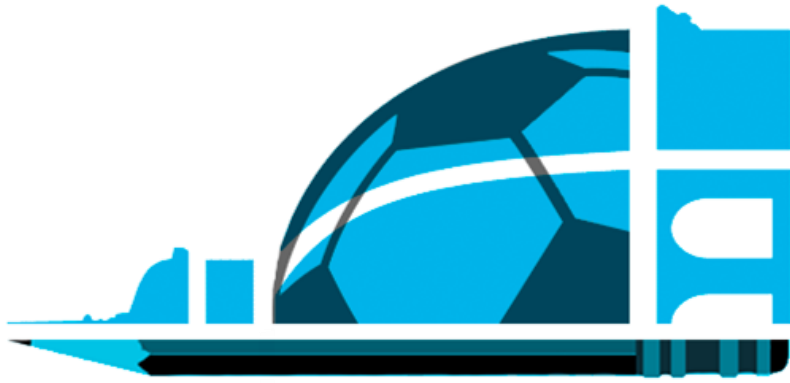




Indusbol
.com

Apuntes de 3ºGITI

María Ballesteros

APUNTES RESISTENCIA DE MATERIAES

Si alguna vez estos
apuntes te sirvieron
de ayuda, piensa que
tus apuntes pueden
ayudar a muchas
otras personas.

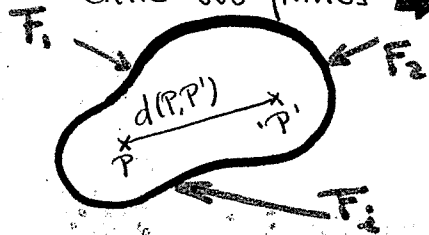
Comparte tus apuntes
En indusbol.com o
simplyjarod.com

INTRODUCCIÓN

Lección 1: DESCRIPCIÓN DEL MODELO DEL SÓLIDO DEFORMABLE

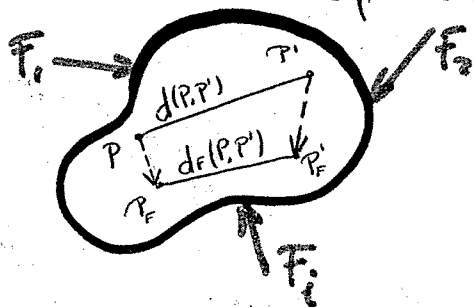
= Definiciones

SÓLIDO RÍGIDO es aquel que ante acciones exteriores no varía la distancia entre sus puntos $\rightarrow d(P, P') = \text{cte} \forall P$



Podremos estudiar su movimiento, equilibrio, ... pero en la realidad este tipo de sólidos no existe

SÓLIDO DEFORMABLE es aquel que ante acciones exteriores la distancia entre dos de sus puntos puede variar.



Un caso particular de sólido deformable es el SÓLIDO ELÁSTICO, que serán los sólidos que estudiaremos en esta asignatura.

Un sólido elástico es aquel que recupera su forma inicial cuando cesan las acciones exteriores

= Propiedades del sólido elástico

ISOTROPÍA: Tiene las mismas propiedades en cualquier dirección



Por ejemplo, la madera no es isotrópica

HOMOGENEIDAD: Todas las partes tienen idénticas propiedades



Por ejemplo, un bloque de hormigón no es homogéneo

CONTINUIDAD: No presentan huecos

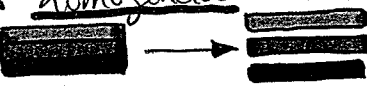


Por ejemplo, la piedra pómez no es continua

= El sólido no perfecto:

Se trata de sólidos reales o verdaderos sobre los cuales realizaremos una serie de simplificaciones para facilitar su estudio.

→ Para conseguir isotropía estudiaremos de forma separada cada dirección

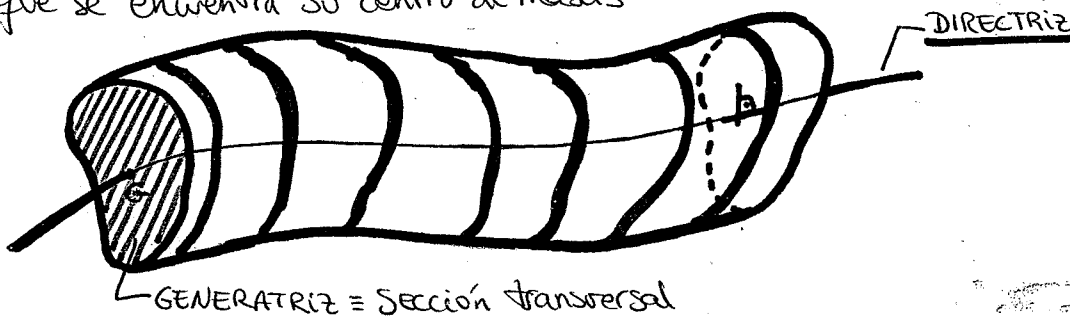
→ Para conseguir homogeneidad descompondremos el sólido real en sólidos homogéneos: 

→ Para conseguir continuidad trabajaremos a un nivel macroscópico de forma que sean irrelevantes los huecos

Lección 2: DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE SÓLIDO PRISMÁTICO

= Definición

SÓLIDO PRISMÁTICO: es aquel generado por una superficie plana, denominada generatriz que se mueve a lo largo de una línea, llamada directriz y sobre la que se encuentra su centro de masas

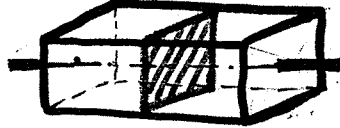


NOTA!! La generatriz y la directriz son siempre perpendiculares entre sí

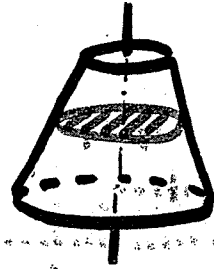
= Clasificación del sólido prismático

★ En función de la generatriz:

Sección constante

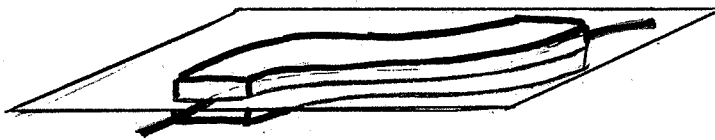


Sección variable

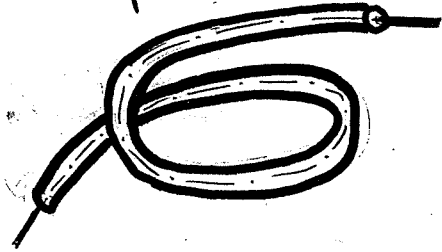


★ En función de la directriz

Plano: La directriz está contenida en un plano

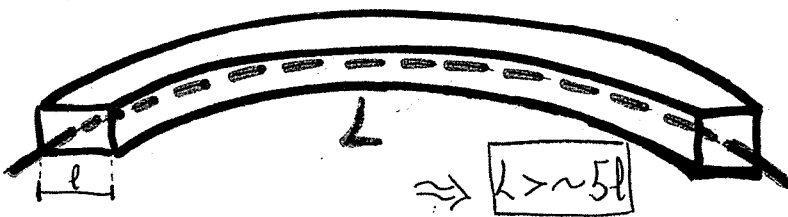


Alabeado: La directriz no puede contenerse en un plano



★ En función de sus dimensiones

Unidimensional: Las dimensiones de la sección transversal son pequeñas respecto de la longitud de la directriz.



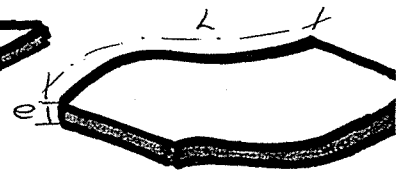
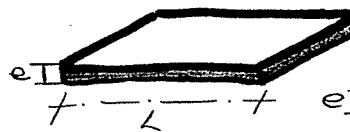
Bidimensional: Aquel que tiene una dimensión mucho menor que las otras dos. Son dos superficies separadas una pequeña distancia denominada espesor, e .

Subtipos:

PLACA: Plano

$L > 10e$

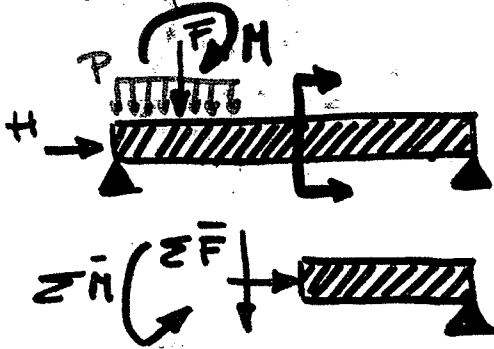
LÁMINA: Alabeado



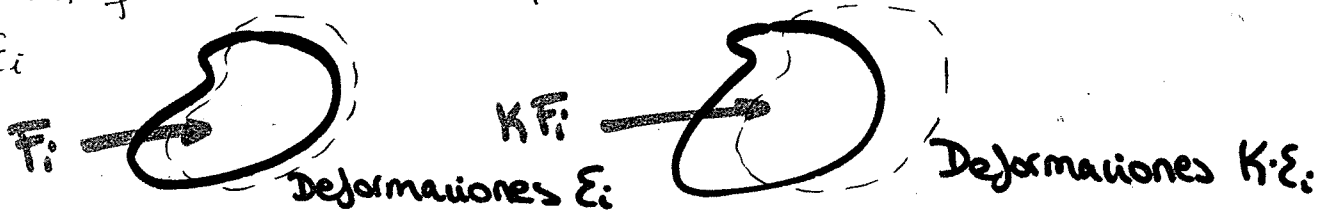
= Principios aplicables

Principio de la rigidez relativa: Los movimientos o deformaciones del sólido son despreciables respecto a sus dimensiones. Las dimensiones del sólido se conservan invariables así como los puntos de aplicación de las cargas o uniones exteriores.

Principio de Saint-Venant: En puntos suficientemente alejados de las cargas aplicadas su efecto puede substituirse por el de un sistema de cargas estáticamente equivalente $\Rightarrow$ Misma resultante $\left\{ \begin{array}{l} \sum \bar{F} \\ \sum \bar{M} \end{array} \right.$



Principio de proporcionalidad: Sobre un sólido actúan un sistema de fuerzas F_i produciendo unas deformaciones ϵ_i de forma que, si sobre el mismo sólido actúan unas fuerzas $K \cdot F_i$, las deformaciones resultantes quedarán también multiplicadas por el factor K , esto es, serán $K \cdot \epsilon_i$.

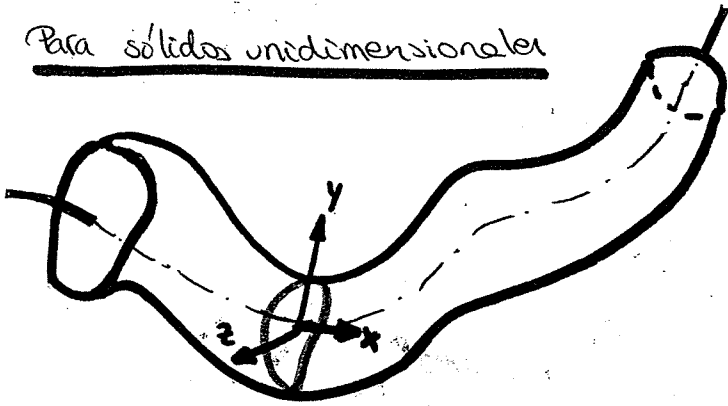


Principio de superposición: Sea el sólido sobre el que actúa el sistema de fuerzas F_i y sea el mismo sólido sobre el que actúa el sistema de fuerzas F_j produciendo, respectivamente deformaciones ϵ_i, ϵ_j . Podemos entonces asegurar que, si sobre este sólido actuase el sistema de fuerzas $F_i + F_j$, las deformaciones producidas serían $\epsilon_i + \epsilon_j$.



= Sistema de referencia

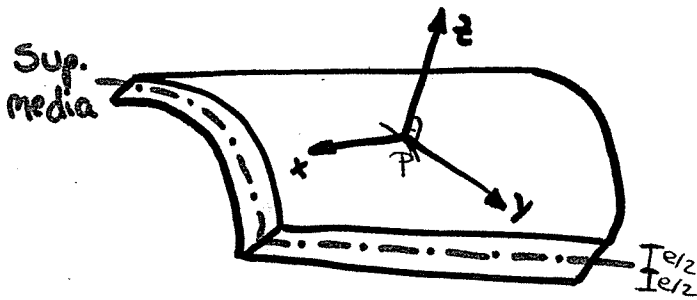
Para sólidos unidimensionales



• El eje x lo tomamos siempre tangente a la directriz en el sentido que nos interesa

• El eje y y el z serán los ejes principales de la sección de manera que $\{x, y, z\}$ sea un triédro directo.

Para sólidos bidimensionales



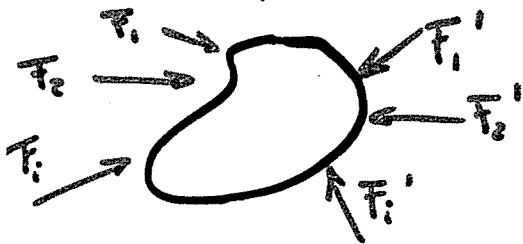
• El eje z lo tomaremos perpendicular a la superficie media en el sentido que nos interesa

• Los ejes x e y serán tangentes a la superficie media formando un triédro a derechas.

Leción 3: ESFUERZOS INTERNOS Y SUS DIAGRAMAS

= Equilibrio estático y elástico

Se dice que un sólido está en EQUILIBRIO ESTÁTICO si:



$$\begin{cases} \sum (F_i + F_i') = 0 \\ \sum (M_i + M_i') = 0 \end{cases} \text{ respecto de cualquier punto}$$

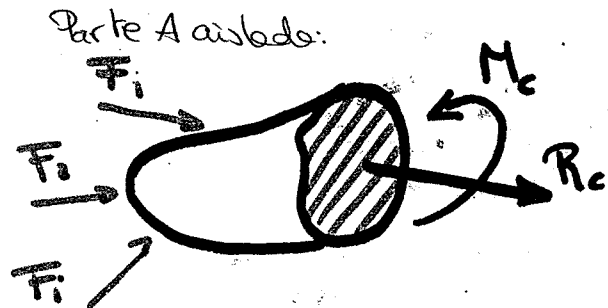
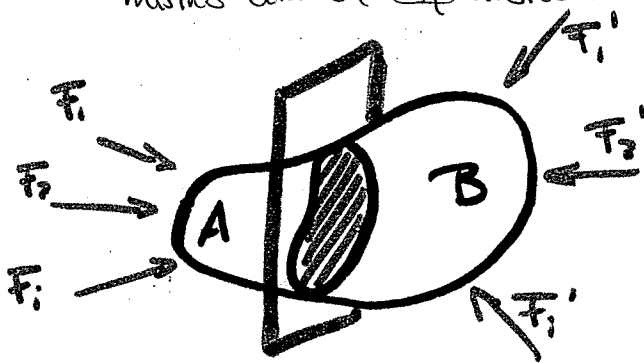
y siendo $M_i + M_i' = r_i \wedge F_i + r_i' \wedge F_i'$

Se trata de una condición necesaria y suficiente para que un sólido rígido este en equilibrio.

Sin embargo, si trabajamos con sólidos elásticos esta condición es necesaria pero no suficiente.

Por tanto, tendrá que cumplirse también la condición de EQUILIBRIO ELÁSTICO, que se trata de una condición interna

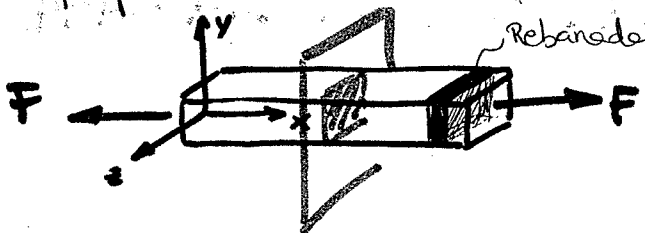
"Un sólido elástico está en equilibrio cuando toda parte aislada del mismo está en equilibrio".



Por equilibrio estático $\sum (F_i + F_i') = 0$; Ahora $\sum F_i \neq 0$ y aparecen R_c y M_c de forma que, para conseguir equilibrio elástico:

$$\begin{cases} \sum F_i + R_c = 0 \\ \sum M_i + M_c = 0 \end{cases}$$

Ejemplos: Sea el sólido elástico de la figura

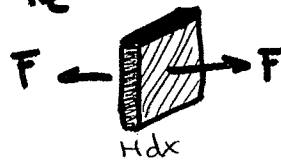


Por equilibrio estático, se cumple:

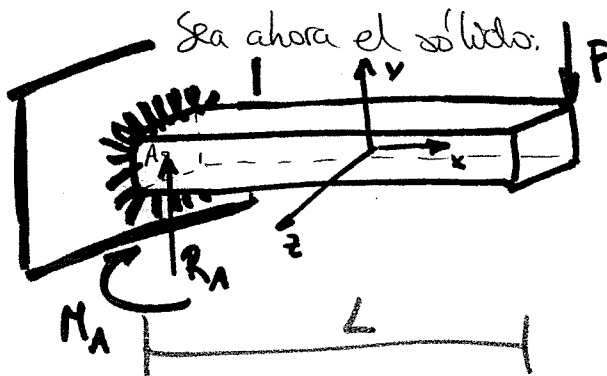
$$\sum F = 0 \rightarrow \vec{i}: F - F = 0$$



Para equilibrio elástico: $\sum F_H = 0 \rightarrow \vec{i}: R_c - F = 0$



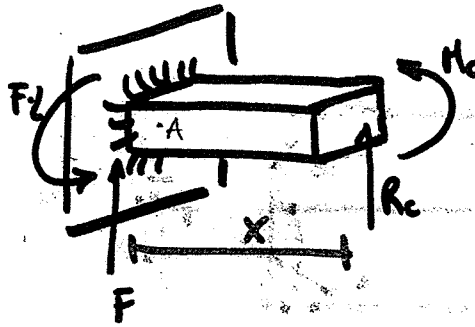
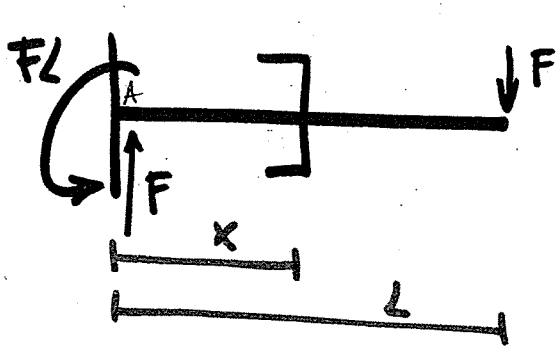
$$\underline{F = R_c}$$



Por equilibrio estático

$$\sum F = 0 \rightarrow \vec{j}: R_A - F = 0 \rightarrow \underline{F = R_A}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \vec{k}: -FL - M_A = 0 \rightarrow \underline{M_A = -FL}$$



Para equilibrio elástico

$$\sum F = 0, \quad \uparrow: F + R_c = 0$$

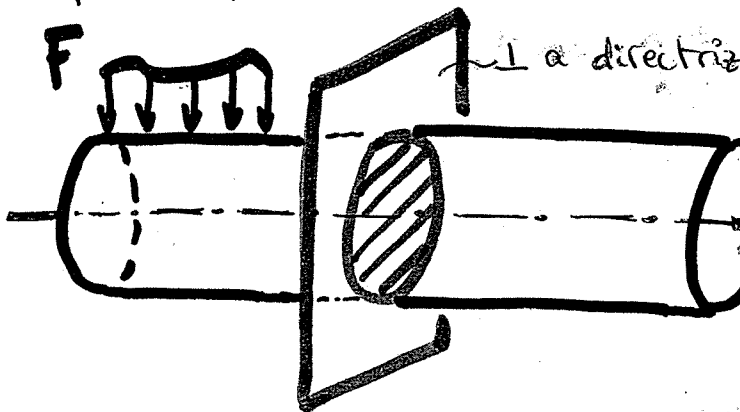
$$R_c = -F$$

$$\sum M_A = 0$$

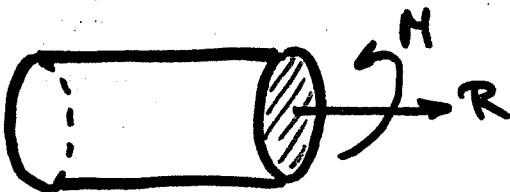
$$FL + M_c + R_c x = 0$$

$$M_c = -F(L-x)$$

= Concepto de esfuerzo



Aislamos una de las partes del sólido elástico prismático



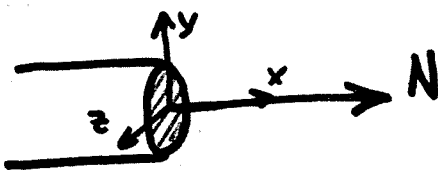
llamaremos fuerzas y momentos aplicados a las acciones externas al sólido y ESFUERZOS a las fuerzas y momentos interiores, es decir, acciones entre una parte y otra del sólido

= Tipos de esfuerzos

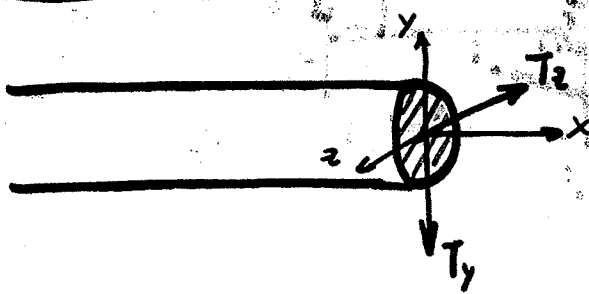
Fuerza: $\vec{R} = N\hat{i} + T_1\hat{j} + T_2\hat{k}$

Momento: $\vec{M} = M_1\hat{i} + M_2\hat{j} + M_3\hat{k}$

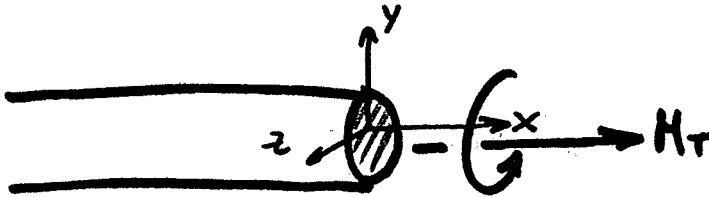
ESFUERZO NORMAL N: Es la fuerza interna según el eje x



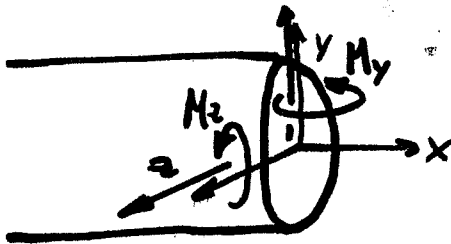
ESFUERZOS CORTANTES T_1, T_2



MOMENTO TORSOR M_T

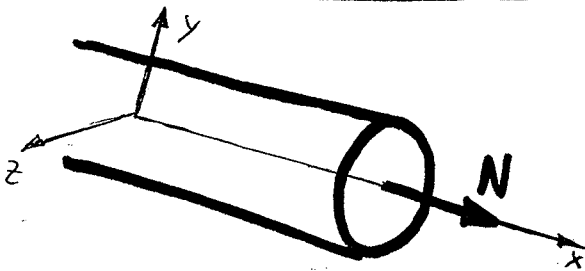


MOMENTOS FLECTORES M_y, M_z

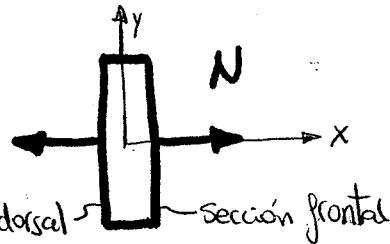


= Diagramas de esfuerzos

DIAGRAMA DE ESFUERZO NORMAL (N): Axil

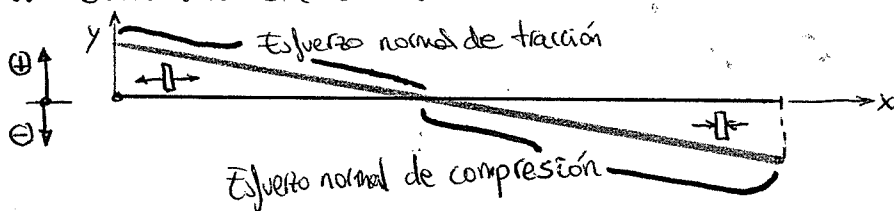


Representación de la rebanada: $N \oplus$

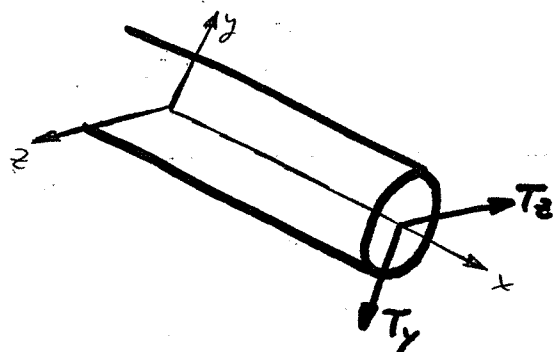


El esfuerzo axial positivo se representa en la dirección y sentido del eje x en la sección frontal y en sentido contrario en la dorsal

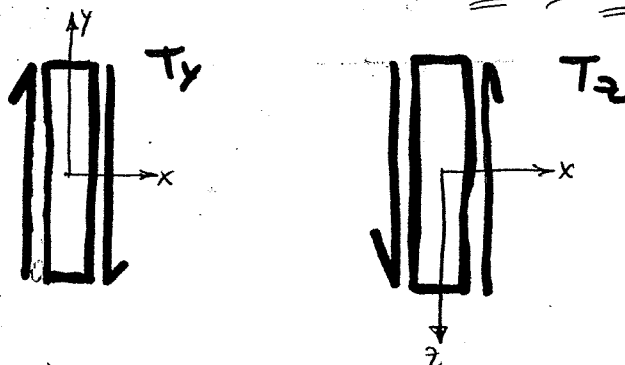
Ejemplo:



DIAGRAMAS DE ESFUERZOS CORTANTES (T_y, T_z)

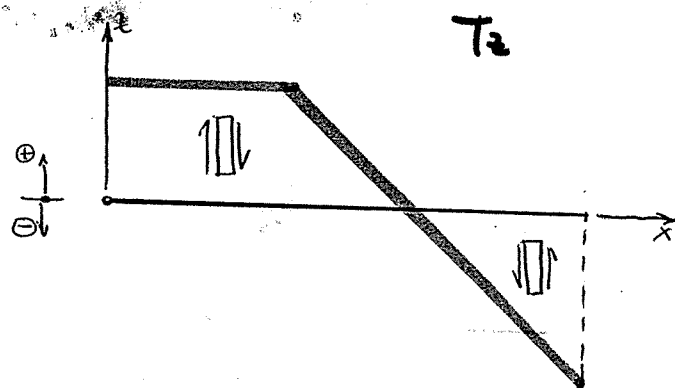
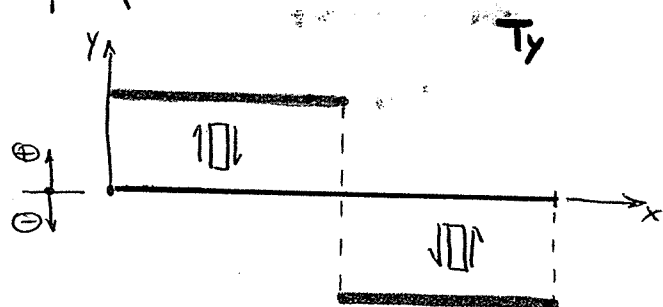


Representación de los rebanados: $T_y^{\oplus}$, $T_z^{\oplus}$

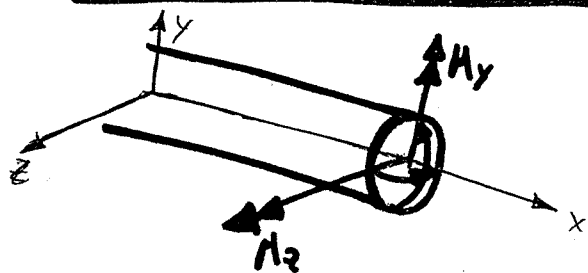


Los esfuerzos cortantes T_y, T_z se representan en sentido contrario a su eje (y o z respectivamente) en la cara frontal si son positivos y llevan el sentido de su eje en la cara dorsal, si son positivos.

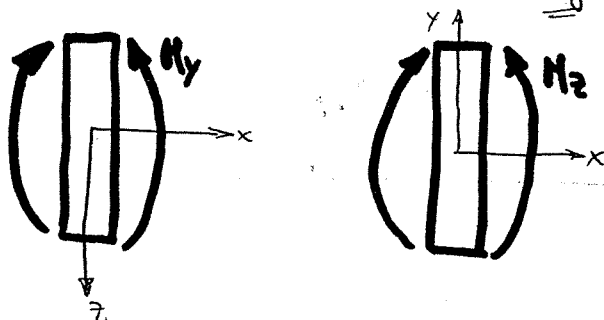
Ejemplos:



DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES (M_y, M_z)



Representación de los rebanados: $M_y^{\oplus}$, $M_z^{\oplus}$



Momentos flectores positivos llevan la dirección y sentido de sus ejes correspondientes en la cara frontal y la contraria en la dorsal.

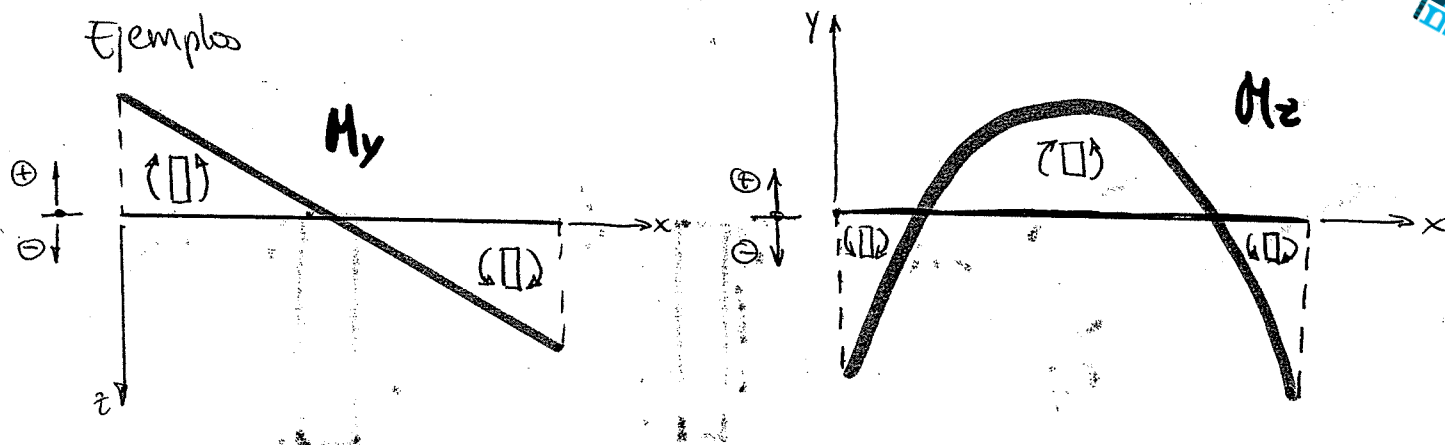
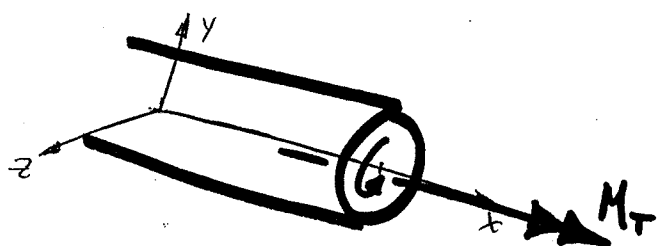
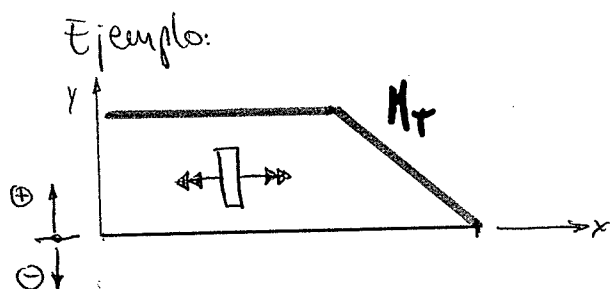
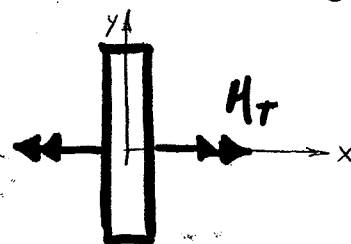


DIAGRAMA DEL MOMENTO TORSOR (M_T)

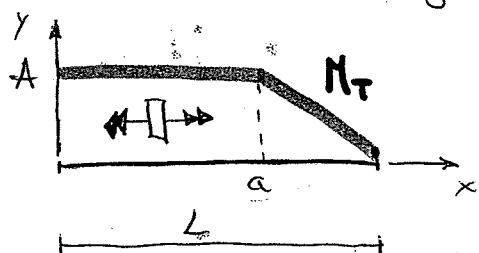


Representación de la rotación: $M_T^{\oplus}$



Observamos que, si el momento torsor es positivo se representará con una doble flecha en sentido del eje x en la cara frontal y sentido contrario en la dorsal.

NOTA!! Llamaremos LEY DE ESFUERZOS a la representación matemática de los diagramas de esfuerzos. Por ejemplo:

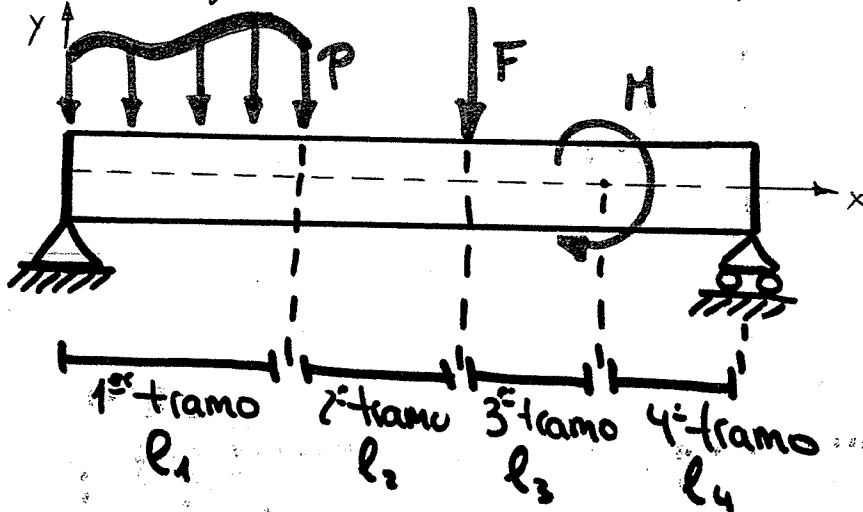


Ley de esfuerzos

$$\left\{ \begin{array}{l} M_T = A \quad 0 < x < a \\ M_T = \frac{-A}{L-a} (x-L) \quad a < x < L \end{array} \right.$$

= Cálculo de esfuerzos

Sea la viga de la figura con las acciones externas representadas



NOTA!!

- Se trata de una estructura plana
- Las acciones externas pueden ser:
 - Cargas repartidas
 - Fuerzas puntuales
 - Momentos aplicados

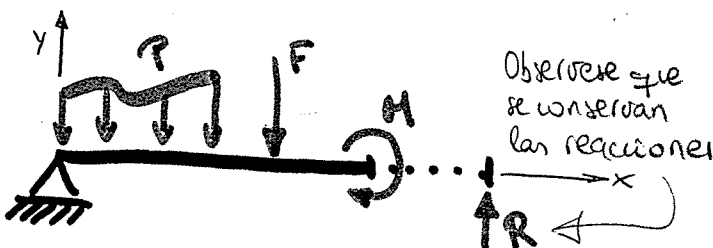
① Cálculo de las reacciones

② Dividir las barras en tramos:

- Divido tramos por puntos de aplicación de cargas
- Divido tramos por puntos donde haya enlaces
- Divido tramos por quiebros de la directriz

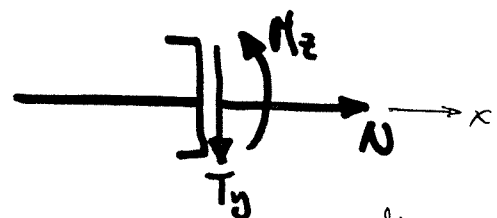
③ Comenzamos por el extremo más sencillo, esto es, el que tenga menos acciones/reacciones

④ Eliminamos el primer tramo desde el extremo elegido conservando las acciones/reacciones.



Observarse que se conservan las reacciones

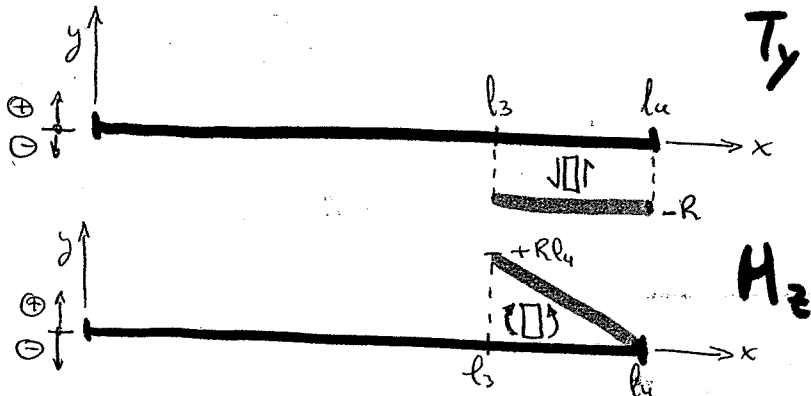
Cara frontal



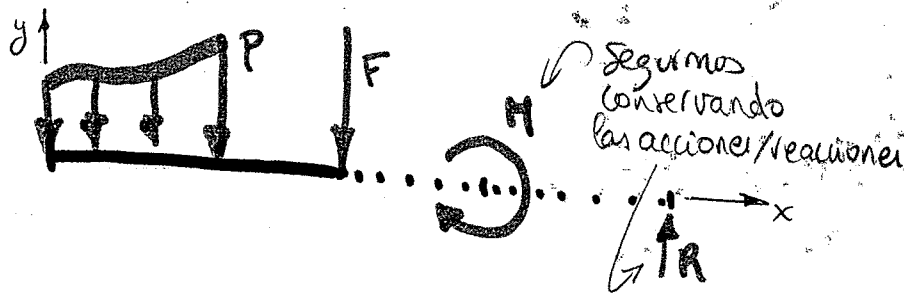
Los esfuerzos son iguales a la resultante de cargas de la parte eliminada

$$\left. \begin{array}{l} N = 0 \\ T_y = -R \\ M_z = Rl_4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Tienen sentidos} \\ \text{contrarios!!} \end{array} \Rightarrow T_y \text{ en la cara frontal lleva el sentido contrario al pintado}$$

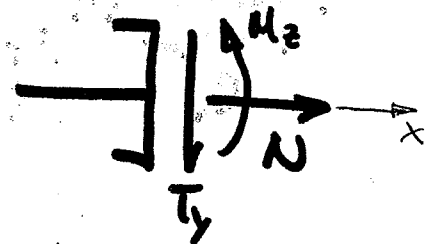
Por tanto, el diagrama de ejes queda:



Seguimos ahora eliminando el siguiente tramo:



Cara frontal

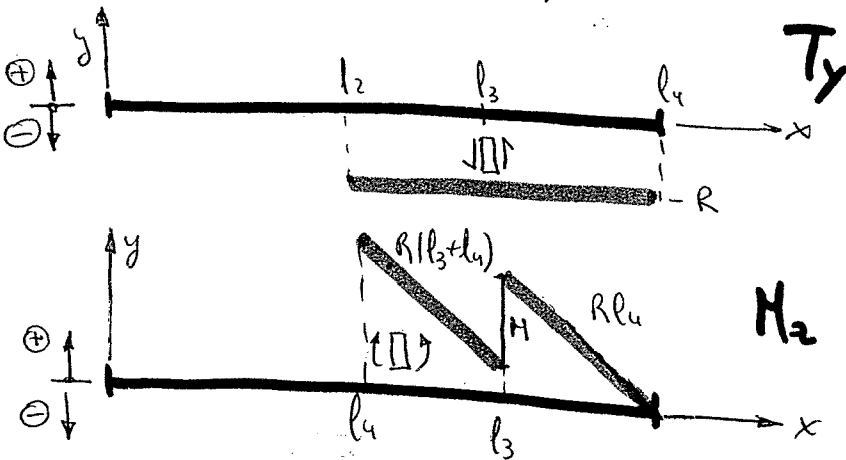


De nuevo los ejes son iguales a la resultante de las cargas de la parte eliminada

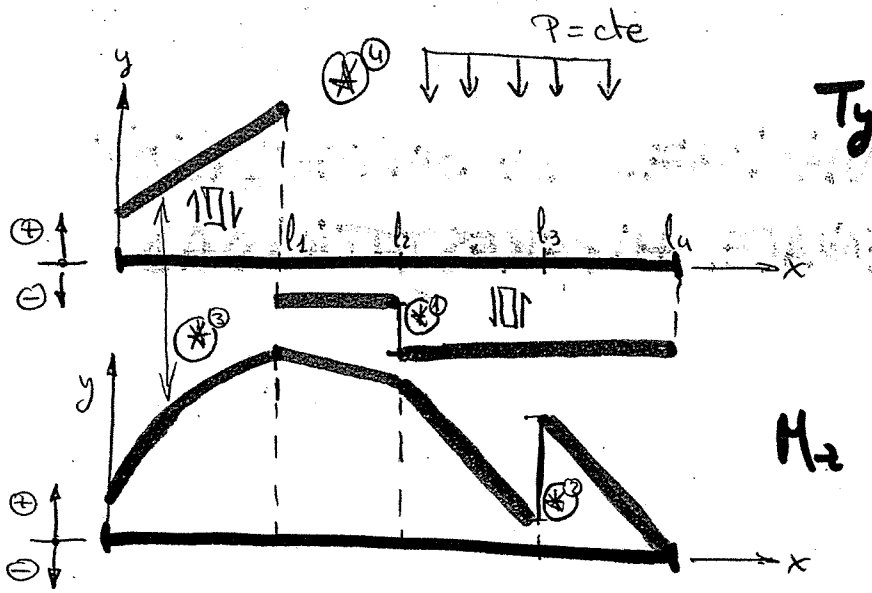
$$\begin{cases} N = 0 \\ T_y = -R \end{cases}$$

$$M_z = -M + R(l_3 + l_4)$$

El diagrama del momento flector M_z habrá un salto brusco de valor $-M$.



[...] Seguiremos con los tramos hasta acabar la viga. Supongamos que el diagrama final es el que se presenta en la siguiente página:



REGLAS BÁSICAS:

- Fuerzas aplicadas puntuales $\Rightarrow$ Salto en la ley de cortante de valor F
- Momentos aplicados puntuales $\Rightarrow$ Salto en la ley del momento flector correspondiente de valor M .
- $T_y = \frac{dM_z}{dx}$ Ej.: $T_y = x \rightarrow M_z = \frac{x^2}{2} + Cte$

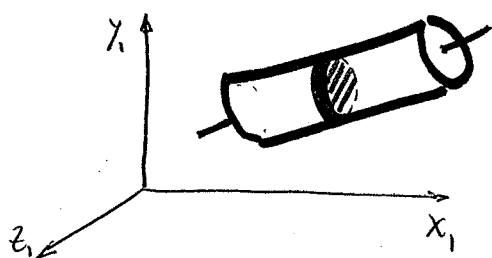
$$p = \frac{dT_y}{dx} = \frac{d^2M_z}{dx^2}$$

Si $p = cte$ $\begin{cases} T_y \text{ es lineal} \\ M_z \text{ es parabólico} \end{cases}$

Si $p = 0$ $\begin{cases} T_y \text{ es constante} \\ M_z \text{ es lineal} \end{cases}$

Lección 4: CONDICIONES DE SUSTENTACIÓN Y ENLACE. HIPERESTATICIDAD

= Restricciones al movimiento



Cada sección tiene seis grados de libertad (en el espacio → en el plano son 3): 3 desplazamientos: δx , δy , δz
3 giros: θ_x , θ_y , θ_z

Por equilibrio del sólido aparecen las restricciones que modifican o cambian algunos o todos los grados de libertad

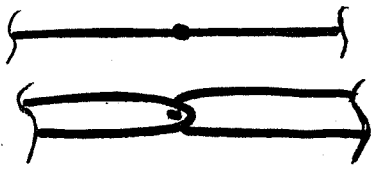
CONDICIONES DE SUSTENTACIÓN: Restricciones interiores

TIPO	δx	δy	δz	θ_x	θ_y	θ_z	ESQUEMA	REACCIONES
Simple o articulado FIJO	ϕ	ϕ	ϕ	✓	✓	✓		
Deslizante	✓	ϕ	ϕ	✓	✓	✓		
Empotramiento	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ		
Empotramiento deslizante	ϕ	✓	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ		

NOTA !! Por cada grado de libertad impedido nos aparece una reacción. Ejemplo: En el empotramiento se impiden los 6 grados de libertad y aparecen 6 reacciones: $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$

CONDICIONES DE ENLACE

• Rótula o articulación

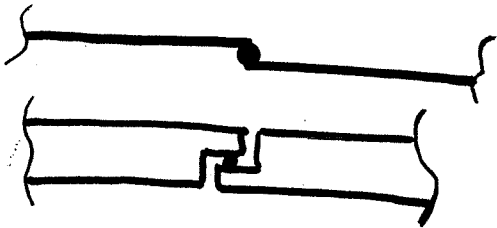


Ambas secciones tienen los mismos desplazamientos pero distintos giros:

$$\begin{cases} \delta x_1 = \delta x_2 \\ \delta y_1 = \delta y_2 \\ \delta z_1 = \delta z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_{x1} \neq \theta_{x2} \\ \theta_{y1} \neq \theta_{y2} \\ \theta_{z1} \neq \theta_{z2} \end{cases}$$

La barra, en el enlace, pierde la rigidez a flexión y torsión $\Rightarrow$ No hay momentos flectores (M_y, M_z) en el enlace ni M_t

• Articulación deslizante



Ambas secciones tienen algún desplazamiento distinto y distintos giros

$$\begin{cases} \delta x_1 \neq \delta x_2 \\ \delta y_1 = \delta y_2 \\ \delta z_1 = \delta z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_{x1} \neq \theta_{x2} \\ \theta_{y1} \neq \theta_{y2} \\ \theta_{z1} \neq \theta_{z2} \end{cases}$$

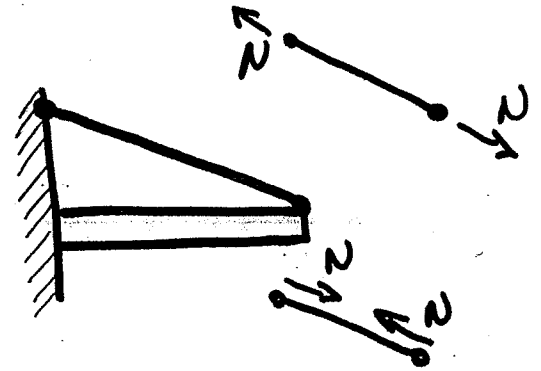
De nuevo, en el enlace se pierde la rigidez a flexión y torsión, además de anularse el esfuerzo en el sentido del desplazamiento diferente, es decir: $M_x = M_y = M_z = 0, N = 0$

• Tirante/puntal o cable

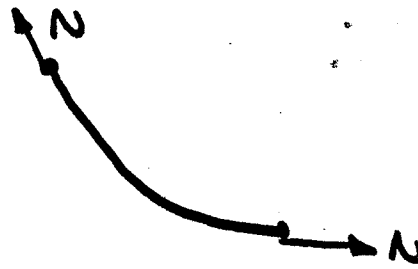
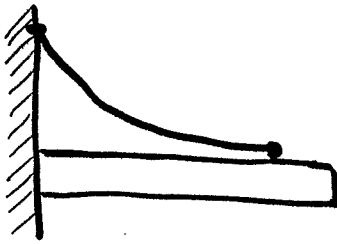
Son elementos de unión que trabajan sólo con esfuerzos normales

Tirante/puntal
- son rectos -

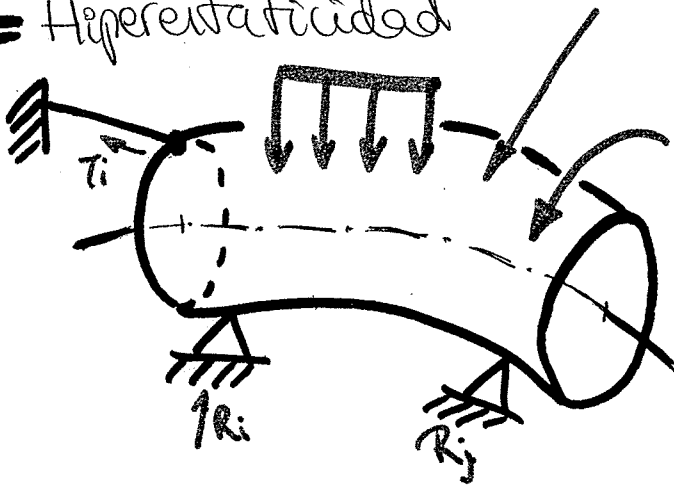
- Tirante: Trabaja a tracción
- Puntal: Trabaja a compresión



Cable: Es curvo y se considera el esfuerzo normal según su tangente



= Hiperestaticidad



Llamaremos

Incógnitas (I) { Reacciones exteriores
Esfuerzos en miembros
cerados

Ecuaciones (E) { Equilibrio
estático $\sum F = 0$
6 en espacio $\sum M = 0$
3 en plano

Condiciones de enlace

En general

Si $I < E \rightarrow$ Mecanismo. No hay equilibrio

Si $I = E \rightarrow$ SISTEMA ISOSTÁTICO

Si $I > E \rightarrow$ SISTEMA HIPERESTÁTICO

Sistema isostático {
 EXTERNAMENTE: $N^{\circ} \text{reacciones exteriores} = N^{\circ} \text{ecuaciones equilibrio estat.}$
 INTERNAMENTE: Si existen contornos cerrados y las ecuaciones de enlace son suficientes

Sistema hiperestático {
 EXTERNAMENTE: $N^{\circ} \text{reacciones exteriores} > N^{\circ} \text{ecuaciones equilibrio estat.}$
 INTERNAMENTE: Si no hay suficientes condiciones de enlace para los contornos cerrados.

GRADO DE HIPERESTATICIDAD (GH)

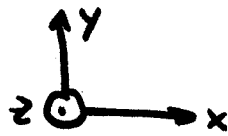
$$GH = I - E$$

Para calcularlo dividiremos el sistema en "p" subsistemas internamente isostáticos. Generalmente cortaremos los contornos cerrados y los enlaces

$$GH = I - E = r - p \cdot e$$

{
 $r \equiv$ Reacciones internas y externas
 $p \equiv$ partes en las que dividimos el sistema
 $e \equiv$ Ecuaciones de equilibrio $\rightarrow$ 3 plano estático
 $\rightarrow$ 6 espacio

Para el caso plano



$$\left\{ \begin{array}{l} F_x \\ F_y \\ M_z \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} N \\ T_y \\ M_z \end{array} \right.$$

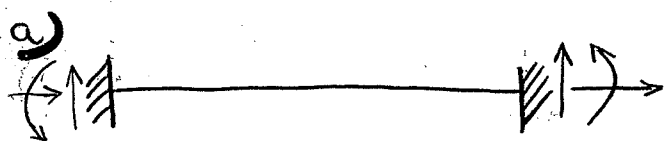
$$GH = I - E = GH_{\text{externas}} + GH_{\text{internas}}$$

$$= (r - 3) + (3c - e)$$

$$GH = (r - 3) + (3c - e)$$

{
 $r \equiv$ Reacciones exteriores
 $c \equiv N^{\circ}$ contornos cerrados
 $e \equiv$ ecuaciones de enlace

Ejercicio 1.15 Determinar el grado de hiperestaticidad (GH) de cada uno de los sistemas planos de la figura.



$$GH = 6 - 1 \cdot 3 = 3 //$$

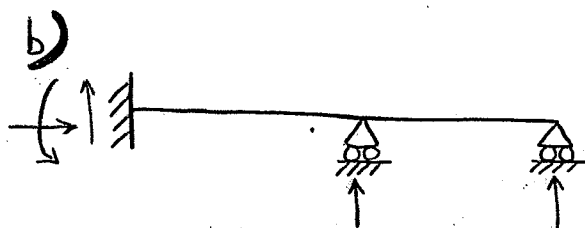
$$GH_{\text{plano}} = (6 - 3) + (3 \cdot 0 - 0) = 3 //$$

Reac. - parte ec. equil (366)

$$GH = r - p \cdot e$$

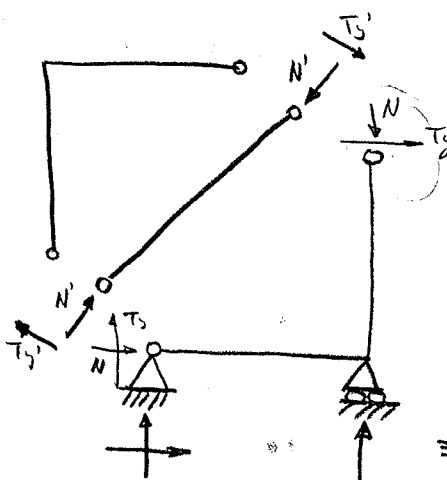
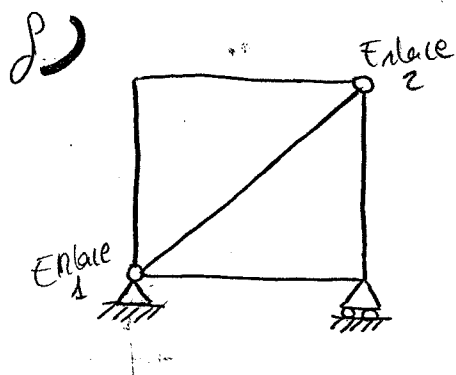
(Reac. ext. - 3) + (3 \cdot contr. cerr. - ec. entrec)

$$GH_{\text{plano}} = (r - 3) + (3c - e)$$



$$GH = 5 - 1 \cdot 3 = 2 //$$

$$GH_{\text{plano}} = (5 - 3) + (3 \cdot 0 - 0) = 2 //$$



= 8 reac. internas

= 3 reac. exteriores

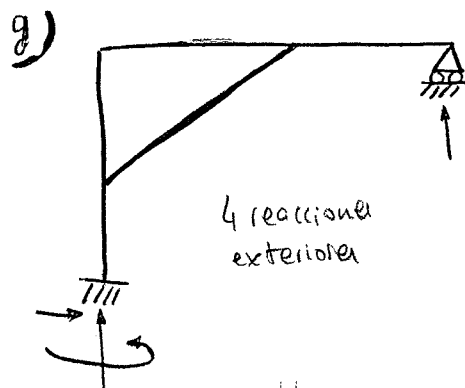
$$GH = 11 - 3 \cdot 3 = 2 //$$

$$GH = (3 - 3) + (3 \cdot 2 - 4) = 2$$

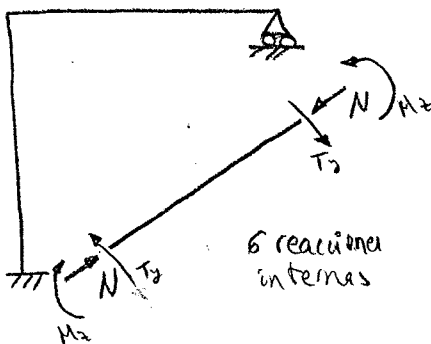
* Nota: N° de barras en la rótula menos 1:

$$\text{Enlace 1} \rightarrow 3 - 1 = 2 //$$

$$\text{Enlace 2} \rightarrow 3 - 1 = 2 //$$



4 reacciones exteriores

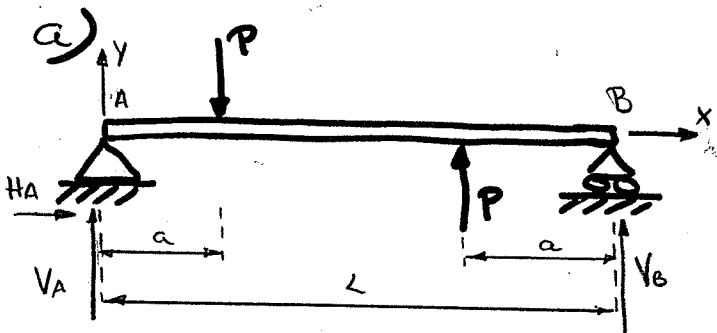


6 reacciones internas

$$GH = 10 - 2 \cdot 3 = 4 //$$

$$GH = (4 - 3) + (3 \cdot 1 - 0) = 4 //$$

Ejercicio 1.1 Dibujar los diagramas de esfuerzos correspondientes a las siguientes estructuras.



