Apuntes de 3°GITI

María Ballesteros

APUNTES AUTOMÁTICA

Si alguna vez estos
apuntes te sirvieron
de ayuda, piensa que
tus apuntes pueden
ayudar a muchas
otras personas.
Comparte tus apuntes
En indusbol.com o
simplyjarod.com

En estos apuntes quedan incompletos los temas 9 y 10: Automatas progrables
Diag. de Escalera

Se recomienda seguirlos por el libro:
"Sistemas de producción automatizados", a partir de la pág. 79.

# ESTABILIDAD

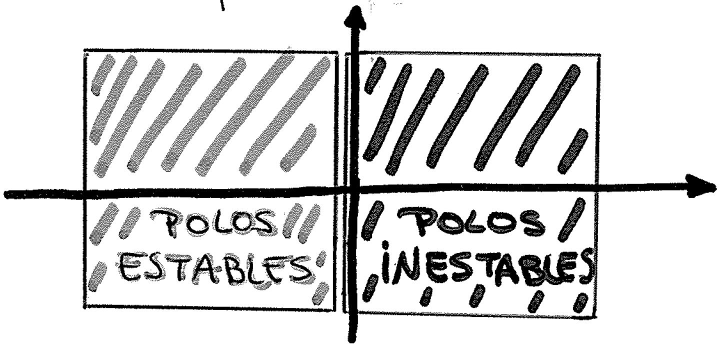
## 1 INTRODUCCIÓN: Sistemas estables

Un sistema es estable si y sólo si ante cualquier entrada acotada, la salida está acotada.

Esto es equivalente a decir que el area encerrada por la respuesta impulsional (antitransformada de la FdT) está acotada

$\int_0^\infty |g(t)|\,dt < \infty$; y si esto ocurre $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0 = \lim_{s \to 0} s\,G(s)$

En general diremos que un sistema es estable si y sólo si TODOS sus polos tienen su parte real estrictamente negativa




Por tanto, si queremos saber los polos del polinomio característico será preciso factorizarlo.

Sin embargo, para saber si un sistema es o no estable sin necesidad de factorizar el polinomio los pasos a seguir son dos:

- Aplicar la regla de Cardano-Vietta con el fin de comprobar si el sistema es, de entrada, inestable.
- Si la regla anterior no indica que sea inestable aplicaremos el criterio de Routh-Hurwitz.

# 2 CARDANO-VIETTA

Si todos los polos del polinomio característico tienen la parte real negativa, todos los coeficientes del polinomio característico han de tener el mismo signo y ninguno puede ser nulo.

Esta condición es necesaria pero no suficiente

Ej.: $p(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 6$ → Falta el coeficiente en $s^1$
Es, con seguridad, inestable

Comprobación: Raices en
→ $-2,8759$
→ $-0,6128 \pm 1,2799j$
→ $0,5507 \pm 0,8954j$ ← ¡!

$p(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 4s^2 - 2s + 6$ → El coef. en $s^1$ es negativo
Es, con seguridad, inestable

Comprobación: Raices en
→ $-2,9412$
→ $-0,5859 \pm 1,3652j$
→ $0,5565 \pm 0,7839j$ ← ¡!

$p(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 6$ → Todos los coef. son positivos
Podría ser estable pero NO ES SEGURO

Raices en:
→ $-2,8021$
→ $-0,6627 \pm 1,0816j$
→ $0,5637 \pm 1,0065j$ ← ¡!

⟹ Resulta ser inestable

# 3 ROUTH-HURWITZ

Este método determina el nº de raices positivas que tiene un polinomio. Además proporciona una condición necesaria y suficiente para la estabilidad

El método consiste en construir una tabla a partir de los coeficientes del polinomio. El número de raices positivas coincide con el número de cambios de signo de la 1ª columna de la tabla.

# Construcción de la tabla de Routh:

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
s^{n-2} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots \\
s^{n-3} & c_{n-3} & c_{n-4} & c_{n-5} & \dots \\
\vdots & \vdots & & & \\
s^2 & u_2 & u_1 & 0 & \dots \\
s^1 & v_1 & 0 & 0 & \dots \\
s^0 & w_0 & 0 & 0 & \dots
\end{array}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2} a_{n-3} - a_{n-1} b_{n-3}}{b_{n-2}}$$

$$\vdots$$

$$w_0 = \frac{v_1 \cdot u_1 - 0 u_2}{v_1} = u_1$$

**Es condición necesaria y suficiente que todos los coeficientes de la 1ª columna de la tabla de Routh sean distintos de cero y tengan el mismo signo** para que el sistema sea estable.

Ej.: $p(s) = s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 7s + 6$

Comprobamos que todos los coef. son $> 0 \Rightarrow$ cumple Cardano-Vietta

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s^6$ | $1$ | $2$ | $4$ | $\boxed{6}$ |
| $s^5$ | $3$ | $5$ | $7$ | $0$ |
| $s^4$ | $\frac{2\cdot 3 - 5\cdot 1}{3} = 0{,}3$ | $\frac{4\cdot 3 - 1\cdot 7}{3} = 1{,}7$ | $\frac{3\cdot 6 - 1\cdot 0}{3} = \boxed{6}$ | $0$ |
| $s^3$ | $\frac{5\cdot 0{,}3 - 3\cdot 1{,}7}{0{,}3} = -10$ | $\frac{7\cdot 0{,}3 - 3\cdot 6}{0{,}3} = -47$ | $0$ | $0$ |
| $s^2$ | $\frac{1{,}7\,(-10) - (-47)\cdot 0{,}3}{-10} = 0{,}13$ | $\frac{6\,(-10) - 0{,}3\cdot 0}{-10} = \boxed{6}$ | $0$ | $0$ |
| $s^1$ | $\frac{-47\cdot 0{,}13 - (-10)\cdot 6}{0{,}13} = 403$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $s^0$ | $\boxed{6}$ | | (*) | |

Hay dos cambios de signo

$\Downarrow$

2 raíces inestables

**NOTA!!** Obsérvese que el término en $s^0$ ha ido cayendo a lo largo de la tabla

**Ejercicio:** Se desea estudiar la estabilidad del sistema:

$$G(s) = \frac{s-3}{s^4+2s^3+s^2+4s+4}$$

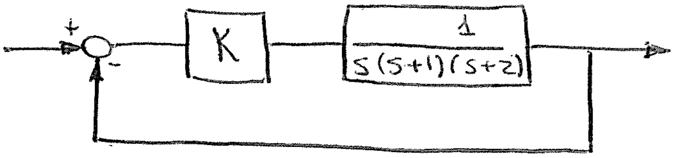
$p(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$ = Polinomio Característico } cumple la cond. necesaria de Cardano Vietta: Todos los coef. son $>0$

Construimos la tabla de Routh:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 1 | 4 |
| $s^3$ | 2 | 4 | 0 |
| $s^2$ | -1 | 4 | 0 |
| $s^1$ | 12 | 0 | 0 |
| $s^0$ | 4 | 0 | 0 |

} Existen dos raíces con la parte real positiva $\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es inestable}}$

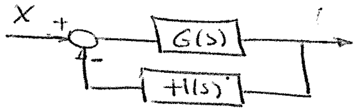
**Ejercicio:** ¿Qué valores de K hacen estable el sistema dado?




Aplicaremos las condiciones de Cardano Vietta y el criterio de Routh para comprobar la inestabilidad

$$G(s) = \frac{K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}}{1+K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\cdot 1} = \frac{K}{s(s+1)(s+2)+K}$$

**NOTA!!** Recordatorio realimentación




$$H(s) = \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$$

$p(s) = s(s+1)(s+2) + K = s^3 + 3s^2 + 2s + K$

Por Cardano Vietta $K>0$ para que sea estable el sistema

Tabla Routh

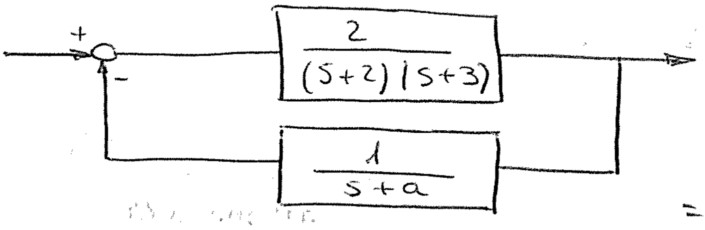
| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 2 |
| $s^2$ | 3 | K |
| $s^1$ | $\frac{6-K}{3}$ | 0 |
| $s^0$ | K | |

$\Rightarrow$ Para que sea estable el sistema

$$\frac{6-K}{3} > 0, \quad 6-K>0; \quad K<6$$

$\boxed{\text{El sistema será estable si } 0<K<6}$

Ejercicio: ¿Qué valores de $a$ hacen estable al sistema?




$$M(s) = \frac{\frac{2}{(s+2)(s+3)}}{1+\frac{2}{(s+2)(s+3)}\cdot\frac{1}{(s+a)}} = \frac{2(s+a)}{\underbrace{(s+2)(s+3)(s+a)+2}_{p(s)}}$$

Pol característico $\equiv p(s)$

$$p(s) = (s^2+5s+6)(s+a)+2 = s^3+(a+5)s^2+(5a+6)s+6a+2$$

Condición de Cardono Vietta: Todos los coef. $>0$

$$\left.\begin{cases} a+5>0 \longrightarrow a>-5 \\ 5a+6>0 \longrightarrow a>-\frac{6}{5} \\ 6a+2>0 \longrightarrow a>\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3} \end{cases}\right\} \longrightarrow a>\frac{-1}{3}$$

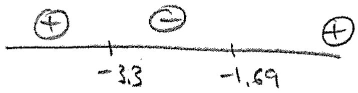
Tabla de Routh:

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | $1$ | $5a+6$ |
| $s^2$ | $a+5$ | $6a+2$ |
| $s^1$ | $b$ | $0$ |
| $s^0$ | $6a+2$ | |

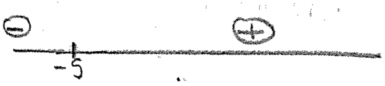
; $\begin{cases} b = \dfrac{(5a+6)(a+5)-(6a+2)}{a+5} > 0 \\ 6a+2>0 \equiv \text{Cond. Cardono Vietta} \equiv \text{Solo me fijo en la cond. } b>0 \end{cases}$

$$b>0 \Longrightarrow \frac{5a^2+25a+28}{a+5}>0$$

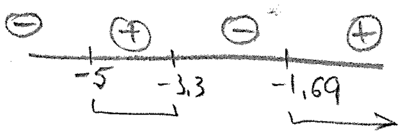
$5a^2+25a+28=0$
$a=-1,69$
$a=-3,3$




$a+5=0$
$\downarrow$
$a=-5$




$\Longrightarrow b>0$ si $-5<a<-3,3$ No cumple cond. Cardono
$-1,69<a$




La cond. de Cardono es la más restrictiva $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Para que el sistema sea estable } a>\frac{-1}{3}}$

# 4 CASOS ESPECIALES

Durante el desarrollo de la tabla de Routh pueden aparecer las situaciones especiales siguientes:

AMBAS CORRESPONDEN A SISTEMAS INESTABLES

## • Aparición de un cero en la 1ª columna:

No es posible evaluar los elementos de la fila siguiente a la del cero pues se produce una división por cero. Hay dos opciones:

- Continuamos con la elaboración de la tabla sustituyendo el elemento nulo por $\varepsilon$ y para ver el signo del término siguiente haremos tender $\varepsilon$ a $0^+$ ó $0^-$.
- Efectuamos el cambio de variable $s = 1/x$ en el polinomio de partida y procedemos a la elaboración de la nueva tabla resultante.

Ejercicio: Sea $p(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 5$ el polinomio característico de un sistema. Analizar su estabilidad

Cumple Cardano Vietta = Todos los coef. tienen el mismo signo

Tabla de Routh:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 4 | 5 |
| $s^3$ | 2 | 8 | 0 |
| $s^2$ | 0 | 5 | 0 |
| $s^1$ | | | |
| $s^0$ | | | |

↑?? No es posible continuar

El sistema tiene 2 raíces con parte real positiva ⇒ Es INESTABLE

• 1er método: Sustituimos el elemento nulo por $\varepsilon$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 |
| 2 | 8 | 0 |
| $\varepsilon$ | 5 | 0 |
| $\frac{8\varepsilon-10}{\varepsilon}$ | 0 | 0 |
| 5 | | |

Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0^+$

⇓

1
2
$0^+$
$-\infty$
5

} 2 cambios

Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0^-$

⇓

1
2
$0^-$
$+\infty$
5

} 2 cambios

• 2º método: Realizamos el cambio de variable $s = \frac{1}{x}$ con lo que el polinomio resulta:

$$p(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x} + 5 = \frac{5x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{x^4}$$ cuyas raíces

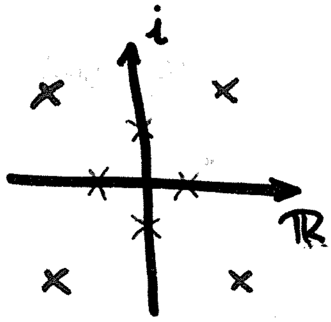
son las mismas que $\Rightarrow 5x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ y la nueva tabla de Routh será:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x^4$ | 5 | 4 | 1 |
| $x^3$ | 8 | 2 | 0 |
| $x^2$ | $\frac{22}{8}$ | 1 | 0 |
| $x^1$ | $m$ | 0 | 0 |
| $x^0$ | 1 | | |

$$m = \frac{2\cdot\frac{22}{8} - 8}{\frac{22}{8}} = \frac{\frac{11}{2} - 8}{\frac{11}{4}} = \frac{-5/2}{11/4} = \frac{-20}{22}$$

$\longrightarrow$ 2 cambios de signo $\Rightarrow$ 2 raíces con parte real positiva $\Rightarrow$ $\boxed{\text{INESTABLE}}$

• **Aparición de una fila de ceros:**




Indica la presencia de raíces simétricas respecto al origen del plano s.

- Si $a_0 \neq 0 \rightarrow$ No hay polos en el origen $\longrightarrow$ Fila de ceros en filas de orden impar $\left\{ \begin{array}{l} +j\omega_d, -j\omega_d, +\sigma, -\sigma \\ \text{ó} \\ j\omega_d+\sigma, j\omega_d-\sigma, -j\omega_d+\sigma, -j\omega_d-\sigma \end{array} \right.$
- Si $a_0 = 0 \rightarrow$ Detectamos la inestabilidad por Cardano Vietta.

Para solucionar la situación se construye un polinomio auxiliar $a(s)$ con la fila anterior a la de ceros. Se verifica:

- Las raíces de $a(s)$ son las de $p(s)$ simétricas respecto del origen
- Los coef. del polinomio $\frac{da(s)}{ds}$ nos permiten reconstruir la fila de ceros

En cualquier caso, una vez detectada la fila de ceros sabemos que el sistema es inestable pero este método nos permite conocer las raíces simétricas respecto del origen, así como detectar más raíces de parte real positiva.

**Ejercicio:** Construir la tabla de Routh de $p(s) = s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 11 | 18 |
| $s^3$ | 2 | 18 | 0 |
| $s^2$ | 2 | 18 | 0 |
| $s^1$ | 0 | 0 | 0 |
| $s^0$ | | | |

$\leftarrow$ Fila de ceros $\Downarrow$ ¡¡Inestable

$a(s) = 2s^2 + 18$; $\frac{d(a(s))}{ds} = 4s$

$s = \pm 3j$

(son raíces de $a(s)$ y $p(s)$)

La nueva tabla de Routh queda

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 11 | 18 |
| $s^3$ | 2 | 18 | 0 |
| $s^2$ | 2 | 18 | 0 |
| $s^1$ | 4 | 0 | 0 |
| $s^0$ | 18 | 0 | 0 |

Aunque no haya cambios de signo ya sabíamos que el sistema era inestable. Por tanto esto nos indica que no hay más raíces con su parte real positiva

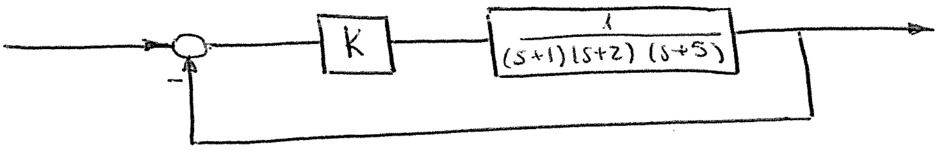
Las raíces del polinomio $p(s)$ podemos obtenerlas dividiéndolo entre $a(s)$

$$
\begin{array}{l|l}
s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18 & 2s^2 + 18 \\
\hline
-s^4 \qquad\qquad - 9s^2 & \frac{s^2}{2} + s + 1 \\
\hline
\qquad 2s^3 + 2s^2 + 18s + 18 & \\
\qquad -2s^3 \qquad\quad - 18s & \\
\hline
\qquad\qquad 2s^2 \qquad + 18 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Raíces de $\frac{s^2}{2} + s + 1 = 0$; $s^2 + 2s + 2 = 0$; $(s+1)^2 + 1 = 0 \rightarrow s = -1 \pm j$

Raíces de $p(s) \longrightarrow \boxed{s = \pm 3j,\ s = -1 \pm j}$

**Ejercicio:** Dado el sistema realimentado, calcular los valores de K para los que es estable




Obsérvese que el sistema en cadena abierta es estable!!

La función de transferencia será:

$$M(s) = \frac{\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+5)}}{1+\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+5)}} = \frac{K}{(s^2+3s+2)(s+5)+K} = \frac{K}{s^3+8s^2+17s+(10+K)}$$

$$p(s) = s^3+8s^2+17s+(10+K)$$

Por cond. Cardano-Vietta $\Longrightarrow$ $10+K>0$; $K>-10$

Aplicando el criterio de Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 17 \\ s^2 & 8 & 10+K \\ s^1 & m & 0 \\ s^0 & 10+K & \end{array}$$

Ha de cumplirse
$$\begin{cases} m = \dfrac{17\cdot 8-(10+K)}{8} > 0 \\ 10+K>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 126-K>0 \\ 10+K>0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{-10<K<126}$$

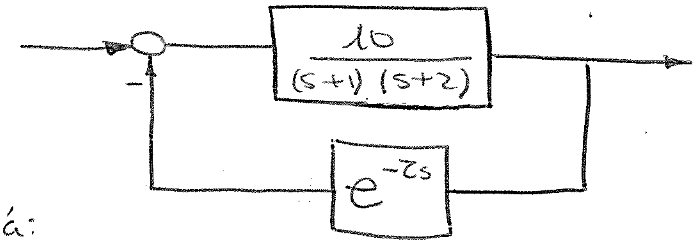
# 5 INFLUENCIA DE RETARDOS

El análisis en el dominio de Laplace no es el más apropiado para tratar retardos pues obliga a utilizar la aproximación de Padé para obtener el polinomio característico

__Aproximación de Padé de 1^er orden__

$$\boxed{e^{-\tau s} \sim \frac{1-\frac{\tau}{2}s}{1+\frac{\tau}{2}s}}$$

**Ejercicio:** Estudiar la estabilidad del sistema si $\tau \geq 0$




La FdT será:

$$M(s) = \frac{\frac{10}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{10}{(s+1)(s+2)} e^{-\tau s}} = \frac{10}{s^2 + 3s + 2 + 10e^{-\tau s}}$$

Por aproximación de Padé de 1^er orden nos queda

$$M(s) = \frac{10}{s^2+3s+2+10\,\frac{1-\frac{\tau}{2}s}{1+\frac{\tau}{2}s}} = \frac{10\left(1+\frac{\tau}{2}s\right)}{(s^2+3s+2)\left(1+\frac{\tau}{2}s\right)+10\left(1-\frac{\tau}{2}s\right)} =$$

$$= \frac{10+5\tau s}{\frac{\tau}{2}s^3 + s^2 + 3s + \frac{3}{2}\tau s^2 + 2 + \tau s + 10 - 5\tau s}$$

$$= \frac{10\left(s+\frac{2}{\tau}\right)}{s^3 + s^2\left(\frac{2}{\tau}+3\right) + s\left(\frac{6}{\tau}-8\right) + \frac{24}{\tau}}$$

Para $\tau = 0 \longrightarrow$ Sistema estable

Para $\tau > 0$: Por Cardano Vietta, para asegurar la estabilidad:

$$\frac{6}{\tau} - 8 > 0\,;\quad 6 - 8\tau > 0\,,\quad \underline{\tau < \frac{3}{4} = 0{,}75}$$

Routh

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & \frac{6}{\tau}-8 \\
s^2 & 3+\frac{2}{\tau} & \frac{24}{\tau} \\
s^1 & M & 0 \\
s^0 & \frac{24}{\tau} &
\end{array}
\quad ; \quad M = \frac{\left(\frac{6}{\tau}-8\right)\left(3+\frac{2}{\tau}\right) - \frac{24}{\tau}}{3+\frac{2}{\tau}}$$

Condiciones para la estabilidad

$$\begin{cases} 3+\dfrac{2}{\tau} > 0 \longrightarrow \text{OK porque } \tau > 0 \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{6}{\tau}-8\right)\left(3+\frac{2}{\tau}\right)-\frac{24}{\tau}}{3+\frac{2}{\tau}} > 0 \\[2ex] \dfrac{24}{\tau} > 0 \longrightarrow \text{OK porque } \tau > 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{(6-8\tau)(3\tau+2)}{\tau^2} - \frac{24\tau}{\tau^2} > 0$$

$$18\tau + 12 - 24\tau^2 - 16\tau - 24\tau > 0$$

$$-24\tau^2 - 22\tau + 12 > 0 \rightarrow$$

$\ominus$ $\quad -1{,}3 \quad$ $\oplus$ $\quad 0{,}38 \quad$ $\ominus$

$\rightarrow$ Se cumple para $\tau \in (-1{,}3,\ 0{,}38)$

Cond Cardano $\quad \tau < 0{,}75$

Por enunciado $\quad \tau > 0$

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Sistema estable si } 0 \leq \tau < 0{,}38}$

**NOTA!!** Claramente se observa que valores de retraso altos inestabilizan el sistema realimentado.
Además, no debemos olvidar que el resultado es solo indicativo, al haberse utilizado la aproximación de Padé.

# ERRORES EN R.P.

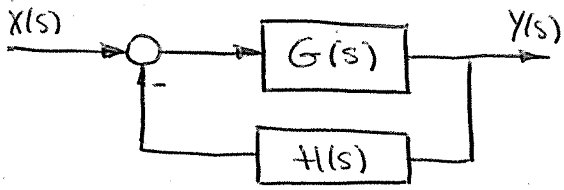
## 1 ERROR ENTRADA SALIDA E/S : E(s), e(t)

Un objetivo en un sistema de control es que la salida siga, con suficiente precisión, a la señal de mando o entrada, en régimen permanente.

La diferencia entre el valor deseado (entrada) y el conseguido (salida), puesto en unidades de la entrada, se denomina error E/S y en particular interesa su valor en régimen permanente

$$\boxed{E(s) = X(s) - Y(s)\,H(0)}$$

Cálculo caso general:




$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$Y(s) = X(s)\,M(s)$$

$$E(s) = X(s) - Y(s)H(0) = X(s)\left[1 - M(s)H(0)\right] = X(s)\left[1 - \frac{G(s)\,H(0)}{1+G(s)\,H(s)}\right] =$$

$$= X(s)\,\frac{1 + G(s)\left(H(s) - H(0)\right)}{1 + G(s)H(s)}$$

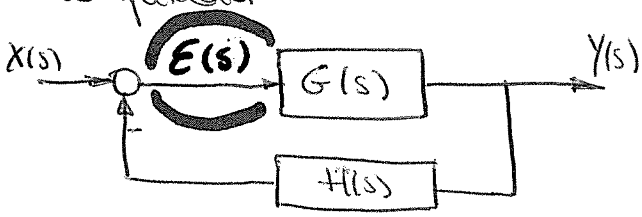
**NOTAS!!** E(s) depende de la entrada

Si $H(s) = cte$ la expresión se simplifica

E(s) no existe como señal

# 2 SEÑAL DE ERROR: $\mathcal{E}(s)$, $\mathcal{E}(t)$

En un sistema realimentado la señal de error es la salida del comparador




$$\boxed{\mathcal{E}(s) = X(s) - Y(s)H(s)}$$

Existe físicamente, esto es, es medible

Cálculo caso general:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \quad ; \quad Y(s) = X(s)M(s)$$

$$\mathcal{E}(s) = X(s) - Y(s)H(s) = X(s)\left[1 - M(s)H(s)\right] = X(s)\left[1 - \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}\right] =$$

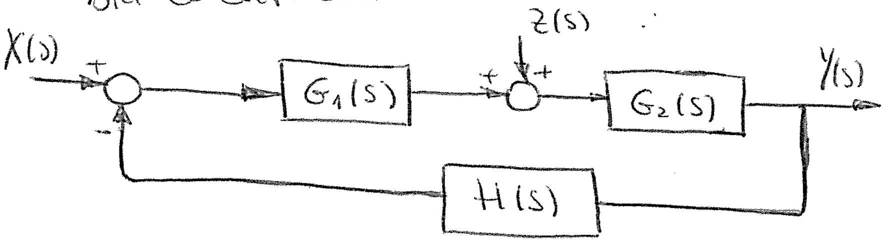
$$= X(s)\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

**NOTAS!!** $\mathcal{E}(s)$ depende de la entrada

Si $H(s) = cte \Longrightarrow \mathcal{E}(s) = E(s)$

# 3 ERROR ANTE PERTURBACIÓN: $E_s(s)$, $e_s(t)$

Representa el valor de la desviación de la salida con respecto a la entrada cuando aparece una perturbación, y no se cambia la entrada.




$$M_x(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$M_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

A este error, cuando la entrada es una perturbación y la referencia es nula se le denomina error de seguimiento $e_s \longrightarrow Y(s) = Z(s)M_z(s)$

$$E_z(S) = X(s) - Y(s) H(0) = 0 - Z(s) M_z(s) H(0) = -Z(s) \frac{G_2(s) H(0)}{1+G_1(s) G_2(s) H(s)}$$

Es importante destacar que en estos sistemas sólo influye el tipo de $G_1(s)$. Veremos el concepto de "tipo" más adelante.

**RESUMEN**

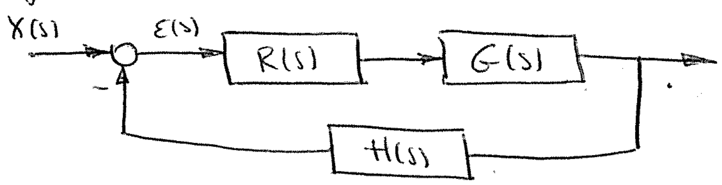
$$\boxed{\begin{array}{l} E(s) = X(s)\left[1 - M(s) H(0)\right] \\ \mathcal{E}(s) = X(s)\left[1 - M(s) H(s)\right] \\ E_z(s) = G_2(s) H(0) / (1 + G_1(s) G_2(s) H(s)) \end{array}}$$

# 4 ERRORES DE POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

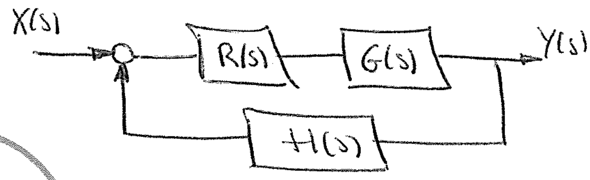
A los errores en régimen permanente ante entradas escalón, rampa y parábola unitaria se les denomina respectivamente error de posición, velocidad y aceleración.

Su cálculo puede hacerse de una manera rápida introduciendo el <u>tipo de un sistema</u>.

El tipo de un sistema realimentado es el nº de polos en el origen que tiene la FdT de la cadena abierta $R(s) G(s) H(s)$



- **ERROR DE POSICIÓN**




$$E_p(s) = X(s)\,\frac{1 + R(s)G(s)[H(s) - H(0)]}{1 + R(s)G(s)H(s)}; \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{e_p = \lim_{s\to 0} s \cdot E_p(s)}$$

Si $H(s) = cte = H(0)$ $\Rightarrow$ $E(s) = \mathcal{E}(s) = \dfrac{1}{1 + R(s)G(s)H(0)}\,X(s)$

$$e_p = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}}\,\frac{1}{1 + R(s)G(s)H(0)} = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0}(R(s)G(s)H(0))}$$

Llamando $\boxed{K_p = \lim_{s\to 0} R(s)G(s)H(0) \Longrightarrow e_p = \frac{1}{1+K_p}}$ $K_p$ = Cte de error de posición

- **ERROR DE VELOCIDAD**

$$X(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$E_v(s) = X(s)\,\frac{1 + R(s)G(s)[H(s) - H(0)]}{1 + R(s)G(s)H(s)}$$

$$\boxed{e_v = \lim_{s\to 0} s\,E_v(s)}$$

Si $H(s) = cte = H(0)$ $\Rightarrow$ $E(s) = \mathcal{E}(s) = \dfrac{1}{1 + R(s)G(s)H(0)}\,X(s)$

$$e_v = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{s^{\cancel{2}}}\,\frac{1}{1 + R(s)G(s)H(0)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s\,R(s)G(s)H(0)}$$

Llamando $\boxed{K_v = \lim_{s\to 0} (s\,R(s)G(s)H(0)) \Rightarrow e_v = 1/K_v}$ $K_v$ = Cte de error de velocidad

● **ERROR DE ACELERACIÓN** → $X(s) = \frac{1}{s^3}$

$$E_a(s) = X(s)\,\frac{1 + R(s)G(s)[H(s) - H(0)]}{1 + R(s)G(s)H(s)}$$

$$\boxed{e_a = \lim_{s \to 0} s\,E_a(s)}$$

Si $H(s) = cte = H(0)$ ➡ $E(s) = \mathcal{E}(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)H(0)}\,X(s)$

$$e_a = \lim_{s \to 0} s\,E(s) = \lim_{s \to 0} s\,\frac{1}{s^3}\,\frac{1}{1 + R(s)G(s)H(0)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2 R(s)G(s)H(0)}$$

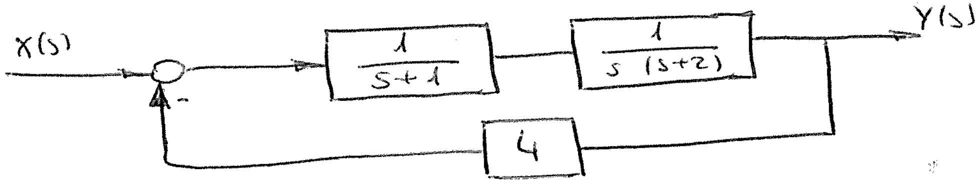
Llamando $\boxed{K_a = \lim s^2 R(s)G(s)H(0) \Rightarrow e_a = \frac{1}{K_a}}$ $K_a$ = cte error de aceleración

# 5 INFLUENCIA DEL TIPO

| | $K_p$ | $\mathcal{E}_p$ | $K_v$ | $\mathcal{E}_v$ | $K_a$ | $\mathcal{E}_a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tipo 0 | Cte | $\frac{1}{1+K_p}$ | 0 | $\infty$ | 0 | $\infty$ |
| Tipo 1 | $\infty$ | 0 | Cte | $\frac{1}{K_v}$ | 0 | $\infty$ |
| Tipo 2 | $\infty$ | 0 | $\infty$ | 0 | Cte | $\frac{1}{K_a}$ |

- La señal de error $\mathcal{E}$ se puede calcular a través de las constantes de error
- El error E/S, en general, se debe calcular por definición

**Ejemplo**: Calcular los errores E/S y $\varepsilon$ de posición, velocidad y aceleración del sistema




- **Método 1**: Por definición

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{4}{(s+1)s(s+2)}} = \frac{1}{s^3+3s^2+2s+4}$$

Verifico estabilidad: Cardano Vieta OK

Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & 4 \\ s^1 & 2/3 & 0 \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Sistema estable

$$E(s) = X(s) - Y(s)H(0) = X(s)\left[1 - \frac{4}{s^3+3s^2+2s+4}\right] = X(s)\frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+4}$$

$$e_p = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}}\frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+4} = 0 = \varepsilon_p$$

$$e_v = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{\cancel{s^2}}\frac{\cancel{s^3}+3\cancel{s^2}+2\cancel{s}}{s^3+3s^2+2s+4} = 1/2 = \varepsilon_v$$

$$e_a = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^3}\frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+4} = \infty = \varepsilon_a$$

Como $H(s) = \text{cte}$

$\varepsilon = E$

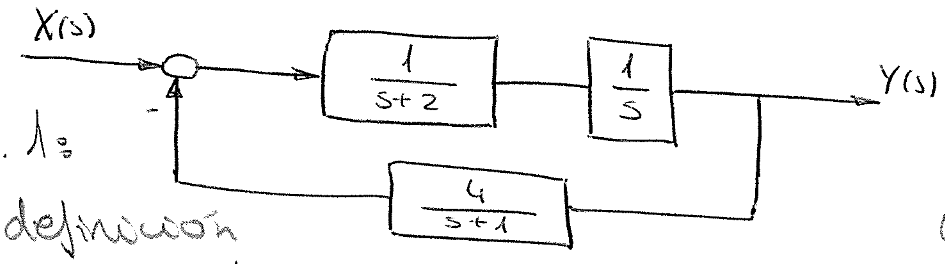
- **Método 2**: Como $H = \text{cte}$ podemos usar las ctes de error

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s+1)}\frac{1}{s(s+2)}4 = \infty \to e_p = \varepsilon_p = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{(s+1)}\frac{1}{\cancel{s}(s+2)}4 = 2 \to e_v = 1/K_v = 1/2$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2\frac{1}{(s+1)}\frac{1}{s(s+2)}4 = 0 \to e_a = \frac{1}{K_a} = \infty$$

**Ejercicio:** Calcular los errores E/S y ε de posición, velocidad y aceleración del sistema:




• Mét. 1:

Por definición

$$M(s) = \frac{\frac{1}{(s+2)(s)}}{1+\frac{4}{(s+1)(s+2)(s)}} = \frac{s+1}{s^3+3s^2+2s+4}$$

Verificamos la estab.
Cardano Vietta OK
Routh:

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 2 |
| $s^2$ | 3 | 4 |
| $s^1$ | 2/3 | 0 |
| $s^0$ | 4 | |

$\Rightarrow$ Estable

Como $H(s) = \frac{4}{s+1}$ no es constante $E \neq \varepsilon$

$H(0) = 4$

$$E(s) = X(s) - Y(s)H(0) = X(s)\left[1 - M(s)H(0)\right] = X(s)\left[1 - \frac{4(s+1)}{s(s+1)(s+2)+4}\right] =$$

$$= X(s)\,\frac{s\left[(s+1)(s+2)-4\right]}{s(s+1)(s+2)+4}$$

$$\varepsilon(s) = X(s) - Y(s)H(s) = X(s)\left[1 - \frac{\cancel{s+1}}{(s+1)(s+2)s+4}\cdot\frac{4}{\cancel{s+1}}\right] =$$

$$= X(s)\,\frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+4}$$

$$e_p = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}}\,\frac{s((s+1)(s+2)-4)}{s(s+1)(s+2)+4} = 0$$

$$e_v = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s^2}}\,\frac{\cancel{s}\left[(s+1)(s+2)-4\right]}{s(s+1)(s+2)+4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$e_a = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s^3}\,\frac{s\left[(s+1)(s+2)-4\right]}{s(s+1)(s+2)+4} = \infty$$

$$\varepsilon_p = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}}\,\frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+4} = 0$$

$$\varepsilon_v = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s^2}}\,\frac{\cancel{s}(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+4} = +\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon_a = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s^3}\,\frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+4} = \infty$$

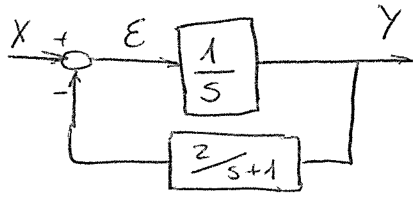
• Met 2: Podemos calcular $\varepsilon_p, \varepsilon_v, \varepsilon_a$ por las cte de errores
No $e_p, e_v, e_a$ porque $H(s) \neq cte$ !!

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(s+2)} \frac{1}{(s)} \frac{4}{(s+1)} = \infty \longrightarrow \varepsilon_p = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{1}{s+2} \frac{1}{\cancel{s}} \frac{4}{s+1} = 2 \longrightarrow \varepsilon_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2} \neq e_v = \frac{-1}{2}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{1}{s+2} \frac{1}{s} \frac{4}{s+1} = 0 \longrightarrow \varepsilon_a = \frac{1}{K_a} = \infty$$

Ejercicio: Obtener $e_p, e_v, e_a$ del sistema




Como $H(s) = \frac{2}{s+1} \neq cte$

Tenemos que obtener los errores por definición

De antemano sabemos que, por ser un sistema tipo 1 → $e_p = 0$, $e_v = cte$, $e_a = \infty$

$E(s) = X(s) - Y(s) H(0)$, $H(0) = 2$

$$M(s) = \frac{1/s}{1 + \frac{2}{s(s+1)}} = \frac{s+1}{s^2+s+2}, \text{ ¿Estable?}$$

$p(s) = s^2+s+2$ → Cardano Vietta OK
→ Ruth ⟶

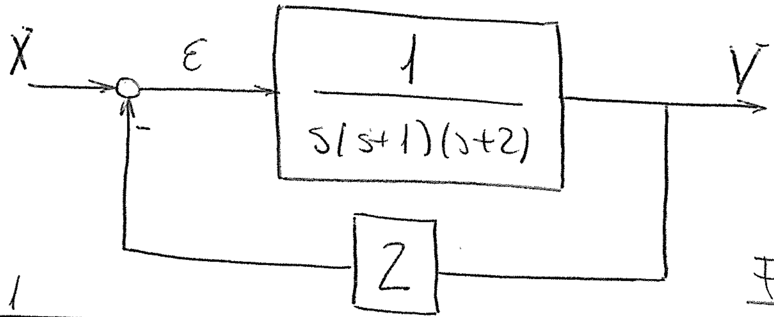
| | | |
|---|---|---|
| $s^2$ | 1 | 2 |
| $s^1$ | 1 | 0 |
| $s^0$ | 2 | |

→ ES ESTABLE

$$E(s) = X(s)\left[1 - \frac{s+1}{s(s+1)+2} \cdot 2\right] = X(s) \frac{s[(s+1)-2]}{s(s+1)+2} = X(s) \frac{s(s-1)}{s(s+1)+2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} e_p &= \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s}} \frac{s(s-1)}{s(s+1)+2} = 0 \\ e_v &= \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s^2}} \frac{\cancel{s}(s-1)}{s(s+1)+2} = \frac{-1}{2} \\ e_a &= \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s^3} \frac{s(s-1)}{s(s+1)+2} = \infty \end{aligned}}$$

Ejercicio: Encontrar el error ante escalón, rampa y parábola del sistema




**Estabilidad**

Cardano Vietta OK.

Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & 2 \\ s^1 & 4/3 & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Sist. Estable

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}}{1+\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\cdot 2} = \frac{1}{\underbrace{s^3+3s^2+2s+2}_{p(s)}}$$

Como $H(s) = H(0) = cte \longrightarrow E(s) = \varepsilon(s)$ Podemos aplicar las cte de error para calcular $e_p, e_v, e_a$

Por ser sist. de tipo 1 sabemos de antemano: $e_p = 0$, $e_v = cte$, $e_a = \infty$

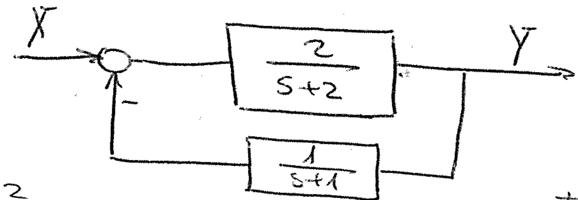
$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s(s+1)(s+2)}\cdot 2 = \infty$$

$$\boxed{e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s}(s+1)(s+2)}\cdot 2 = 1 \rightarrow \boxed{e_v = \frac{1}{K_v} = 1}\ ; \quad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$\boxed{e_a = \frac{1}{K_a} = \infty}$$

Ejercicio:




Encontrar $e_p, e_v, e_a, \varepsilon_p, \varepsilon_v, \varepsilon_a$

$$M(s) = \frac{\frac{2}{s+2}}{1+\frac{2}{s+2}\frac{1}{s+1}} = \frac{2(s+1)}{\underbrace{s^2+3s+4}_{p(s)}}$$

Estabilidad: Cardano Vietta OK

Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 4 \\ s^1 & 3 & 0 \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

Estable

Como $H(s) = \frac{1}{s+1}$ no es constante no podemos aplicar las cte de error para $e_p, e_v, e_a \rightarrow$ Usamos la definición

$$E(s) = X(s) - Y(s)H(0) = X(s)\left[1 - \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+1)+2}\cdot \overset{\overset{H(0)}{\parallel}}{1}\right] = X(s)\frac{(s+2)(s+1)-2s}{(s+2)(s+1)+2}$$

Por ser sistema de tipo 0, generalmente $\begin{cases} e_p = cte \\ e_v = \infty \\ e_a = \infty \end{cases}$

$$\boxed{e_p = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}}\frac{(s+2)(s+1)-2s}{(s+2)(s+1)+2} = \frac{1}{2}} \; ; \; \boxed{e_a = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^3}\frac{(s+2)(s+1)-2s}{(s+2)(s+1)+2} = \infty}$$

$$\boxed{e_v = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\frac{(s+2)(s+1)-2s}{(s+2)(s+1)+2} = \infty}$$

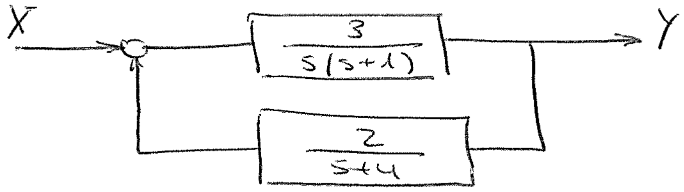
Calculemos las cte de error para $\mathcal{E}_p$, $\mathcal{E}_v$, $\mathcal{E}_a$

$$K_p = \lim_{s\to 0}\frac{2}{s+2}\cdot\frac{1}{s+1} = 1 \longrightarrow \boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{2}}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{2}{s+2}\,\frac{1}{s+1} = 0 \longrightarrow \boxed{\mathcal{E}_v = 1/K_v = \infty}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2\frac{2}{s+2}\,\frac{1}{s+1} = 0 \longrightarrow \boxed{\mathcal{E}_a = 1/K_a = \infty}$$

Ejercicio: Calcular $e_p, e_v, e_a, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_v, \mathcal{E}_a$ del sistema:




$$M(s) = \frac{\frac{3}{s(s+1)}}{1+\frac{2}{(s+4)}\frac{3}{s(s+1)}} = \frac{3(s+4)}{\underbrace{s^3+5s^2+4s+6}_{p(s)}}$$

Estabilidad

Routh
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 5 & 6 \\ s^1 & 14/5 & 0 \\ s^0 & 6 & \end{array} \Rightarrow \text{Sistema Estable}$$

Como $H(s) = \frac{2}{s+4} \neq cte$ no podemos aplicar las cte de error para $e_p, e_v, e_a$

Usamos la definición:

$$E(s) = X(s) - Y(s)H(0) \overset{H(0)=\frac{1}{2}}{=} X(s)\left[1 - \frac{3(s+4)}{(s+4)(s+1)s+6}\cdot\frac{1}{2}\right] =$$

$$= X(s)\left[\frac{s\left[(s+4)(s+1)-\frac{3}{2}\right]}{(s+4)(s+1)s+6}\right]$$ ; Como es sist es de tipo 1 $\begin{cases} e_p = 0 \\ e_v = cte \\ e_a = \infty \end{cases}$

$$\boxed{e_p = \lim_{s\to 0}\cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}}\left(\frac{s\left[(s+4)(s+1)-3/2\right]}{(s+4)(s+1)s+6}\right) = 0}$$

$$\boxed{e_v = \lim_{s\to 0}\cancel{s}\frac{1}{\cancel{s^2}}\left(\frac{\cancel{s}\left[(s+4)(s+1)-3/2\right]}{(s+4)(s+1)s+6}\right) = \frac{4-\frac{3}{2}}{6} = \frac{5}{12}} \; , \; \boxed{e_a = \infty}$$

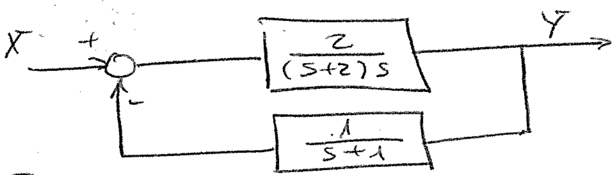
Calculamos las cte de error:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{3}{(s+1)s} \frac{2}{(s+4)} = \infty \rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{3}{(s+1)\cancel{s}} \frac{2}{(s+4)} = \frac{3}{2} \rightarrow \mathcal{E}_v = \frac{1}{K_v} = \frac{2}{3}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^{\cancel{2}} \frac{3}{(s+1)\cancel{s}} \frac{2}{s+4} = 0 \rightarrow \mathcal{E}_a = \frac{1}{K_a} = \infty$$

Ejercicio: Encontrar los valores $e_p, e_v, e_a, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_v, \mathcal{E}_a$




Estabilidad

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 2 |
| $s^2$ | 3 | 2 |
| $s^1$ | 4/3 | 0 |
| $s^0$ | 2 | |

Sistema estable

$$M(s) = \frac{\frac{2}{s(s+2)}}{1 + \frac{1}{(s+1)}\frac{2}{(s+2)s}} = \frac{2(s+1)}{\underbrace{s^3+3s^2+2s+2}_{p(s)}}$$

$$E(s) = X(s) - Y(s)H(s) = X(s)\left[1 - \frac{2(s+1)}{(s+1)(s+2)s+2}\right] = X(s)\left[\frac{s((s+1)(s+2)-2)}{(s+1)(s+2)s+2}\right]$$

$$\boxed{e_p = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s}} \frac{s[(s+1)(s+2)-2]}{s(s+1)(s+2)+2} = 0}$$

$$\boxed{e_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s^2}} \frac{\cancel{s}[(s+1)(s+2)-2]}{s(s+1)(s+2)+2} = 0}$$

$$\boxed{e_a = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{1}{s^3} \frac{\cancel{s}[(s+1)(s+2)-2]}{\underbrace{s(s+1)(s+2)+2}_{s^2+3s+2}} = \frac{0}{0}}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{s^{\cancel{2}}+3\cancel{s}}{s^4+3s^3+2s^2+2\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} \frac{s+3}{s^3+3s^2+2s+2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

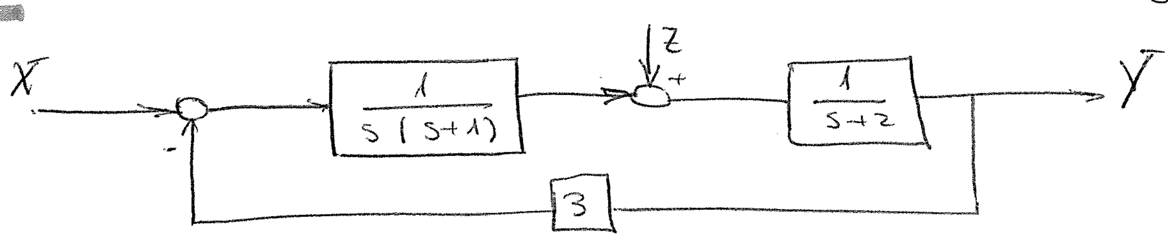
Para la señal de error:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{2}{(s+2)s} \frac{1}{(s+1)} = \infty \rightarrow \boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{1+K_p} = 0}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{2}{\cancel{s}(s+2)} \frac{1}{(s+1)} = 1 \rightarrow \boxed{\mathcal{E}_v = \frac{1}{K_v} = 1}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{2}{s(s+2)} \frac{1}{(s+1)} = 0 \qquad \boxed{\mathcal{E}_a = \frac{1}{K_a} = \infty}$$

**Ejercicio:** Encontrar $e_p$, $e_v$ y el error ante perturbación para $Z \equiv$ escalón unit.




$$M_x(s) = \frac{\frac{1}{s(s+1)}\,\frac{1}{(s+2)}}{1+3\,\frac{1}{s(s+1)}\,\frac{1}{(s+2)}} = \frac{1}{\underbrace{s(s+1)(s+2)+3}_{p(s)}}$$

Estabilidad: $p(s) = s^3+3s^2+2s+3$; Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & 3 \\ s^1 & 1 & 0 \\ s^0 & 3 & \end{array}$$

Sist Estable

Como $H(s) = 3 = cte \rightarrow E(s) = \mathcal{E}(s)$, podemos utilizar las ctes de error para calcular $e_p$, $e_v$. De antemano sabemos que, para sist de tipo 1: $e_p = 0$, $e_v = cte$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p}, \quad K_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s(s+1)}\,\frac{1}{(s+2)}\,3 = \infty \rightarrow \boxed{e_p = 0}$$

$$e_v = 1/K_v; \quad K_v = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}(s+1)}\,\frac{1}{(s+2)}\,3 = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{e_v = \frac{2}{3}}$$

- Error ante perturbación

$$M_z(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1+\frac{1}{s(s+1)}\cdot 3\,\frac{1}{(s+2)}} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)(s+2)+3} = \frac{Y_z(s)}{Z(s)}$$

El error será: $E(s) = \underset{0}{\cancel{X(s)}} - Y_z(s)\,H(0) = -Z(s)\,M_z(s)\,H(0)$

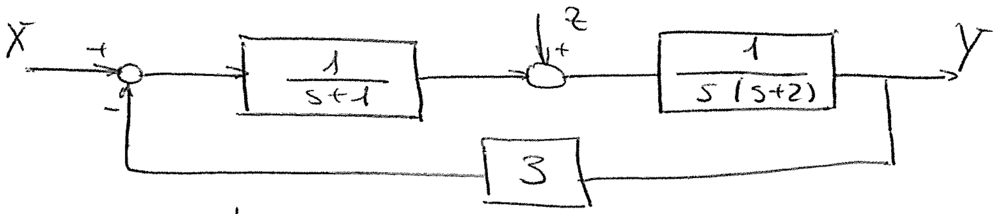
$$E_z(s) = -Z(s)\,\frac{3s(s+1)}{s(s+1)(s+2)+3}$$

Como $Z(s) = \frac{1}{s} \rightarrow E_{z_p}(s) = \frac{-3(s+1)}{s(s+1)(s+2)+3} \rightarrow \boxed{e_{z_p} = \lim_{s\to 0} s\,E_z(s) = 0}$

Observamos que el sistema es de tipo 1 y además el polo en el origen está antes de la perturbación $\rightarrow$ Se conserva el tipo para $e_{z_p}$

$\Rightarrow$ Tipo 1 $\rightarrow$ $e_{z_p} = 0$

Ejercicio: Encontrar el error ante perturbación escalón del sistema:




Con $Z \equiv$ escalón unit.

$$M_z(s)=\frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{1}{s+1}\,3\,\frac{1}{s(s+2)}}=\frac{(s+1)}{\underbrace{s(s+1)(s+2)+3}_{p(s)}}=\frac{Y_z}{Z}$$

$p(s)=s^3+3s^2+2s+3$ ; Estabilidad $\longrightarrow$ Routh:

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 2 |
| $s^2$ | 3 | 3 |
| $s^1$ | 1 | 0 |
| $s^0$ | 3 | |

Estable

$$E^{(z)}(s)=\underbrace{\cancel{X(s)}}_{0}-Y_z(s)H(0)=-Z(s)\,\frac{s+1}{s(s+1)(s+2)+3}\cdot 3$$

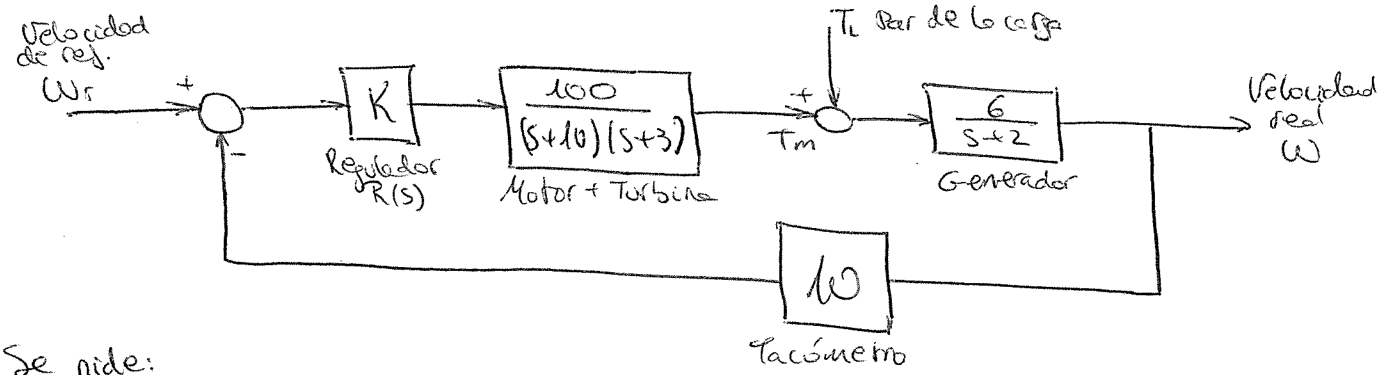
Para $Z=\frac{1}{s}$ $\longrightarrow$ $E_p^{(z)}(s)=-\frac{1}{s}\,\frac{(s+1)\cdot 3}{s(s+1)(s+2)+3}$

$$e_p^{(z)}=\lim_{s\to 0} s\,E_p^{(z)}(s)=\frac{-3}{3}=-1$$

Aunque el sistema sea de tipo 1 observamos que ante $Z(s)=\frac{1}{s}$, esto es, escalon, hay error de perturbación ya que el polo en el origen esta despues del sumador de la perturbación y no antes.

**Ejercicio:** Un grupo generador (alternador) de energía eléctrica debe girar a velocidad constante a fin de que lo sea la frecuencia de la corriente eléctrica generada.

Para ello se dispone el sistema de control de la figura:




Se pide:

1) Analizar la estabilidad en función de K

$$M_\omega(s) = \frac{K\,\frac{100}{(s+10)(s+3)}\,\frac{6}{s+2}}{1+10K\,\frac{100}{(s+10)(s+3)}\,\frac{6}{(s+2)}} = \frac{600K}{(s+10)(s+3)(s+2)+6000K}$$

$$M_{T_L}(s) = \frac{\frac{6}{s+2}}{1+10K\,\frac{100}{(s+10)(s+3)}\,\frac{6}{(s+2)}} = \frac{6(s+10)(s+3)}{(s+10)(s+3)(s+2)+6000K}$$

$$p(s) = s^3+15s^2+56s+(60+6000K)$$

Cond. Cardano-Vietta $\rightarrow$ $60+6000K>0$, $K > \frac{-1}{100}$

Criterio Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 56 \\ s^2 & 15 & 60+6000K \\ s^1 & m & 0 \\ s^0 & 60+6000K & \end{array}$$

$$m = \frac{56\cdot 15-60-6000K}{15} > 0$$

$$\Rightarrow 780-6000K>0$$

$$K<\frac{78}{600},\quad K<0{,}13$$

$$\boxed{\text{El sistema será estable si: } -\frac{1}{100} < K < 0{,}13}$$

Indusbol.com

2) Encontrar el $e_p$ y $e_v$

Como $H(s) = 10 = cte \longrightarrow E(s) = \mathcal{E}(s)$

Podemos usar las ctes de error para calcular $e_p$ y $e_v$

Además, como el sistema es de tipo cero, se tendrá $e_p = cte = \frac{1}{1+K_p}$, $e_v = \infty = \frac{1}{K_v}$

$$K_p = \lim_{s\to 0} K \frac{100}{(s+10)(s+3)} \cdot \frac{6}{(s+2)} \cdot 10 = \frac{600\cancel{0}K}{6\cancel{0}} = 100K \rightarrow \boxed{e_p = \frac{1}{1+100K}}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\, K \frac{100}{(s+10)(s+3)} \frac{6}{(s+2)} 10 = 0 \longrightarrow \boxed{e_v = \frac{1}{K_v} = \infty}$$

3) Encontrar el error en reg. permanente ante escalón en la perturb.

$$\mathcal{E}^T(s) = \underbrace{X(s)}_{0} - Y^T(s) H(0) = - T_L(s) M_{T_L}(s) H(0) = -T_L(s) \cdot 10 \frac{6(s+10)(s+3)}{(s+10)(s+3)(s+2) + 6000K}$$

$$T_L = \frac{1}{s} \Longrightarrow \boxed{e_p^T(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \left[ -\frac{1}{\cancel{s}} 10 \frac{6 \cdot (s+10)(s+3)}{(s+10)(s+3)(s+2) + 6000K} \right]} = \frac{-1800}{60 + 6000K} = \boxed{\frac{-30}{1+100K}}$$

4) Proponer un valor de K para que el error de posición sea

a) Inferior al 10% b) Inferior al 0,01%

a) Queremos que $e_p < 0{,}1 \longrightarrow e_p = \frac{1}{1+100K} < 0{,}1 \Rightarrow K \geq 0{,}09$

Como $K = 0{,}09$ está dentro del límite de estabilidad proponemos este valor ya que no inestabiliza el sistema

b) $e_p = \frac{1}{1+100K} < 0{,}0001$; $1 < 10^{-4} + 0{,}01K$; $K \geq 99{,}99$

Como $K \geq 99{,}99$ queda fuera de los límites de K que hacen estable el sistema no podemos conseguir $e_p = 10^{-4}$

5) Proponer alguna modificación al regulador para que el $e_p$ sea inferior al 0,001%

Como no podemos conseguir este error tan bajo $\uparrow K$ vamos a aumentar el tipo de sistema. Modificando la FdT del regulador de modo que incorporemos un polo en el origen

Por ejemplo $R(s) = K \frac{s+1}{s} \longrightarrow \boxed{e_p = 0}$

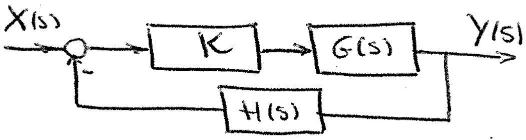
Como estamos cambiando el sistema deberíamos evaluar su nuevo $p(s)$ para comprobar si es estable !! (Un coñazo)

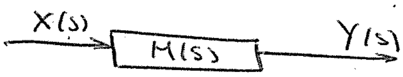
Sale estable

# LDR (EL LUGAR DE LAS RAICES)

## 1 ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Cuando trabajamos con sistemas realimentados para analizar su comportamiento dinámico, se debe obtener su función de tranferencia.




Sin embargo, podemos realizar un análisis cualitativo rápido gracias a que es posible trazar de manera muy simple el recorrido de los polos de $M(s)$ al variar $K$ mediante el Lugar de las Raices.

Al lugar geométrico de los puntos del plano de son polos de $M(s)$ al variar $K$ se le llama el Lugar de las Raices LDR

- Si $K$ varía de 0 a infinito se denomina lugar directo
- Si $K$ varía de $-\infty$ a 0 se denomina lugar inverso

## 2 ECUACIONES BÁSICAS DEL LdR

Sea $G(s)^{*}H(s) = \dfrac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)}$ ; donde $z_i$, $p_i$ son respectivamente ceros y polos de la cadena abierta.

$$p(s) = 1 + K\,G(s)H(s) = 0 \longrightarrow p(s) = 1 + K\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)} = 0 \longrightarrow K = -\frac{\prod(s-p_i)}{\prod(s-z_i)} \in \mathbb{C}$$

- Tomando módulos

$$K = \left\|\frac{\prod(s-p_i)}{\prod(s-z_i)}\right\| = \frac{\prod\|(s-p_i)\|}{\prod\|(s-z_i)\|}$$

$\left.\begin{matrix} s-p_i \\ s-z_i \end{matrix}\right\} \equiv$ Distancia de un punto del plano complejo al polo $p_i$ o al cero $z_i$, respectivamente.

**CRITERIO DEL MÓDULO**

$$\boxed{K = \frac{\text{Producto de las distancias a todos los polos}}{\text{producto de las distancias a todos los ceros}}}$$

Indusbol .com

- Tomando argumentos

$$\angle -K = \angle \frac{\prod (s-p_i)}{\prod (s-z_i)} = \sum \angle (s-p_i) - \sum \angle (s-z_i) = \sum \gamma_{p_i} - \sum \gamma_{z_i}$$

## CRITERIO DEL ARGUMENTO

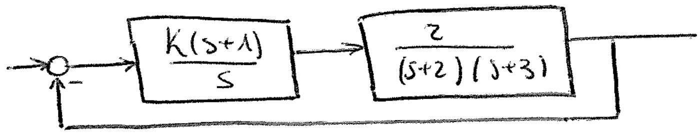
$$\boxed{\angle -K = \text{Suma de ángulos con todos los polos} - \text{Suma de ángulos con ceros}}$$

Si $K > 0 \rightsquigarrow \sum \gamma_{p_i} - \sum \gamma_{z_i} = (2q+1)\pi$

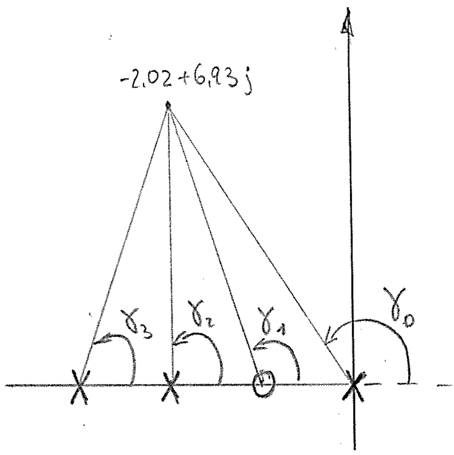
Si $K < 0 \longrightarrow \sum \gamma_{p_i} - \sum \gamma_{z_i} = 2q\pi$

**NOTA!!** Debe tenerse en cuenta que el parámetro K del LdR es el producto de todas las constantes que vayan multiplicando a cada uno de los subsistemas que componen la cadena abierta.

Ejemplo. Sea el sistema




Verificar que el punto $(-2{,}02+6{,}93j) \in$ LdR, es decir, si es polo de $H(s)$ y, si lo es, para qué valor de K.




Cadena abierta $= \dfrac{2K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$

Crit. argumento $\Rightarrow \gamma_0 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1 \overset{K>0}{=} 180(2q+1)$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_0 &= 180° - \text{arctg}\left(\frac{6{,}93}{+2{,}02}\right) = 106{,}25° \\
\gamma_1 &= 180° - \text{arctg}\left(\frac{6{,}93}{2{,}02-1}\right) = 98{,}37° \\
\gamma_2 &= \text{arctg}\,\frac{6{,}93}{-0{,}02} = 89{,}83° \\
\gamma_3 &= \text{arctg}\,\frac{6{,}93}{3-2{,}02} = 81{,}95°
\end{aligned}\right\} \quad \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \approx 180° \rightarrow \text{Cumple crit. del argumento}$$

$(-2{,}02+6{,}93j)$ es polo

Para hallar el valor de K aplicamos el criterio del módulo:

$$K_{LdR} = \frac{d_{p0} \cdot d_{p2} \cdot d_{p3}}{d_{z1}}$$

$$d_{p0} = \sqrt{(2{,}02)^2 + (6{,}93)^2} = 7{,}22$$
$$d_{z1} = \sqrt{1{,}02^2 + 6{,}93^2} = 7{,}00$$
$$d_{p2} = \sqrt{0{,}02^2 + 6{,}93^2} = 6{,}93$$
$$d_{p3} = \sqrt{1{,}02^2 + 6{,}93^2} = 7{,}00$$

$K_{ldr} = 50 = 2K \longrightarrow \boxed{K = 25}$

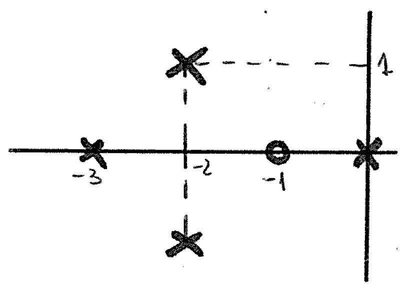
# 3 REGLAS PARA EL TRAZADO DEL LDR

- Se trata de unas reglas de sencilla aplicación que permiten trazar a mano alzada el LDR
- Algunos de ellos son de aplicación inmediata (por ejemplo, si para algún valor de K habrá oscilaciones) ≡ INFO CUALITATIVA
- Otras precisan algún cálculo simple (por ejemplo, valor de K para el que empieza a oscilar) ≡ INFO CUANTITATIVA
- Varias resultan de aplicar el criterio el criterio del argumento o del módulo

NOTA!! A continuación se enuncian reglas de trazado en el orden en que se aconseja su aplicación, pero numerados respetando el orden del libro.

**REGLA 0** (No aparece en el libro)

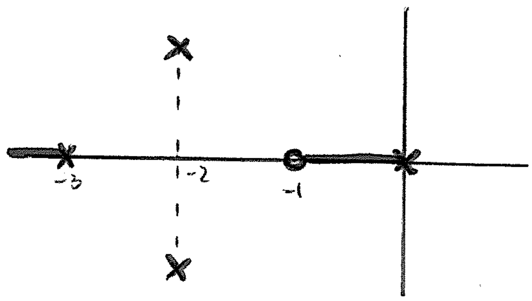
Representar en el plano complejo la posición de los polos (x) y ceros (o) de la cadena abierta ≡ GH.




$$GH = \frac{s+1}{s(s+3)((s+2)^2+1)}$$

## REGLA 3 — Eje Real

Pertenecen al LdR directo los tramos del eje real que dejan a la derecha un nº impar de polos más ceros y pertenecen al LdR inverso los tramos que dejen a la derecha un nº par.



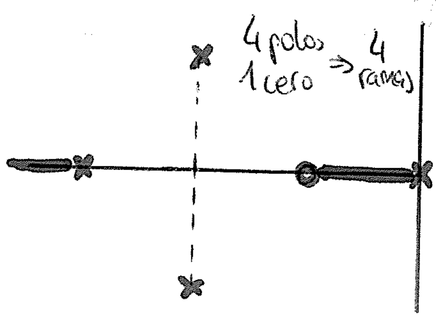

## REGLA 4 — Simetría respecto del eje real

El LdR es simétrico respecto del eje real. Al ser p(s) de coeficientes reales, si hay un polo complejo, estará también su conjugado

## REGLA 1 — Ramas

El LdR se compone de una serie de ramas que muestran la evolución de los polos al variar K.

$$\boxed{N^{\circ}\,ramas = max(N_p, N_z)}$$




El nº de ramas equivaldrá al nº de polos de M(s) para cada K

## REGLA 2 — Origen y destino de las ramas

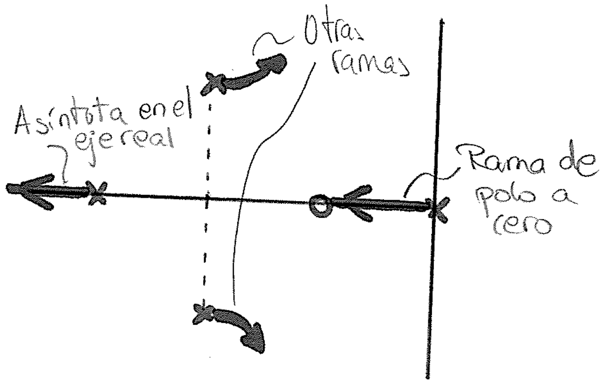
Las ramas parten (K=0) de los polos

Las ramas llegan (K=∞) a los ceros

$$p(s) = P_{GH}(s) + K\,Z_{GH}(s) = 0$$

$$K=0 \rightarrow p(s) = P_{GH}$$

$$K=\infty \rightarrow p(s) = Z_{GH}$$




- Identificamos ramas que parten de polo y llegan a cero

  Si $N_p \neq N_z$, las ramas sin origen posible en polo o destino posible en cero usarán asíntotas.

- Identificamos las ramas que son asíntotas en el eje real
- Dejamos marcadas el resto de ramas

## REGLA 5 y 6 — Asíntotas

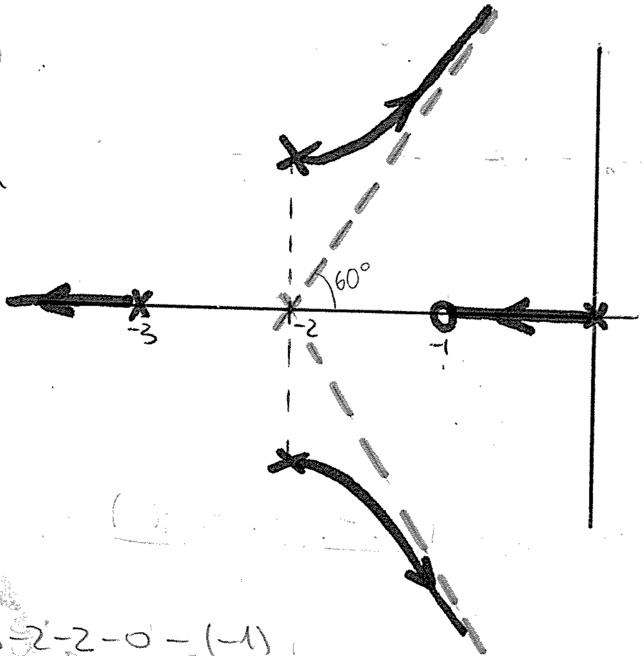
- El nº de asíntotas es $\boxed{N_a = N_p - N_z}$

- Las asíntotas forman ángulos con el eje real de valor $\theta_a$, cortándose todos con este eje en el centroide $\sigma_a$, siendo:

$$\boxed{\theta_a = \frac{(2q+1)\pi}{N_p - N_z}} \quad \text{si } K > 0$$

$$\theta_a = \frac{2q\pi}{N_p - N_z} \quad \text{si } K < 0$$

$$\boxed{\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{N_p - N_z}}$$




$$\sigma_a = \frac{-3-2-2-0-(-1)}{4-1} = -2$$

$$\theta_a = \frac{\pi}{4-1} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

- Completamos con las asíntotas las ramas que tenían comportamiento asintótico

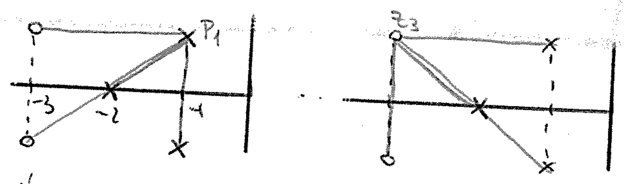
## REGLA 7 — Ángulos de salida y llegada

El ángulo de salida de las ramas desde los polos o llegada a los ceros complejos, se puede calcular aplicando el criterio del argumento a un punto muy cercano.

(En LDR directo)

$$\boxed{\begin{aligned} \sum \gamma_p + \gamma_p - \sum \gamma_z &= (2q+1)\pi \\ \sum \gamma_p - \gamma_z - \sum \gamma_z &= (2q+1)\pi \end{aligned}}$$

$$G(s)\,H(s) = \frac{(s+3)^2+1}{(s+2)[(s+1)^2+1]}$$




Ángulo de salida de $P_1$

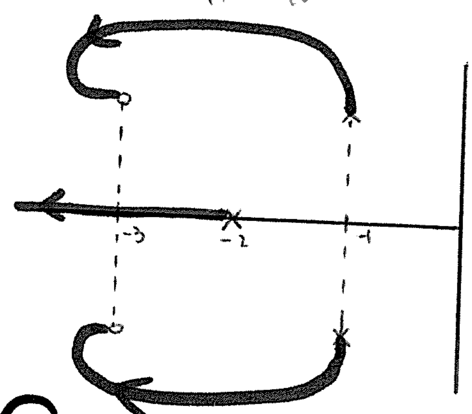
$90^\circ + \cancel{45} + \gamma_{P_1} - \cancel{45} - 0 = 180^\circ$

$\gamma_{P_1} = 90^\circ$

Ángulo de entrada a $z_3$

$\cancel{180} + 135 + 135 - \gamma_{z_3} - 90 = \cancel{180}$

$\gamma_{z_3} = 180^\circ$

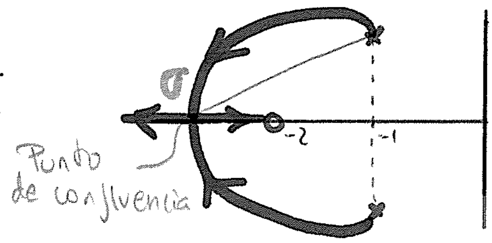


## REGLA 8 — Puntos de confluencia y dispersión

- Los puntos en que 2 ramas que evolucionan por el eje real, pasan al plano imaginario (dispersión) corresponden a máximos locales de K en ese tramo del eje ($dK/ds = 0$)
- Los puntos en que 2 ramas que evolucionan por el plano imaginario, pasan al eje real (confluencia), corresponden a mínimos locales de K en ese tramo del eje ($dK/ds = 0$)

→ Tanteamos valores máximos o mínimos de K en el tramo del eje considerado, haciendo uso del criterio del módulo (también obtener analíticamente $dK/ds = 0$)

Ejemplo: $G \cdot H = \dfrac{s+2}{(s+1)^2+1}$




$$K = \frac{\sqrt{1^2+(\sigma-1)^2} \cdot \sqrt{1^2+(\sigma-1)^2}}{\sigma - 2}$$

Tanteamos el mínimo sobre el eje real con el crit. del módulo

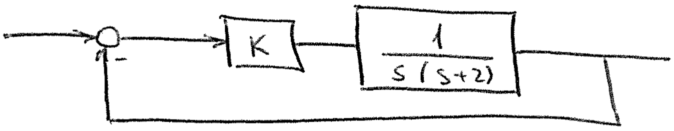
| σ | 3 | 4 | 3,5 | 3,2 | 3,7 | 3,6 | 3,4 | 3,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| K | 5 | 5 | $4,8\overline{3}$ | 4,86 | 4,87 | 4,85 | 4,828 | 4,838 |

$\boxed{K \simeq 4,828,\ \sigma \simeq 3,4}$

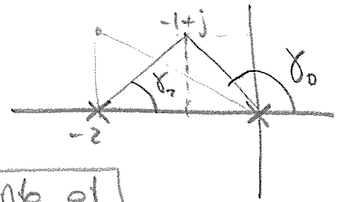
## REGLA 9 — Corte con el eje imaginario

Los puntos de corte del LDR con el eje imaginario se calculan mediante el criterio de Routh (Calcular K por Routh)

¿Será "$-1+j$" polo del sistema para algún valor de $K$? Si es así, ¿para qué valor de $K$?




$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$




• Criterio del argumento

$\gamma_0 + \gamma_2 = 135° + 45° = 180° \rightarrow$ Es polo porque cumple el criterio del argumento

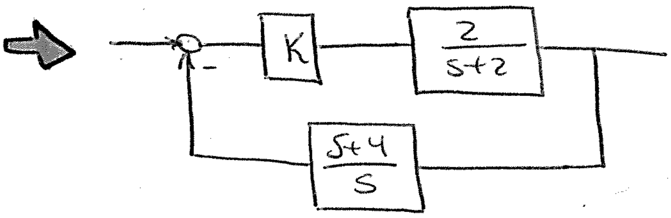
• Criterio del módulo

$$K = \frac{d_{polos}}{d_{zeros}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{1} = 2 \longrightarrow \boxed{\text{Lo es, para } K = 2}$$

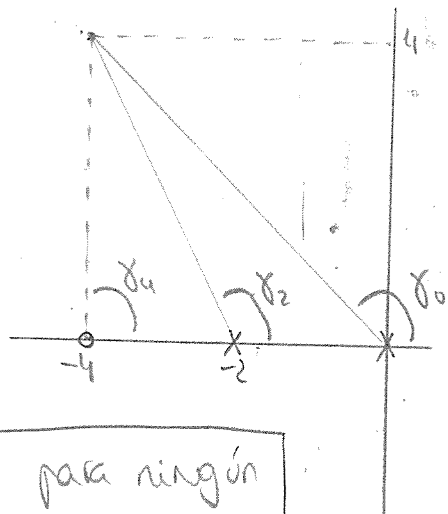
Cuando no hay ceros se pone 1 !!

¿Lo será "$-2+j$"? En este caso, aplicando el criterio del argumento tendríamos: $\gamma_0 + \gamma_2 = 153{,}43 + 90 = 243{,}43 \neq 180°$

$\boxed{\text{No es polo del sistema para ningún valor de } K}$




Analizar si $s = -4+4j$ es polo de $M(s)$ y, en caso afirmativo, calcular el correspondiente valor de $K$




$$\text{Cad. abierta} = \frac{2K(s+4)}{s(s+2)}$$

Por criterio del argumento $\gamma_0 + \gamma_2 - \gamma_4 = 180°$

$\gamma_0 = 135°$
$\gamma_2 = \operatorname{arctg}\frac{4}{2} = 116{,}56°$
$\gamma_4 = 90°$

No cumple condición

$\boxed{s = -4+4j \text{ NO ES polo de } M(s) \text{ para ningún valor de } K}$

Analizar si lo es $s=-4+2,828j$ y su correspondiente $K$.

