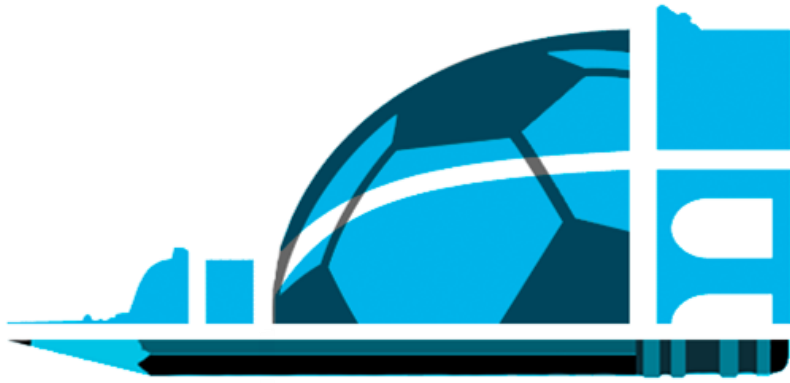




Indusbol
.com

Apuntes de 2ºGITI

María Ballesteros

APUNTES ELECTROTECNIA

Si alguna vez estos
apuntes te sirvieron
de ayuda, piensa que
tus apuntes pueden
ayudar a muchas
otras personas.

Comparte tus apuntes
En indusbol.com o
simplyjarod.com

FUNDAMENTOS

TEMA 1

1 UNIDADES ELECTROMAGNÉTICAS

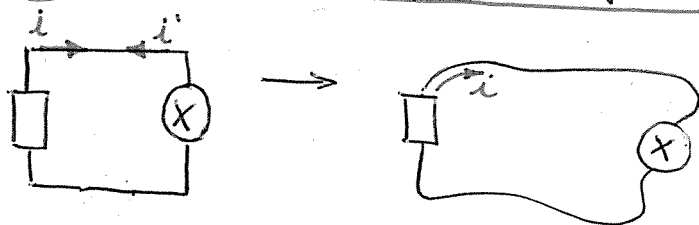
<u>Magnitud</u>	<u>Unidad</u>
Carga eléctrica (q)	columbio, coulomb (C)
Flujo magnético (Φ)	weberio, weber (Wb)
Intensidad de corriente (i)	amperio (A)
Tensión eléctrica (V_m, V_{em} , potencial eléctrico)	voltio, volt (V)
Potencia (p)	vatio, watt (W)
Energía (w)	julio, joule (J)
Capacidad eléctrica (C)	faradio, farad (F)
Resistencia eléctrica (R)	ohmio, ohm (Ω)
Inductancia (L o M)	henrio, henry (H)
Frecuencia (f)	hertzio, hertz (Hz)

Múltiplos	da $\rightarrow 10^1$
	h $\rightarrow 10^2$
	K $\rightarrow 10^3$
	M $\rightarrow 10^6$
	G $\rightarrow 10^9$
	T $\rightarrow 10^{12}$
	P $\rightarrow 10^{15}$
	E $\rightarrow 10^{18}$

Submúltiplos	d $\rightarrow 10^{-1}$
	c $\rightarrow 10^{-2}$
	m $\rightarrow 10^{-3}$
	μ $\rightarrow 10^{-6}$
	n $\rightarrow 10^{-9}$
	p $\rightarrow 10^{-12}$
	f $\rightarrow 10^{-15}$
	a $\rightarrow 10^{-18}$

2 REFERENCIAS DE POLARIDAD

2.1 Referencia de polaridad para la intensidad



$$[A] = \left[\frac{C}{s} \right]$$

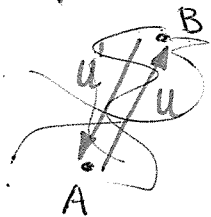
Elegimos siempre una referencia de intensidad en sentido arbitrario:

- Si el sentido es correcto tendremos $i > 0$
- Si el sentido no es correcto tendremos $i < 0$

Ej: En la figura, si $i = 3A \rightarrow i' = -3A$

2.2 Referencias de polaridad para la tensión

Llamamos tensión entre dos puntos A-B de un circuito a la diferencia de potencial entre ambos



$$U_{AB} = U = V_A - V_B$$

$$U_{BA} = U' = V_B - V_A$$

• Tensión > 0 si el terminal inicial está a mayor potencial que el final

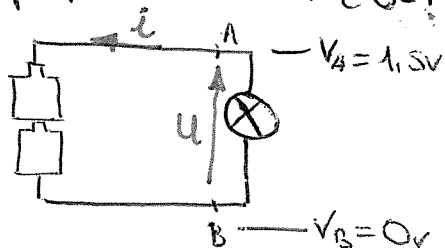
• Tensión < 0 si el terminal inicial está a menor potencial que el final

Ej.: Si $V_A = 15V$
 $V_B = 7V$

$$U_{AB} = U = 15 - 7 = 8V \text{ (caídas de potencial positivas)}$$

$$U_{BA} = U' = 7 - 15 = -8V \text{ (subidas de potencial negativas)}$$

Ejemplo combinado: $\mathcal{U}$? $\mathcal{I}$? $|I| = 3A$



$$U = 0 - 1.5 = -1.5V$$

Por ser i congruente con $U \rightarrow \boxed{I = -3A}$

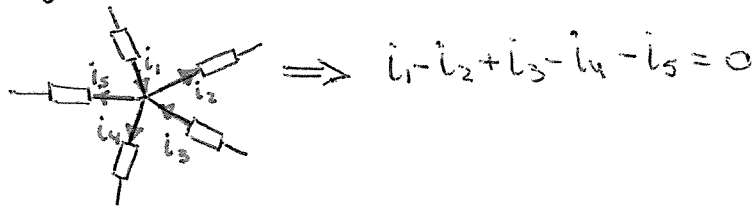
3 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Conjunto de elementos conectados entre sí por los que circula una intensidad.

4 LEYES DE KIRCHOFF

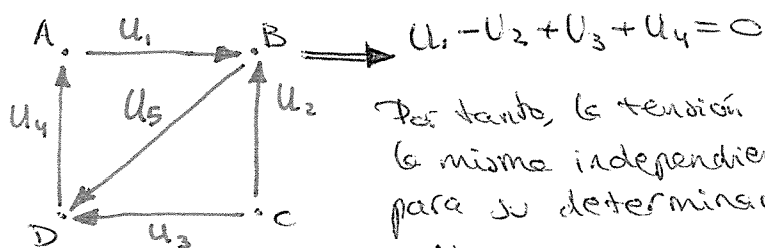
4.1 Primera Ley de Kirchhoff o Ley de Kirchhoff para las corrientes

La suma algebraica de todas las intensidades que convergen en un nodo es igual a cero en todo instante



4.2 2ª Ley de Kirchhoff o Ley de Kirchhoff para las tensiones

La suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier camino cerrado es igual a cero en todo instante.

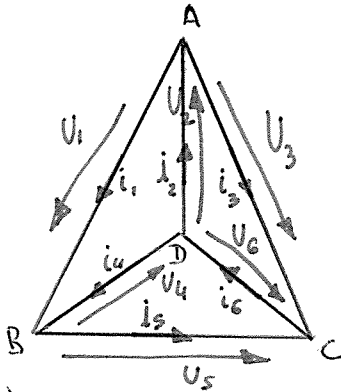


Por tanto, la tensión entre dos puntos de un circuito es la misma independientemente del camino que se siga para su determinación:

$$U_5 = -U_1 - U_4 = -U_2 + U_3$$

Cuestión 1

a) Escribir ecuaciones de 1ª LK aplicadas a cada nodo.



$$\begin{cases} \text{NODO A:} & -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad (1) \\ \text{NODO B:} & i_1 + i_4 - i_5 = 0 \quad (2) \\ \text{NODO C:} & i_3 + i_5 - i_6 = 0 \quad (3) \\ \text{NODO D:} & -i_2 - i_4 + i_6 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

b) Demostrar que son linealmente dependientes las ecuaciones anteriores.

En efecto $(1) + (2) + (3) = -i_1 + i_2 - i_3 + i_1 + i_4 - i_5 + i_3 + i_5 - i_6 = i_2 + i_4 - i_6 = -(4)$
 $\rightarrow (1) + (2) + (3) = -(4) \rightarrow$ combinación lineal $\rightarrow$ son linealmente dependientes.

NOTA!! Podemos escribir en un circuito eléctrico "n-1" ecuaciones linealmente independientes siendo n el nº de nodos del circuito.

c) Obtener i_4 a partir de i_2 e i_6 , e i_3 en función de i_1 , i_2 .

De ec. (4) $i_4 = i_2 - i_6$ De (1) $i_3 = i_2 - i_1$

d) Escribir ecuaciones 2ª LK a los circuitos ABDA, ADCA, ABCDA, ABCA

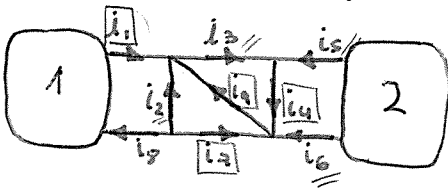
ABDA: $V_1 + V_4 + V_2 = 0$

ADCA: $-V_2 + V_6 - V_3 = 0$

ABCDA: $V_1 + V_5 - V_6 + V_2 = 0$

ABCA: $V_1 + V_5 - V_3 = 0$

Cuestión 2 Sabiendo que $i_1 = 3A$, $i_4 = -5A$, $i_7 = 2A$ e $i_9 = 2A$, calcular las restantes intensidades del gráfico



$$i_6 = -i_4 - i_7 + i_9 = 5 - 2 + 2 = 5A$$

$$i_5 = -i_6 = -5A$$

$$i_3 = i_4 - i_5 = -5 + 5 = 0A$$

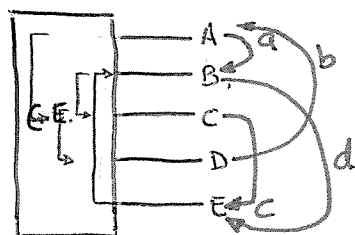
$$i_2 = -i_1 + i_3 - i_9 = -3 + 0 - 2 = -5A$$

$$i_8 = -i_2 - i_7 = 5 - 2 = 3A$$

$$\begin{aligned} i_2 &= -5A & i_6 &= 5A \\ i_3 &= 0 & i_8 &= 3A \\ i_5 &= -5A \end{aligned}$$

Cuestión 3 $U_{AB} = a(V)$, $U_{DA} = b(V)$, $U_{CE} = c(V)$ y $U_{BE} = d(V)$

Expresar U_{EB} , U_{BC} , U_{CD} , U_{AC} .



$$U_{EB} = -d(V)$$

$$U_{BC} = (d - c)(V)$$

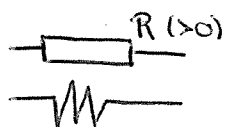
$$U_{CD} = (c - d - a - b)(V)$$

$$U_{AC} = (a + d - c)(V)$$

ELEMENTOS IDEALES

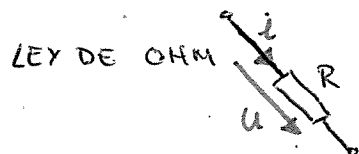
1 RESISTENCIAS, CONDENSADORES, BOBINAS → Elementos pasivos

1.1 Resistencia ideal



Son elementos del circuito en los que la caída de tensión es proporcional a la intensidad.

Se miden en ohmios [Ω]



LEY DE OHM

$$u = i \cdot R$$

$$i = \frac{1}{R} u$$

$$i = G u$$

Conductancia $G \rightarrow [S]$ siemens.

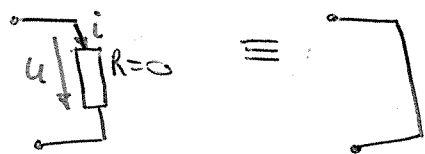
Cambiando referencias de polaridad



$$u = -i' R$$

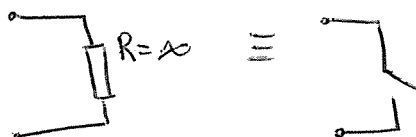
¡¡¡ Casos particulares

i) $R = 0 \equiv$ Cortocircuito



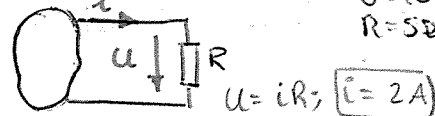
$$u = i R = 0$$

ii) $R = \infty \equiv$ Circuito abierto

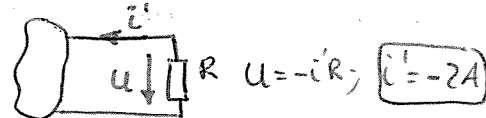


$$u = i R; i = \frac{u}{R} = 0$$

Ejemplo: Determinar i e i' si
 $u = 10V$
 $R = 5\Omega$

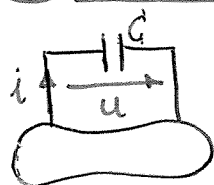


$$u = i R; i = 2A$$



$$u = -i' R; i' = -2A$$

1.2 Condensador ideal

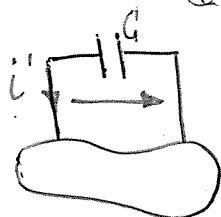


Son elementos del circuito capaces de almacenar carga de valor

$$q = C u \quad \text{con } C \equiv \text{capacidad eléctrica [F]}$$

$$i = C \frac{du}{dt}$$

Cambiando las referencias de polaridad



$$i' = -C \frac{du}{dt}$$

NOTA!! Expresión de la tensión en un condensador:

$$i = C \frac{du}{dt} \quad ; \quad \int du = \int \frac{1}{C} i(\tau) d\tau \quad ; \quad U(t) - U(t_0) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

Hacemos $t_0 \rightarrow -\infty$
 $U_0 = 0 \rightarrow$

$$U(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Se define el régimen permanente de corriente continua ^{R.P.C.C.} como el régimen de función del circuito en el que todas las i y las u son constantes.

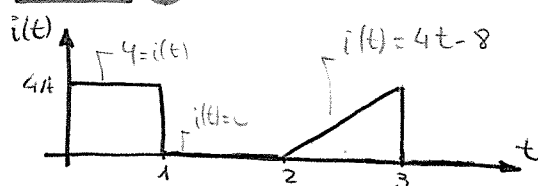
* En R.P.C.C. un condensador se comporta como un circuito abierto.

$$i = C \frac{du}{dt} \stackrel{u=cte=U}{=} C \frac{dU}{dt} = 0$$

* En un condensador la tensión no puede variar bruscamente

$$i = C \frac{du}{dt} \text{ si } U \text{ varía bruscamente en } t_0 \rightarrow i(t_0) = \infty \Rightarrow \text{Imposible.}$$

Ejercicio 6 Condensador $C = 2F$. Se pide $U(t)$. Inicialmente descargado.



$$\hookrightarrow U(0) = 0$$

$$U(t) = U(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

• $0 < t < 1$

$$U(t) = U(0) + \frac{1}{2} \int_0^t 4 d\tau = 0 + \frac{1}{2} 4\tau \Big|_0^t = 2t$$

$$U(t) = 2t \text{ (V)} \quad \forall t \in [0, 1]$$

• $1 < t < 2$

$$U(t) = U(1) + \frac{1}{2} \int_1^t 0 d\tau = 2 \rightarrow U(t) = 2 \text{ (V)} \quad \forall t \in [1, 2]$$

• $2 < t < 3$

$$U(t) = U(2) + \frac{1}{2} \int_2^t (4\tau - 8) d\tau = 2 + \frac{1}{2} \left(4\frac{\tau^2}{2} - 8\tau \right) \Big|_2^t$$

$$= 2 + \frac{1}{2} (2t^2 - 8t - 8 + 16) = 2 + t^2 - 4t + 4$$

$$\rightarrow U(t) = t^2 - 4t + 6 \text{ (V)} \quad \forall t \in [2, 3]$$

• $t > 3$

$$U(t) = U(3) + \frac{1}{2} \int_3^t 0 d\tau = 3$$

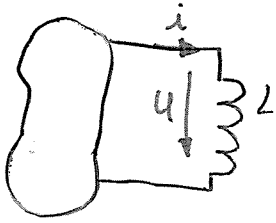
$$U(t) = 3 \text{ V} \quad \forall t > 3$$

1.3 Bobina ideal

Son elementos que cumplen que $\lambda = L i$; $N\Phi = \lambda = L i$ con

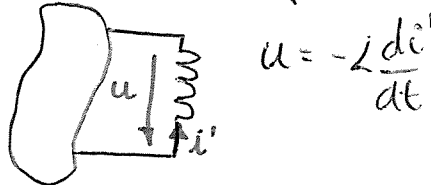
$\left\{ \begin{array}{l} \text{coef. de autoinducción [H]} \\ \text{Inductancia} \end{array} \right.$

$$u = \frac{d(Li)}{dt} \stackrel{L=cte}{=} L \frac{di}{dt}$$



$$u = L \frac{di}{dt}$$

Con referencia opuesta:



$$u = -L \frac{di'}{dt}$$

NOTA!! Expresión de la intensidad en una bobina

$$u(z) = L \frac{di(z)}{dz}; \quad \int di(z) = \int \frac{1}{L} u(z) dz; \quad i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(z) dz$$

$$t_0 \rightarrow -\infty \\ i(-\infty) = 0$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(z) dz$$

* En RPCC una bobina se comporta como un cortocircuito.

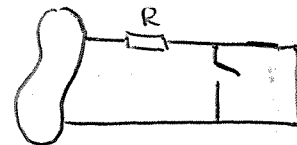
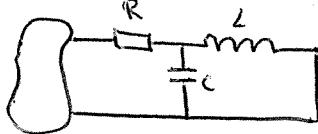
$$i_L = I = cte; \quad u_L = L \frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow \text{cortocircuito}$$

* En una bobina la intensidad es función del tiempo y no puede variar bruscamente

$$u = L \frac{di}{dt} \text{ si } i \text{ varía bruscamente en } t_0 \rightarrow u(t_0) = \infty \text{ imposible.}$$

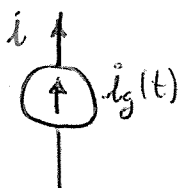
NOTA!! En RPCC

es equivalente a



2 FUENTES IDEALES DEPENDIENTES O INDEPENDIENTES

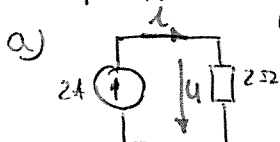
2.1 Fuentes independientes de intensidad (Independent current source)



$$i = i_g(t)$$

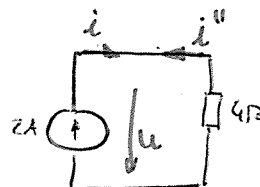
Esta fuente es un elemento del circuito que fija la intensidad que circula a través de ella, independientemente del resto del circuito.

Ejemplos



$$u?? \quad i??$$

$$u = iR = 2i = 4V \\ i = 2A$$

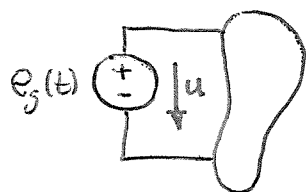


$$u? \quad i? \quad i''?$$

$$u = i4 = -4i'' = 8V \\ i = 2A \\ i'' = -2A$$

NOTA!! En una fuente de intensidad la intensidad está fijada por la fuente pero la tensión depende del circuito externo y generalmente es no nula

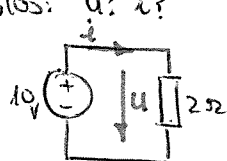
2.2 Fuentes independientes de tensión (Independent voltage source)



Elementos que fijan la tensión entre sus terminales independientemente del resto de circuito

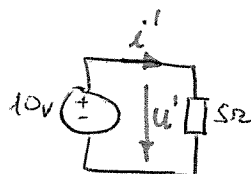
$$u = e_g(t)$$

Ejemplos: u ? i ?



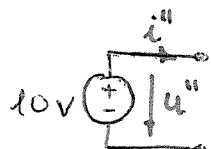
$$u = 10V$$

$$u = iR; i = \underline{5A}$$



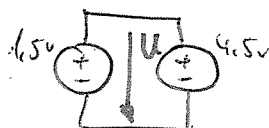
$$u' = 10V$$

$$u = iR; i = \underline{2A}$$



$$u'' = 10V$$

$$i'' = \underline{0}$$

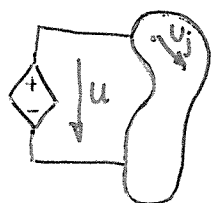


$$u = 1.5V$$

$$u = 4.5V \quad \left. \begin{array}{l} u = 1.5V \\ u = 4.5V \end{array} \right\} \text{Sistema incompatible}$$

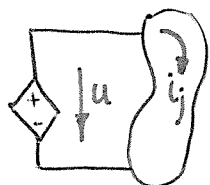
2.3 Fuentes dependientes (Controlled source)

• Fuente de tensión dependiente de tensión $\rightarrow$ Voltage controlled voltage source VCVS



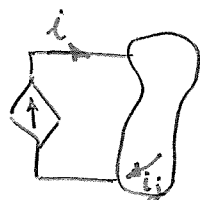
$$u = \gamma u_j; \quad \gamma \text{ adimensional}$$

• Fuente de tensión dependiente de intensidad $\rightarrow$ Current controlled voltage source CCVS



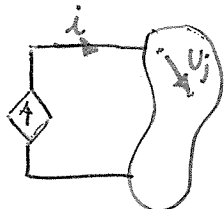
$$u = \beta i_j; \quad \beta [V/A]$$

• Fuente de intensidad dependiente de intensidad $\rightarrow$ Current controlled current source CCCS



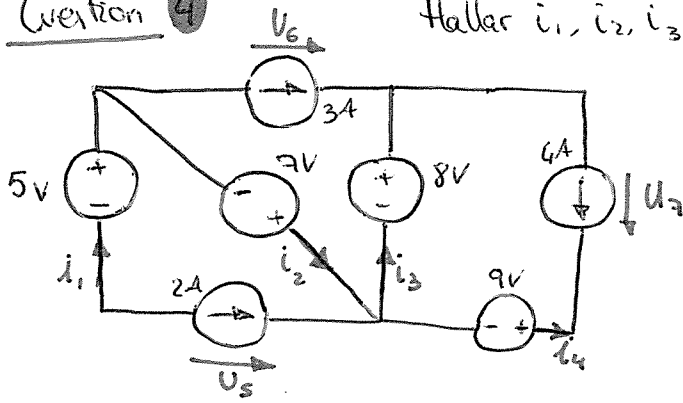
$$i = \gamma i_j; \quad \gamma \text{ adimensional}$$

• Fuente de intensidad dependiente de tensión $\rightarrow$ Voltage controlled current source VCCS



$$i = S u_j; \quad S [A/V] \text{ o } [S]$$

Cuestión 4

Hallar $i_1, i_2, i_3, i_4, U_5, U_6, U_7$ 

$$i_1 = -2A$$

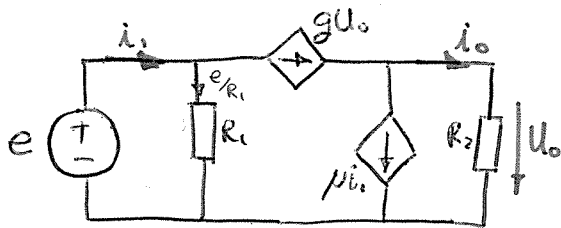
$$i_2 = i_1 - 3A = -5A$$

$$i_3 = -3 + 4 = 1A$$

$$i_4 = i_2 - i_3 + 2 = -5 - 1 + 2 = -4A$$

$$U_5 = -5 - 7 = -12V; \quad U_6 = -7 - 8 = -15V; \quad U_7 = 8 - 9 = -1V$$

Cuestión 5

Hallar i_0 y U_0 función R_1, R_2, μ, g, e .

$$i_0 = gU_0 - \mu i_1 = gU_0 - \mu \left(gU_0 + \frac{e}{R_1} \right) \Rightarrow$$

$$U_0 = i_0 R_2$$

$$i_1 = gU_0 + \frac{e}{R_1}$$

$$\frac{U_0}{R_2} = g(1-\mu)U_0 - \mu \frac{e}{R_1}; \quad \mu \frac{e}{R_1} = \left(g(1-\mu) - \frac{1}{R_2} \right) U_0 = \left(\frac{gR_2(1-\mu) - 1}{R_2} \right) U_0$$

$$U_0 = \frac{\mu e R_2}{g R_1 R_2 (1-\mu) - R_1}$$

$$i_0 = \frac{U_0}{R_2} = \frac{\mu e}{g(R_1 R_2)(1-\mu) - R_1}$$

ELEMENTOS REALES

1 RESISTENCIA, CONDENSADOR X BOBINA

1.1 Resistencia Real

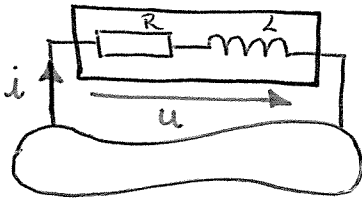


$$R = \frac{l}{S} \rho$$

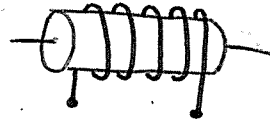
Con $\rho \equiv$ Resistividad $[\Omega \frac{mm^2}{m}]$

$R \rightarrow$ resistencia } Parametros que definen
 $T \rightarrow$ Tolerancia } una resistencia real.

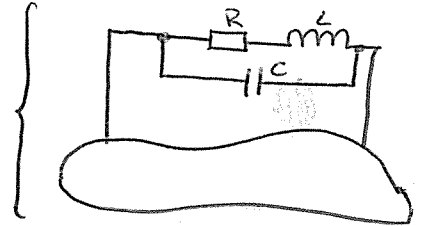
Una resistencia real equivale a una resistencia y una bobina ideal:



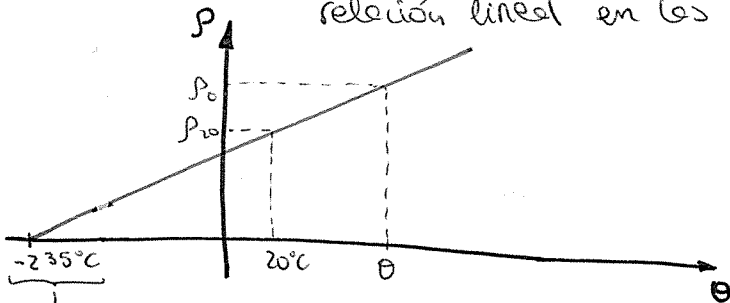
$$u = Ri + L \frac{di}{dt}$$



Para altos voltajes definiremos un modelo más complejo de resistencia real (no se estudiará)



Resistividad: Cambia con la temperatura. Generalmente aumenta siguiendo una relación lineal en las zonas de temperatura



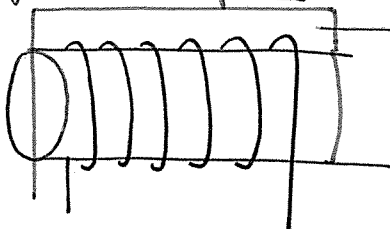
$$\frac{\rho_0}{\theta + 235} = \frac{\rho_{20}}{20 + 235}$$

$$\rho_\theta = \rho_{20} \frac{\theta + 235}{20 + 235} = \rho_{20} \left[1 + \frac{1}{255} (\theta - 20) \right] =$$

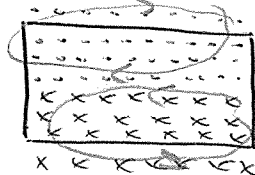
$$= \rho_{20} [1 + \alpha_{20} (\theta - 20)]$$

Tabulados

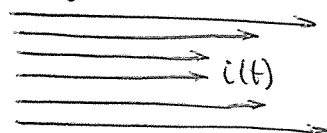
Efecto skin o pelicular



Sección

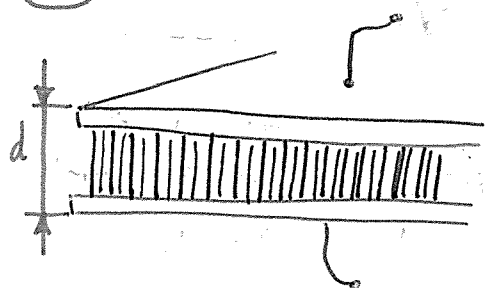


Perfil de corriente



Espiral imaginaria que por crear un campo magnético impiden o facilitan el paso de corriente $\rightarrow$ Toda la sección del conductor no se aproveche de igual forma. Esto sólo ocurre en corriente alterna y cuanto mayor es la frecuencia de variación, mayor es el efecto skin.

1.2 Condensador Real

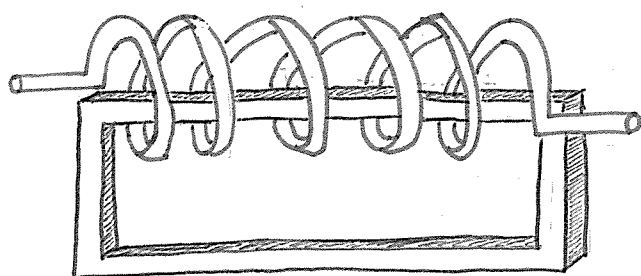


$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

Con ϵ la permitividad dieléctrica del medio

C , t_{ol} y U_{max} definen un condensador.

1.3 Bobina real

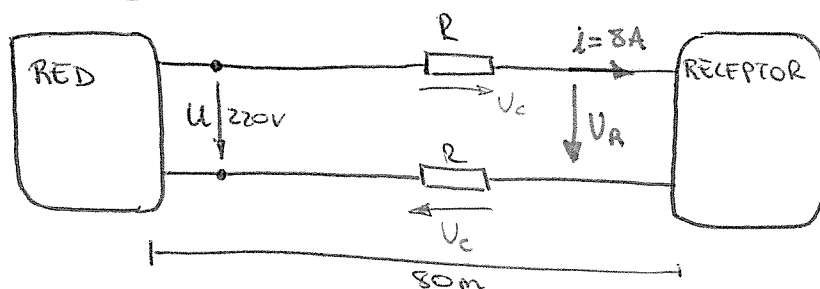


$$L = \oint (\mu) \quad \text{con } \mu = \text{permeabilidad magnética.}$$

Las bobinas se construyen con un material ferromagnético que hace aumentar la L .

Se definen por L , I_{max} , tolerancia.

Cuestión 7



$$\rho_{\text{cobre}} = 0,018 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$$

Se pide la sección de los conductores sabiendo que no admiten caídas de tensión entre receptor y red superiores al 5%.

NOTA!! Incremento de U porcentual.
 sea: $\Delta U\% = \frac{U - U_R}{U} \cdot 100$

$$U = U_c + U_R + U_c, \quad \Delta U\% = \frac{U - U_R}{U} \cdot 100 =$$

$$= \frac{220 - U_R}{220} \cdot 100 \leq 5\%$$

La sección límite será: $\Delta U\% = \frac{220 - U_R}{220} \cdot 100 = 5; \quad 220 - U_R = \frac{5 \cdot 22}{10} = \frac{110}{10} = 11$

$$U_R = 220 - 11 = 209;$$

$$U - U_R = 2U_c = 220 - 209 = 11, \quad U_c = \frac{11}{2}; \quad U_c = R \cdot I; \quad \frac{11}{2} = R \cdot 8; \quad R = \frac{11}{16} \Omega$$

$$\text{Y como } R = \rho \frac{l}{S}; \quad S_{\text{límite}} = \frac{\rho l}{R} = 0,018 \Omega \text{mm}^2/\text{m} \cdot \frac{80 \text{m}}{\frac{11}{16} \Omega} = 2,09 \text{mm}^2$$

Se admitirán secciones $S \geq 2,09 \text{mm}^2$ que mirando en la tabla del enunciado concluimos que el más adecuado es el conductor de sección nominal

$$S = 2,5 \text{mm}^2$$

Repetir procedimiento con $l = 25 \text{ m}$.

$$R = \frac{11}{6} \Omega \quad y \quad R = \rho \frac{l}{S} \quad S_{\text{limite}} = \frac{0,0188 \text{ mm}^2/\text{m} \cdot 25 \text{ m}}{11/6 \Omega} = 0,65 \text{ mm}^2$$

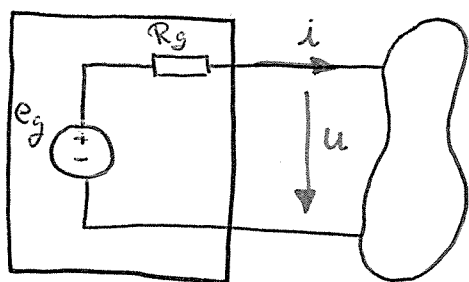
$S \geq 0,65 \text{ mm}^2$ Mirando la tabla del enunciado podríamos pensar que el conductor más adecuado es el de sección nominal $S = 0,75 \text{ mm}^2$ pero su $I_{\text{max}} = 6 \text{ A}$ por lo que no nos sirve pues necesitamos que pasen 8 A .

Usando el conductor de sección nominal $S = 1 \text{ mm}^2$ tendríamos un $I_{\text{max}} = 8 \text{ A}$ que estaría en el límite pero podría usarse.

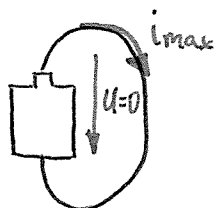
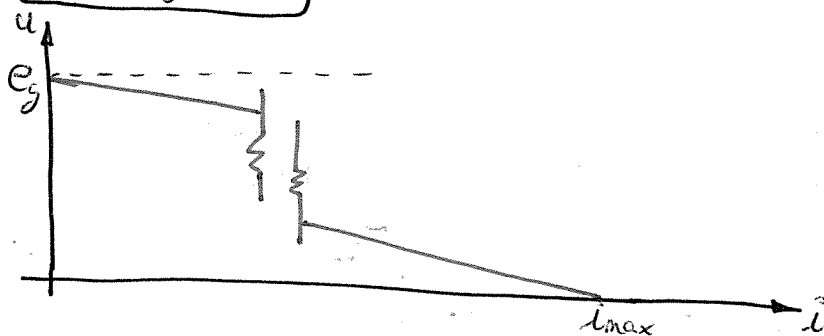
Para evitar riesgos, el conductor más adecuado sería el de sección nominal $S = 1,5 \text{ mm}^2$ que soporta intensidades de hasta 11 A .

2 FUENTES REALES

2.1 Fuente Real de tensión



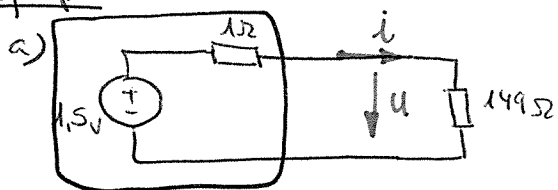
$$u = e_g - i R_g$$



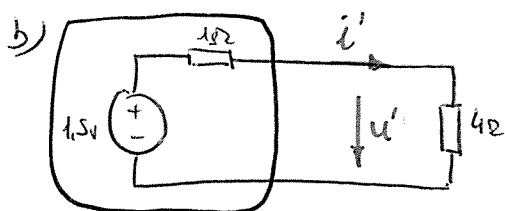
$$0 = e_g - i_{\text{max}} R_g \quad ; \quad i_{\text{max}} = \frac{e_g}{R_g}$$

Porcentaje de caída de tensión en la fuente: $\Delta U\% = \frac{e_g - u}{e_g} \cdot 100$

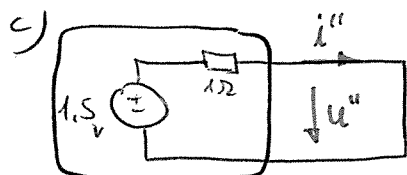
Ejemplos:



$$\begin{cases} u = 149 \cdot i \\ u = 1,5 - i \cdot 1 \end{cases} \rightarrow 150i = 1,5 \quad i = \frac{1,5}{150} = 0,01 \text{ A} \quad \boxed{u = 1,49 \text{ V}}$$



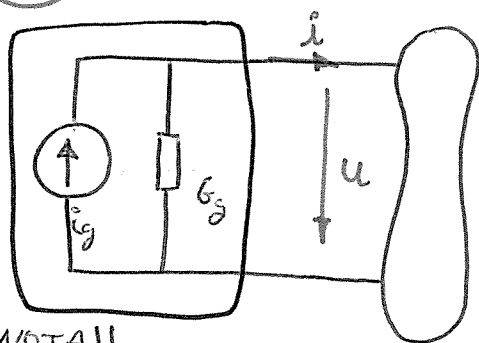
$$\begin{cases} u' = 4i' \\ u' = 1,5 - i' \cdot 1 \end{cases} \quad 5i' = 1,5, \quad i' = 0,3 \text{ A} \quad \boxed{u' = 1,2 \text{ V}}$$



Se cortocircuita a pila $\boxed{u'' = 0}$

$$i'' = i_{\text{max}} \rightarrow u'' = 1,5 - i'' \cdot 1 = 0, \quad i'' = 1,5 \text{ A}$$

22 Fuente de intensidad Real

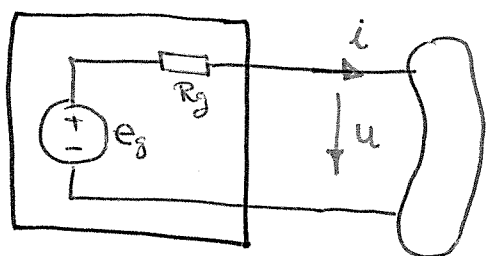


$$\hat{i} = \hat{i}_g - G_g u$$

con $G_g = \frac{1}{R_g}$

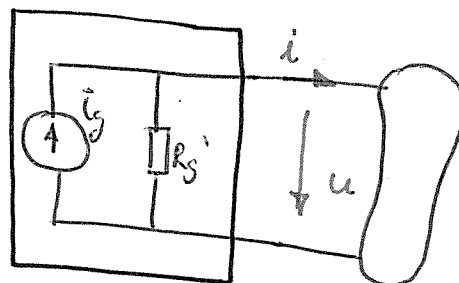
NOTA!!

Toda fuente real de tensión tiene una fuente de intensidad equivalente y viceversa.



$$u = e_g - R_g i \quad (1)$$

$\equiv$



$$\hat{i} = \hat{i}_g - \frac{u}{R_g'} \quad (2)$$

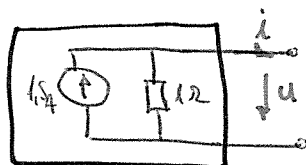
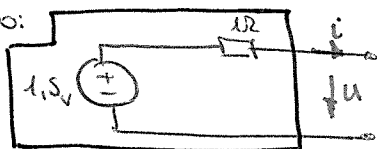
Serán equivalentes si su relación $\frac{u}{i}$ es la misma.

$$\frac{u}{R_g'} = \hat{i}_g - i ; \quad u = R_g' \hat{i}_g - R_g' i$$

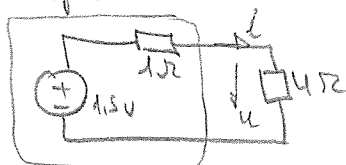
Para equivalencia $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_g &= R_g' \\ e_g &= R_g' \hat{i}_g = R_g \hat{i}_g \end{aligned}$$

Ejemplo:



Conectaremos las fuentes a una resistencia $R=4\Omega$ y comprobaremos que aparece la misma u e i .

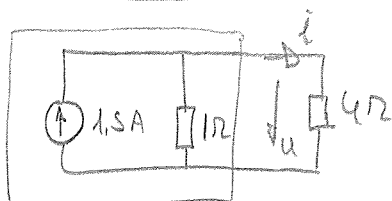


$$u = i \cdot 4$$

$$u = 1.5 - 1 \cdot i$$

$$5i = 1.5$$

$$\boxed{i = 0.3A, u = 1.2V}$$



$$u = i \cdot 4$$

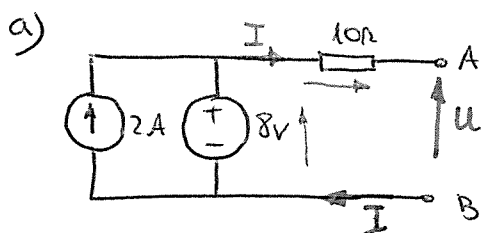
$$i = 1.5 - \frac{u}{1}$$

$$i \cdot 4 = 1.5 - i$$

$$\boxed{i = 0.3A, u = 1.2V}$$

NOTA!! Podemos substituir fuentes de tensión por fuentes de intensidad y viceversa según nos convenga.

Creación 9 Determinar si se puede la tensión U e intensidad I , o la relación entre ambas.

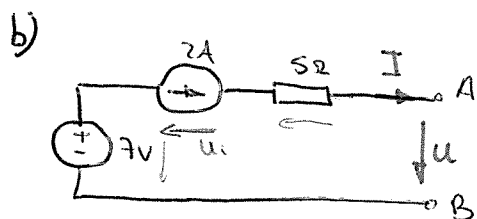


$$U = -8 + I 10$$

Ej.: • Circuito abierto $\begin{cases} U = -8V \\ I = 0 \end{cases}$ • Con $R = 1\Omega$ $\begin{cases} U = -I \cdot 1 \\ U = -8 + 10I \end{cases}$

• Cortocircuitado $\begin{cases} U = 0 \\ I = 0,8A \end{cases}$ $\Rightarrow 11I = +8, I = \frac{8}{11}A$

$U = -\frac{8}{11}V$

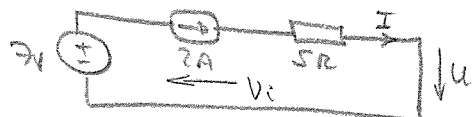


$$I = 2A$$

$U = \underbrace{-I 5}_{-10} + \underbrace{U_i}_{?} + 7 \rightarrow$ No podemos calcularla

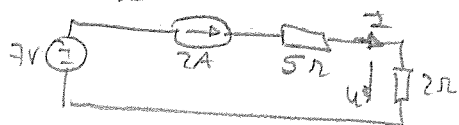
$U_i = U + 3 \rightarrow$ Dependerá del circuito externo

Ej.: • Cortocircuitado



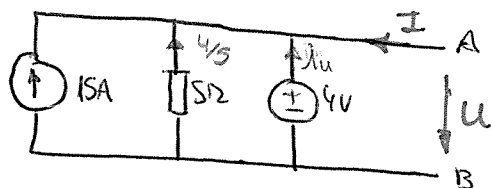
$U = 0, I = 2, U_i = U + 3 = \underline{3V}$

• $R = 2\Omega$



$U = IR = 4V, I = 2A, U_i = 4 + 3 = 7V$

c)



$$U = 4V$$

I depende del circuito externo

$I + 15 + \frac{4}{5} + I_u = 0$

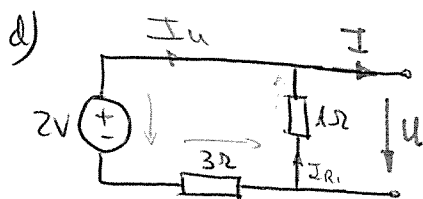
Ej.: • Circuito abierto

$I = 0$
 $I_u = -\frac{79}{5}A$

• $R = 8\Omega$

$I = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}A$

$I_u = -\frac{1}{2} - \frac{79}{5}$



$I = I_u + I_{R1}$

$U = 2 - 3I_u \rightarrow I_u = \frac{U-2}{-3}$

$U = -I_{R1}$

$I = \frac{U-2}{-3} - I_u$

$I = \frac{U-2+3U}{-3}$

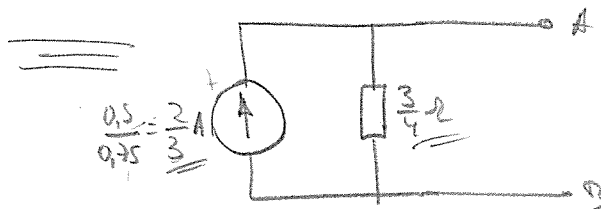
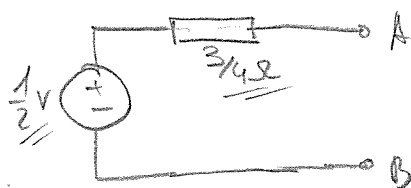
$3I = 4U - 2$

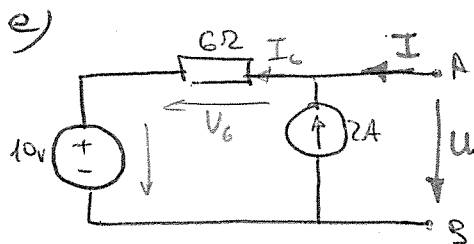
$U = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}I$

→ Ecuación de una fuente real de tensión

Fuente real de tensión equivalente

Fuente real de intensidad equiv.

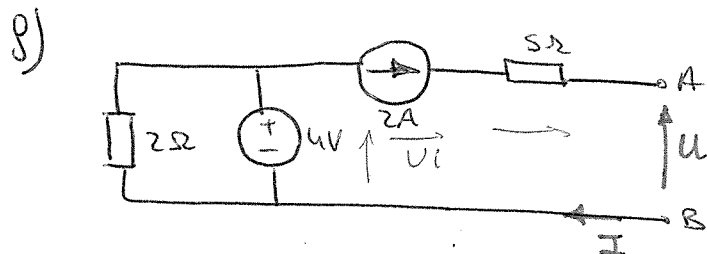




$$I = -2 + I_6 \rightarrow I_6 = I + 2$$

$$U = V_6 + 10 = 6I_6 + 10$$

$$\boxed{U = 6I + 22}$$



$$I = 2A$$

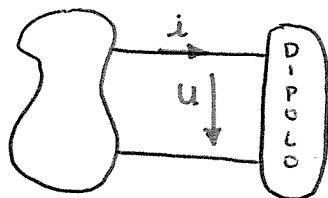
$$U = -4 + V_i + 10 = \underline{V_i + 6}$$

Depende del
circuito externo

POTENCIA Y ENERGÍA

TEMA 4

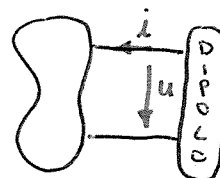
1 POTENCIA Y ENERGÍA EN UN DÍPOLO. REFERENCIAS DE POLARIDAD



$$P_e(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$P_e(t) = -P_{saliente}(t)$$

Unidad [W]



$$P_e(t) = -u(t) \cdot i(t)$$

por estar las referencias cambiadas

$$P_e(t) = \frac{dW_e(t)}{dt} ; \int dW_e = \int p_e d\tau ; W_e(t) - W_e(t_0) = \int_{t_0}^t p_e d\tau \text{ y tomando } t_0 \rightarrow -\infty \text{ } W_e(t_0) = 0$$

$$W_e(t) = \int_{-\infty}^t P_e d\tau$$

Unidad [J]

En régimen permanente de corriente continua -RPCC- $i = I$, $u = U \rightarrow P_e = I \cdot U = P$

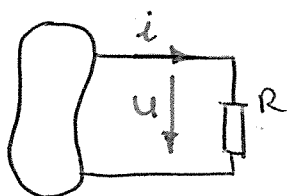
$$W_e = W_e(t_0) = \int_{t_0}^t P d\tau \rightarrow W_e(t) - W_e(t_0) = P(t - t_0)$$

NOTA!! Llamaremos dipolo activo a aquel que contenga alguna fuente en su interior y llamaremos dipolo pasivo a aquel que no contenga fuentes.

2 POTENCIA Y ENERGÍA EN LOS ELEMENTOS PASIVOS BÁSICOS

Resistencia
Bobina
Condensador

2.1 Potencia y energía en Resistencia



$$P_e = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{(i(t))^2}{G} = \frac{(u(t))^2}{R} = (u(t))^2 G$$

$u = iR$ $R = \frac{1}{G}$ $\frac{1}{R} = G$

En resistencia $\left\{ \begin{array}{l} P_{entrante} = P_{consumida} \geq 0 \\ P_{generada} = P_{saliente} \leq 0 \end{array} \right\}$ son iguales pero con signos opuestos

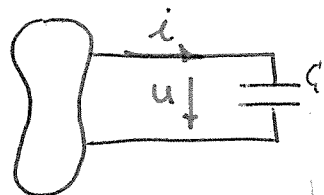
$$W_e(t) - W_e(t_0) = \int_{t_0}^t Ri^2(\tau) d\tau = R \int_{t_0}^t i^2(\tau) d\tau = G \int_{t_0}^t u^2(\tau) d\tau$$

En RPCC:

$$P_e = RI^2 = GU^2 = \frac{I^2}{G} = \frac{U^2}{R}$$

$$W_e(t) - W_e(t_0) = P(t - t_0) = RI^2(t - t_0) = GU^2(t - t_0)$$

2.2 Potencia y energía en condensadores



$$\begin{cases} P_e = u \cdot i \\ i = C \frac{du}{dt} \end{cases}$$

$$P_e(t) = C u(t) \frac{du}{dt}$$

$$W_e(t) - W_e(t_0) = \int_{t_0}^t C u \frac{du}{dt} dz = C \int u du = C \frac{1}{2} (u^2(t) - u^2(t_0))$$

$$\begin{aligned} t_0 &\rightarrow -\infty \\ W_e(t_0 = -\infty) &= 0 \\ u(-\infty) &= 0 \end{aligned}$$

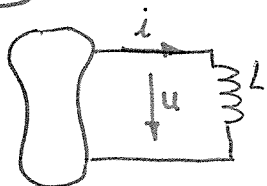
$$W_e(t) = \int_{-\infty}^t C u \frac{du}{dz} dz = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

$$W_e(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

El valor de la energía consumida por un condensador sólo depende de la u inicial y final

En RPCC $W_e(t) - W_e(t_0) = \frac{1}{2} C (U^2 - U^2) = 0 \rightarrow$ El condensador no consume energía

2.3 Potencia y energía en bobinas



$$\begin{cases} P_e = u(t) i(t) \\ u(t) = L \frac{di}{dt} \end{cases}$$

$$P_e(t) = L i(t) \frac{di}{dt}$$

$$W_e(t) - W_e(t_0) = L \int_{t_0}^t i \frac{di}{dz} dz = \frac{1}{2} L (i^2(t) - i^2(t_0))$$

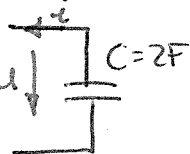
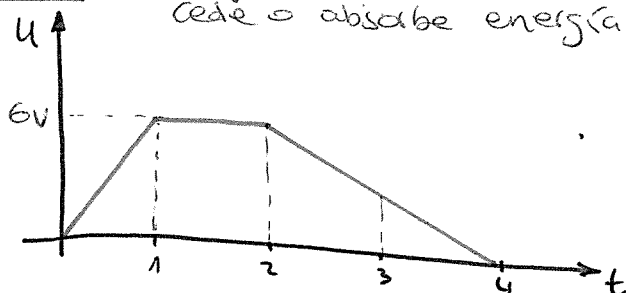
$$\begin{aligned} t_0 &\rightarrow -\infty \\ W_e(t_0 = -\infty) &= 0 \\ i(-\infty) &= 0 \end{aligned}$$

$$W_e(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

$\Rightarrow$ De nuevo, el valor de la energía consumida por una bobina sólo depende de los valores de intensidad inicial y final.

