



Indusbol1
.com

Apuntes de 3°GITI

María Ballesteros

APUNTES MECÁNICA DE FLUIDOS I

Si alguna vez estos
apuntes te sirvieron
de ayuda, piensa que
tus apuntes pueden
ayudar a muchas
otras personas.

Comparte tus apuntes

En indusbol.com o
simplyjarod.com

INTRO

1 DEFINICIÓN DE FLUIDO

Se denomina fluido a un tipo de medio formado por alguna sustancia entre cuyas moléculas hay una fuerza de atracción débil.

Consideramos fluido a todo medio que al aplicarle una fuerza muy pequeña en una dirección determinada conseguimos deformarlo indefinidamente.

El término engloba tanto a líquidos, como a gases:

- Efecto de compresibilidad $\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\text{líquido}} = \text{cte} \\ \rho_{\text{gas}} \neq \text{cte} \end{array} \right.$
- El gas intenta ocupar todo el volumen del recipiente que lo contiene y el líquido no.
- Dos gases no admiten entre sí superficie de separación. En cambio los líquidos (entre sí o líquido-gas) admiten superficie de separación.
- $\rho_{\text{líquido}} > \rho_{\text{gas}}$

2 HIPÓTESIS DE MEDIO CONTINUO

Es la hipótesis fundamental de la mecánica de fluidos. Considera que el fluido es continuo a lo largo del espacio que ocupa, ignorando por tanto su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a ella.

Gracias a esta hipótesis se puede considerar que las propiedades del fluido (densidad, temperatura, ...) son funciones continuas y que podemos expresar cualquier función como $f = f(\vec{x}, t)$

3 DEFINICIONES

Variable extensivas: Aquellos que dependen de la masa (E, H, \dots)

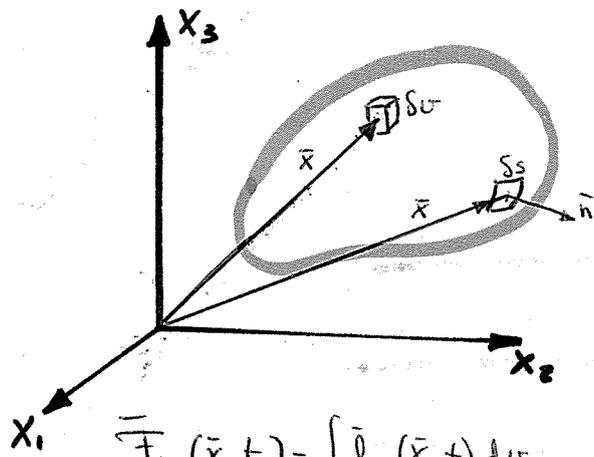
Variable intensivas: " " no " " " " (p, T, \dots)

Variable específicos: Son variable extensivas que se convierten en intensivas al dividirlos por la masa.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} ; \quad \vec{v} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}}{m} ; \quad \frac{v^2}{2} + e = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \text{Energía tot. part.}}{\Delta m} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \bar{E}_i}{\Delta m}$$

FUERZAS SOBRE FLUIDO

1 FUERZAS DE SUPERFICIE



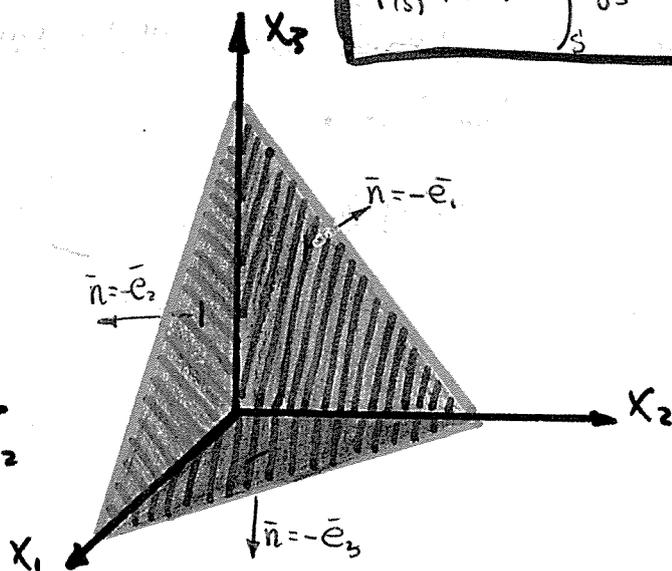
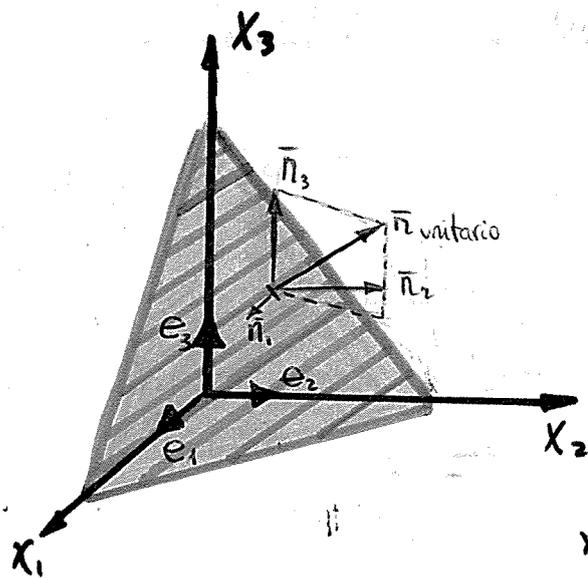
Definimos:

- Fuerzas superficiales: Aquellos que se aplican sobre el contorno (definido por su normal exterior). Ej.: presión
- Fuerzas volumétricas: Su efecto actúa sobre el interior del contorno del cuerpo. Ej.: gravedad

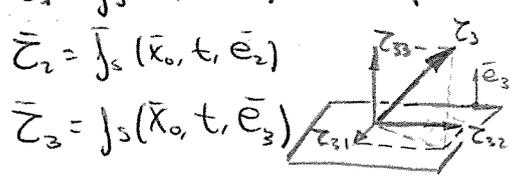
$$\bar{F}_V(\bar{x}, t) = \int_{\text{volumen}} \bar{j}_V(\bar{x}, t) dV \quad ; \quad \bar{F}_S(\bar{x}, t) = \int_{\text{superficie}} \bar{j}_S(\bar{x}, t, \bar{n}) dS$$

Estudiaremos las superficiales en este punto:

$$\bar{F}_{(s)}(\bar{x}, t) = \int_S \bar{j}_S(\bar{x}, t, \bar{n}) dS$$



Por definición: $\bar{c}_1 = \bar{j}_S(\bar{x}_0, t, \bar{e}_1) \equiv$ Fuerza por unidad de sup. normal a un plano de dirección normal \bar{e}_1 .



$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{j}_S(\bar{x}_0, t, -\bar{e}_1) = -\bar{c}_1 \\ \bar{j}_S(\bar{x}_0, t, -\bar{e}_2) = -\bar{c}_2 \\ \bar{j}_S(\bar{x}_0, t, -\bar{e}_3) = -\bar{c}_3 \end{cases}$$

Supongamos el tetraedro formado por los planos de las dos figuras anteriores y una fuerza superficial uniforme

$$\Sigma \bar{F} = m \cdot \bar{a} = \rho \text{Vol} \cdot \bar{a} \quad ; \quad \bar{F}_s = \int_{\text{sup}} \bar{f}_s(\bar{x}, t, \bar{n}) ds$$

$$\int_s ds + (-\bar{c}_1 ds_1) + (-\bar{c}_2 ds_2) + (-\bar{c}_3 ds_3) = 0 (SV)$$

$$\bar{f}_s(\bar{x}, t, \bar{n}) = \bar{c}_1 ds_1 / ds + \bar{c}_2 ds_2 / ds + \bar{c}_3 ds_3 / ds + 0 \cdot \frac{dV}{ds} \Rightarrow$$

Sabiendo que: $\lim_{SV \rightarrow 0} \frac{ds_1}{ds} = \bar{n}_1$; $\lim_{SV \rightarrow 0} \frac{ds_2}{ds} = \bar{n}_2$; $\lim_{SV \rightarrow 0} \frac{ds_3}{ds} = \bar{n}_3$; $\lim_{SV \rightarrow 0} 0 \cdot \frac{dV}{ds} = 0$

Tomamos límite: $\Rightarrow \bar{f}_s(\bar{x}, t, \bar{n}) = \bar{c}_1 \bar{n}_1 + \bar{c}_2 \bar{n}_2 + \bar{c}_3 \bar{n}_3$

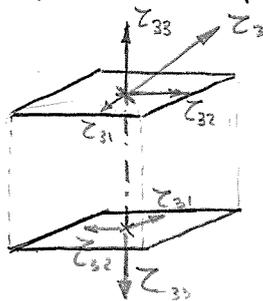
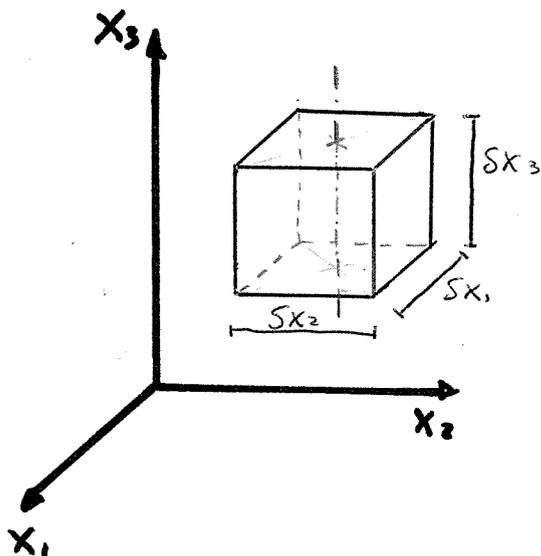
$$\begin{aligned} f_{s1} &= \tau_{11} n_1 + \tau_{21} n_2 + \tau_{31} n_3 \\ f_{s2} &= \tau_{12} n_1 + \tau_{22} n_2 + \tau_{32} n_3 \\ f_{s3} &= \tau_{13} n_1 + \tau_{23} n_2 + \tau_{33} n_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Con τ_{ij} componente en dirección \bar{e}_j de la fuerza por unidad de superficie perpendicular al vector \bar{e}_i (\bar{c}_i)

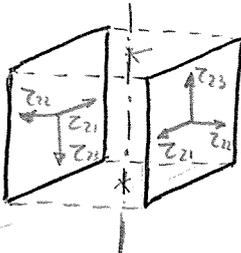
$$\Rightarrow \bar{f}_s(\bar{x}, t, \bar{n}) = \bar{c}(\bar{x}, t) \cdot \bar{n} \quad ; \quad f_{si} = \tau_{1i} n_1 + \tau_{2i} n_2 + \tau_{3i} n_3 = \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} n_j$$

El tensor \bar{c} ha de ser simétrico $\Rightarrow \tau_{ij} = \tau_{ji}$ Demo \rightarrow

Sea el cubo de la figura, queremos saber el momento áxico sobre el eje del cubo de las fuerzas superficiales que actúan en cada cara.



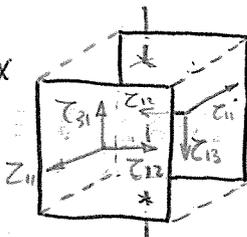
Los momentos son nulos por estar las fuerzas aplicadas en el mismo eje.



Solo dan momento τ_{21} ya que τ_{23} puede contenerse en un plano que contiene al eje y τ_{22} vira al eje

$$\left[\tau_{21} \cdot \delta x_1 \cdot \delta x_3 \cdot \frac{\delta x_2}{2} \right] \cdot 2 - \left[\tau_{12} \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3 \cdot \frac{\delta x_1}{2} \right] \cdot 2 = 0 \delta V \delta x$$

$$\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = \delta V$$

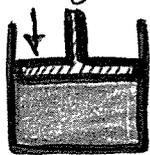


De nuevo, ahora solo da momento τ_{12}

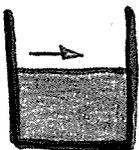
$$\tau_{11} - \tau_{12} = 0 ; \quad \tau_{21} = \tau_{12} \Rightarrow \text{TENSOR SIMÉTRICO}$$

2 PRESIÓN

Un fluido en reposo no aguanta fuerzas cortantes, exclusivamente aguanta fuerzas normales



Reposo



Deformación infinita
NO Reposo

Para fluido en reposo el tensor ha de ser diagonal $\rightarrow \tau_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y además $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p$

Por tanto, un fluido en reposo sólo aguanta la presión como fuerza normal y es:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right.$$

3 FUERZAS VOLUMÉTRICAS

$$\bar{F}_v = \int_{\text{volumen}} \bar{j}_v(\bar{x}, t) dV = \int_{\text{masa}} \bar{j}_m(\bar{x}, t) dm$$

Fuerza volumétrica por unidad de volumen

Fuerza volumétrica por unidad de masa

$$[F_v] = N = \text{kg} \frac{m}{s^2}$$

$$[j_v] = \frac{\text{kg}}{m^2 s^2}$$

$$[j_m] = \frac{m}{s^2}$$

$$\int_V \bar{j}_v dV = \int_m \bar{j}_m dm; \quad \boxed{\bar{j}_v = \rho \bar{j}_m}$$

1) $\bar{j}_m = g \bar{e}_z = -9,81 \bar{e}_z \text{ (m/s}^2\text{)}$

2) INERCIALES $\bar{j}_m = \underbrace{-\bar{\Omega} \wedge (\bar{\Omega} \wedge \bar{x})}_{\text{Fuerza centrífuga}} - \underbrace{2 \bar{\Omega} \wedge \bar{v}}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{\frac{d\bar{\Omega}}{dt} \wedge \bar{x}}_{\text{Vel. angulares variables}}$

4 ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\sum \bar{F} = m \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$\oint_S \bar{z} \cdot \bar{n} ds + \int_V \rho \bar{j}_m dV = m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{Vol}{Vol}$$

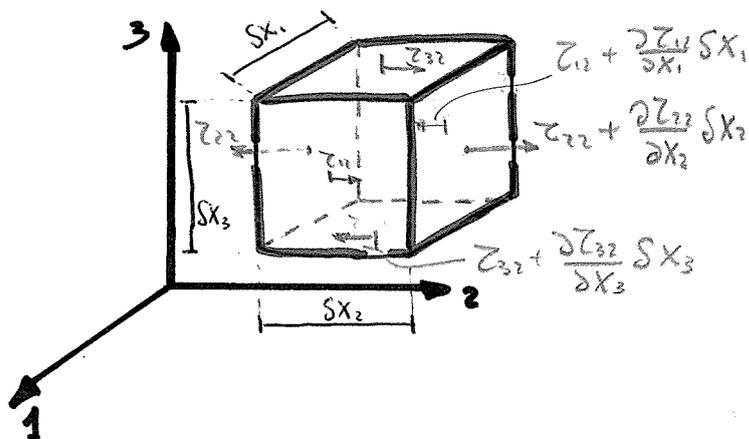
Ostrogradski Gauss $\equiv \int_V \text{div } \bar{z} dV$

Diferenciando

$$\text{div } \bar{z} \delta V + \rho \bar{j}_m \delta V = \rho \frac{d\bar{v}}{dt} \delta V$$

$$\boxed{\text{div } \bar{z} + \rho \bar{j}_m = \rho \frac{d\bar{v}}{dt}}$$

¿cómo calcular la divergencia de un tensor?



Realizo equilibrio de partes de superficie en dirección 2:

$$\begin{aligned} & (\tau_{12} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} \Delta x_1) \Delta x_2 \Delta x_3 - \tau_{12} \Delta x_2 \Delta x_3 + \\ & + (\tau_{22} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} \Delta x_2) \Delta x_1 \Delta x_3 - \tau_{22} \Delta x_1 \Delta x_3 + \\ & + (\tau_{32} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \Delta x_3) \Delta x_1 \Delta x_2 - \tau_{32} \Delta x_1 \Delta x_2 = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right] \delta V = \text{Componente } z^a \text{ de la divergencia}$$

Por tanto: $\rho \frac{dV_1}{dt} = \left[\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right] + \rho f_{m1}$

$\rho \frac{dV_2}{dt} = \left[\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right] + \rho f_{m2}$

$\rho \frac{dV_3}{dt} = \left[\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right] + \rho f_{m3}$

$\rho \frac{dV_i}{dt} = \left[\frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{3i}}{\partial x_3} \right] + \rho f_{mi} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_{mi}$?? SV

→ Ejercicio: Se tiene un elemento de area 1mm^2 cuya normal es paralela al vector $(1,2,3)$. Calcular la fuerza sobre el elemento de area si:

$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 1500$ $\tau_{xz} = \tau_{zx} = -300$ $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 100$

$\tau_{xx} = -101000$ $\tau_{yy} = -103000$ $\tau_{zz} = -100000$

$\vec{F}_s = \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{n} ds = \int \begin{pmatrix} -101000 & 1500 & -300 \\ 1500 & -103000 & 100 \\ -300 & 100 & -100000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} ds =$ \vec{n} unitario!!

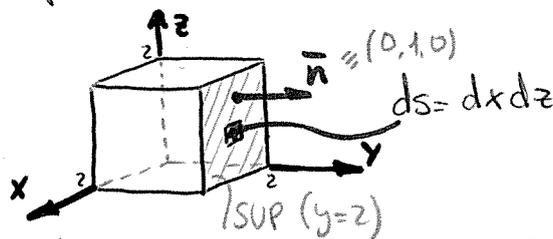
$= \begin{pmatrix} -198900 \\ -204200 \\ -300100 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \int_{\text{Area}} ds = \begin{pmatrix} -0,026 \\ -0,0546 \\ -0,0802 \end{pmatrix} N$
 $1\text{mm}^2 = 10^{-6}\text{m}^2$

¿Podría tratarse de un fluido en reposo?

No, porque el tensor no es diagonal, ni sus elementos de la diagonal son iguales

→ Aplicación al cálculo de la \vec{F}_{sup} sobre la cara de la normal \vec{n} siendo

$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 6x & 2xy & -1 \\ 2xy & y & 3 \\ -1 & 3 & -2z \end{pmatrix}$

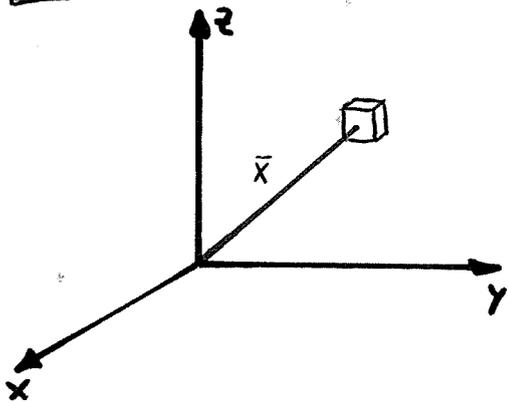


$\vec{F} = \int_{\text{SUP}} \vec{\tau} \cdot \vec{n} ds = \int_{\text{SUP}} \begin{pmatrix} 6x & 2xy & -1 \\ 2xy & y & 3 \\ -1 & 3 & -2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int_0^2 dx \int_0^2 \begin{pmatrix} 4x \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} dz = \int_0^2 \begin{pmatrix} 4xz \\ 2z \\ 3z \end{pmatrix} dx =$

$= \int_0^2 \begin{pmatrix} 8x \\ 4 \\ 6x \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 4x^2 \\ 4x \\ 6x \end{pmatrix} \Big|_0^2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} N$

TERMODINÁMICA

1 EQUILIBRIO TERMODINÁMICO LOCAL



La termodinámica clásica trata sistemas que están en equilibrio térmico y mecánico, para los que todas las propiedades termodinámicas de la materia son uniformes en el espacio y en el tiempo.

Cuando estudiamos mediante leyes de la termodinámica clásica la evolución de un cierto sistema, lo que suponemos es que esa evolución es tan lenta que es como si el sistema estuviera en equilibrio en cada instante. Entre otros resultados de utilidad, la termodinámica establece que podemos caracterizar el estado de un sistema de composición homogénea con sólo dar dos variables de estado independientes.

La mecánica de fluidos, sin embargo, estudia sistemas que no están en equilibrio y cuyas propiedades presentan variaciones espaciales y temporales. Estrictamente hablando los resultados de la termodinámica clásica no serían aplicables pero, afortunadamente, los resultados correspondientes a estados de equilibrio son aproximadamente válidos para la inmensa mayoría de los estados de no-equilibrio que analizamos en mecánica de fluidos. Se acepta por tanto la hipótesis de equilibrio termodinámico local.

2 VARIABLES TERMODINÁMICAS

La hipótesis anterior nos va a permitir describir el estado del fluido mediante: $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ y dos variables termodinámicas, por ejemplo, la energía interna (e)

$$de = Tds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right), \text{ la entalpía } (h) \quad h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$\text{Además, definimos: } C_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad C_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

3 GAS IDEAL O PERFECTO

Un gas perfecto tiene una ecuación de estado de la forma:

$$P \cdot V = n \cdot R_u \cdot T \quad \text{con} \quad R_u = 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 1,987 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$P \cdot V = \frac{m}{P_{\text{molec}}} \cdot R_u \cdot T \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{P}{\rho} = R \cdot T} \quad \text{con} \quad \boxed{R = \frac{R_u}{P_{\text{molec}}}}$$

$R \equiv \text{cte particular de cada gas}$

Valores para el aire: $\underline{P_m = 0,029 \text{ kg/mol}}$; $\boxed{R_{\text{aire}} = \frac{R_u}{P_{\text{m aire}}} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 287 \frac{\text{m}^2}{\text{K} \cdot \text{s}^2}}$

La energía interna y entalpía se determinan a partir de:

$$\boxed{e = c_v T} \quad \text{con} \quad \boxed{c_p = c_v + R}$$

$$\boxed{h = c_p T} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} \Rightarrow \gamma = 1 + \frac{R}{c_v}$$

Valores para el aire $\underline{\gamma_{\text{aire}} \approx 1,4} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} c_v = 717,5 \text{ m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{K} \\ c_p = 1004,5 \text{ m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{K} \end{matrix}}$

NOTA!! Unidades de $1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergios}$

Por último, la entropía se define como:

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad \rightarrow \quad s - s_0 = c_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad \rightarrow \quad s - s_0 = c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

4 LÍQUIDOS PERFECTOS

Un líquido perfecto cumple que su densidad y su calor específico son constantes de manera que podemos escribir:

$$\rho = \rho_0 \quad e = cT \rightarrow h = cT + \frac{P}{\rho_0} \rightarrow s - s_0 = c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

Muchos líquidos se comportan como líquidos perfectos en intervalos razonablemente grandes de presión y temperatura. Por ejemplo, el agua puede suponerse un líquido perfecto de densidad $\rho_{\text{agua}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$c_{\text{agua}} = 4180 \text{ J/kgK}$$

5 COMPRESIBILIDAD DE LÍQUIDOS

Hemos considerado que los líquidos son incompresibles, esto es, no varían su densidad. Sin embargo, la densidad de los líquidos es variable y, para apreciar esta variación necesitamos temperaturas y presiones altísimas.

La expresión cuantitativa que describe esta variación de densidad es:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{\epsilon} (\rho - \rho_0) - \beta (T - T_0)$$

con $\epsilon =$ módulo de elasticidad

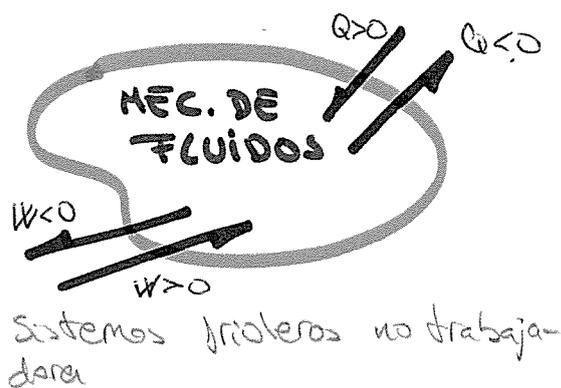
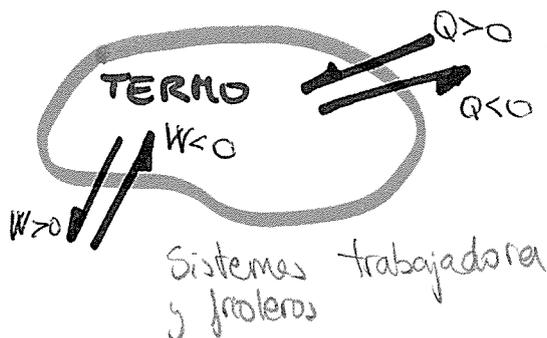
$$\approx 1,96 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$\beta =$ coeficiente de dilatación térmica

$$\approx 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$$

6 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

Para empezar, es importante aclarar que el criterio de signos en esta asignatura es contrario al seguido en termodinámica.



$\Delta E = \Delta W + \Delta Q$; Por tanto, la ecuación de conservación de la energía en su forma integral es:

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{Masa}} \underbrace{\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right)}_{\substack{\text{energía por} \\ \text{unidad masa} \\ \text{J/Kg}}} dV = \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{\text{J/s}} + \underbrace{\int_{\text{S}} \bar{c} \bar{n} \cdot \bar{v} ds}_{\substack{\text{N/m}^2 \cdot \text{m/s} \\ \text{N} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}}}} + \underbrace{\int_V \rho \bar{f}_m \cdot \bar{v} dV}_{\substack{\text{N} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}}}}$$

$\underbrace{\text{J/m}^3}_{\text{J}} \cdot \text{m}^3 = \text{J}$

➔ Se tiene una caja completamente llena de fluido. El conjunto fluido + caja se traslada con una \bar{v} uniforme e igual a 50 m/s. $T_{\text{inicial}} = T_1 = 15^\circ\text{C}$. En un instante determinado se detiene la caja dejando que el fluido repose hasta alcanzar T_2 . Se pide calcular el ΔT del fluido.

- Suponer que durante todo el proceso de frenado del fluido, la caja, y por tanto sus paredes, y el fluido en contacto con los mismos está en reposo. → (1)
- Despreciar el efecto de las fuerzas viscosas → (2)
- Suponer nulo el intercambio de calor con las paredes. → (3)

Aplicamos la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{masa}} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{\text{0 por (3)}} + \underbrace{\int_{\text{sup}} \bar{c} \bar{n} \cdot \bar{v} ds}_{\text{0 por (1)}} + \underbrace{\int_V \rho \bar{f}_m \cdot \bar{v} dV}_{\text{0 por (2)}}$$

- fluido en paredes está en reposo -

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{masa}} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \right) = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) V \right) = 0$$

porque las prop. son uniformes dentro de la caja

$$\frac{d}{dt} \left[M \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] = 0 \quad ; \quad M \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = 0 \quad \rightarrow \quad e + \frac{1}{2} v^2 = \text{cte}$$

cte en el tiempo

Para líquidos: $e = c_v T \Rightarrow c_v T + \frac{1}{2} v^2 = cte \rightarrow c_v T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = c_v T_2 + \frac{1}{2} v_2^2$

$$T_2 = T_1 + \frac{v_1^2}{2c_v} \quad \Delta T = \frac{50^2}{2c_v}$$

Suponiendo fluido agua:

$$c_{\text{agua}} = 4180 \text{ J/kgK} \rightarrow \Delta T_{\text{agua}} = 0,3$$

$$\Rightarrow T_2 (\text{agua}) = 15 + 0,3 = 15,3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Suponiendo fluido aire:

$$c_{\text{aire}} = 217,5 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K} \rightarrow \Delta T_{\text{aire}} = 1,74$$

$$T_2 (\text{aire}) = 15 + 1,74 = 16,74 \text{ } ^\circ\text{C}$$

0
reposo
1261

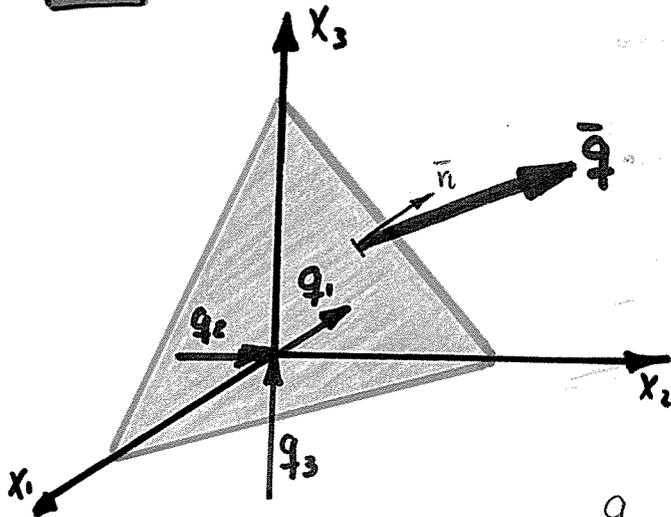
FENÓMENOS DE TRANSPORTE

1 DESCRIPCIÓN

La mecánica de fluidos es la ciencia que estudia el comportamiento mecánico de fluidos en reposo o en movimiento y su efecto en el entorno. Se originan, por el movimiento de partículas, unos fenómenos de transporte que llevan asociados a ellos ciertas irreversibilidades, pues todos implican un aumento de entropía. Estudiaremos 3 tipos de fenómenos:

- Transmisión de calor por conducción (Ley de Fourier)
- Difusión de masa (Ley de Fick)
- Transporte molecular de cantidad de movimiento (Navier)

2 TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN



La dirección del flujo de calor es la del gradiente de temperatura (amb. signo): El calor se transmite de temperaturas altas a bajas.

$$Q_c \text{ (W/s)} = \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} \, ds$$

Fourier establece la ley que sigue la transmisión de calor por conducción:

$$q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

- Suponemos variación lineal a través de una constante K_{ij}
- Suponemos fluido isotrópico, esto es, el calor se transmite por igual en las 3 direcciones.

Como el calor se transmite desde las altas temperaturas a las

bajas: $K_{ij} = -K \delta_{ij}$; con $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & -K \end{pmatrix}; \text{ siendo } K \text{ la conductividad térmica } [K] = \frac{J}{s \cdot K \cdot m}$$

Por tanto:

$$\bar{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x_1} \bar{e}_1 - k \frac{\partial T}{\partial x_2} \bar{e}_2 - k \frac{\partial T}{\partial x_3} \bar{e}_3 = -k \text{grad}(T) = -k \nabla T$$

$$\bar{q} = -k \nabla T$$

Consideraciones: $k_{\text{liquidos}} > k_{\text{gases}}$ Las partículas en el líquido están más juntas y transmiten mejor el calor.

A mayor temperatura, aumenta k ya que al haber más choques de partículas se transmite mejor el calor.

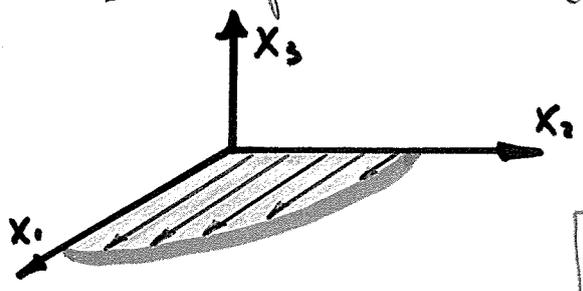
3 TRANSPORTE MOLECULAR DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau'_{ij} \text{ para sistemas en equilibrio.}$$

Más adelante (parte dinámica) veremos que el término τ'_{ij} viene cambiado por la ley de Navier-Poisson de forma que:

$$\tau'_{ij} = \mu \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] + \lambda \text{div} \bar{v} \delta_{ij}$$

→ Caso aplicado:



$$\bar{v} = v_1(x_2) \bar{e}_1$$

$$\tau'_{12} = \mu \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right] + \lambda \text{div} \bar{v} \delta_{12} = \tau'_{21}$$

(no tiene comp en \bar{e}_2)

$$0 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\tau'_{12} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \tau'_{21}$$

$$\frac{1}{s} \quad \frac{kg}{m \cdot s} \quad \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

$\mu \equiv$ Viscosidad

$$\mu_{\text{aire}} = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ Poise}$$

$$\mu_{\text{agua}} = 10^{-2} \text{ Poise}$$

$\mu_{\text{gas}} \ll \mu_{\text{liq}} ; \uparrow T \left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{liq}} \downarrow \\ \mu_{\text{gas}} \uparrow \end{array} \right.$

NOTA!!

$$1 \text{ POISE} = 1 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$$

$$\left[\frac{kg}{m \cdot s} \cdot \frac{1000g}{1kg} \cdot \frac{1m}{100cm} \right]$$

SI = 10 POISE

→ Ejercicio clase: Para un campo de temperaturas dado por

$$T = T_0 \left(\left(\frac{x}{d}\right)^3 - z \left(\frac{y}{d}\right) - \frac{z}{d} \right) \text{ con } T_0 = 15^\circ\text{C}$$

$$d = 20 \text{ cm}$$

Se pide calcular el vector flujo de calor en el origen para un fluido de conductividad térmica constante

$$K = 5 \cdot 10^{-1} \text{ J/mK}\cdot\text{s}$$

Aplicamos la ley de Fourier $\vec{q}(0,0,0) = -K \nabla T$

$$\nabla T = T_0 \left[\frac{3x^2}{d^3} \vec{e}_1 - \frac{z}{d} \vec{e}_2 - \frac{1}{d} \vec{e}_3 \right], \quad \nabla T(0,0,0) = -\frac{2T_0}{d} \vec{e}_2 - \frac{T_0}{d} \vec{e}_3$$

Por tanto

$$\boxed{\vec{q} = \frac{2}{d} T_0 K \vec{e}_2 + K \frac{T_0}{d} \vec{e}_3}$$

Calcular también el calor por unidad de tiempo que atravesaría un elemento diferencial de área de valor $0,1 \text{ mm}^2$ de normal paralela al vector $(1, 1, 3)$ situado en el origen de coordenadas. En la superficie se puede asumir flujo uniforme e igual al valor antes calculado.

$$Q_c = \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} \, ds = \vec{q} \cdot \vec{n} \text{ Area}(S) = \left(0, \frac{2}{d} T_0 K, K \frac{T_0}{d} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \text{Area}(S) =$$

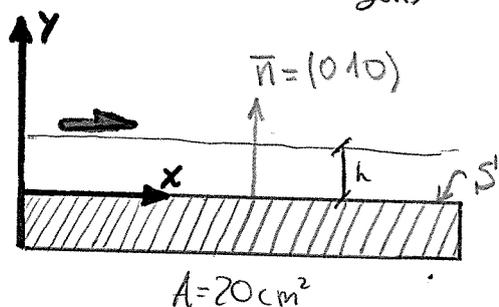
$$= \frac{1}{\sqrt{11}} \left(2 \frac{T_0}{d} K + 3 K \frac{T_0}{d} \right) \text{Area}(S) = K \frac{T_0}{d} \frac{5}{\sqrt{11}} \text{Area}(S) = 5 \cdot 10^{-1} \left(\frac{\text{J}}{\text{mK}\cdot\text{s}} \right) \frac{(15 + 2 \cdot 3) \text{K}}{0,2 \text{ (m)}} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\boxed{Q_c = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ W}}$$

→ Ejercicio clase: se tiene una placa plana de area $20\text{cm}^2 = A$ en reposo colocada en el plano $y=0$. Sobre la placa desliza una película de espesor h de un fluido de viscosidad $1\text{g/cm}\cdot\text{s}$ con una distribución de velocidades tal que:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= u \frac{(2h-z)}{h^2} y \\ v_y &= 0 \\ v_z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{con } u &= 1\text{cm/s} \\ h &= 0.5\text{mm} \end{aligned}$$

Se pide calcular la fuerza ejercida sobre la placa en el origen:



Aplicamos la ecuación de Navier-Poisson:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}' \rightarrow \tau_{ij} = \tau_{ij}'$$

o prece suponemos que a ambos lados de la placa tenemos la misma presión

$$\tau_{ij}' = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \text{div } \vec{v} \delta_{ij}; \quad \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{u}{h^2} (2h - 2y), \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$$

$$\tau_{xy}' = \mu \frac{u}{h^2} (2h - 2y) = \frac{2\mu u}{h^2} (h - y) \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{F}_s = \int_S \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy}' & 0 \\ \tau_{xy}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dS = \iint \underbrace{\tau_{xy}'}_{\substack{\text{solo depende de } y \\ \text{Sale de la integral}}} \vec{e}_1 dx dy = \frac{2\mu u}{h^2} (h - y) \text{Area}(S) \vec{e}_1$$

$$\vec{F}_s(0,0,0) = \frac{2\mu u}{h} A \vec{i} = \frac{1 \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right) 1 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}}\right)}{0.05(\text{cm})} \cdot 20(\text{cm}^2) \vec{i} = 800 \frac{\text{g}\cdot\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1\text{Kg}}{1000\text{g}} \cdot \frac{1\text{m}}{100\text{cm}} \vec{i}$$

$$|\vec{F}_s(0,0,0)| = 8 \cdot 10^{-3} \text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8 \cdot 10^{-3} \text{N}$$

NOTA !! Podríamos comprobar que el esfuerzo cortante es nulo, esto es $\tau_{xy}'|_{y=h} = 0$ $\tau_{xy}'(y=h) = \frac{2\mu u}{h^2} (h-h) = 0 //$

FLUIDOSTÁTICA

Ejercicios que haremos en clase:

- 2, 9, 12, 13, 14, 18, 19, 188, 212, 230, 7, 15

1 ECUACIÓN DE LA FLUIDOESTÁTICA

Partimos de la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f}_m + \text{div} \vec{\tau} = 0$$

0, por fluidoestática. Se toma un sistema de referencia ligado al fluido tal que la velocidad relativa de este sea nula.

$$(\text{div} \vec{\tau})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \Rightarrow \text{div} \vec{\tau} = - \frac{\partial p}{\partial x_1} \vec{e}_1 - \frac{\partial p}{\partial x_2} \vec{e}_2 - \frac{\partial p}{\partial x_3} \vec{e}_3 = -\nabla p$$

Para fluido en reposo: $\tau_{ij} = -p \delta_{ij}$ con $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Por tanto, la ecuación de la fluidoestática queda: $\rho \vec{f}_m - \nabla p = 0$

2 POTENCIAL DE \vec{f}_m

Las fuerzas másicas derivan de potencial, tal que: $\rho \nabla u + \nabla p = 0$

$$\vec{f}_m = -\nabla u = - \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad \text{NOTA!! } \vec{A} = -\nabla B \Rightarrow B \text{ es el potencial del vector de } \vec{A}$$

Potenciales típicos: • Gravitatorio: $\vec{f}_m = -g \vec{k} \rightarrow u = gz$

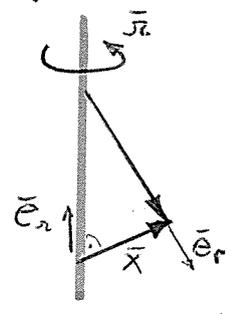
• De inercia

$$a) \vec{f}_m = -\vec{a}_0 = -a_{0x} \vec{i} - a_{0y} \vec{j} - a_{0z} \vec{k}$$

$$\rightarrow u = a_{0x} x + a_{0y} y + a_{0z} z = \vec{a}_0 \cdot \vec{x}$$

b) Coriolis $\vec{f}_m = -2\vec{\omega} \wedge \vec{v}$
 $\vec{f}_m = \vec{0}$ (no hay velocidad relativa)

c) Centrifuga $\vec{f}_m = -\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) = +\Omega^2 r \vec{e}_r \rightarrow \boxed{u = -\frac{\Omega^2 r^2}{2}}$



Si el eje de giro coincide con el eje z

d) Fuerza por giro del sistema de referencia: $\vec{f}_m = -\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{x}$ No lo consideraremos

3 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

POTENCIAL COMPLETO
 $u = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2} + a_0 \bar{x}$

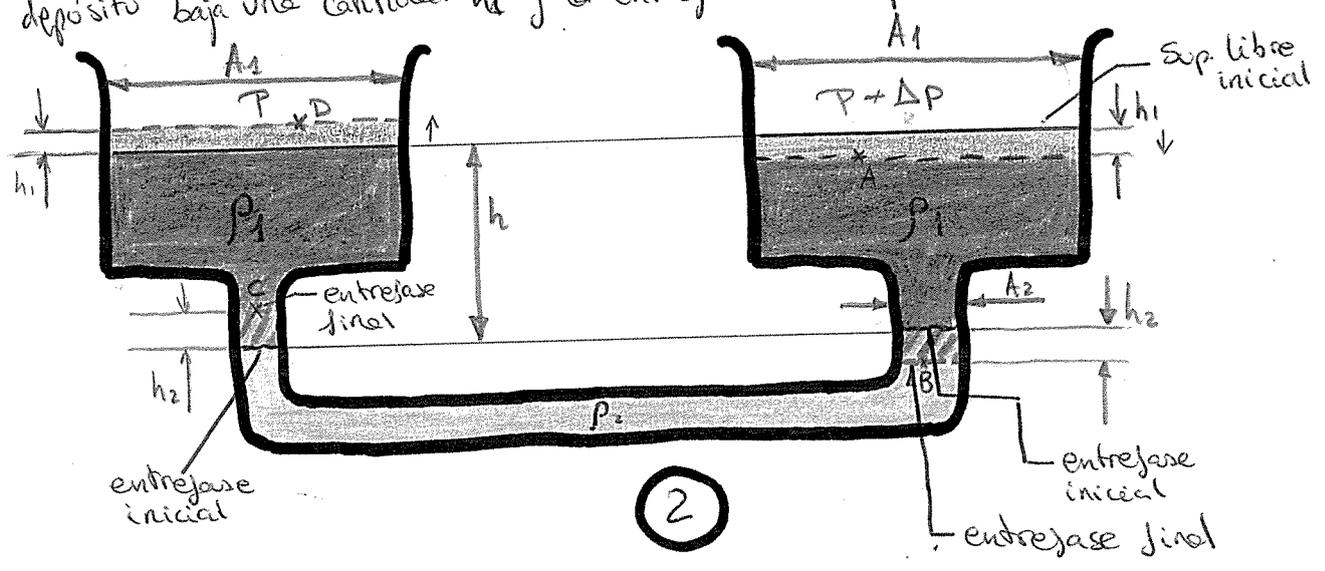
A) Caso $\rho = cte$

Ecuación de la fluidostática: $\rho \nabla u + \nabla p = 0$; $\nabla(\rho u) + \nabla p = 0$;

Suma de gradientes = Gradiente de la suma $\Rightarrow \nabla(\rho u + p) = 0$

$\rho u + p = cte$

13) Se tiene un manómetro de la forma indicada en la figura en el que el depósito superior tiene un área A_1 y el tubo, A_2 . En el equilibrio, los dos líquidos inmiscibles ocupan la posición indicada en la figura, con la interfase a una distancia h de la superficie libre. Si se aplica una sobrepresión Δp en el depósito de la derecha, el nivel de dicho depósito baja una cantidad h_1 y la interfase correspondiente, h_2



a) Se pide calcular h_1 y h_2 como función de los datos anteriores y de las densidades ρ_1, ρ_2 de los líquidos ($\rho_2 > \rho_1$)

• Por conservación de la masa

$$\underbrace{\rho_1 A_1 h_1}_{\text{Vol}} = \rho_2 A_2 h_2 \rightarrow h_1 = \frac{A_2}{A_1} h_2 \quad (*)$$

Masa líquido morado

• Aplico hidrostática entre A y B al líquido 1 (ρ_1) $\rho u + p = cte$
 $u = gz$

$$\underbrace{P + \Delta P}_{P_A} + \rho_1 g (h - h_1) = P_B + \rho_1 g (-h_2) \quad (1)$$

• Aplico hidrostática entre B y C al líquido 2 (ρ_2)

$$P_B + \rho_2 g (-h_2) = P_C + \rho_2 g h_2 \quad (2)$$

• Aplico hidrostática entre C y D al líquido 1 (ρ_1)

$$P_C + \rho_1 g h_2 = \underbrace{P}_{P_D} + \rho_1 g (h + h_1) \quad (3)$$

$$\text{Sumando } (1) + (2) + (3) \rightarrow \begin{cases} P + \Delta P + \rho_1 g (h - h_1) = P_B + \rho_1 g (-h_2) \\ P_B + \rho_2 g (-h_2) = P_C + \rho_2 g h_2 \\ P_C + \rho_1 g h_2 = P + \rho_1 g (h + h_1) \end{cases}$$

$$\Delta P + \rho_1 g (h - h_1) + \rho_2 g (-h_2) + \rho_1 g h_2 = \rho_1 g (-h_2) + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1$$

$$\Delta P = 2\rho_1 g h_1 + 2\rho_2 g h_2 - 2\rho_1 g h_2 = 2\rho_1 g h_1 + (2\rho_2 g - 2\rho_1 g) h_2$$

$$(*) \quad \boxed{h_1 = \frac{\Delta P}{2\rho_1 g + (2\rho_2 g - 2\rho_1 g) \frac{A_1}{A_2}} = \frac{\Delta P}{2g [\rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{A_1}{A_2}]}$$

$$(**) \quad \boxed{h_2 = \frac{\Delta P}{2\rho_1 g \frac{A_2}{A_1} + 2\rho_2 g - 2\rho_1 g} = \frac{\Delta P}{2g [\rho_2 - \rho_1 + \rho_1 \frac{A_2}{A_1}]}$$

b) El objetivo de este manómetro es poder medir los pequeños incrementos de presión con valores altos de h_2 . Manteniendo todos los otros datos constantes, que valor de ρ_2 sería más conveniente para cumplir este objetivo

Queremos $h_2 \uparrow \uparrow$. Podríamos igualar su denominador a cero

de forma que
$$\left. \begin{aligned} & 2g \left[\rho_2 - \rho_1 + \rho_1 \frac{A_2}{A_1} \right] = 0 \\ & \frac{A_2}{A_1} \stackrel{(*)}{=} \frac{h_1}{h_2} \approx 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = \rho_1}$$

\uparrow
 $h_2 \uparrow \uparrow$

De todos modos, si esta fuese la solución habría que tener en cuenta que debe cumplirse $\rho_2 > \rho_1$ para que el líquido 2 se mantenga por debajo del 1

c) En el supuesto de que los dos densidades fuesen iguales, comparar los resultados obtenidos con los que se obtendrían con un manómetro en el que todo el tubo fuese de sección constante $A_1 = A_2$

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow h_2^{\odot} = \frac{\Delta P}{2g \rho_1 \frac{A_2}{A_1}} \xrightarrow{A_1 = A_2} \boxed{h_2^{\odot} = \frac{\Delta P}{2g \rho_1} = h_1^{\odot}}$$

d) Si se quisiese apreciar un $\Delta P = 10^{-4}$ atm, con un valor de $h_2 = 2$ cm, cuánto tendría que valer A_1/A_2 en el supuesto de que $\rho_1 = \rho_2 = 1 \text{ gr/cm}^3$.

$$\rho_2 = \rho_1 \rightarrow h_2 = \frac{\Delta P}{2g \rho_1 \frac{A_2}{A_1}} \Rightarrow 2 \cdot 10^{-2} = \frac{10^{-4} \cdot 10^5 \text{ latm} = 10^{-5} \text{ Pa}}{2 \cdot 10 \cdot 1000 \frac{A_2}{A_1}} \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = 40}$$

B Caso $\rho \neq \text{cte}$

NOTA!! Recordatorio operaciones con operadores diferenciales

$$\text{rot}(A \cdot \vec{B}) = \text{grad } A \wedge \vec{B} + A \text{rot } \vec{B}$$

$$\text{rot}(A \text{ grad } C) = \text{grad } A \wedge \text{grad } C + A \text{rot}(\text{grad } C)$$

$$\text{rot}(\text{grad } C) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} & \frac{\partial C}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{grad } A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{k}; \quad \text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

• Ecuación fluidostática $\rho \nabla u + \nabla p = 0$

$$\text{rot}(\underbrace{\rho \nabla u}_0 + \underbrace{\nabla p}_0) = \text{rot}(\rho \nabla u) + \text{rot}(\nabla p) = \text{grad } \rho \wedge \text{grad } u + \rho \text{rot}(\text{grad } u) = 0$$

Por tanto $\text{grad } \rho \wedge \text{grad } u = 0$

- Caso general $\rho, p, T = f(u) \rightarrow \boxed{\frac{dp}{du} = -\rho}$
 $\rho du + dp = 0$

- Si $u = \text{cte} \rightarrow \rho \nabla u + \nabla p = 0 \rightarrow \nabla p = 0 \rightarrow p = \text{cte}$
 $\text{grad } \rho \wedge \text{grad } u = 0 \rightarrow \nabla p = 0 \rightarrow p = \text{cte}$

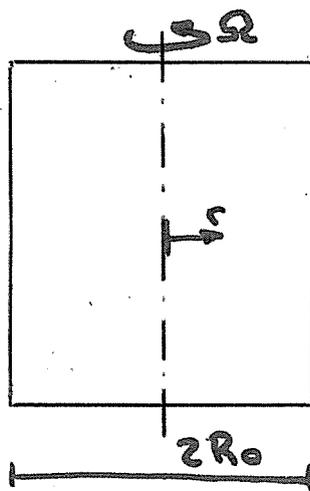
- Siempre consideraremos los gases como ideales $\Rightarrow \frac{p}{\rho} = RT$

Cualquier superficie de potencial constante tiene ρ y p cte

y como $T \uparrow \frac{p}{\rho R} = \text{cte}$
 G.I.

