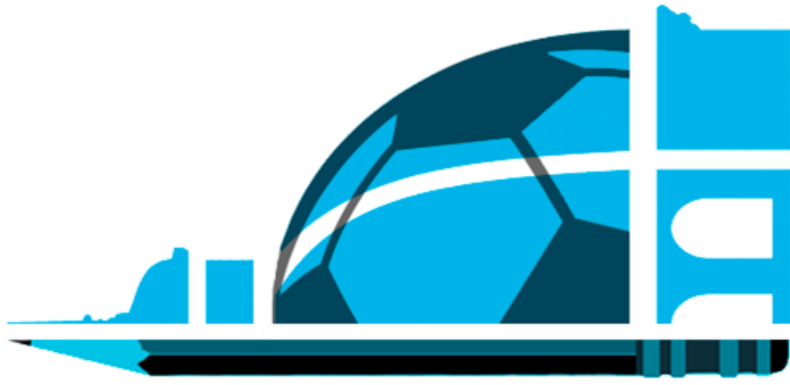




Indusbol
.com

Apuntes de 2ºGITI

María Ballesteros

MECÁNICA JC

Si alguna vez estos
apuntes te sirvieron
de ayuda, piensa que
tus apuntes pueden
ayudar a muchas
otras personas.

Comparte tus apuntes
En indusbol.com o
simplyjarod.com

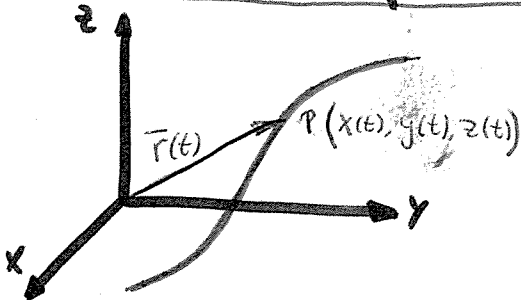
CINEMÁTICA

TEMA 1



1 CINEMÁTICA DEL PUNTO

Vector de posición, ecuaciones horarias



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \equiv \text{trayectoria}$$

Se definen las ecuaciones horarias como:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Vector velocidad y vector aceleración

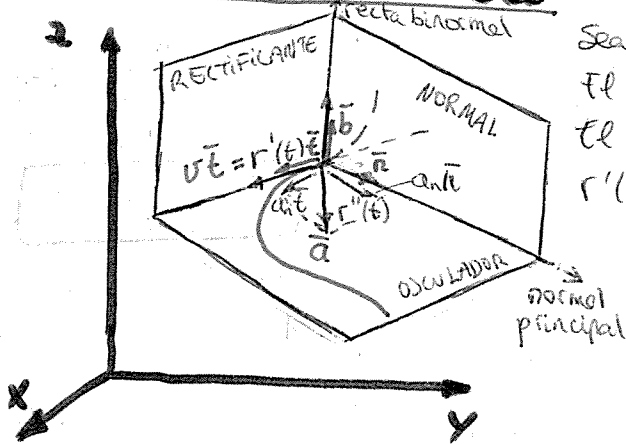
El vector velocidad se define como la derivada del vector de posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

El vector aceleración se define como la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Triedro intrínseco



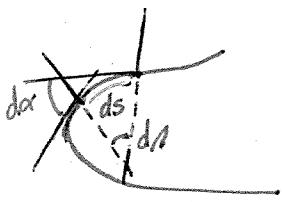
Sea la trayectoria $C: x=x(t); y=y(t); z=z(t) \equiv \vec{r}(t)$
 El vector $\vec{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva.
 El vector $\vec{r}''(t)$ no es un vector tangente a la curva pero $\vec{r}'(t)$ y $\vec{r}''(t)$ definen el plano osculador

$$\begin{aligned} \vec{v} &= |\vec{v}| \vec{t} \\ \vec{a} &= a_t \vec{t} + a_n \vec{n} \\ \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho_c} \vec{n} &\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho_c} \vec{n} \end{aligned}$$

Frenet

Expresan las derivadas de $\vec{t}$, $\vec{n}$ y $\vec{b}$ con respecto al parámetro arco s

Sea $\rho_c = \frac{ds}{d\tau}$ y $\rho_c = \frac{ds}{d\tau}$



$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\rho_c} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{t}}{\rho_c} + \frac{\vec{b}}{\rho_c} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\rho_c} \end{cases}$$

Vector de Darboux

Se define como $\bar{\Omega} = \frac{\bar{t}}{\rho_c} + \frac{\bar{b}}{\rho_c}$

y se comprueba que

$$\begin{cases} \bar{\Omega} \times \bar{t} = \frac{\bar{n}}{\rho_c} = \frac{d\bar{t}}{ds} \\ \bar{\Omega} \times \bar{n} = -\frac{\bar{t}}{\rho_c} + \frac{\bar{b}}{\rho_c} = \frac{d\bar{n}}{ds} \\ \bar{\Omega} \times \bar{b} = -\frac{\bar{n}}{\rho_c} = \frac{d\bar{b}}{ds} \end{cases}$$

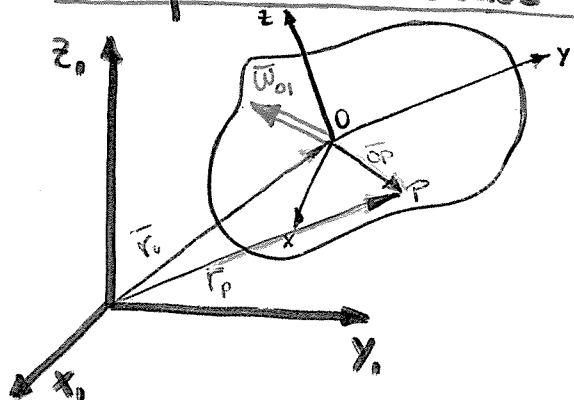
2 CINEMÁTICA DE SISTEMAS

Definición: Un sólido rígido es un sistema de puntos en el que, las distancias entre ellos permanecen invariables. Esto es, dados dos puntos cualquiera A, B ∈ sólido, la distancia entre ellos es constante.

Teorema: Las proyecciones de las velocidades de dos puntos sobre la recta que los une son iguales:

$$\boxed{\bar{u} \cdot \bar{v}_A = \bar{u} \cdot \bar{v}_B}; \quad \bar{u} = \frac{\bar{AB}}{|AB|}$$

Campo de velocidades y aceleraciones ANEXO!



$$\bar{r}_P = \bar{r}_O + \bar{OP} \rightarrow \begin{cases} \bar{r}_P: \text{expresado en } S_1 \\ \bar{r}_O: \text{expresado en } S_1 \\ \bar{OP}: \text{expresado en } S \end{cases}$$

Derivamos respecto de t en S_1 :

$$\left(\frac{d\bar{r}_P}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\bar{r}_O}{dt} \right)_{S_1} + \left(\frac{d\bar{OP}}{dt} \right)_{S_1}$$

$\bar{OP}$: Es un vector lineal que tiene P como punto fijo en torno a un eje que pasa por O y lleva la dirección de $\bar{\omega}$.

CVSR

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \left(\frac{d\bar{OP}}{dt} \right)_{S_1} + \bar{\omega} \times \bar{OP} \Rightarrow \boxed{\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{OP}}$$

Derivo el CVSR respecto de t en S_1 :

$\frac{d}{dt}$ en S

Derivación en ejes móviles

$$\left(\frac{d\bar{v}_P}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\bar{v}_O}{dt} \right)_{S_1} + \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \right)_{S_1} \times \bar{OP} + \bar{\omega} \times \left(\frac{d\bar{OP}}{dt} \right)_{S_1} = \bar{a}_O + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{OP} + \bar{\omega} \times \left[\left(\frac{d\bar{OP}}{dt} \right)_{S_1} + \bar{\omega} \times \bar{OP} \right]$$

CASR

$$\boxed{\bar{a}_P = \bar{a}_O + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{OP} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{OP})}$$

NOTA!! Interpretación física

$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{OP}$ → Representa aceleración tangencial que tendría P al girar con $\dot{\bar{\omega}}$ en torno a un eje que pase por O y tiene la dirección de $\dot{\bar{\omega}}$.

$\bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{OP}$ → Representa la aceleración normal que tendría P al girar en torno a un eje que pase por O y tiene la dirección de $\bar{\omega}$.

NOTA!! Derivación en ejes móviles

$$\boxed{\left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right)_1 = \left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right)_0 + \bar{\omega} \times \bar{u}}$$

Eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento

Es el lugar geométrico de los puntos del sólido cuya velocidad es mínima, por tanto, paralela a $\vec{\omega}$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + (\vec{\omega} \times \vec{OP}) \cdot \frac{\omega}{|\omega|}$$

$$\vec{V}_{min} = \left(\vec{V}_P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\omega|} \right) \frac{\vec{\omega}}{|\omega|}$$

$\vec{V}_{min} \parallel \vec{\omega} \rightarrow$ Proyección de la velocidad de cualquier punto en la dirección de $\omega \rightarrow$ INVARIANTE

La ecuación del EIRMD zero

$$\vec{r} = \vec{r}_P + \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}_P}{|\omega|^2} + \lambda \vec{\omega}$$

Por tanto, si encontramos un punto con velocidad nula $\in$ EIR.

- En cada instante la velocidad de un punto del sólido se puede descomponer en:
 - Componente paralela al EIRMD $\rightarrow$ Traducción del sólido en dirección EIRMD
 - Componente perpendicular al EIRMD proporcional a la distancia al mismo $\rightarrow$ giro al rededor del eje de radio igual a la distancia y velocidad angular de giro ω .

Axoides

Son los lugares geométricos de los rectos que han sido EIRMD.

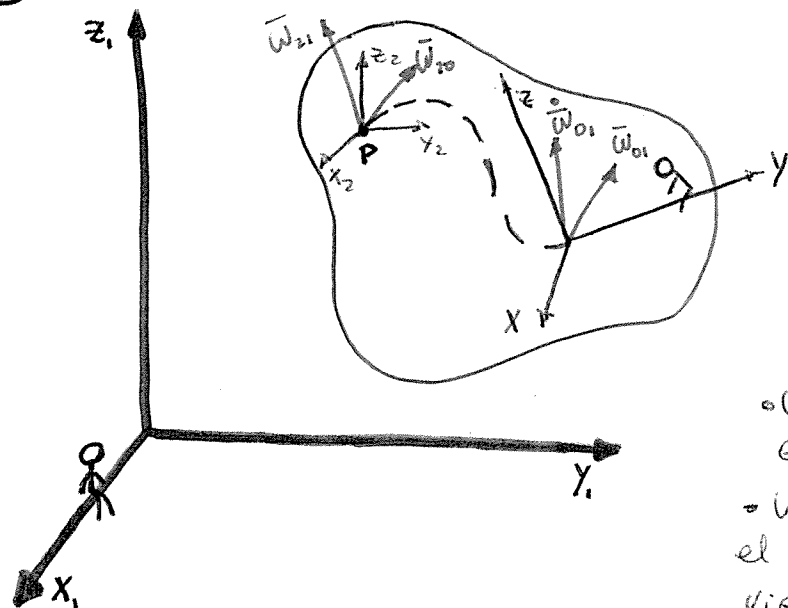
Axoide fijo: Sup formada por los rectos del espacio que han sido EIRMD

Axoide móvil: Sup formada por los rectos del sólido que han sido EIRMD

Ejemplo $\rightarrow$ cilindro



3 COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS



Se estudia el movimiento de la partícula P respecto a dos sistemas de referencia; uno fijo, el S_1 y uno móvil, el S_0 .

El movimiento de la partícula en S_1 será el movimiento absoluto que podremos descomponer en:

- Un movimiento relativo que percibe el observador de S_0
- Un movimiento de arrastre que percibe el observador de S_1 si la partícula se moviera pegada a S_1 .

Por tanto, la composición de velocidades queda

$$\boxed{\vec{v}_{21}^P = \vec{v}_{20}^P + \vec{v}_{01}^P} \quad \text{ó} \quad \vec{v}_{Abs}^P = \vec{v}_{rel}^P + \vec{v}_{arr}^P \quad \text{ó} \quad \vec{v}_{P/S_1} = \vec{v}_{P/S} + \vec{v}_{S/S_1}$$

En cuanto a las aceleraciones, aparece un nuevo término, la aceleración de Coriolis.

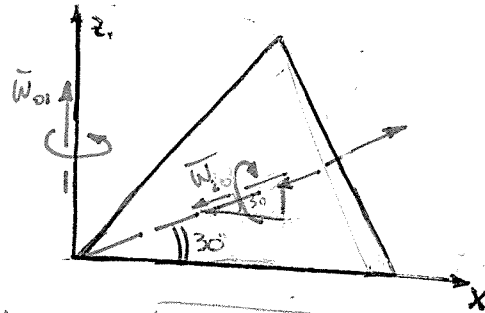
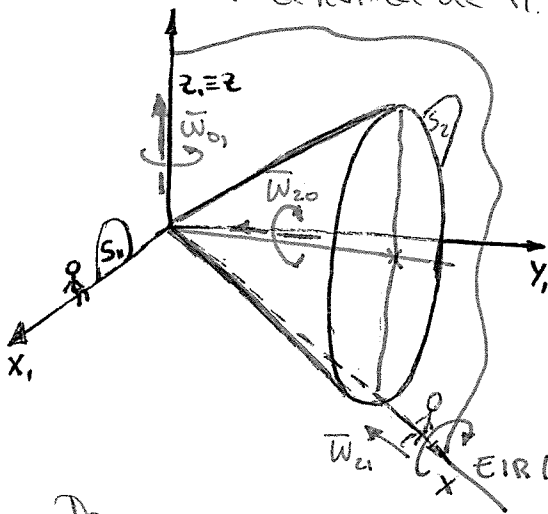
$$\boxed{\vec{a}_{21}^P = \vec{a}_{20}^P + \vec{a}_{01}^P + 2 \vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^P} \quad \text{ó} \quad \vec{a}_{Abs}^P = \vec{a}_{rel}^P + \vec{a}_{arr}^P + 2 \cdot \vec{\omega}_{ARR} \times \vec{v}_{rel}^P$$

Para las velocidades y aceleraciones angulares tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\omega}_{21} &= \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01} \\ \vec{\alpha}_{21} &= \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20} \end{aligned}}$$

4 CUESTIONES Y PROBLEMAS

Q1-1996 Cono de semicírculo $\alpha_{1/2} = 30^\circ$ rueda sobre un plano fijo π con rotación constante Ω . Se pide T que tarda en dar una vuelta entorno a la normal de π .



Nos piden $\boxed{T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_{01}}}$ si $\omega_{01} = cte$

Sabemos $|\vec{\omega}_{21}| = \Omega = cte \quad \vec{\omega}_{21} = \Omega(\vec{i} - \vec{l})$

Descomposición de velocidades angulares

$$\begin{cases} \vec{i}: -\cos 30^\circ \omega_{20} (\downarrow) \\ \vec{j}: 0 \\ \vec{k}: \omega_{01} - \sin 30^\circ \omega_{20} \end{cases}$$

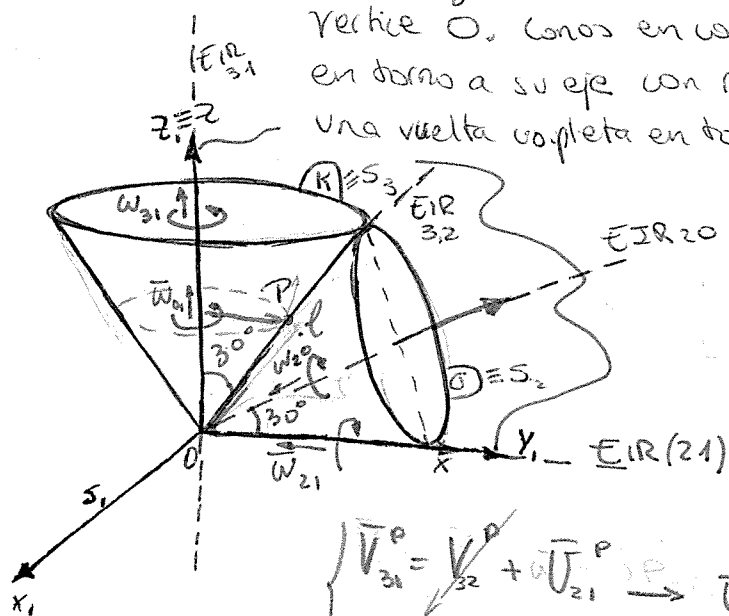
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{i}: -\Omega = -\cos 30^\circ \omega_{20} \rightarrow \omega_{20} = \frac{\Omega}{\cos 30^\circ} \\ \vec{k}: 0 = \omega_{01} - \sin 30^\circ \omega_{20} \end{cases}$$

$$\omega_{01} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Omega = \frac{\Omega}{\sqrt{3}} = cte!$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\frac{\Omega}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{\Omega}}$$

Junio 1996

Cono semiángulo $\alpha_2 = 30^\circ$ y vértice O rueda sin deslizarse sobre plano fijo $O_1x_1y_1$. Cono (R) semiángulo $\beta_2 = 30^\circ$, eje de revolución vertical y vértice O. Conos en contacto por generatriz. El cono (R) gira en torno a su eje con rotación Ω . Calcular T para que σ de una vuelta completa en torno a z.



Tenemos $\bar{\omega}_3 = \Omega \bar{K}$

Se pide $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\bar{w}_{21} = \bar{w}_{20} + \bar{w}_{01} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_{20} = -\omega_3 \omega_{10} \bar{C} + \omega_1 \omega_{20} \bar{K} \\ \bar{w}_{01} = \omega_{01} \bar{K} \end{array} \right.$$

Hay que buscar una relación entre $\bar{w}_{21}$ y $\bar{w}_{31}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_{31}^P = \vec{V}_{32}^P + \vec{W}_{21}^P \rightarrow \vec{U}_{31}^P = \vec{U}_{21}^P = \vec{U}_{21}^0 + \vec{W}_{21}^0 + \vec{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ W_{21} & 0 & 0 \\ \cos 60^\circ & 0 & \sin 60^\circ \end{vmatrix} = \\ \vec{V}_{31}^P = \vec{W}_{31}^P \text{ (en } 30^\circ \text{)} \end{array} \right.$$

Por tanto tenemos que
$$\begin{cases} \bar{U}_{31}^P = W_{21} \sin 60^\circ \bar{j} \\ \bar{U}_{31} = W_{31} \sin 30^\circ \bar{j} \end{cases} \rightarrow \bar{W}_{21} \frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{W}_{31} \frac{1}{2}$$

$$|\bar{w}_{21}| = \frac{|\bar{w}_{31}|}{\sqrt{3}} = \frac{\Omega}{\sqrt{3}} \quad \xrightarrow{\text{R}} \quad \bar{w}_{21} = \frac{-\Omega}{\sqrt{3}} \hat{e}$$

$$\begin{aligned} \vec{W}_{21} &= -\frac{\Omega}{\sqrt{3}} \vec{i} \\ \vec{W}_{20} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_{20} \vec{i} - \frac{1}{2} \omega_{20} \vec{k} \\ \vec{W}_{01} &= \omega_{01} \vec{k} \end{aligned}$$

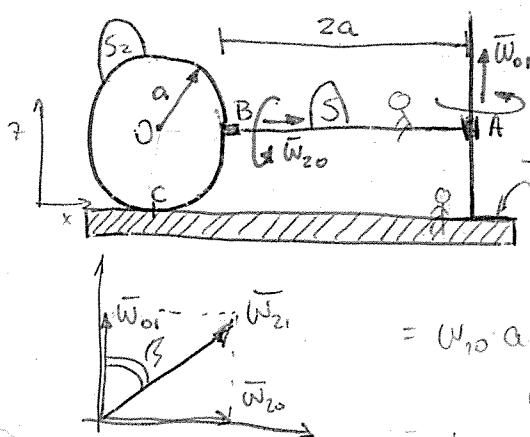
$$7) \frac{-R}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} W_{20}; \quad W_{20} = \frac{2R}{3}$$

$$K) \quad 0 = -\frac{1}{2} \omega_{20} + \omega_{01}, \quad \omega_{01} = \frac{+1}{2} \frac{2R}{3} = \frac{+R}{3}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{\Omega}{3}} = \frac{6\pi}{\Omega}$$

Septiembre 1996 Varilla AB: 2a. Esfera: a. Rueda sin deslizarse en plano fijo TI.

Calcular $\overrightarrow{Weyfer}/\pi$ { módulo y ángulo con 6 vertic. } $T_{01} = T$



Se pide $\overline{W}_{21} = \overline{W}_{20} + \overline{W}_{01}$

$$T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_{01}} = T; \quad \vec{\omega}_{01} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \vec{k}$$

$\bar{w}_n = ??$ Puntos con velocidades nulas

$$U_{21}^0 = y_{21}^0 + \bar{w}_{21} \times \bar{oc} = (\bar{w}_{10} + \bar{w}_{01}) \times \bar{oc} =$$

$$= W_{10} \cdot a(-\frac{1}{j})$$

$$\sigma_{21}^0 = \cancel{V_{20}^0} + V_{01}^0 = \cancel{V_{01}^A} + W_{01} \times \bar{AO} = W_{01} \cdot 3a(1-j)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_P &= \vec{U}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} \\ \vec{U}_P &= \vec{U}_O + \vec{U}_{O,P} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{U}_{20}^0 = 0 \\ \bar{U}_{21}^C = 0 \\ \bar{U}_{01}^A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{W}_{20} &= \vec{W}_{01} \\ W_{01} &= \frac{2n}{T} \\ W_{20} &= \frac{6n}{T} \end{aligned}$$

$$t_{gB} = \frac{w_{20}}{w_{01}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{W}_{01} = \frac{2N}{T} \vec{k} \\ \vec{W}_{20} = 3 \vec{W}_{01} \vec{i} = \frac{6N}{T} \vec{i} \end{array} \right. \rightarrow \vec{W}_{21} = \frac{6N}{T} \vec{i} + \frac{2N}{T} \vec{k}$$

$$|\vec{W}_{21}| = \sqrt{\left(\frac{6N}{T}\right)^2 + \left(\frac{2N}{T}\right)^2} = \frac{N\sqrt{10}}{T}$$

$$tg \beta = \frac{W_{20}}{W_{01}} = \frac{3 W_{01}}{W_{01}} = 3$$

$$tg \beta = 3 \rightarrow \beta = \arctg 3 = 71,57^\circ$$

Enero 1997 A (1,2,-1) y B (1,-2,1). $\vec{V}_A$ (1,2,5) $\vec{V}_B$ (1,1,4) ¿Es posible?

Por theme de los vel. proyectadas $\vec{V}_A \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \vec{V}_B \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$

$$\vec{AB} = (0, -4, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = (0, \frac{-4}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{2\sqrt{5}}) = (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \\ |\vec{AB}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{V}_A \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \neq \vec{V}_B \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \Rightarrow \text{No pueden ser posibles en un sólido rígido}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_A \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = (1,2,5) \cdot (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{-4}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \vec{V}_B \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = (1,1,4) \cdot (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

Junio 1997 Elipsoide con centro O fijo. RSD sobre plano fijo. P $\rightarrow$ punto de contacto. Deduzca la posición del EIR

$\vec{V}_P = 0, \vec{\omega}_0 = 0 \Rightarrow$ El EIR es la recta que une los puntos O y P.

Febrero 1998 Escribir expresión $\vec{a}_P$ conocidos $\vec{w}_P, \vec{\omega}_P$ y $\vec{a}_O$

Por compo de velocidades de un sólido rígido $\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$

$$\left(\frac{d\vec{V}_P}{dt} \right)_s = \left(\frac{d\vec{V}_O}{dt} \right)_s + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_s \times \vec{OP} + \vec{\omega} \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_s = \vec{a}_O + \vec{\dot{\omega}} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\dot{\omega}} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})$$

Febrero 1999 Esfera se mueve con contacto puntual con plano $z=2y$.

$\vec{W} = w \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \vec{i} + \frac{1}{4} \vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right)$ obtener valores de $|\vec{W}|$ pivota (momento) y

$|\vec{W}|$ rodadura

$$\vec{W}_P = W_P \vec{n}_n ; \text{ obtenemos } \vec{n}_n = \frac{(0, -2, 1)}{\sqrt{4+1}} = (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

Proyectamos $\vec{W}$ en la dirección de $\vec{n}_n$

$$W_P = w \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = w \left(0 + \frac{-2}{4\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \right) = w \frac{-2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}} w$$

$$\vec{W}_P = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}} w \right) \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{k} \right) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{5} \vec{j} + \frac{\sqrt{3}-1}{10} \vec{k} \right) w$$

$$\vec{W}_T = \vec{W} - \vec{W}_P = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} w - 0, \frac{1}{4} w - \frac{1-\sqrt{3}}{5} w, \frac{\sqrt{3}}{2} w - \frac{\sqrt{3}-1}{10} w \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} w, \frac{1+4\sqrt{3}}{20} w, \frac{4\sqrt{3}+1}{10} w \right)$$

$$|\vec{W}_T| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1+4\sqrt{3}+8\sqrt{3}}{400} + \frac{4\sqrt{3}+1+8\sqrt{3}}{100}} w = \sqrt{\frac{75+1+4\sqrt{3}+8\sqrt{3}+192+4+32\sqrt{3}}{400}} w = \sqrt{\frac{40\sqrt{3}+32\sqrt{3}}{400}} w = \frac{\sqrt{3}+8}{10} w$$

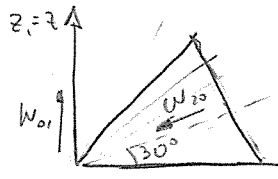
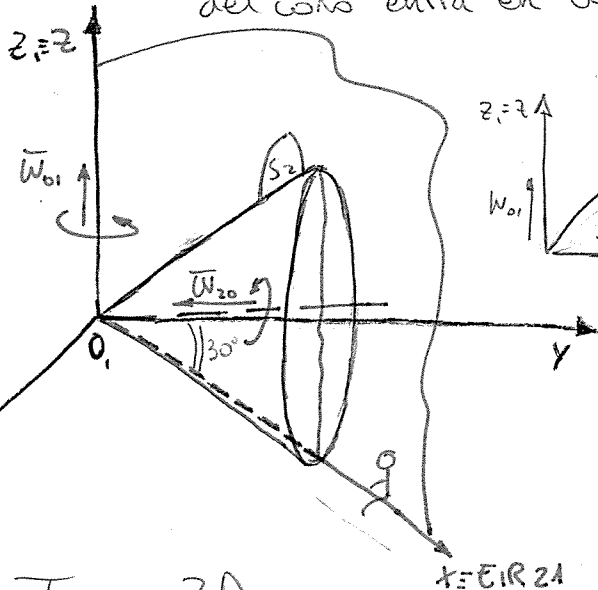
NOTA TEÓRICA!! Sea un sólido rígido que se mueve con contacto puntual fijo y con rotación $\vec{\omega}$.

$$\vec{\omega}_{\text{pivotamiento}} = \omega_p \vec{n}_\pi$$

$$\vec{\omega}_{\text{rodadura}} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_p$$

Febrero 2001 Cono recto $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$. RSD, $\omega = \text{cte}$. Se pide mínimo tiempo que transcurre entre dos instantes en los que una misma generatriz del cono entra en contacto con el plano

Se pide $T_{20} = \frac{2\pi}{\omega_{20}}$; sabemos $\vec{\omega}_{21} = \omega(-\vec{i})$



$$\begin{cases} \vec{\omega}_{20} = \omega_{20} \cos 30^\circ (-\vec{i}) + \omega_{20} \sin 30^\circ (-\vec{k}) \\ \vec{\omega}_{01} = \omega_{01} \vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$$

Identifiquemos términos

$$\vec{i}) -\omega = -\omega_{20} \cos 30^\circ \rightarrow \omega_{20} = \frac{\omega}{\cos 30^\circ}$$

$$\vec{k}) \omega_{01} - \omega_{20} \sin 30^\circ = 0 \rightarrow \omega_{01} = \sin 30^\circ \cdot \frac{\omega}{\cos 30^\circ}$$

$$T_{20} = \frac{2\pi}{\omega/\cos 30^\circ} = \frac{2\pi}{\omega/\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{\frac{\omega\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{\omega}$$

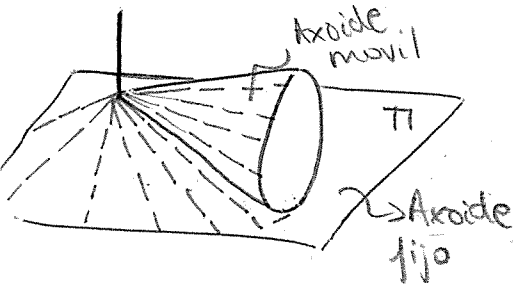
Febrero 2002 Cono RSD sobre plano fijo. Demostrar que,preciñdiendo del vértice la aceleración de cualquier punto del EIR el $\perp$ al EIR
Consideramos $P \in \text{EIR} \rightarrow \vec{U}_P = \vec{0}$ (rueda sin deslizar); $O \rightarrow \vec{U}_O = \vec{0} = \vec{a}_O$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{\vec{\omega} \parallel \vec{OP} \rightarrow 0} = \vec{\omega} \times \vec{OP} \rightarrow \text{Cono } \vec{OP} \parallel \text{EIR}$$

$$\vec{OP} \times \vec{\omega} \perp \text{EIR}$$

$$\vec{a}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP} \perp \text{EIR como queríamos demostrar}$$

2003 Cono recto rueda sobre plano fijo, sin deslizar. Indicar ejes de Euler.



Eje fijo: Conjunto de rectas del espacio que han sido o serán EIR $\rightarrow$ En nuestro caso el plano π

Eje móvil: Conjunto de rectas del sólido rígido que han sido o serán EIR $\rightarrow$ En nuestro caso, la superficie del cono

Junio 2004, septiembre 2005, septiembre 2006, Junio 2008

Punto O de SR $\rightarrow \vec{U}_O, \vec{a}_O$. En ese instante tenemos $\vec{\omega}$ y $\dot{\vec{\omega}}$
Escribir la expresión de $\vec{U}_P$ y $\vec{a}_P$, siendo P otro punto del sólido.

Por CVSR

$$\vec{U}_P = \vec{U}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_S$$

$\rightarrow \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_S = \vec{\omega} \times \vec{OP}$

Por CASR

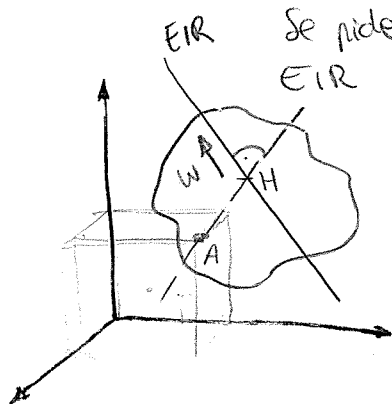
$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})$$

Junio 2005

Sólido rígido S se mueve respecto a S_1 fijo $\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega} = (0, 0, 2) \text{ rad/s}$

$A \in S, \vec{U}_{21}^A = (4, -6, 0) \text{ m/s}$ de coordenadas en S, $A(1, 1, 1) \text{ m}$

Se pide coord. del punto que es pie de la perpendicular por A al



$$\vec{AH} \perp \text{EIR}$$

$$\perp \vec{\omega}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_A + \frac{\vec{\omega} \times \vec{U}_A}{|\vec{\omega}|^2} + \lambda \vec{\omega} = \\ &= (1, 1, 1) + \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & 0 \end{vmatrix} + \lambda (0, 0, 2) = \\ &= (1, 1, 1) + \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} (12, 8, 0) + \lambda (0, 0, 2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{EIR} \begin{cases} x = 1 + \frac{12}{4} = 4 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$|\vec{\omega}|^2 = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = (0, 0, 2) \cdot (0, 0, 2) = 4$$

Como $H \in \text{EIR}$

$$H_x = 4, H_y = 3$$

$$\vec{AH} = (H_x - 1, H_y - 1, H_z - 1) \perp \vec{\omega} = (0, 0, 2)$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{\omega} = 0 \rightarrow 2(H_z - 1) = 0, H_z = \frac{z}{2} = 1 \rightarrow$$

$$\boxed{H(4, 3, 1) \text{ m}}$$

06-2005

Determinar la ecuación del EIR en S_1 como intersección de dos planos proyectantes del movimiento de la cuestión anterior. También obtener los invariantes cinemáticos.

$$\text{EIR} \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-1}{2} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Planos proyectantes} \\ &\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}}$$

Invariantes cinemáticos

$$\begin{cases} \vec{U}^A \cdot \vec{\omega} = U_{\min} = (4, -6, 0) \cdot (0, 0, 2) = 0 = \\ 1^\circ \text{ invariante: } U_{\min} = 0 \\ 2^\circ \text{ invariante: } \vec{\omega} = (0, 0, 2) \end{cases}$$

NOTA TEÓRICA!! En cinemática definimos dos invariantes

1º invariante o invariante escalar: $\vec{U}^P \cdot \vec{\omega} = U_{\min}$

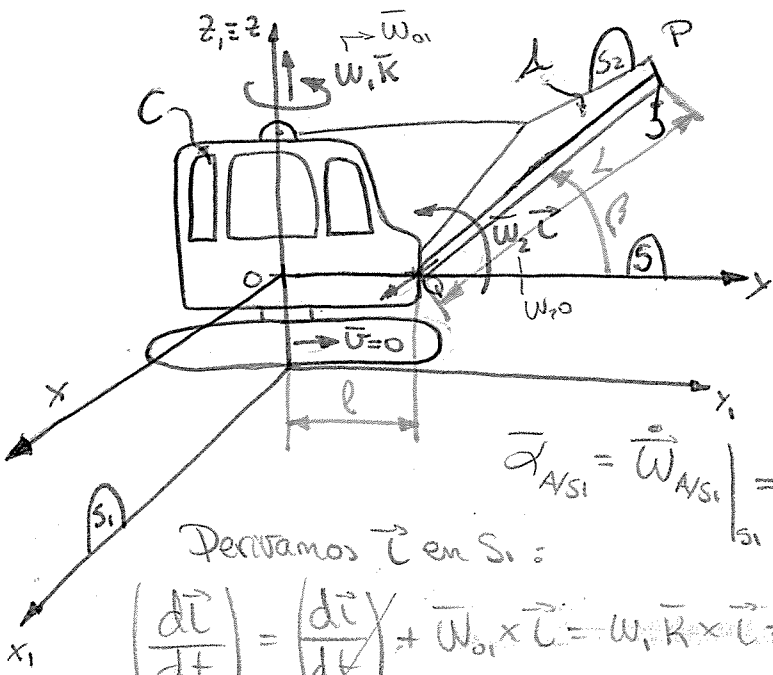
2º invariante o invariante vectorial: $\vec{\omega}$

Junio 2005 Mov. definido en cuestión anterior. Calcular $\vec{U}_B$. $B(2, 3, 3)$

$$\vec{U}_B = \vec{U}_H + \vec{\omega} \times \vec{HB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{j} = \boxed{(0, -4, 0) \text{ m/s}}$$

$$H(4, 3, 1), B(2, 3, 3) \rightarrow (-1, 0, 2)$$

PROBLEMA JUNIO 2005



Se pide:

(1) Expresadas en S:

a) Velocidad angular $\omega_{A/S}$ y aceleración angular $\alpha_{A/S}$.

$$\bar{\omega}_{A/S} = \bar{\omega}_{A/S} + \bar{\omega}_{S/S_1} = \omega_2 \bar{e} + \omega_1 \bar{K}$$

$$\bar{\omega}_{A/S_1} = \omega_2 (H \bar{e} + \omega_1 (H \bar{K})$$

$$\bar{\alpha}_{A/S_1} = \dot{\bar{\omega}}_{A/S_1} \Big|_{S_1} = \dot{\omega}_2 (H \bar{e} + \omega_2 \bar{e}) \Big|_{S_1} + \dot{\omega}_1 \bar{K} + \omega_1 \dot{\bar{K}}$$

Derivamos $\bar{e}$ en S_1 :

$$\left(\frac{d\bar{e}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\bar{e}}{dt} \right)_S + \bar{\omega}_{O_1} \times \bar{e} = \omega_1 \bar{K} \times \bar{e} = \omega_1 \bar{j}$$

0 ($\bar{e}$ cte en S)

También por composición de aceleraciones angulares

$$\bar{\alpha}_{A/S_1} = \bar{\alpha}_{A/S} + \bar{\alpha}_{S/S_1} + \bar{\omega}_{O_1} \times \bar{\omega}_{20} = \dot{\omega}_2 \bar{e} + \dot{\omega}_1 \bar{K} + \omega_1 \omega_2 \bar{j} \quad \checkmark \text{ OK}$$

$$\frac{d\bar{\omega}_{20}}{dt} \Big|_S = \dot{\omega}_{20} \bar{e} + \bar{\omega}_{20} \times \bar{e} = \dot{\omega}_2 \bar{e} \quad \frac{d\bar{\omega}_{O_1}}{dt} \Big|_{S_1} = \dot{\omega}_{O_1} \bar{K} + \omega_{O_1} \dot{\bar{K}} = \dot{\omega}_1 \bar{K} \quad 0 \text{ (K cte en S)}$$

(2) Se considera la situación
 { Reposo de origen
 Rotaciones $\omega_1 = \text{cte}$, $\omega_2 = \text{cte}$
 Ángulo de la pluma con la horizontal $= \beta$

Se piden las siguientes magnitudes en S:

b) $\bar{v}_{Q/S_1}$ y $\bar{a}_{Q/S_1}$

Q describe un movimiento circular de radio = l

$$\bar{v}_{Q/S_1} = -l \omega_1 \bar{e}$$

También, por CVSR $\bar{v}_{Q/S_1} = \bar{v}_{Q/S_1} + \bar{\omega}_{O_1} \times \bar{OQ} = \omega_1 \bar{K} \times l \bar{j} = -\omega_1 l \bar{e}$

$$\bar{a}_{Q/S_1} = \bar{a}_{Q/S_1} + \dot{\bar{\omega}}_{O_1} \times \bar{OQ} + \bar{\omega}_{O_1} \times (\bar{\omega}_{O_1} \times \bar{OQ}) = -\omega_1^2 l \bar{j} + \dot{\omega}_1 l (-\bar{e})$$

c) $\bar{v}_{P/S_1}$ Por CVSR $\bar{v}_{P/S_1} = \bar{v}_{S_1} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{QP} = -l \omega_1 \bar{e} + \begin{vmatrix} \bar{e} & \bar{j} & \bar{K} \\ \omega_2 & 0 & \omega_1 \\ 0 & l \cos \beta & l \sin \beta \end{vmatrix} = -l \omega_1 \bar{e} + \omega_1 l \cos \beta \bar{j} + \omega_2 l \sin \beta \bar{K}$

Otra forma: Podríamos haber hecho composición de mov:

$$\vec{U}_{P/S_1} = \vec{U}_{Z_0}^P + \vec{U}_{O_1}^P$$

$$\vec{U}_{Z_0}^P = \vec{U}_{Z_0}^Q + \vec{\omega}_{Z_0} \times \vec{QP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & L \cos \beta & L \sin \beta \end{vmatrix} = \omega_2 L (-\sin \beta \vec{j} + \cos \beta \vec{k})$$

$$\vec{U}_{O_1}^P = (l + L \cos \beta) \omega_1 (-\vec{i}) = \omega_1 l (-\vec{i}) + \omega_1 L \cos \beta (-\vec{i})$$

Mov. circulares de radio $\rightarrow l + L \cos \beta$; $\omega_1 \vec{k} \parallel \vec{U}_{O_1}^P = \vec{U}_{O_1}^Q + \omega_{O_1} \times \vec{OP} = \omega_1 \vec{k} \times (L \cos \beta + l) (\vec{j}) = \omega_1 (L \cos \beta + l) (-\vec{i})$

$$\Rightarrow \vec{U}_{P/S_1} = -\vec{i} (\omega_1 l + \omega_1 L \cos \beta) - \omega_2 L \sin \beta \vec{j} + \omega_2 L \cos \beta \vec{k}$$

d) $\vec{a}_{P/S_1}$

$$\vec{a}_{P/S_1} = \vec{a}_{Z_1}^P = \vec{a}_{Z_0}^P + \vec{a}_{O_1}^P + 2 \vec{\omega}_{O_1} \times \vec{U}_{Z_0}^P$$

$$\vec{a}_{Z_0}^P = \vec{a}_{Z_0}^Q + \vec{\omega}_{Z_0} \times \vec{QP} + \vec{\omega}_{Z_0} \times (\vec{\omega}_{Z_0} \times \vec{QP}) = L \omega_2^2 (-\cos \beta \vec{j} - \sin \beta \vec{k})$$

$O (\omega = \text{cte en } S)$

$$\vec{a}_{O_1}^P = \vec{a}_{O_1}^Q + \vec{\omega}_{O_1} \times \vec{OP} + \vec{\omega}_{O_1} \times (\vec{\omega}_{O_1} \times \vec{OP}) = \omega_1^2 (l + L \cos \beta) (-\vec{j})$$

$$2 \vec{\omega}_{O_1} \times \vec{U}_{Z_0}^P = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_2 L \sin \beta & \omega_2 L \cos \beta \end{vmatrix} = 2 \omega_1 \omega_2 L \sin \beta \vec{i}$$

$$\vec{a}_{P/S_1} = 2 \omega_1 \omega_2 L \sin \beta \vec{i} - \left[L \omega_2^2 \cos \beta + \omega_1^2 (l + L \cos \beta) \right] \vec{j} - \omega_2^2 L \sin \beta \vec{k}$$

Otra forma:

$$\vec{a}_{P/S_1} = \vec{a}_{Z_1}^P = \vec{a}_{Z_1}^Q + \vec{\omega}_{Z_1} \times \vec{QP} + \vec{\omega}_{Z_1} \times (\vec{\omega}_{Z_1} \times \vec{QP})$$

$$\vec{a}_{Z_1}^Q = \vec{a}_{Z_0}^Q + \vec{a}_{O_1}^Q + 2 (\vec{\omega}_{O_1} \times \vec{U}_{Z_0}^Q) = -\omega_1^2 l \vec{j}$$

$$\vec{\omega}_{Z_1} \times \vec{QP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_1 \omega_2 & 0 \\ 0 & L \cos \beta & L \sin \beta \end{vmatrix} = L \sin \beta \omega_1 \omega_2 \vec{i}$$

$$(\vec{\omega}_{Z_1}, \omega_1 \omega_2, \vec{\omega}_{Z_1})$$

$$\vec{\omega}_{Z_1} \times (\vec{\omega}_{Z_1} \times \vec{QP}) = \vec{\omega}_{Z_1} \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_2 & 0 & \omega_1 \\ 0 & L \cos \beta & L \sin \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_2 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 \cos \beta - \omega_2 L \sin \beta & \omega_2 L \cos \beta & \omega_2 L \sin \beta \end{vmatrix} = -\omega_1^2 L \cos \beta \vec{j} + \omega_1 \omega_2 L \sin \beta \vec{i} - \omega_2^2 L \sin \beta \vec{k} - \omega_2^2 L \cos \beta \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{Z_1}^P = 2 \omega_1 \omega_2 L \sin \beta \vec{i} - \left[\omega_2^2 L \cos \beta + \omega_1^2 (L \cos \beta + l) \right] \vec{j} - \omega_2^2 L \sin \beta \vec{k} \quad \underline{\text{O.K. !}}$$

e) $\vec{v}_{P/S}$ y $\vec{a}_{P/S}$

$$\vec{v}_{P/S} = \vec{v}_{Q/S} + \vec{\omega}_{20} \times \vec{QP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & L\omega_2 \sin \beta & L\sin \beta \end{vmatrix} = -\omega_2 L \sin \beta \vec{j} + \omega_2 L \cos \beta \vec{k} = \vec{v}_{20}^P$$

$$\vec{a}_{P/S} = \vec{a}_{Q/S} + \dot{\vec{\omega}}_{20} \times \vec{QP} + \vec{\omega}_{20} \times (\vec{\omega}_{20} \times \vec{QP}) = \omega_2 \vec{i} \times (\omega_2 \vec{i} \times \vec{QP}) =$$

$$= \vec{\omega}_2 \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & L\omega_2 \sin \beta & L\sin \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 L \sin \beta & \omega_2 L \cos \beta \end{vmatrix} = \omega_2^2 L (-\cos \beta \vec{j} - \sin \beta \vec{k})$$

Consideramos el movimiento de la pluma descompuesto en:
Mov A respecto de C y de C respecto a S_4 . Determinar, en S :

f) $\vec{v}_{arr}$ y $\vec{a}_{arr}$ de P

$$\vec{v}_{AR}^P = \vec{v}_{O1}^P = \vec{v}_{O1}^0 + \vec{\omega}_{O1} \times \vec{OP} = \omega_1 (l + L\omega_2 \sin \beta) (-\vec{i})$$

$$\vec{a}_{ARR}^P = \vec{a}_{O1}^P = \vec{a}_{O1}^0 + \dot{\vec{\omega}}_{O1} \times \vec{OP} + \vec{\omega}_{O1} \times (\vec{\omega}_{O1} \times \vec{OP}) = \omega_1^2 (l + L\omega_2 \sin \beta) (-\vec{j})$$

g) $\vec{a}_{COR}^P$

$$\vec{a}_{WR}^P = 2 \cdot \vec{\omega}_{O1} \times \vec{v}_{20}^P = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_2 L \sin \beta & \omega_2 L \cos \beta \end{vmatrix} = 2\omega_1 \omega_2 L \sin \beta$$

$$\vec{v}_{20}^P = \vec{v}_{20}^0 + \vec{\omega}_{20} \times \vec{QP} = \omega_2 (L\omega_2 \sin \beta \vec{k} - L\sin \beta \vec{j})$$

h) Comparaciones

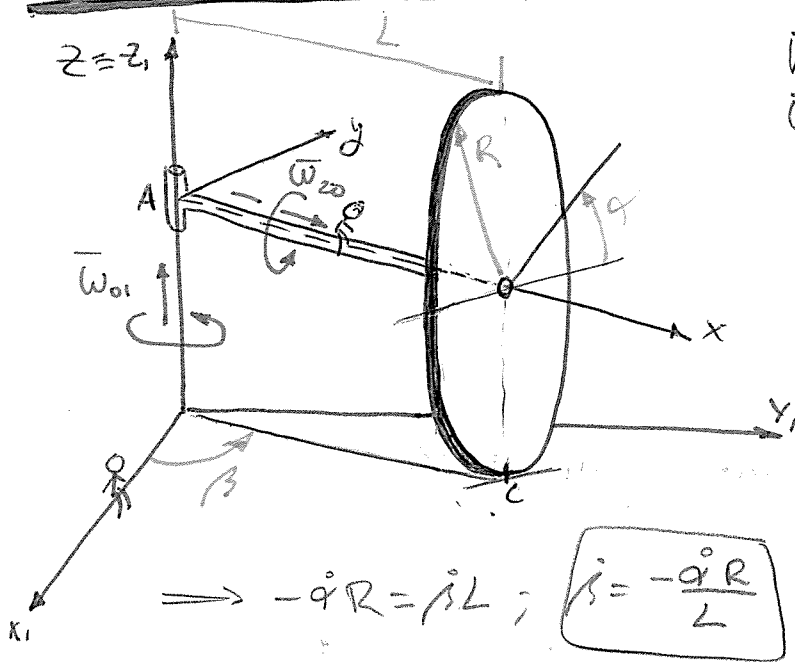
Se cumple que

$$\begin{cases} \vec{v}_{abs}^P = \vec{v}_{relativ}^P + \vec{v}_{arrastre}^P = \vec{v}_{cobia}^P + \vec{v}_{cab/fijo}^P \\ \vec{a}_{abs}^P = \vec{a}_{rel}^P + \vec{a}_{arrastre}^P + \vec{a}_{COR}^P \\ \vec{a}_{sist.fijo}^P = \vec{a}_{cobia}^P + \vec{a}_{cab/fijo}^P + \vec{a}_{COR}^P \end{cases}$$

OK

+ Se omite la 3ª parte del problema por incluir conceptos aún no estudiados.

Junio 2008 / Septiembre 2008



$$\bar{\omega}_{20} = \dot{\alpha} \bar{i}$$

$$\bar{\omega}_{01} = \dot{\beta} \bar{k}$$

$$\bar{U}_{21}^0 = \bar{U}_{21}^c + \bar{\omega}_{21} \times \bar{CO} = (\bar{\omega}_{20} + \bar{\omega}_{01}) \times \bar{CO} =$$

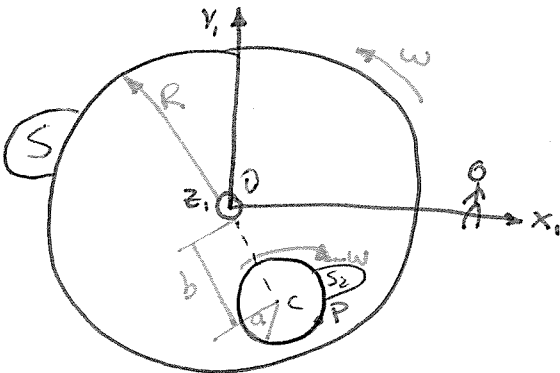
$$= -\omega_{20} R \bar{j} = -\dot{\alpha} R \bar{j}$$

$$\bar{U}_{21}^0 = \bar{U}_{21}^c + \bar{U}_{01}^0 = \bar{U}_{01}^A + \bar{\omega}_{01} \times \bar{AO} =$$

$$= \omega_{01} L \bar{j} = \dot{\beta} L \bar{j}$$

Septiembre 2006

$R, \omega \rightarrow$ fijo, Disco a, -w, b. Se pide $|\bar{U}_{21}^P|$

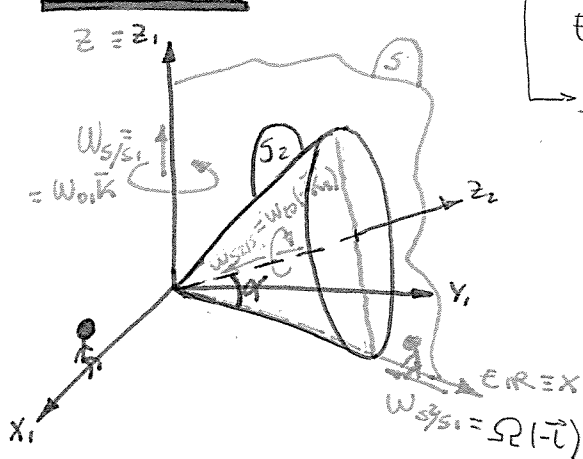


$$\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_{20} + \bar{\omega}_{01} = \omega \bar{k} - \omega \bar{k} = \bar{0}$$

$$|\bar{U}_{21}^P| = |\bar{U}_{21}^c + \bar{\omega}_{21} \times \bar{CP}| = \bar{U}_{21}^c + \bar{U}_{01}^c =$$

$$= \bar{U}_{01}^c + \omega_{01} \times \bar{OC} = \omega \cdot b \rightarrow |\bar{U}_{21}^P| = \omega b$$

Ej. C.I.N. SIST. 1 $\alpha = 30^\circ$, R.S.D., $\Omega = \text{cte}$. Se pide T.



El T pedido es $T_{01} = \frac{2\pi}{W_{01}}$ (si W_{01} es cte)

$\rightarrow \Omega = W_{S2/S1}$: Tomo como dato para orientar el movimiento $\vec{W}_{21} = \Omega(-\vec{i})$

Busco $W_{01} \Rightarrow$ Por composición de velocidades angulares: $\vec{W}_{21} = \vec{W}_{20} + \vec{W}_{01}$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_{21} = \Omega(-\vec{i}) \\ W_{01} = W_{01} \vec{K} \\ W_{20} = W_{10}(-\cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{K}) \end{cases}$$

Por tanto $\rightarrow \begin{cases} \vec{i}: -\Omega = -\cos \alpha \cdot W_{20} \\ \vec{K}: 0 = -W_{20} \sin \alpha + W_{01} \end{cases}$

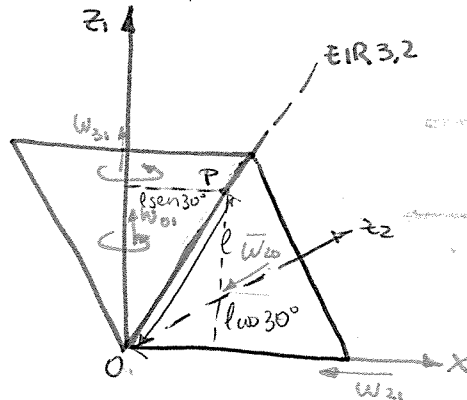
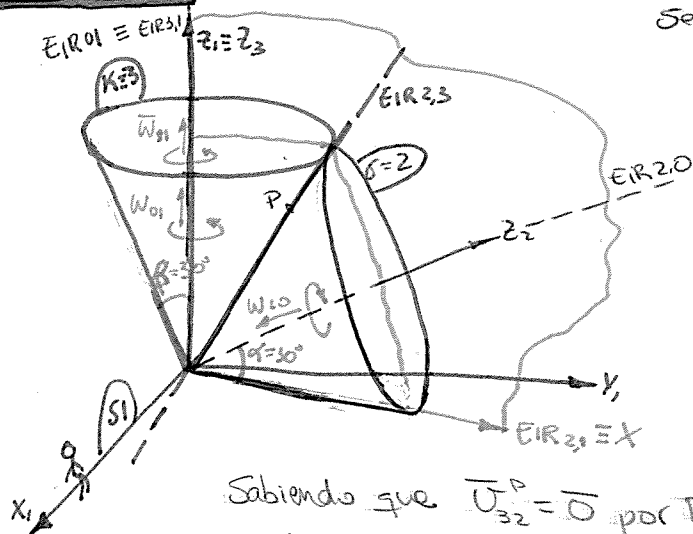
$$\rightarrow W_{20} = \frac{\Omega}{\cos \alpha} \text{ y } W_{01} = W_{20} \sin \alpha = \frac{\Omega}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = \Omega \tan \alpha = \frac{\Omega}{\sqrt{3}} = \text{cte!}$$

$\alpha = 30^\circ$

Nos queda: $T = \frac{2\pi}{\frac{\Omega}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{\Omega}$

Ej. C.I.N. SIST. 2 $\alpha = 30^\circ = \beta$; $\sigma = 2$; $K = 3$. ② R.S.D. sobre ①. z_2 fijo. ③ R.S.D. sobre ②. $\vec{W}_{31} = 2\vec{K}$

Se pide $T = T_{01} = \frac{2\pi}{W_{01}}$ (si W_{01} es cte)



Sabiendo que $\vec{U}_{32}^P = \vec{0}$ por R.S.D., por composición de velocidades se tiene

$$\vec{U}_{32}^P = \vec{U}_{31}^P + \vec{U}_{21}^P; \quad \vec{U}_{31}^P = \vec{U}_{31}^0 + \vec{W}_{31} \times \vec{OP} = W_{31}(\sin 30^\circ(-\vec{j})) \Rightarrow W_{31} \sin 30^\circ = W_{21} \cos 30^\circ$$

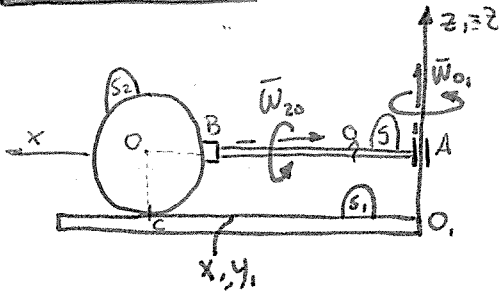
$$\vec{U}_{21}^P = \vec{U}_{21}^0 + \vec{W}_{21} \times \vec{OP} = W_{21}(\cos 30^\circ(-\vec{j})) \quad W_{21} = W_{31} \tan 30^\circ$$

A partir de aquí, con $\vec{W}_{21} = W_{21}(-\vec{i}) = W_{31} \tan 30^\circ(-\vec{i}) = \vec{W}_{20} + \vec{W}_{01}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{i}: -\Omega/\sqrt{3} = -W_{20} \cos 30^\circ \rightarrow W_{20} = \frac{\Omega}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\Omega}{3} \\ \vec{K}: 0 = -W_{20} \sin 30^\circ + W_{01} \end{cases} \rightarrow W_{01} = \frac{2\Omega}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\Omega}{3}$$

$$\Rightarrow T_{01} = \frac{2\pi}{\frac{\Omega}{3}} = \frac{6\pi}{\Omega}$$

Ex. Cin. Sist. 3 $AB=2a$, $BO=a$, Esf Ry P.S.D sobre $\Pi(x_1, y_1)$, T. Se pide 



Por composición de velocidades angulares:

$$\vec{w}_{21} = \vec{w}_{20} + \vec{w}_{01} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{w_{01}}, \quad w_{01} = \frac{2\pi}{T}$$

• Trabajando con O (común a S_2 y S_1)

$$\vec{v}_{21}^O = \vec{v}_{20}^O + \vec{v}_{01}^O$$

$$\rightarrow \vec{v}_{21}^O = \vec{v}_{21}^C + \vec{w}_{21} \times \vec{CO} = (\vec{w}_{20} + \vec{w}_{01}) \times \vec{CO} = \vec{w}_{20} \times \vec{CO} + \vec{w}_{01} \times \vec{CO} = w_{20} a \vec{j}$$

O (por Ry P.S.D) O (por //)

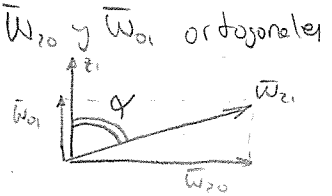
$$\rightarrow \vec{v}_{01}^O = \vec{v}_{01}^A + \vec{w}_{01} \times \vec{AO} = w_{01} 3a \vec{j}$$

Por tanto:

$$\Rightarrow w_{20} a = w_{01} 3a; \quad w_{20} = 3 w_{01} = 3 \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{6\pi}{T} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_{20} \text{ y } \vec{w}_{01} \text{ ortogonales} \\ \vec{w}_{01} \end{array} \right.$$

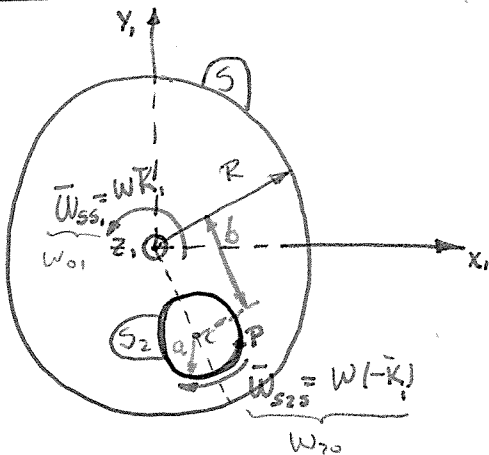
$$\rightarrow \boxed{w_{21} = \sqrt{w_{01}^2 + w_{20}^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{6\pi}{T}\right)^2} = \frac{2\pi\sqrt{10}}{T}}$$

$$\boxed{\alpha = \arctg \frac{w_{20}}{w_{01}} = \arctg \frac{6\pi/T}{2\pi/T} = \arctg 3}$$



Ex. Cin. Sist. 5 Piden $T_{20} = \frac{2\pi}{w_{20}} \Rightarrow$ Mismo desarrollo que ejercicio 1 para obtener w_{20}

Ex. Cin. Sist. 8 R, a, b ($a < b < R$), w . Se pide $|\vec{v}_{P/suelo}| \text{ ?? } = |\vec{v}_{21}^P|$.



Por composición de velocidades angulares:

$$\vec{w}_{21} = \vec{w}_{20} + \vec{w}_{01} = \vec{0}$$

$\vec{w}_{20} = w(-\vec{k}_1) \quad \vec{w}_{01} = w(\vec{k}_1)$

$\vec{w}_{21} = \vec{0} \Rightarrow S_2$ en traslación respecto de $S_1 \Rightarrow$

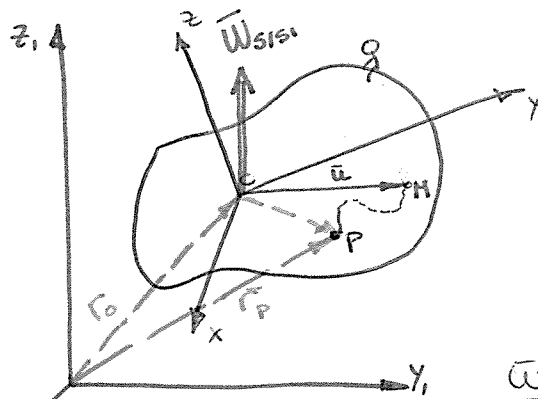
$\Rightarrow$ Mismas trayectorias, velocidades y aceleraciones

$$\forall P \in S_2 \Rightarrow |\vec{v}_{21}^P| = |\vec{v}_{21}^C| = |\vec{v}_{20}^C| + |\vec{v}_{01}^C| = |\vec{v}_{01}^C| + |\vec{w}_{01} \times \vec{OC}| =$$

$$= |\vec{w}_{01}| b = w b$$

$$\boxed{|\vec{v}_{21}^P| = w b}$$

CVSR



$$\bar{r}_P|_{S_0} = \bar{r}_O|_{S_0} + \bar{OP}|_S$$

$$\bar{v}_P|_{S_0} = \bar{v}_O|_{S_0} + [\bar{\omega}|_{S_0} \times \bar{OP}|_S]$$

$\bar{\omega} \times \bar{OP}$: Velocidad lineal que tiene P cuando gira entorno a un eje que pasa por O y lleva la dirección de $\bar{\omega}$

$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{S/S_0}$: Es la velocidad del cambio de orientación de los ejes de un sistema S respecto de los ejes de un sistema S_0 . Es una velocidad de giro y se representa por un vector perpendicular al plano de giro en cada instante (orientado por la regla de la mano derecha)

Obtención del CVSR: $\bar{OP}|_{S_0} = \bar{OP}|_S$

$$\frac{d\bar{r}_P}{dt}|_{S_0} = \frac{d\bar{r}_O}{dt}|_{S_0} + \frac{d\bar{OP}}{dt}|_{S_0} \Rightarrow \bar{v}_P|_{S_0} = \bar{v}_O|_{S_0} + \frac{d\bar{OP}}{dt}|_{S_0} + \bar{\omega}_{S/S_0} \times \bar{OP}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_P|_{S_0} = \bar{v}_O|_{S_0} + \bar{\omega}_{S/S_0} \times \bar{OP}$$

DERIVACIÓN EN EJES MÓVILES

$$\bar{u} = u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k}$$

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right)_{S_0} = \frac{du_x}{dt} \bar{i} + u_x \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{du_y}{dt} \bar{j} + u_y \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{du_z}{dt} \bar{k} + u_z \frac{d\bar{k}}{dt} = \frac{du}{dt} + u_x \frac{d\bar{i}}{dt} + u_y \frac{d\bar{j}}{dt} + u_z \frac{d\bar{k}}{dt} = \frac{du}{dt} + \bar{\omega}_{S/S_0} \times \bar{u}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{dt} \right)_{S_0} = \left(\frac{du}{dt} \right)_S + \bar{\omega}_{S/S_0} \times \bar{u}$$

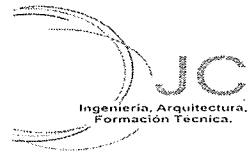
CASR

Obtención del CASR:

$$\left(\frac{d\bar{v}_P}{dt} \right)_{S_0} = \left(\frac{d\bar{v}_O}{dt} \right)_{S_0} + \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \right)_{S_0} \times \bar{OP} + \bar{\omega} \times \left(\frac{d\bar{OP}}{dt} \right)_{S_0} \Rightarrow \bar{a}_P = \bar{a}_O + \bar{\dot{\omega}} \times \bar{OP} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{OP})$$

$\bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{OP}$: Es la aceleración normal que tiene el punto P cuando gira en torno a un eje que pasa por O y tiene la dirección de $\bar{\omega}$

$\bar{\dot{\omega}} \times \bar{OP}$: Es la aceleración tangencial que tiene el punto P cuando gira en torno a un eje que pasa por O y que tiene la dirección de $\bar{\dot{\omega}}$.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Profesor Alex García

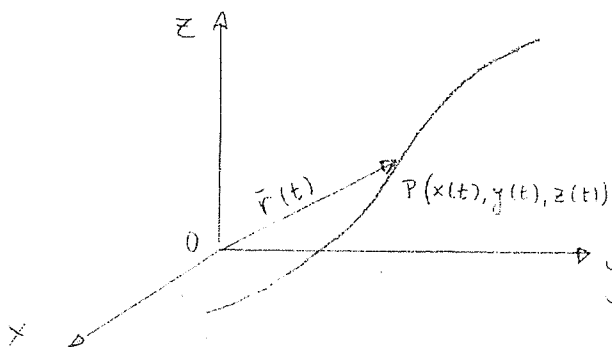
CINEMÁTICA

1-CINEMÁTICA DEL PUNTO

1-1. VECTOR DE POSICIÓN, VECTOR VELOCIDAD, VECTOR ACELERACIÓN.

AP 1.1. VECTOR DE POSICIÓN. ECUACIONES HORARIAS.

Se define el vector de posición, $\vec{r}$, de un punto P, como aquel que tiene por origen el origen de coordenadas y por extremo el punto P. Dicho punto estará en movimiento cuando su vector de posición cambie con el tiempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Las componentes cartesianas de este vector estarán expresadas entonces como funciones del tiempo:



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t))$$

que reciben el nombre de *ecuaciones horarias*. La curva descrita por P en su movimiento se llama *trayectoria*, y está definida por las ecuaciones horarias de P.

$$\text{Trayectoria : } \vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{Ecuaciones horarias: } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

AP 1-1.2 VECTOR VELOCIDAD

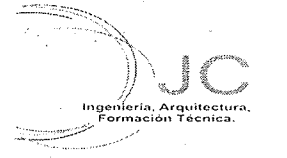
Se define como la *derivada del vector de posición con respecto al tiempo*. Partiendo de las componentes cartesianas del vector de posición, las componentes cartesianas del vector velocidad serán:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

AP 1-1.3 VECTOR ACELERACIÓN

Se define como la *derivada del vector velocidad con respecto al tiempo*. En coordenadas cartesianas, sus componentes son:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Profesor Alex García

AP 1-2. TRIEDRO INTRÍNSECO

Dada una curva (la trayectoria de un punto en nuestro caso) como:

C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (las ecuaciones horarias en nuestro caso)

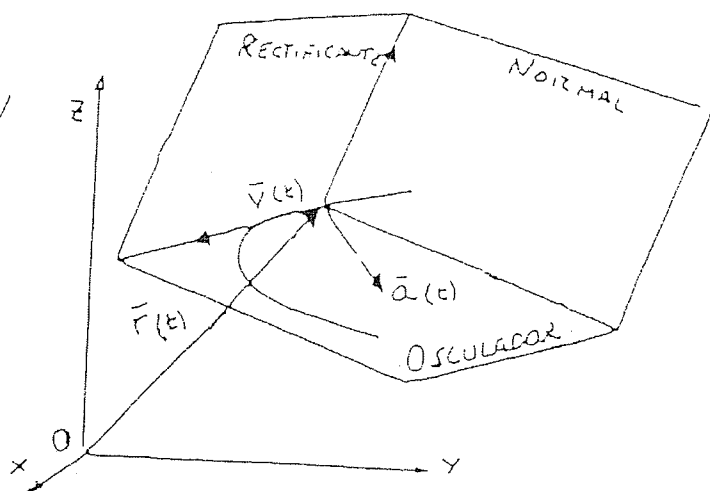
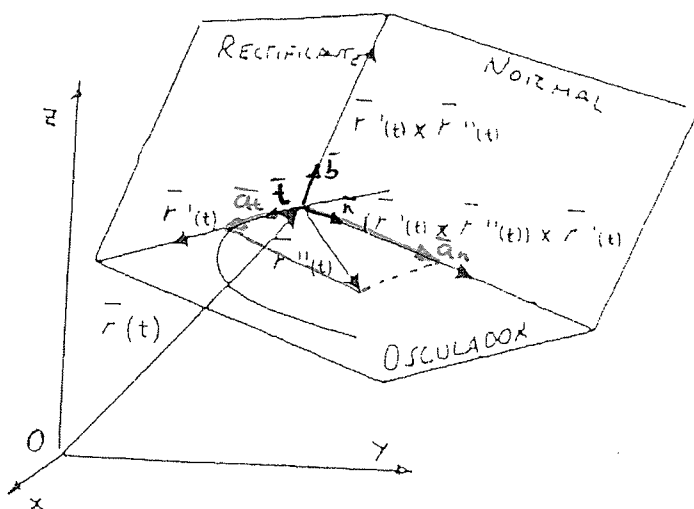
o bien como $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (nuestro vector de posición), siendo t un parámetro cualquiera (para nosotros el tiempo), el vector $\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$, derivada de $\vec{r}(t)$ respecto del parámetro t , es un vector tangente a la curva, situado sobre una *recta tangente* a la curva.

El vector $\vec{r}''(t) = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ no es un vector tangente. $\vec{r}''(t)$ y $\vec{r}'(t)$ definen un plano llamado *plano osculador*. La recta soporte del vector producto vectorial $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ es normal al plano osculador y a la curva y se llama *recta binormal*. La recta soporte del vector producto vectorial $[\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)] \times \vec{r}'(t)$, normal a la curva y contenida en el plano osculador, se llama *recta normal principal*.

De esta manera queda definido, en cada punto de la curva, un triedro llamado *triedro intrínseco*, formado por las *rectas tangente, normal principal y binormal*. Los planos que componen este triedro son:

- el *plano osculador*, ya mencionado, que queda determinado por la *recta tangente* y la *normal principal*,
- el *plano normal*, formado por la *normal principal* y la *binormal*,
- el *plano rectificante*, formado por la *tangente* y la *binormal*.

Por último, se definen tres vectores unitarios: $\vec{t}$ (*vector tangente*), $\vec{n}$ (*vector normal*) y $\vec{b}$ (*vector binormal*), pertenecientes a la *recta tangente, normal principal y binormal*, respectivamente, y que componen, en ese orden, el *triedro intrínseco* a derechas.



	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Profesor Alex García

AP 1-2.1. RADIO DE CURVATURA. RADIO DE TORSIÓN

Si consideramos dos vectores tangente, siendo $d\alpha$ el ángulo que forman y ds el arco que los separa, se llama radio de curvatura ρ_c al cociente $\rho_c = ds/d\alpha$.

De igual forma, si consideramos dos vectores binormales, siendo $d\beta$ el ángulo que forman y ds el arco que los separa, se llama radio de torsión ρ_τ al cociente $\rho_\tau = ds/d\beta$.

AP 1-2.2 FÓRMULAS DE FRENET

Expresan las derivadas de los vectores $\vec{t}$, $\vec{n}$ y $\vec{b}$ con respecto al parámetro arco (s , abscisa curvilínea).

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{t}}{ds} &= \frac{\vec{n}}{\rho_c} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= -\frac{\vec{t}}{\rho_c} + \frac{\vec{b}}{\rho_\tau} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\frac{\vec{n}}{\rho_\tau}\end{aligned}$$

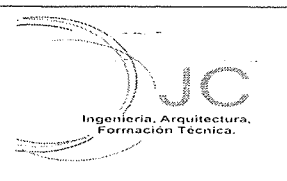
AP 1-2.3 VECTOR DE DARBOUX

Se define como:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{t}}{\rho_\tau} + \frac{\vec{b}}{\rho_c} \quad (\text{contenido en el plano rectificante})$$

Se comprueba que:

$$\left\{ \begin{aligned}\vec{\Omega} \times \vec{t} &= \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho_c} \\ \vec{\Omega} \times \vec{n} &= \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{\rho_c} + \frac{\vec{b}}{\rho_\tau} \\ \vec{\Omega} \times \vec{b} &= \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\rho_\tau}\end{aligned}\right.$$

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajtc.com	Profesor Alex García

1-3. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA VELOCIDAD Y DE LA ACCELERACIÓN.

Definido el triedro intrínseco, vamos a poder expresar las componentes del vector velocidad y del vector aceleración, en cada punto, en ese triedro, obteniendo así las componentes intrínsecas de ambos.

1-3.1 COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA VELOCIDAD:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{t} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{t} \cdot |\vec{v}|, \text{ siendo: } |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$$

1-3.2 COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACCELERACIÓN:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}| \cdot \vec{t})}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{t} + |\vec{v}| \cdot \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{t} + \frac{|\vec{v}|^2}{\rho_c} \cdot \vec{n} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} + \frac{v^2}{\rho_c} \cdot \vec{n}$$

La aceleración tiene, por tanto, dos componentes:

- una componente en la dirección de la tangente, llamada aceleración tangente (o tangencial), que representa la variación del módulo del vector velocidad con respecto al tiempo

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \vec{a} \cdot \vec{t}$$

- una componente en la dirección de la normal principal, llamada aceleración normal, que representa la variación de la dirección del vector velocidad con el tiempo

$$a_n = \frac{v^2}{\rho_c} = \vec{a} \cdot \vec{n}$$

Por tanto $\vec{a} = a_t \cdot \vec{t} + a_n \cdot \vec{n}$. La aceleración está contenida en el plano osculador.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Profesor Alex García

2-CINEMÁTICA DE SISTEMAS

APV 2-1.-DEFINICIÓN DE SÓLIDO RÍGIDO

Un sistema de puntos constituye un sólido rígido si las distancias entre ellos permanecen invariables a lo largo del tiempo.

Dicho de otro modo, un sólido rígido o sistema indeformable es aquel en el que dados dos puntos cualesquiera A y B , la distancia entre A y B permanece constante:

$$\text{por } \vec{AB} = \text{cte} \quad AB^2 = \text{cte}$$

Dado un vector de módulo constante pero de dirección variable con un determinado parámetro, la derivada de ese vector respecto al parámetro será ortogonal al vector. Así, para el vector $\vec{AB}$, si derivamos la expresión $AB^2 = \text{cte}$ con respecto a t , tenemos:

$$\frac{dAB^2}{dt} = 0 \Rightarrow 2\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

A partir de este último resultado se demuestra que las proyecciones de las velocidades de los puntos sobre la recta que los une son iguales ("Tma. de las proyecciones") Si es O el origen de coordenadas:

$$\vec{AB} \cdot \left(\frac{d\vec{OB}}{dt} - \frac{d\vec{OA}}{dt} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v}^A = \vec{u} \cdot \vec{v}^B} \quad ; \quad \boxed{\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}}$$

APV EXTRA 2-2.-CAMPO DE VELOCIDADES DE UN SÓLIDO RÍGIDO

Los puntos de un sólido rígido en movimiento tendrán, en general, trayectorias, velocidades y aceleraciones diferentes, pero no independientes, debido al hecho de pertenecer a un sólido y cumplir la condición de distancias relativas invariables entre ellos.

Obtención del vector rotación o velocidad angular $\vec{\omega}$ (ver demo)

Concepto de $\vec{\omega}$ (invariante vectorial).

Se considera un sistema de referencia fijo S_I , $O_I x_I y_I z_I$, y un sólido S que se mueve respecto de S_I . Se liga a S un sistema de referencia $Oxyz$, siendo O un punto del sólido S . De esta manera, el vector de posición de otro punto P de S vendrá dado por:

$\vec{r}^P = \vec{r}^O + O\vec{P}$, con $O\vec{P}$ expresado en S . Derivando esta expresión respecto al tiempo (ver apdo. 2.4) obtenemos el campo de velocidades de un sólido rígido:

$$\boxed{\vec{v}^P = \vec{v}^O + \vec{\omega} \times O\vec{P}}$$

Interpretación física de la fórmula.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535.75 29 www.academijc.com	Profesor Alex García

Se deduce de la fórmula que:

- Si los puntos O y P están situados sobre una recta paralela a $\vec{\omega}$, ambos tienen la misma velocidad.
- El producto escalar de la velocidad de cada punto por $\vec{\omega}$ es constante (invariante escalar), es decir: $\vec{V}^P \cdot \vec{\omega} = \vec{V}^O \cdot \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times \vec{OP}) \cdot \vec{\omega}$

De esto se deduce que la proyección de la velocidad de cada punto en la dirección de $\vec{\omega}$ es constante e igual a la velocidad mínima que pueda tener un punto del sólido.

2-2.1-EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN Y MÍNIMO DESLIZAMIENTO

Es el lugar geométrico de los puntos del sólido cuya velocidad es mínima, es decir, paralela a $\vec{\omega}$. Es una recta de dirección la de $\vec{\omega}$. La velocidad en estos puntos está contenida en el eje y se denomina velocidad de mínimo deslizamiento y tiene por módulo $V_{\min} = \vec{V}^P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$ ($P \in \text{sólido}$)

Su valor vectorial es: $\vec{V}_{\min} = \left(\vec{V}^P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \right) \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

La ecuación del E.I.R.M.D. se obtiene de forma análoga a como obteníamos la del eje central. Conocida la velocidad de un punto P del sólido, $\vec{V}^P$, y su velocidad angular, la ecuación queda:

$$\vec{r} = \vec{r}_P + \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}_P}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}$$

- si encontramos un punto con velocidad nula, la velocidad de mínimo deslizamiento es nula y ese punto pertenece al EIRMD, que en este caso se llamará solamente EIR.
- si encontramos dos puntos con velocidad nula, el EIR pasará por ellos.

2-2.2-DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES ALREDEDOR DEL EIRMD

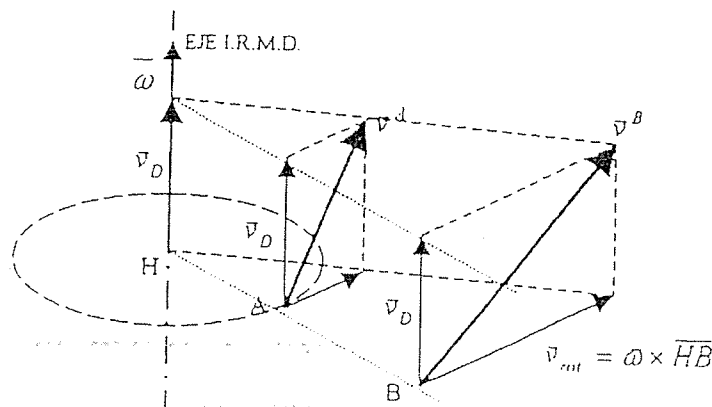
En cada instante, la velocidad de un punto del sólido se puede descomponer en:

- una componente paralela al EIRMD, igual para todos los puntos del sólido, que es la velocidad de mínimo deslizamiento, $\vec{V}_{\min} = \vec{V}^P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$. Corresponde a una traslación del sólido en la dirección del EIRMD.
- una componente perpendicular al eje y proporcional a la distancia al mismo, que corresponde a un giro alrededor del eje, con radio igual a esa distancia y velocidad angular de giro $\vec{\omega}$.

Por tanto, el movimiento más general de un sólido, siempre lo podremos descomponer en uno de traslación en la dirección del EIRMD, a velocidad mínima de deslizamiento, y otro de rotación alrededor del EIRMD, con velocidad de giro $\vec{\omega}$.

Si la velocidad de mínimo deslizamiento es nula, el movimiento se reduce a un giro alrededor del EIRMD, que en este caso se llama EIR (eje instantáneo de rotación).

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Profesor Alex García



APV

2-2.3-AXOIDES

Son los lugares geométricos de las rectas que han sido EIRMD en el movimiento del sólido. Dependiendo de si estudiamos las rectas del espacio (referencia fija) o las del sólido (referencia móvil), distinguimos:

Axoide fijo: superficie formada por las rectas del espacio que han sido EIRMD.

Axoide móvil: superficie formada por las rectas del sólido que han sido EIRMD.

APV
EXTRA

2-2.4-DERIVACIÓN VECTORIAL EN EJES MÓVILES

Dado un sistema de referencia fijo S_I , $O_I X_I Y_I Z_I$, y otro sistema de referencia S , $OXYZ$ que se mueve con respecto a S_I con una velocidad angular $\bar{\omega}_{01}$, si tenemos un vector $\bar{u}$ expresado en el sistema S , $\bar{u} = u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k}$, la derivada de $\bar{u}$ con respecto al tiempo para un observador en S_I será:

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right)_I = \frac{du_x}{dt} \bar{i} + \frac{du_y}{dt} \bar{j} + \frac{du_z}{dt} \bar{k} + u_x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + u_y \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + u_z \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} = \left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right)_0 + u_x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + u_y \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + u_z \cdot \frac{d\bar{k}}{dt}$$

El primer término es la derivada del vector $\bar{u}$ para un observador ligado a S . El segundo término se podrá expresar como el producto vectorial de la velocidad angular $\bar{\omega}_{01}$ por $\bar{u}$, quedando por tanto:

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right)_I = \left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right)_0 + \bar{\omega}_{01} \times \bar{u}$$

APV
EXTRA

2-2.5-CAMPO DE ACELERACIONES.

Derivando el campo de velocidades de un sólido rígido según la fórmula de derivación del apartado anterior, obtenemos la expresión general del campo de aceleraciones de un sólido rígido:

$$\bar{a}^P = \bar{a}^O + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times O\bar{P}) + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times O\bar{P}$$

El vector $\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ recibe el nombre de aceleración angular. El vector $\bar{\omega}$ suele estar expresado en una referencia móvil, por lo que es importante derivarlo correctamente, empleando la fórmula de derivación si fuese necesario.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com		Profesor Alex García

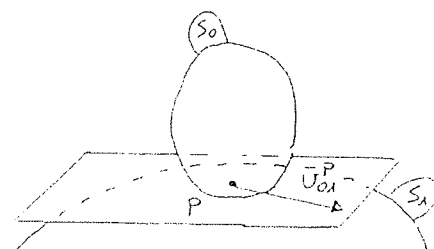
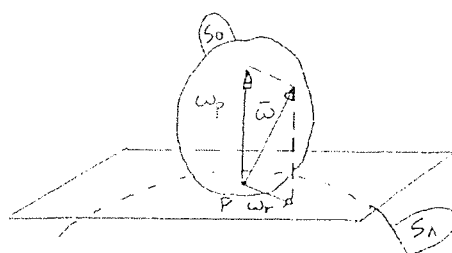
En nota
AD.

2-2.6-VELOCIDADES ANGULARES DE PIVOTAMIENTO Y RODADURA

Si estudiamos el movimiento de dos sólidos, S_0 y S_I , en contacto, la velocidad del punto P de contacto de S_0 respecto de S_I se llama velocidad de deslizamiento de S_0 respecto de S_I y está contenida en el plano tangente común a ambos sólidos por P . El sólido S_0 en su movimiento respecto a S_I tendrá una velocidad angular $\vec{\omega}$ que podremos descomponer en:

- una componente contenida en el plano tangente común a S_I y S_0 por P , llamada velocidad angular de rodadura (responsable del avance de S_0 sobre S_I), $\vec{\omega}_r$
- una componente perpendicular a ese plano tangente, es decir, en la dirección normal a dicho plano, llamada velocidad angular de pivotamiento, $\vec{\omega}_p$

Si S_0 rueda sin deslizarse sobre S_I , la velocidad relativa del punto de contacto entre ambos sólidos es nula: $\vec{V}_{01}^P = \vec{0}$



AD. ✓

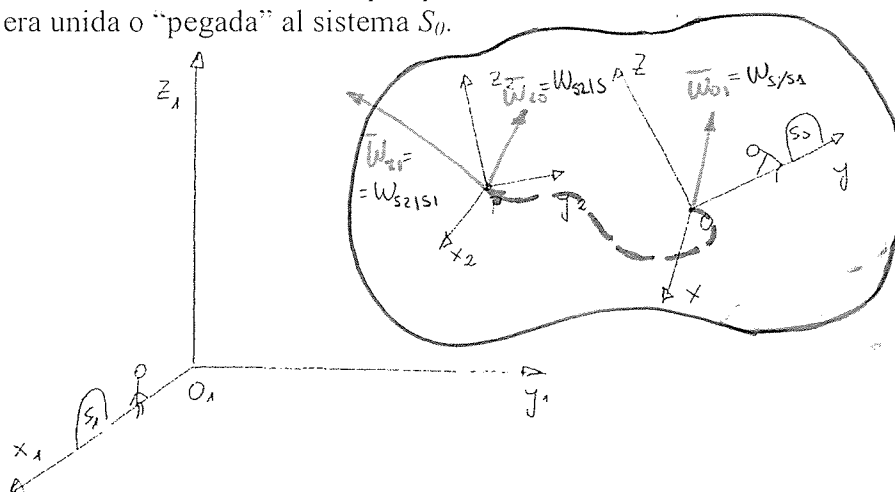
2-3.-COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Vamos a estudiar el movimiento de una partícula P respecto a dos sistemas de referencia, uno fijo S_I , $O_I X_I Y_I Z_I$, y otro móvil S_0 , que se mueve respecto a S_I .

El movimiento de la partícula respecto a S_I se designa como movimiento absoluto, y es el que vería un observador situado en S_I , mientras que el movimiento respecto a S_0 se llama movimiento relativo, y es el que vería otro observador situado en S_0 .

En general, el movimiento que perciba el observador situado en el sistema fijo S_I será más complicado que el que perciba el observador situado en el sistema móvil S_0 . Por eso el estudio del movimiento de la partícula respecto a S_I se hará descomponiéndolo en dos movimientos:

- un movimiento relativo: el que percibe el observador de S_0 .
- un movimiento de arrastre: el que percibiría el observador de S_I si la partícula se moviera unida o "pegada" al sistema S_0 .



	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajaic.com	Profesor Alex García

AP ✓ 2-3.1-COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES

La velocidad absoluta de la partícula respecto de S_I será la suma de:

- una *velocidad relativa*: la que tiene la partícula P respecto de S_0 , es decir, la derivada del vector de posición de P en el sistema S_0 respecto del tiempo.
- una *velocidad de arrastre*: la que tendría P respecto a S_I si se moviese unida al sistema S_0 . Para su análisis, al considerar la partícula como parte del sólido 0 , emplearemos el campo de velocidades del sólido rígido.

Si llamamos S_2 , sistema o sólido 2, a la partícula P , la notación empleada para designar las magnitudes será:

- movimiento absoluto: subíndice $2I$ (movimiento de 2 respecto de I)
- movimiento relativo: subíndice 20 (movimiento de 2 respecto de 0)
- movimiento de arrastre: subíndice $0I$ (movimiento de 0 respecto de I)

Para indicar la partícula a la que nos referimos usaremos el superíndice con la letra de la partícula analizada.

La relación entre velocidades quedará por tanto expresada como:

$$\boxed{\vec{V}_{21}^P = \vec{V}_{20}^P + \vec{V}_{01}^P} \quad \text{ó} \quad \vec{V}_{ABS}^P = \vec{V}_{REL}^P + \vec{V}_{ARR}^P$$

AP ✓ 2-3.2-COMPOSICIÓN DE ACELERACIONES

La aceleración absoluta de la partícula respecto de S_I será la suma de:

- una *aceleración relativa*: la que tiene la partícula P respecto de S_0 , es decir, la derivada del vector de posición de P en el sistema S_0 respecto del tiempo.
- una *aceleración de arrastre*: la que tendría P respecto a S_I si se moviese unida al sistema S_0 . Para su análisis, al considerar la partícula como parte del sólido 0 , emplearemos el campo de aceleraciones del sólido rígido.
- una *aceleración de Coriolis*: éste es un término nuevo consecuencia de la velocidad angular del sólido S_0 respecto del S_I y de la velocidad relativa del S_2 respecto del S_0 .

Manteniendo la misma nomenclatura, la aceleración absoluta queda expresada como:

$$\boxed{\vec{a}_{21}^P = \vec{a}_{20}^P + \vec{a}_{01}^P + 2 \cdot \vec{\omega}_{01} \times \vec{V}_{20}^P} \quad \text{ó} \quad \vec{a}_{ABS}^P = \vec{a}_{REL}^P + \vec{a}_{ARR}^P + 2 \cdot \vec{\omega}_{ARR} \times \vec{V}_{REL}^P$$

AP ✓ 2-3.3-COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES ANGULARES

Llamando:

- $\vec{\omega}_{21}$ a la velocidad angular absoluta del sólido S_2 respecto del S_I .
- $\vec{\omega}_{20}$ a la velocidad angular relativa del sólido S_2 respecto del S_0 .
- $\vec{\omega}_{01}$ a la velocidad angular de arrastre del sólido S_0 respecto del S_I .

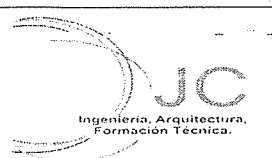
tenemos:

$$\boxed{\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}}$$

De igual manera y manteniendo la nomenclatura, para la aceleración angular obtenemos:

$$\boxed{\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}}$$



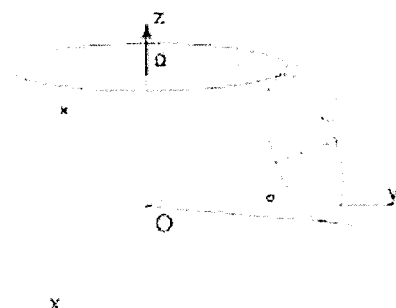
	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Profesor Alex García

Hecho II EJERCICIO CIN.SIST. 1 (Parcial 1996-01-19)

- 1) Un cono de revolución de semiángulo $\alpha/2=30^\circ$ rueda sobre un plano fijo π con una rotación de módulo constante Ω . Calcular el tiempo T que tarda el eje del cono en completar una vuelta completa en torno a un eje perpendicular a π .

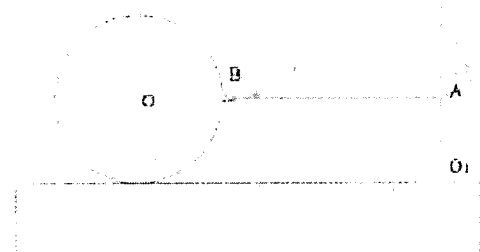
Hecho II EJERCICIO CIN.SIST. 2 (Final 1996-06-24)

- 2) Un cono de revolución σ de semiángulo $\alpha/2 = 30^\circ$ y vértice O rueda sin deslizar sobre un plano horizontal fijo Oxy . Un segundo cono de revolución κ de semiángulo $\beta/2 = 30^\circ$ de eje de revolución vertical, cuyo vértice es también O , permanece en contacto con σ a lo largo de una generatriz común sobre la que puede rodar sin deslizar. El cono κ gira en torno a su eje de revolución con una rotación Ω . Calcular el tiempo necesario para que el eje de σ describa una vuelta completa en torno a z .



Hecho EJERCICIO CIN.SIST. 3 (Final 1996-09-09)

- 3) Una varilla AB de longitud $2a$ puede girar en torno a un eje vertical O_1A sobre el que se encuentra el punto A . La varilla AB se encuentra siempre horizontal y en el punto B se une a una esfera de radio a la cual puede girar en torno a la varilla AB . La esfera, a su vez, rueda y pivota sin deslizar sobre un plano horizontal fijo π . Calcular el módulo y el ángulo que forma con la vertical la rotación de la esfera respecto al plano fijo si la varilla AB tarda un tiempo T en completar una vuelta en torno a la vertical.



Hecho EJERCICIO CIN.SIST. 4 (Final 1999-02-16)

- 4) Una esfera se mueve manteniendo un contacto puntual con el plano fijo $z = 2y$. Si la rotación de la esfera es $\omega = \omega\left(\frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{1}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{2}k\right)$, obtenga los valores modulares de las rotaciones de pivotamiento y de rodadura.

Hecho EJERCICIO CIN.SIST. 5 (Febrero 2001-02-19)

- 5) Un cono recto, de sección circular y semiángulo 30° , rueda sin deslizar sobre un plano siendo ω el módulo de su rotación instantánea cuyo valor es constante. Calcule el mínimo tiempo que transcurre entre dos instantes en los que una misma generatriz del cono entra en contacto con el plano.

Hecho EJERCICIO CIN.SIST. 6 (Febrero 2002-02-11)

- 6) Se considera un cono rodando uniformemente, sin deslizar, sobre un plano fijo. Demuestre que, prescindiendo del vértice, la aceleración de cualquier punto del eje instantáneo de rotación es perpendicular a dicho eje.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajtc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	---	---

EJERCICIO CIN.SIST. 7 (Junio 2005-06-20)

- Hecho
- 7) Un sólido rígido S , se mueve respecto a un sistema fijo S_1 siendo su rotación instantánea ω que expresada en S_1 es $(0, 0, 2)$ rad/s. En el mismo instante la posición y velocidad de un punto $A \in S$, expresados en S_1 son, $A(1, 1, 1)$ m y $v_A(4, -6, 0)$ m/s. Determine las coordenadas del punto que es pie de la perpendicular por A al eje instantáneo de rotación (eir), expresándolas en S_1 .

En el movimiento definido en la cuestión anterior determine la ecuación del eir en S_1 como intersección de dos de sus planos proyectantes, y obtenga los invariantes cinemáticos.

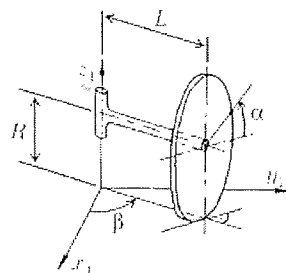
En el movimiento definido en la cuestión anterior la velocidad del punto $B \in S$ cuyas coordenadas en S_1 son $(2, 3, 3)$.

EJERCICIO CIN.SIST. 8 (Septiembre 2006-09-18)

- Hecho
- 8) La plataforma de un "tío-vivo" de radio R gira con velocidad angular ω respecto del suelo. Un disco de radio a , cuyo eje es solidario del "tío-vivo" y dista b del eje del "tío-vivo" ($a < b < R$), gira con velocidad angular $-\omega$ respecto del "tío-vivo". Calcule el módulo de la velocidad de un punto de la periferia del disco de radio a respecto del suelo.

EJERCICIO CIN.SIST. 9 (Junio 2008-06-20) (Septiembre 2008-09-05)

- Hecho
- 9) El círculo de radio R de la figura rueda sin deslizar respecto del plano x_1y_1 y permanece perpendicular a dicho plano en todo instante. El círculo está unido por su centro a una estructura en forma de T con un brazo de longitud L que gira alrededor del eje z_1 , manteniéndose paralelo al plano x_1y_1 , y que permite el giro del círculo respecto de aquella estructura. Determine la velocidad angular $\dot{\beta}$ en función de $\dot{\alpha}$, R y L .

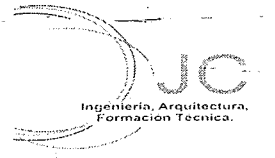


EJERCICIO CIN.SIST. 10 (Septiembre 2008-09-05)

- 10) Una esfera de radio R rueda sin deslizar a la vez sobre el plano $O_1x_1y_1$ y sobre el plano $O_1x_1z_1$. Si el módulo de la velocidad de su centro es v , calcule el módulo ω del vector rotación en función de R y v .

EJERCICIO CIN.SIST. 11 (Junio 2009-06-12)

- 11) Se considera un sólido rígido con movimiento de traslación. Señale la proposición o proposiciones correctas.
- Las velocidades de sus puntos son constantes.
 - Las trayectorias de sus puntos son superponibles por una traslación.
 - La velocidad angular no es nula en una traslación circular.
 - Las aceleraciones de sus puntos son iguales en cada instante.
 - Las trayectorias de sus puntos son rectilíneas.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
---	--	---

REPASO

EJERCICIO R-CIN.SIST. 1 (Parcial 1997-01-27) (Junio 2009-06-12)

- ✓ (R) 1) Justifique si los puntos A y B de un sólido rígido, cuyas posiciones en un instante se expresan en una referencia cartesiana de base ortonormal mediante $A(1,2,-1)$ y $B(1,-2,1)$, pueden poseer, en ese instante, las velocidades $v_A(1,2,5)$ y $v_B(-1,1,4)$ expresadas en la misma base.

EJERCICIO R-CIN.SIST. 2 (Junio 1997-06-19)

- ✓ (R) 2) Un elipsoide cuyo centro O es fijo, rueda y pivota sin deslizar sobre un plano fijo, siendo P el punto genérico de contacto entre el plano y el elipsoide. Deduzca la posición del eje instantáneo de rotación del elipsoide. *Lecho*

EJERCICIO R-CIN.SIST. 3 (Parcial 1998-02-03)

- (R) 3) Escriba la expresión general de la aceleración de un punto P de un sólido rígido, supuestas conocidas su velocidad angular y la derivada temporal de la misma, así como la aceleración de otro punto O .