En RPCC $W_e(t) - W_e(t_0) = \frac{1}{2} L (i^2 - i^2) = 0 \rightarrow$ La bobina no consume energía.

Ejercicio 8 Gráfico: Tensión en un condensador $C = 2F$. Analizar si el condensador cede o absorbe energía $v t$



Para evitar cambios los referenciamos

$$\begin{aligned} P_e &= -u \cdot i \\ i &= -C \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

$$t < 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow W_e(t) = 0 \text{ (J)}$$

$$0 \leq t < 1 \rightarrow u = 6t \rightarrow W_e = \frac{1}{2} C u^2(t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 36t^2 = 36t^2 \rightarrow W_e(t) = 36t^2 \text{ (J)}$$

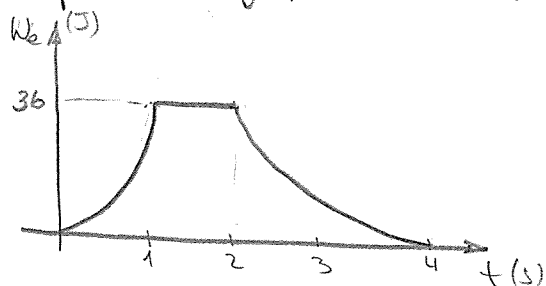
$$1 \leq t < 2 \rightarrow u = 6 \rightarrow W_e = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 36 = 36 \rightarrow W_e = 36 \text{ J}$$

$$2 \leq t < 4; u = -3t + 12 \rightarrow W_e(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-3t + 12)^2 = 144 - 72t + 9t^2$$

$$W_e(t) = 9t^2 - 72t + 144 \text{ (J)}$$

$$t \geq 4 \rightarrow u = 0 \rightarrow W_e(t) = 0$$

Representación gráfica de la energía



En $t \leq 0$ y $t \geq 4 \rightarrow$ El condensador no cede ni absorbe energía

En $0 < t < 1$;

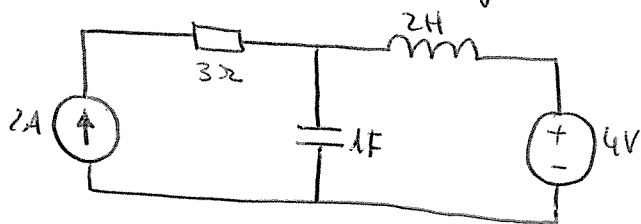
$$P(t) = 2 \cdot 6t \frac{d(6t)}{dt} = 2 \cdot 6t \cdot 6 > 0 \quad \forall t \in (0,1)$$

El condensador absorbe energía

En $1 \leq t < 2$ $P(t) = 2 \cdot 6 \cdot \frac{d(6)}{dt} = 0 \rightarrow$ El condensador no cede ni absorbe energía.

En $2 \leq t < 4$ $P(t) = 2 \cdot (12-3t) \frac{d(12-3t)}{dt} = 2(12-3t)(-3) < 0 \quad \forall t \in [2,4)$
El condensador cede energía

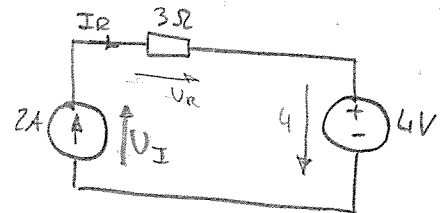
➔ ¿Potencia absorbida por cada elemento? Tenemos RPCC



Por RPCC

Condensadores equivalen a circuitos abiertos

Bobinas equivalen a cortocircuitos



$$I_R = 2A$$

$$I_L = 2A$$

$$I_C = 0A$$

$$U_R = 3 \cdot 2 = 6V$$

$$U_L = 0$$

$$P_C = U \cdot i = 0$$

$$P_L = U i = 0$$

$$P_R = i^2 R = 4 \cdot 3 = 12W$$

$$P_{\text{fuente tensión}} = U \cdot i = 4 \cdot 2 = 8W$$

$\uparrow$
 $U=4$
 $i=I_R=2$

$$P_{\text{fuente intens}} = U_i \cdot i = -10 \cdot 2 = -20W$$

$\uparrow$
 $U_i = -4 - U_R = -10$
 $i = 2A$

¿Energía almacenada en la bobina y el condensador?

$$W_C = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 = 8J$$

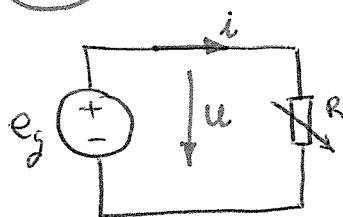
$\uparrow$
 $U_C = 4$

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 = 4J$$

$\uparrow$
 $i_L = I_R = 2$

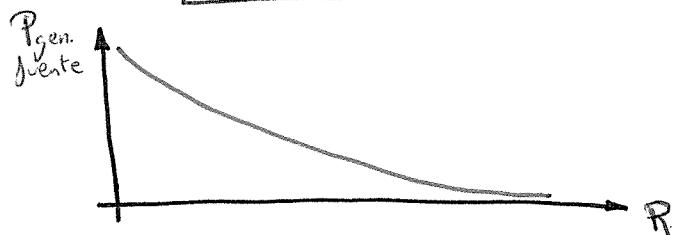
3 POTENCIA EN LAS FUENTES REALES

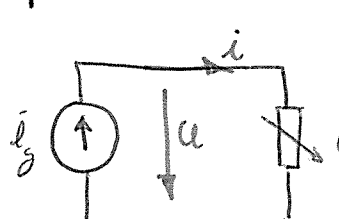
3.1 Potencia en las fuentes ideales



$$P_{\text{saliente fuente}} = P_{\text{entrante resistencia}} = u \cdot i = e_g \frac{e_g}{R} = e_g^2 \frac{1}{R}$$

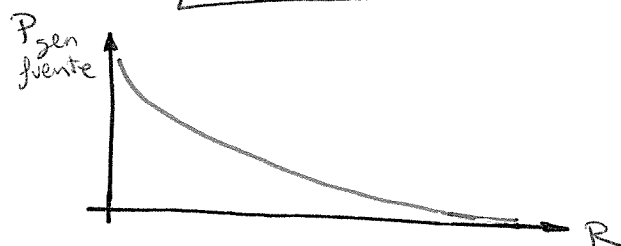
$$\begin{cases} u = iR \\ u = e_g \end{cases} \rightarrow i = \frac{u}{R} = \frac{e_g}{R}$$



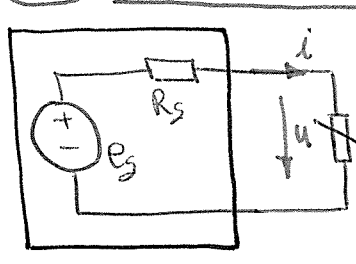


$$P_{\text{saliente fuente}} = P_{\text{entrante en R}} = u \cdot i = \frac{i_g}{G} \cdot i_g = \frac{i_g^2}{G}$$

$$\begin{cases} i = G \cdot u \\ i = i_g \end{cases} \rightarrow u = \frac{i_g}{G}$$

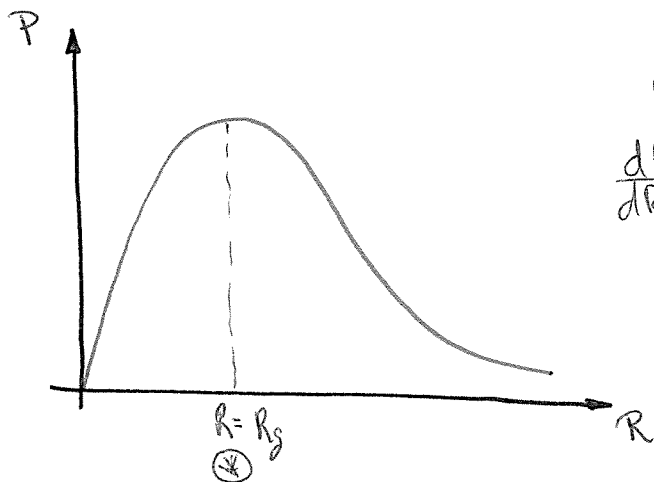


3.2 Potencia en fuente real de tensión



$$P_{\text{saliente fuente}} = P_{\text{entrante en R}} = u \cdot i = R i^2 = R \frac{e_g^2}{(R_g + R)^2}$$

$$e_g = R_g i + R i; \quad i = \frac{e_g}{R_g + R}$$



⊕ Hallamos este máximo con $\frac{dP}{dR} = 0$

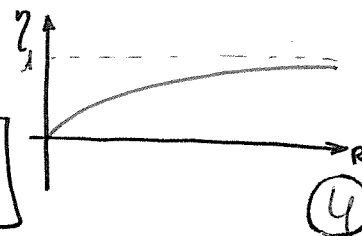
$$\frac{dP}{dR} = \frac{e_g^2 (R_g + R)^{-2} - R e_g^2 2 (R_g + R)^{-3}}{(R_g + R)^4} = 0$$

$$(R_g + R)^2 - 2R(R_g + R) = 0$$

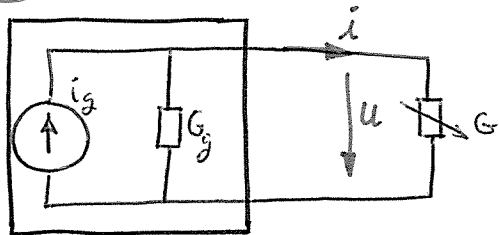
$$R_g - R = 0, \quad R_g = R \text{ es máximo}$$

NOTA!! Rendimiento

$$\eta = \frac{P_{\text{saliente J. real}}}{P_{\text{saliente J. ideal}}} = \frac{u \cdot i}{e_g i} = \frac{u}{e_g} = \frac{R i}{(R_g + R) i} = \frac{R}{R_g + R}$$

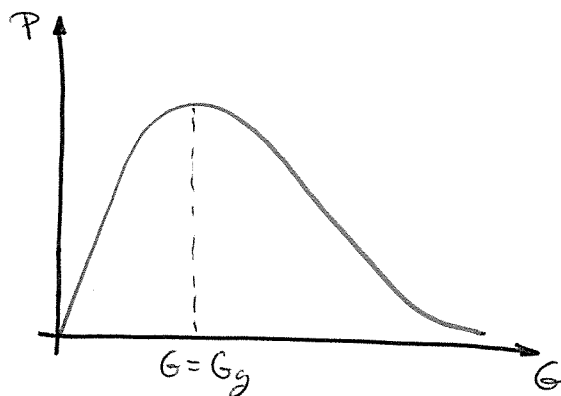


3.3 Fuente real de intensidad



$$P_{\text{saliente fuente}} = P_{\text{entrante en } G} = u \cdot \overset{\substack{\bar{i} = Gu \\ \downarrow}}{\bar{i}} = u^2 G = G \frac{\bar{i}_g^2}{(G + G_g)^2}$$

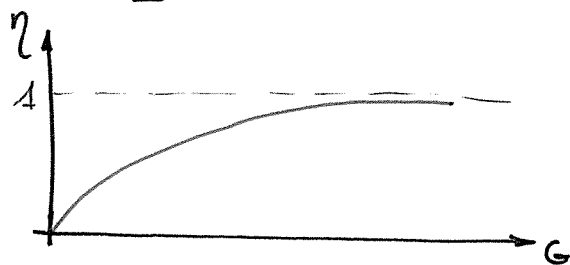
$$\bar{i}_g = G_g u + G u; u = \frac{\bar{i}_g}{G + G_g}$$



$$\frac{dP}{dG} = 0 \rightarrow G = G_g$$

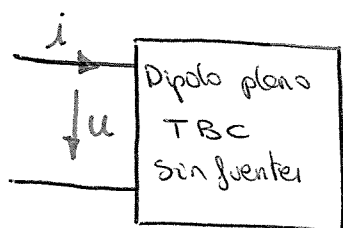
NOTA!! Rendimiento

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{real}}}{P_{\text{ideal interna}}} = \frac{u \cdot \bar{i}}{u \cdot \bar{i}_g} = \frac{\bar{i}}{\bar{i}_g} = \frac{G u}{G_g u + G u} = \frac{G}{G_g + G}}$$



ASOCIACIONES DE ELEMENTOS

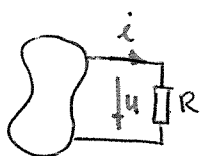
1 CONCEPTO DE IMPEDANCIA O ADMITANCIA OPERACIONAL



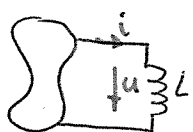
$$U(t) = Z(D) \cdot i(t)$$

Impedancia operacional $[Z]$ operador que, multiplicándolo por la intensidad nos da la tensión.

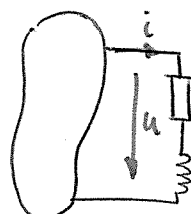
Propiedades del $\left\{ \begin{array}{l} f(D) U(t) \neq U(t) f(D) \\ D \cdot u = \frac{du}{dt} \\ \frac{1}{D} \cdot u = \int u(z) dz \end{array} \right.$



$$u = R \cdot i; \quad Z_R = R$$



$$u = L \frac{di}{dt}; \quad Z_L(D) = LD$$



$$Z(D) = R + LD$$

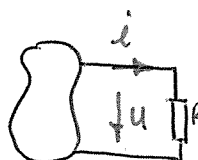
$$u = Ri + L \frac{di}{dt} = Ri + LDi = (R + LD)i$$



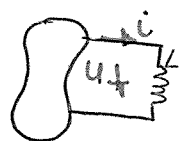
$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(z) dz = \frac{1}{C} \frac{1}{D} i; \quad Z_C = \frac{1}{CD}$$

$$i(t) = Y(D) u(t)$$

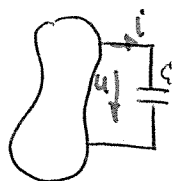
Admitancia operacional $[Y]$ operador que, multiplicándolo por la tensión nos da la intensidad



$$i = \frac{1}{R} u; \quad Y_R = \frac{1}{R} = G$$

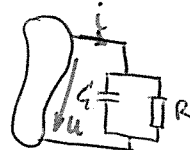


$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(z) dz = \frac{1}{LD} u; \quad Y_L(D) = \frac{1}{LD}$$



$$i(t) = C \frac{du}{dt} = CD u; \quad Y_C = CD$$

Ej.: Admitancia en un condensador real



$$i = G u + C D u$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{R} u + C D u = \\ &= \left(\frac{1}{R} + CD \right) u = \\ &= Y(D) \cdot u \end{aligned}$$

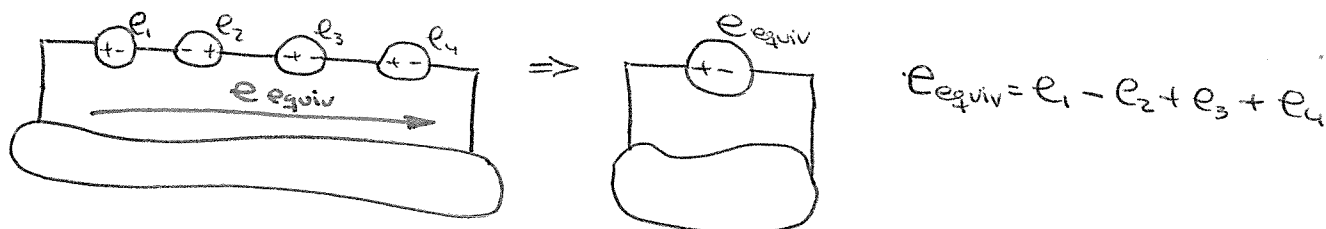
NOTA Como el obrero

$$Y(D) = \frac{1}{Z(D)}$$

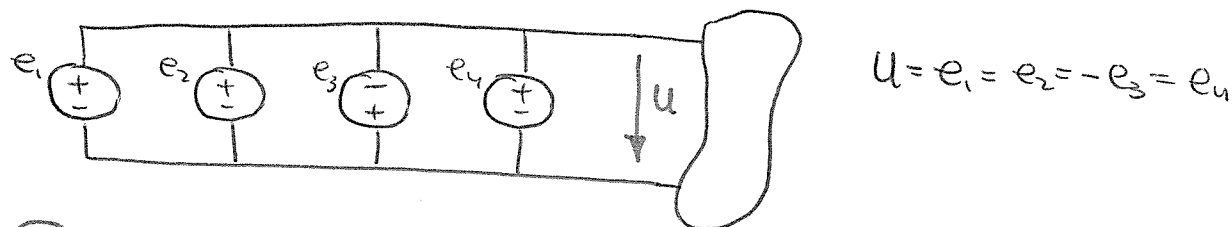
$$\Rightarrow Y(D) = \frac{1}{R} + CD$$

2 ASOCIACIONES DE FUENTES IDEALES

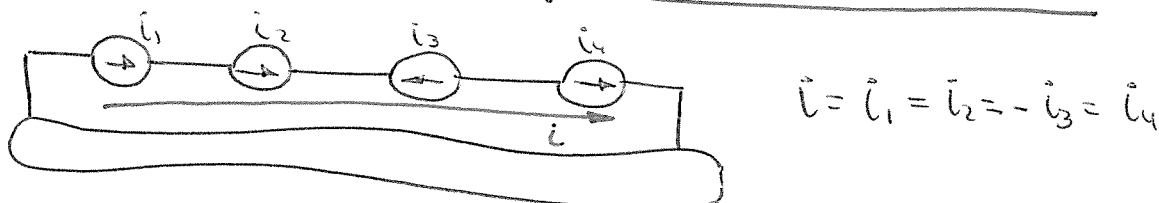
2.1 Asociación en serie de fuentes ideales de tensión



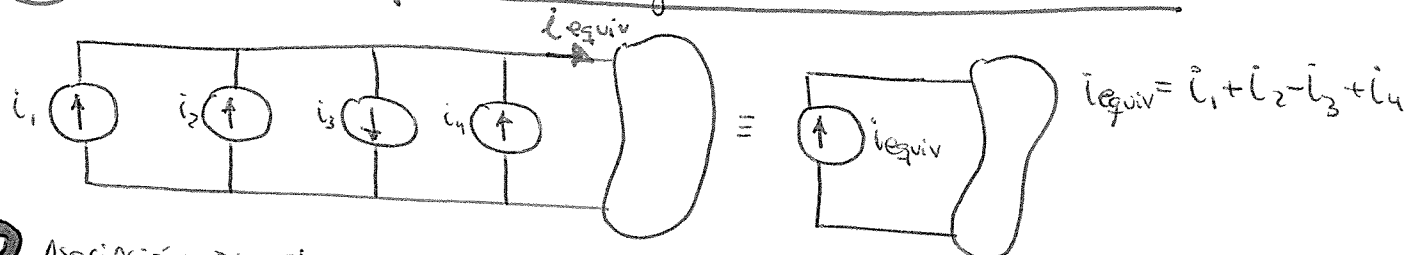
2.2 Asociación en paralelo de fuentes ideales de tensión



2.3 Asociación en serie de fuentes ideales de intensidad



2.4 Asociación en paralelo de fuentes ideales de intensidad



3 ASOCIACIÓN DE ELEMENTOS PASIVOS EN SERIE. Divisor de tensión

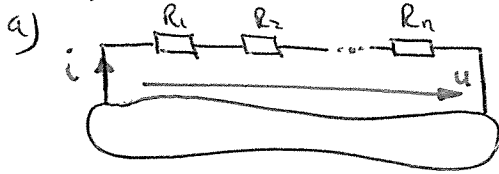


$$\begin{cases} U_1 = Z_1(D) i \\ U_2 = Z_2(D) i \\ \vdots \\ U_n = Z_n(D) i \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} U = U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ U = i \sum_{i=1}^n Z_i(D), \quad U = \overbrace{Z_{equiv}(D)}^{\text{Impedancia operacional del dipolo serie}} \cdot i \end{array} \right.$$

$$Z_{equiv} = Z_1(D) + Z_2(D) + \dots + Z_n(D) = \sum_{i=1}^n Z_i(D)$$

$$\begin{cases} U_j = Z_j(D) i \\ U = Z_{eq}(D) i \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{U_j}{U} = \frac{Z_j}{Z_{eq}} \\ U_j = \frac{Z_j(D)}{Z_{eq}(D)} U \end{array} \right.$$

Ejemplos:

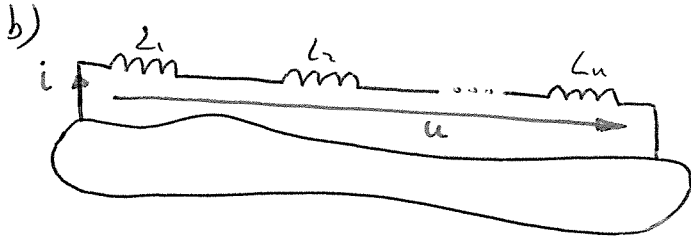


$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$Z_j = R_j$$

$$Z_{eq} = \sum_{j=1}^n R_j = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$U = \underbrace{(R_1 + R_2 + \dots + R_n)}_{R_{eq}} \bar{i} = R_{eq} \cdot \bar{i}$$

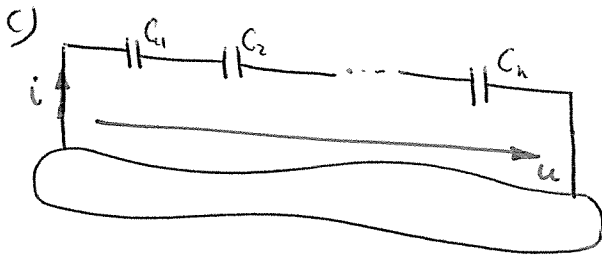


$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

$$Z_i(D) = L_i D$$

$$Z_{eq}(D) = L_1 D + L_2 D + \dots + L_n D = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) D$$

$$U = \underbrace{(L_1 + L_2 + \dots + L_n) D}_{L_{eq} Z_{eq}} \bar{i} = L_{eq} D \cdot \bar{i}$$



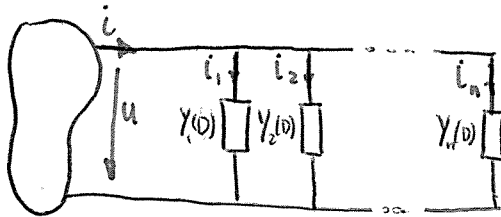
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

$$Z_j(D) = \frac{1}{C_j D}$$

$$Z_{eq}(D) = \frac{1}{C_1 D} + \frac{1}{C_2 D} + \dots + \frac{1}{C_n D} = \frac{1}{D} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

$$U = \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)}_{\frac{1}{C_{eq}}} \cdot \frac{1}{D} \cdot \bar{i}$$

4 ASOCIACIÓN DE ELEMENTOS EN PARALELO. Divisor de intensidad



$$\begin{cases} \bar{i}_1 = Y_1(D) \cdot u \\ \bar{i}_2 = Y_2(D) \cdot u \\ \vdots \\ \bar{i}_n = Y_n(D) \cdot u \end{cases}$$

$$\bar{i} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \dots + \bar{i}_n$$

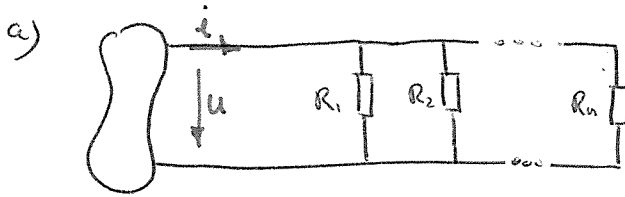
$$\bar{i} = \sum_{j=1}^n Y_j(D) u$$

$$\bar{i} = \underbrace{Y_{eqiv}(D)}_{\text{Admitancia operacional del dipolo paralelo}} \cdot u$$

$$Y_{eqiv}(D) = Y_1(D) + Y_2(D) + \dots + Y_n(D)$$

$$\begin{cases} \bar{i}_j = Y_j(D) \cdot u \\ \bar{i} = Y_{eq}(D) u \end{cases} \quad \bar{i}_j = \frac{Y_j(D)}{Y_{eq}(D)} \cdot \bar{i}$$

Ejemplos



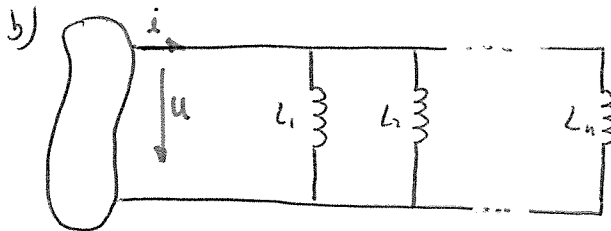
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$Y_j(D) = \frac{1}{R_j} = G_j$$

$$Y_{eq} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

$$i = Y_{eq} u = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) u$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{1/R_{eq}}$



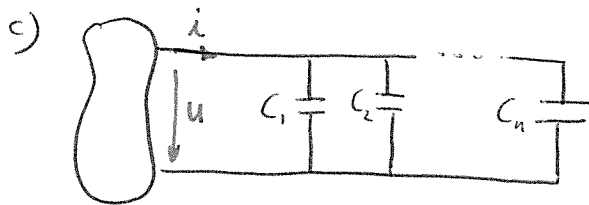
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

$$Y_j(D) = \frac{1}{L_j D}$$

$$Y_{eq}(D) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i D}$$

$$i = Y_{eq}(D) u = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \frac{1}{D} u$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{1/L_{eq}} \quad Y_{eq}(D)$



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

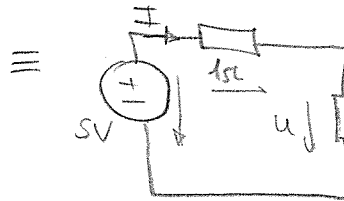
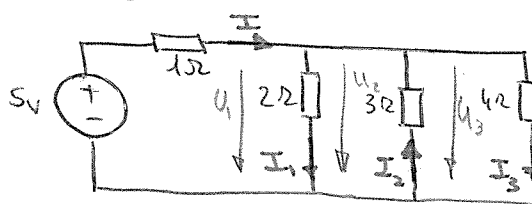
$$Y_j(D) = C_j D$$

$$Y_{eq}(D) = \sum_{j=1}^n C_j D$$

$$i = Y_{eq}(D) u = \underbrace{(C_1 + C_2 + \dots + C_n)}_{C_{eq}} D u$$

$Y_{eq}(D)$

Exerción 10 Hallar I para cada resistencia



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$$

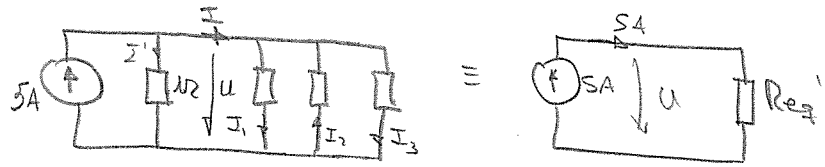
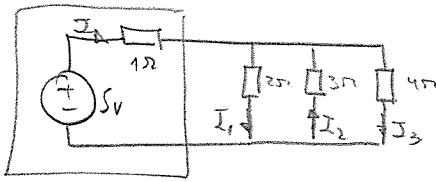
$$R_{eq} = \frac{12}{13} \Omega$$

$$5 = I \cdot 1 + I \cdot \frac{12}{13} ; 5 = I \left(\frac{25}{13} \right) ; \boxed{I = \frac{13}{5} A}$$

$$U_1 = U_2 = U_3 = u = I \frac{12}{13} = \frac{12}{5} V$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= u/R_1 = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{5} A = 1.2 A \\ I_2 &= -u_2/R_2 = -\frac{12}{5} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{5} A = -0.8 A \\ I_3 &= U_3/R_3 = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{5} A = 0.6 A \end{aligned}}$$

Otro método: Convertimos la fuente real de tensión a una fuente real de intensidad



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{25}{12} \Rightarrow U = 5 \cdot R_{eq} = 5 \cdot \frac{12}{25} = \frac{12}{5} V$$

$$R_{eq} = \frac{12}{25} \quad / \quad I' = \frac{Y_{12}}{Y_{eq}} \cdot 5 = \frac{1}{\frac{25}{12}} \cdot 5 = \frac{12}{5} \Rightarrow I = 5 - \frac{12}{5} = \frac{13}{5} A$$

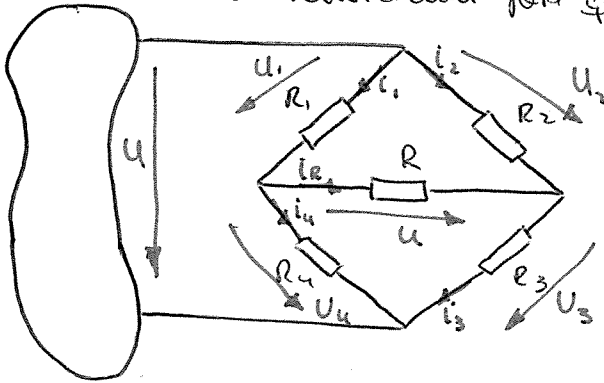
$$I_1 = \frac{Y_{12}}{Y_{eq}} \cdot 5 = \frac{1/2}{\frac{25}{12}} \cdot 5 = \frac{6}{5} A$$

$$I_2 = -\frac{Y_{32}}{Y_{eq}} \cdot 5 = -\frac{1/3}{12/25} \cdot 5 = -\frac{4}{5} A$$

$$I_3 = \frac{Y_{42}}{Y_{eq}} \cdot 5 = \frac{1/4}{12/25} \cdot 5 = \frac{3}{5} A$$

Cuestión 11

El puente está equilibrado si $I_R = 0$. Hallar relación entre el ratio de resistencias para que el puente esté equilibrado.

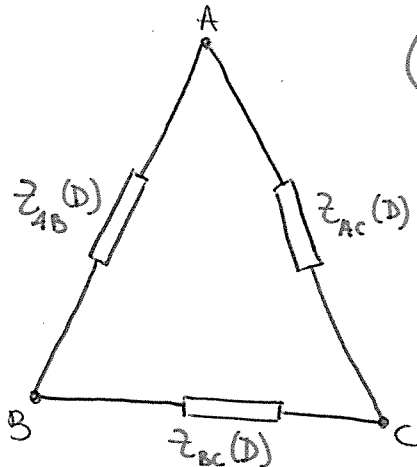
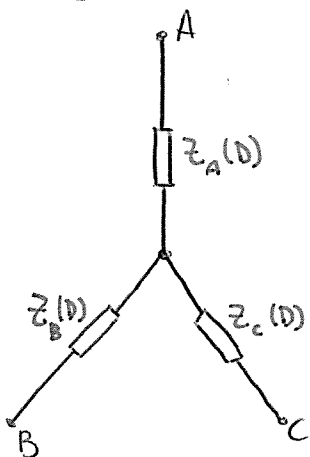


$$I_R = 0 \rightarrow U = 0 \rightarrow \begin{cases} U_1 = U_2 \\ U_3 = U_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 1) & \quad U_1 R_1 = i_2 R_2 \\ 2) & \quad i_3 R_3 = i_4 R_4 \end{aligned} \quad ; \quad i_1 = i_4, \quad i_2 = i_3$$

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$$

5 TRANSFORMACIÓN ESTRELLA-TRIÁNGULO



5.1 $Y \rightarrow \Delta$

- Datos: Z_A, Z_B, Z_C

Incógnitas: Z_{AB}, Z_{AC}, Z_{BC}

$$Z_{AB} = Z_A + Z_B + \frac{Z_A Z_B}{Z_C}$$

$$Z_{CA} = Z_C + Z_A + \frac{Z_C Z_A}{Z_B}$$

$$Z_{BC} = Z_B + Z_C + \frac{Z_B Z_C}{Z_A}$$

5.2 $\Delta \rightarrow Y$

Datos: Z_{AB}, Z_{AC}, Z_{BC}

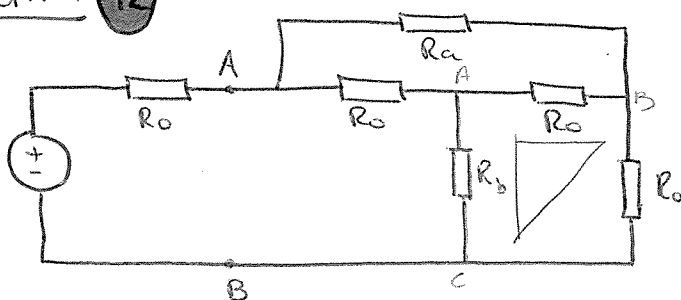
Inmaginar: Z_A, Z_B, Z_C

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{Z_{AB} Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} \\ Z_B &= \frac{Z_{AB} Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} \\ Z_C &= \frac{Z_{BC} Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} \end{aligned}$$

NOTA!! Si se da el caso de que $Z_A = Z_B = Z_C = Z_Y$

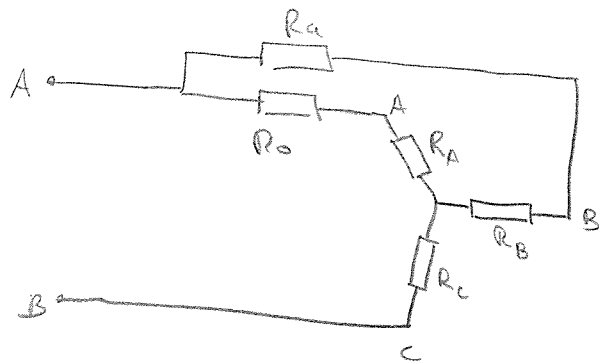
$$Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z_{\Delta} = Z_Y + Z_Y + \frac{Z_Y Z_Y}{Z_Y} = 3Z_Y \quad \left\} \rightarrow \boxed{Z_{\Delta} = 3Z_Y}$$

Guía 12



Demstrar que si $R_a R_b = R_0^2$
La resistencia entre A-B es R_0

a) for conversion $Y \rightarrow \Delta$

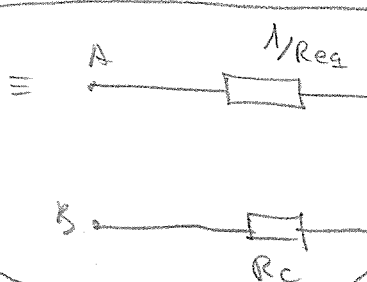
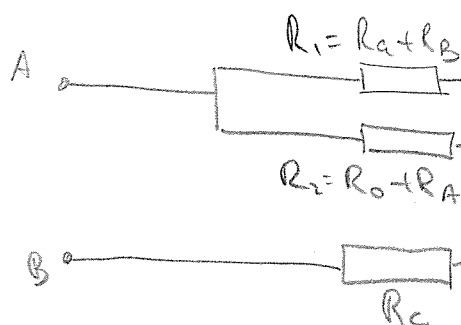


$$\Delta \rightarrow Y$$

$$R_A = \frac{R_0 R_b}{2R_0 + R_b}$$

$$R_B = \frac{R_0^2}{2R_0 + R_b}$$

$$R_C = \frac{R_0 R_b}{2R_0 + R_b}$$

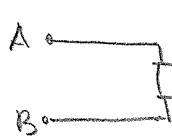


$$\begin{aligned} R_1 &= R_a + R_b = R_a + \frac{R_0^2}{2R_0 + R_b} = \frac{2R_0 R_a + R_0^2}{2R_0 + R_b} = \frac{2R_0(R_0 + R_a)}{2R_0 + R_b} \\ R_2 &= R_0 + R_A = R_0 + \frac{R_0 R_b}{2R_0 + R_b} = \frac{2R_0^2 + R_0 R_b}{2R_0 + R_b} = \frac{2R_0(R_0 + R_b)}{2R_0 + R_b} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{eq} = \frac{\frac{2R_0(R_0+R_a)2R_0(R_0+R_b)}{(2R_0+R_b)^2}}{\frac{2R_0(2R_0+R_a+R_b)}{2R_0+R_b}} = \frac{2R_0(R_0^2+R_0(R_a+R_b)+R_0^2)}{(2R_0+R_b)(2R_0+R_a+R_b)} =$$

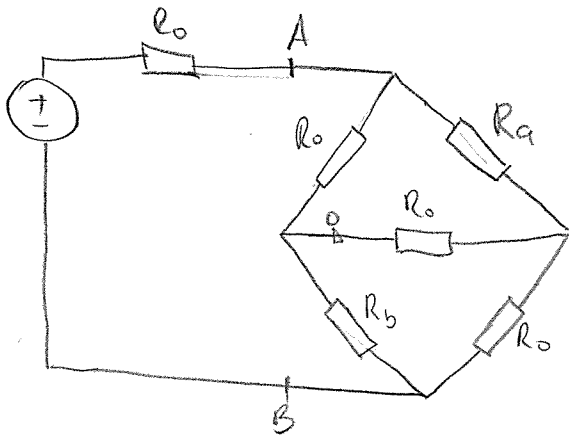
$$= \frac{2R_0^2(2R_0+R_a+R_b)}{(2R_0+R_b)(2R_0+R_a+R_b)} = \frac{2R_0^2}{2R_0+R_b}$$



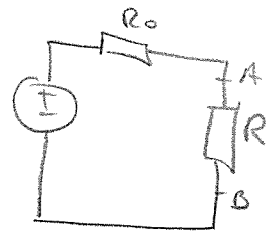
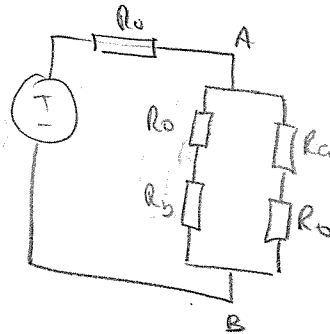
$$R = R_{eq} + R_c = \frac{2R_0^2}{2R_0+R_b} + \frac{R_0R_b}{2R_0+R_b} = \frac{R_0(2R_0+R_b)}{2R_0+R_b} = \underline{\underline{R_0}}$$

Como queríamos demostrar.

b) Repetir el circuito de forma que aparezca un puente equilibrado



$$\frac{R_0}{R_b} = \frac{R_a}{R_0}; \quad R_0^2 = R_a R_b \quad \text{condición puente equilibrado}$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0+R_b} + \frac{1}{R_a+R_0}; \quad R = \frac{(R_0+R_b)(R_a+R_0)}{R_a+R_0+R_0+R_b} = \frac{R_0^2+R_0R_a+R_0R_b+R_0^2}{R_a+2R_0+R_b} =$$

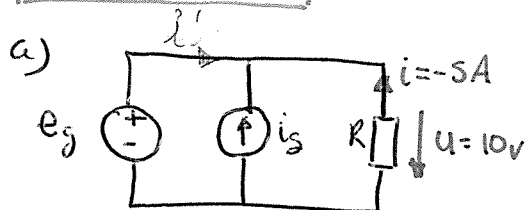
$$= \frac{R_0(2R_0+R_a+R_b)}{2R_0+R_a+R_b} = \underline{\underline{R_0}} \quad \text{with } R_a R_b = R_0^2$$

PROBLEMAS Capítulo 1

TEMAS: 1, 2, 3, 4, 5
Indusbol.com

Problema 1.3

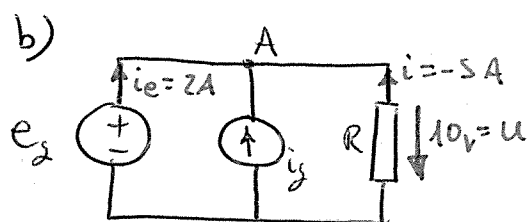
Determinar valores desconocidos de las fuentes



$$e_g = u = \underline{10V}; \quad u = -iR; \quad 10 = -(-5)R; \quad R = \underline{2\Omega}$$

$\Rightarrow$ Los valores de U e i son independientes de $i_g \rightarrow$ Solo dependen de e_g y R

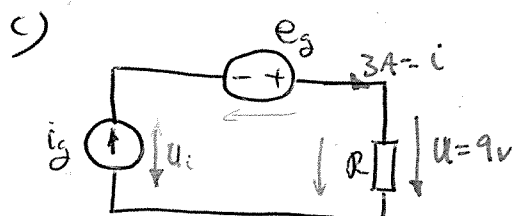
El valor de i' sí dependerá del valor que tome la i_g , de forma que $\boxed{i' + i_g = 5}$



$$e_g = \underline{10V}$$

$$R = -\frac{U}{i} = \frac{-10}{-5} = \underline{2\Omega}$$

$$i_g = 5 - 2 = \underline{3A}$$



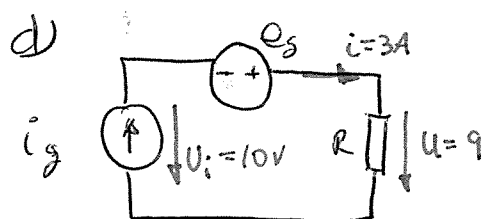
$$i_g = \underline{3A}$$

$$R = \frac{U}{i} = \frac{9}{3} = \underline{3\Omega}$$

Los valores de U e i son indep. de $e_g \rightarrow$ Solo dependen de i_g y R

El valor de U_i sí dependerá del valor de e_g de la forma

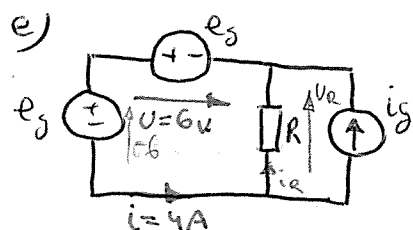
$$\boxed{e_g = 9 + U_i}$$



Aplicando lo anterior

$$\boxed{i_g = 3A}; \quad \boxed{R = 3\Omega}$$

$$e_g = 9 - 10 = \underline{-1V}$$



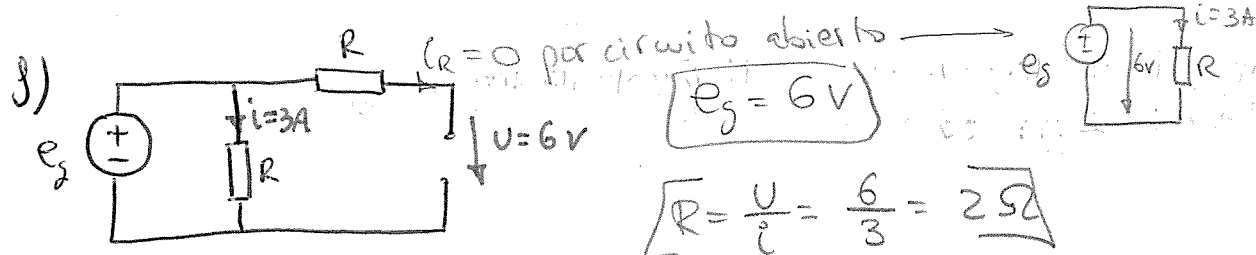
$$\boxed{e_g = 6V}$$

$U_R = e_g + e_g = 0V \rightarrow$ El valor de U_R es independiente de la resistencia al igual que

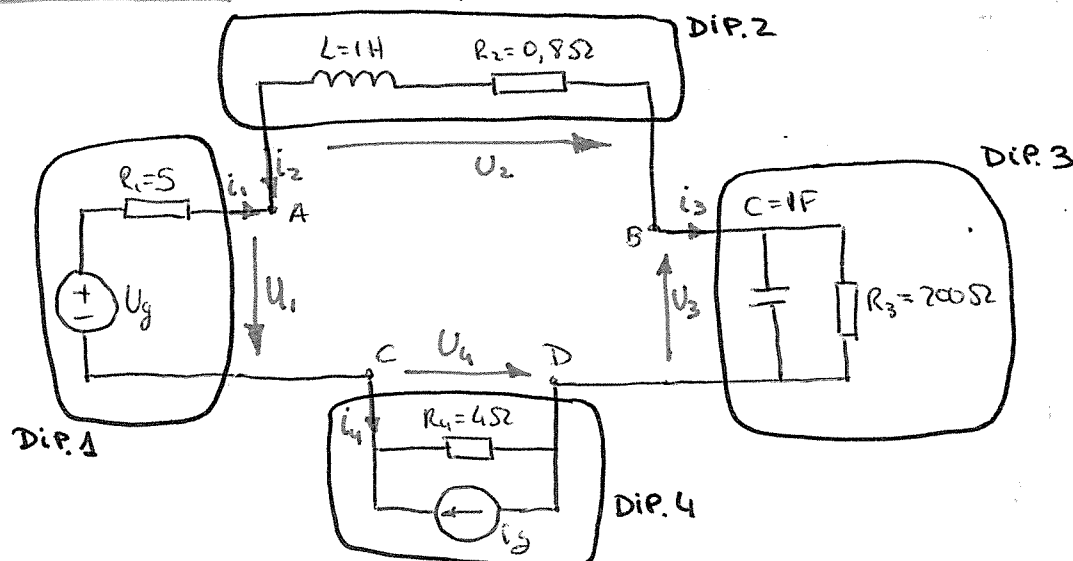
$$i_R = \frac{U_R}{R} = \frac{0}{R} = 0A$$

$$\boxed{i_g = i = 4A}$$

los valores de las fuentes ya que:
 $\rightarrow$ No circula corriente por la resistencia



Problema 1.4 Régimen permanente de corriente continua



Datos:

$$i_1 = -5A$$

$$U_1 = -988V$$

$$U_2 = -4V$$

$$U_3 = 1000V$$

1) Potencia absorbida por cada dipolo

a) Con el convenio de potencia entrante

• Dipolo 1 $P_{e1} = U \cdot i = -U_1 \cdot i_1 = -(-988 \cdot (-5)) = -4940W$

↑
Ref. pol. contraria

$P_{absorbida} = P_{entrante} = -4940W$

Dipolo absorbe potencia negativa, por tanto genera potencia
→ Generador

• Dipolo 2. Por RPCC $\equiv$

$$U_2 = -i_2 R_2 \Rightarrow i_2 = \frac{-4}{-0.8} = 5A$$

$P_{e2} = U \cdot i = -U_2 \cdot i_2 = -(-4) \cdot (5) = 20W$

↑
Ref. pol. contraria

$P_{absorbida} = P_{entrante} = 20W$

→ Dipolo absorbe potencia positiva es receptor

• Dipolo 3. Por RPCC $\equiv$

$$U_3 = -i_3 R_3, i_3 = \frac{1000}{-200} = -5A$$

$P_{e3} = U \cdot i = -U_3 \cdot i_3 = -1000 \cdot (-5) = 5000W$

↑
Ref. pol. contraria

$P_{absorbida} = P_{entrante} = 5000W$

→ Dipolo absorbe potencia positiva, es receptor

Dipolo 4 $U_4 = -U_1 + U_2 - U_3 = 988 - 4 - 1000 = -16V$
 $i_4 = -i_1 = 5A$

$P_{e4} = U \cdot i = U_4 i_4 = -16 \cdot 5 = -80W$
 Ref. pol. congruentes

$P_{abs} = P_{entrate} = -80W$

◀ Dipolo absorbe potencia negativa, por tanto genera potencia
Es generador

b) Con el convenio de potencia saliente

Dip 1 $P_{s1} = -U \cdot i = -(U_1 \cdot i_1) = U_1 i_1 = -988 \cdot (-5) = \underline{4940W}$
 Ref. pol. contrarias

Dip 2 $P_{s2} = -U \cdot i = -(U_2 i_2) = U_2 i_2 = -4 \cdot 5 = \underline{-20W}$

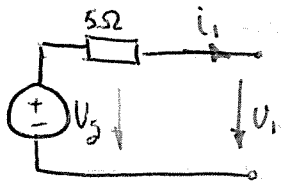
Dip 3 $P_{s3} = -U \cdot i = -(U_3 i_3) = U_3 i_3 = 1000 \cdot (-5) = \underline{-5000W}$

Dip 4 $P_{s4} = -U \cdot i = -U_4 i_4 = -(-16) \cdot 5 = \underline{80W}$

Como vemos, se cumple que $P_e = -P_s$

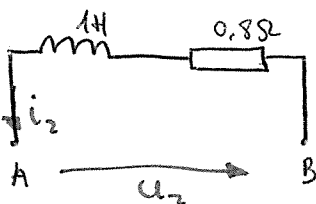
② Comprobar que la P_{abs} dada por cada dipolo coincide con la de la suma de los elementos ideales que lo constituyen

Dipolo 1 $P_{abs1} = -4940W$ $\begin{cases} i_1 = -5A \\ U_1 = -988V \end{cases}$ $U_g = +U_R + U_1 = -25 - 988 = -1013$



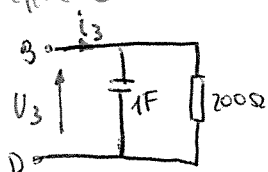
$P_{U_g} = U_g \cdot (-i) = -1013 \cdot (-5) = -5065W$
 $P_R = I^2 R = (-5)^2 \cdot 5 = 125W$
 $\left. \begin{matrix} P_{U_g} \\ P_R \end{matrix} \right\} P_{e1} = -4940W$

Dipolo 2



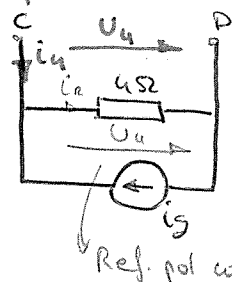
$P_{abs2} = 20W$ $\begin{cases} i_1 = 5A \\ U_2 = -4V \end{cases}$
 Por RPCC $\rightarrow P_L = 0$
 $P_R = I^2 R = (-5)^2 \cdot 0.8 = 20W$
 $\left. \begin{matrix} P_R \end{matrix} \right\} P_{e2} = 20W$

Dipolo 3



$P_{abs3} = 5000W$ $\begin{cases} U_3 = 1000V \\ i_3 = -5A \end{cases}$
 Por RPCC $\rightarrow P_C = 0$
 $P_R = i_3^2 R = (-5)^2 \cdot 200 = 5000W$
 $\left. \begin{matrix} P_R \end{matrix} \right\} P_{e3} = 5000W$

Dipolo 4



$$P_{abs4} = -80 \text{ W} \quad \left\{ \begin{array}{l} U_4 = -16 \text{ V} \\ i_4 = 5 \text{ A} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_R = i_R^2 R \\ P_{fuente} = U_4 \cdot (-i_5) \end{array} \right.$$

$$i_R = \frac{U_4}{R} = \frac{-16}{4} = -4 \text{ A} \rightarrow P_R = (-4)^2 \cdot 4 = 64$$

$$i_5 = -i_4 + i_R = -5 - 4 = -9 \text{ A}$$

$$P_{fuente} = -16 \cdot (-9) = 144$$

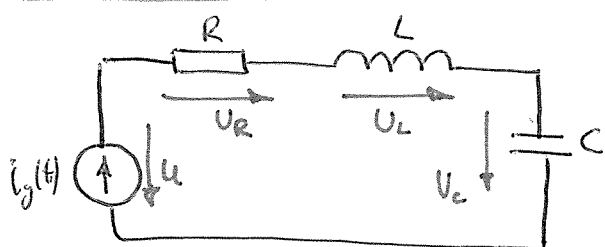
$$P_{e4} = -144 + 64 = -80 \text{ W}$$

- ③ Comprobar que se verifica el theoreme de la energía en forma de potencia. El theoreme de la conservación de la energía también se puede expresar en forma de potencia pues la potencia es la derivada de la energía.

$$P_{e1} + P_{e2} + P_{e3} + P_{e4} = 0 \rightarrow -4940 + 20 + 5000 - 80 = 0$$

También podría haberse comprobado con $\sum P_{salientes} = 0$ o $\sum P_e = \sum P_s$

Problema 1.5



Sea el dipolo serie de parámetros R, L, C

El condensador está descargado inicialmente

$$t < 0_s \rightarrow i_5(t) = 0$$

$$t > 0_s \rightarrow i_5(t) = 5t \text{ (A)}$$

$$|W_C(t=2)| = |W_L(t=2)| = 100 \text{ J}$$

$t=2$ R le disipado 200 J (en el intervalo $(0,2)$)

- ① Expresiones de las tensiones de los elementos pasivos básicos en función del tiempo y los parámetros R, L, C para $t \geq 0_s$

$$U_R(t) = i_5(t) \cdot R = 5Rt \text{ (V)}$$

$$U_L(t) = L \frac{di_5(t)}{dt} = L \frac{d(5t)}{dt} = 5L \text{ (V)}$$

$$i_C(t) = C \frac{dU}{dt}, \quad \int_0^t U(\tau) d\tau = C \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

$U(t=0) = 0$ por condensador inicialmente descargado.

$$U_C(t) = C \cdot 5 \frac{t^2}{2} = \frac{5}{2} \frac{t^2}{C} \text{ (V)}$$

② Valores de R, L, C

Necesitamos emplear los datos de la energía $|W_L(t=2)| = |W_C(t=2)| = 100 \text{ J}$

$$|\Delta W_R| = 200 \text{ J} \quad t \in [0, 2]$$

$$P_R = I^2 R = 25 R t^2, \quad W_R(t) = \int_0^t 25 R t^2 dt = 200, \quad 25 R \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = 200$$

$$25 R \frac{8}{3} = 200, \quad R = \frac{200 \cdot 3}{8 \cdot 25} = 3 \Omega \quad \boxed{R = 3 \Omega}$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t), \quad W_L(t=2) = \frac{1}{2} L (5 \cdot 2)^2 = 100, \quad L = \frac{100 \cdot 2}{100} = 2 \text{ H}$$

$$\boxed{L = 2 \text{ H}}$$

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t), \quad W_C(t=2) = \frac{1}{2} C \left(\frac{5 \cdot 2^2}{2/C} \right)^2 = 100$$

$$\frac{100}{2/C} = 100, \quad \boxed{C = 0,5 \text{ F}}$$

③ Expresión de la potencia instantánea que cede la fuente de intensidad en función del tiempo

Diagrama de la fuente de intensidad $i_s(t)$ en serie con un elemento de impedancia Z que produce una tensión U .

$$P_{\text{cedida}}(t) = P_{\text{saliente}}(t) = -U \cdot i = -(-U \cdot i_s) = U \cdot i_s = (5t^2 + 15t + 10) \cdot 5t$$

ref. contrarias

$$U = U_R + U_L + U_C = 5Rt + 5L + \frac{5}{2/C} t^2 = 15t + 10 + 5t^2$$

$$\boxed{P_{\text{cedida}}(t) = 25t^3 + 75t^2 + 50t \text{ (W)}}$$

④ Si el condensador presenta una $U_{\text{max}} = 720 \text{ V}$ ¿A partir de qué instante podría resultar dañado?

$$U_C(t) = 5t^2 = 720, \quad t^2 = \frac{720}{5} = 144, \quad t = 12 \text{ s}$$

$$\boxed{\text{A partir de } t = 12 \text{ s}}$$

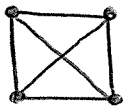
ANÁLISIS DE CIRCUITOS

TEMA 6

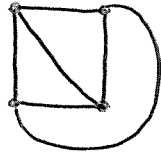
1 DEFINICIONES: Rama, nodo, circuito conexo, circuito plano, lazo, malla.