Comprobamos que es un sistema isostático:

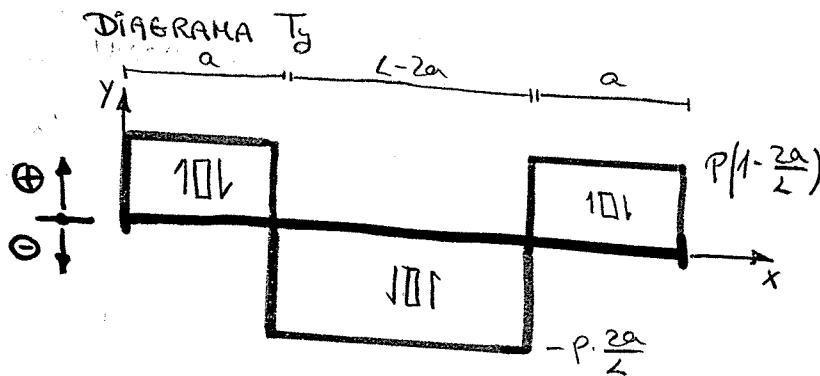
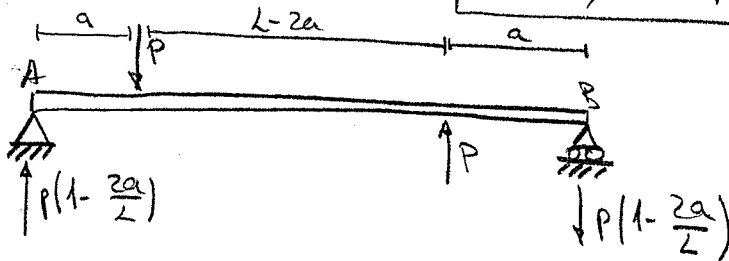
$$G+H = (3-3) = 0$$

Reacciones

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow V_A - P + P + V_B = 0 \rightarrow V_A = P(1 - \frac{2a}{L}) \\ \sum M_A = 0 \rightarrow -Pa + P(L-a) + V_B \cdot L = 0 \rightarrow V_B = \frac{P(L-2a)}{L} \end{cases}$$

EQUILIBRIO ESTÁTICO

Reacciones en los apoyos: $H_A = 0$; $V_A = P(1 - \frac{2a}{L})$; $V_B = -P(1 - \frac{2a}{L})$



Criterio de signos positivo



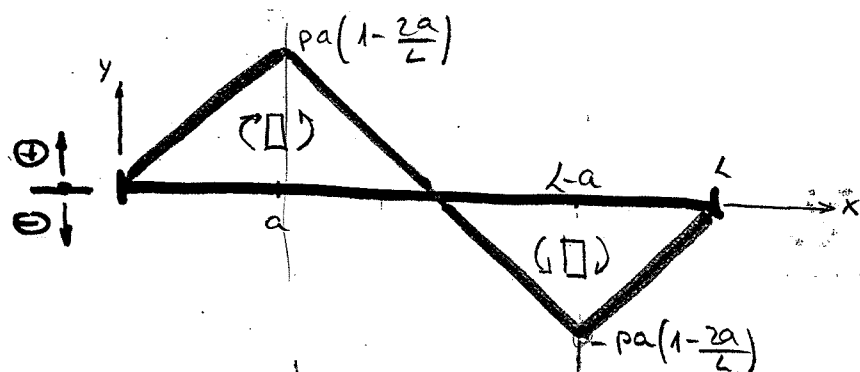
També es correcte girando la barra desde el extremo B al A

$\uparrow \dots \downarrow P(1 - \frac{2a}{L}) \equiv$ Constante hacia abajo en cara frontal $\rightarrow T_y > 0$

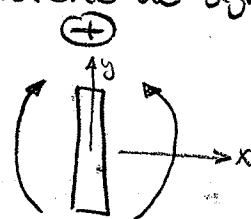
$\downarrow \dots \uparrow =$ Salto en la ley de constantes de valor $P \rightarrow T_y = P(1 - \frac{2a}{L}) - P = -P(\frac{2a}{L})$

$\uparrow \dots \downarrow =$ Cte $\dots \uparrow \downarrow$ Salto en la ley de constantes de valor $P \rightarrow T_y = -P(\frac{2a}{L}) + P = P(1 - \frac{2a}{L})$

DIAGRAMA M_z



Costero de signos



$$M_z = 0, \quad M_z = -pa(1 - \frac{2a}{L})$$

$$M_z = -p(l-a)(1 - \frac{2a}{L}) + p(l-2a) = p(-l + 2a + a - \frac{2a^2}{L} + l - \frac{2a}{L})$$

$$M_z = pa(1 - \frac{2a}{L})$$

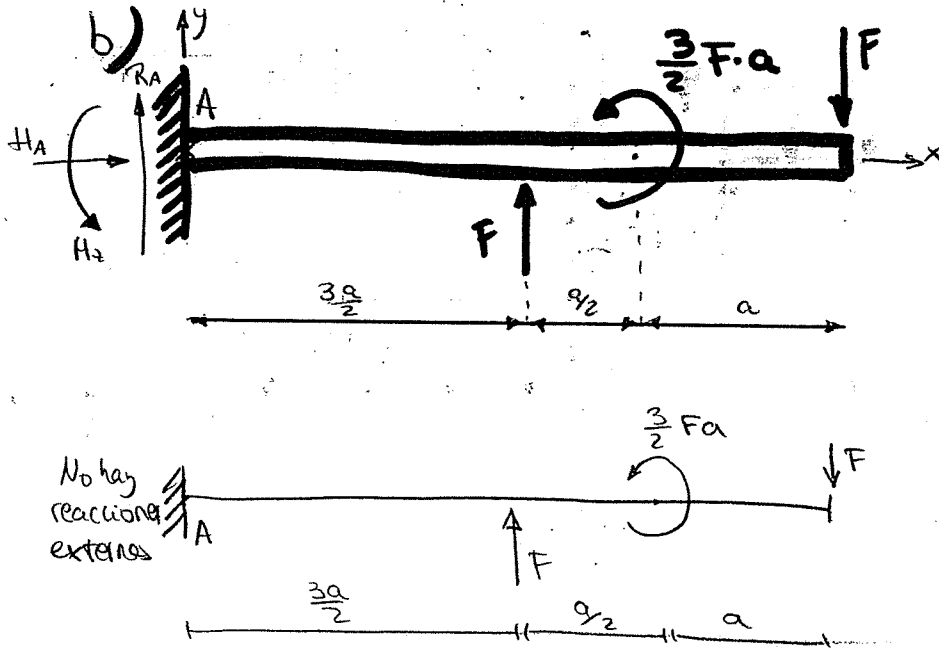
$$M_z = -pa + p(l-a) - pL(1 - \frac{2a}{L}) = -2pa + pL - pL + 2pa = 0$$

Key: T_y

$$\begin{cases} 0 < x < a : T_y = p(1 - \frac{2a}{L}) \\ a < x < L-a : T_y = -p\frac{2a}{L} \\ L-a < x < L : T_y = p(1 - \frac{2a}{L}) \end{cases}$$

Key M_z

$$\begin{cases} 0 < x < a : M_z = p(1 - \frac{2a}{L})x \\ a < x < L-a : M_z = p(1 - \frac{2a}{L})x - p(x-a) \\ L-a < x < L : M_z = p(1 - \frac{2a}{L})x - p(x-a) + p[x - (L-a)] \end{cases}$$



Reacciones:
EQ. ESTÁTICO

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow R_A + F - F = 0 \\ R_A = 0 \\ \sum M_A = 0 \rightarrow \\ M_z + F \frac{3a}{2} + F \frac{3a}{2} - F 3a = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

DIAGRAMA T_y

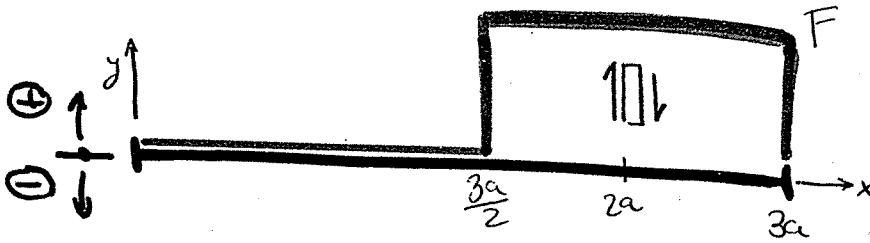
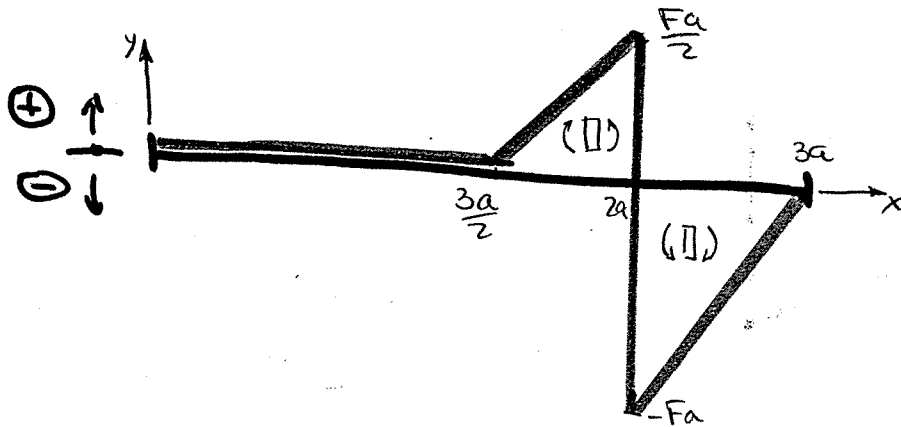
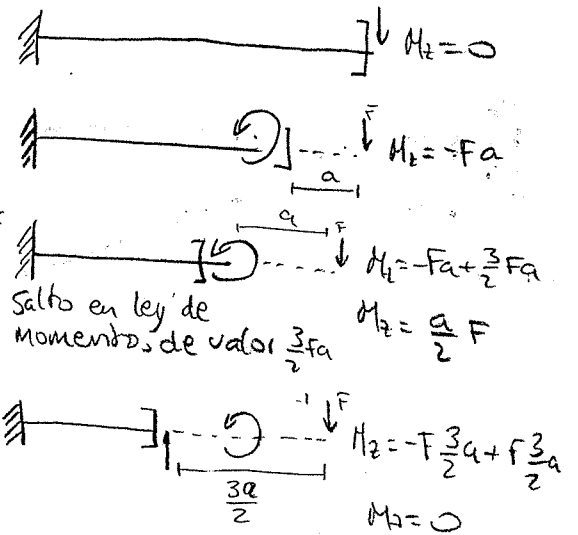
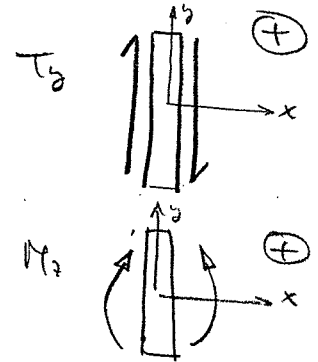
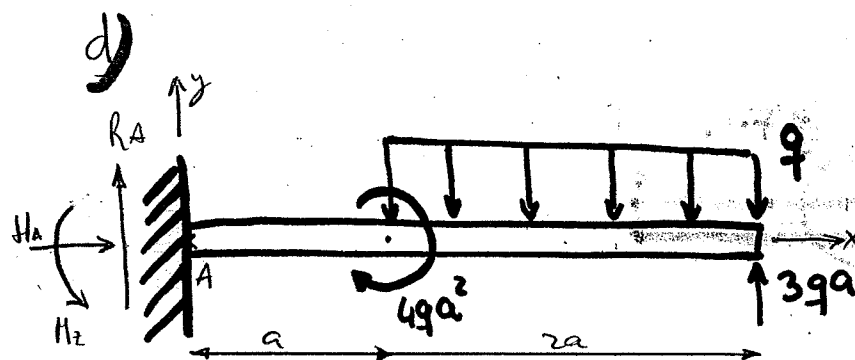


DIAGRAMA M_z

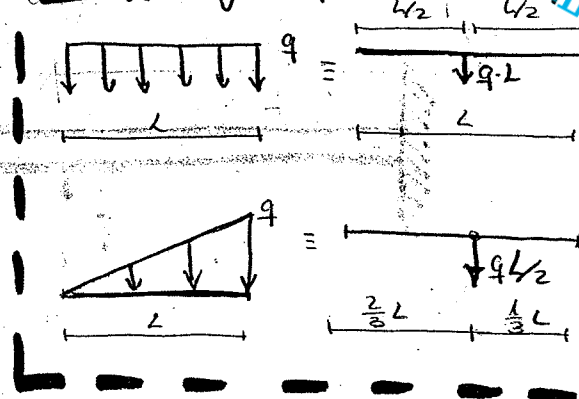


Criterio de signos



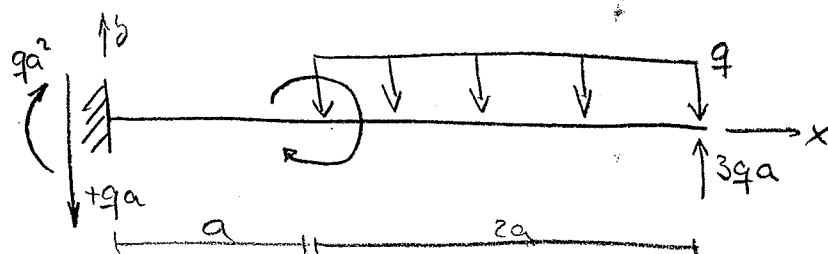


NOTA !! Cargas repartidas



Reacciones: Equilibrio Estático

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow R_A - q \cdot 2a + 3qa = 0 \rightarrow R_A = -qa \\ \sum M_A = 0 \rightarrow M_z - 4qa^2 - (q \cdot 2a) \cdot 2a + 3qa \cdot 3a = 0 \\ M_z = -qa^2 \end{cases}$$



Criterio de signos $\oplus$



Diagrama T_g

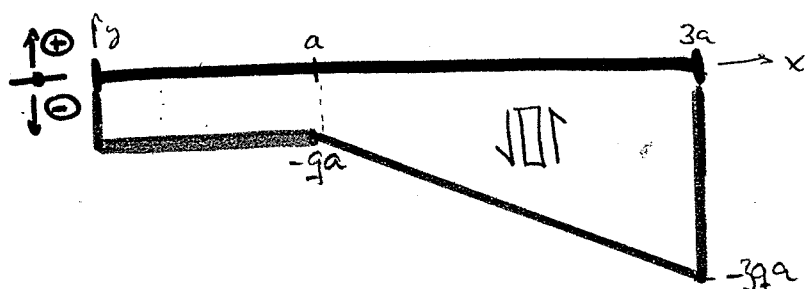
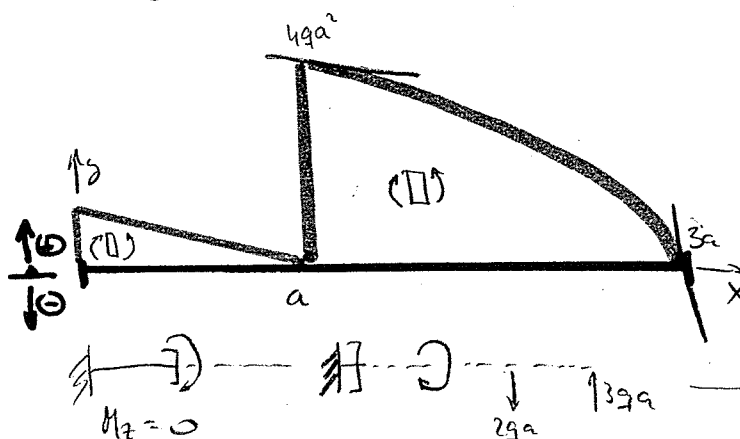


Diagrama M_z



Como no hay cargas aplicadas no hay saltos bruscos en la ley de cortantes

$$M_z = 0$$

$$M_z = 3qa \cdot 2a - 2qa^2 = 4qa^2$$

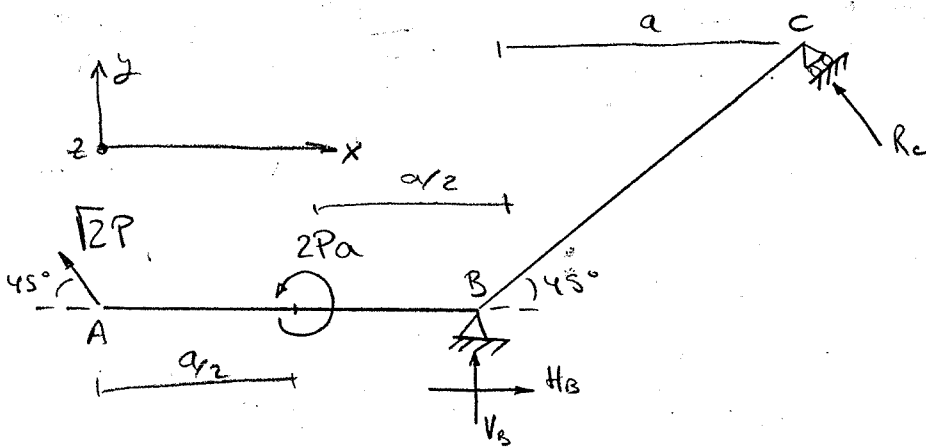
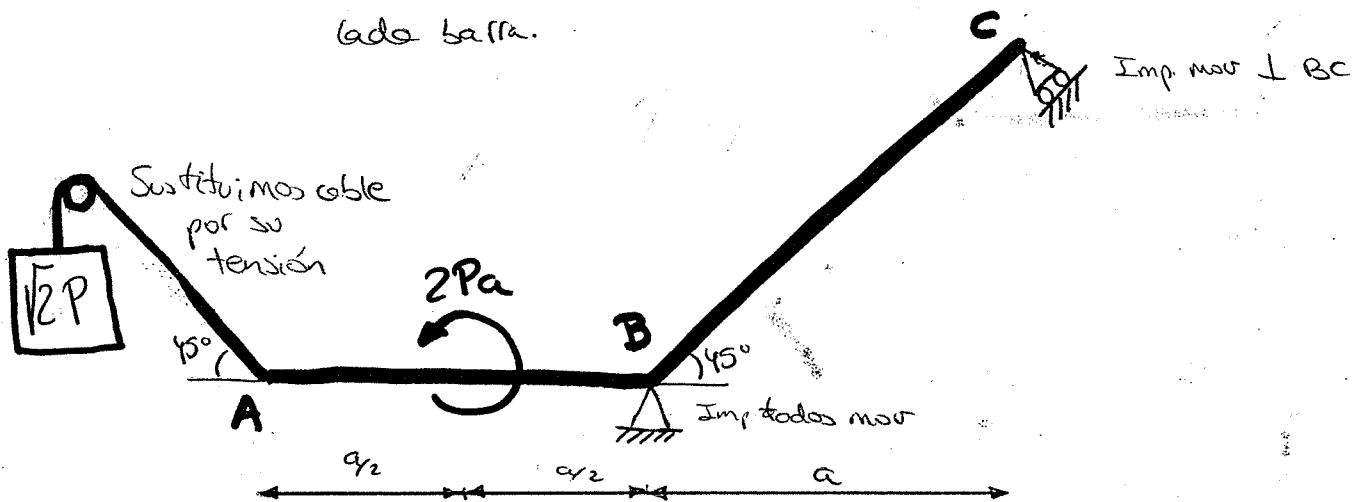
Pendientes

En a: Negativa (-qa, ver diag T_g)

En 3a: Negativa y mayor que en a (-3qa, ver diag T_g)

$$M_z = 9qa^2 - 4qa^2 - 4qa^2 = qa^2$$

Ejercicio 12: La estructura plana de la figura está sustentada por dos apoyos. En B están impedidos todos los desplazamientos y en C está impedido el desplazamiento perpendicular a BC. El cable apoya en una polea de radio despreciable y se une a la estructura en A. Dibuje los diagramas aislados de esfuerzos en ABC, indicando claramente el criterio de signos seguido para cada barra.



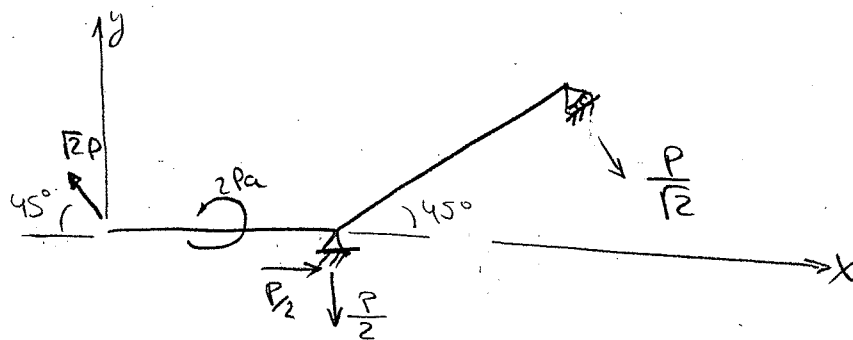
Reacciones: EQUILIBRIO ESTÁTICO

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \rightarrow -\sqrt{2}P \frac{1}{\sqrt{2}} + H_B - R_C \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow \sqrt{2}P \frac{1}{\sqrt{2}} + V_B + \frac{1}{\sqrt{2}} R_C = 0 \\ \sum M_B = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} R_C a + \frac{1}{\sqrt{2}} R_C a - \sqrt{2}P \frac{1}{\sqrt{2}} a + 2Pa = 0 \end{array} \right.$$

$$R_C = \frac{-P \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-P}{\sqrt{2}} //$$

$$H_B = \frac{-P}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + P = \frac{P}{2} //$$

$$V_B = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2} //$$



CRITERIO DE SIGNOS

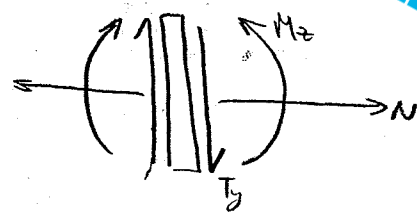
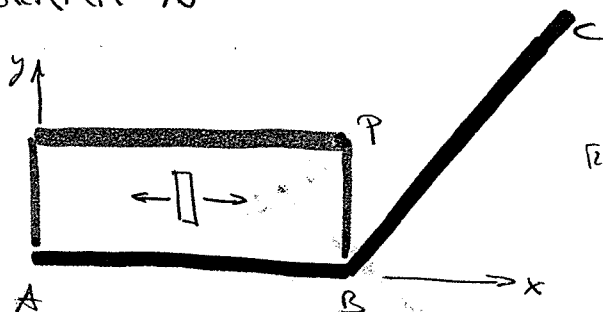


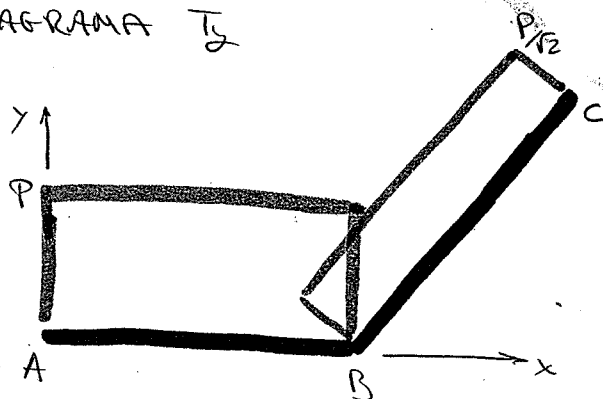
DIAGRAMA N



$N=0 \Rightarrow$ En toda la barra BC

$N=P$ hasta punto B

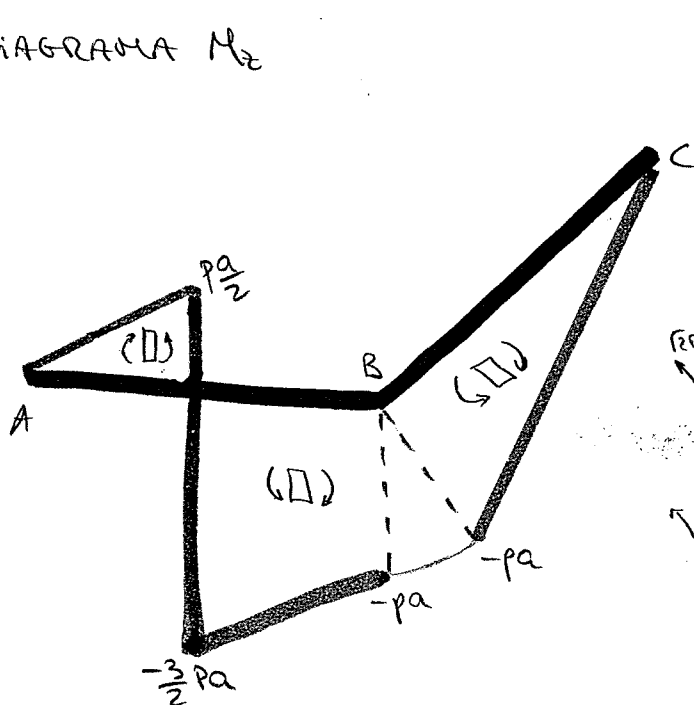
DIAGRAMA T_y



$T_y = \frac{P}{2}$

$T_y = P$

DIAGRAMA M_z



$M_z = 0$

$M_z = -\frac{P}{2} \cdot 2a = -Pa$

$M_z = +P \frac{a}{2}$

$M_z = P \frac{a}{2} - 2Pa = -\frac{3}{2} Pa$

Salto brusco

Ejercicio 1.4 (Ampliado) Realizar los diagramas de esfuerzos

Reacciones: EQUILIBRIO ESTÁTICO

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow X_A + F + F = 0 & (1) \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A - P + P + Y_B = 0 & (2) \\ \sum F_z = 0 \Rightarrow Z_A - Q + Q + Z_B = 0 & (3) \\ \sum M_x^A = 0 \Rightarrow \emptyset & (4) \\ \sum M_y^A = 0 \Rightarrow Qa - Q \cdot 3a - Z_B \cdot 4a = 0 & (4) \\ \sum M_z^A = 0 \Rightarrow -Pa + P \cdot 3a + Y_B \cdot 4a = 0 & (5) \end{cases}$$

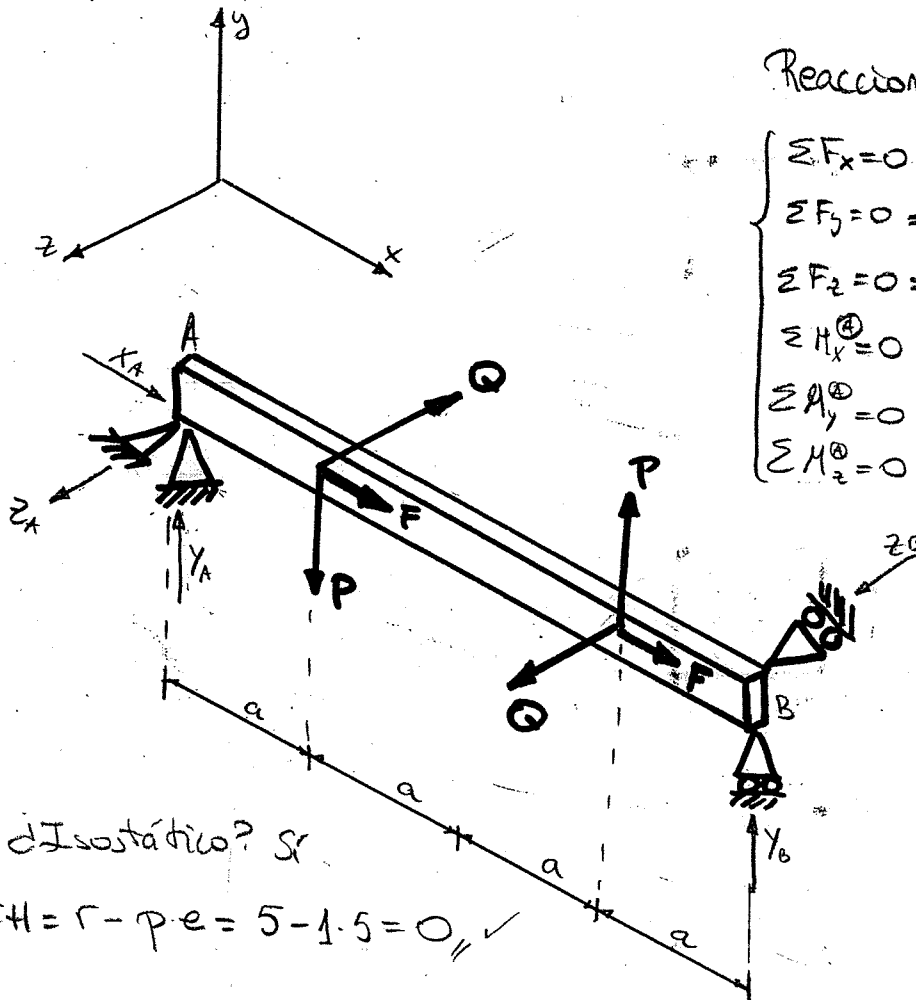
Resolviendo:

De (1): $X_A = -2F$ De (4): $Z_B = \frac{2Qa}{-4a} = -\frac{Q}{2}$

De (5): $Y_B = \frac{-2Pa}{4a} = -\frac{P}{2}$

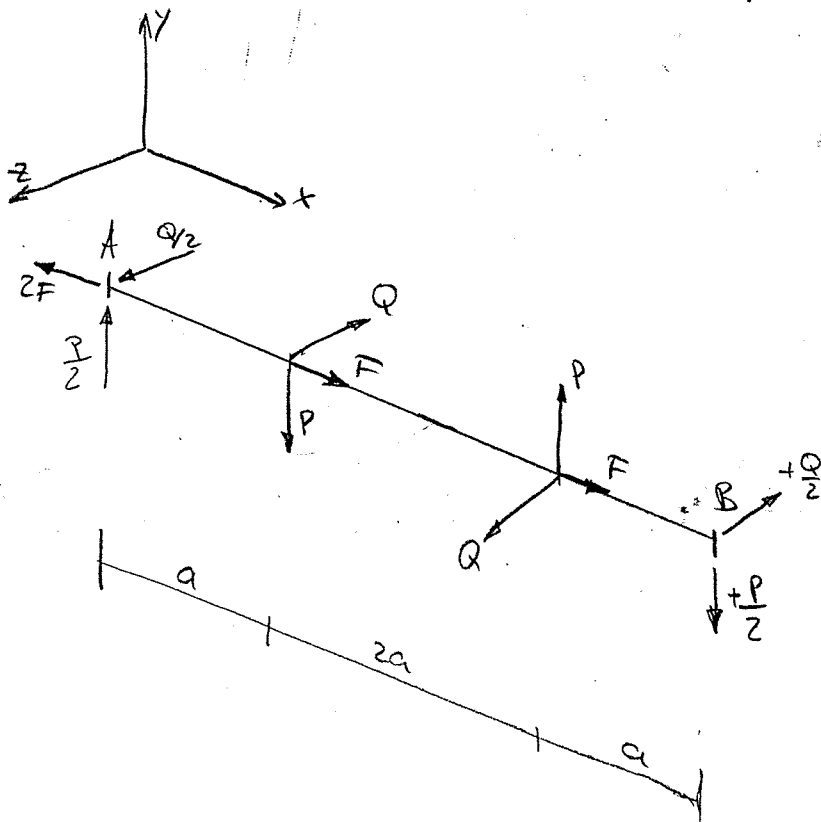
De (2): $Y_A = -Y_B = \frac{P}{2}$

De (3): $Z_A = -Z_B = \frac{Q}{2}$



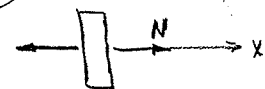
¿Isostático? SI

$$6H = r - p \cdot e = 5 - 1 \cdot 5 = 0 \checkmark$$

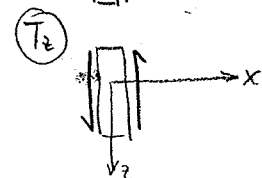


Criterio de signos positivo

Normal: (N)



Cortante: (T)



Momento flectores

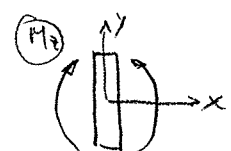
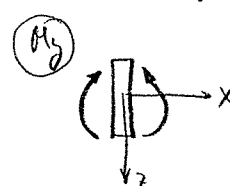
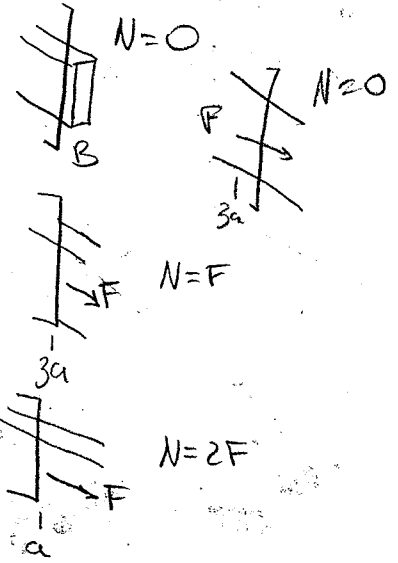
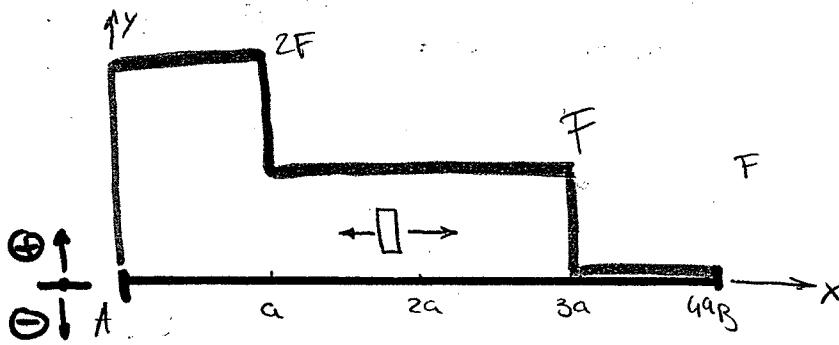
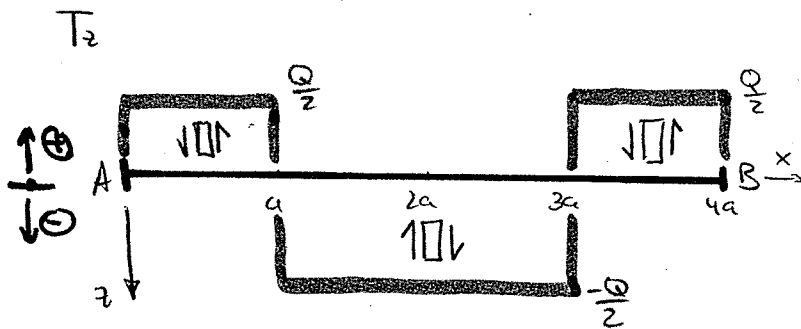
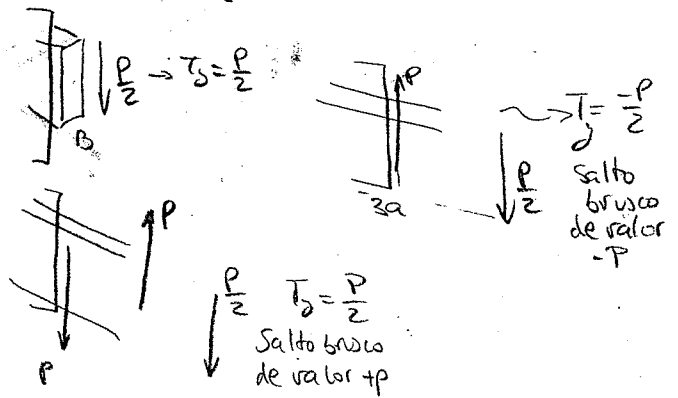
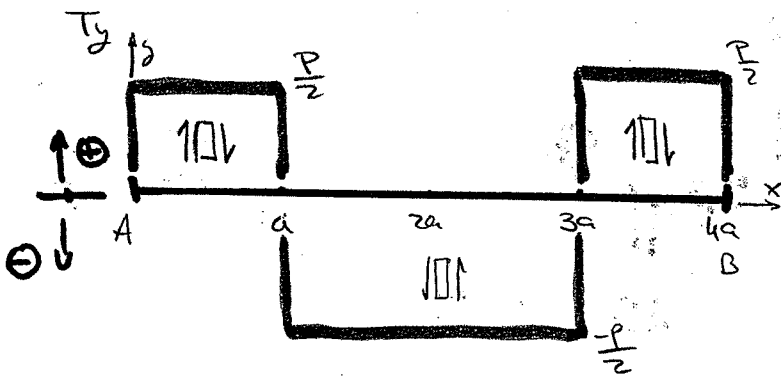


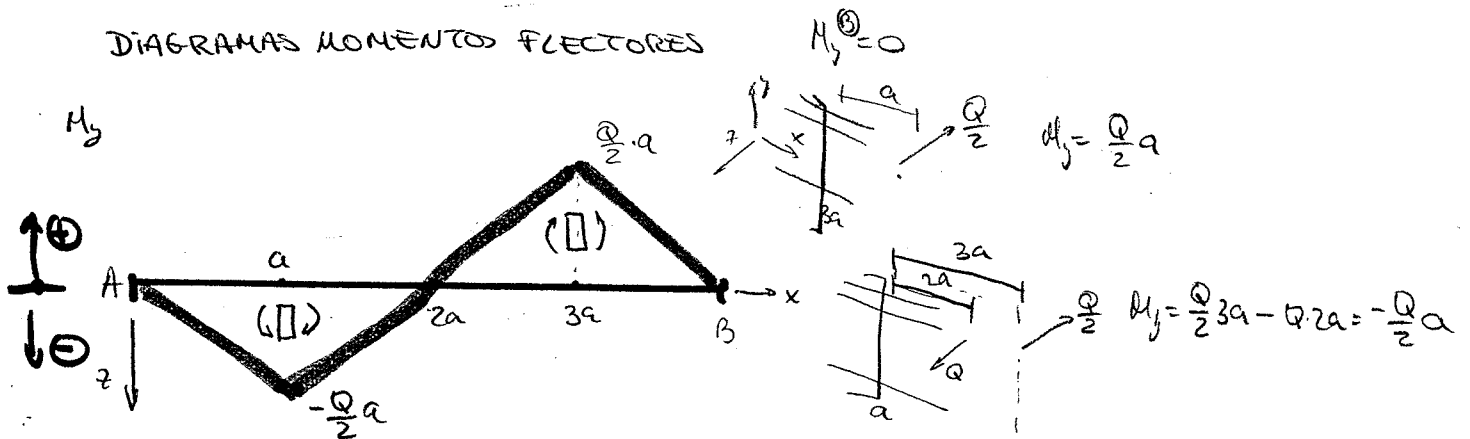
DIAGRAMA ESFUERZO NORMAL: N

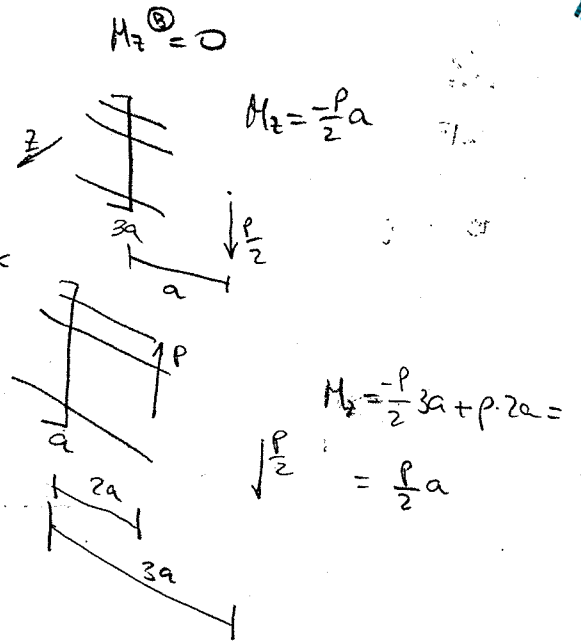
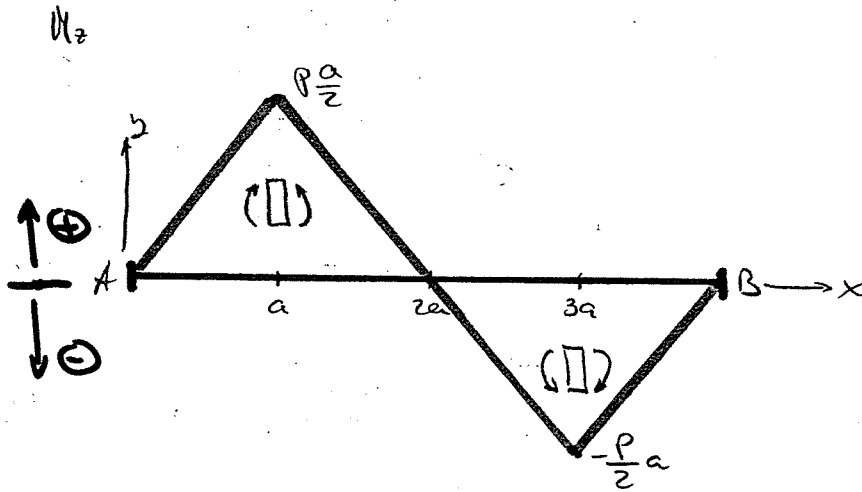


DIAGRAMAS ESFUERZOS CORTANTES:

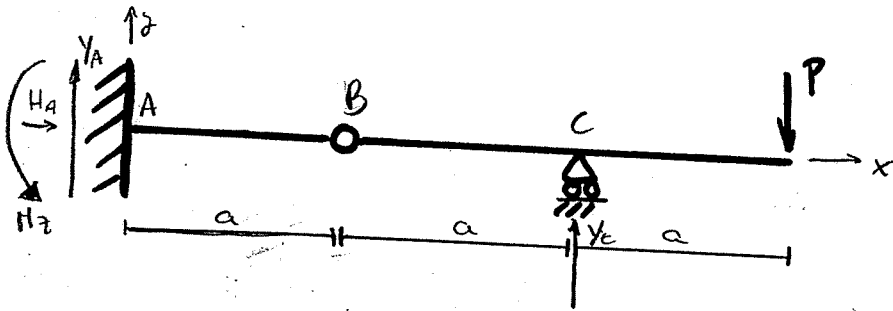


DIAGRAMAS MOMENTOS FLECTORES





Ejercicio 1.14 Dibujar los diagramas de esfuerzos de la estructura



Reacciones: E.Q. ESTÁTICO

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0 \\ \sum F_z = 0 \rightarrow Y_A + Y_C - P = 0 \quad (1) \\ \sum M^{\odot} = 0 \rightarrow M_A + Y_C \cdot 2a - P \cdot 3a = 0 \quad (2) \end{cases}$$

De (2) $\rightarrow Y_C = 2P \xrightarrow{(1)} M_A = 3Pa - Y_C \cdot 2a = -Pa$

$\xrightarrow{(1)} Y_A = \frac{M_A}{a} = -P$

Rotula $\Rightarrow M_B = 0$

Gra frontal: $Y_A \cdot a - P \cdot 2a = 0 \quad (3)$

Gra dorsal: $Y_A \cdot a - M_A = 0 \quad (4)$

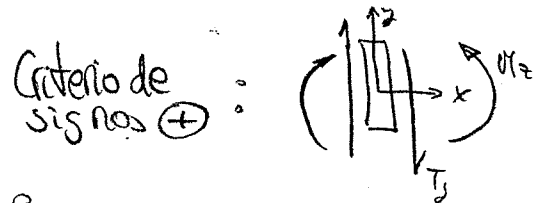
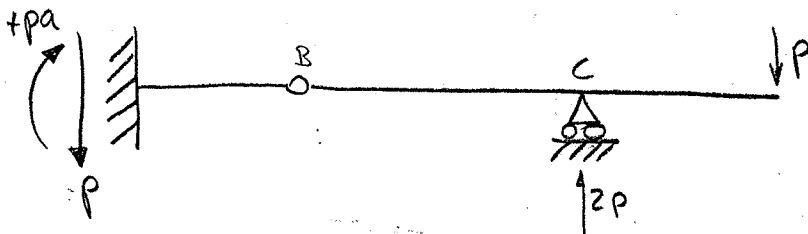


DIAGRAMA CORTANTE: T_z

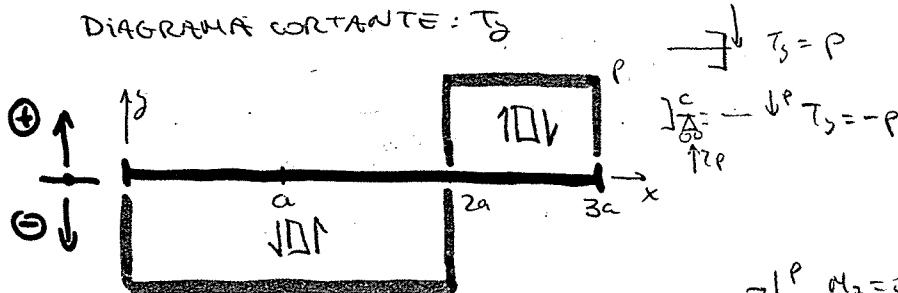
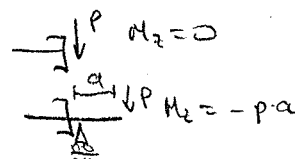
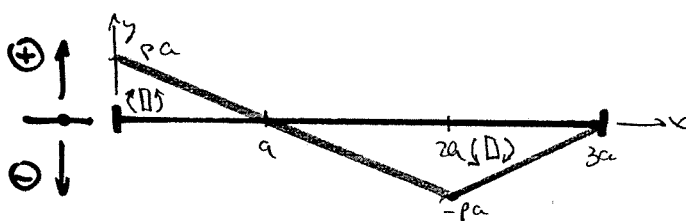


DIAGRAMA FLECTOR: M_z



$M_z = -P \cdot 3a + 2P \cdot 2a = Pa$

$M_z = -P \cdot 2a + 2P \cdot a = 0$

NOTA!! Aclaración para cálculos de GH

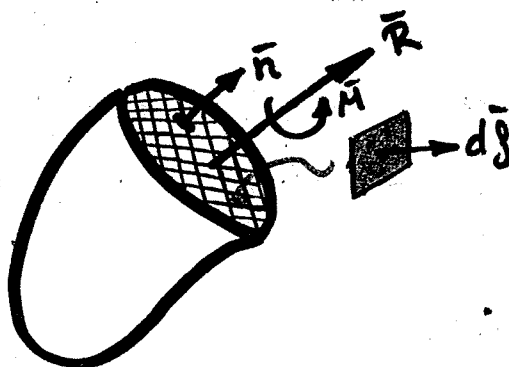
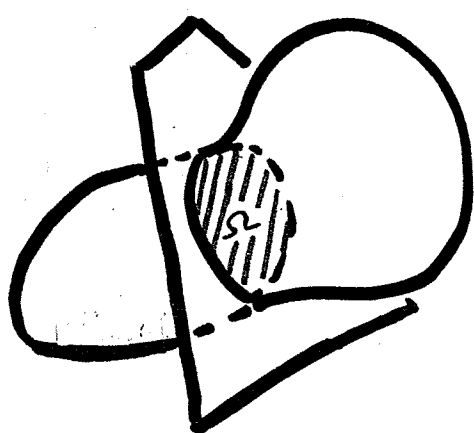
CABLE: se sustituirá por su tensión $\rightarrow$ 1 rect
 $\rightarrow$ 0 cond. enlace

ARTIC. DESLIZANTE $\rightarrow$ 1 r externa
 $\rightarrow$ 2 cond. enlace

RÓTULA $\rightarrow$ 2 r internos por barra en todos los soport. menos 1
 $\rightarrow e = n^{\circ} \text{ barras en rótula} - 1$

TENSIÓN Y DEF. COMP. ELÁSTICO

Lección 5: CONCEPTO DE TENSIÓN. COMPONENTES INTRÍNSICAS



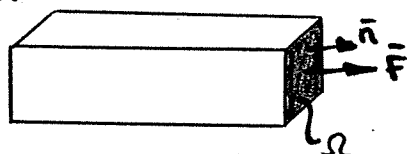
$$\bar{R} = \iint_{\Omega} d\bar{r} \quad \bar{M} = \iint_{\Omega} (\bar{r} \wedge d\bar{r})$$

Se define tensión como:

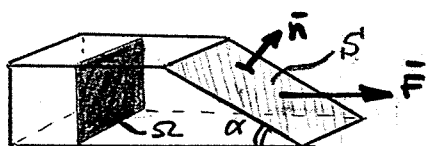
$$\sigma(P, \bar{n}) = d\bar{f} / d\Omega$$

P = punto
 $\bar{n}$ = normal a la superficie Ω hacia el exterior del sólido

Ejemplos:



$$\sigma = \frac{d\bar{f}}{d\Omega} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{\bar{F}}{\Omega}$$



La superficie que hemos de tomar es S siendo $S \cdot \sin \alpha = \Omega$, por tanto:

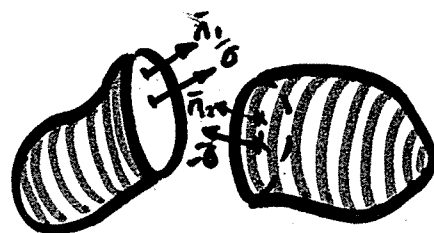
$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{F}}{\frac{\Omega}{\sin \alpha}} = \bar{F} \sin \alpha / \Omega$$

= UNIDADES Y DIMENSIONES

$$[\sigma] = \left[\frac{F}{\Omega} \right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{L^2} \right] = \left[\frac{MT^{-2}}{L} \right] = [ML^{-1}T^{-2}]$$

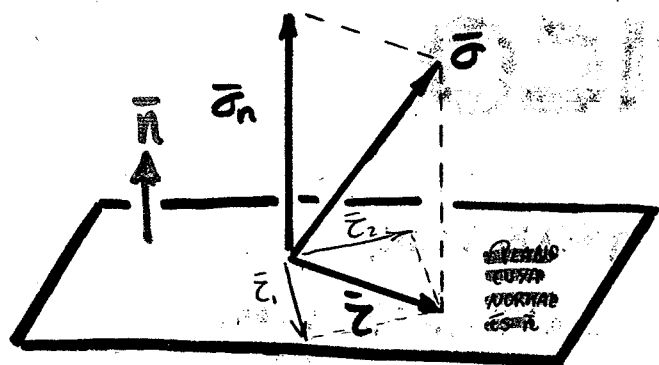
• Unidades S.I.: $\frac{N}{m^2} = Pa$; frecuentemente usaremos

$MPa = \frac{1N}{mm^2}$; Otras: $1Atm = 1.01325 bar$ $1bar = 10^5 Pa$



= COMPONENTES INTRÍNECAS

Son aquellos que no dependen del sistema de coordenadas elegido



$$\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\bar{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \equiv |\bar{n}| = 1$$

$\bar{\sigma}_n$: componente intrínseca normal o tensión normal

$\bar{\tau}$: componente intrínseca tangencial o tensión tangencial: $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$

$$\sigma_n = \alpha \sigma_x + \beta \sigma_y + \gamma \sigma_z, \quad \bar{\sigma}_n = \sigma_n \bar{n}$$

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 \rightarrow \tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\alpha \sigma_x + \beta \sigma_y + \gamma \sigma_z)^2$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\tau} + \bar{\sigma}_n \rightarrow \bar{\tau} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_n$$

= CRITERIO DE SIGNOS

$\bar{n} \oplus$: Hacia el exterior del sólido

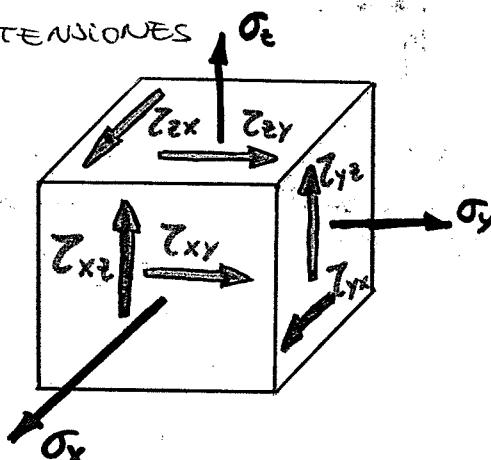
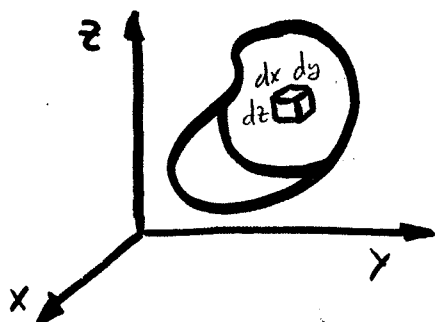
$\bar{\sigma}_n \oplus$ si lleva el sentido de $\bar{n} \Rightarrow$ TRACCIÓN

$\bar{\sigma}_n \ominus$ si lleva sentido contrario a $\bar{n} \Rightarrow$ COMPRESIÓN

$\bar{\sigma}_n = 0$ No hay tensión normal $\Rightarrow$ CORTADURA PURA

$\bar{\tau} = 0$ No hay tensión tangencial $\Rightarrow$ TRACCIÓN COMPRESIÓN PURA

= TENSOR O MATRIZ DE TENSIONES



Tensor o matriz de tensiones: Sólo depende del punto

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Es un tensor simétrico

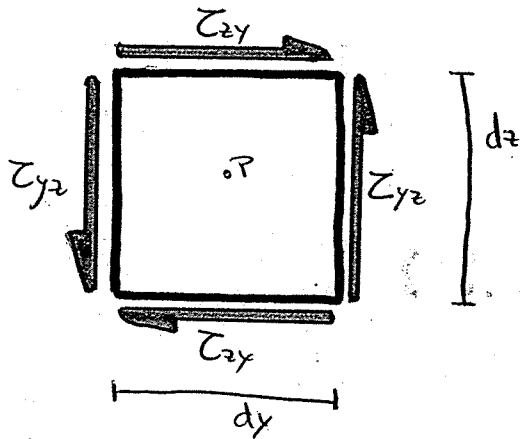
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Demostración: PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD DE TENSIONES TANGENCIALES

Aislamos la cara delantera del elemento diferencial



Por equilibrio $\sum \vec{M}_P = 0$

$$2\tau_{yz} \underbrace{dx dz}_{\text{brazo}} \cdot \frac{dy}{2} - 2\tau_{xy} dx dy \frac{dz}{2} = 0$$

Para sobre la que está aplicada

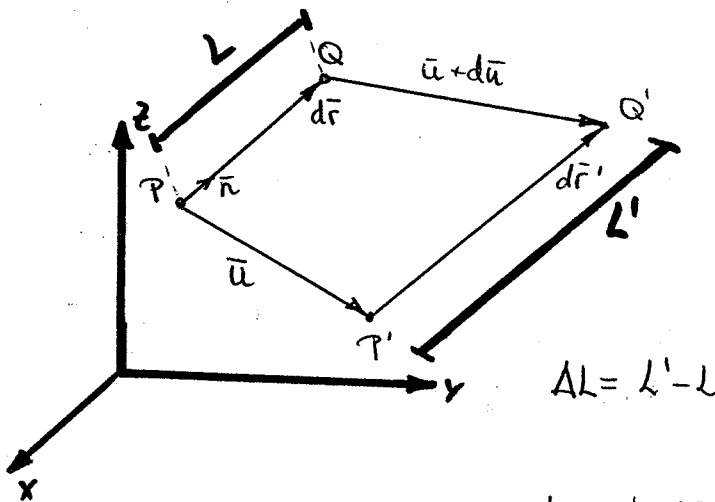
$$\Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

El tensor tendrá por tanto 6 incógnitas

Lección 6: CONCEPTO DE DEFORMACIÓN

Sea el sólido elástico con P, Q , puntos pertenecientes al sólido, muy próximos.

$\bar{u}$: vector desplazamiento



TRANSFORMACIONES

- Deformaciones longitudinales
- Deformaciones angulares

Se define deformación longitudinal unitaria (E) del punto P en la dirección $\bar{n}$ como la diferencia entre las longitudes final e inicial del segmento (PQ ó $P'Q'$) entre la longitud inicial

$$E(P, \bar{n}) = \frac{dr' - dr}{dr} = \frac{\Delta L}{L}$$

= CRITERIO DE SIGNOS

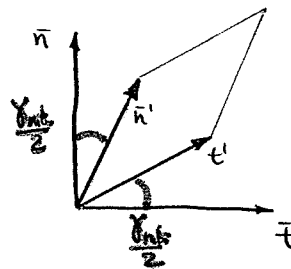
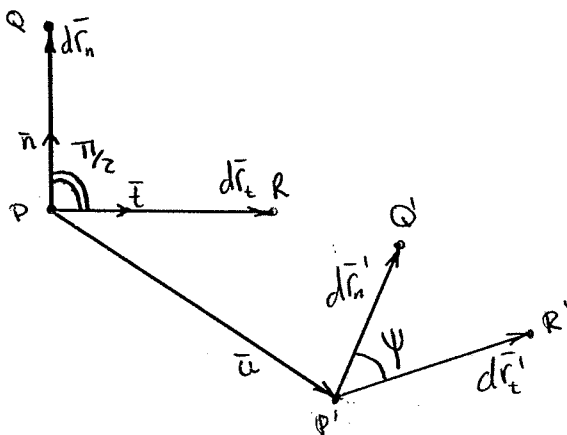
• $E > 0 \Rightarrow \Delta L > 0$ Alargamiento

• $E < 0 \Rightarrow \Delta L < 0$ Acortamiento

= DIMENSIONES Y UNIDADES $[E] = \text{adimensional}$

Deformación angular (γ_{nt}) se define como:

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \gamma_{nt}(P, \bar{n}, \bar{t})$$



= CRITERIO DE SIGNOS

Positivo si se produce cierre de ángulo

= VECTOR DEFORMACIÓN

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_n \bar{n} + \frac{1}{2} \gamma_{nt} \bar{t}$$

= GALGA EXTENSIONÉTRICA: Mide ϵ_n

 Es un elemento cuya resistencia eléctrica varía con la deformación de forma que permite medir ϵ_n

= TENSOR O MATRIZ DE DEFORMACIONES

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Deformaciones angulares y longitudinales referidos a un sistema x, y, z

Cumple principio de reciprocidad para deformaciones angulares $\rightarrow$ Tensor simétrico

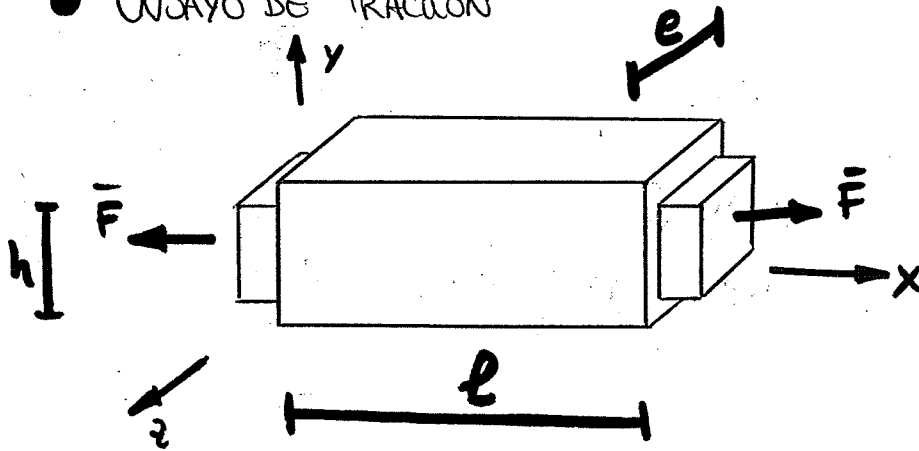
Para galgas:
$$\epsilon_n = \epsilon_x \alpha^2 + \epsilon_y \beta^2 + \epsilon_z \gamma^2 + \gamma_{xy} \alpha\beta + \gamma_{xz} \alpha\gamma + \gamma_{yz} \beta\gamma$$

Lección 7: RELACIÓN ENTRE TENSION Y DEFORMACIÓN.- Comportamiento elástico.-

Sólido ELÁSTICO

- comportamiento:
 - Elástico = Cuando la perturbación cesa recupera su estado inicial
 - Lineal = Proporcionalidad acción-movimiento
- propiedades $\rightarrow$ Homogeneidad, isotropía, continuidad

● ENSAYO DE TRACCIÓN



TENSIONES

$$\sigma_x = \frac{F}{S} \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0 \quad \tau_{xz} = 0$$

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{yz} = 0$$

DEFORMACIONES

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad \gamma_{xy} = 0$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta h}{h} \quad \gamma_{xz} = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{\Delta e}{e} \quad \gamma_{yz} = 0$$

= Ley de Hooke

Establece la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones

Tracción
pura

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

En este caso, entre tensiones normales y def. longitudinales

Con E = Módulo de Young (elasticidad) es característico del material y representa su resistencia a deformarse

Unidades $[E] = \left[\frac{F}{L^2} \right] \Rightarrow \begin{cases} \text{MPa} = \text{N/mm}^2 \\ \text{Pa} = \text{N/m}^2 \end{cases}$

ÓRDENES DE MAGNITUD DE E

Aceró $\Rightarrow E_a \approx 210000 \text{ MPa}$

Hormigón $\Rightarrow E_h \approx 30000 \text{ MPa}$

Aluminio $\Rightarrow E_{al} \approx 70000 \text{ MPa}$

Coefficiente de Poisson (ν)

Tracción
pura

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= -\nu \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_z &= -\nu \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \end{aligned}$$

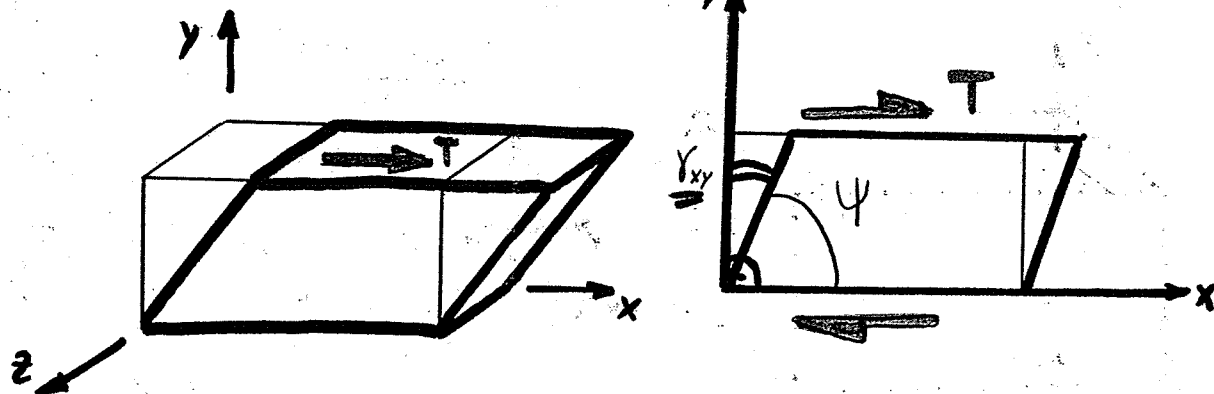
Efecto Poisson $\Rightarrow \epsilon_y = \epsilon_z$

- Por la isotropía -

$[\nu]$ = adimensional; depende de las características del material y

toma valores $0 < \nu < 0,5$ Ejemplo: Aceró $\rightarrow \nu = 0,3$
Hormigón $\rightarrow \nu = 0,2$

● ENSAYO DE CORTADURA



TENSIONES

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0 & \tau_{yz} &= \frac{T}{A} \\ \sigma_y &= 0 & \tau_{xz} &= 0 \\ \sigma_z &= 0 & \tau_{xy} &= 0\end{aligned}$$

DEFORMACIONES

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= 0 & \gamma_{xy} &\neq 0 \\ \epsilon_y &= 0 & \gamma_{xz} &= 0 \\ \epsilon_z &= 0 & \gamma_{yz} &= 0\end{aligned}$$

= LEY DE HOOKE

Establece la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

En este caso, entre tensiones tangenciales y deformaciones angulares

con G = Módulo de elasticidad transversal

$$[G] = \left[\frac{F}{L^2} \right] \Rightarrow \begin{cases} \text{MPa} = \text{N/mm}^2 \\ \text{Pa} = \text{N/m}^2 \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

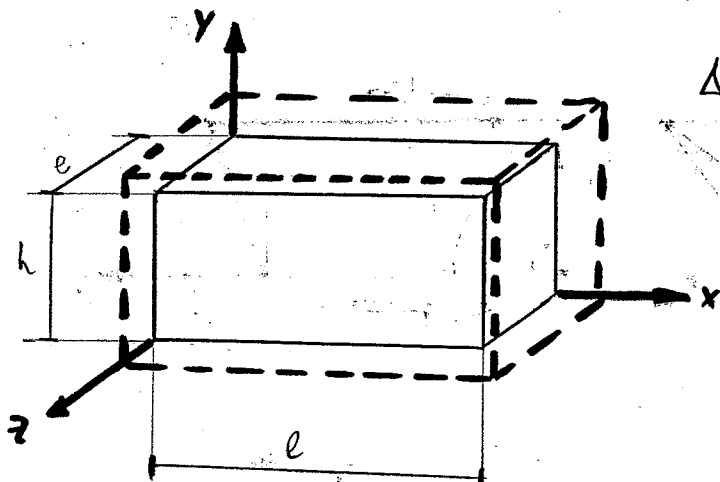
➔ LEYES DE HOOKE GENERALIZADAS (sin salto térmico)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] ; \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] ; \gamma_{xz} = \tau_{xz} / G$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] ; \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G$$