En este caso:

$$\gamma_0 = \arctg\left(\frac{2,828}{-4}\right) = 144,74^\circ$$

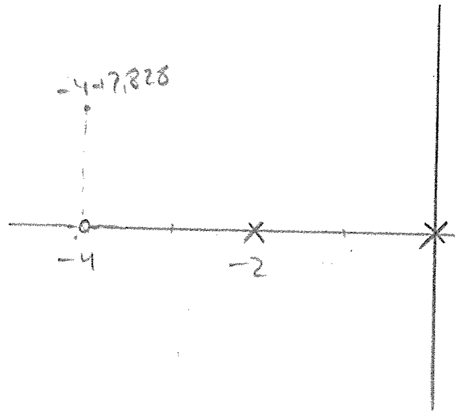
$$\gamma_2 = \arctg\left(\frac{2,828}{-2}\right) = 125,27^\circ$$

$$\gamma_4 = 90^\circ$$

$$\gamma_0 + \gamma_2 - \gamma_4 = 180^\circ$$

Cumple el criterio luego

$\boxed{s=-4+2,828j \text{ es polo del sistema}}$




Con el criterio del módulo calculamos el valor de $K$

$$K_{LDR} = \frac{d_p}{d_z} = \frac{\sqrt{4^2+2,828^2}\,\sqrt{2^2+2,828^2}}{2,828}$$

$$K_{LDR} = 6 = 2K, \quad \boxed{K=3}$$

# 4 ANÁLISIS DEL LDR

Las cinco primeras reglas dan una información suficiente para realizar un análisis cualitativo del comportamiento del sistema

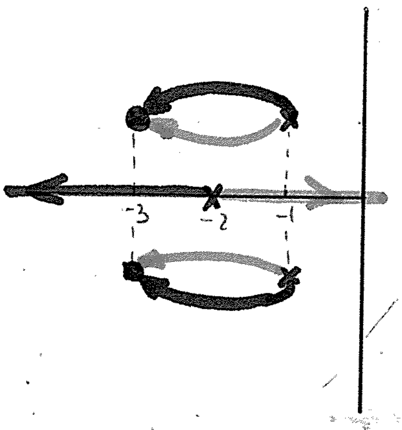
Estabilidad $\begin{cases} \text{¿comienza siendo estable?} \\ \text{¿se hace inestable a partir de algún } K\text{?} \end{cases}$

Dinámica $\begin{cases} \text{¿Posee oscilaciones?} \\ \text{¿siempre?} \end{cases}$

Polos despreciables $\begin{cases} \text{¿Algún polo, para } K \text{ altas, se aleja} \\ \text{tanto del origen que es despreciable?} \end{cases}$

➡ Dibujar el LdR directo e inverso, aproximado de los siguientes sistemas e interpretarlo

a) $GH = \dfrac{3\left((s+3)^2+1\right)}{(s+2)(s^2+2s+2)} = 3\,\dfrac{(s+3)^2+1}{(s+2)\left((s+1)^2+1\right)}$



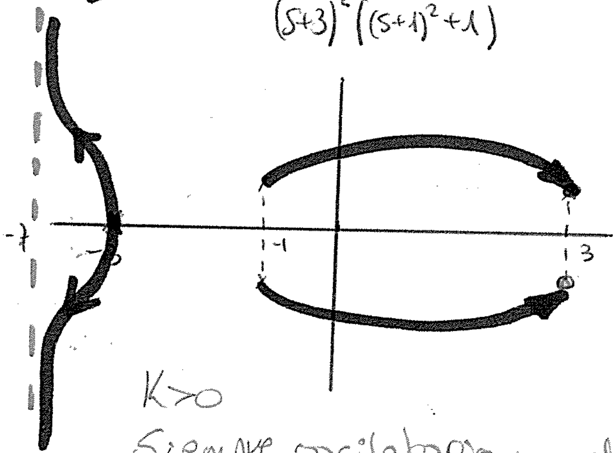
Nº ramos = max (3,2) = 3

Para K>0 (LDR rojo)

El sistema siempre es estable y oscilatorio. Al aumentar la K un polo se aleja del origen y podría considerarse despreciable (para K altas)

Para K<0 (LDR verde): siempre oscilatorio. En el inicio es estable pero si K se hace demasiado negativa se hará inestable

b) $GH = \dfrac{2\left[(s-3)^2+1\right]}{(s+3)^2\left((s+1)^2+1\right)}$



Nº ramos = max (4,2) = 4

$N_a = 4-2 = 2$

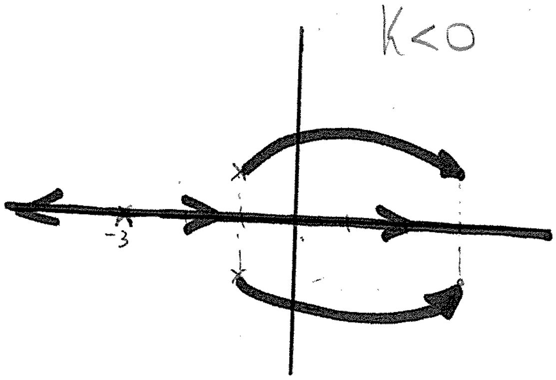
$\sigma_a = \dfrac{-3-3-1-1-3-3}{4-2} = -7$

$\theta_a = \dfrac{180^\circ}{2} = 90$

K>0

Siempre oscilatorio y, al aumentar la K se hará inestable

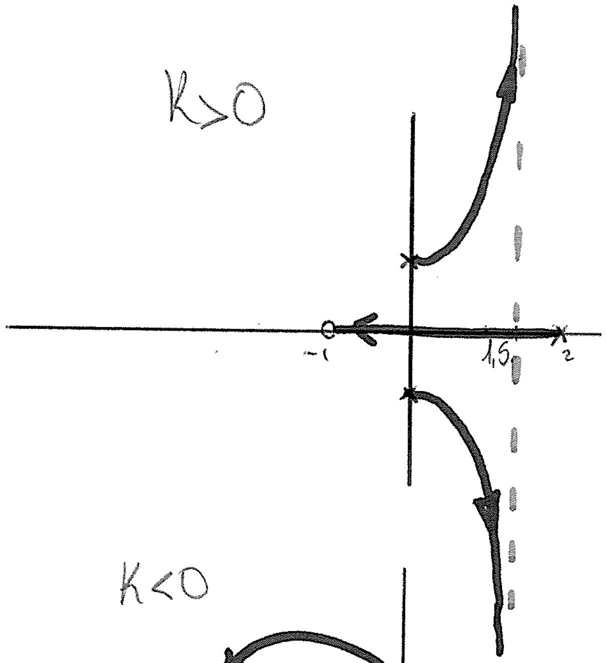
K<0



Siempre oscilatorio.
Si K se hace demasiado negativa el sistema se hace inestable.

c) $GH = \frac{s+1}{(s^2+1)(s-2)}$

K>0




$N^{\circ}$ ramas = max(3,1) = 3

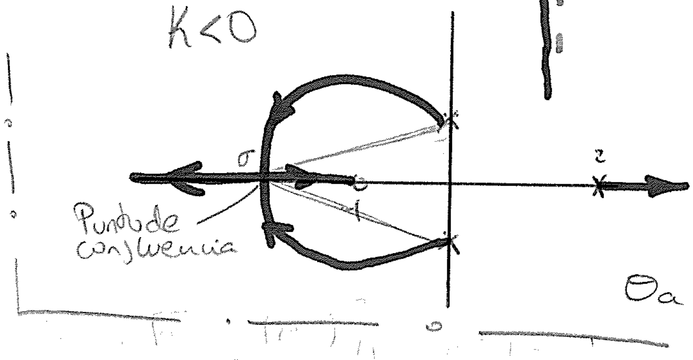
Asíntotas = 3-1 = 2

$\sigma_a = \frac{2+0-(-1)}{3-1} = \frac{3}{2} = 1.5$

$\theta_a = \frac{180}{3-1} = 90$

Siempre inestable y oscilatorio

K<0

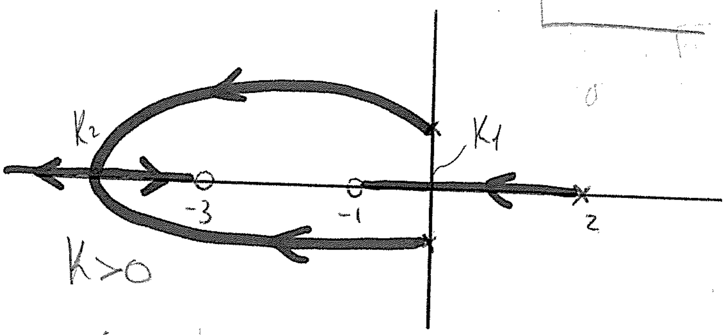



Siempre inestable
Para K muy negativos deja de oscilar

$\theta_a = 180°$ (2 asint.)

d) $G(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{(s^2+1)}$

$H(s) = \frac{1}{s-2}$




K>0

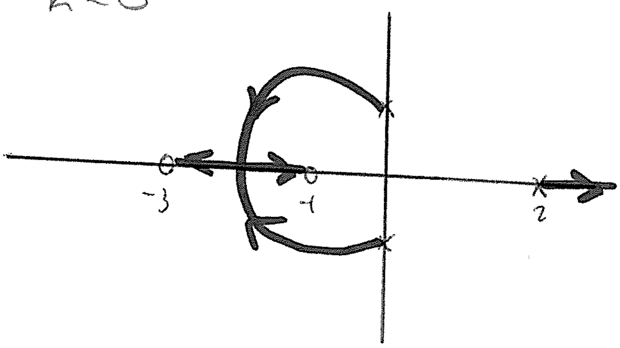
$N^{\circ}$ ramas = max(3,2) = 3

Asíntotas = 1

$\theta_a = 180°$

Es estable a partir de $K_1$ y no oscilatorio a partir de $K_2$

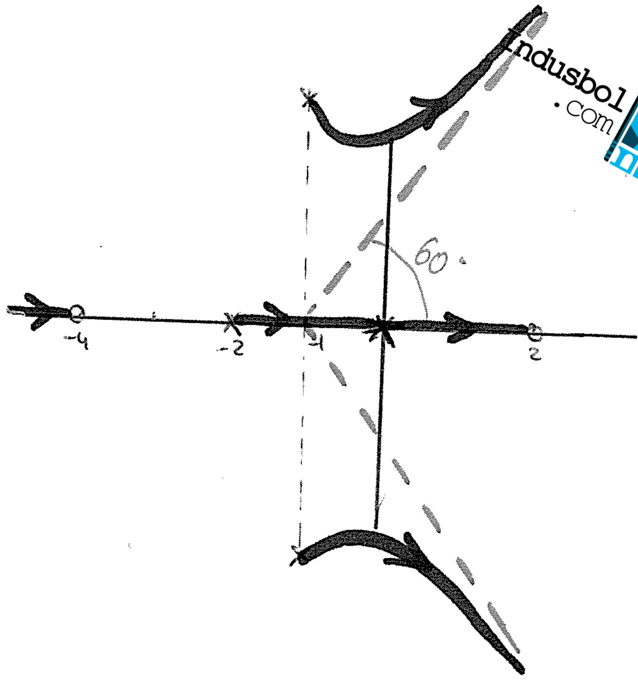
K<0




Siempre oscilatorio ?

siempre inest., no chorba ??

e) $GH = \dfrac{(s-2)(s+4)}{s^2[(s+1)^2+9](s+2)}$




Nº ramos = max(5,2) = 5

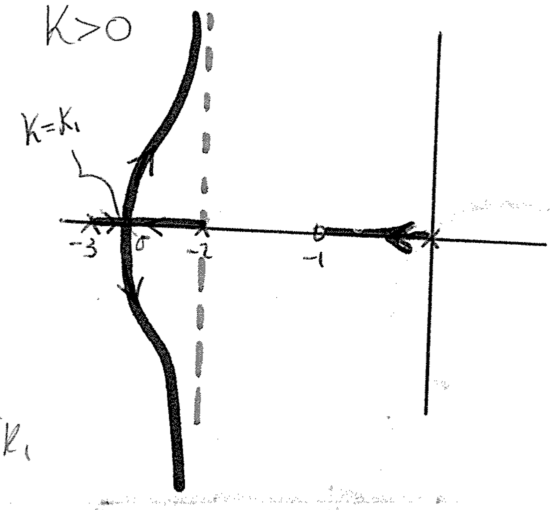
Asint = 3

$\sigma_a = \dfrac{0+0\cancel{-1}\cancel{-1}\cancel{-2}-(2\cancel{-4})}{3} = \dfrac{-2}{3} = -1{,}5$

$\theta_a = \dfrac{180}{3} = 60°$

➡ Estudiar el LdR directo de $G(s) = \dfrac{s+1}{s(s+2)}$ ; $H(s) = \dfrac{1}{s+3}$

Polos cadena abierta: 0, -2, -3
Ceros " " : -1




Nº ramas = max(3,1) = 3

Asíntotas = 2

$\sigma_a = \dfrac{0-2-3-(-1)}{2} = -2$

Existe un punto de dispersión para $K=K_1$

Por mucho que aumentemos K el sistema será siempre estable
Para K bajas aparecen 3 polos reales por lo que el sistema será sobreamortiguado.
A medida que aumentamos la K ($K>K_1$) aparecen oscilaciones y, para K muy altas tendríamos un polo en -1 y otros dos en $s = -2 \pm wj$

$M(s) = \dfrac{K(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+3)+K(s+1)} \underset{K \text{ altas}}{=} \dfrac{K\cancel{(s+1)}(s+3)}{\cancel{(s+1)}((s+2)^2+w^2)}$ ⟶ Sistema de 2º orden con cero adicional

Cuanto más aumentemos la K, mayor serán las oscilaciones

Cálculo del punto de dispersión $(s=\sigma)$ $K=K_1 \longrightarrow K$ máximo local

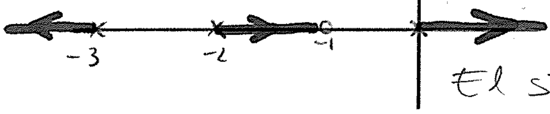
Tanteamos valores de $\sigma$ entre 3 y 2

| $\sigma$ | 2,5 | 2,7 | 2,3 | 2,4 | 2,6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | $0,41\hat{6}$ | 0,334 | 0,372 | 0,411 | 0,39 |

$$K = \frac{d_p}{d_z} = \frac{(3-\sigma)(\sigma-2)\,\sigma}{\sigma-1}$$

$$\boxed{K_1 = 0,41\hat{6} \;,\; \sigma = 2,5}$$

Lugar inverso $(K<0)$

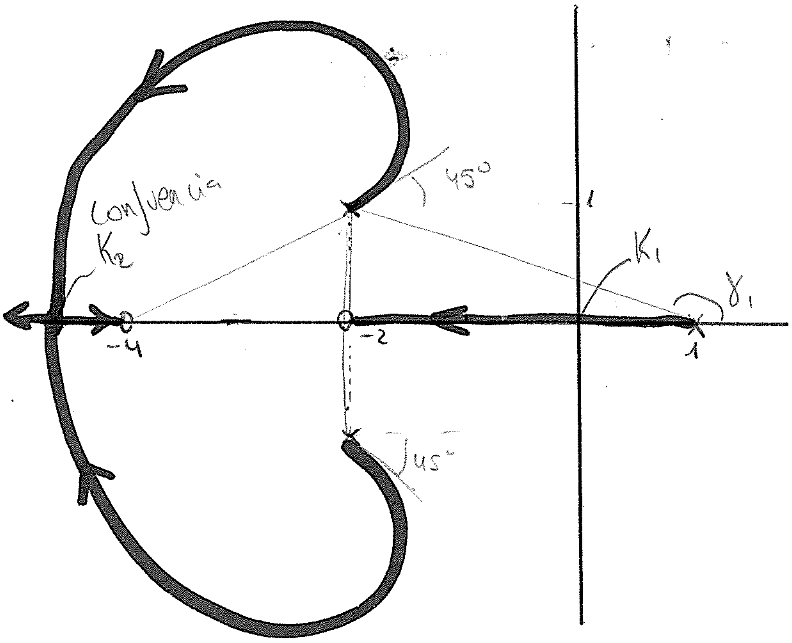



Nº ramas=3

Asint $= 3-1=2$ , $\theta_a = \frac{360}{2} = 180°$

El sistema será siempre inestable

Calcular el lugar directo de $G(s) = \dfrac{s+2}{(s+2)^2+1}$ , $H(s) = \dfrac{s+4}{s-1}$




Nº ramas $= \max(3,2) = 3$

Asint $= 1$ , $\theta_a = 180°$

Ángulo de salida del polo "$-2+j$"

$$\gamma_1 + \gamma_p + \cancel{\gamma_2} - \cancel{\gamma_2} - \gamma_4 = 180°$$

$$\gamma_p = 180° + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-3}\right)$$

$$\gamma_p = 180° + 26,56 - 161,56$$

$$\gamma_p = 45°$$

El sistema es estable para $K > K_1$ , $\boxed{K_1 = \dfrac{1\cdot\sqrt{1+2^2}\cdot\sqrt{1+2^2}}{2\cdot 4} = \dfrac{5}{8}}$

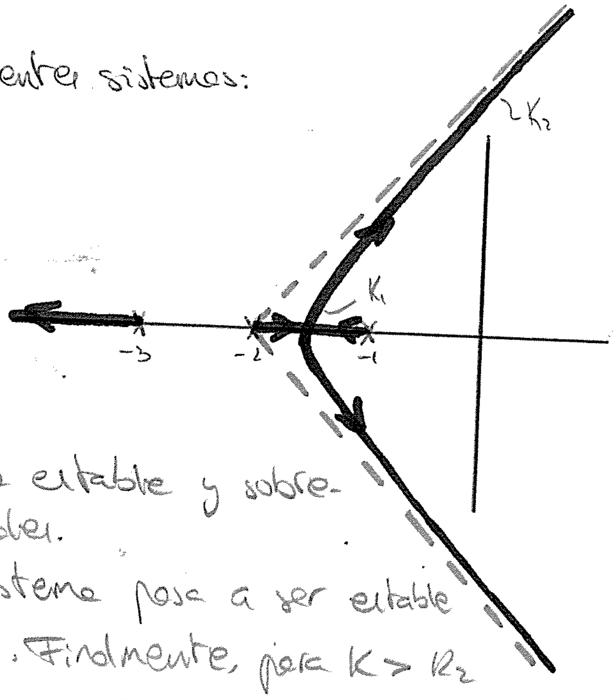
En $K_2$ hay un mínimo local de K o punto de confluencia (Matlab $\rightarrow K=13,8$)

Para K entre $K_1$ y $K_2$, el sistema es estable y oscilatorio y, para $K>K_2$ el sistema tendrá 3 polos reales $\rightarrow$ sobreamortiguado.

Para K altas, un polo se aleja mucho del origen y su efecto es despreciable, otro se acerca a -4 y otro a -2

LdR directo de los siguientes sistemas:

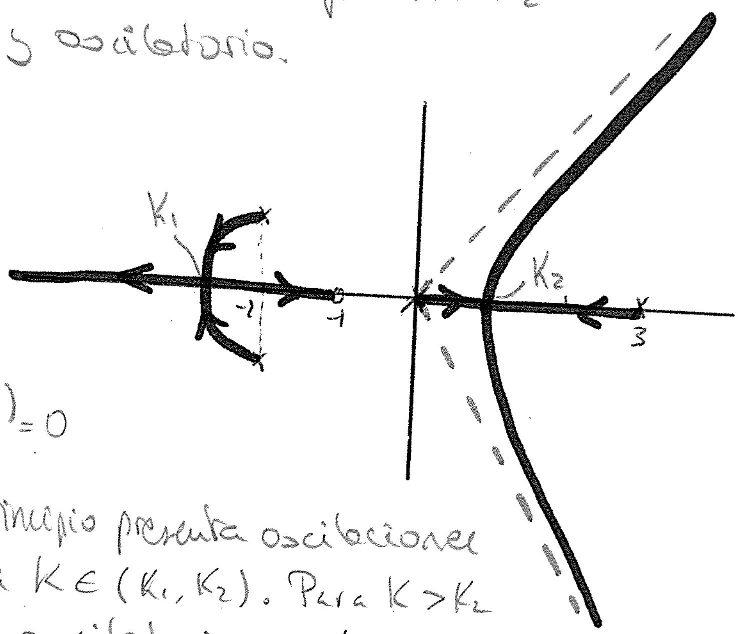
$$GH = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$




Nº ramos = 3
asintot = 3
$\theta_a = \frac{180}{3} = 60°$; $\sigma_a = \frac{-1-2-3}{3} = -2$

Comienza siendo un sistema estable y sobre-amortiguado, con 3 polos reales.
Al aumentar k ($K_1 < K < K_2$) el sistema pasa a ser estable y subamortiguado u oscilatorio. Finalmente, para $K > K_2$ el sistema es inestable y oscilatorio.

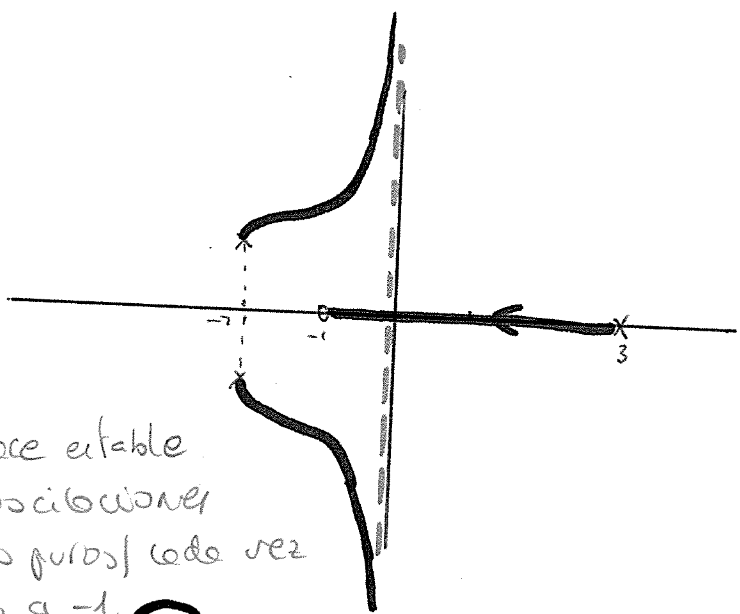
$$GH = \frac{s+1}{s(s-3)[(s+2)^2+1]}$$




Nº ramos = 4
Asint = 3
$\theta_a = 60°$; $\sigma_a = \frac{3+0-2-2-(-1)}{3} = 0$

Es siempre inestable. Al principio presenta oscilaciones pequeñas que se anulan para $K \in (K_1, K_2)$. Para $K > K_2$ el sistema es inestable y oscilatorio, siendo las oscilaciones cada vez mayores

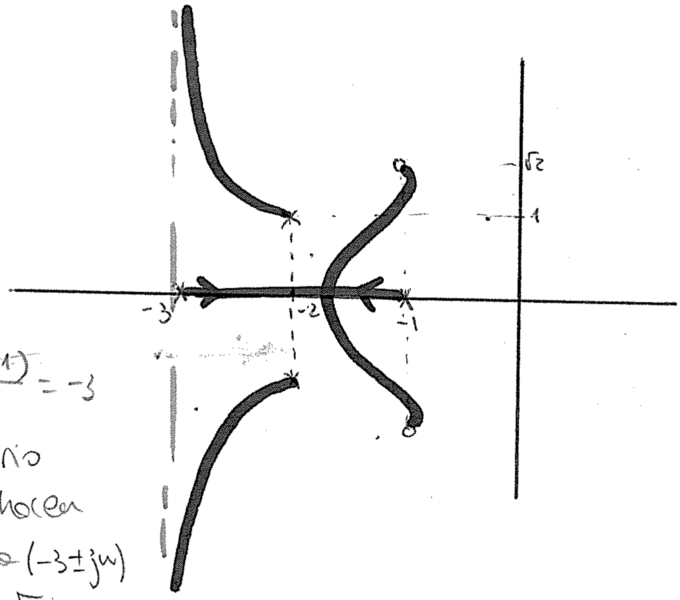
$$GH = \frac{s+1}{(s-3)[(s+2)^2+1^2]}$$




Nº ramas = 3
Asint = 2
$\sigma_a = \frac{3-2-2-(-1)}{2} = 0$
$\theta_a = 90°$

Comienza siendo inestable
A partir de una cierta K se hace estable y oscilatorio tendiendo a oscilaciones mantenidas (polos imaginarios puros) cada vez mayores y un polo cercano a −1.

$$GH = \frac{(s+1)^2+2}{(s+1)(s+3)\left[(s+2)^2+1\right]}$$




N ramos = 4

Asíntotas = 4 − 2 = 2

$\theta_a = \frac{180}{2} = 90°$; $\sigma_a = \frac{-1-2-2-3-(-1-1)}{2} = -3$

K>0: Siempre estable y oscilatorio
Para K altas dos polos se hacen muy oscilatorios de la forma $(-3 \pm jw)$
y otros dos tienden a $-1 \pm \sqrt{2}j$

# CONTROL PID

## 1 DISEÑO DE REGULADORES

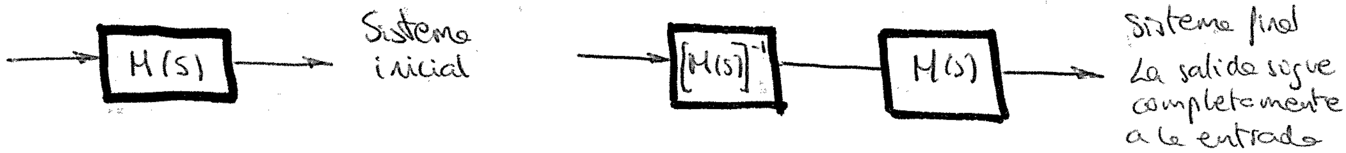
Dado un sistema cuyo comportamiento no es el deseado, se plantea modificarle de modo que responda a unas especificaciones de funcionamiento del tipo:
- Estáticas: estabilidad, precisión ($e_p$, $e_v$, $e_a$)
- Dinámicas: rapidez ($t_p$, $t_s$, $t_r$), amortiguación ($M_p$, $\xi$)

Para ello se define un modo o esquema de control y, si es el caso, se incorporan al sistema subsistemas adicionales que modifiquen su comportamiento.

## 2 ESQUEMAS TÍPICOS DE CONTROL

### • Cadena abierta

Consiste en invertir el modelo: Se incorpora un regulador con una FdT tal que cancele la FdT del sistema y añade una FdT con el comportamiento deseado.

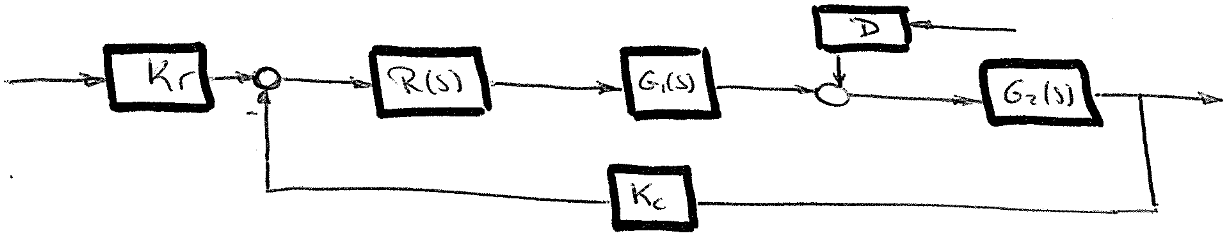



**Problemas**
- Incertidumbre del modelo (incierto el valor exacto de polos y ceros)
- No tiene en cuenta perturbaciones
- Dinámicas no compensables (polos inestables no pueden cancelarse)

SERÍA EL SISTEMA IDEAL PERO EN LA PRÁCTICA, ES POCO ROBUSTO.

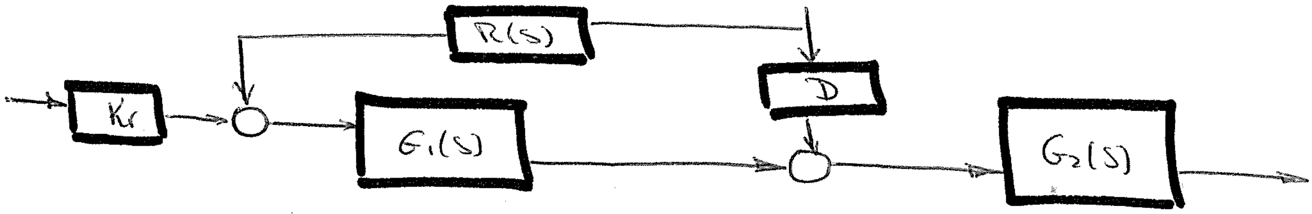
# Realimentación

- Se mide la variable controlada y se compara con la de referencia.
- El error (señal de error) es procesado para actuar sobre el sistema mediante un dispositivo adicional (regulador R(s))
- Una adecuada selección del procesamiento (diseño del regulador) debe permitir:
  - Ajustarse a las especificaciones ($e_p$, $M_p$, $t_s$, ...)
  - Compensar las perturbaciones
- El regulador R(s) puede colocarse en otros lugares o colocar varios.




# Prealimentación

- Evalua las perturbaciones y actua sobre el sistema tratando de compensar su efecto futuro
- Precisa de medir la perturbación
- El regulador R(s) puede colocarse en otros lugares o colocar varios



# 3 METODOLOGÍAS DE DISEÑO

Existen dos grandes grupos de técnicas: de síntesis y de análisis

SÍNTESIS

Calculan el regulador conocidos el sistema a controlar y las especificaciones en bucle cerrado

- Síntesis directa
- método de Truxal
- Optimización de parámetros
- Control de mínima varianza
- Ubicación de polos

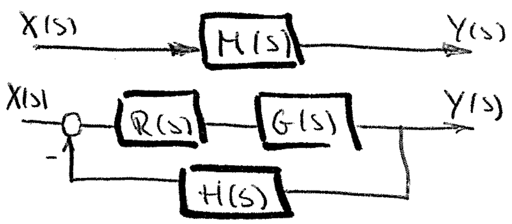
ANÁLISIS

Se elige una FdT estándar para R(s) y se ajustan sus parámetros en refinamientos sucesivos, mediante análisis estático y dinámico del sistema (PID, atraso y adelanto de fase)

- Ajuste empírico
- Ajuste basado en LdR
- Ajuste basado en frecuencia

## SÍNTESIS DIRECTA (TRUXAL)

Si se desea un comportamiento fijado por una M(s) ideal, se iguala esta a la FdT del sistema realimentado y se despeja R(s)




$$M(s) = \frac{R(s)\,G(s)}{1 + H(s)\,R(s)\,G(s)}$$

$$R(s) = \frac{M(s)}{G(s)\,(1 - M(s)\,H(s))}$$

Limitaciones:

- R(s) puede ser no realizable (no causal)
- R(s) puede ser complejo de realizar
- Pueden aparecer valores muy elevados a la salida de R(s)
- G(s) y H(s) no se conocen con exactitud y pueden aparecer nuevos polos en el sistema que lo hagan inestable.

# 4 ACCIONES DE CONTROL

Se basan en los métodos de análisis que parten de reguladores con FdT estandar y se van ajustando sus parámetros.

## Control todo o nada

- Si la variable controlada es inferior a la de referencia $(\varepsilon(t) > 0)$ da señal de control positiva
- Si la variable controlada es superior a la de referencia $(\varepsilon(t) < 0)$ da señal de control negativa

El problema principal de este control es que hace oscilar a los sistemas y por ello necesita incorporar una zona de histéresis.

## Regulador PID

Combina 3 acciones resultantes de procesar la señal de error:
- Una acción proporcional al error
- Una acción proporcional a la integral del error
- Una acción proporcional a la derivada del error

### Acción PROPORCIONAL $\boxed{R(s) = K_r}$

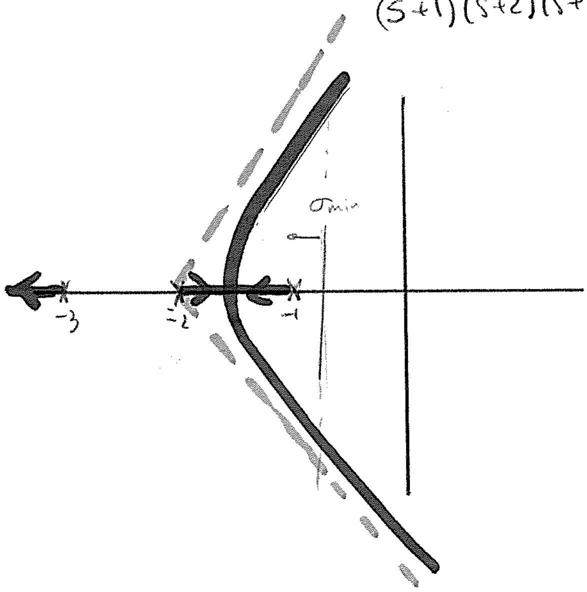
Aumenta la $K_p$, $K_v$ o $K_a$ con lo que disminuye el error $(e_p, e_v, e_a)$ A NO SER QUE INESTABILICE EL SISTEMA

Modifica los polos de $M(s)$ según LdR

Ejemplo: Proponer un regulador P que haga $t_s < 4s$, $e_p < 10\%$ para el sistema

$$GH = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

LdR: Nº ramas = 3, 3 asíntotas $\begin{cases} \theta_a = 60^\circ \\ \sigma_a = \frac{-1-2-3}{3} = -2 \end{cases}$




$$t_{s_{max}} = \frac{\pi}{\sigma} = 4; \quad \sigma_{min} = \frac{\pi}{4} = 0{,}79 \rightsquigarrow \sigma \simeq 0{,}8$$

$$e_p < 10\% \quad e_{p_{max}} = \frac{1}{K_p + 1} = 0{,}1; \quad K_p > 9; \quad K_p = \lim_{s \to 0} RGH = K_r \frac{1}{6}$$

A medida que aumenta $K_r$, aumenta $K_p$ y por tanto se disminuye $e_p$ pero el sistema se hace más lento y oscilatorio

## Acción Integral

$$\boxed{R(s) = K_r\left(\frac{s+a}{s}\right)}$$

Da una señal de control proporcional a la integral del error, generalmente combinado con cierta acción proporcional (PI)

- Aumenta el tipo del sistema → Anula el error
- Empeora el comportamiento dinámico (puede inestabilizar). Generalmente hace aparecer una nueva rama que posiciona un polo de la cadena cerrada muy cerca del origen, lo que ralentiza al sistema.

## Acción Derivativa

$$\boxed{R(s) = K_r\,(s+b)}$$

Da una señal de control proporcional a la derivada del error, generalmente combinado con cierta acción proporcional PD

- Mejora la dinámica → tiende a estabilizar

El regulador PID combina las 3 acciones:

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d\, s \Rightarrow \boxed{R(s) = K_r\,\frac{(s+a)(s+b)}{s}}$$

# AJUSTE DE PIDs

## 1 MÉTODOS ANALÍTICOS

Se supondrá que el comportamiento del sistema realimentado queda determinado por dos polos dominantes

Se escogen dichos polos para cumplir las especificaciones

Se ajusta el regulador para que el LdR pase por los polos dominantes por los polos dominantes. Suele generarse una región del plano donde es posible situar dichos polos. El LdR ha de estar contenido en dicha región.

### ESPECIFICACIONES

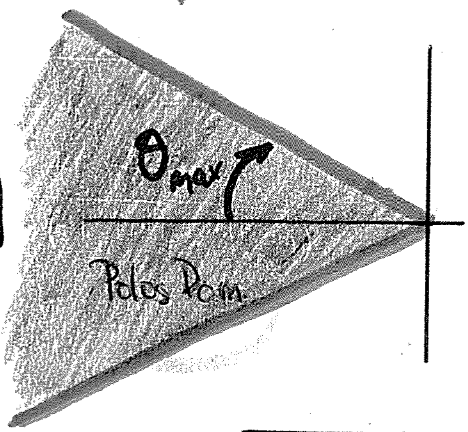
Estáticas: - Error en régimen permanente
- Condicionan el tipo de sistema (si se pretende error nulo) o la ganancia estática (si se pretende error acotado)

Dinámicos

- $M_p \leq M_{p\,max}$

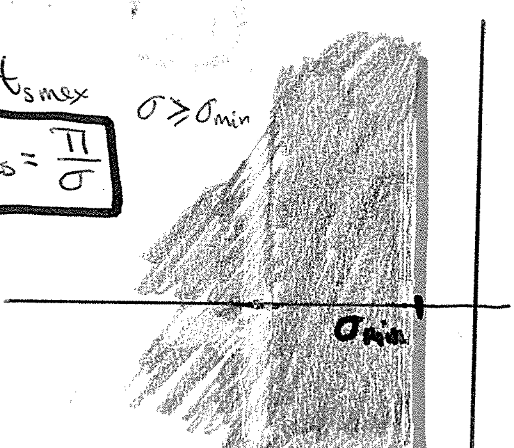
$$\boxed{M_p = e^{-\pi\sigma/\omega_d}\cdot 100 = e^{-\frac{\pi}{tg\theta}}\cdot 100}$$

$\Rightarrow \theta \leq \theta_{max}$

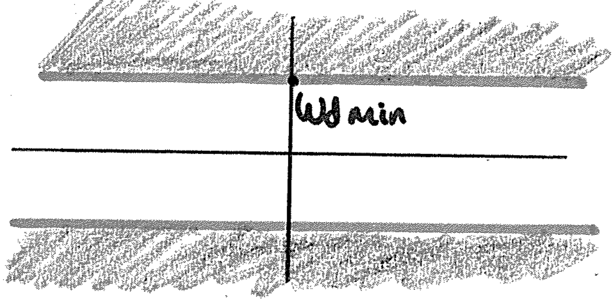



- $t_s \leq t_{s\,max}$ $\quad \sigma \geq \sigma_{min}$

$$\boxed{t_s = \frac{\pi}{\sigma}}$$




- $t_p \leq t_{p\,max}$ $\quad \boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$ $\quad \omega_d \geq \omega_{d\,min}$



# 2 DISEÑO DE REGULADORES POR LdR

Condiciones dinámicas → Determinan Pd (polos dom.)

Condiciones estáticas → Determinan error máx.

↓

Dibujamos LdR

↓

Situamos Pd en el plano S

↓

¿Pertenecen Pd al LdR?

SI → No precisa acción derivativa

↓

¿Se verifica la condición del error?

SI ↓

$R(s) = K$

Ajuste de K por criterio del módulo

P

NO → Necesaria acción integral $R(s) = K\frac{(s+b)}{s}$

Ajustar b a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ de Pd. Ajustar K por criterio del módulo.

PI

NO ↓

Necesaria acción derivativa $R(s) = K(s+a)$

Ajustar a utilizando el criterio del argumento para que LdR pase por los Pd

Ajustar K por criterio del módulo

↓

¿Se verifica la condición de error?

SI → PD

NO ↓

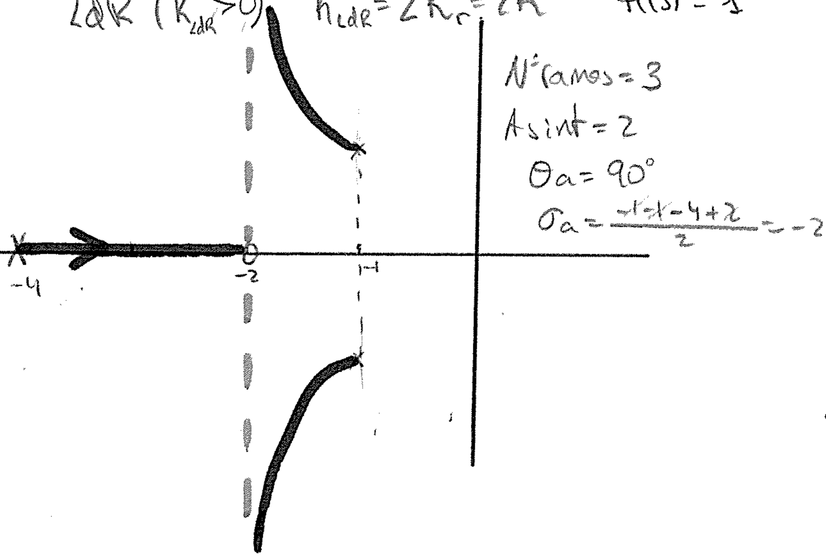
Necesaria acción integral $R(s) = K\frac{(s+a)(s+b)}{s}$

Ajustar a según cálculo anterior, b a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ de Pd y K por criterio del módulo.