137 Se tiene un depósito cerrado de forma cilíndrica, radio $R_0 = 3\text{m}$ y altura $H = 2\text{m}$ que contiene un gas de peso molecular 352, a una temperatura uniforme $T = 325^\circ\text{C}$, girando todo el conjunto como un sólido rígido a una velocidad angular de $\Omega = 100\text{ rad/s}$.
Suponiendo las fuerzas gravitatorias despreciables, se pide:

1. Demostrar que la presión y la densidad dependen espacialmente sólo de la coordenada radial r .



Para el caso general $\rho \neq \text{cte}$

$$\rho, P, T = f(u)$$

$$\rho du + dp = 0, \quad \frac{dp}{du} = -\rho$$

$$u = -\frac{\Omega^2 r^2}{2} + \cancel{gz} \quad \text{(fuerzas grav despreciables)}$$

↑
Pot centrífugo

$$\rightarrow du = -\Omega^2 r dr$$

Como $\frac{dp}{du} = -\rho$; $dp = \rho \Omega^2 r dr$

$$\frac{dp}{P} = \frac{\Omega^2}{RT} r dr$$

con $\frac{\Omega^2}{RT} = 0,707$

Consideramos el gas ideal: $\frac{P}{\rho} = RT$

$$\frac{d(P/RT)}{P/RT} = \frac{\Omega^2}{RT} r dr, \quad \frac{dp}{\rho} = \frac{\Omega^2 r}{RT} dr$$

2. Calcular las leyes de variación de la presión y densidad con r , supuesta conocida la presión en el eje $P_0 = 1\text{atm}$. En particular, calcular la presión en la periferia.

Integrando:

$$\int_{P(r=0)}^{P(r)} \frac{dP}{P} = \int_{r=0}^r \left(\frac{\Omega^2 r}{RT} \right) dr; \quad \ln \frac{P(r)}{P_0} = \frac{\Omega^2 r^2}{2RT}; \quad \boxed{P(r) = P_0 e^{\frac{\Omega^2 r^2}{2RT}} = P_0 e^{0,707 \frac{r^2}{2}}}$$

$$\boxed{\rho(r) = \rho_0 e^{\frac{\Omega^2 r^2}{2RT}} = \rho_0 e^{0,707 \frac{r^2}{2}}}$$

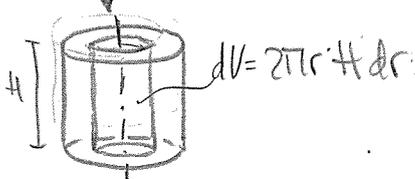
\Rightarrow Con $P_0 = 1\text{atm}$
 $\rho_0 = \frac{P_0}{RT}$

Presión en la periferia $\equiv P(r=R_0) = P_0 e^{0,707 \frac{R_0^2}{2}} = 1 \cdot e^{0,707 \frac{3^2}{2}} = 24,19 \text{ atm}$

3º) Suponiendo que el siso se detiene, llevando el conjunto depósito gas al reposo respecto a tierra, $r=0$, que el proceso es isoterma (manteniéndose la temperatura de 325°C) y que no puede entrar ni salir gas del depósito, calcular la densidad y la presión del gas en esta situación.

Aplicamos conservación de la masa $\Rightarrow M_{antes} = M_{desp}$

$$M_{antes} = \int_0^{R_0} \rho dV = \int_0^{R_0} P_0 e^{0,707 \frac{r^2}{2}} 2\pi r H dr = \frac{P_0}{RT} \pi H 2 \frac{1}{0,707} e^{0,707 \frac{r^2}{2}} \Big|_0^{R_0}$$



$$M_{antes} = \frac{P_0}{RT} \pi H \frac{2}{0,707} \left(e^{0,707 \frac{R_0^2}{2}} - 1 \right) = M_{desp}$$

$$\rho_{desp} = \frac{M_{desp}}{V} = \frac{P_0}{RT} \pi H \frac{2}{0,707} \left(e^{0,707 \frac{R_0^2}{2}} - 1 \right)$$

$$\rho_{desp} = 7,178 \cdot \frac{1}{9} \frac{2}{0,707} \left(e^{0,707 \cdot \frac{3^2}{2}} - 1 \right)$$

$\rho_{desp} = 52,08 \text{ Kg/m}^3$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{P_0}{RT} &= \frac{1 \text{ atm}}{0,082 \text{ atm} \cdot \text{l}} \cdot \frac{1}{(325+273) \text{ K}} \\ &= \frac{1}{0,352 \text{ Kg} \cdot \text{K}} \\ \rho_0 &= 7,178 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{l}} = 7,178 \text{ Kg/m}^3 \\ \frac{\pi H}{V} &= \frac{\pi H}{\pi R_0^2 H} = \frac{1}{R_0^2} = \frac{1}{9} \end{aligned} \right.$$

$$P_{desp} = \rho RT = 52,08 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{0,082 \text{ atm} \cdot \text{l}}{0,352 \text{ Kg} \cdot \text{K}} \cdot (325+273) \text{ K} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ l}}$$

$P_{desp} = 7,26 \text{ atm}$

4º) Calcular la fuerza sobre las tapas A y B, respectivamente superior e inferior del cilindro en los casos anteriores

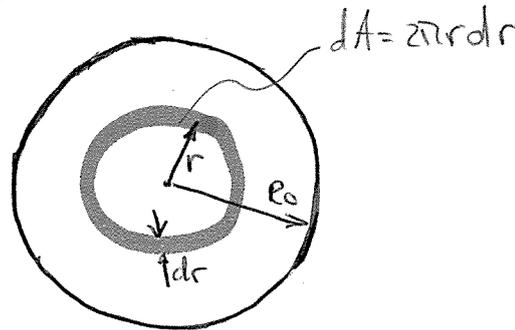
$$\vec{F} = \vec{P} \cdot A \rightarrow F = \int_S P(r) dA$$

$$F = \int_0^{R_0} P_0 e^{\frac{P_0 r^2}{RT}} \frac{r^2}{2} 2\pi r dr =$$

$$= P_0 2\pi \frac{RT}{R^2} e^{\frac{P_0 r^2}{RT}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{R_0} = P_0 2\pi \frac{RT}{R^2} \left(e^{\frac{P_0 R_0^2}{RT}} - 1 \right) =$$

$$= 1 \frac{\text{atm}}{0,707} 2\pi \frac{1}{0,707} \left(e^{0,707 \frac{3^2}{2}} - 1 \right) \cdot 10^5 = \boxed{20,5 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

Como presión solo depende de la coordenada radial



"r" → $F_{\text{TAPA ARRIBA}} = F_{\text{TAPA ABAJO}} = F$

sólo se ha realizado el cálculo para el caso inicial

5º) Indicar si es necesario añadir o extraer energía del depósito para conseguir que la temperatura de los dos casos anteriores sea la misma. Razonar la respuesta, ¿cómo se calcularía esta energía? Dependiendo de la deceleración durante el frenado, discutir si dicha energía sería en forma mecánica o calorífica.

Es necesario extraer energía porque sino, la T durante el movimiento sería mayor que la T cuando el cilindro está parado.

Cálculo de la energía (giro → energía cinética)

$$\int_{vol} \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int \frac{1}{2} \rho (R^2 \dot{\theta}^2) 2\pi r H dr = \int \frac{1}{2} \rho_0 e^{\frac{P_0 r^2}{RT}} R^2 r^3 2\pi H dr$$

Calculando esa integral sacaríamos la energía

Dependencia con la deceleración:

- Frenado brusco

↓
Extraer energía calorífica

- Frenado lento

↓
Extraer energía mecánica

6° Justificar que las fuerzas gravitatorias son despreciables

$$\frac{\int_m g}{\int_m \text{centrif}} = \frac{g}{\Omega^2 r} = \frac{9.8}{(100)^2 \cdot 3} = \frac{1}{3061}$$

⇒ $\int_m \text{centrif} \gg \int_m \text{gravit}$
 Por lo que las fuerzas gravit son despreciables

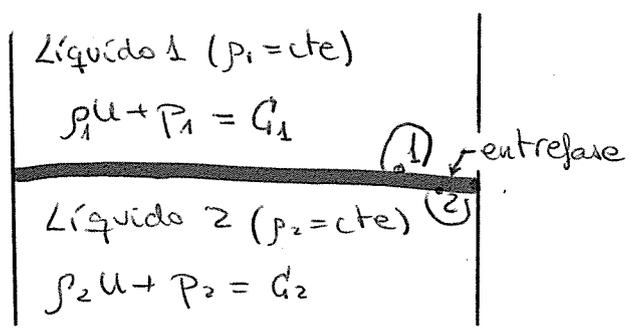
4 SUPERFICIES DE SEPARACIÓN ENTRE FLUIDOS. SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Como ya se ha visto, sólo existe entre fase en los líquidos, pudiendo separar un líquido de un gas, o un líquido de un líquido

↑ Recordatorio!!

- $\rho \nabla \int_m - \nabla p = 0$
- $\left\{ \begin{array}{l} p = \text{cte} \rightarrow \rho u + p = \text{cte} \\ p \neq \text{cte} \rightarrow \frac{dP}{du} = -\rho \end{array} \right.$
- $P, \rho, T = f(u)$

• Líquido 1 - líquido 2 ($\rho_2 > \rho_1$)

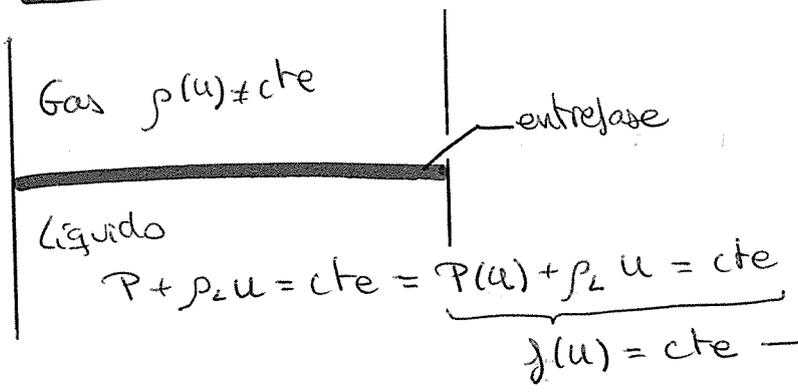


Suponiendo la tensión superficial despreciable $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow (\rho_2 - \rho_1)u = G_2 - G_1 = G'$$

$$u = G' \text{cte}$$

• Líquido ($\rho_2 = \text{cte}$) - Gas ($\rho(u) \neq \text{cte}$)



Por tanto, en la entrefase el potencial es constante e independiente de los fluidos

Análisis de la superficie de separación dependiendo del potencial

(A) Gravitatorio: $U = gz$

$U = cte \rightarrow z = cte$ La interfase es un plano de z constante

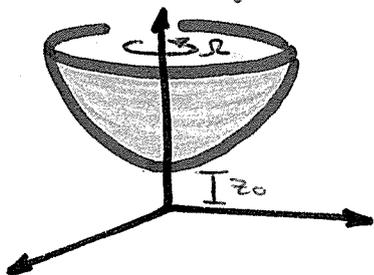
(B) Gravedad + aceleración: $U = gz + a_x x + a_y y + a_z z$

$U = cte \rightarrow a_x x + a_y y + (a_z + g)z = cte$

La interfase es un plano de normal $\vec{a} - \vec{g}$

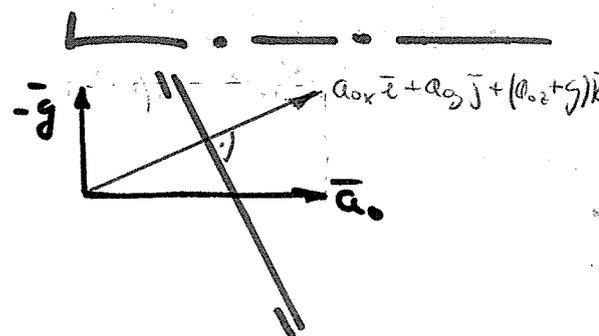
(C) Gravedad + giro: $U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2}$

$U = cte \rightarrow gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = cte \rightarrow z = \left(\frac{cte}{g}\right) + \frac{\Omega^2 (x^2 + y^2)}{2g}$

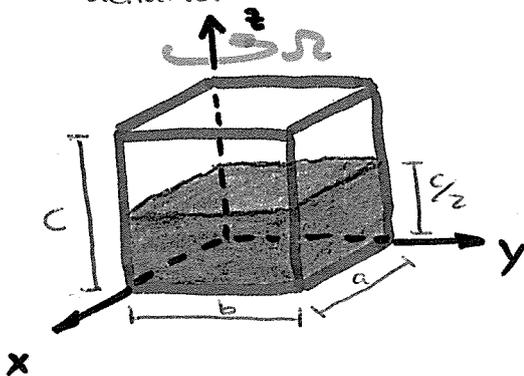


La interfase es un paraboloide de revolución

Recordatorio!!
 Potencial genérico
 $U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \vec{a}_0 \cdot \vec{x}$
 Gravedad Giro Aceleración



2 Un tanque abierto de altura c y dimensiones de la base a y b se encuentra lleno de agua hasta la mitad de su volumen. Se supone en rotación uniforme alrededor de una de sus aristas. Calcular la velocidad angular límite para que no exista derrame.



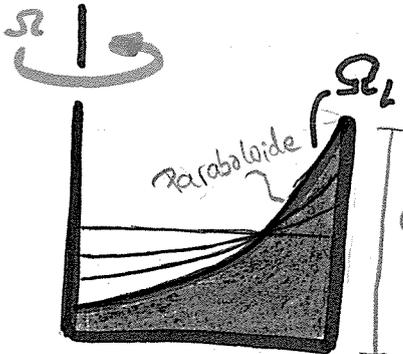
Potencial gravitatorio + giro

$U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = cte$

$z = cte' + \frac{\Omega^2 r^2}{2g} = cte' + \frac{\Omega^2 (x^2 + y^2)}{2g}$

Para que no exista derrame ha de conservarse la masa: $M_{antes} = M_{después}$

Además $\rightarrow z=c$ $\left\{ \begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array} \right. \rightarrow cte' = c - \frac{\omega^2(a^2+b^2)}{2g}$



$$z = c - \frac{\omega^2(a^2+b^2)}{2g} + \frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2g}$$

$$M_{antes} = \rho ab \frac{c}{2}$$

$$M_{después} = \iiint \rho dx dy dz = \rho \iint dx dy \int_0^z dz =$$

$$= \rho \iint z dx dy = \rho \int_0^a dx \int_0^b \left(c - \frac{\omega^2(a^2+b^2)}{2g} + \frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2g} \right) dy =$$

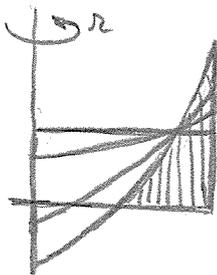
$$= \rho \int_0^a \left(cb - \frac{\omega^2(a^2+b^2)}{2g} b + \frac{\omega^2 x^2}{2g} b + \frac{\omega^2 b^3}{6g} \right) dx = \rho \left(abc - \frac{\omega^2(a^2+b^2)}{2g} ab + \frac{ab^3 \omega^2}{6g} + \frac{\omega^2 ba^3}{6g} \right) =$$

$$= \rho \left(abc - \frac{\omega^2 ab(a^2+b^2)}{2g} + \frac{\omega^2 ab(a^2+b^2)}{6g} \right) = \left(abc - \frac{\omega^2 ab(a^2+b^2)}{3g} \right) \rho$$

$$\Rightarrow \left(abc - \frac{\omega^2 ab(a^2+b^2)}{3g} \right) = abc/2, \quad \omega^2 ab(a^2+b^2) = \frac{abc}{2} 3g$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{3gc}{2(a^2+b^2)}}$$

Cuidado! Podría ocurrir que



$$z(r=0) = c - \frac{\omega^2(a^2+b^2)}{2g} =$$

$$= c - \frac{3gc}{2 \cdot 2g} = c - \frac{3c}{4} = \frac{c}{4} > 0$$

\rightarrow No ocurre!!

5 PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES GENERALIZADO

Ostrogradski-Goursat Fluidostática $\text{div } \vec{c} = -\nabla p$

$$\vec{F}_s = \int_s \vec{n} \cdot \vec{c} \, ds = \iiint_v \text{div } \vec{c} \, dV = - \iiint_v \nabla p \, dV = - \iiint_v \rho \vec{f}_m \, dV$$

En gen fluidostática
 $\vec{f}_m \rho - \nabla p = 0$

$$\vec{F}_s = - \iiint_v \rho \vec{f}_m \, dV$$

"La fuerza que ejerce un fluido sobre una superficie cerrada es igual y opuesta a la que ejercerían las fuerzas másicas del fluido desplazado por el sólido".

"El momento de las fuerzas de superficie respecto a un punto es igual y opuesto al de las fuerzas másicas que actúan sobre el fluido que desplaza ese sólido".

→ Calcular cómo varía la densidad y la presión en la atmósfera

NOTA !! Temperatura en la atmósfera:

- $z < z_1 = 11 \text{ Km} : T = T_0 - \alpha z ; \alpha \approx 6,5^\circ \text{C/Km}$

- $z > z_1 = 11 \text{ Km} : T = T_0 - 11 \alpha = \text{cte}$

• Distinguimos 2 zonas de la atmósfera

ZONA 1: $z < 11 \text{ Km}$
ZONA 2: $z > 11 \text{ Km}$

- Aplico ecuación gas ideal $\frac{p}{\rho} = RT$

- Por tratarse de un gas, la densidad es variable $\frac{dp}{du} = -\rho$

Con $u = gz ; du = g dz \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{\rho g}{RT}$

↑
G.I

ZONA 1: $z < 11 \text{ Km}$ $\rightarrow T = T_0 - \alpha z$, $\alpha = 6.5^\circ\text{C/Km}$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P g}{RT}; \quad \frac{dP}{P} = \frac{-g}{RT} dz = \frac{-g}{R} \frac{dz}{(T_0 - \alpha z)}$$

$$\int_{P(0)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = \frac{-g}{R} \int_0^z \frac{1}{T_0 - \alpha z} dz$$

$$\ln \frac{P(z)}{P(0)} = \frac{-g}{R} \frac{1}{(-\alpha)} \ln \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right); \quad \boxed{\frac{P(z)}{P(z=0)} = \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{g/R\alpha}} \quad (*)$$

$$\frac{P}{RT} = \rho \Rightarrow (*) \cdot \frac{1/RT}{1/RT} \Rightarrow \frac{\frac{P(z)}{RT}}{\frac{P(0)}{RT} \frac{T_0}{T_0}} = \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{g/R\alpha}$$

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \frac{T_0}{(T_0 - \alpha z)} \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{g/R\alpha} \rightarrow \boxed{\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\alpha} - 1}}$$

ZONA 2: $z > 11 \text{ Km}$ $\rightarrow T = \text{cte} = T_1$, $z_1 = 11 \text{ Km} \rightarrow P(z_1) = P_1$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P g}{RT_1}; \quad \frac{dP}{P} = \frac{-g}{RT_1} dz; \quad \int_{P(z_1)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = \frac{-g}{RT_1} \int_{z_1}^z dz; \quad \ln \frac{P}{P_1} = \frac{-g}{RT_1} (z - z_1)$$

$$\boxed{P = P_1 e^{-\frac{g}{RT_1} (z - z_1)}}$$

$$\frac{P}{RT_1} = \rho \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_1}{RT_1} = \rho_1 \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\rho = \rho_1 e^{-\frac{g}{RT_1} (z - z_1)}}$$

9 Un globo de forma esférica de 5m radio está lleno de hidrógeno en las condiciones de presión 1 atm y temperatura $15^\circ\text{C} = 288\text{K}$. Considerando para la atmósfera que la temperatura permanece constante con la altura e igual a 15°C , y que el valor de la gravedad g es constante con la altura e igual a 9.8 m/s^2 , determinar: El peso del lastre adicional si la estructura del globo pesa 3000kg para que dicho globo alcance una altura de 3000 m .

NOTA: Considerar el globo indeformable.

$P.M(\text{Aire}) = 29$ $P.M(\text{H}_2) = 2$

La temperatura del H_2 permanece constante e igual a 288K

Por principio de Arquímedes: Fuerzas místicas del conjunto (globo + hidroj) = Fuerzas místicas del aire desplazado

$$(M_{globo} + M_{astre}) \cdot g + \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho_{H_2} \cdot g = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho_{aire} \cdot g \rightarrow (*)$$

• ρ_{H_2} y ρ_{aire} son densidades de gases por lo que no podemos considerarlas constantes.

Según vimos en el problema anterior, si consideramos la T de la atmosfera constante

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{g}{RT}(z-z_0)} \quad (z \text{ consid. } T = \text{cte desde } z_0)$$

$$\rho_{aire} = \frac{R_u}{PM(Aire)} = \frac{8,314 \frac{J}{mol \cdot K}}{29 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol}} = 287 \left(\frac{J}{kg \cdot K} \right) = 287 \left(\frac{m^2}{s^2 \cdot K} \right)$$

$$\rho_{H_2} = \frac{R_u}{PM(H_2)} = \frac{8,314 \frac{J}{mol \cdot K}}{2 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol}} = 4157 \left(\frac{J}{kg \cdot K} \right) = 4157 \left(\frac{m^2}{s^2 \cdot K} \right)$$

$$\rho_{aire}(z=3000m) = \rho_{aire} e^{-\frac{9,8 \cdot 3000}{287 \cdot 288}} = 0,7 \rho_{aire}$$

NOTA !!

$$\rho_{aire}(z=0) = 1,23 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{H_2}(z=0) = 0,085 \text{ kg/m}^3$$

En el caso del H_2 , este se mantiene a P, T ctes dentro del globo $\rightarrow P, T = \text{cte} \rightarrow \rho = \frac{P}{RT} = \text{cte} = 0,085$

$$\rho_{aire}(3000) = 0,86 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_{H_2}(3000) = 0,085 \text{ kg/m}^3$$

↓
Por gas ideal

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

• Sustituimos valores en (*)

$$300 + M_{astre} + \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 \cdot 0,085 = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 \cdot 0,86$$

$$M_{astre} = 106 \text{ Kg}$$

NOTA !! Observese que conviene saber de memoria cómo varía la presión y la densidad del gas en la atmosfera

$$T = T_0 + \alpha z \neq \text{cte}, \quad \alpha = 6,5^\circ \text{C/km}$$

$$T = \text{cte} \quad \text{con } z_0 \text{ el punto a partir del cual } T = \text{cte}$$

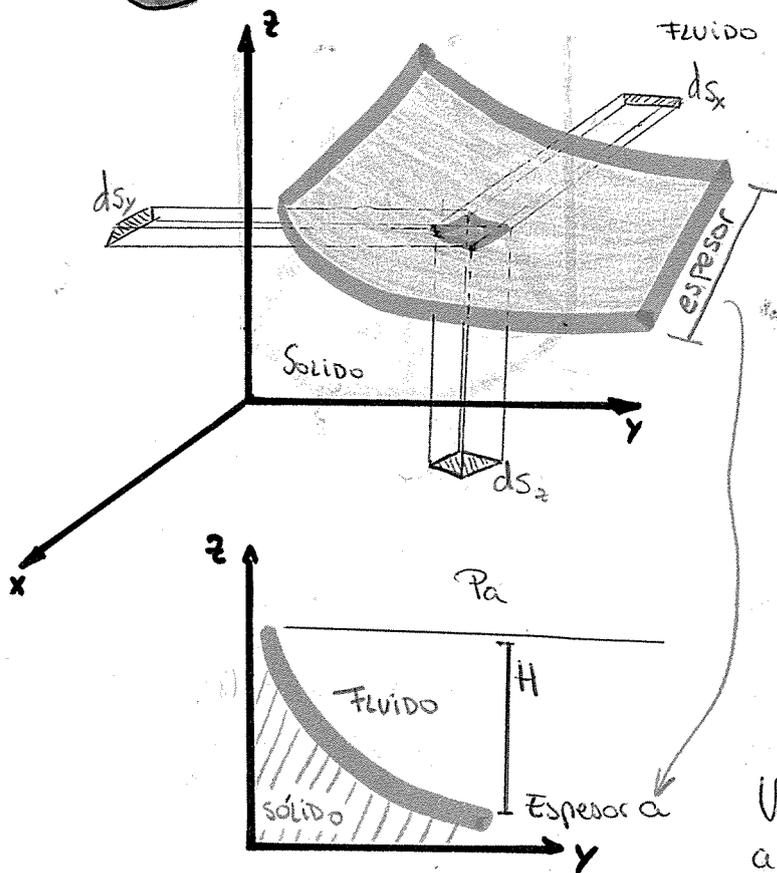
$$\frac{P(z)}{P(z=0)} = \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\alpha}}$$

$$\frac{\rho(z)}{\rho(z=0)} = \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\alpha} - 1}$$

$$P = P(z=z_0) e^{-\frac{g}{RT}(z-z_0)}$$

$$\rho = \rho(z=z_0) e^{-\frac{g}{RT}(z-z_0)}$$

6 HIDROSTÁTICA



$$\vec{F}_s = \int_S \vec{n} \vec{c} ds = - \int_S P \vec{n} ds$$

Pero realmente la fuerza que tenemos que ejercer no viene dada por la presión del fluido sino por la diferencia de presiones

$$\vec{F}_s = - \int_S (P - P_a) \vec{n} ds \Rightarrow \text{Descomponiendo}$$

$$\begin{cases} F_v = - \int (P - P_a) ds_z \\ F_H = \begin{cases} F_x = - \int (P - P_a) ds_x \\ F_y = - \int (P - P_a) ds_y \end{cases} \end{cases}$$

Vamos a considerar una superficie libre a una altura H cuyo valor de presión será la presión atmosférica.

Por hidrostática, con $\rho = cte$: $P + \rho u = cte$

Considerando potencial gravitatorio: $u = gz \rightarrow P + \rho g z = cte$

Por tanto $P + \rho g z = P_a + \rho g H$; $P - P_a = \rho g (H - z)$

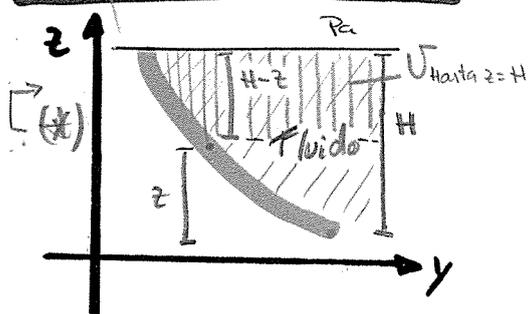
Nos queda por tanto:

$$F_y = - \int \rho g (H - z) ds_y$$

$$F_v = - \int \rho g (H - z) ds_z$$

(*) Si el fluido estuviera debajo solo cambiaría el sentido de las fuerzas, no el módulo

FUERZAS VERTICALES

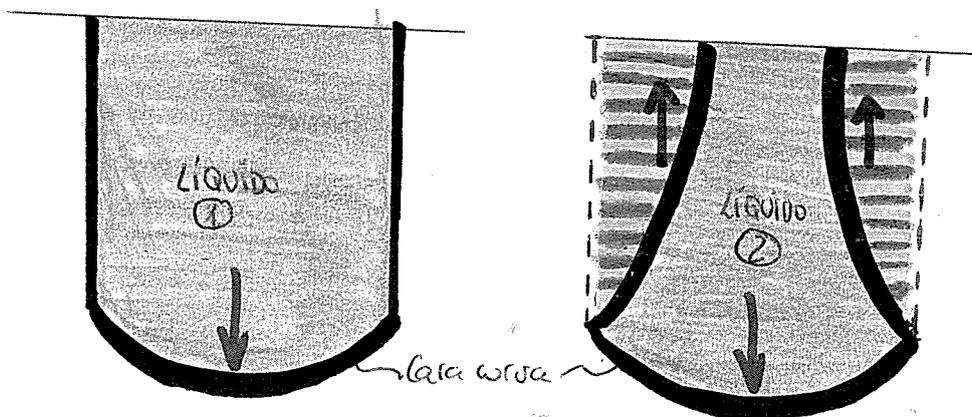


$$F_v = - \int \rho g (H - z) ds_z = - \rho g \int (H - z) ds_z$$

$$F_v = - \rho g U_{\text{hasta } z=H}$$

• Casos paradójicos

Suponemos dos superficies curvas iguales que forman dos depósitos, el 1 y el 2, con líquidos idénticos en cada 1.



El líquido en el depósito ① no debería ejercer mayor fuerza que el líquido en el depósito ②??

$F_{①}(\text{cara curva}) = F_{②}(\text{cara curva})$; sin embargo, en el depósito ② se ejercen unas fuerzas ascendentes sobre las superficies laterales que contrarrestan en parte la fuerza descendente sobre la cara curva

Por tanto $|F_{①}(\text{volumen total})| = \rho g V_{\text{rosa}} - \rho g V_{\text{verde}}$
 $|F_{②}(\text{volumen total})| = \rho g V_{\text{rosa}}$

• Punto de aplicación

Se define como la posición que debería tener una fuerza no distribuida para cumplir el equilibrio de momentos.

A partir de la fuerza vertical puedo calcular la componente x e y del punto de aplicación:

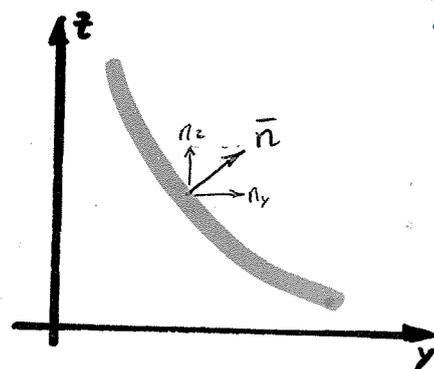
$$x_m F_v = - \int x \rho g (H-z) dS_z ; \quad x_m \rho g V = \rho g \int x \frac{(H-z) dS_z}{dV} ; \quad x_m = \frac{\int x dV}{V}$$

$$y_m F_v = - \int y \rho g (H-z) dS_z ; \quad y_m \rho g V = \rho g \int y \frac{(H-z) dS_z}{dV} ; \quad y_m = \frac{\int y dV}{V}$$

Se demuestra así que el punto de aplicación es el centro geométrico o dentro de gravedad

FUERZAS HORIZONTALES

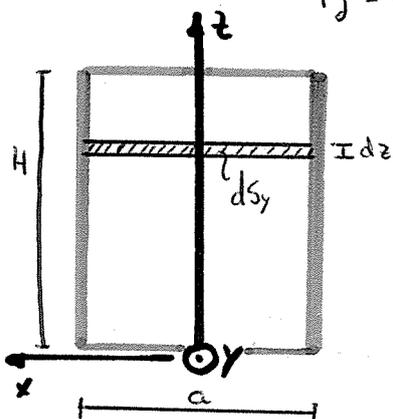
Estudiaremos el caso plano en el que no habrá componente en x de las fuerzas horizontales, por lo que la fuerza lleva la dirección de la normal y no tiene esta componente en x



Por tanto: $F_y = - \int \rho g (H-z) dS_y = - \rho g \int (H-z) dS_y = - \rho g \left[\int H dS_y - \int z dS_y \right]$ ①

$$F_y = - \rho g \left[H \int dS_y - \int z dS_y \right] = - \rho g \left[H S_y - z_{cg, sy} S_y \right] =$$

$$= - \rho g S_y \left[H - z_{cg, sy} \right]$$
 ②



$z_{cg, sy} \cdot S_y$, ya que la componente z del centro de gravedad de la superficie proyectada en la dirección y (S_y) es:

$$z_{cg, sy} = \frac{\int z dS_y}{S_y}$$

$$dx dz \equiv a dz$$

Aplicando la expresión 1 $\rightarrow F_y = - \rho g \int (H-z) dS_y = - \rho g \int_0^H (H-z) a dz =$
 $= - \rho g a \left(H z \Big|_0^H - \frac{z^2}{2} \Big|_0^H \right) = - \rho g a \frac{H^2}{2}$

Aplicando la expresión 2 $\rightarrow F_y = - \rho g S_y \left[H - z_{cg, sy} \right] = - \rho g a H \left[H - \frac{H}{2} \right] =$
 $= - \rho g a \frac{H^2}{2}$

• Punto de aplicación:

$$F_y z_m = - \int \rho g z (H-z) dS_y$$

$$F_y x_m = - \int \rho g x (H-z) dS_y$$

NOTA!! x_m no coincide con x_m de la F_z o fuerza vertical

En resumen:

$$F_y = - \int \rho g (H-z) ds_y = - \rho g (H - z_{cg}) S_y$$

$$z_m F_y = - \int z \rho g (H-z) ds_y$$

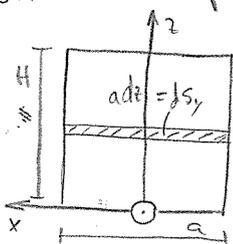
$$x_m F_y = - \int x \rho g (H-z) ds_y$$

Por analogía, para F_x tendríamos

$$F_x = - \int \rho g (H-z) ds_x = - \rho g (H - z_{cg}) S_x$$

$$z_m F_x = - \int z \rho g (H-z) ds_x \quad ; \quad y_m F_x = - \int y \rho g (H-z) ds_x$$

En el caso pintado: $F_y = - \rho g a \frac{H^2}{2}$

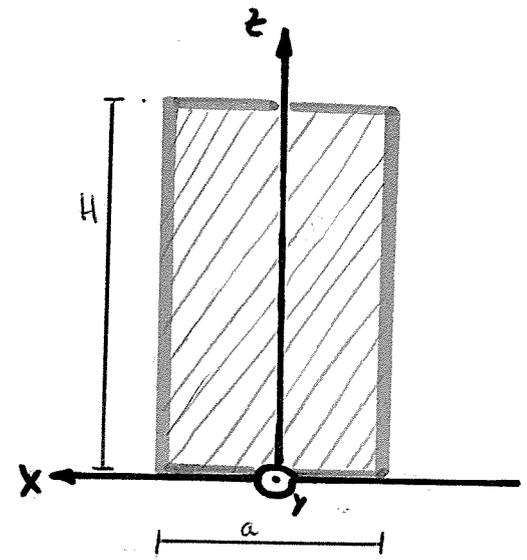
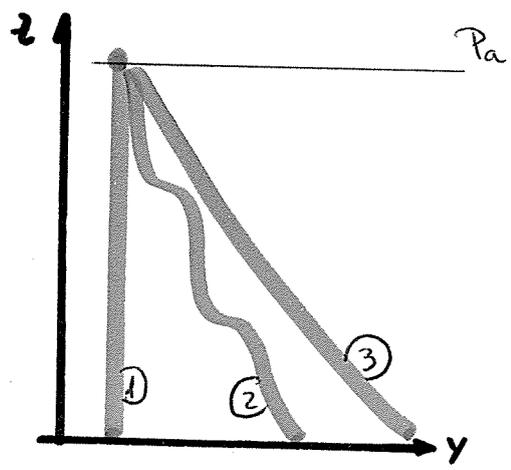


$$x_m = 0$$

$$z_m F_y = \cancel{+ \rho g a} \frac{H^2}{2} \quad z_m = \cancel{+ \rho g} \int_0^H z (H-z) dz$$

$$z_m = \frac{2}{H^2} \left(H \frac{z^2}{2} \Big|_0^H - \frac{z^3}{3} \Big|_0^H \right) = 2 \frac{H}{6} = \frac{H}{3}$$

DIAGRAMAS DE PRESIÓN



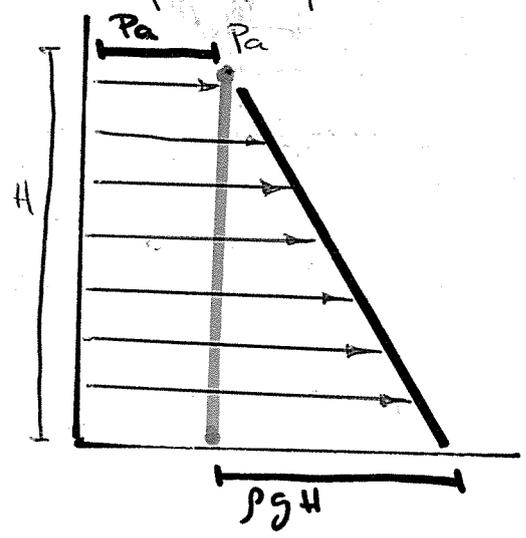
La fuerza horizontal de las superficies ①, ② o ③ es la misma ya que sus proyecciones son iguales.

El diagrama se realiza calculando la presión ejercida sobre la superficie ①

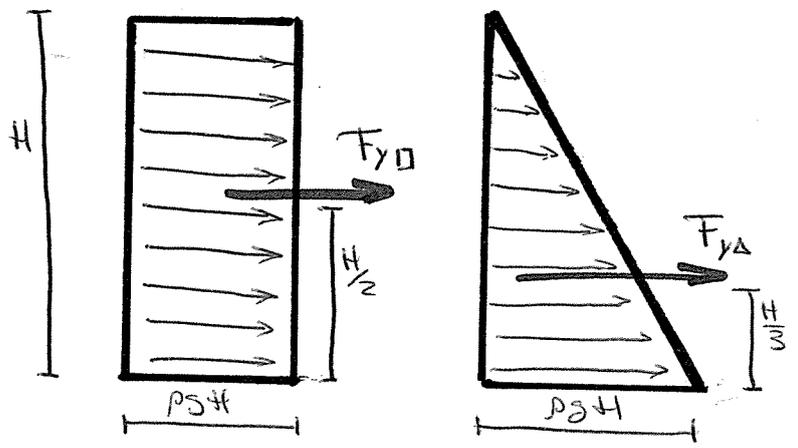
$$P + \rho g z = cte$$

$$P + \rho g z = P_a + \rho g H$$

$$P(z) = P_a + \rho g (H - z)$$



Dividimos el area del diagrama en rectángulos y triángulos.



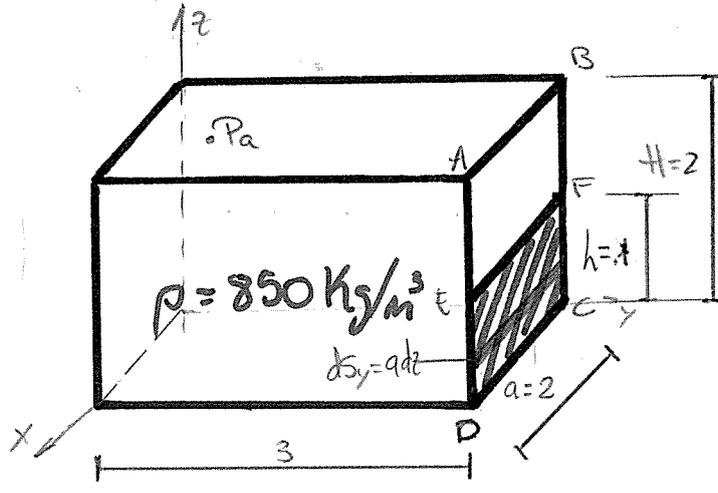
$$S_D = aH$$

$$F_{yD} = \rho g H \cdot aH$$

$$F_{yA} = \frac{1}{2} \rho g H aH$$

7 La figura representa un depósito paralelepípedo de dimensiones 3-2-2 metros, lleno de un líquido de $\rho = 850 \text{ Kg/m}^3$. En la cara ABCD existe una compuerta EFCD que gira alrededor del eje EF. Determinar la fuerza ejercida sobre la compuerta así como su punto de aplicación.

En el caso de que además exista una aceleración vertical hacia arriba de 4 m/s^2 , ver cómo se modificarían los resultados anteriores.
 NOTA: El depósito está abierto a la atmósfera por la parte superior.



