\bar{M}| = 0$ (forman el eje central)

(4) Sistema $\begin{cases} \vec{a}\,(-1,-1,1) \longrightarrow A\,(1,0,0) \\ \bar{b}\,(1,1,1) \longrightarrow B\,(0,1,0) \\ \bar{c}\,(0,0,-1) \longrightarrow C\,(0,0,1) \end{cases}$ Rectas soporte $\Longrightarrow$ Determinar eje central

$\bar{r} = \bar{r}_P + \dfrac{\bar{R}\bar{M}_P}{|R|^2} + \lambda R$

Escogemos A para calcular $M_{sist} = M_a + M_b + M_c$

$\bar{M}_a = \vec{AA} \times \bar{a} = 0$, $\bar{M}_b = \vec{AB} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} - \vec{k} + \vec{j} = (1,1,-2)$

$\bar{M}_c = \vec{AC} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{j} = (0,-1,0)$

$\bar{M}_{sist} = \bar{0} + (1,1,-2) + (0,-1,0) = (1,0,-2)$

Calculamos la ecuación desde $A \longrightarrow \bar{r} = \bar{r}_A + \dfrac{\bar{R} \times \bar{M}_A}{|R|^2} + \lambda \bar{R}$ $\begin{cases} \bar{r}_A = (1,0,0) \\ R = (0,0,1) \to |R|^2 = 1 \\ M_A = (1,0,-2) \end{cases}$

$r = (1,0,0) + \dfrac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \to \vec{j}}{1} + \lambda(0,0,1) = (1,0,0) + (0\,1\,0) + \lambda\,(0\,0\,1)$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}}$$

(5) $\tau = (\bar{R}, \bar{M}_o) = \{(0,0,1), (1,0,0)\}$ Determinar el E.C.

$$\vec{r} = \vec{r}_p + \frac{\vec{R} \times \vec{M}_p}{|R|^2} + \lambda \vec{R}$$

Calculamos la ecuación a partir del origen $\begin{cases} \vec{r}_o = \vec{0} \\ R = (0,0,1) \\ M_o = (1,0,0) \\ |R|^2 = 1 \end{cases}$ $R \times M_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} r = (0,1,0) + \lambda(0,0,1) \\ r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}}$$

(6) E.C. $\equiv$ Eje Oz , $|\vec{R}| = 1$, $\vec{M}_A = (0,1,1)$ siendo $A(1,0,0)$

Se pide $\tau(\bar{R}, \bar{M}_o)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{R} \parallel \text{Eje central} \\ |\vec{R}| = 1 \end{array}\right\} \vec{R} = (0,0,\pm 1)$

Por cambio de momentos

$$M_o = M_A + \vec{OA} \times \vec{R} = (0,1,1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{M}_o = (0,1,1) + (0,-(\pm 1),0)$$

El eje central lo forman los puntos con $\vec{M}_{min}$ $\Longrightarrow M_{min} \parallel R \Longrightarrow$ El origen $\in$ E.C. $\Longrightarrow M_o \parallel R$

Si $\vec{R} = (0,0,1) \Longrightarrow \vec{M}_o = (0,1,1) + (0,-1,0) = (0,0,1) \parallel \vec{R}$

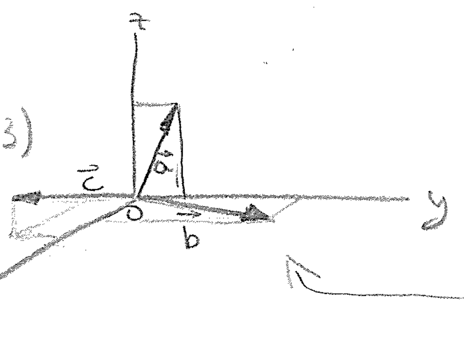
Si $\vec{R} = (0,0,-1) \Longrightarrow \vec{M}_o = (0,1,1) + (0,+1,0) = (0,2,1) \nparallel \vec{R}$

Por tanto $\tau_o(\vec{R}, \vec{M}_o) = \{(0,0,1), (0,0,1)\}$

(7) Sistema de vectores $\begin{cases} \vec{a} = \vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} \\ \vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$ cuyas rectas soporte concurren al origen

Determinar E.C.

$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = (0,1,2) \\ \vec{b} = (1,3,0) \\ \vec{c} = (2,-1,1) \end{array}\right\} \vec{R} = (3,3,3)$



$\vec{M}_o^{sist} = \vec{M}_o^{\vec{a}} + \vec{M}_o^{\vec{b}} + \vec{M}_o^{\vec{c}} = \vec{0}$

$\vec{M}_o^{\vec{a}} = \vec{OO} \times \vec{a} = \vec{0}$

$M_o^{\vec{b}} = \vec{OO} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\vec{M}_o^{\vec{c}} = \vec{OO} \times \vec{c} = \vec{0}$

El momento de un vector desde un punto que está en la recta soporte del vector es nulo

E.C.:

$$\vec{r} = \cancel{\vec{r}_o} + \cancel{\frac{\vec{R} \times \vec{M}_o}{|\vec{R}|}} + \lambda \vec{R} = \lambda(3,3,3) \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{E.C.} \\ x = y = z \end{array}}$$

(8) Sistema de vectores con $\vec{R} = (3\vec{i} - \vec{j})$ y $\vec{M}_0 = a\vec{k}$

Determinar a para que el E.C. pase por $A(1,1,0)$

Si $A \in EC \Longrightarrow |\vec{M}_A| = |M_{min}|$ $\qquad |R| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

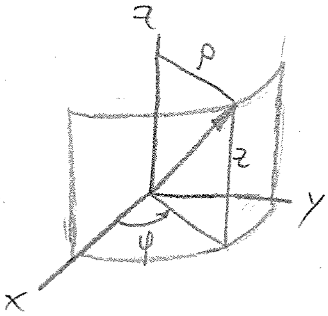
Determinamos $|\vec{M}_A| = |M_{min}| = \vec{M}_0 \cdot \vec{U}_R = (0,0,a)\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1,0) = \underline{\underline{0}}$

Por cambio de momentos

$$M_0 = \cancel{M_A}^{0} + \vec{OA} \times \vec{R} \longrightarrow (0,0,a) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} - 3\vec{k} = (0,0,-4)$$

Así, $\boxed{a = -4}$

(+) Sea el punto $(1, \sqrt{3}, 20)$. Obtener coordenadas cilíndricas



$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$

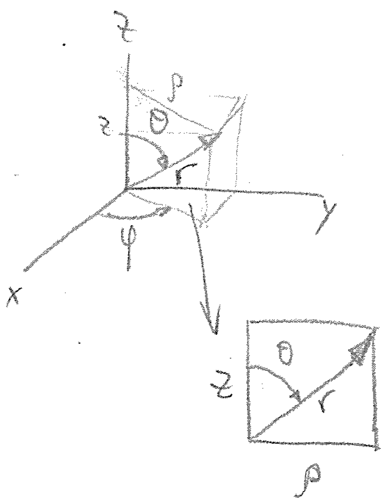
$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = 60° = \frac{\pi}{3}$

$z = 20$

$\boxed{(\rho, \varphi, z) = (2, \frac{\pi}{3}, 20)}$

(9) y (10) Sea el punto en cartesianos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$. Obtener coordenadas cilíndricas y esféricas

Cilíndricas (ρ, φ, z)
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \boxed{1} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg} 1 = 45° = \boxed{\frac{\pi}{4}} \\ z = \boxed{2} \end{cases}$$



Esféricas (r, φ, θ)
$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+4} = \boxed{\sqrt{5}} \\ \varphi = \boxed{\frac{\pi}{4}} \\ \theta = \arccos\frac{z}{r} = \boxed{\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}} \end{cases}$$

(15) Sistema $\begin{cases} \vec{R} = \lambda\vec{i} + \vec{j} \\ M_0 = -4\vec{k} \end{cases}$ Hallar λ para que $A(4,4,0) \in$ E.C.

Si $A \in$ E.C. $\Longrightarrow |\vec{M}_A| = |\vec{M}_{min}| = \vec{M}_0 \vec{U}_R = (0,0,-4)\cdot(\lambda, 1, 0)\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 0$

Por cambio de momentos

$$\vec{M}_0 = \cancel{\vec{M}_A}^{0} + \vec{OA}\times\vec{R} \rightarrow (0,0,-4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{k} - 4\lambda\vec{k} = (4-4\lambda)\vec{k}$$

$$\Longrightarrow -4 = 4 - 4\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = 2} \rightarrow \lambda = 3???$$

(13) Usar la fórmula del doble producto vectorial siendo $(a\times b)\times c$ para deducir la condición que deben cumplir $a\cdot b$ y $b\cdot c$ $(b\neq 0)$ para que $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ $\forall(\bar{a},\bar{c})$.

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) \quad \forall(\bar{a},\bar{c})$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = -c\times(\bar{a}\times\bar{b}) = -\bar{a}(\bar{c}\cdot\bar{b}) + \bar{b}(\bar{c}\cdot\bar{a})$$
$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\cdot\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b})$$

Para obtener igualdad $\forall(\bar{a},\bar{c})$ tienen que ser los productos $\bar{c}\cdot\bar{b}$ y $\bar{a}\cdot\bar{b}$ nulos

$\vec{c}\cdot\vec{b} = 0 \rightarrow \vec{b}\perp\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

(14) Determinar la proyección de $\vec{v} = 4\vec{k}$ sobre $\Pi \equiv x+y+z=0$

$\vec{n}_\Pi = (1,1,1)\frac{1}{\sqrt{3}}$ / $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{3}}(\vec{i}-\vec{j})$

$$\text{proyec}_\Pi \vec{v} = (\vec{n}_\Pi\times\vec{v})\times\vec{n}_\Pi =$$

$$= \left[\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\times(0,0,4)\right]\times\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{-4}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{k} + \frac{4}{3}\vec{k} - \frac{4}{3}\vec{j}$$

PROBLEMA 1

a) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

b) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 1$

c) $\vec{a} \cdot \vec{i} > 0$, $\vec{a} \times \vec{i} = 0$

$\vec{b} \cdot \vec{j} > 0$; $\vec{b} \times \vec{j} = 0$

Definen los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en módulo dirección y sentido

d) $M_0^{\vec{a}} = \vec{j}$ $\quad M_0^{\vec{b}} = \vec{k}$

e) $M_0^{\vec{c}} \cdot \vec{j} = M_y = 0$

f) $|\vec{M}_0| = |\vec{M}_0^a + \vec{M}_0^b + \vec{M}_0^c| = \sqrt{3}$; $M_0 \cdot \vec{i} = M_x < 0$

Definen rectas soporte

① Vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ con sus rectas soporte

Con a) y c)

$|\vec{a}| = 1$

$\vec{a} \times \vec{i} = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{i} \begin{cases} a = \vec{i} \\ a = -\vec{i} \end{cases}$ $\Big\} \Rightarrow a = \vec{i}$

$a \cdot \vec{i} > 0$

$|\vec{b}| = 1$

$\vec{b} \times \vec{j} = 0 \Rightarrow b \parallel \vec{j} \begin{cases} b = \vec{j} \\ b = -\vec{j} \end{cases}$ $\Big\} \Rightarrow b = \vec{j}$

$\vec{b} \cdot \vec{j} > 0$

Con b)

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = c_z = 1 \Rightarrow \vec{c} = (0,0,1) \equiv \vec{k}$$

De d)

$M_0^a = \vec{j}$ $\Big\{$ Sea $A(x,y,z)$ punto genérico de la recta soporte de $\vec{a}$

Sea $\vec{O}(0,0,0)$ $\quad \vec{a}(1\,0\,0)$

$$M_0^a = \vec{OA} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}z - y\vec{k} = (0, z, -y) \overset{M_0 = \vec{j}}{=} (0,1,0)$$

$$\boxed{r_a \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \vec{a} = \vec{i} = (1,0,0)}$$

Sea $B(x,y,z)$ punto genérico de la recta de $\vec{b}(0,1,0)$

$$M_0^b = \vec{k}; \quad M_0^b = \vec{OB} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (z, 0, x) = (0,0,1) \Rightarrow \boxed{r_b \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \vec{b} = \vec{j} = (0,1,0)}$$

De e) y f)

$M_0^c = \vec{OC} \times \vec{c}$; C PNTO. GENERICO de la recta de $\vec{c}(0,0,1)$

$$M_0^c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y\vec{i} - x\vec{j} \Rightarrow M_y \overset{M_y = 0}{=} M_0^c \cdot \vec{j} = (y, -x, 0)(0,1,0) = -x = 0$$

$M_0^c = y\vec{i}$

$$|\vec{M}_0| = |\vec{j} + \vec{k} + y\vec{i}| = |(y,1,1)| = \sqrt{3} \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow y = -1 \Longrightarrow \boxed{r_c = \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \vec{c} = \vec{k} = (0\,0\,1)}$$

$M_0 \vec{i} = (y,1,1)(1\,0\,0) = y < 0$

② Reducir el sistema de vectores al origen

$$\boxed{T_0 = \{(R, M_0)\} = \{(1,1,1), (-1,1,1)\}}$$

③ Ecuación del eje central y su intersección con el plano $z=0$

$$r = r_0 + \underbrace{\frac{R \times M_0}{|R|^2}}_{\vec{OH}} + \lambda R \qquad r_0 = 0; \quad R = (1,1,1)$$

$$|R|^2 = 3$$

$$M_0 = (-1,1,1)$$

$$\vec{OH} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} + \vec{k} - \vec{j} - \vec{i}) = (0,-2,2)\frac{1}{3}$$

$$r = \left(0, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \lambda(1,1,1) \longrightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{-2}{3} + \lambda \\ z = \frac{2}{3} + \lambda \end{cases}}$$

$$Q \equiv E.C. \cap \Pi_{z=0} \begin{cases} x_Q = \lambda_Q \\ y_Q = \frac{-2}{3} + \lambda_Q \\ z_Q = \frac{2}{3} + \lambda_Q \\ z_Q = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_Q = \frac{-2}{3} \qquad \boxed{Q = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, 0\right)}$$

Método alternativo: Buscar $Q \equiv (EC \cap \Pi_{z=0})$ tal que $\begin{cases} z_Q = 0 \\ \vec{M}_Q = \vec{M}_{min} \parallel \vec{R} \end{cases}$

④ Puntos en los que el $\vec{M}^{SIST}$ posee $\vec{M}_{min}$

calculando el módulo de dicho momento

$$\vec{M}_{min} = \left(\vec{M}_0 \cdot \frac{\vec{R}}{|R|}\right)\frac{\vec{R}}{|R|} = \left[(1\,1\,{-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1\,1\,1)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}(1,1,1)$$

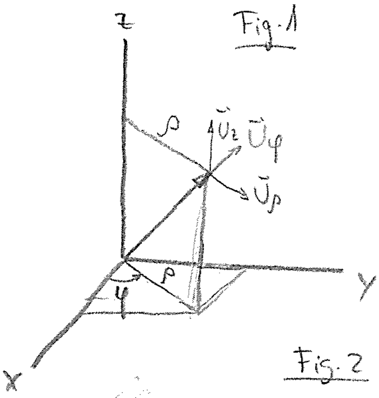
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{M}_{min} \text{ en puntos del E.C.} \\ |\vec{M}_{min}| = \left|\frac{1}{3}(1,1,1)\right| = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}}$$

OTRA FORMA de calcular el M_{min}

$$\vec{M}_{min} = \vec{M}_H = M_0 + \vec{HO} \times R = (-1,1,1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,1,1) + \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,1,1)$$

(12) Expresar en cartesianas $\vec{U}_\rho$ y $\vec{U}_\varphi$

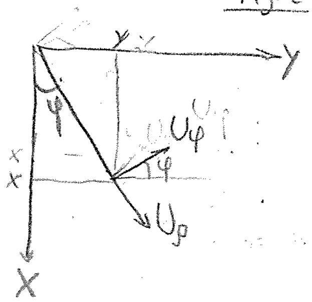
Fig. 1



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{U}_\rho &= \cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}\\ U_\varphi &= -\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\end{aligned}}$$

Figuras 1 y 2

Fig. 2



Por derivación, obtener la relación entre $\frac{dU_\rho}{dt}$ y U_φ y $\frac{dU_\varphi}{dt}$ y U_ρ

$$\frac{dU_\rho}{dt} = \left(-\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \boxed{U_\varphi\,\dot{\varphi}}$$

$$\frac{dU_\varphi}{dt} = \left(-\cos\varphi\,\vec{i} - \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \boxed{-U_\rho\,\dot{\varphi}}$$

(16) Sistema de vectores deslizantes $v_1 = -1\vec{i} + 1\vec{j}$ y $v_2 = +1\vec{i}$ con rectas soporte que pasan por $A_1(0\,3\,0)$ y $A_2(1\,0\,0)$ respectivamente. Determinar un sistema equivalente con el menor número posible de vectores, indicando su recta soporte

$v_1 = (-1,1,0) \to A_1(0\,3\,0)$

$v_2 = (1,0,0) \to A_2(1,0,0)$

$\vec{R} = (0,1,0)$

$|R| = 1$

$$\vec{M}^{sist}_{A_1} = \cancel{\vec{M}^{v_1}_{A_1}} + \vec{M}^{v_2}_{A_1} = (0,0,3)$$

$$M^{v_1}_{A_1} = \overrightarrow{A_1A_1} \times v_1 = 0$$

$$M^{v_2}_{A_1} = \overrightarrow{A_1A_2} \times v_2 = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = 3\vec{k} = (0,0,3)$$

Hallemos la ecuación del eje

$$r = \vec{r}_{A_1} + \frac{\vec{R}\times\vec{M}_{A_1}}{|R|^2} + \lambda R = (0,3,0) + \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix} + \lambda(0,1,0) =$$

$$= (0,3,0) + (3,0,0) + \lambda(0,1,0) \Rightarrow \begin{cases} x = 3\\ y = 3+\lambda\\ z = 0\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\tilde{\tau}_{A_1} = \{\vec{R}, \vec{M}_{A_1}\} = \{(0,1,0), (0,0,3)\}\\ &E.C \Rightarrow \begin{cases} x = 3\\ y = 3+\lambda\\ z = 0\end{cases}\end{aligned}}$$

Problema 2

I) Sistema cuyo $\tau_0\{R, M_0\} = \{(0,0,1),(1,1,0)\}$

Determinar $\vec{M}_{min}$, eje central y las coordenadas del punto intersección con el plano $\Pi_{z=0}$

$$r = \cancel{r_0}^{\,0} + \underbrace{\frac{\vec{R}\times\vec{M}_0}{|R|^2}}_{\vec{OH}} + \lambda R \;; \qquad \vec{OH} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}+\vec{j} = (-1,1,0)$$

$$r = (-1,1,0) + \lambda(0,0,1) \longrightarrow \boxed{E.C \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}}$$

$$E.C \cap \Pi_{z=0} \longrightarrow z=0 \Longrightarrow \lambda=0 \longrightarrow \boxed{P(-1,1,0)}$$

$$\vec{M}_{min} = \vec{M}_H = \vec{M}_0 + \vec{HO}\times R = (1\,1\,0) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1\,1\,0) + (-1,-1,0) = \overline{0}$$

$$\boxed{\vec{M}_{min} = \overline{0}}$$

Sigue!!

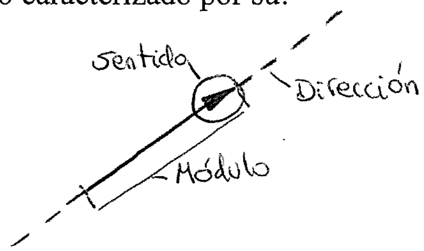
c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid.
Tlfno: 91 535 75 29
Profesor
Alex García

VECTORES Y SISTEMAS DE VECTORES

1.- DEFINICIÓN

Vector geométrico: segmento orientado caracterizado por su:

Módulo: longitud del segmento.
Dirección: recta que lo contiene.
Sentido: del origen al extremo.

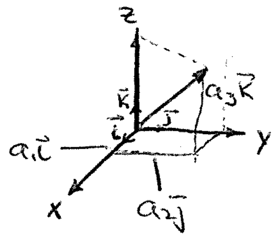


2.- CLASIFICACIÓN

Libres: En su determinación no hay que especificar su recta soporte ni su punto de origen.
Deslizantes: Hay que especificar la recta de acción pero no el punto de origen.
Ligados: Para su determinación hay que especificar tanto la recta de acción como el origen del vector.

3.- OPERACIONES CON VECTORES

En todas las operaciones que siguen, consideraremos sistemas de referencia con bases ortonormales (los vectores de las bases tendrán módulo unidad y serán ortogonales). También consideraremos nuestros sistemas de referencia orientados a derechas.



Componentes ortogonales de un vector: Denominamos así a las proyecciones del vector sobre los ejes del sistema de referencia. Para un sistema de referencia cartesiano, con los vectores ortonormales de la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, el vector $\vec{a}$ se puede expresar como:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

donde a_1, a_2, a_3 son las componentes ortogonales o proyecciones sobre los ejes del sistema de referencia del vector $\vec{a}$.

3.1- SUMA

Sumamos dos vectores de forma geométrica llevando el origen del segundo al extremo del primero. El vector suma tiene por origen el origen del primero y por extremo el extremo del segundo.
Propiedades: conmutativa y asociativa.

3.2- PRODUCTO POR ESCALAR

Sea $\vec{a}$ un vector y k un escalar. El producto exterior $k\vec{a}$ es otro vector de dirección la de $\vec{a}$, sentido el de $\vec{a}$ si $k>0$ y contrario si $k<0$, y módulo $k|\vec{a}|$

3.3- PRODUCTOS ENTRE VECTORES:

3.3.1- PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El resultado es un <u>escalar</u>, que se define, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores, como:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, siendo θ el ángulo que forman.

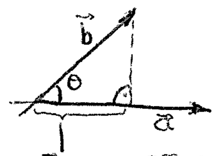
Expresados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en base ortonormal, podemos escribirlo como:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

El producto $|\vec{b}|\cos\theta$ se denomina *proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$*

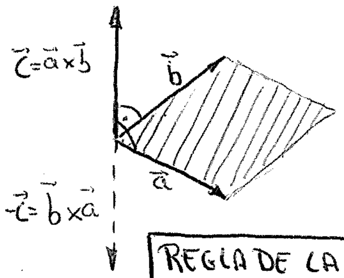


$|\vec{b}|\cos\theta$: proyección de b sobre $\vec{a}$

Si $|\vec{a}| = 1$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot|\vec{b}|\cos\theta =$ proyec.

3.3.2- PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES



REGLA DE LA MANO DERECHA

El resultado es un vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, de:

Módulo: $|\vec{a}||\vec{b}|\,sen\,\theta$, siendo θ el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Dirección: perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Sentido: tal que $\vec{a}$, $\vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b})$ formen un triedro a derechas (reglas del sacacorchos o de la mano derecha).

Se verifica:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (anticonmutativa)

2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3.3.3- PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, se define como:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c})$$

y representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

Propiedades:

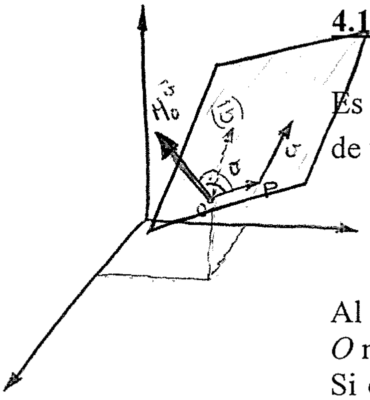
1) intercambiabilidad del producto escalar con el vectorial
$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = (\vec a \times \vec b) \cdot \vec c$$
2) permutabilidad circular de vectores
$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = \vec c \cdot (\vec a \times \vec b) = \vec b \cdot (\vec c \times \vec a)$$
3) antisimetría respecto al producto vectorial
$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = -\vec a \cdot (\vec c \times \vec b)$$

3.3.4- DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

Se define como $\vec a \times (\vec b \times \vec c)$. Es distinto de $(\vec a \times \vec b) \times \vec c$.
Se puede operar directamente o mediante la *fórmula de expulsión*:

$$\boxed{\vec a \times (\vec b \times \vec c) = (\vec a \cdot \vec c)\, \vec b - (\vec a \cdot \vec b)\, \vec c}$$

4.- SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES



4.1- MOMENTO RESPECTO DE UN PUNTO

Es un vector. Se define el momento $\vec M_O$ de un vector $\vec v$ con origen en P respecto de un punto O del espacio como el producto vectorial:

$$\vec M_o = \vec{OP} \times \vec v$$

Al deslizar el vector $\vec v$ a lo largo de su línea de acción, el momento respecto de O no cambia (**ver demo**).
Si consideramos el punto H, pie de la perpendicular por O a la recta soporte de $\vec v$, como origen de $\vec v$, el módulo del momento queda:

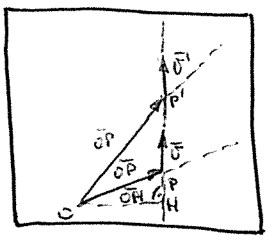
$M_o^{\vec v} = \vec{OP} \times \vec v$

Brazo - módulo

$$\boxed{|\vec M_o| = |\vec{OH}| \cdot |\vec v| \text{ sen } 90 = |\vec{OH}| \cdot |\vec v|}$$

$M_o^{\vec v} = \vec{OP'} \times \vec v = (\vec{OP'} + \vec{P'P}) \times \vec v =$
$= \vec{OP} \times \vec v + \cancel{\vec{PP'} \times \vec v}$ $\vec v\,(\parallel)$

Dando el valor de un vector, el punto respecto al cual tomamos momentos, y el valor de dicho momento, queda definida la línea de acción de ese vector.



4.2- MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO DE UN EJE (MOMENTO ÁXICO)

Es un escalar. Se define como la proyección ortogonal sobre dicho eje (eje e) del momento del vector respecto de un punto del eje. Considerando un vector $\vec v$, un punto O del eje e, y un vector unitario $\vec u_e$ en la dirección del eje, el momento áxico vale:

$|M_o^{\vec v}| = |\vec{OP}||\vec v| \text{sen}\,\theta$ — $|\vec{OH}|$ = brazo

$$\boxed{M_e = \vec M_o \cdot \vec u_e}$$

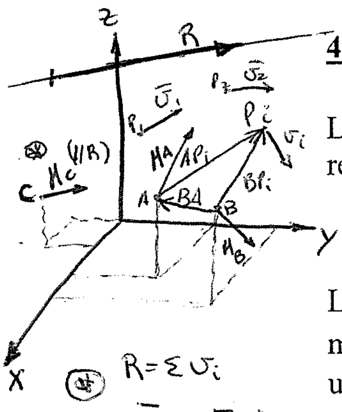
$|M_o^{\vec v}| = |\vec{OP'}||\vec v| \text{sen}\,\theta'$

$|M_o^{\vec v}| = |\vec{OH}||\vec v| \text{sen}\,90°$

M_e no depende del punto del eje que consideremos.

Por tanto

$|M_o^{\vec v}| = \text{brazo}\,|\vec v|$



4.3- RESULTANTE Y MOMENTO: TORSOR

Llamamos resultante $\vec{R}$ de un sistema de vectores deslizantes al vector que resulta de sumar todos los vectores del sistema:

$$\vec{R} = \sum \vec{v}_i \rightarrow \text{Invariante}$$

Llamamos momento del sistema respecto de un punto A, $\vec{M}_A$, a la suma de los momentos en A de todos los vectores del sistema. Siendo P_i el origen de cada uno de los vectores $\vec{v}_i$, tenemos:

$$\vec{M}_A = \sum \vec{AP_i} \times \vec{v}_i$$

Tomando otro punto B, el momento respecto de B vale:

$$\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \times \vec{R}}$$ **(ver demo)** ⊛

A esta expresión se le llama ecuación del cambio de momentos, de gran aplicación.

⊛ $R = \sum v_i$

$M_A = \sum_i \bar{AP_i} \times \bar{v}_i$
$M_B = \sum_i \bar{BP_i} \times v_i$ ⇒

⇒ $M_B = \sum_i (\bar{BA} + \bar{AP_i}) \times v_i =$

$= \sum_i \bar{BA} \times v_i + \underbrace{\sum \bar{AP_i} \times v_i}_{M_A} =$

$= M_A + \bar{BA}(\underbrace{\sum v_i}_{R}) =$

$= M_A + \bar{BA}\,\bar{R}$

Reducir un sistema de vectores deslizantes a un punto P es obtener un sistema equivalente formado por la resultante y el momento del sistema respecto a P, aplicados ambos en P, llamándose al conjunto *torsor en P*, $\tau[\vec{R}, \vec{M}_P]$.

4.4- INVARIANTES DEL SISTEMA (RESULTANTE Y MOMENTO MÍNIMO)

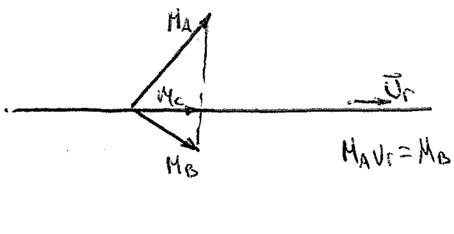
Se llaman invariantes del sistema a ciertas expresiones vectoriales o escalares que no cambian al variar el punto de reducción. Los invariantes fundamentales son dos, aunque de ellos pueden derivarse otros:

1) La resultante $\vec{R}$ (invariante vectorial)

2) El producto escalar $\vec{M} \cdot \vec{R}$ (invariante escalar). Para demostrarlo multiplicamos escalarmente la ecuación del cambio de momentos por $\vec{R}$:

$$\vec{M}_B \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R} + (\vec{BA} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R} \Longrightarrow \bar{M}_A \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \bar{M}_B \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \bar{M}_i \cdot \bar{U}_R$$

Un invariante derivado sería $\dfrac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|} = \vec{M} \cdot \vec{u}_R$ ($\vec{u}_R$ unitario en la dirección de la resultante), que representa la proyección del momento sobre la dirección de la resultante, que coincide a su vez con el módulo del momento mínimo, M_{min}. De esto se deduce que el momento tendrá módulo mínimo en todos los puntos en los que el momento tenga la dirección de la resultante, o lo que es lo mismo, si encontramos un punto en el que el momento es paralelo a la resultante, sabemos que el módulo de ese momento es mínimo. **(ver demo)** ⊛ $M_C \rightarrow M_{min}$ $/\!/ R$



$M_A U_r = M_B U_r = M_C U_r$

4.5- EJE CENTRAL

El lugar geométrico de los puntos en los que el momento del sistema es mínimo, es decir, en los que el momento del sistema tiene la dirección de la resultante, es una recta paralela a la resultante llamada *eje central*. **(ver demo)**

Conocido un punto P y el momento del sistema en P, $\vec{M}_P$, la ecuación vectorial del eje central queda:

$$\vec{r} = \vec{r}_P + \frac{\vec{R} \times \vec{M}_P}{\left|\vec{R}\right|^2} + \lambda \cdot \vec{R}$$ **(ver demo)**

Es evidente que el menor módulo mínimo es 0; por tanto si encontramos un punto en el que el momento del sistema es nulo, ese será el módulo mínimo, y ese punto pertenecerá al eje central.

5.- SISTEMAS DE VECTORES LIGADOS NO ENTRA

5.1- RESULTANTE, MOMENTO Y VIRIAL (VIRITORSOR)

Así como en el caso de vectores deslizantes había que especificar la recta de acción del vector, la cual quedaba definida con el momento, en el caso de vectores ligados habrá que especificar además el punto de aplicación, que quedará definido con el virial.

Se define virial de un vector ***s*** respecto a un punto O, como el producto escalar

$$v_O = \vec{OA} \cdot \vec{s}$$

siendo A el punto de aplicación del vector

Por tanto, dadas las componentes del vector, del punto, y el valor del momento y el virial respecto a ese punto, quedan definidos la recta de acción y el punto de aplicación.

Dado un sistema de vectores ligados se define el virial del sistema respecto al punto O como la suma de viriales respecto a O de cada uno de los vectores que lo constituyen:

$$v_O = \Sigma\ \vec{OA_i} \cdot \vec{s}_i$$

siendo A_i el punto de aplicación de cada uno de los vectores del sistema.

Para relacionar el virial entre dos puntos, P y Q, se emplea la *ecuación del cambio de virales*:

$$v_P = v_Q + \vec{PQ} \cdot \vec{R}$$

El lugar geométrico de los puntos del espacio respecto de los cuales el virial es nulo es un plano perpendicular a la resultante que recibe el nombre de *plano central*, cuya ecuación, siendo O el origen de coordenadas, $\vec{r}$ el vector de posición de un punto P del plano central, y v_O el virial en el origen, es:

$$v_O - \vec{r} \cdot \vec{R} = 0$$

Al punto de intersección del plano central con el eje central se le llama *punto central.*

El plano central divide el espacio en dos semiespacios, teniendo en uno viriales positivos y en el otro negativos.

EJERCICIO VECT. 8. (SEP 2005)

Un sistema de vectores deslizantes tiene como resultante $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ y momento respecto al origen $\boldsymbol{M}_O = a\boldsymbol{k}$. Determinar el valor de a para que el eje central del sistema pase por el punto A(1, 1, 0).

EJERCICIO VECT. 9. (SEP 2006)

Un punto tiene de coordenadas cartesianas $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$. Obtener sus coordenadas esféricas.

EJERCICIO VECT. 10. (FEB 2007)

Un punto tiene de coordenadas cartesianas $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$. Obtener sus coordenadas cilíndricas.

EJERCICIO VECT. 11. (JUN 2007)

Dados los vectores libres $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, justificar si puede existir un vector no nulo $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{i} + \mu\boldsymbol{j}$ para el que se cumpla que $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

EJERCICIO VECT. 12. (FEB 2008)

Expresar en la base de coordenadas cartesianas $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ los vectores unitarios $\boldsymbol{u}_\rho$ y $\boldsymbol{u}_\varphi$ de la base de coordenadas polares y obtener, por derivación, la relación entre los vectores $\frac{d\boldsymbol{u}_\rho}{dt}$ y $\boldsymbol{u}_\varphi$ y la existente entre los vectores $\frac{d\boldsymbol{u}_\varphi}{dt}$ y $\boldsymbol{u}_\rho$.

$\frac{dU_\rho}{dt} = \vec{U}_\varphi \dot{\varphi}$ $\quad \frac{dU_\varphi}{dt} = -\vec{U}_\rho \cdot \dot{\varphi}$

EJERCICIO VECT. 13. (JUN 2008)

Utilizar la fórmula de doble producto vectorial $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ para deducir la condición que deben cumplir $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ (el vector $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$) para que se cumpla la asociatividad del doble producto vectorial: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ para vectores cualesquiera $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$.

EJERCICIO VECT. 14. (FEB 2009)

Determinar el vector proyección del vector $4\boldsymbol{k}$ sobre el plano de ecuación $x + y + z = 0$.

EJERCICIO VECT. 15. (FEB 2009)

Un sistema de vectores deslizantes tiene como resultante $\boldsymbol{R} = \lambda\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y momento respecto al origen $\mathcal{M}_O = -4\boldsymbol{k}$. Determinar el valor de λ para que el eje central del sistema pase por el punto $A(4, 4, 0)$.

EJERCICIO VECT. 16. (SEP 2009)

Se da el sistema de vectores delizantes $v_1 = -1\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j}$ y $v_2 = +1\boldsymbol{i}$ con rectas soporte que pasan por los puntos respectivos $A_1(0,3,0)$ y $A_2(1,0,0)$. Determinar un sistema equivalente al dado con el menor número posible de vectores, indicando su correspondiente recta soporte.

$r = r_A - \frac{R \times M_A}{|R|^2} + \lambda R$

X **EJERCICIO VECT. 1** (Feb 95)

Demuestre que el vector **a** = (**u** x **v**) x (**r** x **s**) pertenece a la intersección de los planos que forman **u**, **v** y **r**, **s**.

EJERCICIO VECT. 2. (Feb-99)

Señale las siguientes afirmaciones correctas para cualquier sistema de vectores ligados, con la particularidad de que todos pertenezcan a un mismo plano π y que su resultante no sea nula:

a) El eje central es perpendicular al plano π.
b) El virial se anula en los puntos del eje central.
c) El momento mínimo es nulo.
d) El punto central siempre está en el plano π.
e) El plano central coincide con el plano π.

X **EJERCICIO VECT. 3.** (Feb 01) (SEP 2003)

Dado un sistema de vectores deslizantes, cuyo torsor en el origen de coordenadas expresado en componentes cartesianas ortonormales es **R**(0,0,1) y $\mathbf{M_O}$(1,1,0), determinar si existirá algún punto para el cual el momento sea nulo.

X **EJERCICIO VECT. 4.** (Sep 01)

Un sistema de vectores deslizantes está constituido por tres vectores dados por sus componentes cartesianas ortonormales, **a**(-1,-1,1), **b**(1,1,1) y **c**(0,0,-1) y sus rectas soporte pasan respectivamente por los puntos A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1). Determinar el eje central de dicho sistema.

X **EJERCICIO VECT. 5.** (Feb 02)

El torsor de un sistema de vectores deslizantes en el origen de coordenadas viene dado en componentes cartesianas ortonormales por: $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M_O}\} \equiv \{(0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$. Determinar el eje central de dicho sistema.

X **EJERCICIO VECT. 6.** (Jun 2002)

El eje central de un sistema de vectores deslizantes es el eje *Oz*, la resultante del sistema tiene por módulo 1 y el momento resultante del sistema con respecto al punto A(1,0,0) vale $\boldsymbol{M_A}$ = (0,1,1) en las apropiadas unidades. Determinar el torsor del sistema referido al origen.

X **EJERCICIO VECT. 7.** (FEB 2005)

Un sistema de vectores deslizantes está formado por los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. cuyas rectas soporte concurren en el origen de coordenadas. Determinar para ese sistema la ecuación del eje central.

$R = (0\ 0\ 1)$

$\Gamma = \Gamma_p + pM + \lambda R$

$M_{min} = 0 \cdot M_A$

$M_0 = M_A + \vec{OA} \times R$

$(1\ 1\ 0) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a_2, -a_1, 0)$

PROBLEMA VECT. 2. (Jun 98)

I) S es un sistema de vectores deslizantes cuyo torsor en el origen de coordenadas es $\boldsymbol{R}(0,0,1)$ y $M_O(1,1,0)$, expresado por sus componentes cartesianas ortogonales en una base ortonormal.

1) Determine el momento de módulo mínimo.

2) Calcule las coordenadas del punto en el que el eje central corta al plano $z = 0$.

II) Se considera un campo vectorial en todo el espacio, definido mediante

$$\boldsymbol{M} = (\lambda y + z)\,\mathbf{i} + (\lambda^2 z - \lambda x)\,\mathbf{j} - (x + y)\,\mathbf{k}$$

donde λ es un número real y (x,y,z) las coordenadas de cada punto.

3) Demuestre que existen dos valores distintos de λ que permiten interpretar $\boldsymbol{M}$ como un campo de *momentos* de un sistema de vectores deslizantes, y obtenga dichos valores. Para ello, exprese su resultante $\boldsymbol{R}$ como $R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} + R_z\,\mathbf{k}$ y obtenga la diferencia entre los momentos del sistema respecto a dos puntos cualesquiera, $P(x_p, y_p, z_p)$ y $Q(x_q, ys_q, z_q)$, introduciendo las variables $X = x_q - x_p$, $Y = y_q - y_p$, $Z = z_q - z_p$. Se obtienen así tres ecuaciones que deben satisfacerse para cualesquiera valores de X, Y, Z, con lo que se encuentran las relaciones necesarias para determinar λ, R_x, R_y y R_z.

4) Sean λ_1 y λ_2 los valores de λ ($\lambda_1 > \lambda_2$) correspondientes a los dos sistemas que se designan mediante S^1 y S^2. Determine la resultante $\boldsymbol{R}^1$ y el momento resultante $\boldsymbol{M}^1$ respecto de un punto (x,y,z) cualquiera para S^1 y lo mismo para S^2.

5) Calcule el momento de módulo mínimo y el eje central de S^1.

6) Calcule el momento de módulo mínimo y el eje central de S^2.

III) Se forma un sistema de vectores deslizantes S^t acumulando todos los vectores de S, S^1 y S^2.

7) Calcule el momento de S^t respecto al origen de coordenadas.

8) Determine el momento de módulo mínimo para S^t.

9) Obtenga el eje central de S^t y las coordenadas del punto en el que corta al plano $z = 0$.

PROBLEMA VECT. 1. (Jun 97)

Hecho

Un sistema está constituido por los tres vectores **a**, **b** y **c**, definidos por las siguientes condiciones:

a) Los tres vectores son unitarios.

b) Su producto mixto es 1.

c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} > 0$, $\mathbf{a} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{j} > 0$, $\mathbf{b} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$.

d) El momento de **a** respecto al origen es **j**, y el de **b** es **k**.

e) El momento áxico de **c** respecto al segundo eje cartesiano es nulo.

f) El momento del sistema respecto al origen tiene módulo $\sqrt{3}$, y su producto escalar por **i** es negativo.

1) Determine los tres vectores **a**, **b** y **c**, con sus rectas soporte que se expresarán mediante su ecuación en coordenadas cartesianas.

2) Reduzca el sistema de vectores al origen de coordenadas.

3) Obtenga la ecuación del eje central del sistema en coordenadas cartesianas y el punto de intersección del eje central con el plano z = 0.

4) Determine los puntos en los que el momento del sistema posee módulo mínimo y calcule el valor de dicho momento.

Para los restantes apartados se trabajará suponiendo que cada uno de los vectores **a**, **b** y **c** están ligados al punto de su soporte más próximo al origen de coordenadas.

5) Determine el virial del sistema respecto al origen de coordenadas.

6) Reduzca el sistema de vectores al punto de coordenadas cartesianas D(1,2,3).

7) Obtenga el plano central del sistema, expresando su ecuación en coordenadas cartesianas.

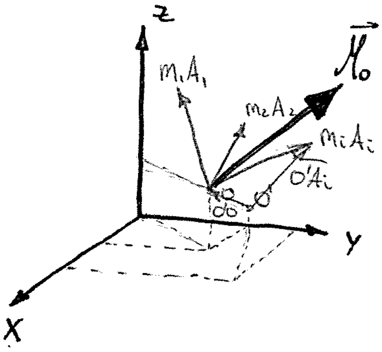
8) Calcule las coordenadas cartesianas del punto central del sistema.

Virial → No entra

Geometría de Masas

1 Momento Estático

1.1 Respecto de un punto O (M. central)



$$\boxed{M_o = \sum_i \vec{OA_i} \cdot m_i}$$

Cogiendo otro punto, el momento será

$$M_{o'} = \sum O'A_i \cdot m_i = \sum (\vec{O'O} + \vec{OA_i})\, m_i =$$

$$= \sum \vec{O'O}\, m_i + \sum \vec{OA_i}\, m_i = \sum \vec{O'O} \cdot m_i + \vec{M}_o$$

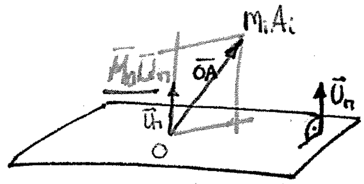
Por tanto, la ecuación queda:

$$\vec{M}_{o'} = \vec{M}_o + M\vec{O'O} \quad ; \text{ con } M = \sum m_i$$

1.2 Respecto de un plano π (M. planario)

$$\vec{M}_\pi = \vec{M}_o \cdot \vec{U}_\pi = \sum \vec{OA_i} \cdot m_i \cdot \vec{U}_\pi$$

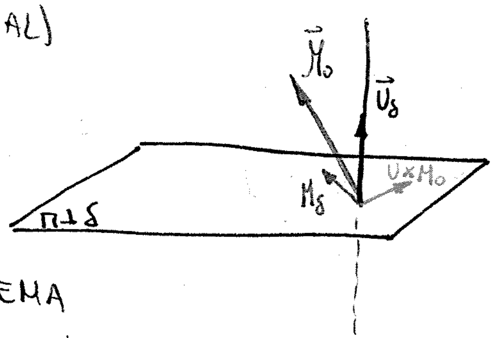
$$\boxed{\vec{M}_\pi = \vec{M}_o \vec{U}_\pi = \sum m_i \cdot d_i}$$



No depende del punto que cojamos del plano

1.3 Respecto una recta δ (M. axial)

$$\boxed{M_\delta = (\vec{U} \times \vec{M}_o) \times \vec{U}}$$



2 Centro de masas de un sistema

Es el punto donde se anula el momento estático, lo llamaremos G.

$$\vec{M}_G = \vec{M}_o + \vec{GO} \cdot M = 0 \longrightarrow \vec{M}_o - \vec{OG}\, M = 0 \longrightarrow \vec{M}_o = \vec{OG}\, M$$

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{M_o}{M} = \frac{\sum \vec{OA_i}\, m_i}{M}}$$

Si consideramos sistemas continuos, los "Σ" se transforman en integrales y las masas m_i en dm. Así, estudiando cada coordenada de G tendremos:

Sistema discreto	Sistema continuo
$x_G = \dfrac{\Sigma m_i x_i}{M}$	$x_G = \dfrac{\int x\, dm}{M}$
$y_G = \dfrac{\Sigma m_i y_i}{M}$	$y_G = \dfrac{\int y\, dm}{M}$
$z_G = \dfrac{\Sigma m_i z_i}{M}$	$z_G = \dfrac{\int z\, dm}{M}$

Por último, si podemos descomponer el sistema en varios subsistemas A, B, C el centro de masas total será:

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_{GA} M_A + \vec{r}_{GB} M_B + \vec{r}_{GC} M_C}{M_A + M_B + M_C}}$$

3 TEOREMAS DE GULDIN

Usados para determinar la posición del centro de masas de algunos sistemas planos (curvas o sup. planas)

1er teorema $\boxed{d_G = \dfrac{A}{2\pi L}}$ 2° teorema $\boxed{d_G = \dfrac{V}{2\pi A}}$

Para curvas planas Para superficies planas

$$\frac{\frac{z^3}{3}\Big|_0^h}{\frac{z^2}{2}\Big|_0^h}$$

NOTA!

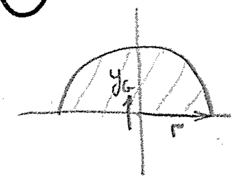
ESFERA: $S = 4\pi r^2$
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ELIPSE: $S = \pi ab$

ELIPSOIDE: $V = \frac{4}{3}\pi abc$

4 EJERCICIOS

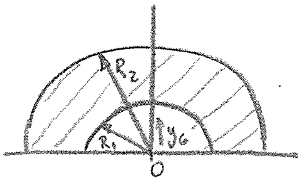
(1) Determinar C.M. de una placa semicircular



2° teorema Guldin $d_G = \dfrac{V}{2\pi A}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3}\pi r^3 = V \\ \frac{\pi r^2}{2} = A \end{array} \right.$

$$y_G = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4\pi r^3}{3\pi^2 r^2} = \frac{4r}{3\pi} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} X_G = 0 \\ y_G = \dfrac{4r}{3\pi} \end{array}}$$

(2) Determinar C.M. de una placa en forma de semicorona circular de radios menor y mayor R_1 y R_2

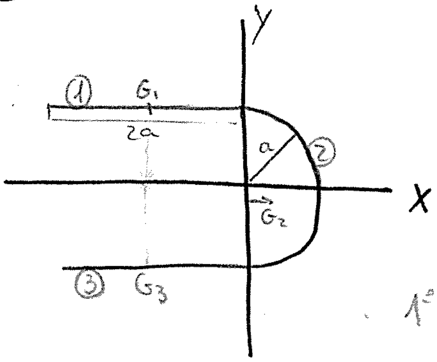


2° teorema Guldin $\dfrac{V}{2\pi A} = y_G$ $\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3 \\ A = \frac{\pi}{2} R_2^2 - \frac{\pi}{2} R_1^2 \end{array} \right.$

$$y_G = \frac{\frac{4}{3}\cancel{\pi}(R_2^3 - R_1^3)}{\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}(R_2^2 - R_1^2)\cancel{2}\pi} = \frac{4(R_2^3 - R_1^3)}{3\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_G = 0 \\ y_G = \dfrac{4}{3}\dfrac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)} \end{array}}$$

(5) Determinar el centro de masas del alambre $\left\{ \begin{array}{l} \text{Lados rectos} \rightarrow \text{long} = 2a \\ \text{Parte semicircular} \rightarrow r = a \end{array} \right.$



Por simetrías

$G_1 \left\{ \begin{array}{l} X_{G_1} = -a \\ y_{G_1} = a \end{array} \right.$ $G_3 \left\{ \begin{array}{l} X_{G_3} = -a \\ y_{G_3} = -a \end{array} \right.$

Para (2) aplicamos Guldin

1° teorema $X_G = \dfrac{A}{2\pi L}$ $\left\{ \begin{array}{l} A = 4\pi r^2 = 4\pi a^2 \\ L = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = \pi a \end{array} \right. \Rightarrow G_2 \left\{ \begin{array}{l} X_G = \frac{2a}{\pi} \\ y_G = 0 \end{array} \right.$

$$X_G = \frac{4\pi a^2}{2\pi \pi a} = \frac{2a}{\pi}$$

Calculemos el G_{TOTAL}

$y_{G\,TOTAL} = 0 \rightarrow$ Por simetría

$X_{G\,TOTAL}$: Alambre homogeneo $\dfrac{dm}{dl} = \lambda \rightarrow \dfrac{M}{\ell} = cte$

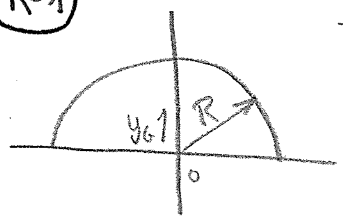
$$X_{G\,TOT} = \frac{M_1 G_1 + M_2 G_2 + M_3 G_3}{M_1 + M_2 + M_3}$$

$\left. \begin{array}{l} M_1 = \lambda l_1 = \lambda 2a \\ M_2 = \lambda l_2 = \lambda \pi a \\ M_3 = \lambda l_3 = \lambda 2a \end{array} \right\} M = \lambda a(2 + \pi + 2)$

$$X_{G\,TOTAL} = \frac{\cancel{\lambda} 2\cancel{a}(-a) + \cancel{\lambda}\pi \cancel{a}\left(\frac{2a}{\pi}\right) + \cancel{\lambda} 2\cancel{a}(-a)}{\cancel{\lambda}\cancel{a}(4+\pi)} = \frac{-2a - 2a + 2a}{4+\pi} = \frac{-2a}{4+\pi}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_G = \dfrac{-2a}{4+\pi} \\ y_G = 0 \end{array}}$$

R-1



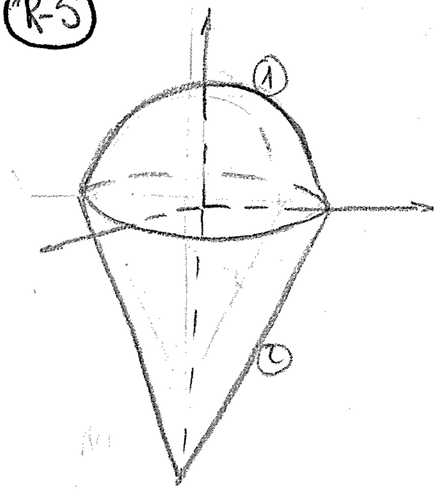
Th. Guldin I: $d_G = \dfrac{A}{2\pi L}$ $\quad \begin{cases} A = 4\pi R^2 \\ L = \dfrac{2\pi R}{2} = \pi R \end{cases}$

$X_G = 0$ → por simetría

$$y_G = \frac{4\pi R^2}{2\pi \pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

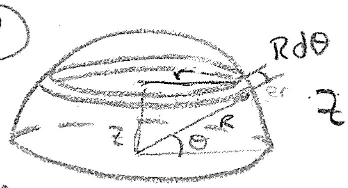
$$\boxed{\begin{matrix} X_G = 0 \\ y_G = \dfrac{2R}{\pi} \end{matrix}}$$

R-5



Por sim. geométrica y másica $\left\{ \boxed{\begin{matrix} X_G = 0 \\ y_G = 0 \end{matrix}} \right.$

(1)



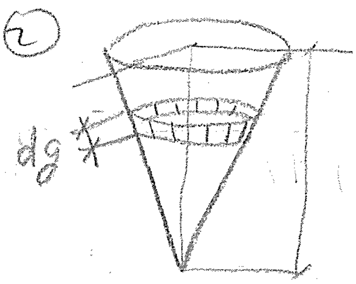
$$z_{G_1} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{\int z \sigma 2\pi r R d\theta}{\int \sigma 2\pi r R\, d\theta} = \frac{\int_0^{\pi/2} R \operatorname{sen}\theta\, R\cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} R\cos\theta\, d\theta} =$$

$$\begin{cases} dm = \sigma ds = \sigma 2\pi r R d\theta \\ r = R\cos\theta, \ z = R\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\sigma = \dfrac{dm}{ds} = cte$

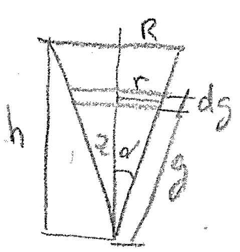
$$= \frac{R \left.\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2}}{\left.\operatorname{sen}\theta\right|_0^{\pi/2}} = \frac{R}{2}$$

(2)



$$z_{G_2} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{\int z \cancel{\sigma} \cancel{2\pi} r\, dg}{\int \cancel{\sigma} \cancel{2\pi} r\, dg} = \frac{\int_0^h z \frac{R}{h} z \frac{dz}{\cancel{\cos\varphi}}}{\int_0^h \frac{R}{h} z \frac{dz}{\cancel{\cos\varphi}}} =$$

$$\begin{cases} dm = \sigma ds = \sigma 2\pi r dg \\ \dfrac{r}{z} = \dfrac{R}{h} \to r = \dfrac{R}{h} z \\ z = g\cos\varphi \to dg = \dfrac{dz}{\cos\varphi} \end{cases} = \frac{-h2}{3}$$



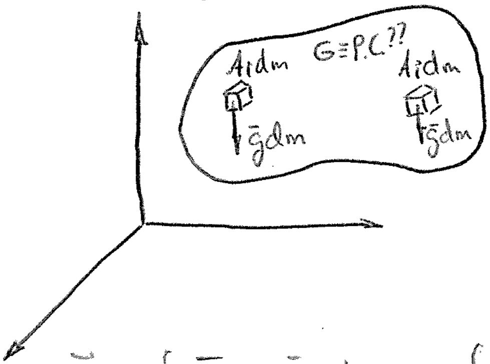
$$Z_G = \frac{z_{G_1} M_1 + z_{G_2} M_2}{M_1 + M_2} = \frac{\frac{R}{2} \cancel{\sigma} 4\cancel{\pi} R^2 - \frac{2}{3} h \frac{Rh}{2\cos\varphi} \cancel{2\sigma\pi}}{\cancel{2\sigma\pi} \left(2R^2 + \frac{Rh}{2\cos\varphi}\right)}$$

$$M_2 = \int dm = \sigma 2\pi \int r\,dg = \sigma 2\pi \int \frac{R}{h} z \frac{dz}{\cos\varphi} = \frac{R}{h\cos\varphi} \frac{h^2}{2} \sigma 2\pi = \sigma 2\pi \frac{Rh}{2\cos\varphi}$$

$$M_1 = \int dm = \sigma 2\pi R \int r\,d\theta = \sigma 2\pi R \int R\cos\theta\, d\theta = \sigma 4\pi R^2$$

Indusbol .com

③ Sistema continuo de vectores ligados que resulta de aplicar en cada elemento diferencial de volumen de un sólido rígido su peso, $\vec{g}dm$, con g cte. Demostrar que el centro de masas del sistema, G es el punto central del sist. de vectores ligados



Por definición $\vec{M}_G = \int \vec{GA_i} \cdot dm = \vec{0}$

$$P.C \equiv (E.C. \cap \Pi_c) \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_{PC} = M_{min} \\ \mathcal{U}_{P.C.} = 0 \end{cases}$$

$$\text{si } G \equiv P.C. \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_G = \vec{M}_{min} \\ \mathcal{U}_G = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M}_G = \int \vec{GA_i} \times \vec{g}\, dm = g \times \underbrace{\int \vec{GA_i} \cdot dm}_{\vec{M}_G = 0} = 0 \Rightarrow \vec{M}_G = \vec{M}_{min} \\ \mathcal{U}_G = \int \vec{GA_i} \times \vec{g}\, dm = g \underbrace{\int \vec{GA_i} \cdot dm}_{\vec{M}_G = 0} = 0 \Rightarrow \mathcal{U}_G = 0 \end{array}\right\} \text{— como queríamos demostrar}$$

④ Placa plana rectangular, a, b con $\sigma = \dfrac{dm}{ds} = C_1 x$ siendo $C_1 =$ cte

NOTA TEÓRICA! Distribuciones de masa

Lineales: Densidad $\lambda = \dfrac{dm}{dl}$; si $\lambda =$ cte (homog.)

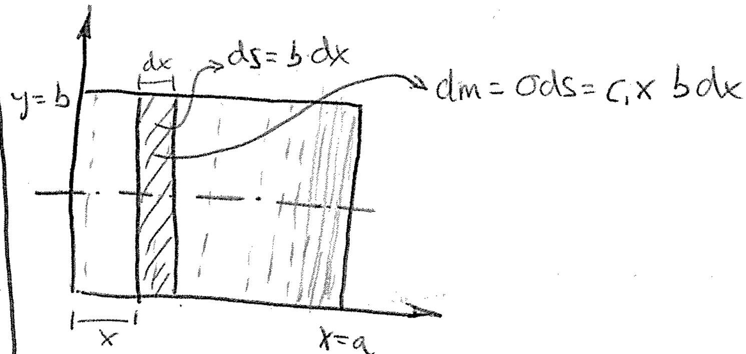
$$\Rightarrow \lambda = \frac{dm}{dl} = cte = \frac{M}{l_{total}}$$

Superficiales: Densidad $\sigma = \dfrac{dm}{ds}$; si $\sigma =$ cte

$$\Rightarrow \sigma = \frac{dm}{ds} = cte = \frac{M}{S_{total}}$$

Volumétricas: Densidad $\rho = K = \dfrac{dm}{dV}$; si $\rho =$ cte

$$\Rightarrow \rho = \frac{dm}{dV} = cte = \frac{M}{V_{TOT.}}$$



Por simetría (másica y geométrica)

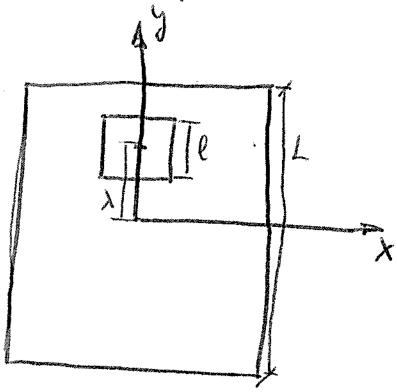
$$y_G = \frac{b}{2}$$

x_G no puedo aplicar Guldin por ser sist. continuo $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int_{x=0}^{x=a} x\, C_1 x\, b\, dx}{\int_{x=0}^{x=a} C_1 x\, b\, dx} = \left.\frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^2}{2}}\right|_{x=0}^{x=a} = \frac{2}{3}a$$

$$\boxed{G \begin{cases} x_G = \frac{2}{3}a \\ y_G = \frac{b}{2} \end{cases}}$$

⑦ Placa cuadrada de lado L con densidad $\sigma = cte$ centrada en el origen. Se ha extraído una porción cuadrada de lado l, centro $(0, \lambda)$. Determinar y_c de la placa resultante



Por simetría $X_{G_{TOT}} = 0$

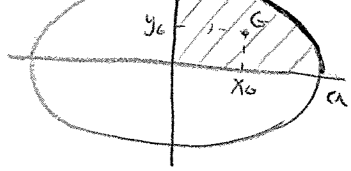
$y_{c_1} = 0$ (por sim)

$$y_{c\,TOTAL} = \frac{\sum M_i y_{ci}}{M_i} = \frac{M_1 y_{c1} - M_2 y_{c2}}{M_1 - M_2} =$$

$$= \frac{-\sigma l^2 \lambda}{\sigma L^2 - \sigma l^2} = \boxed{\frac{-l^2 \lambda}{L^2 - l^2} = y_{c\,TOTAL}}$$

⑥ Dada el área definida por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ correspondiente al 1erC determinar y_c del centro de masas y X_G

medio elipsoide



$$y_G = \frac{V}{2\pi A} \quad \begin{cases} V = \frac{4}{3}\frac{\pi a b^2}{2} = \frac{2\pi a b^2}{3} \\ A = \frac{\pi a b}{4} \end{cases}$$

Medio elip

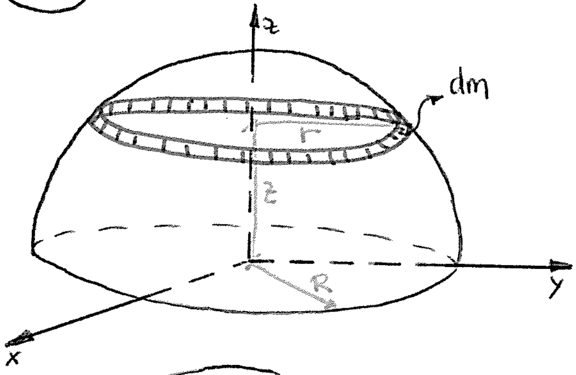
$$y_G = \frac{2\pi a b^2}{3\,\frac{\pi a b}{4} \cdot 2\pi} = \boxed{\frac{4b}{3\pi}}$$

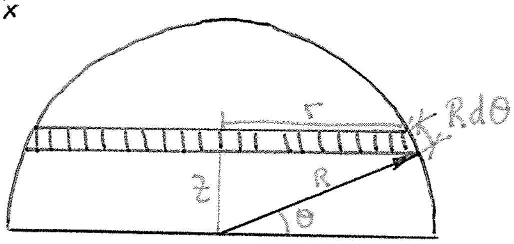
$$X_G = \frac{V}{2\pi A} \quad \begin{cases} V = \frac{4}{3}\frac{\pi a^2 b}{2} = \frac{2\pi a^2 b}{3} \\ A = \frac{\pi a b}{4} \end{cases}$$

$$X_G = \frac{\cancel{2}\cancel{\pi} a^{\cancel{2}} \cancel{b}}{3\,\frac{\cancel{\pi} a \cancel{b}}{4}\,\cancel{2}\pi} = \boxed{\frac{4a}{3\pi}}$$

5 Centro de masa en esferas y conos

5.1 Semiesfera hueca (sin tapa) de radio $= R$ y $\sigma = \frac{dm}{ds} = cte$





Por simetría másica y geométrica $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \end{cases}$

$$z_G = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} R \operatorname{sen}\theta\, \cancel{\sigma}\, \cancel{2\pi} r\, \cancel{R}\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cancel{\sigma}\, \cancel{2\pi} r\, \cancel{R}\, d\theta} =$$

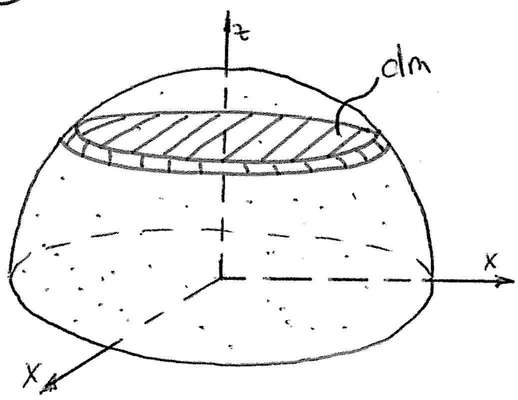
$$\left\{\begin{array}{l} dm = \sigma\, ds = \sigma\, 2\pi r\, R\, d\theta \\ z = R \operatorname{sen}\theta\ ;\ r = R\cos\theta \end{array}\right\} = \frac{R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta}{R \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta} =$$

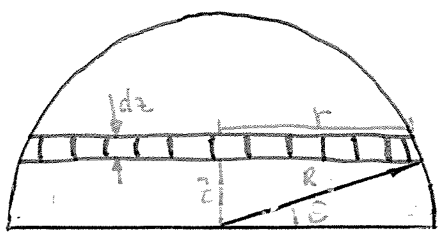
$$= \frac{R\, \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2}}{\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\pi/2}} = \boxed{\frac{R}{2}}$$

(*) Sabiendo área de esfera $\Longrightarrow$ $z_G = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cancel{R} \operatorname{sen}\theta\, \cancel{\sigma}\, \cancel{2\pi} r\, \cancel{R}\, d\theta}{\cancel{\sigma}\, \frac{\cancel{4\pi R^2}}{\cancel{2}}} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, R\cos\theta\, d\theta =$

$$= R\, \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{R}{2}$$

5.2 Semiesfera maciza de radio $= R$ y $\rho = \frac{dm}{dVol} = cte$





Por simetría másica y geométrica $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \end{cases}$

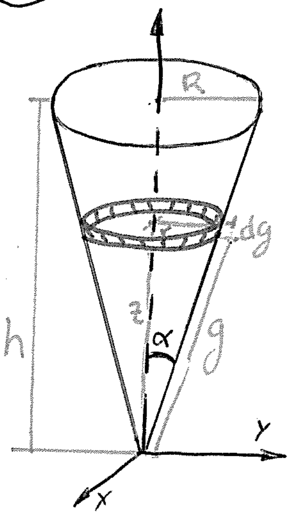
$$z_G = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{\int z\, \cancel{\rho} \cancel{\pi} r^2 dz}{\int \cancel{\rho} \cancel{\pi} r^2 dz} = \frac{\int_0^{\pi/2} R\operatorname{sen}\theta\, \cancel{R}\cos^2\theta\, \cancel{R}\cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cancel{R}\cos^2\theta\, \cancel{R}\cos\theta\, d\theta} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} dm = \rho\, dVol = \rho\, \pi r^2 dz \\ z = R\operatorname{sen}\theta\ ;\ r = R\cos\theta \\ dz = R\cos\theta\, d\theta \end{array}\right\} = \frac{R \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \int \cos^3\theta\, d\theta \overset{\operatorname{sen}\theta = t}{=} \int (1-t^2)\, dt = t - \frac{t^3}{3} \\ = \operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} \end{array}\right\} = \frac{-\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^{\pi/2} R}{\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}} =$$

$$= \frac{\frac{R}{4}}{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{3R}{8}}$$

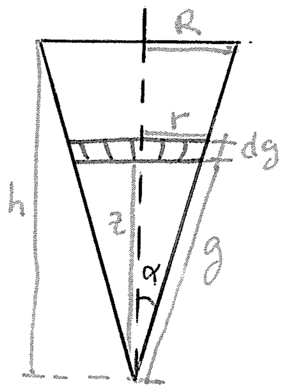
5.3 CONO HUECO (sin tapa) DE ALTURA $= h$, RADIO $= R$, $\sigma = \frac{dm}{ds} = cte$



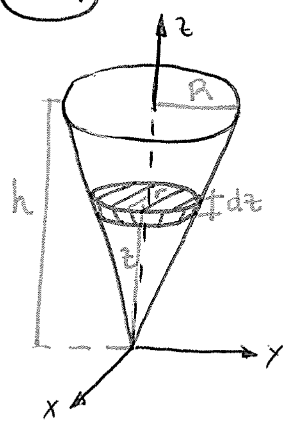
Por simetría másica y geométrica $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \end{cases}$

$$z_G = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{\int z \cancel{\sigma} 2\pi r\,dg}{\int \cancel{\sigma} 2\pi r\,dg} = \frac{\int_0^h z \frac{R}{h} z \frac{dz}{\cancel{\cos\alpha}}}{\int_0^h \frac{R}{h} z \frac{dz}{\cancel{\cos\alpha}}} =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} dm = \sigma\, 2\pi r\,dg & ;\; z = g\cos\alpha \\ \frac{z}{r} = \frac{h}{R} \rightarrow r = \frac{R}{h} z & ;\; dg = \frac{dz}{\cos\alpha} \end{array} \right\} = \frac{\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^h}{\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^h} = \boxed{\frac{2h}{3}}$$



5.4 CONO MACIZO DE ALTURA $= h$, RADIO $= R$ y $\rho = \frac{dm}{dVol} = cte$



Por simetría másica y geométrica $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \end{cases}$

$$z_G = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{\int z \cancel{\rho}\cancel{\pi} r^2\,dz}{\int \cancel{\rho}\cancel{\pi} r^2\,dz} = \frac{\int_0^h z \cancel{\left(\frac{R}{h}\right)^2} z^2\,dz}{\int_0^h \cancel{\left(\frac{R}{h}\right)^2} z^2\,dz} =$$

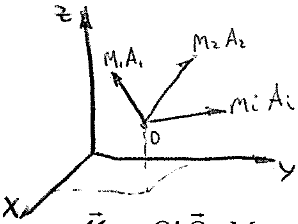
$$\left\{ \begin{array}{l} dm = \rho\,\pi r^2\,dz \\ \frac{r}{z} = \frac{R}{h} \rightarrow r = \frac{R}{h} z \end{array} \right\} = \frac{\left.\frac{z^4}{4}\right|_0^h}{\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^h} = \boxed{\frac{3h}{4}}$$

GEOMETRÍA DE MASAS (I)

1.-MOMENTO ESTÁTICO

1.1-RESPECTO DE UN PUNTO O (M. CENTRAL)

Dado un sistema material discreto formado por i masas m_i, situadas cada una en un punto A_i del espacio, se define el momento estático del sistema respecto del punto O como:



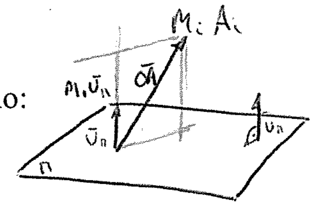
$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum \vec{OA}_i \cdot m_i$$

El momento respecto a otro punto O' sería:

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \sum \vec{O'A}_i \cdot m_i = \sum (\vec{O'O} + \vec{OA}_i)\, m_i = \sum \vec{O'O} \cdot m_i + \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{O'O} \cdot M + \vec{\mathcal{M}}_O$$

siendo $M = \sum m_i$

1.2-RESPECTO DE UN PLANO π (M. PLANARIO)



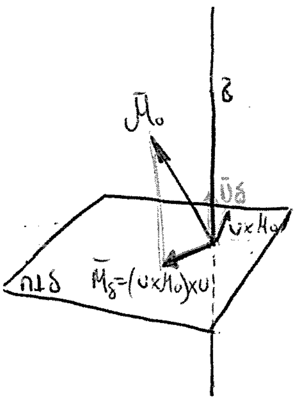
Se define, a partir de $\vec{\mathcal{M}}_O$, para un plano π que contenga a O, como:

$$\mathcal{M}_\pi = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u} = \sum \vec{OA}_i \cdot m_i \cdot \vec{u} = \sum m_i \;\; d_i$$

siendo $\vec{u}$ el vector director unitario del plano π y d_i la distancia en perpendicular de A_i al plano π (o la proyección de $\vec{OA}_i$ sobre $\vec{u}$).
Es independiente del punto del plano que cojamos, por ejemplo O':

$$\mathcal{M}_\pi = \vec{\mathcal{M}}_{O'} \cdot \vec{u} = (\vec{O'O} \cdot M + \vec{\mathcal{M}}_O) \cdot \vec{u} = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}$$

por ser $\vec{O'O}$ perpendicular a $\vec{u}$.



1.3-RESPECTO A UNA RECTA δ (M. AXIAL)

Se calcula el momento estático respecto a un punto O de la recta y se proyecta sobre un plano perpendicular a la recta que pase por O:

$$\vec{\mathcal{M}}_\delta = (\vec{u} \times \vec{\mathcal{M}}_O) \times \vec{u}$$

donde $\vec{u}$ es vector director unitario, tanto de la recta como del plano.
Si elegimos otro punto O' de la recta, $\vec{\mathcal{M}}_\delta$ no cambia **(demo).**

2.-CENTRO DE MASAS DE UN SISTEMA

Es el punto en el que se anula el momento estático del sistema. Siendo O el origen de coordenadas y G el centro de masas:

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0} = \vec{GO} \cdot M + \vec{\mathcal{M}}_O \rightarrow \vec{OG} \cdot M = \vec{\mathcal{M}}_O \rightarrow \vec{OG} = \frac{\vec{\mathcal{M}}_O}{M} = \frac{\sum \vec{OA}_i \cdot m_i}{M}$$

Al ser O el origen, el vector de posición de A_i vendrá dado por:

$$\vec{r}_{A_i} = \vec{OA_i} = x_i\,\vec{i} + y_i\,\vec{j} + z_i\,\vec{k}$$

y el de G será:

$$\vec{r}_G = \vec{OG} = \frac{\sum (x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k})m_i}{M}$$

Ver ejer. Considerando el sistema de vectores formado por los vectores peso de cada partícula, el centro de masas coincide con el punto central de dicho sistema.

Si el sistema material posee puntos, planos o ejes de simetría (másica y geométrica), el centro de masas se encontrará sobre ellos.

Todo lo visto hasta ahora estaba referido a sistemas discretos. Para el caso de sistemas continuos, los sumatorios se transforman en integrales y las masas m_i en diferenciales de masa dm, que serán función de la posición. Vemos la diferencia estudiando cada coordenada de G:

sistema discreto	**sistema continuo**
$x_G = \dfrac{\sum m_i \cdot x_i}{M}$	$x_G = \dfrac{\int x \cdot dm}{M}$
$y_G = \dfrac{\sum m_i \cdot y_i}{M}$	$y_G = \dfrac{\int y \cdot dm}{M}$
$z_G = \dfrac{\sum m_i \cdot z_i}{M}$	$z_G = \dfrac{\int z \cdot dm}{M}$

Si un sistema material puede descomponerse en varios subsistemas, por ejemplo en A, B y C, y si son $\vec{r}_{G_A}M_A$, $\vec{r}_{G_B}M_B$ y $\vec{r}_{G_C}M_C$ los centros de masas por las masas de cada uno de los subsistemas, el centro de masas del sistema total es el punto:

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_{G_A}M_A + \vec{r}_{G_B}M_B + \vec{r}_{G_C}M_C}{M_A + M_B + M_c}$$

Centro de gravedad del sistema: Se define como el punto de aplicación de las fuerzas con las que la Tierra atrae a cada una de sus partículas. Normalmente, en los problemas sobre sólidos de pequeñas dimensiones comparados con la Tierra, se supone que coincide con el centro de masas.

3.- TEOREMAS DE GULDIN

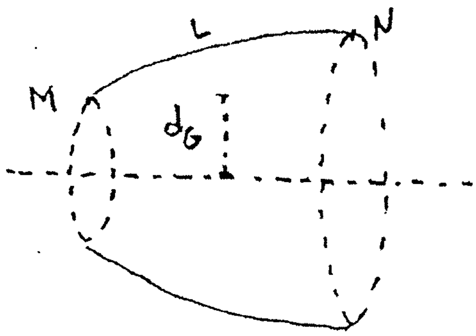
Usaremos los teoremas de Guldin para determinar la posición del centro de masas de algunos sistemas planos (curvas planas o superficies planas)

1^er^ Teorema de Guldin:

El área de la superficie engendrada por una curva plana al girar alrededor de un eje coplanario que no la corta, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia que describe su centro de masas.

$2 \cdot \pi \cdot d_G \cdot L = A$

L = longitud de la curva MN
A = área de la superficie generada al girar la curva MN alrededor del eje

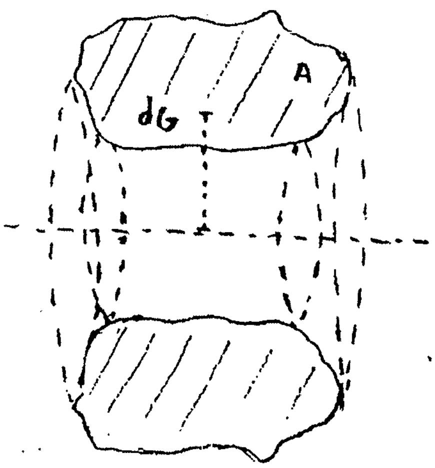


2º Teorema de Guldin:

El volumen del cuerpo engendrado por una superficie plana al girar alrededor de un eje coplanario que no la corta, es igual al área que gira por la longitud de la circunferencia que describe su centro de masas.

$2 \cdot \pi \cdot d_G \cdot A = V$

A = área de la figura
V = volumen de revolución generado al girar la figura alrededor del eje



NOTA!
Esferas $\begin{cases} S = 4\pi r^2 \\ V = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$

Elipse $S = \pi a b$
Elipsoide $V = \frac{4}{3}\pi a b c$

CLASE

EJERCICIO G.M.1. (JUN 2002)

Determinar el centro de masas de una placa plana semicircular por aplicación del apropiado teorema de Guldin.

EJERCICIO G.M.2. (SEPT 2002)

Determinar el centro de masas de una placa plana en forma de semicorona circular de radios menor y mayor R_1 y R_2 respectivamente por aplicación del teorema de Guldin.

EJERCICIO G.M.3.

Se considera el sistema continuo de vectores ligados que resulta de aplicar en cada elemento diferencial de volumen de un sólido rígido su peso, es decir $\boldsymbol{g} \cdot dm$, con $\boldsymbol{g}$ supuesta constante. Demostrar que el centro de masas del sistema, G, resulta ser, además, el punto central (intersección del eje central y el plano central) de dicho sistema de vectores ligados.

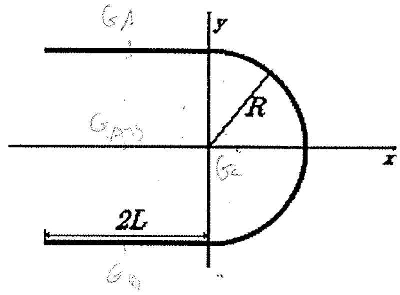
EJERCICIO G.M.4. (SEP 2006)

Determinar el centro de masas de una placa plana rectangular de lados a y b de abscisas situadas entre $x = 0; x = a$ y ordenadas entre $y = 0; y = b$, sabiendo que la densidad superficial de masa es $\sigma = c_1 x$, siendo c_1 una constante.

EJERCICIO G.M.5. (*Jun-98*) (JUN 2007)

Un alambre homogéneo tiene forma de "U", con sus lados rectos de longitud 2a cada uno, y la parte semicircular de radio a. Determine la posición del centro de masas del alambre.

Se construye una figura de alambre homogéneo con dos lados rectos de longitud $2L$ cada uno y un arco semicircular de radio R. Determinar la posición del centro de masas en los ejes indicados en la figura.



EJERCICIO G.M.6. (JUN 2009)

Dada el área definida por el recinto interior de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ correspondiente al primer cuadrante cartesiano, determinar la coordenada, y_C, de su centro de masas.

EJERCICIO G.M.7. (JUN 2010)

Sobre un placa cuadrada de lado L delgada, con densidad de masa constante σ y centrada en el origen de coordenadas $O(0,0)$, se ha extraído una porción cuadrada de lado l cuyo centro tenía las coordenadas $(0, \lambda)$. Determinar la coordenada, y_C, de la placa resultante.

REPASO

EJERCICIO R-G.M.1. (Feb-97)

Se considera un alambre homogéneo con forma de media circunferencia de radio R. Calcule la distancia al centro de masas.

EJERCICIO R-G.M.2. (Sep-98)

Un sistema de puntos materiales y masa total m posee un plano de simetría (π) de dirección $\boldsymbol{u}$. Determine el momento estático respecto a un plano (π'), paralelo al de simetría a la distancia d y con igual orientación, y tal que $\boldsymbol{HH'} \cdot \boldsymbol{u} > 0$, siendo H y H' los puntos de intersección con π y π' de una perpendicular común a ambos planos.

EJERCICIO R-G.M.3. (Sep-00)

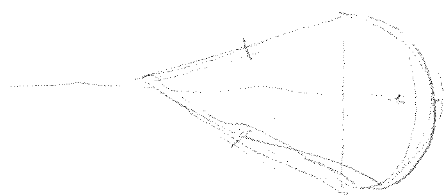
Demuestre vectorialmente que el centro de masas de dos puntos materiales P_1 y P_2, de masas m_1 y m_2 respectivamente, tiene que pertenecer al segmento P_1P_2.

EJERCICIO R-G.M.4. (SEPT 2005)

Enunciar el teorema de Guldin que relaciona la longitud de un arco de curva con la superficie de revolución que engendra al girar en torno a un eje coplanario con él.

EJERCICIO R-G.M.5.

Calcular las coordenadas del centro de masas del sólido homogéneo y hueco formado por una semiesfera de radio R y un cono de igual radio en la base y altura $2R$, unidos por sus bases.



ESTÁTICA DEL PUNTO Y EL SÓLIDO RÍGIDO

Indusbol

1 DEFINICIONES

Punto material: Punto geométrico al que asociamos un escalar m, denominado masa.

Sólido rígido: Sistema de puntos que mantienen sus distancias entre ellos invariables

Fuerza: Acción susceptible de alterar el estado cinemático de los sistemas materiales

2 EQUILIBRIO DE LA PARTÍCULA LIBRE

Condición de equilibrio $\Longrightarrow$ $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$

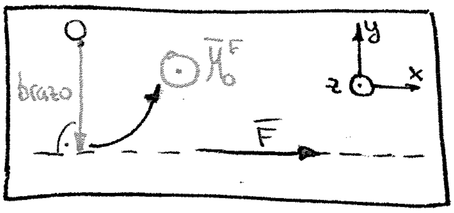
3 EQUILIBRIO DE UN SÓLIDO

Condición de equilibrio $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \longrightarrow \text{evita traslación} \\ \sum \vec{M}_{o\text{-}ext} = \vec{0} \longrightarrow \text{evita giro} \end{cases}$

- $\vec{M}_o$ es el momento de las fuerzas exteriores, siendo O un punto cualquiera
- Las condiciones anteriores no son suficientes para el equilibrio si el sistema tiene varios sólidos o no estamos ante un sólido rígido.

En general, en estática se trabaja en el plano, es decir, todas las fuerzas y los puntos donde tomemos momentos estarán en el mismo plano de trabajo siendo "momento de $\bar{F}$ en O" $\bar{M}_o^F$ un vector $\vec{M}_o = \overline{OP} \times \bar{F}$ de:

- Módulo = $|F| \cdot$ brazo $\Big\{$ brazo: distancia en perpendicular desde el punto donde tomo momentos a la recta soporte de $\bar{F}$. $\Big\}$
- Dirección = $\perp$ al plano de trabajo
- Sentido: El indicado por la regla de la mano derecha en el "giro que $\bar{F}$ le genera al brazo"



$M_o^F = |F|\ \text{brazo}\ \vec{k}$

4 REACCIONES Y ESFUERZOS INTERIORES

Son las condiciones de ligadura que deben cumplir los puntos de un sistema

Fuerzas de ligadura producidas por contacto de puntos → Reacciones

Fuerzas de ligadura en sólidos rígidos → Proporcionan rigidez → Esfuerzos interiores

5 FUERZA DE ROZAMIENTO

Es la fuerza que es necesaria vencer para deslizar un cuerpo sobre una superficie en contacto con el.

Leyes de Coulomb del rozamiento seco. $\vec{F}_{R\,máx}$ es:

(i) Independiente del area de las sup. en contacto

(ii) Dependiente de la naturaleza de las superficies en contacto

(iii) Proporcional a la componente normal de la fuerza mutua entre las superficies

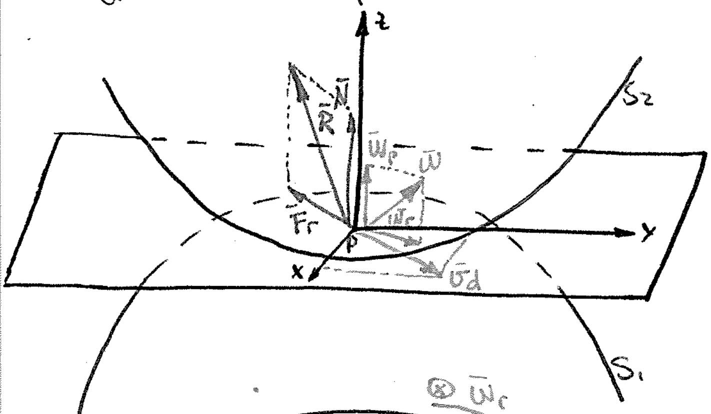
El valor de la fuerza de rozamiento será:

(a) Si no existe deslizamiento → $|\vec{F}_R| \leq \mu|\vec{N}|$

(b) Si existe deslizamiento → $|\vec{F}_R| = \mu \vec{N}$, con sentido contrario al deslizamiento

6 CONTACTO ENTRE DOS SUPERFICIES

Tenemos dos sólidos S_1 y S_2 en contacto tangente en P. Entre las superficies de contacto de los sólidos aparecen fuerzas de rozamiento nombradas en función del movimiento que tienden a impedir.



- Rozamiento al deslizamiento $(\vec{F}_r)$: Fuerza que se opone a $\vec{v}_d$ siendo $v_d = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

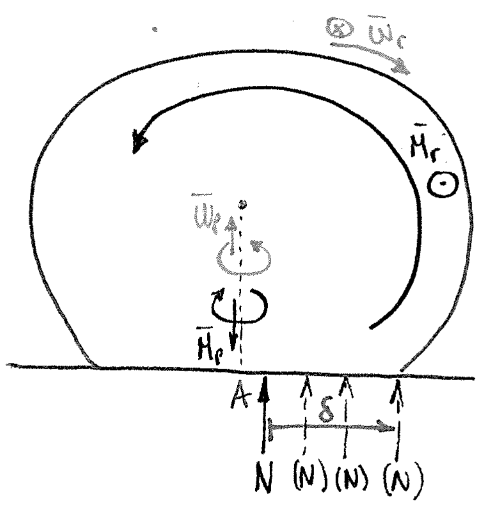
$$\begin{cases} \text{si } \vec{v}_d > 0 \longrightarrow \vec{F}_r = -\mu N \dfrac{\vec{v}_x\vec{i} + \vec{v}_y\vec{j}}{\vec{v}_d} \\ \text{si } v_d = 0 \longrightarrow |\vec{F}_r| \leq \mu N \end{cases}$$

- Rozamiento a la rodadura $(\vec{M}_r)$

$$\begin{cases} \text{si } \omega_r > 0 \rightarrow |\vec{M}_r| = \delta N \\ \text{si } \omega_r = 0 \rightarrow |\vec{M}_r| \leq \delta N \end{cases}$$

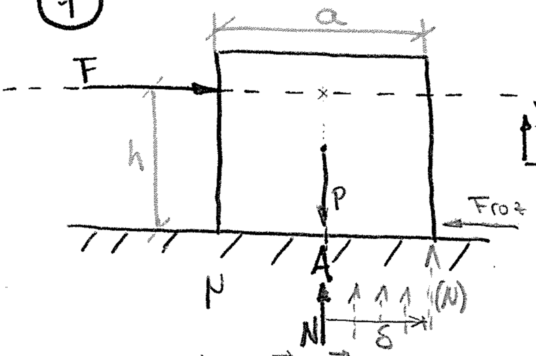
- Rozamiento al pivotamiento $(\vec{M}_p)$

$$\begin{cases} \text{si } \omega_p > 0 \longrightarrow |\vec{M}_p| = \varepsilon N \\ \text{si } \omega_p = 0 \longrightarrow |\vec{M}_p| \leq \varepsilon N \end{cases}$$



7 EJERCICIOS

1



Datos: $\vec{F}_{ext}$, Bloque de peso P

μ coef. de roz. del plano horizontal

Se pide a_{min} y μ_{min} para que el bloque permanezca en equilibrio

Condición de equilibrio $\begin{cases} \Sigma \vec{F} = 0 \\ \Sigma \vec{M}_A = 0 \end{cases}$

$\Sigma \vec{F} = 0 \begin{cases} \vec{i}: \vec{F} - \vec{F}_R = 0 & ① \\ \vec{j}: \vec{N} - \vec{P} = 0 & ② \end{cases}$

$\Sigma \vec{M}_A = 0 \; \{ \vec{k}: -F \cdot h + N\delta = 0 \quad ③$

Momentos de Froz, P → 0

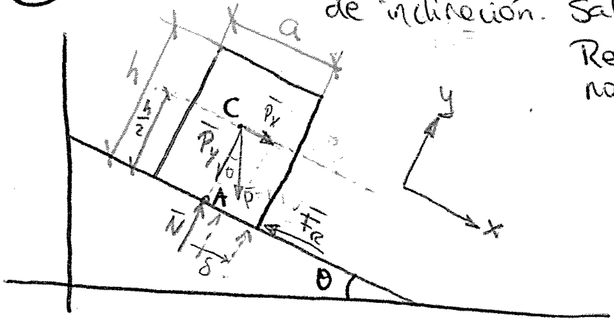
Por no deslizamiento: $F_r \le \mu N$ ④ Por no vuelco: $\delta \le \frac{a}{2}$ ⑤

$$\underset{①}{\bar{F} = \bar{F}_R} \underset{④}{\le} \mu N \underset{②}{=} \mu P \Longrightarrow F \le \mu P \Rightarrow \frac{F}{P} \le \mu \longrightarrow \boxed{\mu_{min} = \frac{F}{P}}$$

$$Fh \underset{③}{=} N\delta \underset{②}{=} P\delta \underset{⑤}{\le} P\frac{a}{2} \Longrightarrow Fh \le P\frac{a}{2} \; ; \; a \ge \frac{2Fh}{P} \longrightarrow \boxed{a_{min} = \frac{2Fh}{P}}$$

2

Prisma de dimensiones a x h apoyado en un plano de "θ" ángulo de inclinación. Sabiendo que el bloque no desliza, determinar: Relación máxima entre h y a para que el prisma no vuelque



$P_x = P \operatorname{sen} \theta = mg \cos \theta$

$P_y = P \cos \theta = mg \operatorname{sen} \theta$

Cond. equilibrio $\begin{cases} \Sigma \vec{F} = 0 \\ \Sigma \vec{M}_A = 0 \end{cases}$

$\Sigma \vec{F} = 0 \begin{cases} \vec{i}: mg \operatorname{sen} \theta - \bar{F}_R = 0 & ① \\ \vec{j}: -mg \cos \theta + N = 0 & ② \end{cases}$

$\Sigma \vec{M}_A = 0 \; \{ -mg \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{h}{2} + N\delta = 0 \quad ③$

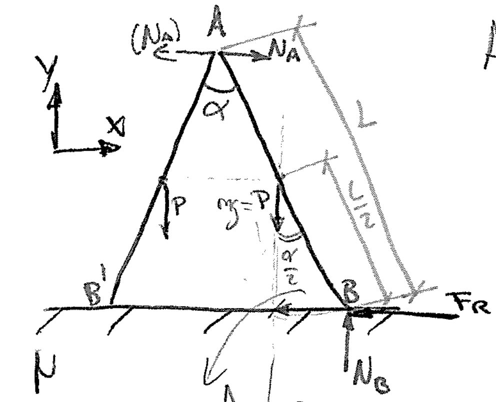
Por no desliza → $F_R \le \mu N$ ④

Por no vuelco → $\delta \le \frac{a}{2}$ ⑤

$$\frac{h}{2} mg \operatorname{sen}\theta \overset{③}{=} N\delta \overset{⑤}{\le} N\frac{a}{2} \overset{②}{=} mg \cos\theta \frac{a}{2} \Longrightarrow \frac{h}{\cancel{2}} \cancel{mg} \operatorname{sen}\theta \le \cancel{mg} \cos\theta \frac{a}{\cancel{2}}$$

$$\frac{h}{a} \le \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \boxed{\frac{h}{a}_{max} = \operatorname{cotg} \theta}$$

④ Dos barras iguales $\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m \\ \text{long. } L \end{array} \right.$ Determinar α_{max} para no deslizamiento

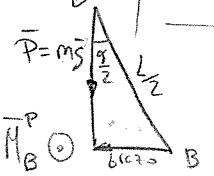


Analizamos la barra de la derecha

$$\text{Equilibrio} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}=0 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{i}: \ \bar{N}_A - \bar{F}_R = 0 \quad ① \\ \vec{j}: \ \bar{N}_B - mg = 0 \quad ② \end{array} \right. \\ \Sigma M_B = 0 \longrightarrow \left\{ \vec{k}: m\vec{g} \cdot \frac{L}{2} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - \vec{N}_A L \cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad ③ \right. \end{array} \right.$$

Por no deslizamiento $\quad \vec{F}_R \leq \mu N_B \quad ④$

Para $\bar{M}_B$)

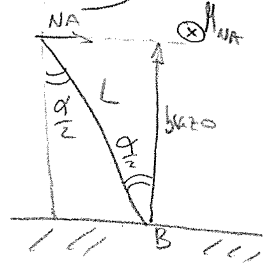


$\bar{M}_B^P$ ⊙

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{brazo}}{\frac{L}{2}}$$

$$\text{brazo} = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

Para $\bar{M}_{NA}$)



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{brazo}}{L}$$

$$\text{brazo} = L\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{N}_A \overset{①}{=} \bar{F}_R \overset{④}{\leq} \mu N_B \overset{②}{=} \mu mg \\ N_A \cancel{L} \cos\frac{\alpha}{2} \underset{③}{=} mg\frac{\cancel{L}}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \end{array} \right\}$$

$$N_A = \frac{\frac{1}{2}\cancel{mg}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \cancel{mg}$$

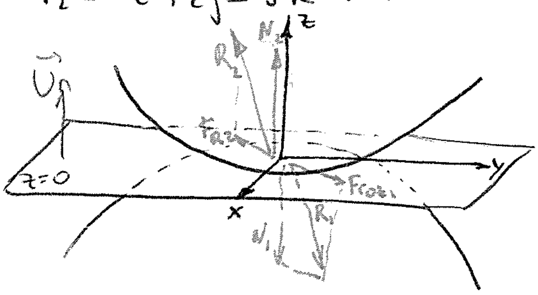
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leq 2\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \leq \operatorname{arctg} 2\mu$$

$$\alpha \leq 2\operatorname{arctg} 2\mu$$

$$\boxed{\alpha_{max} = 2\operatorname{arctg} 2\mu}$$

⑤ Determinar F_R (estático) en módulo para dos cuerpos que permanecen en reposo e interactúan con fuerzas acción-reacción $\vec{F}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$ y $\vec{F}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$. Plano de tangencia $z=0$



$$\bar{F}_1 = (1,-2,8)$$
$$\bar{F}_2 = (-1,2,-8)$$
$$\Pi_{tg} \equiv z=0 \quad \vec{U}_n = \vec{k}$$

$$|F_{R_1}| = \left|(\vec{U}_n \times F_1) \times \vec{U}_n\right| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \right| = \left|(2,1,0) \times \vec{U}_n\right| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left|(1,-2,0)\right| = \sqrt{5}$$

$$\boxed{|F_{R_1}| = \sqrt{5}}$$

ESTÁTICA DEL PUNTO MATERIAL Y DEL SÓLIDO RÍGIDO

1.-PUNTO MATERIAL, MASA, SÓLIDO RÍGIDO Y FUERZA

Punto material es todo punto geométrico (sin dimensiones, o de dimensiones despreciables) al que asociamos un escalar m, denominado **masa**. Este escalar determina el diferente comportamiento de puntos con diferente masa ante idénticas acciones mecánicas.

Sólido rígido es todo sistema de puntos que mantienen sus distancias entre ellos invariables a lo largo del tiempo.

Fuerza es toda acción susceptible de alterar el estado cinemático de los sistemas materiales.

2.-EQUILIBRIO DE LA PARTÍCULA LIBRE

Una partícula libre sometida a un sistema de fuerzas de resultante $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ se encuentra en equilibrio si $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$. Esta condición es necesaria y suficiente.

3.-EQUILIBRIO DE UN SÓLIDO

Un sólido sometido a un sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio si:

$$\sum \vec{F}_{EXT} = \vec{0} \quad \text{evita traslación}$$
$$\sum \vec{M}_{O\text{-}EXT} = \vec{0} \quad \text{evita giro}$$

siendo $\vec{M}_{O\text{-}EXT}$ el momento de las fuerzas exteriores (procedentes de partículas exteriores al sistema) respecto a un punto O (***O* puede ser el punto que queramos).**

Si un sólido sometido a un sistema de fuerzas está en equilibrio, también lo estará si se le somete a un sistema de fuerzas equivalente al anterior (igual resultante y momento).

Si un sólido está en equilibrio, podemos sustituir cualquier parte del sistema de fuerzas que actúa por una parte equivalente.

En el caso de un sistema formado por varios sólidos, o en el de un sólido no rígido, las ecuaciones anteriores no serían suficientes para garantizar el equilibrio (ejemplo del compás).

4.-REACCIONES Y ESFUERZOS INTERIORES

Cuando un sistema se mueve libremente, cualquiera de sus puntos se mueve sin ninguna restricción sobre sus coordenadas. Sin embargo puede ocurrir que los puntos del sistema estén obligados a cumplir ciertas condiciones de ligadura, existiendo puntos que deban restringir posibles posiciones o movimientos (moverse sobre una determinada recta o superficie, mantener distancias constantes con el resto de puntos (sólido rígido), etc.) Para cumplir estas condiciones se introducirán unas *fuerzas de enlace* o *ligadura* (incógnitas en general) introducidas por los *vínculos* sobre el punto que debe cumplir la condición determinada, distintas de las *fuerzas aplicadas* o *dadas* (datos, en general).

Generalmente a las fuerzas de ligadura que surgen del contacto entre puntos de un sistema y su entorno se las denomina *reacciones*.

Si se estudia un sólido rígido, a las fuerzas de ligadura que surgen en su interior proporcionando la rigidez se las denomina *esfuerzos interiores*.

5.-FUERZA DE ROZAMIENTO

Las leyes de Coulomb (Charles A. de Coulomb, 1736-1806) sobre el rozamiento seco entre dos cuerpos que pueden deslizar relativamente sobre una superficie de contacto se establecen sobre la fuerza de rozamiento que es necesario vencer para iniciar el deslizamiento ($\vec{F}_{R_{máx}}$).El valor de esta fuerza $\vec{F}_{R_{máx}}$ es:

i) Independiente del área de las superficies en contacto.
ii) Dependiente de la naturaleza de las superficies en contacto.
iii) Proporcional a la componente normal de la fuerza mutua entre ambas superficies.

Por tanto, las fuerzas que aparecen entre dos sólidos en contacto pueden reducirse a una reacción normal $\vec{N}$ y a una fuerza de rozamiento $\vec{F}_R$. El valor de la fuerza de rozamiento dependerá del coeficiente de rozamiento μ, así como de si existe o no deslizamiento entre los sólidos en contacto, presentándose dos casos:

a) No existe deslizamiento: en este caso, la fuerza de rozamiento es desconocida a priori, tanto en módulo como en signo (sentido). Lo que sí sabremos es que su valor será $|\vec{F}_R| \leq \mu|\vec{N}|$

b) Existe deslizamiento: en este caso, la fuerza de rozamiento no es incógnita, su módulo valdrá $|\vec{F}_R| = \mu|\vec{N}|$, y su sentido será contrario al de deslizamiento. Esto implica que, en un problema, la solución correcta dependa de que tomemos bien el sentido de $\vec{F}_R$.

Rozamiento a rodadura y pivotamiento: ver Schz. Prz.

6.-CONTACTO ENTRE DOS SUPERFICIES

Cuando dos sólidos S_1 y S_2 están en contacto en un punto P, siendo tangentes en ese punto, la acción de uno sobre otro se descompone en fuerzas y momentos de contacto.

En la dirección normal al plano tangente a ambos sólidos en P se tiene la componente de la fuerza de contacto entre ambos, N. Si tomamos un sistema $Pxyz$ con origen en P, con el eje z en la dirección de la normal al plano y los ejes x e y conformando dicho plano, la normal sería la componente en z de la fuerza de contacto.

Generalmente entre las superficies en contacto de los sólidos hay una resistencia al movimiento relativo de las mismas. Esto produce fuerzas de rozamiento nombradas en función del movimiento que tienden a impedir:

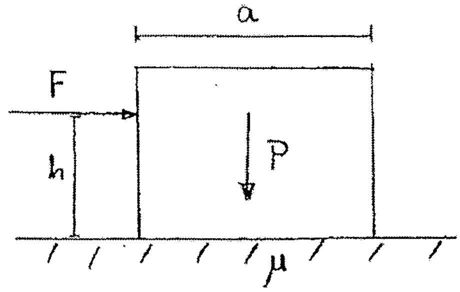
- *rozamiento al deslizamiento* ($\vec{F}_r$): fuerza que se opone a la velocidad de deslizamiento entre las dos superficies $\vec{v}_d = v_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j}$, cumpliendo:
$$\begin{cases} v_d > 0 \Rightarrow \vec{F}_r = -\mu N \dfrac{v_x \vec{i} + v_y \vec{j}}{v_d} \\ v_d = 0 \Rightarrow \left|\vec{F}_r\right| \leq \mu N \end{cases}$$

- *rozamiento a la rodadura* ($\vec{M}_r$): momento que se opone al movimiento relativo de rodadura, es decir, a la componente tangencial de la rotación $\vec{\omega}_{21}$ (según el plano tangente), $\vec{\omega}_r = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}$, cumpliendo:
$$\begin{cases} \omega_r > 0 \Rightarrow \vec{M}_r = -\delta \cdot N \dfrac{\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}}{\omega_r} \\ \omega_r = 0 \Rightarrow \left|\vec{M}_r\right| \leq \delta \cdot N \end{cases}$$

- *rozamiento al pivotamiento* ($\vec{M}_p$): momento que se opone al movimiento relativo de pivotamiento, es decir, a la componente de la rotación $\vec{\omega}_{21}$ normal al plano tangente, $\vec{\omega}_p = \omega_z \vec{k}$, cumpliendo:
$$\begin{cases} \omega_p > 0 \Rightarrow \vec{M}_p = -\varepsilon \cdot N \dfrac{\omega_z \vec{k}}{\omega_z} \\ \omega_p = 0 \Rightarrow \left|\vec{M}_p\right| \leq \varepsilon \cdot N \end{cases}$$

EJERCICIO EST.1. (Sep-98)

Se aplica la fuerza $\boldsymbol{F}$ al bloque homogéneo de la figura, de peso $\boldsymbol{P}$, siendo μ el coeficiente de rozamiento con el plano horizontal. Obtenga los mínimos valores de a y μ para que el bloque permanezca en equilibrio.



EJERCICIO EST.2. (Feb 2003)

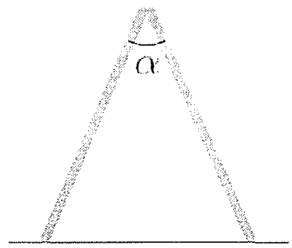
Un prisma recto homogéneo de base cuadrada de lado a y altura h se sitúa con su base apoyada sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal, de manera que dos lados opuestos de su base son paralelos a la línea de base del plano. Sabiendo que el bloque no desliza, determinar la relación máxima entre la altura h y el lado de la base a para que el prisma no vuelque.

EJERCICIO EST.3. (Jun 2004)

Un prisma cuadrangular recto y homogéneo de base cuadrada de lado a y altura h se apoya sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal con el que tiene un coeficiente de rozamiento $\mu < a/h$, de manera que dos lados opuestos de su base son paralelos a la línea de base del plano. Determinar el intervalo de valores que puede tener el ángulo θ para que el prisma deslice y no vuelque.

EJERCICIO EST.4. (JUN 2005)

Dos barras iguales de masa m y longitud L están situadas en un plano vertical como se indica en la figura. Entre el suelo y las barras existe rozamiento, de coeficiente estático μ y el contacto entre ambas se supone puntual y liso. Determinar el máximo ángulo α que pueden formar entre sí sin que deslicen sobre el plano horizontal.



EJERCICIO EST.5. (JUN 2006)

Determinar el módulo de la fuerza de rozamiento estático entre dos cuerpos que permanecen en reposo que interactúan con fuerzas de acción-reacción dadas por $\boldsymbol{F}_1 = 1\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{F}_2 = -1\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}$ y cuyo plano de tangencia es el $z = 0$.

EJERCICIO EST.6. (FEB 2009)

Una placa rectangular, de lados a y b, coplanaria con el plano vertical Oxy de masa M, está sometida a su peso, $-Mg\boldsymbol{j}$, aplicado en su centro de masas $C(x_C, \frac{b}{2})$, a una fuerza desconocida, $(F_{Bx}\boldsymbol{i} + F_{By}\boldsymbol{j})$, aplicada en $B(0, b)$, y a una fuerza, debida a un vínculo liso, $(F_{Ax}\boldsymbol{i})$, en el punto $A(0, 0)$. Determinar F_{Bx}, F_{By} y F_{Ax}, si la placa está en reposo.

EJERCICIO EST.7. (JUN 2009)

Un sistema de fuerzas deslizantes que actúa sobre un sólido indeformable está constituido por los vectores $\boldsymbol{F}_1 = \lambda\boldsymbol{i} + (\lambda + 2)\boldsymbol{j}$, aplicado en $A_1(1, 0, 0)$ y $\boldsymbol{F}_2 = (\mu + 1)\boldsymbol{i} + \nu\boldsymbol{j}$, aplicado en $A_2(2, 0, 0)$. Determinar los valores λ, μ y ν para que el sólido este en reposo.