EJERCICIO R-CIN.SIST. 4 (Junio 2003-06-09)

- ✓ (R) 4) Un cono recto de sección circular rueda uniformemente sobre un plano fijo, sin deslizar. Indique los axoides del movimiento.

EJERCICIO R-CIN.SIST. 5 (Junio 2004-06-17 Septiembre 2005-09-05 Septiembre 2006-09-18 Junio 2008-06-20)

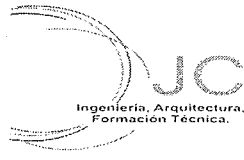
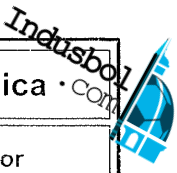
- (R) 5) Un punto O de un sólido rígido posee una velocidad v_O y una aceleración a_O . En el mismo instante la rotación del sólido es ω y su derivada temporal $\dot{\omega}$. Escriba la expresión de la velocidad y aceleración de otro punto, P , del sólido.

EJERCICIO R-CIN.SIST. 6 (Junio 2006-06-26)

- 6) Una esfera de centro O y radio $R = 0,1$ m rueda sin deslizar sobre el plano $z = 0$. En un instante su velocidad angular es $\omega = 3i + 4j + 2k$ rad/s. Determine las rotaciones de rodadura y de pivotamiento, y el módulo de la velocidad del centro O , en unidades SI.

EJERCICIO R-CIN.SIST. 7 (Septiembre 2006-09-18)

- 7) Señale la proposición o proposiciones correctas para cualquier sólido rígido con movimiento de traslación:
- Todos los puntos poseen trayectorias rectilíneas.
 - La velocidad y aceleración, en un instante, son las mismas para todos los puntos.
 - La velocidad es constante durante el movimiento.
 - La velocidad angular es nula.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	 Mecánica Profesor Alex García
--	--	---

EJERCICIO R-CIN.SIST. 8 (2) (Febrero 2007-02-12)

- 8) La rotación instantánea de un sólido rígido, σ , es $\omega = j + 2k$ y la velocidad del punto A (1, 1, 0) es $v_A = -i + k$. Determine la velocidad del punto de σ que es coincide con el origen de coordenadas, si todas las magnitudes estan en unidades SI.

En el mismo instante del movimiento del sólido rígido σ de la cuestión anterior, se sabe, además, que la aceleración del origen de coordenadas y la aceleración angular poseen valores nulos. Obtenga el módulo de la aceleración del punto A.

EJERCICIO R-CIN.SIST. 9 (Febrero 2007-02-12)

- 9) Un punto material recorre una circunferencia de radio R partiendo del reposo, con una velocidad proporcional al tiempo, $v = kt$. Calcule el tiempo que emplea en dar la primera vuelta y el módulo de la aceleración al final de la misma.

EJERCICIO R-CIN.SIST. 10 (Junio 2008-06-20)

- 10) En un movimiento de traslación circular uniforme de un sólido rígido, la trayectoria de un punto A (0, R , 0) de dicho sólido es la curva de ecuaciones $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, y su velocidad es $v_A = v$. Calcule los valores modulares de la velocidad y de la aceleración de otro punto B (0, $2R$, 0) del mismo sólido.

EJERCICIO R-CIN.SIST. 11 (Junio 2009-06-12)

- 11) La aceleración angular de un sólido rígido es $-3j \text{ rad/s}^2$ y su velocidad angular $2k \text{ rad/s}$. Determine las componentes cartesianas de la aceleración del punto P (1, 1, 0) (coordenadas cartesianas en metros) si la aceleración del punto O (0, 0, 0) es de $(1, 0, 1) \text{ m/s}^2$.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Profesor Alex García

PROBLEMA CIN.SIST.1

Se considera un cono recto de semiángulo $\alpha = 30^\circ$ y generatriz $l = 40$ cm, que rueda uniformemente sin deslizar sobre el plano $z_1 = 0$ de un sistema de referencia $S_1\{O_1, x_1, y_1, z_1\}$, con su vértice fijo en el origen de coordenadas, pasando sobre el semieje $O_1 y_1$ tres veces cada minuto. Un punto móvil P recorre una generatriz del cono, $O_1 A$, con aceleración constante respecto al cono, de valor $a = 3,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. En el instante inicial $t = 0$, el punto P se encuentra en el vértice del cono y su velocidad es nula, la generatriz $O_1 A$ está situada sobre el semieje $O_1 x_1$, siendo $O_1 A \cdot i_1 > 0$ y el cono se mueve de forma que la velocidad de su centro de masas, v_C , satisface la condición $v_C \cdot j_1 > 0$.

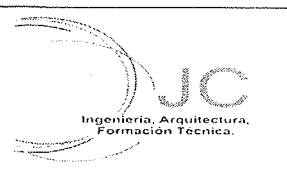
Se define otro sistema de referencia $S\{O, x, y, z\}$, que tiene el origen y el tercer eje coincidentes con los respectivos de S_1 , y se mueve de forma tal que el eje del cono siempre permanece en reposo en S. En $t = 0$ los triedros de S_1 y S coinciden.

- 1) Para el movimiento del cono respecto a S_1 , indique el eje instantáneo de rotación y calcule el valor de la rotación instantánea, expresando este último resultado en las coordenadas y base del sistema S. Indique los axoides del movimiento en S_1 .
- 2) Para el movimiento del cono respecto a S, indique el eje instantáneo de rotación y calcule el valor de la rotación instantánea, expresando este último resultado en las coordenadas y base del sistema S. Indique los axoides del movimiento en S.

Cuando el punto móvil P llega a la base del cono, determine:

- 3) Intervalo de tiempo transcurrido desde el instante inicial.
- 4) Posición del cono y del punto P en la referencia S_1 , dibujando un croquis al respecto.
- 5) Para el movimiento del cono respecto a S, ecuación del eje instantáneo de rotación y valor de la rotación instantánea, expresando las soluciones en las coordenadas y base del sistema S_1 .
- 6) Para el movimiento del cono respecto a S_1 , ecuación del eje instantáneo de rotación y valor de la rotación instantánea, expresando las soluciones en las coordenadas y base del sistema S_1 .
- 7) Velocidad de P respecto a S_1 , expresando sus componentes en la base del sistema S_1 .
- 8) Aceleración de P respecto a S_1 , expresando sus componentes en la base del sistema S_1 .

NOTA: Los resultados obtenidos se simplificarán y se expresarán, en su caso, en función de números irracionales, sin efectuar operaciones con valores aproximados de estos últimos.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Profesor Alex García

PROBLEMA CIN.SIST.2 (Sep 2004)

Una bola de radio $r = 3$ cm rueda sin deslizar sobre la superficie exterior de un cono de revolución de eje Oz cuya ecuación es

$$z^2 - 3(x^2 + y^2) = 0 \quad (-\infty < z < +\infty)$$

La bola se mantiene en contacto con el cono en dos puntos de su superficie de manera que el centro de la bola, C, describe una circunferencia de radio OC (O es el vértice del cono) situada en el plano $z = 0$.

- 1) Adoptando $y = 0$ para el plano de su hoja de examen, dibuje el cono y la esfera cuando el centro de la misma se encuentre sobre el semieje Ox positivo. (Dibuje Ox paralelo a las líneas de escritura de la cabecera de la hoja).
- 2) Calcule el semiángulo del cono y compruebe que su valor es $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
- 3) Determine la distancia $\overline{OC}$ y compruebe que es igual a $2\sqrt{3}$ cm.

De aquí en adelante, se supone que la bola se mueve, partiendo del reposo en la posición indicada en 1), siendo constante la aceleración tangencial de C con valor $a_{Ct} = 2\sqrt{3}\pi \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$. En el instante inicial, la aceleración de C se dirige según Oy positivo.

- 4) Calcule el tiempo, t_1 , que transcurre hasta que C vuelve a pasar por primera vez por la posición inicial.
- 5) Indique cuáles son los axoides del movimiento de la bola.
- 6) Obtenga la velocidad angular de la bola, $\vec{\omega}(t)$, en función del tiempo.
- 7) Determine $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$.
- 8) Calcule la aceleración de C en la posición del apartado 4).

Si A es el punto de la bola en contacto con el cono ($z > 0$) en la posición indicada en 4), obtenga:

- 9) Velocidad de A.
- 10) Aceleración de A.

* * * * *

NO se permite el uso de calculadora
Duración: 90 minutos

Calificación: 50 % del total del examen.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tfno: 91 535 75 29 www.academiajtc.com	Profesor Alex García

PROBLEMA CIN.SIST.3 (JUN 2005)

El sistema de referencia representado, $S \{O, x, y, z\}$ es solidario a la cabina C , estando el eje z situado sobre el eje de giro de la cabina y siendo además coincidente en dirección y sentido con z_1 del sistema ligado al suelo S_1 .

La cabina C de la grúa gira en torno a la vertical con velocidad angular $\omega_1(t)\mathbf{k}_1$, al mismo tiempo la pluma o aguilón $\mathcal{A}$, se levanta respecto a la cabina con una velocidad angular $\omega_2(t)\mathbf{i}$ y se consideran en reposo las orugas o tren de desplazamiento de la grúa.

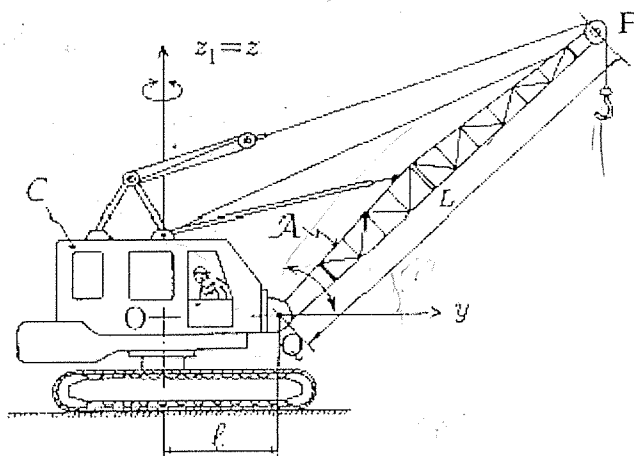
El anclaje de la pluma a la cabina en el punto Q , está situado a una distancia ℓ del eje de giro de la cabina y la longitud de la pluma es L .

I) Se piden, expresadas en S :

- a) 1) Velocidad angular $\omega_{\mathcal{A}/S_1}$ y aceleración angular $\alpha_{\mathcal{A}/S_1}$ de la pluma respecto de la referencia S_1 .

II) En esta segunda parte se considera la situación:

- Reposos de las orugas o tren de desplazamiento de la grúa.
- Rotaciones $\omega_1(t) = \text{cte.} = \omega_1$ y $\omega_2(t) = \text{cte.} = \omega_2$.
- Ángulo de la pluma con la horizontal = β .



Se piden las siguientes magnitudes expresándolas en S .

- b) 2) Velocidad y aceleración del punto Q , extremo de apoyo de la pluma, respecto al suelo (S_1), v_{Q/S_1} y a_{Q/S_1} .
- c) 3) Velocidad del punto P , extremo de la pluma, respecto al suelo (S_1), v_{P/S_1} .
- d) 4) Aceleración del punto P respecto al suelo (S_1), a_{P/S_1} .
- e) 5) Velocidad y aceleración del punto P respecto a la cabina (S), $v_{P/S}$ y $a_{P/S}$.

Considerando el movimiento de $\mathcal{A}$ respecto a S_1 descompuesto en los movimientos de $\mathcal{A}$ respecto a C y de C respecto a S_1 , determine las siguientes magnitudes expresándolas en S .

- f) 6) Velocidad y aceleración de arrastre del punto P .
- g) 7) Aceleración de Coriolis del punto P .
- h) 8) Compruebe que la solución de los apartados 3) y 4) coincide con la obtenida a partir de los apartados 5), 6) y 7).

III) En esta tercera y última parte, el gancho de amarre que pende del cable de sustentación está a distancia h de P y tiene masa m .

- 9) Siendo $\omega_1 = \omega_2 = 0$, el carro avanza rectilíneamente con aceleración constante de valor a . Determine el ángulo constante γ (por medio de su tangente, $\tan \gamma$) que forma la vertical con el cable, y su tensión, en condiciones de movimiento estacionario.
- 10) Siendo $\omega_2 = 0$ y $\omega_1 = \text{cte.}$ y estando el carro parado, determine el ángulo constante γ (por medio de su tangente, $\tan \gamma$) que forma la vertical con el cable, y su tensión, en condiciones de movimiento estacionario, facilitando las ecuaciones que proporcionan $\tan \gamma$ y T en función de datos del enunciado.

CINEMÁTICA PLANA

1 DEFINICIÓN DEL MOVIMIENTO PLANO

Se trata de un movimiento en el que las velocidades de todos los puntos del sólido S están contenidas en un plano, esto es, todos los puntos siguen trayectorias paralelas a un plano fijo Π_1 .

Se demuestra que $\vec{\omega}$ es un vector perpendicular a Π_1 , por tanto perpendicular a las velocidades de todos los puntos de S .

$$\Rightarrow V_{\min} = \vec{V}^P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = 0$$

Los axoides del movimiento serán superficies cilíndricas normales al plano director, tangentes entre sí a lo largo de una generatriz sobre la que se tiene un movimiento de rodadura sin deslizamiento.

Los puntos de S que evolucionan sobre Π_1 constituyen el plano móvil $\Pi \rightarrow$ Estudio se reduce al movimiento de un plano móvil sobre un fijo.

2 C.I.R. Y SEGUIDOR DE POLOS

- C.I.R.: Centro Instantáneo de Rotación. Es un punto intersección del EIR con el plano Π y cuya velocidad respecto a Π_1 es nula. Se denota por $I(t)$ y será un punto distinto en cada instante.
- Seguidor de polos: Es un punto que se mueve de forma que su posición coincide en cada instante con la del C.I.R. pero no pertenece ni al plano fijo ni al móvil, simplemente acompaña al C.I.R. y se denota por I^* .

Por definición $\vec{U}_I = \vec{0} \rightarrow$ C.V.R. $\vec{U}_P = \vec{U}_I + \vec{\omega} \times \vec{IP} = \vec{\omega} \times \vec{IP}$

$\vec{U}^P = \vec{\omega} \times \vec{IP} \rightarrow \vec{U} \perp \vec{\omega}$ y $\vec{U} \perp \vec{IP} \rightarrow$ Si tenemos las velocidades de 2 puntos y tiramos perpendiculares, donde se corten estará el C.I.R.

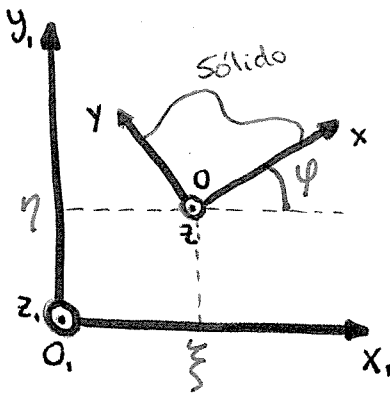
3 BASE Y RULETA

Son equivalentes a los axoides fijo y móvil del tema anterior $\rightarrow$ Curvas que describe el seguidor de polos.

Base: Lugar geométrico de los puntos del plano que han sido C.I.R.

Ruleta: Lugar geométrico de los puntos del sólido que han sido C.I.R.

Fijándonos en el seguidor de polos, la base y la ruleta se pueden definir como las trayectorias de I^* respecto a los planos fijo y móvil respectivamente.



Sea el sistema fijo $\{x_1, y_1, z_1\} \Rightarrow z_1 \parallel z_1$
 Sea el sistema móvil $\{x, y, z\}$

Se definen las coordenadas de O en el sistema fijo S_1 como ξ y η y se designa φ al ángulo que forma en eje x con x_1 .

A partir de esto se definirán las ecuaciones de la base y la ruleta.

- Ecuaciones paramétrico-temporales de la base

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \xi - \frac{\dot{\eta}}{\dot{\varphi}} \\ y_1(t) &= \eta + \frac{\dot{\xi}}{\dot{\varphi}} \end{aligned}$$

- Ecuaciones paramétrico-temporales de la ruleta:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\dot{\xi} \sin \varphi - \dot{\eta} \cos \varphi}{\dot{\varphi}} \\ y(t) &= \frac{\dot{\xi} \cos \varphi + \dot{\eta} \sin \varphi}{\dot{\varphi}} \end{aligned}$$

Si eliminamos el tiempo obtenemos las ecuaciones paramétrico-angulares.

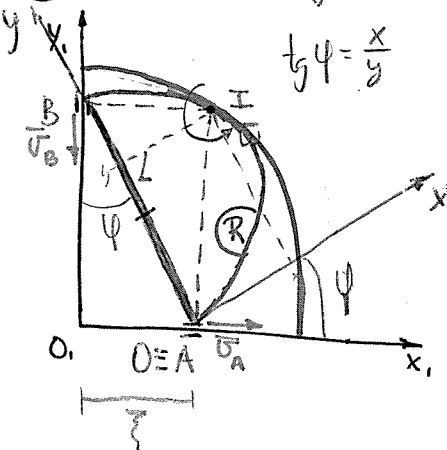
Base:

$$\begin{aligned} x_1(\varphi) &= \xi - \eta' \\ y_1(\varphi) &= \eta + \xi' \end{aligned}$$

Ruleta

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \xi' \sin \varphi - \eta' \cos \varphi \\ y(\varphi) &= \xi' \cos \varphi + \eta' \sin \varphi \end{aligned}$$

Calcular base y ruleta



$$\vec{v}_A = v_A \vec{i}, \quad \vec{v}_B = v_B (-\vec{j}_1)$$

$$O(\xi, \eta) \rightarrow \xi = L \sin \varphi; \quad \xi' = L \cos \varphi$$

$$\eta = 0; \quad \eta' = 0$$

Base

$$\begin{aligned} x_1(\varphi) &= L \sin \varphi \\ y_1(\varphi) &= L \cos \varphi \\ x_1^2 + y_1^2 &= L^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \end{aligned}$$

Base: $x_1^2 + y_1^2 = L^2$

Ruleta

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= L \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) \quad (1) \\ y(\varphi) &= L \cos^2(\varphi) \quad (2) \\ \tan \varphi &= \frac{x}{y} \quad (3) \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = Ly; \quad x^2 + y^2 - Ly = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \text{Ruleta}$$

$$\begin{aligned} y &= L \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} \\ &= L \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = L \frac{y^2}{y^2 + x^2} \end{aligned}$$

4 MOVIMIENTO DE UNA BASE DE FRENET

Sabemos que la base de Frenet la constituyen los vectores $\{\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}\}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{t}}{ds} &= \bar{\Omega} \times \bar{t} \\ \frac{d\bar{n}}{ds} &= \bar{\Omega} \times \bar{n} \\ \frac{d\bar{b}}{ds} &= \bar{\Omega} \times \bar{b} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d\bar{u}}{ds} = \bar{\Omega} \times \bar{u}$$

con $\bar{\Omega} = \frac{\bar{t}}{\tau} + \frac{\bar{b}}{\rho}$

$\uparrow$ radio de curvatura $\uparrow$ radio de torsión

En curvas planas $\tau \rightarrow \infty$

$$\bar{\Omega} = \frac{\bar{b}}{\rho}$$

$$\bar{OI} = \rho \cdot \bar{n} \quad \text{ver demo ej. Sep 96}$$

5 VELOCIDAD DE I*

Definimos la velocidad del seguidor de polos como:

$$\bar{U}^{I^*} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{n}_i}{\bar{n} \cdot \bar{n}_i - \frac{1}{\rho_i}}$$

$\bar{\omega}$: móvil respecto a fija

$\bar{n}_i$: normal Π_i , plano fijo

$\bar{n}$: normal Π , plano móvil

ρ : ruleta

ρ_i : base

6 CAMPO DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES. ACELERACIÓN DE I. POLO DE ACELERACIONES

Obtenión de la velocidad del seguidor de polos, así como la aceleración del CIR

$$\bar{I} \equiv I^* \Rightarrow \bar{I}P \equiv \bar{I}^*P$$

$$\bar{U}^P = \bar{U}^I + \bar{\omega} \times \bar{I}P \xrightarrow{o(plano)} \bar{U}^P = \bar{\omega} \times \bar{I}^*P \quad (1)$$

$$\bar{a}^P = \bar{a}^I + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{I}P) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{I}P) \xrightarrow{IP \equiv I^*P} \bar{a}^P = \bar{a}^I + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{I}^*P) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{I}^*P) \quad (2)$$

Derivamos (1) respecto de t en sistema fijo

$$\frac{d\bar{U}^P}{dt} = \bar{a}^P = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{I}^*P \right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{I}^*P}{dt} \right)$$

Derivación en eje móvil: $\bar{I}^*P = \bar{O}_iP - \bar{O}_iI^*$

$$\frac{d(\bar{I}^*P)}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{O}_iP - \bar{O}_iI^*) = \bar{V}_P - \bar{V}_{I^*} \stackrel{(1)}{=} \bar{V}_P - \bar{V}_{I^*} = \bar{\omega} \times \bar{I}^*P - \bar{V}_{I^*}$$

$$\bar{a}^P = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{I}^*P + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{I}^*P) - \bar{\omega} \times \bar{V}_{I^*} \quad (3)$$

Identificamos coeficientes entre (2) y (3) $\rightarrow \bar{a}^I = -\bar{\omega} \times \bar{V}_{I^*}$

Multiplícando por $\bar{\omega} \rightarrow \bar{\omega} \times \bar{a}^I = \bar{\omega} \times (-\bar{\omega} \times \bar{V}_{I^*}) = (\bar{\omega} \cdot \bar{V}_{I^*}) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) \bar{V}_{I^*} = \omega^2 \bar{V}_{I^*}$

$0 \rightarrow \bar{\omega} \perp \bar{V}_{I^*}$

Por tanto

$$\bar{V}_{I^*} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{a}^I}{\omega^2}$$

Además se define I^Γ como el punto tal que $\bar{a}^I = \bar{0}$, llamado polo de aceleraciones:

$$\bar{I}^\Gamma = \frac{\omega \dot{\bar{\omega}} \bar{U}^{I^*} - \omega^3 \bar{K} \times \bar{U}^{I^*}}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$$

7 PERFILES CONJUGADOS

En movimiento plano, dos curvas que permanecen siempre tangentes entre sí forman una pareja de perfiles conjugados.

El punto de tangencia se llama punto característico.

- A partir del perfil conjugado móvil sean:

$$f(x, y) = 0 \text{ es perfil móvil}$$

ξ, η, φ coordenadas que posicione el plano móvil respecto al fijo

La relación entre las coordenadas del móvil con respecto al fijo es:

$$\begin{cases} x = (x_i - \xi) \cos \varphi + (y_i - \eta) \sin \varphi \\ y = -(x_i - \xi) \sin \varphi + (y_i - \eta) \cos \varphi \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación del plano móvil que queda en variables

$$x_i, y_i, t: f(x, y) \rightarrow \begin{cases} h(x_i, y_i, t) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_i = x_i(t) \\ y_i = y_i(t) \end{cases} \text{ que definen}$$

el punto característico al fijo o lo que es lo mismo el perfil conjugado fijo.

Si los datos fueran $\begin{cases} f(x, y) = 0 \text{ es móvil} \\ \xi(\varphi), \eta(\varphi) \end{cases}$, al sustituir quedaría

$$\begin{cases} g(x_i, y_i, \varphi) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_i = x_i(\varphi) \\ y_i = y_i(\varphi) \end{cases} \text{ coordenadas del punto característico}$$

- A partir del perfil conjugado fijo $f(x_i, y_i) = 0$, se definen las coordenadas del fijo como:

$$\begin{cases} x_i = \xi + x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y_i = \eta + x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

- Propiedad: El CIR de dos perfiles conjugados se encuentra sobre las normales a las parejas de perfiles.

Nota!! Recordad que

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v_0}}{|\overrightarrow{w}|^2}$$

8 MOVIMIENTO DE 3 PLANOS

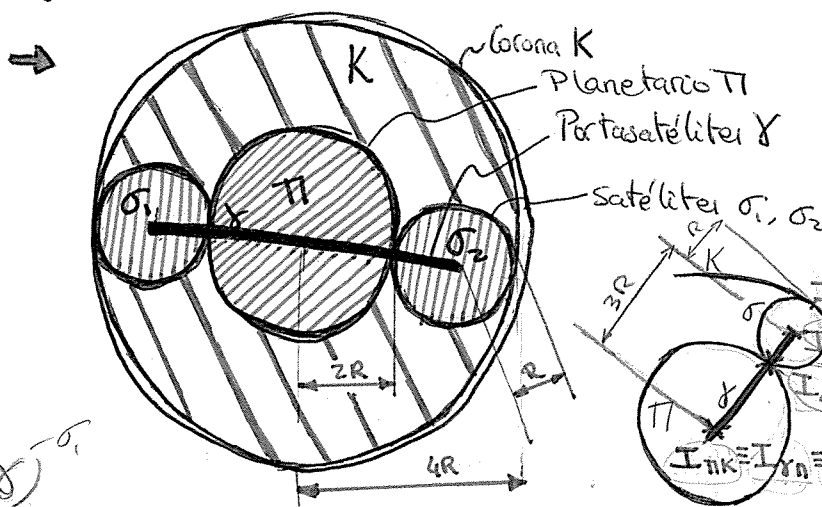
Sean los planos π_1, π_2 y π_3 que evolucionen definiendo los movimientos relativos π_2/π_1 (21), π_1/π_2 (12), π_3/π_1 (31), π_1/π_3 (13), π_3/π_2 (32) y π_2/π_3 (23).

Por movimientos inversos la posición del CIR de los mov $\pi_i/\pi_j, \pi_j/\pi_i$ es la misma por lo que hay 3 CIR.

Se demuestra que los CIR están alineados.

NOTA!! Velocidad respecto a π_1 de
 $I_{32} \rightarrow \in \pi_2$ $\vec{v} = \vec{\omega}_{21} \times \vec{I}_{21} \cdot \vec{I}_{32}$
 $I_{32} \rightarrow \in \pi_3$ $\vec{v} = \vec{\omega}_{31} \times \vec{I}_{31} \cdot \vec{I}_{32}$

9 CUESTIONES



CAJA EPICICLOIDAL

a) Bloqueo el planetario. Se pide

$$\Gamma_A = \frac{\omega_K}{\omega_\gamma}$$

Teoría

$$\vec{\omega}_{21} \times \vec{I}_{21} \cdot \vec{I}_{32} = \vec{\omega}_{31} \times \vec{I}_{31} \cdot \vec{I}_{32}$$

Planetario $\pi \rightarrow 1$

$$\vec{\omega}_{\gamma\pi} \times \vec{I}_{\gamma\pi} \cdot \vec{I}_{\gamma K} = \vec{\omega}_{K\pi} \times \vec{I}_{K\pi} \cdot \vec{I}_{\gamma K}$$

$\pi \rightarrow 0 \rightarrow$ Hay que buscar otra relación

$$\frac{\omega_K}{\omega_{\sigma_1}} = \frac{\omega_K}{\omega_\gamma} = \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}$$

$$\Gamma_A = \frac{\omega_K}{\omega_\gamma} = \frac{3}{2}$$

b) Bloqueo portatélite.

Se pide $\Gamma_B = \frac{\omega_K}{\omega_\pi}$

$$\vec{\omega}_{21} \times \vec{I}_{21} \cdot \vec{I}_{32} = \vec{\omega}_{31} \times \vec{I}_{31} \cdot \vec{I}_{32}$$

Portatélite $\gamma \equiv 1$

$$\vec{\omega}_{K\gamma} \times \vec{I}_{K\gamma} \cdot \vec{I}_{\gamma\pi} = \vec{\omega}_{\pi\gamma} \times \vec{I}_{\pi\gamma} \cdot \vec{I}_{K\gamma}$$

Buscamos otra relación

$$\Gamma_B = \frac{\omega_K}{\omega_\pi} = -\frac{1}{2}$$

$$\vec{\omega}_{K\sigma} \times \vec{I}_{K\sigma} \cdot \vec{I}_{\sigma\gamma} = \vec{\omega}_{\sigma\gamma} \times \vec{I}_{\sigma\gamma} \cdot \vec{I}_{K\sigma}$$

$$\omega_K \cdot 4R = \omega_{\sigma_1} \cdot R \rightarrow \frac{\omega_K}{\omega_{\sigma_1}} = \frac{1}{4}$$

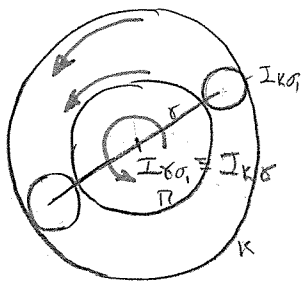
$$\vec{\omega}_{\pi\sigma} \times \vec{I}_{\pi\sigma} \cdot \vec{I}_{\sigma\gamma} = \vec{\omega}_{\sigma\gamma} \times \vec{I}_{\sigma\gamma} \cdot \vec{I}_{\pi\sigma}$$

$$\omega_\pi \cdot 2R = \omega_{\sigma_1} \cdot (-R) \rightarrow \frac{\omega_\pi}{\omega_{\sigma_1}} = -\frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_K}{\omega_{\sigma_1}} = \frac{1}{4} \\ \frac{\omega_\pi}{\omega_{\sigma_1}} = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{\omega_K}{\omega_\pi} = -\frac{1}{2}$$

c) Se bloquea el giro de los satélites respecto al portasatélites.

$$\Gamma_D = \frac{\omega_K}{\omega_S}$$



La rotación de todos los elementos es la misma

$$\Gamma_D = \frac{\omega_K}{\omega_S} = 1$$

d) Se bloquea la corona. $\Gamma_C = \frac{\omega_S}{\omega_\pi}$

Corona K $\rightarrow 1$

$$\overline{\omega}_{S/K} \times \overline{I}_{SK} \overline{I}_{S\pi} = \overline{\omega}_{\pi/K} \times \overline{I}_{\pi K} \overline{I}_{\pi S}$$

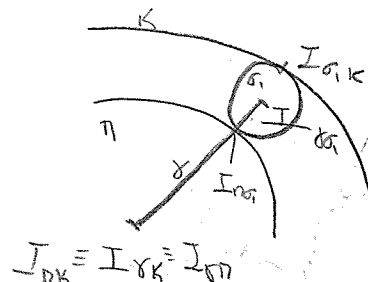
Buscamos otra relación

$$\overline{\omega}_{S/K} \times \overline{I}_{SK} \overline{I}_{S\pi} = \overline{\omega}_{S/\pi} \times \overline{I}_{\pi K} \overline{I}_{\pi S}$$

$$\omega_S \cdot 3R = \omega_{S/\pi} \cdot (-R) \rightarrow \frac{\omega_S}{\omega_{S/\pi}} = -\frac{1}{3}$$

$$\overline{\omega}_{\pi/K} \times \overline{I}_{\pi K} \overline{I}_{\pi S} = \overline{\omega}_{S/\pi} \times \overline{I}_{\pi K} \overline{I}_{\pi S}$$

$$\omega_\pi \cdot 2R = \omega_{S/\pi} \cdot (-2R) \rightarrow \frac{\omega_\pi}{\omega_{S/\pi}} = -1$$



$$I_{\pi K} = I_{SK} = I_{S\pi}$$

$$\frac{\omega_S}{\omega_{S/\pi}} = \frac{\omega_S}{\omega_\pi} = \frac{1}{3} = \Gamma_C$$

Enero 1996 $\{O, \vec{e}, \vec{j}\}$ sobre plano móvil Π que evoluciona respecto a Π_1 fijo. $\xi(t), \eta(t)$ y $\psi(t)$ dados. Se piden ecuaciones de base y ruleta:

Base $\begin{cases} x_1(t) = \xi - \frac{\dot{\eta}}{\dot{\psi}} \\ y_1(t) = \eta + \frac{\dot{\xi}}{\dot{\psi}} \end{cases}$ Ruleta $\begin{cases} x(t) = \xi \sin \psi - \eta \cos \psi \\ y(t) = \xi \cos \psi + \eta \sin \psi \end{cases}$

Junio 1996 Velocidad de oscesión de polos y aceleración CIR.

$$\overline{U}_I = \frac{\overline{\omega} \times \overline{n}_i}{\overline{n} \cdot \overline{n}_i - 1}$$

ω : rot. móvil respecto a fijo
 $\overline{n}_i$: vector normal a plano fijo
 $\overline{n}$: " " " " móvil
 ρ_i : rad. curvatura perfil fijo
 ρ : " " " " móvil

$$\overline{U}_I = \frac{\overline{\omega} \times \overline{a}_I}{\omega^2} \rightarrow \overline{a}_I = -\overline{\omega} \times \overline{U}_I$$

Septiembre 1996, Enero 1997 Demostrar que el CIR del movimiento de una base de Frenet de una curva plana se encuentra en ρ de ésta.

Por derivación en ejes mov $\overline{U} \leftarrow \frac{d\overline{U}}{dt} = \frac{d\overline{U}}{dt} \Big|_S + \overline{\omega} \times \overline{U} = \overline{\omega} \times \overline{U}$ (1)

Por Frenet, $\frac{d\overline{U}}{dt} = \overline{\Omega} \times \overline{U}$; $\frac{d\overline{U}}{dt} = \frac{d\overline{U}}{dt} \frac{dt}{dt} = \overline{\Omega} \times \overline{U}$ (2)

(1) (2) $\rightarrow \overline{\omega} \times \overline{U} = (\overline{\Omega} \times \overline{U}) \frac{dt}{dt}$; $\overline{\omega} = \overline{\Omega} \frac{dt}{dt}$ con $\overline{\Omega} = \frac{\overline{\omega}}{\rho}$ por curva plana ($Z \rightarrow m$)

Sabemos $\overline{\Omega} = \frac{\overline{\omega} \times \overline{U}_0}{|\overline{\omega}|^2} = \frac{\overline{\Omega} \frac{dt}{dt} \times \frac{dt}{dt} \overline{U}_0}{\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{dt}{dt} \right)^2} = \frac{\overline{\Omega} \times \overline{U}_0}{\frac{1}{\rho^2}} = \frac{\overline{\Omega}}{\frac{1}{\rho^2}} = \overline{\Omega} \rho$

El CIR ESTÁ en el centro de curvatura de flexión

Septiembre 2002

Conocemos $(\vec{V}_0, \vec{\omega})$. Deducir expresión vectorial que determine la posición del CIR

Por CVSR $\vec{V}_I = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OI}$; $-\vec{V}_0 \times \vec{\omega} = (\vec{\omega} \times \vec{OI}) \times \vec{\omega}$

$\vec{V}_0 \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OI})$; $\vec{V}_0 \times \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{O} - (\vec{\omega} \cdot \vec{O}) \vec{\omega} = -|\vec{\omega}|^2 \vec{OI} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{OI} = \frac{\vec{V}_0 \times \vec{\omega}}{-|\vec{\omega}|^2}$; $\vec{OI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_0}{|\vec{\omega}|^2}$

Febrero 2003

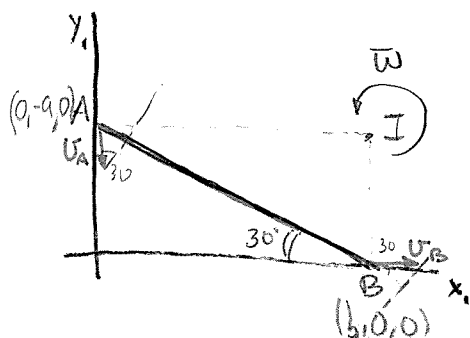
Ruedas 50 cm ^{diámetro} giran a 900 rpm. Se pide $V_{\text{automovil}}$ en Km/h

$\omega = 900 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 30\pi \text{ rad/s}$

$V = \omega \cdot r = 30\pi \cdot \frac{0.5}{2} = \frac{15}{2} \pi \text{ m/s} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 27\pi \text{ Km/h}$

Febrero 2003

$\theta = 30^\circ$ (un velo) $V_A = 4 \text{ m/s}$ ¿ V_B ?



Por theorema de los vel. proyectadas

$V_A \cdot \frac{AB}{|AB|} = V_B \cdot \frac{AB}{|AB|}$

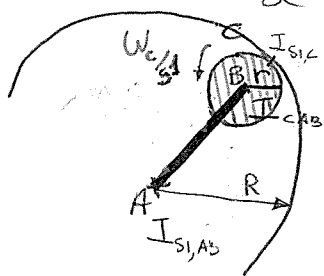
$V_A \sin 30^\circ = V_B \cdot \cos 30^\circ$

$V_B = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$V_B = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ m/s}$

Junio 2003

Círculo c de centro B y radio r RSD por corona hueca y fija de centro A y radio interior $R > r$. Barra AB . Se pide $\omega_{c/\text{corona}}$ $\omega_{c/AB}$ si $\omega_{AB/\text{corona}} = \Omega$



$\omega_{c/SI} = \omega_{c/AB} + \omega_{AB/SI} (*)$

$\vec{\omega} \times \vec{I_{SI,AB}A} = \vec{\omega} \times \vec{I_{SI,AB}B}$
 $\Omega (R-r) = \omega_{c/SI} \times (-r)$

$\omega_{c/SI} = -\frac{\Omega (R-r)}{r}$

$(*) \rightarrow -\frac{\Omega (R-r)}{r} = \Omega = \omega_{c/AB}$

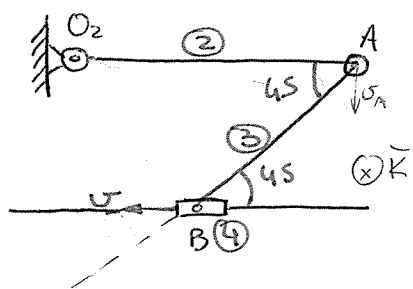
$\omega_{c/AB} = -\Omega \left(\frac{R-r+r}{r} \right) = -\Omega \frac{R}{r}$

$\omega_{c/AB} = -\Omega \frac{R}{r}$

Septiembre 2003 $\vec{\omega}_{manivela 2}$? si $U_A = U$ en sentido indicado

Long: Manivela: a, Biela: b

Teorema vel proy.



$$\overline{O_2 A} = a$$

$$\overline{AB} = b$$

$$U_A \cos 45^\circ = U \cdot \cos 45^\circ$$

$$U_A = U$$

$$\omega_A = \omega_2 = U/r = U/a$$

$$\omega_2 = U/a, \quad \boxed{\bar{\omega}_2 = U/a \vec{k}}$$

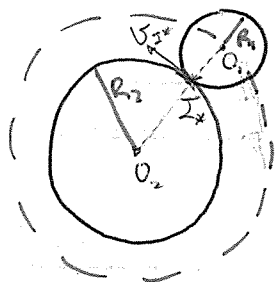
Febrero 2004 Ruedas 50cm diametro. $\omega = 1200 \text{ rpm}$ $U [\text{Km/h}]$

$$\omega = 1200 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60} = 40\pi \text{ rad/s}$$

$$U = \omega \cdot r = 40\pi \cdot \frac{50 \cdot 10^{-2}}{2} = 10\pi \text{ m/s}$$

$$\frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ Km}}{1000 \text{ m}} = \boxed{36\pi \text{ Km/h}}$$

Febrero 2004 Circunferencia R_1 rueda exterior de otra fija coplanaria, a) R_2 , Trueta a R_2 . Se pide aceleración O_1 (m/s²)



$$U_0 = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{T}$$

$$a_0 = \frac{U_0^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi(R_1 + R_2)}{T}\right)^2}{(R_1 + R_2)} = \boxed{\frac{4\pi^2}{T^2} (R_1 + R_2)}$$

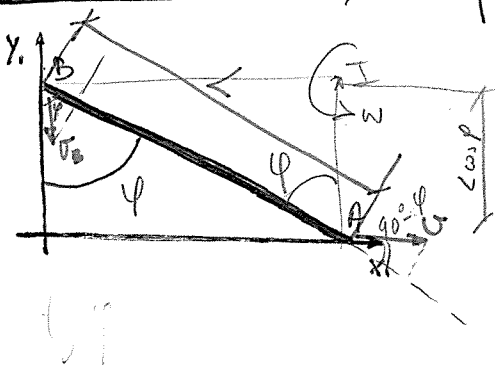
b) Velocidad del seguidor de polos

$$\vec{U}_{I^*} = \vec{U}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OI^*} = \frac{2\pi}{T} (R_1 + R_2) + \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{T(R_1 + R_2)} \cdot (-R_1) =$$

$$\downarrow \omega = \frac{U_0}{r}$$

$$= \frac{2\pi}{T} (R_1 - R_2 - R_1) = \boxed{\frac{2\pi}{T} R_2}$$

Junio 2007 Varilla L, A-B. φ , $U_A = U$. Se pide $|U_B|$



Por teorema de las velocidades proyectadas

$$U \cdot \frac{\cos(90^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} = U_B \cos \varphi$$

$$U_B = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} U = \tan \varphi \cdot U$$

$$\boxed{U_B = U \tan \varphi}$$

Suponemos $U = \text{cte}$. Se pide $|a_B|$ función (L, φ, U)

$$\frac{dU_B}{dt} = U \frac{d \tan(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = U \frac{1}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi} = U \frac{1}{\cos^2 \varphi} \omega$$

$$U_A = \vec{U}_I + \vec{\omega} \times \vec{IA} = \Rightarrow \omega = \frac{U}{L \cos \varphi}$$

$$|a_B| = U \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{U}{L \cos \varphi} = \boxed{\frac{U^2}{L \cos^3 \varphi}}$$

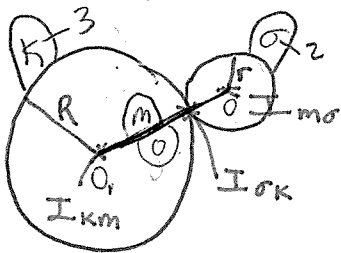
Febrero 2006 Se pide expresión vectorial $\bar{a}_{Iz}(\bar{w}, \bar{U}_{I^*})$ y relación $\bar{w}, \bar{U}_{I^*}/s$ y $\bar{U}_{I^*}/s$.

Seguidor de polos tiene igual velocidad respecto a la base o la ruleta por no pertenecer a ninguno de ellos $\bar{U}_{I^*}/s = \bar{U}_{I^*}/s$.

$$\bar{a}_I = -\bar{\omega} \times \bar{U}_{I^*} \equiv \bar{a}_I = \bar{U}_{I^*} \times \bar{\omega}$$

Febrero 2006

$\bar{w}_{o/k} = \bar{w}$; $\bar{w}_{manivela} = \bar{\Omega}$. ¿Relación $\bar{w}$ con $\bar{\Omega}$? $\downarrow$
 $f(\bar{w}, \bar{\Omega}, r, R) = 0$



$$\bar{w}_{o/k} \times \bar{I} \bar{I} = \bar{w}_{m/k} \times \bar{I} \bar{I}$$

$$\bar{w} \times r = \bar{\Omega} (R+r)$$

$$\bar{w} r - \bar{\Omega} (R+r) = 0$$

Ahora K rota en torno a su centro O_1 fijo. ¿ $f(\bar{w}', \bar{w}, \bar{\Omega}, r, R) = 0$?
 Si $\bar{w}_K = \bar{w}'$; $\bar{w}_o = \bar{w}$; $\bar{w}_m = \bar{\Omega}$ respecto de S, todas.

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U}_{31}^{I_{OK}} &= \bar{U}_{32}^{I_{OK}} + \bar{V}_{21}^{I_{OK}} \\ \bar{U}_{31}^{I_{OK}} &= \bar{U}_{31}^{O_1} + \bar{w}_{31} \times \bar{O}_1 \bar{I}_{OK} = \bar{w}' R \end{aligned} \right.$$

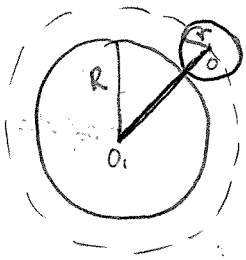
$$\bar{U}_{21}^{I_{OK}} = \bar{V}_{21}^o + \bar{\omega}_{21} \times \bar{O}_1 \bar{I}_{OK} = \bar{V}_{21}^o + \bar{w} \cdot (-r) = \bar{\Omega} (R+r) - \bar{w} r$$

$$\bar{U}_{21}^o = \bar{U}_{20}^o + \bar{U}_{01}^o = \bar{U}_{01}^{O_1} + \bar{\omega}_{01} \times \bar{O}_1 \bar{O} = \bar{\Omega} (R+r)$$

$$\Rightarrow \bar{w}' R = \bar{\Omega} (R+r) - \bar{w} r \longrightarrow \bar{w}' R - \bar{\Omega} (R+r) + \bar{w} r = 0$$

Febrero 2006 Circunferencia C , centro O $r=20\text{cm}$. Circunferencia fija C_1 , O_1 $R=30\text{cm}$.
 RSD por el exterior $T_{centro} = 10\text{s}$

$\bar{\omega}_K$ $\bar{w}_{recta o}$ y $\bar{w}_C$ [rad/s y rpm]



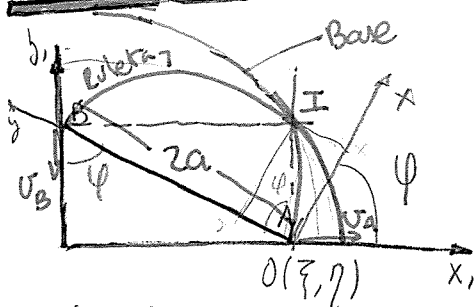
$$T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}_{010}} = 10\text{s}; \bar{\omega}_{010} = \frac{2\pi}{10} \text{ rad/s} = \frac{1}{5} \pi \text{ rad/s} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}} \cdot \frac{60\text{s}}{1 \text{ min}} = 6 \text{ rpm}$$

$$\bar{\omega}_{010} = \frac{\pi}{5} \bar{K} \text{ rad/s} = 6 \text{ rpm } \bar{K}$$

$$\text{Revolte } \frac{2\pi(R+r)}{2\pi r} = \frac{10\text{s}}{T_c} \quad T_c = \frac{2\pi r \cdot 10}{2\pi(R+r)} = \frac{10r}{R+r} = \frac{10 \cdot 0,2}{0,5} = \frac{2}{1/2} = 4\text{s}$$

$$\bar{\omega}_C = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}} \cdot \frac{60\text{s}}{1 \text{ min}} = 15 \text{ rpm} \quad \bar{\omega}_C = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s } \bar{K} = 15 \text{ rpm } \bar{K}$$

Febrero 2006 Se pide base y ruleta



$$\xi = 2a \sin \varphi$$

$$\eta = 0$$

Base $\left\{ \begin{array}{l} x_i = \xi - \eta' = 2a \sin \varphi \\ y_i = \eta + \xi' = 2a \cos \varphi \end{array} \right. \rightarrow \boxed{x_i^2 + y_i^2 = 4a^2}$

BASE

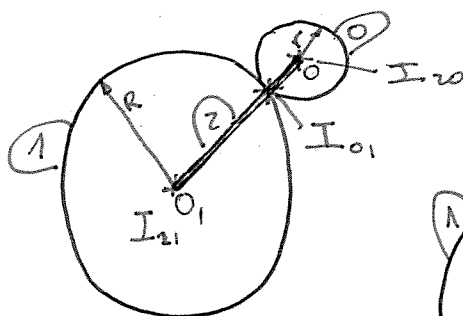
Ruleta $\left\{ \begin{array}{l} x = \xi' \sin \varphi - \eta' \cos \varphi = 2a \cos \varphi \sin \varphi \\ y = \xi' \cos \varphi + \eta' \sin \varphi = 2a \cos^2 \varphi \end{array} \right. \rightarrow \boxed{y = 2a \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} = 2a \frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}}$

$y = 2a \frac{y^2}{y^2 + x^2}; \quad y^2 + x^2 = 2ay; \quad \boxed{x^2 + (y-a)^2 = a^2}$

RULETA

Septiembre 2005 Datos: r, R Se pide relacion $\omega_{rueda} = \omega$ y $\omega_{barra} = \Omega$

Caso a) Exterior.



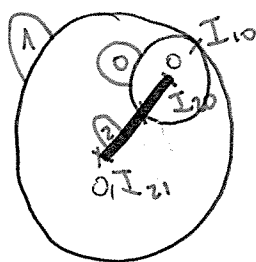
$$\overline{\omega}_{O1/1} \times \overline{I}_{O1} \overline{I}_{O2} = \overline{\omega}_{O2/1} \times \overline{I}_{O2} \overline{I}_{O1}$$

$$\omega_{rueda} \rightarrow \omega$$

$$\omega_{barra} = \Omega$$

$$\omega \cdot r = \Omega \cdot (R+r); \quad \boxed{\frac{\omega}{\Omega} = \frac{R+r}{r}}$$

Caso b) Interior

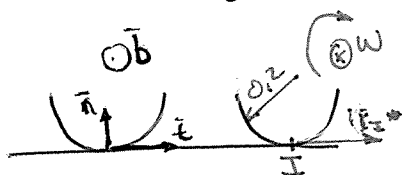


$$\omega(-r) = \Omega(R-r)$$

$$\boxed{\frac{\omega}{\Omega} = -\frac{R-r}{r}}$$

Junio 2005 Se pide $\vec{a}_I$

$$v = 72 \text{ Km/h} \quad r = 20 \text{ cm}$$



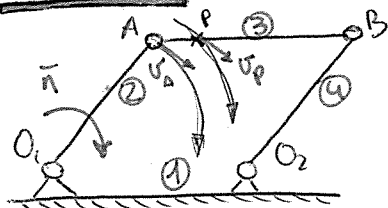
Se pide $\vec{a}_I = -\omega \times \vec{v}_I = - \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{n} & \vec{b} \\ 0 & 0 & -100 \\ 20 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2000 \text{ m/s}^2 \vec{n}$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{20}{0.2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ rad/s}$$

$$v = \frac{72 \text{ Km}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ Km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

$|\vec{a}| = 2000 \text{ m/s}^2$
En dirección $\vec{n}$ (hacia dentro de los ruedas)

Junio 2005



$$\overline{O_1 A} = \overline{O_2 B} = 30 \text{ cm}$$

$$\overline{O_1 O_2} = \overline{AB} = 50 \text{ cm}$$

$$\overline{AP} = 0,2 \overline{AB}$$

$$n = \frac{20}{\pi} \text{ rpm}$$

Se pide $|\vec{v}_P|, |\vec{a}_P|$

por geometría

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A = |\vec{v}_{O1}| + |\vec{\omega} \times \overline{QA}| = \frac{2}{3} \cdot 0,3 = \boxed{0,2 \text{ m/s}}$$

$$\vec{n} = \frac{20 \text{ rev}}{\pi \text{ min}} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60} = \frac{2}{3} \text{ rad/s}$$

$$\overline{QA} = 0,3$$

$$a_P = a_A = \frac{v^2}{|\overline{QA}|} = \frac{(0,2)^2}{0,3} = \boxed{0,13 \text{ m/s}^2}$$

Febrero 2005

$$V_A = V_{cte}, R, \varphi. \quad \omega = \dot{\varphi}$$

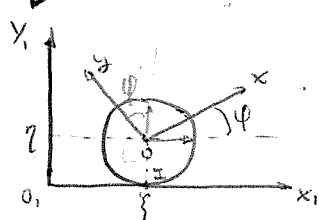
$$|\bar{V}_A| = \frac{V}{\omega} + |\bar{\omega} \times \bar{I}A| = V \quad (*)$$

$$\text{sen } \varphi = \frac{R}{|AC|}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{|AC|}{|IA|} \rightarrow |IA| = \frac{AC}{\text{tg } \varphi} = \frac{R}{\text{sen } \varphi \text{ tg } \varphi}$$

$$(*) \quad V = \omega \cdot \frac{R}{\text{sen } \varphi \text{ tg } \varphi} \quad \boxed{\omega = \frac{V}{R} \text{ sen } \varphi \text{ tg } \varphi}$$

➔ Deducir las expresiones analíticas de base y ruleta



$$\bar{V}_{21}^0 = \dot{\varphi} \bar{r}_1 + \bar{\omega} \times \bar{r}_1, \quad \bar{V}_{21}^0 = \dot{\varphi} \bar{r}_1 + \dot{\varphi} \bar{J}_1, \quad \bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{K}_1$$

$$\bar{\omega} \times \bar{V}_{21}^0 = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_1) = (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_1) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) \bar{r}_1 = -\omega^2 \bar{r}_1$$

$$\boxed{\bar{O}I = \frac{\bar{\omega} \times \bar{V}_{21}^0}{|\bar{\omega}|^2}} = \frac{\dot{\varphi} \bar{K}_1 \times (\dot{\varphi} \bar{r}_1 + \dot{\varphi} \bar{J}_1)}{\dot{\varphi}^2} = \frac{\dot{\varphi} \bar{J}_1 - \dot{\varphi} \bar{r}_1}{\dot{\varphi}}$$

$$\text{Para base buzo } \bar{O}_1 I = \bar{O}O + \bar{O}I = \dot{\varphi} \bar{r}_1 + \dot{\varphi} \bar{J}_1 + \frac{\dot{\varphi} \bar{J}_1 - \dot{\varphi} \bar{r}_1}{\dot{\varphi}}$$

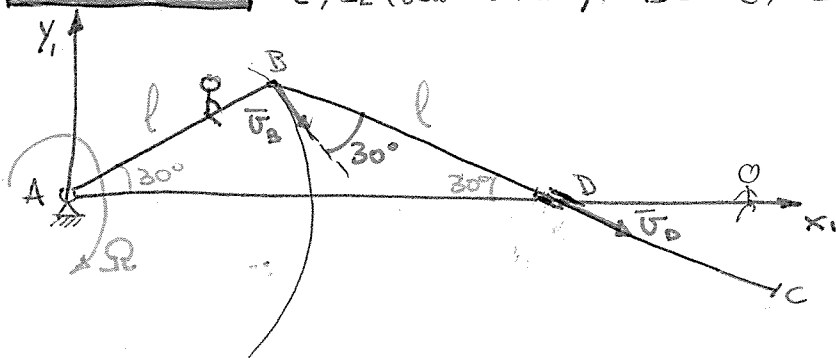
$$\begin{cases} X_1^{I*} = \dot{\varphi} - \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}' \\ Y_1^{I*} = \dot{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi} + \dot{\varphi}' \end{cases}$$

$$\text{Para ruleta buzo } \bar{O}I = \frac{\dot{\varphi} \bar{J}_1 - \dot{\varphi} \bar{r}_1}{\dot{\varphi}}, \quad \begin{cases} \bar{r}_1 = \cos \varphi \bar{r} - \sin \varphi \bar{J} \\ \bar{J}_1 = \sin \varphi \bar{r} + \cos \varphi \bar{J} \end{cases}$$

$$X^{I*} = (\dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \varphi) / \dot{\varphi} = \dot{\varphi}' \sin \varphi - \dot{\varphi}' \cos \varphi$$

$$Y^{I*} = (\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \varphi) / \dot{\varphi} = \dot{\varphi}' \cos \varphi + \dot{\varphi}' \sin \varphi$$

1996- Febrero l, Ω (sent. horario). $BD = l, 30^\circ. |\bar{V}_{31}^D|$



Por teorema de las velocidades proyectadas

$$\bar{V}_B \cdot \cos 30^\circ = \bar{V}_D$$

$$|\bar{V}_{31}^D| = |\bar{V}_{21}^B| = |\bar{V}_{21}^B| + |\bar{V}_{01}^B| = |\bar{V}_{01}^A| + \omega_{01} \times AB| = \Omega l$$

$$\boxed{\bar{V}_{31}^D = \Omega l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Feb. 1997 Circ. móvil: R , R . S. Dextenar de circ. fija $\sigma_1 = 2R$. Se pide

I recorre $2\pi R$ en t dada en un tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

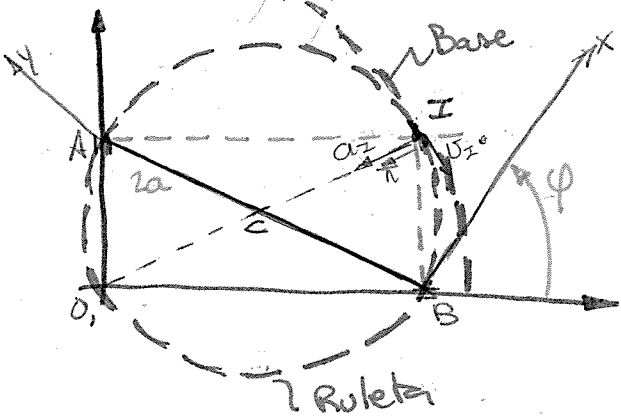
Tiene que recorrer $2\pi 2R \equiv 2$ vueltas $\rightarrow$ Tarde

$$T = \frac{4\pi}{\Omega}$$

$T_0 =$

Sep 1999 ω , $A \in x=0$, $B \in y=0$. Se pide $|\bar{a}_p|$ medid

$$|AB| = 2a$$



Buscamos

$$\bar{a}_c = \bar{a}_I + \dot{\omega} \times \bar{r}_{IC} + \omega \times (\omega \times \bar{r}_{IC})$$

Por tanto, necesitamos $\bar{a}_I$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\bar{a}_I = \bar{v}_I \times \bar{\omega} = v_I \bar{e} \times \dot{\varphi} (-\bar{b}) =$$

$$= v_I \dot{\varphi} \bar{n} = \dot{\varphi}^2 2a \bar{n}$$

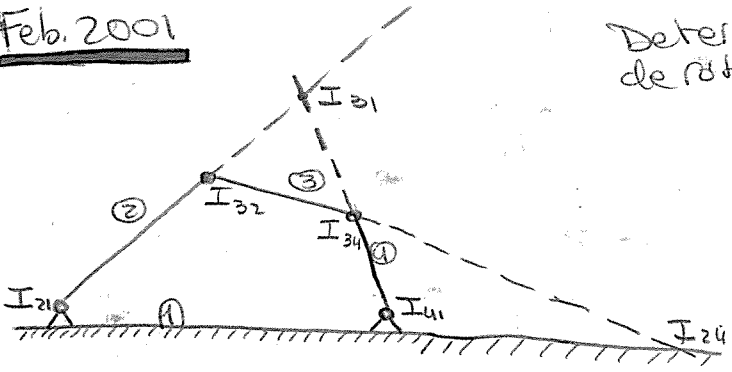
$$\bar{v}_I = \omega \cdot 2a \bar{e}$$

$$\bar{a}_I = \dot{\varphi}^2 2a \bar{n} \rightarrow \bar{a}_c = \dot{\varphi}^2 2a \bar{n} + \bar{\omega} \times \begin{vmatrix} \bar{e} & \bar{n} & \bar{b} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = \dot{\varphi}^2 2a \bar{n} + \begin{vmatrix} \bar{e} & \bar{n} & \bar{b} \\ 0 & 0 & -\omega \\ \omega a & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \dot{\varphi}^2 2a \bar{n} - \dot{\varphi}^2 a \bar{n} = \boxed{\dot{\varphi}^2 a \bar{n}}$$

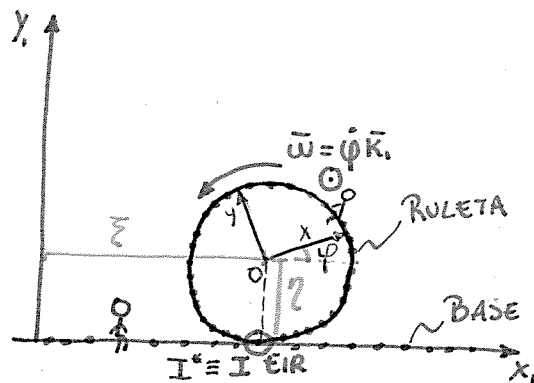
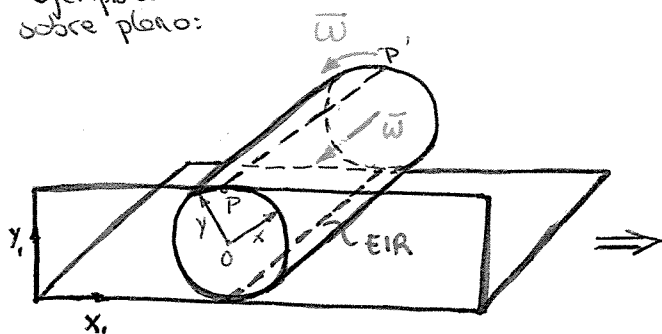
Feb. 2001

Determinar centros instantaneos de rotación

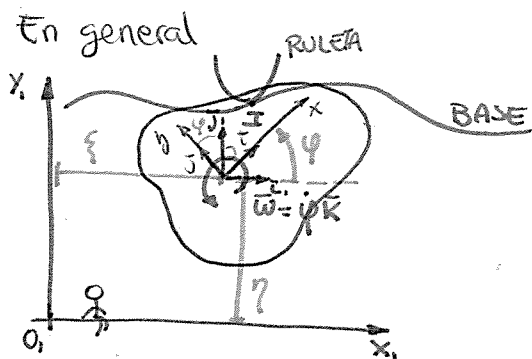


Sep. 2002 En la figura anterior, se pide ω_{42} supuesta conocida ω_{21}

Ejemplo cilindro RSD sobre plano:



En general



Obtención analítica de base y ruleta

$$\begin{aligned} \vec{U}_O &= \vec{U}_I + \vec{\omega} \times \vec{IO} ; \vec{U}_O = \dot{\xi} \vec{i}_1 + \dot{\eta} \vec{j}_1 ; \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k} \\ \vec{\omega} \times \vec{U}_O &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{IO}) \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{U}_O = (\vec{\omega} / \vec{IO}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{IO} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{OI} &= \frac{-\vec{U}_O \times \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} = \frac{-(\dot{\xi} \vec{i}_1 + \dot{\eta} \vec{j}_1) \times \dot{\varphi} \vec{k}}{\dot{\varphi}^2} = \frac{-\dot{\eta} \vec{i}_1 + \dot{\xi} \vec{j}_1}{\dot{\varphi}} \end{aligned}$$

BASE: Busco $\vec{OI} = \vec{OO} + \vec{OI} = \xi \vec{i}_1 + \eta \vec{j}_1 + \frac{-\dot{\eta} \vec{i}_1 + \dot{\xi} \vec{j}_1}{\dot{\varphi}}$

$$\begin{cases} \vec{i}_1: X^{I*} = \xi - \frac{\dot{\eta}}{\dot{\varphi}} = \xi - \frac{d\eta/dt}{d\varphi/dt} \} \eta' \\ \vec{j}_1: Y^{I*} = \eta + \frac{\dot{\xi}}{\dot{\varphi}} = \eta + \frac{d\xi/dt}{d\varphi/dt} \} \xi' \end{cases}$$

RULETA: Busco $\vec{OI} = \frac{-\dot{\eta} \vec{i}_1 + \dot{\xi} \vec{j}_1}{\dot{\varphi}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{i}_1 = \cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{j}_1 = \sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{array} \right.$

Por tanto $\vec{OI} = \frac{-\dot{\eta} \cos \varphi + \dot{\xi} \sin \varphi}{\dot{\varphi}} \vec{i} + \frac{\dot{\eta} \sin \varphi + \dot{\xi} \cos \varphi}{\dot{\varphi}} \vec{j}$

$$\vec{i}: X^{I*} = \frac{\dot{\xi} \sin \varphi - \dot{\eta} \cos \varphi}{\dot{\varphi}} = \frac{d\xi}{d\varphi} \sin \varphi - \frac{d\eta}{d\varphi} \cos \varphi$$

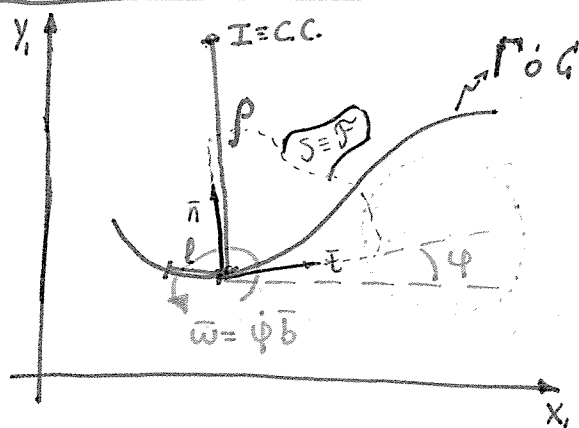
$$\vec{j}: Y^{I*} = \frac{\dot{\xi} \cos \varphi + \dot{\eta} \sin \varphi}{\dot{\varphi}} = \frac{d\xi}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{d\eta}{d\varphi} \sin \varphi$$

Obtención gráfica

BASE: Se busca la posición de I (CIR) aplicando las propiedades adecuadas y se establece la relación entre I y elementos geométricos de la referencia fija

RULETA: Se determina la posición del CIR y se establece la relación geométrica con elementos geométricos de la referencia móvil

Movimiento de una base de Frenet



Demo $\overline{OI} = \rho \bar{n}$

$$\vec{U}_0 = \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{e}$$

• Por Frenet, llamando $\vec{e}$ a $\vec{T}$, $\bar{n}$ o $\vec{b}$ se tiene:

$$\frac{d\vec{e}}{dl} = \bar{\Omega} \times \vec{e}$$

• Por una plana $\bar{\Omega} = \frac{\vec{T}}{\tau} + \frac{\vec{b}}{\rho}$ con $\tau \rightarrow \infty$

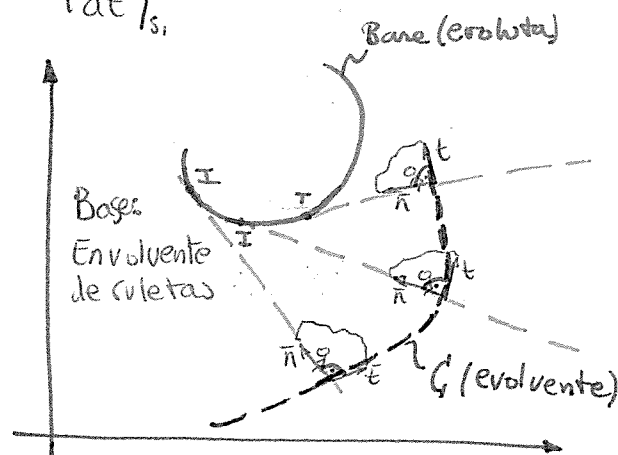
$$\Rightarrow \bar{\Omega} = \frac{\vec{b}}{\rho}$$

• Se demuestra $\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)_{s_1} = \bar{\omega} \times \vec{e}$

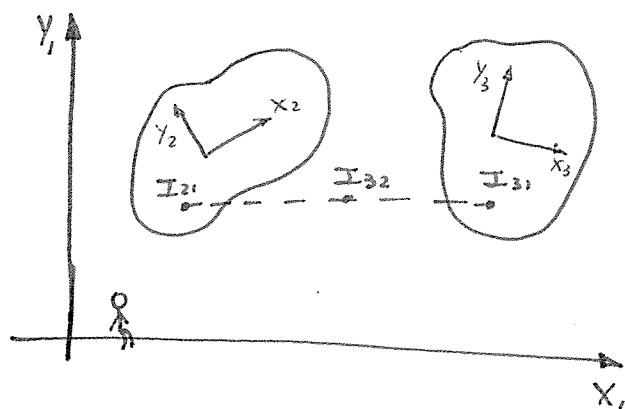
Por tanto:
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\vec{e}}{dt} &= \frac{d\vec{e}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = (\bar{\Omega} \times \vec{e}) \frac{dl}{dt} \\ \frac{d\vec{e}}{dt} &= \bar{\omega} \times \vec{e} \end{aligned} \right\} \quad \bar{\omega} = \bar{\Omega} \frac{dl}{dt}$$

$$\boxed{\overline{OI}} = \frac{\bar{\omega} \times \vec{U}_0}{|\bar{\omega}|^2} = \frac{\frac{\vec{b}}{\rho} \frac{dl}{dt} \times \frac{dl}{dt} \cdot \vec{e}}{\left| \frac{\vec{b}}{\rho} \frac{dl}{dt} \right|^2} = \rho (\vec{b} \times \vec{e}) = \boxed{\rho \bar{n}}$$

ver demo base y ruleta



Movimiento de 3 planos



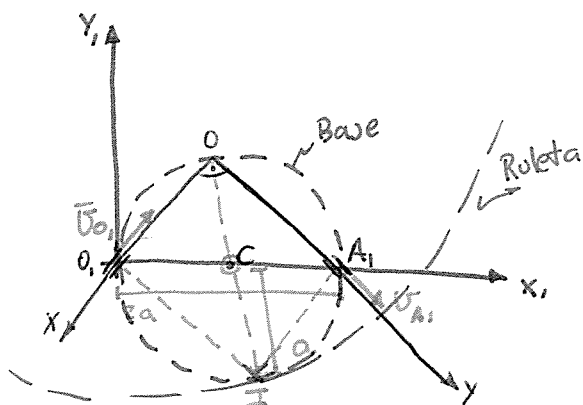
Movimientos recíprocos (inversos) $\rightarrow$ cumplen

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{U}_{21}^P &= -\vec{U}_{12}^P \Rightarrow I_{21} = I_{12} \\ \bar{\omega}_{21} &= -\bar{\omega}_{12} \\ \text{En general: } \vec{a}_{21}^P &\neq -\vec{a}_{12}^P \end{aligned} \right.$$

$$\vec{q}_{21}^P \neq \vec{q}_{12}^P$$

Ej. Cin. PLANA 1

Propiedad: Si una recta S está obligada a pasar por un punto $P \forall t$, se cumple que la velocidad del punto de S que en cada t coincide con P es colineal con S ($\vec{U}_{P \in S} \parallel S$)



I en perpendiculares a $\begin{cases} \vec{U}_O \in x \\ \vec{U}_A \in y \end{cases}$

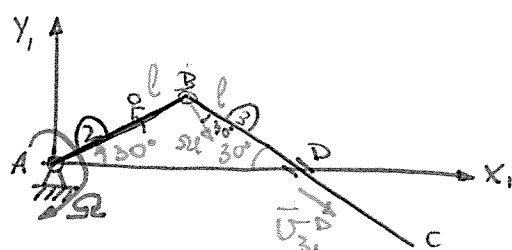
Se genera rectángulo de diagonal fija O, A , y mantiene distancia fija a C , de valor $a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ BASE: Circunferencia de radio a y centro C

I mantiene distancia constante a O (de S) de valor $2a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ RULETA: Circunferencia de radio $2a$ y centro O

Ej. Cin PLANA 2: $l, \Omega, \theta = 30^\circ, \{U_{DE} BC\}$



Por teorema de vel. proyectadas

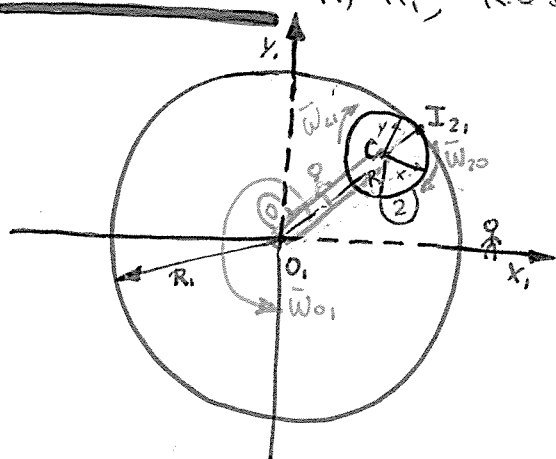
$$\vec{U}_{31}^B \cdot \frac{\vec{BD}}{|\vec{BD}|} = \vec{U}_{31}^D \cdot \frac{\vec{BD}}{|\vec{BD}|}$$

$\bullet BC$ pasa por $D \forall t \Rightarrow \vec{U}_{31}^D \parallel \vec{BC}$

$$|\vec{U}_{31}^B| = |\vec{U}_{32}^B + \vec{U}_{21}^B| = |\vec{U}_{21}^A + \vec{\omega}_2 \times \vec{AB}| = \Omega l$$

Por tanto $|\vec{U}_{31}^B| \cos 30^\circ = |\vec{U}_{31}^D| \cos 0^\circ \rightarrow \boxed{U_{31}^D = \Omega l \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Ej Cin PLANA 4 $R, R_1, R, S.D., v = cte, T_{90}??$



El T_{90} pedido será:

$$T_{90} = \frac{1}{4} T_{20} = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega_{20}} \Rightarrow \text{Busco } \omega_{20}$$

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$$

$$\vec{U}_{21}^C = \vec{U}_{20}^C + \vec{U}_{01}^C \quad \left\{ \begin{aligned} |\vec{U}_{21}^C| &= |\vec{U}_{20}^C + \vec{\omega}_{21} \times \vec{I}_{21}C| = R \omega_{21} = v \\ |\vec{U}_{01}^C| &= |\vec{U}_{01}^C + \vec{\omega}_{01} \times \vec{O}_1C| \Rightarrow v = \omega_{01} (R_1 - R) \end{aligned} \right.$$

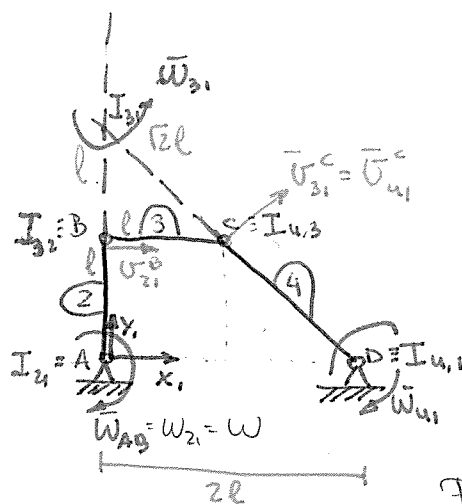
$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \omega_{21} &= \frac{v}{R} (-\vec{k}_1) \\ \omega_{01} &= \frac{v}{R_1 - R} \vec{k}_1 \end{aligned} \right. \quad \vec{\omega}_{20} = \frac{v}{R} (-\vec{k}_1) - \frac{v}{R_1 - R} (\vec{k}_1) = -\frac{v R_1}{R(R_1 - R)} \vec{k}_1$$

Por tanto $\boxed{T_{90} = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{v R_1 / R(R_1 - R)} = \frac{\pi R(R_1 - R)}{2 v R_1}}$

Ej. Cin. PLANA 6

W_{AB} , $l=1m$. Se pide $\bar{W}_{CD}$?

Análisis velocidades de puntos desde A hasta D.



$$\bar{v}_{31}^B = \bar{v}_{32}^B + \bar{v}_{21}^B$$

$$\begin{cases} |\bar{v}_{31}^B| = |\bar{v}_{31}^A| + \bar{W}_{31} \times \bar{I}_{31}B| = W_{31} \cdot l \\ |\bar{v}_{21}^B| = |\bar{v}_{21}^A| + \bar{W}_{21} \times \bar{AB}| = W \cdot l \end{cases}$$

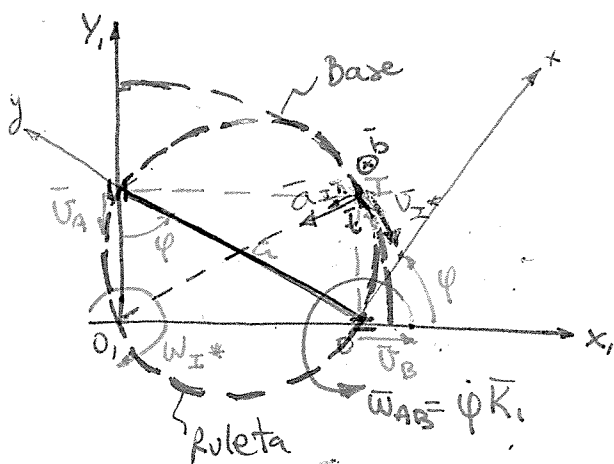
$$\Rightarrow \begin{cases} W_{31} = W \\ \bar{W}_{21} = -\bar{W}_{31} \quad (\text{por sentido de } \bar{v}_{31}^B = \bar{v}_{21}^B) \end{cases}$$

$$|\bar{v}_{41}^C| = |\bar{v}_{41}^D| + |\bar{W}_{41} \times \bar{DC}| = W_{41} \cdot \sqrt{2}l$$

$$|\bar{v}_{31}^C| = |\bar{v}_{31}^D| + |\bar{W}_{31} \times \bar{I}_{31}C| = W_{31} \cdot \sqrt{2}l \quad \left. \begin{array}{l} W_{41} = W_{31} \\ \bar{W}_{41} = -\bar{W}_{31} = \bar{W}_{21} \end{array} \right\}$$

Por tanto: $\boxed{W_{CD} = W_{41} = W_{21} = 10 \text{ rpm}}$

Ej. Cin. PLANA 7 Se pide $\bar{a}_I$? $AB=a$, $W_{AB}=W$



Se pide $\bar{a}_I = \bar{v}_I \times \bar{W}$

→ Para calcular $\bar{v}_I$ sacamos ec. de base y ruleta y derivamos

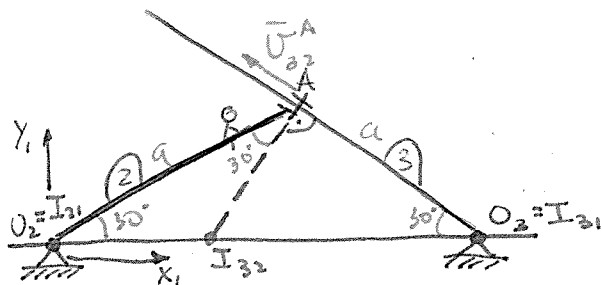
• Base: I mantiene distancia cte "a" con O, → circunf. de radio a y centro O.

• Ruleta: I mantiene dist. cte $a/2$ con C = circunf. de radio $a/2$ y centro C

$$\bar{a}_I = |\bar{v}_I| \bar{t} \times \dot{\varphi} (-\bar{b}) = \bar{v}_I \dot{\varphi} (\bar{n}) \sim -\frac{O, I}{10, I}$$

$$\bar{v}_I = W_{AB} \cdot a \bar{t}, \quad |\bar{W}_{I*}| = |\bar{W}_{O, I}| = |\bar{W}_{AB}| = \dot{\varphi} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{a}_I = \dot{\varphi} a \cdot \dot{\varphi} \bar{n} = \dot{\varphi}^2 a \left(-\frac{O, I}{10, I} \right) \\ |\bar{a}_I| = W^2 a \end{array} \right\}$$

Ej. Cin. PLANA 16 $O_2 I_{32}$?



I_{32} alineado con I_{21} , I_{31}

$I_{32} \perp \bar{v}_{32}^A$ [por pasar (3) por A (fijo de (2)) $\forall t$]

Por construcción $O_2 I_{32} A$ es isóceles $\Rightarrow$

$$O_2 A = a = O_2 I_{32} \cos 30^\circ + A I_{32} \cos 30^\circ$$

$$\boxed{O_2 I_{32} = \frac{a}{2 \cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

E3 Cin. PLANA 29 $AB=L, \varphi, \vec{v}_B = -v\vec{j}_1$. $|\vec{v}_A| = v = \text{cte}$, $|\vec{a}_A|(L, \varphi, v)??$

Por teorema de velocidades proyectadas

$$\vec{v}_B \frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|} = \vec{v}_A \frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|} \Rightarrow v_B \cos \varphi = v_A \cos(90^\circ - \varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_A = v \cot \varphi}$$

A en mov rectilíneo en x.

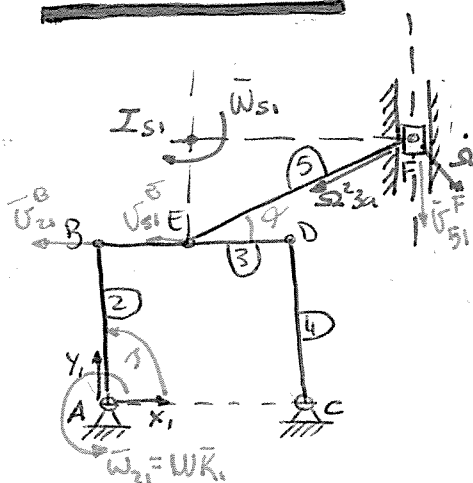
$$a_A = \frac{dv_A}{dt} = \frac{dv_A}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = v \left(\frac{-1}{\sin^2 \varphi} \right) \dot{\varphi}$$

Con I (en $\perp$ a $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$) se tiene $|\vec{v}_d| = |\vec{v}_I| + \vec{\omega} \times \vec{I}B| = \dot{\varphi} L \sin \varphi \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v}{L \sin \varphi}$

$$a_A = -v \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{v}{L \sin \varphi} = -\frac{v^2}{L \sin^3 \varphi} \rightarrow \boxed{|a_A| = \frac{v^2}{L \sin^3 \varphi}}$$

E3 Cin. PLANA 30

Datos: $AB=BD=DC=CA=2a$
 $EF=3a$; $BE=ED=a$
 $\alpha=30^\circ$; $\beta=90^\circ$



3a) Calcular ω_{s1}

$$\vec{v}_{21}^B = \vec{v}_{21}^A + \vec{\omega}_{21} \times \overline{AB} = \omega_{21} 2a (-\vec{i}_1)$$

$$\vec{v}_{32}^B = \vec{0}; \vec{v}_{31}^B = \vec{v}_{32}^B + \vec{v}_{21}^B$$

• 3 se mueve en traslación circular respecto a 1 (por dim. de las barras)

$$\Rightarrow \vec{v}_{31}^B = \vec{v}_{31}^E$$

$$\vec{v}_{s1}^E = \vec{v}_{s3}^E + \vec{v}_{31}^E; \vec{v}_{s1}^E = \vec{v}_{s1}^I + \vec{\omega}_{s1} \times \vec{I}_{s1}E = \omega_{s1} 3a \sin \alpha (-\vec{i}_1)$$

$$\vec{I}_{s1} \text{ en } \begin{cases} \perp \vec{v}_{s1}^E \parallel \vec{j}_1 \\ \perp \vec{v}_{s1}^E = \vec{v}_{21}^B \end{cases}$$

$$\text{Por tanto } \omega_{21} 2a (-\vec{i}_1) = \omega_{s1} 3a \sin \alpha (-\vec{i}_1) \Rightarrow \omega_{s1} = \omega \frac{2}{3} \frac{1}{\sin \alpha} (-\vec{k}_1)$$

$$\boxed{|\omega_{s1}| = \omega_2 = \frac{4}{3} \omega}$$

2) $\omega = \text{cte}$

Con 3 en traslación y $|\omega_{21}| = \omega = \text{cte}$

$$\boxed{\bar{a}_{31}^E = \bar{a}_{31}^B = \bar{a}_{32}^B + \bar{a}_{21}^B + 2 \cdot \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{32}^B = \bar{a}_{21}^A + \underbrace{\bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{A}B)}_{\omega^2 2a (-\bar{j}_1)} + \underbrace{\bar{\omega}_{21} \times \bar{A}B}_{0 (\bar{\omega}_{21} = \text{cte})} = \omega^2 2a (-\bar{j}_1)}$$

comp. avel 3,1 CAS 2,1 0

3) Determinar $|a_F|(\omega, a)$

$$\bar{a}_{s1}^F = \bar{a}_{s1}^E + \bar{\omega}_{s1} \times (\bar{\omega}_{s1} \times \bar{E}F) + \dot{\bar{\omega}}_{s1} \times \bar{E}F$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{s1}^E = \bar{a}_{s3}^E + \bar{a}_{31}^E + 2\bar{\omega}_{31} \times \bar{r}_{s3}^E = \omega^2 2a (-\bar{j}_1) \\ \bar{\omega}_{s1} \times (\bar{\omega}_{s1} \times \bar{E}F) = \Omega^2 3a (-\cos\theta \bar{i}_1 - \sin\theta \bar{j}_1) \\ \dot{\bar{\omega}}_{s1} \times \bar{E}F = \dot{\Omega} 3a (\sin\theta \bar{i}_1 - \cos\theta \bar{j}_1) \end{cases}$$

en plano $\dot{\bar{\omega}} // \bar{\omega}$

$$\begin{aligned} \bar{i}_1: 0 &= -\Omega^2 3a \cos 30^\circ + \dot{\Omega} 3a \sin 30^\circ \\ \bar{j}_1: -a^F &= -\omega^2 2a - \Omega^2 3a \sin 30^\circ - \dot{\Omega} 3a \cos 30^\circ \end{aligned}$$

Resolviendo queda

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = \frac{16}{9} \omega^2 \sqrt{3} \\ a_F = \omega^2 a \cdot \frac{38}{3} \end{cases}$$

CINEMÁTICA PLANA

1.-DEFINICIÓN DE MOVIMIENTO PLANO

Se trata de un caso particular de movimiento en el que las velocidades de todos los puntos de un sólido indeformable S están contenidas en un plano o en planos paralelos (se podrá estudiar el movimiento en uno de los planos y generalizar el resultado a los demás), o lo que es lo mismo, todos los puntos siguen trayectorias paralelas a un plano fijo (o director), π_1 .

Si el vector director de π_1 es $\vec{u}$ y si A, B y C son tres puntos no alineados de S que forman un plano no perpendicular a π_1 y cuyas velocidades son paralelas a π_1 , se demuestra que cualquier punto P de S tiene un movimiento paralelo a π_1 y que la rotación $\vec{\omega}$ de S es un vector perpendicular a π_1 (ver demo).

De existir $\vec{\omega}$, será perpendicular al plano, y por tanto, al ser $\vec{\omega}$ y la velocidad de cualquier punto de S perpendiculares, se tendrá un eje instantáneo de rotación (E.I.R.),

siendo $V_{\min} = \vec{V}^P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = 0$ (P punto del sólido). De esta forma, los axoides del

movimiento serán superficies cilíndricas normales al plano director, tangentes entre sí en cada instante a lo largo de una generatriz sobre la que se tiene movimiento de rodadura sin deslizamiento.

Los puntos de S que evolucionan sobre π_1 constituyen el plano móvil π . El estudio se reduce así al del movimiento de un plano móvil sobre uno fijo.

2.-C.I.R. Y SEGUIDOR DE POLOS.

Aparece ahora un punto característico, intersección del E.I.R. con el plano π , llamado **C.I.R.** (centro instantáneo de rotación), definido como el punto de π cuya velocidad respecto a π_1 es nula. Se denota por $I(t)$ y será un punto distinto en cada instante.

Se define también el **seguidor de polos** como el punto que se mueve de forma que su posición coincide en cada instante con la del C.I.R. Este punto no pertenece al plano fijo ni al plano móvil, simplemente acompaña al punto que en cada instante es C.I.R. Se denota por I^* .

En lugar de *axoide fijo* y *axoide móvil*, podemos hablar de sus equivalentes en el caso particular de movimiento plano, *base* y *ruleta*, que son ahora las curvas intersección de los axoides con el plano del movimiento, curvas que ha descrito el C.I.R.:

- *Base*: lugar geométrico de los puntos del plano que han sido C.I.R.
- *Ruleta*: lugar geométrico de los puntos del sólido que han sido C.I.R.

Fijándonos en el seguidor de polos, la base y la ruleta se pueden definir como las trayectorias de I^* respecto a los planos fijo y móvil respectivamente.

Por la propia definición de I , es $\vec{v}' = \vec{0}$, y por tanto el campo de velocidades del plano móvil es: $\vec{v}^P = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{IP} = \vec{\omega} \times \vec{IP}$. De aquí se deduce la propiedad fundamental del C.I.R.: las normales a la trayectoria (o a la velocidad) de todos los puntos del plano π se cortan en el C.I.R. $\rightarrow$ si tenemos las velocidades de 2 puntos y trazamos perpendiculares, donde se corten estará el CIR

3.-BASE Y RULETA. ECUACIONES

Se consideran dos sistemas de referencia $O_1x_1y_1$ y Oxy , situados sobre los planos fijo y móvil respectivamente, de forma q los ejes z_1 y z son paralelos y $\vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = \vec{k}_1 \equiv \vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$. Las coordenadas x_1 e y_1 de O , origen de la base móvil, en la base fija, se denominan ξ y η respectivamente, y se designa por φ al ángulo q el eje x forma con el eje x_1 . Cada terna (ξ, η, φ) determina, en cada instante, la posición de la base móvil respecto de la fija, y por tanto de todos los puntos del plano móvil.

Las funciones del tiempo $\xi(t), \eta(t), \varphi(t)$ determinan el movimiento en el tiempo. Eliminando t y obteniendo las funciones $\xi(\varphi), \eta(\varphi)$ se tiene una secuencia de posiciones del plano móvil respecto al fijo, con independencia de la velocidad a la que se suceden. A partir de estas consideraciones y de la definición de C.I.R. se pueden obtener (ver demo):

- ecuaciones de la base (ecuaciones paramétrico-temporales de las coordenadas de I^* en la base fija)

$$x_1(t) = \xi - \frac{\dot{\eta}}{\dot{\varphi}}$$

$$y_1(t) = \eta + \frac{\dot{\xi}}{\dot{\varphi}}$$

- ecuaciones de la ruleta (ecuaciones paramétrico-temporales de las coordenadas de I^* en la base móvil):

$$x(t) = \frac{\dot{\xi} \sin \varphi - \dot{\eta} \cos \varphi}{\dot{\varphi}}$$

$$y(t) = \frac{\dot{\xi} \cos \varphi + \dot{\eta} \sin \varphi}{\dot{\varphi}}$$

Se denomina con el símbolo “ ’ ” a la derivada con respecto a t de la función correspondiente.

Eliminando el tiempo (secuencia de posiciones sin la velocidad de su recorrido), se obtienen las ecuaciones paramétrico-angulares de base y ruleta:

- base:
$$\begin{aligned} x_1(\varphi) &= \xi - \eta' \\ y_1(\varphi) &= \eta + \xi' \end{aligned}$$

- ruleta:
$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \xi' \sin \varphi - \eta' \cos \varphi \\ y(\varphi) &= \xi' \cos \varphi + \eta' \sin \varphi \end{aligned}$$

Se denomina con el símbolo “ ’ ” a la derivada con respecto a φ de la función correspondiente.

4.-MOVIMIENTO DE UNA BASE DE FRENET

Se estudia el movimiento de una base de Frenet F (triedro intrínseco), con origen O , de una curva plana Γ .

Se definen una abscisa curvilínea l sobre Γ , los vectores de la base $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ y el vector de Darboux $\vec{\Omega} = \frac{\vec{t}}{\tau} + \frac{\vec{b}}{\rho}$ (τ radio de curvatura de torsión, ρ radio de curvatura de flexión).

Por ser curva plana, $\tau = \infty$ y por tanto $\vec{\Omega} = \frac{\vec{b}}{\rho}$.

Se obtiene así que (ver demo):

- la rotación cinemática de la base F es $\vec{\omega} = \frac{dl}{dt} \vec{\Omega} = \frac{dl}{dt} \cdot \frac{\vec{b}}{\rho}$
- $O\vec{I} = \rho \cdot \vec{n}$, es decir, el C.I.R. de la base de frenet de una curva que se mueve sobre dicha curva es el centro de curvatura de flexión de esta última.
- De esta forma, la *ruleta* de la base de frenet F de una curva es la recta normal de dicha curva, mientras que la *base* de esa F es el lugar geométrico de los centros de curvatura de esa curva. *Ruleta* $\sim G$ *base*
- Se deduce de este último punto que la curva se puede obtener haciendo rodar sin deslizar una recta sobre el lugar geométrico de los centros de curvatura. Una curva generada de esta manera se llama evolvente de la curva base. Así pues, la evolvente de una curva es la envolvente de sus rectas normales.

5.-VELOCIDAD DE I^*

Considerando la base (perteneciente al plano π_1) y la ruleta (perteneciente al plano π), siempre tangentes entre si, se puede estudiar el movimiento de F (Base de Frenet) respecto de las dos referencias anteriores. Se obtienen así:

- rotación de F respecto de la base: $\vec{\omega}_{F/\pi_1} = \frac{\vec{b}_1}{\rho_1} \frac{dl}{dt}$ ($\vec{b}_1$, ρ_1 , binormal y radio de curvatura de flexión de la base)
- rotación de F respecto de la ruleta: $\vec{\omega}_{F/\pi} = \frac{\vec{b}}{\rho} \frac{dl}{dt}$ ($\vec{b}$, ρ , binormal y radio de curvatura de flexión de la ruleta)
- Rotación de π respecto de π_1 : $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{F/\pi_1} - \vec{\omega}_{F/\pi}$
- $\vec{v}^{I^*} = \frac{dl}{dt} \vec{t}$

De todo lo anterior se puede deducir la velocidad del seguidor de polos en función de $\vec{\omega}$, ρ y ρ_1 :

$$\vec{v}^{I^*} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{n}_1}{\frac{\vec{n} \cdot \vec{n}_1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}}$$

$\vec{n}$ - vec norm ruleta
 $\vec{n}_1$ - vec. norm base

6.-CAMPOS DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES. ACELERACION DE I. POLO DE ACELERACIONES.

Ya se ha visto que, siendo P un punto del sólido S que se mueve con movimiento plano, se cumple:

$$\vec{v}^P = \vec{v}^I + \vec{\omega} \times I\vec{P} = \vec{\omega} \times I\vec{P}$$

Teniendo presente que la posición de I coincide en cada instante con la de I* (y por tanto, para cualquier punto P es $I\vec{P} = I^*\vec{P}$), la velocidad de un punto P se puede expresar también como:

$$\vec{v}^P = \vec{\omega} \times I^*\vec{P}$$

y la aceleración de un punto P vendrá dada, por campo de aceleraciones del sólido rígido como:

$$\vec{a}^P = \vec{a}^I + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times I^*\vec{P}) + \dot{\vec{\omega}} \times I^*\vec{P}$$

o bien, derivando la expresión de la velocidad:

$$\vec{a}^P = \dot{\vec{\omega}} \times I^*\vec{P} + \vec{\omega} \times \frac{d I^*\vec{P}}{dt}$$

Desarrollando y operando estas expresiones se obtiene (ver demo en anexo):

$$\vec{a}^I = -\vec{\omega} \times \vec{v}^I \Rightarrow \vec{v}^I = \frac{\vec{\omega} \times \vec{a}^I}{\omega^2}$$

Con estos resultados puede encontrarse el punto I que, si existe, tiene aceleración nula $\vec{a}^I = \vec{0}$, llamado polo de aceleraciones (ver demo en anexo):

chuto →
$$I\vec{I} = \frac{\omega \dot{\omega} \vec{v}^I - \omega^3 \vec{k} \times \vec{v}^I}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$$

↑
no WW44

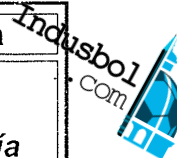
7.-PERFILES CONJUGADOS. (ver anexo)

8.-MOVIMIENTO DE TRES PLANOS

Se tienen tres planos paralelos π_1, π_2, π_3 que evolucionan definiendo los movimientos planos relativos $\pi_2 / \pi_1(21), \pi_1 / \pi_2(12), \pi_3 / \pi_1(31), \pi_1 / \pi_3(13), \pi_3 / \pi_2(32), \pi_2 / \pi_3(23)$. Por movimientos inversos, la posición de los C.I.R. de los movimientos $\pi_i / \pi_j, \pi_j / \pi_i$ es la misma, por lo que únicamente se tienen tres C.I.R.

Se demuestra (ver demo) que los centros instantáneos de rotación de los movimientos relativos de los tres planos que evolucionan sobre el mismo plano geométrico están alineados.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales	Mecánica
	c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid.	Profesor
	Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Alex García



EN SOLUCIONES

Teoría
(R)

EJERCICIO CIN. PLANA.Soluc.1

Primer Examen Parcial 1996-01-19

Una referencia $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ definida sobre un plano móvil π , evoluciona respecto a un plano fijo π_1 . Sean $\xi(t), \eta(t)$ las coordenadas del punto O respecto a un sistema de referencia fijo y sea $\varphi(t)$ el ángulo que forman los ejes de abscisas de los sistemas fijo y móvil. Escribir las ecuaciones de base y ruleta.

(R) Teoría

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.2

Primer Examen Parcial 1996-01-19

Definir la velocidad de sucesión de polos.