• Método 1: Por definición

$$F_y = - \int (P - P_a) ds_y$$

(Fluidostática: $P + \rho g z = P_a + \rho g H$)
 $(P - P_a = \rho g (H - z))$

$$F_y = - \rho g \int_0^h (H - z) a dz = - \rho g a (4h - \frac{h^2}{2})$$

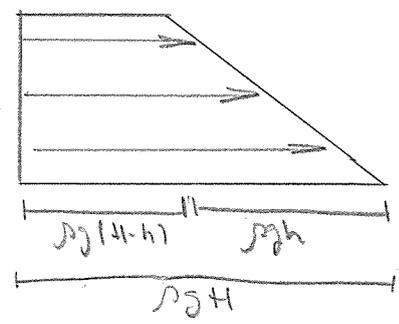
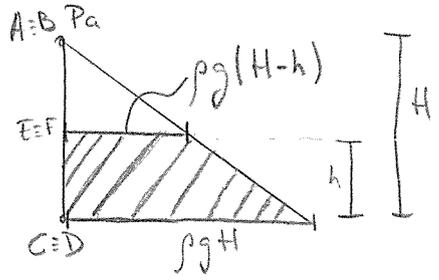
$$F_y = - \rho g a h (H - \frac{h}{2})$$

Para el punto de aplicación habría que aplicar la definición integral

$$F_y z_m = - \int \rho g z (H - z) ds_y \quad ; \quad \frac{1}{a} \rho g a h (H - \frac{h}{2}) \cdot z_m = \frac{1}{a} \rho g a \int_0^h z (H - z) dz$$

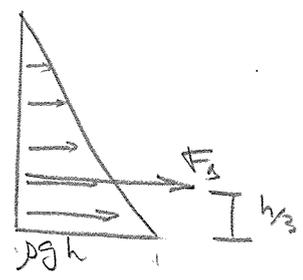
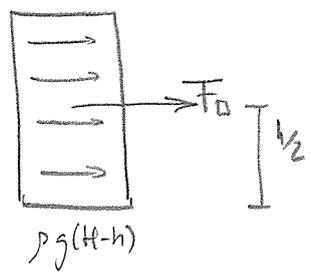
$$z_m = \frac{1}{h(H - \frac{h}{2})} \left(\frac{z^2}{2} H - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^h = \frac{1}{(H - \frac{h}{2})} \left(\frac{h^2}{2} H - \frac{h^3}{3} \right) = 0,4 \text{ m}$$

• Método 2: Diag Presiones: Como nos piden el punto de aplicación, es más sencillo hacer el diag de presiones



$h \cdot ; \quad s_y = a \cdot h$

Dividimos el diagrama:



$$F_0 = \rho g (H-h) \cdot (a \cdot h)$$

$$F_A = \frac{1}{2} \rho g h \cdot (ah)$$

$$\begin{aligned} F_T &= F_0 + F_A = \\ &= \rho g a h \left(H - h + \frac{h}{2} \right) = \\ &= \rho g a h \left(H - \frac{h}{2} \right) \end{aligned}$$

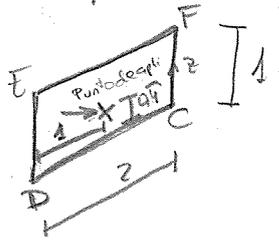
$$F_T = 24990 \text{ N} \text{ hacia la derecha}$$

Punto de aplic: $\frac{h}{2} F_0 + \frac{h}{3} F_A = z_m F_T$

$$\left[ah \rho g (H-h) \right] \frac{h}{2} + \left[\frac{1}{2} ah \rho g h \right] \frac{h}{3} = z_m \rho g ah \left(H - \frac{h}{2} \right); \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = z_m \left(2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$z_m = 0.4 \text{ m}$$

Compuerta

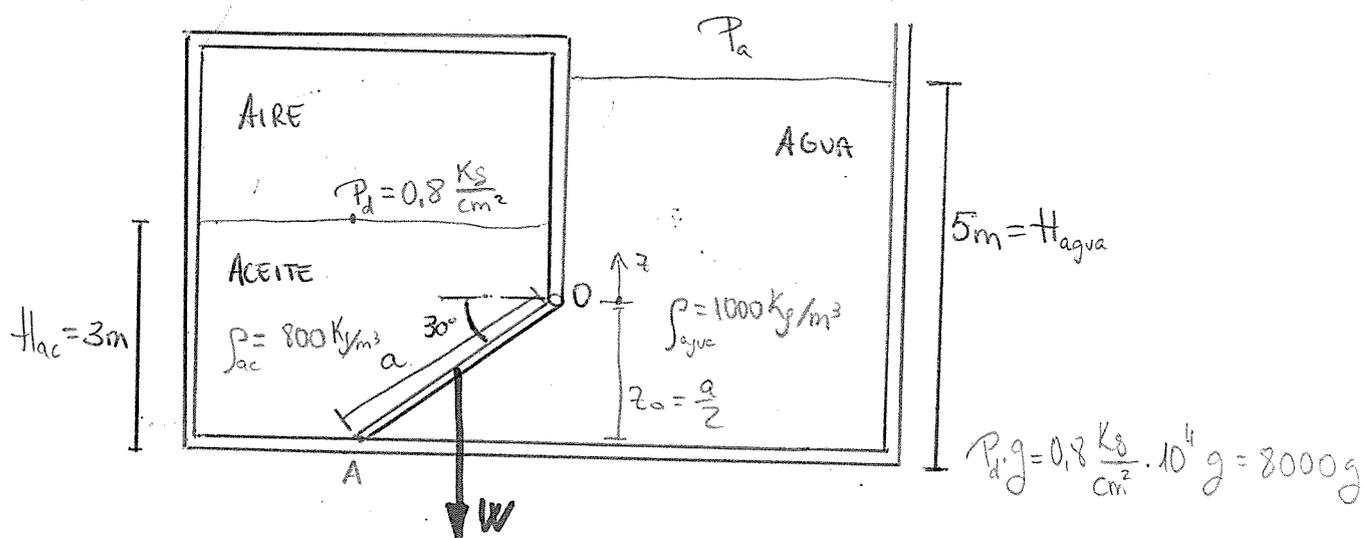


Si tuviéramos una aceleración ascendente

$$U = gz + \underbrace{\bar{a}}_{(0,0,a)}(x,y,z) = z(g+a); \quad P + \rho U = \text{cte}; \quad P + z(g+a)\rho = \text{cte}$$

Por tanto $F_D = -\rho a h (g+a) \left(H - \frac{h}{2} \right) = 35190 \text{ N}$

- 12 La compuerta de la figura es cuadrada de 2m de lado y está inclinada 30° respecto a la horizontal, pudiendo girar alrededor del eje O, situado en el lado más alto de la compuerta. El fluido de la izquierda es aceite de densidad relativa $S=0,8$ y el de la derecha es agua, $S=1$. Sobre la superficie del aceite actúa aire a una presión absoluta de $0,8 \text{ Kg/cm}^2$, mientras que sobre la superficie del agua el aire está a presión atmosférica. Determinar el peso total que he de actuar en el centro de la compuerta para que la misma esté en equilibrio.



Aplicamos Hidroestática: $P + \rho g z = \text{cte}$

$$\text{ACEITE: } P + \rho_{ac} g \cdot z = P_d + \rho_{ac} g \cdot (H_{ac} - z_0)$$

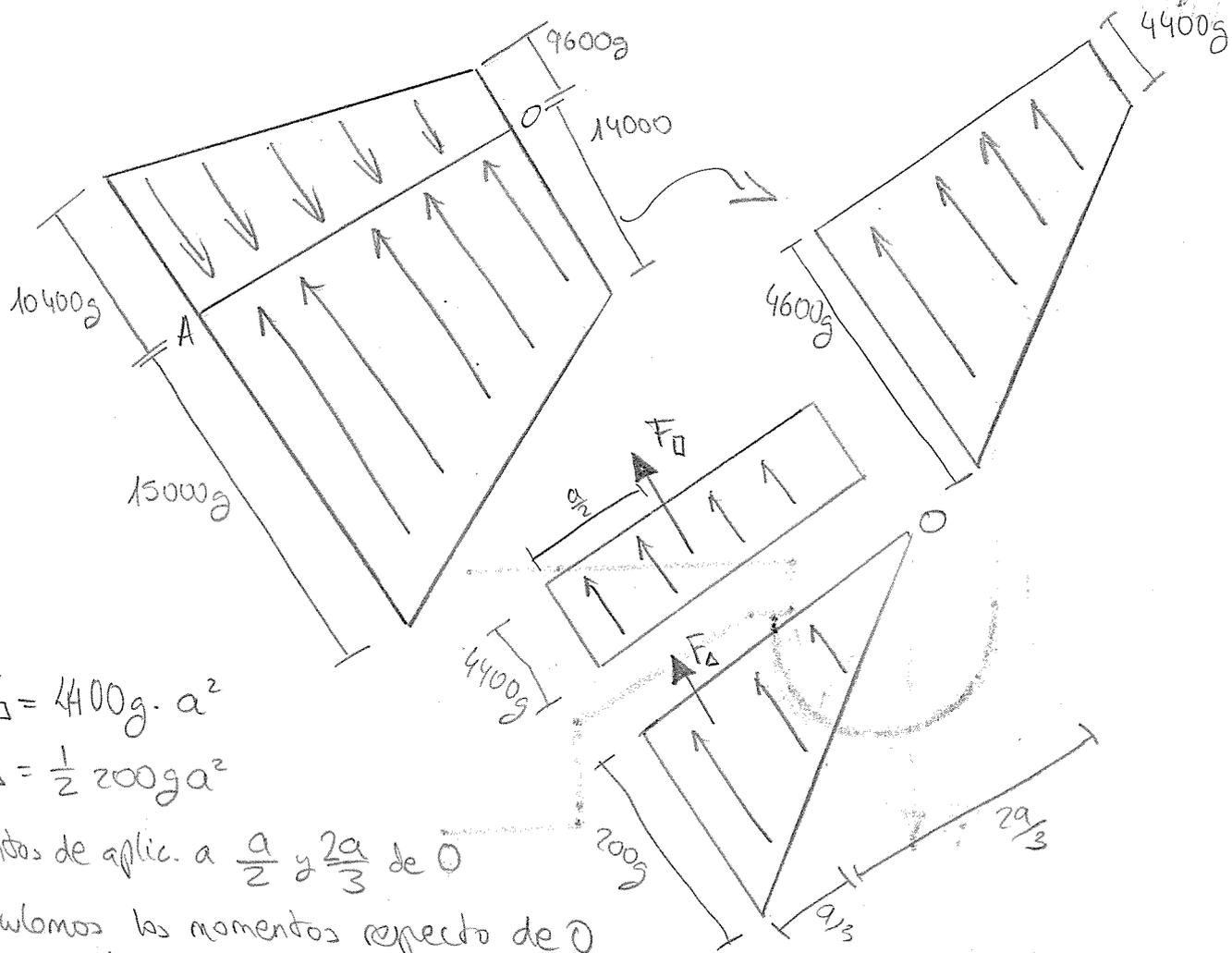
$$P_0 = P_d + \rho_{ac} g \left(H_{ac} - \frac{a}{2} \right) = 8000g + 1600g = 9600g$$

$$P_A + \rho_{ac} g \left(\frac{a}{2} \right) = P_d + \rho_{ac} g \left(H_{ac} - \frac{a}{2} \right) = 8000g + 2400g = 10400g$$

$$\text{AGUA: } P + \rho_{agua} g z = P_a + \rho_{agua} g (H_{agua} - z_0)$$

$$P_0 = P_a + \rho_{agua} g \left(H_{agua} - \frac{a}{2} \right) = 14000g$$

$$P_A = P_a + \rho_{agua} g H_{agua} = 15000g$$

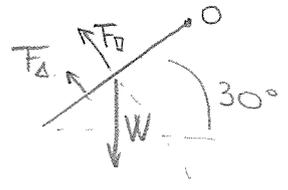


$$F_0 = 4400g \cdot a^2$$

$$F_\Delta = \frac{1}{2} 2000g a^2$$

Puntos de aplic. a $\frac{a}{2}$ y $\frac{2a}{3}$ de O

Calculamos los momentos respecto de O que, para equilibrio, han de anularse:

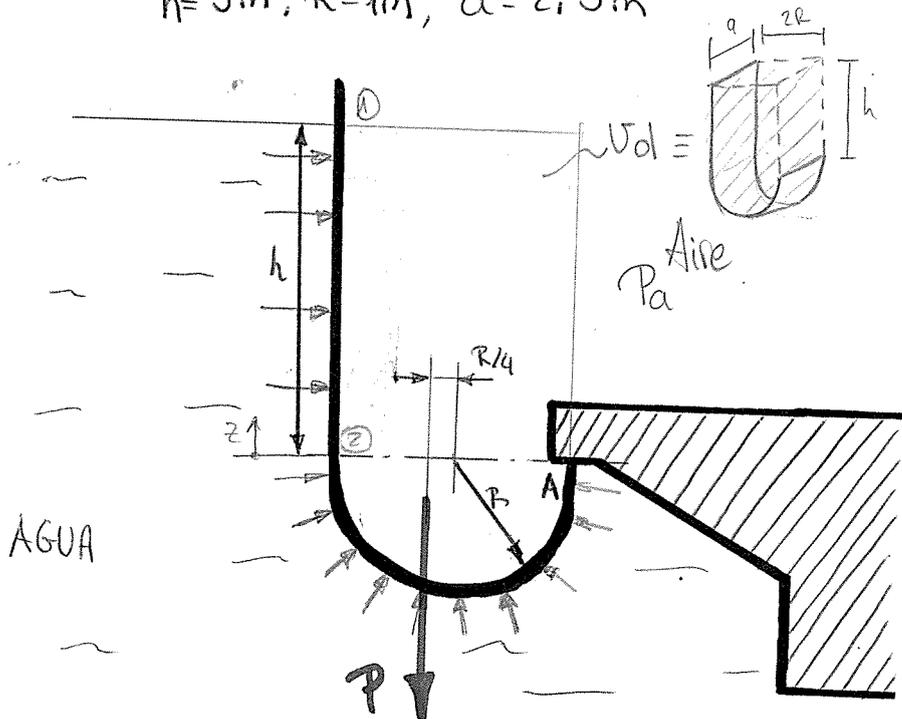


$$Wg \cos 30^\circ \cdot \frac{a}{2} - F_0 \cdot \frac{a}{2} - F_\Delta \frac{2a}{3} = 0$$

$$W = \frac{4400 a^2 / 2 + 1000 a^2 / 3}{\sqrt{3}/2 \cdot \frac{1}{2}} = 20938 \text{ Kg}$$

14 Calcular el peso de la compuerta en el supuesto de que está en equilibrio y que puede girar sin rozamiento alrededor de A

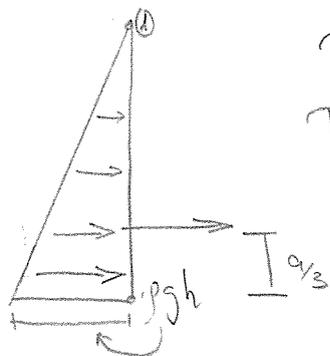
$h = 5\text{ m}, R = 1\text{ m}, a = 2.5\text{ m}$



No podemos aplicar diagrama de presiones por la superficie el agua
 Cálculo fuerzas verticales

$$F_v = \rho g V_{ol} = \rho g (2Rh + \frac{\pi R^2}{2} \cdot a)$$

Las fuerzas horizontales en la compuerta se anulan quedando sólo la pared plana, en lo que puedo aplicar el diagrama de presiones

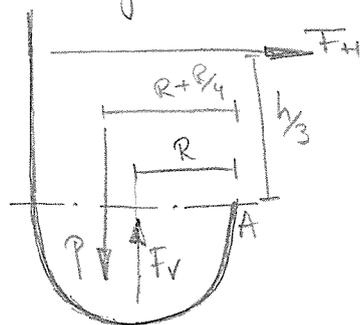


$$P + \rho g z = cte ; P_a + \rho g h = P + \rho g z$$

$$P - P_a = \rho g (h - z) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{①: } P - P_a = 0 \\ \text{②: } P - P_a = \rho g h \end{array} \right.$$

$$F_H = \frac{1}{2} \rho g h (ah)$$

Diagrama de fuerzas



Cálculo equilibrio de momentos en A:

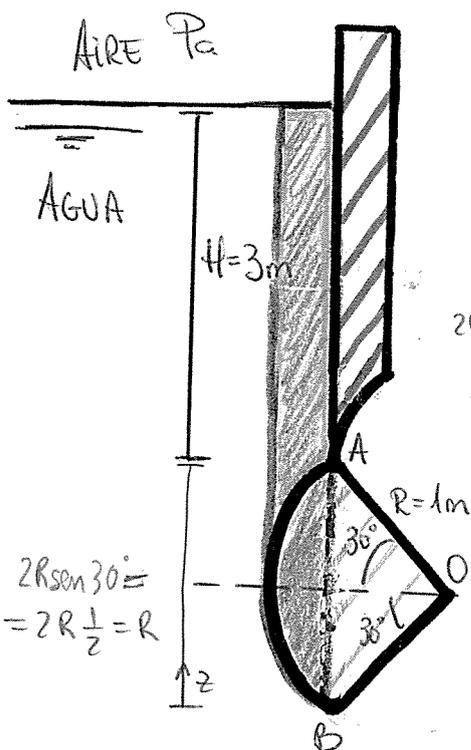
$$P g (R + \frac{R}{4}) - F_H \frac{h}{3} - F_v \cdot R = 0$$

$$P g (1 + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} 1000 \cdot \frac{5^2 \cdot 2.5}{3} - 1000 \cdot \frac{1}{2} (2.5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 + \frac{\pi 1^2}{2} \cdot 2.5) = 0$$

$$P = 64808 \text{ Kg}$$

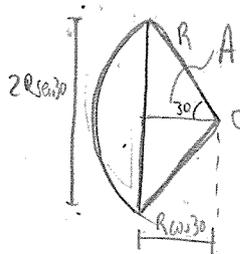
230 Se tiene una compuerta bidimensional AB con sección transversal en forma de arco circular como lo indicado en la figura, y que en dirección normal al papel mantiene su forma y tiene un ancho $b = 2\text{ m}$. La compuerta tiene un radio $R = 1\text{ m}$, abarca un ángulo de 60° y en su parte izquierda contiene agua, de manera que su punto superior A está a una distancia $H = 3\text{ m}$ de la superficie libre. La compuerta puede girar alrededor de un eje situado en el centro de curvatura, O, del arco circular. Se pide

- 1) Calcular las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre la compuerta
- 2) ¿Qué ventaja tiene el colocar el eje de giro de la compuerta en O? ¿Cuánto valdría el momento de la fuerza resultante respecto del eje de giro?
- 3) Calcular las líneas de actuación de cada una de las componentes vertical y horizontal de la fuerza, pudiendo utilizar para ello el resultado del apartado anterior.



1. Cálculo de la F_{vertical}

$$F_v = \rho g V_{\text{RODA}} - \rho g V_{\text{AZUL}} = \rho g V_A$$



$$A_0 = A_{\text{Sec. circ}} - A_T = \pi R^2 \frac{60}{360} - \frac{1}{2} (2R \sin 30) \cdot R \cos 30$$

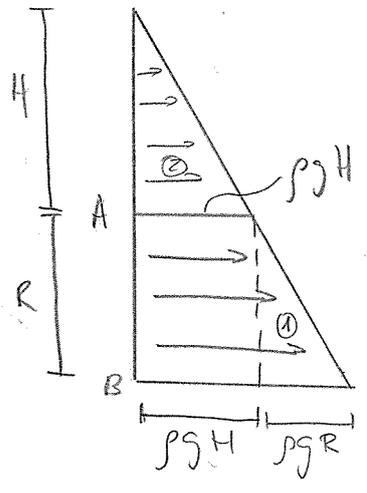
$$A_0 = \frac{\pi R^2}{6} - R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Por tanto: } \boxed{F_v = \rho g b \left(\frac{\pi R^2}{6} - R^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 1775 \text{ N}}$$

• Cálculo de la $F_{\text{horizontal}}$: Podemos aplicar diagrama de presiones

$$P + \rho g z = \text{cte} \rightarrow P + \rho g z = P_a + \rho g (H + R)$$

$A (z=R) \rightarrow P_A + \rho g R = P_a + \rho g (H+R); P_A - P_a = \rho g H$
 $B (z=0) \rightarrow P_B = P_a + \rho g (H+R); P_B - P_a = \rho g (H+R)$



$F_D = \rho g H \cdot (R \cdot b)$

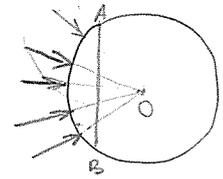
$F_A^1 = \frac{1}{2} \rho g R (R \cdot b)$

$F_A^2 = \frac{1}{2} \rho g H (H \cdot b) \rightarrow$ sólo nos piden las fuerzas sobre la compuerta así que F_A^2 no se contabilizará

Por tanto:

$F_H = \rho g R b (H + \frac{R}{2}) = 68600 N$

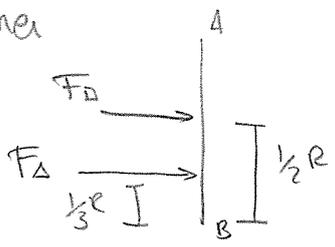
2) La ventaja que tiene colocar el eje de giro en 'O' es que se facilita la apertura y cierre de la compuerta siendo en momento de la fuerza resultante en O, nulo $M_O = 0$



Las fuerzas sobre la sup circular pasan por O \rightarrow Dan momento nulo

3) Puntos de aplicación

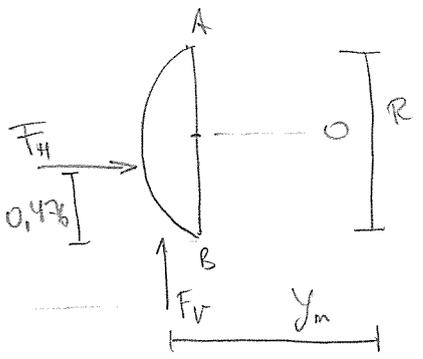
Para la fuerza horizontal es sencillo porque tenemos el diagrama de presiones



$F_D \frac{1}{2} + F_A \frac{1}{3} = F_T z_m$

$z_m = 0,476$ distancia al punto B

Para las fuerzas verticales aplicamos $M_O = 0$



$F_H (\frac{R}{2} - 0,476) - F_V y_m = 0$

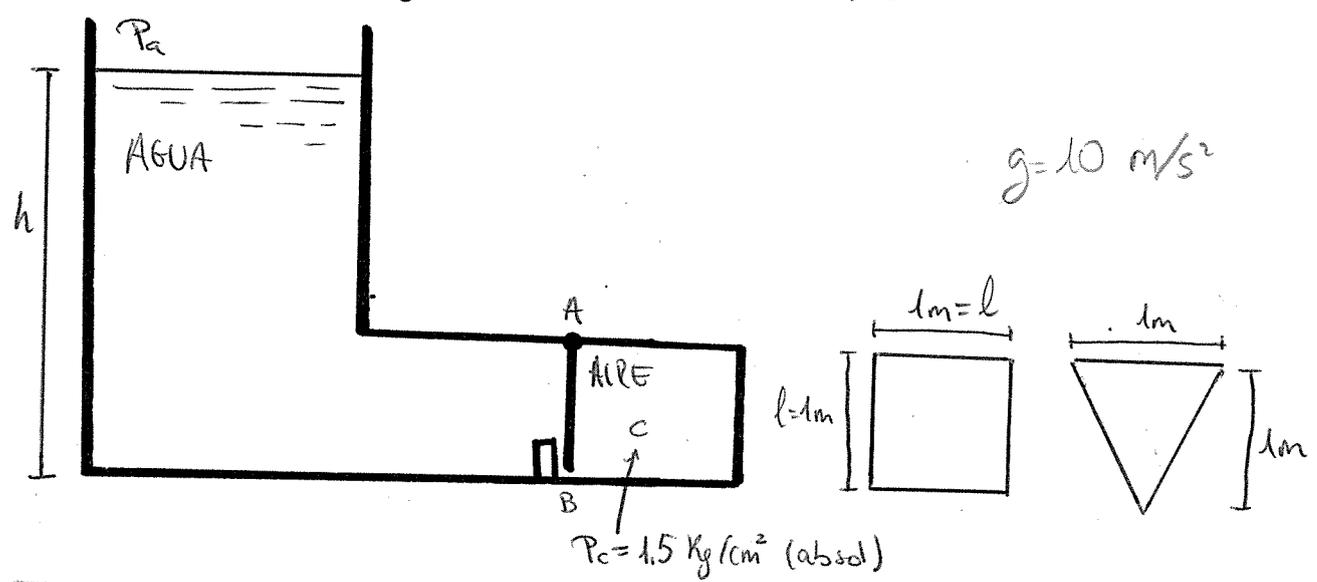
$\frac{4900}{3} - 1775 y_m = 0$

$y_m = 0,92 m$ distancia al punto O

212 Se tiene la compuerta de la figura que puede girar alrededor de la bisagra A, impidiendo el flujo B que lo haga en sentido contrario. En el depósito C hay una presión manométrica de $0,5 \text{ kg/cm}^2$ que mantiene la compuerta cerrada equilibrando la presión del agua al otro lado de la misma. Se pide la altura h del agua necesaria para que se abra la compuerta en los casos siguientes:

- a) Compuerta cuadrada de 1m de lado
- b) Compuerta con forma de triángulo isósceles de 1m de base y 1m de altura.

NOTA: El centro de gravedad de un triángulo está a distancia de la base igual a $\frac{1}{3}$ de la altura. El momento de inercia de un triángulo referido al centro de gravedad es $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}^3}{36}$

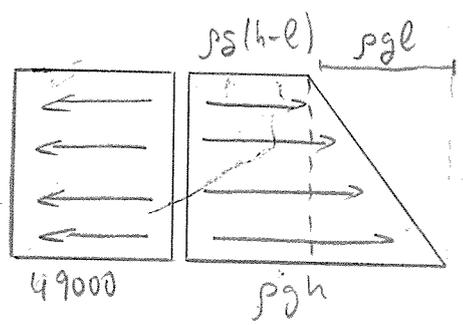
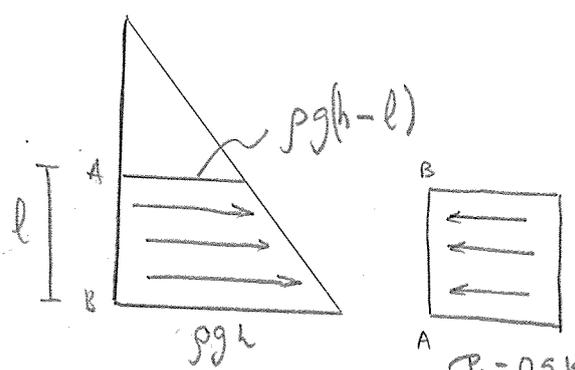


a) Aplico diagrama de presión (expresión cte)

$$P + \rho g z = \text{cte} \quad P + \rho g z = P_a + \rho g h$$

A $\rightarrow z = l: P_A + \rho g l = P_a + \rho g h$

B $\rightarrow z = 0: P_B = P_a + \rho g h$



$$F_{\text{aire}} = 50000 \text{ l}^2$$

$$F_B = \rho g h \cdot l^2 \text{ (aplic a } \frac{l}{2} \text{ respecto de A)}$$

$$F_A = \frac{1}{2} \rho g l \cdot l^2 \text{ (aplic a } \frac{2l}{3} \text{ " " A)}$$

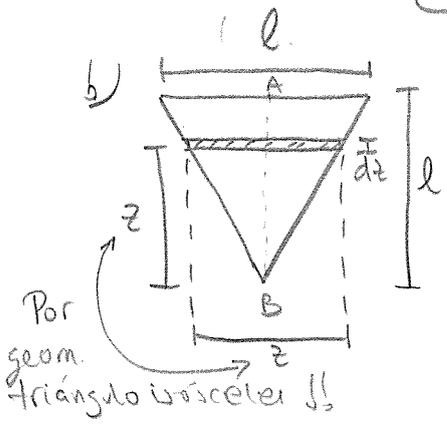
$$P_c = 0,5 \text{ kg/cm}^2 = 0,5 \cdot 10 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Para que la compuerta no se abra: $M_A = 0$ $1000 \frac{10}{2}$

$$F_{\text{aire}} \frac{l}{2} = F_D \frac{l}{2} + F_A \frac{2l}{3}; 50000 \frac{l}{2} = \rho g (h-l) l^2 \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \rho g l^3 \frac{2l}{3}$$

$$25000 = 5000(h-l) + \frac{10000}{3}; h = \frac{25000 - \frac{10000}{3}}{5000} + l$$

$$h = 5.33 \text{ m}$$



No podemos aplicar diagrama de presiones ya que el espesor de la compuerta no es constante

Por hidrostática: $p = \rho g z = \text{cte} = P_a + \rho g h$

$P(z) = P_a + \rho g (h-z)$ (del lado del agua) sentido contrario
 $P(z) = P_c$ (del lado del aire)

$$\Rightarrow P(z) = P_a + \rho g (h-z) - P_c^{\text{absol}}$$

$$dF = (P_a + \rho g (h-z) - P_c^{\text{absol}}) dS; \text{ con } dS = z dz$$

Anulamos el momento:

$$M = \int_{z=0}^{z=l} \underbrace{(l-z)}_{\text{brazo}} dF = \int_0^l (l-z) (P_a - P_c^{\text{absol}} + \rho g (h-z)) z dz = 0$$

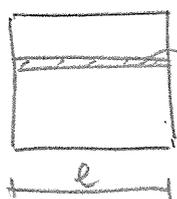
$$\int_0^l (1-z) [-5000 + 10000(h-z)] z dz = 0$$

$$\int_0^l (1-5z + hz - z^2 + 5z^2 - hz^2 + z^3) dz = 0$$

$$\left(-5 \frac{z^2}{2} + h \frac{z^2}{2} + \frac{4z^3}{3} - h \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^l = 0; l=1$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) h = \frac{5}{2} - \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \rightarrow h = 5.5 \text{ m}$$

Si no hubieramos aplicado diagrama de presiones en el caso a)



$$M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^l (l-z) (P_a - P_c + \rho g (h-z)) l dz = 0, \quad l=1$$

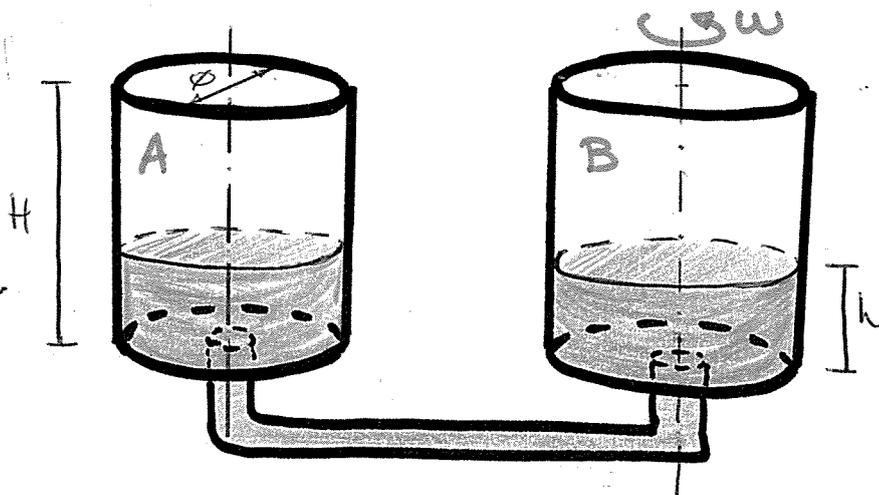
$$\int_0^l (P_a - P_c + \rho g (h-z) - P_a z + P_c z - \rho g h z + \rho g z^2) dz =$$

$$= P_a - P_c + \rho g h - \rho g \frac{1}{2} - P_a \frac{1}{2} + P_c \frac{1}{2} - \rho g h \frac{1}{2} + \rho g \frac{1}{3} = 0$$

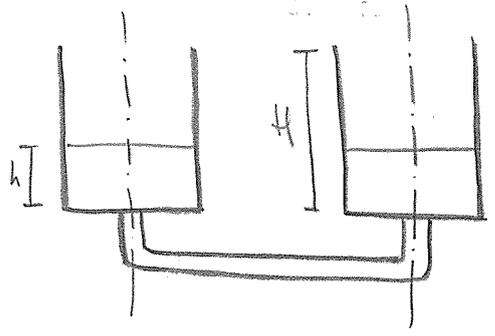
$$h = \frac{\frac{80000}{3} - \frac{75400}{10000} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{5.3 \text{ m}}$$

- 15) Dos depósitos abiertos, cilíndricos, de eje vertical A y B de $\phi = 1 \text{ m}$ y $H = 2.5 \text{ m}$ están llenos de agua hasta una altura $h = 1 \text{ m}$. Se encuentran comunicados por un tubo que une los centros de sus bases inferiores. En un instante dado el depósito B gira con una velocidad angular constante $\omega = 10 \text{ rad/s}$ sobre su eje. Determinar el volumen de agua que pasa de A a B cuando se alcanza la nueva posición de equilibrio en la que el agua de B gira solidariamente con B y el resto está en reposo.

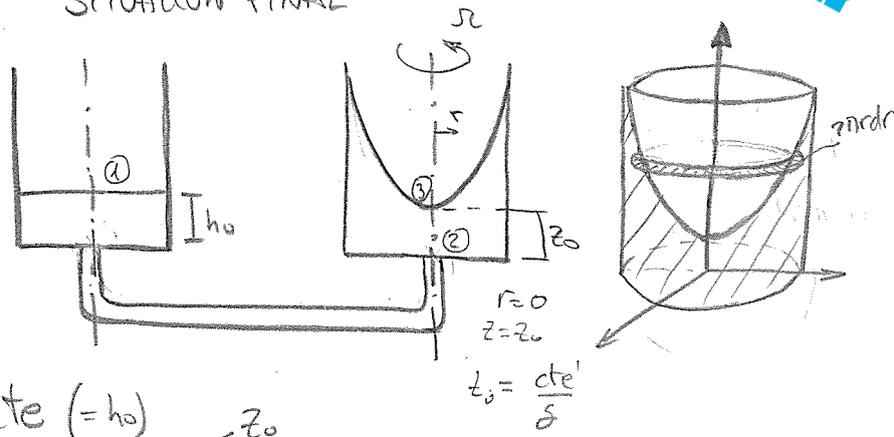
NOTA: Dadas las dimensiones de los depósitos, ni hay derrame de líquido, ni se desdobra la base del depósito B. El diámetro del tubo es muy pequeño comparado con el depósito



SITUACION INICIAL



SITUACION FINAL



En A: $U = gz = cte \rightarrow z = cte (= h_0)$

En B: $U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = cte'$, $z = \frac{cte'}{g} + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$

Por no haber derrame, aplico conservación de la masa (en líquidos equiv a conservar el volumen) $\rho = cte$

$$\cancel{\rho} 2\pi \frac{\phi^2}{4} h + \cancel{Vol \cdot \rho} = \cancel{\rho} \pi \frac{\phi^2}{4} h_0 + \cancel{\rho} \int_0^R z_e 2\pi r dr$$

$$(*) \equiv 2\pi \frac{\phi^2}{4} h = \pi \frac{\phi^2}{4} h_0 + \int_0^R 2\pi r \left(z_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g} \right) dr \quad ??$$

No me sirve conservación de la masa \rightarrow Aplico conservación de la cantidad de movimiento

$$\rho U + p = cte \left\{ \begin{array}{l} \text{En A: } U = gz \\ \rho gz + p = cte \\ \text{En B: } U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2} \\ \rho gz - \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + p = cte \end{array} \right.$$

Además $P_M = P_N$

$$\begin{array}{l} A: P_a + \rho g h_0 = P_2 \\ B: P_2 = P_a + \rho g z_0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho g h_0 = \rho g z_0 \rightarrow h_0 = z_0 \end{array} \right.$$

Ahora aplico (*): $2\pi \frac{\phi^2}{4} h = \pi \frac{\phi^2}{4} h_0 + \int_0^R 2\pi r \left(z_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g} \right) dr$

$$\pi R^2 \left(h_0 + \frac{\Omega^2 R^2}{4g} \right)$$

$$\underbrace{\frac{\pi \phi^2}{4} h}_{V_A^{(1)}} + \underbrace{\frac{\pi \phi^2}{4} h}_{V_B^{(1)}} = \underbrace{\frac{\pi \phi^2}{4} h_0}_{V_A^{(2)}} + \underbrace{\pi R^2 \left(h_0 + \frac{R^2 R^2}{4g} \right)}_{V_B^{(2)}}, \quad \phi = 2R$$

$$V_{A \rightarrow B} = V_A^{(1)} - V_A^{(2)} = V_B^{(2)} - V_B^{(1)} = \pi R^2 (h - h_0)$$

$$\cancel{\pi R^2} (h - h_0) = \pi R^2 \left(h_0 + \frac{R^2 R^2}{4g} \right) - \pi R^2 h$$

$$h - h_0 = h_0 - h + \frac{R^2 R^2}{4g}, \quad 2(h - h_0) = \frac{R^2 R^2}{4g}$$

$$\boxed{V_{A \rightarrow B} = \pi R^2 \frac{R^2 R^2}{8g} = 0,25 \text{ m}^3}$$

188 Se tiene un depósito paralelepípedo como el de las figuras, de 0,5 m de ancho que está lleno de agua. En BB' hay una ranura de tamaño despreciable que pone en comunicación el agua con la atmósfera (fig 1). Si el depósito se acelera hacia lo derecho con $2,45 \text{ m/s}^2$, la gravedad actúa en dirección vertical, y el fluido se supone en reposo respecto al depósito se pide:

1°) Calcular la ley de distribución de presiones en el depósito

2°) Calcular las fuerzas y el punto de aplicación sobre los lados ABB'A' y BDD'B'

3°) Como se modificarían los resultados anteriores si la ranura, en lugar de tener espesor despreciable ocupase media cara, tal y como se indica en la figura 2.

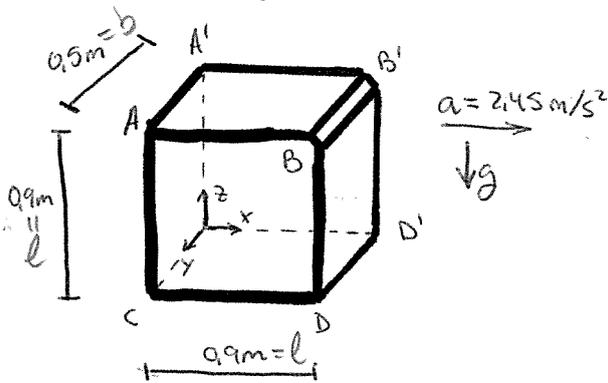


FIG. 1

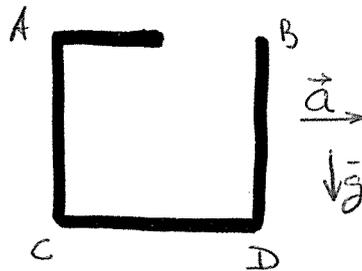


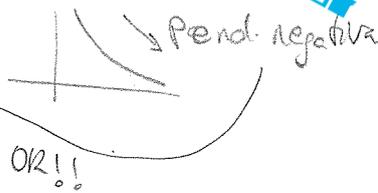
FIG. 2

1) Aplicando fluidostática

$P + \rho u = cte$; $u = gz + ax = cte'$

¿signo? El fluido hora

$z = \frac{cte'}{g} - \frac{ax}{g}$



$\Rightarrow P + \rho(gz + ax) = cte$

$\left\{ \begin{array}{l} x=0,9 \\ z=0,9 \\ \forall y \end{array} \right. \rightarrow P = P_a \quad P_a + \rho(gz + ax) = P + \rho(gz + ax)$

$P(x,y,z) = P_a + \rho(gz + ax - gz - ax)$

$P(x,y,z) = -9800z - 2450x + 111025$

Si hablamos de manométricos ($P_{absol} - P_a$)

$P(x,y,z) = -9800z - 2450x + 11025$

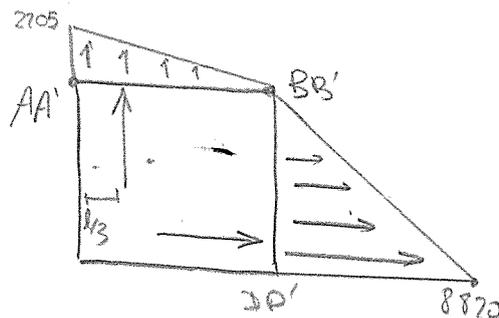
2)

Cara $ABB'A'$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{En } AA', P = cte \\ \text{En } BB', P = cte = P_a \end{array} \right.$

$P_{manom} \begin{array}{l} \swarrow x=0, z=0,9 \\ A = 2205 (Pa) \\ \swarrow B = 0 \end{array}$

Cara $BDD'B'$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{En } BB', P = cte = P_a \\ \text{En } DD', P = cte \end{array} \right.$

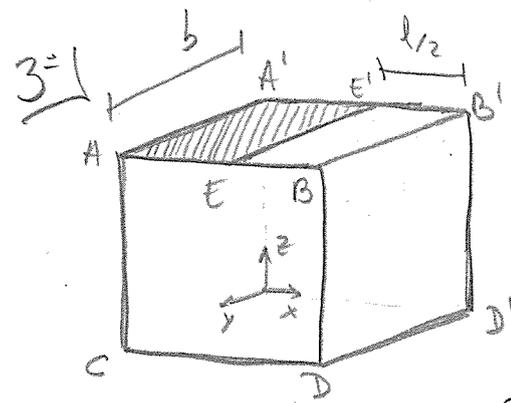
$P_{manom} \begin{array}{l} \swarrow x=0,9, z=0 \\ = 8820 (Pa) \end{array}$



$l=0,9; b=0,5 (m)$

$F_{ABB'A'} = F_v = \frac{1}{2} 2205 \cdot lb = 496 N$; aplicado en $x = \frac{l}{3} = 0,3$

$F_{BDD'B'} = F_H = \frac{1}{2} 8820 \cdot lb = 1984 N$; aplicado en $z = \frac{l}{3} = 0,3$



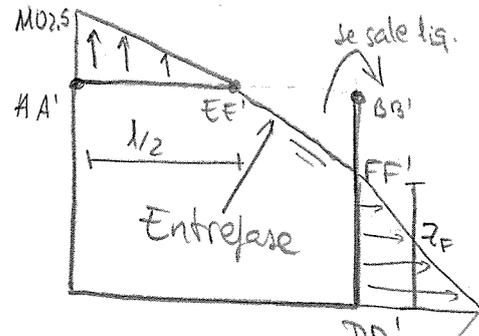
Ahora $x = \frac{l}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} P = P_a \\ z = 0,9 = l \\ \forall y \end{array} \right.$

$$P + \rho(gz + ax) = P_a + \rho(gl + a\frac{l}{2})$$

$P_{monom.}$

$$P(x, y, z) - P_a = \rho(gl + a\frac{l}{2} - gz - ax)$$

$$P(x, y, z) - P_a = -9800z - 2450x + 9922,5$$



$$P_{ma} = 1102,5 \text{ Pa}$$

Equación de la interfase ($gz + ax = cte'$) $u = cte'$

$$z = \frac{cte'}{g} - \frac{a}{g}x$$

$$E(x = \frac{l}{2}, z = l) : gl + a\frac{l}{2} = gz + ax$$

$$F(x = l, z = ?) : gz_f + al = gl + a\frac{l}{2}$$

$$z_f = \frac{gl + a\frac{l}{2} - al}{g} = l - \frac{al}{2g}$$

$$P_m^F = 0, P_m^D = 7717,5 \text{ Pa}$$

$$F_{ABB'A'} = F_{AEE'A'} = 1102,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot b = 124 \text{ N}$$

Aplicado en $x = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{6} = 0,15 \text{ m}$

$$F_{BDD'B'} = F_{FDD'F'} = 7717,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{al}{2g}) \cdot b = 1519 \text{ N}$$

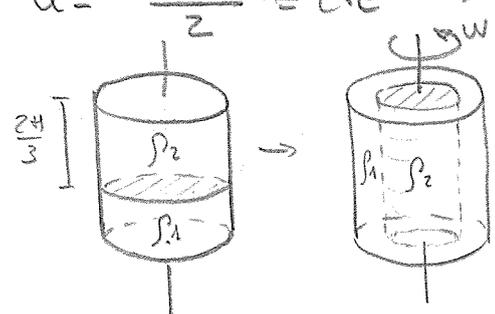
Aplicado en $z = \frac{1}{3} (1 - \frac{al}{2g})$
 $z = 0,23 \text{ m}$

Examen ENERO 2012: En un depósito cilíndrico cerrado de radio R y altura H se tienen dos líquidos inmiscibles de densidades ρ_1 y ρ_2 , siendo $\rho_1 > \rho_2$. El primer líquido ocupa un tercio del volumen, el resto del depósito lo ocupa el segundo líquido, ρ_2 . El depósito se hace girar alrededor de su eje con una velocidad constante ω suficientemente grande como para despreciar la fuerza de la gravedad. La presión en el eje en estas condiciones es P_0 .

a) Determine la ecuación de la superficie de la interfase

En la interfase $u = cte$ (v.p. equipotencial)

$$u = -\frac{\omega^2 r^2}{2} = cte \rightarrow r = cte \rightarrow \text{Superficie cilíndrica}$$



El líquido más pesado (ρ_1) se situará en la periferia y el más ligero en el interior (ρ_2)

Como el volumen de ambos líquidos (o la masa) se conserva

$$\rho_2 \pi R^2 \frac{2H}{3} = \rho_2 \pi r_e^2 H; \quad r_e = R \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Superficie cilíndrica de altura H , radio $r_e = R \sqrt{\frac{2}{3}}$

b) Distribución de presiones en los dos líquidos

Por fluidostática $P + \rho u = cte$, $P - \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} = cte$

$$P(r=0) = P_0 \Rightarrow P(r) = \rho_2 \frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0; \quad \forall r \in (0, r_e)$$

$$P(r=r_e) = P_0 + \rho_2 \frac{\omega^2 r_e^2}{2} \Rightarrow P = \rho_1 \frac{\omega^2 r^2}{2} + \underbrace{P_0 + \rho_2 \frac{\omega^2 r_e^2}{2}}_{P(r=r_e)} - \rho_1 \frac{\omega^2 r_e^2}{2}$$

$$P(r) = P_0 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{\omega^2 r_e^2}{2} + \rho_1 \frac{\omega^2 r^2}{2}; \quad \forall r \in (r_e, R)$$

c) Fuerza ejercida por los líquidos sobre cada una de las tapas del depósito

La fuerza será la misma en ambas tapas y la obtenemos integrando las distribuciones de presión anteriores

$$F = \int_0^{r_e} (\rho_2 \frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0) 2\pi r dr + \int_{r_e}^R (P_0 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{\omega^2 r^2}{2} + \rho_1 \frac{\omega^2 r^2}{2}) 2\pi r dr =$$

$$= \cancel{P_0 \pi r_e^2} + \rho_2 \omega^2 \pi \frac{r_e^4}{4} + \cancel{P_0 \pi (R^2 - r_e^2)} + (\rho_2 - \rho_1) \frac{\omega^2 r_e^2 \pi (R^2 - r_e^2)}{2} +$$

$$+ \rho_1 \omega^2 \pi \frac{1}{4} (R^4 - r_e^4) = P_0 \pi R^2 + \omega^2 \pi \underbrace{\left[\rho_2 \frac{r_e^4}{4} + (\rho_2 - \rho_1) \frac{r_e^2}{2} (R^2 - r_e^2) + \frac{\rho_1}{4} (R^4 - r_e^4) \right]}_K$$

$$K = \rho_2 \frac{r_e^4}{4} + \rho_2 \frac{r_e^2}{2} R^2 - \rho_2 \frac{r_e^2}{2} r_e^2 - \rho_1 \frac{r_e^2}{2} R^2 + \rho_1 \frac{r_e^4}{2} + \frac{\rho_1}{4} R^4 - \frac{\rho_1}{4} r_e^4$$

$$r_e = \sqrt{\frac{2}{3}} R \rightarrow K = \rho_2 \frac{R^4}{9} + \rho_2 \frac{R^4}{3} - \rho_2 \frac{2}{9} R^4 - \rho_1 \frac{R^4}{3} + \rho_1 \frac{2R^4}{9} + \rho_1 \frac{R^4}{4} - \rho_1 \frac{R^4}{9}$$

$$K = \rho_2 \left(\frac{R^4}{9} + \frac{R^4}{3} - \frac{2R^4}{9} \right) + \rho_1 \left(-\frac{R^4}{3} + \frac{2R^4}{9} + \frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{9} \right)$$

$$K = \rho_2 \frac{1+3-2}{9} R^4 + \rho_1 \frac{-12+8+9-4}{36} R^4$$

$$K = \left(\rho_1 \frac{1}{36} + \frac{2}{9} \rho_2 \right) R^4$$

$$F = P_0 \pi R^2 + \omega^2 \pi R^4 \left(\frac{\rho_1}{36} + \frac{2\rho_2}{9} \right)$$

TENSIÓN SUPERFICIAL

Problemas clase: (17, 18, 19, 20, 21, 22, 138, 159, 176, 256)

1 SUPERFICIES DE SEPARACIÓN ENTRE DOS MEDIOS. TENSIÓN SUPERFICIAL

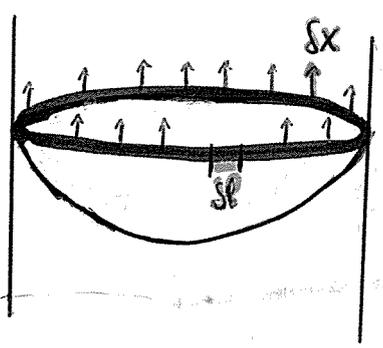
Definimos tensión superficial como la fuerza que aparece en la superficie de separación entre dos fluidos para conseguir que esta superficie exista. Recordamos que sólo los líquidos admiten superficie de separación, bien líquido-líquido, o líquido-gas.