- Rama (branch): Circuito eléctrico que presenta dos terminales accesibles. $u = f(i)$
- Nudo (node): Punto donde se unen dos o mas ramas
- Circuito conexo (connected network): Circuito en el que se puede ir entre dos nudos cualesquiera a través de ramas del circuito
- Circuito plano (planar network): Circuito cuyo grafo se puede representar en un plano sin que sus ramas se crucen en lugares diferentes de los nudos.

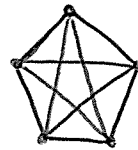
Ej.:



≡



Es plano



No es plano.

- Lazo (loop): Cualquier camino cerrado dentro de un circuito
- Malla (mesh): Lazos de un circuito que no contienen lazos en su interior. Solo está definido este concepto para circuitos planos.

2 NÚMERO DE ECUACIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

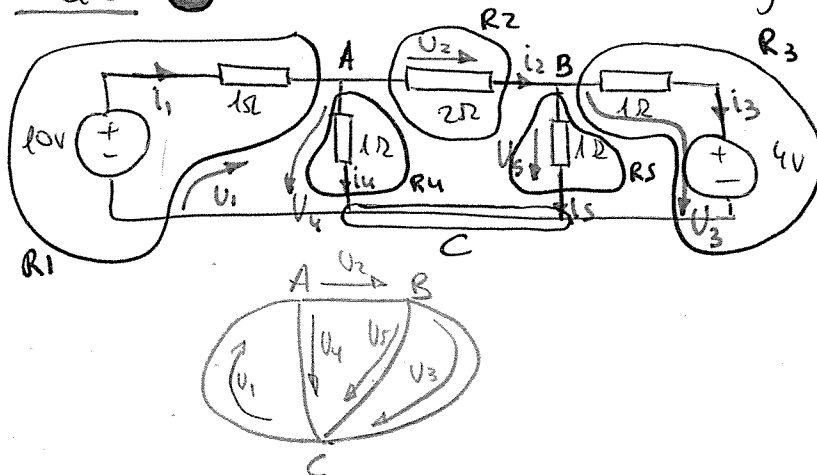
$n \rightarrow n^\circ$ nudos
 $r \rightarrow n^\circ$ ramas } Determinen 25 incógnitas

• Ecuaciones de rama $u = f(i) \} r$
 u, i

• Ecuaciones circulares: 25 LK
aplicada a " $r - (n - 1)$ " mallas.

• Ecuaciones nodales: 15 LK. aplicada a " $n - 1$ " nudos

Cuestión 13 Plantear las ecuaciones nodales y de mallas y resolver



Ec rama

$$\begin{cases} u_1 = -10 + i_1 \cdot 1 \\ u_2 = i_2 \cdot 2 \\ u_3 = i_3 \cdot 1 + 4 \\ u_4 = i_4 \cdot 1 \\ u_5 = i_5 \cdot 1 \end{cases}$$

Ec nodales

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_4 \\ i_2 = i_3 + i_5 \end{cases}$$

Ec circulares

$$\begin{cases} u_1 = -u_4 \\ u_2 + u_5 = u_4 \\ u_3 = u_5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 U_1 = -U_4 &\rightarrow \begin{cases} -10 + i_1 = -i_4 & (1) \\ 2i_2 + i_5 = i_4 & (2) \\ i_3 + 4 = i_5 & (3) \\ i_1 = i_2 + i_4 & (4) \\ i_2 = i_3 + i_5 & (5) \end{cases} \\
 U_2 + U_3 = U_4 &\rightarrow \\
 U_3 = U_5 &\rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i_1 = 10 - i_4 \rightarrow \begin{cases} 2i_2 + i_5 = i_4 \\ i_3 + 4 = i_5 \\ 10 - i_4 = i_2 + i_4 \\ i_2 = i_3 + i_5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2i_2 + i_3 + 4 = i_4 \\ 10 - 2i_4 = i_2 \\ i_2 = 2i_3 + 4 \end{cases}$$

$$i_2 = 10 - 2i_4 \rightarrow \begin{cases} 2(10 - 2i_4) + i_3 + 4 = i_4 \\ 10 - 2i_4 = 2i_3 + 4 \end{cases}$$

$$20 - 4i_4 + i_3 + 4 - i_4 = 0 \rightarrow -5i_4 + i_3 = -24$$

$$6 - 2i_4 - 2i_3 = 0 \rightarrow -i_4 - i_3 = -3$$

$$-6i_4 = -27, i_4 = \frac{9}{2} = 4,5A$$

$$i_3 = +3 - i_4 = -1,5A; i_5 = i_3 + 4 = 2,5A, i_2 = 10 - 2i_4 = 1A$$

$$i_1 = 10 - i_4 = 5,5A$$

$$U_1 = -10 + i_1 = -4,5V; U_2 = 2i_2 = 2V; U_3 = i_3 + 4 = 2,5V; U_4 = 4,5V; U_5 = i_5 = 2,5V$$

$U_1 = -4,5V$	$U_4 = 4,5V$	$i_1 = 5,5A$	$i_4 = 4,5A$
$U_2 = 2V$	$U_5 = 2,5V$	$i_2 = 1A$	$i_5 = 2,5A$
$U_3 = 2,5V$		$i_3 = -1,5A$	

3 ANÁLISIS DE CIRCUITOS POR NUDOS

Definimos las tensiones de nodo o nodales, eligiendo un nodo como referencia, como las tensiones entre el resto de nodos del circuito y el que se elige como referencia.

Para este método tendremos que convertir las fuentes de tensión en fuentes de intensidad

Plantearemos un sistema matricial:

$$[Y_n][U_n] = [i_{al.n.}]$$

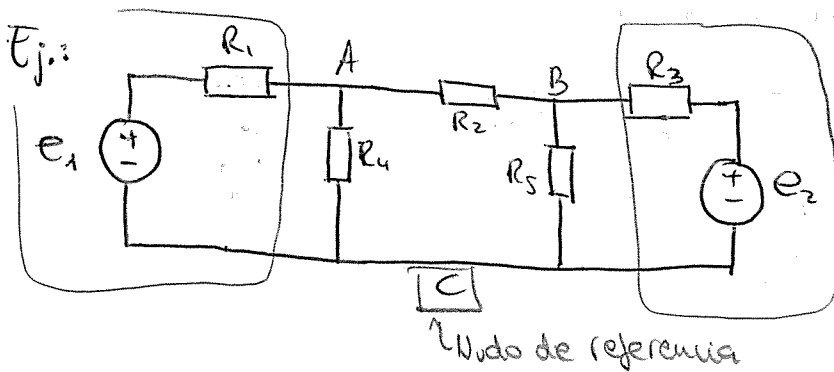
$$\begin{pmatrix} \text{Matriz de admitancias} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Tensiones de nodo} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{intensidades de alimentación de nodo} \end{pmatrix}$$

La matriz de admitancias se construye:

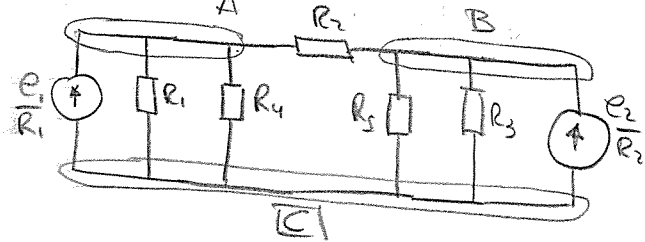
- En la diagonal, suma de las admitancias de los elementos pasivos que concurren en un nodo
- El resto de componentes serán la suma de las admitancias comunes de los elementos entre dos nodos, cambiados de signo

Las tensiones de nodo son las incógnitas

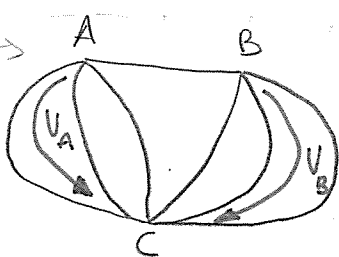
El vector $i_{al.n.}$ lo forman los valores de las fuentes de intensidad que alimentan a cada nodo.



Conversión de fuentes de U a fuentes de i



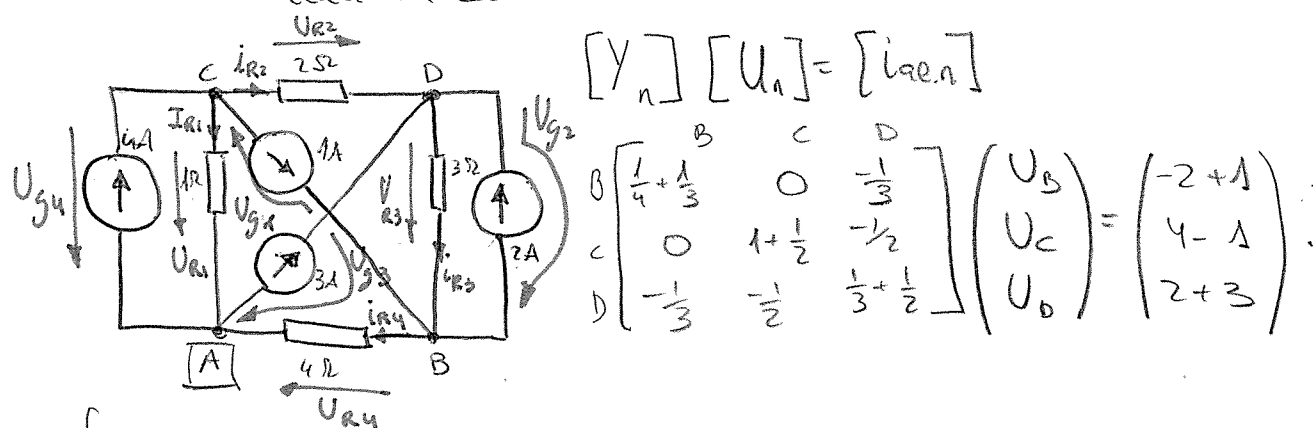
Grafo



$$\begin{matrix} A & B \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e_1}{R_1} \\ \frac{e_2}{R_2} \end{pmatrix}$$

Cuestión 14 Método de análisis por nodos. Nodo de referencia A

Determinar las tensiones en todos los elementos y las intensidades en cada resistencia



$$\begin{cases} \frac{7}{12} U_B - \frac{1}{3} U_D = -1 & \longrightarrow 7U_B - 4U_D = -12 & (1) \\ \frac{3}{2} U_C - \frac{1}{2} U_D = 3 & 3U_C - U_D = 6 & (2) \\ -\frac{1}{3} U_B - \frac{1}{2} U_C + \frac{5}{6} U_D = 5 & -2U_B - 3U_C + 5U_D = 30 & (3) \end{cases}$$

$$(2) + (3) \longrightarrow \begin{cases} -2U_B + 4U_D = 36 \\ 7U_B - 4U_D = -12 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} 5U_B &= 24; & U_B &= 4.8V \\ U_D &= \frac{36 + 2 \cdot 4.8}{4} = 11.4V \\ U_C &= \frac{6 + 11.4}{3} = 5.8V \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} U_{BA} \\ U_{CA} \\ U_{DA} \end{matrix} \begin{pmatrix} U_B \\ U_C \\ U_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.8 \\ 5.8 \\ 11.4 \end{pmatrix}$$

$$U_{g1} = U_{BC} = U_{BA} - U_{CA} = 4.8 - 5.8 = \underline{\underline{-1V}}$$

$$U_{g2} = U_{DB} = U_{DA} - U_{BA} = 11.4 - 4.8 = \underline{\underline{6.6V}}$$

$$U_{g3} = U_{DA} = \underline{\underline{11.4V}}$$

$$U_{g4} = U_{CA} = \underline{\underline{5.8V}}$$

$$U_{R1} = U_{CA} = \underline{\underline{5.8V}}$$

$$U_{R2} = U_{CD} = U_{CA} - U_{DA} = 5.8 - 11.4 = \underline{\underline{-5.6V}}$$

$$U_{R3} = U_{DB} = U_{DA} - U_{BA} = 11.4 - 4.8 = \underline{\underline{6.6V}}$$

$$U_{R4} = U_{BA} = \underline{\underline{4.8V}}$$

$$i_{R1} = U_{R1} / R_1 = \underline{\underline{5.8A}}$$

$$i_{R2} = U_{R2} / R_2 = -5.6 / 2 = \underline{\underline{-2.8A}}$$

$$i_{R3} = U_{R3} / R_3 = 6.6 / 3 = \underline{\underline{2.2A}}$$

$$i_{R4} = U_{R4} / R_4 = 4.8 / 4 = \underline{\underline{1.2A}}$$

4 ANÁLISIS DEL CIRCUITO POR MALLAS

Este método solo es válido para circuitos planos. Necesitamos tener solo fuentes de tensión, por tanto, convertiremos todas las fuentes de intensidad a fuentes de tensión.

Llamaremos intensidades de malla a unas intensidades ficticias de una malla que circulan todas en el mismo sentido.

Plantearémos un sistema matricial $[Z_m(D)][i_m] = [E_{alm}]$ $\left(\begin{array}{c} \text{matriz de impedancias} \\ \downarrow \\ \text{intensidades de malla} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{tensiones por} \\ \text{fuentes en} \\ \text{malla} \end{array} \right)$

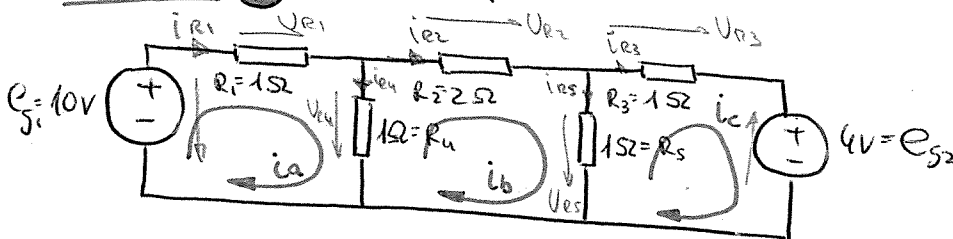
En la matriz de impedancias pondremos:

- En la diagonal, la suma de las impedancias que hay en la malla
- El resto de componentes serán la suma de las impedancias comunes a dos mallas con signo negativo.

Las intensidades de malla son las magnitudes

El vector de E_{alm} lo forman los valores de las fuentes de tensión que alimentan a cada malla. Determinaremos el signo recorriendo la malla en sentido contrario.

Ejercicio 13 Analizar por mallas



$$[Z_m(D)][i_m] = [E_{alm}] \rightarrow \begin{pmatrix} R_1 + R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_3 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{S1} \\ 0 \\ -E_{S2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2i_a - i_b = 10 \\ -i_a + 4i_b - i_c = 0 \\ -i_b + 2i_c = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2i_a - i_b = 10 \\ -2i_a + 7i_b = -4 \end{cases} \Rightarrow 6i_b = 6, i_b = 1$$

$$i_{R1} = i_a = \underline{5,5 A}$$

$$i_{R2} = i_b = \underline{1 A}$$

$$i_{R3} = i_c = \underline{-1,5 A}$$

$$i_{R4} = i_a - i_b = 5,5 - 1 = \underline{4,5 A}$$

$$i_{R5} = i_b - i_c = 1 - (-1,5) = \underline{2,5 A}$$

$$U = iR \Rightarrow \begin{cases} U_{R1} = 5,5 \cdot 1 = \underline{5,5 V} \\ U_{R2} = 1 \cdot 2 = \underline{2 V} \\ U_{R3} = -1,5 \cdot 1 = \underline{-1,5 V} \\ U_{R4} = 4,5 \cdot 1 = \underline{4,5 V} \\ U_{R5} = 2,5 \cdot 1 = \underline{2,5 V} \end{cases}$$

$$i_a = \underline{\frac{11}{2}}$$

$$i_c = \underline{-\frac{3}{2}}$$

$$[Z_m][i_m] = [e_a]_n : \begin{pmatrix} 5+2 & -5 & -2 & 0 \\ -5 & 1+5+2+4 & -2 & -9 \\ -2 & -2 & 2+2+2+1 & -2 \\ 0 & -9 & -2 & 9+2+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Añadimos ec. de fuente de intensidad $i_A = 7$

$$\begin{cases} i_A = 7 \\ 7i_A - 5i_B - 2i_C = 0 \\ -5i_A + 17i_B - 2i_C - 9i_D = -20 \\ -2i_A - 2i_B + 7i_C - 2i_D = 20 \\ -9i_B - 2i_C + 14i_D = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17i_B - 2i_C - 9i_D = 15 & (1) \\ -2i_B + 7i_C - 2i_D = 34 & (2) \\ -9i_B - 2i_C + 14i_D = 23 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) + \frac{2}{7}(2) &\rightarrow (17 - 2 \cdot \frac{2}{7})i_B + (-2 + 7 \cdot \frac{2}{7})i_C + (-9 - 2 \cdot \frac{2}{7})i_D = 15 + \frac{2}{7}34 \\ (1) - (2) &\rightarrow 26i_B - 23i_D = -8 \end{aligned}$$

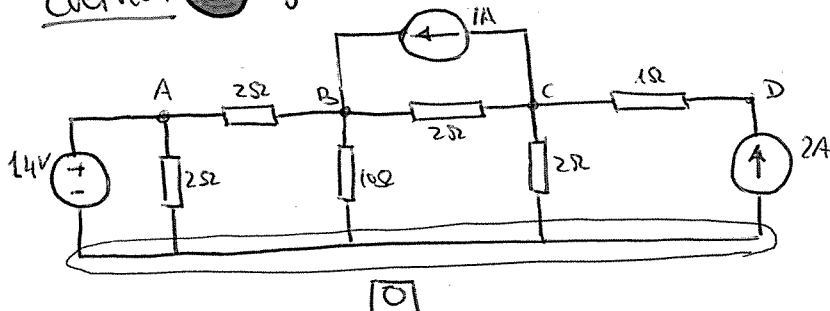
$$\begin{cases} 115i_B - 67i_D = 173 \rightarrow \times(23) \\ 26i_B - 23i_D = -8 \rightarrow \times(-67) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2645i_B - 1541i_D = 3979 \\ -1742i_B + 1541i_D = 536 \end{cases}$$

$$903i_B = 4515; i_B = \underline{5A}; i_D = \frac{-8 - 26 \cdot 5}{-23} = \underline{6A}; i_C = \frac{15 + 9 \cdot 6 - 17 \cdot 5}{-2} = \underline{8A}$$

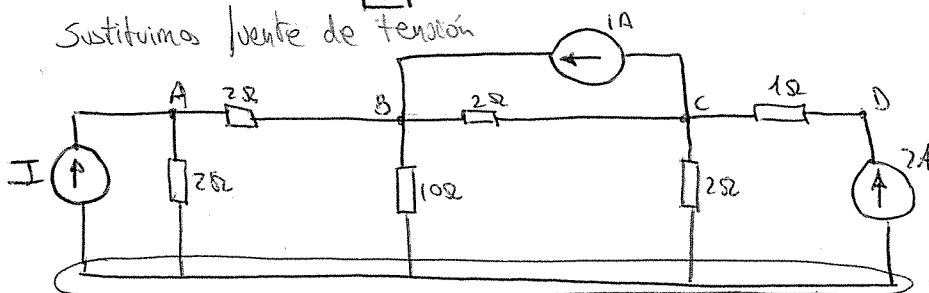
$$U = 49 - 5 \cdot 5 - 2 \cdot 8 = 8V; i_A = 7A$$

$$\begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}; U = 8V$$

Cuestión 17 Efectuar análisis por nodos

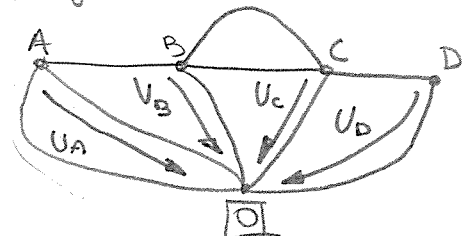


Sustituimos fuente de tensión



⊠ * Nudo de referencia

Grafo



$$[Y_n][U_n] = [I_{adn}]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} U_A - \frac{U_B}{2} = I \\ -\frac{U_A}{2} + \frac{11}{10} U_B - \frac{1}{2} U_C = 1 \\ -\frac{1}{2} U_B + 2U_C - U_D = -1 \\ -U_C + U_D = 2 \\ U_A = 14 \end{cases}$$

Ecuación por f de tensión: $U_A = 14V$

$$\begin{cases} 11U_B - 5U_C = 80 \\ -U_B + 4U_C - 2U_D = -2 \\ -U_C + U_D = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-5 + 4 \cdot 11)U_C - 2 \cdot 11U_D = (80 - 2 \cdot 11) \\ -U_C + U_D = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} +39U_C - 22U_D = 58 \\ -22U_C + 22U_D = 44 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} +17U_C &= 102 \\ U_C &= 6V \end{aligned}$$

$$U_D = 2 + U_C = 8V$$

$$U_B = \frac{80 + 5 \cdot 6}{11} = 10V$$

$$I = 14 - \frac{10}{2} = 9A$$

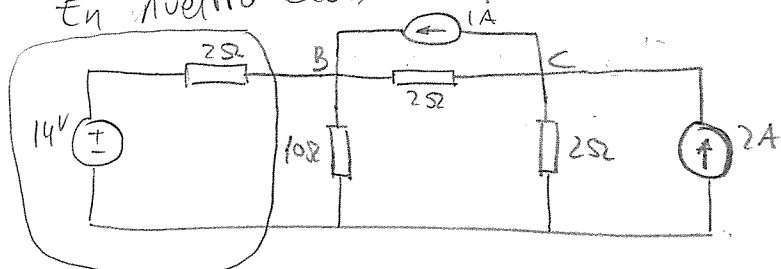
$$\begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14V \\ 10V \\ 6V \\ 8V \end{pmatrix}, \quad \underline{I = 9A}$$

Otra forma: Por simplificación

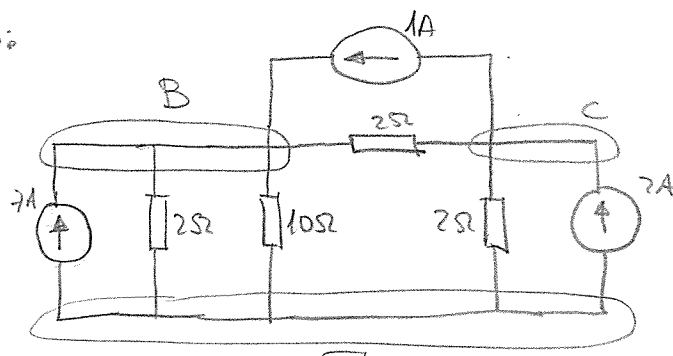
NOTA TEÓRICA!!

Simplificación de circuitos: En general, cuando tengamos una fuente ideal de tensión en paralelo con una resistencia, podremos suprimir esa resistencia para el análisis del circuito ya que el potencial no se ve afectado. Del mismo modo, podemos suprimir una resistencia en serie con una fuente de intensidad para facilitar cálculos ya que la intensidad no se verá afectada.

En nuestro caso, nos quedaría el circuito:



Fuente real de tensión que convertimos a fuente real de intensidad



Ya solo tenemos fuentes de intensidad y podemos hacer el análisis por nodos

$$[Y_n][U_n] = [i_{al_n}] \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 771 \\ -1+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{11}{10} U_B - \frac{1}{2} U_C = 8 \\ -\frac{1}{2} U_B + U_C = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{11}{5} U_B - U_C = 16 \\ -\frac{1}{2} U_B + U_C = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{17}{10} U_B = 17; U_B = 10V$$

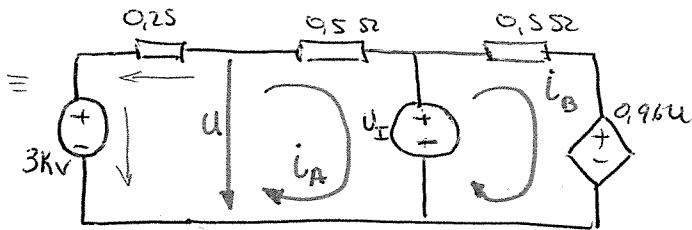
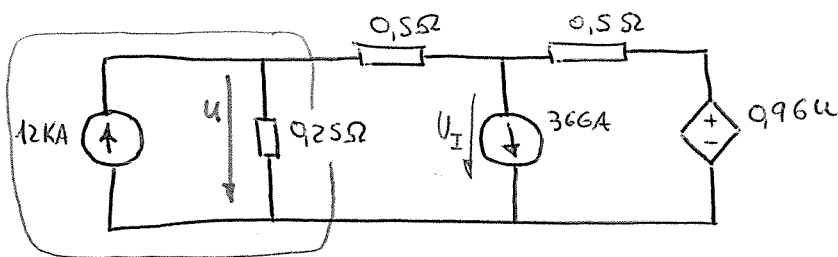
$$U_C = 1 + \frac{1}{2} 10 = 6V$$

Ahora resolvemos al circuito sin simplificar para calcular U_A y U_D

$$U_A = 14V; U_D = 2 \cdot 1 + U_C = 2 + 6 = 8V \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} (V)$$

⇒ Examen 1999 Analizar por el método de mallas



Fuente real de intensidad que convertimos en fuente real de tensión $12 \cdot 10^3 \cdot 0.25 = 3 \cdot 10^3 V$

$$[Z_m][i_m] = [e_{alm}]$$

$$\begin{pmatrix} 0.25 + 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_I + 3000 \\ -0.96u + U_I \end{pmatrix}$$

Ecuación de la f. intensidad $\equiv i_A - i_B = 366$
Ecuación de $u \equiv -0.25i_A + 3000$

$$\begin{cases} \frac{3}{4} i_A = -U_I + 3000 \\ \frac{1}{2} i_B = U_I - 0.96u \\ i_A - i_B = 366 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} i_A - \frac{1}{2} i_B = 3000 - 0.96u \\ i_A - i_B = 366 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} i_A - \frac{1}{2} i_B + 0.96(3000 - 0.25i_A) = 3000; \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{25} \right) i_A - \frac{1}{2} i_B = 120$$

$$\begin{cases} i_A - i_B = 366 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \left(\frac{75-24}{100} \right) i_A + i_B = -240 \\ i_A - i_B = 366 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{51}{50} + 1 \right) i_A = 126 \\ (-51 + 50) i_A = 126 \cdot 50; U_A = -6300A \\ i_B = 360 - 6300 = -5940A \end{cases}$$

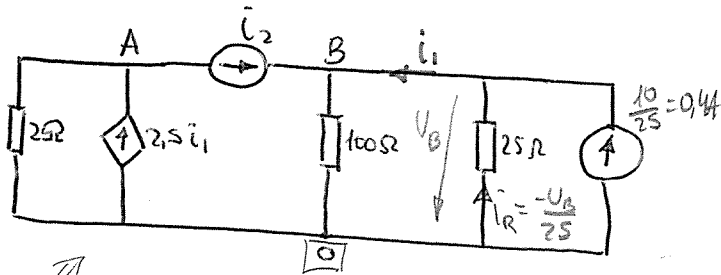
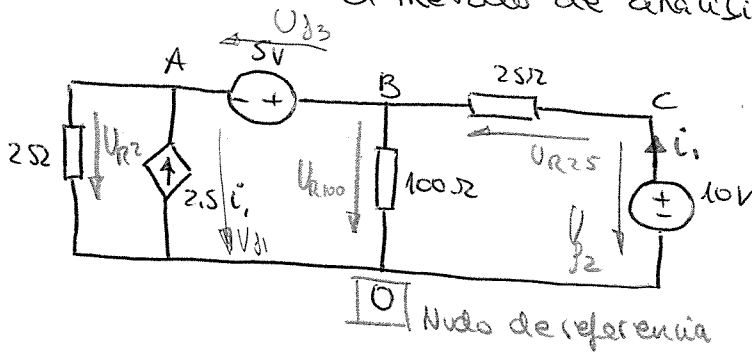
$$\begin{pmatrix} i_A \\ i_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6300 \\ 5940 \end{pmatrix}$$

$$U_I =$$

$$u = -0.25 \cdot (-6300) + 3000 = 4575$$

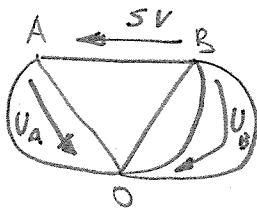
PROBLEMAS Capítulo 2

Problema 2.1 Determinar las tensiones de cada elemento o rama mediante el método de análisis por nudos



Convertimos fuentes de tensión a fuentes de intensidad

Gráfico



$$[Y_n][U_n] = [I_{a.n}]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} + \frac{1}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5i_1 - i_2 \\ i_2 + 0.4 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} 5 &= U_B - U_A \\ i_1 &= 0.4 - \frac{U_B}{25} \end{aligned}$$

Ecuación por fuente

$$\begin{cases} \frac{1}{2} U_A = 2.5i_1 - i_2 \\ \frac{5}{100} U_B = i_2 + 0.4 \\ -U_A + U_B = 5 \\ \frac{U_B}{25} = 0.4 - i_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A - 5i_1 + 2i_2 = 0 \\ U_B - 20i_2 = 8 \\ -U_A + U_B = 5 \rightarrow U_A = U_B - 5 \\ U_B + 25i_1 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_B - 5i_1 + 2i_2 = 5 \\ U_B - 20i_2 = 8 \\ U_B + 25i_1 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5i_1 + 22i_2 = -3 \\ -30i_1 + 2i_2 = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 30i_1 - 132i_2 = 18 \\ 30i_1 + 2i_2 = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 130i_2 = -13 \\ i_2 = -0.1A \end{cases}$$

$$i_1 = \frac{-3 - 22(-0.1)}{-5} = 0.16A; \quad U_B = 8 + 20 \cdot (-0.1) = 6V; \quad U_A = U_B - 5 = 1V$$

$\begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1V \\ 6V \end{pmatrix} \rightarrow$ Calcularemos las tensiones de cada rama en función de las de nudo:

$$U_{R2} = U_A = 1V$$

$$U_{R100} = U_B = 6V$$

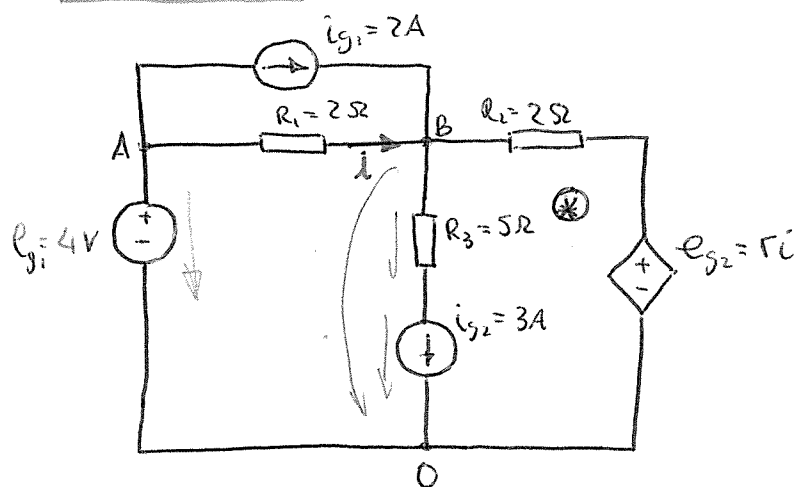
$$U_{R25} = 10 - U_B = 4V$$

$$U_{J1} = U_A = 1V$$

$$U_{J2} = 10V$$

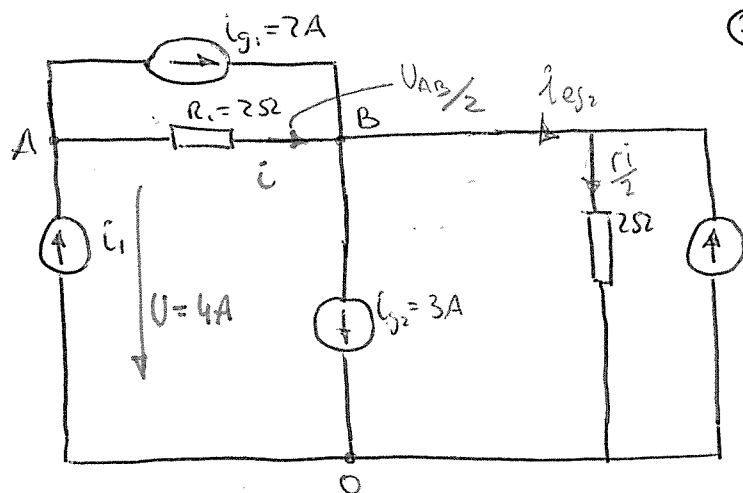
$$U_{J3} = 5V$$

Problema 2.2



Dato: $r = 2\Omega$

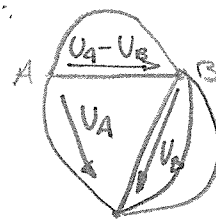
- 1) Analizar el circuito por nudos obteniendo U_A y U_B . Nudo de referencia 0.
Convertimos las fuentes de tensión en fuentes de intensidad



* NOTA!! Para el análisis, por principio de simplificación se podría suprimir la R_3 .

$$i_{g2} = \frac{e_{g2}}{2} = \frac{r i}{2} = i$$

Grabo:



$$[Y_n][U_n] = [i_{an}]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 - 2 \\ 2 - 3 + i \end{pmatrix}$$

Ecuación de fuente e_{g1}

$$U_A = 4V$$

Ecuación de i

$$i = \frac{U_A - U_B}{2}$$

$$\begin{cases} U_A - U_B = 2i - 4 \\ -U_A + 2U_B = -1 + i \\ U_A = 4 \\ U_A - U_B = 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_B = 8 - 2i \\ 2U_B = 3 + i \\ U_B = 4 - 2i \end{cases} \begin{cases} 8 - 2i + 2i - 4 = 0 \\ -13 + i + 4i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i - i_1 + 2 = 0 \\ -i - 4i_1 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow -5i_1 = -15, i_1 = 3A, i = -2 + 3 = 1A, U_B = 8 - 2 \cdot 3 = 2V, U_A = 4V$$

$$\begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} (V)$$

② Potencia cedida por cada una de las fuentes

Fuente e_{g1} : $P_{s e_{g1}} = -U i = + (U_A \cdot i_1) = 4 \cdot 3 = \boxed{12 \text{ W}}$
rel. pol. contrarias

Fuente i_{g2} : $P_{s i_{g2}} = -U i = -(-13)/3 = \boxed{39 \text{ W}}$
 $U_i = U_B - i_{g2} \cdot 5 = 2 - 3 \cdot 5 = -13 \text{ V}$

Fuente i_{g1} : $P_{s i_{g1}} = -U i = -2 \cdot 2 = \boxed{-4 \text{ W}}$
 $U_i = U_A - U_B = 2 \text{ V}$

Fuente e_{g2} : $P_{s e_{g2}} = -U i = \boxed{0 \text{ W}}$
 $U = r i$, $i_{e_{g2}} = -i_{g2} + \frac{r i}{2} = -i + i = 0$

Potencia total $\equiv 12 + 39 - 4 + 0 = \boxed{47 \text{ W}}$

③ Si $R_3' = 10 \Omega$, indicar cuanto valdrán las tensiones de nodo así como la potencia cedida por cada una de las fuentes

Por principio de simplificación, al encontrarse R_3 asociado en serie con la fuente de intensidad i_{g2} , su valor no afecta a las tensiones de nodo, por tanto,

Con $R_3' = 10 \Omega \rightarrow \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (V)}$

De igual forma, los valores de $P_{s e_{g1}}$, $P_{s i_{g1}}$ y $P_{s e_{g2}}$ tampoco se verán afectados

$P_{s e_{g1}} = 12 \text{ W}$, $P_{s e_{g2}} = 0 \text{ W}$, $P_{s i_{g1}} = -4 \text{ W}$

Sin embargo, $P_{s i_{g2}} = -U i = -(-28) \cdot 3 = \boxed{84 \text{ W}}$

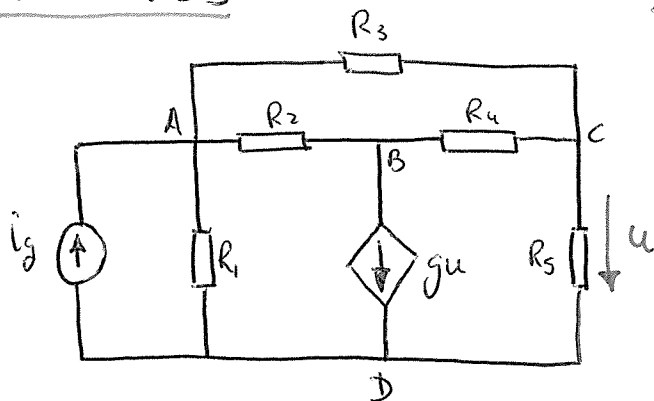
$U_i = U_B - i_{g2} \cdot 10 = 2 - 3 \cdot 10 = -28$

$P'_{\text{TOTAL}} = 12 + 84 - 4 + 0 = \boxed{92 \text{ W}}$

Problema 2.3

Datos: $\vec{i}_g = 4A$, $g = 1S$

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 3\Omega$

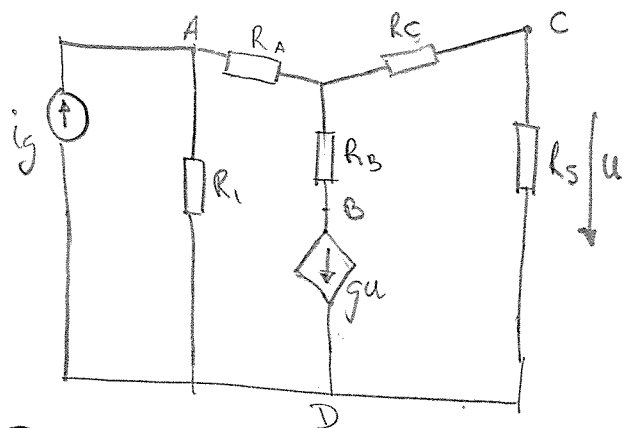


1) Transformar el triángulo ABC en una estrella equivalente

$$R_A = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{3^2}{3+3+3} = 1\Omega$$

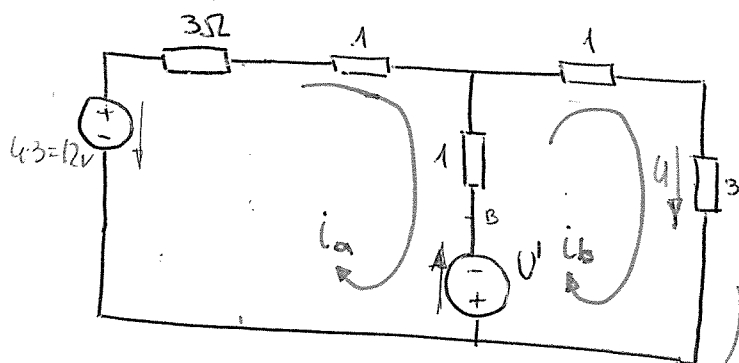
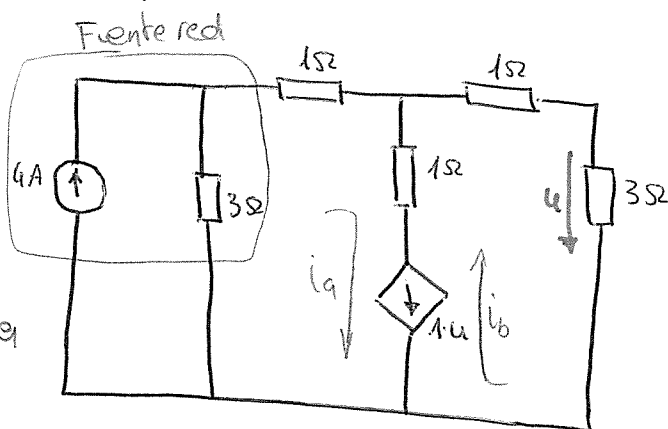
$$R_B = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 1\Omega$$

$$R_C = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 1\Omega$$



2) Analizar por mallas el circuito transformado

Transformemos las fuentes de intensidad a fuentes de tensión



$$[Z_m][i_m] = [e_{alm}]$$

$$\begin{pmatrix} 3+1+1 & -1 \\ -1 & 3+1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'+12 \\ -U' \end{pmatrix}$$

$$5i_a - i_b = 12 + U'$$

$$-i_a + 5i_b = -U'$$

ecuación por fuente

$$U = i_a - i_b$$

$$U = 3i_b$$

$$3i_b = i_a - i_b$$

$$\begin{cases} U' = 5i_a - i_b - 12 \\ U' = i_a - 5i_b \\ 4i_b = i_a \end{cases}$$

$$U' = 19i_b - 12$$

$$U' = -i_b$$

$$0 = 20i_b - 12; i_b = \frac{12}{20} = 0,6A$$

$$U' = -0,6A$$

$$i_a = 4 \cdot 0,6 = 2,4A$$

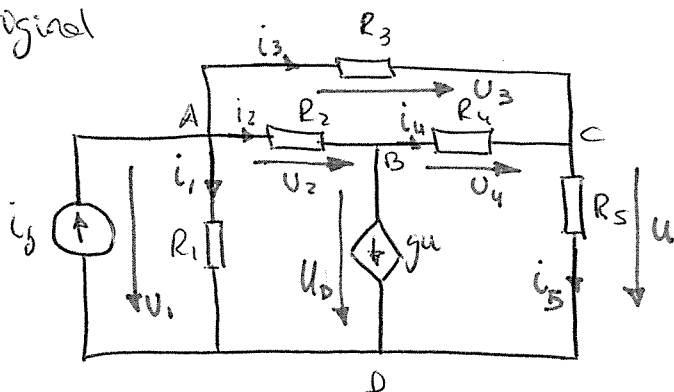
$$\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} (A)$$

$$U' = -0,6V$$

$$U = 1,8V$$

4

③ Calcular las tensiones e intensidades de todos los elementos del circuito original



Tensión $U_1 = U_1 = 12 - 3i_a = 12 - 3 \cdot 2,4 = \underline{4,8V}$ } Fuente i_g
 $U_1 = 4,8V$
 $i_g = 4A$

Resistencia R_1 { $U_1 = 4,8V$
 $i_1 = \frac{4,8}{3} = 1,6A$

Fuente dependiente { $U_D = -U_1 = 0,6V$
 $i = g \cdot u = 1,8A$

$U_3 = U_2 + U_4 = U_1 - U = 4,8 - 1,8 = 3V$

Resistencia R_5 { $U = 1,8V$
 $i_5 = i_6 = 0,6A$

Resistencia R_3 { $U_3 = 3V$
 $i_3 = 1A$

$i_g = i_1 + i_2 + i_3 = 4$; $-i_2 = 4 - 1,6 - 1 = 1,4A$ Resistencia R_2 { $i_2 = 1,4A$
 $U_2 = 3,4 = 4,2V$

Resistencia R_4 { $U_4 = U_3 - U_2 = 3 - 4,2 = -1,2V$
 $i_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{-1,2}{3} = -0,4A$

④ Balance de potencia del circuito original

Calculamos potencia entrante a cada elemento

$P_{eig} = U \cdot i = -U_1 i_g = -4,8 \cdot 4 = -19,2W$

$P_{eR1} = 4,8 \cdot 1,6 = 7,68W$

$P_{eFuenteDep} = 0,6 \cdot 1,8 = 1,08W$

$P_{eR2} = 1,4 \cdot 4,2 = 5,88W$

$P_{eR3} = 3 \cdot 1 = 3W$

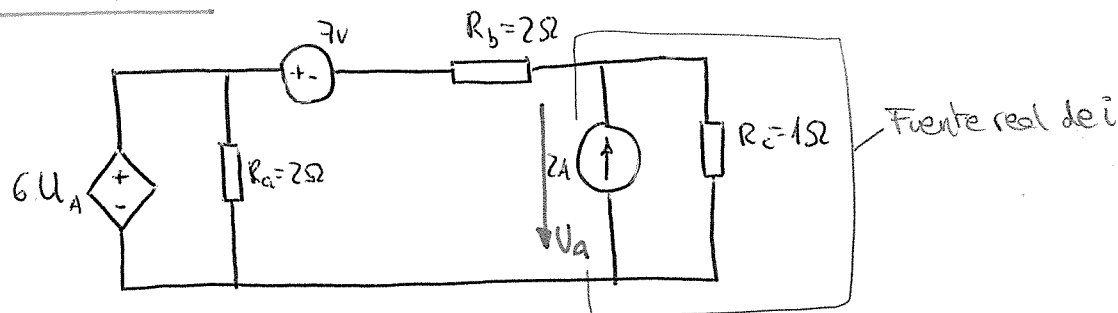
$P_{eR4} = -1,2 \cdot (-0,4) = 0,48W$

$P_{eR5} = 1,8 \cdot 0,6 = 1,08W$

$\sum P_e = -19,2 + 7,68 + 1,08 + 5,88 + 3 + 0,48 + 1,08 = \underline{0}$

Se cumple el balance de potencia

Problema 2.4

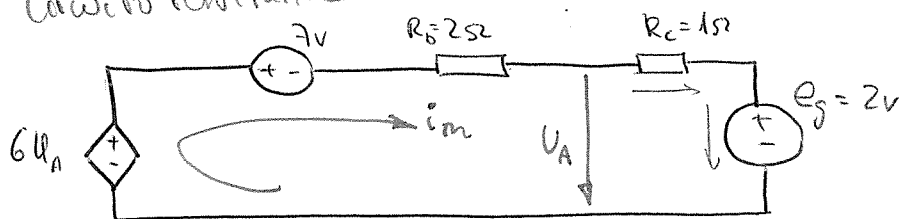


① Analizar el circuito por mallas con el menor n° de mallas posible.