(R) Teoría

EJERCICIO CIN. PLANA.Soluc.3

Examen Final 1996-06-24

Defina la *velocidad de sucesión de polos* y exprese la *aceleración del centro instantáneo de rotación* en función de dicha velocidad y de la rotación del plano móvil respecto al fijo.



EJERCICIO CIN. PLANA.Soluc.4

Examen Final 1996-09-09

Demuestre que el centro instantáneo de rotación del movimiento de la base de Frenet de una curva plana a lo largo de los puntos de esta curva se encuentra en el centro de curvatura de flexión de ésta.

EJERCICIO CIN. PLANA.Soluc. 5

Primer Examen Parcial 1997-01-27

Un punto P se mueve sobre una curva plana. Demuestre que el triedro de Frenet de dicha curva asociado al punto P, posee movimiento plano cuyo centro instantáneo de rotación coincide con el centro de curvatura de flexión de la curva. Se recuerda que el vector de Darboux es $\Omega = \frac{b}{\rho} + \frac{t}{\tau}$.

(R) Teoría

EJERCICIO CIN. PLANA.Soluc.6

Examen de Septiembre 1997-09-16

En el movimiento plano, el sistema fijo es $\{O_1, x_1, y_1\}$ y el sistema móvil $\{O, x, y\}$, Escriba las ecuaciones paramétricas angulares de la ruleta en el sistema móvil y de la base en el sistema fijo, explicando el significado de los símbolos empleados.

(R) Teoría

EJERCICIO CIN. PLANA.Soluc.7

Examen de Septiembre 1998-09-21

Defina *base* y *ruleta* en el movimiento plano.

EJERCICIO CIN. PLANA.Soluc.8

Primer examen parcial 1999-01-25



(R)

Una bicicleta se mueve de forma que sus ruedas, de radios r , se encuentran en un mismo plano y ruedan sin deslizar, con velocidad ω , sobre un perfil circular de radio R , por su parte exterior. Calcule el módulo de la rotación del cuadro de la bicicleta.

Teoría

EJERCICIO CIN. PLANA.Soluc.9

Examen Final 1999-02-16

Defina movimiento plano y demuestre que la rotación instantánea mantiene dirección constante.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.10

Examen final 2000-09-11

Un triángulo móvil con movimiento plano desliza sobre una curva fija de dicho plano, de forma que uno de sus lados siempre es tangente a dicha curva en un vértice del triángulo. Sitúe el CIR del movimiento del triángulo, en función de elementos intrínsecos de la curva.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.11

Examen de Septiembre 2001-09-19

→ **(R)** En un movimiento plano un círculo c de radio r rueda sin deslizar por el exterior de un cilindro de radio $2r$ con una velocidad angular constante $\omega_1 = 2\pi \text{ s}^{-1}$. Calcule el tiempo que tarda el centro de c en completar una vuelta completa.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.12 Feb 2009-02-06, Feb 2002-02-11, Jun 1998-06-22, Parc. 1997-01-27, Parc 1996-01-19

¿Qué son perfiles conjugados?

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.13

Examen de Junio 2002-06-10

→ **(R)** Una circunferencia de radio a rueda uniformemente, sin deslizar, por el exterior de otra circunferencia, coplanaria y de radio b , empleando un tiempo T entre cada dos pasos sucesivos de su centro por la misma posición. Calcule la velocidad del seguidor de polos.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.14

Examen de Septiembre 2002-09-16

(R) En un cierto instante se conoce el tursor cinemático en O de un movimiento plano, (v_O, ω) . Deduzca la expresión vectorial que determina la posición del centro instantáneo de rotación.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.15

Febrero 2003-02-10

→ **(R)** Determine la velocidad de un automóvil, en Km/h, cuando sus ruedas, de 50 cm. de diámetro giran sin deslizar, a 900 revoluciones por minuto.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.16

Febrero 2003-02-10

(R) Una escalera cuyos extremos A y B apoyan, respectivamente, en una pared vertical y en el suelo horizontal, cae con sus extremos deslizando sobre la pared y el suelo. Cuando la escalera forma un ángulo de 30° con el suelo la velocidad de su extremo A es de 4 m/s. ¿Cuál es la velocidad del otro extremo B ?

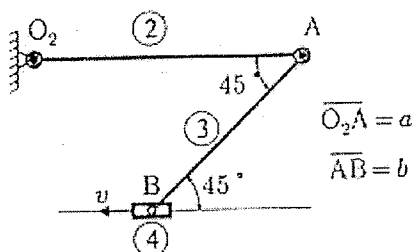
EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.17

Junio 2003-06-09

→ **(R)** Un círculo c de centro B y radio r puede rodar sin deslizar por el interior de una corona hueca y fija, de centro A y radio interior $R > r$. Una barra AB se encuentra articulada al círculo móvil en B y a la corona en A . Determine las rotaciones del círculo c respecto al sistema fijo y respecto al segmento AB , si la del segmento respecto al sistema fijo es Ω .

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.18

Examen de Septiembre 2003-09-15



En el mecanismo de biela-manivela de la figura, determine la velocidad angular de la manivela 2, si la velocidad de la corredera 4 situada en el extremo de la biela 3 es v en la dirección y sentido indicados, y cuando el mecanismo se encuentra en la posición de la figura. La longitud de la manivela es a y la de la biela b .

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.19

Examen de Febrero 2004-02-12

Determine la velocidad de un automóvil, en km/h, cuando sus ruedas, de 50 cm de diámetro giran sin deslizar, a 1200 revoluciones por minuto. Puede expresar el resultado en función del número π .

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.20

Examen de Febrero 2004-02-12

Una circunferencia de radio R_1 rueda sin deslizar por el exterior de otra circunferencia fija y coplanaria, de radio R_2 , con movimiento uniforme, empleando un tiempo T entre dos pasos sucesivos de su centro por el mismo punto. Obtenga la aceleración del centro O_1 de la circunferencia móvil.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.21

Examen de Febrero 2004-02-12

En relación con la cuestión anterior, determine la velocidad del seguidor de polos (velocidad de sucesión de polos)..

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.22

Examen de Septiembre 2004-09-23

Escriba el vector de Darboux para una curva expresado en su base de Frenet, indicando el nombre de las magnitudes escalares que intervienen.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.23

Examen de Febrero 2005-02-07

En un movimiento plano se conocen las coordenadas $\xi(\varphi)$ y $\eta(\varphi)$ de O , origen de la referencia $S\{O, x, y\}$ ligada al plano móvil, siendo φ el ángulo de Ox respecto al primer eje de la referencia fija $S_1\{O_1, x_1, y_1\}$. Escriba las ecuaciones de la base en S_1 y de la ruleta en S , adoptando φ como parámetro.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.24 Feb 2009-02-06, Sept 2005-09-05, Feb 2005-02-07, Sep 2004-09-23, Feb 2000-02-15, parcial 2000-01-24, Final 1999-02-16, febrero 1998-02-24

En un movimiento plano, escriba la aceleración del centro instantáneo de rotación en función de la velocidad angular y de la velocidad del seguidor de polos.

EJERCICIO CIN. PLANA. Soluc.25

(Sept 2005-09-05, Sept 2004-09-23)

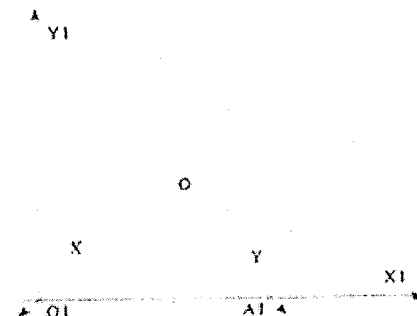
Indique cuál es el centro instantáneo de rotación de la base de Frenet de una curva plana que se mueve sobre la curva.

EN CLASE

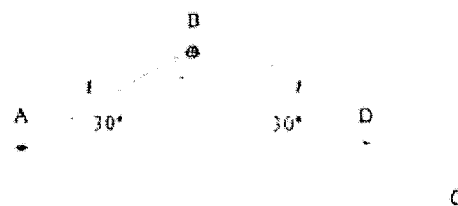
✓ EJERCICIO CIN. PLANA. 1

Un plano móvil π en el que se encuentra definida una referencia $\{O, x, y\}$ se mueve respecto a un plano móvil π_1 en el que se encuentra definida la referencia $\{O_1, x_1, y_1\}$. El eje x del sistema móvil pasa permanentemente por el origen de coordenadas del sistema fijo. El eje y del sistema móvil, a su vez, pasa permanentemente por un punto fijo A_1 de coordenadas $(2a, 0)$ en el sistema fijo. Hallar la base y la ruleta de este movimiento.

Examen Final 1996-02-12



Examen Final 1996-02-12



✓ EJERCICIO CIN. PLANA. 2 *Cae mucho*

Una barra AB de longitud l gira con velocidad angular constante Ω en sentido horario alrededor de su extremo A , que está fijo. Una segunda barra BC está articulada a la anterior en el punto B y pasa siempre por un punto fijo D , sobre el que puede deslizarse. En un momento dado, la distancia BD es l y los ángulos que forman el segmento AB y el BD con el AD son iguales y de valor 30° . Calcular la velocidad de deslizamiento de la barra BC en D .

Examen Final Febrero 1997-02-19

Hecho EJERCICIO CIN. PLANA. 3

Una circunferencia móvil σ de radio R rueda sin deslizar por el exterior de otra circunferencia fija σ_1 de radio $2R$ con una rotación constante de módulo Ω . Calcule el tiempo que tardará el centro de σ en describir una vuelta completa en torno a σ_1 .

Examen de Septiembre 1997-09-16

✓ EJERCICIO CIN. PLANA. 4 *Cae mucho*

Un círculo de radio R rueda sin deslizar por el interior de una circunferencia fija de radio R_1 . La velocidad del centro del círculo tiene módulo constante v . Calcule el tiempo T necesario para que la dirección de un radio cualquiera del círculo gire 90° respecto a la recta que une los centros de círculo y circunferencia.

EJERCICIO CIN. PLANA. 5

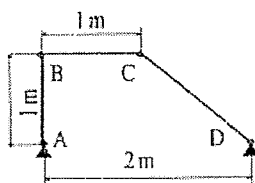
Primer examen parcial 1998-02-03

En un movimiento plano se conocen la velocidad de un punto A , v_A y la velocidad angular, ω . Deduzca la expresión del vector AI en el que I representa el centro instantáneo de rotación.

Primer examen parcial 1999-01-25

✓ EJERCICIO CIN. PLANA. 6

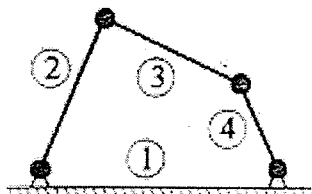
g. típico



En el cuadrilátero articulado de la figura, la manivela AB gira con 10 r.p.m. Determine el módulo de la rotación de la barra CD .

EJERCICIO CIN. PLANA. 14

Feb 2001-02-19 Jun 1997-06-19



En el cuadrilátero articulado de la figura, determine los centros instantáneos de rotación de las barras respecto al plano fijo y de las barras entre sí, designándolos en la forma habitual (por ejemplo, I_{31}) sobre el croquis de dicho cuadrilátero.

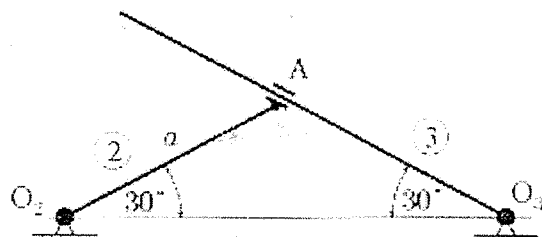
EJERCICIO CIN. PLANA. 15

Examen de Junio 2001-06-20

En un movimiento plano se conocen, en un cierto instante, la velocidad y aceleración de un punto, O, v_O y a_O , respectivamente, la velocidad angular ω y se sabe que la aceleración angular es nula. Deduzca expresiones vectoriales que determinan las posiciones del CIR y del polo de aceleraciones mediante los vectores OI y OF , respectivamente.

EJERCICIO CIN. PLANA. 16

Examen de Junio 2001-06-20



En el mecanismo de la figura, la barra 3 es guía de una corredera en el extremo, A, de la manivela 2 cuya longitud es a . Justifique la posición del centro instantáneo de rotación del movimiento de la barra 3 respecto de la 2 y calcule su distancia al punto O_2 en la posición indicada en la figura.

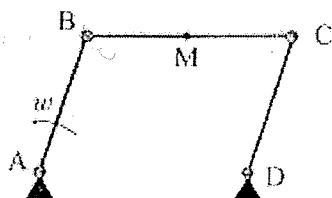
EJERCICIO CIN. PLANA. 17

Examen de Febrero 2002-02-11

En un movimiento plano, las coordenadas del origen de la referencia móvil son $\xi = a(1 - \cos\varphi)$, $\eta = a \sin\varphi$, donde φ es el ángulo de O_1x_1 respecto a Ox . Obtenga las ecuaciones cartesianas de la base y de la ruleta del movimiento.

EJERCICIO CIN. PLANA. 18

Examen de Junio 2002-06-10



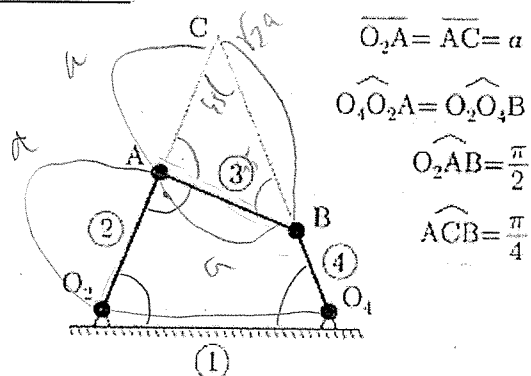
En el cuadrilátero articulado de la figura, las barras AB y CD son paralelas y de igual longitud dada por l , girando la barra AB con velocidad angular ω uniforme. Determine el módulo de la aceleración del punto medio de la barra BC (punto M).

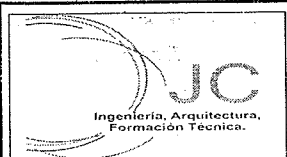
EJERCICIO CIN. PLANA. 19

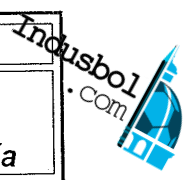
Examen de Septiembre 2002-09-16

En el cuadrilátero articulado de la figura, determine la posición del centro instantáneo de rotación de la barra 3 respecto del plano fijo 1.

En el cuadrilátero articulado de la misma figura, calcule la velocidad angular de la barra 4 respecto de la barra 2, supuesta conocida la rotación ω_{21} de la barra 2 respecto al plano fijo.



	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	--	---



EJERCICIO CIN. PLANA. 7 *Difícil*

Examen Final 1999-06-28

Una barra AB , de longitud a , describe un movimiento plano con velocidad angular constante, ω , en el plano Oxy , de forma que su extremo A siempre se encuentra en el eje $x = 0$ y el extremo B en el eje $y = 0$. Calcule el módulo, dirección y sentido de la aceleración del centro instantáneo de rotación.

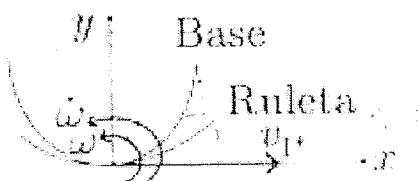
EJERCICIO CIN. PLANA. 8

Examen Final 1999-09-06

Una barra AB , de longitud $2a$, describe un movimiento plano con velocidad angular constante, ω , en el plano Oxy , de forma que su extremo A siempre se encuentra en el eje $x = 0$ y el extremo B en el eje $y = 0$. Calcule el módulo, dirección y sentido de la aceleración del punto medio de la barra AB .

EJERCICIO CIN. PLANA. 9

Primer examen parcial 2000-01-24



En relación con el movimiento plano esquematizado en la figura, determine el sistema de ecuaciones que permiten obtener las coordenadas (x, y) del polo de aceleraciones en función de la rotación instantánea, ω , de su derivada temporal, $\dot{\omega}$, y de la velocidad de sucesión de centros instantáneos de rotación, v_1 .

EJERCICIO CIN. PLANA. 10

Examen Febrero 2000-02-15

Si en un movimiento plano con $\omega = \text{Cte.}$, I es el centro instantáneo de rotación y Γ el polo de aceleraciones, demuestre que $I\Gamma = \frac{v_I \times \omega}{\omega^2}$ siendo v_I la velocidad de sucesión de centros instantáneos de rotación.

EJERCICIO CIN. PLANA. 11

Junio 2000-07-03

Un triángulo OAB , rectángulo en A , con $|OA| = a$ y $|OB| = b$, gira en su plano permaneciendo O fijo. Los módulos de la velocidad y aceleración de A son v_A y a_A . Determine los módulos de la velocidad y aceleración de B .

EJERCICIO CIN. PLANA. 12

Junio 2000-07-03

En un movimiento plano se conoce, en un instante determinado, la aceleración de un punto A , a_A , la derivada temporal de la rotación instantánea, $\dot{\omega}$, y se sabe que la rotación instantánea es nula. Expresé el vector $A\Gamma$ en función de los datos, siendo Γ el polo de aceleraciones.

EJERCICIO CIN. PLANA. 13

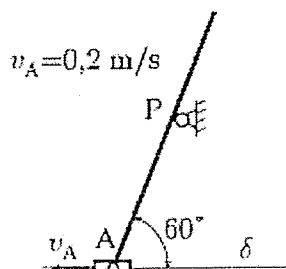
Primer parcial 2001-01-Primer examen parcial 1999-01-25

Si A y B son dos puntos de plano móvil en un movimiento plano, y v_A y v_B sus velocidades respectivas, deduzca una expresión vectorial que exprese la rotación ω en función de los datos anteriores.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	--	---

EJERCICIO CIN. PLANA. 20

Examen de Febrero 2003-02-10



El extremo A de la barra de la figura se mueve con velocidad igual a 0,2 m/s según la recta δ . En el movimiento de la barra ésta siempre apoya sobre un cilindro de radio despreciable. Determine la velocidad del punto P de la barra en contacto con dicho cilindro en la posición de la figura.

EJERCICIO CIN. PLANA. 21

Examen de Septiembre 2003-09-15

Una recta fija y un círculo móvil son coplanarios. Si el círculo rueda, sin deslizar, sobre la recta fija con velocidad angular constante, justifique sin cálculos que el punto del círculo en contacto con la recta siempre tiene aceleración.

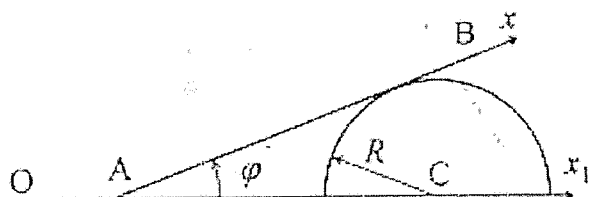
EJERCICIO CIN. PLANA. 22

Examen de Junio 2004-06-17

Una barra AB, de longitud $2L$, se mueve de forma que A lo hace sobre el eje Oy y B sobre el eje Ox de un sistema de referencia cartesiano. Justifique las formas de la base y de la ruleta del movimiento plano de la barra, sin necesidad de ecuaciones

EJERCICIO CIN. PLANA. 23

Examen de Febrero 2005-02-07



La varilla AB apoya constantemente sobre la semicircunferencia fija de centro C y radio R. El extremo A de la misma se mueve sobre el eje fijo Ox_1 con velocidad $v = \text{cte}$. Calcule la velocidad angular de la varilla AB en función de los parámetros R, v y la variable φ .

EJERCICIO CIN. PLANA. 24

Febrero 2005-02-07 Septiembre 2005-09-05

Una rueda de radio r y centro O, rueda sin deslizar sobre el contorno de una circunferencia fija de radio R ($R > r$) y centro O_1 , en dos situaciones diferentes: a) por su exterior; b) por su interior. En ambos casos el movimiento de la rueda es consecuencia del arrastre de una manivela O_1I , que une O_1 con O. Determine, en cada caso, la relación existente entre las velocidades angulares o rotaciones, ω de la rueda y Ω de la manivela (como es habitual, se atribuyen signos contrarios a los escalares de rotaciones de sentidos opuestos).

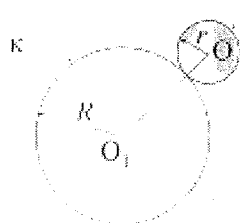
EJERCICIO CIN. PLANA. 25

Febrero 2006-02-13

En un movimiento plano en el que el sistema fijo es S_1 y S el móvil, I^* , es el seguidor de polos, es decir, el punto móvil que coincide en cada instante con el punto I que es centro instantáneo de rotación (c.i.r.) o polo de dicho instante. Indique la relación entre las velocidades v_{I^*/S_1} y v_{I/S_1} y escriba la expresión vectorial de la aceleración del c.i.r. respecto del sistema fijo en función de la rotación instantánea ω y de la velocidad del seguidor de polos.

EJERCICIO CIN. PLANA. 26

Febrero 2006-02-13



Una circunferencia σ , de centro O y radio r , rueda sin deslizar sobre el exterior de otra κ , que es fija, de centro O_1 y radio R , siendo arrastrada por una manivela $\overline{O_1O}$. Determine la relación $f(\omega, \Omega, r, R) = 0$, existente entre las rotaciones ω de σ y Ω de la manivela.

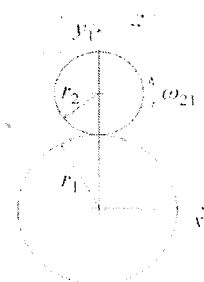
En la situación anterior, de rodadura sin deslizamiento de σ sobre κ , ésta última ahora puede rotar en torno a su centro O_1 fijo. Deduzca la relación $f(\omega', \omega, \Omega, r, R) = 0$, existente entre las rotaciones ω' de κ , ω de σ y Ω de la manivela, todas ellas respecto de S_1 .

EJERCICIO CIN. PLANA. 27

Junio 2007-06-18

Una circunferencia móvil, C_2 , de radio r_2 rueda sin deslizar respecto de una circunferencia fija, C_1 , de radio r_1 con velocidad angular ω_{21} . Determine el módulo de la velocidad de sucesión de polos en el instante representado.

En el mismo sistema y posición que en la cuestión anterior, determine el módulo de la aceleración del centro instantáneo de rotación, en función de los mismos datos: r_1, r_2, ω_{21} .

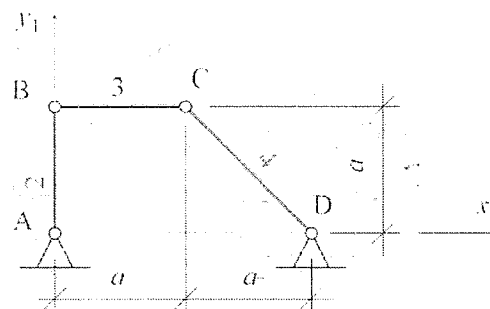


EJERCICIO CIN. PLANA. 28

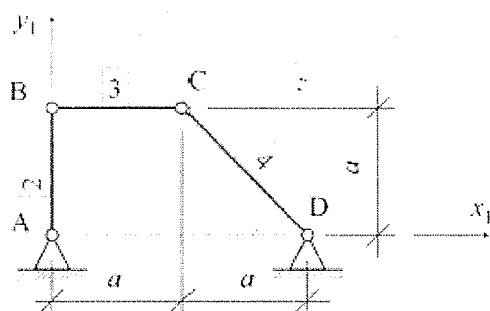
Junio 2007-06-18

Septiembre 2007-09-03

El mecanismo plano de la figura está compuesto por las barras 2, 3 y 4 articuladas en los puntos A, B, C y D. Determine el valor modular máximo, $v_{\max}$, de la velocidad de los puntos de la barra 3 en su movimiento respecto del sistema $S_1: \{Ax_1, y_1\}$, expresando el resultado en función de ω_{21} , rotación de la barra 2 respecto a S_1 , y de la longitud a .



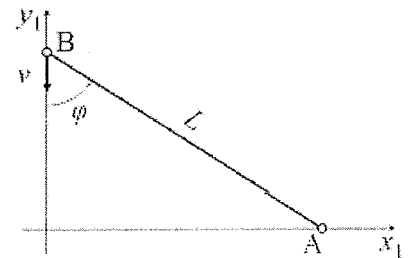
El mecanismo plano de la figura está compuesto por las barras 2, 3 y 4 articuladas en los puntos A, B, C y D que se mueven respecto del sistema fijo S_1 . Determine el valor modular máximo, $v_{\max}$, de la velocidad de los puntos de la barra 3 en su movimiento respecto de la barra 2, expresando el resultado en función de ω_{21} , rotación de la barra 2 respecto a S_1 , y de la longitud a .



EJERCICIO CIN. PLANA. 29

Septiembre 2007-09-03

Una varilla de longitud L con extremos A y B se mueve de modo que el extremo A desliza sobre el eje x_1 y el extremo B sobre el eje y_1 . En la posición indicada, caracterizada por el ángulo φ , la velocidad del extremo B es $v_B = -v j_1$. Determine el módulo de la velocidad del extremo A en dicho instante.



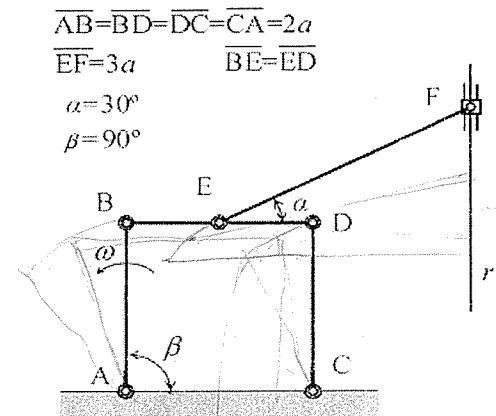
En el mismo sistema y posición que en la cuestión anterior, y suponiendo $v = \text{cte.}$, determine el módulo de la aceleración del punto A, en función de los mismos datos: L, φ, v .

EJERCICIO CIN. PLANA. 30 (Examen de Febrero 2008-02-15)

La barra $\overline{EF}$ está articulada en sus extremos al cuadrilátero articulado (ABCD) y a la corredera que desliza sobre la recta r . Los puntos A y C son fijos. Con los parámetros indicados en la figura que caracterizan el mecanismo, determine la velocidad angular de la barra EF en función de ω , en la posición indicada.

En el mismo sistema y posición que en la cuestión anterior, y suponiendo $\omega = \text{cte.}$, determine el módulo de la aceleración del punto E, en función de ω y a .

En el mismo sistema y posición que en la cuestión 1), y suponiendo $\omega = \text{cte.}$, determine el módulo de la aceleración del punto F, en función de los mismos datos: ω y a .



EJERCICIO CIN. PLANA. 31 (Examen de Septiembre 2008-09-05)

Una barra rectilínea de extremos A y B y longitud L se mueve de modo que A desliza sobre el eje x_1 y B sobre el eje y_1 , siendo $y_1(B) > 0$. Sabiendo que la abscisa del punto A es $x_1(A) = a$, determine las coordenadas $(x_1(I), y_1(I))$ del centro instantáneo de rotación en la referencia $O_1 x_1 y_1$, en función de a y L .

Si la barra de la pregunta anterior se mueve de modo que $\dot{x}_A = v$, se pide determinar la velocidad de sucesión de polos $v_I = \dot{x}_I j_1 + \dot{y}_I j_1$, en función de v, L y a .

REPASO

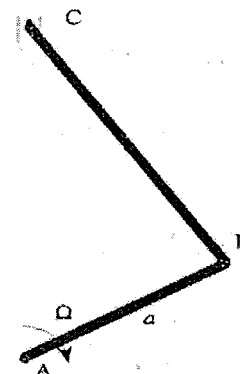
EJERCICIO R-CIN. PLANA. 1

Primer Examen Parcial 1996-01-19

Una circunferencia σ de radio R rueda sin deslizar por el interior de una circunferencia fija σ_1 de radio R_1 , siendo $R_1 > R$. Calcular la $\bar{\omega}_\sigma$ suponiendo que es constante y el centro de σ tarda un tiempo T en volver a su posición inicial.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 2

El mecanismo de la figura consta de una manivela AB de longitud a y de una biela BC de longitud $\sqrt{3}a$. La manivela AB gira con velocidad angular constante Ω en torno al extremo A . El extremo C de la biela se mueve sobre un carril rectilíneo que pasa por A . Calcular el módulo de la velocidad de C cuando la distancia desde C hasta A es $2a$.



EJERCICIO R-CIN. PLANA. 3

Examen Junio 1997-06-19

Al recordar la expresión de la aceleración del centro instantáneo en el movimiento plano está dudando entre $\omega \times v_I$ y $v_I \times \omega$, aceptando que una de ellas es la correcta (lo cual es cierto). ¿Cómo puede resolver la cuestión, sin deducir la fórmula, mediante argumentos puramente cinemáticos?

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 4

Examen de Septiembre 1997-09-16

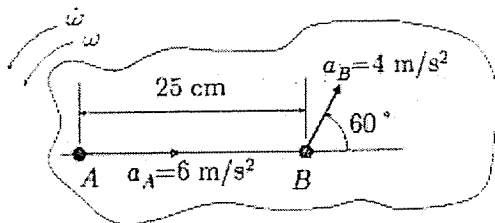
Señale las afirmaciones correctas para el movimiento plano cuando $\omega \neq 0$ y $\dot{\omega} \neq 0$:

- El centro instantáneo de rotación (CIR) es, en cada instante, el punto del plano móvil en el que se cortan las perpendiculares a las trayectorias de tres puntos del plano móvil trazadas por cada uno de dichos puntos, respectivamente.
- La base y la ruleta no son perfiles conjugados.
- La aceleración del CIR y la velocidad de sucesión de polos siempre son paralelas.
- El CIR siempre se encuentra sobre la recta que definen los centros de curvatura de la base y de la ruleta respecto del punto común a la base y a la ruleta.
- La velocidad de sucesión de polos es la velocidad del CIR respecto al sistema fijo.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 5

Examen de Junio 1998-06-22

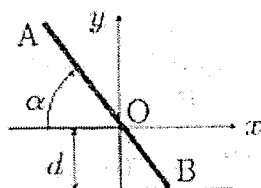
Un cuadrado de lado a se mueve en su plano de forma que la velocidad de un vértice es el triple que la de su vértice opuesto, siendo ambas perpendiculares a la diagonal de dichos vértices y de sentidos contrarios. Determine la distancia del centro del cuadrado al centro instantáneo de rotación.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 6
Feb 2001-02-19


Los puntos A y B del plano móvil poseen las aceleraciones indicadas en la figura. Determine los valores de la velocidad y aceleración angular del plano móvil respecto al plano fijo.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 7
Examen de Junio 2003-06-09

Una recta fija y un círculo móvil son coplanarios. Si el círculo rueda, sin deslizar, sobre la recta fija con velocidad angular constante, justifique el valor de la aceleración del centro del disco.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 8
Examen de Junio 2003-06-09


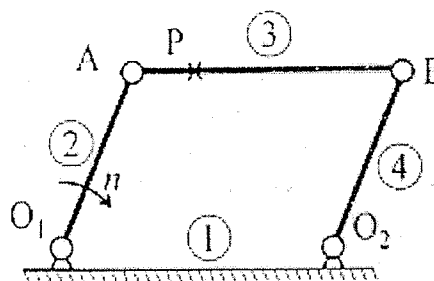
Un segmento AB se encuentra situado en un plano vertical xy (x es horizontal e y es vertical) apoyado sobre el vértice O (que se toma como origen de coordenadas) de un escalón de altura d y sobre la base horizontal del mismo. Obtenga las coordenadas del centro instantáneo de rotación del movimiento que puede seguir el segmento.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 9
Examen de Junio 2005-06-20

Un automóvil marcha horizontal, rectilínea y uniformemente a 72 km/h. Si sus ruedas tienen 20cm de radio y no deslizan, calcule la aceleración de los puntos de contacto de las ruedas con la carretera, en módulo, dirección y sentido.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 10

Calcule el módulo de la velocidad del punto P del cuadrilátero representado en la figura.



$$\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = 30 \text{ cm}$$

$$\overline{O_1O_2} = \overline{AB} = 50 \text{ cm}$$

$$\overline{AP} = 0.2 \overline{AB}$$

$$n = \frac{20}{\pi} \text{ r.p.m.}$$

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 11

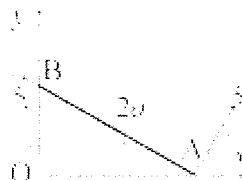
En el cuadrilátero definido en la cuestión anterior, determine el módulo de la aceleración del punto P si la barra O_1A gira uniformemente

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 12
Examen de Febrero 2006-02-13

Una circunferencia C , de centro O y radio $r = 20$ cm, rueda uniformemente sin deslizar sobre otra circunferencia fija, C_1 , de centro O_1 y radio $R = 30$ cm, por el exterior de la misma. Ambas circunferencias son coplanarias. Sabiendo que el centro O de C emplea un tiempo $T = 10$ s entre dos pasos sucesivos por la misma posición, determine la velocidad angular de la recta O_1O y la de la circunferencia C , expresando cada una en rad/s y en r.p.m.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 13
Examen de Febrero 2006-02-13

La barra AB se mueve manteniendo sus extremos sobre los ejes fijos x_1 e y_1 según se representa en la figura. Determine las ecuaciones de la base en la referencia fija (Ox_1y_1) y las de la ruleta en la referencia móvil ($Ax'y'$).


EJERCICIO R-CIN. PLANA. 14 (Examen de Septiembre 2007-09-03)

En un movimiento plano, escriba la aceleración de un punto P del plano móvil, en función de los vectores velocidad angular, aceleración angular, velocidad de sucesión de polos y vector $\overrightarrow{IP}$.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 15 (Examen de Septiembre 2007-09-03)

Una circunferencia de radio R_1 rueda sin deslizar por el exterior de otra circunferencia fija y coplanaria, de radio R_2 , con movimiento uniforme, empleando un tiempo T entre dos pasos sucesivos de su centro por el mismo punto. Obtenga la aceleración del centro O_1 de la circunferencia móvil.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. 16 (Examen de Septiembre 2008-09-05)

Una circunferencia de radio R_1 rueda sin deslizar por el interior de otra circunferencia fija y coplanaria, de radio R_2 ($R_2 > R_1$), con velocidad angular constante, empleando un tiempo T entre dos pasos sucesivos de su centro por el mismo punto. Obtenga la aceleración del centro O_1 de la circunferencia móvil en función de los datos.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. EXTRA 1.

Sean dos rectas r y s que se cortan en un punto O formando un ángulo fijo α y que se mueven respecto a una referencia fija de forma que r siempre pasa por un punto fijo A y s siempre pasa por un punto fijo B . Determine base y ruleta del en el movimiento del sólido formado por r y s respecto de la referencia fija.

EJERCICIO R-CIN. PLANA. EXTRA 2.

Sea un segmento AB que se mueve respecto a una referencia fija de forma que el extremo A desliza sobre una recta r de la referencia fija y el extremo B desliza sobre otra recta s de la misma referencia fija. Determine base y ruleta del en el movimiento del sólido formado por el segmento AB respecto de la referencia fija.

6. CAMPOS DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES ACELERACIÓN DE I. POLO DE ACELERACIONES

EN TODO INSTANTE, POSICIÓN DE I $\equiv$ POSICIÓN DE I* $\Rightarrow \bar{I}P \equiv \bar{I}^*P$

POR TANTO: $\bar{U}^P = \bar{U}^I + \bar{\omega} \times \bar{I}P \Rightarrow \boxed{\bar{U}^P = \bar{\omega} \times \bar{I}^*P} \quad (1)$

$\bar{a}^P = \bar{a}^I + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\omega} \times \bar{I}P) + \bar{\omega} \times \dot{\bar{I}P} \Rightarrow \boxed{\bar{a}^P = \bar{a}^I + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\omega} \times \bar{I}^*P) + \bar{\omega} \times \dot{\bar{I}^*P}} \quad (2)$

DERIVANDO (1): $\frac{d\bar{U}^P}{dt} = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{I}^*P \right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{I}^*P}{dt} \right)$

$|\bar{I}^*P| \neq de \Rightarrow \frac{d\bar{I}^*P}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{O}_1P - \bar{O}_1I^*) = \bar{U}^P - \bar{U}^{I^*} = \bar{\omega} \times \bar{I}^*P - \bar{U}^{I^*}$

$\bar{O}_1P = \bar{O}_1I^* + \bar{I}^*P$

$(1) \bar{U}^P = \bar{\omega} \times \bar{I}^*P$

POR TANTO: $\frac{d\bar{U}^P}{dt} = \bar{a}^P = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{I}^*P + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{I}^*P - \bar{U}^{I^*}) =$
 $= \dot{\bar{\omega}} \times \bar{I}^*P + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{I}^*P) - \bar{\omega} \times \bar{U}^{I^*} \quad (3)$

COMPARANDO (2) Y (3) SE OBTIENE:

$\bar{a}^I = -\bar{\omega} \times \bar{U}^{I^*} \Rightarrow \bar{\omega} \times \bar{a}^I = \bar{\omega} \times (-\bar{\omega} \times \bar{U}^{I^*})$

MULTIPLICANDO POR $\bar{\omega}$ $= (\bar{\omega} \cdot \bar{U}^{I^*}) \bar{\omega} - [\bar{\omega}(\bar{\omega} \cdot \bar{U}^{I^*})] \bar{U}^{I^*} = \omega^2 \bar{U}^{I^*}$
 $\bar{O}(\bar{\omega} \perp \bar{U}^{I^*})$

POR TANTO: $\boxed{\bar{U}^{I^*} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{a}^I}{\omega^2}}$

DESARROLLANDO (3): $\bar{a}^P = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{I}^*P + [(\bar{\omega} \cdot \bar{I}^*P) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) \bar{I}^*P] - \bar{\omega} \times \bar{U}^{I^*}$
 $\bar{O}(\bar{\omega} \perp \bar{I}^*P) \quad \omega^2$

POR TANTO, REORDENANDO: $\bar{a}^P = -\bar{\omega} \times \bar{U}^{I^*} - \omega^2 \bar{I}^*P + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{I}^*P \quad (4)$

CON ESTOS RESULTADOS SE VA A BUSCAR EL PUNTO P QUE, DE EXISTIR, TENGA ACELERACIÓN NULA

	Ingenieros Industriales	Mecánica I
	c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tfno: 91 535 75 29	Profesor Alex García

Indusbol
ANEXOS
CON. PLAS
2/4

Partiendo de (4) y considerando $\vec{r}$ en lugar de $\vec{P}$:

$$\ddot{\vec{a}}^r = \ddot{\vec{0}} = -\ddot{\vec{\omega}} \times \vec{U}^{I*} - \omega^2 \vec{I}^{*r} \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{I}^{*r} \vec{r} \Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{\omega}} \times \vec{U}^{I*} = -\omega^2 \vec{I}^{*r} \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{I}^{*r} \vec{r}} \quad (5)$$

Multiplicando por $\vec{k}$ por la izquierda: $\vec{k} \times (\ddot{\vec{\omega}} \times \vec{U}^{I*}) = \vec{k} \times (-\omega^2 \vec{I}^{*r} \vec{r}) + \vec{k} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{I}^{*r} \vec{r})$

$$\underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{U}^{I*})}_{\ddot{0}(\vec{k} \perp \vec{U}^{I*})} \ddot{\vec{\omega}} - \underbrace{(\vec{k} \cdot \ddot{\vec{\omega}})}_{\omega} \vec{U}^{I*} = -\omega^2 \vec{k} \times \vec{I}^{*r} \vec{r} + \underbrace{[(\vec{k} \cdot \vec{I}^{*r} \vec{r}) \dot{\vec{\omega}} - (\vec{k} \cdot \dot{\vec{\omega}}) \vec{I}^{*r} \vec{r}]}_{\ddot{0}(\vec{k} \perp \vec{I}^{*r} \vec{r})}$$

Por tanto: $\boxed{\omega \vec{U}^{I*} = \omega^2 \vec{k} \times \vec{I}^{*r} \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \vec{I}^{*r} \vec{r}} \quad (6)$

Operando: (5) $\cdot \omega^2$: $(\ddot{\vec{\omega}} \times \vec{U}^{I*}) \omega^2 = -\omega^4 \vec{I}^{*r} \vec{r} + \omega^2 \dot{\vec{\omega}} \vec{k} \times \vec{I}^{*r} \vec{r}$

(6) $\cdot \dot{\vec{\omega}}$: $\dot{\vec{\omega}} \omega \vec{U}^{I*} = \dot{\vec{\omega}} \omega^2 \vec{k} \times \vec{I}^{*r} \vec{r} + \dot{\vec{\omega}}^2 \vec{I}^{*r} \vec{r}$

Restando las ecuaciones (6) $\dot{\vec{\omega}}$ - (5) ω^2 :

$$\dot{\vec{\omega}} \omega \vec{U}^{I*} - \omega^3 \vec{k} \times \vec{U}^{I*} = \dot{\vec{\omega}}^2 \vec{I}^{*r} \vec{r} + \omega^4 \vec{I}^{*r} \vec{r}$$

Y despejando: $\boxed{\vec{I}^{*r} \vec{r} = \frac{\dot{\vec{\omega}} \omega \vec{U}^{I*} - \omega^3 \vec{k} \times \vec{U}^{I*}}{\dot{\vec{\omega}}^2 + \omega^4}}$

PERFILES CONJUGADOS

- • EN MOVIMIENTO PLANO, DOS CURVAS (UNA MÓVIL Y UNA FIJA) QUE PERMANECEN SIEMPRE TANGENTES ENTRE SÍ CONFORMAN UNA PAREJA DE PERFILES CONJUGADOS.
- • EL PUNTO QUE SIGUE AL DE TANGENCIA SE LLAMA "PUNTO CARACTERÍSTICO" DE LA PAREJA DE PERFILES CONJUGADOS.
- • EL PERFIL CONJUGADO FIJO ES TANGENTE AL PERFIL CONJUGADO MÓVIL EN TODAS LAS POSICIONES QUE ÉSTE ÚLTIMO OCUPA (HUELLAS), SIENDO POR TANTO LA ENVOLVENTE DE FAMILIA DE POSICIONES QUE EL PERFIL CONJUGADO MÓVIL DETERMINA SOBRE EL PLANO FIJO.
- • ESTO PERMITE DETERMINAR EL PERFIL CONJUGADO FIJO A PARTIR DEL MÓVIL:

SEAN $\begin{cases} f(x, y) = 0 & \text{EQUAC. PERFIL CONJUG. MOV.} \\ \xi, \eta, \varphi & \text{COORDENADAS QUE POSICIONAN EL} \\ & \text{PLANO MÓVIL RESPECTO AL FIJO} \end{cases}$

UN PUNTO P TENDRÁ COORDENADAS (x_1, y_1) EN EL PLANO FIJO Y (x, y) EN EL PLANO MÓVIL.

LA RELACIÓN ENTRE ELAS SERÁ:

$$\vec{O_1 P} = \vec{O_1 O} + \vec{OP}$$

$$(x_1, y_1) = (\xi, \eta) + (x, y) \Rightarrow (x_1 - \xi) \vec{i}_1 + (y_1 - \eta) \vec{j}_1 = x \vec{i} + y \vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(x_1 - \xi) \cos \varphi + (y_1 - \eta) \sin \varphi] \vec{i} + [-(x_1 - \xi) \sin \varphi + (y_1 - \eta) \cos \varphi] \vec{j} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

Por tanto:
$$\begin{cases} x = (x_1 - \xi) \cos \varphi + (y_1 - \eta) \sin \varphi \\ y = -(x_1 - \xi) \sin \varphi + (y_1 - \eta) \cos \varphi \end{cases}$$

ASÍ, SUSTITUYENDO EN LA ECUACIÓN DEL PERFIL CONJUGADO MÓVIL, SE OBTIENE:

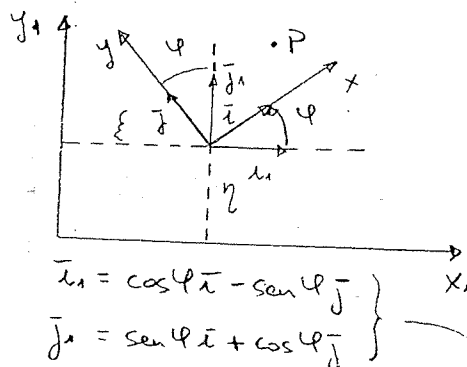
$$f((x_1 - \xi) \cos \varphi + (y_1 - \eta) \sin \varphi, -(x_1 - \xi) \sin \varphi + (y_1 - \eta) \cos \varphi) = 0.$$

SI ADEMÁS SE CONOCEN $\xi(t)$, $\eta(t)$ y $\varphi(t)$, LA ECUACIÓN ANTERIOR QUEDA EN VARIABLES x_1, y_1, t EN LA FORMA: $h(x_1, y_1, t) = 0$

LA ENVOLVENTE SE OBTENDRÁ DEL SISTEMA $\Rightarrow \begin{cases} h(x_1, y_1, t) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{cases}$, SISTEMA DE

ECUACIONES QUE DETERMINARÁ $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t) \end{cases}$, FUNCIONES QUE DEFINEN EL PUNTO CARACTERÍSTICO

RESPECTO AL PLANO FIJO, O LO QUE ES LO MISMO, EL PERFIL CONJUGADO FIJO.



	Ingenieros Industriales	Mecánica I
	c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tfno: 91 535 75 29	Profesor Alex García

4/4

SI EN LUGAR DE $\xi(t)$, $\eta(t)$ Y $\varphi(t)$ SE CONOCEN $\xi(\varphi)$ Y $\eta(\varphi)$, AL SUSTITUIR EN $f=0$

EN LUGAR DE $h(x_1, y_1, t)=0$ SE OBTENDRÁ $g(x_1, y_1, \varphi)=0$, Y DE LA MISMA FORMA, LA

ENVOLVENTE VENDRÁ DEFINIDA POR $\begin{cases} g(x_1, y_1, \varphi)=0 \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi}=0 \end{cases}$ OBTENIENDO $\begin{cases} x_1 = x_1(\varphi) \\ y_1 = y_1(\varphi) \end{cases}$, COORDENADAS

DEL PUNTO CARACTERÍSTICO EN FUNCIÓN DE φ .

— DE FORMA ANALÓGICA PUEDE OBTENERSE EL PERFIL CONJUGADO MÓVIL CONOCIDO EL FIJO. LA ECUACIÓN

DEL PERFIL CONJUGADO FIJO SERÁ AHORA $f(x_1, y_1)=0$

PARA UN PUNTO P:

$$\vec{O_1P} = \vec{O_1O} + \vec{OP}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \cos\varphi \bar{x}_1 + \sin\varphi \bar{y}_1 \\ \bar{y} = -\sin\varphi \bar{x}_1 + \cos\varphi \bar{y}_1 \end{cases}$$

$$(x_1 \bar{x}_1 + y_1 \bar{y}_1) = (\xi \bar{x}_1 + \eta \bar{y}_1) + (x \bar{x} + y \bar{y}) = (\xi + x \cos\varphi - y \sin\varphi) \bar{x}_1 + (\eta + x \sin\varphi + y \cos\varphi) \bar{y}_1$$

PORTANTO, LA FAMILIA DE CURVAS DEFINIDAS EN EL PLANO MÓVIL ES:

$$f(\xi + x \cos\varphi - y \sin\varphi, \eta + x \sin\varphi + y \cos\varphi) = 0$$

OBTENIENDO LA ENVOLVENTE DE LA MISMA MANERA QUE ANTERIORMENTE (DERIVANDO RESPECTO A t O φ), ETC)

EL MOVIMIENTO GENERAL DEL PERFIL CONJUGADO MÓVIL SOBRE EL FIJO CONSISTIRÁ EN UNA RODADURA MÁS UN DESLIZAMIENTO, SIENDO LA VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO $\vec{U}^D = \vec{\omega} \times \vec{IP}$, QUE TIENE QUE SER TANGENTE A AMBOS PERFILES. PORTANTO, $\vec{IP}$ SERÁ PERPENDICULAR A ESA TANGENTE, LO QUE DETERMINA LA PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS PERFILES CONJUGADOS:

"EL C.I.R SE ENCUENTRA SOBRE LAS NORMALES A LAS PAIREJAS DE PERFILES CONJUGADOS"

ESTÁTICA

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum M_o = 0$$

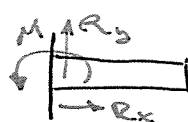
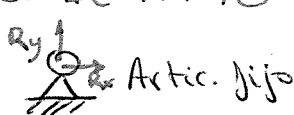
En equilibrio con rozamiento

- Al deslizamiento
- A la rodadura

$$F_r \leq \mu N$$

$$M_r \leq \delta N$$

TIPOS DE APOYO



Empotramiento

TRABAJO VIRTUALES

$$\delta W = \sum F \delta r_p = 0$$

$\forall \delta r_p$

sólo se consideran los F_{aplic} y los δr compatibles con las ligaduras

En sól. ríg. + $\bar{M}_p \delta \theta$

FUERZAS QUE DERIVAN DE POTENCIAL - TIPOS DE EQUILIBRIO

$$F = -\nabla U; \quad \nabla U \cdot dr = dU$$

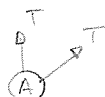
En el caso de que la posición del sistema pueda definirse con un único parámetro q , evaluamos $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$ si:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0 \rightarrow \text{Eq. estable} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0 \rightarrow \text{Eq. inestable} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = 0 \rightarrow \text{Eq. indiferente}$$

BARRAS ARTICULADAS

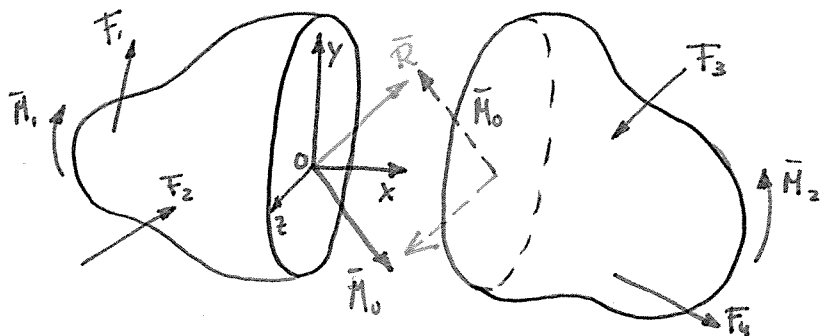
Se calcula el equilibrio de la figura total para sacar las reacciones en los apoyos.

Para sacar las tensiones en cada barra además los nodos y consideramos todos los ejuntos de tracción. Si salen negativas serán de compresión.



ANEXO

Esfuerzos Interiores



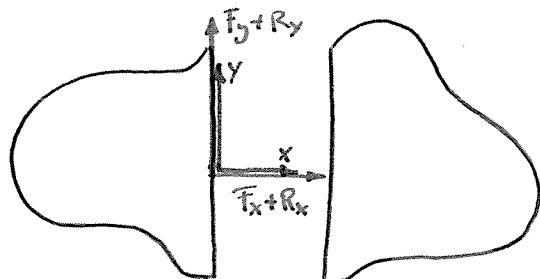
$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

Esfuerzo normal N Esfuerzo cortante Q_y Esfuerzo cortante Q_z

$$\vec{M}_0 = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

Momento torsor Momento flector Momento flector

En caso plano



En caso plano solo hay momento en z (momento flector en z M_z)

Tipos de apoyo

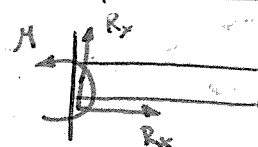
• Apoyo articulado fijo



• Apoyo articulado móvil

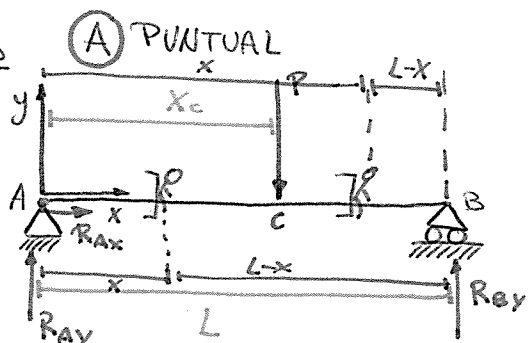


• Empotramiento



Vigas: Son sistemas bidimensionales, no tienen grosor

• Tipos de cargas



1) Cálculo de reacciones en apoyos: equilibrio viga total

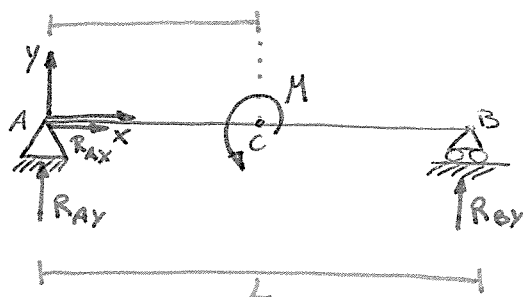
$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{0} & \left\{ \begin{array}{l} \sum: R_{Ax} = 0 \\ \downarrow: R_{Ax} + R_{By} - P = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} = 0 \\ R_{By} = \frac{P x_c}{L} \end{array} \right. \\ \sum \vec{M}_A = \vec{0} & : R_{By} L - P x_c = 0 \end{aligned}$$

Para el cálculo de distribuciones separa la viga en tramos determinados por los puntos de apoyo y puntos de cargas.

2) Cálculo de distribuciones de Q y M

$$\text{Tramo CB} \left\{ \begin{array}{l} Q(x) = R_{By} \\ M_j(x) = R_{By}(L-x) \end{array} \right\} \parallel \text{Tramo AC} \left\{ \begin{array}{l} Q(x) = R_{By} - P \\ M_j(x) = R_{By}(L-x) - P(x_c - x) \end{array} \right.$$

(B) MOMENTO PUNTUAL



1) Cálculo de reacciones en apoyos: equilibrio viga total

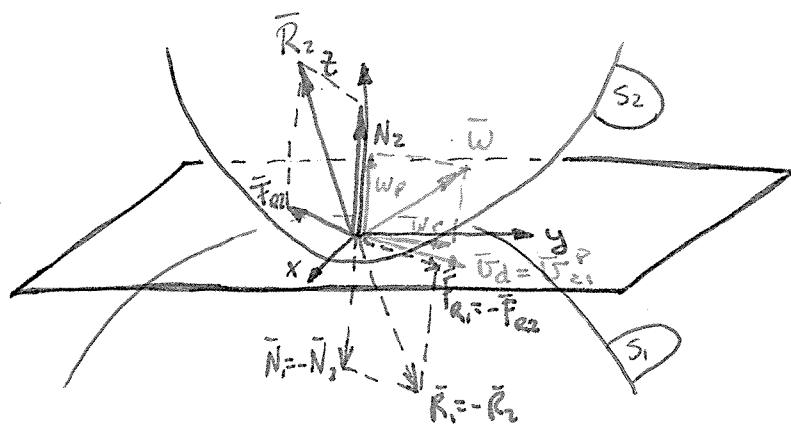
$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{0} & \left\{ \begin{array}{l} \sum: R_{Ax} = 0 \\ \uparrow: R_{Ay} + R_{By} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} = 0 \\ R_{By} = -\frac{M}{L} \end{array} \right. \\ \sum M_A = 0: R_{By}L + M = 0 & \left\{ R_{Ay} = \frac{M}{L} \right. \end{aligned}$$

2) Cálculo de distribuciones de Q y M

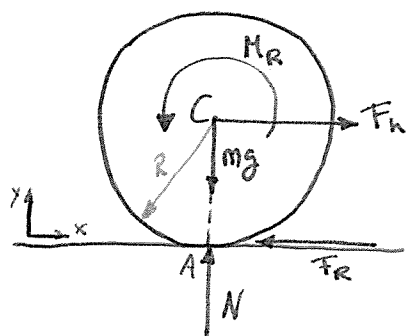
$$\text{Tramo CB:} \left\{ \begin{array}{l} Q(x) = R_{By} \\ M_j(x) = R_{By}(L-x) \end{array} \right. \quad \text{Tramo AC:} \left\{ \begin{array}{l} Q(x) = R_{By} \\ M_j(x) = R_{By}(L-x) + M \end{array} \right.$$

(C) DISTRIBUCIÓN DE CARGA (ver en ejercicios)

Equilibrio con rozamiento



EJ. ESTAT. I 2 $m, R, \delta, \mu, \mu \cdot R < \delta, F_h, g$



• Por equilibrio $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ $\begin{cases} \vec{i}: F_h - F_R = 0 & (1) \\ \vec{j}: N - mg = 0 & (2) \end{cases}$

$\Sigma M_A = 0 \begin{cases} R: M_R - F_h R = 0 & (3) \end{cases}$

• Por no deslizamiento: $F_R \leq \mu N$ (4)

• Por no rodadura: $M_R \leq \delta N$ (5)

• $\mu R < \delta$ (6)

$F_h = F_R \leq \mu N = \mu mg \Rightarrow \mu \geq \frac{F_h}{mg}$
 $F_h R = M_R \leq \delta N = \delta mg \Rightarrow \frac{\delta}{R} \geq \frac{F_h}{mg}$

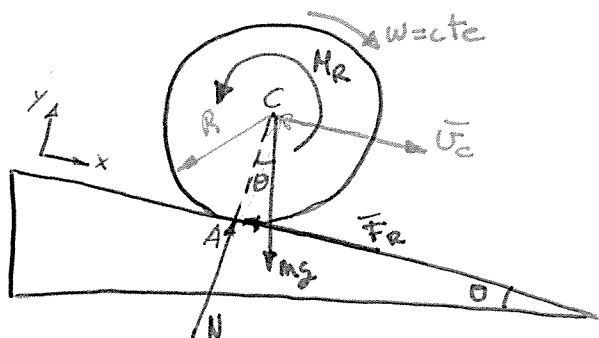
De (6) $\rightarrow \frac{\delta}{R} > \mu$

Con F_h creciente desde 0, $\frac{F_h}{mg}$ alcanzará primero el valor μ (empieza a deslizarse) y después alcanza el valor $\frac{\delta}{R}$ (empieza a rodar)

Rompe equilibrio:

Con $\mu = \frac{F_h}{mg} \Rightarrow \begin{cases} F_h = F_R = \mu N = \mu mg \\ N = mg \end{cases}$

EJ. ESTAT. I 4 Cilindro: RSD, R , mov. uniforme ($\vec{\omega} = c\vec{e}$); δ ; $\mu = \infty$
 Se pide θ



Por CVS y RSD:

$\vec{U}_C = \vec{U}_A + \vec{\omega} \times \vec{AC} = \vec{\omega} R \vec{e} \Rightarrow \vec{a}_C = \frac{d\vec{U}_C}{dt} = \vec{\omega} \times R \vec{e} = 0$ ($\vec{\omega} = c\vec{e}$)

Por tanto se cumplen condiciones de estática

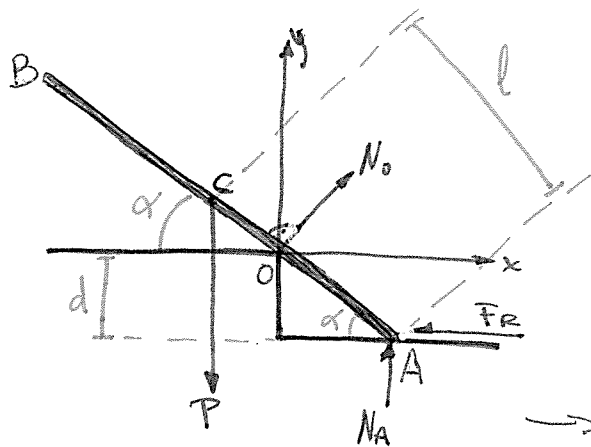
$\begin{cases} \vec{i}: mg \sin \theta - F_R = 0 & (1) \\ \vec{j}: N - mg \cos \theta = 0 & (2) \\ \Sigma \vec{F} = m \vec{a}_C = \vec{0} & (wcte) \\ \Sigma M_C = \vec{0}: R: M_R - F_R \cdot R = 0; & (3) \end{cases}$

Por rodadura $M_R = M_{Rmax} = \delta N$ (4)

$F_R = mg \sin \theta \Rightarrow \frac{M_R}{\delta N} = F_R \cdot R = mg \sin \theta \cdot R \Rightarrow \delta mg \cos \theta = mg \sin \theta \cdot R$

$\theta = \arctg \frac{\delta}{R}$

EJ. ESTAT. I 5 $AB=2l$, P , Se pide F_R



Por equilibrio

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \begin{cases} \text{I: } N_0 \sin \alpha - F_R = 0 \\ \text{J: } N_0 \cos \alpha + N_A - P = 0 \end{cases}$$

$$\sum \bar{M}_A = \vec{0} \quad \bar{R}: P l \cos \alpha - N_0 \frac{d}{\sin \alpha} = 0 \Rightarrow$$

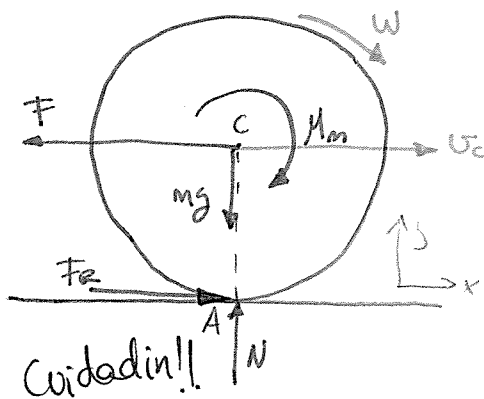
$$\Rightarrow N_0 = \frac{P l \cos \alpha \sin \alpha}{d}$$

$$\rightarrow \boxed{F_R = \frac{P l \cos \alpha \sin^2 \alpha}{d}}$$

EJ. ESTAT. I 7

Se pide $\mu_{\min}$ por equilibrio:

Por no deslizamiento:



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \text{I: } F_R - F = 0 \\ \text{J: } N - mg = 0 \end{cases}$$

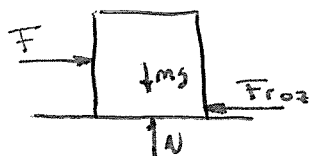
$$\sum \bar{M}_A = \vec{0} \rightarrow -M_m + F_R R = 0$$

$$M_m = F_R R = F_R \cdot R \leq \mu \cdot N R = \mu mg R$$

$$\mu \geq \frac{M_m}{mg R} \rightarrow \boxed{\mu_{\min} = \frac{M_m}{mg R}}$$

EJ. ESTAT. I 8

$m = 500 \text{ kg}$, $\mu = 0,1$, $F_{\text{aplic}} = 400 \text{ N}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$
Se pide F_{roz}



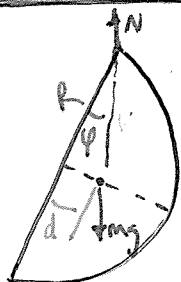
$$\text{Por eq: } \sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} F - F_{\text{roz}} = 0 \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

$$F_{\text{roz}} \leq \mu N = 0,1 \cdot m \cdot g = 0,1 \cdot 500 \cdot 9,8 = 490 \text{ N}$$

$$F = 400 \text{ N} \rightarrow \boxed{F_{\text{roz}} = 400 \text{ N}}$$

EJ. ESTAT. 10 Se pide φ para equilibrio de la figura

Calculo posición del centro de masa por Guildin



$$\sum \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \frac{4}{3} R^3 d = \frac{4}{3} R^3, \quad d = \frac{4R}{3\pi}$$



$$\boxed{\tan \varphi = \frac{4R}{3\pi R} = \frac{4}{3\pi}}$$

Recordar Guildin

$$2\pi \text{ Area figura} \cdot d = \text{Volumen revolución}$$

EJ. ESTAT. I 11 Varible AB: $2a, P; h; \sigma$ Sepide No

Por equilibrio

$$\sum F_{\rightarrow} = 0 \} \tau: N_0 \sin \alpha - F_R = 0$$

$$\vec{J} = N_B + N_O \cos \phi - mg = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \left\{ \bar{K} \cdot mg a \cos \theta - N_0 \frac{h}{\sin \theta} = 0 \right.$$

$$N_0 = \frac{mg \cos \theta \sin T}{h}$$

$$N_o = \frac{P \cdot a \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{h}$$

Se pide $\mu_{\min}$ si: $h=a$, $\alpha=30^\circ$

$$h=a, \varphi=30^\circ$$

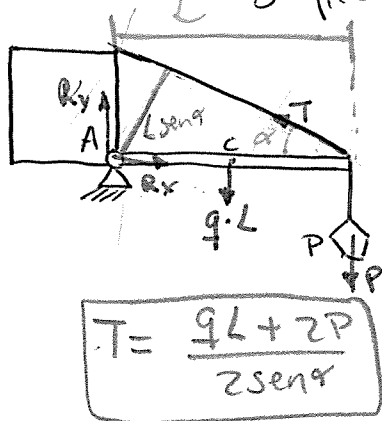
$$F_R = N \sin \theta = \frac{P \cdot a \cdot \cos \theta \sin^2 \theta}{h} \downarrow = P \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3} P}{8}$$

For no delamination: $F_R \leq \mu N_B = \mu (P - N_0 \cos \theta) = \mu (P - P \cos^2 \theta \sin \theta)$

$$\mu \geq \frac{F_R}{1 - \frac{3}{4} \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}P}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{5} \rightarrow \boxed{\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{5}}$$

EJ. ESTAT. 12 Viga en equilibrio: $L, q(N/m)$. Peso: P, α

Se pide T

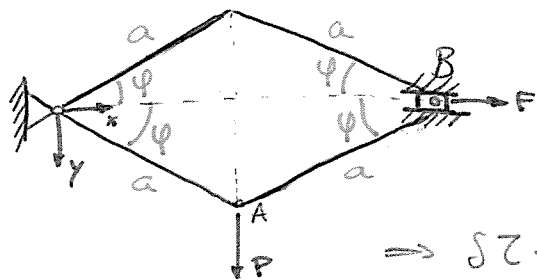


$$\sum M_A = 0 \left\{ -9 \times \frac{L}{2} - PL + TL \sin \theta = 0 \right.$$

$$T = \left(q \frac{L^2}{2} + PL \right) / L \sin \theta = \frac{qL^2 + 2PL}{2L \sin \theta}$$

$$T = \frac{qL + 2P}{2\sin\alpha}$$

EJ. ESTAT. II 2 F, P, φ Relación entre los datos para equilibrio?



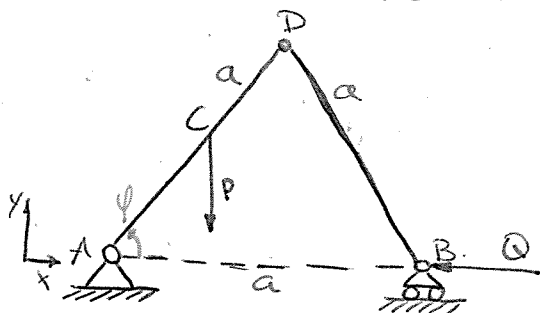
Por P.T.V $\delta Z = \bar{P} \delta \bar{r}_A + \bar{F} \delta \bar{r}_B$
 $\bar{F} = F \bar{i}$, $\bar{P} = P \bar{j}$
 $\delta \bar{r}_B = \delta x_B \bar{i}$; $\delta \bar{r}_A = \delta x_A \bar{i} + \delta y_A \bar{j}$

$\Rightarrow \delta Z = P \delta y_A + F \delta x_B = 0 \rightarrow$ Busco relación entre x_A, x_B :

$\left\{ \begin{array}{l} y_A = a \sin \varphi \rightarrow \delta y_A = a \cos \varphi \delta \varphi \\ x_B = 2a \cos \varphi \rightarrow \delta x_B = 2a (-\sin \varphi) \delta \varphi \end{array} \right. \Rightarrow \delta Z = P a \cos \varphi \delta \varphi - F 2a \sin \varphi \delta \varphi = 0$
 $(P \cos \varphi - 2F \sin \varphi) \delta \varphi = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Para $\delta Z = 0 \forall \delta \varphi \rightarrow P \cos \varphi - 2F \sin \varphi = 0$; $\boxed{\tan \varphi = \frac{P}{2F}}$

EJ. ESTAT. II 3 $AD = AB = DB$ Se pide $Q = Q(P)$ para equilibrio
 $2AC = AD$



Por P.T.V $\delta Z = \bar{P} \delta \bar{r}_C + \bar{Q} \delta \bar{r}_B$
 $\bar{P} = P(-\bar{j})$, $\bar{Q} = Q(\bar{i})$, $\delta \bar{r}_C = \delta x_C \bar{i} + \delta y_C \bar{j}$
 $\delta \bar{r}_B = \delta x_B \bar{i}$

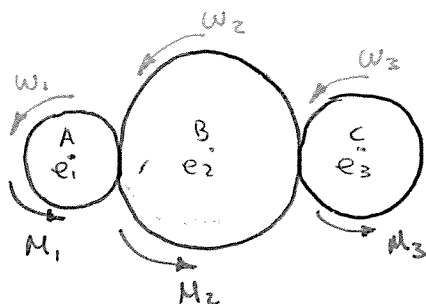
$\Rightarrow \delta Z = -P \delta y_C + Q \delta x_B = 0$; Busco relación entre y_C y x_B

$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_C = \frac{a}{2} \sin \varphi \rightarrow \delta y_C = \frac{a}{2} \cos \varphi \delta \varphi \\ x_B = 2a \cos \varphi \rightarrow \delta x_B = 2a (-\sin \varphi) \delta \varphi \end{array} \right. \Rightarrow \delta Z = -P \frac{a}{2} \cos \varphi \delta \varphi + Q 2a \sin \varphi \delta \varphi = 0$
 $(2Q \sin \varphi - \frac{P}{2} \cos \varphi) \delta \varphi = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Para $\delta Z = 0 \forall \delta \varphi \rightarrow 2Q \sin \varphi - \frac{P}{2} \cos \varphi = 0$; $Q = \frac{P}{4} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$
 $\cos \varphi = \frac{AB/2}{AD} = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi = 60^\circ$
 $\boxed{Q = \frac{P}{12} \sqrt{3}}$

EJ. ESTAT. II 4

$a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 = 0$, M_1 . Relación entre M_1, M_2, M_3 para impedir movimiento



Por P.T.V (2ª fórmula $\rightarrow$ sólido rígido):

$\delta Z = \bar{F} \delta \bar{r}_Q + \bar{M}_Q \delta \bar{\theta}$
 Para cada disco, reduciendo el sist de fuerzas en su centro (A, B o C) con $\bar{r}_A = \bar{r}_B = \bar{r}_C = \bar{0} \rightarrow \delta \bar{r}_A = \delta \bar{r}_B = \delta \bar{r}_C = \bar{0}$ & tiene:
 $\delta Z_{sist} = \bar{M}_1 \delta \bar{\theta}_1 + \bar{M}_2 \delta \bar{\theta}_2 + \bar{M}_3 \delta \bar{\theta}_3 = M_1 \delta \theta_1 + M_2 \delta \theta_2 + M_3 \delta \theta_3$
 $\bar{M} \delta \bar{\theta}$

• $a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0 \Rightarrow a \delta \theta_1 + b \delta \theta_2 + c \delta \theta_3 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \delta \theta_1 = -\frac{b}{a} \delta \theta_2 - \frac{c}{a} \delta \theta_3 \end{array} \right. \Rightarrow$

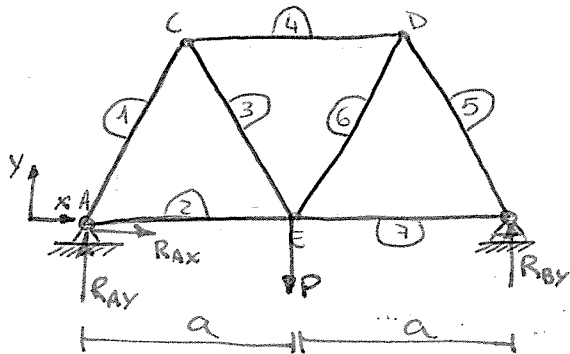
$\Rightarrow$ Por tanto $\delta Z = M_1 \left(-\frac{b}{a} \delta \theta_2 - \frac{c}{a} \delta \theta_3 \right) + M_2 \delta \theta_2 + M_3 \delta \theta_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (M_2 - M_1 \frac{b}{a}) \delta \theta_2 + (M_3 - M_1 \frac{c}{a}) \delta \theta_3 = 0$; Como $\forall \delta \theta_i \rightarrow \delta Z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_2 - M_1 \frac{b}{a} = 0 \rightarrow M_2 = M_1 \frac{b}{a} \\ M_3 - M_1 \frac{c}{a} = 0 \rightarrow M_3 = M_1 \frac{c}{a} \end{array} \right.$

EJ. ESTAT. II 12 Misma longitud de barras, P. Se pide T_1, T_2, T_3, T_4

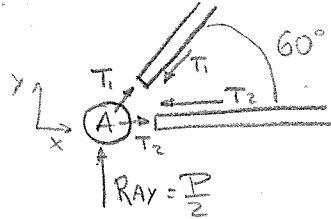
Reacciones en apoyos: Equilibrio a todo la estructura



$\sum \vec{F} = \vec{0}$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{i}: R_{ax} = 0 \\ \vec{j}: R_{ay} + R_{by} - P = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} R_{ax} = 0 \\ R_{by} = \frac{P}{2} \\ R_{ay} = \frac{P}{2} \end{array} \right.$

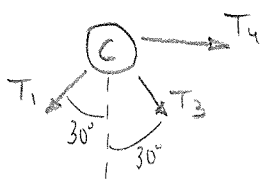
$\sum \vec{M}_A = \vec{0}$ $\vec{k}: R_{by} \cdot 2a - P \cdot a = 0$

Aislo A. Por equilibrio: $\sum \vec{F}_A = \vec{0}$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{i}: T_2 + T_1 \cos 60^\circ = 0 \\ \vec{j}: R_{ay} + T_1 \sin 60^\circ = 0 \end{array} \right.$



$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_1 = -\frac{P}{2} \frac{1}{\sqrt{3}/2} < 0 \text{ (compresión)} \\ T_2 = -T_1 \cos 60^\circ = \frac{P}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} > 0 \text{ (tracción)} \end{array} \right.$

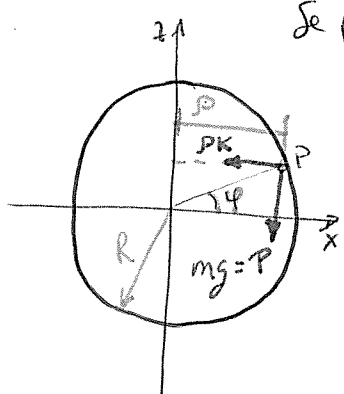
Aislo C. Por equilibrio: $\sum \vec{F}_C = \vec{0}$



$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i}: T_4 + T_3 \sin 30^\circ - T_1 \sin 30^\circ = 0 \\ \vec{j}: -T_1 \cos 30^\circ - T_3 \cos 30^\circ = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_4 = 2 T_1 \sin 30^\circ = \frac{-2P}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} = \frac{-P}{\sqrt{3}} \\ T_3 = -T_1 = \frac{P}{\sqrt{3}} \text{ (tracción)} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} T_4 = \frac{-P}{\sqrt{3}} \text{ (comp)} \\ T_3 = \frac{P}{\sqrt{3}} \text{ (tracción)} \end{array} \right.$

Por la simetría que presenta la estructura serán: $\left\{ \begin{array}{l} T_2 = T_3 \\ T_3 = T_6 \\ T_1 = T_5 \end{array} \right.$

EJ. ESTAT. II.5 Punto: m; Curv.: R. Fuerzas: peso $\left\{ \begin{array}{l} T_1 = T_5 \\ T_2 = T_3 \end{array} \right.$
Se pide relación: m, g, R, K para eq. $\left\{ \begin{array}{l} T_1 = T_5 \\ T_2 = T_3 \end{array} \right.$



Necesitamos una función potencial: $\cos \psi = \frac{x}{R}$
 $P = mg \rightarrow U_p = \int mg dz = mgz$
 $F = PK \rightarrow U_f = \int PK dx = \int R \cos \psi K dx = \int x K dx = \frac{K}{2} x^2$
 $U = mgz + \frac{1}{2} K x^2$

Necesito $U(\varphi)$

$$U = mg R \sin \varphi + \frac{1}{2} K (R \cos \varphi)^2$$

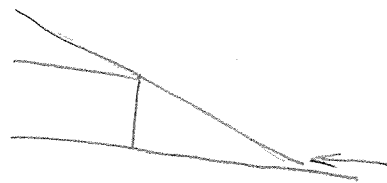
$$U'(\varphi) = mg R \cos \varphi + \frac{1}{2} K R^2 \cdot 2 \cos \varphi (-\sin \varphi)$$

Efectivamente $U'(\varphi = \frac{\pi}{2}) = 0$

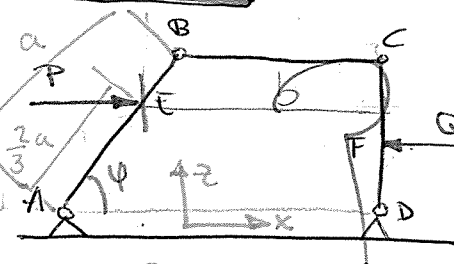
$$U''(\varphi) = -mg R \sin \varphi + K R^2 (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)$$

Condición eq estable $\rightarrow U''(\frac{\pi}{2}) > 0 \rightarrow -mg R + K R^2 > 0$
en $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{KR > mg}$$



Ej. ESTAT II 6 Figura en equilibrio. Se pide P en función de Q



Por PTV

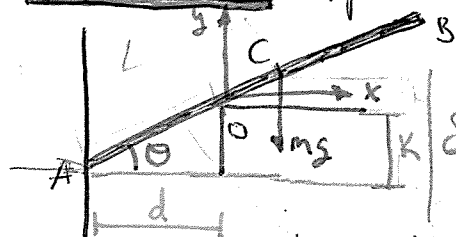
$$\begin{cases} \sum \vec{r} = P \vec{r}_E + Q \vec{r}_F = 0 \\ P \sum x_E + Q \sum x_F = 0 \end{cases}$$

$$x_E = \frac{2}{3} a \cos \varphi$$

$$x_F = \frac{2}{3} a \cos \varphi + b$$

Dificultad elevada

Ej. ESTAT II 8 Aplicar PTV. Barra AB: $2L, m; d$. Determinar θ para eq.



Por PTV

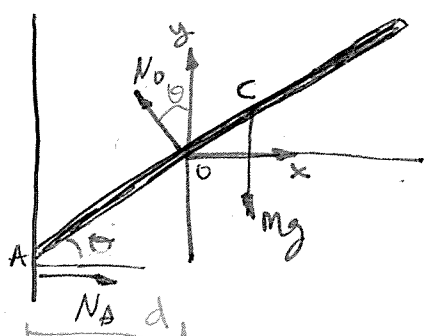
$$\sum \vec{r} = (mg) \cdot \vec{r}_G = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} mg(-j) \\ \vec{r}_G = (L \cos \theta - d) \vec{i} + (L \sin \theta - \frac{1}{2} d) \vec{j} \end{array} \right.$$

$$\tan \theta = \frac{k}{d}, \quad k = \frac{1}{2} d$$

$$\vec{r}_G = L \cos \theta \vec{i} - \frac{1}{2} d \vec{j} \rightarrow mg \left(L \cos \theta - \frac{1}{2} d \right) = 0$$

$$\Rightarrow L \cos \theta - \frac{1}{2} d = 0, \quad \frac{L \cos^3 \theta - d}{\cos^3 \theta} = 0, \quad \boxed{\cos^3 \theta = \frac{d}{L}}$$

Ej. ESTAT II 9 Obtener reacciones de la barra de la cuestión anterior

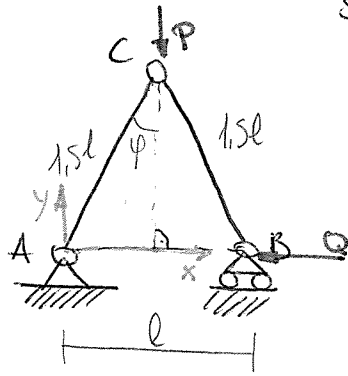


$$\sum \vec{F} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{i}: -N_O \sin \theta + N_A = 0 \\ \vec{j}: N_O \cos \theta - mg = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{N_O = \frac{mg}{\cos \theta}}$$

$$\boxed{N_A = mg \tan \theta}$$

EJ ESTAT. II 10 P, Q ; $AC=BC=1.5 AB$. Determinar Q para equilibrio
 si $P=400N$



$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \delta r_C + Q \delta r_B = \delta Z = 0$$

$$P \delta y_C + Q \delta x_B = 0$$

$$y_C = 1.5l \cos \varphi; \quad \delta y_C = -1.5l \sin \varphi \delta \varphi$$

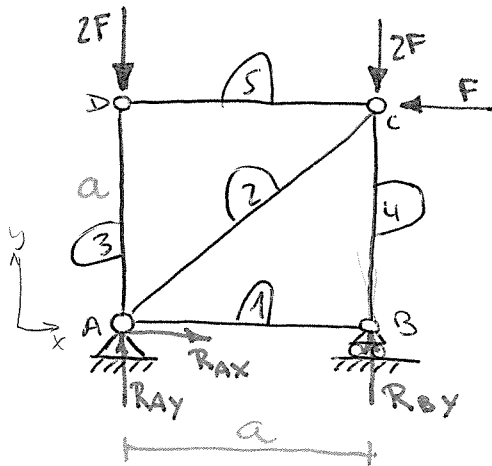
$$x_B = \underbrace{1.5l \sin \varphi}_{l/2}; \quad \delta x_B = 2 \cdot 1.5l \cos \varphi \delta \varphi$$

$$1.5l \delta \varphi (-P \sin \varphi + 2Q \cos \varphi) = 0; \quad P \sin \varphi = 2Q \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{l/2}{\sqrt{1.5l^2 - (l/2)^2}} = \frac{l/2}{\sqrt{2.25 - 0.25}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow Q = 400 \frac{\sqrt{2}}{8} = 50\sqrt{2}$$

$$\boxed{Q = 50\sqrt{2} N}$$

EJ ESTAT. II 11 Calcular módulos de las reacciones, Tensiones en AC, BC



Reacciones en apoyos:

Aplicamos eq a toda la estructura:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \vec{i}: R_{Ax} - F = 0 \quad (1)$$

$$\vec{j}: R_{Ay} + R_{By} - 4F = 0 \quad (2)$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \quad \vec{k}: R_{By} \cdot a + F \cdot a - 2F \cdot a = 0 \quad (3)$$

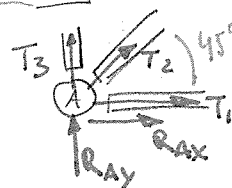
$$R_{Ax} = F; \quad R_{Ay} = 4F - F = 3F$$

$$R_{By} = F$$

$$\boxed{R_A = \sqrt{F^2 + (3F)^2} = F\sqrt{10}}$$

$$\boxed{R_B = F}$$

Aislo nudo (A)



$$\sum \vec{F}_A = 0 \quad \vec{i}: R_{Ax} - T_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} T_2 = 0$$

$$\vec{j}: R_{Ay} + T_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} T_2 = 0$$

Aislo nudo (B)



$$\sum \vec{F}_B = 0 \quad \vec{i}: T_4 = 0 \rightarrow T_4 = -R_{By} = -F \rightarrow |T_{CB}| = F \text{ (compresión)}$$

$$\vec{j}: R_{By} + T_4 = 0;$$

$$\rightarrow T_2 = -2R_{Ax}/\sqrt{2} = -\frac{2F}{\sqrt{2}} = -F\sqrt{2} \rightarrow \boxed{|T_{AC}| = \sqrt{2} F \text{ (compresión)}}$$

(4)

ESTÁTICA

La estática es la parte de la mecánica que se encarga del estudio del equilibrio de los sistemas materiales y de las condiciones necesarias para mantenerlo.

Se presentarán dos clases de problemas típicos:

- dado un sistema material, encontrar sus posiciones de equilibrio.
- dada una situación de equilibrio, encontrar las fuerzas o momentos de ligadura o aplicados que lo hacen posible.

1.-CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN SISTEMA MATERIAL

Para que un sistema S se encuentre en equilibrio respecto de otro sistema S_I todos sus puntos deben permanecer en reposo en S_I . Si se cumple esta condición en un instante t_0 , la condición que asegura el reposo es que la fuerza sobre cada punto P de S sea permanentemente nula:

$$\forall t \forall P \in S \quad \vec{F}_P = \vec{0}$$

lo que equivale a exigir que para todo $S' \subset S$, la resultante de las fuerzas exteriores (las interiores no contribuyen a la resultante) que actúan sobre S' sea nula

$$\forall t \forall S' \in S \quad \vec{F}_{S'} = \vec{0}$$

Implicaciones:

- el momento respecto a cualquier punto del espacio de las fuerzas que actúan sobre cada punto debe ser permanentemente nulo.
- el momento respecto a cualquier punto del espacio de las fuerzas exteriores que actúan sobre cada subsistema S' de S debe ser permanentemente nulo.
- si el sistema S_I de referencia no es inercial, en las fuerzas exteriores se deben incluir las fuerzas de inercia.

En la práctica: Sólido en equilibrio

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0}, \quad \forall O \end{array} \right.$$

2.-LIGADURAS

Se llaman *ligaduras* a las restricciones del movimiento que se imponen en una o varios puntos de un sistema. Se llama *vínculo* al dispositivo material utilizado para conseguir una restricción del movimiento. Surgen así un conjunto de fuerzas que limitan el movimiento y que se denominan *fuerzas de ligadura, de reacción del vínculo o de enlace* (en general serán incógnitas).

Las ligaduras pueden ser fijas o variables con el tiempo. Se estudiarán en este tema las primeras. Se dice que una ligadura es ideal si el conjunto de fuerzas de enlace realiza trabajo nulo sobre cada una de las posibles evoluciones del sistema que no prohíbe. Las ligaduras que se estudien en este tema, salvo indicación, se considerarán todas ideales.

→ En la práctica son lig. ideales aquellas en las que F_R no trabaja.

Las fuerzas que no son de ligadura se denominan fuerzas aplicadas (suelen ser dato, respondiendo a una ley conocida), dependiendo de ellas las fuerzas de ligadura (en función de las aplicadas variarán las de ligadura).

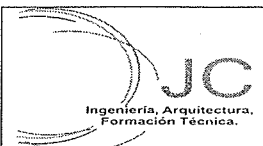
3.-APLICACIÓN A SÓLIDO RÍGIDO: REACCIONES Y ESFUERZOS INTERIORES

La condición necesaria y suficiente para que un sólido rígido inicialmente en reposo se mantenga en equilibrio en un sistema de referencia es que se cumpla

$$\sum (\vec{F} + \vec{R}) = \vec{0} \quad y \quad \sum (\vec{N}_O + \vec{M}_O) = \vec{0} \quad \forall O$$

$$\vec{F}_{aplic} = \vec{F}$$

$$\vec{F}_{lig} = \vec{R} \text{ (reacciones)}$$

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajtc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	---	---



siendo $\vec{F}$ la resultante de fuerzas aplicadas sobre el sólido, $\vec{R}$ la resultante de fuerzas de ligadura, $\vec{M}_O$ el momento respecto a un punto O de las fuerzas aplicadas y N_O el momento respecto a O de las fuerzas de ligadura (O puede ser el punto que queramos).

El sistema de ecuaciones vectoriales anteriores, donde en general serán incógnitas las componentes del sistema de fuerzas de ligadura, puede resultar:

- compatible determinado: el sistema se llama entonces isostático.
- compatible indeterminado: el sistema se llama entonces hiperestático. Ocurre que el sistema tiene más ligaduras de las que son necesarias, y puede suprimirse alguna sin que peligre el equilibrio.
- incompatible: el sistema se llama entonces hipostático. En este caso, el sistema está menos ligado de lo que es necesario y no puede asegurarse el equilibrio.

Esfuerzos interiores: ver clase

4.-SISTEMAS PLANOS

Caso particular en el que el sistema de fuerzas de ligadura es coplanario con las fuerzas aplicadas, pudiendo reducirse a una resultante coplanaria y a su momento respecto a cualquier punto del plano. Evidentemente, el momento será perpendicular a dicho plano.

Si el plano de trabajo es el determinado por los ejes x e y , las ecuaciones vectoriales de equilibrio se reducen a tres ecuaciones escalares, según las componentes de las fuerzas en x e y , y la de los momentos en z :

$$F_x + R_x = 0$$

$$F_y + R_y = 0$$

$$M_z + N_z = 0$$

Es un caso típico de gran aplicación en el estudio de vigas apoyadas.

Tipos de apoyos (ver clase): articulado fijo, articulado móvil, empotramiento, otros.

5.-ESFUERZOS INTERIORES EN VIGAS

El concepto simplificado de viga que se trata en este tema es el de un sistema material unidimensional rectilíneo de sección despreciable.

En una viga en equilibrio, el conjunto de fuerzas que soporta en cualquiera de sus tramos es nulo. Así, si M es un punto situado entre los extremos A y B de una viga en equilibrio, al estar el tramo AM en equilibrio, en M la viga sufre una acción del tramo MB que compensa la de las fuerzas que actúan en el tramo AM , es decir, una acción igual y contraria a la del sistema de fuerzas que actúa en el tramo MB . Reduciendo el sistema de fuerzas que actúa sobre MB a una resultante $\vec{R}$ y un momento en M $\vec{M}_M$, el esfuerzo interior en M está constituido por:

- esfuerzo normal N : componente de $\vec{R}$ colineal con la viga, pudiendo ser de tracción o compresión.
- esfuerzo cortante T : componente de $\vec{R}$ normal a la viga.
- momento flector M_f : componente de $\vec{M}_M$ normal a la viga.
- ~~momento torsor M_t : componente de $\vec{M}_M$ según el eje de la viga.~~

6.-BARRAS ARTICULADAS *Ver por tema EST. II*

Las estructuras de barras o armaduras son estructuras idealizadas compuestas por barras rectas y delgadas, cada una de las cuales está articulada al resto de la estructura y/o al suelo por sus extremos mediante vínculos sin rozamiento. Se tienen en cuenta las siguientes hipótesis:

- masa de las barras despreciable (no se considera su peso)
- solo se tienen cargas en los nudos (no hay fuerzas a lo largo de las barras)
- Los únicos esfuerzos interiores serán normales, de tracción o compresión (no se consideran cortantes)

Para la resolución de estas estructuras, tras obtener las reacciones en los apoyos, se aislará cada nudo y se impondrá el equilibrio en cada uno de ellos, tomando un sentido arbitrario para cada uno de los esfuerzos normales de cada barra que confluye en ese nudo.

7.-EQUILIBRIO CON ROZAMIENTO

Cuando dos sólidos S_1 y S_2 están en contacto en un punto P , siendo tangentes en ese punto, la acción de uno sobre otro se descompone en fuerzas y momentos de contacto.

En la dirección normal al plano tangente a ambos sólidos en P se tiene la componente de la fuerza de contacto entre ambos, N . Si tomamos un sistema $Pxyz$ con origen en P , con el eje z en la dirección de la normal al plano y los ejes x e y conformando dicho plano, la normal sería la componente en z de la fuerza de contacto.

Generalmente entre las superficies en contacto de los sólidos hay una resistencia al movimiento relativo de las mismas. Esto produce fuerzas de rozamiento nombradas en función del movimiento que tienden a impedir:

- *rozamiento al deslizamiento* ($\vec{F}_r$): fuerza que se opone a la velocidad de deslizamiento entre

las dos superficies $\vec{v}_d = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$, cumpliendo:

$$\begin{cases} v_d > 0 \Rightarrow \vec{F}_r = -\mu N \frac{v_x \vec{i} + v_y \vec{j}}{v_d} \\ v_d = 0 \Rightarrow |\vec{F}_r| \leq \mu N \end{cases}$$

- *rozamiento a la rodadura* ($\vec{M}_r$): momento que se opone al movimiento relativo de rodadura, es decir, a la componente tangencial de la rotación $\vec{\omega}_{21}$ (según el plano tangente),

$\vec{\omega}_r = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}$, cumpliendo:

$$\begin{cases} \omega_r > 0 \Rightarrow \vec{M}_r = -\delta \cdot N \frac{\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}}{\omega_r} \\ \omega_r = 0 \Rightarrow |\vec{M}_r| \leq \delta \cdot N \end{cases}$$

- *rozamiento al pivotamiento* ($\vec{M}_p$): momento que se opone al movimiento relativo de pivotamiento, es decir, a la componente de la rotación $\vec{\omega}_{21}$ normal al plano tangente,

$\vec{\omega}_p = \omega_z \vec{k}$, cumpliendo:

$$\begin{cases} \omega_p > 0 \Rightarrow \vec{M}_p = -\varepsilon \cdot N \frac{\omega_z \vec{k}}{\omega_z} \\ \omega_p = 0 \Rightarrow |\vec{M}_p| \leq \varepsilon \cdot N \end{cases}$$

8.-DESLIZAMIENTO Y VUELCO DE SÓLIDOS APOYADOS SOBRE UN PLANO (clase)

CLASE

EJERCICIO ESTÁTICA. 1 (Examen final 2000-09-11 Febrero 2001-02-19 febrero 2005-02-07)

NO

Una barra horizontal de longitud L , con un extremo articulado fijo y el otro articulado móvil, se encuentra en equilibrio en un sistema inercial, soportando una carga vertical uniforme por unidad de longitud, de valor q . Deduzca el valor absoluto del momento flector y el esfuerzo cortante máximos que actúan sobre la barra, y los puntos en los que se producen.

EJERCICIO ESTÁTICA. 2

Segundo examen parcial 1998-06-01

✓

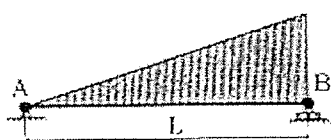
(2)

Una rueda de masa m y radio R puede moverse de forma plana, manteniéndose siempre paralela a un plano vertical fijo y en contacto con un plano horizontal rugoso, también fijo, ambos planos solidarios de un sistema de referencia inercial. Los coeficientes de rozamiento a la rodadura (δ) y al deslizamiento (μ) verifican $\mu R < \delta$. Con la rueda en reposo, se aplica lentamente a su eje una fuerza horizontal creciente (F_h), paralela al plano vertical fijo, hasta que la rueda comienza a moverse. En ese instante, justifique el tipo de movimiento de la rueda, el valor de F_h , y el valor de las componentes vertical y horizontal de la reacción, dibujando un croquis con la rueda y las fuerzas que actúan sobre la misma (la aceleración de la gravedad se designará por g). Aos, F_g, F_R, N

EJERCICIO ESTÁTICA. 3

Primer examen parcial 2000-01-24 Primer parcial 2001-01-25

NO



La viga AB de la figura está sometida a una carga por unidad de longitud que crece linealmente desde A hasta B. Si la carga total aplicada a la viga es P , determine las reacciones en A y en B y la sección en la que el esfuerzo cortante es nulo.

En la viga AB de la cuestión anterior, determine el valor máximo del momento flector.

EJERCICIO ESTÁTICA. 4

Febrero 2003-02-10

(2)

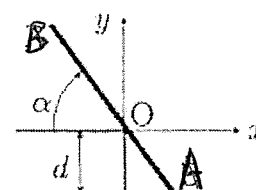
Un cilindro de radio R rueda uniformemente sobre un plano inclinado. El coeficiente de rozamiento a la rodadura es δ y el coeficiente de rozamiento al deslizamiento es muy grande. Determine el ángulo de inclinación del plano respecto al horizontal.

EJERCICIO ESTÁTICA. 5

Junio 2003-06-09

(2)

En relación con la figura determine el valor de la fuerza de rozamiento en A para que la varilla AB de longitud $2L$ y peso P permanezca en equilibrio en la posición indicada, admitiendo que no existe rozamiento en O.



EJERCICIO ESTÁTICA. 6

Junio 2003-06-09

NO

Una viga AB de longitud L y densidad másica lineal λ se sustenta sobre un plano horizontal mediante un apoyo articulado fijo A y otro móvil B. Calcule las reacciones en A y B.

Determine el máximo valor del momento flector de la viga de la cuestión anterior.