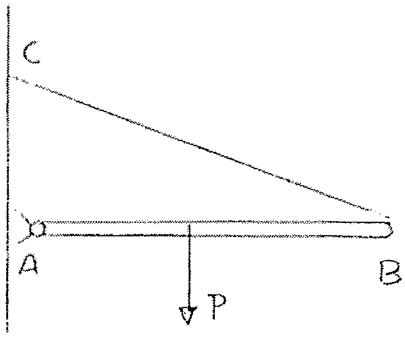
REPASO

EJERCICIO R-EST.1. (Jun-95)

Un bloque de 10 kg. de masa se encuentra sobre un plano horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano igual a 0,15. Determine el valor de la fuerza de rozamiento cuando se aplica al bloque una fuerza horizontal de 10 N.

EJERCICIO R-EST.2. (Sep-97)

En la figura, ***P*** es el peso de la barra *AB*, *BC* es un hilo inextensible, sin masa, y *A* un apoyo articulado fijo en la pared vertical. Represente las fuerzas que actúan sobre la barra *AB* en equilibrio y la condición geométrica que han de cumplir dichas fuerzas si *A*, *B* y *C* son coplanarios.



EJERCICIO R-EST.3. (Sep 2003)

Un cubo homogéneo de lado l se encuentra apoyado contra una pared sin rozamiento formando un ángulo $\theta < \pi/4$ con el suelo. Determinar el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre el cubo y el suelo μ_e necesario para que el cubo permanezca en reposo.

EJERCICIO R-EST.4. (FEB 2005)

Una barra de longitud L y peso P se apoya sobre una pared vertical sin rozamiento y sobre el suelo horizontal, con el que existe rozamiento de coeficiente μ, de forma que las verticales que pasan por sus extremos están en un plano perpendicular a la pared vertical. Determinar el ángulo mínimo que puede formar la barra con el suelo horizontal para mantener el equilibrio.

EJERCICIO R-EST.5. (SEP 2005)

Un punto material está obligado a permanecer sobre la recta de ecuación $y = cx$ $(c > 0)$ y está sometido a su propio peso $-mg\boldsymbol{j}$, a una fuerza elástica horizontal que le atrae hacia el eje de ordenadas ($\boldsymbol{F}=-kx\boldsymbol{i}$), a la fuerza de rozamiento elástica horizontal que evita el deslizamiento sobre la recta , de coeficiente estático μ , y a la reacción normal de la recta, ***N***. Obtener, imponiendo las condiciones de equilibrio del punto, la relación que debe existir entre μ y c para que el punto pueda estar en equilibrio para $x > 0$ y los valores de x en los que el punto puede estar en equilibrio.

EJERCICIO R-EST.6. (FEB 2006)

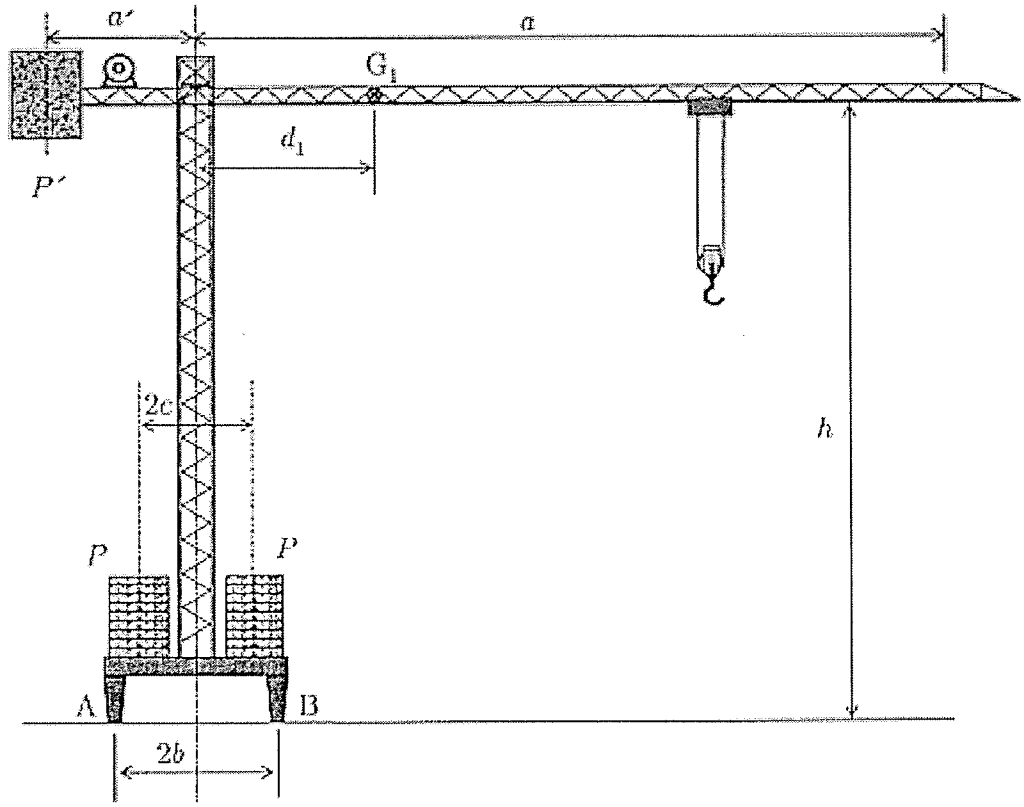
En el punto $A_1(1,0,0)$ de un sólido en reposo se aplica la fuerza $F_1(1,0,0)$ y en el punto $A_2(0,1,0)$ se aplica la fuerza $F_2(0,0,1)$. Razonar si se puede conseguir su equilibrio estático aplicando una tercera fuerza en algún punto del mismo

EJERCICIO R-EST.7. (SEP 2006)

Se quiere arrastrar una caja de masa m tirando de ella mediante una cuerda que forma 45° con la horizontal. Si el coeficiente estático del rozamiento entre la caja y el suelo es μ_e, determinar la tensión de la cuerda en el instante que la caja comienza a deslizar suponiendo que no vuelca.

PROBLEMA EST. 1. (Jun 00)

Se considera una grúa tipo pluma cuya estructura simplificada se presenta en la figura. El brazo horizontal ("pluma") tiene un peso $\boldsymbol{P_1}$, con su centro de masas G_1 en la posición indicada, incluyéndose en dicho peso el del propio brazo y el del motor, despreciándose el peso del gancho y pieza soporte. Además, existe un contrapeso de valor $\boldsymbol{P'}$ en el extremo de la pluma más próximo a la torre vertical.
La torre vertical está fijada sobre una plataforma horizontal cuyo centro se encuentra sobre el eje de la torre y el conjunto torre-plataforma posee un peso $\boldsymbol{P_2}$ aplicado según el eje de la torre. Además, existen contrapesos simétricos, colocados sobre la plataforma, cada uno de valor $\boldsymbol{P}$.
La polea con el gancho soporte de la carga puede alejarse hasta una distancia máxima (a) del eje de la torre.
La plataforma horizontal está simplemente apoyada en A y B.

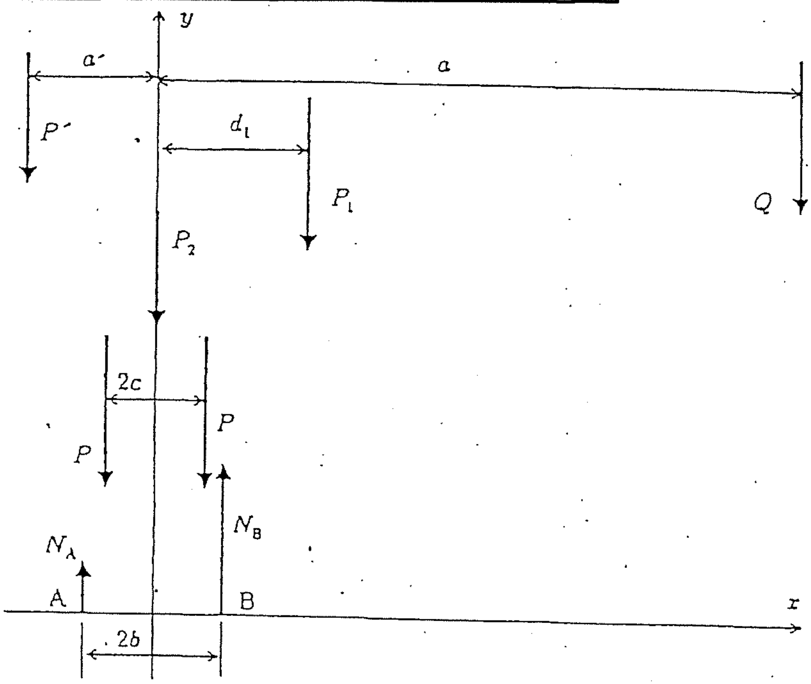


En la posición indicada en la figura:
1) Establezca el sistema de fuerzas considerado dibujando cada una de ellas sobre su soporte, y obtenga en forma literal la máxima carga $\boldsymbol{Q}$ que puede soportar la grúa con la polea en la posición límite indicada.
2) En las condiciones del apartado anterior calcule, en forma literal, el valor de las reacciones en los pies de apoyo de la plataforma (A y B), supuestas ambas de dirección vertical.
3) Determine las reacciones en A y B cuando la grúa no tiene carga suspendida. En estas condiciones, obtenga una relación entre parámetros de la grúa que asegure que las reacciones en A y B sean iguales.
4) La carga máxima del apartado 1) se eleva una altura $h' < h$ con velocidad uniforme durante un tiempo Δt. Determine, en forma literal, la potencia teórica del motor de la grúa.
5) Obtenga los valores numéricos de las magnitudes solicitadas en los apartados anteriores en el sistema internacional de unidades, cuando los valores de los parámetros son los siguientes:

$a' = 5$ m; $a = 36$ m; $d_1 = 6$ m; $b = 4$ m; $c = 3$ m; $h = 26$ m; $h' = 24$ m;
$\boldsymbol{P_1} = 30$ kN; $\boldsymbol{P_2} = 40$ kN; $\boldsymbol{P'} = 36$ kN; $\boldsymbol{P} = 180$ kN; $\Delta t = 120$ s

JC Aula de Ingeniería | **Ingenieros Industriales** | **Física I**
c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid.
Tlfno: 91 535 75 29
Profesor
Alex García

PROBLEMA EST. 1.



I) Q_{MAX} ? $\Rightarrow$ SITUACIÓN LIM. DE VUELCO $\Rightarrow$ DESPLAZAMIENTO MAX. DE N $\Rightarrow$ N APLICADA EN B $\Rightarrow \boxed{N_A = 0}$

EN EQUILIBRIO : $\sum \bar{F} = \bar{0}$ $\begin{cases} \bar{i} : \text{NO FUERZAS} \\ \bar{j} : \sum F_y = 0 \end{cases}$

$\sum \bar{M}_{\square} = \bar{0}$. INCOGNITAS : N_B , Q_{max} $(N_A = 0)$ $\Rightarrow$ TOMO $\sum \bar{M}_{\boxed{B}}$ Y EVITO N_B

$\sum \bar{M}_B = \bar{0}$: $\bar{k}$: $P'(a'+b) + P(c+b) + P_2 \cdot b + P(b-c) - P_1(d_1 - b) - Q_{max}(a-b) = 0$

$$Q_{max} = \frac{P'(a'+b) + 2P \cdot b + P_2 \cdot b - P_1(d_1 - b)}{a-b}$$

II) $N_A = 0$ (CONDIC. DE VUELCO)

N_B : $\bar{j}$; $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B - [P' + P + P_2 + P + P_1 + \underbrace{Q_{MAX}}_{\text{DATO POR I)}}] = 0.$

SUSTITUYENDO Q_{MAX} DE I) :
$$N_B = \frac{P'(a+a') + 2ap + aP_2 + (a-d_1)P_1}{(a-b)}$$

III) i) $\boxed{Q=0}$

INCOGNITAS: N_A Y N_B. ECUACIONES $\begin{cases} \bar{j} : \sum F_y = 0 \Rightarrow N_A + N_B - P' - 2P - P_2 - P_1 = 0 \quad (*) \\ \sum \bar{M}_B = \bar{0} : \bar{k} : P'(a'+b) + P(c+b) + P_2 b + P(b-c) - P_1(d_1 - b) - \\ \qquad - N_A \cdot 2b = 0 \quad (**) \end{cases}$

DE (**) : $N_A = \dfrac{P'(a'+b) + 2Pb + P_2 \cdot b - P_1(d_1 - b)}{2b}$

ENTRADO EN (*): $N_B = \dfrac{2Pb + P_2 b - P'a' + P'b + P_1 b + P_1 d_1}{2b}$

III) ii) IMPONGO $N_A = N_B \Rightarrow P'a' = P_1 d_1$

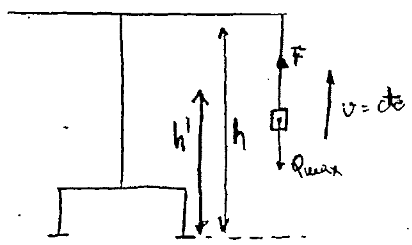
2º METODO: SI $N_A = N_B$ Y N_A SIMETRICA DE N_B RESPECTO EJE GRUA, TOMO $\Sigma \bar{M}_M$ (M PTO CUALQUIERA DEL EJE).

$$\Sigma \bar{M}_M = \bar{0} \;:\; \bar{K}: -N_a \cdot b + N_b \cdot b - P \cdot c + P c + P'a' - P_1 d_1 = 0 \Rightarrow \boxed{P'a' = P_1 d_1}$$

IV)

$$Pot = \frac{W}{t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\bar{F} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

IV).



$$\text{Si } \bar{v} = \bar{cte} \Rightarrow \Sigma \bar{F} = m\bar{a} = \bar{0}$$
$$(\bar{a} = \bar{0})$$

$$\bar{j}: F - Q_{MAX} = 0 \Rightarrow F = Q_{MAX} \text{ (APTDO I)}$$

$$\bar{F} \parallel \bar{v} \Rightarrow \bar{F} \cdot \bar{v} = |\bar{F}||\bar{v}| \cos 0 = F \cdot v$$

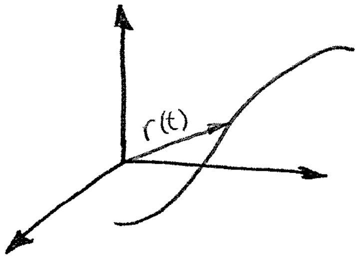
$$v = cte = \frac{s}{t} = \frac{h'}{\Delta t} \Rightarrow Pot = \bar{F} \cdot \bar{v} = F \cdot v = F \cdot \frac{h'}{\Delta t} = Q_{MAX} \cdot \frac{h'}{\Delta t}$$

V)
1) $Q = 58,25 \text{ KN}$
2) $N_A = 0 \qquad N_B = 524,25 \text{ KN}$
3) $N_A = N_B = 233 \text{ KN}$
4) $Pot = 11,65 \text{ KW}$

CINEMÁTICA DEL PUNTO

1 VECTOR POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

1.1 VECTOR POSICIÓN, LA TRAYECTORIA



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad \} \ \underline{\text{trayectoria}}$$

$$r(t) \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \Bigg\} \ \underline{\text{Ec. horarias}}$$

1.2 VECTOR VELOCIDAD

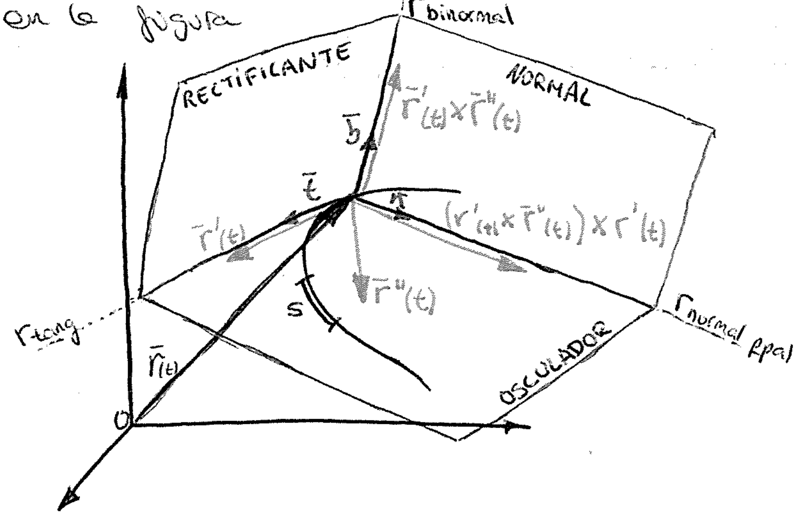
$$\vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \boxed{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \vec{v}}$$

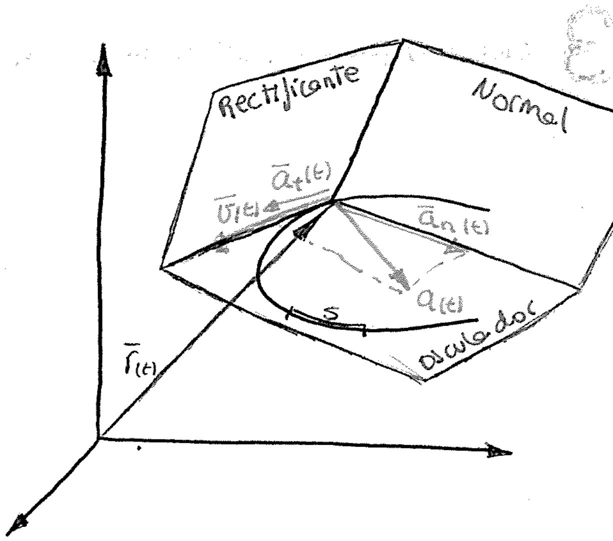
1.3 VECTOR ACELERACIÓN

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \boxed{\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \vec{a}}$$

2 TRIEDRO INTRÍNSECO

Dada una trayectoria cualquiera se define el triedro intrínseco como se indica en la figura



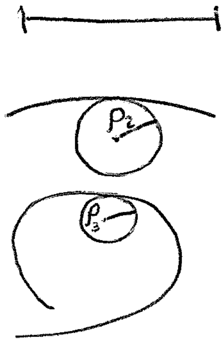


S: Es el parámetro arco que expresa el recorrido sobre la curva

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}\ ; \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}\ ; \quad \frac{ds}{dt} = |\bar{v}| \quad \Bigg\{ \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \underline{\underline{\bar{t}\,|\bar{v}|}}$$

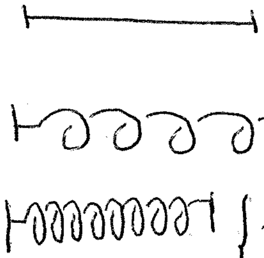
2.1 Radio de Curvatura. Radio de Torsión

Radio de curvatura → flexión



$$\begin{cases} \rho_1 = \infty \\ c_1 = \dfrac{1}{\rho_1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_2 < \rho_1 \\ c_2 > c_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_3 < \rho_2 \\ c_3 > c_2 \end{cases}$$

Radio de Torsión



$$\begin{cases} \tau_1 = \infty \\ c_{\tau_1} = \dfrac{1}{\tau_1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_2 < \tau_1 \\ c_{\tau_2} > c_{\tau_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_3 < \tau_2 \\ c_{\tau_3} > c_{\tau_2} \end{cases}$$

2.2 Fórmulas de Frenet

Expresan las derivadas de $\vec{t}$, $\vec{n}$ y $\vec{b}$ respecto del parámetro arco s.

$$\boxed{\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho_c}} \qquad \boxed{\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{\rho_c} + \frac{\vec{b}}{\rho_\tau}} \qquad \boxed{\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\rho_\tau}}$$

2.3 Vector de Darboux

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{\vec{t}}{\rho_\tau} + \frac{\vec{b}}{\rho_c}}$$

y se comprueba que

$$\begin{cases} \Omega \times \vec{t} = \dfrac{d\vec{t}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{\rho_c} \\ \Omega \times \vec{n} = \dfrac{d\vec{n}}{ds} = \dfrac{-\vec{t}}{\rho_c} + \dfrac{\vec{b}}{\rho_c} \\ \Omega \times \vec{b} = \dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{-\vec{n}}{\rho_\tau} \end{cases}$$

3 Componentes Intrínsecas de la Velocidad y la Aceleración

3.1 Componentes Intrínsecas de la Velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{t}\,|\vec{v}| \qquad \begin{cases} |\vec{v}| = \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ \vec{t} = \dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t} \end{cases}$$

3.2 Componentes Intrínsecas de la Aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}| \cdot \vec{t})}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{t} + |\vec{v}| \underbrace{\frac{d\vec{t}}{dt}}_{\frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{\rho_c} \cdot |v|} = \frac{d|v|}{dt}\vec{t} + |v|^2 \frac{\vec{n}}{\rho_c} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{t}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho_c}\vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

Por tanto:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\vec{n}}$$

8 VECTOR POSICIÓN, VECTOR VELOCIDA Y VECTOR ACELERACIÓN EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$\boxed{\vec{r} = \rho \vec{U}_\rho + z \vec{U}_z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_\rho + \rho \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{U}_z + \cancel{z\frac{d\vec{U}_z}{dt}}^{\text{0 por } \vec{U}_z = \text{cte}} =$$

$$= \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}U_\varphi + \dot{z}\vec{U}_z \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}U_\varphi + \dot{z}\vec{U}_z}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{d(\rho\dot{\varphi})}{dt}\vec{U}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{dU_\varphi}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{U}_z + \cancel{\dot{z}\frac{dU_z}{dt}}^{\text{0 por } U_z = \text{cte}} =$$

$$= \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + [\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}]\vec{U}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{U}_\rho + \ddot{z}\vec{U}_z =$$

$$= \boxed{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{U}_\rho + [2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}]\vec{U}_\varphi + \ddot{z}\vec{U}_z = \vec{a}}$$

9 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Sea la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, su solución será:

$$\boxed{x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)}$$

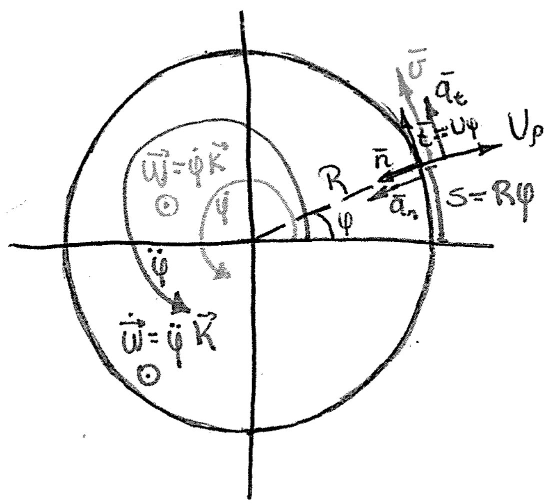
Siendo A y $\varphi \rightarrow$ constantes de integración por determinar con las condiciones iniciales (A amplitud y φ ángulo inicial).

$T \rightarrow$ Periodo

$f \rightarrow$ Frecuencia

$\omega \rightarrow$ Frecuencia natural de las oscilaciones.

10 MOVIMIENTO CIRCULAR EN CIRCUNFERENCIA DE RADIO R.



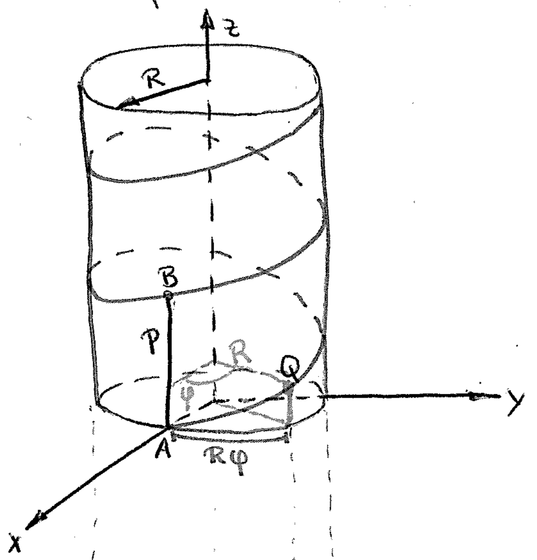
- $\vec{r} = \overset{R}{\overset{\shortparallel}{\rho}}\vec{U}_\rho + \cancel{z\vec{U}_z}^{0} = R\vec{U}_\rho$
- $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi = R\dot{\varphi}\vec{t}$ $\begin{cases} |\vec{v}| = R\dot{\varphi} \\ \text{Direc} = \vec{t} \end{cases}$
- $\vec{a} \begin{cases} \vec{a}_t = \frac{d|v|}{dt} = R\ddot{\varphi}\vec{t} \\ \vec{a}_n = \frac{|v|^2}{\rho} = \frac{R^2\dot{\varphi}^2}{R}\vec{n} = R\dot{\varphi}^2\vec{n} \end{cases}$

11 EJERCICIOS

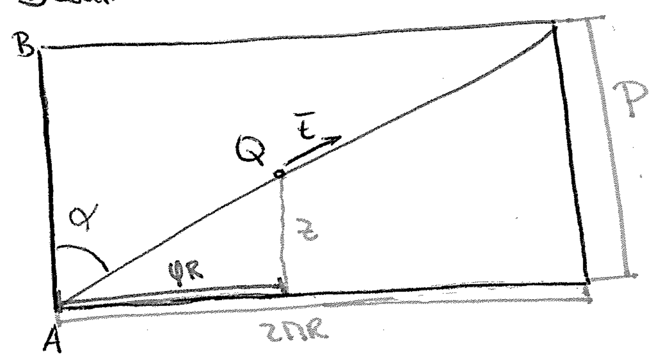
1

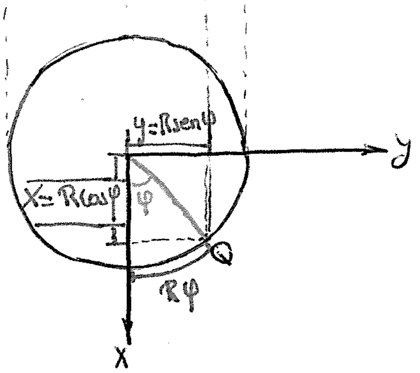
NOTA TEÓRICA! LA HÉLICE CIRCULAR

Es una curva alabeada contenida en una superficie lateral de un cilindro de sección circular constante con radio R cuyo vector tangente forme ángulo constante con una dirección fija, que es la del eje central del cilindro. → Tiene p cte $\neq R$



Desarrollando el cilindro:





Por semejanza de triángulos o por $tg(90^\circ-\alpha)$

$$\frac{P}{2\pi R}=\frac{z}{\varphi R} \Longrightarrow z=\frac{P}{2\pi}\varphi$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la hélice son:

$$\boxed{\vec{r}\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\,\text{sen}\,\varphi \\ z = \dfrac{P}{2\pi}\varphi \end{cases}}$$

En nuestro caso tenemos una hélice $\begin{cases}\text{radio } R \\ \text{paso } P\end{cases}$ → Se pide $|\vec{a}|$ si la velocidad es v (cte)

Trayectoria $\vec{r}\begin{cases} x=R\cos\varphi \\ y=R\,\text{sen}\,\varphi \\ z=\dfrac{P}{2\pi}\varphi\end{cases} \longrightarrow \vec{v}=\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt}=-R\,\text{sen}\,\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y}=R\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{z}=\dfrac{P}{2\pi}\dot{\varphi}\end{cases}$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-R\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi)^2+(R\dot{\varphi}\cos\varphi)^2+\left(\frac{P}{2\pi}\dot{\varphi}\right)^2}=\sqrt{R^2\dot{\varphi}^2\,\text{sen}^2\varphi+R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi+\frac{P^2}{4\pi^2}\dot{\varphi}^2}=$$

$$=\sqrt{R^2\dot{\varphi}^2(\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi)+\frac{P^2}{4\pi^2}\dot{\varphi}^2}=\sqrt{\dot{\varphi}^2\left(R^2+\frac{P^2}{4\pi^2}\right)}=\dot{\varphi}\sqrt{R^2+\frac{P^2}{4\pi^2}}=v=cte$$

$$\dot{\varphi}=\frac{v}{\sqrt{R^2+\frac{P^2}{4\pi^2}}}=cte$$

$$\vec{a}\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \dfrac{d\dot{x}}{d\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{dt} = -R\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 \\ \ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = \dfrac{d\dot{y}}{d\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{dt} = -R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\dot{\varphi}^2 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{\sqrt{R^2+\frac{p^2}{4\pi^2}}}$$

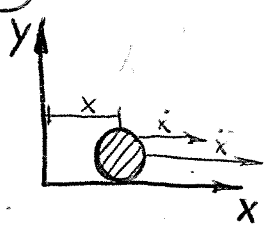
$$|\vec{a}| = \sqrt{R^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^4 + R^2\,\mathrm{sen}^2\varphi\,\dot{\varphi}^4} = R\dot{\varphi}^2 = R\cdot\frac{v^2}{R^2+\frac{p^2}{4\pi^2}}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \frac{R\cdot v^2}{R^2+\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}}$$

Calcule ahora ρ de la hélice $\rho = cte \neq R$

si $v = cte$ $\begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{v^2 R}{R^2+\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2} \end{cases} \longrightarrow \boxed{\rho = \dfrac{R^2+\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}{R} = cte}$

2



MRUA $\longrightarrow$ $X(5) - X(1) = 32$; $v_{(5)} - v_1 = 8$; $X_{(0)} = 2$

Se pide $X_{(5)}$ y $\ell_{(1)}$

MRUA $\Rightarrow \ddot{x} = a = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = cte \Longrightarrow a\,dt = d\dot{x}$

Integrando $\displaystyle\int_{\dot{x}_i}^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_{t_i}^{t} a\,dt = \dot{x} - \dot{x}_i = a(t-t_i)$

si $v_{(5)} - v_{(1)} = 8 \longrightarrow v_{(5)} - v_{(1)} = a(5-1) = 8$

$4a = 8$; $a = 2$

$\dot{x} = v = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}_i + a(t-t_i) \Longrightarrow dx = (\dot{x}_i + a(t-t_i))\,dt$

Integrando

$\displaystyle\int_{x_i}^{x} dx = \int_{t_i}^{t} [\dot{x}_i + a(t-t_i)]\,dt$; $X - X_i = \dot{X}_i(t-t_i) + a\dfrac{(t-t_i)^2}{2} - \cancel{a\dfrac{(t_i-t_i)}{2}}^{\,0}$

$X = X_i + \dot{X}_i(t-t_i) + \frac{1}{2}a(t-t_i)$

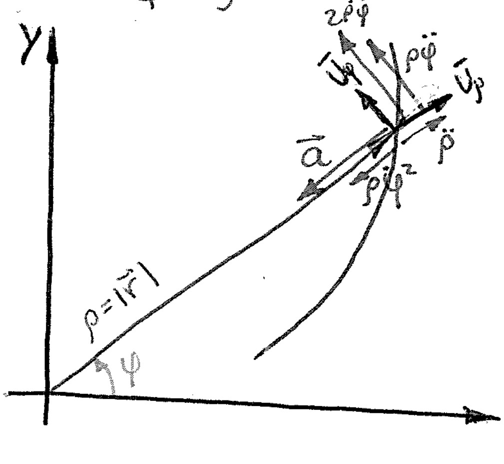
$X_{(5)} - X_{(1)} = \dot{X}_{(1)}(5-1) + \frac{1}{2}2(5-1)^2; \quad 32 = v_{(1)}4 + 16; \quad v_1 = \frac{32-16}{4} = 4$

$X_{(0)} = 2 = X_1 + v_{(1)}(0-1) + \frac{1}{2}2(0-1)^2 \xrightarrow[v_1=4]{} X_1 = +2+4-1 = 5$

$X_5 = 32 + X_1 = 32+5 = 37$

$$\boxed{\begin{cases} X_1 = 5 \\ X_2 = 37 \end{cases}}$$

③ Mov. plano OXY con $\vec{a}$ pasando por el origen (dirigida hacia él)
A partir de la expresión en polares de $\vec{a}$ demostrar que ρ barre áreas iguales en tiempos iguales



Expresión $\vec{a}$ en polares

$\vec{r} = \rho\vec{U}_\rho$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt}\vec{U}_\rho + \rho\frac{d\vec{U}_\rho}{dt}\right) =$ $\quad \dot{\varphi}\vec{U}_\varphi$

$= \left(\dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi\right)$

$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}U_\varphi)}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{d\rho\dot{\varphi}}{dt}\vec{U}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} =$

$= \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}U_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \rho\dot{\varphi}(-\vec{U}_\rho\dot{\varphi}) =$

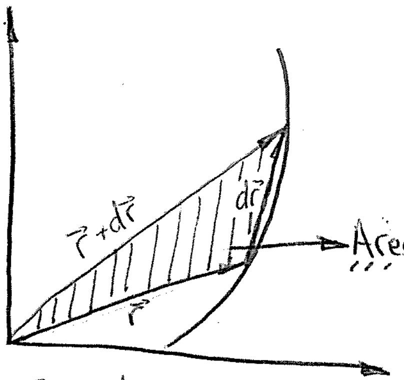
$= \underbrace{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)}_{a_\rho}\vec{U}_\rho + \underbrace{(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})}_{a_\varphi}\vec{U}_\varphi$

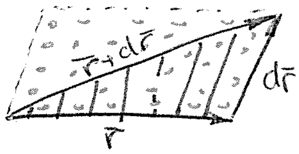
si $\vec{a}$ dirigida hacia O $\Longrightarrow \vec{a} \parallel \vec{r} \longrightarrow \begin{cases} a_\varphi = 0 \\ a_\rho = |\vec{a}| \end{cases}$

$a_\varphi = 0 \longrightarrow \rho(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 0) \longrightarrow 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = \rho\cdot 0 = \frac{d(\rho^2\dot{\varphi})}{dt} = 0$

$\Longrightarrow$

$\rho^2\dot{\varphi} = cte$





$$dA_{TOTAL} = \vec{r} \times d\vec{r}$$

$$dA_{BARRIDA} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

Se define v aerolar $= \frac{dA_{BAR}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} U_\rho & U_\varphi & U_z \\ \rho & 0 & 0 \\ \dot{\rho} & \rho\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\, U_z\right)$

Como $U_z = cte$ y $\rho^2\dot{\varphi} = cte \implies v_{aerolar} = cte$ cuando $\vec{a} \parallel \vec{r}$

Queda demostrada la ley de las areas.

(4) Partícula con mov. compuesto $\begin{cases} X_{(t)} = A\,sen\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \\ y_{(t)} = A\,sen\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$ Determinar trayectoria y las características de la figura de Lisajous

Por relaciones trig:

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} X_t = A\left[sen\,\omega t\cos\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{4}\cos\omega t\right] \Rightarrow X^2 = A^2\left[\frac{1}{2}sen^2\omega t + \frac{1}{2}\cos^2\omega t + sen\,\omega t\cos\omega t\right] \\ y_t = A\left[sen\,\omega t\cos\frac{\pi}{4} - sen\frac{\pi}{4}\cos\omega t\right] \Rightarrow y^2 = A^2\left[\frac{1}{2}sen^2\omega t + \frac{1}{2}\cos^2\omega t - sen\,\omega t\cos\omega t\right] \end{cases}$$

$$X^2 + y^2 = A^2\left[\frac{1}{2}(sen^2\omega t + \cos^2\omega t) + \frac{1}{2}(sen^2\omega t + \cos^2\omega t)\right] \Rightarrow X^2 + y^2 = A^2$$

Trayectoria $\{ X^2 + y^2 = A^2 \rightarrow$ circunferencia de centro $(0,0)$ y radio A.

$$\boxed{\text{Caract.} \begin{cases} A_1 = A_2 \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

Indusbol.com

(6) $\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = 2\cos t \end{cases}$ Obtener $\vec{t}$ y $\vec{n}$ en $t = \frac{\pi}{3}$ s

$t \parallel \vec{v}$ Busco $\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = -3 \operatorname{sen} 3t \\ \dot{y} = -2 \operatorname{sen} t \end{cases}$

$\downarrow$

$t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ por ser v siempre tangente a la trayectoria

$$t = \frac{(-3\operatorname{sen}3t)\vec{i} + (-2\operatorname{sen}t)\vec{j}}{|\vec{v}|} \; ; \; t_{\frac{\pi}{3}} = \frac{(-3\operatorname{sen}3\frac{\pi}{3})\vec{i}\,(-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3})\vec{j}}{|\vec{v}|} = \frac{-\sqrt{3}\vec{j}}{|\vec{v}|} =$$

$$= -\vec{j} \qquad \boxed{\vec{t} = -\vec{j}}$$

Busco $\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = -9\cos 3t \\ \ddot{y} = -2\cos t \end{cases}$ $\quad a_{\frac{\pi}{3}} = (-9\cos\pi)\vec{i} - 2\cos\frac{\pi}{3}\vec{j} = 9\vec{i} - \vec{j} = 9\vec{i} + (-\vec{j})$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = |\vec{a}_n|\vec{n} + |\vec{a}_t|\vec{t} = 9\vec{i} + (-\vec{j})$$

$\vec{t} \Longrightarrow |\vec{a}_t| = 1$

$|\vec{a}_n| = 9 \begin{cases} \vec{a}_n = 9\vec{i} \rightarrow \vec{n} = \vec{i} \\ \vec{a}_n = -9\vec{i} \rightarrow \vec{n} = -\vec{i} \end{cases}$

Pero $a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{R} > 0 \longrightarrow \vec{a}_n \neq -9\vec{i} \Longrightarrow \vec{a}_n = 9\vec{i}$

Así: $\boxed{\vec{t} = -\vec{j} \; ; \; \vec{n} = \vec{i}}$

(8) Plano Oxy movimiento. $\vec{v} = y\vec{i} - x\vec{j}$. En $t=0$ $P_0(a,0)$

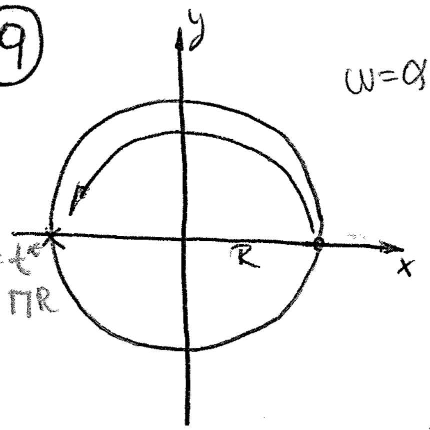
Determinar trayectoria

$\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = y \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \longrightarrow$ Dividiendo $\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x} \longrightarrow x\,dx = -y\,dy$

$$\int_{x=a}^{x} x\,dx = -\int_{y=0}^{y} y\,dy \; ; \; \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^x = \left.-\frac{y^2}{2}\right|_0^y$$

$$\frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{a^2}{\cancel{2}} = \frac{-y^2}{\cancel{2}} \qquad \boxed{x^2 + y^2 = a^2}$$ Circunferencia de centro $(0,0)$ y radio a.

9



$t=t^*$

$S=\pi R$

$\omega = \alpha t$ Determinar las comp. intrínsecas de $\vec{a}$ en π rad.

Suponemos en $t=0 \begin{cases} s=0 \\ v=0 \end{cases}$

$|\vec{v}| = \omega R = R\alpha t$

$$\vec{a} \begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} = R\alpha \\ a_n = \dfrac{|v|^2}{R} = \dfrac{R^2\alpha^2 t^2}{R} = R\alpha^2 t^2 \end{cases}$$

$S(t) \Longrightarrow v = \dfrac{ds}{dt}$; $\displaystyle\int_{t=0}^{t} v\,dt = \int_{s=0}^{s} ds$; $\displaystyle S = R\alpha \int_{t=0}^{t} t\,dt$

$S = R\alpha \dfrac{t^2}{2}$; $S_{(t^*)} = \cancel{R}\alpha \dfrac{t^{*2}}{2} = \pi \cancel{R}$

$t^* = \sqrt{\dfrac{2\pi}{\alpha}}$

$$\begin{cases} \boxed{a_t = R\alpha} \text{ cte} \\ a_n = R\alpha^2 \dfrac{2\pi}{\alpha} = \boxed{R\alpha 2\pi} \end{cases}$$

12 $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Determinar ρ

$\vec{v} \parallel \vec{t}$ y $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$

$\vec{a}_n \downarrow |a_n| = \dfrac{|v|^2}{\rho}$ $\quad \vec{a}_t \downarrow a_t \parallel \vec{t}$

Buscamos $\vec{t} = \dfrac{v}{|v|} = \dfrac{(1,2,0)}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$

$\vec{a}_t = \vec{a} \cdot \vec{t} = (1,1) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1+2) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\vec{a}_t = |\vec{a}_t|\,\vec{t} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = \dfrac{3}{5}(1,2)$

$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$; $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = (1,1) - \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{6}{5}\right) = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$

$|\vec{a}_n| = \sqrt{\dfrac{4}{25} + \dfrac{1}{25}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{|v|^2}{\rho}$, $\dfrac{1+4}{\rho} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; $25 = \sqrt{5}\rho$

$\rho = \dfrac{25}{\sqrt{5}} \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{25\sqrt{5}}{5} = 5\sqrt{5} \longrightarrow \boxed{\rho = 5\sqrt{5}\ u}$

JC
Aula de Ingeniería

Ingenieros Industriales
c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid.
Tlfno: 91 535 75 29

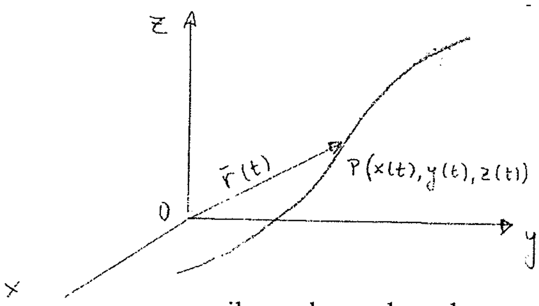
Física I
Profesor
Alex García

CINEMÁTICA DEL PUNTO

1.VECTOR DE POSICIÓN, VECTOR VELOCIDAD, VECTOR ACELERACIÓN.

1.1. VECTOR DE POSICIÓN. ECUACIONES HORARIAS.

Se define el vector de posición, $\vec{r}$, de un punto P, como aquel que tiene por origen el origen de coordenadas y por extremo el punto P. Dicho punto estará en movimiento cuando su vector de posición cambie con el tiempo, $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Las componentes cartesianas de este vector estarán expresadas entonces como funciones del tiempo:



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} = (x(t),\, y(t),\, z(t))$$

que reciben el nombre de *ecuaciones horarias*. La curva descrita por *P* en su movimiento se llama *trayectoria*, y está definida por las ecuaciones horarias de P.

Trayectoria : $\vec{r}=\vec{r}(t)$ **Ecuaciones horarias:** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

1.2 VECTOR VELOCIDAD

Se define como la *derivada del vector de posición con respecto al tiempo.* Partiendo de las componentes cartesianas del vector de posición, las componentes cartesianas del vector velocidad serán:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\dot{x}\cdot\vec{i}+\dot{y}\cdot\vec{j}+\dot{z}\cdot\vec{k}$$

1.3 VECTOR ACELERACIÓN

Se define como la *derivada del vector velocidad con respecto al tiempo.* En coordenadas cartesianas, sus componentes son:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}=\ddot{x}\cdot\vec{i}+\ddot{y}\cdot\vec{j}+\ddot{z}\cdot\vec{k}$$

2. TRIEDRO INTRÍNSECO

Dada una curva (la trayectoria de un punto en nuestro caso) como:

C: x = x(t), y = y(t), z = z(t) (las ecuaciones horarias en nuestro caso)

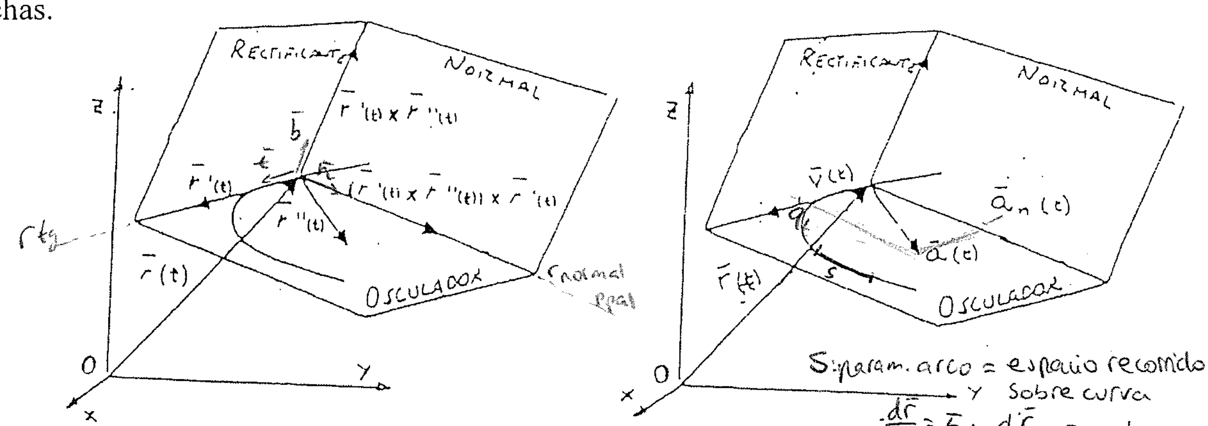
o bien como $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (nuestro vector de posición), siendo t un parámetro cualquiera (para nosotros el tiempo), el vector $\vec{r}\,'(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, derivada de $\vec{r}(t)$ respecto del parámetro *t*, es un vector tangente a la curva, situado sobre una *recta tangente* a la curva.

El vector $\vec{r}\,''(t) = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$ no es un vector tangente. $\vec{r}\,''(t)$ y $\vec{r}\,'(t)$ definen un plano llamado *plano osculador*. La recta soporte del vector producto vectorial $\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)$ es normal al plano osculador y a la curva y se llama *recta binormal*. La recta soporte del vector producto vectorial $[\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)] \times \vec{r}\,'(t)$, normal a la curva y contenida en el plano osculador, se llama *recta normal principal*.

De esta manera queda definido, en cada punto de la curva, un triedro llamado *triedro intrínseco*, formado por las *rectas tangente, normal principal y binormal*. Los planos que componen este triedro son:

- el *plano osculador*, ya mencionado, que queda determinado por la *recta tangente* y la *normal principal*,
- el *plano normal*, formado por la *normal principal* y la *binormal*,
- el *plano rectificante*, formado por la *tangente* y la *binormal*.

Por último, se definen tres vectores unitarios: $\vec{t}$ (*vector tangente*), $\vec{n}$ (*vector normal*) y $\vec{b}$ (*vector binormal*), pertenecientes a la *recta tangente, normal principal y binormal*, respectivamente, y que componen, en ese orden, el *triedro intrínseco* a derechas.



S: param. arco = espacio recorrido sobre curva

$\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$; $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$; $\dfrac{ds}{dt} = |\vec{v}|$

2.1. RADIO DE CURVATURA. RADIO DE TORSIÓN

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \vec{t}|\vec{v}|$

Si consideramos dos vectores tangente, siendo *dα* el ángulo que forman y *ds* el arco que los separa, se llama radio de curvatura ρ_c al cociente $\rho_c = ds/d\alpha$.

De igual forma, si consideramos dos vectores binormales, siendo *dβ* el ángulo que forman y *ds* el arco que los separa, se llama radio de torsión ρ_τ al cociente $\rho_\tau = ds/d\beta$.

2.2 FÓRMULAS DE FRENET

Expresan las derivadas de los vectores $\vec{t}$, $\vec{n}$ y $\vec{b}$ con respecto al parámetro arco (s, abscisa curvilínea).

$$\boxed{\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{\vec{n}}{\rho_c}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{n}}{ds}=-\frac{\vec{t}}{\rho_c}+\frac{\vec{b}}{\rho_\tau}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{b}}{ds}=-\frac{\vec{n}}{\rho_\tau}}$$

2.3 VECTOR DE DARBOUX

Se define como:

$$\vec{\Omega}=\frac{\vec{t}}{\rho_\tau}+\frac{\vec{b}}{\rho_c} \quad \text{(contenido en el plano rectificante)}$$

Se comprueba que:

$$\vec{\Omega} \times \vec{t}=\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{\vec{n}}{\rho_c}$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{n}=\frac{d\vec{n}}{ds}=-\frac{\vec{t}}{\rho_c}+\frac{\vec{b}}{\rho_\tau}$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{b}=\frac{d\vec{b}}{ds}=-\frac{\vec{n}}{\rho_\tau}$$

3. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA VELOCIDAD Y DE LA ACELERACIÓN.

Definido el triedro intrínseco, vamos a poder expresar las componentes del vector velocidad y del vector aceleración, en cada punto, en ese triedro, obteniendo así las componentes intrínsecas de ambos.

3.1 COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA VELOCIDAD:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{t} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{t} \cdot |\vec{v}| \text{ , siendo: } |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad ; \quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$$

3.2 COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN:

$\frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{\rho_c} |\vec{v}|$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}| \cdot \vec{t})}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{t} + |\vec{v}| \cdot \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{t} + \frac{|\vec{v}|^2}{\rho_c} \cdot \vec{n} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} + \frac{v^2}{\rho_c} \cdot \vec{n}$$

La aceleración tiene, por tanto, dos componentes:

- una componente en la dirección de la tangente, llamada aceleración tangente (o tangencial), que representa la variación del módulo del vector velocidad con respecto al tiempo

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \vec{a} \cdot \vec{t}$$

- una componente en la dirección de la normal principal, llamada aceleración normal, que representa la variación de la dirección del vector velocidad con el tiempo

$$a_n = \frac{v^2}{\rho_c} = \vec{a} \cdot \vec{n}$$

Por tanto $\vec{a} = a_t \cdot \vec{t} + a_n \cdot \vec{n}$. La aceleración está contenida en el plano osculador.

4. HODÓGRAFA DE VELOCIDADES NO NO !!

Curva que describe un vector equipolente al vector velocidad y con origen en el origen de coordenadas. La ecuaciones paramétricas de la hodógrafa son:

$$X = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

$$Y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t)$$

$$Z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}(t)$$

5. DEFINICIÓN ESCALAR DE LA VELOCIDAD Y DE LA ACELERACIÓN. FUNCIÓN ESPACIO, FUNCIÓN HORARIA, FUNCIÓN CINEMÁTICA NO

Considerando una orientación de la trayectoria y un origen del parámetro arco, s (abscisa curvilínea), se puede describir el movimiento del punto sobre la trayectoria mediante el escalar s(t), llamada *función espacio o función horaria*. La derivada de s(t) respecto del tiempo se llama *función cinemática*, v(t), y representa la velocidad como escalar, coincidiendo con $|\vec{v}|$. De igual modo, derivando la función cinemática respecto al tiempo obtenemos la función γ(t), que representa la aceleración como escalar, γ(t), que coincide con a_t.

6. SOBREACELERACIÓN NO

Se denomina sobreaceleración de orden n a la derivada enésima del vector aceleración.

7. TEOREMA DE LA PROYECCIÓN NO

La velocidad, aceleración y sobreaceleraciones de la proyección de un punto móvil sobre un eje o sobre un plano coinciden con las correspondientes proyecciones de la velocidad, aceleración y sobreaceleraciones del punto.

8. VECTOR POSICIÓN, VECTOR VELOCIDAD Y VECTOR ACELERACIÓN EN COORDENADAS CILÍNDRICAS.

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{u}_\varphi + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \cdot \vec{u}_\rho + \left[2 \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \cdot \vec{u}_\varphi + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \vec{u}_z$$

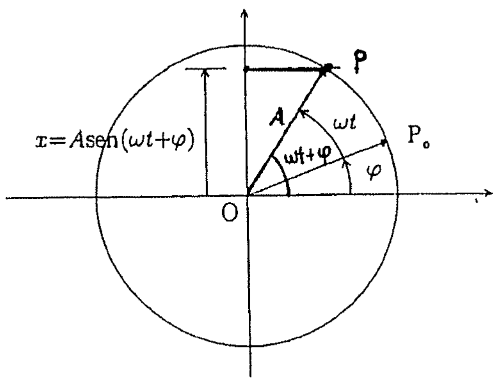
9. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La ecuación del movimiento armónico simple, solución de la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$, sobre una base rectilínea es:

$$x = A\ sen\ (\omega t + \varphi)$$

siendo:
- A: amplitud o elongación máxima
- ω: frecuencia angular o pulsación. $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
- φ: fase inicial
- f: frecuencia
- T: periodo

Aplicando el teorema de la proyección, este movimiento puede estudiarse como la proyección sobre un diámetro de un movimiento circular uniforme:



CLASE

EJERCICIO CIN.PTO.1 (Sep-98)

Un punto se mueve uniformemente sobre una hélice circular de radio R y paso p. Obtenga el valor modular de su aceleración si su velocidad es v.

EJERCICIO CIN.PTO.2 (Jun-99)

Un punto se desplaza según el eje de abscisas con movimiento uniformemente acelerado, y se conocen los siguientes datos, todos ellos expresados en unidades SI:

$$x(5) - x(1) = 32, \quad v(5) - v(1) = 8 \quad y\ x(0) = 2$$

Determine x(1) y x(5) en metros.

EJERCICIO CIN.PTO.3 (Feb-01)

Un punto se mueve en el plano XOY de manera que su aceleración está permanentemente dirigida hacia el origen de coordenadas. A partir de la expresión de su aceleración en coordenadas polares, demostrar que el radio polar que determina su posición con respecto al origen barre áreas iguales en tiempos iguales (ley de las áreas en el movimiento plano).

EJERCICIO CIN.PTO.4 (Feb 02)

Un punto está sometido a la composición de dos movimientos armónicos perpendiculares de ecuaciones paramétricas respectivas: $x(t) = Asen(\omega t + \pi/4)$; $y(t) = Asen(\omega t - \pi/4)$. Determinar la ecuación cartesiana de la trayectoria e indicar las características (relación de frecuencias y diferencia de fase) de la figura de Lissajous a que corresponde.

EJERCICIO CIN.PTO.5 (Feb 02)

El vector de posición de un móvil viene dado en función del tiempo por: $\mathbf{r}(t) = \cos(100\pi t)\mathbf{i} + \mathrm{sen}(100\pi t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$. Determinar las expresiones temporales de las aceleraciones normal y tangencial del movimiento.

EJERCICIO CIN.PTO.6 (JUN 2005)

Un punto móvil describe una trayectoria cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = 2\cos(t) \end{cases}$$

Obtener los vectores unitarios tangente y normal a la trayectoria en $t = \dfrac{\pi}{3}\,s$.

EJERCICIO CIN.PTO. 7 (FEB 2006)(FEB 2010)

En un instante dado, un punto móvil tiene una velocidad $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}$ y una aceleración $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. Obtener la aceleración normal, $\boldsymbol{a}_n$, el vector normal a la trayectoria, $\boldsymbol{n}$, y el radio de curvatura, ρ

EJERCICIO CIN.PTO. 8 (SEP 2006)

Una partícula se mueve en el plano Oxy con una velocidad $v = yi - xj$. Si en $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto $P_0\,(a, 0)$, determinar la ecuación de la trayectoria.

EJERCICIO CIN.PTO. 9 (JUN 2007)

Un punto que parte del reposo describe una trayectoria circular de radio R de forma que su velocidad angular crece linealmente con el tiempo $\omega = \alpha t$. Determinar las componentes intrínsecas de la aceleración del punto cuando ha recorrido media circunferencia desde su posición inicial.

EJERCICIO CIN.PTO. 10 (FEB 2008)

Un punto describe una curva definida por las coordenadas polares en función del tiempo siguientes: $\rho = kt^2$ y $\varphi = kt$, donde k es una constante. Determinar su aceleración $\boldsymbol{a}$ en la base $\{O, \boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\varphi\}$.

EJERCICIO CIN.PTO. 11 (JUN 2008)

Un tornillo se desenrosca de modo que su eje de simetría avanza colinealmente con velocidad uniforme y en el mismo sentido del eje Oz de una referencia fija de coordenadas cilíndricas. Si da n vueltas cada segundo y el paso de hélice es h, determinar la expresión en coordenadas cilíndricas de la velocidad instantánea del punto del tornillo con coordenadas $B(R_B, 0, 0)$.

EJERCICIO CIN.PTO. 12 (JUN 2009)

En un determinado punto de su trayectoria un móvil tiene una velocidad $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ y una aceleración $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. Determinar el radio de curvatura ρ en ese punto.

EJERCICIO CIN.PTO. 13 (SEP 2009)

Un móvil tiene una aceleración en función del tiempo dada por $\boldsymbol{a} = -t^2\boldsymbol{i} + 2t\sqrt{t^2+1}\boldsymbol{j} + \frac{1}{t+1}\boldsymbol{k}$ y una velocidad $\boldsymbol{v}_0(t=0) = \boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j}$. Determinar su velocidad para todo t.

EJERCICIO CIN.PTO. 14 (SEP 2009)

Determinar en todo instante, utilizando la 1ª fórmula de Frenet, el vector normal $\boldsymbol{n}$ a la trayectoria de un móvil si el vector tangente a la misma es $\boldsymbol{t} = \frac{1}{2}\cos t\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}$.

REPASO

EJERCICIO R-CIN.PTO.1 (Feb-95)

Un punto móvil describe la trayectoria $(x^2 / a^2) + (y^2 / b^2) = 1$ en el plano $z = 0$ $(a > b)$, con velocidad de módulo constante y siempre en el mismo sentido. Señale los puntos de la trayectoria en los que la aceleración es máxima y justifíquelo.

EJERCICIO R-CIN.PTO.2 (Feb-96)

El movimiento de un punto responde, en unidades SI, a

$$x(t) = 10\ \operatorname{sen}(2\pi t + \pi/2) \quad (t > 0)$$

Calcule el instante en el que la sobreaceleración primera del punto alcanza por primera vez su valor absoluto máximo.

EJERCICIO R-CIN.PTO.3 (Jun-96)

Un punto móvil que parte del reposo describe una circunferencia con aceleración tangencial constante. Cuando vuelve a pasar por primera vez por la posición inicial, su aceleración total vale **a**. Determine el valor de la aceleración tangencial.

EJERCICIO R-CIN.PTO.4 (Feb 97)

Un punto se mueve sobre una circunferencia con la siguiente ecuación horaria o función espacio $s=(10-t)t$, en unidades S.I. Determine su aceleración tangencial y normal en $t=5\,\text{s}$. interpretando el significado de los signos correspondientes.

EJERCICIO R-CIN.PTO.5 (Feb-97)

¿Cuál es la utilidad del vector de Darboux?.

EJERCICIO R-CIN.PTO.6 (Jun-97)

Un punto se desplaza según el eje de abscisas con movimiento uniformemente acelerado, y se conocen los siguientes datos, todos ellos expresados en unidades SI:

$$x(3) = 25,\quad v(2) = 19 \;\text{ y }\; v(5) = 23$$

Determine la abscisa, en metros, cuando t = 4 s, es decir, x(4).

EJERCICIO R-CIN.PTO.7 (Sep 97)

Exprese el vector de Darboux en la base que define el triedro intrínseco de una curva, indicando el significado de los símbolos empleados.

EJERCICIO R-CIN.PTO.8 (Feb-99)

Exprese las componentes intrínsecas de la aceleración de un punto en mecánica clásica.

EJERCICIO R-CIN.PTO.9 (Jun-99)

El vector tangente a una curva en un punto es (1/3) **i** + (2/3) **j** + (2/3) **k**, y su vector de Darboux 2 **i** + 2**j**. ¿Cuánto vale, en ese punto, la curvatura de flexión?.

EJERCICIO R-CIN.PTO.10 (Sep-99)

Indique justificadamente cuáles son las hodógrafas de velocidades y aceleraciones en un movimiento circular uniforme.

EJERCICIO R-CIN.PTO.11 (Sep-99)

Escriba la primera fórmula de Frenet en función del vector de Darboux.

EJERCICIO R-CIN.PTO.12 (Feb-00) (Feb 2004)

Obtenga las componentes intrínsecas de la aceleración usando las fórmulas de Frenet.

EJERCICIO R-CIN.PTO.13 (Jun-00)

Exprese en coordenadas polares la aceleración de un punto con movimiento plano.

EJERCICIO R-CIN.PTO.14 (Sep-00)

En un mismo instante se lanza verticalmente, alejándose de la Tierra y desde su superficie, un grave con velocidad $\mathbf{v_0}$, y se deja caer otro grave desde una altura $h_0 > 0$, sin velocidad inicial. Ambos llegan al suelo simultáneamente. Determine el valor de $\mathbf{v_0}$, en función de h_0 y $\mathbf{g}$.

EJERCICIO R-CIN.PTO.15 (Sep-01)

El vector de posición de un móvil en una referencia cartesiana ortonormal viene dado por la expresión: $\mathbf{r}(t) = (t^2 +1)\, \mathbf{i} + (½\, t^2)\, \mathbf{j} + (t^2 - 1)\, \mathbf{k}$ (m), viniendo el tiempo expresado en segundos. Indicar el tipo de trayectoria que sigue y obtener las componentes intrínsecas de su aceleración.

EJERCICIO R-CIN.PTO.16 (Jun-01)

Un móvil recorre una hélice según las coordenadas paramétricas:

$$x = R \cos \omega t \;;\; y = R \,\text{sen}\, \omega t \;;\; z = (p/2\pi)\, \omega t$$

Determinar, para cada instante t, el módulo de su velocidad y las componentes cartesianas del vector tangente a la trayectoria.

EJERCICIO R-CIN.PTO.17 (JUN 2002)

Un punto está sometido a la composición de dos movimientos armónicos perpendiculares de ecuaciones paramétricas respectivas: $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \pi/2)$; $y(t) = A\,\text{sen}(\omega t - \pi/2)$. Determinar la ecuación cartesiana de la trayectoria.

EJERCICIO R-CIN.PTO.18 (JUN 2002)

El vector de posición de un móvil viene dado en función del tiempo por: $\mathbf{r}(t) = A\cos\omega t\; \mathbf{i} + B\,\text{sen}\,\omega t\; \mathbf{j}$. Determinar la expresión temporal del vector tangente a la trayectoria.

EJERCICIO R-CIN.PTO.19 (SEP 2002)

Del movimiento de un punto se conocen completamente los vectores velocidad y aceleración (**v** y **a**). A partir de estos datos, determinar el radio se curvatura de la trayectoria.

EJERCICIO R-CIN.PTO.20 (FEB 2003)

Expresar en coordenadas polares la velocidad de un móvil que describe un movimiento plano.

EJERCICIO R-CIN.PTO.21 (JUN 2004)

Del movimiento de un punto se conocen completamente los vectores velocidad y aceleración (**v** y **a**). A partir de estos datos, determinar el módulo de la componente normal de la aceleración.

EJERCICIO R-CIN.PTO.22 (Sep 2003) (Sep 2004)

Un móvil recorre una curva plana (cicloide) cuyas coordenadas vienen dadas en función del tiempo en la forma $\begin{cases} x = R(\omega \cdot t - sen\omega \cdot t) \\ y = R(1-\cos\omega \cdot t) \end{cases}$ siendo ω una constante. Determinar las componentes cartesianas y el módulo de su aceleración.

EJERCICIO R-CIN.PTO.23 (FEB 2005) (Jun 95) (Sep-98)

Escribir las fórmulas de Frenet, indicando el significado de cada símbolo empleado.

EJERCICIO R-CIN.PTO.24 (SEP 2005)

El vector de posición con respecto a un punto fijo, O, de un punto móvil P que se mueve en un plano es $\boldsymbol{r}(t) = \rho(t)\boldsymbol{u}_\rho(t)$.

i) Expresar la velocidad y la aceleración de P en la base $\{\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\varphi\}$.

ii) Obtener la velocidad y la aceleración de P si se mueve de modo que su distancia a O crece linealmente con el tiempo ($\rho(t) = kt$) y el radio vector $\boldsymbol{OP}$ gira alrededor de O con velocidad angular constante($\varphi(t) = \omega t$)

EJERCICIO R-CIN.PTO. 25 (SEP 2008)

El vector de posición con respecto a un punto fijo, O, de un punto móvil P que se mueve en un plano es $r(t) = \rho(t)\,u_\rho(t)$. Expresar la velocidad y la aceleración de P en la base $\{u_\rho, u_\varphi\}$.

EJERCICIO R-CIN.PTO. 26 (SEP 2008)

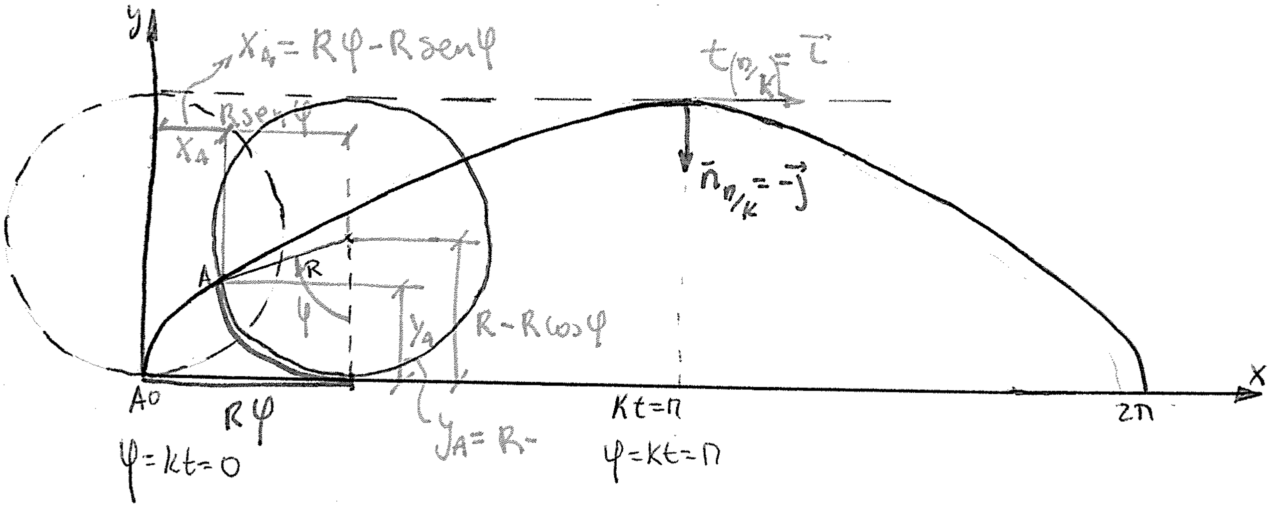
Una partícula se mueve en el plano Oxy con una velocidad $v = xi - yj$. Si en $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto $P_0\,(2,3)$, determinar la ecuación de la trayectoria.

Problema Cinemática del Punto (1)

$$\vec{r}\begin{cases} X = A\left(Kt - sen(Kt)\right) \\ y = A\left(1 - \cos(Kt)\right) \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq Kt < 2\pi$$

Nos damos cuenta que estamos ante una cicloide

Obtención gráfica → Rueda R.S.D sobre x



$$r_A = \begin{cases} x_A = R(\varphi - sen\varphi) \\ y_A = R(1 - \cos\varphi) \end{cases} \Longrightarrow$$

La cicloide definida correspondería a una rueda R.S.D de radio = A girando con $\omega_{cte} = K = \frac{d\varphi}{dt} \Longrightarrow \varphi = Kt \; [\varphi_{(t=0)} = 0]$

1) Analizo corte con ejes

PROBLEMA CIN.PTO 1 (Jun 2001)

Un punto P se mueve según una trayectoria plana definida en un sistema ortogonal de coordenadas cartesianas mediante

$$\left.\begin{aligned} x &= A(kt - \operatorname{sen}(kt)) \\ y &= A(1 - \cos(kt)) \end{aligned}\right\} \quad \text{con} \quad 0 \leq kt < 2\pi$$

donde A y k son constantes positivas y t el tiempo que define un instante genérico del intervalo indicado.

1) Dibujar, de forma aproximada, el tramo de trayectoria del punto correspondiente al intervalo especificado ($0 \leq kt < 2\pi$).

2) Obtener las componentes cartesianas de la velocidad de P y el módulo de dicha velocidad, en función de t.

3) Calcular las componentes cartesianas de la aceleración de P y el módulo de dicha aceleración, en función de t.

4) Determinar las componentes normal y tangencial de la aceleración, en función de t.

5) Expresar la abscisa curvilínea $s(t)$ mediante integración de $v(t)$, adoptando $s(0) = 0$.

6) Calcular el radio de curvatura de la trayectoria en el instante $t = \pi/k$ y expresar los vectores tangente y normal principal del triedro intrínseco de la trayectoria, mediante sus componentes cartesianas.

7) Encontrar el máximo valor de la velocidad en el intervalo considerado e indicar dónde se alcanza, determinando, a su vez, los valores de las componentes tangencial y normal de la aceleración en dicho punto. ¿Existe alguna razón que justifique el valor de la componente tangencial de la aceleración?

8) Determinar el instante en el que el punto P ha recorrido sobre la trayectoria una arco de longitud $2A$ a partir de la posición inicial ($t = 0$).

* * * * * * *

NO se permite el uso de calculadora

Duración: 90 minutos

Calificación: 10 puntos sobre 20 del total del examen.

PROBLEMA CIN.PTO 2 (Jun 2002)

Siempre son elipses

Un móvil recorre una trayectoria en el plano xOy, viniendo dado su vector de posición en coordenadas cartesianas por: $\boldsymbol{r} = A\cos\omega t\, \boldsymbol{i} + B\,\mathrm{sen}\,\omega t\, \boldsymbol{j}$, con A > B y ω constante.

1) Determinar la ecuación de la trayectoria del móvil en coordenadas cartesianas, indicando qué tipo de curva es.

2) Determinar vectorialmente en componentes cartesianas la velocidad del móvil en función del tiempo.

3) Determinar vectorialmente, asimismo en componentes cartesianas, la aceleración del móvil en función del tiempo.

4) Determinar las componentes intrínsecas de la aceleración en función del tiempo.

5) Referir la ecuación cartesiana de la trayectoria al nuevo origen definido por (C,0).
[Ind.: Comprobar que, en la nueva ecuación, para $x = -C$, debe ser $y = B$].

6) A partir de la ecuación de la trayectoria referida al nuevo origen, y tomando $C = \sqrt{A^2 - B^2}$, demostrar que la expresión en coordenadas polares de dicha trayectoria (centro polar el nuevo origen y origen de ángulos el eje Ox) es:
$$\rho(\theta) = \frac{\dfrac{B^2}{A}}{1 + \dfrac{C}{A}\cos\theta}$$

7) A partir de la trayectoria obtenida en coordenadas polares, y definiendo $\omega^*(t) = d\theta(t)/dt$ en la nueva referencia, obtener la velocidad del móvil en coordenadas polares.

8) A partir de las expresiones de la posición y la velocidad del móvil (de masa m) en coordenadas polares, obtener el momento cinético del mismo con respecto al origen (nuevo) en estas coordenadas.

9) Relacionar el valor $\omega^*(t) = d\theta(t)/dt$ con el valor de ω constante utilizado para la definición del movimiento en la referencia antigua.

* * * * * * *

Examen de junio 18-06-2002

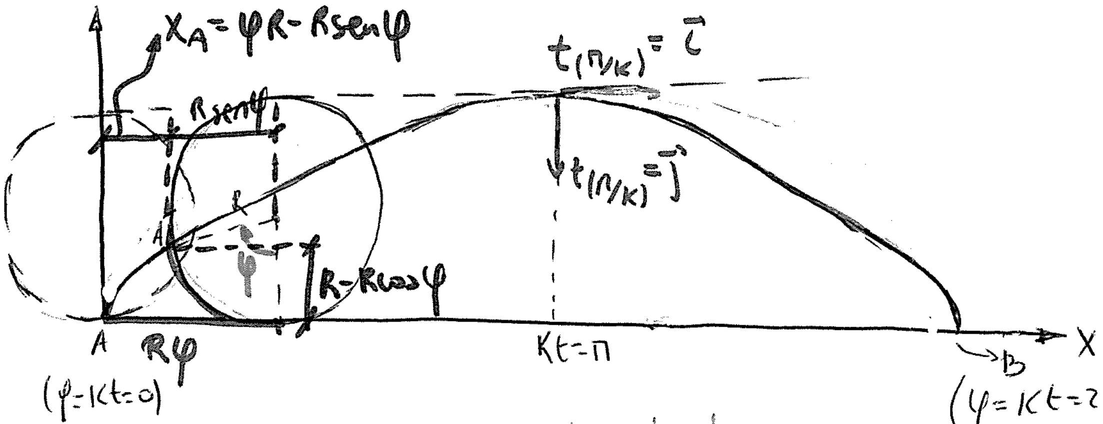
NO se permite el uso de calculadora

Duración: 90 minutos Calificación: 10 puntos sobre 20 del total del examen.

PROBLEMA CIN. PUNTO

1) $\bar{r}\begin{cases} A(Kt-\text{sen}(Kt)) = x \\ A(1-\cos(Kt)) = y \end{cases}$ con $0 \leq Kt < 2\pi$

Obtención gráfica de cicloide: Rueda RSD sobre X



$\bar{r}_A\begin{cases} x_A = R(\varphi - \text{sen}\varphi) \\ y_A = R(1-\cos\varphi) \end{cases}$ || La cicloide definida corresponderá a una rueda de radio $R = A$ girando con $\omega = \text{cte} = K = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = Kt \;(\varphi_{t=0} = 0)$

1) Analizo corte con ejes: $\begin{cases} Kt = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ Kt = 2\pi \begin{cases} x = A2\pi \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$

Analizo extremos relativos $\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 0$

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 0 \Rightarrow \frac{AK\,\text{sen}Kt}{AK[1-\cos Kt]} = 0$$

$\rightarrow \begin{cases} \text{En } Kt = \pi \text{ es } y' = \frac{0}{2AK} = 0 \rightarrow \text{Extremo en } Kt = \pi \\ \text{En } Kt = 0 \rightarrow y' \simeq \frac{AK\left(Kt - \frac{(Kt)^3}{3!} \ldots\right)}{AK\left[1-\left(1 + \frac{(Kt)^2}{2!} + \frac{(Kt)^4}{4!} \ldots\right)\right]} = \frac{Kt}{+\frac{K^2t^2}{2!}} = \frac{2!\,Kt}{+K^2t^2} \xrightarrow{Kt=0} \infty \end{cases}$

Desarrollo

Como $y = A[1-\cos(Kt)] > 0$ en el intervalo, en $Kt = \pi$ tengo máximo

Indusbol.com

2)
$$v = \frac{d\bar{r}}{dt} = \begin{cases} \dot{y} = AK \operatorname{sen} Kt \\ \dot{x} = AK[1-\cos Kt] \end{cases} \longrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(AK)^2(1-\cos Kt)^2 + (AK)^2 \operatorname{sen}^2 Kt}$$

$$= AK\sqrt{1 + \underbrace{\cos^2 Kt - 2\cos Kt + \operatorname{sen}^2 Kt}_{1}} =$$

$$= AK\sqrt{2-2\cos Kt} = AK\sqrt{2\underbrace{(1-\cos Kt)}_{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{Kt}{2}\right)}} =$$

$$= \boxed{2AK \operatorname{sen}\left(\frac{Kt}{2}\right)}$$

(3)
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} \ddot{x} = AK^2 \operatorname{sen} Kt \\ \ddot{y} = AK^2 \cos Kt \end{cases} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{(AK^2)^2(\operatorname{sen}^2 Kt + \cos^2 Kt)} = AK^2$$

(4)
$$a_t = \frac{d|v|}{dt} = 2AK\frac{K}{2}\cos\left(\frac{Kt}{2}\right) = AK^2 \cos\frac{Kt}{2}$$

$$a_n = \frac{|v|^2}{R}$$ No puedo $\longrightarrow$ $$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{(AK^2)^2 - \left(AK^2\cos\frac{Kt}{2}\right)^2} =$$

$$= AK^2\sqrt{1-\cos^2\frac{Kt}{2}} = AK^2 \operatorname{sen}\left(\frac{Kt}{2}\right)$$

(5)
$$|v| = \frac{ds}{dt} \Longrightarrow \int_{s(t=0)=0}^{s(t)} ds = \int_{t=0}^{t} |v|\,dt \longrightarrow s(t) = \int_{t=0}^{t} 2AK \operatorname{sen}\frac{Kt}{2}\,dt =$$

$$= \frac{4AK}{K}\left(-\cos\frac{Kt}{2}\right) = \boxed{4A\left[1-\cos\frac{Kt}{2}\right]}$$

(6)
$$a_n = \frac{|v^2|}{\rho} \Longrightarrow \rho = \frac{|v|^2}{a_n} = \frac{4A^2K^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{Kt}{2}\right)}{AK^2\operatorname{sen}\left(\frac{Kt}{2}\right)} = 4A\operatorname{sen}\left(\frac{Kt}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\rho\left(\frac{\pi}{K}\right) = 4A}$$

$$t = \frac{v}{|v|} = \frac{\cancel{AK}\overbrace{[1-\cos(Kt)]}^{2\sin^2(Kt/2)}\vec{i} + \cancel{AK}\sin(Kt)\vec{j}}{2\cancel{AK}\sin\left(\frac{Kt}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}(Kt/2)\vec{i} + \cancel{2\sin\left(\frac{Kt}{2}\right)}\cos\left(\frac{Kt}{2}\right)\vec{j}}{\cancel{2\sin\left(\frac{Kt}{2}\right)}} = \sin\left(\frac{Kt}{2}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{Kt}{2}\right)\vec{j}$$

$$t\left(\frac{\pi}{K}\right) = \vec{i}$$

Por 1° Frenet $\frac{d\bar{t}}{dS} = \frac{\bar{n}}{\rho} \Rightarrow \frac{d\bar{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{dS} = \frac{\bar{n}}{\rho}; \; \frac{d\bar{t}}{dt}\cdot\frac{1}{|v|} = \frac{\bar{n}}{\rho} \Rightarrow$

$$\frac{\frac{d\bar{t}}{dt}}{|v|} = \frac{\frac{K}{2}\cos\left(\frac{Kt}{2}\right)\vec{i} - \frac{K}{2}\sin\left(\frac{Kt}{2}\right)\vec{j}}{|v|} = \frac{\bar{n}}{\rho} \Rightarrow \frac{K}{2|v|}\left[\cos\left(\frac{Kt}{2}\right)\vec{i} - \sin\left(\frac{Kt}{2}\right)\vec{j}\right] = \frac{\vec{n}}{\rho}$$

$$\begin{cases} \bar{n} = \cos\frac{Kt}{2}\,\vec{i} - \sin\frac{Kt}{2}\,\vec{j} \rightarrow \vec{n}\left(\frac{\pi}{K}\right) = -\vec{j} \\ \frac{K}{2|v|} = \frac{1}{\rho}; \; \cancel{\frac{K}{8A\left[1-\cos\frac{Kt}{2}\right]} = \frac{1}{\rho} \to \rho\left(\frac{\pi}{K}\right) = \frac{8A[1-0]}{K}} = \\ \rho = 4A\sin\frac{Kt}{2} \end{cases}$$

se podría secar a OJO !!

(7) Calcular

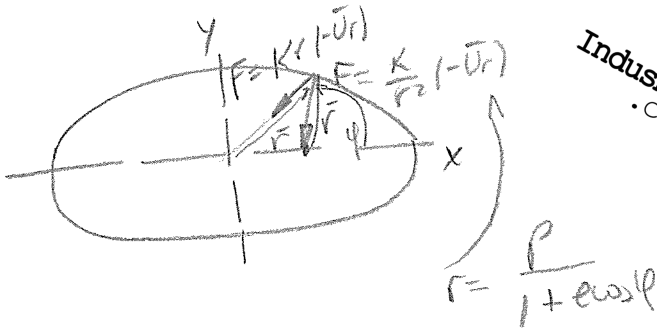
v_{max} en $\frac{d|v|}{dt} = a_t = 0 \rightarrow$ en $t = \frac{\pi}{K}$ $\left(\text{en } \sin\left(\frac{Kt}{2}\right) = 1\right) \Rightarrow a_n = |a| = AK^2$

$a_t = 0$ cuando v es max. es lógico porque donde se obtiene un extremo del $|v|$

(8) $s(t^*) = \cancel{2}A = \overset{2}{\cancel{4}}\cancel{A}\left(1 - \cos\left(\frac{Kt^*}{2}\right)\right); \; \cancel{+}\frac{1}{2} = \cancel{-}\cos\left(\frac{Kt^*}{2}\right) \Rightarrow \frac{Kt^*}{2} = \frac{\pi}{3}$

$$\boxed{t^* = \frac{2\pi}{3K}}$$

PROBLEMA (2) CIN. PUNTO



$\boxed{\text{P. Cin. Pro. 2}}$ (Jun 2002)

$\bar{r} = A\cos\omega t\,\bar{\imath} + B\,\text{sen}\,\omega t\,\bar{\jmath}$; $A > B$; $\omega = \text{cte}$

1) $\bar{r}\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\,\text{sen}\,\omega t \end{cases} \Longrightarrow \begin{rcases} \frac{x}{A} = \cos\omega t \\ \frac{y}{B} = \text{sen}\,\omega t \end{rcases} \Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

TRAYECTORIA: ELIPSE CENTRADA EN EL ORIGEN DE LA REFERENCIA Oxy, CON EL EJE MAYOR $2A$ PARALELO A Ox Y EL EJE MENOR $2B$ PARALELO A Oy

2) $\bar{v}\begin{cases} \dot{x} = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t \\ \dot{y} = B\omega\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \bar{v} = -\omega(A\,\text{sen}\,\omega t\,\bar{\imath} - B\cos\omega t\,\bar{\jmath})$

3) $\bar{a}\begin{cases} \ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y} = -A\omega^2\,\text{sen}\,\omega t \end{cases} \Rightarrow \bar{a} = -\omega^2(A\cos\omega t\,\bar{\imath} + B\,\text{sen}\,\omega t\,\bar{\jmath}) = -\omega^2\bar{r}$

($\bar{a} \parallel \bar{r} \Rightarrow$ MOVIMIENTO CENTRAL)

4) $\underline{a_t}$: 1er MÉTODO: OBTENGO $\bar{t}$ Y PROYECTO $\bar{a}$ SOBRE $\bar{t}$: $\bar{a}\cdot\bar{t} = a_t$

· $\bar{t} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{-\cancel{\omega}(A\,\text{sen}\,\omega t\,\bar{\imath} - B\cos\omega t\,\bar{\jmath})}{\cancel{\omega}\sqrt{A^2\text{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}}$

· $a_t = \bar{a}\cdot\bar{t} = -\omega^2(A\cos\omega t\,\bar{\imath} + B\,\text{sen}\,\omega t\,\bar{\jmath})\cdot\frac{-\cancel{\omega}(A\,\text{sen}\,\omega t\,\bar{\imath} - B\cos\omega t\,\bar{\jmath})}{\cancel{\omega}\sqrt{A^2\text{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}} = \omega^2\frac{(A^2 - B^2)\,\text{sen}\,\omega t\cos\omega t}{\sqrt{A^2\text{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}}$

2º MÉTODO: OBTENGO $|\bar{v}|$ Y DERIVO: $\frac{d|\bar{v}|}{dt} = a_t$

· $|\bar{v}| = \omega\sqrt{A^2\text{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t} \Rightarrow a_t = \frac{d|\bar{v}|}{dt} = \omega^2\frac{1}{\cancel{2}}\frac{(A^2\cdot\cancel{2}\,\text{sen}\,\omega t\cos\omega t - B^2\cancel{2}\cos\omega t\,\text{sen}\,\omega t)}{\sqrt{A^2\text{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}} =$

$\underline{a_n}$: MÉTODO 1: $a_n = \frac{|\bar{v}_c|^2}{\rho_c} \Rightarrow$ NO CONOZCO ρ_c

MÉTODO 2: $a_n = \bar{a}\cdot\bar{n} \Rightarrow$ NO CONOZCO $\bar{n}$ (OBTENIBLE CONOCIDA LA TRAYECTORIA) Cogiendo t e invirtiéndolo

MÉTODO 3: $\bar{a} = a_t\cdot\bar{t} + a_n\bar{n} \Rightarrow \bar{t}\times\bar{a} = a_n\underbrace{(\bar{t}\times\bar{n})}_{\bar{b} = \pm\bar{k}} \Rightarrow |\bar{t}\times\bar{a}| = a_n|\bar{b}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = |\bar{t}\times\bar{a}| = \frac{\omega^2}{\sqrt{A^2\text{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}}\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ A\,\text{sen}\,\omega t & -B\cos\omega t & 0 \\ A\cos\omega t & B\,\text{sen}\,\omega t & 0 \end{vmatrix} = \frac{\omega^2}{\sqrt{A^2\text{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}}\cdot AB$$

P.C.IN.RA 2/3

MÉTODO 4: $a_n^2 = a^2 - a_t^2 \overset{\text{INFIERNO}}{=} \omega^4(A^2\cos^2\omega t + B^2\operatorname{sen}^2\omega t) - \left[\dfrac{\omega^2(A^2-B^2)\cos\omega t\operatorname{sen}\omega t}{\sqrt{A^2\operatorname{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}}\right]^2 =$

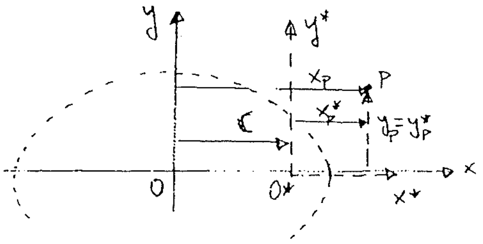
$$= \omega^4(A^2\cos^2\omega t + B^2\operatorname{sen}^2\omega t) - \frac{\omega^4\cos^2\omega t\operatorname{sen}^2\omega t\,(A^4+B^4-2A^2B^2)}{A^2\operatorname{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t} =$$

$$= \frac{\omega^4\left[A^4\cancel{\cos^2\omega t}\operatorname{sen}^2\omega t + A^2B^2\cos^4\omega t + A^2B^2\operatorname{sen}^4\omega t + B^4\operatorname{sen}^2\cancel{\omega t}\cos^2\omega t - [\cos^2\omega t\operatorname{sen}^2\omega t\,(\cancel{A^4}+\cancel{B^4}-2A^2B^2)\right]}{A^2\operatorname{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t} =$$

$$= \frac{\omega^4\left[A^2B^2\cos^4\omega t + A^2B^2\operatorname{sen}^4\omega t - 2A^2B^2\cos^2\omega t\operatorname{sen}^2\omega t\right]}{A^2\operatorname{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t} = \frac{\omega^4\left[AB\cos^2\omega t + AB\operatorname{sen}^2\omega t\right]^2}{A^2\operatorname{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t} =$$

$$= \frac{\omega^4(AB)^2}{A^2\operatorname{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t} \Longrightarrow a_n = \frac{\omega^2 AB}{\sqrt{A^2\operatorname{sen}^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}}$$

5)

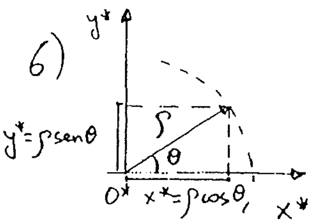


CAMBIO DE EJES:

$$\left.\begin{array}{l} x = C + x^* \\ y = y^* \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1}_{\text{ECUAC. ELIPSE EN EJES } xy} \Rightarrow \underbrace{\frac{(C+x^*)^2}{A^2} + \frac{y^{*2}}{B^2} = 1}_{\text{ECUAC. ELIPSE EN EJES } x^*y^*} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow$ PARA $x^* = -C$ ES $\dfrac{0}{A^2} + \dfrac{y^{*2}}{B^2} = 1 \Longrightarrow y^* = \pm B$

6)



$$\left.\begin{array}{l} x^* = \rho\cos\theta \\ y^* = \rho\operatorname{sen}\theta \\ C^2 = A^2 - B^2 \end{array}\right\}$$

$$\frac{(C+\rho\cos\theta)^2}{A^2} + \frac{(\rho\operatorname{sen}\theta)^2}{B^2} = 1 \Rightarrow B^2(\rho\cos\theta + C)^2 + A^2(\rho\operatorname{sen}\theta)^2 = A^2B^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B^2(\rho^2\cos^2\theta + C^2 + 2C\rho\cos\theta) + A^2\rho^2\operatorname{sen}^2\theta = A^2B^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (B^2\cos^2\theta + A^2\operatorname{sen}^2\theta)\rho^2 + 2B^2C\cos\theta\,\rho + \underbrace{B^2C^2 - A^2B^2}_{B^2(C^2-A^2) = -B^4} = 0$$

SOLUCIONANDO LA ECUACIÓN EN ρ:

$$\rho = \frac{-2CB^2\cos\theta \pm \sqrt{\cancel{4}B^4C^2\cos^2\theta - 4(B^2\cos^2\theta + A^2\operatorname{sen}^2\theta)(-B^4)}}{2(B^2\cos^2\theta + A^2\operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{-2CB^2\cos\theta \pm 2B^2\sqrt{C^2\cos^2\theta + [B^2\cos^2\theta + A^2\operatorname{sen}^2\theta]}}{2(B^2\cos^2\theta + A^2\operatorname{sen}^2\theta)} =$$

$C^2 = A^2 - B^2$

$$= \frac{-2CB^2\cos\theta \pm 2B^2\sqrt{A^2\cos^2\theta - \cancel{B^2\cos^2\theta} + \cancel{B^2\cos^2\theta} + A^2\operatorname{sen}^2\theta}}{2(B^2\cos^2\theta + A^2\operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{-\cancel{2}CB^2\cos\theta \pm \cancel{2}B^2A}{\cancel{2}[(A^2-C^2)\cos^2\theta + A^2\operatorname{sen}^2\theta]} = \frac{B^2[\pm A - C\cos\theta]}{[A^2 - C^2\cos^2\theta]}$$

$B^2 = A^2 - C^2$

$$= \frac{\frac{B^2}{A}\left[\pm 1 - \frac{C}{A}\cos\theta\right]}{A^2\left[1 - \frac{C^2}{A^2}\cos^2\theta\right]} = \frac{B^2}{A}\,\frac{\left[\pm 1 - \frac{C}{A}\cos\theta\right]}{\left[1 - \frac{C}{A}\cos\theta\right]\left[1 + \frac{C}{A}\cos\theta\right]} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho = \dfrac{\frac{B^2}{A}\left[-1 - \frac{C}{A}\cos\theta\right]}{\left[1 - \frac{C}{A}\cos\theta\right]\left[1 + \frac{C}{A}\cos\theta\right]} = \dfrac{-\frac{B^2}{A}}{1 - \frac{C}{A}\cos\theta} < 0 \quad \left(\frac{C}{A} < 1\right) \Rightarrow \underline{\underline{\text{NO}}} \\ \rho = \dfrac{\frac{B^2}{A}\left[1 - \frac{C}{A}\cos\theta\right]}{\left[1 - \frac{C}{A}\cos\theta\right]\left[1 + \frac{C}{A}\cos\theta\right]} = \dfrac{\frac{B^2}{A}}{1 + \frac{C}{A}\cos\theta} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{SI}}} \end{array}\right.$$

7) $\left.\begin{array}{l}\bar{r}^* = \rho\bar{u}_\rho \\ \bar{v}^* = \dfrac{d\bar{r}}{dt} \\ \rho = \rho(\theta) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \omega^*\end{array}\right\}$ $\bar{v}^* = \dfrac{d}{dt}(\rho\bar{u}_\rho) = \dfrac{d\rho}{dt}\bar{u}_\rho + \rho\dfrac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta = \dfrac{d\rho}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}\bar{u}_\rho + \rho\dfrac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta =$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{B^2}{A}\left[-\frac{1}{\left(1+\frac{C}{A}\cos\theta\right)^2}\left(-\frac{C}{A}\operatorname{sen}\theta\right)\right] \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega^*$$

$$= \frac{B^2}{A}\frac{\frac{C}{A}\operatorname{sen}\theta}{\left(1+\frac{C}{A}\cos\theta\right)^2}\omega^*\bar{u}_\rho + \frac{B^2}{A}\frac{1}{1+\frac{C}{A}\cos\theta}\bar{u}_\varphi = \frac{B^2}{A}\frac{\omega^*}{\left(1+\frac{C}{A}\cos\theta\right)}\left[\frac{\frac{C}{A}\operatorname{sen}\theta}{1+\frac{C}{A}\cos\theta}\bar{u}_\rho + \bar{u}_\theta\right]$$

8) $\bar{L}_{0^*} = \bar{r}\times m\bar{v} = \cdots = m\omega^*\left(\dfrac{B^2/A}{1+\frac{C}{A}\cos\theta}\right)^2\bar{k} = m\omega^*\rho^2\bar{k} = m\rho^2\dfrac{d\theta}{dt}\bar{k}$

9) $\bar{r} = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$

$$\left.\begin{array}{l}x^* = x - C \\ y^* = y\end{array}\right\}\left.\begin{array}{ll}\rho\cos\theta = A\cos\omega t - C & (1) \\ \rho\operatorname{sen}\theta = B\operatorname{sen}\omega t & (2)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho\cos\theta} = \frac{B\operatorname{sen}\omega t}{A\cos\omega t - C} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{B\operatorname{sen}\omega t}{A\cos\omega t - C}\right)$$

$$\omega^* = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{B\operatorname{sen}\omega t}{A\cos\omega t - C}\right)^2}\cdot\frac{\omega B\cos\omega t\,(A\cos\omega t - C) - B\operatorname{sen}\omega t\,(-\omega A\operatorname{sen}\omega t)}{(A\cos\omega t - C)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^*(t) = \frac{\omega AB\left(1-\frac{C}{A}\cos\omega t\right)}{[A\cos\omega t - C]^2 + [B\operatorname{sen}\omega t]^2}$$

1/1

CURVAS DE LISSAJOUS

No hay que estudiarlas

CURVAS GENERADAS POR LA COMPOSICIÓN DE DOS MOVIMIENTOS ARMÓNICOS SIMPLES DE DIRECCIONES PERPENDICULARES. CONSIDERANDO LOS MOVIMIENTOS EN LOS EJES X E Y:

$$x = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2)$$

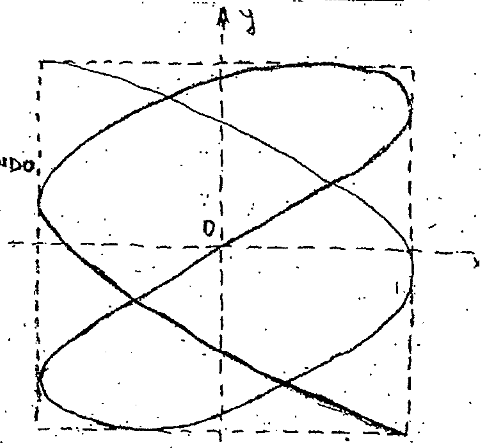


FIGURA OBTENIDA PARA: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{5}{3} \\ A_1 = A_2 \\ \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0 = \end{array} \right.$

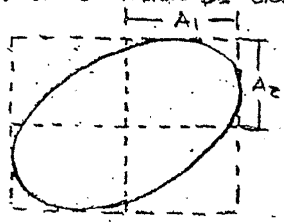
1) MOVIMIENTOS DE DISTINTA FRECUENCIA : $\omega_1 \neq \omega_2$

DAN LUGAR A FIGURAS COMPLICADAS. SI LA RELACIÓN DE PERIODOS ES UN NÚMERO RACIONAL $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}$; PARA $T_R = mT_1 = nT_2$ LA TRAYECTORIA SE CIERRA Y EL MOVIMIENTO ES PERIÓDICO DE PERIODO T_R

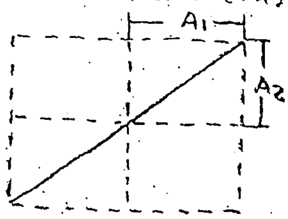
2). MOVIMIENTOS DE IGUAL FRECUENCIA : $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

2.a) $A_1 \neq A_2$; $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0$ $\Longrightarrow$ SE OBTIENE DE (*) LA ECUACIÓN DE UNA ELIPSE:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos\varphi_0 = \operatorname{sen}^2\varphi_0 \quad (**)$$

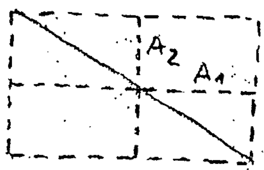


2.b) $A_1 \neq A_2$; $\varphi_2 - \varphi_1 = 0 = \varphi_0$ (MOVIMIENTOS EN FASE) $\Rightarrow$ LA ECUACIÓN (**) SE REDUCE LA DE UNA RECTA : $\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0$



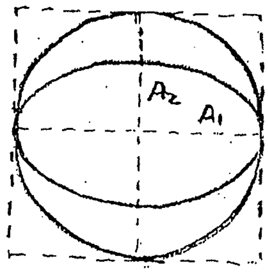
2.c) $A_1 \neq A_2$; $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi = \varphi_0$ (MOVIMIENTOS EN OPOSICIÓN DE FASE) $\Longrightarrow$ LA ECUACIÓN (**) SE SIMPLIFICA OTRA VEZ EN LA DE UNA RECTA:

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0$$



2.d) $A_1 \neq A_2$; $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} = \varphi_0$ (MOVIMIENTOS EN CUADRATURA) $\Longrightarrow$ LA ECUACIÓN (**) QUEDA LA DE UNA ELIPSE DE EJES PARALELOS A LOS COORDENA

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$



2.e) $A_1 = A_2$; $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} = \varphi_0$ (MOVIMIENTOS EN CUADRATURA DE IGUAL AMPLITUD) $\Longrightarrow$ LA ECUACIÓN (**) SE SIMPLIFICA A LA DE UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL DE LOS EJES COORDENADOS

CINEMÁTICA DE SISTEMAS

1 EL SÓLIDO RÍGIDO

Un sistema de puntos constituye un sólido rígido si las distancias entre ellos permanecen invariables a lo largo del tiempo.

Se cumple el "Tma. de las proyecciones" $\boxed{\vec{u}\,v_A = \vec{u}\,v_B}$ siendo $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$

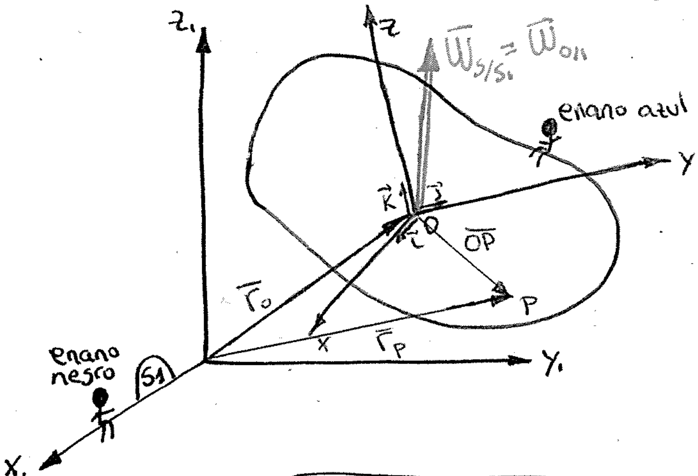
2 MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

En el todos los puntos del sólido rígido tienen igual velocidad y aceleración, y todos describen trayectorias iguales. $\boxed{\vec{v_A} = \vec{v_B}}$

3 MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

Se produce cuando existen, en el sólido, dos puntos A y B con velocidad nula. La recta que une A y B está formada por puntos con velocidad nula, y será el eje instantaneo de rotación EIR.

4 CAMPO DE VELOCIDADES DEL SÓLIDO RÍGIDO



$\omega_{S/S_1} = \omega_{0/1} =$ Es la velocidad del cambio de orientación de los ejes de un sistema S respecto a los ejes de un sistema S_1. Es la velocidad angular o de giro y se representa por un vector perpendicular al plano de giro en cada instante orientado según la regla de la mano derecha.

C.V.S.R $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OP}}$

- Si O, P están en recta $\parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_0 + \cancel{\vec{\omega} \times \vec{OP}}$ (0 por $\vec{OP} \parallel \vec{\omega}$)
  $v_P = v_0$
- $\vec{v}_P \cdot \vec{\omega}$ es invariante vectorial $\Rightarrow |\vec{v}_{min}| = \vec{v}_P \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

4.1 EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y MÍNIMO DESLIZAMIENTO

Es el lugar geométrico de los puntos del plano con velocidad mínima.

$|\vec{v}_{min}| = \bar{v}_p \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}$. La ecuación del EIRMD queda

$$\boxed{\vec{r} = r_p + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}^p}{|\omega|^2} + t\vec{\omega}}$$

4.2 DISTRIBUCIÓN DE LA VELOCIDAD ALREDEDOR DEL EIRMD

Descomponemos la velocidad del sólido en:

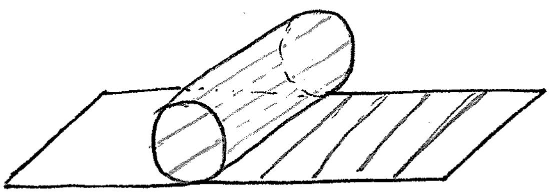
- Componente // EIRMD que es la velocidad de min. deslizamiento

$$v_D = \left(\vec{v}_p \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\omega|}\right) \frac{\vec{\omega}}{|\omega|}$$

- Componente ⊥ al eje, $\vec{\omega}$.

Si $v_D = 0$ el movimiento se reduce a un giro y el EIRMD pasa a llamarse EIR.

4.3 AXOIDES



- Axoide Móvil Sup. formada por las rectas del sólido que han sido EIRMD
- Axoide Fijo Sup formada por las rectas del espacio que han sido EIRMD

4.4 DERIVACIÓN VECTORIAL EN EJES MÓVILES

Sea el vector $\vec{u}$ expresado en coordenadas de un sistema $\{S = \vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\}$ que se mueve con respecto a otro sistema S_1, derivando $\vec{u}$ desde S_1 obtenemos:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{S_1} = \underbrace{\frac{du_x}{dt}\vec{i} + \frac{du_y}{dt}\vec{j} + \frac{du_z}{dt}\vec{k}}_{\left(\frac{du}{dt}\right)_S} + \bar{u}_x \underbrace{\frac{d\vec{i}}{dt}}_{\vec{\omega}_{01} \times \vec{i}} + \bar{u}_y \underbrace{\frac{d\vec{j}}{dt}}_{\vec{\omega}_{01} \times \vec{j}} + u_z \underbrace{\frac{d\vec{k}}{dt}}_{\vec{\omega}_{01} \times \vec{K}} = \left(\frac{du}{dt}\right)_0 + \omega_{01} \times \vec{u}$$

Obtención de CVSR

Se suponen $\begin{cases} \bar{r}_P & \text{expresado en } S_1 \\ \bar{r}_0 & \text{expresado en } S_1 \\ \overline{OP} & \text{expresado en } S \end{cases}$ $\Longrightarrow$ y derivando en S_1 (mirar dibujo)

$$v_P\Big|_{S_1} = \left(\frac{dr_P}{dt}\right)_{S_1} = \left(\frac{dr_0}{dt}\right)_{S_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{S_1} = v_0\Big|_{S_1} + \cancelto{0}{\left(\frac{d\overline{OP}}{dt}\right)_{S}} + \overline{\omega}_{S/S_1} \times \overline{OP}$$

$$\boxed{\bar{v}_P = \bar{v}_0 + \bar{\omega}_{01} \times \overline{OP}} \quad \text{C.V.S.R}$$

4.5 CAMPO DE ACELERACIONES DEL SÓLIDO RÍGIDO (CASR)

Derivando el CVSR obtenemos:

$$\vec{a}_P = \left(\frac{dv_P}{dt}\right)_{S_1} = \left(\frac{dv_0}{dt}\right)_{S_1} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{S/S_1}}{dt}\right)_{S_1} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega}_{S/S_1} \times \left(\frac{d\overline{OP}}{dt}\right)_{S_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_P\Big|_{S_1} = \vec{a}_0\Big|_{S_1} + \dot{\vec{\omega}}_{01} \times \overrightarrow{OP} + \omega_{S/S_1} \times \left(\vec{\omega}_{S/S_1} \times \overrightarrow{OP}\right)} \quad \text{CASR.}$$

Interpretación física de la fórmula

$\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$ Es la velocidad lineal que tiene el punto P cuando gira entorno a un eje que pasa por O y tiene la dirección de $\vec{\omega}$

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP})$ Es la aceleración normal que tiene un punto P cuando gira (en mov. circular) en torno a un eje que pasa por O y tiene dirección $\vec{\omega}$.