Convertiremos la fuente real de intensidad en una de tensión de forma que nos quedaríamos con dos mallas.

Además, por principio de simplificación podemos suprimir la R_a , ponerla en paralelo con una fuente de tensión.

Circuito resultante:



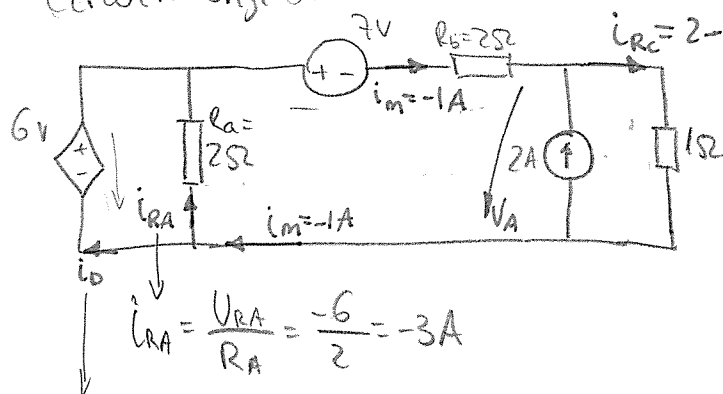
$$\begin{cases} (2+1)(i_m) = (-2+7+6V_A) \\ V_A = i_m + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3i_m = -9 + 6V_A \\ i_m = V_A - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 6V_A - 9 - 3V_A + 6 \\ 3V_A = +3, V_A = 1V \\ i_m = -1A \end{cases}$$

$$\boxed{i_m = -1A; V_A = 1V}$$

② Calcular la energía que disipa cada uno de los resistencias del circuito en un intervalo de 2s.

Para resistencias $P_R = I^2 R$; $W_R = \int_{t_0}^t I^2 R dt = I^2 R \int dt = I^2 R (t - t_0)$

Circuito original



$$i_0 = i_m - i_{RA} = -1 - (-3) = 2A$$

$$W(0,2) \\ W_{RA} = I_{RA}^2 \cdot R_A (2-0) = 9 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{\underline{36J}}$$

$$W_{RB} = I_{RB}^2 \cdot R_B (2-0) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{\underline{4J}}$$

$$W_{RC} = I_{RC}^2 \cdot R_C (2-0) = 1^2 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{2J}}$$

$$W_{abs\ tot} = \underline{\underline{42J}}$$

③ Calcular la energía que cede cada una de las fuentes en un intervalo de tiempo de 2 s.

En fuentes $W = \int_{t_0}^t P_s dt = -VI(t-t_0)$

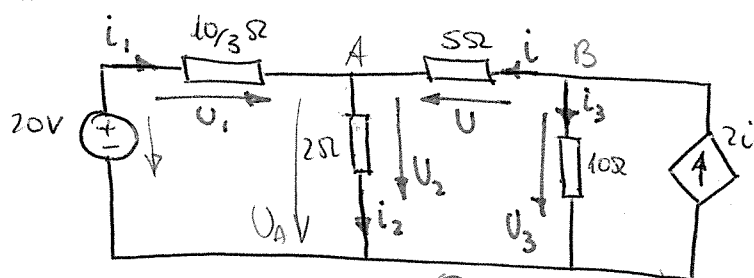
Fuente dependiente $W_{(0,2)} = (-6i_0(2-0)) = +6 \cdot 2 \cdot 2 = +24 \text{ J}$

Fuente 7V $W_{(0,2)} = -7 \cdot (-1)(2) = 14 \text{ J}$

Fuente 2A $W_{(0,2)} = -1(-2)(2) = 4 \text{ J}$

$W_{\text{cedido TOTAL}} = 42 \text{ J}$

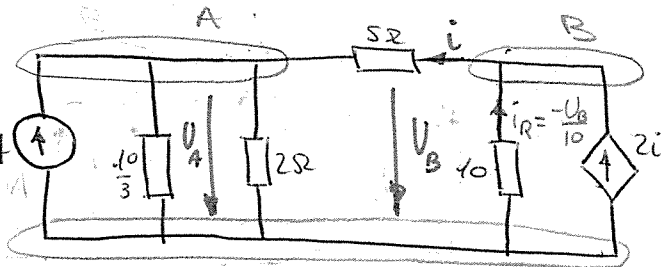
Problema 2.5



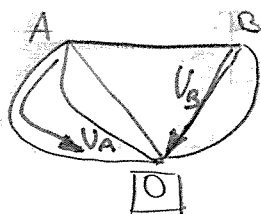
① Tensiones e intensidades de todos los ramos mediante análisis por nodos

Cambiamos las fuentes de tensión por fuentes de intensidad de forma que el circuito quede

$\frac{20}{10/3} = 6A$



Grafo



$$[Y_n][U_n] = [i_{\text{ind}}]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2i \end{pmatrix}$$

Expresión para i: $i = 2i - U_B/10$

$$\begin{cases} \frac{3+5+2}{10} U_A - \frac{1}{5} U_B = 6 \\ -\frac{1}{5} U_A + \frac{2+1}{10} U_B = 2i \\ i - \frac{U_B}{10} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5U_A - U_B = 30 \\ -2U_A + 3U_B = 20i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5U_A - U_B = 30 \\ -2U_A + 3U_B = 2U_B \rightarrow -2U_A + U_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ V}, \quad i = 2 \text{ A}$$

$3U_A = 30$

$U_A = 10 \text{ V}$

$U_B = 20 \text{ V} \quad \text{⑦}$

$$U_1 = +20 - U_A = 20 - 10 = \underline{10V}$$

$$i_1 = \frac{U_1}{\frac{10}{3}} = \frac{30}{10} = \underline{3A}$$

$$U_2 = U_A = \underline{10V}$$

$$i_2 = \frac{U_2}{2} = \underline{5A}$$

$$U = U_B - U_A = \underline{10V}$$

$$i = \underline{2A}$$

$$U_3 = U_B = \underline{20V}$$

$$i_3 = \frac{U_3}{10} = \underline{2A}$$

2) Balance de potencia

Comprobaremos que $\sum P_e = 0$

Fuente 20V $\rightarrow P_e = U \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ref polaridad} \\ \text{convención}}}{i} = -20 \cdot 3 = -60W$

$R = \frac{10}{3}\Omega \rightarrow P_e = U \cdot i = 10 \cdot 3 = 30W$

$R = 5\Omega \rightarrow P_e = U \cdot i = 10 \cdot 2 = 20W$

$R = 2\Omega \rightarrow P_e = U \cdot i = 5 \cdot 10 = 50W$

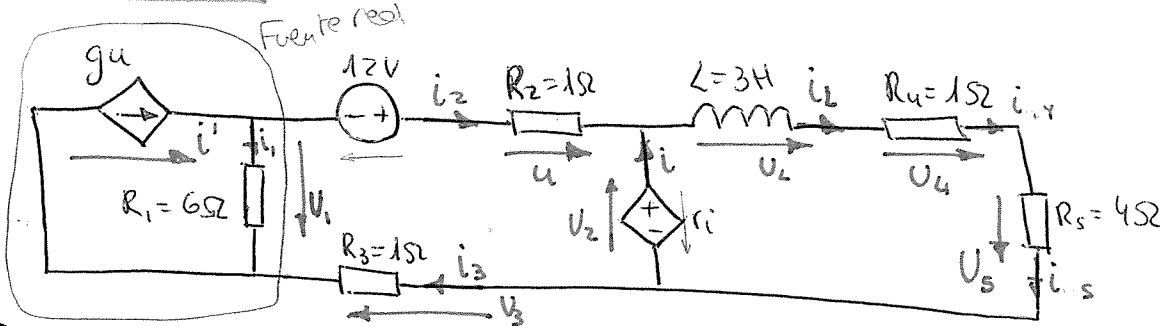
$R = 10\Omega \rightarrow P_e = U \cdot i = 20 \cdot 2 = 40W$

Fuente $2i_1 = 4$
 $i_1 = 2 \rightarrow P_e = U \cdot i = -20 \cdot 4 = -80W$

$$\sum P_e = -60 + 30 + 20 + 50 + 40 - 80 = \underline{0}$$

Se cumple el teorema de la conservación de la energía

Problema 2.6 Tenemos RPCC

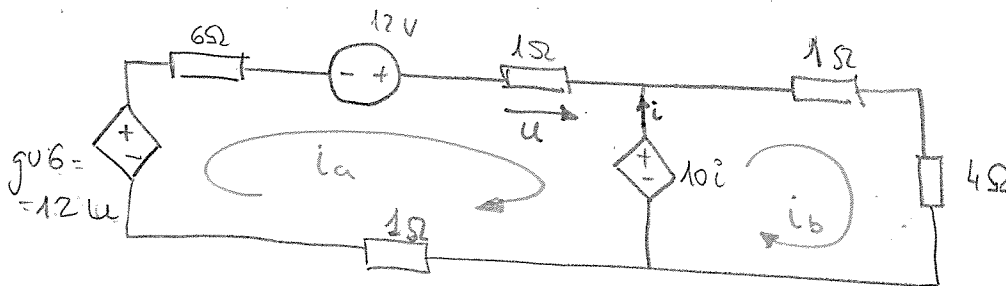


$$r = 10\Omega$$

$$g = 25$$

1) Análisis por mallas del circuito, calculando tensiones e intensidades de cada elemento.

Suprimimos fuentes de intensidad y bobinas por cortos (RPCC).



$$[Z_m][i_m] = [e_{al m}]$$

$$\begin{pmatrix} 6+1+1 & 0 \\ 0 & 1+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10i + 12 + 12u \\ 10i \end{pmatrix}$$

$$u = i_a \cdot 1$$

$$i = i_b - i_a$$

$$\begin{cases} 8i_a = 124 - 10i + 12 \\ 5i_b = 10i \rightarrow i_b = 2i \\ U = i_a \\ i = i_b - i_a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8i_a = 12i_a - 10i_a + 12 \\ 6i_a = 12; i_a = 2A \\ i_b = 4A \\ i = 2A \\ U = 2V \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_2 = 1\Omega &\rightarrow \begin{cases} U = 2V \\ i_2 = 2A \end{cases} & L = 3H &\begin{cases} U_L = 0V \\ i_L = i_3 = 4A \end{cases} & R_4 = 1\Omega &\begin{cases} i_4 = i_3 = 4A \\ U_4 = 4V \end{cases} \\ R_5 = 4\Omega &\begin{cases} i_5 = i_b = 4A \\ U_5 = 16V \end{cases} & \text{Fuente } r_1 &\begin{cases} i = 2A \\ U_2 = -20V \end{cases} & R_3 = 1\Omega &\begin{cases} i_3 = i_a = 2A \\ U_3 = 2 \cdot 1 = 2V \end{cases} \\ R_1 = 6\Omega &\begin{cases} U_1 = -12 + U - U_2 + U_3 = -12 + 2 + 20 + 2 = 12V \\ i_1 = \frac{12}{6} = 2A \end{cases} & \text{Fuente } g_u &\begin{cases} U_1 = 12V \\ i' = i_1 + i_2 = 4A \end{cases} \end{aligned}$$

② Calcular las potencias cedidas por los fuentes y las absorbidas por las resistencias y comprobar que se cumple $\sum P_{cedidas} = \sum P_{absorbidas}$

Teorema de Boucherot

$$\begin{aligned} P_{Fuente} &= -U_i i \\ \text{Fuente } g_u &\rightarrow P_s = -(U_1 i) = 12 \cdot 4 = 48W \\ \text{Fuente } 12V &\rightarrow P_s = -(12 \cdot i_2) = +24W \\ \text{Fuente } r_1 &\rightarrow P_s = -U_2 i = +40W \end{aligned}$$

$$P_{cedidas} = +40 + 24 + 48 = 112W$$

$$P_{entrante} = U_i i = i^2 R$$

$$\begin{aligned} R_1 &\rightarrow P_e = i_1^2 R_1 = 2^2 \cdot 6 = 24W \\ R_2 &\rightarrow P_e = i_2^2 R_2 = 2^2 \cdot 1 = 4W \\ R_3 &\rightarrow P_e = i_3^2 R_3 = 2^2 \cdot 1 = 4W \\ R_4 &\rightarrow P_e = i_4^2 R_4 = 4^2 \cdot 1 = 16W \\ R_5 &\rightarrow P_e = i_5^2 R_5 = 4^2 \cdot 4 = 64W \end{aligned}$$

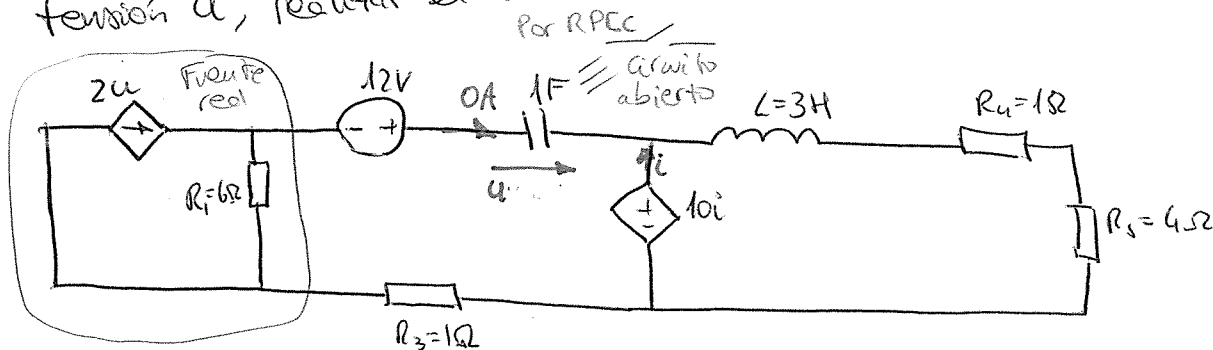
$$P_{abs} = 24 + 4 + 4 + 16 + 64 = 112W$$

$$\sum P_{ced} = \sum P_{ab} \text{ se cumple}$$

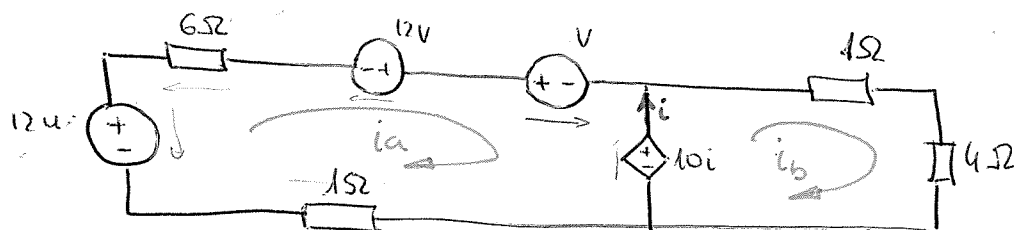
③ Energía almacenada en la bobina

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 4^2 = 24J$$

4) Si se sustituye R_2 por un condensador $C=1F$, manteniéndose tensión u , realizar el nuevo análisis por mallas



Transformamos el circuito para poder realizar el análisis



$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 6+1 & 0 \\ 0 & 1+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12u - 10i - u + 12 \\ 10i \end{pmatrix} \\ u \cdot i = i_b - i_a \\ u = 12 - i_a \cdot 6 + 12u - i_a \cdot 1 - 10i \end{cases}$$

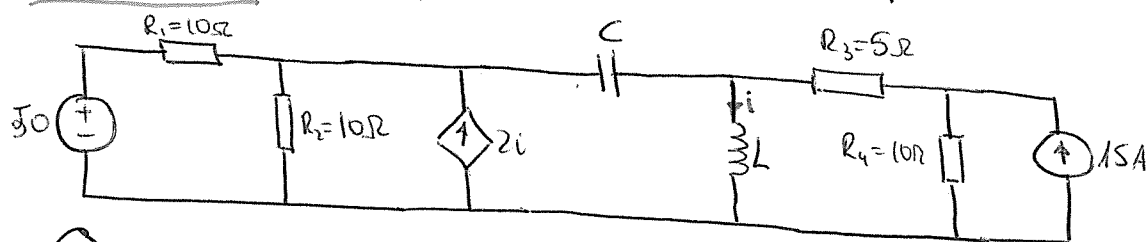
Por RPCC $\rightarrow i_a = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11u - 10i + 12 = 0 \\ i = i_b \\ u = 12 + 12u - 10i \\ 5i_b = 10i \end{cases}$$

$$\rightarrow 5i - 10i = 0 \rightarrow i = 0 = i_b; \quad u = -\frac{12}{11} V$$

No quedaría $i_a = i_b = i = 0; \quad u = -\frac{12}{11} V$

Problema 2.7 Tenemos RPCC

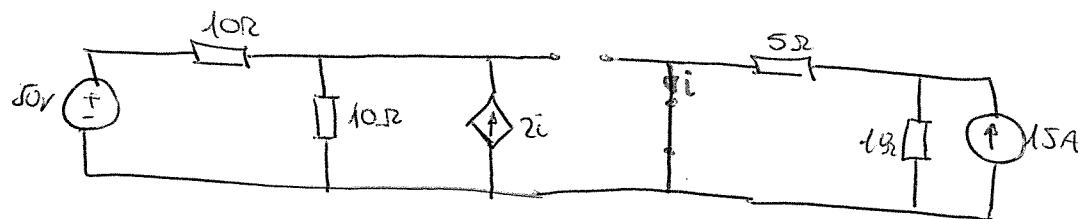


1) Determinar los valores de u tensión en C bobina y de i intensidad en el condensador

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 0 V$$

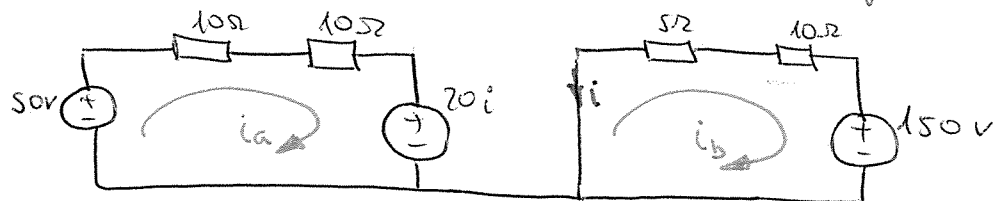
$$i_C = C \frac{du}{dt} = 0 A$$

② Teniendo en cuenta el apartado 1, dibujar el circuito resultante



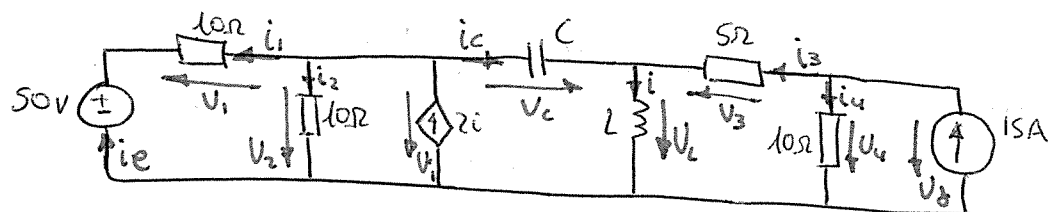
③ Determinar tensiones e intensidades en todos los ramos mediante análisis por mallas

Sustituimos las fuentes de intensidad por fuentes de tensión



$$[Z_m][i_m] = [e_{alm}] \quad \begin{pmatrix} 10+10 & 0 \\ 0 & 10+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200+50 \\ -150 \end{pmatrix}, \quad i = i_b$$

$$\begin{cases} 2i_a + 2i = 5 \\ i_b = -10 \end{cases} \rightarrow i = 10 \quad i_a = \frac{5 - 20}{2} = -7.5 \text{ A}$$



Fuente 50V $\rightarrow U_e = 50 \text{ V}; i_e = +7.5 \text{ A}$

Fuente 15A $\rightarrow \begin{cases} U_4 = U_d = 150 + 10 \cdot i_b = 150 - 100 = 50 \text{ V} \\ U_d = 50 \text{ V}; i_d = 15 \text{ A} \end{cases}$

Fuente 2i $\begin{cases} U_i = U_2 = U_1 + 50 = i_1 \cdot 10 + 50 = -7.5 \cdot 10 + 50 = 7.5 + 50 = 12.5 \text{ V} \\ U_i = 12.5 \text{ V}; i_i = 20 \text{ A} \end{cases}$

$R_1 \rightarrow \begin{cases} U_1 = U_2 - 50 = 12.5 - 50 = -37.5 \text{ V} \\ U_1 = -37.5 \text{ V}; i_1 = -7.5 \text{ A} \end{cases}$

$R_2 \rightarrow \begin{cases} U_2 = 12.5 \text{ V} \\ i_2 = 12.5 \text{ A} \end{cases}$

$R_3 \rightarrow \begin{cases} i_3 = -i_b = 10 \text{ A}; U_3 = 50 \text{ V} \\ U_3 = 50 \text{ V}; i_3 = 10 \text{ A} \end{cases}$

$R_4 \rightarrow \begin{cases} U_4 = 50 \text{ V} \\ i_4 = 5 \text{ A} \end{cases}$

$L \rightarrow \begin{cases} U_L = 0; i_L = i = 10 \text{ A} \end{cases}$

$C \rightarrow \begin{cases} U_C = U_i = 12.5 \text{ V}; i_C = 0 \text{ A} \end{cases}$

Industri
v10.com

4) Determinar los valores de L y C si en régimen permanente almacenan 5 J cada uno

ellos

$$i_L = 10 \text{ A}$$

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} L 10^2 = 5; \quad L = \frac{5 \cdot 2}{10^2} = \frac{1}{10} \text{ H}$$

$$L = 0,1 \text{ H}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{1}{2} C 125^2 = 5; \quad C = \frac{5 \cdot 2}{125^2} = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$U_C = 125$$

$$C = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 640 \mu\text{F}$$

TEOREMAS

TEMA 7

1 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN. LINEALIDAD

$$\begin{aligned} D[x(t) + y(t)] &= D x(t) + D y(t) \\ D[K x(t)] &= K D x(t) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} D[K_1 x(t) + K_2 y(t)] &= K_1 D x(t) + K_2 D y(t) \end{aligned} \right.$$

$$[Y_n][U_n] = [i_{an}] ; [Y_n]^{-1} = [Z_n]$$

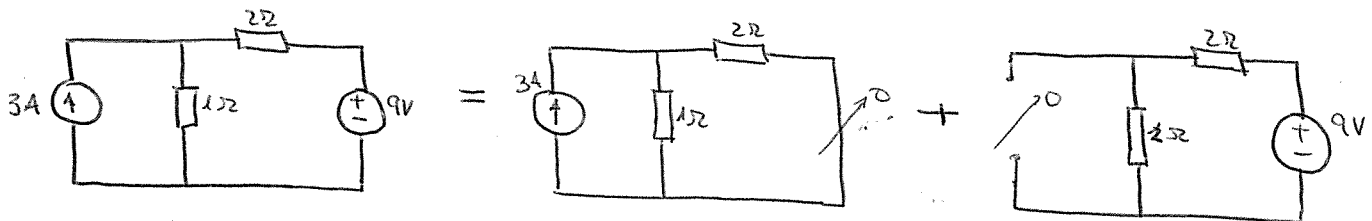
$$[Z_n][Y_n][U_n] = [Z_n][i_{an}] ;$$

$$[U_n] = [Z_n][i_{an}] \longrightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matriz de impedancias} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{an1} \\ i_{an2} \\ \vdots \\ i_{ann} \end{bmatrix}$$

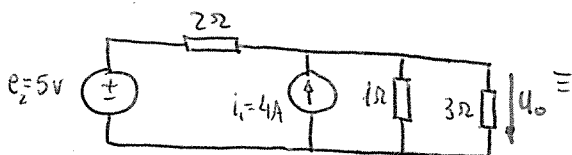
Tensión del nodo j : $U_j = Z_{j1} i_{an1} + Z_{j2} i_{an2} + \dots + Z_{jn} i_{ann}$

"La respuesta de un circuito eléctrico ante determinadas excitaciones es la misma que si al circuito lo excito con cada una de las fuentes por separado y sumo las excitaciones de cada fuente".

Ej.:

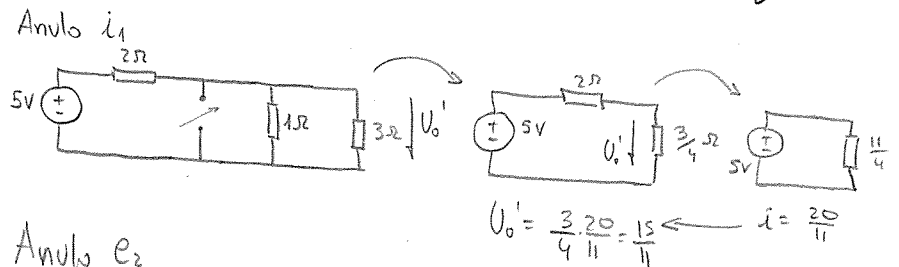


Cuestión 19 Hallar U_0 en el circuito de la figura. Si i_1 y e_2 piden a valer 8A y 3V ¿cuanto vale U_0 ?



Por principio de superposición

$$U_0 = U_0' + U_0'' = \frac{15}{11} + \frac{24}{11} = \frac{39}{11} \text{ V}$$



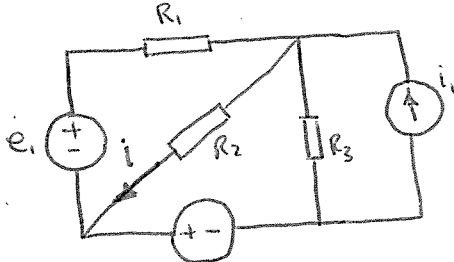
$$\begin{aligned} \text{Anulo } e_2 \\ \begin{cases} U_0' = i_2 \cdot \frac{3}{4} \\ U_0' = i_3 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow 2i_3 - \frac{3}{4}i_2 = 0 \\ i_1 = i_2 + i_3 = 4 \Rightarrow i_3 = 4 - i_2 \\ i_3 = 4 - \frac{32}{11} = \frac{12}{11} \Rightarrow U_0' = \frac{24}{11} \end{cases} \\ \text{Anulo } i_1 \\ \begin{cases} U_0'' = i_2 \cdot \frac{3}{4} \\ U_0'' = i_3 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow 2i_3 - \frac{3}{4}i_2 = 0 \\ i_1 = i_2 + i_3 = 4 \Rightarrow i_3 = 4 - i_2 \\ i_3 = 4 - \frac{32}{11} = \frac{12}{11} \Rightarrow U_0'' = \frac{24}{11} \end{cases} \\ U_0 = U_0' + U_0'' = \frac{15}{11} + \frac{24}{11} = \frac{39}{11} \end{aligned}$$

Ahora $\begin{cases} e_{20} = 3 = \frac{3}{5} e_2 \\ i_{10} = 8 = 2 i_1 \end{cases}$

Como $V_{00} = V_{00}' + V_{00}''$

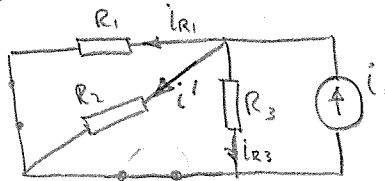
$$V_{00} = \frac{3}{5} V_{00}' + 2 V_{00}'' = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{11} + 2 \cdot \frac{24}{11} = \frac{57}{11} V$$

Cuestión 20 Hallar i aplicando el teorema de superposición



$i = i' + i'' + i'''$ por teorema de superposición

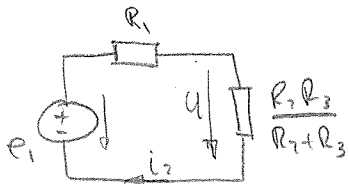
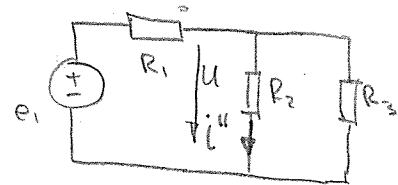
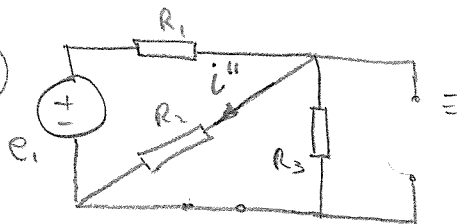
• Primero e_1 y $e_2 \rightarrow i'$



$$i' = \frac{1/R_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \cdot i_1 = \frac{\frac{i_1}{R_2}}{\frac{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3}}$$

$$i' = \frac{R_1 R_3 i_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

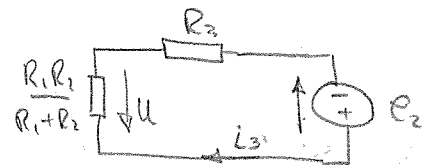
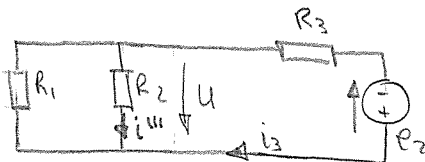
• 2º ando i_1 y $e_2 \rightarrow i''$



$$i_2 = \frac{e_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}; U = \frac{e_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \left(\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) = \frac{e_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$i'' = \frac{U}{R_2} = \frac{e_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

• 3º ando i_1 y $e_1 \rightarrow i'''$



$$i_3 = \frac{e_2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3}; U = - \frac{e_2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} \cdot \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right); i''' = \frac{U}{R_2} = \frac{-e_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

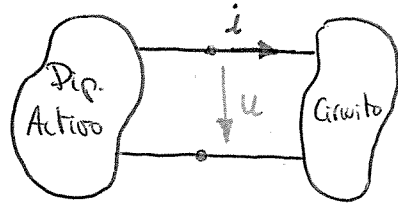
Por tanto:

$$i = \frac{1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} (R_1 R_3 i_1 + e_1 R_3 - e_2 R_1)$$

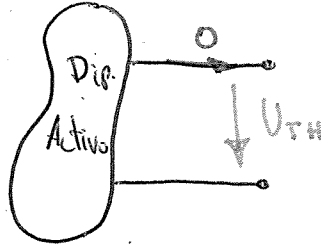
2

TEOREMA DE THEVENIN

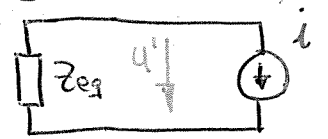
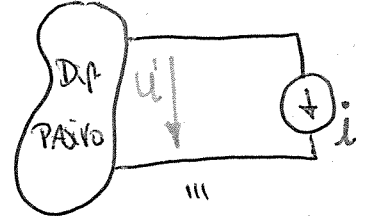
Dado un dipolo activo, es posible encontrar una fuente real de tensión equivalente al dipolo activo



$\equiv$

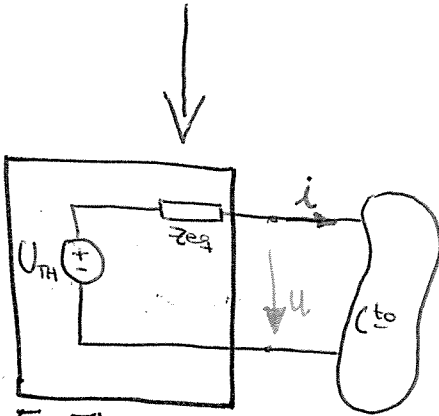


+



Para determinar U_{TH} dejamos el dipolo conectado a circuito abierto

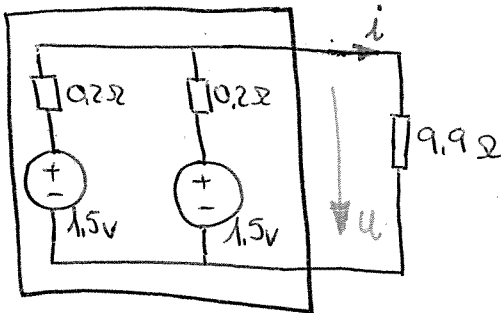
Hacemos el circuito pasivo para hallar Z_{eq}



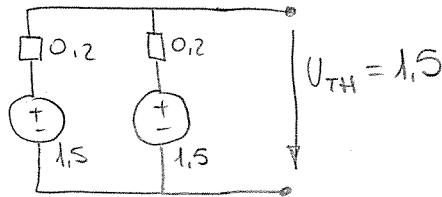
Eq. Thevenin

$$U = U_{TH} + U' = U_{TH} - Z_{eq} \cdot i$$

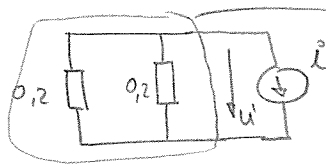
Ejemplo. Hallar eq Thevenin del circuito dado.



U_{TH} : Dejamos circuito abierto

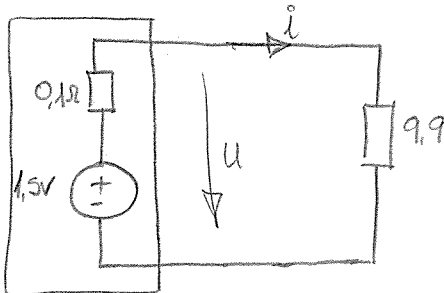


$Z_{eq} = R_{eq} \rightarrow$ Hacemos dipolo pasivo



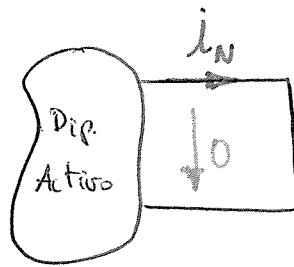
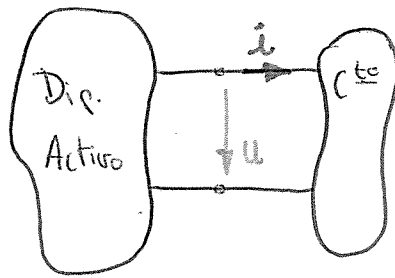
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{2}{0,2} \rightarrow R_{eq} = 0,1\Omega$$

Equivalente Thevenin:

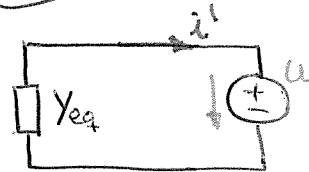
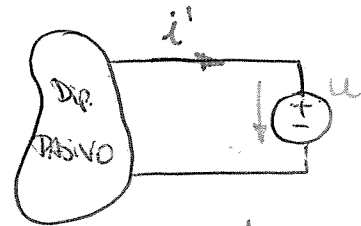


$$i = \frac{1,5}{0,1 + 9,9} = 0,15A; \quad u = 9,9 \cdot 0,15 = 1,485V$$

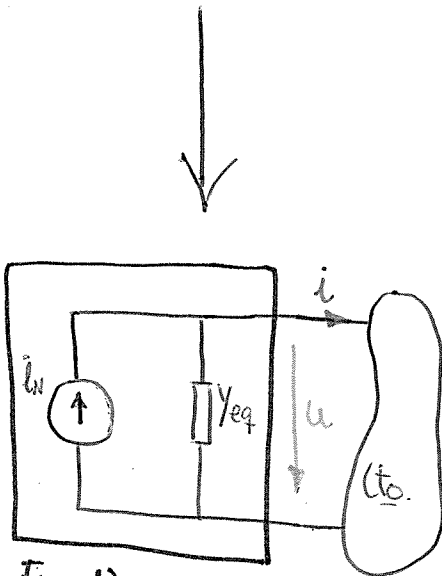
3 TEOREMA DE NORTON



Cortocircuitamos el dipolo para determinar i_N



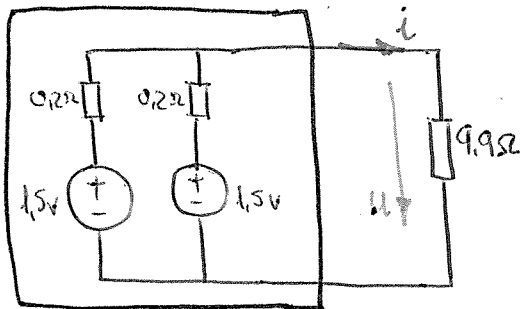
Para determinar Y_{eq} hacemos el dipolo pasivo



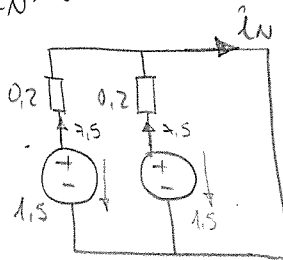
Eg. NORTON

$$\hat{i} = \hat{i}_N - Y_{eq} \cdot u$$

Ejemplo. Determinar equivalente Norton

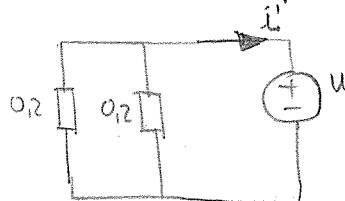


$\hat{i}_N$: Cortocircuitamos



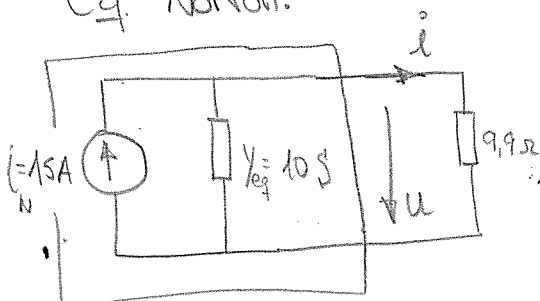
$$\hat{i}_N = 7.5 + 7.5 = 15 \text{ A}$$

Y_{eq} hacemos dipolo pasivo



$$Y_{eq} = \frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.2} = 10 \text{ S}$$

Eg. Norton:



$$\hat{i} = \hat{i}_N - u Y_{eq}; \quad \hat{i} = 15 - u \cdot 10; \quad u = 9.9 \cdot \hat{i}$$

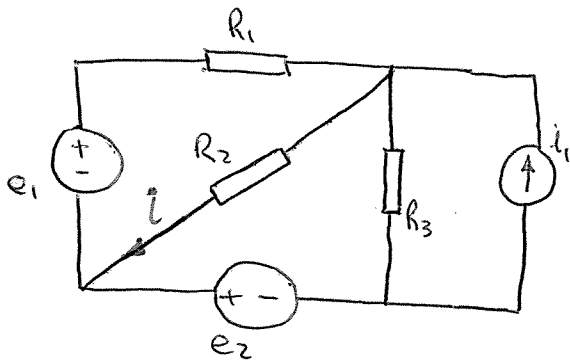
$$\hat{i} = 15 - 9.9 \hat{i}; \quad 10.9 \hat{i} = 15$$

$$\hat{i} = 0.15 \text{ A}$$

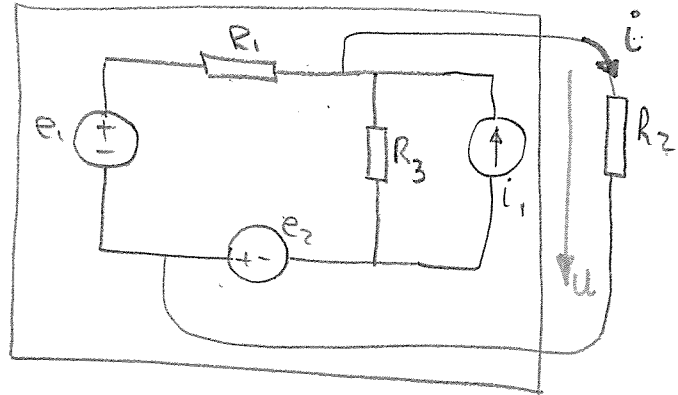
$$u = 1.485 \text{ V}$$

NOTA Juntando los teoremas de Thevenin y Norton, las fuentes serán equivalentes
Compléndose $Z_{eq} = 1/Y_{eq}; U_{TH} = Z_{eq} \cdot \hat{i}_N$

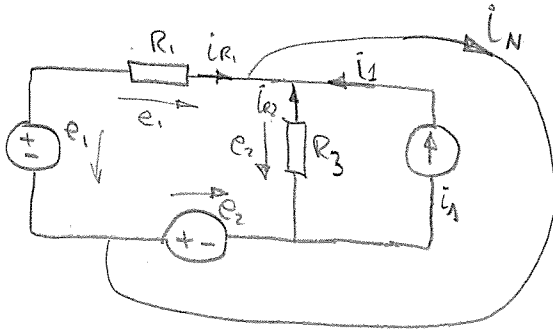
Cuestión 21 Realizar 6. cuestión 20 aplicando el teorema de Norton.



Queremos hallar el eq Norton del dipolo conectado a R_2 , es decir:

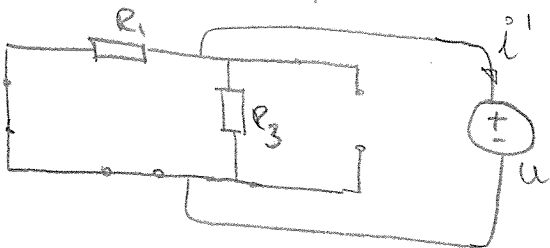


- Determinamos i_N : cortocircuitamos



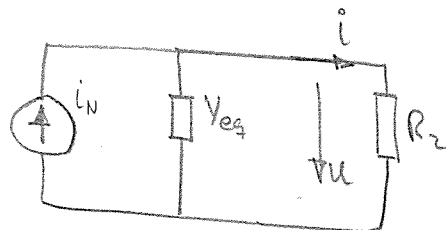
$$i_N = i_{R1} + i_{R2} + i_1 = \frac{e_1}{R_1} - \frac{e_2}{R_3} + i_1 = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + i_1 R_3}{R_1 R_3}$$

- Determinamos Y_{eq} : Hacemos circuito pasivo



$$Y_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3}$$

Por tanto, el equivalente Norton es:



$$i = i_N - u \cdot Y_{eq}; \quad i = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + i_1 R_3}{R_1 R_3} - i R_2 Y_{eq}$$

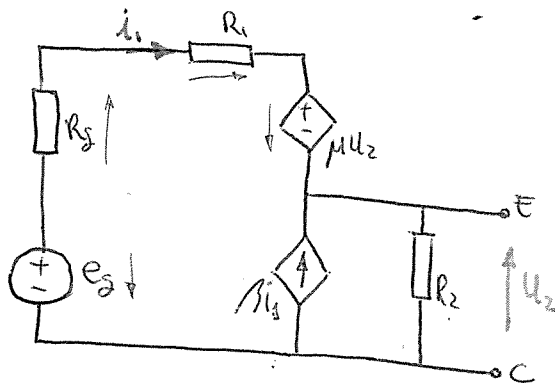
$$u = i R_2$$

$$i \left(1 + \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} R_2 \right) = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + i_1 R_3}{R_1 R_3}$$

$$i \left(\frac{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_1 R_3} \right) = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + i_1 R_3}{R_1 R_3}$$

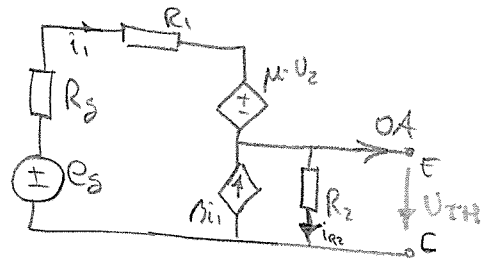
$$i = \frac{e_1 R_3 - e_2 R_1 + i_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Cuestión 26 Calcular equivalentes Thevenin y Norton y comprobar resultados.



① EQUIV. THEVENIN

• $U_{TH} \rightarrow$ Dejo circuito abierto y calculo b tension



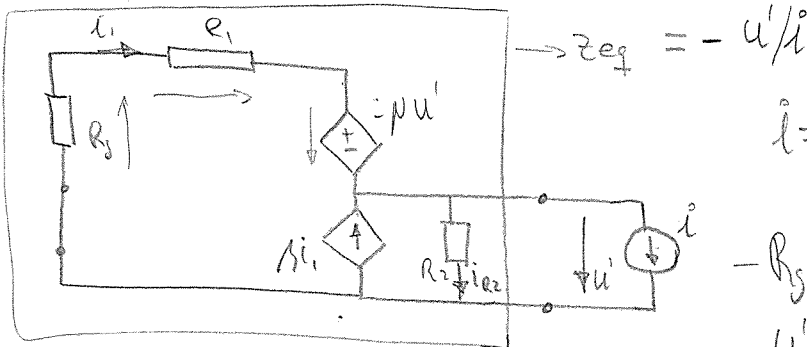
$$\left. \begin{aligned} U_{TH} &= i_{R2} \cdot R_2; \quad i_{R2} = \beta i_1 + i_1 \longrightarrow U_{TH} = R_2 i_1 (1 + \beta) \\ e_s &= R_s i_1 + R_1 i_1 - \mu U_{TH} + U_{TH}; \quad e_s + \mu U_{TH} - U_{TH} = (R_s + R_1) i_1; \\ i_1 &= \frac{e_s}{R_s + R_1} + \frac{(\mu - 1) U_{TH}}{R_s + R_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{TH} = R_2 i_1 (1 + \beta) = R_2 (1 + \beta) \frac{e_s}{R_s + R_1} + \frac{R_2 (1 + \beta) (\mu - 1) U_{TH}}{R_s + R_1}$$

$$U_{TH} \left(1 + \frac{R_2 (1 + \beta) (\mu - 1)}{R_s + R_1} \right) = \frac{e_s R_2 (1 + \beta)}{R_s + R_1}; \quad U_{TH} \frac{R_s + R_1 + R_2 (1 + \beta) (\mu - 1)}{R_s + R_1} = \frac{e_s R_2 (1 + \beta)}{R_s + R_1}$$

$$U_{TH} = \frac{e_s R_2 (1 + \beta)}{R_s + R_1 + R_2 (1 + \beta) (\mu - 1)}$$

• Para Z_{eq} corto frontal IDEALES:



$$i = -i_{R2} + \beta i_1 + i_1 = \frac{-u'}{R_2} + i_1 (\beta + 1)$$

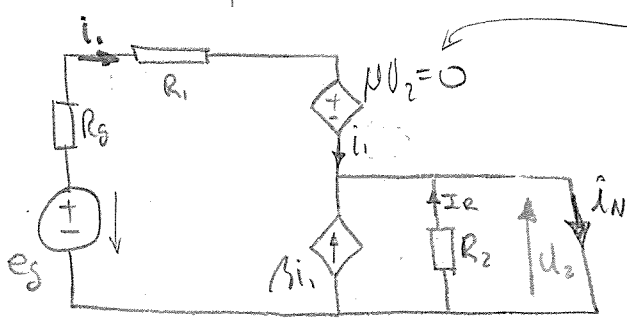
$$-R_s i_1 - R_1 i_1 + \mu u' = u'$$

$$u' (1 - \mu) = -i_1 (R_s + R_1); \quad u' = \frac{-i_1 (R_s + R_1)}{1 - \mu}$$

$$i = \frac{+i_1 (R_s + R_1)}{(1 - \mu) R_2} + i_1 (\beta + 1)$$

$$Z_{eq} = \frac{+i_1 (R_s + R_1)}{(1 - \mu) \left(\frac{+i_1 (R_s + R_1)}{(1 - \mu) R_2} + i_1 (\beta + 1) \right)} = \frac{R_2 (R_s + R_1)}{R_s + R_1 + R_2 (\beta + 1) (1 - \mu)}$$

Busco equivalente Norton $\rightarrow \hat{I}_N$: Corbocurwcho



$$u_2 = 0$$

$$I_{R_2} = 0$$

$$\hat{I}_N = \hat{I}_1 + \beta \hat{I}_1; \hat{I}_N = \hat{I}_1 (1 + \beta) = \frac{e_s}{R_s + R_1} (1 + \beta)$$

$$e_s = \hat{I}_1 R_s + \hat{I}_1 R_1; \hat{I}_1 = \frac{e_s}{R_s + R_1}$$

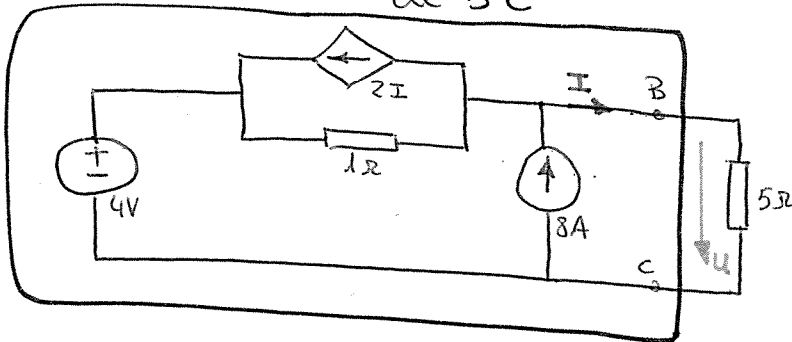
$\hat{I}_N$ NORTON: $Z_{eq} = Z_{eq}(\text{Thevenin}); \hat{I}_N = \frac{e_s}{R_s + R_1} (1 + \beta)$

Veamos si se cumple la relación entre fuentes

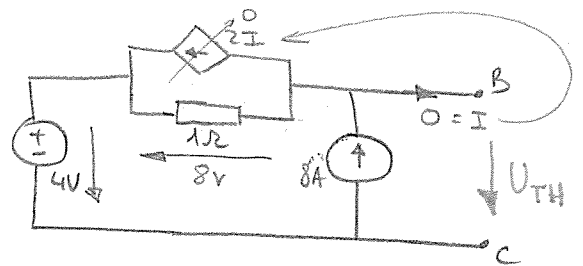
$$U_{TH} = Z_{eq} \hat{I}_N = \frac{R_2 (R_s + R_1)}{R_s + R_1 + R_2 (1 + \beta) (1 - \mu)} \cdot \frac{e_s (1 + \beta)}{(R_s + R_1)} = \frac{e_s R_2 (1 + \beta)}{R_s + R_1 + R_2 (1 + \beta) (1 - \mu)}$$

Cumple

Examen 6-02-2003 Dado el circuito, obtener el equivalente Thevenin a la izquierda de B-C

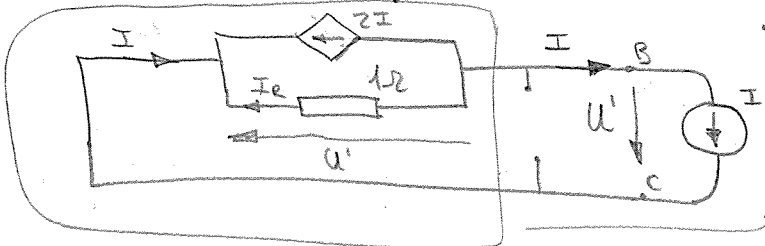


Busco $U_{TH} \rightarrow$ Dep en circuito abierto



$$U_{TH} = 8 + 4 = 12V$$

Busco $R_{eq} \rightarrow$ Ambos fuentes ideales

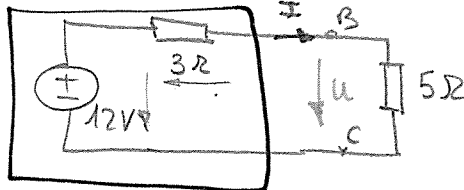


$$2I + I_R + I = 0; I_R = -3I$$

$$u' = I_R \cdot 1 = -3I$$

$$Z_{eq} = -u'/I = \frac{3I}{I} = 3\Omega$$

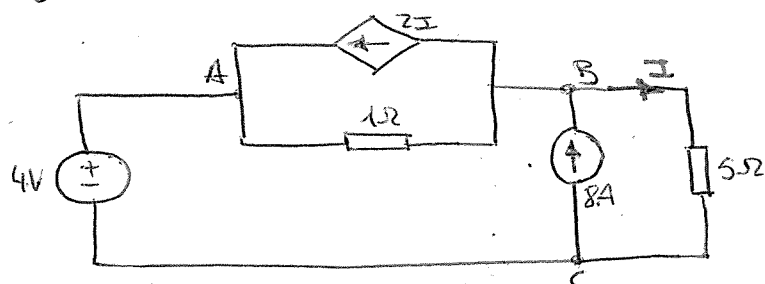
$\hat{I}_N$ Thevenin



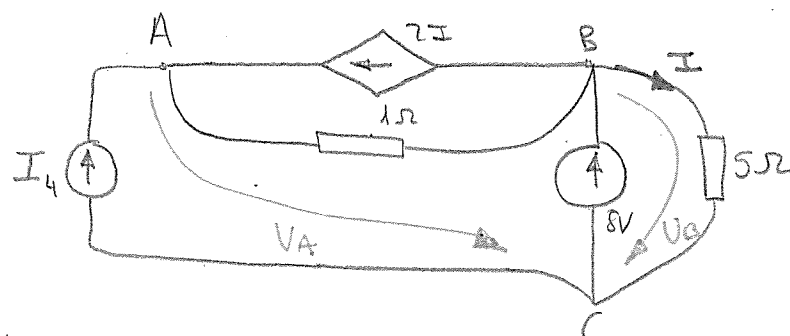
Calcular el valor de I usando el equivalente Thevenin

$$\begin{cases} u = U_{TH} - 3 \cdot I \rightarrow 5I = 12 - 3I; 8I = 12; I = \frac{3}{2} = 1.5A \\ u = 5I \end{cases}$$

c) Analizar el circuito por nodos, tomando como referencia el nodo C



Preparamos el circuito para el análisis por nodos



$$[Y_n][U_n] = [I_{an}]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{5} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_4 + 2I \\ 8V - 2I \end{pmatrix}$$

Ec. adicional: $V_A = 4V$

Ec. adicional: $V_B = 5I$

$$V_A - V_B = I_4 + 2I$$

$$-V_A + \frac{6}{5}V_B = 8 - 2I$$

$$V_A = 4$$

$$V_B = 5I$$

$$-4 + \frac{6}{5}5I = 8 - 2I, 8I = 12, I = 1.5A$$

$$I = 1.5A$$

$$V_A = 4V$$

$$V_B = 7.5V$$

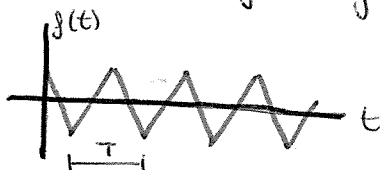
RÉGIMEN ESTACIONARIO SENOIDAL

1 ONDAS PERIÓDICAS Y VALORES ASOCIADOS

Forma de onda: Expresión de i o u con respecto al tiempo.