● EFECTO TÉRMICO



$$\Delta T = T - T_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} T \rightarrow \text{Temperatura final} \\ T_0 \rightarrow \text{Temperatura inicial} \end{array} \right.$$

$\Delta T < 0$: Enfriamiento

$\Delta T > 0$: Calentamiento

Salto térmico

TENSIONES Si el sólido está libre de coacciones todas las tensiones son nulas

$$\sigma_x = 0; \sigma_y = 0; \sigma_z = 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0$$

DEFORMACIONES

$$\Delta l = l \Delta T \cdot \alpha \quad \xrightarrow{\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l}} \quad \epsilon_x = \Delta T \cdot \alpha$$

$$\Delta h = h \Delta T \cdot \alpha \quad \xrightarrow{\epsilon_y = \frac{\Delta h}{h}} \quad \epsilon_y = \Delta T \cdot \alpha$$

$$\Delta e = e \Delta T \cdot \alpha \quad \xrightarrow{\epsilon_z = \frac{\Delta e}{e}} \quad \epsilon_z = \Delta T \cdot \alpha$$

No hay deformaciones angulares $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

➔ LEYES DE HOOKE GENERALIZADAS CON SALTO TÉRMICO

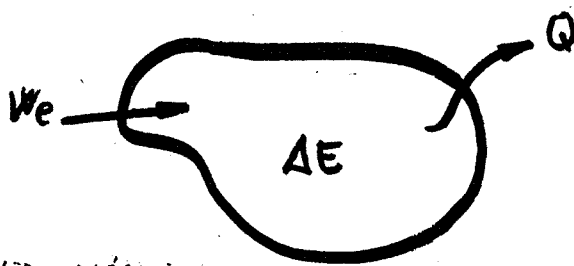
$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \Delta T \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta T \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Lección 8: ENERGÍA ELÁSTICA. TEOREMAS ENERGÉTICOS

= POTENCIAL INTERNO



$$W_e = Q + \Delta E$$

$$\text{Siendo } \Delta E = \Delta C + \Delta P + \Delta U$$

E. cinética

E. Potencial

E. elástica

SÓLIDO ELÁSTICO

$Q = 0$ (no hay desprendimiento de calor por tratar procesos reversibles)

$\Delta C = 0$ (no hay movimiento del sólido)

$\Delta P = 0$

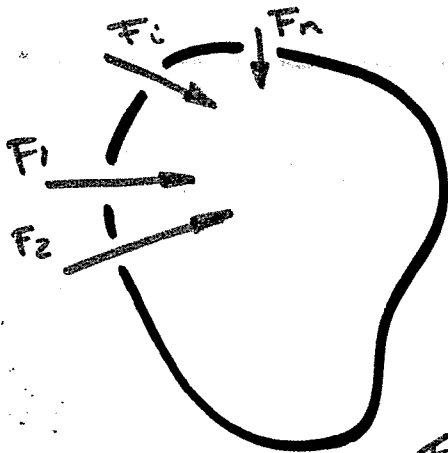
$$\Delta E = \Delta U$$

$$W_e = \Delta E = \Delta U$$

$U \equiv$ energía elástica, potencial interno o energía de deformación

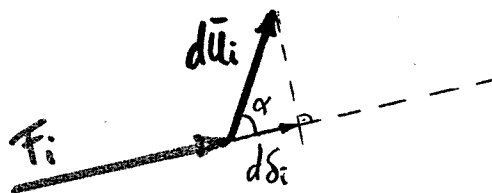
$$dW = \left(\iint_S \bar{T}_s ds \right) d\bar{u} + \left(\iiint_V \bar{T}_v dv \right) d\bar{u}$$

Fuerzas de superficie Fuerzas de volumen



Aplicando el teorema de Saint Venant, las fuerzas pueden substituirse por su resultante

$$dW = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot d\bar{u}_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot du_i \cdot \cos \alpha = \sum_{i=1}^n F_i d\delta_i (*)$$

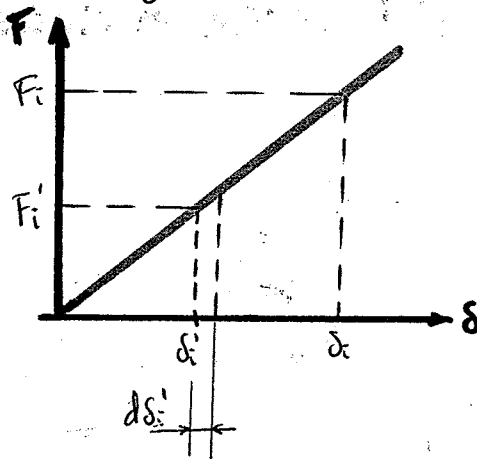


$\delta_i \equiv$ Desplazamiento eficaz

• Sentido positivo el de la fuerza, en su misma dirección

Por principio de proporcionalidad δ_i y F_i son proporcionales.

$$F_i = K \delta_i \text{ con } K = \text{cte}$$



(*)

$$dW = \sum_{i=1}^n F_i d\delta_i = \sum_{i=1}^n K \delta_i d\delta_i$$

$$W = \int_0^{\delta_i} \sum_{i=1}^n K \delta_i' d\delta_i' = \sum_{i=1}^n K \frac{\delta_i^2}{2} \Rightarrow$$

FÓRMULA DE CLAPEYRON

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i$$

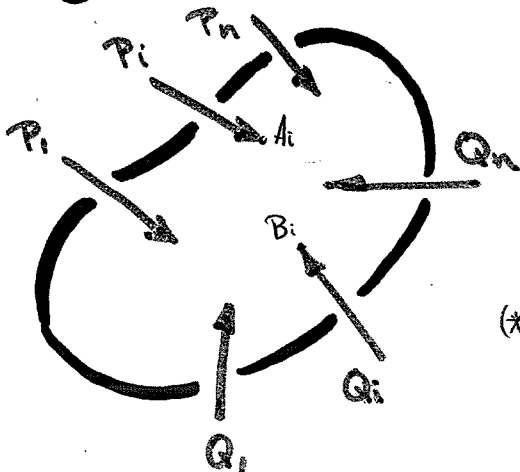
También podríamos escribir la fórmula en función de las tensiones y deformaciones ($F_i \delta_i \approx$ Tensión · deformación asociada)

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i \delta_i = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \epsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz}) dV$$

TEOREMAS ENERGÉTICOS

● 1- TEOREMA DE RECIPROCIDAD O MAXWELL-BETTI

A) Aplicando primero P_i y después Q_i



$$U_a = \underbrace{\left(\sum \frac{1}{2} P_i \delta_{A_i} \right)}_{\text{Aplicamos Clapeyron}} + \underbrace{\left(\sum \frac{1}{2} Q_i \delta_{B_i} \right)}_{(*)} + \underbrace{\sum P_i \delta_{A_i Q_i}}_{(*)}$$

(*) $\delta_{A_i Q_i}$ es lo que se han desplazado los puntos de aplicación A de la fuerza P_i cuando hemos aplicado Q_i . Los puntos se habrán desplazado una distancia $\delta_{A_i Q_i}$ gracias a la fuerza P_i que se es constante y por tanto, el trabajo valdrá

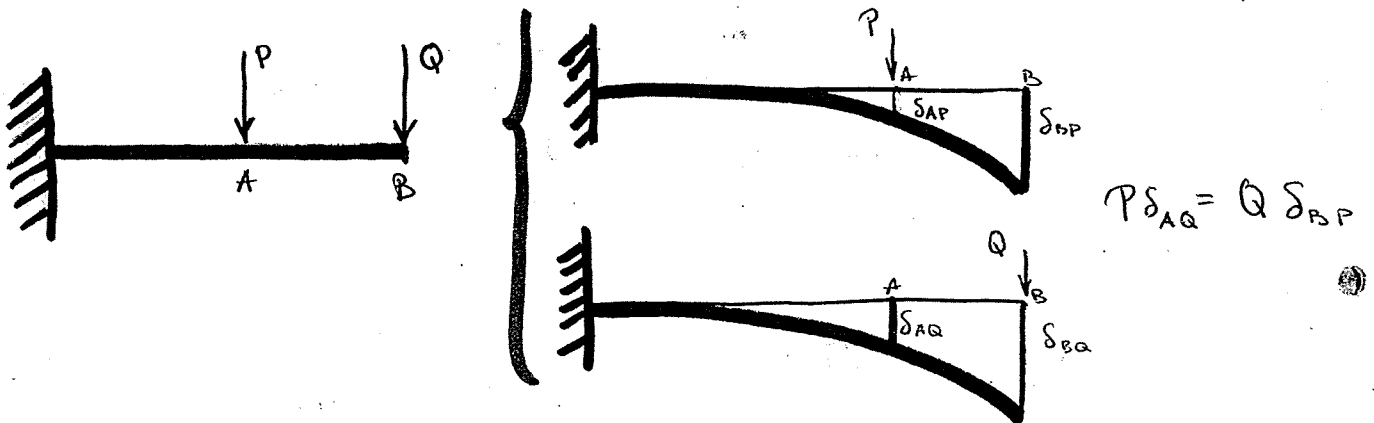
$$W = \int_0^{\delta_{A_i Q_i}} P_i d\delta = P_i \delta_{A_i Q_i}$$

B) Aplicando primero Q_i y después P_i

$$U_b = \left(\sum \frac{1}{2} Q_i \delta_{BQ_i} \right) + \left(\sum \frac{1}{2} P_i \delta_{AP} + \sum Q_i \delta_{BP_i} \right)$$

Como $U_a = U_b \Rightarrow \boxed{\sum Q_i \delta_{BP_i} = \sum P_i \delta_{AQ_i}}$

"El trabajo ejercido por un grupo de cargas P_i cuando actúa un grupo de cargas Q_i es el mismo que ejercería el grupo de cargas Q_i cuando actúa P_i "



● 2- TEOREMA DE CASTIGLIANO

La derivada del potencial respecto a una fuerza es igual al desplazamiento eficaz de dicha fuerza:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i}$$

Demo: $U = \sum \frac{1}{2} F_i \delta_i = \frac{1}{2} (F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + \dots + F_i \delta_i + \dots)$

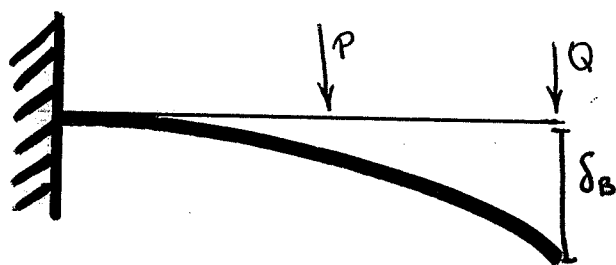
$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \frac{1}{2} \left(\delta_i + \sum_k F_k \frac{\partial \delta_k}{\partial F_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta_i + \sum_k F_k \frac{\delta_{ik}}{F_k} \right) = \frac{1}{2} (\delta_i + \delta_i) = \delta_i$$

$\delta_k = \delta_{k1}(F_1) + \delta_{k2}(F_2) + \dots + \delta_{ki}(F_i) + \dots$ por PRIO DE PROP. $\frac{\partial \delta_k}{\partial F_i} = \frac{\partial \delta_i}{\partial F_k}$

$$(*) \frac{\partial \delta_k}{\partial F_i} = \frac{\partial \delta_{ki}}{\partial F_i} = \frac{\delta_{ki}}{F_i} = \frac{\delta_{ik}}{F_k}$$

Más sencillo: $\frac{\partial U}{\partial F_i} = \frac{1}{2} \left(\delta_i + F_i \frac{\partial \delta_i}{\partial F_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta_i + F_i \frac{\delta_i}{F_i} \right) = \delta_i$

"En todo sist. elástico sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio la variación de trabajo interno para un incremento unitario de la fuerza aplicada en un punto cualquiera del mismo representa el desplazamiento del punto proyectado en la dirección de la fuerza siempre que el sistema se encuentre en régimen elástico".



Aplicaciones: CÁLULO DE DESPLAZAMIENTOS

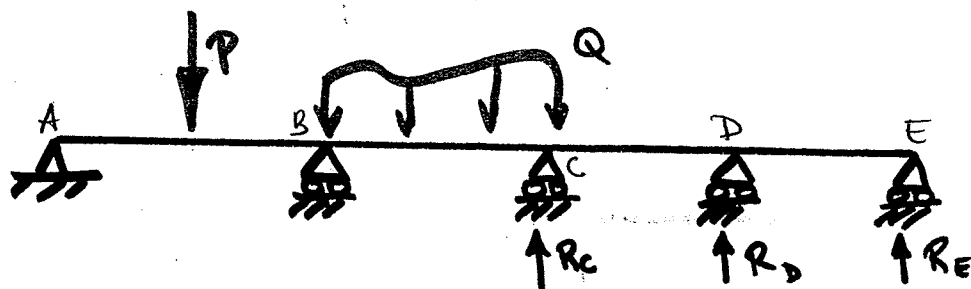
Aplico fuerza ficticia Q en el punto de desplazamiento B

$$U = U(P, Q); \quad \frac{\partial U(P, Q)}{\partial Q} = \delta_B(P, Q)$$

Haciendo $Q=0 \rightarrow \delta_B = \delta_B(P)$

● TEOREMA DE MENABREA (o del trabajo mínimo)

En un sistema hiperestático:



Las 3 reacciones hiperestáticas R_C, R_D, R_E pueden liberarse liberando todas las acciones excepto

la de los apoyos A y B y, por tanto, resolviendo la estructura ya isostática, en función de las 3 reacciones mencionadas.

Si calculamos la energía elástica U o potencial interno almacenado en la pieza, que resulta ser función de las 3 reacciones incógnitas, podríamos aplicar el 1º teorema de Castigliano teniendo en cuenta que en la estructura original los puntos C, D, E no sufren desplazamiento verticales por lo que:

$$\frac{\partial U}{\partial R_C} = \frac{\partial U}{\partial R_D} = \frac{\partial U}{\partial R_E} = 0$$

Los valores de las reacciones hiperestáticas que actúan sobre un sólido hacen mínima su energía elástica.

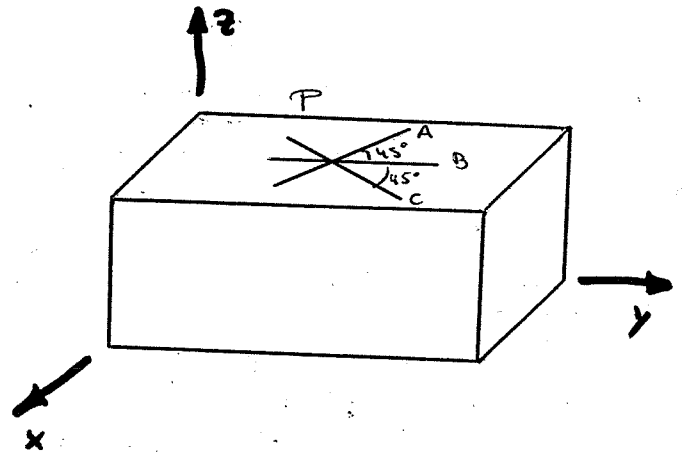
EJERCICIOS

ESPECIALT4

Sobre el punto medio de la cara superior (P) del sólido elástico de la figura se ha pegado una roseta extensiométrica. Tras la puesta en carga se han medido los siguientes valores ($K = 10^{-4}$)

$$\epsilon_A = 1,5K \quad \epsilon_B = 4K \quad \epsilon_C = 1,5K$$

Se pide determinar el tensor de tensiones y de deformación en el punto P sabiendo que sobre los planos paralelos al xy las tensiones son nulas ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\nu = 0,25$)



Necesitamos calcular: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tensor de tensiones: } \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \\ \text{" " deformaciones: } \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \end{array} \right.$

Datos $\Rightarrow$ En planos paralelos al xy las tensiones son nulas $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right.$

• Ecuación de galgas: $\epsilon_n = \epsilon_x \alpha^2 + \epsilon_y \beta^2 + \epsilon_z \gamma^2 + \gamma_{xy} \alpha\beta + \gamma_{xz} \alpha\gamma + \gamma_{yz} \beta\gamma$
con $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \equiv$ COSENO DIRECTORES DEL VECTOR DE DIRECCIÓN DE LA GALGA

• Leyes de Hooke generalizadas: $\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0 \end{array} \right.$

Por ecuación de galgas

$$\text{GALGA A: } \vec{n} = (-\sin 45^\circ, \cos 45^\circ, 0) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \gamma_A = 0 \end{array} \right. / \quad 1,5 \cdot 10^{-4} = \epsilon_x \frac{1}{2} + \epsilon_y \frac{1}{2} - \gamma_{xy} \frac{1}{2} \quad \rightarrow (1)$$

$$\text{GALGA B: } \vec{n} = (0, 1, 0) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_B = 0 \\ \beta_B = 1 \\ \gamma_B = 0 \end{array} \right. / \quad 4 \cdot 10^{-4} = \epsilon_y \quad \rightarrow (2)$$

$$\text{GALGA C: } \vec{n} = (\sin 45^\circ, \cos 45^\circ, 0) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \gamma_C = 0 \end{array} \right. / \quad 1,5 \cdot 10^{-4} = \epsilon_x \frac{1}{2} + \epsilon_y \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \frac{1}{2} \quad \rightarrow (3)$$

Resolviendo (1) (2) (3):

$$\begin{cases} 1,5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y - \gamma_{xy}) \rightarrow -10^{-4} = \epsilon_x - \gamma_{xy} \\ 4 \cdot 10^{-4} = \epsilon_y \\ 1,5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}) \rightarrow -10^{-4} = \epsilon_x + \gamma_{xy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\epsilon_x = -2 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon_x = -10^{-4}$$

$$\epsilon_y = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = 0$$

Nos falta ϵ_z : Aplicamos las leyes de Hooke

$$\begin{cases} \epsilon_x + \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y] = \frac{1}{E} (\sigma_x + \sigma_y) (1 - \nu) \rightarrow \sigma_x + \sigma_y = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{1 - \nu} E \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [-\nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

$$\rightarrow \epsilon_z = \frac{1}{E} \left[-\nu \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{1 - \nu} E \right] = -0,25 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-4}}{1 - 0,25} = -10^{-4}$$

Por tanto:

$$\boxed{\epsilon_x = -10^{-4}, \quad \epsilon_y = 4 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon_z = -10^{-4}}$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0}$$

Tensor de deformaciones

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$

Para las tensiones volvemos a aplicar Hooke $\left(\begin{matrix} \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{matrix} \right)$

$$\begin{cases} -10^{-4} = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (\sigma_x - 0,25 \sigma_y) \\ 4 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (\sigma_y - 0,25 \sigma_x) \\ -10^{-4} = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (-0,75 (\sigma_x + \sigma_y)) \rightarrow \sigma_x + \sigma_y = +80, \quad \sigma_x = 80 - \sigma_y \end{cases}$$

$$\rightarrow -20 = +1,25 \sigma_y + 80, \quad \sigma_y = \frac{-80 - 20}{-1,25} = 80 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_x = 0$$

Por tanto:

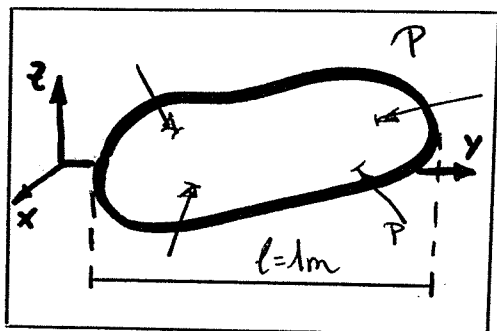
$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 80 \text{ MPa}, \quad \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\boxed{[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}}$$

EJERCICIO ESPECIAL TI

Un sólido elástico macizo de 1m de longitud y módulo elástico $E=20000 \text{ MPa}$ se introduce en un depósito cerrado. Al someter este a una presión interna de 1MPa, el sólido experimenta una disminución de longitud de $5 \cdot 10^{-6}$. Determinar los valores del coeficiente de Poisson y del módulo de elasticidad transversal.



La presión ejercida al sólido es normal a su superficie y de compresión $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -P \\ \sigma_y &= -P \\ \sigma_z &= -P\end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

presión = Fuerza normal a la sup

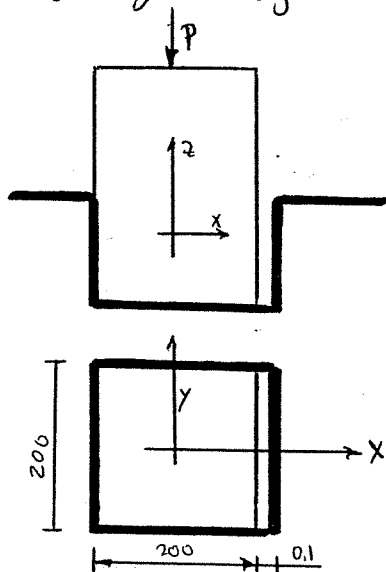
$$\epsilon_y = \frac{\Delta l}{l} = \frac{-0,005}{1000} \stackrel{\text{Hooke}}{=} \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$-5 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{20000} (-P + 2\nu P) \rightarrow \nu = \left(\frac{-1}{10} + P \right) \cdot \frac{1}{2P} = 0,45$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{20000}{2(1+0,45)} = 6,897 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

EJERCICIO ESPECIAL TI

El extremo de una columna prismática de base $200 \times 200 \text{ mm}$, está encajado sin rozamiento en un hueco de dimensiones $200 \times 200,1 \text{ mm}$ de rigidez infinita. Si la columna se carga en su extremo superior con $P=800 \text{ kN}$, determinar el valor del tensor de tensiones y deformaciones, referidas al sistema $oxyz$ de la figura, en los puntos de la columna dentro del hueco, considerando que el estado tensional es homogéneo (igual en todos sus puntos). Datos: $E=20 \cdot 10^3 \text{ MPa}$, $\nu=0,25$



Tensiones:

$$\sigma_z = -P / \text{Área} = \frac{-800 \cdot 10^3}{200^2} = -20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y \neq 0 \text{ de compresión } (\sigma_y < 0)$$

Hipótesis: Supongo $\sigma_x = 0$ (Tras el alojamiento la columna no toca con la cara del hueco donde inicialmente tenía holgura) $\Rightarrow \epsilon_x < \frac{0,1}{200} = 5 \cdot 10^{-4}$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Deformaciones: Aplicación de Hooke

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = 0 \quad (\text{esta anclada la columna en el agujero infinitamente rígido}) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \end{cases}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (-\nu(\sigma_y - 20)) = 3,125 \cdot 10^{-4} < 5 \cdot 10^{-4} \leftarrow \text{Cumple hipótesis } \sigma_x = 0$$

$$\varepsilon_y = 0 = \frac{1}{E} (\sigma_y + 20\nu) \rightarrow \sigma_y = -20\nu = -5 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (-20 - \nu\sigma_y) = -9,375 \cdot 10^{-4}$$

Por tanto, tensor de tensiones

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Como $\tau_{ij} = 0 \rightarrow \gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = 0$ y el tensor de deformaciones queda:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,125 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9,375 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

NOTA!! Si no se hubiera cumplido la hipótesis $\varepsilon_x = \frac{0,1}{200}$, $\sigma_x < 0$

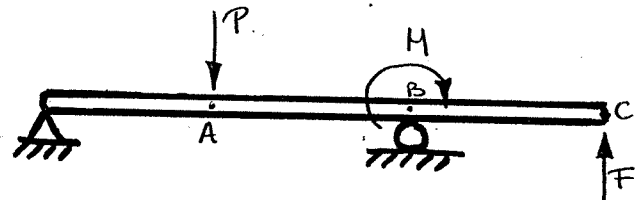
EJERCICIO ESPECIAL 1

Se considera la viga de la figura sobre la que pueden actuar una fuerza P en el punto A, un momento M sobre el apoyo B y una fuerza F en C como se indica en la figura. Saber que:

- Cuando actúa una fuerza P de 10 kN en el punto A, dicho punto desciende 1,5 mm, mientras que el punto C asciende 1 mm y la viga experimenta un giro antihorario de 10^{-4} rad. en el punto B.
- Cuando actúa un momento M desconocido sobre el apoyo B, el punto A asciende 0,2 mm, el punto C desciende 0,5 mm y la viga experimenta en el apoyo B un giro horario de $2 \cdot 10^{-4}$ rad.
- Si se impide el movimiento en el punto C y se aplica el mismo momento M anterior, en dicho punto aparece una reacción F de 5 kN hacia arriba.

Se pide:

- 1) Determinar el valor del momento M en m.kN
- 2) Calcular el potencial interno del sistema cuando actúan todas las cargas.
- 3) Calcular el trabajo realizado durante el proceso de carga del momento M , de forma lenta, cuando sobre la viga ya estaba actuando la fuerza P , sin presencia de la fuerza F .



$$P = 10 \text{ kN} \left\{ \begin{array}{l} \delta_A^P = 1,5 \text{ mm} \\ \delta_B^P = -10^{-4} \text{ rad} \\ \delta_C^P = 1 \text{ mm} \end{array} \right.$$

Tomamos como sentido positivo el sentido de la fuerza aplicado en A (descendente)
Tomamos como sentido positivo el sentido del momento aplicado en B (horario)

Tomamos como sentido positivo el sentido de la fuerza aplicado en C

$$M ? \left\{ \begin{array}{l} \delta_A^M = -0,2 \text{ mm} \\ \delta_B^M = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \delta_C^M = -0,5 \text{ mm} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} H + F \\ F = 5 \text{ kN} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \delta_C^{H+F} = 0 \text{ ya que se impide movimiento.} \end{array} \right.$$

① Aplico teorema de Maxwell-Betty para el cálculo de M

$$P \delta_A^M = M \delta_B^P; 10 (\text{kN}) (-0,2) (\text{mm}) = M \cdot (-10^{-4} \text{ rad})$$

$$M = \frac{10 \cdot 0,2}{10^{-4}} \text{ kN} \cdot \text{mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}}$$

$$M = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

② Potencial interno U

$$U = \frac{1}{2} (P \delta_A + M \delta_B + F \delta_C) (*)$$

Nos faltan los desplazamientos debidos a F

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_A^F \xrightarrow{MB} \rightarrow \delta_A^F = F \delta_C^P; \quad \delta_A^F = \frac{5 \cdot 1}{10} = 0,5 \text{ mm} \\ \delta_B^F \rightarrow M \delta_B^F = F \delta_C^M; \quad \delta_B^F = \frac{5 \cdot (-0,5)}{20 \cdot 10^3} = -1,25 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \delta_C^F \rightarrow \delta_C^F = 0,5 \text{ mm} \end{array} \right.$$

$$\delta_A = \delta_A^P + \delta_A^M + \delta_A^F = 1,5 - 0,2 + 0,5 = 1,8 \text{ mm}$$

$$\delta_B = \delta_B^P + \delta_B^M + \delta_B^F = -10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} - 1,25 \cdot 10^{-4} = -0,25 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\delta_C = \delta_C^P + \delta_C^M + \delta_C^F = 1 - 0,5 + 0,5 = 1 \text{ mm}$$

$$U = \frac{1}{2} (10 \cdot 1,8 + 20 \cdot 10^3 (\text{KN/mm}) (-0,25 \cdot 10^{-4}) + 5 (\text{KN}) 1 \text{ mm}) = 11,25 \text{ KNmm}$$

$$U = 11,25 \text{ N} \cdot \text{m} = 11,25 \text{ J}$$

3) Aplio 1° P y luego M : Se pide trabajo realizado durante la carga de M

$$W = \frac{1}{2} M \delta_B^M + P \delta_A^M = \frac{1}{2} \frac{20 \cdot 10^3}{\text{KN} \cdot \text{mm}} 2 \cdot 10^{-4} + 10 \cdot (-0,2) = 2 - 2 = 0$$

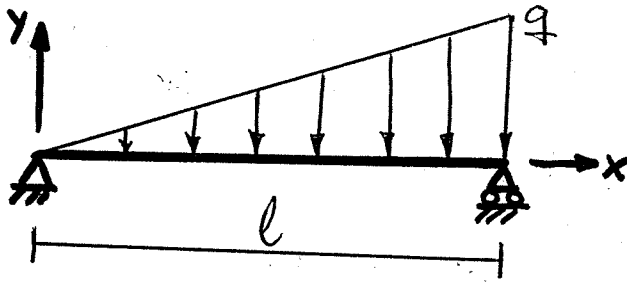
COMUNES

Ejercicio

El desplazamiento vertical en cada punto de la viga de la figura viene dado por:

$$V = \frac{-q l^3 x}{360 E I_z} \left(7 - 10 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{x^4}{l^4} \right)$$

Se desea conocer la energía elástica de la viga así cargada.



$$q(x) = q \frac{x}{l}$$

$$dU = q(x) d(x) V(x)$$

$$U = \int_0^l q(x) V(x) dx$$

$$U = \int_0^l \frac{-q^2 l^2}{360 E I_z} \left(7x^2 - 10 \frac{x^4}{l^2} + 3 \frac{x^6}{l^4} \right) dx = \frac{-q^2 l^2}{360 E I_z} \left(\frac{7}{3} l^3 - 2l^3 + \frac{3}{7} l^3 \right) =$$

$$= \frac{-q^2 l^5}{360 E I_z} \frac{16}{21} = \frac{-2q^2 l^5}{945 E I_z} \left(\frac{KN^2 m^{-2} m^5}{KN \cdot m^{-2} m^4} \right) \rightarrow KN \cdot m$$

Momento de energía de sup. $\rightarrow [L^4]$
MÁSICA.

Ejercicio

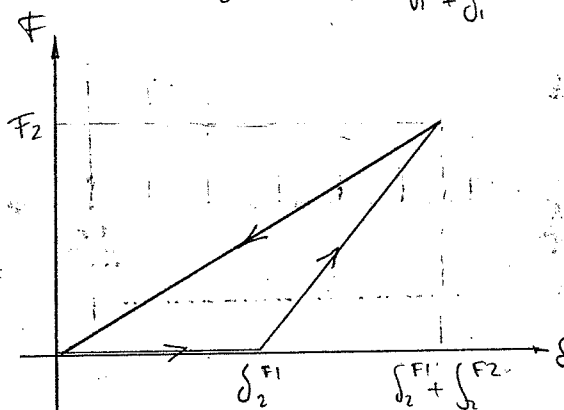
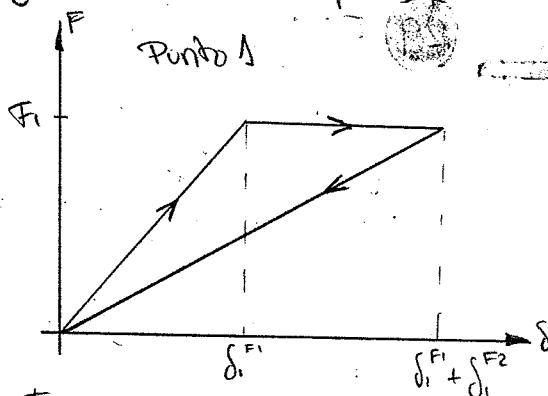
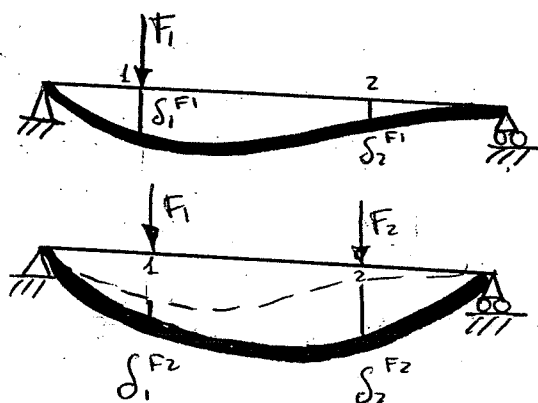
Barra inicialmente descargada sufre proceso de carga:

- Aplicación progresiva de carga en 1 hasta alcanzar F_1
- Manteniendo aplicada F_1 , aplicación progresiva de carga en el punto 2 hasta F_2 .
- Retirada progresiva y simultánea de ambas cargas hasta volver al estado inicial

(A) Dibujar, en dos diagramas F-S separados, la evolución de cada carga frente a su desplazamiento eficaz asociado

(B) Demostrar el teorema de Maxwell-Betti partiendo de que el proceso es reversible (la suma de los trabajos realizados durante el proceso por cada carga es nula: $W_{F_1} + W_{F_2} = 0$)

A) Diagramas Fuerza-desplazamientos



B)

$$W_{F1} + W_{F2} = 0$$

$$W_{F1} = \frac{1}{2} F_1 \delta_1^{F1} + F_1 \delta_1^{F2} - \frac{1}{2} F_1 (\delta_1^{F1} + \delta_1^{F2}) = \frac{1}{2} F_1 \delta_1^{F2}$$

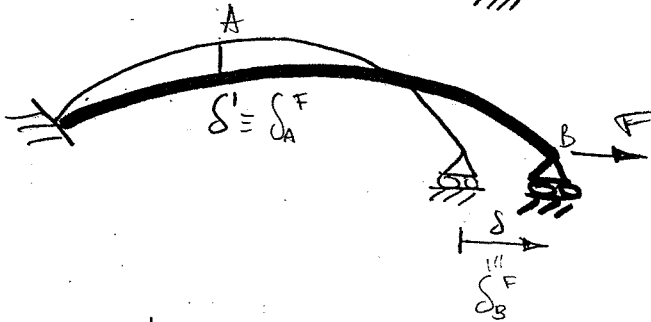
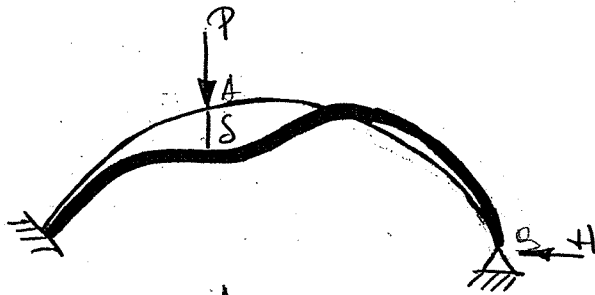
$$W_{F2} = \frac{1}{2} F_2 \delta_2^{F2} - \frac{1}{2} F_2 (\delta_2^{F1} + \delta_2^{F2}) = -\frac{1}{2} F_2 \delta_2^{F1}$$

Teorema Maxwell-Betti

$$\text{Como } W_{F1} + W_{F2} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} F_1 \delta_1^{F2} - \frac{1}{2} F_2 \delta_2^{F1} = 0 \Rightarrow F_1 \delta_1^{F2} = F_2 \delta_2^{F1}$$

Ejercicio

Para determinar experimentalmente las reacciones en una estructura hiperestática se puede utilizar el método de Beggs, tal como se indica en el caso siguiente. Se trata un arco, empotrado en su extremo izquierdo y con apoyo fijo en el derecho, sometido a la fuerza P . Para determinar la reacción horizontal H en el apoyo retiramos la fuerza aplicada y liberamos el apoyo en dirección horizontal. Seguidamente imponemos en el apoyo un desplazamiento δ mediante la aplicación de una fuerza F y en el punto donde estaba aplicada la fuerza P medimos el desplazamiento δ'' en su dirección. A partir de los valores P, δ, δ'' se puede H .



$$\rightarrow \frac{-P\delta'}{F} = \frac{H\delta}{F}, \quad \boxed{H = -P \frac{\delta'}{\delta}}$$

Aplicando Maxwell-Betti

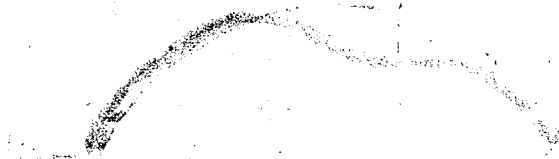
$$P\delta_A^F = F\delta_B^P$$

$$\delta_B^P = \frac{P\delta_A^F}{F} = \frac{P\delta'}{F}$$

$$H\delta_B^F = F\delta_B^H$$

$$\left. \begin{aligned} \int_B^{P+H} &= 0 \\ \delta_B^H + \delta_B^P &= 0 \end{aligned} \right\} \delta_B^H = -\delta_B^P$$

$$\delta_B^H = \frac{H\delta}{F}$$



Handwritten text, possibly a signature or a line of writing, located in the middle of the page.

MÓDULO 2. TENSÓN Y DEFORMACIÓN. COMPORTAMIENTO ELÁSTICO

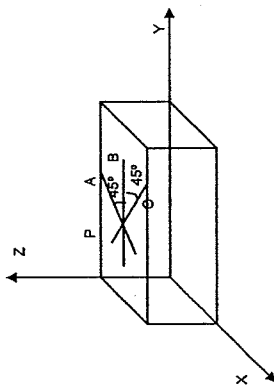
PROBLEMA 2.1

Sobre el punto medio de la cara superior (P) del sólido elástico de la figura se ha pegado una roseta extensométrica. Tras la puesta en carga se han medido los siguientes valores ($k=10^{-6}$):

$$\epsilon_A = 1,5 \text{ k} \quad \epsilon_B = 4 \text{ k} \quad \epsilon_C = 1,5 \text{ k}$$

Se pide determinar el tensor de tensiones y de deformación en el punto P sabiendo que sobre los planos paralelos al XY las tensiones son nulas.

$$(E = 2 \cdot 10^6 \text{ MPa}; \quad \nu = 0,25)$$

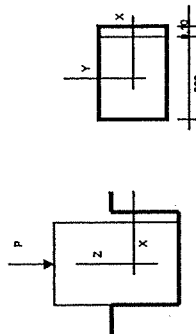


PROBLEMA 2.2

Un sólido elástico macizo de 1 m de longitud y módulo elástico $E=20000 \text{ MPa}$, se introduce en un depósito cerrado. Al someter éste a una presión interna de 1 MPa , el sólido experimenta una disminución de su longitud de $0,005 \text{ mm}$. Determinar los valores del coeficiente de Poisson y del módulo de elasticidad transversal.

PROBLEMA 2.3

El extremo de una columna prismática, de base $200 \times 200 \text{ mm}$, está encajado sin rozamiento en un hueco de dimensiones $200 \times 200,1 \text{ mm}$, de rigidez infinita. Si la columna se carga en su extremo superior con $P=800 \text{ kN}$, determinar el valor del tensor de tensiones y de deformación, referidas al sistema OXYZ de la figura, en los puntos de la columna dentro del hueco, considerando que el estado tensional es homogéneo (igual en todos sus puntos). Datos: $E=2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$; $\nu=0,25$

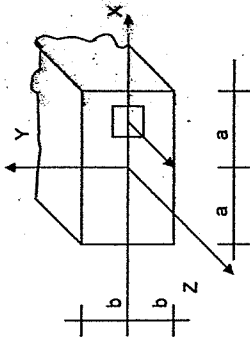


PROBLEMA 2.4

Un sólido prismático largo de sección rectangular $2ax2b$, está sometido en su extremo a una distribución de fuerzas de superficie dadas por:

$$f_x = f_y = 0 \quad f_z = q[1-(x/a)^2]$$

respecto al sistema OXYZ de la figura. Se pide determinar una distribución de fuerzas más simple, que aplicada en el extremo origine un estado tensional idéntico en puntos suficientemente alejados de él.



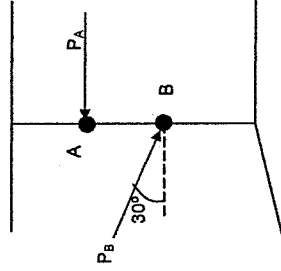
PROBLEMA 2.5

Una estructura elástica y plana, de la cual se dibuja sólo una parte, se encuentra sometida a la acción de dos fuerzas puntuales P_A y P_B aplicadas sobre los puntos A y B, respectivamente, con la dirección y sentido indicados en la figura.

Cuando se aplica una carga puntual $P_A = 3 \cdot 10^3 \text{ N}$, el punto A se desplaza 3 mm hacia la izquierda y el punto B, 2 mm hacia la izquierda y 1 mm hacia abajo. Cuando se aplica únicamente una fuerza $P_B = 7 \cdot 10^3 \text{ N}$, el punto B tiene un desplazamiento efectivo cuyo módulo es 4 mm .

Se pide:

- 1) ¿Qué dirección y sentido tiene el desplazamiento del punto B en este último caso de carga? ¿Por qué?
- 2) ¿Cuánto vale (y en qué sentido) el desplazamiento horizontal del punto A cuando se aplica una fuerza sobre él de valor $P_A = 2 \cdot 10^3 \text{ N}$ y otra de valor $P_B = 3 \cdot 10^3$ sobre el punto B?



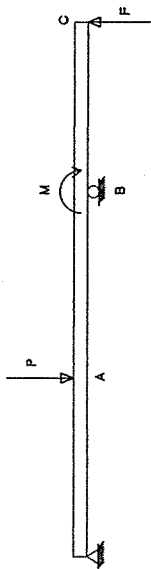
PROBLEMA 2.6

Se considera la viga de la figura sobre la que pueden actuar una fuerza P en el punto A, un momento M sobre el apoyo B y una fuerza F en el punto C, tal y como se indica en la figura. Se sabe que:

- Cuando actúa una fuerza P de 10 kN en el punto A, dicho punto desciende 1,5 mm, mientras que el punto C asciende 1 mm y la viga experimenta un giro antihorario de 10^{-4} rad en el punto B.
- Cuando actúa un momento M desconocido sobre el apoyo B, el punto A asciende 0,2 mm, el punto C desciende 0,5 mm y la viga experimenta en el apoyo B un giro horario de $2 \cdot 10^{-4}$ rad.
- Si se impide el movimiento del punto C y se aplica el mismo momento M anterior, en dicho punto aparece una reacción F de 5 kN hacia arriba.

Se pide:

- 1) Determinar el valor del momento M en mKN.
- 2) Calcular el potencial interno del sistema cuanto actúan todas las cargas, P , M y F .
- 3) Calcular el trabajo realizado durante el proceso de carga del momento M , de forma lenta, cuando sobre la viga ya estaba actuando la fuerza P , sin presencia de la fuerza F .

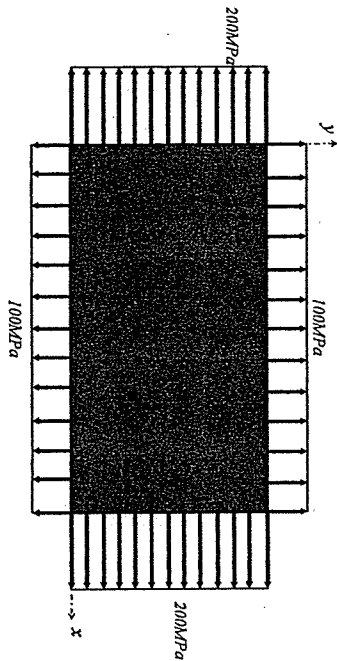


9-2-00

2.8.- La placa de la figura es de un material de características: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,25$. Su espesor es $e = 1 \text{ cm}$ y está sometida a la distribución de fuerzas de superficie indicada (no hay fuerzas aplicadas con componente según z). Mediante técnicas de extensometría se ha obtenido la siguiente solución de deformaciones:

$$\epsilon_x = 875 \cdot 10^{-6} \quad \epsilon_y = 250 \cdot 10^{-6} \quad \epsilon_z = -375 \cdot 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$



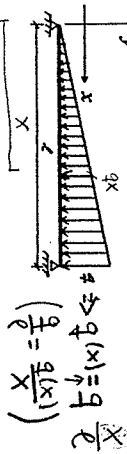
Hallar en Julios la energía elástica

- En función de las fuerzas aplicadas
- Como trabajo de las tensiones

2.9.- El desplazamiento vertical en cada punto de la viga de la figura viene dado por:

$$v = \frac{-qL^3 x}{360EI_z} \left(7 - 10 \frac{x^2}{L^2} + 3 \frac{x^4}{L^4} \right)$$

Se desea conocer la energía elástica de la viga así cargada.



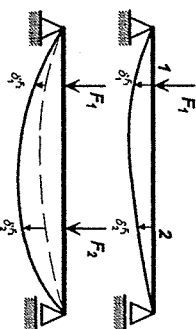
$$U = \int_0^L q v dx = \frac{q}{2} \left(\frac{-qL^3}{360EI_z} \right) \int_0^L x^2 \left(7 - 10 \frac{x^2}{L^2} + 3 \frac{x^4}{L^4} \right) dx = \frac{-q^2 L^2}{360EI_z} \left(7 \frac{x^3}{3} - 10 \frac{x^5}{5L^2} + 3 \frac{x^5}{5L^4} \right) \Big|_0^L$$

$$U = \frac{-q^2 L^2}{360EI_z} \left(\frac{7L^3}{3} - \frac{10L^3}{5} + 3 \frac{L^3}{5} \right) =$$

Hecho
Cora

2.10.- La barra de la figura (inicialmente descargada) sufre el siguiente proceso de carga:

- Aplicación progresiva de carga en el punto 1, hasta alcanzar el valor F_1 .
- Manteniendo aplicada F_1 , aplicación progresiva de carga en el punto 2 hasta alcanzar el valor F_2 .
- Retirada progresiva y simultánea de ambas cargas hasta volver al estado inicial.



(A).- Dibujar, en dos diagramas $F-\delta$ separados, la evolución de cada carga frente a su desplazamiento eficaz asociado.

(B).- Demostrar el teorema de Maxwell-Betti partiendo de que el proceso es reversible (la suma de los trabajos realizados durante el proceso por cada carga es nula: $W_{F1} + W_{F2} = 0$).

8-2-02

Hecho
Cora

2.11.- Para determinar experimentalmente las reacciones en una estructura hiperestática, se puede utilizar el método de Beggs, tal como se indica en el caso siguiente. Se trata de un arco, empujado en su extremo izquierdo y con un apoyo fijo en el derecho, sometido a la fuerza P . Para determinar la reacción horizontal H en el apoyo, retiramos la fuerza aplicada y liberamos el apoyo en dirección horizontal. Seguidamente imponemos en el apoyo un desplazamiento δ mediante la aplicación de una fuerza F , y en el punto donde estaba aplicada la fuerza P medimos un desplazamiento δ' en su dirección. A partir de los valores de F , δ y δ' , se pide obtener el valor de H .



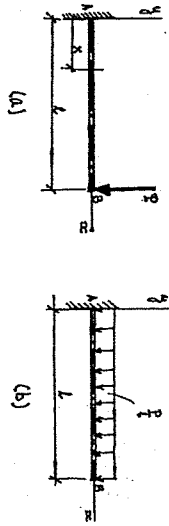
18-6-04



2.12.- Cuando sobre el extremo libre de una viga en voladizo actúa una carga concentrada P, el desplazamiento vertical de cada sección, respecto del sistema de referencia indicado en la figura a, viene dado por la expresión:

$$v = \frac{P}{EI_z} \left(-\frac{Lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right)$$

Siendo E el módulo de elasticidad del material e I_z el momento de inercia de la sección recta de la viga respecto del eje z, ambos constantes.



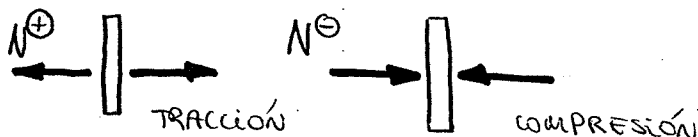
Calcular, aplicando el teorema de Maxwell-Betti, el desplazamiento vertical del extremo libre cuando la carga P actúa uniformemente repartida, tal como se indica en la figura b.

20-1-98

TRACCIÓN

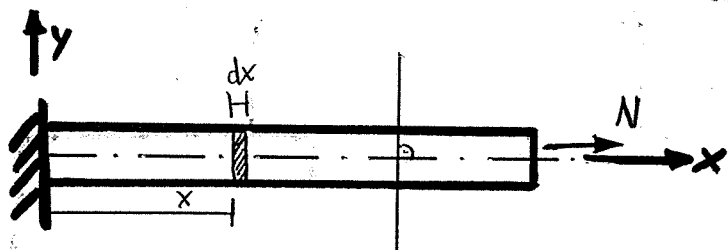
TRACCIÓN EN BARRAS Lección 9: ESFUERZO NORMAL VARIABLE. CASOS HIPERESTÁTICOS

Llamamos tracción o compresión para cuando sólo existe esfuerzo normal N .



$$\tau_y = \tau_z = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_T = 0$$

① HIPÓTESIS CINEMÁTICA O DE BERNOUILLI



Secciones planas y perpendiculares a la directriz se conservan planas y perpendiculares.

Sólo existe por tanto desplazamiento a lo largo de la directriz.

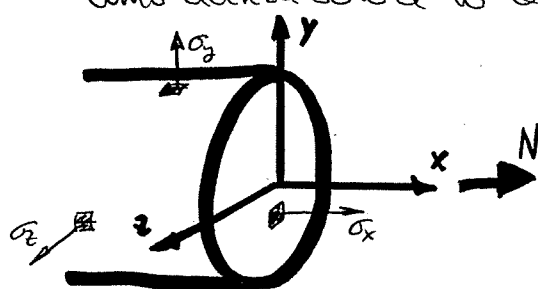
② HIPÓTESIS DE DEFORMACIÓN CONSTANTE

La deformación de cualquier fibra de una sección es constante en la sección. $\epsilon_x = C(x)$ (cte en la sección que tiene x dada)

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

TENSIONES

Como deformación sólo a lo largo de la directriz

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_y = \sigma_z = 0 \\ \sigma_x \neq 0 \end{array} \right.$$


$$\sigma_x: \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = C(x) \text{ constante en cada sección}$$

$$N = \int \sigma_x dA = \sigma_x A \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{N(x)}{A}}$$

DEFORMACIONES

Como $\sigma_x = \frac{N(x)}{A}$ y, en tracción pura $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

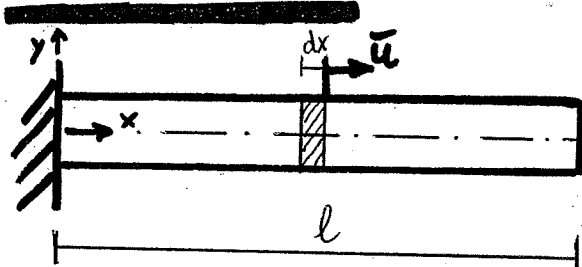
$$\epsilon_x = \frac{N(x)}{A E}$$

Además, $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \frac{N(x)}{A E}$$

Las deformaciones angulares son nulas ya que $\tau_{ij} = 0 \forall i, j$ y $\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

DESPLAZAMIENTOS (de la sección en piezas rectas)

$$u = (u, v, w); v = w = 0$$

$$\epsilon_x = du/dx; du = \epsilon_x dx$$

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N(x)}{EA} dx$$

$$\Delta l_x = u(x) - u_0 = \int_0^x \frac{N(x)}{EA} dx; \text{ Para toda la pieza}$$

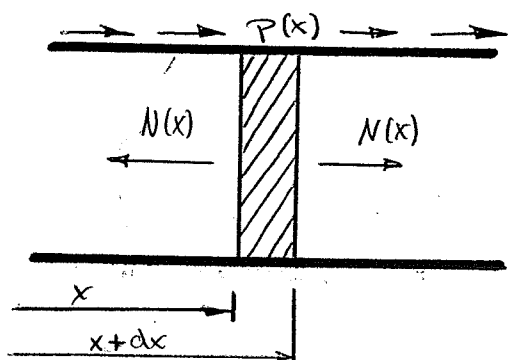
$$\Delta l = \int_0^L \frac{N(x)}{EA} dx$$

• Si $N(x) = \text{cte} = F$: $\Delta l = \frac{F l}{EA}$

• Si en la pieza hay tramos de N constante ($N = F_i$)

$$\Delta l = \sum_i \frac{F_i l_i}{EA}$$

• Si el esfuerzo normal es variable : $N(x) \neq \text{cte}$

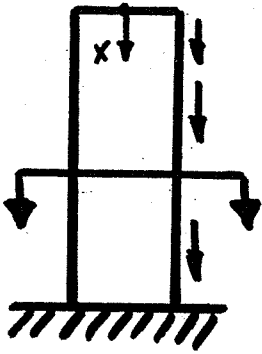


Por equilibrio de la sección

$$-N(x) + p(x) + (N(x) + \frac{dN(x)}{dx} dx) = 0$$

$$p(x) + \frac{dN(x)}{dx} = 0$$

Caso 1: Viga sometida a peso propio



γ = peso específico (por unidad de volumen)

A = área de la sección

$$p(x) = \gamma \cdot A$$

Como $N(x) \neq \text{cte}$: $p(x) + \frac{dN(x)}{dx} dx = 0$;

$$\gamma A + \frac{d(N(x))}{dx} = 0, \quad dN(x) = -\gamma A dx$$

$$N(x) = N_0 - \int_0^x \gamma A dx = N_0 - \gamma A x$$

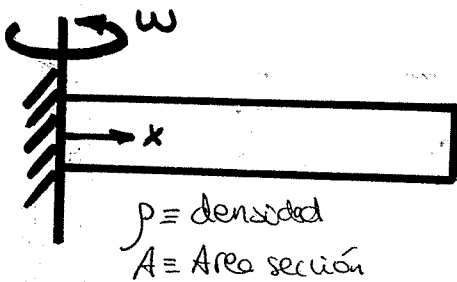
Tensiones: $\sigma_x = \frac{N(x)}{A} = \frac{N_0}{A} - \gamma x$

Deformaciones: $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_0}{EA} - \frac{\gamma x}{E}$

Desplazamientos: $\epsilon_x = \frac{du}{dx}$; $du = \epsilon_x dx$; $u(x) = u_0 + \int_0^x \epsilon_x dx$

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \left(\frac{N_0}{EA} - \frac{\gamma x}{E} \right) dx = u_0 + \frac{N_0}{EA} x - \frac{\gamma}{2E} x^2$$

Caso 2: Viga giratoria (sometida a una fuerza centrífuga)



ρ = densidad
 A = Área sección

$$p(x) = \rho A \omega^2 x$$

Como $N(x) \neq \text{cte}$ $\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0$

$$\frac{dN(x)}{dx} + \rho A \omega^2 x = 0, \quad dN(x) = -\rho A \omega^2 x dx$$

$$N(x) = N_0 - \frac{\rho A \omega^2 x^2}{2}$$

Tensiones: $\sigma_x = \frac{N(x)}{A} = \frac{N_0}{A} - \frac{\rho \omega^2 x^2}{2}$

Deformaciones: $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_0}{EA} - \frac{\rho \omega^2 x^2}{2E}$

Desplazamientos: $u(x) = u_0 + \int_0^x \epsilon_x dx = u_0 + \frac{N_0}{EA} x - \frac{\rho \omega^2}{6E} x^3$

POTENCIAL INTERNO

Recordemos $U = \sum_i F_i \cdot \delta_i / 2 = \frac{1}{2} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \epsilon_z \sigma_z + \dots)$

Tracción pura $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ $\sigma_x = N(x)/A$ $dV = A dx$

$$dU = \frac{1}{2} \epsilon_x \sigma_x dV = \frac{1}{2E} \sigma_x^2 dV = \frac{1}{2E} \frac{(N(x))^2}{A^2} dV = \frac{1}{2E} \frac{N(x)^2}{A} dx$$

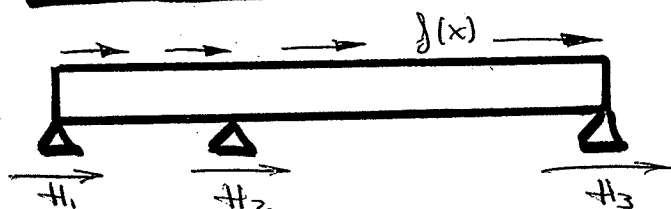
Potencial extendido a toda la pieza:

$$U = \int_0^l \frac{1}{2E} \frac{N(x)^2}{A} dx$$

• Si $N(x) = cte$ $U = \frac{1}{2E} \frac{N^2}{A} l$

• Si $N(x) = cte$ por tramos $U = \sum_i \frac{1}{2E} \frac{N_i^2}{A} l_i$

CASO HIPERESTÁTICO

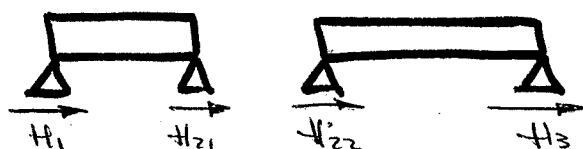


Grado de hiperestaticidad de la estructura

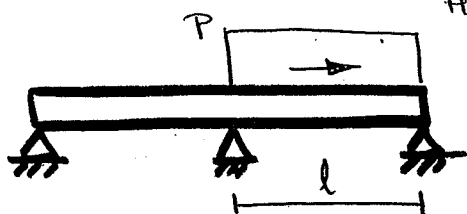
$$GH = (r-3) + (3c-e) = 0$$

Ecuación equilibrio $\sum F_v = 0$
 indeterminata $\left\{ \begin{array}{l} \text{Isostático} \\ \text{solo pueda tener 1 reacción} \end{array} \right.$

Dividiremos el sistema en tramos hiperestáticos de $GH = 1$



Ejemplo:

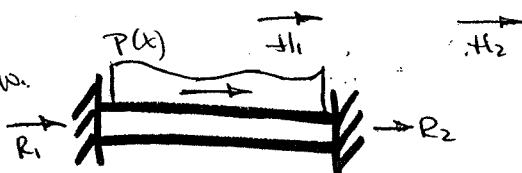


Ecuación adicional

$$H_1 + H_2 = P$$

Ecuación equilibrio estático:
 $\sum F_H = 0$

Ejemplo:



Ecuación equilibrio estático

$$\sum F_H = 0; R_1 + R_2 + \int_0^l P(x) dx = 0$$

Para obtener la ecuación adicional tenemos dos métodos:

1) Compatibilidad de movimientos

Por empotramiento a ambos lados $\Delta l = 0$

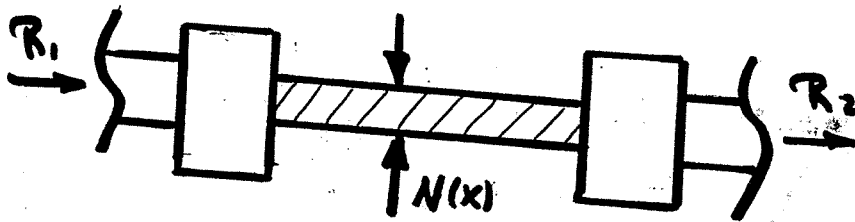
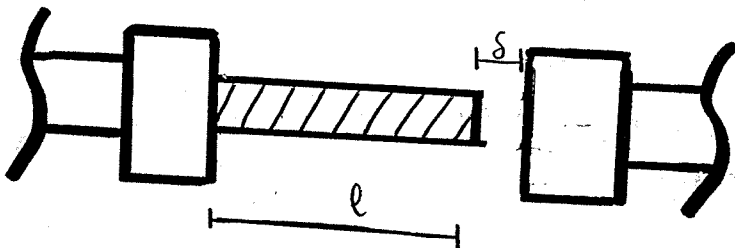
$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)}{EA} dx = \int_0^l \frac{N(R_1, R_2, P)}{EA} dx = 0 \quad \leftarrow \text{Ecuación adicional}$$

2) Aplicar Teorema de Menabrea $\frac{\partial U}{\partial R_1} = 0$; siendo R_1 reacción hiperestática.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N(x)^2}{EA} dx \Rightarrow \text{Ecuación adicional}$$

CASOS PARTICULARES

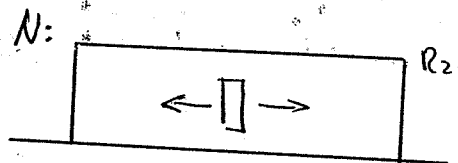
A) Defectos de montaje



Por equilibrio estático

$$\sum F_H = 0 \quad R_1 + R_2 = 0$$

$$R_1 = -R_2$$

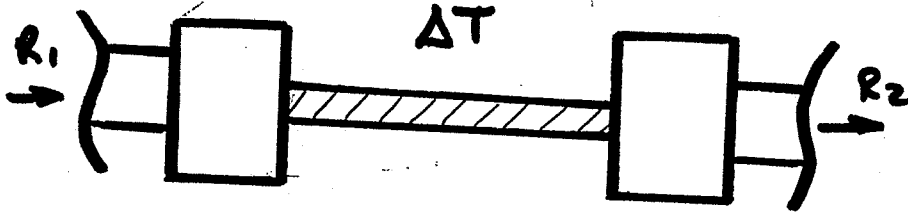


Por compatibilidad de movimientos

$$\Delta l = \delta$$

$$\Delta l = \delta = \int_0^l \frac{N(x)}{EA} dx \Rightarrow \frac{R_2 l}{EA} = \delta \quad \leftarrow \text{Ecuación adicional}$$

6) Salto térmico



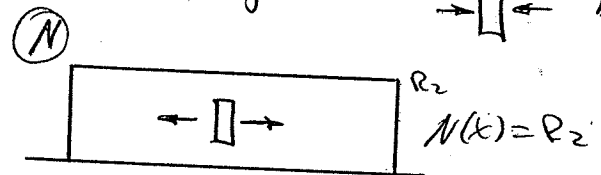
El hecho de incrementar (o disminuir) la temperatura produce esfuerzos en los miembros.