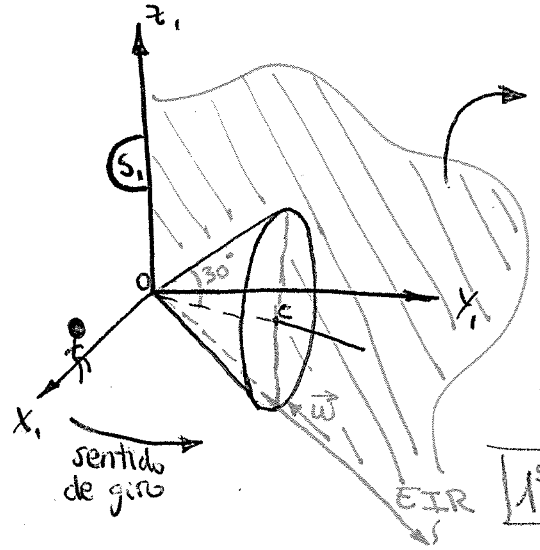
En ambas fórmulas el radio de giro en torno al eje no tiene porqué ser $\overrightarrow{OP}$, sino la distancia en $\perp$ desde P hasta el eje de giro

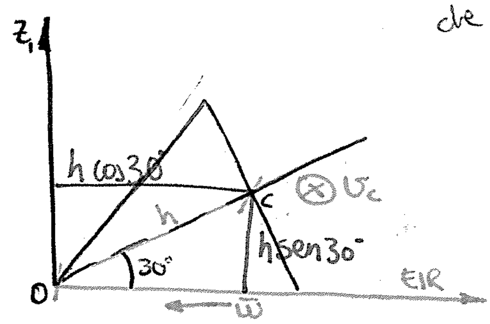
$\dot{\vec{\omega}} \times \overline{OP}$ Es la aceleración tangencial que tiene el punto P cuando gira en torno a un eje que pase por O y tiene la dirección de $\dot{\vec{\omega}}$.

En el caso general, $\bar{\omega}$ y $\dot{\bar{\omega}}$ no tienen porqué coincidir en dirección

5 EJERCICIOS

① Cono $\begin{cases} h \text{ (altura)} \\ \varphi \text{ (semiángulo)} \end{cases}$ rueda sin deslizar con $|\vec{\omega}| = cte$. Calcular $|\vec{a}_c|$ del centro de su base.





Se puede demostrar que O es punto fijo del cono en S_1 pues hay rodadura sin deslizamiento.

$\boxed{1^{er} \text{ método}}$: $\vec{a}_c = \vec{a}_o + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OC}}_{\neq 0 \text{ pues } \vec{\omega} \text{ no es cte en } S_1} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OC})$

Por tanto, hay que calcular $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S_1}$ por derivación en ejes móviles.

Se hace complicado

$\boxed{2^{o} \text{ Método}}$ Analizamos la trayectoria de C. Recorre una circunferencia de radio $h\cos 30°$ a una altura de $h \operatorname{sen} 30°$ en torno a z_1

$$\vec{a}_c = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \begin{cases} \vec{a}_t = \dfrac{d|\vec{v}_c|}{dt} \\ \vec{a}_n = \dfrac{|v|^2}{\rho} \end{cases}$$

Buscamos $|\vec{v}_c| \underset{\substack{\uparrow \\ CVSR}}{=} |\vec{v}_o + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{OC}}| = 0 + \omega \cdot h \operatorname{sen} 30° = cte \Longrightarrow \dfrac{d|v_c|}{dt} = 0$

Es la vel. lineal que tiene C cuando gira en torno a un eje que pasa por O y tiene dirección $\vec{\omega}$

$$\vec{a}_n = \frac{(\omega h \operatorname{sen} 30°)^2}{h \cos 30°} = \frac{\omega^2 h \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\omega^2 h}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\omega^2 h \sqrt{3}}{6}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\omega^2 h \sqrt{3}}{6}}$$

② Sólido rígido $\longrightarrow \vec{a}_p = \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{\vec{a}_n}$ Diga si es V ó F:

a) Punto O permanece en reposo o se mueve rectilínea y uniformemente
b) Rotación instantánea es cte en el tiempo (direc, sentido y mód.)
c) Todos los puntos del sólido describen trayectorias situadas en un mismo plano o planos paralelos
d) La velocidad de cualquier punto es paralela a un plano fijo
e) La aceleración en cualquier punto es paralela a un plano fijo

$\vec{a}_p = \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{a_n}$; $\vec{a}_p = a_0 + w \times (w \times \vec{OP}) + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP}}_{a_t = 0}$

$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \dot{\vec{\omega}} = 0 \Longrightarrow \vec{\omega} = cte \longrightarrow \boxed{\text{b) Verdadero}} \\ \text{ó} \\ \vec{OP} = 0 \longrightarrow \text{Imposible (pues no teníamos un sólido rígido)} \\ \text{ó} \\ \dot{\vec{\omega}} \parallel \vec{OP} \longrightarrow \text{Imposible} \end{cases}$

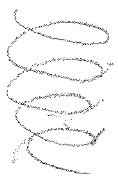
$\vec{a}_0 = 0 \longrightarrow v_0 = cte \begin{cases} 0 \\ \neq 0 \end{cases}$

Por tanto $\longrightarrow \boxed{\text{a) Verdadero}}$

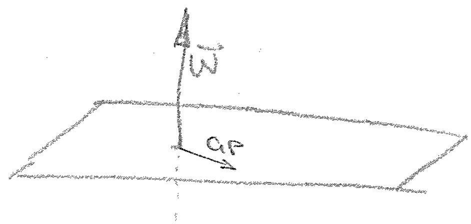
c) y d) Mov. helicoidal $\longrightarrow v_0 = cte \neq 0$, $0 \in$ eje y $\vec{\omega} = cte$

$\forall P \notin$ eje las trayectorias son hélices circulares (curva 3D)

$\boxed{\text{Falsas}}$



e) Si $\begin{cases} \vec{a}_p = \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})} \Longrightarrow \vec{a}_p \parallel [\Pi_{\perp \vec{\omega}}] \\ \vec{\omega} = cte \longrightarrow a_p \perp \vec{\omega} \end{cases}$



$\boxed{\text{Verdadero}}$

④ Punto P $\longrightarrow \vec{v}_p \neq 0 \parallel \vec{\omega}$. ¿Dónde se encuentra P? ¿Puede tener otro punto $v = 0$?

$\vec{v}_p \parallel \vec{\omega} \Longrightarrow \vec{v}_p = \vec{v}_{min} \neq \vec{0} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \nexists Q / \vec{v}_Q = \vec{0} \\ P \in \text{EIRMD} \end{matrix}}$

(5) $A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$ $[cm]$ $O(0,0,0) \in EIRMD$

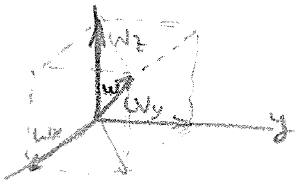
$\vec{v}_A(0,3,-2)$ $\vec{v}_B(-3,0,1)$ $\vec{v}_C(2,-1,0)$ $[m/s]$ Determinar el EIRMD

Buscamos $\vec{\omega} \parallel EIRMD$

Planteamos CVSR

$$v_B = v_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \Rightarrow (-3,0,1) = (0,3,-2) + \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -10^{-2} & 10^{-2} & 0 \end{vmatrix}}; \underbrace{(-10^{-2}\omega_z, -10^{-2}\omega_z, 10^{-2}\omega_x + 10^{-2}\omega_y)}$$

$$\begin{cases} -3 = -10^{-2}\omega_z \longrightarrow \omega_z = \dfrac{3}{10^{-2}} = 300\,\vec{k} \\ 0 = 3 - 10^{-2}\omega_z \\ 1 = -2 + 10^{-2}\omega_x + 10^{-2}\omega_y \end{cases}$$



$\omega = \omega_x + \omega_y + \omega_z$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AC}$$

$$\Rightarrow (2,-1,0) = (0,3,-2) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & 300 \\ -10^{-2} & 0 & 10^{-2} \end{vmatrix} = (0,3,-2) + (10^{-2}\omega_y, -3 - \omega_x 10^{-2}, 10^{-2}\omega_y)$$

$$\begin{cases} 2 = 10^{-2}\omega_y \longrightarrow \omega_y = 200 \\ -1 = \cancel{3} + (\cancel{-3} - \omega_x 10^{-2}) \longrightarrow \omega_x = \dfrac{-1}{-10^{-2}} = 100 \\ 0 = -2 + 10^{-2}\omega_y \end{cases}$$

$\vec{\omega} = (100, 200, 300)$ rad/s

$\parallel EIRMD$

$O \in EIRMD$

$$\boxed{EIRMD \equiv \begin{cases} x = 100\lambda \\ y = 200\lambda \\ z = 300\lambda \end{cases}}$$

(6) $O(0,0,0)$ $A(1,0,0)$ $B(0,0,1)$ $[cm]$ Determinar $\vec{\omega}$ y EIRMD

$v_O(0,0,1)$ $v_A(0,1,1)$ $v_B(0,0,1)$ $[m/s]$

$$v_B \overset{CVSR}{=} v_O + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{OB}}$$

$\bar{0}$ pues $v_O = v_B \Rightarrow \vec{OB} = (0,0,1) \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega}(0,0,\vec{\omega}_z)$

$\Rightarrow O$ y $B \in EIRMD$

$$\boxed{EIRMD \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}}$$

; Por CVSR $\rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_O + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{OA}} \Rightarrow (0,1,1) = (0,0,1) + (0,\omega_z,0)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ 10^{-2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 10^{-2}\omega_z, 0)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 10^{-2}\omega_z \longrightarrow \omega_z = 100 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\vec{\omega} = (0,0,100)}$ rad/s

(7) Punto P $\longrightarrow$ $\vec{v}_P \neq 0 \perp \vec{w}$. ¿Puede existir Q tal que $\vec{v}_Q = 0$?

$|\vec{v}_Q| = |\vec{v}_{min}| = \vec{v}_P \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = 0$ por perpendicularidad $\Longrightarrow$ $\boxed{\exists\ \infty \text{ puntos con } \vec{v} = 0 \text{ y forman el Eje.}}$

CINEMÁTICA DE SISTEMAS

1.-DEFINICIÓN DE SÓLIDO RÍGIDO

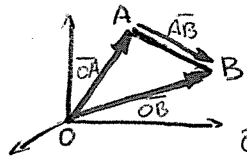
Un sistema de puntos constituye un sólido rígido si las distancias entre ellos permanecen invariables a lo largo del tiempo.
Dicho de otro modo, un sólido rígido o sistema indeformable es aquel en el que dados dos puntos cualesquiera A y B, la distancia entre A y B permanece constante:

$$\text{nor } \vec{AB} = cte \qquad AB^2 = cte$$

Dado un vector de módulo constante pero de dirección variable con un determinado parámetro, la derivada de ese vector respecto al parámetro será ortogonal al vector. Así, para el vector $\vec{AB}$, si derivamos la expresión $\vec{AB}^2$ = cte con respecto a t, tenemos:

$$\frac{d\vec{AB}^2}{d\vec{AB}} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{AB}^2}{dt} = 0 \Rightarrow 2\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{AB} \perp \frac{d\vec{AB}}{dt}$$



$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

A partir de este último resultado se demuestra que las proyecciones de las velocidades de los puntos sobre la recta que los une son iguales ("Tma. de las proyecciones") Si es O el origen de coordenadas:

$$\vec{AB} \cdot \left(\frac{d\vec{OB}}{dt} - \frac{d\vec{OA}}{dt}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v}^A = \vec{u} \cdot \vec{v}^B \quad ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

2.-MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

Un sólido está sometido a un movimiento de traslación pura cuando dados dos puntos A y B cualesquiera del mismo, el vector $\vec{AB}$ se conserva constante. Si es O el origen de coordenadas:

$$\vec{AB} = c\vec{te} \longrightarrow \vec{OB} - \vec{OA} = c\vec{te} \longrightarrow \frac{d\vec{OB}}{dt} - \frac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{0} \longrightarrow \vec{v}^B - \vec{v}^A = \vec{0} \longrightarrow \vec{v}^A = \vec{v}^B$$

Por tanto, todos los puntos tienen igual velocidad y aceleración, y todos describen trayectorias iguales. Las trayectorias pueden ser curvilíneas o rectilíneas.

3.-MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

Un sólido está sometido a un movimiento de rotación pura cuando existan dos puntos, A y B, del sólido que en todo instante tengan velocidad nula.
Se demuestra que cualquier punto C situado en la recta que une A y B tiene también velocidad nula. Siendo O el origen de coordenadas:

$$\vec{v}_A = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{0} \qquad \vec{AC} = \lambda \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{OC} - \vec{OA} = \lambda \cdot (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$\vec{v}_B = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{OB}}{dt} = \vec{0} \qquad \frac{d\vec{AC}}{dt} = \lambda \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{OC}}{dt} - \frac{d\vec{OA}}{dt} = \lambda \cdot \left(\frac{d\vec{OB}}{dt} - \frac{d\vec{OA}}{dt}\right) \Rightarrow \frac{d\vec{OC}}{dt} = \vec{0}$$

4.-CAMPO DE VELOCIDADES DE UN SÓLIDO RÍGIDO

Los puntos de un sólido rígido en movimiento tendrán, en general, trayectorias, velocidades y aceleraciones diferentes, pero no independientes, debido al hecho de pertenecer a un sólido y cumplir la condición de distancias relativas invariables entre ellos.

Obtención del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ (ver Schz- Prz. pags: 106-112).
Concepto de $\vec{\omega}$ (invariante vectorial).: $\omega_{S/S_1} = \omega_{o_1}$: Es la velocidad del cambio de orientación de los ejes de un sistema S respecto de los ejes de un sistema S_1. Es una velocidad angular o de giro y se representa por un vector $\perp$ al plano de giro en cada instante orientado según la regla de la mano derecha

En nota!

Se considera un sistema de referencia fijo S_1, $O_1x_1y_1z_1$, y un sólido S que se mueve respecto de S_1. Se liga a S un sistema de referencia $Oxyz$, siendo O un punto del sólido S. De esta manera, el vector de posición de otro punto P de S vendrá dado por:
$\vec{r}^P = \vec{r}^O + \vec{OP}$, con $\vec{OP}$ expresado en S. Derivando esta expresión respecto al tiempo (ver aptdo. 2.4) obtenemos el campo de velocidades de un sólido rígido:

$$\vec{V}^P = \vec{V}^O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

Se deduce de la fórmula que:

- Si los puntos O y P están situados sobre una recta paralela a $\vec{\omega}$, ambos tienen la misma velocidad. $\vec{OP} \parallel \omega \rightarrow v_P = v_O + \cancel{\omega \times \vec{OP}}^{\,0} \Rightarrow v_P = v_O$
- El producto escalar de la velocidad de cada punto por $\vec{\omega}$ es constante (invariante escalar), es decir:

$$\vec{V}^P \cdot \vec{\omega} = \vec{V}^O \cdot \vec{\omega}$$

De esto se deduce que la proyección de la velocidad de cada punto en la dirección de $\vec{\omega}$ es constante e igual a la velocidad mínima que pueda tener un punto del sólido.

4.1-EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y MÍNIMO DESLIZAMIENTO

Es el lugar geométrico de los puntos del sólido cuya velocidad es mínima, es decir, paralela a $\vec{\omega}$. Es una recta de dirección la de $\vec{\omega}$. La velocidad en estos puntos está contenida en el eje y se denomina velocidad de mínimo deslizamiento y tiene por módulo $V_D = \vec{V}^P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$. Su valor vectorial es: $\vec{V}_D = \left(\vec{V}^P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}\right) \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$ $\equiv$ M mín

La ecuación del E.I.R.M.D. se obtiene de forma análoga a como obteníamos la del eje central. Conocida la velocidad de un punto P del sólido, $\vec{V}_P$, y su velocidad angular, la ecuación queda:

$$\vec{r} = \vec{r}_P + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}^P}{\omega^2} + \lambda\vec{\omega} \quad \equiv \text{E.C.}$$

- si encontramos un punto con velocidad nula, la velocidad de mínimo deslizamiento es nula y ese punto pertenece al EIRMD, que en este caso se llamará solamente EIR.
- si encontramos dos puntos con velocidad nula, el EIR pasará por ellos.

4.4-DERIVACIÓN VECTORIAL EN EJES MÓVILES

Dado un sistema de referencia fijo S_1, $O_1X_1Y_1Z_1$, y otro sistema de referencia S, $OXYZ$ que se mueve con respecto a S_1 con una velocidad angular $\vec{\omega}_{01}$, si tenemos un vector $\vec{u}$ expresado en el sistema S, $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$, la derivada de $\vec{u}$ con respecto al tiempo para un observador en S_1 será:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_1 = \frac{du_x}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{du_y}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{du_z}{dt}\cdot\vec{k} + u_x\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + u_y\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + u_z\cdot\frac{d\vec{k}}{dt} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0 + u_x\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + u_y\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + u_z\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}$$

El primer término es la derivada del vector $\vec{u}$ para un observador ligado a S. El segundo término se podrá expresar como el producto vectorial de la velocidad angular $\vec{\omega}_{01}$ por $\vec{u}$, quedando por tanto:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0 + \vec{\omega}_{01}\times\vec{u}$$

4.5-CAMPO DE ACELERACIONES.

Derivando el campo de velocidades de un sólido rígido según la fórmula de derivación del apartado anterior, obtenemos la expresión general del campo de aceleraciones de un sólido rígido:

$$\boxed{\vec{a}^P = \vec{a}^O + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{OP} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{OP}}$$

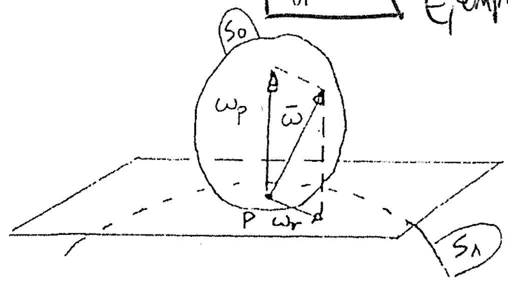
El vector $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ recibe el nombre de aceleración angular. El vector $\vec{\omega}$ suele estar expresado en una referencia móvil, por lo que es importante derivarlo correctamente, empleando la fórmula de derivación si fuese necesario.

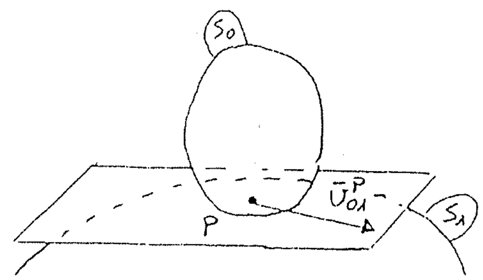
4.6-VELOCIDADES ANGULARES DE PIVOTAMIENTO Y RODADURA

Si estudiamos el movimiento de dos sólidos, S_0 y S_1, en contacto, la velocidad del punto P de contacto de S_0 respecto de S_1 se llama velocidad de deslizamiento de S_0 respecto de S_1 y está contenida en el plano tangente común a ambos sólidos por P. El sólido S_0 en su movimiento respecto a S_1 tendrá una velocidad angular $\vec{\omega}$ que podremos descomponer en:

- una componente contenida en el plano tangente común a S_1 y S_0 por P, llamada velocidad angular de rodadura (responsable del avance de S_0 sobre S_1), $\vec{\omega}_r$
- una componente perpendicular a ese plano tangente, es decir, en la dirección normal a dicho plano, llamada velocidad angular de pivotamiento, $\vec{\omega}_p$

Si S_0 rueda sin deslizar sobre S_1, la velocidad relativa del punto de contacto entre ambos sólidos es nula: $\boxed{\vec{V}_{01}^{\,P} = \vec{0}}$ Ejemplo del tío con el dedo en el suelo y el coche





4.2-DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES ALREDEDOR DEL EIRMD

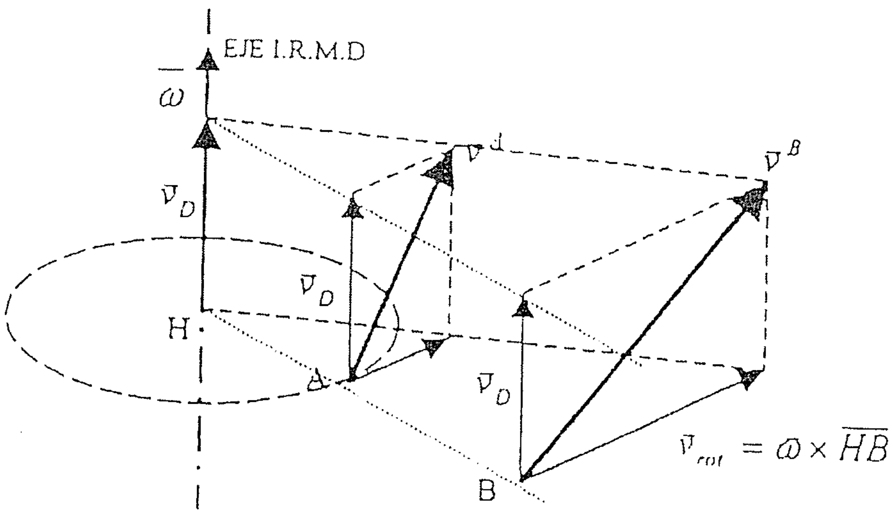
En cada instante, la velocidad de un punto del sólido se puede descomponer en:

- una componente paralela al EIRMD, igual para todos los puntos del sólido, que es la velocidad de mínimo deslizamiento, $\vec{V}_D = \vec{V}^P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$. Corresponde a una traslación del sólido en la dirección del EIRMD.

- una componente perpendicular al eje y proporcional a la distancia al mismo, que corresponde a un giro alrededor del eje, con radio igual a esa distancia y velocidad angular de giro $\vec{\omega}$.

Por tanto, el movimiento más general de un sólido, siempre lo podremos descomponer en uno de traslación en la dirección del EIRMD, a velocidad mínima de deslizamiento, y otro de rotación alrededor del EIRMD, con velocidad de giro $\vec{\omega}$.

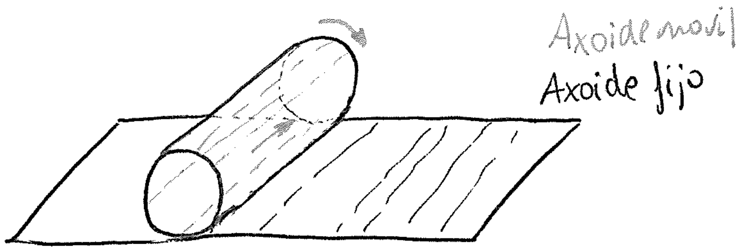
Si la velocidad de mínimo deslizamiento es nula, el movimiento se reduce a un giro alrededor del EIRMD, que en este caso se llama EIR (eje instantáneo de rotación).



4.3-AXOIDES

Son los lugares geométricos de las rectas que han sido EIRMD en el movimiento del sólido. Dependiendo de si estudiamos las rectas del espacio (referencia fija) o las del sólido (referencia móvil), distinguimos:

Axoide fija: superficie formada por las rectas del espacio que han sido EIRMD.
Axoide móvil: superficie formada por las rectas del sólido que han sido EIRMD.



EN SOLUCIONES

EJERCICIO CIN.SIST.1 (Feb-95)

En un instante, y para un sólido rígido S, se conoce la rotación Ω aplicada, su derivada $d\Omega/dt$ y la aceleración a_O de un punto O del mismo. Escriba la expresión de la aceleración de otro punto P de S.

EJERCICIO CIN.SIST.2 (Jun-96)

En un cierto instante un sólido rígido posee una rotación ω, cuya derivada respecto al tiempo es nula, y la aceleración y velocidad de un punto A del mismo son, respectivamente, a_A y v_A. Escriba las expresiones de la velocidad y aceleración de otro punto B del sólido en ese mismo instante.

EJERCICIO CIN.SIST.3 (Feb-99)

Relacione vectorialmente las velocidades de dos puntos de un sólido rígido que se mueve de la forma más general posible

EJERCICIO CIN.SIST.4 (Sep-99)

Cuando dos sólidos se mueven relativamente manteniéndose en contacto en un punto de su plano tangente común en cada instante, indique la denominación y orientación de las componentes características del torsor cinemático del movimiento relativo de uno de los sólidos respecto al otro.

EJERCICIO CIN.SIST.5 (Jun-01)

Expresar la aceleración de un punto de un sólido indeformable en función de las magnitudes del grupo cinemático en su centro de masas y su posible variación con el tiempo.

EJERCICIO CIN.SIST.6 (Feb-99) (Sep-01)

Formular y demostrar el teorema de las velocidades proyectadas en el movimiento de un sólido indeformable

EJERCICIO CIN.SIST.7 (Jun 99) (Feb 2003)

Formular el teorema de las velocidades proyectadas en el movimiento de un sólido indeformable.

EJERCICIO CIN.SIST.8 (Sep-01)

Expresar la aceleración de un punto P de un sólido indeformable en función de las magnitudes del grupo cinemático en un punto del mismo, O, que se mantiene fijo.

EJERCICIO CIN.SIST.9 (Jun 2002)

Los puntos de un sólido indeformable A(1,0, 0), B(0, 1, 0) y C(0, 0, 1), dados en un sistema de referencia inercial ortonormal, tienen velocidades respectivas en el mismo (en unidades coherentes): $v_A = (0, 1, 1)$, $v_B = (-1, 0, 1)$, $v_C = (0, 0, 1)$. Determinar vectorialmente la rotación del sólido. [Ind: Expresar las velocidades de A y B en función de la velocidad de C y el vector rotación para determinar las componentes cartesianas de éste].

EN CLASE

EJERCICIO CIN.SIST.1 (Feb-98)

Un cono recto de base circular, altura h y semiángulo $\alpha = 30°$, rueda sin deslizar sobre un plano fijo con velocidad angular ω de módulo constante. Calcule el valor modular de la aceleración del centro de su base.

EJERCICIO CIN.SIST.2 (Jun-98)

En un sólido rígido la aceleración de cualquier punto P, durante un tiempo finito, se expresa mediante $\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OP})$. Indique el carácter verdadero o falso de las siguientes proposiciones:

a) El punto O permanece en reposo o se mueve rectilínea y uniformemente.
b) La rotación instantánea es constante en el tiempo (en dirección, sentido y módulo).
c) Todos los puntos del sólido describen trayectorias situadas en un mismo plano o en planos paralelos.
d) La velocidad de cualquier punto es paralela a un plano fijo.
e) La aceleración de cualquier punto es paralela a un plano fijo.

EJERCICIO CIN.SIST.3 (Feb-00)

Demuestre que si un punto O de un sistema indeformable tiene una velocidad $\boldsymbol{v}_O$, y la rotación del sistema vale $\boldsymbol{\omega}$, el punto G determinado por el vector de posición respecto a O: $\vec{OG} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{v}_o}{|\vec{\omega}|^2} + \lambda \cdot \vec{\omega}$

donde λ es un escalar cualquiera, pertenece al eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo del sistema.

EJERCICIO CIN.SIST.4 (Jun-00) (JUN 2004)

En un cierto instante, un determinado punto de un sistema indeformable tiene una velocidad $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ y paralela a la rotación $\boldsymbol{\omega}$ del mismo. Justifique dónde se encuentra dicho punto y si algún otro punto del sistema puede o no tener velocidad nula.

EJERCICIO CIN.SIST.5 (Feb-01)

En un instante dado, los puntos A, B y C de un sistema indeformable cuyas coordenadas dadas en centímetros en una referencia ortonormal son A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1) tienen velocidades respectivas $v_A(0,3,-2)$, $v_B(-3,0,1)$ y $v_C(2,-1,0)$ dadas en m/s con relación a la misma referencia. Determinar el eje instantáneo de rotación y mínima traslación sabiendo que el origen de coordenadas pertenece al mismo.

EJERCICIO CIN.SIST.6 (Jun 01)

En un instante dado, los puntos O, A y B de un sistema indeformable cuyas coordenadas dadas en centímetros en una referencia ortonormal son O(0, 0, 0), A(1, 0, 0) y B(0, 0, 1) tienen velocidades respectivas $v_O(0,0,1)$, $v_A(0,1,1)$ y $v_B(0,0,1)$ dadas en m/s con relación a la misma referencia. Determinar la rotación del sistema y el eje instantáneo de rotación y mínimo traslación.

EJERCICIO CIN.SIST.7 (Feb 2004)(SEP 2004)

En un cierto instante, un determinado punto de un sistema indeformable tiene una velocidad no nula perpendicular a la rotación $\boldsymbol{\omega}$ del mismo. Indicar si podrá haber o no puntos del sistema con velocidad nula.

EJERCICIO CIN.SIST.8 (JUN 2005)

En un instante dado, los puntos $A(1,0,0)$ y $B(0,0,1)$ de un sistema indeformable se mueven en el sentido positivo del eje Oz con velocidades iguales en módulo de valor v. Determinar si el punto $A(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, que pertenece al mismo sistema indeformable, puede moverse en ese mismo instante con la velocidad $\boldsymbol{v}_C = \frac{v}{2}(-\boldsymbol{i} - \sqrt{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

EJERCICIO CIN.SIST.9 (SEP 2005)

Un sólido rígido está sometido a una rotación pura $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$. Si el eje de rotación pasa por el origen de coordenadas, obtener la velocidad del punto P del sólido que tiene coordenadas (1,2,0)

EJERCICIO CIN.SIST.10 (FEB 2006)

En el instante t se sabe que dos puntos de un sólido indeformable de coordenadas $P_1(x,y,z)$ y $P_2(-x,-y,z)$, con x, y, z cualesquiera, tienen velocidades respectivas: $\boldsymbol{v}_1 = -2y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v}_1 = +2y\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$. Determinar la velocidad instantánea de rotación del sólido, $\boldsymbol{\omega}$.

EJERCICIO CIN.SIST.11 (FEB 2008)

Un sólido cilíndrico homogéneo de radio $R = 1$ rueda sobre el plano horizontal Oxy de tal manera que su centro de masa, $C(0,0,R)$, tiene la velocidad $\boldsymbol{v}_C = 3\boldsymbol{i}$ y una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{j}$. Determinar la velocidad, $\boldsymbol{v}_A$, del punto $A(0,0,0)$ de la generatriz de contacto del cilíndrico con el plano Oxy y decir si el cilindro desliza.

EJERCICIO CIN.SIST.12 (JUN 2008)

De un sistema indeformable se sabe que tiene una rotación instantánea $\boldsymbol{\omega} = 3\boldsymbol{i} + \mu\boldsymbol{j}$ y que el punto $B(0,0,0)$ perteneciente al mismo tiene una velocidad $\boldsymbol{v}_B = -4\boldsymbol{k}$. Determinar μ para que la velocidad del punto $A(4,4,0)$ sea nula.

$\mu = 2$

EJERCICIO CIN.SIST.13 (JUN 2009)

Las velocidades de los puntos $O(0,0,0)$, $P_1(1,0,0)$ y $P_2(0,1,0)$, correspondientes a un sólido indeformable, son, respectivamente, $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}_{P1} = 2\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{v}_{P2} = -2\boldsymbol{i}$. Determinar la rotación instantánea, $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$, de dicho sólido.

REPASO

EJERCICIO R-CIN.SIST.1 (Feb-97)

Indique las proposiciones correctas en un movimiento de traslación de un sólido rígido:
a) Las trayectorias de sus puntos pueden ser curvas en el espacio.
b) Las velocidades de todos los puntos del sólido son iguales en cada instante.
c) Las aceleraciones de todos los puntos del sólido son iguales en cada instante.

EJERCICIO R-CIN.SIST.2 (Feb 2002)

Los puntos A(1,0, 0), B(0, 1, 0) y C(0, 0, 1), dados en un sistema de referencia inercial ortonormal, tienen velocidades respectivas en el mismo (en unidades coherentes): $\boldsymbol{v}_A = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_B = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_C = (1, 0, 0)$. Discutir si dichos puntos pueden o no formar parte de un sólido indeformable.

EJERCICIO R-CIN.SIST.3 (Jun 2003)

Un punto de un sistema indeformable que está sometido a un movimiento general cuya rotación es ω tiene una velocidad $\boldsymbol{v}_A$. Determinar a partir de estos datos la ecuación vectorial del eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento del sistema.

EJERCICIO R-CIN.SIST.4 (JUN 2006)

De un sistema indeformable se sabe que tiene una rotación instantánea $\omega = k$ y que el punto $B(0, 4, 0)$ perteneciente al mismo está en reposo. Determinar la velocidad del punto $A(0, 8, 0)$.

EJERCICIO R-CIN.SIST.5 (FEB 2007)

De un sistema indeformable se sabe que tiene una rotación instantánea $\omega = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y que el punto $B(0, 4, 0)$ perteneciente al mismo tiene una velocidad $\boldsymbol{i}$. Determinar la velocidad del punto $A(0, 8, 0)$.

EJERCICIO R-CIN.SIST.6 (SEP 2007) (FEB 2009)

De un sistema indeformable se sabe que tiene una rotación instantánea $\omega = 3i - j$ y que el punto $B(0, 0, 0)$ perteneciente al mismo tiene una velocidad $\boldsymbol{v}_B = \lambda k$. Determinar λ para que la velocidad del punto $A(1, 1, 0)$ sea mínima.

EJERCICIO R-CIN.SIST.7 (FEB 2008)

En un instante dado se sabe que las velocidades de los puntos $A(1, 2, 0)$ y $B(1, 1, 0)$ de un sólido indeformable en movimiento son $\boldsymbol{v}_A = 2i + 1j$ y $\boldsymbol{v}_B = 5i + 1j$, respectivamente. Además, todos los restantes puntos tienen las velocidades paralelas al plano Oxy. Determinar la rotación instantánea, ω, del sistema.

JC Aula de Ingeniería	Ingenieros Industriales	Física I
	c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29	Profesor **Alex García**

SOLUCIONES CIN. SIST. 1/1

EJ CIN. SIST. 1

DATOS: $\bar{\Omega}$, $\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = \dot{\bar{\Omega}}$, $\bar{a}_O \Rightarrow \bar{a}_P = \bar{a}_O + \bar{\Omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{OP}) + \frac{d\bar{\Omega}}{dt}\times\bar{OP}$

EJ. CIN. SIST. 2

DATOS: $\bar{\omega}$, $\dot{\bar{\omega}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{0}$, $\bar{v}_A, \bar{a}_A \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}\times\bar{AB} \\ \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{AB}) + \underbrace{\cancel{\dot{\bar{\omega}}}}_{\bar{0}}\times\bar{AB} \end{cases}$

EJ. CIN. SIST 3

$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}\times\bar{AB}$

EJ. CIN SIST. 4

VER TEORÍA : $\tau(\bar{\omega}, \bar{v}^P_{10}) = \tau(\bar{\omega}_{PIV.} + \bar{\omega}_{ROD}, \bar{v}^P_{10})$

$\bar{v}^P_{10}$: VELOCIDAD DEL PUNTO DE CONTACTO DEL SÓLIDO 1 RESPECTO (RELATIVA A) AL SÓLIDO 0. CONTENIDA EN EL PLANO COMÚN DE TANGENCIA DE AMBOS SÓLIDOS EN P.

$\bar{\omega}_{PIV}$: PERPENDICULAR AL PLANO MENCIONADO

$\bar{\omega}_{ROD}$: CONTENIDA EN EL PLANO MENCIONADO.

EJ. CIN. SIST. 5

$\bar{a}_P = \bar{a}_C + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{CP}) + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{CP}$ $\begin{cases} C: \text{CENTRO DE MASAS} \\ \dot{\bar{\omega}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \end{cases}$

EJ. CIN. SIST. 6 y 9

1º MÉTODO: VER FORMULACIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN PÁG. 1 DE TEORÍA

2º MÉTODO: POR CAMPO DE VELOC. DE SOL. RÍG.: LAS PROYECC. DE LAS VELOC. DE DOS PUNTOS DE UN SÓLIDO RÍGIDO EN LA DIRECC. DE LA RECTA QUE UNE ESOS PUNTOS SON IGUALES. POR TANTO:

$\bar{v}^B = \bar{v}^A + \bar{\omega}\times\bar{AB} \Rightarrow \bar{v}^B\cdot\bar{AB} = \bar{v}^A\cdot\bar{AB} + \underbrace{\cancel{(\bar{\omega}\times\bar{AB})\cdot\bar{AB}}}_{0\ (\perp)} \Rightarrow \bar{v}^B\cdot\bar{AB} = \bar{v}^A\cdot\bar{AB}$

EJ. CIN SIST 7

$O \equiv$ PTO FIJO $\Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_O = \bar{0} \\ \bar{a}_O = \bar{0} \end{cases} \Rightarrow \bar{a}_P = \underbrace{\cancel{\bar{a}_O}}_{\bar{0}} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{OP}) + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{OP}$

EJ. CIN. SIST. 8

A (1,0,0)
B (0,1,0)
C (0,0,1)
$\bar{v}_A$ (0,1,1)
$\bar{v}_B$ (-1,0,1)
$\bar{v}_C$ (0,0,1)

$\bar{v}^A = \bar{v}^C + \bar{\omega}\times\bar{CA} \Rightarrow (0,1,1) = (0,0,1) + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (0-\omega_y)\bar{i} + (0+\omega_x+\omega_z)\bar{j} + (1-\omega_y)\bar{k}$

$\bar{i}: 0 = 0-\omega_y \Rightarrow \boxed{\omega_y = 0}$

$\bar{j}: 1 = 0+\omega_x+\omega_z$

$\bar{k}: 1 = 1-\omega_y \Rightarrow \omega_y = 0$

$\bar{v}^B = \bar{v}^C + \bar{\omega}\times\bar{CB} \Rightarrow (-1,0,1) = (0,0,1) + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-\omega_y-\omega_z)\bar{i} + \omega_x\bar{j} + (1+\omega_x)\bar{k}$

$\bar{i}: -1 = -\cancel{\omega_y}^{0} - \omega_z \Rightarrow \boxed{\omega_z = 1}$

$\bar{j}: 0 = \omega_x \Rightarrow \boxed{\omega_x = 0}$

$\bar{k}:$ ——

POR TANTO $\bar{\omega} = \bar{k}$

PROBLEMA CIN.SIST.1

Un disco de radio R, situado en el plano Oxy se desplaza de manera que su centro C está siempre situado sobre el eje Oy. En el instante de estudio la velocidad angular del disco es $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, la aceleración angular es $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$, la velocidad de C es $\vec{V}^C = V\vec{j}$ y su aceleración es $\vec{a}^C = a\vec{j}$. Calcular en dicho instante la velocidad y la aceleración del punto P de la periferia del disco que se encuentra sobre el eje Oy a mayor distancia de O.

PROBLEMA CIN.SIST.2

Una barra homogénea de longitud $2a$ se encuentra inicialmente en el plano XZ de un sistema de referencia ortonormal, con uno de sus extremos (A) situado en el punto de coordenadas (a,0,0) y el otro (B) sobre el eje OZ. Se considera además el punto P, centro geométrico de la barra. El extremo A de la barra está obligado a moverse sobre una guía paralela al eje OY de ecuación x=a y el extremo B está obligado a moverse sobre otra guía coincidente con el eje OZ. En un momento dado, que se tomará como $t=0$, el punto A empieza a moverse con una velocidad constante v_0. Se pide:

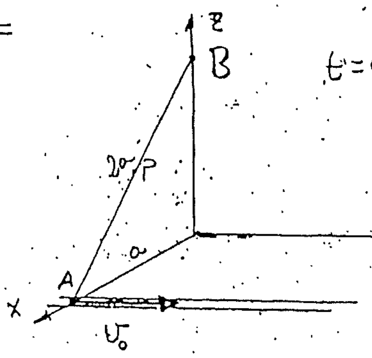
i) Determinar la posición y velocidad de los puntos A, B y P en función del tiempo.

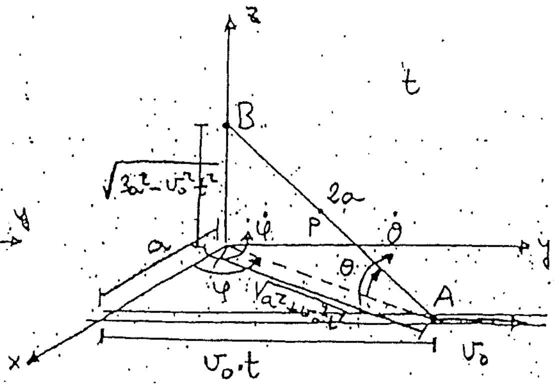
ii) Determinar la aceleración de P y el radio de curvatura de su trayectoria en cada instante.

iii) Demostrar que la trayectoria seguida por P es una circunferencia situada en un plano vertical, determinando el centro y radio de la misma.

iv) Considerando la barra AB como parte de un sistema indeformable encontrar los puntos de dicho sistema con velocidad nula y, a partir de ellos, el eje instantáneo de rotación y el valor de ésta.

P.Cin.Sist. 2





i)

$$\bar v^A = v_0 \bar j \begin{cases} \dot x_A = 0 \Longrightarrow x_A = C_1 = a \\ \dot y_A = v_0 \bar j \Longrightarrow y_A = v_0 t + \cancel{C_3} = v_0 t \quad 0(t=0,\ y_A=0) \\ \dot z_A = 0 \Longrightarrow z_A = C_2 = 0 \end{cases} \Bigg\} \ \bar r^A\,(a, v_0 t, 0)$$

$\bar r^B$: Por geometría de la figura:

$$\left.\begin{array}{l} x_B = 0 \\ y_B = 0 \\ z_B = \sqrt{4a^2-(a^2+v_0^2t^2)} = \sqrt{3a^2-v_0^2t^2} \end{array}\right\| \Rightarrow \bar v^B \begin{cases} \dot x_B = 0 \\ \dot y_B = 0 \\ \dot z_B = \dfrac{dz_B}{dt} = --- = -\dfrac{v_0^2 t}{\sqrt{3a^2-v_0^2t^2}} \end{cases}$$

$\bar r^P$: Si P es punto medio de $\bar{AB}$ también lo será de sus proyecciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_P = \dfrac{a}{2} \\ y_P = \dfrac{v_0 t}{2} \\ z_P = \dfrac{\sqrt{3a^2-v_0^2t^2}}{2} \end{array}\right\| \Longrightarrow \bar v^P \begin{cases} \dot x_P = 0 \\ \dot y_P = \dfrac{v_0}{2} \\ \dot z_P = -\dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2 t}{\sqrt{3a^2-v_0^2t^2}} \end{cases}$$

ii)

$$\bar a^P = \frac{d\bar v^P}{dt} \begin{cases} \ddot x_P = 0 \\ \ddot y_P = 0 \\ \ddot z^P = \dfrac{d\left(-\frac{1}{2}\frac{v_0^2 t}{\sqrt{3a^2-v_0^2t^2}}\right)}{dt} = --- = -\dfrac{3}{2}\dfrac{a^2 v_0^2}{(3a^2-v_0^2t^2)^{3/2}} \end{cases}$$

$$\bar a^P \left(0, 0, -\frac{3}{2}\frac{a^2v_0^2}{(3a^2-v_0^2t^2)^{3/2}}\right)$$

$$\bar a = a_t \cdot \bar t + a_n \cdot \bar n \Longrightarrow \bar t \times \bar a = \overbrace{(\bar t \times a_t \cdot \bar t)}^{\bar 0} + \underbrace{(\bar t \times a_n \cdot \bar n)}_{a_n \cdot \bar b} \Longrightarrow |\bar t \times \bar a| = |a_n \cdot \bar b| = a_n$$

$$\bar t = \frac{\bar v^P}{|\bar v^P|} = \frac{\left(0, \frac{v_0}{2}, -\frac{1}{2}\frac{v_0^2 t}{(3a^2-v_0^2t^2)^{1/2}}\right)}{\sqrt{\frac{v_0^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{v_0^2t^2}{(3a^2-v_0^2t^2)}}} = \frac{\left(0, 1, -\frac{v_0 t}{(3a^2-v_0^2t^2)^{1/2}}\right)}{\sqrt{1+\frac{v_0^2t^2}{3a^2-v_0^2t^2}}}$$

$$\bar{t} \times \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v_0^2 t^2}{3a^2-v_0^2t^2}}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & -\frac{v_0 \cdot t}{\sqrt{3a^2-v_0^2t^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8}\frac{a^2 v_0^2}{(3a^2-v_0^2t^2)^{3/2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v_0^2t^2}{3a^2-v_0^2t^2}}} \left[-\frac{3}{2} \frac{a^2 v_0^2}{(3a^2-v_0^2t^2)^{3/2}} \right] \bar{i}$$

$$a_n = |\bar{t} \times \bar{a}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{3a^2 \cancel{-v_0^2t^2} \cancel{+v_0^2t^2}}{3a^2-v_0^2t^2}}} \cdot \frac{3}{2} \frac{a^2 v_0^2}{(3a^2-v_0^2t^2)^{3/2}} = \dots = \frac{3a^2 v_0^2}{2a\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{(3a^2-v_0^2t^2)}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho_c} \Longrightarrow \frac{3a^2 v_0^2}{2a\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{(3a^2-v_0^2t^2)} = \frac{\frac{v_0^2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{v_0^4 t^2}{3a^2-v_0^2t^2}}{\rho_c}$$

$$\frac{\cancel{3a^2 v_0^2}}{2a\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{(3a^2-v_0^2t^2)}} = \frac{\cancel{v_0^2}}{4} \cdot \frac{\cancel{3a^2 - v_0^2t^2 + v_0^2t^2}}{\cancel{(3a^2-v_0^2t^2)}} \frac{1}{\rho_c} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\rho_c = \frac{2a\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a} \Longrightarrow \rho_c = cte \Longrightarrow \text{CIRCUNF. Ó HEL.}$$

iii) $X_P = \frac{a}{2} = cte \Longrightarrow$ TRAYECTORIA DE P CONTENIDA EN EL PLANO $X = \frac{a}{2}$ (VERTICAL)

$$y_P^2 + z_P^2 = \left(\frac{v_0 \cdot t}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3a^2-v_0^2t^2}}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{v_0^2t^2}}{\cancel{4}} + \frac{3a^2}{4} - \frac{\cancel{v_0^2t^2}}{\cancel{4}} = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow$$

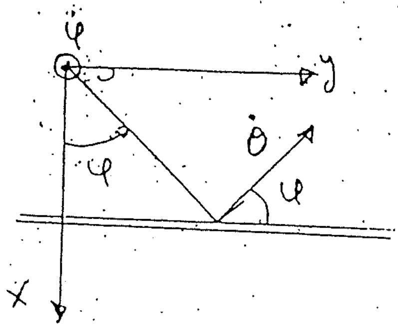
$\Longrightarrow y_P^2 + z_P^2 = \frac{3a^2}{4}$: CIRCUNF CONTENIDA EN $x = \frac{a}{2}$ DE RADIO $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$

EN $t=0$, z_P MAX Y $\bar{v}^P = \frac{v_0}{2}\bar{j} \Longrightarrow \bar{\rho}_c = \rho_c \bar{n}$ CONTENIDO EN $x = \frac{a}{2}$, $\perp \bar{v}^P$ Y HACIA ABAJO DE P $\Longrightarrow$ C EN

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0 \end{cases}$$

iv) $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{v_0 t}{a}\right) \Longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{v_0/a}{1+\left(\frac{v_0 t}{a}\right)^2}$

$\theta = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3a^2-v_0^2t^2}}{\sqrt{a^2+v_0^2t^2}}\right) \Longrightarrow \dot{\theta} = \dots = -\frac{2v_0^2 t}{(a^2+v_0^2t^2)}$



$\bar{\omega} = \frac{2v_0^2 t}{a^2+v_0^2t^2}\left[\text{sen}\left(\text{arctg}\frac{v_0 t}{a}\right)\bar{i} - \cos\left(\text{arctg}\frac{v_0 t}{a}\right)\bar{j}\right] + \frac{v_0/a}{1+\left(\frac{v_0 t}{a}\right)^2}$

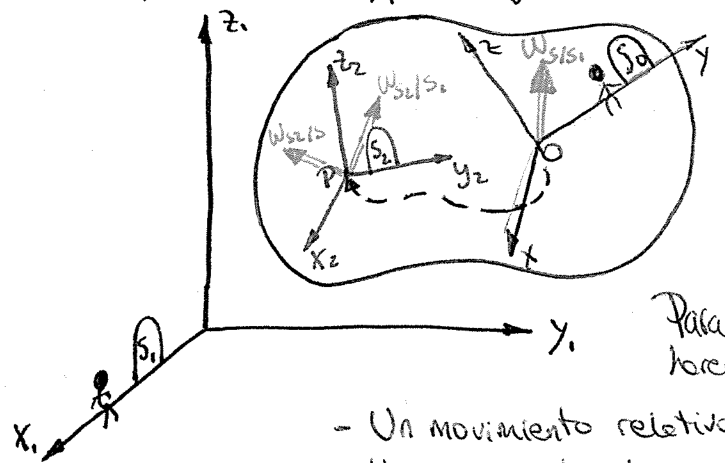
En $t=0$ $\begin{cases} \cdot\ \bar{\omega} = v_0/a \cdot \bar{k} \\ \cdot\ \bar{v}^A \perp \bar{\omega} \Longrightarrow \exists\ \text{E.I.R.}\ (\bar{V}_{MIN} = \bar{0}) \\ \cdot\ \bar{V}^B = \bar{0} \Rightarrow \bar{v}^A = \underbrace{\cancel{\bar{v}^B}}_{\bar{0}} + \bar{\omega}\times\overline{AB} = \frac{v_0}{\cancel{a}}\cdot\cancel{a}\,\bar{j} \end{cases}$

E.I.R en $t=0$ $\left\{\begin{array}{l} \cdot\ \text{Pasa por B}\ (\bar{v}^B = \bar{0}) \\ \cdot\ \text{Tiene direcc de}\ \bar{\omega}(t=0) = \frac{v_0}{a}k \end{array}\right\} \Longrightarrow$ En $t=0$, $EIR \equiv OZ$

CINEMÁTICA RELATIVA DEL PUNTO

1 COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Vamos a estudiar el movimiento de una partícula P respecto de dos sistemas de referencia: Uno fijo, S_1 y uno móvil S_0.



- El movimiento de la partícula respecto de S_1 es el movimiento absoluto
- El movimiento de la partícula respecto de S es el movimiento relativo

Para estudiar el mov. absoluto de una partícula haremos:

- Un movimiento relativo percibido desde S_0
- Un movimiento de arrastre que percibiría el observador en S_1 si la partícula se moviera anclada al sistema S.

2 COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES

Para analizar la velocidad absoluta de una partícula (desde S_1) haremos la suma de: $\vec{v}^{\,P}_{S_2/S_1} = \vec{v}^{\,P}_{21}$

Velocidad relativa $\vec{v}^{\,P}_{S_2/S} = v_{20}$

Velocidad de arrastre $\vec{v}^{\,P}_{S/S_1} = v^P_{01}$

Así ≡ $\boxed{\vec{v}^{\,P}_{21} = \vec{v}^{\,P}_{20} + \vec{v}^{\,P}_{01}}$ $\qquad \vec{v}^{\,P}_{ABS} = \vec{v}^{\,P}_{REL} + \vec{v}^{\,P}_{ARR}$

3 COMPOSICIÓN DE ACELERACIONES

La aceleración absoluta $\vec{a}^{\,P}_{S_2/S_1} = \vec{a}^{\,P}_{21}$ será la suma de:

Aceleración relativa $\vec{a}^{\,P}_{S_2/S} = \vec{a}^{\,P}_{20}$

Aceleración de arrastre $\vec{a}^{\,P}_{S/S_1} = \vec{a}^{\,P}_{01}$

Aceleración de coriolis $\vec{a}^{\,P}_{COR} = 2\,\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{\,P}_{20}$

Así ≡ $\boxed{\vec{a}^{\,P}_{21} = \vec{a}^{\,P}_{20} + \vec{a}^{\,P}_{01} + 2\,\vec{\omega}^{\,P}_{01} \times \vec{v}^{\,P}_{20}}$ $\qquad \vec{a}^{\,P}_{ABS} = \vec{a}^{\,P}_{REL} + \vec{a}^{\,P}_{ARR} + \underbrace{2\,\vec{\omega}^{\,P}_{ARR} \times v^{P}_{rel}}_{\vec{a}^{\,P}_{COR}}$

4 Composición de velocidades y aceleraciones angulares

Diremos que la velocidad angular absoluta $\vec{\omega}_{21}$ será la suma de:

$$\boxed{\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}}$$

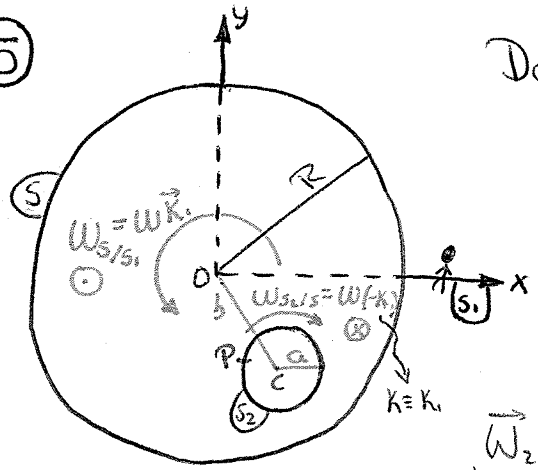
De igual modo, la aceleración angular será:

$$\boxed{\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}}$$

$$\vec{\alpha}_{20} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt}\right)_S ; \quad \vec{\alpha}_{01} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt}\right)_{S_1}$$

5 Ejercicios cinemática relativa

5



Datos $\begin{cases} R \text{ del tío-vivo} \\ \omega_{\text{tiovivo}} \;\; -\omega_{\text{disco}} \end{cases}$ Distancia b, a $\quad a < b < R$

Se pide $|\vec{v}^{\,P}_{21}|$

No estando definido P y con los valores dados de $\vec{\omega}_{0,1}$ y $\vec{\omega}_{2,0}$ sospecho que está preparado

$$\underbrace{\vec{\omega}_{21}}_{\vec{\omega}_{ABS}} = \underbrace{\vec{\omega}_{20}}_{\vec{\omega}_{Rel}} + \underbrace{\vec{\omega}_{01}}_{\omega_{arr}} = -\omega\vec{K}_1 + \omega\vec{K}_1 = \vec{0}$$

Si $\vec{\omega}_{21} = \vec{0}$ $\quad S_2$ está en traslación respecto a $S_1 \Longrightarrow$ Todos los puntos de S_2 tendrán igual $\vec{v}$ y $\vec{a}$ respecto de S_1

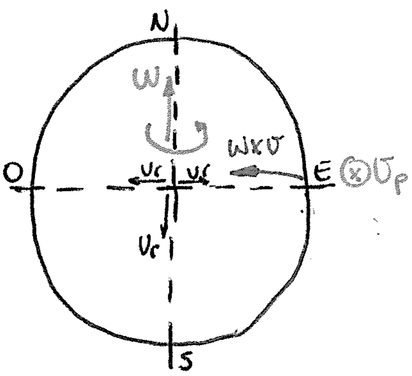
Por traslación; 0 por ser C punto fijo; CVSR en S/S_1

$$|v^{P}_{S_2/S_1}| \overset{\downarrow}{=} |\vec{v}^{\,C}_{S_2/S_1}| = |\cancel{\vec{v}^{\,C}_{20}} + \vec{v}^{\,C}_{01}| \overset{\downarrow}{=} |\cancel{\vec{v}^{\,O}_{01}} + \omega_{01} \times \vec{OC}| = \omega b$$

(0)

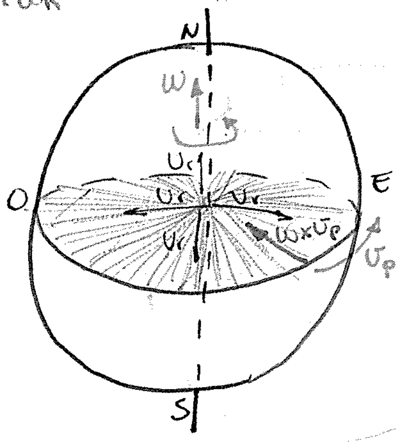
$$\boxed{\omega^{P}_{2/1} = \omega b}$$

3 Determinar $\vec{a}_{COR}$ $\quad$ Punto P $\begin{cases} \vec{v}_P \text{ dirección este} \\ \vec{\omega} \text{ rotación terrestre} \end{cases}$

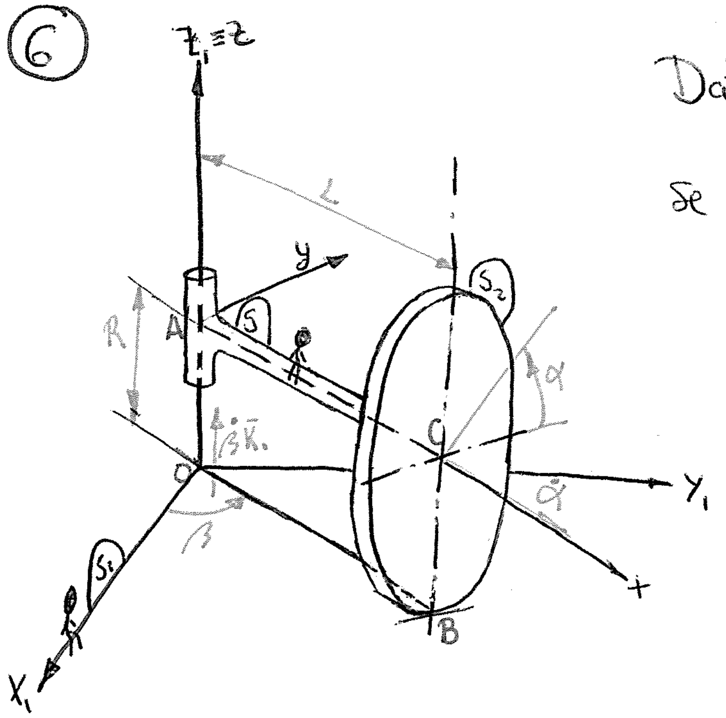


$$a_{COR} = 2\,\vec{\omega}_{arr} \times \vec{v}_{rel} = 2\,\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{\,P}_{20} = 2\,\omega v\,(-\vec{v}_r)$$

Unitario desde el centro terrestre

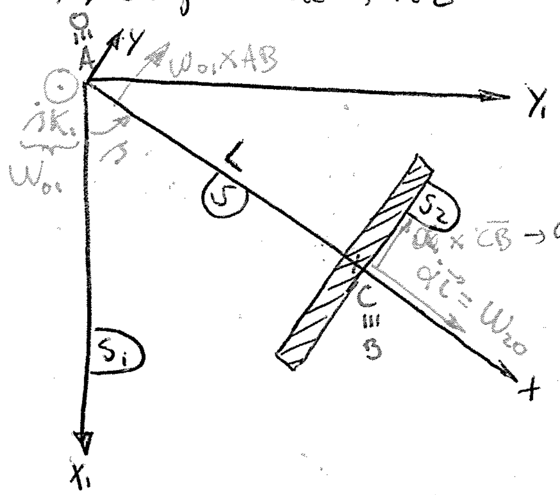


6



Datos: Disco, R, que rueda sin deslizar en plano X_1Y_1

Se pide $\dot{\beta}$ en función de $\dot{\varphi}$ R L



Por rodadura sin desliz. $\rightarrow \bar{v}_{21}^{B} = \bar{0} = \vec{v}_{20}^{B} + \vec{v}_{01}^{B}$

por comp. de vel.

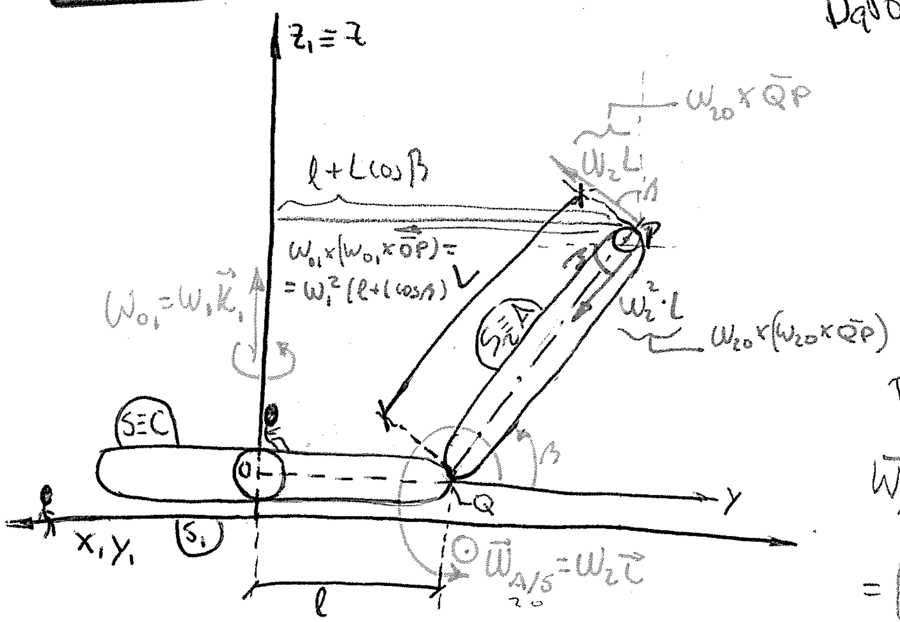
CVSR S_2/S $\quad$ CVSR

$\vec{v}_{20}^{B} = \cancel{v_{20}^{C}} + \omega_{20} \times \bar{CB} = \dot{\varphi} R \vec{j}$; $\quad \vec{v}_{01}^{B} = \cancel{v_{01}^{A}} + \bar{\omega}_{01} \times \bar{AB} = \dot{\beta} L \vec{j}$

0 por punto fijo

$\bar{0} = \dot{\varphi} R \vec{j} + \dot{\beta} L \vec{j} \Longrightarrow \dot{\beta} = \dfrac{-\dot{\varphi} R}{L}$

Problema 2 Cinemática Relativa



Datos: $\omega_{01} = \omega_1 \vec{K}_1 \equiv \vec{K}$

$\omega_{20} = \omega_2 \vec{i}$

Distancias l y L

① I) Se pide $\vec{\omega}_{A/S_1}$ y $\vec{\alpha}_{A/S_1}$

Por compos. de velocidades

$$\vec{\omega}_{A/S_1} = \vec{\omega}_{A/S} + \vec{\omega}_{01} =$$

$$= \boxed{\omega_2 \vec{i} + \omega_1 \vec{K}}$$

$\vec{K} = \vec{K}_1$

$$\vec{\alpha}_{A/S_1} = \left.\frac{d\vec{\omega}_{A/S_1}}{dt}\right|_{S_1} = \left.\frac{d\,\omega_2\vec{i}}{dt}\right|_{S_1} + \left.\frac{d\,\omega_1\vec{K}}{dt}\right|_{S_1} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times\vec{\omega}_{20} =$$

$$= \left(\frac{d\omega_2}{dt}\vec{i}\right)_S + \left(\frac{d\omega_1}{dt}\vec{K}_1\right)_{S_1} + \vec{\omega}_{01}\times\vec{\omega}_{20} = \boxed{\underbrace{\frac{d\omega_2}{dt}\vec{i}}_{\vec{\alpha}_{20} = \frac{d\omega_{A/S}}{dt}} + \omega_1\omega_2\vec{j} + \underbrace{\frac{d\omega_1}{dt}\vec{K}_1}_{\vec{\alpha}_{01} = \frac{d\omega_{01}}{dt}} = \vec{\alpha}_{A/S_1}}$$

$$\vec{\omega}_{01}\times\vec{\omega}_{20} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Composición de aceleración angular

II) Se considera ahora
- Reposo de grúa
- $\vec{\omega}_{01} = \omega_1 K_1 = cte$
- $\omega_{A/S} = \omega_{20}\vec{i} = cte$
- β (figura)

② Se pide $\vec{v}^{\,Q}_{A/S_1}$ y $\vec{a}^{\,Q}_{A/S_1}$

Int. física: Velocidad lineal de Q girando con eje que pasa por O y tiene sentido ω_{01}

$$\vec{v}^{\,Q}_{A/S_1} = \cancel{\vec{v}^{\,Q}_{20}} + \vec{v}^{\,Q}_{01} = 0 + \vec{v}^{\,Q}_{01} \overset{\text{CVSI } S/S_1}{=} \vec{v}^{\,O}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times\vec{OQ} = \boxed{\omega_1 l(-\vec{i})}$$

Comp. velocidades

Int. física: a_n de Q girando en eje con dirección ω_{01}

$$\vec{a}^{\,Q}_{A/S_1} = \cancel{\vec{a}^{\,Q}_{20}} + \vec{a}^{\,Q}_{01} + \underbrace{2\vec{\omega}_{01}\times\cancel{\vec{v}_{20}}}_{0} = 0 + \vec{a}^{\,Q}_{01} + 0 = \vec{a}^{\,O}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times[\vec{\omega}_{01}\times\vec{OQ}] + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_{01}\times\vec{OQ}}_{0 \text{ por ser } \omega_{01} \text{ cte!!!}}$$

Comp. acel — C.A.S.R S/S₁

$$= \boxed{\omega_1^2\, l\, (\vec{j})}$$

③ Se pide $\vec{v}^{\,P}_{A/S_1}$

$$\vec{v}^{\,P}_{A/S_1} \underset{\text{C.V.S.R. } S_2/S_1}{=} \underbrace{\vec{v}^{\,Q}_{A/S_1}}_{\text{Calculado en 2}} + \underbrace{\vec{\omega}_{21} \times \vec{QP}}_{\text{Calculada en 1}} = \boxed{-\omega_1 (l + L\cos\beta)\,\vec{i} - \omega_2 L \operatorname{sen}\beta\,\vec{j} + \omega_2 L \cos\beta\,\vec{k}}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_2 & 0 & \omega_1 \\ 0 & L\cos\beta & L\operatorname{sen}\beta \end{vmatrix} = -\omega_1 L \cos\beta\,\vec{i} - \omega_2 L \operatorname{sen}\beta\,\vec{j} + \omega_2 L \cos\beta\,\vec{k}$$

④ Se pide $\vec{a}^{\,P}_{A/S_1}$

$$\vec{a}^{\,P}_{A/S_1} \underset{\text{CASR}}{=} \underbrace{\vec{a}^{\,Q}_{A/S_1}}_{\text{Calculada en 2}} + \vec{\omega}_{21} \times [\vec{\omega}_{21} \times \vec{QP}] + \dot{\vec{\omega}}_{21} \times \vec{QP} =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_2 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 L\cos\beta & -\omega_2 L\operatorname{sen}\beta & \omega_2 L\cos\beta \end{vmatrix} = \boxed{\omega_1 \omega_2 L \operatorname{sen}\beta\,\vec{i} - L\cos\beta\,(\omega_1^2 + \omega_2^2)\,\vec{j} - \omega_2^2 L \operatorname{sen}\beta\,\vec{k}}$$

$$\underbrace{\dot{\vec{\omega}}_{21}}_{\alpha_{21}} \times \vec{QP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_1\omega_2 & 0 \\ 0 & L\cos\beta & L\operatorname{sen}\beta \end{vmatrix} = \omega_1 \omega_2 L \operatorname{sen}\beta\,\vec{i}$$

Por tanto

$$\boxed{\vec{a}^{\,P}_{A/S_1} = 2\omega_1\omega_2 L \operatorname{sen}\beta\,\vec{i} - \left[\omega_1^2 l + L\cos\beta\,(\omega_1^2 + \omega_2^2)\right]\vec{j} - \omega_2^2 L \operatorname{sen}\beta\,\vec{k}}$$

⑤ Se pide $\vec{v}^{\,P}_{A/S}$ y $\vec{a}^{\,P}_{A/S}$

$$\vec{v}^{\,P}_{20} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CVSR}\\ S_2/S}}{=} \vec{v}^{\,Q}_{20} + \underbrace{\vec{w}_{20} \times \vec{QP}}_{\text{vel lineal}} = 0 + w_2 L\left(\operatorname{sen}\beta(-\vec{j}) + \cos\beta\,\vec{k}\right) = \boxed{w_2 L\left(-\operatorname{sen}\beta\,\vec{j} + \cos\beta\,\vec{k}\right)}$$

$$\vec{a}^{\,P}_{20} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CASR}}}{=} \vec{a}^{\,Q}_{20} + \underbrace{\vec{w}_{20}\times[\vec{w}_{20}\times\vec{QP}]}_{a_{normal}} + \cancel{\dot{\vec{w}}_{20}\times\vec{QP}}^{\,\bar{0}\text{ por } w_2 \text{ cte}} = \boxed{w_2^2 L\left(-\cos\beta\,\vec{j} - \operatorname{sen}\beta\,\vec{k}\right)}$$

⑥ Se pide $\vec{v}^{\,P}_{01}$ y $\vec{a}^{\,P}_{01}$

$$\vec{v}^{\,P}_{01} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CVSR}}}{=} \cancel{\vec{v}^{\,O}_{01}}^{\,0} + \underbrace{\vec{w}_{01}\times\vec{OP}}_{\text{vel lineal}} = \boxed{-w_1(l + L\cos\beta)\,\vec{i}}$$

$$\vec{a}^{\,P}_{01} = \cancel{\vec{a}^{\,O}_{01}}^{\,\bar{0}} + \vec{w}_{01}\times[\vec{w}_{01}\times\vec{OP}] + \cancel{\dot{\vec{w}}_{01}\,\vec{OP}}^{\,\bar{0}} = \boxed{-w_1^2(l + L\cos\beta)\,\vec{j}}$$

⑦ $\vec{a}^{\,P}_{\text{coriolis}}$

$$\vec{a}^{\,P}_{\text{coriolis}} = 2\,\vec{w}_{01}\times\underbrace{\vec{v}^{\,P}_{20}}_{|v_{20}| = |w_2 L|} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & w_1 \\ 0 & -w_2 L\operatorname{sen}\beta & w_2 L\cos\beta \end{vmatrix} = \boxed{2 w_1 w_2 L \operatorname{sen}\beta\,\vec{i}}$$

⑧ Comprobar soluciones de ③ y ④ con las obtenidas en ⑤⑥ y ⑦

3)

$$\vec{v}^{\,P}_{S_2/S_1} = \underbrace{-w_1(l + L\cos\beta)\,\vec{i}}_{=\vec{v}^{\,P}_{ARR}\ \left|\begin{smallmatrix}\text{obtenida}\\ \text{en ⑥}\end{smallmatrix}\right.} \underbrace{- w_2 L\operatorname{sen}\beta\,\vec{j} + w_2 L\cos\beta\,\vec{k}}_{L w_2(+\operatorname{sen}\beta\vec{j} + \cos\beta\vec{k}) = \vec{v}^{\,P}_{rel}\ (\text{obtenido en 5})}$$

$$\vec{v}^{\,P}_{ABS} = \vec{v}^{\,P}_{ARR} + \vec{v}^{\,P}_{REL} \quad ✓$$

4)

$$\vec{a}^{\,P}_{S_2/S_1} = \underbrace{2 w_1 w_2 L \operatorname{sen}\beta\,\vec{i}}_{\ominus\, a_{\text{coriolis}}\ [Ap.7]} - \underbrace{\left[w_1^2 l + L\cos\beta\,(w_1^2 + w_2^2)\right]\vec{j} - w_2^2 L\operatorname{sen}\beta\,\vec{k}}_{-w_1^2 l\vec{j} - L\cos\beta\, w_1^2\vec{j} - L\cos\beta\, w_2^2\vec{j} - w_2^2 L\operatorname{sen}\beta\,\vec{k}}$$

$$\underbrace{w_2^2 L\left(-\cos\beta\,\vec{j} - \operatorname{sen}\beta\,\vec{k}\right)}_{\ominus\,\vec{a}^{\,P}_{Rel}\ [Ap.5]} \underbrace{- w_1^2(l + L\cos\beta)\,\vec{j}}_{\ominus\,\vec{a}^{\,P}_{ARR}\ [Ap.6]}$$

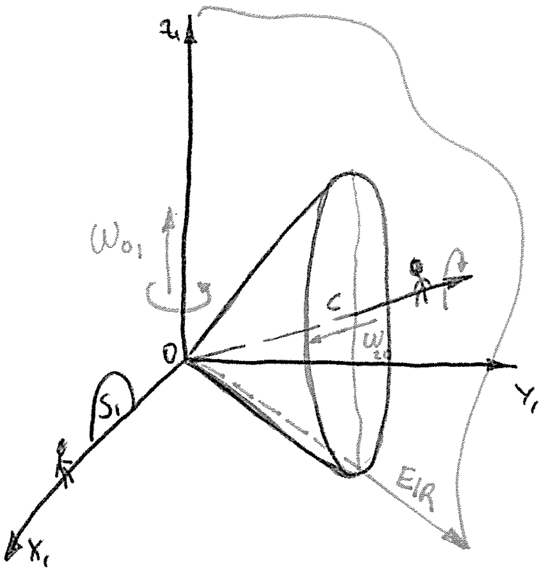
Por tanto

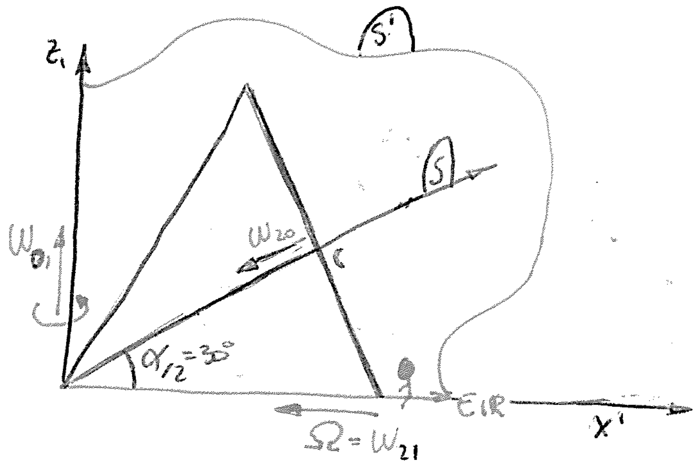
$$\vec{a}^{\,P}_{ABS} = \vec{a}^{\,P}_{Rel} + \vec{a}^{\,P}_{ARR} + a^{P}_{COR} \quad ✓$$

⊛ Ap. 9 y 10 no resueltos por ser de dinámica

Ej 1 Repaso

$\frac{\alpha}{2} = 30°$, $\Omega = cte$. Calcular $T_{2,1}$





Por $\overline{W} = cte \Longrightarrow T_{01} = \frac{2\pi}{W_{01}}$

Busco W_{01}

$$W_{21} = W_{20} + W_{01} \qquad \begin{cases} W_{21} = \Omega\,(-\vec{i}\,') \\ W_{20} = W_{20}\,(-\cos 30°\,\vec{i}\,' - \operatorname{sen} 30°\,\vec{k}\,') \\ W_{01} = W_{01}\,(\vec{k}\,') \end{cases}$$

Así $\vec{i}\,' \Rightarrow -\overline{\Omega} = -\cos 30\,\overline{W}_{20} \longrightarrow \overline{W}_{20} = \frac{-\Omega}{-\cos 30} = \frac{2\Omega}{\sqrt{3}}$

$\vec{k}\,' \Rightarrow \quad 0 = -\overline{W}_{20}\operatorname{sen} 30° + \overline{W}_{01} \to W_{01} = \frac{\cancel{2}\Omega}{\sqrt{3}}\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\Omega}{\sqrt{3}}$

$$\boxed{T_{01} = \frac{2\pi}{\frac{\Omega}{\sqrt{3}}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{\Omega}}$$

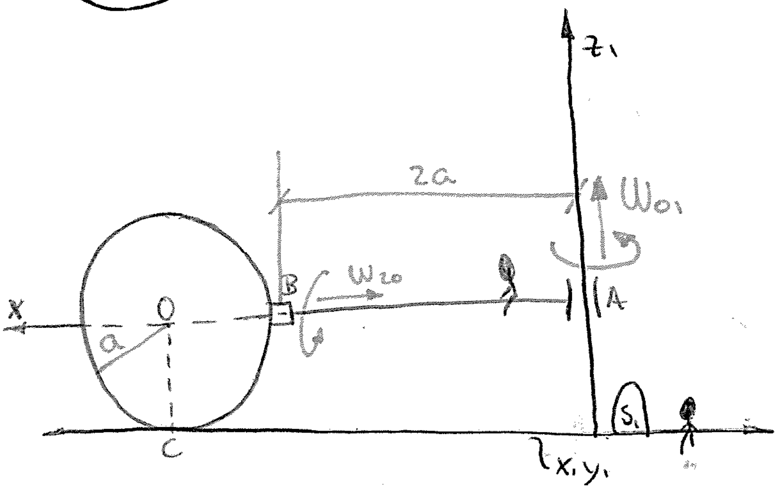
Extra: Calcular t de una generatriz en dar una vuelta

$$\boxed{T_{20} = \frac{2\pi}{W_{20}} = \frac{2\pi}{\frac{2\Omega}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{\Omega}}$$

Ej. 2 Repaso

Datos:
RPSD
$T_{01} = T$

Se pide
$|\omega_{21}|$
β (con z_1)



$\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_{20} + \bar{\omega}_{01} \Longrightarrow$ Buscamos ω_{20} y ω_{01}

ω_{01}) Como $T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_{01}} \Longrightarrow \vec{\omega}_{01} = \frac{2\pi}{T}\vec{k}$

ω_{02}) $v_{21}^{O} = \cancel{v_{20}^{O}} + v_{01}^{O} \longrightarrow \vec{v}_{21}^{O} = \vec{v}_{01}^{O}$ (1)

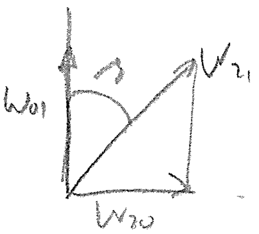
$v_{21}^{O} = \cancel{v_{21}^{C}} + \omega_{21} \times \overline{OC} = \omega_{20} \times \overline{OC} = \omega_{20}\, a \to \omega_{20} = \frac{v_{21}^{O}}{a}$ (2)

$v_{01}^{O} = \cancel{v_{01}^{A}} + \omega_{01} \times \overline{OA} = \omega_{01}\, 3a$ (3)

$\omega_{01} = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_{20} \overset{(2)}{=} \frac{v_{21}^{O}}{a} \overset{(1)}{=} \frac{v_{01}^{O}}{a} \overset{(3)}{=} \frac{\omega_{01}\, 3a}{a} = \omega_{01}\, 3 = 3\frac{2\pi}{T}$

$\Rightarrow |\omega_{21}| = \sqrt{\omega_{01}^2 + \omega_{20}^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \left(3\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{\sqrt{40\pi^2}}{T} = \boxed{\frac{2\pi\sqrt{10}}{T}}$



$\beta = tg\, \frac{\omega_{20}}{\omega_{01}} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{01}} = 3 \longrightarrow \boxed{\beta = \text{arctg}\, 3}$

CINEMÁTICA RELATIVA DEL PUNTO

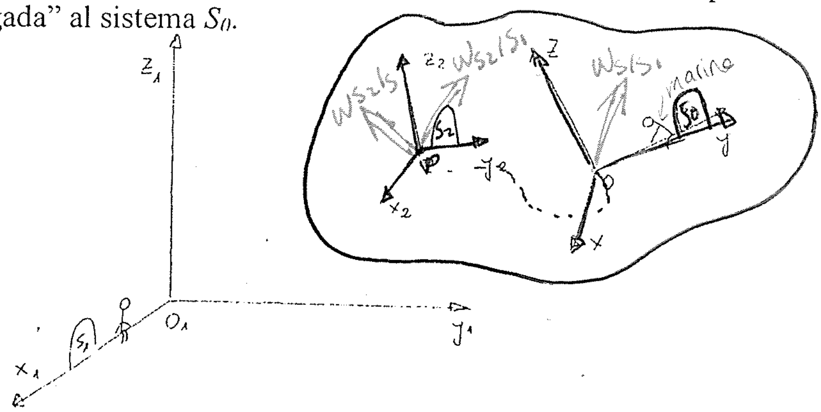
1.-COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Se va a estudiar el movimiento de una partícula P respecto a dos sistemas de referencia, uno fijo S_1, $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, y otro móvil S_0, que se mueve respecto a S_1.

El movimiento de la partícula respecto a S_1 se designa como movimiento absoluto, y es el que vería un observador situado en S_1, mientras que el movimiento respecto a S_0 se llama movimiento relativo, y es el que vería otro observador situado en S_0.

En general, el movimiento que perciba el observador situado en el sistema fijo S_1 será más complicado que el que perciba el observador situado en el sistema móvil S_0. Por eso el estudio del movimiento de la partícula respecto a S_1 se hará descomponiéndolo en dos movimientos:

- un movimiento relativo: el que percibe el observador de S_0.
- un movimiento de arrastre: el que percibiría el observador de S_1 si la partícula se moviera unida o "pegada" al sistema S_0.



2.-COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES

La velocidad absoluta de la partícula respecto de S_1 será la suma de:

- una *velocidad relativa*: la que tiene la partícula P respecto de S_0, es decir, la derivada del vector de posición de P en el sistema S_0 respecto del tiempo.
- una *velocidad de arrastre*: la que tendría P respecto a S_1 si se moviese unida al sistema S_0. Para su análisis, al considerar la partícula como parte del sólido 0, emplearemos el campo de velocidades del sólido rígido.

Si llamamos S_2, sistema o sólido 2, a la partícula P, la notación empleada para designar las magnitudes será:

- movimiento absoluto: subíndice 21 (movimiento de 2 respecto de 1)
- movimiento relativo: subíndice 20 (movimiento de 2 respecto de 0)
- movimiento de arrastre: subíndice 01 (movimiento de 0 respecto de 1)

Para indicar la partícula a la que nos referimos usaremos el superíndice con la letra de la partícula analizada.

La relación entre velocidades quedará por tanto expresada como:

$$\vec{V}_{21}{}^{P} = \vec{V}_{20}{}^{P} + \vec{V}_{01}{}^{P} \quad \text{ó} \quad \vec{V}_{ABS}{}^{P} = \vec{V}_{REL}{}^{P} + \vec{V}_{ARR}{}^{P}$$

$$\bar{v}_{P/S_1} = \bar{v}_{P/S} + \bar{v}^{P}_{S/S_1}$$

3.-COMPOSICIÓN DE ACELERACIONES

La aceleración absoluta de la partícula respecto de S_1 será la suma de:

- una *aceleración relativa*: la que tiene la partícula *P* respecto de S_0, es decir, la derivada del vector de posición de *P* en el sistema S_0 respecto del tiempo.
- una *aceleración de arrastre*: la que tendría *P* respecto a S_1 si se moviese unida al sistema S_0. Para su análisis, al considerar la partícula como parte del sólido *0*, emplearemos el campo de aceleraciones del sólido rígido.
- una *aceleración de Coriolis*: éste es un término nuevo consecuencia de la velocidad angular del sólido S_0 respecto del S_1 y de la velocidad relativa del S_2 respecto del S_0.

Manteniendo la misma nomenclatura, la aceleración absoluta queda expresada como:

$$\vec{a}_{21}{}^{P} = \vec{a}_{20}{}^{P} + \vec{a}_{01}{}^{P} + 2\cdot\vec{\omega}_{01}\times\vec{V}_{20}{}^{P} \quad \text{ó} \quad \vec{a}_{ABS}{}^{P} = \vec{a}_{REL}{}^{P} + \vec{a}_{ARR}{}^{P} + 2\cdot\vec{\omega}_{ARR}\times\vec{V}_{REL}{}^{P}$$

$a_{P/S_1} = a_{P/S} + a^{P}_{S/S_1} + 2\,\omega_{S/S_1} \times v_{P/S}$

4.-COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES ANGULARES

Llamando:

- $\vec{\omega}_{21}$ a la velocidad angular absoluta del sólido S_2 respecto del S_1.
- $\vec{\omega}_{20}$ a la velocidad angular relativa del sólido S_2 respecto del S_0.
- $\vec{\omega}_{01}$ a la velocidad angular de arrastre del sólido S_0 respecto del S_1.

tenemos: $\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$

De igual manera y manteniendo la nomenclatura, para la aceleración angular obtenemos:

$$\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01}\times\vec{\omega}_{20}$$

$\left(\frac{d\omega_{20}}{dt}\right)_S$ $\left(\frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt}\right)$

EJERCICIO CIN.REL.1(Jun-95)

Una plataforma circular de radio R gira alrededor de su eje geométrico con velocidad angular constante ω, respecto a la referencia S. Un punto móvil que parte del eje se desplaza radialmente por la plataforma con velocidad constante igual a **v** respecto de la misma. Determine el valor modular de la aceleración del punto móvil respecto de S cuando dicho punto alcanza el borde de la plataforma.

EJERCICIO CIN. REL.2(Sep-95)

La aguja minutero de un reloj tiene 0,6 m de longitud. Determine la velocidad del extremo de dicha aguja respecto de un observador vinculado a la aguja horaria, cuando el reloj marca las 12 horas, expresando el resultado en mm/s redondeando a las cifras de las unidades. (Sep-95)

EJERCICIO CIN. REL.3(Jun-96)

Determine el módulo, dirección y sentido de la aceleración de Coriolis para un punto que se mueve en el ecuador terrestre, con velocidad **v** hacia el Este. Denomínese ω a la rotación terrestre. (Jun-96)

EJERCICIO CIN. REL.4(Sep 96)

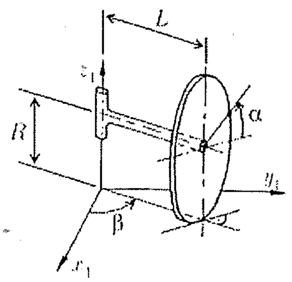
Si un punto se mueve respecto de la Tierra sobre el plano horizontal hacia el Sur, en un lugar del hemisferio norte de latitud $\lambda = 30°$, con una velocidad $v = \dfrac{135}{\pi} m \cdot s^{-1}$, determine la dirección, sentido y módulo de la aceleración de Coriolis del punto si se admite que la última referencia es un sistema de coordenadas con origen en el centro de la tierra y direcciones fijas (el módulo de la aceleración se expresará mediante una fracción irreducible). (Sep 96)

EJERCICIO CIN.REL. 5 (Septiembre 2006-09-18)

La plataforma de un "tío-vivo" de radio R gira con velocidad angular ω respecto del suelo. Un disco de radio a, cuyo eje es solidario del "tío-vivo" y dista b del eje del "tío-vivo" ($a < b < R$), gira con velocidad angular $-\omega$ respecto del "tío-vivo". Calcule el módulo de la velocidad de un punto de la periferia del disco de radio a respecto del suelo.

EJERCICIO CIN.REL. 6 (Junio 2008-06-20) (Septiembre 2008-09-05)

El círculo de radio R de la figura rueda sin deslizar respecto del plano x_1y_1 y permanece perpendicular a dicho plano en todo instante. El círculo está unido por su centro a una estructura en forma de T con un brazo de longitud L que gira alrededor del eje z_1, manteniéndose paralelo al plano x_1y_1, y que permite el giro del círculo respecto de aquella estructura. Determine la velocidad angular $\dot{\beta}$ en función de $\dot{\alpha}$, R y L.



REPASO

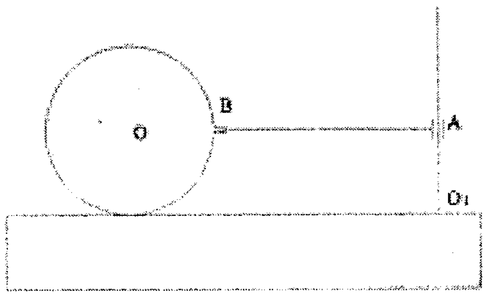
INFIERNO

EJERCICIO R-CIN.REL.1 (Parcial 1996-01-19)

Un cono de revolución de semiángulo $\alpha/2=30^{\circ}$ rueda sobre un plano fijo π con una rotación de módulo constante Ω. Calcular el tiempo T que tarda el eje del cono en completar una vuelta completa en torno a un eje perpendicular a π.

EJERCICIO R-CIN.REL. 2 (Final 1996-09-09)

Una varilla AB de longitud $2a$ puede girar en torno a un eje vertical O_1A sobre el que se encuentra el punto A. La varilla AB se encuentra siempre horizontal y en el punto B se une a una esfera de radio a la cual puede girar en torno a la varilla AB. La esfera, a su vez, rueda y pivota sin deslizar sobre un plano horizontal fijo π. Calcular el módulo y el ángulo que forma con la vertical la rotación de la esfera respecto al plano fijo si la varilla AB tarda un tiempo T en completar una vuelta en torno a la vertical.



EJERCICIO R-CIN. REL.3(Jun-99)

La Luna gira alrededor de la Tierra presentándonos siempre la misma cara. Admitiendo que el centro de la Luna describe una trayectoria circular con una frecuencia angular de revolución Ω en un sistema de referencia (S) con origen en el centro de la Tierra y con direcciones fijas, y que la Luna posee una velocidad angular ω respecto a S, perpendicular al plano de la trayectoria de su centro, determine la relación que debe existir entre Ω y ω. (Jun-99)

EJERCICIO R-CIN. REL.4(Feb-00)

Obtenga la aceleración de Coriolis para un punto material que se mueve sobre la superficie de la Tierra a lo largo de un meridiano en sentido Sur - Norte en un punto de latitud 30° N, con velocidad **v** respecto a la Tierra. (Feb-00)

EJERCICIO R-CIN. REL.5(Feb 01)

Si un punto se mueve respecto de la Tierra sobre el plano horizontal, con velocidad v hacia el Norte, en un lugar de latitud $\lambda < 0$, determinar la dirección, sentido y módulo de la aceleración de Coriolis del punto si se admite que la referencia fija es un sistema de coordenadas con origen en el centro de la Tierra y direcciones fijas. (Feb 01)

EJERCICIO R-CIN.REL. 6 (Febrero 2001-02-19)

Un cono recto, de sección circular y semiángulo 30°, rueda sin deslizar sobre un plano siendo ω el módulo de su rotación instantánea cuyo valor es constante. Calcular el tiempo T que tarda el eje del cono en completar una vuelta completa en torno a un eje perpendicular al plano y el mínimo tiempo que transcurre entre dos instantes en los que una misma generatriz del cono entra en contacto con el plano.

PROBLEMA CIN.REL.1

Se considera un cono recto de semiángulo $\alpha = 30°$ y generatriz $l = 40$ cm, que rueda uniformemente sin deslizar sobre el plano $z = 0$ de un sistema de referencia S{O, x, y, z}, con su vértice fijo en el origen de coordenadas, pasando sobre el semieje Oy tres veces cada minuto. Un punto móvil P recorre una generatriz del cono, **OA**, con aceleración constante respecto al cono, de valor
$\mathbf{a} = 3{,}2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. En el instante inicial $t = 0$, el punto P se encuentra en el vértice del cono y su velocidad es nula, la generatriz **OA** está situada sobre el semieje Ox, siendo $\mathbf{OA} \cdot \mathbf{i} > 0$ y el cono se mueve de forma que la velocidad de su centro de masas, $\mathbf{v}_C$, satisface la condición $\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j} > 0$.

Se define otro sistema de referencia $S_I\{O, x_I, y_I, z_I\}$, que tiene el origen y el tercer eje coincidentes con los respectivos de S, y se mueve de forma tal que el eje del cono siempre permanece en reposo en S_I. En $t = 0$ los triedros de S y S_I coinciden.

Cuando el punto móvil P llega a la base del cono, determine:

1) Intervalo de tiempo transcurrido desde el instante inicial.
2) Posición del cono y del punto P en la referencia S, dibujando un croquis al respecto.
3) Para el movimiento del cono respecto a S_I, ecuación del eje instantáneo de rotación y valor de la rotación instantánea, expresando las soluciones en las coordenadas y base del sistema S.
4) Para el movimiento del cono respecto a S, ecuación del eje instantáneo de rotación y valor de la rotación instantánea, expresando las soluciones en las coordenadas y base del sistema S.
5) Velocidad de P respecto al cono, expresando sus componentes en la base del sistema S.
6) Velocidad de P respecto a S_I, expresando sus componentes en la base del sistema S.
7) Velocidad de P respecto a S, expresando sus componentes en la base del sistema S.
8) Aceleración de P respecto al cono, expresando sus componentes en la base del sistema S.
9) Aceleración de P respecto a S_I, expresando sus componentes en la base del sistema S.
10) Aceleración de P respecto a S, expresando sus componentes en la base del sistema S.

NOTA:
Los resultados obtenidos se simplificarán y se expresarán, en su caso, en función de números irracionales, sin efectuar operaciones con valores aproximados de estos últimos.

Sep 97

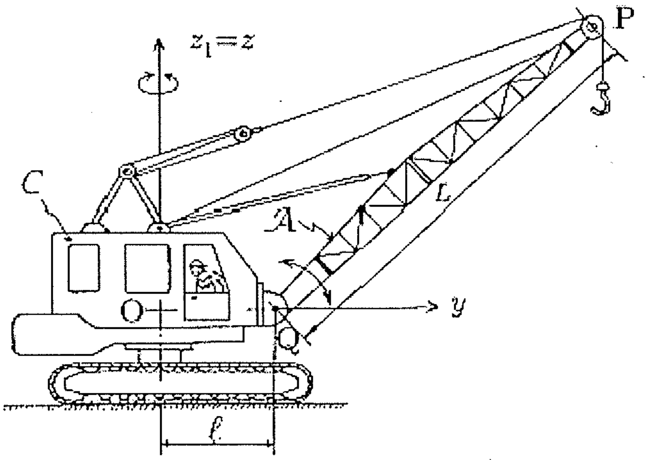
PROBLEMA CIN.REL.2 (JUN 2005)

El sistema de referencia representado, S $\{O, x, y, z\}$ es solidario a la cabina C, estando el eje z situado sobre el eje de giro de la cabina y siendo además coincidente en dirección y sentido con z_1 del sistema ligado al suelo S_1.
La cabina C de la grúa gira en torno a la vertical con velocidad angular $\omega_1(t)\boldsymbol{k}_1$, al mismo tiempo la pluma o aguilón $\mathcal{A}$, se levanta respecto a la cabina con una velocidad angular $\omega_2(t)\boldsymbol{i}$ y se consideran en reposo las orugas o tren de desplazamiento de la grúa.
El anclaje de la pluma a la cabina en el punto Q, está situado a una distancia ℓ del eje de giro de la cabina y la longitud de la pluma es L.
I) Se piden, expresadas en S:

1) Velocidad angular $\omega_{\mathcal{A}/S_1}$ y aceleración angular $\alpha_{\mathcal{A}/S_1}$ de la pluma respecto de la referencia S_1.

II) En esta segunda parte se considera la situación:

- Reposos de las orugas o tren de desplazamiento de la grúa.
- Rotaciones $\omega_1(t) = \text{cte.} = \omega_1$ y $\omega_2(t) = \text{cte.} = \omega_2$.
- Ángulo de la pluma con la horizontal = β.



Se piden las siguientes magnitudes expresándolas en S.

2) Velocidad y aceleración del punto Q, extremo de apoyo de la pluma, respecto al suelo (S_1), $\boldsymbol{v}_{Q/S_1}$ y $\boldsymbol{a}_{Q/S_1}$.

3) Velocidad del punto P, extremo de la pluma, respecto al suelo (S_1), $\boldsymbol{v}_{P/S_1}$.

4) Aceleración del punto P respecto al suelo (S_1), $\boldsymbol{a}_{P/S_1}$.

5) Velocidad y aceleración del punto P respecto a la cabina (S), $\boldsymbol{v}_{P/S}$ y $\boldsymbol{a}_{P/S}$.

Considerando el movimiento de $\mathcal{A}$ respecto a S_1 descompuesto en los movimientos de $\mathcal{A}$ respecto a C y de C respecto a S_1, determine las siguientes magnitudes expresándolas en S.

6) Velocidad y aceleración de arrastre del punto P.

7) Aceleración de Coriolis del punto P.

8) Compruebe que la solución de los apartados 3) y 4) coincide con la obtenida a partir de los apartados 5), 6) y 7).

III) En esta tercera y última parte, el gancho de amarre que pende del cable de sustentación está a distancia h de P y tiene masa m.

9) Siendo $\omega_1 = \omega_2 = 0$, el carro avanza rectilíneamente con aceleración constante de valor a. Determine el ángulo constante γ (por medio de su tangente, $\operatorname{tg}\gamma$) que forma la vertical con el cable, y su tensión, en condiciones de movimiento estacionario.

10) Siendo $\omega_2 = 0$ y $\omega_1 = \text{cte.}$ y estando el carro parado, determine el ángulo constante γ (por medio de su tangente, $\operatorname{tg}\gamma$) que forma la vertical con el cable, y su tensión, en condiciones de movimiento estacionario, facilitando las ecuaciones que proporcionan $\operatorname{tg}\gamma$ y T en función de datos del enunciado.

Indusbol.com

DINÁMICA DEL PUNTO

1 LEYES DE NEWTON

1ª ley: PRINCIPIO DE INERCIA

Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o mov. rectilíneo uniforme a no ser que aquel estado se modifique aplicando al cuerpo una fuerza

2ª ley: LEY FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA

La aceleración es proporcional a la fuerza aplicada, coincidiendo con ella en dirección y sentido

3ª ley: PRINCIPIO DE ACCIÓN - REACCIÓN

La reacción es siempre igual y contraria a la acción, es decir, las acciones mutuas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y contrarias

Las leyes de Newton son validas en sistemas de referencia inerciales (en reposo o movimiento rectilíneo uniforme)

2 ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA (2ª ley)

2.1 ECUACIONES CARTESIANAS

La fuerza puede depender de la posición, la velocidad y del tiempo. Así, sus ecuaciones serán:

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = m\cdot\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \begin{cases} m\cdot\ddot{x} = F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \\ m\ddot{y} = F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \\ m\ddot{z} = F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \end{cases}$$

2.2 ECUACIONES INTRÍNSECAS

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \begin{cases} F_t = m a_t = m\dfrac{d|\vec{v}|}{dt} \\ F_n = m a_n = m\dfrac{v^2}{\rho_c} \\ F_b = 0 \end{cases}$$

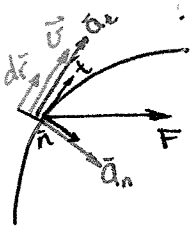
3 MAGNITUDES CINÉTICAS

- Cantidad de movimiento o momento lineal, $\vec{p}$: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$
- Momento cinético L_o (momento de la cantidad de movimiento): $\vec{L}_o = \vec{OP}\times m\vec{v}$ $\boxed{L_o = \vec{r}\times\vec{p}}$
- Energía cinética $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$

4 TRABAJO Y POTENCIA

4.1 TRABAJO

El trabajo que realiza una fuerza $\vec{F}$ cuando su punto de aplicación se desplaza un $d\vec{r}$ es:



$$d\tau = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\theta = F\,ds\cos\theta = F_t\,ds$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}\ ;\ \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = |\vec{t}| = 1 \Rightarrow |d\vec{r}| = ds$$

Por tanto $\boxed{d\tau = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz}$

Para obtener el trabajo realizado integraremos de tal forma que

$$\boxed{\tau = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r}}$$

{Es un escalar
Unidades: julios}

Además, podemos decir que $d\tau = \vec{F}\,d\vec{r} = F\,\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \vec{F}\cdot\vec{v}\cdot dt$

Por tanto $\boxed{d\tau = \vec{F}\,\vec{v}\,dt}$

4.2 POTENCIA

Es el trabajo realizado en la unidad de tiempo $\boxed{W = \frac{d\tau}{dt} = F\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}}$

{Es un escalar
Unidad: Watio}

5 TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA DEL PUNTO

5.1 TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

"La variación de la cantidad de movimiento con el tiempo es igual a la F resultante"

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

NOTA! Si $\Sigma F = 0 \Longrightarrow \vec{p} = cte$

5.2 TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d(m\vec{v}\times\vec{r})}{dt} = \underbrace{\cancel{m\vec{v}\times\frac{d\vec{r}}{dt}}}_{0 \text{ pues } \vec{v}\,//\,d\vec{r}} + \vec{r}\times\frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{r}\times\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}_o \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}_o}$$

5.3 TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

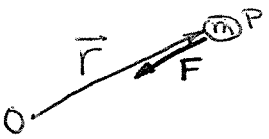
$$\boxed{\tau_{1,2} = \Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1}}$$

FALTA Dinámica de sist. puntuales de masa variable (cohete)
Dinámica del punto sobre la curva → Pág 7

6 EJERCICIOS DINÁMICA DEL PUNTO

(2) Demostrar que un punto material sometido a una fuerza central que pasa por un punto fijo describe una trayectoria plana

Por el teorema del momento cinético



$$\frac{dL_o}{dt} = \frac{d\,m\vec{v}\times\vec{r}}{dt} = \underbrace{\cancel{m v \times \frac{d\vec{r}}{dt}}}_{0} + r\times\frac{dmv}{dt} = r\times\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \underset{\vec{r}\,//\,\vec{F}}{=} \bar{0}$$

1^er^ método (gráfico)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r} \perp (L_o = cte)\\ \vec{v} \perp (L_o = cte)\end{array}\right\} r \in (\Pi\ cte) \text{ con } \Pi \perp L_o$$

2º método (analítico)

Sea $O(0,0,0)$ punto fijo
$P(x,y,z) \in$ trayec.
$L_o(C_1, C_2, C_3)$

$r \perp L_o \rightarrow L_o\cdot r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0}$

Ecuación de un plano $\Rightarrow$ Trayectoria plana

(3) Movimiento rectilíneo en X de partícula "m", $\left|\begin{array}{l}F_{motriz}\ (cte)\\ F_{disipativa/viscosa}\end{array}\right.$

Ec. movimiento $\left\{ m\frac{d\dot{x}}{dt} = F - K\eta v \right.$. Se pide $\dfrac{dE_{disipada}}{dt}$

NOTA! Toda fuerza disipativa se opone al movimiento

$F_{dis} = -K\eta v \vec{\imath}$

$E_{disipada}$ es el $\tau_{F\,disip} \Rightarrow \dfrac{dE_{dis}}{dt} = \dfrac{d\tau}{dt} = F_{dis}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = -K\eta v \vec{\imath}\,\dfrac{dx}{dt}\vec{\imath} =$

$= \boxed{-K\eta v^2}$

(4) Demuestre la ley de las áreas para una masa puntual m bajo la acción de una fuerza central

Con F central de punto fijo O diremos que (tma. del momento cinético)

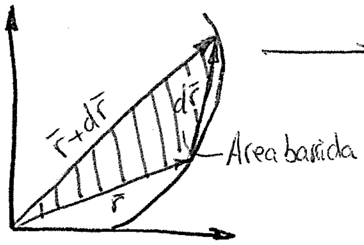
$\vec{r}\,//\,\vec{F}$

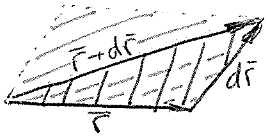
$$\frac{dL_o}{dt} = r\times\frac{dmv}{dt} = r\times F \overset{\vec{r}//F}{=} \bar{0} \longrightarrow L_o = cte$$

Con trayectoria plana y usando cilíndricas $\left\{\begin{array}{l}\vec{r} = \rho\vec{U}_\rho\\ \vec{v} = \dot{\rho}U_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi\end{array}\right. \longrightarrow L_o = \vec{r}\times m\vec{v} =$

$$= m\begin{vmatrix} U_\rho & U_\varphi & U_z\\ \rho & 0 & 0\\ \dot{\rho} & \rho\dot{\varphi} & 0\end{vmatrix} = m\rho^2\dot{\varphi}U_z = cte$$

Definimos $\sigma_{aerolar}$





$dA_{TOTAL} = \vec{r} \times d\vec{r}$

$dA_{BARRIDA} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}$

$$\boxed{\sigma_{aerolar} = \frac{1}{2} \frac{dA_{BAR}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{dt}}$$

Por tanto $\sigma_{aer.} = \frac{1}{2} r \times \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{\sigma}$

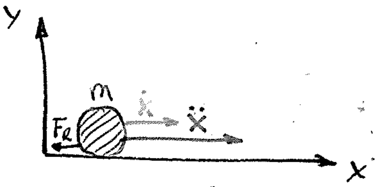
$L_o = \vec{r} \times m\vec{v} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m\rho\varphi^2 v_z = cte \Big\} \; r \times v = \rho\varphi^2 v_z = cte = \frac{L_o}{m}$

$\sigma_{aer} = \frac{1}{2}\rho\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{L_o}{m} = cte \Rightarrow \boxed{\text{Si } L_o = cte,\ \sigma_{aerolar} \text{ es cte}}$

(6) Masa (m) con movimiento rectilíneo en X. $F_{ROZ} = -K\dot{x}\vec{\imath}$

$v = \dot{x}\vec{\imath}$

$v_{(t=0)} = v_o$; $v_{final} = 0$ Calcule X_{final}



Considero $X_{t=0} = 0$

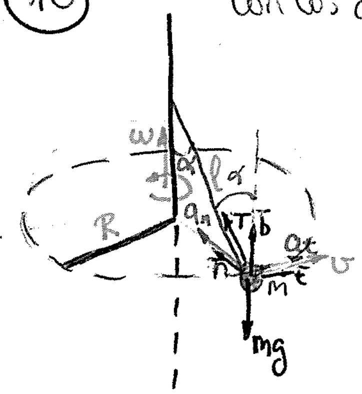
Por tma. fundamental de la dinámica

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{\imath}: -K\dot{x} = m\ddot{x}$

$-K\dot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dx}{dx} \Rightarrow -K\,dx = m\,d\dot{x}$

$-K\int_{x=0}^{x_f} dx = m\int_{v_o}^{v_f=0} d\dot{x}$; $-K\,X_{final} = m\,\dot{x}\Big|_{v_o}^{0}$; $\boxed{X_{final} = \frac{m v_o}{K}}$

(10) Con los datos de la figura m, l, R<l. Se pide $\tau = \tau_{(R/l)}$ (periodo de revolución)



Planteo $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ en intrínsecas

NOTA! En problemas donde no se especifique dirección no podemos colocar el peso

$\vec{t}: \; 0 = m\,a_t \Rightarrow a_t = \frac{d|v|}{dt} = 0$

$\Rightarrow |v| = cte = WR$

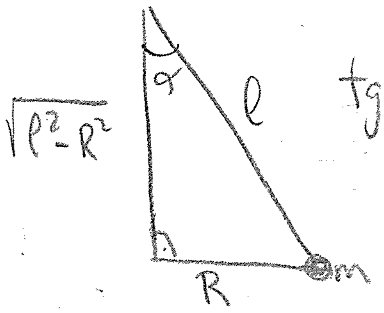
Como R cte, v cte $\rightarrow \bar{w} = cte = \frac{2\pi}{\tau}$; $\tau = \frac{w}{2\pi}$

$\vec{n}: \; T\,sen\,\alpha = m\,a_n \; (1)$

$\vec{b}: \; T\cos\alpha - mg = 0 \rightarrow T\cos\alpha = mg \; (2)$

$$\begin{cases} T\,\text{sen}\,\varphi = m\,a_n \\ T\cos\varphi = mg \end{cases} \qquad \left(\text{Como } a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{w^2R^2}{R} = w^2R\right)$$

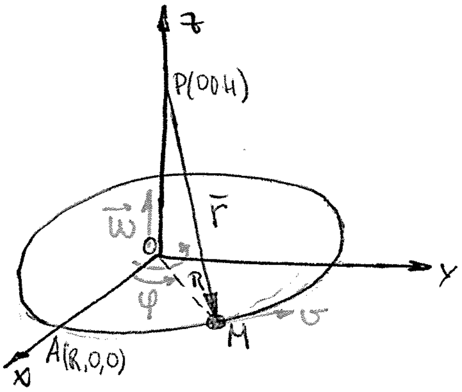
Dividiendo ecuaciones $\quad \text{tg}\,\varphi = \frac{w^2R}{g} \Rightarrow g\frac{\cancel{R}}{\sqrt{l^2-R^2}} = w^2\cancel{R}$



$$\text{tg}\,\varphi = \frac{R}{\sqrt{l^2-R^2}} \qquad w = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2-R^2}}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{l^2-R^2}}{g}}}$$

(13) Circunferencia radio R en $\Pi z=0$ con centro $O(0,0,0)$
Punto material M con $\vec{w} = \text{cte}$. En $t=0 \to \underbrace{A(R,0,0)}_{\text{Posición } t=0}$
Determinar $\forall t$ $\vec{L}_P$ del punto $P(0,0,H)$

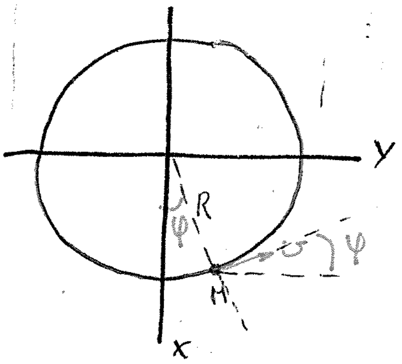


$$L_P = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{PM}\times M\vec{v}$$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = (0,0,-H) + R(\cos\varphi, \text{sen}\,\varphi, 0)$$

$$\vec{v} = |\vec{v}|(-\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = wR(-\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})$$

$$w = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \int_{\substack{\varphi=0\\t=0}}^{\varphi} d\varphi = w\int_{t=0}^{t} dt \Rightarrow \varphi = wt$$



$$\vec{L}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos\varphi & R\,\text{sen}\,\varphi & -H \\ MwR(-\text{sen}\,\varphi) & MwR\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= HMwR\cos\varphi\,\vec{i} + HMwR\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{j} + \Big(\underbrace{MwR^2\cos^2\varphi + MwR^2\text{sen}^2\varphi}_{1}\Big)\vec{k} \overset{\varphi = wt}{=}$$

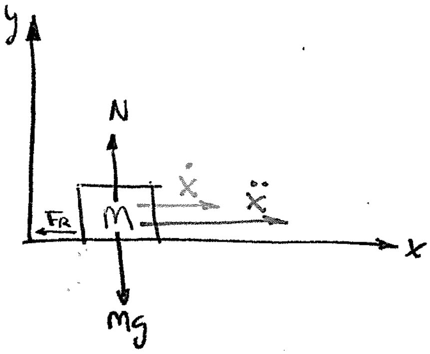
$$= HMwR\cos(wt)\,\vec{i} + HMwR\,\text{sen}(wt)\,\vec{j} + MwR\,\vec{k} = MwR\big[H\cos(wt)\,\vec{i} + H\text{sen}$$

$$= \boxed{MwR\left[H\cos(wt)\,\vec{i} + H\,\text{sen}(wt)\,\vec{j} + R\vec{k}\right)}$$

(14) Bloque puntual (m). Mov. rectilíneo en eje X. Datos $\begin{cases} \mu_{dinamico} \\ v_{t=0} = v_0 \\ X_{t=0} = 0 \end{cases}$

Se pide, mediante el teorema de la Tcinética, la relación entre v y x mientras la masa esté en movimiento.