Una forma de onda periódica es aquella que sus valores se repiten a lo largo del tiempo. Esto es, $f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \dots = f(t+KT)$ con $K \in \mathbb{Z}$

T: periodo



• Llamamos ciclo a los valores de una onda comprendidos dentro de un periodo y frecuencia al n° de ciclos por unidad de tiempo [Hz]

$$f \cdot T = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]} \\ T = \frac{1}{f} \text{ [s]} \end{array} \right.$$

La frecuencia industrial son 50 Hz $\rightarrow T = \frac{1}{50} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 2 \text{ ms}$
En USA: 60 Hz

Llamamos valores de cresta o pico a los máximos y mínimos de una forma de onda.

Llamamos valor de cresta cresta a la diferencia entre el máximo y el mínimo.

Llamamos valor medio al promedio integral en un periodo

$$\overline{F}_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

Llamamos valor eficaz a:

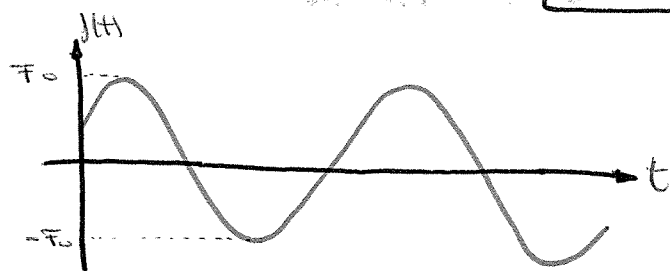
$$\overline{F} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [f(t)]^2 dt}$$

Ejemplo:

Potencia promedio: $P_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{R}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (i(t))^2 dt = RI^2$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (i(t))^2 dt} \quad I^2 \text{ (valor eficaz de } I)$$

Función periódica senoidal: $f(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi)$



F_0 : Amplitud. Es el valor de cresta máxima.
 ω : Pulsación $[\text{rad/s}] \equiv \text{frecuencia angular}$
 $\omega t + \varphi \rightarrow$ ángulo de fase
 $\varphi \rightarrow$ ángulo fase inicial

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$\underline{F_m} = 0 \rightarrow$ Demo. $F_m = \frac{1}{T} \int_0^T (\omega t + \varphi) dt = \frac{-F_0}{T\omega} \cos(\omega t + \varphi) \Big|_0^T = 0 //$

$$\underline{F} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T F_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt}$$

$$\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = I$$

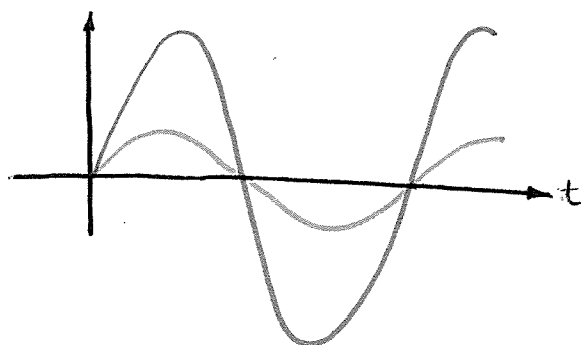
$$\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt + \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = 2I$$

$$\int_0^T (\underbrace{\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)}_1) dt = 2I$$

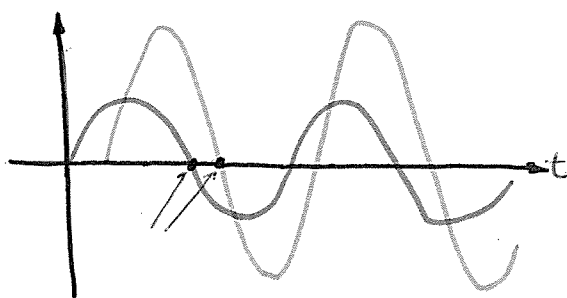
$T = 2I$
 $I = \frac{T}{2}$

$$\underline{F} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T F_0^2 \underbrace{\sin^2(\omega t + \varphi)}_I dt} = \sqrt{\frac{F_0^2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{F = \frac{F_0}{\sqrt{2}}}$$

Se dice que dos ondas están en fase si " $\omega t + \varphi$ " es igual para ambas



En desfase sería:

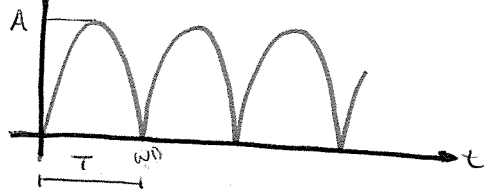


Podemos determinar cuál de las dos ondas adelanta o retrasa comparando dos puntos separados menos de $T/2$

En nuestro caso, la onda rosa adelanta a la verde, o la verde retrasa a la rosa.

Question 1 Hallar valor medio y eficaz de las formas de onda representadas en las figuras:

a) $f(t) = A|\sin(\omega t)|$



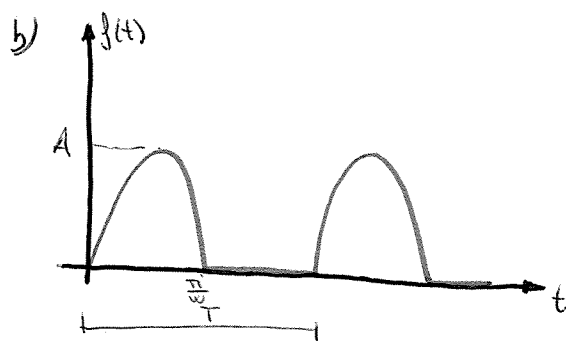
$$F_m = \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t) dt = \left. \frac{-A}{T\omega} \cos(\omega t) \right|_0^T = \frac{-A}{T\omega} (\cos(\omega T) - 1)$$

$\uparrow$
 $\omega T = \pi$

$$= \frac{-A}{T\omega} (\cos(\pi) - 1) = \frac{2A}{\pi} = F_m$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} A^2 \frac{T}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{F = \frac{A}{\sqrt{2}}}$$

$\frac{T}{2} = T$



$$f(t) = \begin{cases} A \sin(\omega t), & t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] \\ 0 & t \in (\frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}) \end{cases}$$

$$F_m = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} A \sin(\omega t) dt + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} 0 dt \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \left. \frac{-A}{\omega} \cos(\omega t) \right|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{-A}{T\omega} (-1 - 1) = \frac{2A}{\omega T} \xrightarrow{\omega T = 2\pi} \frac{2A}{2\pi} = \frac{A}{\pi} = F_m$$

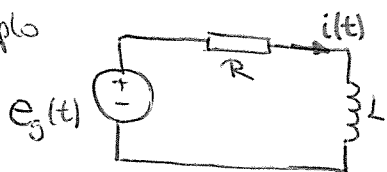
$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} A^2 \sin^2(\omega t) dt} = \sqrt{\frac{A^2}{T} \frac{T}{4}} = \frac{A}{2} \rightarrow \boxed{F = \frac{A}{2}}$$

$\frac{T}{2} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{2}$

2 RESOLUCIÓN DE UN CIRCUITO DE ALTERNA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Su análisis consiste en resolver un sistema de EDO's

Ejemplo



Datos: $\begin{cases} e_g(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \\ E_0, \omega, \varphi_e, R \text{ y } L \end{cases}$

Inógnitas: $i(t) \rightarrow$ Ensayo $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow$ Inógnitas I_0, φ_i

$$e_g(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}; \quad e_g(t) = (R + L D) i(t)$$

$$E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) = R I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) - L I_0 \sin(\omega t + \varphi_i) \cdot \omega$$

$$E_0 \cos(\omega t) \cos(\varphi_e) - E_0 \sin(\omega t) \sin(\varphi_e) = R I_0 \cos(\omega t) \cos(\varphi_i) - R I_0 \sin(\omega t) \sin(\varphi_i) - \omega L I_0 \sin(\omega t) \cos(\varphi_i) - \omega L I_0 \cos(\omega t) \sin(\varphi_i)$$

$$\begin{aligned} \cos \omega t \rightarrow & E_0 \cos \varphi_e = R I_0 \cos(\varphi_i) - \omega L I_0 \sin(\varphi_i) \\ \sin \omega t \rightarrow & -E_0 \sin \varphi_e = -R I_0 \sin(\varphi_i) - \omega L I_0 \cos(\varphi_i) \end{aligned}$$

$$E_0^2 = R^2 I_0^2 + \omega^2 L^2 I_0^2 - 2 R I_0 \cos(\varphi_i) \omega L I_0 \sin(\varphi_i) + 2 R I_0 \sin(\varphi_i) \omega L I_0 \cos(\varphi_i)$$

$$E_0^2 = I_0^2 (R^2 + \omega^2 L^2) \rightarrow$$

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

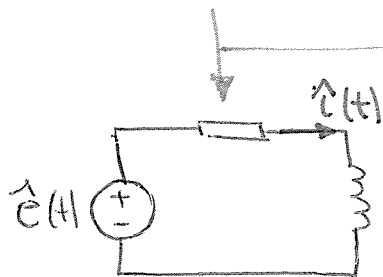
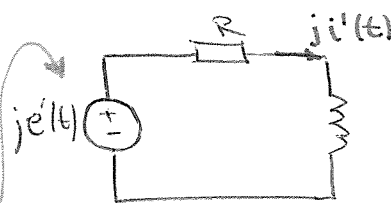
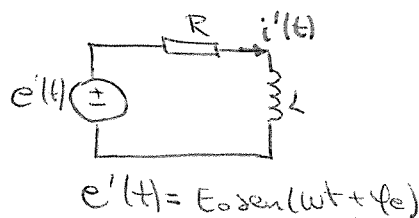
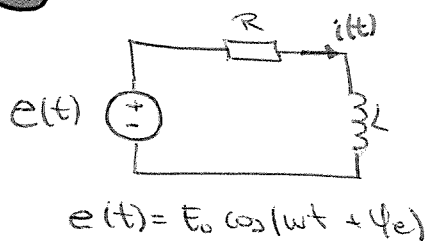
$$\tan \varphi_e = \frac{R \sin \varphi_i + \omega L \cos \varphi_i}{R \cos \varphi_i - \omega L \sin \varphi_i} \xrightarrow[\frac{1}{R \cos \varphi_i}]{\frac{1}{R \cos \varphi_i}} \tan \varphi_e = \frac{\tan \varphi_i + \frac{\omega L}{R}}{1 - \frac{\omega L}{R} \tan \varphi_i} = \tan(\varphi_i + \varphi)$$

$$\frac{\omega L}{R} = \tan \varphi$$

$$\varphi_e = \varphi_i + \varphi, \quad \varphi_i = \varphi_e - \varphi \rightarrow \varphi_i = \varphi_e - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_e - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

3 RESOLUCIÓN DE UN CIRCUITO DE ALTERNA MEDIANTE CÁLCULO SIMBÓLICO. FASORES.



Por principio de superposición:

$$\hat{e}(t) = e(t) + j e'(t)$$

$$\hat{i}(t) = i(t) + j i'(t)$$

$$\hat{e}(t) = E_0 [\cos(\omega t + \varphi_e) + j \sin(\omega t + \varphi_e)] \rightarrow \hat{e}(t) = E_0 e^{j(\omega t + \varphi_e)}$$

$$\hat{e}(t) = R \hat{i}(t) + L \frac{d\hat{i}(t)}{dt}$$

$$\downarrow E_0 e^{j(\omega t + \varphi_e)} = R I_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)} + L j \omega I_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$E_0 e^{j\varphi_e} = (R + j\omega L) I_0 e^{j\varphi_i}; \quad E_0 e^{j\varphi_e} = (R + j\omega L) I_0 e^{j\varphi_i}$$

$$\begin{cases} E_0 = E_0 e^{j\varphi_e} = E_0 \angle \varphi_e = E_0 (\cos \varphi_e + j \sin \varphi_e) \\ I_0 = I_0 e^{j\varphi_i} = I_0 \angle \varphi_i = I_0 (\cos \varphi_i + j \sin \varphi_i) \end{cases} \rightarrow \underline{E}_0 = (R + j\omega L) \underline{I}_0$$

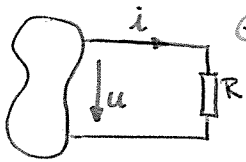
$$* E_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_0 \rightarrow I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\begin{cases} \varphi_e = \varphi + \varphi_i \\ \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \end{cases} \rightarrow \varphi_i = \varphi_e - \arctg \frac{\omega L}{R}$$

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_e - \arctg(\frac{\omega L}{R}))$$

4 RESPUESTAS A LOS ELEMENTOS PASIVOS BÁSICOS. Resistencias, Bobinas y Condensadores

4.1 Resistencias



→ Con método de los coeficientes indeterminados:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u = Ri \rightarrow u(t) = R I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$\Rightarrow U_0 = I_0 R, \varphi_u = \varphi_i$$

→ Con fasores

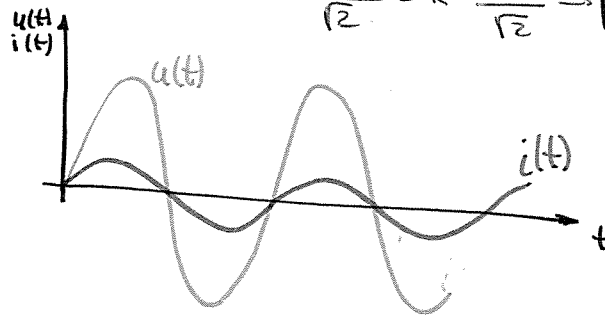
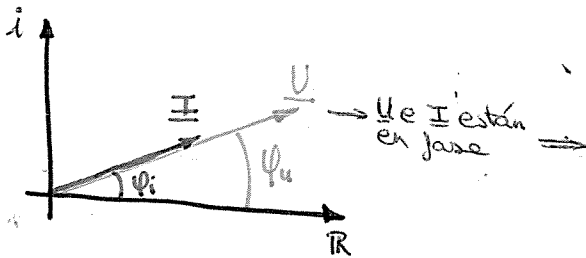
$$\hat{i}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$\hat{u}(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

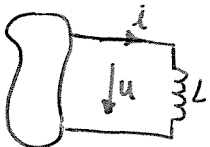
$$\hat{u} = R \hat{i} \rightarrow U_0 e^{j\varphi_u} = R I_0 e^{j\varphi_i}$$

$$U_0 \angle \varphi_u = R I_0 \angle \varphi_i; U_0 = R I_0 \text{ que en valores}$$

$$\text{eficaces queda } \frac{U_0}{\sqrt{2}} = R \frac{I_0}{\sqrt{2}} \rightarrow \underline{U} = R \underline{I}$$



4.2 Bobinas



→ Con método de los coeficientes indeterminados:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$u(t) = L \frac{di}{dt}; u(t) = L \omega I_0 \sin(\omega t + \varphi_i)$$

→ Con fasores

$$\left. \begin{aligned} \hat{i}(t) &= I_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)} \\ \hat{u}(t) &= U_0 e^{j(\omega t + \varphi_u)} \end{aligned} \right\} \hat{i}(t) = L \frac{d\hat{i}(t)}{dt}$$

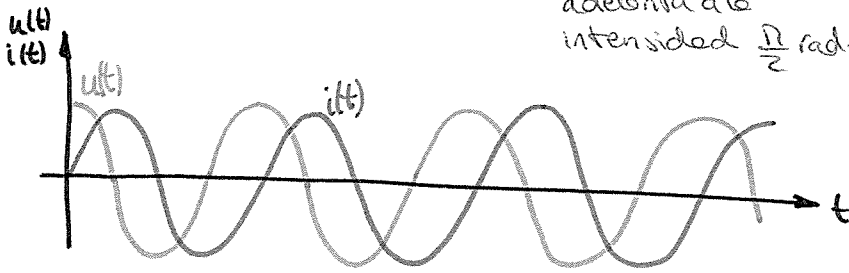
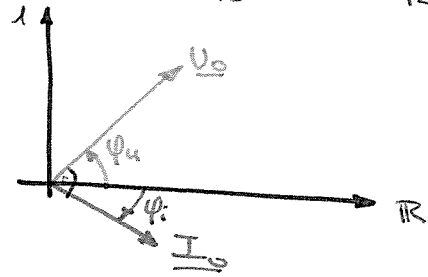
$$U_0 e^{j\varphi_u} = j\omega L I_0 e^{j\varphi_i} \Rightarrow U_0 e^{j\varphi_u} = j\omega L I_0 e^{j\varphi_i}$$

que en valores eficaces queda: $\frac{U_0}{\sqrt{2}} = j\omega L \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\underline{U} = j\omega L \underline{I}}$$

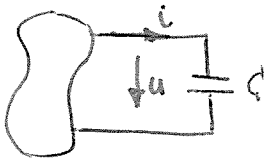
$$\begin{aligned} U_0 &= j\omega L I_0 \\ \varphi_u &= \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La tensión adelanta a la intensidad $\frac{\pi}{2}$ rad.



4.3 Condensadores

→ Con método de los coeficientes indeterminados



$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) &= I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \\ i(t) &= C \frac{du}{dt} = C D u \end{aligned}$$

→ Con fasores

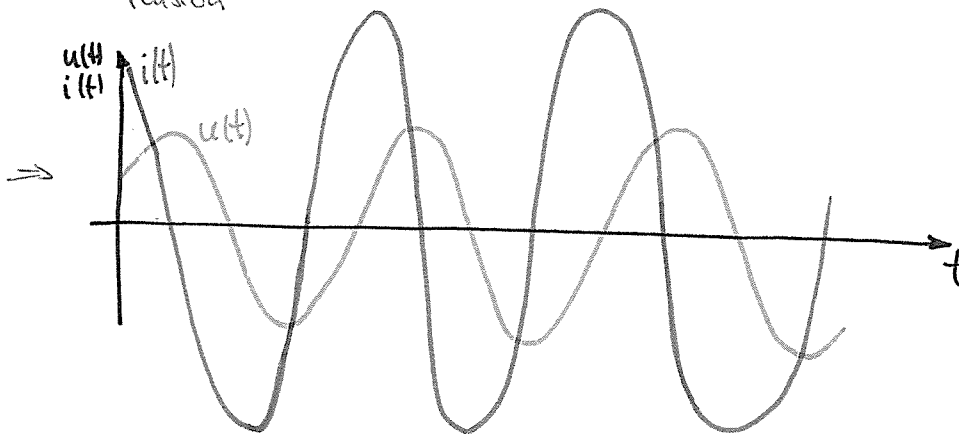
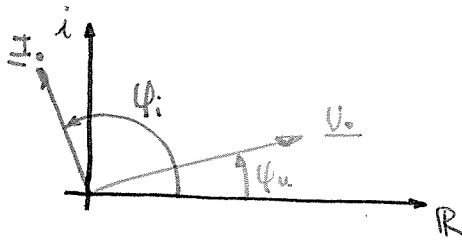
$$\left. \begin{aligned} \hat{u}(t) &= U_0 e^{j(\omega t + \varphi_u)} \\ \hat{i}(t) &= I_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)} \end{aligned} \right\} \hat{i}(t) = C \frac{d\hat{u}}{dt} \rightarrow I_0 e^{j\varphi_i} = C U_0 j\omega e^{j\varphi_u}$$

$$I_0 e^{j\varphi_i} = j\omega C U_0 e^{j\varphi_u} ; I_0 = j\omega C U_0 \text{ que en}$$

valores eficaces queda $\frac{I_0}{\sqrt{2}} = j\omega C \frac{U_0}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{\underline{I} = j\omega C \underline{U}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_0 = j\omega C U_0 \\ \varphi_i = \frac{\pi}{2} + \varphi_u \end{cases}$$

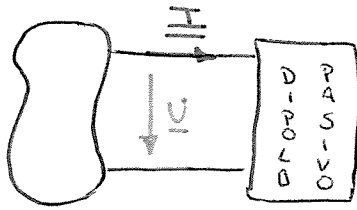
La intensidad adelanta $\frac{\pi}{2}$ a la tensión



NOTA!!

Obsérvese que el operador $\boxed{D = j\omega}$

5 IMPEDANCIA Y ADMITANCIA COMPLEJAS



$$u(t) = Z(D) \cdot i(t)$$

$$\downarrow D = j\omega$$

$$\underline{U} = \underline{Z}(j\omega) \underline{I}$$

Impedancia

$$\underline{Z}(j\omega) = R + jX \text{ } [\Omega]$$

$R \equiv$ Resistencia
 $X \equiv$ Reactancia

$$\underline{Z}_R = R ; X_R = 0$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L ; X_L > 0$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega C} ; X_C < 0$$

$$Y(j\omega) \rightarrow \text{Admitancia} = \frac{1}{\underline{Z}(j\omega)} ; \underline{I} = \underline{Y}(j\omega) \underline{U}$$

$$\underline{Y}(j\omega) = G + jB \text{ } [S]$$

$G \equiv$ Conductancia
 $B \equiv$ Susceptancia

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R} ; B_R = 0$$

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega L} ; B_L < 0$$

$$\underline{Y}_C = j\omega C ; B_C > 0$$

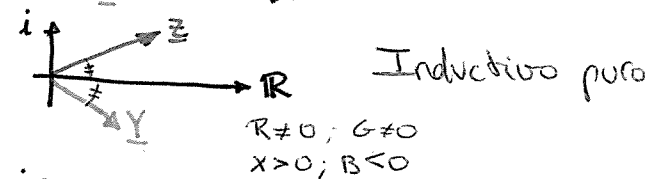
Como $\begin{cases} \underline{Z} = Z \angle \psi \\ \underline{Y} = Y \angle \varphi \end{cases} \rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} ; Y \angle \varphi = \frac{1}{Z \angle \psi} = \frac{1}{Z} \angle -\psi = \frac{1}{Z} \angle \varphi$

$$\begin{cases} Y = \frac{1}{Z} \\ \varphi = -\psi \end{cases}$$

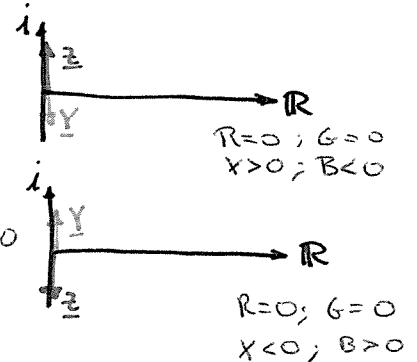
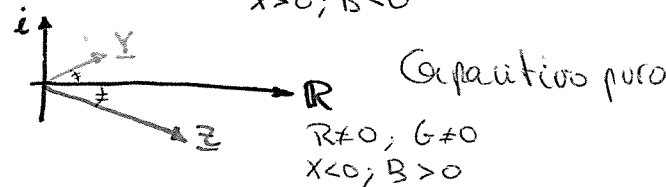
Dipolo resistivo



Dipolo inductivo

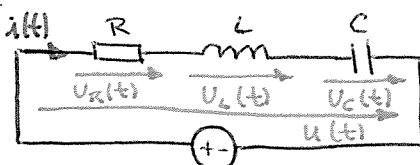


Dipolo capacitivo



6 CIRCUITOS BÁSICOS RLC

6.1 RLC serie



$$u(t) = e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e) = \sqrt{2} E \cos(\omega t + \varphi_e)$$

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

$$u(t) = \underbrace{\left(R + L D + \frac{1}{C D} \right)}_{Z(D)} i(t)$$

Como $D=j\omega$ en fasores queda:

$$\underline{U} = \underbrace{\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)}_{\underline{Z}(j\omega)} \underline{I}, \quad \underline{Z} = R + jX \rightarrow jX = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L - \frac{1}{\omega C} j = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

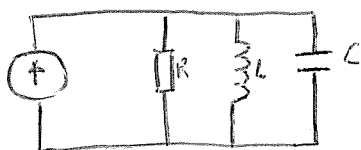
$$\Rightarrow X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \begin{cases} \text{Si } \omega L > \frac{1}{\omega C} \rightarrow X > 0 \rightarrow \text{Dipolo inductivo} \\ \text{Si } \omega L < \frac{1}{\omega C} \rightarrow X < 0 \rightarrow \text{Dipolo capacitivo} \\ \text{Si } \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow X = 0 \rightarrow \text{Dipolo resistivo o en resonancia} \end{cases}$$

$\underline{Z} = R$; $\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad \text{con } \underline{Z} = R + jX \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctg \frac{X}{R} \end{cases} \rightarrow \underline{I} = \frac{E \angle \varphi_e}{\sqrt{R^2 + X^2} \angle \arctg \frac{X}{R}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}} \angle \varphi_e - \arctg \frac{X}{R}$$

$$\underline{I} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \angle \varphi_e - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad i(t) = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_e - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

6.2 RLC paralelo



$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} u + \frac{1}{L D} u + C D u = \underbrace{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{L D} + C D\right)}_{Y(D)} u$$

Como $D=j\omega$ en fasores

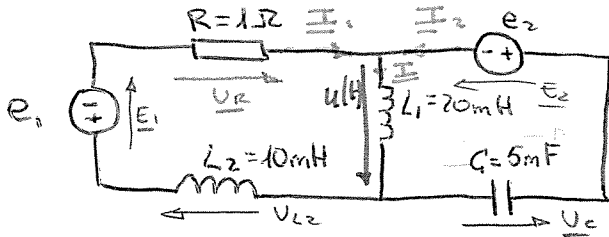
$$\underline{I} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right) \underline{U}$$

$$Y = G + jB = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U}, \quad \underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = U \angle \varphi_u \begin{cases} U = \frac{I}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \\ \varphi_u = \varphi_i - \arctg \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{1/R}\right) \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{\sqrt{2} I}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_i - \arctg \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{1/R}\right)\right)$$

Cuestión 2 Hallar $u(t)$ y dibujar el diagrama vectorial de tensiones e intensidades. $e_1 = 10\sqrt{2} \cos(100t)$; $e_2 = 20\sqrt{2} \cos(100t)$ [V]



① Comenzamos preguntándonos si trabajamos con valores eficaces o valores de cresta. Elegimos valores eficaces (no trabajamos con raíces)

② ¿Argumentos en seno o en coseno? Eligió coseno por tener e_1 y e_2 expresados con coseno

③ Como todos los fuentes tienen misma ω podemos aplicar el cálculo simbólico o de valores. ($\omega = 100 \text{ rad/s}$)

$$\underline{E}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \underline{E}_2 = 20 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \underline{Z}_R = 1 \angle 0^\circ \Omega$$

$$\underline{Z}_{L1} = j\omega L = j \cdot 100 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = j2 = 2 \angle \frac{\pi}{2} \Omega$$

$$\underline{Z}_{L2} = j\omega L = j \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = j = 1 \angle \frac{\pi}{2} \Omega$$

$$\underline{Z}_C = j \frac{-1}{\omega C} = j \frac{-1}{100 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = -2j = 2 \angle -\frac{\pi}{2} \Omega$$

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{E}_1 + \underline{Z}_R \cdot \underline{I}_1 + \underline{U} + \underline{Z}_{L2} \underline{I}_1 = 0 \rightarrow \underline{I}_1 = \frac{-\underline{E}_1 - \underline{U}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L2}} = \frac{-10 \angle 0^\circ - \underline{U}}{1 \angle 0^\circ + 1 \angle \frac{\pi}{2}} = \frac{-10 - \underline{U}}{1 + j} \\ \underline{E}_2 + \underline{U} + \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_2 = 0 \rightarrow \underline{I}_2 = \frac{-\underline{E}_2 - \underline{U}}{\underline{Z}_C} = \frac{-20 - \underline{U}}{-j2} \\ \underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_{L1} = \underline{I} \cdot j2 \rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{j2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{U}}{j2} = \frac{-10 - \underline{U}}{1 + j} + \frac{-20 - \underline{U}}{-j2}; \quad \frac{\underline{U}}{j2} + \frac{10 + \underline{U}}{1 + j} - \frac{20 + \underline{U}}{j2} = 0$$

$$\frac{(10 + \underline{U})j2 - 20(1 + j)}{(1 + j)j2} = 0; \quad j20 + 2j\underline{U} - 20 - 20j = 0; \quad \underline{U} = \frac{20}{2j} \cdot \frac{j}{j} = -10j = 10 \angle -\frac{\pi}{2} \text{ V}$$

$$\boxed{u(t) = 10\sqrt{2} \cos(100t - \frac{\pi}{2}) \text{ (V)}}$$

Diagrama vectorial de intensidades

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_C} = \frac{-10j}{j2} = -5 \text{ (A)} = 5 \angle \frac{\pi}{2} \text{ (A)}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{-10 - \underline{U}}{1 + j} = \frac{-10 + 10j}{1 + j} \cdot \frac{(1 - j)}{(1 - j)} = \frac{-10 + 10j + 10j + 10}{2} = \frac{20j}{2} = 10j = 10 \angle \frac{\pi}{2} \text{ (A)}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{20 + \underline{U}}{j2} = \frac{20 - 10j}{j2} = -5 - 10j = \sqrt{25 + 100} \angle \arctan 2 = 5\sqrt{5} \angle 243.43^\circ$$

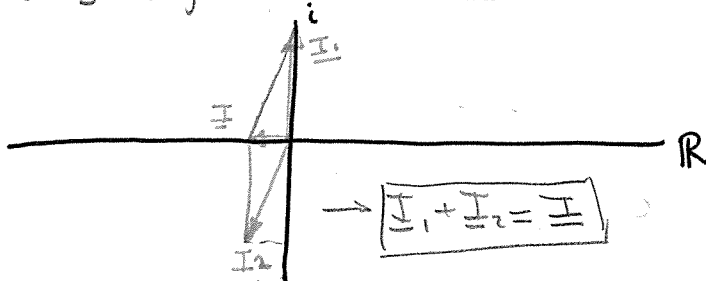


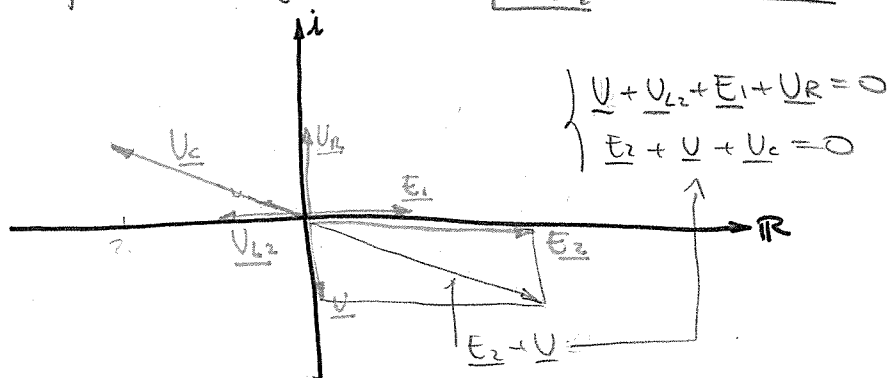
Diagrama de tensiones

$$\underline{E}_1 = 10 \angle 0^\circ ; \underline{E}_2 = 20 \angle 0^\circ ; \underline{U}_R = \underline{Z}_R \cdot \underline{I}_1 = 1 \cdot 10j = 10j = 10 \angle 90^\circ ;$$

$$\underline{U}_{L2} = \underline{Z}_{L2} \cdot \underline{I}_1 = j \cdot 10j = -10 = 10 \angle 180^\circ ; \underline{E}_2 = 20 \angle 0^\circ ; \underline{U}_C = -10 \angle 90^\circ$$

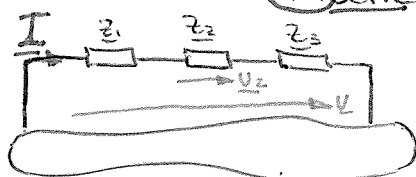
$$\underline{U}_C = \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_2 = -2j (-5 - 10j) = -20 + 10j = \sqrt{20^2 + 10^2} \angle \arctan \frac{1}{2} = 10\sqrt{5} \angle 153.93^\circ$$

$$\underline{U} = -10j = 10 \angle 270^\circ$$



7 ASOCIACIÓN DE ELEMENTOS EN CORRIENTE ALTERNA

7.1 Serie

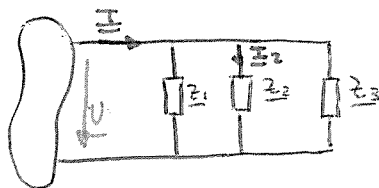


$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$$

Divisor de tensión

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \underline{U}$$

7.2 Paralelo



$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

Divisor de intensidad

$$\underline{I}_2 = \frac{1/\underline{Z}_2}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} \underline{I}$$

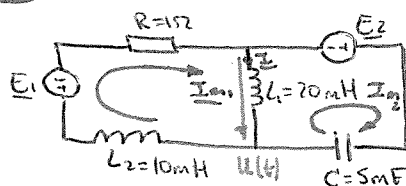
Tendremos las mismas expresiones que en continua pero con fasores.

8 TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE ALTERNA

• Análisis por nodos: $[\underline{Y}_n] \cdot [\underline{U}_n] = [\underline{I}_{aln}]$

• Análisis por mallas: $[\underline{Z}_m] [\underline{I}_m] = [\underline{E}_{alm}]$

➔ Análisis del circuito (ver fig. 2) por mallas → Determinar $U(t)$; $\omega = 100 \text{ rad/s}$



$$[\underline{Z}_m] [\underline{I}_m] = [\underline{E}_{alm}]$$

$$\begin{bmatrix} 1+j2+j & -j2 \\ -j2 & j2-j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{m1} \\ \underline{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z}_R = 1\Omega$$

$$\underline{Z}_{L1} = j25\Omega$$

$$\underline{Z}_{L2} = j5\Omega$$

$$\underline{Z}_C = -j2\Omega$$

$$\begin{cases} (1+j3)\underline{I}_{m1} - j2\underline{I}_{m2} = -10 \\ (-j2)\underline{I}_{m1} = 20 \end{cases} \rightarrow \underline{I}_{m1} = \frac{20}{-j2} = 10j \quad \underline{I}_{m2} = \frac{(1+j3)10j + 10}{j^2} = \frac{10j - 30 + 10}{j^2} = 5 + 10j$$

$$\underline{I} = \underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2} = 10j - 5 - 10j = -5 \text{ (A)} ; \underline{U} = \underline{Z}_{L1} \cdot \underline{I} = j2 \cdot (-5) = -10j ; U(t) = 10\sqrt{2} \cos(100t - \frac{\pi}{2}) \text{ V}$$

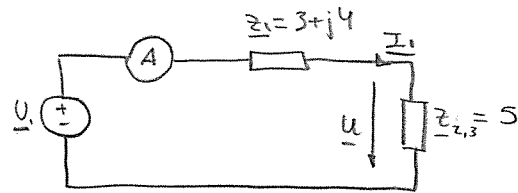
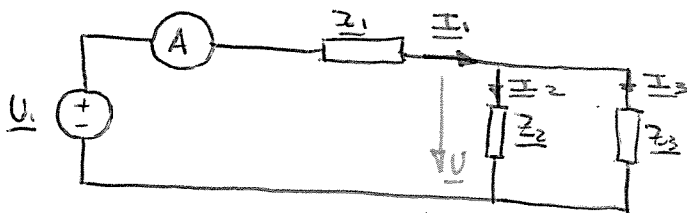
9 TEOREMAS EN CORRIENTE ALTERNA

Son los mismos que en corriente continua

- Principio de superposición y linealidad
- Teorema de Thevenin
- Teorema de Norton

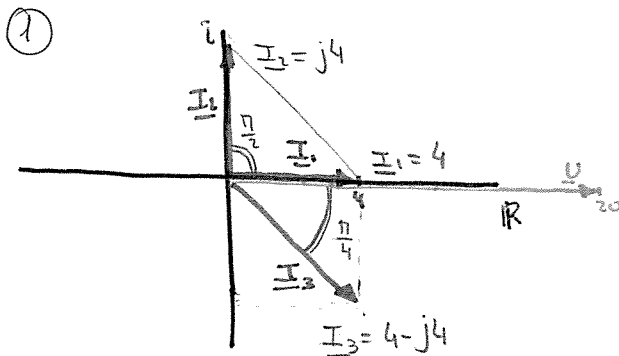
Cuestion 3 En el circuito de la figura el amperímetro marca 4A y $\underline{Z}_1 = 3 + j4 \Omega$. $\underline{Z}_2$ es puramente capacitiva y $\underline{Z}_3$ es de carácter inductivo con $R_{Z_3} = X_{Z_3}$. $\underline{Z}_2$ y $\underline{Z}_3$ en paralelo forman un dipolo puramente resistivo con una impedancia de valor 5Ω . Se pide:

1) Diagrama vectorial de intensidades 2) Valor de $\underline{Z}_2$ y $\underline{Z}_3$ 3) Valor de la fuente de tensión



NOTA: Cuando se tienen circuitos en serie es más cómodo tomar como origen de fases la $\underline{I}$. Cuando son en paralelo es más cómodo tomar como origen la $\underline{U}$.

$$\Rightarrow \underline{I}_1 = I_1 \angle 0 = 4 \angle 0 \text{ A} ; \quad \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 4 \angle 0 \cdot 5 \angle 0 = 20 \angle 0 \text{ V}$$



$$\underline{Z} = Z \angle \varphi = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \angle \varphi_u}{I \angle \varphi_i} = \frac{U}{I} \angle (\varphi_u - \varphi_i)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \begin{cases} \underline{Z}_2: \text{capacitivo puro} \rightarrow \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} = \varphi \\ \underline{Z}_2 \rightarrow \text{intensidad adelanta a tensión } \frac{\pi}{2} \\ \underline{Z}_3: \text{inductivo con } R_3 = X_3 \rightarrow \tan \varphi = \tan \frac{\pi}{4} = \tan 1 \\ \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \text{tensión adelanta a intensidad } \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

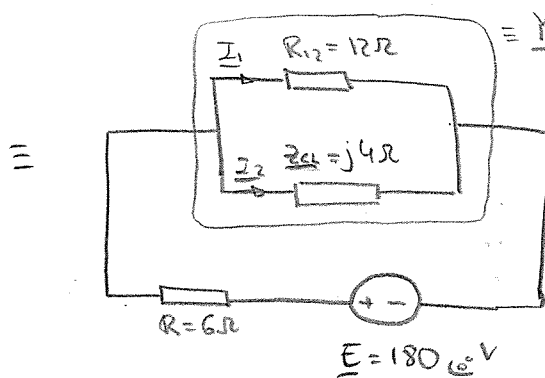
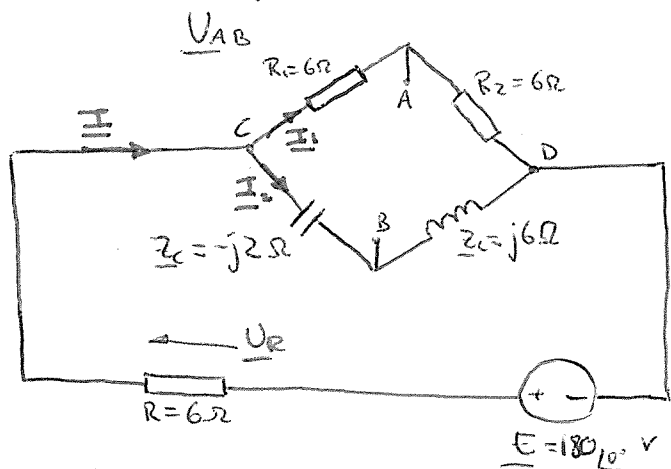
Se cumple que $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

② $\underline{Z}_3 = R_3 + X_3 j = R_3 + j R_3 = R_3 (1 + j)$; $\underline{Z}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_3} = \frac{20}{4 - j4} = \frac{4 + j4}{4 - j4} = \frac{80(1+j)}{16+16} = \frac{5}{2} (1+j)$

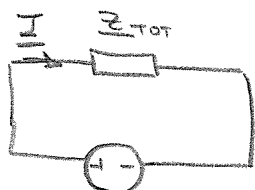
$$\underline{Z}_3 = \frac{5}{2} (1+j) (\Omega)$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = \frac{20}{j4} \cdot \frac{j}{j} = -j5 ; \quad \underline{Z}_2 = -j5 (\Omega)$$

Cuestión 4 Dibujar el diagrama vectorial de tensiones e intensidades. Hallar



$$Y = \frac{1}{12} + \frac{1}{j4} = \frac{1}{12} - \frac{j}{4} = \frac{1}{12} (1 - 3j) \text{ S} \rightarrow Z = (Y)^{-1} = \frac{12}{1-3j} \cdot \frac{1+j3}{1+j3} = \frac{12(1+j3)}{10} = \frac{6}{5} (1+j3) \Omega$$



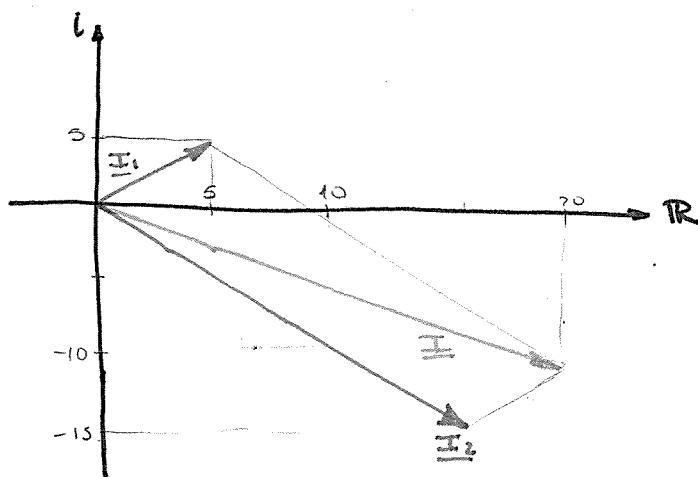
$$Z_T = 6 + \frac{6}{5} (1+j3) = 6 \left(1 + \frac{1}{5} + j\frac{3}{5} \right) = 6 \left(\frac{6}{5} + j\frac{3}{5} \right) = \frac{18}{5} (2+j) \Omega$$

$$I = \frac{E}{Z_{TOT}} = \frac{180}{\frac{18}{5} (2+j)} \cdot \frac{(2-j)}{(2-j)} = \frac{50(2-j)}{5} = \boxed{20 - 10j \text{ (A)}}$$

$$I_1 = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{j4}} \cdot (20 - 10j) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{j+3}{12j}} \cdot (20 - 10j) = \frac{j(20-10j)}{j+3} \cdot \frac{(j-3)}{(j-3)} = \frac{(10+20j)(j-3)}{-10} = \frac{10j-30-20-60j}{-10} = \frac{-50-j50}{-10} = \boxed{5+j5 \text{ (A)}}$$

$$I_2 = \frac{\frac{1}{j4}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{j4}} (20 - 10j) = \frac{\frac{1}{4j}}{\frac{j+3}{12j}} (20 - 10j) = \frac{3(20-10j)}{j+3} \cdot \frac{(j-3)}{(j-3)} = \frac{3 \cdot 10(2-j)(j-3)}{-10} = -3(2j-6+1+3j) = -3(-5+j5) = \boxed{15-j15 \text{ (A)}}$$

$$I = I_1 + I_2 = 5+j5 + 15-j15 = 20-j10 \quad \checkmark$$



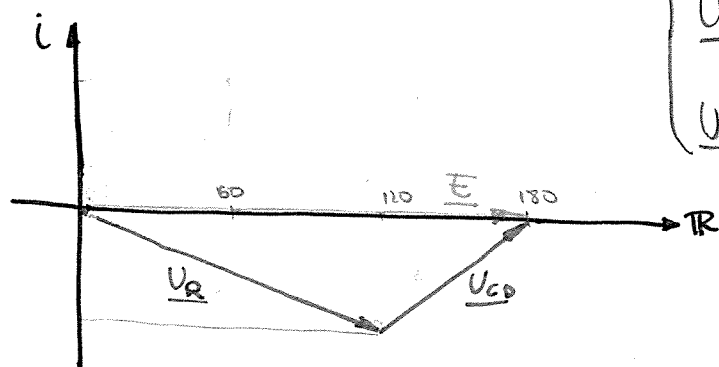
$\underline{U}_{AB}?$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AC} + \underline{U}_{CB} = -\underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C = -5(1+j)6 + 15(1-j)(-j2) = -30(1+j) - 30(1+j) = -60 - 60j$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AD} + \underline{U}_{DB} = \underline{I}_1 R_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_L = 5(1+j)6 - 15(1-j)j6 = 30 + j30 - 90j =$$

$$= -60 - j60 \rightarrow \underline{U}_{AB} = -60 - j60 \text{ (V)}$$

Diagrama vectorial de intensidades



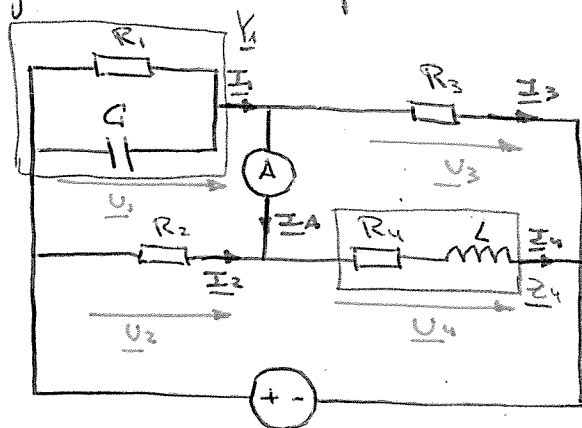
$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{U}_R + \underline{U}_{CD} \\ \underline{U}_{CD} = \begin{cases} \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2} = \underline{I}_1(12) = 60(1+j) \\ \underline{U}_C + \underline{U}_L = \underline{I}_2(j4) = 15(1-j)j4 = 60(1+j) \end{cases} \\ \underline{U}_R = \underline{I}_1 R = (20-10j) \cdot 6 = 60(2-j) = 120 - 60j \end{cases}$$

$$180 = 60 + j60 + 120 - j60 \quad \odot$$

Exercício 5 El circuito de la figura es un puente que se utiliza para medir el coeficiente de autoinducción de una bobina y su resistencia de pérdidas (L y R_u)

1) Encontrar las ecuaciones que permiten conocer estos valores en función de C , R_1 , R_2 y R_3 .

2) ¿Se podría utilizar el mismo circuito para medir la capacitancia de un condensador y su resistencia de pérdidas si se conocen R_2 , R_3 , R_u y L ?