PID

Ejemplo: Ajuste regulador P $\quad G(s) = \dfrac{2(s+2)}{(s+4)\left((s+1)^2+1\right)}$ $\quad$ Condiciones $\begin{cases} e_p < 50\% \\ t_s < 3 \\ M_p < 10\% \end{cases}$

LdR ($K_{LdR} > 0$) $\quad K_{LdR} = 2K_r = 2K \quad H(s) = 1$




• COND $e_p < 50\%$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} < 0{,}5; \quad K_p > 1$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} RGH = \frac{K_r}{2}$$

$K_r = K$

$$\boxed{K_r > 2}$$

• COND $t_s < 3$

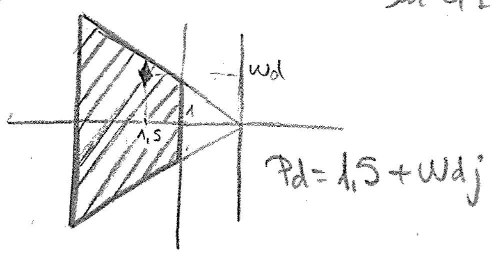
$$t_s = \frac{\pi}{\sigma} < 3; \quad \sigma > \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{\sigma > 1{,}047 \approx 1}$$

• COND $M_p < 10\%$

$$M_p = e^{-\pi/tg\theta} \cdot 100 < 10; \quad e^{-\pi/tg\theta} < 0{,}1; \quad \frac{-\pi}{tg\theta} > \ln(0{,}1); \quad tg\theta < \frac{-\pi}{\ln 0{,}1}$$

$$tg\theta < 1{,}36; \quad \boxed{\theta < 53{,}7°}$$




Tanteo manual:

Proponemos polo real entre $(-4, -2)$

Obtener la K ≡ Criterio del módulo

Conocido p(s) y un polo, encontrar los otros 2 (Ruffini)

Verificar si responden a $\sigma = 1{,}5$

$$p(s) = (s+4)\underbrace{\left((s+1)^2+1\right)}_{s^2+2s+2} + K\,2(s+2)$$

$$p(s) = s^3 + 6s^2 + (10+2K)s + 8 + 4K$$

Polo en $s = -\sigma$

Crit módulo $\quad 2K = \dfrac{(4-\sigma)\left(1+(\sigma-1)^2\right)}{\sigma-2}$

| σ | 2,5 | 3 |
|---|---|---|
| K | 4,875 | 2,5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 6 | 19,75 | 27,5 |
| 2,5 | | 2,5 | 8,75 | 27,5 |
| | 1 | 3,5 | 11 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 6 | 15 | 18 |
| 3 | | 3 | 9 | 18 |
| | 1 | 3 | 6 | 0 |

$s^2 + 3{,}5s + 11 \Rightarrow -1{,}75 + j2{,}81$ ; $\quad s^2 + 3s + 6 \Rightarrow -1{,}5 + 1{,}93j$

Se toma $K = 2{,}5$ que cumple
$$\begin{cases} K = 2K_p \longrightarrow e_p = \dfrac{1}{1+K_p} = \dfrac{1}{1+1{,}25} = 0{,}44 \\ t_s = \dfrac{\pi}{\sigma} = \dfrac{\pi}{1{,}5} = 2{,}1\ s \ \checkmark \\ M_p = e^{-\pi\frac{\sigma}{\omega_d}}\, 100 = 8{,}7\% \ \checkmark \end{cases}$$

## EXAMEN FEB 2006

Las figuras siguientes representan las respuestas a un escalón de un sistema realimentado de control con realimentación unitaria con diferentes reguladores. La figura marcada con un 1 en el interior del recuadro corresponde al sistema sin ningún tipo de regulador. Las restantes responden a los siguientes reguladores:

Regulador 2: Proporcional de ganancia 14

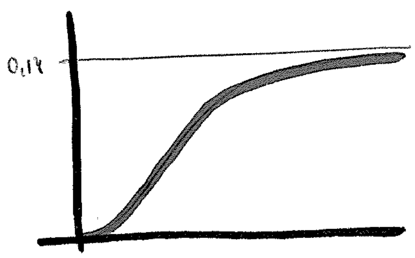
Regulador 3: PI con FdT $= 14\left(1 + \frac{1}{15s}\right)$

Regulador 4: PI con FdT $= 14\left(1 + \frac{1}{5s}\right)$

Regulador 5: PD con FdT $= 14\,(s + 1{,}5)$

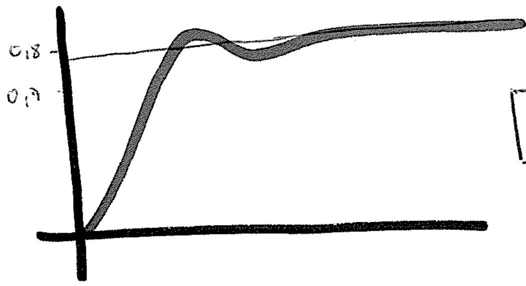
Regulador 6: PID con FdT $= 14\,\dfrac{(s+1{,}5)(s+0{,}9)}{s}$

Indicar en los recuadros de las figuras el nº del regulador correspondiente



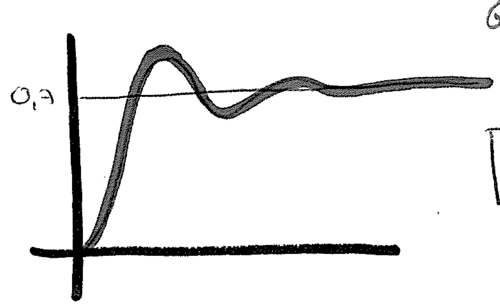

GRÁFICA 1

$\boxed{1}$



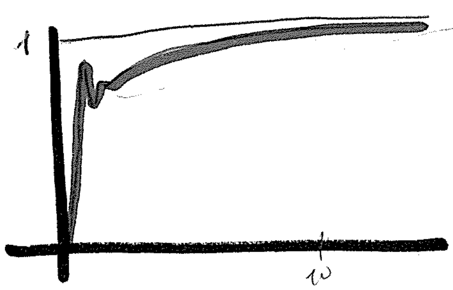

GRÁFICA 2

$\boxed{5}$



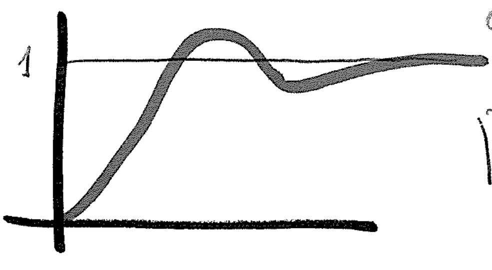

GRÁFICA 3

$\boxed{2}$



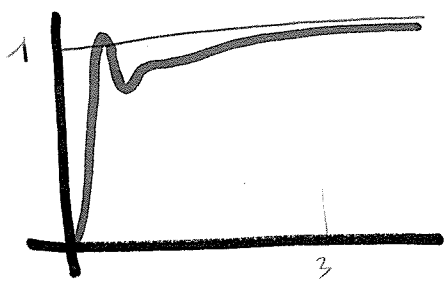

GRÁFICA 4

$\boxed{3}$




GRÁFICA 5

$\boxed{6}$




GRÁFICA 6

$\boxed{4}$

De GRÁFICA 1:

Dif. entre salida y entrada (1)

$y(\infty) = 0{,}14 \qquad e_p = 1 - 0{,}14 = 0{,}86 = \dfrac{1}{1+K_p} \rightsquigarrow K_p = 0{,}1628$

Como $K_p = \lim\limits_{s\to 0} R(s)\, GH = \lim\limits_{s\to 0} GH = 0{,}1628$

$R(s) = 1$ para GRÁF 1

- Con un regulador P $R_2$ $\longrightarrow R_2(s) = 14 \longrightarrow K_p = \lim\limits_{s\to 0} 14\, GH = 14 \cdot 0{,}1628$

  $K_p = 2{,}279$

$e_p = \dfrac{1}{1+K_p} = 0{,}304 \longleftarrow$ Corresponde a la GRÁF. 3 $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Reg } 2 \equiv \text{GRÁFICA } 3}$

- Con $R_3$: PI $\quad R_3(s) = 14\left(1 + \dfrac{1}{15s}\right) = \dfrac{14(15s+1)}{15s} = 14\dfrac{(s + 1/15)}{s}$

  Con la acción integral $\rightarrow e_p = 0$ { GRÁFICAS 4, 5 y 6

- Con $R_4$: PI $\quad R_4(s) = 14\left(1 + \dfrac{1}{5s}\right) = 14\dfrac{5s+1}{5s} = 14\dfrac{s + 1/5}{s}$

Ambos reguladores introducen un polo en cadena cerrada que ralentiza:

$R_3$ entre 0 y $-1/15$ $\longleftarrow$ Mas cercano al origen, hará el sistema muy lento; más que $R_4$

$R_4$ entre 0 y $-1/5$

$\boxed{R_3 \equiv \text{GRÁFICA } 4 \; ; \; R_4 \equiv \text{GRÁFICA } 6}$

- Con $R_5$: PD $= 14(s + 1{,}5)$ No se anulará el error de posición por lo que corresponderá a GRÁF. 2

$K_p = \lim\limits_{s\to 0} 14(s+1{,}5)\, GH = 14 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}1628 = 3{,}419 \; ; \quad e_p = \dfrac{1}{1+K_p} = 0{,}226$

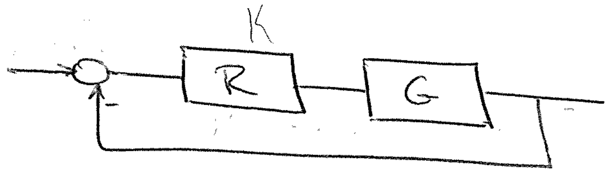
$y(\infty) = 1 - 0{,}226 = 0{,}77 \equiv$ GRÁF 2

$\boxed{R_5 \equiv \text{GRÁFICA } 2}$

- Con $R_6$ se anula $e_p$ por acción integral y se mejora el transitorio con acción derivativa

$\boxed{R_6 \equiv \text{GRÁFICA } 5}$

Para el sistema de la figura, seleccionar el regulador más simple que consigue $e_p \leq 10\%$




Condición estática $e_p = \dfrac{1}{1+K_p} < 0{,}1$

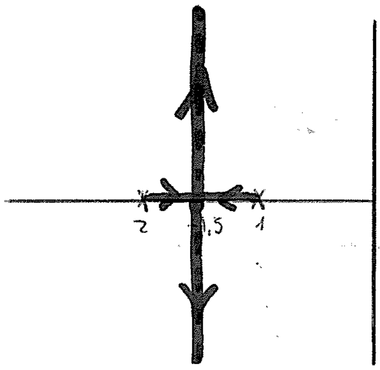
$G = \dfrac{2}{(s+1)(s+2)}$

$0{,}1 K_p > 0{,}9; \quad K_p > 9$

Como $K_p = \lim_{s\to 0} RG = 1 \lim_{s \to 0} R = 9 \longrightarrow R(0) = 9$

$K_{LdR} \neq 2R(0)$

LdR directo $(K>0)$




N° ramos = 2

Asint = 2; $\Theta_a = 90°$, $\sigma_a = \dfrac{-1-2}{2} = \dfrac{-3}{2} = -1{,}5$

Es estable para cualquier valor de K por lo que basta un regulador proporcional $\boxed{R(s) = 9}$ para cumplir la condición pedida

Para el sistema de la figura, seleccionar un regulador que consigue que

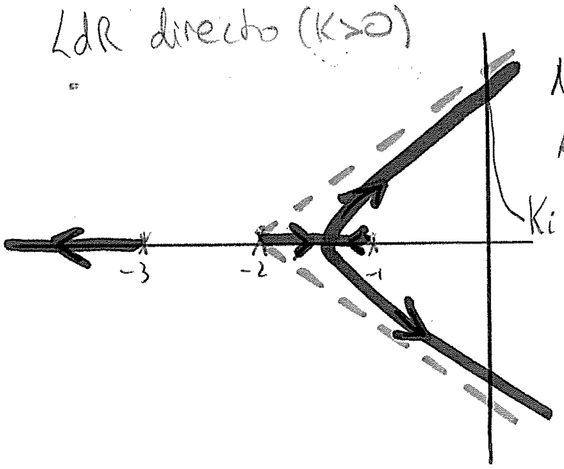
a) $e_p \leq 10\%$

b) $e_p \leq 5\%$

$G(s) = \dfrac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ $\quad H(s) = 1$

a) Condición estática $e_p = \dfrac{1}{1+K_p} \leq 0{,}1; \quad 0{,}9 \leq 0{,}1 K_p, \quad K_p \geq 9$

LdR directo $(K>0)$




N° ramos = 3

Asint = 3; $\Theta_a = 60°$, $\sigma_a = \dfrac{-1-2-3}{3} = -2$

Para $K_{LdR} > K_i$ el sistema se hace inestable. Calculamos $K_i$ por Routh

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+KG(s)H(s)} = \frac{\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}}{1+K\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)+6K}$$

$P(s) = s^3+6s^2+11s+(6+6K)$ Routh

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 11 |
| $s^2$ | 6 | $6+6K$ |
| $s^1$ | M | 0 |
| $s^0$ | $6+6K>0$ | |

$6+6K>0 \rightarrow K>-1$

$m = \frac{66-(6+6K)}{6} > 0$

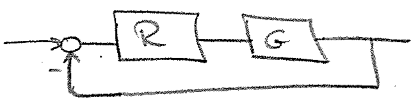
$m = 10-K>0$

$K \leq 10$

Por tanto, colocando un regulador P de $R(s)=10$ estaríamos justo en el límite de la estabilidad → Para el caso a) $R(s)=9$ cumple la condición $e_p \leq 10\%$ pedido, y es válido

$K_p = \lim_{s\to 0} R(s)GH = R(0) \geq 9$

b) $e_p \leq 0{,}05 \longrightarrow K_p \geq 19$, y como $K_p = R(0) \geq 19$, se sale del límite de la estabilidad por lo que tenemos que incorporar una acción integral. Regulador PI $R(s) = K\frac{s+a}{s}$




El polo en el origen anula $e_p$ $\frac{1}{2}$ Pd

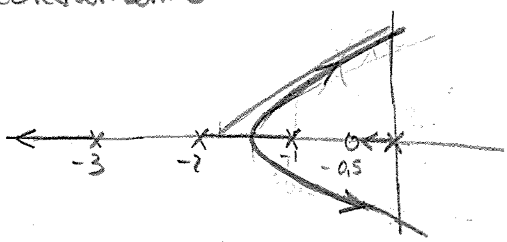
El cero en "$-a$" se tomará de modo que el resultado de un sist. no excesivamente lento ni oscilatorio

Polo dominante → $s=-1 \longrightarrow a=-0{,}5$

Criterio del módulo → Proponemos K

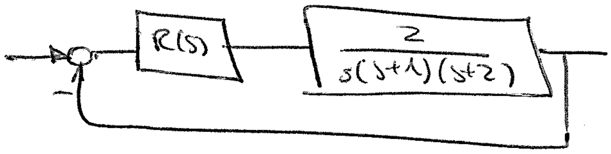
⋮

[...]




$\sigma_a = \frac{-3-2-1+0{,}5}{3} = 1{,}8\hat{3}$

➡ Diseñar un regulador para que el sistema de la figura cumpla $M_p \le 25\%$ $t_s \le 10$ $e_v < 2s$

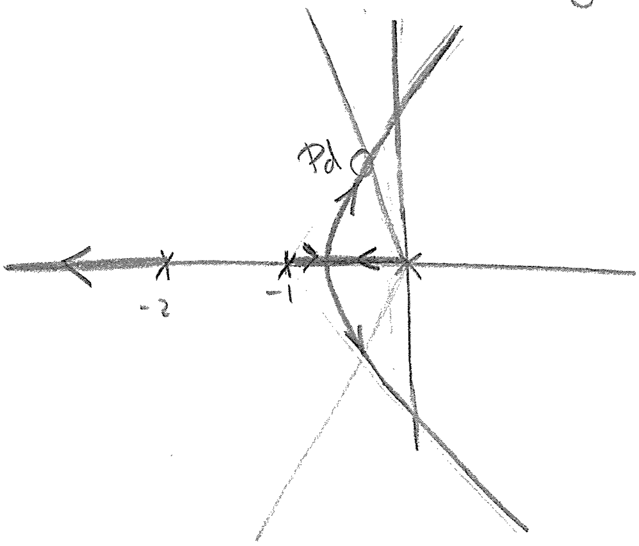



Las condiciones dinámicas definen los polos dominantes deseados Pd

$M_p \le 25\% \longrightarrow M_{p_{max}} = e^{-\pi/\tan\theta} = 0{,}25$ , $\frac{-\pi}{\tan\theta} = \ln 0{,}25$ ; $\tan\theta = \frac{-\pi}{\ln 0{,}25}$

$$\theta \le 66{,}19^\circ$$

$t_s \le 10 \longrightarrow t_{s\,max} = \frac{\pi}{\sigma}$ ; $\sigma = \frac{\pi}{10} = 0{,}3$ ; $\sigma \ge 0{,}3$




$P_d = -0{,}3 \pm w_d\, j$ $\left\{ \frac{w_d}{0{,}3} = \tan 66{,}19^\circ \right.$

$w_d = 0{,}68 \approx \frac{2}{3}$

$P_d = -0{,}3 \pm \frac{2}{3} j$

No sabemos si Pd es del LdR.

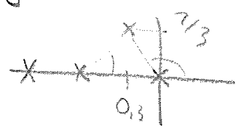
Aplicamos criterio del Argumento

$\gamma_0 = \operatorname{arctg} \frac{2/3}{-0{,}3} = 114{,}2^\circ$

$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \frac{2/3}{0{,}7} = 43{,}6^\circ$

$\gamma_2 = \operatorname{arctg} \frac{2/3}{1{,}7} = 21{,}41^\circ$

$\longrightarrow \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \approx 180^\circ$




Por tanto, ajustando la K se puede conseguir pasar por Pd

Por el criterio del módulo

$$2K = \frac{\sqrt{0{,}3^2 + (2/3)^2}\,\sqrt{0{,}7^2 + (2/3)^2}\,\sqrt{1{,}7^2 + (2/3)^2}}{1} = 1{,}29$$

Por tanto $R(s) = \frac{1{,}29}{2} = 0{,}64$

Se evalua ahora si se cumple la condición estática $e_v < 2_{seg}$

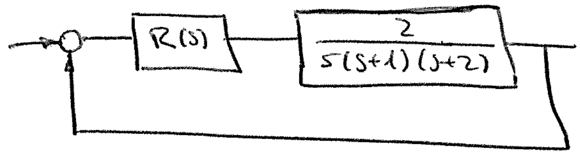
$e_v = \frac{1}{K_v}$ $K_v = \lim_{s\to 0} sRG = 0{,}645$ ; $e_v = \frac{1}{K_v} = 1{,}55 < 2$

Luego cumple y por ello basta con un regulador P

$$\boxed{R(s) = \frac{1{,}29}{2}}$$

➔ Diseñar un regulador para el sistema de la figura que cumple

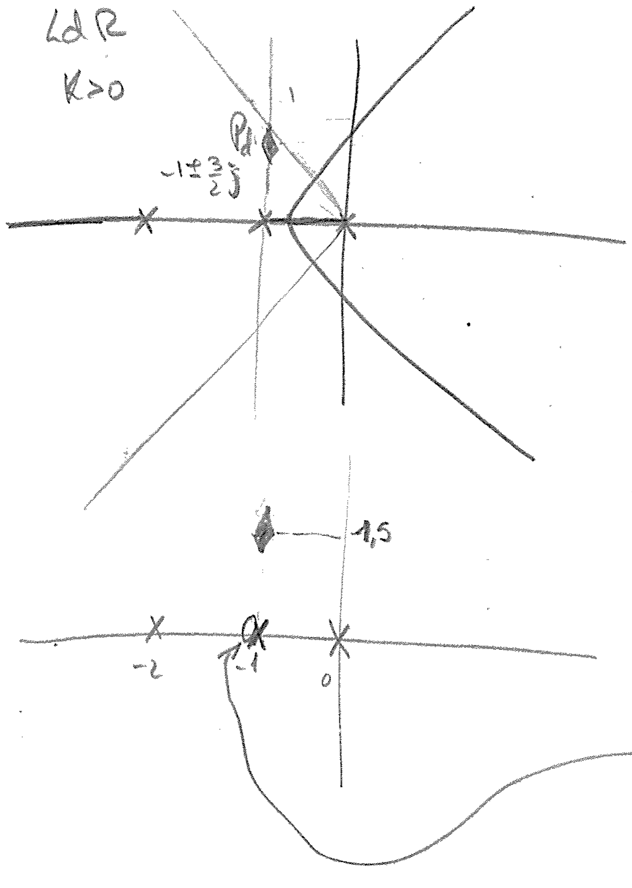
$M_p \leq 15\%$ $t_s \leq \pi$ $e_p \leq 10\%$




La especificación estática se cumple sin necesidad de usar integral pues $G(s)$ es de tipo 1

Seleccionamos los polos dominantes Pd a partir de las condiciones dinámicos.

- $M_p \leq 15\% \rightarrow e^{-\pi/tg\theta} = 0{,}15$ ; $tg\theta = \frac{-\pi}{\ln 0{,}15} = 1{,}656$ ; $\theta \leq 58{,}87$
- $t_s \leq \pi \rightarrow \frac{\pi}{\sigma} \leq \pi$; $\sigma \geq 1$




LdR no pasa por los Pd, por lo que se aportará una acción derivativa

$\gamma_0 = actg \frac{1{,}5}{-1} = 123{,}69°$

$\gamma_1 = 90° = 90°$

$\gamma_2 = arctg\ 1{,}5 = 56{,}3°$

$123{,}69 + 90 + 56{,}3 - \gamma_z = 180°$

cero introd. por ac. deriv.

$\gamma_z \approx 90°$

Ajustamos la K por crit módulo

$$2K = \frac{\left(\sqrt{1{,}5^2+1^2}\right)^2 1{,}5^2}{1{,}5^2} = 3{,}25 \Longrightarrow \boxed{R(s) = \frac{3{,}25}{2}\cdot(s+1)}$$

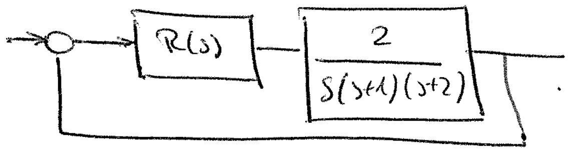
Con este regulador PD

$$RG = 3{,}25\,\frac{1}{s(s+2)}\ ,\quad M(s) = \frac{RG}{1+RG\cdot 1} = \frac{\frac{3{,}25}{s(s+2)}}{1+\frac{3{,}25}{s(s+2)}}$$

$$M(s) = \frac{3{,}25}{s^2+2s+3{,}25} \longrightarrow$$ Polos: $-1 \pm \frac{3}{2}i$
Cumplen especificaciones dinámicas

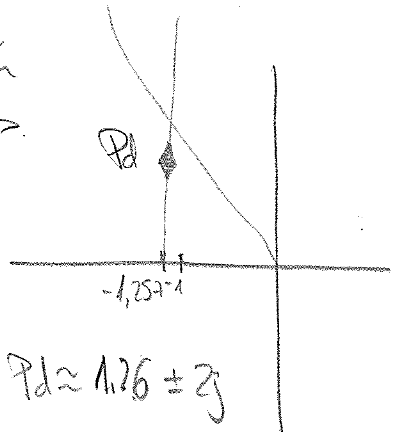
Para el sistema de la figura, diseñar un regulador que cumple:

$M_p \leq 15\%$ $\quad t_s \leq 2{,}5 \quad e_p \leq 10\%$




Como $G(s)$ es de tipo 1 $e_p = 0$ y se cumple la condición $e_p \leq 10\%$ sin necesidad de aportar acción integral

Las especificaciones dinámicas fijan la posición de los polos dominantes Pd $\longrightarrow$



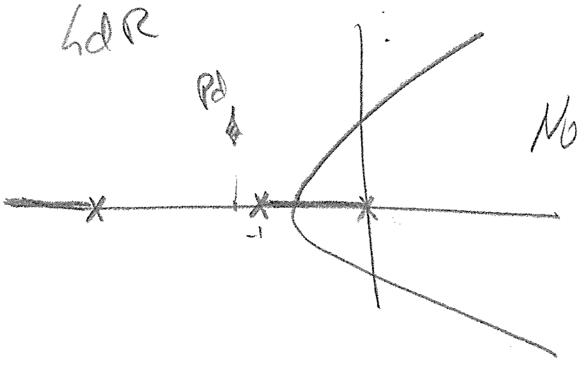

$M_p \leq 15\%$ $\quad e^{-\pi/\tg\theta} = 0{,}15\ ,\ \tg\theta = 1{,}656$

$\theta = 58{,}87°$

$t_s = \frac{\pi}{\sigma} \leq 2{,}5\ ,\quad \sigma \geq 1{,}257$

$Pd \simeq 1{,}26 \pm 2j$

LdR




No pasa por Pd

Usaremos un regulador PD

$R(s) = K(s+a)$ ajustando a para que el LdR pase por los Pd

Ajustamos "a" por criterio del argumento

$\gamma_0 = \text{arctg}\,\dfrac{2}{-1,26} = 122,21°$

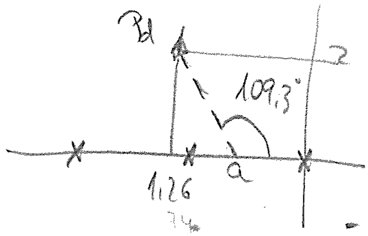
$\gamma_1 = \text{arctg}\,\dfrac{2}{-0,26} = 97,4°$

$\gamma_2 = \text{arctg}\,\dfrac{2}{2-1,26} = 69,7°$

cero añadido: acción D

$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_z = 180$

$\gamma_z = 109,3°$




$\text{tg}\,109,3 = \dfrac{2}{1,26-a}$

$-2,85 = \dfrac{2}{-(1,26-a)}$

$-1,26+a = \dfrac{2}{-2,85} = -0,7$

$a = 0,559$

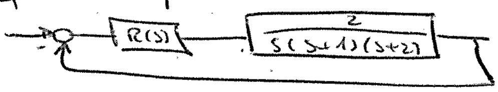
Ajustamos ahora K por crit. módulo

$$2K = \frac{d_0 d_1 d_2}{d_a} = \sqrt{\frac{(2^2+1,26^2)(2^2+0,26^2)(2^2+0,74^2)}{4+(1,26-0,559)^2}} = 4,797$$

$$\boxed{R(s) = \frac{4,797}{2}(s+0,559)}$$

Diseñar un regulador para el sistema de la figura que cumple:

$M_p \leq 15\%$ $t_s \leq 2,5$ $e_{ss} = 0$



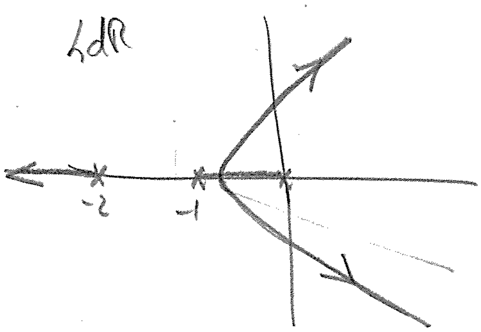

Las condiciones dinámicas posicionan los polos dominantes Pd

$M_p \leq 15\% \rightarrow e^{-\pi/\text{tg}\theta} = 0,15;\ \text{tg}\theta = 1,65598;\ \Rightarrow \theta \leq 58,87°$

$t_s \leq 2,5 \rightarrow \dfrac{\pi}{\sigma} \leq 2,5;\ \sigma \geq \dfrac{\pi}{2,5} = 1,26$

$Pd = -1,26 \pm 2j$

LdR




Pd no pertenece al LdR por lo que incluiremos una acción derivativa

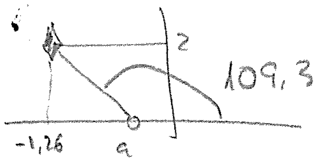
$R(s) = K(s+a)$

Ajustamos "a" con el criterio del argumento:

$$\gamma_0 = \operatorname{arctg}\frac{-2}{1{,}26} = 122{,}21^\circ$$
$$\gamma_1 = \operatorname{arctg}\frac{-2}{0{,}26} = 97{,}4^\circ$$
$$\gamma_2 = \operatorname{arctg}\frac{+2}{0{,}74} = 69{,}7^\circ$$

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_z = 180^\circ$$

$$\gamma_z = 109{,}3^\circ \; ; \; tg\,\gamma_z = \frac{2}{-1{,}26+a}$$




$$-1{,}26 + a = \frac{2}{-2{,}85}$$

$$a = 0{,}559$$

$$\Rightarrow R(s) = K(s+0{,}559)$$

Ajustamos K con criterio del módulo

$$2K = \sqrt{\frac{(4+1{,}26^2)(4+0{,}26^2)(4+0{,}74^2)}{4+(1{,}26-0{,}559)^2}} = 4{,}797$$

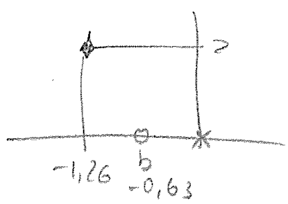
$$R(s)_{PD} = \frac{4{,}797}{2}(s+0'559)$$

Ahora necesitamos ajustar el regulador mediante una acción integral para cumplir la condición estática $e_v = 0$

$$R(s)_{PID} = K'(s+0{,}559)\frac{(s+b)}{s}$$

Tomamos b a $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{3}$ de la Pd (se toma a $\frac{1}{2}$) $\rightarrow b = \frac{1{,}26}{2} = 0{,}63$

Se reajusta la $K \rightarrow K' = \frac{4{,}797}{2} \cdot \sqrt{\frac{4+1{,}26^2}{(1{,}26-0{,}63)^2+4}}$

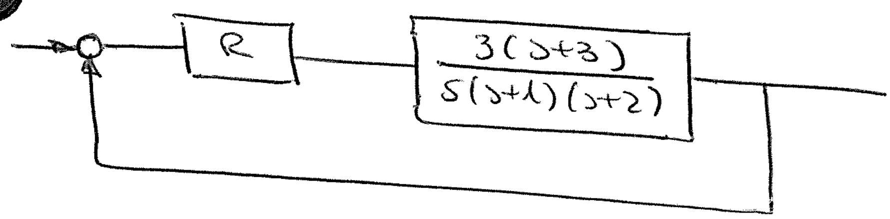



$$K' = \frac{5{,}41}{2}$$

$$\boxed{R(s) = \frac{5{,}41}{2}(s+0{,}559)\frac{(s+0{,}63)}{s}}$$

# PARCIAL 2º → Turno Mañana

**1** a)




$$M(s) = \frac{3(s+3)}{s(s+1)(s+2) + 3(s+3)K}$$

$s^2+3s+2$

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + (2+3K)s + 9K$$

- $M_p \leq 5\%$
- Error de velocidad el menor posible
- Regulador lo más simple posible

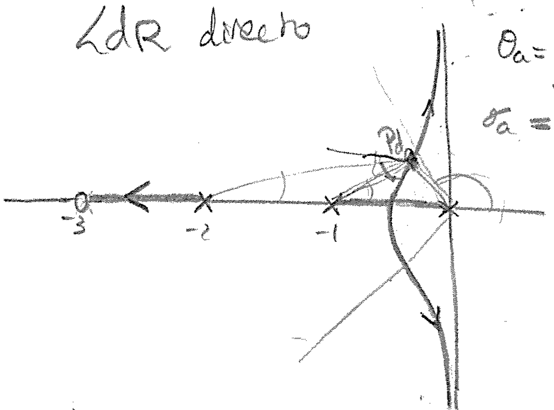
Con los condiciones dinámicos situamos los polos dominantes

$$M_p \leq 5\% \longrightarrow M_{p\,max} = e^{-\pi/\mathrm{tg}\,\theta} = 0{,}05 \quad ; \quad \mathrm{tg}\,\theta = 1{,}0487$$

$$\theta = 46{,}36° \simeq 45°$$

$$\Longrightarrow \boxed{\theta \leq 45°}$$

LdR directo




$$\theta_a = \frac{180}{3-1} = 90°$$

$$\sigma_a = \frac{0-1-2-(-3)}{2} = 0$$

Podemos situal Pd en el LdR

Nos basta por tanto un regulador proporcional

$$\boxed{R(s) = K}$$

El sistema es estable para cualquier valor de K

Vamos a proponer un polo entre -3 y -2 ; Iteramos:

| a | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| K | 0,085 | 0,22 | 0,4271 | 0,746 | 1,25 |

| a | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 |
|---|---|---|---|---|
| K | 2,08 | 3,57 | 6,72 | 16,53 |

$$3K = \frac{a\cdot(a-1)(a-2)}{(3-a)}$$

Queremos que el error de velocidad sea lo menor posible, para lo que interese K lo más alta posible PERO hemos de cumplir la condición $\theta \leq 45°$, por lo que vamos a ir probando con cada K hasta encontrar la mayor que cumple $\theta \leq 45°$

Como:

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + (2+3K)s + 9K$$

$\Longrightarrow$

Indusbol.com

Pruebo $K = 1{,}25 \longrightarrow a = 2{,}5$

Ruffini

| | 1 | 3 | $(2+3K)$ 5,75 | $9K$ 11,25 |
|---|---|---|---|---|
| 2,5 | | 2,5 | 1,25 | 11,25 |
| | 1 | 0,5 | 4,5 | 0 |

$s^2 + 0{,}5s + 4{,}5 = 0$

$s = -0{,}25 \pm 2j$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{2{,}1}{0{,}25} = 8{,}4;\ \theta = 83^\circ > 45^\circ$

$\longrightarrow$ NO CUMPLE

Pruebo $K = 0{,}4271 \longrightarrow a = 2{,}3$

| | 1 | 3 | $2+3K$ 3,2813 | $9K$ 3,8439 |
|---|---|---|---|---|
| 2,3 | | 2,3 | 1,61 | 3,8439 |
| | 1 | 0,7 | 1,6713 | 0 |

$s^2 + 0{,}7s + 1{,}6713 = 0$

$s = -0{,}35 \pm 1{,}24j$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1{,}24}{0{,}35};\ \theta = 74{,}23^\circ > 45^\circ$

NO CUMPLE

Pruebo $K = 0{,}22 \longrightarrow a = 2{,}2$

| | 1 | 3 | $3K+2$ 2,66 | $9K$ 1,98 |
|---|---|---|---|---|
| 2,2 | | 2,2 | 1,76 | 1,98 |
| | 1 | 0,8 | 0,9 | 0 |

$s^2 + 0{,}8s + 0{,}9 = 0$

$s = -0{,}4 \pm 0{,}86j$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{0{,}86}{0{,}4},\ \theta = 65^\circ > 45^\circ$

NO CUMPLE

Pruebo $K = 0{,}085 \longrightarrow a = 2{,}1$

| | 1 | 3 | $3K+2$ 2,255 | $9K$ 0,765 |
|---|---|---|---|---|
| 2,1 | | 2,1 | 1,89 | 0,765 |
| | 1 | 0,9 | 0,365 | 0 |

$s^2 + 0{,}9s + 0{,}365 = 0$

$s = -0{,}45 \pm 0{,}4j$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{0{,}4}{0{,}45} \Rightarrow \theta = 41{,}63^\circ < 45^\circ$

CUMPLE

Por tanto, elegimos $K = 0{,}085$, los Pd estarán en $\boxed{\text{“}-0{,}45 \pm 0{,}4j\text{”}}$

$\boxed{K(s) = 0,085}$

$\boxed{P_d = -0,45 \pm 0,4j}$

b) ¿Cómo se comporta en cadena cerrada?
Es lento, pues el polo dominante esta cerca del origen y oscilatorio

2 ¿Para que sirven los criterios del módulo y argumento?
¿Y la realimentación

# INTRO A LOS SISTEMAS DE AUTOMATIZACIÓN

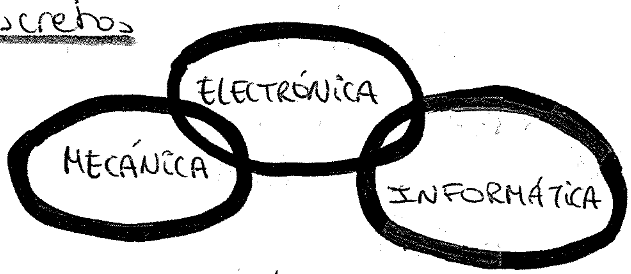
## 1 LA AUTOMATIZACIÓN DE LA FABRICACIÓN

- **Automática:** Ciencia que trata de los métodos y procedimientos cuya finalidad es la sustitución del operador humano por un operador artificial en la ejecución de una tarea, física o mental, previamente programada.

- **Automatización:** Estudio y aplicación de la Automática al control de procesos industriales, tanto en lazo abierto como en cerrado.

Aplicables →
- Fabricación continua ≈ Regulación automática } PROCESS
- Fabricación discontinua, por lotes o de eventos discretos ≈ Automatización } AUTOMATED MANUFACTURING

Automatizar implica conocer {




REGULACIÓN Y CONTROL

- Sist. sensoriales
- Actuadores
- Máq. y herramientas con control numérico
- Máq. de ensamblado
- Robots industriales
- Sist. de almacenamiento y transporte

[...]

En la asignatura estudiaremos el modelado de eventos discretos y los equipos de control más adecuados para los mismos, los autómatas programables.

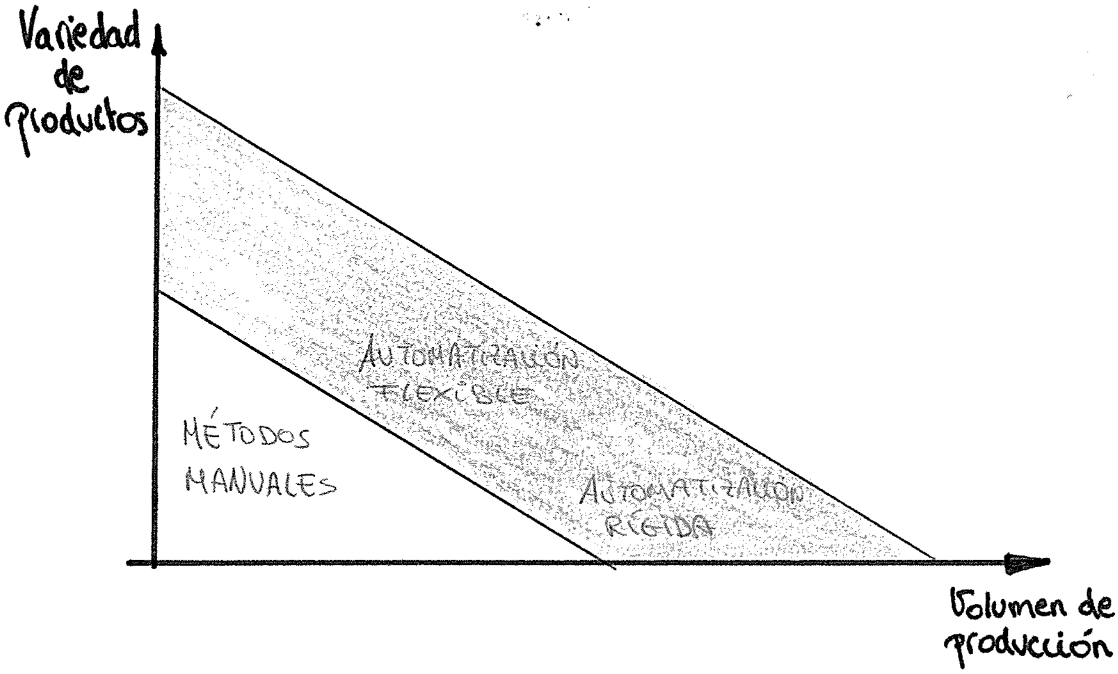
## Flexibilidad en la automatización:

### Automatización rígida

- Secuencia de las operaciones fijada por la configuración de los equipos utilizados.
- Sistema diseñado para fabricar un sólo producto (o varios muy similares).
- Rentable en series grandes (productos de gran demanda)
- Concatenación de operaciones simples
- Instalación costosa que se amortiza con el tamaño de la serie
- Máquinas transfer

### Automatización flexible

- Cambio del producto fabricado mediante cambio de las órdenes de control (alteraciones mínimas del sistema) → Alta inversión en sistemas
- Rentable en series medias (producción por lotes) → batch production
- En series cortas el coste de la reprogramación y los parados de producción pueden hacerlos no rentables.
- Máquinas herramientas con control numérico



## Campos de aplicación de la automatización

La automatización se centra principalmente en procesos productivos (fabricación) aunque también aparece en otros muchos campos, por ejemplo, medio ambiente, transporte.

FABRICACIÓN

- Automatización de procesos de fabricación continua. AUTOMÁTICA-PROCESS — Ejemplos: cementeras, petroquímica, azucareras, ...
- Automatización de procesos discontinuos o de fabricación por lotes. AUTOMATIZACIÓN-AUTOMATED-MANUFACTURING — Ejemplos: metalurgia, construcción, electrodomésticos, alimentación, ...

# 2 TIPOS DE PLANTAS DE FABRICACIÓN → LAY-OUT'S

Lay-Out o disposición en planta es la ubicación física de las máquinas, transportes y demás dispositivos que intervienen en el proceso de fabricación.

Tipos:
- Pieza en posición fija (fixed-position layout)
- Agrupamiento por procesos (process layout)
- Agrupamiento por células (cellular layout)
- Agrupamiento en línea de producción (product layout)

### LAY-OUT PIEZAS EN POSICIÓN FIJAS

La pieza ocupa una posición fija en la fábrica y las máquinas y operarios se mueven a su alrededor.
Cuando la pieza está finalizada se evacua y entra una nueva.

- Piezas complejas de gran tamaño o peso
- Producción de pocas unidades (unidades a veces similares)
- Equipos de fabricación móviles
- Ej.: aviones, barcos, trenes, ...

## LAY-OUT AGRUPAMIENTO POR TIPO DE PROCESO

Las máquinas, de propósito general, se agrupan de acuerdo a sus funciones (mecanizado, pintura, control de calidad, ...). Las piezas van recorriendo diferentes áreas de acuerdo a sus necesidades (sistema de transporte no rígido).

- Fabricación por pedidos o lotes de piezas batch production
- Series cortas, prototipos.
- Mucho movimiento de piezas.
- Ej.: Talleres mecánicos, industria auxiliar, ...