Por tma. Ec $\longrightarrow$ $\tau_{\substack{TODAS \\ FUERZAS}} = \Delta E_c$



$$\tau_N = \tau_{mg} = 0 \begin{cases} \tau_N = \int N v\, dt \overset{N \perp v}{=} 0 \\ \tau_{mg} = \int mg\, v\, dt \overset{mg \perp v}{=} 0 \end{cases}$$

$$\tau_{FROZ} = \int \vec{F_R} \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F_R} = -N\mu \vec{i}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \; : \vec{j} : \; N - mg = 0 \longrightarrow N = mg$

$r = x\vec{i} \longrightarrow d\vec{r} = dx\, \vec{i}$

Por tanto:

$$\tau_{FROZ} = \int_{x=0}^{x} -N\mu \vec{i}\, dx \vec{i} = -N\mu \int_0^x dx = -N\mu x = -mg\mu x$$

$$\tau_{TOTAL} = -\cancel{m} g \mu x = \Delta E_c = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 - \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - g\mu x \; ; \; \boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2g\mu_d x}}$$

7 DINÁMICA DEL PUNTO SOBRE LA CURVA

Un punto material puede ligarse con una curva mediante:

- Enlace unilateral: La partícula apoya en la curva y la reacción de esta sólo puede tener un sentido. Si se anula, la partícula se separa de la curva
- Enlace bilateral: La partícula está ensartada en la curva y la reacción de ésta puede tener ambos sentidos. La partícula nunca se separará de la curva

Con vínculo liso no hay F_{ROZ} entre el punto y la curva y la reacción es perpendicular a la tangente de la curva en el punto. Dicho fuerza no realiza trabajo

7.1 ECUACIONES INTRÍNSECAS CON CURVA FIJA Y LISA

[Siendo l (param. arco)]

$$\begin{cases} \vec{t}: F_t = m\ddot{l} \\ \vec{n}: F_n + N_n = m\dfrac{\dot{l}^2}{\rho} \Rightarrow \text{Reacción curva-partícula } \vec{N} = \underbrace{N_t}_{0\ (N_t = F_R = 0 \text{ por vínculo liso})}\vec{t} + N_n\vec{n} + N_b\vec{b} \\ \vec{b}: F_b + N_b = 0 \end{cases}$$

DINÁMICA DEL PUNTO

1-.LEYES O PRINCIPIOS DE NEWTON

1ª Ley: Principio de Inercia.

Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a no ser que aquel estado se modifique aplicando al cuerpo una fuerza.

2ª Ley: Ley fundamental de la dinámica.

La aceleración (cambio en el estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme) es proporcional a la fuerza aplicada, coincidiendo con ella en dirección y sentido.

3ª Ley: Principio de acción y reacción.

La reacción es siempre igual y contraria a la acción, es decir, las acciones mutuas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y contrarias.

Las leyes de Newton son válidas en sistemas de referencia inerciales (es decir, en estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, sin aceleración)

2-. ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA (2ª LEY)

2.1.- ECUACIONES CARTESIANAS:

La forma más general de la ecuación fundamental de la dinámica, expresada en coordenadas cartesianas, es la siguiente:

$$\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)=m\cdot\ddot{\vec{r}}\Rightarrow\begin{cases}m\cdot\ddot{x}=F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\\ m\cdot\ddot{y}=F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\\ m\cdot\ddot{z}=F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\end{cases}$$

es decir, la fuerza puede depender de la posición, la velocidad y el tiempo, y la ecuación vectorial da lugar a tres ecuaciones escalares diferenciales de segundo orden.
La ecuación vectorial la podremos expresar en otras referencias, por ejemplo en cilíndricas o esféricas, proyectándola en la dirección de los versores correspondientes.

2.2.- ECUACIONES INTRÍNSECAS:

Si expresamos la ecuación fundamental de la dinámica en el triedro intrínseco obtendremos las ecuaciones intrínsecas. Proyectando los vectores fuerza y aceleración en el triedro queda:

$$F_t=m\cdot a_t=m\cdot\frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

$$F_n=m\cdot a_n=m\cdot\frac{|\vec{v}|^2}{\rho_c}$$

$$F_b=0$$

3.-MAGNITUDES CINÉTICAS

Llamamos así a tres magnitudes que dependen de la velocidad y la masa del punto:

a) Cantidad de movimiento o Momento lineal, $\vec{p}$:

Siendo m la masa del punto y $\vec{v}$ su velocidad, se define $\vec{p}$ como:

$$\vec{p} = \mathrm{m} \cdot \vec{v}$$

b) Momento cinético:

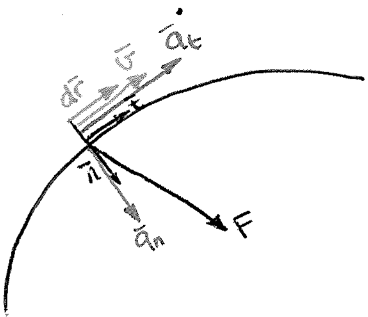
Siendo m la masa del punto material P, $\vec{v}$ su velocidad y O un punto del espacio, se define el momento cinético $\vec{L}_O$ del punto material P respecto de O como el momento de la cantidad de movimiento $\vec{p}$ respecto de O. Si es O el origen de coordenadas:

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \times \mathrm{m} \cdot \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

c) Energía cinética:

Su unidad en el S.I. es el *julio*. Es un escalar que se define como:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$



4.- TRABAJO Y POTENCIA

4.1-TRABAJO

El trabajo elemental que realiza una fuerza $\vec{F}$ cuando su punto de aplicación se desplaza $d\vec{r}$ según una curva C es:

$$d\tau = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot cos\theta = F \cdot ds \cdot cos\theta = F_t \cdot ds$$

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$; $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = |\vec{t}| = 1$

$|d\vec{r}| = ds$

Si $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ y $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$, entonces:

$$d\tau = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

Para obtener el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento finito habrá que integrar la expresión anterior a lo largo del recorrido sobre la curva C, desde el punto inicial 1 hasta el final 2:

$$\tau = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

El trabajo, por tanto, es un escalar con su signo, que dependerá en general de la curva C o trayectoria que une los puntos inicial 1 y final 2. Al igual que la energía, tiene unidades de julios.

Operando en la expresión del trabajo elemental:

$$\mathrm{d}\tau = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

4.2.- POTENCIA

La potencia es el trabajo realizado en la unidad de tiempo, o la derivada del trabajo respecto del tiempo:

$$W = \frac{d\tau}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Es también un escalar, y su unidad en el S.I. es el Wattio.

5.- TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA DEL PUNTO

5.1.- TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La variación de la cantidad de movimiento con el tiempo es igual a la fuerza resultante aplicada sobre la partícula. Para un sistema con m independiente de t:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Si no hay fuerzas actuando sobre el punto material, la cantidad de movimiento se mantiene constante. $\Longrightarrow \sum F = 0$

5.2.- TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

La variación con el tiempo del momento cinético de una partícula material P de masa m respecto de un punto fijo O es igual al momento respecto de O de las fuerzas aplicadas sobre P. Siendo O el origen y llamando $\vec{r}$ a $\vec{OP}$:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{dt} = \cancel{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times m \cdot \vec{v}} + \vec{r} \times \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

$0 \leftarrow \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ por $(\parallel)$

Si $\vec{F}$ no da momento en O (nula o paralela a $\vec{r}$), $\vec{L}_O$ se mantiene constante. $\Rightarrow \sum \vec{M}_0 = 0$ si $\begin{cases} \vec{F} = 0 \\ \vec{F} \neq 0,\ \vec{r} \parallel \vec{F} \end{cases}$

5.3.-TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

El trabajo de las fuerzas aplicadas sobre la partícula material se traduce en un incremento de la energía cinética de la partícula:

$$\tau_{12} = W_{12} = \Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1}$$

Si las fuerzas aplicadas no realizan trabajo, se conserva la energía cinética de la partícula.

Dinámica relativa

6.- DINÁMICA DE LOS SISTEMAS PUNTUALES DE MASA VARIABLE

Cohetes!

Para un punto material que intercambia masa con el entorno en su movimiento (por ejemplo, un cohete), la ecuación fundamental de la dinámica aplicada a ese punto queda:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \dot{m} \cdot \vec{v}_e$$

donde m es la masa en un instante determinado, $\vec{v}$ es la velocidad del punto, $\vec{F}$ es la fuerza aplicada al punto, $\dot{m}$ es la variación de masa con el tiempo, dm/dt, y $\vec{v}_e$ es la velocidad relativa al punto de la masa aportada o desprendida. Es fundamental la elección correcta de los signos de $\vec{v}_e$ y $\dot{m}$ ($\dot{m}>0$ si se gana masa, $\dot{m}<0$ si se pierde masa).

7.-DINAMICA DEL PUNTO SOBRE CURVA

Se estudia la dinámica del punto ligado a una curva. En el estudio entra en juego la reacción de la curva sobre la partícula que evita que ésta abandone la curva, buscándose en la resolución del problema tanto la posición del punto como el valor de dicha reacción en cada instante.
Se considerarán en general curvas lisas y fijas, sin rozamiento, por lo que la reacción será normal a la curva. El valor de la reacción será desconocido a priori.
El punto material puede estar ligado a la curva con enlace unilateral o bilateral

- Enlace unilateral: la partícula se apoya en la curva, la reacción de la curva sobre la partícula sólo puede tener un sentido, y si se anula, la partícula se puede separar de la curva (deja de haber contacto entre ambas)
- Enlace bilateral: la partícula está ensartada en la curva, la reacción de la curva sobre la partícula puede tener ambos sentidos, puede anularse y cambiar de signo, y la partícula no puede separarse de la curva nunca.

Con vínculo liso, no hay rozamiento entre punto y curva, la reacción es perpendicular a la tangente a la curva (está contenida en el plano perpendicular a la curva en cada punto), y dicha fuerza no realiza trabajo.

7.1.- ECUACIONES INTRÍNSECAS CON CURVA FIJA Y LISA

Si la curva es fija y lisa, curva y trayectoria coinciden, y sus triedros intrínsecos también. Considerando la abscisa curvilínea (parámetro arco) l y $\vec{F}$ y $\vec{N}$ en componentes intrínsecas, se obtiene

$$\begin{cases} \vec{t} : F_t = m\underbrace{\ddot{l}}_{a_t} \\ \vec{n} : F_n + N_n = m\underbrace{\left(\frac{\dot{l}^2}{\rho}\right)}_{a_n} \\ \vec{b} : F_b + N_b = 0 \end{cases}$$

Reacción curva-partícula $\vec{N} = \underbrace{N_t \vec{t}}_{0} + N_n \vec{n} + N_b \vec{b}$

0 ($N_t = F_R = 0$ si curva es lisa)

8.- DINAMICA RELATIVA DEL PUNTO. FUERZAS DE INERCIA.

8.1-. ECUACIONES DE LA DINÁMICA RELATIVA DEL PUNTO

Se analiza el movimiento de un punto P respecto de un sistema no inercial S que a su vez se mueve respecto de un sistema inercial S_I.
Según ya se ha visto, la ecuación que rige la dinámica del punto material en su movimiento respecto de un sistema inercial S_I es:

$$\vec{F}_P = m\vec{a}_{P/S_1} \begin{cases} \vec{F}_P : resultante\ de\ las\ fuerzas\ sobre\ P \\ m : masa\ del\ punto \\ \vec{a}_{P/S_1} : aceleración\ respecto\ de\ S_1 \end{cases}$$

Por composición de movimientos se obtienen las relaciones:
Para velocidades $\vec{V}_{P/S_1} = \vec{V}_{P/S} + \vec{V}^P{}_{S/S_1}$ (ó $\vec{V}_{21}{}^P = \vec{V}_{20}{}^P + \vec{V}_{01}{}^P$ ó $\vec{V}_{ABS}{}^P = \vec{V}_{REL}{}^P + \vec{V}_{ARR}{}^P$)
donde si O es un punto de S, es $\vec{V}^P{}_{S/S_1} = \vec{V}^O{}_{S/S_1} + \vec{\omega}_{S/S_1} \times \vec{OP}$

CLASE

EJERCICIO DIN.PTO.1 (Feb-95)

A partir de la ecuación fundamental de la Dinámica clásica, deduzca el teorema de la energía cinética para un punto material y escriba su enunciado.

EJERCICIO DIN.PTO.2 (Jun 96)

Demuestre que un punto material sometido a una fuerza central que pasa por un punto fijo describe una trayectoria plana.

EJERCICIO DIN.PTO.3 (Jun 97)

Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente sometido a una fuerza motriz constante **F** y a una fuerza disipativa de tipo viscoso. Su movimiento viene determinado por la ecuación $m\frac{d\dot{x}}{dt} = F - k\eta v$. Determine el valor de la energía disipada en la unidad de tiempo.

EJERCICIO DIN.PTO.4 (Feb 00)

Demuestre la ley de las áreas para el movimiento de un punto material bajo la acción de una fuerza central.

EJERCICIO DIN.PTO.5 (Jun-00)

Determine la energía perdida por rozamiento por un cuerpo que ha bajado deslizando sin rodar por un plano inclinado de altura h y ángulo de inclinación α por acción de la gravedad g, siendo μ el valor del coeficiente dinámico de rozamiento cuerpo-plano.

EJERCICIO DIN.PTO.6 (Sep-00)

En el marco de la Dinámica clásica, un punto material de masa m se mueve rectilíneamente sobre un plano horizontal sometido a una fuerza de rozamiento, colineal y opuesta a su velocidad, y directamente proporcional a dicha velocidad (constante k). Si en el instante t = 0 su velocidad es v_0, calcule la distancia recorrida hasta que el punto material se detiene.

EJERCICIO DIN.PTO.7 (Feb 2002)

Un punto material de masa *m* describe una trayectoria plana bajo la acción de una fuerza cuya línea de acción pasa permanentemente por el origen de coordenadas de un sistema inercial. Expresar el momento cinético del punto en coordenadas polares y demostrar que es constante.

EJERCICIO DIN.PTO.8 (SEPT 2002)

El vector de posición de un móvil de masa *m* respecto a una referencia inercial viene dado en función del tiempo por: $\mathbf{r}(t) = A \cos \omega t\ \mathbf{i} + B \text{ sen } \omega t\ \mathbf{j}$. Justificar que se trata de un movimiento bajo la acción de una fuerza central dirigida permanentemente hacia el origen de coordenadas y obtener la expresión de la variación temporal del vector momento cinético del móvil respecto a dicho origen.

EJERCICIO DIN.PTO.9 (Jun 2003)

Un móvil de masa m es forzado a recorrer una curva Γ con una velocidad cuyas componentes cartesianas son: $\left\{\begin{aligned} v_x &= -\omega R \operatorname{sen}\omega t \\ v_y &= \omega R \cos\omega t \\ v_z &= (p/2\pi)\,\omega \end{aligned}\right\}$, siendo ω una constante. Determinar las componentes intrínsecas de la resultante de fuerzas que actúan sobre el mismo (según los vectores tangente, normal y binormal a la trayectoria).

EJERCICIO DIN.PTO.10 Jun 2003)

Una masa m colgada de un punto fijo por medio de un hilo flexible, inextensible y de masa despreciable de longitud l, se mueve de forma permanente según una circunferencia horizontal de radio $R < l$. Determinar el periodo τ, del movimiento de la masa (tiempo necesario para describir una circunferencia completa) en función de la relación R/l.

EJERCICIO DIN.PTO.11(JUN 2002) (Sep 2004)

Un punto material de masa m describe una trayectoria plana. Expresar su momento cinético en coordenadas polares.

EJERCICIO DIN.PTO.12(SEP 2006)

Un punto de masa m se mueve a lo largo de una curva definida por el vector $r = (2t+1)i + (t^2+1)j + t^3k$. La fuerza de resistencia que se opone al movimiento viene dada por $R = -kv$, k constante. Determinar el trabajo de dicha fuerza resistente en el intervalo de tiempo de $t = 0$ s a $t = 1$ s. [Ind: Todas las magnitudes se expresan en el sistema internacional]

EJERCICIO DIN.PTO.13(SEP 2007)

Una circunferencia de radio R situada en el plano $z = 0$ está centrada en el origen de coordenadas $O(0,0,0)$. Un punto material de masa M recorre dicha circunferencia con velocidad angular ω constante. Si en el instante $t = 0$ pasa por el punto $(R,0,0)$, determinar, para todo instante t, el momento cinético L_P respecto al punto $P(0,0,H)$.

EJERCICIO DIN.PTO.14(FEB 2008)

Un bloque puntual de masa m se lanza sobre un plano horizontal, en el sentido positivo del eje Ox. El coeficiente de rozamiento dinámico es μ_d y en el origen de coordenadas, $x = 0$, la velocidad es v_0. La única fuerza resultante es la del rozamiento. Determinar, utilizando el teorema de la energía cinética, la relación entre la velocidad v y la posición x mientras la masa se mantenga en movimiento.

EJERCICIO DIN.PTO.15 (JUN 2010)

Una masa puntual de valor m =1 kg se mueve sobre el eje Ox, de una referencia inercial, bajo la acción de una fuerza de valor $F_x(t) = 3t^2 + \operatorname{sen} t$, dada en unidades del SI. Se sabe que en $t = 0$ pasa por el origen de coordenadas con una velocidad $v_x(0) = 0$. Determinar $v_x(t)$ y $x(t)$, para todo t.

REPASO

EJERCICIO R-DIN.PTO.1 (Jun-95)

Un automóvil ejerce una fuerza de frenado constante que lo detiene en un espacio de 30 metros en un tiempo de 3 segundos. Determine la velocidad inicial del automóvil en km/h.

EJERCICIO R-DIN.PTO.2 (Sep 95)

Deduzca la condición necesaria y suficiente para que en mecánica clásica, un punto material describa una trayectoria curvilínea con velocidad de módulo constante.

EJERCICIO R-DIN.PTO.3 (Jun-97)

Escriba la ecuación fundamental de la Dinámica del punto en el caso de masa variable, indicando el significado de cada uno de los símbolos utilizados.

EJERCICIO R-DIN.PTO.4 (Sep-97)

Se considera un punto material que se mueve exclusivamente por acción de una fuerza que, en el caso más general, depende de la velocidad, de la posición y del tiempo. ¿Qué ley de fuerza debería actuar sobre el punto para que la componente de la fuerza según la binormal a la trayectoria resulte siempre nula?

EJERCICIO R-DIN.PTO.5 (Feb 99)

Un bloque de masa $m = 100$ kg. se desplaza con aceleración constante $a = 1$ m/s^2, sobre un plano horizontal rugoso de coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}1$. Determine la potencia de la fuerza motriz que debe aplicarse al bloque cuando su velocidad es de 10 m/s.

EJERCICIO R-DIN.PTO.6 (Sep-01)

Determinar la máxima velocidad, v, supuesta constante, con la que un automóvil puede describir una trayectoria de radio R sobre un plano horizontal rugoso de coeficiente de rozamiento μ para la superficie.

EJERCICIO R-DIN.PTO.7 (Sep-01)

El vector de posición de un móvil de masa m viene dado en unidades del SI por:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + (t/2\pi)\, \mathbf{k}$$

Determinar en función del tiempo su vector momento cinético respecto al origen.

EJERCICIO R-DIN.PTO.8 (Feb 2003)

Un móvil de masa m es forzado a recorrer una curva Γ con una velocidad de módulo constante v. Determinar las componentes intrínsecas de la resultante de fuerzas que actúan sobre el mismo (según los vectores tangente, normal y binormal a la trayectoria) en un punto dado en el que dicha trayectoria tiene un radio de curvatura ρ.

EJERCICIO R-DIN.PTO.9 (JUN 2006)

Un móvil puntual de masa m se mueve con velocidad $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ bajo la acción de una fuerza $\boldsymbol{F} = 1\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Determinar la potencia instantánea desarrollada por la fuerza.

EJERCICIO R-DIN.PTO.10 (JUN 2008)

Un pistón circular, de seccion S y masa despreciable, soporta sobre su cara superior perpendicular al eje Oz un sólido de masa M. Si para $t = 0$ sobre la parte inferior del pistón actúa una fuerza, $F > Mg$, externa vertical y hacia arriba, determinar la aceleración a con la que sube el sólido.

PROBLEMA DIN.PTO.1 (Feb 99)

Un punto material P, de masa $m = 0,1$ kg, se mueve en el plano Oxy atraído por una fuerza directamente proporcional a la distancia al origen de coordenadas, con constante de proporcionalidad $k = 12 \cdot 10^3$ N/m.

1) Demuestre que los movimientos proyectados sobre los ejes Ox y Oy son movimientos armónicos de igual frecuencia y determine la frecuencia angular común en rad/s.

2) Si en el instante inicial el punto P se encuentra en $P_0(x_0, y_0)$ y su velocidad es $v_0 = \dot{x}_0\,\mathrm{i} + \dot{y}_0\,\mathrm{j}$, determine las ecuaciones del movimiento sabiendo que

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,1 \text{ m} \qquad & \dot{x}_0 &= 20 \text{ m/s} \\ y_0 &= 0,05 \text{ m} \qquad & \dot{y}_0 &= 30 \text{ m/s} \end{aligned}$$

expresando dichas ecuaciones en unidades del sistema internacional (SI).

3) Obtenga la ecuación de la trayectoria de P en coordenadas cartesianas y compruebe que es una elipse.

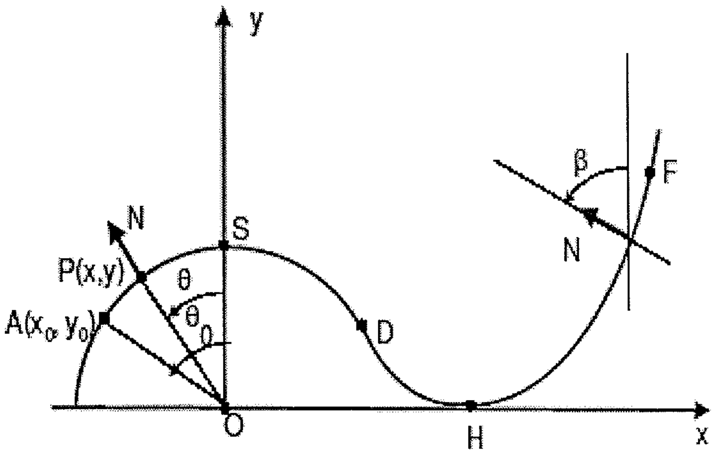
4) Determine las direcciones de los ejes de la elipse y el valor de la longitud de sus semiejes.

5) Represente la elipse y la posición inicial del punto P sobre la misma.

* * * * * * *

Se permite el uso individual de calculadora SIN información previa. La existencia en la calculadora de información almacenada o programada relacionada con el temario de la asignatura supondrá la

PROBLEMA DIN.PTO.2 (JUN 2006)



Un punto material P de masa m está en contacto con un sólido perfectamente liso de sección semicircular vertical, de centro $(0,0)$ y radio R, en un punto A de coordenadas $(x_0, y_0) = (-R\operatorname{sen}\theta_0, R\cos\theta_0)$ del sistema de coordenadas representado en la figura.

En el instante inicial se dota al punto P de una velocidad inicial tangente al sólido de módulo v_0, de forma que su movimiento comienza hacia valores crecientes de la coordenada vertical, permaneciendo en todo momento en el plano xOy.

La única fuerza que puede actuar sobre P, además del peso, es la reacción normal N del sólido. Se considera que, si el módulo de N se anula, el punto P se separa del sólido.

I) En esta primera parte se considera el movimiento del punto sobre el perfil circular.

1) Expresar el módulo de la reacción normal N que ejerce el sólido sobre el punto P, en función del ángulo θ y del módulo de su velocidad en un instante genérico.

2) Determinar la velocidad máxima v_{0c} con que el móvil puede ser lanzado para que no se despegue del perfil circular del sólido en su parte inicial ascendente.

II) Suponiendo que el móvil se ha lanzado con velocidad $v_0 < v_{0c}$, se pide:

3) Demostrar que N es positivo en toda la trayectoria ascendente de P, desde A hasta S.

4) Determinar, a partir del principio de conservación de la energía mecánica, el valor crítico v_{1c} que debe tomar la velocidad inicial para que el punto P llegue a S con velocidad nula.

III) Suponiendo que la velocidad de lanzamiento de móvil cumple $v_{1c} < v_0 < v_{0c}$:

5) Obtener el valor de la ordenada y_D del punto D de la trayectoria descendente de P en el que el punto se separa del perfil semicircular del sólido.

6) Justificar que el punto D está a menor altura que el punto inicial A, es decir, $y_D < y_0$.

IV) Se considera el perfil parabólico que tiene su vértice en el eje Ox y que enlaza con el perfil semicircular en la posición del punto D y tiene en él la misma pendiente que dicho perfil semicircular. El punto P que se separa del perfil semicircular en D sigue su trayectoria en contacto con el perfil parabólico.

7) Justificar que a lo largo de la trayectoria de P sobre la parábola, el punto no se separa de ésta, es decir, siempre es $N > 0$.

8) Sabiendo que el radio de curvatura del perfil parabólico viene dado por $\rho(y) = \left(1 + \dfrac{2y}{p}\right)^{\frac{3}{2}} p$ con $p = \dfrac{2y_D^3}{x_D^2}$, expresar la reacción normal N de la parábola sobre P a lo largo de la trayectoria. [Ind: En cada punto de la parábola, el coseno del ángulo que forma la normal a la misma con la vertical es: $\cos\beta = \left(1 + \dfrac{2y}{p}\right)^{-\frac{1}{2}}$]

9) Determinar la ordenada y_F del punto más alto, F, al que asciende el móvil sobre la parábola, en función de v_0, y_0 y g.

PROBLEMA DIN.PTO.3 (FEB 2008)

Un punto material de masa m se mueve de forma ascendente sin rozamiento vinculado a la hélice de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\operatorname{sen}\varphi \\ z = R\ \varphi \end{cases}$$

La hélice se encuentra situada de forma que la aceleración de la gravedad está dirigida según el sentido negativo del eje Oz. Para dicha situación las fuerzas que actúan sobre la masa puntual son la acción del vinculo liso, $\boldsymbol{F}_v = N_1\boldsymbol{n} + N_2\boldsymbol{b}$ y el peso, $\boldsymbol{p} = -mg\boldsymbol{k}$ y los vectores intrínsecos de la curva durante el movimiento ascendente vienen dados en componentes cartesianas por: $\boldsymbol{t} = \dfrac{-\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{n} = (-\cos\varphi\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j})$ y $\boldsymbol{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} - \cos\varphi\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}$.

[Dato: Tener en cuenta que el radio de curvatura de flexión de la hélice vale $\rho = 2R$].

En la primera parte del problema (apartados 1) a 7)) se analiza el movimiento de la masa puntual por efecto de las fuerzas actuantes siguiendo un tratamiento vectorial newtoniano.

En la segunda parte del problema (apartados 8) a 10)) se analiza el movimiento de dicha masa a través de la aplicación del principio de conservación de la energía

Se pide:

1) Escribir la ecuación fundamental de la Dinámica en coordenadas intrínsecas (como expresión de $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{t}$) referida a una trayectoria curvilínea cualquiera. (1 punto)

2) Obtener, por identificación de las componentes $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$, un sistema de tres ecuaciones, en el que, además de las constantes del problema y constantes físicas, figuren las variables del problema $N_1, N_2, v, \dfrac{dv}{dt}$ y φ. (1 punto)

3) A partir de las ecuaciones para las componentes según $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ obtenidas en el apartado 2) obtener una relación explícita entre $\dfrac{dv}{dt}$ y g. [Ind: se sugiere eliminar la componente N_1 entre las dos ecuaciones correspondientes a las componentes según $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ multiplicando la primera de ellas por $\operatorname{sen}\varphi$ y la segunda por $\cos\varphi$ y restando a continuación, y eliminar posteriormente N_2 utilizando la ecuación de la componente según $\boldsymbol{k}$]. (1 punto)

4) Por derivación de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula, obtener una expresión que relaciona v y $R\dot{\varphi}$, y finalmente una expresión que relaciona $\dfrac{dv}{dt}$ y $R\ddot{\varphi}$. (1 punto)

5) Igualar las expresiones para $\dfrac{dv}{dt}$ obtenidas en los apartados 3) y 4) para obtener la ecuación que expresa $\ddot{\varphi}$ en función de g y R. (1 punto)

6) Integrar la expresión del apartado anterior en función del tiempo con las condiciones en $t = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ y $\varphi_0 = 0$, para obtener explícitamente $\varphi = \varphi(t)$. (1 punto)

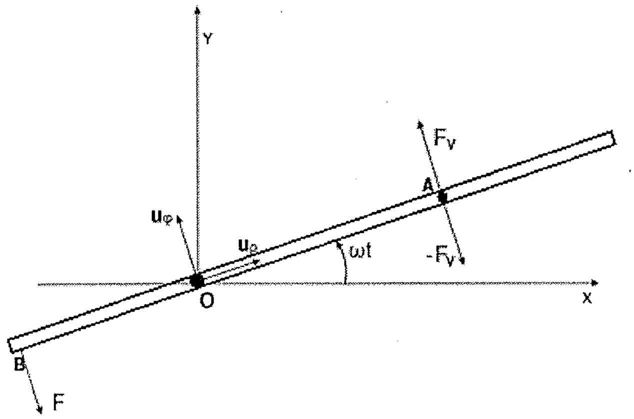
7) Llevar los valores obtenidos de N_2, $\dfrac{dv}{dt}$, v y φ a la ecuación correspondiente a la componente $\boldsymbol{i}$ del apartado 2) para obtener N_1 en funcion del tiempo t y las constantes m, R, g, ω_0. (1 punto)

8) Mediante la ley de la conservación de la energía mecánica entre la posición inicial ($t = 0$, $v = v_0$, $z = 0$) y la posición genérica ($t = t$, $v = v$, $z = R\varphi$), obtener $v = v(v_0, g, R, \varphi)$ y la z_{max} cuando la masa se hace partir de su posición inicial con una velocidad inicial v_0. (1 punto)

9) Igualando las dos expresiones de v de los apartados 4) y 8), obtener la relación entre $\dot{\varphi}$ y φ, separando variables a continuación. (1 punto)

10) Integrar la expresion obtenida en el apartado anterior con la condición en $t = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ y $\varphi_0 = 0$ y obtener $\varphi = \varphi(t)$, comprobando que coincide con la solución dada en el apartado 6). (1 punto)

PROBLEMA DIN.PTO.4 (JUN 2008)



Un tubo hueco de masa $M = 0$ transporta en su interior una masa puntual, $m \neq 0$, que circula por su interior sin rozamiento.

El tubo se mueve con rotación angular constante ($\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k} = \omega_0 \boldsymbol{k}$) en torno a una articulación fija sin rozamiento en el origen de coordenadas. Para ello actúa una fuerza exterior F perpendicular al tubo en el punto B, que dista del origen de coordenadas la distancia fija b. La acción del tubo sobre la masa puntual, situada en A, puede representarse por una fuerza F_v perpendicular al tubo, al no existir rozamiento entre el mismo y la masa. Se denomina $\rho = \rho(t)$ a la distancia de la masa al origen en cada instante, t.

En el instante $t = 0$ la masa puntual m tiene las coordenadas polares $(\rho_0, 0)$ y una velocidad en dichas coordenadas $\boldsymbol{v}_0 = \dot{\rho}_0 \boldsymbol{u}_\rho + \omega_0 \rho_0 \boldsymbol{u}_\varphi = 0\boldsymbol{u}_\rho + \omega_0 \rho_0 \boldsymbol{u}_\varphi$

1) Expresar la aceleración de la masa puntual m en coordenadas polares, $\boldsymbol{a}$, en función del conjunto de variables $\ddot{\rho}, \rho, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \dot{\rho}$ y los vectores de la base polar $\boldsymbol{u}_\rho$ y $\boldsymbol{u}_\varphi$. Particularizarla para el caso presente de $\dot{\varphi} = \omega = \omega_0$. (1 punto)

2) Teniendo en cuenta que se trata de una situación de vínculo liso, expresar la nulidad de la componente radial de la aceleración para obtener una ecuación en las variables $\ddot{\rho}$ y ρ y la constante ω_0. Multiplicarla por $\dot{\rho}$ y hacer una primera integral para obtener una ecuación en la que solo aparecen $\dot{\rho}, \omega_0, \rho$ y ρ_0. [Ind: tener en cuenta que $\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}$, que $\dot{\rho}\frac{d\dot{\rho}}{dt} = \dot{\rho}\ddot{\rho} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{\rho})^2}{dt}$ y que $\rho\dot{\rho} = \frac{1}{2}\frac{d(\rho)^2}{dt}$] (1 punto)

3) Separando variables, integrar en el tiempo la ecuación obtenida en el apartado 2) para obtener, $\rho = \rho(t)$. En $t = 0$ es $\rho = \rho_0$ y $\dot{\rho} = 0$ (1 punto)

4) Comprobar que la solución de la ecuacion obtenida en el apartado 2) puede expresarse en la forma: $\rho(t) = \rho_0 \frac{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}{2} = \rho_0 \cosh \omega_0 t$. (1 punto)

5) Si la longitud del tubo desde el origen de coordenadas, O, hasta el extremo, es L, calcular el instante t_s de salida de la masa puntual por el extremo, en funcion de ω_0, L y ρ_0. . (1 punto)

6) Determinar, utilizando las componentes polares de la velocidad, el incremento de energía cinética, ΔE_c, entre el instante inicial, $t = 0$, y el instante genérico $t = t$. Se recuerda que en $t = 0$ la velocidad de la masa no es nula. (1 punto)

7) Determinar la acción, F_v del vínculo sobre la partícula de masa m como una expresión de m, ω_0, ρ_0, t. (1 punto)

8) Determinar la expresión de la acción exterior al tubo perpendicular a él, F, como una expresión de $m, \omega_0, \rho_0, t, b$. (1 punto)

9) Determinar el trabajo realizado por F entre el instante inicial, $t = 0$, y el instante genérico $t = t$. (1 punto)

10) Determinar el ángulo φ_s que la velocidad de salida, $\boldsymbol{v}$, de la masa m, forma con el eje Ox. (1 punto)

[Ind: tener en cuenta para el apartado 3) que $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \arg\cosh \frac{x}{a}$]

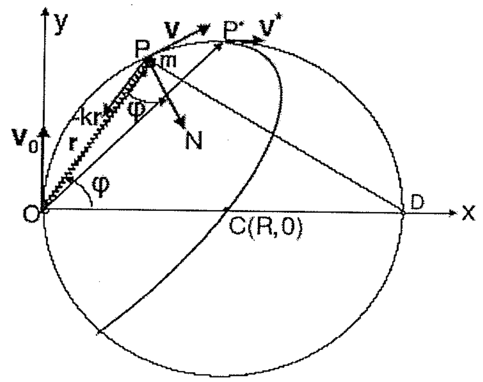
* * * * * * *

NO se permite el uso de calculadora

Duración: 90 minutos

Calificación: 50 % del total del examen.

PROBLEMA DIN.PTO.5 (FEB 2009)



Una masa puntual, m, está enganchada en el extremo de un resorte de constante k y masa despreciable, cuyo otro extremo está fijo en el origen de un sistema inercial de coordenadas, Oxy, perteneciente a un plano horizontal, sin rozamiento. La fuerza del resorte actúa permanentemente.

En un determinado instante la masa se dispara con velocidad v_0 paralela al eje Oy, de tal manera que se mueve sin rozamiento por el interior de la circunferencia de radio R y centro $(R, 0)$ en tanto en cuanto la fuerza N ejercida por la circunferencia sobre la masa m sea positiva. Cuando $N = 0$ la masa m despega hacia el interior de misma.

1) Aplicando la segunda ley de Newton, escribir la expresión de la componente normal a la trayectoria de la fuerza ejercida sobre la masa por la circunferencia, N, en función de $k, r, \cos\varphi, m, v^2$ y R. (1 punto)
2) Utilizando la conservación de la energía mecánica en el punto genérico P perteneciente a la circunferencia, escribir la igualdad que relaciona m, v^2, k, r^2 y v_0. [Ind.: tener en cuenta que en el punto de lanzamiento la energía total de móvil es $E = \frac{1}{2}mv_0^2$] (1 punto)
3) Teniendo en cuenta que las rectas PO y PD forman un ángulo recto en el punto P, determinar la ecuación que relaciona r, R, y $\cos\varphi$. (1 punto)
4) Obtener los valores de φ, r y v en el punto general de despegue ($N = 0$), llamándolos φ^*, r^* y v^* respectivamente, en función de k, m, R y v_0. (1 punto)
5) Si se desea que el punto de despegue, P^*, sea el de máxima ordenada, $y = R$, de la circunferencia, como aparece en el dibujo, obtener el valor v_0 en función de k, m y R. (1 punto)
6) Determinar en dicho caso las componentes de la velocidad en $P^*(v_x^*$ y $v_y^*)$. El valor v_x^* debe darse como función únicamente de v_0. (1 punto)
7) Una vez que la masa ha despegado de la circunferencia, sólo queda sometida a la acción de la fuerza del resorte de constante k. Escribir la ecuación vectorial de Newton que relaciona $m, \ddot{r}, k$ y r y descomponerla en un sistema de dos ecuaciones diferenciales escalares, una para la componente x y otra para la componente y. (1 punto)
8) Comprobar que la solución del sistema de dos ecuaciones diferenciales mencionadas en el apartado anterior es:
$$\begin{cases} x = A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \delta_1\right) \\ y = B \operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \delta_2\right) \end{cases}$$
, siendo A, δ_1, B y δ_2 constantes cualesquiera. Asimismo, obtener por derivación las dos ecuaciones correspondientes a las componentes de la velocidad (v_x, v_y). (1 punto)
9) Tomando el instante en que la masa parte de P^* como $t = 0$ y utilizando como condiciones iniciales los valores obtenidos en el apartado 6) determinar las cuatro constantes: A, δ_1, B y δ_2. (1 punto)
10) Sabiendo que la ecuación de la trayectoria es:
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy \operatorname{sen}\delta_1}{AB} = \cos^2\delta_1,$$
Indicar qué tipo de curva es y determinar el punto de corte con el eje Ox. (1 punto)

* * * * * * *

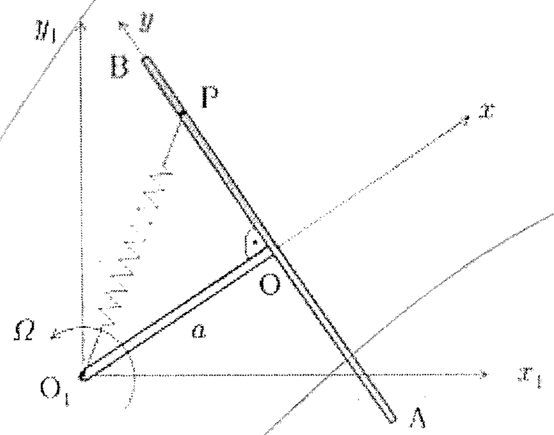
NO se permite el uso de calculadora
Duración: 90 minutos

Calificación: 50 % del total del examen.

PROBLEMA DIN. RELAT. 1. (JUN 2001)

Un tubo AB, de sección despreciable, unido solidariamente a la manivela O_1O gira con velocidad angular constante, Ω, en el plano horizontal $O_1x_1y_1$ alrededor del eje O_1z_1, vertical ascendente.
Por el interior del tubo puede moverse un punto material P, de masa m, sin rozamiento, actuando sobre el mismo, además del peso, la fuerza de un muelle ideal, de constante elástica k y longitud natural nula.
El sistema de referencia $O_1x_1y_1z_1$ es inercial y como sistema de referencia ligado al tubo se utilizará $Oxyz$ (figura) estando dirigido Oy según el eje del tubo y siendo Oz paralelo a O_1z_1 y del mismo sentido. El valor de la distancia O_1O es a.
Se propone analizar el equilibrio y el movimiento relativo de P respecto a $Oxyz$, admitiendo que se verifica $\frac{k}{m} - \Omega^2 > 0$.

En tema siguiente



1) Determine la posición de equilibrio relativo de P en $Oxyz$ y obtenga el valor de la reacción del tubo en ese caso.

2) Justifique las modificaciones en la respuesta anterior si $\frac{k}{m} - \Omega^2 < 0$ o si $\frac{k}{m} - \Omega^2 = 0$.

3) Obtenga la energía potencial del punto material en el sistema $Oxyz$ y justifique a partir de la misma la naturaleza del equilibrio.

Para analizar el movimiento relativo en $Oxyz$ se adopta como instante inicial uno en el que Ox y O_1x_1 coinciden en dirección y sentido. En ese instante el punto material P posee una velocidad relativa $v_0\boldsymbol{j}$.

4) Indique cada una de las fuerzas reales y de las fuerzas de inercia que actúan sobre el punto material, expresándolas en el sistema $Oxyz$.

5) Obtenga la ecuación diferencial que determina la ley del movimiento relativo, $y(t)$, del punto P.

6) Determine la solución de dicha ecuación diferencial con dos constantes de integración y obtenga dichas constantes a partir de las condiciones iniciales. Exprese finalmente la ecuación $y(t)$ del movimiento relativo de P.

Sustituir valores de y e y' para sacar N_x N_y N_z

7) Calcule las componentes de la reacción del tubo sobre P en función del tiempo.

8) Para conseguir la rotación uniforme del tubo AB es necesario aplicar un par $M_m\boldsymbol{k}_1$ al sistema formado por la manivela O_1O y el tubo AB. Determine el valor de dicho par en función del tiempo.

9) ¿Cuál es la ley del movimiento relativo si $\frac{k}{m} - \Omega^2 = 0$? ¿Cuál es cuando $\frac{k}{m} - \Omega^2 < 0$?

P. Din. Pto. 2

$P \ (m = 0{,}1 \ Kg)$; $\bar{F} = -K\bar{r} \ (K = 12 \cdot 10^3 \ N/m)$; $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$

1) $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$: $\begin{cases} \bar{\imath} : -Kx = m\ddot{x} \\ \bar{\jmath} : -Ky = m\ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{K}{m}y = 0 \end{cases}$ $\omega^2 = \frac{K}{m}$; $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

En $\bar{\imath}$ y $\bar{\jmath}$, ecuac. dif. 2º orden de mov. arm. simple. Soluciones:

$x = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$

$y = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 10^3}{0{,}1}} = 200\sqrt{3} \ rad/seg.$$

2) En $t = 0$ $\begin{cases} P_0(x_0, y_0) \\ \bar{v}_0 = \dot{x}_0\bar{\imath} + \dot{y}_0\bar{\jmath} \end{cases}$ $\quad x_0 = 0{,}1 \ m \quad \dot{x}_0 = 20 \ m/s$; $\quad y_0 = 0{,}05 \ m \quad \dot{y}_0 = 30 \ m/s$

$x = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$ $\qquad y = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$

$\dot{x} = A_1 \omega \cos(\omega t + \varphi_1)$ $\qquad \dot{y} = A_2 \omega \cos(\omega t + \varphi_2)$

Trabajando con mov en x: En $t = 0$ $\begin{cases} x_0 = A_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \\ \dot{x}_0 = A_1 \omega \cos\varphi_1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} = A_1^2 \cancel{(\operatorname{sen}^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1)}^{1} \\ \frac{x_0}{\frac{\dot{x}_0}{\omega}} = \operatorname{tg}\varphi_1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} \end{cases}$

De forma análoga para y: $A_2 = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\omega y_0}{\dot{y}_0}$

Con los datos: $A_1 = \frac{0{,}2}{\sqrt{3}} \ m$; $\operatorname{tg}\varphi_1 = \sqrt{3} \Longrightarrow \varphi_1 = 60° = \frac{\pi}{3} \ rad$

$A_2 = 10^{-1} \ m$; $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \varphi_2 = 30° = \frac{\pi}{6} \ rad$

Por tanto $\begin{cases} x = \frac{0{,}2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(200\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3}\right) \\ y = 0{,}1 \operatorname{sen}\left(200\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

3) $x = A_1 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = A_1\left[\operatorname{sen}\omega t \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\omega t\right] =$

$y = A_2 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = A_2\left[\operatorname{sen}\omega t \cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\omega t\right] =$

$$= A_1\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t\right] \quad (1)$$

$$= A_2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{2}\cos\omega t\right] \quad (2)$$

$(1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\frac{x}{A_1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}\omega t + \frac{3}{4}\cos\omega t$

$(2)\cdot\frac{1}{2}$: $\frac{y}{A_2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{4}\cos\omega t$

RESTANDO ECUACIONES

$$\frac{x}{A_1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{A_2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos\omega t \quad (3)$$

$(1)\cdot\frac{1}{2}$: $\frac{x}{2A_1} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\omega t + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\omega t$

$(2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\frac{y}{A_2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\omega t + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\omega t$

RESTANDO ECUACIONES

$$\frac{x}{A_1}\frac{1}{2} - \frac{y}{A_2}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\omega t \quad (4)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow (3)^2 + (4)^2 : \frac{x^2}{A_1^2}\frac{3}{4} + \frac{y^2}{A_2^2}\cdot\frac{1}{4} - 2\frac{x}{A_1}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{y}{A_2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{x^2}{A_1^2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{y^2}{A_2^2}\cdot\frac{3}{4} - 2\frac{x}{A_1}\cdot\frac{1}{2}\frac{y}{A_2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\cdot\frac{y}{A_2}\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} \iff \left[\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{A\cdot B}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \operatorname{sen}^2(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

METIENDO VALORES Y SIMPLIFICANDO : $3x^2 + 4y^2 - 6xy - 10^{-2} = 0$

4) Paso a polares: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{A_1^2} + \frac{\rho^2\,\text{sen}^2\theta}{A_2^2} - \frac{2\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{A_1A_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \text{sen}^2(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$\rho^2\left[\frac{\cos^2\theta}{A_1^2} + \frac{\text{sen}^2\theta}{A_2^2} - \frac{2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{A_1A_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right] = \text{sen}^2(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$\rho^2\left[\frac{A_2^2\cos^2\theta + A_1^2\,\text{sen}^2\theta - 2A_1A_2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{A_1^2A_2^2}\right] = \text{sen}^2(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$\rho^2 = \frac{A_1^2A_2^2\,\text{sen}^2(\varphi_1-\varphi_2)}{A_2^2\cos^2\theta + A_1^2\,\text{sen}^2\theta - 2A_1A_2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$$

- Max ρ en min de denominador
- min ρ en Max de denominador

$$\frac{d(\text{denominador})}{d\theta} = -2A_2^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 2A_1^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\left[-\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right] =$$

$$= -A_2^2\,\text{sen}\,2\theta + A_1^2\,\text{sen}\,2\theta - 2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\cos 2\theta =$$

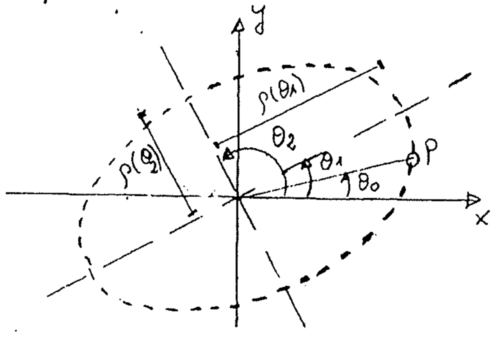
$$= (A_1^2 - A_2^2)\,\text{sen}\,2\theta + 2A_1A_2\cos 2\theta\cos(\varphi_1-\varphi_2) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{tg}\,2\theta = \frac{2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{A_1^2-A_2^2} = \cdots = 6 \Longrightarrow 2\theta = 80{,}537^\circ \Longrightarrow$$

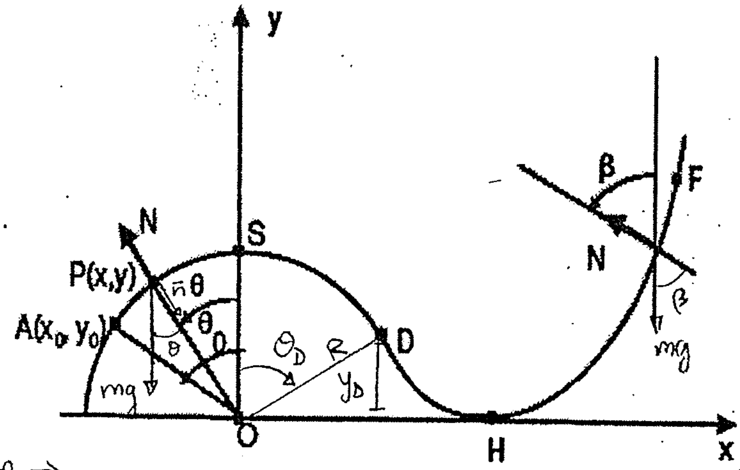
$$\Longrightarrow \begin{cases} \theta_1 = 40{,}27^\circ \\ \theta_2 = \theta_1 + 90 = 130{,}27^\circ \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} \rho(\theta_1) = 0{,}148\,\text{m} \\ \rho(\theta_2) = 0{,}039\,\text{m} \end{matrix}$$

5) $\theta_0 = \text{arctg}\,\dfrac{y_0}{x_0} = 26{,}56^\circ$

$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \rho_0(\theta_0) = 0{,}1118$



2ª Parte Jun 2006



I)

1) Por Ec. Fundam. Dinám.: $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$

$\bar{n}: \; -N + mg\cos\theta = m a_n = m\dfrac{v^2}{R} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow N = m\left(g\cos\theta - \dfrac{v^2}{R}\right)$

2) Para no despegar, con enlace unilateral, ha de ser $N > 0$ en $\theta = \theta_0$

$N = m\left(g\cos\theta_0 - \dfrac{v^2}{R}\right) \geq 0 \Rightarrow v^2 \leq g \cdot R\cos\theta_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{max} = v_{0c} = \sqrt{gR\cos\theta_0} = \sqrt{g y_0}$

II) $v_0 < v_{0c}$

3) Siendo $N = m\left(g\cos\theta - \dfrac{v^2}{R}\right)$ y ocurriendo que entre A y S $\begin{cases} \theta \text{ disminuye} \Rightarrow \cos\theta \text{ aumenta} \\ v \text{ disminuye (gana altura, pierde } v) \end{cases}$

el valor $g\cos\theta - \dfrac{v^2}{R}$ aumenta. Por tanto, si $N(\theta_0) > 0$ en A, $N > 0$ entre A y S

4) En el recorrido sólo actúan $\begin{cases} mg: \text{ conservativa} \\ N: \text{ no conservativa pero } \bar{N} \perp \begin{cases} d\bar{r} \\ \bar{v} \end{cases} \Rightarrow \tau_N = \int \bar{N}\cdot d\bar{r} = \int \bar{N}\cdot\bar{v}\,dt = 0 \end{cases}$

Por tanto, el movimiento es conservativo: $E_{MEC} = E_c + E_p = cte = E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_S} + E_{p_S} \Longrightarrow$

$E_{p_{mg}} = mgy + C$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_{1c}^2 + \cancel{m}g R\cos\theta_0 + \cancel{C} = 0 + \cancel{m}gR + \cancel{C} \Rightarrow v_{1c} = \sqrt{2gR(1-\cos\theta_0)} = \sqrt{2g(R-y_0)}$

III) $v_{1c} < v_0 < v_{0c}$

5) Ahora $N = m\left(g\cos\theta_D - \dfrac{v_D^2}{R}\right) = 0 \Rightarrow$ ($\cos\theta_D = \dfrac{y_D}{R}$)

$g\dfrac{y_D}{R} - \dfrac{v_D^2}{R} = 0 \Rightarrow y_D = \dfrac{v_D^2}{g}$

Por movimiento conservativo: $\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \cancel{m}gy_0 + \cancel{C} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_D^2 + \cancel{m}gy_D + \cancel{C}$

$\Bigg\}\; y_D = \left(\dfrac{v_0^2}{2} + gy_0\right)\cdot\dfrac{2}{3g} = \dfrac{v_0^2 + 2gy_0}{3g}$

6) $v_0^2 < v_{0c}^2 \overset{\text{Aptdo 2)}}{=} gy_0 \Rightarrow y_D = \dfrac{v_0^2 + 2y_0 g}{3g} < \dfrac{gy_0 + 2y_0\cdot g}{3g} = y_0$

7) A partir de D; por $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$, en $\bar{n}$: $N - mg\cos\beta = m\underbrace{\dfrac{v^2}{\rho}}_{a_n} \Rightarrow N = mg\cos\beta + m\dfrac{v^2}{\rho} > 0$

8) $N = mg\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2y}{p}}} + \dfrac{\overbrace{mv^2}^{2E_c}}{\left(1+\dfrac{2y}{p}\right)^{3/2}} = \dfrac{mg}{\sqrt{1+\dfrac{2y}{p}}} + \dfrac{2\left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 - mgy\right)}{\left(1+\dfrac{2y}{p}\right)^{3/2}}$

9) Por movim. conservat.: $\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 + C = 0 + mgy_F + C \Rightarrow y_F = \dfrac{v_0^2 + 2gy_0}{2g}$

3.-MEDIDA INDIRECTA

· medida de volumen } acumulación de errores (largo, ancho, altura)
· medición de leyes físicas

Si la magnitud y está relacionada con otras magnitudes z_i a través de una ley física o geométrica de la forma:

$$y = f(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_q)$$

podemos medir y de forma indirecta, midiendo las magnitudes z_i y obteniendo el valor de y a través de la relación f. Hallando los valores corregidos por calibración y redondeo de las z_i como se ha indicado en el apartado anterior, el valor característico de y es:

$$\hat{y} = f(\tilde{z}_1 + C_{Cz1} + C_{Ez1}, \tilde{z}_2 + C_{Cz2} + C_{Ez2}, \ldots, \tilde{z}_i + C_{Czi} + C_{Ezi}, \ldots, \tilde{z}_q + C_{Czq} + C_{Ezq})$$

La incertidumbre típica asociada a $\hat{y}$ será:

INCERTIDUMBRE ABSOLUTA

INCERTIDUMBRE DE LA MEDIDA INDIRECTA

$$\boxed{u(\hat{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^2 u^2(z_i)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 u^2(z_1) + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial z_q}\right)^2 u^2(z_q)}}$$

evaluándose las derivadas en el punto correspondiente a los valores de medida.

4.-INCERTIDUMBRE EXPANDIDA

La $\boxed{\text{incertidumbre expandida } U(y)}$ se obtiene multiplicando el valor de la incertidumbre típica por k, factor de cobertura, que depende del nivel de confianza p con que queremos obtener la medida:

$$\boxed{U_p(y) = k \cdot u(y)}$$

expresándose el resultado de la medida para un nivel de confianza del $p\%$:

$$\boxed{y \pm U_p(y)}$$

siendo $k(p)$ dato.

Un nivel de confianza del $p\%$ indica que la medida estará comprendida en el intervalo $\boxed{(y - U_p(y), y + U_p(y))}$ con una probabilidad del $p\%$.

Para un nivel de confianza p del 95%, $k = 2$. Este valor es el más empleado en aplicaciones industriales, por lo que en general se escribirá: $U_{95}(y) = 2 \cdot u(y)$ y el resultado de la medida será: $y \pm U_{95}(y)$.

REPASO

EJERCICIO R-IN.MED.1. (Sep-96)

El lado de un cuadrado, de valor 100 mm., se conoce con una incertidumbre típica de 2 μm. Determine la incertidumbre (k = 2) del área del cuadrado.

EJERCICIO R-IN.MED.2. (Feb 98) (Sep-99)

¿Qué son las magnitudes de influencia? Indique un ejemplo.

EJERCICIO R-IN.MED.3. (Jun-99)

Se conoce el valor de la base b de una placa rectangular y su incertidumbre típica u_b. Asimismo, se ha determinado la altura h de dicha placa con incertidumbre típica u_h. Obtenga la incertidumbre expandida (k = 2) para el área de la placa.

EJERCICIO R-IN.MED.4. (Sep-00)

Conociendo la incertidumbre típica, u_D, del diámetro D de un círculo, determine la incertidumbre típica del área del círculo y su incertidumbre típica relativa.

EJERCICIO R-IN.MED.5. (Jun-01)

Determinar la incertidumbre relativa con la que se podrá obtener la velocidad de un móvil en movimiento rectilíneo a partir de la medida del espacio recorrido y el tiempo empleado, sabiendo que estas medidas se realizan con una incertidumbre relativa del 1%.

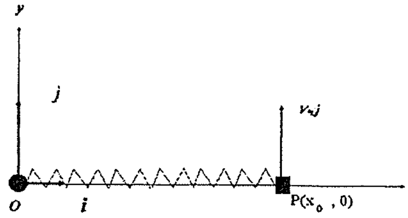
EJERCICIO R-IN.MED.6. (Feb 02)

Determinar la incertidumbre relativa resultante en la estimación de la distancia a un punto dado mediante un haz láser por un procedimiento de reflexión ($2d = c\Delta t$), sabiendo que la incertidumbre en la determinación del intervalo de tiempo entre emisión y recepción de señal es del 0,5% y suponiendo que la velocidad de la luz se conoce con exactitud.

EJERCICIO R-IN.MED.7. (SEPT 2002)
Al medir un prisma recto de base cuadrada, se obtienen los siguientes valores, todos afectados de sus correspondientes incertidumbres, para las longitudes de su lado del cuadrado de la base y su altura, respectivamente: $a = 2 \pm 0{,}005$ cm; $h = 40 \pm 0{,}15$ cm. Sobre la base de estas medidas, determinar el volumen del prisma y la correspondiente incertidumbre.

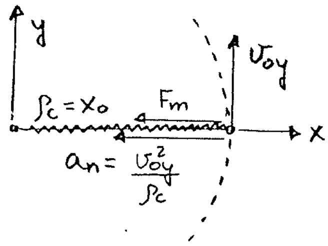
EJERCICIO R-IN.MED.8. (SEPT 2008)
Para medir el valor de una corriente que circula en sentidos contrarios por cada uno de dos conductores paralelos rectos infinitamente largos y extremadamente delgados se mide la distancia d que les separa y la fuerza F por unidad de longitud con que se repelen los conductores utilizando la fórmula $F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$, pero escrita en la forma: $I = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\mu_0^{-\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$. Si se miden directamente la pareja de valores $[F, d]$ y se obtiene para cada uno de dichos valores una incertidumbre relativa de w_F y w_d, determinar la incertidumbre relativa, w_I, del valor probable de I. Se supone $w_\pi = 0$ y $w_{\mu_0} = 0$.

Examen 2ª Parte Feb 2006



I) Muelle $(K, 0)$
Masa $m \Rightarrow$ En $t=0$: $\begin{cases} P_0(x_0, 0) \\ \bar{v} = 0\bar{i} + v_{0y}\bar{j} \end{cases} \Rightarrow$ Trayectoria: Elipse centrada en $O(0,0)$

1) $\bar{v} \perp \overline{OP_0}$ en $t=0$: Si la trayectoria fuera circular,



Por ecuac. fundam de la dinámica: $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$: $\bar{n}$: $F = m a_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow K x_0 = m \frac{v_{0yc}^2}{x_0} \Rightarrow v_{0yc} = x_0 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

2) En P_0, $\bar{v} \perp \overline{OP_0} \Rightarrow P_0$ es vértice de la elipse

3) P_0 es vértice y está sobre $Ox \Rightarrow$ Por la simetría de la elipse, el resto de vértices están sobre Ox y Oy (Ejes de elipse coincidentes con ejes coordenados): $P_2(0, y_2)$, $P_3(x_3, 0)$; $P_4(0, y_4)$

• El movimiento es central $\Rightarrow C = 2\frac{dA}{dt} = |\bar{r}_0 \times \bar{v}_0| = x_0 v_{0y} = y_2 v_2$ (1)

• F_{muelle} conservativa $\Rightarrow E = E_c + E_p = cte$: $\frac{1}{2}K x_0^2 + \frac{1}{2} m v_{0y}^2 = \frac{1}{2}K y_2^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$ (2)

$\Rightarrow$ Sustituyendo en (1) y (2) los valores propuestos para P_2

$$x_0 v_{0y} = v_{0y}\sqrt{\frac{m}{K}} \cdot \left|-x_0\sqrt{\frac{K}{m}}\right| \; ; \; \frac{1}{2}K x_0^2 + \frac{1}{2} m v_{0y}^2 = \frac{1}{2}K\left(v_{0y}\sqrt{\frac{m}{K}}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(x_0\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Identidades que confirman los valores. Por simetría $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ y_2 = -y_4 \end{cases}$

II) En $t=0$ $\begin{cases} (x_0, y_0) \\ (v_{0x}, v_{0y}) \end{cases}$

4) Ecuac de Newton: $\Sigma \bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow -K\bar{r} = m\ddot{\bar{r}} \Rightarrow \begin{cases} \bar{i}: -Kx = m\ddot{x} \\ \bar{j}: -Ky = m\ddot{y} \end{cases}$

5) Sustituyendo en 4) los valores propuestos de X e Y (y sus derivadas $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$) se obtienen identidades

$$\bar{i}: m\left[-\frac{K}{m}A\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi_1\right)\right] = -KA\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi_1\right) \; ; \; \bar{j}: m\left[-\frac{K}{m}B\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi_2\right)\right] = -KB\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi_2\right)$$

6) $$v_x = \sqrt{\frac{K}{m}}A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi_1\right) \; ; \; v_y = \sqrt{\frac{K}{m}}B\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \varphi_2\right)$$

En $t=0$ $\begin{cases} x_0 = A\,\text{sen}\,\varphi_1 \\ y_0 = B\,\text{sen}\,\varphi_2 \end{cases}$; $\begin{cases} v_{0x} = \sqrt{\frac{K}{m}}A\cos\varphi_1 \\ v_{0y} = \sqrt{\frac{K}{m}}B\cos\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{K}v_{0x}^2} \; ; \; \text{sen}\,\varphi_1 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m}{K}v_{0x}^2}} \quad \left(\frac{x_0}{A}\right)$$

$$B = \sqrt{y_0^2 + \frac{m}{K}v_{0y}^2} \; ; \; \text{sen}\,\varphi_2 = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + \frac{m}{K}v_{0y}^2}}$$

7) PARA QUE COINCIDAN LOS EJE DE LA ELIPSE CON LOS COORDENADAS, SÓLO PUEDE HABER TÉRMINOS EN x^2 E $y^2 \Rightarrow \cos(\varphi_2-\varphi_1)=0$ (Y POR TANTO $\operatorname{sen}^2(\varphi_2-\varphi_1)=1$) $\Rightarrow \varphi_2=\varphi_1\pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_2=\cos\varphi_1$ (POR COMPLEMENTARIOS):

$$\operatorname{sen}^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1=\operatorname{sen}^2\varphi_1+\operatorname{sen}^2\varphi_2 \overset{6)}{=} \left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\frac{m}{K}v_{0x}^2}}\right]^2+\left[\frac{y_0}{\sqrt{y_0^2+\frac{m}{K}v_{0y}^2}}\right]^2=1 \xrightarrow[\text{Y SIMPLIFICANDO}]{\text{OPERANDO}}$$

$\Longrightarrow \frac{K}{m}x_0y_0=v_{0x}v_{0y}$ (RELACIÓN QUE CUMPLEN LOS DATOS INICIALES DE 2) y 3))

8) $C=|\bar{r}\times\bar{v}|=r_{min}\,v_{MAX}\,\cancel{\operatorname{sen}90}^{\,1}$

$E=\frac{1}{2}Kr_{min}^2+\frac{1}{2}mv_{MAX}^2$

DE LAS 2 SOLUCIONES DE LA ECUAC. DE 2º GRADO EN r_{min}, TOMO LA MENOR

9) $v_{MAX}=\frac{C}{r_{min}} \Longrightarrow E=\frac{1}{2}Kr_{min}^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{C}{r_{min}}\right)^2 \Longrightarrow r_{min}=\sqrt{\frac{E-\sqrt{E^2-KmC^2}}{K}}$

$v_{min}=\frac{C}{r_{MAX}} \Longrightarrow E=\frac{1}{2}Kr_{MAX}^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{C}{r_{MAX}}\right)^2 \Longrightarrow r_{MAX}=\sqrt{\frac{E+\sqrt{E^2-KmC^2}}{K}}$

DE LAS 2 SOLUCIONES DE LA ECUAC DE 2º GRADO EN r_{MAX}, TOMO LA MAYOR

Dinámica Relativa

1 Ecuaciones de la dinámica relativa

Diremos que $\vec{F}_p = m\,\vec{a}^{\,p}_{21}$ $\begin{cases} \vec{F}_p : \text{resultante de las fuerzas sobre } P \\ m : \text{masa del punto} \\ \vec{a}_{21} : \text{aceleración absoluta de } P \end{cases}$

Por composición de aceleraciones tendremos que:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}^{\,p}_{21} = m\left(\vec{a}^{\,p}_{20} + \vec{a}^{\,p}_{01} + 2\vec{\omega}_{01}\times\vec{v}_{20}\right) = m\left(\vec{a}^{\,p}_{REL} + \vec{a}^{\,p}_{ARR} + \vec{a}^{\,p}_{CORIOLIS}\right)$$

Que podemos escribir como: $\boxed{\vec{F} - m(\vec{a}^{\,p}_{ARR} + a^{p}_{CORIOLIS}) = m\cdot\vec{a}^{\,p}_{REL}}$

(la que plantea el enano aquí en la pizarra)

- $m\cdot\vec{a}^{\,p}_{ARR} \equiv$ Fuerza de arrastre $\longrightarrow \vec{F}_{ARR} = -m\,\vec{a}^{\,p}_{ARR} = -m\left[\bar{a}^{\,o} + \bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times\overline{OP}] + \dot{\bar{\omega}}\times\overline{OP}\right]$
  – inercial –
  $\begin{cases} -m\bar{a}_o \text{ — Fuerza inercial rotacional} \\ -m(\bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times\overline{OP}]) \text{ — Fuerza inercial centrífuga} \\ -m(\dot{\bar{\omega}}\times\overline{OP}) \text{ — Fuerza inercial azimutal} \end{cases}$

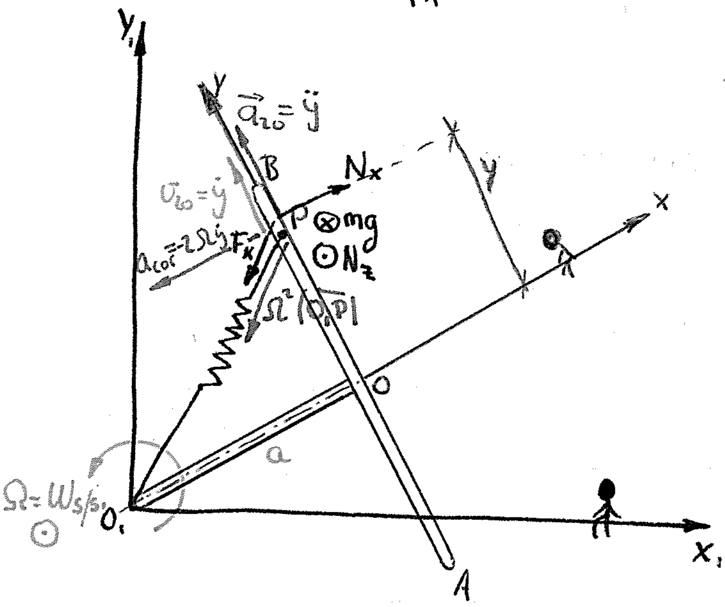
- $m\cdot\vec{a}_{CORIOLIS} \equiv$ Fuerza de coriolis $\longrightarrow \vec{F}_{COR} = -m\,\vec{a}_{CORIOLIS}$
  – inercial –

NOTA! En estático relativo, $\vec{F} + \vec{F}_{ARR} = \bar{0}$ pues $\begin{cases} \vec{a}^{\,p}_{20} = 0 = \vec{a}_{REL} \\ \vec{v}^{\,p}_{20} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{COR} = 0 \end{cases}$

2 Ecuación de la energía en dinámica relativa

Problema Din. Rel. I

Datos $\left\{ \begin{array}{l} \omega = \Omega \text{ cte},\ \text{situamos } \vec{g} = g(-K_1),\ \text{partícula material } (m),\ \mu = 0,\ \text{Muelle: } K,\ l_0 = 0, \\ \text{Distancia } a,\ \dfrac{K}{m} - \Omega^2 > 0 \end{array} \right.$



→ ANÁLISIS PREVIO EN SISTEMA INERCIAL (no lo piden)

$$F_{reales} \left\{ \begin{array}{l} mg(-K_1);\quad \bar{N} = N_x\vec{i} + N_z\vec{k} \\ F_K = -K\,\overline{O_1P} = -K(a\vec{i} + y\vec{j}) \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\vec{a}^{\,P}_{S_2/S_1}}_{\text{comp. acel}} = \vec{a}^{\,P}_{20} + \vec{a}^{\,P}_{01} + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{\,P}_{20}$$

$$\vec{a}^{\,P}_{20} = \ddot{y}\vec{j}$$

$$\vec{a}^{\,P}_{01} = \cancel{\vec{a}^{\,0}_{01}} + \vec{\omega}_{01} \times \underbrace{[\vec{\omega}_{01} \times \overline{O_1P}]}_{\text{acel angular}} + \cancel{\dot{\vec{\omega}}_{01}} \times \overline{O_1P} =$$

$0 \to \vec{\omega}_{01} = $ cte

$$= -\Omega^2 (a\vec{i} + y\vec{j})$$

$$2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}^{\,P}_{20} = 2\Omega K_1 \times \dot{y}\vec{j} = -2\Omega\dot{y}\vec{i}$$

Por tanto, en S_1 por $\sum \vec{F} = m\vec{a}_{21}$:

$$\left| \begin{array}{ll} \vec{i}: & N_x - Ka = m(-\Omega^2 a - 2\Omega\dot{y}) \quad (1) \\ \vec{j}: & -Ky = m(\ddot{y} - \Omega^2 y) \quad (2) \\ \vec{k}: & -mg + N_z = m \cdot 0 = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

Se pide: Analizar el equilibrio y mov. relativo de P.

$$F_{reales} \left\{ \begin{array}{l} mg(-K_1);\quad \bar{N} = N_x + N_z \\ y\quad F_K = -K\,\overline{OP} = -K(a\vec{i} + y\vec{j}) \end{array} \right. ;\quad \vec{a}^{\,P}_{20} = \vec{a}^{\,P}_{Rel} = \ddot{y}\vec{j}$$

$$F_{inercia} = F_{in\,ARR} = -m\underbrace{\vec{a}^{\,P}_{ARR}}_{\vec{a}^{\,P}_{01}} = -m[-\Omega^2(a\vec{i} + y\vec{j})] = \overbrace{m\Omega^2(a\vec{i} + y\vec{j})}^{F_{in.\ arr.\ cent.}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{No hay } F_{ARR\,(rot)} \text{ por } a^{01}_{a} = 0 \\ \text{No hay } F_{arr\,(azimut)}\ \dot{\vec{\omega}} = 0 \end{array} \right.$$

$$F_{in\,COR} = -m\,a^{P}_{COR} = -m[-2\Omega\dot{y}\vec{i}] = 2m\Omega\dot{y}\vec{i}$$

Por tanto

$$\left| \begin{array}{lll} \vec{i} = N_x - Ka + m\Omega^2 a + 2m\Omega\dot{y} = 0 & & (1') \equiv (1) \\ \vec{j} = -Ky + m\Omega^2 y = m\ddot{y} & & (2') \equiv (2) \\ \vec{k} = N_z - mg = 0 & & (3') \equiv (3) \end{array} \right.$$

Dato ⊛ Indusbol.com

$$\frac{K}{m} - \Omega^2 > 0$$

① Posición de equilibrio relativo de P en S y reacción del tubo

En equil. relativo $\left\{ \vec{v}^{\,P}_{Rel} = \vec{v}^{\,P}_{20} = \dot{y} = 0 \longrightarrow \vec{a}^{\,P}_{20} = \ddot{y} = 0 \right.$

De 2' $\longrightarrow$ $(m\Omega^2 - K)y = m\ddot{y} = 0$ → $y = 0$; → $m\Omega^2 - K \neq 0$ por dato ⊛

$$\boxed{\text{Por tanto, equilibrio en } y=0 \longrightarrow x=0,\ z=0 \quad O(0,0,0)}$$

De 1' y 3' $\left\{ \begin{array}{l} N_x = (K - m\Omega^2)\,a > 0 \text{ por dato ⊛} \\ N_z = mg \end{array} \right.$ $\Longrightarrow$ Desde el sistema S se observa que $\vec{F}_K > \vec{F}_{Inercial\ cent}$ y N_x "ayuda" a $\vec{F}_{inercial}$ para compensar a $\vec{F}_K$

- Muelle potente, $\vec{\omega}$ pequeña

② Modifique la respuesta anterior si $\frac{K}{m} - \Omega^2 < 0$ ó si $\frac{K}{m} - \Omega^2 = 0$

Si $\frac{K}{m} - \Omega^2 < 0$ → $\boxed{\text{equilibrio en } y=0 \rightarrow x=0,\ z=0 \quad O(0,0,0)}$

$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1'\ N_x = (K - m\Omega^2)a < 0 \\ 3'\ N_z = mg \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}_K < \vec{F}_{inercial\ cent} \text{ y } \vec{N}_x \text{ "ayuda" a } \vec{F}_K \text{ para compensar } \vec{F}_{inercial} \text{ (muelle débil, } \vec{\omega} \text{ grande)}}$

Si $\frac{K}{m} - \Omega^2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1'\ N_x = (K - m\Omega^2)a = 0 \\ 3'\ N_z = mg \end{array} \right.$ $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{F}_K = \vec{F}_{inercial\ cent.} \text{ La partícula no toca las paredes del tubo pues } N_x = 0}$

$2' \rightarrow (\cancel{m\Omega^2 - K})^{\,0}\, y = m\ddot{y} = 0 \longrightarrow \boxed{\text{Equilibrio } \forall y,\ x=0,\ z=0}$

③ Se pide E_p de Ⓜ en S justificando a partir de ella la naturaleza del equilibrio.

Analizamos Fuerzas para ver si el mov. es conservativo

$mg(-K) \longrightarrow$ conservativa $\quad U_g = \cancel{mgz_1}^{\,0} + C_1 = C_1$

$\bar{N} = N_x \bar{i} + N_z \bar{K}$ (No conservativa) $\longrightarrow$ Pero $\tau_N = \int N v\, dt = 0$ $\quad N \perp v$

F_K Conservativa $\quad U_K = \frac{1}{2} K |O_1P|^2 = \frac{1}{2} K (a^2+y^2) + C_2$

$F_{inercia\ coriolis}$ = No es conservativa pero $\int_{F_{cor}} F v\, dt = 0$ por $F \perp v$

$F_{inercia\ arrastre\ cent.}$ = Es conservativa porque $W_{01} = \Omega \bar{K}_1 = cte$

$\boxed{\overset{\circ}{\Delta}V}$ $\quad U_{cent} = -\frac{1}{2} m \underbrace{\Omega^2 |O_1P|^2}_{v = w \cdot R} = -\frac{1}{2} m\Omega^2 (a^2+y^2) + C_3$

Nota! Para el observador negro en S_1 N_x tendrá trabajo por no ser $\perp$ a la trayectoria. Por tanto, el mov. es conservativo en S pero no en S_1.

En S, $U_{TOTAL} = C_1 + \frac{1}{2} K (a^2+y^2) + C_2 - \frac{1}{2} m\Omega^2 (a^2+y^2) + C_3$, $\quad C_1 + C_2 + C_3 = C'$

$$\boxed{U_{Tot} = \frac{1}{2} (a^2+y^2)(K - m\Omega^2) + C'}$$

Veamos si $y=0$ es extremo relativo para comprobar que es punto de equilibrio

$\frac{dU}{dy} = \frac{1}{2} \underbrace{(K - m\Omega^2)}_{>0} 2y = 0 \longrightarrow$

$\frac{d''U}{dy} = (K - m\Omega^2) > 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow$ $y=0$ es mínimo (equilibrio estable)

④ Indicar F_{REALES} y $F_{INERCIA}$ expresadas en S

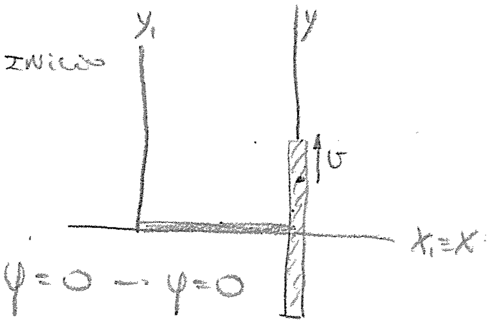
F_{reales} $\begin{cases} P = mg(-\vec{K}) \\ \bar{N} = N_x \bar{i} + N_z \bar{K} \\ \bar{F}_K = -K(a\bar{i} + y\bar{j}) \end{cases}$

$F_{INERCIAL}$ $\begin{cases} F_{inARR} = m\Omega^2 (a\bar{i} + y\bar{j}) \\ F_{inCOR} = 2m\Omega \dot{y} \bar{i} \end{cases}$

⑤ Ecuación diferencial del mov. relativo de P

De 2' $\ddot{y}m + Ky - m\Omega^2 y = 0$; $\boxed{\ddot{y} + y\underbrace{\left(\frac{K}{m} - \Omega^2\right)}_{w_0^2} = 0 \quad \text{Ec. diferencial de tipo armónico}}$

⑥ Solución de ec. + constantes obteniendo $y(t)$



Sol = $y = \underbrace{A \,\text{sen}\,(w_0 t + \varphi)}_{\text{constantes}}$

$y_{(t=0)} = 0 \longrightarrow \quad 0 = A\,\text{sen}\,(w_0 \cdot 0 + \varphi)$; $\text{sen}\,\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$

$\dot{y} = A w_0 \cos(w_0 t + \varphi)$

$\dot{y}_{(t=0)} = A w_0 \cos(w_0 \cdot 0) = A w_0 = v_0$; $A = \frac{v_0}{w_0} = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{K}{m} - \Omega^2}}$

$y_{(t)} = \frac{v_0}{w_0}\,\text{sen}\,(w_0 t) = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{K}{m} - \Omega^2}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m} - \Omega^2}\; t\right)$

$\dot{y}_{(t)} = v_0 \cos(w_0 t) = v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m} - \Omega^2}\; t\right)$

⑦ Calcular N_x, N_y y N_z en función de t

$N_x = Ka - m\Omega^2 a - 2m\Omega\dot{y} = am\left(\frac{K}{m} - \Omega^2\right) - 2m\Omega\dot{y} =$

$= \boxed{a m w_0^2 - 2m\Omega v_0 \cos(w_0 t)}$

$\boxed{\begin{array}{l} N_y = 0 \\ N_z = mg \end{array}}$ (cte) (cte)

⑧ ⑦ ??

DINÁMICA RELATIVA

8.1 Para aceleraciones: $\vec{a}_{P/S_1} = \vec{a}_{P/S} + \vec{a}^P{}_{S/S_1} + 2\cdot\vec{\omega}_{S/S_1} \times \vec{V}_{P/S}$, con $2\cdot\vec{\omega}_{S/S_1}\times\vec{V}_{P/S} \equiv \vec{a}_{coriolis}$

(ó $\vec{a}_{21}{}^P = \vec{a}_{20}{}^P + \vec{a}_{01}{}^P + 2\cdot\vec{\omega}_{01}\times\vec{V}_{20}{}^P$ ó $\vec{a}_{ABS}{}^P = \vec{a}_{REL}{}^P + \vec{a}_{ARR}{}^P + 2\cdot\vec{\omega}_{ARR}\times\vec{V}_{REL}{}^P$)

donde si O es un punto de S, es: $\vec{a}^P{}_{S/S_1} = \vec{a}^O{}_{S/S_1} + \vec{\omega}_{S/S_1}\times(\vec{\omega}_{S/S_1}\times\vec{OP}) + \dot{\vec{\omega}}_{S/S_1}\times\vec{OP}$

Así, la ecuación de la dinámica puede escribirse:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}_{P/S_1} = m\cdot(\vec{a}_{P/S} + \vec{a}^P{}_{S/S_1} + 2\cdot\vec{\omega}_{S/S_1}\times\vec{V}_{P/S}) = m\cdot(\vec{a}^P{}_{REL} + \vec{a}^P{}_{ARR} + \vec{a}^P{}_{CORIOLIS})$$

Planteado por enero azul

y a partir de ésta se puede escribir: $\vec{F} - \underbrace{m(\vec{a}^P{}_{ARR} + \vec{a}^P{}_{CORIOLIS})}_{??\ \leftarrow \text{Apic. por [illegible]}} = m\cdot\vec{a}^P{}_{REL}$

que proporciona la ecuación de la dinámica en el movimiento del punto P respecto del sistema no inercial S, incluyendo en las fuerzas sobre P los términos que resultan de $m\cdot\vec{a}^P{}_{ARR}$ y $m\cdot\vec{a}^P{}_{CORIOLIS}$, que reciben el nombre de:

- Fuerza de inercia de arrastre: $\vec{F}_{ARR} = -m\cdot\vec{a}^P{}_{ARR} = -m\,(\bar{a}_0 + \bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times\bar{OP}] + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{OP}) \Rightarrow$
- Fuerza de inercia de Coriolis: $\vec{F}_{COR} = -m\cdot\vec{a}^P{}_{CORIOLIS}$ $\Rightarrow$
  $\begin{cases} -m\bar{a}_0 \doteq \text{F inerc. rotacional} \\ -m(\bar{\omega}\times[\omega\times\bar{OP}]) \doteq \text{F inerc. centrífuga} \\ -m(\dot{\bar{\omega}}\times OP) \doteq \text{F inerc. azimutal} \end{cases}$

Por tanto, la ecuación fundamental de la dinámica relativa queda: $\vec{F} + \vec{F}_{ARR} + \vec{F}_{COR} = m\cdot\vec{a}_{P/S}$

(la que plantea el enano azul en la patata)

A partir de esta ecuación, la condición para la estática relativa es que: $\vec{F} + \vec{F}_{ARR} = \bar{0}$ $\begin{cases} \bar{a}_{P/S} = \bar{0} \\ \bar{v}_{P/S} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a}_{cor} = \bar{0} \end{cases}$

(siendo siempre $\vec{F}_{COR} = \bar{0}$ por ser nula la velocidad relativa en estática)

8.2.- ECUACIÓN DE LA ENERGÍA EN DINÁMICA RELATIVA.

De forma análoga se puede analizar la energía cinética relativa, aplicando el teorema de la energía cinética en el movimiento respecto del sistema no inercial S:

$$dE_c = dT = \vec{F}\cdot\overbrace{\vec{V}_{P/S}\cdot dt}^{d\vec{r}\ \text{relativo (respecto a S)}} + \vec{F}_{ARR}\cdot\vec{V}_{P/S}\cdot dt + \vec{F}_{COR}\cdot\vec{V}_{P/S}\cdot dt$$

siendo: $\vec{F}_{COR}\cdot\vec{V}_{P/S}\cdot dt = -m\cdot(\overbrace{2\cdot\vec{\omega}_{S/S_1}\times\vec{V}_{P/S}}^{\perp\, v_{P/S}})\cdot\vec{V}_{P/S}\cdot dt = 0$ $\quad 0\ (\perp)$

Por tanto: $dE_c = dT = \vec{F}\cdot\vec{V}_{P/S}\cdot dt + \vec{F}_{ARR}\cdot\vec{V}_{P/S}\cdot dt$

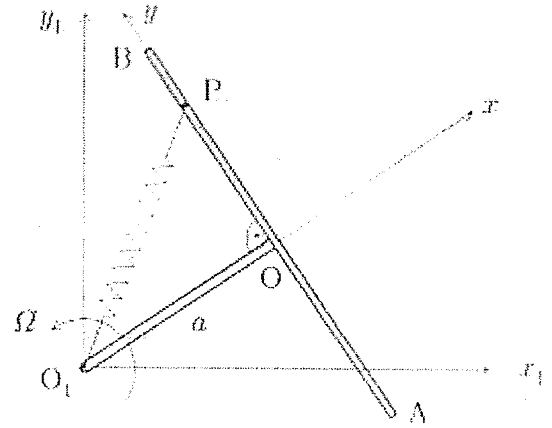
Si $\vec{F}$ y $\vec{F}_{ARR}$ derivan de potencial, entonces se conserva la energía mecánica. Un caso típico e interesante en que $\vec{F}_{ARR}$ es conservativa se produce en un movimiento del sistema S de giro en torno a un eje fijo con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$. Si se considera dicho eje como el eje z y se toman unas coordenadas cilíndricas r,θ,z, se obtiene:

$\vec{F}_{ARR} = m\Omega^2 r\vec{u}_r$, que deriva de una energía potencial de valor:

$U_{ARR} = -\dfrac{1}{2}m\Omega^2 r^2$, llamado potencial centrífugo.

PROBLEMA DIN. RELAT. 1. (JUN 2001)

Un tubo AB, de sección despreciable, unido solidariamente a la manivela O_1O gira con velocidad angular constante, Ω, en el plano horizontal $O_1x_1y_1$ alrededor del eje O_1z_1, vertical ascendente.
Por el interior del tubo puede moverse un punto material P, de masa m, sin rozamiento, actuando sobre el mismo, además del peso, la fuerza de un muelle ideal, de constante elástica k y longitud natural nula.
El sistema de referencia $O_1x_1y_1z_1$ es inercial y como sistema de referencia ligado al tubo se utilizará $Oxyz$ (figura) estando dirigido Oy según el eje del tubo y siendo Oz paralelo a O_1z_1 y del mismo sentido. El valor de la distancia O_1O es a.
Se propone analizar el equilibrio y el movimiento relativo de P respecto a $Oxyz$, admitiendo que se verifica $\frac{k}{m} - \Omega^2 > 0$.



1) Determine la posición de equilibrio relativo de P en $Oxyz$ y obtenga el valor de la reacción del tubo en ese caso.

2) Justifique las modificaciones en la respuesta anterior si $\frac{k}{m} - \Omega^2 < 0$ o si $\frac{k}{m} - \Omega^2 = 0$.

3) Obtenga la energía potencial del punto material en el sistema $Oxyz$ y justifique a partir de la misma la naturaleza del equilibrio.

Para analizar el movimiento relativo en $Oxyz$ se adopta como instante inicial uno en el que Ox y O_1x_1 coinciden en dirección y sentido. En ese instante el punto material P posee una velocidad relativa $v_0\vec{j}$.

4) Indique cada una de las fuerzas reales y de las fuerzas de inercia que actúan sobre el punto material, expresándolas en el sistema $Oxyz$.

5) Obtenga la ecuación diferencial que determina la ley del movimiento relativo, $y(t)$, del punto P.

6) Determine la solución de dicha ecuación diferencial con dos constantes de integración y obtenga dichas constantes a partir de las condiciones iniciales. Exprese finalmente la ecuación $y(t)$ del movimiento relativo de P.

Sustituir valores de y e $\ddot{y}$ para sacar N_x N_y N_z

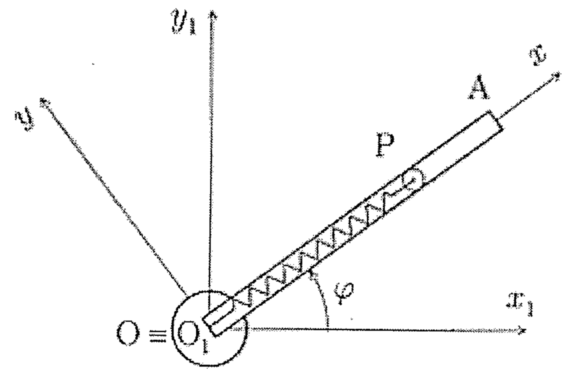
7) Calcule las componentes de la reacción del tubo sobre P en función del tiempo.

8) Para conseguir la rotación uniforme del tubo AB es necesario aplicar un par $M_m\vec{k}_1$ al sistema formado por la manivela O_1O y el tubo AB. Determine el valor de dicho par en función del tiempo.

9) ¿Cuál es la ley del movimiento relativo si $\frac{k}{m} - \Omega^2 = 0$? ¿Cuál es cuando $\frac{k}{m} - \Omega^2 < 0$?

PROBLEMA DIN. RELAT. 2 (SEP 2003)

Un tubo OA, de longitud L y sección y masa despreciables, gira en un plano ($z_1 = 0$) accionado por un motor que le imprime una velocidad angular constante $\omega = \omega k_1$ alrededor de uno de sus extremos, O≡O$_1$, respecto a un sistema inercial de referencia S$_1$:{O$_1 x_1 y_1 z_1$}, según indica la figura.



Una bolita, asimilable a un punto material P de masa m, puede moverse por el tubo sin rozamiento y su posición en el sistema de referencia S:{Oxyz}, solidario del tubo, se establece mediante la abscisa $x = \overline{OP}$. A su vez, la posición del sistema S respecto a S$_1$ viene definida mediante el ángulo φ entre los respectivos ejes de abscisas, como se observa en la figura.

Sobre el punto material P se aplica una fuerza atractiva hacia O$_1$, de módulo $k|O_1P|$, siendo k = cte. y, además, el tubo ejerce sobre P la reacción correspondiente.

En el instante inicial, $t = 0$, los sistemas de referencia S y S$_1$ coinciden ($\varphi = 0$), el punto P se encuentra en la abscisa $x = x_o$ y su velocidad respecto a S es cero ($\dot{x} = 0$).
Los valores de los parámetros m, ω y k son tales que el movimiento de P lo aleja permanentemente de O. En todo el ejercicio se considera exclusivamente el movimiento del punto material cuando éste se encuentra dentro del tubo, es decir, $x_o \leq x \leq L$.

1) Dibuje sobre un croquis las fuerzas que actúan sobre P, distintas de las de inercia.

2) Obtenga las fuerza de inercia sobre P para el sistema de referencia S, en función de m, ω, x y $\dot{x}$, en la posición genérica de la figura, expresándolas por sus componentes en la base $\{i, j, k\}$ de S. Represente dichas fuerzas de inercia en un croquis similar al del apartado 1).

3) Aplicando la ley fundamental de la dinámica al punto P en S, deduzca la ecuación diferencial que determina $x(t)$ y compruebe que coincide con la expresión $\ddot{x} - (\omega^2 - k/m)x = 0$. Asimismo, determine la reacción del tubo sobre P como función de m, ω y $\dot{x}$, expresándola vectorialmente en la base $\{i, j, k\}$ de S.

4) Justifique, sin resolver la ecuación deiferencial, que el movimiento de P se produce en la forma indicada (alejamiento permanente de O) cuando $\omega^2 > k/m$.

5) Determine $x(t)$ para las condiciones iniciales indicadas, como función del tiempo y de parámetros del enunciado.

6) Exprese la velocidad de P respecto a S como función del tiempo y de parámetros del enunciado.

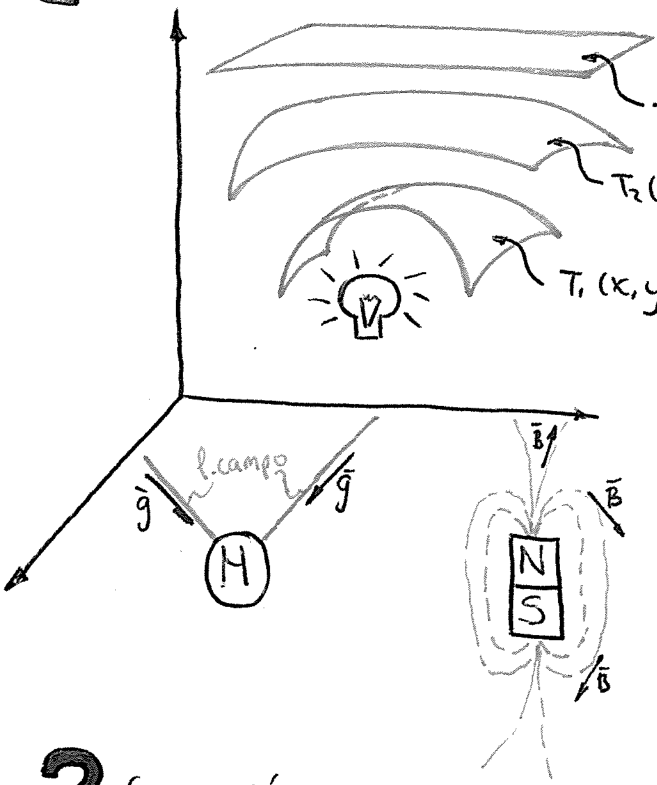
7) Determine la energía potencial $U(x)$ asociada al movimiento de P en S.

8) Valiéndose de la energía potencial determine la velocidad de P respecto a S cuando P alcanza el extremo del tubo.

9) Calcule la potencia que ejerce el motor que hace girar el tubo cuando P alcanza el punto A.

TRABAJO Y ENERGÍA I

1 CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES



- Campo escalar: Función que asigna a cada punto del espacio un valor escalar (ejemplo en figura)

- Campo vectorial: Función que asigna a cada punto del espacio un valor vectorial

2 CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

La circulación de un campo a lo largo de una curva es $\int_{C\,A}^{B} \vec{V}\,d\vec{r}$

Expresando V y $d\vec{r}$ en cartesianas y con C parametrizada en λ tenemos

$$\int_A^B \vec{V}d\vec{r} = \int_{A(\lambda_1)}^{B(\lambda_2)} V_x[x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)]\frac{dx}{d\lambda}d\lambda + V_y[x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)]\frac{dy}{d\lambda}d\lambda + V_z[x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)]\frac{dz}{d\lambda}d\lambda$$

3 GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR

Es un campo vectorial con dirección normal a la sup. de nivel del campo y sentido correspondiente a los valores crecientes en U

Verifica que:

$$\boxed{\nabla U \cdot d\vec{r} = dU}$$

Operador ∇

- Gradiente: $\text{grad}\,U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$
- Divergencia: $\text{div}\,\vec{V} = \nabla\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\vec{k}$
- Rotacional: $\text{rot}\,\vec{V} = \nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$

4 FUNCIÓN POTENCIAL. ENERGÍA POTENCIAL. CAMPOS CONSERVATIVOS

4.1 FUNCIÓN POTENCIAL

Un campo vectorial $\vec{V}$ puede expresarse como $\boxed{\vec{V} = \text{grad } U}$ y se verifica que

- La circulación de $\vec{V}$ entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino
- La circulación de $\vec{V}$ a lo largo de cualquier línea cerrada es nula

4.2 CAMPOS DE FUERZAS

Una fuerza deriva de potencial si $\vec{F} = -\nabla E_p$ — orienta a $\vec{F}$ en sentido decrec. de E_p

El potencial lo sacamos considerando la intensidad del campo $\frac{\vec{F}}{m}$

$$\vec{F} = -\nabla E_p \longrightarrow \frac{F}{m} = -\nabla \frac{E_p}{m}$$

La energía potencial y el potencial son funciones escalares indeterminadas a falta de una constante (trabajamos usualmente con incrementos)

5 TEOREMA DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

A partir del tma. de la Ecinética:

$$\tau_{A-B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_A^B \underbrace{\nabla E_p\, d\vec{r}}_{dE_p} = -\int_A^B dE_p = -(E_{p_B} - E_{p_A}) = \Delta E_c$$

Por tanto: $\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \longrightarrow \Delta E = 0 \longrightarrow \boxed{E_{mecánica} = cte}$

Cuando las fuerzas sean algunas no conservativas diremos

$$\underbrace{\tau_{F.CONS.}}_{-\Delta E_p} + \tau_{F.NO\,CONS} = \Delta E_c \Longrightarrow \tau_{F.NO\,CONS} = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E$$

6 IDENTIFICACIÓN DE FUERZAS CONSERVATIVAS

- Sólo dependen de la posición no de la velocidad ni del tiempo
- Su rotacional es nulo → $\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{0}$

Identificación de fuerzas en la práctica

Fuerzas conservativas

- $F.$ gravitatoria $= G \dfrac{M_1 M_2}{r^2}(-\bar{u}_r)$

  $U_{grav} = -G \dfrac{M_1 M_2}{r}$
- Peso $= mg\,(-\bar{k})$

  $U_g = mgz + cte$
- $F_{muelle} = -K\,x\,\vec{i}$

  $U_k = \frac{1}{2} K x^2 + cte$
- $F = F\vec{i} = cte$ (cualquier $\bar{F}$ cte en módulo, dirección y sentido)

  $U_F = F(-x) + cte$

Fuerzas no conservativas

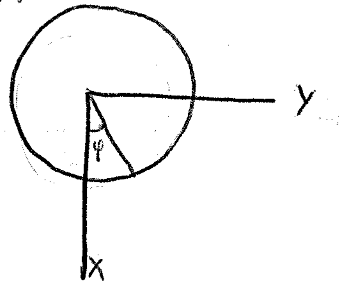
- $\vec{T}$ensiones
- $\vec{F}_{Roz}$
- $\vec{N}$
- $\vec{R}$ (reacciones de contacto)
- $\vec{F}$ disip. en general

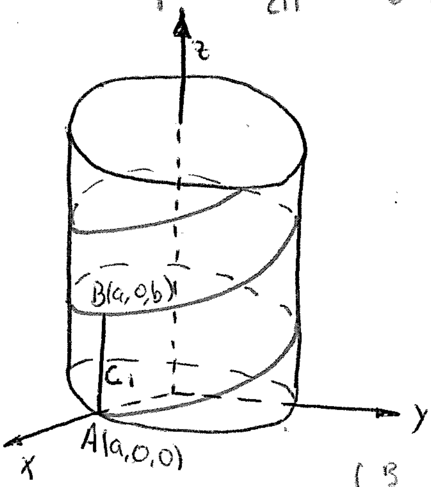
7 EJERCICIOS

1) Dada $\vec{F}(x,y,z) = (3y+z^2)\vec{i} + (3x+z)\vec{j} + (2xz+y)\vec{k}$ (N) entre los puntos $(a,0,0)$ y $(a,0,b)$ (m) sobre curva $x^2+y^2=a^2$; $z = \frac{b}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}$. Determinar trabajo:

$$\vec{r}\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = \frac{b}{2\pi}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\varphi) = \frac{b}{2\pi}\varphi \end{cases} \longrightarrow$$

Se trata de una hélice circular





1^{er} método: Por definición

$$\tau_F = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} \quad \begin{cases} \vec{F} = 3a\,\mathrm{sen}\,\varphi + \left(\frac{b}{2\pi}\varphi\right)^2\vec{i}\ \ldots \\ d\vec{r} = -a\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi\,\vec{i} + a\cos\varphi\, d\varphi\,\vec{j} + \frac{b}{2\pi}\,d\varphi\,\vec{k} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int_A^B \left[3a\,\mathrm{sen}\,\varphi + \left(\frac{b}{2\pi}\varphi\right)^2\right](-a\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi) + \ldots = \text{Infierno}$$

2^{o} método: Compruebo si $\vec{F}$ es conservativa

$$\begin{cases} \text{Depende sólo de posición} \longrightarrow \underline{\text{Cumple}} \\ \nabla\times\vec{F} = \vec{0} \longrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y+z^2 & 3x+z & 2xz+y \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} + (2z-2z)\vec{j} + (3-3)\vec{k} = \vec{0} \ \underline{\text{Cumple}} \end{cases}$$

$\underline{\vec{F} \text{ es conservativa}}$

1^{a} forma: Busco una forma que proporcione una integral sencilla

NOTA: Las rectas son curvas apropiadas si pasan por el origen o son paralelas a los ejes

$$\tau_{AB} = \int_A^B F\,d\vec{r} \longrightarrow \text{Buscamos una curva } C_1 \quad \begin{cases} x = a;\ y = 0;\ z = z \\ \vec{r} = a\vec{i} + z\vec{k} \\ d\vec{r} = dz\,\vec{k} \\ \vec{F} = z^2\vec{i} + (3a+z)\vec{j} + (2az)\vec{k} \end{cases}$$

$$\tau_{AB} = \int_{A\to z=0}^{B\to z=b} F\,d\vec{r} = \int_{A\,z=0}^{B\,z=b} F\,dz\,\vec{k} = 2a\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^b = \boxed{ab^2}$$

2^a forma: Busco E_p tal que $\vec{F} = -\nabla E_p$ y $\tau_{AB} = -\Delta E_p$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left[\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right]$$

$$\begin{cases} \vec{i}: \ 3y + z^2 = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} & (1) \\ \vec{j}: \ 3x + z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} & (2) \\ \vec{k}: \ 2xz + y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} & (3) \end{cases}$$

NOTA! En sistemas con gradientes integro una ecuación y derivo las demás

De (1) $E_p = -\int (3y + z^2)\, dx =$

$= -\left[3yx + z^2x + f(y,z)\right]$

Ahora derivo (2)

$$\cancel{3x} + z = \cancel{-}\frac{\partial \cancel{-}\left[3yx + z^2x + f(y,z)\right]}{\partial y} =$$

$$= \cancel{3x} + 0 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = z;\quad f(y,z) = \int z\,dy =$$

$$= zy + f(z)$$

Por tanto $E_p = -\left[3yx + z^2x + zy + g(z)\right]$

Ahora de (3)

$$\cancel{2xz} + \cancel{y} = +\frac{\partial\left[3yx + z^2x + zy + g(z)\right]}{\partial z} = 2xz + y + \frac{\partial g(z)}{\partial z}$$

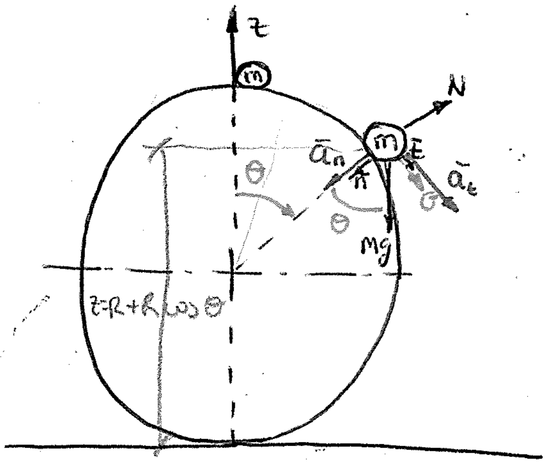
$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0; \longrightarrow z = cte = C_1$$

$$E_p = -\left[3yx + z^2x + zy + C_1\right]$$

$$\tau_{A\text{-}B} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\left(-\left[ab^2 + C_1\right] - (-C_1)\right) = \boxed{ab^2}$$

$B = (a,0,b)$ $A(a,0,0)$

⑥ Esfera de radio R (vínculo liso) $\mu = 0$ Determinar la altura a la que la masa abandone la esfera.