Las unidades de $\sigma \equiv$ tensión superficial son $\left[\frac{\text{Energía}}{\text{Área}} \right] = \left[\frac{\text{Fuerza}}{\text{Longit.}} \right] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Se suele trabajar en el sistema cegesimal \rightarrow dinas/cm

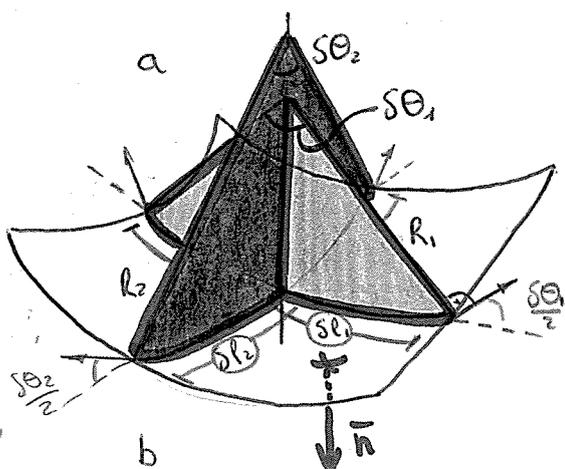
$$\boxed{\frac{\text{dinas}}{\text{cm}} = \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{cm}} = \frac{\text{g}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1 \text{ Kg}}{1000 \text{ g}} = \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{1}{1000}}$$

$$\underline{\sigma_{\text{aire-agua}} = 72,8 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}} = 0,0728 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$



2 EQUILIBRIO

EN DIRECCIÓN NORMAL



• Los radios de curvatura R_1, R_2 los obtenemos mediante 2 planos perpendiculares entre sí que a su vez son perpendiculares a la superficie estudiada

• La normal es siempre saliente a la zona convexa

Componente normal de la fuerza de la zona (a) a la zona (b)

$$\bar{n} \cdot (\bar{c}_b \bar{n} - \bar{c}_a \bar{n}) S_1 S_2 - 2\sigma \cdot S_2 \sin\left(\frac{\delta\theta_1}{2}\right) - 2\sigma S_1 \sin\left(\frac{\delta\theta_2}{2}\right) = 0$$

$\bar{c} \left[\frac{F}{S} \right]$ sup donde se aplica $\sigma \left[\frac{F}{L} \right]$ Long donde se aplica

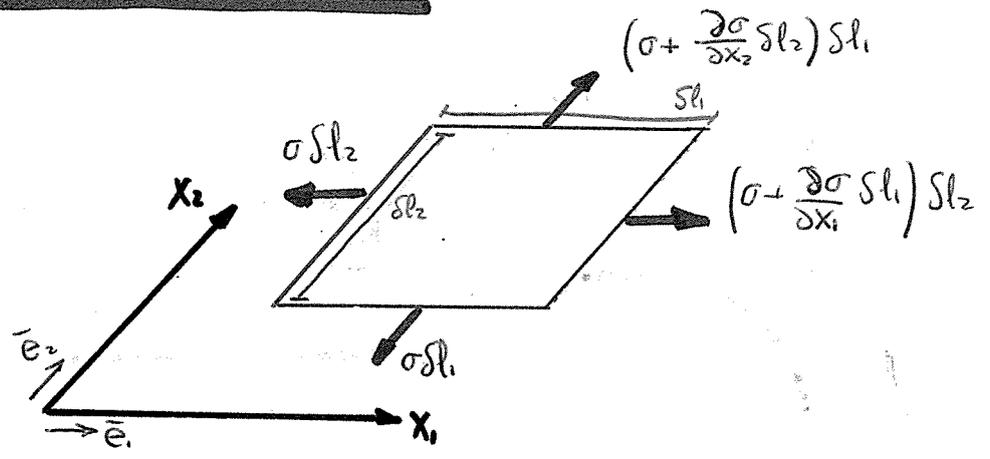
$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\delta\theta_2}{2}\right) &= \frac{S_2}{R_2} \\ \sin\left(\frac{\delta\theta_1}{2}\right) &= \frac{S_1}{R_1} \end{aligned} \right\} \bar{n} (\bar{c}_b \bar{n} - \bar{c}_a \bar{n}) S_1 S_2 = 2\sigma \frac{S_2 \cdot S_1}{R_1} + 2\sigma \frac{S_1 \cdot S_2}{R_2} =$$

$$\boxed{\bar{n} (\bar{c}_b - \bar{c}_a) \bar{n} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \text{ INVARIANTE}$$

Caso hidrostática (reposo) $\tau_{ij} = -p \delta_{ij} \Rightarrow$

$$\boxed{P_a - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

EN DIRECCIÓN NORMAL



$$\underbrace{\iint_S [(\bar{c}_b - \bar{c}_a)\bar{n} - (\bar{n}(\bar{c}_b - \bar{c}_a)\bar{n})\bar{n}]}_{\substack{\text{Fuerzas totales} \\ \text{Componente tangencial}}} = \underbrace{\left[\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}\right) s_2 \bar{e}_1 - \sigma s_2 \bar{e}_1 + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}\right) s_1 \bar{e}_2 - \sigma s_1 \bar{e}_2 \right]}_{\text{Componente normal}}$$

$$+ \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}\right) s_1 \bar{e}_2 - \sigma s_1 \bar{e}_2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} \bar{e}_2\right) s_1 s_2 = \nabla_s \sigma \iint_S$$

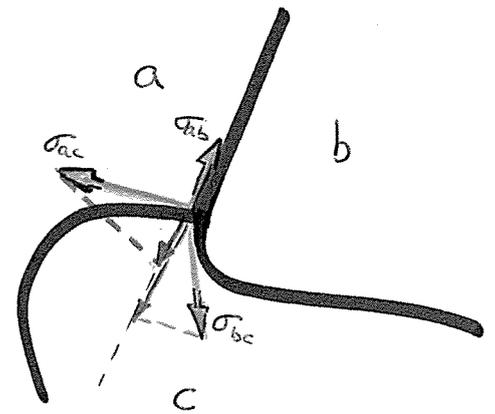
En fluidos estáticos las fuerzas han de ser normales a la superficie, esto es, la componente tangencial de la tensión ha de ser nula, y por tanto:

$$\nabla_s \sigma \iint_S = 0 \rightarrow \nabla_s \sigma = 0 \rightarrow \sigma = \text{cte en la superficie.}$$

3 LINEA DE CONTACTO Y ÁNGULO DE CONTACTO

La línea de contacto aparece cuando tenemos más de dos fluidos en contacto entre sí.

$\Sigma \vec{F} = 0$ y, si existe una línea de separación cualquiera que sea a, b, c



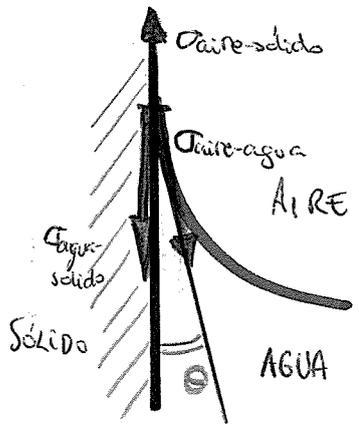
$$\sigma_{ab} < \sigma_{ac} + \sigma_{bc}$$

$$\sigma_{\text{aire-agua}} < \sigma_{\text{aire-grasa}} + \sigma_{\text{agua-grasa}}$$

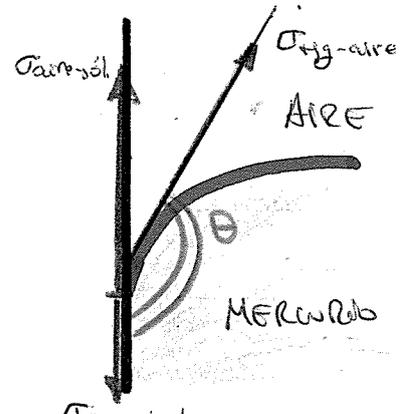
$$\sigma_{\text{aire-agua}} > \sigma_{\text{aire-aceite}} + \sigma_{\text{gas-aceite}}$$

APARECE LA LINEA DE CONTACTO
NO APARECE LA LINEA DE CONTACTO

El ángulo de contacto se define cuando dos líquidos entran en contacto con la pared de un sólido.



$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

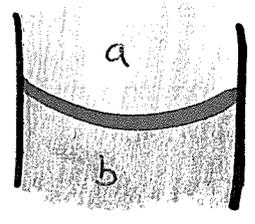


$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{\text{sólido-aire}} - \sigma_{\text{aire-agua}}}{\sigma_{\text{aire-agua}}}$$

4 TENSION SUPERFICIAL DOMINANTE

• Por tensión superficial $P_a - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$



• Si la despreciamos, aplico fluido estática

$$P + \rho g z = \text{cte} \quad \begin{cases} P_a + \rho_a g z = C_1 \\ P_b + \rho_b g z = C_2 \end{cases} \quad P_a - P_b + (\rho_a - \rho_b) g z = C'$$

= Comparamos órdenes de magnitud

$$\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = C + (\rho_b - \rho_a) g z ; \quad \frac{1}{z} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = C' + \frac{\rho_b - \rho_a}{\sigma} g$$

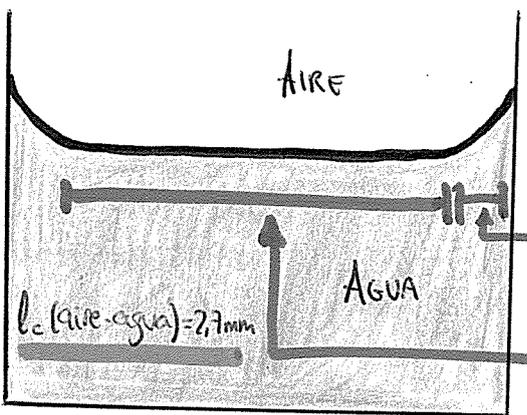
Definimos la longitud capilar como

$$l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho_b - \rho_a) g}}$$

y la comparamos con un tamaño típico

$l_c \gg l_{\text{típico}} \Rightarrow$ Domina la tensión superficial, siendo despreciable el término del potencial

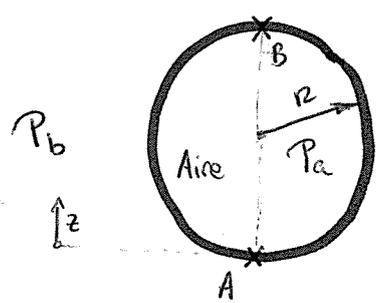
$l_c \ll l_{\text{típico}} \Rightarrow$ Puedo despreciar el término de la presión superficial, quedando sólo el del potencial de los fuerzas viscosas



La longitud es pequeña y el efecto de σ domina sobre las fuerzas másicas

La longitud es muy grande y dominan las fuerzas másicas

Caso burbuja de aire en agua



Tensión sup:

$$P_a - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R} \quad \text{Radios de curvat. } R_1 = R_2 = R$$

Fluidoestático

$$P + \rho g z = \text{cte} \quad \begin{cases} P_b(A) + 0 = P_b(B) + \rho_b g 2R \\ P_b(A) - P_b(B) = 2R \rho_b g \end{cases}$$

$$l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho_b - \rho_a)g}}$$

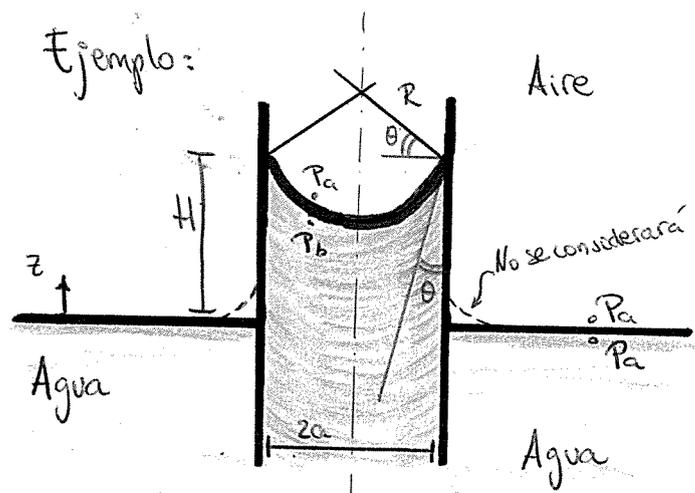
Depreivable

$$\frac{P_a - P_b}{P_b(A) - P_b(B)} = \frac{\frac{2\sigma}{R}}{2R \rho_b g} = \frac{\sigma}{\rho_b g R^2} = \frac{l_c^2}{R^2} \gg 1$$

↑
Ya que R es muy pequeño

$$\Rightarrow P_a - P_b \gg P_b(A) - P_b(B)$$

Ejemplo:



$$a \ll l_c (2,7 \text{ mm})$$

$$P_a - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \sigma \frac{2}{R} = \sigma \frac{2 \cos \theta}{a}$$

$R_1 = R_2 = R \cos \theta = \frac{a}{R}$

Para el resto del agua \equiv FLUIDOESTÁTICA

$$P + \rho g z = \text{cte}$$

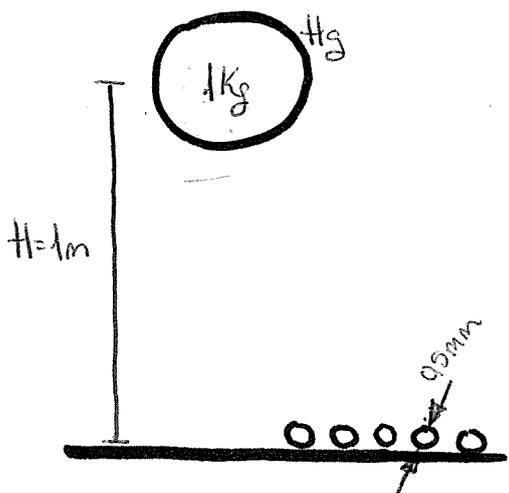
$$P_a + 0 = P_b + \rho g H$$

$$P_a - P_b = \rho g H = \sigma \frac{2 \cos \theta}{a}$$

$$H = \frac{2 \sigma \cos \theta}{\rho g a}$$

17) Desde 1m de altura cae 1Kg de mercurio al suelo. Se forman gotitas que tienen 0,5 mm de diámetro por término medio. Calcular la fracción de la energía cinética absorbida en el choque por la tensión superficial suponiendo que vale 487 dinas/cm para aire-mercurio.

Nota: Despreñar la sup. inicial del mercurio $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$



Inicio \rightarrow Energía potencial + σ superficial \rightarrow O (ver nota)

$$E_p = mgH$$

$$FINAL \rightarrow E_{gotas} = \underbrace{\sigma}_{\text{Sup. 1 gota}} \cdot 4\pi \frac{D^2}{4} \cdot N_{gotas}$$

Por conservar masa

$$\rho \underbrace{Vol_{inicial}}_{\text{Masa} = 1\text{Kg}} = N_{gotas} \rho \underbrace{Vol_{fin}}_{\text{1 gota}} ; N_{gotas} = \frac{1000 \text{ g}}{\rho \underbrace{Vol_{fin}}_{\text{1 gota}}}$$

$$N_{gotas} = \frac{1000 \text{ g}}{13,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{0,05^3 \text{ cm}^3}{8}}$$

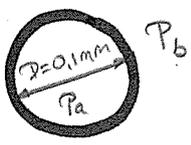
$$N_{gotas} = 1123000$$

$$Fracción = \frac{487 \left(\frac{\text{g cm}}{\text{seg}^2 \text{ cm}} \right) \pi (0,5)^2 (\text{cm}^2) \cdot 1123000}{1 \cdot 9,8 \cdot 1 \left(\text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} \text{ m} \right)}$$

$$Fracción = \frac{429765882,4 \frac{\text{g cm}^2}{\text{kg}^2 \text{ m}^2}}{9,8} \cdot \frac{1\text{Kg}}{1000\text{g}} \cdot \frac{\text{dm}^2}{10000\text{cm}^2} = 4,29\%$$

18) ¿Cuál es la presión originada por la tensión superficial en los dos casos siguientes?

1º) En una gotita de agua de 0,1 mm de diámetro a 20 °C



$$P_a - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{4\sigma}{D}$$

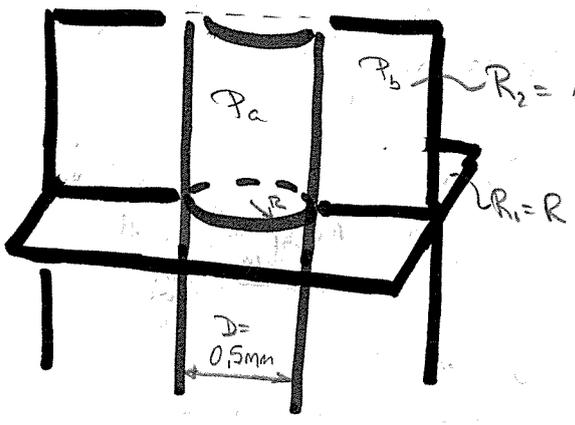
$$R_1 = R_2 = \frac{D}{2}$$

$$= 4 \cdot \frac{0,0728}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 29,12 \frac{N}{m^2}$$

$$P_a - P_b = 29,12 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{1m^2}{10^4 cm^2} \cdot \frac{1}{g} = 0,002912 \frac{Kg}{cm^2}$$

$\sigma_{\text{aire-agua}} = 0,0728 \frac{N}{m}$

2º) En un chorro de agua de 0,5 mm de diámetro a 20 °C

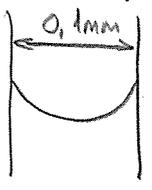


$$P_a - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{D}$$

$$= 2 \cdot \frac{0,0728 \frac{N}{m}}{0,5 \cdot 10^{-3} m} = 291,2 \frac{N}{m^2}$$

$$\Delta P = 0,002912 \frac{Kg}{cm^2}$$

19) Dar la forma de la superficie libre aire-agua en dos tubos cilíndricos de diámetros 0,1 mm y 1 dm, justificando la respuesta.

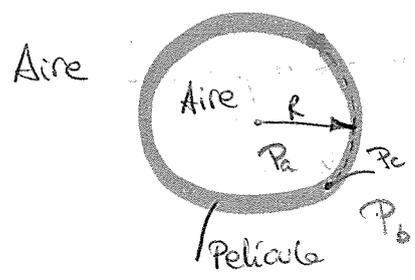


• Como 0,1 mm << 2,7 mm (la agua) Superficie curva
 Carácter cóncavo
 Domina la tensión superficial



• Como 1 dm >> 2,7 mm → la superficie puede considerarse una recta
 Domina las fuerzas métricas

21 Se tiene una pompa esférica de jabón. Se puede expresar la diferencia de tensiones entre el interior y el exterior de la pompa en función de su radio y de la tensión superficial aire-película (σ) Suponer que no hay movimiento y que la gravedad es despreciable.



$$P_a - P_c = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R}$$

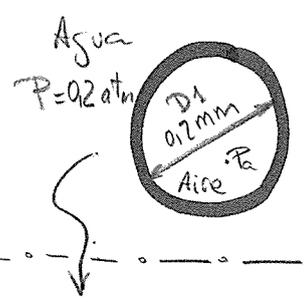
$R_1 = R_2 = R$

$$P_c - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R}$$

$$P_a - P_b = 4 \frac{\sigma}{R}$$

20 Una burbuja de aire de 0,2 mm de diámetro está inmersa en agua a la presión ambiente de 0,2 atm. Calcular la presión del aire dentro de la burbuja

Si la presión exterior se incrementa en ΔP , se encuentra que en el nuevo estado de equilibrio, a la misma temperatura que en el caso anterior, el diámetro de la burbuja es 0,1 mm. Calcular ΔP suponiendo que el aire es un gas perfecto y que en el proceso de compresión la masa dentro de la burbuja no cambia.

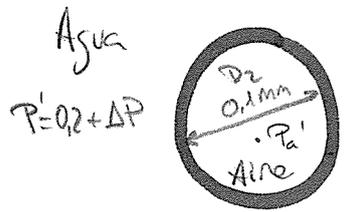


$$P_a - P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{4\sigma}{D_1} = 1456 \text{ Pascales}$$

$$\sigma_{\text{aire-agua}} = 0,0728 \frac{N}{m}$$

$$R_1 = R_2 = \frac{D_1}{2}$$

$$P_a = 1456 + P = 21456$$



$$P_a' - P' = \frac{4\sigma}{D_2} = 2912 \text{ Pascales}$$

Para hallar P_a' aplico el gas ideal y conserv. masa

$$\frac{P}{P'} = \frac{RT}{RT}, \text{ con } T = \text{cte} \quad \frac{P}{P'} = \text{cte} \quad \frac{P_a}{\frac{M}{Vol.}} = \frac{P_a'}{\frac{M'}{Vol.'}}$$

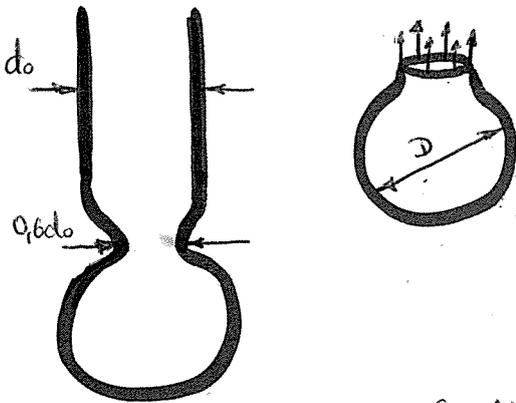
$$\text{Como: } M = M' \rightarrow P_a' = P_a \frac{Vol.}{Vol.'} = P_a \frac{\frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_1}{2}\right)^3}{\frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_2}{2}\right)^3}$$

$$\Rightarrow P_a' = P_a \frac{D_1^3}{D_2^3} = 8 P_a$$

Como $P_a' - P' = 2912$ Pascales $\rightarrow P' = 8 P_a - 2912 = 168736$

$$\Rightarrow P' = 0,2 + \Delta P \text{ (atm)} \rightarrow \boxed{\Delta P = P' - 0,2 = 1,487 \text{ atm}}$$

22) Se observa experimentalmente que para una gota en el momento de su desprendimiento del extremo de un tubo de diámetro d_0 , el diámetro del cuello es aproximadamente $0,6 d_0$. Si el peso de la gota en ese momento está equilibrado por la tensión superficial en el cuello y la gota es aproximadamente esférica, calcular el diámetro de la gota D . Hacer aplicación a $d_0 = 0,4 \text{ mm}$, $\sigma = 70 \text{ dinas/cm}$ y para agua



Peso $\rightarrow \rho \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$ equilibrado por tensión superficial

$$\sigma \pi (0,6 d_0)$$

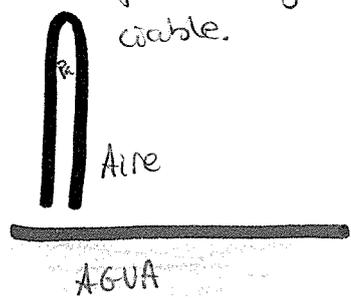
$$\rho_{\text{agua}} \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8} = \sigma \pi 0,6 d_0$$

$$9,8 \frac{\text{M}}{\text{g}^2} \left(\frac{1 \text{ g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{4}{3} \frac{D^3}{8} \right) = 70 \frac{\text{g}}{\text{g}^2} \cdot 0,6 \cdot 0,04 \text{ (cm)}$$

$$D^3 = \frac{70 \cdot 0,6 \cdot 0,04 \text{ cm}^4 \cdot 3 \cdot 8}{4 \cdot 9,8 \text{ (M)}} \cdot \frac{1 \text{ M}}{100 \text{ cm}} = 0,0103 \text{ cm}^3, \quad \boxed{D = 2,17 \text{ mm}}$$

159 Un tubo capilar de longitud L y diámetro D , inicialmente lleno de aire en condiciones ambientales y cerrado por un extremo, se introduce por su extremo abierto en un depósito con líquido, el cual asciende por el tubo comprimiendo el aire atrapado, alcanzándose un estado de equilibrio en el que la tensión superficial se equilibra con la sobrepresión creada por la compresión y la fuerza gravitatoria. Se pide:

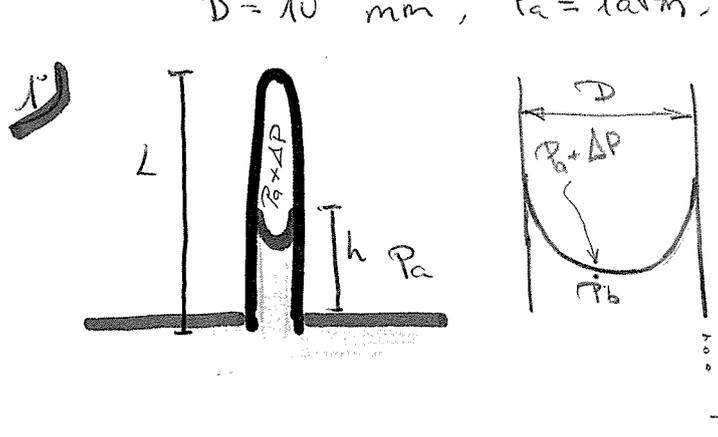
1° Calcular la altura h y la sobrepresión ΔP creadas, suponiendo que la longitud del tubo introducido en el depósito es despreciable.



2° ¿Cómo cambiarían los resultados si el tubo se introdujese inclinado un ángulo de 30° respecto a la horizontal y se introdujese el tubo un 10% de su longitud?

Suponer el proceso de compresión isoterma

DATOS: $\rho_{\text{liq}} = 1 \text{ gr/cm}^3$; $\sigma = 75 \text{ dinas/cm}$, $\theta = 0^\circ$, $L = 20 \text{ cm}$
 $D = 10^{-2} \text{ mm}$, $P_a = 1 \text{ atm}$, $T_a = 288^\circ \text{C}$



$\theta = 0^\circ \rightarrow R_1 = R_2 = \frac{D}{2}$

$$P_a + \Delta P - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{4\sigma}{D}$$

$$P_a + \Delta P - P_b = \frac{4\sigma}{D} \quad (1)$$

$P_a \uparrow z$

Aplicamos hidrostática $P + \rho g z = \text{cte} \Rightarrow P_a = P_b + \rho g h \quad (2)$

Por proceso isoterma + conservación de la masa al aire (gas ideal)

$$\frac{P}{\rho} = RT = \text{cte} \quad P_a \frac{1}{\rho_1} = (P_a + \Delta P) \frac{1}{\rho_2} \quad \rho_1 = \frac{m_1}{V_{\text{ol}1}} = \frac{m_1}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 L}$$

$$\rho_2 = \frac{m_2}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (L-h)}$$

$M_1 = M_2$

$$\Rightarrow P_a \cdot \frac{\pi D^2 L}{4 m_1} = (P_a + \Delta P) \frac{\pi D^2 (L-h)}{4 m_2} \quad P_a L = (P_a + \Delta P) (L-h) \quad (3)$$

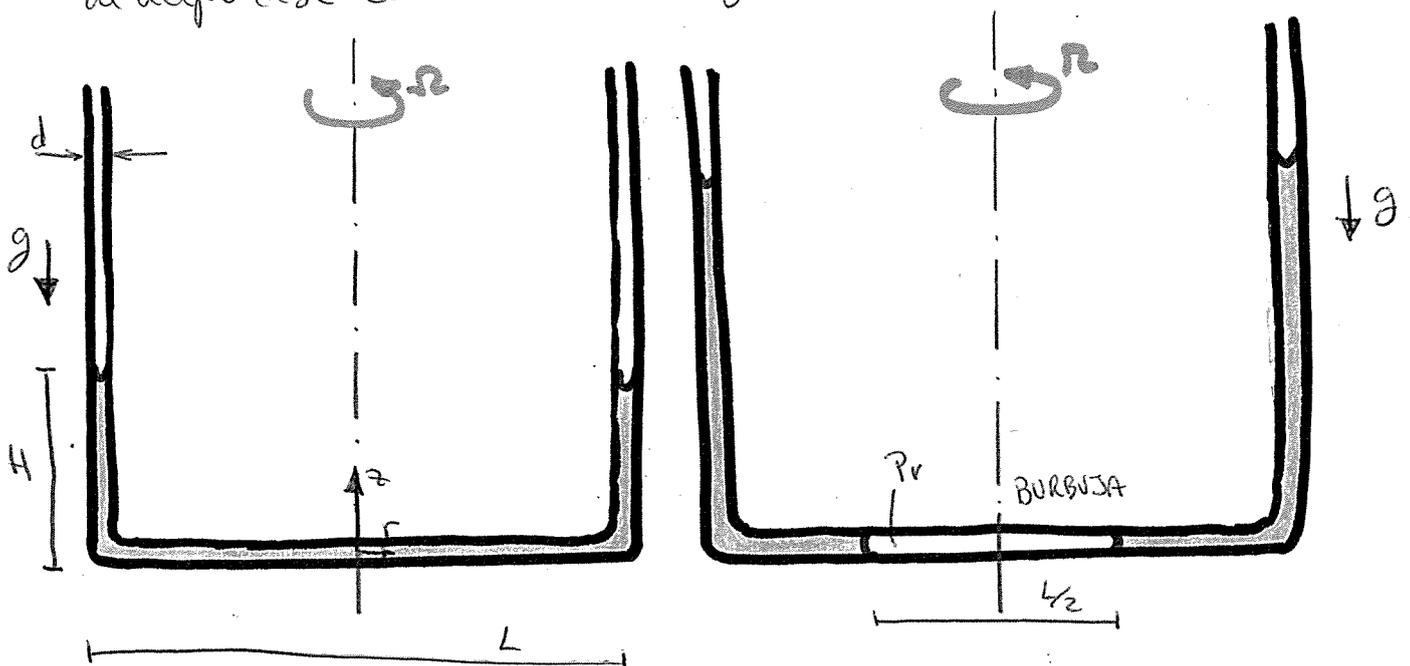
256 Se tiene un tubo en U como el indicado en la figura de diámetro $d = 0.5 \text{ mm}$, base $L = 20 \text{ cm}$ y lleno de agua hasta una altura $H = 10 \text{ cm}$. Suponer $d \ll L, H$. El tubo gira alrededor de su eje con velocidad angular Ω . Suponiendo que las fuerzas de tensión superficial son dominantes en la interfase y que el ángulo de contacto es $\theta = 60^\circ$, se pide:

- 1º) Escribir la distribución de presiones en el tubo para Ω arbitrario en función de las coordenadas indicadas en la figura
- 2º) Calcular los valores de la velocidad de giro Ω para los que en el centro del tubo ($r = z = 0$) la presión absoluta es:

2.1) La ambiente $P_a = 10^5 \text{ N/m}^2$

2.2) La presión de vapor $p_v = 1.3 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$

3º) Para velocidades de giro mayores la columna de agua se perturba y se forma una burbuja de vapor en el centro, en la que la presión sería P_v , subiendo el agua por los ramos laterales. Calcular Ω para que la longitud de la burbuja sea igual a la de la mitad de la base $L_1 = L/2$. Suponer que la tensión superficial agua-vapor y el ángulo de contacto son los mismos que para aire-agua. Despreciar la masa de agua vaporizada. Suponer que al desplazarse la columna de agua se conserva su masa.



Resolvemos (1), (2), (3)

$$\left\{ \begin{aligned} P_a + \Delta P - P_b &= \frac{4\sigma}{D} \rightarrow P_b = P_a + \Delta P - \frac{4\sigma}{D} \\ P_a &= P_b + \rho g h \rightarrow P_b = P_a - \rho g h \\ P_a L &= (P_a + \Delta P)(L-h) \rightarrow (L-h)\Delta P = P_a h \end{aligned} \right\} \Delta P - \frac{4\sigma}{D} = -\rho g h$$

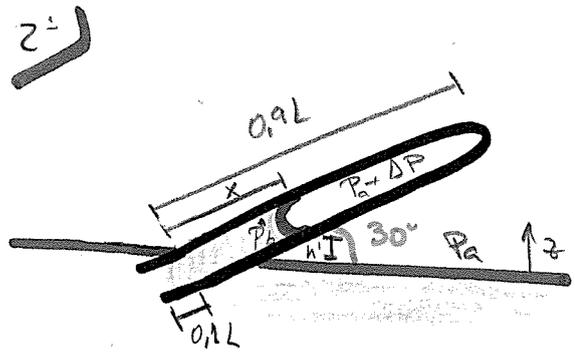
$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \Delta P &= \frac{4\sigma}{D} - \rho g h \rightarrow \frac{4\sigma}{D} - \rho g h = \frac{P_a h}{L-h} \\ \Delta P &= \frac{P_a h}{L-h} \end{aligned} \right. \quad \sigma = 75 \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{cm}} \cdot \frac{1 \text{ Kg}}{1000 \text{ g}} = 0,075 \left(\frac{\text{Kg}}{\text{s}^2} \right) \left(\frac{\text{N}}{\text{m}} \right)$$

$$30000 - 9800h = \frac{10^5 h}{0,2 - h}$$

$$-1960h + 9800h^2 + 60000 - 300000h = 10^5 h$$

$$9800h^2 - 401960h + 60000 = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} h &= 40,87 \text{ m} \text{ No válida} \\ h &= 0,1498 \text{ m} \end{aligned} \right. \text{ ???}$$

$$\Delta P = \frac{10^5 \cdot 0,1498}{0,2 - 0,1498} = 298406 \text{ Pa} \text{ ???}$$



Denvers

$$P_a + \Delta P - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{4\sigma}{D}$$

$$P_a = P_b + \rho g h'$$

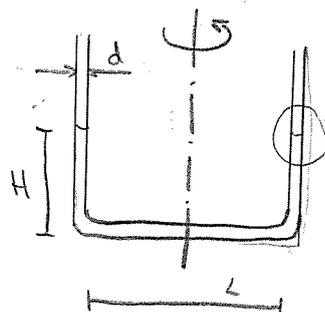
$$P_a \cdot \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot L = (P_a + \Delta P) \cdot \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 (0,9L - x)$$

$\text{sen } 30^\circ = \frac{h'}{x} \quad x = 2h'$

$$\left\{ \begin{aligned} P_b &= P_a + \Delta P - \frac{4\sigma}{D} \\ P_b &= P_a - \rho g h' \end{aligned} \right. \rightarrow \Delta P - \frac{4\sigma}{D} = \rho g h' \rightarrow \Delta P = \frac{4\sigma}{D} + \rho g h'$$

$$P_a L = (P_a + \Delta P)(0,9L - 2h') \quad ; \quad P_a L = \left(P_a + \frac{4\sigma}{D} + \rho g h' \right) (0,9L - 2h')$$

(1)



= Aplicando hidrostática $p + \rho u = cte$ con
 $u = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2}$

$$\rightarrow P + \rho g z - \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} = cte$$

$$P(z=H, r=\frac{L}{2}) = P_b \quad P + \rho g z - \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} = P_b + \rho g \frac{L}{2} - \rho \frac{\Omega^2 L^2}{8} \quad (1)$$

• Por tensión superficial

$$P_a - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad R_1 = R_2 = R \quad \omega = 60^\circ = \frac{d/2}{R}$$

$$P_a - P_b = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \sigma \frac{2}{R} = \sigma \frac{2}{\frac{d/2}{\cos 60^\circ}} = \frac{4\sigma \cos 60^\circ}{d}$$

$$(4) \quad P = -\rho g z + \rho \Omega^2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{L^2}{8} \right) + P_b + \rho g \frac{L}{2} = -9800z + 500r^2\Omega^2 - 5\Omega^2 + P_b + 980$$

$$P_a - P_b = \frac{4\sigma \cos 60^\circ}{d} = \frac{2 \cdot 0,0728}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 291,2 \quad ; \quad P_b = 100000 - 291,2$$

$$\sigma_{\text{aire-agua}} = 0,0728 \text{ N/m}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(r, z) = -9800z + 500\Omega^2 r^2 + 100000 - 291,2 + 980 - 5\Omega^2}$$

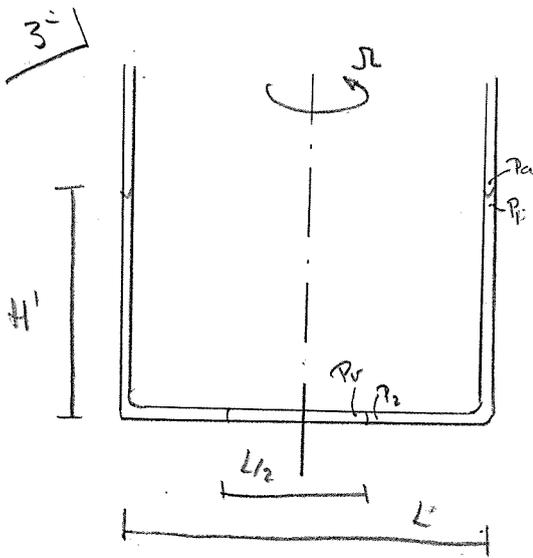
$$(2) \quad 2.1) \quad P(z=0, r=0) = 100000 \text{ Pa} \rightarrow 10^5 - 291,2 + 980 - 5\Omega^2 = 10^5$$

$$\boxed{\Omega = 11,74 \text{ rad/s}}$$

$$2.2) \quad P(z=0, r=0) = 1,5 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$10^5 - 291,2 + 980 - 5\Omega^2 = 1,5 \cdot 10^3$$

$$\boxed{\Omega = 140,85 \text{ rad/s}}$$



Simplificamos depreciamos la masa de aire vaporizada

$$P_1 = P_2, R = \frac{d}{2 \cos 60^\circ}$$

$$\bullet P_a - P_1 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{4 \cos 60^\circ \sigma}{d} = \frac{2 \cdot \sigma}{d} \quad (1)$$

$$\bullet P_1 + \rho g H' - \rho \frac{\Omega^2 \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2} = P_2 + 0 - \rho \frac{\Omega^2 \left(\frac{L}{4} \right)^2}{2} \quad (2)$$

$$\bullet P_1 - P_2 = \frac{2 \sigma}{d} \quad (3)$$

Por último, aplicando conservación de la masa:

$$\rho \cdot \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \cdot (2H + L) = \rho \cdot \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \cdot (2H' + \frac{L}{2}) \quad (4)$$

$$\text{De (1): } P_1 = P_a - \frac{2 \sigma}{d} = 10^5 - \frac{2 \cdot 0,0728}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 99708,8 \text{ Pascales}$$

$$\text{De (3): } P_2 = P_1 - \frac{2 \sigma}{d} = 1,5 \cdot 10^3 - \frac{2 \cdot 0,0728}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 1208,8 \text{ Pascales}$$

$$\text{De (4): } H' = \frac{2H + L - \frac{L}{2}}{2} = 0,15 \text{ m } (\checkmark)$$

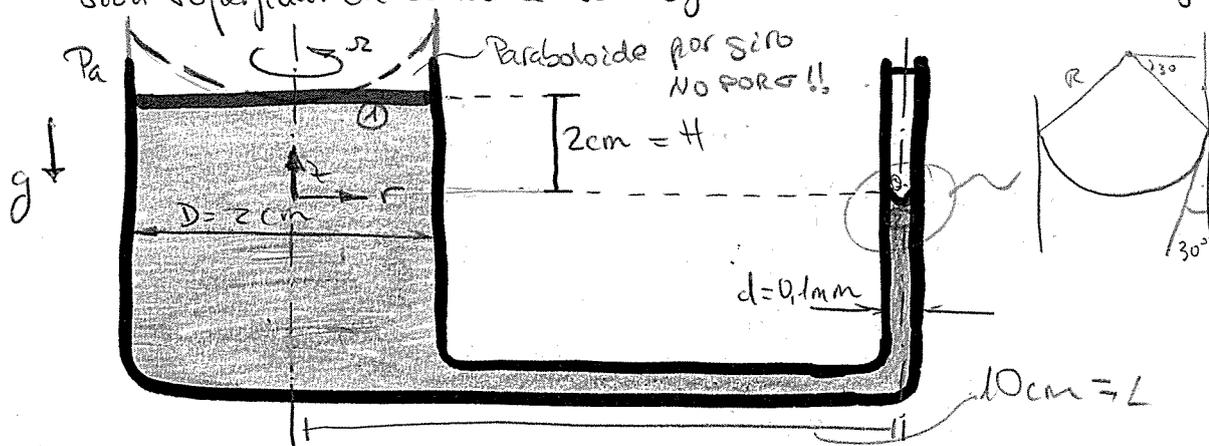
$$\text{De (2)} \rightarrow P_1 + \rho g H' - \rho \frac{\Omega^2 L^2}{8} = P_2 - \rho \frac{\Omega^2 L^2}{32}$$

$$P_1 + \rho g H' - P_2 = \rho \Omega^2 L^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{32} \right)$$

$$\Omega^2 = \frac{P_1 - P_2 + \rho g H'}{\rho L^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{32} \right)} = 26658,67$$

$$\boxed{\Omega = 163,27 \text{ rad/s}}$$

138 El tubo en U representado en la figura tiene cerrado su ramo de menor diámetro. Cuando el tubo gira sobre el eje de la rama de mayor diámetro a una velocidad de 100 rpm, la diferencia de nivel de los entrefases de los dos ramos es de 2 cm. El ángulo de contacto del menisco formado en la rama de menor diámetro es de 30°. Determinar la presión del aire en la burbuja atrapada y justificar por qué son despreciables los efectos de tensión superficial en la rama de mayor diámetro. Tomar $\sigma_{\text{aire-agua}} = 75 \text{ dinas/cm}$



Por fluidoestática ①-② $P + \rho \psi = \text{cte}$, $\psi = g z - \frac{\omega^2 r^2}{2}$

$$P_1 + \rho g H - 0 = P_2 + 0 - \frac{\omega^2 L^2}{2} \rho; \quad P_2 = P_1 + \rho g H + \frac{\omega^2 L^2}{2} \rho \quad (1)$$

$$P_3 - P_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \checkmark R_1 = R_2 = R \quad \omega \cos 30^\circ = \frac{1}{2R}; \quad R = \frac{d}{2 \cos 30^\circ}$$

$$= \frac{4 \sigma \cos 30^\circ}{d} = \frac{2\sqrt{3} \sigma}{d}$$

$$P_3^{\text{abs}} = P_2 + \frac{2\sqrt{3} \sigma}{d} \quad \checkmark^*$$

$$= P_1 + \rho g H + \frac{\omega^2 L^2}{2} \rho + \frac{2\sqrt{3} \sigma}{d} = 103342 \text{ Pa}$$