• Calentamiento $\rightarrow \square \rightarrow \Delta T > 0$

• Enfriamiento $\rightarrow \square \leftarrow \Delta T < 0$

Supongo: $\Delta T > 0 \Rightarrow$ Tracción

$$\sum F_H = 0 \rightarrow R_1 + R_2 = 0; R_1 = -R_2$$

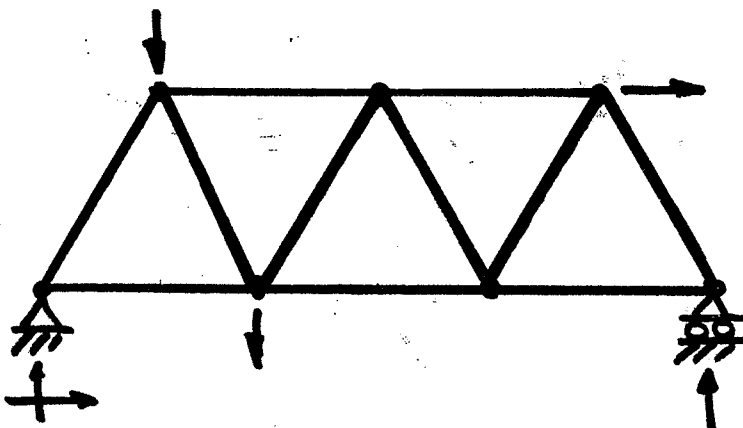


Por compatibilidad de movimientos: $\Delta l = 0$

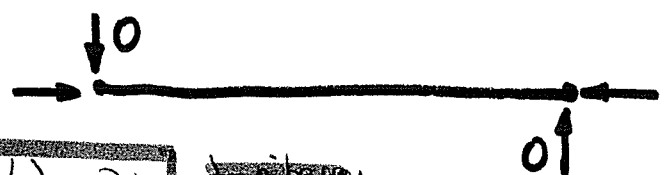
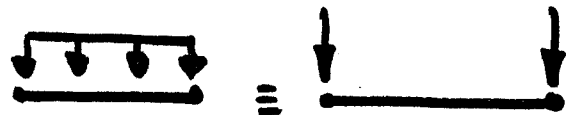
$$\Delta l = \int_0^l \epsilon_x dx = \int_0^l \left(\frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T \right) dx = \int_0^l \left(\frac{N(x)}{EA} + \alpha \Delta T \right) dx = 0$$

$$\frac{R_2 l}{EA} + \alpha \Delta T l = 0 \leftarrow \text{Ecuación adicional}$$

Lección 10: SISTEMAS ISOSTÁTICOS DE BARRAS ARTICULADAS



- Todas las uniones son articuladas
- Sólo hay fuerzas aplicadas en los nodos y los esfuerzos son normales



• El problema siempre será isostático

$$GH = (r-3) + (3c-e) = (3-3) + (3 \cdot 5 - 15)$$

$$GH = 0$$

Solemos calcular el GH por

$$GH = (r+b) - 2n$$

6

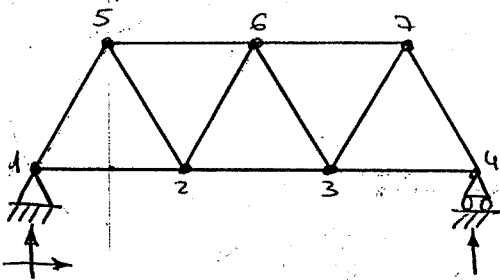
~~3 miembros~~
~~7 nudos~~

$$GH = (3+1) - 2 \cdot 7 = 0$$

MÉTODOS DE CÁLCULO

- ① Método de Cremona: método gráfico que no estudiaremos
- ② Método de las secciones: Se usa cuando hay nudos con más de dos incógnitas
- ③ Método del equilibrio de nudos

Ejemplo método de eq. nudos:

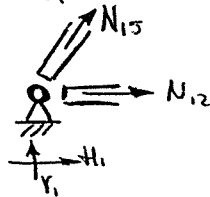


Aplico ecuaciones de equilibrio estático

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M = 0 \end{array} \right.$$

Tenemos que aislar cada nudo para sacar los esfuerzos internos. Consideraremos a priori todos los esfuerzos de tracción de forma que si al resolver las ecuaciones salen negativos significa que son de compresión.

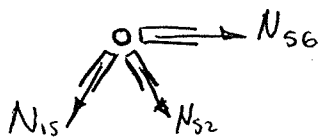
Aislo nudo ①



y aplico ecuaciones de equilibrio

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \end{array} \right.$$

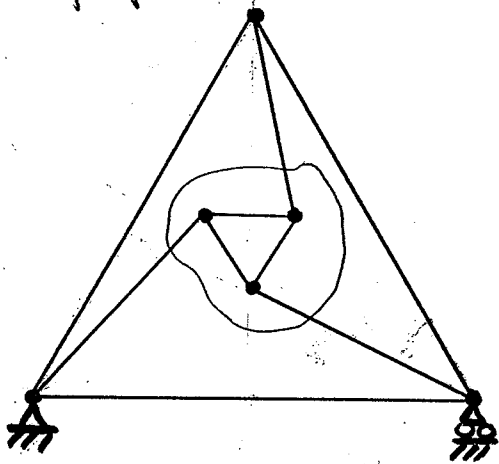
Aislo nudo ⑤



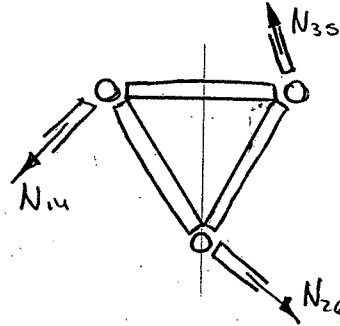
y de nuevo aplicamos ecuaciones de equilibrio

Y así, sucesivamente

Ejemplo método de las secciones: Todos los nodos tienen 3 incógnitas



Aislamos una parte de la estructura (sección) que corte 3 barras



Aplico las ecuaciones de equilibrio

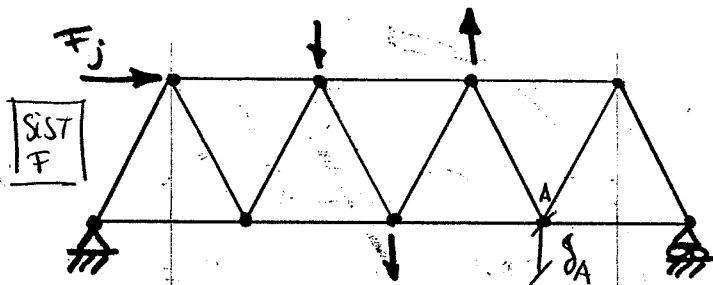
$$\begin{cases} \sum F_v = 0 \\ \sum F_H = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

● POTENCIAL INTERNO $\Rightarrow$ Desplazamientos

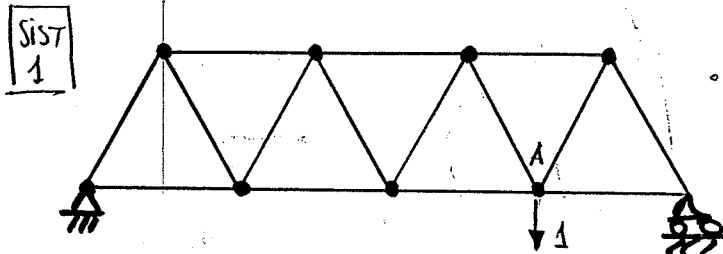
El método que sigue se basa en el potencial interno, que como ya se dijo, su expresión es:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i^2}{E_i A_i} l_i$$

Definimos un sistema F (el real) y un sistema 1 (auxiliar)



$$U_F = \sum_i \frac{1}{2} \frac{N_i^2(F_j)}{E_i A_i} l_i$$



$$U_{F+P} = \sum_i \frac{1}{2} \frac{(N_i(F) + P N_i(1))^2}{E A_i} l_i$$

Por th. Castigliano: $\delta_A = \frac{\partial U}{\partial F_i}$

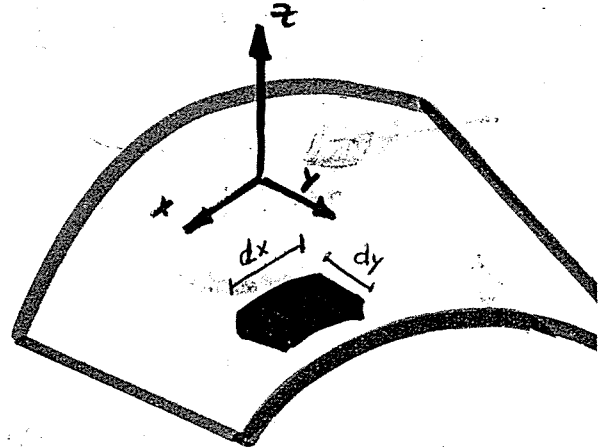
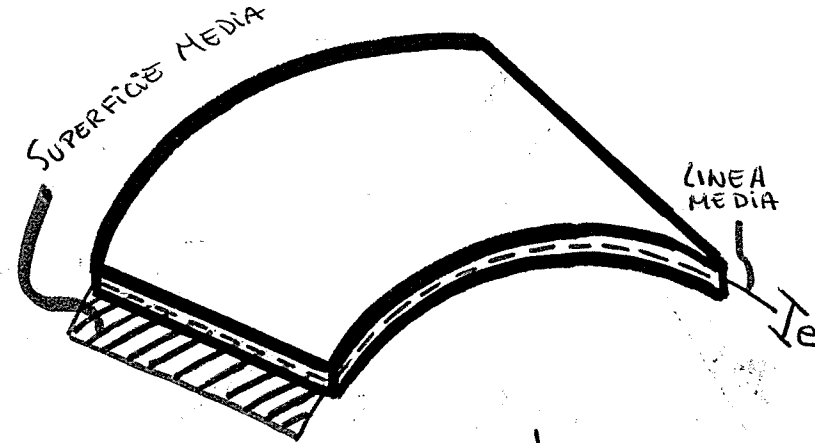
$$\left[\delta_A = \frac{\partial U_{F+P}}{\partial P} \right]_{P=0} = \sum_i \frac{(N_i(F) + P(N_i(1)))}{E A_i} \cdot N_i(1) \cdot l_i \bigg|_{P=0} = \sum_i \frac{N_i(F) \cdot N_i(1)}{E A_i} l_i$$

Lección 11: TRACCIÓN BIAXIAL

Consideraremos bidimensionales

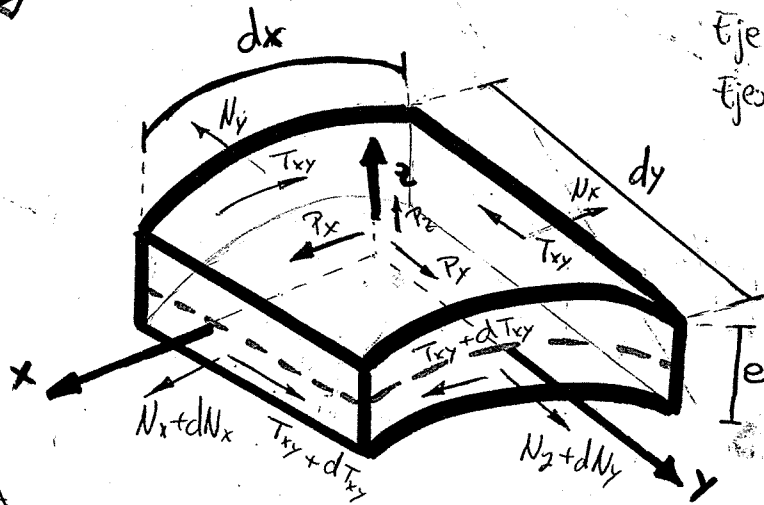
SUPERFICIE MEDIA

LINEA MEDIA



Eje z $\perp$ sup. media
Ejes x y y tangentes a ella

ESTADO
TENSIONAL
DE MEMBRANA



Fuerzas
 P_x, P_y, P_z
de superficie
 $[F/L^2]$

En sólidos bidimensionales aparecen únicamente esfuerzos normales según la dirección x e y , y esfuerzos cortantes en dichos planos

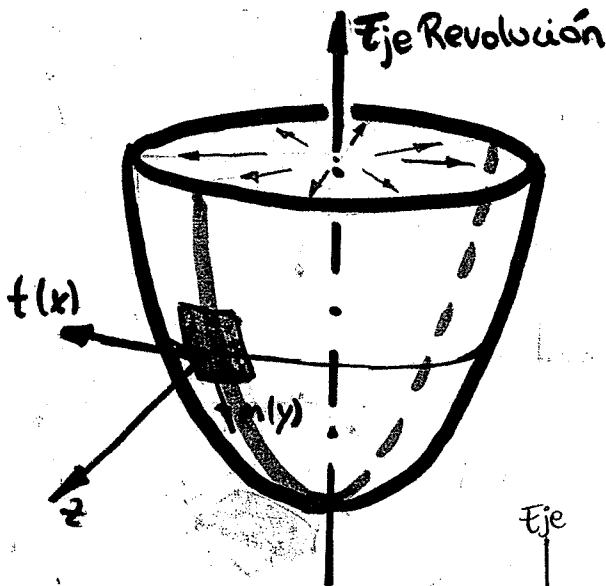
$\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{array} \right.$ definidos por metro lineal $[F/L]$ Resiste por forma

$$\sigma_x = N_x / e$$

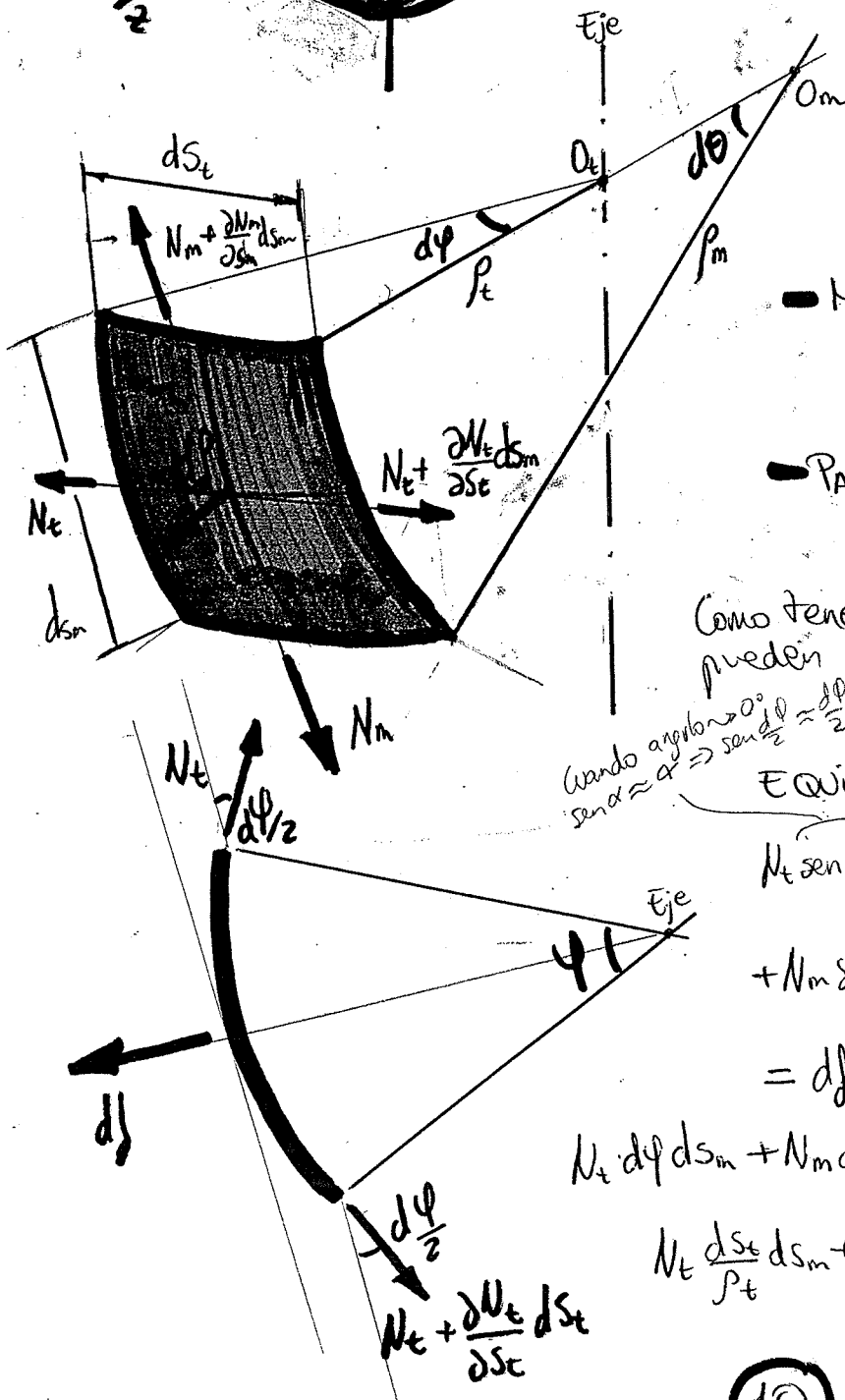
$$\sigma_y = N_y / e$$

$$\tau_{xy} = T_{xy} / e$$

Caso particular: LÁMINAS DE REVOLUCIÓN



- Sólido bidimensional: MEMBRANA
- Simetría radial en torno al eje de revolución
- Cargas axisimétricas (en dirección radial)
- Trabajamos con cargas $\perp$ a la superficie media P_z



Definimos 2 Familias de Curvas:

- MERIDIANAS: Resultante de cortar a la superficie por planos que contienen al eje
- PARALELAS: Corte por planos perpendiculares al eje.

Como tenemos simetría de revolución no pueden aparecer esfuerzos cortantes: sólo normales

Cuando $\alpha \rightarrow 0^\circ \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$

EQUILIBRIO DIRECCIÓN z : dif. de orden sup.

$$N_t \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) ds_m + N_t \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) ds_m + \frac{\partial N_t}{\partial s_t} ds_t \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) ds_m + N_m \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) ds_t + N_m \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) ds_t + \frac{\partial N_m}{\partial s_m} ds_m \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) ds_t = df \cdot ds_m ds_t$$

diferencial de orden superior

$$N_t d\varphi ds_m + N_m d\theta ds_t = df ds_m ds_t \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d\theta = \frac{ds_m}{\rho_m} \\ d\varphi = \frac{ds_t}{\rho_t} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$N_t \frac{ds_t}{\rho_t} ds_m + N_m \frac{ds_m}{\rho_m} ds_t = df ds_m ds_t$$

De esta expresión se deduce la ecuación de Laplace

$$\frac{N_t}{\rho_t} + \frac{N_m}{\rho_m} = P$$

Expresada en tensiones

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{P}{e}$$

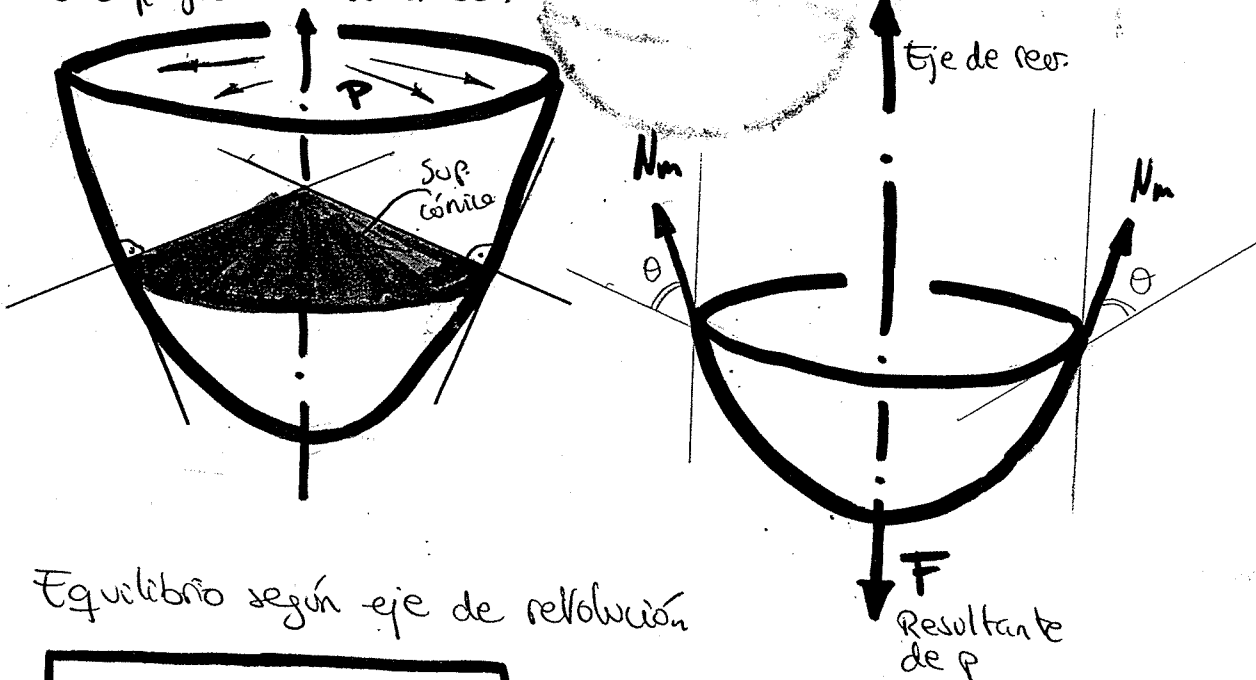
Ecuación adicional

Como N_t es constante en cada curva t

$$\frac{\partial N_t}{\partial s_t} = 0$$

MÉTODO DE LAS SECCIONES

Consistirá en definir una superficie cónica con el mismo eje y $\perp$ a la superficie considerada.

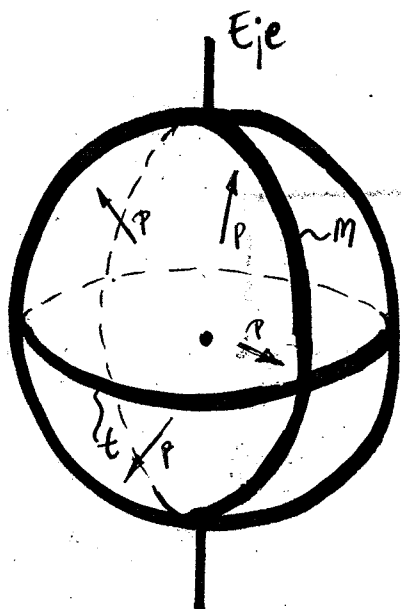


Equilibrio según eje de revolución

$$N_m \sin \theta \cdot 2\pi r = F(P)$$

CASOS

A Depósito esférico



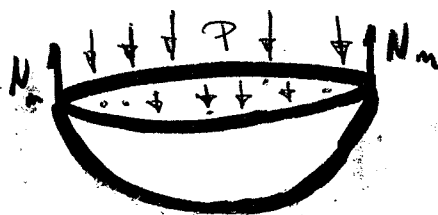
1°: Definimos las familias M y $t \Rightarrow O_m = O_t$

$$\rho_m = R; \rho_t = R$$

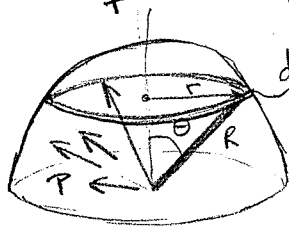
2°: Los ejes z llevan sentido saliente de la superficie

3°: Ecuación de Laplace $\frac{N_m}{R} + \frac{N_t}{R} = P$

4°: Sección por cónica



Equilibrio según eje de revolución $\rightarrow N_m 2\pi R = P \pi R^2$



$$ds = 2\pi r d\theta = 2\pi R \sin\theta d\theta$$

$$\sin\theta = \frac{r}{R}$$

simetría esférica

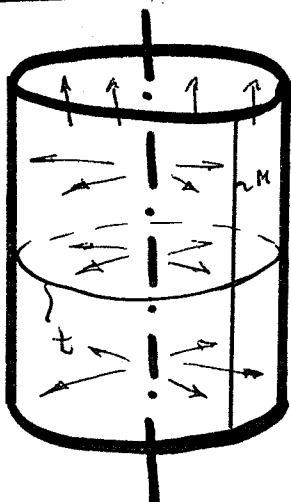
$$\int P \bar{r} ds = P \int_0^{\pi/2} (R \cos\theta) (2\pi R \sin\theta d\theta) = P 2\pi R^2 \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = P \pi R^2$$

Por tanto $N_m = \frac{PR}{2}$

Laplace

$$N_t = \left(P - \frac{N_m}{R}\right) R = \frac{PR}{2}$$

B Depósito cilíndrico



1° Definimos familias M y $t \Rightarrow O_m, O_t$

$$\rho_m = \infty; \rho_t = R$$

2° Ejes z llevan sentido saliente de la sup.

3° Ec. Laplace $\frac{N_m}{\infty} + \frac{N_t}{R} = P \quad N_t = PR; \sigma_t = \frac{RP}{t}$

4° Sección por cónica: $N_m \cdot 2\pi R = P \pi R^2$



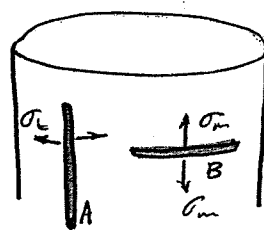
$$N_m = \frac{PR}{2}; \sigma_m = \frac{PR}{2t}$$

NOTA!! ¿Por dónde rompe el cilindro?

$$\sigma_t = RP/e \quad \sigma_t > \sigma_m$$

$$\sigma_m = RP/2e$$

ROMPE POR A!



Las tensiones llevan la dirección de su línea de actuación

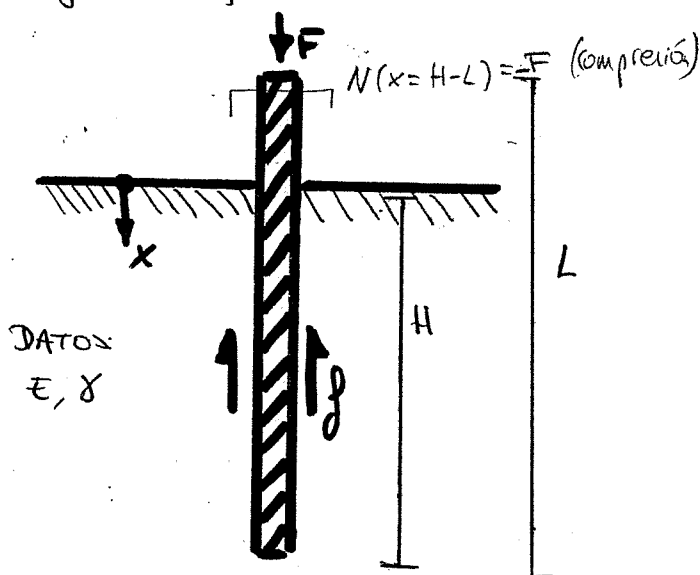
Siempre romperá por lo $\perp$ a la línea de actuación correspondiente a la mayor tensión.

PROBLEMA (Lección 9) ESPECIAL T1

Un pilote de hormigón de sección constante Ω y longitud L ha sido introducido verticalmente en un terreno arcilloso hasta una profundidad H . El pilote soporta una carga F en su extremo superior que, junto con su peso propio, es equilibrado en su totalidad por el rozamiento con el terreno, cuyo efecto es una fuerza f por unidad de longitud que varía cuadráticamente con la profundidad $f = Kx^2$.

Se pide:

- 1) Relación que debe existir entre H y F en función del parámetro K .
- 2) Expresión analítica y diagrama de esfuerzos normales del pilote
- 3) Profundidad a la que el esfuerzo normal es máximo
- 4) Acortamiento total del pilote



DATOS:
 E, γ

Estamos ante el caso de esfuerzo normal variable, por tanto

$$p(x) + \frac{dN(x)}{dx} = 0, \text{ siendo } p(x) \text{ las fuerzas por unid. longitud} \begin{cases} x < 0 & \text{solo peso prop} \\ x > 0 & \text{peso prop + rozam.} \end{cases}$$

$$x < 0: p(x) = \gamma \cdot \Omega; \quad \gamma \cdot \Omega + \frac{dN(x)}{dx} = 0; \quad \underline{N(x) = N_0 - \gamma \Omega x}$$

Condiciones de contorno:

$$N(x=H-L) = -F \rightarrow N(H-L) = N_0 - \gamma \Omega (H-L) = -F; \quad N_0 = -F + \gamma \Omega (H-L)$$

$$\underline{N(x) = -F + \gamma \Omega (H-L) - \gamma \Omega x; \quad x < 0}$$

• $x > 0$: $p(x) = \gamma \Omega - p = \gamma \Omega - kx^2$

$p(x) + \frac{dN(x)}{dx} = 0$, $\gamma \Omega - kx^2 + \frac{dN(x)}{dx} = 0$; $dN(x) = (kx^2 - \gamma \Omega) dx$

$N(x) = N_0 + k \frac{x^3}{3} - \gamma \Omega x$

Condición de contorno: $N(x=H) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow N_0 + k \frac{H^3}{3} - \gamma \Omega H = 0$, $N_0 = \gamma \Omega H - k \frac{H^3}{3}$

$N(x) = \gamma \Omega H - k \frac{H^3}{3} - \gamma \Omega x + k \frac{x^3}{3}$

Por continuidad: $N(x=0) = N(x=0)$
 $x < 0$ $x > 0$

$\gamma \Omega H - k \frac{H^3}{3} = -F + \gamma \Omega (H-L)$

① $-F = k \frac{H^3}{3} - \gamma \Omega L$ $\rightarrow k = \frac{F + \gamma \Omega L}{H^3} \cdot 3$

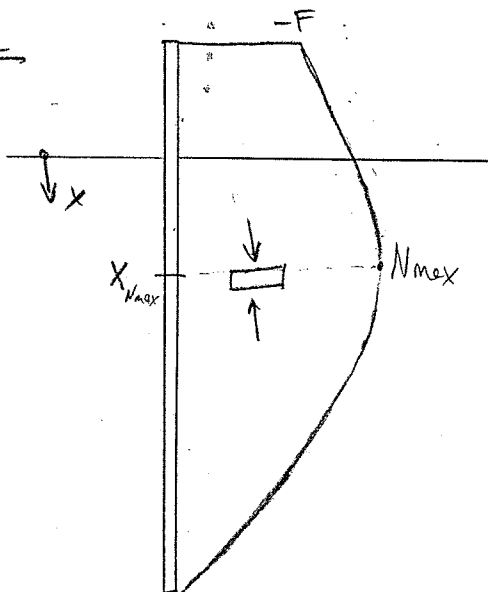
②

Expresiones
analíticas
de $N(x)$

$x < 0$: $N(x) = -F + \gamma \Omega (H-L-x)$

$x > 0$: $N(x) = -F + \gamma \Omega (H-L-x) + \frac{F + \gamma \Omega L}{H^3} \cdot \frac{x^3}{3}$

Diagrama



③ Profundidad X_{Nmax}

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0 \rightarrow -\gamma\Omega + \frac{F + \gamma\Omega L}{H^3} 3x^2 = 0$$

$$X_{Nmax} = \sqrt{\frac{\gamma\Omega \cdot H^3}{3(F + \gamma\Omega L)}}$$

④

$$\Delta L = \underbrace{\int_{H-L}^0 \frac{N(x)}{E\Omega} dx}_{x < 0} + \underbrace{\int_0^H \frac{N(x)}{E\Omega} dx}_{x > 0} = \frac{1}{E\Omega} \left[\int_{H-L}^0 (-F + \gamma\Omega(H-L-x)) dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^H \left(-F + \gamma\Omega(H-L-x) + \frac{F + \gamma\Omega L}{H^3} x^3 \right) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{E\Omega} \left(\left(-Fx + \gamma\Omega x(H-L) - \gamma\Omega \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{H-L}^0 + \left(-Fx - \gamma\Omega(H-L)x - \gamma\Omega \frac{x^2}{2} + \frac{F + \gamma\Omega L}{H^3} \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^H \right) =$$

$$= \frac{1}{E\Omega} \left[F(H-L) - \gamma\Omega(H-L)^2 + \frac{\gamma\Omega(H-L)^2}{2} - FH + \gamma\Omega H(H-L) - \gamma\Omega \frac{H^2}{2} + \frac{F + \gamma\Omega L}{H^3} \frac{H^4}{4} \right] =$$

$$= \frac{1}{E\Omega} \left[-\gamma\Omega \frac{(H-L)^2}{2} - FL + \gamma\Omega H \left(H-L - \frac{H}{2} \right) + \frac{F + \gamma\Omega L}{4} H \right] =$$

$$= \frac{F}{E\Omega} \left(\frac{H}{4} - L \right) + \frac{\gamma\Omega L}{E} \left(\frac{H}{4} - \frac{L}{2} \right) - \frac{\gamma\Omega}{E\Omega} \left[\frac{H^2}{2} + \frac{L^2}{2} - HL - H^2 + HL + \frac{H^2}{2} \right] =$$

$$= \frac{F}{E\Omega} \left(\frac{H}{4} - L \right) + \frac{\gamma\Omega L}{E} \left(\frac{H}{4} - \frac{L}{2} \right) = \Delta L$$

se trata de un Acortamiento

EJERCICIO (sección 10) ESPECIAL TI

En la estructura articulada de la figura todas las barras excepto la 5-9 tienen 10 cm^2 de sección. El módulo de Young para todas ellas es $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Se pide:

- Indicar razonadamente si la estructura es isostática.
- Calcular los esfuerzos en todas las barras.
- Determinar el valor mínimo de la sección de la barra 5-9 para que el movimiento horizontal del nudo 1 no sea mayor de 5 mm .

a) Calcular el grado de hiperestaticidad

$$GH = (r + b) - 2n \quad \begin{matrix} r = \text{reac. ext.} \\ b = \text{n}^\circ \text{ barras} \\ n = \text{n}^\circ \text{ nudos} \end{matrix}$$

$$GH = 4 + 14 - 18 = 0 \rightarrow \text{Sistema Isostático}$$

b) Esfuerzos

1º Calcular reacciones en los apoyos aplicando cond. de eq. estático

$$\sum F_H = 0: H_8 + H_9 - 5 = 0 \text{ (KN)}$$

$$\sum F_V = 0: V_8 + V_9 = 0; V_8 = -V_9$$

$$\sum M_9 = 0: -V_8 \cdot 8 + 5 \cdot 16 = 0 \text{ (KN.m)}$$

$$V_8 = \frac{5 \cdot 16}{8} = 10 \text{ KN}$$

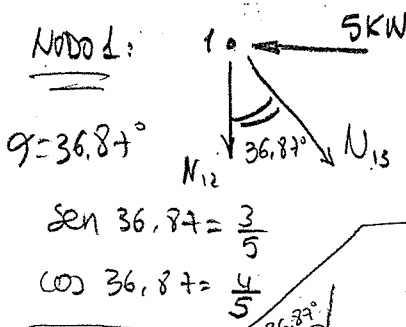
$$V_9 = -10 \text{ KN}$$

Nudo 9: $H_9 = -V_9$
 $H_9 = 10 \text{ KN}$

$$H_8 = 5 - 10 = -5 \text{ KN}$$

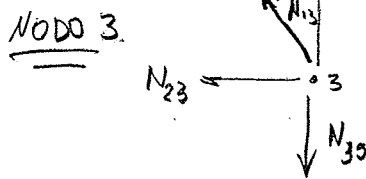
$$\begin{matrix} H_8 = -5 \text{ KN}, V_8 = 10 \text{ KN} \\ H_9 = 10 \text{ KN}, V_9 = -10 \text{ KN} \end{matrix}$$

Aplico equilibrio a cada Nudo:



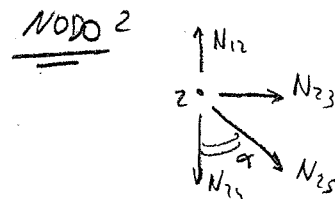
$$\sum F_H = 0 \rightarrow N_{13} \cdot \frac{3}{5} - 5 = 0, \quad N_{13} = \frac{25}{3} \text{ KN, Barra 13 a tracción}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow N_{12} + N_{13} \cdot \frac{4}{5} = 0, \quad N_{12} = -\frac{20}{3} \text{ KN, Barra 12 a compresión}$$



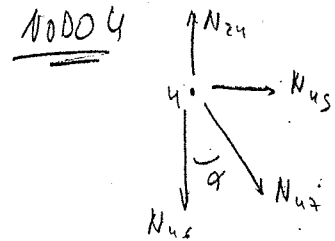
$$\sum F_H = 0 \rightarrow -N_{23} - N_{13} \cdot \frac{3}{5} = 0, \quad N_{23} = -5 \text{ KN, Barra 23 a compresión}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow N_{13} \cdot \frac{4}{5} - N_{35} = 0, \quad N_{35} = \frac{20}{3} \text{ KN, Barra 35 a tracción}$$

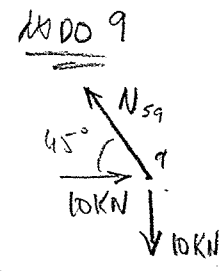


$$\sum F_H = 0 \rightarrow N_{23} + \frac{3}{5} N_{25} = 0, \quad N_{25} = \frac{25}{3} \text{ KN, Barra 25 a tracción}$$

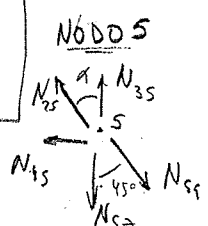
$$\sum F_V = 0 \rightarrow N_{12} - N_{24} - N_{25} \cdot \frac{4}{5} = 0, \quad N_{24} = -\frac{40}{3} \text{ KN, Barra 24 a compresión}$$



$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &\rightarrow N_{45} + \frac{3}{5} N_{47} = 0 \rightarrow 5N_{45} + 3N_{47} = 0 \quad (*) \\ \sum F_V = 0 &\rightarrow N_{24} - N_{46} - \frac{4}{5} N_{47} = 0 \rightarrow N_{46} + \frac{4}{5} N_{47} = -\frac{40}{3} \quad (**) \end{aligned}$$



$$N_{59} = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2} \text{ KN, Barra 5-9 a tracción}$$



$$\sum F_H = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} N_{59} - N_{45} - N_{25} \cdot \frac{3}{5} = 0, \quad N_{45} = 5 \text{ KN, Barra 4-5 a tracción}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow N_{35} + \frac{4}{5} N_{25} - N_{57} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{59} = 0$$

$$N_{57} = \frac{10}{3} \text{ KN, Barra 5-7 a tracción}$$

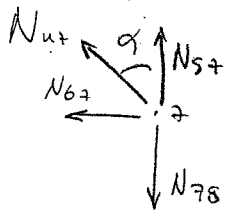
$$(*) \rightarrow N_{47} = -\frac{5}{3} N_{45}$$

$$N_{47} = -\frac{25}{3} \text{ KN, Barra 4-7 a tracción}$$

$$(**) \rightarrow N_{46} = -\frac{40}{3} - \frac{4}{5} N_{47}$$

$$N_{46} = -\frac{20}{3} \text{ KN, Barra 4-6 a compresión}$$

NODO 7



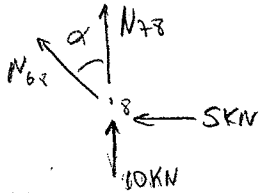
$$\sum F_H = 0 \rightarrow -\frac{3}{5} N_{47} - N_{67} = 0;$$

$$N_{67} = +5 \text{ KN}; \text{ Barra 6-7 a tracci6n}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow N_{57} + \frac{4}{5} N_{47} - N_{78} = 0;$$

$$N_{78} = \frac{-10}{3} \text{ KN} \text{ Barra 7-8 a compresi6n}$$

NODO 8



$$\sum F_H = 0$$

$$-5 - \frac{3}{5} N_{68} = 0;$$

$$N_{68} = \frac{-25}{3} \text{ KN}; \text{ Barra 6-8 a compresi6n}$$

$$\sum F_V = 0: 10 + \left(\frac{-10}{3}\right) + \left(\frac{-25}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} = 0 \checkmark$$

Ⓒ Valor m6nimo de secci6n de barra 5-9 : A_{59}

$$\text{CIN: } S_H^1 \leq 0,005 \text{ m}$$

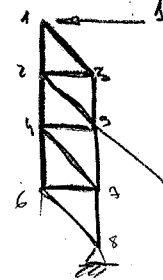
Teorema de Castigliano (Ver pag 8-lec 10)

Aplicamos $S_H^1 = \sum \frac{N_i(F) \cdot N_i(1)}{EA_i} l_i$

$$N_i(F) = 5N_i(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_H^1 = \sum \frac{N_i \cdot \frac{N_i}{5}}{EA_i} l_i =$$

SIST AUX



$$A_i = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ excepto}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$= \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 10^8} \cdot \left(\left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{10^{-3}} + \left(\frac{25}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{10^{-3}} + 5^2 \cdot \frac{3}{10^{-3}} + \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{10^{-3}} + \left(\frac{25}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{10^{-3}} + \left(\frac{40}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{10^{-3}} + 5^2 \cdot \frac{3}{10^{-3}} + \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{10^{-3}} + \left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{10^{-3}} + \left(\frac{25}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{10^{-3}} + 5^2 \cdot \frac{3}{10^{-3}} + \left(\frac{25}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{10^{-3}} + \left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{10^{-3}} + (10\sqrt{2})^2 \cdot \frac{8\sqrt{2}}{A_{59}} \right) = 0,005$$

$$2,9472 \cdot 10^{-3} + \frac{10^2 \cdot 2}{10^9} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{A_{59}} = 0,005$$

$$\frac{200}{10^9} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{A_{59}} = 2,0527 \cdot 10^{-3}, \quad A_{59} = \frac{200 \cdot 8\sqrt{2}}{2,0527 \cdot 10^6} = 11,02 \text{ cm}^2$$

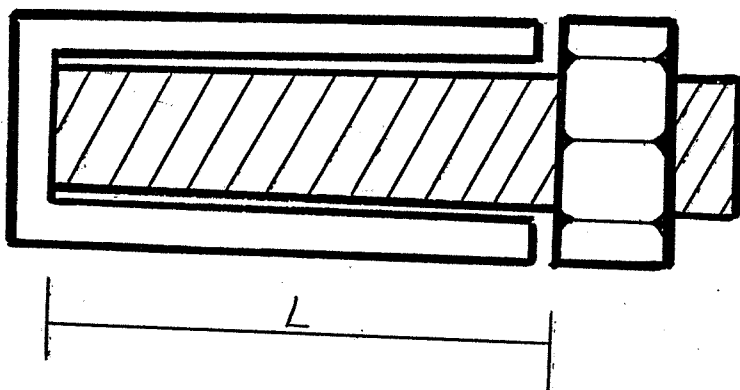
Conjunto: Cilindro de cobre + tornillo de acero en su interior (L)

En su extremo inicial el tornillo esta unido al cilindro mientras que en el final esta roscado externamente a una tuerca con paso de rosca (longitud que avanza por cada vuelta completa) p

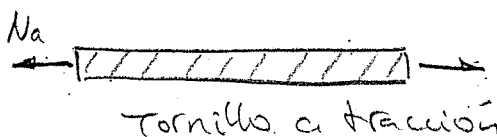
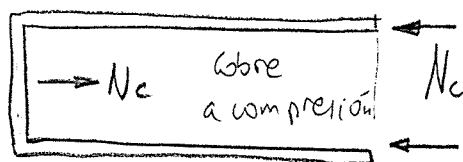
Se pide:

- 1) Tensiones en cilindro y tornillo después de dar n vueltas de apriete a la tuerca
- 2) Si en estas condiciones se produce un salto térmico ΔT en todo el conjunto, determinar las nuevas tensiones que se establecerán

Datos: Cobre: σ_c τ_c E_c
 Acero: σ_a τ_a E_a



① Desplazamiento por giro de tuerca = $n \cdot p$



$$N_a = -N_c = N$$

$$n \cdot p = \Delta L_{\text{torn}} - (-\Delta L_{\text{cobre}}) = E_a L - E_c L = \frac{\sigma_a}{E_a} L - \frac{\sigma_c}{E_c} L = \frac{N}{\sigma_a E_a} L - \frac{(-N)}{\sigma_c E_c} L$$

$$n \cdot p = N L \left(\frac{\sigma_a E_a + \sigma_c E_c}{\sigma_a \sigma_c E_a E_c} \right); K = \sigma_a E_a + \sigma_c E_c$$

$$N = \frac{n \cdot p}{L} \left(\frac{\sigma_a \sigma_c E_a E_c}{K} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_a = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{n \cdot p}{L} \frac{\sigma_c E_a E_c}{K} \\ \sigma_c = \frac{-N}{\sigma_c} = -\frac{n \cdot p}{L} \frac{\sigma_a E_a E_c}{K} \end{array} \right.$$

b) Se produce $\Delta T = T$

suponemos que no hay apriete de fuerza, sólo salto térmico

De nuevo $N_a = -N_c = N$

$$\Delta L_a = \epsilon_a L + \alpha T L = \frac{N}{R_a E_a} L + \alpha_a T L$$

$$\Delta L_c = \epsilon_c L + \alpha T L = \frac{-N}{R_c E_c} L + \alpha_c T L$$

$$\Delta L_a = \Delta L_c$$

$$\frac{N}{R_a E_a} L + \alpha_a T L = \frac{-N}{R_c E_c} L + \alpha_c T L$$

$$\Rightarrow N \left(\frac{L}{R_a E_a} + \frac{L}{R_c E_c} \right) = (\alpha_c - \alpha_a) T L$$

$$N = (\alpha_c - \alpha_a) T \frac{R_a E_a + R_c E_c}{\frac{1}{R_a E_a} + \frac{1}{R_c E_c}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_a = \frac{N}{R_a} = (\alpha_c - \alpha_a) T \frac{E_a R_c E_c}{K} \\ \sigma_c = \frac{-N}{R_c} = -(\alpha_c - \alpha_a) T \frac{E_a R_a E_c}{K} \end{cases}$$

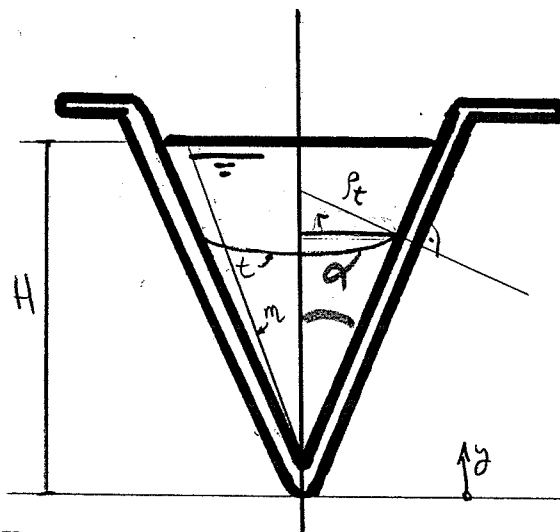
Por tanto, la resultante de tensiones si se produce salto térmico y apriete de fuerza será

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{E_a R_c E_c}{K} \left(\frac{N_P}{L} + (\alpha_c - \alpha_a) T \right) \\ \sigma_c = \frac{E_a R_a E_c}{K} \left((\alpha_a - \alpha_c) T - \frac{N_P}{L} \right) \end{cases}$$

PROBLEMA Lección 11 ESPECIAL T1

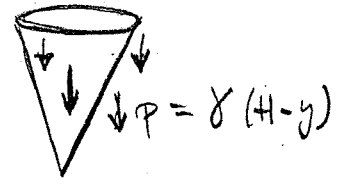
El depósito de la figura, de forma cónica y semiángulo α , contiene un fluido de peso específico γ , siendo H la profundidad máxima se pide

- 1) Calcular las tensiones de membrana en cualquier punto del depósito
- 2) Calcular el valor de la tensión máxima y dónde tiene lugar



1

① Familias de curvas t, m $\left\{ \begin{array}{l} P_t = r / \cos \varphi, \quad t \varphi = \frac{r}{2} \\ P_m = \infty \end{array} \right.$

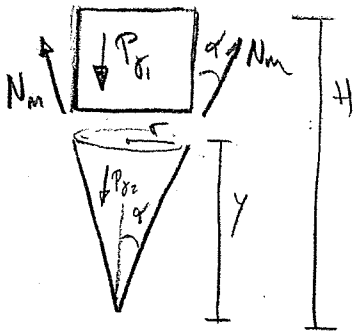


② Laplace $\rightarrow \frac{N_m}{\infty} + \frac{N_t}{y \tan \varphi} \cos \varphi = P$

$$N_t = \gamma(H-y) \frac{y \tan \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma(H-y) y \tan \varphi}{e \cos \varphi}, \quad e = \text{espesor}$$

Fuerza Meridiana



Equilibrio en la dirección del eje de revolución

$$N_m \cos \varphi \cdot 2\pi r = \gamma(H-y) \pi r^2 + \frac{1}{3} \pi r^2 y \gamma$$

$$N_m \cos \varphi 2\pi y \tan \varphi = \gamma(H-y) \pi y^2 \tan^2 \varphi + \frac{1}{3} \pi y^2 \tan^2 \varphi y$$

$$N_m = \frac{\gamma \tan \varphi}{2 \cos \varphi} y \left(H - \frac{2}{3} y \right); \quad \sigma_m = \frac{\gamma \tan \varphi}{2 e \cos \varphi} y \left(H - \frac{2}{3} y \right)$$

$$y = H \rightarrow N_m = \frac{\gamma \tan \varphi}{2 \cos \varphi} \frac{H^2}{3}, \quad \sigma_m = \frac{N_m}{e}$$

$$y = 0 \rightarrow N_m = 0; \quad \sigma_m = 0$$

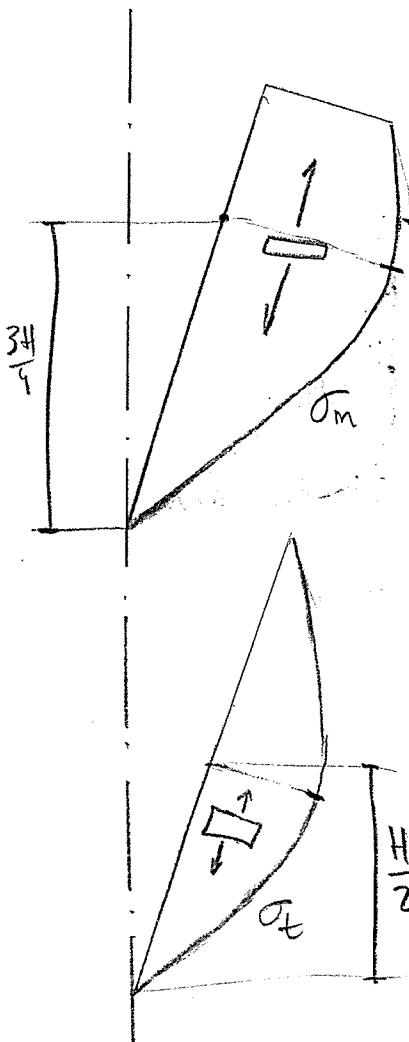
$$\sigma_{m \max} \rightarrow \frac{d\sigma_m}{dy} = 0 \rightarrow \frac{\gamma \tan \varphi}{2 e \cos \varphi} \left(H - \frac{4}{3} y \right) = 0, \quad y = \frac{3H}{4}$$

$$y = H \rightarrow N_t = 0 \rightarrow \sigma_t = 0$$

$$y = 0 \rightarrow N_t = 0 \rightarrow \sigma_t = 0$$

$$\sigma_{t \max} \rightarrow \frac{d\sigma_t}{dy} = 0 \rightarrow \frac{\gamma \tan \varphi}{e \cos \varphi} (H - 2y) = 0$$

$$\sigma_{t \max} \Rightarrow y = \frac{H}{2}$$

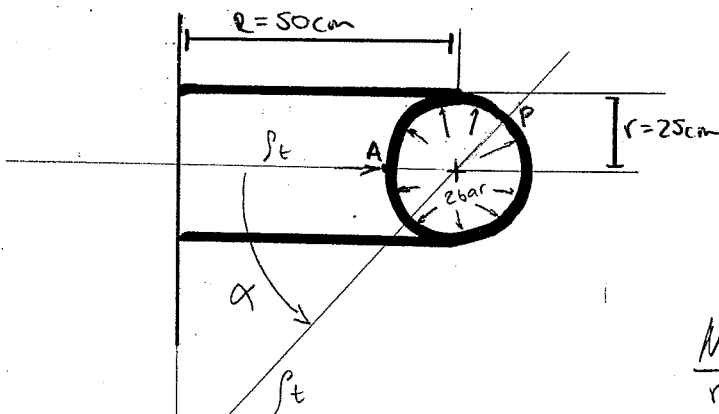


$$\sigma_{tmax} = \sigma_t \left(y = \frac{H}{2} \right) = \frac{r t \varphi}{e \cos \varphi} \frac{H^2}{4}$$

$$\sigma_{max}^m = \sigma_m \left(y = \frac{3H}{4} \right) = \frac{r t \varphi}{2 e \cos \varphi} \frac{3H^2}{8} = \frac{3 r t \varphi H^2}{16 e \cos \varphi}$$

EJERCICIO

Un neumático con las dimensiones indicadas en la figura está sometido a una presión interna de 2 bar. Si el espesor e es de 2.5 mm, calcular las tensiones en los puntos más cercanos al eje de revolución.



En P

$$\begin{aligned} \sigma_m &= r \\ \sigma_t &= r + \frac{R}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

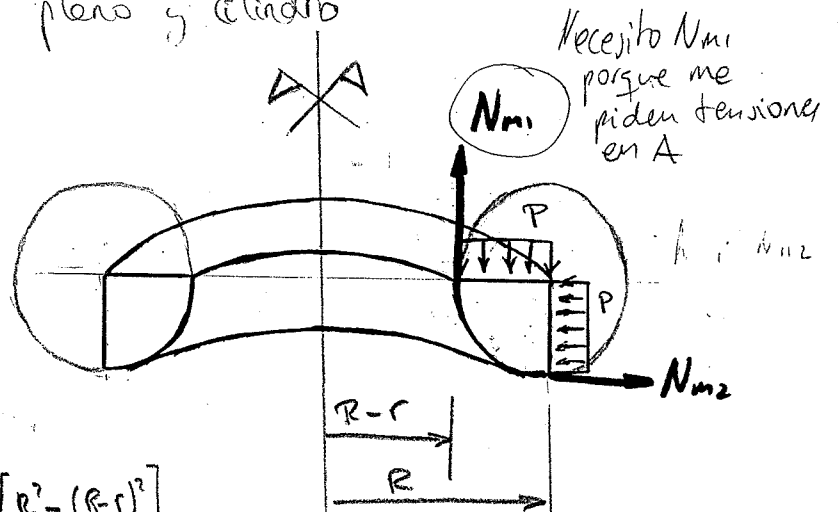
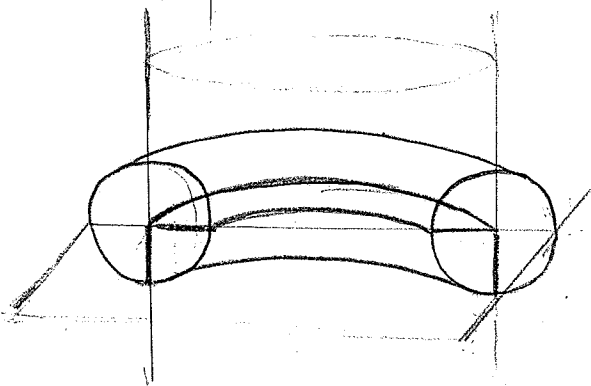
En A

$$\begin{aligned} \sigma_m &= r \\ \sigma_t &= r - R \end{aligned}$$

$$\frac{N_m}{r} + \frac{N_t}{r + \frac{R}{\cos \varphi}} = P$$

$$\frac{N_m}{r} + \frac{N_t}{r - R} = P$$

Corto el tubo por plano y cilindro



$$\sum F_r = 0 \rightarrow N_{m1} 2\pi(R-r) = P [\pi(R^2 - (R-r)^2)]$$

$$N_{m1} = \frac{P r (2R - r)}{2(R - r)}$$

$$\sigma_n = \frac{N_{m1}}{e} = \frac{0.2 \cdot 250 (2 \cdot 500 - 250)}{2 (500 - 250) \cdot 2.5} = 30 \text{ MPa}$$

Toda a
MPa, N, mm

$$N_t = \left(P - \frac{N_m}{r} \right) (r - R)$$

$$\sigma_t = \left(\frac{P}{e} - \frac{\sigma_m}{r} \right) (r - R)$$

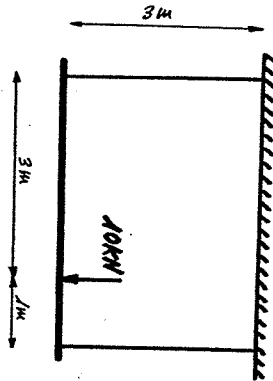
$$\sigma_t = \left(\frac{0.2}{2.5} - \frac{30}{250} \right) (250 - 500)$$

$$\sigma_t = 10 \text{ MPa}$$

PROBLEMAS DE RESISTENCIA DE MATERIALES
MÓDULO 3: TRACCIÓN
CURSO 2012-13

3.1.- Una viga indeformable de longitud 4 m, de peso despreciable, está suspendida por dos hilos verticales de 3 m de longitud. La viga está cargada con un peso, situado a 3 m del hilo de la izquierda. Sabiendo que el hilo de la izquierda es de aluminio de 25 mm² de sección y que el de la derecha es de acero, de 64 mm² de sección, se pide:

- Determinar la tensión en cada uno de los hilos.
- Calcular el alargamiento de cada hilo.

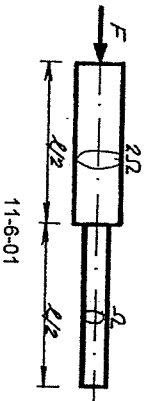


Datos: $E_{\text{acero}} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ $E_{\text{aluminio}} = 0,6 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

3.2.- Dos hilos metálicos de la misma sección, uno de acero y otro de aluminio, se cuelgan independientemente en posición vertical. Hallar la longitud máxima compatible con la resistencia del material en ambos casos.

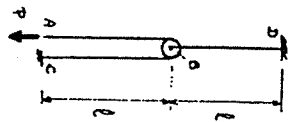
Datos:	Acero	Aluminio
Tensión de rotura, σ_r (MPa)	400	180
Peso específico, γ (kp/dm ³)	7,8	2,7

3.3.- La barra de la figura está sometida a una aceleración constante producida por la actuación de la fuerza F en su extremo. Determinar la ley de esfuerzos normales y dibujar el correspondiente diagrama.



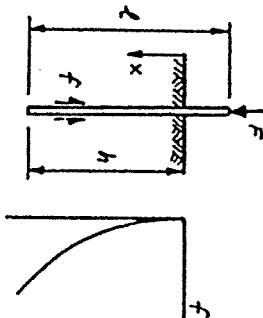
3.4.- Se considera el sistema indicado en la figura formado por dos cables DB y CBA, y una polea cuyo radio es despreciable respecto a la longitud l del cable DB.

Sabiendo que los cables tienen iguales las áreas Ω de las secciones rectas, así como que son del mismo material, de módulo de elasticidad E , calcular el descenso del extremo A del cable cuando se aplica en él una carga P .



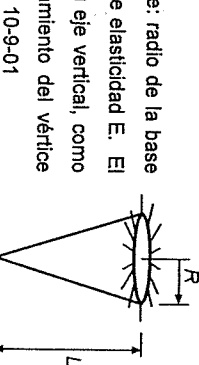
2-9-93

3.5.- Un pilote de hormigón de sección constante Ω y longitud l , ha sido introducido verticalmente en un terreno arcilloso hasta una profundidad h . El pilote soporta una carga F en su extremo superior, la cual es equilibrada en su totalidad por el rozamiento con el terreno cuyo efecto es una fuerza por unidad de longitud que varía cuadráticamente con la profundidad: $f = kx^2$. Suponiendo que la rigidez del hormigón es E , se pide:



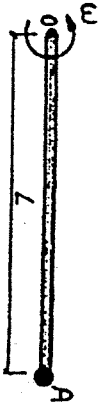
- Relación que debe existir entre h y F en función del parámetro k .
- Diagrama de esfuerzos normales en el pilote, obteniendo su expresión analítica.
- Acorreamiento total del pilote.

3.6.- Un sólido elástico de forma cónica tiene: radio de la base R ; longitud L ; peso específico γ ; y módulo de elasticidad E . El cono está empotrado por su base y tiene su eje vertical, como se indica en la figura. Calcular el desplazamiento del vértice debido al propio peso.



10-9-01

3.7.- Una barra OA de longitud L , sección constante Ω y peso P_1 gira en un plano horizontal alrededor de un eje vertical fijo que pasa por su extremo O, a velocidad angular constante ω . La barra lleva soldada en su extremo A una bola de peso P y radio despreciable.

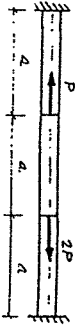


Conociendo el módulo de elasticidad E de la barra, se pide:

- Hallar la ley de distribución de tensiones normales en las secciones de la barra en función de la distancia r al eje de giro.
- Calcular el alargamiento experimentado por la barra.

10-6-97

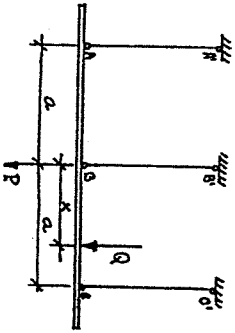
3.8.- Para la barra de la figura, de longitud L , módulo de elasticidad E , sección constante Ω y empotrada por sus dos extremos A y B, se pide:



- Reacciones en los apoyos y diagrama de esfuerzos normales.
- Desplazamientos longitudinales de las secciones respecto de la sección A.