EJERCICIO ESTÁTICA. 7
Febrero 2004-02-12

(R)

Una rueda de radio R y peso mg se mueve uniformemente rodando sin deslizar sobre un plano horizontal, de forma que el centro de la rueda describe una trayectoria rectilínea. Al eje de la rueda se le aplica un par motor M_m con el que debe arrastrar una carga que equivale a una fuerza resistente F , aplicada sobre el eje, horizontal y de sentido opuesto al de la velocidad del centro de la rueda. Dibuje un croquis con el par y todas las fuerzas que actúan sobre la rueda y determine el menor valor del coeficiente de rozamiento μ para que el movimiento indicado sea posible.

EJERCICIO ESTÁTICA. 8
Junio 2004-06-17

(R)

A un bloque cúbico uniforme en reposo, de 500 kg de masa, apoyado sobre un suelo horizontal rugoso, con coeficiente de rozamiento al deslizamiento igual a 0,1, se le aplica una fuerza horizontal de 400 N por su centro de masas. Determine el valor de la fuerza de rozamiento si la aceleración de la gravedad es $9,8 \text{ m/s}^2$.

EJERCICIO ESTÁTICA. 9
 $\tan \alpha = 1??$
Septiembre 2004-09-23 Septiembre 2005-09-05

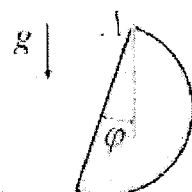
(R)

Un bloque cúbico, pesado y uniforme, se coloca sobre un plano inclinado de forma que dos de las aristas de su base se sitúan según la dirección de máxima pendiente con la horizontal. Entre la base del bloque y el plano existe un rozamiento de coeficiente al deslizamiento igual a μ . Obtenga la condición que debe cumplir μ para que el bloque pierda el equilibrio por vuelco cuando el plano inclinado se levanta lenta y progresivamente.

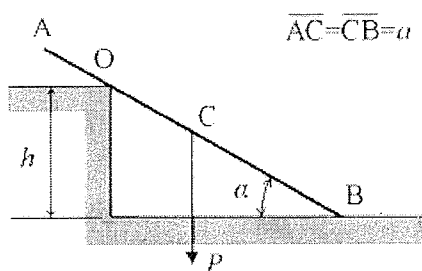
EJERCICIO ESTÁTICA. 10
Junio 2006-06-26 septiembre 2008-09-05

(R)

Una placa semicircular, pesada y homogénea, se suspende de un extremo de su diámetro, punto A, de forma que pueda oscilar libremente en un plano vertical coincidente con el de la placa. Determine el ángulo φ del diámetro con la vertical en la posición de equilibrio


EJERCICIO ESTÁTICA. 11
Febrero 2007-02-12

(R)

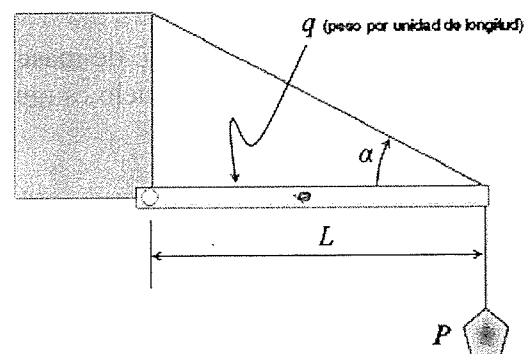


La varilla AB, de longitud $2a$, es uniforme, de peso P , y se encuentra en equilibrio sobre un escalón de altura h , como señala la figura, formando un ángulo α con el suelo horizontal. Se supone que en el contacto O no hay rozamiento pero sí con el suelo. Calcule la reacción en el punto O.

En el mismo sistema de la cuestión anterior, determine el valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre suelo y varilla para que ésta permanezca en equilibrio en la posición indicada, para la situación concreta siguiente: $\alpha = 30^\circ$ y $h = a$.

EJERCICIO ESTÁTICA. 12
Junio 2008-06-20

La viga de la figura se encuentra en equilibrio en posición horizontal. Su longitud es L y su peso por unidad de longitud es q . La viga está fija y articulada en un extremo. En el otro extremo cuelga un peso P . El cable que sujeta la viga forma un ángulo α con la horizontal. Calcule la tensión en dicho cable en función de L , α , q y P .



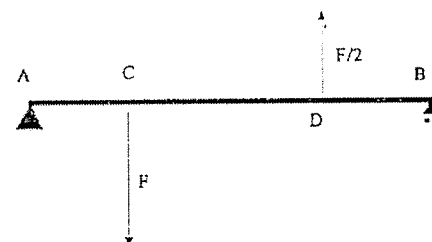
En el mismo sistema de la cuestión anterior, calcule el módulo de la reacción en el extremo articulado de la viga en función de L , α , q y P .

EJERCICIO ESTÁTICA. 13
Junio 2009-06-12

Una viga AB, de longitud L y peso por unidad de longitud, q , se sustenta mediante un apoyo articulado fijo A y un apoyo articulado móvil B. Una carga Q está situada a distancia $\frac{3}{4}L$ del apoyo A. Calcule el módulo del esfuerzo cortante a una distancia $L/4$ de A.

REPASO
EJERCICIO R-ESTÁTICA. 1
Primer Examen Parcial 1996-01-19

La viga de la figura es de longitud L y está apoyada por sus extremos A y B sobre un apoyo articulado fijo y un apoyo articulado móvil respectivamente. Sobre la viga se aplica una fuerza vertical descendente de valor F en un punto C situado a una distancia $L/4$ de A y una fuerza vertical ascendente de valor $F/2$ en un punto D que dista $3/4L$ del punto A. Calcular las reacciones en los apoyos.


EJERCICIO R-ESTÁTICA. 2
Primer Examen Parcial 1997-01-27

Se considera un sistema mecánico con algunas restricciones por la existencia de vínculos geométricos. Clasifique las fuerzas que pueden considerarse sobre el sistema, empleando al menos dos criterios diferentes y explicando brevemente cada clase de fuerzas.

EJERCICIO R-ESTÁTICA. 3
Examen Junio 1997-06-19 Examen de febrero 1998-02-24

¿Cómo se denominan los sistemas en los que las ligaduras aseguran el equilibrio y las ecuaciones universales de la estática permiten determinar todas las reacciones de los apoyos en el equilibrio?

EJERCICIO R-ESTÁTICA. 4
Junio 2000-07-03

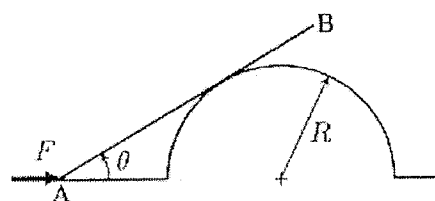
Un círculo pesado homogéneo de radio R y masa m se apoya sin rozamiento sobre dos rectas de su mismo plano que forman 60° y 30° con la vertical. Encuentre las reacciones en cada recta cuando el sistema está en equilibrio.

EJERCICIO R-ESTÁTICA. 5
Febrero 2003-02-10

Un bloque de 1000 Kg. de masa se empuja horizontalmente con una fuerza de 800 N. Si el coeficiente de rozamiento con el suelo es igual a 0,1 y $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, determine el valor de la fuerza de rozamiento.

EJERCICIO R-ESTÁTICA. 6
Septiembre 2003-09-15

Sea un sólido rígido en equilibrio. Si se considera una sección ideal que divide al sólido S en otros dos, S_1 y S_2 , y se analiza el equilibrio de S_1 , las fuerzas que actuaban sobre S_2 se reducen, en un punto O de la sección, a una resultante R y un momento resultante M_O . Si n es un vector unitario, normal a la sección, y hacia el exterior de S_1 , relacione estas magnitudes con los esfuerzos normal y cortante y los momentos flector y torsor sobre S_1 en O .

EJERCICIO R-ESTÁTICA. 7


Una varilla (AB) de peso P y longitud $2L$ se apoya por su extremo A sobre un suelo liso, es tangente a un semicírculo liso de radio R (por lo que $\tan \theta > \frac{R}{2L}$) y se le aplica una fuerza F horizontal en A , todo ello como se muestra en la figura. Si la varilla se encuentra en equilibrio, determine el valor del ángulo θ en función de los datos indicados.

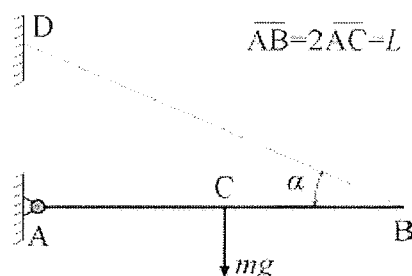
En el mismo sistema de la cuestión anterior, obtenga las fuerzas de ligadura (reacciones) N_1 , en A , y N_2 , en el punto de tangencia con el semicírculo, en función de los datos indicados en 5).

EJERCICIO R-ESTÁTICA. 8
Septiembre 2004-09-23

Una barra AB , de longitud L , está sometida a una fuerza P , por su punto medio y perpendicular a AB . El extremo A es articulado fijo y B articulado móvil en el plano que definen AB y P . Calcule las reacciones en A y B , y los valores máximos del momento flector y del esfuerzo cortante en la barra AB .

EJERCICIO R-ESTÁTICA.9
Septiembre 2006-09-18 Febrero 2009-02-06

Un bloque pesado y uniforme puede deslizarse sobre un plano inclinado un ángulo α respecto del plano horizontal. Si el plano inclinado es solidario de un sistema inercial, determine el intervalo de valores del coeficiente de rozamiento para que al liberar el bloque, sin velocidad inicial, comience a moverse.

EJERCICIO R-ESTÁTICA. 10
Septiembre 2006-09-18


La varilla AB , uniforme, de peso mg y longitud L , se encuentra en equilibrio, en posición horizontal, articulada en su extremo A y sujeta a un hilo ideal en su extremo B que forma un ángulo α con la varilla, todo ello de acuerdo con la figura. Determine la tensión del hilo BD .

En el sistema de la cuestión anterior, obtenga el módulo de la reacción del apoyo en A .

EJERCICIO R-ESTÁTICA. 11

Junio 2007-06-18

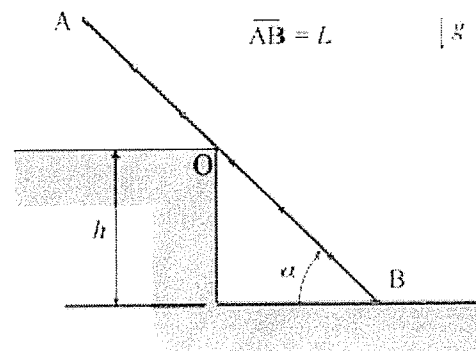
Una viga AB horizontal, tiene una longitud L y su peso por unidad de longitud es p . El apoyo A es articulado fijo y el B articulado móvil. Calcule el máximo valor modular del momento flector y el valor modular del momento flector a una distancia $L/4$ de A.

EJERCICIO R-ESTÁTICA. 12

Junio 2008-06-20

La varilla AB, uniforme, de longitud L y peso P , está apoyada sobre el vértice O de un escalón de altura h , sin rozamiento, formando un ángulo α con la horizontal. Calcule la reacción normal del plano en B, donde sí existe rozamiento.

En relación con la cuestión anterior, determine la relación a satisfacer entre los parámetros L, h y α para que pueda conseguirse la configuración de equilibrio indicada.



PROBLEMA ESTÁTICA I. 1. (Junio 2007-06-18)

Se analiza el equilibrio de un sistema formado por un cubilete apoyado sobre una mesa horizontal en cuyo interior se colocan dos bolas, en dos supuestos: I) cubilete sin fondo, y II) cubilete con fondo.

En ambos casos sólo puede existir fuerza de rozamiento en los puntos de contacto del cubilete y el tablero de la mesa. Además, a efectos dimensionales, los espesores del fondo y pared del cubilete son despreciables, todo ello de acuerdo con los esquemas de las figuras I y II que corresponden al plano de simetría del sistema ($z = 0$). El eje y , vertical ascendente, coincide con el eje del cubilete.

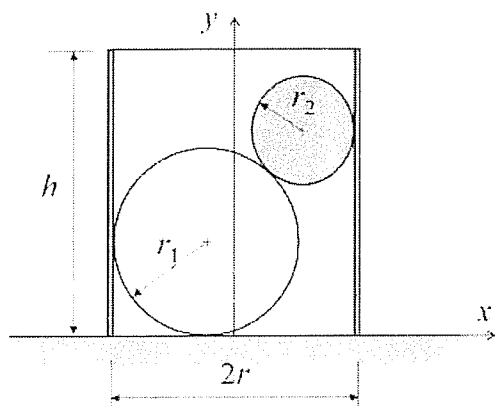


Fig. I: Cubilete sin fondo.

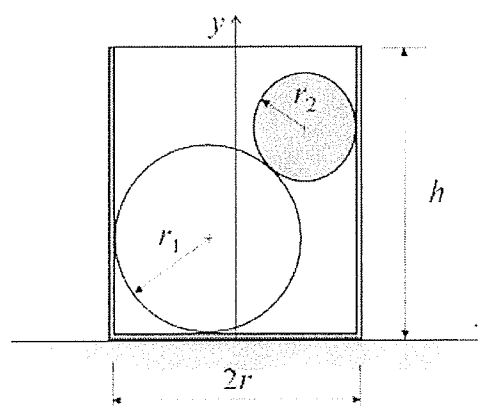


Fig. II: Cubilete con fondo.

Las magnitudes conocidas (datos) son las siguientes:

	Cubilete	Bola inferior (B_1)	Bola superior (B_2)
dimensiones:	r, h	r_1	r_2
pesos:	P	P_1	P_2

junto con el coeficiente de rozamiento, μ , entre fondo y borde del fondo con el tablero de la mesa. El coeficiente de rozamiento es nulo entre cualquier otra pareja de superficies (bola-bola, bola-cubilete, bola-mesa). Se imponen, además, las siguientes relaciones geométricas:

$$r_2 < r_1 < r < r_1 + r_2$$

y no existen limitaciones entre los valores de los tres pesos.

Determine las siguientes magnitudes en función de todos o algunos de los datos indicados y demuestre las proposiciones solicitadas:

- 1) Valores de a (distancia horizontal entre centros) y b (distancia vertical entre centros). (1 punto)

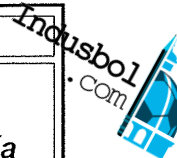
I) Cubilete sin fondo

- 2) Módulo de la fuerza entre la mesa y la bola B_1 . (1 punto)
- 3) Módulos de las fuerzas entre el cubilete y cada una de las bolas, y de la fuerza entre las bolas. (1 punto)
- 4) Componentes de la fuerza R que la mesa ejerce sobre el cubilete, según los semiejes x e y (fig. I). (1 punto)
- 5) Abscisa, x , del punto intersección de la recta de acción de R con el tablero de la mesa. Demuestre que para cualquier conjunto de datos, siempre es $x > 0$. (1 punto)
- 6) Máximo valor que puede alcanzar P_2 sin que el cubilete vuelque. (1 punto)

II) Cubilete con fondo

- 7) Componentes de la fuerza R' que la mesa ejerce sobre el cubilete, según los semiejes x e y (fig. II). (1 punto)
- 8) Abscisa, x' , del punto intersección de la recta de acción de R' con el tablero de la mesa. (1 punto)
- 9) Demuestre que para cualquier conjunto de datos el cubilete nunca vuelca. (1 punto)
- 10) Valor modular de la fuerza entre las bolas cuando $r_1 = \frac{2}{3}r$, $r_2 = \frac{1}{2}r$, $P_2 = 2P$. (1 punto)

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	--	---



ESTÁTICA II

1.-PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Se denomina desplazamiento virtual en un sistema material a la variación de la configuración del mismo como resultado de cualquier cambio infinitesimal arbitrario de las coordenadas de las partículas que constituyen el sistema, que sea compatibles con las fuerzas y las ligaduras impuestas al sistema en un instante determinado del tiempo. El concepto de desplazamiento virtual parte de la idea de un desplazamiento instantáneo, de duración nula, o lo que es lo mismo, realizado a velocidad infinita. ~~La dependencia temporal de las ligaduras, en este caso, se obvia, pues por ser desplazamientos tan rápidos no llega a manifestarse (se "congelan" las ligaduras).~~

$\delta \vec{r}_i \equiv$ desplazamiento virtual

El desplazamiento real es aquel que realizan los puntos del sistema como consecuencia de las fuerzas que actúan sobre él durante un intervalo de tiempo infinitesimal (dt):

$d \vec{r}_i \equiv$ desplazamiento real

Enunciado para estática del *Principio de los trabajos virtuales*: para que un sistema material con ligaduras ideales e inicialmente en reposo permanezca en equilibrio en un sistema, es necesario y suficiente que sea nulo el trabajo desarrollado por las **fuerzas aplicadas** al sistema sobre cada desplazamiento virtual del mismo permitido por las ligaduras (de ser el sistema no inercial, en las fuerzas aplicadas se incluirán las de inercia):

$$\delta W = \sum \vec{F}_p \cdot \delta \vec{r}_p = 0 \quad \forall \delta \vec{r}_p$$

El desplazamiento virtual no se llega a producir realmente, por lo que el trabajo virtual tampoco tiene lugar, pero para analizar las situaciones de equilibrio es necesario considerar el trabajo que se realizaría en una hipotética evolución del sistema compatible con las ligaduras.

Si un sistema se mueve rígidamente, y si se considera un giro virtual $\delta \vec{\alpha}$ y un punto $Q \in S$, la condición de sólido rígido determina:

$$\forall P \in S \quad \delta \vec{r}_p = \delta \vec{r}_Q + \delta \vec{\alpha} \times \vec{Q}\vec{P}$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \vec{Q}\vec{P}; \quad \frac{d\vec{r}_p}{dt} = \frac{d\vec{r}_Q}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{Q}\vec{P}$$

$$\delta \vec{r}_p = \delta \vec{r}_Q + \delta \vec{\omega} \times \vec{Q}\vec{P}$$

Y desarrollando la expresión del trabajo virtual se obtiene:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_Q + \vec{M}_Q \cdot \delta \vec{\alpha}$$

Versión modificada de $\oplus$ para sólido rígido

Transmisiones (ver ejercicios)

Resultante $\vec{F}$ que actúan sobre sólido solo aplicados no de $\vec{F}$ en Q
 $\sum$ momentos de las fuerzas que actúan sobre el sólido en Q

2.-FUERZAS APLICADAS QUE DERIVAN DE POTENCIAL

En el caso en que las fuerzas aplicadas sobre cada punto P deriven de potencial ($\vec{F}_p = -\nabla U_p$), y teniendo en cuenta que $\nabla U \cdot d\vec{r} = dU$ se obtiene:

$$\delta W = \sum_{P \in S} \vec{F}_p \cdot \delta \vec{r}_p = - \sum_{P \in S} \nabla U_p \cdot \delta \vec{r}_p = - \sum_{P \in S} \delta U_p = -\delta U = 0$$

Cuando las posiciones permitidas por las ligaduras en un sistema se pueden expresar por una relación biunívoca con un conjunto de parámetros (coordenadas generalizadas) $q_1, q_2, \dots, q_n$, siendo

$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ la condición de equilibrio es: $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$

en la práctica no entre

El equilibrio será estable donde U presente un mínimo y viceversa. Para analizar el equilibrio, en el caso de n coordenadas generalizadas, es preciso calcular la matriz

No es nunca $\nabla^2 U \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n^2} \end{bmatrix}$

y calculando sus autovalores se obtiene que:

- si $\lambda_i > 0 \forall i \Rightarrow$ Equilibrio estable
- si $\lambda_i \geq 0 \forall i \Rightarrow$ Equilibrio metaestable
- si algún $\lambda_i < 0 \Rightarrow$ Equilibrio inestable

En el caso de que la posición del sistema pueda definirse mediante un único parámetro q , el

análisis del equilibrio resultará mucho más sencillo, limitándose a evaluar $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$, siendo

- $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0 \Rightarrow$ Equilibrio estable
 - $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0 \Rightarrow$ Equilibrio inestable
- $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = 0 \Rightarrow$ Eq indiferente*

3.-BARRAS ARTICULADAS

Las estructuras de barras o armaduras son estructuras idealizadas compuestas por barras rectas y delgadas, cada una de las cuales está articulada al resto de la estructura y/o al suelo por sus extremos mediante vínculos sin rozamiento. Se tienen en cuenta las siguientes hipótesis:

- masa de las barras despreciable (no se considera su peso)
- solo se tienen cargas en los nudos (no hay fuerzas a lo largo de las barras)
- Los únicos esfuerzos interiores serán normales, de tracción o compresión (no se consideran cortantes)

Para la resolución de estas estructuras, tras obtener las reacciones en los apoyos, se aislará cada nudo y se impondrá el equilibrio en cada uno de ellos, tomando un sentido arbitrario para cada uno de los esfuerzos normales de cada barra que confluye en ese nudo.

CLASE

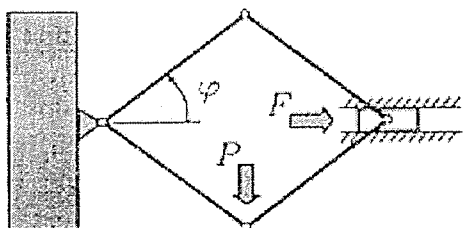
EJERCICIO ESTÁTICA II. 1

Parcial 1997-01-27 Final 1996-09-09 Septiembre 1998-09-21
Final 1999-06-28

Expresa el principio de los trabajos virtuales aplicado a la estática.

EJERCICIO ESTÁTICA II. 2

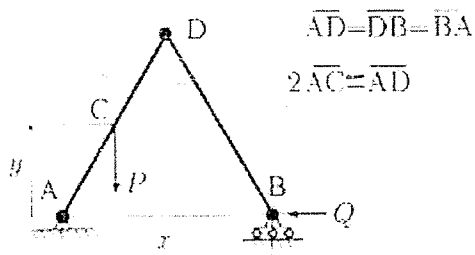
Segundo examen parcial 2000-06-12



El sistema articulado de la figura está formado por cuatro barras articuladas iguales y de peso despreciable. Si aplican al sistema las fuerzas F , P indicadas, determine la relación entre F , P , φ para que el sistema esté en equilibrio.

EJERCICIO ESTÁTICA II. 3

Junio 2001-06-20 Junio 2007-09-03 Febrero 2009-02-06



El sistema de dos barras articuladas de la figura se encuentra en equilibrio, en la posición indicada, siendo P y Q las dos únicas fuerzas aplicadas, e ideales todas las ligaduras.

Con objeto de calcular Q en función de P , un estudiante de mecánica decide aplicar el principio de los trabajos virtuales (figura) mediante

$$-P\delta y - Q\delta x = 0$$

$$\text{haciendo } \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{y}{x/4} \Rightarrow \delta y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \delta x \text{ (al crecer } x \text{ decrece } y) \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{3}}{4} P.$$

Aunque no existe error algebraico en las operaciones presentadas, el resultado es incorrecto. Indique la causa y obtenga el resultado correcto.

EJERCICIO ESTÁTICA II. 4

Septiembre 2001-09-19 Junio 2003-06-09

En un mecanismo formado por elementos ideales, se tienen tres ejes paralelos e_1 , e_2 , e_3 cuyas rotaciones verifican la relación $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 = 0$. Si se aplica un momento M_1 al eje e_1 , obtenga los módulos de los momentos que deben aplicarse a los otros ejes para impedir el movimiento.

Un mecanismo cinemático de inercia despreciable y sin rozamiento define una relación $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 = 0$ (a , b , c son constantes) entre las rotaciones de tres ejes. Determine las relaciones entre los momentos (M_1 , M_2 , M_3) aplicados al mecanismo según los tres ejes.

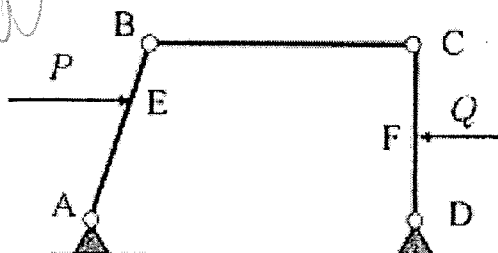
EJERCICIO ESTÁTICA II. 5

Junio 2002-06-10

Un punto material de masa m está ligado a una circunferencia lisa y vertical, de radio R , sometido a dos fuerzas aplicadas, su peso, y una fuerza atractiva horizontal, proporcional a la distancia al diámetro vertical, siendo k la constante de proporcionalidad. Determine la relación que deben satisfacer m , g , R , k para que el punto superior de la circunferencia sea de equilibrio estable.

EJERCICIO ESTÁTICA II. 6

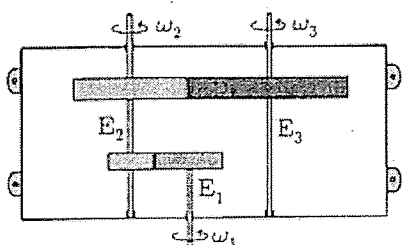
Febrero 2003-02-10



Las barras del cuadrilátero articulado de la figura tienen peso despreciable y no existen rozamientos. Expresa P en función de Q sabiendo que el cuadrilátero se encuentra en equilibrio en la posición indicada (BC horizontal y DC vertical). Determine, también, las reacciones en A y en D.

EJERCICIO ESTÁTICA II. 7

Junio 2004-06-17



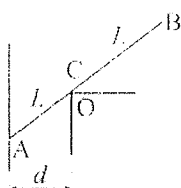
Se representa en planta un esquema de un distribuidor de par, formado por engranajes rectos de características $E_1(R_1)[\omega_1, M_1]$, $E_2(R_2, r_2; R_2 > r_2)[\omega_2, M_2]$ y $E_3(R_3)[\omega_3, M_3]$. Se pide para su funcionamiento, obtener las tres relaciones cinemáticas existentes entre las tres parejas de velocidades y datos geométricos del distribuidor (radios de engranajes); es decir:

a) $f_{12}(\omega_1, \omega_2, \text{datos}) = 0$, b) $f_{23}(\omega_2, \omega_3, \text{datos}) = 0$, c) $f_{13}(\omega_1, \omega_3, \text{datos}) = 0$

En el distribuidor de par anterior, se considera a sus elementos ideales y de masas despreciables. Se pide para una situación de equilibrio del mecanismo o bien de movimiento en su funcionamiento, la relación que se establece entre los momentos (M_1, M_2 y M_3) de los pares que actúan sobre los ejes.

EJERCICIO ESTÁTICA II. 8

Febrero 2006-02-13



La barra pesada $\overline{AB}$ de longitud $2L$ y masa m , se apoya por A en una pared vertical y en la esquina O, como se muestra en la figura, no existiendo rozamiento en ambos contactos. La separación entre los dos tramos verticales es d . Utilizando el formalismo analítico, es decir, aplicando el principio de los trabajos virtuales, determine el ángulo θ que la barra forma con la horizontal cuando está en equilibrio.

EJERCICIO ESTÁTICA II. 9

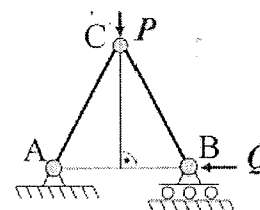
Febrero 2006-02-13

Con la barra de la cuestión anterior en equilibrio, obtenga las reacciones N_A en A y N_O en O, en función del ángulo θ .

EJERCICIO ESTÁTICA II. 10

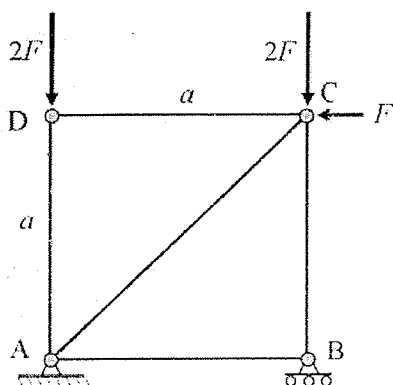
Junio 2006-06-26

Las barras AC y BC están articuladas en C. El apoyo A es articulado fijo y el B articulado móvil, y las cargas P y Q son coplanarias con las barras. En la posición analizada $AC=BC=1,5 AB$. Determine el valor de Q para que el sistema esté en equilibrio cuando $P = 400 \text{ N}$.



EJERCICIO ESTÁTICA II. 11

Junio 2006-06-26

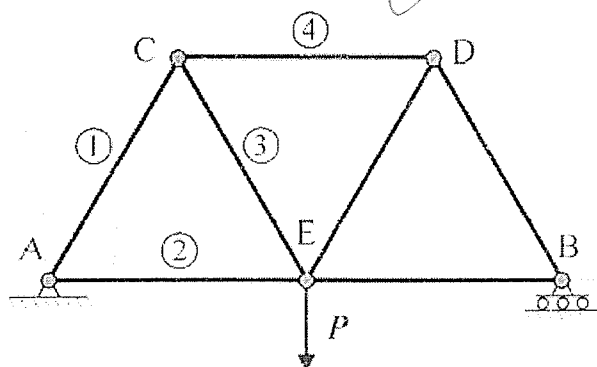


La estructura plana de la figura, articulada en los nudos y con barras de masa despreciable, está cargada en C y D, y sustentada en A (apoyo articulado fijo) y en B (apoyo articulado móvil). Calcule los módulos de las reacciones en A y B.

En la estructura de la cuestión anterior, determine la tensión en las barras AC y BC e indique en cada caso si se trata de tensión de tracción o compresión.

EJERCICIO ESTÁTICA II. 12

Febrero 2007-02-12 Junio 2009-06-12

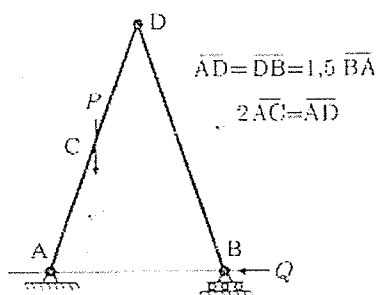


En la estructura de la figura todas las barras tienen la misma longitud y P es la única carga aplicada. Determine las tensiones T_1, T_2, T_3 y T_4 en las barras correspondientes expresándolas positivamente si son de tracción y negativamente si son de compresión.

REPASO

EJERCICIO R-ESTÁTICA II. 1

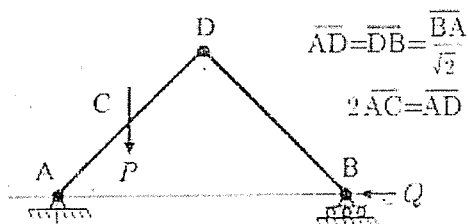
Febrero 2002-02-11



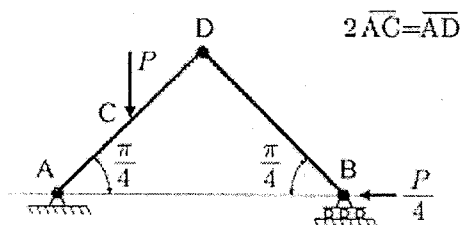
El sistema de dos barras articuladas de la figura se encuentra en equilibrio, en la posición indicada, siendo P y Q las dos únicas fuerzas aplicadas, e ideales todas las ligaduras. Determine Q en función de P .

EJERCICIO R-ESTÁTICA II. 2

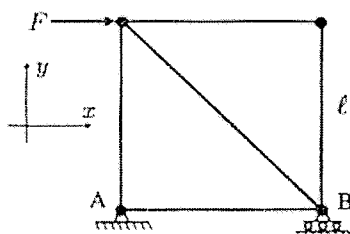
Junio 2002-06-10



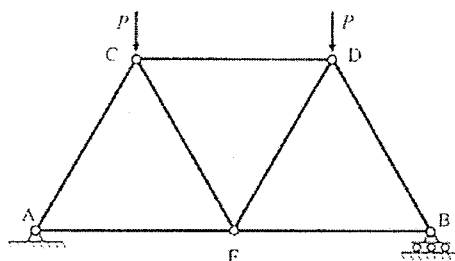
El sistema de dos barras articuladas de la figura se encuentra en equilibrio, en la posición indicada, siendo P y Q las dos únicas fuerzas aplicadas, e ideales todas las ligaduras. Determine Q en función de P .

EJERCICIO R-ESTÁTICA II. 3
Septiembre 2002-09-16


El sistema de dos barras articuladas de la figura se encuentra en equilibrio, en la posición indicada, siendo P y $P/4$ las dos únicas fuerzas aplicadas, e ideales todas las ligaduras. Determine las reacciones en A y en B. Justifique, sin realizar más cálculos, la existencia o no de esfuerzo cortante en cada barra o tramo de barra.

EJERCICIO R-ESTÁTICA II. 4
Febrero 2004-02-12


La estructura de barras articuladas de la figura consta de cuatro barras de longitud l , dispuestas según un cuadrado y una quinta barra diagonal del mismo. Las barras se suponen sin peso. Determine las componentes según x , y , de las reacciones en A y B cuando se aplica a la estructura la fuerza F indicada en la figura.

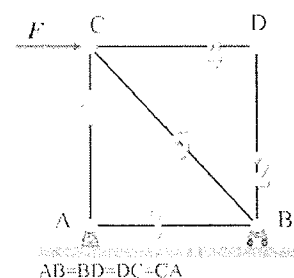
EJERCICIO R-ESTÁTICA II. 5
Junio 2005-06-20


La estructura de barras de la figura esta articulada en todos los nodos y cargada en C y D con dos fuerzas iguales, P , en el plano de la estructura. Los tres triángulos son equiláteros.

Determine, en función de P , la tensión en cada barra, asignándole signo positivo si es de atracción y negativo si es de compresión.

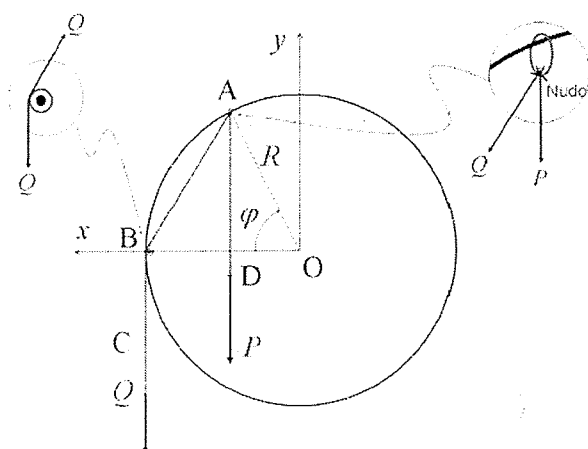
EJERCICIO R-ESTÁTICA II. 6
Junio 2007-06-18

La estructura de barras articuladas de la figura consta de dos barras verticales (1 y 2), dos horizontales (3 y 4), las cuatro de igual longitud, y una riostra (5) que la rigidiza. El peso de las barras es despreciable. Si se aplica una fuerza horizontal, F en C, determine la tensión en las barras 1, 3 y 5 asignándole signo positivo si es de tracción y negativo si es de compresión.



PROBLEMA ESTÁTICA (I y II). 1.

Una pequeña anilla, A, puede moverse sin rozamiento sobre la circunferencia de centro O y radio R , fija en un sistema inercial de referencia. Una pequeña polea ideal, B, se encuentra fija respecto a la circunferencia. Dos hilos ideales, CBA y DA, de longitud constante y suficiente cada uno de ellos, se atan por uno de sus extremos a la anilla. En los otros extremos de los hilos se aplican fuerzas verticales de valor constante, Q en C y P en D ($Q > 0$, $P > 0$). La configuración del sistema viene definida por una única coordenada, el ángulo φ de OA con Ox, todo ello según la figura y las dos ampliaciones de detalle en A y B.



Admitiendo que la polea y la anilla tienen dimensiones despreciables, se desea determinar la posición o posiciones de equilibrio de la anilla y su estabilidad.

- 1) Las fuerzas aplicadas sobre la anilla distintas de la reacción de la circunferencia, es decir, Q y P , derivan de un potencial que debe determinar y comprobar que expresado en función de φ es

$$U = R \left(P \sin \varphi + 2Q \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

cuando se adopta valor nulo de U para $\varphi = 0$.

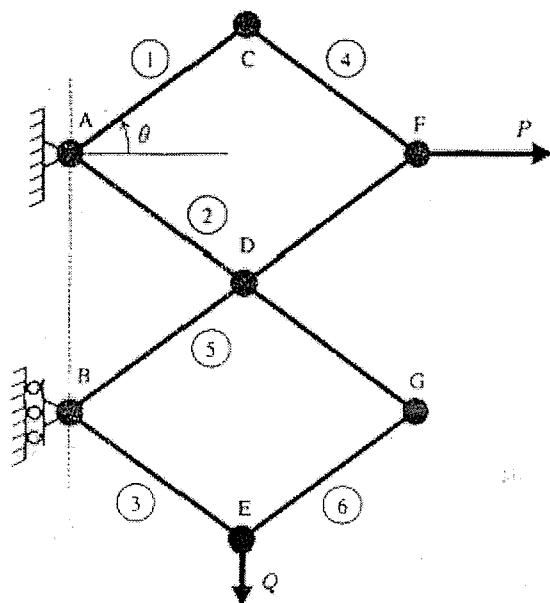
Una posible forma para determinar U en función de φ es partir de la expresión cartesiana $U = Qy_C + Py_D$, sustituyendo y_C e y_D en función de las coordenadas de los puntos A, B, de la longitud de la cuerda AB y de las longitudes de los hilos respectivos, que son constantes, expresando todas las magnitudes variables en función de φ . La constante resultante en la expresión de U se determina con la condición $U(\varphi) = 0$.

- 2) Demuestre que existen dos valores de $\cos \frac{\varphi}{2}$, uno positivo y otro negativo, en los que la anilla A se encuentra en equilibrio.
- 3) Compruebe que el equilibrio correspondiente a $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$ se presenta para cualesquiera valores de P y Q con los sentidos de la figura.
- 4) En las condiciones del apartado anterior, compruebe que hay una posición de equilibrio, determinela, señale en qué cuadrante se sitúa el punto A y obtenga la naturaleza del equilibrio (estable, inestable o indiferente).
- 5) Compruebe que el equilibrio correspondiente a $\cos \frac{\varphi}{2} < 0$ sólo es posible si se impone una condición entre P y Q que deberá determinar.
- 6) En las condiciones del apartado anterior, compruebe que hay una posición de equilibrio, determinela, señale en qué cuadrante se sitúa el punto A y obtenga la naturaleza del equilibrio.
- 7) Determine la expresión de la reacción de la circunferencia sobre A, en función de φ , para las posiciones de equilibrio de la anilla.

PROBLEMA ESTÁTICA (I y II). 2.

La estructura de la figura está formada por seis barras rígidas, de masa despreciable, articuladas en sus extremos. Las dos barras de mayor longitud están, además, articuladas en su punto medio, D. Las barras se designan en la forma siguiente

$$\left. \begin{array}{lll} \text{barra 1: } \overline{AC} & \text{barra 3: } \overline{BE} & \text{barra 5: } \overline{BF} \\ \text{barra 2: } \overline{AG} & \text{barra 4: } \overline{CF} & \text{barra 6: } \overline{EG} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \overline{AC} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{EG} = a \\ \overline{AG} = \overline{BF} = 2a \end{array}$$



La articulación A es fija y la B móvil según la recta AB que es perpendicular a la recta AF. Todas las articulaciones son ideales y la estructura y las fuerzas aplicadas son coplanarias. Se aplica una fuerza P en F, para equilibrar una fuerza Q en E, en las direcciones y sentidos indicados en la figura.

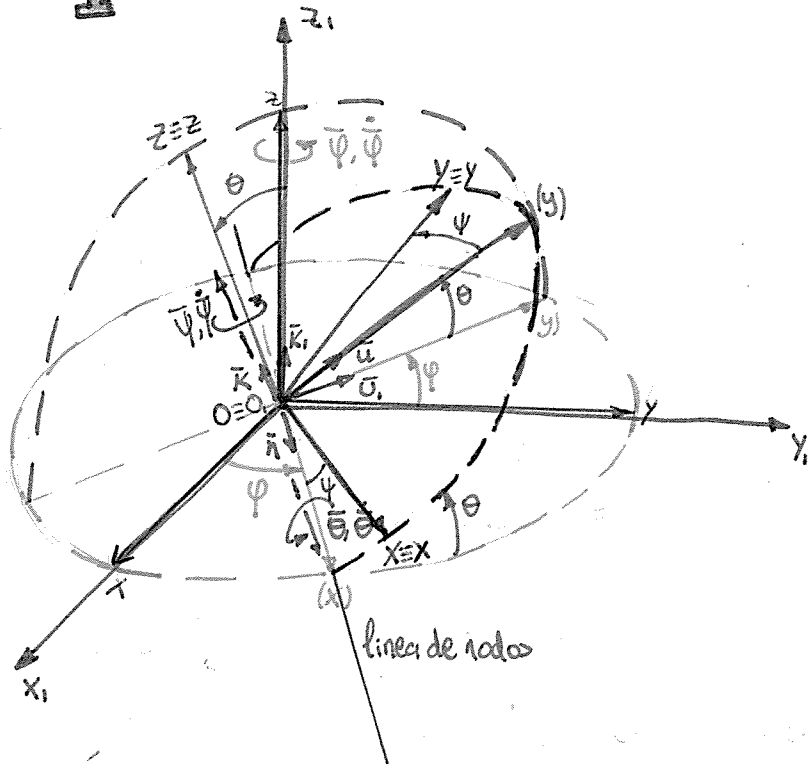
I) Analice el equilibrio del sistema con la configuración indicada ($0 < \theta < \pi/2$), determinando:

- 1) El ángulo θ en función de las fuerzas aplicadas, justificando la naturaleza del equilibrio (estable, inestable o indiferente).
- 2) Las reacciones en A y B como función de P y Q .

II) Suponiendo en los restantes apartados que $\theta = \pi/4$:

- 3) Determine el valor de P en función de Q .
- 4) ¿Podrían suprimirse algunas barras de la estructura de forma que el sistema mantuviese la misma configuración de equilibrio? En caso afirmativo, indique qué barras podrían suprimirse y por qué.
- 5) Aíse la barra ②, indique todas las fuerzas que actúan sobre la misma, representándolas en un croquis y calcule sus valores en función de P .
- 6) Obtenga los diagramas que recogen la variación del esfuerzo normal, esfuerzo cortante y momento flector en las sucesivas secciones de la barra ②.
- 7) Calcule el esfuerzo normal en cada una de las restantes barras de la estructura, en función de P .

1 ÁNGULOS Y ROTACIONES DE EULER



Se considera el sistema fijo $\{0, x, y, z\}$ y el móvil $\{0, x, y, z\}$

Se va a someter al sistema móvil a 3 rotaciones:

- Línea de nodos:

Recta de intersección de los planos π, γ y $\pi\gamma$ orientado según $\vec{n}$ de forma que $\vec{n}, \vec{k}_\pi$ y $\vec{k}_\gamma$ estén orientados en ese orden:

$$\vec{n} = \frac{\vec{K}_1 \times \vec{K}_2}{|\vec{K}_1 \times \vec{K}_2|}$$

- Ángulo de precesión (φ): Giro alrededor de z ,
 $[0, 2\pi]$ 

- Ángulo de rotación (θ): Giro alrededor de la línea de nodos $[0, \pi]$ $\otimes \otimes$

- Ángulo de rotación propia (ψ): Giro alrededor de $\begin{matrix} \textcircled{*} \textcircled{*} \textcircled{*} \\ [0, 2\pi] \end{matrix} \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \vec{t}_i \cdot \vec{n} \\ \sin \varphi &= \vec{j}_i \cdot \vec{n}\end{aligned}$$

$$\omega \Theta = \bar{K}_i \cdot \bar{K}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \psi = \vec{r} \cdot \vec{n} \\ \sin \psi = -\vec{j} \cdot \vec{n} \end{array} \right.$$

Relaciones $\otimes$ ϕ

$$\{\vec{u}, \vec{j}, \vec{k}\} \leftrightarrow \{\vec{n}, \vec{u}, \vec{v}\} \begin{cases} \vec{n} = \cos\phi \vec{u} + \sin\phi \vec{j} \\ \vec{u} = -\sin\phi \vec{u} + \cos\phi \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{T}_1 = \cos \varphi \vec{n} - \sin \varphi \vec{u}_1 \\ \vec{J}_1 = \sin \varphi \vec{n} + \cos \varphi \vec{u}_1 \end{cases}$$

Rebutioner 

$$\{ \bar{n}, \bar{u}, k, \} \longleftrightarrow \{ \bar{n}, \bar{u}, \bar{k} \} \quad \begin{cases} \bar{u} = \cos \theta \bar{u}_i + \sin \theta \bar{k}_i \\ \bar{k} = -\sin \theta \bar{u}_i + \cos \theta \bar{k}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \cos \theta \bar{u} - \sin \theta \bar{k} \\ \bar{k}_1 = \sin \theta \bar{u} + \cos \theta \bar{k} \end{cases}$$

Relationen $\otimes \otimes \otimes \textcircled{4}$

$$\begin{cases} \pi, \bar{u}, K^+ \leftrightarrow \tau, \bar{J}, K^+ \\ \begin{cases} \vec{C} = \cos \psi \vec{\pi} + \sin \psi \vec{u} \\ \vec{J} = -\sin \psi \vec{\pi} + \cos \psi \vec{u} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{n} = \cos \psi \bar{I} - \sin \psi \bar{J} \\ \bar{u} = \sin \psi + \cos \psi \bar{J} \end{cases}$$

De forma matricial

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_i \\ \bar{j}_i \\ \bar{k}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u} \\ \bar{k} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u} \\ \bar{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u} \\ \bar{k} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u} \\ \bar{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_i \\ \bar{j}_i \\ \bar{k}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix}$$

$M_\psi \quad M_\theta \quad M_\psi$

Rotación de Euler:

$$\bar{\omega} = \dot{\psi} \bar{k}_i + \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\phi} \bar{k}$$

*

$\{ \bar{n}, \bar{k}_i, \bar{k} \}$ BASE EULER
 $\dot{\theta} \rightarrow$ nutación
 $\dot{\phi} \rightarrow$ precesión
 $\dot{\psi} \rightarrow$ rotación propia

De la expresión matricial sacamos la fórmula

$$\bar{k}_i = \sin\theta \sin\psi \bar{t} + \sin\theta \cos\psi \bar{j} + \cos\theta \bar{k}$$

* En base móvil y base fija

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_y = \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \end{cases}$$

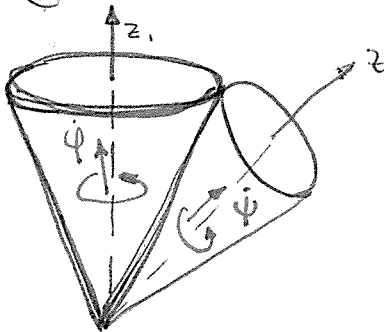
$$\begin{cases} \omega_{x1} = \dot{\psi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_{y1} = -\dot{\psi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_{z1} = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} \end{cases}$$

2 CONOS DE POINSON. Mov. de nutación nula

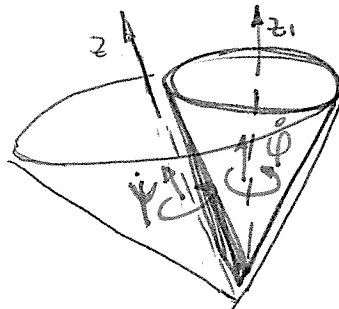
En estos tendremos:

$$\begin{cases} \bar{U}^P = \bar{\omega} \times O\bar{P} \\ \bar{A}^P = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times O\bar{P}) + \bar{\omega} \times O\bar{P} \\ \text{tir pasando por } O \forall t \end{cases}$$

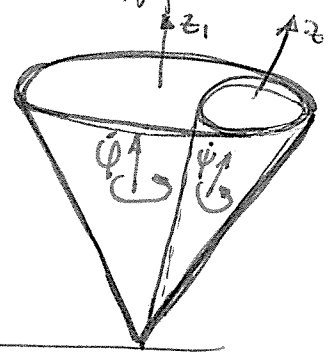
Caso ① Rodadura exterior:



Caso ②. Cono fijo por interior del móvil



Caso ③: Cono móvil por interior del fijo



Completan $\dot{\theta}$ nula
 $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ uniformes

3 CUESTIONES

16-09-1997 Se consideran 2 triedros S, S_1 con $O \equiv O_1$. S gira entorno a S_1 con ω . Escribir componentes de ω en S en función de las rotaciones y ángulos de Euler.

$$\omega = \dot{\psi} \bar{K}_1 + \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\varphi} \bar{K} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{K}_1 = \sin \theta \bar{u} + \cos \theta \bar{K} = \sin \theta (\sin \psi \bar{i} + \cos \psi \bar{j}) + \cos \theta \bar{K} \\ \bar{n} = \cos \psi \bar{i} - \sin \psi \bar{j} \\ \bar{K} = \bar{K} \end{array} \right.$$

$$\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\} \xrightarrow{\varphi} \{\bar{n}, \bar{u}, \bar{K}\} \xrightarrow{\theta} \{\bar{n}, \bar{u}, \bar{K}\} \xrightarrow{\psi} \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{sen } \psi \bar{i} - \cos \psi \bar{j}} \\ \text{sen } \theta \bar{u} + \cos \theta \bar{K} = \text{sen}(\theta) [\text{sen } \psi \bar{i} + \cos \psi \bar{j}] + \cos \theta \bar{K} \end{array}$$

$$\omega = \begin{cases} \bar{i}: \dot{\varphi} \text{sen } \theta \text{sen } \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \bar{j}: \dot{\varphi} \text{sen } \theta \cos \psi - \dot{\theta} \text{sen } \psi \\ \bar{K}: \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \theta \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \text{sen } \theta \cos \psi & 0 \\ 0 & \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

24-02-1998

La posición de la base móvil $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ respecto de la fija viene definida por:

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/2 & -\sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix} \quad \text{Se pide } \varphi$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \bar{n} \cdot \bar{i}_1 \\ \text{sen } \varphi = \bar{n} \cdot \bar{j}_1 \end{cases} \quad \bar{n} = \frac{\bar{K}_1 \times \bar{K}}{|\bar{K}_1 \times \bar{K}|} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|\bar{K}_1 \times \bar{K}|} = \frac{\sqrt{2}(\bar{j}) \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = -\bar{j}$$

$$\bar{K}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{k}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = (-\bar{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{j} - \frac{\sqrt{2}}{4} \bar{k} \right) = +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen } \varphi = (-\bar{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \bar{i} + \frac{1}{2} \bar{j} - \frac{\sqrt{6}}{4} \bar{k} \right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \boxed{\varphi = 330^\circ}$$

25-01-2001

27-01-1997

Determinar los ángulos de Euler del triedro $\{O, x, y, z\}$

respecto a $\{O, x_1, y_1, z_1\}$ sabiendo que: $\bar{i} = -\bar{K}_1, \bar{j} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}_1$

$$\text{se pide } (\varphi, \theta, \psi) \quad \bar{K} = \bar{i} \times \bar{j} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i}_1 \xrightarrow{\bar{K}_1 \perp \bar{K}} \omega, \theta = \bar{K} \cdot \bar{K}_1 = 0 \rightarrow \boxed{\theta = 90^\circ}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \bar{i} \cdot \bar{n} \\ \text{sen } \varphi = \bar{j} \cdot \bar{n} \end{cases}, \quad \bar{n} = \frac{\bar{K}_1 \times \bar{K}}{|\bar{K}_1 \times \bar{K}|} = \frac{-\bar{i} \times \bar{K}}{1} = \bar{j} \rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \bar{i} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}_1 \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } \varphi = \bar{j} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}_1 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\varphi = 135^\circ}$$

$$\begin{cases} \cos \psi = \bar{i} \cdot \bar{n} = 0 \\ \text{sen } \psi = -\bar{j} \cdot \bar{n} = -1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\psi = -90^\circ = \frac{3\pi}{2}}$$

10-06-2002

18-09-2007

Determinar ángulos de precesión y rot. propia.
 $\vec{i} = -\vec{i}_1$ y $\vec{j} = -\vec{k}_1$

$$\vec{K} = \vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{j}_1 ; \quad \vec{n} = \frac{\vec{K}_1 \times \vec{K}}{|\vec{K}_1 \times \vec{K}|} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}_1$$

Se pide φ y ψ

$$\begin{cases} \sin \varphi = \vec{j}_1 \cdot \vec{n} = \vec{j}_1 \cdot \vec{i}_1 = 0 \\ \cos \varphi = \vec{i}_1 \cdot \vec{n} = \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\varphi = 0^\circ \text{ (precesión)}}$$

$$\begin{cases} \cos \psi = \vec{i}_1 \cdot \vec{n} = -\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = -1 \\ \sin \psi = -\vec{j}_1 \cdot \vec{n} = \vec{k}_1 \cdot \vec{i}_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\psi = \pi \text{ (rot. propia)}}$$

26-06-2006 Determinar φ, θ, ψ y $\vec{n}$ expresado en S_1 $\begin{cases} \vec{i} = \vec{k}_1 \\ \vec{j} = \vec{j}_1 \end{cases}$

$$\vec{K} = \vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}_1, \quad \vec{n} = \frac{\vec{K}_1 \times \vec{K}}{|\vec{K}_1 \times \vec{K}|} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j}_1 \rightarrow \boxed{\vec{n} = -\vec{j}_1}$$

$$\cos \theta = \vec{K} \cdot \vec{K}_1 = -\vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0 \rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} \sin \varphi = \vec{j}_1 \cdot \vec{n} = \vec{j}_1 \cdot (-\vec{j}_1) = -1 \\ \cos \varphi = \vec{i}_1 \cdot \vec{n} = \vec{i}_1 \cdot (-\vec{j}_1) = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{3\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} \sin \psi = -\vec{j}_1 \cdot \vec{n} = -\vec{j}_1 \cdot (-\vec{j}_1) = 1 \\ \cos \psi = \vec{i}_1 \cdot \vec{n} = \vec{k}_1 \cdot (-\vec{j}_1) = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\psi = \frac{\pi}{2}}$$

19-06-1997 Obtener los ángulos de Euler: $z\vec{i} = \sqrt{2}(\vec{j}_1 + \vec{k}_1)$; $\vec{j} = \vec{i}_1$

$$\vec{K} = \vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{j}_1 - \vec{k}_1)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{K}_1 \times \vec{K}}{|\vec{K}_1 \times \vec{K}|} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i}_1 \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\vec{i}_1 = (-1, 0, 0)$$

$$\varphi \begin{cases} \cos \varphi = \vec{i}_1 \cdot \vec{n} = \vec{i}_1 \cdot (-\vec{i}_1) = -1 \\ \sin \varphi = \vec{j}_1 \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\varphi = \pi}$$

$$\psi \begin{cases} \cos \psi = \vec{i}_1 \cdot \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (0, 1, 1) \cdot (-1, 0, 0) = 0 \\ \sin \psi = -\vec{j}_1 \cdot \vec{n} = -(1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 0) = +1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\psi = \pi/2}$$

$$\theta \begin{cases} \cos \theta = \vec{K} \cdot \vec{K}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{j}_1 - \vec{k}_1) \cdot (\vec{k}_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{4}} \end{cases}$$

25-01-1999 Determinar ángulos de Euler si: $\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$

$$(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \xrightarrow{\psi} (\vec{n}, \vec{u}_1, \vec{k}_1) \xrightarrow{\theta} (\vec{n}, \vec{u}, \vec{k}) \xrightarrow{\varphi} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\rightarrow \cos \theta = \vec{k} \cdot \vec{k}_1 = \vec{k} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \vec{n} \cdot \vec{i}_1 \\ \sin \varphi = \vec{n} \cdot \vec{j}_1 \end{cases}; \text{ Necesito } \vec{n} = \frac{\vec{k}_1 \times \vec{k}}{|\vec{k}_1 \times \vec{k}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\left| \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right|} = \frac{-\vec{j}}{\frac{1}{2}} = -2\vec{j}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = -2\vec{j} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{k} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos \psi = \vec{n} \cdot \vec{i} = (-2\vec{j}) \cdot \vec{i} = 0 \\ \sin \psi = \vec{n} \cdot (-\vec{j}) = (-2\vec{j}) \cdot (-\vec{j}) = 2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\psi = \frac{\pi}{2}}$$

03-07-2000 $X \equiv Z$, permanentemente. $\Omega = cte$. En $t=0: y = x_1, z = y_1$. Determinar ángulos de Euler y rotaciones en función del tiempo.

$$\begin{aligned} X \equiv Z &\rightarrow \vec{i} = \vec{k}_1 \\ y = x_1 &\rightarrow \vec{j} = \vec{i}_1 \\ z = y_1 &\rightarrow \vec{k} = \vec{j}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}_1 \times \vec{k}}{|\vec{k}_1 \times \vec{k}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right|} = -\vec{i}_1 = -\vec{j}$$

$$\cos \theta = \vec{k}_1 \cdot \vec{k} = \vec{k}_1 \cdot \vec{j}_1 = 0 \rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \vec{i}_1 \cdot \vec{n} = -1 \\ \sin \varphi = \vec{j}_1 \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\varphi = \pi}$$

$$\begin{cases} \cos \psi = \vec{i} \cdot \vec{n} = 0 \\ \sin \psi = \vec{j} \cdot \vec{n} = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\psi = \frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$$

$$\Omega = \dot{\varphi}; \varphi(t) = \Omega t + K$$

$$\varphi(0) = \pi \rightarrow \boxed{\varphi(t) = \Omega t + \pi}$$

Rotación a eje $Z_1 = cte$

$$\Omega = \dot{\varphi} \Rightarrow \theta = cte, \varphi = cte$$

07-02-2005 $\dot{\varphi} = \omega_1$, y $\dot{\psi} = \omega_2$, $\dot{\theta} = 0$, $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} = \varphi = cte$. Calcular $|\omega|$

$$\omega = \dot{\varphi} \vec{k}_1 + \dot{\psi} \vec{n} + \dot{\theta} \vec{k} = \omega_1 \vec{k}_1 + \omega_2 \vec{k}$$

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{k} = \varphi = cte \rightarrow \vec{k}_1 \cdot \dot{\vec{k}} = -\omega_2 \vec{k}_1 \cdot \vec{k} = -\omega_2 \cos \varphi$$

$$\omega \cdot \omega = |\omega|^2 = (\omega_1 \vec{k}_1 + \omega_2 \vec{k})^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \underbrace{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}}_{\cos \varphi}$$

$$\rightarrow \boxed{|\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \varphi}}$$

Sep-2008 Se piden ángulos de Euler si: $\vec{L} = \vec{j}_1, \vec{J} = -\vec{k}_1 \rightarrow \vec{L} \times \vec{J} = \vec{K} =$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{K}_1 \times \vec{K}}{|\vec{K}_1 \times \vec{K}|} = \frac{\vec{K}_1 \times (-\vec{L}_1)}{|\vec{K}_1 \times \vec{L}_1|} = -\vec{j}_1 = -\vec{L}$$

$$\omega \theta = K K_1 = -\vec{L}_1 \cdot \vec{K}_1 = 0$$

$$\psi \begin{cases} \cos \psi = \vec{n} \cdot \vec{L}_1 = (-\vec{j}_1) \cdot (\vec{L}_1) = 0 \\ \sin \psi = \vec{n} \cdot \vec{j}_1 = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\psi = \frac{3\pi}{2}}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\psi \begin{cases} \cos \psi = \vec{n} \cdot \vec{L} = -\vec{L} \cdot \vec{L} = -1 \\ \sin \psi = -\vec{n} \cdot \vec{J} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\psi = \pi}$$

Ex Cin Esf 1 $2\vec{c} = \sqrt{2} (\vec{j}_1 + \vec{k}_1)$, $\vec{j} = \vec{c}_1$. Se pide φ, Θ, ψ

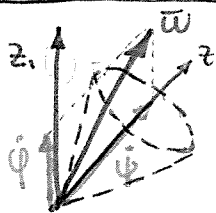
$$\vec{k} = \vec{c} \times \vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{j}_1 + \vec{k}_1) \times \vec{c}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{j}_1 - \vec{k}_1) \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{k}_1 \times \vec{k}}{|\vec{k}_1 \times \vec{k}|} = \frac{\vec{k}_1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{j}_1 - \vec{k}_1)}{|\vec{k}_1 \times \vec{k}|} = -\vec{c}_1 = -\vec{j}$$

$$\Theta: \cos \Theta = \vec{k}_1 \cdot \vec{k} = \vec{k}_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{j}_1 - \vec{k}_1) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\Theta = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\varphi \begin{cases} \cos \varphi = \vec{c}_1 \cdot \vec{n} = \vec{c}_1 \cdot (-\vec{c}_1) = -1 \\ \sin \varphi = \vec{j}_1 \cdot \vec{n} = \vec{j}_1 \cdot (-\vec{c}_1) = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\varphi = \pi}$$

$$\psi \begin{cases} \cos \psi = \vec{c} \cdot \vec{n} = \vec{c} \cdot (-\vec{j}) = 0 \\ \sin \psi = -\vec{j}_1 \cdot \vec{n} = -\vec{j}_1 \cdot (-\vec{c}_1) = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\psi = \frac{\pi}{2}}$$

Ex Cin Esf 4 $\dot{\varphi} = \omega_1, \dot{\psi} = \omega_2, \dot{\Theta} = 0$; α . Se pide $|\vec{w}|$

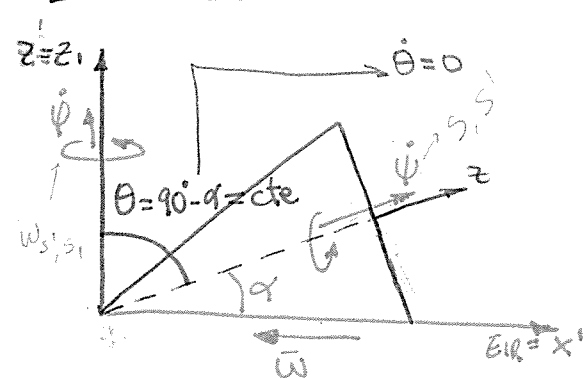


$$\vec{w} = \dot{\varphi} \vec{k}_1 + \dot{\psi} \vec{k}$$

$$|\vec{w}|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\alpha = \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\alpha$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\alpha}$$

Ex Cin Esf 5 (cono: α, R, S, D, T). Se pide $|\vec{w}|$



$$T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_{01}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{|\dot{\varphi}|}; |\dot{\varphi}| = \frac{2\pi}{T}$$

$$\vec{w} = \dot{\varphi} \vec{k}_1 + \dot{\Theta} \vec{n} + \dot{\psi} \vec{k}, \quad \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} \vec{k}_1$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} \vec{k}_1 \quad (K_1 \equiv K') \\ \dot{\psi} = \dot{\psi} \vec{k} = \dot{\psi} (\cos\alpha \vec{c}' + \sin\alpha \vec{k}') \end{cases} \xrightarrow{\vec{w} = \vec{w}(\vec{c})}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{c}': -\omega = \dot{\psi} \cos\alpha \rightarrow \dot{\psi} = \frac{-\omega}{\cos\alpha} \\ \vec{k}': 0 = \dot{\psi} \sin\alpha + \frac{2\pi}{T} \rightarrow \dot{\psi} = \frac{-2\pi/T}{\sin\alpha} \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi/T}{\sin\alpha} \cos\alpha$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \cot\alpha}$$

b) $|\dot{\alpha}| = \dot{\omega}$

$$\dot{\vec{w}} = \frac{d\vec{w}}{dt} \Big|_{S_1} = \frac{d(\dot{\varphi} \vec{k}_1 + \dot{\psi} \vec{k})}{dt} \Big|_{S_1} = \frac{d\dot{\varphi} \vec{k}_1}{dt} \Big|_{S_1} + \frac{d\dot{\psi} \vec{k}}{dt} \Big|_{S_1} = \frac{d\dot{\psi} \vec{k}}{dt} \Big|_S + \vec{w}_{S, S_1} \times \dot{\psi} \vec{k} = (\dot{\psi} \vec{k}_1 + \dot{\psi} \vec{k}) \times \dot{\psi} \vec{k} =$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

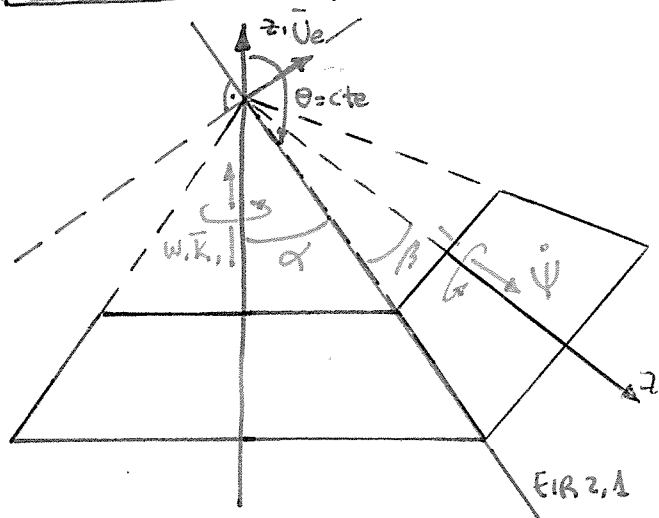
$$0 \quad (\dot{\psi} = \text{cte}, K_1 = \text{cte en } S_1)$$

$$0 \quad (\dot{\psi} = \text{cte}, \vec{k} = \text{cte en } S)$$

$$= \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin\Theta \vec{n} = \frac{2\pi}{T} \left(-\frac{2\pi}{T} \frac{\cot\alpha}{\omega} \right) \cos\alpha \vec{n} \Rightarrow \boxed{|\dot{\vec{w}}| = \frac{4\pi^2}{T^2} \cot\alpha}$$

Ej. Cin. Esf. 7 $\dot{\varphi} = \omega_1$, α, β : se pide $\dot{\psi}$ y $\ddot{\theta}$

$$\theta = \text{cte} \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = 0}$$



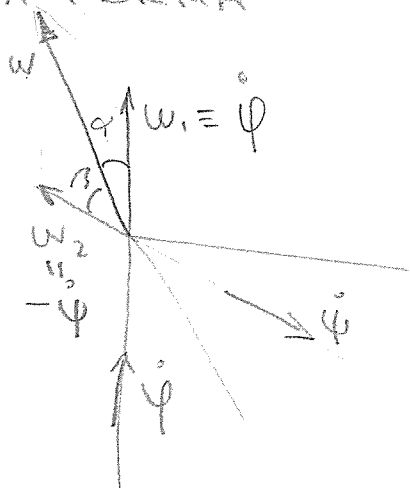
$$\bar{w} = \dot{\varphi} \bar{K}_1 + \dot{\psi} \bar{K} ; \bar{w} \cdot \bar{U}_e = 0$$

$$\Rightarrow \bar{U}_e: \dot{\varphi} \sin \alpha + \dot{\psi} \sin \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\psi} = -\dot{\varphi} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = -\omega_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}}$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \omega_1}$$

OTRA FORMA



$$\begin{cases} w \sin \alpha = w_2 \sin(\alpha + \beta) & (1) \\ w_2 \cos \beta + w_1 \cos \alpha = w & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow w \sin \alpha = w_2 [\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha]$$

$$(2) \rightarrow w_2 \cos \beta + w_1 \cos \alpha = w_2 \cos \beta + w_2 \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha}$$

$$\rightarrow w_2 = w_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\boxed{\dot{\psi} = -w_2 = -\omega_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = 0}$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \omega_1}$$

CINEMÁTICA ESFÉRICA

1.-POSICIÓN SÓLIDO CON PUNTO FIJO: ÁNGULOS Y ROTACIONES DE EULER

Cuando un móvil se mueve de forma que un punto del mismo permanece fijo, se necesitan solamente tres parámetros para determinar su posición. Estos tres parámetros pueden elegirse de muchas maneras, pero los más frecuentes son los ángulos de Euler.

1.1.-ÁNGULOS DE EULER

Se considera un sistema fijo $O_1x_1y_1z_1$ con base ortonormal $\{\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1\}$ y un sistema móvil $Oxyz$ con base ortonormal $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ligado al sólido que se mueve con punto fijo $O \equiv O_1$. Se va a someter al sólido S a tres rotaciones, definidas por los ángulos de Euler. Se define previamente la línea de nodos como la recta intersección de los planos x_1y_1 y xy , orientada por el versor $\bar{n}$ de forma que $\bar{n}, \bar{k}_1$ y $\bar{k}$ estén orientados, en ese orden, a derechas es decir:

$$\bar{n} = \frac{\bar{k}_1 \times \bar{k}}{|\bar{k}_1 \times \bar{k}|}$$

Ángulo de precesión ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$): representa un giro alrededor de z_1 , y es el ángulo que forma la línea de nodos con el eje Ox_1 (y $\bar{u}_1$ con $\bar{j}_1$), orientado por z_1 , determinándose por: $\cos \varphi = \bar{i}_1 \cdot \bar{n}$; $\sin \varphi = \bar{j}_1 \cdot \bar{n}$

-Obtención de $\{\bar{n}, \bar{u}_1\}$ a partir de $\{\bar{i}_1, \bar{j}_1\}$ ($\bar{k}_1$ común):

$$\begin{cases} \bar{n} = \cos \varphi \bar{i}_1 + \sin \varphi \bar{j}_1 \\ \bar{u}_1 = -\sin \varphi \bar{i}_1 + \cos \varphi \bar{j}_1 \end{cases} \quad \text{Inversas:} \quad \begin{cases} \bar{i}_1 = \cos \varphi \bar{n} - \sin \varphi \bar{u}_1 \\ \bar{j}_1 = \sin \varphi \bar{n} + \cos \varphi \bar{u}_1 \end{cases}$$

Ángulo de nutación ($0 \leq \theta < \pi$): representa un giro alrededor de la línea de nodos, y es el ángulo que forma el eje z con el z_1 (y $\bar{u}$ con $\bar{u}_1$), determinándose por: $\cos \theta = \bar{k}_1 \cdot \bar{k}$

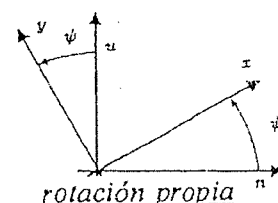
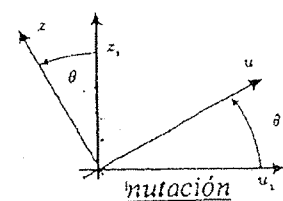
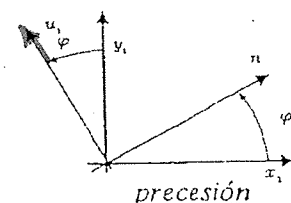
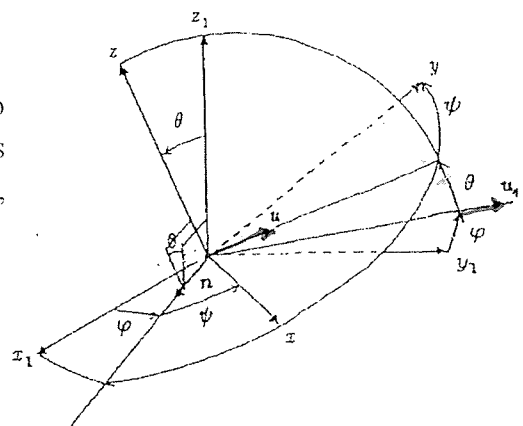
-Obtención de $\{\bar{u}, \bar{k}\}$ a partir de $\{\bar{u}_1, \bar{k}_1\}$ ($\bar{n}$ común):

$$\begin{cases} \bar{u} = \cos \theta \bar{u}_1 + \sin \theta \bar{k}_1 \\ \bar{k} = -\sin \theta \bar{u}_1 + \cos \theta \bar{k}_1 \end{cases} \quad \text{Inversas:} \quad \begin{cases} \bar{u}_1 = \cos \theta \bar{u} - \sin \theta \bar{k} \\ \bar{k}_1 = \sin \theta \bar{u} + \cos \theta \bar{k} \end{cases}$$

Ángulo de rotación propia ($0 \leq \psi < 2\pi$): representa un giro alrededor de z , y es el ángulo que forma el eje x con la línea de nodos, definiéndose por: $\cos \psi = \bar{i} \cdot \bar{n}$; $\sin \psi = -\bar{j} \cdot \bar{n}$

-Obtención de $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ a partir de $\{\bar{n}, \bar{u}\}$ ($\bar{k}$ común):

$$\begin{cases} \bar{i} = \cos \psi \bar{n} + \sin \psi \bar{u} \\ \bar{j} = -\sin \psi \bar{n} + \cos \psi \bar{u} \end{cases} \quad \text{Inversas:} \quad \begin{cases} \bar{n} = \cos \psi \bar{i} - \sin \psi \bar{j} \\ \bar{u} = \sin \psi \bar{i} + \cos \psi \bar{j} \end{cases}$$



Estos ángulos están definidos para toda configuración, salvo cuando los ejes z y z_1 son paralelos en intervalos de tiempo no nulos: en este caso se tendría un sólido con eje fijo, y sólo sería necesario un parámetro para fijar la posición del sólido.

Es fácil deducir las matrices de los cambios de base para los giros vistos:

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u} \\ \bar{k} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{u} \\ \bar{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix}$$

de forma que:

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix}$$

$M_\varphi \qquad M_\theta \qquad M_\psi$

lo que proporciona:

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \cos\theta \sin\psi & -\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\theta \cos\psi & \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \cos\theta \sin\psi & -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\theta \cos\psi & -\cos\varphi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\psi & \sin\theta \cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix}$$

La transformación global es ortogonal y por tanto la matriz de la transformación inversa es la traspuesta de esta última matriz.

1.2.-ROTACIONES DE EULER

Definidos los ángulos de Euler para determinar la posición de un sólido con punto fijo, se obtiene ahora la rotación del sólido en función de dichos ángulos y sus derivadas, quedando:

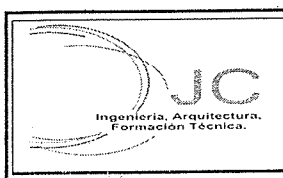
$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k}_1 + \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\psi} \bar{k}$$

La base $\{\bar{n}, \bar{k}_1, \bar{k}\}$ se llama base de Euler, y las componentes de la rotación en ella se denominan rotaciones de Euler, recibiendo los nombres: nutación ($\dot{\theta}$), precesión ($\dot{\varphi}$) y rotación propia ($\dot{\psi}$)

Con todo lo visto se pueden obtener las componentes de la rotación del sólido tanto en la base móvil como en la fija:

$$\text{En base móvil} \begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_y = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta \end{cases}$$

$$\text{En base fija} \begin{cases} \omega_{x1} = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi \\ \omega_{y1} = -\dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi + \dot{\theta} \sin\varphi \\ \omega_{z1} = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

**EN SOLUCIONES****EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 1****Examen Final 1996-06-24**

Defina la *línea de nodos* y los tres *ángulos de Euler*.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 2**Examen de Septiembre 1997-09-16**

Se consideran dos triedros cartesianos directos, S y S_1 , con orígenes coincidentes. El sistema S gira respecto al sistema S_1 con velocidad angular ω . Escriba las componentes de ω en S en función de las rotaciones y ángulos de Euler.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 3**Primer examen parcial 1998-02-03**

Si la base del triedro móvil es $\{i, j, k\}$ y la del triedro fijo $\{i_1, j_1, k_1\}$, defina vectorialmente los ángulos de Euler que permiten establecer la posición del triedro móvil respecto al triedro fijo.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 4**Examen de febrero 1998-02-24 febrero 2009-02-06**

La posición de la base móvil $\{i, j, k\}$ respecto a la base fija $\{i_1, j_1, k_1\}$ viene definida mediante la matriz indicada. Determine el valor del primer ángulo de Euler (ángulo de precesión).

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/2 & -\sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 5**Examen Final 1999-06-28**

¿Qué es la *línea de nodos* y cómo se orienta?

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 6**Examen Final 1999-09-06**

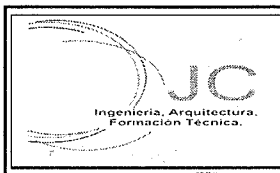
Suponiendo conocido el vector n que orienta la línea de nodos en el movimiento relativo de dos triedros con origen común, defina analíticamente los ángulos de precesión y rotación propia haciendo intervenir n y vectores de las bases de ambos triedros.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 7**parcial 2000-01-24**

En el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo, escriba la relación matricial que permite expresar las componentes de la rotación en la base móvil en función de los ángulos y rotaciones de Euler, indicando la denominación de las magnitudes utilizadas.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 8 **Primer parcial 2001-01-25 Primer Examen Parcial 1997-01-27**
Primer parcial 2001-01-25

Determine los ángulos de Euler del triedro ortogonal $\{O, x, y, z\}$ respecto a otro $\{O, x_1, y_1, z_1\}$, sabiendo que $i = -k_1$ y $j = -\frac{1}{\sqrt{2}}i_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}j_1$.

**EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 9****Examen de Febrero 2001-02-19**

Utilizando vectores, defina el ángulo de rotación propia de un triedro móvil, $Oxyz$, respecto a otro fijo, $Ox_1y_1z_1$.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 10**Examen de Febrero 2002-02-11**

En el movimiento relativo de dos triedros trirectángulos con orígenes coincidentes, defina la base de Euler mediante los vectores que la forman.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 11**Junio 2002-06-10**

Determine los ángulos de precesión y de rotación propia del triedro $\{Ox_1y_1z_1\}$ respecto del triedro $\{Oxyz\}$, cuando $i = -i_1$ y $j = -k_1$, especificando el valor de cada uno de ellos.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 12**Septiembre 2002-09-16**

Supuesta conocida la posición de un triedro móvil, $Oxyz$, respecto a otro fijo, $Ox_1y_1z_1$, exprese vectorialmente el vector de la línea de nodos y los ángulos de Euler, indicando el nombre de cada uno de ellos.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 13**Febrero 2003-02-10 Febrero 2004-02-12**

Utilizando vectores unitarios, defina el ángulo de rotación propia y el ángulo de precesión de un triedro móvil respecto de otro fijo y con orígenes coincidentes.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 14 Examen de Junio 2004-06-17 Examen de Septiembre 2004-09-23 Examen de Septiembre 2005-09-05

En el movimiento relativo de dos triedros ortogonales, con vértice u origen coincidentes, ¿cómo se define la línea de nodos? y ¿cuál es la expresión de un vector unitario que la orienta?

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 15**Febrero 2005-02-07**

En el movimiento relativo de dos triedros ortogonales, con vértice u origen coincidentes, defina mediante relaciones vectoriales los ángulos de Euler, indicando sus nombres, utilizando los vectores de las bases ortonormales de cada sistema y el vector n que orienta la línea de nodos.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 16**Febrero 2006-02-13**

Defina los ángulos de nutación, precesión y de rotación propia de un sistema móvil $S(O, x, y, z)$ con relación al sistema fijo $S_1(O, x_1, y_1, z_1)$, especificando su campo de variabilidad y expresándolos a través de relaciones con vectores.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 17**Junio 2006-06-26**

Se consideran dos referencias cartesianas ortogonales: $S_1\{O, i_1, j_1, k_1\}$, fija, y $S\{O, i, j, k\}$, móvil. En un cierto instante, la posición de S es tal que $i = k_1$ y $j = j_1$. Determine los ángulos de Euler de S respecto a S_1 y el vector que orienta la línea de nodos expresado en S_1 .

**EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 18****Junio 2007-09-18**

Determine los ángulos de precesión y de rotación propia del triedro $\{Ox_1y_1z_1\}$ respecto del triedro $\{Oxyz\}$ cuando $i = -i_1$ y $j = -k_1$, especificando el valor de cada uno de ellos.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 19**Febrero 2008-02-15**

Determine los ángulos de precesión y de rotación propia del triedro $\{Ox_1y_1z_1\}$ respecto del triedro $\{Oxyz\}$ cuando $i = -k_1$ y $k = -i_1$, especificando el valor de cada uno de ellos.

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 21**Junio 2008-06-20**

Dos triedros rectangulares y ortogonales, T y T_1 , tienen el origen común y, además, $i = j_1$, $j = -k_1$. Justifique los valores de los ángulos de Euler de T respecto de T_1 .

EJERCICIO CIN. ESF. Soluc. 20**Septiembre 2008-09-05**

Determine los ángulos de precesión, rotación propia y nutación del triedro $\{Oxyz\}$ respecto del triedro $\{Ox_1y_1z_1\}$, cuando $i = j_1$ y $j = -k_1$, especificando el valor de cada uno de ellos.

EN CLASE**EJERCICIO CIN. ESF. 1****Junio 1997-06-19**

Dos triedros cartesianos directos, S y S_1 , con bases ortonormales, $\{O, i, j, k\}$ y $\{O, i_1, j_1, k_1\}$, se encuentran situados de forma que $2i = \sqrt{2}(j_1 + k_1)$; $j = i_1$. Obtenga los ángulos de Euler de S respecto a S_1 .

EJERCICIO CIN. ESF. 2**Parcial 1999-01-25**

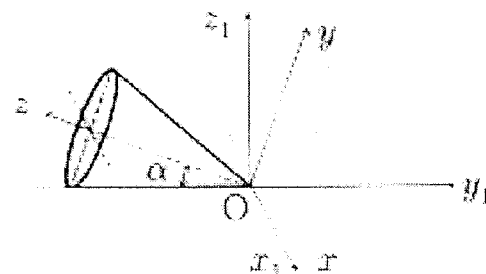
Dos triedros con origen común S_1 (fijo) y S (móvil), se relacionan mediante la siguiente matriz entre sus bases

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

Determine los ángulos de Euler que definen la posición de S respecto a S_1 .

EJERCICIO CIN. ESF. 3
Junio 2001-06-20

El cono de la figura, de semiángulo α , rueda uniformemente sin deslizar sobre el plano fijo $z_1 = 0$ con velocidad angular ω . En la posición representada la velocidad del centro de la base tiene el sentido de i_1 , los primeros semiejes, Ox y Ox_1 , coinciden y $\omega \cdot k > 0$. Determine las rotaciones de Euler del cono.


EJERCICIO CIN. ESF. 4
Febrero 2005-02-07

Una peonza de eje Oz se mueve respecto a un sistema fijo $S_1\{O_1, x_1, y_1, z_1\}$ con velocidades de precesión y rotación propia de módulo constante y valores ω_1 y ω_2 , respectivamente. La velocidad de nutación es nula y el ángulo entre los vectores que representan las velocidades de precesión y rotación propia es $\alpha = cte$. Calcule el módulo de la rotación de la peonza.

EJERCICIO CIN. ESF. 5 (2)
Febrero 2007-02-12

Un cono circular de semiángulo α rueda uniformemente sobre un plano fijo, sin deslizar, de forma que su eje tarda un tiempo T entre dos pasos sucesivos por la misma posición espacial. Determine el valor modular de la rotación instantánea del cono.

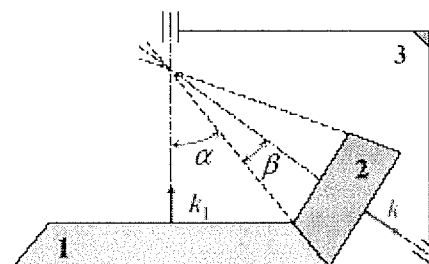
En el sistema de la cuestión anterior, calcule el módulo de la aceleración angular del cono.

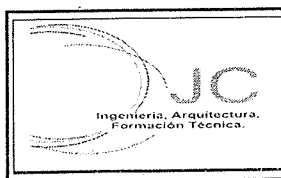
EJERCICIO CIN. ESF. 6
Junio 2008-06-20

Un cono recto, de sección circular, radio de base r y semiángulo α , se mueve rodando sobre el plano fijo Ox_1y_1 , de forma que su vértice está fijo en el origen de coordenadas, O , y todos sus puntos se encuentran siempre en el semiespacio $z_1 \geq 0$. Se define un sistema de referencia solidario al cono cuyo eje k tiene la dirección del eje del cono y sentido ~~hacia~~ desde el vértice hacia su base. La rotación del cono es $\Omega = \omega_1 k_1 + \omega k$. Calcule el valor modular del máximo de la velocidad de deslizamiento de los puntos del cono en contacto con Ox_1y_1 .

EJERCICIO CIN. ESF. 7
Septiembre 2008-09-05 Junio 2009-06-12

En el mecanismo de la figura, el sistema 3 gira con velocidad $\omega_1 k_1$, arrastrando en su movimiento el tronco de cono 2 que rueda sin deslizar sobre el tronco de cono 1 que permanece inmóvil. Calcule las rotaciones de Euler del cono 2 respecto a la referencia 1 en función de ω_1 , α y β .


EJERCICIO R-CIN. ESF. 1
Junio 2000-07-03



Grado en Ing. en Tecnologías Industriales

c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid.

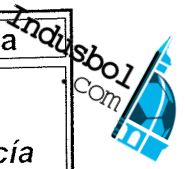
Tlfno: 91 535 75 29

www.academiajc.com

Mecánica

Profesor

Alex García



Sean dos referencias cartesianas con el mismo origen: $x_1y_1z_1$, que se considera fija y xyz , móvil respecto a la anterior. El eje x coincide permanentemente con z_1 y la referencia móvil gira con velocidad Ω constante en torno a dicho eje. Si en el instante inicial $y = x_1$, $z = y_1$, determine el valor de los ángulos y rotaciones de Euler en función del tiempo.

EJERCICIO R-CIN. ESF. 2

Junio 2007-06-18

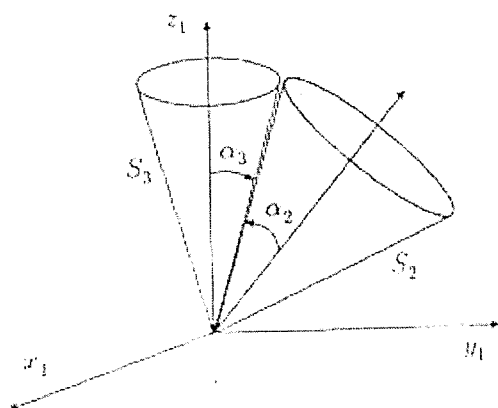
Un cono recto, de sección circular y semiángulo α ($\alpha < \pi/4$) rueda sin deslizar sobre un plano horizontal fijo, siendo ω el módulo de su rotación instantánea. El eje z_1 del sistema fijo es vertical ascendente. El eje z del sistema de referencia solidario al cono tiene la dirección del eje del cono y sentido desde el vértice hacia la base del cono. La rotación propia es negativa en este sistema. Calcule las tres rotaciones de Euler en valor y signo.

PROBLEMA CIN. ESF. 1 (FEB 1999)

Dos conos S_2 y S_3 , de revolución y semiángulos $\alpha_2 = 30^\circ$ y $\alpha_3 = 15^\circ$ giran alrededor de sus ejes geométricos z_2 y z_3 que se encuentran fijos en un sistema de referencia S_1 . Los ejes z_2 y z_3 se toman como los terceros ejes de sendas referencias cartesianas, solidarias a S_2 y S_3 , y las ecuaciones que definen sus direcciones en S_1 son

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = z_1 \end{array} \right\} \text{ eje de } S_2 \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ eje de } S_3$$

de acuerdo con la figura.



Sabiendo que el movimiento relativo entre los dos conos es una rodadura pura y que S_3 gira con velocidad uniforme a razón de 20 vueltas por minuto respecto a S_1 alrededor de z_1 y en sentido antihorario, determine en unidades del sistema internacional con tres cifras decimales:

- 1) Axoïdes del movimiento de S_3 respecto a S_2 y ecuación del eje instantáneo de rotación de dicho movimiento, en un instante genérico, para un observador ligado a S_1 .
- 2) Rotación ω_{21} de S_2 respecto a S_1 , expresada por sus componentes en la base de S_1 .
- 3) Rotación ω_{32} de S_3 respecto a S_2 , expresada por sus componentes en la base de S_1 .
- 4) Línea de nodos, en el movimiento de S_3 respecto a S_2 , y el vector n que la orienta, expresado por sus componentes en la base de S_1 .
- 5) Rotaciones de Euler en el movimiento de S_3 respecto a S_2 .
- 6) Velocidad y aceleración, respecto al sistema S_2 , del punto P_3 del eje de S_3 que dista 20 cm del vértice, expresadas por sus componentes en la base de S_1 .

* * * * *

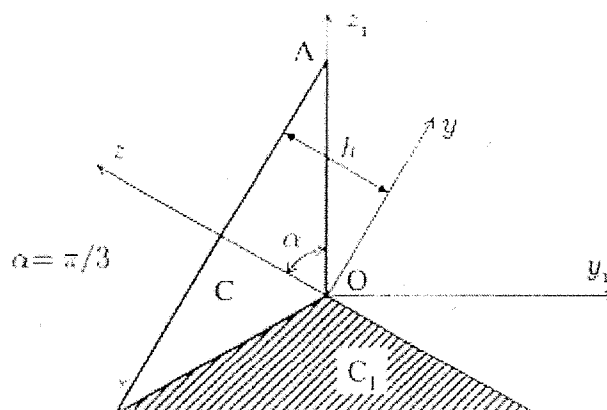
Se permite el uso individual de calculadora SIN información previa. La existencia en la calculadora de información almacenada o programada relacionada con el temario de la asignatura supondrá la anulación del examen.

Duración: 90 minutos

Calificación: 10 puntos sobre 20 del total del examen.

PROBLEMA CIN. ESF. 2 (FEB 2002)

Se tienen dos conos iguales, de semiángulo $\alpha = 60^\circ$ y altura h . Uno de ellos, C_1 , es fijo y el otro, C , rueda sin deslizar por el exterior de C_1 de forma que sus vértices son permanentemente coincidentes. La situación inicial ($t = 0$) es la representada en la figura.



Se vincula a C_1 un sistema de referencia fijo, $S_1 \{O_1x_1y_1z_1\}$, y a C un sistema de referencia móvil, $S \{Oxyz\}$, de forma que en $t = 0$ el sistema S tiene su eje Ox coincidente con el O_1x_1 .

El cono móvil, C , parte del reposo sometido a una velocidad angular instantánea de módulo

$$\omega(t) = \frac{\pi}{8}t \quad (t \text{ en segundos implica } \omega \text{ en rad/s})$$

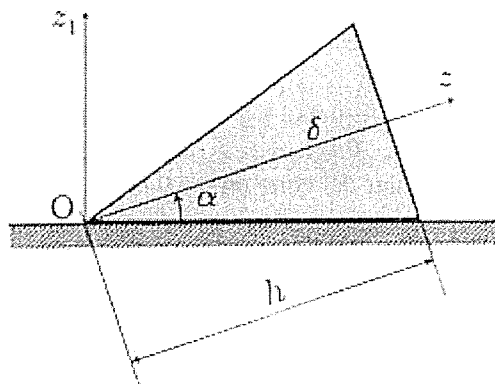
Finalmente, un punto A que en el instante inicial ($t = 0$) tiene por coordenadas en el sistema fijo, S_1 , $(0, 0, 2h)$, posee en $t = 0^+$ una velocidad con una componente positiva perpendicular al plano del dibujo y saliente.

- 1) Determine el vector $\mathbf{n}$ que define y orienta la línea de nodos y los ángulos de Euler de S respecto a S_1 en $t = 0$.
- 2) En un instante genérico ($t > 0$), calcule las componentes de la rotación instantánea del cono C en la base de Euler.
- 3) Exprese los ángulos de Euler en función del tiempo.
- 4) Determine el tiempo transcurrido, desde el instante inicial, para que el punto A vuelva a ocupar, por primera vez, la misma posición sobre el semieje Oz_1 . ¿Qué posición ocupa el cono C en ese instante?
- 5) Obtenga $d\omega/dt$ en $t = 0$ y facilite sus componentes en la referencia fija, S_1 .
- 6) Determine la aceleración del punto A en $t = 0$ expresando sus componentes en S_1 .
- 7) Determine los ángulos de Euler para $t = 4$ s. Represente la posición del cono móvil y la posición del punto A en ese instante.
- 8) Calcule $d\omega/dt$ en $t = 4$ s y facilite sus componentes en la referencia fija, S_1 .
- 9) Determine la aceleración del punto A en $t = 4$ s expresando sus componentes en S_1 .

PROBLEMA CIN. ESF. 3 (Feb 2004 - Jun 2004)

Un cono de revolución de semiángulo α ($\pi/2 > 2\alpha$), altura h y vértice O , rueda sin deslizar sobre un plano horizontal con rotación o velocidad angular de módulo constante ω .

Se consideran los siguientes sistemas de referencia:



a) Sistema fijo S_1 , con origen en el vértice del cono y eje z_1 según la vertical ascendente.

En el movimiento del cono es $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}_{S/S_1}$

b) Sistema móvil S , solidario al cono, con origen en O y eje z según el eje δ del cono y sentido desde el vértice hacia la base.

El movimiento del cono es tal, que $\vec{\omega} \cdot \vec{k} > 0$.

c) Sistema móvil auxiliar S' , de origen en O y uno de sus planos es el determinado en cada instante por la recta fija z_1 y por la recta móvil $\delta \equiv z$.

En relación con dicho sistema auxiliar S' se definen las rotaciones:

$$\vec{\omega}_{S/S'} \equiv \vec{\omega}_{rel} \quad \wedge \quad \vec{\omega}_{S'/S_1} \equiv \vec{\omega}_{arr}$$

En función de ω y las características geométricas del cono:

- 1) Obtenga $\vec{\omega}_{S/S'}$, "velocidad relativa del cono en torno a su eje" expresándola en S' y $\vec{\omega}_{S'/S_1}$, "velocidad de arrastre del cono en torno al eje vertical" expresándola en S_1 .
- 2) Indique los axoides del movimiento del cono respecto al sistema de referencia S_1 .
- 3) Indique los axoides del movimiento del cono respecto al sistema de referencia S' .
- 4) Expresé $\vec{\omega}$ en la base de Euler y obtenga los valores de las rotaciones de Euler en el movimiento de S/S_1 .
- 5) Expresé asimismo, en función de las rotaciones de Euler anteriores, las rotaciones relativa $\vec{\omega}_{S/S'}$ y de arrastre $\vec{\omega}_{S'/S_1}$.
- 6) Si se denominan β al ángulo girado por el eje δ en torno al eje vertical y γ al ángulo girado por el cono alrededor de su eje δ , determine la relación que liga las magnitudes β y γ .
- 7) Calcule el tiempo T_δ , que tarda el eje δ en dar una vuelta en torno al eje vertical z_1 y el tiempo T_γ , que tarda una generatriz del cono en dar una vuelta en torno al eje del cono o lo que es lo mismo en volver a contactar con el plano horizontal. Establezca la relación que existe entre T_δ y T_γ .
- 8) Obtenga el valor de $\dot{\vec{\omega}}$ expresándola en la base de Euler.
- 9) Calcule la aceleración de un punto P , del e.i.r (eje instantáneo de rotación) que dista L del punto O , expresándola en la base del sistema cilíndrico de eje Oz_1 .
- 10) Para el punto C , centro de la base del cono, calcule $\vec{v}_C$ y $\vec{a}_C$, expresándolas en la base del sistema cilíndrico de eje Oz_1 .

PROBLEMA CIN. ESF. 4 (Septiembre 2006)

Un cono, σ , de semiángulo $\alpha = 30^\circ$ y base circular de radio R , rueda uniformemente sin deslizar sobre el plano Ox_1y_1 de un sistema de referencia fijo, S_1 , permaneciendo el vértice del cono en el origen de coordenadas O . Un segundo sistema de referencia, solidario del cono σ , se designa por S y se denomina sistema móvil. El origen de S y S_1 es el mismo, Oz se escoge coincidente con OC .

Un punto material P , de masa m , está ligado a la circunferencia que limita la base del cono y la recorre uniformemente a razón de 10 vueltas por minuto.

Todos los resultados se expresarán en unidades SI. A tal efecto, en las expresiones en las que intervengan R o m se supondrá que dichos símbolos representan cantidades en unidades SI, es decir en metros y kilogramos, respectivamente.