$P_3^{\text{memom}} = 3342,4 \text{ Pa}$

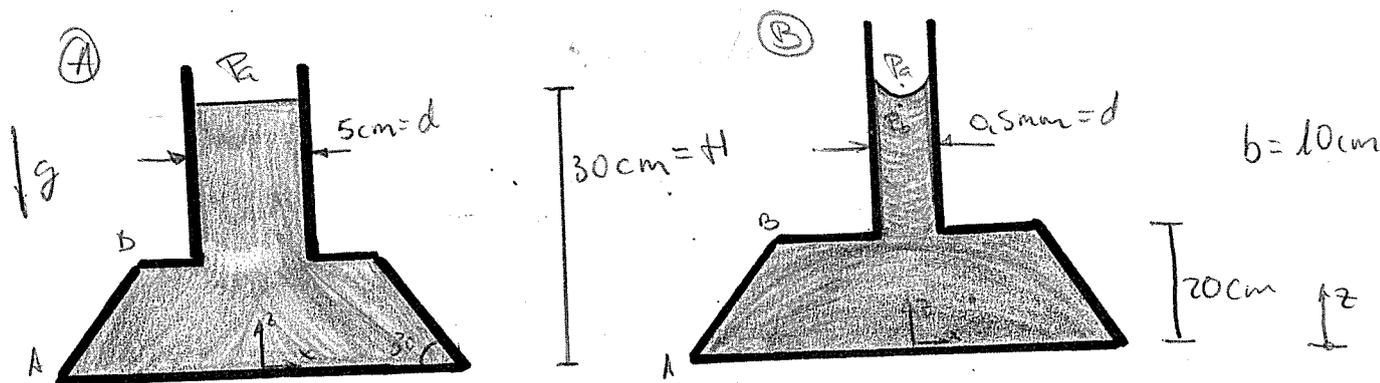
$$\omega = 100 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60} = \frac{10\pi}{3} \text{ rad/s}$$

En el cilindro mayor la tensión superficial es despreciable por ser $D=2\text{cm} \gg l_c \text{ agua} = 2,7 \text{ mm}$

176 Se tienen dos tanques idénticos en cuya parte superior se encuentran sendos tubos de dos distintos diámetros. El nivel del agua alcanza en los dos casos una altura de 30cm, tal como se indica en la figura. Uno de los tubos tiene 5cm de diámetro, mientras que el otro es un tubo capilar de 0,5 mm de diámetro

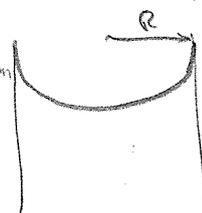
Se pide:

- 1) Dar la forma de la interfase aire agua en cada uno de los tubos justificando la respuesta. Tomar $\theta = 0^\circ$ para el ángulo de contacto.
- 2) Distribución de presiones en cada uno de los dos depósitos en función de las coordenadas indicados en la figura
- 3) La fuerza que actúa sobre la cara AB de cada uno de los depósitos, así como su punto de aplicación, sabiendo que la anchura del depósito es de 10cm
- 4) La distribución de presiones cuando los depósitos se mueven hacia la derecha con una aceleración de 3 m/s^2



1) Como $5 \text{ cm} \gg 2,7 \text{ mm}$ (lc del agua) \rightarrow Solo afecta la gravedad, siendo el efecto de la tensión superficial despreciable \rightarrow Interfase recta en el depósito A

En el depósito B $0,5 \text{ mm} \ll 2,7 \text{ mm}$ (lc agua) \rightarrow Solo afecta la tensión superficial, siendo el efecto de las fuerzas viscosas despreciables. La interfase es un arco de círculo de radios de curvatura $R_1 = R_2 = R = \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ mm}$



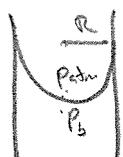
2

Tanque (A): Fluidostática: $P + \rho g z = cte$

$$P(z) + \rho g z = P_a + \rho g H, \quad \underbrace{P(z) - P_a}_{P_{manom}(z)} = \rho g (H - z)$$

$$P(z) \text{ manométrica} = 9800(0,3 - z) \left(\frac{N}{m^2}\right)$$

Tanque (B)

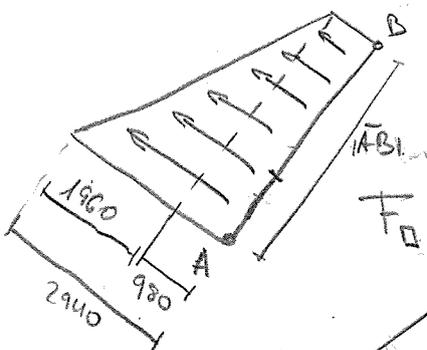


$$P_{atm} = P_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{d} = 582,4 \frac{N}{m^2} = -P_b \text{ (manométrica)}$$

$$P_b + \rho g H = P(z) + \rho g z, \quad P(z) = P_b + \rho g (H - z)$$

$$P(z) \text{ manométrica} = -582,4 + 9800(0,3 - z) \left(\frac{N}{m^2}\right)$$

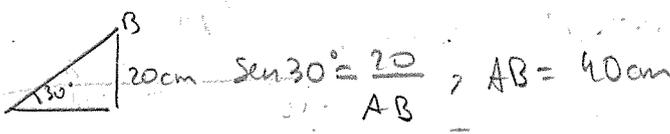
3 Tanque (A)



$$P_{mB} = \rho g (H - z_b) = \rho g (0,3 - 0,2) = 980 \text{ Pa}$$

$$P_{mA} = \rho g (H - z_a) = 2940 \text{ Pa}$$

$$F_B = 980 \cdot |AB| \cdot b = 39,2 \text{ N}$$

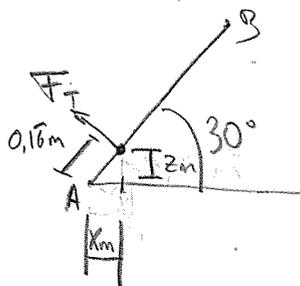


$$F_T = 78,4 \text{ N}$$

$$F_A = \frac{1}{2} 1960 \cdot |AB| \cdot b = 39,2 \text{ N}$$

Punto de aplic:

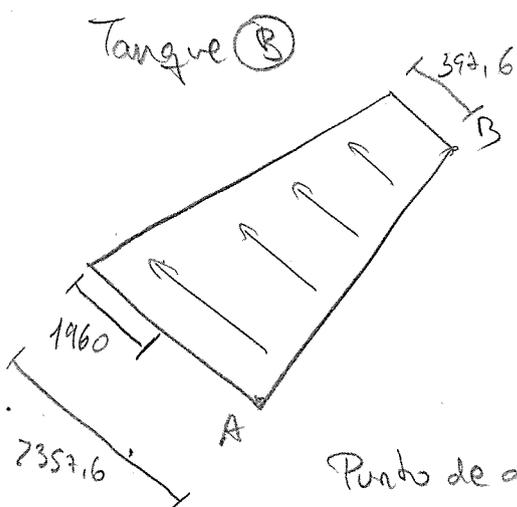
$$F_B \cdot \frac{|AB|}{2} + F_A \cdot \frac{AB}{3} = F_T \cdot l_T, \quad l_T = \frac{39,2 \cdot \frac{0,4}{2} + 39,2 \cdot \frac{0,4}{3}}{78,4} = 0,16 \text{ m}$$



$$X_m = 0,16 \cdot \cos 30^\circ = 0,14 \text{ m} \quad \text{Distancias indicadas en la figura}$$

$$Z_m = 0,16 \cdot \text{sen } 30^\circ = 0,083 \text{ m}$$

$$A, 0,16 \text{ m del punto A}$$



$$P_{mB} = 397.6 \text{ Pa}$$

$$P_{mA} = 2357.6 \text{ Pa}$$

$$F_T = \overbrace{397.6 \cdot 0.4 \cdot 0.1}^{F_B} + \overbrace{\frac{1}{2} \cdot 1960 \cdot 0.4 \cdot 0.1}^{F_A}$$

$$F_T = 55.1 \text{ N}$$

Punto de aplic:

$$F_B \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.4 + F_A \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.4 = F_T \cdot l_T ; l_T = 15.2 \text{ cm del punto A}$$

4°) Tanque A

$$P + \rho u = cte \quad u = g z + 3x$$

$$P(z) + \rho g z + 3\rho x = P_{atm} + \rho g \cdot 0.3 + 3\rho \cdot 0$$

$$P_m(x, z) = \rho g (0.3 - z) - 3\rho x$$

$$P_b + \rho g H = P + \rho g z + \rho a x$$

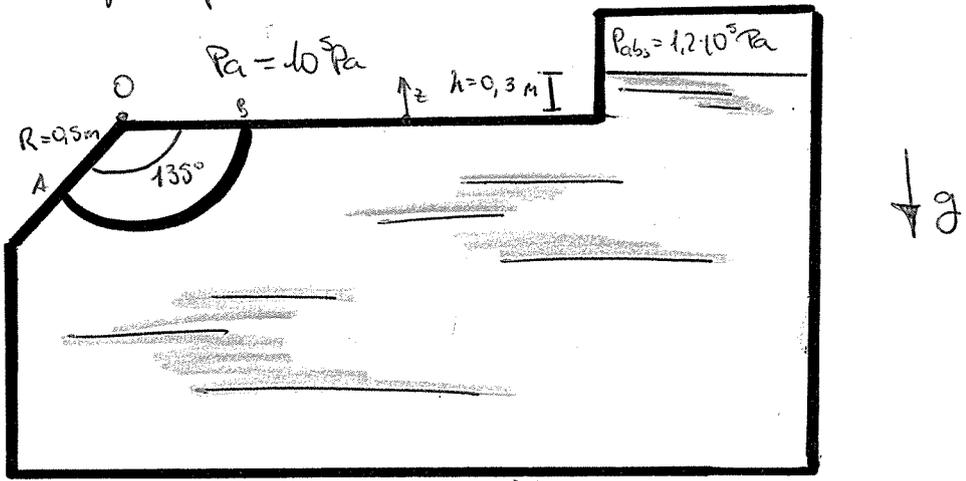
Tanque B

$$P_{mb} = -\frac{4\sigma}{d}$$

$$P_m(x, z) = -\frac{4\sigma}{d} + \rho g (H - z) - \rho a x$$

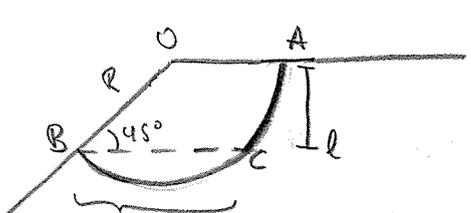
Examen 2010 Junio TEMA 5

Se tiene un depósito de ancho $b = 2\text{m}$ que contiene agua cuya sección transversal se representa en la figura adjunta. Está cerrado por su parte superior y se sabe que la presión absoluta del aire encerrado entre la superficie libre y el techo del depósito es $P_{abs} = 1,2 \cdot 10^5 \text{Pa}$. En la parte de la izquierda hay una compuerta cuyo volumen equivale a $3/8$ ($\theta = 135^\circ$) de un cilindro de radio $R = 0,5\text{m}$ y que puede girar alrededor de O . La diferencia de cotas entre la superficie libre y la parte superior de la compuerta es de $h = 0,3\text{m}$.



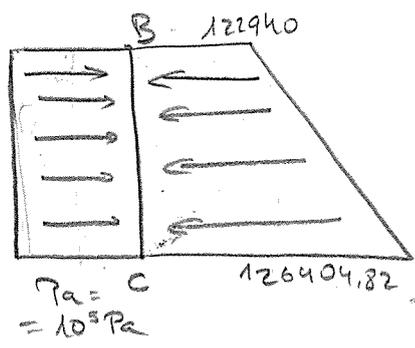
a) Fuerza horizontal y vertical sobre la compuerta.

Fuerzas horizontales



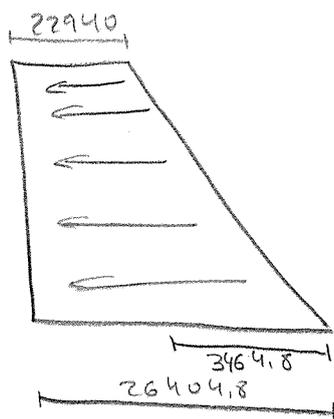
$$\sin 45^\circ = \frac{l}{R}, \quad l = 0,5 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Se anulan las fuerzas horizontales
 Aplico diagrama de presiones a la zona roja



Aplico hidrostática $P + \rho g z = cte$

$$P(z) = P_{abs} + \rho g (h - z) \quad \left\{ \begin{aligned} P_B &= 1,2 \cdot 10^5 + 9800(0,3 - 0) = 122940 \text{ Pa} \\ P_C &= 1,2 \cdot 10^5 + 9800(0,3 + \frac{\sqrt{2}}{4}) = 126404,82 \text{ Pa} \end{aligned} \right.$$



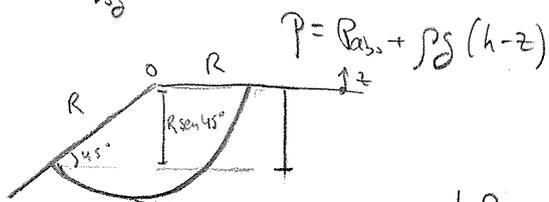
$$F_{\square} = 22940 \cdot b \cdot l = 16221 \text{ N}$$

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} 3464.8 \cdot b \cdot l = 1225 \text{ N}$$

$$F_H = 17446 \text{ N}$$

También podríamos haber integrado

$$F_H = \int_{S_g} (P - P_a) dS_g = (P_{abs} - P_a) S_g + \rho g S_g (h - z_g) = (P_{abs} - P_a) b R \sin 45^\circ +$$



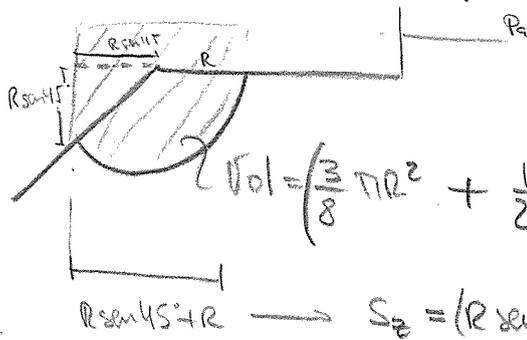
$$S_g = b \cdot R \sin 45^\circ$$

$$z_g = \frac{1}{2} R \sin 45^\circ$$

$$+ \rho g b R \sin 45^\circ \left(h + \frac{1}{2} R \sin 45^\circ \right) = \underline{\underline{17446 \text{ N}}}$$

Para los F verticales

$$F_z = \int_{S_z} (P - P_a) dS_z = \int_{S_z} (P_{abs} + \rho g (h - z) - P_a) dS_z = (P_{abs} - P_a) S_z + \rho g Vol$$



$$Vol = \left(\frac{3}{8} \pi R^2 + \frac{1}{2} (R \sin 45^\circ)^2 + (R \sin 45^\circ + R) \cdot h \right) b = 1.226$$

$$S_z = (R \sin 45^\circ + R) b$$

$$F_z = (1.2 \cdot 10^5 - 10^5) \left(0.5 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.5 \right) 2 + 9800 \cdot 1.226 = \underline{\underline{46158 \text{ N}}}$$

b) Momento respecto de O

$$\bar{M}_O = 0$$

CINEMÁTICA

1 ESPECIFICACIÓN DEL CAMPO FLUIDO

Una partícula fluido es aquella que no intercambia masa. Es la masa elemental de fluido que en un instante determinado se encuentra en un punto del espacio. Dicha masa elemental ha de ser lo suficientemente grande como para contener un gran número de moléculas y lo suficientemente pequeña como para poder considerar que en su interior no hay variaciones de las prop. macroscópicas del fluido.

2 TIPOS DE MOVIMIENTO DE UN FLUIDO

A) Mov. estacionario \equiv No hay dependencia con el tiempo

$$\vec{v} = v_1(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_3$$

B) Uniforme

$$\vec{v} = v_1(t) \vec{e}_1 + v_2(t) \vec{e}_2 + v_3(t) \vec{e}_3$$

C) Mov. plano

$$\vec{v} = v_1(x_1, x_2, x_3, t) \vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3, t) \vec{e}_2$$

D) Bidimensional

$$\vec{v} = v_1(x_1, x_2, t) \vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, t) \vec{e}_2$$

E) Axial-simétrico

$$\vec{v} = v_r(r, z, t) \vec{e}_r + v_z(r, z, t) \vec{e}_z$$

3 TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA FLUIDA

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, \vec{x}_0, t, t_0)$$

$$t = t_0 \rightarrow \vec{X} = \vec{x}_0$$

NOTA!! $f(\vec{x}_0) = 0 \rightarrow$ despejando $x_0 \Rightarrow$ superficie fluida
 Intersección de dos sup. fluidas \Rightarrow
 Línea fluida
 Vol. dentro de una sup. fluida \Rightarrow
 \Rightarrow Vol. fluido

4 TRAZA Y SENDA

SENDA Lugar geométrico de los puntos que ocupa una partícula fluida que en $t = t_0$ pasa por $\vec{x} = \vec{x}_0$.

Para calcularla, despeja t

TRAZA En cada instante, el lugar geométrico de los puntos que en algún momento pasaron por \vec{x}_0

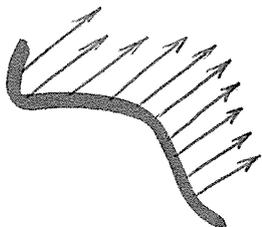
Despeja t_0 para calcularla.

En el problema estacionario senda y traza coinciden

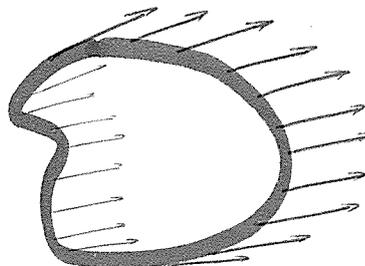
5 LINEAS DE CORRIENTE

Son líneas tangentes a la velocidad en un punto: $\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}$
2 ecuaciones

En el problema estacionario: línea de corriente = traza = senda



En ellas el tiempo es constante !!



Todas las líneas de corriente que parten de una línea forman una superficie de corriente

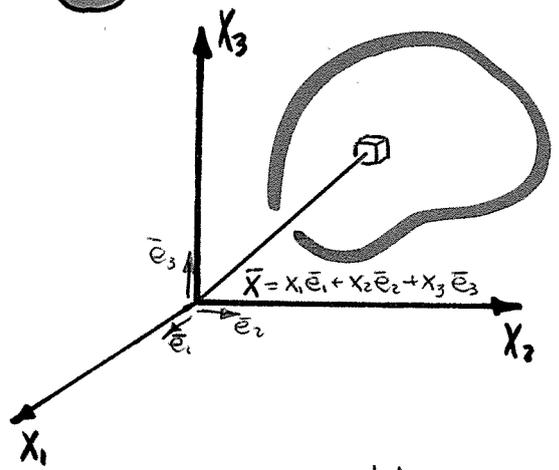


si la línea es cerrada forman un tubo de corriente

NOTA TEÓRICA || Punto de remanso

Das líneas de corriente se cortan en un punto de remanso que cumple que $v = 0$

6 DERIVADA SIGUIENDO UNA PARTÍCULA FLUIDA



$$\phi = \phi(\bar{x}, t)$$

CARTESIANAS - EULERIANAS

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t} =$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \bar{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \bar{e}_3 \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \bar{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t} \bar{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial t} \bar{e}_3 \right) + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Por tanto, $\frac{d\phi}{dt} = \bar{v} \cdot \nabla\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}$

Se define por tanto el operador derivada total como:

$$\boxed{\frac{D\phi}{dt} = (\bar{v} \cdot \nabla\phi) + \frac{\partial\phi}{\partial t}}$$

$\bar{v} \cdot \nabla\phi \equiv$ Derivada convectiva que no existe en el caso lagrangiano

$\frac{\partial\phi}{\partial t} \equiv$ Derivada local

7 ACELERACIÓN

Vamos a particularizar la derivada anterior para $\phi = \bar{v} \Rightarrow \bar{a} = \frac{D\bar{v}}{dt}$

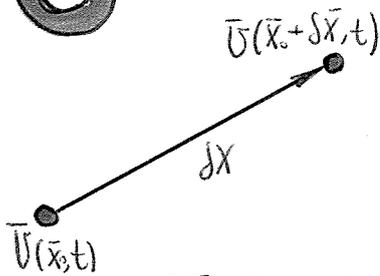
$$\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 = \frac{D\bar{v}}{dt} = (\bar{v} \cdot \nabla\bar{v}) + \frac{\partial\bar{v}}{\partial t}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ a_2 &= v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ a_3 &= v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{aligned} \right\} a_i = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla\bar{v} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \bar{v} \wedge (\nabla \wedge \bar{v})}$$

8

MOV. EN EL ENTORNO DE UN PUNTO



Sea un punto arbitrario, queremos ver como se modifica su velocidad respecto a un segundo punto separado del primero una distancia $\delta \bar{x}$

Del orden de $\delta \bar{x}^2$ y superiores.

$$\bar{U}(\bar{x}_0 + \delta \bar{x}, t) = \bar{U}(\bar{x}_0, t) + \underbrace{\delta \bar{x} \cdot \nabla \bar{U}}_{\delta \bar{U}} + \cancel{O(\delta \bar{x}^2)}$$

$$\begin{pmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_3} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix}$$

TENSOR $\bar{\bar{E}}$ (Deformación)

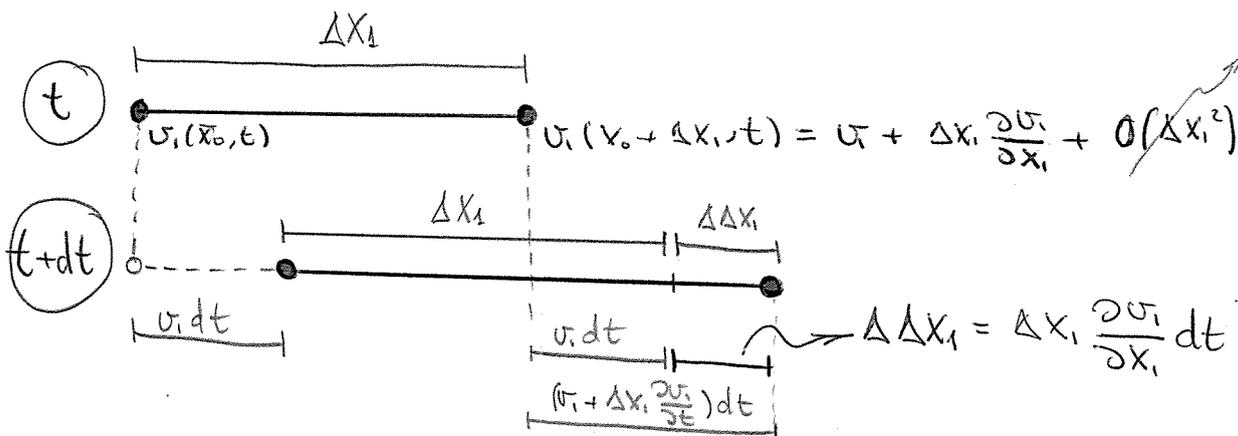
TENSOR $\bar{\bar{\zeta}}$ (Rotación)

$$\bar{\bar{E}} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} + \bar{\bar{\zeta}} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = \bar{\bar{E}} \delta \bar{x} + \bar{\bar{\zeta}} \delta \bar{x}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \quad \zeta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\bar{\bar{\zeta}} \cdot \delta \bar{x} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{U} \wedge \delta \bar{x}$$

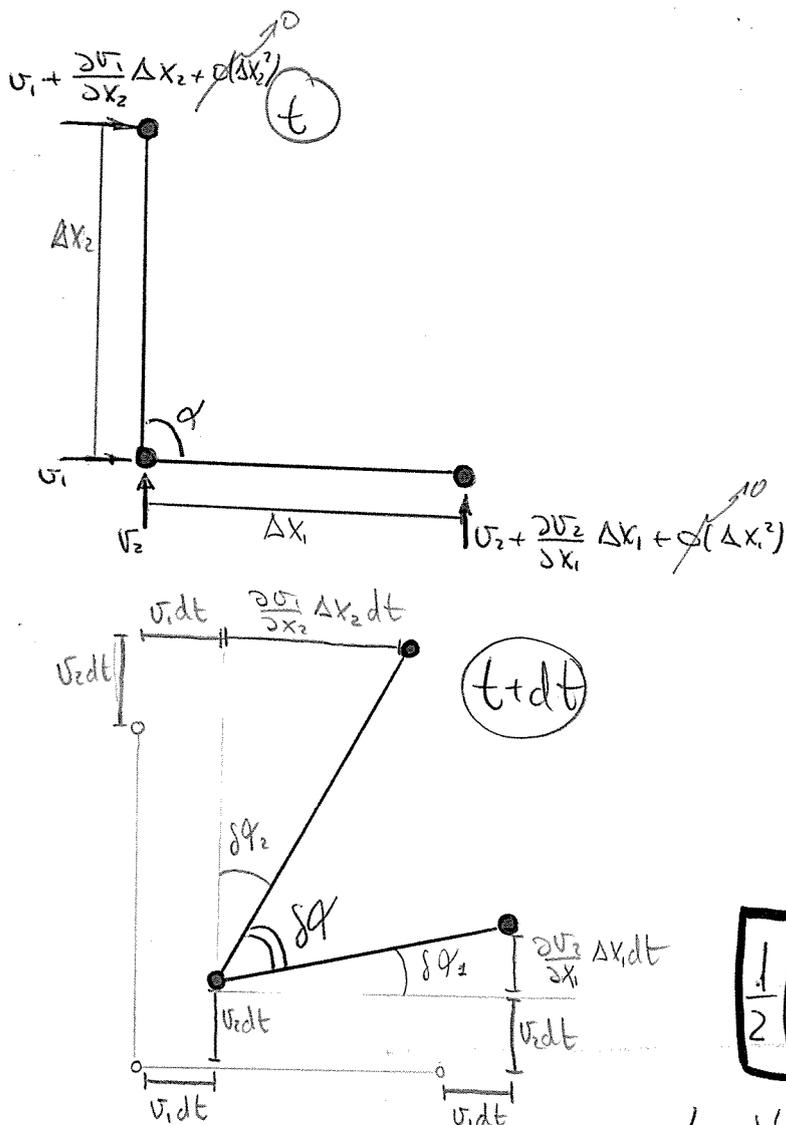
\approx Rotación de un cuerpo fluido como sólido rígido para una velocidad angular igual a $\frac{1}{2} \text{rot } \bar{U}$



Por tanto:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\Delta(\Delta x_1)}{\Delta x_1 dt}$$

Los términos de la diagonal principal del tensor de deformación son la velocidad de alargamiento respecto a la distancia inicial.



$$\sin \delta \phi_1 = \frac{\Delta x_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dt}{\Delta x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dt \approx \delta \phi_1$$

Aproximación por sen $\delta \phi_1$ pequeño

$$\sin \delta \phi_2 = \frac{\Delta x_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dt}{\Delta x_2} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dt \approx \delta \phi_2$$

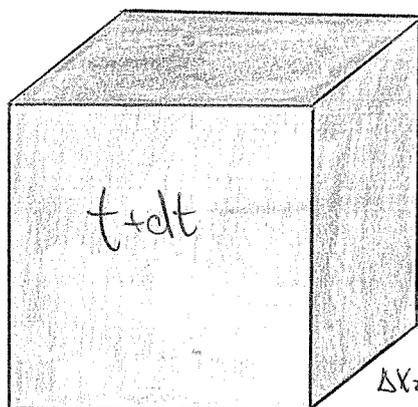
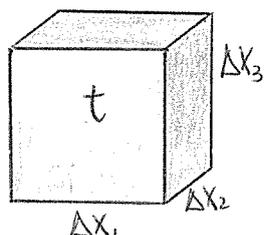
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{(90^\circ - \delta \phi_1 - \delta \phi_2) - 90^\circ}{dt} = -\frac{\delta \phi_1 + \delta \phi_2}{dt} = -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d\phi}{dt}$$

Los términos que no pertenecen a la diagonal principal del tensor de deformación son $\frac{1}{2}$ de la velocidad de disminución del ángulo recto.

- Por todo esto, podemos decir que la velocidad en el entorno de un punto es una traslación + una deformación + una rotación como sólido rígido

NOTA TEÓRICA!!



$$\Delta x_3 + \Delta x_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dt$$

$$\Delta x_2 + \Delta x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dt$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dt$$

CONSERVACIÓN DE LA MASA

$$V_{inicial} = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

$$V_{final} = \left(\Delta x_1 + \Delta x_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dt \right) \left(\Delta x_2 + \Delta x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dt \right) \left(\Delta x_3 + \Delta x_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dt \right) =$$

$$= \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \left(\Delta x_1 \Delta x_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Delta x_3 + \Delta x_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \Delta x_3 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \right) dt + o(dt^2)$$

$$V_j = V_i + \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dt + o(dt^2)$$

$$V_j = V_i + v_i \operatorname{div} \vec{U} \cdot dt + o(dt^2)$$

$$V_j - V_i = dV = V_i \operatorname{div} \vec{U} dt + o(dt^2); \frac{dV}{dt} = V_i \operatorname{div} \vec{U}$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = V \operatorname{div} \vec{U}}$$

$$\frac{dV}{dt} = V \operatorname{div} \vec{U} \Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{U}; \quad M \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} = \frac{M}{\rho} \operatorname{div} \vec{U}, \quad \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{U}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{U} = 0}$$

Para que un campo de velocidades pueda pertenecer a un líquido,

$$\text{Como } p = \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + p \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

➔ Para el siguiente campo de velocidades $\left\{ \begin{array}{l} v_x = ax + by \\ v_y = cx + dy + ez \\ v_z = fy + gz + ht \end{array} \right.$ donde a, b, c, d, e, f, g, h son constantes, se pide:

a) Aceleración

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} ; a_i = v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} + \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = a(ax+by) + b(cx+dy+ez) \\ a_2 = c(ax+by) + d(cx+dy+ez) + e(fy+gz+ht) \\ a_3 = f(cx+dy+ez) + g(fy+gz+ht) + h \end{array} \right.$$

b) Tensor deformación

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \boxed{\bar{e}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a & b+c & 0 \\ b+c & 2d & e+f \\ 0 & e+f & 2g \end{pmatrix}$$

c) Vector rotación

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (f-e)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (c-b)\vec{k}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{v} = (f-e)\vec{i} + (c-b)\vec{k}}$$

d) Condición para campo irrotacional

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \rightarrow \boxed{f=e, c=b}$$

e) Condición para que el fluido cuyo movimiento está regido por el campo sea un líquido.

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = a + d + g \rightarrow \boxed{a + d + g = 0}$$

Derivado de la temperatura siguiendo una partícula fluyente
 Siendo $T = T_0 + Ax + By + Cz + Dt$; siendo A, B, C, D constantes

$$\frac{DT}{dt} = \bar{V} \nabla T + \frac{\partial T}{\partial t} = U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_y \frac{\partial T}{\partial y} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{DT}{dt} = (ax+by)A + (cx+dy+ez)B + (fy-gz+ht)C + D$$

25) Hallar las líneas de traza correspondientes a un campo de velocidades:

$$\bar{V} = \frac{x}{t} \bar{i} + y \bar{j} + 0 \bar{k}$$

Calcularemos la trayectoria para después

- Despejar $t = S \in \text{NDA}$
- Despejar $t_0 = \text{TRAZA}$

$$\begin{cases} U_x = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}, \ln\left(\frac{x}{A}\right) = \ln(t), & x = At \\ U_y = \frac{dy}{dt} = y \rightarrow \frac{dy}{y} = dt, \ln\left(\frac{y}{B}\right) = t, & y = Be^t \\ U_z = \frac{dz}{dt} = 0 \rightarrow dz = 0, & z = C \end{cases} \rightarrow \text{Constantes iniciales con } (x_0, y_0, z_0, t_0)$$

$$x_0 = At_0 \rightarrow A = \frac{x_0}{t_0}, y_0 = Be^{t_0}, B = \frac{y_0}{e^{t_0}}, C = z_0$$

Trayectoria:

$$\begin{cases} x = \frac{x_0}{t_0} t \\ y = y_0 e^{t-t_0} \\ z = z_0 \end{cases}$$

TRAZA: Lugar geométrico de los puntos que en algún instante pasaron por $x_0, y_0, z_0 \rightarrow$ Despejo $t_0 \rightarrow t_0 = \frac{x_0}{x} t \Rightarrow$

$$\text{Traza } \begin{cases} y = y_0 e^{t(1-\frac{x_0}{x})} \\ z = z_0 \end{cases}$$

Extra, calcular la senda

SENDA: lugar geométrico de los puntos que en t_0 pasaron por x_0, y_0, z_0

Despejo t : $t = \frac{x}{x_0} t_0$

$$\text{SENDA} \left\{ \begin{array}{l} y = y_0 e^{t_0 (\frac{x}{x_0} - 1)} \\ z = z_0 \end{array} \right.$$

23 El movimiento de un fluido viene definido por la ecuación:

$$\vec{v} = (x+t)\vec{i} + (y+t)\vec{j} + \vec{k} \quad \text{se pide:}$$

a) Ecuaciones cartesianas de la línea de corriente que pasa por el origen en el instante $t=1$

Líneas de corriente: $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad \frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{y+t} = \frac{dz}{1}$

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{x+t} = dz, \quad \ln \left| \frac{x+t}{A} \right| = z \\ \frac{dy}{y+t} = dz, \quad \ln \left| \frac{y+t}{B} \right| = z \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+t = A e^z \\ y+t = B e^z \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Condición} \\ (x_0, y_0, z_0, t_0) = (0, 0, 0, 1) \\ \rightarrow 1 = A \\ \rightarrow 1 = B \end{array}$$

NOTA!! En las líneas de corriente el tiempo es constante

$$\text{L.C.} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+1 = e^z \\ y+1 = e^z \end{array} \right.$$

Otras soluciones posibles son: $\left\{ \begin{array}{l} x+1 = e^z \\ y = x \end{array} \right.$ ó $\left\{ \begin{array}{l} y+1 = e^z \\ x = y \end{array} \right.$

b) Trayectoria seguida por una partícula que en el instante inicial $t=0$ está en el origen.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = x+t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = y+t \\ v_z = \frac{dz}{dt} = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{homogénea}} \frac{dx}{dt} = x, \quad \ln \left| \frac{x}{A} \right| = t, \quad x_h = A e^t \\ \xrightarrow{\text{Particular \& prueba en polinomio de 1er grado}} \\ x_p = at+b \quad \left\{ \begin{array}{l} a = at+b+t \\ \text{t}^0 \quad a=b \\ \text{t}^1 \quad 0 = a+1 \rightarrow a = -1 \end{array} \right. \rightarrow b = -1 \end{array} \right\} x_p = -t-1$$

Por tanto: $x = x_h + x_p = A e^t - t - 1$

• Por analogía con $\begin{cases} x = Ae^t - t - 1 \\ y = Be^t - t - 1 \\ z = t + G \end{cases} \xrightarrow{\text{Cond. Inicial}} \begin{cases} 0 = A - 1; A = 1 \\ 0 = B - 1; B = 1 \\ 0 = 0 + G; G = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = e^t - t - 1 \\ y = e^t - t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

→ El movimiento de un fluido en el entorno de un punto se considera superposición de 3 fenómenos

1) Explícorlos

Los fenómenos son: Traslación, deformación y rotación

$$\bar{U}(\bar{x}_0 + \delta \bar{x}, t) = \underbrace{\bar{U}(\bar{x}_0, t)}_{\text{Traslación}} + \underbrace{\nabla \bar{U} \delta \bar{x}}_{\substack{\bar{\bar{e}} \delta \bar{x} + \bar{\bar{\zeta}} \delta \bar{x} \\ \text{Deformación}}} + \underbrace{O(\delta \bar{x}^2)}_{\text{Despreciable}} \quad \text{Rotación}$$

2) En dos de ellos se encuentran involucrados sendos tensores. Definirlos y dar su valor para el campo bidimensional siguiente: $\begin{cases} u_x = bt_x \\ u_y = -bt_y \end{cases}$

• Tensor deformación $\equiv \bar{\bar{e}}$; $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Los elementos de la diagonal del tensor deformación son $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\Delta(\Delta x_i)}{\Delta x_i}$ y representan la velocidad de alargamiento respecto de la distancia inicial

Los elementos que no pertenecen a la diagonal principal del tensor deformación, esto es: $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt}$; representan la velocidad de disminución del ángulo recto

• Tensor rotación $\equiv \bar{\bar{\zeta}}$; $\zeta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

$\bar{\bar{\zeta}} \delta \bar{x} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{U} \wedge \delta \bar{x} \Rightarrow$ Representa la rotación de un cuerpo fluido como sólido rígido para una velocidad angular igual a $\frac{1}{2} \text{rot } \bar{U}$

Para el campo dado

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 2bt & bt-bt \\ -bt+bt & -2bt \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} 2bt & 0 \\ 0 & -2bt \end{pmatrix}$$

$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} bt-bt & 0-0 \\ 0-0 & -bt+bt \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cond. inicial $(x_0, y_0, t_0) = (a, a, 0)$

3) Trayectoria, senda, traza y l. de corriente, calcúlalos para el campo dado.

Trayectoria: $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = btx \rightarrow \frac{dx}{x} = btdt; \ln\left|\frac{x}{A}\right| = bt^2/2 \rightarrow x = Ae^{bt^2/2} \\ \frac{dy}{dt} = -bty \rightarrow \frac{dy}{y} = -btdt; \ln\left|\frac{y}{B}\right| = -bt^2/2 \rightarrow y = Be^{-bt^2/2} \end{cases}$

Cond inicial

$a = A$
 $a = B \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = a e^{bt^2/2} \\ y = a e^{-bt^2/2} \end{cases} \text{ Trayectoria}$$

Para la senda, suprimo $t \Rightarrow \boxed{xy = a^2}$ SENDA

Para la traza, como hemos considerado la condición inicial en $t_0 = 0$; no podemos dejar $t_0 \Rightarrow$ Recalculemos la trayectoria con condición inicial en t_0 genérico:

$x = Ae^{bt^2/2} \xrightarrow{x(t_0)=a} a = Ae^{bt_0^2/2} \rightarrow A = e^{-bt_0^2/2} \cdot a$

$y = Be^{-bt^2/2} \xrightarrow{y(t_0)=a} a = Be^{-bt_0^2/2} \rightarrow B = e^{bt_0^2/2} \cdot a$

$x = e^{b/2(t^2-t_0^2)} \cdot a$
 $y = e^{-b/2(t^2-t_0^2)} \cdot a$

$\boxed{xy = a^2}$
TRAZA

Nota que la senda y la traza coinciden a pesar de no estar en caso estacionario ya que \vec{v} depende de t .

Linea de corriente

$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}; \frac{dx}{btx} = \frac{dy}{-bty}; \ln\left|\frac{x}{K}\right| = -\ln|y|; \frac{x}{K} = \frac{1}{y}$

$xy = K; \text{ cond. inicial } (a, a, 0) \rightarrow a^2 = K \rightarrow \boxed{xy = a^2}$ Linea de corriente

4) Comprobar que el campo de velocidades podría corresponder a un líquido

El campo podría corresponder a un líquido si $\text{div } \vec{V} = 0$

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} = bt - bt = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \text{El campo puede corresponder a un líquido}$$

5) Aceleración

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \vec{V} = (a_x, a_y)$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{V} \nabla v_x = bx + \vec{V} \cdot (bt, 0) = bx + b^2 t^2 x$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{V} \nabla v_y = -by + \vec{V} \cdot (0, -bt) = -by + b^2 t^2 y$$

$$\vec{a} = (bx + b^2 t^2 x) \vec{i} + (b^2 t^2 y - by) \vec{j}$$

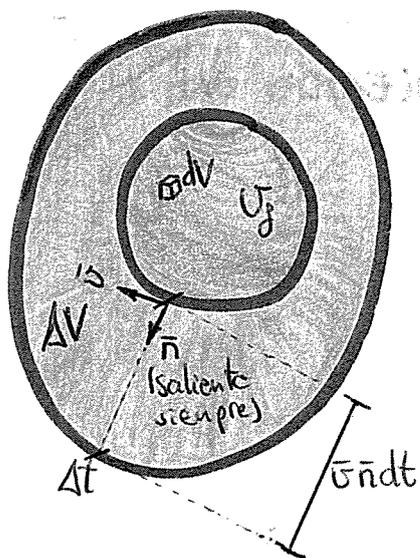
INTEGRALES

EXTENDIDAS A VOLUMEN FLUIDO

Vamos a aplicar el concepto de integral extendida a volúmenes

$$\bar{F} = \int_{V_j} \phi dV \quad \text{cogiendo como variables } \phi: \begin{cases} \rho \equiv \text{conservación de la masa} \\ \rho v \equiv u \text{ de la cantidad de movimiento} \\ \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \equiv \text{conservación de la energía.} \end{cases}$$

1 DERIVADA DE UNA INTEGRAL SIGUIENDO UN VOLUMEN FLUIDO



Supongo ϕ aplicado a un volumen fluido

$$\bar{F} = \int_{V_j} \phi dV$$

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_j} \phi dV = \int_{V_j} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_S \phi \bar{v} \bar{n} ds \quad (*)$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE REYNOLDS

"La variación de una variable en el tiempo dentro de un volumen fluido se debe a que esa variable varía dentro del volumen fluido y a que cambia el fluido en sí, por tanto, hay un flujo entrada/salida, a lo largo de su contorno".

CASOS PARTICULARES

• $\phi = \rho$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_j} \rho dV = \int_{V_j} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho \bar{v} \bar{n} ds = 0$$

Ecuación de la conservación de la masa en su forma integral

INTEGRAL

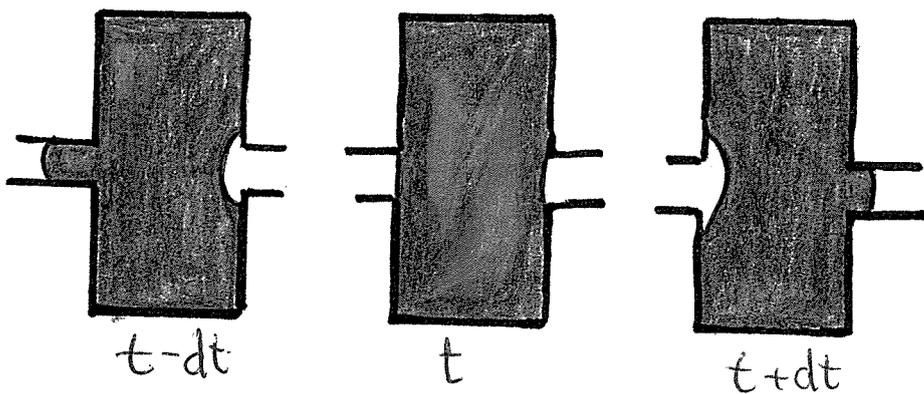
• $\phi = \rho \bar{v}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_j} \rho \bar{v} dV = \int_{V_j} \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} dV + \oint_S (\rho \bar{v}) \bar{v} \cdot \bar{n} ds = \oint_S \bar{n} \cdot \bar{c} ds + \int_{V_j} f_m dV$$

Ecuación de la cantidad de movimiento en su forma integral.

• $\phi = \left(\rho + \frac{\rho v^2}{2} \right) \rho \rightarrow$ lo veremos más adelante. se obtiene la ecuación de conservación de la energía.

2 DERIVADA DE UNA INTEGRAL SIGUIENDO UN VOLUMEN DE CONTROL



Ahora el volumen fluido se desplaza y necesitamos simplificar la situación. Vamos a tomar un volumen de control

Suponemos que en un instante $t \rightarrow V_j = V_c$

NOTA $\bar{v}_c \equiv$ velocidad del volumen fluido de control

Como $V_c = V_j$ para un instante: $\frac{d}{dt} \int_{V_c} \phi dV = \int_{V_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_S \phi \bar{v}_c \cdot \bar{n} ds$; restando

esta ecuación con $\textcircled{*} = \frac{d}{dt} \int_{V_j} \phi dV = \int_{V_j} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_S \phi \bar{v} \cdot \bar{n} ds$; obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_j} \phi dV - \frac{d}{dt} \int_{V_c} \phi dV = \oint_S \phi \bar{v} \cdot \bar{n} ds - \oint_S \phi \bar{v}_c \cdot \bar{n} ds$$

Las parciales se anulan, los totales no !!