1-3-94

3.9.- El sistema indicado en la figura está constituido por una viga rígida de peso P sostenida por tres cables idénticos AA', BB' y CC'. Cuando se coloca en la viga una carga Q , calcular los esfuerzos normales en los cables, en función de la distancia x a su centro de gravedad.



11-2-98

3.10.- Una barra corta compuesta está formada por una barra cilíndrica de área A_1 y módulo E_1 , y un tubo de igual longitud de área A_2 y módulo E_2 . ¿Cómo se distribuirá la carga P de compresión aplicada sobre una placa rígida, como se indica en la figura?



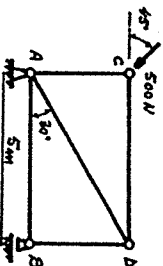
3.11.- Se desea fabricar una viga de hormigón pretensado de 3 m de longitud y sección rectangular de 10×10 cm. Para ello se tensan 4 redondos de acero de $\phi = 5$ mm, con 7500 N de carga total, en un molde con la sección deseada. Con los redondos tensos, se vierte el hormigón en el molde y se deja fraguar. Una vez endurecido el hormigón, se retira la carga de los redondos de acero, quedando el hormigón comprimido y los redondos traccionados. Calcular las tensiones finales en el hormigón y en el acero.

Datos: $E_a = 2,1 \cdot 10^5$ MPa $E_h = 1,85 \cdot 10^5$ MPa

3.12.- Un perno de acero de sección A_p , módulo de Young E_a y longitud L atraviesa un tubo de fundición (sección A_t , módulo de Young E_t , longitud L) como se representa en la figura. El paso de rosca es p . Admitiendo que ambos se comportan elásticamente y que no existen rozamientos, calcular la tensión en el perno y en el tubo si la tuerca se aprieta un cuarto de vuelta una vez conseguido el contacto.



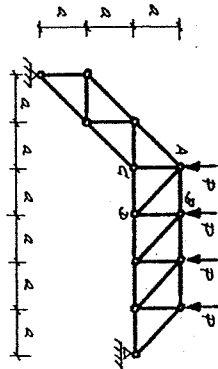
3.13.- Hallar los esfuerzos en las barras del sistema articulado de la figura.



2-9-94

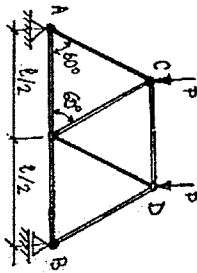


3.14.- En el sistema de nudos articulados de la figura, se pide determinar los esfuerzos en las barras AB, CD y AD.



4-3-99

3.15.- Calcular los valores de los esfuerzos, con su signo, de todas las barras del sistema plano de nudos articulados de la figura.



8-9-98

3.16.- Calcular el estado tensional creado en las paredes de un depósito esférico de radio R y espesor e pequeño y constante, sometido en su interior a presión p constante

3.17.- Calcular el estado tensional creado en las paredes de un depósito cilíndrico de radio de la base R , longitud de la generatriz h y espesor e pequeño y constante, sometido en su interior a presión p constante

3.18.- Se tiene un depósito cónico abierto de pared delgada de espesor constante suspendido de su borde superior y lleno de agua hasta una altura h . Calcular el estado tensional creado en las paredes del depósito (se desprecia el peso propio de éste).

RESISTENCIA DE MATERIALES
PROBLEMAS GRUPO T1, CURSO 2012-2013

MÓDULO 3. TRACCIÓN

PROBLEMA 3.1

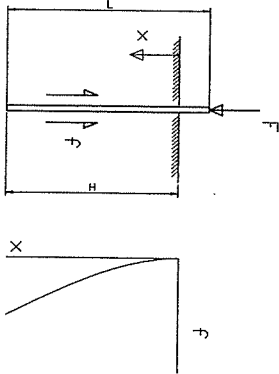
Helio
en
clase

Un pilote de hormigón, de sección constante Ω y longitud L , ha sido introducido verticalmente en un terreno arcilloso hasta una profundidad H . El pilote soporta una carga F en su extremo superior, que junto con su peso propio es equilibrada en su totalidad por el rozamiento con el terreno, cuyo efecto es una fuerza f por unidad de longitud que varía cuadráticamente con la profundidad:
 $f = kx^2$

Se pide:

- 1) Relación que debe existir entre H y F en función del parámetro k .
- 2) Expresión analítica y diagrama de esfuerzos normales del pilote.
- 3) Profundidad a la que el esfuerzo normal es máximo
- 4) Acorramiento total del pilote.

Datos: E y γ



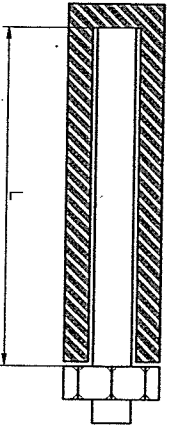
PROBLEMA 3.2

Se considera el conjunto formado por un cilindro de cobre y un tornillo de acero alojado en su interior de longitud L . En su extremo inicial el tornillo está unido al cilindro mientras que en su extremo final está roscado externamente a una tuerca con paso de rosca (longitud que avanza la tuerca por cada vuelta completa) igual a p . Se pide:

- 1) Tensiones en el cilindro y en el tornillo después de dar n vueltas de apriete a la tuerca.
- 2) Si en estas condiciones se produce un salto térmico T en todo el conjunto, determinar las nuevas tensiones que se establecerán.

Datos:

Cobre: Ω_c	α_c	E_c
Acero: Ω_a	α_a	E_a



PROBLEMA 3.3

Un anillo delgado de acero 200 mm de diámetro, con una sección de 6 mm de espesor y 20 mm de anchura se ha calentado 150 °C por encima de la temperatura ambiente. En estas condiciones el anillo se ha ajustado sin holgura sobre un eje cilíndrico macizo que se considera infinitamente rígido.

Se pide:

- 1) Determinar la tensión que se producirá en el anillo al enfriarse
- 2) Determinar la fuerza necesaria para sacar el anillo del eje.

Datos:

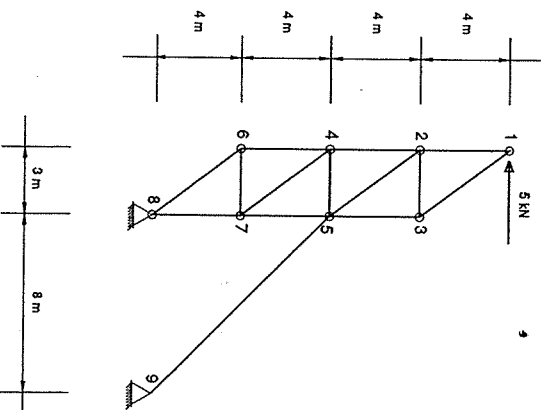
Acero:	$\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
Coefficiente de rozamiento acero-eje:	$\mu = 0,3$	

PROBLEMA 3.4

En la estructura articulada de la figura todas las barras excepto la 7-11 tienen 10 cm² de sección. El módulo de Young es para todas ellas $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Se pide:

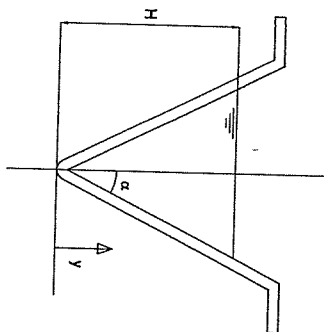
- a) Indicar razonadamente si la estructura es isostática
- b) Calcular los esfuerzos en todas las barras
- c) Determinar el valor mínimo de la sección de la barra 5-9 para que el movimiento horizontal del nudo 1 no sea mayor de 5 mm.



PROBLEMA 3.5

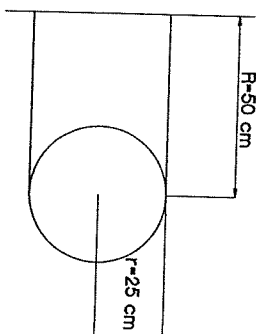
El depósito de la figura de forma cónica y semicírculo α contiene un fluido de peso específico γ , siendo H la profundidad máxima. Se pide:

- 1) Calcular las tensiones de membrana en cualquier punto del depósito.
- 2) Calcular el valor de la tensión máxima y dónde tiene lugar.



PROBLEMA 3.6

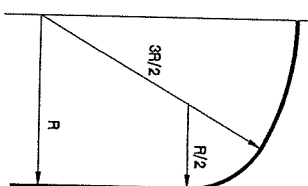
Un neumático con las dimensiones indicadas en la figura está sometido a una presión interna de 2 bar. Si el espesor es de 2,5 mm calcular las tensiones en los puntos más cercanos al eje de revolución.



PROBLEMA 3.7

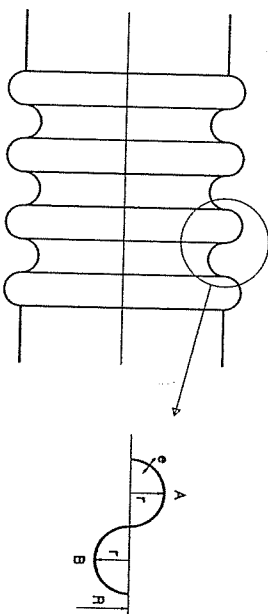
Un recipiente a presión tiene el cuerpo cilíndrico con radio $R = 2$ m, y los fondos toriénticos, con $R/2$ de radio en la parte tórica y $3R/2$ en la parte esférica. El recipiente está sometido a una presión interna $p = 5$ bar. Considerando exclusivamente las tensiones de membrana se pide:

- 1) Determinar los espesores mínimos del recipiente.
- 2) Representar gráficamente los espesores sobre un meridiano. El dimensionamiento debe hacerse aplicando el criterio de Tresca, siendo la tensión admisible del material $\sigma_{adm} = 100$ MPa.



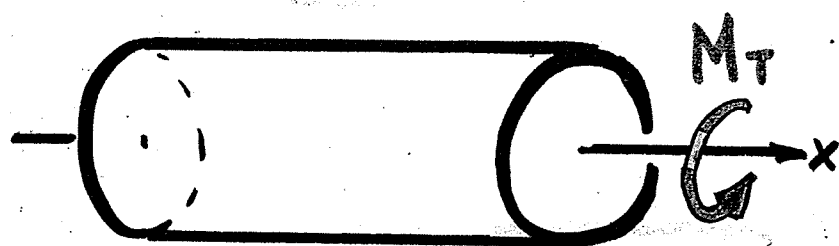
PROBLEMA 3.8

La figura representa la sección longitudinal de una junta de expansión montada en una tubería de radio medio R . Dicha junta tiene forma de fuelle con volutas semicirculares de radio medio r y espesor e ($e \ll r$). Se pide determinar las tensiones de membrana en las secciones A y B producidas por una presión interna p .

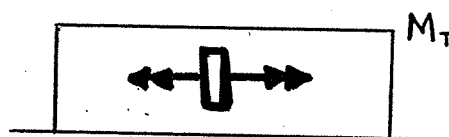


TORSIÓN

Lección 12: TEORÍA ELEMENTAL DE TORSIÓN



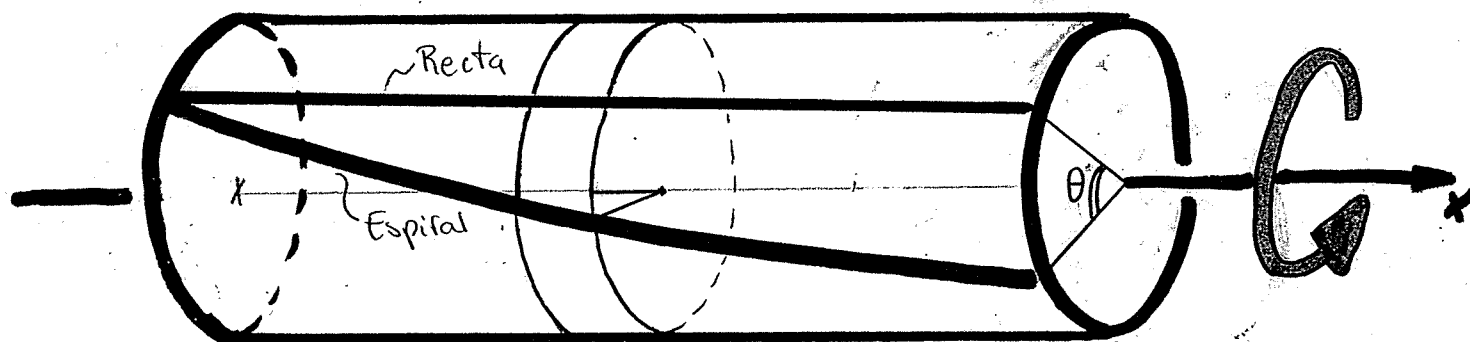
En torsión pura sólo existe momento torsor



TEORÍA ELEMENTAL: sólo válido para secciones circulares (muntas o huecas)

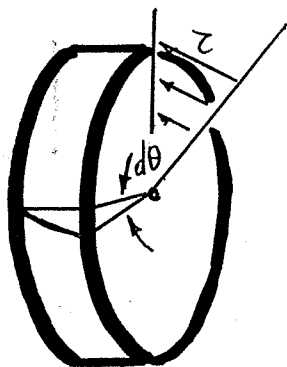
TEORÍA SAINT-VENANT: válido para cualquier sección

= TEORÍA ELEMENTAL



HIPÓTESIS SIMPLIFICADORAS:

- Las secciones planas se conservan planas (no hay alabeo)
- Sólo existe un movimiento que es el giro alrededor del eje x (θ)
- El giro por unidad de longitud es constante $\Rightarrow \theta' = \frac{d\theta}{dx} = \alpha$



DEFORMACIONES

Tomamos un sistema de referencia en cilindricos (r, θ, x)

$$\epsilon_x = 0$$

$$\gamma_{xr} = 0$$

$$\epsilon_r = 0$$

$$\gamma_{\theta r} = 0$$

$$\epsilon_\theta = 0$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{r d\theta}{dx} = \gamma \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{r d\theta}{dx} = r \theta'$$

TENSIONES

$$\sigma_x = 0$$

$$\tau_{xr} = 0$$

$$\sigma_r = 0$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_\theta = 0$$

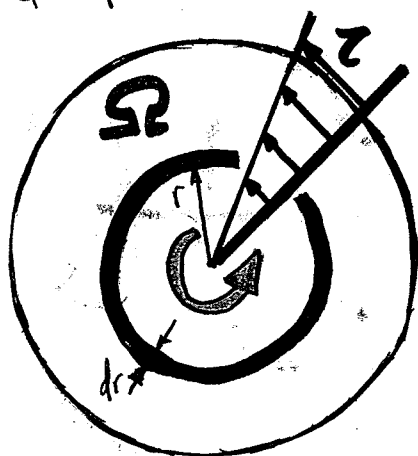
$$\tau_{x\theta} = G \gamma_{x\theta}$$

$$\Rightarrow$$

$$\tau = G r \frac{d\theta}{dx} = G r \theta'$$

$$\tau_{max} = G \theta' R$$

Las tensiones son tangenciales en las caras de la sección transversal y van en dirección circunferencial dando lugar a un giro igual al que produce el momento.



$$M_T = \int \tau dr \cdot r = \int_0^R G \theta' r^2 dr$$

$$M_T = G \theta' \int_0^R r^2 dr$$

se define el momento polar de inercia como $I_0 = \int_0^R r^2 dr$

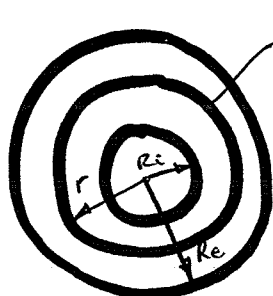
$$\Rightarrow M_T = G \theta' I_0$$

Como $G \theta' = \frac{M_T}{I_0}$

$$G \theta' = \frac{\tau}{r}$$

$$\tau = \frac{M_T}{I_0} r$$

CALCULO DEL I_0

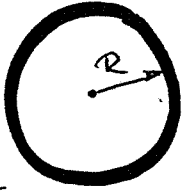


$$dA = 2\pi r dr$$

$$I_0 = \int r^2 dA = \int_{R_i}^{R_e} r^2 2\pi r dr = 2\pi \frac{1}{4} (R_e^4 - R_i^4)$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$$

MÓDULO RESISTENTE A TORSIÓN W_T



$$I_o = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$\tau_{max} = G \theta' R = \frac{M_T}{I_o} R = \frac{M_T}{W_T}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$$

Se define el módulo resistente a torsión como

$$W_T = \frac{I_o}{R} = \frac{\pi}{2} R^3$$

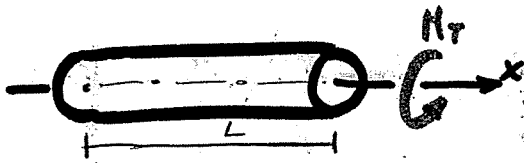
$$[W_T] = \text{mm}^2$$

DESPLAZAMIENTOS

$$\theta' = \frac{M_T}{G I_o}$$

$$d\theta = \frac{M_T}{G I_o} dx$$

$$\theta = \theta_o + \int_0^L \frac{M_T}{G I_o} dx$$



Caso M_T constante a lo largo en el sólido

$$\Delta\theta = \sum_i \frac{M_{Ti}}{G I_o} L_i$$

Y si $M_T = \text{cte}$ en todo el sólido

$$\Delta\theta = \frac{M_T}{G I_o} L$$

POTENCIAL INTERNO

$$dU = \frac{1}{2} \tau \gamma dV = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dV = \frac{1}{2G} \left(\frac{M_T}{I_o} r \right)^2 dV$$

$M_T \text{ cte}$

$$U = \int_V \frac{1}{2G} \left(\frac{M_T r}{I_o} \right)^2 \frac{dV}{dV} = L \int_0^R \frac{1}{2G} \left(\frac{M_T r}{I_o} \right)^2 2\pi r dr = \frac{M_T^2 L}{2G I_o^2} \int_0^R r^2 dr =$$

$$= \frac{M_T^2 L}{2G I_o^2} I_o = \frac{M_T^2}{2G I_o} L$$

Por tanto

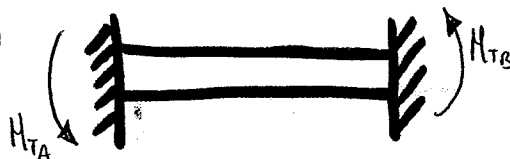
$$M_T = \text{cte} \rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{M_T^2}{G I_o} L$$

$$M_T \neq \text{cte} \rightarrow U = \frac{1}{2} \int_L \frac{M_T^2}{G I_o} dx$$

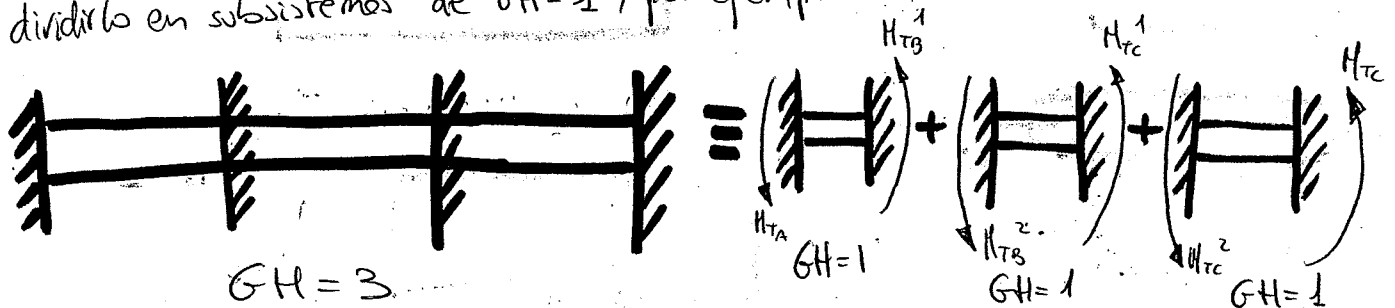
= Caso hiperestático

En sistemas isostáticos $(GH=0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \sum M_x = 0 \rightarrow \text{ecuación} \\ 1 \text{ incógnita} \Rightarrow 1 \text{ GRADO DE LIBERTAD} \end{array} \right.$

En sistemas hiperestáticos como el del ejemplo

$(GH=1)$  No faltará una ecuación

Y si el sistema es hiperestático, con $GH > 1$ siempre podremos dividirlo en subsistemas de $GH=1$, por ejemplo:



Para calcular la ecuación adicional aplicaremos
CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD EN GIROS

$$\Delta\theta = \int_0^L \frac{M_x}{GI_0} dx$$

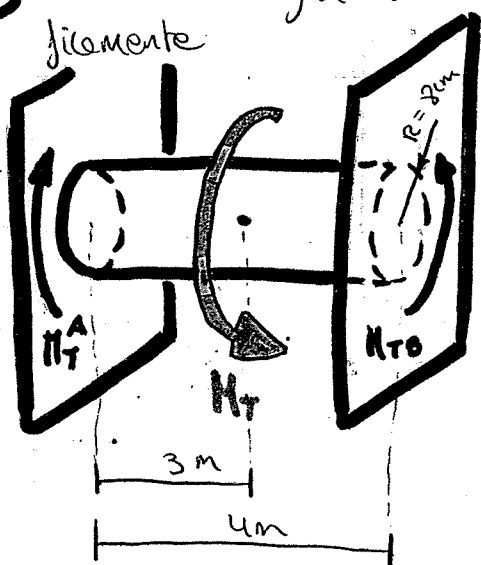
NOTA!! El problema térmico, en el que se da un salto de temperatura ΔT no produce torsión

EJERCICIO ESPECIAL 1

Una pieza recta de sección circular de radio 8 cm y longitud 4 m tiene los extremos empotrados. Está sometido a una torsión pura mediante la aplicación de un par externo sobre una sección situada a 3 m de uno de los extremos. Se pide:

DATOS: $\tau_{adm} = 100 \text{ MPa}$
 $G = 80000 \text{ MPa}$

- 1) Dibujar el diagrama de momentos torsores.
- 2) Calcular el valor máximo que puede alcanzar el par aplicado.
- 3) Determinar la ley de variación del giro de las secciones, representándola gráficamente.



El sistema es hiperestático

$$G + 1 = 1$$

Ecuación por equilibrio estático

$$\sum M = 0 \rightarrow M_{TA} + M_{TB} + M_T = 0$$

Ecuación adicional: Cond. comp. en giros

$$\Delta\theta_{AB} = \int_0^L \frac{M_T}{G I_0} dx = 0$$

Ley M_T : $\Delta\theta_{AB} = 0 = \int_0^3 \frac{-M_{TA}}{G I_0} dx + \int_3^4 \frac{M_{TB}}{G I_0} dx$; $-M_{TA} \cdot 3 + M_{TB} \cdot (4-3) = 0$

$$M_{TB} = +3 M_{TA}$$

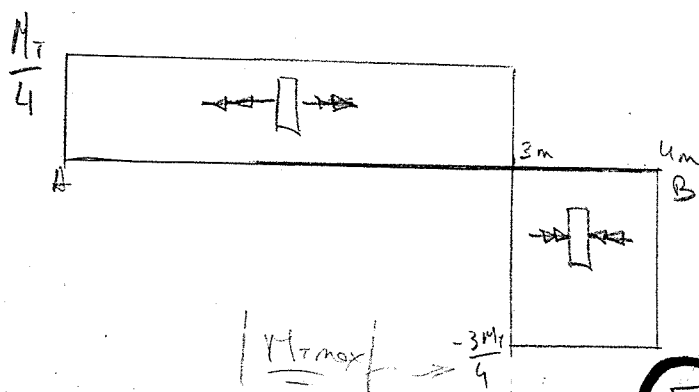
$$M_T + M_{TA} + M_{TB} = 0$$

$$M_T = -(M_{TA} + M_{TB}) = -4 M_{TA} = -\frac{4}{3} M_{TB}$$

$$M_{TA} = -\frac{M_T}{4}$$

$$M_{TB} = -\frac{3}{4} M_T$$

Diagrama M_T



APARTADOS 2 y 3
 DESPUES DE 4.2

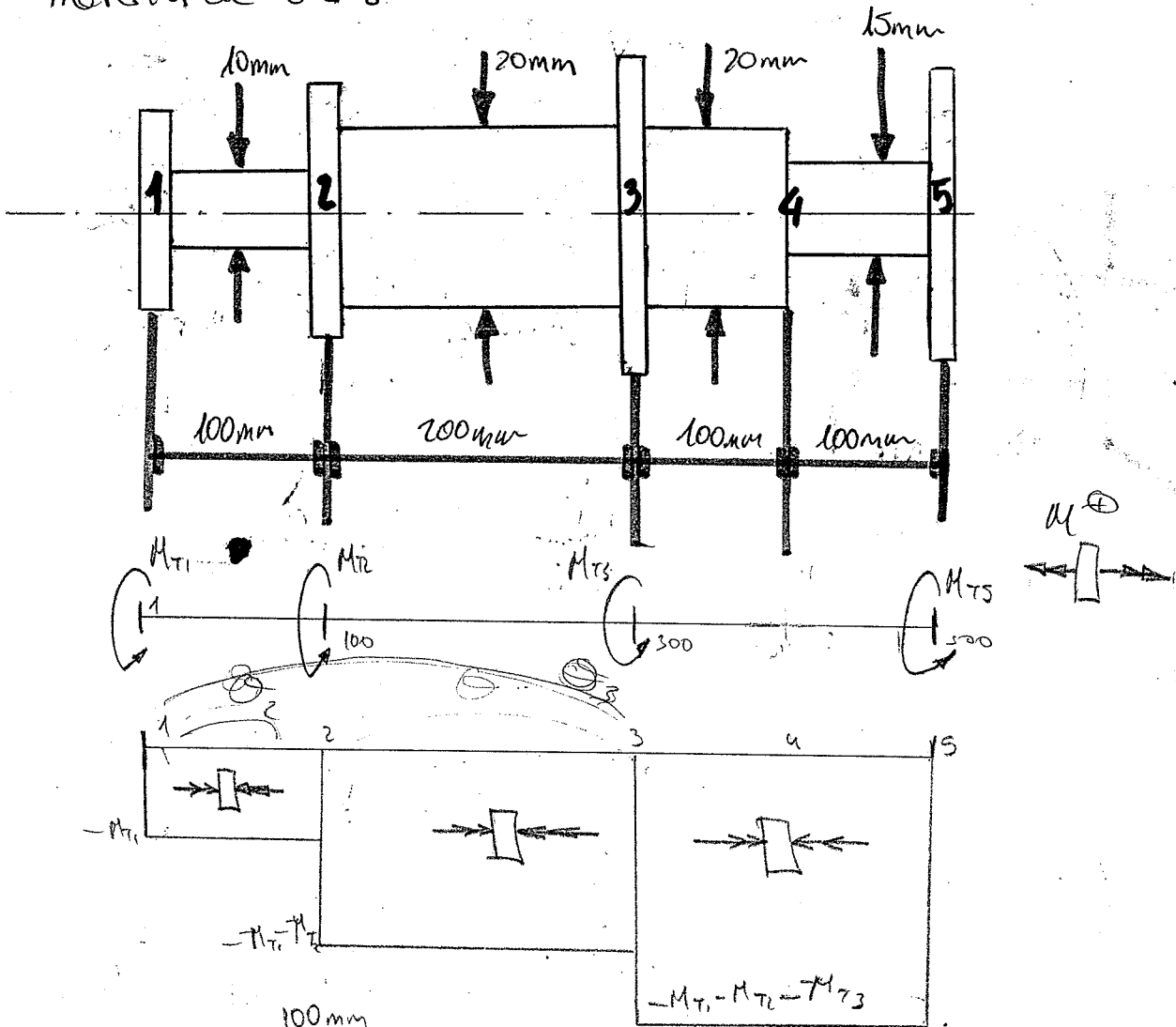
Exercicio

COMUNES

En el árbol de la figura hay montados 4 poleas (1,2,3,5) de ancho de eje previsible. Se han medido los siguientes giros, todos ellos respecto a la sección 1.

$$\theta_2 = -0,002 \text{ rad} \quad \theta_3 = 0,006 \text{ rad} \quad \theta_5 = 0,008 \text{ rad}$$

Dibujar el diagrama de M_T si el árbol esta construido con un material de $G = 80000 \text{ MPa}$



$$\theta_2 = -0,002 = \int_0^{100} \frac{-M_{T1}}{G I_p} dx = \frac{-M_{T1}}{G R^4 \frac{\pi}{2}} 100 = \frac{-M_{T1} \cdot 2 \cdot 100}{G \pi 5^4} = -0,002$$

$$M_{T1} = 1520,8 \text{ Nmm}$$

$$\theta_3 = 0,006 \text{ rad} = \theta_2 + \int_{100}^{300} \frac{-M_{T1} + M_{T2}}{G R^4 \frac{\pi}{2}} dx = -0,002 - \frac{M_{T1} + M_{T2}}{G \pi 7^4} 400 = 0,006$$

$$M_{T1} + M_{T2} = -50265,5 \text{ Nmm} \rightarrow M_{T2} = -51836,3 \text{ Nmm}$$

6

PROBLEMA

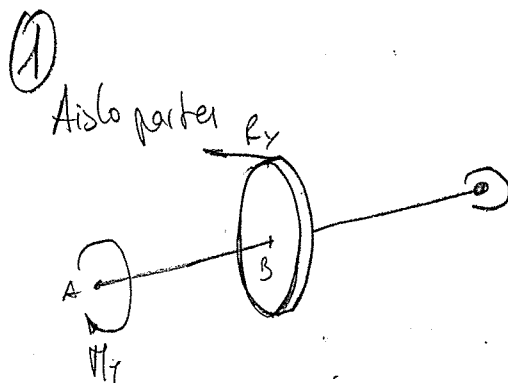
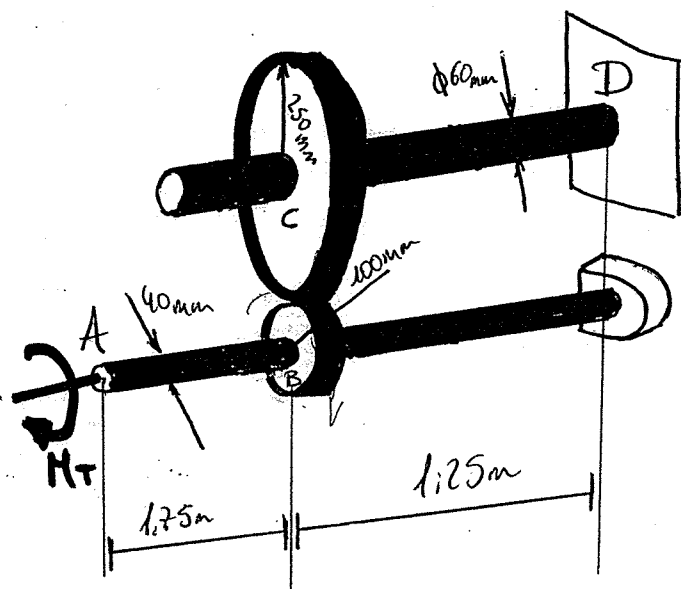
COMUNES

Dos ejes de acero $G = 77 \text{ GPa}$ de sección circular están conectados mediante rotores dentados tal y como se indica en la figura.

El eje superior está empotrado en D, mientras que el resto de apoyos permiten giro sin rozamiento del eje. Suponiendo que el momento torsor aplicado en A es $M_T = 600 \text{ Nm}$

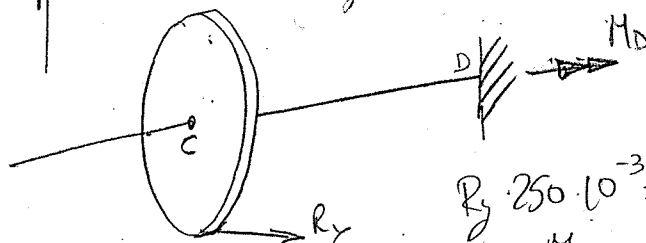
se pide

- 1 Diagramas de M_T en ambos ejes
- 2 Ángulo girado por el extremo A



$$\sum M_b = 0 \rightarrow M_T = R_y \cdot 100 \cdot 10^{-3}$$

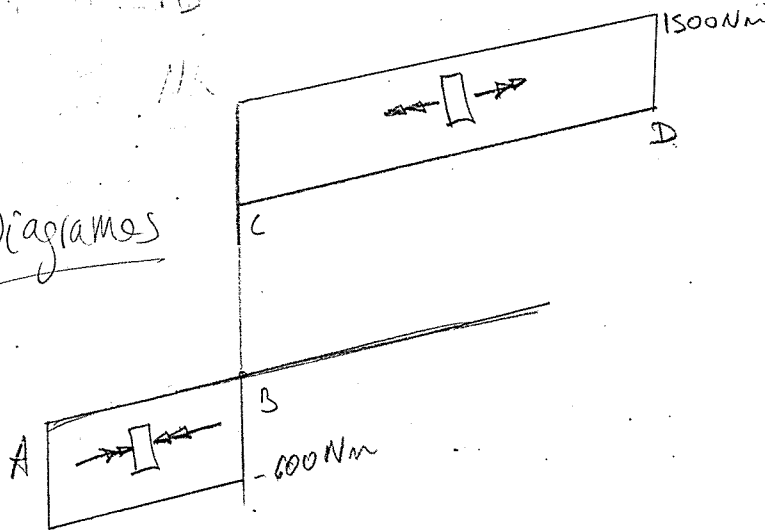
$$R_y = 6000 \text{ N}$$



$$R_y \cdot 250 \cdot 10^{-3} = M_D$$

$$M_D = 1500$$

Diagramas



$$\theta_5 = 0,008 = \theta_3 + \int_{300}^{400} \frac{-(M_{T1} + M_{T2} + M_{T3})}{G \frac{\pi}{2} 16^4} dx + \int_{400}^{500} \frac{-(M_{T1} + M_{T2} + M_{T3})}{G \frac{\pi}{2} 7,5^4} dx$$

$$0,002 = -(M_{T1} + M_{T2} + M_{T3}) \frac{2 \cdot 100}{\pi G 16^4} - (M_{T1} + M_{T2} + M_{T3}) \frac{2 \cdot 100}{G \pi 7,5^4}$$

$$M_{T1} + M_{T2} + M_{T3} = -6040,8 \rightarrow M_{T3} = 4424,7 \text{ Nmm}$$

$$M_{T5} = 6040,8 \text{ Nmm}$$

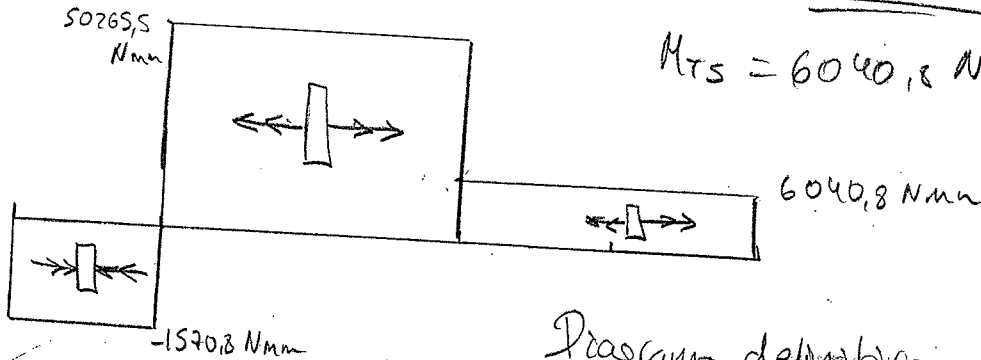


Diagrama definitivo

CONTINUACIÓN 4.1

2) Si $\tau_{adm} = 100 \text{ MPa} \rightarrow \tau_{adm} = \frac{M_{Tmax}}{I_0} R, \tau_0 = \frac{R}{2} R^4$

$$\tau_{adm} = \frac{3}{4} \frac{M_T}{\pi R^4} R, M_{Tmax} = \frac{\tau_{adm} \cdot 4 \pi R^4}{3 \cdot 2 \cdot R} = 107733029 \text{ Nmm}$$

$$M_{Tmax} = 107,2 \text{ kN.m}$$

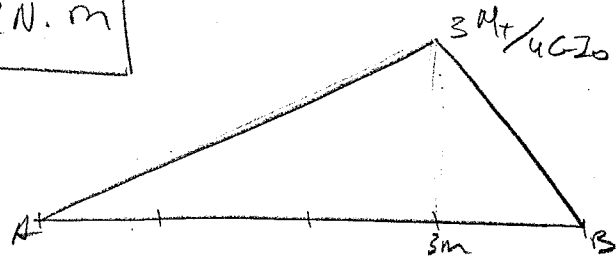
3) Ley de variación de giro

$$\Delta \theta = \int_0^x \frac{M_T(x)}{G I_0} dx$$

$$0 < x < 3m: \theta_x = \frac{M_T}{4620} x, \theta_{3m} = \frac{3}{4} \frac{M_T}{G I_0}$$

$$3m < x < 4m: \theta_x = \frac{-3}{4} \frac{M_T}{G I_0} (x-3) + \theta_{3m} = \frac{3}{4} \frac{M_T}{G I_0} (1-x+3)$$

$$\theta_x = \frac{M_T}{G I_0} \left(3 - \frac{3}{4} x \right); \theta_{4m} = 0$$



2) Giro en A

$$\theta_A = \theta_B + \int_B^A \frac{M_T(x)}{G I_0} dx \quad (*)$$

$$\theta_C = \int_D^C \frac{M_T(x)}{G I_0} dx + \phi_D \rightarrow 0$$

$$\theta_C = \frac{1500 \cdot 10^3}{77 \cdot 10^3 \frac{\pi}{2} 30^4} 1250 = 0,0191 \text{ rad}$$

Por engraneje

$$-\theta_C \cdot R_C = \theta_B \cdot R_B$$

$$\theta_B = -\frac{\theta_C R_C}{R_B} = -0,0479$$

$$(*) \theta_A = -0,0479 + \frac{(-600) \cdot 10^3}{77 \cdot 10^3 \frac{\pi}{2} 20^4} 1750 = -0,1021 \text{ rad}$$

**RESISTENCIA DE MATERIALES
PROBLEMAS GRUPO T1. CURSO 2012-2013**

MÓDULO 4. TORSIÓN

PROBLEMA 4.1

Hecho
en
clase

Una pieza recta de sección circular de radio 8 cm y longitud 4 m tiene los extremos empotrados. Está sometida a torsión pura mediante la aplicación de un par externo sobre una sección situada a 3 m de uno de los extremos. Se pide:

- 1) Dibujar el diagrama de momentos torsores
- 2) Calcular el valor máximo que puede alcanzar el par aplicado
- 3) Determinar la ley de variación del giro de las secciones, representándola gráficamente.

Datos: $\tau_{adm} = 100 \text{ MPa}$; $G = 80000 \text{ MPa}$

PROBLEMA 4.2

Un resorte de torsión está constituido por dos cilindros del mismo material unidos por su extremo. El primer cilindro es macizo, de radio R_i y longitud L_i , y se aloja sin holgura ni rozamiento en el interior del segundo que es hueco de radio exterior R_e y longitud L_e . Se pide:

- 1) Determinar la rigidez del resorte (M_T/θ)
- 2) Relación que debe existir entre R_e y R_i para que los dos cilindros trabajen con la misma tensión.

Dato: G



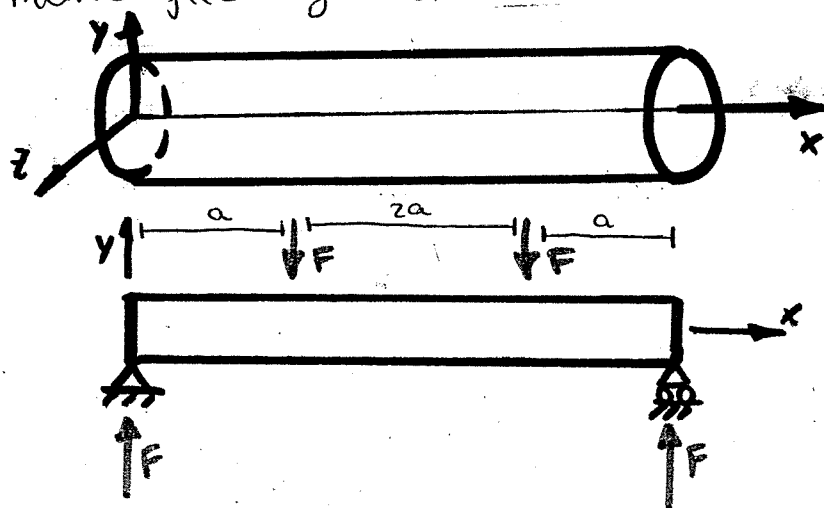
1-3-94



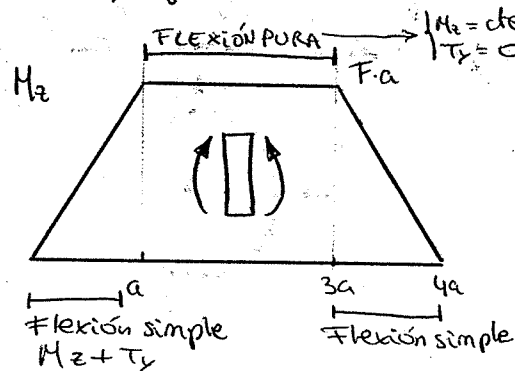
FLEXIÓN

Lección 13: FLEXIÓN PURA

- Llamamos flexión pura al esfuerzo que aparece en el sólido prismático cuando cada una de sus secciones sólo está afectada por un momento flector y este es constante

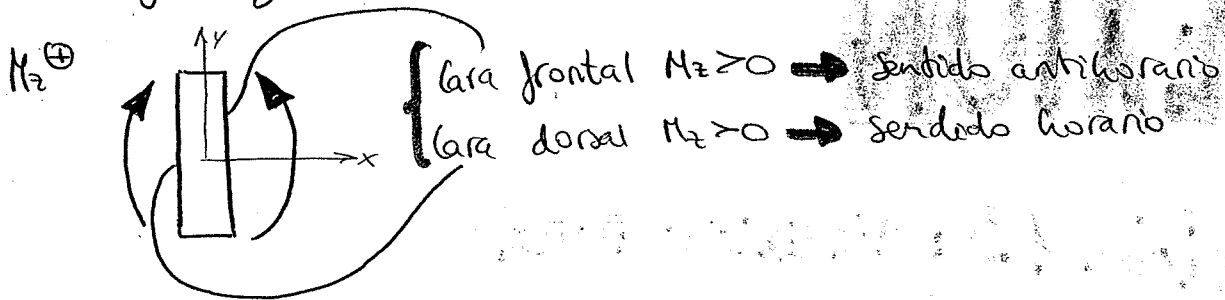


- Si sólo hay momento en una dirección la flexión es pura simétrica.
- Si $M_z + M_y$ la flexión es asimétrica

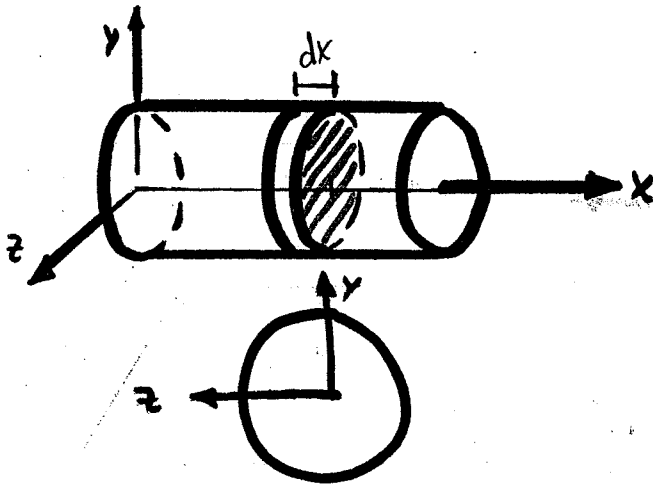


- Habemos de flexión simple cuando existe un momento flector y un cortante $M_z + T_y$ o $M_y + T_z$ existiendo M sólo en una dirección y T también. Si existiese momento o esfuerzo cortante en más de una dirección tendríamos flexión simple derivada
- Si existe, además de una flexión simple, esfuerzos normales tendremos flexión compuesta $\rightarrow$ Flexo-tracción $N > 0$
Flexo-compresión $N < 0$
- Si existiese, además de una flexión simple, torsión tendríamos el sólido sometido a una flexión con torsión.

= Diagrama y criterio de signos



● LEY DE NAVIER



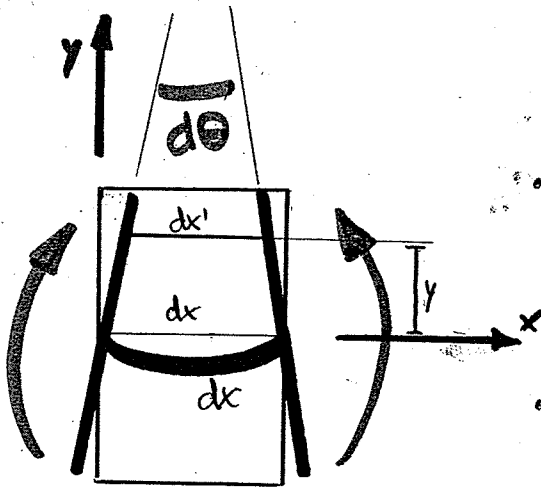
$X \equiv$ Directriz: Pasa siempre por el CDG (centro de gravedad).

$Y, Z \equiv$ Ejes principales de la sección

● HIPÓTESIS PARA FLEXIÓN PURA

- ① Pequeñas deformaciones
- ② Elasticidad proporcional $\rightarrow$ Principios de proporcionalidad y superposición
- ③ Hipótesis de Bernoulli

Las secciones transversales planas y perpendiculares a la directriz siguen siendo planas y perpendiculares tras la deformación.



• El movimiento de la sección es un giro alrededor del eje de referencia

• La directriz se convierte en una línea (que denominaremos elástica) con radio de curvatura ρ , constante.

$$\frac{dx - dx'}{y} = d\theta = \frac{dx}{\rho}$$

aprox por dθ pequeños

$$\epsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} \Rightarrow$$

LEY DE NAVIER

$$\sigma_x = E \epsilon_x = -\frac{E y}{\rho}$$

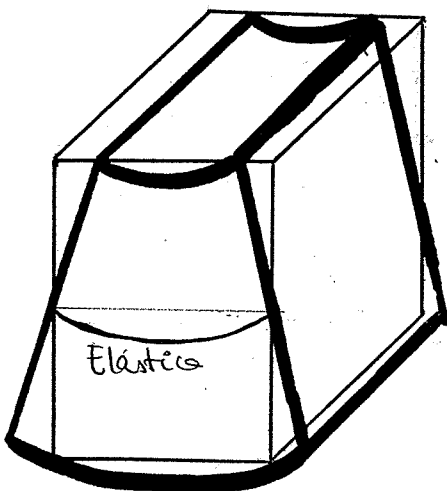
DEFORMACIONES

Como las secciones siguen siendo perpendiculares a la directriz

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

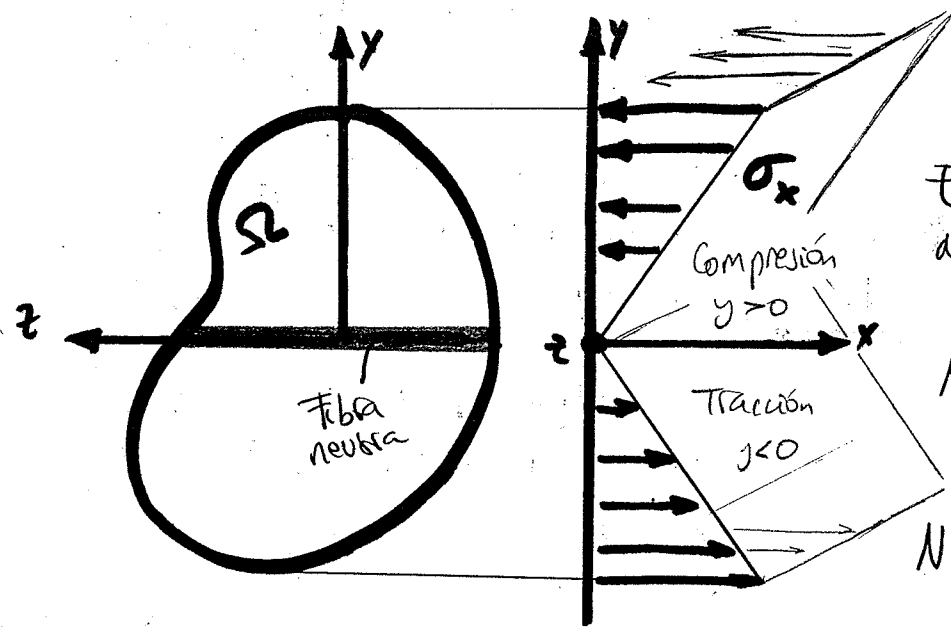
Por efecto Poisson o ley de Hooke

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$



TENSIONES

$$\begin{aligned} \sigma_x &\neq 0; & \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_y &= 0; \\ \sigma_z &= 0; \end{aligned}$$



ESFUERZO NORMAL

$$N = \int_{\Omega} \sigma_x d\Omega = \int_{\Omega} \frac{-E y}{\rho} d\Omega$$

$$N = \frac{-E}{\rho} \int_{\Omega} y d\Omega = 0$$

ESFUERZOS CORTANTES

$$T_y = \int_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega = 0, \quad T_z = \int_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega = 0$$

$$M_y = \int_{\Omega} \sigma_x z d\Omega = \int_{\Omega} \frac{-E y}{\rho} z d\Omega = 0 \quad \leftarrow \text{Se anulan sus componentes con otras por simetría}$$

$$M_z = \int_{\Omega} \sigma_x y d\Omega = \int_{\Omega} \frac{+E y}{\rho} y d\Omega = \frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y^2 d\Omega = \frac{E}{\rho} I_z$$

$y > 0 \rightarrow \sigma_x < 0$ (compresión)
y viceversa $\rightarrow$ Necesario cambio signo

$$M_z = \frac{E}{\rho} I_z$$

Expresión adicional
Ley Navier

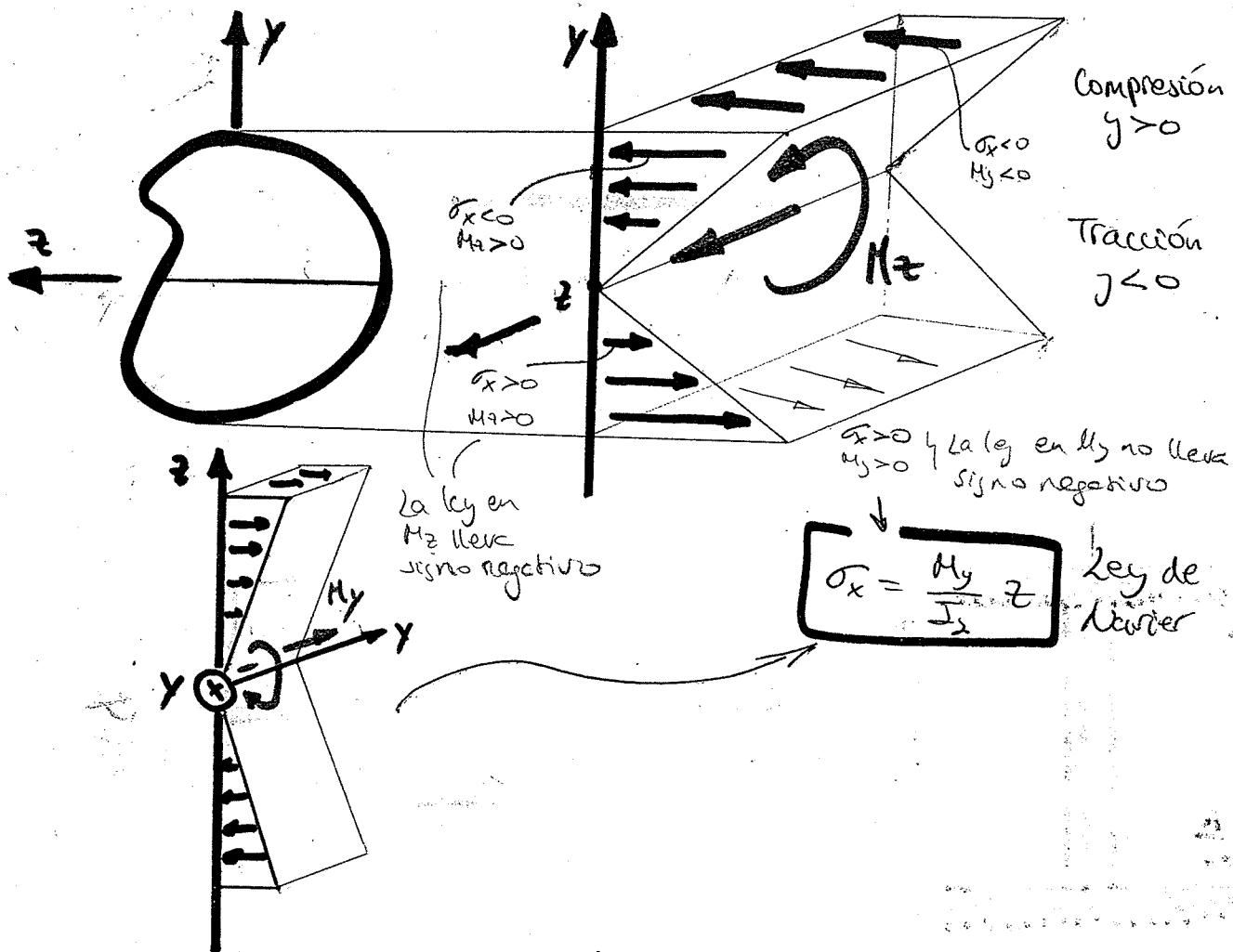
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E I_z} = \frac{-\sigma_x}{E y} \Rightarrow$$

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$$

LEY DE NAVIER
Expresión principal

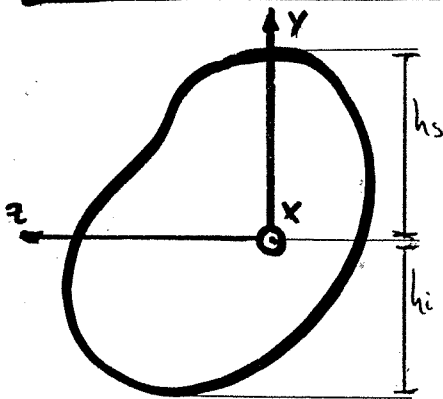
"La tensión normal en una sección sometida a flexión pura es proporcional a la distancia de la fibra, considerada al centro de gravedad de la sección" Eje $z \rightarrow y=0 \rightarrow \sigma_x=0$

FIBRA NEUTRA



MOMENTO TORSOR: $M_t = \int_r (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dr = 0$

MÓDULO RESISTENTE A FLEXIÓN (W)



$$\sigma_{max} = -\frac{M_z}{I_z} h_i = -\frac{M_z}{W_i} \quad W_i = \frac{I_z}{h_i}$$

$$\sigma_{min} = -\frac{M_z}{I_z} h_s = -\frac{M_z}{W_s} \quad W_s = \frac{I_z}{h_s}$$

$W_i \equiv$ Módulo resistente inferior

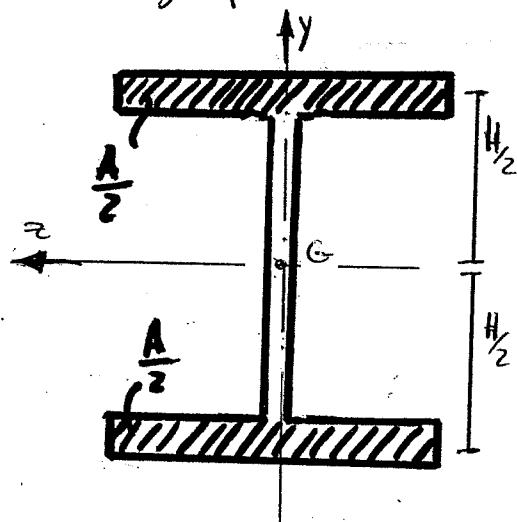
$W_s \equiv$ Módulo resistente superior

$$W = \min(W_i, W_s) \Rightarrow |\sigma| \text{ máximo}$$

RENDIMIENTO GEOMÉTRICO DE LA SECCIÓN

A continuación nos preguntamos si existe alguna sección óptima de parámetros w y h para resistir a flexión.

La sección óptima para resistir a flexión es aquella en la que la mayor parte del material se sitúa lo más alejado de G .