Condición dinámica para separación:

$\bar{N} = 0$

Busco $\bar{N}$ en función de la posición

$$\sum \bar{F} = m\bar{a} \, ; \; \bar{n}: \; mg\cos\theta - N = m\bar{a}_n \overset{\text{Por mov. circular}}{=} m \cdot \frac{v^2}{R} = m\dot{\theta}^2 R$$

$$N = mg\cos\theta - m\dot{\theta}^2 R$$

Necesito $\dot{\theta}_{(\theta)}$ por lo que busco relacionar velocidad y posición.

$\Rightarrow$ ANALIZO FUERZAS Y ENERGÍAS

Movimiento conservativo? $\left\{ \begin{array}{l} mg(-k) \text{ es conservativo} \rightarrow E_p = mgz + C_1 \\ N \text{ (no conservativa)} \rightarrow \tau_N = 0 \text{ por } N \perp v \\ \qquad \int F\,dr = \int F\,v\,dt = 0 \end{array} \right\}$ Mov. conser.

Por tanto $E = E_p + E_c = \text{cte}$

$$\cancel{E_{c_{in}}}^{0} + E_{p_{in}} = E_{c\theta} + E_{p\theta}$$

$$\cancel{m}g2R + \cancel{C_1} = \frac{1}{2}\cancel{m}\dot{\theta}R + \cancel{m}gz + \cancel{C_1}$$

$$g2R = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2R^2 + g(R + R\cos\theta) \, ; \; 2g - g - g\cos\theta = \frac{\dot{\theta}}{2}$$

$$R\dot{\theta}^2 = 2g(1-\cos\theta)$$

Por tanto

$$N_{(\theta)} = mg\cos\theta - m\,2g(1-\cos\theta) \rightarrow N_{(\theta)} = mg(3\cos\theta - 2)$$

$$N_{(\theta^*)} = 0 \longrightarrow N_{(\theta^*)} = mg(3\cos\theta - 2) = 0 \longrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$h = R + R\cos\theta = R + \frac{2}{3}R = \boxed{\frac{5R}{3}}$$

TRABAJO Y ENERGÍA (I)

1.-CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

Campo escalar: Se denomina así a una función que asigna a cada punto del espacio un valor escalar:

$$U = U(x, y, z) = U(\vec{r})$$

$U(x, y, z) = cte$ es la ecuación de una superficie. Se llamarán superficies de nivel (equiescalares o equipotenciales) y serán las superficies de puntos en los que el campo escalar tiene ese determinado valor *cte.* Las superficies equiescalares no se pueden cortar (los puntos de corte tendrían asignados dos valores distintos). Esto no implica que las superficies tengan que ser paralelas.

Campo vectorial: Se denomina así a una función que asigna a cada punto del espacio un valor vectorial:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z) = \vec{V}(\vec{r})$$

En coordenadas cartesianas tendrá la forma:

$$\vec{V} = V_x(x, y, z)\vec{i} + V_y(x, y, z)\vec{j} + V_z(x, y, z)\vec{k}$$

Las líneas tangentes en cada punto al campo vectorial reciben el nombre de líneas de campo.

Campos escalares planos (ver Schez.Prz. pag 150)
Campos vectoriales planos (ver Schez.Prz. pag 151)

2.-CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL.

Se define circulación de un campo vectorial $\vec{V}$ a lo largo de una curva C entre los puntos A y B como:

$$\int_{A}^{B} \vec{V} \cdot d\vec{r} \quad (\text{C})$$

Expresados $\vec{V}$ y $d\vec{r}$ en cartesianas, estando C expresada en paramétricas en función de un parámetro λ:

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\vec{i} + y(\lambda)\vec{j} + z(\lambda)\vec{k} \Rightarrow d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \frac{dx}{d\lambda} \cdot d\lambda\vec{i} + \frac{dy}{d\lambda} \cdot d\lambda\vec{j} + \frac{dz}{d\lambda} \cdot d\lambda\vec{k}$$

$$\vec{V} = V_x(x, y, z)\vec{i} + V_y(x, y, z)\vec{j} + V_z(x, y, z)\vec{k}$$

la circulación de $\vec{V}$ a lo largo de C entre los puntos A y B se expresará mediante una integral en λ:

$$\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{A(\lambda 1)}^{B(\lambda 2)} V_x[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)] \cdot \frac{dx}{d\lambda} d\lambda + V_y[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)] \cdot \frac{dy}{d\lambda} d\lambda + V_z[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)] \cdot \frac{dz}{d\lambda} d\lambda$$

El trabajo de una fuerza es un caso particular de circulación, en el que el campo vectorial es un campo de fuerzas.

3.-GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR

Es un campo vectorial que asigna a cada punto del dominio en el que está definido el campo escalar un vector con:

- **dirección:** normal a la superficie de nivel del campo escalar U que pasa por cada punto.
- **sentido:** el correspondiente a valores crecientes de U.
- **módulo:** derivada de U según la normal en el sentido de los valores crecientes de U.

$U(x,y,z) = x^2 + xy^3 + 3z\ln x$

$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y^3 + 3z\frac{1}{x}$

$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 + x3y^2 + 0$

$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 + 0 + 3\ln x$

Operador ∇:

El operador ∇ indica la operación $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$. Se opera "como si fuese un vector".

- El "producto" por una función escalar U, $\nabla \cdot U$, representa el $\boxed{\textit{gradiente}}$ de dicha función ($gradU = \nabla \cdot U$)
- El "producto escalar" por un vector (campo vectorial) $\vec{V}$, $\nabla \cdot \vec{V}$, representa la $\boxed{\textit{divergencia}}$ de dicho campo ($div\vec{V} = \nabla \cdot \vec{V}$) $= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$
- El "producto vectorial" por un vector (campo vectorial) $\vec{V}$, $\nabla \times \vec{V}$, representa el $\boxed{\textit{rotacional}}$ de dicho campo. ($rot\vec{V} = \nabla \times \vec{V}$) No suele caer

En la expresión del gradiente se verifica: $\boxed{\nabla U \cdot d\vec{r} = dU}$.

El gradiente es la derivada direccional máxima.

La expresión de ∇U en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas queda, respectivamente:

Solo saber recuadro

$$1)\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

$$2)\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\cdot\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot\vec{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{u}_z$$

$$3)\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\cdot\vec{u}_\theta + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot\vec{u}_\varphi$$

4.-FUNCIÓN POTENCIAL. ENERGÍA POTENCIAL. CAMPOS CONSERVATIVOS.

Función potencial (ver Schz.Prz.).

Se demuestra que un campo vectorial $\vec{V}$ tal que la circulación de $\vec{V}$ entre dos puntos A y B no depende del camino o curva elegida entre esos puntos puede expresarse como $\vec{V} = gradU$, donde U se llama función potencial de la que deriva $\vec{V}$. Se verifica, por tanto, que si $\vec{V}$ deriva de una función potencial U:

- la circulación de $\vec{V}$ entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino.
- la circulación de $\vec{V}$ a lo largo de cualquier línea cerrada es nula.

Campos de fuerzas Orienta $\vec{F}$ en sentido de E_p decreciente

Un campo de fuerzas deriva de un potencial cuando existe una función E_p, llamada energía potencial, tal que $\vec{F} = -\nabla E_p$. Se verifican para $\vec{F}$ las dos propiedades del apartado anterior.

Si en lugar de considerar la fuerza $\vec{F}$ consideramos la *intensidad de campo* $\frac{\vec{F}}{m}$, ésta será también un

$\vec{F} = -\nabla E_p \rightarrow \frac{\vec{F}}{m} = -\nabla\left(\frac{E_p}{m}\right)$

campo vectorial que derivará de una función potencial $\varphi = \frac{E_p}{m}$ a la que se llamará *potencial.*

Energía potencial y *potencial* son funciones escalares indeterminadas a falta de una constante, lo que permite asignar el valor que se quiera para ellos en un punto arbitrario del espacio, y en función de ese valor quedarán definidos el resto de valores para el resto de puntos. Esto no tendrá demasiada importancia al calcular incrementos de estas funciones, pues evidentemente la constante desaparecerá.

5.-TEOREMA DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Enunciado por Helmholtz en 1847. Se expresa, introduciendo en el teorema de la energía cinética ($\tau_{A\rightarrow B} = \Delta Ec$) la condición de que la fuerza aplicada derive de un potencial, como:

Thma. Ec

$$\tau_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B \underbrace{\nabla Ep \cdot d\vec{r}}_{\nabla E_p d\vec{r} = dE_p} = -\int_A^B dEp = -(Ep_B - Ep_A) = -\Delta Ep = \Delta Ec \Rightarrow \Delta Ec + \Delta Ep = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta Em = 0 \Rightarrow Em = cte$$

es decir, cuando los únicos campos de fuerzas que actúan derivan de un potencial, la energía mecánica (cinética + potencial) se conserva constante. De ahí que a esas fuerzas se las llame conservativas. En el caso de un punto material el movimiento se realiza intercambiando energía cinética con energía potencial y manteniendo la energía total (mecánica) constante.

Para el caso general en que las fuerzas aplicadas sean unas conservativas y otras no conservativas tendremos:

$$\tau_{F.C.} + \tau_{F.NC.} = \Delta Ec \Rightarrow \tau_{F.NC.} = \Delta Ec + \Delta Ep = \Delta Em$$

6.-IDENTIFICACIÓN DE LEYES DE FUERZA CONSERVATIVA.

Una fuerza conservativa cumple que:

- No depende del tiempo t ni de la velocidad $\vec{v}$, solamente depende de la posición:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$$

- Su rotacional es nulo, es decir: $rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{0}$

Identificación de fuerzas en la práctica

F.C.

- ~~Peso~~
- F. gravitatoria $= G \dfrac{m_1 m_2}{r^2} (-\bar{u}_r)$

$$U_{gravit} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

- $mg(-\bar{k}) \Rightarrow \bar{U}_g = mgz + cte$
- $F_{muelle} = -K x \vec{i}$

$$U_K = \frac{1}{2} K x^2 + cte$$

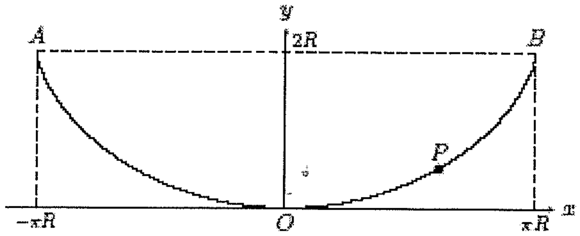
- $\bar{F} = F\bar{i} = cte \Rightarrow U_F = F(-x) + cte$

(cualquier fuerza constante en mod. direc. y sent.)

FNC

- Tensiones $\bar{T}$
- $\bar{F}_{Roz}$, $\bar{N}$
- $\bar{R}$ (reac. de contacto)
- $F_{disip.}$ en general

PROBLEMA T. y E.(I).1 (JUN 2005)



Un punto material P de masa m, sometido a su propio peso, está obligado a moverse sin rozamiento sobre la cicloide vertical cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = R(\theta + \operatorname{sen}\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [-\pi, \pi]$$

donde θ es un parámetro que depende del tiempo.

I) El movimiento del punto está determinado dinámicamente por la acción de dos fuerzas: el peso del punto material, que es una fuerza conservativa que deriva de potencial, y la reacción de la curva que mantiene al punto sobre la misma y que, al no existir rozamiento, es perpendicular en todo instante a la curva y no realiza trabajo.

1) Obtener las componentes cartesianas y el módulo de la velocidad de P en función de θ y $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

2) Determinar los vectores unitarios tangente $\boldsymbol{t}$ y normal $\boldsymbol{n}$ a la cicloide en P, y el ángulo ψ que forma $\boldsymbol{t}$ con la horizontal, en función de θ. Se elige $\boldsymbol{t}$ en el sentido de abscisas crecientes y $\boldsymbol{n}$ con componente vertical positiva.

3) Hallar la expresión de la abscisa curvilínea o longitud de arco, $s(\theta)$, entre O y P en función de $\theta/2$, recordando que $v = \frac{ds}{dt}$.

4) Escribir la energía mecánica de P en función de s y $\dot{s}$, tomando como origen de energías potenciales la recta $y = 0$. Indicar si la energía es o no una constante del movimiento.

5) A partir de la expresión obtenida en el apartado anterior, obtener, por derivación con respecto al tiempo, la ecuación diferencial del movimiento de P en función de s y sus derivadas y comprobar que coincide con la que se obtiene por aplicación de la segunda ley de Newton.

6) Justificar el tipo de movimiento que realiza el punto y determinar el periodo de las oscilaciones del punto material.

II) El punto material se pone en movimiento en $t = 0$ sin velocidad inicial desde un punto C que tiene abscisa positiva y está situado a una altura $y = R$. Su evolución temporal está dada por la solución de la ecuación del movimiento, que tiene la forma $s(t) = A\operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi)$.

7) Obtener el tiempo τ_1 que tarda el punto P en ir de C a O, particularizando la solución general de la ecuación del movimiento y su derivada con respecto al tiempo a las condiciones iniciales del mismo.

II) El punto material se pone ahora en movimiento sin velocidad inicial desde el punto A a una altura $y = 2R$.

8) Obtener, a partir de la conservación de la energía mecánica, una expresión para la velocidad de P en función de $\theta/2$.

9) Determinar, por integración de la expresión obtenida en el apartado anterior, el tiempo τ_2 que tarda P en llegar al punto más bajo de la cicloide, y comparar el resultado con el obtenido en el apartado 7).

[Nota: Se recuerdan las relaciones trigonométricas: $\frac{1-\cos\theta}{2} = \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$, $\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$]

* * * * * * *

NO se permite el uso de calculadora
Duración: 90 minutos

Calificación: 50 % del total del examen.

CLASE

X

EJERCICIO T.yE.(I).1 (Feb-01)

Determinar el trabajo realizado por una fuerza $F(x,y,z) = (3y + z^2)\boldsymbol{i} + (3x + z)\boldsymbol{j} + (2xz + y)\boldsymbol{k}$ *(N)* entre los puntos de coordenadas *(a,0,0)* y *(a,0,b)* *(m)* al circular sobre la curva de ecuaciones en coordenadas cartesianas : $x^2 + y^2 = a^2$; $z = \dfrac{b}{2\pi} \arctan\dfrac{y}{x}$

como el 1 fácil

EJERCICIO T.yE.(I).2 (Jun-01)

Determinar el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}(x,y,z) = az\boldsymbol{k}$ entre los puntos de coordenadas $(R,0,0)$ y (0,0,R) al circular sobre la curva obtenida por intersección de las dos superficies de ecuaciones en coordenadas cartesianas: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $y = 0$

EJERCICIO T.yE.(I).3 (Sep-01)(SEP 03)

En una región del espacio existe un campo de fuerzas conservativo, $\boldsymbol{F}$, cuya función potencial expresada en coordenadas cartesianas dadas en el SI es: $U(x,y,z) = -x(3y+z^2) - yz$ (J).

i) Obtener la expresión vectorial de la fuerza $\boldsymbol{F}$, dada en unidades del Sistema Internacional, considerándola orientada en el sentido de los potenciales decrecientes.

ii) Id. el trabajo realizado por la fuerza al desplazar un móvil entre los puntos *(1,0,0)* y *(0,1,0)*.

EJERCICIO T.yE.(I).4 (Feb 2004)

con 1er método

En una región del espacio existe un campo de fuerzas plano cuya expresión vectorial es: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (F_0/r)(y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j})$, donde F_0 es una constante y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

i) Determinar el trabajo realizado por esta fuerza sobre un punto material de masa m al recorrer por completo en el sentido antihorario una circunferencia de radio R centrada en el origen dada por las ecuaciones: $x^2 + y^2 = R^2$; $z = z_0 = cte.$ [Indicación: Observar que la fuerza es perpendicular a $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$]

ii) Indicar si la fuerza es o no conservativa.

EJERCICIO T.yE.(I).5 (FEB 2005)

Un campo de fuerzas plano está definido en coordenadas cartesianas por $\boldsymbol{F}(x, y) = ax^2y^3\boldsymbol{i} + (2x^3y^2 + 5y)\boldsymbol{j}$. Determinar si existe algún valor de a para el que el campo sea conservativo y en ese caso calcular la energía potencial.

X

EJERCICIO T.yE.(I).6 (FEB 2005)

Un punto material está en lo más alto de una esfera de radio R, que está fija sobre el suelo. El punto material empieza a deslizar sin rozamiento sobre la esfera. Determinar la altura sobre el suelo a la que el punto material abandona el contacto con la esfera.

EJERCICIO T.yE.(I).7 (FEB 2007)

Un campo de fuerzas, en el espacio tridimensional, viene dado por la expresión, en coordenadas esféricas, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -3kr^2\boldsymbol{u}_r$. Evaluar el potencial U, tomando $U = 0$ en el origen de coordenadas.

EJERCICIO T.yE.(I).8 (SEP 2007)

Expresar en la base de coordenadas cartesianas $(\mathrm{O}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ el campo de fuerzas que en coordenadas esféricas viene dado por $\boldsymbol{F}(r,\theta) = -kr^2\cos\theta\boldsymbol{u}_r$, siendo k una constante, θ el ángulo que $\boldsymbol{r}$ forma con el eje Oz y $\boldsymbol{u}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$, el primer vector de la base de coordenadas esféricas aplicado en el punto P(x,y,z).

Demostrar que el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(r,\theta) = -kr^2\cos\theta\boldsymbol{u}_r$ de la cuestión 1) no admite función potencial.

EJERCICIO T.yE.(I).9(SEP 2009)

Un punto móvil de masa m describe el primer cuadrante de un arco de circunferencia centrada en el origen de coordenadas de radio R. Las fuerzas que actúan son $\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$, con a y b constantes, y la accion variable del vínculo liso. Calcular el trabajo realizado por todas las fuerzas desde el punto $A(R, 0)$ hasta el punto $B(0, R)$.

REPASO

EJERCICIO R-T.yE.(I).1 (Sep-95)
Indique dos proposiciones equivalentes respecto de la proposición: *V* es un campo vectorial que deriva de una función potencial *U*.

EJERCICIO R-T.yE.(I).2 (Sep-99)
Defina qué entiende por *superficie de nivel* de un campo escalar y por *líneas de campo* de un campo vectorial.

EJERCICIO R-T.yE.(I).3 Feb 02)

En una región del espacio existe un campo de fuerzas conservativo unidimensional, $F(x)$, cuya función potencial sólo depende de la distancia al origen: $U(x) = k/x$, donde k es una constante.
i) Obtener la expresión vectorial de la fuerza, $F(x)$, considerándola orientada en el sentido de los potenciales decrecientes.
ii) Id. el trabajo realizado por la fuerza al desplazar un móvil desde el punto $x = x_1$ al $x = x_2$.

EJERCICIO R-T.yE.(I).4(Jun 02)

En el semiespacio de abscisas positivas ($x>0$) existe un campo de fuerzas conservativo unidimensional cuyo potencial (energía potencial por unidad de masa) depende de la distancia al origen en la forma: $U(x) = -k/x$, donde k es una constante positiva. Obtener para los puntos de dicho semiespacio, la expresión vectorial de la fuerza, $\mathbf{F}(x)$, que actúa sobre una masa puntual m situada en la abscisa x.

EJERCICIO R-T.yE.(I).5(Sep 02)

Sobre una masa m actúa un campo de fuerzas dado por $\vec{F}(x,y,z) = \mathrm{m}\left(\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)$. Determinar si el trabajo realizado por dicho campo al mover la masa entre dos puntos correspondientes respectivamente a las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2$ dependerá o no de los puntos inicial y final elegidos. Se recuerda que una fuerza central sólo dependiente de la distancia al centro de fuerzas es siempre conservativa.

EJERCICIO R-T.yE.(I).6(JUN 2004)

Determinar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x,y,z) = ay\mathbf{j}$ entre los puntos de coordenadas $(0,\sqrt{2}R/2,-\sqrt{2}R/2)$ y $(0,R,0)$ al circular sobre la curva obtenida por intersección de las dos superficies de ecuaciones en coordenadas cartesianas: $x^2+y^2+z^2=R^2; x=0$.

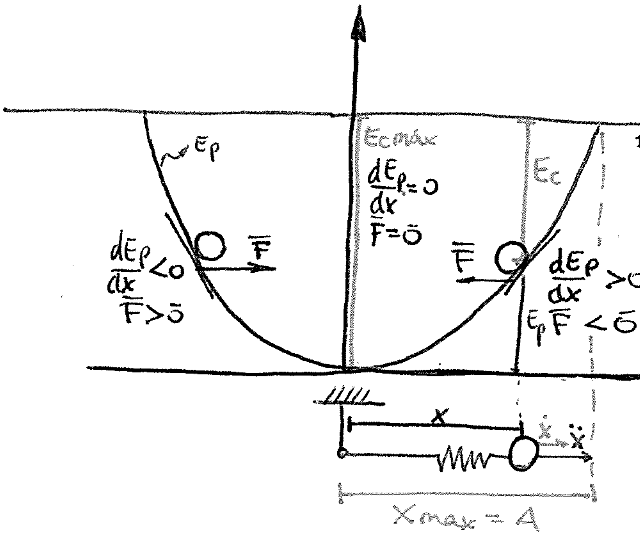
EJERCICIO R-T.yE.(I).7(FEB 2006)

Un campo de fuerzas viene dado por la expresión $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Indicar si es, o no, un campo conservativo y calcular el trabajo realizado a lo largo del contorno de la circunferencia $x^2+y^2=16$ en una vuelta completa. [Ind.: observar que la fuerza es tangente a la circunferencia en todos los puntos de ésta y de módulo constante.]

EJERCICIO R-T.yE.(I).8(JUN 2006)
Un resorte con un extremo fijo en el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y una masa m sujeta a su otro extremo, de vector de posición $\mathbf{r}$, evoluciona en el plano xOy de tal manera que la fuerza con que actúa sobre dicha masa viene dada por $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ (k es una constante). Determinar la energía potencial del resorte si para $\mathbf{r} = \mathit{0}$ es $E_p(\mathit{0}) = 0$.

TRABAJO Y ENERGÍA II

1 MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CONSERVATIVA



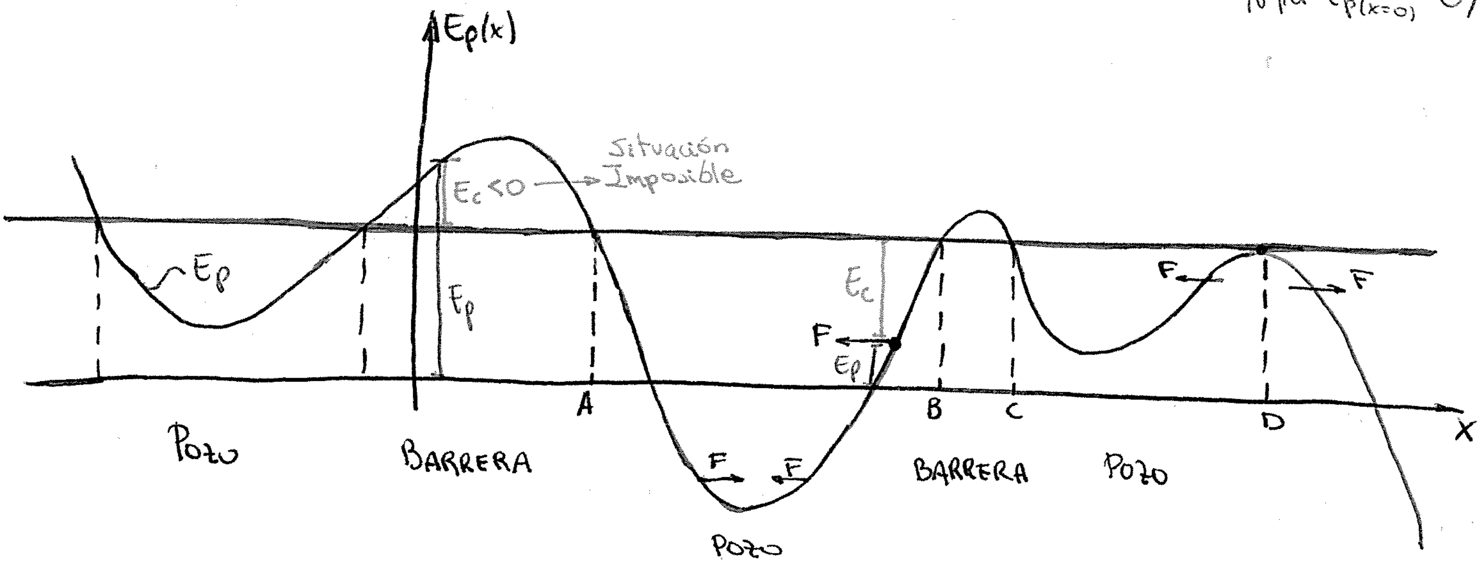
$E=E_c+E_p$

$\left.\begin{array}{l} E_{p\,max}=E \rightarrow E_c=0 \\ \frac{dE_p}{dx}>0 \rightarrow \vec{F}<\vec{0} \end{array}\right\}$ La partícula para e invierte movimiento

En el ejemplo de la figura tenemos la fuerza de un muelle $\vec{F}=-Kx\vec{i}=-\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$

$$E_p=\int Kx\vec{i}\,dx=\frac{1}{2}Kx^2+C$$

(0 por $E_{p(x=0)}=0$)



- Entre A y B existe un movimiento oscilatorio, en A y en B para e invierte movimiento
- Entre C y D el movimiento es asintótico hacia D. La partícula tarda $t=\infty$ en llegar a D y cuando llega se para $\left\{ \text{en D } \frac{dE_p}{dx}=0=F \rightarrow E=E_p \rightarrow E_c=0 \right\}$

Equilibrios $\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } E_p \longrightarrow \text{Equilibrio estable} \\ \text{Max } E_p \rightarrow \text{Equilibrio inestable} \end{array} \right.$

Pozos y Barreras $\left\{ \begin{array}{l} \text{-Pozo: } E_p<E \text{ y la diferencia es la } E_c \\ \text{-Barrera: } E_p>E \text{. El movimiento no es posible, no está definido} \end{array} \right.$

2 EJERCICIOS

② Expresar E_c, E_p y E en función de ~~x~~ conocidos m, A, K

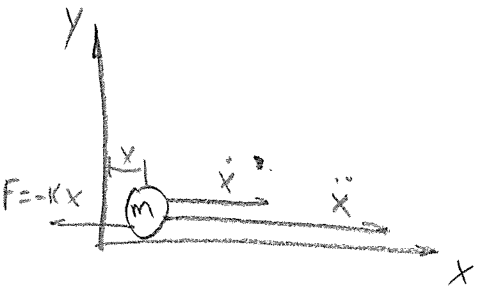
$dE_p = -dF\,dr \rightarrow E_p = -\int F\,dr$

$\vec{F}_K = -Kx \rightarrow E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + \cancel{C}$ 0 ($E_p = 0$ en $x=0$) $\longrightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2}Kx^2}$

En $A = X_{max} \rightarrow E_{p\,max} = \frac{1}{2}KA^2 = E \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}KA^2}$

$E_c \underset{\text{Por mov. conserv}}{=} E - E_p = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2) \longrightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2)}$

③ Expresar E_c, E_p y E en función t conocidos m, A, K y que en $t=0 \rightarrow x=0$



$\Sigma F = m\vec{a} \quad \vec{\iota}: -Kx = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_0^2} x = 0$ (ec. diferencial de tipo armonico)

$x = A\,\text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$

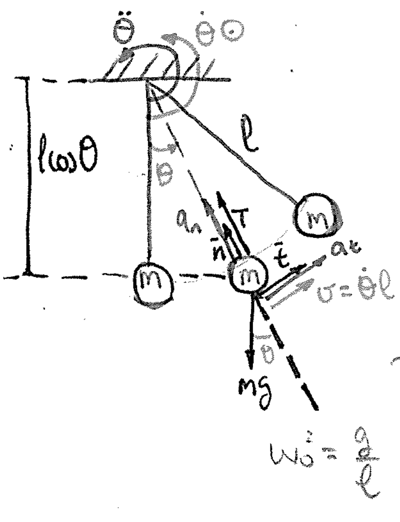
$x_{t=0} = 0 \longrightarrow 0 = A\,\text{sen}(0+\varphi) \longrightarrow \text{sen}\,\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$

$x = A\,\text{sen}(\omega_0 t) \longrightarrow E_p = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}A^2K\,\text{sen}^2(\omega_0 t) \rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2}A^2K\,\text{sen}^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)}$

$\dot{x} = A\omega_0\cos(\omega_0 t) \longrightarrow E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\underbrace{\omega_0^2}_{\frac{K}{m}}\cos^2(\omega_0 t) \rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2}A^2K\cos^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)}$

$E = E_p + E_c = \frac{1}{2}A^2K\left[\text{sen}^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right) + \cos^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)\right] \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}A^2K}$

④ Pendulo l, masa m, pequeñas oscilaciones (θ pequeña)
Escribir ec diferencial de 2° orden en el desplazamiento angular del pendulo



$\Sigma F = ma$

$\vec{n}: T - mg\cos\theta = m\overbrace{\frac{v^2}{l}}^{a_n}$

$\vec{t}: -mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{d|v|}{dt} = m\frac{d\dot{\theta}l}{dt} = ml\ddot{\theta}$

$\cancel{m}l\ddot{\theta} + \cancel{m}g\underbrace{\text{sen}\,\theta}_{\simeq\theta\ (\text{peq}\ \theta)} = 0, \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$

$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

Periodo $\longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

Otra forma: Analizo F y Energías:

Actúan $\begin{cases} T \to \int T\,v\,dt = 0 \text{ por } T \perp v \\ mg \to E_p = mgy + C \end{cases}$

Como el mov. es conservativo $E = E_p + E_c$

$$\begin{cases} E_c\ \frac{1}{2} m(\dot{\theta} l)^2 \\ E_p = mgy = mg[l\cos\theta] \end{cases} \longrightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 l^2 - mgl\cos\theta = cte$$

Derivando E en función de t

$$\frac{1}{2} m l^2 2\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + mgl\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} = 0$$

$\simeq \theta$ (por ser pequeño)

$$ml\dot{\theta}\,[l\ddot{\theta} + g\,\text{sen}\,\theta] = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

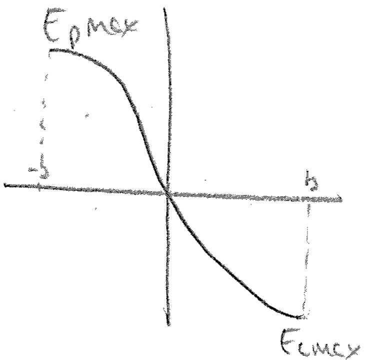
8 $E_p = ax(x^2 - 3b^2)$ | a, b ctes | Mov. rectilíneo en x | $X_0 \to$ equilibrio inest. $v_0 = 0$

Se pide v_{max}.

$X_0 \to$ eq. inest. $\to$ Max. E_p

$$dE_p(x) = 3ax^2 - 3ab^2 = 0 \longrightarrow x = \sqrt{\frac{3ab^2}{3a}} = \pm b$$

$$d''E_p(x) = 6ax \begin{cases} d''E_p(b) > 0 \to \text{Min} \\ d''E_p(-b) < 0 \to \text{Max} \end{cases}$$



$X_0 = -b$

La v_{max} se alcanzará en $x = b$ (mínimo)

$$E\begin{cases} E_{p\,max} = E_p(-b) = a(-b)(b^2 - 3b^2) = -ab^3 + 3ab^3 = 2ab^3 \\ E_c(-b) = 0 \end{cases}$$

$$E\begin{cases} E_p(b) = ab^3 - 3ab^3 = -2ab^3 \\ E_c(b) = \frac{1}{2} m v^2 \end{cases}$$

$$2ab^3 = \frac{1}{2} m v^2 - 2ab^3, \quad \boxed{\sqrt{\frac{8ab^3}{m}} = v}$$

7 $U(x) = U_0 \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)$ $\quad U_0 \geq 0$

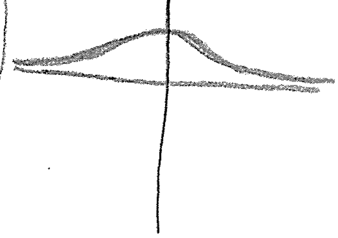
Determinar para qué valores de x el equilibrio es estable, inestable o indiferente

Calculamos máx. y mín.

$$\frac{dU}{dx} = U_0 e^{\left(\frac{-x^2}{x_0^2}\right)}\left(\frac{-2x}{x_0^2}\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\infty \end{cases}$$

$$\frac{d^2U}{dx} = U_0 e^{\left(\frac{-x^2}{x_0^2}\right)}\left(\frac{-2x}{x_0^2}\right)^2 + U_0 e^{\left(\frac{-x^2}{x_0^2}\right)}\left(\frac{-2}{x_0^2}\right) = U_0 e^{\left(\frac{-x^2}{x_0^2}\right)}\left[\frac{4x^2}{x_0^4} - \frac{2}{x_0^2}\right]$$

$$\begin{cases} \frac{d^2U}{dx} < 0 \longrightarrow & x = 0 \text{ es máximo} \longrightarrow \text{Eq. inestable} \\ \frac{d^2U}{dx} = 0 \longrightarrow & x = \pm\infty \longrightarrow \text{Eq. indiferente} \end{cases}$$



TRABAJO Y ENERGÍA (II)

1.-MOVIMIENTO RECTILÍNEO DEL PUNTO MATERIAL BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CONSERVATIVA

Se estudia el caso de un punto sometido a la acción de una fuerza conservativa dependiente solamente de la distancia a un plano fijo. Si se denomina como x a la distancia a ese plano y como $\vec{i}$ al versor perpendicular a dicho plano, se verifica que $Ep = Ep(x) \rightarrow \vec{F} = -gradEp = F\vec{i}$, y si el punto posee una velocidad inicial en la dirección de $\vec{F}$, el movimiento tendrá lugar en una recta perpendicular a un plano fijo. Identificando esa recta como el eje Ox, se tiene:

Si $\vec{F} = F(x)\,\vec{i} \Rightarrow$ Conservativa con $F = -\nabla E_p$ tal que $F(x)\,\vec{i} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$

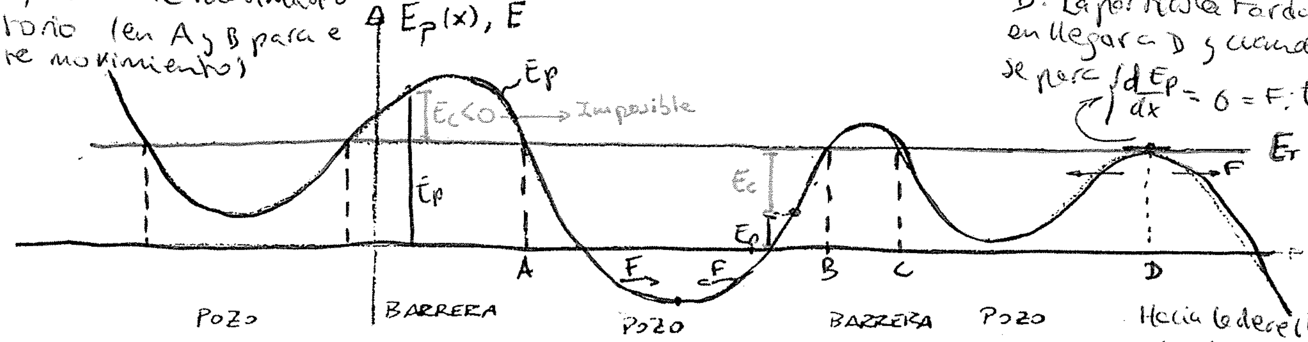
$$\vec{F} = -\frac{dEp}{dx}\vec{i} \Rightarrow d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dEp(x) \Rightarrow d\left[\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + Ep(x)}_{E_m = cte}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ep(x) = E = cte \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - Ep(x)\right]} = v(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - Ep(x)\right]} \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - Ep(x)\right]}} \Rightarrow x = x(t)$$

Entre A y B se tiene movimiento oscilatorio (en A y B para e invierte movimiento)

C–D
Movimiento asintótico hacia D. La partícula tarda $t = \infty$ en llegar a D y cuando llega se para ($\frac{dE_p}{dx} = 0 = F$; $E = E_p \rightarrow E_c = 0$)



Si $v = 0$, $Ec = 0$ y $E = Ep(x)$ (intersección de la gráfica de $Ep(x)$ con la recta horizontal de ordenada igual a E).

Al ser $F = -dEp/dx$, las posiciones de equilibrio ($F = 0 = -dEp/dx$) se producen en los extremos de $Ep(x)$. En el entorno de un mínimo la fuerza atrae al punto hacia el mínimo, mientras que en el entorno de un máximo la fuerza aleja al punto del máximo. Por tanto, según que tipo de extremo sea, se tendrá equilibrio estable o inestable:

- mín $Ep(x)$: $\frac{dEp(x)}{dx} = 0$; $\frac{d^2Ep(x)}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ equilibrio estable
- máx $Ep(x)$: $\frac{dEp(x)}{dx} = 0$; $\frac{d^2Ep(x)}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ equilibrio inestable

Pozo de potencial: intervalo en el que $Ep(x)$ es menor que E. La diferencia la "altura" de $Ep(x)$ y E en cada punto es la Ec.

Barrera de potencial: intervalo en el que $Ep(x)$ es mayor que E. El movimiento en esta zona no es posible, no está definido.

En los puntos que limitan estas zonas, intersección de E y $Ep(x)$, la partícula alcanza el reposo o invierte el sentido de movimiento. Si uno de estos puntos resulta ser un máximo relativo de $Ep(x)$, el punto quedaría en reposo, pero esta posición es inalcanzable (indeterminación en el denominador de la integral del tiempo ($E = Ep(x)$), criterios de convergencia, etc).

CLASE

EJERCICIO T.y E.(II).1 (Feb-98*)

Un pequeño bloque de masa m está obligado a desplazarse por el eje de abscisas, dentro del intervalo limitado por los puntos O (x = 0) y R (x > 0), permaneciendo unido a dichos puntos mediante dos muelles cuyas constantes recuperadoras son k_1 y k_2. Determine el período de las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

EJERCICIO T.y E.(II).2 (Jun 00) (Feb-01)(SEP 03)

Expresar las energías cinética, potencial y total de un cuerpo de masa m que se mueve unidimensionalmente con una amplitud A bajo la acción de un resorte de constante recuperadora k alrededor de un punto de equilibrio en función de su distancia a éste.

EJERCICIO T.y E.(II).3 (Jun 01) (JUN 2004)

Expresar en función del tiempo las energías cinética, potencial y total de un cuerpo de masa m que se mueve unidimensionalmente con una amplitud A bajo la acción de una fuerza atractiva proporcional a su distancia al origen de coordenadas. (constante de proporcionalidad k), sabiendo que en el origen de tiempos, pasa por el origen.

EJERCICIO T.y E.(II).4 (SEP 2002)

Un péndulo simple de longitud l y masa puntual m colgada a su extremo se mueve realizando pequeñas oscilaciones de amplitud angular θ_0 alrededor de su posición de equilibrio (sin amortiguamiento). Escribir una ecuación diferencial de segundo orden en el desplazamiento angular del péndulo a partir de dicha posición que permita obtener el mismo en función del tiempo.

EJERCICIO T.y E.(II).5 (JUN 2005)

Demostrar que, en el movimiento del oscilador armónico, la energía cinéticamedia coincide con la energía potencial media $\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle$, tomando promedios a un periodo de oscilación.

[Ind: $\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} sen^2 x dx = \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \cos^2 x dx = \pi$]

EJERCICIO T.y E.(II).6 (SEP 2005)

Un punto material de masa $m = 0{,}2 kg$ se mueve sobre una base rectilínea horizontal, que se toma como eje de abscisas, bajo una fuerza conservativa cuya energía potencial está dada por $E_p(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$, donde $E_p(x)$ resulta en julios cuando x se expresa en metros. Determinar si, lanzando el punto desde $x_0 = -3$ m con velocidad inicial v_0 = 2 m/s hacia abscisas crecientes, alcanza el origen de coordenadas, calculando en su caso el punto de retorno.

EJERCICIO T.y E.(II).7 (SEP 2006)

Dada la función potencial $U(x) = U_0 \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)$, con $U_0 \gg 0$, determinar para que valores de x el equlibrio es estable, inestable ó indiferente.

EJERCICIO T.y E.(II).8 (JUN 2007)

Un punto material de masa m se mueve sobre el eje x sometido a una fuerza conservativa cuya energía potencial es $E_p(x) = ax(x^2 - 3b^2)$ con a y b constantes. Si comienza el movimiento en la posición de equilibrio inestable moviéndose hacia x crecientes con velocidad inicial despreciable, determinar la velocidad máxima que alcanza.

EJERCICIO T.y E.(II).8 (FEB2010)

En un instante dado, la masa m de un oscilador armónico lineal de constante k tiene una posición x_0 y una velocidad v_0. Determinar la velocidad máxima, v_{max}, de dicha masa en función de los datos.

REPASO

EJERCICIO R-T.y E.(II).1 (Feb-96)

Un punto material se mueve sobre un segmento rectilíneo $\overline{AB}$ dentro de un pozo de potencial. ¿Qué condición debe cumplir la función que representa la energía potencial $E_p(x)$ en los puntos A y B para que el punto material describa un movimiento periódico?.

EJERCICIO R-T.y E.(II).2 (Jun-96)

Determine la amplitud de un oscilador armónico simple de masa m = 2 kg. y constante recuperadora k = 200 $N \cdot m^{-1}$ si su velocidad máxima es $\mathbf{v}_{máx} = 2\ m \cdot s^{-1}$.

EJERCICIO R-T.y E.(II).3 (Sep-96)

Un oscilador simple con masa *m* y constante recuperadora *k* (de forma que la fuerza sobre m cuando se encuentra a una distancia *x* de la posición de equilibrio es -*kx*) se mueve libremente. Escriba la expresión que proporciona el período de las oscilaciones.

EJERCICIO R-T.y E.(II).4 (Feb-97)

Un tirador ha de disparar sobre un blanco móvil que oscila armónicamente en un segmento, con una frecuencia elevada que impide que el tirador pueda seguir el blanco con la mira del arma.
Justifique qué decisión es más adecuada para intentar alcanzar el blanco:

a) apuntar al centro del segmento,
b) apuntar a uno de los extremos del segmento o
c) apuntar a una posición intermedia entre las anteriores.

EJERCICIO R-T.y E.(II).5 (FEB 02)

Un punto material de masa m se mueve con energía mecánica total E en un pozo de potencial unidimensional dado por: $E_p(x) = E_0 + \frac{1}{2}kx^2$, donde x es la distancia del móvil al origen de coordenadas. Determinar los límites (mecánica clásica) del movimiento del punto para $E > E_0$ y el periodo del movimiento.

EJERCICIO R-T.y E.(II).6 (SEP 2004)

Un punto material está sometido a una fuerza asociada a la energía potencial unidimensional $E_p(x) = -3x^2 + x^3 (SI)$. Determinar la expresión vectorial de la fuerza en función de x y determinar los límites del movimiento del punto cuando su energía total es $E = 0$ (SI). (SEP 2004)

EJERCICIO R-T.y E.(II).7 (JUN 2008) (SEP 2008)

Siendo $F(x) = (-6x^2 + 1)i$, (en unidades del SI) una fuerza conservativa unidimensional, calcular la variación de la energía potencial entre los puntos $x = 1\ m$ y $x = 3\ m$.

Siendo $F(r) = (-6r^2 + 1)u_r$, (en unidades del SI) una fuerza conservativa central, calcular la variación de la energía potencial entre dos puntos cuyas distancias al origen son $r_1 = 1$ m y $r_2 = 4$ m.

OSCILADORES AMORTIGUADOS

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.1

Escriba la ecuación horaria correspondiente al movimiento rectilíneo de un punto material sometido a una oscilación libre y amortiguada con amortiguamiento débil, indicando el significado de los parámetros utilizados. (Feb-96*)

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.2

La solución en régimen permanente para las oscilaciones forzadas de un sistema amortiguado regulado por la ecuación $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 sen\omega_f t$ es

$$x = \frac{F_0 / \omega_f}{\sqrt{\left(m\omega_f - \dfrac{k}{\omega_f}\right)^2 + \lambda^2}} sen(\omega_f t + \psi)$$

Exprese la impedancia del oscilador. (Jun 96*)

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.3

Una oscilación amortiguada se caracteriza por la ecuación $x = Ae^{-\gamma t} sen(\omega t + \varphi)$. Calcule el intervalo de tiempo entre dos inversiones sucesivas del sentido de movimiento. (Sep 96*)

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.4

Recordando que la amplitud de la respuesta permanente en el caso de oscilaciones forzadas y amortiguadas se expresa por

$$B = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f{}^2}}$$

justifique si un sistema de este tipo presenta siempre resonancia en amplitud. (Jun 97*)

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.5

¿A qué se denomina factor de calidad de un oscilador armónico?. (Sep-97*)

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.6

Se considera el sistema mecánico con un grado de libertad caracterizado por la ecuación

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$$

Indique la relación que deben satisfacer los parámetros para que exista sobreamortiguamiento. (Jun-98*)

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.7

¿Cómo se denomina el movimiento de un punto definido por la ecuación

$$x = Ae^{-\gamma t}\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$ (Feb-99*)

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.8

Una masa m = 0,1 kg está unida a un resorte de constante recuperadora $k = 10\ N.m^{-1}$ y se mueve rectilíneamente en el seno de un medio viscoso que ejerce sobre ella una fuerza de oposición proporcional a su velocidad de valor $f_\eta = \lambda v$, donde λ = 2 N.s.m^{-1}. Determine si el movimiento de la masa será sobreamortiguado, con amortiguamiento crítico o subamortiguado. (Jun 00*)

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.9

Una masa m = 0,1 kg está unida a un resorte de constante recuperadora k y se mueve rectilíneamente en el seno de un medio viscoso que ejerce sobre ella una fuerza de oposición proporcional a su velocidad de valor $f_\eta = \lambda v$, donde λ = 2 N.s.m^{-1}. Determinar el valor que debe tener la constante recuperadora k para que el movimiento resultante sea críticamente amortiguado. (Feb 01*)(Jun 03)

EJERCICIO T.y E.(II). O.A.10

Escribir la ecuación diferencial del movimiento de un oscilador armónico unidimensional de masa m y frecuencia natural ω_0 cuando se le introduce en fluido viscoso que ejerce sobre él una fuerza opuesta y proporcional a su velocidad ($\boldsymbol{F}_v = -\lambda \boldsymbol{v}$). (Feb 03)

PROBLEMA T. y E.(II).1 (Jun 2004)

La energía potencial de una masa m en movimiento unidimensional en función de la posición viene expresada por $E_p(x) = U_0 \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x} - 2\right)$, donde U_0 y a son constantes positivas.

1) Representar $E_p(x)$ en función de x para $0,5a < x < 3a$.

2) Determinar el valor de x para el cual la masa se encuentra en equilibrio estable, x_0.

3) Expresar la energía potencial $E_p(x)$ para $x = x_0 + \epsilon$, siendo ϵ un pequeño desplazamiento alrededor de la posición de equilibrio x_0, obteniendo $E_p(\epsilon)$.

4) Aproximar el término $\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0 + \epsilon} = (x_0 + \epsilon)^{-1}$ mediante un desarrollo en serie alrededor de la posición de equilibrio $r = \epsilon / x_0 = 0$ despreciando términos de orden superior a r^2.
[Ind.: $(1 + r)^n \simeq 1 + nr + \frac{n(n-1)}{2!} r^2 + ...$].

5) Haciendo uso del desarrollo obtenido en el apartado anterior, justificar que $E_p(\epsilon)$ puede escribirse, bajo la aproximación efectuada, en la forma: $E_p(x) = U_0 \left(\frac{\epsilon}{x_0}\right)^2$.

6) Comparar el resultado obtenido con el potencial de un oscilador armónico que realizara pequeñas oscilaciones de elongación ϵ alrededor de la posición de equilibrio $x_0 = a$. En concreto, determinar cuanto valdría la constante de fuerza k del oscilador que tuviera en el entorno del punto de equilibrio la misma variación de la energía potencial.

7) A partir del resultado del apartado anterior, determinar la fuerza de atracción hacia el punto de equilibrio estable que sufre la masa m al separarla del mismo una pequeña distancia h en el sentido positivo del eje Ox.

8) Si, partiendo del reposo desde la posición del apartado anterior, se deja a la masa m moverse bajo la acción del potencial considerado, determinar en función de los datos del enunciado la máxima velocidad que adquirirá y el punto en el que se alcanzará ese máximo.

9) Describir el movimiento posterior de la partícula a partir de su liberación en el citado punto de elongación h, determinando el período de su movimiento.

* * * * * * *

NO se permite el uso de calculadora
Duración: 90 minutos

Calificación: 50 % del total del examen.

Ver también: (Física I, junio 1994) (Física I, septiembre 1998)

PROBLEMA T. y E.(II).2 (FEB 2007)

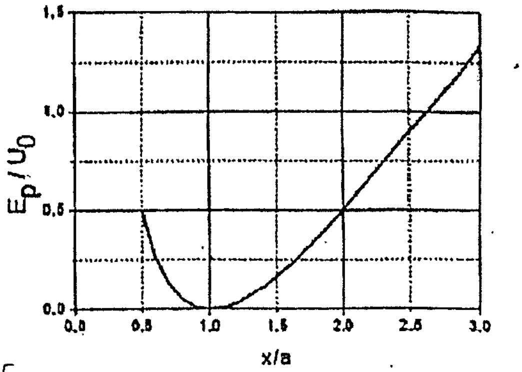
Dos fuerzas conservativas, una cuya expresión es $F_1 = -kx$ y otra de tipo constante, $F_2 = F$, actúan simultáneamente en la dirección del eje Ox sobre un ión atómico. Por consiguiente $F_{\text{tot}} = -kx + F$, con $k, F > 0$.

Se pide:

1) Obtener, salvo una constante aditiva, C, la expresión de la energía potencial, $U(x)$ correspondiente a dicha combinación de fuerzas. (1 punto)
2) Demostrar que la constante C puede ser tomada como $C = -\dfrac{F^2}{2k}$ sin ningún impedimento de tipo dimensional. (1 punto)
3) Determinar las posibles posiciones de equilibrio de la partícula (o del ión), indicando el tipo de equilibrio. (1 punto)
4) Si, en lo que sigue, la energía total es $E = \dfrac{F^2}{k}$, determinar los valores extremos (puntos de retroceso) de x que alcanza el ión. (1 punto)
5) Determinar para qué valor de x es máxima la velocidad. (1 punto)
6) Determinar la energía cinética máxima del ión. (1 punto)
7) Determinar la velocidad máxima del ión. (1 punto)
8) Obtener la función reducida, $U'(x')$, en función de variables adimensionales, a través de los cambios de variable $\dfrac{U}{\left(\dfrac{F^2}{k}\right)} = U'$ y $\dfrac{x}{\left(\dfrac{F}{k}\right)} = x'$. Se dice que U' es la energía potencial en unidades de $\dfrac{F^2}{k}$ y que x' es la posición en unidades de $\dfrac{F}{k}$. (1 punto)
9) Dibujar la gráfica de U' en función de x' entre los valores $x' = -4$ y $x' = +4$. (1 punto)
10) Identificar en el espacio (U', x') las posiciones de equilibrio encontradas en el apartado 3).(1 punto)

P.T y E II (JUN 2004)

• DATOS: m ; $E_p(x) = U_0\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x} - 2\right)$; $U_0 = cte > 0$, $a = cte > 0$



1) $E_p(x)$ EN $0{,}5a < x < 3a$

• SIGNO: POSITIVA EN EN INTERVALO (SI NO SE VE, SEGUIMOS)

• CEROS: $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} - 2 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + a^2 - 2ax}_{(x-a)^2} = 0 \Rightarrow 0$ EN $x = a$

• EXTREMOS: $\frac{dE_p}{dx} = U_0\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}\right)$; $\frac{d^2E_p}{dx^2} = 2U_0\frac{a}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dE_p}{dx} = 0 \Rightarrow x = \pm a \text{ (} x=-a \text{ FUERA DE INTERVALO)} \\ \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=a} > 0 \Rightarrow x = a \text{ ES MÍN.} \end{cases}$

$x = a$ ES MIN
$x = a$ ES CERO DE FUNCIÓN } SIGNO POSITIVO DE LA FUNCIÓN

• PUNTOS IMPORTANTES $\Longrightarrow$
$x = 0{,}5a \longrightarrow E_p(0{,}5a) = 0{,}5\,U_0$
$x = a \longrightarrow E_p(a) = 0$
$x = 3a \longrightarrow E_p(3a) = \frac{4}{3}U_0$

2) $x_0 = a$ ES UN MÍN $\left(\frac{dE_p}{dx} = 0;\ \frac{d^2E_p}{dx^2} > 0\right) \Longrightarrow x_0 = a$ ES PUNTO DE EQUILIBRIO ESTABLE

3) SUSTITUYO x POR $x_0 + \varepsilon$ EN $E_p \Rightarrow E_p(x_0+\varepsilon) = U_0\left(\frac{x_0+\varepsilon}{a} + \frac{a}{x_0+\varepsilon} - 2\right)$ [OJO!! YA SABEMOS QUE $x_0 = a$]

4) $\frac{1}{x_0+\varepsilon} = (x_0+\varepsilon)^{-1} = \frac{1}{x_0}\left(1+\frac{\varepsilon}{x_0}\right)^{-1} \underset{\text{Taylor}}{\simeq} \frac{1}{x_0}\left[1 - \frac{\varepsilon}{x_0} + \frac{(-1)(-2)}{2!}\left(\frac{\varepsilon}{x_0}\right)^2 + \cdots\right] \simeq \frac{1}{x_0}\left[1 - \frac{\varepsilon}{x_0} + \left(\frac{\varepsilon}{x_0}\right)^2\right]$

5) CON $x_0 = a$, $E_p(\varepsilon) = U_0\left[\cancel{\frac{x_0}{a}} + \cancel{\frac{\varepsilon}{a}} + \cancel{\frac{a}{x_0}}\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{\varepsilon}{x_0}} + \left(\frac{\varepsilon}{x_0}\right)^2\right) - \cancel{2}\right] = U_0\frac{\varepsilon^2}{a^2}$

6) PARA OSCILADOR ARMÓNICO DE CONSTANTE K ("MUELLE"): $\bar{F} = -K\varepsilon\,\bar{\imath}$ (CONSERVAT) $\quad 0\ (E_p(\varepsilon=0)=0)$
(NOTA: $x = x_0 + \varepsilon \Rightarrow \dot{x} = 0 + \dot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$) $\quad \bar{F} = -\nabla E_p$ } $E_{p_{OA}} = \frac{1}{2}K\varepsilon^2 + \cancel{cte}$

SI $E_{p\,O.A.} = E_{p\,\text{ENUNCIADO}} \Longrightarrow \frac{1}{2}K\varepsilon^2 = U_0\left(\frac{\varepsilon}{x_0}\right)^2 \Longrightarrow K = \frac{2U_0}{x_0^2} = \frac{2U_0}{a^2}$

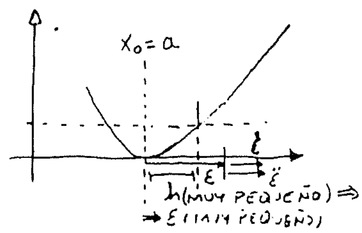
7) $\bar{F} = -\nabla E_p = -\frac{dE_p}{d\varepsilon}\bar{\imath} = -\frac{U_0}{x_0^2}2\varepsilon\bar{\imath} = -\frac{U_0}{a^2}2\varepsilon\bar{\imath} \Longrightarrow \bar{F}(\varepsilon = h) = -\frac{U_0}{a^2}\,2h\,\bar{\imath}$

8) $\bar{F}$ ES CONSERVATIVA: $E_{MEC} = E_c + E_p = cte = E_{c\,MAX} + \underbrace{\cancel{E_{p\,min}}}_{0(\varepsilon=0)} = \underbrace{\cancel{E_{c\,min}}}_{0(v=0)} + E_{p\,max} \Longrightarrow \frac{1}{2}m\,v_{max}^2 = U_0\left(\frac{\varepsilon_{MAX}}{x_0}\right)^2 \Longrightarrow$ ($\varepsilon_{MAX} = h$)

$\Longrightarrow v_{MAX} = \sqrt{\frac{2U_0}{m}\left(\frac{h}{a}\right)^2}$

9) $\bar{F} = -\nabla E_p = -\frac{U_0}{a^2}\cdot 2\varepsilon\,\bar{\imath}$: POR ECUAC. FUNDAM. DINÁM.: $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$:

$\bar{\imath}$: $-\frac{U_0}{a^2}2\varepsilon = m\ddot{\varepsilon} \longrightarrow \ddot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{2U_0}{ma^2}}_{\omega_0^2}\varepsilon = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{ma^2}} \\ T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ma^2}{2U_0}} \end{cases}$



JC Aula de Ingeniería | **Ingenieros Industriales** | **Física I**
c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. | Profesor
Tlfno: 91 535 75 29 | *Alex García*

P. T y E. Extra

1) $\bar{F}_{TOTAL} = (F-Kx)\bar{\imath}$ $\begin{cases} \bar{F}_{TOTAL} \neq f(t,\bar{v}) \\ \nabla \times \bar{F}_{TOTAL} = \cdots = \bar{0} \end{cases} \Rightarrow \bar{F}_{TOTAL} = -\nabla U = -\dfrac{dU}{dx}\bar{\imath} \Rightarrow F - Kx = -\dfrac{dU}{dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow U = -F\cdot x + \dfrac{Kx^2}{2} + C$

2) Se tiene que cumplir que $[C] = [U] \Rightarrow [C] = \left[-\dfrac{F^2}{2K}\right] = [F]\cdot\left[\dfrac{F}{K}\right] = [F]\left[\dfrac{\cancel{F}}{\cancel{F}}\cdot x\right] = [U]$

3) Equilibrio en: $\dfrac{dU}{dx} = 0 = -F_{TOTAL} = -F + Kx = 0 \Rightarrow x_{EQ} = \dfrac{F}{K}$

Tipo de equilib: $\dfrac{d^2U}{dx^2} = +K > 0 \Rightarrow$ Eq. Estable

4) Puntos de retroceso en $E = U \Rightarrow \dfrac{F^2}{K} = \dfrac{1}{2}Kx^2 - F\cdot x - \dfrac{F^2}{2K} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{F}{K} \\ x_2 = 3\dfrac{F}{K} \end{cases}$

5) Si $v = v_{MAX} \Rightarrow Ec_{MAX} \Rightarrow U_{min} \Rightarrow x = x_{EQ.ESTABLE} = \dfrac{F}{K}$ $(x_1 < x_{EQ} < x_2)$

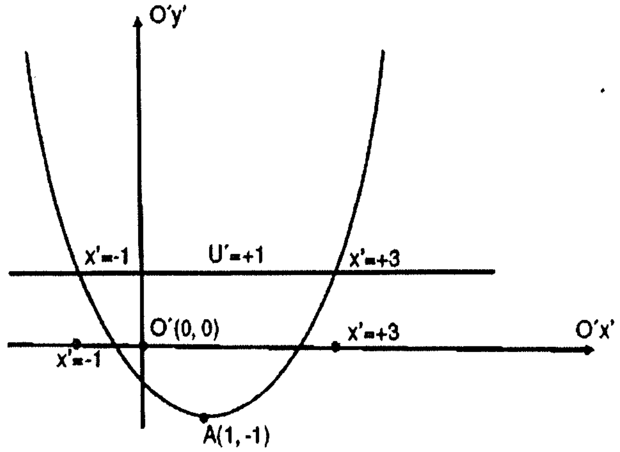
6) $Ec_{MAX} = E - U_{min} = E - U\left(x = \dfrac{F}{K}\right) = \dfrac{F^2}{K} - \left[-F\cdot\dfrac{F}{K} + \dfrac{K}{2}\left(\dfrac{F}{K}\right)^2 - \dfrac{F^2}{2K}\right] = \cdots = 2\dfrac{F^2}{K}$

7) $E_{CMAX} = 2\dfrac{F^2}{K} = \dfrac{1}{2}m\,v_{MAX}^2 \Rightarrow v_{MAX} = \sqrt{\dfrac{4F^2}{mK}} = \dfrac{2F}{\sqrt{mK}}$

8) Dividiendo U por $\dfrac{F^2}{K}$: $\dfrac{U}{\frac{F^2}{K}} = -\dfrac{F\cdot x}{\frac{F^2}{K}} + \dfrac{\frac{1}{2}K\,x^2}{\frac{F^2}{K}} - \dfrac{\frac{F^2}{2K}}{\frac{F^2}{K}} \Rightarrow U' = -x' + \dfrac{1}{2}x'^2 - \dfrac{1}{2}$

9) Operando la última expresión: $U' + 1 = \dfrac{1}{2}(x'-1)^2 \Rightarrow$ Parábola de eje paralelo al eje de ordenadas desplazado a $x' = 1$ y de vertice desplazado a $U' = -1$.

10) x_{EQ} en vértice de la parábola (extremo relativo mínimo), en $(x', U') = (1, -1)$



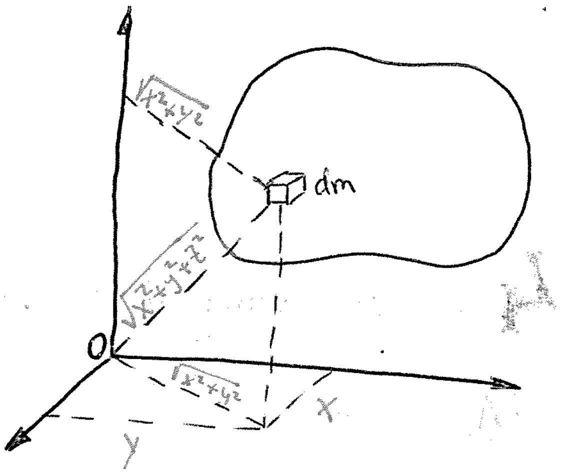
Indusbol .com

GEOMETRÍA DE MASAS II

1 Momentos de Inercia de un Sistema Material

Se define el momento de inercia del sistema como

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$



- Momento de inercia respecto al origen

$$I_O = \int (x^2+y^2+z^2)\, dm$$

- Momento de inercia respecto a los ejes coord.

$$I_x = \int (y^2+z^2)\, dm$$
$$I_y = \int (x^2+z^2)\, dm$$
$$I_z = \int (x^2+y^2)\, dm$$

- Momento de inercia respecto a los planos coord.

$$I_{xy} = \int z^2 dm \; ; \; I_{xz} = \int y^2 dm \; ; \; I_{yz} = \int x^2 dm$$

- Relaciones: $I_x = I_{xy} + I_{xz}$; $I_y = I_{xy} + I_{yz}$; $I_z = I_{xz} + I_{yz}$

$$I_o = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right)$$

2 Steiner

"El momento de inercia respecto de $\left\{\begin{array}{l}\text{un punto } P \\ \text{una recta } \delta \\ \text{un plano } \pi\end{array}\right\}$ es igual al momento de inercia de un sólido rígido respecto de $\left\{\begin{array}{l}\text{el centro de masas CM} \\ \text{una recta } \delta_{CM} \text{ por CM o paralela a } \delta \\ \text{un plano } \pi_{CM} \text{ por CM o paralelo a } \pi\end{array}\right\}$ más la masa del sólido rígido por el cuadrado de la distancia entre $\left\{\begin{array}{l}P \text{ y CM} \\ \delta \text{ y } \delta_{CM} \\ \pi \text{ y } \pi_{CM}\end{array}\right\}$"

- En momentos centrales $\boxed{I_P = I_{CM} + Ma^2}$
- En momentos axiales $\boxed{I_\delta = I_{\delta CM} + Ma^2}$
- En momentos planarios $\boxed{I_\pi = I_{\pi CM} + Ma^2}$

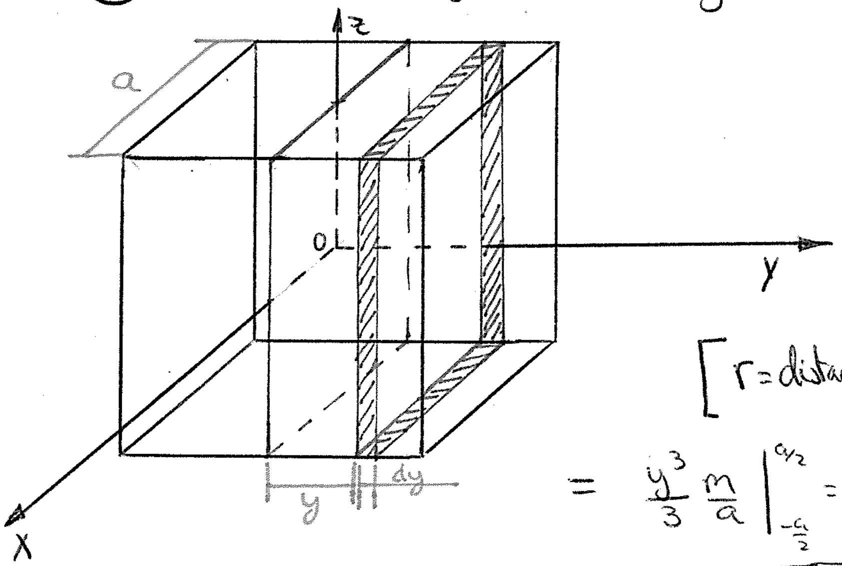
3 Radio de giro

Es la distancia (d, k o R_g) respecto a un elemento geométrico (punto, recta o plano) a la que habría que situar un punto que tuviera toda la masa M del sólido tal que $I_{\#} = MK^2$

En la práctica sólo tiene sentido físico el momento de inercia respecto de un eje. En ese caso, I_S es a los giros y a los momentos de fuerza lo que M es a las traslaciones y a las fuerzas.

4 Ejemplos para cálculo de I

(A) Cubo homogéneo de arista "a" y masa "M". $\rho = \frac{dm}{dVol} = cte = \frac{m}{a^3}$



Por integración

$$I_{xz} = \int r^2 dm = \int_{y=-\frac{a}{2}}^{y=\frac{a}{2}} y^2 \frac{m}{a} dy =$$

$$\left[r = \text{distan } dm - xz = y \; ; \; dm = \rho dVol = \frac{m}{a^3} a^2 dy \right]$$

$$= \frac{y^3}{3}\frac{m}{a}\Big|_{-\frac{a}{2}}^{a/2} = \frac{a^3}{24}\frac{m}{a} + \frac{a^3}{24}\frac{m}{a} = \frac{2a^2 m}{24} = \frac{1}{12}ma^2$$

Por misma distribución $\boxed{I_{xz} = I_{xy} = I_{yz} = \frac{1}{12}ma^2}$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = 2\,\frac{1}{12}ma^2 = \frac{1}{6}ma^2$$

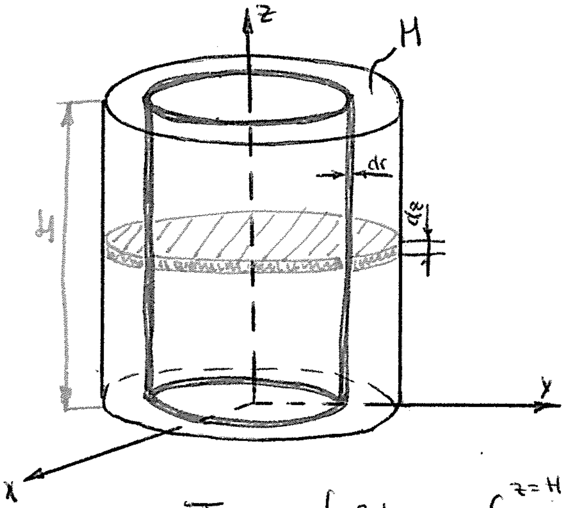
Por misma distribución $\boxed{I_x = I_y = I_z = \frac{1}{6}ma^2}$

$$I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = 3\,\frac{1}{12}ma^2 = \frac{1}{4}ma^2$$

$$I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = \frac{1}{2}\frac{3}{6}ma^2 = \frac{1}{4}ma^2$$

$$\boxed{I_O = \frac{1}{4}ma^2}$$

Ⓑ CILINDRO HOMOGÉNEO DE RADIO "R", masa "M" y altura "H". $\rho = \frac{dm}{dVol} = cte = \frac{M}{\pi R^2 H}$



Por integración (rosa)

$$I_z = \int r^2 dm = \int_{r=0}^{r=R} r^2 \frac{M}{R^2} 2r = \frac{2M}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\left[r = \text{distan } dm - z = r \, ; \; dm = \rho \, dVol = \frac{M}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{H}} 2\cancel{\pi} r \cancel{H} dr \right]$$

$$\boxed{I_z = \frac{1}{2} MR^2} \Longrightarrow$$

I eje es indiferente de H
I base " " " R

Por integración (verde)

$$I_{xy} = \int r^2 dm = \int_{z=0}^{z=H} z^2 \frac{M}{\cancel{\pi R^2} H} \cancel{\pi R^2} dz = \frac{1}{3}\frac{M}{H} H^3 = \frac{1}{3} MH^2 \qquad \boxed{I_{xy} = \frac{1}{3} MH^2}$$

$$\left[r = \text{dist.} dm \text{ a } xy = z \, ; \; dm = \rho \, dVol = \frac{M}{\pi R^2 H} \pi R^2 . dz \right]$$

Por misma distribución = $I_{xz} = I_{yz} \Longrightarrow I_z = I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{2} MR^2$

$$\boxed{I_{xz} = I_{yz} = \frac{1}{4} MR^2}$$

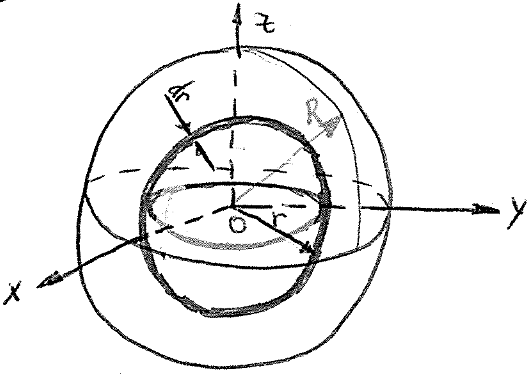
Por misma distribucion $I_x = I_y$

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = \frac{1}{3} MH^2 + \frac{1}{4} MR^2 = I_y$$

Por último:

$$I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} =$$
$$= \frac{1}{3} MH^2 + \frac{1}{2} MR^2$$

Ⓒ ESFERA MACIZA HOMOGÉNEA DE RADIO "R", MASA "M", $\rho = \frac{dm}{dVol} = cte = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$



Por integración:

$$I_O = \int r^2 dm = \int_0^{r=R} r^2 \frac{3M}{R^3} r^2 dr = \frac{3M}{5} R^2 \longrightarrow \boxed{I_O = \frac{3}{5} MR^2}$$

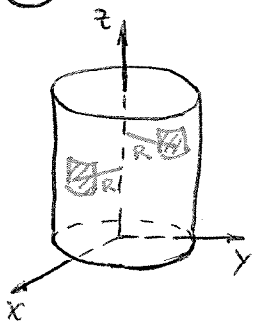
$$\left[r = \text{dis } dm \text{ a } O = r \, ; \; dm = \rho dVol = \frac{M}{\frac{4}{3}\cancel{\pi} R^3} 4\cancel{\pi} r^2 dr \right]$$

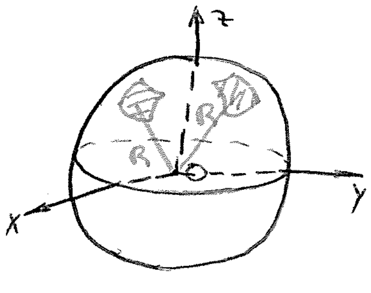
Por misma distribución = $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = \frac{1}{3} I_O = \frac{1}{5} MR^2$

$$I_x = I_y = I_z \, ; \; \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = I_O \, ; \; I_x = \frac{2 I_O}{3} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = \frac{1}{5} MR^2 \\ I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} MR^2 \end{array}}$$

(D) CILINDRO Y ESFERA HOMOGÉNEOS Y HUECOS





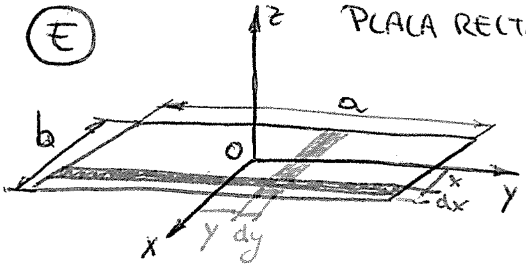
Cilindro

$$I_z = \int r^2 dm = R^2 M$$

Esfera

$$I_o = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 M$$

(E) PLACA RECTANGULAR DE LADOS "a, b", masa M, $\sigma = \frac{dm}{ds} = cte = \frac{M}{ab}$



Por integración:

$$I_{xz} = \int r^2 dm = \int_{y=-\frac{a}{2}}^{y=\frac{a}{2}} y^2 \frac{M}{a} dy = \frac{y^3}{3} \frac{M}{a} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{M}{3a}\left(\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8}\right) = \frac{M}{12} a^2$$

$$\left[r = d_{\text{o}}(dm \text{ a } xz) = y \; ; \; dm = \sigma ds = \frac{M}{ab} b\, dy \right]$$

Por integración

$$I_{yz} = \int r^2 dm = \int_{x=-\frac{b}{2}}^{x=\frac{b}{2}} x^2 \frac{M}{b} dx = \frac{M}{3b} x^3 \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{3b} M \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8}\right) = \frac{1}{12} M b^2$$

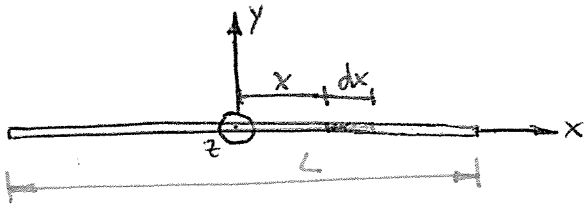
$$\left[r = x \; ; \; dm = \sigma ds = \frac{M}{ab} a\, dx \right]$$

; $I_{xy} = 0$ (masa contenida en plano)

$$\boxed{\begin{aligned} I_{xz} &= I_x = \frac{1}{12} M a^2 \\ I_{yz} &= I_y = \frac{1}{12} M b^2 \\ I_{xy} &= 0 \\ I_z &= \frac{M}{12}(a^2+b^2) = I_o \end{aligned}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} I_x &= I_{xz} + \cancel{I_{xy}}^{0} = I_{xz} \\ I_y &= I_{yz} + \cancel{I_{xy}}^{0} = I_{yz} \\ I_z &= I_{xz} + I_{yz} = \frac{M}{12}(a^2+b^2) \\ I_o &= I_{xz} + \cancel{I_{xy}}^{0} + I_{yz} = I_z = \frac{M}{12}(a^2+b^2) \end{aligned} \right.$$

(F) VARILLA DELGADA $\lambda = \frac{dm}{dl} = cte = \frac{M}{L}$



Por integración

$$I_y = \int r^2 dm = \int_{x=-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{3} x^3 \frac{M}{L} = \frac{M}{3L}\left[\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right] = \frac{ML^2}{12}$$

$$\left[r = x \ ; \ dm = \lambda dl = \frac{M}{L} dx\right]$$

Por misma distribución =

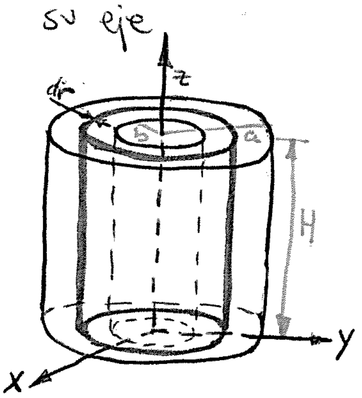
$$\boxed{\begin{array}{l} I_y = I_z = \frac{1}{12} ML^2 \\ I_x = 0 \text{ (por masa en eje)} \\ I_o = \frac{1}{12} ML^2 \\ I_{xy} = I_{xz} = 0 \text{ (por masa en planos)} \\ I_{yz} = \frac{1}{12} ML^2 \end{array}}$$

$$I_o = \frac{1}{2}\left[\cancelto{0}{I_x} + I_y + I_z\right] = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I_z = \cancelto{0}{I_{xz}} + I_{yz} = \frac{1}{12} ML^2$$

5 EJERCICIOS

(1) Se pide el radio de giro de un cilindro hueco (radios $a > b$) respecto a su eje



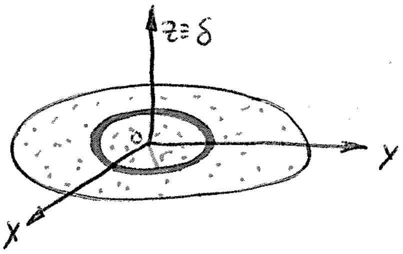
$$I_z = \int r^2 dm = \int_{r=b}^{r=a} r^2 \frac{M}{a^2 - b^2} 2r = \frac{M}{a^2-b^2} 2 \left.\frac{r^4}{4}\right|_b^a = \frac{M}{2(a^2-b^2)}(a^4 - b^4)$$

$$\left[r = \text{dis dm a } z = r \text{; } dm = \rho dVol = \frac{M}{\cancel{\pi}\cancel{H}(a^2-b^2)} 2\cancel{\pi} r \cancel{H} dr\right]$$

$$I_z = \frac{M}{2(a^2-b^2)}(a^2+b^2)(a^2-b^2) = \frac{1}{2} M (a^2+b^2)$$

$$I_z = MK^2 \longrightarrow K^2 = \frac{I_z}{M} = \frac{1}{2}\frac{M(a^2+b^2)}{M} \longrightarrow \boxed{K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

④ Determinar I_δ y K de un disco $\begin{cases} R \\ M \end{cases}$, $\sigma(r) = \sigma_0 r$



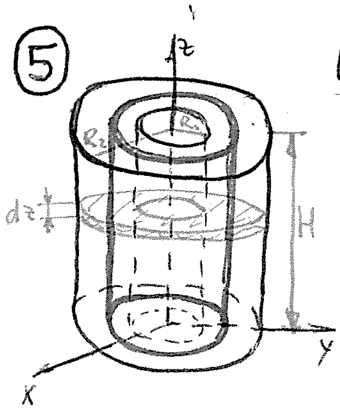
$$I_\delta = \int r^2 dm = \int_{r=0}^{r=R} r^2 \sigma_0 r^2 2\pi \, dr = 2\pi \sigma_0 \frac{R^5}{5}$$

$[r = r;\ dm = \sigma ds = \sigma_0 r \cdot 2\pi r \, dr]$

$$M = \int dm = \int_{r=0}^{r=R} \sigma ds = \int_{r=0}^{r=R} \sigma_0 r 2\pi r \, dr = \sigma_0 2\pi \frac{R^3}{3} \longrightarrow \sigma_0 = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

$$\boxed{I_\delta = 2\pi \frac{3M}{2\pi R^3} \frac{R^5}{5} = \frac{3MR^2}{5}} \qquad I_\delta = MK^2, \quad K = \sqrt{\frac{3MR^2}{5M}} = \boxed{R\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

⑤ Masa M, altura H, Radios $R_1 < R_2$. Determinar I_{xy}



$$I_{xy} = \int r^2 dm = \int_{z=0}^{z=H} z^2 \frac{M}{H} dz = \boxed{\frac{1}{3} MH^2}$$

$$r = z;\ dm = \underbrace{\frac{M}{\cancel{\pi} H (\cancel{R_2^2 - R_1^2})}}_{\rho \, d\text{vol}} \cancel{\pi (R_2^2 - R_1^2)} dz$$

⑦ Obtener I_z de un cilindro: Radio R, masa M, altura h, $\rho(r) = \rho_0 (R - r)$ en función únicamente de M y R

$$I_z = \int r^2 dm = \int_{r=0}^{r=R} (\rho_0 2\pi r^3 R - \rho_0 2\pi r^4) dr = \frac{\rho_0 2\pi R^5}{4} - \frac{\rho_0 2\pi R^5}{5}$$

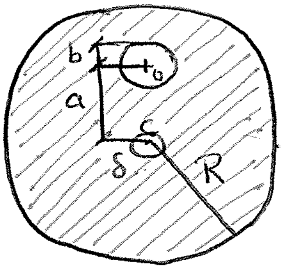
$\rho = \dfrac{dm}{d\text{Vol}}$ $\qquad r = r,\ dm = \rho \, d\text{Vol} = \rho_0 (R - r) 2\pi r \, dr = (\rho_0 2\pi r R - \rho_0 2\pi r^2) dr$

$$M = \int_{r=0}^{r=R} dm = \int_{r=0}^{r=R} \rho_0 (R - r) 2\pi r \, dr = \cancel{2}\pi \rho_0 R \frac{R^2}{\cancel{2}} - \rho_0 2\pi \frac{R^3}{3} = \frac{\rho_0 \pi R^3}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \rho_0 = \frac{3M}{\pi R^3}$$

$$\boxed{I_z = \frac{\frac{3M}{\cancel{\pi R^3}} \pi R^5}{2} - \frac{\frac{3M}{\cancel{\pi R^3}} 2\pi R^5}{5} = \frac{5(3MR^2) - 2(6MR^2)}{10} = \frac{3MR^2}{10}}$$

(10) Determinar $I_{\delta c}$ función de σ, R, b y a de la figura $\delta \perp$ disco



Designamos ① al disco comp. de radio R

② al disco que quito de radio b

La figura total es 1–2 y por tanto

$$I_{\delta TOT} = I_{\delta C1} - I_{\delta C2}$$

$$I_{\delta C1} = \int_{r=0}^{r=R} r^2 dm = \frac{R^2}{2} M_1 = \frac{R^2}{2}\sigma \pi R^2$$

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{M_1}{\pi R^2};\ M_1 = \sigma \pi R^2$$

$$I_{\delta C2} \underset{\text{Steiner}}{=} I_{\delta_0} + m_2 a^2 = \frac{b^2}{2} M_2 + M_2 a^2 = \sigma \pi b^2\left(\frac{b^2}{2} + a^2\right)$$

$$\boxed{I_{\delta C TOT} = \frac{R^2}{2}\sigma \pi R^2 - \sigma \pi b^2\left(\frac{b^2}{2} + a^2\right)}$$

GEOMETRÍA DE MASAS (II)

1.-MOMENTOS DE INERCIA DE UN SISTEMA MATERIAL

En lo sucesivo vamos a particularizar nuestro sistema material para el caso de un sólido rígido. Se tratará de un sistema continuo, por lo que los sumatorios los expresaremos como integrales y los elementos puntuales de masa como diferenciales.
Se define el momento de inercia del sistema como:

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

siendo r la distancia de dm al punto, recta o plano respecto al cual calculamos el momento de inercia, y con la integral extendida a todo el sistema. Así, definimos:

momento de inercia respecto al origen:

$$I_O = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

momento de inercia respecto a los ejes coordenados:

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2)\, dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

momento de inercia respecto a los planos coordenados:

$$I_{xy} = \int z^2\, dm$$

$$I_{xz} = \int y^2\, dm$$

$$I_{yz} = \int x^2\, dm$$

Es fácil deducir las relaciones entre ellos a la vista de las ecuaciones:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz}$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

$$I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{2}\,(I_x + I_y + I_z)$$

Unico caso donde no se cumple la suma

2.-PRODUCTOS DE INERCIA DE UN SISTEMA MATERIAL RESPECTO A DOS PLANOS ORTOGONALES

NO

Se define como:

$$P = \int r_1 \cdot r_2 \cdot dm$$

donde r_1 y r_2 son las distancias, **considerando sus signos**, del dm a los planos considerados.

Si consideramos las parejas de planos coordenados, los productos de inercia son:

$$P_{Oyz,Oxz} = P_{xy} = \int x \cdot y \cdot dm$$

$$P_{Oyz,Oxy} = P_{xz} = \int x \cdot z \cdot dm$$

$$P_{Oxz,Oxy} = P_{yz} = \int y \cdot z \cdot dm$$

3.-TENSOR DE INERCIA DE UN SISTEMA RESPECTO AL ORIGEN

NO

Lo definimos como:

$$\overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

4.-MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UNA RECTA QUE PASA POR O Y TIENE POR COSENOS DIRECTORES cosα, cosβ, cosγ

NO

Dado el tensor de inercia en el origen O, $\overline{\overline{I}}_O$, el momento de inercia respecto a una recta e que pase por O y cuyos cosenos directores sean los mencionados $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$, vale:

$$I_e = \begin{pmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\alpha \\ cos\beta \\ cos\gamma \end{pmatrix}$$

O desarrollando:

$$I_e = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2 P_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2 P_{xz} \cos\alpha \cos\gamma - 2 P_{yz} \cos\beta \cos\gamma$$

Dado que un vector unitario en la dirección de la recta, $\vec{u}$, tiene por componentes $(cos\alpha \quad cos\beta \quad cos\gamma)$, la expresión de I_e queda: $I_e = \vec{u} \cdot \overline{\overline{I}}_O \cdot \vec{u}$

5.-EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Si cambiamos los ejes del sistema de referencia, las componentes del tensor de inercia cambiarán también. Se demuestra que, para cada punto O, existen tres ejes ortogonales para los cuales la expresión del tensor de inercia es una matriz diagonal, y se denominan *ejes principales de inercia.*
De esta forma, si los ejes $Ox'y'z'$ son principales de inercia, la expresión del tensor de inercia queda

$$\overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix}$$

Si el eje x' es principal de inercia, $P_{x'y'} = P_{x'z'} = 0$(análogamente para y', z')

6.-ELIPSOIDE DE INERCIA

Es el lugar geométrico de puntos que se obtiene al llevar sobre cada recta r que pasa por O, y desde O, el segmento de valor $OP = h/\sqrt{I_r}$. Cuando r describe la radiación de rectas de vértice O, para cada valor de h, obtenemos un elipsoide de inercia.
La ecuación del elipsoide de inercia es:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = h^2$$

o, desarrollando:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 \ -2\, P_{xy}\, xy - 2\, P_{xz}\, xz - 2\, P_{yz}\, yz = h^2$$

Los ejes del elipsoide de inercia serán principales de inercia en O.

Si dos de los momentos principales de inercia son iguales, el elipsoide es de revolución.

Si los tres momentos principales de inercia son iguales, el elipsoide es una esfera. En este caso, el momento de inercia es el mismo independientemente de la dirección de la recta que pase por O.

7.-ELIPSE DE INERCIA

En el caso de un sistema másico plano, la intersección del el elipsoide de inercia con el plano que contiene la masa es, para cada valor de h, una elipse. Considerando que el plano mencionado fuera el Oxy, la ecuación de la elipse quedaría:

$$I_x x^2 + I_y y^2 \ -2\, P_{xy}\, xy = h^2$$

8.- TEOREMAS DE STEINER

El momento de inercia de un sólido rígido respecto de:

a).-un punto P
b).-una recta δ
c).-un plano π

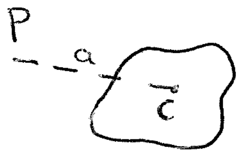
es igual al momento de inercia del sólido rígido respecto de:

a).-el centro de masas CM
b).-una recta δ_{CM} por CM y paralela a δ
c).-un plano de π_{CM} por CM y paralelo a π

más la masa del sólido rígido por el cuadrado de la distancia entre:

a).-P y CM
b).-δ y δ_{CM}
c).-π y π_{CM}

respectivamente. Así:



a) para momentos centrales: $I_P = I_{CM} + M \cdot a^2$

b) para momentos axiales: $I_\delta = I_{\delta_{CM}} + M \cdot a^2$

c) para momentos planarios: $I_\pi = I_{\pi_{CM}} + M \cdot a^2$

No

Por último, el producto de inercia de un sólido rígido respecto de dos planos, π_1 y π_2, es igual al producto de inercia respecto a dos planos paralelos a los anteriores por el centro de masas, π_{CM_1} y π_{CM_2}, más la masa del sólido por las distancias a y b entre π_1- π_{CM_1} y π_2- π_{CM_2}, respectivamente:

$$P_{\pi 1 \pi 2} = P_{\pi_{CM_1} \pi_{CM_2}} + M \cdot a \cdot b$$

RADIO DE GIRO

"Radio de una superficie esférica de centro O (para momentos centrales respecto de O), de una superficie cilíndrica de eje δ (para momentos axiales respecto a δ) o mitad de la distancia entre dos planos paralelos a π (para momentos planarios) tales que si en ellos se situase toda la masa del sistema material, se tendría el mismo momento de inercia."

M

Def práctica: Es la distancia (do K o Rg) respecto a un elemento geométrico (punto, recta o plano) a la que habría que situar un punto que tuviera toda la masa M del sólido tal que I (respecto del el. geo) $= M \cdot K^2$

En la práctica, sólo tiene sentido físico el momento de inercia respecto de un eje. En ese caso, I_δ es a los giros y a los momentos de fuerza lo que M es a las traslaciones y a las fuerzas.

X

EJERCICIO G.M.(II).1 (Jun-96)

Determine el radio de giro de un cilindro hueco y homogéneo, de radios a y b (a > b), respecto de su eje geométrico.

EJERCICIO G.M.(II).2 (Jun-2002)

En 1

Determinar el momento de inercia áxico de un cubo de densidad uniforme, masa m y arista a respecto a uno de sus ejes de simetría perpendiculares a las caras.

EJERCICIO G.M.(II).3 (Sept-2002)

En 4

Determinar el momento de inercia áxico respecto a un eje diametral de una esfera hueca de masa m y radio R.

X

EJERCICIO G.M.(II).4 (JUN 2004)

Determinar el momento de inercia áxico, I_δ, y el radio de giro, k, respecto de su eje de revolución de un disco de radio R, masa M y densidad másica superficial $\sigma(r) = \sigma_0 r$, donde r es la distancia al eje de revolución.

X

EJERCICIO G.M.(II).5 (JUN 2005)

Un sólido homogéneo de masa M tiene forma de cilindro hueco de altura H y radios interior R_1 y exterior R_2. Determinar el momento de inercia de ese sólido respecto al plano de su base.

EJERCICIO G.M.(II).6 (SEP 2006)

En 9

Determinar el momento de inercia de una placa rectangular homogénea de masa m y lados a y b, respecto de su centro.

EJERCICIO G.M.(II).7 (FEB 2007)

Obtener el momento de inercia áxico respecto a su eje de revolución de un cilindro de radio R, masa M, altura h y densidad variable $\rho(r) = \rho_0(R - r)$, en función únicamente de M y R.

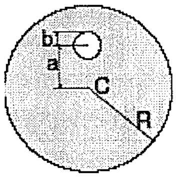
EJERCICIO G.M.(II).8 (JUN 2007)

Determinar el momento de inercia de una placa cuadrada de masa M y lado L respecto a un eje que contiene a uno de los lados.

EJERCICIO G.M.(II).9 (SEP 2007)

Obtener el momento de inercia áxico respecto a uno de sus ejes de revolución de una corona esferica de radio interior R_1, radio exterior R_2 y densidad variable $\rho(r) = \rho_0(R - r)$, en función únicamente de R_1, R_2, ρ_0 y R, siendo R una constante.

EJERCICIO G.M.(II).10 (FEB 2009)



En un disco de espesor despreciable, centro C, radio R y densidad superficial de masa constante, σ, se ha practicado un agujero circular de radio b y cuyo centro dista a del centro C. Determinar el momento de inercia áxico respecto a una recta perpendicular por su centro, $I_{\delta C}$, en función de σ, R, b y a.

EJERCICIO G.M.(II).11 (FEB 2010)

Determinar el momento de inercia, I_C, respecto a su centro de masas, de una varilla delgada de densidad lineal de masa constante, λ , y longitud L, en función de dichos datos.

EJERCICIO G.M.(II).12 (JUN 2010)

Un cilindro de radio R y altura H tiene una densidad de masa dada por la función $\rho = \dfrac{\rho_0 r}{R}$. Determinar su momento de inercia, I_δ, respecto a su eje de simetría, en función de su masa, M, y de su radio, R.

REPASO

EJERCICIO R.G.M.(II).1 (Sep-97)

Se considera un cubo homogéneo, de arista 0,2 m y masa 12 kg. Si el momento de inercia respecto de una de sus aristas vale 0,32 $kg \cdot m^2$, determine el momento de inercia respecto a una diagonal del cubo.

EJERCICIO R.G.M.(II).2 (Sep-98)

Determine el momento de inercia de una esfera maciza de radio R y masa m respecto a uno de sus diámetros.

EJERCICIO R.G.M.(II).3 (Feb-99)

Calcule el momento de inercia respecto al centro de un cubo homogéneo de masa m y arista a.

EJERCICIO R. G.M.(II).4 (Feb-00)

Obtenga la relación existente entre los momentos de inercia de un cuerpo respecto a dos planos perpendiculares concurrentes y el momento de inercia respecto a su recta de intersección.

EJERCICIO R.G.M.(II).5 (Jun-00)

Obtenga el momento de inercia de una esfera de densidad constante respecto a un eje diametral.

EJERCICIO R.G.M.(II).6 (Sep-95) (Jun-97)(Feb-01)

Calcular el momento de inercia de un cubo homogéneo, de arista a y masa M respecto a una de sus diagonales.

EJERCICIO R.G.M.(II).7 (Feb 2002)

Determinar el momento de inercia áxico respecto de a su eje de simetría de un cono de revolución de masa m, radio de la base R y altura h.

EJERCICIO R.G.M.(II).8 (SEP 2003)

Una placa cuadrada de lado l, espesor e y densidad ρ gira alrededor de un eje perpendicular a ella que pasa por su centro. Determinar su momento de inercia áxico respecto a dicho eje.

EJERCICIO R.G.M.(II).9 (SEP 2005)

Obtener el momento de inercia áxico respecto de su eje de revolución de un disco de radio R, masa M y densidad superficial variable $\sigma(r) = \sigma_0(R - r)$, en función únicamente de M y R.

EJERCICIO R.G.M.(II).10 (SEP 2006)

Determinar el momento de inercia de una placa rectangular homogénea de masa m y lados a y b, respecto de su centro.

EJERCICIO R.G.M.(II).11 (JUN 2009)

Determinar el momento de inercia áxico respecto al eje Ox diametral, I_x, correspondiente a una corona circular plana de densidad constante de masa, σ, comprendida entre los radios $r = R_1$ y $r = R_2$.

MOVIMIENTO BAJO FUERZAS CENTRALES

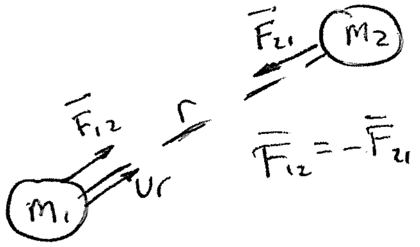
1.-LEY Y CONSTANTE DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Dos masas puntuales m_1 y m_2, separadas una distancia r, ejercen entre sí una fuerza atractiva cuyo módulo es:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

siendo G la constante de gravitación universal ($G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}).
Cada masa ejerce una fuerza igual y opuesta sobre la otra, dirigida según la recta que une m_1 y m_2.
Vectorialmente, la ley se expresa como sigue:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\vec{u}_r$$



donde:

- $\vec{F}_{21}$ es la fuerza que actúa sobre m_2 debida a m_1.
- $\vec{u}_r$ es el unitario dirigido de m_1 a m_2
- $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

2.-INTENSIDAD DE CAMPO Y POTENCIAL

Dada una masa puntual M situada en el origen de coordenadas, la fuerza que ejerce sobre otra masa puntual m situada a una distancia r de M es:

$$\vec{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad E_p = -G\frac{Mm}{r} + C$$

$0 \; (E_p(r=\infty)=0)$

Se llama intensidad de campo gravitatorio o campo gravitatorio $\vec{\Gamma}$ o $\vec{g}$ de M a la fuerza que M ejerce sobre la unidad de masa:

$$\vec{\Gamma} = \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Es decir, por el hecho de estar presente M, se produce una perturbación en el espacio que se pone de manifiesto al aparecer una fuerza $\vec{F}$ sobre otra masa m.
Se puede comprobar que la fuerza de atracción gravitatoria es conservativa y por lo tanto deriva de una energía potencial. Considerando el campo gravitatorio, éste derivará de un potencial de forma que:

$$\psi = V = -G\frac{M}{r} + cte$$

Si se impone la condición de regularidad en el infinito es $\psi \to 0$ si $r \to \infty \Rightarrow cte = 0$ y por tanto:

$$\psi = V = -G\frac{M}{r}$$

sólo se aplica a masas finitas (ejemplo del hilo de long. infinita)

que determina un pozo de potencial negativo en todo punto. Las líneas de campo son semirrectas que parten del origen de coordenadas. Las superficies de nivel son esferas con centro en el origen.

3.-MOVIMIENTO DEL PUNTO BAJO FUERZAS CENTRALES

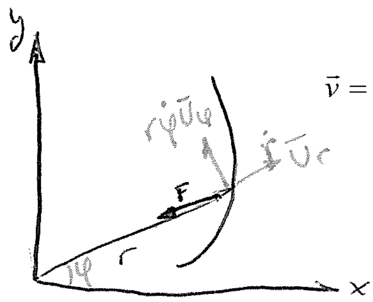
Se va a estudiar el movimiento de un punto material sometido a un campo vectorial (una fuerza) cuya recta soporte pasa siempre por un punto fijo *O* denominado centro del campo (centro de fuerzas). El campo se denominará campo central. El campo gravitatorio de una masa puntual es un ejemplo. $\bar{r} // \bar{a} // F \Rightarrow \begin{cases} a_\varphi = 0 \\ \frac{dL_o}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} = 0 \longrightarrow L_o = cte \end{cases}$

El problema general que se estudia será por tanto el movimiento de un punto material *P* sometido a una fuerza que pasa siempre por un punto fijo *O*. La aceleración del punto material pasará también por *O*, que se tomará como origen del sistema de referencia. El estudio del movimiento será en general más cómodo considerando unas coordenadas polares (r, φ).

Como ya se ha visto anteriormente (ejercicios cinemática del punto y dinámic. del punto), en este tipo de movimientos se cumple lo siguiente:

- El momento de la fuerza respecto de *O* es nulo, por lo que el momento cinético $\bar{L}_O$ de *P* respecto de *O* es constante.
- Ley de áreas: consecuencia de lo anterior, la velocidad areolar es constante: $r^2 \cdot \dot{\varphi} = C$
- La trayectoria es plana.

Expresando la velocidad y el teorema de la energía cinética en coordenadas polares y aplicando la ley de áreas, se obtiene:



$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{u}_r + r\cdot\frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{u}_\varphi \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \begin{cases} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} (\text{si r = r(t)}) \\ = C^2\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} (\text{si r} = \text{r}(\varphi)) \quad \underline{\text{Binet}} \end{cases}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2} = \frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\cdot C$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cdot dr = d\left(\frac{1}{2}\cdot mv^2\right) = \begin{cases} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot d\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) (\text{si r = r(t)}) \\ = \frac{1}{2}\cdot m\cdot d\left(C^2\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) (\text{si r} = \text{r}(\varphi)) \end{cases}$$

Con estos resultados, conocido *r(t)* y operando se obtiene *F=F(t)*

$$F = m\cdot\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3}\right) \quad \text{menos imp.}$$

De la misma forma, conocido $r(\varphi)$, se obtiene $F=F(\varphi)$

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right) = \quad \text{Importante } \underline{\text{Binet}}$$

$$= ma$$

Formulas de Binet

Permiten relacionar velocidad y aceleración con la trayectoria para el caso de un movimiento central:

1ª form. de Binet:

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]$$

2ª form. de Binet:

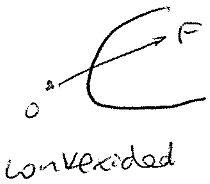
$$a = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right)$$

4.-CARACTERÍSTICA DE LA TRAYECTORIA PARA F. ATRACT. Y REPULS.

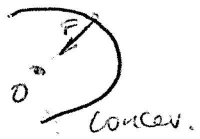
4.1.-CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD DE LA TRAYECTORIA

Ver Schz-Prz pg.229
Según que la fuerza central sea de atracción o de repulsión con respecto a O, la trayectoria tendrá:

- $F > 0$ *(repulsión)* $\rightarrow$ convexidad hacia O.
- $F < 0$ *(atracción)* $\rightarrow$ concavidad hacia O.