Diseño del layout: Integración global de todos los factores (almacen, oficina, equipos,..)
Mínima distancia de movimientos de materiales
Circulación fluida del trabajo en la planta.
Utilización eficiente del espacio
Seguridad para trabajadores y productos
Disposición flexible, fácilmente reajustable

## LAY-OUT CÉLULA DE PRODUCCIÓN

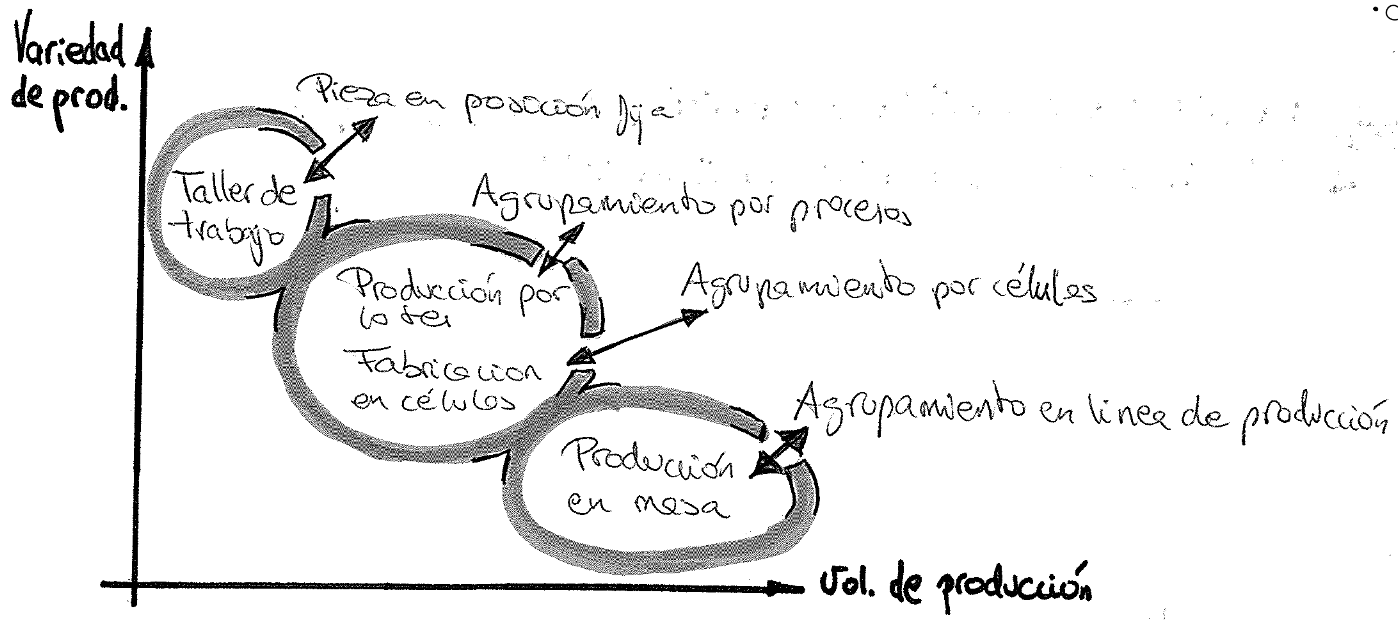
Las máquinas se agrupan en torno a una función a realizar sobre la pieza.

- Variedad de producto baja
- Volumen de producción medio
- Cada célula se diseña para producir una variedad limitada de configuraciones de piezas.

## LAY-OUT LINEA DE PRODUCCIÓN

Las máquinas se disponen secuencialmente de acuerdo al orden de las operaciones a realizar sobre la pieza. Las piezas van pasando progresivamente por las máquinas de manera secuencial → la "cadena de montaje".

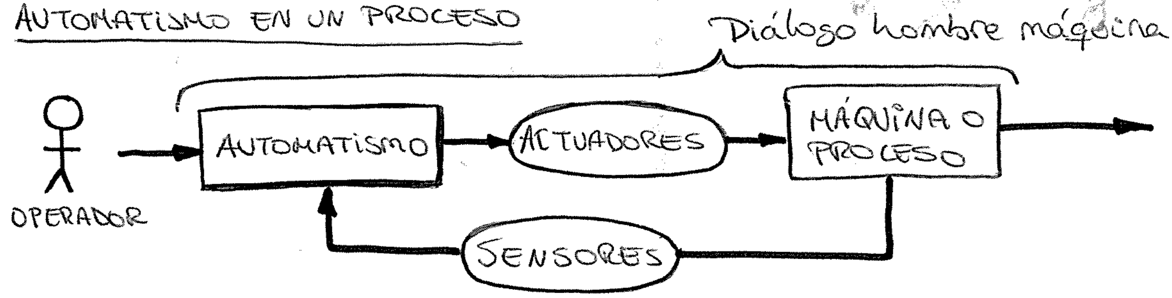
- Grandes series con diferentes opciones o modelos
- Contratos con los clientes para varios años
- Tiempos de entrega inferiores al tiempo de fabricación
- Ej.: Automóviles, electrodomesticos, ...




# 3 AUTOMATISMOS SECUENCIALES

Un automatismo es un dispositivo capaz de reaccionar ante situaciones que se presentan en el funcionamiento de una máquina o proceso, ejerciendo sobre la misma acciones de control, según las directrices con las que ha sido concebido.

AUTOMATISMO EN UN PROCESO




De forma tradicional se asocia el uso de la palabra automatismo al control lógico o mando secuencial de procesos.
La misión del automatismo secuencial consistirá en proporcionar las órdenes necesarias para garantizar la ejecución correcta de todas las operaciones.

# 4 PARTE OPERATIVA Y PARTE DE CONTROL DE UN SISTEMA DE AUTOMATIZACIÓN

Automatizar → Sustitución del operador humano en sus tareas físicas o mentales por máquinas o dispositivos.

## Parte operativa: ACCIONES FÍSICAS

Conecta la parte de control con el proceso o máquina.

Es la parte que actúa directamente sobre la máquina. Son los elementos que hacen que la máquina se mueva y realice la operación deseada. Los elementos que forman la parte operativa son los accionadores de las máquinas (motores, cilindros, ...) y los captadores (fotodiodos, ...)

Sensores — Actuadores — Interfaces hombre/máquina — Potencia

Ejemplos:

- Sensores: de posición, velocidad, temperatura, proximidad, ...
- Actuadores: motores eléctricos, cilindros y motores hidráulicos, cilindros y motores neumáticos, ...
- Control o mando de potencia: arrancadores de motor AC, contactores eléctricos, relés, ...
- Interfase hombre-máquina: Pantallas de control, botoneras, ...

## Parte de control: ACCIONES MENTALES

Recibe consignas de mando y señales de los captadores de campo, elaborando acciones de control

Suele ser un equipo de cálculo como el autómata programable (tecnología programada), aunque pueden ser relés electromagnéticos, tarjetas electrónicas o algún tipo de tecnología cableada

**Tecnología cableada**

- Eléctrica: Relés electromag., electroneumática, electrohidráulica.
- Electrónica: Electrónica estática

→ Es más rápida que la programada pero no es adecuada para sistemas de complejidad elevada.

**Tecnología programada**

- Electrónica: Microordenadores, miniordenadores, autómatas programables

→ Requiere el uso de equipos así como de personal informático especializado

La progresiva mejora de los equipos basados en microprocesadores y el abaratamiento de sus costes ha ido relegando el uso de la tecnología cableada a sistemas muy simples

# 5 EL COMPUTADOR EN LOS SISTEMAS DE AUTOMATIZACIÓN

**CAD**

Computer Aided Desing

Diseño asistido por computador

↓

Analiza diseño

**CAE**

Computer Aided Engineering

Ingeniería asistida por computador

↓

Optimiza proceso de fab. de un diseño

**CAM**

Computer Aided Manufacturing

Fabricación asistida por computador

↓

Automatiza la producción

**CIM**

Fabricación integrada por computador (Computer Integrated Manufacturing)

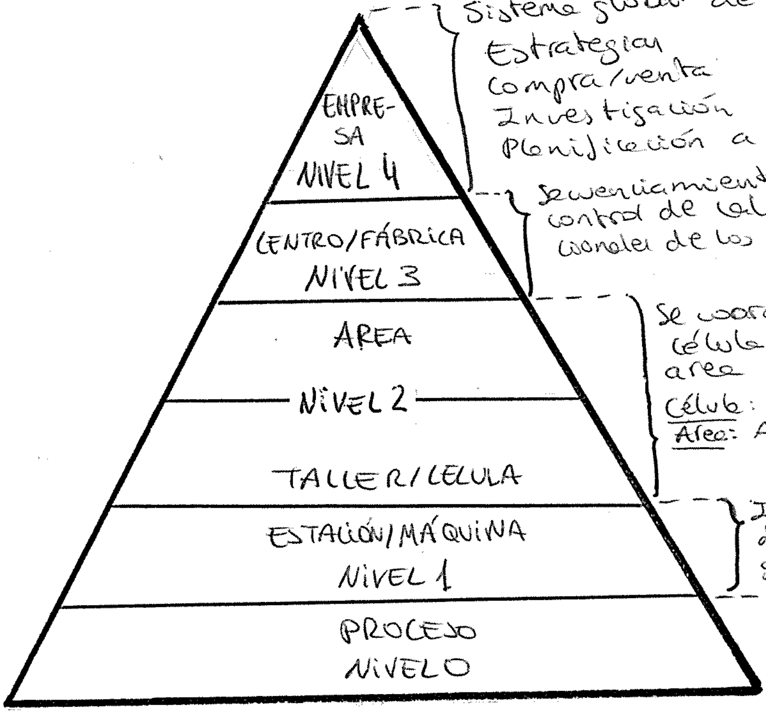
↓

**TIA** Automatización totalmente integrada (Totally Integrated Automation) → integran en el proceso de automatización el resto de aspectos relacionados con la empresa

- Gestión del aprovisionamiento
- Planificación de recursos de la empresa ERP (Entreprise Resource planning)
- Gestión de ventas
- Integración global del sistema de ejecución de la fabricación MES (Manufacturing Execution System)

# 6 LA PIRAMIDE DE CONTROL

También conocida como pirámide CIM




Sistema global de información de una empresa.
Estrategias
compra/venta
Investigación
Planificación a medio y largo plazo.

Secuenciamiento de tareas, admin. de recursos y control de calidad a partir de las órdenes operacionales de los niv. superiores de la empresa

Se coordinan todas las máquinas de una misma célula y se coordinan las células que forman un area

Célula: Grupo de maquinas que trabajan conjuntamente

Área: Agrupación de células

Intervienen dispositivos controladores de máquinas cómo los autómatas programables

Actuadores, sensores, ... que forman una máquina → Interaccionan directamente con el proceso productivo (field devices)

# 7 COMUNICACIONES EN ENTORNOS DE FABRICACIÓN

Los sistemas de comunicaciones industriales han permitido el desarrollo de redes para el intercambio de datos entre circuitos y sistemas electrónicos utilizados para llevar a cabo tareas de control y gestión del ciclo de vida de los productos industriales

MODELO DE CONEXIÓN SIST. INFORMÁTICOS OSI (Open system Interconnection) desarrollado por ISO (International Standar Organization)

## Modelo ISO / OSI → Comunicación en 7 niveles

- Nivel 7 - Aplicación: Determina un entorno que permite el entendimiento a escala temática
- Nivel 6 - Presentación: Unifica el lenguaje y modo de presentación entre el usuario y la máquina que utiliza para comunicarse
- Nivel 5 - Sesión: Arbitra la comunicación dando los turnos para transmitir a cada una de las estaciones.
- Nivel 4 - Transporte: Gestiona el medio de comunicación utilizado
- Nivel 3 - Red: Regula el enrutamiento de los mensajes
- Nivel 2 - Enlace: Mantiene la comunicación entre dos nodos
- Nivel 1 - Físico: Proporciona el soporte físico utilizado para la comunicación.

### REDES

- Alto nivel: WAN (Wide Area Network) Comunicación entre empresas. Ej.: Internet
- Nivel medio: LAN (Local Area Network) Comunicación dentro de un area proxima
  Ej.: Ethernet + TCP/IP
- Bajo nivel: A nivel de célula e inferiores → Redes que garantizan la comunicación en tiempo real

Buses de campo, nombre genérico que reciben las comunicaciones en la zona de campo. Simplifican el proceso, estan normalizados, reducen cableado, cubren los niveles 1, 2 y 7 de arquitectura OSI, ...

# 8 RAZONES PARA AUTOMATIZAR UN PROCESO PRODUCTIVO

Indusbol.com

## OBJETIVOS

- Aumentar la productividad (nº piezas/hora) → Más rápido
- Disminuir costes, ya que la mano de obra manual es costosa. Además los procesos automatizados reducen generalmente la materia prima desperdiciada.
- Homogeneizar el producto. Gracias a ello, se mejora la calidad
- Disminuir los tiempos de entrega
- Aumentar la seguridad
- Facilitar la integración de gestión con producción

## ARGUMENTOS A FAVOR

- Competitividad → el alto coste de no automatizar
- Aumenta calidad de vida y condiciones de trabajo (disminuye riesgos)
- Mejora relación calidad- precio
- Genera empleo

## INCONVENIENTES

- Gran inversión capital inicial
- Dependencia del mantenimiento y reparación
- Decremento de la flexibilidad

## ESTRATEGIAS

- Adecuado diseño de los productos
- Selección adecuada del proceso
- Utilización maquinaria especializada
- Formación adecuada del personal en cada fase

# EVENTOS DISCRETOS

## 1 AUTOMATISMO LÓGICO

Llamamos señal digital a aquella que puede tomar un conjunto de valores determinados en un dominio discreto. Las señales binarias o lógicas son un tipo de señales digitales que pueden tomar sólo dos valores: Alto/bajo, 0/1, ON/OFF, ...

Denominamos automatismo lógico al sistema de control que recibe, procesa y entrega señales lógicas.

## 2 ALGEBRA DE BOOLE

Definido hacia 1847 por George Boole, sus operaciones básicas son:

- Producto lógico (Y): $Q = A \cdot B$

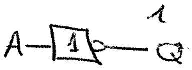
| A | B | A·B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

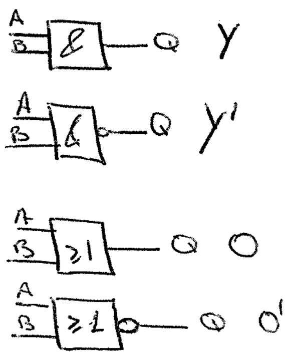
- Suma lógica (O): $Q = A + B$

| A | B | A+B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

- Negación (Not): $A'$

| A | A' |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |




Propiedades

- Conmutativa $A+B = B+A$; $A \cdot B = B \cdot A$
- Elementos neutros: $A+0 = A$; $B \cdot 1 = B$
- Distributiva $A + B \cdot C = (A+B)(A+C)$; $A \cdot (B+C) = AB + AC$
- Elemento simétrico $A + A' = 1$; $B \cdot B' = 0$
- Asociativa: $A + (B+C) = (A+B)+C$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Leyes de Morgan: $(A+B)' = A' \cdot B'$; $(A \cdot B)' = A' + B'$
- Ley de absorción: $A \cdot (A+B) = A + (A \cdot B) = A$

# 3 SIST. COMBINACIONALES Y SECUENCIALES

## SISTEMAS COMBINACIONALES

Son aquellos en los que las variables de salida sólo dependen en cada instante del valor que tomen las variables de entrada en dicho instante. Independencia de las salidas respecto a el valor que tomasen éstas anteriormente.

Ejemplo: $Q = (I_1 \cdot I_2) + I_3$

| Entradas | | | Salida |
|---|---|---|---|
| $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $Q$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

## SISTEMAS SECUENCIALES

Aquellos en los que las salidas dependen de las variables de entrada y del propio estado inicial del sistema, es decir, de los valores que tomaron las salidas con anterioridad

El sistema ha de ser capaz de memorizar todos los estados posibles mediante variables internos o de estado.

Ejemplo $Q = (I_1 + Q) \cdot I_2'$

| Entradas | | Estado inicial | Salida |
|---|---|---|---|
| $I_1$ | $I_2$ | $Q_{k-1}$ | $Q_k$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

# 4 SISTEMAS ASÍNCRONOS Y SÍNCRONOS (punto 2.6 en libro)

- **Asíncronos**

Las variables de entrada actúan sobre el estado interno del sistema en el mismo instante en el que pasan a un determinado estado, o cambian de estado. - Uso limitado.

- **Síncronos**

El cambio del valor lógico de sus variables entrada/salida solo actúa sobre el estado interno/externo en el instante en que se activa una señal de disparo o sincronismo (reloj)

# 5 ELEMENTOS DE UN AUTOMATISMO (2.4 en libro)

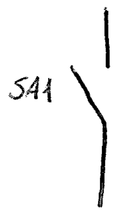
- Entradas:
  - En la parte operativa se corresponden a las señales de mando o las recogidas por sensores en el automatismo.
  - En la parte de control se corresponden a las variables en las que se copia el estado de las correspondientes señales de la parte operativa
- Salidas:
  - En la parte operativa son señales que dan información al usuario o al mando de interrupciones que cierran o abren los circuitos.
  - En la parte de control se corresponden con variables cuyo valor se copia en las correspondientes de la parte operativa.
- Biestables
  Se activan (set) o desactivan (reset) conservando por defecto el valor anterior
- Contadores
  Cuentan pulsos eléctricos y guardan el resultado de la cuenta
- Temporizadores
  Cambian su estado de activado a desactivado tras transcurrir un tiempo prefijado.

# 6 REPRESENTACIÓN DE UN AUTOMATISMO

## Representaciones gráficas

### 1) Esquema de contactos

Plano eléctrico del esquema de conexiones del automatismo

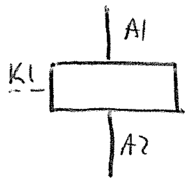



Contacto normalmente abierto

SA1 = 0 Abierto
SA1 = 1 Cerrado


Contacto normalmente cerrado

SA2 = 0 Cerrado
SA2 = 1 Abierto



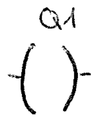

Bobina o relé.
Si pasa corriente de A1 a A2, K1 = 1

### 2) Diagrama de escalera

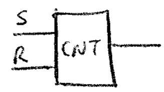
Parecido al esquema de contactos pero en horizontal y con símbolos Ascii


Interruptor normalmente abierto. Si SA1 = 1 el interruptor se cierra


Interruptor normalmente cerrado. Si SA1 = 1 el interruptor se abre

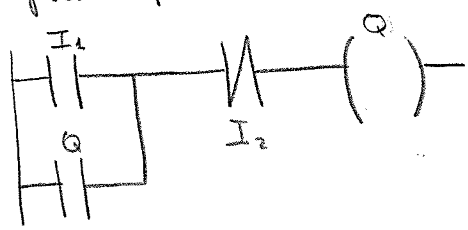



Bobina o relé. Si a la izquierda hay un $1 \rightarrow Q1 = 1$




Contador

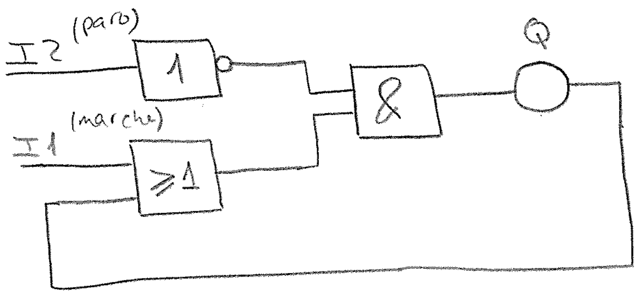
Ejemplo: Representar $Q = (I_1 + Q) \cdot I_2'$ en diagrama de escalera

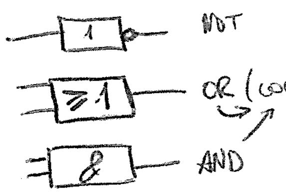



### 3) Plano de funciones

Utiliza puertas lógicas

Ejemplo: Representar $Q = (I1 + Q) \cdot I2'$



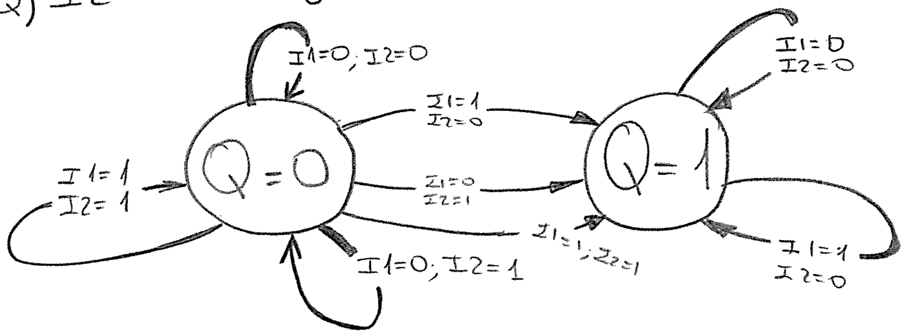

(con pelotita delante NOR, NAND)

## 4. Diagrama de transición de estados

- Los estados (valor de las salidas) se representan por círculos
- Los cambios son arcos orientados indicando las entradas que lo originan.

Ejemplo: $Q=(I1+Q)\,I2'$ en diagrama de transición de estados

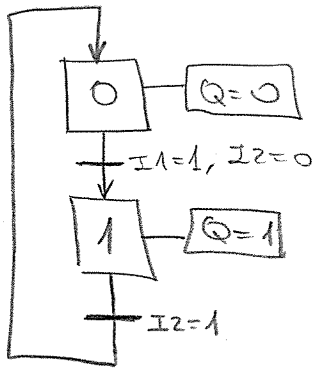
| I1 | I2 | $Q_{K-1}$ | $Q_K$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |




## 5. Grafo de funciones secuenciales → GRAFCET

- Las etapas son cajas con acciones asociadas
- Las transiciones son segmentos horizontales con condiciones asociadas
- Etapas y transiciones se alternan uniéndolas con arcos orientados.

| I1 | I2 | $Q_{K-1}$ | $Q_K$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |




Ejemplo

$Q=(I1+Q)\cdot I2'$

- Siempre que $Q=1$ solo se produce el cambio si $I2'=0$ → $I2=1$
- Siempre que $Q=0$, nunca cambiaremos si $I1\neq 0$

# Representaciones literales

## 1) Ecuaciones lógicas

Representación haciendo uso del álgebra de Boole

## 2) Lista de instrucciones

Juego de instrucciones con una sintaxis básica, semejante al lenguaje ensamblador

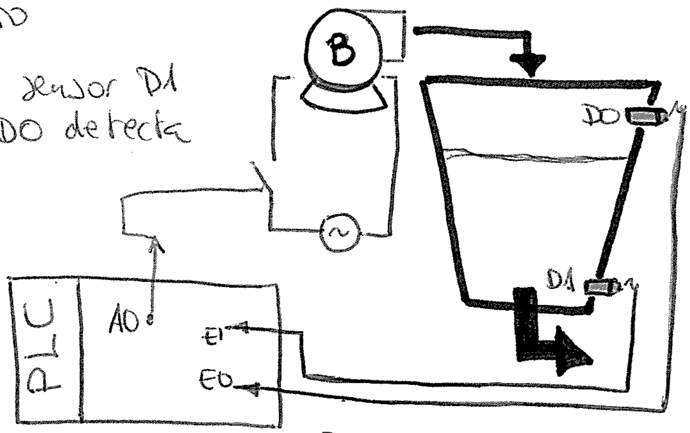
- Y lógico → U
- O lógico → O
- Asignación → =
- Y lógico negado → UN
- O lógico negado → ON

Ej.: $Q = (I1 + Q)\,I2'$

U I1
O Q
UN I2
= Q

**Ejercicio: AUTOMATISMO – control depósito**

La bomba B se debe encender cuando el sensor D1 deja de detectar y se debe apagar cuando D0 detecta




D0 → E0
D1 → E1

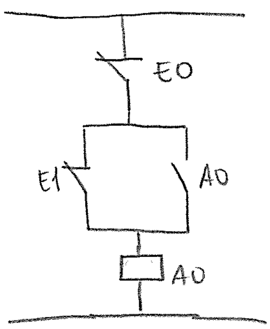
a) Ecuación lógica

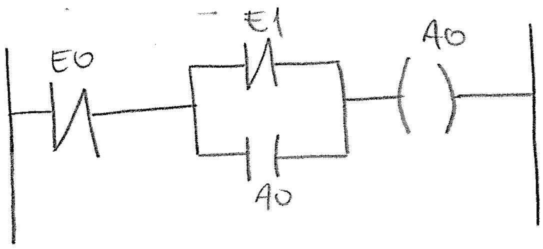
A0 debe encenderse cuando D1=1 y apagarse cuando D0 detecta

$\boxed{A0 = (E1' + A0)\cdot E0'}$ ≉ $\boxed{A0 = \overline{E0}\cdot(\overline{E1} + A0)}$

Condiciones de encendido $\begin{cases} D0 = 0 \text{ y } D1 = 0 \to \text{siempre} \\ D0 = 0 \text{ y } D1 = 1 \to \text{Si se está llenando: } A0 = 1 \\ \qquad \text{Si se está vaciando NO} \end{cases}$

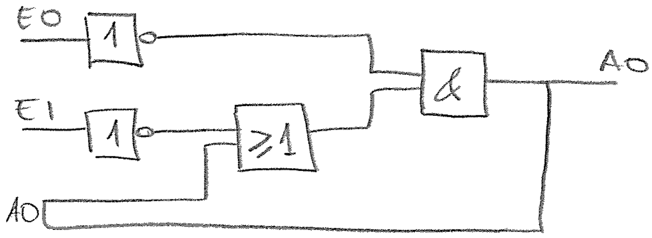
b) Esquema de contactos y diagrama escalera



## c) Plano de funciones

$A0 = \overline{E0}\,(\overline{E1} + A0)$




## d) Lista de instrucciones

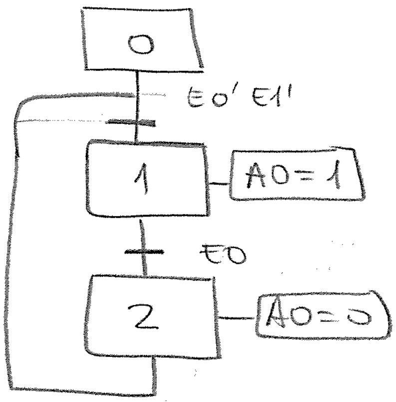
```
UN E0
U(
ON E1
O A0
)
= A0
```

≈

```
ON E1
O A0
UN E0
= A0
```

NO

## e) Diagrama funcional de secuencia



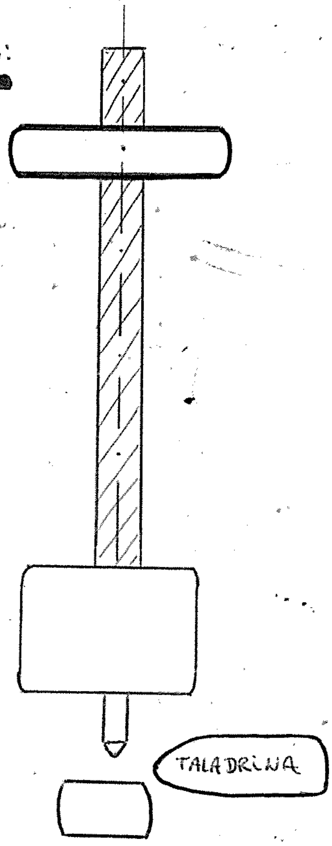
# GRAFCET

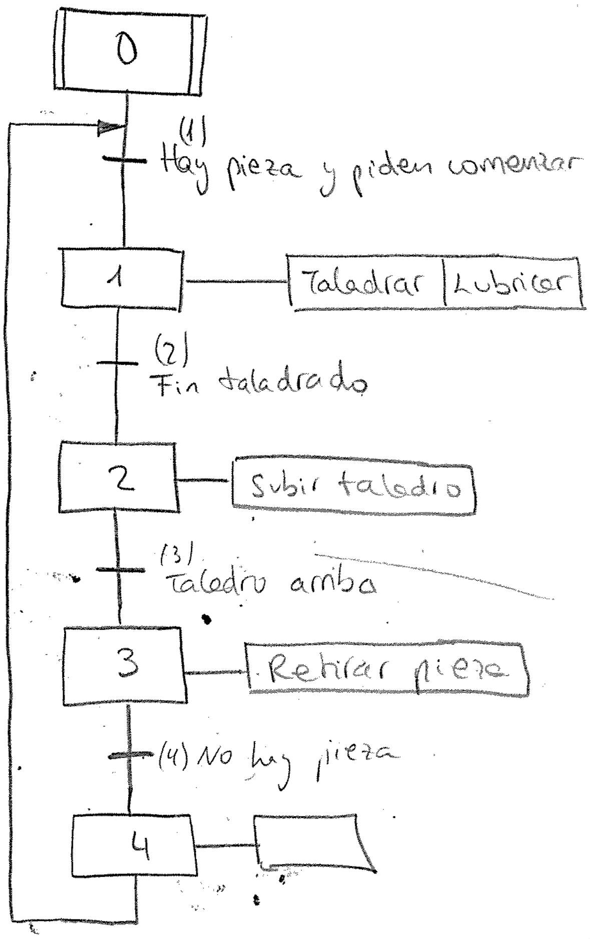
## 1 NIVELES GRAFCET

### ● Nivel 1 o Funcional

- Definición del comportamiento en términos no técnicos: idioma común entre usuario y desarrollador.
- No incluye referencias a la solución

Ejemplo:

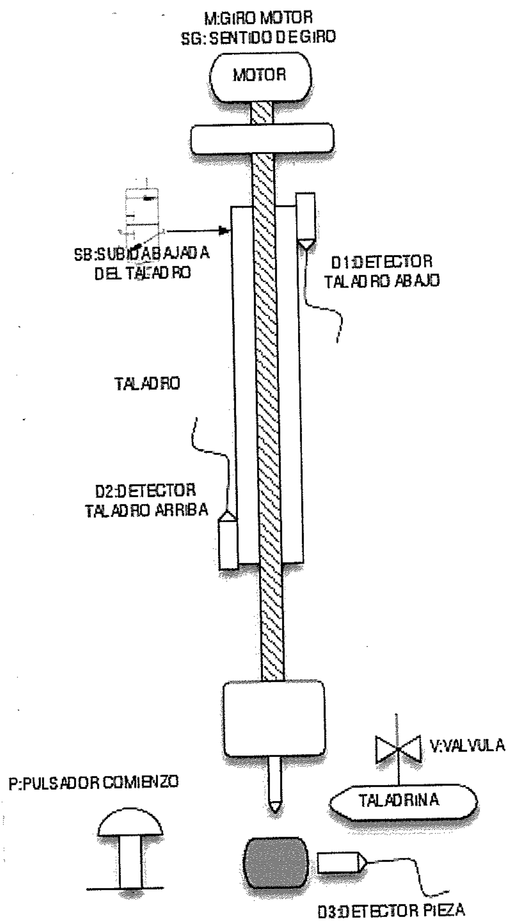


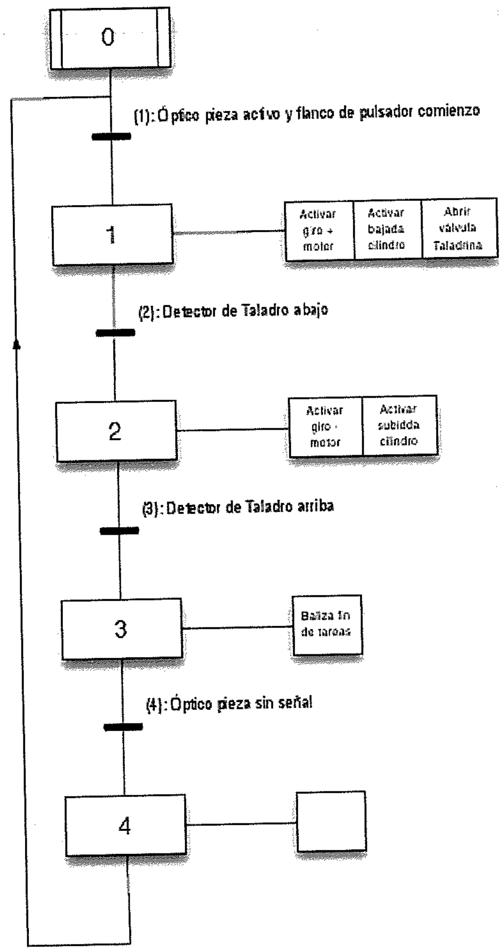



## Nivel 2 o Tecnológico

- Desarrolla la solución tecnológica adoptada
  - Se llega tras un proceso de ingeniería en el que se proyecta la parte operativa → sensores y actuadores
  - El interlocutor es el ingeniero que concibe y diseña la solución tecnológica
- No se tiene en cuenta el sistema de control { Cuadro de relés, FPGA, Programa en C, PLC, ...

### Ejemplo

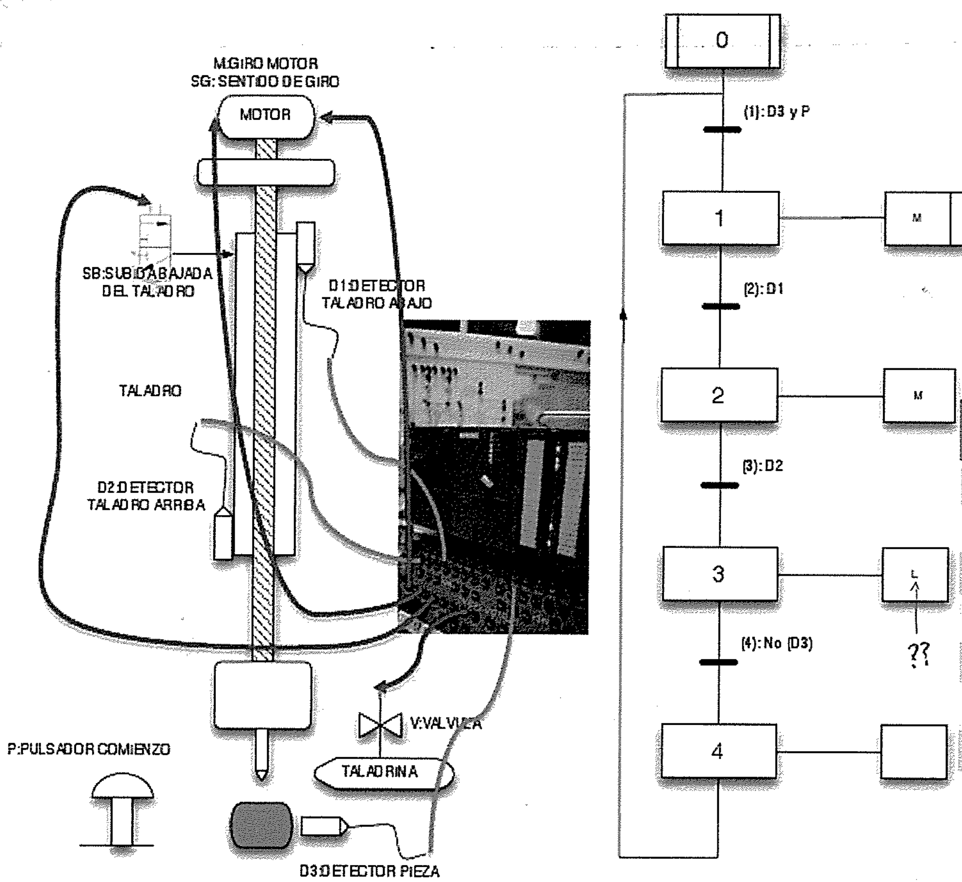


- Nivel 3 o Operativo

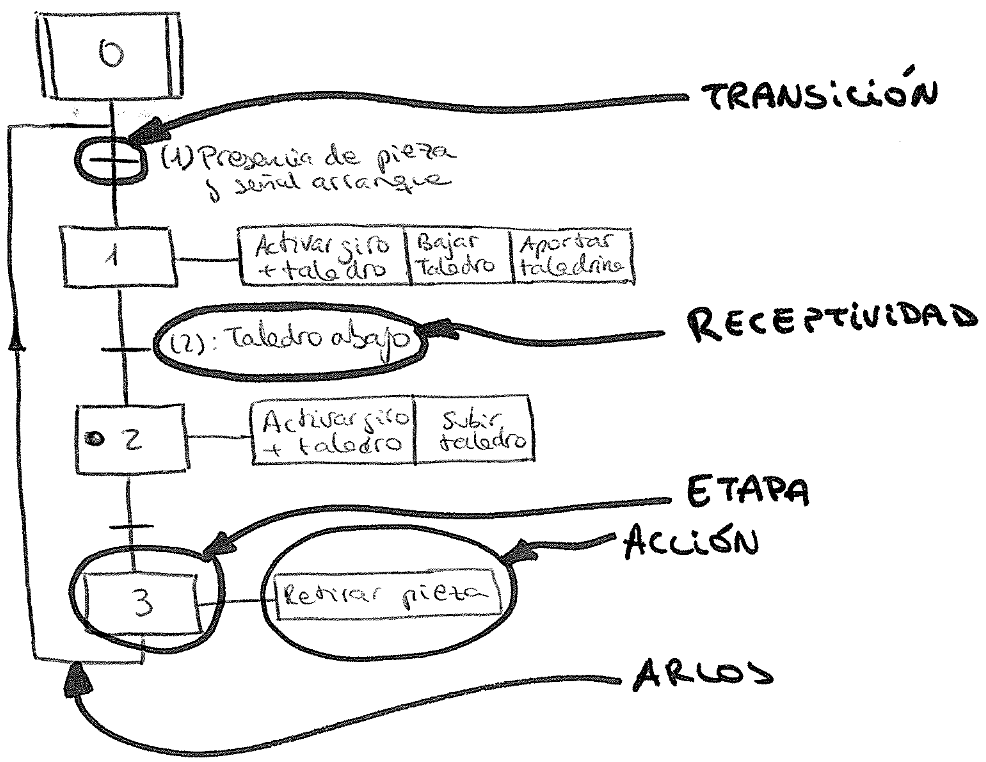
Considera el modo en que la parte de control maneja la parte operativa (sensores, actuadores, interacciones HM)

- Tipo de señales, direcciones E/S
- El interlocutor es el programador del automatismo  Ejemplo:




| Sim bolo | Comentario |
|---|---|
| M | Encender motor |
| SG | Sentido giro motor |
| SB | Subida/Bajada |
| V | Valvula taladrina |
| D1 | Detector Taladro abajo |
| D2 | Detector Taladro arriba |
| D3 | Detector Pieza |

# 2 ELEMENTOS DEL GRAFCET




- **Etapas**

Estados estables del automatismo. Se representan mediante un cuadrado con un número único en su interior. Se identifican, de ser necesario, mediante la letra X seguida del número. Pueden estar activas (Punto en su interior •) o inactivas.

Al comenzar (reposo) al menos hay una etapa activa (doble cuadrado)

- **Acciones**

Asociadas a las etapas. Se deben poner en marcha cuando la etapa esté activa. Puede haber acciones vacías sin efecto sobre ninguna variable

- Transiciones

Posibles evoluciones del automatismo desde una o varias etapas a otras. El automotismo pasa de una etapa a otra "franqueando" una transición. Se pueden identificar mediante un número entre paréntesis. Llevan asociadas repetitividades.

- Receptividades

Condiciones lógicas que permiten que una transición pueda ser franqueada. Se puede hacer uso de la repetitividad entidad, siempre cierta, que se indica con un "1".
Puede considerarse como variable a usar el estado de una etapa $X_n$.

- Arcos

Líneas orientadas que unen etapas con transiciones y viceversa. La dirección, por defecto, es de arriba a abajo y sino, se indicará con flecha. En ningún caso un arco puede unir dos etapas o dos transiciones, necesariamente éstas deberán alternarse.