Por técnica de medida, cuando $I_A = 0$

(puente equilibrado): $\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_4 \end{cases}$

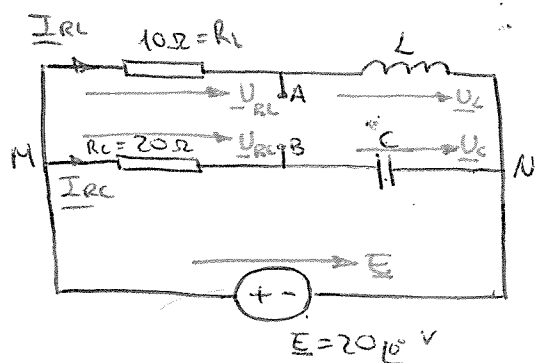
Por topología $\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 = \underline{U}_4 \end{cases}$

① $\frac{\underline{I}_1}{\underline{Y}_1} = \underline{I}_2 \cdot R_2 \quad \left\{ \quad \frac{1}{\underline{Y}_1 R_3} = \frac{R_2}{\underline{Z}_4} \quad ; \quad \underline{Z}_4 = R_2 R_3 \underline{Y}_1 \rightarrow R_u + j\omega L = R_2 R_3 \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C \right) \right.$

$$R_3 \underline{I}_3 = \underline{I}_4 \underline{Z}_4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_u = \frac{R_2 R_3}{R_1} \\ L = R_2 R_3 C \end{cases}$$

② Si se podrían determinar pero no tiene sentido por haber métodos más precisos para determinar los parámetros G y R_s de un condensador real.

Cuestión 6 Calcular L y C para que la tensión entre A y B en el circuito de la figura tenga el mismo valor eficaz que E y este $\frac{\pi}{2}$ adelantado respecto a ella. Razonar la solución gráficamente.



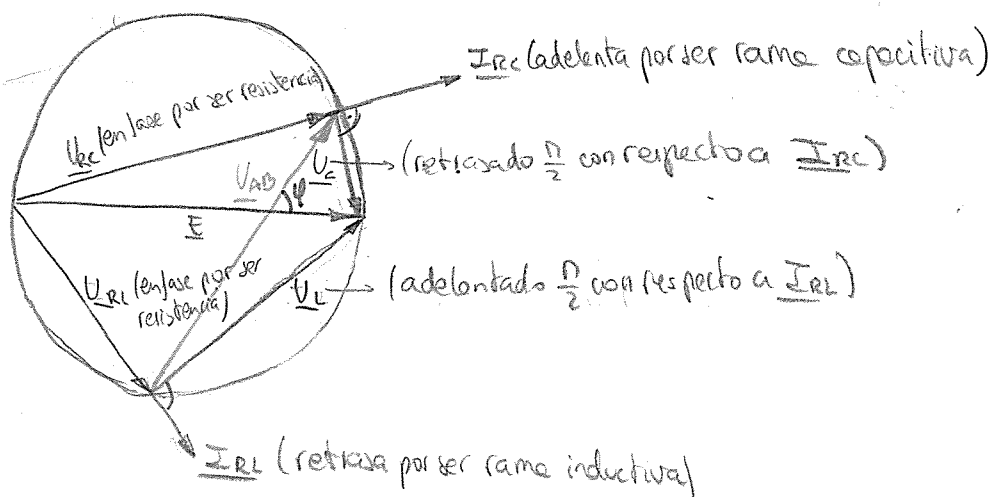
$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

$\underline{V}_{AB}$ ha de ser:

$$\underline{V}_{AB} = 20 \angle \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$V_{AB} = 20$$

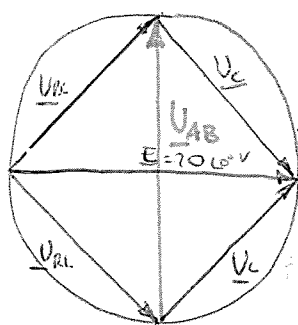
$$\varphi = \varphi_C + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



$$\underline{V}_{AB} = -\underline{V}_{RL} + \underline{V}_{RC}$$

$$\underline{V}_{AB} = \underline{V}_L - \underline{V}_C$$

Del diagrama anterior se deduce que para que $\varphi = \frac{\pi}{2}$ el diagrama vectorial es:



$$\begin{cases} \underline{V}_{RL} = 10 - j10 \text{ (V)} \\ \underline{V}_L = 10 + j10 \text{ (V)} \\ \underline{V}_{RC} = 10 + j10 \text{ (V)} \\ \underline{V}_C = 10 - j10 \text{ (V)} \end{cases}$$

$$\underline{I}_{RL} = \frac{\underline{V}_{RL}}{R_L} = \frac{10(1-j)}{10} = (1-j) \text{ (A)}$$

$$\underline{I}_{RC} = \frac{\underline{V}_{RC}}{R_C} = \frac{10(1+j)}{20} = 0.5 + j0.5 \text{ (A)}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{V}_L}{\underline{I}_{RL}} = \frac{10(1+j)}{1-j} \cdot \frac{(1+j)}{(1+j)} = 5(1-1+2j) = 10j \Omega \rightarrow 10^3 L = 10, \boxed{L = 10^{-2} \text{ H}}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{V}_C}{\underline{I}_{RC}} = \frac{10-j10}{0.5+j0.5} \cdot \frac{0.5-j0.5}{0.5-j0.5} = \frac{10 \cdot 0.5(1-j)^2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 10(-2j) = -20j \rightarrow \underline{Z}_C = \frac{1}{\omega C} j$$

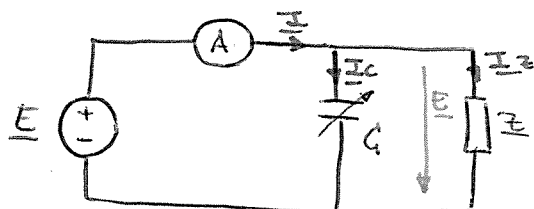
$$\rightarrow -20j = \frac{1}{\omega C} j \rightarrow \frac{1}{10^3 C} = 20 \rightarrow C = \frac{1}{10^3 \cdot 20} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ F} \rightarrow \boxed{C = 50 \mu\text{F}}$$

Cuestión 7 En el circuito de la figura se observa que:

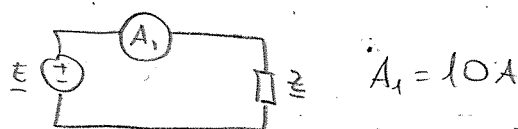
a) Sin condensador el amperímetro marca 10 A

b) Variando el condensador el amperímetro indica una $I_{\min} = 6$ A cuando $C = 160 \mu\text{F}$

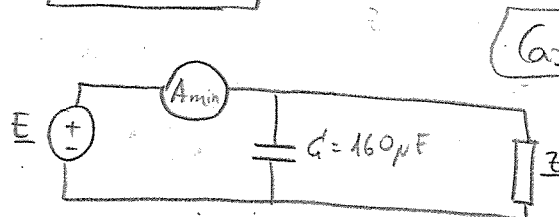
Calcular Z y el valor eficaz de E de la fuente ideal.



$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$



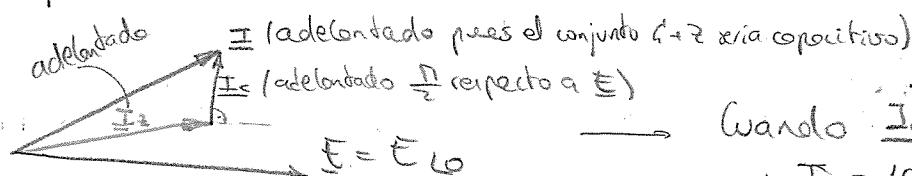
Caso 1



$$I_{\min} = 6 \text{ A}$$

Caso 2

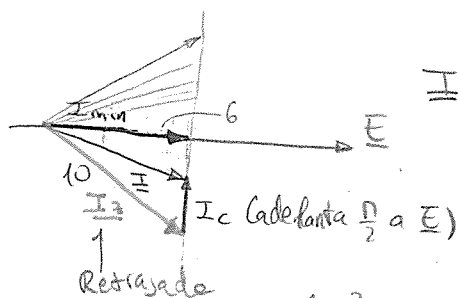
Z puede ser capacitivo?



$$\text{Cuando } I_C = 0 \quad Z = Z_Z = 10 \Omega$$

$$\rightarrow I_Z = 10 \text{ A} \rightarrow I \geq 10 \text{ A}$$

Como $I_{\min} = 6 \text{ A}$ no es compatible un dipolo Z capacitivo con los datos dados $\Rightarrow Z$ será inductivo



$$I \leq 10, \text{ compatible; } I_C = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ A} \Rightarrow$$

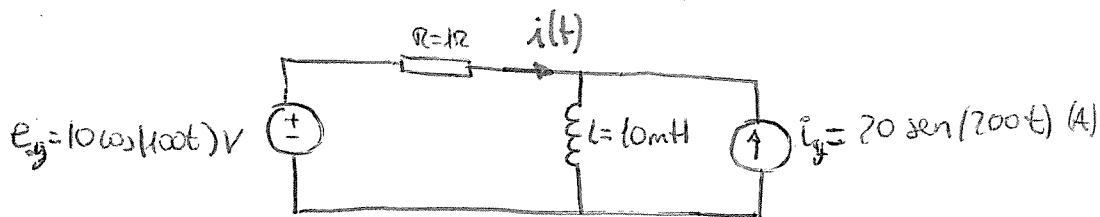
$$\Rightarrow \begin{cases} I_{\min} = 6 \text{ (A)} \\ I_Z = 6 - j8 \text{ (A)} \\ I_C = j8 \text{ (A)} \end{cases}$$

$$\underline{E} = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_C = j8 \cdot \left(\frac{-j}{10^3 \cdot 160 \cdot 10^{-6}} \right) = \frac{8}{16 \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50 \text{ V} \rightarrow \underline{E} = 50 \text{ V}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}_Z} = \frac{50}{1} \cdot \frac{6+j8}{6-j8} = \frac{100(3+j4)}{100} = 3+j4 \rightarrow \underline{Z} = 3+j4$$

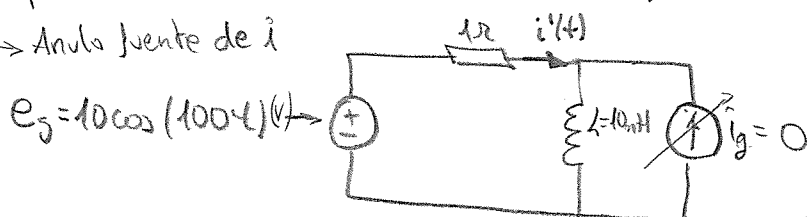
NOTA!! Ambos conjuntos (caso 1 y caso 2) consumen la misma potencia activa pero uno demanda 6 A y otro 10 A.

Cuestión 8 En el circuito de la figura, la intensidad instantánea $i(t)$ que circula por la resistencia $R=1\Omega$ calcular

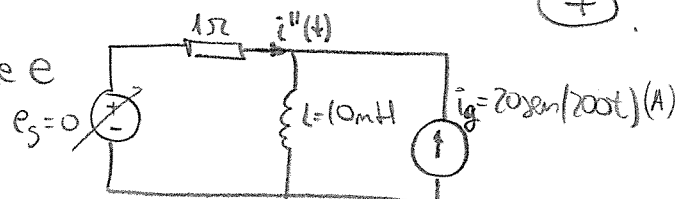


No podemos aplicar el método de fasores por las fuentes no tienen igual pulsación. Apliquemos el principio de superposición:

① Anulo fuente de i

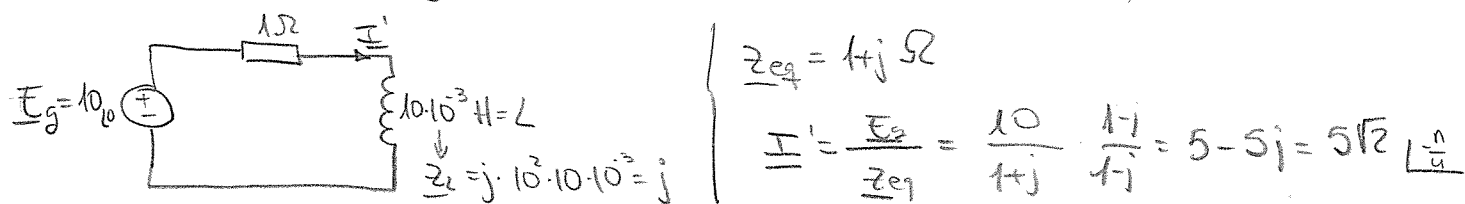


② Anulo fuente de e



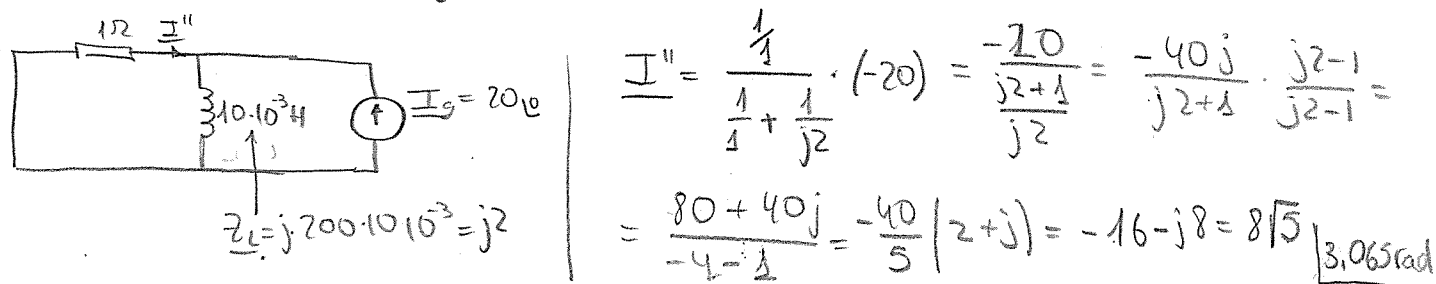
$$i(t) = i'(t) + i''(t)$$

① Usamos valores de cresta, fasor en coseno, $\omega = 100 \text{ rad/s}$



$$\rightarrow i'(t) = 5\sqrt{2} \cos(100t - \frac{\pi}{4})$$

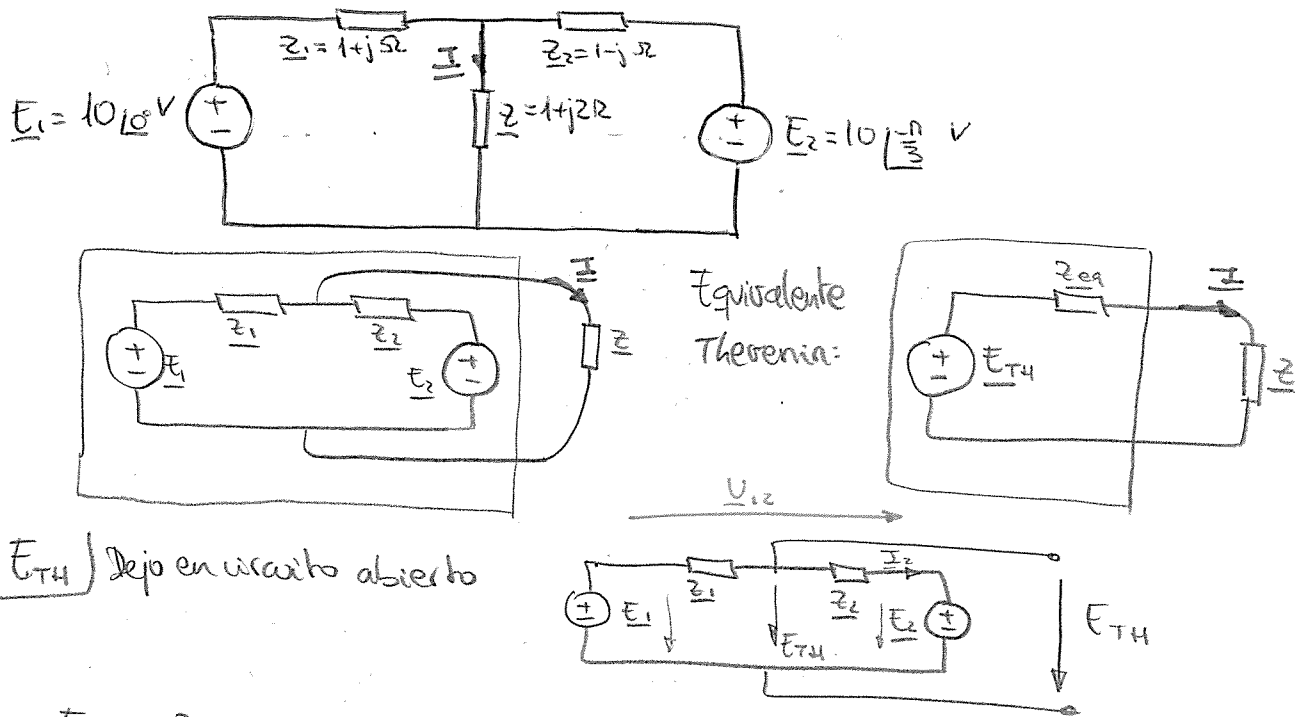
② Usamos valores de cresta, fasor en seno, $\omega = 200 \text{ rad/s}$



$$\rightarrow i''(t) = 8\sqrt{5} \sin(200t + 3.065)$$

Por tanto
$$i(t) = 5\sqrt{2} \cos(100t - \frac{\pi}{4}) + 8\sqrt{5} \sin(200t + 3.065) \text{ (A)}$$

Cuestión 9 En el circuito de la figura hallar la intensidad que circula por la impedancia $\underline{Z} = 1 + j2 \Omega$ por aplicación del teorema de Thévenin.



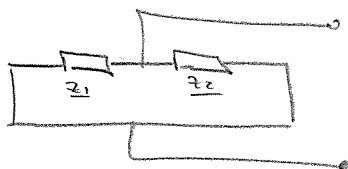
$$\underline{E}_{Th} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{E}_2$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 &= 10 - 10 \angle -\frac{\pi}{3} = (10 + j0) - (10 \cos(-\frac{\pi}{3}) + j10 \sin(-\frac{\pi}{3})) = \\ &= (10 - 5 + j10(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = 5 - j5\sqrt{3} = \sqrt{25 + 25 \cdot 3} \angle \arctan \frac{5\sqrt{3}}{5} = 10 \angle \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{10 \angle \frac{\pi}{3}}{1 + j + 1 - j} = 5 \angle \frac{\pi}{3} \rightarrow \underline{E}_{Th} = (1 - j) 5 \angle \frac{\pi}{3} + 10 \angle -\frac{\pi}{3} =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4} \cdot 5 \angle \frac{\pi}{3} + 10 \angle -\frac{\pi}{3} = 5\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{12} + 10 \angle -\frac{\pi}{3} = 5\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{12}) + 10 \cos(-\frac{\pi}{3}) + j5\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{12}) + \\ &+ j10 \sin(-\frac{\pi}{3}) = 11,83 - j6,83 = 13,66 \angle -30^\circ \end{aligned}$$

$\underline{Z}_{eq}$ Impedancia equivalente del circuito hecho pasivo

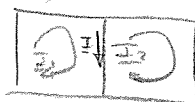


$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{1 + j} + \frac{1}{1 - j} = \frac{1 - j + 1 + j}{2} = 1; \quad \underline{Z}_{eq} = 1 \Omega$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{Th}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}} = \frac{13,66 \angle -30^\circ}{1 + 1 + j2} = \frac{13,66 \angle -30^\circ}{2\sqrt{2} \angle 45^\circ} = 4,83 \angle -75^\circ \text{ (A)}$$

Si lo hubieramos resuelto por mallas tendríamos

$$[Z_m][I_m] = [E_{alm}]$$



$$\begin{bmatrix} 1+j+1+2j & -1-2j \\ -1-2j & 1-j+1+2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (2+j3)I_1 + (-1-2j)I_2 = 10 & (1) \\ (-1-2j)I_1 + (2+j)I_2 = -10 \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases} \quad (2) \quad \text{coef}$$

(2) coef $\rightarrow$

$$\begin{aligned} & (-1-j2) \frac{1}{5} (4+3j)I_1 + (2+j)(4+3j) \cdot \frac{1}{5} I_2 = -10 \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(\frac{4+3j}{5} \right) \\ & \frac{1}{5} (-4-3j-8j+6)I_1 = \frac{(2-11j)}{5} I_1 \quad (1+j2)I_2 \quad \frac{-10}{2 \cdot 5} (1-j\sqrt{3})/(4+3j) = -(4+3j-j4\sqrt{3}+3) = \\ & \quad = -7-j(3-4\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$(1) \rightarrow (2+j3)I_1 + (-1-2j)I_2 = 10$$

$$(2) \rightarrow \left(\frac{2-11j}{5} \right) I_1 + (1+j2)I_2 = -7+j(4\sqrt{3}-3)$$

$$I_1 \left(2+j3 + \frac{2}{5} - j\frac{11}{5} \right) = 10 - 7 + j(4\sqrt{3}-3); \quad I_1 = \frac{3+j(4\sqrt{3}-3)}{\frac{12}{5} + j\frac{4}{5}} =$$

$$= \frac{5(3+j(4\sqrt{3}-3))}{12+j4} \cdot \frac{(12-j4)}{(12-j4)} = \frac{5(36-12j+j(48\sqrt{3}-36)-12+16\sqrt{3})}{144+16} =$$

$$= \frac{24+16\sqrt{3}+48j(-1+\sqrt{3})}{32} = \frac{3+2\sqrt{3}+j6(-1+\sqrt{3})}{4} = 1.616 + j4.39 =$$

No acabado

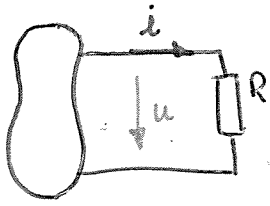
$$\text{Sol. } I_1 = 0.292 + j1.37 \rightarrow I = I_1 - I_2 = 4.83 \angle -75^\circ$$

$$I_2 = -0.458 + j6.04$$

POTENCIA Y ENERGÍA EN R.E. SENOIDAL

1 POTENCIA Y ENERGÍA EN LOS ELEMENTOS PASIVOS BÁSICOS

1.1 Resistencias

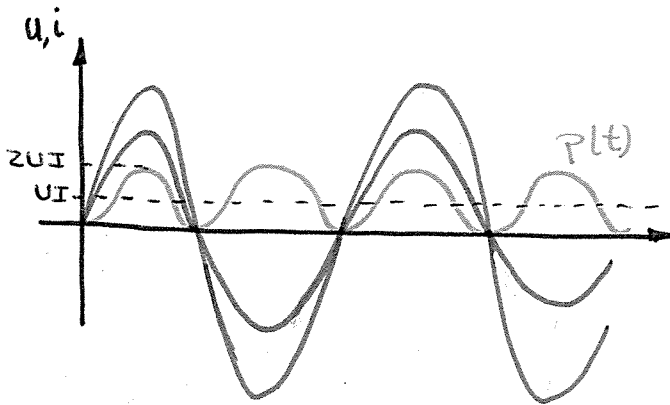


$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{2} U \sin(\omega t) \\ i &= \sqrt{2} I \sin(\omega t) \\ I &= \frac{U}{R} \end{aligned} \right\}$$

$$p_e(t) = u(t) i(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t) \cdot \sqrt{2} I \sin(\omega t)$$

$$p_e(t) = 2 UI \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t) - \cos(\omega t + \omega t)]$$

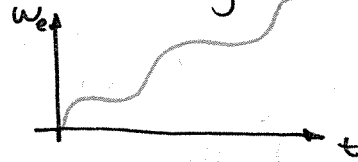
$$p_e(t) = UI [1 - \cos(2\omega t)]$$



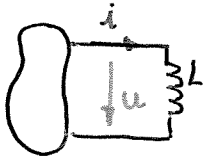
Potencia activa $P = \text{valor medio } p(t)$

$$P_R = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2$$

$$\text{Energía consumida} = \int p_e(t) dt = UI t - UI \int \cos(2\omega t) dt$$



1.2 Bobinas

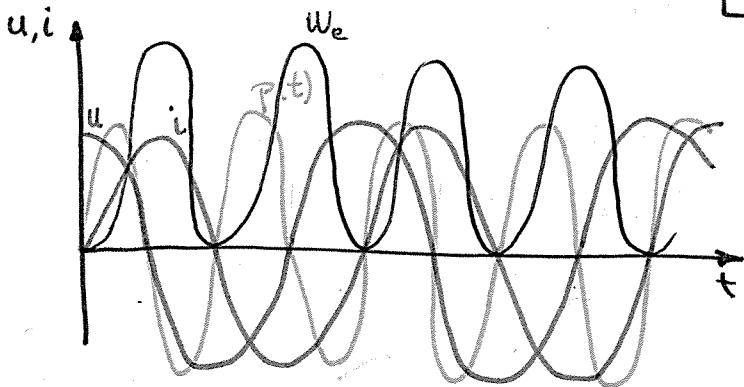


$$\left. \begin{aligned} i &= \sqrt{2} I \sin(\omega t) \\ u &= \sqrt{2} U \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ U &= j\omega L I \end{aligned} \right\}$$

$$p_e(t) = u(t) i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t) \sqrt{2} U \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= 2 UI \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t - \frac{\pi}{2}) - \cos(\omega t + \omega t + \frac{\pi}{2})]$$

$$p_e(t) = UI \sin(2\omega t)$$



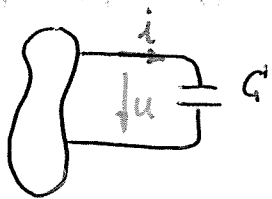
Potencia activa $= P = \text{valor medio } p(t)$

$$P_L = 0$$

Energía consumida

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int i^2 = \frac{1}{2} \int 2 I^2 \sin^2(\omega t) = \\ &= I^2 (1 - \cos(2\omega t)) \end{aligned}$$

1.3 Condensadores



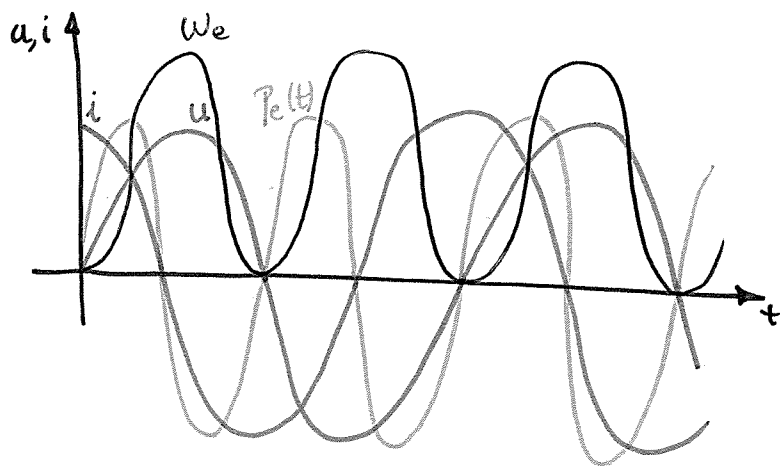
$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2} U \sin(\omega t) \\ i(t) &= \sqrt{2} I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ I &= j\omega C U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_e(t) &= u(t) i(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t) \sqrt{2} I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \\ &= 2UI \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t - \frac{\pi}{2}) - \cos(\omega t + \omega t + \frac{\pi}{2})] \end{aligned}$$

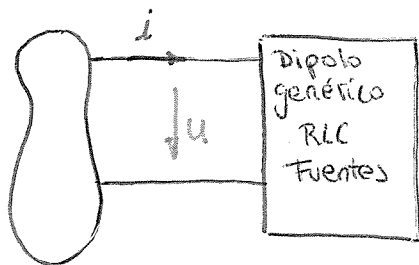
$$P_e(t) = UI \sin(2\omega t)$$

Potencia activa = P = valor medio de $P_e(t)$

$$P_c = 0$$



2 POTENCIA Y ENERGÍA EN UN DIPOLLO



$$u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$P_e(t) = i(t) u(t) = 2UI \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i)$$

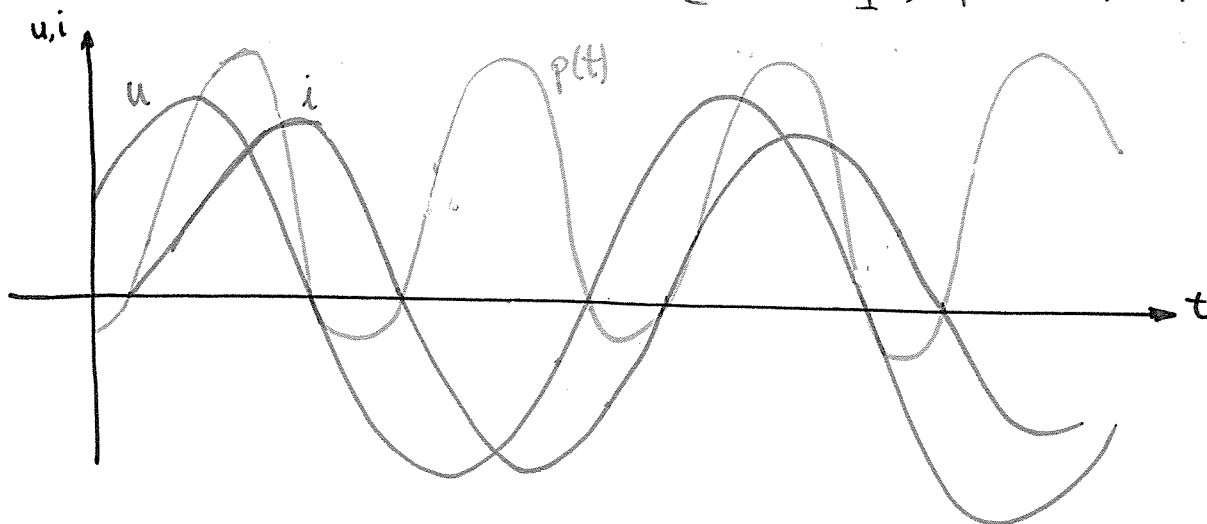
$$P_e(t) = 2UI \frac{1}{2} [\cos(\omega t + \varphi_u - \omega t - \varphi_i) - \cos(\omega t + \varphi_u + \omega t + \varphi_i)]$$

$$P_e(t) = UI [\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] ; \quad \varphi_u - \varphi_i = \varphi$$

$$P_e(t) = UI \cos \varphi - \underbrace{UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{potencia fluctuante}}$$

$$P = UI \cos \varphi$$

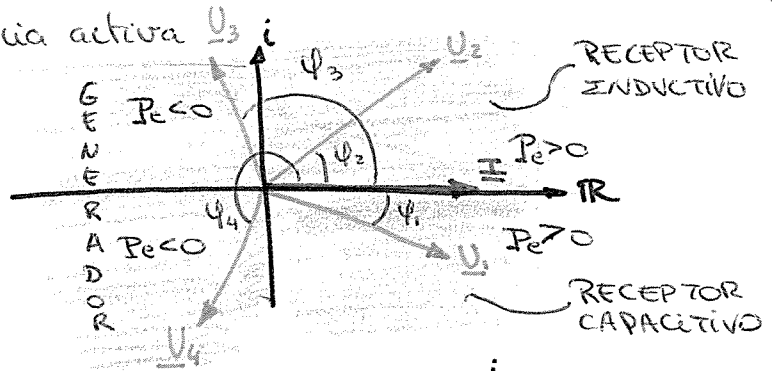
NOTA!! Si el dipolo fuera pasivo se caracteriza por su Z
 $Z = Z(\varphi) \Rightarrow Z = \frac{U}{I} ; \quad \varphi_z = \varphi_u - \varphi_i = \varphi$



Tipos de dipolos según su potencia activa P_e

Receptor $P_e > 0$

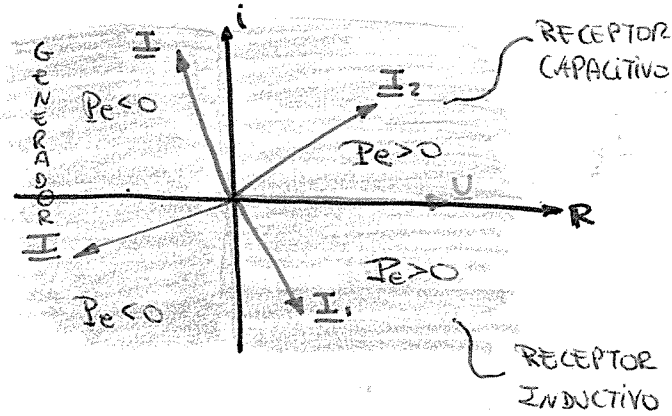
Generador $P_e < 0$



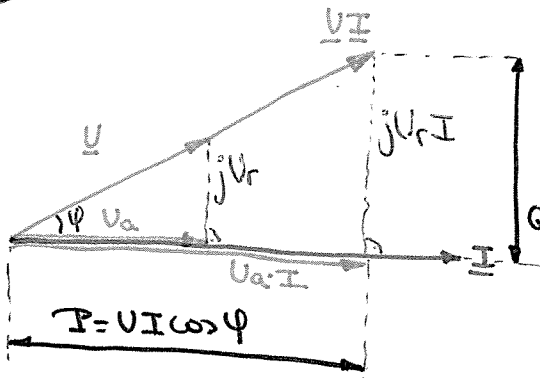
$$P_R = UI \cos(\psi_u - \psi_i) = UI \Rightarrow \text{Dipolo resistivo puro}$$

$$P_L = UI \cos(\psi_u - \psi_i) = UI \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{Dipolo inductivo puro}$$

$$P_C = UI \cos(\psi_u - \psi_i) = UI \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{Dipolo capacitivo puro}$$



3 POTENCIA ACTIVA, REACTIVA Y APARENTE



La proyección de U sobre I es la tensión activa mientras que la proyección de U sobre la perpendicular a I es la tensión reactiva

Definimos la potencia reactiva como $Q = UI \sin \psi$, medida en voltamperos reactivos (var). Diremos que la potencia reactiva es consumida por analogía con la potencia activa:

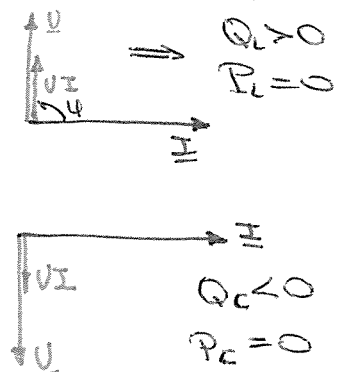
- $P_{\text{reactiva consumida}} > 0 \rightarrow$ Se consume potencia reactiva
- $P_{\text{reactiva consumida}} < 0 \rightarrow$ Se genera potencia reactiva

Definimos la potencia aparente $S = UI$, medida en voltamperios (VA). Más adelante veremos su notación simbólica.

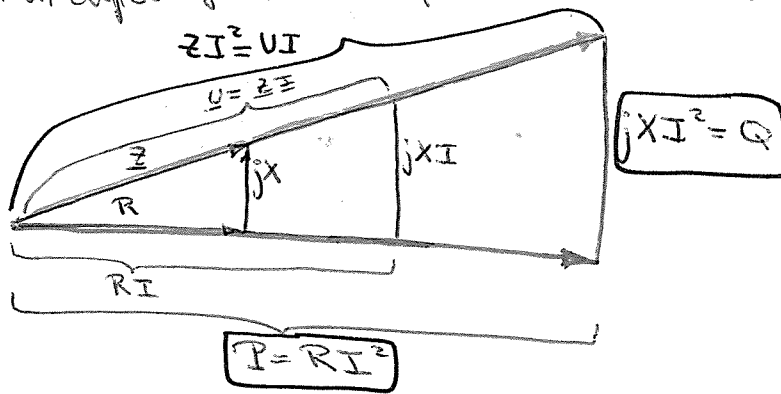
En resistencias $Q_R = UI \sin \psi = 0 \Rightarrow$ Las resistencias no consumen potencia reactiva

En bobinas $Q_L = UI \sin \psi = UI \Rightarrow$ Las bobinas consumen potencia reactiva

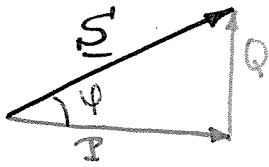
En condensadores $Q_C = UI \sin \psi = -UI \Rightarrow$ Los condensadores ceden o generan potencia reactiva



En un dipolo pasivo cualquiera, caracterizado por $\underline{Z}$



4 POTENCIA COMPLEJA Y SU NOTACIÓN SIMBÓLICA



$\underline{S} = P + jQ$: Potencia compleja absorbida por un dipolo

$$\underline{S} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = UI (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U \angle \varphi_u (I \angle \varphi_i)^* = U \angle \varphi_u I \angle -\varphi_i = UI \angle \varphi_u - \varphi_i = UI \angle \varphi$$

5 DIFERENTES EXPRESIONES PARA LA POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA

$$\begin{aligned} P &= \text{p. real} \{ \underline{S} \} = UI \cos \varphi = \text{p. real} \{ \underline{U} \underline{I}^* \} = \text{p. real} \{ \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* \} = \text{p. real} \{ \underline{Z} \cdot \underline{I}^2 \} = \\ &= RI^2 = \text{p. real} \left\{ \underline{U} \left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \right)^* \right\} = \text{p. real} \left\{ \underline{U} \frac{\underline{U}^*}{\underline{Z}^*} \right\} = \text{p. real} \left\{ \frac{\underline{U}^2}{\underline{Z}^*} \right\} = \text{p. real} \{ \underline{Y}^* \underline{U}^2 \} = G U^2 \end{aligned}$$

Dip. pasivo $\underline{Z} = \underline{Z}_R = R + jX$ $\underline{Y} = G + jB$

$$\begin{aligned} Q &= \text{p. im} \{ \underline{S} \} = UI \sin \varphi = \text{p. im} \{ \underline{U} \underline{I}^* \} = \text{p. im} \{ \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* \} = \text{p. im} \{ \underline{Z} \underline{I}^2 \} = \\ &= XI^2 = \text{p. im} \left\{ \underline{U} \left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \right)^* \right\} = \text{p. im} \left\{ \underline{U} \frac{\underline{U}^*}{\underline{Z}^*} \right\} = \text{p. im} \left\{ \frac{\underline{U}^2}{\underline{Z}^*} \right\} = \text{p. im} \{ \underline{Y}^* \underline{U}^2 \} = BU^2 \end{aligned}$$

Dip. pasivo $\underline{Z} = \underline{Z}_R = R + jX$

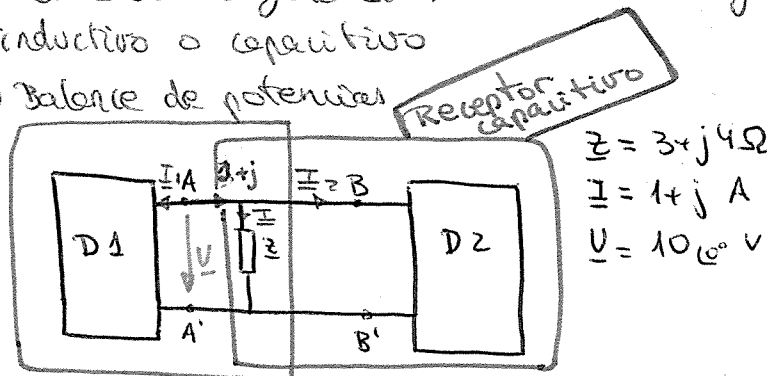
6 TEOREMA DE BOUCHEROT

"En un circuito de corriente alterna se cumple el balance de potencias tanto para la activa como para la reactiva"

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{e_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n Q_{e_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \underline{S}_{e_i} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Cuestión 10 En el circuito $\underline{U} = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$

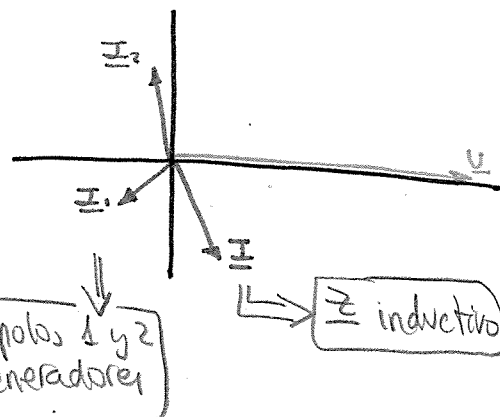
- ① Decir que dipolo actúa como generador y cual como receptor
- ② En caso de receptor, decir si es inductivo o capacitivo
- ③ En caso de generador, decir si la carga conectada a él es de carácter inductivo o capacitivo
- ④ Balance de potencias



$$\begin{aligned} Z &= 3 + j4 \Omega \\ I &= 1 + j \text{ A} \\ \underline{U} &= 10 \angle 0^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$I_1 = -1 - j(4); \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{10}{3 + j4} \cdot \frac{3 - j4}{3 - j4} = \frac{10(3 - j4)}{25} = \frac{2}{5}(3 - j4)$$

$$I_2 = -I - I_1 = +\frac{6}{5} + j\frac{8}{5} + 1 + j = -\frac{1}{5} + j\frac{13}{5}$$



→ Consideramos el dipolo $Z + D_2$: $\rightarrow Z + D_2$ forman dipolo capacitivo

Por tanto D_1 es un generador conectado a una carga receptora capacitiva

→ Consideramos dipolo $Z + D_1$: $\rightarrow Z + D_1$ forman dipolo inductivo

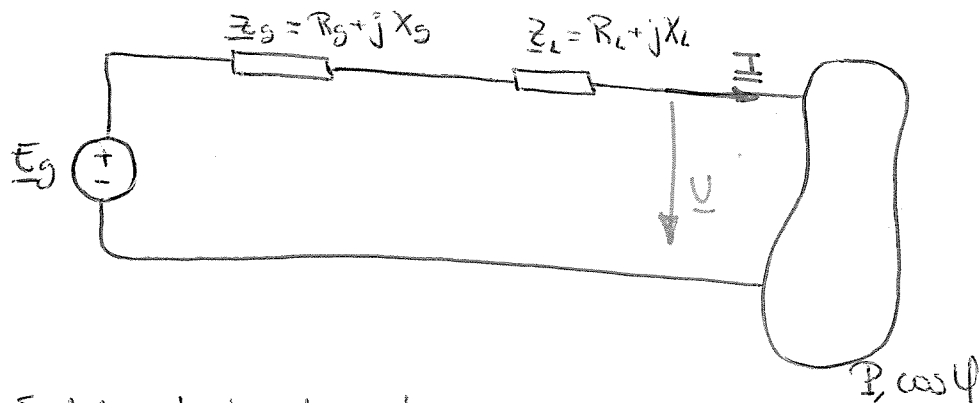
Por tanto D_2 es un generador conectado a una carga receptiva inductiva

Balance de potencias

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{S}_1 &= \underline{U} \underline{I}_1^* = 10(-1 + j) = -10 + j10 \text{ VA} & \left\{ \begin{aligned} P &= -10 \text{ W} \\ Q &= 10 \text{ var} \end{aligned} \right. \\ \underline{S}_2 &= \underline{U} \underline{I}_2^* = 10\left(-\frac{1}{5} - j\frac{13}{5}\right) = -2 - j26 \text{ VA} & \left\{ \begin{aligned} P &= -2 \text{ W} \\ Q &= -26 \text{ var} \end{aligned} \right. \\ \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = 10\left(\frac{2}{5}(3 - j4)\right) = 12 - j16 \text{ VA} & \left\{ \begin{aligned} P &= 12 \text{ W} \\ Q &= -16 \text{ var} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum P_e &= -10 - 2 + 12 = 0 \\ \sum Q_e &= 10 - 26 + 16 = 0 \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} &\text{Se cumple el teorema de} \\ &\text{Boucherot} \end{aligned} \right.$$

7 FACTOR DE POTENCIA Y SU IMPORTANCIA EN EL SUMINISTRO DE ENERGÍA ELÉCTRICA.



Se define factor de potencia como:

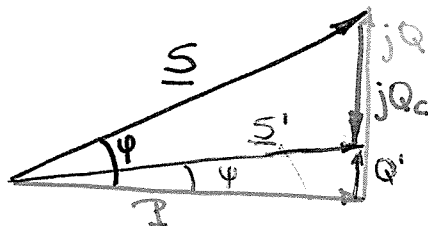
$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \phi}{UI} = \cos \phi$$

$$I = \frac{P}{U \cos \phi} \left\{ \begin{array}{l} I_{\min} = \frac{P}{U \cdot 1} \\ I_{(\cos \phi = 0.5)} = \frac{P}{U \cdot 0.5} = 2 I_{\min} \end{array} \right.$$

Demondremos la mínima corriente cuando $\cos \phi = \lambda = 1$

Como $P = R_g I^2 + R_L I^2 = (R_g + R_L) I^2 \rightarrow$ las pérdidas con $\lambda = 0.5$ son 4 veces mayores que con $\lambda = 1$

Por tanto $\lambda \rightarrow 1$ es muy conveniente en las instalaciones eléctricas



$$Q_c = UI \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -UI = -U \omega C U = -\omega C U^2 < 0$$

Por tanto, un condensador rebaja el factor de potencia y no consume potencia activa

$$Q' = Q + Q_c, \quad -Q_c = Q - Q'; \quad \omega C U^2 = Q - Q'$$

$$\text{Como } \tan \phi = \frac{Q}{P} \rightarrow Q = P \tan \phi \Rightarrow$$

$$\tan \phi = \frac{Q'}{P} \rightarrow Q' = P \tan \phi$$

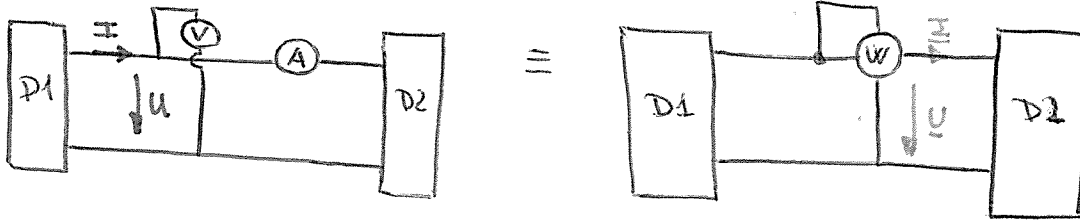
$$\Rightarrow \omega C U^2 = P (\tan \phi - \tan \phi)$$

$$C = \frac{P (\tan \phi - \tan \phi)}{\omega U^2}$$

8 MEDIDA DE POTENCIA

Tema 9

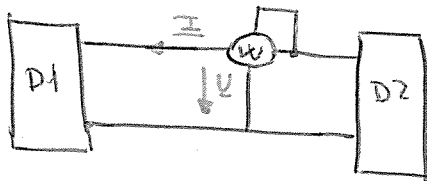
Para medir potencia se usa el vatímetro, que es la combinación de un amperímetro y un voltímetro



Mide potencia activa $W = UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) = P_{\text{real}} \{ \underline{U} \underline{I}^* \}$

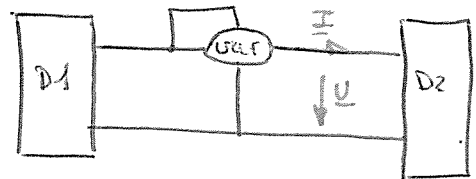
El vatímetro representado mide la potencia entrante a D2.