4.2.-ANÁLISIS DE CÓNICAS



Elipse

Lugar geométrico de los puntos M tales que la suma de sus distancias r y r' a dos puntos fijos F y F', llamados focos, es constante e igual a $2a$
Parámetros:

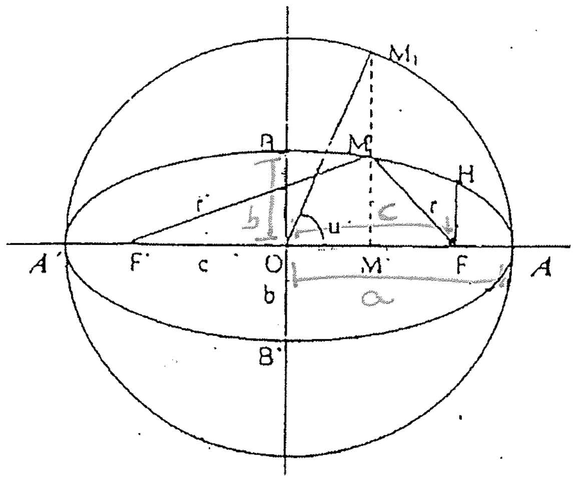
- a: longitud del semieje mayor. ($AA' = 2a$)
- b: longitud del semieje menor. ($BB' = 2b$)
- c: semidistancia focal. ($FF' = 2c$)

Se cumple $a^2 = b^2 + c^2$

- e: excentricidad. $e = c/a < 1$
- $\varphi = M\hat{F}A$: anomalía verdadera NO
- $u = M_1\hat{O}A$: anomalía excéntrica NO

Se cumple: $tg\dfrac{\varphi}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\, tg\dfrac{u}{2}$

- p: parámetro de la elipse. Es la ordenada en el foco. $p = b^2/a$



Otros parámetros de interés:

- $MM'/M_1M' = b/a = cte$
- Radios de curvatura en A y B: $\rho_A = b^2/a$ $\quad\rho_B = a^2/b$ NO
- Área de la elipse: $S = \pi\, ab$

Hipérbola

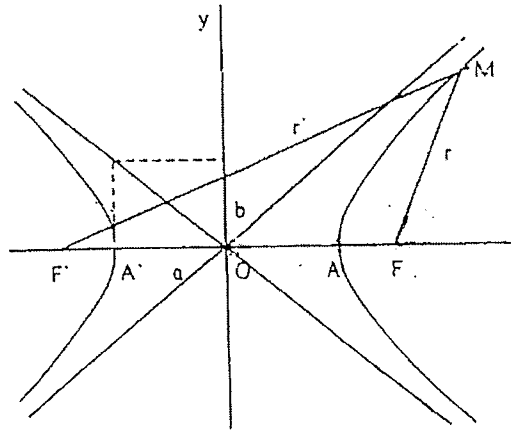
Lugar geométrico de los puntos *M* tales que la diferencia de sus distancias *r* y *r'* a dos puntos fijos *F* y *F'*, llamados focos, es constante.

Parámetros:

- a: longitud del semieje mayor. ($AA' = 2a$)
- c: semidistancia focal. ($FF' = 2c$)

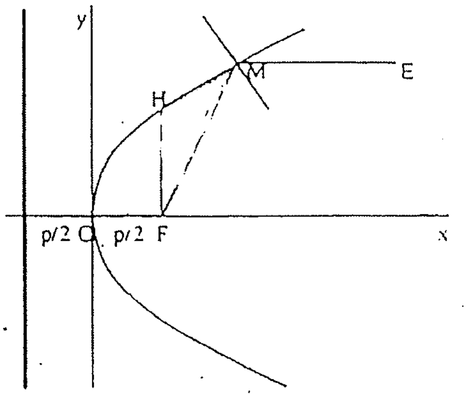
  b: tal que $c^2 = a^2 + b^2$

- e: excentricidad. $e = c/a > 1$
- p: parámetro de la hipérbola. Es la ordenada en el foco. $p = b^2/a$
- Las asíntotas de la hipérbola tienen por ecuaciones $y = \pm \dfrac{b}{a} x$



Parábola e=1

Lugar geométrico de los puntos *M* tales que su distancia a un punto *F* llamado foco es igual a su distancia a una recta *D* llamada directriz.
El foco se encuentra en (p/2,0) y la directriz tiene por ecuación x=-p/2. La ordenada en el foco vale p(parámetro de la parábola), como se deduce de la propia definición.



4.3.-ECUACIÓN DE CÓNICAS EN COORDENADAS POLARES

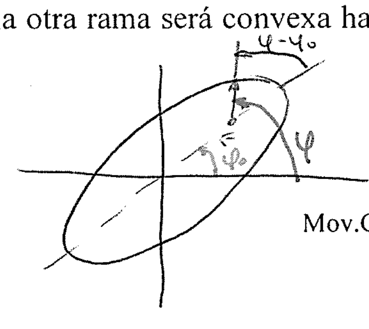
La ecuación de cualquier cónica en coordenadas polares, adoptando el foco *F* como polo y la semirrecta $\varphi = 0$ coincidente con el eje mayor de la cónica, se puede escribir de la siguiente manera:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi)} \left\{ \begin{matrix} e < 1 (elipse) \\ e = 1 (parábola) \\ e > 1 (hipérbola) \end{matrix} \right\} \text{ con } \left\{ \begin{matrix} e = \dfrac{c}{a} (excentricidad) \\ p = \dfrac{b^2}{a} (parámetro) \end{matrix} \right\} \text{en cónicas con centro}$$

sólo válida con foco = F

Si la semirrecta $\varphi = 0$ no coincide con el eje mayor de la cónica, en la ecuación de la cónica se sustituye φ por $\varphi - \varphi_0$, siendo φ_0 el ángulo del semieje mayor con la horizontal (eje *Ox*).
Esta ecuación corresponde a la elipse, la parábola y la rama de la hipérbola tales que son cóncavas hacia el foco *F* elegido como polo. En el caso de la hipérbola, la otra rama será convexa hacia *F* y su ecuación será:

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos(\varphi)} \text{ con } e > 1$$



5.-NATURALEZA DE LA FUERZA CUANDO LA TRAYECTORIA ES UNA CÓNICA

Empleando la ecuación polar de las cónicas y la 2ª fórmula de Binet se obtienen las siguientes conclusiones (ver Schz-Prz pgs.232-233):

- Si la trayectoria es una cónica, la fuerza que actúa es newtoniana y central, con centro en un foco de la cónica. proporcional a $\frac{1}{r^2}$ en $\bar{u}_r$
- Si la cónica presenta concavidad hacia el foco, la fuerza es atractiva.
- Si la cónica presenta convexidad hacia el foco(es decir, la otra rama de la hipérbola), la fuerza es repulsiva.

6.-MOVIMIENTO BAJO FUERZA CENTRAL CONSERVATIVA

Toda fuerza central que dependa sólo de la distancia al centro de fuerzas es conservativa y deriva de un potencial. Las líneas de campo serán semirrectas que parten del centro de fuerzas, y las superficies de nivel serán esferas concéntricas de centro el centro de fuerzas. Si sólo actúa esa fuerza, la energía mecánica del movimiento se conserva: $\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}$

saber Potencial efectivo y como se deduce

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = E = cte \Rightarrow v^2 = \frac{2}{m}\left[E - E_p(r)\right]\ ; \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\ ; \quad r^2\cdot\dot{\varphi} = C$$

Expresando la velocidad en polares y despejando en la ecuación de la energía se obtiene:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left[E - E_p(r) - \frac{mC^2}{2r^2}\right] = \frac{2}{m}\left[E - E_{p.ef}(r)\right]$$

siendo $E_{p,ef}(r) = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$ el potencial efectivo. De esta forma se puede estudiar el movimiento según el radio vector. Despejando se obtienen las ecuaciones del movimiento (en cuadraturas generalmente) $t=t(r)$ y $\varphi=\varphi(r)$. (ver Schz-Prz pg.234).

7.-MOVIMIENTO DE UN PUNTO BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA NEWTONIANA: DISCUSIÓN DE LAS TRAYECTORIAS.

Se analiza el movimiento de un punto material de masa m atraído por un punto O con una fuerza $\vec{F} = -m\cdot\frac{k}{r^2}\vec{u}_r$, que se lanza con una velocidad v_0 a una distancia r_0 de O. Se quieren obtener su trayectoria y sus ecuaciones horarias.

$\to$ GM en F gravit. con M = masa del centro de fuerzas

Trayectoria:

Por lo ya visto, con el planteamiento hecho, la trayectoria será una cónica cóncava de ecuación polar general: (con $K>0$ y F en $(-U_r)$)

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{con} \quad p = \frac{C^2}{k} > 0 \quad \text{y} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2C^2E}{k^2m}}$$

$p = \frac{b^2}{a}$

Si la fuerza es de repulsión (k<0), la trayectoria será convexa respecto del centro de fuerzas, correspondiendo a la rama convexa de la hipérbola, con e>1 y:

$$p = -\frac{C^2}{k} > 0 \quad \text{y} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2C^2 E}{k^2 m}}$$

Discusión de la trayectoria:

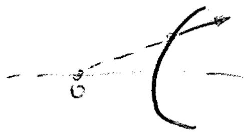
- Fuerza atractiva (k>0):

$$E < 0 \Rightarrow e < 1 \quad \text{(elipse)} \qquad E = \frac{1}{2} m v_0^2 - k\frac{m}{r_0} \Rightarrow v_{\cancel{min}}^2 < v_0^2 < \frac{2k}{r_0}$$

$$E = 0 \Rightarrow e = 1 \quad \text{(parábola)} \qquad \Rightarrow \qquad v_0^2 = \frac{2k}{r_0}$$

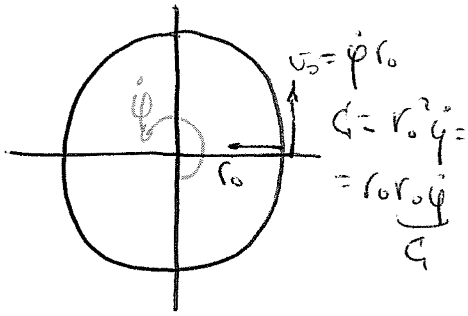
$$E > 0 \Rightarrow e > 1 \quad \text{(hipérbola)} \qquad \Rightarrow \qquad v_0^2 > \frac{2k}{r_0}$$

- Fuerza repulsiva (k<0):



$$E > 0 \Rightarrow e > 1 \quad \text{(hipérbola, rama convexa)} \qquad \Rightarrow \qquad v_0^2 > 0$$

La excentricidad e no puede ser negativa. Su valor mínimo es por tanto $e = 0$, y corresponde a una circunferencia de energía:



$$E = -\frac{mk^2}{2C^2} < 0 \quad ; \quad e = 0 \quad \text{(circunferencia)}$$

siendo: $p = cte. = r_0 = \dfrac{C^2}{k} = \dfrac{r_0^2 v_0^2}{k} \Rightarrow k = r_0 v_0^2$

No

Determinación de los semiejes de la cónica y expresión de la velocidad:

- Fuerza atractiva(k>0):

$$a = \mp\frac{km}{2E} \qquad b = C\sqrt{\mp\frac{m}{2E}} \qquad v^2 = \frac{2K}{r} \mp \frac{k}{a}$$

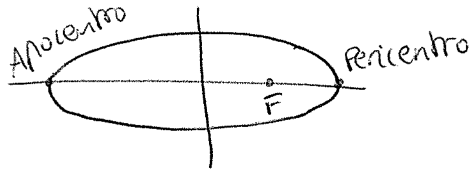
donde el signo - se aplica para el movimiento elíptico y el + para el movimiento hiperbólico (rama cóncava).

- Fuerza repulsiva (k<0):

$$a = -\frac{km}{2E} \qquad b = C\sqrt{\frac{m}{2E}} \qquad v^2 = \frac{2K}{r} - \frac{k}{a}$$

Movimiento elíptico: Periodo, curvatura máxima, curvatura mínima:

- Periodo: $T^2 = 4\pi^2 \dfrac{a^3}{k}$



No

- Curvatura máxima: $\left(\dfrac{1}{\rho_c}\right)_{max} = \dfrac{k}{C^2}$. Se produce en el punto más alejado del foco, apocentro (si el foco es el Sol se llama afelio, si es la Tierra, apogeo), y en el más cercano, pericentro (perihelio para el Sol, perigeo para la Tierra)
- Curvatura mínima: $\left(\dfrac{1}{\rho_c}\right)_{min} = \dfrac{kb^3}{C^2 a^3}$

8.-LEYES DE KEPLER

1ª.- Las curvas que describen los planetas en su movimiento son elipses que tienen por foco el centro del Sol.

2ª.- Los centros de los planetas describen curvas planas alrededor del Sol, cumpliendo la ley de áreas.

3ª.- Los cuadrados de los tiempos de las revoluciones siderales son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas: $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{a_1^3}{a_2^3}$

EN CLASE

EJERCICIO MOV.CENT.1. (Feb 98)

Exprese la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(a > b > 0)$ en coordenadas polares con polo en el foco de abscisa positiva y semieje polar de igual dirección y sentido que el Ox.

EJERCICIO MOV.CENT.2. (JUN 2004)

La ecuación del movimiento de un satélite alrededor de su centro de atracción newtoniana expresada en coordenadas polares con origen en dicho centro es: $r = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, donde $p = 3$ u.a. (unidades astronómicas) y e = 0,5. Determinar el tipo de cónica que describe y las distancias de máximo alejamiento y máximo acercamiento (la primera en caso de existir) del satélite a su centro de atracción.

EJERCICIO MOV.CENT.3. (FEB 2005)

Un planeta describe una órbita elíptica en torno al Sol, de la que se conocen la excentricidad y el perihelio $r_{\min}$. A partir de estos datos, determinar los semiejes de la órbita.

EJERCICIO MOV.CENT.4. (SEP 2006)

Desdémona es un satélite natural de Urano descubierto en 1986 por la sonda espacial Voyager 2. Su órbita en torno a Urano es circular de radio R. La masa de Urano es M_U. Determinar el periodo de la órbita en función de R, M_U, y la constante universal G.

EJERCICIO MOV.CENT.5. (JUN 2007)

Un asteroide sigue una órbita circular de radio R en torno al Sol. Obtener la expresión que proporciona el periodo T de la órbita en función de R, la masa del Sol M y la constante de la gravitación universal G.

EJERCICIO MOV.CENT.6. (FEB 2008)

Tomando como módulo de la fuerza central de atracción, F, que ejerce el Sol sobre cada uno de los planetas del Sistema Solar: $F = \dfrac{mC^2}{pr^2} = \dfrac{mk}{r^2}$, con $GM_S = k = \dfrac{C^2}{p} = \text{Cte}$ y $p = \dfrac{b^2}{a}$ (parámetro de la elipse), demostrar que se cumple para todos ellos la tercera ley de Kepler.

EJERCICIO MOV.CENT.7. (JUN 2009)

Un punto que se mueve bajo la acción de una fuerza central que apunta al origen de coordenadas O tiene en un instante dado el vector de posición $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$ y una velocidad $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$. Determinar la constante de las áreas, C, y la velocidad areolar, $\dfrac{dA}{dt}$.

EJERCICIO MOV.CENT.8. (JUN 2009)

Utilizar la ley de las áreas para obtener el semieje menor, b, de la elipse recorrida por un planeta, si se conoce la velocidad, v_{per}, en el perihelio, la excentricidad, e y el periodo, T.

EJERCICIO MOV.CENT.9. (SEP 2009)

Se lanza desde un punto P de la línea de los polos terrestres situado a una distancia del centro de la Tierra, r_p, mayor que el radio terrestre R, un proyectil de masa m y velocidad v_p en dirección perpendicular a dicha linea de los polos. Escribir un sistema de dos ecuaciones que permitan determinar la distancia r_a desde el centro de la Tierra al punto A en que la trayectoria elíptica del proyectil, que no choca con la Tierra, cortaría a la mencionada línea de polos, así como la velocidad en A, v_a.

EJERCICIO MOV.CENT.10. (JUN 2010)

En un instante dado un planeta tiene un vector de posición, respecto al Sol, $r_1 = 10^{11}(i + j)$ m y una velocidad $v_1 = 10^4(i + 5j)$ m · s^{-1}. Determinar la velocidad angular de su radio vector de posición.

EJERCICIO MOV. CENT.11. (feb 2001)

Suponiendo que la Tierra fuera una esfera inmóvil, determinar el máximo alejamiento de su superficie que alcanzaría un proyectil lanzado verticalmente (en dirección radial desde un punto de la misma con una velocidad inicial v_0).

EJERCICIO MOV. CENT.12. (feb 2004)

Una sonda espacial enviada desde la Tierra hacia el espacio exterior deberá tener una velocidad v_f cuando esté muy lejos de nuestro planeta. ¿Con qué velocidad mínima, v_0 se deberá lanzar desde la superficie terrestre?. Considerar sólo la actuación del campo gravitatorio terrestre.

REPASO

EJERCICIO R-MOV.CENT.1. (Jun 96)

Determine la energía potencial efectiva de un punto material de masa m sometido a una fuerza central, newtoniana y atractiva $\mathbf{F} = -\frac{mk}{r^2}\mathbf{u_r}$, siendo C la constante de las áreas.

EJERCICIO R-MOV.CENT.2. (Feb 97)

En el sistema solar, la fuerza que el Sol ejerce sobre un planeta de masa m es: $\mathbf{F} = -\frac{mk}{r^2}\mathbf{u}_r$

en un sistema de coordenadas polares con origen en el Sol. Justifique, a partir de la tercera ley de Kepler, que la constante k es la misma para cualquier planeta, sabiendo que $k = C^2 / p$.

EJERCICIO R-MOV.CENT.3. (Feb 99)

En una órbita planetaria indique la distancia del planeta al Sol en el afelio y en el perihelio, en función del semieje mayor y de la distancia focal (distancia entre el centro y el foco).

EJERCICIO R-MOV.CENT.4. (Jun 99)

Un punto material describe una trayectoria plana cumpliendo la ley de las áreas respecto al origen de coordenadas en un sistema inercial, formulada mediante $r^2\frac{d\varphi}{dt}=$ cte. en coordenadas polares. Demuestre que el movimiento del punto obedece a una fuerza central.

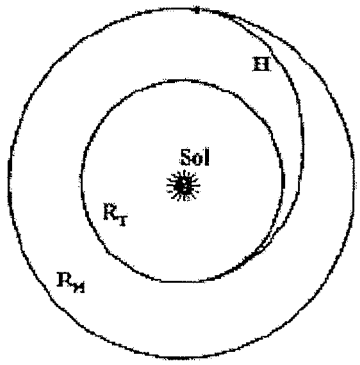
EJERCICIO R-MOV.CENT.5. (Jun 00)

Un punto material de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza central conservativa según la trayectoria (dada en coordenadas polares)

$$r(\varphi) = \frac{-p}{1 - e\cos\varphi}$$

donde p (p > 0) y e (e > 1) son parámetros constantes. A partir de estos datos, obtenga la expresión de la citada fuerza en función de la posición del móvil, indicando si es atractiva o repulsiva.

PROBLEMA MOV.CENT.1 (FEB 2003)



Un método para la transferencia de satélites entre órbitas planetarias es la utilización de la llamada órbita de transferencia de Hohmann. Supuestas las órbitas de origen y destino circulares, coplanarias y concéntricas alrededor del Sol, la órbita de transferencia de Hohmann es una órbita elíptica (H), en cuyo perihelio (punto de distancia mínima al Sol) y afelio (punto de distancia máxima al Sol) es tangente, respectivamente, a las órbitas más cercana y más alejada de éste. Los propulsores del vehículo interorbital se encienden brevemente cuando el satélite está en la órbita estable de origen a fin de comunicarle de forma prácticamente instantánea la velocidad adecuada para el seguimiento de la órbita de transferencia; a continuación, la nave viaja sin la ayuda de los propulsores hasta llegar a la órbita de destino; allí, éstos se encienden de nuevo para conferirle la velocidad adecuada para el seguimiento de la órbita circular estable alrededor del Sol a dicha distancia.

Se considera la transferencia mediante una órbita de Hohmann de un satélite que se mueve alrededor del Sol en una órbita circular de radio R_T hasta otra también circular, coplanaria y concéntrica con la anterior de radio $R_M > R_T$. La transferencia se realiza mediante un incremento prácticamente instantáneo de velocidad, Δv_T, cuando el satélite está en la órbita estable de menor radio y un segundo incremento, Δv_M, asimismo prácticamente instantáneo, cuando llega a la órbita de radio R_M, en la que permanecerá a partir de entonces. Se considera la masa del Sol suficientemente grande como para poderlo tomar como origen de una referencia inercial y se desprecia la acción gravitatoria de los planetas.

1) Obtener las energías potenciales, $E_p^*(R_T)$ y $E_p^*(R_M)$, las energías cinéticas, $E_c^*(R_T)$ y $E_c^*(R_M)$, y las energías totales, $E^*(R_T)$ y $E^*(R_M)$ del satélite en las órbitas circulares estables de menor radio (R_T) y de mayor radio (R_M) respectivamente. Denominar m a la masa del satélite y tomar como datos adicionales la constante de gravitación universal, G, y la masa del Sol, M_S.

2) Determinar las velocidades de movimiento del satélite en las citadas órbitas estables de radio menor y de radio mayor, a las que se denominará, respectivamente, v_T^* y v_M^*.

3) Establecer, aplicando el teorema de conservación de la energía mecánica, una relación entre las distancias mínima y máxima de acercamiento al Sol (respectivamente R_T y R_M) y las velocidades respectivas, v_T y v_M, que deberá tener el satélite en dichos puntos cuando se mueva según la órbita de Hohmann una vez impulsado por la acción de los propulsores. [Indicación: Recordar que la órbita de Hohmann es una órbita elíptica descrita por el satélite bajo la acción de la fuerza central de atracción gravitatoria ejercida por el Sol].

4) Aplicando la constancia de la velocidad areolar del movimiento del satélite sometido a la fuerza de atracción del Sol, demostrar que las distancias de alejamiento a éste en el afelio y el perihelio (R_T y R_M) y las respectivas velocidades (v_T y v_M) verifican la relación: $R_T v_T = R_M v_M$.

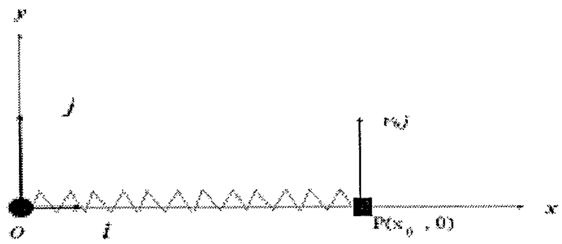
5) A partir de las dos relaciones encontradas en los apartados anteriores, determinar explícitamente los valores v_T y v_M en función de los datos del problema, demostrando que los mismos son, respectivamente: $v_T = v_T^* \sqrt{\dfrac{2R_M}{R_M + R_T}}$ y $v_M = v_M^* \sqrt{\dfrac{2R_T}{R_M + R_T}}$.

6) A partir del resultado obtenido en el apartado precedente, determinar los incrementos respectivos de velocidad, Δv_T y Δv_M (supuestos prácticamente instantáneos según lo dicho), que deben proporcionar los propulsores al satélite para salir de la órbita circular de radio R_T e integrarse en la órbita circular de radio R_M, indicando el sentido de propulsión requerido en cada caso.

7) Discutir el hecho aparentemente paradójico de que, siendo positivos los dos incrementos instantáneos de velocidad hallados, la velocidad orbital en la órbita de mayor radio, R_M, sea menor que la velocidad orbital en la órbita de menor radio, R_T.

8) Obtener los resultados del apartado 6) para el caso de que la órbita final tuviera un radio R_V menor que el de la órbita inicial.

PROBLEMA MOV.CENT.2 (FEB 2006)



En la figura se representa, visto desde arriba, un muelle de constante elástica k, de masa despreciable y longitud natural nula, con un extremo permanentemente sujeto en el origen de coordenadas $O(0,0)$ de una referencia Oxy situada sobre una superficie horizontal perfectamente lisa. El otro extremo del muelle lleva enganchada una masa puntual de valor m.

I. En el instante $t = 0$ la masa m se situa en el punto $P_0(x_0, 0)$ del eje Ox y se lanza con una velocidad $v = 0i + v_{oy}j$ en la dirección del eje Oy. En estas condiciones la trayectoria es una elipse centrada en $O(0,0)$, como se demuestra en los últimos apartados.

Se pide:

1) Determinar el valor crítico, v_{oyc}, que debe tener v_{oy} para que la trayectoria sea una circunferencia de radio x_0. El resultado se dará en función de k, m y x_0.
2) Justificar que si $v_{oy} \neq v_{oyc}$, el punto de lanzamiento, $P_0(x_0, 0)$, es un vértice de la trayectoria elíptica.
3) Justificar, aplicando la ley de las áreas y el teorema de conservación de la energía, que los restantes vértices de dicha trayectoria están en los vértices $P_2\left(0, v_{oy}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$, $P_3(-x_0, 0)$ y $P_4\left(0, -v_{oy}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$ y que la velocidad v_2 es: $v_2 = \left(-x_0\sqrt{\frac{k}{m}}i + 0j\right)$

II. En esta segunda parte del problema se considera que la masa m sigue unida al resorte y se lanza desde una posición cualquiera (x_0, y_0) con una velocidad cualquiera (v_{0x}, v_{0y}).

4) Escribir la ecuación de Newton para el movimiento de la masa bajo la acción del muelle y tomar componentes cartesianas x e y, obteniendo así una ecuación diferencial para cada una de ellas. Dichas ecuaciones son independientes.
5) Comprobar que las soluciones respectivas de las mismas son:
$$x = A\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) \qquad y = B\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_2\right)$$
6) Determinar A, B, φ_1 y φ_2 en función, exclusivamente, de k, m, x_0, y_0, v_{x0} y v_{y0}
7) Eliminando t entre las ecuaciones anteriores se obtiene la siguiente ecuación de la trayectoria:
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \frac{2xy}{AB}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \text{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$
que es una elipse centrada en el origen de coordenadas. Determinar la relación que deben cumplir los parámetros k, m, x_0, y_0, v_{x0} y v_{y0} para que los ejes naturales de esa elipse coincidan con los de la referencia. Verificar si los datos iniciales de los apartados 2) y 3) cumplen dicha relación.
8) Considerar, para el caso general, el vértice de la elipse menos alejado del origen (caracterizado por su distancia al mismo $(r = r_{min})$ y su velocidad $(v = v_{max})$) y obtener, a partir de estos parámetros, la energía total E y la constante de las áreas C. [Ind.: Recordar que $C = 2\frac{dA}{dt} = |r \times v|$].
9) A partir de las expresiones obtenidas en el apartado anterior, comprobar que los valores mínimo (r_{min}) y máximo (r_{max}) de la distancia de la masa al origen son, respectivamente:
$$r_{min} = \sqrt{\frac{E - \sqrt{E^2 - kmC^2}}{k}} \qquad r_{max} = \sqrt{\frac{E + \sqrt{E^2 - kmC^2}}{k}}$$

Ej. Mov. Cent. 1 Teoría: $\left.\begin{array}{l} P \\ \varphi_0 = 0 \\ e = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow r = \dfrac{P}{1 + \cos\varphi}$ (r, φ, coord. pol.)

Ej. Mov. Cent. 2 Teoría: $e = \dfrac{c}{a}$ $\quad P = \dfrac{b^2}{a}$ siendo
- a: semieje mayor (elipse) o real (hipérbola)
- b: " menor (") " imaginario (")
- c: semidistancia focal.

Ej. Mov. Cent. 3 Teoría: $r = \dfrac{P}{-1 + e\cos\varphi}$

- $P = \dfrac{b^2}{a}$ (parámetro)
- $e = \dfrac{c}{a} > 1$ (excentricidad)

siendo a: ---, b: ---, c: ---

Ej. Mov. Cent. 4 Registrar datos precisos sobre la posición de los planetas que sirvieron a Kepler para desarrollar y enunciar sus leyes

Ej. Mov. Cent. 5 Teoría: $\dfrac{k}{r_0} \leq v_0^2 < 2\dfrac{k}{r_0}$

Ej. Mov. Cent. 6 Teoría:

Energía	Cónica	Carácter
< 0	Elipse	Cerrado
$= 0$	Parábola	Abierto Crítico
> 0	Hipérbola	Abierto

Ej. Mov. Cent. 7 Teoría: $v_0 > \sqrt{\dfrac{2k}{r_0}}$

Ej. Mov. Cent. 8 y 9 Hechos en Cin. y Din. Pto

Ej. Mov. Cent. 10 $E = E_c + E_p = \dfrac{1}{2} m 4\dfrac{GM}{d} - \dfrac{GMm}{d} = \dfrac{GMm}{d} > 0 \Rightarrow$ Hiperbólico

Ej. Mov. Cent. 11 $E = \dfrac{1}{2} m v^2 - \dfrac{GMm}{r_{min}} < 0 \Rightarrow v < \sqrt{\dfrac{2GM}{r_{min}}} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{2\dfrac{GM}{r_{min}}}$

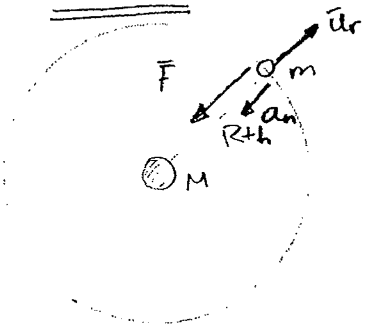
Trayect. cerrada

Ej. Mov. Cent. 12 Ver Ej. 2

EJERCICIO MOV. CENT.

Un satélite orbita alrededor de Júpiter en una órbita circular de radio $R = 15 \cdot R_J$ (R_J radio de Júpiter) con periodo T_s. Del mismo modo se considera la Luna orbitando alrededor de la Tierra en órbita circular de radio $R = 60 \cdot R_T$ y periodo T_L. Obtener la relación de densidades de Júpiter y la Tierra.

1º METODO: DIN. PTO: PARA JUPITER: $\sum \bar{F} = m\bar{a}$



$$\bar{u}_r : \cancel{+}\frac{G M_J \cancel{m}}{(15 R_J)^2} = \cancel{+}\cancel{m}\, \omega_s^2\, 15 R_J \Rightarrow M_J = \frac{\omega_s^2 (15 R_J)^3}{G} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3} = \frac{\omega_s^2 \cdot 15^3}{G \cdot \frac{4}{3}\pi} = \frac{\left(\frac{2\pi}{T_s}\right)^2 \cdot 15^3}{G \frac{4}{3}\pi} \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

ANÁLOGO PARA LA LUNA $\Longrightarrow \rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{\omega_L^2 \cdot 60^3}{G \cdot \frac{4}{3}\pi} = \frac{\left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2 \cdot 60^3}{G \cdot \frac{4}{3}\pi}$ $\qquad \omega_L = \frac{2\pi}{T_L}$

$$\frac{\rho_J}{\rho_T} = \left(\frac{T_L}{T_s}\right)^2 \cdot \frac{15^3}{60^3}$$

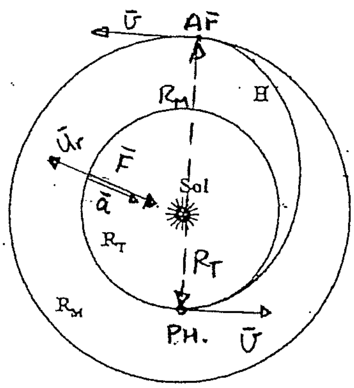
2º METODO: 3ª LEY DE KEPLER GENERALIZADA: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K}$ CON $K = GM$, SIENDO M LA MASA DE CUALQUIER CUERPO QUE EJERZA DE CENTRO DE ATRACCIÓN Y T y a EL PERIODO Y EL SEMIEJE MAYOR DE LA ORBITA DE CUALQUIER CUERPO QUE ORBITE ALREDEDOR DE M (EN ORBITA CERRADA): SI LA TRAYECTORIA ES CIRCUNFERENCIA, $a = R$. PARA JUPITER

$$\frac{G M_J}{4\pi^2} = \frac{(15 R_J)^3}{T_s^2} \Rightarrow \rho_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3} = \frac{15^3\, 4\pi^2}{G\, T_s^2\, \frac{4}{3}\pi}$$

ANALOGO PARA LUNA $\Rightarrow \rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{60^3 \cdot 4\pi^2}{G\, T_L^2\, \frac{4}{3}\pi}$

ETC...

PROBLEMA MOV.CENT.1.



1) DATOS: $m, G, M_s, R_M > R_T$

- ÚNICA FUERZA QUE ACTÚA: F ATRACC. GRAVITAT. DEL SOL $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ CONSERVAT.: $\bar{F} = -\dfrac{G M_s m}{R^2}\,\bar{u}_r$

- ENERGÍAS: $E_p = -G\dfrac{M_s m}{r}$; $E_c = \dfrac{1}{2} m v^2$

- BUSCAMOS v_T^2 y v_M^2, VELOC. EN ÓRBITAS CIRCULARES DE RADIOS R_T y R_M. MOV EN ÓRBITA CIRCULAR DE RADIO r:

$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} : \quad \bar{u}_r : -\frac{G M_s m}{r^2} = -m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{G M_s}{r}}$$

1) $E_p^*(R_T) = -\dfrac{G M_s m}{R_T}$; $E_c^*(R_T) = G\dfrac{M_s m}{2R_T}$; $E^*(R_T) = E_p^*(R_T) + E_c^*(R_T) = -\dfrac{G M_s m}{2R_T}$

$E_p^*(R_M) = -\dfrac{G M_s m}{R_M}$; $E_c^*(R_M) = G\dfrac{M_s m}{2R_M}$; $E^*(R_M) = E_p^*(R_M) + E_c^*(R_M) = -\dfrac{G M_s m}{2R_M}$

2) $v_T^* = \sqrt{\dfrac{G M_s}{R_T}}$; $v_M^* = \sqrt{\dfrac{G M_s}{R_M}}$

3) EN LA ÓRBITA ELÍPTICA SÓLO ACTÚA LA FUERZA DE ATRACC DEL SOL $\Longrightarrow E_{MEC} = E = cte$

$$\left.\begin{array}{l} \text{EN PERIHELIO: } E = \dfrac{1}{2} m v_T^2 - \dfrac{G M_s m}{R_T} \\ \text{EN AFELIO: } E = \dfrac{1}{2} m v_M^2 - \dfrac{G M_s m}{R_M} \end{array}\right\} v_T^2 - v_M^2 = 2 G M_s \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M}\right]$$

4) $V_{AR} = \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}|\bar{r} \times \bar{v}|$. EN PERIH. $\bar{r} \perp \bar{v} \Rightarrow V_{AR} = \dfrac{1}{2}|\bar{r}_{PH}||\bar{v}_{PH}| \operatorname{sen} 90 = \dfrac{1}{2} R_T v_T$

EN AFEL. $\bar{r} \perp \bar{v} \Rightarrow V_{AR} = \text{- - - - - - - - -} = \dfrac{1}{2} R_M v_M$

POR TANTO $R_T v_T = R_M v_M$

5) $$\left\{\begin{array}{l} v_T^2 - v_M^2 = 2 G M_s \left[\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{1}{R_M}\right] \\ R_T v_T = R_M v_M \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_T = \text{- - -} = \sqrt{\dfrac{G M_s}{R_T}\cdot\dfrac{2R_M}{R_T + R_M}} = v_T^* \sqrt{\dfrac{2R_M}{R_T + R_M}} \\ v_M = \text{- - -} = \sqrt{\dfrac{G M_s}{R_M}\cdot\dfrac{2R_T}{R_T + R_M}} = v_M^* \sqrt{\dfrac{2R_T}{R_T + R_M}} \end{array}\right.$$

$$\left(v_T^2\left(1 - \frac{R_T^2}{R_M^2}\right) = 2 G M_s \left[\frac{R_M - R_T}{R_T R_M}\right] \Rightarrow v_T^2 = 2 G M_s \frac{(R_M - R_T)\cdot R_M^2}{R_T R_M (R_M^2 - R_T^2)} = 2 G M_s \frac{\cancel{(R_M - R_T)}\cdot R_M}{R_T \cancel{(R_M - R_T)}(R_M + R_T)} \right.$$

ANÁLOGO PARA v_M)

2/2

6) $$v_T = v_T^* + \Delta v_T \Rightarrow \Delta v_T = v_T - v_T^* = v_T^* \left[\underbrace{\sqrt{\frac{2R_M}{R_M+R_T}}}_{>1} - 1 \right] > 0$$

$$v_M^* = v_M + \Delta v_M \Rightarrow \Delta v_M = v_M^* - v_M = v_M^* \left[1 - \underbrace{\sqrt{\frac{2R_T}{R_M-R_T}}}_{<1} \right] > 0$$

7) LA Ec. APORTADA AL SATELITE CON EL 1er Δv INSTANTANEO SE INVIERTE EN PROPORCIONAR AL SATELITE LA POSIBILIDAD DE PASAR A UNA DISTANCIA MAYOR DEL CENTRO DE ATRACCIÓN, PTO. DONDE LA Ep ES MAYOR. UNA VEZ ALLI LA VELOCIDAD DEL SATÉLITE ES DEMASIADO BAJA PARA LO QUE CORRESPONDE A UNA ÓRBITA CIRCULAR DE RADIO R_M, DE FORMA QUE SU VELOC HA DE SER DE NUEVO AUMENTADA, PARA QUE PUEDA PERMANECER EN LA MISMA.

8) EN AFELIO (R_T) : $v_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_T} \cdot \frac{2R_V}{R_T+R_V}} < v_T^*$

EN EL PERIHELIO (R_V):
$$v_V = \sqrt{\frac{GM_S}{R_V} \cdot \frac{2R_T}{R_T+R_V}} > v_V^*$$

$$\Delta v_T = v_T - v_T^* = -\sqrt{\frac{GM_S}{R_T}} \left[1 - \sqrt{\frac{2R_V}{R_T+R_V}} \right] < 0$$

$$\Delta v_V = v_V^* - v_V = -\sqrt{\frac{GM_S}{R_V}} \left[\sqrt{\frac{2R_T}{R_T+R_V}} - 1 \right] > 0$$

AMBOS Δv SON NEGATIVOS $\rightarrow$ SE LOGRAN APLICANDO AL SATELITE UNA PROPULSIÓN EN SENTIDO CONTRARIO A SU MARCHA

MEDIOS DEFORMABLES

1.- SÓLIDOS DEFORMABLES

El sólido ideal indeformable no existe. Todo sólido sometido a esfuerzos experimenta deformaciones, que pueden clasificarse en tres zonas:

- elasticidad: el sólido sufre pequeñas deformaciones reversibles.
- plasticidad: las deformaciones son mayores e irreversibles.
- rotura: el sólido rompe.

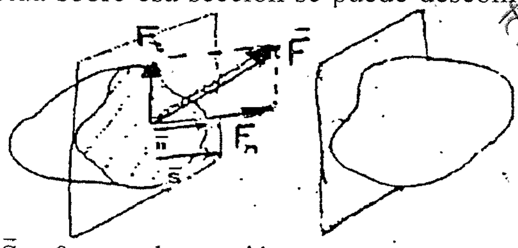
Tengo ganas de regalarle un calefactor a tetuda bija

1.1.- ESFUERZOS Y TENSIONES INTERNAS EN SÓLIDOS DEFORMABLES

Considerando una sección del sólido, la fuerza que actúa sobre esa sección se puede descomponer en una componente normal y una tangencial.

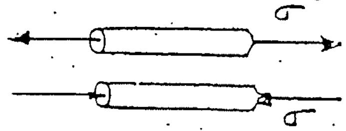
$$F_n = \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$F_t = \left[\left(\vec{n} \times \vec{F}\right) \times \vec{n}\right]$$

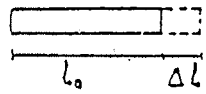


Esto da lugar, respectivamente, a:

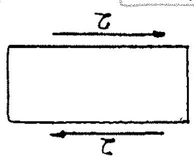
- tensión (esfuerzo) normal: $\sigma = \dfrac{\partial F_n}{\partial S}$ $\begin{cases} \vec{F}_n \cdot \vec{S} > 0 \Rightarrow \sigma \text{ de tracción} \\ \vec{F}_n \cdot \vec{S} < 0 \Rightarrow \sigma \text{ de compresión} \end{cases}$



Estos esfuerzos dan lugar a deformaciones del tipo: $\boxed{\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}}$

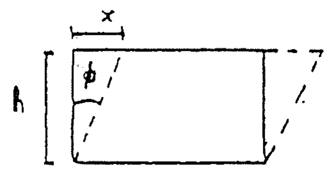


- tensión (esfuerzo) cortante: $\tau = \dfrac{\partial F_t}{\partial S}$



Estos esfuerzos dan lugar a deformaciones del tipo: $\operatorname{tg}\phi = \phi = \dfrac{x}{h}$

$\operatorname{tg}\phi \approx \phi$ (ϕ pequeño)



Las tensiones tienen dimensiones de presión ($N/m^2 = Pa$), mientras que las deformaciones son adimensionales.

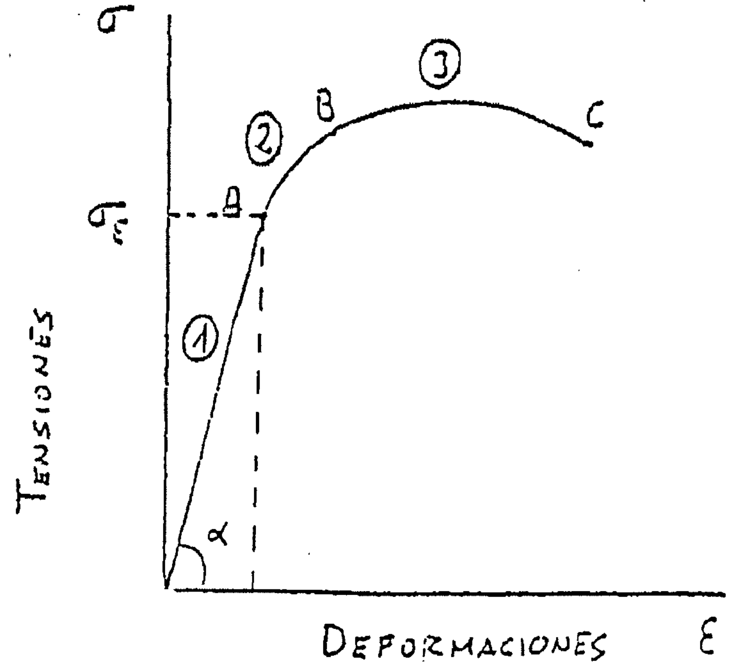
1.2.- SÓLIDO ELÁSTICO. LEY DE HOOKE

La ley de Hooke es una ley empírica que relaciona tensiones (esfuerzos) y deformaciones dentro de la zona de elasticidad de los sólidos:

$$\frac{\textit{Tensión}}{\textit{Deformación}} = \textit{Módulo de elasticidad} = \textit{cte. dependiente del material}$$

- normales: $\dfrac{\sigma}{\varepsilon} = Y \Rightarrow \sigma = Y \cdot \varepsilon$ (A Y también se le denomina como E)
- tangenciales: $\dfrac{\tau}{\phi} = G \Rightarrow \tau = G \cdot \phi$

1.3.- ZONAS DE ELASTICIDAD, PLASTICIDAD Y ROTURA



Zona 1: zona elástica. Deformación reversible. Ley de Hooke válida:

$$\sigma = E{\cdot}\varepsilon \;\rightarrow\; E = tg\,\alpha$$

En A: σ_E: límite elástico (lineal)

Zona 2: zona elástica no lineal. Deformación reversible, pero Ley de Hooke no válida.

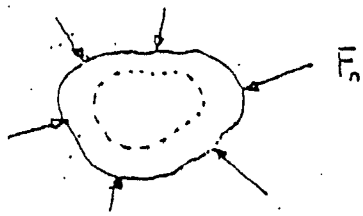
En B: límite elástico no lineal.

Zona 3: zona plástica.

En C: rotura

1.4.- PRESION. COEFICIENTE DE COMPRESIBILIDAD

Se define la presión como $\boxed{P = \dfrac{\partial F_n}{\partial S}}$ donde F_n es la fuerza normal aplicada en toda la superficie del sólido. Esto da lugar a una deformación en volumen $\dfrac{\Delta V}{V}$



Se define el *módulo de compresibilidad* como: $\beta = -\dfrac{\Delta P}{\Delta V / V_0}$

A partir del *módulo de compresibilidad* se define el *coeficiente de compresibilidad* (o *compresibilidad* simplemente) como:

$$k = \frac{1}{\beta} = -\frac{\Delta V / V_0}{\Delta P}$$

No

o en forma diferencial: $$k = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T=cte}$$

Para sólidos y líquidos, k puede considerarse constante y muy pequeño, por lo que, integrando la última ecuación se obtiene: $V = V_0 e^{-k\Delta P}$, ecuación a partir de la cual, considerando desarrollos en serie, se obtiene la primera fórmula de k.

2.- FLUIDOS

Se llama fluido perfecto a todo sistema material continuo que no soporta ningún esfuerzo cortante y fluye.
La densidad ρ caracteriza a un fluido a una temperatura y una presión.
Un fluido con gran compresibilidad (k) tendrá una variación de densidad grande. Los líquidos, en general son poco compresibles, y en la práctica se considerarán incompresibles.

2.1.- HIDROSTÁTICA

Entodas o alguna dirección

Estudio de los fluidos en equilibrio (reposo). Se basa en el principio de Pascal y en el principio de Arquímedes.
Cuando un fluido está en reposo ejerce una fuerza normal sobre toda superficie en contacto con él. A la fuerza normal por unidad de superficie se la llama presión (ver 1.4).

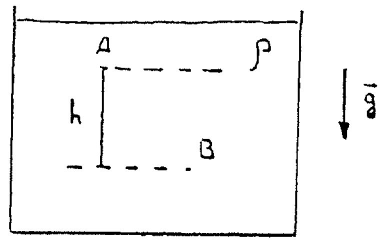
$$\text{Unidades de presión}\begin{cases} 1Pa = 1N/1m^2 \\ 1atm = 760mmHg = 760torr = 101325Pa = 14{,}7\,psi(lib/pulg^2) \\ 1psi = 1lib/1pulg^2 = 689{,}1Pa \end{cases}$$

2.1.1.- ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTÁTICA

Permite conocer la presión en un punto de un fluido. La presión aumenta con la profundidad en el líquido. Conocida la presión en un punto A del fluido, la presión en un punto B situado a una altura h por debajo de A viene dada por **(ver demo)**:

$$P_B = P_A + \rho \cdot g \cdot h$$

pres. absoluta



Esta presión recibe el nombre de presión absoluta.
Se denomina presión manométrica a la diferencia entre la presión absoluta y la atmosférica: $P_{man} = P_{abs} - P_{atm}$

2.1.2.- PRINCIPIO DE PASCAL

La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin variación en todas direcciones a todas las partes del fluido y paredes del recipiente **(ver aplicaciones con demo)**.

2.1.3.- PRINCIPIO DE ARQUIMEDES. FLOTACIÓN

Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un *empuje* vertical ascendente igual al peso del volumen de fluido desalojado **(ver demo)**. El *empuje* recibe también el nombre de *fuerza de flotación.*
La línea de acción del empuje pasa por el centro de gravedad del fluido desplazado, llamado *centro de carena* o *centro de presiones*, que no tiene que coincidir necesariamente con el centro de gravedad del cuerpo sumergido(solamente si el cuerpo es homogéneo).
Un cuerpo que flota estará en equilibrio si el *centro de carena* y el de gravedad se encuentran en la misma vertical:

- si ambos coinciden, el cuerpo está en una posición de *equilibrio indiferente.*
- si el centro de carena está por debajo, el equilibrio es *inestable*
- si el centro de carena está por encima, el equilibrio es *estable*

2.1.4.- PROPIEDADES SUPERFICIALES DE LÍQUIDOS. TENSIÓN SUPERFICIAL

Originada por las fuerzas de cohesión moleculares del líquido, actúa paralelamente a la superficie y tiende a "estirar" esa superficie, apareciendo en cada entrefase. Es una fuerza por unidad de longitud.

$$\gamma = \frac{F}{L}$$ En el *S.I.* se mide en *N/m*

2.2.- FLUJOS FLUIDOS

En los fluidos en movimiento, cada molécula del fluido tiene en cada instante una velocidad, que en general varía con el tiempo. Así, para conocer el estado de movimiento de un fluido es necesario conocer en cada instante su campo de velocidades.
Se definen:

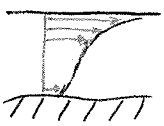
- *línea de flujo*: camino seguido por una partícula individual dentro de un fluido en movimiento.
- *línea de corriente*: curva tal que su tangente en cada punto proporciona la dirección de la velocidad en ese punto.

Cuando la distribución de velocidades no se modifica a lo largo del tiempo, ambas líneas coinciden y el movimiento del fluido se dice que es estacionario.
Existen dos tipos de flujos:

- *flujo laminar*: las trayectorias de las partículas son uniformes y no se cruzan. El mapa de velocidades se compone de líneas que parecen "láminas de fluido"
- *flujo turbulento*: al rebasar una cierta velocidad, aparecen corrientes parásitas o remolinos. El flujo no es estacionario, cada elemento puede cambiar de dirección

Características de los flujos:

- *compresibilidad*: variación de la densidad del fluido por cambios de *P* y *T*. El fluido podrá considerarse compresible o incompresible.



- *viscosidad*: presente en el movimiento del fluido, origina fuerzas tangenciales entre las capas del fluido, provocando una disipación de energía mecánica y un gradiente de velocidades en el movimiento.
- *flujo estacionario*: la distribución de velocidades del fluido es constante en el tiempo.
- *flujo rotacional*: en cada punto el fluido tiene asociada una velocidad angular neta

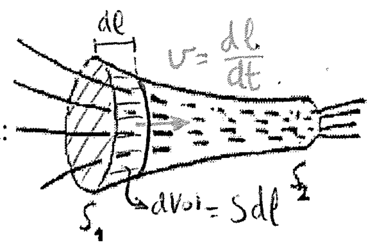
Se consideran fluidos ideales a los fluidos incompresibles y no viscosos. $(\rho = cte, \eta = 0)$

2.2.1.- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD (CONSERVACIÓN DE LA MASA)

En un fluido que circula por un conducto de sección variable, el gasto (masa por unidad de tiempo)

$$G = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho \cdot dV}{dt} = \frac{\rho \cdot S \cdot dl}{dt} = \rho \cdot S \cdot v = cte$$

ha de ser constante.



Considerando dos secciones de áreas S_1 y S_2, la ecuación de continuidad queda:

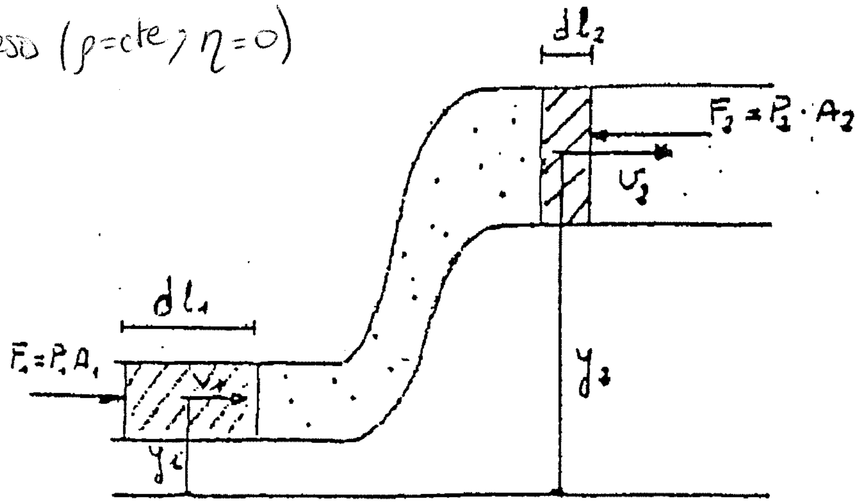
$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2$$

y en el caso de tener un fluido de $\rho = cte$: $\boxed{S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2}$

$\boxed{\text{Caudal} = Q = \frac{G}{m}}$

2.2.2.- CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN FLUJOS FLUIDOS. TEOREMA DE BERNOULLI

Hipótesis (ρ=cte ; η=0)



Se estudia el problema representado en la figura, para el caso de un fluido de densidad constante. Planteando la ecuación de la energía cinética, se obtiene la ecuación de Bernoulli **(ver demo)**:

$\frac{\tau}{Vol} = \frac{\int \vec{F}\cdot d\vec{r}}{Vol} = \frac{F \cdot L}{Vol} = \frac{F}{S} = P$; Σ_{SL} ; E_p/Vol ; E_c/Vol

$$\underbrace{P_1}_{} + \underbrace{\rho \cdot g \cdot y_1}_{E_p/Vol} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho \cdot v_1^{\,2}}_{E_c/Vol} = P_2 + \rho \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^{\,2} \Rightarrow P + \rho \cdot g \cdot y + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = cte$$

Se llama presión estática al término $P + \rho \cdot g \cdot y$

Se llama presión dinámica al término $\frac{1}{2}\rho \cdot v^2$

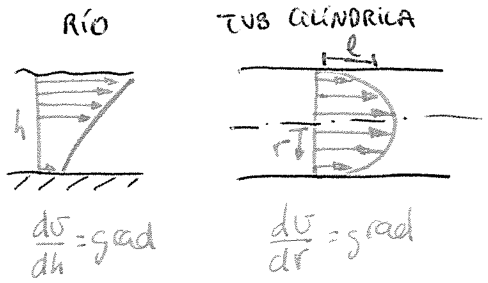
2.2.3.- VISCOSIDAD Y PÉRDIDAS POR FRICCIÓN EN CONDUCCIONES FLUIDAS. ECUACIÓN DE POISEVILLE

Hipótesis ($\eta \neq 0$ y régimen laminar)

La viscosidad η es la causa de la fricción interna en un fluido. Si tenemos un flujo laminar de un fluido en un conducto, la viscosidad va a originar un gradiente de velocidades, de forma que el fluido más cercano a las paredes tendrá una velocidad mucho menor que el fluido más alejado de las mismas.

Ley de Newton para fluidos: fuerzas entre capas: $F = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dh}$ $\quad$ ($\frac{dv}{dh}$ = grad. de veloc)

$$\eta = \frac{esfuerzo\ cortante}{raz\acute{o}n\ de\ deformaci\acute{o}n} = \frac{dF/dS}{dv/dh} \qquad [\eta] = \frac{MLT^{-2}}{L^2T^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

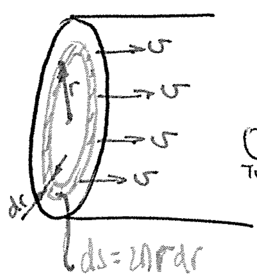


Para el caso de un conducto cilíndrico de sección circular de radio R, la distribución de velocidades es parabólica y vale **(ver demo)**:

$$V = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{dP}{dl}\right)\left(R^2 - r^2\right)$$

La ecuación de Poiseville, válida solamente para flujos laminares, proporciona el caudal que atraviesa un conducto cilíndrico en la unidad de tiempo **(ver demo)**:

$$Q = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \eta}\left(\frac{dP}{dl}\right)$$



$Q = S \cdot v$

$dQ = dS\, v = 2\pi r\, dr \frac{1}{4\eta}\left|\frac{dP}{dl}\right|(R^2 - r^2)$

$Q_{\text{TOTAL POR TUB. CILÍNDRICA}} = \int_{r=0}^{r=R} dQ = \int_{r=0}^{R} 2\pi \frac{1}{4\eta}\left|\frac{dP}{dl}\right| r(R^2 - r^2)\, dr =$

$= \frac{\pi}{2\eta}\left|\frac{dP}{dl}\right|\left(\frac{R}{2} - \frac{R}{4}\right) = \frac{\pi}{8\eta}\left|\frac{dP}{dl}\right| R^4$

2.2.4.- FLUIDOS DE FLUJO TURBULENTO. NÚMERO DE REYNOLDS

Si la velocidad del fluido es elevada, el flujo deja de ser laminar y pasa a ser turbulento, y la ecuación de Poiseville ya no es válida.
La turbulencia en un flujo se caracteriza con el número de Reynolds (Re). En el caso de un flujo a través de un conducto de sección circular, su valor es:

No lo han preg. nunca

$$\mathrm{Re} = \frac{2 \cdot v \cdot r \cdot \rho}{\eta} \begin{cases} v = \text{velocidad promedio del fluido} \\ r = \text{radio de la sección} \\ \rho = \text{densidad} \\ \eta = \text{viscosidad} \end{cases}$$

Experimentalmente se comprueba que para Re<2000 el flujo es laminar, y para Re>2000 es turbulento.

2.2.5.- MOVIMIENTO DE SÓLIDOS EN EL SENO DE UN FLUIDO. FÓRMULA DE STOCKES

Cuando un sólido se mueve en el seno de un fluido de viscosidad η, aparece una fuerza que se opone al movimiento. Esta fuerza responde a la fórmula de Stockes:

Sí!

$$\boxed{\vec{F}_R = -k \cdot \eta \cdot \vec{v}} \begin{cases} k = \text{factor de forma (cte. que depende de la geometría del sólido)} \\ \eta = \text{viscosidad} \\ \vec{v} = \text{velocidad del sólido respecto del fluido} \end{cases}$$

En el caso de un sólido en movimiento en el seno de un fluido se define el número de Reynolds como:

No lo han preg. nunca

$$R_e' = \frac{v \cdot L \cdot \rho}{\eta} \begin{cases} v = \text{velocidad del sólido relativa al fluido} \\ L = \text{longitud característica del sólido} \\ \rho = \text{densidad} \\ \eta = \text{viscosidad} \end{cases}$$

Si $R_e'<1$, el flujo que rodea el sólido es esencialmente laminar.
Si $1<R_e'<10$, se produce turbulencia tras el sólido, llamada estela, y la fuerza de arrastre es mayor que la de Stockes, siendo proporcional al cuadrado de la velocidad.

EJERCICIO M.D.1. (Feb 96)

Formule el teorema de Bernoulli para un fluido incompresible en régimen permanente por una tubería, indicando el significado de los símbolos empleados y las hipótesis necesarias.

EJERCICIO M.D.2. (Sep-96)

Dos cuerpos tienen la misma masa pero densidades diferentes. Si se coloca cada cuerpo en un platillo distinto de una balanza de dos platillos, que se supone perfecta, indique si el fiel de la balanza se sitúa o no en el cero de la escala, justificando su respuesta.

EJERCICIO M.D.3. (Sep 96*)

¿Qué magnitudes relaciona la ecuación de Poiseuille para fluidos y qué hipótesis básicas utiliza?

EJERCICIO M.D.4. (Feb 98*)

Un fluido de densidad ρ y coeficiente de viscosidad η circula por una tubería de diámetro D con velocidad v. Defina el número de Reynolds correspondiente.

EJERCICIO M.D.5. (Jun 98)

Explique el funcionamiento de un medidor de caudal tipo Venturi en una tubería horizontal.

EJERCICIO M.D.6. (Jun 98*)

En el sistema CGS de unidades la unidad de viscosidad es el poise. Obtenga su equivalencia con la unidad en el Sistema Internacional (SI).

EJERCICIO M.D.7. (Feb 99)

Un fluído de densidad ρ circula por una tubería horizontal en condiciones en las que es aplicable el teorema de Bernoulli. Relacione el incremento de presión entre dos secciones de la tubería con las velocidades respectivas.

EJERCICIO M.D.8. (Jun 99)

Un cuerpo sólido de densidad ρ permanece flotando en un líquido permaneciendo sumergido las dos terceras partes del mismo. Determine la densidad del líquido si se desprecia la densidad del aire.

EJERCICIO M.D.9. (Sep 99*)

Enuncie y formule la ley de Stokes para el movimiento de los cuerpos en el seno de fluidos.

EJERCICIO M.D.10. (Feb 00)(JUN 04)

Enuncie el teorema de Bernoulli, explicando el significado físico de cada término.

EJERCICIO M.D.11. (Sep 00)

Determine la velocidad con la que sale el agua por el fondo de un depósito de 2,5 metros de altura cuando está lleno, adoptando como valor de la gravedad 9,8 m/s^2.

EJERCICIO M.D.12. (Feb 01)

Escribir la expresión de la hidrostática experimentada por un cuerpo sumergido a una profundidad h en un fluido de densidad ρ.

EJERCICIO M.D.13. (Jun 01)

Obtener en unidades del S.I. la presión existente en el fondo de una piscina de 3 metros de profundidad situada en un lugar donde el valor local de la aceleración de la gravedad es 10 m/s^2, suponiendo que la presión atmosférica es 1 bar y el agua tiene una densidad de 1000 kg/m^3.

EJERCICIO M.D.14.

Definir y expresar cuantitativamente la compresibilidad de un medio material. (Sep 01)

EJERCICIO M.D.15. (Sep 01)

Determinar la profundidad a que es necesario descender en un lago con agua de densidad 1000kg/m^3 para que la presión alcance el valor de dos veces la presión atmosférica, supuesta igual a 1 bar, en un lugar donde el valor local de la aceleración de la gravedad es 10m/s^2.

EJERCICIO M.D.16. (Feb 2002)

Una muestra de aceite con un volumen inicial de 800 cm^3 se somete a un aumento de presión de $1 \cdot 10^5$ Pa, disminuyendo su volumen en 0,8 cm^3. Determinar su módulo de compresibilidad.

EJERCICIO M.D.17. (Jun 2002)

Una barra de material desconocido de sección 1 cm^2 se somete a una tracción de 10^3 N, experimentando un alargamiento relativo del 0,1 %. Determinar el módulo de Young del material.

EJERCICIO M.D.18. (Feb 2003)

Obtener la fuerza horizontal neta que ejerce el agua sobre una presa de anchura D sobre la que alcanza una altura H medida desde el fondo. Tomar ρ como densidad del agua.

EJERCICIO M.D.19. (Feb 2003)

Un tanque grande abierto al aire, de radio R y pared de espesor despreciable contiene agua hasta un altura H. Se practica un orificio de diámetro d<<D en la base del tanque. Despreciando efectos debidos a viscosidad y a contracción de vena líquida, determinar el tiempo que tardará el tanque en vaciarse.

EJERCICIO M.D.20. (Jun 2003)

Obtener el momento de fuerzas respecto a la línea de base (recta intersección del fondo, supuesto horizontal, con la pared en contacto con el agua, supuesta vertical) que ejerce el agua almacenada en una presa de anchura D sobre la que alcanza una altura H medida desde el fondo. Tomar ρ como densidad del agua.

EJERCICIO M.D.21. (Jun 2003)

Sabiendo que la distribución de velocidades en una tubería rectilínea de longitud L y radio interno R por la que circula un fluido newtoniano de viscosidad η en régimen laminar bajo una diferencia de presión en sus extremos Δp es: $v(r) = \dfrac{|\Delta p|}{4\eta L}(R^2 - r^2)$, siendo r la posición radial medida a partir del eje de la tubería, obtener la expresión del caudal de dicho fluido en función de los parámetros dados.

EJERCICIO M.D.22. (Sep 2003)

Determinar la reducción de volumen que experimenta el aceite de una prensa hidráulica (inicialmente 1 m^3) cuando se le somete a un aumento de presión de $5 \cdot 10^6$ Pa. El módulo de compresibilidad del aceite es $5 \cdot 10^9$ Pa.

EJERCICIO M.D.23. (Sep 2003)

Determinar la presión manométrica mínima necesaria en una toma de agua para que el chorro de una manguera de bomberos conectada a ella pueda alcanzar una altura h. (Suponer que la toma tiene un diámetro mucho mayor que la manguera).

EJERCICIO M.D.24. (Feb 2004)

Determinar la reducción de volumen que experimenta el aceite de una prensa hidráulica (inicialmente 1 m^3) cuando se le somete a un aumento de presión de $5 \cdot 10^6$ Pa. La compresibilidad del aceite es $2 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}.

EJERCICIO M.D.25. (SEP 2004)

Determinar la posición de equilibrio de un bloque de un material de densidad ρ y altura h que flota en la interfaz entre sendas capas de gran espesor de un fluido de densidad ρ_1 y otro de densidad ρ_2, con $\rho_1 > \rho > \rho_2$. Expresar dicha posición de equilibrio en función de la fracción de h que queda sumergida en el líquido inferior (de mayor densidad).

EJERCICIO M.D.26. (SEP 2004)

Por una tubería de 100 mm^2 de sección interior circula un fluido a una velocidad media de 4 m/s.

i) Determinar el caudal que circula por la misma.

ii) Admitiendo que se mantiene el caudal, determinar la velocidad media del fluido cuando el diámetro de la tubería se reduce a la mitad.

EJERCICIO M.D.27. (FEB 2005)

Escribir la ecuación fundamental de la hidrostática, indicando el significado de cada símbolo.

EJERCICIO M.D.28. (JUN 2005)

Un fluido incompresible circula por una tubería horizontal que tiene un tramo de sección A1 y otro de sección A2 (A1>A2). Si se puede medir la diferencia de presión entre esos tramos, $\Delta p = p_1 - p_2$, obtener la expresión que proporciona el caudal Q que pasa por la tubería (volumen de fluido por unidad de tiempo), en función únicamente de Δp, A1, A2, y la densidad del fluido ρ, mediante la aplicación del teorema de Bernoulli.

EJERCICIO M.D.29. (SEP 2005)

Definir el módulo de Young para un material que sufre una deformación elástica por unidad de longitud ε al ser sometido a un esfuerzo de tracción o compresión σ, e indicar su unidad en el SI.

EJERCICIO M.D.30. (FEB 2006)

Exprese la ley de Hook para la deformación longitudinal de una barra sometida a tracción.

EJERCICIO M.D.31. (JUN 2006)

Un tubo horizontal de sección transversal A_1 por el que circula un fluido ideal incompresible presenta un estrechamiento con sección transversal A_2, siendo $A_2 < A_1$. Demostrar que la presión en la sección A_2 es menor que en la sección A_1 ($p_2 < p_1$).

EJERCICIO M.D.32. (JUN 2006)

Definir el módulo de compresibilidad (o de volumen), B, para un fluido.

EJERCICIO M.D.33. (SEP 2006)

Dos varillas de cobre A y B tienen la misma longitud y el área de la sección transversal de la varilla A es el doble del área de la sección transversal de la varilla B. Si se aplican las mismas fuerzas de tracción en los extremos de cada una de las varillas, responder qué respuesta es verdadera:

a) Las dos varillas sufrirán igual alargamiento.
b) La varilla A se alarga la mitad que la varilla B.
c) La varilla A se alarga el doble que la varilla B.
d) Ninguna de las dos varillas sufrirá alargamiento.

EJERCICIO M.D.34. (FEB 2007)

Un tubo horizontal de sección transversal $A_1 = 4\ \mathrm{cm}^2$ por el que circula agua (considerado un fluido ideal incompresible) presenta un estrechamiento con sección transversal $A_2 = 2\ \mathrm{cm}^2$ y donde la velocidad es $v_2 = 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m\ s}^{-1}$. Calcular, en pascales (Pa), la diferencia de presiones $p_2 - p_1$.

EJERCICIO M.D.35. (FEB 2007)

Calcular cuánto se alarga una barra de sección uniforme $A = 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$ y de longitud $l = 4\ m$ sometida a una fuerza de tracción $F = 100$ N si su módulo de Young vale $E = 10^8\ \mathrm{N\ m}^{-2}$.

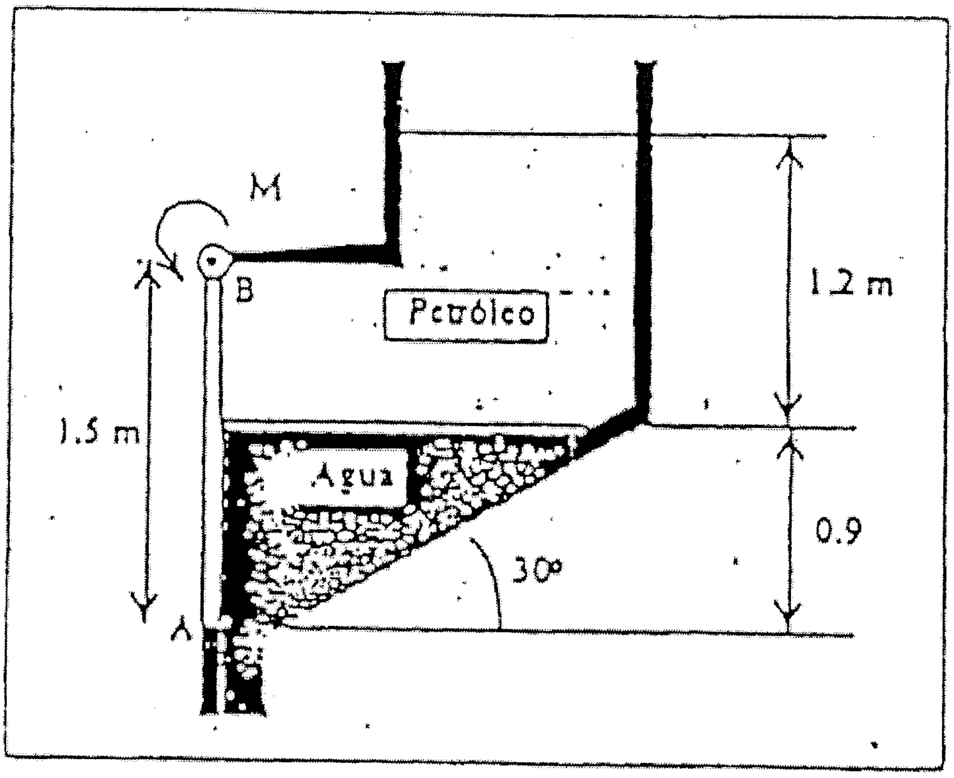
PROBLEMA M.D.1.

La compuerta AB de la figura representa una placa rectangular de 280 kg., 1,5 m de altura y 1,1 m de anchura, componente de un sistema que se utiliza habitualmente para cerrar el canal de desagüe en la parte inferior de los depósitos de petróleo, en el que se recoge agua dulce como consecuencia de condensaciones en los mismos. Para la configuración representada en la figura se pide determinar:

1) Las fuerzas totales que sobre la compuerta ejercen el petróleo (de densidad relativa 0,85) y el agua, indicando en cada caso el correspondiente centro de presiones.

2) El momento M respecto al eje del pasador representado en B necesario para mantener cerrada la compuerta contra la acción de las fuerzas hidrostáticas del agua y del petróleo.

3) La compresión inicial requerida en un resorte de constante elástica $k = 3{,}5 \cdot 10^4$ N · m destinado a ser colocado contra la compuerta y a 1 m por debajo del pasador en B con objeto de mantener estacionario el nivel de agua en el depósito en caso de condensación adicional.



PROBLEMA M.D.2.

i) De un depósito de pared rectangular de altura $\underline{H}$ y gran dimensión lateral se efectúa la descarga de un fluido ideal de peso específico $\underline{\gamma}$ de las dos maneras siguientes:

a) Mediante una ranura horizontal de gran anchura lateral y practicada entre las profundidades $\underline{z}_a$ y $\underline{z}_b$ (según indica la figura a)

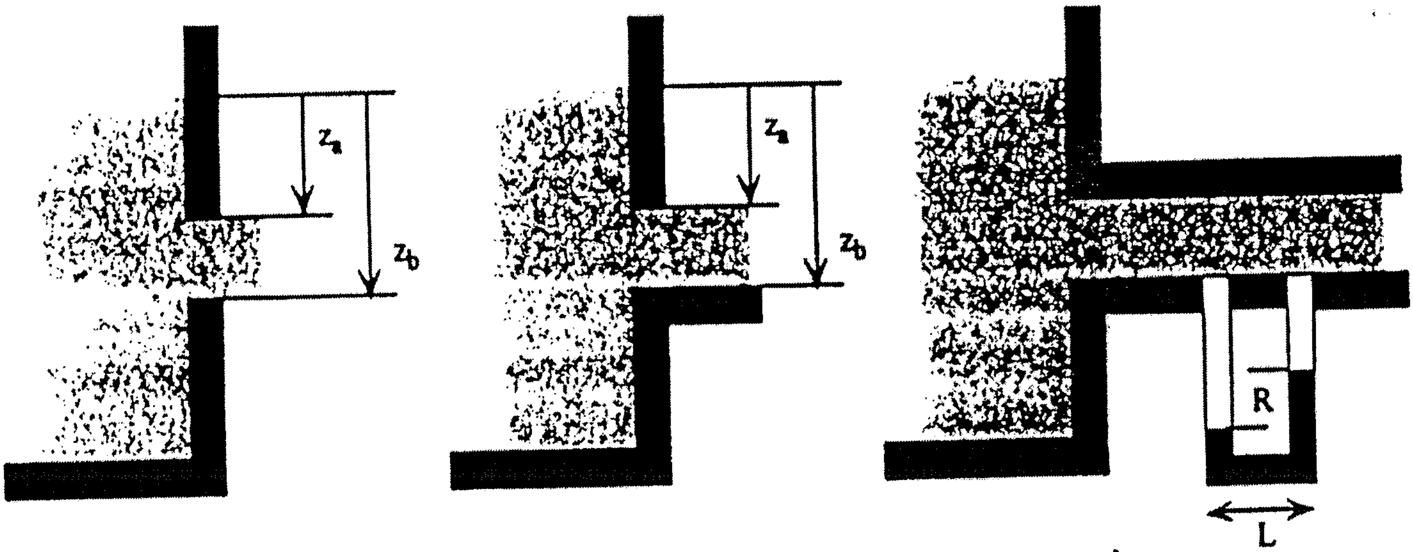
b) Mediante una puerta al piso situada a la profundidad $\underline{z}_b$ (según indica la figura b).

Se pide determinar la expresión de la velocidad del fluido (en función de la altura medida a partir de la cota $\underline{z_b}$), la velocidad máxima en el chorro de salida, el caudal del mismo por unidad de dimensión lateral y la velocidad media del fluido en cada uno de los dos casos.

ii) Se sustituye el fluido ideal por un fluido viscoso de viscosidad $\underline{\mu}$ y se hace que la descarga se realice entre dos paredes paralelas y muy anchas, de manera que el flujo resulte completamente laminar, y, en un punto dado de la conducción se coloca un manómetro con un líquido manométrico de peso específico $\underline{\gamma_m}$ en el cual se registra una lectura $\underline{R}$ sobre una distancia $\underline{L}$ (ver figura c). Se pide obtener la expresión de la velocidad del fluido en función de la altura dentro del conducto, la velocidad máxima en el fluido, su velocidad media y su caudal por unidad de dimensión lateral, comparando el resultado con el correspondiente a una conducción cilíndrica.

iii) Para cada uno de los casos descritos, indicar la altura dentro del fluido a la que habría que situar un tubo de Pitot que indicara exactamente los valores de la velocidad máxima y la velocidad media.

Nota: Para la determinación del perfil de velocidades en la conducción formada por las paredes paralelas, aplicar la definición de viscosidad a un volumen de fluido situado a una distancia dada de cada una de las paredes y establecer el correspondiente equilibrio de fuerzas.



a) b) c)

PROBLEMA M.D.3 (FEB 2000)

Desde una altura h sobre un estanque suficientemente profundo, se deja caer verticalmente un cuerpo esférico de radio R y densidad ρ menor que la densidad del agua del estanque, de manera que el mismo incide sobre la superficie de éste sumergiéndose y experimentando tanto el empuje hidrostático como la fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad debida a la viscosidad del agua según la ley de Stokes ($F_\eta = 6\pi R\eta v$: Coeficiente de viscosidad del agua igual a η). Suponiendo que en el momento de atravesar la superficie del agua la esfera no sufre ninguna interacción adicional debida al choque con la misma:

1) Determine la velocidad v_0 de la esfera en el momento justo de su entrada en el agua del estanque.
2) Establezca la ecuación del movimiento de la esfera en el seno del estanque durante su descenso en el mismo, expresando la variación de su velocidad con respecto al tiempo en función de la propia velocidad. Se sugiere tomar como sentido de desplazamiento positivo el vertical descendente.
3) Obtenga explícitamente la expresión de la velocidad del movimiento descendente de la esfera en función del tiempo.
4) Demuestre que, en su movimiento de caída, la esfera llega a un punto de retroceso en el que la velocidad se anula y determine el instante en que esto ocurre a partir de la entrada de la esfera en el estanque. Indique en qué condiciones tal retroceso tendrá lugar y en qué condiciones no existiría.
5) Determine en función de los datos del problema la profundidad bajo la superficie del agua a la que se alcanza dicho punto.
6) Una vez alcanzado el punto de retroceso, establezca la ecuación del movimiento de la esfera a partir de ese instante en forma análoga a lo realizado en el apartado 2). Se sugiere tomar ahora como sentido de desplazamiento positivo el vertical ascendente.
7) Obtenga de forma explícita y tomando como nuevo origen de tiempos el instante en el que se alcanza la velocidad nula, la expresión de la velocidad de la esfera en función del tiempo en su movimiento ascendente.
8) Para el caso de una esfera de $R = 1{,}00$ cm, $\rho = 0{,}80\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ lanzada desde una altura de 1 m sobre el nivel del estanque y un fluido con densidad $\rho_L = 1{,}00\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ y coeficiente de viscosidad $\eta = 1{,}02 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m^{-2} \cdot s}$, obtenga, sin establecer la ecuación horaria del movimiento, y por consideración del caso más favorable (suponiendo despreciable el rozamiento viscoso) una cota superior para el valor de la velocidad de la esfera en su movimiento ascendente cuando llega de nuevo a la superficie del estanque, comparándolo con el valor v_0 obtenido en el apartado 1). Tómese $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
9) A partir del citado valor de v_0 y del valor particularizado de la profundidad del punto de retroceso obtenido en el apartado 5), determine la energía que se ha disipado por rozamiento viscoso en el movimiento de bajada de la esfera hasta dicho punto de retroceso.

(Examen de febrero 21-02-2000)

PROBLEMA M.D.4 (JUN 2007)

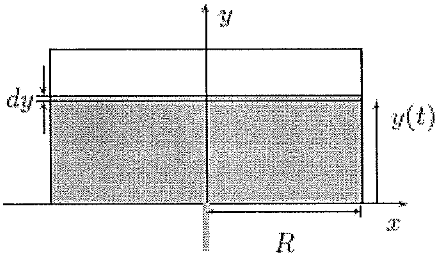


Figura 1

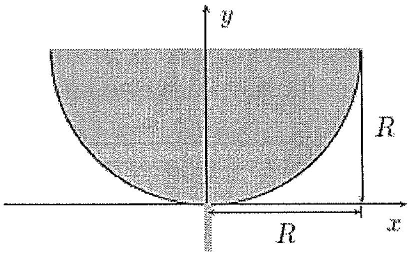


Figura 2

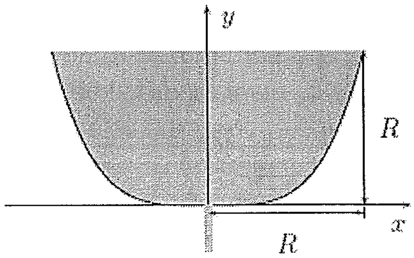


Figura 3

Se dispone de tres depósitos con forma de figura de revolución en torno al eje vertical y de radio máximo R, que están llenos de agua (considerada como un fluido ideal). Los depósitos se vacían muy lentamente mediante un orificio circular situado en la base, de radio $r \ll R$. El nivel del agua en cada depósito, $y(t)$, se mide desde la base, y se considera positivo en sentido ascendente. La rapidez de variación de y se denota por $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ y será una magnitud negativa si el nivel de agua disminuye.

1) Determinar la relación entre la velocidad de salida del agua por el orificio, v, y la altura del nivel del agua, y, utilizando el teorema de Bernoulli. (1 punto)

I) Se considera un deposito cilíndrico de radio R y altura R, como se muestra en la figura 1.

2) Expresar el volumen dV_s que sale del depósito cuando el nivel de agua es y y disminuye $|dy|$, en función de $|dy|$ y de la sección del depósito. (1 punto)

3) Determinar el valor instantáneo de $\dot{y}$, teniendo en cuenta que el volumen de agua anterior dV_s es el que sale por el orificio en un tiempo dt y forma una columna de sección aproximadamente igual a la del orificio y de altura $v\,dt$: $dV_s = \pi r^2 v\,dt$. [Ind.: Recordar que $\dot{y} < 0$ por definición y por tanto $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{|dy|}{dt}$.] (1 punto)

4) Integrando la ecuación diferencial del apartado anterior, obtener el tiempo T que tarda en vaciarse el depósito. (1 punto)

II) Se considera ahora un depósito semiesférico de radio R, como se muestra en la figura 2.

5) Expresar el volumen dV_s que sale del depósito cuando el nivel de agua es y y disminuye $|dy|$, en función de $|dy|$ y de la sección del depósito. (1 punto)

6) Determinar el valor instantáneo de $\dot{y}$, como se ha indicado en el apartado 3). (1 punto)

7) Integrando la ecuación diferencial del apartado anterior, obtener el tiempo T que tarda en vaciarse el depósito. (1 punto)

III) Finalmente, se considera un depósito en el que $y = cx^{\alpha}$, donde x es la distancia al eje de revolución, c es constante y α un número entero, como se muestra en la figura 3.

8) Determinar el valor instantáneo de $\dot{y}$, como se ha indicado en los apartados anteriores. (1 punto)

9) Determinar el valor de α para que $\dot{y}$ sea constante. (1 punto)

10) Obtener el tiempo de vaciado del depósito, para el valor de α obtenido en el apartado anterior, tomando $c = R^{-3}$. (1 punto)

$\boxed{\text{EJ. M.D.1}}$ Teoria Pag 5. Pto 2.2.2

$\boxed{\text{EJ. M.D.3}}$ "Determina la pérdida de carga por unidad de longitud en un conducto por el que circula un fluido, en función del caudal, del coeficiente de viscosidad del fluido y del radio del conducto. Hipotesis: Régimen permanente y laminar."

$\boxed{\text{EJ. M.D.4}}$ Teoria Pag. 6. Pto 2.2.4. $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta}$

$\boxed{\text{EJ. M.D.7}}$ $h_1 = h_2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$ (Por Bernoulli)

$\boxed{\text{EJ. M.D.9}}$ Teoria Pag. 6. Pto 2.2.5.

$\boxed{\text{EJ. M.D.10}}$ Igual que Ej. 1: "La suma de las energías específicas (por unidad de volumen) debidas a la altura (E_p), a la presión y al movimiento (E_c) es cte"

$\boxed{\text{EJ. M.D.12}}$ Teoria Pag 3 Pto. 2.1.1. : $P_B = P_A + \rho g h$

$\boxed{\text{EJ. M.D.13}}$ $h = 3m$; $g = 10 \, m/s^2$; $P_0 = 1 \, bar$; $\rho = 1000 \, Kg/m^3$

$P_0 = 1 bar = 101325 Pa \simeq 100000 Pa$; $P_F = P_0 + \rho g h = \ldots = 130000 Pa$

$\boxed{\text{EJ. M.D.14}}$ Teoria Pag. 2. Pto 1.4 : $K = -\frac{\Delta V / V_0}{\Delta P}$

$\boxed{\text{EJ. M.D.15}}$ $\rho = 1000 \, kg/m^3$; $P_0 = 1bar \simeq 100000 Pa$; $g = 10 \, m/s^2$; $P_f = 2P_0$

$P_f = 2P_0 = P_0 + \rho g h \Rightarrow P_0 = \rho g h \Rightarrow h = \frac{P_0}{\rho g} = \ldots = 10m$

$\boxed{\text{EJ. M.D.16}}$

$V_0 = 800 \, cm^3$

$\Delta P = 1 \cdot 10^5 Pa$

$\Delta V = -0,8 \, cm^3$

$$\beta = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V_0} = -\frac{1 \cdot 10^5 Pa}{-\frac{0,8 \, cm^3}{800 \, cm^3}} = 10^8 \cdot Pa$$

$\boxed{\text{EJ. M.D.17}}$ $S = 1 cm^2$; $\sigma = 10^3 N$; $\frac{\Delta l}{l} = 0,1\% = \varepsilon = \frac{0,1}{100} = 10^{-3} \Rightarrow Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/S}{\Delta l / l} = \ldots = 10^{10} \frac{N}{m^2} (Pa)$

$\boxed{\text{EJ. M.D.21}}$ Demo Pto. 2.2.3.

$\boxed{\text{EJ. M.D.22}}$ $\beta = -\Delta P \frac{V_0}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = -V_0 \frac{1}{\beta} \Delta P = -1 \frac{1}{5 \cdot 10^9} 5 \cdot 10^6 = -0,001 m^3 = -1L$

$\boxed{\text{EJ. M.D.24}}$ $K = -\frac{\Delta V}{\Delta P \cdot V_0} \Rightarrow \Delta V = -K \Delta P V_0 = -2 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1 m^3 = -0,001 m^3 = -1L$

$\boxed{\text{EJ. MD.27}}$ Teoria Pag. 3. Pto 2.1.1.

$\boxed{\text{EJ MD 29}}$ $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ (Pa)

$\boxed{\text{EJ. M.D.30}}$ Teoria: $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{dF}{dA}$; $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \Rightarrow \sigma = E\varepsilon$

$\varepsilon : \ldots$; $E : \ldots$; $\sigma : \ldots$

Ingenieros Industriales	Física I
c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29	Profesor Alex García

JC Aula de Ingeniería

P.M.D.1

1/2

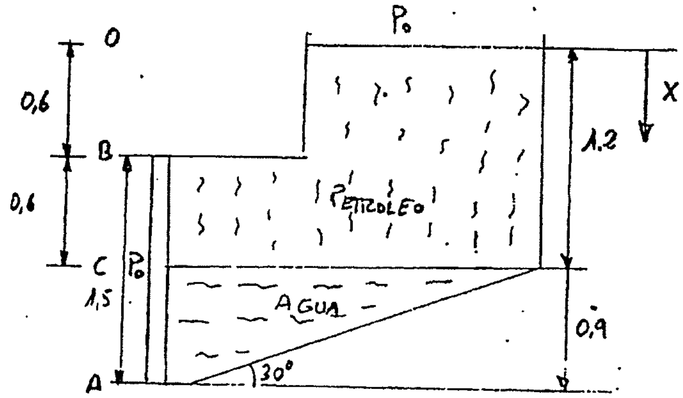
PROBLEMA M.D.1

DATOS:

$m_{COMP.} = 280 \text{ Kg}$

ANCHURA $= L = 1{,}1 \text{m}$

$\rho_r = \rho_{REL.PET} = 0{,}85 = \frac{\rho_P}{\rho_a}$



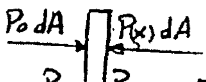
1) LAS FUERZAS QUE EJERCEN EL PETRÓLEO Y EL AGUA SOBRE LA COMPUERTA SON DEBIDAS A LA PRESIÓN. CALCULO LA DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES, TOMANDO EL PARÁMETRO X CRECIENTE HACIA ABAJO DESDE LA SUPERFICIE LIBRE DEL PETRÓLEO (PUNTO O)

- TRAMO OC (PETRÓLEO): $(0 \leq x \leq 1{,}2\text{m})$ $\quad P(x) = P_0 + \rho_P\, g \cdot x \overset{\rho_P = \rho_r \rho_a}{=} P_0 + \rho_r \rho_a \cdot g \cdot x$

- TRAMO CA (AGUA): $(1{,}2 \leq x \leq 2{,}1\text{m})$ $\quad P(x) = P_0 + \rho_P\, g \cdot X_C + \rho_a g(x - 1{,}2) = P_C + \rho_a\, g\,(x - X_C)$

POR TANTO $P(x) = P_0 + (\rho_P - \rho_a) g \cdot X_C + \rho_a g x \overset{\rho_P = \rho_r \rho_a}{=} P_0 + (\rho_r - 1)\rho_a g \cdot X_C + \rho_a g \cdot x$

LA FUERZA DEBIDA A LA PRESIÓN SERÁ:



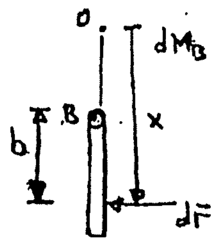
$dF = (P(x) - P_0) \cdot dA = (P(x) - P_0) \cdot L \cdot dx$

$$F_{PETRÓLEO} = \int_{X_B}^{X_C} [P_0 + \rho_r \rho_a g \cdot x - P_0]\, L\, dx = \cdots = \frac{1}{2} \rho_r \rho_a\, g \cdot L\, (X_C^2 - X_B^2)$$

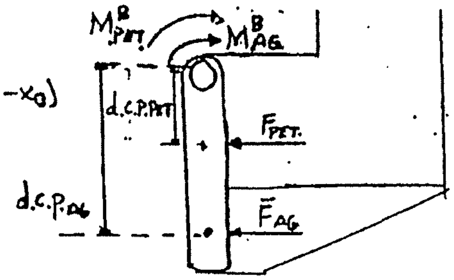
DE FORMA ANÁLOGA:

$$F_{AGUA} = \int_{X_C}^{X_A} [P_0 + (\rho_r - 1)\rho_a \cdot g\, X_C + \rho_a \cdot g \cdot x - P_0]\, L\, dx = \cdots = (\rho_r - 1)\rho_a g L X_C (X_A - X_C) + \frac{1}{2} \rho_a\, g\, L (X_A^2 - X_C^2)$$

PARA CONOCER EL CENTRO DE PRESIONES, NECESITO CONOCER LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS RESPECTO DE B:



$dM_B = dF \cdot b = dF\,(X - X_B) = P \cdot dA\,(x - x_B)$



Tramo BC (Petróleo): $M_{B_{PET}} = \int_{x_B}^{x_C} \rho_r \rho_a g (x-x_B) x L\,dx = \cdots = \rho_r \rho_a g L \left[\frac{1}{3}(x_C^3-x_B^3) - \frac{x_B}{2}(x_C^2-x_B^2)\right]$
$(0,6 \leq x \leq 1,2)$

Tramo CA (Agua): $M_{B_{AG}} = \int_{x_C}^{x_A} [(\rho_r-1)\rho_a g x_C + \rho_a g x](x-x_B) L\,dx = \cdots =$

$$= \frac{1}{2}(\rho_r-1)\rho_a g x_C L \left((x_A-x_B)^2-(x_C-x_B)^2\right) + \rho_a g L\left(\frac{x_A^3-x_C^3}{3} - \frac{x_B}{2}(x_A^2-x_C^2)\right)$$

Para el tramo BC, la distancia de al centro de presiones se obtiene de la condición:

$$F_{PET\,(BC)} \cdot d_{C.P.} = M_{B_{PET}} \Longrightarrow d_{C.P._{PET}} = \frac{M_{B.PET}}{F_{PET}} = \frac{\rho_r \rho_a g L\left[\frac{1}{3}(x_C^3-x_B^3) - \frac{x_B}{2}(x_C^2-x_B^2)\right]}{\frac{1}{2}\rho_r \rho_a g L (x_C^2-x_B^2)}$$

$$d_{C.P._{PET}} = \frac{2}{3}\frac{(x_C^3-x_B^3)}{x_C^2-x_B^2} - x_B$$

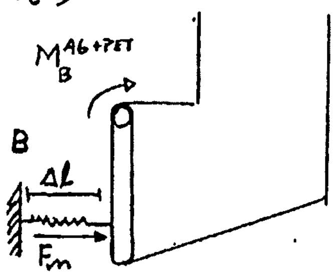
La $x_{C.P._{PET}}$ será entonces: $x_{CP_{PET}} = \frac{2}{3}\frac{(x_C^3-x_B^3)}{x_C^2-x_B^2}$.

De forma análoga para el tramo CA:

$$d_{CP_{AG}} = \frac{M_{B.AG}}{F_{AG}} = \frac{\frac{1}{2}(\rho_r-1)\rho_a g x_C L[(x_A-x_B)^2-(x_C-x_B)^2] + \rho_a g L\left(\frac{x_A^3-x_C^3}{3} - \frac{x_B}{2}(x_A^2-x_C^2)\right)}{(\rho_r-1)\rho_a g L x_C(x_A-x_C) + \frac{1}{2}\rho_a g L (x_A^2-x_C^2)}$$

$$d_{c.p.} = \frac{\frac{1}{2}(\rho_r-1)[(x_A-x_B)^2-(x_C-x_B)^2]x_C + \frac{1}{3}(x_A^3-x_C^3) - \frac{x_B}{2}(x_A^2-x_C^2)}{(\rho_r-1)x_C(x_A-x_C) + \frac{1}{2}(x_A^2-x_C^2)}$$

2) $M_B^{NEC} \geq M_B^{PET} + M_B^{AG}$ y en sentido contrario



3) Compresión del muelle k situado a $d = 1m$ por debajo de B

$$\left.\begin{array}{l} F_m = k \cdot \Delta l \\ k \cdot \Delta l \cdot d = M_B^{NEC} = M_B^{PET} + M_B^{AG} \end{array}\right\} \Delta l = \frac{M_{B\,NEC}}{k \cdot d}$$

Resultados numéricos de 1) 2) y 3) con los datos proporcionados

1) $F_{PET} = 4948,02\ N$
$F_{AG} = 14261,94\ N$
$F_{TOTAL} = 19209,96\ N$
$d_{c.p.\,PET} = 0,33\,m$ $\quad d_{cp_{AG}} = 1,096\,m$

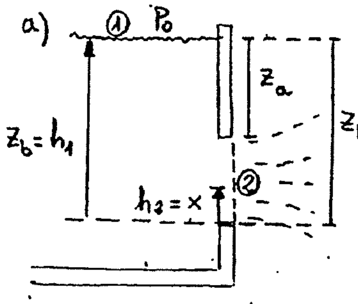
2) $M_B^{PET} = 1649,34\ Nm$
$M_B^{AG} = 15629,922\ Nm$
$M_{NEC} \geq M_{TOTAL} = 17279,262\ N.m$

3) $\Delta l = 0,49\,m$

P.M.D.2 Datos: H (no se usa); γ = peso específico $= \rho g$; $\gamma_m = \rho_m g$

i) Fluido ideal ($\eta = 0, \rho = cte$)

a)



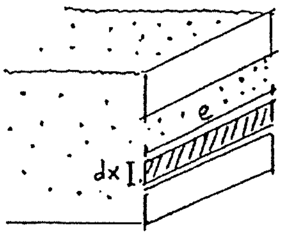
a.1) $v_2(x)$?? Aplicando Bernoulli entre ① y ②:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Hipótesis y consideraciones $\begin{cases} v_1 \ll v_2 \\ P_1 = P_2 = P_0 \\ h_1 = z_b \\ h_2 = x \end{cases}$ $\Rightarrow$ Por tanto, Bernolli queda $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{P_0} + \rho g z_b + \frac{1}{2}\cancel{\rho v_1^2} = \cancel{P_0} + \rho g x + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2\cancel{\rho} g (z_b - x)}{\cancel{\rho}}}$$

a.2) $v_{2\,max} = v_2(x=0) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 g z_b}$

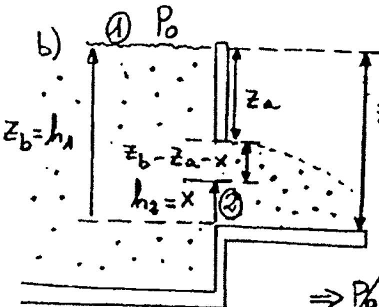


a.3) $$Q = \int v\,dA \Rightarrow \frac{Q}{e} = \frac{1}{e}\int v \cdot e \cdot dx = \int_{x=0}^{x=z_b-z_a} \sqrt{2g(z_b-x)}\,dx = -\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,(z_b-x)^{3/2}\Big|_0^{z_b-z_a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{e} = -\frac{2}{3}\sqrt{2g}\left[z_a^{3/2} - z_b^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\left[z_b^{3/2} - z_a^{3/2}\right]$$

a.4) $$\frac{Q}{e} = v_{med} \cdot \frac{A}{e} = v_{med}\,\frac{e(z_b - z_a)}{e} \Rightarrow v_{med} = \frac{Q/e}{z_b - z_a} = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{2g}\left[z_b^{3/2} - z_a^{3/2}\right]}{z_b - z_a}$$

b)



b.1) $v_2(x)$?? Aplicando Bernoulli entre ① y ②

Hipótesis y consideraciones $\begin{cases} v_1 \ll v_2 \\ P_1 = P_0 \\ P_2 = P_0 + \rho g (z_b - z_a - x) \\ h_1 = z_b ,\ h_2 = x \end{cases}$ $\rightarrow$ Bernoulli queda $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{P_0} + \rho g z_b + \frac{1}{2}\cancel{\rho v_1^2} = \cancel{P_0} + \rho g (z_b - z_a - x) + \rho g x + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 g z_a}$$

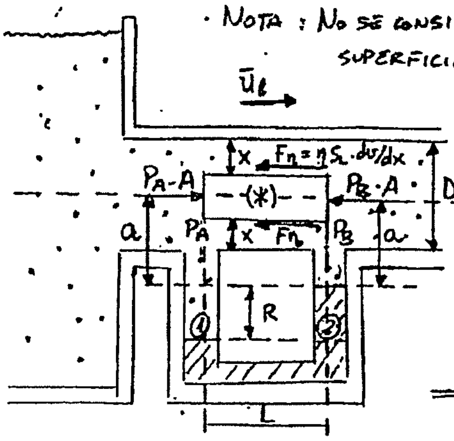
b.2) $v_{2\,max} = v_2 = \sqrt{2 g z_a}$

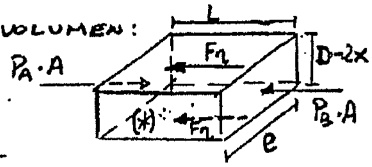
b.3) $$\frac{Q}{e} = \frac{1}{e}\int v\,dA = \frac{1}{e}\int v \cdot e \cdot dx = \int_{x=0}^{x=z_b-z_a} \sqrt{2 g z_a}\,dx = \sqrt{2 g z_a}\,(z_b - z_a)$$

b.4) $v_{media} = v_2 = \sqrt{2 g z_a}$

ii) Fluido viscoso ($\eta = \mu$) y laminar ; Manómetro : y_m, $h=R$, L

· Nota : No se considera F_η en paredes laterales del volumen de fluido, sólo en superficies superior e inferior de dicho volumen:





· Fluido laminar, $\bar{v} = \bar{J}_e$ en dirección $\bar{u}_\ell$ para cada lámina. Siguiendo el comentario final:

$$\bar{u}_\ell : P_A \cdot A - P_B \cdot A - \eta S_\ell \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow (P_A - P_B)(D-2x)\cdot e - \eta 2e \cdot L \cdot \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{v(0)=0}^{v(x)} dv = \frac{P_A - P_B}{2\eta L}\int_{x=0}^{x}(D-2x)\,dx \Rightarrow v(x) = \frac{P_A - P_B}{2\eta \cdot L}(Dx - x^2)$$

No conocemos P_A ni P_B $\Rightarrow$ manómetro:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = P_A + \rho g(a+R) \\ P_2 = P_B + \rho g a + \rho_m g R \end{array}\right\} P_A + \rho g a + \rho g R = P_B + \rho g a + \rho_m g R \Rightarrow P_A - P_B = (\rho_m - \rho) g R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{(\rho_m - \rho) g R}{2\mu L}(Dx - x^2)$$

ii.2) v_{max} | · A ojo : $v_{max} = v(x = \frac{D}{2})$; · Riguroso : $\frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{D}{2}$

$$v_{max} = \frac{(\rho_m - \rho) g R}{2\mu L}\left(\frac{D^2}{2} - \frac{D^2}{4}\right) = \frac{(\rho_m - \rho) g R D^2}{8\mu L}$$

ii 3) ii 4)

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{e}\int v(x)\,dA = \int_{x=0}^{x=D} \frac{(\rho_m - \rho) g \cdot R}{2\mu L}(Dx - x^2)\,dx = \frac{(\rho_m - \rho) g R}{2\mu L}\left(\frac{D^3}{2} - \frac{D^3}{3}\right) = \frac{(\rho_m - \rho) g R}{2\mu L} \cdot \frac{D^3}{6}$$

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{e} v_{med} \cdot D \cdot e \Rightarrow v_{med} = \frac{Q}{e} \cdot \frac{1}{D} = \frac{(\rho_m - \rho) g R}{12\mu L} D^2$$

iii) a) Para medir v_{med} : $v(x^*) = v_{med} \Rightarrow v(x^*) = \sqrt{2g(z_b - x^*)} = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\frac{z_b^{3/2} - z_a^{3/2}}{z_b - z_a} = v_{med}$

$$x^* = z_b - \frac{4}{9}\left[\frac{z_b^{3/2} - z_a^{3/2}}{z_b - z_a}\right]^2$$

Para medir v_{med} : $v(x^{**}) = v_{med} \Longrightarrow x^{**} = 0$

b) $v = v_{max} = v_{med} \Rightarrow$ x la que quiera

ii) v_{max} en $x = \frac{D}{2}$; $v(x^*) = \frac{(\rho_m - \rho) g R}{2\mu L}(Dx^* - x^{*2}) = \frac{(\rho_m - \rho) g R}{12\mu L} D^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6x^{*2} - 6Dx^* + D^2 = 0 \Rightarrow x^* = D\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}}\right)$$

JC Aula de Ingeniería

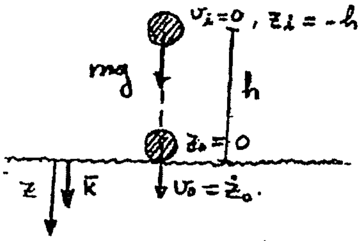
Ingenieros Industriales | **Física I**

c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29

Profesor **Alex García**

P.M.D. 3

DATOS: $\cdot h$; $\cdot$ ESFERA $\begin{cases} \text{Radio } R \\ \rho < \rho_\ell \end{cases}$; $\cdot F_\eta = 6\pi R \eta v$; η



1) Metodo 1: Por cinemática: Esfera sometida a $\bar g = cte$.

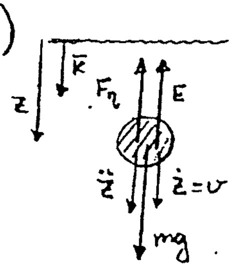
Tomo z creciente en sentido descendente desde superficie (* lo sugieren en Aptdo 2)

$$\bar k: \; g = cte \xrightarrow{\text{INTEGRO}} \begin{cases} v = \dot z = \cancel{\dot z_i}^{\,0\,(v_i=0)} + g t \\ z = z_i + 0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} v_o = g \cdot t_c \quad (t_c \equiv \text{tiempo de choque}) \\ z_o = 0 = -h + \frac{1}{2} g t_c^2 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow v_o = \sqrt{2hg}$$

Metodo 2: Por energias: En el aire esfera sometida sólo a su peso (conservativo) $\Rightarrow E_M = cte$:

$$\cancel{E_{c_i}}^{\,0} + \cancel{E_{p_i}}^{\,mgh} = \frac{1}{2} m v_o^2 + \cancel{\;}^{\,E_p(z=0)=0} \Longrightarrow v_o = \sqrt{2gh}$$

2)



$$\begin{rcases} \bar W = mg\,\bar k \\ \bar E = m_\ell \cdot g(-\bar k) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\ell \cdot g(-\bar k) \\ \bar F_\eta = 6\pi R \eta \cdot \dot z\,(-\bar k) \end{rcases}$$

Ecuac. Movim.: $\sum \bar F = m \cdot \bar a = m \frac{d\bar v}{dt}$

$$\bar k: \; \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\ell \cdot g - 6\pi R \eta \dot z = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{d\dot z}{dt}$$

Simplificando: $\frac{\rho - \rho_\ell}{\rho} g - \frac{9\,\eta \cdot \dot z}{2R^2 \cdot \rho} = \frac{d\dot z}{dt} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow -\Big[\underbrace{\frac{\rho_\ell - \rho}{\rho} \cdot g}_{\substack{\text{Lo llamaremos} \\ \gamma = cte}} + \underbrace{\frac{9}{2} \frac{\eta}{R^2} \cdot \frac{1}{\rho}}_{\substack{\text{Lo llamaremos} \\ K = cte}} \cdot \dot z\Big] = \frac{d\dot z}{dt} \Rightarrow -[\gamma + K v] = \frac{dv}{dt}$$

$\dot z = v$

3) A partir de la ultima expresión, trabajando con las ctes: $-dt = \frac{dv}{\gamma + K \cdot v}$

$$\int_{v_o}^{v} \frac{dv}{\gamma + K v} = -\int_{t=0}^{t} dt \Longrightarrow \frac{1}{K} \ln \frac{\gamma + K v}{\gamma + K v_o} = -t \Rightarrow \boxed{v = \frac{\gamma + K v_o}{K} e^{-Kt} - \frac{\gamma}{K}} \Rightarrow \boxed{v = v_o e^{-Kt} - \frac{\gamma}{K}(1 - e^{-Kt})}$$

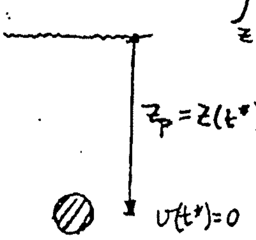
4) $E > mg \; (\rho_\ell > \rho) \Rightarrow$ La esfera se frenará hasta llegar a $v = 0$ (en t^*) $\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_\eta = 0 \\ E > mg \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Comienza movim. ascendente.