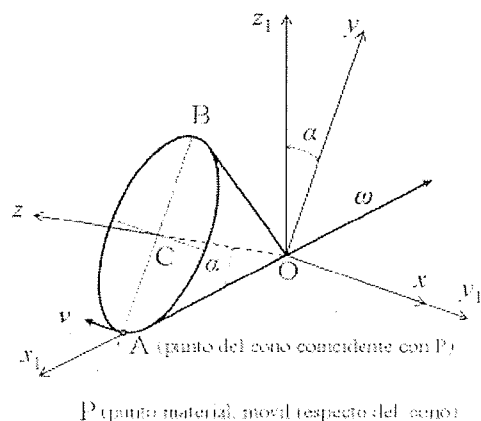


Fig. 1: Posición inicial del sistema ($t = 0$).

En las figuras 1 y 2 se representa la posición del cono en $t = 0$ y $t = 6$ s, respectivamente. La velocidad angular del cono en $t = 0$ es

$$\omega_0 = -\pi \frac{\sqrt{3}}{12} \hat{i}_1 \quad \text{rad/s}$$

En $t = 0$ el punto P se representa en la figura 1 y su velocidad respecto al cono es $-v \hat{j}_1$.

- 1) Determine el módulo, v , de la velocidad de P respecto del cono en función de R .
- 2) En el movimiento del cono respecto de S_1 , determine el vector n que orienta la línea nodos en $t = 0$ y en $t = 6$ s, mediante sus componentes en S_1 .
- 3) Obtenga las rotaciones de Euler, en rad/s.

- 4) Justifique que en el instante $t = 6$ s, el cono σ se encuentra en la posición de la figura 2.

De aquí en adelante, todas las cuestiones siguientes se solicitan en $t = 6$ s.

- 5) Determine ω y $\dot{\omega}$ del cono respecto de S_1 facilitando sus componentes en S .
- 6) Determine la posición del punto material P facilitando sus coordenadas en S . Obtenga la velocidad y aceleración de P respecto del cono, mediante sus componentes en S .
- 7) Obtenga la velocidad y la aceleración del punto A del cono respecto de S_1 proporcionando sus componentes en S .
- 8) Determine la aceleración del punto P respecto de S_1 expresando sus componentes en la base de S .
- 9) Si en $t = 6$ s la fuerza aplicada sobre P es cero, determine las componentes de la reacción de la curva sobre el punto material P según el triedro intrínseco de la trayectoria de P en S . A tal efecto se admitirá que no existe rozamiento y se escogerá el vector tangente, $\hat{t}$, en el sentido de la velocidad de P relativa a S .

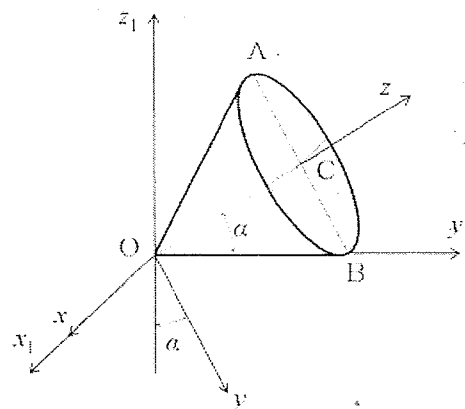


Fig. 2: Posición del sistema en $t = 6$ s.

HILOS

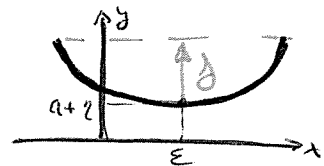
CATENARIA

Simplemente es necesario saber la ecuación de la catenaria:

$$y(x) = \eta + \frac{T_0}{P} \operatorname{Ch} \left(\frac{P}{T_0} (x - \varepsilon) \right)$$

Tomamos parámetro a de la catenaria:

$$a = \frac{T_0}{P}$$



(ε, η) coordenadas del mínimo de la catenaria que si $\varepsilon = \eta = 0$ se dice que la catenaria está referida a su sistema propio y la ecuación queda:

$$y(x) = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}$$

Conviene saberse las relaciones:

$$\begin{aligned} T &= T_0 \sqrt{1 + y'^2} \\ dl &= dx \sqrt{1 + y'^2} \\ \operatorname{Ch}^2 - \operatorname{Sh}^2 &= 1 \end{aligned}$$

$f \rightarrow$ flecha del arco

Ej. tipo: ① ④ ⑤ ⑦ ⑩ ⑬

HILOS SOBRE SUP. CILINDRICAS CON ROZAMIENTO

Simplemente consistirá en aplicar la fórmula

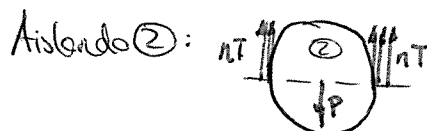
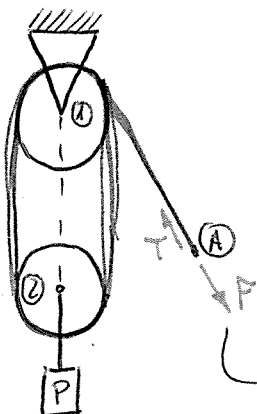
$$F_{\text{pequeña}} \geq F_{\text{grande}} e^{-\mu \Delta \varphi}$$

Cuidado con $\Delta \varphi$ (ver ej. ②)

Ej. tipo: ② ③ ⑨ ⑪

Usa $F_{\text{muelle}} = K(l - l_0)$

POLIPASTOS



En equilibrio $\sum \vec{F}_0 = \vec{0}$; $2nT - P = 0$

$$T = \frac{P}{2n} = F$$

Todos los problemas se resuelven aplicando esta fórmula

En equilibrio $\sum \vec{F}_0 = \vec{0} \rightarrow F = T$

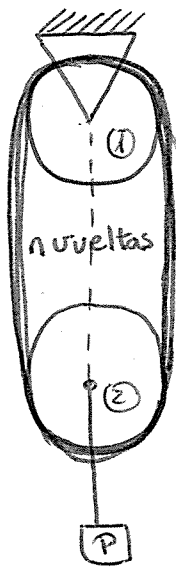
Aplicando Estat. II PTV

Ej. tipo: ⑥ ⑧ ⑭

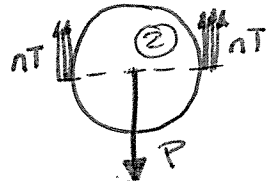


ANEXO

Polipastos



Aislo ②

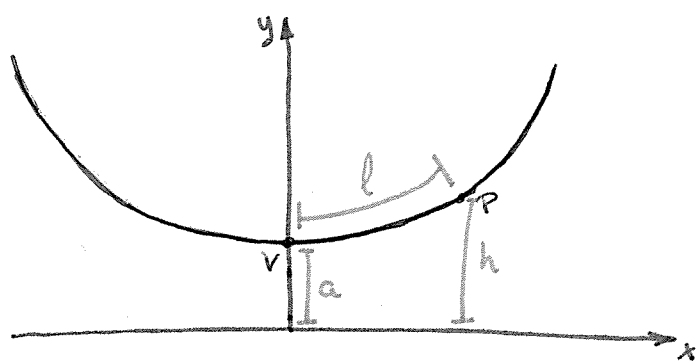


En equilibrio $\sum \vec{F}_O = \vec{0}$

$$2nT - P = 0 ; T = \frac{P}{2n} = F$$

At point A: $\sum F_A = 0 \Rightarrow F = T$

EJ. ESTAT. HILOS 1 Catenaria: V (punto cota mínima), P (punto walsguiera), h, a.
 Demostrar: $a^2 + l^2 = h^2$



$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1)$$

$$y = a \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (2)$$

$$\textcircled{1} \int_{l_v=0}^{l_p=l} dl = \int_{x_v=0}^{x_p} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\textcircled{2} y' = \frac{dy}{dx} = a \operatorname{Sh}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = \operatorname{Sh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\operatorname{Ch}^2\left(\frac{x}{a}\right) - \operatorname{Sh}^2\left(\frac{x}{a}\right) = 1$$

$$\Rightarrow l = \int_0^{x_p} \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = \int_0^{x_p} \sqrt{\operatorname{Ch}^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = \int_0^{x_p} \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \operatorname{Sh}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot a \Big|_0^{x_p}$$

$$l = a \operatorname{Sh}\left(\frac{x_p}{a}\right) = a \sqrt{\operatorname{Ch}^2\left(\frac{x_p}{a}\right) - 1} = a \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} = a \sqrt{\frac{h^2 - a^2}{a^2}}$$

$$y_p = a \operatorname{Ch}\left(\frac{x_p}{a}\right) = h$$

Por tanto: $l^2 = a^2 \left(\frac{h^2 - a^2}{a^2} \right)$

$$h^2 = l^2 + a^2$$

EJ. ESTAT. HILOS 4 Catenaria: T_0, p . Se piden T_A, T_B

Ecuación catenaria (geom prop): $y = a \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{a}\right)$

con $a = \frac{T_0}{P}$

$$T_A = T_0 \sqrt{1 + (y'(A))^2}; \quad y' = a \operatorname{Sh}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = \operatorname{Sh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y'(a) = \operatorname{Sh}\left(\frac{x_A}{a}\right) = \operatorname{Sh}\left(\frac{\frac{3T_0}{P}}{\frac{T_0}{P}}\right) = \operatorname{Sh}(3)$$

$$\operatorname{Ch}^2(3) - \operatorname{Sh}^2(3) = 1$$

$$\Rightarrow T_A = T_0 \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2(3)} = T_0 \operatorname{Ch}(3); \quad \boxed{T_A = T_0 \operatorname{Ch}(3)}$$

$$T_B = T_0 \sqrt{1 + (y'(B))^2} = T_0 \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2\left(\frac{x_B}{a}\right)} = T_0 \sqrt{\operatorname{Ch}^2\left(\frac{-2T_0/P}{T_0/P}\right)} = T_0 \operatorname{Ch}(-2) \rightarrow \boxed{T_B = T_0 \operatorname{Ch}(-2)}$$

Ej. ESTAT. Hilos 5 $y = 50 \text{ Ch}(0,02x)$. $T_P = 2 \text{ kN}$, 60° . Se pide: p , T_0

Ecuación catenaria

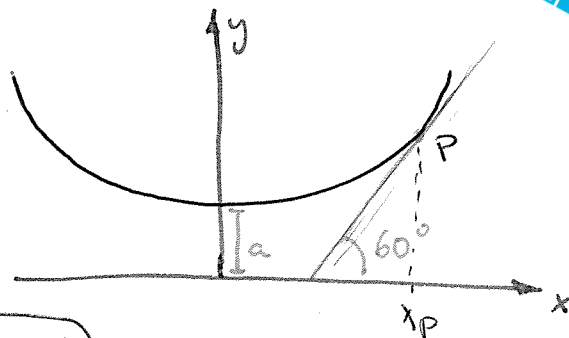
$$y = a \text{ Ch}\left(\frac{x}{a}\right) \text{ con } a = \frac{T_0}{P} = 50$$

$$T_P = T_0 \sqrt{1 + (y'(x_P))^2} = T_0 \sqrt{1 + (\tan 60^\circ)^2} = 2 \text{ kN}$$

$$T_0 = \frac{2000 \text{ N}}{\sqrt{4}} = 1000$$

$$P = \frac{T_0}{50} = \frac{1000}{50} = 20$$

$$\boxed{T_0 = 1000 \text{ N}} \\ \boxed{P = 20 \text{ N/m}}$$

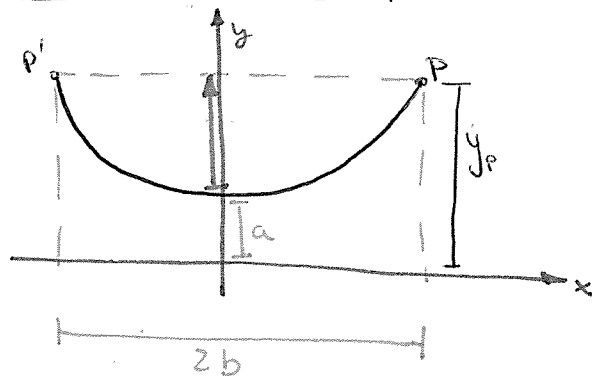


Ej. ESTAT. Hilos 7 $p = 5 \text{ N/m}$, $y = 100 \text{ Ch}\left(\frac{x}{100}\right)$. Determinar menor tensión que soporta el hilo.

Se pide T_0 . $y = a \text{ Ch}\left(\frac{x}{a}\right)$; con $a = \frac{T_0}{P} = 100$, $T_0 = 100 P = 500 \text{ N}$

$$\boxed{T_0 = 500 \text{ N}}$$

Ej. ESTAT. Hilos 10 p , $2b$, T_0 . Se pide flecha del arco.



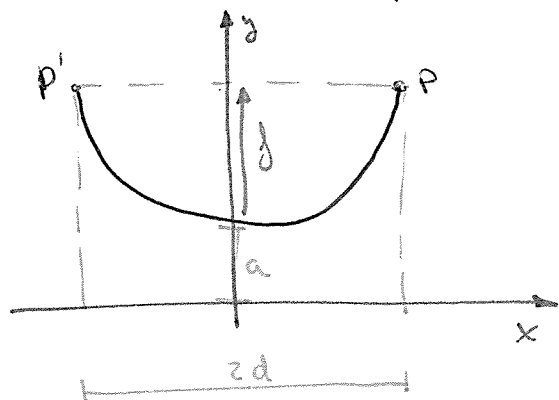
$$y = a \text{ Ch}\left(\frac{x}{a}\right); \text{ con } a = \frac{T_0}{P}$$

$$y_P = a \text{ Ch}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$f = y_P - a = a \left(\text{Ch}\left(\frac{b}{a}\right) - 1 \right)$$

$$\boxed{f = \frac{T_0}{P} \left(\text{Ch}\left(\frac{bP}{T_0}\right) - 1 \right)}$$

Ej. ESTAT. Hilos 13 p , $2d$, $T_0 = H$. Se pide f



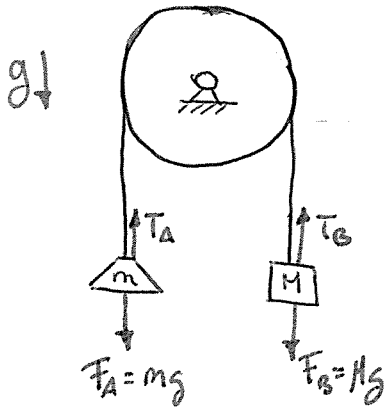
$$y = a \text{ Ch}\left(\frac{x}{a}\right); \text{ con } a = \frac{T_0}{P} = \frac{H}{P}$$

$$y_P = \frac{H}{P} \text{ Ch}\left(\frac{dP}{H}\right)$$

$$\boxed{f = y_P - a = y_P - \frac{H}{P} = \frac{H}{P} \left(\text{Ch}\left(\frac{dP}{H}\right) - 1 \right)}$$

EJERCICIOS HILOS

EJ. ESTAT HILOS 2 Masas en reposo. $\mu = \frac{1}{5\pi}$, $m = Me^{-2}$. Se pide n vueltas



$$F_A \geq F_B e^{-\mu \Delta \varphi} \quad \begin{cases} F_A = m g = M e^{-2} g \\ F_B = M g \end{cases}$$

$$\frac{F_A}{F_B} \geq e^{-\mu \Delta \varphi}; \quad \frac{F_A}{F_B} = \frac{M e^{-2} g}{M g} = e^{-2}$$

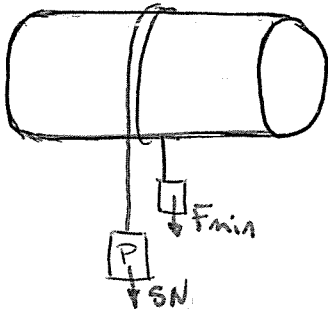
$$e^{-2} \geq e^{-\frac{\Delta \varphi}{5\pi}}; \quad -2 \geq -\frac{\Delta \varphi}{5\pi};$$

$$2 \leq \Delta \varphi / (5\pi); \quad \Delta \varphi \geq 10\pi, \quad 10\pi \leq \pi + n 2\pi$$

$$9\pi \leq n 2\pi; \quad n \geq \frac{9}{2} = 4.5 \rightarrow \boxed{n=5}$$

⊛ Apoyo 1° π , luego $n 2\pi$ (n vueltas).
Cojo siempre el entero superior!

EJ. ESTAT HILOS 3 $\Delta \varphi = 5\pi \text{ rad}$, $\mu = 1$. $P = 5N$. Calcular $F_{\min}$ del otro extremo para mantener el equilibrio



$$F_{\text{eq}} \geq F_{\text{grande}} e^{-\mu \Delta \varphi}$$

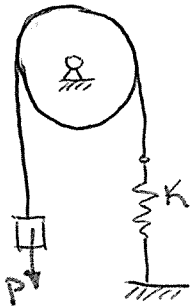
$$F \geq 5 e^{-5\pi \cdot 1}$$

$$\boxed{F_{\min} = 5 e^{-5\pi} (N)}$$

EJ. ESTAT HILOS 9 Datos: P; muelle: K, l_0 . Se pide long. muelle para equilibrio

$$F_{\text{eq}} \geq F_{\text{grande}} e^{-\mu \Delta \varphi}, \quad \Delta \varphi = 0 \text{ (no enrollamiento)}$$

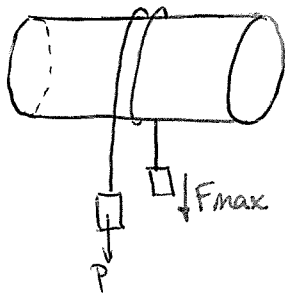
↑ no considera el π



$$F_{\text{muelle}} = P = K(l - l_0); \quad \boxed{l = \frac{P}{K} + l_0}$$

EJ. ESTAT. HILOS 11

$\Delta\phi = 5\pi \text{ rad}$, $N = 1$, $P = 5N$. Se pide F_{max} para el libro.



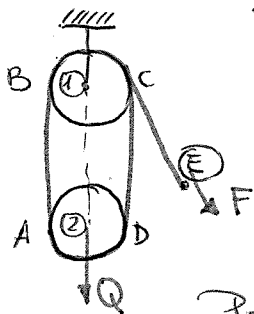
Cuidado! Como piden F_{max} el F_{grande} y $P = F_{\text{pequeño}}$

$$P \geq F e^{-\Delta\phi \cdot N}, \quad P \geq F e^{-5\pi \cdot 1}$$

$$F \leq P e^{5\pi}, \quad \boxed{F_{\text{max}} = 5e^{5\pi} N}$$

EJ. ESTAT. HILOS 6

$n = 3$ vueltas, Q . Se desprecia el rozamiento. Se desea levantar Q con velocidad uniforme. Se pide F



Sobre polea 2 $\sum \vec{F}_2 = \vec{0}$ (por equilibrio)

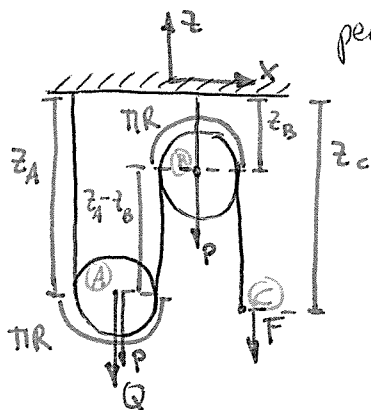
$$\text{Actúan: } 2(3T) - Q = 0$$

$$\text{Sobre } \textcircled{E} \sum \vec{F}_E = \vec{0} \rightarrow F = T$$

$$\text{Por tanto; } F = T = \frac{Q}{6}; \quad \boxed{F = \frac{Q}{6}}$$

EJ. ESTAT. HILOS 8

Aplicando principio de trabajos virtuales, determinar F . Sube Q verticalmente con velocidad constante. Cada polea tiene peso P .



$$\text{Por PTV} \rightarrow \delta Z = \sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

Fuerzas aplicadas presentes:

(0, B es fijo)

$$\begin{cases} \vec{P} = P(-\vec{k}) \\ \vec{Q} = Q(-\vec{k}) \\ \vec{F} = F(-\vec{k}) \end{cases} \Rightarrow P \delta r_A + Q \delta r_A + F \delta r_C + P \delta r_B = 0$$

$$\begin{cases} \delta \vec{r}_A = \delta x_A \vec{i} + \delta z_A \vec{k} \\ \delta \vec{r}_C = \delta x_C \vec{i} + \delta z_C \vec{k} \end{cases}$$

Tiene que poner los δx aunque se sabe que serán nulos por tener que considerar todo desplazamiento compatible con ligaduras

$$\Rightarrow -P \delta z_A - Q \delta z_A - F \delta z_C = 0$$

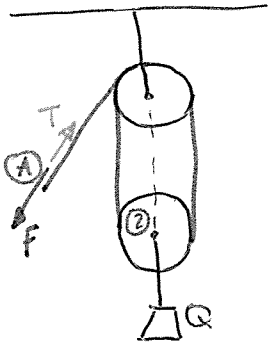
Como la cuerda es inextensible su longitud será constante:

$L = z_A + \pi R + z_A - z_B + \pi R + z_C - z_B \rightarrow$ Diferenciando virtualmente:

$$\delta L = 0 \rightarrow \delta z_A + 0 + \delta z_A - \delta z_B + 0 + \delta z_C + \delta z_B = 0, \quad \delta z_C = -2 \delta z_A$$

$$\text{Por tanto; } \delta z_A (-P - Q) + F 2 \delta z_A = 0, \quad \delta z_A (2F - P - Q) = 0 \quad \forall \delta z_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2F - P - Q = 0, \quad \boxed{F = \frac{P+Q}{2}}$$

EJ. ESTAT. HILLOS 14 $n = 4$ vueltas, $Q = 400 \text{ N}$. Giremos F 

$$\text{Aulo } \textcircled{2} \quad 4T \parallel \textcircled{2} \parallel 4T \quad \sum \vec{F}_2 = \vec{0}$$

$$4T + 4T - Q = 0, \quad T = \frac{Q}{8}$$

$$\text{Aulo } \textcircled{A} \quad \sum \vec{F}_A = \vec{0} \rightarrow \vec{F} = \vec{T}, \quad \boxed{F = \frac{Q}{8}}$$

ESTÁTICA DE HILOS

Hilo: sistema material unidimensional perfectamente flexible y, mientras no se indique lo contrario, totalmente inextensible. Solamente soporta esfuerzos normales de tracción. Su distribución la determina la curva funicular. Siendo l la abscisa curvilínea definida sobre la curva, la curva funicular está definida por la función funicular $\vec{r}(l)$, cumpliéndose:

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{t} \quad \text{con } \vec{t} \text{ vector tangente, } \vec{n} \text{ normal y } \rho \text{ radio de curvatura}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad (\text{1ª Frenet})$$

Si se considera el hilo como sistema unidimensional tendrá una densidad de masa $\lambda(l)$. La tracción que puede soportar se designa como tensión $\vec{T}(l) = T \vec{t} = T \frac{d\vec{r}}{dl}$

En el caso de un hilo en equilibrio sometido a una densidad de fuerza por unidad de longitud $\vec{f}(l)$, puede demostrarse que la ecuación de equilibrio de dicho hilo es:

$$\vec{f}(l) + \frac{d\left(T \frac{d\vec{r}}{dl}\right)}{dl} = \vec{0}$$

que proyectada según el triedro intrínseco de la curva del hilo queda, para cada punto:

$$\begin{cases} \vec{t} \rightarrow \frac{dT}{dl} + f_t = 0 \\ \vec{n} \rightarrow \frac{T}{\rho} + f_n = 0 \\ \vec{b} \rightarrow f_b = 0 \end{cases}$$

Este sistema no es lineal y su resolución en general es imposible, salvo en algunos casos de entre los cuales destaca el de hilo sometido a su propio peso. *catenaria*

1.-CURVA DE EQUILIBRIO DE UN HILO BAJO SU PROPIO PESO. CATENARIA.

En este caso, la curva funicular es plana, contenida en un plano vertical. Para definir dicho plano se toma un eje x horizontal y un eje y vertical ascendente. Considerando $-p\vec{j}$ el peso por unidad de longitud del hilo, supuesto constante, se tiene:

$$\vec{T} = T \vec{t} = T \frac{d\vec{r}}{dl} = T \left(\frac{dx}{dl} \vec{i} + \frac{dy}{dl} \vec{j} \right)$$

$$d\vec{r} = d(x\vec{i} + y\vec{j}) = dx\vec{i} + dy\vec{j}; \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dl} \right| = |\vec{t}| = 1$$

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow dl = dx \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\vec{i}: \frac{d\left(T \frac{dx}{dl}\right)}{dl} = 0$$

$$\vec{j}: \frac{d\left(T \frac{dy}{dl}\right)}{dl} - p = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\left(\frac{T}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dl} = 0 \\ \frac{d\left(\frac{T y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dl} = p \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene: $\frac{T}{\sqrt{1+y'^2}} = T_0 \Rightarrow T = T_0 \sqrt{1+y'^2}$, siendo T_0 la componente

horizontal de la tensión, constante para todo el hilo y valor mínimo de la tensión en el hilo. La segunda ecuación queda entonces:

$\frac{dT_0 y'}{dx} = p \sqrt{1+y'^2}$ que puede integrarse dando: $\arg \operatorname{sh} y' = \frac{p}{T_0} (x - \varepsilon)$ ($\varepsilon = \text{cte.}$ que representa la abscisa en la que $y' = 0$).

$$\hookrightarrow y' = \operatorname{sh} \left(\frac{p}{T_0} (x - \varepsilon) \right) = \frac{dy}{dx}$$

Integrando de nuevo se obtiene $y(x) = \eta + \frac{T_0}{p} \operatorname{Ch} \left(\frac{p}{T_0} (x - \varepsilon) \right)$ ($\eta = \text{cte.}$ que representa una traslación vertical de la curva).

Si $T_0 > 0$ se tiene la curva funicular, llamada en este caso catenaria. Si $\varepsilon = \eta = 0$ se dice que la catenaria esta referida a su sistema propio o natural, y se denominan eje de la catenaria al eje de ordenadas y base al eje de abscisas de la misma. $\Rightarrow y(x) = \frac{T_0}{p} \operatorname{Ch} \left(\frac{p}{T_0} x \right)$

Se llama parámetro a de la catenaria a $\frac{T_0}{p} = a$, de forma que la ecuación de la misma referida

a su sistema propio y con dicho parámetro queda: $y(x) = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}$

$$T = T_0 \sqrt{1+y'^2} \quad [\operatorname{Ch}^2 - \operatorname{Sh}^2 = 1]$$

La expresión de la tensión queda: $T(x) = T_0 \operatorname{Ch} \left(\frac{p}{T_0} (x - \varepsilon) \right) = p[y(x) - \eta]$

El parámetro abscisa curvilínea, en función de x, se obtiene, por integración:

$$l(x) = \int_{\varepsilon}^x \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{T_0}{p} \operatorname{Sh} \left(\frac{p}{T_0} (x - \varepsilon) \right)$$

2.-HILO SOBRE SUPERFICIE CILÍNDRICA CON ROZAMIENTO

Se considera un hilo de peso despreciable enrollado alrededor de una superficie cilíndrica, con un coeficiente de rozamiento entre hilo y superficie μ .

Se realiza el estudio a partir de las ecuaciones de equilibrio de un hilo sobre una superficie con rozamiento, en triedro intrínseco de Frenet:

$$\begin{cases} \bar{T}: \frac{dT}{dl} + f_t + \bar{R}_t = 0 & \text{FR por unidad de long (N/m)} \\ \bar{n}: \frac{T}{\rho} + f_n + \bar{R}_n = 0 & \text{N por unidad de long (N/m)} \\ \bar{b}: f_b + R_b = 0 \end{cases}$$

, donde se denominan:

- $\bar{T}$: tensión en el hilo.
- $\bar{R}$: reacción por unidad de longitud
- $\bar{f}$: fuerza aplicada por unidad de longitud

Por lo general se desprecia cualquier f aplicado

Se considera el hilo apoyado sobre la superficie cilíndrica entre los puntos A y B , extremos sobre los que se aplican fuerzas de sujeción de módulos F_A y F_B que aseguren el equilibrio. Se orienta el hilo tomando origen de arcos en A de forma que $l_B > 0$. Se supone primero la posibilidad de que el hilo trate de desplazarse hacia B .

Para el caso analizado, las dos primeras ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} \vec{t} \cdot \left(\frac{dT}{dl} - \vec{F}_R \right) = 0 \\ \vec{n} \cdot \left(\frac{T}{\rho} - N \right) = 0 \end{cases} \quad \text{o bien:}$$

obtiene: $\frac{dT}{dl} = F_R \leq \mu N$ (por no deslizamiento) y dividiendo ambas se obtiene $\frac{dT}{T} \leq \mu d\varphi$. Integrando entre A y B se obtiene: $\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) \leq \mu(\varphi_B - \varphi_A)$, $\frac{T_B}{T_A} \leq e^{\mu\Delta\varphi}$

$T_B \leq T_A \exp(\mu\Delta\varphi)$ y por tanto, para que el hilo no se desequilibre hacia B ha de cumplirse que en A y B en equilibrio el $F_A = T_A$ y $F_B = T_B$

$$F_B \leq F_A \exp(\mu\Delta\varphi) \Rightarrow \frac{F_B}{F_A} \leq \exp(\mu\Delta\varphi) \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} \geq e^{-\mu\Delta\varphi}$$

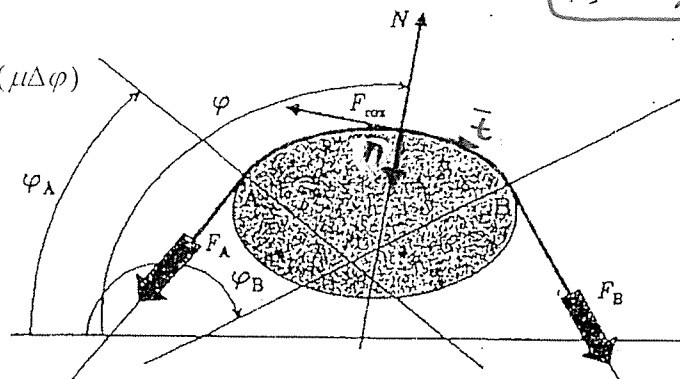
$F_A \geq F_B e^{-\mu\Delta\varphi}$
 $F_A \rightarrow F_{\text{menor}}$
 $F_B \rightarrow F_{\text{mayor}}$

Suponiendo ahora que el equilibrio tienda a romperse hacia A , desarrollando de forma análoga, se obtiene:

$$F_A \leq F_B \exp(\mu\Delta\varphi) \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} \leq \exp(\mu\Delta\varphi)$$

Y por tanto, la condición de equilibrio queda:

$$\exp(-\mu\Delta\varphi) \leq \frac{F_A}{F_B} \leq \exp(\mu\Delta\varphi)$$



3.-POLIPASTOS

Son sistemas de poleas en los que un hilo se enrolla una o varias vueltas alrededor de varias poleas, y cuyo objeto es equilibrar un peso P grande en un extremo del hilo con una fuerza pequeña en el otro extremo.

Puede haber o no rozamiento entre las poleas y el hilo (en general se considera rozamiento nulo), y se considera despreciable el rozamiento de la propia polea en su eje. La tensión en el hilo es constante en toda su longitud. En el caso de dos poleas, si la cuerda se enrolla alrededor de ellas una vuelta, sobre la polea inferior aparece una fuerza $2T$ en sentido ascendente, que se equilibra con la fuerza P aplicada en la misma polea, resultando:

$2T = P$. Si el extremo de la cuerda enrollada se sujeta aplicando una fuerza F , por acción

reacción es $F = T$ y por tanto: $F = \frac{P}{2}$

Si se enrolla la cuerda n vueltas, sobre la polea inferior aparece ahora una fuerza $2nT$, y por el mismo procedimiento de antes se obtiene:

$$F = \frac{P}{2n}$$

consiguiendo el efecto de multiplicación de fuerza.

EN SOLUCIONES

EJERCICIO EST. HILOS. Soluc. 1

Examen Final 1996-09-09

Escriba las ecuaciones de equilibrio de un hilo bajo un sistema de fuerzas por unidad de longitud conocido.

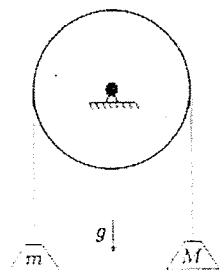
EJERCICIO EST. HILOS. Soluc.2

Examen de febrero 1998-02-24

Indique las características que definen los sistemas mecánicos denominados *hilos* y explique brevemente el significado mecánico de cada una de ellas.

EJERCICIO EST. HILOS. Soluc.3

Septiembre 1998-09-21 Junio 2009-06-12



En la polea de la figura, cilíndrica y de eje horizontal, las masas indicadas se encuentran en reposo. Determine el mínimo número de vueltas que debe arrollarse el hilo que las une sobre la polea, sabiendo que dicho hilo es ideal y de peso despreciable, y conociendo los siguientes valores:

$$\mu \text{ (coef. de rozamiento)} = \frac{1}{10\pi}$$

$$m = Me^{-4}$$

EJERCICIO EST. HILOS. Soluc.4

Junio 2001-06-20 Septiembre 2007-09-03

Escriba la ecuación del funicular de un hilo ideal sometido a su propio peso (catenaria), adoptando como eje de abscisas la base de la catenaria y como eje de ordenadas el eje de la catenaria. Expresé la ecuación en función del parámetro de la catenaria.

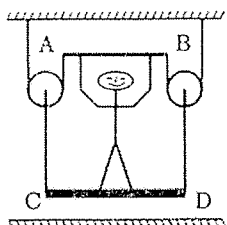
EJERCICIO EST. HILOS. Soluc.5

Febrero 2002-02-11

Un hilo de masa despreciable se arrolla tres vueltas y media alrededor de un cilindro de eje horizontal con un coeficiente de rozamiento $\mu = 1$. Uno de los extremos libres del hilo sostiene un peso $P = 1 \text{ kN}$. Calcule la fuerza mínima con la que debe sujetarse el otro extremo del hilo para que se mantenga el equilibrio.

EJERCICIO EST. HILOS. Soluc.6

Junio 2003-06-09



Calcule la fuerza soportada por los anclajes del techo si el gimnasta de la figura se encuentra en equilibrio, siendo P su peso y Q el de la base CD sobre la que descansa y no existiendo rozamiento en las poleas (el peso de la barra AB y las poleas es despreciable).

Calcule la fuerza que debe ejercer sobre la barra AB el gimnasta de la cuestión anterior para mantener el equilibrio. ¿Qué fuerza ejercen entre sí el gimnasta y la base CD?.

EJERCICIO EST. HILOS. Soluc.7
Febrero 2004-02-12

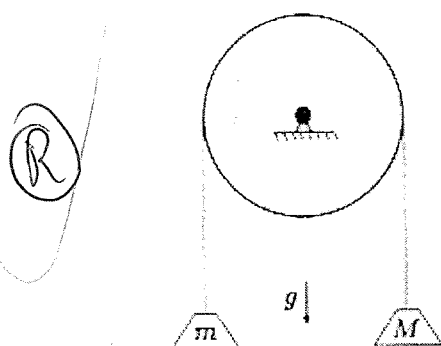
Un hilo de masa despreciable se arrolla cuatro vueltas y media alrededor de un cilindro de eje horizontal con un coeficiente de rozamiento $\mu = 1$. Uno de los extremos libres del hilo sostiene un peso $P = 1$ kN. Calcule la fuerza mínima con la que debe sujetarse el otro extremo del hilo para que se mantenga el equilibrio.

EJERCICIO EST. HILOS. Soluc.8
Septiembre 2007-09-03

Un hilo de masa despreciable se arrolla cuatro vueltas y media alrededor de un cilindro de eje horizontal con un coeficiente de rozamiento $\mu = 1$. Uno de los extremos libres del hilo sostiene un peso $P = 1$ kN. Calcule la fuerza máxima que puede aplicarse al otro extremo del hilo sin que se rompa el equilibrio.

EN CLASE
EJERCICIO EST. HILOS. 1
Segundo Examen Parcial 1997-06-02 Examen Final 1999-06-28
Examen de Febrero 2002-02-11

En una catenaria, V es el punto de cota mínima y l la longitud del arco VP entre V y un punto de la catenaria (P) cuya distancia a la base es h . Si el parámetro de la catenaria es a , demuestre la relación:

$$a^2 + l^2 = h^2$$
EJERCICIO EST. HILOS. 2
Primer parcial 2001-01-25


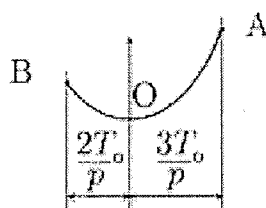
En la polea de la figura, cilíndrica y de eje horizontal, las masas indicadas se encuentran en reposo. Determine el mínimo número de vueltas que debe arrollarse el hilo que las une sobre la polea, sabiendo que dicho hilo es ideal y de peso despreciable, y conociendo los siguientes valores:

$$\mu \text{ (coef. de rozamiento)} = \frac{1}{5\pi}$$

$$m = Me^{-2}$$

EJERCICIO EST. HILOS. 3
Septiembre 2001-09-19

Un hilo de masa despreciable se arrolla dos vueltas y media (5π radianes) alrededor de un cilindro de eje horizontal con un coeficiente de rozamiento $\mu = 1$. Uno de los extremos libres del hilo sostiene un peso $P = 5$ N. Calcule la fuerza mínima con la que debe sujetarse el otro extremo del hilo para que se mantenga el equilibrio.

EJERCICIO EST. HILOS. 4
Examen de Junio 2002-06-10


Un hilo uniforme cuelga de dos puntos fijos, A y B, según la figura y sometido exclusivamente a su peso. Conociendo la tensión del punto más bajo, T_O , y el peso por unidad de longitud, p , determine las tensiones en A y B.

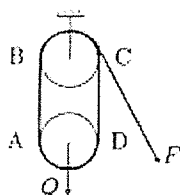
EJERCICIO EST. HILOS. 5

Septiembre 2002-09-16 Junio 2009-06-12

El funicular de un hilo ideal sometido a su propio peso es $y = 50 \operatorname{ch} 0,02x$ (coordenadas en metros). La tensión es de 2 kN en un punto en el que la tangente al hilo forma 60° con la horizontal. Obtenga el peso por unidad de longitud y la tensión en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO EST. HILOS. 6

Examen Febrero 2003-02-10



En el polipasto de la figura el bucle ABCDA rodea tres veces a las poleas de pesos despreciables. Determine la fuerza F que hay que ejercer sobre el extremo libre para levantar una carga Q con velocidad uniforme si se desprecia el efecto del rozamiento.

EJERCICIO EST. HILOS. 7

Examen de Septiembre 2003-09-15

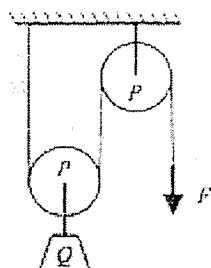
Cuando las coordenadas se expresan en metros, la ecuación de equilibrio de un hilo ideal con un peso uniforme por unidad de longitud igual a $5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ resulta

$$y = 100 \operatorname{ch} \frac{x}{100}$$

Determine la menor tensión que soporta el hilo.

EJERCICIO EST. HILOS. 8

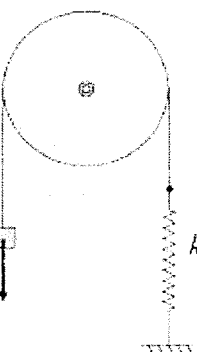
Examen de Febrero 2005-02-07



Por aplicación del principio de los trabajos virtuales, determine la fuerza F que hay que ejercer para subir verticalmente la carga de peso Q , con velocidad uniforme, sabiendo que cada polea tiene un peso P .

EJERCICIO EST. HILOS. 9

Examen de Septiembre 2006-09-18



Un pequeño bloque de peso P y dimensiones despreciables, está sujeto por su centro C a un extremo de un hilo ideal que se apoya sobre una polea y se ata por su otro extremo a un muelle ideal de constante elástica k y longitud natural ℓ_0 , según indica la figura. Determine la longitud del muelle cuando el bloque se encuentra en la posición de equilibrio.

EJERCICIO EST. HILOS. 10

Examen de Junio 2007-06-18

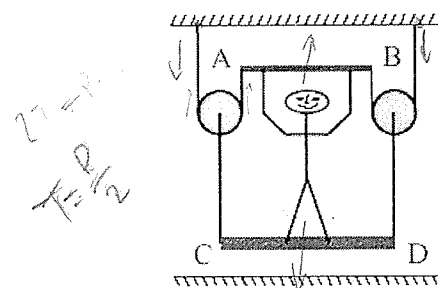
Un hilo de peso por unidad de longitud p cuelga entre dos puntos situados a la misma cota y separados una distancia $2b$. Si la tensión mínima del hilo es T_0 , obtenga la flecha del arco formado por el hilo.

EJERCICIO EST. HILOS.11
Febrero 2008-02-15

Un hilo de masa despreciable se arrolla dos vueltas y media (5π radianes) alrededor de un cilindro de eje horizontal con un coeficiente de rozamiento $\mu = 1$. Uno de los extremos libres del hilo sostiene un peso $P = 5$ N. Calcule la fuerza máxima que puede soportar el otro extremo del hilo para que se mantenga el equilibrio.

EJERCICIO EST. HILOS. 12
Febrero 2008-02-15

Calcule la fuerza soportada por cada uno de los dos anclajes del techo si el gimnasta de la figura se encuentra en equilibrio, siendo G su peso, P el peso de la barra AB y Q el peso de la base CD sobre la que descansa, no existiendo rozamiento en las poleas cuyo peso, además, es despreciable.



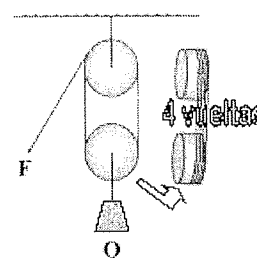
Calcule la fuerza que debe ejercer sobre la barra AB el gimnasta de la cuestión anterior para mantener el equilibrio. ¿Qué fuerza ejercen entre sí el gimnasta y la base CD?

EJERCICIO EST. HILOS. 13
Febrero 2008-02-15 Junio 2009-06-12

Un hilo de peso por unidad de longitud p cuelga entre dos puntos situados a la misma cota y separados por una distancia $2d$. Si la tensión mínima del hilo es H , obtenga la flecha del arco formado.

EJERCICIO EST. HILOS. 14
Septiembre 2008-09-05

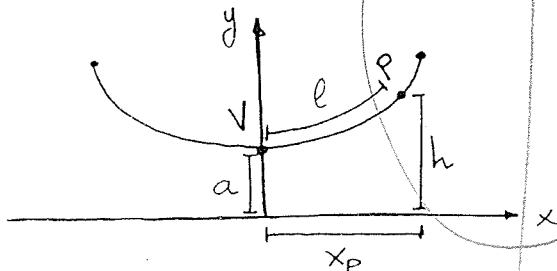
En el polipasto de la figura la cuerda rodea cuatro veces a las poleas de pesos despreciables frente a la carga. Calcule justificadamente la fuerza F que hay que ejercer sobre el extremo libre para levantar la carga de $Q = 400$ N con velocidad uniforme si se desprecian todas las pérdidas.



EJ. EST. HILOS. 1

En una catenaria, V es el punto de cota mínima y l es la longitud del arco VP entre V y un punto P que dista de la base h . Si el parámetro de la catenaria es a demostrar la relación $a^2 + l^2 = h^2$

CATENARIA EN EJES PROPIOS:



• ecuación $y = a \operatorname{ch}(\frac{x}{a})$

• $dl = dx \sqrt{1 + y'^2}$

$l_P = l \quad x_P$
 $\int_{l_V=0}^{l_P=l} dl = \int_{x_V=0}^{x_P} dx \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = a \cdot \frac{1}{a} \operatorname{sh}(\frac{x}{a})$, $\operatorname{ch}^2(\frac{x}{a}) - \operatorname{sh}^2(\frac{x}{a}) = 1$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow l = \int_0^{x_P} dx \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\frac{x}{a})} = \int_0^{x_P} dx \sqrt{\operatorname{ch}^2(\frac{x}{a})} = \int_0^{x_P} \operatorname{ch}(\frac{x}{a}) dx = a \cdot \operatorname{sh}(\frac{x_P}{a})$

Se tiene portanto $l = a \cdot \operatorname{sh}(\frac{x_P}{a})$;

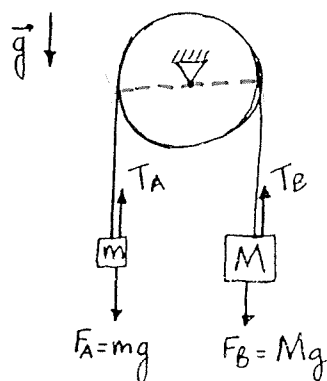
y con $\operatorname{sh}(\frac{x_P}{a}) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\frac{x_P}{a}) - 1}$ se tiene $l = a \sqrt{\operatorname{ch}^2(\frac{x_P}{a}) - 1} \Rightarrow$

$y_P = a \cdot \operatorname{ch}(\frac{x_P}{a}) \downarrow$
 $\Rightarrow l = a \sqrt{(\frac{y_P}{a})^2 - 1} \Rightarrow l^2 = a^2 \left(\frac{y_P^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{y_P^2}{a^2} - a^2 \Rightarrow \boxed{a^2 + l^2 = h^2}$

EJ. ESTAT. HILOS. 2

En la figura, masas en reposo ;
Determinar mínimo número de vueltas que debe enrollarse el hilo
conociendo los valores:

$$\mu = 1/5\pi ; m = M \cdot e^{-2} ; \frac{F_{\text{req}}}{F_A} \geq \frac{F_{\text{rand}}}{F_B} e^{-\mu \Delta\varphi}$$



$$F_B = Mg > F_A = mg ;$$

$$\frac{F_A}{F_B} \geq e^{-\mu \Delta\varphi}$$

(para que no
desplace a B)

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{mg}{Mg} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\varphi}{5\pi}$$

Tomo referencias:

$$\frac{mg}{Mg} \geq e^{-\Delta\varphi/5\pi} \Rightarrow \frac{m}{M \cdot e^2} \geq e^{-\Delta\varphi/5\pi} \Rightarrow e^{-2} \geq e^{-\Delta\varphi/5\pi}$$

$$-2 \geq -\Delta\varphi/5\pi \rightarrow 2 \leq \Delta\varphi/5\pi \Rightarrow 10\pi \leq \Delta\varphi$$

$$\Rightarrow 10\pi \leq \pi + n \cdot 2\pi ; 9\pi \leq n \cdot 2\pi ; n \geq \frac{9}{2} = 4.5 \Rightarrow n = 5$$

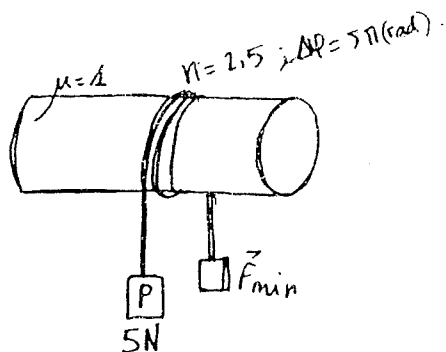
Apoyo $1^\circ \pi$ y luego
4 veces 2π

$\Delta\varphi$

hay q wger siempre
el entero superior.

EJ. ESTAT. HILOS. 3

Hilo arrollado 5π radianes (2.5 vueltas) alrededor de cilindro $\mu = 1$
Un extremo sostiene peso $P = 5(N)$. Calcular F_{min} con la que debe
sujetarse el otro extremo para mantener equilibrio.



Para que no desplace hacia $P = 5 N$;

$$\frac{F_{\text{min}}}{P} \geq e^{-\mu \Delta\varphi} \Rightarrow \frac{F_{\text{min}}}{5} \geq e^{-5\pi}$$

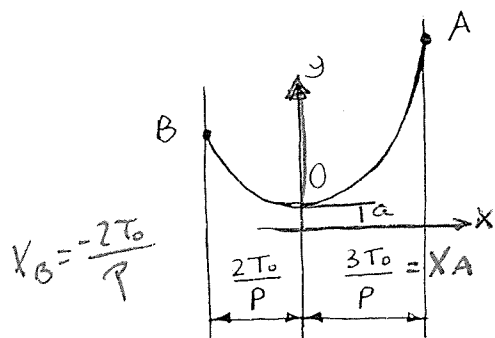
$$F_{\text{min}} \geq 5 \cdot e^{-5\pi}$$

Por tanto

$$F_{\text{min}} = 5 \cdot e^{-5\pi} (N)$$

EJ. ESTAT. HILOS. 4)

Hilo uniforme que cuelga de A, B; sometido a su peso;
Se conoce la tensión del punto mas bajo, T_0 ; peso por unidad de long P ,
Determinar tensiones en A y B.



Es una catenaria en ejes propios porque no me dicen lo contrario.

Expresión para la tensión

$$T = T_0 \cdot \text{Ch}\left(\frac{P}{T_0} x\right)$$

Dado que $X_A = 3T_0/P$; $X_B = -2T_0/P$, se tiene:

$$T_A = T_0 \cdot \text{Ch}\left(\frac{P}{T_0} X_A\right) = T_0 \cdot \text{Ch}\left(\frac{P}{T_0} \cdot \frac{3T_0}{P}\right) \rightarrow T_A = T_0 \cdot \text{Ch}(3)$$

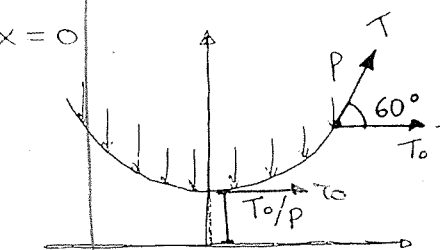
$$T_B = T_0 \cdot \text{Ch}\left(\frac{P}{T_0} X_B\right) = T_0 \cdot \text{Ch}\left(\frac{P}{T_0} \cdot -\frac{2T_0}{P}\right) \rightarrow T_B = T_0 \cdot \text{Ch}(-2)$$

EJ. ESTAT. HILOS. 5

Funiular de un hilo ideal sometido a su propio peso: $y = 50 \cdot \text{Ch}(0.02x)$
La tensión es 2 kN en un punto en que la tangente al hilo forma 60° con la horizontal. Obtener el peso por unidad de longitud y la tensión en $x=0$

$$y = 50 \cdot \text{Ch}(0.02x)$$

$\frac{T_0}{P}$ $\frac{P}{T_0}$



$$T_0 = T \cdot \cos 60^\circ = T \cdot \frac{1}{2}$$

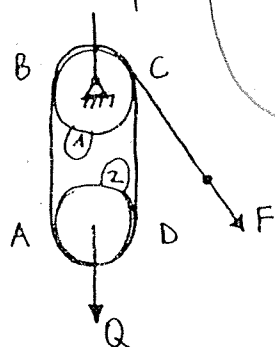
0	30	45	60	90
sen 0	1/2			1
cos		1/2		0
tg			1	

$$\frac{T_0}{P} = 50 \rightarrow P = \frac{1000 \text{ (N)}}{50 \text{ (m)}} = 20 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)$$

$$T_0 = 1000 \text{ (N)}$$

EJ. EST. HILOS. 6)

El bode ABCDA rodea 3 veces las poleas. Determinar la fuerza F que hay que hacer sobre el extremo libre para levantar Q con mov. uniforme.
Se desprecia el efecto del rozamiento



Sobre polea ②; Sobre ③;

Por tanto:

$$F = \frac{Q}{6}$$

$$\sum \vec{F}_Q = \vec{0}$$

$$6T = Q \rightarrow T = \frac{Q}{6}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$T = F$$

EJ. EST. HILOS. 7

Ecuación de equilibrio de un hilo ideal: $y = 100 \cdot \text{ch}\left(\frac{x}{100}\right)$

Peso por unidad de longitud $P = 5 \text{ (N/m)}$

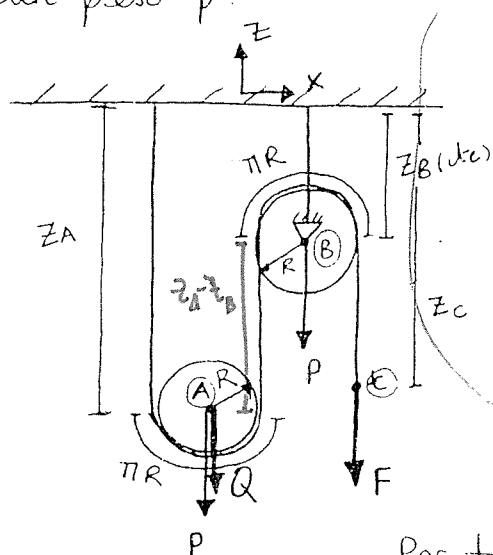
Determinar la menor tensión que soporta el hilo?

$$y = 100 \cdot \text{ch}\left(\frac{x}{100}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{T_0}{P_0} = 100 \longrightarrow T_0 = 5 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right) \cdot 100 (\text{m}) \longrightarrow T_0 = 500 \text{ (N)} \\ \frac{P_0}{T_0} = \frac{1}{100} \end{cases}$$

EJ. EST. HILOS 8

Est. II

Aplicando el Ppto. Trabajos Virtuales determinar la F que hay que ejercer para subir verticalmente la carga Q , si cada polea tiene un peso P .



• Por PTV se tiene: $\delta Z = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

Fuerzas aplicadas que tengo:

$$\begin{cases} \vec{P} = P(-\vec{k}) \\ \vec{Q} = Q(-\vec{k}) \\ \vec{F} = F(-\vec{k}) \end{cases}$$

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{Q} \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_C = 0$$

$$\begin{cases} \delta \vec{r}_A = \delta x_A \vec{i} + \delta z_A \vec{k} \\ \delta \vec{r}_B = 0 \text{ (PUNTO FIJO)} \\ \delta \vec{r}_C = \delta x_C \vec{i} + \delta z_C \vec{k} \end{cases}$$

o (B fijo)
Tienes que ponerlo aunque luego se pira por tener que consid despl + comp con lig.

Por tanto $\Rightarrow P(-\delta z_A) + Q(-\delta z_A) + F(-\delta z_C) = 0$

• Si la cuerda es inextensible, su longitud será constante.

Es decir $L = Z_A + \pi R + Z_A - Z_B + \pi R + Z_C - Z_B$

Diferenciando

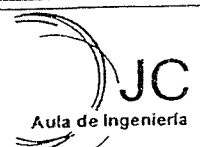
virtualmente $\delta L = 0 \Rightarrow \delta Z_A + 0 + \delta Z_A - \delta Z_B + 0 + \delta Z_C - \delta Z_B = 0 \Rightarrow \delta Z_C = -2 \cdot \delta Z_A$
o (punto fijo).

Por tanto $-P \delta z_A - Q \delta z_A - F(-2 \delta z_A) = 0$

$$\delta z_A (-P - Q + 2F) = 0$$

Y como tiene que ser 0 $\forall \delta z_A$ se tiene: $2F - P - Q = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F = \frac{P+Q}{2}$$

	Ingenieros Industriales c/ Conde de la Cigera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29	Mecánica I Profesor Alex García
---	--	---

EJ. ESTAT HILOS. SOLUC. 1

$$\frac{d\left(T \frac{dr}{dl}\right)}{dl} + \bar{F} = 0 \quad \text{CON LA CONDICIÓN} \quad \text{por } \frac{dr}{dl} = 1$$

EJ. ESTAT. HILOS SOLUC. 2 LOS HILOS SON:

- a) SISTEMAS MATERIALES: POSEEN MASA
- b) UNIDIMENSIONALES: SECCIÓN DESPRECIABLE
- c) PERFECTAMENTE FLEXIBLES: DOS PORCIONES ADYACENTES NO PUEDEN TRANSMITIRSE MOMENTOS

- d) INCAPACES DE TRABAJAR A COMPRESIÓN: SE TRANSMITEN ESFUERZOS NORMALES DE TRACCIÓN ENTRE SECCIONES ADYACENTES
- e) PERFECTAMENTE INEXTENSIBLES: LONGITUD DE CUALQUIER TRAMO ES CONSTANTE

EJ. ESTAT. HILOS SOLUC. 3 IGUAL QUE EJ. EST. HILOS 2 (CLASE): $n_{\min} = 20$ ($n \geq 19,5$)EJ. ESTAT. HILOS. SOLUC. 4 $y = a \cdot \ln \frac{x}{a}$ EJ. ESTAT. HILOS. SOLUC. 5 IGUAL QUE EJ. EST. HILOS 3 (CLASE): $F = P e^{-\mu \Delta x} = \dots = e^{-7\pi} \text{ KN}$ EJ. ESTAT. HILOS SOLUC. 6 IGUAL QUE EJ. EST. HILOS 11 (CLASE), PERO CON $P_{AB} = 0 \Rightarrow$

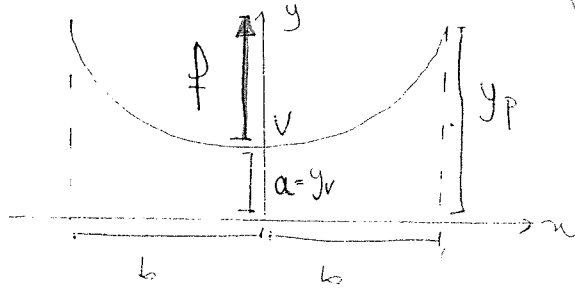
$$\Rightarrow T_A = \frac{P+Q}{2}; N = F_{CD} = 2P+Q$$

EJ. ESTAT. HILOS SOLUC. 7 IGUAL QUE EJ. ESTAT. HILOS 3 (CLASE): $F = P e^{-\mu \Delta x} = \dots = e^{-9\pi} \text{ KN}$ EJ. ESTAT. HILOS. SOLUC. 8 IGUAL QUE EJ. ESTAT. HILOS 11 (CLASE): $F = P e^{\mu \Delta x} = \dots = e^{9\pi} \text{ KN}$
 $\uparrow P \geq F_{\max} e^{-\mu \Delta \varphi}$

Estatica de hilos:

Ej. Est. hilos (10): $T, 2L, T_0, P?? \Rightarrow$ Forma de hilo = catenaria.

En ejes propios: $y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{T_0}{P} \operatorname{ch}\left(\frac{P}{T_0} x\right)$



$$y(x=0) = a \operatorname{ch} 0 = a = \frac{T_0}{P}$$

$$y(x=b) = a \operatorname{ch} \frac{b}{a} = \frac{T_0}{P} \operatorname{ch}\left(\frac{P}{T_0} b\right)$$

$$P = y_p - y_v = \frac{T_0}{P} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{P}{T_0} b\right) - 1 \right]$$

Ej. Est. hilos (11): $T \geq T_{\max} e^{\mu \Delta \varphi} \Rightarrow T_{\max} \leq S \cdot N \cdot e^{1.5 \times \pi}$

Ej. Est. hilos (13): igual que (10)

P 6 8 12 14

CDSR

Ejercicios tipo:

Momentos, tensores y productos



Steiner mom. ⑥
Steiner ten. ⑤ ⑧
P. pro superposición ⑨
Relaciones momentos ⑪
Elipsoide-momentos ⑫
Productos ⑬
Cosenos directores ⑭ (06-2008)

MOMENTO DE INERCIA

Hay que saber calcular los momentos de inercia de los cuerpos más básicos (esfera, cilindro, cubo, disco, placa, ...)

$$I = \int r^2 dm$$

Relaciones:

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}$$

$$I_y = I_{yz} + I_{yx}$$

$$I_z = I_{zx} + I_{zy}$$

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$

PRODUCTOS DE INERCIA

$$P_{xy} = \int xy \, dm; \quad P_{xz} = \int xz \, dm; \quad P_{yz} = \int yz \, dm$$

Cuidado! Hay que considerar los signos de las distancias del dm a los planos!!

TENSOR DE INERCIA

$$\underline{\underline{I}}_0|_{xyz} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

⊗

Buscaremos siempre el tensor en ejes principales de inercia para que quede diagonal → Saber punto 1.8 genial para saber colocar los ejes principales de inercia

ELIPSOIDE DE INERCIA

Ecuación general $(x, y, z) \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = K^2$

STEINER → Permite relacionar momentos, productos o tensores de elementos que no pasan por G con elementos que sí pasan por G.

Para momentos de inercia

$$I = I_G + M a^2$$

Para productos de inercia

$$P_{n_1 n_2} = P_{n_1 G n_2 G} + M \cdot a \cdot b$$

↑
paralelos por G

→ Cuidado! Hay que considerar los signos de las distancias
 $n_1 G = n_1$
 $n_2 G = n_2$

Para tensores

$$\left(\underline{\underline{I}}_0 \right)_{xyz} = \left(\underline{\underline{I}}_G \right)_{xyz} + m(\overline{OG} \cdot \overline{OG}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m(\overline{OG})(\overline{OG})^t$$

Ver ej. 13



MAGNITUDES CINÉTICAS

Cantidad de movimiento

$$\overline{P}_{sio} = M \cdot \overline{V}_G$$

Momento cinético

Energía cinética

⊕ Cosenos directores

$$I_e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \underline{\underline{I}}_0 (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

TEOREMAS

• De la cantidad de movimiento.

$$\sum \bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{p}}{dt} = M \cdot \bar{a}_c$$

• Del momento cinético.

$$\sum \bar{M}_{ext}^O = \frac{dL_O}{dt} + \bar{v}_O \times \bar{p}$$

(siempre se anula el 2º término)

• De la energía cinética.

$$dE_{cist} = dT_{ext} + dT_{int}$$

SISTEMA S* O DE REF. CENTRO DE MASAS

Sistema de ejes paralelos a los fijos (S_1), clavados en G.

Magnitudes $\left\{ \begin{array}{l} \bar{p}^* \longrightarrow \bar{p}^* = 0 \\ \text{Momento cinético} \longrightarrow \text{I de König} \end{array} \right.$

$$\bar{L}_O = \bar{r}_G \times M \bar{v}_G + \bar{L}_G^* \text{ con: } \bar{L}_G^* = \bar{L}_G$$

Energía cinética $\longrightarrow$ T de König

$$E_c = \frac{1}{2} M \bar{v}_G^2 + E_c^* \longleftarrow$$

MAGNITUDES PARA EL SÓLIDO RÍGIDO !!!

• Cantidad de movimiento $\bar{p} = M \bar{v}_G$

• Momento cinético $\bar{L}_O = \bar{OG} \times M \cdot \bar{v}_O + \bar{I}_O \cdot \bar{\omega}$

Relación

$$\bar{L}_{O_2} = \bar{L}_{O_1} + \bar{O_2 O_1} \times \bar{p}$$

- Sol punto fijo: $\bar{L}_O = \bar{I}_O \cdot \bar{\omega}$
($\bar{v}_O = 0$)

- En centro de masas: $\bar{L}_G = \bar{I}_G \cdot \bar{\omega}$
($O \equiv G$)

• Energía cinética $E_c = \frac{1}{2} M \bar{v}_O^2 + M \bar{v}_O \cdot (\bar{\omega} \times \bar{OG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_O \cdot \bar{\omega}$

- Para sol punto fijo O: $E_c = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_O \cdot \bar{\omega}$
 $\bar{v}_O = 0$

- En centro de masas:
 $O \equiv G; \bar{v}_O^* = 0 \implies$

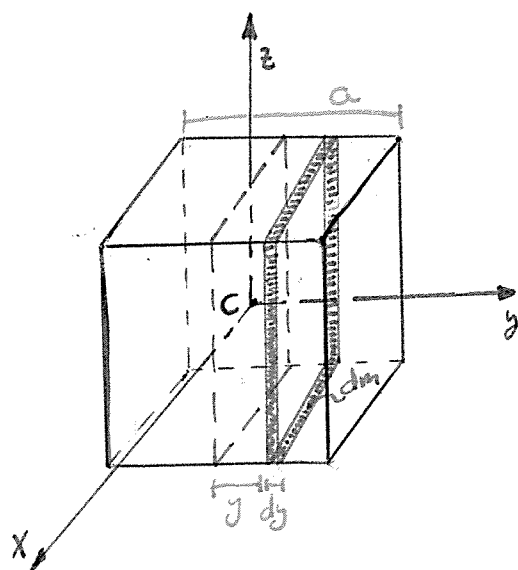
$$E_c^* = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_G \cdot \bar{\omega}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M \bar{v}_G^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{I}_G \cdot \bar{\omega}$$

• Potencia

$$P = \frac{dE_c}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}_A + \bar{M}_A \cdot \bar{\omega}$$

CÁLCULO MOMENTOS DE INERCIA



(A) CUBO MATERIAL HOMOGÉNEO, MASA m , ARISTA a , EJE S CX, y, z PARALELOS A ARISTAS

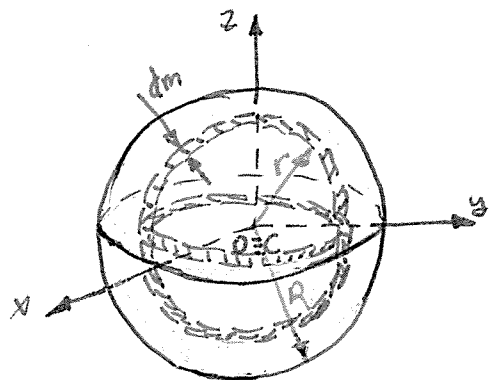
$$I_{xz} = \int r^2 dm = \int_{y=-\frac{a}{2}}^{y=\frac{a}{2}} y^2 \frac{m}{a} dy = \dots = \frac{1}{12} m a^2$$

$$[r = d_{dm-xz} = y; dm = \underbrace{\left(\frac{m}{a^3}\right)}_{\rho \cdot dV} a^2 dy]$$

$I_{xz} = I_{xy} = I_{yz}$ por misma distribución de m

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = 2 \frac{1}{12} m a^2 = \frac{1}{6} m a^2 = I_x = I_y$$

Por tanto $\bar{I}_C|_{xyz} = \frac{1}{6} m a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Elipsoide en C esférico $\Rightarrow$ $\forall S$ por C el S ppal con $I_S = \frac{1}{6} m a^2$



(B) ESFERA MATERIAL HOMOGÉNEA, MASA m , RADIO R , EJE S CX, y, z

$$I_0 = \int r^2 dm = \int_{r=0}^{r=R} r^2 \frac{3m}{R^3} r^2 dr = \dots = \frac{3}{5} m R^2$$

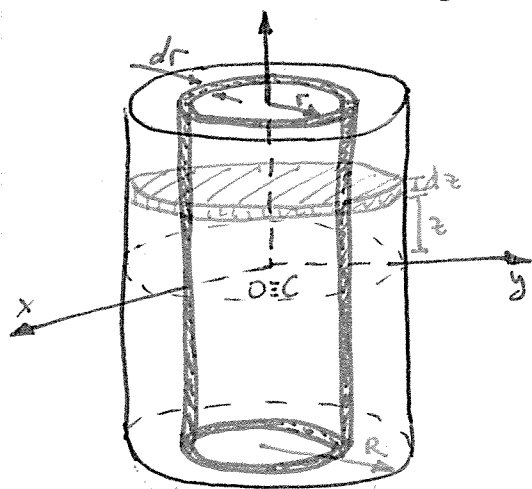
$$[r = d_{dm-0} = r(\text{esf.}); dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr]$$

$I_x = I_y = I_z$ por misma distribución

$$I_0 = I_x + I_y + I_z \Rightarrow I_z = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{3} m R^2 = I_x = I_y$$

x, y, z son de simetría (revolución) $\Rightarrow$ Son principales $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{I}_O|_{xyz} = \frac{2}{5} m R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Elipsoide en O esférico $\Rightarrow \forall S$ por O el principal con $I_S = \frac{2}{5} m R^2$



(C) CILINDRO HOMOGÉNEO, MASA m , RADIO R , ALTURA H , EJE S CX, y, z (z revolución)

$$I_z = \int r^2 dm = \int_{r=0}^{r=R} r^2 \frac{m}{R^2} 2\pi r dr = \dots = \frac{1}{2} m R^2$$

$$[r = d_{dm-z} = r(\text{cilind}); dm = \frac{m}{\pi R^2 H} 2\pi r H dr]$$

$$I_{xy} = \int r^2 dm = \int_{z=-\frac{H}{2}}^{z=\frac{H}{2}} z^2 \frac{m}{H} dz = \dots = \frac{1}{12} m H^2$$

$$[r = d_{dm-xy} = z; dm = \frac{m}{\pi R^2 H} \pi R^2 dz]$$

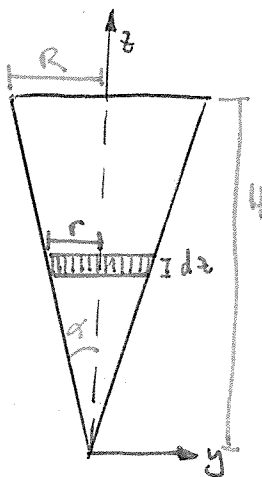
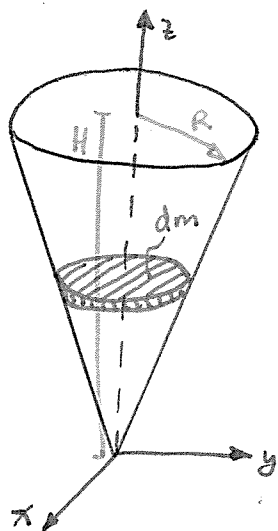
$$I_{xz} = I_{yz} \text{ (por misma distribución)}$$

$$I_{xz} + I_{yz} = I_z$$

$$I_x = I_{xz} + I_{xy} = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m H^2 = \frac{1}{4} m \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right) \xleftarrow{\text{misma distribución}} I_y$$

$$z \text{ de revolución} \Rightarrow x, y, z \text{ principales: } \bar{I}_c \Big|_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{bmatrix}$$

① CONO MACIZO HOMOGÉNEO, RADIO R , ALTURA H , Ejes Ox, y, z } $O = \text{vértice}$
masa m } $z \text{ de rev.}$



$$I_z^{\text{cono}} = \int dI_z^{\text{cilin}} = \int \frac{1}{2} dm r^2 =$$

$$= \int \frac{1}{2} \frac{3m}{R^2 H} r^2 dz r^2 = \int_{z=0}^{z=H} \frac{3}{2} \frac{m}{R^2 H} z^4 \frac{R^4}{H^4} dz =$$

$$= \frac{3}{10} m R^2$$

$$\cdot \frac{r}{z} = \tan \alpha = \frac{R}{H} \Rightarrow$$

$$\cdot dm = \rho_{\text{cono}} dV_{\text{cilin}} = \frac{m}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} \cdot \pi r^2 dz$$

$$I_{xy}^{\text{cono}} = \int r^2 dm = \int z^2 \frac{3m}{R^2 H} r^2 dz = \int_{z=0}^{z=H} z^2 \frac{3m}{R^2 H} z^2 \frac{R^2}{H^2} dz =$$

$$[r = d_{dm-xz} = z] = \frac{3}{5} m H^2$$

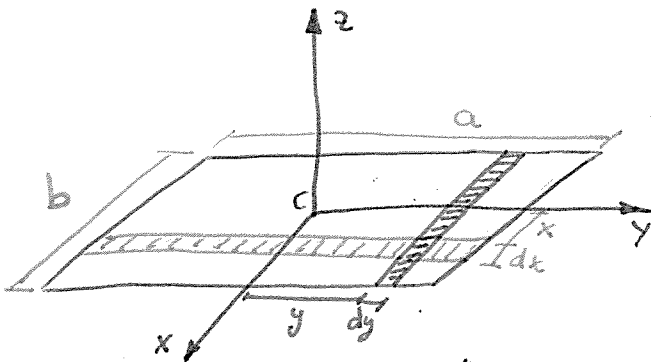
$$I_{xz} + I_{yz} = I_z \Rightarrow I'_{xz} = \frac{I_z}{2} = \frac{3}{20} m R^2$$

$$I_{xz} = I_{yz} \quad I_x = I_{xz} + I_{xy} = \frac{3}{5} m \left[\frac{R^2}{4} + H^2 \right] = I_y$$

$$z \text{ de revolución} \Rightarrow x, y, z \text{ principales: } \bar{I}_o \Big|_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} m \left(\frac{R^2}{4} + H^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} m \left(\frac{R^2}{4} + H^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} m R^2 \end{bmatrix}$$

(E) CASOS PLANOS

E.1) Placa rectangular homogénea, masa m , lados a, b



$$I_{xz} = \int r^2 dm = \int_{y=-\frac{a}{2}}^{y=\frac{a}{2}} y^2 \frac{m}{a} dy = \frac{1}{12} m a^2$$

$$I_{yz} = \text{Análogo} \dots = \frac{1}{12} m b^2$$

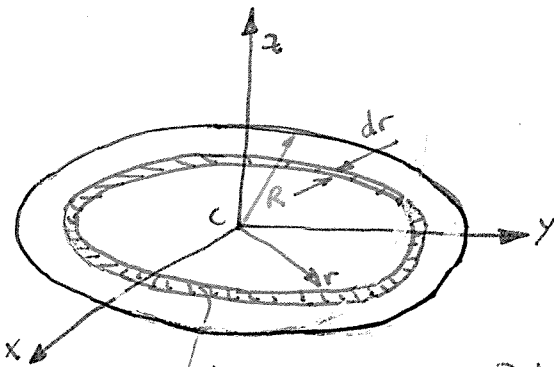
$$I_{xy} = 0 \text{ (m contenida en } xy)$$

$$dm = \sigma \cdot ds = \frac{m}{a \cdot b} b dy$$

$$\begin{cases} I_z = I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \\ I_x = I_{xz} + I_{xy} = \frac{1}{12} m a^2 \\ I_y = I_{yz} + I_{xy} = \frac{1}{12} m b^2 \end{cases}$$

x, y, z de simetría $\Rightarrow$ principales $\Rightarrow \bar{I}_c|_{xyz} = \frac{1}{12} m \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$

E.2) Disco homogéneo, radio R , masa m



$$I_z = \int r^2 dm = \int_{r=0}^{r=R} r^2 \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \dots = \frac{1}{2} m R^2$$

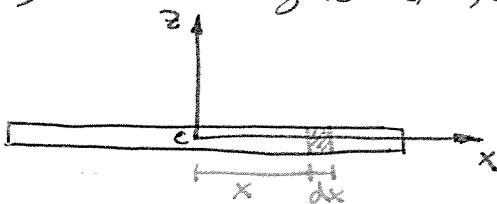
$$I_{xz} = I_{yz}, I_{xz} + I_{yz} = I_z \Rightarrow I_{xz} = I_{yz} = \frac{1}{4} m R^2$$

$$I_{xy} = 0 \text{ (m en } xy)$$

$$I_x = I_{xz} + I_{xy} = \frac{1}{4} m R^2 = I_y \text{ (misma distrib.)}$$

$dm = \sigma \cdot ds = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$ z de simetría $\Rightarrow x, y, z$ principales $\Rightarrow \bar{I}_c|_{xyz} = \frac{1}{4} m R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

E.3) Varilla homogénea: $l, m, d = \frac{dm}{dl} = \text{cte} = \frac{m}{l}$



$$I_{yz} = \int r^2 dm = \int_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \dots = \frac{1}{12} m l^2$$

$$I_{xy} = I_{xz} = 0 \text{ (contienen a m)}$$

$$I_x = 0 \text{ (" ")}$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{12} m l^2$$

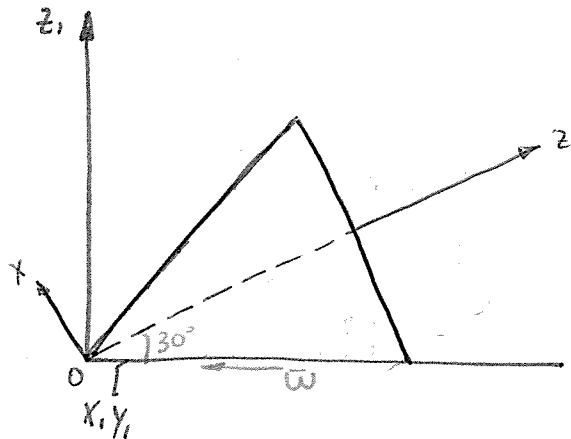
$$I_y = I_{yz} + I_{xy} = \frac{1}{12} m l^2$$

xyz de simetría $\Rightarrow$ principales $\Rightarrow \bar{I}_c|_{xyz} = \frac{1}{12} m l^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esfera hueca $I_0 = \int r^2 dm = \dots = m R^2$

Cilindro hueco: $I_z = \int r^2 dm = \dots = m R^2$

Ej C.D.S.R.2 Cono: $\alpha = 30^\circ$, R.S.D., ω , I_z , I_x . Se pide T.



Por sólido rígido con punto fijo

$T_1 = \frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{I}_0 \bar{\omega}$; $\bar{I}_0$ de revolución $\Rightarrow$ x, y, z PPALES
O el punto fijo x, y, z x, y no tienen porque estar ligados a cono, sólo a O.

$$\bar{\omega} = \omega (\sin 30^\circ \bar{e} - \cos 30^\circ \bar{k}), \bar{I}_0 = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

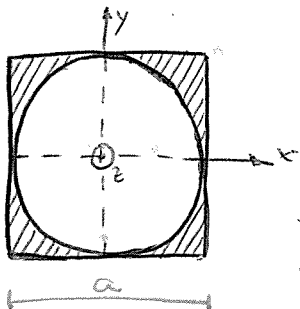
$$T = \frac{1}{2} \omega \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \omega \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \left(I_x \frac{1}{4} + 3 I_z \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{8} \omega^2 (I_x + 3 I_z)$$

Ej C.D.S.R.4 $\bar{L}_0, \bar{p}, \bar{M}_{ext}, \bar{z}_0, \bar{\omega}, \bar{v}_0$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \left(\frac{d\bar{L}_0}{dt} \right)_{s_1} &= \left(\frac{d\bar{L}_0}{dt} \right)_s + \bar{\omega} \times \bar{L}_0 \quad (\text{por derivar en ejes móviles}) \\ \bullet \left(\frac{d\bar{L}_0}{dt} \right)_{s_1} &= \sum \bar{M}_{ext} - \bar{v}_0 \times \bar{p} \quad (\text{H. momento cinético}) \end{aligned} \right\} \left(\frac{d\bar{L}_0}{dt} \right)_s = \sum \bar{M}_{ext} - \bar{v}_0 \times \bar{p} - \bar{\omega} \times \bar{L}_0$$

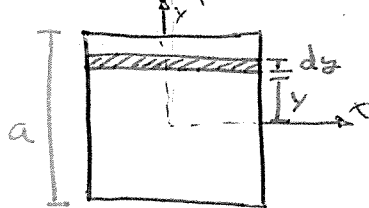
Ej C.D.S.R.9 Chapa cuadrada, σ , a . Círculo: $r = \frac{a}{2}$ centrado



• Por superposición: Figura = Placa completa - círculo

• x, y, z de simetría por figura, placa o círculo $\Rightarrow$ PPALES de inercia

— Para placa



$$I_{xz} = \int r^2 dm = \int_{y=-a/2}^{y=a/2} y^2 \sigma a dy = \sigma a \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{12} \sigma a^4$$

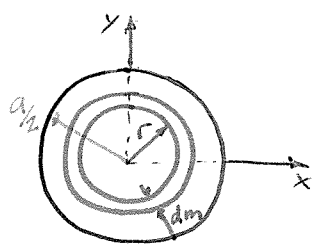
$$[r = d_{dm-xz} = y; dm = \sigma a dy]$$

• Por misma distribución $I_{xz} = I_{yz}$

• $I_{xy} = 0$ (m contenida en xy)

$$\begin{cases} I_x = I_{xz} + I_{xy} = \frac{1}{12} \sigma a^4 \\ I_y = I_{yz} + I_{xy} = \frac{1}{12} \sigma a^4 \\ I_z = I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{6} \sigma a^4 \end{cases}$$

Para círculo.



$$\begin{cases} I_x = I_y = \frac{1}{4} \sigma \pi \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a^2}{4} \\ I_z = \frac{1}{2} \sigma \pi \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a^2}{4} \rightarrow I_z = \int r^2 dm = \int_0^{a/2} r^2 \pi r dr = \frac{r^4}{4} \pi \sigma \Big|_0^{a/2} = \frac{a^4}{2^5} \pi \sigma = I_0 \end{cases}$$

Para figura

$$\begin{aligned} I_x^F &= I_x^P - I_x^C = \frac{1}{12} \sigma a^4 - \frac{1}{64} \sigma \pi a^4 = \frac{16\sigma a^4 - 3\sigma \pi a^4}{2^6 \cdot 3} \\ I_z^F &= I_z^P - I_z^C = \frac{1}{6} \sigma a^4 - \frac{1}{32} \sigma \pi a^4 = \frac{16\sigma a^4 - 3\sigma \pi a^4}{2^5 \cdot 3} \end{aligned}$$

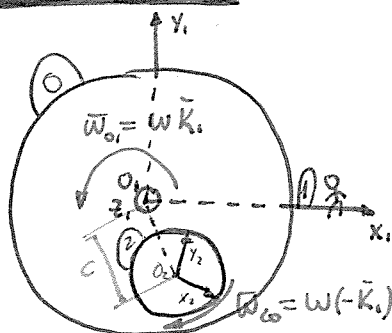
$$I_0 = \frac{I_x + I_y + I_z}{3}$$

$$\frac{1}{2} I_z = I_x \quad ; \quad I_x = \frac{1}{2} I_z$$

$$I_x = \frac{a^4}{2^6} \pi \sigma$$

$$\Rightarrow \bar{I}_C^F = \begin{bmatrix} I_x^F & 0 & 0 \\ 0 & I_x^F & 0 \\ 0 & 0 & I_z^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma a^4}{2^6 \cdot 3} (16 - 3\pi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma a^4}{2^6 \cdot 3} (16 - 3\pi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma a^4}{2^5 \cdot 3} (16 - 3\pi) \end{bmatrix}$$

Ex C.D.S.R 10 Disco homogêneo: M, R, w . Círculo: $m, r, -w, c$. Se pede $\begin{cases} |P_{sist}| \\ |T_1^{sist}| \end{cases}$



$$\vec{P}_{sist} = \vec{P}_0 + \vec{P}_2 = M \vec{v}_{O_1=C_0} + m \vec{v}_{O_2=C_2}$$

$$|\vec{v}_{21}| = |\vec{v}_{20} + \vec{v}_{01}| = |\vec{v}_{01} + \vec{w}_{01} \times \vec{r}_{01}| = w \cdot c$$

$$\Rightarrow |P_{sist}| = m w c$$

$$T_1^{sist} = T_1^0 + T_1^2: \quad T_1^0 = \frac{1}{2} \bar{w} \bar{I}_{O_1} \bar{w} = \frac{1}{2} w \bar{K}_1 \cdot \bar{I}_{O_1} \bar{K}_1 \cdot w = \frac{1}{2} w^2 \bar{I}_{z1} = \frac{1}{4} M R^2 w^2$$

$$T_1^2 = \frac{1}{2} m (\vec{v}_{21})^2 + \frac{1}{2} w_{21} \bar{I}^{O_2} \cdot w_{21} = \frac{1}{2} m w^2 c^2$$

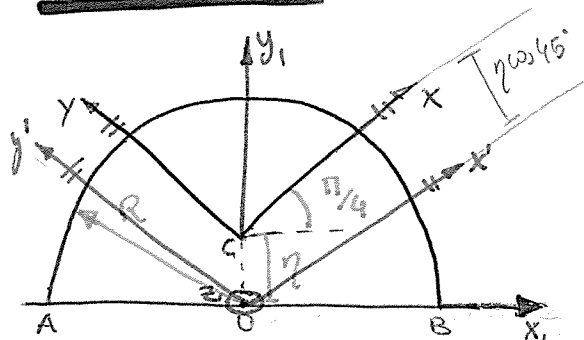
2-Koenig

$$\bar{w}_{21} = \bar{w}_{20} + \bar{w}_{01} = w \bar{K}_1 + w (-\bar{K}_1) = 0$$

$$\Rightarrow T_1^{sist} = \frac{1}{4} M R^2 w^2 + \frac{1}{2} m w^2 c^2$$

Ej. C.D.S.R. 13 R.m. se pide I_{diam} , I_{oc} , P_{xy}

EJERCICIOS CDSR



1) Para disco completo de masa $2m$ se tiene que

$$I_{diam} = I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{1}{4} 2m R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

Contribución de los dos semidisks homogéneos a I_{diam} es la misma

$$I_{diam} = 2 I_{semidisk} \rightarrow I_{semidisk} = \frac{1}{4} m R^2$$

$$I_{diam} = I_{AB} = I_{oc} = \frac{1}{4} m R^2$$

3) P_{xy} ? x_1, y_1 de simetría $\left\{ \begin{array}{l} x_1, y_1, z_1 \text{ son Principales en } O \Rightarrow P_{x_1 y_1} = 0 \\ I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{1}{4} m R^2 \Rightarrow z_1 \text{ de revolución para elipsoide de inercia en } O \end{array} \right.$

$\Rightarrow \forall \delta \in x_1, y_1$ que pase por O se cumple $\left\{ \begin{array}{l} \delta \text{ es ppa} \\ I_\delta = I_{x_1} = I_{y_1} \end{array} \right. \Rightarrow$

Por tanto los ejes $x', y', z' \equiv z_1$ son principales en O $\Rightarrow P_{x' y'} = 0$

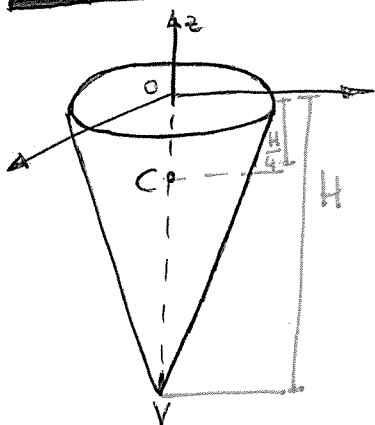
$$P_{xy} = P_{x' y'} - m d_{xz-x'z'} d_{yz-y'z'} = 0 - m \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{m}{2}$$

Ej. C.D.S.R. 5 Sólido con sist. de referencia S: $Cxyz$. Cz de revolución. N° mínimo de componentes no nulas del tensor central de inercia? Expresión matricial

Sólido de revolución $\rightarrow$ Elipsoide de revolución en torno a $z \rightarrow I_x = I_y$
 $\rightarrow$ Tensor diagonal

$$I_c|_{xyz} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{l} 2 \text{ componentes de los} \\ 6 \text{ totales} \end{array}$$

Ej. C.D.S.R. 6 Cono: $R, H, r_G = \frac{H}{4}$. $I_{base} = \frac{m H^2}{10}$ $I_{eje} = \frac{3m R^2}{10}$. Se pide $I_{vértice}$



Sabemos que:

$$I_O = I_{xy} + I_z = m \left(\frac{H^2}{10} + \frac{3R^2}{10} \right)$$

Por Steiner

$$I_O = I_G + m \left(\frac{H}{4} \right)^2, I_G = m \left(\frac{H^2}{10} + \frac{3R^2}{10} - \frac{H^2}{16} \right)$$

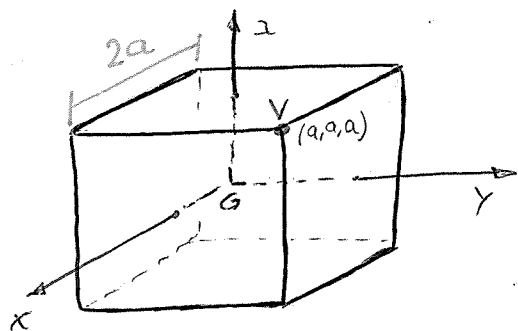
De nuevo por Steiner

$$I_V = I_G + m \left(\frac{3H}{4} \right)^2 = m \left(\frac{H^2}{10} + \frac{3R^2}{10} - \frac{H^2}{16} + \frac{9H^2}{16} \right)$$

$$I_V = \frac{3}{5} m H^2 + \frac{3}{10} m R^2$$

Ej. C.D.S.R 7 $I_v|_{xyz}$ Cubo: $2a, m$

Por simetría $\rightarrow$ Cubo posee elipsoide esférico



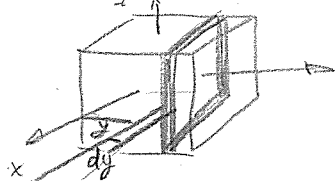
$$I_{e|xyz} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_x \end{bmatrix}$$

$$\vec{OG} = (a, a, a) \\ (\vec{OG})(\vec{OG}) = 3a^2$$

Por Steiner

$$I_v|_{xyz} = I_G|_{xyz} + m(\vec{VG} \cdot \vec{VG}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m(\vec{VG}(\vec{VG})^t)$$

Calculamos I_x :



$$I_{xz} = \int_{y=-a}^{y=a} y^2 \frac{m}{2a} dy = \frac{y^3}{3} \frac{m}{2a} \Big|_{-a}^a = \frac{a^3}{3a} m = \frac{a^2 m}{3} = I_{xy} = I_{yz}$$

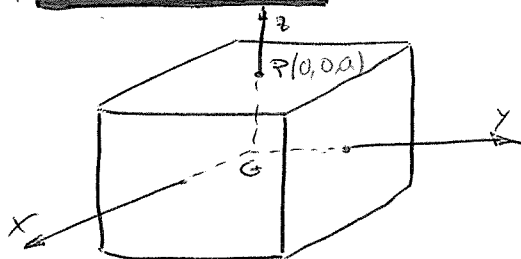
$$dm = \frac{m}{(2a)^3} (2a)^2 dy = \frac{m}{2a} dy$$

$$I_v = I_{xz} + I_{xy} = 2I_{xz} = \frac{2}{3} a^2 m$$

Por tanto

$$I_v = \frac{2}{3} a^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + m(3a^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m \cdot a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = m a^2 \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{8}{3} & -1 \\ -1 & -1 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Ej. C.D.S.R. 8: Cubo: $2a$. $\bar{I}_P|_{xyz}$



$$\bar{I}_P|_{xyz} = I_G|_{xyz} + m(\vec{PG} \cdot \vec{PG}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m(\vec{PG}(\vec{PG})^t)$$

$$\bar{I}_P|_{xyz} = \frac{2}{3} a^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{I}_P|_{xyz} = a^2 m \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ej CDSR 11 Cono: O_2 (rev), I_e, I_{nv} . Calcular $\bar{I}_O|_{xyz}$

Cono revolución $\rightarrow$ Ejes xyz principales. Además $I_x = I_y$

$$I_O|_{xyz} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_e \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} I_{xy} = I_{nv} \\ I_z = I_e \end{cases}$$

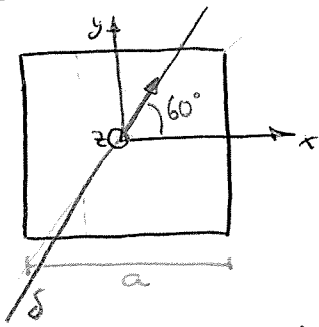
$$I_O = I_{nv} + I_e = \frac{1}{2} (\overbrace{I_x + I_y}^{2I_x} + I_e)$$

$$I_x = I_{nv} + I_e - \frac{1}{2} I_e = I_{nv} + \frac{1}{2} I_e$$

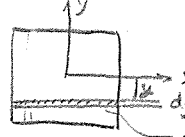
$$\bar{I}_O|_{xyz} = \begin{pmatrix} I_{nv} + \frac{1}{2} I_e & 0 & 0 \\ 0 & I_{nv} + \frac{1}{2} I_e & 0 \\ 0 & 0 & I_e \end{pmatrix}$$

EJ. CDSR 12 Cuadrado: a, m , situado en $z=0$. Calcular I_S , $S \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

Por simetría en cuadrado $\rightarrow$ elipsoide de revolución sobre eje z



$$\rightarrow I_x = I_y = I_S$$



$$I_x = \int y^2 \frac{m}{a} dy = \frac{m}{a} \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{m}{a} \frac{a^3}{2^3 \cdot 3} \cdot 2 = \frac{m a^2}{2^2 \cdot 3} = \frac{1}{12} m a^2$$

$$dm = \frac{m}{a^2} a dy$$

$$I_S = \frac{1}{12} m a^2$$

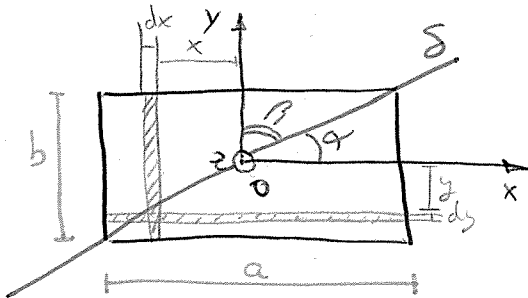
Por cosenos directores

$$\bar{I}_S = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I_x & \frac{\sqrt{3}}{2} I_x & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I_x & \frac{\sqrt{3}}{2} I_x & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} I_x + \frac{3}{4} I_x = I_x = \frac{1}{12} m a^2$$

EJ. CDSR 06-2008 I_S ?? Placa rectangular homogénea: m, a, b .