Operando.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \phi dV + \oint_S \phi (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n} ds = \int_{V_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_S \phi \bar{v} \cdot \bar{n} ds$$

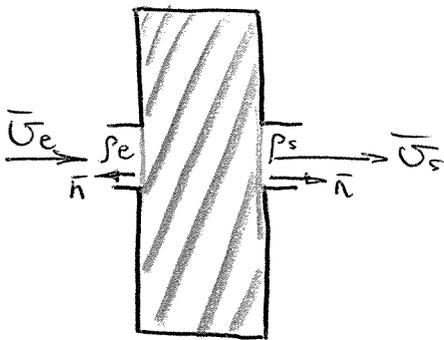
Por tanto, la ecuación de conservación de la masa con volumen de control queda

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_S \rho (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n} ds = 0$$

y la de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} (\rho \bar{v}) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c} (\rho \bar{v}) dV + \oint_S (\rho \bar{v}) (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n} ds = \oint_S \bar{n} \cdot \bar{c} ds + \int_{V_c} \rho \bar{f} dV$$

→ Ejemplo



Tomamos un volumen de control cerrado (zona rodeada)

$$V_{\text{deposito}} = V_c \equiv \text{Paredes dep} + A_e + A_s \equiv S_c$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_S \rho (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (\text{conserv. de la masa})$$

$$\frac{dM_{\text{dep}}}{dt} + \int_{\text{Paredes}} \rho (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n} ds + \int_{A_e} \rho_e (\bar{v}_e) \cdot \bar{n} ds + \int_{A_s} \rho_s (\bar{v}_s) \cdot \bar{n} ds = 0$$

○ Fluido no atraviesa paredes

$$\frac{dM_{\text{dep}}}{dt} = \underbrace{\rho_e v_e \int_{A_e} ds}_{\text{Gastos m\u00e9sicos en la E/S}} - \underbrace{\rho_s v_s \int_{A_s} ds}_{\text{Gastos m\u00e9sicos en la E/S}} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

PROBLEMA ESTACIONARIO: Gasto másico = Gasto másico
 entrada = salida

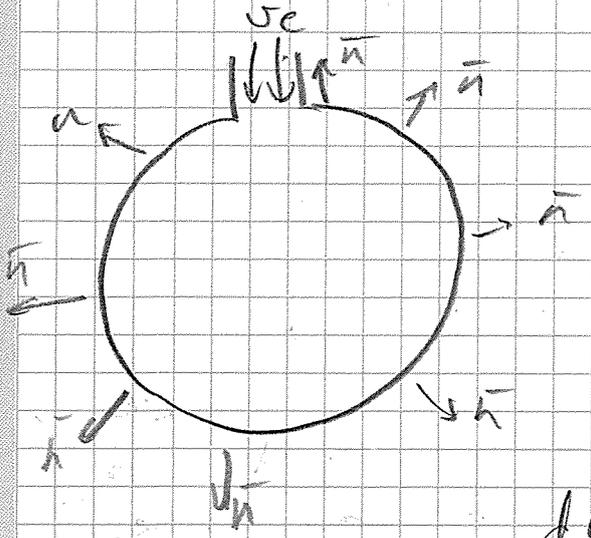
" " + LÍQUIDO: Caudal entrada = Caudal salida

Falta ejemplo de un globo raro \Rightarrow Pedirlo a alguien de por ahí

→ Caso globo: Conserv. masa

$$\frac{dM_G}{dt} + 0 + \rho_e \int_{A_e} (v_e - \frac{dr}{dt}) ds$$

6 veces del fluido en la zona de contacto con el globo ha de ser 6
 misma → Exp 0



$$\frac{dM_G}{dt} - \rho_e (v_e + \frac{dr}{dt}) \int_{A_e} ds = 0$$

$$\frac{dM_G}{dt} = \rho_e (v_e + \frac{dr}{dt}) A_e$$

En todos estos cálculos
 uno prop. de tal y de

cálculos de var. respecto del tiempo =



$\phi = \rho$

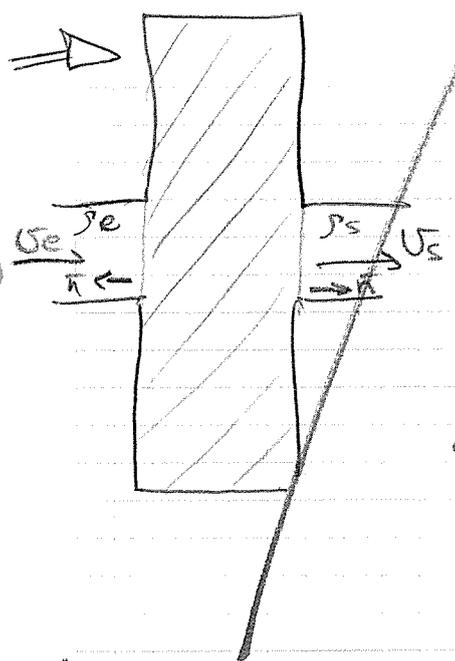
$$\frac{d}{dt} \int_{V_j} \rho dv = \int_{V_j} \frac{d\rho}{dt} dv + \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dv + \oint_S \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0$$

Er. cont. masa con vol. fluido / vol control

$\phi = \rho \vec{v}$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_j} \rho \vec{v} dv = \int_{V_j} \frac{d(\rho \vec{v})}{dt} dv + \oint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} ds = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} dv +$$

$$+ \oint_S (\rho \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = \oint_S \rho \vec{z} ds + \int_{V_j, V_c} \rho \vec{v} dv$$



Tomamos
 el volumen de control (CERRADO)
 $V_d = V_c =$ Periferia depósito + $A_e + A_s$

$$\frac{d}{dt} \int \rho dv + \oint_S \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0$$

$$\frac{dM_d}{dt} + 0 + \oint_{A_e} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds + \oint_{A_s} \rho \vec{v}_s \cdot \vec{n} ds = 0$$

En la periferia del dep. el fluido solo puede salir.
 El campo normal de \vec{v}_c es nula

$$\frac{dM_d}{dt} = \rho_e v_e \oint_{A_e} ds - \rho_s v_s \oint_{A_s} ds \quad \left[\frac{kg}{s} \right]$$

Prob. entrac \rightarrow Gasto entrac = Gasto salida
 Prob. entrac + $\dot{m}_f \rightarrow \Sigma \text{ gaud. entrac} = \Sigma \text{ caud. salida}$

EC. CONSERVACIÓN DE LA MASA

1 FORMA INTEGRAL

$$\phi = \rho \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV + \oint_S \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0$$

"Un volumen fluido no intercambia masa"

CASO CÍCLICO

$$\rho = \text{cte} \rightarrow \left. \begin{aligned} \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= 0 \\ \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{"Para cualquier superficie cerrada} \\ &\text{el flujo volumétrico ha de ser nulo"} \\ &\text{(también llamado caudal)} \end{aligned}$$

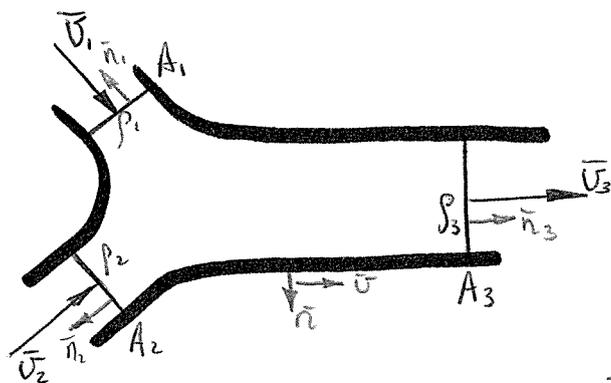
CASO ESTACIONARIO

No vamos a poder decir que el flujo volumétrico sea nulo pero sí que el flujo o gasto másico a lo largo de cualquier superficie cerrada lo será. $\oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0$

→ Ejercicio.

La velocidad en las secciones es uniforme y perpendicular a las secciones de E/S.

Se pide $V_3 = f(V_1, V_2, A_1, A_2, A_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$
Comprobación.



Volumen de control

$$S_c = A_1 + A_2 + A_3 + LC$$

Por conservación de la masa

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0$$

0 (por caso estacionario o propiedades en el vol. de control)

Por tanto:

$$\oint_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = \int_{LC} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds + \int_{A_1} \rho_1 (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}_1 ds + \int_{A_2} \rho_2 (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}_2 ds + \int_{A_3} \rho_3 (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}_3 ds = 0$$

0 ($\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$)

$$-\rho_1 v_1 A_1 - \rho_2 v_2 A_2 - \rho_3 v_3 A_3 = 0$$

$$v_3 = \frac{\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2}{\rho_3 A_3}$$

Comprobación ⇒ Gasto másico nulo

¿Y si se tratase de un líquido?

$$\rho = cte \rightarrow v_3 = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_3}$$

2 FORMA DIFERENCIAL

Partimos de la forma integral:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_g} \rho dV = \int_{V_g} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0, \text{ aplico Ostrogradski-Gauss}$$

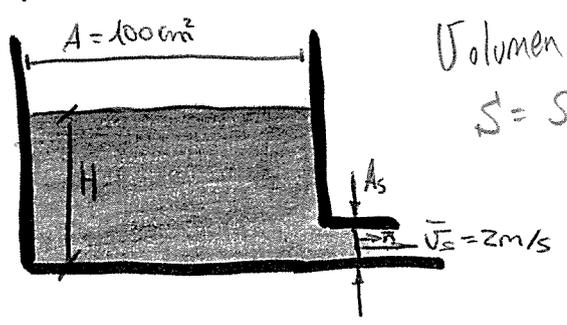
$$\int_{V_g} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_g} \text{div}(\rho \vec{v}) dV = 0; \text{ agrupando,}$$

$$\int_{V_g} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0 \xrightarrow{\text{Hipotesis de medio continuo}} \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \vec{v} + \vec{v} \nabla \rho \right) = 0 \xrightarrow{\frac{D\rho}{Dt}} \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0}$$

→ Se tiene un depósito de agua que se vacía por su parte inferior a través de un orificio de 5cm². El área de la superficie libre es de 100cm². Se pide:

Calcular la velocidad a la que baja el nivel si por la salida el fluido sale a 2m/s $\rightarrow \frac{dH}{dt}$



Volumen de control limitado por S = Sup. libre + paredes + salida (As) p=ccte

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_S \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0$$

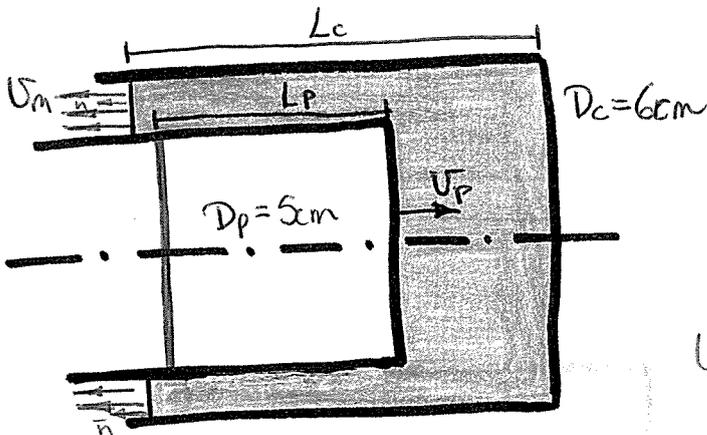
\swarrow sup. libre ($\vec{v} = \vec{v}_c$)
 \nwarrow paredes dep. (fluido no atraviesa)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} dV + \oint_S (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0; \quad \frac{dVol}{dt} + 0 + 0 + v_s \int_{As} ds = 0,$$

\uparrow Vol = AH

$$A \frac{dH}{dt} + v_s \cdot A_s = 0; \quad \boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{v_s A_s}{A} = -\frac{2 \cdot 5}{100} = -0,1 \text{ m/s}}$$

→ Se pide U_m sabiendo que el fluido es un líquido



Elegimos el volumen de contorno verde

$S_c \equiv$ Paredes (cilindro y pistón) + Base (cilindro + pistón) + salida

$$Vol_c = \pi \frac{D_c^2}{4} L_c - \pi \frac{D_p^2}{4} L_p$$

Variable

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0, \quad \frac{dVol_c}{dt} + \oint_{S_c} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0$$

$$\frac{dVol_c}{dt} = 0 - \pi \frac{D_p^2}{4} \frac{dL_p}{dt} = -\pi \frac{D_p^2}{4} U_p$$

$$\oint_{S_c} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0 + \underbrace{0}_{\substack{\uparrow \text{Paredes} \\ \text{No hay escape}}} + \underbrace{0}_{\substack{\uparrow \text{Base pistón} \\ v_c = v}} + U_m \int_{A_s} ds = U_m \left(\pi \frac{D_c^2}{4} - \pi \frac{D_p^2}{4} \right)$$

$$-\frac{\pi D_p^2}{4} U_p + U_m \left(\pi \frac{D_c^2}{4} - \pi \frac{D_p^2}{4} \right) = 0;$$

$$U_m = \frac{D_p^2}{D_c^2 - D_p^2} U_p$$

CONS. DE LA CANT. DE MOV.

Forma Integral (28, 35, 37, 95, 121, 150 // 29, 38, 39, 97)

1 ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Recordando: Fly que atraviesa el vol. fluido

$$\frac{d}{dt} \int_{V_j} \phi dV = \int_{V_j} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_S \phi (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \phi dV + \int_S \phi (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds$$

Particularizando para $\phi = \rho \vec{v}$ obtenemos la ecuación de la cantidad de movimiento:

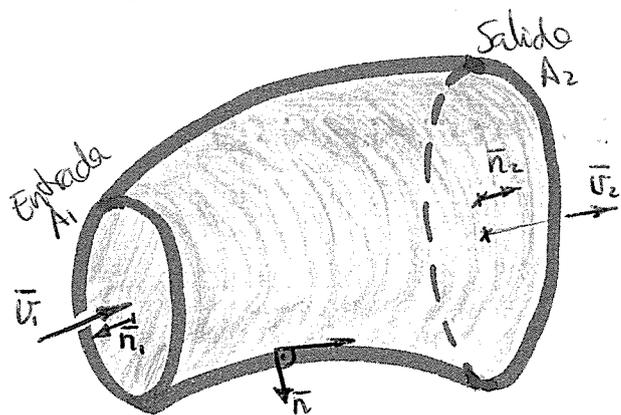
$$\frac{d}{dt} \int_{V_j} \rho \vec{v} dV = \left| \int_{V_j} \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_S (\rho \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds \right| = \int_S \vec{n} \cdot \vec{\tau} ds + \int_{V_j} \rho \vec{f}_m dV =$$

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} dV + \int_S (\rho \vec{v}) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds \right|$$

$$= - \int_S \vec{n} p ds + \int_S \vec{n} \vec{\tau}' ds + \int_{V_j} \rho \vec{f}_m dV$$

$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau'_{ij}$
 Termina asociado a esfuerzos viscosos
 Tiene \vec{v} nulo al tensor si: τ'_{ij}
 no diagonal \rightarrow viscosidad depreciable / viscosidad uniforme

A continuación vamos a aplicar la expresión anterior al tubo quieto de la figura 2



$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \bar{v} dV}_{(1)} + \underbrace{\oint_{V_c} \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \bar{n} ds}_{(2)} = \underbrace{\oint_{S_c} \bar{n} p ds}_{(3)} + \underbrace{\oint_{S_c} \bar{n} \bar{c} ds}_{(4)} + \underbrace{\int_{V_c} \rho \bar{f} dV}_{(5)}$$

(1) $\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \bar{v} dV = \vec{0}$ Fluido varía sus prop. con la posición pero no con el tiempo

(2) $\oint_{S_c} \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \bar{n} ds$; $S_c \equiv \text{Entrada} + \text{Salida} + \text{Paredes}$

$\Rightarrow \int_{\text{Paredes}} \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \bar{n} ds = \vec{0}$ (fluido no atraviesa la pared)

$\Rightarrow \int_{\text{Entrada}} \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \bar{n} ds = \rho \bar{v}_1 (\bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1) \int_{\text{Entrada}} ds = -\rho \bar{v}_1 \bar{n}_1 (\bar{v}_1) A_1 = \rho \bar{v}_1^2 \bar{n}_1 A_1$

$\Rightarrow \int_{\text{Salida}} \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \bar{n} ds = \rho \bar{v}_2 (\bar{v}_2 \cdot \bar{n}_2) \int_{\text{Salida}} ds = \rho \bar{v}_2 \bar{n}_2 (\bar{v}_2) A_2 = \rho \bar{v}_2^2 \bar{n}_2 A_2$

(3), (4), (5):

$$\oint_{S_c} \bar{n} \bar{c} ds + \int_{V_c} \rho \bar{f} dV = \underbrace{\int_{\text{Paredes}} \bar{n} \bar{c} ds}_{\boxed{\text{---}}} + \int_{A_1} \bar{n} \bar{c} ds + \int_{A_2} \bar{n} \bar{c} ds + \int_{V_c} \rho \bar{f} dV$$

--- F_{INT} Es la fuerza del fluido interna sobre la tubería
 ↑
 Cuidado con el cambio de signo (normal de la \bar{c} saliente del sólido) y normal de este (atomamiento saliente del fluido).

Por tanto tenemos:

$$\rho v_1^2 A_1 \bar{n}_1 + \rho v_2^2 A_2 \bar{n}_2 = -F_{INT} - \int_{A_1} \bar{n} p ds + \int_{A_1} \bar{n} \bar{c}' ds - \int_{A_2} \bar{n} p ds + \int_{A_2} \bar{n} \bar{c}' ds + \int_V \rho \bar{j} m dV$$

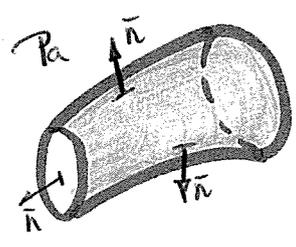
Velocidad y propiedades de esta sección

$\int_V \rho dV = M$
 $\bar{j} m = -g \bar{k}$

$$\rho v_1^2 A_1 \bar{n}_1 + \rho v_2^2 A_2 \bar{n}_2 = -F_{INT} - \bar{n}_1 p_1 A_1 - \bar{n}_2 p_2 A_2 - g \cdot M \bar{k}$$

$$F_{INT} = -\bar{n}_1 A_1 (\rho v_1^2 + p_1) - \bar{n}_2 A_2 (\rho v_2^2 + p_2) - g M \bar{k}$$

Ahora estudiamos el fluido externamente. Ya que el fluido está en reposo y la $F_{INT} \neq 0$, ha de existir una fuerza externa.



$$\int_{\text{paredes}} \bar{n} \bar{c}' ds = F_{EXT} = - \int_{\text{paredes}} \bar{n} P_a ds + \int_{\text{paredes}} \bar{n} \bar{c}' ds ;$$

$$- \int_S \bar{n} P_a ds = - \int_{\text{paredes}} \bar{n} P_a ds - \int_{A_1} \bar{n} P_a ds - \int_{A_2} \bar{n} P_a ds = 0$$

$$- \int_{\text{paredes}} \bar{n} P_a ds = \int_{A_1} \bar{n} P_a ds + \int_{A_2} \bar{n} P_a ds = \bar{n}_1 P_a A_1 + \bar{n}_2 P_a A_2 = F_{EXT}$$

Finalmente, sumando ambas expresiones

$$F_{TOT} = F_{INT} + F_{EXT} = -\bar{n}_1 A_1 (\rho v_1^2 + \underbrace{(P_1 - P_a)}_{P_{m1}}) - \bar{n}_2 A_2 (\rho v_2^2 + \underbrace{(P_2 - P_a)}_{P_{m2}}) - g M \bar{k}$$

↑
Término asociado al empuje
↑
Término asociado a la presión
↑
P_{m2}

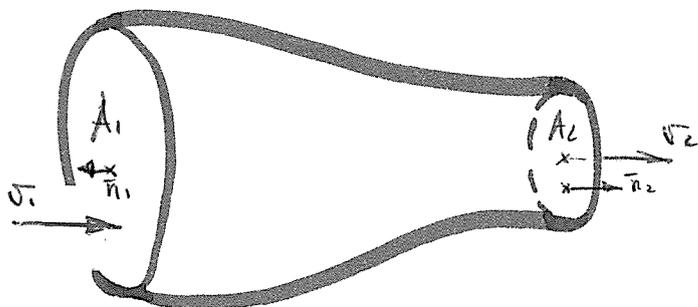
37) Un gas perfecto entra por una sección de un conducto de área A_1 con una velocidad v_1 , normal a la sección, presión P_1 y temperatura T_1 . A la salida la sección es A_2 , presión P_2 y temperatura T_2 . En la entrada y la salida las condiciones son uniformes y el tensor de esfuerzos se reduce a la presión. El conducto estará en reposo respecto a tierra; se desprecia la gravedad y el momento es estacionario.

Se pide calcular lo siguiente para los dos tubos de las figuras:

- 1) v_2 , velocidad a la salida
- 2) Fuerza sobre el conducto siendo la presión exterior P_a

CONDUCTO A: Tubo recto:

DATOS: $P_a = P_1 = 1 \text{ atm}$; $P_2 = 0,75 \text{ atm}$
 $v_1 = 30 \text{ m/s}$; Gas perfecto
 $A_1 = 1 \text{ dm}^2$ Aire
 $A_2 = 0,5 \text{ dm}^2$
 $T_1 = 15^\circ\text{C}$; $T_2 = 303^\circ\text{C}$



Volumen de control, V_c , limitado por:
 $S_c = \text{Paredes} + A_1 + A_2$

• 1º aplica conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0$$

0 (problema estacionario)

$$\left. \begin{aligned} \int_{\text{paredes}} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds &= 0 \Rightarrow \vec{v} \text{ será nulo o} \\ &\text{al menos no} \\ &\text{tendrá compo-} \\ &\text{nente en la} \\ &\text{dirección +} \\ &\text{a la pared.} \end{aligned} \right\}$$

$$\int_{A_1} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = -\rho_1 v_1 A_1$$

$$\int_{A_2} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = \rho_2 v_2 A_2$$

Por tanto: $-\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2 = 0$

$$v_2 = \frac{\rho_1 v_1 A_1}{\rho_2 A_2} = \frac{\frac{P_1}{RT_1} v_1 A_1}{\frac{P_2}{RT_2} A_2} = \frac{P_1 v_1 A_1 T_2}{P_2 A_2 T_1}$$

Por G Ideal $\frac{P}{\rho} = RT$; $\rho = \frac{P}{RT}$

$$\boxed{v_2 = \frac{1 \cdot 30 \cdot 1 \cdot 303}{0,75 \cdot 0,5 \cdot 15} = 160,8 \text{ m/s}}$$

NOTA!!
 Podríamos haber aplicado conservación de masas más tarde para prob. estacionarios
 $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$

35 El tubo acodado toma fluido a presión P_1 y lo expulsa a P_2 . La mitad superior de la tubería está a presión P_a y la inferior a P_2 , estando ambos ambientes separados por un tabique T. La sección del conducto que cruza el tabique es A.

Entrada: v_1, ρ_1, A_1

Salida: v_2, A_2

El movimiento es permanente, las condiciones en la entrada y la salida son uniformes y se desprecian las fuerzas viscosas.

Se pide calcular la densidad de salida ρ_2 y la fuerza total que ejerce el fluido tanto exterior como interior sobre el conducto.

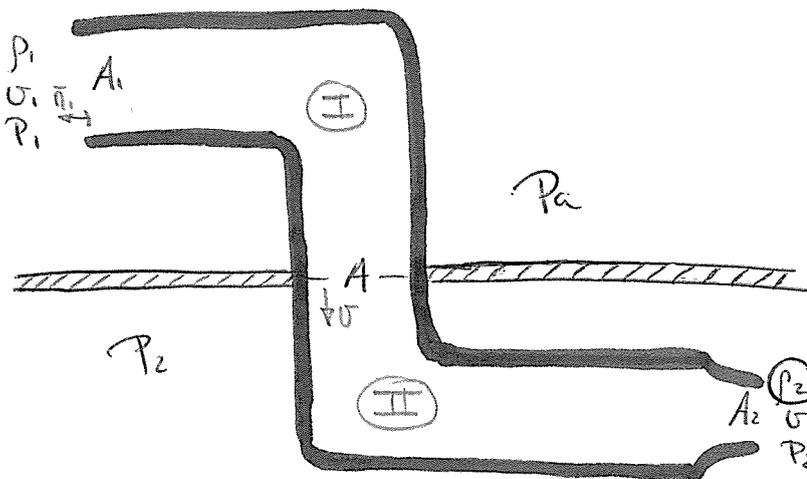
Hacer aplicación para:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1.2 \text{ Kg/m}^3 & A_2 &= 20 \text{ cm}^2 \\ v_1 &= 50 \text{ m/s} & \rho_1 &= 0.95 \text{ Kg/cm}^2 \\ A_1 &= 30 \text{ cm}^2 & \rho_2 &= 0.8 \text{ Kg/cm}^2 \\ v_2 &= 100 \text{ m/s} & P_a &= 1 \text{ Kg/cm}^2 \\ & & A &= 25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

1° - Por problema estacionario
 $G_1 = G_2$ (conserv. masa)

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 v_1 A_1}{v_2 A_2} = \frac{1.2 \cdot 50 \cdot 30 \cdot 10^{-4}}{100 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 0.9 \text{ Kg/m}^3$$



Separamos el conducto en dos partes I y II

$$F_{\text{Tot}}^{\text{I}} = A_1 (\rho_1 v_1^2 + P_{m1}) \bar{i} + A (\rho_x v_x^2 + P_{mx}^{\text{I}}) \bar{j}$$

\parallel
 $P_x - P_a$

$$F_{\text{Tot}}^{\text{II}} = -A (\rho_x v_x^2 + P_{mx}^{\text{II}}) \bar{j} - A_2 (\rho_2 v_2^2 + P_{m2}) \bar{i}$$

\parallel
 $P_x - P_2$

Por tanto:

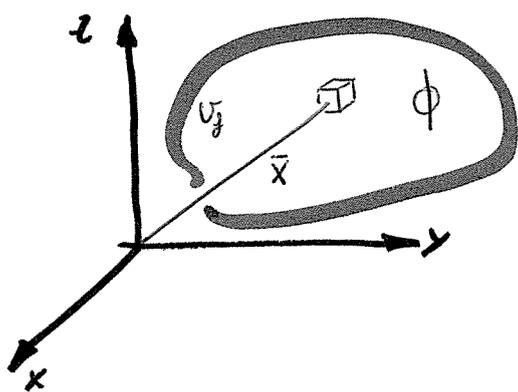
$$F_{\text{Tot}} = A_1 (\rho_1 v_1^2 + P_{m1}) \bar{i} - A_2 (\rho_2 v_2^2 + P_{m2}) \bar{i} + A (P_2 - P_a) \bar{j}$$

$$F_{\text{Tot}} = 30 \cdot 10^{-4} (1.2 \cdot 50^2 + (-0.95 \cdot 10^4)) \bar{i} - 20 \cdot 10^{-4} (0.9 \cdot 100^2 + 0) \bar{i} + 25 (0.8 - 1) \cdot 10^4 \bar{j}$$

$$F_{\text{Tot}} = -6 \bar{i} - 18 \bar{i} + 50 \bar{j} = -24 \bar{i} + 50 \bar{j} \text{ (N)}$$

2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO

Es una variante de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento que se basa en el mismo principio de conservación.



Definimos $\phi = \bar{x} \lambda \rho \bar{v}$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\phi} (\bar{x} \lambda \rho \bar{v}) dV = \int_{V_\phi} \frac{\partial (\bar{x} \lambda \rho \bar{v})}{\partial t} dV + \oint_S (\bar{x} \lambda \rho \bar{v}) \bar{v} \cdot \bar{n} ds =$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\phi} (\bar{x} \lambda \rho \bar{v}) dV + \oint_S (\bar{x} \lambda \rho \bar{v}) (\bar{v} - \bar{v}_e) \cdot \bar{n} ds =$$

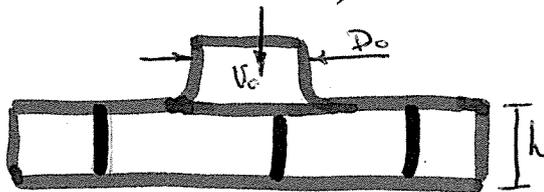
$$= \oint_S (\bar{x} \lambda \bar{n} \bar{v}) ds + \int_V \bar{x} \lambda \rho \bar{v} \bar{v} \cdot \bar{n} dV$$

28) Al elemento de la figura le llega agua axialmente con una velocidad v_0 por un conducto de diámetro D_0 y a la presión P_0 . El diámetro del elemento es D , su altura h y el conjunto permanece quieto. La velocidad de salida es perpendicular a la de la entrada y forma 45° con la dirección tangencial. Determinar:

- 1) El esfuerzo axial que el agua ejerce sobre el elemento
- 2) El par necesario para mantener el elemento quieto.

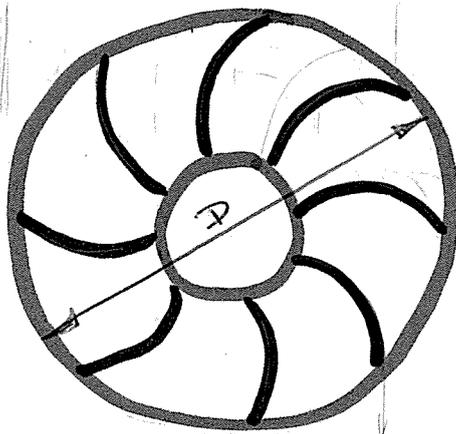
Hacer aplicación al siguiente caso: $v_0 = 5 \text{ m/s}$; $D_0 = 10 \text{ cm}$; $D = 40 \text{ cm}$; $h = 1 \text{ cm}$

Fuerzas grav despreciables



$$P_m(\text{entrada}) = 0.5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$P(\text{salida}) = P_{\text{ambiente}}$$



1) Aplico conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} dV + \oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{v}_c) \vec{n} ds = \oint_S \vec{n} \vec{z} ds + \int \rho \vec{f} dV$$

0 (caso estacionario)

S = Entrada (0) + salida (1) + Paredes

$$\rho U_0^2 \bar{K} \pi \frac{D_0^2}{4} = \oint_S \vec{n} \vec{z} ds = -F_{INT} - \int_0 \vec{n} p ds + \int_1 \vec{n} \vec{z}' ds - \int_1 \vec{n} p ds + \int_1 \vec{n} \vec{z}' ds$$

0 = simetría circular

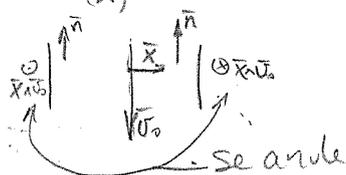
$$\rho U_0^2 \pi \frac{D_0^2}{4} \bar{K} = -F_{INT} - P_0 \pi \frac{D_0^2}{4} \bar{K}$$

$$F_{TOT} = -(\rho U_0^2 + P_{m0}) \frac{\pi D_0^2}{4} \bar{K} = 581,2 \text{ N}$$

2) Aplico conservación del mom. cinético

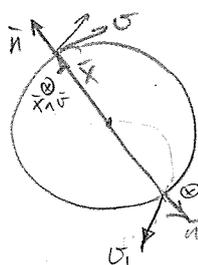
$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) dV + \oint_S (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{v}_c) \vec{n} ds = \oint_S \vec{x} \wedge (\vec{n} \vec{z}) ds + \int \vec{x} \wedge \rho \vec{f} dV$$

(*) En entrada



$$\int_0 (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{v}_c) \vec{n} ds = \vec{0}$$

(*) En salida



$$\int_1 (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{v}_c) \vec{n} ds = \left(\frac{D}{2} \rho v_1 \sin 45^\circ \right) (v_1 \cos 45^\circ) (-\vec{K}) \pi D h$$

$$(**): \oint_S \vec{x} \wedge (\vec{n} \vec{z}) ds = - \int_0 \vec{x} \wedge (\vec{n} p) ds - \int_1 \vec{x} \wedge (\vec{n} p) ds + \int_1 \vec{x} \wedge \vec{n} \vec{z}' ds - T_{INT}$$

0 (x colineal n)

Agrupamos:

$$-\frac{D}{2} \rho v_i^2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ \pi D h \bar{K} = -T_{int}; \quad \bar{T} = -v_i^2 \frac{1}{2} \pi D^2 \frac{1}{2} \rho h \bar{K}$$

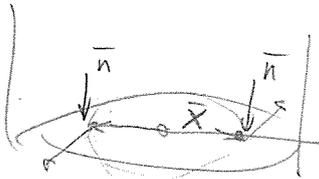
v_i es desconocida \rightarrow Apliquemos conservación de la masa para caso estacionario y líquido

Caudal constante $\rightarrow C_1 = C_2; \quad v_0 \cdot \pi \frac{D_0^2}{4} = v_i \cdot \pi D^2 \sin 45^\circ$

$$v_i = \frac{v_0 D_0^2 \sqrt{2}}{4 h D} = \frac{25 \sqrt{2}}{8} \frac{m}{s}$$

y substituyendo:

$$\bar{T} = - \frac{v_0^2 D_0^4 \cdot 2}{4^2 h^2 D^2} \cdot \frac{1}{2} \pi D^2 \frac{1}{2} \rho h \bar{K} = - \frac{\pi D_0^4}{32 h} \rho v_0^2 = 24,54 \frac{N}{m^2}$$



CONS. DE LA CANT. DE MOV.

Forma diferencial

1 ECUACIÓN DE LA CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN FORMA DIFERENCIAL

Parto de la ecuación en forma integral:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_3} \rho \bar{u} dV = \int_{V_3} \frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} dV + \oint_S \rho \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) dS = \oint_S \bar{n} \bar{c} dS + \int_{V_3} \rho \bar{f}_m dV;$$

Aplicamos Ostrogradski-Gauss a los integrales de superficie.

$$\int_{V_3} \frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \text{div}[(\rho \bar{u}) \bar{u}] dV = \int_{V_3} \text{div} \bar{c} dV + \int_{V_3} \rho \bar{f}_m dV;$$

juntando términos,

$$\int_{V_3} \left[\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \text{div}[(\rho \bar{u}) \bar{u}] - \text{div} \bar{c} - \rho \bar{f}_m \right] dV = 0; \quad \frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \text{div}[(\rho \bar{u}) \bar{u}] - \text{div} \bar{c} - \rho \bar{f}_m = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \text{div}[(\rho \bar{u}) \bar{u}] = \text{div} \bar{c} + \rho \bar{f}_m \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{c} \\ \bar{u} \\ \bar{f}_m \end{array} \right.$$

Tomamos $\phi' = \bar{u}_i$

$$\frac{\partial(\rho \phi')}{\partial t} + \text{div}[(\rho \phi') \bar{u}] = \phi' \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \phi' \text{div}(\rho \bar{u}) + \rho \bar{u} \nabla \phi' =$$

$$= \phi' \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) \right) + \rho \left(\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \bar{u} \nabla \phi' \right) = \rho \frac{D\phi'}{Dt}$$

Por tanto:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \text{div} \bar{c} + \rho \bar{f}_m$$

Cons. de la masa

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \nabla \rho; \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \bar{u} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\bar{u} \nabla \rho + \rho \text{div} \bar{u}}_{\text{div}(\rho \bar{u})}$$

Mucha forma de expresar la ec. de cons. de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0$$

①

2 LEY DE NAVIER POISSON

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau'_{ij}$$

$$\tau'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) A_{ijkl} \approx \text{Tendríamos 81 términos}$$

Medio isotrópico

Generalmente se simplifica ya que no todos los fluidos son isotrópicos y no habrá direcciones predominantes

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk} + \mu'' \delta_{ik} \delta_{jl}; \text{ por tanto,}$$

$$\tau'_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\mu' + \mu''}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$\mu = \text{viscosidad}$

$$\tau'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \text{div} \bar{v} \delta_{ij}$$

$$U = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]; \mu \left[\frac{N \cdot s}{m^2} \right]; \lambda = \mu_0 - \frac{2}{3} \mu; \text{ quedando por tanto:}$$

$$\tau'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left(\mu_0 - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div} \bar{v};$$

$$\xrightarrow{i=j} \sum_{i=1}^3 \tau'_{ii} = 2\mu \text{div} \bar{v} + 3\mu_0 \text{div} \bar{v} - 2\mu \text{div} \bar{v} = 3\mu_0 \text{div} \bar{v}$$

$$\tau'_{11} + \tau'_{22} + \tau'_{33} = 3\mu_0 \text{div} \bar{v}$$

Para líquidos monoatómicos $\sum_{i=1}^3 \tau'_{ii} = 0$ ($\mu_0 = 0$)

Implicaciones físicas:

$$p_m = -\frac{\tau'_{11} + \tau'_{22} + \tau'_{33}}{3} = p - \mu_0 \text{div} \bar{v}$$

3 ECUACIÓN DE NAVIER STOKES

Partiendo de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en forma diferencial.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \text{div } \vec{\tau} + \rho \vec{f}_m$$

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{v} \delta_{ij}$$

Recordamos

$$\text{div } \vec{\tau} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{3i}}{\partial x_3}$$

Volviendo a la ecuación de la cantidad de movimiento

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \text{div } \vec{\tau} + \rho \vec{f}_m$$

La componente i -ésima será:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \rho v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + \rho v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{v} \right] + \rho f_{mi} \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 2 componente

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + \rho v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \rho v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \rho v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} &= - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{v} \right] + \rho f_{m2} \end{aligned}$$

CASO LÍQUIDOS $\rho = \text{cte}$; $\text{div } \vec{U} = 0$
 $\mu = \text{cte}$

$$\rho \frac{D\vec{U}_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \right)}_{\substack{\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 (u_i)}{\partial x_j^2} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 (u_j)}{\partial x_i \partial x_j} \\ \Delta \vec{U}_i}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu - \frac{2}{3} \rho \right) \text{div } \vec{U} \right]} + \rho \bar{f}_{mi}$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad \text{div } \vec{U} = 0$$

Por tanto,

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\nabla P + \mu \Delta \vec{U} + \rho \bar{f}_m \quad ; \quad \text{si además } \bar{f}_m \text{ deriva de potencial: } \bar{f}_m = -\nabla u$$

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \nabla P + \rho \nabla u = \mu \Delta \vec{U} \quad ; \quad \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \nabla (P - P_a + \rho u) = \mu \Delta \vec{U}$$

$P_r \equiv$ Presión reducida
 Manométrica + ρu en cada punto

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \nabla P_r = \mu \Delta \vec{U} \quad ; \quad \text{si } \rho = \text{cte}, \mu = \text{cte}, \bar{f}_m = -\nabla u$$

PROBLEMA GENERAL

ρ, T, \vec{U} , desconocidos \rightarrow 5 incógnitas
 Masa + Energía + CM(3) \rightarrow 5 ecuaciones } No podremos desacoplar el problema mecánico del térmico

PROBLEMA LÍQUIDOS ($\rho = \text{cte}$ y $\mu = \text{cte}$)

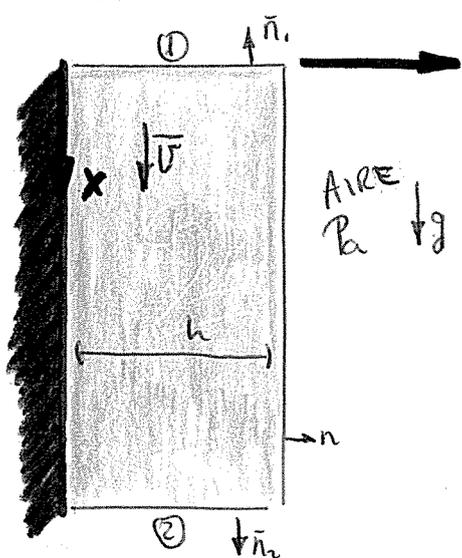
4 incógnitas ρ, \vec{U}
 Masa + CM(3); 4 ecuaciones } \rightarrow siempre que no tenga que haber la temperatura

Puedo desacoplar el problema mecánico del térmico

→ Se tiene el campo de velocidades $\begin{cases} U_x = \frac{(2h-y)y}{h^2} \cdot U \\ U_y = U_z = 0 \end{cases}$, que corresponde a un líquido que desliza

sobre una superficie vertical ascendente bajo la acción de la gravedad. Por conveniencia del problema, elegir como sistema de referencia el indicado en la figura.

Se pide, usando la ecuación de la cantidad de movimiento, el valor de U en función de h (espesor de película), viscosidad, gravedad y densidad. La presión se supone uniforme P_a , y proceso estacionario



• Ec. cont. mov. en forma integral:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \bar{v} dV + \oint_{S_c} \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \bar{n} ds = \oint_{S_c} \bar{n} \bar{z} ds + \int_{V_c} \bar{f}_m \rho dV$$

\bar{v} (con el tiempo)

• $S_c = ① + ② + \text{Pared} + \text{Aire}$

$$\oint_{S_c} \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \bar{n} ds = \bar{0} + \bar{0} - \int_{\text{Entrada}} \rho U_x^2 \bar{i} ds + \int_{\text{Salida}} \rho U_x^2 \bar{i} ds = 0$$

• $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left(\mu - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div} \bar{v} \delta_{ij} = \begin{cases} \tau_{12} = \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} = \tau_{21} \\ \text{el resto nulos} \end{cases} \Rightarrow \bar{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• $\tau_{ij} = -p \bar{n} \delta_{ij} + \tau_{ij}$

• $\oint_{S_c} \bar{n} \bar{z} ds + \int_{V_c} \rho \bar{f}_m dV = \int_{\text{Entrada}} \bar{z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_{\text{Salida}} \bar{z} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_{\text{Pared}} \bar{z} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_{\text{Aire}} \bar{z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds + \rho g \bar{z} \int_{V_c} dV$

Juntando términos:

se anulan

$$\bar{0} = \int_{①} \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_{12} \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_{②} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{12} \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_{\text{Pared}} \begin{pmatrix} -\tau_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_{\text{Aire}} \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds + \rho g \bar{z} B h L$$

ancho de la película

$$\bar{0} = -\frac{2\mu U}{h} \bar{i} \int_{\text{Pared}} ds + \bar{0} + \rho g \bar{z} B h L, \quad \bar{i}: \frac{2\mu U}{h} \frac{4}{B} = \rho g \frac{4}{B} h$$

$$U = \frac{\rho g h^2}{2\mu}$$

Otro método: Como todos los puntos del fluido cumplen el mismo tiempo de velocidades, $p = cte$, $\rho = cte$

$\partial f_m = -\rho u$, aplico ec. cont. mov. en forma diferencial, componente X

$$\int \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right) + \rho g_x$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot 2u \frac{h-y}{h^2} \right) + \rho g_x ; \quad -2u\mu \frac{1}{h^2} + \rho g_x = 0$$

Por tanto \rightarrow
$$u = \frac{\rho g h^2}{2\mu}$$

\rightarrow Ejercicio. Interpretar ecuaciones:

1) $\text{div } \vec{v} = 0$ la ecuación de conservación de la masa es:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{v \nabla \rho + \rho \text{div } \vec{v}} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \nabla \rho \Rightarrow \text{div}(\rho \vec{v})$$

Como los líquidos tienen $\rho = cte$: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ y

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0; \quad \text{div}(\vec{v}) = 0$$

Por tanto, esta ecuación es la ecuación de conservación de la masa en líquidos

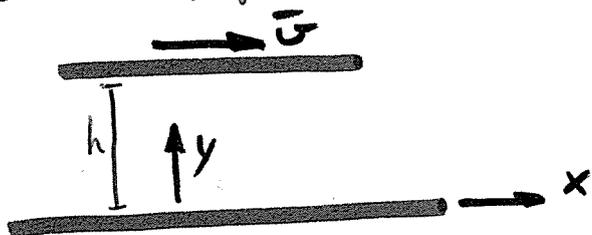
$$2) \underbrace{\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \underbrace{\rho \vec{v} \nabla \vec{v}} = \underbrace{-\nabla(p + \rho u)} + \underbrace{\mu \Delta \vec{v}}$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \nabla p_r = \mu \Delta \vec{v}$$

Ecuación de cantidad de movimiento para líquidos con viscosidad constante y fuerzas másicas derivando de potencial.

Caso aplicación

Movimiento estacionario bidimensional. La placa de arriba se mueve a velocidad U y la otra está quieta. Las fricciones viscosas son despreciables y la presión es uniforme en todo el sistema. Calcular el perfil de velocidades $\rightarrow \bar{U} = U_x(y) \bar{x}$



Como solo existe componente x de la velocidad, aplico la ecuación del apartado 2), pero sólo su 1ª componente:

$$\rho \frac{\partial U_x}{\partial t} + \rho \bar{U} \nabla U_x = -\nabla(\rho + \rho u) + \mu \Delta U_x$$

0 (1) m despreciables y P cte en todo sistema)

0 (U_x no depende del tiempo)

$$\rho \bar{U} \nabla U_x \begin{cases} \rho U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} = 0 \quad (\frac{\partial U_x}{\partial x} = 0) \\ \rho U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = 0 \quad (U_y = 0) \\ \rho U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} = 0 \quad (U_z = 0) \end{cases}$$

Nos queda por tanto:

$$\Delta U_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = A, \quad U_x = Ay + B$$

Condiciones de contorno: $U_x(y=0) = 0 \rightarrow 0 = B$

$U_x(y=h) = U \rightarrow U = Ah, \quad A = \frac{U}{h}; \quad U_x = \frac{U}{h} y$

Por tanto $\boxed{\bar{U} = \frac{U}{h} y \bar{x}}$

Continúa en el tema siguiente, cuando hagamos embedido la ecuación de conservación de la energía.

4 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Recordemos, del tema 7: $\bar{a} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \bar{v} \wedge (\nabla \wedge \bar{v})$

$$\bar{a} = \frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}$$

Por ec. cont. mas, en forma diferencial:

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \text{div} \bar{\tau} + \rho \bar{f}_m; \quad \left(\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla p + \text{div} \bar{\tau}' + \rho \bar{f}_m \right) \cdot \bar{v}$$

$$\rho \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \rho \bar{v} \cdot \left[\bar{v} \wedge (\nabla \wedge \bar{v}) \right] = -\bar{v} \cdot \nabla p + \bar{v} \cdot \text{div} \bar{\tau}' + \bar{v} \cdot \rho \bar{f}_m$$

$$\rho \left(\frac{\partial (v^2/2)}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla (v^2/2) \right) = -\bar{v} \cdot \nabla p + \bar{v} \cdot \text{div} \bar{\tau}' + \bar{v} \cdot \rho \bar{f}_m$$

$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} \equiv$ Variación de la energía cinética en el tiempo para un volumen unitario que se descompone en términos de variación local y convectiva.

Esta variación de E_c es el resultado de 3 trabajos:

- El 1º, por la presión
- El 2º, por las fuerzas viscosas
- El tercero, por fuerzas másicas.

Es la potencia de las fuerzas exteriores al volumen si todo se moviera a velocidad \bar{v}

Caso Líquido $\oplus \bar{f}_m = -\nabla u$ $\oplus \mu$ despreciable \oplus Estacionario

$$\rho \frac{\partial (v^2/2)}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\bar{v} \cdot \nabla p + \bar{v} \cdot \text{div} \bar{\tau}' - \bar{v} \cdot \rho \nabla u$$

$\leftarrow 0$ (estacionario) $\rightarrow 0$ (μ despreciable)

Obtenemos así una primera versión del teorema de Bernoulli

$$\bar{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \rho + p + \rho u \right) = 0$$

La proyección de (*) en la dirección de la línea de corriente \bar{v} es nula.