Por tanto: $v(t^*) = 0 = \frac{\gamma + K v_o}{K} \cdot e^{-Kt^*} - \frac{\gamma}{K} \Longrightarrow t^* = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{\gamma + K v_o}{\gamma}\right)$; $v_o = \sqrt{2gh}$

5)

$$v = \dot z = \frac{dz}{dt} \Rightarrow \int_{z=0}^{z_p} dz = \int_{t=0}^{t^*} v\,dt \Rightarrow z_p = \int_{t=0}^{t^*} \left(\frac{\gamma + K v_o}{K} \cdot e^{-Kt} - \frac{\gamma}{K}\right) dt \Rightarrow z_p = \frac{\gamma + K v_o}{K}\left(-\frac{1}{K}\right) e^{-Kt} - \frac{\gamma}{K} t \Big|_{t=0}^{t^*} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow z_p = \frac{\gamma + K v_o}{K^2}\left[1 - e^{-Kt^*}\right] - \frac{\gamma}{K} t^*$$

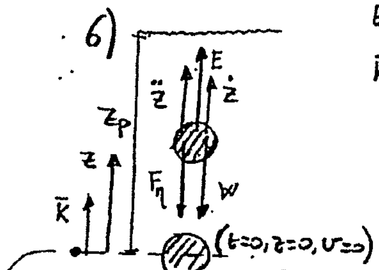


Sustituyendo t^* y operando:

$$\boxed{z_p} = \frac{\gamma + K v_o}{K^2}\left[1 - e^{-K \frac{1}{K} \ln\left(\frac{\gamma + K v_o}{\gamma}\right)}\right] - \frac{\gamma}{K}\left[\frac{1}{K} \ln\left(\frac{\gamma + K v_o}{\gamma}\right)\right] =$$

$$= \frac{\gamma + K v_o}{K^2}\left[1 - \frac{\gamma}{\gamma + K v_o}\right] - \frac{\gamma}{K^2} \ln\left(\frac{\gamma + K v_o}{\gamma}\right) = \cdots = \boxed{\frac{v_o}{K} - \frac{\gamma}{K^2} \ln\left(\frac{\gamma + K v_o}{\gamma}\right)}$$

6)



↳ Nuevo origen de t y z en movim. ascendente $(t=0,\ z=0,\ v=0)$

Ecuac. movim. en ascenso: $\Sigma \bar{F} = m\bar{a} = m\dfrac{d\bar{v}}{dt}$:

$\bar{k}$: $E - W - F_\eta = m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{d\dot{z}}{dt}$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_L g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - 6\pi R \eta v = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{dv}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{\rho_L - \rho}{\rho}\cdot g}_{\gamma} - \underbrace{\frac{9}{2}\,\frac{\eta}{R^2\rho}}_{K}\cdot v = \frac{dv}{dt}\ ;\ \boxed{\gamma - Kv = \frac{dv}{dt}}$$

7) De la última ecuación: $\displaystyle\int_{t=0}^{t} dt = \int_{v(t=0)=0}^{v(t)} \frac{dv}{\gamma - Kv} \Longrightarrow t = -\frac{1}{K}\ln\left(\frac{\gamma - Kv}{\gamma}\right) \Rightarrow e^{-Kt} = \frac{\gamma - Kv}{\gamma} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{v = \frac{\gamma}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right)} \Rightarrow \boxed{v_{lim}(t\to\infty) = \frac{\gamma}{K}}$$

8). Considerando $\eta = 0$ sólo en el ascenso $\Rightarrow E - W = m\,a_{asc} \Longrightarrow a_{asc} = \dfrac{\rho_L - \rho}{\rho} g = cte \Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{Análogo a Aptdo 1)}]{}$ $v_f = \sqrt{2\underbrace{\dfrac{\rho_L - \rho}{\rho} g}_{a_{asc}}\, z_p} = 4{,}28\ \dfrac{m}{s} < v_0$

· Considerando $\eta = 0$ en todo el movimiento (No $F_\eta \Rightarrow$ No disipación energ.), sólo actúan E y W (conservat) $\longrightarrow v_{\text{de llegada a superficie en ascenso}} = v_{\text{entrada}} = \sqrt{2gh}$

9) Por Tma E_c: $\Delta E_c = \tau_{Fext}$. En descenso intervienen: E (conserv), W (conserv), F_η (no. cons)

$$\tau_W = \int \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{z=0}^{z_p} mg\,\bar{k}\cdot dz\bar{k} = mg\,z_p = -\Delta E_{p\,w}$$

$$\tau_E = \int \bar{E}\cdot d\bar{r} = \int_{z=0}^{z_p} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_L g\,(-\bar{k})\cdot dz\bar{k} = -m_L\cdot g\,z_p = -\Delta E_E$$

$$\Delta E_c\Big|_{v(z_0)=v_0}^{v(z_p)=0} = \frac{1}{2}m\left[0^2 - v_0^2\right] = -\frac{1}{2}m v_0^2$$

Busco τ_{F_η}: $\Delta E_c = \tau_{Fext}$:

$-\dfrac{1}{2}m v_0^2 = mg\,z_p - m_L g\,z_p + \tau_{F_\eta} \Rightarrow$

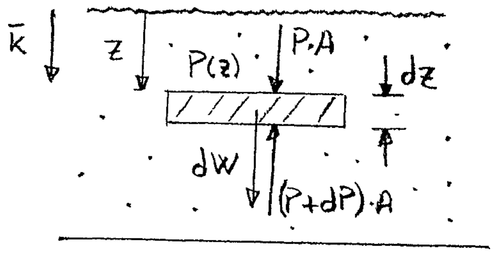
$\Longrightarrow \tau_{F_\eta} = -\dfrac{1}{2}v_0^2 - mg\,z_p + m_L g\,z_p =$

$= \cdots = -2{,}13\cdot 10^{-3}\,J$

Negativo $\Rightarrow$ disipado.

Parte de la energía inicial de la bola en la entrada al estanque se disipa en el movimiento en el agua por efecto de la fuerza de rozamiento viscoso F_η

Ley de Presión en Fluidos Compresibles



· Se considera un parámetro z de profundidad, creciente hacia abajo desde la superficie libre

· Se considera el fluido en reposo.

· Estableciendo el equilibrio a un dV_{ol}: $\bar{k}$: $dW + P\cdot A - (P+dP)\cdot A = 0$

$$\rho(z)\cdot \cancel{A}\cdot dz\cdot g + P(z)\cdot\cancel{A} - \left(P(z)+dP(z)\right)\cdot\cancel{A} = 0$$

Por tanto: $\boxed{dP = \rho(z)\cdot g\cdot dz}$ (1)

· Por otra parte, al ser un fluido compresible: $B = -\dfrac{dP}{dV/V_0}$; $V = \dfrac{m}{\rho(z)}$

$$\underset{m=cte}{B} = -\frac{dP}{\dfrac{d\left(\dfrac{\cancel{m}}{\rho(z)}\right)}{\dfrac{\cancel{m}}{\rho(z)}}} = -\frac{dP}{\dfrac{-\frac{1}{\rho^2}\cdot d\rho}{\frac{1}{\rho}}} = \frac{dP}{\frac{1}{\rho}\cdot d\rho} \Rightarrow \boxed{\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{B}} \quad (2)$$

$$\left(d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\right)$$

· Integrando (2): $\ln\dfrac{\rho(z)}{\rho_0} = \dfrac{1}{B}\left(P(z) - P_0\right) \Longrightarrow \boxed{\rho(z) = \rho_0\, e^{\frac{1}{B}[P(z)-P_0]} \quad (3)}$

· Con (3), entrando en (1): $dP = \rho_0\cdot e^{\frac{1}{B}[P(z)-P_0]}\cdot g\cdot dz \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_{P_0}^{P(z)} e^{-\frac{1}{B}[P-P_0]}\cdot dP = \rho_0\, g\int_{z_0}^{z} dz \Longrightarrow -B\, e^{-\frac{1}{B}(P-P_0)}\Big|_{P_0}^{P} = \rho_0\, g(z-z_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -B\left[e^{-\frac{1}{B}(P-P_0)} - e^{0}\right] = \rho_0\, g(z-z_0) \Longrightarrow e^{-\frac{1}{B}(P-P_0)} = 1 - \frac{\rho_0\, g}{B}(z-z_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(z) = P_0 - B\ln\left[1 - \frac{\rho_0\, g}{B}(z-z_0)\right]}$$

CAPILARIDAD

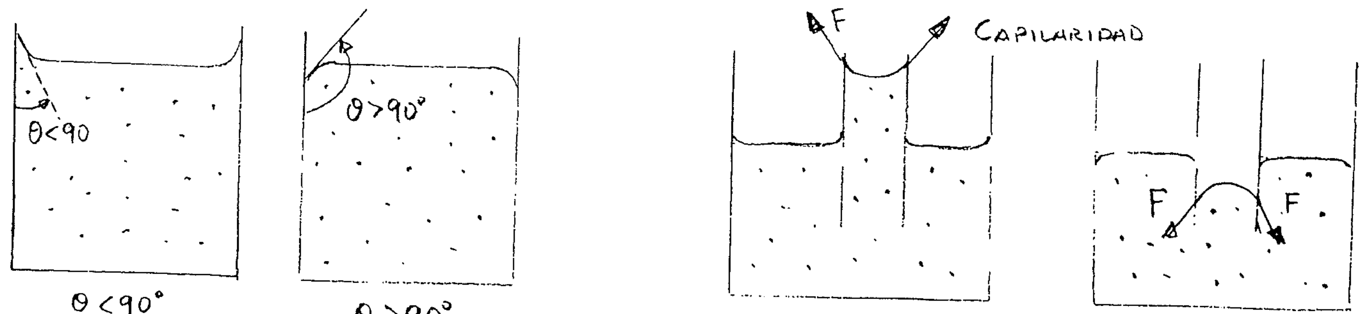
- UNA ENTREFASE GAS-LIQUIDO, EN CONTACTO CON UNA SUPERFICIE SÓLIDA, SE CURVA CERCA DE LA SUPERFICIE, FORMANDO UN "ÁNGULO DE CONTACTO" θ:

$\theta < 90°$: LA SUPERFICIE SE CURVA HACIA ARRIBA. EL LÍQUIDO "MOJA" A LA SUPERFICIE SÓLIDA. LAS FUERZAS DE ATRACCIÓN DE LAS MOLÉCULAS DEL SÓLIDO SOBRE LAS DEL LÍQUIDO SON MAYORES QUE LAS FUERZAS DE ATRACCIÓN DE LAS MOLÉCULAS DEL LÍQUIDO ENTRE SÍ.

$\theta > 90°$: AL CONTRARIO, LA SUPERFICIE SE CURVA HACIA ABAJO. EL LÍQUIDO NO MO[JA]. LAS FUERZAS DE ATRACCIÓN DE LAS MOLÉCULAS DEL LIQUIDO ENTRE SI SON MAYORES

- LA TENSIÓN SUPERFICIAL ORIGINA LA ELEVACIÓN O DEPRESIÓN DE UN LIQUIDO EN UN TUBO ESTRECHO. ESTO SE CONOCE COMO CAPILARIDAD.

PARA $\theta < 90°$, LA FUERZA DE TENSIÓN SUPERFICIAL TOTAL A LO LARGO DE LA LÍNEA DE CONTACTO LÍQUIDO-PARED ACTÚA HACIA ARRIBA, ELEVANDO EL LÍQUIDO HASTA EQUILIBRA[R] EL PESO EXTRA DE LÍQUIDO EN EL TUBO. DE FORMA INVERSA PARA $\theta > 90°$



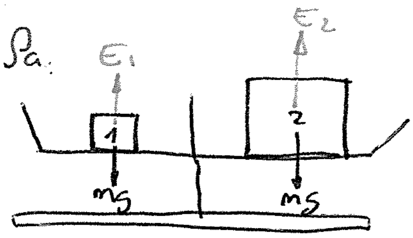
$\theta < 90°$ MOJA | $\theta > 90°$ NO MOJA | $\theta < 90°$ ELEVACIÓN | $\theta > 90°$ DEPRESIÓN

- EFECTO MAGNUS: VER CLASE

- LEY DE TORRICELLI: VER CLASE

EJERCICIOS

(2) $m_1 = m_2 = m$; $\rho_1 > \rho_2 \Longrightarrow \underline{Vol_1 < Vol_2}$

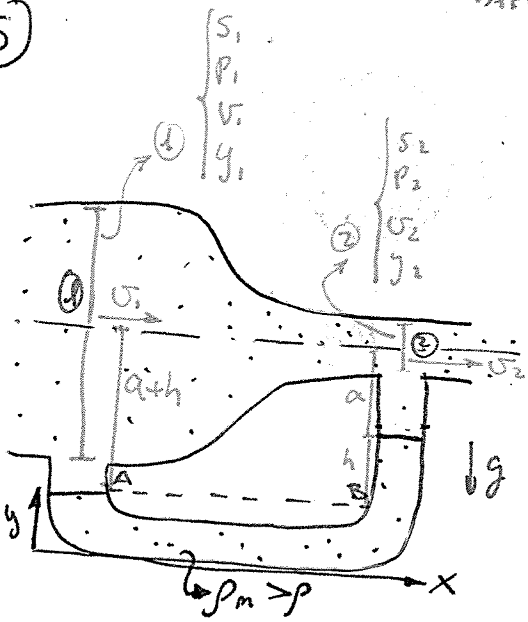


$$P_{APARENTE} = P_{REAL} - E$$

$$\left.\begin{aligned} P_{AP①} &= mg - E_1 = mg - \rho_a Vol_1 g \\ P_{AP②} &= mg - E_2 = mg - \rho_A Vol_2 g \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_{AP①} > P_{AP②}$$

(5)



Suponemos fluido ideal $\begin{cases} \rho = cte \\ \eta = 0 \end{cases}$

Se busca medir magnitudes "complicadas" $(Q, V, P, \ldots)$ en función de magnitudes sencillas o datos $(h, a, \rho, \rho_m \ldots)$

- Por ec. de continuidad (con $\rho = cte$)

$$Q = V_1 \cdot S_1 = V_2 S_2$$

- Por ec. de Bernouilli

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

- Por equilibrio vertical de fluidos

$$P_A = P_1 + \rho g (a+h)$$

$$P_B = P_2 + \rho g a + \rho_m g h$$

- Por equilibrio horizontal de ρ_m: $P_A = P_B$

Por tanto

$$P_1 + \rho g a + \rho g h = P_2 + \rho g a + \rho_m g h$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = (\rho_m - \rho) g h}$$

De Bernouilli

$$\boxed{P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho (V_2^2 - V_1^2)}$$

$$\Longrightarrow (\rho_m - \rho) g h = \frac{1}{2}\rho (V_2^2 - V_1^2)$$

De ec. continuidad: $V_2 = \dfrac{V_1 S_1}{S_2}$ $\Longrightarrow$

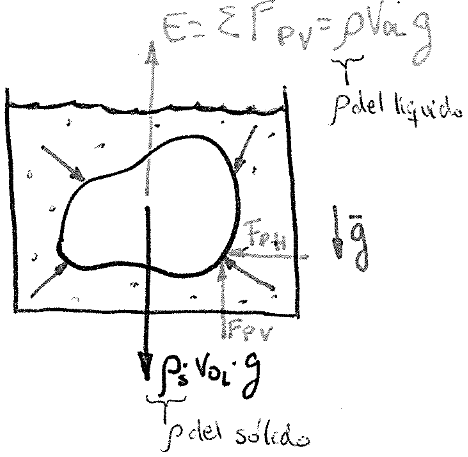
$$\Longrightarrow (\rho_m - \rho) g h = \frac{1}{2}\rho V_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right) \Longrightarrow V_1 = V_1(h, S_1, S_2)$$

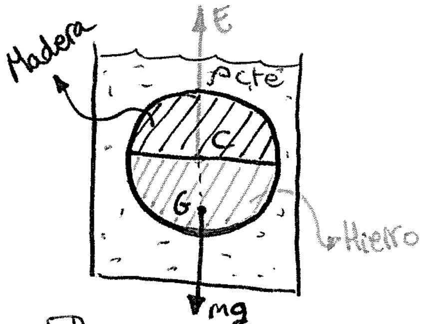
De ec continuidad $V_1 = \dfrac{Q}{S_1}$

Por tanto $\Longrightarrow$

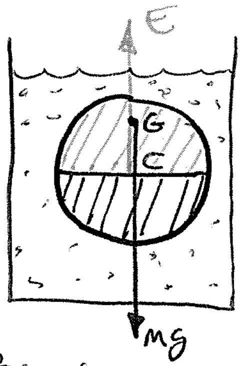
$$\boxed{Q = \sqrt{(\rho_m - \rho) g h \frac{2}{\rho} \frac{S_1^2}{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}}$$

2.1.3

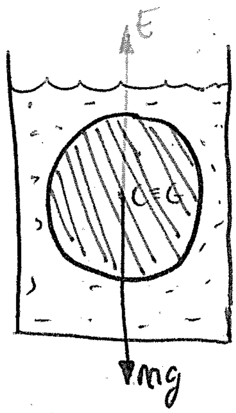


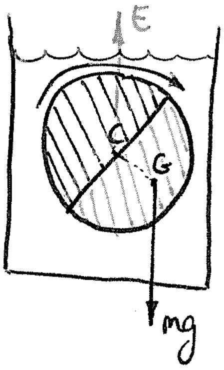


Posición de equilibrio estable



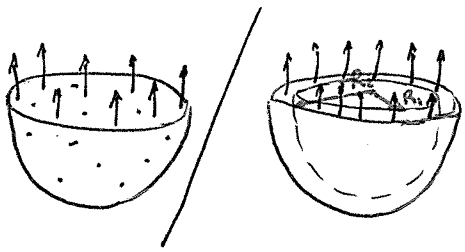
Posición de equilibrio inestable





2.1.4 Gota de agua / Pompa de jabón

$$F = \gamma L = \gamma\, 2\pi R \;/\; F = \gamma l = \gamma\, 2\pi (R_2 + R_1)$$



Vectores e incertidumbre

POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

INDUSTRIALES ETSII · UPM

Física General I — Curso 2007-08

Hoja de Evaluación Continua nº 1 — Fecha límite de entrega: 29 oct 2007

Ejercicios propuestos

$\boxed{\text{I.1}}$ Obtener mediante el análisis dimensional la relación entre el periodo de revolución de un satélite artificial que orbita alrededor de la Tierra (masa M) en una órbita de radio R, comparando el resultado con el que proporciona la tercera ley de Kepler. ($T^2 = 4\pi^2 R^3/GM$)

$\boxed{\text{I.2}}$ En algunas áreas de la Física se utiliza un sistema de unidades definido por Planck en el que los valores de las unidades de masa, longitud y tiempo se obtienen a partir de las constantes universales G, constante de la gravitación universal, $\hbar$, constante de Planck reducida ($\hbar = h/2\pi$) y c, velocidad de la luz. Obtener, salvo factores numéricos adicionales, las combinaciones más sencillas de G, $\hbar$ y c que tengan dimensiones de masa, longitud y tiempo, y determinar los valores de la masa, longitud y tiempo de Planck en el Sistema Internacional. [$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg², $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J·s, $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s]

$\boxed{\text{I.3}}$ Se utiliza un péndulo simple para medir el valor local de la aceleración de la gravedad. Si se desea que la incertidumbre relativa en el valor de g sea menor del 1 % y la incertidumbre relativa en la medida de la longitud del péndulo es del 0,5 %, determinar la máxima incertidumbre relativa que se puede permitir en la medida del periodo. ($T = 2\pi\sqrt{l/g}$)

$\boxed{\text{I.4}}$ Obtener la expresión de las componentes cartesianas de los vectores de las bases locales de los sistemas de coordenadas cilíndricas $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\}$ y esféricas $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$. Aplicar al cálculo de las coordenadas cilíndricas y esféricas de los puntos cuyas coordenadas cartesianas son $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$,$(1,0,-1)$,$(0,1,-1)$.

$\boxed{\text{I.5}}$ Para un vector libre $\vec{v}$, indicar la forma de obtener su proyección sobre un eje y un plano cualesquiera. Dado el vector libre $\vec{v} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, hallar su proyección sobre el eje Ox positivo y sobre el plano de ecuación $y - z = 0$.

$\boxed{\text{I.6}}$ Un sistema de vectores deslizantes está formado por los vectores $\vec{a} = \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ y $\vec{c} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, cuyas rectas soporte concurren en el origen de coordenadas. Determinar para ese sistema la ecuación del eje central.

$\boxed{\text{I.7}}$ Se considera la parábola de ecuación $y = \dfrac{x^2}{2} - \lambda$ y el segmento del eje x $[-2, 2]$. Se define un sistema de vectores deslizantes, que representan fuerza por unidad de longitud, medida sobre el eje $y = 0$, se forma que el origen de los vectores está sobre el segmento definido en el eje x y el extremo sobre la parábola definida. Calcular el valor de λ para que ese sistema continuo de vectores deslizantes sea equivalente al vector nulo, es decir, tenga resultante nula y momento nulo.

I.1

1ª Forma : Magnitudes que intervienen $\left\{\begin{array}{l}\text{Del enunciado: } M, R, T \\ \text{Otras: } G, m\end{array}\right\} n=5$

• $f(m, M, R, T, G)=0 \Rightarrow$ Ecuac. exacta. Forma más general: $F(\pi_1, \pi_2, ---, \pi_i)=0$

con: $\pi = T^\alpha \cdot m^\beta M^\gamma R^\delta G^\rho$

• Analisis de dimensiones en el problema:

$[T]=T$

$[m]=M$

$[M]=M$

$[R]=L$

$[G]=\left[\frac{R^3}{mT^2}\right]=L^3M^{-1}T^{-2}$

$\Longrightarrow [\pi] = T^\alpha M^\beta M^\gamma L^\delta (L^3M^{-1}T^{-2})^\rho = T^{\alpha-2\rho} M^{\beta+\gamma-\rho} L^{\delta+3\rho} \Longrightarrow h=3$

• Como $[\pi] \equiv$ nula ha de ser $\left\{\begin{array}{l}\alpha-2\rho=0\\ \beta+\gamma-\rho=0\\ \delta+3\rho=0\end{array}\right. \Rightarrow$ S.C.I. $\Rightarrow \infty$ soluciones.

• Nº de monomios independ. necesarios: $i=n-h=5-3=2$

Solución 1 (π_1): Fijo $\alpha=1$, $\beta=0 \Longrightarrow \rho=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{2}$, $\delta=-\frac{3}{2} \Longrightarrow \pi_1 = T\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$

Solución 2 (π_2): Fijo $\alpha=0$, $\beta=1 \Longrightarrow \rho=0$, $\gamma=-1$, $\delta=0 \Longrightarrow \pi_2 = m\,M^{-1} = \frac{m}{M}$

$F(\pi_1, \pi_2)=0 \longleftrightarrow \pi_1 = \Psi(\pi_2) \Longrightarrow$ Sustituyendo: $T\sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \Psi\left(\frac{m}{M}\right) \Rightarrow T = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}\cdot\Psi\left(\frac{m}{M}\right)$

(Por proceso empírico se obtendría $\Psi\left(\frac{m}{M}\right)=2\pi$)

2ª Forma : Vista la solución exacta, si no se considera la masa m del satélite, se obtiene $n=4$, $h=3 \Longrightarrow i=1$, un único monomio necesario: $\pi = T^\alpha M^\gamma R^\delta G^\rho \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [\pi] = T^{\alpha-2\rho} M^{\gamma-\rho} L^{\delta+3\rho} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha-2\rho=0\\ \gamma-\rho=0\\ \delta+3\rho=0\end{array}\right.$. Fijo $\alpha=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho=\frac{1}{2}\\ \gamma=\frac{1}{2}\\ \delta=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$. Por tanto: $\pi = T\cdot M^{1/2}\cdot R^{-3/2}\cdot G^{1/2} \overset{i=1}{=} cte$

Despejando: $T = cte\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

(Por proceso empírico se obtendría $cte = 2\pi$)

I.2

t_p: Ver Ej. T.Π.6 $\Longrightarrow t_p = G\sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^5}}$

m_p: Relación más sencilla: $m_p = G\,\hbar^{\alpha} G^{\beta} c^{\gamma}$. En dimensiones: $\begin{cases} [\hbar] = M L^2 T^{-1} \\ [G] = L^3 T^{-2} M^{-1} \\ [c] = L\, T^{-1} \end{cases}$

Por tanto: $M = M^{\alpha-\beta} L^{2\alpha+3\beta+\gamma} T^{-\alpha-2\beta-\gamma}$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \alpha-\beta \\ 0 = 2\alpha+3\beta+\gamma \\ 0 = -\alpha-2\beta-\gamma \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1 = \alpha-\beta \\ 0 = \alpha+\beta \end{array}\right\} 1 = 2\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \beta = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{2}$$

Por tanto $m_p = G\, \hbar^{1/2} G^{-1/2} c^{1/2} \Longrightarrow m_p = G\sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G}}$

l_p: Relación más sencilla: $l_p = G\,\hbar^{\alpha} G^{\beta} c^{\gamma}$

En dimensiones $L = M^{\alpha-\beta} L^{2\alpha+3\beta+\gamma} T^{-\alpha-2\beta-\gamma}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha-\beta = 0 \\ 2\alpha+3\beta+\gamma = 1 \\ -\alpha-2\beta-\gamma = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha-\beta = 0 \\ \alpha+\beta = 1 \end{array}\right\} 2\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \gamma = -\frac{3}{2}$$

Por tanto $l_p = G\, \hbar^{1/2} G^{1/2} c^{-3/2} \Longrightarrow l_p = G\sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^3}}$

I.3

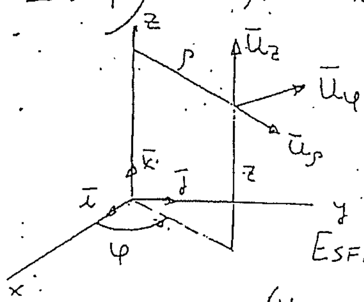
Ver Ej. Inc. Med 6 y Ej Inc. Med. 10

$$\omega_g = \text{- - -} = \omega_l^2 + \omega_T^2 \Longrightarrow \omega_T = \sqrt{\frac{(0,01)^2 - (0,005)^2}{4}} = \sqrt{1{,}875 \cdot 10^{-5}} = 4{,}33 \cdot 10^{-3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \omega_T \simeq 0{,}4\,\%$$

I.4) i) CILINDRICAS :

$$\bar{u}_\rho = \cos\varphi\,\bar{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\,\bar{\jmath}$$
$$\bar{u}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\bar{\imath} + \cos\varphi\,\bar{\jmath}$$
$$\bar{u}_z = \bar{k}$$



ESFERICAS :

(VER DIBUJO EN APTES)

$$\bar{u}_r = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\bar{\imath} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\bar{\jmath} + \cos\theta\,\bar{k}$$
$$\bar{u}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\bar{\imath} + \cos\varphi\,\bar{\jmath}$$
$$\bar{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\bar{\imath} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\bar{\jmath} - \operatorname{sen}\theta\,\bar{k}$$

ii) CILINDRICAS :

$$\bar{r} = \rho\,\bar{u}_\rho + z\,\bar{u}_z$$
$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\operatorname{sen}\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

ESFERICAS :

$$\bar{r} = r\,\bar{u}_r$$
$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ y &= r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

iii) $P_1(1,1,0)$: CILIND. $\left\{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{2} \\ \varphi &= \pi/4 \\ z &= 0 \end{aligned}\right.$; ESF $\left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{2} \\ \theta &= \pi/2 \\ \varphi &= \pi/4 \end{aligned}\right.$

$P_2(1,0,1)$: CILIND $\left\{\begin{aligned} \rho &= 1 \\ \varphi &= 0 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$; ESF $\left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{2} \\ \theta &= \pi/4 \\ \varphi &= 0. \end{aligned}\right.$

ETC : VER TABLA

RESULTADOS NUMÉRICOS EJ. PROP. I.4) APTDO iii)

Coor. Cart.(x,y,z)	Coor. Cil. (ρ,φ,z)	Comp. u_ρ	Comp. u_φ	Comp. u_z
1,1,0	1.4142,0.7854,0	0.7071,0.7071,0	-0.7071,0.7071,0	0,0,1
1,0,1	1,0,1	1,0,0	0,1,0	0,0,1
0,1,1	1,1.5708,1	0,1,0	-1,0,0	0,0,1
1,-1,0	1.4142,-0.7854,0	0.7071,-0.7071,0	0.7071,0.7071,0	0,0,1
NO → -1,1,0	1.4142,2.3562,0	-0.7071,0.7071,0	-0.7071,-0.7071,0	0,0,1
1,0,-1	1,0,-1	1,0,0	0,1,0	0,0,1
NO → -1,0,1	1,3.1416,1	-1,0,0	0,-1,0	0,0,1
NO → 0,-1,1	1,-1.5708,1	0,-1,0	1,0,0	0,0,1
0,1,-1	1,1.5708,1	0,1,0	-1,0,0	0,0,1

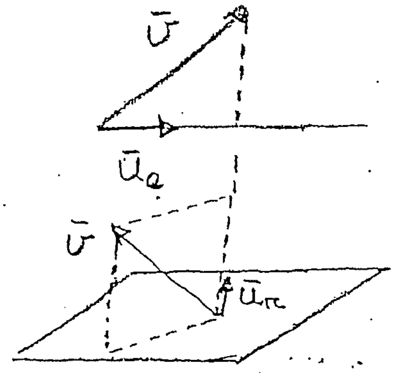
Coor. Cart.(x,y,z)	Coor. Esf. (r,θ,φ)	Comp. u_r	Comp. u_θ	Comp. u_φ
1,1,0	1.4142,1.5708,0.7854	0.7071,0.7071,0	0,0,-1	-0.7071,0.7071,0
1,0,1	1.4142,0.7854,0	0.7071,0,0.7071	0.7071,0,-0.7071	0,1,0
0,1,1	1.4142,0.7854,1.5708	0,0.7071,0.7071	0,0.7071,-0.7071	-1,0,0
1,-1,0	1.4142,1.5708,-0.7854	0.7071,-0.7071,0	0,0,-1	0.7071,0.7071,0
NO -1,1,0	1.4142,1.5708,2.3562	-0.7071,0.7071,0	0,0,-1	-0.7071,-0.7071,0
1,0,-1	1.4142,2.3563,0	0.7071,0,-0.7071	-0.7071,0,0.7071	0,1,0
NO -1,0,1	1.4142,0.7854,3.1416	-0.7071,0,0.7071	-0.7071,0,-0.7071	0,-1,0
NO 0,-1,1	1.4142,0.7854,-1.5708	0,-0.7071,0.7071	0,-0.7071,-0.7071	1,0,0
0,1,-1	1.4142,2.3562,1.5708	0,0.7071,-0.7071	0,-0.7071,-0.7071	-1,0,0

I.5

$\bar{v} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k} = (3, -1, 2)$

$\pi : y - z = 0 \Longrightarrow \bar{u}_\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$

$e_{ox} : \Longrightarrow \bar{u}_e = (1, 0, 0)$



· Proyección sobre Ox: $\text{proy}_{ox}\bar{v}$

$\bar{v} \cdot \bar{u}_e = (3, -1, 2)(1, 0, 0) = 3 \Rightarrow \boxed{\text{proy}_{\bar{u}_e}\bar{v} = 3}$

· Proyección sobre π: $\text{proy}_\pi \bar{v}$

$(\bar{u}_\pi \times \bar{v}) \times \bar{u}_\pi = -\bar{u}_\pi \times (\bar{u}_\pi \times \bar{v}) = -[(\bar{u}_\pi \cdot \bar{v})\bar{u}_\pi - \underbrace{(\bar{u}_\pi \cdot \bar{u}_\pi)}_{1} \cdot \bar{v}] =$

$= \bar{v} - (\bar{u}_\pi \cdot \bar{v}) \cdot \bar{u}_\pi = (3, -1, 2) - \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{\text{proy}_\pi \bar{v} = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

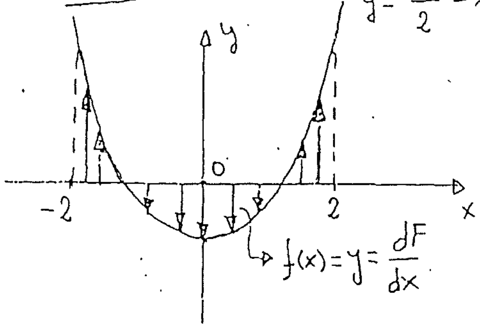
I.6

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a} = \bar{j} + 2\bar{k} \\ \bar{b} = \bar{i} + 3\bar{j} \\ \bar{c} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k} \end{array}\right\} \quad \bar{R} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 3\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$$

Las rectas soporte de $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ concurren en $O \Longrightarrow \bar{M}_O = \bar{0} \Rightarrow O \in E.C. \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow E.C. \left\{\begin{array}{l} x = 0 + \lambda \cdot 3 \\ y = 0 + \lambda \cdot 3 \\ z = 0 + \lambda \cdot 3 \end{array}\right. \Longrightarrow x = y = z$$

I.7



· Por la simetría del problema, $\Sigma \bar{M}_O = \bar{0} \ \forall \lambda$

- Para obtener $\bar{F} = \bar{0}$:

$\bar{F} = \int d\bar{F} = \int f(x) \cdot dx \ \bar{i} = \int_{x=-2}^{x=2} \left(\frac{x^2}{2} - \lambda\right) \cdot dx =$

$= \left.\frac{x^3}{6}\right|_{-2}^{2} - \left.\lambda x\right|_{-2}^{2} = \frac{16}{6} - 4\lambda \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

POLITÉCNICA

E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

INDUSTRIALES

Física General I — Curso 2007-08

Hoja de Evaluación Continua nº 2 — Fecha límite de entrega: 5 nov 2007

Ejercicios propuestos

II.1 *a)* Calcular el centro de masas de una placa homogénea con forma de cuadrante de disco de radio R por la definición y utilizando el segundo teorema de Guldin.

b) Calcular utilizando el segundo teorema de Guldin la posición del centro de masas de una placa con forma de cuadrante de elipse, de semiejes a y b.

II.2 Un cono de altura h y radio de la base R se coloca sobre un cilindro del mismo radio de la base R y altura H de forma que la base del cono coincide con la tapa superior del cilindro y tienen ambos el mismo eje de simetría. Obtener la relación que debe existir entre H y h para que el centro de masas del sistema compuesto esté contenido en el plano común.

II.3 Se considera un sistema discreto de puntos materiales y se define el sistema de vectores ligados que resulta de aplicar sobre cada punto el peso, es decir una fuerza $F_i = m_i g$. Demostrar que el centro de masas del sistema coincide con el centro de gravedad del sistema de fuerzas, definido como el punto central del sistema de vectores ligados. Se recuerda que el punto central de un sistema de vectores ligados se localiza, conocido el viritorsor en O $(R, M_O, \mathcal{V}_O)$, mediante la expresión: $OC = \dfrac{\mathcal{V}_O R - M_O \times R}{|R|^2}$.

II.4 Un punto material está obligado a permanecer sobre la recta de ecuación $y = cx$ $(0 < c < 1)$ sometido a una fuerza atractiva proporcional a la distancia a un punto fijo de coordenadas $(0, a)$ (factor de proporcionalidad k) y a su propio peso $-mgj$. Determinar la posición o posiciones de equilibrio en el caso de que la recta sea lisa (no hay rozamiento) y en el caso de que exista rozamiento entre el punto y la recta, con coeficiente de rozamiento estático μ.

II.5 Una escalera de longitud L y masa m se encuentra apoyada y en equilibrio contra una pared vertical y sobre el suelo, siendo θ el ángulo que forma la misma con la horizontal. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre la escalera y el suelo es μ y entre la escalera y la pared vertical es despreciable, determinar el peso máximo de un hombre que puede subir hasta la posición más alta de la escalera sin que el conjunto resbale sobre el suelo. Aplicar el resultado obtenido al caso en que $L = 5$ m, $m = 75$ kg, $\theta = 45°$ $\mu = 0{,}6$.

II.6 Un lápiz de sección recta hexagonal está colocado sobre un plano inclinado de forma que su eje de simetría es horizontal. El ángulo que forma el plano con la horizontal vale α y se va aumentando hasta que el lápiz pierde el equilibrio, deslizando o rodando hacia abajo. Determinar el intervalo de valores que debe tener el coeficiente de rozamiento estático μ entre el lápiz y el plano para que el lápiz ruede hacia abajo por el plano sin deslizar.

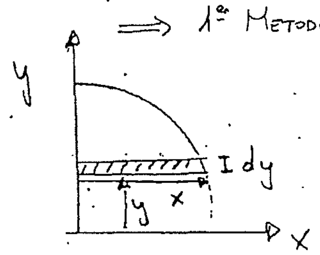
II 1/6

H.E.C. 2

II.1

a) Por la definición: $y_G = x_G$ (por simetría): $y_G = \dfrac{\int y\,dm}{\int dm} \Longrightarrow$

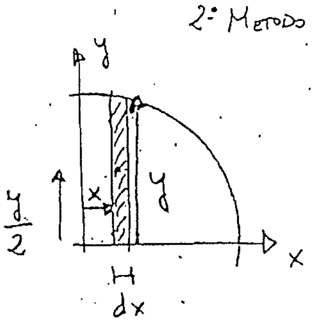
$\Longrightarrow$ 1º Método: Integro en y:



$$\left.\begin{aligned} M &= \sigma\cdot\frac{\pi R^2}{4} \\ dm &= \sigma\cdot x\,dy \\ x^2+y^2 &= R^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y_G = \frac{\int y\cdot\sigma\cdot x\cdot dy}{\int dm} = \frac{\int_0^R y\cdot\sigma\sqrt{R^2-y^2}\,dy}{\sigma\cdot\frac{\pi R^2}{4}} =$$

$$= \frac{\cancel{\sigma}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(R^2-y^2)^{3/2}\Big|_{y=0}^{y=R}}{\cancel{\sigma}\cdot\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

2º Método: Integro en x:



$$\left.\begin{aligned} M &= \sigma\,\frac{\pi R^2}{4} \\ dm &= \sigma\cdot y\,dx \end{aligned}\right\}$$

ojo! El G de cada dm está en $\frac{y}{2}$

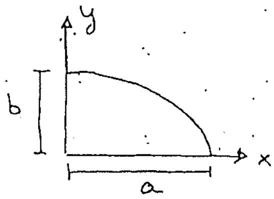
$x^2+y^2=R^2$

$$y_G = \frac{\int \frac{y}{2}\cdot\sigma\cdot y\,dx}{\int dm} = \frac{\int_0^R \cancel{\sigma}\,\frac{R^2-x^2}{2}\cdot dx}{\cancel{\sigma}\cdot\frac{\pi R^2}{4}} :$$

$$= \frac{\frac{R^2\cdot x}{2} - \frac{x^3}{6}\Big|_{x=0}^{x=R}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

Por Guldin. Ver Ej. 6 M~~M~~

b) Aplicamos 2º Teorema de Guldin para calcular la posición de G de una placa plana con forma de cuadrante de elipse.



$A_{ELIPSE} = \pi\cdot a\cdot b$

$Vol_{ELIPSOIDE} = \frac{4}{3}\pi\cdot a\cdot b\cdot c$

a, b, c: long. semiejes

No hay simetrías $\Longrightarrow$ tengo que calcular X_G e Y_G, ambas con Guldin.

Y_G: Giro en torno a eje x: Se genera medio elipsoide de semiejes a, b y b.

$$2\cdot\pi\cdot y_G\cdot\frac{\pi a b}{4} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi\,a\,b^2}{2}$$

$$\boxed{y_G = \frac{4}{3}\,\frac{b}{\pi}}$$

X_G: Giro en torno a eje y: Se genera medio elipsoide de semiejes a, a y b

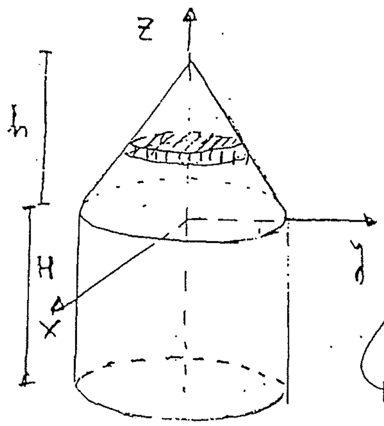
$$2\pi\,x_G\cdot\frac{\pi a b}{4} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi\,a^2\cdot b}{2}$$

$$\boxed{x_G = \frac{4}{3}\,\frac{a}{\pi}}$$

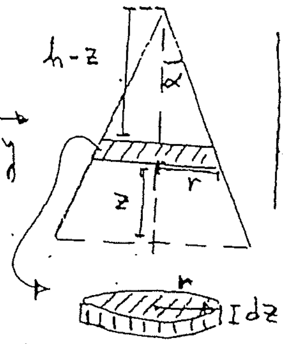
$\boxed{II.2}$ Si el cilindro es homogéneo, su G estará siempre en su centro, por simetría, a distancia $\frac{H}{2}$ de ambas tapas

- Si ambos cuerpos son huecos $\Longrightarrow$ Ver Ej. Geom. Masas (I). 9

- Si ambos son macizos y homogéneos $(\rho = cte)$:



- $\underline{\text{Cono}}$ | $R, h, \rho = \frac{dm}{dV_{ol}}$; $z_{G_{cono}} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} \Longrightarrow \ldots$



Disco de radio r
y espesor diferencial dz

$\cdot\ dm = \rho\, dV_{ol} = \rho \pi r^2 dz$

$\cdot\ dV_{ol} = \pi r^2 dz$

$\cdot\ \frac{R}{h} = \frac{r}{h-z} \Rightarrow r = \frac{R}{h}(h-z)$

$$\Longrightarrow z_{G_{cono}} = \frac{\int z \cdot \rho \pi r^2 dz}{\int \rho \pi r^2 dz} = \frac{\int_{z=0}^{z=h} z \rho \pi \frac{R^2}{h^2}(h^2+z^2-2hz)\,dz}{\int_{z=0}^{z=h} \rho \pi \frac{R^2}{h^2}(h^2+z^2-2hz)\,dz} =$$

$$= \frac{\rho \pi \frac{R^2}{h^2}\left[\frac{h^4}{2}+\frac{h^4}{4}-2\frac{h^4}{3}\right]}{\rho \pi \frac{R^2}{h^2}\left[h^3+\frac{h^3}{3}-h^3\right]} = h\,\frac{1/12}{1/3} = \frac{h}{4}$$

- $\underline{\text{Cilindro}}$ | $z_{G_{cilindro}} = -\frac{H}{2}$

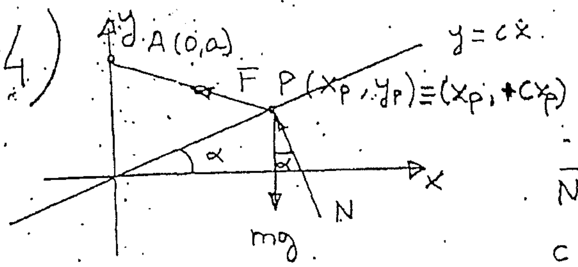
- Por tanto: $z_{G_{total}} = \frac{M_{cono} \cdot z_{G_{cono}} + M_{cil} \cdot z_{G_{cil}}}{M_{cono} + M_{cil}} = \frac{\rho \pi R^2 \frac{h}{3} \cdot \frac{1}{4} h + \rho \pi R^2 H \left(-\frac{H}{2}\right)}{\rho \pi R^2 H + \rho \pi R^2 \frac{h}{3}} = \frac{\frac{h^2}{12} - \frac{H^2}{2}}{H + \frac{h}{3}}$

Si $z_{G_{total}} = 0 \Longrightarrow \frac{h^2}{12} - \frac{H^2}{2} = 0 \Longrightarrow h^2 = 6H^2 \Longrightarrow h = \sqrt{6}\,H$

$\boxed{II.3}$ Hecho

II.4)

a)



$\bar{mg} = -mg\,\bar{j}$

$\bar{F} = K \cdot \overline{PA} = K\,(-x_P\,\bar{i} + (a - cx_P)\,\bar{j})$

$\bar{N} = N\,(-\operatorname{sen}\alpha\,\bar{i} + \cos\alpha\,\bar{j})$

$c = \operatorname{tg}\alpha$ (PENDIENTE DE $y = cx$)

POSICIONES DE EQUILIBRIO : $\sum \bar{F}_{\text{sobre } P} = \bar{0}$

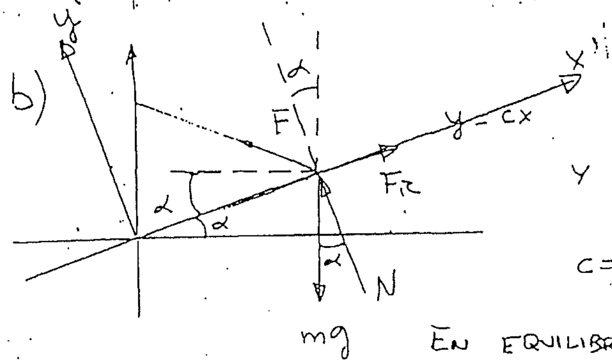
$\bar{i}: \; -N\operatorname{sen}\alpha - Kx_P = 0 \quad (1)$

$\bar{j}: \; -mg + N\cos\alpha + K(a - cx_P) = 0 \quad (2)$

$(1) \rightarrow N = -\dfrac{Kx_P}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (2) \rightarrow -mg - Kx_P\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + Ka - Kcx_P = 0$

$x_P K\left(c + \dfrac{1}{c}\right) = Ka - mg \Rightarrow \boxed{x_P = \dfrac{Ka - mg}{K\left(c + \frac{1}{c}\right)} \quad y_P = cx_P} \rightarrow$ EQUILIBRIO

b)



CAMBIO A LOS EJES x'y' Y PROYECTO EN ELLOS.

$c = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}$

EN EQUILIBRIO : $\begin{cases} \sum \bar{F} = \bar{0} \\ |\bar{F}_R| \le \mu |\bar{N}| \end{cases}$

$\bar{i}': \; F_R - mg\operatorname{sen}\alpha \underbrace{- Kx_P\cos\alpha}_{\text{Proy. Comp. Horiz } \bar{F}} \underbrace{- Kcx_P\operatorname{sen}\alpha + Ka\operatorname{sen}\alpha}_{\text{Proy. Comp. Vertic. } \bar{F}} = 0$

OPERO: $\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}$

$F_R + \cos\alpha\,[-cmg - Kx_P - Kc^2x_P + Kac] = 0 \rightarrow$ OPERANDO Y ARREGLANDO

$\dfrac{-Kx_P - c\,[K(cx_P - a) + mg]}{\sqrt{1+c^2}} + F_R = 0$

POR TANTO $\boxed{F_R = \dfrac{Kx(1+c^2) + c(mg - Ka)}{\sqrt{1+c^2}}}$

$\vec{j}$: $kx_p \operatorname{sen}\alpha + ky_p\cos\alpha - P\cos\alpha + N = 0$

$$kx_p \operatorname{sen}\alpha + ka\cos\alpha - kc\,x_p\cos\alpha - P\cos\alpha + N = 0$$

Operando y arreglando

$$\frac{\cancel{k x_p c} - [k(\cancel{cx_p} - a) + mg]}{\sqrt{1+c^2}} + N = 0 \qquad (ka - mg)$$

Por tanto $\boxed{N = \dfrac{mg - ka}{\sqrt{1+c^2}}} \Longrightarrow$ Se debe cumplir: $F_R \leq \mu N$. Discusión:

$$\left|\frac{kx(1+c^2) + c(mg-ka)}{\cancel{\sqrt{1+c^2}}}\right| \leq \mu \left|\frac{mg-ka}{\cancel{\sqrt{1+c^2}}}\right|$$

$0 < c < 1$; $k > 0$; $\mu > 0$.

Por definición $\left.\begin{array}{l}|A| \leq |B| \\ B > 0 \\ A > 0\end{array}\right\} \Longrightarrow -B \leq A \leq B$

Casos a estudiar:

1) $\underline{mg - ka > 0} \Longrightarrow |kx(1+c^2) + c(mg-ka)| \leq \mu(mg-ka) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow -\mu(mg-ka) \leq kx(1+c^2) + c(mg-ka) \leq \mu(mg-ka)$$

Despejando x: $\dfrac{-(\mu+c)(mg-ka)}{k(1+c^2)} \leq x \leq \dfrac{(\mu-c)(mg-ka)}{k(1+c^2)}$

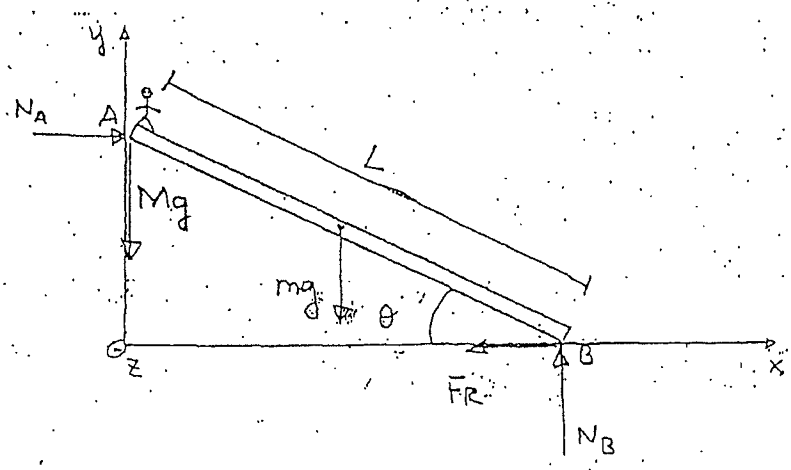
2) $\underline{mg - ka < 0} \Longrightarrow |mg - ka| = -(mg-ka) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow |kx(1+c^2) + c(mg-ka)| \leq -\mu(mg-ka) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mu(mg-ka) \leq kx(1+c^2) + c(mg-ka) \leq -\mu(mg-ka)$$

Despejando x: $\dfrac{(\mu-c)(mg-ka)}{k(1+c^2)} \leq x \leq \dfrac{-(\mu+c)(mg-ka)}{k(1+c^2)}$

II.5)



CON EL PESO MÁXIMO, LA ESCALERA ESTARÁ A PUNTO DE DESLIZAR:

$F_R = \mu N_B$. EQUILIBRIO: $\Sigma \bar{F} = \bar{0}$

$\Sigma \bar{M}_B = 0$

$$\Sigma \bar{F} = \bar{0} \begin{cases} \bar{i}: & N_A - F_R = 0: \quad N_A = \mu N_B = \mu [Mg + mg] \\ \bar{j}: & N_B - Mg - mg = 0: \quad N_B = Mg + mg \end{cases}$$

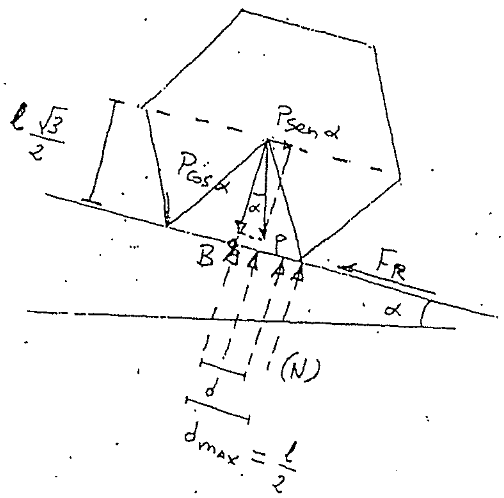
$$\Sigma \bar{M}_B = \bar{0}: \bar{k}: \quad -N_A L \operatorname{sen}\theta + mg \frac{L}{2}\cos\theta + Mg L \cos\theta = 0$$

$$-\mu \operatorname{sen}\theta (Mg + mg) + \frac{mg \cos\theta}{2} + Mg \cos\theta = 0$$

$$(Mg)_{max} = mg \cdot \left(\frac{\mu \operatorname{sen}\theta - \frac{\cos\theta}{2}}{\cos\theta - \mu \operatorname{sen}\theta} \right)$$

APLICACIÓN $\left| \begin{array}{l} L = 5 \\ m = 75 \text{ kg} \\ \theta = 45 \\ \mu = 0{,}6 \end{array} \right. \Rightarrow (Mg)_{max} = --- = 183{,}75 \text{ N} \rightsquigarrow M_{MAX} = 18{,}75$

II. 6



EN EQUILIBRIO:

$$\Sigma \bar{F} = \bar{0} \begin{cases} \bar{\imath} : P\,sen\alpha - F_R = 0 \Longrightarrow P\,sen\alpha \le \mu P\cos\alpha \\ \quad F_R \le \mu N \Longrightarrow F_R \le \mu P\cos\alpha \\ \bar{\jmath} : N - P\cos\alpha = 0 \Longrightarrow N = P\cos\alpha \end{cases}$$

POR TANTO $\cancel{P}sen\alpha \le \mu \cancel{P}\cos\alpha \Longrightarrow \boxed{tg\,\alpha \le \mu}$

$\Longrightarrow$ PARA NO DESLIZAR

$$\Sigma \bar{M}_B = \bar{0} : \bar{k} : -P\,sen\alpha \cdot \ell\frac{\sqrt{3}}{2} + N \cdot d = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P\,sen\alpha\,\ell\frac{\sqrt{3}}{2} = Nd \le N\,d_{max} = P\cos\alpha\,\frac{\ell}{2}$$

POR TANTO $\cancel{P}sen\alpha\,\cancel{\ell}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \le \cancel{P}\cos\alpha\,\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}} \Longrightarrow \boxed{tg\,\alpha \le \frac{1}{\sqrt{3}}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ PARA NO VOLCAR $\Longrightarrow$ PARA VOLCAR : $tg\,\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}}$

POR TANTO PARA VOLCAR SIN DESLIZAR : $\frac{1}{\sqrt{3}} < tg\,\alpha \le \mu \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ RANGO DE μ : $\frac{1}{\sqrt{3}} < tg\,\alpha \le \mu < \infty$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

Física General I — Curso 2007-08

Hoja de Evaluación Continua nº 3 — Fecha límite de entrega: 12 nov 2007

Ejercicios propuestos

Cinemática punto

III.1 Un punto P se mueve en un plano de modo que su distancia a un punto fijo O crece linealmente con el tiempo y el radio vector OP gira alrededor de O con velocidad angular constante. Hallar en función del tiempo la velocidad y la aceleración del punto P y su trayectoria.

III.2 Un punto describe la cardioide cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$ de forma que $\varphi(t) = bt$ (a, b constantes). En el instante inicial, su posición en coordenadas cartesianas es $(2a, 0)$ y su velocidad $v(0) = v_0 j$, ($v_0 > 0$). Determinar:

1. Velocidad y aceleración en el instante en que el punto pasa por el eje Oy positivo ($\varphi = \pi/2$).
2. Componentes intrínsecas de la aceleración y radio de curvatura en el mismo instante.

III.3 Un punto móvil, inicialmente en reposo en $(R, 0, 0)$ describe un movimiento helicoidal sobre la superficie lateral de un cilindro de radio R cuyo eje coincide con el eje Oz, en el sentido de cotas crecientes. La velocidad del punto v_0 y la velocidad angular ω_0 son constantes. Determinar la ecuación de la hodógrafa de las velocidades y representarla.

III.4 Un punto está sometido a la composición de dos movimientos armónicos perpendiculares de ecuaciones paramétricas $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \pi/4)$, $y(t) = A\cos(\omega t - \pi/4)$. Determinar la ecuación cartesiana de la trayectoria.

III.5 Un punto móvil recorre la hélice de ecuaciones paramétricas $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\,\mathrm{sen}\,t$, $z(t) = bt$. Determinar en función del tiempo los vectores del triedro intrínseco, las curvaturas de flexión y de torsión y el vector de Darboux.

III.6 La curva plana llamada cicloide tiene por ecuaciones paramétricas $x(t) = R(\omega t - \mathrm{sen}(\omega t))$, $y(t) = R(1 - \cos(\omega t))$, con R, ω constantes. Un punto móvil recorre una cicloide. Determinar el radio de curvatura y los vectores del triedro intrínseco en el instante $t = \pi/\omega$. Hallar también el instante t^* en el que el punto ha recorrido sobre la trayectoria un arco de longitud $2R$ desde el instante inicial. .

III.7 Un avión no tripulado vuela con velocidad constante v_a a una altura h sobre el suelo y siguiendo una trayectoria paralela a una carretera recta. La distancia entre el plano vertical de vuelo del avión y la carretera es d. En un punto de la carretera está situado un cañón antiaéreo que sólo puede disparar perpendicularmente a la carretera, con un ángulo de elevación variable α. El proyectil es lanzado con velocidad v_p. Si en el instante del disparo, el avión está a una distancia y_0 del plano que contiene a la trayectoria del proyectil, determinar la velocidad con la que se debe disparar el proyectil para que alcance al avión, para una elevación determinada, en función de α, h, d, g y v_a y discutir los valores de α para los que el alcance es posible. Obtener el valor numérico de v_p cuando $h = 1$ km, $d = 3$ km, $v_a = 700$ km/h, $\alpha = 30°$ y $g = 9,81$ m s^{-2}.

H.E.C N.º 3

III.1) $\rho = \rho_0 + c\cdot t \quad (\rho_0, c : \text{ctes})$

$\dot\theta = \omega_0 = \text{cte} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t \quad (\theta_0, \omega_0 : \text{ctes})$

Con los datos dados y si no dicen nada, trabajo en polares:

$$\bar r = \rho \bar u_\rho = (\rho_0 + ct)\bar u_\rho$$

$$\bar v = \dot\rho \bar u_\rho + \rho\dot\theta \bar u_\theta = c\,\bar u_\rho + (\rho_0 + ct)\omega_0 \bar u_\varphi$$

$$\bar a = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\bar u_\rho + (2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta)\bar u_\theta = -(\rho_0 + c\cdot t)\omega_0^2 \bar u_\rho + 2c\cdot\omega_0 \bar u_\theta$$

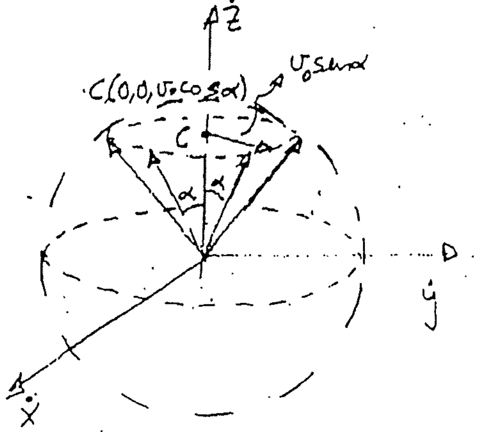
Trayectoria: Despejo t:

$$\left.\begin{array}{l}\theta = \theta_0 + \omega_0 t \\ \rho = \rho_0 + c\cdot t\end{array}\right\} \Rightarrow \rho = \rho_0 + c\left(\frac{\theta - \theta_0}{\omega_0}\right) \quad (\text{Espiral de Arquímedes: } \rho = a + b\theta)$$

III.3) $R,\ v_0 = \text{cte},\ \omega_0 = \dot\varphi = \text{cte}$.

Por ser hélice, $\bar t$ forma ángulo cte con eje $OZ \Rightarrow \bar v$ también $\Big\} \Rightarrow$ $|\bar v| = \text{cte} = v_0$

En los eje $O\dot x\dot y\dot z$, todos los vectores $\bar v$ parten de O, forman α con $O\dot z$ y tienen igual módulo $\Rightarrow$ hodógrafa $\equiv$ circunferencia de $\begin{cases}\text{Centro: } (0, 0, v_0\cos\alpha) \\ \text{Radio: } v_0 \operatorname{sen}\alpha\end{cases}$

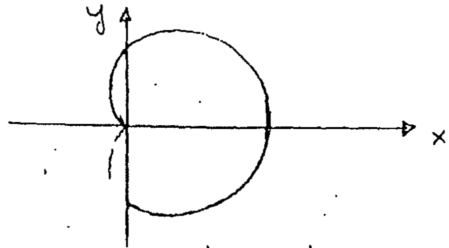


En general:
La hodógrafa de cualquier movimiento realizado con $|\bar v| = \text{cte}$ estará contenida en una esfera de radio $|\bar v|$

III 2/t

III.2

$$\left.\begin{aligned}\rho(\varphi) &= a(1+\cos\varphi)\\ \varphi(t) &= b\cdot t\end{aligned}\right\}\quad a, b \text{ ctes}$$



$$t=0\begin{cases}(x,y)\equiv(2a,0)\\ v(0)=v_0\,\bar{j}\quad (v_0>0)\end{cases};\quad \frac{d\rho}{d\varphi}=-a\,\text{sen}\varphi\quad;\quad \frac{d\varphi}{dt}=b=\dot{\varphi}\Longrightarrow\dot{\rho}=\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=-a\,\text{sen}\varphi\cdot b$$

$$\frac{d\dot{\rho}}{d\varphi}=-ab\cos\varphi\quad;\quad\frac{d\dot{\varphi}}{dt}=0$$

$$\bar{v}=\dot{\rho}\,\bar{u}_\rho+\rho\dot{\varphi}\,\bar{u}_\varphi=\frac{d\rho}{d\varphi}\dot{\varphi}\,\bar{u}_\varphi+\rho\dot{\varphi}\,\bar{u}_\varphi=-a\,\text{sen}\varphi\, b\,\bar{u}_\rho+a(1+\cos\varphi)\cdot b\,\bar{u}_\varphi$$

$$\bar{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\,\bar{u}_\rho+(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi})\,\bar{u}_\varphi=\left(\frac{d\dot{\rho}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\bar{u}_\rho+(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\cancel{\ddot{\varphi}})\,\bar{u}_\varphi=$$

$0\ (\dot{\varphi}=\text{cte})$

$$=[-ab^2\cos\varphi-a(1+\cos\varphi)b^2]\,\bar{u}_\rho+[-2ab^2\,\text{sen}\varphi]\,\bar{u}_\varphi=(-2ab^2\cos\varphi-ab^2)\,\bar{u}_\rho-2ab^2\,\text{sen}\varphi\,\bar{u}_\varphi$$

a)

$$\bar{v}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=-ab\,\bar{u}_\rho+ab\,\bar{u}_\varphi$$

$$\bar{a}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=-ab^2\,\bar{u}_\rho-2ab^2\,\bar{u}_\varphi$$

b)

$$|\bar{v}|=\sqrt{a^2b^2\text{sen}^2\varphi+a^2b^2+a^2b^2\cos^2\varphi+2a^2b^2\cos\varphi}=\sqrt{2a^2b^2(1+\cos\varphi)}=\sqrt{2a^2b^2\,2\cos^2\frac{\varphi}{2}}=2ab\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{d|\bar{v}|}{dt}=\frac{d|\bar{v}|}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}=-2ab\,\frac{1}{2}\,\text{sen}\frac{\varphi}{2}\,b=-ab^2\text{sen}\frac{\varphi}{2}=a_t\Longrightarrow a_t\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=-ab^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\bar{a}|\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{a^2b^4+4a^2b^4}=ab^2\sqrt{5}\Longrightarrow a_n=\sqrt{a^2b^4\,5-a^2b^4\frac{1}{2}}=ab^2\,3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rho_c=\frac{\left(2ab\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{ab^2\,3\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a^2b^2\cdot 2}{ab^2\,3\frac{\sqrt{2}}{2}}=a\,\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

III 3/6

Aula de Ingeniería JC	Ingenieros Industriales	Física II
	c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29	Profesor *Alex García*

III.4) MOVIM EN CUADRATURA
IGUAL AMPLITUD A
IGUAL FRECUENCIA ω

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega t + \frac{\pi}{4}) \\ y = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) = A\,\text{sen}(\omega t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = A\,\text{sen}(\omega t + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4} \quad (x = y) \quad \text{BISECTRIZ } 1^{er} \text{ CUADRANTE}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A\,\text{sen}(\omega t + \tfrac{\pi}{4}) = A\left[\text{sen}\,\omega t \cos\tfrac{\pi}{4} + \cos\omega t\,\text{sen}\tfrac{\pi}{4}\right] = A\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\text{sen}\,\omega t + \cos\omega t\right] \\ y &= A\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{4}) = A\left[\cos\omega t\cos\tfrac{\pi}{4} + \text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\tfrac{\pi}{4}\right] = A\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\omega t + \text{sen}\,\omega t\right] \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y$$

III.5)
$$\bar{r}\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\,\text{sen}\,t \\ z = b\cdot t \end{cases} \Longrightarrow \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}\begin{cases} \dot{x} = -a\,\text{sen}\,t \\ \dot{y} = a\cos t \\ \dot{z} = b \end{cases} \Longrightarrow \bar{a}\begin{cases} \ddot{x} = -a\cos t \\ \ddot{y} = -a\,\text{sen}\,t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{a^2+b^2} = cte \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow \bar{a} = \bar{a}_n = a_n\bar{n} = \frac{v^2}{\rho_c}\bar{n}$$
$$|\bar{a}| = |\bar{a}_n|$$

$$\bar{t} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{(-a\,\text{sen}\,t,\ a\cos t,\ b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\bar{n} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{(-a\cos t,\ -a\,\text{sen}\,t,\ 0)}{a} = (-\cos t,\ -\text{sen}\,t,\ 0)$$

$$\bar{b} = \bar{t}\times\bar{n} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -a\,\text{sen}\,t & a\cos t & b \\ \cos t & \text{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} = \frac{(b\,\text{sen}\,t,\ -b\cos t,\ a)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\rho_c = \frac{v^2}{|\bar{a}_n|} = \frac{v^2}{|\bar{a}|} = \frac{a^2+b^2}{a}$$

$$\rho_\tau:\quad 3^a\ \text{FRENET}:\ \frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{\bar{n}}{\rho_\tau} \Longrightarrow \frac{d\bar{b}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(b\cos t,\ b\,\text{sen}\,t,\ 0)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\bar{v}|}$$

$$\frac{d\bar{b}}{ds}\cdot\bar{n} = -\frac{\bar{n}\cdot\bar{n}}{\rho_\tau} \Longrightarrow \boxed{\rho_\tau = -\frac{1}{\frac{d\bar{b}}{ds}\cdot\bar{n}} = -\frac{1}{\frac{1}{a^2+b^2}\left[-b\cos^2 t - b\,\text{sen}^2 t + 0\right]} = \frac{a^2+b^2}{b}}$$

III.6

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = R(\omega t - \text{sen}\,\omega t) \\ y(t) = R(1-\cos\omega t) \end{array}\right\} \quad R,\omega \text{ ctes}$$

$$\bar{v} = \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = R\omega(1-\cos\omega t) \\ \dot{y} = R\omega\,\text{sen}\,\omega t \end{array}\right| \Longrightarrow |\bar{v}| = R\omega\sqrt{1+\cos^2\omega t - 2\cos\omega t + \text{sen}^2\omega t} = R\omega\sqrt{2(1-\cos\omega t)}$$

$$1-\cos 2\theta = 2\,\text{sen}^2\theta$$

$$|\bar{v}| = R\omega\cdot 2\,\text{sen}\,\frac{\omega t}{2}$$

$$\bar{a} = \left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = R\omega^2\,\text{sen}\,\omega t \\ \ddot{y} = R\omega^2\cos\omega t \end{array}\right| \Longrightarrow |\bar{a}| = R\omega^2 \;;\; a_t = \frac{d|\bar{v}|}{dt} = 2R\omega\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega t}{2} = R\omega^2\cos\frac{\omega t}{2}$$

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = (R\omega^2)^2 - (R\omega^2)^2\cos^2\frac{\omega t}{2} = (R\omega^2)^2\,\text{sen}^2\frac{\omega t}{2} \Longrightarrow a_n = R\omega^2\,\text{sen}\,\frac{\omega t}{2}$$

Por tanto $\cdot\ \rho_c = \dfrac{v^2}{a_n} \Rightarrow$ En $t = \dfrac{\pi}{\omega}$, $\boxed{\rho_c = \dfrac{\left(R\omega\cdot 2\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)^2}{R\omega^2\,\text{sen}\frac{\pi}{2}} = 4R}$

$\cdot\ \bar{t} = \dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \Longrightarrow$ En $t = \dfrac{\pi}{\omega}$, $\boxed{\bar{t} = \dfrac{(2R\omega, 0)}{2R\omega} = (1,0) \equiv \bar{\imath}}$

$\cdot\ \bar{n} = \dfrac{\bar{a}_n}{|\bar{a}_n|} = \dfrac{\bar{a}-\bar{a}_t}{|\bar{a}_n|} \Longrightarrow$ En $t = \dfrac{\pi}{\omega}$ $\left\{\begin{array}{l} a_t = 0 \\ \bar{a} = \bar{a}_n = -\omega^2 R\bar{\jmath} \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\bar{n} = -\bar{\jmath}}$

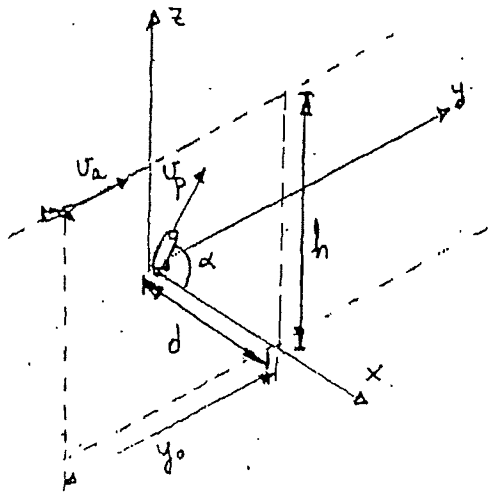
$\cdot\ v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt} \Longrightarrow \displaystyle\int_{s(t=0)=0}^{s(t)} ds(t) = \int_{t=0}^{t} v(t)\,dt \Longrightarrow s(t) = \int_{t=0}^{t} 2R\omega\,\text{sen}\frac{\omega t}{2}\,dt = \cdots = 4R\left[1-\cos\frac{\omega t}{2}\right]$

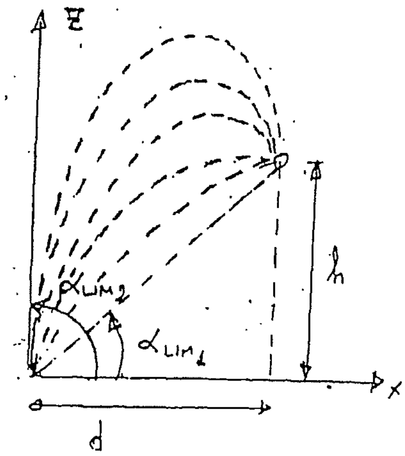
$$s(t^*) = 2\cancel{R} = 4\cancel{R}\left[1-\cos\frac{\omega t^*}{2}\right] \Longrightarrow 2 - 2\cos\frac{\omega t^*}{2} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} = \cos\frac{\omega t^*}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\omega t^*}{2} = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \boxed{t^* = \frac{2\pi}{3\omega}}$$

III 5/6

III.7)





Cuando chocan, $\bar{r}_a = \bar{r}_p$

$\bar{r}_a(t=0) = (d, -y_0, h)$

Avión: $\bar{v}_a \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = v_a \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \bar{r}_a = \int \bar{v}_a \cdot dt \begin{cases} x = C_1 & = d \\ y = v_a t + C_2 & = v_a t - y_0 \\ z = C_3 & = h \end{cases}$

Proyectil: $\bar{a}_p \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Longrightarrow \bar{v}_p = \int \bar{a}\, dt \begin{cases} \dot{x} = C_1 & = v_p \cos\alpha \\ \dot{y} = C_2 & = 0 \\ \dot{z} = -gt + C_3 & = -gt + v_p \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \Longrightarrow$

$\bar{v}_p(t=0) = (v_p \cos\alpha, 0, v_p \operatorname{sen}\alpha)$

$\Longrightarrow \bar{r}_p = \int \bar{v}_p\, dt \begin{cases} x_p = v_p \cos\alpha \cdot t + K_1 & = v_p \cos\alpha \cdot t \\ y_p = K_2 & = 0 \\ z_p = -g\frac{t^2}{2} + v_p \operatorname{sen}\alpha\, t + K_3 & = -g\frac{t^2}{2} + v_p \operatorname{sen}\alpha\, t \end{cases}$

$\bar{r}_p(t=0) = (0,0,0)$

En t_c (choque): $r_a(t_c) = r_p(t_c)$:

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{\imath}: & d = v_p \cos\alpha \cdot t_c & (1) \\ \bar{\jmath}: & v_a t_c - y_0 = 0 & (2) \\ \bar{k}: & h = -g\frac{t_c^2}{2} + v_p \operatorname{sen}\alpha \cdot t_c & (3) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ DE (1): $t_c = \dfrac{d}{v_p \cos\alpha} \Longrightarrow$ ENTRO EN (3): $\cancel{v_p} \operatorname{sen}\alpha \dfrac{d}{\cancel{v_p} \cos\alpha} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{d^2}{v_p^2 \cos^2\alpha} = h \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad v_p = \sqrt{\frac{g \cdot d^2}{2\cos^2\alpha\,(d \cdot \operatorname{tg}\alpha - h)}} = \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(d\cdot \operatorname{tg}\alpha - h)}} = v_p(\alpha)$$

$$\left(\begin{array}{l} t_c = \dfrac{d}{v_p \cos\alpha} = t_c(\alpha) \\ y_o = v_a \cdot t_c = y_o(\alpha) \longleftrightarrow \alpha(y_o) \end{array} \right)$$

PARA $h = 1\text{Km}$, $d = 3\text{Km}$, $v_a = 700\ \text{Km/h}$, $\alpha = 3?°$, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

$$v_p = - - - - = 283{,}556\ \text{m/s} = 1020{,}8\ \text{Km/h}$$

$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{h}{d} = 18{,}435 < \alpha < \alpha_2 = 90°$

POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

INDUSTRIALES ETSII UPM

Física General I

Curso 2009-10

Hoja de Evaluación Continua nº 4

DINAMICA DEL PUNTO

Ejercicios propuestos

IV.1 Un automóvil toma una curva peraltada. Determinar el intervalo de velocidades a las que el automóvil puede tomar la curva de forma segura, es decir, sin sufrir desplazamientos laterales de su trayectoria, en función del radio de la curva R, del ángulo de peralte α (ángulo de inclinación de la calzada respecto a la horizontal) y del coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y el asfalto, μ. Obtener los valores numéricos para $R = 100$ m, $\alpha = 10^\circ$ y $\mu = 0{,}7$ (asfalto seco) ó 0,4 (asfalto mojado).

IV.2 Un punto material de masa m se mueve sobre una recta sometido únicamente a la acción de una fuerza proporcional a su velocidad y de sentido opuesto a ella ($F = -kv$). En el instante inicial, su posición es x_0 y su velocidad v_0 en el sentido que se toma positivo sobre la recta. Determinar:

i) Las funciones cinemática y horaria del movimiento.

ii) El tiempo que tarda la velocidad inicial del móvil en reducirse a la mitad.

iii) La distancia desde la posición inicial a la que se anularía la velocidad del punto.

Muy

IV.3 Un punto material de masa m se mueve en el plano Oxy sometido a una fuerza $\boldsymbol{F} = (a + by)\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}$ (a, b, c constantes). En el instante inicial se encuentra en reposo en el origen de coordenadas. Determinar la ecuación de la trayectoria, en forma paramétrica (dependiente del tiempo) e implícita (eliminando la dependencia temporal).

Cohete

IV.4 Un vagón cisterna de ferrocarril con una masa inicial m_0 está lleno de agua e inicia su marcha con una velocidad v_0. La cisterna tiene una fuga en el fondo, de forma que pierde agua a un ritmo de k kg s^{-1}. Demostrar que:

i) La aceleración que adquiere el vagón cuando se le aplica una fuerza constante F_0 es $a(t) = \dfrac{F_0}{m_0 - kt}$.

ii) Para que la aceleración del vagón fuera constante e igual a a_0 la fuerza aplicada debería ser $F(t) = m_0 a_0 - k a_0 t$.

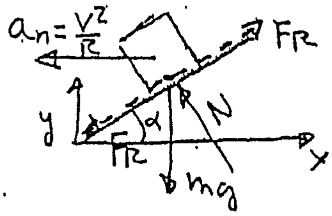
IV.5 Un automóvil de masa $m = 1000$ kg, cuyo motor desarrolla una potencia constante $P = 90$ CV, se mueve por una carretera recta, sometido a una fuerza de rozamiento aerodinámica proporcional al cuadrado de su velocidad, $F = -kv^2$, con $k = 4{,}1 \cdot 10^{-2}$ N/(km/h)^2. Demostrar que la velocidad del automóvil no puede superar una cierta velocidad límite v_L, y calcular v_L en km/h. (1 CV = 735,5 W)

Muy

IV.6 Un portero de fútbol saca el balón desde su portería en dirección a la contraria imprimiéndole una energía cinética E_c. La trayectoria del balón se ve afectada por el viento desde la portería contraria que ejerce una fuerza constante horizontal F sobre él. Determinar el valor del ángulo α de salida del balón respecto a la horizontal para el que se consigue un alcance máximo, y obtener el valor numérico si $E_c = 180$ J, masa del balón m =400 gr y $F = 3$ N. Para un valor dado de F, ¿qué condición sobre α se debe verificar para que el balón no vuelva arrastrado por el viento a la portería?

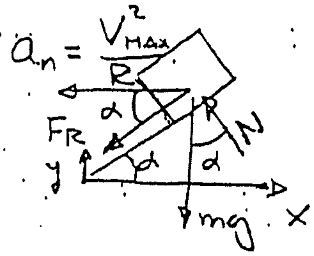
H.E.C. Nº 4 — 21 - Nov - 2005

IV.1



Se producirán desplazamientos laterales cuando se supere el valor Fr_{MAX} en uno u otro sentido. Esto ocurrirá para una V_{MAX} y una V_{MIN}.

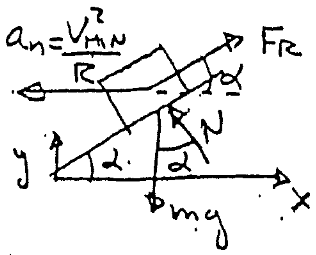
V_{MAX}



$$\begin{cases} \bar{\imath}: -N\operatorname{sen}\alpha - Fr\cos\alpha = -m\dfrac{V^2}{R} & (1) \\ \bar{\jmath}: N\cos\alpha - mg - Fr\operatorname{sen}\alpha = 0 & (2) \\ |Fr| \leq \mu |N| & (3) \end{cases}$$

De (2) $\longrightarrow$ $\boxed{N \leq \dfrac{mg}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}}$ $\longmapsto (1) \Longrightarrow$ $\boxed{V^2 \leq g\cdot R\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}\right)}$

V_{MIN}



$$\begin{cases} \bar{\imath}: -N\operatorname{sen}\alpha + Fr\cos\alpha = -m\dfrac{V^2_{MIN}}{R} & (1) \\ \bar{\jmath}: N\cos\alpha - mg + Fr\operatorname{sen}\alpha = 0 & (2) \\ |Fr| \leq \mu |N| & (3) \end{cases}$$

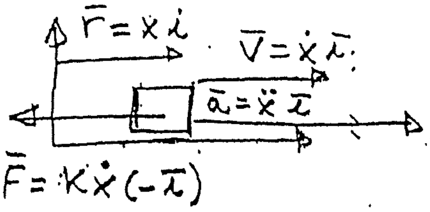
De (2) $\longrightarrow$ $\boxed{N \leq \dfrac{mg}{\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha}}$ $\longmapsto (1) \Longrightarrow$ $\boxed{V^2 \geq g\cdot R\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}\right)}$

Para $\mu = 0{,}7$
$$\begin{cases} V_{MAX} = 31{,}316 \text{ m/s} = 112{,}74 \text{ Km/h} \\ \underbrace{V^2_{min} < 0}_{\text{IMPOSIBLE}} \Rightarrow \text{No se produce desplazamiento hacia el interior} \end{cases}$$

Para $\mu = 0{,}4$
$$\begin{cases} V_{MAX} = 24{,}663 \text{ m/s} = 88{,}788 \text{ Km/h} \\ \underbrace{V^2_{min} < 0}_{\text{IMPOSIBLE}} \Rightarrow \text{No se produce desplazamiento hacia el interior} \end{cases}$$

$$\left[V^2_{MAX} = gR\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}\right) \; ; \; V^2_{min} = gR\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}\right) \right]$$

IV.2 i)



$\Sigma \bar{F} = m \cdot \bar{a}$

$\bar{\imath}: \; -k\dot{x} = m\ddot{x} \quad (*)$

$t=0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x}_0 = V_0 \end{cases}$

Función Cinemát: Busco $\dot{x} = \dot{x}(t) \Longrightarrow -k\dot{x} = m\dfrac{d\dot{x}}{dt} \Longrightarrow -k\displaystyle\int_{t=0}^{t} dt = m\int_{\dot{x}_0=V_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}}$

Luego: $-\dfrac{k \cdot t}{m} = \ln\dfrac{\dot{x}}{V_0} \Longrightarrow \dot{x} = V_0\, e^{-\frac{kt}{m}}$

Función Horaria: A partir de la anterior: $\dfrac{dx}{dt} = V_0 e^{-\frac{kt}{m}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_{x=x_0}^{x} dx = V_0 \int_{t=0}^{t} e^{-\frac{kt}{m}} dt \Longrightarrow x = x_0 - \frac{V_0 \cdot m}{k}\left[e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right]$

ii) $t_1 \longrightarrow \dot{x}(t_1) = \dfrac{V_0}{2} \longrightarrow \dfrac{\cancel{V_0}}{2} = \cancel{V_0}\, e^{-\frac{kt_1}{m}} \longrightarrow t_1 = \dfrac{m}{k}\ln 2$

iii) $\dot{x} = 0 \Longrightarrow 0 = V_0 e^{-\frac{kt_2}{m}} \Longrightarrow t_2 = \infty \Longrightarrow \overset{x(t=\infty)}{x} = x_0 + \dfrac{V_0 m}{k}$

IV.3 m, Oxy, $\bar{F} = (a+by)\bar{\imath} + c\bar{\jmath}$; (a, b, c, ctes) ; $t=0 \begin{cases} \text{Reposo } (\bar{v} = \bar{0}) \\ \text{En origen } (\bar{r} = \bar{0}) \end{cases}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} \begin{cases} \bar{\imath}: \; a + by = m\ddot{x} \\ \bar{\jmath}: \; c = m\ddot{y} \Longrightarrow \ddot{y} = \frac{c}{m} \Longrightarrow \dot{y} = \frac{c}{m}t + \cancel{\dot{y}(t=0)}^{\,0} \Rightarrow y = \frac{c}{m}\frac{t^2}{2} + \cancel{y(t=0)}^{\,0} \end{cases}$

Por tanto, de la ecuación en $\bar{\imath}$: $\ddot{x} = \dfrac{a}{m} + \dfrac{b}{m}y = \dfrac{a}{m} + \dfrac{b}{m}\dfrac{c}{m}\dfrac{t^2}{2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dot{x} = \cancel{\dot{x}(t=0)}^{\,0} + \dfrac{a}{m}t + \dfrac{bc}{m^2}\cdot\dfrac{t^3}{6} \Longrightarrow x(t) = \cancel{x(t=0)}^{\,0} + \dfrac{a}{m}\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{bc}{m^2}\dfrac{t^4}{24}$

Ecuaciones Paramétricas $\begin{cases} x = \frac{a}{2m}t^2 + \frac{b \cdot c}{24 m^2}t^4 \\ y = \frac{c}{2m}t^2 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ Implícitas : $t^2 = \dfrac{2my}{c} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left[x = \dfrac{a}{2m}\cdot\dfrac{2my}{c} + \dfrac{bc}{24m^2}\dfrac{4m^2y^2}{c^2}\right. = \boxed{\dfrac{a}{c}y + \dfrac{b}{6c}y^2}$

IV.4

i) $m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \dot{m}\,\bar{U}_e$; $m = m_0 - Kt$; $\bar{U}_e = \bar{0}$ (EL AGUA CAE, NO SE LANZA)

POR TANTO, SUPONIENDO MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y USANDO COMPONENTES EN LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO:

$$(m_0 - Kt)\frac{dv}{dt} = F_0 \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = a(t) = \frac{F_0}{m_0 - Kt}$$

ii) DE FORMA ANÁLOGA A i), $m\frac{dv}{dt} = F + \dot{m}\cancel{v_e}^{\,0}$

$$(m_0 - Kt)\,a_0 = F(t) \Rightarrow F(t) = m_0 a_0 - K a_0 t$$

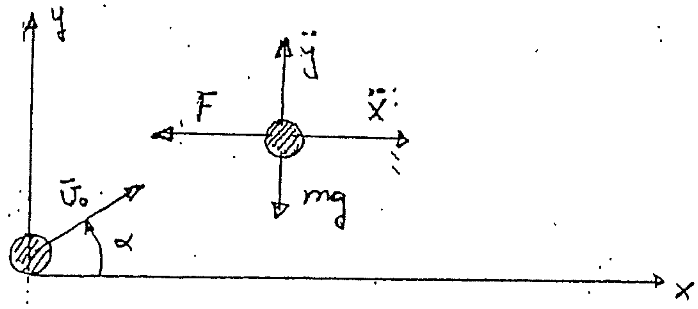
IV.5

VER DIN PTO. 1 (CUAD. VERDE: FIS I. FEB 1996), aptdos 2, 3, 4

OJO!! : $K = 4{,}1 \cdot 10^{-2} \dfrac{N}{(Km/h)^2}$

JC Aula de Ingeniería	Ingenieros Industriales	Física I
	c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29	Profesor **Alex García**

$\boxed{IV.6}$



$\Sigma \bar{F} = m \cdot \bar{a}$:

$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha \qquad x(t=0) = x_0 = 0$

$\bar{\imath}: -F = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{F}{m} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{F}{m}\cdot t + \dot{x}_0 = -\frac{F}{m}\cdot t + v_0 \cos\alpha \Rightarrow x = -\frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + v_0\cos\alpha \cdot t + \cancel{x_0}$

$\bar{\jmath}: -mg = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = -g\cdot t + \dot{y}_0 = -g\cdot t + v_0 \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow y = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t + \cancel{y_0}$

$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0 = v_0 \operatorname{sen}\alpha \qquad y(t=0) = y_0 = 0$

Busco $X_{MAX}(\alpha) \Rightarrow$ Elimino t de x e y: En x_{FINAL}, $y_{FINAL} = 0 = t\left(-g\frac{t}{2} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\right) \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \\ t = 0 \text{ (inicio)} \end{cases}$

Por tanto $X_{FINAL}(\alpha) = -\frac{F}{m}\frac{4v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\cdot g^2} + v_0\cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} =$

$= -\frac{F}{m}\, 2\frac{v_0^2}{g^2}\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}2\alpha$

$X_{MAX}: \frac{dX}{d\alpha} = 0 = -\frac{F}{m}\frac{v_0^2}{g^2}\cancel{2}\operatorname{sen}2\alpha + \cancel{2}\frac{v_0^2}{g}\cos 2\alpha \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{\cancel{v_0^2}}{g}}{\frac{F}{m}\frac{\cancel{v_0^2}}{g^{\cancel{2}}}} = \frac{mg}{F}$

$\boxed{\text{Por tanto } X_{MAX} \text{ en } \alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{mg}{F}}$

Para que no vuelva a la portería: $X_{FINAL} > 0$: $-\frac{F}{m}\frac{2v_0^{\cancel{2}}}{g^{\cancel{2}}}\operatorname{sen}^{\cancel{2}}\alpha + \frac{2v_0^{\cancel{2}}}{\cancel{g}}\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{mg}{F} > \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha < \operatorname{arctg}\frac{mg}{F}}$

Para: $E_c = 180\,J$

$\left.\begin{array}{l} m = 400\,gr = 0{,}4\,kg \\ F = 3N \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_{X_{MAX}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{0{,}4\,kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{3N} = 26{,}28^\circ$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

POLITÉCNICA

INDUSTRIALES ETSII UPM

Física General I — Curso 2009-10

Hoja de Evaluación Continua nº 5 — Trabajo y energía

Ejercicios propuestos

V.1 Un punto material de masa m = 0,2 kg puede moverse sobre una base rectilínea que se toma como eje de abscisas, bajo una fuerza conservativa cuya energía potencial está dada por $E_p(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$, donde $E_p(x)$ resulta en julios cuando x se expresa en metros.

- I) Representar $E_p(x)$ en función de la abscisa.
- II) Determinar el punto x_0 en el que la energía potencial posee un mínimo relativo, obteniendo el valor de ésta.
- III) Determinar las posiciones de equilibrio del punto material, señalando su naturaleza (estable, inestable o indiferente).
- IV) Representar la fuerza que actúa sobre el punto en función de x.
- V) Determinar la máxima velocidad que alcanza el punto cuando se abandona en el origen sin velocidad inicial, justificando si vuelve a pasar o no por la posición inicial.
- VI) Determinar la mínima energía total del punto que asegure que, moviéndose hacia el origen desde puntos muy alejados con x positiva, consiga alcanzar aquel.
- VII) Determinar si, lanzando el punto desde $x = -3$ m con velocidad inicial $v_0 = 2$ m/s , alcanza o no el origen, determinando en su caso el punto de retorno.
- VIII) Describir el tipo de movimiento que realiza el punto cuando se abandona en $x = -2$ m sin velocidad inicial.

¿¿Clase??

V.2 Un campo de fuerzas plano está definido en coordenadas cartesianas por $F(x,y) = ax^2y^3\boldsymbol{i} + (2x^3y^2 + 5y)\boldsymbol{j}$.

- I) Determinar si existe algún valor de a para el que el campo sea conservativo y en ese caso calcular la energía potencial.
- II) En el mismo caso conservativo, calcular el trabajo realizado al mover una masa puntual de 0,5 kg del origen al punto $(1, 1)$ (m) a lo largo de la parábola $y = x^2$.

V.3 La interacción fuerte entre dos nucleones se puede aproximar mediante el potencial de Yukawa. En este modelo, la energía potencial de un nucleón en el nucleo atómico es $U(r) = -U_0\dfrac{r_0}{r}e^{-r/r_0}$, donde U_0 y r_0 son constantes positivas y $r > 0$.

- I) Obtener la fuerza sobre el nucleón en función de r y su valor para $r = r_0$.

Si el nucleón tiene carga eléctrica, su energía potencial electrostática está dada por $V(r) = \dfrac{V_0}{r}$, (V_0 constante positiva) y se suma a la energía potencial anterior.

- II) Determinar el valor de r para el que la energía potencial total se anula.
- III) Obtener aproximadamente el valor de r para el que el nucleón está en equilibrio.

[Datos numéricos: $U_0 = 7{,}37\cdot10^{-12}$ J, $r_0 = 1{,}22\cdot10^{-15}$ m, $V_0 = 2{,}31\cdot10^{-28}$ J]

¿Clase??

V.4 Un punto material está en lo más alto de una esfera de radio R, que está fija sobre el suelo. El punto material empieza a deslizar sin rozamiento sobre la esfera. Determinar la altura sobre el suelo a la que el punto material abandona el contacto con la esfera y la distancia entre el punto del suelo en que cae el punto material y el punto de apoyo de la esfera.

V.5 Una plataforma vibra horizontalmente en su plano con un movimiento armónico simple de periodo 0,8 s . Sobre ella descansa una caja de masa 1 kg que empieza a deslizar cuando la amplitud de vibración alcanza los 10 cm . ¿Cuánto vale el coeficiente de rozamiento estático entre la plataforma y la caja? Si el coeficiente de rozamiento estático fuese 0,40, ¿cuál sería la amplitud máxima de vibración antes de que la caja deslizase?

V.6 Un resorte de longitud en descarga ℓ_0 = 20 cm y constante elástica k = 400 N/m se elonga lentamente bajo la acción de una masa de 300 g sometida a la gravedad.

- I) Calcular la longitud en equilibrio del resorte elongado por ese peso y el trabajo desarrollado para estirarlo.
- II) Si en estas condiciones se hace oscilar la masa verticalmente, calcular la frecuencia y el periodo de las oscilaciones.
- III) Se desplaza la masa 1 cm por debajo de su posición de equilibrio y se le imprime una velocidad vertical hacia abajo de 2 cm/s. Calcular la energía total de la masa, la amplitud del movimiento y la velocidad máxima que alcanza.

H.E.C. Nº 5

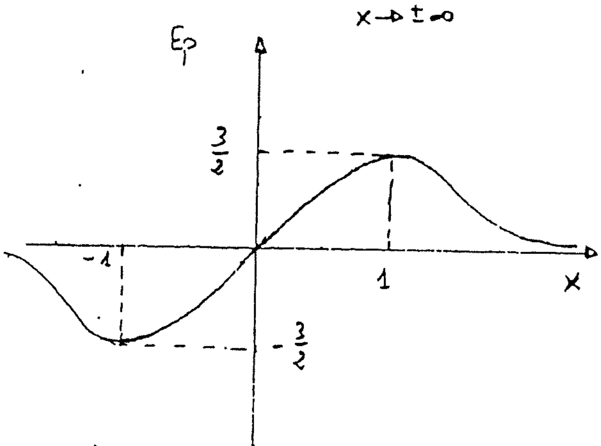
V.1 $m = 0{,}2\ Kg$; BASE RECTILINEA (OX) ; $E_p(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

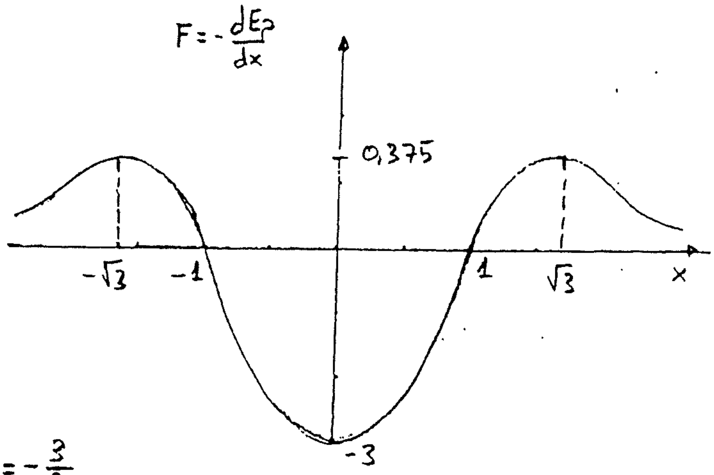
i) a) SIGNO $\begin{cases} + & \text{EN } x>0 \\ - & \text{EN } x<0 \end{cases}$; b) CORTES : EN $O(0,0)$

c) EXTREMOS : $\dfrac{dE_p}{dx} = \dfrac{3(x^2+1) - 2x \cdot 3x}{(x^2+1)^2} = \cdots = 3\,\dfrac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$\dfrac{dE_p}{dx} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{MAX (SE VE CON d), NO HACE FALTA } \frac{d^2E_p}{dx^2}\text{)}; \ E_p(x=1) = \frac{3}{2} \\ x = -1 & \text{MIN (" " " " " " " ")}; \ E_p(x=-1) = -\frac{3}{2} \end{cases}$

d) ASINTOTAS : $E_p \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$





ii) MIN DE E_p EN $x_0 = -1$; $E_p(x=-1) = -\frac{3}{2}$

iii) EQUILIBRIO EN $F = -\dfrac{dE_p}{dx} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{MAX : EQ INEST} \\ x = -1 & \text{MIN : EQ EST} \end{cases}$

iv) $F = -\dfrac{dE_p}{dx} = 3\,\dfrac{(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

a) SIGNO $\begin{cases} F>0 & \text{CON } |x|>1 \\ F<0 & \text{CON } |x|<1 \end{cases}$ b) CORTES $\begin{cases} \text{CON } OX : F=0 \text{ EN EXTREMOS DE } E_p ;\ x = \pm 1 \\ \text{CON } OY : x=0 \Rightarrow F(x=0) = -3 \end{cases}$

c) EXTREMOS : $\dfrac{dF}{dx} = 3 \cdot \dfrac{2x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(x^2-1)}{(x^2+1)^4} = \cdots = \dfrac{3 \cdot 2x(-x^4+3+2x^2)}{(x^2+1)^4}$

$\dfrac{dF}{dx} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 3 \to x = \pm\sqrt{3} \\ x^2 = -1 \to \text{NADA} \end{array} \right\}$ CON a) Y d) OBTENEMOS $\begin{cases} x = 0 & \text{MIN} \\ x = \pm\sqrt{3} & \text{MAX} \end{cases}$

d) ASINTOTAS : $F \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$

v) Si en $x=0$, $v_0=0 \Rightarrow \begin{cases} E = E_p = 0 \\ E_c = 0 \\ F = -\frac{dE_p}{dx} < 0 \text{ (HACIA IZQ.)} \end{cases} \Rightarrow E_c + E_p = 0 = E_{c\,MAX} + E_{p\,MIN} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow E_{c\,MAX} = -E_{p\,MIN} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} m v_{MAX}^2$

Por tanto $v_{MAX} = \sqrt{\frac{3}{m}} = \sqrt{\frac{3}{0,2}} = 3,873$ m/s

vi) Para alcanzar 0 desde $x>0$ muy alejada, $E_{TOTAL} > E_p(x=1) \Rightarrow E_{TOT_{MIN}} = \frac{3}{2}$

vii) Con $v_0 = 2$ m/s en $x=-3 \Longrightarrow \begin{cases} E_p(x=-3) = -0,9 \\ E_c = 0,4 \end{cases}$ $E_T = -0,5 < E_p(x=0) = 0 \Rightarrow$ No alcanza el origen, se para antes

Punto de retorno: $E_p(x_R) = \frac{3x_R}{x_R^2+1} = -0,5 \Longrightarrow x_R = -3 \pm 2\sqrt{2} \to$ Retorno en $x = -3+2\sqrt{2}$

$(x = -3-2\sqrt{2} < -3)$

viii) Realizará un movimiento oscilatorio con paradas (extremos del mov.) en $\begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} x_0 = -2 \\ v_0 = 0 \end{matrix}\right\}$ $E = E_p(x=-2) = -\frac{6}{5} = \frac{3x}{x^2+1} \Longrightarrow x_R \begin{cases} = -2 \\ = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ Oscila entre $x=-2$ y $x=-\frac{1}{2}$

[En $x=-2$ (a izq de $x=-1$), $F>0$. En $x=-\frac{1}{2}$ (dcha de $x=1$), $F<0$]

$\boxed{V.2}$ i) $\bar{F} \neq \bar{F}(\bar{v},t)$

$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax^2y^3 & 2x^3y^2+5y & 0 \end{vmatrix} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + (6x^2y^2 - 3ax^2y^2)\bar{k} = \bar{0}$

Por tanto $6 = 3a \Longrightarrow \boxed{a=2}$

Con $a=2$, $\bar{F} = -\nabla E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\bar{k}\right)$

$\left.\begin{matrix} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_x = 2x^2y^3 \end{matrix}\right\}$ $E_p = -\int 2x^2y^3\,dx = -2\left[\frac{x^3y^3}{3} + f(y,z)\right]$

$\left.\begin{matrix} F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = 2\left[x^3y^2 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}\right] \\ F_y = 2x^3y^2 + 5y \end{matrix}\right\}$ $\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = \frac{5}{2}y \Longrightarrow f(y,z) = \int \frac{5}{2}y\,dy = \frac{5}{4}y^2 + g(z)$

$\left.\begin{matrix} F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \\ F_z = 0 \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow \frac{dg(z)}{dz} = 0 \Longrightarrow g(z) = cte = C$. Por tanto $E_p = -2\left[\frac{x^3y^3}{3} + \frac{5}{4}y^2 + C\right]$

ii) $\left.\begin{matrix} O(0,0) \\ A(1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \tau_{O\to A} = -\Delta E_p = -[E_{pA} - E_{pO}] = --- = \frac{19}{6}$ J

V.3

$U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} e^{-r/r_0}$; U_0, r_0 : ctes >0 ; $r>0$

$V(r) = \frac{V_0}{r}$; V_0 : cte >0

i) $\bar{F}(r) = -\frac{dU(r)}{dr}\bar{u}_r = +U_0 r_0 \left[-\frac{1}{r^2} \cdot e^{-r/r_0} + \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r_0}\right)e^{-r/r_0}\right]\bar{u}_r = -\frac{U_0 r_0}{r} e^{-r/r_0}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right]\bar{u}_r$

$\bar{F}(r_0) = -\frac{2U_0}{r_0 e}\bar{u}_r$

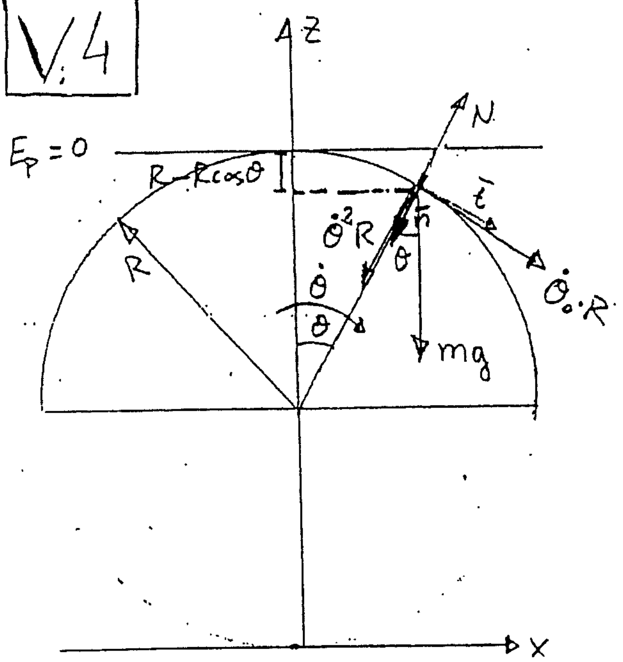
ii) $U(r)+V(r) = 0 \Rightarrow -\frac{U_0 r_0}{r} e^{-r/r_0} + \frac{V_0}{r} = 0 \Rightarrow \left(V_0 - U_0 r_0 e^{-r/r_0}\right)\frac{1}{r} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-r/r_0} = \frac{V_0}{U_0 r_0} \Rightarrow -\frac{r}{r_0} = \ln\frac{V_0}{U_0 r_0} \Rightarrow r = r_0 \ln\frac{U_0 r_0}{V_0}$

iii) $\bar{F} = -\frac{d(U+V)}{r} = -\frac{U_0 r_0}{\cancel{r}} e^{-r/r_0}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right] + \frac{V_0}{r^{\cancel{2}}} = 0 \Rightarrow \frac{-U_0 r_0 e^{-r/r_0} + V_0 - rU_0 e^{-r/r_0}}{r} = 0$

$V_0 - U_0(r_0+r)e^{-r/r_0} = 0 \Longrightarrow r \simeq 9{,}9 \cdot 10^{499}$??

V4



• $\Sigma \bar F = m\cdot\bar a$

$\bar n: -N + mg\cos\theta = +m\dfrac{v^2}{R} = +m\dot\theta^2 R$

$\boxed{N = mg\cos\theta - m\dot\theta^2 R}$ (I)

• Análisis Energ: Fuerzas:

Peso $mg \to$ conservativa : $E_p = mg z + \cancel{cte}$; $0\ (E_p(z=0)=0)$

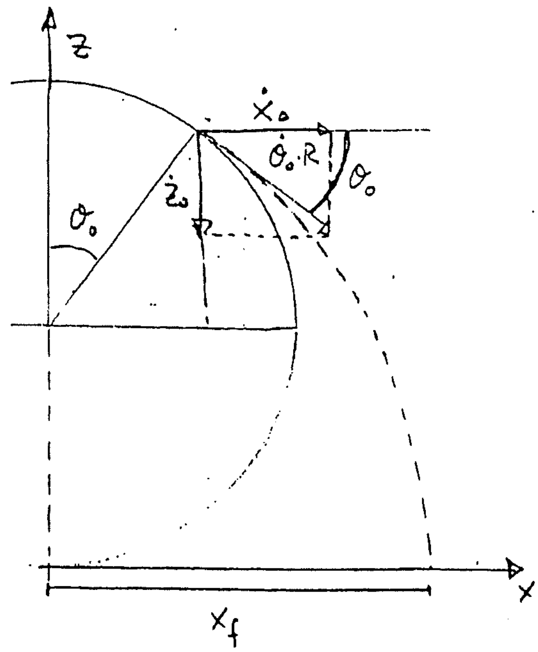
• $N \to$ no conserv. pero $\int \bar N\, d\bar r = 0$; $\bar N \perp d\bar r \perp \bar v$

Por tanto $E_{MEC} = cte = E_c + E_p$:

$\boxed{\underbrace{0}_{E_{c_i}} + \underbrace{mg2R}_{E_{p_i}} = \frac{1}{2}m(\dot\theta R)^2 + mg\,R(1+\cos\theta)}$ (II)

$(\text{II}) \to \dot\theta^2 = \dfrac{2g}{R}(1-\cos\theta) \Longrightarrow (\text{I}) : \boxed{N = mg\cos\theta - m2g(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)} \Rightarrow$

$\Longrightarrow$ Cuando se despega, $N = 0 \Longrightarrow \cos\theta_0 = \frac{2}{3} \Longrightarrow \theta_0 = 48{,}189° \Rightarrow \boxed{h = R + R\cos\theta_0 = R(1+\frac{2}{3}) = R\,\frac{5}{3}}$



Desde que despega: $\Sigma\bar F = m\bar a$: $\bar i$: $0 = m\ddot x \Rightarrow \dot x = cte$

$\dot x = cte = \dot x_0 = \dot\theta_0 \cdot R\cos\theta_0 \Longrightarrow \boxed{x_f = x_0 + \dot\theta_0 R\cos\theta_0 \cdot t_f}$

t_f ? : Mov en z uniform. acel. : $\bar g = -g\bar k$: Integro:

$-\dot z_f = -\dot z_0 - g t_f \Rightarrow \boxed{t_f = \dfrac{-\dot z_f + \dot z_0}{-g}}$

$\dot z_f = \sqrt{v_f^2 - \dot x_f^2} \Longrightarrow \boxed{\dot z_f = \sqrt{4gR - (\dot\theta_0 R\cos\theta_0)^2}}$

• $\boxed{\dot x_f = \dot x_0 = \dot\theta_0 R\cos\theta_0}$

• v_f : $E_{MEC} = cte$ en todo el movimiento:

$\underset{0}{\cancel{E_{c_i}}} + \underset{0}{\cancel{E_{p_i}}} = E_{c_f} + E_{p_f} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}m v_f^2 - mg2R \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{4gR}}$

• Por tanto : $t_f = \dfrac{-\sqrt{4gR - (\dot\theta_0 R\frac{2}{3})^2} + \dot\theta_0 R\,\text{sen}\,\theta_0}{-g}$

• $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$, $\text{sen}\,\theta_0 = \frac{\sqrt5}{3}$; $\dot\theta_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}} \Longrightarrow t_f = 1{,}316\sqrt{\frac{R}{g}}$

$\boxed{x_f = 1{,}16\,R}$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

POLITÉCNICA

INDUSTRIALES ETSII UPM

Física General I Curso 2009-10

Hoja de Evaluación Continua nº 6

Ejercicios propuestos

– **VI.1** Un misil balístico se dispara verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v_0. Determinar:

i) El valor límite, v_e, que puede alcanzar v_0 si se desea que el misil vuelva de nuevo a la superficie terrestre.

ii) La altura máxima que alcanzará si se lanza con $v_0 = v_e/2$, comparándola con la que se obtendría suponiendo la gravedad constante con la altura.

iii) La velocidad final que alcanza si se lanza con $v_0 = 2v_e$, en ausencia de otros cuerpos celestes que influyan en su movimiento.

iv) Relacionar la existencia o inexistencia de límites en la trayectoria con la energía total del misil en cada caso.