$S \equiv$ diagonal de la placa



$$I_S = (\cos \alpha, \cos \beta, 0) \bar{I}_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & 0 \end{pmatrix}$$

• Calculamos tensor en $O \rightarrow x, y, z$ principales

$$\bar{I}_0 = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \frac{m}{b} dy = \frac{m}{b} \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{m 2 b^3}{b \cdot 3 \cdot 8} = \frac{m b^2}{12}$$

Por analogía

$$I_y = \frac{1}{12} m a^2$$

$$(dm = \frac{m}{a b} a dy) \quad I_z = I_{xz} + I_{yz} = \begin{cases} I_x = I_{xz} + I_{xz}^0 \\ I_y = I_{yz} + I_{yz}^0 \end{cases} \Rightarrow I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

• Calculamos $\alpha, \beta \rightarrow \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Por tanto:

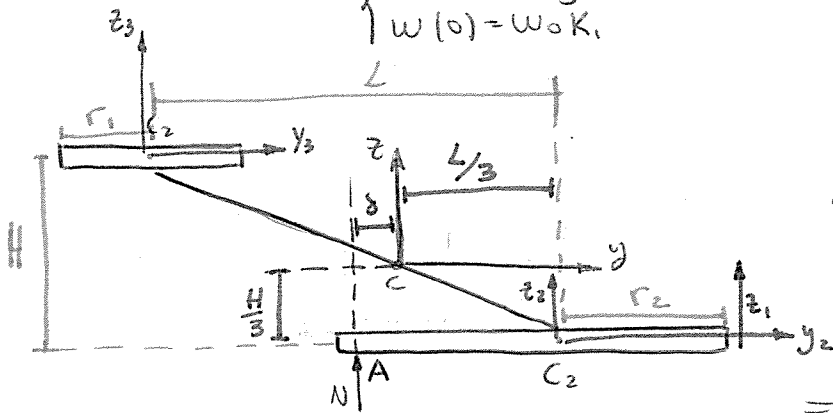
$$I_S = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right) \frac{1}{12} m \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a, b, 0) =$$

$$= \frac{1}{12} m \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a b^2, b a^2, 0) \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a, b, 0) = \frac{1}{12} m \frac{1}{a^2 + b^2} 2 \cdot a^2 b^2 \Rightarrow$$

$$I_S = \frac{1}{6} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

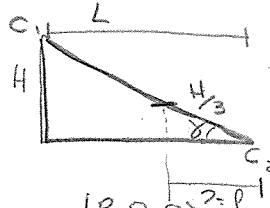
PROB C.D.S.R 2 $C_1(r_1, m_1)$ $C_2(r_2, m_2=2m_1)$; $\alpha, \mu=0$, $\bar{g}=g(\sin\alpha\bar{e}_1 - \cos\alpha\bar{e}_1)$

$$\begin{cases} v_c(0) = v_0\bar{j}_1 \\ w(0) = w_0\bar{k}_1 \end{cases}$$



1) Cota de C en S_1

$$\bar{z}_c = \frac{m_1 z_1^c + m_2 z_2^c}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 H}{m_1 + 2m_1} = \frac{H}{3}$$



$$\tan \alpha = \frac{H}{L} = \frac{H/3}{l} \quad L = 3l, \quad l = \frac{L}{3}$$

2) Razón $P_{xy} P_{xz} = 0$ del tensor en $Cxyz$ $\bar{I}_{Cxyz} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & S \\ 0 & S & R \end{bmatrix}$
yz es plano de simetría $\begin{cases} P_{yz, xz} = P_{xy} = 0 \\ P_{yz, xy} = P_{xz} = 0 \end{cases}$ Otra opción: yz de simetría $\Rightarrow$ x por C principal
 $P_{xy} = 0$
 $P_{xz} = 0$

$$S = -P_{yz} \Rightarrow P_{yz} = P_{yz}^{(1)} + P_{yz}^{(2)}$$

$$P_{yz}^{(1)} = P_{x_3 y_3, x_2 z_2} = P_{x_3 y_3, x_3 z_3} + m_1 d_{x_3 y_3 - x_3} d_{x_3 z_3 - x_2} = m_1 \left(\frac{2H}{3} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) =$$

$$P_{yz}^{(2)} = P_{x_2 y_2, x_2 z_2} = P_{x_2 y_2, x_2 z_2} + m_2 d_{x_2 y_2 - x_2} d_{x_2 z_2 - x_2} = m_2 \left(\frac{H}{3} \right) \left(\frac{L}{3} \right)$$

Signo en S_2

$$P_{yz} = m_1 \left(\frac{-2H}{3} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) + m_2 \left(\frac{H}{3} \right) \left(\frac{L}{3} \right) = \frac{-6}{9} m_1 H L = \frac{-2}{3} m_1 H L \rightarrow \boxed{S = + \frac{2}{3} m_1 H L}$$

$$R = I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + m_1 \frac{4}{9} L^2 + m_1 r_2^2 + \frac{2}{9} m_1 L^2$$

$$\begin{cases} I_z^{(1)} = I_{z_3}^{(1)} + m_1 \left(\frac{2}{3} L \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + m_1 \frac{4}{9} L^2 \\ I_z^{(2)} = I_{z_2}^{(2)} + m_2 \left(\frac{1}{3} L \right)^2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 + m_2 \frac{L^2}{9} \end{cases}$$

$$\boxed{R = m_1 \left(\frac{r_1^2}{2} + r_2^2 + \frac{2}{3} L^2 \right)}$$

3) Obtener $\bar{I}_c$ y $\left(\frac{d\bar{I}_c}{dt} \right)_{S_1}$

Con $\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k}$ y $\bar{I}_c$ se tiene $\boxed{\bar{I}_c|_{xyz} = \bar{I}|_{xyz} \cdot \bar{\omega} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & S \\ 0 & S & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = S \dot{\varphi} \bar{j} + R \dot{\varphi} \bar{k}}$

$$\left(\frac{d\bar{I}_c}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\bar{I}_c}{dt} \right)_S + \bar{\omega} \times \bar{I}_c = (S \ddot{\varphi} \bar{j} + R \ddot{\varphi} \bar{k}) + \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ 0 & S \dot{\varphi} & R \dot{\varphi} \end{vmatrix} = -S \dot{\varphi}^2 \bar{e}_1 + S \ddot{\varphi} \bar{j} + R \ddot{\varphi} \bar{k}$$

4) Condición de ω_0 para que el disco mayor no se separe del plano

Teorema del momento angular en C, en S_1 :

$$\sum \vec{H}_C = \left(\frac{dL_C}{dt} \right)_{S_1} + \vec{U} \times \vec{P}^0$$

$$\begin{cases} \vec{i}: M_x = -s\dot{\psi}^2 & (1) \\ \vec{j}: M_y = s\ddot{\psi} & (2) \\ \vec{k}: M_z = R\ddot{\psi} & (3) \end{cases}$$

N aplicada a la izquierda de C (para dar $M_y < 0$)

$M_y = 0 \forall t \rightarrow N \text{ corta a } y \Rightarrow N \text{ en } yz$

$$\begin{cases} m_g \text{ en C} \Rightarrow \vec{M}_C^{m_g} = \vec{0} \\ N // z \Rightarrow M_z = \vec{0} \end{cases}$$

Mom nulo si F aplic en punto donde calculo mom segun un eje si F // al eje si F la la al eje

De (1) $M_x = -s\dot{\psi}^2$

Con N aplicada en yz a la izquierda de C será: $M_x = Ns \Rightarrow$

$Ns = -s\dot{\psi}^2 \Rightarrow s = -\frac{s\dot{\psi}^2}{N} < 0$ (A la izq de C)

Para no vuelco $|s| \leq r_2 - \frac{L}{3}$

Busco N: Por teorema de cantidad de movimiento

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_C$$

$$\vec{i}: 3mg \sin \varphi = 3m \ddot{x}_1^C \quad (4)$$

$$\vec{j}: 0 = 3m \ddot{y}_1^C \quad (5)$$

$$\vec{k}: N - 3mg \cos \varphi = 3m \ddot{z}_1^C \quad (6) \rightarrow N = 3mg \cos \varphi$$

0 por $\ddot{z}_1^C = \ddot{z} = \frac{H}{3}$

Por tanto $|s| = \frac{s\dot{\psi}^2}{3mg \cos \varphi} \leq r_2 - \frac{L}{3}; \quad \omega_0^2 \leq \left(r_2 - \frac{L}{3} \right) 3m g \cos \varphi / \frac{2}{3} m H L$

$\Rightarrow$

5)

De (4), (5) y (6)

$$\ddot{x}_1^C = g \sin \varphi = cte \rightarrow \dot{x}_1^C = g \sin \varphi t + \dot{x}_1^C(t=0) \Rightarrow x_1^C = g \sin \varphi \left(\frac{t^2}{2} \right) + \dot{x}_1^C(t=0) \Rightarrow$$

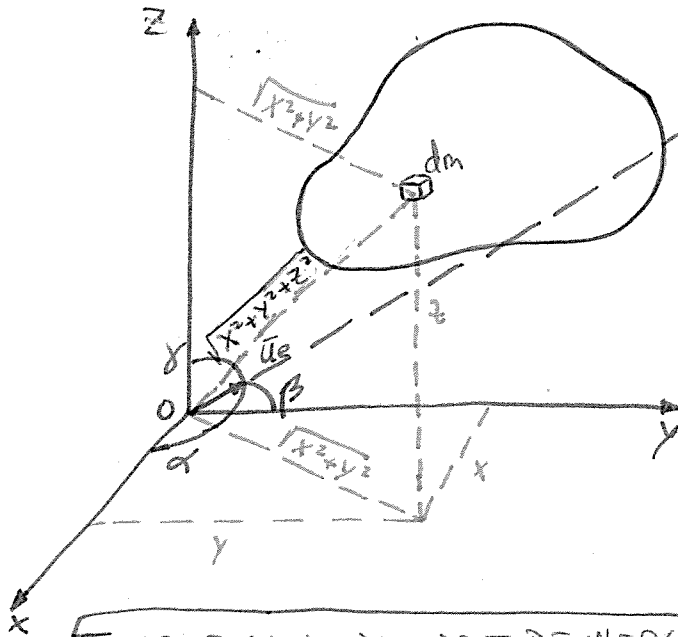
$$\ddot{y}_1^C = 0 \Rightarrow \dot{y}_1^C = cte = v_0 \rightarrow y_1^C = v_0 t + y_1^C(t=0)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} t = \frac{y_1^C}{v_0} = \frac{l}{v_0} \Rightarrow x_1^C &= g \sin \varphi \frac{l^2}{2v_0^2} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{g \sin \varphi}{2v_0^2} l^2} \end{aligned} \right.$$

$$\omega_0 = cte = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \left[\varphi = \omega_0 t + \varphi(t=0) = \omega_0 t \right]$$

$$\begin{cases} 13 \text{ en } 21,15 \text{ h} \\ 14 \text{ en } 8,30 \text{ h} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13 \text{ o } 15,30 \text{ h } 17 \\ 8,30 \text{ o } 12 \text{ h } 18 \end{cases}$$

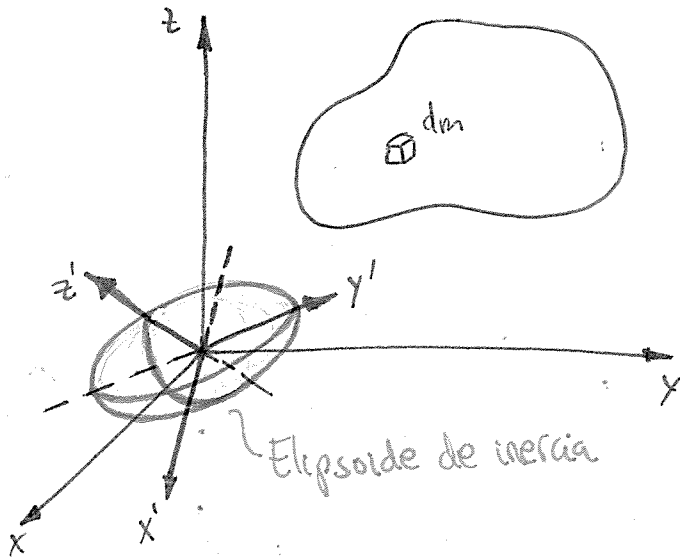


$$I = \int r^2 dm$$

(r = ddm - elem geom)

$$\begin{cases} I_o = \int r^2 dm = \int_{MASA} (x^2 + y^2 + z^2) dm \\ I_z = \int r^2 dm = \int_{MASA} (x^2 + y^2) dm \\ I_{xy} = \int r^2 dm = \int_{MASA} z^2 dm \end{cases}$$

TENSOR Y ELIPSOIDE DE INERCIA

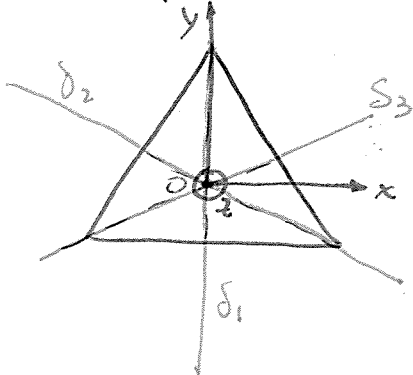


$$\bar{I}_o|_{xyz} = \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{bmatrix} = \text{Tensor de inercia}$$

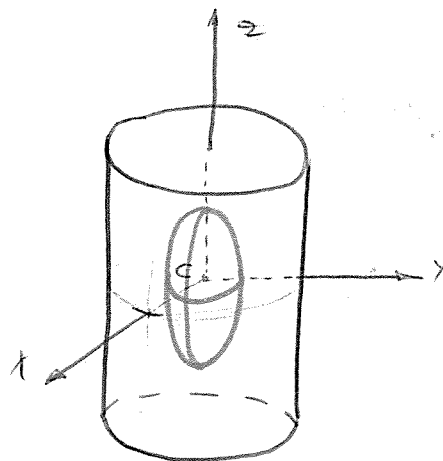
$$I_o|_{x'y'z'} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

ejes principales de inercia

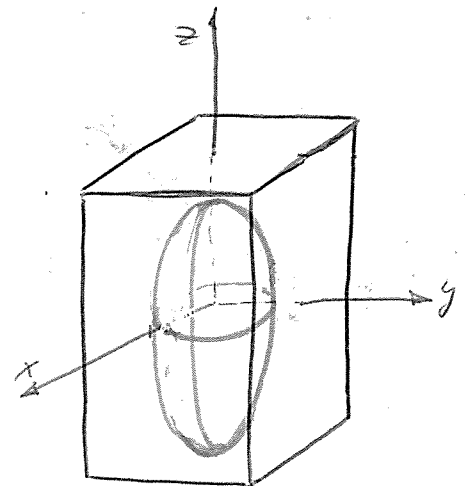
Ejemplos:



Tenemos 3 rectas principales de inercia. $\rightarrow$ Eje z sera eje de revolucion del elipsoide



Sólido de revolución implica elipsoide de revolución



Elipsoide de revolución no implica sólido de revolución

Recordatorio G.M.I

$$M \cdot \bar{r}_c = \sum_i m_i \bar{r}_i \Rightarrow \frac{d}{dt} M \bar{r}_c = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \bar{r}_i) \Rightarrow M \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} \Rightarrow M \cdot \bar{v}_c = \sum_i m_i \bar{v}_i = \bar{p}_{sist}$$

Analogamente se tiene $M \bar{a}_c = \sum_i m_i \bar{a}_i$

Demo: Teorema del momento cinético

$$L_{o,i} = \bar{O}P_i \times m_i \bar{v}_i \Rightarrow L_{o,sist} = \sum_i L_{o,i} = \sum_i \bar{O}P_i \times m_i \bar{v}_i$$

$$\frac{dL_{o,sist}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \bar{O}P_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_i \frac{d(\bar{O}P_i \times m_i \bar{v}_i)}{dt} =$$

$$= \sum_i \left[\left(\frac{d\bar{O}P_i}{dt} \times m_i \bar{v}_i \right) + \left(\bar{O}P_i \times \frac{d(m_i \bar{v}_i)}{dt} \right) \right] = \sum_i \left[\left(\frac{d\bar{r}_i}{dt} - \frac{d\bar{r}_o}{dt} \right) \times m_i \bar{v}_i + \bar{O}P_i \times \frac{d\bar{p}_i}{dt} \right] =$$

$$- \bar{v}_o \times \sum_i m_i \bar{v}_i = - \bar{v}_o \times \bar{p}_{sist}$$

$$= \sum_i \left[- \bar{v}_o \times m_i \bar{v}_i \right] + \sum_i \bar{O}P_i \times \frac{d\bar{p}_i}{dt}$$

$$\sum_i \bar{M}_{ext,o,i} + \sum_i \bar{M}_{int,o,i} \quad \bar{O} \text{ siempre (fuera de acción reacción)}$$

Por tanto:

$$\frac{dL_{o,sist}}{dt} = - \bar{v}_o \times \bar{p}_{sist} + \bar{M}_{ext,o}$$

$$\bar{\omega}_{S/S_i} = \bar{O} \rightarrow \bar{\omega}_{S/S_i} = \bar{\omega}_{S/S_i} + \bar{\omega}_{S_i/S_i}$$

$$\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{r}_i^*$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{v}_i^* \rightarrow \bar{a}_i = \bar{a}_c + \bar{a}_i^*$$

$$\sum_i m_i \bar{r}_i = \sum_i m_i (\bar{r}_c + \bar{r}_i^*) = \sum_i m_i \bar{r}_c + \sum_i m_i \bar{r}_i^* = \underbrace{\sum_i m_i \bar{r}_c}_{M \cdot \bar{r}_c} + \underbrace{\sum_i m_i \bar{r}_i^*}_{M \cdot \bar{r}_c^*} = M \cdot \bar{r}_c + \bar{O}$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \bar{r}_i^* = \bar{O}$$

$$\sum_i m_i \bar{v}_i = \sum_i m_i (\bar{v}_c + \bar{v}_i^*) = \sum_i m_i \bar{v}_c + \sum_i m_i \bar{v}_i^* \Rightarrow \sum_i m_i \bar{v}_i^* = \bar{O} = \bar{p}_{sist}^*$$

Análogo $\sum_i m_i \bar{a}_i^* = \bar{O}$

CINÉTICA Y DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

1.-GEOMETRÍA DE MASAS EN EL SÓLIDO RÍGIDO

1.1-MOMENTOS DE INERCIA DE UN SISTEMA MATERIAL

En lo sucesivo se particulariza el sistema material para el caso de un sólido rígido. Se tratará de un sistema continuo, por lo que los sumatorios se expresarán como integrales y los elementos puntuales de masa como diferenciales.

Se define el momento de inercia del sistema como:

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

siendo r la distancia de dm al punto, recta o plano respecto al cual calculamos el momento de inercia, y con la integral extendida a todo el sistema. Así, definimos:

momento de inercia respecto al origen:

$$I_O = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

momento de inercia respecto a los ejes coordenados:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

momento de inercia respecto a los planos coordenados:

$$I_{xy} = \int z^2 dm$$

$$I_{xz} = \int y^2 dm$$

$$I_{yz} = \int x^2 dm$$

Es fácil deducir las relaciones entre ellos a la vista de las ecuaciones:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz}$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

$$I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$

1.2.-PRODUCTOS DE INERCIA DE UN SISTEMA MATERIAL RESPECTO A DOS PLANOS ORTOGONALES

Se define como:

$$P = \int r_1 \cdot r_2 \cdot dm$$

donde r_1 y r_2 son las distancias, **considerando sus signos**, del dm a los planos considerados.

Si consideramos las parejas de planos coordenados, los productos de inercia son:

$$P_{Oxz, Oyz} = P_{xy} = \int x \cdot y \cdot dm$$

$$P_{Oxy, Ozy} = P_{xz} = \int x \cdot z \cdot dm$$

$$P_{Oyx, Ozx} = P_{yz} = \int y \cdot z \cdot dm$$

1.3.-TENSOR DE INERCIA DE UN SISTEMA RESPECTO AL ORIGEN

Lo definimos como:

Para que
valga constante
elevamos x,y,z
en la masa

$$\bar{I}_O = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

Diag. Momentos de inercia
Reb. Prod. inercia con signo
negativo

1.4.-MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UNA RECTA QUE PASA POR O Y TIENE POR COSENOS DIRECTORES $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

Dado el tensor de inercia en el origen O , $\bar{I}_O$, el momento de inercia respecto a una recta e que pase por O y cuyos cosenos directores sean los mencionados $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, vale:

$$I_e = \underbrace{\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{pmatrix}}_{\bar{u}_e} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

En la práctica
simplemente proyectamos
en los ejes x,y,z $\bar{u}_e$

O desarrollando:

$$I_e = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2 P_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2 P_{xz} \cos\alpha \cos\gamma - 2 P_{yz} \cos\beta \cos\gamma$$

Dado que un vector unitario en la dirección de la recta, $\bar{u}$, tiene por componentes $(\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$, la expresión de I_e queda: $I_e = \bar{u} \cdot \bar{I}_O \cdot \bar{u}$

$$\begin{matrix} 1,3 & 3,3 & 3,1 \\ 1,3 & 3,1 & \end{matrix} \rightarrow \textcircled{4}$$

1.5.-EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Si cambiamos los ejes del sistema de referencia, las componentes del tensor de inercia cambiarán también. Se demuestra que, para cada punto O , existen tres ejes ortogonales para los cuales la expresión del tensor de inercia es una matriz diagonal, y se denominan *ejes principales de inercia*.

De esta forma, si los ejes $Ox'y'z'$ son principales de inercia, la expresión del tensor de inercia queda

$$\bar{I}_O = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix}$$

1.6.-ELIPSOIDE DE INERCIA

(Te da idea de como se va a comportar la masa)

Es el lugar geométrico de puntos que se obtiene al llevar sobre cada recta r que pasa por O , y desde O , el segmento de valor, $OP = \frac{k}{\sqrt{I_r}}$ (k constante arbitraria). Cuando r describe la radiación de rectas de vértice O , para cada valor de k , obtenemos un elipsoide de inercia.

La ecuación del elipsoide de inercia es:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k^2$$

Los ejes del elipsoide de inercia que una palata genera en cada punto coinciden con los ejes princ. de inercia de la palata en ese punto

o, desarrollando:

Girado!

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2P_{xy} xy - 2P_{xz} xz - 2P_{yz} yz = k^2$$

Si elip. deplaza terminos en x, y o z

Si elip. en term xy negativos girado en torno al eje z en sent. positivo

Los ejes del elipsoide de inercia serán principales de inercia en O y por tanto, en esos ejes el tensor será diagonal. Si dos de los momentos principales de inercia de ese tensor son iguales, el elipsoide es de revolución. Si los tres momentos principales de inercia son iguales, el elipsoide es una esfera. En este caso, el momento de inercia es el mismo independientemente de la dirección de la recta que pase por O .

Si elip. es de rev. cualquier recta por O en plano perpendicular al eje de rev. es el ppal de inercia

1.7.-ELIPSE DE INERCIA

En el caso de un sistema másico plano, la intersección del el elipsoide de inercia con el plano que contiene la masa es, para cada valor de k , una elipse. Considerando que el plano mencionado fuera el Oxy , la ecuación de la elipse quedaría:

$$I_x x^2 + I_y y^2 - 2P_{xy} xy = k^2$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = k^2$$

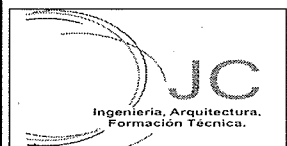
$$I_{x'} x'^2 + I_{y'} y'^2 + I_{z'} z'^2 = k^2$$

No está girado

ejes elip $\equiv$ ejes princ. de inercia

demiej del elipsoide

$$\begin{cases} a = \frac{k}{\sqrt{I_{x'}}} \\ b = \frac{k}{\sqrt{I_{y'}}} \\ c = \frac{k}{\sqrt{I_{z'}}} \end{cases}$$

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
---	--	--

1.8.-PROPIEDADES Y SIMETRÍAS

Si π es plano de simetría:

- G pertenece a π ($\bar{M}_{\pi} = 0$, momento estático planar nulo).
- el producto de inercia $P_{\pi\pi'}$ de π con cualquier otro plano π' perpendicular a π es nulo.
- todas las rectas perpendiculares a π son ejes de los elipsoides de inercia de los puntos en que cortan a π .

Si δ es eje de simetría del sólido:

- G pertenece a δ ($\bar{M}_{\delta} = 0$, momento estático áxico nulo).
- el producto de inercia $P_{\pi\pi'}$ de un plano π perpendicular a δ con cualquier otro plano π' que contenga a δ es nulo.
- δ es eje de los elipsoides de inercia de todos sus puntos.

Si δ es eje de revolución del sólido (y por tanto de simetría):

- G pertenece a δ ($\bar{M}_{\delta} = 0$, momento estático áxico nulo).
- el producto de inercia $P_{\pi\pi'}$ de un plano π perpendicular a δ con cualquier otro plano π' que contenga a δ es nulo.
- δ es eje de los elipsoides de inercia de todos sus puntos.
- Todos los elipsoides de inercia de los puntos de δ son de revolución en torno a δ .
- Las rectas del plano ecuatorial de dichos elipsoides son ejes de los mismos y todas tienen el mismo momento de inercia. Ver dibujo de páginas anteriores

De esto se deduce que:

- Cuando un sólido rígido tiene tres planos de simetría mutuamente perpendiculares, la intersección de los tres planos es G y el tensor de inercia en G respecto a las intersecciones o trazas de dichos planos es diagonal. Las tres trazas se corresponderán además con los ejes del elipsoide de inercia en G.
- Cuando un sólido rígido tiene dos planos de simetría, π y π' , mutuamente perpendiculares, G se encuentra sobre la intersección o traza de dichos planos, y el tensor de inercia en cualquier punto de esa traza respecto a unos ejes xyz tales que $z \equiv$ traza, $\pi \equiv xz$ y $\pi' \equiv yz$ es diagonal.
- Si el eje x es principal de inercia, $P_{xy} = P_{xz} = 0$ (análogamente para y, z)
- Todo eje de simetría es principal de inercia (pero no a la inversa).
- Si dos rectas r y s que pasan por un punto P son de simetría y no son perpendiculares, todas las rectas que pasan por P contenidas en el plano definido por r y s son ejes principales de inercia y tienen el mismo momento de inercia. *Ver ej. triángulo*

1.9.- TEOREMAS DE STEINER

Permite relacionar momentos de inercia de elementos que no pasan por G con elementos que sí pasan por G

El momento de inercia de un sólido rígido respecto de:

- a).-un punto P
- b).-una recta δ
- c).-un plano π

es igual al momento de inercia del sólido rígido respecto de:

- a).-el centro de masas G
- b).-una recta δ_G por G y paralela a δ
- c).-un plano de π_G por G y paralelo a π

más la masa del sólido rígido por el cuadrado de la distancia entre:

- a).-P y G
- b).- δ y δ_G
- c).- π y π_G

respectivamente. Así:

a) para momentos centrales: $I_P = I_G + M \cdot a^2$

b) para momentos axiales: $I_\delta = I_{\delta_G} + M \cdot a^2$

c) para momentos planarios: $I_\pi = I_{\pi_G} + M \cdot a^2$

El producto de inercia de un sólido rígido respecto de dos planos, π_1 y π_2 , es igual al producto de inercia respecto a dos planos paralelos a los anteriores por el centro de masas, π_{G_1} y π_{G_2} , más la masa del sólido por las distancias a y b entre π_1 - π_{G_1} y π_2 - π_{G_2} , respectivamente:

$$P_{\pi_1 \pi_2} = P_{\pi_{G_1} \pi_{G_2}} + M \cdot a \cdot b$$

Aplicando Steinner para relacionar los tensores de inercia entre un punto O y el centro de masas G, se obtiene:

$$\left(\overline{I}_O \right)_{xyz} = \left(\overline{I}_G \right)_{xyz} + m \left(\overline{OG} \cdot \overline{OG} \right) \overline{U} - m \left(\overline{OG} \right)_{xyz} \left(\overline{OG}' \right)_{xyz}$$

Si es necesario cambiar de sistema de referencia el tensor de inercia en un punto O, de xyz a x'y'z', siendo T la matriz del cambio de base de un sistema a otro, se obtiene:

$$\left(\overline{I}_O \right)_{x'y'z'} = T \left(\overline{I}_O \right)_{xyz} T^T$$

(Las filas de T serán las componentes, en la base inicial, de los vectores de la nueva base)

2.- DINÁMICA DE LOS SISTEMAS

2.1.- MAGNITUDES CINÉTICAS.

Se estudia el movimiento de los sistemas de partículas (discretos o continuos), en particular de sólidos rígidos, en función de las fuerzas aplicadas sobre los mismos que, en general, se consideran como datos (cuando se trate de fuerzas de ligadura se considerarán en general como incógnitas).

2.1.1.- CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

Se define la cantidad de movimiento de un sistema de partículas como la suma de las cantidades de movimiento de cada una de las partículas del sistema.

- Sistema discreto:

$$\vec{p}_{Sist.} = \sum_{Sist.} \vec{p}_i = \sum_{Sist.} m_i \vec{v}_i$$

- Sistema continuo:

$$\vec{p}_{Sist.} = \int_{Sist.} d\vec{p} = \int_{Sist.} \vec{v} dm$$

Teniendo en cuenta la definición de centro de masas, la expresión de la cantidad de movimiento del sistema queda:

$$\vec{p}_{Sist.} = M_{Sist.} \vec{V}_C$$

2.1.2.- MOMENTO CINÉTICO.

Se define el momento cinético de un sistema de partículas respecto de un punto cualquiera O como la suma de los momentos cinéticos de cada una de las partículas del sistema respecto del punto O .

- Sistema discreto:

$$\vec{L}_{OSist.} = \sum_{Sist.} \vec{L}_{Oi} = \sum_{Sist.} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

siendo $\vec{r}_i$ el vector de posición de la partícula i tomando como origen O .

- Sistema continuo:

$$\vec{L}_{OSist.} = \int_{Sist.} \vec{L}_{Oi} = \int_{Sist.} \vec{r} \times \vec{v} dm$$

siendo $\vec{r}$ el vector de posición de cada dm tomando como origen O .

2.1.3.- ENERGÍA CINÉTICA.

Se define la energía cinética de un sistema de partículas como la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas del sistema.

- Sistema discreto:

$$Ec_{Sist.} = \sum_{Sist.} Ec_i = \sum_{Sist.} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- Sistema continuo:

$$Ec_{Sist.} = \int_{Sist.} dEc = \int_{Sist.} \frac{1}{2} v^2 dm$$

2.2.-TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA DE SISTEMA

2.2.1.-TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

La resultante de todas las fuerzas exteriores a un sistema es igual a la derivada de la cantidad de movimiento del sistema respecto al tiempo.

$$\sum \vec{F}_{Ext,Sist} = \frac{d\vec{p}_{Sist}}{dt}$$

2.2.2.- TEOREMA DEL CENTRO DE MASAS.

La resultante de todas las fuerzas exteriores a un sistema es igual a la masa total del sistema por la aceleración del centro de masas.

$$\sum \vec{F}_{Ext,Sist} = \frac{d\vec{p}_{Sist}}{dt} = M_{Sist} \cdot \vec{a}_C$$

2.2.3.- TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO.

La suma de los momentos de las fuerzas exteriores a un sistema respecto de un punto cualquiera O , fijo o móvil, del sistema de referencia, resulta:

$$\sum \vec{M}_{Ext,Sist,O} = \frac{d\vec{L}_{O,Sist}}{dt} + \vec{r}_O \times \vec{p}_{Sist} \quad \text{Ver demo}$$

2.2.4.- TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA.

La variación de la energía cinética de un sistema en un intervalo de tiempo finito es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores e interiores, es decir, de todas las fuerzas que actúan en el sistema, durante dicho intervalo.

$$\Delta Ec_{Sist} = Ec_2 - Ec_1 = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{Ext,i} \cdot \vec{v}_i \cdot dt + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{Int,i} \cdot \vec{v}_i \cdot dt = \tau_{Ext1 \rightarrow 2} + \tau_{Int1 \rightarrow 2}$$

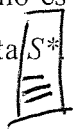
o en forma diferencial:

$$dEc_{Sist} = d\tau_{Ext} + d\tau_{Int}$$

2.3.-SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASAS.

Es un sistema de referencia cuyo origen es el centro de masas del sistema, moviéndose ligado a él con movimiento de traslación respecto al sistema de referencia fijo en el que se analiza el movimiento, y manteniéndose sus ejes paralelos a los del sistema fijo (sin movimiento de rotación, sin velocidad angular).

El sistema centro de masas no es en general un sistema inercial (puede ser $\vec{a}_C \neq \vec{0}$), se mueve con una velocidad $\vec{V}_C$ y se denota S^* . El centro de masas suele denominarse CM , G o C .



2.4.-EXPRESIÓN DE LAS MAGNITUDES CINÉTICAS EN EL SISTEMA DEL CENTRO DE MASAS.

2.4.1.-CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

Ya se ha visto que la cantidad de movimiento de un sistema material es la misma que tendría toda la masa del sistema moviéndose con la velocidad del centro de masas del sistema:

$$\vec{p}_{Sist.} = M_{Sist.} \vec{V}_C$$

Denominando $\vec{p}_{Sist.}^*$ a la cantidad de movimiento del sistema en su movimiento relativo al sistema de referencia del centro de masas, se tiene:

$$\vec{p}_{Sist.}^* = \sum_{Sist.} m_i \vec{v}_i^*$$

siendo $\vec{v}_i^*$ la velocidad de la partícula i relativa al sistema de referencia del centro de masas ($\vec{v}_i^* = \vec{v}_i - \vec{V}_C$). Por la propia definición de centro de masas se cumple entonces:

$$\vec{p}_{Sist.}^* = \vec{0}$$

2.4.2.-MOMENTO CINÉTICO.

1º Teorema de König: El momento cinético de un sistema respecto de un punto cualquiera O es igual al momento que tendría toda la masa del sistema concentrada en el centro de masas, más el momento cinético del sistema en su movimiento relativo al sistema de referencia del centro de masas:

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad \vec{L}_O = \vec{r}_C \times M \vec{V}_C + \vec{L}_C^* \quad \sum_i \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^* \quad \vec{L}_C^*$$

con:

- $\vec{r}_C$: vector de posición de C tomando como origen O

$$\vec{L}_C^* = \sum_{Sist.} \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^* = \sum_{Sist.} \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i = \vec{L}_C$$

2.4.3.-ENERGÍA CINÉTICA.

2º Teorema de König: La energía cinética de un sistema es igual a la energía cinética que tendría toda la masa del sistema concentrada en el centro de masas, más la energía cinética del sistema en su movimiento relativo al sistema de referencia del centro de masas:

$$Ec = \frac{1}{2} M_{Sist.} V_C^2 + Ec^* \quad \text{con} \quad Ec^* = \sum_{Sist.} \frac{1}{2} m_i v_i^{*2}$$

2.5.- TEOREMAS DE LA MECÁNICA EN EL SISTEMA DEL CENTRO DE MASAS

Aunque el sistema del centro de masas no es en general un sistema inercial, posee propiedades que hacen muy útil su empleo en muchas aplicaciones.

2.5.1.- TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN S*

Como ya se ha visto, $\vec{p}_{Sist.}^* = \vec{0}$. Esta relación se cumple permanentemente, por lo que se puede afirmar que $\frac{d\vec{p}_{Sist.}^*}{dt} = \vec{0}$, que difiere de la ecuación de la cantidad de movimiento en el sistema inercial.

2.5.2.- TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

La suma de los momentos de las fuerzas exteriores respecto del centro de masas es igual a la derivada respecto al tiempo del momento cinético en el centro de masas relativo al movimiento del sistema material respecto al sistema de referencia del centro de masas:

$$\text{En } S^*: \sum_{Sist.} \vec{M}_{Ext.C} = \frac{d\vec{L}_C}{dt} + \vec{v}_C \times \vec{p}^*; \text{ En } S_i: \boxed{\sum \vec{M}_{ext.c} = \frac{d\vec{L}_c}{dt} + (\vec{v}_c \times \vec{p}_{rel})}$$

0 (11)

2.5.3.- TEOREMA DE LA ENERGÍA RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS.

La variación de la energía de un sistema material en su movimiento relativo al sistema de referencia del centro de masas, es igual al trabajo relativo a dicho sistema de las fuerzas exteriores e interiores:

$$\Delta E_{Sist.}^* = E_{C_2}^* - E_{C_1}^* = \tau_{Ext \rightarrow 2}^* + \tau_{Int \rightarrow 2}^*$$

ecuación que tiene la misma forma que la correspondiente a un sistema inercial.

2.6.- FUERZAS QUE DERIVAN DE UN POTENCIAL

Si existen fuerzas que derivan de potencial (conservativas), su trabajo se podrá expresar como un incremento negativo de energía potencial, quedando la ecuación de la energía:

$$dE_{C_{Sist.}} = d\tau_{ext} + d\tau_{int} = \overbrace{d\tau_{ext-CONS}}^{-dE_{pext}} + d\tau_{ext-NOCONS} + \overbrace{d\tau_{int-CONS}}^{-dE_{pint}} + d\tau_{int-NOCONS}$$

$$\underbrace{dE_{C_{Sist.}} + dE_{p_{int}} + dE_{p_{ext}}}_{dE_{mec} + dE_{p_{sist}}} = d\tau_{ext-NOCONS} + d\tau_{int-NOCONS}$$

Definiendo la energía mecánica como $E_{Mec} = E_C + E_p$, si todas las fuerzas que actúan son conservativas:

$$d\tau_{ext-NOCONS} + d\tau_{int-NOCONS} = 0$$

$$dE_{Mec.Sist.} = d(E_C + E_p)_{Sist.} = 0 \Rightarrow E_{Mec} = (E_C + E_p)_{Sist.} = cte$$

2.7.- MAGNITUDES CINÉTICAS DEL SÓLIDO RÍGIDO

2.7.1.- CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Se puede calcular igual que para un sistema deformable:

$$\vec{p} = M\vec{V}_G$$

2.7.2.- MOMENTO CINÉTICO

El momento cinético puede escribirse: $\vec{L}_O = O\vec{G} \times M \cdot \vec{v}_O + \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}$ (con O punto cualquiera y $\vec{v}_O$ velocidad de ese punto como perteneciente al sólido)
Tensor y ω en mismo sist ref!!!
Como tal no usaremos esta fórmula pero se particularizará para d. casos

Casos particulares:

① - Sólido con punto fijo O : $\vec{v}_O = 0$

$$\vec{L}_O = \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}$$

② - Momento cinético en el centro de masas: $O \equiv G$

$$\vec{L}_G = \vec{I}_G \cdot \vec{\omega} = \vec{L}_G^* \quad (\#)$$

③ - Sólido libre: por sustitución de $(\#)$ en 1º Tma. Koenig:

$$\vec{L}_O = O\vec{G} \times M \cdot \vec{V}_G + \vec{I}_G \cdot \vec{\omega} \quad (O \text{ punto cualquiera del espacio})$$

por usar

Relación entre $\vec{L}_{O_1}$ y $\vec{L}_{O_2}$ dados dos puntos O_1 y O_2 :

$$\vec{L}_{O_2} = \vec{L}_{O_1} + O_2\vec{O}_1 \times \vec{p}$$

2.7.3.- ENERGÍA CINÉTICA

La energía cinética se escribe: $Ec = \frac{1}{2}mv_O^2 + m\vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times O\vec{G}) + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}$ (O punto del sólido)

Casos particulares:

- Sólido con punto fijo O : $\vec{v}_O = 0$

$$Ec = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}$$

- Movimiento respecto del sistema centro de masas:

$$O\vec{G} = \vec{G}\vec{G} = \vec{0}, \vec{v}_G^* = 0$$

$$Ec = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{I}_G \cdot \vec{\omega}$$

- Sólido libre: Considerando $O \equiv G$:

$$Ec = \frac{1}{2}M \cdot V_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{I}_G \cdot \vec{\omega}$$

Por otra parte, $P = \frac{dEc}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ Considerando $\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times A\vec{P}_i$ y desarrollando se obtiene:

Potencia

$$P = \frac{dEc}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}$$

Análogo a precio de trabajos virtuales

Se aplica al cir para que $\vec{v}_E = \vec{0}$

2.8.- DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO LIBRE

En el estudio del movimiento de un sólido libre se trata, en general, de obtener los parámetros que sitúan al sólido en el espacio en cada instante. Así como en el caso de una masa puntual sólo eran necesarios tres parámetros para situarla en el espacio, en el caso de un sólido el número de parámetros será seis: las tres coordenadas que proporcionan la posición de un punto del sólido, y los tres ángulos que orientan el sólido en el espacio.

En general se suele tomar como punto del sólido su centro de masas, de coordenadas $O_1C = \xi \vec{i}_1 + \eta \vec{j}_1 + \zeta \vec{k}_1$ respecto de un sistema de referencia inercial $\{O_1, x_1, y_1, z_1\}$, y como ángulos para orientar el sólido los ángulos de Euler $(\varphi, \vartheta, \psi)$ que forman unos ejes principales de inercia con origen en C, $\{C, x, y, z\}$, con los del sistema de referencia $\{O_1, x_1, y_1, z_1\}$.

El sistema de seis ecuaciones necesario para obtener estas seis incógnitas se genera planteando dos ecuaciones vectoriales (que proporcionan las correspondientes seis ecuaciones escalares):

- el teorema de la cantidad de movimiento: Proporciona: $\frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} = \sum \vec{F}$

$$\begin{cases} \vec{r}_1: m\ddot{\xi} = F_{x_1} \\ \vec{j}_1: m\ddot{\eta} = F_{y_1} \\ \vec{k}_1: m\ddot{\zeta} = F_{z_1} \end{cases}$$

→ integrando se obtendrá ξ, η, ζ

- el teorema del momento cinético en el centro de masas: Expresando el momento cinético en la base $\{C, x, y, z\}$: $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum \vec{M}_C$ (por observador fijo)

$$\vec{L}_C = \vec{I}_C \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = I_x \omega_x \vec{i} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k}$$

Aplicando el teorema del momento cinético y empleando la derivación en ejes móviles se obtienen las ecuaciones de Euler:

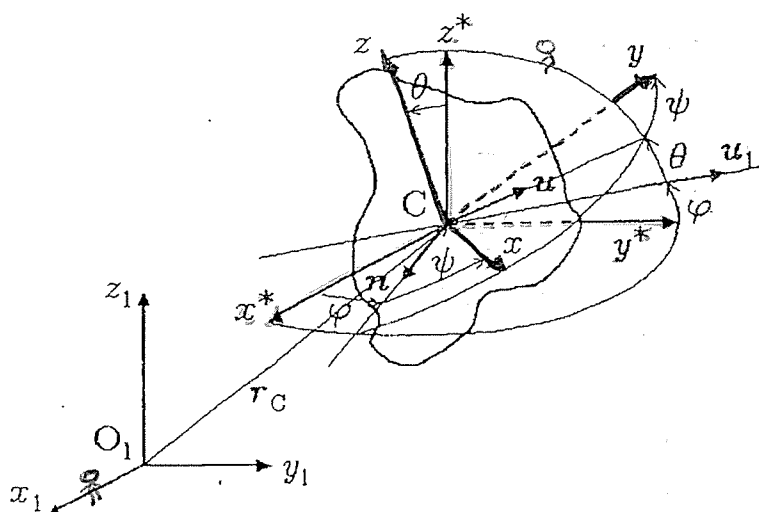
$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = M_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z \end{cases}$$

Ver desarrollo en pag siguiente por detrás

La rotación $\vec{\omega}$ aparece expresada en la base $\{C, x, y, z\}$, por lo que es necesario emplear las ecuaciones que relacionan estas componentes con las rotaciones de Euler:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{cases}$$

Sustituidas en las ecuaciones del teorema del momento cinético se obtiene el sistema buscado. $\{ \text{Incógnitas } \xi, \eta, \zeta, \varphi, \theta, \psi \}$



2.9.- LIGADURAS EN UN SÓLIDO RÍGIDO

El movimiento de un sólido puede verse restringido por ligaduras (introducidas por vínculos) apareciendo de esta manera las fuerzas de ligadura provocadas por dichas ligaduras. Entre los elementos típicos que introducen ligaduras ideales están los cojinetes:

- cojinete radial: si está situado en un punto O , permite cualquier movimiento del eje que lo mantenga pasando por el punto O . Denominando a dicho eje como eje z , las reacciones de

ligadura en O y las restricciones cinemáticas cumplen:

$$\begin{cases} \bar{M}_O = \bar{0} \\ R_z = 0 \\ v_{Ox} = 0 \\ v_{Oy} = 0 \end{cases}$$

- cojinete axial (o de empuje): es un cojinete radial al que se le restringe el movimiento axial,

esto implica las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \bar{M}_O = \bar{0} \\ v_{Ox} = 0 \\ v_{Oy} = 0 \\ v_{Oz} = 0 \end{cases}$$

- rótula (cojinete esférico): En este caso, el elemento rótula, en el punto O , permite cualquier

giro en torno a O , pero ningún desplazamiento, cumpliéndose:

$$\begin{cases} \bar{M}_O = \bar{0} \\ v_{Ox} = 0 \\ v_{Oy} = 0 \\ v_{Oz} = 0 \\ \bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} \end{cases}$$

• Por teorema del Mom. Cinético en C: $\left(\frac{d\bar{L}_C}{dt}\right)_{s_1} = \sum \bar{M}_C$

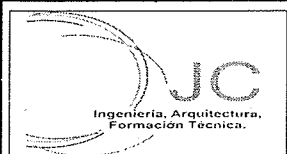
$$\bar{L}_C = \sum_{cte} I_x \omega_x \bar{i} + \sum_{cte} I_y \omega_y \bar{j} + \sum_{cte} I_z \omega_z \bar{k}$$

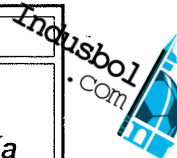
$$\left(\frac{d\bar{L}_C}{dt}\right)_{s_1} = \left(\frac{d\bar{L}_C}{dt}\right)_s + \bar{\omega}_{s/s_1} \times \bar{L}_C$$

$$\bullet \left(\frac{d\bar{L}_C}{dt}\right)_s = I_x \dot{\omega}_x \bar{i} + I_y \dot{\omega}_y \bar{j} + I_z \dot{\omega}_z \bar{k}$$

$$\bullet \bar{\omega} \times \bar{L}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_x \omega_x & I_y \omega_y & I_z \omega_z \end{vmatrix} = \dots$$

$$\sum \bar{M}_C = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$$

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	--	---



EN CLASE

EJERCICIO C.D.S.R. 1 Final 1996-02-12

- 1) Se define un sistema de referencia $\{C, x, y, z\}$ ligado a un sólido rígido σ , cuyo tensor central de inercia tiene en la terna $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la representación matricial: $I_c = m \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ Calcular la expresión matricial del tensor de inercia del punto P de coordenadas $(a, 0, 0)$ en la base definida por los vectores $\bar{i}^* = \bar{i}$; $\bar{j}^* = \frac{1}{2}\bar{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{k}$; $\bar{k}^* = -\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j} + \frac{1}{2}\bar{k}$: Steiner tensorial + cambio de base

EJERCICIO C.D.S.R. 2 Septiembre 1997-09-16

- 2) Un cono de semiángulo en el vértice 30° rueda sin deslizar sobre un plano con una rotación de módulo ω . Halle la energía cinética del cono, expresándola en función de ω y de los momentos de inercia respecto a su eje geométrico (I_z) y a una recta perpendicular a éste que pasa por el vértice (I_x).

EJERCICIO C.D.S.R. 3 Parcial 2000-06-12

- 3) Un sólido rígido, σ , uno de cuyos puntos es O y su centro de masas C, se mueve respecto a un sistema de referencia, S_1 . Señale las proposiciones verdaderas en relación con la expresión de la energía cinética $T_1 = \frac{1}{2} \omega \cdot \overline{I_O} \cdot \omega$, en la que $\overline{I_O}$ es el tensor de inercia en O y ω la rotación instantánea de σ respecto a S_1 :
- a) Es válida si O está fijo en S_1 . c) Es válida si O es cualquier punto de σ .
b) Es válida si O coincide con C. d) Es válida si O pertenece al eje instantáneo rotación.

EJERCICIO C.D.S.R. 4 Septiembre 2002-09-16

- 4) Deduzca la expresión de la derivada temporal del momento cinético respecto de un punto O de un sólido rígido y de un sistema inercial, L_O , realizada desde un sistema de referencia ligado al sólido, en función de p , L_O , M_{Oext} y del torsor cinemático en O del movimiento del sólido respecto del sistema inercial. $\hookrightarrow \bar{\omega}, \bar{v}_O$

EJERCICIO C.D.S.R. 5 Febrero 2003-02-10

- 5) El sistema de referencia ligado a un sólido rígido de revolución y densidad uniforme es $S: Cxyz$, donde C es el centro de masas y Cz el eje de revolución. Justifique el número mínimo de componentes no nulas del tensor central de inercia que son necesarias para escribir la matriz de sus componentes en S y escriba dicha matriz.

EJERCICIO C.D.S.R. 6 Septiembre 2003-09-15

- 6) Sabiendo que el centro de masas de un cono macizo y uniforme, de radio R y altura H, dista H/4 de su base, que el momento de inercia respecto de dicha base es $mH^2/10$ y que el momento de inercia respecto de su eje es $3mR^2/10$, determine el momento de inercia respecto del vértice del cono.

EJERCICIO C.D.S.R. 7 Febrero 2005-02-07

- 7) Obtenga la expresión matricial del tensor de inercia que un cubo de arista $2a$ y masa m define en uno de sus vértices, tomando una referencia de ejes perpendiculares a las caras.

EJERCICIO C.D.S.R. 8 Septiembre 2005-09-05

- 8) Obtenga la expresión matricial del tensor de inercia de un cubo de arista $2a$ y masa m en el centro de una de sus caras

EJERCICIO C.D.S.R. 9 Septiembre 2006-09-18

- 9) Determine el tensor central de inercia de una chapa cuadrada, de espesor despreciable, densidad superficial de masas σ , lado a , con un orificio circular de radio $a/2$ con centro en el del cuadrado.

EJERCICIO C.D.S.R. 10 Febrero 2006-02-13

- 10) Un disco uniforme, de masa M y radio R , gira alrededor de su eje con velocidad angular ω respecto de un sistema de referencia S_1 . Otro disco uniforme, de masa m y radio r , gira respecto del primer disco con velocidad angular $-\omega$ alrededor del eje del segundo disco que dista c del eje del primero. Determine el módulo de la cantidad de movimiento del sistema material que forman los dos discos.

En el sistema de dos discos de la cuestión anterior, determine la energía cinética en S_1 .

EJERCICIO C.D.S.R. 11 Junio 2007-06-18

- 11) Se considera el sistema de referencia $S: \{Oxyz\}$ ligado a un cono de revolución en el que O es el vértice del cono y Oz el eje del mismo. El momento de inercia respecto al eje del cono es I_e . El momento de inercia respecto a un plano perpendicular al eje del cono por O es I_{xy} . Calcule el tensor de inercia del cono respecto de O mediante la matriz de sus componentes en S .

$$\begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} I_x = I_y \\ I_e = 2I_{xy} = I_o \end{matrix}$$


EJERCICIO C.D.S.R. 12 Septiembre 2007-09-03

- 12) Un cuadrado uniforme de lado a , masa m y espesor despreciable, se encuentra en el plano $z = 0$, su centro coincide con el origen de coordenadas, O , y sus lados son paralelos a los ejes Ox y Oy . Calcule el momento de inercia del cuadrado respecto a la recta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ del plano $z = 0$.

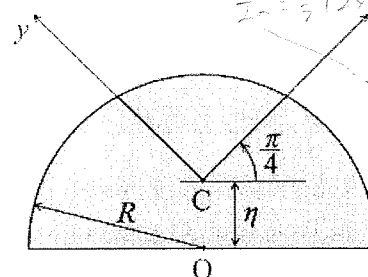
$$\begin{aligned} I_x + I_{xy} &= I_x \\ I_{xy} + I_{xy} &= I_y \\ I_x &= I_y \\ I_e &= 2I_{xy} \end{aligned}$$

EJERCICIO C.D.S.R. 13 Septiembre 2008-02-15

- 13) En el semicírculo de la figura, de radio R , masa m , centro O y espesor despreciable, calcule el momento de inercia respecto a su diámetro.

En el mismo semicírculo anterior, obtenga el momento de inercia respecto a la recta OC , siendo C el centro de masas.

Para el mismo semicírculo de las cuestiones anteriores, determine el producto de inercia P_{xy} en función de m y η .



EJERCICIOS REPASO

EJERCICIO R-C.D.S.R. 1 Final 1996-09-09

- 1) Determinar el momento cinético respecto al centro de masas de una esfera maciza homogénea de masa m y radio R que rueda y pivota sin deslizar sobre un plano horizontal xy con una rotación $ui+vk$.

EJERCICIO R-C.D.S.R. 2 Parcial 1997-06-02

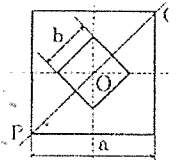
- 2) Justifique si es suficiente que un sistema tenga su masa distribuida con simetría central para que el elipsoide central de inercia sea una esfera.

EJERCICIO R-C.D.S.R. 4 Septiembre 2001-09-19

- 3) Un cono recto, de sección circular, uniforme y macizo, de masa m , altura h y semiángulo en el vértice α , rueda sin deslizar sobre un plano fijo con velocidad angular ω . Determine el módulo de la cantidad de movimiento del cono.

EJERCICIO R-C.D.S.R. 5 Septiembre 2002-09-16

- 4) El sistema plano de la figura tiene una densidad másica uniforme, σ , y está limitado por dos contornos cuadrados, concéntricos y girados $\pi/4$, de lados a y b . Determine el momento de inercia del sistema respecto de la recta PQ, diagonal del cuadrado mayor.



EJERCICIO R-C.D.S.R. 6 Junio 2006-06-26

- 5) Un sólido rígido libre (σ), de masa $m = 1$ kg, se mueve respecto de un sistema de referencia inercial. $S\{Oxyz\}$. El momento cinético medido en S respecto de un punto A es $L_A = t^2i - 2tj + 2tk$. En $t = 0$ la velocidad de A es $v_A = i + j + 2k$ y la del centro de masas de C es $v_C = 2j + 2k$. Todos los valores están en unidades SI. Determine, en $t = 0$, el momento resultante respecto de A de las fuerzas aplicadas a σ .

EJERCICIO R-C.D.S.R. 7 Septiembre 2006-09-18

- 6) Un sólido rígido, σ , se mueve en ausencia de fuerzas exteriores. En S , sistema solidario de σ , se conocen, en un instante, la velocidad angular $\omega(0, 1, 2)$ y el momento cinético respecto del centro de masas, $L_C(2, 1, 0)$. Calcule, en ese instante, la derivada temporal de L_C respecto a S .

EN SOLUCIONES

EJERCICIO S-C.D.S.R. 1

Parcial 1998-06-01

- 1) Demuestre que la cantidad de movimiento de un sistema mecánico, determinada en un sistema de referencia S_1 , coincide con la de un punto material cuya masa fuese la del sistema y se moviese con la velocidad de su centro de masas respecto a S_1 .

EJERCICIO S-C.D.S.R. 2

Septiembre 1998-09-21

- 2) Determine el momento de inercia de un cilindro de masa m , radio R y altura H , respecto del diámetro de una de sus bases.

EJERCICIO R-C.D.S.R. 3

Final 1999-02-16

- 3) Obtenga el tensor central de inercia de una lámina cuadrada da masa m y lado a , referido a sus ejes.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 4

Parcial 1999-06-07

- 4) Escriba la expresión del momento cinético de un sólido rígido respecto del centro de masas, C , en un cierto sistema de referencia, si se conoce el tórsor cinemático del sólido en C , $(\mathbf{v}_C, \boldsymbol{\omega})$, respecto de dicho sistema de referencia, y su tensor central de inercia.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 5 Parcial 1999-06-07

- 5) Demuestre que el momento cinético de un sólido rígido respecto al centro de masas es el mismo si se evalúa en el sistema del centro de masas (S^*) o en cualquier otro sistema (S_1) que posea movimiento de traslación respecto a S^* .

EJERCICIO S-C.D.S.R. 6

Final 1999-06-28

- 6) Demuestre la siguiente expresión del teorema del momento cinético polar de un sistema material

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = -\bar{\mathbf{v}}_O \times \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{M}}_O^{ext}$$

cuando el punto O se mueve con velocidad $\mathbf{v}_O$ respecto a un sistema de referencia inercial en el que $\mathbf{p}$ es la cantidad de movimiento del sistema material, y $\bar{\mathbf{M}}_O^{ext}$ representa el momento resultante de las fuerzas exteriores.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 7

Final 1999-09-06

- 7) Un punto O de un sistema material se mueve con velocidad $\mathbf{v}_O$ respecto a un sistema de referencia inercial en el que $\mathbf{p}$ es la cantidad de movimiento. Demuestre que cuando $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{p}$ son colineales la expresión del teorema del momento cinético polar es $\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{\mathbf{M}}_O^{ext}$ si $\bar{\mathbf{M}}_O^{ext}$ representa el momento resultante de las fuerzas exteriores.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 8

Febrero 2000-02-15

- 8) Demuestre que en cualquier sistema de referencia S , inercial o no, la cantidad de movimiento de un sistema material es nula si su centro de masas está permanentemente en reposo en S .

EJERCICIO S-C.D.S.R. 9
Parcial 2000-06-12

- 9) Se consideran dos sistemas de referencia, S y S' , que se mueven relativamente en traslación. Si O es un punto fijo de S' , con velocidad v_0 en S , demuestre la siguiente relación entre los momentos cinéticos de un sistema material σ respecto a O , en S y en S' , $\bar{L}_O = \bar{L}'_O + O\bar{C} \times m\bar{v}_O$, donde m es la masa del sistema material y C su centro de masas.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 10
Junio 1997-06-19, Junio 2001-06-20

- 10) Se considera un sistema de referencia (S) en el que el centro de masas de un sistema mecánico (S_M) es un punto fijo. El sistema S gira con velocidad angular ω respecto de un sistema inercial. Demuestre que es nula la cantidad de movimiento de S_M determinada en S .

EJERCICIO S-C.D.S.R. 11 Septiembre 2001-09-19

- 11) Un sólido, σ , de masa m , se mueve respecto a un sistema de referencia, S , siendo su tórsor cinemático en un punto, A , $[\bar{v}_A, \bar{\omega}]$. Conociendo, además, la posición del centro de masas y el tensor de inercia en A , escriba la expresión del momento cinético de σ respecto al punto A , en S .

EJERCICIO S-C.D.S.R. 12 Septiembre 2001-09-19

- 12) Deduzca la expresión del teorema del momento cinético de un sistema de puntos materiales en una referencia inercial, respecto de un punto B que se mueve con velocidad v_B en dicha referencia.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 13 Febrero 2002-02-11, junio 2002-06-10

- 13) Determine el momento de inercia de un cubo de masa m y lado a respecto a una de sus diagonales.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 14 Junio 2002-06-10

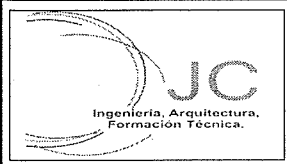
- 14) Escriba la expresión vectorial del primer teorema de König (momento cinético) para el sólido rígido, haciendo intervenir el tensor de inercia del centro de masas.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 15 Junio 2002-06-10 Septiembre 2006-09-18 Septiembre 2007-09-03

- 15) El tórsor cinemático de un sólido rígido, en un punto O del mismo, viene caracterizado por v_O y ω . El sistema de fuerzas que actúan sobre el sólido se reduce en el punto O a la resultante F y momento resultante M_O . Expresa la potencia suministrada por el sistema de fuerzas.

En un instante se conocen el tórsor cinemático de un sólido rígido en un punto A , $[\omega, v_A]$ y el tórsor de las fuerzas exteriores aplicadas, $[F, M_A]$ en el mismo punto A . Expresa la potencia de las fuerzas aplicadas en dicho instante.

En un instante, se conoce el tórsor cinemático de un sólido rígido respecto a un punto, A , es decir, $(\omega$ y $v_A)$, y el tórsor de las fuerzas exteriores, $(F$ y $M_A)$. Escriba la derivada respecto al tiempo de la energía cinética en función de los datos indicados.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	--	---



EJERCICIO S-C.D.S.R. 16 Septiembre 2002-09-16 Febrero 2005-02-07, septiembre 2005-09-05

- 16) Escriba la expresión del teorema del momento cinético de un sólido rígido, en un sistema inercial, respecto a un punto que se mueve con velocidad v_0 en dicho sistema.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 17 Febrero 2003-02-10 Septiembre 2007-09-03

- 17) ¿Qué relación existe entre las cantidades de movimiento de un mismo sistema material evaluadas en dos sistemas inerciales de referencia uno de los cuales se mueve respecto al otro con velocidad V ? ¿y entre sus derivadas temporales?

EJERCICIO S-C.D.S.R. 18 Junio 2003-06-09

- 18) Formule, en un sistema inercial, el teorema del momento cinético para un sólido rígido, respecto de un punto móvil, indicando el significado de las magnitudes que utilice.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 19 Septiembre 2003-09-15

- 19) Se conoce la masa m y el tensor central de inercia $\overline{I}_C$ de un sólido rígido. Escriba su energía cinética si el torsor cinemático referido a su centro de masas es $(\vec{v}_C, \vec{\omega})$.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 20 Febrero 2004-02-12

- 20) Sea un sistema material, σ , que se mueve respecto de un sistema de referencia, S , de forma que el centro de masas de σ siempre está en reposo en S . Exprese el momento cinético de σ en un punto O cualquiera en función del definido en C e indique cómo ha llegado a dicha expresión.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 21 Junio 2004-06-17

- 21) Sea una superficie esférica homogénea de masa m y ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Determine la expresión matricial del tensor de inercia que define en su centro $O(0,0,0)$, referenciada en x, y, z .

EJERCICIO S-C.D.S.R. 22 Junio 2004-06-17

- 22) Obtenga la expresión matricial del tensor de inercia que la superficie esférica anterior define en $P(R, R, 0)$, utilizando igualmente la referencia x, y, z .

EJERCICIO S-C.D.S.R. 23 Septiembre 2004-09-23

- 23) Determine el momento de inercia de una placa cuadrada uniforme, de masa m y arista a , respecto de su centro.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 24 Septiembre 2004-09-23

- 24) Se considera una superficie esférica homogénea, de masa m , radio R y centro en el origen de coordenadas. Halle la expresión matricial del tensor de inercia que define en el punto $P(R,0,0)$ respecto a la referencia x, y, z .

EJERCICIO S-C.D.S.R. 25 Febrero 2006-02-13

- 25) Sea C el centro de masas de un sólido rígido de masa m . El torsor cinemático (grupo cinemático) en otro punto A del sólido es $[\vec{v}_A, \vec{\omega}]$. Exprese la cantidad de movimiento del sólido rígido en función de los datos anteriores.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 26 Septiembre 2006-09-18

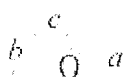
- 26) La velocidad del centro de masas de un sistema material, σ , respecto de un sistema de referencia inercial, S_1 , es $(1, 2, 2)$ m/s y su energía cinética en el sistema del centro de masas es de 100 J. Sabiendo que la masa de σ es 10 kg, calcule la energía cinética de σ en S_1 si todas las unidades son del Sistema Internacional SI.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 27 Febrero 2006-02-13 Febrero 2007-02-12

- 27) Sean A y B dos puntos de un sólido rígido de masa m . La velocidad de su centro de masas es v_C y el momento cinético en A es L_A . Determine el momento cinético en B en función de los datos anteriores.

EJERCICIO S-C.D.S.R. 28 Febrero 2006-02-13

28)



Un sólido rígido homogéneo, σ , de masa m , se configura a partir de un cilindro macizo de radio a con un orificio cilíndrico de radio b ($b < a$), con sus ejes paralelos a una distancia c ($b < c < a$), todo ello según la sección recta que se indica. Determine el momento de inercia de σ respecto del eje por O, perpendicular a la sección, en función de m, a, b y c .

EJERCICIO C.D.S.R. 29 Septiembre 2007-09-03

- 29) Formule vectorialmente, para un sólido rígido, el teorema del momento cinético en un sistema inercial cuando el punto de referencia, A, se mueve con velocidad v_A . Indique el significado de los símbolos empleados.

PROBLEMA C.D.S.R. 1 (1998-06-22)

S_1 es el sistema de referencia de Galileo, con origen en el centro de la Tierra y desde el que se observa que la Tierra gira uniformemente, con velocidad angular ω_T , a razón de una revolución cada veinticuatro horas. Se admite que S_1 es inercial.

I) Se considera un satélite geoestacionario en la vertical de un punto A del ecuador terrestre. Si el radio de la Tierra es $R_T = 6370$ km y la aceleración de la gravedad en su superficie es $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, determine:

- 1) El radio R de la órbita de dicho satélite, en km.
- 2) La velocidad del centro de masas del satélite, en km/h.

II) El satélite se asimila a un cilindro homogéneo de masa m , radio a y altura $3a$. Un sistema de referencia S , ligado al satélite, se escoge con origen en su centro de masas, C , y eje Cz coincidente con el eje geométrico del cilindro.

- 3) Determine el tensor central de inercia del satélite, expresándolo por sus componentes en S .

III) Cuando el satélite se sitúa en órbita, el eje Cz se encuentra en la dirección de la vertical del punto A siendo $AC \cdot k > 0$ y el eje Cx es paralelo a la rotación terrestre ω_T y en su mismo sentido. La velocidad angular del satélite, en ese instante inicial, es ω_0 , verificándose que

$$\omega_0 \cdot i = 0; \quad \omega_0 \cdot j > 0; \quad \omega_0 \cdot k > 0; \quad |\omega_0 \times k| = |\omega_0| \sqrt{\frac{3}{7}}$$

Se designa por S^* el sistema de referencia del centro de masas del satélite, con origen en C y tercer eje con la dirección y sentido del momento cinético inicial respecto a C .

- 4) En el instante inicial de puesta en órbita, determine el momento cinético respecto a C y la energía cinética, evaluadas ambas magnitudes en S_1 y S^* , expresando las componentes del momento cinético en la base S .

Indique justificadamente si se conservan algunas de estas magnitudes en los sistemas de referencia indicados.

- 5) Expresar las componentes de la rotación instantánea, ω , en S , en función de los ángulos y rotaciones de Euler de S respecto a S^* y deduzca la evolución de ω en S .
- 6) Expresar las componentes de la rotación instantánea, ω , en S^* , en función de los ángulos y rotaciones de Euler de S respecto a S^* y deduzca la evolución de ω en S^* .

IV) Con objeto de evaluar las posibles aplicaciones del satélite, se consideran tres supuestos en relación con el valor de la rotación inicial ω_0 , a saber:

$$a) \omega_0 = \frac{\sqrt{7}}{8} \omega_T; \quad b) \omega_0 = \frac{3\sqrt{7}}{2} \omega_T; \quad c) \omega_0 = 4\sqrt{7} \omega_T$$

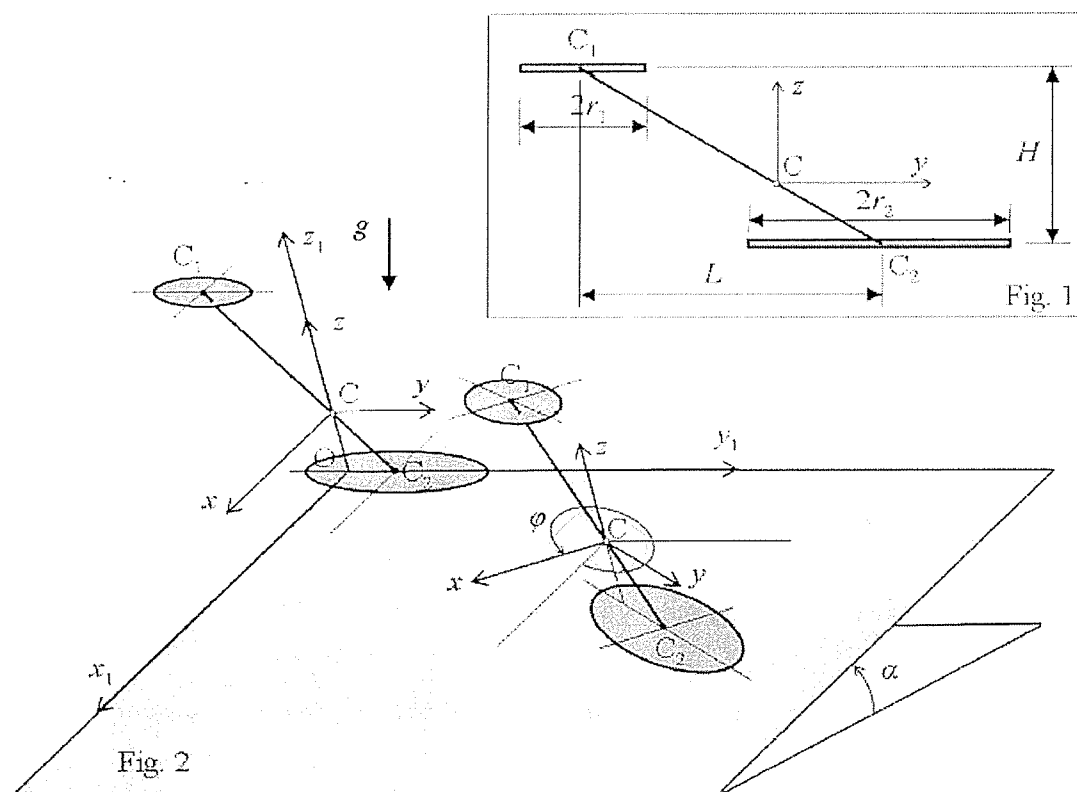
- 7) Determine, en cada caso, el tiempo que transcurre desde el instante inicial de puesta en órbita para que el eje Cz vuelva a coincidir con la vertical de A , indicando si el vector k se aleja de la Tierra o se orienta hacia ella.

PROBLEMA C.D.S.R. 2 (2007-09-03)

Se configura un sólido rígido, σ , uniendo dos discos planos paralelos, de espesores despreciables, mediante una varilla que enlaza sus centros, C_1 y C_2 , con las dimensiones indicadas en la figura 1. Los radios de los discos son r_1 y $r_2 > r_1$. Las masas de cada uno son m_1 y $m_2 = 2m_1$ y sus densidades no son iguales necesariamente. La masa de la varilla C_1C_2 es despreciable. Se escoge un sistema de coordenadas cartesiano $S \{Cxyz\}$, ligado a σ , con origen en su centro de masas, C , y con los semiejes indicados en las figuras.

Se pretende que σ se mueva sobre un plano inclinado un ángulo α con el horizontal, de forma que el disco mayor permanezca siempre en contacto con el plano inclinado. No existe rozamiento entre el disco y el plano inclinado. Un sistema de coordenadas $S_1 \{Ox_1y_1z_1\}$, ligado al plano inclinado, es un sistema de referencia inercial. Su eje Oz_1 es perpendicular al plano inclinado y el eje Oy_1 horizontal, todo ello con los sentidos indicados en la figura 2. La aceleración de la gravedad es $g = g \sin \alpha \hat{i}_1 - g \cos \alpha \hat{k}_1$.

El el instante inicial, $t = 0$, σ se abandona en la posición superior izquierda de la figura 2, es decir, con los semiejes Oz y Oz_1 superpuestos y los otros dos coincidentes en dirección y sentido. En ese instante la velocidad del centro de masas de σ es $v_C(0) = v_0 \hat{j}_1$ y la velocidad angular del sólido $\omega(0) = \omega_0 \hat{k}_1$.



- 1) Determine la cota de C (tercera coordenada) en S_1 . (1 punto)
- 2) Proporcione una razón suficiente para la nulidad de los productos de inercia P_{xy}, P_{zx} del tensor de inercia del sólido rígido en C , expresado en $Cxyz$ mediante:

$$(\bar{I}_C)_{xyz} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & S \\ 0 & S & R \end{pmatrix}$$

y determine los valores de S y R . (2 puntos)

- 3) Determine el momento cinético respecto a C y su derivada respecto del tiempo en S_1 , en un instante genérico t ($t > 0$), facilitando sus componentes en la base de S en función de la velocidad y aceleración angulares y datos del enunciado. (3 puntos)
- 4) A partir de las ecuaciones del movimiento de σ , obtenga el valor ^{max.} ~~mínimo~~ admisible de ω_0 , en función de datos del enunciado, para que el disco mayor no se separe nunca del plano inclinado. (2 puntos)
- 5) Calcule la trayectoria de C en S_1 expresándola mediante las coordenadas de C en función de t . Obtenga el ángulo girado por σ desde su posición inicial, $\varphi(t)$. (2 puntos)

SÓL. EJE FIJO

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Relacionamos las ecuaciones del tema CDSR general anterior para el caso particular del sól con eje fijo (se toma el eje z para fórmulas)

$$L_0 = \vec{OG} \times M\vec{v}_G + \vec{I}_0 \cdot \vec{\omega} \rightarrow \boxed{L_0 = \vec{I}_0 \cdot \vec{\omega}} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{\omega} = \omega \cdot \hat{k} \\ \rightarrow L_z = I_z \omega_z = I_z \dot{\varphi} \end{array} \right.$$

Además, $\frac{dL_z}{dt} = M_z \rightarrow \boxed{I_z \ddot{\varphi} = M_z}$

Teorema mom. cinético axial

$\frac{dL}{dt} + \vec{v}_G \times \vec{p} = \sum \vec{M}_{ext}$
↓ proyectando en z
 $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z$

REACCIONES DE LIGADURA

Todos los problemas y cuestiones se resuelven igual.

Planteas: • Teorema de la cantidad de movimiento $\boxed{\sum F_{ext} = m \vec{a}_G}$

que te proporciona 3 ecuaciones

• Teorema del momento cinético $\boxed{\sum M_0 = \left(\frac{dL_0}{dt} \right)_{s_1} + \vec{v}_G \times \vec{p}}$

que te proporciona 2 ecuaciones

Generalmente, como $\left(\frac{dL_0}{dt} \right)_{s_1}$ es en el sistema fijo tendremos que derivar en eje móvil $\left(\frac{dL_0}{dt} \right)_{s_1} = \left(\frac{dL_0}{dt} \right)_s + \vec{\omega} \times \vec{L}_0$, con $L_0 = \vec{I}_0 \cdot \vec{\omega}$

Así obtendremos: R_x, R_y, R_z , reacciones del cojinete axial inferior y R_x', R_y' , reacciones del cojinete radial superior.

EQUILIBRADO ESTÁTICO Y DINÁMICO

Consiste simplemente en plantear dos condiciones y buscar las relaciones que las hacen posibles:

- Centro de masas sobre eje fijo $\rightarrow z = \bar{x} = 0$
- Eje fijo principal de inercia $\rightarrow P_{xz} = P_{yz} = 0$

Ejercicios tipo

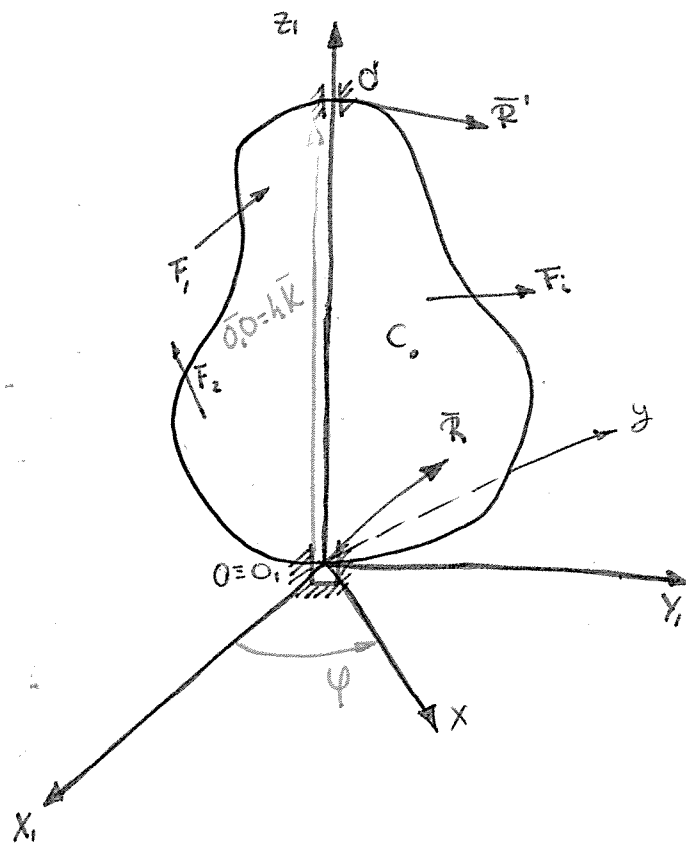
- Reacciones y ligaduras (3) (5) (6) (7) (8) (13)
- Planteamiento y aplicación de fórmulas CDSR (4) (9) (10) (11) (15) (17)
- Equilibrado (14) (16) (18)

↑
? Koning

(19) De todo un poco!!



Sólido con eje fijo



$$\bullet \vec{L}_0 = \bar{\bar{I}}_0 \vec{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -p_{xy} & -p_{xz} \\ -p_{xy} & I_{yy} & -p_{yz} \\ -p_{xz} & -p_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} =$$

$$= -p_{xz} \omega_z \vec{i} - p_{yz} \omega_z \vec{j} + I_{zz} \omega_z \vec{k}$$

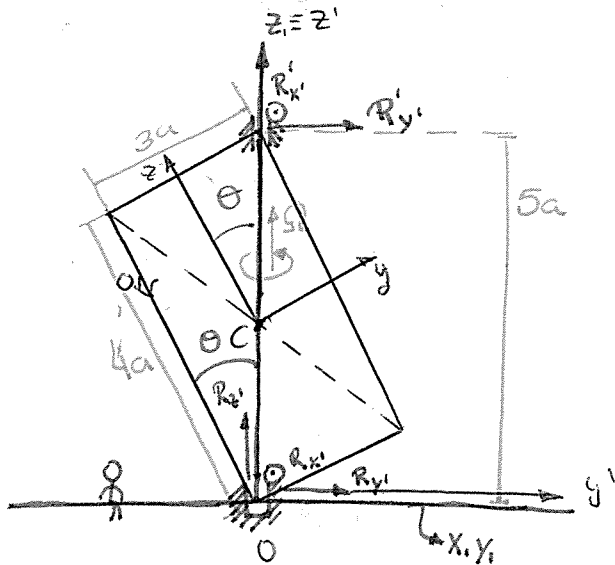
$$\bullet \vec{L}_0 \cdot \vec{K} = L_{z1} = I_{z1} \omega_z = I_{zz} \dot{\varphi}$$

• Por teorema de momento cinético áxiz en

$$O: \sum \vec{M}_0 \cdot \vec{K} = \left(\frac{dL_0}{dt} \right)_{S_1} \vec{K} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{z1} = \frac{dI_{zz} \omega_z}{dt} \Rightarrow M_{z1} = I_{zz} \ddot{\varphi}$$

EJ. SÓLIDO. EJE FIJO 3 Rectángulo: m, 3a, 4a, $\Omega = \text{cte}$. Se pide $|\bar{R}|$ y $|\bar{R}'|$.



Por teorema de cantidad de movimiento.

$$\Sigma \bar{F} = m \bar{a}_c \quad \text{por ser } \Omega \text{ cte}$$

$$\begin{cases} \bar{I}: R_x + R'_x = 0 & (1) \\ \bar{J}: R_y + R'_y = 0 & (2) \\ \bar{K}: R_z = 0 & (3) \end{cases}$$

Por teorema de momento cinético en C:

$$\Sigma \bar{M}_c = \left(\frac{dL_c}{dt} \right)_{S_1} + \bar{\omega}_c \times \bar{L}_c$$

$$\Sigma \bar{M}_c = (R_y - R'_y) \frac{5}{2} a \bar{I} + (R_x - R'_x) \frac{5}{2} a \bar{J}$$

$$L_c = \bar{I}_c \cdot \bar{\omega} \Big|_{x,y,z} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \end{bmatrix} =$$

$$= I_y \Omega \sin \theta \bar{J} + I_z \Omega \cos \theta \bar{K} \quad \left(\begin{array}{l} = \text{cte en S} \\ \neq \text{cte en } S_1 \end{array} \right)$$

$$\left(\frac{dL_c}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{dL_c}{dt} \right)_S + \bar{\omega}_S \times \bar{L}_c = \begin{vmatrix} \bar{I} & \bar{J} & \bar{K} \\ 0 & \Omega \sin \theta & \Omega \cos \theta \\ 0 & I_y \Omega \sin \theta & I_z \Omega \cos \theta \end{vmatrix} = (I_z - I_y) \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \bar{I}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \bar{I}: (R_y - R'_y) \frac{5}{2} a = (I_z - I_y) \Omega^2 \sin \theta \cos \theta & (4) \\ \bar{J}: (R_x - R'_x) \frac{5}{2} a = 0 & (5) \end{cases}$$

MOMENTOS DE INERCIA FÍSICA I

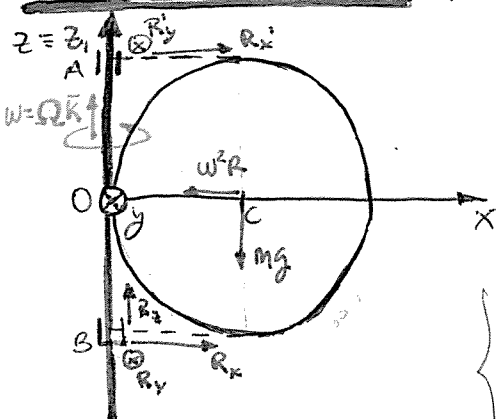
$$I_z = \frac{1}{12} m 9a^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} m 16a^2$$

$$\sin \theta = \frac{4a}{5a}; \cos \theta = \frac{3a}{5a}$$

Solución: De (1) y (5): $R_x = R'_x = 0$
De (3): $R_z = 0$
De (2) y (4): $R_y = -R'_y = -\frac{7}{125} m a \Omega^2$

EJ. SÓL. CON EJE FIJO 5 Disco: m, R, $\Omega = \text{cte}$. Se pide $|\bar{R}|$, $|\bar{R}'|$



Por teorema de cantidad de movimiento

$$\Sigma \bar{F} = m \bar{a}_c$$

$$\Sigma \bar{F} = (R_x + R'_x) \bar{I} + (R_y + R'_y) \bar{J} + (R_z - mg) \bar{K}$$

$$\bar{a}_c = \bar{a}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{r}_{0c}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{0c})$$

$$\begin{cases} \bar{I}: R_x + R'_x = (-\omega^2 R) m & (1) \\ \bar{J}: R_y + R'_y = 0 & (2) \\ \bar{K}: R_z - mg = 0 & (3) \end{cases}$$

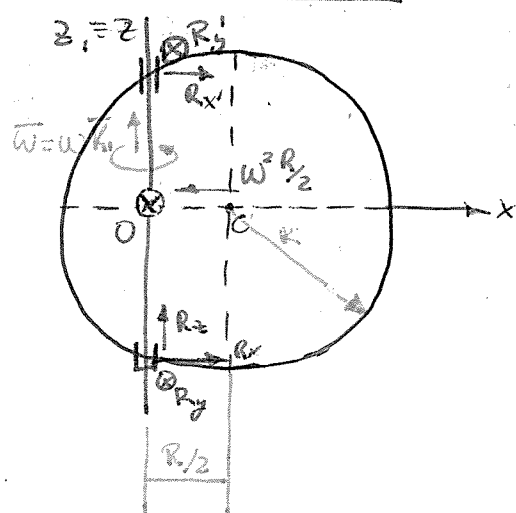
Por teorema de momento cinético en O: $\sum \vec{M}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{S_1} + \vec{r}_O \times \vec{P}$

$$\sum \vec{M}_O = (R_y - R'_y) R \vec{i} + (R'_x + mg - R_x) R \vec{j}$$

$$\sum \vec{L}_O = \vec{I}_O \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \vec{I}_z \omega \vec{k} \left\{ \begin{array}{l} = \text{cte en } S \\ = \text{cte en } S_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{S_1} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{i}: (R_y - R'_y) R = 0 \quad (4) \\ \vec{j}: (R'_x + mg - R_x) R = 0 \quad (5) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{De (2), (4)} \quad R_y = R'_y = 0 \\ \text{De (3)} \quad R_z = mg \\ \text{De (1), (5)} \quad \begin{cases} R_x = \frac{m}{2} (-\omega^2 R + g) \\ R'_x = -\frac{m}{2} (\omega^2 R + g) \end{cases} \end{array} \right.$$

Ej. Sól. con Eje Fijo 6 Se piden Reacciones. $\omega = \text{cte}$, R_z , m , pero despreciable



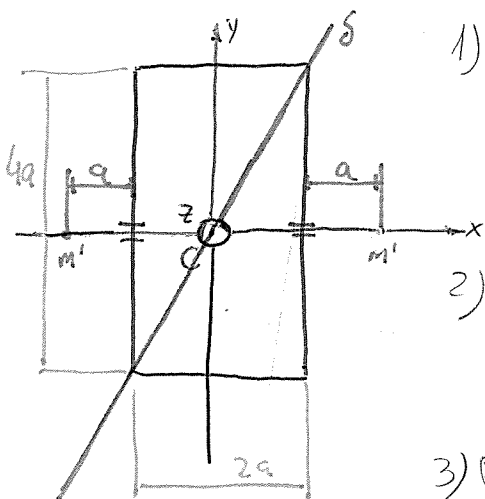
Por teorema de cantidad de movimiento $\sum \vec{F} = m \vec{a}^c$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i}: R_x + R'_x = (-\omega^2 \frac{R}{2}) m \quad (1) \\ \vec{j}: R_y + R'_y = 0 \quad (2) \\ \vec{k}: R_z = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

Se presenta una situación de simetría geom y dinámica tal que se puede asegurar

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = R'_x \quad (4) \\ R_y = R'_y \quad (5) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_y = R'_y = 0 \\ R_z = 0 \\ R_x = R'_x = -\frac{\omega^2 R m}{4} \end{array} \right. \quad 2R_x = -\frac{\omega^2 R m}{2}$$

Ej. Sól. Eje Fijo 19



$$1) \vec{I}_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m 16a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m 20a^2 \end{bmatrix}$$

2) $\sum M_C = 0$, porque en C se aplica mg (no da momento) R_y y R'_x cortan a x (donde $M_C = 0$) y no hay giro en y ni en z

3) Para simetría rectángulo + $m' + m'$, $C_{TOTAL} \in \delta \equiv C_{inicial}$ (equil. estat)

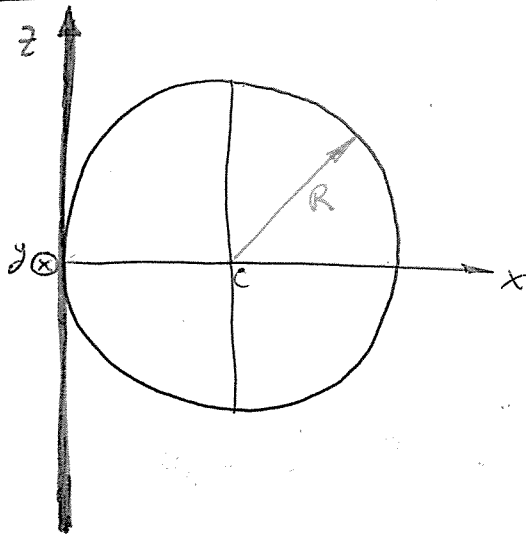
x y y son de simetría para sistema "rect + $m' + m'$ " $\Rightarrow S: I_x^{Sist} = I_y^{Sist}$

Se tendría elipsoide de revolución en C entorno a $\vec{z} \Rightarrow \forall \delta \in xy$ por C sería δ ppal inercia

$$\text{con } I_\delta^{Sist} = I_x^{Sist} = I_y^{Sist} \left\{ \begin{array}{l} I_x^{Sist} = I_x^{rect} + I_{x_0}^{m'} + I_{x_0}^{m'} = \frac{1}{12} m 16a^2 = \frac{4}{3} m a^2 \\ I_\delta^{Sist} = I_y^{rect} + I_y^{m'} + I_y^{m'} = \frac{1}{12} m 4a^2 + m 4a^2 \cdot 2 = \frac{1}{3} m a^2 + 8 m' a^2 \end{array} \right.$$

Por tanto, como $I_x^{sist} = I_y^{sist} \Rightarrow \frac{4}{3}ma^2 = \frac{1}{3}ma^2 + 8m'a^2 \Rightarrow \boxed{m' = \frac{m}{8}}$

EJ. Sól. CON EJE FIJO 14



Para eq dinámico de disco + m' se necesita

- C_{TOT} sobre z (eje de giro)
- C_{TOT} en recta de unión de m' y $C \Rightarrow m'$ sobre plano xz

• z principal de $disco + m' \Rightarrow$

$X_{m'} = 0$ imposible pero no elegía C_{TOT} en z

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_{m'} = 0 \\ Z_{m'} = 0 \end{cases} \rightarrow m' \text{ sobre eje } x$$

$$P_{xz}^{TOTAL} = P_{xz}^{disc} + P_{xz}^{mex} = 0$$

(x, z iguales disco)

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{m'} = 0 \\ Z_{m'} = 0 \end{cases} \rightarrow m'X_{m'}Z_{m'} = 0$$

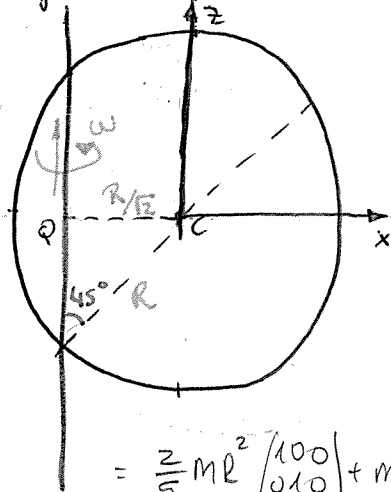
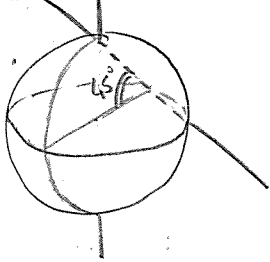
$$P_{yz}^{TOTAL} = P_{yz}^{disc} + P_{yz}^{mex} = 0$$

0 $m'Y_{m'}Z_{m'}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{m'} = 0 \\ Z_{m'} = 0 \end{cases}$$

• Por GMI: $X_{C_{TOT}} = \frac{m'X_{m'} + mX_c}{m' + m} = \frac{m'X_{m'} + mR}{m' + m} = 0$ (para estar en eje z)

$$\boxed{X_{m'} = -\frac{m}{m'}R}$$

EJ. Sól. EJE FIJO 4 Esfera: R, m, ω . $\alpha = 45^\circ$. $I_{dram} = \frac{2}{5}mR^2$ Se pide T .

$$T = \frac{1}{2} \omega \bar{I}_Q \omega$$

Necesitamos $\bar{I}_Q$

$$Q_C = \left| \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \right|^2$$

$$\bar{I}_Q = \bar{I}_C + m \overline{Q_C Q_C} \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix} - m \overline{Q_C} \cdot \overline{Q_C}^T =$$

$\begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{2}{5}mR^2 \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix} + m \frac{R^2}{2} \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

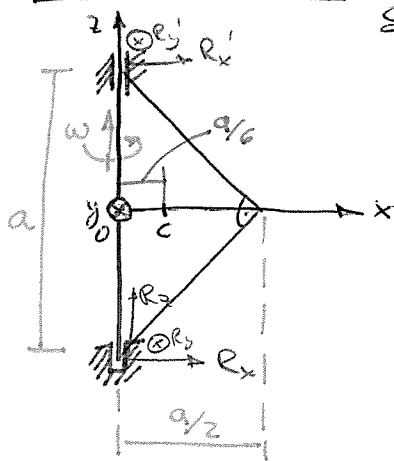
$$= mR^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4+5}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \omega \bar{I}_Q \omega = \frac{1}{2} (0, 0, \omega) \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} (0, 0, \omega) = \frac{1}{20} (0, 0, 9\omega) (0, 0, \omega) \Rightarrow$$

$$\boxed{T_1 = \frac{mR^2}{20} 9\omega^2}$$

Ej. Sól. Eje Fijo 7

Triángulo rectángulo isósceles: hip. a , m ; $\omega = \text{cte}$; peso despreciable. Se piden reacciones.



Por triángulo sabemos que C dista de O : $\frac{1}{3} \frac{a}{2} = \frac{a}{6}$

Por teorema de la cantidad de movimiento: $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_c$

$$\Sigma \vec{F} = (R_x + R_x') \vec{i} + (R_y + R_y') \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OC}) = \omega^2 \frac{a}{6} (-\vec{i})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x + R_x' = (-\omega^2 \frac{a}{6}) m \\ R_y + R_y' = 0 \\ R_z = 0 \end{array} \right.$$

Por teorema del momento cinético: $\Sigma M_o = \left(\frac{dL_o}{dt} \right)_{S_1} + \vec{r}_o \times \vec{p}$

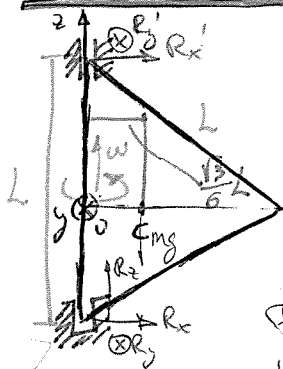
$$L_o = \vec{I}_o \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = I_z \omega = (\text{cte en } S_1) \rightarrow \left(\frac{dL_o}{dt} \right)_{S_1} = 0$$

$xyz \rightarrow x_3 z$ principales en O

$$\Rightarrow \Sigma M_o = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{i}: (R_y - R_y') \frac{a}{2} = 0 \rightarrow R_y = R_y' = 0, R_z = 0 \\ \vec{j}: (R_x' - R_x) \frac{a}{2} = 0 \rightarrow R_x = R_x' = -\omega^2 \frac{a}{12} m \\ \vec{k}: \text{---} \end{array} \right.$$

Ej. Sól. Eje Fijo 8

Triángulo equilátero: L , m ; $\Omega = \text{cte}$. Se piden reacciones.



Por teorema de la cantidad de movimiento: $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_c$

$$\Sigma \vec{F} = (R_x + R_x') \vec{i} + (R_y + R_y') \vec{j} + (R_z - mg) \vec{k}$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OC}) = -\Omega^2 |\vec{OC}| \vec{i} = -\Omega^2 \frac{\sqrt{3}}{6} L \vec{i}$$

Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x + R_x' = \left(-\Omega^2 \frac{\sqrt{3}}{6} L \right) m \quad (1) \\ R_y + R_y' = 0 \quad (2) \\ R_z - mg = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$|\vec{OC}| = \frac{1}{3} H = \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} L = \frac{\sqrt{3} L}{6}$$

Aplicamos ahora el teorema del momento cinético: $\Sigma M_o = \left(\frac{dL_o}{dt} \right)_{S_1} + \vec{r}_o \times \vec{p}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_o = (R_y - R_y') \frac{L}{2} \vec{i} + \left((R_x' - R_x) \frac{L}{2} + mg \frac{\sqrt{3}}{6} L \right) \vec{j} \\ L_o = \vec{I}_o \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = I_z \Omega = \text{cte en } S_1 \rightarrow \left(\frac{dL_o}{dt} \right)_{S_1} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_y - R_y' = 0 \equiv i \quad (4) \\ \frac{R_x' - R_x}{2} + mg \frac{\sqrt{3}}{6} = 0 \equiv j \quad (5) \end{array} \right.$$

Por tanto de ①②③④⑤ tenemos:

$$\begin{cases} R_y = R_y' = 0 \\ R_z = mg \\ R_x + R_x' = \left(-R^2 \frac{\sqrt{3}}{6} L\right) m \\ R_x' - R_x = -2mg \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2R_x' = -\frac{\sqrt{3}}{6} m (\Omega^2 L + 2g); R_x' = -\frac{\sqrt{3}}{12} m (\Omega^2 L + 2g)$$

$$R_x = -R^2 \frac{\sqrt{3}}{6} m L + \frac{\sqrt{3}}{12} m \Omega^2 L + \frac{\sqrt{3}}{12} m 2g = \frac{\sqrt{3} m (-2\Omega^2 L + R^2 L + 2g)}{12} = \frac{\sqrt{3} m (2g - \Omega^2 L)}{12}$$

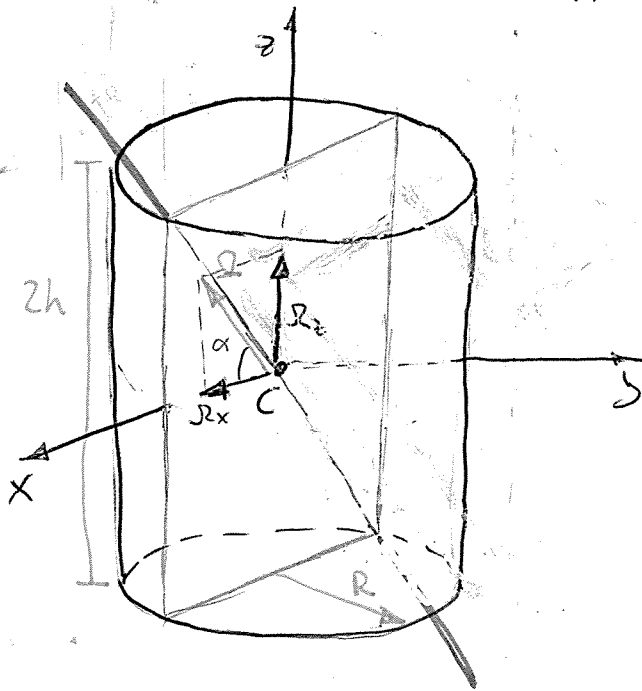
$$R_z = mg$$

Por tanto

$$\begin{cases} |R_{\text{empuje}}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} m (2g - \Omega^2 L)}{12}\right)^2 + (mg)^2} \\ |R_{\text{radial}}| = \frac{\sqrt{3}}{12} m (\Omega^2 L + 2g) \end{cases}$$

EJ. SOL. EJE FIJO 9

Cilindro: $2h, R, m, \Omega = \text{cte.}$ Se pide T



$$\bar{\Omega} = (\omega \sin \alpha, 0, \omega \cos \alpha); \text{ con } \alpha = \arctg \frac{h}{R}$$

$$\text{Por tanto } \bar{\Omega} = \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}, 0, \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \Omega$$

$$\text{Buscamos } T = \frac{1}{2} \omega \left| \bar{\mathbb{I}}_C \right| \omega$$

$$\bar{\mathbb{I}}_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m \left(R^2 + \frac{(2h)^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m \left(R^2 + \frac{(2h)^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{pmatrix}$$

↑
principales

$$T = \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\sqrt{R^2 + h^2}} (R, 0, h) \frac{1}{4} m \begin{pmatrix} R^2 + \frac{4h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + \frac{4h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} \frac{\Omega}{\sqrt{R^2 + h^2}} (R, 0, h) =$$

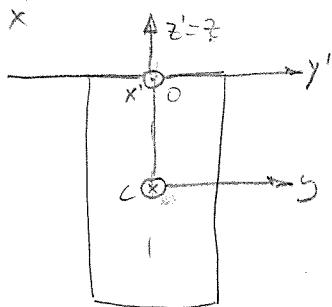
$$= \frac{1}{8m} \frac{\Omega^2 m}{(R^2 + h^2)} \left(R \left(R^2 + \frac{4h^2}{3} \right), 0, 2R^2 h \right) (R, 0, h) = \frac{R^2 \Omega^2 m}{8m(R^2 + h^2)} \left(R^2 + \frac{4h^2}{3} + 2h^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{24} m \Omega^2 \frac{R^2}{R^2 + h^2} (3R^2 + 10h^2)$$

Ej Sol. Eje Fijo 10 Cilindro: $R, H=R, m, \Omega$. Se pide T



$$T = \frac{1}{2} \omega \left|_{x'y'z'} \bar{I}_0 \right|_{x'y'z'} \omega \quad ; \quad \omega \left|_{x'y'z'} = (0, \Omega, 0) \right.$$



x', y', z' son principales de inercia en O

$$\bar{I}_0 = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} = I_z \end{pmatrix} \quad I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{4} m \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right) = \frac{1}{4} m \left(R^2 + \frac{R^2}{3} \right) = \frac{1}{4} m \frac{4R^2}{3} = \frac{R^2 m}{3}$$

Por Steiner $I_{x'} = I_x + m \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{R^2 m}{3} + m \frac{R^2}{4} = \frac{7R^2 m}{12}$

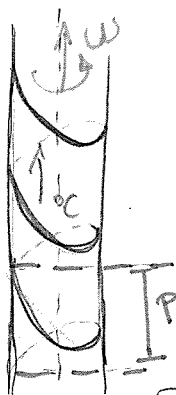
$$I_{x'} = I_{y'}$$

$$I_{z'} = I_z = \frac{1}{2} m R^2$$

$$T = \frac{1}{2} (0, \Omega, 0) R^2 m \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} (0, \Omega, 0) = \frac{1}{2} (0, \frac{7}{12} \Omega, 0) (0, \Omega, 0) R^2 m$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \frac{7}{12} m R^2 \Omega^2 = \frac{7}{24} m R^2 \Omega^2}$$

Ej Sol. Eje Fijo 11 Tornillo: R, p, m, ω . Calcular T .