## Estructura e interpretación del GRAFCET

El estado de un Grafcet en un momento determinado queda definido por las Etapas que tiene activas en dicho momento. Este conjunto de etapas activas se denomina MARCADO DEL GRAFCET.
Para representar el marcado se emplea la notación: $G_n\{p, q, \dots z\}$
$n \equiv$ nº que indica el Grafcet, si hay varios
$p, q, \dots z \equiv$ conjunto de etapas activas

- Etapas
- Transiciones
- Arcos

} Definen estructura del Grafcet
↓
cómo evoluciona el automatismo

- Receptividades
- Acciones

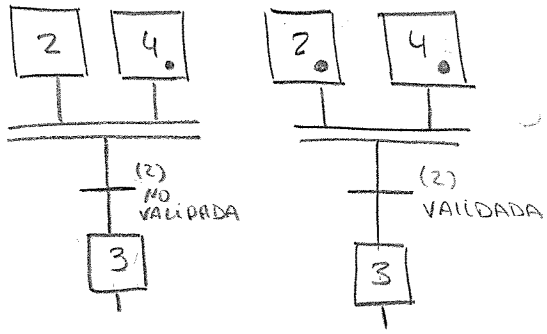
} Permiten la interpretación del Grafcet
↓
Relacionan el Grafcet con las E/S

# 3 REGLAS DE EVOLUCIÓN

## REGLA 1 Etapa inicial

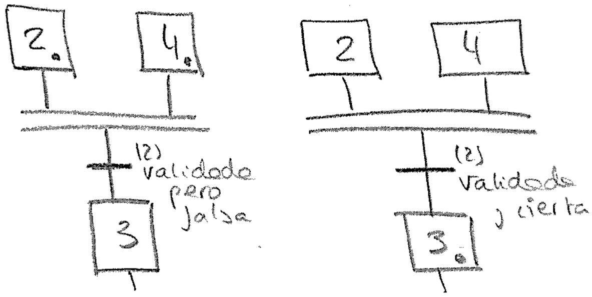
Debe existir al menos una etapa activa en el Estado Inicial. Las etapas iniciales se activan incondicionalmente al comenzar el funcionamiento.
Las acciones asociadas a las etapas iniciales corresponden, por lo general, a las condiciones de reposo del sistema

## REGLA 2 Franqueo de transición.




- Se dice que una transición está validada cuando todas las etapas que le preceden están activas.
- Una transición es franqueada cuando se cumple a la vez
  - Esta validada
  - La receptividad asociada a la transición es cierta

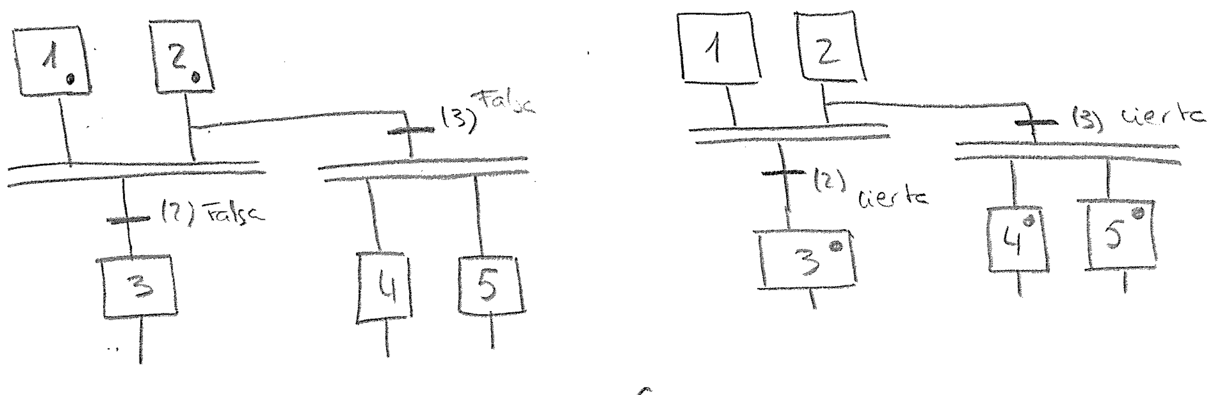
## REGLA 3 Evolución del marcado o de las etapas activas




- El franqueo de una transición origina simultaneamente la activación de todas las etapas que la siguen y la desactivación simultanea de todas las etapas que la preceden.

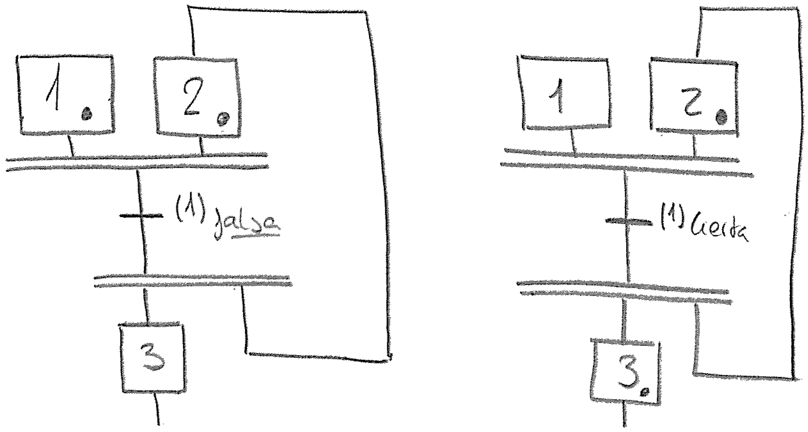
## REGLA 4 Evolución simultanea

Pueden franquearse simultaneamente varias transiciones, si reunen las condiciones



## REGLA 5 Activación y desactivación simultanea

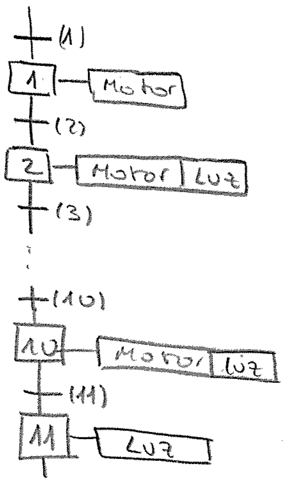
Si una etapa es activada y desactivada simultaneamente, permanecerá activa.




# 4 ACCIONES ESPECIALES

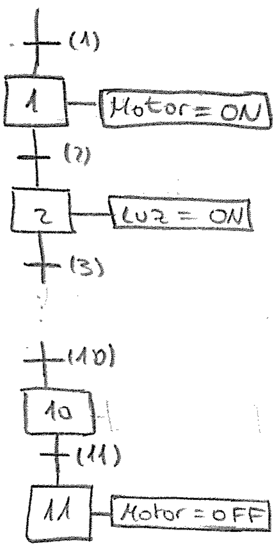
## Acciones Memorizadas

Por defecto, las acciones de un Grafcet solo se ejecutan si explicitamente así se indica. Ver ejemplo figura →




Vemos que se han repetido las acciones Motor o luz durante todas las etapas donde queríamos que estuviesen activos

**ALTERNATIVA**




En las acciones memorizadas se indica el valor que tome la variable.

Este valor se mantiene aun cuando la etapa se desactive, hasta que explicitamente se indique el cambio de su estado

Esta opción se debe indicar de manera explícita: "las acciones son memorizadas"

Afecta a todo el grafcet.

## Inconvenientes

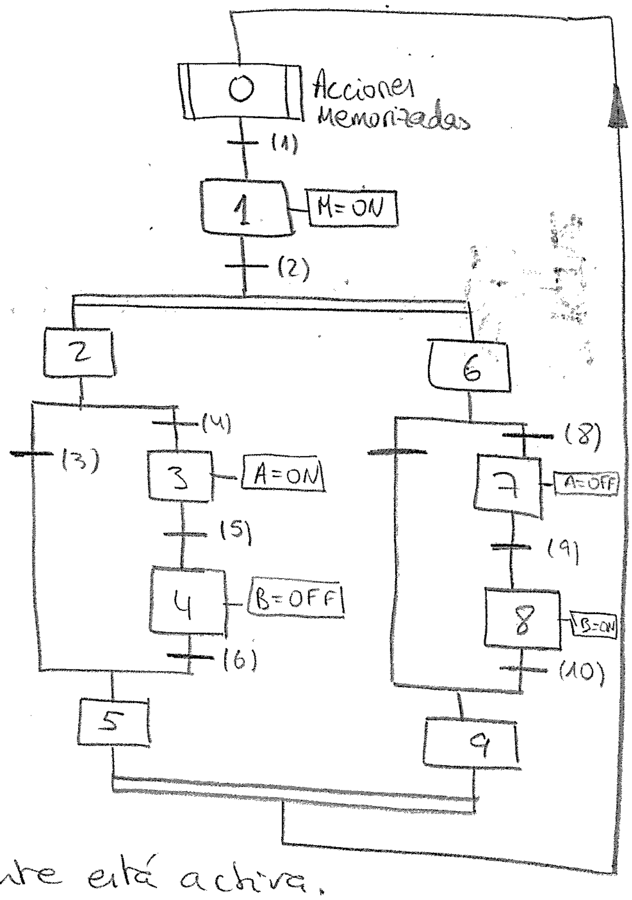
1- Conocimiento del estado del sistema

- Con acciones no memorizadas, el estado del sistema queda definido por el valor de las entradas y las etapas activas
- Con acciones memorizadas además es preciso conocer la evolución previa

2- Conflictos de activación de salidas

- Con acciones no memorizadas no hay conflicto posible
- Con acciones memorizadas hay riesgo de, simultaneamente, tener la activación y desactivación de una salida. El programador debe estar atento a ello

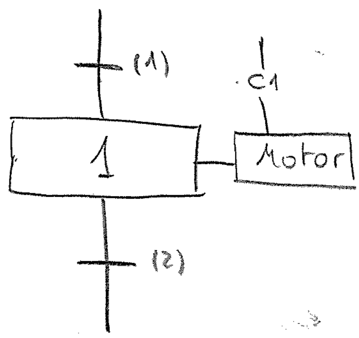
¿Si 3 y 7 están activas qué hacemos con A?
¿Y si lo están 4 y 8?



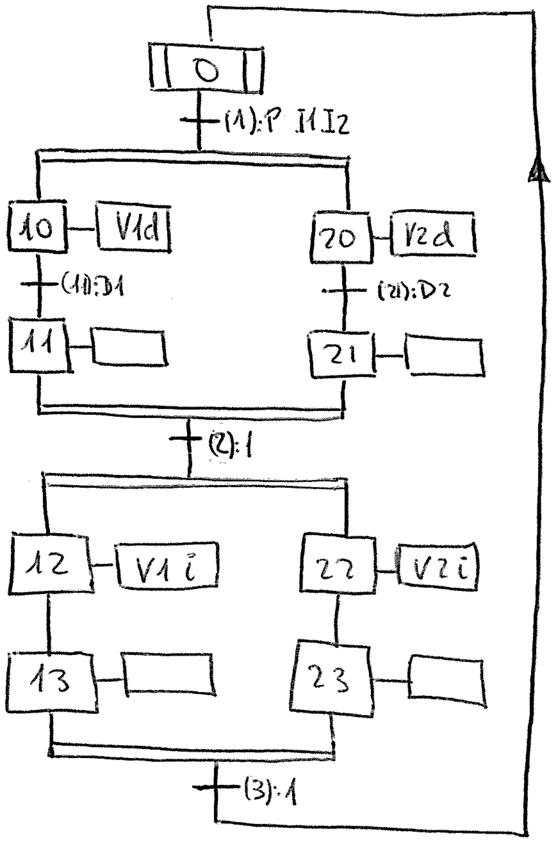

## Acciones Condicionadas:

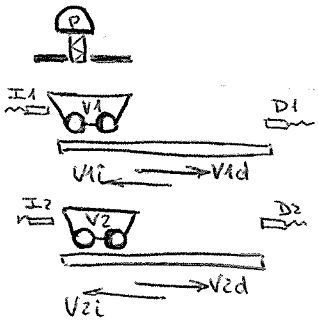
Una acción se ejecuta si la etapa correspondiente está activa.
Podemos modificar esta regla mediante acciones condicionadas, que añaden una condición junto con la acción y precisan que, estando la etapa activa, la condición se cumpla y así la acción se ejecute.
Se debe representar la condición junto con la acción

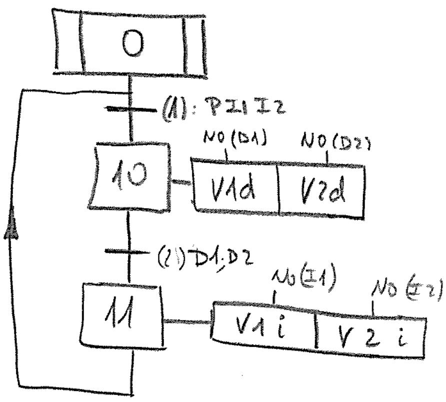
Atención en acciones memorizadas:
Una vez efectuada la acción no importa que deje de verificarse la condición



Ejemplo: Simplificar el grafcet usando acciones condicionadas

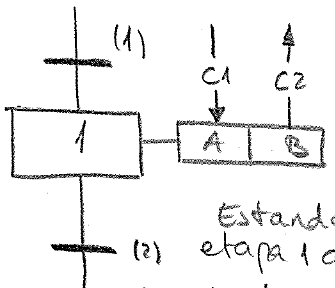



## Acciones condicionadas a evento

Son acciones condicionadas en las que la condición que permite que la acción se ejecute incluye el flanco (cambio de estado) de alguna señal.
Se presentan mediante una flecha vertical, que será hacia arriba, si se trata de un cambio de falso a cierto (flanco positivo) o hacia abajo, si se trata de un cambio de cierto a falso (flanco negativo)



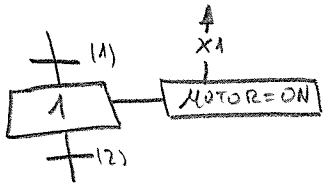

Estando la etapa 1 activa:

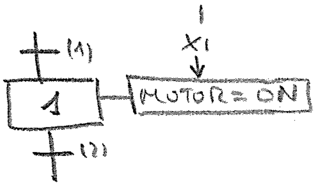
- A se ejecuta en el instante en que C1 pasa de cierto a falso
- B se ejecuta en el instante en que C2 pasa de falso a cierto

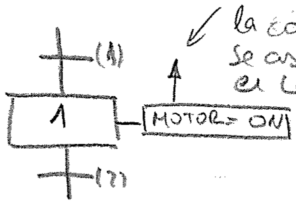
## Acciones de activación y desactivación de etapa

Se trata de acciones memorizadas que se deben ejecutar sólo cuando la etapa pasa de inactiva a activa o viceversa

Para indicar este funcionamiento se debe usar como condición la variable asociada al flanco del estado de la etapa (a la etapa n se le asocia una variable de estado $X_n$)



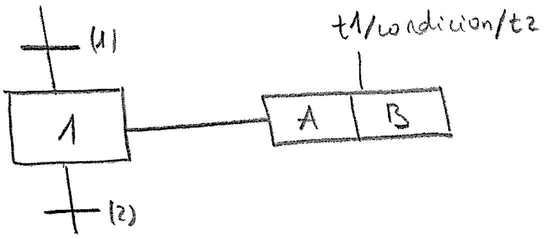



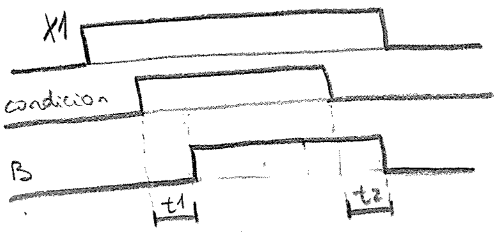




Si no se indica la condición se asume que es la propia etapa

## Acciones temporizadas

Son acciones condicionadas por una restricción de tiempo.



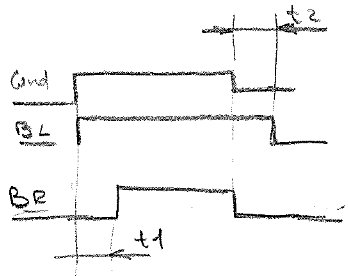




La acción B se ejecutará cuando, estando activa la etapa 1, hayan pasado t1 segundos desde que se cumplió la condición y hasta que pasen t2 después de que deje de cumplirse

- Si t1 o t2 no existen se prescinde de indicarlo

  /condición/t2 → acción limitada: se ejecuta un máximo de t2 tras caer condición

  t1/condición → acción retardada: se ejecuta t1 tras condición




## Acciones vacías

Son etapas en las que no se realiza ninguna acción → El cuadro de acciones asociadas está vacío

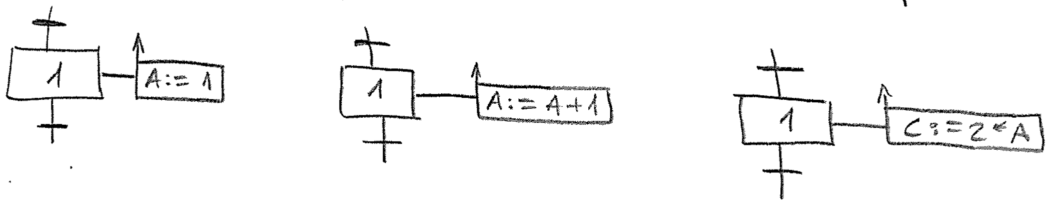
Útil para sincronizar secuencias que han evolucionado de manera independiente.

También se les llama etapas de espera.

### ● Acciones de asignación de valor a variable

Se puede incluir la asignación de un valor a una variable mediante una expresión aritmética lógica.

Estas acciones deben estar condicionadas al flanco para evitar que se ejecuten de manera repetitiva mientras esté la etapa activa.



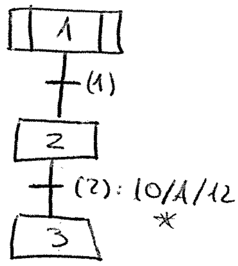

# 5 TRANSICIONES ESPECIALES

El Grafcet permite el uso de condiciones en las receptividades de las transiciones.

- Temporizadas - Al flanco - Incondicionales - Receptividades asociadas a valores lógicos

En muchas ocasiones el efecto que se consigue con el uso de una transición condicionada puede conseguirse de manera alternativa con acciones condicionadas.

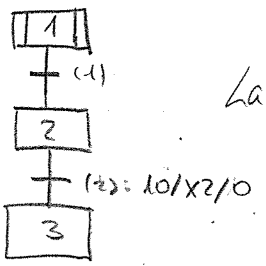
### ● Transiciones temporizadas




Son aquellas cuya receptividad responde a una temporización. Se refleja de forma análoga a las acciones temporizadas: t1/cond/t2

* La transición 2 se podrá franquear 10 segundos después de que A sea cierto y hasta 12 segundos después de que deje de serlo.

Un caso particular es cuando la condición es precisamente el estado de la etapa anterior. En ese caso el efecto es que la etapa en cuestión sólo estará activa durante un tiempo t1



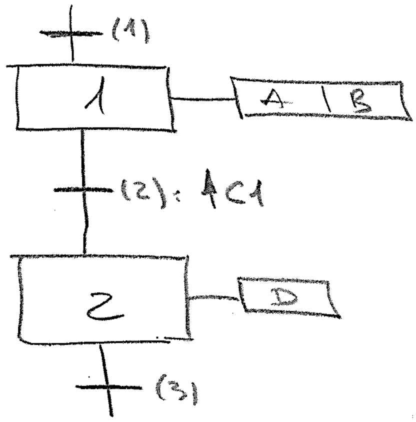

La etapa 2 sólo estará activa durante t1 = 10 seg.

## Transiciones al flanco

La receptividad puede incluir condiciones al flanco de una señal o variable

La receptividad sólo se verifica en el momento correspondiente al cambio

- Flanco positivo → Flecha hacia arriba
- Flanco negativo → Flecha hacia abajo

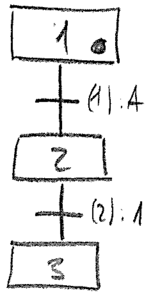



## Transición incondicional

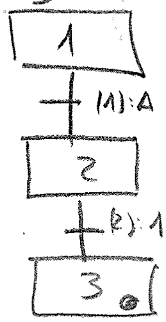
Transición cuya receptividad siempre es cierta (receptividad de valor 1)

Si estando en a) se cumple la condición A, se pasa de manera inmediata a b)

a)



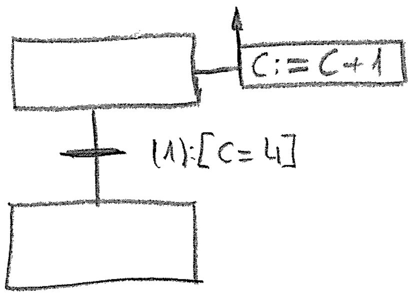

b)

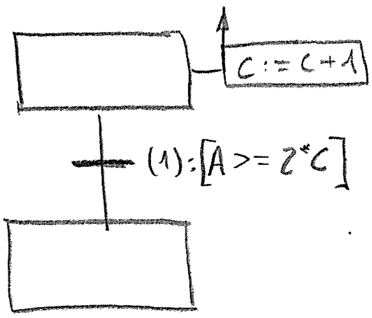


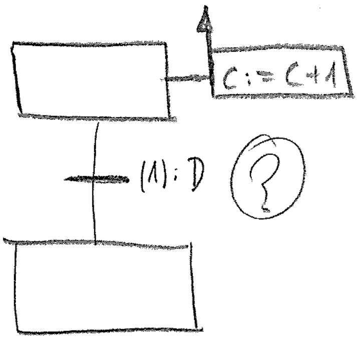

## Receptividades asociados a valores lógicos

Son receptividades de valor lógico (0 ó 1) asociado a cualquier expresión booleana.

Para indicar que la expresión debe ser evaluada se encierra entre corchetes.



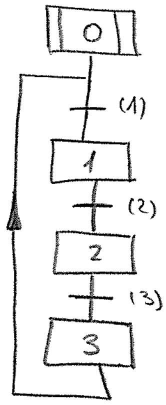
# 6 ESTRUCTURAS DEL GRAFCET

## Secuencia Única o lineal

Es la estructura más simple. Responde a una secuencia única formada por una serie de etapas que van siendo activadas una tras otra de manera secuencial unidas consecutivamente por arcos transicionales.

Se cumple que:

- Cada etapa, salvo la última, tiene una y sólo una transición de salida.
- Cada etapa, salvo la primera, tiene una y sólo una transición de entrada, válida por solo una posible etapa de la secuencia




La secuencia está activa cuando al menos una etapa de la misma lo está.

La secuencia está inactiva cuando no hay ninguna etapa de la misma activa.

Una secuencia lineal puede formar parte de una estructura más compleja

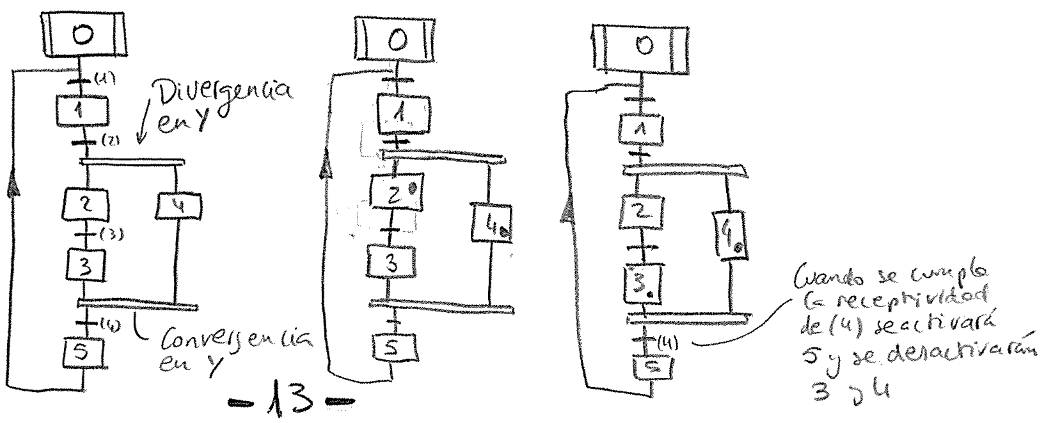
## Secuencias concurrentes o simultaneas (Y)

A partir de cumplirse el franqueo de una transición se inician varias secuencias simultaneas lineales, aunque pueden contener otras estructuras más complejas

Las secuencias finalizan en concurrencias en Y de manera que la estructura debe ser globalmente cerrada.

La concurrencia en Y impone la condición de que TODAS las tareas que confluyan deben haber terminado para que el proceso pueda continuar

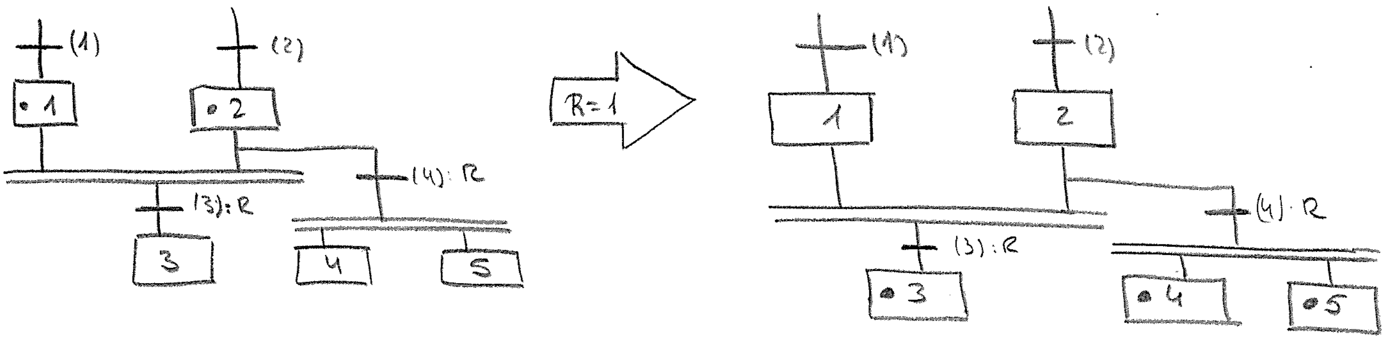
Se identifican con una doble raya horizontal



**NOTA!!** El toquen o punto de marcado

No es una identidad que se propaga, si no una marca que indica la actividad de una etapa.

La figura muestra la evolución del grafcet cuando es cierta la receptividad R, idéntica para las transiciones (4) y (3)



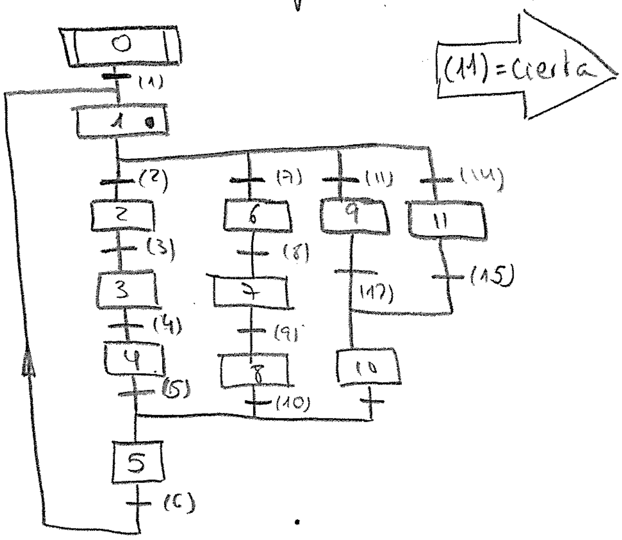

**Etapas de espera**: Cuando se desarrollan varias secuencias silmultaneamente pero su tiempo de duración no es el mismo para todos, para establecer la condición de convergencia en Y es necesario utilizar una o varias etapas de espera sin ninguna acción asociada.

## Selección exclusiva (O)

A partir del punto de divergencia el proceso podrá evolucionar por distintos caminos alternativos, cada uno de ellos debe tener su propia condición de transición.

A nivel de gráfico global, los distintos caminos iniciados como divergencia en "O" deben confluir en uno o más puntos de convergencia en "O"

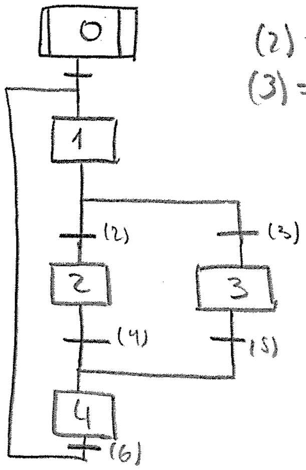
La estructura debe ser totalmente cerrada no pudiendo existir caminos abiertos pues el Grafcet no evolucionaría




Se desactiva la etapa 1 y se activa la etapa 9

## Prioridades

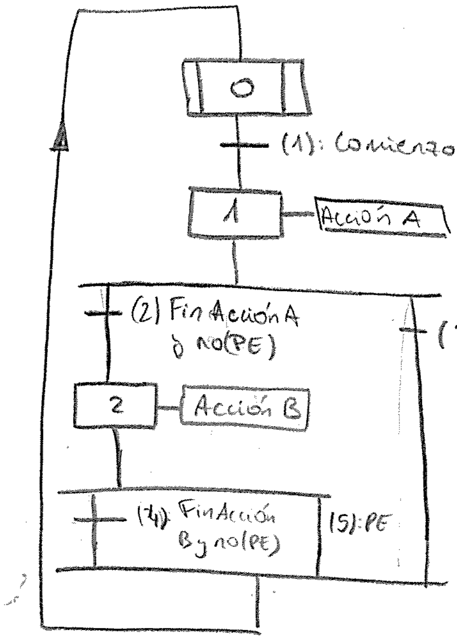
Debe considerarse la posibilidad de que ante una selección exclusiva (o), se puedan franquear simultaneamente varias transiciones. Por ejemplo, en el grafcet anterior pudiera ocurrir que, siendo ciertas las receptividades de las transiciones (2), (7) y (14) se activara la etapa 1. En este caso se debería evitar la incertidumbre de cuál de las etapas de salida se debe activar.
Por ello deben fijarse en las propias receptividades de las transiciones condiciones excluyentes que fijen la prioridad




(2) = a
(3) = b y no(a)

Si se dan a la vez a y b la etapa 2 tiene prioridad pues se opta por ella, ya que la receptividad (2) será cierta, no ocurriendo lo mismo con la (3) por incluir el valor de la variable (a) negado

**Ejemplo:** Mediante un pulsador de inicio realizar secuencialmente las acciones A y B.
En cualquier momento puede interrumpirse el proceso mediante un pulsador de parada.

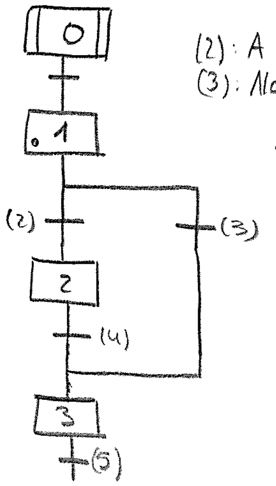



PE: Pulsador de emergencia

## Saltos condicionales o bucles

Utilizando la selección exclusiva (O) se pueden realizar saltos y bucles

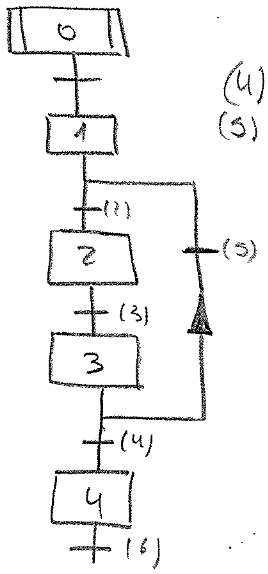
SALTO




(2): A
(3): No (A)

Estando activa la etapa 1, la etapa 2 se activará si la receptividad de la transición (2); señal A, es cierta, mientras que si es falsa se activará la etapa 3

BUCLE

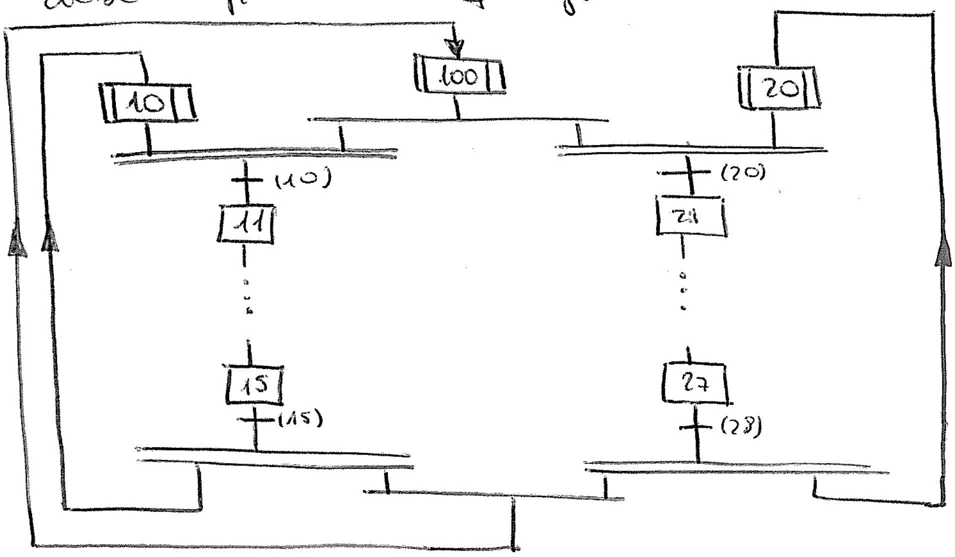



(4): A
(5): No A

Las etapas 2 y 3 se activarán repetidamente mientras A sea falsa

## Recursos compartidos

Como ejemplo pensamos en un robot dedicado a cargar y descargar 2 máquinas. Cuando cada una de las máquinas está lista para iniciar su trabajo, queda a la espera de que el robot le cargue la pieza. Si el robot no está ocupado en ese momento podrá atender la petición de manera inmediata, pero si está haciendo otra tarea, la máquina deberá esperar hasta que finalice.



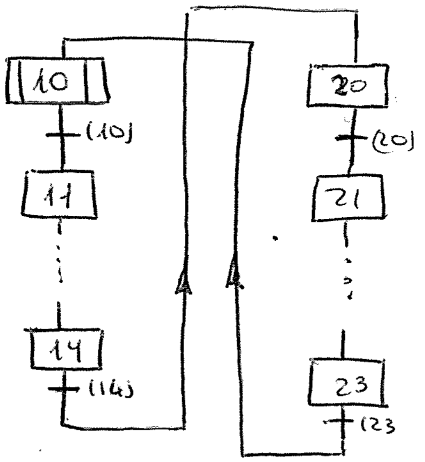

Etapas 10, 20, 100 → Iniciales

Suponemos al inicio cierta (10) → se activa etapa 11 y se desactivan 10 y 100. La desactivación de 100 impide que, aun siendo cierta (20), se active 21.

Cuando la rama de la izquierda evolucione hasta activar 15 y, siendo cierta (15), se volverán a activar 10 y 100. Entonces la rama de la derecha podrá evolucionar si se verifica (20)

La etapa 100 hace la función de recurso compartido. X10 y X20 corresponden a la espera de cada máquina.

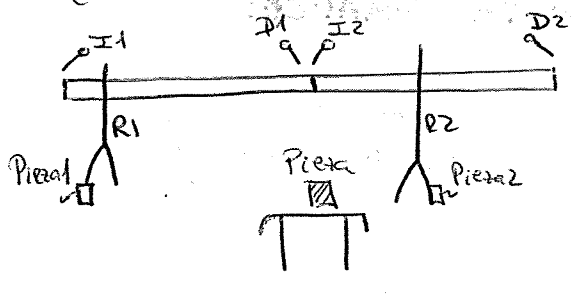
## Alternancia de secuencias

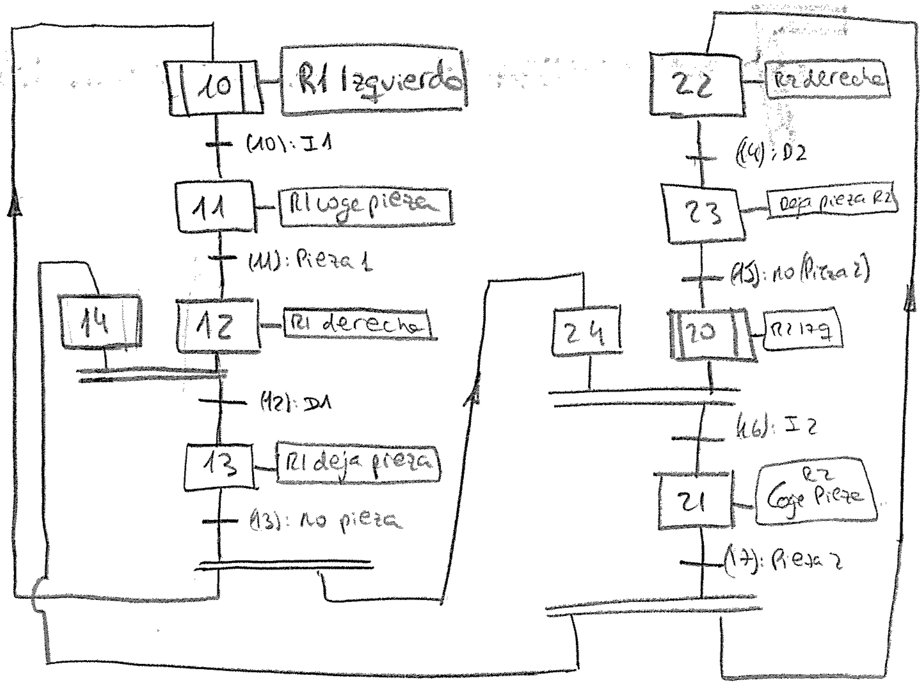



Podemos ejecutar de manera alternativa dos secuencias diferentes.
La primera en comenzar será la que incluya la etapa inicial que, tras finalizar su recorrido, dará el relevo a la otra secuencia, que a su vez dará paso a la primera tras finalizar.

**Ejemplo** (alternancia de secuencias.

Dos robots colaboran en transportar piezas. El R1 las toma de su izquierda y las deja en una mesa situada a su derecha. El R2 las coge de la mesa situada a su izquierda y las transporta hasta su derecha. El R1 puede estar realizando su tarea pero no puede dejar una nueva pieza hasta que R2 haya recogido la anterior. Del mismo modo R2 puede estar haciendo su tarea pero no puede coger la pieza hasta que R1 la haya dejado. Cada robot cuenta con detectores izquierda (I1, I2) y derecha (D1, D2) y un detector que indica que tiene una pieza cogida. (Pieza 1, Pieza 2)

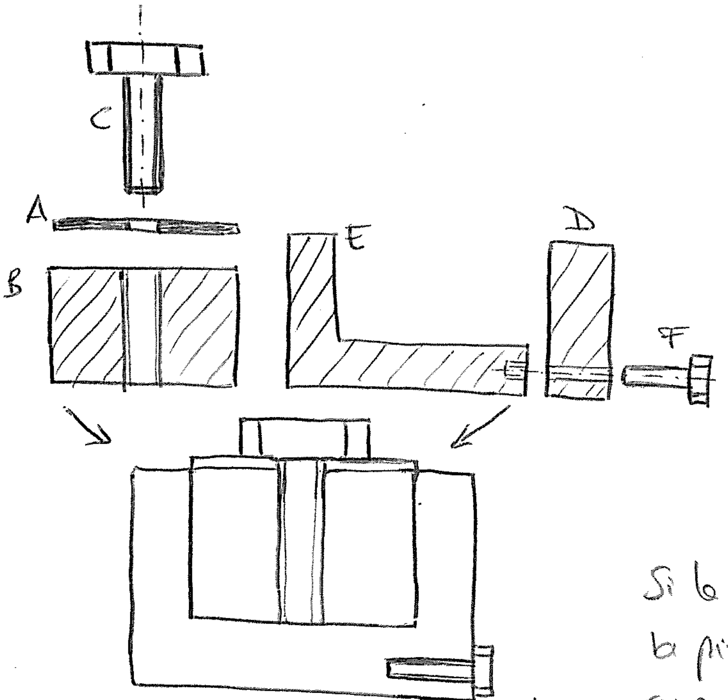


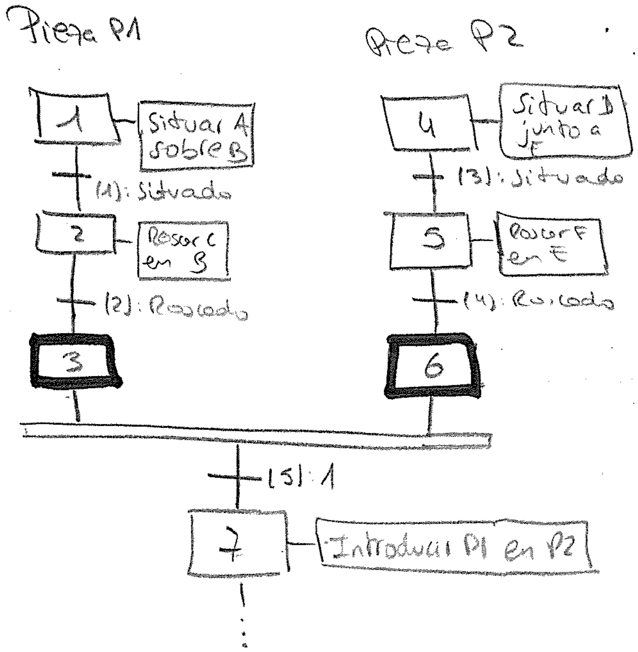



## Sincronización de secuencias

Permite que una secuencia espere a otra para poder continuar.