– **VI.2** Dos pequeñas naves espaciales de masa 2000 kg están en órbita circular en torno a la Tierra a una altitud de 400 km.

i) Determinar el periodo de revolución en esa órbita y la velocidad de las naves.

Si una de las naves pasa por la vertical de un cierto punto 90 s antes que la otra y la que va detrás reduce su velocidad en un 1 % , de forma muy rápida, ésta entra en una órbita elíptica.

ii) Determinar para esta órbita el semieje mayor y el nuevo periodo orbital.

iii) Comprobar que, en una vuelta completa, la nave que iba detrás consigue adelantar a la otra.

~ **VI.3** El cometa de Halley se mueve en una órbita elíptica de gran excentricidad alrededor del Sol. En el perihelio, el cometa está a $8,75 \cdot 10^7$ km del mismo, estando a $5,26 \cdot 10^9$ km en el afelio. Determinar los valores de los semiejes de la elipse, la excentricidad de la misma, la energía total del cometa, las velocidades en el afelio y perihelio y el periodo de la órbita. (Datos: Masa del Sol, $M = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, masa del cometa $m \approx 1,00 \cdot 10^{14}$ kg)

~ **VI.4** Un asteroide, de masa $m = 10^{20}$ kg se acerca a la Tierra describiendo una trayectoria hiperbólica cuyas asíntotas forman un ángulo de $\pi/2$ rad y cuya distancia de máximo acercamiento es 10000 km. Se pide determinar:

i) Los valores de la excentricidad y el parámetro p de la hipérbola.

ii) La velocidad areolar y la energía total del asteroide.

iii) La velocidad del asteroide en el punto de máximo acercamiento.

No **VI.5** Considerando la densidad de la Tierra variable según la relación $\rho(r) = \rho_0(2 - r^2/R^2)$, donde ρ_0 es la densidad en la superficie y R el radio de la Tierra, determinar:

i) La densidad en el centro de la Tierra y el valor de ρ_0 si la masa de la Tierra es M.

ii) La relación entre la aceleración de la gravedad en la superficie obtenida con la distribución de densidad dada y la obtenida con una distribución homogénea de masa, interpretando el resultado. (En ambos casos, la masa de la Tierra es la misma, M).

iii) Para ambas distribuciones de densidad, la ecuación diferencial del movimiento de un cuerpo que se moviera sin rozamiento, y bajo el único efecto de la gravedad, por un túnel diametral que atravesara la Tierra pasando por su centro.

NO **VI.6** Sobre un segmento de longitud $2L$ se distribuye uniformemente una masa gravitatoria M. Un punto material de masa m ($m \ll M$) puede moverse sobre la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio, sometido al campo gravitatorio que crea la distribución de masa. Obtener (sin resolver) la ecuación del movimiento del punto.

VI.1)

i) TRAS EL LANZAMIENTO SÓLO ACTÚA F_{GRAV} (CONS.) $\Rightarrow E_{MEC} = cte$

EL PROYECTIL ESCAPA SI $E_{MEC} = E_{CIN_\infty} + E_{P_\infty} = 0 + 0 = \frac{1}{2} m_p V_e^2 - \frac{GM_T m_p}{R_T}$

$\Rightarrow V_e = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T} \cdot 2} \Rightarrow V_0 < \sqrt{\frac{GM_T}{R_T} \cdot 2}$

ii) $E_{MEC} = cte \Rightarrow E_{C_i} + E_{P_i} = E_{C_f} + E_{P_f}$

(SIM. ESF.) $\frac{1}{2} m_p \left(\frac{V_e}{2}\right)^2 - \frac{G m_p M_T}{R_T} = 0 - \frac{G m_p \cdot M_T}{R_T + h} \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{3} R_T}$

SI $\bar{g} = cte = -\frac{GM_T}{R_T^2} \bar{u}_r$: $g = \frac{GM_T}{R_T^2} \Rightarrow E_p = mgh$ ($E_p = 0$ EN SUPERFICIE DE LA TIERRA)

(SIM. PLANA) $\frac{1}{2} m_p \left(\frac{V_e}{2}\right)^2 + 0 = 0 + m_p g h \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2} \frac{GM_T}{2 \cdot R_T} \cdot \frac{R_T^2}{GM_T} = \frac{R_T}{4}}$

iii) $E_{MEC} = cte \Rightarrow E_{C_i} + E_{P_i} = E_{C_\infty} + E_{P_\infty}$

$\frac{1}{2} m_p (2V_e)^2 - \frac{G m_p M_T}{R_T} = \frac{1}{2} m_p V_\infty^2 + 0 \Rightarrow V_\infty = \sqrt{6 G \frac{M_T}{R_T}}$

iv) $E < 0 \Rightarrow$ NO LLEGA AL ∞. HABRÁ UN PUNTO DE PARADA Y VUELTA

$E = 0 \Rightarrow$ LLEGA AL ∞ CON $V_\infty = 0$ (PARA EN ∞)

$E > 0 \Rightarrow$ LLEGA AL ∞ CON $V_\infty > 0$

VI.2)

$m_1 = m_2 = 2000 \text{ Kg}$

$h = 400 \text{ Km}$

DATOS ?? $\begin{cases} G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ Kg}^{-2} \\ M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ R_T = 6380 \text{ Km} \end{cases}$

PORTANTO: $\begin{cases} T = 5558{,}71 \text{ sg} = 1{,}54 \text{ h} \\ V_0 = 7663{,}64 \text{ m/s} \end{cases}$

i) POR 3ª KEPLER GENERALIZADA

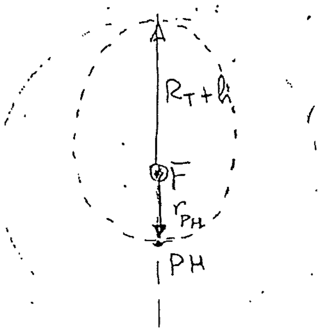
$K_{TIERRA} = GM_{TIERRA} = 4\pi^2 \frac{(R_T + h)^3}{T^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{GM_T}}$

$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{g_T \cdot R_T^2}} \Rightarrow v_0 = \omega \cdot (R_T + h) = \frac{2\pi}{T} (R_T + h) \Rightarrow$

$\Rightarrow v_0 = 2\pi (R_T + h) \sqrt{\frac{g_T R_T^2}{4\pi^2 (R_T + h)^3}}$

ii) $v_2 = \frac{99}{100} v_0 = \frac{99}{100} \cdot 2\pi (R_T+h) \sqrt{\frac{g R_T^2}{4\pi^2 (R_T+h)^3}} = 7587 \, m/s$

EN LA ORBITA ELIPTICA:



$\bar{L} = cte \Rightarrow \frac{99}{100} v_0 (R_T+h) = v_{PH} \cdot r_{PH}$

$E = cte \Rightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{99}{100} v_0\right)^2 - \frac{GMm}{R_T+h} = \frac{1}{2} m v_{PH}^2 - \frac{GMm}{r_{PH}}$

$v_{PH} = 7891{,}8 \, m/s$

$r_{PH} = 6515709{,}93$

POR TANTO: $\frac{r_{PH} + R_T + h}{2} = a \Rightarrow$ POR 3^a KEPLER: $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot a^3}{GM_T}} =$

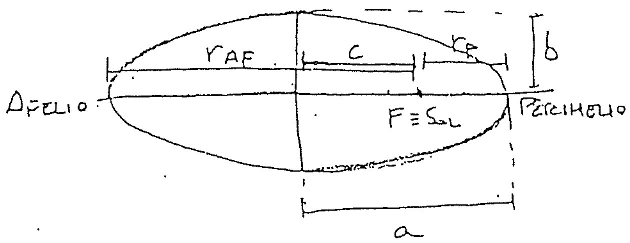
$a = 3201244{,}96$

$= \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{g \cdot R_T^2}} = 1854{,}406 \, seg$

iii) $T_1 = T_0 > T_2 + 90 s.$

$5558{,}71 > 1854{,}4 + 90 = 1944{,}4 \, seg$

VI.3)
- ORBITA ELÍPTICA
- $r_{PH} = 8{,}75 \cdot 10^7 \, Km$
- $r_{AF} = 5{,}26 \cdot 10^9 \, Km$
- G, M_{SOL}, M_{HALLEY}



ELIPSE:

DIBUJO
- $a = \frac{r_{PH} + r_{AF}}{2} = 2{,}67375 \cdot 10^9 \, Km = 2{,}67375 \cdot 10^{12} \, m$
- $c = a - r_P = 2{,}58625 \cdot 10^9 \, Km = 2{,}58625 \cdot 10^{12} \, m$

- $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = 6{,}78417 \cdot 10^{11} \, m$

- $e = \frac{c}{a} = 0{,}9672744$

- $e = \sqrt{1 + \frac{2G^2 E}{K^2 m}} \Rightarrow E = (e^2 - 1) \frac{K^2 m}{2 G^2}$
- $G^2 = p \cdot K = \frac{b^2}{a} K = 2{,}28482 \cdot 10^{31}$
- $\bar{F} = -K \frac{m}{r^2} \bar{u}_r = -G \frac{M_{SOL} \, m_{HAL}}{r^2} \bar{u}_r$

$K = G \cdot M_{SOL} = 1{,}327 \cdot 10^{20}$

$m = m_{HAL} = 1 \cdot 10^{14} \, Kg$

$E = -2{,}48277 \cdot 10^{21}$

VELOCIDADES EN AFELIO Y PERIHELIO

· APLICO LEY DE AREAS

$$r^2\dot{\varphi} = C = \sqrt{\frac{b^2}{a}K} = 4{,}7793 \cdot 10^{15}$$

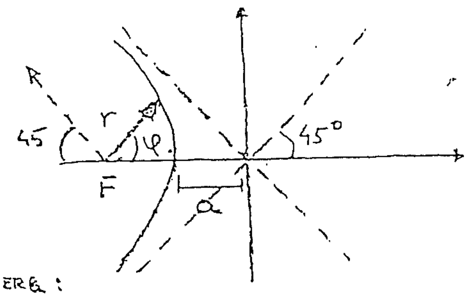
PERIHELIO: $r_{PH}^2\,\dot{\varphi} = r_{PH}\cdot V_{PH} = C \Longrightarrow V_{PH} = \dfrac{C}{r_{PH}} = 54.621{,}514$ m/s

AFELIO: $r_{AF}^2\,\dot{\varphi} = r_{AF}\cdot V_{AF} = C \Longrightarrow V_{AF} = \dfrac{C}{r_{AF}} = 908{,}628$ m/s

PERIODO DE LA ORBITA ELIPTICA:

$$T^2 = 4\pi^2\frac{a^3}{K} \Longrightarrow T = 2{,}3846\cdot 10^9\ s$$

VI.4)



Ec. POLAR.

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi} \quad (*)$$

TRAYECT. HIPERB.:

i) DEL ENUNCIADO

$\varphi = 0 \longrightarrow r = r_0 = 10000\cdot 10^3$ m

$\quad \hookrightarrow (*) \longrightarrow r_0 = \dfrac{p}{1+e} \Longrightarrow p = r_0(1+e)$

$\varphi = 135^\circ \longrightarrow r \to \infty$

$\quad \hookrightarrow (*) \longrightarrow r = \infty = \dfrac{p}{1+e\cos 135} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+e\cos 135 = 0$

$$e = \frac{-1}{\cos 135} = \sqrt{2}$$

· $p = \dfrac{b^2}{a} = (1+e)r_0 = (1+\sqrt{2})\cdot 10^7 \quad (1)$

· $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2} \quad (2)$

· $b = \sqrt{c^2-a^2} \quad (3)$

3 ECUAC. 3 INCOG.

$(2) \to (3) \Rightarrow 2a^2 = a^2+b^2 \Rightarrow \boxed{a=b}$

$a = b = (1+\sqrt{2})\cdot 10^7$

$c = \sqrt{2}\,a = (\sqrt{2}+2)\cdot 10^7$

ii) $\bar{F} = -K \frac{m}{r^2} \bar{u}_r = -G \frac{M_T \, m_a}{r^2} \bar{u}_r \Rightarrow \begin{cases} K = G \cdot M_T = 3{,}982 \cdot 10^{14} \\ m = m_a = 1 \cdot 10^{20} \, Kg \end{cases}$

$p = \frac{C^2}{K} = \frac{b^2}{a} \Rightarrow C^2 = \frac{K b^2}{a} \overset{a=b}{=} K \cdot b = 9{,}61337 \cdot 10^{21} \, \frac{m^4}{s^2}$

$\bar{V}_{AREOLAR} = \frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v} \Rightarrow |\bar{V}_{AR}| = \frac{1}{2} |\bar{r} \times \bar{v}| = \frac{1}{2} C$

$V_{AR} = \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{9{,}61337 \cdot 10^{21}}}{2} = 4{,}9024 \cdot 10^{10} \, \frac{m^2}{s}$

iii) $E \to e = \sqrt{1 + \frac{2C^2 E}{K^2 m}} \Rightarrow E = (e^2 - 1) \frac{K^2 m}{C^2 \, 2} = 8{,}247 \cdot 10^{26} \, J$

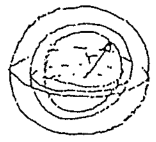
Velocidad en $r = r_0 \Rightarrow$ Ley de áreas : $V_{(r=r_0)} = \frac{C}{r_0} = 9804{,}78$

Velocidad en $r = \infty \Rightarrow$ Energías : $8{,}247 \cdot 10^{26} = \frac{1}{2} m_a V^2 - \cancel{\frac{G M_T m_a}{\infty}}$

$V_{(r=\infty)} = \sqrt{\frac{2 \, E}{m_a}} = 4061{,}28 \, \frac{m}{s}$

VI 5) i) $\rho(r) = \rho_0 \left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right) \Rightarrow$ Densidad en centro : $\rho(r=0) = 2\rho_0$

$\rho_0 \Rightarrow \rho(r) = \rho_0 \left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{dm}{dV_{OL}} \Rightarrow dm = \rho(r) \, dV_{OL} \Rightarrow \int_{r=0}^{r=R} dm = M = \int_{r=0}^{r=R} \rho(r) \, dV_{OL}$

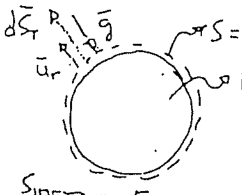


$dV_{OL} = 4\pi r^2 dr$

$M = \int_{r=0}^{r=R} \rho_0 \left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right) 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi \int_{r=0}^{r=R} 2r^2 - \frac{r^4}{R^2} = \rho_0 4\pi \left[\frac{2r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right]_{r=0}^{r=R} \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \rho_0 4\pi R^3 \cdot \frac{7}{15} \Rightarrow \rho_0 = \frac{15 M}{28 \pi R^3}$

ii) En ambos casos, $\rho = \rho(r) \Rightarrow$ Simetría Esférica. Aplico Gauss a una superficie (esfera) S que contenga a la Tierra (M_T):



$\int_{S=S_T} \bar{g} \cdot d\bar{S}_T = -4\pi G \, m_{int} = -4\pi G M_T$

Caso a) $\rho(r) = \rho_0 \left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

$r = R_T$: $\int_{S=S_T} \bar{g} \, d\bar{S}_T = -\int g \, dS_T = -g \int dS_T = -g S_T = -g 4\pi R_T^2 \overset{Gauss}{=} -4\pi G M_T$

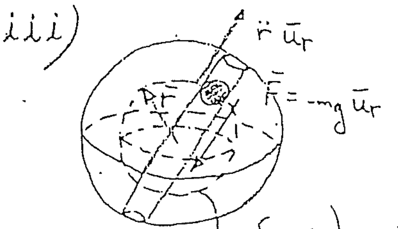
$\bar{g}(r = R_T) = -\frac{G M_T}{R_T^2} \bar{u}_r \qquad g = \frac{G M_T}{R_T^2}$

Caso b) $\rho(r) = cte = \dfrac{M_T}{Vol_T} = \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Longrightarrow$ Idem: $r = R_T$: $\int_{S_T} \bar{g}\, d\bar{S}_T = \cdots = -g\, S_T = -g\, 4\pi R_T^2 = -4\pi G M_T$

$\bar{g}(r = R_T) = -\dfrac{G M_T}{R_T^2}\,\bar{u}_r$ $\qquad g = \dfrac{G M_T}{R_T^2}$

El resultado es el mismo. Al aplicar Gauss, dada la sim. esf. de este problema, el campo en la superficie elegida (esfera) solo depende de la masa interior, no de su distribución.

iii)



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$: $-mg\,\bar{u}_r = m\ddot{r}\,\bar{u}_r \Longrightarrow \boxed{\ddot{r} + g = 0}$

Busco g en el int.: Ahora aplico Gauss a una superf. (esfera) interior a la Tierra $(r < R_T)$:

a) $r < R_T$: $\int_S \bar{g}\, d\bar{S} = -\int g\, dS = -g\int dS = -g\,S = -g\,4\pi r^2 = -4\pi G \underbrace{\int_0^r \rho(r)\, dV_{ol}}_{m_{int}}$

Luego $g = \dfrac{G}{r^2}\displaystyle\int_0^r \rho_0\left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right)\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{G}{r^2}\cdot\rho_0\cdot 4\pi \int_0^r 2r^2 - \frac{r^4}{R^2} = \frac{4\pi G}{r^2}\,\frac{15M}{28\pi R^3}\left[\frac{2r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right]$

$g = \dfrac{15MG}{7R^3}\left[\dfrac{2}{3}r - \dfrac{r^3}{5R^2}\right] \Longrightarrow$ $\boxed{\text{Ec. Dif.}: \ddot{r} + \dfrac{15MG}{7R^3}\left[\dfrac{2}{3}r - \dfrac{r^3}{5R^2}\right] = 0}$

b) Aplico Gauss a la misma superficie:

$r < R_T$: $\int \bar{g}\, d\bar{S} = \cdots = -g\,4\pi r^2 = -4\pi G \underbrace{\int_{r=0}^{r} \rho\, dV_{ol}}_{m_{int}} = -4\pi G \overset{\rho = cte}{\rho} \int_0^r dV_{ol} = -4\pi G \rho\, V_{ol}$

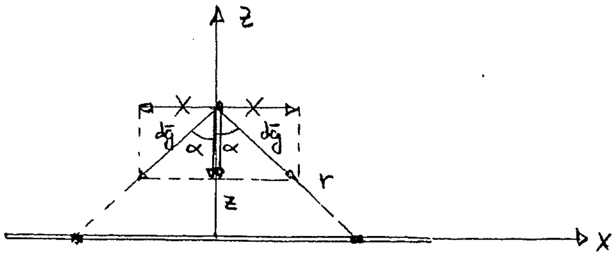
$-g\,4\pi r^2 = -4\pi G\rho\,\frac{4}{3}\pi r^3 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} g = G\rho\frac{4}{3}\pi r \\ \rho = cte = \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \end{array}\right\}$ $g = G\dfrac{M_T}{R_T^3}\,r$

Ec. Dif.: $\ddot{r} + \dfrac{GM_T}{R_T^3}\,r = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Mov. Arm. Simple: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T^3}}$

VI.6

SEGMENTO : 2L, M
PARTICULA : m << M



TOMANDO EL SEGMENTO COMO EJE X Y LA MEDIATRIZ COMO EJE Z:

EXISTE SIMETRÍA RESPECTO AL EJE Z. CADA PAR DE dm SIMÉTRICOS GENERAN SENDOS $d\bar{g}$ QUE ANULAN SUS COMPONENTES EN X Y SUMAN SUS COMPONENTES EN Z. POR TANTO EL CAMPO TOTAL $\bar{g}$ SÓLO TENDRÁ COMPONENTE EN Z:

- $\bar{g}_{TOTAL} = \int dg \cdot \cos\alpha\,(-\bar{k}) = \int \frac{G\,dm}{r^2}\cos\alpha(-\bar{k}) = \int \frac{G\lambda\,dx}{r^2}\cos\alpha(-\bar{k})$
- $\lambda = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \lambda\,dx$
- $\frac{x}{z} = tg\,\alpha \Rightarrow \frac{dx}{z} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot d\alpha \Rightarrow dx = \frac{z}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$
- $r\cos\alpha = z \Rightarrow r = \frac{z}{\cos\alpha}$

$\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bar{g}_{TOTAL} = \int \frac{G\lambda\frac{\cancel{z}}{\cancel{\cos^2\alpha}}\,d\alpha}{\frac{z^{\cancel{2}}}{\cancel{\cos^2\alpha}}}\cdot\cos\alpha\,(-\bar{k}) = \frac{G\lambda}{z}(-\bar{k})\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\cos\alpha\,d\alpha = \cdots = \frac{G\lambda}{z}\,2\,\text{sen}\,\alpha_0(-\bar{k})$$

$\text{sen}(-\alpha_0) = -\text{sen}\,\alpha_0$

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,\alpha_0 &= \frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}} \\ \lambda &= \frac{M}{2L} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \bar{g}_{TOTAL} = -\frac{GM}{z\,2L}\,2\,\frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}}\,\bar{k} = -\frac{GM}{z\sqrt{z^2+L^2}}\,\bar{k}$$

ECUACIÓN MOVIMIENTO : $\bar{F} = m\bar{a}$: $\bar{k}$:
$$-\frac{GM\cancel{m}}{z\sqrt{z^2+L^2}} = \cancel{m}\ddot{z} \Longrightarrow \ddot{z} + \frac{GM}{z\sqrt{z^2+L^2}} = 0$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

POLITÉCNICA — INDUSTRIALES ETSII UPM

Física General I — Curso 2009-10

Hoja de Evaluación Continua nº 7

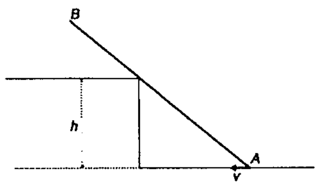
Ejercicios propuestos

VII.1 Justificar si los puntos A y B de un sólido rígido cuyas coordenadas, en un instante dado y en una base cartesiana ortonormal, son $A(1,2,-1)$ y $B(1,-2,1)$ pueden poseer en ese instante las velocidades $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v}_B = -\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, expresadas en esa misma base.

VII.2 En un instante dado, los puntos $A(1,0,0)$ y $C(0,0,1)$ de un sistema indeformable se mueven en el sentido positivo del eje Oz, y el punto $B(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ se mueve en la dirección del vector $(-1,-\sqrt{2},1)$. Si en dicho instante el módulo de las velocidades de los tres puntos es el mismo, e igual a v, determinar, en ese instante:

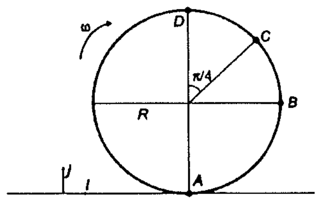
- i) La velocidad angular del sistema.
- ii) La velocidad del punto que está en el origen de coordenadas.
- iii) La velocidad mínima de cualquier punto del sistema.
- iv) La ecuación del eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo.

VII.3 Una barra $\overline{AB}$ de longitud L está apoyada sobre un escalón de altura h, según se muestra en la figura. El extremo A situado a menor altura se mueve con velocidad horizontal constante v. Si se denota por θ el ángulo que forma la barra con la horizontal, hallar la velocidad y la aceleración del otro extremo de la barra, B, en función de θ, L y h. (Se considera que la barra está siempre contenida en el plano de la figura.)



VII.4 Un sólido rígido está sometido a una rotación pura $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$ constante. Si el eje de rotación pasa permanentemente por el origen de coordenadas, obtener la velocidad y aceleración del punto P del sólido que en un instante tiene coordenadas $(1,2,0)$.

VII.5 Un disco de radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal describiendo un movimiento plano con velocidad angular constante ω. Determinar la velocidad y aceleración vectoriales, y sus valores modulares, para los puntos que se indican en la figura.



VII.6 Se considera un cono recto, de semiángulo $\alpha = 30^\circ$ y generatriz $\ell = 40$ cm, que rueda uniformemente sin deslizar sobre el plano $z = 0$ de un sistema de referencia fijo, con su vértice fijo en el origen de coordenadas, pasando sobre el semieje Oy positivo tres veces cada segundo. Si en el instante inicial la generatriz de contacto con el plano está sobre el eje Ox positivo, determinar:

- i) El vector rotación $\boldsymbol{\omega}$ en $t = 5$ s .
- ii) La ecuación del eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo en ese mismo instante, en el sistema de referencia fijo ya definido.
- iii) La velocidad y aceleración del punto de la base del cono que, en ese instante, está en contacto con el plano.

H.E.C. Nº 7

VII.1

$$\left.\begin{array}{l} A(1,2,-1),\ \bar{v}^A(1,2,5) \\ B(1,-2,1),\ \bar{v}^B(-1,1,4) \end{array}\right\}$$

SI PERTENECEN A SÓLIDO RÍGIDO, CUMPLEN TMA VELOC. PROYECTADAS: $\bar{v}^A \cdot \frac{\bar{AB}}{|\bar{AB}|} = \bar{v}^B \cdot \frac{\bar{AB}}{|\bar{AB}|} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (1,2,5)(0,-4,2) = (-1,1,4)(0,-4,2) \Longrightarrow 2 \neq 4 \Longrightarrow$ NO PUEDEN

$[\bar{AB}(0,-4,2)]$

VII.4

$\bar{\omega} = 2\bar{\imath}+\bar{k} = cte$; $P(1,2,0)$; ROTACIÓN PURA E.I.R PASA POR O PERMANENTEM. $\Big\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\bar{v}^O = (0,0,0) \\ \bar{a}^O = (0,0,0)\end{array}$

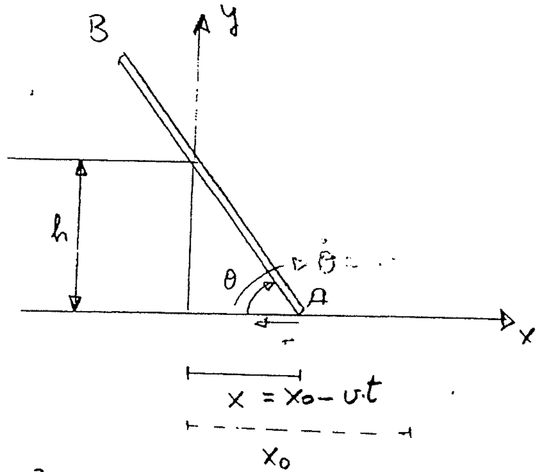
$$\bar{v}^P = \cancel{\bar{v}^O}^{\bar{0}} + \bar{\omega}\times\bar{OP} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\bar{\imath}+\bar{\jmath}+4\bar{k}$$

$$\bar{a}^P = \cancel{\bar{a}^O}^{\bar{0}} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{OP}) + \underbrace{\cancel{\dot{\bar{\omega}}}}_{\bar{0}\,(\bar{\omega}=cte)}\times\bar{OP} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bar{a}^P = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\bar{\imath}-10\bar{\jmath}+2\bar{k}$$

VII.3

$|\bar{AB}| = L$, $\bar{v}^A = v(-\bar{\imath}) = cte,\ h$



$$\left.\begin{array}{l} \bar{v}^B = \bar{v}^B(\theta, L, h) \\ \bar{a}^B = \bar{a}^B(\theta, L, h) \end{array}\right\} ?$$

$$\frac{h}{x} = tg\,\theta \Rightarrow \frac{x}{h} = cotg\,\theta \Rightarrow \frac{\dot{x}}{h} = \frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)}{dt} = \frac{-\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\dot{\theta} = -\frac{\dot{\theta}}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$x = x_0 - v\cdot t \Rightarrow \dot{x} = -v \Rightarrow -\frac{v}{h} = -\frac{\dot{\theta}}{\operatorname{sen}^2\theta} \Longrightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{v}{h}\operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{v}{h}2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}} =$$

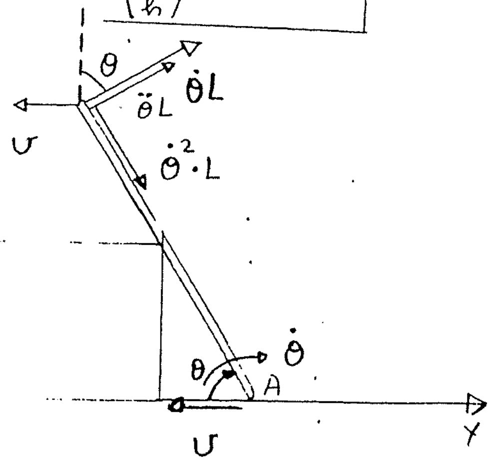
$$= \boxed{\left(\frac{v}{h}\right)^2\cdot 2\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta}$$

$$\bar{v}^B \overset{\text{C.V.S.R.}}{=} \bar{v}^A + \bar{\omega}\times\bar{AB}$$

$\bar{v}^A = v(-\bar{\imath})$

$\bar{\omega}\times\bar{AB} = \frac{v}{h}\cdot\operatorname{sen}^2\theta\cdot L(\operatorname{sen}\theta\,\bar{\imath} + \cos\theta\,\bar{\jmath})$

$(\omega = \dot{\theta})$



$$\bar{a}^B \overset{\text{C.A.S.R}}{=} \cancel{\bar{a}^A}^{\bar{0}} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{AB} + \bar{\alpha}\times\bar{AB}$$

$\bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{AB} = \left(\frac{v}{h}\right)^2\cdot\operatorname{sen}^4\theta\cdot L(\cos\theta\,\bar{\imath} - \operatorname{sen}\theta\,\bar{\jmath})$

$\bar{\alpha}\times\bar{AB} = \left(\frac{v}{h}\right)^2 2\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\cdot L(\operatorname{sen}\theta\,\bar{\imath} + \cos\theta\,\bar{\jmath})$

POR TANTO:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{v}^B = v\left[\left(\frac{\operatorname{sen}^3\theta\cdot L}{h} - 1\right)\bar{\imath} + \frac{L}{h}\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos\theta\,\bar{\jmath}\right] \\ \bar{a}^B = \left(\frac{v}{h}\right)^2\left[\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta\cdot L\cdot 3\,\bar{\imath} + \operatorname{sen}^3\theta\cdot L(-\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta)\,\bar{\jmath}\right] \end{array}\right.$$

VII.2

$A(1,0,0)\ ;\ \bar{v}_A = v\bar{k}$

$C(0,0,1)\ ;\ \bar{v}_C = v\bar{k}$

$B(0,\frac{1}{\sqrt{3}},0);\ \bar{v}_B = v\cdot\dfrac{-\bar{i}-\sqrt{2}\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt{1+2+1}} = \dfrac{v}{2}(-1,-\sqrt{2},1)$

i) $\bar{\omega} = \omega_x\bar{i}+\omega_y\bar{j}+\omega_z\bar{k} = (\omega_x,\omega_y,\omega_z)$

Por C.V.S.R.:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}\times\bar{AB} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}v, -\frac{\sqrt{2}}{2}v, \frac{1}{2}v\right) = (0,0,v) + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{i}: -\frac{1}{2}v = -\frac{\omega_z}{\sqrt{2}} \\ \bar{j}: -\frac{\sqrt{2}}{2}v = -\omega_z \\ \bar{k}: \frac{1}{2}v = \frac{\omega_x}{\sqrt{2}}+\omega_y+v \end{cases}$$

$$\cancel{\bar{v}_A} = \cancel{\bar{v}_C} + \bar{\omega}\times\bar{CA} \Rightarrow (0,0,0) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{i}: 0 = -\omega_y \\ \bar{j}: 0 = \omega_x+\omega_z \\ \bar{k}: 0 = -\omega_y \end{cases}$$

Por tanto: $\omega_z = \frac{\sqrt{2}}{2}v\ ,\ \omega_y = 0\ ,\ \omega_x = -\omega_z = -\frac{\sqrt{2}}{2}v \Longrightarrow \bar{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}v(-1,0,1)$

ii) $$\bar{v}_O = \bar{v}_A + \bar{\omega}\times\bar{AO} = (0,0,v) + \frac{\sqrt{2}}{2}v\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}v, v\right) = v\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$$

iii) $$v_{min} = \bar{v}^P\cdot\frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}\ (\forall P \text{ del sistema}) \Rightarrow v_{min} = \bar{v}^A\cdot\frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = v(0,0,1)\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{v}(-1,0,1)}{\cancel{v}} = v\frac{\sqrt{2}}{2}$$

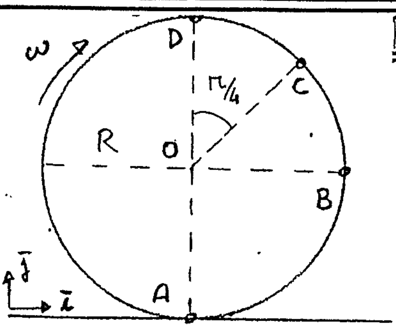
$$\bar{v}_{min} = v_{min}\frac{\bar{\omega}}{|\omega|} = v\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1) = \frac{v}{2}(-1,0,1)$$

iv) $$\bar{r} = \bar{r}_0 + \frac{\bar{v}_O\times\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|^2} + \lambda\bar{\omega} = (0,0,0) + \frac{v\cdot v}{v^2}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} + \lambda v\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right) + \lambda v\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1)$$

$$\text{E.I.R}\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \lambda v\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = -\frac{1}{2} + \lambda v\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

VII.5



Para A

- Por R.S.D.: $\boxed{\bar{v}^A = \bar{0}}$ (en ese instante).

$$\bar{v}^O = \cancel{\bar{v}^A}^{\bar{0}} + \bar{\omega} \times \bar{AO} = \omega R\, \bar{i}\ (\forall t) = cte \Rightarrow$$

$\omega = cte$

$\Rightarrow$ Puedo derivar: $\dfrac{d\bar{v}^O}{dt} = \bar{a}_O = \bar{0}\ (\forall t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{a}^A = \underbrace{\cancel{\bar{a}^O}}_{\bar{0}} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{OA} + \underbrace{\cancel{\bar{\alpha}}\times\bar{OA}}_{\bar{0}\,(\bar{\omega}=cte)} = \omega^2 R\, \bar{j}}$$

Para B

$$\bar{v}^B = \bar{v}^O + \bar{\omega}\times\bar{OB} = \omega R\,\bar{i} + \omega R(-\bar{j})$$

$$\bar{a}^B = \underbrace{\cancel{\bar{a}^O}}_{\bar{0}} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{OB} + \underbrace{\cancel{\bar{\alpha}}\times\bar{OB}}_{\bar{0}} = \omega^2 R(-\bar{i})$$

Hacer a partir de A y comprobar resultados

Para C

$$\bar{v}^C = \bar{v}^O + \bar{\omega}\times\bar{OC} = \omega R\,\bar{i} + \omega R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right)$$

$$= \omega R\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right]$$

$$\bar{a}^C = \underbrace{\cancel{\bar{a}^O}}_{\bar{0}} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{OC} + \underbrace{\cancel{\bar{\alpha}\times\bar{OC}}}_{\bar{0}} = \omega^2 R\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right]$$

||

Para D

$$\bar{v}^D = \bar{v}^O + \bar{\omega}\times\bar{OC} = 2\omega R\,\bar{i}$$

$$\bar{a}^D = \underbrace{\cancel{\bar{a}^O}}_{\bar{0}} + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{OD} + \underbrace{\cancel{\bar{\alpha}\times}\bar{OD}}_{\bar{0}} = -\omega^2 R\,\bar{j}$$

||

Valores modulares:

$|\bar{v}_A| = 0$; $|\bar{a}_A| = \omega^2 R$

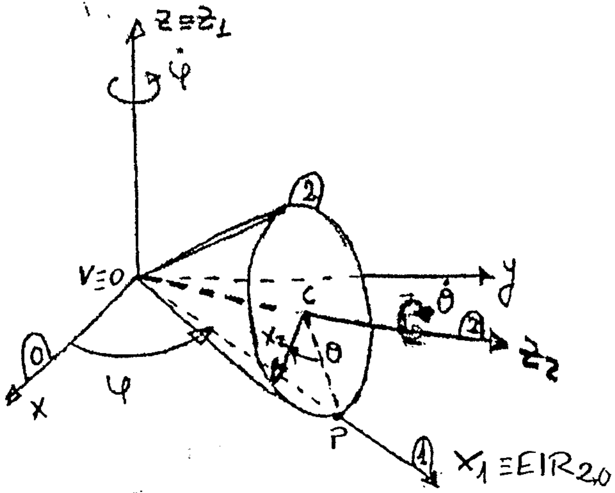
$|\bar{v}_B| = \omega R\sqrt{2}$; $|\bar{a}_B| = \omega^2 R$

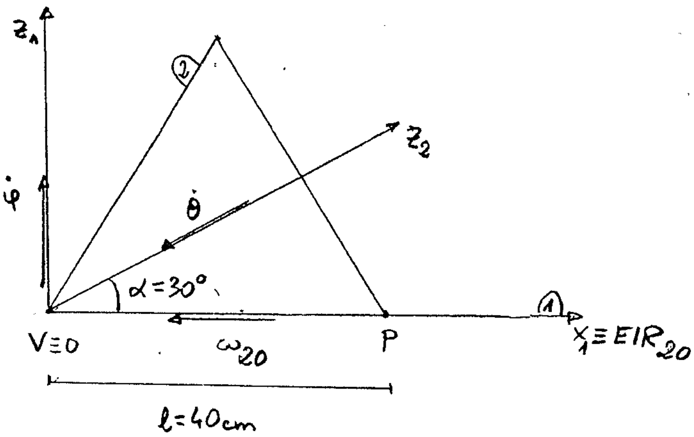
$|\bar{v}_C| = \omega R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $|\bar{a}_C| = \omega^2 R$

$|\bar{v}_D| = 2\omega R$; $|\bar{a}_D| = \omega^2 R$

VII.6

$\alpha = 30°$; $l = 40$ cm ; R.S.D , $V \equiv O$, $\dot{\varphi} = \frac{3 \cdot 2\pi}{1s} = 6\pi \frac{rad}{s}$, $t=0$: Ver figura





i) En $t=5$, $\varphi = \int \dot{\varphi}\, dt = \dot{\varphi} t + \cancel{\varphi_0} \overset{t=5s}{=} 5 \cdot 6\pi = 15 \cdot 2\pi \Rightarrow OX_1 \equiv OX$

$0 \; (\varphi(t=0) = 0 \Rightarrow OX_1 \equiv OX)$

- $OX_1 \equiv$ Generatriz de contacto Cono − Suelo $\equiv$ E.I.R 2 (R.S.D.) $\Rightarrow \bar{\omega}_2 \parallel OX \Rightarrow$ En $t=5s$: $\bar{\omega} \parallel OX_1 \parallel OX$
- $\bar{\omega}_{20} = \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{10} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_{21} = \dot{\theta}(-\bar{k}_2) = \dot{\theta}(-\cos 30\, \bar{\imath} - \operatorname{sen} 30\, \bar{k}) \\ \bar{\omega}_{10} = \dot{\varphi}\, \bar{k} \end{cases}$

Por tanto $\bar{\omega}_{20} = \omega_{20}(-\bar{\imath}_1) = -\dot{\theta} \cos 30\, \bar{\imath}_1 + (\dot{\varphi} - \dot{\theta} \operatorname{sen} 30) \bar{k}_1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{k}_1 : 0 = \dot{\varphi} - \dot{\theta} \operatorname{sen} 30 \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\theta} = 2\dot{\varphi} = 12\pi \frac{rad}{s} \\ \bar{\imath}_1 : -\omega_{20} = -\dot{\theta}\frac{\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}\pi \frac{rad}{s} \end{cases}$

Por tanto $\bar{\omega}_{20} = -6\sqrt{3}\pi \frac{rad}{s} \bar{\imath}_1 \overset{t=5s}{=} -6\sqrt{3}\pi \frac{rad}{s} \bar{\imath}_1$

$\theta = \int \dot{\theta}\, dt = 12\pi \cdot t + \cancel{\theta_0} \longrightarrow$ ($\theta_0 = 0$)

$\rightarrow \theta(t=5) = 60\pi = 30 \cdot 2\pi$: Posic. Cono misma en $t=0$ y $t=5$.

ii) $E.I.R_{20} \equiv OX_1$ ($EIR_{21} \equiv Oz_2$, $EIR_{10} \equiv Oz$)

iii) $\bar{v}^P_{20} = \bar{0}$ (R.S.D.)

$$\bar{a}^P_{20} \overset{C.A.S.R.}{=} \bar{a}^V_{20} + \bar{\omega}_{20} \times (\bar{\omega}_{20} \times \overline{VP}) + \dot{\bar{\omega}}_{20} \times \overline{VP}$$

$\bar{a}^V_{20} = \bar{0}$

$\bar{\omega}_{20} \times (\bar{\omega}_{20} \times \overline{VP}) = 0$

$$\dot{\bar{\omega}}_{20} \times \overline{VP} = \left[\left(\frac{d\bar{\omega}_{21}}{dt}\right)_{S}^{\nearrow \bar{0}\,(\bar{\omega}_{21} = cte \text{ en } S_1)} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{20} \right] \times \overline{VP} = \dot{\varphi}\,\dot{\theta}\frac{\sqrt{3}}{2}(-\bar{\jmath}_1) \times l\,\bar{\imath}_1 = \dot{\varphi}\,\dot{\theta}\frac{\sqrt{3}}{2}\, l\, \bar{k}_1 = 246{,}16305\, \bar{k}_1 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Indusbol.com

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

Física General I — Curso 2007-08

Hoja de Evaluación Continua nº 8 — Fecha límite de entrega: 14 ene 2008

Ejercicios propuestos

VIII.1 Dos masas puntuales iguales m se fijan en puntos diametralmente opuestos de una circunferencia de radio R y masa despreciable. La circunferencia, contenida en un plano vertical, rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, siendo la velocidad de su centro constante, $\mathbf{v}_C = v_C\mathbf{i}$ en el sistema de referencia S respecto al que la recta es fija. En el instante inicial una de las masas está en contacto con la recta horizontal en el punto O.

i) Determinar el momento cinético del sistema formado por las dos masas respecto a O, $\mathbf{L}_O$, y respecto al centro de masas, $\mathbf{L}_C^*$, comprobando que se cumple el primer teorema de König.

ii) Calcular la energía cinética del sistema respecto a S y respecto a S^*, comprobando que se cumple el segundo teorema de König.

No lo hacemos

VIII.2 Se considera un alambre rígido y uniforme, de densidad lineal de masa λ, en forma de cuadrante circular, colocado con su centro en el origen de coordenadas de un sistema cartesiano $Oxyz$ y tal que sus extremos tienen por coordenadas $A(0, a, 0)$ y $B(0, 0, a)$. El alambre descrito se hace girar con velocidad angular ω alrededor del eje Oz. Determinar su energía cinética y el momento cinético respecto al origen de coordenadas.

Choques

VIII.3 Sobre una mesa de billar suficientemente amplia se sitúan tres bolas en reposo de igual radio, en el orden B_1, B_2 y B_3, de modo que sus respectivos centros se encuentren sobre una misma recta. Sabiendo que sus masas respectivas guardan la relación $m_1 = 2m_2 = m_3$, analícense los diferentes choques que se producirán entre las diferentes bolas cuando se comunica a la bola B_1 una velocidad inicial $v_1 = 6,0$ m/s dirigida hacia la bola B_2. Supóngase en todos los casos que los choques son elásticos, esto es, en cada interacción se conserva la cantidad de movimiento y la energía cinética.

VIII.4 Una cuerda está arrollada alrededor de un cilindro macizo, de radio R y masa M y sujeta al techo. Determinar la velocidad del cilindro después de haber caido una altura s. Repetir el problema suponiendo que el cilindro es hueco y tiene la masa concentrada en su superficie.

VIII.5 Una cuña de masa M y ángulo sobre la horizontal θ se encuentra en reposo sobre una balanza con platillo horizontal, que sólo registra fuerzas en dirección vertical, a la que se halla unida solidariamente, de manera que la indicación de ésta es Mg. En un momento dado, se situa un pequeño bloque de masa m en la parte más alta del plano inclinado de la cuña y se deja deslizar hacia abajo. El rozamiento entre bloque y cuña se considera despreciable. Determinar la indicación de la balanza mientras el bloque desliza.

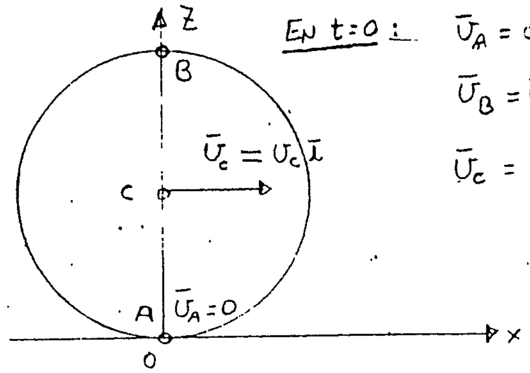
VIII.6 Un cilindro de 30 cm de radio y 25 kg de peso se eleva mediante un cable enrollado en su periferia. A los dos extremos del cable se aplican fuerzas de distinto módulo, de manera que el cilindro adquiere un movimiento de rotación con una aceleración angular de 6,44 rad/s^2 de sentido contrario a las agujas del reloj, y asciende con una aceleración de 1 m/s^2. Determinar la tensión soportada por ambas secciones del cable.

VIII.7 Una barra de acero de 2 m de largo y 100 kg de peso se encuentra con uno de sus extremos sobre el suelo y el otro sujeto por una cuerda en vertical. La barra en equilibrio forma un ángulo de 30° con el suelo. Determinar las reacciones en el punto de contacto en esta configuración y justo después de que se rompa la cuerda, si se considera despreciable el rozamiento.

H.E.C.S

1/5

VIII.1



En t=0: $\bar v_A = 0$ (R.s.D)

$$\bar v_B = \bar v_A + \bar\omega \times \overline{AB} = \omega \cdot 2R\,\bar i = 2v_c \bar i$$

$$\bar v_c = \bar v_A + \bar\omega \times \overline{AC} = \omega \cdot R\,\bar i$$

i) $\bar L_O = \sum_i \bar r_i \times m_i \bar v_i = (\bar r_A \times m_A \underbrace{\bar v_A}_{\bar 0}) + (\bar r_B \times m_B \bar v_B) = 2R\bar k \times m\, 2v_c \bar i = 4mRv_c \bar j$

$\bar L_c^* = \bar L_c = (\overline{CA} \times m_A \underbrace{\cancel{\bar v_A}}_{\bar 0}) + (\overline{CB} \times m_B \bar v_B) = R\bar k \times m\, 2v_c \bar i = 2mRv_c \bar j$

1er Tma König: $\bar L_O = \bar r_c \times M\bar v_c + \bar L_c^* = (R\bar k \times 2m \cdot v_c \bar i) + 2mRv_c \bar j = 4mRv_c \bar j$

$M = 2m$

ii) $E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_A \underbrace{\cancel{v_A}}_{0}{}^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m\, 4v_c^2 = 2mv_c^2$

$E_c^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} = \frac{1}{2} m_A v_A^{*2} + \frac{1}{2} m_B v_B^{*2} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 = m v_c^2$

$\bar v_A^* = \underbrace{\cancel{\bar v_A}}_{0} - \bar v_c$; $\bar v_B^* = \underbrace{\cancel{\bar v_B}}_{2\bar v_c} - \bar v_c$

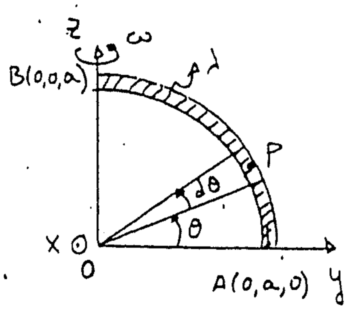
2º Tma König: $E_c = \frac{1}{2} M v_c^2 + E_c^* = \frac{1}{2} 2m \cdot v_c^2 + m v_c^2 = 2m v_c^2$

VIII.2

- $dm = \lambda\, dl = \lambda\, a\, d\theta$
- $\bar\omega = \omega \bar k$
- $\bar v_P = \cancel{\bar v_O}^{\,\bar 0} + \bar\omega \times \overline{OP} = \omega a \cos\theta (-\bar i)$

$E_c = \int \frac{1}{2} dm\, v^2$

$\bar L_O = \int \bar r \times dm\, \bar v$



x,y,z EJES FIJOS AL ALAMBRE

$$\boxed{E_c} = \int \frac{1}{2} dm\, v^2 = \int \frac{1}{2} \lambda a\, d\theta\, \omega^2 a^2 \cos^2\theta = \frac{1}{2}\lambda a^3 \omega^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda a^3 \omega^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2}\lambda a^3 \omega^2 \left[\frac{\pi}{4} + 0\right] = \boxed{\frac{\pi}{8}\lambda a^3 \omega^2}$$

$$\bar L_O = \int \bar r \times dm\, \bar v = \int (a\cos\theta\, \bar j + a\,\mathrm{sen}\,\theta\, \bar k) \times \lambda a\, d\theta\, \omega a \cos\theta (-\bar i) = \lambda a^3 \omega \left[\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos^2 d\theta\, \bar k + \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta\, d\theta (-\bar j)\right]$$

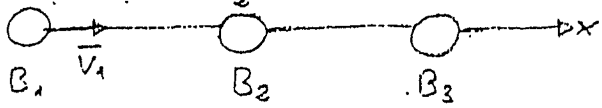
$$= \lambda a^3 \omega \left[\frac{\pi}{4}\bar k - \frac{1}{2}\bar j\right]$$

JC Aula de Ingeniería | Ingenieros Industriales | Física I
c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. | Profesor
Tlfno: 91 535 75 29 | *Alex García*

V.III 3) $\cdot\ m_1 = 2m_2 = m_3$

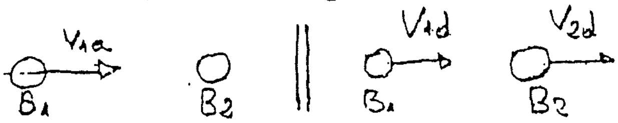
$\cdot\ V_1 = 6$ m/s

m_1 $\quad m_2 = \frac{m_1}{2}$ $\quad m_1$



· CHOQUE ELÁSTICO : $Q = 0$: $\Delta E_c = 0$

a) 1er CHOQUE : $B_1 \longrightarrow B_2$



• $\bar{P}_{SIST} = \overline{cte} \Longrightarrow \bar{P}_{SIST\,ANTES} = \bar{P}_{SIST\,DESPUÉS} \Longrightarrow m_1 V_{1a}\bar{\imath} + m_2 V_{2a}\bar{\imath} = m_1 V_{1d}\bar{\imath} + m_2 V_{2d}\bar{\imath}$

$$m_1 V_{1a}\bar{\imath} + \bar{0} = m_1 V_{1d}\bar{\imath} + \frac{m_1}{2} V_{2d}\bar{\imath}$$

$$\boxed{V_{1d} = V_{1a} - \frac{V_{2d}}{2}} \quad (1)$$

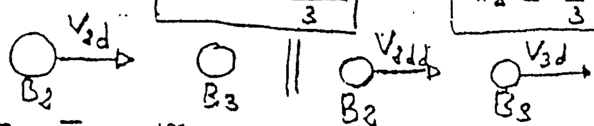
• $E_{CIN\,SIST} = cte \Longrightarrow E_{CIN\,a} = E_{CIN\,d} \Longrightarrow \frac{1}{2} m_1 V_{1a}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 V_{1d}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1}{2} V_{2d}^2$

$$\boxed{V_{1a}^2 = V_{1d}^2 + \frac{V_{2d}^2}{2}} \quad (2)$$

· (1) ⟶ (2) : $\cancel{V_{1a}^2} = \cancel{V_{1a}^2} + \frac{V_{2d}^2}{4} - V_{1a}V_{2d} + \frac{V_{2d}^2}{2} \Longrightarrow \left(\frac{3}{4}V_{2d} - V_{1a}\right)V_{2d} = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} V_{2d} = 0 \text{ (ANTES DE CHOCAR)} \\ \boxed{V_{2d} = \frac{4V_{1a}}{3}} \Longrightarrow \boxed{V_{1d} = \frac{1}{3}V_{1a}} \end{cases}$

b) 2º CHOQUE : $B_2 \longrightarrow B_3$



• $\bar{P}_{SIST} = \overline{cte} \Longrightarrow \frac{m_1}{2} \cdot V_{2d}\bar{\imath} + \bar{0} = \frac{m_1}{2} V_{2dd}\bar{\imath} + m_1 V_{3d}\bar{\imath}$

$$\frac{V_{2d}}{2} = \frac{V_{2dd}}{2} + V_{3d} \Longrightarrow \boxed{\frac{4/3 \cdot V_{1a}}{2} = \frac{V_{2dd}}{2} + V_{3d}} \quad (3)$$

• $E_{CIN\,SIST} = cte \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{m_1}{2} V_{2d}^2 + 0 = \frac{1}{2}\frac{m_1}{2} V_{2dd}^2 + \frac{1}{2} m_1 V_{3d}^2$

$$\boxed{\frac{4}{9} V_{1a}^2 = \frac{1}{4} V_{2dd}^2 + \frac{1}{2} V_{3d}^2} \quad (4)$$

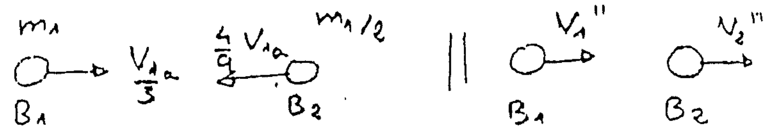
(3) ⟶ (4) : OPERANDO : $\frac{3V_{2dd}^2}{8} - \frac{V_{1a} \cdot V_{2dd}}{3} - \frac{4V_{1a}^2}{18} = 0 \Longrightarrow V_{2dd} = \frac{4}{3}\left(\frac{V_{1a}}{3} \pm \frac{2V_{1a}}{3}\right)$

H.E.C. 3/5

$$V_{2dd} = \frac{4}{3} V_{1a} \quad (\text{ANTES } 2^{\circ} \text{ CHOQUE}) \longleftrightarrow \begin{cases} V_{3a} = 0 \\ V_{3d} = \dfrac{2V_{1a}}{3} + \dfrac{2V_{1a}}{9} = \dfrac{8}{9} V_{1a} \end{cases}$$

$$\rightarrow V_{2dd} = -\frac{4 V_{1a}}{9} \quad (\text{DESPUÉS } 2^{\circ} \text{ CHOQUE}) \Longrightarrow$$

c) 3^{er} CHOQUE



- $\bar{P}_{SIST} = \overline{cte}$: $m_1 \frac{V_{1a}}{3} \bar{i} - \frac{m_1}{2} \frac{4}{9} V_{1a} \bar{i} = m_1 V_1'' \bar{i} + \frac{m_1}{2} V_2'' \bar{i}$

$$\boxed{\frac{V_{1a}}{3} - \frac{2}{9} V_{1a} = V_1'' + \frac{V_2''}{2}} \quad (5)$$

- $E_{CIN\,SIST} = cte$: $\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{V_{1a}}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{2} \left(\frac{4}{9} V_{1a}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1''^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{2} V_2''^2$

$$\boxed{\frac{V_{1a}^2}{9} + \frac{8}{81} V_{1a}^2 = V_1''^2 + \frac{V_2''^2}{2}} \quad (6)$$

(5) ⟶ (6) : OPERANDO : $\frac{3}{4} V_2''^2 - \frac{V_1 V_2''}{9} - \frac{16}{81} V_{1a}^2 = 0 \Longrightarrow V_2'' = \dfrac{\frac{V_{1a}}{9} \pm \sqrt{\frac{V_{1a}^2}{81} + \frac{48 V_{1a}^2}{81}}}{3/2}$

$$V_2'' = \frac{2}{3}\left(\frac{V_{1a}}{9} \pm \frac{7}{9} V_{1a}\right) \begin{cases} V_2'' = -\frac{4}{9} V_{1a} \ (\text{ANTES CHOQUE}) \\ V_2'' = \frac{16}{27} V_{1a} \ (\text{DESPUÉS}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_1'' = +\frac{V_{1a}}{3} \\ V_1'' = -\frac{5}{27} V_{1a} \end{cases}$$

(VA HACIA LA IZQ)

d) ¿4º CHOQUE?

$$\left.\begin{aligned} V_1'' &= \frac{5}{27} V_{1a} (-\bar{i}_1) \\ V_2'' &= \frac{16}{27} V_{1a} \bar{i}_1 \end{aligned}\right\} \text{NO CHOCAN} \qquad \left.\begin{aligned} V_2'' &= \frac{16}{27} V_{1a} \bar{i}_1 \\ V_{3d} &= \frac{8}{9} V_{1a} \bar{i}_1 \end{aligned}\right\} \bar{V}_2'' < \bar{V}_{3d} \Longrightarrow \text{NO CHOCAN}$$

$$V_1'' = -1{,}1 \ \bar{i} \ \frac{m}{s}$$

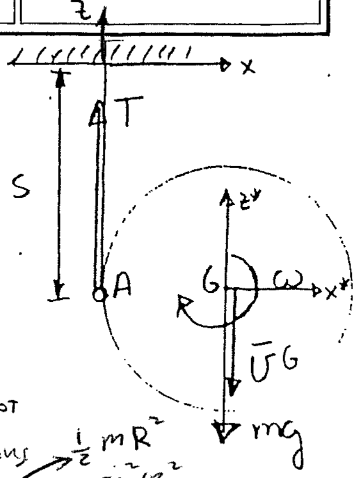
$$V_2'' = 3{,}56 \ \bar{i} \ \frac{m}{s}$$

$$V_{3d} = V_3'' = 5{,}33 \ \bar{i} \ \frac{m}{s}$$

Aula de Ingeniería JC	Ingenieros Industriales	Física I
	c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29	Profesor Alex García

VIII.4

- Cilindro Macizo (Homogéneo): R, M
- $I_{e_G} = \frac{1}{2} MR^2$ (Tomado como dato) $= I_{y^*}$



. $\bar{v}^A \overset{\text{R.S.D.}}{=} \bar{0}$ (Cilindro no desliza sobre cuerda) (Se supone)

. T no trabaja. $\tau_T = \int \bar{T} \cdot \cancel{\bar{v}_A}^{\bar{0}} \, dt = 0$; mg $^{(-k)}$ conservat $\rightarrow E_p = mgz + C$ $\left(\begin{smallmatrix} z\rightarrow 0 \\ E_{p,z=0} \\ = 0 \end{smallmatrix}\right)$; $E_{MEC} = cte = E_{CIN} + E_{POT}$

Reposo inicial; $E_p(z=0) = 0$; τ Koenigs; $\frac{1}{2} mR^2$; v_G^2/R^2

Por tanto: $Ec_i + Ep_i = Ec_s + Ep_s \Rightarrow \bar{0} + 0 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2} I_{y^*} \omega^2}_{\frac{1}{2} I_{y^*} w^2 (\text{caso B})} - mgs$; $v_G^2 = \dfrac{mgs}{\frac{1}{2} m + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{mR^2}{R^2}}$; $v^G = \sqrt{\frac{4}{3} g \cdot s}$

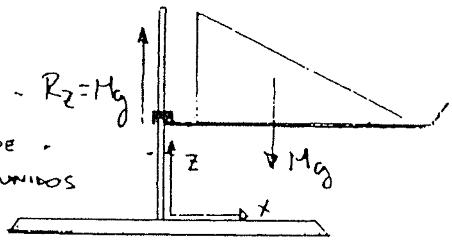
Por C.V.S.R.: $\cancel{v_G} = \bar{v}^A + \omega \times \bar{AG} \Rightarrow v^G = \omega \cdot R$

. Para cilind. hueco: $I_y^* = mR^2 \Rightarrow v^G = \sqrt{g \cdot s}$

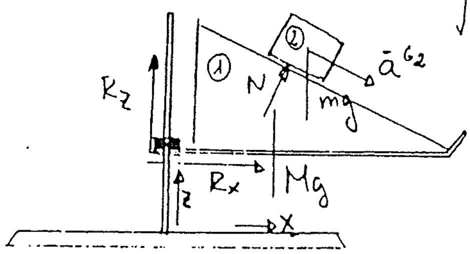
VIII.5

. $R_z = Mg$

* Considero plato de balanza y cuña unidos y "elimino" una normal

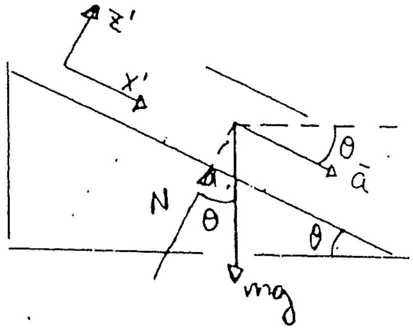


Solo con cuña



Cuña ① + Bloque ②

Aislando el bloque ②:



$\Sigma \bar{F}_{EXT_{②}} = m \bar{a}^{G_2}$

$\bar{i}'$: $mg \, \text{sen}\theta = m a_{x'} \Rightarrow \bar{a}^{G_2} = g \, \text{sen}\theta \, \bar{i}' =$
$= g \, \text{sen}\theta (\cos\theta \, \bar{i} - \text{sen}\theta \, \bar{k})$

$\bar{j}'$: $N - mg\cos\theta = 0$

Para Sistema ①+②: N es interior al sistema, no aparece:

$\Sigma \bar{F}_{EXT_{SIST}} = m_{SIST} \bar{a}_{G_{SIST}} = M \cancel{\bar{a}^{G_1}}^{\bar{0}} + m \bar{a}^{G_2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_{EXT}: R_x \bar{i} + R_z \bar{k} \, ; \, Mg(-\bar{k}), mg(-\bar{k}) \\ m_{SIST} \bar{a}_{G_{SIST}} = mg \, \text{sen}\theta (\cos\theta \, \bar{i} - \text{sen}\theta \, \bar{k}) \end{array} \right.$

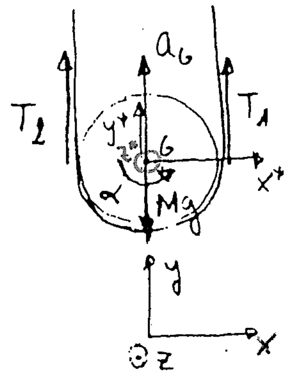
Por tanto, en $\bar{k}$: $R_z - (M+m)g = -mg \, \text{sen}^2\theta \Longrightarrow R_z = Mg + mg(1 - \text{sen}^2\theta)$

$R_z = Mg + mg\cos^2\theta$

JC Aula de Ingeniería	Ingenieros Industriales	Física I
	c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29	Profesor *Alex García*

VIII.6)

DATOS:
$R = 30\cdot10^{-2}$ m
$M = 25$ Kg
$\alpha = 6{,}44$ rad/s
$a_G = 1$ m/s²



• $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}_G$: $\bar{j}$: $T_1 + T_2 - Mg = Ma_G$ (1)

• $\Sigma \bar{M}_G = \dfrac{d\bar{L}_G}{dt}$: $\bar{k}$: $\Sigma M_{z^*} = I_{z^*}\dot{\bar{\omega}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow T_1\cdot R - T_2\cdot R = I_{z^*}\dfrac{d\omega}{dt}$ (2)

$\bar{\omega} = \omega\bar{k}$
$\bar{\alpha} = \alpha\bar{k} = \dfrac{d\omega}{dt}\bar{k}$

$I_{z^*} = \frac{1}{2}MR^2 = cte$ (CILIND.) $\Longrightarrow \begin{cases} T_1 + T_2 - Mg = Ma_G \\ (T_1 - T_2)R = \frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha \end{cases}$ $T_1 = \frac{1}{2}M(g+a^G) + \frac{1}{4}MR\alpha$, $T_2 = \frac{1}{2}M(g+a^G) - \frac{1}{4}MR\alpha$

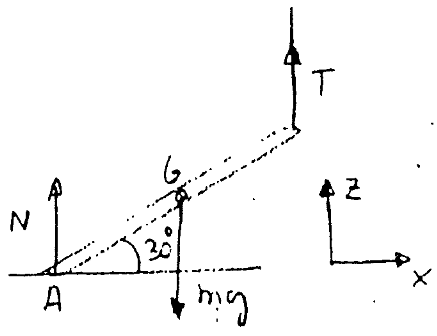
$T_1 = 147{,}075$ N

$T_2 = 122{,}925$ N

VIII.7) (Cool)

DATOS:
$L = 2$ m
$M = 100$ Kg
$\theta = 30°$

Con Cuerda (Estática):



$\Sigma \bar{F} = \bar{0}$: $\bar{k}$: $T + N - mg = 0$

$\Sigma \bar{M}_A = \bar{0}$: $\bar{j}$: $T\cdot l\cos30° - mg\frac{l}{2}\cos30° = 0$

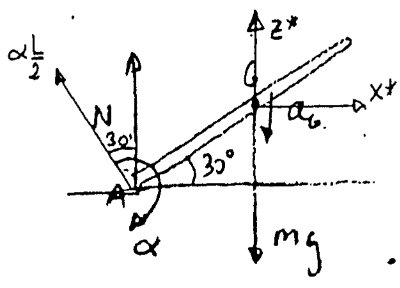
Solución:
$T = mg/2$
$N = mg/2$.

Sin Cuerda (Dinám), en la misma posición:

$\Sigma \bar{F} = m\cdot\bar{a}^G$: $\bar{i}$: $0 = ma_x^G \Rightarrow a_x^G = 0 \Rightarrow v_x^G = v_{x_0}^G = 0$

$\bar{k}$: $N - mg = -ma_z^G$ (1)

Solución:
$\alpha = \frac{g}{L}\frac{12}{13}\sqrt{3}$
$a_{G_z} = \frac{9}{13}g$
$N = \frac{4}{13}mg$



$\Sigma \bar{M}_G = \dfrac{d\bar{L}_G}{dt} \Longrightarrow \bar{j}$: $N\,\frac{L}{2}\cos30 = I_{y^*}\alpha$ (2)

$\bar{0}$ ($\bar{\omega} = \bar{0}$ en $t=0$) $\quad (I_{y^*} = \frac{1}{12}ML^2)$

• $\bar{a}_A = \bar{a}_G + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{GA} + \bar{\alpha}\times\bar{GA} = -a_G\bar{k} + \alpha\frac{L}{2}(-\text{sen}30\,\bar{i} + \cos30°\,\bar{k})$

• Como $\bar{a}_A \parallel \bar{i} \Longrightarrow -a_{G_z} + \alpha\frac{L}{2}\cos30 = 0$. (3)

POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

INDUSTRIALES ETSII UPM

Física General I — Curso 2007-08

Hoja de Evaluación Continua nº 9 — Fecha límite de entrega: 21 ene 2008

Ejercicios propuestos

IX.1 Determinar el momento de inercia de:

i) Una esfera maciza de radio R y masa M respecto a uno de sus diámetros.

ii) Un cubo de arista a y masa M respecto a una diagonal que pase por vértices opuestos.

iii) Un disco de radio R, masa M y densidad superficial $\sigma(r) = \sigma_0 r$ respecto a su eje de revolución.

IX.2 Se considera un cilindro homogéneo de altura igual al diámetro. Determinar, en función de su masa M y su radio R los siguientes parámetros:

i) Momento de inercia respecto al eje de simetría y a una generatriz.

ii) Momento de inercia respecto a la base, a un plano axial y a un plano tangente a la superficie lateral.

iii) Momento de inercia respecto al centro de masas.

iv) Momento de inercia respecto a una recta diametral de una base.

ΔP

IX.3 Determinar la velocidad de rotación que adquirirá un volante de inercia cilíndrico de masa M y radio R que puede girar alrededor de un eje fijo coincidente con su eje de simetría, cuando es golpeado en un punto de su periferia por una masa puntual m que tiene una velocidad v e incide según una dirección tangencial al mismo contenida en un plano perpendicular al eje de giro, suponiendo que la masa queda adherida al volante.

si piden t
buscas a = cte
integras
sacas v(t)
sacas x(t)

IX.4 Obtener la relación entre los tiempos empleados por tres cuerpos rodantes de la misma masa y radio externo (uno tubular, con la masa concentrada en la periferia, uno cilíndrico macizo homogéneo y otro esférico homogéneo) en llegar a la base de un plano inclinado de ángulo θ cuando se ponen en movimiento sin velocidad inicial desde una altura h y ruedan sin deslizar paralelamente a su eje de simetría a lo largo de una línea de máxima pendiente del plano.

IX.5 Sobre una polea formada por un disco uniforme de radio R y masa M se cuelga una cuerda pesada de masa m y longitud L, de forma que la diferencia de altura entre sus extremos en el instante inicial es d. Determinar la velocidad angular de la polea cuando el extremo más corto de la cuerda alcanza la altura del centro de la polea. Se considera que no hay deslizamiento entre la cuerda y la polea.

IX.6 Un eje CD de longitud L tiene sus extremos apoyados en dos cojinetes en los puntos $C(-L/2, 0, 0)$ y $D(L/2, 0, 0)$. El eje gira con movimiento de rotación uniforme de velocidad angular ω. Existen dos masas m que giran solidarias con dicho eje y que en el instante considerado ocupan los punto $A(b/2, a, 0)$ y $B(-b/2, -a, 0)$. Las masas y el eje forman un conjunto rígido, unidos por varillas de masas despreciables. Se pide:

i) Hallar la expresión vectorial de las fuerzas de reacción en los cojinetes.

ii) Discutir si el sistema está estática y/o dinámicamente equilibrado.

iii) Hallar la relación M/m que permite que, al colocar dos masas de valor M, en los puntos de abscisas b y $-b$, a distancia del eje $|y| = a/3$, en el mismo plano que las masas iniciales, los cojinetes no sufran acción dinámica al girar el sistema.

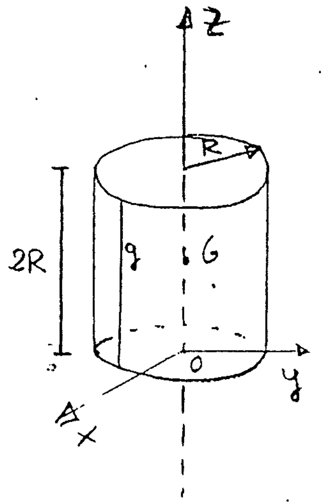
H.E.C. Nº 9 — 24 - ENERO - 2005

IX.1

VER EJ. GEOM. MAS. (II)

IX.2

CILINDRO: $M, R, h = 2R$



i) $I_z = \int r^2 dm = \int_{r=0}^{r=R} r^2 \rho 2\pi r \, 2R dr = \rho \cdot 4\pi R \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$

$\cdot \ r = r$

$\cdot \ dm = \rho dV_{ol} = \rho 2\pi r \cdot 2R dr$

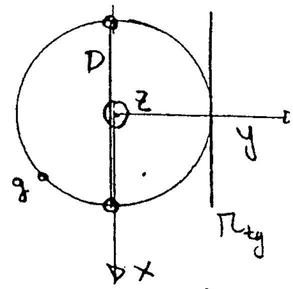
$\rho = \frac{M}{\pi R^2 \cdot 2R}$

$\cdot \ I_g = I_z + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$ (STEINER)

ii) $I_{xy} = \int r^2 dm = \int_{z=0}^{z=2R} z^2 \rho \pi R^2 dz = \rho \pi R^2 \frac{8R^3}{3} = \frac{4}{3} MR^2$

$r = z$

$dm = \rho dV_{ol} = \rho \cdot \pi R^2 dz$



$I_{xz} + I_{yz} = 2 I_{xz} = I_z \Rightarrow I_{xz} = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{4} MR^2$

$I_{xz} = I_{yz}$ (SIMETRÍA)

$I_{\pi_{xy}} = I_{xz} + MR^2 = \frac{5}{4} MR^2$ (STEIN.)

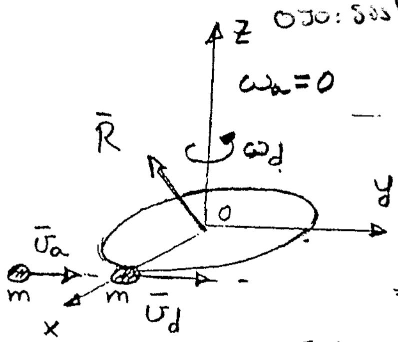
iii) $I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \frac{4}{3} MR^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} MR^2 = \frac{11}{6} MR^2$

$I_G = I_0 - MR^2 = \frac{5}{6} MR^2$ (STEIN.)

iv) $I_D = I_{xz} + I_{xy} = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{4}{3} MR^2 = \frac{19}{12} MR^2$

IX.3

- Volante : M, R
- masa : m, v
- Choque inelástico
- Eje OZ fijo, de giro
- No se especifican verticales ni horizontales $\Rightarrow$ No considero los pesos (si los considerara en dirección $(-\bar{k})$, serían paralelos a Z y darían $M_Z=0$)



OJO: sistema no aislado $\sum \bar{F}_{ext} = \bar{R} \neq 0 \rightarrow \bar{P}_{sist} \neq cte$

Considerando el sistema masa + volante, en el choque aparecerán reacciones internas entre masa y volante, y reacciones externas en el eje que impiden desplazamiento del volante y que cortan a Z, dando $M_Z = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Por Tma. Mom Cinét Áxico según Z para sist.

$$\sum M_{Z\,\substack{EXT\\SIST}} = 0 = \frac{dL_{Z_{SIST}}}{dt} \Rightarrow L_{Z_{SIST}} = L_{Z_m} + L_{Z_{VOL}} = cte$$

$$\left.\begin{aligned} L_{Z_m} &= \bar{L}_{m,O}\cdot\bar{k} = (\bar{r}\times m\bar{v})\cdot\bar{k} = Rmv \\ L_{Z_{VOL}} &= \bar{L}_{VOL,O}\cdot\bar{k} = I_{Z_{VOL}}\,\omega \end{aligned}\right\} L^{a}_{Z_m} + L^{a}_{Z_{VOL}} = L^{d}_{Z_m} + L^{d}_{Z_{VOL}}$$

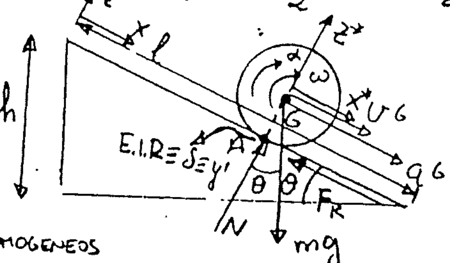
($\bar{r}$, $\bar{\tau}$, $m\bar{v}$)

Por tanto $\Longrightarrow R\cdot m v_a + I_Z\cdot \cancel{\omega_a} = Rmv_d + I_Z\,\omega_d \quad (1)$ (con $\omega_a = 0$)

Después de choque, m pegada a volante $\Longrightarrow$ C.V.S.R : $\bar{v}^m = \bar{v}^O + \bar{\omega}\times \bar{Om} = \bar{0} + \omega_d\cdot R\bar{j} \quad (2)$ $\Big\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow Rmv = Rm\,\omega_d\cdot R + \frac{1}{2}MR^2\omega_d \Rightarrow \omega_d = \frac{R\cdot m\cdot v}{R^2 m + \frac{1}{2}MR^2}$$

IX.4



Caso B

Tubo, Cilindro, Esfera $\Big\}$ M, R, homogéneos

Plano : θ, h

$$\text{R.S.D.}\begin{cases} \bar{v}^G = \bar{v}^A + \bar{\omega}\times\bar{AG} = \omega\cdot R\bar{\imath} \Rightarrow \\ \Rightarrow R = cte,\ \bar{\imath} = cte \Rightarrow \text{Derivando:} \\ \bar{a}^G = \alpha\cdot R\bar{\imath} \Rightarrow a^G = \alpha\cdot R \end{cases}$$

G realiza movim rectilíneo. Si consigo a^G y la puedo integrar podría relacionar ℓ y t. Por RSD tengo relación $a^G \leftrightarrow \alpha$.

Por ser sólidos homogéneos en R.S.D. aplico Tma Mom. Cinet Áxico en $S \equiv z'$

$I_{y'} = I_{y^*} + mR^2$; $I_{y^*} = cte$

G realiza mov. rectilíneo unif. acelerado

- N y F_R cortan a y' (dan $M_{y'} = 0$)
- $\sum M_{y'} = mg\,\text{sen}\theta\cdot R$

$\Big\} \Rightarrow \sum M_{y'} = I_{y'}\alpha \Longrightarrow mg\,\text{sen}\theta\cdot R = (I_{y^*} + mR^2)\,\alpha$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{mg\,\text{sen}\theta R}{I_{y^*} + mR^2} \Rightarrow a_G = \frac{mg\,\text{sen}\theta R^2}{I_{y^*} + mR^2} \Longrightarrow$$

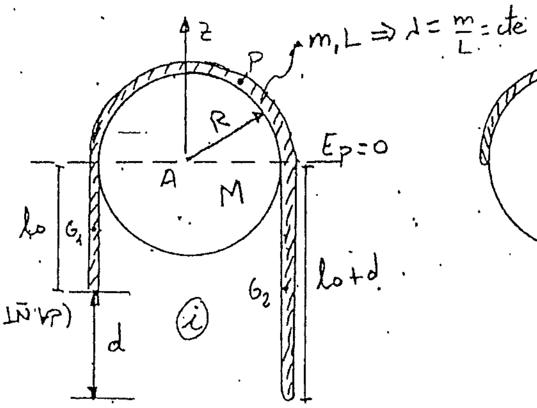
- Partiendo del reposo: $v_G(t=0) = 0$ y $a_G = cte \Longrightarrow x_G = \frac{1}{2}a_G\cdot t^2$
- $x(t_f) = \ell \Rightarrow t_f = \sqrt{\dfrac{2\ell}{\dfrac{mg\,\text{sen}\theta R^2}{I_{y^*} + mR^2}}} = \underbrace{\sqrt{\dfrac{2h}{g\,\text{sen}^2\theta}}}_{C}\sqrt{1 + \dfrac{I_{y^*}}{mR^2}}$

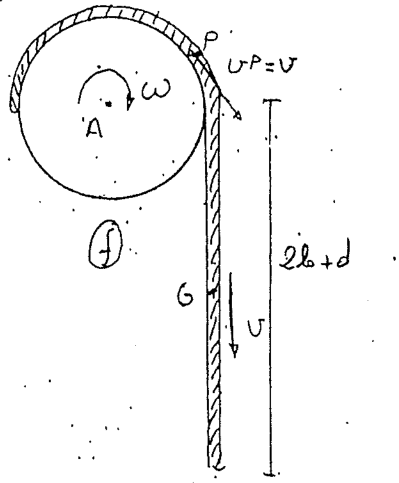
$$\text{Por tanto, con} \begin{cases} I_{y^*TUBO} = mR^2 \\ I_{y^*CIL} = \frac{1}{2}mR^2 \\ I_{y^*ESF} = \frac{2}{5}mR^2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{t_{TUBO}}{\sqrt{2}} = \frac{t_{CIL.}}{\sqrt{3/2}} = \frac{t_{ESF}}{\sqrt{7/5}} = C$$

IX.5

POLEA : M, R

CUERDA : m, L





SOBRE EL SISTEMA CUERDA + POLEA ACTÚAN:

- $m\vec{g}$: CONSERVAT
- $\vec{N}$: NO CONSERVAT, PERO $\tau_N = \int \vec{N}\,\vec{v}_P\,dt = 0$ $(\vec{v}_P \perp \vec{N}\ \forall P)$
- $M\vec{g}$: CONSERVAT
- $\vec{R}_A$: NO CONSERVAT PERO $\tau_{\vec{R}_A} = 0$ PUES $\vec{v}^A = \vec{0}$

$$L = l_0 + \pi R + l_0 + d \Rightarrow l_0 = \frac{L - \pi R - d}{2}$$

POR TANTO EN SISTEMA CUERDA + POLEA, $E_{MEC_{SIST}} = E_{C_{SIST}} + E_{P_{SIST}} = cte$

$$\cancel{E_{C_i}}^{\,0}{}_{SIST} + E_{P_i\,SIST} = E_{C_f\,SIST} + E_{P_f\,SIST}$$

$$0 + 0 - \frac{m}{L} l_0 g \frac{l_0}{2} - \frac{m}{L}(l_0+d) g \left(\frac{l_0+d}{2}\right) + \cancel{\frac{m}{L}\cdot\pi R\cdot\frac{2R}{\pi}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_y \omega^2 - \frac{m}{L}(2l_0+d) g \left(\frac{2l_0+d}{2}\right) + \cancel{\frac{m}{L}\cdot\pi R\cdot\frac{2R}{\pi}}$$

$$-\frac{mg}{2L}\left[l_0^2 + (l_0+d)^2\right] = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} M R^2 \omega^2 - \frac{mg}{2L}(2l_0+d)^2 \ ; \ \text{POR NO DESL.: } \vec{v}^P = \cancel{\vec{v}^A}^{\,0} + \vec{\omega} \times \vec{AP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \omega \cdot R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{mg}{2L}\left[2l_0^2 + \cancel{d^2} + 2 l_0 d\right] = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} M \cancel{R^2} \frac{v^2}{\cancel{R^2}} - \frac{mg}{2L}(4l_0^2 + \cancel{d^2} + 4 l_0 d)$$

$$v^2 = \frac{\frac{mg}{\cancel{2}L}(\cancel{2}l_0^2 + \cancel{2}l_0 d)}{\frac{1}{2} m + \frac{1}{4} M} = \frac{4mg\,(l_0^2 + l_0 \cdot d)}{L\cdot(2m+M)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{\frac{4mg\,(l_0^2 + l_0 d)}{L\,(2m+M)}}}{R}$$

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

POLITÉCNICA

INDUSTRIALES ETSII | UPM

Física General I — Curso 2008-09

Hoja de Evaluación Continua nº 10 — Fecha límite de entrega: 22 ene 2009

Ejercicios propuestos

X.1 Un poste vertical de acero en forma de cilindro macizo de 15 cm de diámetro y 3 m de largo debe soportar una carga de 80000 N.

i) Determinar la tensión de compresión a que se somete el poste en caso de considerar despreciable el efecto de su propio peso.

ii) Determinar en este caso la deformación que sufre el poste.

iii) Determinar cómo variarán la tensión de compresión y la deformación calculadas en el caso de tomar en consideración el propio peso del poste.

La densidad del acero es 7860 kg/m^3, el módulo de Young es $Y = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2.

X.2 Una presa tiene la forma de un sólido rectangular. El lado que da al lago tiene una superficie S y una altura H. La superficie del agua llega al borde de la presa. Obtener la fuerza horizontal neta ejercida por el agua sobre la presa y el momento de fuerzas respecto a un eje longitudinal situado en su base y coincidente con su arista en contacto con el agua del lago. Determinar la posición del eje central del sistema de fuerzas hidrostáticas sobre la presa.

X.3 Determinar la posición de equilibrio de un bloque de madera ($\rho = 900$ kg·m^{-3}) de altura $h = 10$ cm que flota en la interfaz entre una capa de agua ($\rho = 1000$ kg·m^{-3}) y otra de aceite ($\rho = 750$ kg·m^{-3}), ambas de espesor $d = 10$ cm .

X.4 i) Determinar la densidad de un líquido en función de la presión, teniendo en cuenta su compresibilidad.

ii) Determinar, utilizando el resultado anterior, la presión hidrostática del líquido en función de la profundidad.

iii) Comprobar que la expresión obtenida tiende a la que se tiene para un líquido incompresible si su módulo de compresibilidad es muy grande o si la profundidad es pequeña.

iv) Determinar para el caso del agua de mar la presión a una profundidad de 10,9 km utilizando la expresión obtenida en el apartado ii) y compararla con la que se obtendría suponiendo el agua incompresible.

Datos: Presión atmosférica en la superficie del mar: $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Pa . Compresibilidad del agua: $k = 45,8 \cdot 10^{-11}$ Pa^{-1}. Densidad del agua en la superficie del mar $\rho_0 = 1030$ kg/m^3.

X.5 Un globo sonda lleno de helio tiene una masa $m = 15$ kg y forma esférica de radio $R = 2,5$ m. Si se suelta el globo desde el nivel del mar, en su movimiento ascensional se ve sometido, además de a su propio peso y al empuje aerostático, a una fuerza de rozamiento viscoso $F = \frac{1}{2}\pi R^2 \rho v^2$, donde ρ es la densidad del aire y v la velocidad a la que asciende el globo. Determinar la velocidad límite ascensional y el tiempo que tarda el globo en alcanzar 10 km de altura.

X.6 Se va a bombear petróleo con una viscosidad de 0,3 Pa·s y densidad de 860 kg/m^3 de un tanque abierto suficientemente grande a otro cuya entrada se encuentra situada a 30 m por encima del nivel del petróleo en el tanque de origen. El bombeo se va a realizar a través de una tubería de 0,12 m de diámetro y longitud 1 km. Determinar:

i) La presión manométrica que debe ejercer la bomba para mantener un flujo, supuesto laminar, de 0,06 m^3/s .

ii) La potencia consumida por la bomba, suponiendo que su rendimiento sea igual al 70 % .

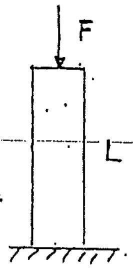
X.7 Un tubo horizontal de sección circular tiene una zona ancha de sección transversal 40 cm^2 y otra estrecha de sección 10 cm^2. Fluye agua por el tubo con un flujo de $5 \cdot 10^{-3}$ m^3/s . Calcular:

i) La velocidad del agua en las zonas ancha y estrecha.

ii) La diferencia de presión entre estas zonas.

JC Aula de Ingeniería | Ingenieros Industriales | Física I
c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. | Profesor
Tlfno: 91 535 75 29 | Alex García

F. II - Hoja E.C. Nº 1 -



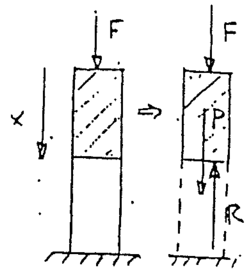
X.1) Datos:

- Acero $\Rightarrow E_{Acero} = 2\cdot 10^{11}$ Pa $= Y$; $L = 3$ m
- $D = 15$ cm $= 0{,}15$ m ; $F = 80000$ N

i) Despreciando el peso: $\sigma_c = -\frac{F}{A} = -\frac{F}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = -\frac{4F}{\pi D^2} = -\frac{4\cdot 80000}{\pi\cdot(0{,}15)^2}\ \frac{N}{m^2} = \boxed{-4{,}53\cdot 10^6\ N/m^2}$

ii) $\sigma_c = Y\cdot\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_c}{Y} = -2{,}263\cdot 10^{-5}$; $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \varepsilon\cdot L = -6{,}79\cdot 10^{-5}$ m

iii) Estudiando el equilibrio en una sección genérica:



Analisis Mecánico: $F + P - R = 0 \Rightarrow R = F + P$

$F = 80000$

$P = \rho_{Ac}\cdot g\cdot V = \rho_{Ac}\cdot g\cdot \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\cdot x$

Analisis Elástico: $\sigma_c(x) = -\frac{R}{S} = -\frac{80000 + \rho_{Ac}\, g\, \pi \frac{D^2}{4} x}{\pi\frac{D^2}{4}} = -[4{,}53\cdot 10^6 + g\, 7800\, x]$

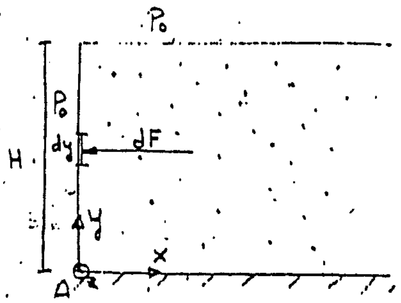
$\varepsilon(x) = -\frac{\sigma(x)}{E} = -\frac{80000 + \rho_{Ac}\, g\, \pi\frac{D^2}{4}\cdot x}{E\cdot\pi D^2/4} = -\frac{1}{E}[4{,}53\cdot 10^6 + g\, 7800\, x]$

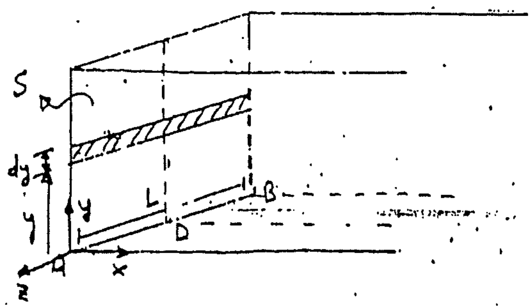
Si se quiere obtener la deformación total de la barra hay que integrar:

$\varepsilon(x) = \frac{\Delta\, dx}{dx} \Rightarrow \int \Delta\, dx = \int_0^L \varepsilon(x)\cdot dx$; $E = 2\cdot 10^{11}$ Pa ; $\rho_{Ac} = 7800$ Kg/m³ $\Rightarrow$ $\Delta L = -\frac{80000}{E\cdot\pi\frac{D^2}{4}}\cdot L - \frac{\rho_{Ac}}{E}\cdot\frac{L^2}{2} = -6{,}8\cdot 10^{-5}$

$\varepsilon_T = \dots = -2{,}27\cdot 10^{-5}$

X.2)





a) $P = P_0 + \rho g(H-y) \Rightarrow dF = (P-P_0)\, dS$

Fuerza horizontal neta: Tomo parametro "y" creciente con la altura:

$dF = (P-P_0)\cdot dS = \rho g(H-y)\, L\, dy = \rho g(H-y)\frac{S}{H}\, dy \Rightarrow d\vec{F} = \rho g(H-y)\frac{S}{H}\, dy\, (-\vec{i})$

$\boxed{F} = \int_{y=0}^{y=H} \rho g\frac{S}{H}(H-y)\, dy = \left[\rho g\frac{S}{H}\cdot Hy - \rho g\frac{S}{H}\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=H} = \dots = \boxed{\frac{1}{2}\rho g S H}$

$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}\rho g S H\, (-\vec{i})}$

b) $\bar{k}: \quad dM = y \cdot dF = y \cdot \rho \cdot g \frac{S}{H}(H-y)\,dy \Rightarrow d\bar{M} = y \rho g \frac{S}{H}(H-y)\,dy\,\bar{k}$

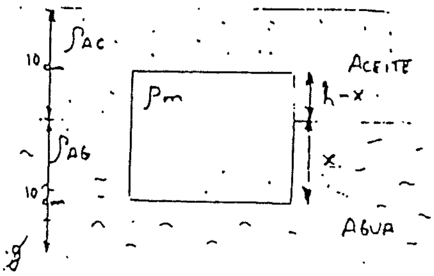
$$\boxed{M = \int_{y=0}^{y=H} dM = \rho g \frac{S}{H}\int_0^H y(H-y)\,dy = \rho g \frac{S}{H}\left[H\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^H = \dots = \frac{\rho g S H^2}{6}}$$

Por tanto $M = \frac{1}{6}\rho g S H^2 \Rightarrow \boxed{\bar{M} = \frac{1}{6}\rho g S H^2\,\bar{k}}$

X.3)

$\rho_m = 900\ kg \cdot m^{-3}$ $\qquad \rho_{AG} = 1000\ kg\ m^{-3}$

$h = 10\ cm = 0{,}1\ m$ $\qquad \rho_{AC} = 750\ kg\ m^{-3}$



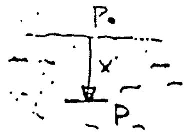
Siendo x la altura del bloque sumergida en agua y $h-x$ la altura del bloque sumergida en aceite, en equilibrio: $P_m = E_{AG} + E_{AC}$

$$\rho_m \cdot \cancel{A} \cdot h \cdot \cancel{g} = \rho_{AG} \cdot \cancel{A} \cdot x \cdot \cancel{g} + \rho_{AC} \cdot \cancel{A} \cdot (h-x) \cdot \cancel{g}$$

Despejando: $\boxed{x = \frac{\rho_m - \rho_{AC}}{\rho_{AG} - \rho_{AC}} \cdot h} \Rightarrow x = \frac{900-750}{1000-750} \cdot 0{,}1\,m = 0{,}06\ m$

X.4)

i) Considero un parámetro creciente en profundidad:



Por la ecuación de la hidrostática: $P = P_0 + \rho g x$

o en forma diferencial $\frac{dP}{dx} = \rho g$. Al considerar la compresibilidad, ρ varía $\Rightarrow$ Busco ρ:

El coeficiente de compresibilidad, en forma diferencial, vale: $K = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{P_0}^{P} K\,dP = -\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V} \overset{K\text{ cte con }P}{\Rightarrow} K(P-P_0) = -\ln\frac{V}{V_0} \Rightarrow -K(P-P_0) = \ln\left(\frac{m/\rho}{m/\rho_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-K(P-P_0)} = \frac{\rho_0}{\rho} \Rightarrow \rho = \rho_0\, e^{K(P-P_0)}$$

ii) Volviendo a la ecuación de la hidrostática en forma diferencial y sustituyendo $\rho \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = \rho_0\, e^{K(P-P_0)} \cdot g \Rightarrow \frac{dP}{e^{K(P-P_0)}} = \rho_0 \cdot g \cdot dx \overset{\text{Integro}}{\Longrightarrow} \int \frac{dP}{e^{K(P-P_0)}} = \int \rho_0 g \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{K}e^{-K(P-P_0)} = \rho_0 g x + C \quad \left\{\begin{array}{l}\text{En } x=0 \rightarrow P = P_0 \\ \text{Luego } C = -\frac{1}{K}\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{-e^{-K(P-P_0)} = K\rho_0 g x - 1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Despejo P (Tomo Ln): $-K(P-P_0) = \ln[1 - K\rho_0 g x] \Rightarrow \boxed{P = P_0 - \frac{1}{K}\ln[1-K\rho_0 g x]}$

iii) Si se considera $\left\{\begin{array}{l}\text{Fluido incompresible } \left(\begin{array}{l}\beta \rightarrow \infty \\ K \rightarrow 0\end{array}\right) \\ \text{Profundidad pequeña : } x \rightarrow 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \ln|1 - K\rho_0 g x| \sim -K\rho_0 g x$

y por tanto $P = P_0 - \frac{1}{K}[-K\rho_0 g x] \Rightarrow P = P_0 + \rho_0 g x$

iv)

• Presión a $x = 10,9\cdot10^3$ m:

$P_0 = 1,0\cdot10^5$ Pa

$K = 45,8\cdot10^{-11}$ Pa^{-1}

$\rho_0 = 1030$ kg$\cdot$m^{-3}

Para $K = 45,8\cdot10^{-11}$ Pa^{-1}

$P = P_0 - \frac{1}{K}\ln[1 - K\rho_0 g x]$

$\boxed{P = 1,13\cdot10^8 \text{ Pa}}$

Para $K \to 0$

$P = P_0 + \rho g x$

$\boxed{P = 1,101\cdot10^8}$

$\boxed{X5}$

$m = 15$ kg

$R = 2,5$ m

$F = \frac{1}{2}\pi R^2\rho v^2 = cte$

$\bar{a} = \ddot{z}\bar{k}$; $\bar{v} = \dot{z}\bar{k}$

$\bar{P} = mg(-\bar{k}) = cte$; $\bar{E} = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 g\bar{k} = cte$

$\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$; $\bar{k}$: $\underbrace{E - P}_{a^2} - \underbrace{\frac{1}{2}\pi R^2\rho}_{b^2} v^2 = m\frac{dv}{dt} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{dt}{m} = \frac{dv}{a^2 - b^2v^2} = \frac{dv}{(a-bv)(a+bv)} \Longrightarrow$

$\frac{1}{a+bv} + \frac{1}{a-bv} = \frac{a + \cancel{bv} + a - \cancel{bv}}{(a+bv)(a-bv)}$

$\Longrightarrow \frac{dt}{m} = \frac{1}{2a}\left[\int\frac{dv}{a-bv} + \int\frac{dv}{a+bv}\right] = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a+bv}{a-bv}\right) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{a+bv}{a-bv} = e^{\frac{2abt}{m}} \Longrightarrow vb\left(1 + e^{\frac{2abt}{m}}\right) = a\left(e^{\frac{2abt}{m}} - 1\right) \Longrightarrow v = \frac{a}{b}\cdot\frac{e^{\frac{2abt}{m}} - 1}{e^{\frac{2abt}{m}} + 1} = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow dx = \frac{a}{b}\left[\frac{e^{\frac{2abt}{m}}}{e^{\frac{2abt}{m}} + 1} - \frac{1}{e^{\frac{2abt}{m}} + 1}\cdot\frac{e^{-\frac{2abt}{m}}}{e^{-\frac{2abt}{m}}}\right]dt \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \frac{a}{b}\frac{m}{2ab}\left[\ln\left(e^{\frac{2abt}{m}} + 1\right) + \ln\left(e^{-\frac{2abt}{m}} + 1\right)\right] \ldots$ etc

• Si es $F = \frac{1}{2}\pi R^2\rho v \Longrightarrow \underbrace{E - P}_{a} - \underbrace{\frac{1}{2}\pi R^2\rho}_{b} v = m\frac{dv}{dt} \Longrightarrow \int_{t=0}^{t}\frac{dt}{m} = \int_{v(0)=0}^{v}\frac{dv}{a - bv} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{t}{m} = -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{a-bv}{a}\right) \Longrightarrow a - bv = a\,e^{-\frac{b}{m}t} \Longrightarrow \frac{a}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) = v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int_{x=0}^{x}dx = \int_{t=0}^{t}v\,dt \Longrightarrow x = \frac{a}{b}\left[t + \frac{m}{b}\left[e^{-\frac{b}{m}t} - 1\right]\right] \Longrightarrow x = 10\text{ km} = \frac{a}{b}\left[t^* + \frac{m}{b}\left[e^{-\frac{b}{m}t^*} - 1\right]\right] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow t^* = ---$

$v_{lim} \Rightarrow a = 0 \Longrightarrow E - P - \frac{1}{2}\pi R^2\rho v_{lim} = 0 \Longrightarrow \boxed{v_{lim} = \frac{E - P}{\frac{1}{2}\pi R^2\rho} = ----}$

Indusbol.com

JC Aula de Ingeniería	Ingenieros Industriales	Física I
	c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29	Profesor *Alex García*

4/5

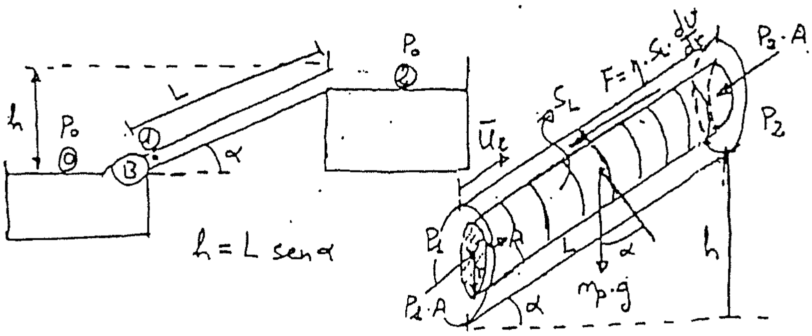
X.6) $\eta = 0,3\ Pa\cdot s$

(2005) $\rho_P = 860\ kg/m^3$

$h = 30\ m$

$D = 0,12\ m$

$L = 1000\ m$



$h = L\ sen\alpha$

i) $Q = 0,06\ m^3/s$ (LAMINAR)

CONSIDERANDO LA VISCOSIDAD Y EL RÉGIMEN LAMINAR EN LA TUBERÍA Y ESTABLECIENDO EL SUMA DE FUERZAS (AHORA APARECERÁ LA COMPONENTE DEL PESO POR NO SER TUBERÍA HORIZONTAL) EN LA DIRECCIÓN DE LA TUBERÍA:

$$\bar{u}_L: \ \sum F = m\cdot a = 0 \Longrightarrow P_1\cdot A - P_2\cdot A - \eta\, S_L \frac{dv}{dr} - m_p\cdot g\cdot sen\alpha = 0$$

CON: $A = \pi r^2$; $S_L = 2\pi r\cdot L$; $m_p = \rho_p\cdot \underbrace{\pi\cdot r^2\cdot L}_{\text{Vol. de petróleo}}$

POR TANTO: $(P_1 - P_2)\cdot\pi r^2 - \eta\, 2\pi r L\cdot\frac{dv}{dr} - \rho_p \pi r^2 L\cdot g\cdot sen\alpha = 0 \Longrightarrow$ DESPEJANDO $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_{v(r=R)=0}^{v(r)} dv = \frac{P_1 - P_2 - \rho_p\cdot g\cdot \overset{h}{L sen\alpha}}{2\eta\cdot L}\cdot\int_{r=R}^{r} r\,dr \Longrightarrow \boxed{v(r) = \frac{P_1 - P_2 - \rho_p\cdot g\cdot h}{4\eta\cdot L}\cdot(r^2 - R^2)} \Longrightarrow$$

$$|Q| = 0,06\ m^3/s = \left|\int v(r)\cdot dA\right| = \left|\int_{r=0}^{r=R}\frac{P_1 - P_2 - \rho_p\cdot g\, h}{4\eta L}\cdot(r^2 - R^2)\cdot 2\pi r\,dr\right| = \ldots = \left|-\frac{P_1 - P_2 - \rho_p g h}{8\eta L}\cdot\pi\cdot R^4\right|$$

DESPEJANDO:

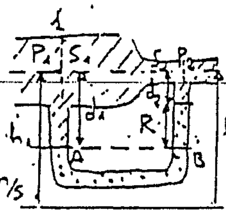
$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \dfrac{Q\cdot 8\cdot\eta\cdot L}{\pi R^4} + \overset{P_0}{\cancel{P_2}} + \rho_p\cdot g\cdot h \\ P_2 = P_0\ ;\ P_{B_{manom}} = P_{①} - P_{⓪} = P_1 - P_0 \end{array}\right\} P_{B_{manom}} = \frac{Q\cdot 8\cdot\eta\cdot L}{\pi R^4} + \rho_p\cdot g\cdot h = 3,79\cdot 10^6\ Pa$$

ii) $Pot_{BOMBA}\cdot\eta_B = Q\cdot P_{B_{manom}} \Longrightarrow Pot_{BOMBA} = 324\,824,27\ \frac{N\cdot m^2}{s}$

5/5

X.7) (2005)

- $S_1 = 40 \cdot 10^{-4} \, m^2$
- $S_2 = 10 \cdot 10^{-4} \, m^2$
- $Q = 5 \cdot 10^{-3} \, m^3/s$



$\rho_{H_2O} = 1000 \, Kg/m^3$

$\rho_{Hg} = 13600 \, Kg/m^3$

i) $Q = cte = S \cdot v$

$Q = S_1 \cdot v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-4}} = 1{,}25 \, m/s$

$Q = S_2 \, v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 5 \, m/s$

ii) Aplico Bernoulli entre 1 y 2: $P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \xRightarrow{h_1 = h_2} P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2)$

Por tanto $P_1 - P_2 = 11718{,}75 \; Pa$

iii) Por hidrostática: $P_a = P_1 + \rho g d_1 = P_a = P_2 + \rho g d_2 + \rho_m g R \xRightarrow{d_1 = d_2 + R} P_1 + \rho g d_2 + \rho g R = P_2 + \rho g d_2 + \rho_m g R$

Por tanto: $P_1 - P_2 = (\rho_m - \rho) g \cdot R \Rightarrow R = \frac{P_1 - P_2}{(\rho_m - \rho) g} = 9{,}5 \cdot 10^{-2} \, m$