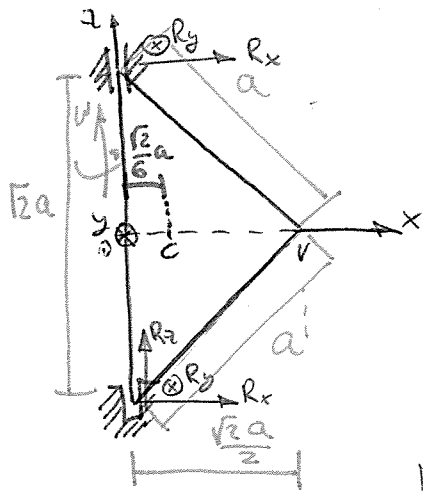
Por 2^o Koenig: $T = \frac{1}{2} m \bar{U}_c^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\omega \cdot \bar{I}_c \cdot \omega}_{\omega \bar{K} I_c \bar{K} \omega}$
 $\bar{I}_z = \frac{1}{2} m R^2$

$\bar{U}_c = \dot{z}$; Buscamos z

$\frac{2\pi \text{ rad}}{p} = \frac{\varphi}{z} \quad ; \quad z = \frac{p \varphi}{2\pi} \quad ; \quad \dot{z} = \frac{p}{2\pi} \dot{\varphi} = \frac{p}{2\pi} \omega$

Por tanto: $\boxed{T = \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{2\pi} \omega \right)^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m \omega^2 \left(\frac{p^2}{2\pi^2} + R^2 \right)}$

Ej. Sól. Eje Fijo 13 Triángulo rectángulo isósceles. m , cateto $= a$; ω . Pero de ω se piden reacciones



$$OC = \sqrt{a^2 - \frac{2}{9}a^2} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

$$OC = \frac{1}{3} OV = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

Por teorema de cantidad de movimiento $\Sigma F = m \bar{a}_C$

$$\Sigma F = (R_x + R_x')\vec{i} + (R_y + R_y')\vec{j} + R_z\vec{k}$$

$$\bar{a}_C = \vec{a}_0 + \omega \times (\omega \times \vec{OC}) = \frac{\sqrt{3}a}{6} \omega^2 (-\vec{i})$$

$$\begin{cases} R_x + R_x' = (-\frac{\sqrt{3}a}{6} \omega^2) m \\ R_y + R_y' = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

Por teorema del momento cinético $\Sigma M_0 = \left(\frac{dL_0}{dt} \right)_{S_1} + \vec{r}_0 \times \vec{p}$ $\left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \Sigma M_0 = 0$

$$L_0 = \vec{I}_0 \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = I_z \omega \text{ (eje en } S_1) \rightarrow \left(\frac{dL_0}{dt} \right)_{S_1} = 0$$

$$\begin{cases} R_y \frac{\sqrt{3}a}{2} - R_y' \frac{\sqrt{3}a}{2} = 0 \rightarrow R_y = R_y' = 0 \\ R_x' \frac{\sqrt{3}a}{2} - R_x \frac{\sqrt{3}a}{2} = 0; R_x = R_x' \rightarrow R_x = (-\frac{\sqrt{3}a}{12} \omega^2) m \end{cases}$$

Reacciones (módulos) $\rightarrow R_x = R_x' = \frac{\sqrt{3}a}{12} m \omega^2$

Ej. Sól. Eje Fijo 15 Cubo: $2a$, m ; Ω

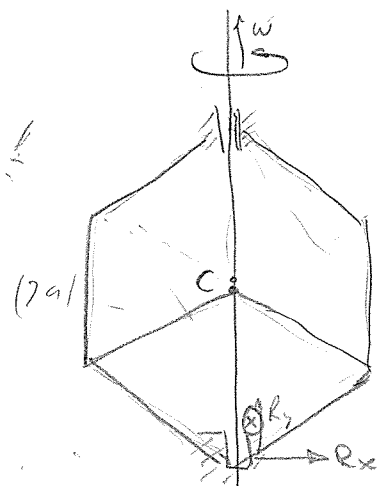
$$\vec{\Omega} = \Omega \cdot (1, 1, 1) \frac{1}{\sqrt{3}}; T = \frac{1}{2} \omega|_{x,y,z} I_c|_{x,y,z} \omega|_{x,y,z}$$

x, y, z paralelos en cubo

Eje principal $I_x = I_y = I_z = \frac{1}{6} m (2a)^2$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \begin{pmatrix} I_y & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_x \end{pmatrix} \frac{\Omega}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{3} \frac{1}{6} m 4a^2 \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)}{3} = \\ &= \frac{1}{3} m a^2 \Omega^2 \end{aligned}$$

EJ. SÓL. EJE FIJO 16 Obtener Reacciones si sujetamos el cubo anterior por 2 ejes. Industriale.com



Por teorema cent. mov. $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_C$

$$\begin{cases} R_x + R_x' = 0 \\ R_y + R_y' = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

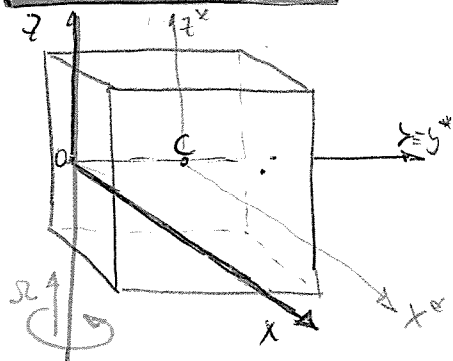
Por teorema mom. cinético $\Sigma \vec{M}_C = \left(\frac{d\vec{L}_C}{dt} \right)_{S_1} + \vec{v}_C \times \vec{p}$

$$\begin{cases} R_x \frac{a}{2} - R_x' \frac{a}{2} = 0 \\ R_y \frac{a}{2} - R_y' \frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

Reacciones nulas por sistema dinámicamente equilibrado

De wjmeter a C $\rightarrow d = \sqrt{2}a$

EJ. SÓL. EJE FIJO 17 Cubo: $2a, m$; Ω . Hallar T.



x, y, z principales de inercia en O

$$I_y = I_{y^*} = \frac{1}{6} m (2a)^2$$

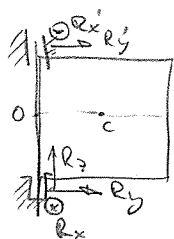
$$I_x = I_{x^*} + m a^2 = \frac{1}{6} m (2a)^2 + m a^2 = m a^2 \left(\frac{4}{6} + 1 \right) = m a^2 \frac{5}{3}$$

$$I_z = I_{z^*} + m a^2 = m a^2 \frac{5}{3}$$

$$\left[T = \frac{1}{2} (0, 0, \Omega) \begin{pmatrix} \frac{1}{6} m 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} m a^2 \end{pmatrix} (0, 0, \Omega) \right] = \frac{1}{2} \frac{5}{3} m a^2 \Omega^2 = \frac{5}{6} m a^2 \Omega^2$$

$(0, 0, \frac{5}{3} m a^2 \Omega) (0, 0, \Omega)$

EJ. SÓL. EJE FIJO 18 Sujetamos cubo anterior con wjmeter. Obtener Reacciones.



Por teorema cent. mov. $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_C$; con $\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OC} = \Omega^2 a (-\vec{j})$

$$\begin{cases} R_x + R_x' = 0 \\ R_y + R_y' = -\Omega^2 a m \\ R_z = 0 \end{cases}$$

Por teorema mom. cinético $\Sigma \vec{H}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{S_1} + \vec{v}_O \times \vec{p}$

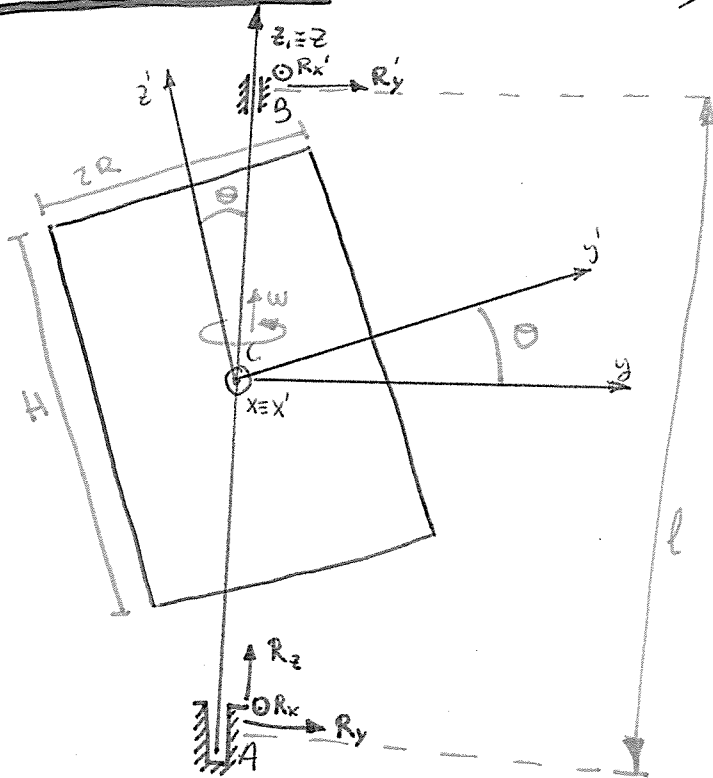
$$R_z a - R_y' a = 0 \rightarrow |R_y| = |R_y'| = \frac{\Omega^2 a^2 m}{2}$$

$$R_x' a - R_x a = 0 \rightarrow R_x = R_x' = 0$$

$$R = \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 m$$

PROB SOL. EJE FIJO 1

Cilindro: $\sigma, M, H, R, \ell = AB$



1) $\bar{I}_c|_{x'y'z'}$

$$\bar{I}_c|_{x'y'z'} = \dots = \frac{1}{12} MR^2 \begin{bmatrix} 3 + \frac{H^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 + \frac{H^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2) $\bar{I}_c|_{xyz}$

Mat. cambio base

$$\bar{I}_c|_{xyz} = T \bar{I}_c|_{x'y'z'} T^t, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_c|_{xyz} = \dots = \frac{1}{12} MR^2 \begin{bmatrix} 3 + \frac{H^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & (3 + \frac{H^2}{R^2}) \cos^2\theta + 6 \sin^2\theta & (\frac{H^2}{R^2} - 3) \sin\theta \cos\theta \\ 0 & (\frac{H^2}{R^2} - 3) \sin\theta \cos\theta & (3 + \frac{H^2}{R^2}) \sin^2\theta + 6 \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

3) Justificar $\bar{\omega} = cte$

Por teorema del momento cinético axial según z (fijo)

$$\sum \bar{M}_z = \underbrace{(\bar{I}_z)}_{cte} \ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \dot{\varphi} = cte = \dot{\varphi}(t=0) = \omega_0$$

0 (todas las fuerzas cortantes son paralelos a z)

4) T c/fijo Ap 2 $\rightarrow$ Intentar hacer con $\bar{I}_{x'y'z'}$

$$\left[T \right] = \frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{I}_c \bar{\omega} = \frac{1}{2} \omega \underbrace{\bar{K} \bar{I}_c \bar{K}}_{\bar{I}_z} \omega = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\left(3 + \frac{H^2}{R^2} \right) \sin^2\theta + 6 \cos^2\theta \right) \frac{1}{12} MR^2$$

5) Determinar $\frac{H}{R}$ para eq. dinámico

Equilibrado dinámico si $\left\{ \begin{array}{l} C \text{ en } z \text{ (simple)} \\ z \text{ principal} \end{array} \right. \rightarrow z \text{ principal si}$

1º método: si elipsoide es esférico

$$3 + \frac{H^2}{R^2} = 6, \quad \boxed{\frac{H}{R} = \sqrt{3}}$$

2º método: $P_{xz} = 0, P_{yz} = 0$

$$\left(\frac{H^2}{R^2} - 3 \right) \sin\theta \cos\theta = 0, \quad \boxed{\frac{H}{R} = \sqrt{3}}$$

6) R_y H arbitrarios determinar componentes de las reacciones en cada soporte

Por teorema de la cantidad de movimiento: $\sum \vec{F} = m \vec{a}_c$

$$\begin{cases} \vec{i}: R_x + R'_x = 0 & (1) \\ \vec{j}: R_y + R'_y = 0 & (2) \\ \vec{k}: R_z - mg = 0 & (3) \end{cases}$$

Por teorema de mom. cinético en C: $\sum \vec{M}_c = \left(\frac{d\vec{L}_c}{dt} \right)_{s_1} + \vec{v}_c \times \vec{p}$

$$\sum \vec{M}_c = (R_y - R'_y) \frac{l}{2} \vec{i} + (R'_x - R_x) \frac{l}{2} \vec{j}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_c}{dt} \right)_{s_1} = \left(\frac{d\vec{L}_c}{dt} \right)_s + \vec{\omega} \times \vec{L}_c \implies$$

$$\vec{L}_c = \vec{I}_c \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{12} m R^2 \begin{bmatrix} 3 + \frac{H^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & (3 + \frac{H^2}{R^2}) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & (\frac{H^2}{R^2} - 3) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & (\frac{H^2}{R^2} - 3) \sin \theta \cos \theta & (3 - \frac{H^2}{R^2}) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{matrix} Q \\ P \\ P \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{12} m R^2 (Q \vec{\omega} + P \vec{\omega}) = \text{cte en } S$$

$$\implies \left(\frac{d\vec{L}_c}{dt} \right)_{s_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & Q\omega & P\omega \end{vmatrix} \frac{1}{12} m R^2 = -Q\omega^2 \frac{1}{12} m R^2 \vec{i}$$

Por tanto

$$\vec{i}: \frac{l}{2} (R_y - R'_y) = -\frac{1}{12} m R^2 \omega^2 \left(\frac{H^2}{R^2} - 3 \right) \sin \theta \cos \theta \quad (4)$$

$$\vec{j}: \frac{l}{2} (R'_x - R_x) = 0 \quad (5)$$

$$\boxed{R_x = R'_x = 0}, \quad \boxed{R_z = mg}, \quad \boxed{R_y = -R'_y = -\frac{1}{24} m R^2 \omega^2 \left(\frac{H^2}{R^2} - 3 \right) \sin(2\theta)}$$

7) $\frac{H}{R}$ del ap. 5 calcule reacciones

$$\text{Con } \frac{H}{R} = \sqrt{3} \text{ se tiene } \begin{cases} R_x = R'_x = 0 \\ R_y = R'_y = 0 \\ R_z = mg \end{cases}$$

Con $\frac{H}{R} = \sqrt{3}$ sólido equilibrado dinámicamente y por tanto componentes dinámicos de reacciones se anulan (Aquí R_y y R'_y)

SÓLIDO CON EJE FIJO

1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se estudia el caso de un sólido que puede girar en torno a una recta (eje de giro δ) inmóvil respecto a un sistema inercial $(S_1, O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$. Este eje está sujeto mediante dos cojinetes, uno de empuje aplicado a un punto O y otro radial en otro punto O' . Se considera un sistema $(S, O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ligado al sólido, con origen en O y el tercer eje coincidente en dirección y sentido con OO' .

Se denomina $\vec{F}$ a la resultante del sistema de fuerzas ^{Aplicados} y $\vec{M}$ al momento del mismo en O . Inicialmente, S_1 y S son coincidentes. Las fuerzas de ligadura en los cojinetes son:

- En O : $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$

- En O' : $\vec{R}' = R'_x \vec{i} + R'_y \vec{j}$

Solamente es necesaria una coordenada para definir la posición y el movimiento del sólido, el ángulo φ que representa el giro de S respecto de S_1 . Interesa por tanto encontrar una ecuación diferencial en φ donde no intervengan las reacciones, que son incógnitas. Aplicando el teorema del momento cinético proyectado según el eje de giro (teorema del momento cinético áxico), las reacciones no proporcionarán momento áxico según el eje, pues cortan al mismo. Así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{L}_O = \vec{I}_O \cdot \vec{\omega} \\ \vec{\omega} = \omega_z \vec{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{k} = I_z \omega_z = I_z \dot{\varphi} \right] \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = M_z \Rightarrow \boxed{I_z \ddot{\varphi} = M_z}$$

Integrando esta última ecuación diferencial se determina la posición del sólido en cada instante.

2.- REACCIONES DE LIGADURA

Para determinar las componentes de las reacciones en los cojinetes se emplearán los teoremas de cantidad de movimiento y momento cinético respecto de O :

- Por teorema cantidad de movimiento:

$$\boxed{m \dot{\vec{v}}_C = \vec{F} + \vec{R} + \vec{R}'} \quad (1)$$

- Por campo de velocidades y aceleraciones del sólido rígido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C \\ \vec{a}_C = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_C \end{array} \right.$$

Así:
$$m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_C) = \vec{F} + \vec{R} + \vec{R}'$$

Siendo $\vec{L}_O = \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}$ expresados en S , por el teorema del momento cinético se tiene (aplicando derivación en ejes móviles):

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \vec{I}_O \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}$$

En O , $\vec{R}$ no da momento, las fuerzas aplicadas dan momento $\vec{M}$ y la reacción $\vec{R}'$ en O da momento $h\vec{k} \times \vec{R}'$. Por tanto:

$$\vec{I}_O \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{I}_O \cdot \vec{\omega} = \vec{M} + h\vec{k} \times \vec{R}' \quad (2)$$

Si se multiplica (2) vectorialmente por $\vec{k}$ se obtiene:

$$(\vec{I}_O \cdot \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{k} + (\vec{\omega} \times \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}) \times \vec{k} = \vec{M} \times \vec{k} + h\vec{R}'$$

*Desarrolla
no importa.*

Despejando:

$$\vec{R}' = \frac{(\vec{I}_O \cdot \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{k} + (\vec{\omega} \times \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}) \times \vec{k} - \vec{M} \times \vec{k}}{h}$$

Y sustituyendo en (1):

$$\vec{R} = -\vec{F} + m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_C) - \frac{(\vec{I}_O \cdot \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{k} + (\vec{\omega} \times \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}) \times \vec{k} - \vec{M} \times \vec{k}}{h}$$

3.- EQUILIBRADO ESTÁTICO Y DINÁMICO

Considerando $\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{k}$ y sustituyendo en las ecuaciones de $\vec{R}$ y $\vec{R}'$ se obtiene:

$$\vec{R}' = \frac{\ddot{\phi}(\vec{I}_O \cdot \vec{k}) \times \vec{k} + \dot{\phi}^2(\vec{k} \times \vec{I}_O \cdot \vec{k}) \times \vec{k} - \vec{M} \times \vec{k}}{h}$$

$$\vec{R} = -\vec{F} + m(\dot{\phi}^2 \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r}_C) + \ddot{\phi} \vec{k} \times \vec{r}_C) - \frac{\ddot{\phi}(\vec{I}_O \cdot \vec{k}) \times \vec{k} + \dot{\phi}^2(\vec{k} \times \vec{I}_O \cdot \vec{k}) \times \vec{k} - \vec{M} \times \vec{k}}{h}$$

Se observa que $\vec{R}'$ es perpendicular a $\vec{k}$, mientras que en $\vec{R}$, la componente según $\vec{k}$ es $R_z = -F_z$.

Las componentes de $\vec{R}$ y $\vec{R}'$ se pueden separar en:

- componentes debidas exclusivamente al sistema de fuerzas aplicado ($\vec{F}$ y $\vec{M}$). Estos términos son los mismos que aparecerían en condiciones estáticas (sin movimiento). Se llaman componentes estáticas de la reacción, siendo respectivamente:

$$\underbrace{\vec{R}'_s = -\frac{\vec{M} \times \vec{k}}{h}}_{\text{Comp. estáticas}} ; \quad \underbrace{\vec{R}_s = -\vec{F} + \frac{\vec{M} \times \vec{k}}{h}}_{\text{Comp. estáticas}}$$

- componentes que dependen de la geometría de masas (m , $\vec{r}_C$, $\vec{I}_O$) y la cinemática ($\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$). Aparecen cuando el sólido esta en movimiento, reciben el nombre de componentes centrífugas o dinámicas y son perpendiculares al eje (al vector $\vec{k}$). Son:

Son las que queremos central dinámico

$$\begin{cases} \bar{R}'_{cf} = \frac{\ddot{\phi}(\bar{I}_O \cdot \bar{k}) \times \bar{k} + \dot{\phi}^2(\bar{k} \times \bar{I}_O \cdot \bar{k}) \times \bar{k}}{h} \\ \bar{R}_{cf} = m(\dot{\phi}^2 \bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{r}_C) + \ddot{\phi} \bar{k} \times \bar{r}_C) - \frac{\ddot{\phi}(\bar{I}_O \cdot \bar{k}) \times \bar{k} + \dot{\phi}^2(\bar{k} \times \bar{I}_O \cdot \bar{k}) \times \bar{k}}{h} \end{cases}$$

Trabajando en el sistema S (las componentes de $\bar{r}_C$ y $\bar{I}_O$ son constantes) se tiene:

$$\bar{r}_C = \xi \bar{i} + \eta \bar{j} + \zeta \bar{k}$$

$$\bar{I}_O \cdot \bar{k} = -P_{zx} \bar{i} - P_{yz} \bar{j} + I_z \bar{k}$$

$$\bar{k} \times \bar{r}_C = -\eta \bar{i} + \xi \bar{j}$$

$$(\bar{I}_O \cdot \bar{k}) \times \bar{k} = -P_{yz} \bar{i} + P_{zx} \bar{j}$$

$$(\bar{k} \times \bar{I}_O \cdot \bar{k}) \times \bar{k} = -P_{zx} \bar{i} - P_{yz} \bar{j}$$

$$\bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{r}_C) = -\xi \bar{i} - \eta \bar{j}$$

$$\bar{k} \times (\bar{I}_O \cdot \bar{k}) = P_{yz} \bar{i} - P_{zx} \bar{j}$$

y así:

$$R_{x_{cf}} = \ddot{\phi} \left(-m\eta + \frac{P_{yz}}{h} \right) + \dot{\phi}^2 \left(-m\xi + \frac{P_{zx}}{h} \right)$$

$$R_{y_{cf}} = \ddot{\phi} \left(m\xi - \frac{P_{zx}}{h} \right) + \dot{\phi}^2 \left(-m\eta + \frac{P_{yz}}{h} \right)$$

$$R'_{x_{cf}} = \ddot{\phi} \left(-\frac{P_{yz}}{h} \right) + \dot{\phi}^2 \left(-\frac{P_{zx}}{h} \right)$$

$$R'_{y_{cf}} = \ddot{\phi} \left(\frac{P_{zx}}{h} \right) + \dot{\phi}^2 \left(-\frac{P_{yz}}{h} \right)$$

Para un régimen de giro prácticamente constante, estas reacciones serían constantes en S . Proyectando en S_I se obtendrían unas reacciones con carácter oscilatorio:

$$R_{x_{I,I}} = R_{x_{cf}} \cos \varphi - R_{y_{cf}} \sin \varphi$$

$$R_{y_{I,I}} = R_{x_{cf}} \sin \varphi + R_{y_{cf}} \cos \varphi$$

$$R'_{x_{I,I}} = R'_{x_{cf}} \cos \varphi - R'_{y_{cf}} \sin \varphi$$

$$R'_{y_{I,I}} = R'_{x_{cf}} \sin \varphi + R'_{y_{cf}} \cos \varphi$$

de la misma frecuencia que el giro. Esto supone una fuente de vibraciones en los apoyos del sólido que acelera el desgaste de los cojinetes, de ahí que se intenten anular dichas reacciones.

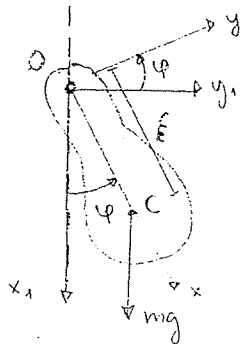
Si $\eta = \xi = 0$ y $P_{zx} = P_{yz} = 0$ las componentes centrífugas desaparecen y las reacciones en los apoyos pasan a ser independientes del movimiento, coincidiendo con las componentes estáticas. Se dice entonces que el eje está dinámicamente equilibrado. Además se cumple que en esta situación el eje de rotación es eje del elipsoide central de inercia.

Si la única fuerza aplicada es el peso y el sólido se encuentra inicialmente en reposo, con $\eta = \xi = 0$, para cualquier posición inicial φ_0 , el sistema está en equilibrio. Así, cuando el centro de masas se sitúa sobre el eje de rotación, se dice que el sólido está estáticamente equilibrado.

Equilibrado dinámico $\left\{ \begin{array}{l} \eta = \xi = 0 \\ P_{zx} = P_{yz} = 0 \end{array} \right.$

PÉNDULO COMPUESTO TEOREMA DE HUYGHENS

PÉNDULO FORMADO POR UN SÓLIDO PESADO QUE PUEDE GIRAR EN TORNO A UN EJE FIJO ($Z_1 \equiv Z$)



S : SISTEMA LIGADO AL SÓLIDO

S_0 : SISTEMA INERCIAL

$$\vec{i} = \cos\varphi \vec{i}_1 + \sin\varphi \vec{j}_1$$

$$\vec{j} = -\sin\varphi \vec{i}_1 + \cos\varphi \vec{j}_1$$

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} : \vec{K} : -mg \cdot l \sin\varphi = I_Z \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mg l}{I_Z} \sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\frac{I_Z}{m l}} \sin\varphi = 0$$

Por comparación con el péndulo simple sincrónico (partícula puntual de masa m unida por un elemento sin masa (cuerda, alambre, ...) de longitud ℓ a un eje fijo), de ecuación: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin\varphi = 0$

se obtiene la relación $\ell = \frac{I_Z}{m l}$

Se define como eje de suspensión (Z) al eje fijo de giro, y como eje de oscilación (Z') a la recta paralela al eje de suspensión, coplanaria con éste y con el centro de masas, situada a una distancia ℓ del eje de suspensión y situada al otro lado del centro de masas.

Los puntos de este eje de oscilación se mueven como si fuesen péndulos simples.

LLAMANDO ℓ' A LA DISTANCIA ENTRE C Y EL EJE DE OSCILACIÓN, SE TIENE: $\ell = \ell + \ell'$

$$\text{CONSIDERANDO } I_Z = I_{Z_C} + m \ell^2 \Rightarrow \ell = \frac{I_{Z_C} + m \ell^2}{m \ell} = \frac{I_{Z_C}}{m \ell} + \ell \quad \left. \begin{array}{l} \text{COMO ADÉMÁS: } \ell' = \ell - \ell \end{array} \right\} \ell' \cdot \ell = \frac{I_{Z_C}}{m} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ES DECIR, QUE Z' ES DE OSCILACIÓN CUANDO Z ES DE SUSPENSIÓN Y Z ES DE OSCILACIÓN CUANDO Z' ES DE SUSPENSIÓN.

TEOREMA DE HUYGHENS: SI EN UN SÓLIDO RÍGIDO SE FIJAN SUCESIVAMENTE 2 EJES A Y B PARALELOS COPLANARIOS CON EL CENTRO DE MASAS, A AMBOS LADOS DE ÉSTE Y A DISTANCIAS DISTINTAS DEL MISMO, Y SE MIDEN LAS MISMAS OSCILACIONES ISÓCRONAS (LAS EQUIVALENTES A LAS DEL PÉNDULO SIMPLE SÍNCRONO), ENTONCES LA DISTANCIA ENTRE AMBOS EJES ES LA LONGITUD DEL PÉNDULO SIMPLE SÍNCRONO EQUIVALENTE. (DEMO SCHZ-PRÉ PAG 47)

EN CLASE

EJERCICIO S.E.F. 1 Parcial 1996-06-03

- 1) Una varilla de masa m y longitud $2a$ puede girar en torno a un eje horizontal fijo perpendicular a la varilla por uno de sus extremos. Calcular el periodo del movimiento correspondiente a las pequeñas oscilaciones de este péndulo compuesto.

EJERCICIO S.E.F. 2 Final 1996-06-24 final 2000-09-11 Junio 2002-06-10 Febrero 2003-02-10

- 2) Un sólido rígido gira en torno a un eje fijo δ . Identifique las condiciones que debe satisfacer δ para que el sólido esté dinámicamente equilibrado.

Enuncie las condiciones necesarias y suficientes para que un sólido rígido con un eje fijo se encuentre dinámicamente equilibrado

EJERCICIO S.E.F. 3 Final Febrero 1997-02-19

- 3) Un rectángulo homogéneo de masa m y lados $3a$, $4a$ puede girar en torno a una de sus diagonales con velocidad angular constante Ω . Calcule el módulo de las reacciones en los cojinetes si éstos están situados en los extremos de la diagonal, suponiendo el peso despreciable.

EJERCICIO S.E.F. 4 parcial 1998-02-03

- 4) Una esfera de radio R y masa m , gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje fijo que pasa por un punto de su superficie en el que forma un ángulo de 45° con el diámetro correspondiente. Sabiendo que el momento de inercia de la esfera respecto a un diámetro es $\frac{2}{5}mR^2$, determine la energía cinética de la esfera.

EJERCICIO S.E.F. 5 Junio 2000-07-03

- 5) Un círculo homogéneo de peso mg y radio R gira con velocidad angular constante Ω en torno a un eje fijo vertical, tangente y coplanario con dicho círculo. El eje se sujeta con dos cojinetes: uno axial situado a una distancia R por debajo del punto de tangencia y otro radial, situado a una distancia R por encima del punto de tangencia. Obtenga los módulos de las reacciones en cada apoyo..

EJERCICIO S.E.F. 6 febrero 2001-02-19

- 6) Un círculo homogéneo de masa m y radio R gira con velocidad angular constante ω en torno a una de sus cuerdas que está fija a una distancia $R/2$ de su centro. Se sujeta dicha cuerda con dos cojinetes situados en sus extremos. Obtenga las reacciones en los apoyos, despreciando el peso del círculo.

EJERCICIO S.E.F. 7 Junio 2001-06-20 Febrero 2006-02-03

7) Un triángulo rectángulo, isósceles y homogéneo, de hipotenusa a y masa m , gira con velocidad angular constante ω en torno a su hipotenusa. Se sujeta dicha hipotenusa con dos cojinetes situados en sus extremos, A y B . Obtenga las reacciones en los apoyos, despreciando el peso del triángulo.

EJERCICIO S.E.F. 8 Septiembre 2001-09-19

8) Un triángulo equilátero, σ , de lado L y masa m , gira en torno a uno de sus lados, que permanece vertical, con velocidad angular Ω constante. El triángulo se encuentra sostenido por un cojinete de empuje en el vértice inferior y uno radial en el superior. Obtenga el módulo de las reacciones en los cojinetes.

EJERCICIO S.E.F. 9 Febrero 2002-02-11

9) Calcule la energía cinética de un cilindro de revolución, macizo y homogéneo, de altura $2h$, radio R y masa m , cuando gira con velocidad angular de módulo Ω en torno a una recta que pasa por su centro de masas y se apoya en el borde de las dos bases.

EJERCICIO S.E.F. 10 Septiembre 2002-09-16

10) Calcule la energía cinética de un cilindro de revolución, macizo y homogéneo, de altura igual a su radio, R , y masa m , cuando gira con velocidad angular de módulo Ω en torno a un diámetro de una de sus bases.

EJERCICIO S.E.F. 11 Junio 2003-06-09

11) Un tornillo de sección circular, de masa m , paso p y radio medio R , se hace girar con velocidad angular ω alrededor de un eje fijo coincidente con su eje geométrico. Calcule su energía cinética.

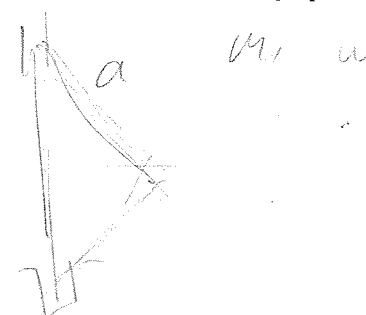
EJERCICIO S.E.F. 12 Febrero 2004-02-12 Septiembre 2004-09-23 Junio 2007-06-18

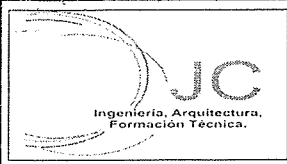
12) Obtenga el periodo de las pequeñas oscilaciones de un segmento pesado, de longitud L , que puede girar en un plano vertical en torno a un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos.

Una barra homogénea de longitud a y masa m puede oscilar verticalmente en torno a un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones de este sistema en torno a su posición de equilibrio estable.

EJERCICIO S.E.F. 13 Febrero 2004-02-12 Junio 2004-06-17

13) Sea una chapa uniforme, de espesor despreciable, cuyo contorno es el de un triángulo rectángulo isósceles. Si la chapa se hace girar alrededor de su hipotenusa, sobre dos cojinetes situados en los extremos de la misma, determine las reacciones en los cojinetes sabiendo que la masa de la chapa es m , la longitud de uno de sus catetos a , la velocidad de rotación ω y que se desprecia el peso y cualquier otra fuerza aplicada.



	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	--	---



EJERCICIO S.E.F. 14 Septiembre 2004-09-23

- 14) Un círculo de masa m y radio R puede rotar en torno a una recta tangente al mismo. Se desea equilibrar dinámicamente el sistema añadiendo una masa puntual m' que gire solidariamente al círculo. Determine la posición en la que hay que situarla.

EJERCICIO S.E.F. 15 Febrero 2005-02-07

- 15) Halle la energía cinética que tendría un cubo de arista $2a$ y masa m si rotara con una velocidad angular Ω alrededor de una de sus diagonales.

EJERCICIO S.E.F. 16 Febrero 2005-02-07

- 16) Obtenga las componentes dinámicas de las reacciones que existirían si se sujetase el cubo anterior con dos cojinetes, situados en los extremos de la diagonal.

EJERCICIO S.E.F. 17 Septiembre 2005-09-05

- 17) Halle la energía cinética que tendría un cubo de arista $2a$ y masa m si rotara con una velocidad angular Ω alrededor de un eje por el centro de una de sus caras y paralelo a una de las aristas de dicha cara.

EJERCICIO S.E.F. 18 Septiembre 2005-09-05

- 18) Obtenga el valor modular de las componentes dinámicas de las reacciones que existirían si se sujetase el cubo anterior con dos cojinetes situados en los puntos de intersección del eje con las aristas.

EJERCICIO S.E.F. 19 Junio 2006-06-13

- 19) Sea un rectángulo de ecuaciones

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -2a \leq y \leq 2a \\ z = 0 \end{cases}$$

y masa m distribuida uniformemente sobre su superficie. Exprese su tensor central de inercia en los ejes xyz .

Si se hace girar el rectángulo anterior, de peso mg , con una velocidad constante Ω en torno al eje x que es horizontal, determine el módulo del momento respecto al centro de masas definido por el sistema de fuerzas de ligadura.

Se desea hacer girar el rectángulo de las cuestiones previas en torno a una de sus diagonales, y para equilibrarlo dinámicamente se añaden dos puntos materiales, cada uno de masa m' , en los puntos $A(-2a, 0, 0)$ y $A'(2a, 0, 0)$ de la referencia $\{Cxyz\}$ de la cuestión 3. Halle el valor de m' en función de m .

EJERCICIO S.E.F. 20 **Febrero 2007-02-12**

- 20) Un círculo homogéneo de masa m y radio a puede girar en torno a una recta δ coplanaria con el mismo y situada a una distancia $\frac{a}{2}$ de su centro. Halle el momento de inercia del disco respecto a la recta.

En el mismo disco de la cuestión anterior, determine el módulo de las componentes dinámicas de las reacciones si los soportes del eje de rotación se sitúan en los puntos en que δ corta a la circunferencia que limita el disco y la velocidad de rotación es $\omega = \text{cte}$.

Siguiendo con el disco de las cuestiones 3) y 4), se considera ahora el disco sometido, también, a su peso, mg . Obtenga el módulo de las componentes estáticas de las reacciones si δ es vertical y el cojinete axial es el de cota más baja.

EJERCICIO S.E.F. 21 **Junio 2008-06-20**

- 21) Determine el momento de inercia de una placa rectangular homogénea, de masa m y lados a y b , respecto de una de sus diagonales.

EJERCICIO S.E.F. 22 **Junio 2008-06-20**

- 22) Un aro circular homogéneo y pesado, de radio R y masa m , puede oscilar, en su plano, alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus puntos. Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones de este sistema en torno a su posición de equilibrio estable.

EJERCICIO S.E.F. 23 **Febrero 2009-02-06**

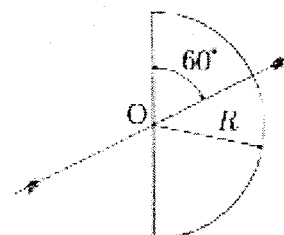
- 23) Una placa triangular homogénea y equilátera, de lado a y masa m , gira con velocidad angular ω alrededor de un eje que coincide con una de sus alturas, en un sistema de referencia en el que el eje indicado es fijo. Calcule su energía cinética sabiendo que el momento de inercia de la placa respecto a uno de sus lados es $\frac{1}{8}ma^2$.

REPASO
EJERCICIO R-S.E.F. 1 **febrero 2001-02-19**

- 1) Determine la energía cinética de un segmento AB de longitud $2a$ y masa m que gira con velocidad uniforme ω en torno a un eje fijo que contiene al centro de masas C y forma 45° con el segmento.

EJERCICIO R-S.E.F. 2 **Junio 2001-06-20**

- 2) El semicírculo homogéneo de la figura, de radio R y masa m , gira alrededor de un eje coplanario con el mismo, que pasa por su centro y forma 60° con su diámetro. Determine la energía cinética del semicírculo cuando su velocidad angular es ω .



EJERCICIO R-S.E.F. 3 Septiembre 2001-09-19

- 3) Un cubo macizo, de masa m y arista a , gira con velocidad angular, ω , alrededor de un eje fijo que coincide con una de sus diagonales. Calcule su energía cinética.

EJERCICIO R-S.E.F. 4 Febrero 2002-02-11 Septiembre 2007-09-03

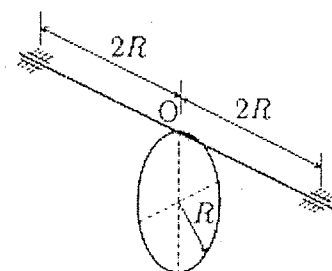
- 4) Obtenga el módulo de la cantidad de movimiento de un cilindro macizo y homogéneo, de masa m y radio R , que gira con velocidad angular ω respecto a una generatriz.

EJERCICIO R-S.E.F. 5 Febrero 2002-02-11

- 5) La ecuación del elipsoide central de inercia de un sólido rígido es $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, coincidiendo el origen de coordenadas con el centro de masas. Se hace girar el sólido alrededor de la recta de ecuación $x = y = z$. Justifique si puede afirmarse o negarse que el sólido se encuentra equilibrado dinámicamente.

EJERCICIO R-S.E.F. 6 Febrero 2003-02-10

- 6) El aro hueco de masa m y radio R de la figura puede girar libremente en torno a una recta perpendicular a su plano por un punto O del mismo, sobre la que se encuentran situados dos cojinetes a un lado y a otro de O y a una distancia $2R$ de éste. Obtenga el módulo de la reacción en cada cojinete cuando el aro gira a una velocidad Ω constante, suponiendo despreciable el peso.


EJERCICIO R-S.E.F. 7 Junio 2003-06-09

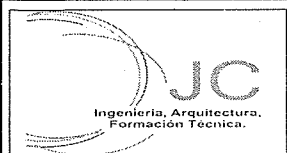
- 7) Se consideran dos formas de hacer girar un cubo homogéneo alrededor de un eje fijo de un sistema inercial: a) haciendo pasar el eje por los centros de dos caras paralelas del cubo; b) haciendo coincidir el eje con una de las diagonales del cubo. En ambas circunstancias, los cojinetes de apoyo se sitúan a igual distancia y equidistantes del centro del cubo, no existen fuerzas aplicadas y la velocidad angular es la misma. ¿En qué caso son mayores los valores de las reacciones en los apoyos? Justifique la respuesta.

EJERCICIO R-S.E.F. 8 Septiembre 2003-09-15

- 8) Calcule la energía cinética de un cilindro de revolución, macizo y homogéneo, de radio R y masa m , cuando gira con velocidad angular de módulo ω en torno a una de sus generatrices.

EJERCICIO R-S.E.F. 9 Febrero 2004-02-12

- 9) Calcule la energía cinética de un cubo homogéneo, de masa m y arista a , que gira con una rotación Ω alrededor de una de sus aristas.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	--	---



EJERCICIO R-S.E.F. 10 Septiembre 2004-09-23

- 10) Calcule el módulo del momento cinético respecto de la diagonal de una lámina uniforme y cuadrada, de lado 10 cm y masa 300 g, cuando gira a 120 r.p.m. alrededor de dicha diagonal.

EJERCICIO R-S.E.F. 11 Septiembre 2004-09-23

- 11) En las mismas condiciones de la cuestión anterior, determine el energía cinética de la lámina cuadrada.

EJERCICIO R-S.E.F. 12 Junio 2005-06-20 Septiembre 2008-09-05

- 12) Obtenga el módulo del momento cinético respecto a su centro de una placa rectangular de masa m , lados a , b y espesor despreciable que rota con velocidad uniforme ω en torno a una de sus diagonales.

Calcule el módulo de la derivada respecto al tiempo del momento cinético obtenido en la cuestión anterior.

EJERCICIO R-S.E.F. 13 Junio 2005-06-20

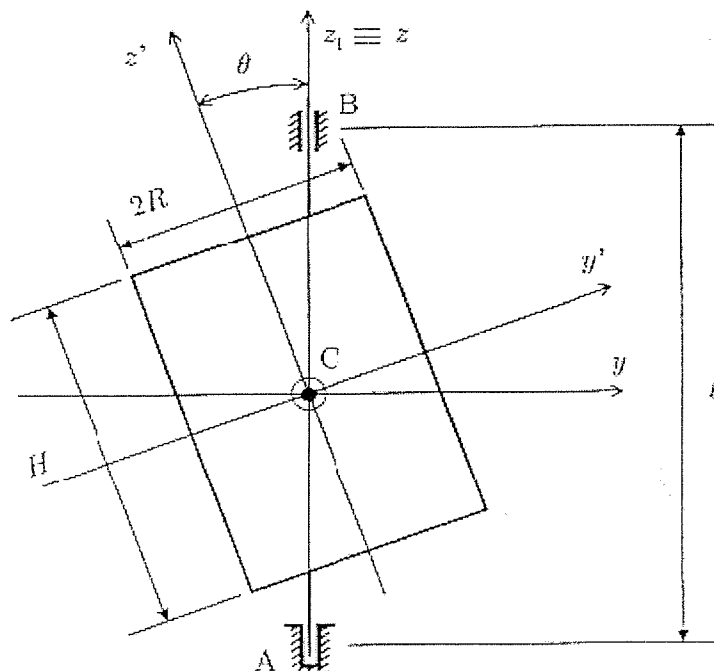
- 13) Cuando se analiza el movimiento de un sólido rígido que gira permaneciendo fijos dos de sus puntos, O y O', las ecuaciones de la dinámica no permiten determinar las componentes según el eje OO' de las reacciones en ambos puntos. ¿Cómo se resuelve esta indeterminación en la práctica?

EJERCICIO R-S.E.F. 14 Febrero 2009-02-06

- 14) Una placa semicircular homogénea, situada en $z = 0$, está limitada por la líneas $x^2 + y^2 = R^2$, $y = 0$, y gira con velocidad angular $\omega = \omega k$ alrededor del eje Oz, en un sistema de referencia en el que dicho eje es fijo. Conociendo el momento de inercia de la placa respecto al eje x , $I_x = I$, calcule el momento cinético de la placa en O, en función de ω e I .

PROBLEMA S.E.F. 1 (2001-09-19)

Un cilindro homogéneo, σ , de masa M , altura H y radio R , puede girar alrededor del eje z_1 de un sistema inercial que forma un ángulo θ con el eje geométrico del cilindro, constante, tal y como indica la figura.



El eje de rotación está soportado por dos cojinetes, A, de empuje y B, radial, separados una distancia l . El centro de masas del cilindro, C, pertenece al eje de rotación y se escoge como origen de coordenadas. Los sistemas de referencia S ($Cxyz$) y S' ($Cx'y'z'$) son solidarios del cilindro y comparten el eje x' común. El eje z_1 del sistema de referencia inercial, S_1 , es vertical ascendente. Los ejes x , y , se mueven en un plano horizontal. Los tres sistemas de referencia son directos. Sobre el cilindro no se aplican más fuerzas que la de su propio peso, siendo g el módulo de la aceleración de la gravedad.

- 1) Calcule las componentes del tensor central de inercia de σ en la base $\{i', j', k'\}$ del sistema S' .
- 2) Calcule las componentes del tensor central de inercia de σ en la base $\{i, j, k\}$ del sistema S .

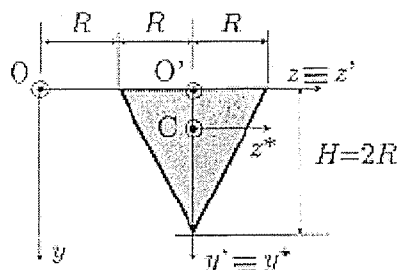
A partir de este punto, se considera que el cilindro inicia su movimiento en $t = 0$ con la velocidad angular $\omega = \omega_0 k_1$ respecto a S_1 .

- 3) Justifique que el cilindro se mueve en $t > 0$ con velocidad angular constante.
- 4) Obtenga la energía cinética del cilindro.
- 5) Determine el valor de la relación H/R para que el cilindro esté equilibrado dinámicamente.
- 6) Suponiendo que los valores de R y H son arbitrarios, determine la componente radial y axial de la reacción en cada cojinete.
- 7) Introduzca en las expresiones anteriores el valor de la relación H/R obtenida en el apartado 5) y explique los valores resultantes de las reacciones.

PROBLEMA S.E.F. 2 (2002-06-10)

Para analizar el movimiento de un cono girando alrededor de un eje fijo, se determinan en primer lugar sus características de inercia.

I) Sea un cono circular, macizo y homogéneo, de masa m , radio R y altura $H = 2R$. Se consideran tres puntos O' , C y O , que son los orígenes de tres sistemas de referencia directos y paralelos, ligados al cono, notados S' , S^* y S , respectivamente. C es el centro de masas, encontrándose O y O' sobre una recta diametral de la base del cono, tal y como indica la primera figura.

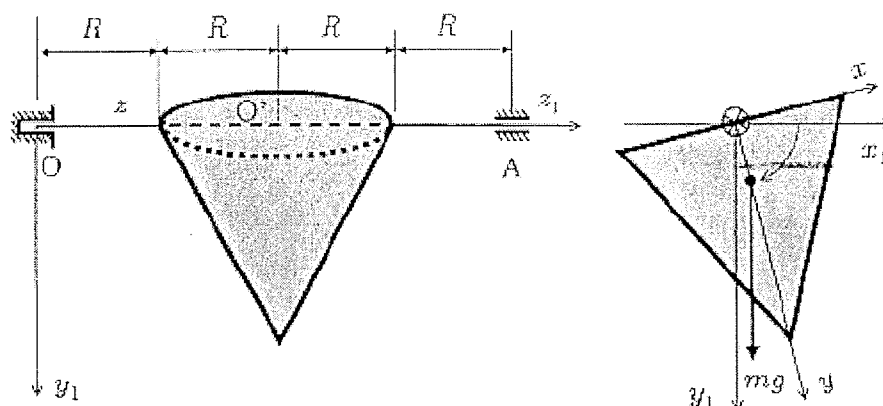


- 1) Determine las componentes en S' del tensor de inercia del punto O' .
- 2) Determine las componentes en S del tensor de inercia de C (tensor central de inercia) y compruebe que su elipsoide de inercia es esférico.

- 3) Obtenga las componentes en S del tensor de inercia en O y compruebe que se corresponden con las siguientes:

$$(\bar{I}_O)_S = \frac{1}{20} MR^2 \begin{pmatrix} 91 & 0 & 0 \\ 0 & 86 & -20 \\ 0 & -20 & 11 \end{pmatrix}$$

II) Se considera un sistema inercial $S_1: O_1x_1y_1z_1$, en el que el eje O_1y_1 coincide con la vertical descendente y se coloca el cono haciendo coincidir los semiejes Oz de S y O_1z_1 de S_1 , de forma que pueda girar con el eje Oz fijo (segunda figura). A tal fin, se sitúa un cojinete de empuje en el origen O y un cojinete radial en el punto $A(0,0,4R)$. En la posición de equilibrio estable del cono, coinciden los sistemas de referencia S_1 y S . En el instante inicial se abandona el cono con su vértice en el punto de coordenadas $(2R,0,2R)_{S_1}$.



- 4) Determine la velocidad y aceleración angular del cono cuando su vértice pasa por la posición más baja por primera vez.
- 5) Obtenga el valor de la reacción en cada cojinete, en el instante del apartado anterior, expresándolas por sus componentes en S_1 .
- 6) Partiendo de la misma condición inicial que en apartados anteriores, el cono sufre una percusión $P\hat{i}_1$ en su vértice cuando éste pasa por primera vez por la posición más baja. Determine el valor de P preciso para que el cono quede inmóvil y las componentes de las reacciones de percusión en los cojinetes.

III) El cono realiza oscilaciones de pequeña amplitud alrededor de su posición de equilibrio estable.

- 7) Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones.

PROBLEMA S.E.F. 3 (1996-09-09)

Una turbina de vapor utilizada para producir energía eléctrica en un turboalternador se mantiene girando a una velocidad angular constante n_0 alrededor de su eje. En un momento dado el eje comienza a vibrar y termina por romper los cojinetes de apoyo. Se atribuye el fallo a un deterioro mecánico que ha desequilibrado dinámicamente el rotor. Para reparar la turbina, se monta de nuevo sobre dos cojinetes A (de empuje) y A' (radial) y se hace girar en torno a un eje vertical una velocidad angular constante n_1 , midiendo las fuerzas de reacción en los apoyos $R_A, R_{A'}$. Se elige un sistema de referencia solidario al sólido A, x, y, z tal que A es el cojinete de empuje, Az es el eje de giro y Ax, Ay completan un sistema trirrectangular a derechas. La posición del cojinete A' en esta referencia viene dada por la terna $(0, 0, c)$. Dada la magnitud de las fuerzas implicadas se considera despreciable el peso de la turbina. Las fuerzas de reacción medidas son solidarias al sólido y su valor es:

$$\left. \begin{aligned} R_A &= -F\dot{i} + F\dot{j} \\ R_{A'} &= -F\dot{j} \end{aligned} \right\}$$

donde F es una constante con dimensiones de fuerza.

1. Expresar la cantidad de movimiento de la turbina en función de n_1 y de su momento estático $\mathcal{M}_z$ respecto al eje Az.
2. Aplicar el teorema de la cantidad de movimiento para determinar el momento $\mathcal{M}_z$, en función de las constantes F, n_1 .
3. Expresar el momento cinético de la turbina en función de n_1 y de las componentes en la base dada del tensor de inercia del sólido en el punto A.
4. Obtener, aplicando el teorema del momento cinético respecto al punto A, los productos de inercia P_{yz}, P_{zx} , en función de las constantes F, n_1, c .
5. Para equilibrar estáticamente la turbina se añade una masa puntual m sobre el eje Ax en un punto de abscisa a dada. Determinar el valor de m en función de $\mathcal{M}_z, a$.
6. Se desea ahora terminar de equilibrar dinámicamente la turbina, añadiendo un par de masas puntuales iguales de valor m' sobre el plano Ayz en los puntos de coordenadas $(0, -b, c)$ y $(0, b, 0)$, donde b es una constante dada. Calcular m' en función de P_{yz}, P_{zx}, b, c .
7. Los valores numéricos de las constantes del problema son: $n_0 = 6000\pi \text{ rad s}^{-1}$, $n_1 = 100\pi \text{ rad s}^{-1}$, $F = 200000 \text{ N}$, $a = -1 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$. Calcular m y m' .

SOL. PUNTO FIJO

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO Y MAGNITUDES

Por punto fijo, aplicaremos las ecuaciones de Euler para la rotación

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

Por ser O fijo se cumple:

$$\bar{L}_O = \bar{I}_O \cdot \bar{\omega}$$

$$\bar{M}_O = \left(\frac{d\bar{L}_O}{dt} \right)_{s_1} + \bar{\omega}_O \times \bar{r} = \left(\frac{d\bar{L}_O}{dt} \right)_s + \bar{\omega} \times \bar{L}_O$$

El teorema del momento cinético queda

$$\begin{aligned} \bar{I}: I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_z \omega_y &= M_x \\ \bar{J}: I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_y \\ \bar{K}: I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x &= M_z \end{aligned}$$

Ecuaciones de Euler

ÁNGULOS DE EULER

Hay que saber las relaciones de cin. esférica además de las ecuaciones para la ω , escritas arriba.

Pedición celular $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$

Recordar $\bar{k}_1 = \sin \theta \sin \psi \bar{i} + \sin \theta \cos \psi \bar{j} + \cos \theta \bar{k}$

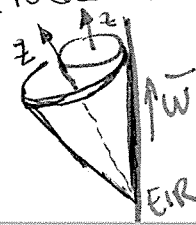
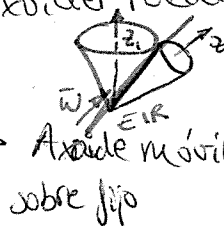
MOV. CONOS DE POINOT

Se trata de un mov. de rotación nula ($\dot{\theta}=0$), precesión y rotación propia uniformes ($\dot{\psi}, \dot{\psi} \rightarrow \text{cte}$)

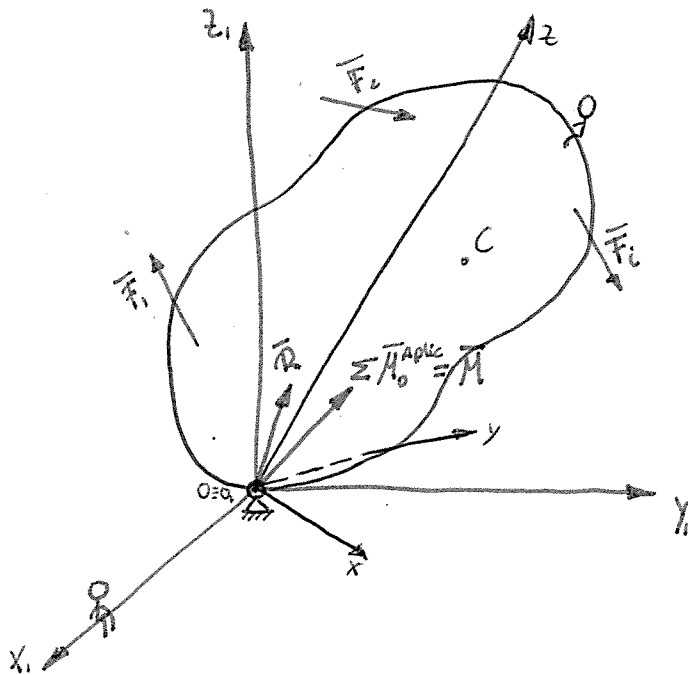
RSD de cono de Poinot

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x > I_z \rightarrow \text{Axe de la rueda exteriormente} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_z > I_x \rightarrow \text{Axe de la rueda exteriormente sobre fijo} \end{array} \right.$$



Sólido con punto fijo



Movimiento por Inercia

Si reducimos en O el sistema de fuerzas aplicadas queda

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_{aplic} = \bar{F} \neq 0 \\ \bar{M} = \sum \bar{M}_O^{aplic} = 0 \end{cases}$$

⇒ Por teorema de energía cinética

$$\sum \bar{F}_{aplic} \cdot \bar{v}_O + \bar{M} \cdot \bar{\omega} = \Delta T_d$$

$\bar{v}_O$ ($\bar{R}$ aplic. en O)

$$\sum \bar{F}_{aplic} \cdot \bar{v}_O + \bar{M} \cdot \bar{\omega} = 0$$

$$T_d = cte$$

⇒ Por teorema momento cinético en O:

$$\bar{M} + \bar{H}_O = \left(\frac{dL_O}{dt} \right)_{S_1} \Rightarrow \bar{L}_O = cte \text{ en } S_1$$

EJ. SÓL. PUNTO FIJO 1 y 2 $\vec{U}_0 = \vec{0}$, $\vec{M}_0 = \vec{0}$, $\vec{\omega}$. Se pide $\frac{dT}{dt} = \omega \cdot M_0$

Por teorema de la E.C.: $\frac{dT}{dt} = \frac{dZ}{dt}$, Para sólidos rígidos
 $T = \frac{dZ}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{U}_0 + \vec{M}_0 \cdot \vec{\omega} = M_0 \cdot \omega$

Por tanto $\frac{dT}{dt} = \vec{M}_0 \cdot \vec{\omega}$

Resultante F_{aplic} Resultante M_{aplic} en O

Si $\vec{M}_0 = \vec{0} \implies \frac{dT}{dt} = 0 \implies T = cte$

EJ. SÓL. PUNTO FIJO 4 $\vec{F}_{aplic} = \vec{0} \implies \vec{M}_0 = \vec{0}$, x, y, z principales tal que $I_x = I_y = 2I_z$
 Se pide $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$

Por ecuaciones de Euler

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = M_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z \end{cases} \begin{cases} 2I_z \dot{\omega}_x - I_z \omega_y \omega_z = 0 \\ 2I_z \dot{\omega}_y + I_z \omega_x \omega_z = 0 \\ \dot{\omega}_z = 0 \end{cases} \begin{cases} \dot{\omega}_x - \frac{\omega_y \omega_z}{2} = 0 \quad (1) \\ \dot{\omega}_y + \frac{\omega_x \omega_z}{2} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$\dot{\omega}_z = 0 \implies \omega_z = cte = \omega$

$$\implies \text{Derivo respecto de } t \begin{cases} \ddot{\omega}_x - \frac{\omega}{2} \dot{\omega}_y = 0 \\ \ddot{\omega}_y + \frac{\omega}{2} \dot{\omega}_x = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{Derivo } \dot{\omega} \text{ de (1) y (2)} \\ \text{y sustituyo en (3) y (4)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_x + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \omega_x = 0 \\ \ddot{\omega}_y + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \omega_y = 0 \end{cases} \begin{cases} \omega_x = A \sin\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi\right) \\ \omega_y = B \sin\left(\frac{\omega}{2}t + \beta\right) \end{cases} \begin{cases} \dot{\omega}_x = A \frac{\omega}{2} \cos\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi\right) \\ \dot{\omega}_y = B \frac{\omega}{2} \cos\left(\frac{\omega}{2}t + \beta\right) \end{cases}$$

Sustituyo en (1) y (2) para $t=0$

$$\begin{cases} A \frac{\omega}{2} \cos \varphi - \frac{\omega}{2} B \sin \beta = 0 \\ B \frac{\omega}{2} \cos \beta + \frac{\omega}{2} A \sin \varphi = 0 \end{cases} \begin{cases} A \cos \varphi = B \sin \beta \\ A \sin \varphi = -B \cos \beta \end{cases}$$

$$A^2 \frac{\omega^2}{4} = \frac{\omega^2}{4} B^2, \quad A = B$$

$$\cot \varphi = -\tan \beta \implies \varphi = \beta + \frac{\pi}{2}$$

EJ. SOL. PUNTO FIJO 13 Indicador magnitudes que se conservan Sol. punto fijo
Movimiento merical

a) P

Por teorema de cantidad de mov $\sum \vec{F} = \frac{dP_{sist}}{dt} \Rightarrow P_{sist} \neq cte$

b) L_c

Por teorema de momento cinético en C

$$\sum \vec{M}_c = \left(\frac{dL_c}{dt} \right)_{s_1} \Rightarrow L_c \neq cte$$

c) L_o

Por teorema de momento cinético en O

$$\vec{M}_O + \vec{M}_O^R = \left(\frac{dL_o}{dt} \right)_{s_1} \Rightarrow L_o = cte$$

d) Energía cinética T

Por teorema de energía cinética $Z_{f,aplic} + Z_R = \Delta T_i$

$$Z_{f,aplic} = \int_0^t \vec{F} \cdot \vec{v}_O dt + \int_0^t \vec{M}_O \cdot \vec{\omega} dt = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \vec{O} (R_{aplic} en O) \end{array} \right] \Rightarrow \Delta T = 0 \rightarrow T = cte$$

e) ω

$\omega \neq cte$ Ver teoría mov. de $\vec{\Theta}$ nula y $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ ctes $\Rightarrow$ Conos de Poinsot $\vec{\omega} \neq cte$
 $\omega = cte$

g) $\omega \cdot L_o$

$$T_i = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underbrace{\vec{I}_o}_{L_o} \cdot \vec{\omega} = cte \rightarrow \omega \cdot L_o = cte$$

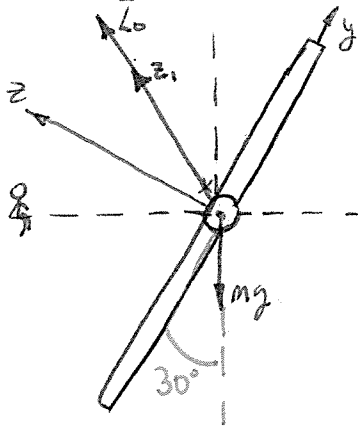
h) $\omega \cdot L_c$

$$T_i = \overset{\text{Teo. König}}{\frac{1}{2} m v_c^2} + \frac{1}{2} \omega \cdot \underbrace{\vec{I}_c}_{L_c} \cdot \omega \Rightarrow \omega L_c \neq cte$$

cte $\neq cte$

PROBLEMA SOL. PUNTO FIJO 1

Disco: R, m (uniforme), $\omega_0(t=0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_0 \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{\omega}_0 \cdot \vec{j} = \frac{2}{\sqrt{7}} \omega_0 \end{array} \right. ; \omega_0 \cdot K > 0$



$$1) \vec{I}_c \Big|_{xyz} \xrightarrow{E_1, E_2} \vec{I}_c \Big|_{xyz} = \frac{1}{4} m R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2) L_0, T_0 en S_1 , en $t=0$

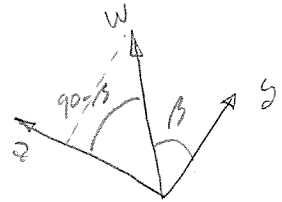
$$L_0 = \vec{I}_0 \Big|_{xyz} \vec{\omega} \Big|_{xyz} \quad (\text{en } S_1: \text{análisis en plano negro})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 \cdot \vec{r} = 0 \rightarrow \omega_x = 0 \\ \vec{\omega}_0 \cdot \vec{j} = |\vec{\omega}_0| |\vec{j}| \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{7}} \omega_0 \\ \vec{\omega}_0 \cdot \vec{j} = \frac{2}{\sqrt{7}} \omega_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{7}} \end{array} \right.$$

$$\omega_y = \frac{2}{\sqrt{7}} \omega_0$$

$$\omega_0 \cdot K > 0$$

$$\vec{\omega}_0 \cdot \vec{K} = |\vec{\omega}_0| |\vec{K}| \cos(90^\circ - \beta) = \omega_0 \sqrt{\frac{3}{7}}$$



Por tanto $\vec{L}_0(t=0) = \frac{1}{4} m R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \dots = \frac{m R^2 \omega_0}{2 \sqrt{7}} (\vec{j} + \sqrt{3} \vec{k})$

$$T(t=0) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_0 \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \Big|_{xyz} \cdot \vec{L}_0 \Big|_{xyz} = \dots = \frac{5}{28} m R^2 \omega_0^2$$

3) Justificar L_0 y T_0 son constantes

Por teorema de momento cinético en O: $\sum \vec{M}_{ext, O} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} + \vec{\omega}_0 \times \vec{p} = 0$

$\vec{p} = 0$ (O es el pivote)

$\Rightarrow L_0$ es constante en $S_1 = L_0(t=0)$

Por teorema de la energía cinética: $d\mathcal{E} = dT \rightarrow T = cte = T(t=0)$

O (mg y $\vec{R}_0$ aplicadas en O que el pivote y no se desplaza)

4) Justificar ω_z cte.

Por 3º de Euler: $\underbrace{I_z}_{cte} \cdot \dot{\omega}_z + \underbrace{(I_y - I_x)}_{0 \rightarrow z \text{ de rev.}} \omega_y \omega_x = M_z = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_z = 0 \Rightarrow \omega_z = cte = \omega_z(t=0) = \sqrt{\frac{3}{7}} \omega_0$

5) Se pide $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $|\vec{\omega}|$, ¿cómo se denomina el movimiento?

Ecuaciones:

$$\vec{L}_0 = I_x \omega_x \vec{i} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k} \rightarrow (1)$$

$$\vec{L}_0 = |\vec{L}_0| \vec{K} = |\vec{L}_0| (\sin \theta \sin \psi \vec{i} + \sin \theta \cos \psi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) \rightarrow (2)$$

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \rightarrow (3)$$

$$\omega_y = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \rightarrow (4)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \rightarrow (5)$$

$$\omega_z (\text{ap } 4) \rightarrow \omega_z = \text{cte} = \sqrt{\frac{3}{7}} \omega_0 \rightarrow (6)$$

1°) $\left. \begin{array}{l} \vec{L}_0 \vec{k} = I_z \omega_z \\ |\vec{L}_0| \vec{k} = |\vec{L}_0| \cos \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \theta = \frac{I_z \omega_z}{|\vec{L}_0|} = \frac{\frac{1}{2} m R^2 \omega_0 \sqrt{\frac{3}{7}}}{\frac{m R^2 \omega_0}{2 \sqrt{7}} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = 30^\circ = \text{cte} \\ \dot{\theta} = 0 \end{array} \right.$

2°) $\left\{ \begin{array}{l} \vec{L}_0 \vec{i} = I_x \omega_x \\ |\vec{L}_0| \vec{i} = |\vec{L}_0| \sin \theta \sin \psi \end{array} \right. \Rightarrow I_x \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi = |\vec{L}_0| \sin \theta \sin \psi$

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \quad \left[\dot{\varphi} = \frac{|\vec{L}_0|}{I_x} = \frac{\frac{m R^2 \omega_0}{2 \sqrt{7}}}{\frac{1}{4} m R^2} = \frac{4}{\sqrt{7}} \omega_0 = \text{cte} \right]$$

3°) $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} = \omega_z - \dot{\varphi} \cos \theta \\ \dot{\psi} = \sqrt{\frac{3}{7}} \omega_0 - \frac{4}{\sqrt{7}} \omega_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{\frac{3}{7}} \omega_0 = \text{cte} \end{array} \right.$

$|\vec{\omega}|^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 \stackrel{\dot{\theta}=0}{=} (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi)^2 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)^2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 =$
 $= \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) + \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + 2 \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \theta = \dots = \omega_0^2 = \text{cte}$ $|\vec{\omega}| = \omega_0 = \text{cte}$

Se trata de un movimiento por inercia con 2 de revolución. Nutación nula y rotación propia y precesión constante

6) Ángulos de Euler en la posición inicial y sus valores en función del tiempo

$\theta = 30^\circ = \text{cte}$ $\vec{n}(t=0) = \frac{\vec{K} \times \vec{K}}{|\vec{K} \times \vec{K}|} = \vec{i}_1 = \vec{i} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi(t=0) = 0 \\ \psi(t=0) = 0 \end{array} \right.$

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \int_{\varphi=0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t=0}^t \dot{\varphi} dt \Rightarrow \varphi = \frac{4}{\sqrt{7}} \omega_0 t$

$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} \Rightarrow \int_{\psi=0}^{\psi} d\psi = \int_{t=0}^t \dot{\psi} dt \Rightarrow \psi = -\sqrt{\frac{3}{7}} \omega_0 t$

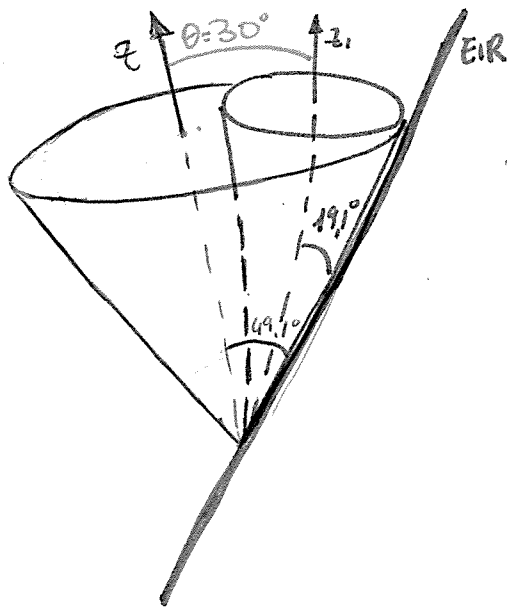
7) Ejes del movimiento

Los ejes serán conos de Poisson de revolución

Busco semiaángulos α y α_1 de cono móvil (de eje z) y cono fijo (de eje z_1)

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \cdot \vec{K} &= |\vec{\omega}| |\vec{K}| \cos \alpha \\ \vec{\omega} \cdot \vec{K} &= \omega_z \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \omega \alpha &= \frac{\omega_z}{|\vec{\omega}|} = \frac{\frac{3}{4} \omega_0}{\omega_0} = \sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \alpha = 49,1^\circ \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \cdot \vec{K}_0 &= |\vec{\omega}| |\vec{K}_0| \cos \alpha_1 \\ \vec{\omega} \cdot \vec{K}_0 &= 2T \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \omega \alpha_1 &= \frac{2T}{|\vec{\omega}| |\vec{K}_0|} = \dots \Rightarrow \alpha_1 = 19,1^\circ \end{aligned} \right.$$



8) $\vec{R}_0|_{x,y,z_1}$

Por $\sum \vec{F} = m \vec{a}_c^0$

$$\Rightarrow m \vec{g} + \vec{R}_0 = \vec{0}; \vec{R}_0 = -m \vec{g} = -m g (-\sin 30^\circ \vec{j}_1 - \cos 30^\circ \vec{k}_1)$$

$$\boxed{\vec{R}_0 = m g \left(\frac{1}{2} \vec{j}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{k}_1 \right)}$$



SÓLIDO CON PUNTO FIJO

1.- ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Se estudia el movimiento de un sólido con un punto fijo. Se considera al sólido sometido a un sistema de fuerzas aplicadas, de resultante $\vec{F}$ y cuyo momento respecto al punto fijo es $\vec{M}$, y a una reacción $\vec{R}$ en el punto fijo. Se analiza el movimiento respecto a un sistema inercial $(S_1, O_1 \vec{i}_1 \vec{j}_1 \vec{k}_1)$. Se considera una referencia $(S, O \vec{i} \vec{j} \vec{k})$ ligada al sólido, con origen en el punto fijo O , coincidente con los ejes del elipsoide de inercia en O y tal que se satisfaga la condición $I_x \geq I_y \geq I_z$. La posición del sólido puede determinarse entonces con los ángulos de Euler $(\varphi, \vartheta, \psi)$ que forman los ejes de la referencia $(S, O \vec{i} \vec{j} \vec{k})$ con los de la referencia $(S_1, O_1 \vec{i}_1 \vec{j}_1 \vec{k}_1)$. La rotación del sólido, expresada en la base móvil, queda, según ya se ha visto:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_y = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta \end{cases}$$

(1)

✓ saber

Por ser O punto fijo se cumple:

Teorema mom. cinet. en O

Deriv. eje mo

ω_{S/S_1}

$$\vec{L}_O = \vec{I}_O \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{M}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{S_1}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$$

Dadas las características de la referencia $(S, O \vec{i} \vec{j} \vec{k})$, el tensor de inercia en ella es diagonal y de componentes constantes, por lo que se obtiene:

$$\vec{L}_O = \vec{I}_O \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = I_x \omega_x \vec{i} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_S = I_x \dot{\omega}_x \vec{i} + I_y \dot{\omega}_y \vec{j} + I_z \dot{\omega}_z \vec{k}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{L}_O = (I_z - I_y) \omega_x \omega_z \vec{i} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x \vec{j} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y \vec{k}$$

Por lo que el teorema del momento cinético, expresado en la referencia $(S, O \vec{i} \vec{j} \vec{k})$ queda:

$$\begin{cases} \vec{i}: I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x \\ \vec{j}: I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = M_y \\ \vec{k}: I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z \end{cases}$$

(2)

✓ saber

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{S_1} = \sum \vec{M}_O^{aplic}$$

En dinámica de sistemas se plantean en C

Ecuaciones formalmente idénticas a las del movimiento del sólido libre, y que constituyen las ecuaciones de Euler. Los sistemas de ecuaciones (1) y (2) permiten determinar las funciones $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$, es decir, la evolución del movimiento sólido rígido.

Una vez resuelto el movimiento se puede despejar el valor de $\vec{R}$ del teorema de la cantidad de movimiento:

$$\vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}_C \quad ; \quad \vec{a}_C = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_C + \cancel{\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_C} \quad \text{CASR}$$

$$\vec{R} = m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_C) - \vec{F} \quad \text{0 ex 1.10}$$

2.- MOVIMIENTO POR INERCIA

Se produce cuando el sistema de fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido se puede reducir a una fuerza única cuya línea de acción pasa por el punto fijo. Como esta fuerza no da momento en O , las ecuaciones de Euler quedan:

de (2) $\rightarrow$
$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = 0 & (a) \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = 0 & (b) \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = 0 & (c) \end{cases}$$

Remanente de $\vec{F}_{aplic}$ pasa por O $\rightarrow \sum \vec{F} \neq 0$
 $\downarrow$
 No da momento $\rightarrow \sum \vec{r} \times \vec{F} = 0$

Si se opera $(a) \cdot \omega_x + (b) \cdot \omega_y + (c) \cdot \omega_z$ se obtiene:

$$I_x \omega_x \dot{\omega}_x + I_y \omega_y \dot{\omega}_y + I_z \omega_z \dot{\omega}_z + (I_z - I_y + I_x - I_z + I_y - I_x) \omega_x \omega_y \omega_z = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \right) = 0$$

$\rightarrow \frac{1}{2} \dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{I}_O \cdot \vec{\omega} = T_i$ (punto fijo)

es decir, que la energía cinética se mantiene constante (previsible dado que las fuerzas presentes están aplicadas en un punto fijo y por tanto su trabajo es nulo).

Operando ahora $(a) \cdot I_x \omega_x + (b) \cdot I_y \omega_y + (c) \cdot I_z \omega_z$ se obtiene:

$$I_x^2 \omega_x \dot{\omega}_x + I_y^2 \omega_y \dot{\omega}_y + I_z^2 \omega_z \dot{\omega}_z + (I_z I_x - I_y I_x + I_x I_y - I_z I_y + I_y I_z - I_x I_z) \omega_x \omega_y \omega_z = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2) \right) = 0$$

$\rightarrow |\vec{L}_O|^2$

es decir, que la norma del momento cinético, L^2 , se conserva. El propio vector $\vec{L}_O$ se conserva en S_1 , al no dar momentos en O las fuerzas presentes (aunque las componentes de $\vec{L}_O$ no se conservan en S). Por tanto:

$$T = cte = K \quad ; \quad L^2 = cte = K'$$

Definiendo las constantes $I = \frac{L^2}{2T}$, $\Omega = \frac{2T}{L}$, y junto con (b), se puede escribir otro sistema:

$$\begin{cases} I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 = I \Omega^2 \\ I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = I^2 \Omega^2 \quad (3) \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = 0 \quad (b) \end{cases}$$

cuya resolución (ver Schz-Prz páginas 71-72) permite obtener la reducción a cuadraturas

$$\int_{\omega_{y0}}^{\omega_y} \frac{d\omega_y}{d\sqrt{(\alpha^2 - \omega_y^2)(\beta^2 - \omega_y^2)}} = \mu(t - t_0). \text{ Obteniendo el valor } \omega_y(t) \text{ y despejando se obtendrían } \omega_x(t) \text{ y } \omega_z(t).$$

2.1.- DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN SEGÚN EL VALOR DE I (Ver Schz-Prz Pág. 72-75)

2.2.- ANGULOS DE EULER

Los ejes $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ son $\vec{e}_1 \parallel \vec{L}_0$

Como en S_1 es $\vec{L}_0 = I_x \omega_x \vec{i} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k} = I \Omega \vec{k}_1 = c \vec{e}$, multiplicando escalarmente por los vectores unitarios de la base móvil se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Lo } \vec{e}_1: & I_x \omega_x = I \Omega \sin \theta \sin \psi \\ \text{Lo } \vec{e}_2: & I_y \omega_y = I \Omega \sin \theta \cos \psi \quad (4) \\ \text{Lo } \vec{e}_3: & I_z \omega_z = I \Omega \cos \theta \end{aligned}$$

$R = \sin \theta \sin \psi$

con eje precesión

Ecuaciones de las que se deduce:

- ángulo de nutación: θ : $\cos \theta = \frac{I_z \omega_z}{I \Omega}$

- ángulo de rotación propia: ψ : $\tan \psi = \frac{I_x \omega_x}{I_y \omega_y}$

- ángulo de precesión: ϕ : de las ecuaciones de (1) y (4) se obtiene:

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi}{\sin \theta}$$

y por tanto, operando:

$$\dot{\phi} = I \Omega \frac{I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2}{I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2}$$

Lo cual deja reducido a cuadraturas el cálculo de la precesión.

Casos particulares: ver Schz-Prz pág. 76-77

2.3.- CASO EN QUE EL ELIPSOIDE ES DE REVOLUCIÓN (entorno a z)

Teniendo en cuenta que ahora no se impone que $I_x \geq I_z$, y empleando los sistemas de ecuaciones (1), (2) y (4) se obtiene:

- de la tercera ecuación de Euler se deduce que es $\omega_z = cte$, lo cual sustituido en la tercera ecuación del sistema (4) proporciona: $\cos \theta = \frac{I_z \omega_z}{I \Omega} = cte \Rightarrow \theta = 0$
 $\Rightarrow I_z \omega + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x = \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow \omega = 0$
 $\omega_z = cte$

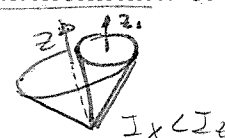
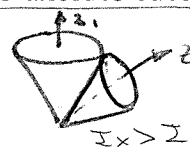
de las primeras ecuaciones de (1) y (4), sabiendo que es $\dot{\theta} = 0$: $\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi = \omega_x = \frac{I \Omega \sin \theta \sin \psi}{I_x} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{I \Omega}{I_x} = cte$

- de la tercera ecuación de (1) y de los resultados anteriores se tiene:

$$\dot{\psi} = \omega_z - \dot{\phi} \cos \theta = \dot{\phi} \left(\frac{I_x - I_z}{I_z} \right) \cos \theta = \omega_z \left(\frac{I_x - I_z}{I_x} \right) = cte$$

Saco ψ y ψ

Se tiene por tanto un movimiento de nutación nula y precesión y rotación propia uniformes, que se puede describir por la rodadura sin deslizamiento de un cono de Poinot de revolución, móvil, sobre otro cono de Poinot de revolución, fijo. Si $I_x > I_z$ los axoides ruedan exteriormente. Si $I_x < I_z$ el axoide móvil rueda exteriormente sobre el fijo.



2.4.- MOVIMIENTO SEGÚN POINSOT

Se estudia la evolución del sólido a partir del movimiento del elipsoide de inercia en el punto fijo.

Se denomina polo al punto P que se mueve sobre el elipsoide de forma que el vector $\vec{OP}$ se encuentre siempre sobre la recta de acción de la rotación $\vec{\omega}$, siendo l el módulo de este vector, δ su recta soporte y $\vec{u}_\delta$ el unitario con la dirección y sentido de $\vec{OP}$.

Se consideran los siguientes teoremas para el elipsoide de inercia: No!

- la energía cinética del sólido es directamente proporcional a $\frac{\omega^2}{l^2}$

$$T = \frac{1}{2} I_\delta \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\text{nor } \vec{OP}} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{l^2} \omega^2 \quad (\text{ver Schz-Prz pag. 152})$$

- el momento cinético es perpendicular en todo instante al plano tangente al elipsoide de inercia por el polo.

- la distancia del punto fijo al plano tangente al elipsoide de inercia por el polo es directamente proporcional al cociente entre la raíz cuadrada de la energía cinética y el

$$\text{módulo del momento cinético: } d = \vec{OP} \cdot \vec{n} = l \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}_O}{\omega L_O}; \quad T = \frac{1}{2} \frac{k^2}{l^2} \omega^2 \Rightarrow d = \frac{k \sqrt{T}}{2 L_O}$$

Aplicando los resultados obtenidos para el movimiento por inercia del sólido a los teoremas de Poinot, se deduce que el elipsoide es siempre tangente a un plano de dirección fija situado a una distancia constante $d = \frac{k}{\sqrt{I}}$ del punto fijo, es decir, el elipsoide de inercia del punto fijo de un sólido que se mueve bajo la acción de un sistema de fuerzas de momento nulo respecto al punto fijo rueda y pivota sin deslizar sobre el plano fijo. (plano perpendicular a $\vec{I}_0$)

En su evolución, el polo describe dos tipos de curvas:

- Poloide: curva que describe el polo sobre el elipsoide de inercia ($\approx$ redeta)
- Herpoloide: curva (plana) que describe el polo respecto al sistema fijo ($\approx$ base)

La forma de la poloide depende de las condiciones iniciales del movimiento del sólido y, en concreto, de la constante I . (Ver Schz-Prz. Pág. 80-82)

Si el elipsoide de inercia es de revolución, entonces las poloides son circunferencias cuyo centro está sobre el eje de revolución y contenidas en planos perpendiculares al mismo. En este caso sólo son estables las rotaciones alrededor del eje de revolución.

3.- SÓLIDO PESADO CON PUNTO FIJO (PROBLEMA DE LAGRANGE-POINOT)

Se estudia la evolución de un sólido rígido con punto fijo con su propio peso como única fuerza aplicada. Se toma el tercer eje fijo según la vertical ascendente. El momento del peso respecto del punto fijo no tiene por qué ser nulo, por lo que el momento cinético no se mantiene constante.

El peso deriva de potencial, y las fuerzas de reacción están aplicadas en el punto fijo, por lo que la energía mecánica se mantiene constante. Si el centro de masas tiene por coordenadas (ξ, η, ζ) en el sistema móvil y (ξ_1, η_1, ζ_1) en el sistema fijo, se obtiene:

$$T + mg\zeta_1 = E \Rightarrow \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) + mg(\xi \sin\theta \sin\psi + \eta \sin\theta \cos\psi + \zeta \cos\theta) = E$$

Las fuerzas de ligadura están aplicadas en el punto fijo, origen del sistema fijo, y el peso es paralelo al eje z_1 , por lo que el momento cinético áxico respecto de z_1 es constante:

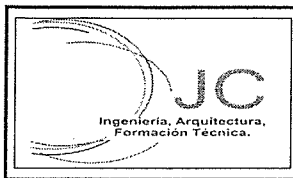
$$I_x\omega_x \sin\theta \sin\psi + I_y\omega_y \sin\theta \cos\psi + I_z\omega_z \cos\theta = L_{z_1}$$

El sistema se completa con la tercera ecuación de Euler:

$$I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = (\vec{r}_C, -mg\vec{k}_1, \vec{k})$$

Con este sistema se ha evitado la aparición en las ecuaciones de la reacción en el punto fijo (incógnita). En determinados casos dicho sistema se reduce a cuadraturas. El más conocido es aquel en el que el elipsoide de inercia del punto fijo es de revolución y el centro de masas se encuentra sobre el eje de revolución (trompo pesado).

4.- TROMPO PESADO (VER LIBRO Y ANEXO)

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	--	---



EJERCICIO soluc-S.P.F. 1 **Final 1996-02-12**

- 1) Nombrar los tipos de movimiento del trompo pesado.

EJERCICIO soluc-S.P.F. 2 **Final Febrero 1997-02-19**

- 2) Describa la evolución de un sólido rígido con punto fijo en el caso de movimiento según Poinot.

EJERCICIO soluc-S.P.F. 3 **Parcial 1997-06-02**

- 3) En relación con los movimientos zonales del trompo pesado, ¿cuál es la característica fundamental común que presentan el movimiento absidal y el movimiento con cúspides?

EJERCICIO soluc-S.P.F. 4 **Septiembre 1997-09-16**

- 4) Describa el movimiento según Poinot y establezca bajo qué hipótesis dinámicas tiene lugar.

EJERCICIO soluc-S.P.F. 5 **febrero 1998-02-24**

- 5) Escriba las ecuaciones de Euler para el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo e indique el sistema de referencia en el que se expresan las magnitudes que intervienen en las mismas.

EJERCICIO soluc-S.P.F. 6 **febrero 1998-02-24**

- 6) ¿Cuándo se dice que un sólido rígido posee un movimiento según Poinot?

EJERCICIO soluc-S.P.F. 7 **Final 1999-02-16**

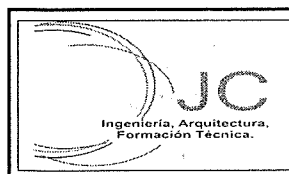
- 7) Escriba la energía cinética de un sólido rígido que se mueve con un punto fijo O , en función de la rotación ω y el momento cinético L_O .

EJERCICIO soluc-S.P.F. 8 **parcial 2000-06-12**

- 8) Escriba la clasificación terminológica de los posibles movimientos del sólido rígido pesado, con elipsoide central de inercia de revolución y un punto fijo en el eje de revolución, no siendo necesario indicar los valores de los parámetros que definen cada caso.

EJERCICIO soluc-S.P.F. 9 **Junio 2000-07-03**

- 9) Señale la proposición que incluye las condiciones que determinan un *movimiento según Poinot* de un sólido rígido pesado que se mueve con un punto fijo O
- a) el centro de masas coincide con O
 - b) el elipsoide de inercia del sólido rígido en O es de revolución
 - c) el elipsoide de inercia del sólido en O es de revolución y el centro de masas se encuentra sobre el eje de revolución
 - d) la rotación inicial del sólido es según un eje permanente de rotación

**EJERCICIO soluc-S.P.F. 10** **final 2000-09-11**

- 10) Un sólido rígido se mueve con una rotación ω alrededor de un punto fijo O , en el que define un tensor de inercia I_O . Si la masa del sólido es m , determine la cantidad de movimiento, momento cinético respecto a O y energía cinética del sólido en función de los datos anteriores y del vector OC que posiciona su centro de masas C respecto a O .

EJERCICIO soluc-S.P.F. 11 **febrero 2002-02-11**

- 11) Se considera el movimiento por inercia de un sólido rígido con un punto fijo. Describa el movimiento del elipsoide de inercia del sólido en el punto fijo.

EJERCICIO soluc-S.P.F. 12 **junio 2002-06-10 septiembre 2002-09-16**

- 12) ¿A qué se denomina movimiento por inercia de un sólido rígido con un punto fijo?

EJERCICIO soluc-S.P.F. 13 **Parcial 1996-06-03 parcial 1999-06-07 febrero 2002-02-11**
junio 2002-06-10 junio 2003-06-09 septiembre 2003-09-15

- 13) Escriba las ecuaciones de Euler para el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo y precise el significado de cada uno de los símbolos utilizados.

EJERCICIO soluc-S.P.F. 14 **septiembre 2003-09-15**

- 14) Indique las características del movimiento por inercia de un sólido rígido con un punto fijo cuando el elipsoide de inercia de dicho punto es de revolución.

EJERCICIO soluc-S.P.F. 15 **septiembre 2004-09-23 septiembre 2005-09-05**

- 15) Se considera el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo sometido a fuerzas no nulas. ¿Qué condición debe imponerse para que resulte un movimiento por inercia?

EJERCICIO soluc-S.P.F. 16 **febrero 2005-02-07**

- 16) Escriba las ecuaciones de Euler e indique las condiciones exigidas sobre los ejes x, y, z en las que se expresan.

CLASE
EJERCICIO S.P.F. 1 Parcial 1997-06-02

- 1) Un sólido rígido se mueve con un punto fijo (O), siendo M_O el momento de las fuerzas exteriores respecto a O y ω su rotación instantánea. Demuestre que la variación temporal de la energía cinética coincide con $\omega \cdot M_O$.

EJERCICIO S.P.F. 2 parcial 1998-06-01

- 2) Demuestre que en un sólido rígido que se mueve con un punto fijo O respecto a un sistema de referencia inercial S_I , de forma que las fuerzas aplicadas dan momento nulo respecto a O , su energía cinética en S_I se mantiene constante.

EJERCICIO S.P.F. 3 parcial 1998-06-01

- 3) Un sólido rígido se mueve respecto a un sistema inercial S_I , manteniendo un punto fijo (O) que no es el centro de masas, actuando sobre el mismo un sistema general de fuerzas aplicadas. Designando por S un sistema de referencia ligado al sólido, indique si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa:
- El tensor de inercia en C es constante respecto a S_I .
 - Las componentes del tensor de inercia en C son constantes respecto a S .
 - El tensor de inercia en O es constante respecto a S_I .
 - Las componentes del tensor de inercia en O son constantes en S_I .
 - El tensor de inercia en O es constante respecto a S .

EJERCICIO S.P.F. 4 parcial 2000-06-12

- 4) Un sólido rígido (σ) se mueve con un punto fijo (O) respecto a un sistema inercial (S_I), en ausencia de fuerzas aplicadas, siendo Ox , Oy , Oz , las direcciones principales de inercia en O , tales que $I_x = I_y = 2I_z$. Obtenga las soluciones generales que expresan $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, dependientes de las constantes de integración necesarias.

EJERCICIO S.P.F. 5 Parcial 1997-01-27 junio 2001-06-20

- 5) Un sólido rígido homogéneo, en forma de paralelepípedo recto, se mueve en ausencia de fuerzas de todo tipo, animándole inicialmente de una rotación ω_0 alrededor de una de sus diagonales. Justifique el movimiento del sólido a partir del instante inicial. Justifique si la rotación instantánea permanece o no constante a lo largo del tiempo y el valor de la velocidad del centro de masas.

EJERCICIO S.P.F. 6 junio 2003-06-09 septiembre 2005-09-05

- 6) Demuestre que en el movimiento del trompo pesado simétrico, se conserva la componente de la rotación sobre el eje del trompo.

EJERCICIO S.P.F. 7 febrero 2006-02-13

- 7) Un sólido rígido se mueve con un punto fijo O respecto a un sistema de referencia inercial S_I , de forma que las fuerzas aplicadas dan momento nulo respecto a O , Obtenga la derivada de su energía cinética.

EJERCICIO S.P.F. 8 febrero 2006-02-13

8) Se considera el movimiento del trompo pesado simétrico con un punto fijo (O) en un sistema inercial (S_1) es decir, tal que el elipsoide de inercia de O es de revolución y sobre dicho eje se encuentra el centro de masas C. Se adopta Oz_1 vertical ascendente y Oz , tercer eje del sistema de referencia (S) ligado al trompo, coincidente con el vector OC . Indique las magnitudes que se conservan:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------|
| a) Energía cinética | d) L_z | g) ω_z |
| b) L_O | e) Energía mecánica | |
| c) L_{z_1} | f) ω^2 | |

EJERCICIO S.P.F. 9 junio 2007-06-18

9) Se considera un sólido rígido pesado con su centro de masas fijo y elipsoide central de inercia esférico. Determine el valor de las componentes de la rotación instantánea en función del tiempo para un sistema de referencia ligado al sólido.

EJERCICIO S.P.F. 10 febrero 2008-02-15

10) Un giróscopo de rigidez H se utiliza como estabilizador en un barco, de forma que el eje del giróscopo (z) puede girar libremente en torno a un eje dirigido transversalmente al barco (de babor a estribor), perpendicular a z y que pasa por el centro del giróscopo. Si β es el ángulo que forma z con el eje perpendicular a la cubierta y se aplica al giróscopo un par de módulo M según la dirección popa-proa, obtenga el valor de $|\dot{\beta}|$ en función de H, M, β

EJERCICIO S.P.F. 11 junio 2008-06-20

11) El rotor de un giróscopo se mueve manteniendo en reposo su centro de masas en un sistema inercial. Calcule justificadamente la cantidad de movimiento del rotor.

EJERCICIO S.P.F. 12 junio 2008-06-20

12) El torsor cinemático de un sólido rígido en un punto O es $[\omega, v_O]$ y el torsor de las fuerzas exteriores sobre el mismo es $[M_O, F]$. Escriba el teorema de la energía cinética a partir de las magnitudes indicadas.

EJERCICIO S.P.F. 13 febrero 2009-02-06

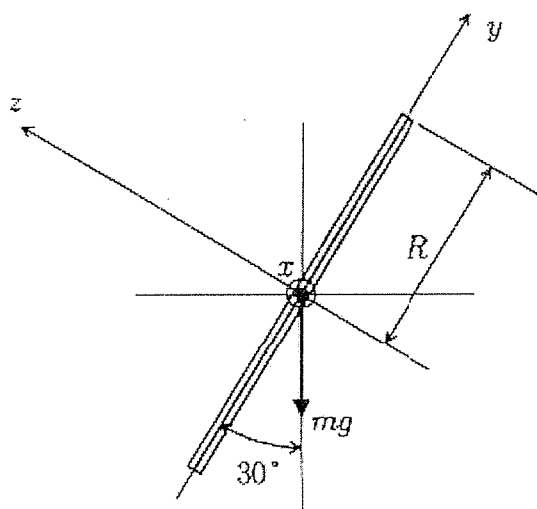
13) En el movimiento por inercia de un sólido rígido con un punto fijo (O), también conocido como caso de Euler o caso de Euler-Poinsot, indique las magnitudes que se conservan de entre las siguientes:

- cantidad de movimiento p
- momento cinético en el centro de masas L_C
- momento cinético en el punto fijo L_O
- energía cinética T
- rotación ω
- producto escalar $\omega \cdot L_C$
- producto escalar $\omega \cdot L_O$

PROBLEMA S.P.F. 1 (JUN 2001)

Una placa circular pesada, de radio R y masa m , uniforme y de espesor despreciable, puede girar alrededor de su centro, O , que se mantiene fijo en un sistema de referencia inercial, S_1 . Se adopta como sistema de referencia cartesiano ligado a la placa, S , uno con origen en O , eje Oz perpendicular al plano de la misma y Ox , Oy , perpendiculares entre sí y situados en el plano de la placa. En el instante inicial, $t = 0$, la placa ocupa la posición indicada en la figura y la rotación instantánea, ω_0 verifica

$$\omega_0 \cdot i = 0; \quad \omega_0 \cdot j = \frac{2}{\sqrt{7}}\omega_0; \quad \omega_0 \cdot k > 0$$



- 1) Determine el tensor central de inercia de la placa, expresándolo por sus componentes en S .
- 2) Calcule el momento cinético respecto a O en el instante inicial, L_0 , y la energía cinética de la placa en el instante inicial, T_0 , en el sistema inercial S_1 .
- 3) Justifique si los valores de L_0 y T_0 se mantienen constantes, o no, en el transcurso del tiempo.
- 4) Justifique por qué se mantiene constante en el tiempo la componente de la rotación según Oz .