La representación contraria sería:



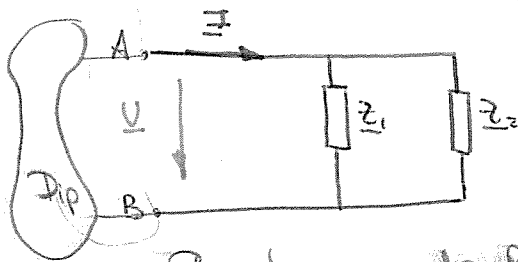
Mide potencia entrante a D1

De igual manera tenemos el varímetro para medir potencia reactiva



$\text{Var} = UI \sin(\varphi_u - \varphi_i) = P_{\text{im}} \{ \underline{S} \} = P_{\text{im}} \{ \underline{U} \underline{I}^* \}$

Cuestión 11 En el circuito: $P_1 = 3 \text{ kW}$, $P_2 = 4 \text{ kW}$, $Q_1 = 10 \text{ kvar}$, $Q_2 = -3 \text{ kvar}$, $U_{AB} = 1000 \text{ V}$ y $f = 50 \text{ Hz}$. Se pide:



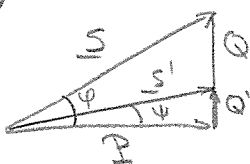
- ① Intensidad $\underline{I}$
- ② Q del condensador que al conectarlo en paralelo consigue un factor de potencia de 0,8 inductivo

Por teorema de Boucherot

$$P_{\text{sdip}} = P_{eZ1} + P_{eZ2} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\text{sdip}} = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 7 \cdot 10^3 \text{ W} \\ Q_{\text{sdip}} = 10 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3 = 7 \cdot 10^3 \text{ var} \end{array} \right. \rightarrow \underline{S} = 7 \cdot 10^3 + j 7 \cdot 10^3 \text{ VA}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*, \quad \underline{I}^* = \frac{\underline{S}}{\underline{U}} = \frac{10^3 (7 + j 7)}{10^3} = 7 + j 7 \rightarrow \underline{I} = 7 - j 7 \text{ (A)}$$

b)



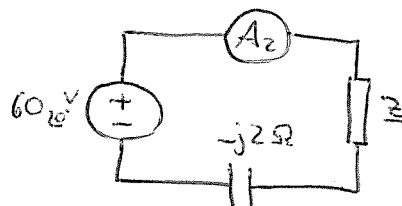
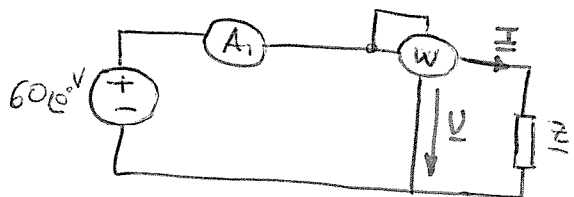
$$C = \frac{P (t_g \varphi - t_g \psi)}{\omega U^2} = \frac{7000 (1 - 0,75)}{2\pi \cdot 50 \cdot (10^3)^2} = 5,57 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$\Rightarrow Q = 5,57 \mu\text{F}$$

$$t_g \varphi = 1$$

$$\varphi = \arccos 0,8, t_g \psi = 0,75$$

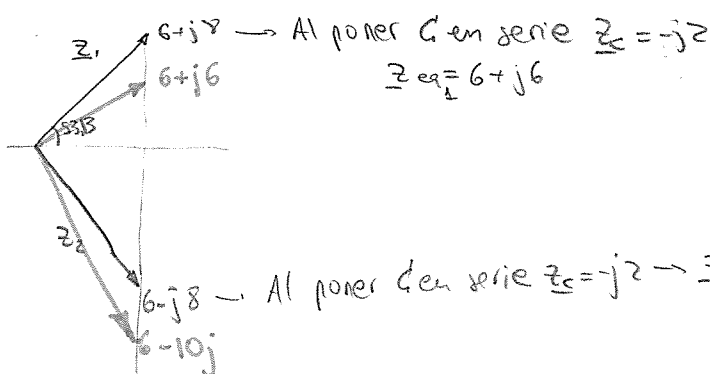
Cuestión 12 Con la fuente de valor $60 \angle 0^\circ \text{ V}$ se han realizado los dos montajes dados. Deducir $\underline{Z} = R + jX$ sabiendo que:
 $A_1 \rightarrow 6 \text{ A}$, $W \rightarrow 216 \text{ W}$, $A_2 \rightarrow$ menos que A_1



$$\underline{Z} = \frac{U}{I} \left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{60}{6} = 10 \Omega \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i \end{array} \right. , \quad P = UI \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{216}{60 \cdot 6} = 0,6 \rightarrow \varphi = \pm 53,13^\circ$$

Por tanto $\underline{Z} = 10 \angle \pm 53,13^\circ = 10 (\cos \varphi + j \sin \varphi) = 10 (0,6 \pm j0,8)$

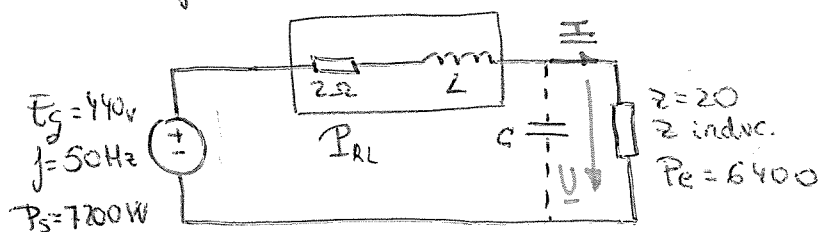
$$\underline{Z} = 6 \pm j8 \Omega$$



Si $A_2 < A_1 \Rightarrow \underline{Z}_{eq} > \underline{Z} \rightarrow \underline{Z} = 6 - j8 \Omega$

Cuestión 13 Calcular, tomando como origen de fase la tensión en la carga

- ① Intensidad absorbida por la carga
- ② Factor de potencia de la impedancia de la carga
- ③ Factor de potencia del generador
- ④ Valor de L
- ⑤ Diagrama vectorial de tensión e intensidad
- ⑥ Condensador que debería colocarse en paralelo con la carga para que el conjunto de ambas tuviese un $\cos \varphi = 0,9$ inductivo



$$\underline{U} = U \angle 0^\circ$$

$$\textcircled{1} \quad P_{RL} = P_S - P_e = 7200 - 6400 = 800 \text{ W} \left\{ \begin{array}{l} P_L = 0 \\ P_R = I^2 R = 800 \text{ W} \end{array} \right. \rightarrow I = \sqrt{\frac{800}{2}} = \sqrt{400}$$

$$\underline{I} = 20 \text{ A}$$

Factor pot. carga

$$② P_e = UI \cos \varphi = 6400 \rightarrow \cos \varphi = \frac{6400}{UI} = \frac{6400}{400 \cdot 20} = 0,8$$

$$U = Z \cdot I = 400$$

$$I = 20$$

$$Z = 20$$

$$\boxed{\cos \varphi = 0,8}$$

→ Como Z inductivo $\Rightarrow \varphi = \arccos 0,8 = +36,87^\circ$

③ Factor pot. del generador ???

$$P_{eg} = -P_s = U_g I_g \cos \varphi_g = -7200; \cos \varphi_g = \frac{-7200}{E_g I} = \frac{-7200}{440 \cdot 20} = -0,82$$

$$\boxed{\cos \varphi_g = -0,82} \rightarrow \varphi_g = 145,08^\circ$$

④ Valor de L

$$\text{Para bobina } \underline{S}_L = j\omega L I^2 \Rightarrow \cancel{P_L} + jQ_L = j\omega L I^2$$

$$\rightarrow Q_L = \omega L I^2 \left\{ \begin{array}{l} I = 20 \\ \omega = 2\pi 50 \text{ rad/s} \\ Q_L = ? \end{array} \right.$$

$$\sum Q_L = 0$$

$$Q_{sg} = \cancel{Q_R} + Q_L + Q_{ez}$$

$$Q_{sg} = E_g I \sin(145,08^\circ) \cdot \frac{\cos(145,08^\circ)}{\cos(145,08^\circ)} = P_{sg} \tan(145,08^\circ) = -7200 \cdot (-0,698) = 5026,53$$

$$Q_{ez} = UI \sin(36,87^\circ) \cdot \frac{\cos(36,87^\circ)}{\cos(36,87^\circ)} = P_e \tan(36,87^\circ) = 6400 \tan(36,87^\circ) = 4800$$

$$Q_L = 5026,53 - 4800 = 226,53 \rightarrow L = \frac{Q_L}{\omega I^2} = \frac{226,53}{2\pi 50 \cdot 20^2} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$\boxed{L = 1,8 \text{ mH}}$$

⑤ Diag. de tensión e intensidad

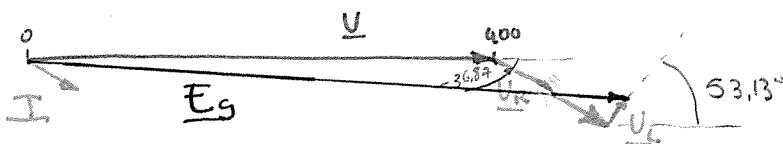
$$U = Z I = 400 \rightarrow \boxed{U = 400 \angle 0^\circ}; \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 36,87^\circ \rightarrow \varphi_i = -36,87^\circ$$

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i = 20 \angle -36,87^\circ$$

$$\boxed{\underline{U}_R = R \underline{I} = 2 \cdot 20 \angle -36,87^\circ = 40 \angle -36,87^\circ}; \boxed{\underline{U}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{I} = j\omega L \cdot \underline{I} = j2\pi 50 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \angle -36,87^\circ = 11,33 \angle 53,13^\circ}$$

$$= 2\pi \cdot 50 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3} \angle 90^\circ \angle -36,87^\circ = 11,33 \angle 53,13^\circ$$

$$\boxed{\underline{E}_g = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U} = 40(\cos(-36,87^\circ) + j\sin(-36,87^\circ)) + 11,33(\cos(53,13^\circ) + j\sin(53,13^\circ)) + 400 = 438,8 - j14,94 = 440 \angle -2^\circ}$$



$$C = \frac{P(\tan \psi - \tan \phi)}{\omega U^2} = \frac{6400(\tan(36.87^\circ) - \tan(25.84^\circ))}{2\pi \cdot 400^2} = 3.38 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

$$C = 33.8 \mu\text{F}$$

$$P = 6400$$

$$\tan \psi = \tan 36.87^\circ$$

$$\psi = \arccos 0.9 = 25.84^\circ$$

$$\omega = 2\pi \cdot 50$$

$$U = 400$$

➔ Question ANSWER: Se pide C y L

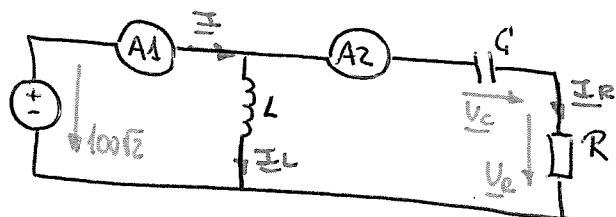
Datos: $U_R = U_C$

A₁ marca igual que A₂

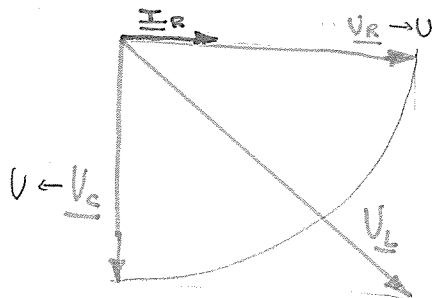
$$P_g = 400 \text{ W}$$

$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

$$E_g = 100 \text{ V}$$



$U_L = 100 \sqrt{2}$; $U_L = U_C + U_R$ con $U_C = U_R$; Si tomamos como origen de fase U_R :



$$U_L = 100 \sqrt{2} \Rightarrow (100 \sqrt{2})^2 = U^2 + U^2 = 2U^2$$

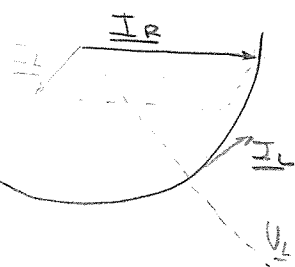
$$100 \sqrt{2} = U \sqrt{2} \rightarrow U = 100 \text{ V}$$

Como $P_L = 0$ y $P_C = 0$ $P_g = P_R = 400 \text{ W}$

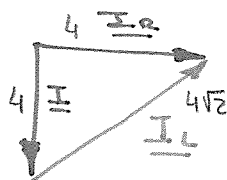
$$P_R = U_R \cdot I_R \cos 0^\circ = U_R \frac{U_R}{R} = \frac{100^2}{R} = 400 \text{ W}$$

$$R = \frac{100^2}{400} = 25 \Omega \rightarrow I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{100}{25} = 4 \text{ A}$$

$$Y_C = \omega C = \frac{I_R}{U} = \frac{4}{100} = 0.04; 1000 \cdot C = 0.04, \boxed{C = 4 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 40 \mu\text{F}}$$



$$I_R = I$$

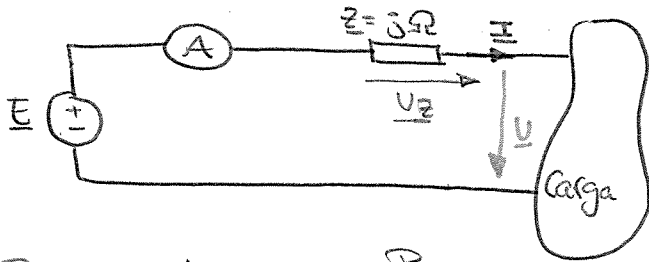


$$Z_L = \omega L = \frac{U}{I_L} \rightarrow 1000 \cdot L = \frac{100 \sqrt{2}}{4 \sqrt{2}}; L = \frac{1}{40} = 0.025 \text{ H}$$

$$\boxed{L = 25 \text{ mH}}$$

➔ CUESTIÓN AULAWEB

La carga consume $P = 36 \text{ kW}$ y $\cos \varphi_{\text{carga}} = 0,8$ inductivo
El amperímetro marca 90 A , $f = 50 \text{ Hz}$. a) Calcular el valor eficaz de E .



$$P = UI \cos \varphi \rightarrow U = \frac{P}{I \cos \varphi} = \frac{36000}{90 \cdot 0,8} = 500 \text{ V}$$

Tomamos como origen de fase la $\underline{I} \rightarrow \underline{I} = I_{\text{eff}} = 90 \angle 0^\circ$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arccos 0,8 \rightarrow \varphi_u = +36,87^\circ > 0 \text{ por inductivo} \rightarrow \underline{U} = 500 \angle 36,87^\circ \checkmark$$

$$\underline{U}_Z = \underline{Z} \cdot \underline{I} = j \cdot 90 = 90 \angle 90^\circ \text{ V} \rightarrow \underline{E} = \underline{U}_Z + \underline{U} = j90 + 500 \angle 36,87^\circ = j90 + 400 + j300$$

$$\underline{E} = j90 + 400 + j300 = 400 + j390 \rightarrow E = \sqrt{400^2 + 390^2} = 558,66 \text{ V}$$

b) Calcular la capacidad del condensador a conectar en paralelo con la carga para conseguir un factor de potencia de 1

$$C = \frac{P (\tan \varphi - \tan \psi)}{\omega U^2} = \frac{36000 (0,75 - 0)}{100\pi \cdot 500^2} = 3,44 \cdot 10^{-4} \text{ F}$$

$$C = 344 \mu\text{F}$$

$$P = 36000 \text{ W}, \omega = 2\pi f = 2\pi 50 = 100\pi \text{ rad/s}; U^2 = 500^2$$

$$\tan \varphi = \tan 36,87^\circ = \frac{300}{400} = 0,75$$

$$\tan \psi = 0$$

➔ Problema FEB 03. Ejercicio 3

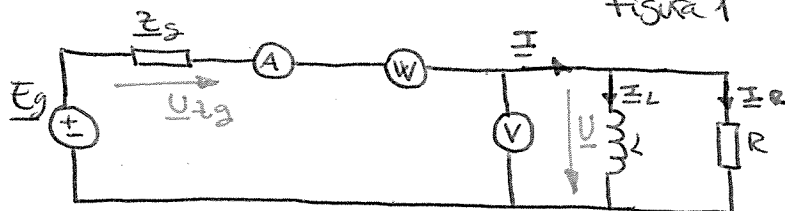


Figura 1

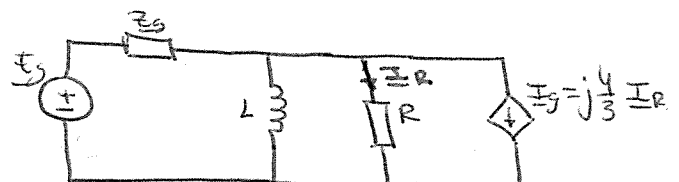


Figura 2

$$\underline{E}_g = 220 \angle 0^\circ \text{ V}; \text{ Carga paralelo } L, R; \omega = 100 \pi \text{ rad/s}$$

$$\cos \varphi_{\text{fuente ideal}} = \cos \varphi_{\text{carga RL}}$$

$$\text{Lecturas: } A \approx 11 \text{ A}; W \approx 1379,4 \text{ W}; V \approx 209 \text{ V}$$

Se pide:

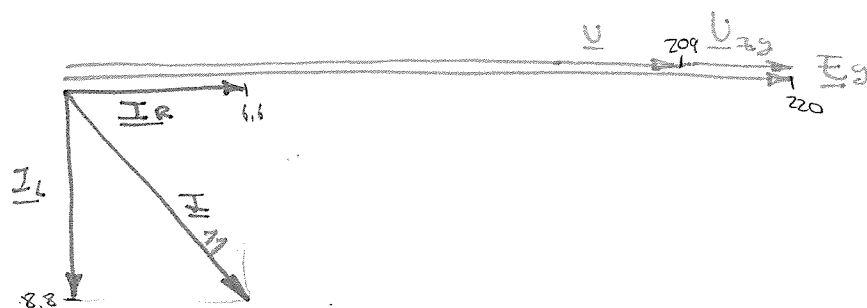
- ① Diagrama vectorial de tensiones e intensidades, indicando sus valores complejos.
- ② Determinar R y L
- ③ Determinar Z_g sabiendo que tiene caracter inductivo
- ④ Valor de E_g para que la tensión en la carga sea 220 V
- ⑤ Viendo el montaje de la figura 2, calcular el factor de potencia del conjunto carga + fuente dependiente

① Como $P_L = 0 \rightarrow P_g = 1379,4 = P_{er} = UI_R$, Como $U = 209$

$$I_R = \frac{1379,4}{209} = 6,6\text{ A}$$

Como $\cos \varphi_{\text{generador}} = \cos \varphi_{\text{carga}} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi_{\text{gen}} = \varphi_e - \varphi_i \\ \varphi_{\text{carga}} = \varphi_u - \varphi_i \end{array} \right\} \xrightarrow{\varphi_e = 0} \varphi_e = \varphi_u = 0$

$$\rightarrow \underline{E}_g = 220 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{U} = 209 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{U}_{Z_g} = \underline{E}_g - \underline{U} = 220 \angle 0^\circ - 209 \angle 0^\circ = 11 \angle 0^\circ \text{ V}$$



$\underline{I}_R$ va en fase con $\underline{U}$ por ser rama resistiva

para $\Rightarrow \underline{I}_R = 6,6 \angle 0^\circ \text{ A}$

$\underline{I}_L$ retrasa $\frac{\pi}{2}$ respecto de $\underline{U}$ por ser rama inductiva pura

Además $\underline{I} = 11 \angle \theta$ e $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L \rightarrow \underline{I} = \underline{I}_R + j \underline{I}_L$

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2; \quad I_L = \sqrt{11^2 - 6,6^2} = 8,8 \rightarrow \underline{I}_L = 8,8 \angle -90^\circ \text{ A}$$

② $U = IR \rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{209}{6,6} = 31,67 \Omega \rightarrow \boxed{R = 31,67 \Omega}$

$$\underline{U} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_L; \quad \underline{Z}_L = \frac{209 \angle 0^\circ}{8,8 \angle -90^\circ} = 23,75 j = j \omega L \xrightarrow{\omega = 100\pi} L = \frac{23,75}{100\pi} = 0,076 \text{ H};$$

$$\boxed{L = 76 \text{ mH}}$$

③ Por método de tensiones

$$\underline{E}_g = \underline{I} \underline{Z}_g + \underline{V} \rightarrow 220 = (R_g + jX_g)(6,6 - j8,8) + 209 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 220 = R_g 6,6 + 8,8 X_g + 209 \\ 0 = 6,6 X_g - 8,8 R_g \end{cases} \xrightarrow{\uparrow} R_g = \frac{6,6}{8,8} X_g = \frac{3}{4} X_g$$

$$\rightarrow 21 = \frac{3}{4} 6,6 X_g + 8,8 X_g = 4,95 X_g + 8,8 X_g = 11, X_g = \frac{11}{13,75} = 0,8$$

$$R_g = \frac{3}{4} 0,8 = 0,6$$

$$\underline{Z}_g = 0,6 + j0,8$$

④ Por principio de linealidad $\rightarrow \underline{E}_g' = K \underline{E}_g \rightarrow \underline{U}' = K \underline{U} = 220$

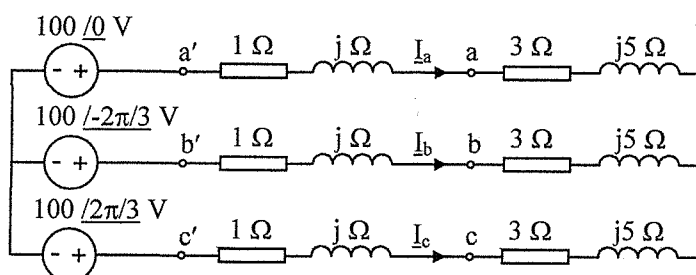
Por tanto $K \cdot \underline{U} = 220$, $\underline{U} = 209$, $K = \frac{220}{209}$

$$\underline{E}_g' = \frac{220}{209} \cdot 220 = \boxed{231,58 \text{ V}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad & \underline{I}_R = 6,6 \text{ (A)} \\ & \underline{I}_L = -8,8j \text{ (A)} \\ & \underline{I}_g = j \frac{4}{3} \underline{I}_R = j \frac{4}{3} 6,6 = j8,8 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_g = 6,6 - 8,8j + 8,8j = 6,6 \text{ u} \\ \underline{U} &= 209 \text{ u} \end{aligned} \right.$$

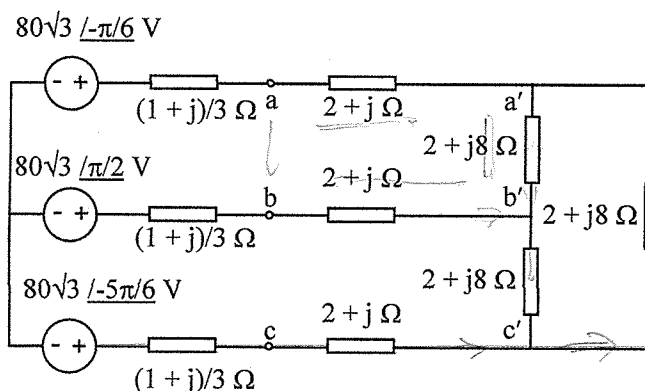
$\rightarrow$ Como $\underline{I}$ e $\underline{U}$ quedan en fase $\psi = 0 \rightarrow \boxed{\cos \psi = 1}$

3f1.- Calcular las corrientes de línea en el sistema trifásico equilibrado de la figura.



3f2.- Dado el sistema de la figura, calcular:

- 1) Intensidad de fase y de línea.
- 2) Tensiones en bornas del generador y del receptor.
- 3) Potencias activas y reactivas suministradas por el generador trifásico.
- 4) Potencias activa y reactiva consumidas por cada impedancia receptora y en la línea.
- 5) Comprobar aplicando el teorema de Boucherot.
- 6) Calcular lo que marcaría un vatímetro derivando su bobina de tensión entre a y b, e intercalando su bobina amperimétrica entre a y a'.
- 7) Resolver las cuestiones anteriores supuesto que las impedancias receptoras estén conectadas en estrella.



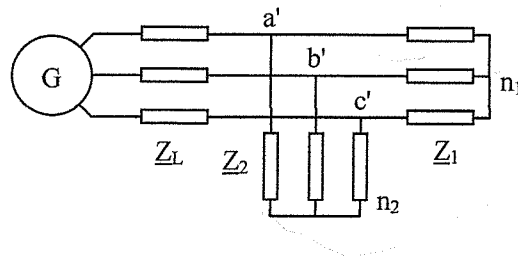
3f3.- Tres impedancias iguales de $\cos\phi = 0,8$ inductivo se conectan en estrella a un sistema de tensiones trifásico equilibrado de secuencia directa y tensión de línea 200 V. En estas condiciones la potencia consumida por cada impedancia es de 1000 W. Se pide:

- 1) Calcular la potencia consumida por cada impedancia si en vez de conectarse en estrella se conectasen en triángulo.
- 2) Valor de las intensidades de fase y de línea en estas condiciones.

3f4.- En la figura se representa un circuito trifásico equilibrado en carga y de secuencia directa, siendo la tensión de línea en el generador supuesto ideal 220 V (eficaz). Además se conocen los siguientes datos: $Z_L = 1 + j \Omega$, $Z_1 = 10(3 - j) \Omega$, $Z_2 = 10(2 + j) \Omega$. La frecuencia es de 50 Hz. Se pide:

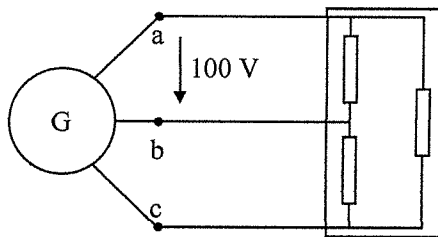
- 1) Intensidad de línea en el generador.
- 2) Tensión de fase en cada una de las cargas.
- 3) Intensidad de línea en cada una de las cargas.
- 4) Potencia activa y reactiva en cada carga.
- 5) Potencia perdida en la línea.
- 6) Indicar la capacidad por fase de la batería de condensadores que debería colocarse en triángulo en paralelo con la carga conjunto de ambas, para que el total presentase $\cos\phi = 1$.

7) Idem si se conectase en estrella.

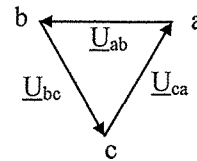
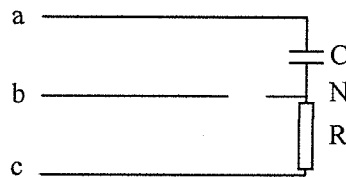


3f.5.- En la distribución trifásica equilibrada de secuencia directa, a la frecuencia de 50 Hz, de la figura, la impedancia por fase de la carga inaccesible es $4 + j3 \Omega$. Se pide:

- 1) Dibujar dónde se colocarían dos vatímetros para medir la potencia consumida por dicha carga. Calcular lo que indicaría cada vatímetro.
- 2) Calcular la capacidad de los condensadores que deberían colocarse en triángulo en paralelo con la carga para que el factor de potencia del conjunto fuese 0,9 inductivo.



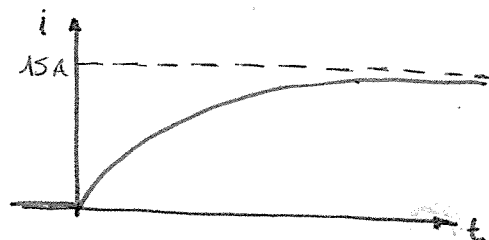
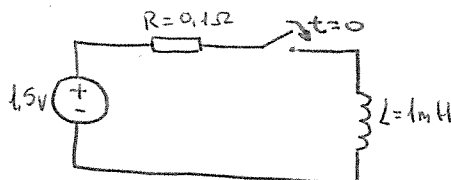
3f.6.- Las tensiones aplicadas a los terminales a, b y c constituyen el sistema trifásico equilibrado que se representa en el diagrama vectorial. Discutir si la tensión U_{bN} es mayor o menor que la tensión de línea.



TRANSITORIOS

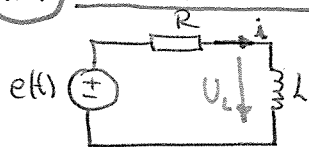
1 PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES EN UN CIRCUITO DE PRIMER ORDEN

$$f(t) = f_h(t) + f_{\infty}(t)$$



Un circuito de 1^{er} orden es aquel que sólo tiene un elemento almacenador de energía, esto es, sólo una bobina o un condensador.

1.1 Circuito con bobina

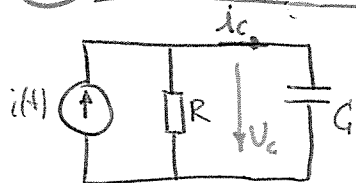


$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}; \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} e(t)$$

$$e(t) = Ri(t) + U_L(t); \quad \frac{de(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{dU_L(t)}{dt} = \frac{R}{L} U_L(t) + \frac{dU_L(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dU_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} U_L(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

1.2 Circuito con condensador



$$i(t) = \frac{1}{R} U_C(t) + C \frac{dU_C}{dt} \rightarrow \frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} U_C(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

$$i(t) = \frac{U_C(t)}{R} + i_C(t); \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dU_C}{dt} + \frac{di_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC} U_C(t) + \frac{di_C(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{di_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} U_C(t) = \frac{di(t)}{dt}$$

Por tanto, llegaremos a una ecuación del tipo:

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} f(t) = g(t)$$

$$\text{Con } \begin{cases} L \rightarrow \tau = \frac{L}{R} \\ C \rightarrow \tau = RC \end{cases}$$

Resolución de las EDOs $\rightarrow f(t) = f_h(t) + f_{\infty}(t)$

$f_h(t)$: solución de la homogénea

$$\frac{df_h(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} f_h(t) = 0 \rightarrow f_h(t) = k e^{-t/\tau}$$

$f_{\infty}(t)$: se determina analizando el circuito para $t \rightarrow \infty$, es decir, cuando se ha alcanzado el régimen permanente de corriente continua o el régimen estacionario sinusoidal.

$$\rightarrow f(t) = k e^{-t/\tau} + f_{\infty}(t)$$

Para determinar K necesitamos condiciones iniciales

$$f(0) = f_{\infty}(0) + K \rightarrow K = f(0^+) - f_{\infty}(0^+)$$

$t=0$: Instante en el que el circuito cambia de topología:

$$t=0^- \equiv t \rightarrow 0, t < 0$$

$$t=0^+ \equiv t \rightarrow 0, t > 0$$

$$\Rightarrow f(t) = f_{\infty}(t) + [f(0^+) - f_{\infty}(0^+)]e^{-t/\tau}$$

En caso de haber discontinuidad, el valor de la expresión es válido en $t \rightarrow 0^+$

2 CÁLCULO DE LAS CONDICIONES INICIALES

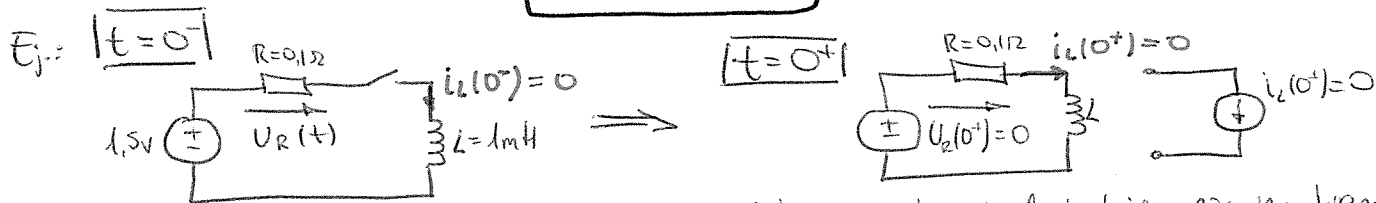
Determinación de $f(0^+)$

• Para condensadores: Determinaremos $U_C(0^-)$ ya que la tensión en condensadores no puede variar bruscamente, por tanto:

$$U_C(0^-) = U_C(0^+)$$

• Para bobinas: Determinaremos $i_L(0^-)$ ya que en las bobinas la intensidad no puede variar bruscamente, por tanto:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$



Sustituyo, en $t=0^+$, la bobina por una fuente de intensidad de valor $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

3 CÁLCULO DE LAS CONDICIONES INICIALES Y LA CONSTANTE DE TIEMPO τ

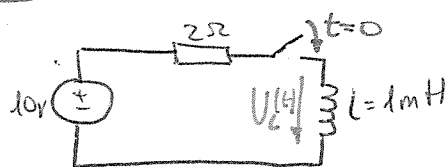
$f_{\infty}(t) \equiv f(t \rightarrow \infty)$: Obtendremos un circuito en

- RPCC $\Rightarrow$ L: cortocircuito
- C: circuito abierto

RPS $\Rightarrow$ $(+) \sim C \sim (-)$

$$\tau_L = \frac{L}{R} \text{ o } \tau_C = RC$$

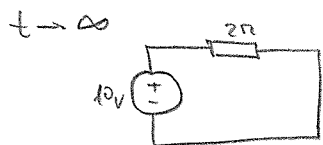
➔ Calcular $U_L(t)$ para $t > 0$



$$U_L(t) = U_{L\infty}(t) + [U_L(0^+) - U_{L\infty}(0^+)]e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10^{-3}}{2} = 0.5 \text{ ms}$$

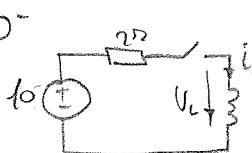
$$\Rightarrow U_L(t) = 10e^{-t \cdot 2000}$$



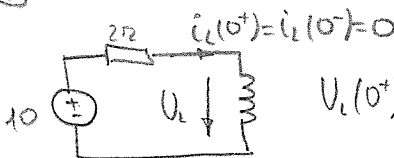
$$U_{L\infty}(t) = 0$$

$$U_{L\infty}(t=0) = 0$$

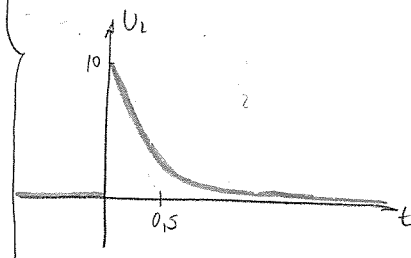
$t=0^-$



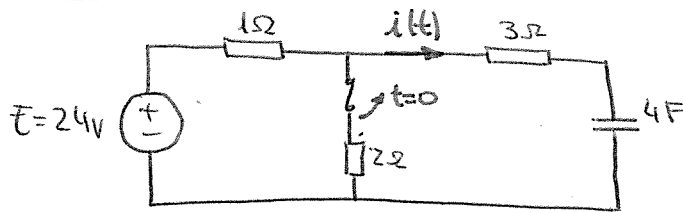
$t=0^+$



$$U_L(0^+) = 10V$$

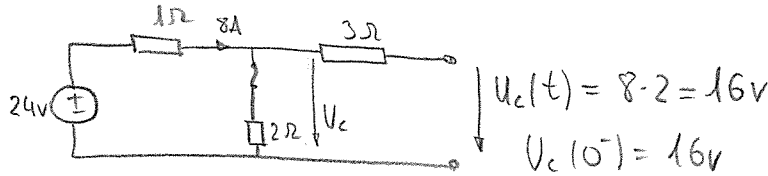


Cuestión 1 Abrimos el interruptor en $t=0$. Calcular la expresión $i(t)$ para $t > 0$

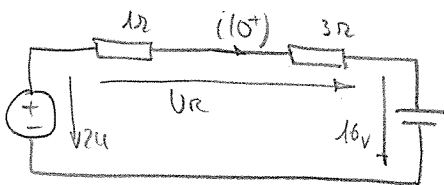


$$i(t) = i_{\infty}(t) + [i(0) - i_{\infty}(0)] e^{-t/\tau}$$

$t < 0$



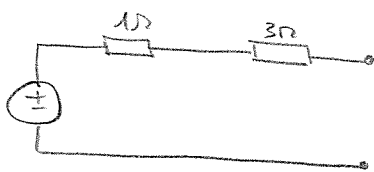
$t = 0^+$



$$U_c(0^-) = U_c(0^+) = 16V$$

$$U_R = 8V, i(0^+) = \frac{8}{4} = 2A$$

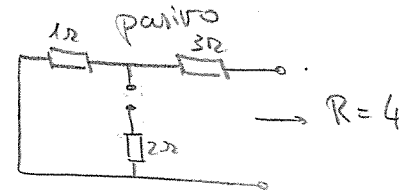
$t \rightarrow \infty$



$$i_{\infty}(t) = 0$$

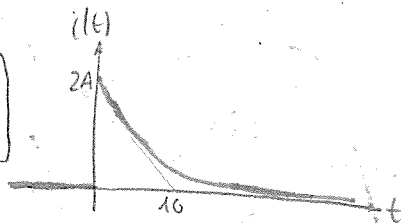
$$i_{\infty}(0^+) = 0$$

$\tau = RC \Rightarrow$ Hacemos el circuito

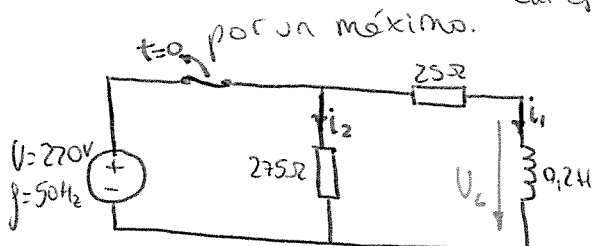


$$\tau = 4 \cdot 4 = 16s$$

$$\Rightarrow i(t) = 2e^{-t/16} (A)$$



Cuestión 3 Abrimos el interruptor en $t=0$. Expresar y dibujar i_1, i_2, U_L desde 20ms antes de la apertura del interruptor hasta 5ms después de dicha apertura. $U=220V$ y en $t=0$ la tensión de la fuente para ser un máximo.

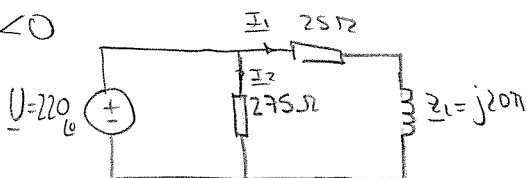


$$u = 220\sqrt{2} \cos(100\pi t)$$

$$U = 220 \angle 0^\circ V$$

$$Z_L = j\omega L = j2\pi 50 \cdot 0.2 = j20\pi \Omega$$

$t < 0$



$$I_1 = \frac{220 \angle 0^\circ}{25 + j20\pi} = \frac{220 \angle 0^\circ}{\sqrt{25^2 + (20\pi)^2} \angle \arctan \frac{20\pi}{25}} = 3.25 \angle -68.30^\circ (A)$$

$$I_2 = \frac{220}{275} = 0.8 \angle 0^\circ (A)$$

$$U_L = j20\pi \cdot 3.25 \angle -68.30^\circ = 204.41 \angle 21.7^\circ (V)$$

Para $t < 0$:

$$i_1(t) = 3.25\sqrt{2} \cos(100\pi t - \frac{68.30 \cdot \pi}{180}) = 4.6 \cos(100\pi t - 1.19) (A)$$

$$i_2(t) = 0.8\sqrt{2} \cos(100\pi t) = 1.13 \cos(100\pi t) (A)$$

$$U_L(t) = 204.41\sqrt{2} \cos(100\pi t + 21.7 \cdot \frac{\pi}{180}) = 289.1 \cos(100\pi t + 0.379) (V)$$

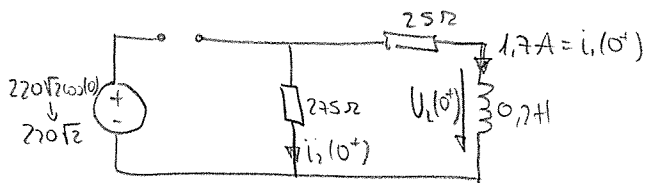
Buscamos

$$\begin{cases} i_1(t) = i_{1,\infty}(t) + [i_1(0^+) - i_{1,\infty}(0^+)]e^{-t/\tau} \\ i_2(t) = i_{2,\infty}(t) + [i_2(0^+) - i_{2,\infty}(0^+)]e^{-t/\tau} \\ u_L(t) = u_{L,\infty}(t) + [u_L(0^+) - u_{L,\infty}(0^+)]e^{-t/\tau} \end{cases}$$

$t = 0^- \rightarrow i_L(0^-) = i_1(0^-) = 4,6 \cdot \omega_0(-1,19) = 1,7 \text{ A}$

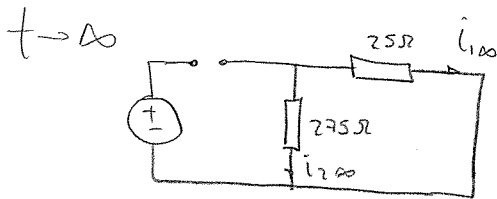
$t = 0^+ \quad i_1(0^+) = i_L(0^+) = 1,7 \text{ A}$

Circuito congelado en $t = 0^+$



$i_2(0^+) = -1,7 \text{ A}$

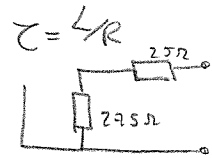
$u_L(0^+) = -1,7 \cdot 25 - 1,7 \cdot 275 = -510 \text{ V}$



$i_{1,\infty}(t) = 0 \quad i_{1,\infty}(0^+) = 0$

$i_{2,\infty}(t) = 0 \quad i_{2,\infty}(0^+) = 0$

$u_{L,\infty}(t) = 0 \quad u_{L,\infty}(0^+) = 0$

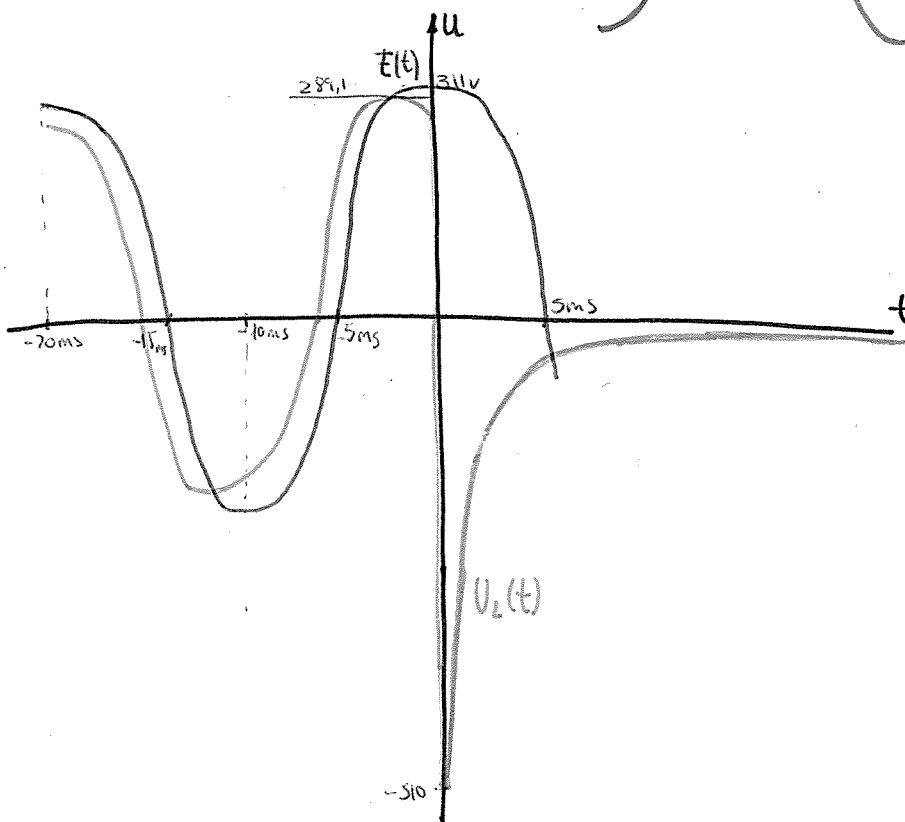
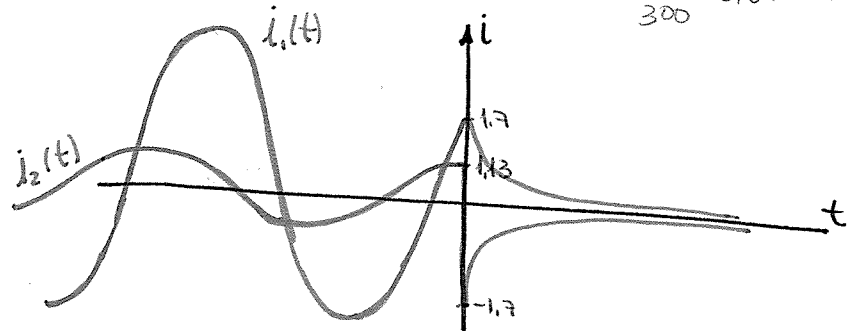


$R = 300 \Omega$

$\tau = \frac{0,2}{300} = 0,67 \text{ ms}$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} i_1(t) = 1,7 e^{-1500t} \text{ (A)} \\ i_2(t) = -1,7 e^{-1500t} \text{ (A)} \\ u_L(t) = -510 e^{-1500t} \text{ (V)} \end{cases}$$



Circuitos Trifásicos Equilibrados

TEMA 10

Industria

1

SISTEMA TRIFÁSICO DE TENSIONES EQUILIBRADAS



$$e_a(t) = \sqrt{2} E \cos(\omega t) \longrightarrow \underline{E}_a = E \angle 0^\circ$$



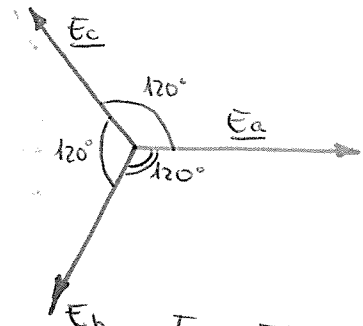
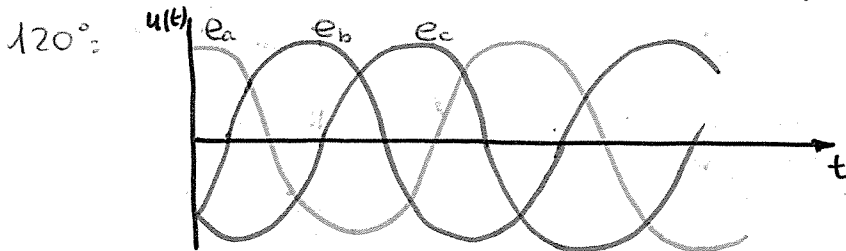
$$e_b(t) = \sqrt{2} E \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \longrightarrow \underline{E}_b = E \angle -\frac{2\pi}{3}$$



$$e_c(t) = \sqrt{2} E \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \longrightarrow \underline{E}_c = E \angle \frac{2\pi}{3}$$

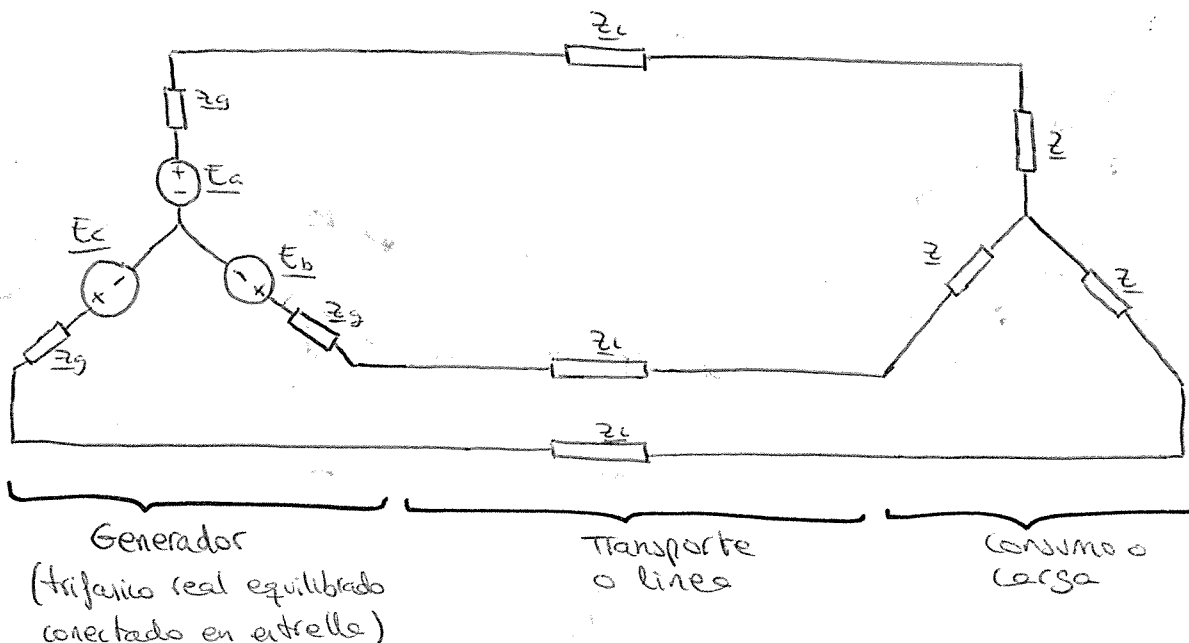
Son los sistemas que permiten transportar la energía eléctrica de la manera más eficiente.

Para que un sistema trifásico sea equilibrado ha de serlo en generación, transporte y consumo. Por ejemplo, un sistema trifásico de tensiones equilibradas son 3 tensiones con mismo valor eficaz y que están desplazadas entre sí 120° :



Se cumple que $e_a(t) + e_b(t) + e_c(t) = 0, \forall t$

Circuito trifásico modelo:



Generador
(Trifásico real equilibrado
conectado en estrella)

Transporte
o líneas

Consumo o
carga

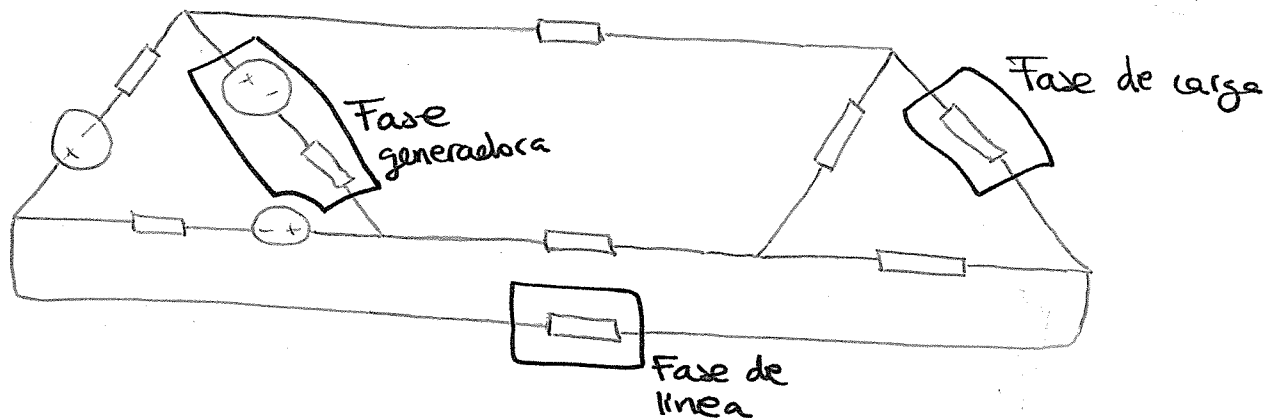
NOTA!!

Los sistemas pueden ser Y-Y, como el de la figura o

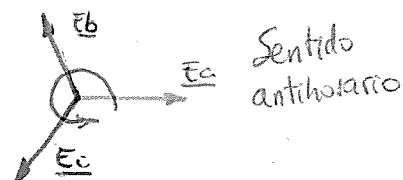
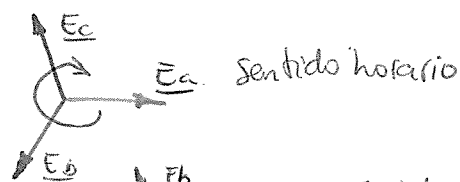
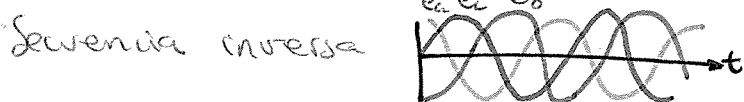
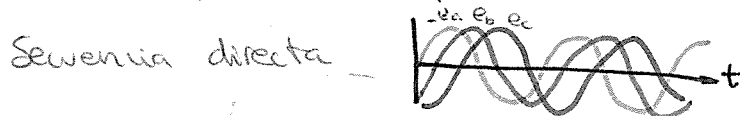
Y- Δ
 Δ -Y
 Δ - Δ

2 CONCEPTO DE FASE Y SECUENCIA DE FASES

Llamamos fase de un sistema trifásico de energía eléctrica a cada uno de las partes donde se genera, consume o transmite energía eléctrica.

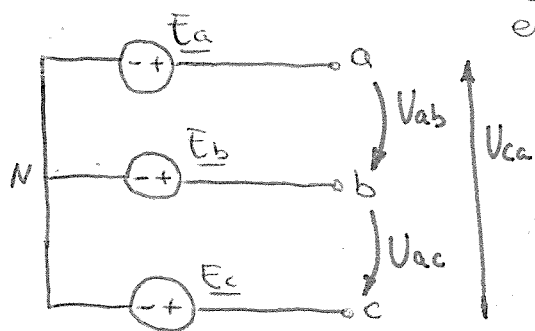


Llamaremos secuencia de fase al orden en que se suceden valores homólogos de las tensiones en el tiempo.