Se define

$$W_{opt} = \frac{I_z}{\frac{h}{2}} = \frac{2 \frac{A}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2}{\frac{h}{2}} = \frac{Ah}{2}$$

A = área de la sección

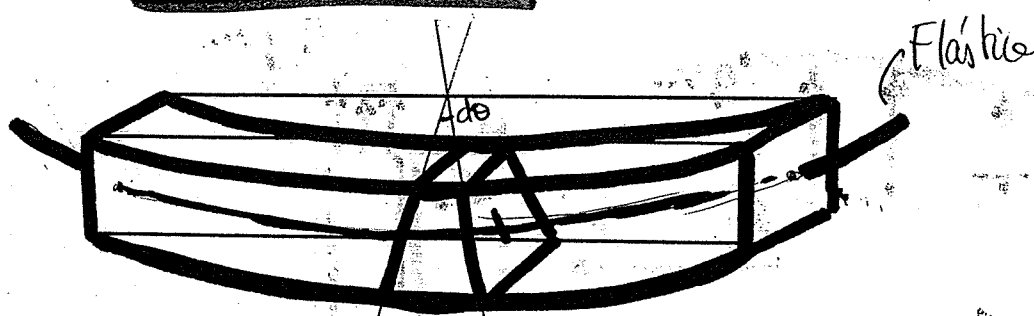
$$\eta = \frac{w}{W_{opt}} = \frac{2w}{Ah}$$

DATOS: A : área de la sección
 h : canto de la sección

Buscamos el valor más pequeño de η $\rightarrow$ Lo conseguimos con un w muy grande (w_{opt}) $\rightarrow$ alejamos la masa todo lo posible de G

VALORES DE η PARA SECCIONES TÍPICAS

SECCIÓN	η	SÍMBOLO
PERFIL DOBLE T	2/3	I
PERFIL EN U	3/5	U
ANILLO CIRCULAR	1/2	O
SECCIÓN RECTANGULAR MACIZA	1/3	■
SECCIÓN CIRCULAR MACIZA	1/4	●
SECCIÓN ROMBOIDAL MACIZA	1/6	◆

DESPLAZAMIENTOS

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \chi dx, \text{ siendo } \chi = \frac{1}{\rho} \equiv \text{curvatura}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \chi = \frac{1}{\rho} = \overset{\text{Navier}}{\frac{M_z}{EI_z}}; \quad d\theta = \frac{M_z}{EI_z} dx;$$

$$\Delta\theta = \int_L \frac{M_z}{EI_z} dx$$

Si $M_z = \text{cte}$

$$\Delta\theta = \frac{M_z}{EI_z} L$$

Lección 14: TENSIONES DEBIDAS AL CORTANTE

FÓRMULA DE COLIGNON

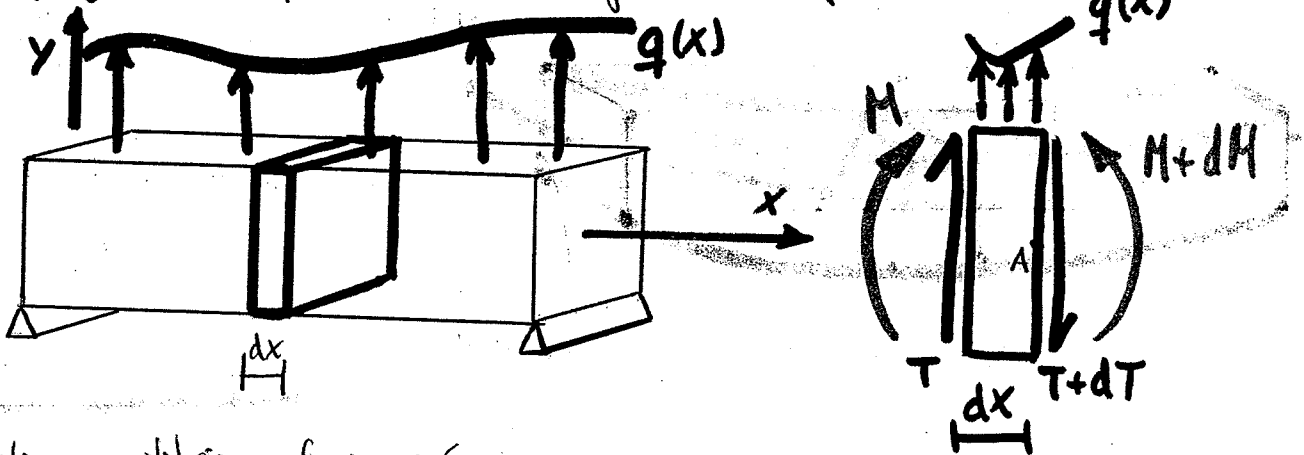
Recordemos que FLEXIÓN SIMPLE $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Momento flector } M_z \text{ (o } M_y) \end{cases}$ $\begin{matrix} \uparrow \square \\ \downarrow \square \end{matrix}$ $M_z^{\oplus}$
 $\begin{cases} \text{Esfuerzo cortante } T_z \text{ (o } T_y) \end{cases}$ $\begin{matrix} \rightarrow \square \\ \leftarrow \square \end{matrix}$ $T_z^{\oplus}$

Será aplicable la ley de Navier para flexión pura:

$$\sigma_z = -\frac{M_z}{I_z} y$$

Podremos aceptar las hipótesis de flexión pura siendo la inexactitud menor

Supongamos una pieza sometida a flexión simple



Aplicamos equilibrio a la sección:

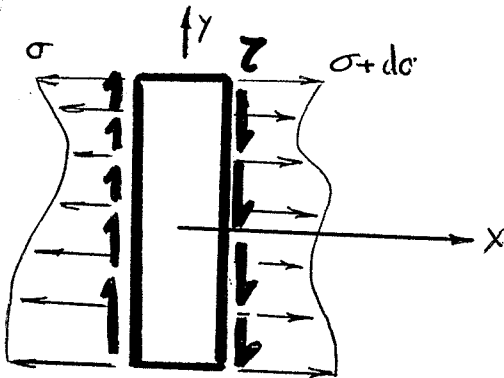
$$\sum F_v = 0 \Rightarrow T + q(x)dx - T - dT = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{dT}{dx} = q(x)}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M - Tdx - q(x)dx \frac{dx}{2} + M + dM = 0 \longrightarrow$$

0 (diferencial de 2º orden)

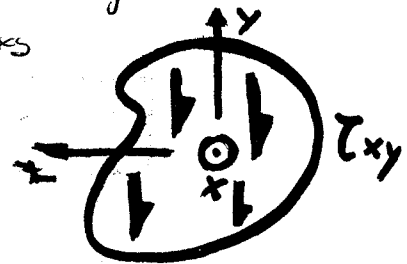
$$\longrightarrow dM = Tdx; \frac{dM}{dx} = T; \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = q(x); \boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)}$$

TENSIONES TANGENCIALES

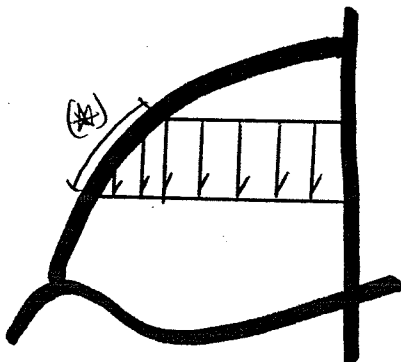


• Hipótesis

① \$\tau\$ lleva la dirección y sentido del eje \$y \longrightarrow \tau_{xy}\$



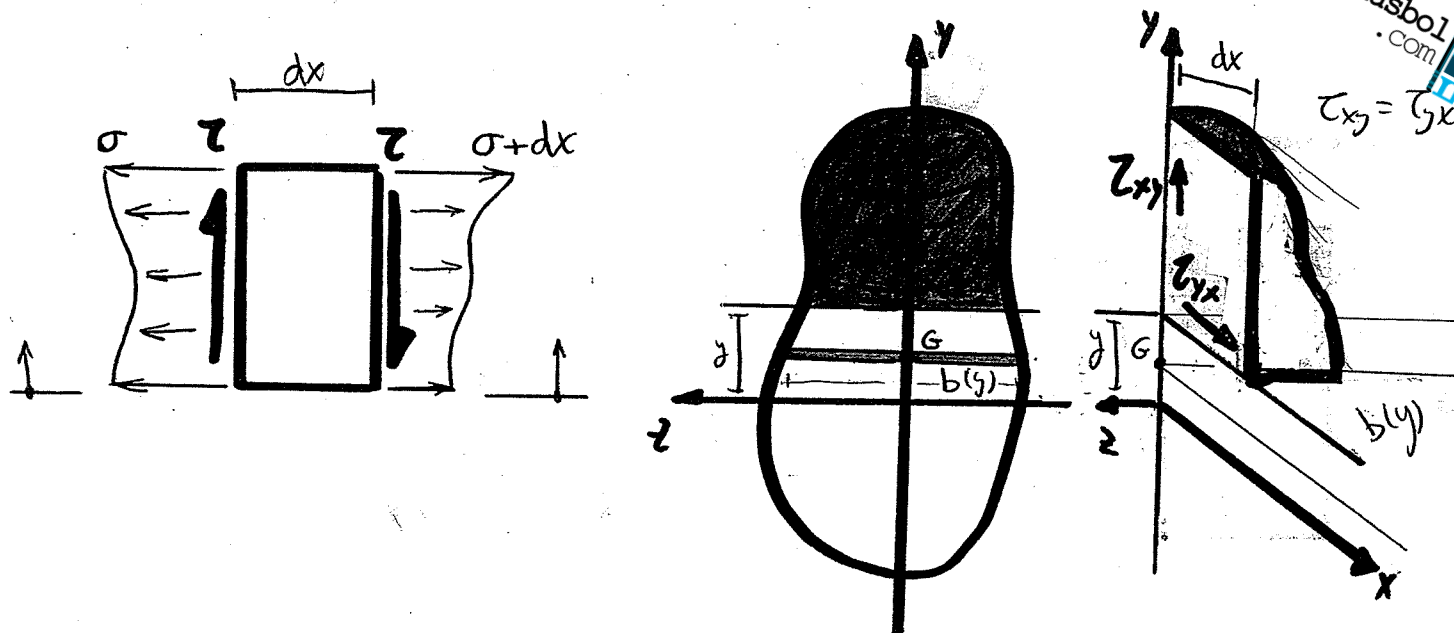
② \$\tau\$ es constante para los puntos de igual coordenada \$y\$



Esta hipótesis no se ajusta a la realidad ya que en el borde no se cumple (*)

Sin embargo, como trabajaremos con secciones gruesas podemos despreocupar el problema de borde

SECCIÓN GRESA: Aquella que no tiene ninguna de sus dimensiones lo vea mayor que otra.



$$\sum F_H = 0: -\int_{A^*} \sigma dA^* + \int_{A^*} \sigma dA^* + \int_{A^*} d\sigma dA^* + \tau_{yx} b(y) dx = 0$$

$$\tau_{yx} b(y) dx = -\int_{A^*} d\sigma dA^* = -\int_{A^*} -\frac{dM_z}{I_z} y dA^* = \int_{A^*} \frac{T_0 dx}{I_z} y dA^* \quad \begin{matrix} dM_z = T_0 dx \\ \text{Navier: } \sigma = -\frac{M_z}{I_z} y \end{matrix}$$

$$\tau = \tau_{yx} = \int_A \frac{T_0 y}{I_z b(y)} dA^* = \int_{A^*} \frac{T_0}{I_z} y dy \Rightarrow \tau = \frac{T_0 M_z}{I_z b(y)} \quad \begin{matrix} dA^* = b(y) dy \end{matrix}$$

FÓRMULA DE COLIGNON

$$\tau_{max} = \frac{T_0}{I_z} \left(\frac{M_z}{b} \right)_{max} ; \text{ con } b = b(y \text{ fibra neutra})$$

fibra que contiene al C.D.G

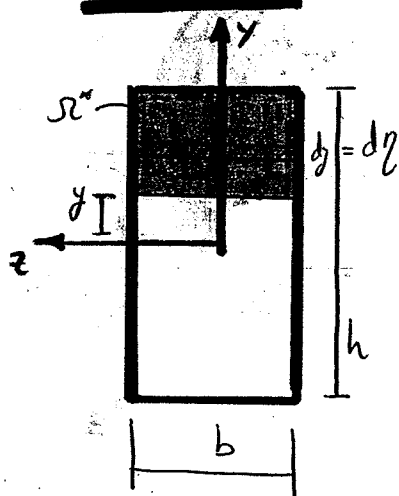
Si $b = cte$: $\left(\frac{M_z}{b} \right)_{max} \Rightarrow M_{z,max} = M_z(y=0) \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_0 M_z(y=0)}{I_z b}$

Se define M_z = $\int_{A^*} y dA = \int y b(y) dy = A^* \cdot \overbrace{y_{cog}}^{\text{C.D.G. del centro de gravedad de } A}$

$dA = b(y) dy$

A SECCIÓN RECTANGULAR

EJEMPLOS



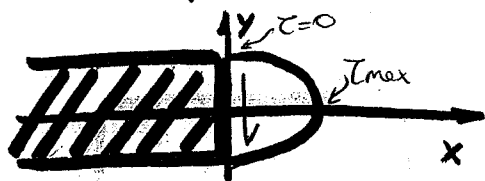
$$\tau = \frac{T_0 M_z(y)}{b I_z}$$

$$I_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{1}{12} b h^3$$

$$M_z = \int_y^{\frac{h}{2}} \eta b d\eta = b \frac{\eta^2}{2} \Big|_y^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

También podríamos haber aplicado

$$M_z = \int_y^{\frac{h}{2}} y \cdot y_{\text{cog}} = \underbrace{b \left(\frac{h}{2} - y \right)}_{\text{área}} \left[\underbrace{y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right)}_{y_{\text{cog}} = \frac{y}{2} + \frac{h}{4}} \right] =$$

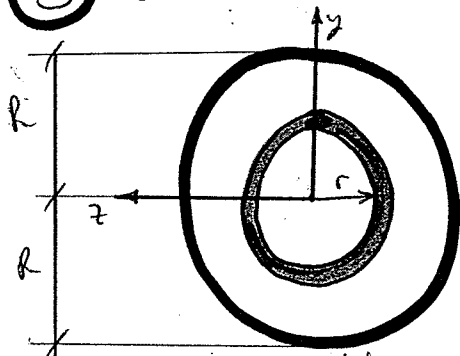


$$= \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Por tanto

$$\tau = \frac{T_0 \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \frac{1}{12} b h^3} = \frac{6 T_0 \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b h^3}, \quad \tau_{\text{max}} = \tau(y=0) = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_0}{b h}$$

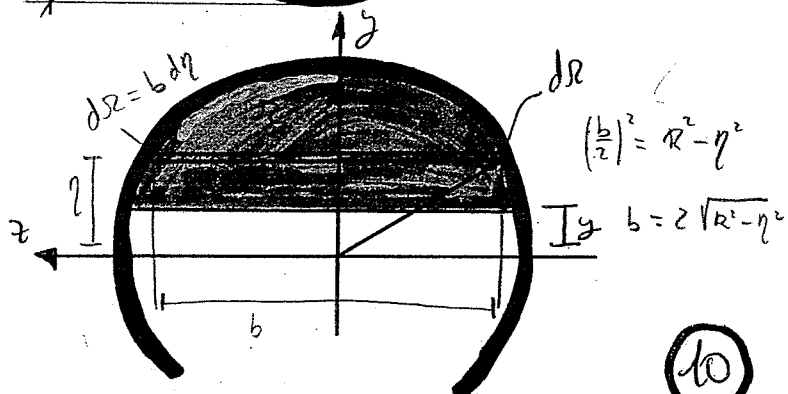
B SECCIÓN CIRCULAR



$$I_z = I_y = \frac{1}{2} (I_z + I_y) = \frac{1}{2} \int_R (y^2 + z^2) dA = \frac{1}{2} \int_0^R r^2 2\pi r dr = \pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{4}$$

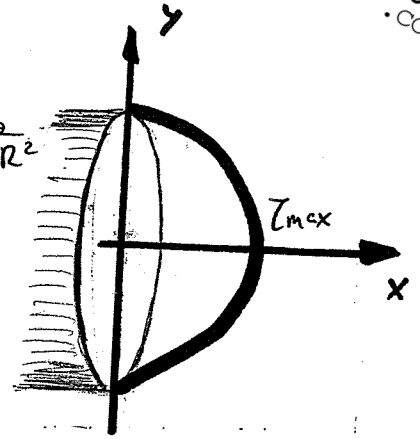
$$M_z = \int_y^R y dA = \int_y^R y 2\sqrt{R^2 - y^2} dy = -\frac{(R^2 - y^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_y^R = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}$$

$$\tau(y) = \frac{T_0 \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}}{2\sqrt{R^2 - y^2} \cdot \frac{\pi R^4}{4}}$$

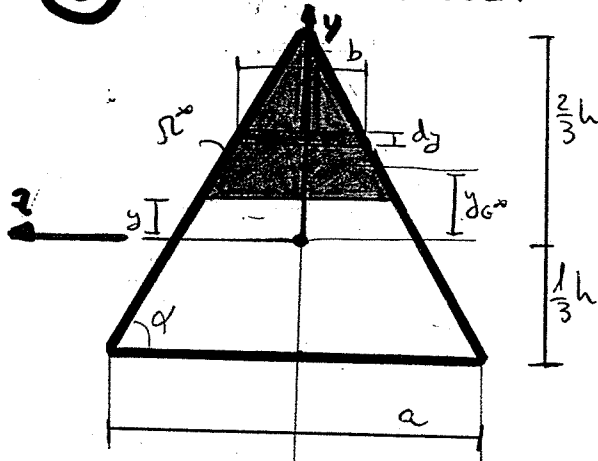


$$\tau(y) = \frac{4}{3} \frac{T_2}{\pi R^2} (R^2 - y^2)$$

$$\tau_{max}(y=0) = \frac{4}{3} \frac{T_2}{\pi R^2}$$



C SECCIÓN TRIANGULAR



$$\tan \theta = \frac{h}{a/2} = \frac{\frac{2}{3}h - y}{b/2}, \quad b = \frac{a(\frac{2}{3}h - y)}{h}$$

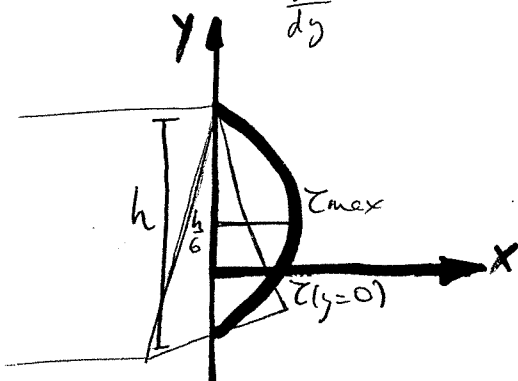
$$\tau = \frac{T_2 M_2(y)}{b I_z}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 d\Omega = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 b dy = \int_{-h/3}^{2h/3} \frac{a(\frac{2}{3}h - y)^2}{h} dy = \\ &= \frac{a}{h} \left[\frac{2}{3}h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{-h/3}^{2h/3} = \\ &= \frac{1}{36} a h^3 \end{aligned}$$

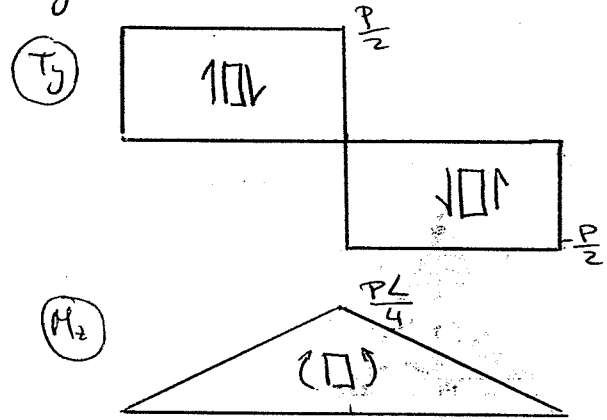
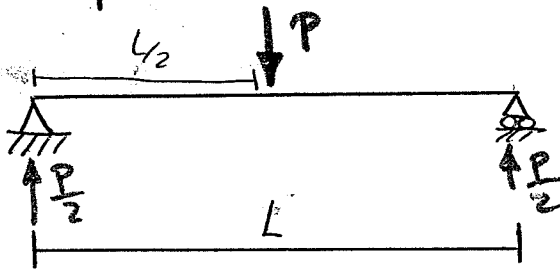
$$\begin{aligned} M_2 = \Omega^* y_{G^*} &= \left[\frac{1}{2} b(y) \left(\frac{2}{3}h - y \right) \right] \cdot \left[y + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}h - y \right) \right] = \left[\frac{1}{2} b(y) \left(\frac{2}{3}h - y \right) \right] \left(\frac{2}{9}h + \frac{2y}{3} \right) = \\ &= b(y) \left(\frac{2}{3}h - y \right) \left(\frac{h}{3} + y \right) \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto } \tau = \frac{T_2 M_2(y)}{b I_z} = \frac{T_2 b \left(\frac{2}{3}h - y \right) \left(\frac{h}{3} + y \right)}{3b \cdot \frac{1}{36} a h^3} = \frac{12 T_2}{a h^3} \left(\frac{2}{3}h - y \right) \left(y + \frac{h}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \tau_{max} \rightarrow \frac{d\tau}{dy} &= \frac{2}{3}h - 2y - \frac{h}{3} = 0 \rightarrow y_{\tau_{max}} = \frac{h}{6} ; \quad \tau(y=0) = \frac{8}{3} \frac{T_2}{a h} \\ \tau_{max} &= \frac{3 T_2}{a h} \end{aligned}$$

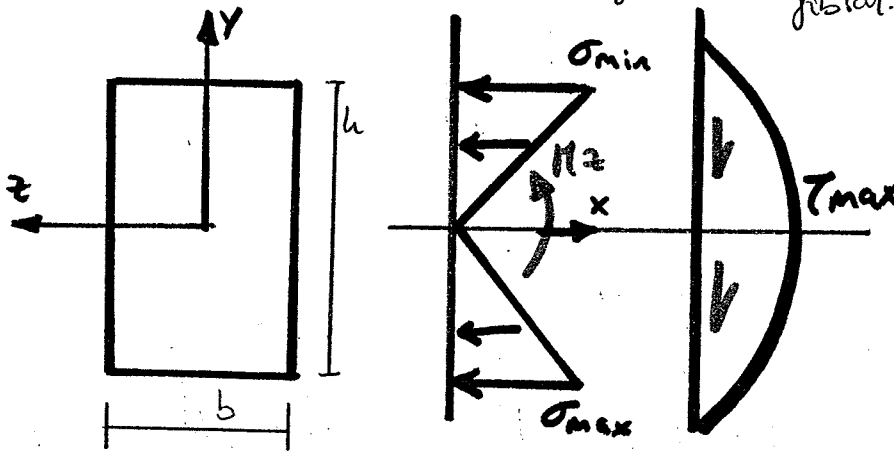


= Comparación entre tensión normal y tangencial



En la estructura rígida: $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{max} \Rightarrow M_{z max} \\ \tau_{max} \Rightarrow T_y max \end{array} \right.$

pero no aparecen en las mismas fibras.



Comparación numérica:

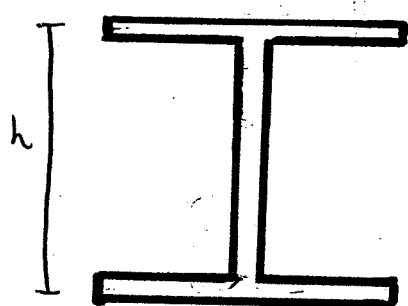
$$\sigma_{max} = -\frac{M_z}{I_z} \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{\frac{PL}{4}}{\frac{1}{12}bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3}{2} \frac{PL}{bh^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_y M_z(y=0)}{I_z b} = \frac{\frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{h^2}{4} \cdot b}{\frac{1}{12}bh^3b} = \frac{3}{4} \frac{P}{bh}$$

$$\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{2L}{h} \gg 1 \longrightarrow \boxed{\sigma_{max} \gg \tau_{max}}$$

Lección 15: VIGAS ARMADAS

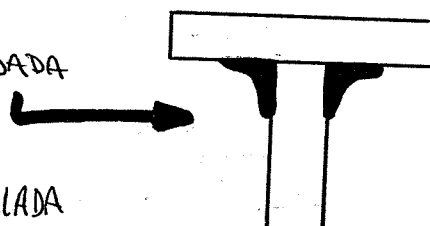
Una viga armada es aquella que fabricamos con platabandas con una sección a medida elegida por el usuario sin ajustarse a un n° de secciones en catálogo normalizados.



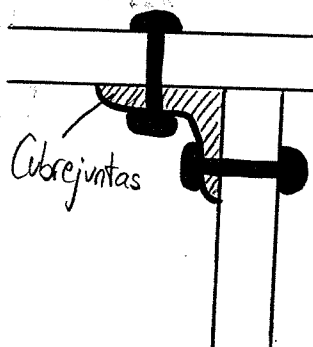
h normalizada $\Rightarrow$ Viga de catálogo
 h no normalizada $\Rightarrow$ Viga armada

Para unir las secciones tenemos dos opciones

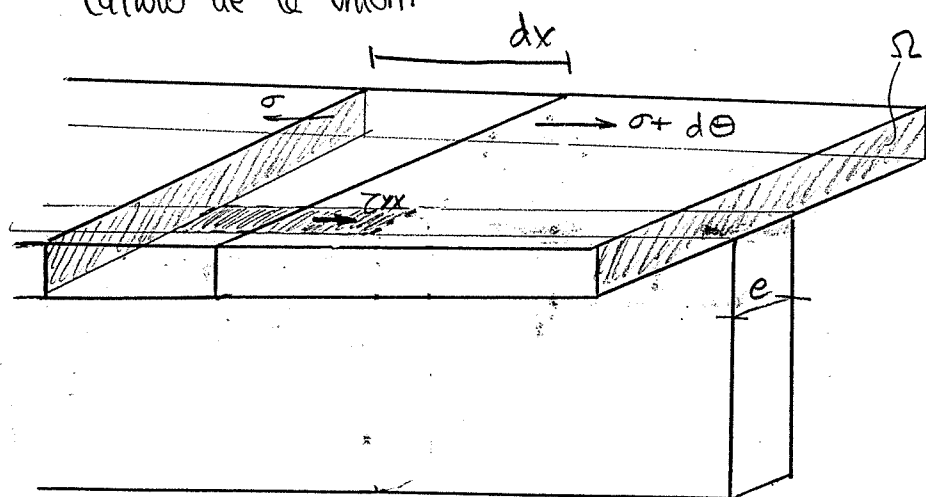
① UNIÓN SOLDADA



② UNIÓN ATORNILLADA



Cálculo de la unión:



Diferencial del flujo tangencial

$$dF = \tau dx \cdot e$$

$$dF = - \int_r \sigma d\Omega + \int_r (\sigma + d\sigma) d\Omega =$$

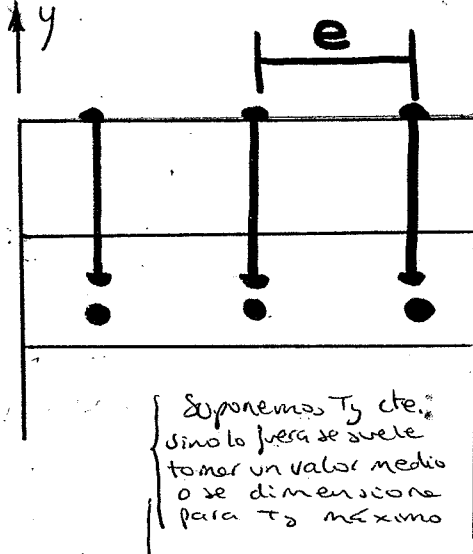
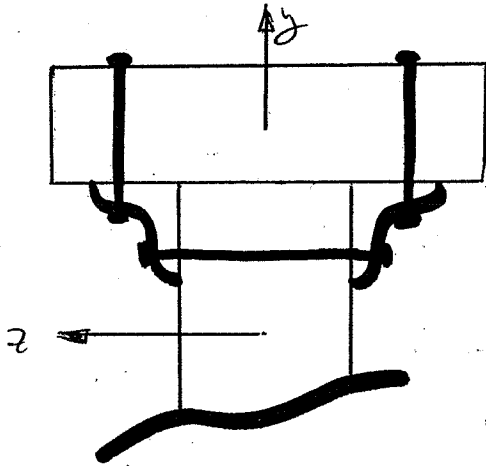
$$= - \int_r d\sigma d\Omega = \int_r \frac{dM_z}{I_z} y d\Omega =$$

Navier
 $\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$

$$= \frac{T_y dx}{I_z} \int_r y d\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dF = \frac{T_y M_z}{I_z} dx$$

CÁLCULO UNIÓN ATORNILLADA



Suponemos T_b de: sino lo fuera se suele tomar un valor medio o se dimensiona para T_b máximo

$$dF = \frac{T_b M_z^x}{I_z} dx ; F = \int_0^e \frac{T_b M_z^x}{I_z} dx = \frac{T_b M_z^0}{I_z} e$$

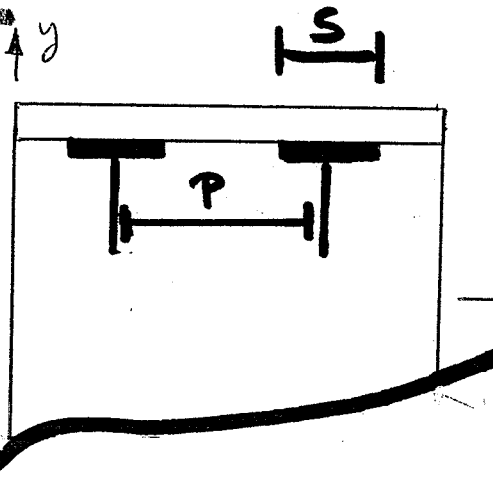
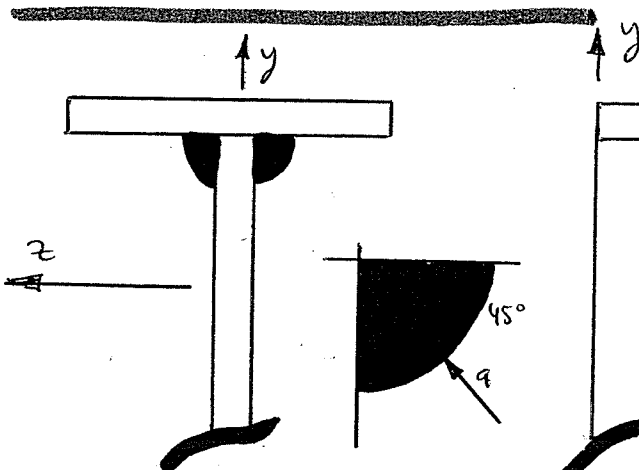
Momento estático M_z : es el de la zona que se va a cortar el elemento de unión

$$F = \frac{n \pi \phi^2}{4} \tau_{adm}$$

n = num. tornillos EN SECCIÓN por platavanda
 ϕ = diámetro de los tornillos

$$\frac{T_b M_z^x}{I_z} e = n \frac{\pi \phi^2}{4} \tau_{adm}$$

CÁLCULO DE LA UNIÓN SOLDADA



a = Garganta de la soldadura

s = Longitud de la soldadura

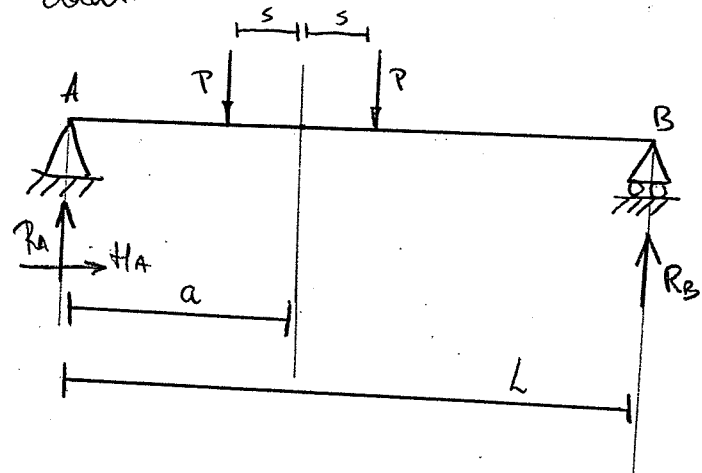
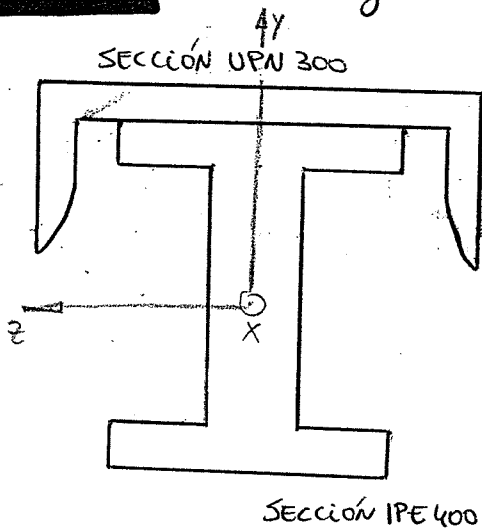
p = paso, distancia entre el centro de un cordón y otro en soldaduras discontinuas.

$$F = \int_0^p \frac{T_b M_z^x}{I_z} dx = \frac{T_b M_z^x}{I_z} p$$

$$F = n s a \tau_{adm} ; n = \text{nº cordones EN SECCIÓN por platavanda}$$

$$\frac{T_b M_z^x}{I_z} p = n s a \tau_{adm}$$

EJERCICIO Sea la viga de sección dada:



1) Calcular los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector

Por equilibrio estático a toda la estructura

$$\sum F_H = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_A + R_B = 2P$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -P(a-s) - P(a+s) + R_B L = 0; R_B = \frac{P(2a)}{L}$$

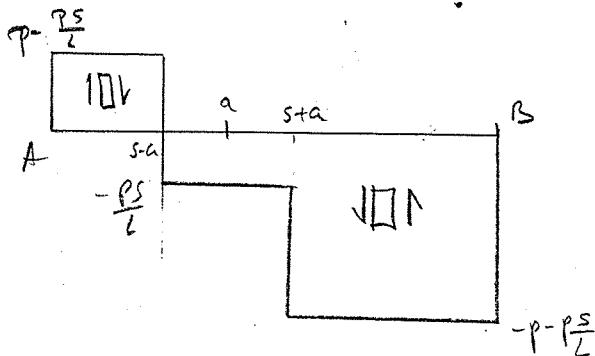
$$R_A = 2P - \frac{P(2a)}{L} = 2P\left(1 - \frac{a}{L}\right)$$

$$M_z(x=a-s) = 2P\left(1 - \frac{a}{L}\right)(a-s) = \frac{2P}{L}(aL - sL - a^2 + as)$$

$$\frac{dM_z(x=a-s)}{da} = 0 \rightarrow 2P - \frac{2P}{L}2a + \frac{2Ps}{L} = 0; 1 + \frac{s}{L} = \frac{2a}{L}$$

$$a = \frac{(L+s)}{2}$$

Diagrama de cortante (V)



$$\Rightarrow R_A = P - \frac{PS}{L}$$

$$R_B = P + \frac{PS}{L}$$

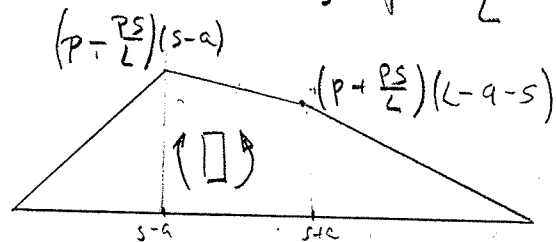


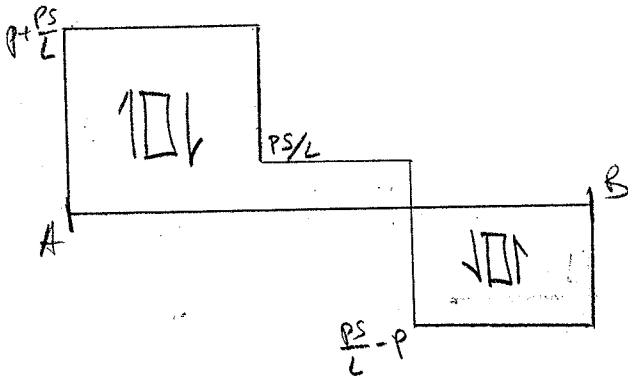
Diagrama de flector (M_z)

b) Condición Momento flector máximo en $x = s + a$. Calcular el nuevo valor de a

$$M_z(x=s+a) = \frac{2Pa}{L} (L-a-s) = \frac{2P}{L} (aL - a^2 - as)$$

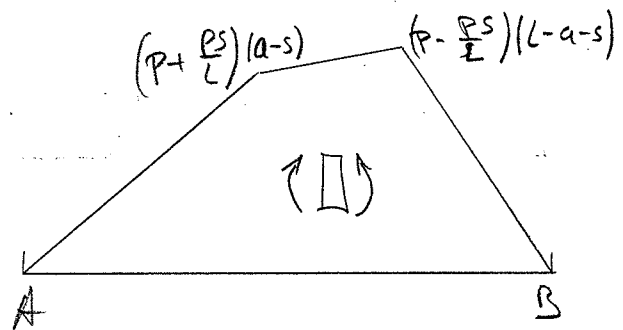
$$\frac{dM_z(x=s+a)}{da} = 0 \rightarrow \frac{2P}{L} L - \frac{2P}{L} 2a - \frac{2P}{L} s = 0, \quad \boxed{a = \frac{L-s}{2}}$$

Diagrama de cortante T_z



$$R_A = 2P(1 - \frac{L-s}{2L}) = P + \frac{PS}{L}$$

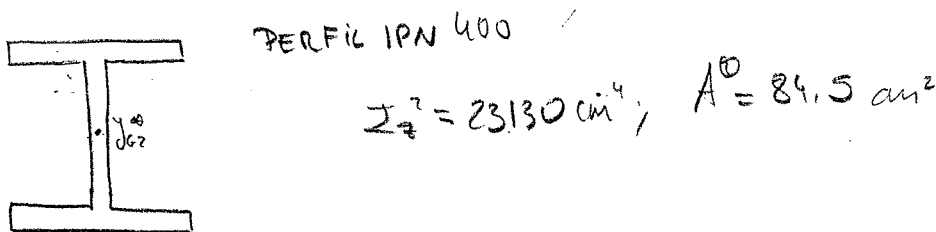
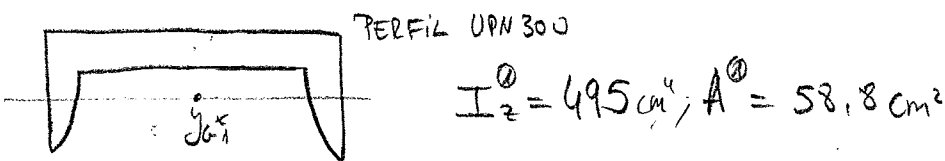
$$R_B = \frac{2P}{L} (\frac{L-s}{2}) = P - \frac{PS}{L}$$



2) Calcular el módulo resistente a flexión de la viga dada.

$$W = \min(W_{inf}, W_{sup}) \rightarrow W_{inf} = \frac{I_z}{h_{inf}}, \quad W_{sup} = \frac{I_z}{h_{sup}}$$

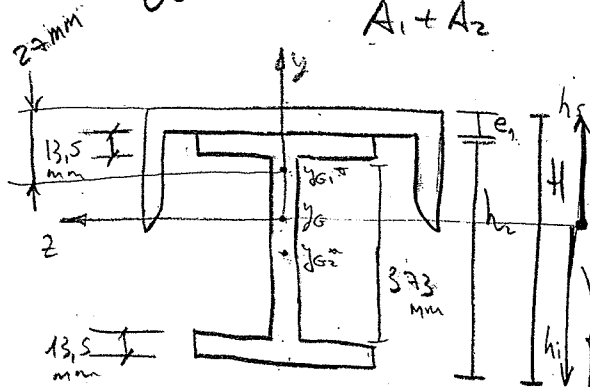
Nuestro problema es, por tanto, calcular el momento polar de la sección. Calculamos los respectivos momentos de cada parte



Necesitamos ahora calcular el centro de gravedad de la pieza

Tomando el origen de coord. en $y_G = 0$

$$y_G = \frac{y_{G1}^* A_1 + y_{G2}^* A_2}{A_1 + A_2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (**)$$



Tomamos los valores de e_1 y h_2 de tablas

$$e_1 = 10 \text{ mm} \quad \left\{ \begin{array}{l} h = 410 \text{ mm} = h_s + h_i \\ h_2 = 400 \text{ mm} \end{array} \right.$$

$$y_{G2}^* = -h_i + 13.5 + \frac{373}{2} \text{ (mm)}$$

$$y_{G1}^* = h_s - 27 \text{ (mm)}$$

$$h_s = 410 - h_i$$

Aplicamos (**): $0 = [(410 - h_i) - 27] \cdot 5880 + [-h_i + 13.5 + \frac{373}{2}] \cdot 8450$

$$h_i = 27.5 \text{ cm} \rightarrow y_{G2}^* = -75 \text{ mm}$$

$$h_s = 13.5 \text{ cm} \rightarrow y_{G1}^* = 108 \text{ mm}$$

Aplicamos Steiner de forma que:

$$I_z^{\text{tot}} = I_z^{\text{flange}} + (y_{G1}^*)^2 A_{\text{flange}} + I_z^{\text{web}} + (y_{G2}^*)^2 A_{\text{web}} =$$

$$= 495 + (10.8)^2 \cdot 58.8 + 23130 + (7.5)^2 \cdot 89.5 = 35236.55 \text{ cm}^4$$

Por tanto

$$W = \min(W_{\text{inf}}, W_{\text{sup}}) = \left(\frac{35236.55}{27.5}, \frac{35236.55}{13.5} \right) = 1281.33 \text{ cm}^3$$

3) Para el valor de a calculado en 1b) y con los valores $P = 100 \text{ kN}$, $L = 8 \text{ m}$, $S = 1,5 \text{ m}$ calcular la $\sigma_{\text{máxima}}$

Para el caso 1b) tendríamos

$$a = \frac{L-S}{2} = 3,25 \text{ m}$$

$$M_{z \text{ max}} = \frac{2Pa}{L} (L-a-S) = 264,0625 \text{ kNm}$$

Por ley de Navier $\sigma = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{+M_z}{W_{\text{inf}}} = \frac{264,0625 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ (Nmm)}}{1281,33 \cdot 10^3 \text{ (mm}^3\text{)}} = \boxed{206,08 \text{ MPa}}$$

$y < 0$ TRACCIÓN

4) Suponiendo una unión soldada entre los dos perfiles con los datos

$g = 0,5 \text{ cm}$ garganta

$\tau_{\text{adm}} = 100 \text{ MPa}$

$l = 10 \text{ cm}$

longitud del cordón de soldadura

Calcular el paso, p .

$$\frac{T_y M_z}{I_z} p = n l g \tau_{\text{adm}}$$

$$I_z = 35236,55 \text{ cm}^4$$

$$l = 10 \text{ cm}$$

$$n = 2$$

$$g = 0,5 \text{ cm}$$

$$\tau_{\text{adm}} = 100 \text{ MPa}$$

Modelamos la soldadura para $T_y \text{ max}$:

$$T_{y \text{ max}} = \max(R_A, R_B) = 118,75 \text{ kN}$$

$$M_z^* = A_0 y_{c,0} = 58,8 \cdot 10,8 = 635,04 \text{ cm}^3$$

Rotando

$$\frac{118,75 \cdot 10^3 \cdot 635,04 \cdot 10^3}{35236,55 \cdot 10^4} p = 2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 100 \rightarrow \boxed{p = 467 \text{ mm}}$$

5) Si la unión fere abornillada con de dos: $\phi = 20 \text{ mm}$
 $\tau_{adm} = 150 \text{ MPa}$

Recordar
 $I = \frac{1}{12} b h^3$

Calcular la distancia entre tornillos, para la figura dada

Aplicamos (*) $\frac{T_y M_z}{I_z} e = n \frac{\pi \phi^2}{4} \tau_{adm}$

$M_z = 13,5 \cdot 180 \left(\frac{400}{2} - \frac{13,5}{2} \right) = 469,6 \text{ cm}^3$

Platabanda

Area plat

$I_z = 2 \left[\frac{1}{12} 1,35^3 18 + 1,35 \cdot 18 \cdot \left(20 - \frac{1,35}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{12} 0,86 \cdot (40 - 21,35)^3$

2 Platabandas $I_{z \text{ platabanda}}$ STEINER

$I_z = 21876,47 \text{ cm}^4$

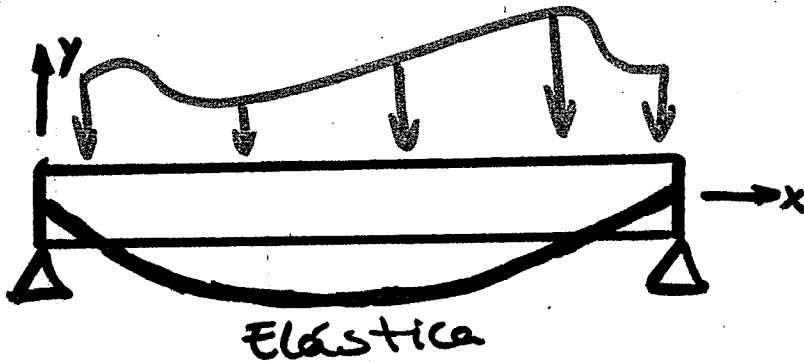
$T_y = 118,75 \cdot 10^3 \text{ N}$

$\Rightarrow$ sustituyendo en (*) obtendríamos e , ($n=1$)

$$e = \frac{1 \cdot \pi \cdot 20^2}{4} \cdot 150 \cdot \frac{21876,47 \cdot 10^4}{118,75 \cdot 10^3 \cdot 469,6 \cdot 10^3} = 184,9 \text{ mm}$$

Diferente resultado al del profesor

Lección 16: ECUACIONES DE LA ELÁSTICA. ECUACIÓN UNIVERSAL



Ecuación intrínseca de la elástica

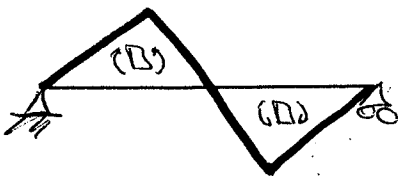
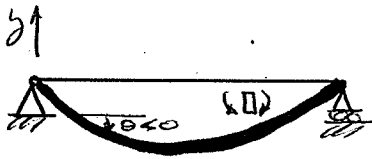
$$\frac{1}{\rho} = \chi = \frac{M_z}{EI_z}$$

La curvatura va a tener el mismo signo que el momento

$\chi > 0 \Rightarrow M_z > 0$ (□) CONCAVIDAD EN LA DIRECCIÓN NEGATIVA DEL EJE Y

$\chi < 0 \Rightarrow M_z < 0$ (□) CONVEXIDAD EN LA DIRECCIÓN POSITIVA DEL EJE Y

Ejemplos.



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{\rho d\theta} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \quad (*)$$

$$\frac{ds}{ds} \frac{d\theta}{d\theta} \rightarrow \begin{cases} ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}; \text{ siendo } y' = \frac{dy}{dx} \\ \tan \theta = \frac{dy}{dx} = y'; \quad \theta = \arctan(y') \\ \frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{(1 + y'^2)} \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{y'''}{(1+y'^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(1+y'^2)^{1/2}} = \frac{y'''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Por tanto, la ecuación de la elástica en coordenadas cartesianas queda:

$$\boxed{\frac{y'''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M_z}{EI_z}} \xrightarrow{\text{SIMPLIFICACIÓN}} \boxed{y''' = \frac{M_z}{EI_z}}$$

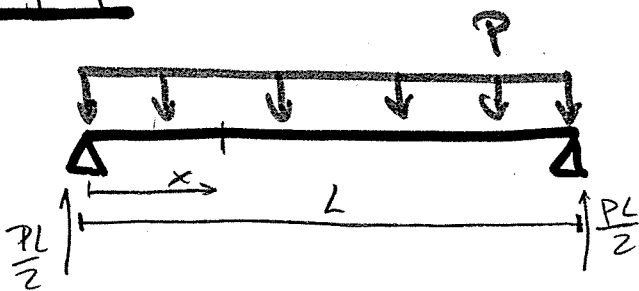
Estas ecuaciones debemos integrarlas:

$$y' = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1 ; \quad y = \int \left[\int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1 x \right] + C_2$$

Obtendremos C_1 y C_2 por condiciones de contorno en apoyos

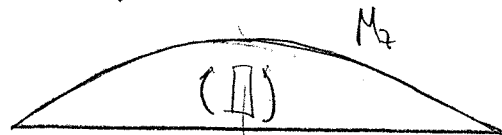
- Apoyo simple $\rightarrow y=0$
- Empotramiento $\rightarrow y=0, y'=0$

Ejemplo



$$M_z(x) = \frac{PL}{2}x - (Px)\frac{x}{2} = \frac{PL}{2}x - \frac{Px^2}{2}$$

Calculo ley M_z (□)



$$y''' = \frac{\frac{PL}{2}x - \frac{Px^2}{2}}{EI}$$

$$EI y' = \frac{PL}{4}x^2 - \frac{Px^3}{6} + C_1$$

$$EI y = \frac{PL}{12}x^3 - \frac{Px^4}{24} + C_1x + C_2$$

COND. CONTORNO EN APOYOS SIMPLES

$$y(x=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$y(x=L) = 0 \rightarrow 0 = \left(\frac{PL^4}{12} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + C_1 L \right) / C_1 = \frac{-PL^3}{24}$$

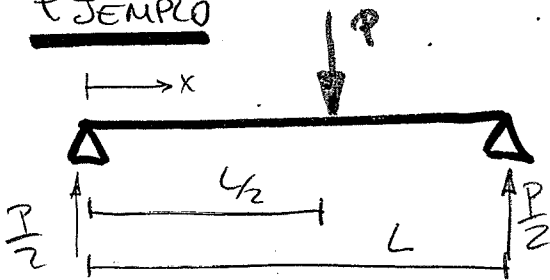
$$\Rightarrow EI y = \frac{PLx^3}{12} - \frac{PLx^4}{24} - \frac{PL^3}{24} x$$

NOTA!! flecha $\rightarrow |y_{\max}|$

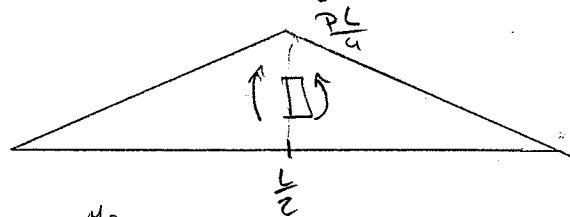
$$y_{\max} \leftrightarrow M_{\max} \left(x = \frac{L}{2}\right) \rightarrow y_{\max} = \frac{1}{EI} \frac{PL^4}{12} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2 \cdot 2^4} - \frac{1}{4} \right]$$

$$|y_{\max}| = \text{FLECHA} = \frac{-5}{384} \frac{PL^4}{EI}$$

EJEMPLO



• Calcular M_z (diagrama)



$$M_z = \begin{cases} x < \frac{L}{2} \rightarrow M_z = \frac{P}{2} x \\ x > \frac{L}{2} \rightarrow M_z = \frac{P}{2} x - P \left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2} (L - x) \end{cases} \xrightarrow{y'' = \frac{M_z}{EI}} \begin{cases} EI y_1' = \frac{P}{4} x^2 + C_{11} \\ EI y_1 = \frac{P}{12} x^3 + C_{11} x + C_{12} \\ EI y_2' = -\frac{P}{4} (L - x)^2 + C_{21} \\ EI y_2 = \frac{P}{12} (L - x)^3 + C_{21} x + C_{22} \end{cases}$$

COND. CONTORNO

$$x=0 \rightarrow y_1 = 0 \rightarrow C_{12} = 0$$

$$x=L \rightarrow y_2 = 0 \rightarrow C_{21} L + C_{22} = 0$$

COND DE CONTINUIDAD

$$\begin{aligned}
 x = \frac{L}{2} \rightarrow y_1 = y_2 &\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{P(\frac{L}{2})^3}{12} + G_{11} \frac{L}{2} &= \frac{P(\frac{L}{2})^3}{12} + G'_{21} \frac{L}{2} + G'_{22} \\ x = \frac{L}{2} \rightarrow y'_1 = y'_2 &\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{P(\frac{L}{2})^2}{4} + G_{11} &= \frac{-P}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + G'_{21} \end{aligned} \right. \\ &\rightarrow \left\{ \begin{aligned} G_{11} = LG_{21} + 2G'_{22} &= LG_{21} - 2G'_{21}L = -G'_{21}L, \quad G_{11} = -G'_{21} \\ G'_{22} = -G'_{21}L \end{aligned} \right. \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{P(\frac{L}{2})^2}{4} = G'_{21} - G_{11} = 2G'_{21} \rightarrow G'_{21} = \frac{PL^2}{16}; G_{11} = -\frac{PL^2}{16}$$

Por tanto

$$G'_{22} = -\frac{PL^3}{16}, \quad G'_{12} = 0$$

$$\begin{cases} EI y_1 = \frac{P}{12} x^3 + \frac{PL^2}{16} x \\ EI y_2 = \frac{P}{12} (L-x)^3 + \frac{PL^2}{16} x - \frac{PL^3}{16} \end{cases}$$

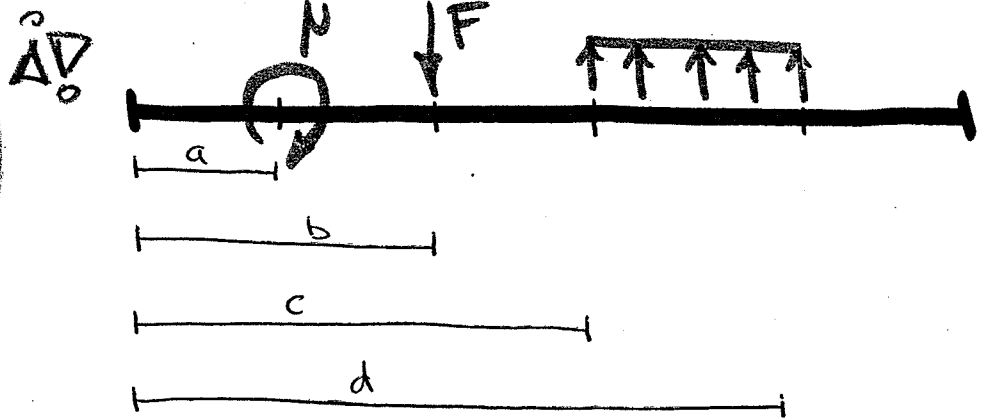
● ECUACIÓN UNIVERSAL DE LA ELÁSTICA

Definimos las funciones de continuidad $\rightarrow$ $\langle f_n(x) = \langle x-a \rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$

HIPÓTESIS

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu > 0 \Rightarrow \text{HORARIO} \\ F > 0 \\ \uparrow > 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y > 0 \end{array} \right.$$

La ecuación de la elástica es más compleja si hoy no fuese!!



$$x < a \Rightarrow M_z = 0 \rightarrow EI y_1'' = 0; EI y_1' = C_1; EI y_1 = C_1 x + K_1$$

$$a < x < b \Rightarrow M_z = \mu \rightarrow EI y_2'' = \mu; EI y_2' = \mu(x-a) + C_2; EI y_2 = \mu \frac{(x-a)^2}{2} + C_2 x + K_2$$

$$b < x < c \Rightarrow M_z = \mu + F(x-b) = EI y_3''; EI y_3' = \mu(x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + C_3$$

$$EI y_3 = \mu \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + C_3 x + K_3$$

$$c < x < d \Rightarrow M_z = \mu + F(x-b) + p \frac{(x-c)^2}{2} = EI y_4''$$

$$EI y_4' = \mu(x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + p \frac{(x-c)^3}{6} + C_4$$

$$EI y_4 = \mu \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + p \frac{(x-c)^4}{24} + C_4 x + K_4$$

$$x > d \Rightarrow M_z = \mu + F(x-b) + p \frac{(x-c)^2}{2} - p \frac{(x-d)^2}{2} = EI y_5''$$

$$EI y_5 = \mu \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{3!} + p \left(\frac{(x-c)^4}{4!} - \frac{(x-d)^4}{4!} \right) + C_5 x + K_5$$

14

Aplicamos condiciones de continuidad

$$x=a \begin{cases} y_1 = y_2 \rightarrow C_1 a + K_1 = C_2 a + K_2 \rightarrow K_1 = K_2 \\ y_1' = y_2' \rightarrow C_1 = C_2 \end{cases}$$

$$x=b \begin{cases} y_2 = y_3 \rightarrow C_2 b + K_2 = C_3 b + K_3 \rightarrow K_2 = K_3 \\ y_2' = y_3' \rightarrow C_2 = C_3 \end{cases}$$

...

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C$$

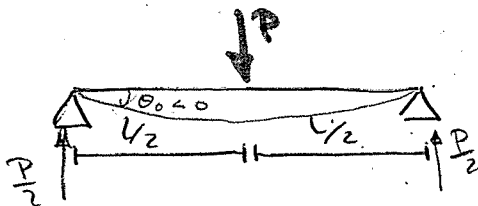
Ecuación Universal

$$EI y = Cx + K + P \frac{\langle x-a \rangle^2}{2!} + F \frac{\langle x-b \rangle^3}{3!} + P \left[\frac{\langle x-c \rangle^4}{4!} - \frac{\langle x-d \rangle^4}{4!} \right]$$

$$C = EI y_0' = EI \theta_0, \quad K = EI y_0$$

$y_0' = \theta_0 \equiv$ Pendiente en el origen
 $y_0 \equiv$ Flecha en el origen

Ejemplo



$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

Planteamos ec universal

$$EI y = EI y_0 + EI \theta_0 x + \frac{P}{2} \frac{\langle x-0 \rangle^3}{3!} - P \frac{\langle x-\frac{L}{2} \rangle^3}{3!} + \frac{P}{2} \frac{\langle x-L \rangle^3}{3!}$$

Cond. contorno

$$x=0 \rightarrow y_0, \quad 0 = y_0 + 0$$

$$x=L \rightarrow y_L = 0, \quad 0 = 0 + EI \theta_0 L + \frac{P}{2} \frac{L^3}{6} - \frac{P}{6} \frac{L^3}{8}$$

$$EI \theta_0 = \frac{P}{6} L^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{3PL^2}{48}$$

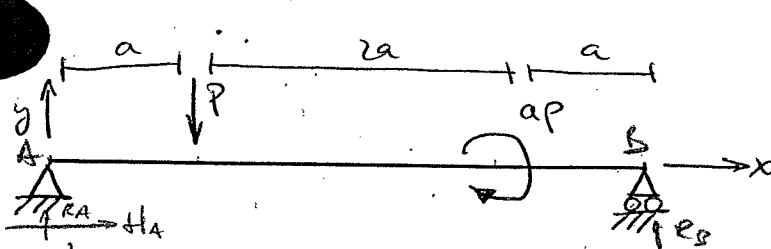
Por tanto

$$EI y = -\frac{3PL^2}{48} x + \frac{P}{12} x^3 - \frac{P}{6} \langle x-\frac{L}{2} \rangle^3$$

EJERCICIO

ESPECIAL T1

Sea la viga



DATOS:
 E, I

1) Reacciones en los apoyos y diagramas en leyes de T_y , M_z

Reacciones

Aplico cond. de eq. estático a toda la estructura

$$\begin{cases} \sum F_H = 0 \rightarrow H_A = 0 \\ \sum F_V = 0 \rightarrow R_A + R_B - P = 0 \\ \sum M_A = 0 \rightarrow -Pa - Pa + R_B 3a = 0 \end{cases}$$

$$R_B = \frac{P}{2}, R_A = \frac{P}{2}$$

Diagrama T_y $\uparrow \downarrow$

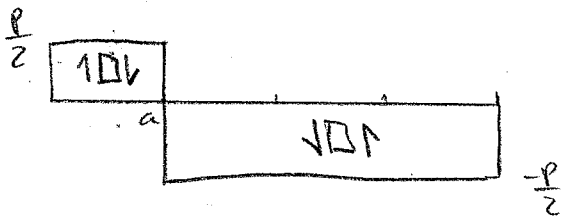
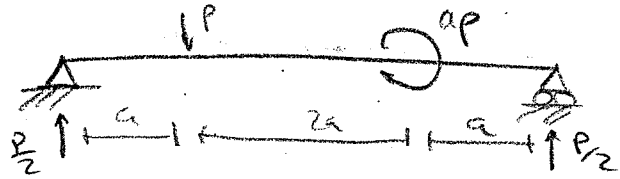
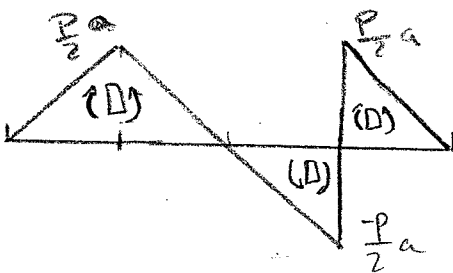


Diagrama M_z $\uparrow \downarrow$



leyes

$$T_y = \begin{cases} x < a, T_y = \frac{P}{2} \\ x > a, T_y = -\frac{P}{2} \end{cases}$$

$$M_z = \begin{cases} x < a, M_z = \frac{P}{2}x \\ a < x < 3a, M_z = \frac{P}{2}x - P(x-a) \\ x > 3a, M_z = 2Pa - \frac{Px}{2} \end{cases}$$

2) Desplazamientos y giros de las secciones $x=na$ ($n=1,2,3,4$)

Uso ecuación universal

$$EIy = EI\theta_0 + EI\theta_0 x + \frac{P}{2} \frac{\langle x-0 \rangle^3}{3!} - P \frac{\langle x-a \rangle^3}{3!} + aP \frac{\langle x-3a \rangle^2}{2} + \frac{P}{2} \frac{\langle x-4a \rangle^3}{3!}$$

$\circ \mid x < 4a$ (siempre)

Condiciones de contorno

$$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow 0 = \theta_0$$

$$x=4a \rightarrow y=0 = EI\theta_0(4a) + \frac{P}{2} \frac{(4a)^3}{3!} - P \frac{(4a-a)^3}{3!} + aP \frac{(4a-3a)^2}{2}$$

$$\cancel{4a} EI\theta_0 = Pa^3 \left(\frac{-16}{3} + \frac{27}{3 \cdot 2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{-Pa^3}{3} \cancel{4a}; \quad EI\theta_0 = -\frac{Pa^2}{3}$$

Ecuación elástica:

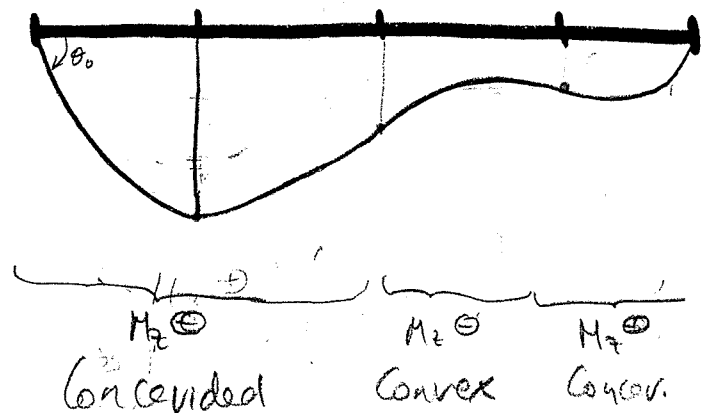
$$EIy = -\frac{Pa^2}{3} x + \frac{aP}{2} \langle x-3a \rangle^2 + \frac{P}{12} x^3 - P \frac{\langle x-a \rangle^3}{6}$$

Derivando la ecuación de la elástica obtenemos la de giro

$$EI\theta = -\frac{Pa^2}{3} + aP \langle x-3a \rangle + \frac{Px^2}{4} - \frac{P}{2} \langle x-a \rangle^2$$

x	EIy	$EI\theta$
0	0	$-\frac{Pa^2}{3}$
a	$-\frac{Pa^3}{6}$	$-\frac{Pa^2}{12}$
2a	$\frac{1}{6} Pa^3$	$\frac{1}{6} Pa^2$
3a	$\frac{1}{12} Pa^3$	$-\frac{1}{12} Pa^2$
4a	0	$\frac{Pa^2}{6}$

3) Dibujar a escala la elástica

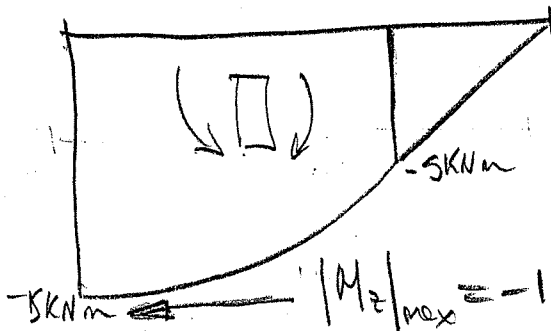
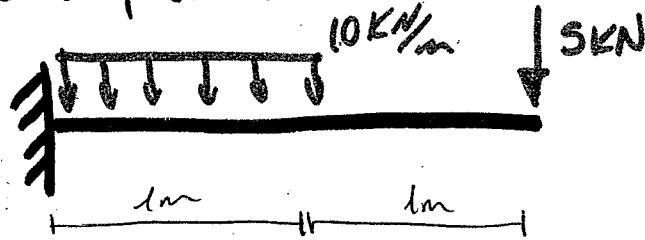


Ejercicio →

Para dimensionar la ménsula indicada en la figura se pueden usar 3 perfiles de las gamas IPN, IPE y HEB. Se pide determinar el perfil más económico posible.