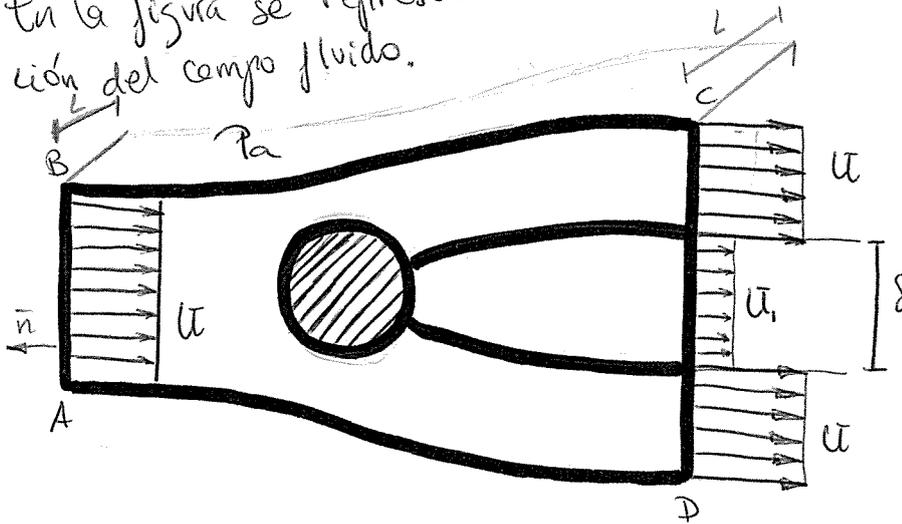
Por tanto, para una línea de corriente

$$\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho u = cte$$

y, además, si todos las corrientes surgen de una zona con propiedades uniformes

$$P + \rho u + \rho \frac{v^2}{2} = cte$$

95 Se trata de relacionar la fuerza que ejerce una corriente uniforme sobre un obstáculo bidimensional, con el defecto de velocidad o sombra que se produce en la parte posterior del mismo. En la figura se representa un modelo simple de la configuración del campo fluido.



Suponer que el ancho de la estela es δ y que en ella la velocidad es $u_1 = u - \Delta u$

Tomar un volumen de control ABCD, suficientemente alejado del cuerpo para que en 1ª aproximación en toda la superficie del volumen sea la ambiente, P_a , y la velocidad sea aproximadamente \bar{u} , excepto en la estela. BC y AD son líneas de corriente. Se pide:

1) Por continuidad, la diferencia entre CD y AB.

Aplicar conservación de la masa

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0; \quad \rho u (1 - \bar{u}) \overline{AB} \cdot \vec{k} + \rho u (\overline{CD} - \delta) \vec{k} + \rho u_1 \delta \vec{k} = 0$$

$$S_c = \text{Entrada} + \text{Salida} + LC; \quad (\overline{CD} - \overline{AB}) u = u \delta - u_1 \delta = \Delta u \delta$$

$$\overline{CD} - \overline{AB} = \frac{\Delta u}{u} \delta$$

2) Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento, calcular la fuerza F por unidad de ancho del obstáculo, como función de $\delta, u, \rho, \Delta u$

Hacer aplicación a: $\delta = 1m$ $u = 5m/s$
 $\rho = 1,25 Kg/m^3$ $\Delta u = 0,5 m/s$

$$\frac{1}{CD - AB} = \frac{\Delta u}{u} \delta = \frac{0,5}{5} \cdot 1 = \underline{0,1 m}$$

Ec. de la cons. de la cantidad de mov. (forma integral)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} dv + \oint_{S_c} \rho \vec{v} (\vec{r} - \vec{r}_c) \cdot \vec{n} ds = \oint_{S_c} \vec{n} \cdot \vec{c} ds + \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dv$$

• Componente x:

$$-\rho u^2 \overline{ABL} + \rho u^2 (\overline{CD} - \delta) L + u_1^2 \rho \delta L = \rho L (-u^2 \overline{AB} + u^2 \overline{CD} - u^2 \delta + u_1^2 \delta) =$$

$$= 1,25 L \cdot (5^2 \cdot 0,1 - 5^2 \cdot 1 + (5 - 0,5)^2 \cdot 1) = -2,81 L (N)$$

(Anulación) $\oint_{S_c} \vec{n} \cdot \vec{c} ds = \underbrace{\oint_{\text{superf}} \vec{n} \cdot \vec{c} ds}_{-F_x} + \underbrace{\oint_{LC+AB+CD} \vec{n} \cdot \vec{c} ds}_{-\oint \vec{n} \cdot \vec{p} ds} + \underbrace{\oint_{AB, CD, LC} \vec{n} \cdot \vec{c} ds}_{-F_x}$

• Suponemos f_m despreciable

Por tanto $-2,81 L = -F_x$; $F = 2,81 \frac{N}{m}$

$$F = -\rho (u^2 \frac{\Delta u}{u} \delta - u^2 \delta + u_1^2 \delta) = -\rho \delta \Delta u (u - \frac{u^2}{\Delta u} + \frac{u_1^2}{\Delta u}) =$$

$$= -\rho \delta \Delta u (u + \frac{(u - \Delta u)^2 - u^2}{\Delta u}) = -\rho \delta \Delta u (u + \frac{\Delta u^2 - 2u \Delta u}{\Delta u}) =$$

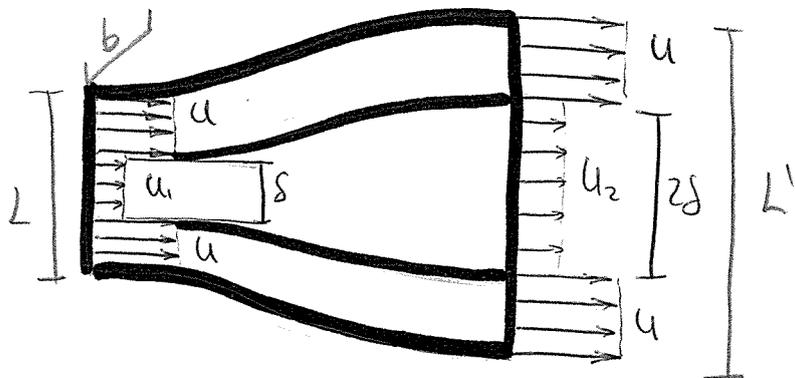
$$u_1 = u - \Delta u$$

$$\Delta u - u = -u_1$$

$$\Delta u - 2u = -u_1 - u$$

$$= -\rho \delta \Delta u (u - u_1 - u) = \rho \delta \Delta u (u - \Delta u)$$

3) Aguas abajo la estela se ensancha. En un sitio donde el ancho sea 2δ , calcular lo que valdría u_1 . Despreciar f_m y viscosidad.



Como estamos en caso estacionario. Gasto másico = 0 $\left(\oint_{V_{sc}} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0 \right)$

$$\rho u (L - \delta) b - \rho u_1 \delta b + \rho u ((L - 2\delta) b) + \rho u_2 2\delta b = 0 \quad (1)$$

y por cantidad de movimiento

$$\rho u^2 (L - \delta) b - \rho \delta b u_1^2 + \rho u^2 ((L - 2\delta) b) + \rho u_2^2 2\delta b = 0 \quad (2)$$

No existe fuerza por no haber cuerpo donde aplicarlo. μ despreciables f_m también.

Hezo (1) $\cdot u$ y resto:

$$-\rho u u_1 \delta b + \rho \delta b u_1^2 + \rho u_2 u 2\delta b - \rho u_2^2 2\delta b = 0$$

$$2u_1^2 - 2u u_2 - u_1^2 + 4u_1 = 0; \quad u_2^2 - u u_2 + \frac{u_1(u + u_1)}{2} = 0$$

$$u_2 = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2u_1(u + u_1)}}{2}; \quad u_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.5 \cdot 2 \cdot 0.5}}{2} = \left. \begin{array}{l} u_2 = 4.76 \text{ m/s} \\ \text{No válida} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{u_2 = 4.76 \text{ m/s}}$$

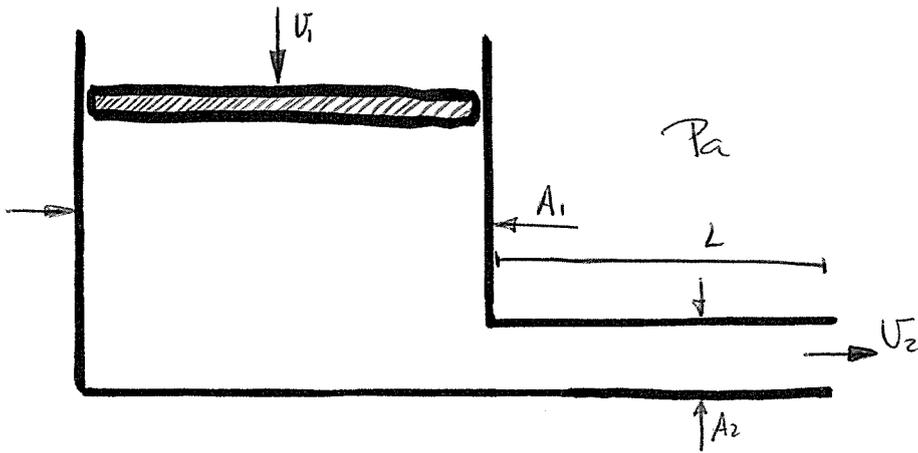
121) Un pistón se mueve con una velocidad v_1 , variable con el tiempo con aceleración constante: $v_1 = v_{10} + at$

y empuja a un líquido que descarga a través de una tubería horizontal de área A_2 y longitud L . Siendo A_1 el área del pistón, se pide:

- 1) Calcular la velocidad del fluido v_2 , supuesta uniforme en la tubería. Valor numérico v_{20}
- 2) Aplicando la ecuación integral de la cantidad de movimiento, proyectada en dirección horizontal, al sistema anterior, calcular la fuerza horizontal que ejerce el fluido en cada instante sobre el sistema. Considerar los dos casos: $a = 0$; $a \neq 0$

Suponer que el único tramo donde hay velocidad horizontal es en el tubo. La presión exterior es constante e igual a la atmosférica.

Para aplicación a: $v_{10} = 10 \text{ cm/s}$; $A_1 = 100 \text{ cm}^2$; $A_2 = 10 \text{ cm}^2$
 $a = 1 \text{ cm/s}^2$; $L = 1 \text{ m}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$



1) Aplico conservación de la masa para problema no estacionario

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho (\vec{r} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0; \quad \frac{d}{dt} \int_{V_c} dV + \oint_{S_c} (\vec{r} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0$$

V_c - limitado por: $S_c = \text{Pistón} + \text{Paredes (dep + tub)} + \text{Salida}$

$$\frac{d(V_c)}{dt} + 0 + 0 + v_2 A_2 = 0; \quad \frac{dV_{\text{dep}}}{dt} + \frac{dV_{\text{tub}}}{dt} + v_2 A_2 = 0$$

Pistón $v_1 = v_2$ Paredes $v_c = 0, \vec{r} \cdot \vec{n} = 0$

$$V_{\text{dep}} = A_1 H; \quad \frac{dV_{\text{dep}}}{dt} = A_1 \frac{dH}{dt} = -A_1 v_1; \quad \longrightarrow \quad -A_1 v_1 + A_2 v_2 = 0$$

Por tanto, $v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} = \frac{A_1}{A_2} (v_{10} + at)$

$v_2(t=0) = v_{20} = \frac{100}{10} 10 = 100 \text{ cm/s} = 1 \text{ m/s}$

2) Ecuación integral cons. CM:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} dV}_{(1)} + \underbrace{\oint_{S_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds}_{(2)} = \underbrace{\oint_{S_c} \vec{n} \cdot \vec{c} ds}_{(3)} + \underbrace{\int_{V_c} \rho \vec{f} dV}_{(4)}$$

①: Componente horizontal:

$$\rho \frac{d}{dt} \int_{V_c} v_x dV = \rho \frac{d}{dt} \int_{V_{der}} v_x dV + \rho \frac{d}{dt} \int_{V_{izq}} v_x dV = \rho \frac{d}{dt} (v_{20} + at) \frac{A_1}{A_2} L = \rho A_1 L a$$

(se en posición)

0 (por encajado)

②: $\oint_{S_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = \overset{\text{comp. horiz.}}{0} + \overset{\text{Pistón}}{0} + \rho v_2^2 A_2 = \rho (v_{10} + at)^2 \frac{A_1^2}{A_2}$

③: $\oint_{S_c} \vec{n} \cdot \vec{c} ds = \underbrace{\int_{\text{pared}} \vec{n} \cdot \vec{c} ds}_{-F_{INT}} + \underbrace{\int_{\text{salida}} \vec{n} \cdot \vec{c} ds}_{-\int_{\text{salida}} \vec{n} p ds + \int_{\text{salida}} \vec{n} \vec{c}' ds = -P_a A_2 \vec{i}}$

En el pistón no hay F_{horiz} (se omite)

④ Fuerzas másicas despreciables \rightarrow ④ $\equiv 0$

Agrupando términos:

$$\rho L A_1 a + \rho (v_{10} + at)^2 \frac{A_1^2}{A_2} = -F_{INT} - P_a A_2$$

$$F_{TOT} = -\rho L A_1 a - \rho (v_{10} + at)^2 \frac{A_1^2}{A_2} - (P_{ext} - P_a) A_2$$

$a=0 \rightarrow F = -1N$
 $a=1 \text{ cm/s}^2 \rightarrow F = -1,1N$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \text{div} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \bar{v} \right] = \text{div}(\bar{z}'\bar{v}) + \rho \bar{j}_m \bar{v} + Q_r + Q_g - \text{div} \bar{q}$$

Cons. masa = 0

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi') + \text{div} (\rho \phi' \bar{v}) = \rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \phi' \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) \right) + \rho \bar{v} \cdot \nabla \phi' =$$

$$= \rho \left(\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \phi' \right) = \rho \frac{D}{Dt} (\phi') = \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \rho \bar{v} \cdot \nabla \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = \text{div}(\bar{z}'\bar{v}) + \rho \bar{j}_m \bar{v} + Q_r + Q_g - \text{div} \bar{q}$$

-div(p\bar{v}) + div(z'\bar{v})

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \text{div}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(\bar{z}'\bar{v}) + \rho \bar{j}_m \bar{v} + Q_r + Q_g - \text{div} \bar{q} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Cons. masa = 0

$$\text{div}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{\rho}{\rho} \cdot \rho \bar{v} \right) + \frac{\partial \left(\frac{\rho}{\rho} \cdot \rho \right)}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\rho} \right) + \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) \right) + \rho \bar{v} \cdot \nabla \left(\frac{\rho}{\rho} \right) =$$

$$= \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\rho} \right) + \bar{v} \cdot \nabla \left(\frac{\rho}{\rho} \right) \right) = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{\rho} \right)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{\rho} \right) = \text{div}(\bar{z}'\bar{v}) + \rho \bar{j}_m \bar{v} + Q_r + Q_g - \text{div} \bar{q} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) = \rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = \text{div}(\bar{z}'\bar{v}) + \rho \bar{j}_m \bar{v} + Q_r + Q_g - \text{div} \bar{q} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$h = \text{entalpía}$

DOX PARTES

$\frac{\partial}{\partial t} \left(h + \frac{v^2}{2} \right)$ Local

$\rho \bar{v} \cdot \nabla \left(h + \frac{v^2}{2} \right)$ Término convectivo

Variación total de la energía de una partícula fluida	Parte viscosa del trabajo de fuerzas interiores - es hecho viscoso -	Trabajo de J. volumétricos Calores: radiación, químicos Flujo de calor: convección Presiones
---	---	---

Aplicamos $\vec{j}_m = -\nabla u$ y sumo " $\int \frac{\partial u}{\partial t}$ "

$$\int \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) + \int \bar{\sigma} \nabla u + \int \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\bar{c}' \bar{v}) + Q_r + Q_g - \text{div} \bar{q} + \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{\sigma} \nabla u \right) \rho \frac{Du}{Dt}$$

$$\int \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right)$$

$$\int \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right) = \int \frac{\partial}{\partial t} \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right) + \int \bar{\sigma} \nabla \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right) = \text{div}(\bar{c}' \bar{v}) + Q_r + Q_g - \text{div} \bar{q} + \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

①
②
③
④
⑤

NOTA TEÓRICA!! Teorema de Bernoulli "alternativo"

Vamos a deducir, a partir de la ecuación anterior, un teorema de Bernoulli "alternativo" que es aplicable en gases (la obtenida en el tema anterior -Ej. 8- sólo era válida para líquidos, con \vec{j}_m derivan de potencial, viscosidad despreciable y caso estacionario $\Rightarrow P + \rho u + \rho \frac{v^2}{2} = \text{cte}$ en una línea de corr. si añadimos prop. constante en la entrada $P + \rho u + \rho \frac{v^2}{2} = \text{cte}$ en todo el fluido.)

- En este caso, las condiciones de aplicabilidad del teorema que se deduce son:
- Fuerzas másicas derivan de potencial
 - Estacionario \rightarrow ①, ⑤ se anulan
 - Viscosidad (μ) despreciable \rightarrow ③ se anula
 - No intercambia calor \rightarrow ④ se anula
 - Válido para líquidos y gases.

No queda $\rho \bar{\sigma} \nabla \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right) = 0 \Rightarrow h + \frac{v^2}{2} + u = \text{cte}$ en una línea de corriente

Pero, si todas las líneas de corriente proceden de una sola con propiedades uniformes:

$$h + \frac{v^2}{2} + u = \text{cte}$$

3 DIFERENCIAL ECUACIÓN DE LA ENERGÍA INTERNA

Recordamos, del tema anterior, la ecuación de la energía mecánica:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \bar{v} \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = \bar{v} \text{div}(\bar{\tau}) + \bar{v} \rho \bar{f}_m$$

"La variación de energía cinética en el tiempo para un volumen unitario, considerada como variación local y convectiva, es el resultado de 3 trabajos: por variaciones de presión, fuerzas viscosas y fuerzas másicas."

Ahora vamos a restar la ecuación de la conservación de la energía interna y cinética menos la de la energía mecánica:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{v^2}{2}) &= \text{div}(\bar{\tau} \bar{v}) + \rho \bar{f}_m \bar{v} + Q_r + Q_s - \text{div} \bar{q} \\ \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= \bar{v} \text{div}(\bar{\tau}) + \rho \bar{f}_m \bar{v} \end{aligned} \right. \xrightarrow{\text{Restando}}$$

Trabajo fuerzas de sup como si el sist. fuera un sólido rígido

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \bar{v} \nabla e = \underbrace{\text{div}(\bar{\tau} \bar{v}) - \bar{v} \text{div}(\bar{\tau})}_{\text{Trabajo fuerzas de superficie} \Rightarrow \text{deformación}} + Q_r + Q_s - \text{div} \bar{q}$$

Estudiamos el término de trabajo por deformación: (diferencia entre el trabajo de los \int_{sup} y los \int_{sup} como si el sist. fuera un sólido rígido)

$$\text{div}(\bar{\tau} \bar{v}) - \bar{v} \text{div} \bar{\tau} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i) - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} =$$

$$= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{ij} p \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \text{div} \bar{v} + \Phi_v$$

siendo Φ_v la función de disipación de Rayleigh

Trabajo de los esfuerzos viscosos al deformar la partícula

Trabajo de la presión al comprimir la partícula fluida (=0 para líquidos)

FUNCION DE DISIPACION DE RAYLEIGH

Remember $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{v} \cdot \delta_{ij}$

$$\Phi_v = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div } \vec{v} \right)^2 \right] + \mu_v (\text{div } \vec{v})^2 \geq 0$$

HAY QUE SABERLA DE MEMORIA!!

Sustituyendo, la ecuación de la energía interna queda:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\rho \text{div } \vec{v} + \Phi_v + Q_r + Q_g - \text{div } \vec{q}$$

4 ECUACION DIFERENCIAL DE LA ENTROPÍA

Partimos de la relación termodinámica: $Tds = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right)$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + \rho p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right); \quad \rho T \frac{Ds}{Dt} = -\rho \text{div } \vec{v} + \Phi_v + Q_r + Q_g - \text{div } \vec{q} - \frac{\rho p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

Ecuación e. interna

EC masa $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \text{div } \vec{v}$

$$\Rightarrow \rho p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \rho p \left(\frac{-1}{\rho^2} \right) \frac{D\rho}{Dt}$$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\cancel{\rho \text{div } \vec{v}} + \Phi_v + Q_r + Q_g - \text{div } \vec{q} + \cancel{\rho \text{div } \vec{v}}$$

Nos queda:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi_v + Q_r + Q_g - \text{div } \vec{q}$$

EC ENTROPÍA EN SU FORMA DIFERENCIAL

La variación de entropía de una partícula fluida se debe \rightarrow Irreversibilidades por efectos viscosos (>0) \rightarrow Calor recibido $\left\{ \begin{array}{l} \text{Radiación} \\ \text{Reacción química} \\ \text{Conducción} \end{array} \right.$

A continuación vamos a estudiar la variación temporal de la entropía contenida en un volumen fluido:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \cdot s \, dV = \int_{V_f} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} \, dV + \oint_{S_f} \rho s \bar{u} \cdot \bar{n} \, dS = \int_{V_f} \left(\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho s \bar{u}) \right) \, dV = \int_{V_f} \frac{D_s}{Dt} \, dV$$

$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial s}{\partial t} + \rho \bar{u} \cdot \nabla s + s \text{div}(\rho \bar{u}) \right)$

Entropía en el vol. fluido

Volviendo a la ecuación diferencial de la entropía tenemos

$$T \rho \frac{D_s}{Dt} = \Phi_v + Q_r + Q_g - \text{div} \bar{q} \quad ; \quad \text{que integrando:}$$

$$\int_{V_f} \frac{D_s}{Dt} \, dV = \int_{V_f} \frac{\Phi_v}{T} \, dV + \int_{V_f} \frac{Q_r + Q_g}{T} \, dV - \int_{V_f} \frac{\text{div} \bar{q}}{T} \, dV = \frac{d}{dt} \int_{V_f} (\rho s) \, dV$$

Vamos a analizar el término de conducción de calor: Recordamos la ley de Fourier: $\bar{q} = -k \nabla T$

$$\frac{\text{div} \bar{q}}{T} = \frac{\text{div}(-k \nabla T)}{T} = \frac{\bar{q} \cdot \nabla T}{T^2} + \text{div} \left(\frac{\bar{q}}{T} \right)$$

$$\text{div} \left(\frac{\bar{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \text{div} \bar{q} + \bar{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) = \left(\frac{\text{div} \bar{q}}{T} \right) - \bar{q} \cdot \frac{1}{T^2} \nabla T$$

Volviendo a la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} (\rho s) \, dV = \int_{V_f} \frac{\Phi_v}{T} \, dV + \int_{V_f} \frac{Q_r + Q_g}{T} \, dV - \int_{V_f} \text{div} \left(\frac{\bar{q}}{T} \right) \, dV - \int_{V_f} \frac{\bar{q} \cdot \nabla T}{T^2} \, dV$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} (\rho s) \, dV = \int_{V_f} \frac{\Phi_v}{T} \, dV + \int_{V_f} \frac{Q_r + Q_g}{T} \, dV + \int_{V_f} \frac{k(\nabla T)^2}{T^2} \, dV - \oint_{S_f} \frac{\bar{q}}{T} \cdot \bar{n} \, dS$$

Ecuación de la entropía forma integral

La variación de la entropía de un fluido es debido a:

- 1) Irreversibilidades debidas a diferencias de velocidades - esfuerzos viscosos -
- 2) Calores intercambiados por radiación y reacción química
- 3) Calor por conducción dentro del volumen fluido (> 0)
- 4) Calor intercambiado en la superficie

Es importante destacar que la entropía de un volumen fluido que no recibe ninguna aportación de calor, esto es, un sistema aislado, aumenta.

Este aumento se debe a estados irreversibles (1, 3 ya que 2 y 4 son cero en sistemas aislados). Las desviaciones de equilibrio termodinámico asociadas a variaciones espaciales de velocidad (1), temperatura y composición (3) dan lugar a fenómenos de transporte irreversibles que causan un aumento de entropía en el sistema material.

5 ECUACIÓN DE CONS. DE LA ENERGÍA INTERNA PARA FLUIDOS DE ρ CTE (Líquidos)

Para un líquido perfecto, la entropía viene expresado por $Tds = cdt$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \rho T \frac{ds}{dt} = \Phi_v + Q_r + Q_g - \text{div } \mathbf{q}$$

La variación térmica \rightarrow proporcional a la var. entropía \rightarrow Es deseada

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \mathbf{v} \cdot \nabla T = \Phi_v + Q_r + Q_g + \text{div}(K \nabla T)$$

F. disip. Rayleigh, Irrev. viscosas

Calor: radiación, convección, químico

Para el problema térmico con líquidos SIEMPRE usaremos esta ecuación

Suponiendo despreciable el término de la disipación viscosa: $\Phi_v = 0$ y además $Q_g = Q_r = 0$ y $K = cte$

Ley de Fourier

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{K}{\rho c} \Delta T$$

Si $\mathbf{v} = 0$
Desaparece el término convectivo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c} \Delta T = \alpha \Delta T$$

Nota: Para un líquido, con μ no dependiente de T , la velocidad se calcula a partir de las ecuaciones mecánicas ya que el problema mecánico está totalmente desarrollado del térmico.

La difusión térmica (3) de un material es debida a la acumulación térmica en el tiempo y al transporte convectivo (2)

→ Cuestión 2 ; Enero curso 2011/2012

1) ¿Qué es cada ecuación y qué representa cada uno de sus términos?

• $\text{div } \vec{U} = 0$

• $\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \vec{U} \nabla \vec{U} = -\nabla(p + \rho u) + \mu \Delta \vec{U}$

• $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \vec{U} \nabla T = \phi_v + \text{div}(K \nabla T) + Q_r + Q_f$

Las ecuaciones anteriores permiten resolver las cuestiones que se piden a continuación para un movimiento estacionario bidimensional de un aceite, $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 0,1 \text{ kg/ms}$, entre dos placas planas, paralelas e infinitas, separadas una distancia $h = 1 \text{ cm}$, sabiendo que una de ellas se mueve a una velocidad $\vec{U} = 24 \text{ cm/s}$. Suponer fuerzas viscosas despreciables y presión uniforme en todo el campo fluido.



2) Calcular el perfil de velocidades $V = V_x(y) \vec{i}$

3) Calcular el tensor $\nabla \vec{U}$, descomponiéndolo en el tensor de deformación y de rotación. Verificar que ϕ_v no depende de la posición en este caso.

4) Suponiendo $K = 0,7 \text{ J/ms}^2\text{C}$ constante y calor por radiación y reacción química nulos, calcular el perfil de temperaturas $T(y)$ y la temperatura máxima cuando las temperaturas de ambas placas es $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

①. $\text{div } \vec{U} = 0$

Es la ecuación de la masa para líquidos: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \vec{U} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{U} = 0 \\ \rho = \text{cte} \end{array} \right.$

$$\rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \rho \bar{U} \nabla \bar{U} = -\nabla(p + \rho U) + \mu \Delta \bar{U}$$

Se trata de la ecuación de la cantidad de movimiento en forma dif. para líquidos de $\rho = \text{cte}$, μ constante y $\bar{f}_m = -\nabla U$

Partiendo de: $\rho \frac{D\bar{U}}{Dt} = \text{div} \bar{\tau} + \rho \bar{f}_m$, cogiendo la componente i -ésima:

$$\rho \frac{D\bar{U}_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \right)}_{\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j \partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho U - \frac{2}{3} \mu \text{div} \bar{U} \right) + \rho_j f_{mi}$$

$0 \text{ (div} \bar{U} = 0)$

$$\rho \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_3^2} \right) = \mu \Delta U_i \qquad \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right)$$

$\text{div} \bar{U} = 0$

$$\Rightarrow \rho \frac{D\bar{U}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \bar{U} + \rho \bar{f}_m, \text{ y si } \bar{f}_m = -\nabla U, \rho \frac{D\bar{U}}{Dt} = -\nabla(p + \rho U) + \mu \Delta \bar{U}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{D\bar{U}}{Dt} = \underbrace{\rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial t}}_{\text{①}} + \underbrace{\rho \bar{U} \nabla \bar{U}}_{\text{②}} = -\nabla(p + \rho U) + \mu \Delta \bar{U}$$

La variación temporal de una partícula fluida, descompuesta en términos de variación local y término convectivo es igual a:

Menos el gradiente de la presión reducida, entendido como la suma de la presión manométrica y el término de potencial

El término de la acción de los esfuerzos viscosos

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \bar{U} \nabla T = \underbrace{\Phi_v}_{\text{②}} + \underbrace{\text{div}(K \nabla T)}_{\text{③}} + \underbrace{Q_r + Q_g}_{\text{④}}$$

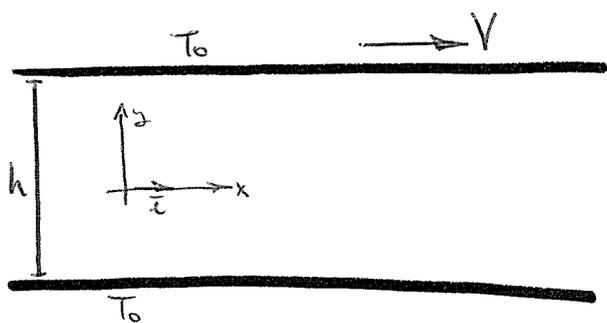
Se trata de la ecuación de la conservación de la energía en su forma diferencial para líquidos perfectos $\Rightarrow T ds = c dt$

① \Rightarrow La variación de entropía Φ proporcional a la de la temperatura, se descompone en una variación local y una convectiva y es igual a:

② \Rightarrow La función de disipación de Rayleigh Φ representa las irreversibilidades debidas a los esfuerzos viscosos.

④ \Rightarrow Calor recibido por radiación Q_r y reacción química Q_g

③ \Rightarrow Calor por conducción $-\text{div} \bar{q} \Rightarrow \text{div}(K \nabla T)$
 $\bar{q} = -K \nabla T$



$\rho = 800 \text{ kg/m}^3 = \text{cte}$

$\mu = 0,1 \text{ kg/m s}$

$h = 1 \text{ cm}$

$\bar{V} = 24 \text{ cm/s}$

\bar{f}_m despreciables, presión unif.

②

Usamos la segunda ecuación dada, cantidad de mov. para líquidos con $\mu = \text{cte}$:

$$\rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \rho \bar{U} \nabla \bar{U} = -\nabla(P + \rho U) + \mu \Delta \bar{U}$$

Cojemos exclusivamente la 1ª componente, esto es, la dirección x , por ser el único componente no nulo de la velocidad que sólo depende de la coordenada y

$P = \text{cte}$, \bar{f}_m despreciables

$$\underbrace{\rho \frac{\partial U_x}{\partial t}}_{\text{Caso estacionario}} + \underbrace{\rho U_x \frac{\partial U_x}{\partial x}}_{0 (U_x(y))} + \underbrace{\rho U_y \frac{\partial U_x}{\partial y}}_{0} + \underbrace{\rho U_z \frac{\partial U_x}{\partial z}}_{0 (U_x(y))} = -\nabla(P + \rho U) + \mu \Delta U_x$$

$$\Delta U_x = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} = 0, \text{ con las condiciones de contorno } \begin{cases} y=0 \Rightarrow U_x=0 \\ y=h \Rightarrow U_x=V \end{cases}$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = C, \quad U_x(y) = Cy + K \quad \begin{cases} 0 = K \\ V = Ch, \quad C = \frac{V}{h} \end{cases}$$

Por tanto $\bar{U} = U_x \bar{e}_x = \frac{V}{h} y = 24 y \text{ (m/s) con } y \text{ en (cm)}$

③ Tensor $\nabla \bar{U} = \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] = \begin{pmatrix} 0 & V/h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{\bar{e}} + \bar{\bar{\zeta}}$

Tensor deformación $\bar{\bar{e}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & V/2h & 0 \\ V/2h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{\bar{e}}$

Tensor rotación $\bar{\bar{\zeta}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & V/2h & 0 \\ -V/2h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{\bar{\zeta}}$

$$\Phi_v = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div} \vec{v} \right)^2 \right] + \underbrace{\mu_v}_{\text{0}} (\text{div} \vec{v})^2 =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 = \mu \left(\frac{V}{h} \right)^2 = 0,1 \cdot \frac{24^2}{1} = \underline{57,6 \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}}}$$

④ $K = 0,7 \text{ J/m s } ^\circ\text{C}$; $Q_r = Q_g = 0$, $T = T(y)$

Aplicamos la ecuación de la energía para líquidos-

$$\underbrace{\rho c \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{0}} + \underbrace{\rho c v_x \frac{\partial T}{\partial x}}_{\text{0}} + \underbrace{\rho c v_y \frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{0}} + \underbrace{\rho c v_z \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{0}} = \Phi_v + \text{div}(K \nabla T) + \underbrace{Q_r}_{\text{0}} + \underbrace{Q_g}_{\text{0}}$$

$$\Phi_v + \text{div}(K \nabla T) = 0; \quad K \Delta T = -\Phi_v; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\Phi_v}{K}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\Phi_v}{K} y + A; \quad T(y) = -\frac{\Phi_v}{K} \frac{y^2}{2} + Ay + B$$

Cond. $T(y=0) = T_0$, $T_0 = B$

Condiciones $T(y=h) = T_0$, $T_0 = -\frac{\Phi_v}{2K} h^2 + Ah + T_0 \rightarrow A = h + \frac{\Phi_v}{2K}$

$$\Rightarrow \boxed{T(y) = T_0 + \frac{\Phi_v}{2K} y(h-y)}$$

$$T_{\text{max}} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \rightarrow -\frac{\Phi_v}{K} y + h \frac{\Phi_v}{2K} = 0, \quad y = \frac{h}{2}$$

$$\boxed{T_{\text{max}} = T_0 + \frac{\Phi_v}{2K} \frac{h^2}{4} = 20 + \frac{57,6}{2 \cdot 0,7} \cdot \frac{(0,01)^2}{4} = \underline{20,001^\circ\text{C}}}$$

EXTRA

$$q = -K \nabla T \left\{ \begin{aligned} q_y(y=0) &= -K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -h \frac{\Phi_v}{2} = -\mu \frac{V^2}{2h} = -0,288 \text{ W/m}^2 \\ q_y(y=h) &= -K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=h} = +\Phi_v h + h \frac{\Phi_v}{2} = \Phi_v \frac{h}{2} = \mu \frac{V^2}{2h} = +0,288 \text{ W/m}^2 \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{q_{\text{TOT}} = q_y(y=h) - q_y(y=0) = 2 \cdot 0,288 = \underline{0,576 \text{ W/m}^2}}$$

CONS. DE LA ENERGÍA

Ecuación en su forma integral

1 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA EN FUNCIÓN DE LA ENERGÍA POTENCIAL. POTENCIAL DE LAS FUERZAS MÁGICAS

Primero vamos a expresar el trabajo de las fuerzas mágicas en función del potencial del que derivan (u) y veremos que este término puede englobarse en el de variación de energía de una partícula fluida, siempre que se cumple que dicho potencial no varía con el tiempo $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ de esta forma, conseguiremos una expresión que incluya un término para la energía potencial.

$$\dot{W} = \int_V \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} dV = - \int_V \rho \vec{v} \cdot \nabla u dV = - \int_V \text{div}(\rho \vec{v} u) dV + \int_V u \text{div}(\rho \vec{v}) dV \stackrel{\text{Cons. masa}}{=} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\int_V \text{div}(\rho \vec{v} u) dV = \int_V \rho \vec{v} \cdot \nabla u dV + \int_V u \text{div}(\rho \vec{v}) dV$$

Condiciones $\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \neq \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \neq \vec{v}(t) \\ \text{La velocidad angular no depende del tiempo} \\ \text{La fuerza de Coriolis puede existir ya que, aunque no derive de potenciales, desaparece al multiplicar exactamente por } \vec{v} \end{array} \right.$

$$= - \int_V \text{div}(\rho \vec{v} u) dV - \int_V u \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \text{div}(\rho \vec{v} u) dV - \int_V \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV + \int_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \stackrel{u \neq \text{const}}{\uparrow} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$= - \left[\int_V \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV + \oint_S \rho u \vec{v} \cdot \vec{n} ds \right] = - \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV \Rightarrow \int_V \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} dV = - \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV$$

Ahora, partiremos de la ecuación de la energía en su forma integral:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV = \oint_S \bar{n} \bar{c} \bar{v} ds + \underbrace{\int_V \rho \bar{f}_m \bar{v} dV}_{-\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV} - \oint_S \bar{q} \bar{n} ds + \int_V (\bar{Q}_r + \bar{Q}_q) dV$$

Obtendremos:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + u \right) dV = \oint_S (\bar{n} \bar{c}) \bar{v} ds - \oint_S \bar{q} \bar{n} ds + \int_V (\bar{Q}_r + \bar{Q}_q) dV$$

Ecuación de la energía en forma integral en función de la E_{pot} .

Si tomamos un volumen de control:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + u \right) dV + \oint_{\Sigma} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + u \right) [(\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n}] ds = \int_{V_c} (\bar{n} \bar{c}) \bar{v} ds - \oint_S \bar{q} \bar{n} ds + \int_V (\bar{Q}_r + \bar{Q}_q) dV$$

"La variación de energía cinética, interna y potencial por unidad de tiempo es igual al trabajo de las fuerzas de superficie más los valores de radiación, reacción química y conducción por unidad de tiempo"

CONDICIONES $\bar{\Omega} \neq f(t)$
 $u \neq f(t)$

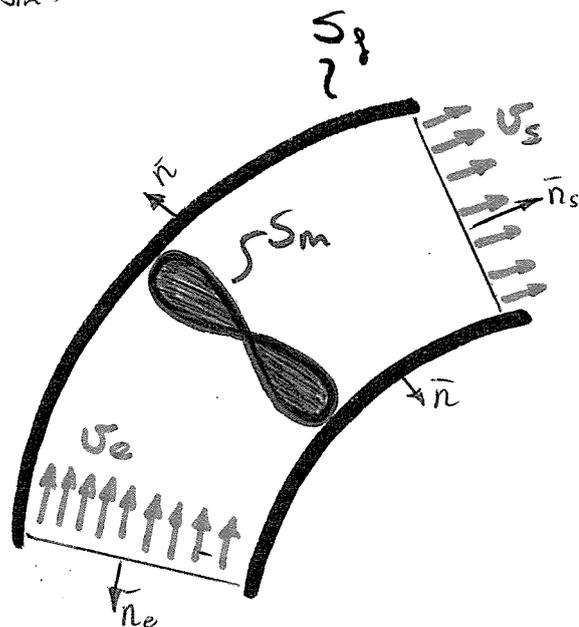
2 MÁQUINA HIDRÁULICA - BALANCE ENERGÉTICO

Supongamos un volumen de control limitado por una entrada y una salida fijas (S_f) y unas paredes móviles interiores S_m .

CONDICIONES

- Entradas y salidas con prop. uniformes
- Velocidad \perp a la sección de entrada y salida
- Viscosidad (μ) despreciable
- Superficie fija (S_f) = limita el problema
- Superficie móvil (S_m) = hélice

- Problema variacional: Estudio en escala de tiempo suficientemente grande de forma que el periodo característico dentro del sistema del movimiento de la hélice es mucho menor.



Aplicando la ecuación de conservación de la energía en función de la entalpía:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + u \right) dV + \int_{S_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + u \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} \, ds = \int_{S_c} (\vec{n} \cdot \vec{c}) \bar{v} \, ds - \int_{S_c} \bar{q} \cdot \vec{n} \, ds + \int_{V_c} (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) dV$$

La energía total no varía en el tiempo en el interior del volumen considerado.

En las paredes
 - Móviles: $\vec{v} = \vec{v}_c \rightarrow \vec{0}$
 - Fijas: $\vec{v} = \vec{v}_c = \vec{0} \rightarrow \vec{0}$
 Entrada: $\vec{v} \cdot \vec{n} = -v_e, \vec{v}_c = \vec{0} \rightarrow -\rho_e \left(e + \frac{1}{2} v_e^2 + u_e \right) v_e A_e$
 Salida: $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_s, \vec{v}_c = \vec{0} \rightarrow \rho_s \left(e + \frac{1}{2} v_s^2 + u_s \right) v_s A_s$

$\dot{Q} \equiv$ Calor añadido al fluido dentro del volumen de control por unidad de tiempo.

Por tanto

$$\int_{S_c} (\vec{n} \cdot \vec{c}) \bar{v} \, ds + \dot{Q} = -\rho_e \left(e_e + \frac{v_e^2}{2} + u_e \right) v_e A_e + \rho_s \left(e_s + \frac{v_s^2}{2} + u_s \right) v_s A_s$$

$$\int_{S_m} \vec{n} \cdot \vec{c} \bar{v} \, ds + \int_{S_e+S_s+S_j} \vec{n} \cdot \vec{c} \bar{v} \, ds = \dot{W} - \int_{S_e+S_s+S_j} \vec{n} \cdot \vec{p} \bar{v} \, ds + \int_{S_e+S_s+S_j} \vec{n} \cdot \vec{c} \bar{v} \, ds = \dot{W} + \rho_e v_e A_e \left(e_e + \frac{v_e^2}{2} + u_e \right) + \rho_s v_s A_s \left(e_s + \frac{v_s^2}{2} + u_s \right) + \dot{Q}$$

\downarrow
0 (M despreciable)

Por tanto:

$$\underbrace{\rho_s v_s A_s}_{G_s} \left(\underbrace{e_s + \frac{v_s^2}{2} + u_s}_{h_s} \right) - \underbrace{\rho_e v_e A_e}_{G_e} \left(\underbrace{e_e + \frac{v_e^2}{2} + u_e}_{h_e} \right) = \dot{W} + \dot{Q};$$

EC. CONS. DE LA ENERGÍA

$$\sum_{s=1}^n G_s \left(h_s + \frac{v_s^2}{2} + u_s \right) - \sum_{e=1}^n G_e \left(h_e + \frac{v_e^2}{2} + u_e \right) = \dot{W} + \dot{Q}$$

Si $G_e = G_s + \text{Prob. wasicetálio}$

"La variación de la entalpía, energía cinética y potencial entre la entrada y la salida por unidad de masa es igual al trabajo más el calor comunicados al fluido por unidad de masa que circula por una máquina hidráulica".

$$G \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = \dot{W} + \dot{Q}$$

Válida para gases y líquidos

MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA

$$G \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = \dot{W} + \dot{Q}$$

> 0 Energía desaprovechada
 \downarrow
Pérdidas

< 0 lo realiza el fluido, esto es, la máquina comunica trabajo al exterior
 > 0

$$\dot{Q} = \dot{Q}_g + \dot{Q}_r + \dot{Q}_{cond.}$$

Reacción química - Combustión
 $\dot{Q}_g \gg 0$ (lo gana el fluido)
 Reac. exotérmica

< 0 Son calores perdidos por Pérdidas

$$\dot{Q}_g \gg |\dot{Q}_r| + |\dot{Q}_{cond}|$$

$\dot{Q} > 0$

3 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA INTERNA EN LÍQUIDOS. APLICACIÓN A MÁQUINAS HIDRÁULICAS

Para máquinas que manejan líquidos: $\text{div } \vec{U} = 0$

Partimos de la ecuación de conservación de energía interna:

$$\int \frac{De}{Dt} = \int \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{U} \cdot \nabla e = -\rho \text{div } \vec{U} + \Phi_v + Q_r + Q_g - \text{div } \vec{q}; \text{ integrando:}$$

$$\int_V \rho \frac{De}{Dt} = \int_V (\Phi_v + Q_r + Q_g - \text{div } \vec{q}) dV$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \int_V \rho \frac{De}{Dt} dV &= \int_V \rho \frac{\partial e}{\partial t} dV + \int_V \rho \vec{U} \cdot \nabla(e) dV \stackrel{\text{Cons. masa} = 0}{=} \int_V \left(\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot e + \text{div}(\rho \vec{U} e) - e \text{div}(\rho \vec{U}) \right) dV = \\ &= \int_V \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\rho \vec{U} e) dV = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot e + \frac{\partial e}{\partial t} \cdot \rho \\ \text{div}(\rho \vec{U} e) &= e \text{div}(\rho \vec{U}) + \rho \vec{U} \cdot \nabla e \end{aligned}$$

$$= \int_V \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV + \oint_S \rho e \vec{U} \cdot \vec{n} ds = \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho e) dV = \int_V \Phi_v dV + \int_V (Q_r + Q_g) dV - \oint_S \rho e \vec{U} \cdot \vec{n} ds$$

La ecuación finalmente queda:

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho e) dV = \int_V \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV + \oint_S \rho e \vec{U} \cdot \vec{n} ds \quad \Bigg| \quad = \Phi_v + \bar{Q}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV + \oint_S \rho e (\vec{U} - \vec{U}_c) \cdot \vec{n} ds$$

Φ_v = Función de disipación de Rayleigh \equiv Potencia perdida por disipación viscosa

$$\Phi_v = \int_V \Phi_v dV \geq 0$$

Para máquinas hidráulicas en proceso estacionario:

$$\int_{G_s} \rho_s v_s A_s e_s - \int_{G_e} \rho_e v_e A_e e_e = \Phi_v + \bar{Q} \Rightarrow \boxed{\sum G_s e_s - \sum G_e e_e = \Phi_v + \bar{Q}}$$

Si $G_s = G_e \Rightarrow \boxed{G(e)_e^s = \Phi_v + \bar{Q}}$ sólo válida para líquidos!!