Ejemplo: Ensamblado de dos piezas que requieren montaje previo




Si la etapa 2 acaba antes que la 5 la pieza P1 se quedará esperando a que finalice 5.

# 7 SINCRONIZACIÓN Y ESTRUCTURACIÓN DEL GRAFCET

En ocasiones es conveniente utilizar recursos o métodos que permiten descomponer y estructurar un único Grafcet global en varios Grafcet parciales:

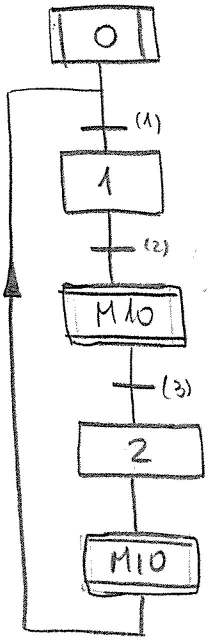
- Macroetapas
- Encapsulación
- Partición del Grafcet
- Forzado del Grafcet

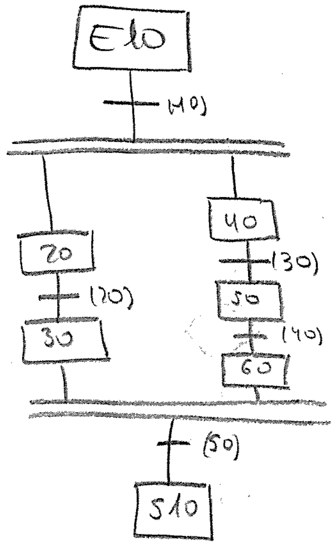
Es conveniente acudir a estos recursos cuando nos enfrentamos a automatismos complejos ya que conseguimos un aumento de legibilidad del grafcet, una interpretación más sencilla y una mayor facilidad de mantenimiento

## Macroetapas

Consisten en la representación compacta de una secuencia, de forma que evitamos repetir secuencias idénticas.

Representación: Igual que una etapa pero con líneas horizontales dobles, identificándose con la letra M y un nº único. Tiene al menos una etapa de entrada En y una de salida Sn



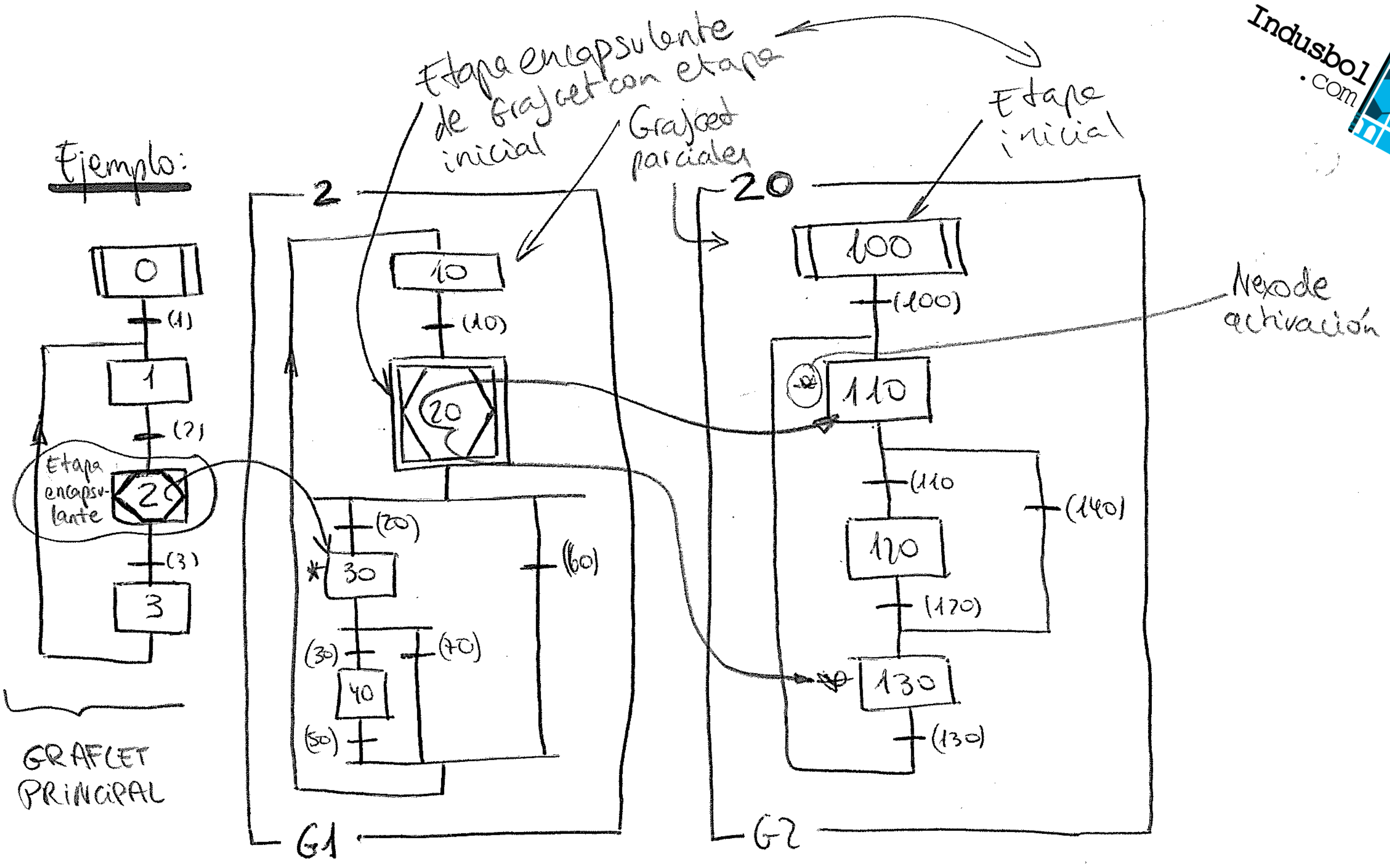

Debe considerarse que está permitido que una macroetapa tenga más de una etapa de entrada.

## Encapsulación

Permite estructurar jerárquicamente el Grafcet de modo que un Grafcet principal activa o desactiva etapas (encapsulantes) que corresponden con Grafcet parciales (encapsulados)

- Las etapas encapsulantes se representan con un hexágono interior
- Nexo de activación: Etapa del Grafcet encapsulado que se activa cuando se activa la etapa encapsulante (*)
- El estado de una etapa encapsulante (activada / desactivada) se representa por: Xn / Gm (etapa n encapsula grafcet m).
- El estado de una etapa encapsulada se representa por Xu/Xm: Etapa M pertenece a grafcet encapsulado en etapa n.
- Si dejan de estar activas las etapas encapsulantes se desactiva el grafcet encapsulado.

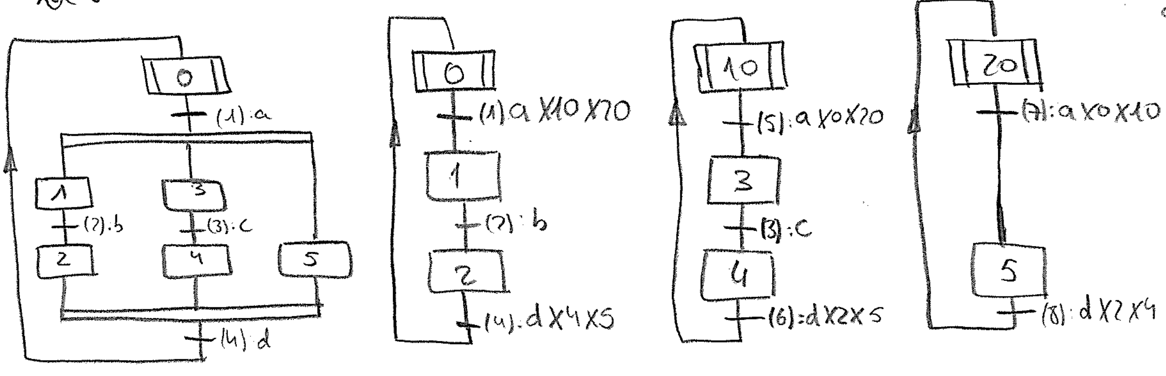
Ejemplo:




Cuando la etapa 2 se activa lo hace la etapa 30 del Grafcet G1
El Grafcet G1 evoluciona según las reglas habituales
Cuando se activa la etapa 20 se activarán las etapas 110 y 130
Si la etapa 20 deja de estar activa por franquearse la transición (20) ó (60), el Grafcet G2 dejará de estar activo.
Si la etapa 2 deja de estar activa por franquearse la transición (3), dejará de estar activo el Grafcet G1

## Partición del Grafcet

Consiste en dividir el Grafcet completo en varios más sencillos.
Gn (n = número de la etapa inicial del grafcet parcial) hace referencia a cada grafcet parcial.
La variable XGn indica si el Grafcet Gn está activo o no.




Las receptividades de las transiciones (1), (5), (7) aseguran que los 3 Grafcet arrancan las etapas 1, 3, 5 de manera simultánea como ocurría en el Grafcet original. Por su parte las receptividades de las transiciones (4) (6) (8) garantizan que las etapas 2, 4 y 5 se sincronizan antes de desactivarse y activar las etapas iniciales (0, 10, 20)

# Forzado del Grafcet

Se trata de un recurso que permite sincronizar de manera jerárquica el funcionamiento de varios Grafcet.

- Grafcet maestro → Fuerza a otro Grafcet a pasar a un estado determinado
- Grafcet esclavo → Es el grafcet forzado.

Para el Grafcet maestro la orden de forzado es una acción más que se activa al activarse la etapa a la que se encuentra asociada

**Representación**

- Orden de forzado en Grafcet maestro dentro de la caja de acciones asociadas a una etapa.

Acción de forzado

F/Gn: {p, q, ... z}

Grafcet esclavo

Etapas de Gn forzadas a estar activas

**Casos particulares**

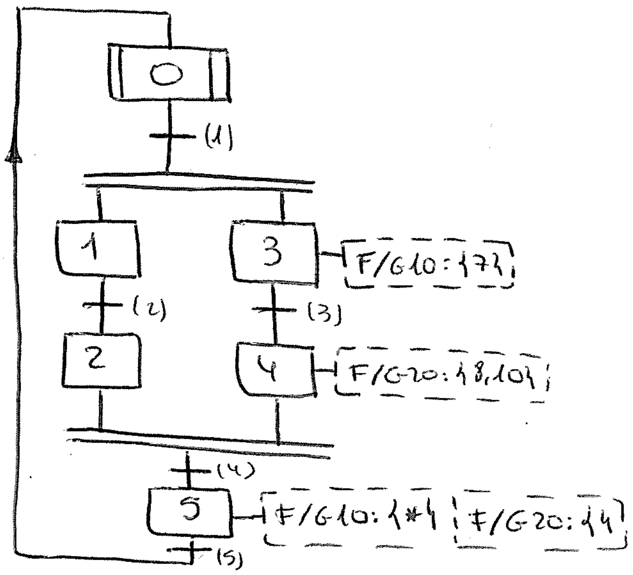
- {*} El Grafcet Gn (esclavo) se debe congelar en el estado que tenga en ese instante
- { } Se deben desactivar todas las etapas de Gn (después, Gn sólo podrá tener etapas activas si se fuerza externamente)

**Reglas**

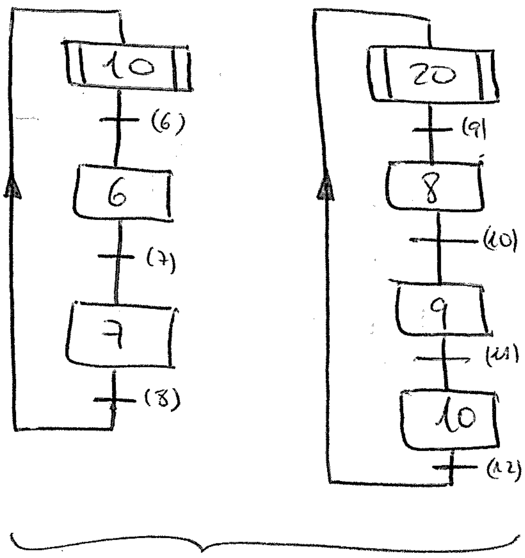
- La orden de forzado tiene prioridad sobre el funcionamiento normal del Grafcet esclavo → Deja el estado previo y pasa al estado forzado de manera inmediata.
- Si la etapa de forzado está activa, el Grafcet esclavo no puede evolucionar (queda bloqueado en el estado fijado por el forzado).
- No puede haber bucles: Si Gx fuerza a Gy → Gy no puede forzar a Gx, generalizando, Gx → Gy → Gz, entonces Gz no puede forzar a Gx
- Un Grafcet sólo puede ser forzado por un único Grafcet.

El forzado del grafcet es especialmente útil para el manejo de situaciones de alarma o emergencias, en los que el funcionamiento normal del automatismo debe ser interrumpido.

# Ejemplo: Interpretación




GRAFCET MAESTRO




GRAFCET ESCLAVOS de G0

Al inicio cada Grafcet evoluciona según sus propias reglas desde las etapas 0, 10, 20 (etapas iniciales) cuando se activa la etapa 3 el G10 se verá obligado a activar sólo la etapa 7 y mientras la etapa 3 esté activa el G10 estará bloqueado en la etapa 7 sin poder evolucionar.
Cuando el G0 evolucione de la etapa 3 a la 4, G10 podrá continuar su evolución natural desde la etapa 7. Por su parte G20 quedará forzado a activar las etapas 8 y 10, desactivando el resto.
Más adelante, cuando se active la etapa 5, G10 se bloqueará en el estado en el que esté, sin poder evolucionar. G20 quedará completamente inactivo hasta que se reactiven sus etapas 8 y 10 pues fue forzado desde la etapa 4.

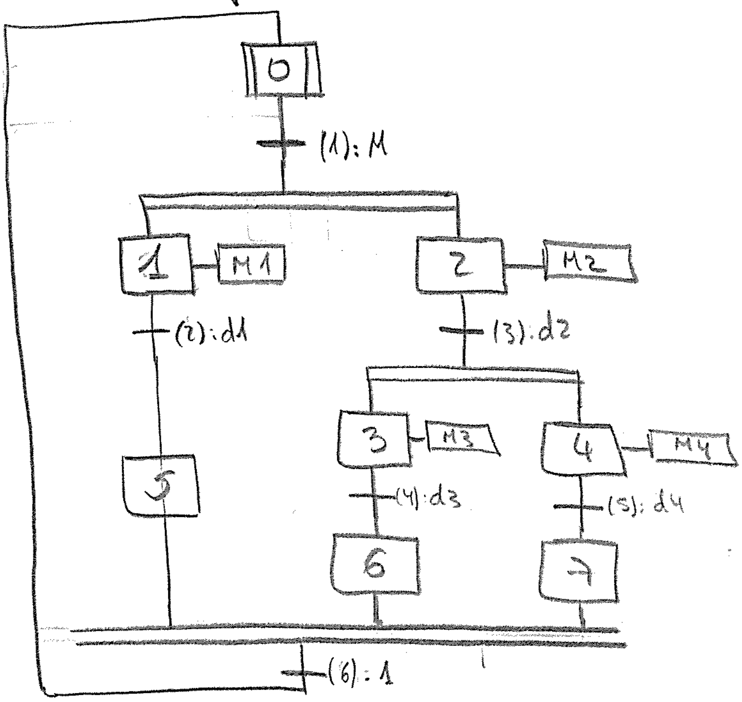
# Ejemplo: Secuencia de motores.

**a)** Realizar Grafcet:

4 Motores M1, M2, M3, M4 deben encenderse según esta secuencia: Tras la puesta en marcha, mediante el pulsador M se activan M1 y M2 hasta que completen su ciclo, lo que se detecta en d1 y d2.

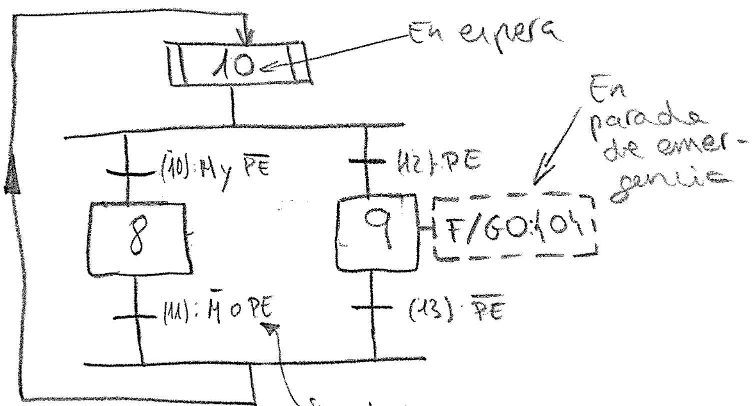
- M1 se parará y quedará a la espera de que se completen el resto de acciones.
- M2 se parará y dará paso simultaneo a M3 y M4 que deberán por separado completar su ciclo, lo que se detecta en d3 y d4.

Cuando los 4 motores hayan completado su ciclo, este se repetirá si la llave o pulsador de marcha M sigue pulsado.




**b)** Queremos añadir una parada de emergencia (PE) si PE = 1 se debe interrumpir de manera inmediata el funcionamiento de los motores. El sistema queda en este estado hasta que la parada de emergencia se desactive. Tras la desactivación se debe comenzar desde su estado inicial, como si acabara de ser encendido.

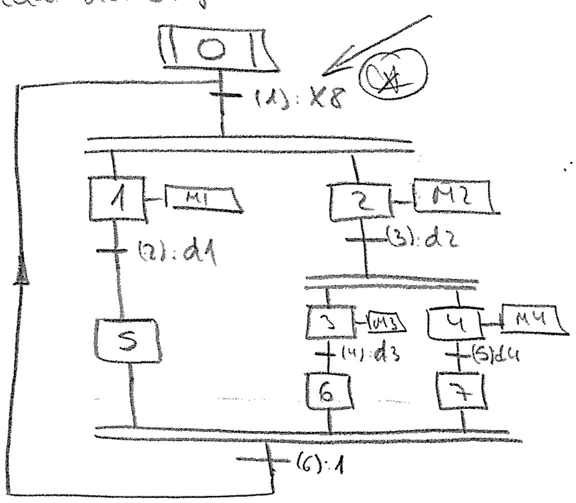
Vamos a realizar un Grafcet maestro muy simple que contemple la situación de PE




Si se diera este caso pasaríamos a 10 (espera) e inmediatamente a 9: Parada de emergencia

GRAFCET MAESTRO G10

Hay que modificar la receptividad inicial del Grafcet esclavo G0



Indusbol.com

# Ejercicios GRAFCET

## ➡ Ejemplo 3.9.1 del libro de texto: TRANSPORTE DE VAGONETA

Dibujar diagrama de estados y GRAFCET del funcionamiento

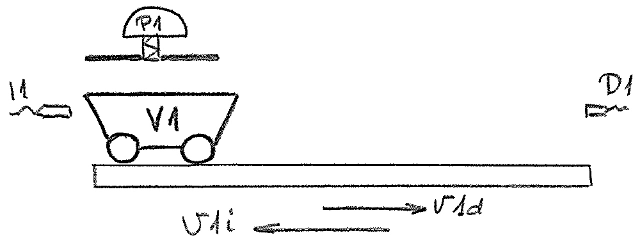
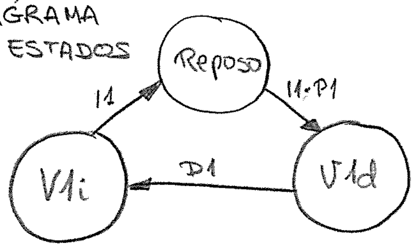
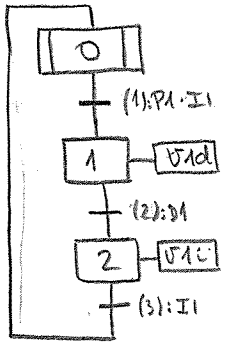



DIAGRAMA DE ESTADOS




GRAFCET




## ➡ Ejemplo 3.9.2 del libro de texto: TRANSPORTE DE VAGONETAS SINCRONIZADAS

A] Diagrama de estados para 2 y 3 vagonetas.

DIAGRAMA DE ESTADOS PARA DOS VAGONETAS

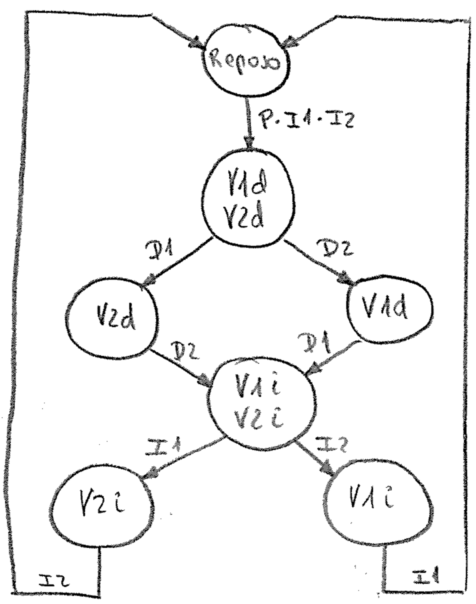
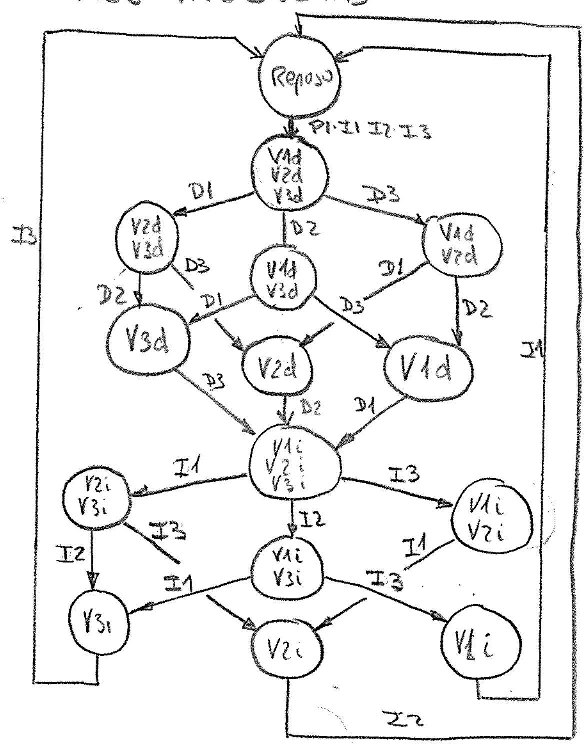



DIAGRAMA DE ESTADOS PARA TRES VAGONETAS




7 estados

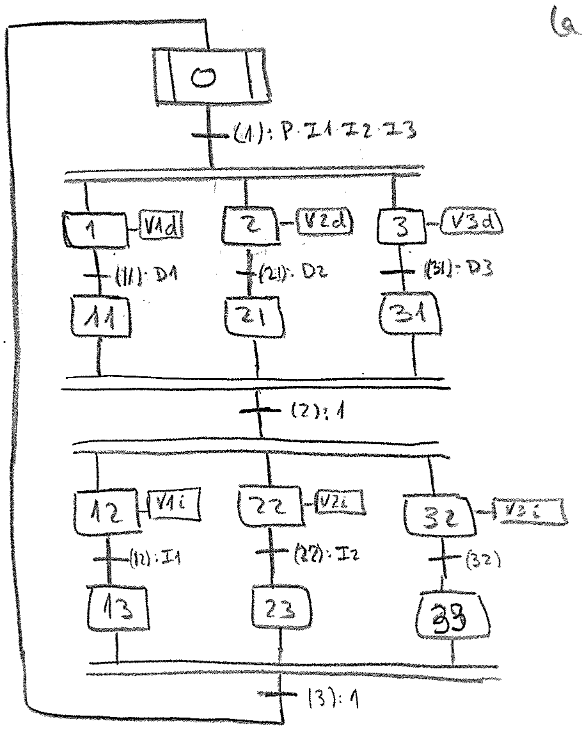
15 estados

N vagonetas

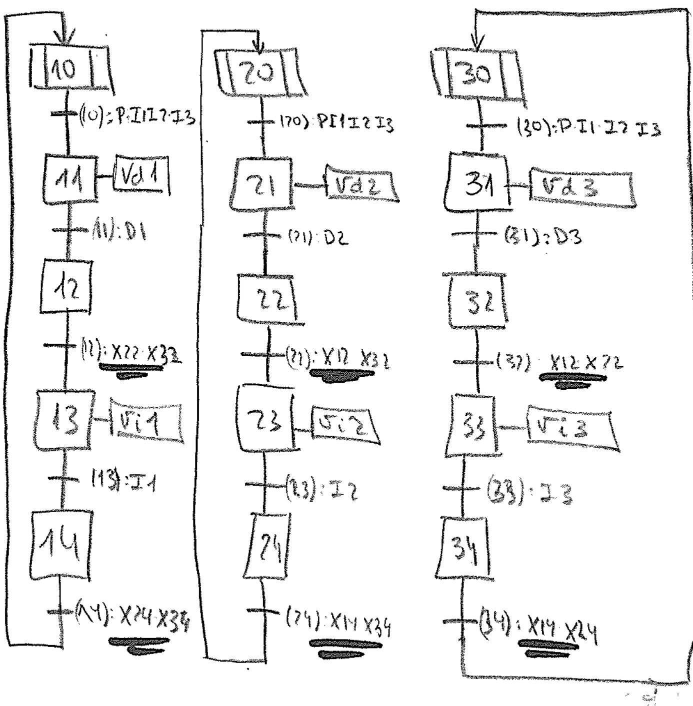
$2^{N+1}-1$ estados

## B) Grafcet

GRAFCET PARA TRES VAGONETAS (para dos sería igual solo que suprimiendo la 3ª columna)



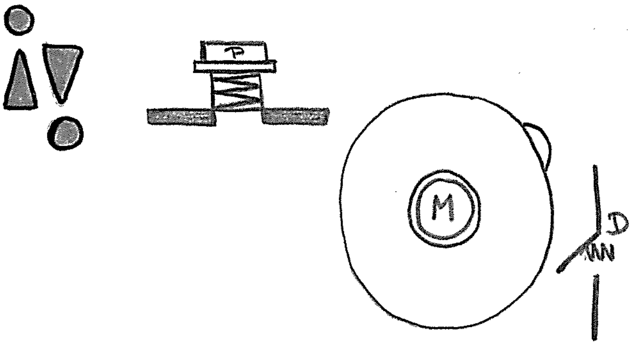

También podríamos haber hecho 3 grafcets parciales sincronizados



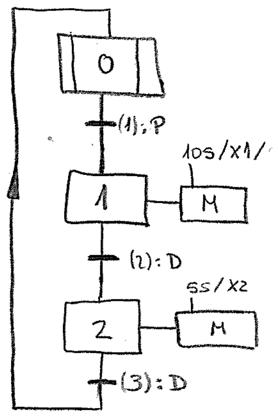

(*) Sincronización de las receptividades

→ Ejemplo 3.9.3 del libro de texto: GIRO DE MOTOR CON LEVA

Construir GRAFCET que modele el comportamiento del sistema




Planteamos una primera solución

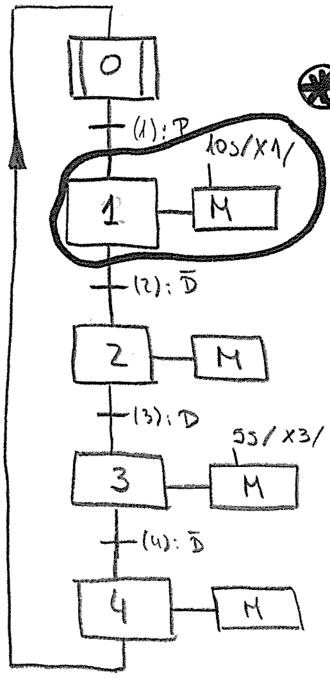



El funcionamiento es incorrecto porque:

A partir de que la leva se sitúe sobre D en la etapa cero (ocurre después de la 1ª vuelta), al entrar en la etapa 1, de manera inmediata se valida (2) y se activa la etapa 2 cuya salida, (3), estaría también validada y se pararía a la etapa 0 directamente.

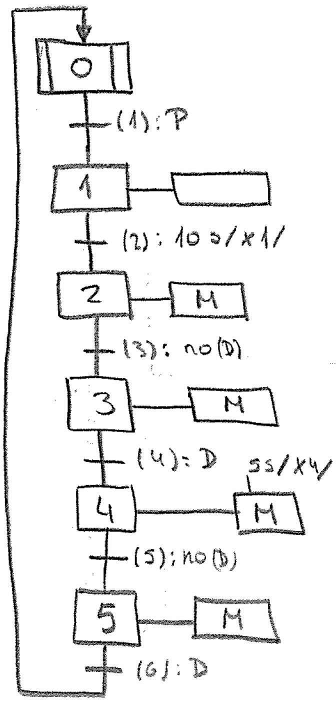
El grafcet evoluciona sin activar el motor !!

Por tanto, la solución válida será:



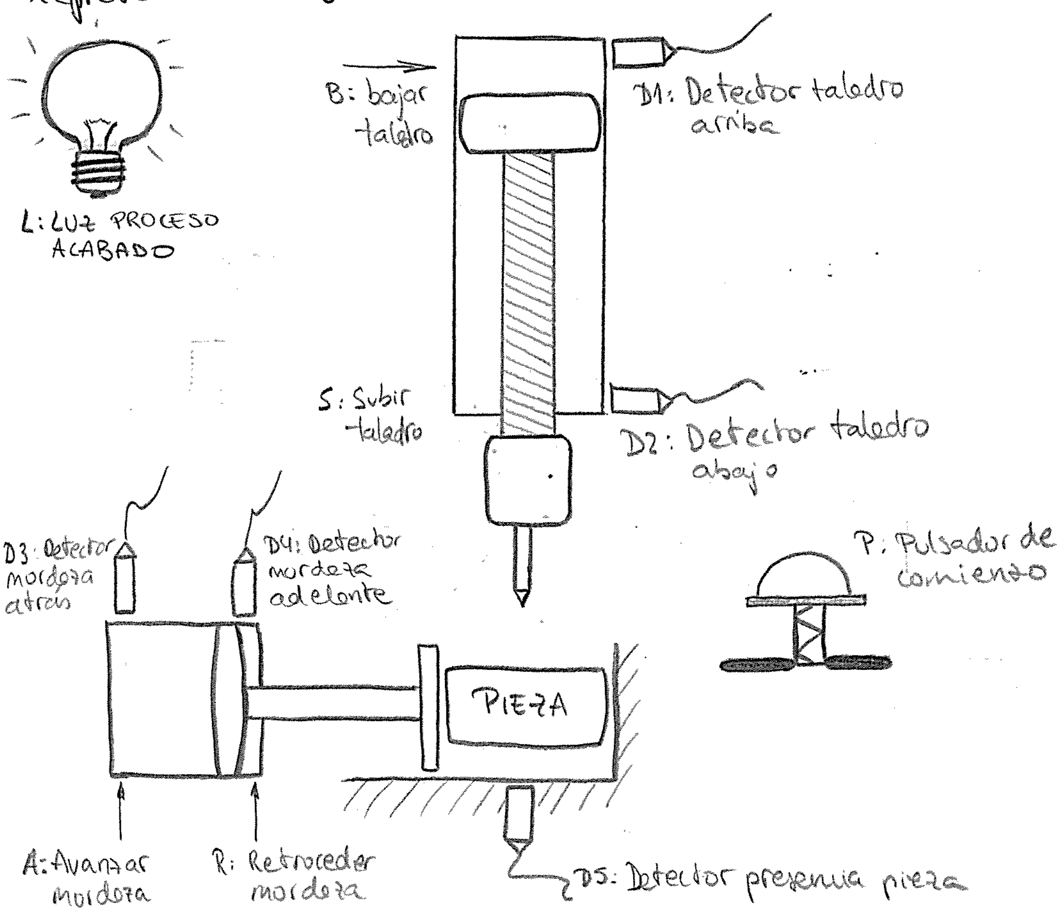

(*) Si el motor no está sobre D (esto sólo puede ocurrir en la 1ª vuelta), al activar la etapa 1, (2) esta validada y por tanto se activará inmediatamente la etapa 2 sin esperar los 10 segundos

SOLUCIÓN BARRIENTOS (con etapa de espera)



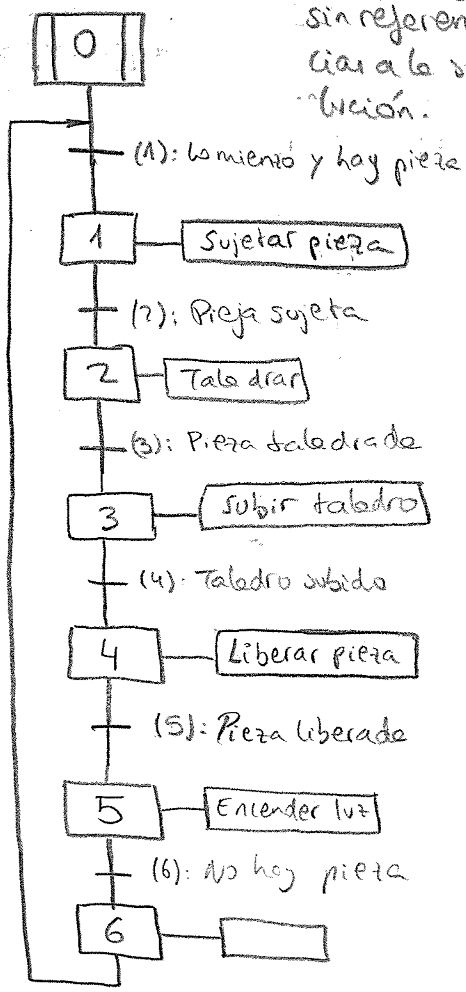

Ejemplo 3.9.4 del libro de texto: TALADRO NEUMÁTICO

Representar Grafcet de nivel 1 y 2.

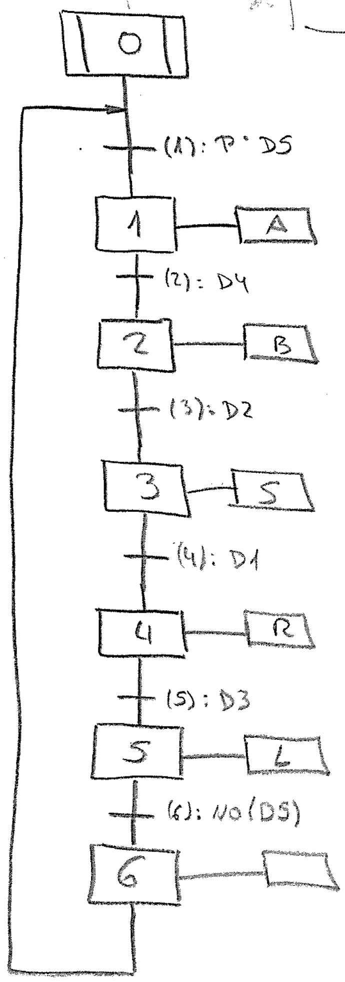


No es nivel 3???

GRAFCET Nivel 1: Términos no técnicos y sin referencias a la solución.

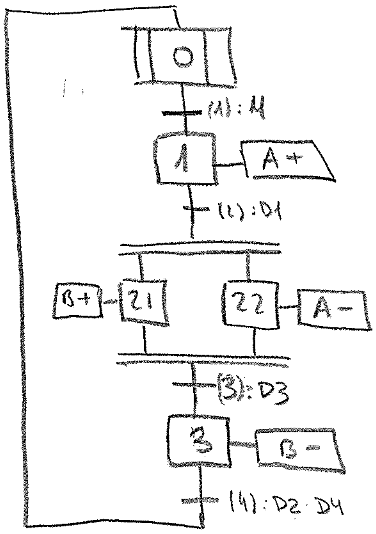



GRAFCET Nivel 2:




→ Ejemplo 3.9.5 del libro de texto → PRENSA DE ESTAMPACIÓN

A) Definir el modo de funcionamiento básico y construir el Grafcet




Mientras esté activada la señal de marcha M:

Paso 1: Posicionamiento – Avance del posicionador

Paso 2: Estampación – Avance de la estampadora y retroceso simultáneo del posicionador

Paso 3: Rearme – Retroceso de la estampadora hasta su posición superior

Paso 4: Retorno a condiciones iniciales – Estamp. y posicionador en posiciones retraídas, se puede repetir ciclo

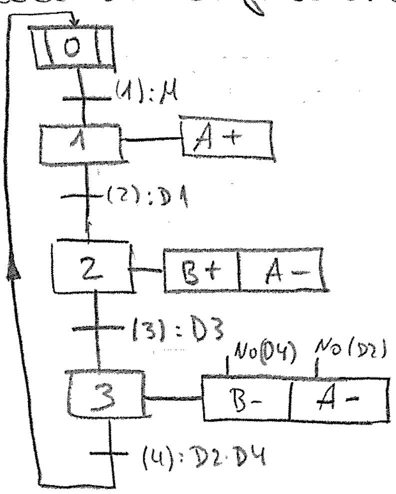
→ En caso de desconectar M se debe esperar a acabar el ciclo para detener funcionamiento

Se considera que no es preciso esperar a que el posicionador esté retraído antes de retirar la estampadora pero...

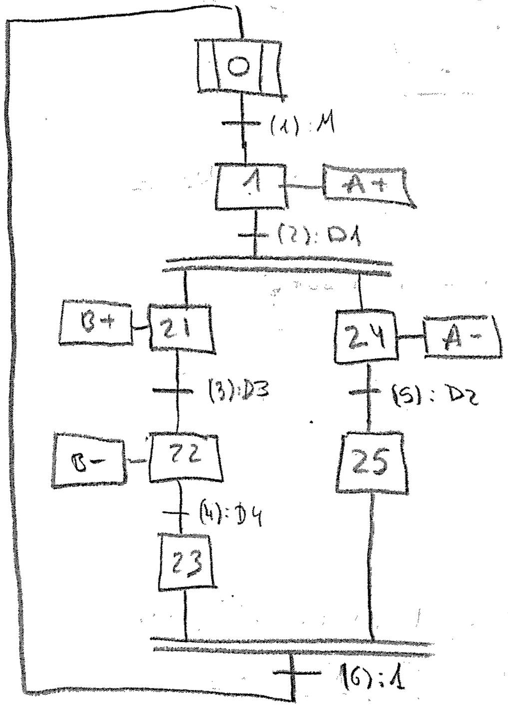
¿Que pasa si la estampadora llega abajo antes de retraer el posicionador por completo?

X21 y X22 están activadas → Al cumplirse (3): D3 → se activaría 3 con el posicionador a mitad de carrera → Nunca llegaría a cumplirse D2 = 1 → (4): D2·D4 = 0 → BLOQUEO !!