Dato $\sigma_{adm} = 150 \text{ MPa}$

Calcular diagrama de momentos



$$|M_z|_{\max} = -15 \text{ kNm}, \quad \sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq \sigma_{adm}$$

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{15 \cdot 10^6 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{150} = 10^5 \text{ mm}^3 = 100 \text{ cm}^3$$

$$\text{IPN } 160 \rightarrow W_x = 117 \text{ cm}^3 \quad \text{---} \quad \text{Area} = 22,8 \text{ cm}^2$$

$$\text{IPE } 160 \rightarrow W_x = 109 \text{ cm}^3 \quad \text{---} \quad \text{Area} = 20,1 \text{ cm}^2$$

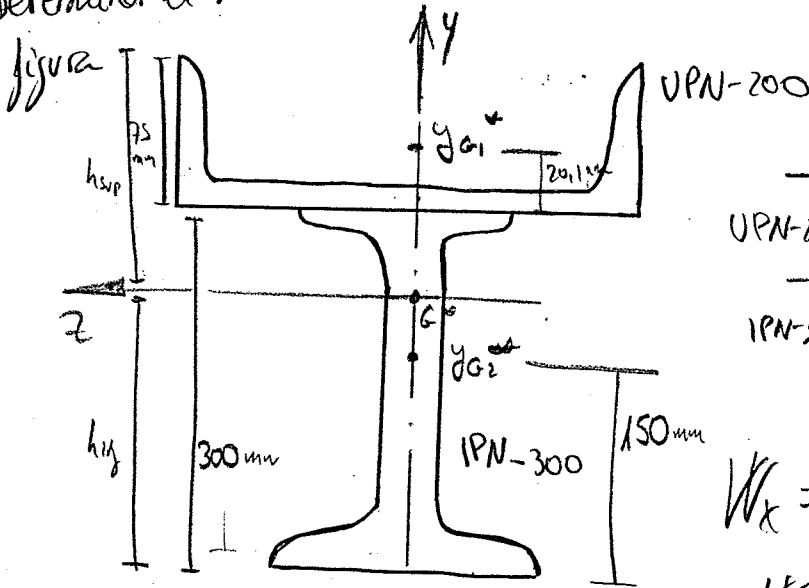
$$\text{HEB } 120 \rightarrow W_x = 144 \text{ cm}^3 \quad \text{---} \quad \text{Area} = 34 \text{ cm}^2$$

El más económico será el de menor área

$$\Rightarrow \boxed{\text{IPE } 160 \rightarrow W_x = 109 \text{ cm}^3 (100 \text{ cm}^3); A = 20,1 \text{ cm}^2}$$

ETERWGO

Determinar el módulo resistente W_x del perfil armado indicado en b



	$A (\text{cm}^2)$	$I (\text{cm}^4)$
UPN-200	32,2	148
IPN-300	69,1	9800

$$W_x = \min(W_{sup}, W_{inf})$$

$$W_{inf} = \frac{I_z}{h_{inf}}, \quad W_{sup} = \frac{I_z}{h_{sup}}$$

Necesitamos - por tanto - calcular I_z , el valor de h_{inf} o h_{sup}

$$y_{G^*} = \frac{y_{G1}^* A_1 + y_{G2}^* A_2}{A_1 + A_2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{G1}^* = h_s - 75 + 20,1 = h_s - 54,9 \\ y_{G2}^* = -h_i + 150 \end{array} \right.$$

$$\frac{(h_s - 75 + 20,1) 3220 + (-375 + h_s + 150) 6910}{32,2 + 69,1} = 0$$

$$h_s = 170,9 \text{ mm} = 17,1 \text{ cm} \rightarrow y_{G1}^* = 11,61 \text{ cm}$$

$$h_i = 375 - 170,9 = 20,4 \text{ cm} \rightarrow y_{G2}^* = -5,4 \text{ cm}$$

$$I_z^* = (y_{G1}^*)^2 A_1 + I_{z1} + (y_{G2}^*)^2 A_2 + I_{z2} = 148 + 32,2 \cdot 11,61^2 + 9800 + 69,1 \cdot 5,4^2$$

Steiner

$$I_z^* = 16303 \text{ cm}^4 \quad (\text{en valor mejor al } I_{max} \text{ de la parte grande pero no mucho mejor})$$

$$W_x = \frac{16303}{h_i} = 800 \text{ cm}^3$$

Lección 17: ENERGÍA ELÁSTICA MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA

• En flexión simple tenemos M_z, T_y

$$\begin{cases} \sigma = -\frac{M_z}{I_z} y \\ \tau = \frac{T_y M_z}{I_z b} \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon = \frac{\sigma}{E} \\ \gamma = \frac{\tau}{G} \end{cases}$$

$$dU = \left(\frac{1}{2} \sigma \epsilon + \frac{1}{2} \tau \gamma \right) dV = \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} + \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \right) dV$$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_z^2}{E I_z^2} y^2 + \frac{T_y^2 M_z^2}{G I_z^2 b^2} \right) \Rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{E I_z^2} \int_n^{\overbrace{I_z}} y^2 dx + \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{G I_z^2} \int_n^{\overbrace{I_z}} \frac{M_z^2}{b^2} dx$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{E I_z} + \frac{T_y^2}{2 G A_{Ty}}, \quad A_{Ty} \equiv \text{Area reducida respecto a } T_y = \frac{I_z^2}{\int_n \frac{M_z^2}{b^2} dx} = \left[\frac{\frac{L^8}{L^2 \cdot L^2}}{\frac{L^8}{L^2 \cdot L^2}} \right] = [L^2]$$

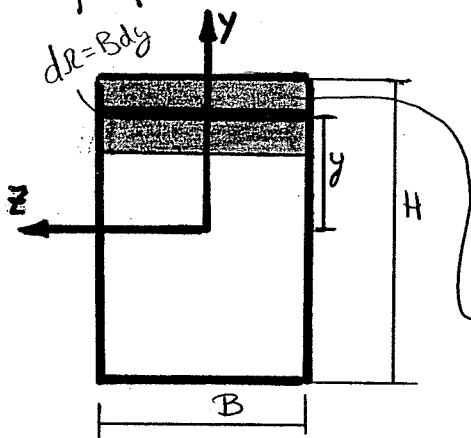
Por tanto $\Rightarrow$

$$U = \frac{1}{2} \int_L \frac{M_z^2}{E I_z} dx + \frac{1}{2} \int_L \frac{T_y^2}{G A_{Ty}} dx$$

Area · Dist = $L^2 \cdot L$

Despreciable

Ejemplo cálculo area reducida de sección rectangular



$$A_{Ty} = \frac{I_z^2}{\int_n \frac{M_z^2}{B^2} dx} \quad ; \quad I_z = \frac{1}{12} B H^3$$

$$M_z^2 = \int_y^H \eta^2 dx = \int_y^H \eta^2 B d\eta = \frac{\eta^3}{3} \Big|_y^H = \frac{1}{3} \left(\frac{H^3}{3} - y^3 \right) B$$

No pongo y, por estar en el limite de integración ($\eta = y$)

$$A_{Ty} = \frac{\left(\frac{1}{12} B H^3 \right)^2}{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{1}{3} \left(\frac{H^3}{3} - y^3 \right) B^2 dy} = \frac{\frac{1}{144} B^2 H^6}{\frac{1}{4} B \left(\frac{H^4}{16} y - \frac{H^3 y^3}{2 \cdot 3} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}} =$$

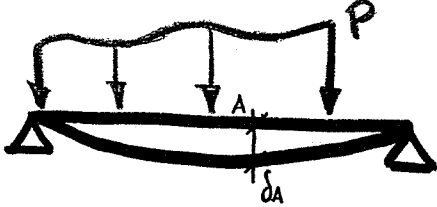
Algo menor que Area total

$$= \frac{\frac{1}{144} B^2 H^6}{\frac{1}{4} B H^5 \left(\frac{1}{16 \cdot 2} - \frac{1}{2^3 \cdot 6} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \frac{1}{16 \cdot 2} - \frac{1}{2^3 \cdot 6} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} \right)} = \frac{\frac{1}{12^2} B^2 H^6}{\frac{1}{4} \frac{1}{30} B H^5} = \underline{\underline{\frac{5}{6} B H}} < B H$$

● MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA O MÉTODO DE MOHR

→ Cálculo de desplazamientos → Teorema de Castigliano $\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_F$

Este es un método alternativo para el cálculo de desplazamientos

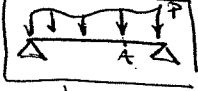
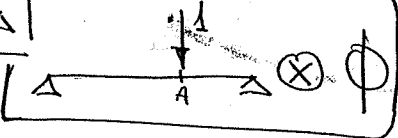


Solo nos proporciona δ_A , no de todos los puntos como nos daba la ecuación de la elástica, pero ésta solo servía para momentos puntuales y cargas puntuales o uniformemente distribuidos

→ PROCEDIMIENTO

① Aplicar una carga Φ tal que el desplazamiento de A sea su desplazamiento eficaz

② Descomponer el sistema en dos subsistemas

Sistema (P) → El original 
Sistema (1) → El de la carga unitaria 

③ Ley de momentos de ambos sistemas → M_{zp}
→ $M_{z1} \cdot \Phi$

tal que $M_z = M_{zp} + M_{z1} \cdot \Phi$

④ Potencial interno (despreciando el constante)

$$U = \frac{1}{2} \int_L \frac{M_z^2}{EI_z} dx = \frac{1}{2} \int_L \frac{(M_{zp} + M_{z1} \cdot \Phi)^2}{EI_z} dx$$

⑤ Derivamos el potencial respecto a la carga

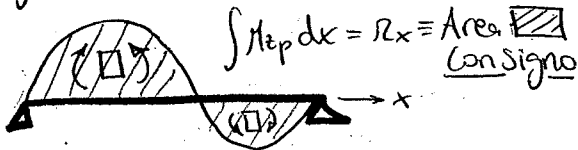
$$\frac{dU}{d\Phi} = \int_L \frac{(M_{zp} + M_{z1} \cdot \Phi) \cdot M_{z1}}{EI_z} dx$$

⑥ $\frac{dU}{d\Phi} \bigg|_{\Phi=0} = \delta_A = \int_L \frac{M_{z1} \cdot M_{zp}}{EI_z} dx$

En general la ley de momentos M_{z1} será de la forma
 $M_{z1} = ax + b = r(x)$, por tanto:

$$\delta_A = \frac{1}{EI_z} \int_L (ax+b) M_{zP} dx = \frac{1}{EI_z} \left[\int_L ax M_{zP} dx + \int_L b M_{zP} dx \right]$$

ley M_{zP} (sistema original)

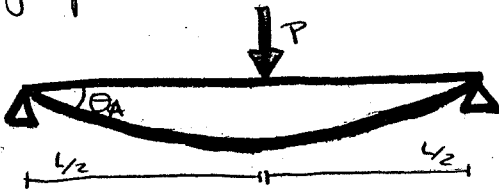


$$\Rightarrow \delta_A = \frac{1}{EI_z} (a X_G^* R^* + b R^*)$$

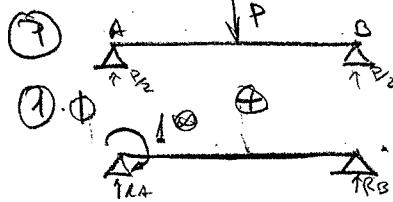
$$\delta_A = \frac{R^* (a X_G^* + b)}{EI_z} = \frac{R^* r(X_G^*)}{EI_z}$$

$X_G^* \equiv$ Centro de gravedad de R^*

Ejemplo. Calcular θ_A



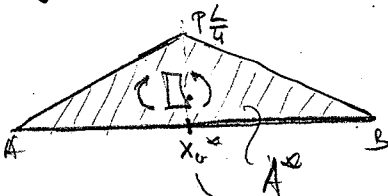
Subsistemas



$$R_A + R_B = 0$$

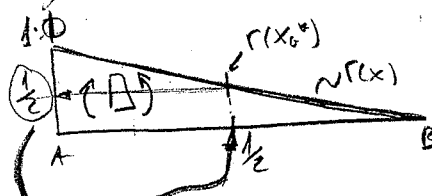
$$-1 + R_B L = 0; R_B = \frac{1}{L}; R_A = -\frac{1}{L}$$

Ley de momentos M_{zP}



$$X_G^* \equiv \text{centro grav. } A^* = \frac{1}{2}$$

Ley de momentos $M_{zP} \cdot \Phi$



⊗ Ponemos la carga unitaria en el punto donde queremos calcular el desplaz (pondremos carga punto) o el giro (momento punto)

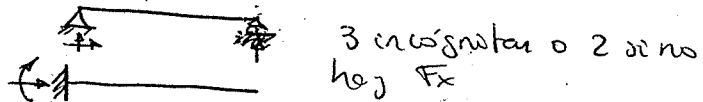
$$\theta_A = \frac{A^* r(X_G^*)}{EI_z} = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} L \frac{PL}{4} \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{PL^2}{16EI_z}$$

Lección 18: FLEXIÓN HIPERESTÁTICA

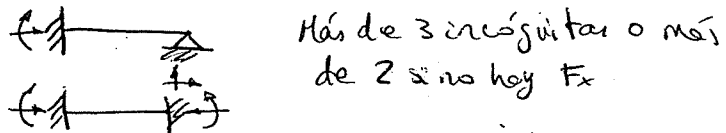
En general tendremos problemas planos

3 ecuaciones $\begin{cases} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$

• En casos isostáticos teníamos



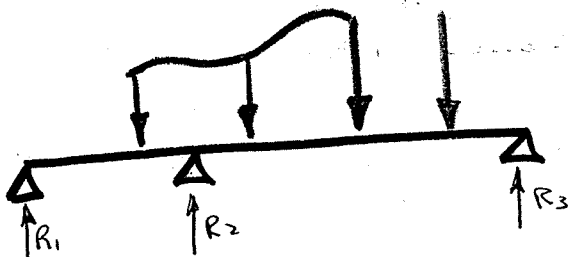
• En casos hiperestáticos teníamos



Estudiaremos
sistemas hiper-
estáticos de
grado 1 ($GH=1$)

2 Métodos de cálculo $\begin{cases} \text{Método de la carga unitaria o de Mohr (basado en la energía)} \\ \text{Método de la ecuación universal} \end{cases}$

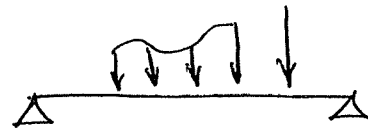
1) MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA



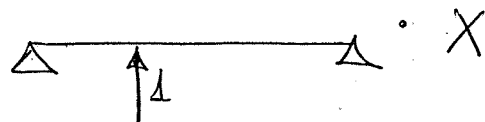
1º Elegimos la "incógnita hiperestática". En el caso pintado, quitando una de las reacciones el problema ya sería isostático. Elijo R_2

2º Descomposición del sistema

Sistema P: Es el original con la incógnita hiperestática



Sistema 1: Sistema con carga unitaria en el punto de aplicación de R_2 con su mismo sentido



3) Cálculo de los diagramas de momentos $\rightarrow M_P$
 $\rightarrow M_1$

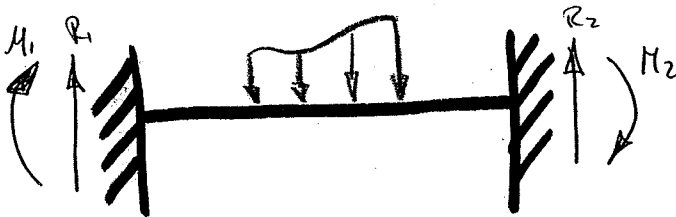
4° Cálculo del desplazamiento eficaz respecto de la incógnita hiperestática (x) → lo llamaremos δ

$$\delta = \delta_P + X \delta_1 \rightarrow \begin{cases} \delta_P = \int_0^L \frac{M_P \cdot M_1}{E I_z} dx \\ \delta_1 = \int_0^L \frac{M_1 \cdot M_1}{E I_z} dx \end{cases}$$

con la condición $\delta=0$ ya que la carga está en un apoyo.

$$X = -\frac{\delta_P}{\delta_1}$$

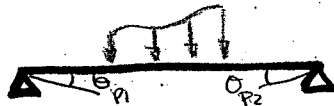
• Qué ocurriría si el sistema fuese hiperestático de $G+1 > 1$?



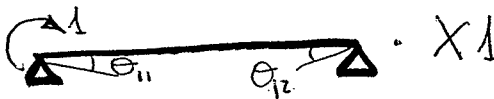
1° Elegimos las incógnitas hiperestáticas $M_1 = X_1$ y $M_2 = X_2$

2° Descomposición del sistema

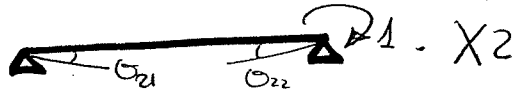
Sistema P



Sistema 1



Sistema 2



3° Leyes de momentos de los 3 sistemas

$$\text{Leyes} \begin{cases} M_P \\ M_1 \\ M_2 \end{cases}$$

4° Desplazamientos eficaces respecto a las incógnitas (en este caso son giro porque las incógnitas son momentos)

$$\theta_1 = \theta_{P1} + \theta_{11} X_1 + \theta_{21} X_2 = 0$$

$$\theta_2 = \theta_{P2} + \theta_{12} X_1 + \theta_{22} X_2 = 0$$

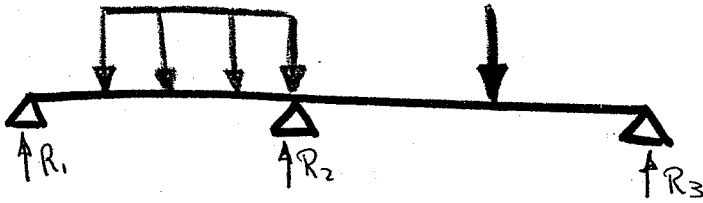
Por estar realmente apoyados en apoyo empotrado que no permite el giro.

Resolviendo obtenemos

$$X_1 = M_1$$

$$X_2 = M_2$$

2) MÉTODO DE LA ECUACIÓN UNIVERSAL



1° Dibuja la viga con todas las cargas y reacciones, sea hiperestático del grado que sea.

2° Plantea ecuación universal

$$EI y = EI y_0 + EI \theta_0 x + \frac{\sum M_i}{2!} \langle x-a \rangle^2 + \frac{\sum F_i}{3!} \langle x-a \rangle^3 + \frac{\sum P_i}{4!} \left[\langle x-c \rangle^4 - \langle x-d \rangle^4 \right]$$

3° Incógnitas isostáticas

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \\ \theta_0 \\ R_1, R_2, R_3 \end{array} \right.$$

⇒ Tengo 5 incógnitas

4° Necesito 5 ecuaciones

$$\rightarrow \sum F = 0$$

$$\rightarrow \sum M = 0$$

→ Ecuaciones de compatibilidad de mov. en apoyos $\equiv$ tantas como reacciones tenga.

● VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL SISTEMA HIPERESTÁTICO

Ventajas

- Sistemas redundantes ⇒ Más seguros
- Reducen esfuerzos en un sentido ⇒ Optimizan sección
- Menores deformaciones o flechas.

Desventajas

- Aparecen esfuerzos en el sentido contrario al que se reduce (es mejor tener 2 momentos pequeños que 1 grande)
- Los movimientos impuestos producen esfuerzos
- Los cálculos dependen de $EI_z \Rightarrow$ dependen de la inercia

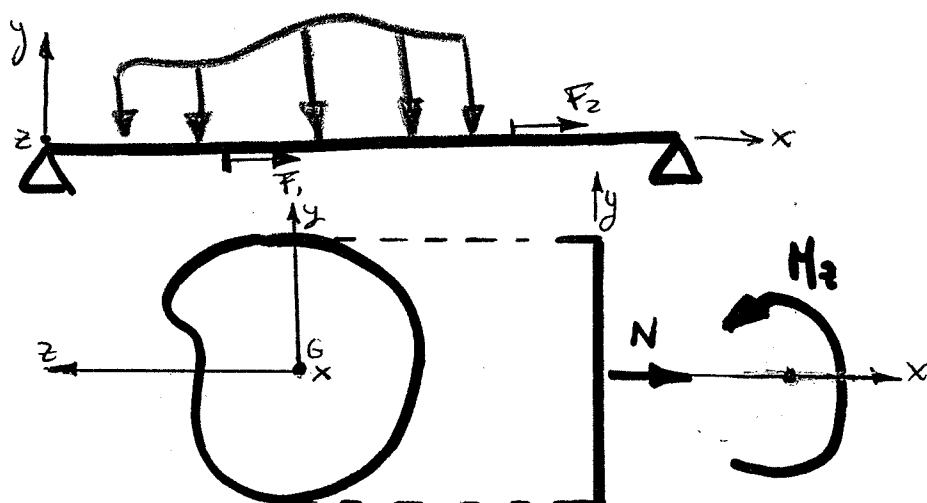
Lección 19: FLEXIÓN COMPUESTA

Un sólido prismático está sometido a flexión compuesta cuando sus secciones sufren: Esfuerzo normal (N) y momento flector (M_z, M_y)

Dos Tipos

- Llamamos flexión compuesta recta cuando solo actúan $M_z + N$ y $M_y + N$
- Llamamos flexión compuesta desviada cuando actúan: N, M_z, M_y

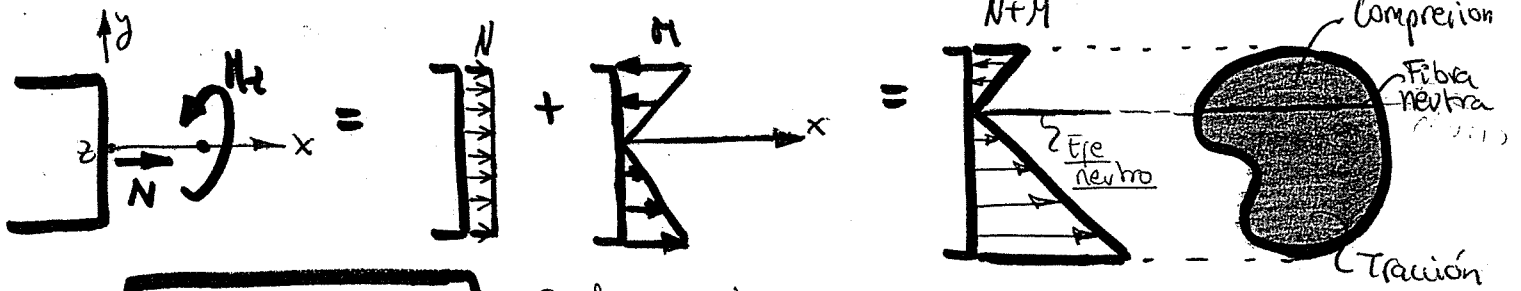
No se estudia ni entra en examen aunque hay un ejercicio en la colección



HiPÓTESIS

- Elasticidad proporcional: Podemos aplicar las leyes de Hooke, principios de superposición y proporcionalidad,...
- Teoría de pequeñas deformaciones
- Hipótesis de Bernoulli: Conservación de secciones planas y perpendiculares a la directriz

TENSIONES NORMALES



$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y$$

Si el momento flector M_z

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} z$$

N : Esfuerzo normal ($>0 \Rightarrow$ Tracción)
 A : Área de la sección
 M_z : Momento flector ($M_z > 0$)
 I_z : Momento de inercia de la sección respecto al eje z
 y : Coordenada de la fibra considerada.

Como podemos ver en las figuras anteriores, el eje neutro ya no coincide con el centro de gravedad de la sección.

Definimos la ecuación del eje o fibra neutra:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y = 0 ; \quad y_{\text{Fibra neutra}} = \frac{N I_z}{A M_z}$$

y además: d (distancia a la fibra neutra) $= y - y_{\text{fibra neutra}} = y - \frac{N I_z}{A M_z} = y \frac{M_z}{I_z} - \frac{N}{A} = \frac{-\sigma_x}{K}$

Por tanto $\sigma_x = -Kd = -\frac{M_z}{I_z} d$

TENSIONES TANGENCIALES

$$\tau = \frac{T_y M_z^*}{I_z b}$$

ya que el esfuerzo normal no da tensión tangencial.

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Aplicamos superposición: Los desplazamientos están desacoplados, el esfuerzo normal da desplazamiento en una dirección (x) y el momento flector en otra (si el $M_z \rightarrow$ en dirección y)

POTENCIAL

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV = \frac{1}{2} (\sigma \epsilon + \tau \gamma) dV \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \frac{\sigma}{E} \\ \gamma = \frac{\tau}{G} \end{array} \right.$$

$$dU = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dV = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y \right)^2 \frac{1}{E} + \frac{T_0^2 M_z^2}{G I_z^2 b^2} \right] dV$$

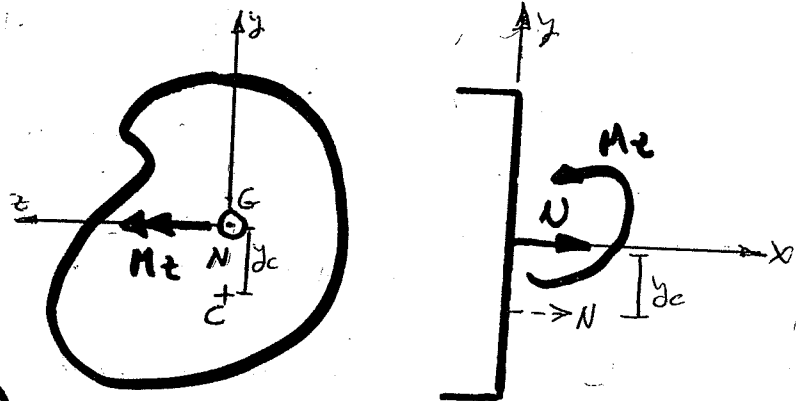
$$\frac{dU}{dx} = \int_A \frac{1}{2E} \left(\frac{N^2}{A^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2} y^2 - \frac{2NM_z}{AI_z} y \right) dA + \int_A \frac{1}{2G} \frac{T_0^2 M_z^2}{I_z^2 b^2} dA$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2E} \left(\frac{N^2}{A} + \frac{M_z^2}{I_z} \right) + \frac{1}{2G} \frac{T_0}{A_{Tz}} \quad \text{Area reducida} \Rightarrow \frac{I_z^2}{\int_A \frac{M_z^2}{b^2} dA} = A_{Tz}$$

Despreciando los términos $\frac{1}{2G} \frac{T_0}{A_{Tz}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{dU}{dx} \approx \frac{1}{2E} \frac{M_z^2}{I_z}; U = \int_L \frac{1}{2E} \frac{M_z^2}{I_z} dx}$

CENTRO DE PRESIONES

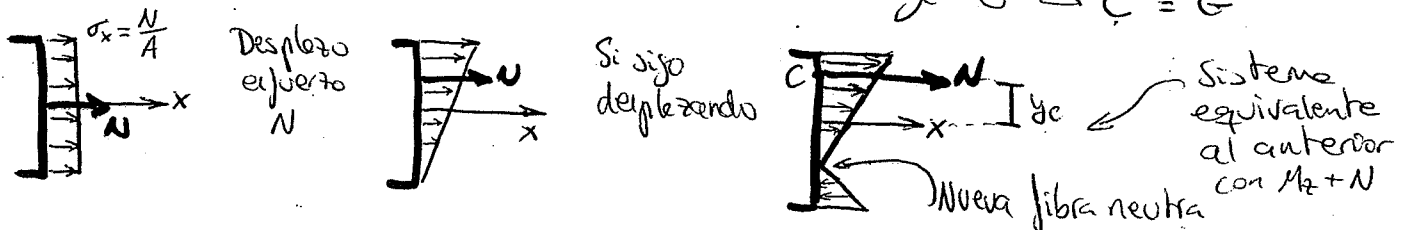
Se define como el punto en el que tendría que aplicar N para obtener un sistema equivalente con la misma resultante



$$M_z = -y_c N \Rightarrow \boxed{y_c = -\frac{M_z}{N}}$$

En flexión curvada $y_c = -\frac{M_z}{N}$
 $C(y_c, z_c)$ $z_c = +\frac{M_y}{N}$

Si no hay momento, tendríamos tracción exclusiva $y_c = 0 \rightarrow C \equiv G$



Por tanto, volviendo a la ecuación del eje o fibra neutra:

$$\frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y = 0 \xrightarrow{y_c = \frac{-M_z}{N}} \frac{N}{A} + \frac{N y_c}{I_z} y = 0, \quad \text{Definimos el radio de giro, respecto del eje } z \text{ como: } i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

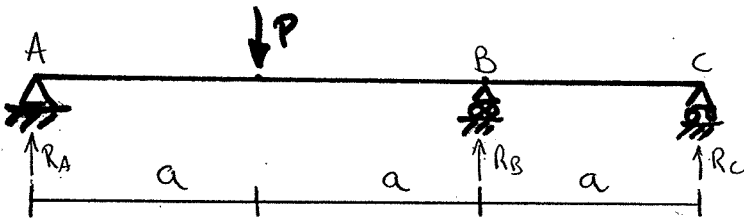
$$0 = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_c A}{I_z} y \right), \quad \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_c}{i_z^2} y \right) = 0,$$

La nueva ecuación del eje neutro queda:

$$1 + \frac{y_c}{i_z^2} y = 0$$

EJERCICIO Especial T1

La viga de la figura tiene sección uniforme de rigidez EI . Se pide calcular la flecha bajo la carga P y dibujar a escala la deformada.



Se trata de un sistema hiperestático de $G.H = 3 - 2 = 1$

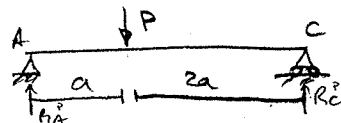
2 métodos $\rightarrow$ Carga unitaria o Mohr
 $\leftarrow$ Ec universal

• Aplicamos MOHR

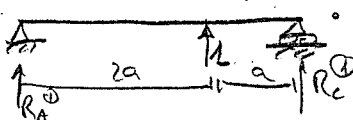
1) Elegimos como magnitud hiperestática R_B

2) Descomposición del sistema

Subsistema 1



Subsistema 2



$$\begin{cases} \sum F = 0 \rightarrow R_A^{\text{I}} + P + R_C^{\text{I}} = 0 \\ \sum M_A = 0 \rightarrow -Pa + R_C^{\text{I}} 3a = 0; \quad R_C^{\text{I}} = \frac{P}{3} // \\ R_A^{\text{I}} = \frac{2P}{3} // \end{cases}$$

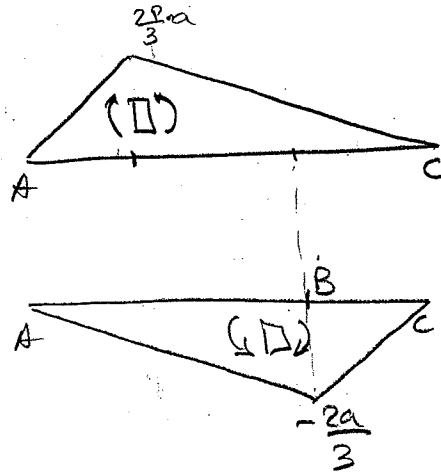
$$\times \begin{cases} \sum F = 0 \rightarrow R_A^{\text{II}} + R_C^{\text{II}} + 1 = 0, \quad R_A^{\text{II}} = -\frac{1}{3} // \\ \sum M_A = 0 \rightarrow 2a + R_C^{\text{II}} 3a = 0; \quad R_C^{\text{II}} = -\frac{2}{3} // \end{cases}$$



3) Leyes de Momentos

• Subsistema P: M_{zp}

• Subsistema 1: M_{z1}



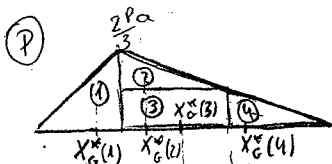
4) Condición de compatibilidad de movimiento

$$\delta_B = 0 = \delta_B^P + \delta_B^I \cdot X \quad ; \quad X = -\frac{\delta_B^P}{\delta_B^I}$$

$$\delta_B^P = \int_L \frac{M_{zp} \cdot M_{z1}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{3a} \frac{M_{zp} M_{z1}}{\text{I}} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\delta_B^P}{\delta_B^I} = \frac{\text{I}}{\text{II}} = X \end{array} \right.$$

$$\delta_B^I = \int_L \frac{M_{z1} \cdot M_{z1}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{3a} M_{z1}^2 \text{II}$$

Resolvemos I y II $\rightarrow$ Vamos a aplicar multiplicación de áreas $\rightarrow$ (Área en sist P) (Valor de M_{z1} en x_G^* de este área)



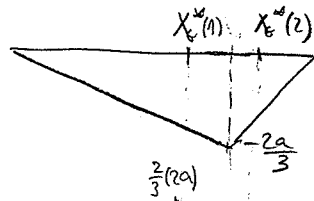
$$\begin{aligned} \text{I} \quad M_{z1} &= \frac{2}{3}(x-3a) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{z1}(x_G^*(4)) = M_{z1}\left(2a + \frac{1}{3}a\right) = M_{z1}\left(\frac{7a}{3}\right) = -\frac{4a}{9} \\ M_{z1}(x_G^*(1)) = M_{z1}\left(\frac{2}{3}a\right) = -\frac{2a}{9} \\ M_{z1}(x_G^*(2)) = M_{z1}\left(a + \frac{1}{3}a\right) = M_{z1}\left(\frac{4a}{3}\right) = -\frac{4a}{9} \\ M_{z1}(x_G^*(3)) = M_{z1}\left(a + \frac{a}{2}\right) = M_{z1}\left(\frac{3a}{2}\right) = -\frac{a}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \text{I} &= \int_0^{3a} M_{zp} \cdot M_{z1} dx = \left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}Pa \right) \left(-\frac{2a}{9} \right) + \left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}Pa \right) \left(-\frac{4a}{9} \right) + \left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}Pa \right) \left(-\frac{a}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}Pa \right) \left(-\frac{4a}{9} \right) = \\ &= Pa^3 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \right) = Pa^3 \frac{-4-4-4-9}{2 \cdot 3 \cdot 9} = Pa^3 \frac{-21}{2 \cdot 3 \cdot 9} \end{aligned}$$

$$\textcircled{I} = -\frac{7}{18} Pa^3$$

Hacemos lo mismo con $\textcircled{II}$



$$\textcircled{II} = \int_0^{2a} M_{21} M_{21} dx = \left(\frac{1}{2} x \cdot \frac{-2a}{3} \right) \left(\frac{-4}{3} a \right) + \left(\frac{1}{2} a \cdot \frac{-2a}{3} \right) \left(\frac{-4}{3} a \right)$$

$$\textcircled{II} = a^3 \left(\frac{8}{27} + \frac{4}{27} \right) = a^3 \frac{4}{9}$$

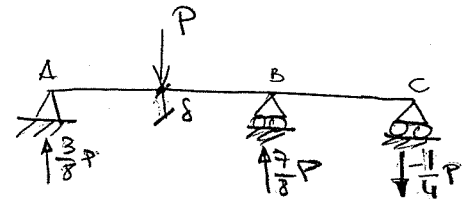
$$M_{21} \left(\frac{4}{3} a \right) = M_{21} \left(2a + \frac{1}{3} a \right) = M_{21} \left(\frac{7a}{3} \right)$$

Por tanto $X = \frac{-\textcircled{I}}{\textcircled{II}} = \frac{-\frac{7}{18} Pa^3}{\frac{4}{9} a^3} = \frac{7 \cdot 9}{4 \cdot 18} P = \frac{7}{8} P$

$X = R_B = \frac{7}{8} P$ (como $X > 0 \rightarrow$ sentido tomado de R_B correcto)

$$R_A = R_A^{\textcircled{I}} + R_A^{\textcircled{II}} \cdot X = \frac{2}{3} P + \frac{1}{3} \frac{7}{8} P = \frac{9}{24} P = \frac{3}{8} P$$

$$R_C = R_C^{\textcircled{I}} + R_C^{\textcircled{II}} \cdot X = \frac{P}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} P = \frac{-6}{24} P = -\frac{1}{4} P$$



Ahora queremos calcular el desplazamiento del punto de aplicación de $P \Rightarrow \delta|_{x=a}$

Usamos los subsistemas definidos anteriormente

Subsist P $\delta_P = \int_0^{2a} \frac{M_{2P} \cdot M_{21}}{EI} dx$

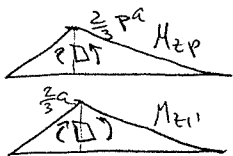
Subsist 1 $\delta_1 = \int_0^{2a} \frac{M_{21} \cdot M_{21}}{EI} dx$

siendo M_{21} la ley de momentos del subsistema 1'

Por tanto $\delta|_{x=a} = \delta_P + \delta_1 \cdot X$

simetría con $\textcircled{II}$

$$\int_0^{2a} M_{2P} \cdot M_{21} dx = \frac{4}{9} Pa^3$$

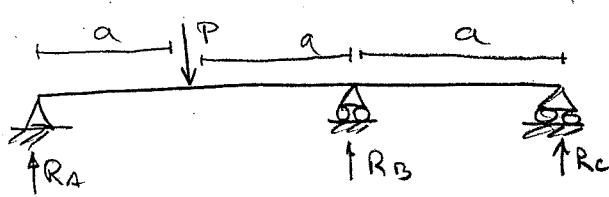


$$\Rightarrow \delta|_{x=a} = \frac{4}{9} Pa^3 - \frac{7}{18} a^3 \cdot \frac{7}{8} P = Pa^3 \frac{8 \cdot 8 - 7 \cdot 7}{18 \cdot 8}$$

$$\boxed{\delta|_{x=a} = \frac{15}{9 \cdot 2 \cdot 8} Pa^3 = \frac{5}{48} Pa^3}$$

$$\int_0^{2a} M_{21} \cdot M_{21} dx = -\frac{7}{18} a^3$$

Vamos a resolver el problema aplicando la ecuación universal



Por equilibrio estático

$$\sum F_v = 0 \rightarrow R_A + R_B + R_C - P = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -P \cdot a + R_B \cdot 2a + R_C \cdot 3a = 0 \quad (2)$$

Planteo ecuación universal de la elástica:

$$\begin{cases} \langle x-a \rangle^3 = 0 & x < a \\ \quad = x-a, & x \geq a \end{cases}$$

$$EI y = EI y_0 + EI \theta_0 x + \frac{R_A}{3!} \langle x-0 \rangle^3 - \frac{P}{3!} \langle x-a \rangle^3 + \frac{R_B}{3!} \langle x-2a \rangle^3 + \frac{R_C}{3!} \langle x-3a \rangle^3$$

Condiciones de contorno:

$$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow y_0=0$$

$$x=2a \rightarrow y=0 \rightarrow 0 = EI \theta_0 2a + \frac{R_A}{3!} (2a)^3 - \frac{P}{3!} a^3 \quad (3)$$

$$x=3a \rightarrow y=0 \rightarrow 0 = EI \theta_0 3a + \frac{R_A}{3!} (3a)^3 - \frac{P}{3!} (2a)^3 + \frac{R_B}{3!} a^3 \quad (4)$$

Resolvemos (1) (2) (3) (4)

$$\begin{cases} R_A + R_B + R_C = P & (1) \\ 2R_B + 3R_C = P & (2) \\ \frac{4}{3} a^3 R_A + 2EI a \theta_0 = \frac{P}{6} a^3 & (3) \\ \frac{9}{2} a^3 R_A + \frac{1}{6} a^3 R_B + 3EI \theta_0 a = \frac{4}{3} P a^3 & (4) \end{cases} \begin{cases} (1) \cdot 2 - (2) \cdot 3 \\ R_A a^3 (9-4) + \frac{1}{3} a^3 R_B = P a^3 \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ 5R_A + \frac{R_B}{3} = \frac{13}{6} P \\ (1) \cdot 5 \rightarrow 5R_A + 5R_B + 5R_C = 5P \end{cases}$$

$$\left(5 - \frac{1}{3}\right) R_B + 5R_C = \left(5 - \frac{13}{6}\right) P = \frac{30-13}{6} P = \frac{17}{6} P, \quad \begin{cases} \frac{14}{3} R_B + 5R_C = \frac{17}{6} P \\ (2) \cdot \frac{5}{3} \rightarrow \frac{10}{3} R_B + 5R_C = \frac{5}{3} P \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} R_B = \left(\frac{17}{6} - \frac{5}{3}\right) P, \quad R_B = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{4}{3}} P = \frac{7}{8} P, \quad R_C = \frac{\frac{5}{3} P - \frac{10}{3} \cdot \frac{7}{8} P}{5} = -\frac{1}{4} P$$

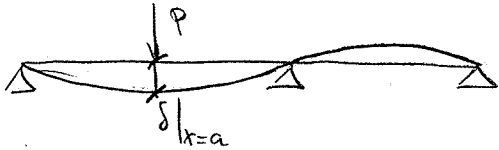
$$R_A = \left(\frac{13}{6} P - \frac{7}{8} P\right) \frac{1}{5} = \frac{13 \cdot 8 - 14}{5 \cdot 6 \cdot 8} P = \frac{90}{5 \cdot 6 \cdot 8} P = \frac{3}{8} P$$

$$EI \theta_0 = \left(\frac{P}{6} a^3 - \frac{4}{3} a^3 \frac{7}{8} P\right) \frac{1}{2a} = \frac{P a^2}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} P a^2$$

La ecuación de la elástica queda por tanto:

$$EI y = -\frac{1}{6} P a^2 x + \frac{1}{16} P x^3 - \frac{P}{6} \langle x-a \rangle^3 + \frac{7}{8} P \frac{\langle x-2a \rangle^3}{6}$$

$$\boxed{\delta|_{x=a} = y(x=a) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} P a^3 + \frac{1}{16} P a^3 \right) = \frac{1}{EI} \frac{-8+3}{48} P a^3 = \frac{-5}{48 EI} P a^3}$$

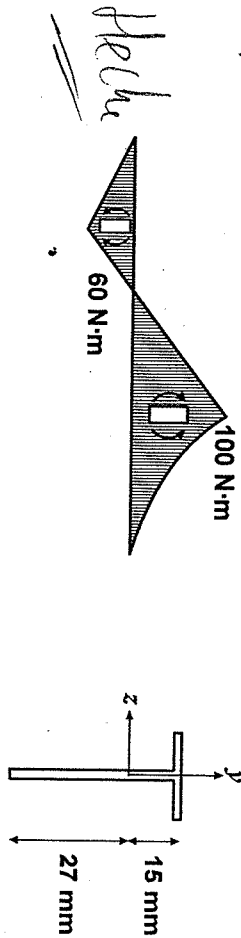


Elástica a elíptica

NOTA!! Aplicando MOHR el desplazamiento da positivo, ya que va en la dirección de la fuerza P . sin embargo, aplicando la ecuación universal el desplazamiento da negativo ya que va en sentido negativo del eje y .

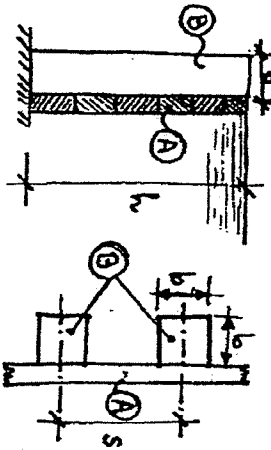
PROBLEMAS DE RESISTENCIA DE MATERIALES
MÓDULO 5: FLEXIÓN DE VIGAS (1)
CURSO 2012-13

5.1.- Halle, en MPa, la tensión normal máxima de compresión en la viga cuya sección y diagrama de momentos flectores se muestran en la figura ($I_z = 22 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$).



21-6-10

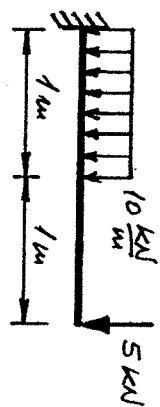
5.2.- Un dique temporal de madera se construye con tablas horizontales A, sostenidas mediante postes verticales B, que están empotrados en el suelo de tal forma que actúan como vigas en voladizo. Los postes son de sección transversal cuadrada $b \times b$ y están separados una distancia $s = 0,8 \text{ m}$. El nivel del agua está a la altura total del dique $h = 2 \text{ m}$. Determinar la dimensión b mínima requerida de los postes si la tensión admisible de la madera es $\sigma_{adm} = 8 \text{ MPa}$.



11-3-88

5.3.- Para dimensionar la ménsula indicada en la figura se pueden usar perfiles de las gamas IPN, IPE y HEB. Se pide determinar el perfil más económico posible.

Hecho
Dato: $\sigma_{adm} = 150 \text{ MPa}$



5-9-00

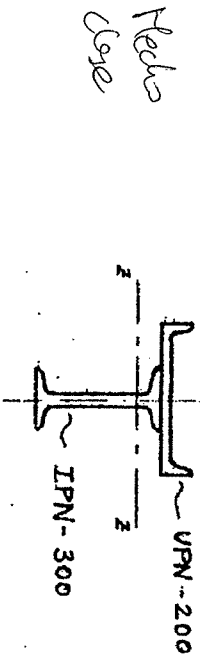
5.4.- Determinar el radio más pequeño (en mm) hasta el que podemos curvar una fibra de vidrio rectilínea, de diámetro $d = 10 \mu\text{m}$, sin que se produzca su rotura.

Datos: $E = 76000 \text{ MPa}$; $\sigma_{rot} = 2000 \text{ MPa}$

26-6-03

Hecho
Código
Cálculo
 $\sigma_{max} = \frac{E \cdot d}{2 \cdot R}$

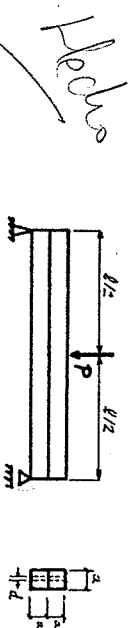
5.5.- Determinar el módulo resistente W_z del perfil armado indicado en la figura.



19-9-86

5.6.- Las dos barras de sección cuadrada que constituyen la viga de la figura se pretenden unir mediante tornillos de diámetro $d = 5 \text{ mm}$. Calcular el número mínimo de tornillos necesario.

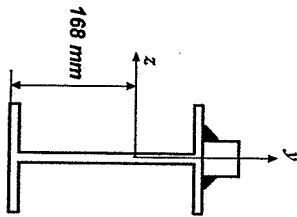
Datos: $P = 1 \text{ kN}$ $L = 2 \text{ m}$ $a = 10 \text{ cm}$ $\tau_{adm} = 150 \text{ MPa}$



2-6-92



5.7.- Las vigas carfil (biapoyadas), de un puente grúa tienen 5 m de longitud y están fabricadas con un perfil IPE 220 y un perfil cuadrado macizo de 50 x 50 mm ($\sigma_{adm} = 200 \text{ MPa}$), soldados entre sí con cordones interumpidos de ancho de garganta $a = 4 \text{ mm}$ y longitud $L_c = 100 \text{ mm}$ ($\tau_{adm} = 100 \text{ MPa}$).



Por ellas circula un puente grúa cuyas ruedas están separadas 50 cm entre sí, siendo la carga máxima por rueda de 25 kN. Se pide:

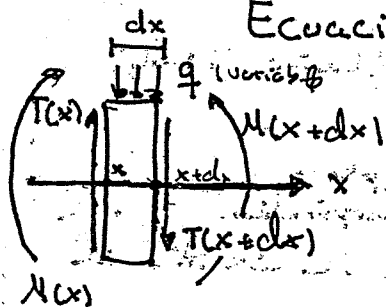
- 1.- Comprobar que la tensión normal máxima es inferior a la admisible.
- 2.- Hallar el paso máximo entre los cordones de soldadura.

$$\frac{\mu_{SR}}{e}$$

$$\begin{aligned} K &= \rho_{SR} \times \frac{E}{L} = K_S \cdot \frac{E}{S^2} \\ \frac{M}{\gamma} &= \frac{1}{T_2} K \end{aligned}$$

$$\gamma'' = \frac{M}{EI}$$

Ecuación de equilibrio en flexión



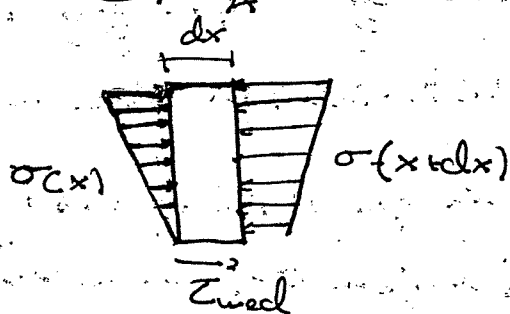
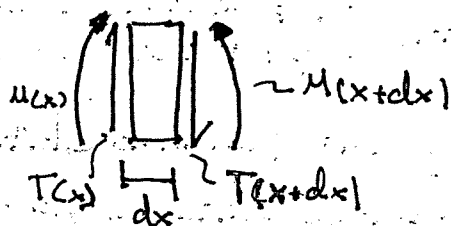
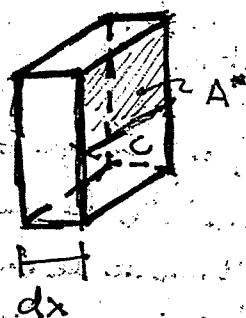
$$T(x) - q dx - T(x+dx) = 0 \quad T(x+dx) = T(x) + \frac{dT}{dx} dx$$

$$\frac{dT}{dx} + q = 0$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M(x) + q dx \cdot \frac{dx}{2} + T(x+dx) dx = M(x+dx)$$

$$T(x) = \frac{dM}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0}$$

Estudio de las tensiones en flexión simple $\tau \neq \frac{T}{A}$



Th. de Colignon: $\boxed{z_{med} = \frac{T}{b} \frac{m_z(A^*)}{I_z}}$ tensión rasante

Es un valor aproximado. Si el corte es paralelo al eje z:

$$z_{xy} = - \frac{T(y)}{c} \cdot \frac{m_z(A^*)}{I_z}$$

$$m_z(A^*) = \iint_{A^*} y dA = \int_{-h/2}^{h/2} y b dy = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} y dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^3}{4} - y^2 \right)$$

$$o' m_z(A^*) = A^* \cdot y_{GA} = b \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

Ecuación fundamental de la elástica $(v(x))$ $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} = \frac{v'''}{(1+v')^2} \approx v'''$

$$\boxed{v''(x) = \frac{M(x)}{EI_z}}$$

Calculo ley de $M(x)$

$$v'(x) = \int \frac{M(x)}{EI_z} dx = \Theta(x)$$

si $M > 0 \Rightarrow$ viga $\cap$

si $M < 0 \Rightarrow$ viga $\cup$

Condiciones de contorno $v(\text{apoyos}) = 0$; 2 leyes de $M \Rightarrow \begin{cases} V_{AB}(a) = V_{BC}(a) \\ V_{AB}'(a) = V_{BC}'(a) \end{cases}$

Ecuación universal de la elástica

$$EI v(x) = \sum_{i=1}^{nm} \frac{M_i}{2} \langle x - a_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^{np} \frac{P_i}{6} \langle x - b_i \rangle^3 + \sum_{i=1}^{nq} \frac{q_i}{24} \langle x - c_i \rangle^4 - \langle x - d_i \rangle^4 + EI \Theta_0 \cdot x + EI v_0$$

Módulo 5: Flexión

Flexión simétrica pura: No $\exists$ cortantes, solo momento flector $M = cte$, el eje de giro coincide con el eje del par M .

Hipótesis de Bernoulli: Las secciones transversales planas $\perp$ a la directriz antes de la deformación, permanecen planas y $\perp$ a la directriz tras la deformación.

Consecuencia: el mov. de las secciones es un giro alrededor del eje de referencia.

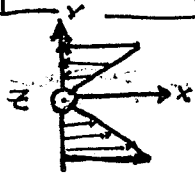
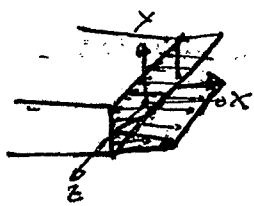
Fibra neutra: Línea que aproximadamente ni se alarga ni se acorta.

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad \sigma_x = -\frac{E}{\rho} y \Rightarrow + \text{deformación y tensión cuanto mayor distancia a la fibra neutra.}$$

y : distancia a fibra neutra
 ρ : radio de curvatura

Para que $U=0 \Rightarrow m_z = \int y dA = 0$ (momento estático) $\Rightarrow$ el eje z (el eje neutro) ha de pasar por el centro de gravedad de la sección.

Ley de Navier: $\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y$ $I_z = \int y^2 dA$ Momento de inercia
Dificultad rotacional para girar la sección



$$I_z = \frac{1}{2} b h^3 + d_{Gy}^2 \cdot A \quad (\text{Steiner})$$

Módulo resistente a flexión respecto del eje z [L^3]

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|}$$

Material con $\sigma_{adm} \Rightarrow M_{\max} = W_z \cdot \sigma_{adm}$

$$M_z = W_z \cdot |\sigma_{\max}|$$

Si hay momento en $y \Rightarrow \sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|}$$

$$I_y = \frac{1}{2} b^3 h + d_{Gz}^2 \cdot A$$

5 FLEXIÓN

DEFINICIONES

Un sólido prismático está sometido a FLEXIÓN cuando el momento interno sobre sus secciones tiene componentes sobre el plano de las mismas que es no nulo.

• Flexión pura: cuando el único esfuerzo sobre las secciones es el momento flector. ($\Rightarrow T$ es nulo $\Leftrightarrow M$ es constante)

• Flexión simple: un sólido prismático está sometido a FS cuando además de M , sus secciones sufren esfuerzos cortantes T .

• Flexión compuesta: un sólido prismático está sometido a FC cuando sus secciones sufren M, T y N .

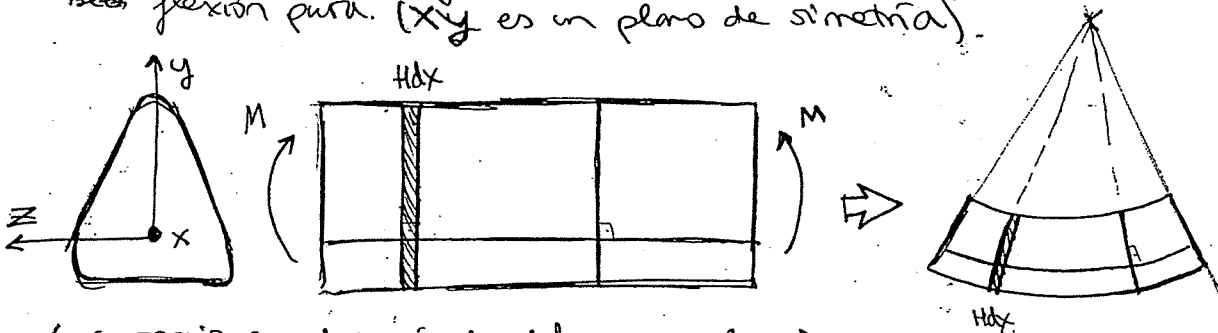
• Flexo-tensión: un sólido prismático está sometido a FT cuando sobre sus secciones actúan $(M, T) + N_t$.

• Flexión simétrica: cuando M tiene la dirección de un eje principal de la sección.

• Flexión oblicua o ^{esviada} esviada: cuando M no tiene la dirección de ninguno de los ejes principales de la sección.

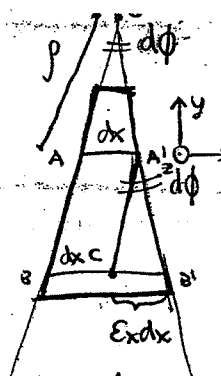
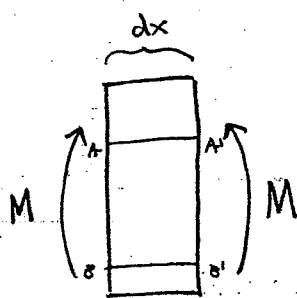
LAS TENSIONES EN FLEXIÓN PURA. LEY DE NAVIER.

Consideramos una viga de sección simétrica sometida a ~~flexión~~ flexión pura. (Xy es un plano de simetría).



Las secciones, después de deformarse la viga:

- Permanecen Planas.
 - Forman 90° con la directriz de la viga.
- } Hipótesis de Bernoulli.



AA' es la fibra Neutra
 si ni se alarga ni se encoje
 al doblarse la sección

Por semejanza de triángulos $\triangle OAA' \sim \triangle A'CB'$

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{A'C}{CB'} \Rightarrow \frac{\rho}{dx} = \frac{-y}{\epsilon_x dx}$$

$$\epsilon_x = \frac{-y}{\rho} = -\kappa y = \epsilon_x$$

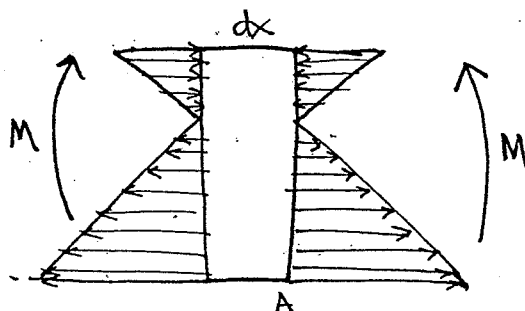
radio de curvatura $\rho = 1/\kappa$ curvatura.

Según Ley de Hooke:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \sigma_x = -\kappa E y$$

Sabemos que en flexión
 pura $N = 0$.

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A -\kappa E y dA = -\kappa E \int_A y dA = 0$$



El eje neutro
 pasa por el centro
 de gravedad de
 la sección.

$$\int_A y dA = 0$$

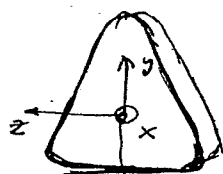
$M \neq 0$.

$$M_z = \int_A y \sigma_x dA = \int_A y (-\kappa E y) dA =$$

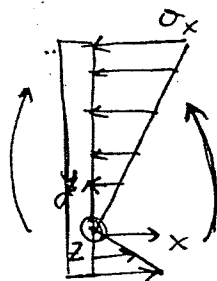
$$= -\kappa E \int_A y^2 dA = -\kappa E I_z \Rightarrow \kappa E = \frac{M_z}{I_z}$$

$$\sigma_x = -\kappa E y = -\frac{M_z}{I_z} y = \sigma_x$$

NAVIER



ha de ser el
 C.D.G. de la sección

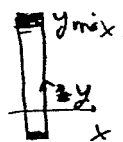


observaciones:

a) $[I_z] = L^4$

$I_z = \frac{1}{12} b h^3$

b) $|\sigma_{\max}| = \frac{M_z}{I_z} |y_{\max}| = \frac{M_z}{I_z / |y_{\max}|} = \frac{M_z}{W_z}$

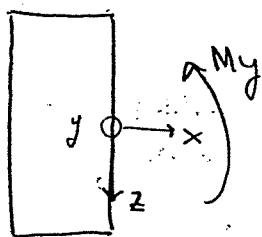


Módulo resistente a flexión
 respecto del eje z $[L^3]$

c) Si tenemos un material con σ_{adm}

$$M_{\max} = W_z \cdot \sigma_{adm}$$

d)



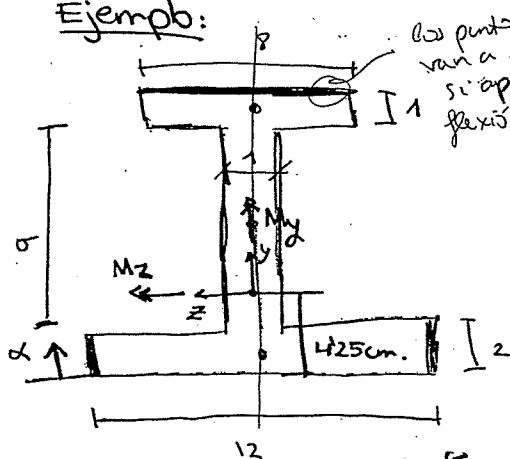
$$\sigma_x = + \frac{M_y}{I_y} z$$

Por tener el eje z en sentido contrario.

En general, cuando una sección está sometida a M_y y M_z :

$$\sigma_x = - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Ejemplo:



$$W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|}$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|}$$

Para encontrar el centro de gravedad.

$$x_G = \frac{2 \cdot 12 \cdot 1 + 1 \cdot 8 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 11.5}{2 \cdot 12 + 1 \cdot 8 + 8 \cdot 1} = 4.25 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 2^3 + (4.25 - 2)^2 \cdot 2 \cdot 12 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 8^3 + 8 \cdot 1 \cdot (6.5 - 4.25)^2 + \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1 \cdot (11.5 - 4.25)^2 = 788 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 12^3 + \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 8^3 = 331 \text{ cm}^4$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{788 \text{ cm}^4}{(12 - 4.25)} = 102 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|} = \frac{331 \text{ cm}^4}{6 \text{ cm}} = 55 \text{ cm}^3$$

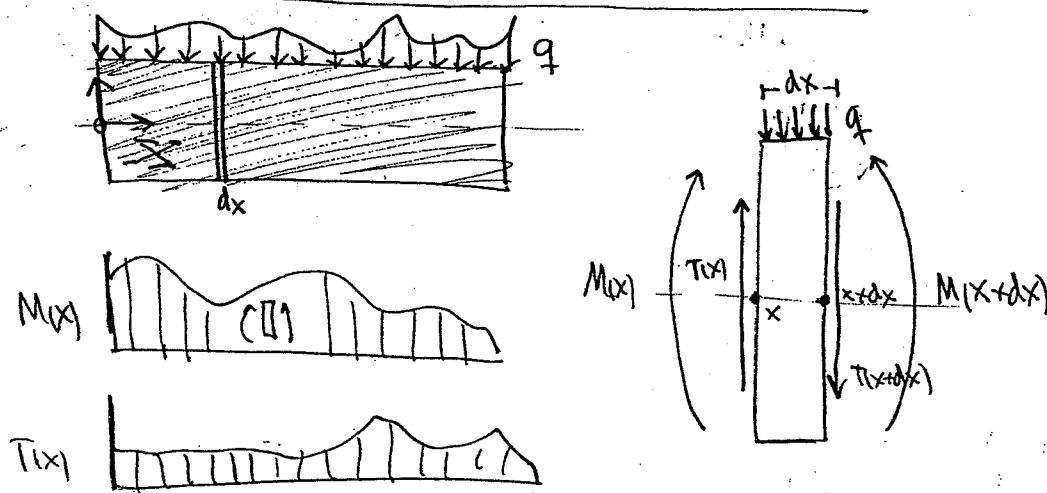
Para aumentar la rigidez respecto a flexión aleja todo lo que puedas el área del eje z_g .