ENERGÍA MECÁNICA EN MÁQ. HIDRÁULICAS

Hemos deducido las expresiones bajo las condiciones:

- Líquidos (por 2^a ec)
- Variación neta (por 1^a ec)
- Prop. uniformes E/s (por 1^a ec)
- Viscosidad (μ) despreciable (1^a ec)
- $\bar{x} \neq \bar{x}(t)$; $u \neq u(t)$ (por 1^a ec)

$$G \left(e + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = W + \bar{Q}$$

$$G(e)_e^s = \bar{Q} + \Phi_v$$

$$\boxed{G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = W - \Phi_v}$$

4 RENDIMIENTO DE MÁQUINAS HIDRÁULICAS

BOMBA

Se comunica una potencia mecánica al fluido (bajo forma de P, energía cinética o energía potencial)

$$\Rightarrow \begin{cases} G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s \neq 0 \\ W > 0 \\ \Phi_v > 0 \end{cases}$$

Aplicamos: $G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = W - \Phi_v$

$$W = G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s + \Phi_v \quad \text{Pérdidas (viscosas)}$$

Potencia suministrada - lo que consume - Potencia aprovechada - Trabajo para la energía del sistema -

Se define el rendimiento menométrico como la relación entre la potencia aprovechada y la consumida:

$$\boxed{\eta_m = \frac{G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s}{W} = \frac{W - \Phi_v}{W} = 1 - \frac{\Phi_v}{W}}$$

En general las bombas funcionan empujando líquidos en contra de la gravedad o a favor de la misma, por lo que el término de la energía mecánica que aprovecha la máquina puede expresarse como:

$$G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e = G g (H_m) \text{ ~ Altura manométrica "hasta la que el agua de llegar la bomba" y además:}$$

$$W = G g (H_u) \text{ ~ Altura útil}$$

$$\Phi_v = G g (H_L) \text{ ~ Altura de pérdidas (por fricción)}$$

$$H_u = H_m + H_L$$

$$\eta_m = \frac{H_m}{H_u} = \frac{H_u - H_L}{H_u} \rightarrow \boxed{\eta_m = 1 - \frac{H_L}{H_u}}$$

TURBINA

Ahora disponemos de una potencia correspondiente a la diferencia entre los potenciales mecánicos a la entrada y a la salida $\Rightarrow G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e < 0$

W : Es el trabajo realizado por el fluido que mueve la hélice: $W < 0$
 $\Phi_v > 0$

$$\text{Por tanto: } G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e = W - \Phi_v \Rightarrow -W + \Phi_v = -G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e$$

$$|W| + \Phi_v = G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e$$

Energía útil \equiv Conseguido Trabajo \leftarrow Pérdidas \leftarrow Energía a disposición de mi turbina que empleo en:

Se define el rendimiento hidráulico como la relación entre la energía útil y la disponible:

$$\boxed{\eta_h = \frac{|W|}{G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e} = \frac{G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e - \Phi_v}{G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e} = 1 - \frac{\Phi_v}{G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e} = 1 - \frac{\Phi_v}{|W| + \Phi_v}}$$

Generalmente la turbina se mueve gracias a que el fluido de trabajo cae desde una cierta altura. Podemos expresar el término de energía disponible como:

$$G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_s = G g (H_n) \text{ ~ Altura neta y además:}$$

$$|W| = G g (H_u) \text{ ~ Altura útil}$$

$$\Phi_v = g G (H_L) \text{ ~ Altura de pérdidas}$$

$$H_u + H_L = H_n$$

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_n} = \frac{H_n - H_L}{H_n} \longrightarrow \boxed{\eta_h = 1 - \frac{H_L}{H_n}}$$

CALENTAMIENTO DEBIDO A FRICCIÓN = LÍQUIDOS

• Gases y líquidos $\Rightarrow G \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = W + \bar{Q}$

• Solo líquidos $\Rightarrow \begin{cases} G(e)_e^s = \bar{Q} + \Phi_v \\ G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = W - \Phi_v \end{cases}$

Para gases incomprensible es también aplicable, siendo $e = c_p T$

$\xrightarrow{e = cT}$ $G c (T_s - T_e) = \bar{Q} + \Phi_v$

$$\boxed{\Delta T = \frac{\bar{Q}}{Gc} + \frac{\Phi_v}{Gc}}$$

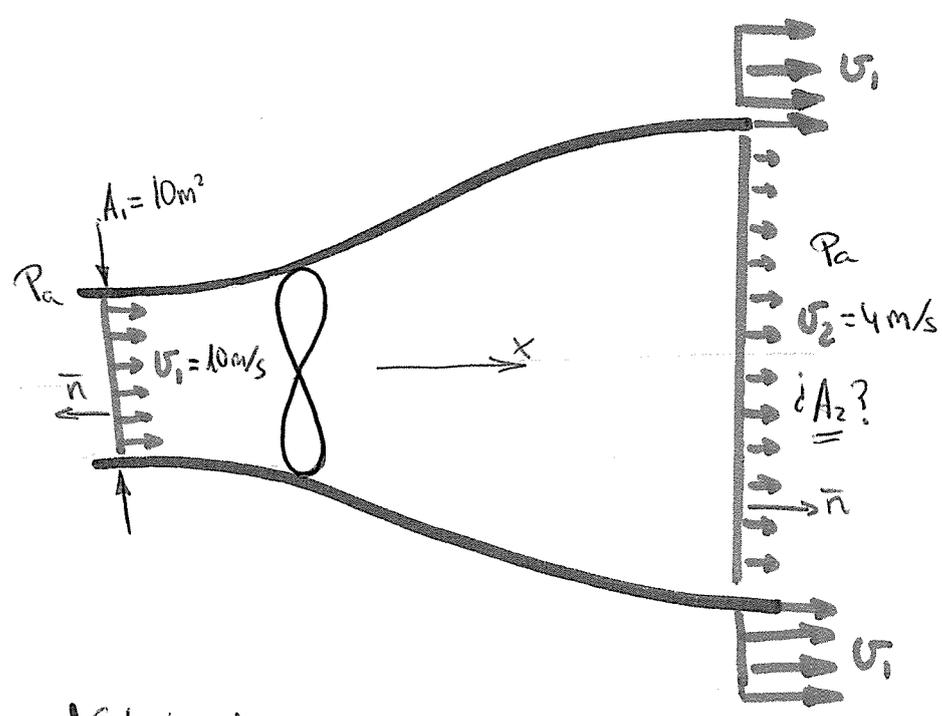
$$\boxed{\Delta T = \frac{\bar{Q}}{Gc} + \frac{g(H_L)}{c}}$$

Altura de pérdidas

En cualquier máquina térmica, siempre que exista calor o pérdidas viscosas se producirá una variación de temperatura.

169

Una aeroturbina es utilizada para extraer energía del viento. El aire que atraviesa la turbina está separado del resto por una superficie de corriente axisimétrica, cuyo corte por el plano del papel corresponde a las líneas de corriente ABC y DEF. Lejos de la máquina aguas arriba, en la sección 1, el aire está sin perturbar por la máquina a la velocidad v_1 y a la presión ambiente P_a . A medida que nos movemos aguas abajo de la máquina, el aire pierde velocidad, hasta que llegamos suficientemente lejos en la sección 2, en que se recupera la presión ambiente y la velocidad toma un valor v_2 inferior al exterior sin perturbar. Suponer despreciable las fuerzas viscosas y métricas, el aire incomprensible y el proceso estacionario sin adición de calor.



- Proceso estacionario
- $\dot{m} = 0$
- Fuerzas viscosas despreciables $\phi_v = 0$
- $Q = 0$
- Aire incomprensible $\rho = \text{cte}$

a) Calcular el area de salida A_2 conocida el area de entrada $A_1 = 10 \text{ m}^2$

Por fluido incomprensible ($\rho = \text{cte}$) aplico conservación de la masa. Esto es equivalente a decir que el caudal en la entrada es igual al de la salida

$$\int_e \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds + \int_s \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \Rightarrow U_1 A_1 = U_2 A_2 ; \boxed{A_2 = A_1 \frac{U_1}{U_2} = 25 \text{ m}^2}$$

b) Calcular la fuerza sobre la aero turbina indicando su sentido. Dponer que la resultante de las fuerzas de presión sobre la superficie de corriente es nula

Aplico ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} \, dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} \, ds = \int_{S_c} \vec{n} \cdot \vec{C} \, ds + \int_{V_c} \vec{f}_m \, dV$$

$\vec{C} = -p \delta_{ij} + \vec{\tau}$
0 (fuerzas viscosas despreciables)

0 (estacionario) 0 (f_m despreciable)

$$-\rho U_1^2 A_1 + \rho U_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_{INT_x} + 0$$

$$F_{INT_x} = \rho U_1^2 A_1 - \rho U_2^2 A_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2 \Rightarrow F_{TOT_x} = \rho U_1^2 A_1 - \rho U_2^2 A_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

$$\boxed{F_x = \rho U_1 A_1 (U_1 - U_2) = 750 \text{ N}}$$

en dirección axial

$$\rho_{\text{aire}} = 1,25 \text{ kg/m}^3$$

c) Calcular la energía extraída del aire por la aere turbina

Aplicamos conservación de la energía para máquinas hidráulicas = Turbina $G_e = G_s$

$$G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + U \right)_e = W - \phi_v \Rightarrow \left(\frac{U_2^2}{2} - \frac{U_1^2}{2} \right) G = W$$

$U = \text{cte}$ (m depreciables)
 $\rho_m = 0 \rightarrow \nabla U = 0; U = \text{cte}$
 $U_e = U_s$

$P_e = P_s = P_a$
 $\rho_e = \rho_s$ (aire incomprensible)

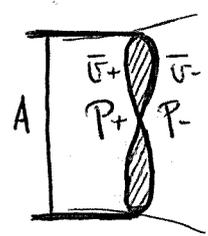
La energía extraída coincide con el trabajo obtenido por no existir pérdidas viscosas

$$W = \underbrace{\rho U_1 A_1}_G \left(\frac{U_2^2}{2} - \frac{U_1^2}{2} \right) = -5250 \text{ W}$$

Negativo por ser trabajo realizado (saliente) por el fluido

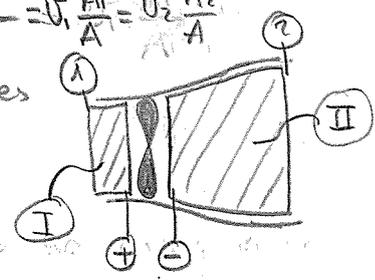
d) ¿Cómo se calcularían las presiones inmediatamente delante (p_+) e inmediatamente detrás (p_-) de la aere turbina así como el área, A , de la misma?

Por conservación de la masa para fluido incomprensible



$$A_1 U_1 = A_2 U_2 = A U_+ = A U_- \Rightarrow U_+ = U_- = U = \frac{U_1 A_1}{A} = \frac{U_2 A_2}{A}$$

Dividimos el problema en 2 partes



Aplico conservación de la energía:

• En I: $G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + U \right)_e = W - \phi_v \rightarrow \frac{P_+}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} - \frac{P_a}{\rho} - \frac{U_1^2}{2} = 0$

• En II: $G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + U \right)_s = 0 \rightarrow \frac{P_a}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} - \frac{P_-}{\rho} - \frac{U_2^2}{2} = 0$

} Sumamos

$$\frac{P_+}{\rho} - \frac{P_-}{\rho} - \frac{U_1^2}{2} + \frac{U_2^2}{2} = 0 (*)$$

Aplico cantidad de movimiento al conjunto (apertado 2)

$$\rho U_1 A_1 (U_1 - U_2) = +A P_m^{\oplus} - A P_m^{\ominus} \rightarrow A = \frac{\rho U_1 A_1 (U_2 - U_1)}{P^{\oplus} - P^{\ominus}} = \frac{2 U_1 A_1 (U_1 - U_2)}{U_1^2 - U_2^2} = \frac{2 U_1 A_1 (U_1 - U_2)}{(U_1 + U_2)(U_1 - U_2)}$$

Por (*) $P^{\oplus} - P^{\ominus} = \left(\frac{U_1^2}{2} - \frac{U_2^2}{2} \right) \rho$

$$A = \frac{2 U_1 A_1}{U_1 + U_2} = 14,29 \text{ m}^2$$

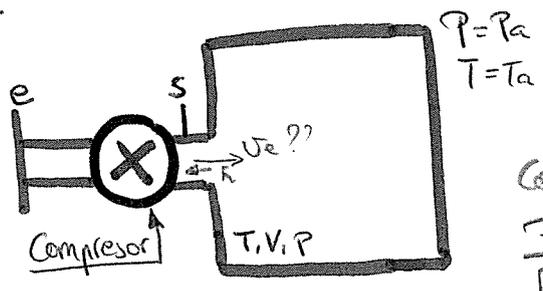
$$P_m^{\oplus} = \frac{U_1^2 - U^{\oplus 2}}{2} \rho = 31,875 \text{ Pa}$$

$$P_m^{\ominus} = \frac{U_2^2 - U^{\ominus 2}}{2} \rho = -20,625 \text{ Pa}$$

$U^{\oplus} = 7 \text{ m/s}$
 $U^{\ominus} = 7 \text{ m/s}$

189 Se tiene un depósito de $V = 1m^3$ en el que hay aire a $p_0 = 2atm$ y $T = 15^\circ C$. Se desea aumentar la presión en $\Delta p = 2atm$ utilizando un compresor durante 30 minutos.

El depósito es muy grande y las velocidades en el mismo son despreciables y las prop. uniformes. Se supone que la presión cambia linealmente durante este periodo: $P = P_0 + \Delta p \frac{t}{T}$



a) Calcular la variación (ley) de densidad y masa del aire dentro del depósito

Consideramos al aire como gas ideal $P_0 = 2 \cdot 10^5$

$$\frac{P}{\rho} = R_{aire} \cdot T, \quad \rho = \frac{1}{RT} (P_0 + \Delta p \frac{t}{T})$$

$$m = \rho \cdot V \rightarrow m = \frac{V}{RT} (P_0 + \Delta p \frac{t}{T})$$

b) Gasto suministrado por el compresor

Aplico conservación de la masa $\Sigma \equiv$ Depósito (E + Paredes)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dv + \oint_{sc} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0 \rightarrow \frac{dm}{dt} - u_e \rho A_e = 0, \quad G_e = \frac{dm}{dt} = \frac{V \Delta P}{RT^2}$$

c) Potencia comunicada por el compresor suponiendo que funciona isentrópicamente y que la energía cinética a la entrada es muy pequeña frente a la térmica

Por ser proceso estacionario, con prop uniformes y las velocidades despreciables \Rightarrow (despreciable), aplico ecuación de conservación de la energía en la forma $G(h + \frac{v^2}{2} + u)_e^s = W + \dot{Q}$

$$G(h_s - h_e + \frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} + u_s - u_e) = W, \quad W = G(h_s - h_e) \xrightarrow{\text{O(isentrópico)}} W = c_p (T_s - T_e) G$$

$h = c_p \cdot T$ $T_e = T_a = 15^\circ C$

$$W = c_p T_a G \left(\frac{T_s}{T_a} - 1 \right), \quad \text{por proceso isentrópico } \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1.4-1}{1.4}}, \quad \gamma = 1.4$$

$$W = c_p T_a G \left(\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right); \quad c_{p,aire} \approx 1004 \text{ J/KgK}; \quad T_a \text{ (ambiente)}$$

$$G = \frac{V \Delta P}{RT^2} \quad P_2 = p = P_0 + \Delta p \frac{t}{T} = P_{deposito}$$

$$P_1 = P_a$$

NOTA!! PROCESOS ISENTRÓPICOS

$$ds = \frac{C_p}{T} dT - \frac{R}{P} dP = 0 \Rightarrow C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = R \ln \frac{P_2}{P_1} ; \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{C_p} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^R$$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{R}{C_p}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{C_p}{C_v} \\ C_p - C_v &= R \rightarrow 1 + \frac{C_v}{C_p} = \frac{R}{C_p} \\ \frac{R}{C_p} &= 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \end{aligned} \right\}$$

Aclaración sobre el ejercicio:

- La temperatura T₂ a la salida del compresor no tiene por qué ser la misma que la del depósito
- Sin embargo, la presión P₂ a la salida sí es la misma que P_{depósito}.

d) Calcular la energía comunicada por compresor durante todo el periodo

$$W = \frac{dE}{dt} \rightarrow E = \int_0^t W(t) dt \rightarrow \text{Integraríamos la expr. del apartado c, dependiendo del tiempo a través de } P_2$$

e) Calcular el calor Q que hay que extraer del depósito para conseguir mantener la temperatura de 15°C

Aplicamos conservación de la energía: No puedo aplicar la forma dif. porque la p del depósito varía con el tiempo:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) dV + \oint_{S_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = \oint_{S_c} \vec{n} \cdot \vec{c} ds + \underbrace{\int_{V_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} ds + \int_{V_c} (\dot{q}_r + \dot{q}_f) - \oint_{S_c} \vec{q} \cdot \vec{n} ds}_{\equiv Q}$$

$V_c \equiv \text{Entrada} + \text{Paredes} + \text{Abierta}$

Término a término

$$\frac{d}{dt} \int_{dep.} \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) dV + \frac{d}{dt} \int_{comp} \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) dV = C_v T_d \left(\frac{dm}{dt}\right) = C_v T_d G_e$$

$e = C_v T$

$$-\rho_e e_c v_e A_e = -\rho_a C_v T_d (v_e A_e) = -C_v T_d G_e$$

$$W + 0 - \int_{entrada} \vec{n} \cdot \vec{v} dV + \oint_{S_c} \vec{n} \cdot \vec{c} = W + \frac{\rho_a v_e A_e}{\rho_e} \rho_e = W + \frac{\rho_a}{\rho_a} G_e$$

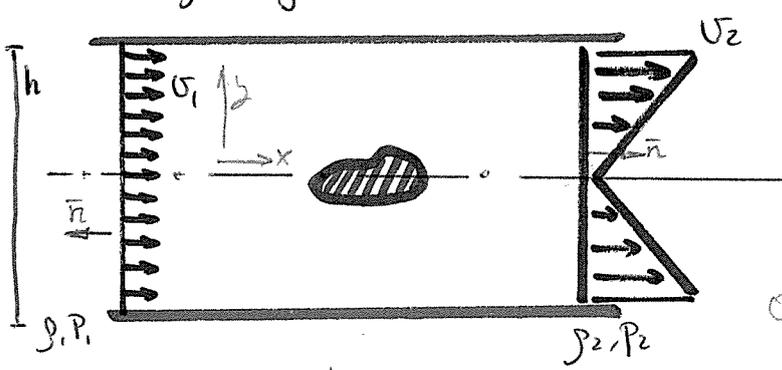
Junta los términos:

$$G C_p T_d - G C_p T_a = W + \frac{P_a}{\rho_a} G + Q \Rightarrow Q = G (C_p (T_d - T_a) - R T_a) - W$$

$$G C_p (T_d - T_a)$$

$$Q [J] = \int_0^t Q dt$$

197 Se tiene un conducto bidimensional de altura $h=0,1m$ por el que circula aire. A la entrada v, p, ρ son uniformes $\rightarrow v_1, p_1, \rho_1$. En el conducto hay un objeto que hace que la corriente sea obstaculizada en su parte central, de manera que a la salida el perfil de velocidades es triangular con una velocidad nula en el centro y máxima en la inmediata proximidad de las paredes v_2 . En la salida, T y ρ se suponen uniformes: p_2 y ρ_2 . Despreciar los viscosos frente a la presión en la entrada, salida y paredes del conducto. El régimen es estacionario y los ρ del previsible.



a) Valor de U_{max} a la salida

Aplico conservación de la masa

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0$$

Suponemos estacionario ρ en las orillas b

$$-\rho_1 v_1 h + \rho_2 \int_{-h/2}^{h/2} v_2 n dy = -\rho_1 v_1 h + \rho_2 \left[\frac{1}{2} \frac{h}{2} v_2 + \frac{1}{2} \frac{h}{2} v_2 \right] = 0 \Rightarrow \rho_2 \frac{h}{2} v_2 = \rho_1 v_1 h$$

$$\boxed{v_{2,max} = \frac{2 \rho_1 v_1}{\rho_2}}$$

b) Fuerza sobre el objeto por unidad de espesor

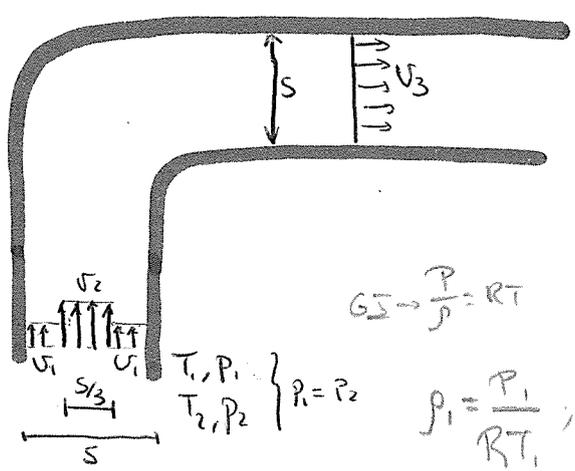
Aplico eq. cont de mov.: $\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \rho \vec{f}_s dV$ / Proyecto en eje X:

$$-\rho_1 v_1^2 h b + \rho_2 \int_{-h/2}^{h/2} v_2^2 b dy = +p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_x \quad ; \quad v_2 = \begin{cases} v_2 = \frac{U_{max}}{h/2} y = \frac{2 U_{max}}{h} y \\ v_2 = -\frac{U_{max}}{h/2} y = -\frac{2 U_{max}}{h} y \end{cases}$$

$$F_x = p_1 h b - p_2 h b + \rho_1 v_1^2 h b + \rho_2 b \left[\frac{4 U_{max}^2}{h^2} \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$-\rho_2 b \left[\frac{4 U_{max}^2}{h^2} \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \rightarrow \boxed{\frac{F_x}{b} = h \left(p_1 - p_2 + \rho_1 v_1^2 + \rho_2 \frac{U_{max}^2}{3} \right)}$$

225) A la entrada de un tubo curvado de sección constante S se tienen dos corrientes de aire coaxiales de velocidades v_1 y v_2 y temperaturas T_1 y T_2 . La sección de la corriente de velocidad v_2 es $S_2 = \frac{S}{3}$. En la sección de entrada las presiones se reducen a la presión, uniforme de valor $p_1 = p_2 = p_0$. Las dos corrientes se mezclan en el interior del tubo de forma que en la sección S_3 la velocidad del gas es v_3 . Suponiendo el aire como gas perfecto, que tanto en la entrada como en la sección S_3 las propiedades son uniformes y las fuerzas viscosas despreciables, determinar.



a) Densidad en la sección 3.

Datos
 T_1, T_2, P_1, P_2
 $P_1 = P_2$
 v_1, v_2, v_3

Aplico conservación de la masa \rightarrow se conservan los gases másicos

$$G \rightarrow \frac{P}{\rho} = RT$$

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1}; \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2}$$

$$\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2 = \rho_3 v_3 S_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{RT_1} v_1 \frac{2S}{3} + \frac{P_2}{RT_2} v_2 \frac{S}{3} = \rho_3 v_3 S \rightarrow \frac{1}{R v_3} \left(\frac{P_1}{3T_1} 2v_1 + \frac{P_2}{3T_2} v_2 \right) = \rho_3 = 1,52 \frac{kg}{m^3}$$

b) Suponiendo que el flujo en el interior del conducto es adiabático, se pide T_3

$$R = 287 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Aplico ec. de conservación de la energía despreciando \dot{m} :

$$G_1 \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + G_2 \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - G_3 \left(h_3 + \frac{v_3^2}{2} \right) = \dot{W} + \dot{Q}$$

$h = c_p T$

$$\rho_1 v_1 \frac{2S}{3} \left(c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 v_2 \frac{S}{3} \left(c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - \rho_3 v_3 S \left(c_p T_3 + \frac{v_3^2}{2} \right) = 0$$

- DATOS
- $v_1 = 10 \text{ m/s}$
 - $v_2 = 20 \text{ m/s}$
 - $v_3 = 14 \text{ m/s}$
 - $T_1 = 360 \text{ K}$
 - $T_2 = 300 \text{ K}$
 - $P_1 = P_2 = 1,5 \text{ bar}$
 - $\rho_1 = 1,4518 \text{ kg/m}^3$
 - $\rho_2 = 1,742 \text{ kg/m}^3$

$$\frac{3,499 \cdot 10^6}{6,999 \cdot 10^6} \quad \frac{3,5 \cdot 10^6}{6,999 \cdot 10^6}$$

$$T_3 = \frac{\left(\frac{6,999 \cdot 10^6}{\rho_3 v_3} - \frac{v_3^2}{2} \right)}{c_p}$$

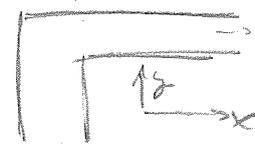
$$T_3 = 327,5 \text{ K}$$

c) Presión P_3 en S_3 y componentes horizontal y vertical de la fuerza total sobre las paredes del tubo. En el exterior actúa $P_a = 10^5 \text{ Pa}$
 $S = 0.01 \text{ m}^2$

Por tratarse de un gas ideal $\rightarrow \frac{P}{\rho} = RT; P_3 = \rho_3 R \cdot T_3$

$$P_3 = 1,4287 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Aplico cantidad de mov.:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \vec{v} dV + \oint_{\Sigma} \rho \vec{v} (\vec{r} - \vec{r}_c) \cdot \vec{n} ds = \oint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \vec{c} ds + \int_{V_c} \rho \vec{f} dV$$


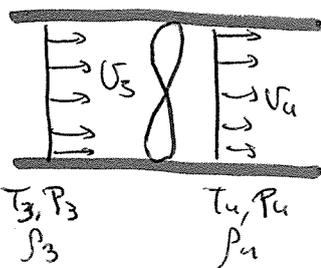
En dir. X: $U_3^2 \rho_3 A_3 = -P_3 A_3 - F_x \rightarrow F_{x, \text{TOT}} = -P_{m3} A_3 - U_3^2 \rho_3 A_3$

$$F_x = 432 \text{ N}$$

En dir. Y: $-U_1^2 \rho_1 A_1 - U_2^2 \rho_2 A_2 = +P_1 A_1 + P_2 A_2 - F_y \rightarrow F_y = 1003 \text{ N}$

Supongase que el fluido en S_3 se expande isentrópicamente hasta la presión ambiente a través de una turbina axial situada en el interior del conducto

d) Determinar la densidad, velocidad y T del aire en la sección de salida



• Por proceso isentrópico: $\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \frac{P_4}{P_3} = \left(\frac{\rho_4}{\rho_3}\right)^{\gamma}$

• Por conservación de la masa $G_3 = G_4$

$\rho_3 U_3 S = \rho_4 U_4 S; \rightarrow U_4 = \frac{\rho_3 U_3}{\rho_4}$

$P_4 = 10^5 \text{ Pa}$

①: $\frac{T_4}{327,5} = \frac{10^5}{1,4287 \cdot 10^5} \rightarrow T_4 = 229 \text{ K}$
 $\frac{P_4}{P_3} = \frac{10^5}{1,4287 \cdot 10^5} \rightarrow \rho_4 = \frac{10^5}{287 \cdot 229} = 1,52 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

②: $U_4 = \frac{1,52 \cdot 14}{1,52} \approx 14 \text{ m/s}$

e) Potencia comunicada por el fluido a la turbina

Aplico $G \left(h + \frac{v^2}{2} + \psi\right)_e = W + \dot{Q}$

$W = \rho_3 U_3 S \left(c_p (T_4 - T_3) + \frac{1}{2} (U_4^2 - U_3^2) \right)$

$W = -21 \text{ kW} < 0$ ya que lo realiza el fluido

41) En una turbina de gas circula un gasto m3ico de $G = 10000 \text{ kg/h}$ la velocidad y la entalpia a la entrada son respectivamente $v_e = 1000 \text{ m/min}$ y $h_e = 500 \text{ kcal/kg}$. La velocidad y la entalpia a la salida son respectivamente $v_s = 3000 \text{ m/min}$ y $h_s = 400 \text{ kcal/kg}$ Si las pérdidas de calor son 25000 kcal/h , determinar la potencia en el eje en CV y en CV de vapor.

Aplicamos $G \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right)_e = W + Q$

$$2,778 \left(1,672 \cdot 10^6 - 2,09 \cdot 10^6 + \frac{50^2}{2} - \frac{16,667^2}{2} \right) = W + Q$$

$$W = -1,187052 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$1 \text{ CV} = 735,5 \text{ W}$$

$$W = -1535 \text{ CV}$$

$$G = 10000 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 2,778 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$h_s = 400 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \cdot \frac{1000 \text{ cal}}{1 \text{ kcal}} \cdot \frac{4,18 \text{ J}}{1 \text{ cal}} = 1,672 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$h_e = 500 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} = 2,09 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$v_s = 3000 \frac{\text{m}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 50 \text{ m/s}$$

$$v_e = 1000 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 16,667 \text{ m/s}$$

$$Q = 25000 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \cdot \frac{4180 \text{ J}}{1 \text{ kcal}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 29027,8 \text{ W}$$

$$\text{NOTA: } 1 \text{ CV} = 735,5 \text{ W}$$

Ej) Gestión turbinas

Una turbina opera con una altura neta $H_u = 400 \text{ m}$ y un caudal de $2 \text{ m}^3/\text{s}$. Su rendimiento hidraulico $\eta_h = 0,85$

a) Calcular la potencia que se obtiene de la turbina

b) Incremento de T debido a la disip. viscosa

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_n} \Rightarrow H_u = 0,85 \cdot 400 = 340 \text{ m}; H_n = 60 \text{ m}$$

$H_u \Rightarrow W \equiv$ potencia que se obtiene de la turbina $W = \rho G H_u$

$$a) |W| = 9,8 \cdot 2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1 \text{ m}^3} \cdot 340 = 6664 \text{ W}$$

$$b) G \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e = W - \Phi_v \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \equiv -7840 \text{ W} \\ W \equiv -6664 \text{ W} \\ \Phi_v \equiv 1176 \text{ W} \end{cases}$$

$$G \left(e + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e = W + Q$$

$$G(e)_e - 7840 = -6664 + Q \rightarrow 6C \Delta T = 1176; \Delta T = 0,14$$

FLUIDOS - Resumen 2º Parte

CINEMÁTICA Generalmente dan un campo de velocidades + cond. inicial y piden:
 - Trayectoria \rightarrow Senda + Taza + ϵ - Tensor $\nabla \bar{u} = \bar{\epsilon} + \bar{\zeta}$ - Aceleración o cualquier otra derivada total

- Definición partícula fluida
- Trayectoria: $\bar{u} = \frac{d\bar{x}}{dt} \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = u_1; \frac{dx_2}{dt} = u_2; \frac{dx_3}{dt} = u_3$
- Senda (definición) \equiv Para calcularla, despejo t de las ec. de trayectoria
- Taza (definición) \equiv " " " to " " " " "
- Lineas de corriente $\equiv \frac{dx_1}{V_1} = \frac{dx_2}{V_2} = \frac{dx_3}{V_3}$; En ellas t es constante
- Derivado siguiendo una part. fluida $\frac{D\phi}{Dt} = (\bar{u} \cdot \nabla)\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}$

Aceleración $\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \bar{u} \wedge (\nabla \wedge \bar{u})$

Mov. en el entorno de un punto

Tensor $\nabla \bar{u} \begin{pmatrix} \delta \bar{v} = \delta \bar{x} \cdot \nabla \bar{u} \\ \delta \bar{v} = \bar{\epsilon} \delta \bar{x} + \bar{\zeta} \delta \bar{x} \end{pmatrix} \quad \nabla \bar{u} = \bar{\epsilon} + \bar{\zeta}$

Deformación $\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Rotación $\bar{\zeta}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\Delta(\Delta x_i)}{\Delta x_i}$: Los términos de la diag. principal de $\bar{\epsilon}$ son la vel. de alargamiento respecto de la distancia inicial

$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt}$: Los términos que no pertenecen a la diag. principal del tensor deformación son $\frac{1}{2}$ de la vel. de disminución del ángulo recto.

$\frac{1}{2} \text{rot } \bar{u} \wedge \delta \bar{x}$

INTEGRALES EXTENDIDAS A VOLUMEN FLUIDO

NO hay ningún problema. Solo hay que saber aplicar la integral.

- Teorema fundamental de Reynolds (enviado)
- $\frac{d}{dt} \int_{V_j} \phi dV = \int_{V_j} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_{S_j} \phi \bar{u} \cdot \bar{n} ds \Rightarrow$ Derivado de una integral siguiendo un volumen fluido
- $\frac{d}{dt} \int_V \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{\bar{e}}} \phi dV + \oint_S \phi (\bar{u} - \bar{e}) \cdot \bar{n} ds \Rightarrow$ Derivado de una integral siguiendo un volumen de control.

- Casos particulares
- $\phi = \rho \Rightarrow$ Cons. masa $\frac{d}{dt} \int_{V_j} \rho dV = 0$
- $\phi = \rho \bar{u} \Rightarrow$ Cons. cont. mov $\frac{d}{dt} \int_{V_j} (\rho \bar{u}) dV = \oint_{S_j} \bar{n} \bar{\tau} ds + \int_V \rho \bar{f} dV$
- $\phi = \left(\rho + \frac{u^2}{2} \right) \Rightarrow$ Cons. de la energía

CONSERVACIÓN DE LA MASA

• Forma integral: $\frac{d}{dt} \int_{V_3} \rho dV = \int_{V_3} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0$
 $\left| \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \oint_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0 \right.$

- Caso líquidos ($\rho = cte$) $\Rightarrow \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ Superficie cerrada \Rightarrow Caudal nulo
- Caso estacionario $\Rightarrow \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ Superficie cerrada \Rightarrow Cambio métrico nulo

• Forma diferencial: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ $\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla \rho}_{\frac{D\rho}{Dt}} = 0$
 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0$

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO. FORMA INTEGRAL

• $\frac{d}{dt} \int_{V_3} (\rho \vec{v}) dV = \int_{V_3} \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \oint_S (\rho \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \oint_S \vec{n} \cdot \vec{\bar{c}} ds + \int_V \rho \vec{j}_m dV = - \oint_S \rho \vec{n} p ds + \oint_S \rho \vec{n} \cdot \vec{c} ds + \int_V \rho \vec{j}_m dV$
 $\left| \frac{d}{dt} \int_{V_c} (\rho \vec{v}) dV + \oint_{S_c} (\rho \vec{v}) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds \right.$

La variación temporal de la cantidad de movimiento en un volumen fluido entendida como:

Variación local temporal en el volumen (fluido o de control)

+ Flujo que atraviesa el volumen fluido o de control

Es debido a:

- La distribución de presiones en la sup que limita al volumen
- Un término asociado a los esfuerzos viscosos
- La acción de las fuerzas másicas sobre el volumen fluido

Es importante saber aplicar esta ecuación a volúmenes (gen. de control).

En especial el término $\oint_{\text{paredes}} \vec{n} \cdot \vec{\bar{c}} ds = -F_{int} \leftarrow$ Fuerza interna que ejerce el fluido sobre las paredes del depósito que lo contiene

Para hallar la F_{tot} generalmente será suficiente con cambiar, en la expresión de la F_{int} las presiones absolutas por sus correspondientes manométricas ($p - p_a$)

$F_{ext} = \int_{\text{paredes}} \vec{n} \cdot \vec{\bar{c}} ds$

• Conservación de la cantidad de momento cinético:

$\frac{d}{dt} \int_{V_3} (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) dV = \int_{V_3} \frac{\partial (\vec{x} \wedge \rho \vec{v})}{\partial t} dV + \oint_S (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \oint_S (\vec{x} \wedge \vec{n} \cdot \vec{\bar{c}}) ds + \int_V (\vec{x} \wedge \rho \vec{j}_m) dV$
 $\left| \frac{d}{dt} \int_{V_c} (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) dV + \oint_{S_c} (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds \right.$

Se usa cuando piden pares mecánicos aplicándose igual que la ecuación anterior.

Hay que saber que $\int_{\text{pared}} \vec{x} \wedge \vec{n} \cdot \vec{\bar{c}} ds = -T \leftarrow \underline{\text{Par}}$

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO. FORMA DIFERENCIAL

$\int \frac{D\bar{U}}{Dt} = \text{div } \bar{\tau}' + \bar{f}_m$

Cant. de mov. en forma diferencial $(= -\nabla p + \text{div } \bar{\tau}' + \bar{f}_m)$

$\rho \frac{D\bar{U}}{Dt} + \rho \bar{U} \nabla \bar{U} =$ *La var. temporal de la cant. de mov. entendida como variación local + convectiva es debida a:*

$\tau'_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau'_{ij}$

$\tau'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \text{div } \bar{U} \delta_{ij}$; $\lambda = \mu_v - \frac{2}{3} \mu$

$\sum \tau'_{ii} = 2\mu \text{div } \bar{U} + 3\mu_v \text{div } \bar{U} - 2\mu \text{div } \bar{U} = 3\mu_v \text{div } \bar{U}$

Nota: líq. monoatómicos ($\mu_v = 0$)

Acción de la presión
 Acción de los esfuerzos viscosos
 Acción de las fuerzas másicas

Ley de Navier Poisson $\Rightarrow \tau'_{ij}$

Solo hay que saber aplicar bien la definición de la $\bar{\tau}' \approx$ Asociado a esfuerzos viscosos

Ecuación de Navier Stokes

simplemente consiste en juntar la ecuación de la cantidad de movimiento en forma dif. con la ley de Navier Poisson. Ejemplo componente i-ésima

$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \bar{U} \right] + \rho f_{mi}$

Es importante saber aplicarlos!!
 Es simplemente una sustitución pero lee un poco

CASO líquidos con $\mu = cte$ se simplifica mucho lo anterior

El desarrollo es sencillo. tomemos componente i-ésima (por líquidos)

$\rho \frac{D u_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \bar{U} \right] + \rho f_{mi}$

Aplicación $\Delta \bar{U} \Leftarrow \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \Rightarrow \text{div } \bar{U} = 0$

$\rho \frac{D \bar{U}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \bar{U} + \bar{f}_m$

Si además: $\bar{f}_m = -\nabla u \Rightarrow \rho \frac{D \bar{U}}{Dt} + \nabla p + \rho \nabla u = \mu \Delta \bar{U}$; $\rho \frac{D \bar{U}}{Dt} + \nabla (p - \tau_a + \rho u) = \mu \Delta \bar{U}$

Líquidos $\mu = cte$
 Líquidos $\mu = cte$
 Presión reducida $\Rightarrow \bar{f}_m = -\nabla u$

Ecuación de la energía mecánica

se obtiene a partir de la ec. de conservación de la cant. de mov. y la expresión para la aceleración $\bar{a} = \frac{D \bar{U}}{Dt} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{U^2}{2} \right) - \bar{U} \wedge (\nabla \wedge \bar{U})$

$\rho \frac{D \bar{U}}{Dt} = -\nabla p + \text{div } \bar{\tau}' + \bar{f}_m = \rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{U^2}{2} \right) - \bar{U} \wedge (\nabla \wedge \bar{U})$

$\rho \frac{D \bar{U}}{Dt} = -\nabla p + \bar{U} \text{div } \bar{\tau}' + \bar{U} \rho \bar{f}_m$

La ecuación ahora es escalar!!

La variación de la energía cinética en el tiempo para un volumen unitario, entendido como variación local y convectiva es el resultado de 3 trabajos \rightarrow

$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{U^2}{2} \right) = -\nabla p + \bar{U} \text{div } \bar{\tau}' + \bar{U} \rho \bar{f}_m$

\rightarrow Debido a gradiente de presiones \rightarrow Debido a fuerzas viscosas \rightarrow Debido a fuerzas másicas

Caso líquido + μ despreciable + ESTACIONARIO $\Rightarrow \rho \frac{U^2}{2} + p + \rho u = cte$ en una línea de corriente

Th. de Bernoulli

Si además Prop. uniforme en la entrada $\Rightarrow \rho \frac{U^2}{2} + \rho u + p = cte$ en todo el vol. fluido

Cuidado con las condiciones!!

• Ecuación de la energía interna para líquidos

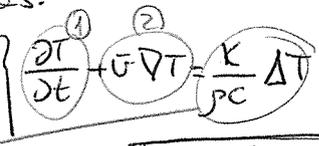
$$T ds = c dT \rightarrow \int \rho c \frac{DT}{Dt} = \int T \frac{Ds}{Dt} = \Phi_v + Q_r + Q_q - \text{div } \bar{q}$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} + \rho c \bar{v} \nabla T = \Phi_v + Q_r + Q_q + \text{div}(K \nabla T)$$

La variación de entropía en el tiempo en un líquido perfecto, directamente proporcional a la var. de temperatura es debido a:

Si además:

$Q_r = Q_q = 0$
 $K = cte$
 $\Phi_v \rightarrow 0$



Función de disipación de Rayleigh que rep. las dif. espaciales de velocidad \rightarrow esfuerzos viscosos. Disip. viscosa

Calor recibido por radiación Q_r y reac. quím. Q_q

Calor por conducción

Desaparece término convectivo \rightarrow FOURIER $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c} \Delta T = g \Delta T$

La difusión térmica de un material es debido a ①: acumulación térmica en el tiempo y a ②: el transporte convectivo

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA. FORMA INTEGRAL $\int_V \rho \left(\frac{d}{dt} \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right) dv + \int_S \rho (h + \frac{v^2}{2} + u) (\bar{v} \cdot \bar{n}) nds \right)$

• En función de la energía potencial

$$\text{Trabajo } J_m \rightarrow \int_V \rho \bar{f}_m \bar{v} dv = - \frac{d}{dt} \int_V \rho \psi dv \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right) dv = \int_S \bar{n} \cdot \bar{z} \bar{v} ds - \int_S \bar{q} \cdot \bar{n} ds + \int_V (Q_r + Q_q) dv$$

"La variación de la e. cinética, interna y potencial por unidad de tiempo es igual al trabajo de los fuerz. de superficie más los calor. transferidos por radiación, reacción química y conducción por unidad de tiempo".

• MAQ. HIDRAULICAS

COND $\left\{ \begin{array}{l} \text{ES con prop. unj.} \\ \bar{v} \perp \text{ sección ES} \\ \rho \rightarrow 0 \\ \text{Comercialización } (\theta = \phi) \end{array} \right.$

$$\sum G_s \left(h_s + \frac{v_s^2}{2} + u_s \right) - \sum G_e \left(h_e + \frac{v_e^2}{2} + u_e \right) = W + Q$$

$$\underline{G_e = G_s} \quad \boxed{G \left(h + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = W + Q} \quad \text{①}$$

• Cons. energía interna LIQUIDOS

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho e) dv = \int_V \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} dv + \int_S \rho e \bar{v} \cdot \bar{n} ds = \Phi_v + \bar{Q}$$

$$\int_V \rho e dv + \int_S \rho e (\bar{v} \cdot \bar{n}) nds$$

$$\sum G_s e_s - \sum G_e e_e = \Phi_v + \bar{Q}$$

$$\text{Si } \underline{G_e = G_s} \quad \boxed{G(e)_e^s = \Phi_v + \bar{Q}} \quad \text{②}$$

Sumando ① + ② $\Rightarrow \boxed{G \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = W - \Phi_v}$

• Rendimiento: Aplicaremos

	$G \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s$	W	Φ_v	η	η con H
Bomba	Es la pot. aprovechada es decir, el trabajo para H.E. del sist. > 0	Es la potencia suministrada, la que consume > 0	Son las pérdidas viscosas > 0	Se define $\eta_{manom.}$ $\eta_m = \frac{G \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s}{W} = 1 - \frac{\Phi_v}{W}$	$G \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = G g H_m$ $W = g G H_u$ $\Phi_v = g G H_L$ $H_u = H_m + H_L$ $\eta_m = \frac{H_m}{H_u} = 1 - \frac{H_L}{H_u}$
Turbina	Potencia de la que disponemos desde a diferencia entre las pot. mecánicas de la entrada y la salida < 0	Es el trabajo realizado por el fluido que mueve la hélice < 0 Pot. de la turb > 0	Son las pérdidas viscosas > 0	Se define el $\eta_{hidráulico}$ $\eta_H = \frac{ W }{G \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s}$ $\eta_H = 1 - \frac{\Phi_v}{ W + \Phi_v}$	$G \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u \right)_e^s = G g H_n$ $ W = g G H_u$ $\Phi_v = g G H_L$ $\eta_H = \frac{H_u}{H_n} = 1 - \frac{H_L}{H_n}$ $H_n = H_u + H_L$

Gas: $e = cT$ (o $c_p T$ si gas incomprensible) $\rightarrow h = e + \frac{P}{\rho}$
 Gas id: $e = c_v T$, $h = c_p T$, $e = h + \frac{P}{\rho}$

• líquidos

$G(e)e^s = \bar{Q} + \Phi_v \xrightarrow{e=cT} cG(T_s - T_e) = \bar{Q} + \Phi_v, \Delta T = \frac{\bar{Q}}{cG} + \frac{\Phi_v}{cG}$

"En cualquier máq. térmica, siempre que exista calor o pérdidas viscosas, se producirá un ΔT "

Proc. isentrop.

$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \quad c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = S - S_0$

Calcular Σ Fricciones \xrightarrow{kg} $\equiv \nu \Delta T$

$\Delta S|_{adib} \geq 0!!$