- Usamos acciones condicionados para solucionar el problema:



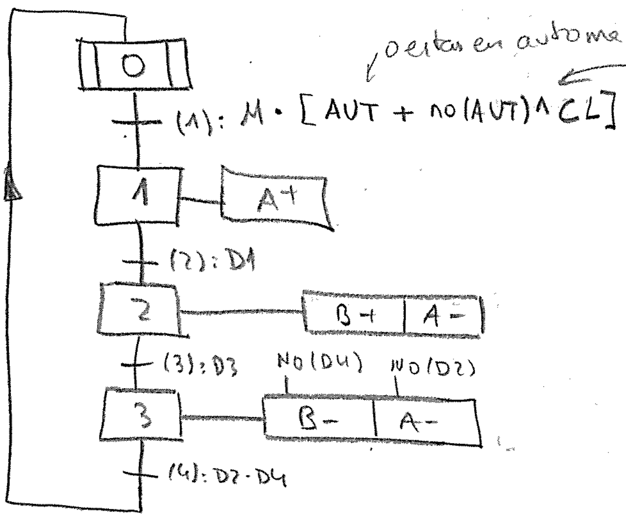

- Usamos divergencia en Y




## B] Incorporación de modo manual

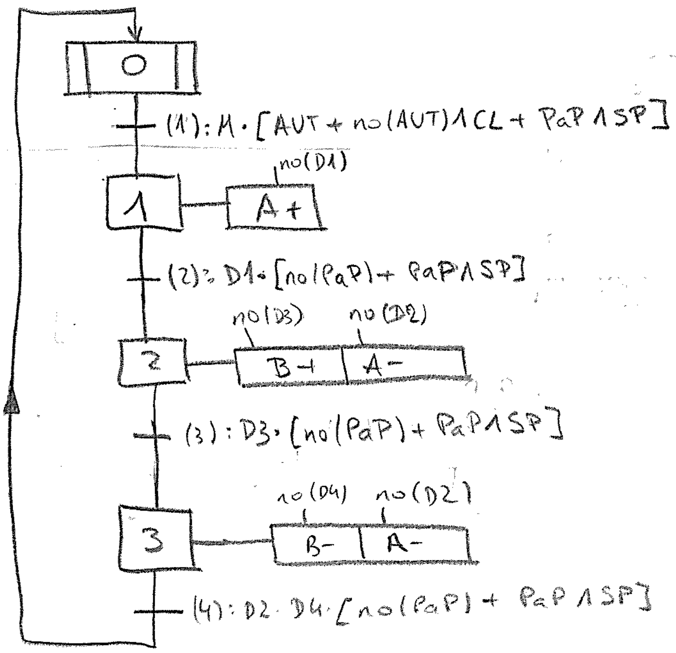
- Llave selectora AUT/MAN indica el modo de trabajo
- Modo manual → el operador debe pulsar CL para estampar pieza
- Modo automático → el anterior
- En ambos modos es necesario que la llave M esté cerrada

o estas en automatico o no estas en automatico y has pulsado CL



## C) Modo paso a paso

- A los modos manual y automático se incorpora un tercero denominado paso a paso que se selecciona mediante una tercera posición de la llave selectora (AUT, MAN, PaP)
- En PaP el operario debe pulsar SP para que se ejecute el paso siguiente.




(*) Se añaden en todas las acciones condiciones al fin de carrera para evitar que se mantenga la presión mientras se espera a SP

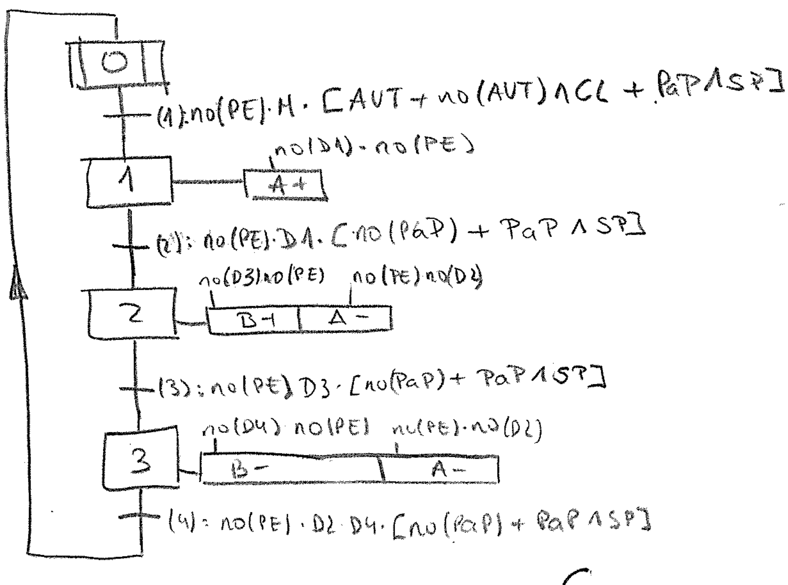
## D) Incorporación modo parada de emergencia

- Incorpora un último pulsador PE que queda auto-enclavado tras su activación debiendo ser desactivado manualmente.
- Dos modos de tratamiento

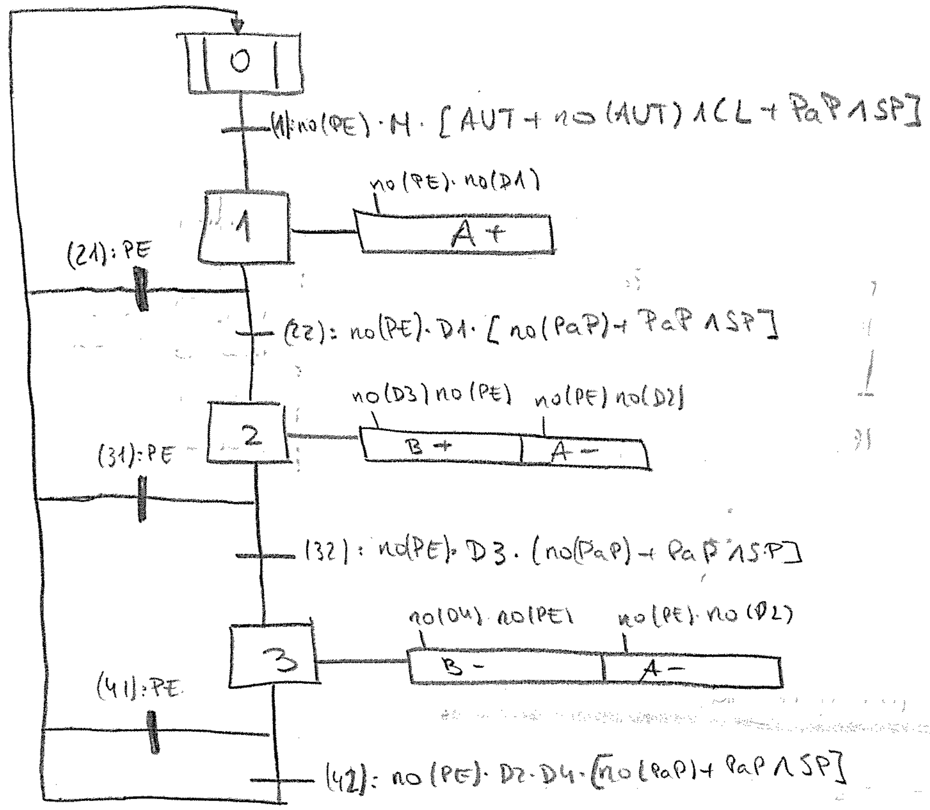
(D.1) Pausa: El sistema bloquea su estado imposibilitando la evolución a la siguiente etapa

(D.2) Retorno a condiciones iniciales

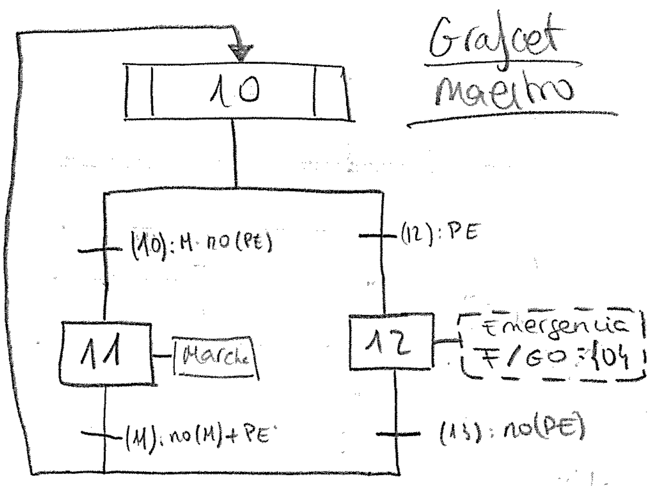
(D1) → Añadimos a todas las receptividades la condición de no(PE)
→ Añadimos a todas las acciones la condición de no(PE)

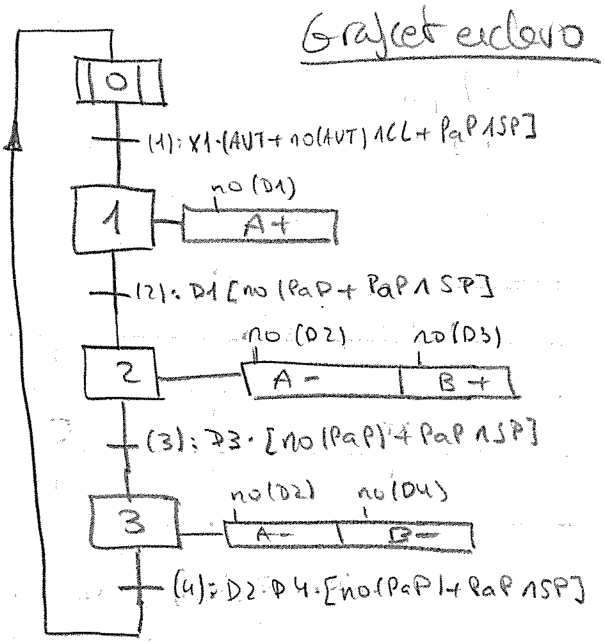


D2 Se añade a cada salida alternativa en 0 → PE, y se da prioridad a esta opción incluyendo "no (PE)" en el resto de casos:



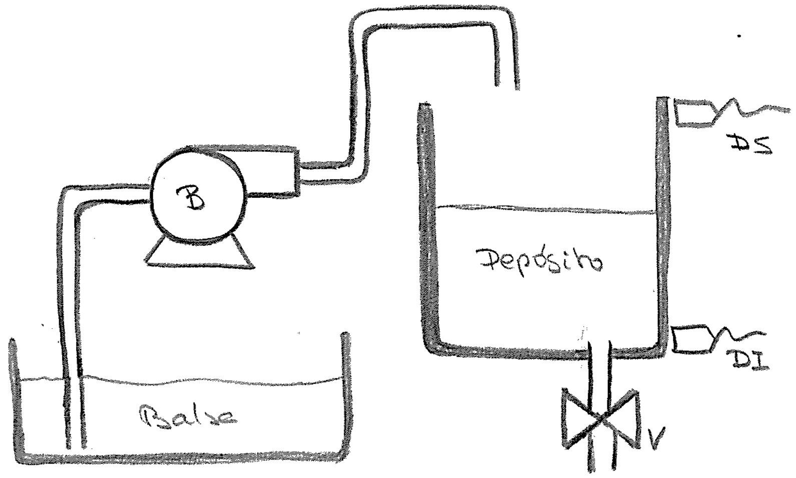

## CON FORZADO:

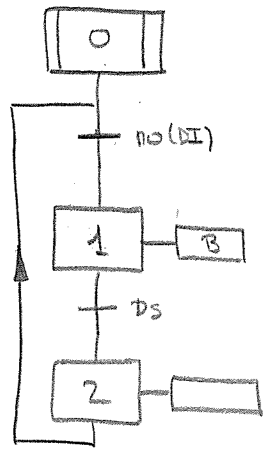


## ➡ Ejemplo 3.9.6 del libro de texto: CONTROL NIVEL DE UN DEPOSITO

Representar Grafcet



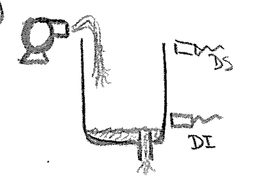

## NOTA!! TEÓRICA CIRCUITO MARCHA-PARO

Se trata de sistemas que, ante una condición funcionan en modo marcha o set y bajo otra condición están en modo paro, ó reset ⟶ BIESTABLES SET/RESET, podemos representar su tabla de verdad

| Condición de marcha (Set) | Condición de paro (Reset) | Estado de salida previo | Salida nuevo estado |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0/1 | 0/1 |
| 0 | 1 | 0/1 ✲ ? | 0 |
| 1 | 0 | 0/1 ✲✲ ? | 1 |
| 1 | 1 | 0/1 | Indeterminado |

Sistema ejemplo: Condición de marcha: Set = no(DI)
Condición de paro: Reset = DS

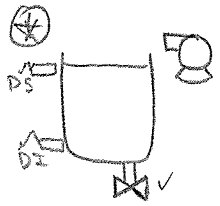
✲✲




Set = no(DI) = 1
Reset = DS = 0

Puede ser el estado previo (1) y la nueva salida (1)

✲



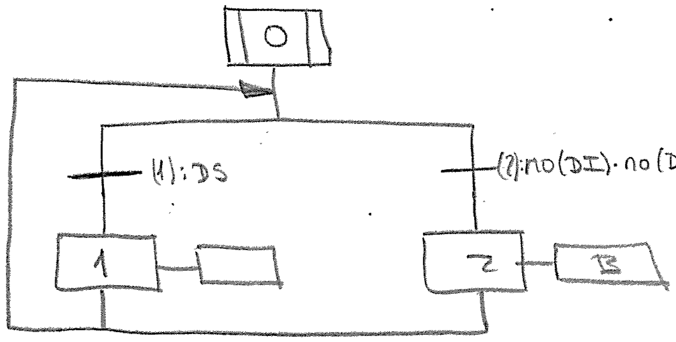

Set = 0
Reset = 1

Puede ser el estado previo (0) y la nueva salida (0) si resta cerrada

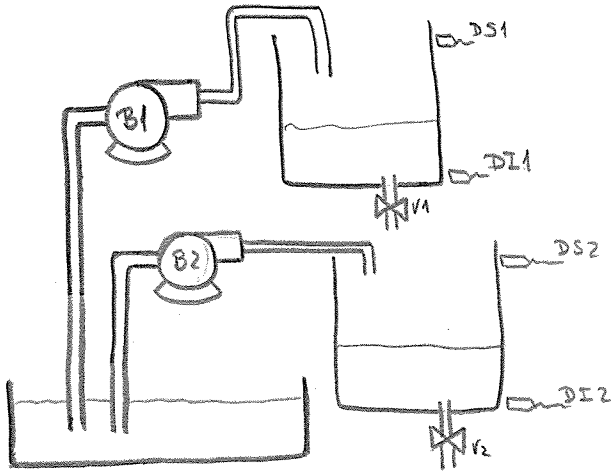
Avería ⟶ Señales de set y Reset ciertas a la vez ⟶ se debería llevar al sistema a un estado seguro, parando la bomba.

**PARO O RESET HA DE TENER PREFERENCIA FRENTE AL SET O CONDICIÓN DE MARCHA**

Modificamos el Grafcet para dar prioridad a la señal de reset
↓
paro
↓
DS

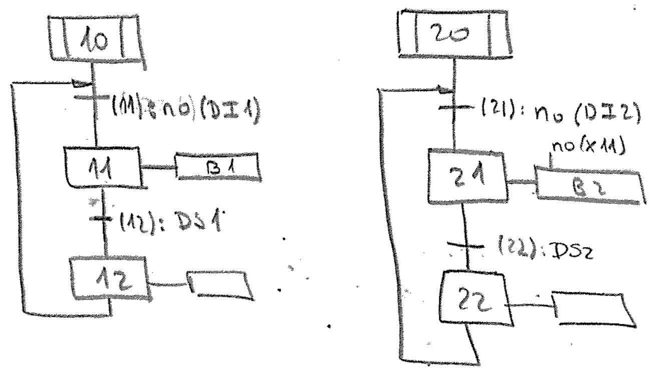



Ejemplo 3.9.7 del libro de texto: CONTROL DE N DEPÓSITOS CON RESTRICCIONES DE POTENCIA

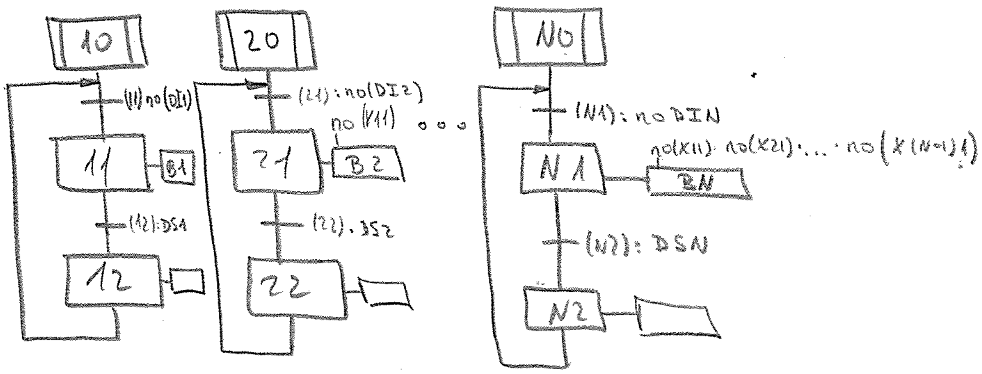



- No pueden estar encendidos B1 y B2 a la vez
- B1 tendrá prioridad

CON 2 DEPÓSITOS

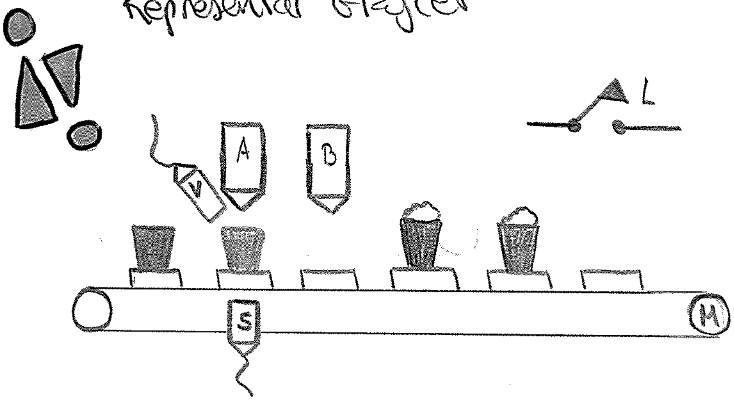



CON N DEPÓSITOS

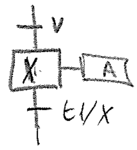


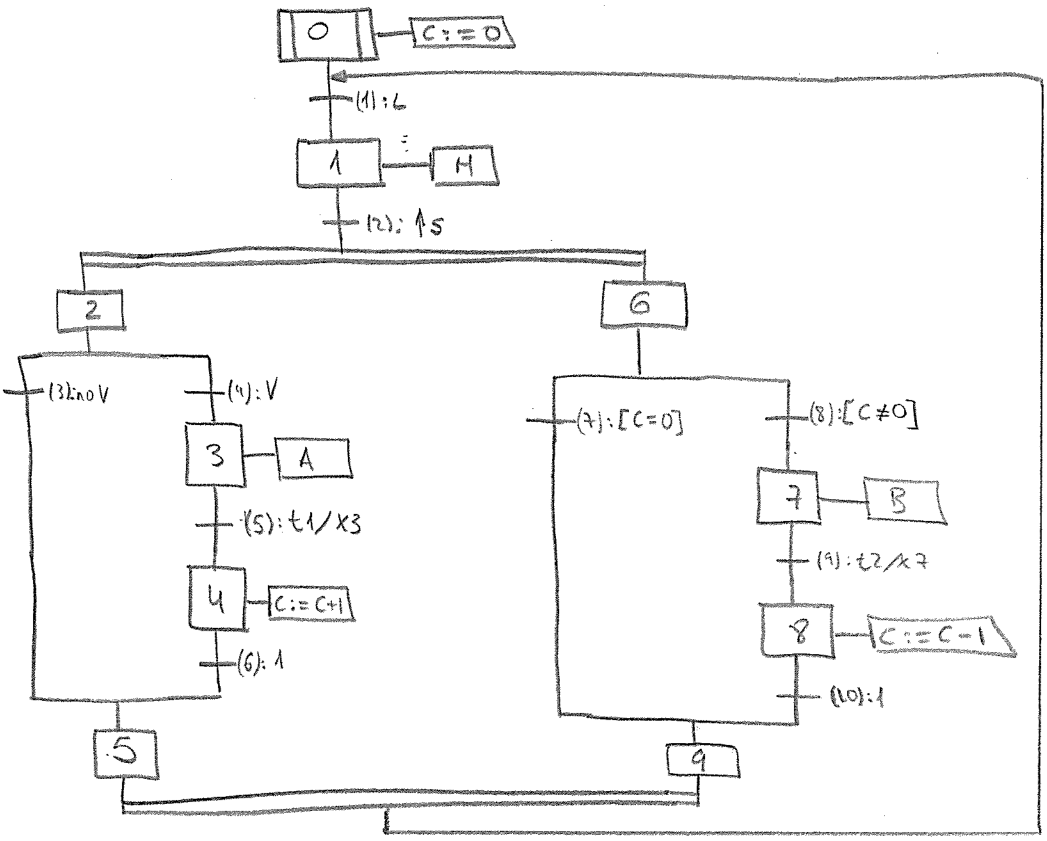
➡ Ejemplo 3.9.8 del libro de texto: MAQUINA DE LLENADO DE HELADOS

Representar Grafcet

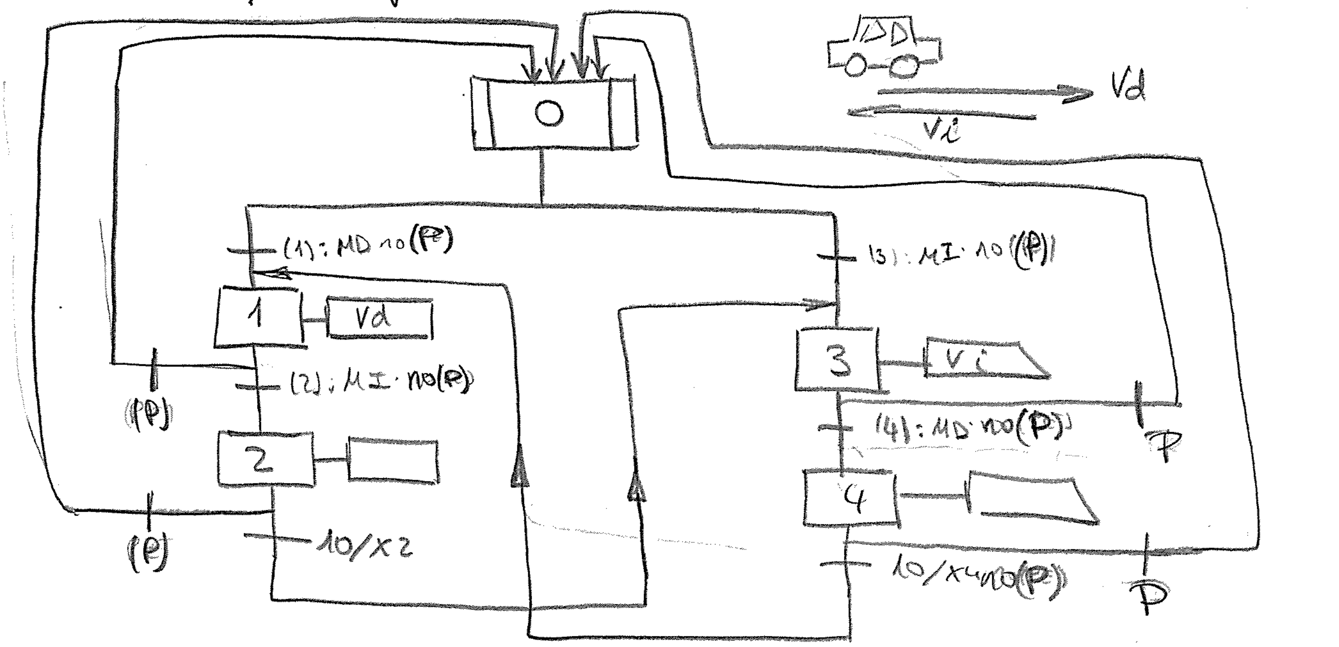


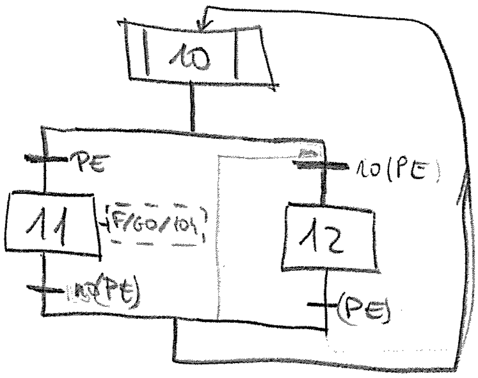

En A:

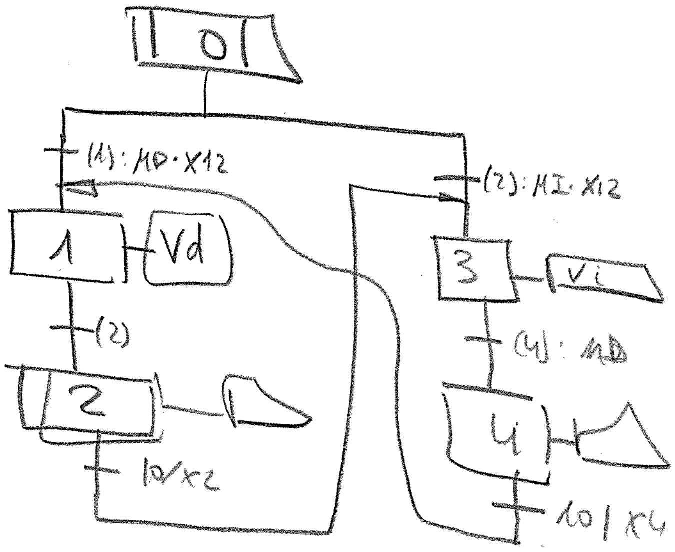


Tenemos un vehículo que puede ir a la derecha o a la izquierda pulsando el botón MD o MI respectivamente. Se mueve para uno de los dos lados indefinidamente.
Si estando en movimiento pulso el botón de moverse al otro lado, el vehículo se para, espera 10 segundos, y va al otro lado.
En todo caso, si se pulsa el botón P se debe parar el movimiento



# AUTÓMATAS

## 1 CONCEPTOS GENERALES

- **REQUISITOS** (de un equipo dedicado al control de procesos)
  - Captación y procesamiento rápido de señales
  - Versatilidad en el manejo de señales de campo
  - Facilidad de desarrollo (interfaces, depuración)
  - " " mantenimiento (ajustes, reprogramación)
  - Permitir acceso remoto
  - Poder compartir información
  - Escalabilidad
  - Interoperabilidad

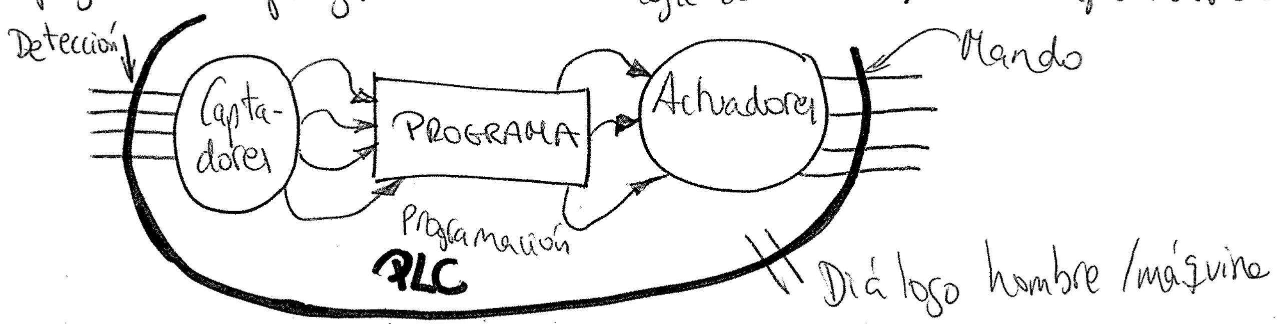
- **ORIGEN**

Década de los 50 → Proliferación de sistemas de control lógico o mandos secuenciales de procesos → Aumento de la complejidad → Tecnología cableada (relés electromagnéticos) llegó a su límite práctico de uso → Comenzaron a usarse computadores digitales de propósito general → Necesitaban condiciones muy específicas → Aparecen los 1^os^ autómatas programables, capaces de trabajar en un entorno industrial

- **DEFINICIÓN**: "Equipo electrónico programable en lenguaje no informático, diseñado para controlar en tiempo real y ambiente industrial procesos secuenciales."

NEMA → "Aparato electrónico digital que usa una memoria programable para el almacenamiento de instrucciones que implementan funciones lógicas, secuenciales, temporizadores, contadores y aritméticas, para controlar a través de módulos de E/S digitales y analógicos, diferentes tipos de máquinas o procesos."

Autómata programable ≡ Controlador lógico programable ≡ PLC (Programmable logic controller) ≡ Computador de uso especializado



# 2 ARQUITECTURA

- Componentes

ARQUITECTURA MODULAR

- Procesador (CPU) ≡ Operaciones aritmético lógicos para control PLC
- Alimentación ≡ función de la configuración PLC
- Entradas < Digitales / Analógicos — El autómata recibe a través de ellos las señales de los captadores presentes en el proceso industrial
- Salidas < Digitales / Analógicos — El autómata transmite a través de las salidas las señales que controlan el sistema → Hace uso de actuadores
- Módulos especiales, módulos de comunicación, unidad de programación externa, ...

<u>BÁSICA</u>

Captadores → Unidad de entradas | Fuente de alim. / CPU / Interfaces | Unidad de salidas → actuadores

Unidad de programación ↔ (Interfaces) ↔ periféricos externos.

# D. ESCALERA

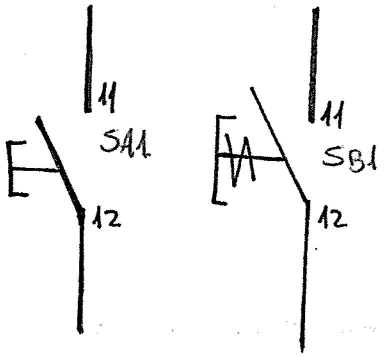
Intro a la programación de automatismos secuenciales.

## 1 CIRCUITOS DE MANDO ELÉCTRICOS

RELÉ: Dispositivo electromecánico en el que un circuito de mando (primario) abre o cierra un interruptor.
→ Primario = Bobina
→ Secundario = Uno o varios contactos NA o NC que invierten su estado al circular corriente por la bobina.

NOTA!! Si el relé no es de los pequeños, hará falta dar suficiente corriente = Transistor
Hay que evitar picos de corriente por la inductancia = Diodo

### SÍMBOLOS ELÉCTRICOS

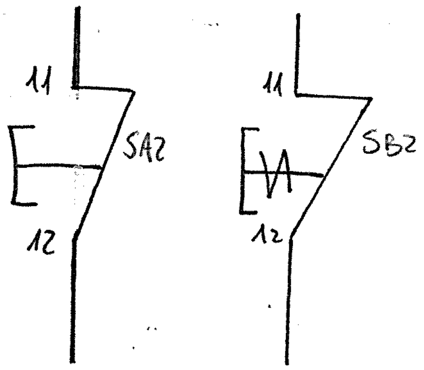



**Interruptor y pulsador normalmente abiertos NA**

SA1 ó SB1 = 0 ⇒ Abierto ⇒ No conduce

Si se actúa sobre él se cierra

Si se deja de actuar se mantiene la última posición en interruptor pero no en pulsador (queda abierto)



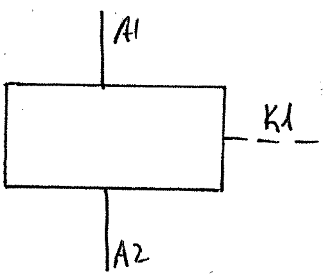

**Interruptor y pulsador normalmente cerrados NC**

SA2 ó SB2 = 0 ⇒ Cerrado ⇒ Conduce

Si se actúa sobre él se abre

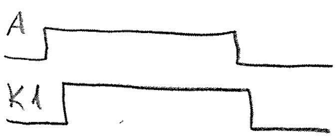
Si se deja de actuar mantiene su última posición en interruptor pero no en pulsador (queda cerrado)

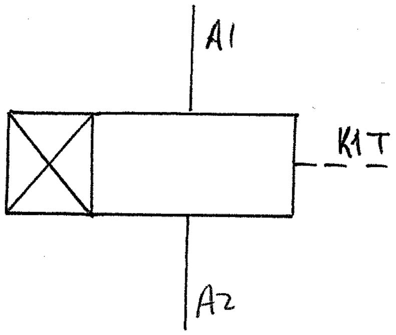
**Relé general**




Bornes del circuito de mando o 1ario

Cuando circula corriente de A1 a A2, K1 se abre o se cierra

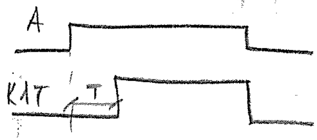


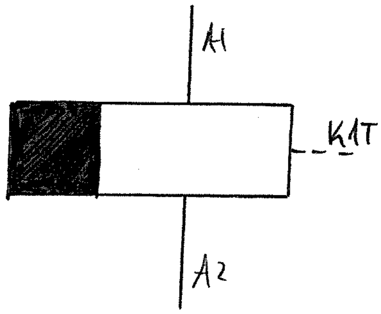



## Relé con retardo a la conexión

K1T se abre o cierra un tiempo después de que la corriente circule por la bobina del relé.

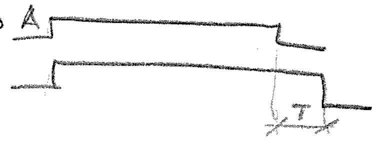
El retorno a la condición de reposo del interruptor de salida es simultanea con la falta de corriente por el primario

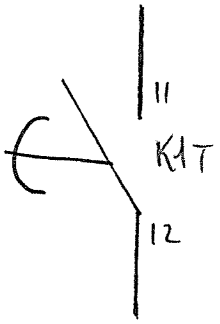



## Relé con retardo a la desconexión

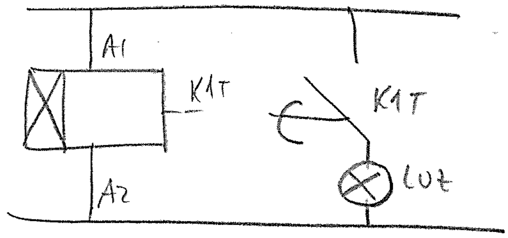
El interruptor de salida K1T se abre o cierra a la par que aparece corriente por la bobina del primario, pero una vez que esta desaparece, el interruptor del secundario no retorna a reposo hasta pasado un tiempo T.




## Interruptor temporizado

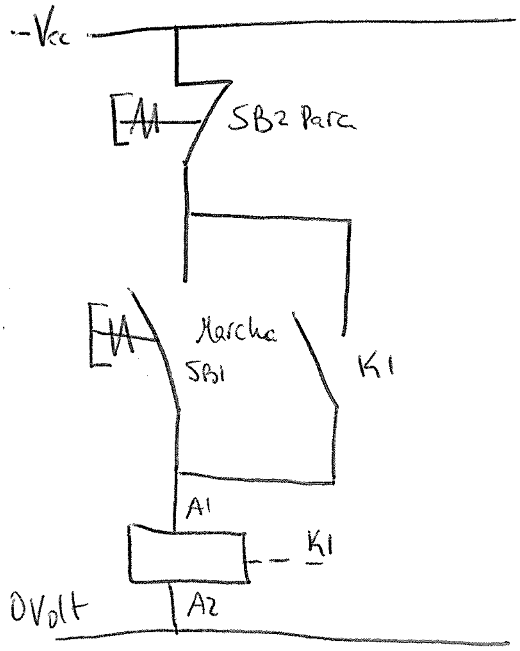
Interruptor que se activa desde el circuito de salida de un relé temporizado.

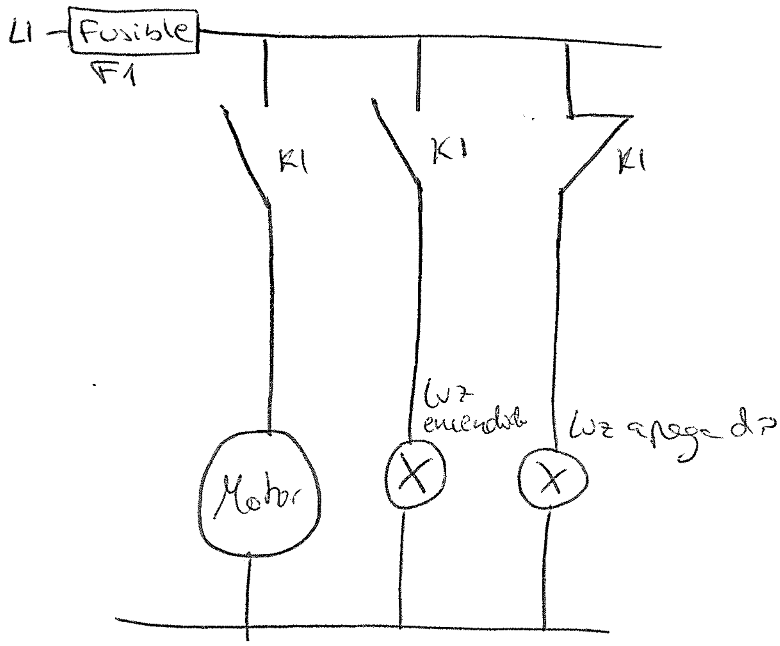



La luz se enciende T segundos después de cerrarse A1A2 y se apaga a la vez que A1A2 se desconectan.

# 2 EJEMPLOS DE CIRCUITOS DE MANDO ELECTRÓNICOS

- ARRANQUE DE MOTOR CON PARADA PREFERENTE



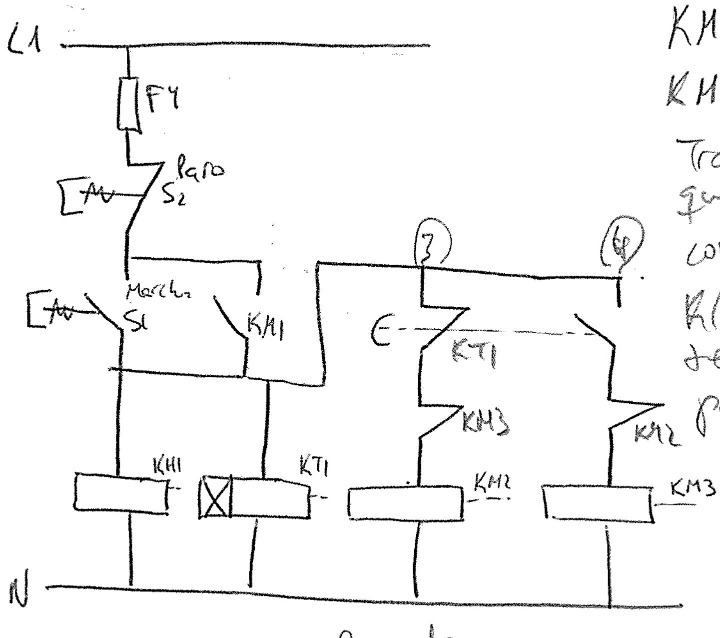



Actuamos momentaneamente sobre SB1 ⇒ Marcha ⇒ Circula corriente de A1 a A2

K1 entonces cambia su estado y, aunque el pulsador vuelva a su estado de reposo (abierto), el relé sigue conduciendo.
Si se pulsase el 1er pulsador el relé deja de conducir, hasta que no vuelva a pulsarse de nuevo SB1.
Este 1er circuito sería el de mando, del que se destaca que se da preferencia al paro frente a la marcha, por razones de seguridad.
El otro circuito es el de potencia, que requiere una tensión alterna y elevado consumo de corriente. Se han incluido dos luces para indicar el estado encendido o apagado del motor.

## ● ARRANQUE DE MOTOR ESTRELLA-TRIÁNGULO

Motores trifásicos con rotor en cortocircuito admiten 2 tipos de funcionamiento según los devanados del estator se conecten en estrella o en triángulo.
En el arranque, el motor demanda una corriente eléctrica muy elevada, lo que debe ser evitado. Para motores que vayan a trabajar en triángulo, dado que este modo $I_L = \sqrt{3}\, I_F$, mientras que en estrella $I_L = I_F$. Arrancaremos por tanto en Y y cuando se haya adquirido la velocidad de régimen conmutaremos a Δ




Paso de Y a Δ

KM1 y KM2 ⇒ Estrella
KM1 y KM3 ⇒ Triángulo
Tras pulsar marcha (S1) se alimenta KM1 quedando autoenclavado, no se desconectará hasta pulsar S2 (paro)
KM1 → alimenta relé genérico y relé temporizado KT1 que un tiempo programado después cerrará sus contactos. Hasta ese momento KT1 y KM3 conducen alimentando a KM2 que abre el contacto de la rama KM3. Cuando pasa tiempo T, KT1 se abre, en la rama 3 y se cierra en la 4. KM2 se cierra por dejarse de alimentar la rama 3

# 3 DIAGRAMAS DE ESCALERA

Lenguaje gráfico de estándar IEC 61131. Fue el primer método de programación de PLC desarrollado (para sustituir a los esquemas eléctricos. Posee un gran paralelismo con los esquemas de mando a relé