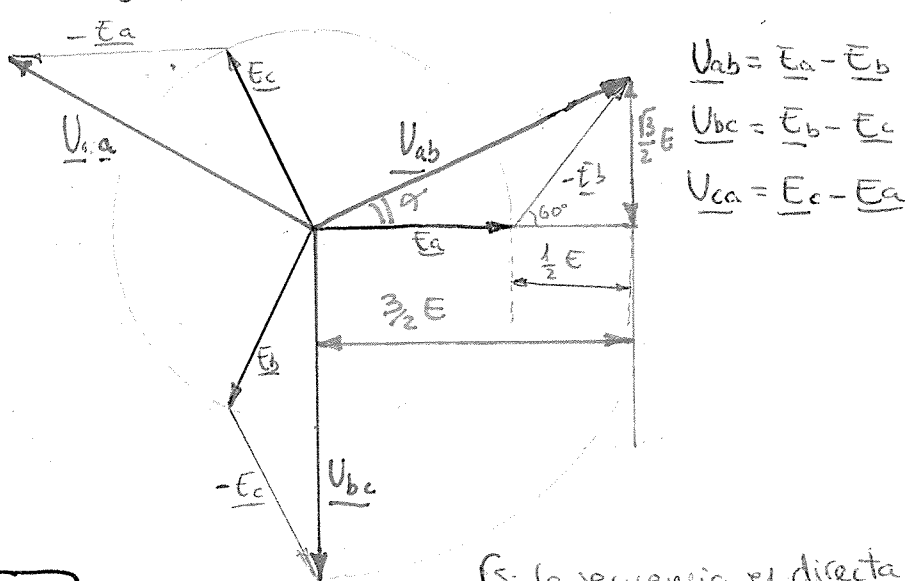
3 CONEXIÓN DE FUENTES EN ESTRELLA Y EN TRIÁNGULO. DIAGRAMA VECTORIAL DE TENSIONES.

3.1 Conexión en estrella



Sea el generador trifásico ideal en estrella representado en la figura:

Diagrama vectorial (secuencia directa)



$$V_{ab} = V_{bc} = V_{ca} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}E\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}E\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9E^2}{4} + \frac{3E^2}{4}} = \sqrt{3}E$$

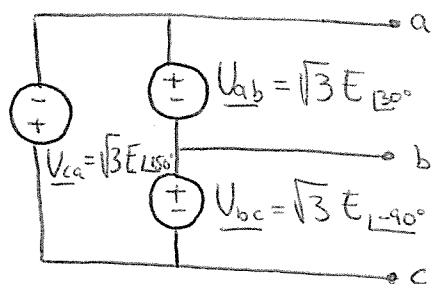
$$\alpha = \arctg \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}E}{\frac{3}{2}E} = 30^\circ$$

$$U_L = \sqrt{3}U_F$$

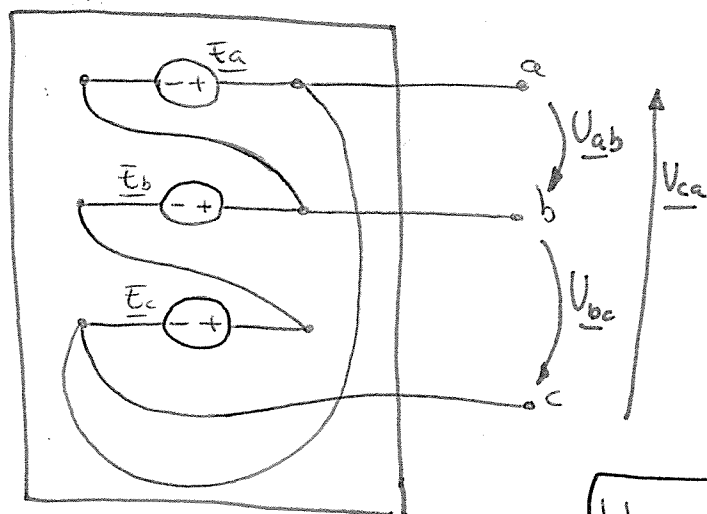
Se defazan $\alpha = 30^\circ$

Si la secuencia es directa U_L adelanta a U_F y si es inversa U_L retrasa a U_F

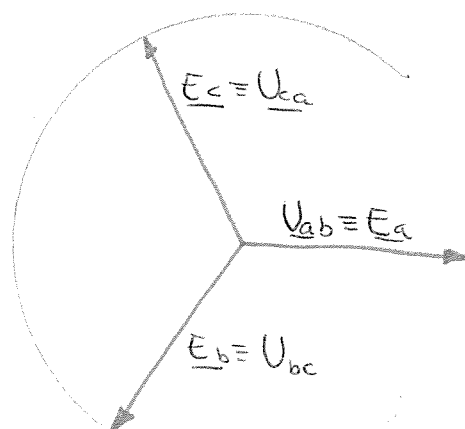
Por tanto, la estrella anterior sería equivalente a:



3.2 Conexión en triángulo

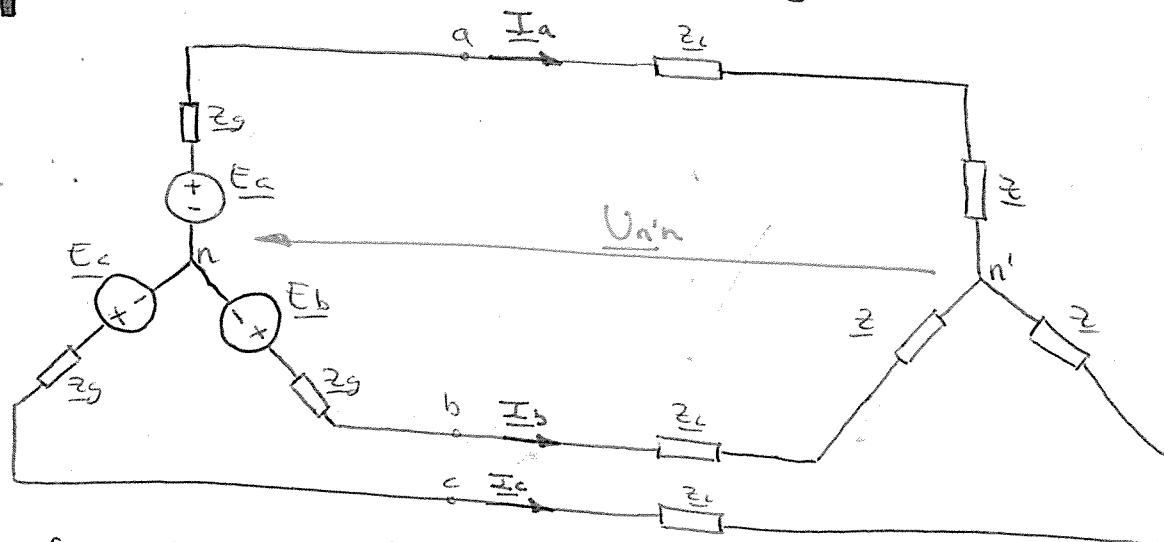


$$U_{LA} = U_{FA}$$



Por lo tanto, en un triángulo la tensión de línea coincide con la de fase.

4 CORRIENTES EN LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS



Nota!! Siempre que tengamos una configuración distinta convertiremos a Y-Y

$$\begin{cases} E_a = (Z_g + Z_l + Z) I_a + U_{n'n} \\ E_b = (Z_g + Z_l + Z) I_b + U_{n'n} \\ E_c = (Z_g + Z_l + Z) I_c + U_{n'n} \end{cases}$$

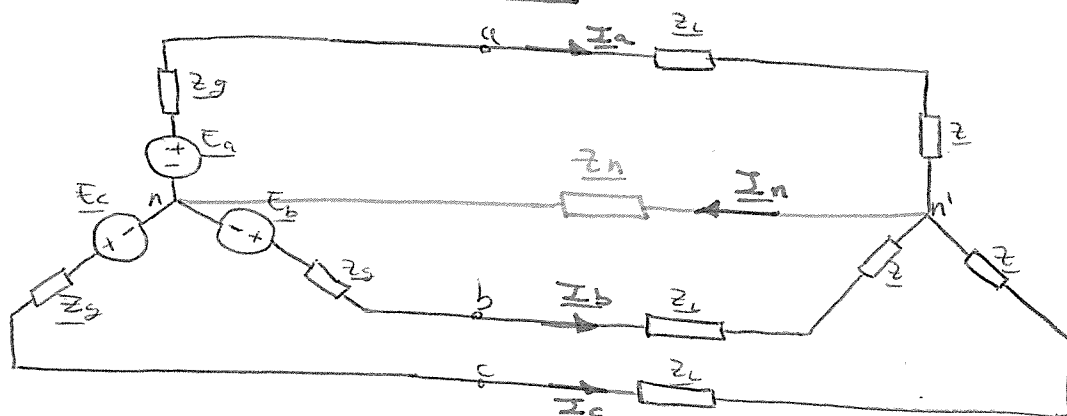
Sumando ($E_a + E_b + E_c = 0$)

$$(Z_g + Z_l + Z) (I_a + I_b + I_c) + 3U_{n'n} = 0$$

4.1 Sistema trifásico a 3 hilos (como el de la figura anterior)

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0 \rightarrow 0 = 0 + 3 \underline{U}_{n'n} \Rightarrow \underline{U}_{n'n} = 0; \text{ esto es, la tensión entre los neutros es nula.}$$

4.2 Sistema trifásico a 4 hilos



Conectamos un hilo neutro entre n y n' de forma que:

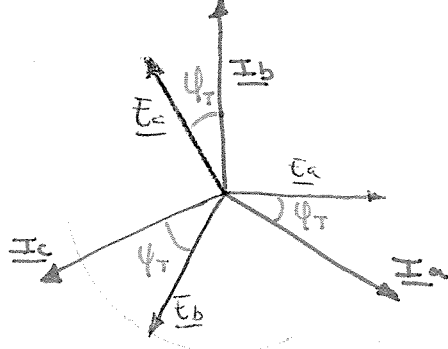
$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = \underline{I}_n \rightarrow 0 = (\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}) \underline{I}_n + 3 \underline{Z}_n \underline{I}_n;$$

$$(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z} + \underline{Z}_n) \underline{I}_n = 0; \quad \underline{I}_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0 \\ \underline{U}_{n'n} = 0 \end{cases}$$

Por tanto, en cualquier sistema trifásico equilibrado la tensión entre los neutros será siempre nula: $\underline{U}_{n'n} = 0$

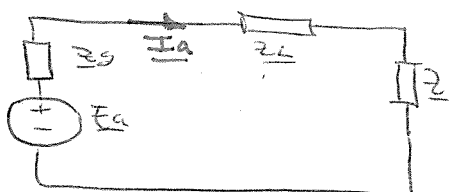
$$\begin{cases} \underline{I}_a = \frac{\underline{E}_a}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}} \\ \underline{I}_b = \frac{\underline{E}_b}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}} \\ \underline{I}_c = \frac{\underline{E}_c}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}} \end{cases}$$

$$\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z} = \underline{Z}_T = \underline{Z}_T \angle \varphi_T$$



Las intensidades también forman un sistema trifásico equilibrado con desfase 120° y mismo módulo

Por tanto, si en un sistema trifásico equilibrado hacemos el sistema monofásico (conectando los neutros con un corto), con sólo uno de los fases, la $\underline{I}$ será la misma que la del circuito trifásico original

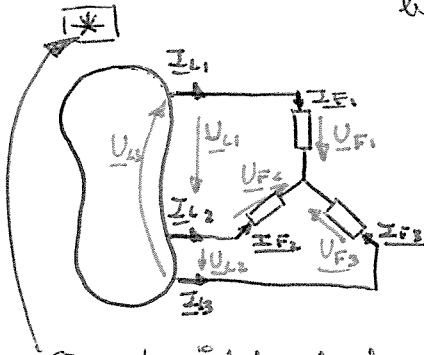


$\equiv$ Circuito monofásico equivalente de la fase a.

5 MAGNITUDES DE FASE Y DE LINEA

Tensiones de fase: Tensiones que hay entre los terminales de las fases

Tensiones de línea: Tensiones que existen entre los terminales de conexión a la línea

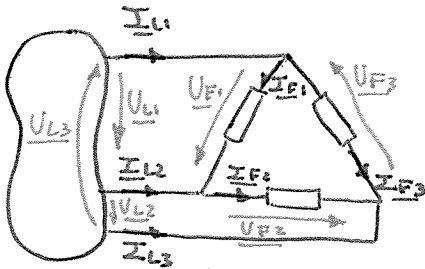


Por tanto, en una estrella:

$$U_{LY} = \sqrt{3} U_{FY}$$

$$I_{LY} = I_{FY}$$

⊗ Intensidades de fase: Intensidad que circula por cada una de las fases
Intensidades de línea: Intensidad que entra o sale por los terminales de conexión a la línea.



Por tanto, en un triángulo:

$$U_{L\Delta} = U_{F\Delta}$$

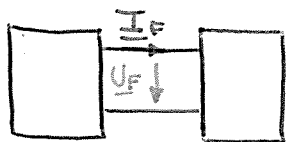
$$I_{L\Delta} = \sqrt{3} I_{F\Delta}$$

Mila Purob
por adaweb porque
no le dio la gana
de explicarlo

POTENCIA EN SIST. TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS

TEMA 11
Industria

1 POTENCIA ACTIVA, REACTIVA Y APARENTE



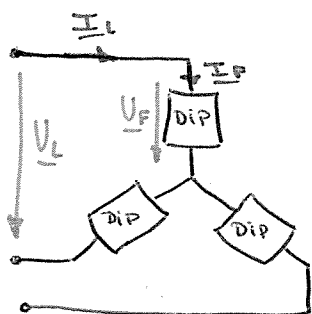
$$\underline{S}_F = \underline{U} \underline{I}_F^* = S_F \angle \varphi = U_F I_F \angle \varphi = U_F I_F [\cos \varphi + j \sin \varphi]$$

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

$$\underline{S}_{FF} = P_{FF} + j Q_{FF} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{FF} = U_F I_F \cos \varphi = S_F \cos \varphi \\ Q_{FF} = U_F I_F \sin \varphi = S_F \sin \varphi \end{array} \right.$$

3 fases

$$\underline{S}_T = 3 \underline{S}_F = 3 S_F \angle \varphi = 3 U_F I_F (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_T = 3 P_F = 3 U_F I_F \cos \varphi \\ Q_T = 3 Q_F = 3 U_F I_F \sin \varphi \end{array} \right.$$

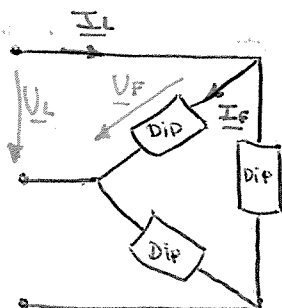


• Caso estrella

Por Y $U_F = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$; $I_F = I_L$

$$\underline{S}_T = 3 U_F I_F (\cos \varphi + j \sin \varphi) = 3 \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \sqrt{3} U_L I_L (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\begin{array}{l} P_T = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi \\ Q_T = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi \end{array} \quad \rightarrow \quad \boxed{S = \sqrt{3} U_L I_L}$$



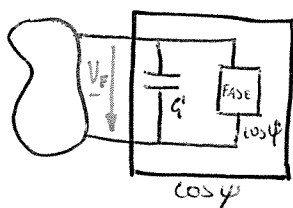
• Caso triángulo

Por Δ $U_F = U_L$; $I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$

$$\underline{S}_T = 3 U_F I_F (\cos \varphi + j \sin \varphi) = 3 U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \sqrt{3} U_L I_L (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

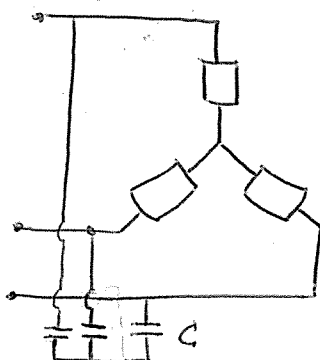
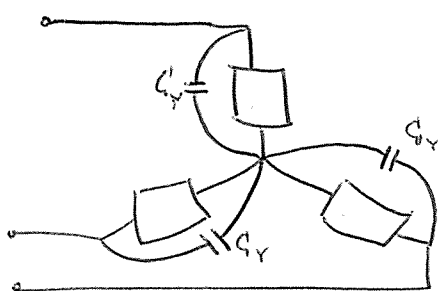
$$\begin{array}{l} P_T = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi \\ Q_T = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi \end{array} \quad \rightarrow \text{Mismas expresiones que en la estrella.}$$

2 COMPENSACIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA



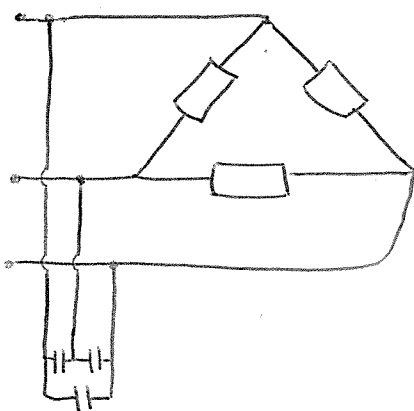
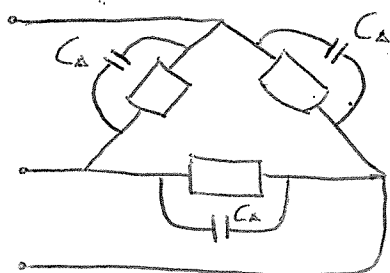
$$C' = \frac{P_F (\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega U_F^2} \quad *$$

• En estrella



Aplicaremos la fórmula * a cada una de las fases

• Triángulo:



Aplicamos la fórmula * para cada una de las fases

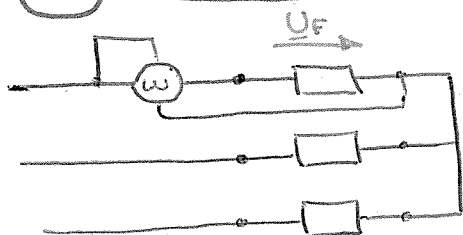
Podríamos dejarlo en función de las tensiones de línea

$$C_Y = \frac{P_F (t_{\phi} - t_{\phi})}{\omega U_F^2} = \frac{3P_F (t_{\phi} - t_{\phi})}{\omega U_L^2}$$

Relación Y-Δ: $C_Y = 3C_{\Delta}$

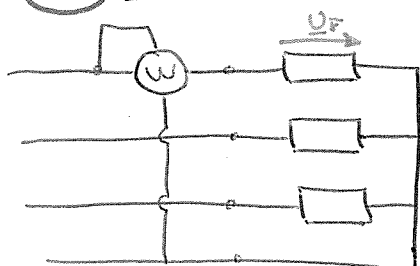
4 MEDIDA DE LA POTENCIA ACTIVA. Método de los dos vatímetros:

4.1 6 terminales accesibles



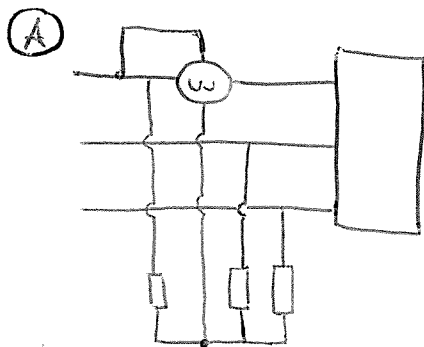
$$P_T = 3(W)$$

4.2 4 terminales accesibles

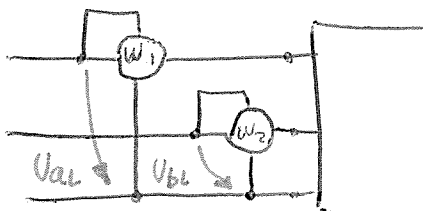


$$P_T = 3(W)$$

4.3 3 terminales accesibles



B Método de los dos vatímetros



$$P_T = W_1 + W_2$$

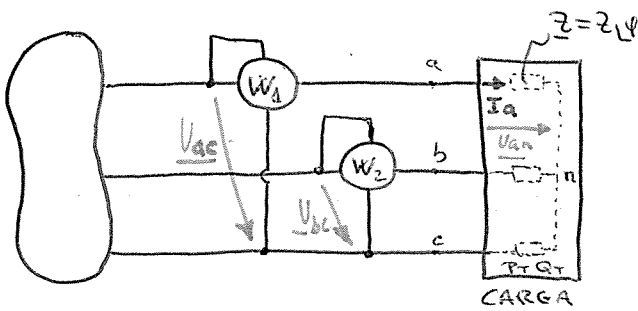
Para sistemas equilibrados

Secuencia directa:

$$Q_T = \sqrt{3} (W_1 - W_2)$$

Secuencia inversa:

$$Q_T = \sqrt{3} (W_2 - W_1)$$



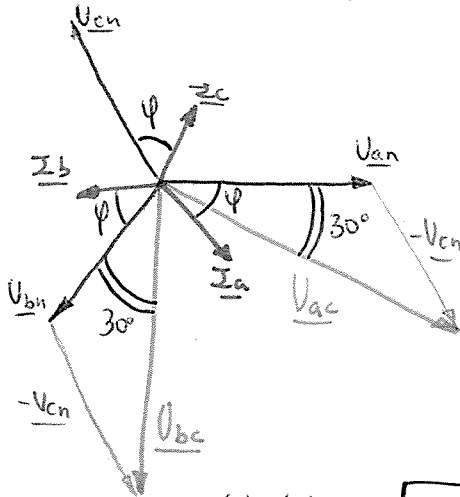
$P_T = W_1 + W_2$; válida para sistemas equilibrados, en secuencia directa o inversa

$Q_T = \sqrt{3}(W_1 - W_2)$ en secuencia directa

$Q_T = \sqrt{3}(W_2 - W_1)$ en secuencia inversa

Sólo para sist. equil.

Pensemos en una carga en estrella:



$$W_1 = U_{ac} \cdot I_a \cos(\varphi_{U_{ac}} - \varphi_{I_a}) = U_L \cdot I_L \cos(\varphi - 30^\circ) =$$

$$= U_L I_L (\cos \varphi \cos 30^\circ + \sin \varphi \sin 30^\circ) =$$

$$= U_L I_L \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \quad (1)$$

$$W_2 = U_{bc} \cdot I_b \cos(\varphi_{U_{bc}} - \varphi_{I_b}) = U_L I_L \cos(\varphi + 30^\circ) =$$

$$= U_L I_L (\cos \varphi \cos 30^\circ - \sin \varphi \sin 30^\circ) =$$

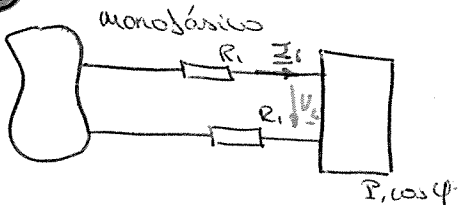
$$= U_L I_L \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \quad (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow \boxed{W_1 + W_2 = U_L I_L 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi = P_T}$$

$$(1) - (2) \rightarrow W_1 - W_2 = U_L I_L \sin \varphi = \frac{Q_T}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{entijaxio } Q_T = \sqrt{3} U_L I_L \sin(\varphi)} \boxed{Q_T = \sqrt{3} (W_1 - W_2)}$$

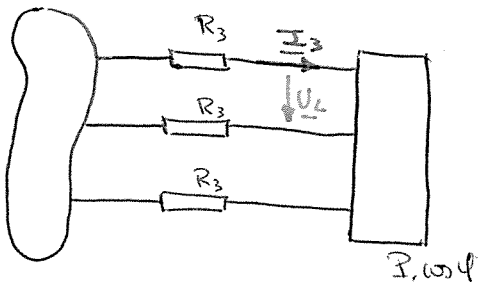
Si hubiéramos hecho la demostración para sistema en secuencia inversa $\boxed{Q_T = \sqrt{3} (W_2 - W_1)}$

3 COMPARACIÓN DE LOS SISTEMAS MONOFÁSICOS Y TRIFÁSICOS.



$$P = U_L I_1 \cos \varphi \Rightarrow I_1 = \frac{P}{U_L \cos \varphi}$$

$$P_{\text{perdidas}}^{(1)} = 2 R_1 I_1^2 = \frac{2 R_1 P^2}{U_L^2 \cos^2 \varphi}$$



$$P = \sqrt{3} U_L I_3 \cos \varphi \Rightarrow I_3 = \frac{P}{\sqrt{3} U_L \cos \varphi}$$

$$P_{\text{perd}}^{(3)} = 3 R_3 I_3^2 = \frac{3 R_3 P^2}{3 U_L^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\frac{P_{\text{perd}}^{(1)}}{P_{\text{perd}}^{(3)}} = \frac{2 R_1}{3 R_3} \cdot 3 = \frac{2 R_1}{R_3}, \text{ si } P_{\text{perd}}^{(1)} = P_{\text{perd}}^{(3)} \Rightarrow R_3 = 2 R_1$$

Las secciones de los conductores serán: $\rho \frac{1}{S_3} = 2 \rho \frac{1}{S_1} \Rightarrow S_1 = 2 S_3$

Por tanto, el volumen de material en cable:

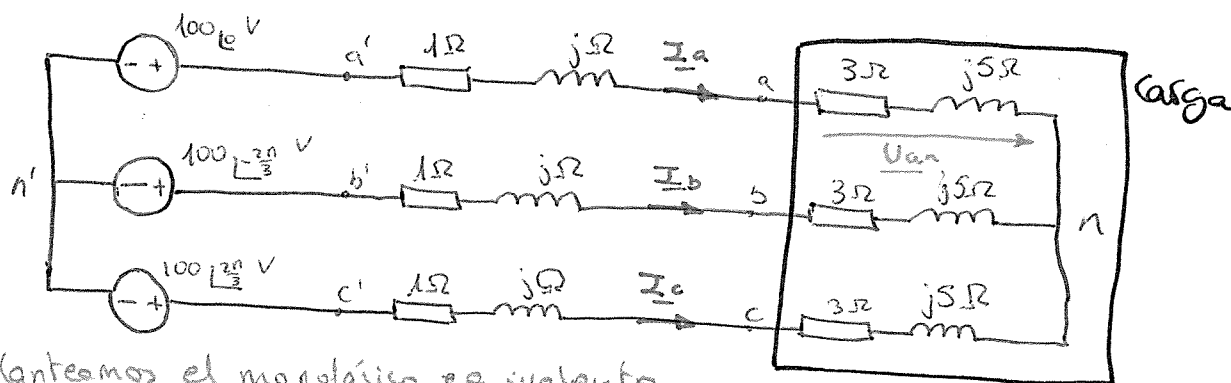
$$V_1 = 2 \ell S_1 = 2 \ell 2 S_3 = 4 \ell S_3$$

$$V_3 = 3 \ell S_3$$

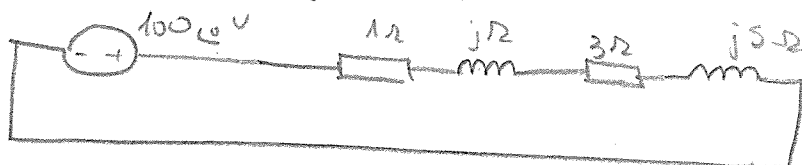
$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_3} = \frac{4}{3}}$$

El volumen de material utilizado en monofásico es el 33% mayor que el usado en trifásico. Sist. trifásicos aprox. un 30% más económicos

Cuestión 1 Calcular corriente de línea



Planteamos el monofásico equivalente



$$Z_{eq} = 1 + j + 3 + j5 = 4 + j6, \quad \underline{I}_a = \frac{100 \angle 0^\circ}{4 + j6} = \frac{100 \angle 0^\circ}{\sqrt{4^2 + 6^2} \angle \arctan \frac{6}{4}} = 13.87 \angle -56.3^\circ \text{ A}$$

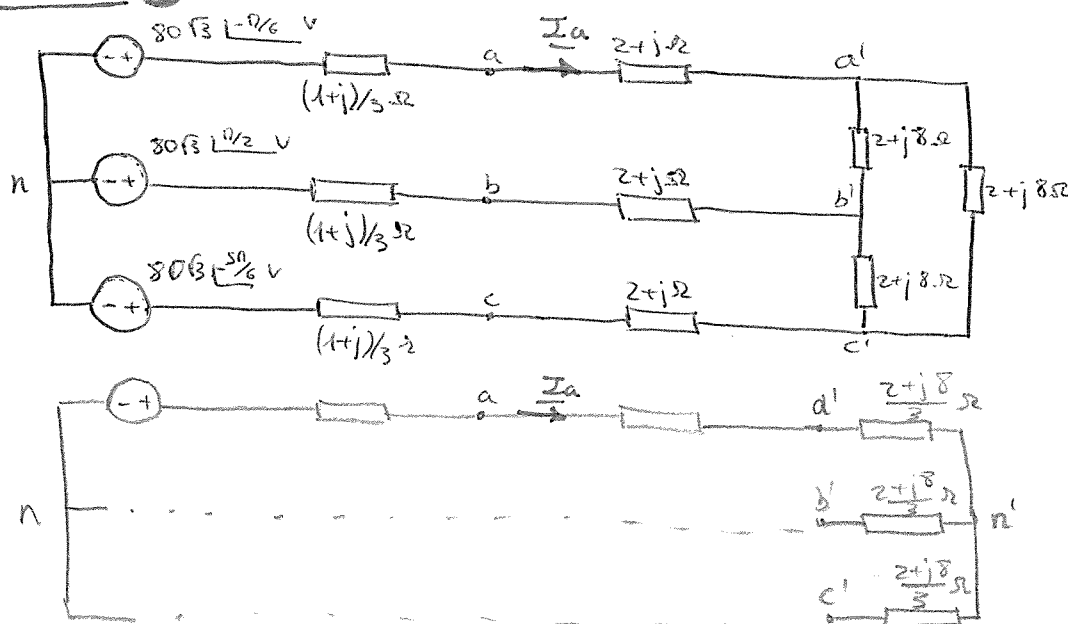
$$\underline{I}_b = 13.87 \angle -176.3^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_c = 13.87 \angle 63.69^\circ \text{ A}$$

EXTRA → ¿Tensiones de fase en la carga?

$$\underline{U}_{an} = Z_a \cdot \underline{I}_a = (3 + j5) / 13.87 \angle -56.3^\circ = \sqrt{34} \angle 59.03^\circ \cdot 13.87 \angle -56.3^\circ = 80.87 \angle 2.74^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{bn} = 80.87 \angle -117.26^\circ \text{ V} \quad \underline{U}_{cn} = 80.87 \angle 122.74^\circ \text{ V}$$

Cuestión 2 Dado el sistema:



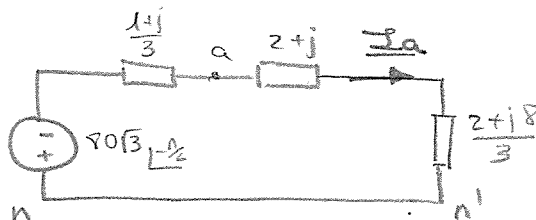
$$Z_a = 3Z_Y \rightarrow Z_Y = \frac{1}{3} Z_a = \frac{1}{3} (2 + j8) \Omega$$

Se pide:

- ① Z de fase y de línea
- ② Tensiones en bornes del generador y receptor
- ③ P y Q suministrados por el generador
- ④ P y Q consumidos por impedancias receptoras y de línea
- ⑤ Comprobar Th. de Boucherot
- ⑥ Calcular lo que marcará un vatímetro con su bobina de tensión entre a y b y bobina de intensidad entre a y a'

① I fase e I linea

Planteo el monofásico equivalente



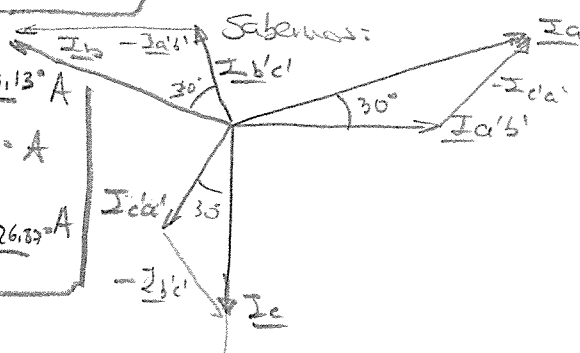
$$\underline{I}_a = \frac{80\sqrt{3} \angle -30^\circ}{\frac{1+j}{3} + 2+j + \frac{2+j8}{3}} = \frac{80\sqrt{3} \angle -30^\circ}{3+4j} = \frac{80\sqrt{3} \angle -30^\circ}{5 \angle 38.13^\circ} = 16\sqrt{3} \angle -68.13^\circ \text{ (A)}$$

$$\underline{I}_b = 16\sqrt{3} \angle 36.87^\circ \text{ A}, \quad \underline{I}_c = 16\sqrt{3} \angle 156.87^\circ \text{ A} \Rightarrow$$

$$\underline{I}_{\text{linea}} \begin{cases} \underline{I}_a = 16\sqrt{3} \angle -68.13^\circ \text{ A} \\ \underline{I}_b = 16\sqrt{3} \angle 36.87^\circ \text{ A} \\ \underline{I}_c = 16\sqrt{3} \angle 156.87^\circ \text{ A} \end{cases}$$

$$\underline{I}_{\text{fase (generador)}} = \underline{I}_{\text{linea}} \text{ (por conj. en estrella)}$$

$$\underline{I}_{\text{fase (carga)}} = \begin{cases} \underline{I}_{a'b'} = \frac{\underline{I}_a}{\sqrt{3}} \angle -68.13^\circ - 30^\circ = 16 \angle -98.13^\circ \text{ A} \\ \underline{I}_{b'c'} = 16 \angle 36.87^\circ - 30^\circ = 16 \angle 6.87^\circ \text{ A} \\ \underline{I}_{c'a'} = 16 \angle 156.87^\circ - 30^\circ = 16 \angle 126.87^\circ \text{ A} \end{cases}$$



② Tensiones en los bornes del generador

$$\underline{U}_{ab} = (2+j)\underline{I}_a + (2+j8)\underline{I}_{a'b'} - (2+j)\underline{I}_b = \sqrt{5} \angle 26.57^\circ \cdot 16\sqrt{3} \angle -68.13^\circ + \sqrt{68} \angle 75.96^\circ \cdot 16 \angle -98.13^\circ - \sqrt{5} \angle 26.57^\circ \cdot 16\sqrt{3} \angle 36.87^\circ$$

$$= (16\sqrt{15} \cos(-56.56) + j16\sqrt{15} \sin(-56.56)) + \sqrt{68} \cdot 16 \cos(-37.17) + j\sqrt{68} \cdot 16 \sin(-37.17) - \sqrt{15} \cdot 16 \cos(63.44) - j\sqrt{15} \cdot 16 \sin(63.44)$$

$$= 111.57 - j186.85 = 217.63 \angle -59.16^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{bc} = 217.63 \angle 60.84^\circ \text{ V} \quad \underline{U}_{ca} = 217.63 \angle 179.16^\circ \text{ V}$$

Otra forma:

$$\underline{U}_{ab} = -\underline{Z}_a \left(\frac{1+j}{3} \right) + 80\sqrt{3} \angle -30^\circ - 80\sqrt{3} \angle 90^\circ + \left(\frac{1+j}{3} \right) \underline{Z}_b =$$

$$= -16\sqrt{3} \angle -68.13^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \angle 45^\circ + 80\sqrt{3} \angle -30^\circ - 80\sqrt{3} \angle 90^\circ + \frac{\sqrt{2}}{3} \angle 45^\circ \cdot 16\sqrt{3} \angle 36.87^\circ =$$

$$= -\frac{16\sqrt{6}}{3} \cos(-37.13) - j\frac{16\sqrt{6}}{3} \sin(-37.13) + 80\sqrt{3} \cos(-30) + j80\sqrt{3} \sin(-30) - 80\sqrt{3} \cos 90 - j80\sqrt{3} \sin 90 + \frac{16\sqrt{6}}{3} \cos(81.87) + j\frac{16\sqrt{6}}{3} \sin(81.87) =$$

$$= 111.57 + j186.84 = 217.63 \angle -59.16^\circ \text{ V}$$

③ Tensiones en la carga

$$\underline{U}_{a'b'} = (2+j8) \underline{I}_{a'b'} = \sqrt{68} \angle 75,96^\circ 16 \angle -113,13^\circ = 131,94 \angle -37,17^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{b'c'} = 131,94 \angle 82,83^\circ \text{ V}; \underline{U}_{c'a'} = 131,94 \angle -157,17^\circ \text{ V}$$

③ P y Q salientes del generador

$$\underline{S}_{sg} = 3 \underline{S}_{ef} = 3 \underline{U}_{a'n} \underline{I}_a^* = 3 \left(2+j \right) + \frac{2+j8}{3} \underline{I}_a \cdot \underline{I}_a^*$$

$$\underline{S}_{sg} = 3 \left(\frac{8}{3} + j \frac{11}{3} \right) \underline{I}_a^2 = (8+j11) (16\sqrt{3})^2 = 6144 + j 8448 \text{ VA}$$

$$\underline{P}_{sg} = 6144 \text{ W}, \underline{Q}_{sg} = 8448 \text{ var}$$

④ P y Q consumidos por las impedancias receptoras y de línea

$$\underline{S}_{ec} = 3 \underline{U}_{a'n} \underline{I}_a^* = 3 \underline{Z}_i \underline{I}_a^2 = 3 \left(\frac{2+j8}{3} \right) (16\sqrt{3})^2 = 3(2+j8) \cdot 16^2 = 1536 + j 6144 \text{ VA}$$

$$3 \underline{Z}_i \underline{I}_a^2 \rightarrow 3(2+j8) 16^2$$

$$\underline{P}_{ec} = 1536 \text{ W}$$

$$\underline{Q}_{ec} = 6144 \text{ var}$$

$$\underline{S}_{el} = 3 \underline{U}_{aa'} \underline{I}_a^* = 3 \underline{Z}_L \underline{I}_a^2 = 3(2+j)(16\sqrt{3})^2 = 4608 + j 2304 \text{ VA}$$

$$\underline{P}_{el} = 4608 \text{ W}$$

$$\underline{Q}_{el} = 2304 \text{ var}$$

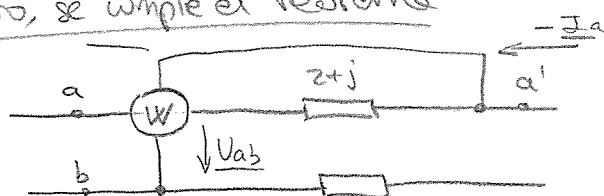
⑤ Teorema de Boucherot

$$\underline{P}_{sg} = \underline{P}_{ec} + \underline{P}_{el} : 6144 = 1536 + 4608 \checkmark$$

$$\underline{Q}_{sg} = \underline{Q}_{ec} + \underline{Q}_{el} : 8448 = 6144 + 2304 \checkmark$$

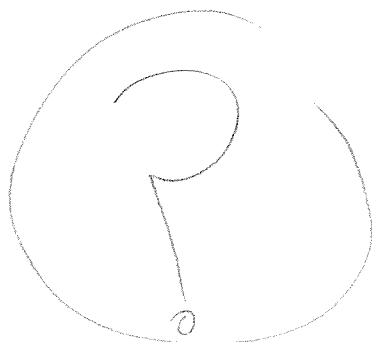
Por tanto, se cumple el teorema

⑥



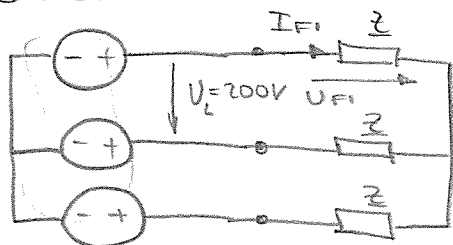
$$W = \text{P. real} \left\{ \underline{U}_{ab} (-\underline{I}_a)^* \right\} = \underline{U}_{ab} \underline{I}_a \cos(\varphi_{uab} - (-96,87^\circ)) = 217,63 \cdot 16\sqrt{3} \cos(-59,16^\circ + 96,87^\circ)$$

$\underline{I}_a \angle -96,87^\circ$



Cuestión 3 3 impedancias iguales de $\cos \varphi = 0,8$ inductivo se conectan en estrella a un sistema de tensiones trifásico en secuencia directa y tensión de línea 200V. La P consumida por cada impedancia es 1000 W.

1) Calcular la P consumida por cada impedancia si en vez de conectarse en estrella se conectan en triángulo.

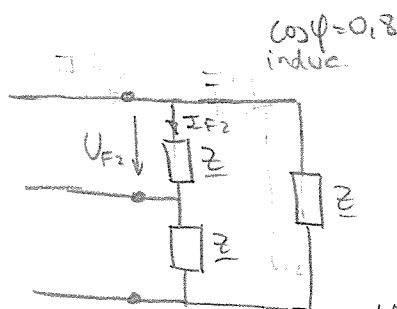


$$P_{F1} = 1000 \text{ W} = U_{F1} I_{F1} \cos \varphi = U_{F1} \frac{U_{F1}}{Z} \cos \varphi =$$

$$= \left(\frac{U_L}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{1}{Z} \cos \varphi = \frac{U_L^2}{3Z} \cos \varphi$$

Por Y $U_F = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$

Por Δ $U_{F2} = U_L$



$$P_{F2} = U_{F2} I_{F2} \cos \varphi = U_{F2} \frac{U_{F2}}{Z} \cos \varphi = \frac{U_L^2}{Z} \cos \varphi = 3 P_{F1} = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ W}$$

$$P_{F2} = 3 P_{F1} = 3000 \text{ W}$$

2) Valor de las intensidades de fase y de línea en estas condiciones

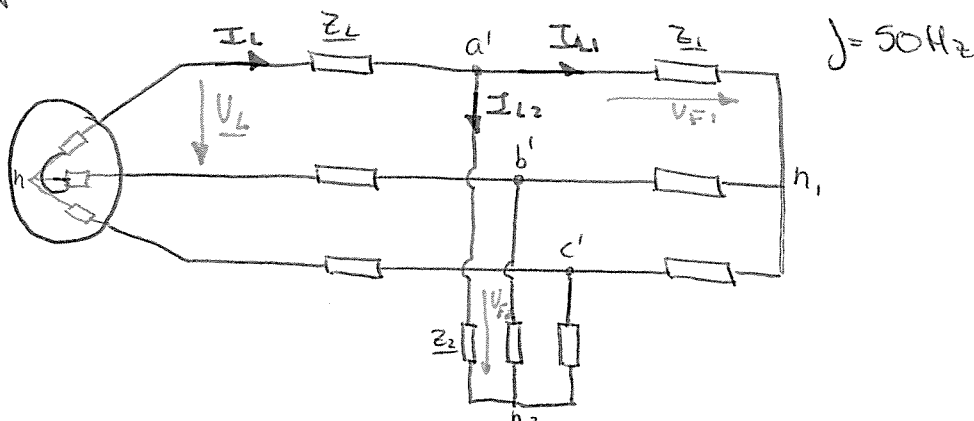
$$I_{F1} = \frac{P_{F1}}{U_{F1} \cos \varphi} = \frac{1000}{\frac{200}{\sqrt{3}} \cdot 0,8} = 10,83 \text{ A} \xrightarrow{\text{Por Y } I_F = I_L} I_{L1} = 10,83 \text{ A}$$

$$I_{F2} = \frac{P_{F2}}{U_{F2} \cos \varphi} = \frac{3000}{200 \cdot 0,8} = 18,75 \text{ A} \xrightarrow{\text{Por Δ } I_L = I_F \sqrt{3}} I_{L2} = 18,75 \sqrt{3} = 32,48 \text{ A}$$

Cuestión 4 Circuito trifásico equilibrado en secuencia directa con $U_L = 220 \text{ V}$.

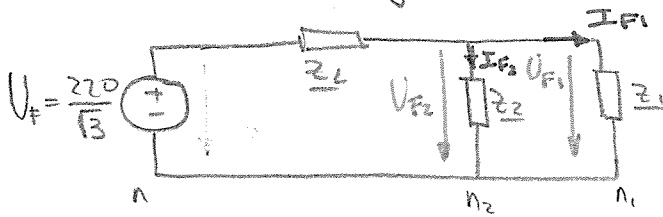
$$Z_L = 1 + j2; Z_1 = 10(3 - j) \Omega; Z_2 = 10(2 + j) \Omega. f = 50 \text{ Hz}$$

- ① Intensidad de línea en el generador
- ② Tensión de fase en cada una de las cargas
- ③ Intensidad de línea en cada una de las cargas
- ④ Potencia activa y reactiva en cada carga
- ⑤ Potencia perdida en la línea
- ⑥ Indicar la capacidad por fase de la batería de condensadores que debería colocarse en triángulo en paralelo con la carga conjunto de ambas, para que el total presentase $\cos \varphi = 1$
- ⑦ Capacidad si se conectasen en estrella.



① I_L

Planteamos monofásico equivalente



$$Z_{1,2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{10(3-j) + 10(2+j)}{10(3-j) + 10(2+j)} = \frac{10(6+3j-2j+1)}{5} = 14 + 2j$$

$$Z_{eq} = Z_L + Z_{1,2} = 15 + 3j$$

$$I_L = \frac{U_F}{Z_{eq}} = \frac{220}{\sqrt{3} \sqrt{15^2 + 3^2}} = 8,30 \text{ A}$$

② U_{fase} en cada carga

$$U_{F1} = U_{F2} = I_L Z_{1,2} = 8,30 \cdot \sqrt{14^2 + 2^2} = 117,43 \text{ V}$$

③ I_L en cada carga: I_{L1}, I_{L2}

$$I_{L1} = I_{F1} = \frac{U_{F1}}{Z_1} = \frac{117,43}{10\sqrt{3^2 + 1^2}} = 3,71 \text{ A}$$

$$I_{L2} = I_{F2} = \frac{U_{F2}}{Z_2} = \frac{117,43}{10\sqrt{2^2 + 1^2}} = 5,25 \text{ A}$$

④ P y Q en cada carga (carga Y_1 y Y_2)

$$S_{T1} = 3 U_{F1} I_{F1}^* = 3 I_{F1}^2 Z_1 = 3 \cdot 3,71^2 \cdot 10(3-j) = 1241 - j413,7 \text{ VA}$$

$$S_{T2} = 3 I_{F2}^2 Z_2 = 3 \cdot 5,25^2 \cdot 10(2+j) = 1654,7 + j827,35 \text{ VA}$$

$$P_{T1} = 1241 \text{ W}, Q_{T1} = -413,7 \text{ var}$$

$$P_{T2} = 1654,7 \text{ W}, Q_{T2} = 827,35 \text{ var}$$

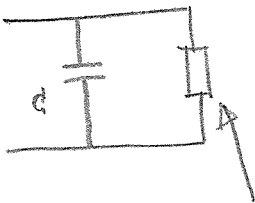
$$P_{T1,2} = P_{T1} + P_{T2} = 1241 + 1654,7 = 2895,7 \text{ W}$$

$$Q_{T1,2} = Q_{T1} + Q_{T2} = -413,7 + 827,35 = 413,65 \text{ var}$$

$$⑤ S_{TL} = 3 Z_L I_L^2 = 3(1+j) 8,30^2 = 206,84 + j206,84 \text{ VA}$$

$$P_{TL} = 206,84 \text{ W}, Q_{TL} = 206,84 \text{ var}$$

⑥



$$C = \frac{P_{F1,2} (\tan \varphi_{1,2} - \tan \varphi)}{\omega U_L^2} = \frac{\frac{2895,7}{3} \left(\frac{413,65}{2895,7} - 0 \right)}{2\pi \cdot 50 (117,43 \sqrt{3})^2} = 1,06 \cdot 10^{-5}$$

Suponemos una fase del conjunto

$$1,2 \rightarrow P_{T1,2} = 2895,7$$

$$\rightarrow P_{F1,2} = \frac{2895,7}{3}$$

$$\tan \varphi_{1,2} = \frac{Q_{T1,2}}{P_{T1,2}} = \frac{413,65}{2895,7}$$

$$U_{F1,2} = 117,43 \text{ V}$$

$$U_L = 117,43 \sqrt{3}$$

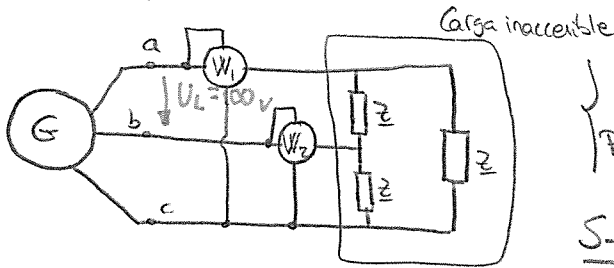
$$C_{\Delta} = 10,6 \mu\text{F}$$

$$⑦ C_Y = 3C_{\Delta} = 31,8 \mu\text{F}$$

⑧

Cuestión 5 Sistema en secuencia directa. $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ rad/s}$. $Z = 4 + j3 \Omega$

- ① Dibujar donde se colocarían dos vatímetros para medir la potencia consumida por dicha carga. Calcular lo que indicaría cada vatímetro [$U_L = 100 \text{ V}$]



$$\begin{cases} W_1 + W_2 = P \\ \text{Por S.D} \rightarrow Q = \sqrt{3} (W_1 - W_2) \end{cases}$$

$$S_T = 3 S_F = 3 (U_F \cdot I_F^*) = 3 \left(U_F \cdot \left(\frac{U_F}{Z} \right)^* \right) =$$

$$= 3 U_F^2 \cdot \frac{1}{Z^*} = 3 \cdot 100^2 \cdot \frac{1}{4 - j3} \cdot \frac{4 + j3}{4 + j3} = \frac{3 \cdot 100^2 \cdot (4 + j3)}{25}$$

$$= 1200 (4 + j3) \quad \begin{cases} P_T = 1200 \cdot 4 = 4800 \text{ W} \\ Q_T = 3 \cdot 1200 = 3600 \text{ var} \end{cases}$$

$$W_1 + W_2 = 4800$$

$$\sqrt{3} (W_1 - W_2) = 3600$$

$$2 W_1 = 4800 + 3600 / \sqrt{3}$$

$$W_1 = 3439 \text{ W}$$

$$W_2 = 1361 \text{ W}$$

- ② Calcular la capacidad de los condensadores que deberían adosarse en paralelo con la carga para que el factor de potencia sea 0.9 inductivo.

$$C = \frac{P_T (t_g \phi - t_g \psi)}{\omega U_F^2} = \frac{4800 / 3 \left(\frac{3}{4} - t_g(\arccos 0.9) \right)}{2\pi \cdot 50 \cdot 100^2} = 1.35 \cdot 10^{-4} = 135.3 \mu\text{F}$$

$$C_{\Delta} = 135 \mu\text{F}; C_Y = 405 \mu\text{F}$$