En todo lo que sigue se utilizará como sistema de referencia de S_1 uno con origen en O , con Oz_1 según la dirección y sentido de L_0 y tal que en el instante inicial, Ox coincide con Ox_1 .

- 5) Considerando $Ox_1y_1z_1$ como sistema fijo y $Oxyz$ como sistema móvil, determine las rotaciones de Euler en un instante genérico $t > 0$ y compruebe que la rotación instantánea posee módulo constante. ¿Cómo se denomina el movimiento que realiza la placa circular?
- 6) Calcule los ángulos de Euler en la posición inicial y obtenga sus valores en función del tiempo.
- 7) Determine los axoides del movimiento.
- 8) Expresé el valor de la reacción del punto fijo en un instante genérico, por sus componentes en $Ox_1y_1z_1$.

PROBLEMA S.P.F. 2 (Feb 2003)

Un disco homogéneo, de centro O y radio R , posee una masa m y su espesor es despreciable.

Con origen en el centro del disco se escoge un sistema de referencia ligado al mismo, $S\{O, x, y, z\}$, tal que Oz resulta perpendicular al disco y coincide con su eje geométrico.

- 1) Obtenga cada una de las componentes en S del tensor de inercia respecto al centro del disco, O , y compruebe posteriormente que coinciden con los elementos de la matriz siguiente:

$$(\bar{I}_O)_S = \frac{1}{4}mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El centro del disco, O , se fija al punto O_1 , origen de un sistema de referencia inercial, S_1 y se le imprime una rotación inicial $\omega(0) = \omega_0 k$, no existiendo fuerzas aplicadas sobre el disco.

- 2) Justifique que el momento cinético respecto a O y la energía cinética del disco en S_1 permanecen constantes en el tiempo.
- 3) Calcule el momento cinético respecto a O y la energía cinética del disco en S_1 .
- 4) Justifique que el vector velocidad angular del disco permanece constante durante el movimiento.
- 5) Indique el movimiento que adopta el disco.

En una segunda experiencia, la única fuerza aplicada al disco es la de su peso y se admite que la aceleración de la gravedad, g , es uniforme en el sistema inercial S_1 . El centro del disco, O , se fija al punto O_1 , origen de S_1 , de forma que el plano del disco resulte horizontal y se le imprime una rotación inicial

$$\omega(0) = \frac{\omega_0}{\sqrt{5}} (2i + k)$$

coincidiendo Oz en dicho instante inicial con la vertical ascendente.

- 6) Determine la reacción del apoyo.
- 7) Justifique que el momento cinético respecto a O y la energía cinética del disco en S_1 permanecen constantes en el tiempo y calcule el valor de ambas magnitudes.
- 8) Demuestre que, escogiendo $O_1 z_1$ coincidente en dirección y sentido con L_O , el ángulo θ entre Oz y Oz_1 , permanece constante durante el movimiento y calcule el valor de dicho ángulo, en radianes.
- 9) Justifique que la rotación instantánea, $\omega(t)$ describe un cono circular de eje Oz respecto a S (axoide móvil) y un cono circular de eje Oz_1 respecto a S_1 (axoide fijo). Determine los semiángulos α y β de los axoides móvil y fijo, respectivamente, expresados mediante los cosenos correspondientes, y dibuje un croquis de los axoides en $t = 0$, indicando sobre el mismo la posición de las magnitudes notables ($L_O, \omega, \theta, \alpha, \beta$) y los ejes coordenados si en $t = 0$ se verifica $i_1 = -j$.
- 10) Indique el valor de los ángulos de Euler de S respecto a S_1 en $t = 0$.

Mov. PLANO

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO

Trabajaremos siempre con sólidos de revolución RSD por planos.

Buscaremos: $N, F_R, a_c, \dot{\omega}, \mu_{\min} \rightarrow$ Trabajamos en I^*

Paso 1: Plantear teorema momento cinético $\rightarrow \dot{\omega}$

Paso 2: Por RSD $\rightarrow$ CUSR $\rightarrow a_c$

Paso 3: Plantear teorema cent. de movimiento $\rightarrow \begin{matrix} F_R \\ N \end{matrix}$

Paso 4: Por no deslizamiento $F_R \leq \mu N; \mu \geq \frac{F_R}{N}$

$$\mu_{\min} = \frac{F_R}{N}$$

Recordar

$$M_R \leq \delta N$$

3 sistemas de referencia

- El fijo $\{X, Y, Z\}$

- El $S' \rightarrow$ clavado en I^*

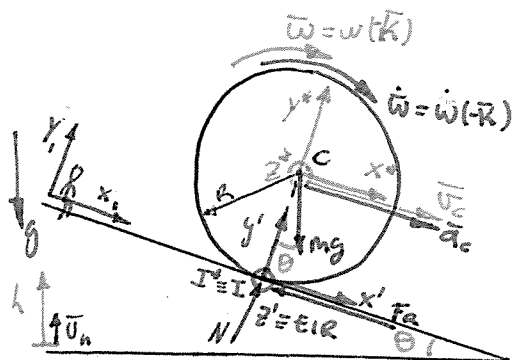
- El $S^* \equiv$ Sist. ref. centro de masa



ANEXO

Dinámica de movimiento plano

Particularización para sólidos de revolución en mov. plano, de simetría central (homogéneos, con $\rho = \rho(r)$ o similares) rodando sin deslizar por planos



Busco: $N, F_r, a_c, \dot{\omega}, \mu_{\min}$

1º método: Trabajo en I^*

• Por teorema del momento cinético en I^* :

$$\sum M_{I^*} = \left(\frac{dL_{I^*}}{dt} \right)_{S_1} + \bar{U}_{I^*} \times \bar{P} \quad \bar{O} (\bar{U}_{I^*} \parallel \bar{P})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \sum M_{I^*} = -mg \sin \theta R \bar{K}' \\ \cdot \bar{I}_{I^*} = \bar{I}_{I^*} \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} \bar{I}_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\omega} \end{pmatrix} = \bar{I}_{z'}(\dot{\omega}) \bar{K}' \quad \begin{matrix} \text{cte} & \text{cte en } S_1 \end{matrix} \\ \cdot \left(\frac{dL_{I^*}}{dt} \right)_{S_1} = \bar{I}_{z'}(-\dot{\omega}) \bar{K}' \end{array} \right.$$

Por tanto: $\bar{K}'$: $-mg \sin \theta R = -\bar{I}_{z'} \cdot \dot{\omega} \quad (1) \rightarrow \boxed{\dot{\omega}}$

• Por R.S.D y CUSR: $\bar{U}_C = \bar{U}_I + \bar{\omega} \times \bar{IC} = \omega R \bar{U}'_I \Rightarrow \bar{a}_c = \left(\frac{d\bar{U}_C}{dt} \right)_{S_1} = \dot{\omega} R \bar{U}'_I \Rightarrow \Rightarrow \bar{a}_c = \dot{\omega} R \quad (2) \rightarrow \boxed{\bar{a}_c}$

• Por teorema de la cantidad de movimiento

$$\sum \bar{F}_{ext} = m \cdot \bar{a}_c \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{i}': mg \sin \theta - F_r = m \bar{a}_c \quad (3) \rightarrow \boxed{F_r} \\ \bar{j}': N - mg \cos \theta = 0 \quad (4) \rightarrow \boxed{N} \end{array} \right.$$

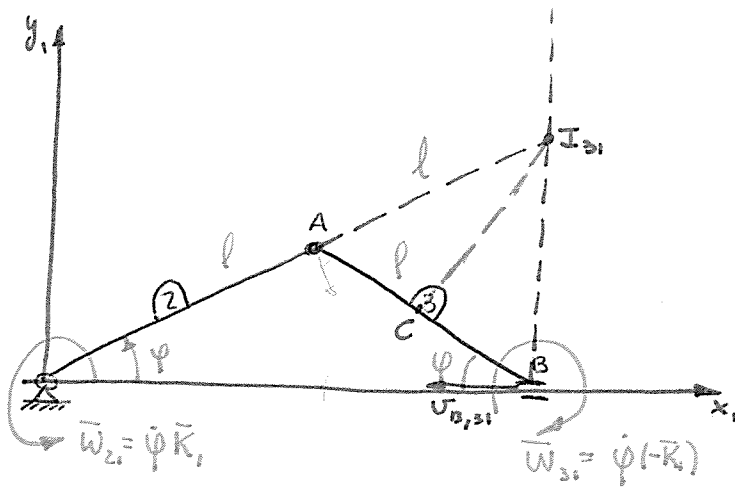
• Por no deslizamiento: $F_r \leq \mu N$; $\mu \geq \frac{F_r}{N} \rightarrow \mu_{\min} = \frac{F_r}{N} \rightarrow \boxed{\mu_{\min}}$

2º Método: Trabajar en C: No recomendable: sist. de ecuaciones acoplado

3º Método: Por energía. Actúan $\left\{ \begin{array}{l} \cdot mg (-\bar{U}_n) \text{ conservat} \rightarrow U = mgh + \text{cte} \\ \cdot F_r \text{ y } N \text{ actúan en } I (\bar{U}_I = 0) \forall t \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z_n = \int \dot{\omega} \bar{U}_I dt = 0 \\ Z_{F_r} = \dots = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$

Por tanto el movimiento es conservativo: $E_{mec} = T + U = \text{cte}$

EJ. MOV. PLANO 4 m, l, w. Se pide $T_{AB} = T_{31}??$



$$\bar{r}_c: \begin{cases} x_1^c = l \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos \psi = (l + \frac{l}{2}) \cos \varphi \\ y_1^c = \frac{l}{2} \sin \psi \end{cases}$$

$$\bar{v}_c: \begin{cases} \dot{x}_1^c = \frac{3}{2} l (\sin \varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y}_1^c = \frac{1}{2} l \cos \psi \dot{\psi} \end{cases}$$

$$T_{31} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_{31}^c)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\bar{I}_c}{\omega^2 \bar{I}_{zc}} \quad \left\{ \Rightarrow \right.$$

$\text{con } \bar{I}_{zc} = \frac{1}{12} m l^2$

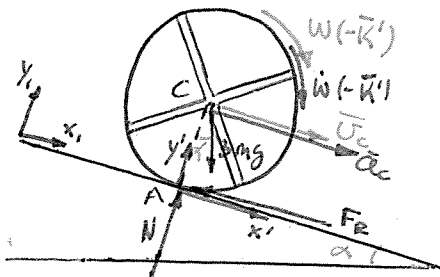
$$\Rightarrow T_{31} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^c^2 + \dot{y}_1^c^2) + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{9}{4} l^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} l^2 \cos^2 \psi \right) \omega^2 + \frac{1}{24} m l^2 \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \left(\frac{9}{4} \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{24} m l^2 \omega^2 = \frac{1}{8} m l^2 \omega^2 (8 \sin^2 \varphi + 1) + \frac{1}{24} m l^2 \omega^2$$

Otra forma $T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{I}_{31} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \omega^2 \bar{I}_{31} = \dots = \text{complicado calcular d}$

$\rightarrow \bar{I}_{31} = \bar{I}_{zc} + m d^2$

EJ. MOV. PLANO 6 Aro: m, R. Travesaños: m, 2R, q
Se pide $\mu_{\min}$ para RSD



Desarrollo método 1:

• Por teorema mom. cinético en I^* (mom direct axio según z')

$$-3mg \sin \alpha R = -I_{z'} \dot{\omega} \quad (1)$$

$$I_{z'} = \underbrace{I_{z'}^{\text{aro}}}_{\bar{I}_{zc}} + \underbrace{I_{z'}^{\text{trav}}}_{\bar{I}_{zc}} + \underbrace{I_{z'}^{\text{trav}}}_{\bar{I}_{zc}} = mR^2 + mR^2 + \left[\frac{1}{12} m (2R)^2 + mR^2 \right] 2 = \frac{14}{3} mR^2$$

Steiner

$$\rightarrow \dot{\omega} = \frac{3mg \sin \alpha R}{\frac{14}{3} m R^2} = \frac{9}{14} g \sin \alpha$$

• Por RSD y C.V.R.: $\bar{a}_c = \dot{\omega} R = \frac{9}{14} g \sin \alpha \quad (2)$

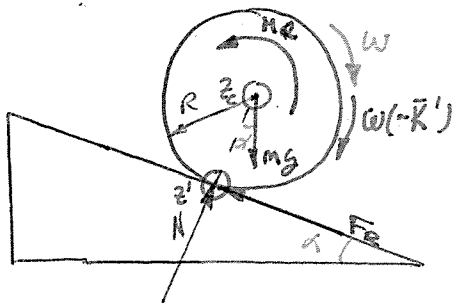
• Por teorema de cant. de mov: $\begin{cases} \bar{z}': 3mg \sin \alpha - F_R = 3m \frac{9}{14} g \sin \alpha & (3) \\ \bar{y}': -3mg \cos \alpha + N = 0 & (4) \end{cases}$

$$\rightarrow F_R = \frac{5}{14} 3mg \sin \alpha$$

$$N = 3mg \cos \alpha$$

• Por R.S.D $\rightarrow F_R \leq \mu N \rightarrow \boxed{N_{\min} = \frac{F_R}{N} = \frac{5}{14} \tan \alpha}$

Ej. Mov. PLANO 9 Dado: $R, m, \alpha = 45^\circ$. Se pide $\vec{a}_c$?



Por teorema del mom. cinético áxio en z'

$$\vec{K}': -mg \sin \alpha R + M_R = I_{z'} (-\dot{\omega}) \quad \left\{ \begin{array}{l} mg \sin \alpha R - fN = I_{z'} \dot{\omega} \quad (1) \\ \text{Por rodadura } M_R = M_{Rmax} = fN \end{array} \right.$$

$$I_{z'} = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

Por teorema de cantidad de movimiento

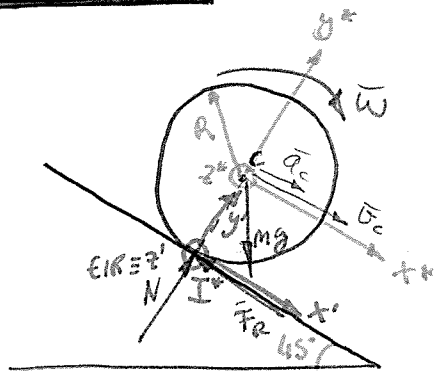
$$\vec{J}': N - mg \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

De (1) y (2)

$$\dot{\omega} = \frac{mg \sin \alpha R - f mg \cos \alpha}{\frac{3}{2} m R^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_c = \frac{2}{3} \frac{g}{R} [\sin \alpha R - \cos \alpha f] = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{g}{R} [R - f] \end{array} \right.$$

Por CVSR, RSD: $a_c = \dot{\omega} R$

Ej. Mov. PLANO 1 Círculo homogéneo: $R, m, \alpha = 45^\circ$. Se pide $\vec{a}_c$



① Por teorema del momento cinético en I^*

$$\sum M_{I^*} = \left(\frac{dL_{I^*}}{dt} \right)_{s_1} + \vec{r}_{I^*} \times \vec{F}$$

$$\sum M_{I^*} = mg R \sin 45^\circ (-\vec{K}') \quad \vec{\omega} = -\vec{\omega} \vec{K}'$$

$$\left(\frac{dL_{I^*}}{dt} \right)_{s_1} = \vec{I}_{I^*} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\omega} \end{pmatrix} = -\dot{\omega} I_{z'} \vec{K}'$$

$$\left(\frac{dL_{I^*}}{dt} \right)_{s_1} = -\dot{\omega} I_{z'} \vec{K}' \quad \left| \quad \left(\frac{dL_{I^*}}{dt} \right)_{s_1} = -\frac{3}{2} m R^2 \dot{\omega} \vec{K}' \right.$$

$$\rightarrow \text{Cálculo } I_{z'} = I_{z^*} + m R^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

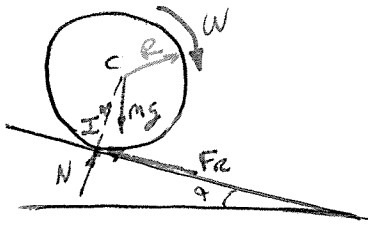
$$\text{Por tanto: } \vec{K}': \quad \frac{mg \sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\omega}, \quad \dot{\omega} = \frac{\sqrt{2} g}{3 R^2}$$

$$\text{② Por RSD} \rightarrow \text{CVSR: } \vec{v}_c = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \vec{r}_{IC} = \vec{\omega} \cdot R \vec{t}^*_{res.}$$

$$\vec{a}_c = \left(\frac{d\vec{v}_c}{dt} \right)_{s_1} = \dot{\omega} R \vec{t}^* = \frac{\sqrt{2} g}{3 R^2} R \vec{t}^* = \frac{\sqrt{2} g}{3 R} \vec{t}^*$$

$$|\vec{a}_c| = \frac{\sqrt{2} g}{3}$$

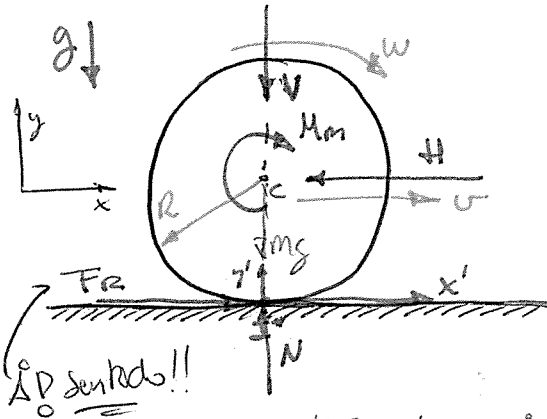
EJ. MOV. PLANO 7 Cilindro: m, g, R ; α . Se pide P .



$$P = \frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{I^*} + \vec{M}_{I^*} \cdot \vec{\omega}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{I^*} &= mg R \sin(\alpha) - \vec{K} \\ \omega &= \omega / (-\vec{K}) \end{aligned} \right\} \boxed{P = mg R \omega \sin \alpha}$$

EJ. MOV. PLANO 10 Rueda: R, m, I ; H, V, M_m
 $\vec{v}$, RSD. Se pide $\vec{a}$



Por teorema del momento cinético en I_c

$$\sum M_{I^*} = \left(\frac{dL_{I^*}}{dt} \right)_{S_1} + \vec{v}_{I^*} \times \vec{p}$$

$$\sum M_{I^*} = HR \vec{K} - M_m \vec{K}$$

$$L_{I^*} = I_{I^*} \omega = I_{I^*} \omega (\vec{K}) \quad \frac{dL_{I^*}}{dt} = \dot{\omega} \cdot I_{I^*} (\vec{K})$$

$$HR - M_m = -\dot{\omega} I_{I^*}; \quad \dot{\omega} = -\frac{HR - M_m}{I_{I^*}}; \quad I_{I^*} = I + mR^2$$

$$\boxed{a = \dot{\omega} R = -\frac{M_m - HR}{I + mR^2} \cdot R}$$

$$\boxed{\text{Condición } M_m > HR}$$

→ Determinar $\mu_{\min}$

Por teorema controlad mov: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_c = m \cdot \frac{M_m - HR}{I + mR^2} \cdot R \vec{K}$

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{K}: F_r - H = mR \frac{M_m - HR}{I + mR^2} \rightarrow F_r = mR \frac{M_m - HR}{I + mR^2} + H = \frac{mR M_m - mHR^2 + H(I + mR^2)}{I + mR^2}$$

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{J}: -V - mg + N = 0 \rightarrow N = V + mg$$

$$\mu_{\min} = \frac{F_r}{N} = \frac{IH + mR M_m}{(V + mg)(I + mR^2)}$$

$$\boxed{N \geq \frac{IH + mR M_m}{(V + mg)(I + mR^2)}}$$

MOVIMIENTO PLANO

Se estudia la evolución de un sólido rígido que describe un movimiento plano, es decir, tal que las velocidades de todos sus puntos son paralelas a un plano determinado.

1.- CINÉTICA DEL MOVIMIENTO

Se define un sistema de referencia inercial $(S_1, O_1 \vec{i}_1 \vec{j}_1 \vec{k}_1)$, con $\vec{k}_1$ perpendicular al plano de movimiento, y un sistema ligado al sólido $(S, C \vec{i} \vec{j} \vec{k})$, con origen en el centro de masas del sólido y $\vec{k}$ con igual dirección y sentido que $\vec{k}_1$. Se presupone a C contenido en el plano del movimiento $O_1 x_1 y_1$ (la trayectoria de C siempre esta contenida en un plano paralelo al anterior). Para describir la posición del sólido se emplean las coordenadas de C en $O_1 x_1 y_1$, (ξ, η) , y el ángulo azimutal φ que forma el eje x con el x_1 , orientado por $\vec{k}$.

2.- ECUACIONES

Teniendo en cuenta que: $\vec{v}_C = \dot{\xi} \vec{i}_1 + \dot{\eta} \vec{j}_1$; $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}_1$

- Cantidad de movimiento: $\vec{p} = m \vec{v}_C = m(\dot{\xi} \vec{i}_1 + \dot{\eta} \vec{j}_1)$
- Momento cinético:
 - No *importante* respecto a O_1 : $\vec{L}_{O_1} = m \vec{r}_C \times \vec{v}_C + I_C \dot{\varphi} \vec{k}$; $L_z = m(\vec{r}_C, \vec{v}_C, \vec{k}) + I_z \dot{\varphi}$.
Handwritten notes: $I_C^ = I_C$, $-I_{xz} \dot{\varphi} \vec{i}_1 - I_{yz} \dot{\varphi} \vec{j}_1 + I_z \dot{\varphi} \vec{k}$*
 - Respecto a C : $\vec{L}_C^* = \vec{L}_C = I_C \dot{\varphi} \vec{k}$; $L_z = I_z \dot{\varphi}$
 - Respecto al CIR (o al seguidor de polos I^*): $\vec{L}_I = I_I \dot{\varphi} \vec{k}$
- Energía cinética:
 - $T = Ec = \frac{1}{2} m \cdot \overbrace{|\vec{v}_C|^2}^{v^2 \text{ Koenig}} + \frac{1}{2} \dot{\varphi} (\vec{k} \cdot \overbrace{I_C}^{I_z} \cdot \dot{\varphi} \vec{k}) = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} I_z \cdot \dot{\varphi}^2$
 - $T = Ec = \frac{1}{2} I_\delta \cdot \dot{\varphi}^2$ ($\delta \equiv E.I.R.$) $= \frac{1}{2} \omega \overbrace{I_z}^{I_\delta} \omega$

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO (VER CLASE Y ANEXO)

↑ No importante.

EJERCICIO M.P.1

Febrero 1997-02-19 febrero 2009-02-06

(R)

- 1) Un círculo homogéneo de radio R y masa m cae rodando sin deslizar sobre un plano inclinado que forma 45° con la vertical. Calcule la aceleración del centro de masas.

EJERCICIO M.P.2

Parcial 1997-06-02

- 2) Un cilindro macizo y homogéneo, de radio R , cae por un plano inclinado un ángulo α con la horizontal, rodando sin deslizar según la dirección de máxima pendiente. Determine, mediante una única ecuación y por aplicación del teorema del momento cinético, la aceleración angular del cilindro, justificando la validez del teorema empleado.

EJERCICIO M.P.3

Junio 1997-06-19 Parcial 2000-06-12

- 3) Un disco con densidad másica uniforme que tiene un agujero elíptico con centro en el del disco, está sometido a su peso y rueda sin deslizar en su plano, que es vertical, sobre una recta horizontal de un sistema inercial. Si O es el seguidor de polos de su movimiento plano y todas las velocidades se consideran respecto al sistema inercial, señale y justifique las expresiones correctas:

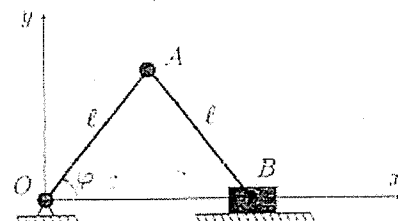
- ω (velocidad de rotación) = cte.
- L_O (momento cinético respecto a O) = cte.
- I_O (tensor de inercia en O) = cte.
- T (energía cinética) = cte.

Idéntico enunciado en Parcial 2000-06-12, cambiando el agujero elíptico por uno rectangular

EJERCICIO M.P.4

Septiembre 1998-09-21

- 4) En el mecanismo plano de la figura, las barras OA y AB , articuladas en A , son iguales, homogéneas, de masa m y longitud l . El punto B puede deslizar sobre Ox y la barra OA gira con velocidad angular ω . Determine, en la posición indicada, la energía cinética de la barra AB .



EJERCICIO M.P.5

Septiembre 2001-09-19

- 5) Un disco circular σ , de radio R y de masa m , cuyo plano es vertical, se apoya sobre un plano inclinado de ángulo α respecto al horizontal. El disco tiene una masa puntual adicional $M = 2m$ adherida a su centro. Suponiendo que el disco cae rodando sin deslizar, según la dirección de máxima pendiente, obtenga la aceleración de su centro.

Obtenga, para la cuestión anterior, la fuerza de rozamiento y el coeficiente de rozamiento mínimo necesario para impedir el deslizamiento.

parecido
varia al 6
calculo
de I_z

$a = \frac{25 \sin \alpha}{7}$
 Comprobamos
 $N_{\min} = \frac{159}{7}$
 $f_r = \frac{105 \sin \alpha}{7}$

EJERCICIO M.P.6

Febrero 2002-02-11

- 6) Una circunferencia hueca σ de masa m y radio R se encuentra rígidamente unida a una cruz de masa total $2m$ (m cada travesaño) formada por dos diámetros mutuamente perpendiculares de σ . Se deja caer el conjunto por un plano inclinado que forma un ángulo α con horizontal. Determine el coeficiente de rozamiento mínimo para que no exista deslizamiento en la caída.

EJERCICIO M.P.7

Septiembre 2002-09-16 - Septiembre 2005-09-05

- 7) Un cilindro macizo y homogéneo, de peso mg y radio R , cae por un plano inclinado un ángulo α con la horizontal rodando sin deslizar según la dirección de máxima pendiente. Determine la potencia aplicada al cilindro cuando su velocidad angular es ω .

EJERCICIO M.P.8

Junio 2002-06-10 - Septiembre 2002-09-16

- 8) Obtenga el par motor que debe proporcionar el motor de un vehículo de masa total m que asciende con velocidad constante V sobre una pendiente que forma un ángulo α con el horizontal, cuando la relación entre la velocidad de rotación del eje motor Ω y la de las ruedas motrices ω es de $\omega/\Omega = k$, el radio de estas últimas es R_m y la mitad de la potencia suministrada por el motor se pierde por rozamiento.

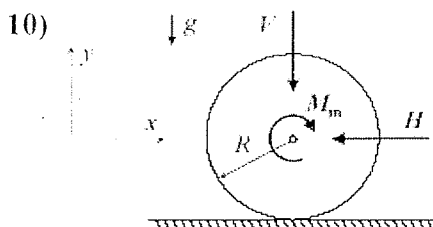
EJERCICIO M.P.9

Febrero 2005-02-07

- 9) Un círculo de radio R y masa m cae rodando sin deslizar sobre una pendiente de 45° . Calcule la aceleración de su centro si se supone que el coeficiente de resistencia a la rodadura es δ .

EJERCICIO M.P.10

Junio 2005-06-20 Septiembre 2008-09-05



Se representa una rueda motriz de un vehículo, de radio R , masa m y momento de inercia I respecto a su eje, sobre la que se aplican las fuerzas H y V y el par motor M_m . El rozamiento existente sólo se manifiesta al deslizamiento (no existe rozamiento a la rodadura). En la posición indicada, el vehículo posee una velocidad v en la dirección y sentido positivo del eje x (horizontal), rodando sin deslizar.

Determine la aceleración a del vehículo y la condición para que ésta sea positiva (igual sentido que la velocidad).

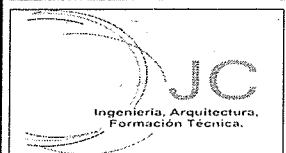
En la rueda de la cuestión anterior, determine el intervalo de valores del coeficiente de rozamiento para que no exista deslizamiento.

EJERCICIO M.P.11

Febrero 2008-02-15

- 11) Un disco circular homogéneo, de centro O , presenta un orificio circular situado en posición excéntrica. El plano del disco se mantiene permanentemente vertical mientras rueda sin deslizar sobre un plano horizontal de un sistema inercial, S_1 , sometido a su peso como única fuerza aplicada. Señale si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa:

- El momento de inercia respecto al eje instantáneo de rotación (e.i.r.) es constante en el tiempo.
- La energía mecánica del disco permanece constante en S_1 .
- La reacción del plano sobre el disco es igual al peso pero de sentido contrario.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajtc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	---	---

EJERCICIO R-M.P.1 Final 2000-09-11

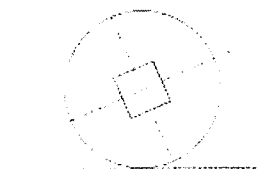
- 1) Una rueda circular inicialmente en reposo, de masa m y radio R , cae por un plano fijo inclinado un ángulo α respecto al horizontal, bajo la acción de su propio peso. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu = \infty$, justifique si se conservará la energía mecánica.

EJERCICIO R-M.P.2 Febrero 2001-02-19

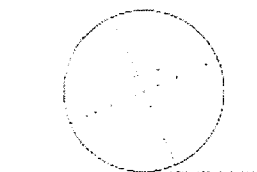
- 2) Una rueda homogénea tiene forma de aro de radio a y puede descender por un plano inclinado un ángulo α respecto al horizontal, permaneciendo vertical y según la dirección de máxima pendiente. Determine el valor del coeficiente de rozamiento μ para que no se produzca deslizamiento.

EJERCICIO R-M.P.3 Junio 2001-06-20 Septiembre 2001-09-19 Febrero 2004-02-12

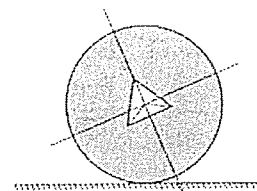
- 3) Un disco circular homogéneo, pero con un vaciado de forma cuadrada alrededor de su centro, tal y como indica la figura, rueda sin deslizar sobre un plano horizontal siendo su peso la única fuerza aplicada sobre el mismo. Justifique adecuadamente si la velocidad de rotación del disco es constante o variable.



Un disco circular homogéneo, pero con un vaciado de forma elíptica cuyo centro coincide con el del disco, tal y como indica la figura, rueda sin deslizar sobre un plano horizontal siendo su peso la única fuerza aplicada sobre el mismo. Justifique adecuadamente si la velocidad de rotación del disco es constante o variable



Un disco circular homogéneo, pero con un vaciado en forma de triángulo equilátero alrededor de su centro, tal y como indica la figura, rueda sin deslizar sobre un plano horizontal siendo su peso la única fuerza aplicada sobre el mismo. Justifique adecuadamente si la velocidad de rotación del disco es constante o variable.

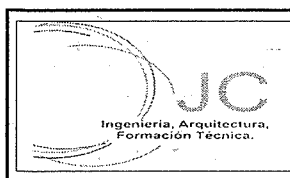


EJERCICIO R-M.P.4 Septiembre 2002-09-16

- 4) En el movimiento plano de un sólido rígido, ¿qué condición debe satisfacerse para que las fuerzas de ligadura sean independientes del estado cinemático del sólido?

EJERCICIO R-M.P.5 Febrero 2003-02-10

- 5) Un sólido rígido, σ , efectúa un movimiento plano respecto a un sistema inercial, $S_1: O x_1 y_1 z_1$, paralelamente a $z_1 = 0$. La masa de σ es m , las coordenadas de su centro de masas en S_1 son $C(\xi, \eta, \zeta)$, la resultante de las fuerzas aplicadas es F , el momento resultante de las mismas respecto al centro de masas es M_C y las ligaduras son ideales. Escriba las ecuaciones escalares del movimiento (ecuaciones sin intervenir las ligaduras) indicando el significado de aquellos símbolos que no correspondan a algunas de las magnitudes antes indicadas.

**EJERCICIO R-M.P.6****Junio 2004-06-17**

- 6) Un cuadrado homogéneo de lado a , masa m , centro C y momento de inercia respecto a C $I_C = \frac{1}{6}ma^2$; se encuentra rígidamente inscrito en un aro de masa despreciable y radio $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ que puede empezar a caer sobre un plano inclinado un ángulo α respecto al horizontal. Determine el mínimo valor del coeficiente de rozamiento entre aro y plano para que no haya deslizamiento.

EJERCICIO R-M.P.7 Junio 2005-06-20 Septiembre 2008-09-05 Febrero 2007-02-12 Junio 2007-06-18**Junio 2008-06-20**

- 7) Una circunferencia de masa m y radio R cae rodando sin deslizar por una pendiente que forma un ángulo α con la horizontal. Halle la aceleración de su centro de masas.

Identifique el mínimo valor del coeficiente de rozamiento de la cuestión anterior para que no exista deslizamiento

Una circunferencia homogénea de radio R puede caer sobre un plano inclinado un ángulo α respecto al horizontal, manteniéndose siempre en el plano vertical que corta al plano inclinado según su línea de máxima pendiente. Determine el mínimo valor del coeficiente de rozamiento μ para que no exista deslizamiento.

Halle la aceleración del centro de la circunferencia de la cuestión anterior.

EJERCICIO R-M.P.8**Septiembre 2005-09-05 Septiembre 2009-02-06**

- 8) En el movimiento plano de un sólido rígido, ¿qué condición debe cumplirse entre el elipsoide central de inercia y el plano director del movimiento, para que las ligaduras no dependan del movimiento?

En el movimiento plano de un sólido rígido, con ligaduras ideales y fuerzas aplicadas constantes, indique la relación entre su elipsoide central de inercia y la normal al plano del movimiento para que las fuerzas de ligadura sean independientes de su estado cinemático.

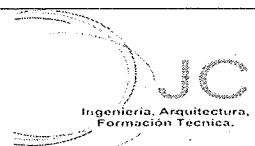
EJERCICIO R-M.P.9**Junio 2006-06-26**

- 9) Un camión avanza rectilínea y uniformemente con velocidad $v = 72$ km/h. Un rodillo de radio $R = 10$ cm y masa $m = 1$ kg rueda sin deslizar sobre la plataforma del camión, acercándose a la cabina, con velocidad angular $\omega = 10$ rad/s respecto de dicha plataforma. La rotación ω del rodillo es perpendicular a la velocidad v del camión. Determine el módulo de la cantidad de movimiento del rodillo en un sistema de referencia ligado a la carretera.

EJERCICIO M.P.10**Febrero 2006-02-13 Junio 2006-06-26**

- 10) Una superficie esférica hueca de masa m y radio R cae por un plano inclinado un ángulo α respecto al horizontal. Obtenga el mínimo valor del coeficiente de rozamiento μ para que no haya deslizamiento.

Calcule la aceleración del centro de la superficie esférica del problema anterior.

	Grado en Ing. en Tecnologías Industriales c/ Almirante Francisco Moreno, 5, 1º Izda., 28040 Madrid. Tlfno: 91 535 75 29 www.academiajc.com	Mecánica Profesor Alex García
--	--	---



EJERCICIO R-M.P.11 Septiembre 2006-09-18

- 11) Una rueda motriz de un vehículo que avanza sin deslizar por una carretera horizontal, soporta una fuerza vertical descendente, P , y otra horizontal, F , en sentido opuesto al de avance del vehículo. Ambas fuerzas se admiten aplicadas en el centro de la rueda, de radio R , y masa m concentrada en su periferia. A la rueda se le aplica un par motor, M , por su eje. El único rozamiento posible es del tipo de Coulomb entre rueda y firme de la carretera con coeficiente μ . Determine el valor de la aceleración del vehículo.

En relación con la cuestión anterior, obtenga el mínimo valor de μ para que la rueda avance sin deslizar.

EJERCICIO R-M.P.12 Junio 2008-06-20

- 12) Si I es un punto de un sólido rígido con movimiento plano que en el instante t_0 es centro instantáneo de rotación del movimiento, relacione la derivada del momento cinético en I , $\frac{dL_I}{dt}$, en el instante $t = t_0$ con la resultante F y el momento en I , M_I , de las fuerzas que actúan sobre el sólido en el instante t_0 .

PROBLEMA M.P.1 (2005-02-07)

I) Un automóvil de masa $m = 400 \text{ kg}$ circula por una carretera recta, inclinada un ángulo $\alpha = 15^\circ$ respecto al plano horizontal. Las ruedas tienen un radio $R = 30 \text{ cm}$ y la distancia entre ejes es $d = 160 \text{ cm}$. La masa de las ruedas y la de los restantes elementos móviles respecto al chasis se considera despreciable, admitiéndose que el centro de masas del sistema se encuentra en el plano de los ejes de las ruedas, en el centro del rectángulo que forman sus centros.

El vehículo posee tracción trasera y el par motor que se aplica al eje trasero (M_e) es cuatro veces superior al par generado por el motor (M_m) debido a la conversión de la caja de cambios.

Se desea que el vehículo marche con aceleración constante $a = 0,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ sin derrapar ni levantar las ruedas delanteras del suelo.

Se adoptará $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- 1) Dibuje las acciones mecánicas sobre cada uno de los siguientes elementos cuando se consideran aislados del resto del vehículo y de la carretera: una rueda trasera, una rueda delantera, el chasis.
- 2) Calcule el par generado por el motor del automóvil, M_m y su potencia cuando su velocidad es de 60 km/h .
- 3) Determine las reacciones del firme de la carretera sobre una rueda delantera y sobre otra trasera, facilitando sus componentes en la dirección del movimiento y según la perpendicular al firme de la carretera.
- 4) Demuestre que existe una aceleración máxima que el vehículo no puede superar para que no se despeguen del suelo las ruedas delanteras. Compruebe que la aceleración indicada como dato permite que el automóvil marche con las cuatro ruedas en contacto con el firme.
- 5) Obtenga el valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que no se produzca deslizamiento en las ruedas.

II) El vehículo sube la cuesta con velocidad uniforme.

- 6) Demuestre que existe una pendiente máxima que el vehículo no puede superar para que no se despeguen del suelo las ruedas delanteras. Determine su valor mediante $\tan \alpha_{\text{máx}}$.
- 7) Obtenga el valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que no se produzca deslizamiento en las ruedas.

III) El vehículo marcha sobre una carretera horizontal con velocidad uniforme.

- 8) Indique los valores de las reacciones del firme de la carretera sobre una rueda trasera y sobre otra delantera.
- 9) Obtenga el valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que no se produzca deslizamiento en las ruedas.

NOTA: Las cuestiones 2) a 9) se responderán facilitando la expresión literal en función de datos del enunciado y, además, su valor numérico.

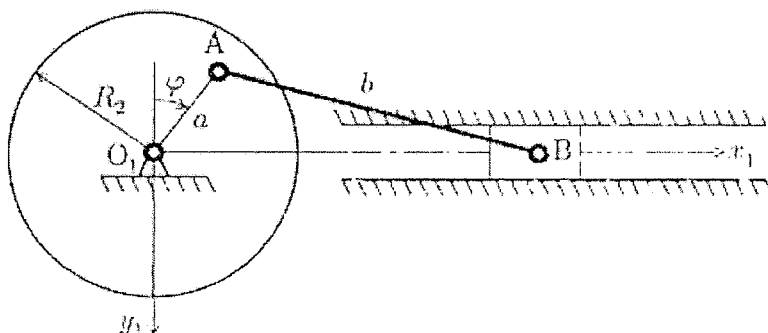
PROBLEMA M.P.2 (2003-09-15)

Se analiza el movimiento de un mecanismo de biela manivela constituido por un círculo homogéneo de masa m_2 y radio R_2 (manivela) cuyo centro coincide con el origen del sistema inercial de referencia S_1 : $\{O_1x_1y_1z_1\}$. La biela, AB, se articula a la manivela en el punto A, siendo $\overline{O_1A} = a$, y a la corredera en el punto B. La longitud de la biela es b y su masa se admite despreciable. La corredera, de masa m_4 , desliza según O_1x_1 sobre una guía, solidaria de S_1 , sin rozamiento. Todas las articulaciones son ideales. La posición del sistema se describe mediante el ángulo φ indicado en la figura. Aunque se representa el mecanismo sobre el plano de dibujo, sus distintos elementos se encuentran contenidos en diferentes planos paralelos de modo que no interfieren entre sí.

En todo el ejercicio solo se considera el movimiento de avance de la corredera, es decir, $b-a < x_B < b+a$.

- 1) Determine la posición de la corredera expresando x_B (abscisa de B en S_1) en función de φ y compruebe que el resultado es

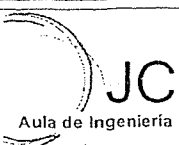
$$x_B = a \sin \varphi + b \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cos^2 \varphi}$$



- 2) Calcule la velocidad de B, expresándola en función de φ , $\dot{\varphi}$ y de parámetros conocidos.
- 3) Si la manivela (círculo de radio R_2) gira con velocidad angular constante, ω_2 , obtenga la aceleración de B en función de φ y de parámetros conocidos del mecanismo, es decir parámetros del enunciado.

En las restantes cuestiones el movimiento de la manivela se produce con velocidad angular constante, ω_2 , y existe una fuerza exterior constante, F , sobre la corredera en sentido opuesto al desplazamiento de ésta.

- 4) Determine el par M_2 que debe aplicarse a la manivela para que sea posible el movimiento indicado. El par M_2 resulta función de φ , ω_2 y de parámetros ya indicados, pero es suficiente que proporcione una expresión en función de F , m_4 , ω_2 , $\dot{x}_B$ y $\ddot{x}_B$ pues ya se han obtenido $\dot{x}_B$ y $\ddot{x}_B$ como funciones de φ y ω_2 en las cuestiones 2) y 3).
- 5) Indique mediante un croquis las fuerzas que actúan sobre la biela y sobre la corredera y calcule la fuerza F_{23} que la biela ejerce sobre la manivela expresando su módulo en función de M_2 , φ y de parámetros conocidos del mecanismo. Indique, también, la dirección y sentido de dicha fuerza.
- 6) Determine las componentes en S_1 de la reacción de la guía sobre la corredera, expresándolas en función de φ , F_{23} y de parámetros conocidos del mecanismo.

	Ingenieros Industriales c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Teléfono: 91 535 75 29	Mecánica II Profesor Alex García
---	---	--

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO PLANO CON LIGADURA LISA

- SE ESTUDIA LA DINÁMICA DE UN SÓLIDO CON MOVIMIENTO PLANO. EL SISTEMA DE FUERZAS APLICADAS QUE ACTÚAN SOBRE ÉL SE REDUCE A UNA RESULTANTE $\vec{F} = F_x \vec{i}_1 + F_y \vec{j}_1 + F_z \vec{k}_1$ Y A UN MOMENTO EN G, $\vec{M}_C$.
- SE SUPONE UNA LIGADURA LISA, QUE IMPIDE EL MOVIMIENTO SEGÚN $\vec{k}$. LAS FUERZAS DE LIGADURA PUEDEN REDUCIRSE ENTONCES A UNA RESULTANTE $\vec{R} = R_z \vec{k}$, CON UN MOMENTO $\vec{M}_C^R$ QUE SERÁ POR TANTO $\vec{M}_C^R = M_{x_1}^R \vec{i}_1 + M_{y_1}^R \vec{j}_1$

• POR T.M.A. CANTIDAD MOVIMIENTO : $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}^c \Rightarrow \vec{F} + \vec{R} = m(\ddot{\xi} \vec{i}_1 + \ddot{\eta} \vec{j}_1)$

$$\vec{i}_1 : F_{x_1} = m \ddot{\xi} \quad (1)$$

$$\vec{j}_1 : F_{y_1} = m \ddot{\eta} \quad (2)$$

• POR T.M.A. MOMENTO CINÉTICO $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C + \vec{M}_C^R$

$$\vec{k}_1 \equiv \vec{k} : I_z \ddot{\varphi} = M_z \quad (3)$$

CON (1) (2) (3) SE OBTIENEN (ξ, η, φ)

• PARA LAS FUERZAS DE LIGADURA, TRABAJANDO EN EL SISTEMA $S(x, y)$

• POR T.M.A. CANTIDAD MOVIMIENTO : $\vec{k} \cdot \vec{F}_z + R_z = 0$

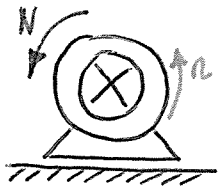
• POR T.M.A. MOMENTO CINÉTICO : $\vec{i} : -P_{xz} \ddot{\varphi} + P_{yz} \dot{\varphi}^2 = M_x + M_x^R$

$\vec{j} : -P_{yz} \ddot{\varphi} - P_{xz} \dot{\varphi}^2 = M_y + M_y^R$

DE ESTO SE DEDUCE QUE PARA QUE LAS FUERZAS DE LIGADURA EQUILIBREN EL SISTEMA DE FUERZAS APLICADAS Y NO DEPENDAN DE LA CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO (EQUILIBRIO DINÁMICO EN SÓLIDO CON EJE FIJO) ES NECESARIO QUE EL PLANO DEL MOVIMIENTO SEA PARALELO A UN PLANO PRINCIPAL DE INERCIA DEL SÓLIDO, ES DECIR A UN PLANO DE SIMETRÍA DEL ELIPSOIDE CENTRAL DE INERCIA

MOTORES

MOTORES



Aplicaremos la fórmula $P_m = N \cdot n$

n : velocidad = $\dot{\varphi}$
 N : momento

Esto es, la pot. suministrada por un motor es momento · velocidad

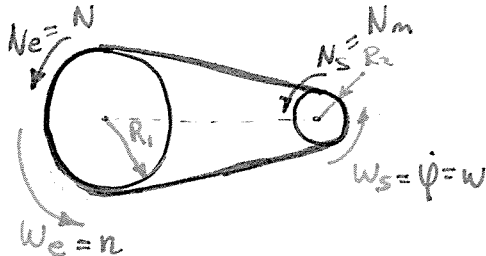
N dependerá de φ , n y $u(t) \equiv$ señales de control

$N = u(t)M(n)$ con $M(n) \equiv$ curva par-velocidad (dato) a partir de la cual se obtiene $W_m(n) = n M(n) \equiv$ curva pot-velocidad

Los valores de la velocidad para los que se den los máximos de par y potencia son $n^* \xrightarrow{\uparrow} n^* M'(n^*) + M(n^*) = 0$

$$\frac{dW}{dn} = 0 \xrightarrow{n=n^*} n^* M'(n^*) + M(n^*)$$

ACOPLAMIENTO



$$W_e = \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \omega_s$$

$$r N_e = N_s$$

DIMENSIONAMIENTO $\rightarrow$ Ej tipo: ① ②

En la mayoría de problemas se pretende elegir el motor más adecuado entre una gama dada, por su curva $M(n)$ (curva par-velocidad) dependiente de un parámetro $K \rightarrow$ Buscaremos K^* y r^* $N_m = r u M(Kn)$ ③

$\rightarrow$ 1º buscaremos el máximo valor de u en función de K , r e igualamos a 1

$\rightarrow$ 2º despejamos $K(r)$ y hallamos su valor mínimo que determina derivando respecto de r
 K^* y r^*

④ Para sacar N_m habrá que aplicar la mecánica clásica (teorema de (mom. cin.) cantidad movi. ...)

⑤ Al maximizar u se usará que $n_{max} = n^* = r \dot{\varphi}_{max} = r \frac{U}{R}$

Otro método:

1- Cálculo de N_m por mecánica clásica

2- Cálculo de $P_{salida, max} = N_m \cdot \dot{\varphi}_{max}$

3- Cálculo de $P_{entrante, max} = p^*(n^*)$; $p(n) = r u M(n, K) \rightarrow \frac{dp}{dn}(n^*) = 0 \xrightarrow{\text{despejando } n^*} p(n^*)$

4- Igualar Potencias $\rightarrow (K^*)$, $n^* = r^* \dot{\varphi}_{max} \rightarrow (r^*)$

BOMBAS O COMPRESORES. ELEMENTOS COMBINADOS

Para bombas aplicaremos los mismos 2 métodos.

Solo variará el cálculo del N_m , que en vez de por mecánica clásica lo haremos por hidráulica.

$$N_m = K \cdot \Delta P = K \frac{F}{A_{\text{rea}}}$$

K = cte dada de bomba
Distinta K del $N(K, n)$

Cuando la bomba no sea ideal

$$N_m = K \Delta P = K \left(\frac{F}{A} + R_h \Delta v \right)$$

R_h = coef de roz hidráulico

K es el volumen desplazado por la bomba en un giro de 1 radian

Fórmulas importantes:

$$P = N \cdot W = Q \Delta P$$

Para cilindros

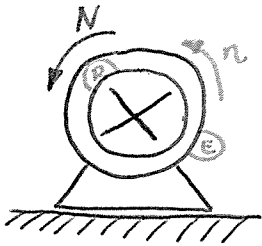
$$F = A \Delta P$$

$$F = v A \Delta P$$

siendo v la velocidad del émbolo $v = \frac{Q}{A}$

ANEXO

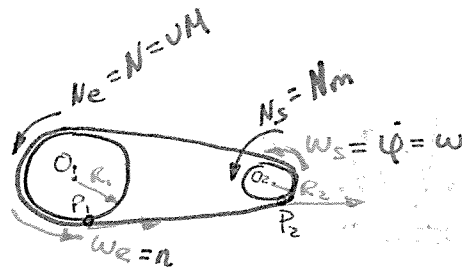
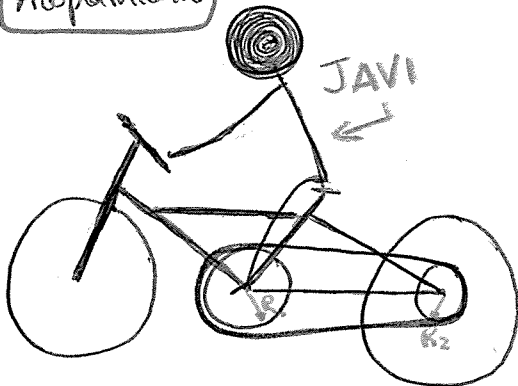
Motora



n : velocidad del rotor respecto al estator

N : Momento axial respecto al eje del motor

Acoplamiento



• Cadena no desliza sobre plato ni piñón:

$$|\vec{U}_{P1}| = |\vec{U}_{O1} + \vec{\omega} \times \vec{O1P1}| = \omega \cdot R1$$

$$|\vec{U}_{P2}| = |\vec{U}_{O2} + \vec{\omega} \times \vec{O2P2}| = \omega \cdot R2$$

• Por cadena inextensible $\omega R1 = \omega_s R2$

• Si no hay pérdidas en la transmisión

$$P_e = P_s \Rightarrow N_e \omega_e = N_s \omega_s$$

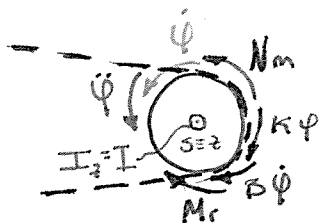
$$\omega_e = \left(\frac{R2}{R1} \right) \omega_s$$

$$N_e \cdot r = N_s$$

En caso de bici: Subir wertas $\left\{ \begin{array}{l} R2(\text{piñón}): \text{Grande} \quad R1(\text{plato}): \text{Pequeño} \\ \omega_e = r \omega_s \Rightarrow \omega_e > \omega_s \quad (\text{dar pedales rápido}) \\ N_e \cdot r = N_s \Rightarrow N_s > N_e \end{array} \right.$

Bajar wertas $\left\{ \begin{array}{l} R2(\text{piñón}): \text{Pequeño} \quad R1(\text{plato}): \text{Grande} \\ \omega_e = r \omega_s \Rightarrow \omega_s > \omega_e \quad (\text{no dar casi pedales}) \\ N_s = N_e \cdot r \Rightarrow N_e > N_s \end{array} \right.$

• Por teorema del movimiento cinético axial según el eje de salida:

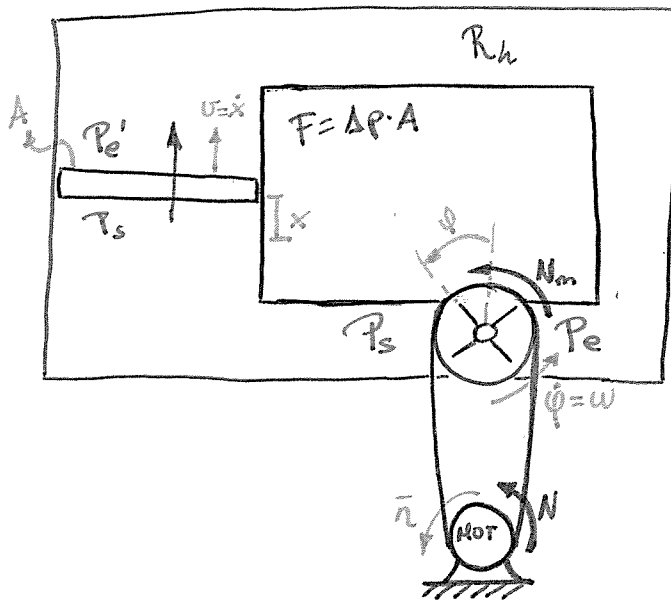


$$K: N_m - K\varphi - B\dot{\varphi} - M_r = I_z \ddot{\varphi}$$

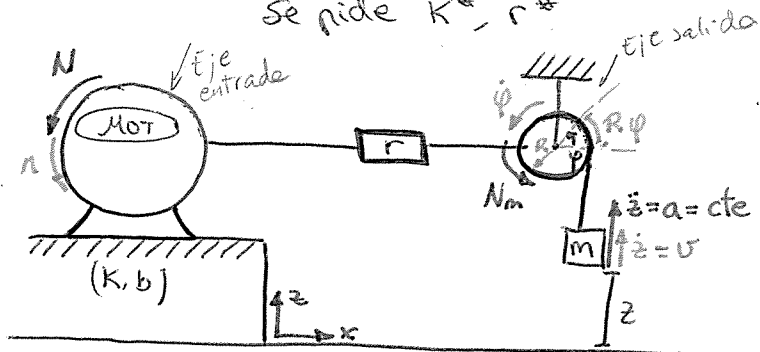
$$\Rightarrow N_m = K\varphi + B\dot{\varphi} + I_z \ddot{\varphi} + M_r$$

$$\phi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$$

Elementos combinados



Ej. Motores 1 $r, R, m, \ddot{z} = a = \text{cte}$; $0 \leq v \leq v^* = v_{\text{max}}$; g ; $M(K, n) = K - bn$; m_p
 Se pide K^*, r^*



$$\begin{aligned} R \cdot \varphi &= z \\ R \dot{\varphi} &= \dot{z} = v \\ R \ddot{\varphi} &= \ddot{z} = a \end{aligned}$$

1er método: $P_{\text{máx},e} = P_{\text{máx},s} \cdot P_{\text{máx},s} = N_m \dot{\varphi}_{\text{max}}$

$$\Rightarrow \text{Por tanto } N_m = m(a+g)R$$

$$\dot{\varphi} = \dot{z}/R \rightarrow \dot{\varphi}_{\text{max}} = \frac{v^*}{R}$$

$$\rightarrow P_{\text{máx},s} = m(a+g)R \frac{v^*}{R} = m(a+g)v^*$$

• $P_{\text{máx},e} = P^*(n^*)$, $p(n) = n M(K, n) = n(K - bn) = nK - bn^2$

Para sacar el max. $\frac{dP}{dn} = 0 \rightarrow \frac{dP}{dn}(n^*) = K - 2bn^* = 0$

$$n^* = \frac{K}{2b} \rightarrow P^*(n^*) = \frac{K}{2b} \left(K - b \frac{K}{2b} \right) = \frac{K^2}{2b} - \frac{K^2}{4b} = \frac{K^2}{4b}$$

Por tanto $P_{\text{máx},e} = P_{\text{máx},s} \rightarrow m(a+g)v^* = \frac{K^2}{4b}$; $K^* = \sqrt{4bm(a+g)v^*}$

• $n^* = r^* \dot{\varphi}_{\text{max}}$; $r^* = \frac{n^*}{\dot{\varphi}_{\text{max}}} = \frac{K/2b}{v^*/R} = \frac{K \cdot R}{v^* 2b} = \sqrt{\frac{4bm(a+g)v^* R^2}{(v^*)^2 4b^2}} = \sqrt{\frac{m(a+g)R^2}{bv^*}}$

2º método: $N_m = r \cdot u \cdot M(K, n) \rightarrow u = \frac{N_m}{r M(K, n)}$; (al mismo tiempo N_m igual que antes)

$$N_m = m(a+g)R$$

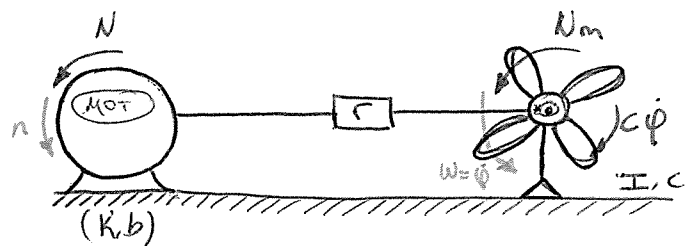
$$\rightarrow u = \frac{m(a+g)R}{r(K - bn)} \Rightarrow u^* = \frac{m(a+g)R}{r(K - br \dot{\varphi}_{\text{max}})} = \frac{m(a+g)R}{r(K - br \frac{v^*}{R})} = 1$$

$$\frac{m(a+g)R + br^2 \frac{v^*}{R}}{r} = K; K(r) = \frac{m(a+g)R}{r} + br \frac{v^*}{R}; \left. \frac{dK}{dr} \right|_{r^*} = 0$$

$$-\frac{m(a+g)R}{(r^*)^2} + b \frac{v^*}{R} = 0; r^* = \sqrt{\frac{m(a+g)R^2}{bv^*}}$$

$$K^* = \frac{m(a+g)R}{\sqrt{\frac{m(a+g)R^2}{bv^*}}} + b \frac{m(a+g)R^2}{bv^*} \frac{v^*}{R} = \sqrt{m(a+g)bv^*} + \sqrt{bm(a+g)v^*} = \sqrt{4m(a+g)bv^*}$$

EJ MOTORES 2



- Analizando el eje de salida (ver hilo)
Por teorema del mom. cinético áxico según

$$\sum \vec{M}_z = I_z \ddot{\varphi} \rightarrow N_m - c \dot{\varphi} = I \ddot{\varphi}$$

$$\rightarrow N_m = I \ddot{\varphi} + c \dot{\varphi}$$

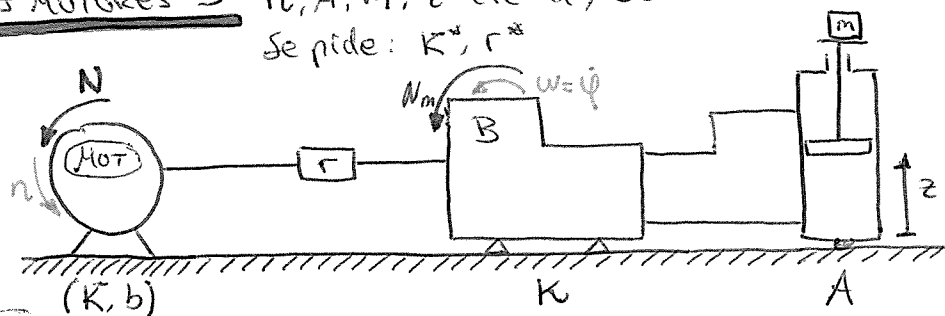
1^{er} método: $P_{max,e} = P_{max,s}$

$$P_{max,e} = P^*(n^*) \stackrel{\text{misma de ej 1}}{=} \frac{K^2}{4b} \text{ (con } n^* = \frac{K}{2b})$$

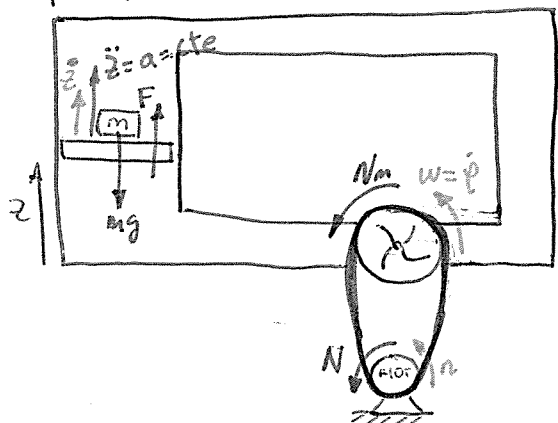
$$P_{max,s} = N_{m,max} \dot{\varphi}_{max} = (I \ddot{\varphi} + c \dot{\varphi}_{max}) \dot{\varphi}_{max} = (I \ddot{\varphi} + c w^*) w^* \left\{ \Rightarrow \dots \Rightarrow \right\} \begin{cases} K^* = \\ n^* = \\ n^* = r^* w^* \end{cases}$$

$$2^o \text{ método: } u = \frac{N_m}{r M(K, n)} = \frac{I \ddot{\varphi} + c \dot{\varphi}_{max}}{r(K - b \dot{\varphi}_{max})} = 1$$

EJ MOTORES 3 $K, A, m, \ddot{z} = cte = a, 0 \leq v \leq v^*, M(K, n) = K - bn, g, P_n = 0$
Se pide: K^*, r^*



Dibujos equivalentes modo Alex

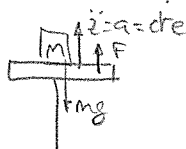


1^{er} método:

$$\Rightarrow P_{max} = P_{s,max}$$

$$P_s = N_m \cdot w; \begin{cases} w = \frac{v \cdot A}{K} \\ N_m = K \frac{F}{A} \end{cases}$$

Análisis [m]



$$\text{Por } \Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{K} = F - mg = m \cdot a$$

$$F = m(a + g)$$

$$\text{Por tanto } P_{s,max} = N_{m,max} \cdot w_{max} = K \frac{m(a+g)}{A} \frac{v^* A}{K} = m(a+g) v^*$$

$$P_{max} = P^*(n^*) = \dots \text{ ver ej. 1, 2} \dots = \frac{K^2}{4b} \text{ (} n^* = \frac{K}{2b} \text{)}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{K^2}{4b} &= m(a+g) v^* \Rightarrow K^* = \sqrt{4bm(a+g) v^*} \\ n^* &= r^* w^* \Rightarrow r^* = \frac{n^*}{w^*} = \frac{K/2b}{\frac{v^* A}{K}} = \frac{\sqrt{4bm(a+g) v^*} K}{2b v^* A} \end{aligned} \right.$$

2º método: $N_m = \frac{k}{A} m(a+g) = r u M(K, n) \Rightarrow u = \frac{\frac{k}{A} m(a+g)}{r(K - bn)} \Rightarrow u^* = \frac{\frac{k}{A} m(a+g)}{rK - br^2 w^*}$

Indusbol.com

$h^* = r\dot{\varphi}^*$

$$\Rightarrow \frac{K m(a+g)}{A r} + b r w^* = K, \quad \left. \frac{dK}{dr} \right|_{r=r^*} = - \frac{K m(a+g)}{A^2 (r^*)^2} + b w^* = 0$$

$$\left[r^* = \sqrt{\frac{K m(a+g)}{b w^* A}} = \sqrt{\frac{K^2 m(a+g)}{b w^* A^2}} \right]; \left[K^* = \frac{K m(a+g)}{A \sqrt{\frac{K^2 m(a+g)}{b w^* A^2}}} + b \sqrt{\frac{K^2 m(a+g)}{b w^* A^2}} \frac{w^* A}{K} \right] = \dots = \left[4 b m(a+g) w^* \right]$$

Cuestiones Motores

- Julio 2011 → Un compresor hidráulico bombea un volumen V de fluido por cada radián girado entre un depósito a P_1 y otro a $P_2 > P_1$. Determine el par que hay que aplicar en el eje despreciando la resistencia hidráulica

$$P = N \cdot \omega = Q \Delta P, \quad N \cdot \frac{\text{vueltas}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{Volumen}}{\text{tiempo}} \Delta P$$

$$N = \frac{\text{Vol.}}{\text{vueltas}} \Delta P = \frac{2\pi V}{2\pi \text{ rad}} \Delta P \rightarrow \boxed{N = V(P_2 - P_1)}$$

→ Sistema anterior: Obtener potencia de compresor (Q)

$$\boxed{P = Q(P_2 - P_1)}$$

→ Determine la máx. pot. de un motor cuya curva par-velocidad es: $M(n) = K e^{-n/\Omega}$, siendo K y Ω constantes conocidas, y n la velocidad angular del motor.

$$P = nM = nK e^{-n/\Omega}$$

$$\left. \frac{dP}{dn} \right|_{n=n^*} = 0 \rightarrow e^{-\frac{n^*}{\Omega}} \left[K - \frac{n^* K}{\Omega} \right] = 0$$

$$n^* = \Omega$$

$$\boxed{P_{\text{máx}} = P(n^*) = K \Omega e^{-1}}$$

- Junio 2010 → Cilindro hidráulico con diferencia de presiones 10^4 Pa y acción en émbolo 10 cm^2 . Se pide Potencia si $Q = 0.5 \text{ l/s}$

$$Q = 0.5 \frac{\text{l}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ dm}^3}{1 \text{ l}} \frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ dm}^3} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}, \quad \boxed{P = Q \Delta P = 5 \text{ W}}$$

→ Para cilindro anterior obtenga la velocidad a la que se desplaza el émbolo respecto al cilindro

$$P = v \cdot A \Delta P \Rightarrow 5 = v \cdot 0.001 \cdot 10^4, \quad \boxed{v = 0.5 \text{ m/s}}$$

$$A = 10 \text{ cm}^2 \frac{1 \text{ m}^2}{10000 \text{ cm}^2}$$

→ Curva par-velocidad $M(n) = a(1 - bn^2)$. Se pide n^*

$$P = nM = an(1 - bn^2)$$

$$\left. \frac{dP}{dn} \right|_{n=n^*} = 0 \rightarrow a - 3abn^2 = 0, \quad \boxed{n^* = \sqrt{\frac{1}{3b}}}$$

• Septiembre 2010

→ Se aplica un par N a una polea de radio R unida por correa fija a otra de radio R' . Halle N' (N, R, R')



$$nR = \omega R'$$

$$\frac{n}{\omega} = \frac{N'}{N} = \frac{R'}{R}, \quad \boxed{N' = \frac{R'}{R} N}$$

→ Si la polea de la izquierda gira con rotación n , halle la vel. ω de la polea de la derecha

$$\frac{n}{\omega} = \frac{R'}{R} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{nR}{R'}}$$

• Junio 2010

→ Un compresor hidráulico sin pérdidas: gira con 2 rad/s, caudal = 0,5 l/s, $\Delta p = 10^4$ Pa. Hallar P y potencia

$$P = N\omega = Q\Delta p, \quad N \cdot 2 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4, \quad \boxed{N = 2,5 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

$$\boxed{P = 5 \text{ W}}$$

• Enero 2010 → 0,628 l por revolución, $N = 9 \text{ N}\cdot\text{m}$. Δp ??

$$P = N\omega = Q\Delta p, \quad N \cdot \frac{\text{revoluciones}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{Volumen}}{\text{tiempo}} \cdot \Delta p$$

$$\Delta p = 9 \frac{2\pi \text{ rad}}{0,628 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} \approx 90 \text{ kPa}$$

• Septiembre 2009 → $Q = V \cdot \omega$ con $V = \text{cte}$. Se pide relacionar $|\Delta p|$ y $|N|$

$$P = N \cdot \omega = Q \Delta p, \quad \frac{Q}{\omega} = \frac{N}{\Delta p} = V$$

$$\boxed{|N| = V |\Delta p|}$$

- Junio 2009 → $\vec{U}_A(1, 2, -2)$ $\vec{W}(-1, 1, 1)$ $\vec{M}_A(1, 2, 3)$ $\vec{F}(2, 0, 1)$ Se pide Potencia

$$P = \vec{U} \cdot \vec{F} + \vec{W} \cdot \vec{M}_A = (2 - 2) + (-1 + 2 + 3) = \boxed{4 \text{ W}}$$

- Enero 2009 → Curva: $P(n) = K(3\Omega^2 - n^2)n$. Se pide $M_{\max}$

$$\left. \frac{dP}{dn} \right|_{n=n^*} = 0 \rightarrow 3K\Omega^2 - 3K(n^*)^2 = 0, n^* = \Omega$$

$$P_{\max} = K(3\Omega^2 - \Omega^2)\Omega = 2K\Omega^3 = M_{\max} \Omega^*$$

$$\boxed{M_{\max} = 2K\Omega^2}$$

- Febrero 2008 → Bomba: K, A (sección), N . Se pide F
↳ V_{radial}

$$N \cdot W = Q \Delta P$$

$$N \frac{\text{radianes}}{\text{tiempo}} = \frac{V}{\text{tiempo}} \Delta P$$

$$N = K \Delta P; \Delta P = \frac{N}{K}$$

$$\boxed{F = A \cdot \Delta P = A \frac{N}{K}}$$

$$\rightarrow M(n) = K(\Omega^2 - n^2) \text{ se pide } n^*, P^*$$

$$P = M \cdot n = K\Omega^2 n - Kn^3; \left. \frac{dP}{dn} \right|_{n=n^*} = K\Omega^2 - 3(n^*)^2 K = 0$$

$$\boxed{n^* = \frac{\Omega}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\Omega}{3}}$$

MOTORIZACIÓN DE MECANISMOS

1.-MOTORES

Un motor rotativo es un conjunto de dos sólidos rígidos, estator ε y rotor ν . El rotor puede girar en torno a un eje fijo (que suele tomarse como eje z) respecto al estator, recibiendo de él un conjunto de fuerzas cuyo momento áxico respecto a z se denomina par motor N (por acción-reacción el rotor ejerce sobre el estator un momento opuesto y del mismo valor, $-N$).

La velocidad de rotación del rotor respecto del estator se denomina velocidad del motor n .

Se demuestra que la potencia que un motor suministra a un mecanismo es igual al producto de su par por su velocidad: $P_m = N \cdot n$ *Momento por velocidad*

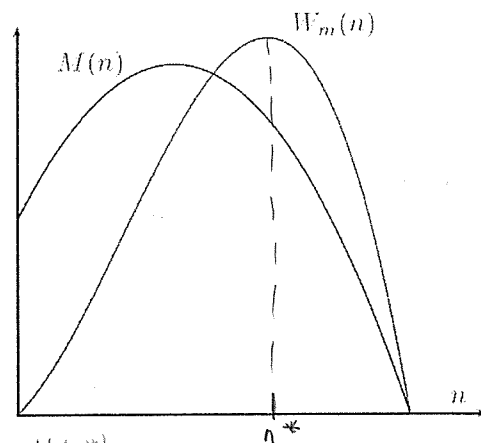
El motor puede proporcionar un par que será función de la posición del rotor respecto del estator (determinada por un ángulo φ), de la velocidad n ($n = \dot{\varphi}$) y de una o varias señales externas $u(t)$ (señales de control, alimentación eléctrica, etc.), siendo $N = N(\varphi, n, u(t))$

En lo que sigue se considerarán sólo motores que proporcionen un par $N = u(t)M(n)$, siendo $u(t) < 1$ el porcentaje de par actuante que depende de una señal externa de control.

La función $M(n)$ determina la curva par-velocidad del motor. A partir de ella se puede obtener la función $W_m(n) = nM(n)$ cuya representación determina la curva potencia-velocidad del motor.

Los valores de la velocidad para los cuales se dan los máximos de par y potencia constituyen las velocidades de máximo par o máxima potencia. Esta última puede obtenerse buscando el máximo de la función $nM(n)$: la velocidad de máxima potencia (n^*) verifica:

$$n^* M'(n^*) + M(n^*) = 0$$



2.-ACOPLAMIENTO

En dispositivos capaces de multiplicar o dividir la velocidad de rotación de un eje, como las cajas reductoras, existen dos ejes, uno de entrada e y otro de salida s , cuyas rotaciones respecto de la caja ω_e y ω_s están relacionadas mediante un factor multiplicativo r , siendo

$\omega_e = r\omega_s$, y el momento áxico que ejerce el eje de entrada sobre la caja N_e está relacionado con el que la caja aplica sobre el eje de salida N_s mediante la ecuación: $N_s = rN_e$ siendo $N_e\omega_e = N_s\omega_s$

Cuando se utiliza un motor para mover un sistema, su estator se une rigidamente a la caja y su rotor se suele acoplar al eje de entrada de una caja reductora, siendo:

$$\omega_e = n, \quad \omega_s = \omega, \quad N_s = N_m, \quad N_e = N, \quad \text{y quedando: } n = r\omega, \quad N_m = rN$$

Si $r > 1$ se tiene una caja que aumenta el par y disminuye la velocidad, mientras que si $r < 1$ sucede lo contrario

Se ha visto que en un motor es $N = u(t)M(n)$ *mon. eje entrada*, siendo $u(t) < 1$, y que en un mecanismo es

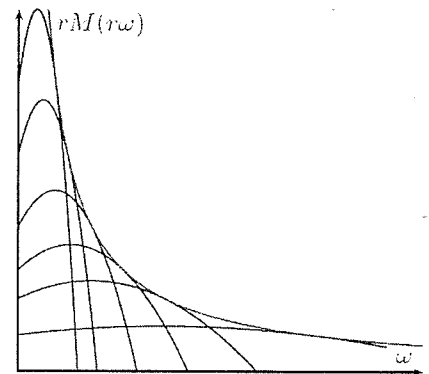
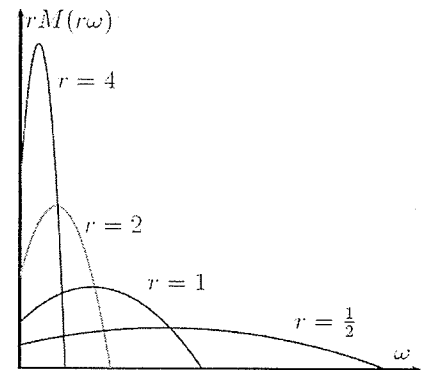
$N_m = rN$ y . Por tanto es $N_m = rN = ruM(n) = ruM(r\omega)$ *mon. eje sal.*

En la figura se muestran las curvas $rM(r\omega)$ definidas por el motor para distintos acoplamientos r .

La envolvente de la familia de curvas obtenida variando el parámetro r en la expresión $M_m(\omega) = rM(r\omega)$ recibe el nombre de hipérbola motora. Se obtiene eliminando r de su segundo miembro $M(r\omega) + r\omega M'(r\omega) = 0$

mon. sal. Esta hipérbola también puede obtenerse de la relación $M_m(\omega) \cdot \omega = P^*$ *mon. eje* donde P^* es la máxima potencia obtenible por el motor.

La hipérbola motora representa el máximo par que puede aplicar un motor dado a un mecanismo suponiendo que en cada instante t se pudiese elegir una relación de transmisión $r(t)$ cualquiera (esto es posible mediante una Transmisión de Variación Continua, CVT).



Denominando ahora ϕ al ángulo girado por el eje de salida como parámetro para determinar la posición del mecanismo, será ahora $\omega = \dot{\phi}$ (y no $n = \dot{\phi}$ como ocurría en el apartado 1 donde ϕ era el ángulo girado por el eje del motor, o eje de entrada) y $N_m = ruM(r\dot{\phi})$, y por aplicación de los teoremas fundamentales de la dinámica se obtiene una relación entre el movimiento y el par N_m :

$$\phi(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) = N_m = ruM(r\dot{\phi})$$

La función $\phi(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ puede tener, en sistemas lineales con amortiguamiento viscoso, la forma

$$\phi(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) = I_z \ddot{\phi} + B \dot{\phi} + k\phi + M_r$$

Suele ocurrir que el término de rozamiento es cuadrático o cúbico en la velocidad, o incluso despreciable, y si además se tienen mecanismos rotatorios con simetría de revolución, se anula la constante k .

Nunca se considera el $K \cdot \phi$ y gen M_r tan solo.

	Ingenieros Industriales c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Teléfono: 91 535 75 29	Mecánica II Profesor Alex García
--	---	--

3.-DIMENSIONAMIENTO

Se pretende elegir un motor de entre una gama de motores, de forma que si se identifica cada motor mediante un parámetro c que crezca con el precio y el tamaño del motor, la *curva par-velocidad*, diferente para distintos valores de c , viene dada por una función de la velocidad y de c , con lo que el par generado por un motor c es: $N = uM(c, n)$

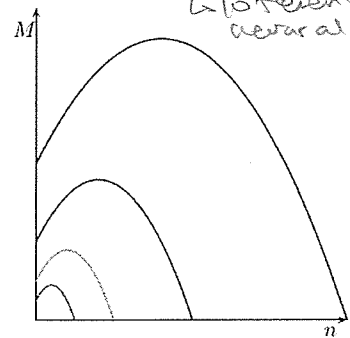
En la práctica pueden llamarse K

*Si tenemos el motor más pequeño $u=1$ (ejemplo jiat pando)
 $\hookrightarrow$ lo tenemos que llevar al más*

En la figura se muestran *curvas par-velocidad* de cuatro motores de una misma gama.

Se pretende elegir un motor de la gama y una relación r que permita que el movimiento de nuestro mecanismo cumpla con un conjunto de especificaciones conocidas. La ecuación de funcionamiento del sistema, para el motor c y la relación r es:

$$\phi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = ruM(c, r\dot{\varphi})$$



formulándose el problema general del siguiente modo:

Encontrar el máximo valor $u^*(c, r)$ de u , en función de c, r para que el movimiento cumpla con las especificaciones dadas, igualarlo a 1 y, de la relación $c(r)$ definida, hallar el mínimo valor de c (c^*) y la relación r^* con la que se consigue.

señal de control más

porque lo queremos al max.

Es decir, los pasos a seguir son.

1) Encontrar el máximo de u en función de c, r : $u^* = \max \left(\frac{\phi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})}{rM(c, r\dot{\varphi})} \right)$

2) Despejar $c(r)$ de la ecuación $u^*(c, r) = 1$ y hallar su valor mínimo, que determina c^*, r^*

Ejemplos (ver clase)

4.- SISTEMAS HIDRÁULICOS

Son sistemas constituidos por circuitos por los que se mueven fluidos incompresibles que pueden arrastrar émbolos y turbinas que realicen diversos trabajos mecánicos. El circuito hidráulico es un recinto cerrado por el que puede circular un fluido con un caudal Q . Para cada tramo del mismo existe una relación entre las presiones de sus extremos y el caudal que circula. En cada conducción existe una resistencia hidráulica R_h , cumpliéndose la relación, para un fluido muy viscoso y un caudal bajo (lo que se supondrá en adelante:

$$\Delta p = R_h Q$$

Los elementos fundamentales de un circuito hidráulico son el compresor o bomba, las turbinas y los cilindros

BOMBAS O COMPRESORES

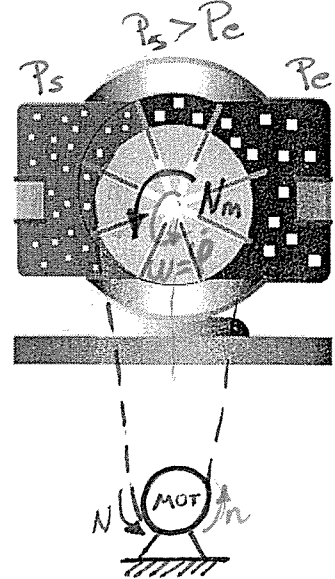
En los compresores o bombas hidráulicas, se fuerza al fluido a que pase de un conducto de entrada a uno de salida. Son en general máquinas rotativas y la velocidad de rotación de las mismas fija el caudal.

En las bombas hidráulicas ideales, el caudal Q depende directamente de ω , a través de una constante k con dimensiones de volumen $[Q = k\omega]$, siendo el par:

$$N_m = k\Delta p$$

El significado de k es el volumen desplazado por la bomba en un giro de un radián desde la zona de baja presión a la de alta. La potencia entregada al circuito es:

$$P = N_m \omega = Q\Delta p$$



CILINDROS

Elemento en el que un émbolo se puede trasladar según el eje del cilindro (cilindro de sección constante A). La fuerza que experimenta debida a la diferencia de presión entre sus lados es:

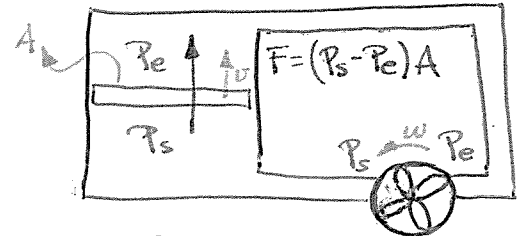
$$F = A\Delta p$$

y la potencia suministrada

$$P = vA\Delta p$$

siendo v la velocidad del émbolo respecto al cilindro, de valor $v = \frac{Q}{A}$, siendo por tanto

$$P = Q\Delta p$$



TURBINAS

Elemento recíproco del compresor. Cuando se sitúan en un salto de presión proporcionan un par mecánico $N = k\Delta p$, siendo atravesadas por el caudal $Q = k\omega$ (ω es su velocidad de rotación). La potencia es $P = N\omega = Q\Delta p$. k es el volumen desplazado por la turbina desde la zona de alta presión a la de baja en promedio para una rotación de un radián

Cuando un caudal circula por una conducción del circuito genera un calor por fricción, debido a la viscosidad: $W = Q^2 R_h$

	Ingenieros Industriales	Mecánica II
	c/ Conde de la Cimera, 6 (bajo jardín), 28040 Madrid. Teléfono: 91 535 75 29	Profesor Alex García



ELEMENTOS COMBINADOS

El cilindro hidráulico suele accionar un mecanismo con una fuerza F , definiéndose (a través de las ecuaciones de la dinámica) una relación entre F , la posición (x), la velocidad ($v = \dot{x}$) y la aceleración ($\ddot{x}$) del mecanismo movido por el cilindro:

$$F = \Psi(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

Se saca por cond. mecanicas haciendo $\Sigma F = 0$ sobre el émbolo (mec. clásica)

Con cilindros hidráulicos deben identificarse las características de fuerza y velocidad del émbolo y relacionarlos con el par y la rotación del eje del compresor, según:

$$N_m = k \Delta p = k \left(\frac{F}{A} + R_h A v \right)$$

Handwritten notes: $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3$, $Q = \omega \cdot K = v \cdot A$, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{vA}{k}$, $\frac{dx}{dt}$

Se tiene además la relación entre movimiento del émbolo y de la bomba: $\omega = \frac{vA}{k}$ (k constante

de volumen del compresor, A área transversal del cilindro) que lleva a la relación $\varphi = \frac{xA}{k}$

Con todo esto, volviendo a la teoría de dimensionamiento del motor, la función $\phi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ queda de la forma:

$$N_m = \phi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = k \left(\frac{\Psi(x, \dot{x}, \ddot{x})}{A} + R_h A v \right) = k \left(\frac{\Psi\left(\frac{k\varphi}{A}, \frac{k\dot{\varphi}}{A}, \frac{k\ddot{\varphi}}{A}\right)}{A} + R_h \dot{\varphi} \right)$$

y la ecuación de funcionamiento, considerando el par procedente del motor a través del acoplamiento es

$$N_m = \tau u \cdot M$$

cond. hidráulicas

$$k \left(\frac{\Psi\left(\frac{k\varphi}{A}, \frac{k\dot{\varphi}}{A}, \frac{k\ddot{\varphi}}{A}\right)}{A} + R_h \dot{\varphi} \right) = \tau u M(r\dot{\varphi})$$

o si se dispone de una gama de motores parametrizados por c , se tendría:

$$k \left(\frac{\Psi\left(\frac{k\varphi}{A}, \frac{k\dot{\varphi}}{A}, \frac{k\ddot{\varphi}}{A}\right)}{A} + R_h \dot{\varphi} \right) = \tau u M(c, r\dot{\varphi}),$$

siendo el método de dimensionamiento de la motorización el comentado anteriormente

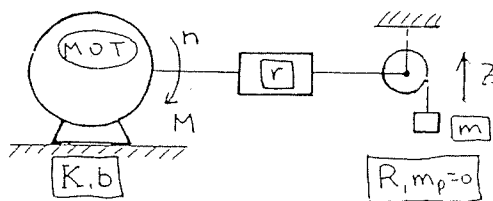
EJERCICIOS MOTORES

- 1 * – Se acopla un motor mediante una transmisión de coeficiente r a una polea simple de radio R y masa despreciable. Se pretende izar una masa m con aceleración $\ddot{z} = cte = a$ desde el reposo hasta una velocidad v^* .

La aceleración de la gravedad es g .

Se tiene una familia de motores de curva característica o curva par-velocidad dada por $M(K, n) = K - bn$, siendo K la constante propia o parámetro de cada motor de la familia.

Se pide: Determinar la constante K que identifica el motor óptimo para tal tarea, así como la constante r de la transmisión.



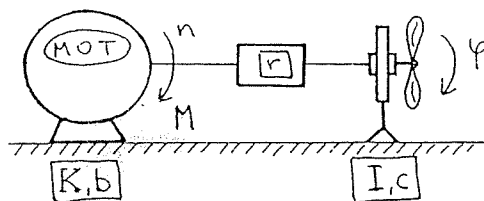
2

– Se acopla un motor mediante una transmisión de coeficiente r a un ventilador. El ventilador al girar presenta un par resistente de valor proporcional a su velocidad, siendo c dicha constante de proporcionalidad. Respecto al eje de rotación el momento de inercia del ventilador vale I .

Se desea que rote con una aceleración $\dot{\omega} = cte = \alpha$ desde el reposo hasta una velocidad ω^* .

Se tiene una familia de motores de curva característica o curva par-velocidad dada por $M(K, n) = K - bn$, siendo K la constante propia o parámetro de cada motor de la familia.

Se pide: Determinar la constante K que identifica el motor óptimo para tal tarea, así como la constante r de la transmisión.



EJERCICIOS

- 3 A – Se tiene un motor acoplado mediante una transmisión de coeficiente r a una bomba hidráulica ó compresor que a la vez acciona un cilindro hidráulico vertical.

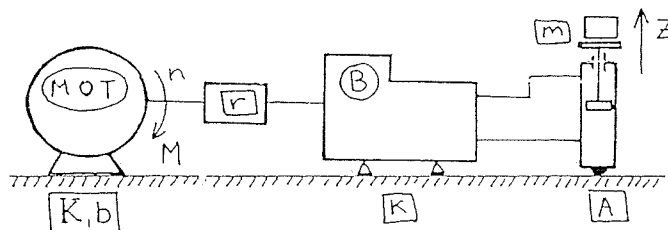
La bomba hidráulica tiene una constante volumínica k y el cilindro hidráulico unido a ella tiene una sección A .

Se pretende izar una masa m con una aceleración constante $\ddot{z} = cte = a$ desde el reposo hasta una velocidad v^* .

Se dispone de una familia de motores de curva característica o curva par-velocidad dada por $M(K, n) = K - bn$, donde K es la constante de proporcionalidad ó parámetro de cada motor de la familia.

Sea g el valor de la gravedad. Se desprecia la pérdida de carga en el circuito hidráulico. $R_h = 0$

Se pide: Determinar K del motor óptimo para tal tarea, así como la constante r de la transmisión.



- 4 – Se tiene un motor acoplado mediante una transmisión de coeficiente r a una bomba hidráulica ó compresor que a la vez acciona un cilindro hidráulico horizontal.

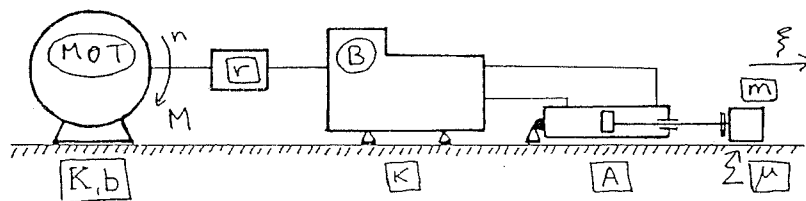
La bomba hidráulica tiene una constante volumínica k y el cilindro hidráulico unido a ella tiene una sección A .

Se pretende empujar una masa de valor m apoyada en un plano horizontal, con un coeficiente de rozamiento μ , con una aceleración $\xi = cte = a$ desde el reposo hasta una velocidad v^* .

Se dispone de una familia de motores de curva característica o curva par-velocidad dada por $M(K, n) = K - bn$, donde K es la constante de proporcionalidad ó parámetro de cada motor de la familia.

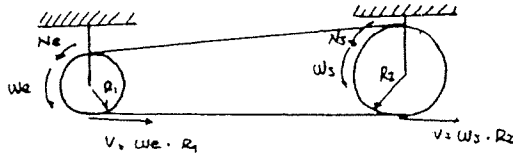
Sea g el valor de la gravedad. Se desprecia la pérdida de carga en el circuito hidráulico.

Se pide: Determinar K del motor óptimo para tal tarea, así como la constante r de la transmisión.



MOTORIZACIÓN DE MECANISMOS

(*) EJ. TE.4



$\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2$ (por RSD de cadena, sobre poleas)

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2} \omega_1 = r \omega_1$$

EJEMPLOS PUNTO 3

3.1. SISTEMAS QUE FUNCIONAN EN UN PUNTO

- Busco motorización que mantenga un sistema girando con $\Omega = \text{cte.}$
- Las ecuaciones dinámicas del mecanismo presentan simetría de revolución.
- Se tiene $\phi(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi})$, $\phi(\Omega) = r \cdot \underbrace{M(c, r, \Omega)}_N$
 $(\psi=0, \dot{\psi}=0, \text{ simetría de revolución})$ N : momento en el eje de salida
 ψ no influye

1º método: busco u y su valor máximo. En este caso, al trabajar en un solo punto, (para $\psi = \Omega$, $\dot{\psi} = 0$, ψ no influye), sólo tengo un valor de u : $u = \frac{\phi(\Omega)}{r \cdot M(c, r, \Omega)} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ igualo $u = 1$ y obtengo relación $c = c(r, \Omega) \Rightarrow$ opero $\frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=r^*} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ obtengo $\begin{cases} r^* \\ c^* \end{cases}$

2º método: como la potencia se transmite íntegra del motor a la carga,

$$P_{\text{carga}} = P_{\text{motor}} = P^*(n^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\text{carga}} = N_m \cdot \Omega \cdot \phi(\Omega) \cdot \Omega \\ P_{\text{motor}} = P^*(n^*) = n^* \cdot M(n^*) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

considero ya que en el eje de entrada tengo v_{el} y $N \cdot v_{el} \cdot M = M$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(\Omega) \cdot \Omega = P^*(n^*) \\ n^* = r^* \cdot \Omega \end{cases}$$

EMPLO 1: Mecanismo tal que $\phi(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}) = J\ddot{\psi} + B\dot{\psi}$ ⇒ se busca $\dot{\psi} = \omega = \text{cte}$
 gama de motores, $M(c, n) = c - kn$ trabajar con $\ddot{\psi} = 0$
 ($k = \text{cte dato}$)

→ Por 2º Método: $P_{\text{motor}} = M(n) \cdot n = (c - kn) \cdot n = cn - kn^2 \rightarrow \text{Busco } P^*(n^*)$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{n=n^*} = 0 \rightarrow c - 2kn^* = 0 \rightarrow \boxed{n^* = \frac{c}{2k}} \Rightarrow \boxed{P^* = cn^* - kn^{*2} = \frac{c^2}{2k} - \frac{c^2}{4k} = \frac{c^2}{4k}}$$

$$\phi(\omega) \cdot \omega = (J\dot{\psi} + B\dot{\psi})\omega = B\omega^2$$

$$\text{Por tanto, } \begin{cases} \frac{c^2}{4k} = B\omega^2 \rightarrow \boxed{c^* = 2\omega\sqrt{Bk}} \\ n^* \cdot r^* \cdot \omega \rightarrow \boxed{r^* = \frac{n^*}{\omega} = \frac{c/2k}{\omega} = \frac{2\omega\sqrt{Bk}/2k}{\omega} = \sqrt{\frac{B}{k}}} \end{cases}$$

→ Por 1º Método: $u = \frac{J\ddot{\psi} + B\dot{\psi}}{r \cdot (c - kn)} = \frac{B\omega}{r(c - k r \omega)} = 1 \Rightarrow c = \frac{B\omega}{r} + k r \omega \rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=r^*} = \frac{B\omega}{r^2} + k\omega = 0 \rightarrow r^* = \sqrt{\frac{B\omega}{k\omega}} \rightarrow \boxed{r^* = \sqrt{\frac{B}{k}}}$$

$$\rightarrow \boxed{c^* = \frac{B\omega}{r^*} + k r^* \omega = 2\omega\sqrt{Bk}}$$

3.2. SISTEMAS QUE FUNCIONAN EN RÉGIMEN PERMANENTE

Se desea que un mecanismo, inicialmente en reposo, llegue a un régimen permanente con $\dot{\psi} = \omega$ de con simetría de revolución, de forma que en el régimen permanente,

$$\phi(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}) = \phi(\omega)$$

no influye (simetría de revolución)

Se busca el motor más pequeño que mediante una reductora r proporcione $\phi(\omega)$ (con $\omega \in [0, \omega]$) para llevar el sistema del reposo al régimen permanente.

El análisis es igual al hecho en 3.1. Ahora hay una variación de $\dot{\psi} = 0$ a $\dot{\psi} = \omega$ y si aplico en 1º método, necesito el valor más de u para ese rango de valores de $\dot{\psi}$.

E.

Por tanto: $u = \frac{\phi(\omega)}{r M(c, r\omega)} \Rightarrow u^* = \frac{\phi(\omega)}{r M(c, r\omega)} = 1 \Rightarrow c = c(r, \omega) \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial r} \bigg|_{r=r^*} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^* \\ c^* \end{cases}$

3.3. SISTEMAS CON ACELERACIONES MÍNIMAS

Se tiene un mecanismo que puede trabajar con diferentes velocidades y posiciones. Se busca una aceleración mínima α del sistema para un rango de valores de φ y $\dot{\varphi}$. Se trabaja con el 1er método y se tiene:

1er método: $u = \frac{\phi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})}{r M(c, r, \dot{\varphi})} \Rightarrow$ Busco u^*, u_{max} (para los valores correspondientes

de φ y $\dot{\varphi}$ y después obligo a $u_{max} = 1$ y opero como en los otros métodos.

EJEMPLO 3:

Datos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Mecanismo definido por } \phi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = J\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} \begin{cases} \ddot{\varphi} = \alpha \\ 0 \leq \dot{\varphi} \leq \omega \end{cases} \\ \text{Gama de motores: } M(c, r) = c - k \underbrace{r}_{r\dot{\varphi}} \quad (k = \text{cte dato}) \end{array} \right.$

Por tanto $u = \frac{J\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi}}{r(c - kr\dot{\varphi})} \Rightarrow u \uparrow$ si $\dot{\varphi} \uparrow$ (y $\ddot{\varphi} \uparrow$) $\Rightarrow u_{max} = \frac{J\alpha + B\omega}{r(c - kr\omega)} = 1 \Rightarrow$
(pero considero $\ddot{\varphi}_{min} = \alpha$)

$\Rightarrow c = \frac{J\alpha + B\omega}{r} + kr\omega \Rightarrow$ Busco cuál: $\frac{\partial c}{\partial r} \bigg|_{r=r^*} = 0 \Rightarrow -\frac{J\alpha + B\omega}{r^2} + k\omega = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^* = \sqrt{\frac{J\alpha + B\omega}{k\omega}} \Rightarrow c^* = \frac{J\alpha + B\omega}{r^*} + kr^*\omega = 2\sqrt{(J\alpha + B\omega)k\omega}$