Si el acero tiene $\sigma_{adm} = 200 \text{ MPa}$. $M_z^{\max}$? $M_y^{\max}$?

$$M_z^{\max} = 102 \text{ cm}^3 \cdot 200 \text{ MPa} = 102 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 204 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

$$M_y^{\max} = 55 \text{ cm}^3 \cdot 200 \text{ MPa} = 55 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 110 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

ECUACIÓN DEL EQUILIBRIO EN FLEXIÓN.



$$\sum F_y = 0:$$

$$T(x) = T(x+dx) + q dx = T(x) + \frac{dT}{dx} dx + q dx$$

$$\boxed{0 = \frac{dT}{dx} + q} \quad (1)$$

$$\sum M_z = 0:$$

$$M(x) + q dx \frac{dx}{2} + T(x+dx) dx = M(x+dx)$$

$$M(x) + q \frac{dx^2}{2} + (T(x) + \frac{dT}{dx} dx) dx = M(x) + \frac{dM}{dx} dx$$



$$\boxed{T(x) = \frac{dM}{dx}} \quad (2)$$

• dividido todo entre dx

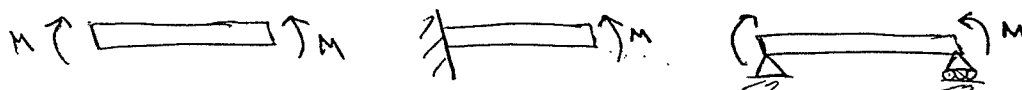
• Es decir, desprecia dx^2

La pendiente del flector es el cortante

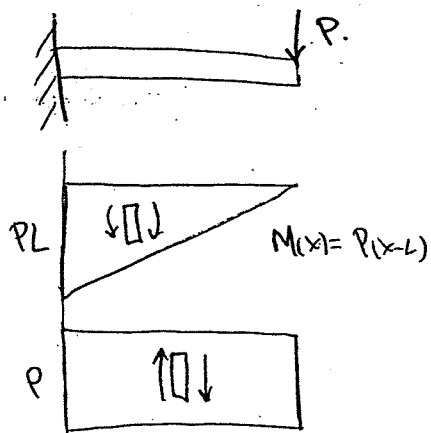
Combinando (1) y (2):

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q \Rightarrow \boxed{\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0}$$

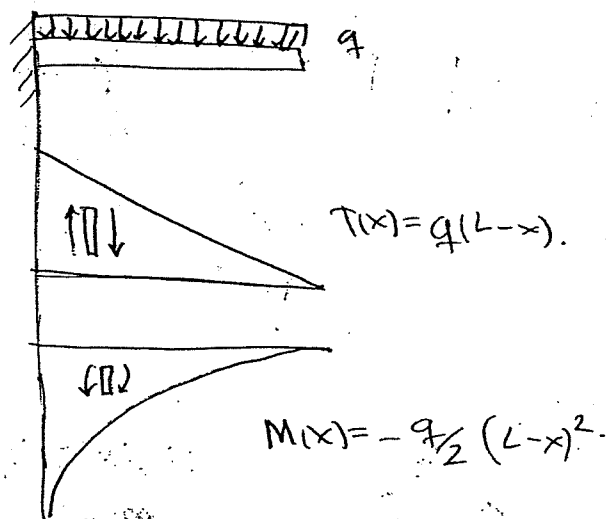
• Único caso de flexión pura



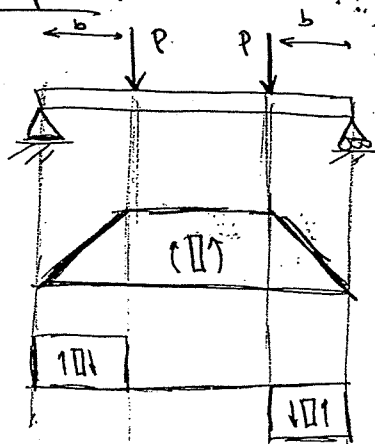
Ejemplo 1.



Ejemplo 2:



Ejemplo 3:

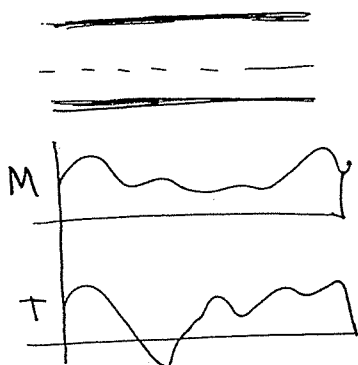


$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} + q = 0 & \text{Herramientas de} \\ \frac{dM}{dx} = T & \text{comprobación} \end{cases}$$

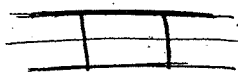
ESTUDIO DE LAS TENSIONES EN FLEXIÓN SIMPLE.

Estudiamos:

- i) El efecto de M
- ii) El efecto de T.



i) Efecto del momento flector en flexión simple.

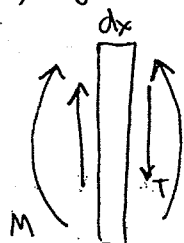


Las secciones dejan de ser planas y de ser perpendiculares a la directriz (se alabean)

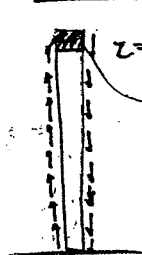
Aun así, admitimos como válida la ley de Navier

$$\sigma_x = - \frac{Mz}{I_z} y.$$

ii) Efecto del cortante en flexión simple

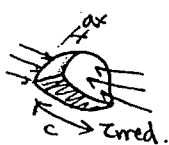
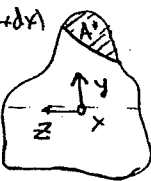
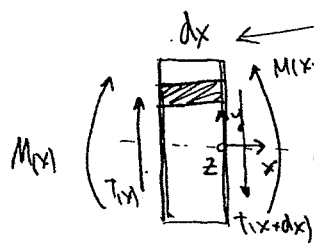


1ª HIPÓTESIS. No es cierta.



En los bordes $z = \pm \frac{T}{A}$.

b) Hay puntos en los que z es constante mayor de T/A .



$$\int_{A^*}^{izda} \frac{Mz}{I_z} y dA + \int_{A^*}^{dcha} \frac{Mz(x+dx)}{I_z} y dA = \int_{A^*} \frac{Mz(x+dx)}{I_z} y dA$$

$$+ \frac{Mz}{I_z} \int_{A^*} y dA + z_{med} \cdot C \cdot dx = \frac{Mz(x+dx)}{I_z} \int_{A^*} y dA =$$

$$= \left(\frac{Mz(x)}{I_z} + \frac{dM}{dx} \frac{dx}{I_z} \right) \int_{A^*} y dA.$$

$$\cancel{\frac{Mz}{I_z} m_z(A^*)} + z_{med} \cdot C \cdot dx = \cancel{\frac{Mz}{I_z} m_z(A^*)} + \frac{dM}{dx} \frac{dx}{I_z} m_z(A^*).$$

$$\tau_{med} \cdot C dx = \frac{T dx}{I_z} \cdot m \cdot (A^*)$$

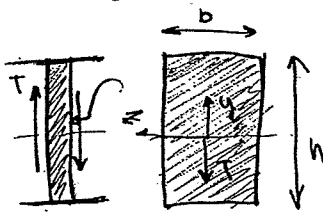
$$\tau_{med} = \frac{T}{C} \cdot \frac{m_z(A^*)}{I_z}$$

Estas tensiones se encargan de igualar las de la izquierda con las de la derecha. **TENSIONES RASANTES**



Por reciprocidad en la otra cara del corte existe τ_{med} de sentido contrario.

Ejemplo:

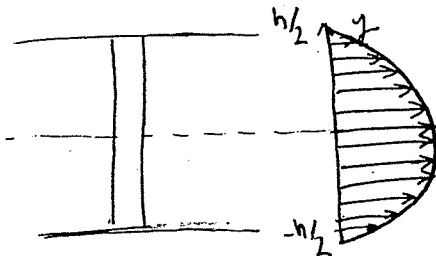


1ª Aproximación $\tau = T/A \cdot X$

$$\tau_{med} = \frac{T}{b} \cdot \frac{m_z(A^*)}{I_z} =$$

$$= \frac{T}{b} \cdot \frac{b \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right)}{\frac{1}{12} b h^3} =$$

$$= \frac{6T \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b h^3} = \frac{6T}{A} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right) = \frac{3T}{2A} \left(1 - \left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right)$$

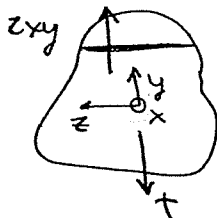


$$\tau = \frac{T}{A} \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right)$$

Observaciones a la fórmula de Colignon:

a) τ_{med} es un valor aproximado de la tensión ~~sea~~ rasante en dirección x. De ahí sacamos τ en el plano de la sección.

b) El corte que hacemos puede ser cualquiera que sea recto. En particular, si el corte es // al eje z:



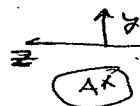
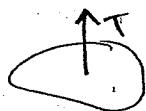
$$\tau_{xy} = - \frac{T(y)}{C} \cdot \frac{m_z(A^*)}{I_z}$$

c) La fórmula de Colignon no es exacta, pero es lo mejor que sabemos hacer, y es mucho más exacta que $\tau = T/A$

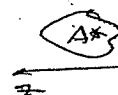
d) La fórmula tiene signos.

$T, z_{med}, m_z(A^*) \rightarrow$ tienen signo.

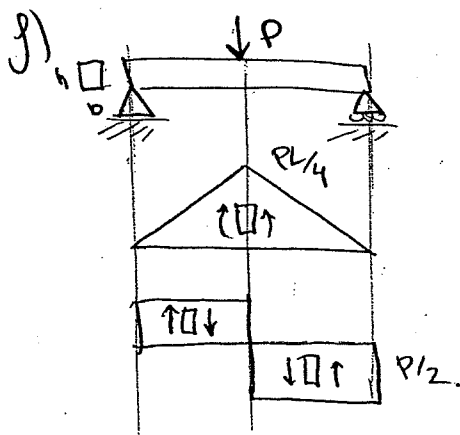
Negativo $\rightarrow$



Partido $\rightarrow$



e)



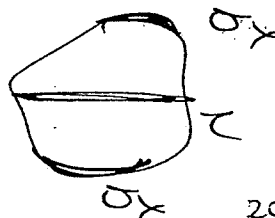
$$\frac{\sigma_x^{max}}{z_{max}} = \frac{4}{3} \frac{L}{h}$$

¿Cuanto de importantes son σ_x y z en un caso típico de flexión simple?

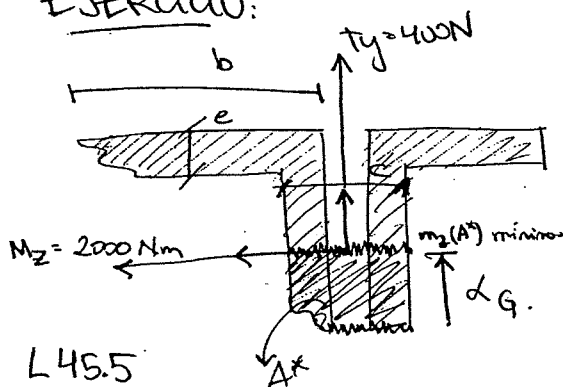
$$\sigma_x^{max} = \frac{M_z^{max}}{I_z} y_{max} = \frac{PL^3/4}{\frac{1}{2}bh^3} \frac{h}{2}$$

$$z_{max} = \frac{3}{2} \frac{T_{max}}{bh} = \frac{3}{2} \frac{P/2}{b \cdot h}$$

Es más + importante que z menos en vigas extremadamente cortas.



EXERCICIO:



L45.5

Centro de gravedad:

$$x_G = \frac{2e \cdot b \cdot \frac{b}{2} + e \cdot (2b) \cdot b}{2eb + e2b} = \frac{b/2 + b}{2} = 3/4 b = 33.75 \text{ mm}$$

$$I_z = \frac{1}{12} (2e)b^3 + 2eb \left(\frac{3}{4}b - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} 2be^3 + 2be \left(\frac{3}{4}b - b \right)^2 = 16'8 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

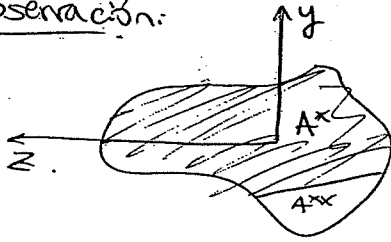
$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{I_z}{3/4 b}$$

$$z = 136 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{max} = \frac{M_z}{W_z} = 402 \text{ MPa}$$

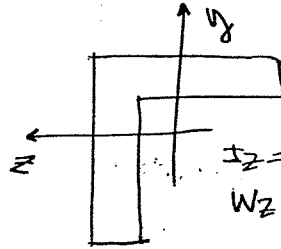
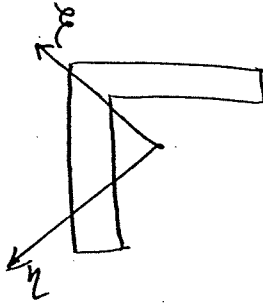
$$z = \frac{+}{-} \frac{m_z(A^*)}{I_z} = \frac{400 \cdot (2e \cdot \frac{3}{4}b) (\frac{3}{4}b \cdot \frac{3}{4}b)}{I_z}$$

Observación:



$$m(A^*) = -m(A^{**})$$

Resolviendo este ejercicio mediante FORMULARIO/TABLAS:



Perfiles L

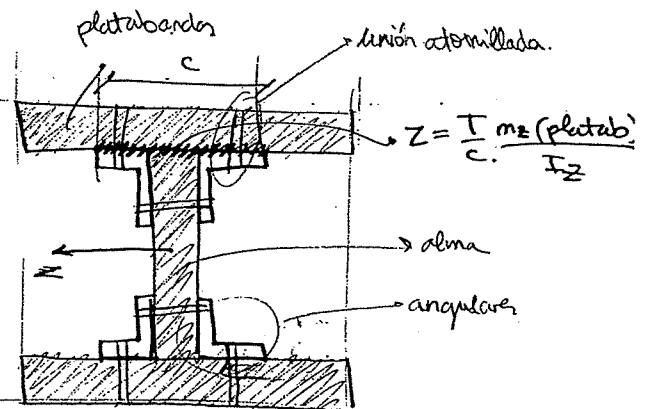
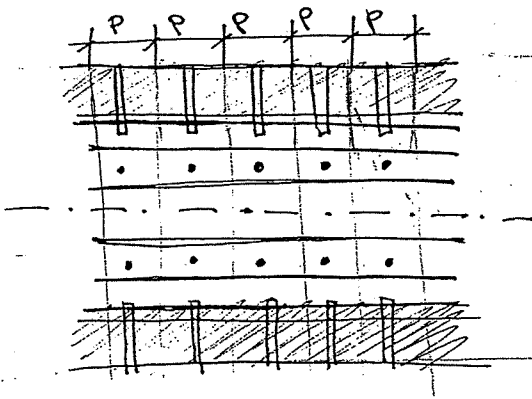
$$I_z = 784 \text{ cm}^4$$

$$W_z = 243 \text{ cm}^3$$

$$\Delta G = 45 \text{ mm} - 12.8 \text{ mm} = 32.2 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{2 \cdot W_z} = 412 \text{ MPa}$$

VIGAS ARMADAS



Cada tornillo recoge todos los tensiones tangenciales de cada pose

Frasante = $z \cdot c \cdot p$ que recoge cada par de tornillos

$$z_{\text{tornillo}} = \frac{\text{Frasante} / 2}{A_{\text{tornillo}}} = \frac{T}{c} \frac{m_z(A^*)}{I_z} \cdot \frac{p_1}{2 A_{\text{tornillo}}} \leq z_{\text{adm}}$$

Dado un tornillo con área conocida y z_{adm} conocido, ¿cuál es el paso mínimo?

$$p_1 \leq \frac{z_{\text{adm}} \cdot I_z \cdot (2) A_{\text{tornillo}}}{T m_z(\text{platabandas})}$$

Paso 1 de Tornillos Verticales

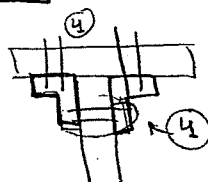
dos secciones sometidas al mismo corte

$$P_2 \leq \frac{Z_{adm} \cdot I_z \cdot (2 \cdot A_{\text{tornillos}})}{T \cdot m(\text{plat} + \text{grajola})}$$

P_2 de tornillos horizontales.

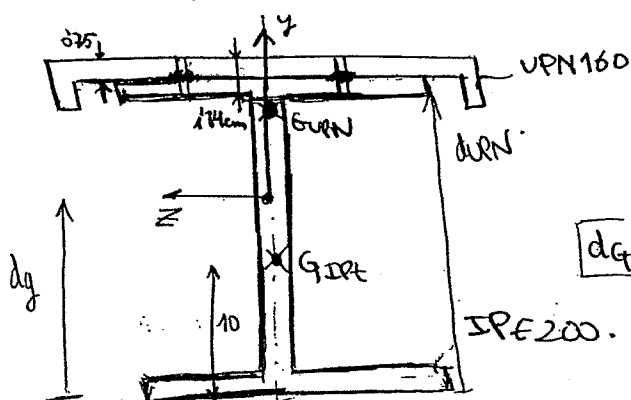
se puede despreciar el $\ll$ plat

$$P = \min(P_1, P_2)$$



21-11-2012

ESERCICIO 2.



$W_z?$

$Z_{adm} = 100 \text{ MPa}$

$\phi = 13 \text{ mm}$

$T_{\text{mix}} = 3000 \text{ N}$

$$\begin{aligned} d_g &= \frac{A_{IPE} \cdot d_{IPE} + A_{UPN} \cdot d_{UPN}}{A_{IPE} + A_{UPN}} = \\ &= \frac{28.5 \text{ cm}^2 \cdot 10 + 24 (20 + 0.75 - 1.84)}{28.5 + 24} = \\ &= 14.1 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$I_z = I_z^{IPE} + A^{IPE} (14.1 - 10)^2 + I_z^{UPN} (20 + 0.75 - 1.84 - 14.1)^2 = 3060 \text{ cm}^4$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\text{mix}}|} = \frac{3060}{14.1} = 217 \text{ cm}^3$$

$$P \leq \frac{Z_{adm} \cdot A_{\text{tornillos}} \cdot (2 \cdot I_z)}{T_y \cdot m_z(\text{UPN})} = \frac{100 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} 13^2 \text{ mm}^2 \cdot 3060 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{3000 \text{ N}} = 234 \text{ cm}$$

$$m_z(\text{UPN}) = A_{UPN} \cdot (20 + 0.75 - 1.84 - 14.1) = 115.4 \text{ cm}^3$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LAS VIGAS EN FLEXIÓN. ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA

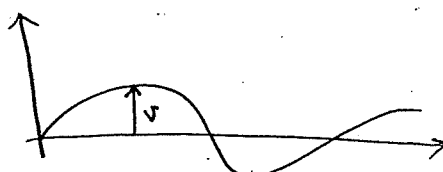
Ecuaón fundamental:

$$(1) \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$(2) \quad \kappa = \frac{v''}{(1+(v')^2)^{3/2}}$$

Si $v' \ll 1$,
Aproximo (2) como:

$$\boxed{\kappa = v''}$$

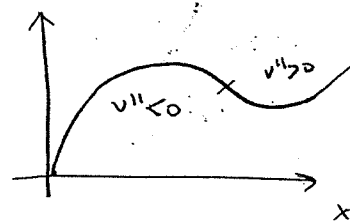
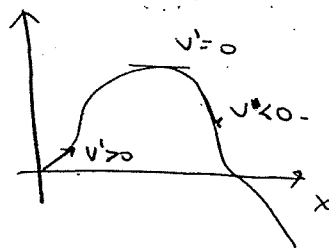
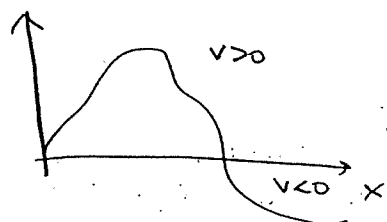


Por lo que sustituyendo en (1)
(Este método es poco práctico)

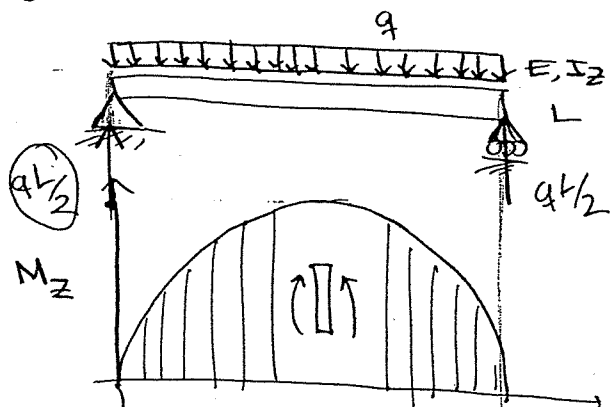
$$\boxed{v''(x) = \frac{M(x)}{EI_z}}$$

Ec. diferencial de la elástica.

Criterio de signos:



Ejemplo:



$$M_z(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

Integramos la elástica:

$$v''(x) = \frac{1}{EI} \frac{q}{2} x(L-x)$$

$$v'(x) = \frac{1}{EI} \frac{q}{2} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1 \right)$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \frac{q}{2} \left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2 \right)$$

Condiciones de contorno:

$$v(0) = 0 = v(L)$$

$$1^{\circ}) \rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

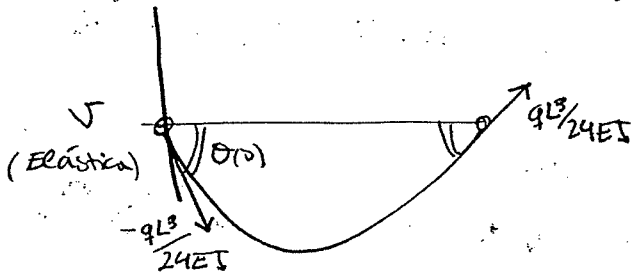
$$2^{\circ}) \rightarrow 0 = \frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12} + C_1 L = C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{L^3}{12}}$$

$$v(x) = \frac{q}{24EI} \left(Lx^3 - \frac{x^4}{12} - \frac{L^3}{12}x \right)$$

Todos los sumandos tienen las mismas dimensiones ✓

Giro $\rightarrow \theta(x) = v'(x) = \frac{q}{24EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{12} \right)$

En el apoyo? $\theta(0) = -\frac{qL^3}{24EI}$ $\theta(L) = \frac{qL^3}{24EI}$

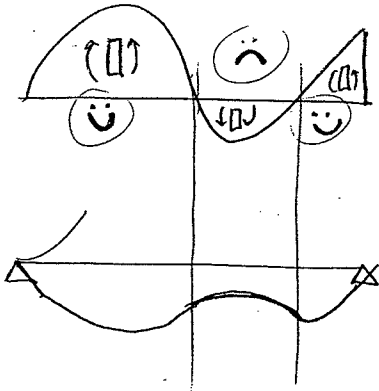


Desplazamiento vertical máximo?
Flecha $\equiv \uparrow$

$$v_{\max} = v(L/2) = -\frac{5qL^4}{384EI}$$

por ser simétrica
no derivar e igualar a cero

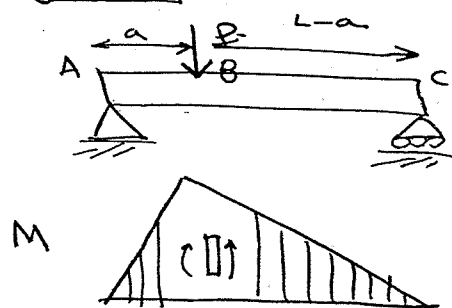
NOTA:



Cuando el momento $\uparrow$ la viga está contenta 😊

Cuando el momento $\downarrow$ la viga está triste ☹️

Ejemplo 2.



$$M(x) = \begin{cases} P \frac{L-a}{L} x & 0 \leq x \leq a \\ P \cdot \frac{a}{L} (L-x) & a \leq x \leq L \end{cases}$$

Tramo AB:

$$v''_{AB} = \frac{P}{EI} \frac{L-a}{L} x$$

$$v'_{AB} = \frac{P}{EI} \frac{L-a}{L} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right)$$

$$v_{AB} = \frac{P}{EI} \frac{L-a}{L} \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right)$$

Condiciones de Contorno

$$v_{AB}(0) = 0$$

$$v_{BL}(L) = 0$$

$$C_1 = \frac{a}{6} (a - 2L)$$

$$C_2 = 0$$

Tramo BC:

$$v''_{BC} = \frac{P}{EI} \frac{a}{L} (L-x)$$

$$v'_{BC} = \frac{P}{EI} \frac{a}{L} \left(Lx - \frac{x^2}{2} + D_1 \right)$$

$$v_{BC} = \frac{P}{EI} \frac{a}{L} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + D_1 x + D_2 \right)$$

Condiciones de Continuidad.

$$v'_{AB}(a) = v'_{BC}(a)$$

$$v_{AB}(a) = v_{BC}(a)$$

$$D_1 = \frac{1}{6} (a^2 + 2L^2)$$

$$D_2 = \frac{1}{6} a^2 L$$

Esto en la práctica no se usa ya que si hay muchas cargas aplicadas, se tienen muchos integrales y muchas ecuaciones.

→ Ecuación Universal

LA ECUACIÓN UNIVERSAL.

Método para calcular elásticas de vigas con momentos flectores definidos a trozos.

■ Leyes de esfuerzos con funciones de discontinuidad.

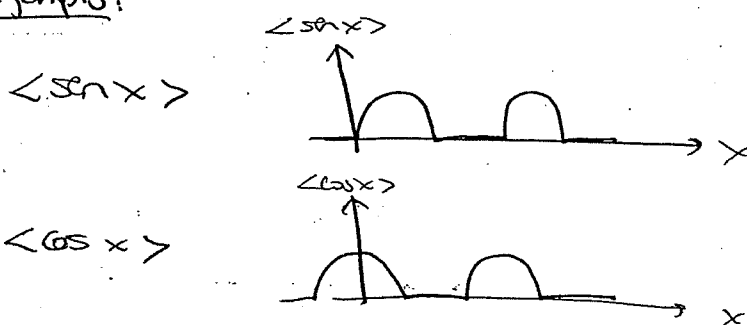
Definición: El corchete de Macaulay es una función

$$\langle \rangle : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

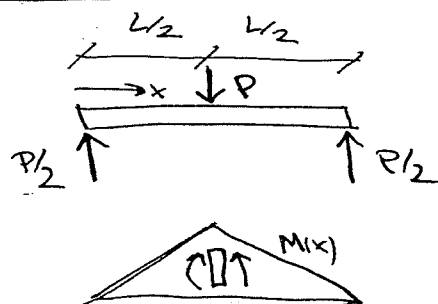
Definida como:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

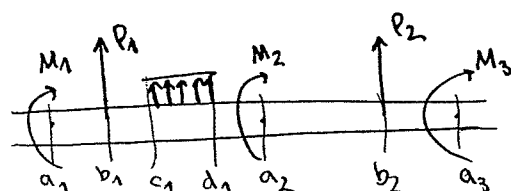
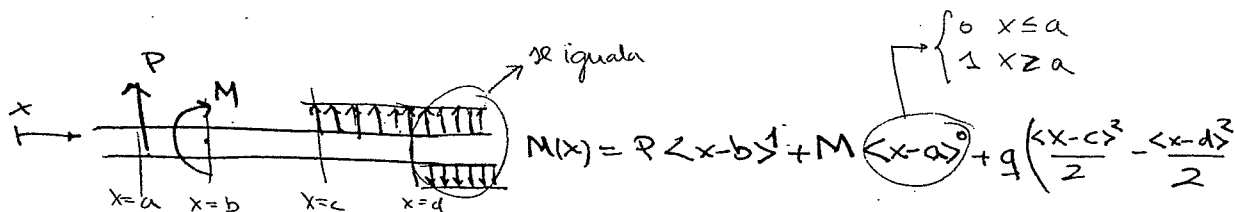


Ejercicio:



$$M(x) = \begin{cases} P/2 x & 0 \leq x \leq L/2 \\ P/2 x + P(x - L/2) & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$= P/2 \langle x \rangle + P \langle x - L/2 \rangle$$



$$M(x) = \sum_{i=1}^{nm} M_i \langle x - a_i \rangle^0 + \sum_{i=1}^{np} P_i \langle x - b_i \rangle^1 + \sum_{i=1}^{nq} q_i \frac{1}{2} (\langle x - c_i \rangle^2 - \langle x - d_i \rangle^2)$$

La Elástica.

$$v'' = \frac{M(x)}{EI}, \quad EI v'' = M(x)$$

Suponiendo que EI es constante, integramos una vez.

$$EI v'(x) = \sum_{i=1}^{n,m} M_i \langle x-a_i \rangle^1 + \sum_{i=1}^{n,p} \frac{P_i}{2} \langle x-b_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^{n,q} \frac{q_i}{6} (\langle x-c_i \rangle^3 - \langle x-d_i \rangle^3) + EI \theta_0.$$

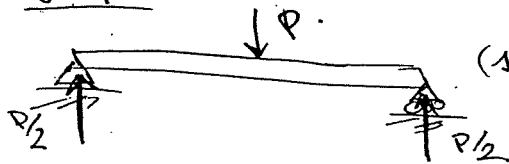
Integramos una segunda vez.

$$EI v(x) = \sum_{i=1}^{n,m} \frac{M_i}{2} \langle x-a_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^{n,p} \frac{P_i}{6} \langle x-b_i \rangle^3 + \sum_{i=1}^{n,q} \frac{q_i}{24} (\langle x-c_i \rangle^4 - \langle x-d_i \rangle^4) + EI \theta_0 x + EI v_0.$$

EQUACIÓN UNIVERSAL

No usar si $\left\{ \begin{array}{l} \text{hay libertad} \\ EI \neq \text{cte} \end{array} \right.$

Ejemplo 1:



$$(1) EI v(x) = EI v_0 + EI \theta_0 x$$

$$- \frac{P}{6} \langle x - L/2 \rangle^3$$

$$+ \frac{P/2}{6} \langle x - 0 \rangle^3$$

$$+ \frac{P/2}{6} \langle x - L \rangle^3$$

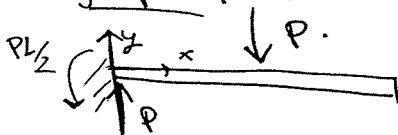
siempre ≤ 0 .

Para despejar θ_0 .

$$0 = EI v(L) = EI \theta_0 L - \frac{P}{6} \langle L - L/2 \rangle^3 + \frac{P/2}{6} L^3 + 0$$

y luego la meta en (1)

Ejemplo 2:

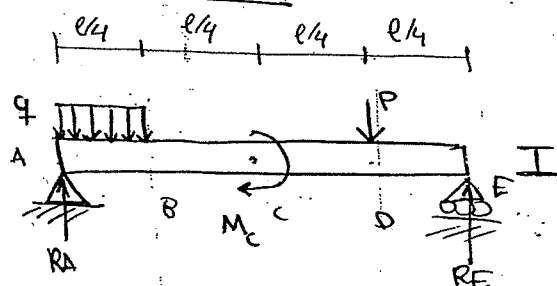


$$EI v(x) = EI v_0 + EI \theta_0 x$$

$$+ \frac{P}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{P}{6} \langle x - L/2 \rangle^3$$

$$- \frac{PL/2}{2} \langle x \rangle^2$$

EXERCÍCIO 5.1



$$l = 2000 \text{ mm}$$

$$q = 5 \text{ N/mm}$$

$$M_c = 2000 \text{ Nmm}$$

$$P = 30 \text{ N}$$

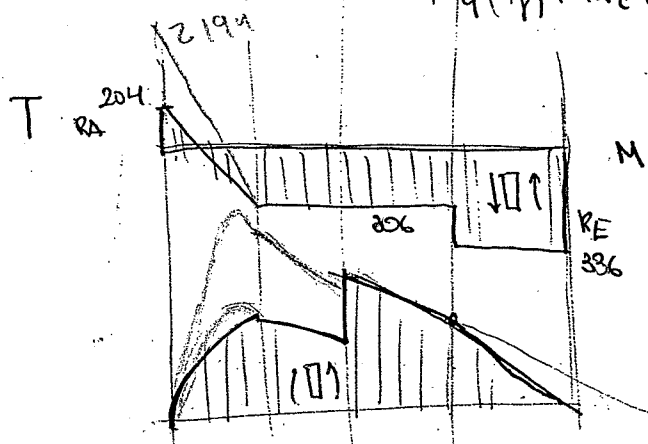
$$\sum F_y = 0$$

$$q \frac{l}{4} + P = R_A + R_E$$

$$\sum M_A = 0$$

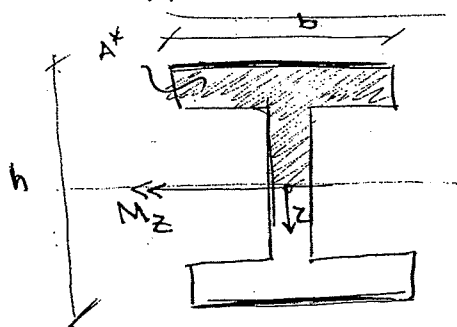
$$q \frac{l}{4} \left(\frac{l}{2} \right) + M_c + P \frac{3l}{4} = R_E \cdot l$$

$$\begin{cases} R_E = \frac{q l}{32} + \frac{M}{l} + \frac{3P}{4} \\ R_A = \frac{7q l}{32} + \frac{P}{4} - \frac{M}{l} \end{cases}$$



$$M(x) = R_A \langle x - 0 \rangle - \frac{q}{2} \langle x \rangle^2 - \langle x - \frac{l}{4} \rangle^2 + M_c \langle x - \frac{l}{2} \rangle - P \cdot \langle x - \frac{3l}{4} \rangle$$

Tensión Normal Máxima.



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{481 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{2010^3 \text{ mm}^2} = 24.1 \text{ MPa}$$

momento estático máximo. para por el G

Tensión tangencial máxima τ en A*

$$\tau = \frac{T}{b} \cdot \frac{m_z(A^*)}{I_z} = \frac{2194 \text{ N}}{3.8 \text{ mm}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} e + e_b \right) \cdot \frac{1}{2} e \cdot h_4 + e_b h}{80.1 \text{ cm}^4} = 9.08 \text{ MPa}$$

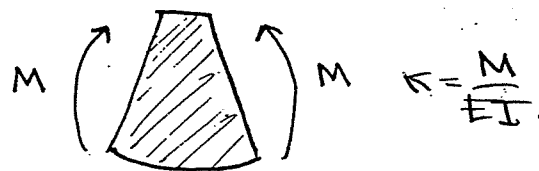
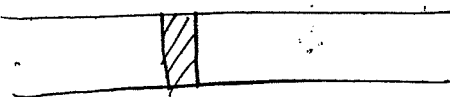
Elastica:

$$EI v(x) = \frac{1}{4!} \left(\langle x \rangle^4 - \langle x - \frac{l}{4} \rangle^4 \right) + \frac{M}{2!} \left(\langle x - \frac{l}{2} \rangle^2 \right) - \frac{P}{3!} \left(\langle x - \frac{3l}{4} \rangle^3 \right) + \frac{R_A}{3!} \langle x \rangle^3 + \frac{R_E}{3!} \langle x - l \rangle^3$$

$$EI v(l) = 0 \quad \theta(l) = 1.626 \text{ rad}$$

ENERGÍA ELÁSTICA DE VIGAS A FLEXIÓN:

$$W_{int}^* = W_{int}^* \text{ FLEXIÓN} + \cancel{W_{int}^* \text{ GIRAÇÃO}} \quad \text{°} \ll W_{flex}^*$$



$$W_{int}^* = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$dW_{int}^* = \frac{1}{2} M \kappa dx = \frac{M^2 dx}{2EI} = dW_{int}^*$$

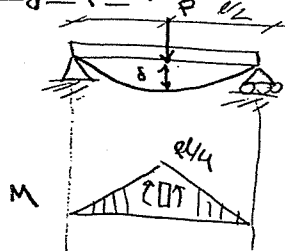
$$W_{ext} = \int_0^L \frac{1}{2} M \kappa dx$$

$$W_{int} = \int_0^L \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx$$

son numéricamente iguales en el equilibrio:

MÉTODOS ENERGÉTICOS PARA EL CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS.

Ejemplo: 1

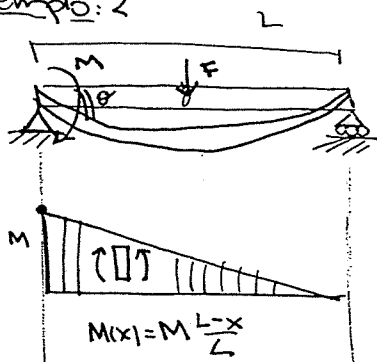


$$\begin{aligned} W_{int}^* &= \int_0^L \frac{M(x)^2 dx}{2EI} = 2 \int_0^{L/2} \frac{M(x)^2 dx}{2EI} = \\ &= 2 \int_0^{L/2} \frac{(\frac{Px}{2})^2 dx}{2EI} = \frac{1}{EI} \frac{P^2}{4} \int_0^{L/2} x^2 dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{P^2}{4EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} = \frac{P^2 L^3}{4EI} \frac{1}{24}$$

$$\delta = \frac{\partial W_{int}^*}{\partial P} = \frac{PL^3}{48EI}$$

Ejemplo: 2

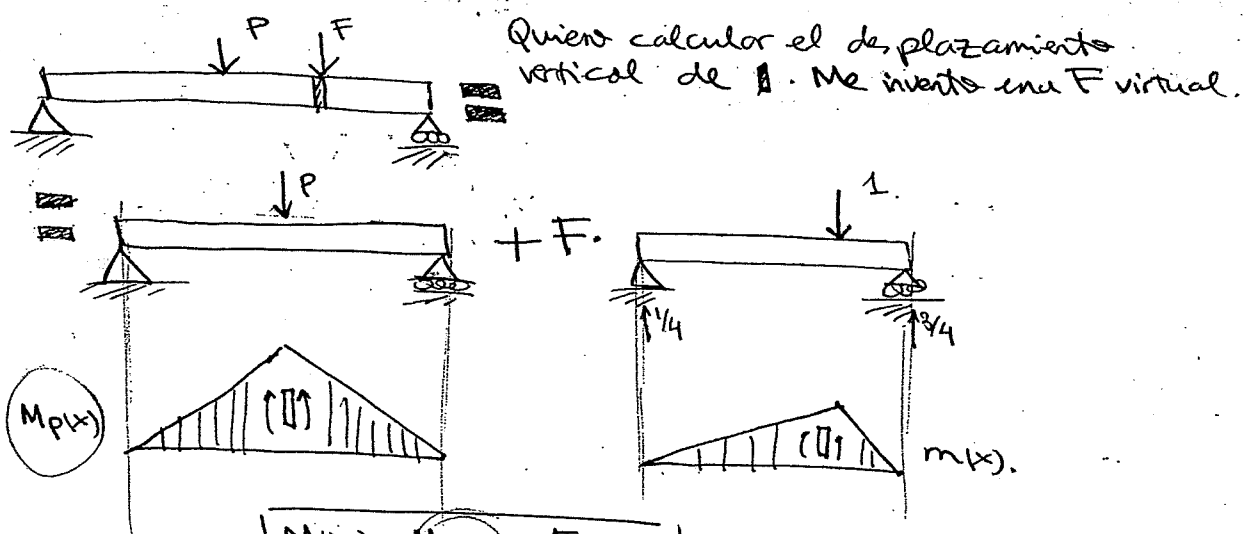


$$\begin{aligned} W_{int}^* &= \int_0^L \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \frac{M^2}{L^2} (L-x)^2 dx = \\ &= \frac{M^2}{2EIL^2} \left[-\frac{(L-x)^3}{3} \right]_0^L = \frac{M^2 L^3}{6EI L^2} \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\partial W_{int}^*}{\partial M} = \frac{2ML}{6EI} = \frac{ML}{3EI}$$

Quiero hallar desplazamiento vertical, pero no hay ninguna fuerza!
Me invento una F (que volga 0).

MÉTODO DE LA CARGA UNITARIA.



$$M(x) = M_p(x) + F \cdot m(x)$$

$$W_{int}^* = \int_0^L \frac{1}{2EI} M^2(x) dx = \int_0^L \frac{(M_p(x) + F \cdot m(x))^2}{2EI} dx$$

$$\delta = \frac{\partial W_{int}^*}{\partial F} = \int_0^L \frac{1}{EI} (M_p(x) + F \cdot m(x)) m(x) dx$$

$$\delta = \int_0^L \frac{1}{EI} M_p(x) m(x) dx$$

momento real

momento ficticio.

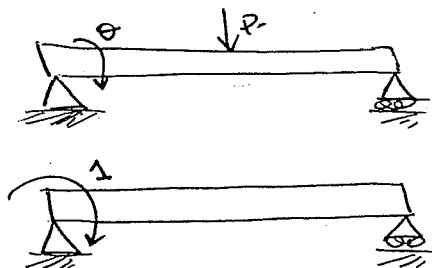
Continuación ejemplo 2:

$$M_p(x) = \frac{P}{2}x - P \langle x - \frac{L}{2} \rangle$$

$$m(x) = \frac{1}{4}x - 1 \cdot \langle x - \frac{3}{4}L \rangle$$

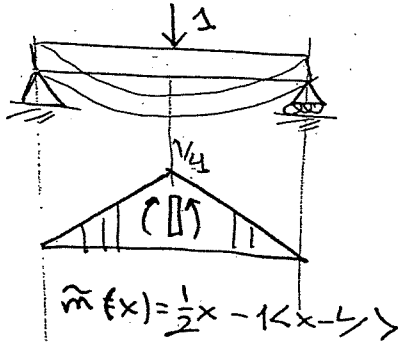
$$\delta = \frac{11}{768} \frac{PL^3}{EI}$$

si quiero averiguar el giro θ .

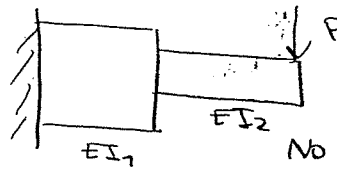


$$\theta = \int_0^L \frac{1}{EI} M_p(x) \bar{m}(x) dx = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\bar{m}(x) = \frac{L-x}{L}$$



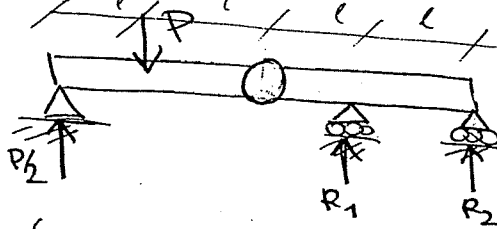
$$\delta\left(\frac{L}{2}\right) = \int_0^L \frac{1}{EI} M_p(x) \tilde{m}(x) dx$$



desplaz en la punta?

No se puede usar la Ec. universal, rigideces diferentes

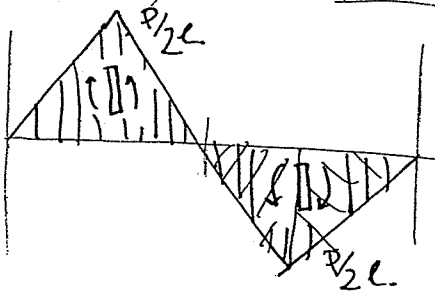
Ejemplo:



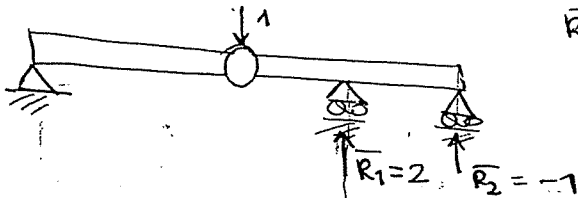
- Desplaz. bajo rótula?
- Deformada a estima?

$$\begin{cases} P/2 + R_1 + R_2 = P \rightarrow R_1 + R_2 = P/2 \\ R_1 L + R_2 2L = 0 \rightarrow R_1 = -2R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 = P \\ R_2 = -P/2 \end{cases}$$



$$M(x) = \frac{P}{2} x - P \langle x - L \rangle + P \langle x - 3L \rangle$$



$$R_1 + R_2 = 1$$

$$\delta = \int_0^{4L} \frac{1}{EI} M_p(x) \cdot m(x) dx =$$

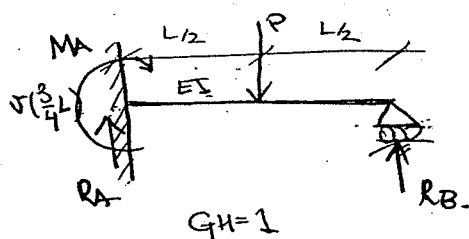
$$= \int_0^{4L} \frac{1}{EI} M_p(x) m(x) dx = \text{Triángulos simétricos}$$

$$= 2 \cdot \int_{3L}^{4L} \frac{1}{EI} \frac{P}{2} (x - 4L) \cdot 1(x - 4L) dx =$$

$$= \frac{PL^3}{3EI}$$

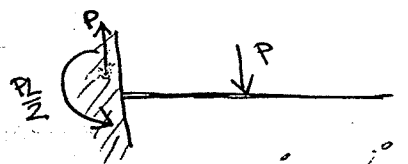
$$m(x) = -1 \langle x - 2L \rangle + 2 \langle x - 3L \rangle$$

PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS EN FLEXIÓN



1.) Usando ecuación de compatibilidad geométrica

Supremos R conocida



$$EI\psi_1(x) = EI\psi_0 + EI\theta_0 x$$

$$-\frac{PL^2}{2!} \langle x \rangle^2 + \frac{P}{3!} \langle x \rangle^3 - \frac{P}{3!} \langle x - \frac{L}{2} \rangle^3$$



$$EI\psi_2(x) = EI\psi_0 + EI\theta_0 x + \frac{RL}{2!} \langle x \rangle^2 - \frac{R}{3!} \langle x \rangle^3$$

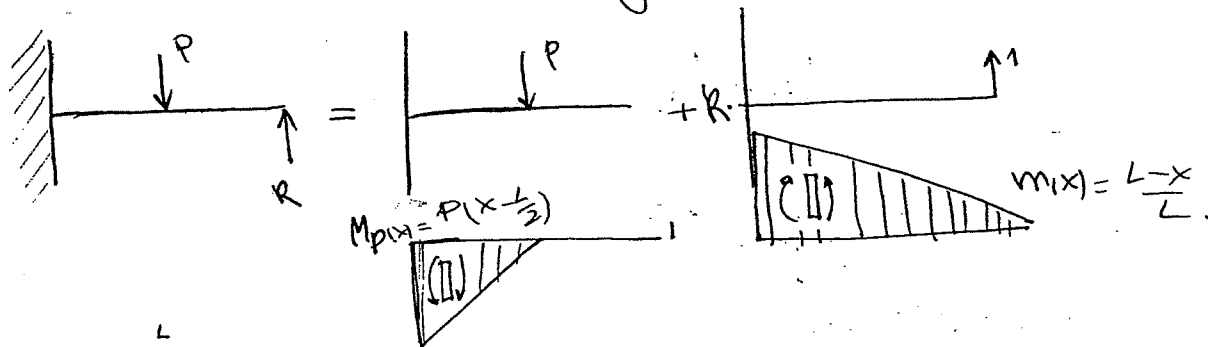
$$EI\psi(x) = EI\psi_1(x) + EI\psi_2(x)$$

$$EC. \text{ compatibilidad } \boxed{\psi(L) = 0}$$

$$EI\psi(L) = \frac{-5PL^3}{48EI} + \frac{PL^3}{3EI} = 0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{5P}{16}}$$

$$\boxed{EI\psi\left(\frac{3}{4}L\right) = EI\psi_1\left(\frac{3}{4}L\right) + EI\psi_2\left(\frac{3}{4}L\right) = \frac{-43PL^3}{6144}}$$

2.) Usando el Método de la Carga Unitaria (supremos R de).

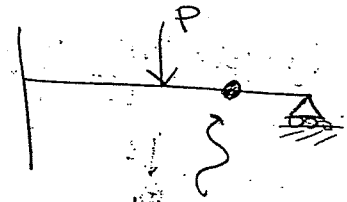


$$W_{int}^* = \int_0^L \frac{1}{2EI} (M_p(x) + R \cdot m(x))^2 dx$$

$$0 = \delta_R = \frac{\partial W_{int}^*}{\partial R} = \int_0^L \frac{1}{EI} (M_p(x) + R m(x)) \cdot m(x) dx$$

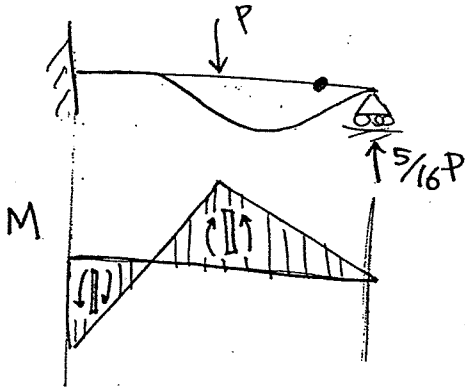
$$\boxed{R = \frac{- \int_0^L \frac{1}{EI} M_p(x) m(x) dx}{\int_0^L \frac{1}{EI} m(x)^2 dx}}$$

$$R = \frac{-\int_0^{L/2} \frac{1}{EI} P \left(x - \frac{L}{2}\right) \frac{L-x}{L} dx}{\int_0^L \frac{1}{EI} \left(\frac{L-x}{L}\right)^2 dx} = \frac{5}{16} P$$

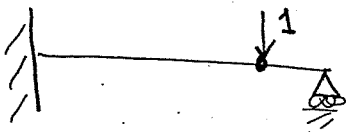


¿desplazamiento ahí?

Desplazamiento vertical en $\bullet$?

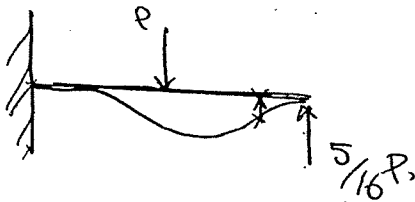


$$M(x) = \begin{cases} P \left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{5}{16} (L-x) P & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{5}{16} P (L-x) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$



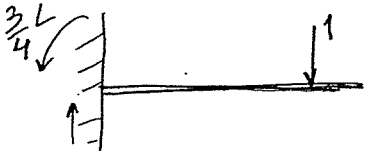
$$\delta = \int_0^L \frac{1}{EI} M(x) m(x) dx = \dots$$

Astucia! → Nos olvidamos de esto y...



Tienen la misma elástica.

Nos olvidamos así del P hiper.

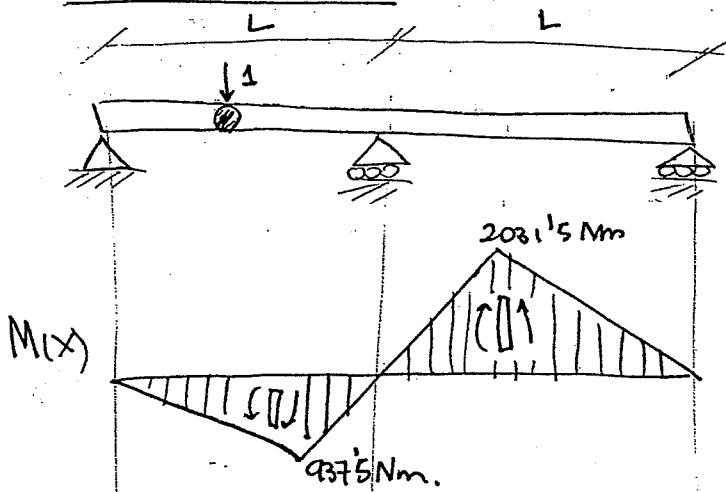


Los desplazamientos en las estructuras hiperestáticas son iguales en la estructura isostática equivalente (Estruct. auxiliar)



$$= \dots = \frac{43}{6144} \frac{P L^3}{EI}$$

PROBLEMA 5.10. (EX) *

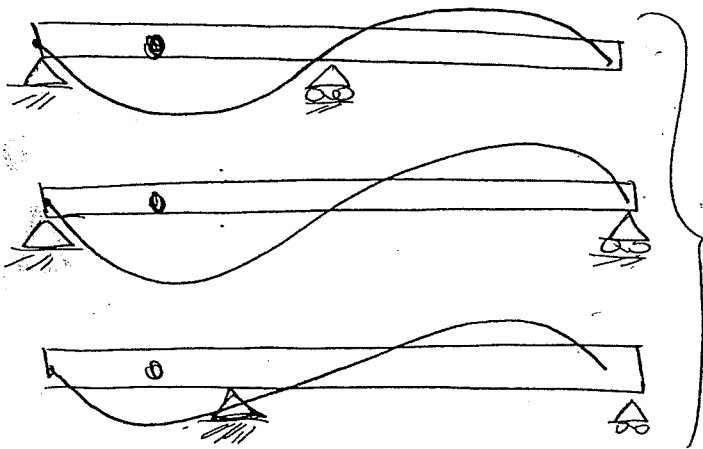


$$L = 10 \text{ m}$$

$$EI = 2 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$$

$$\delta = \int_0^L \frac{1}{EI} M(x) m(x) dx.$$

Busco un sistema isostático auxiliar.



Donc diferente in
pero la integral (δ)
resulta igual

Misma elastica

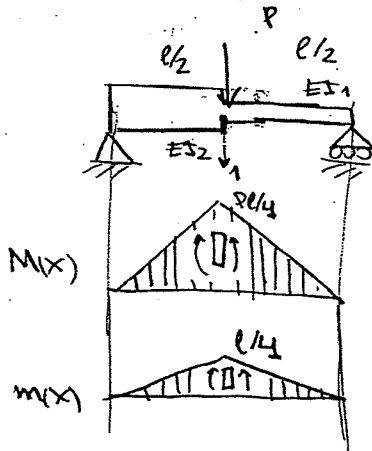
Pruebo con



$$\left[\delta = \int_0^{2L} \frac{1}{EI} M(x) m(x) dx = 0.0029 \text{ m} \right]$$

PROBLEMA

4-12-2012

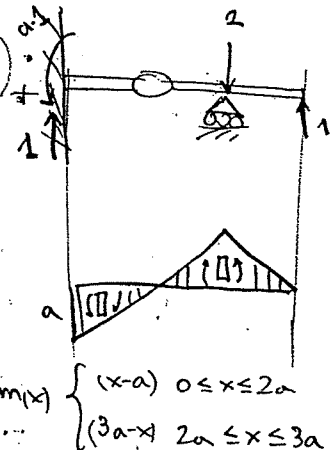
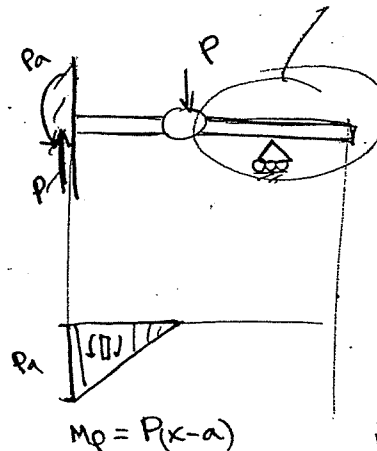
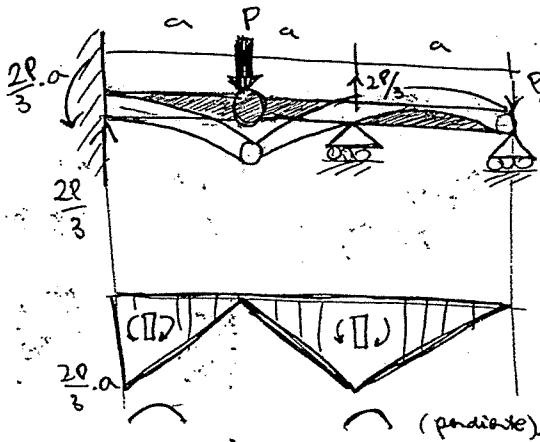


No se puede usar el método de la carga universal

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^l \frac{1}{EI(x)} M(x) m(x) dx = \\ &= \int_0^{l/2} \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{P}{2} x \cdot \frac{1}{2} x dx + \int_{l/2}^l \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{P}{2} (l-x) \cdot \frac{1}{2} (l-x) dx \\ &= \frac{P}{4EI_2} \left[\frac{x^3}{2} \right]_0^{l/2} + \frac{P}{4EI_1} \left[-\frac{(l-x)^3}{3} \right]_{l/2}^l = \\ &= \frac{P}{12EI_2} \cdot \frac{l^3}{8} + \frac{P}{12EI_1} \cdot \frac{l^3}{8} = \frac{Pl^3}{96} \left[\frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right] \end{aligned}$$

PROBLEMA

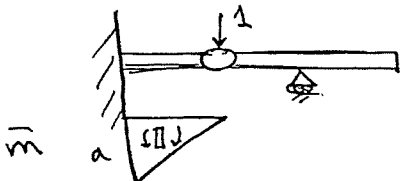
$\sum M_{apoy} = 0 \rightarrow$ El apoyo no produce reacción



$$\begin{aligned} R &= - \frac{\int_0^{3a} \frac{1}{EI} M_p(x) m(x) dx}{\int_0^{3a} \frac{1}{EI} m(x)^2 dx} = - \frac{\int_0^a P(x-a)(x-a) dx}{\int_0^a (x-a)^2 dx + \int_a^{3a} (3a-x)^2 dx} = \\ &= - \frac{P \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_0^a}{\left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_0^{2a} + \left[-\frac{(3a-x)^3}{3} \right]_{2a}^{3a}} = - \frac{Pa^3}{a^3 + a^3 - 0 + a^3} = \boxed{\frac{-P}{3} = R} \end{aligned}$$

vamos a completar el dibujo, primeramente realizamos el diagrama.

Desplazamiento vertical bajo la carga P.

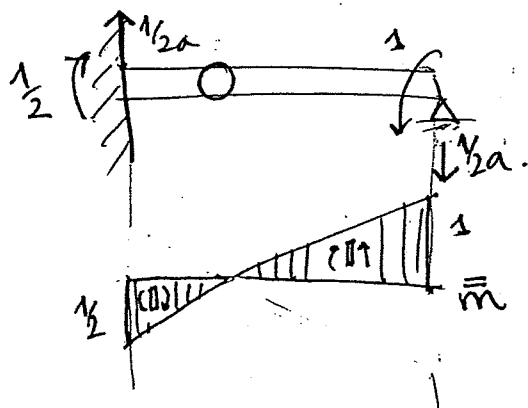


(sistema sustitutivo auxiliar)

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^{3a} \frac{1}{EI} M(x) \bar{m}(x) dx = \int_0^a \frac{1}{EI} \frac{2P}{3} (x-a)(x-a) dx = \\ &= \frac{2P}{3EI} \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_0^a = \frac{2P}{9EI} (0 - (-a^3)) = \boxed{\frac{2Pa^3}{9EI}} \end{aligned}$$

Dibujar la elástica a continuación en el dibujo.

Para calcular el ángulo
(Sist. Sist. Aux)

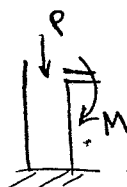
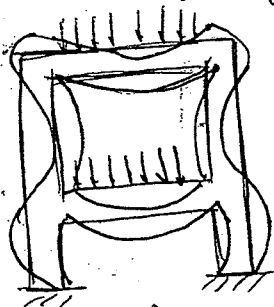


$$\delta = \int \dots \dots \dots$$

5-12-2012

FLEXIÓN COMPUESTA

Definición: Un sólido prismático está sometido a flexión compuesta cuando sufre flexión y tracción/compresión.

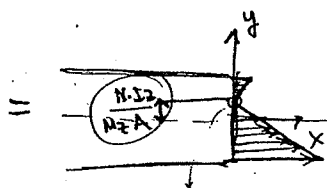


i) Estado de tensiones.

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z} y + \frac{N}{A}$$

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z} y + \frac{N}{A}$$

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z} y + \frac{N}{A}$$



$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z} y + \frac{N}{A}$$

El eje Neutro ya no está en el centro de gravedad.

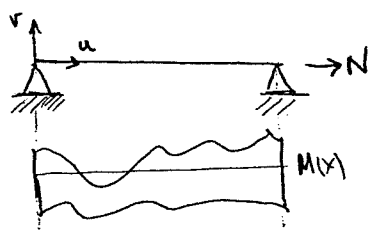
■ Posición del eje neutro:

$$\sigma_x = 0$$

$$-\frac{M}{I_z} y + \frac{N}{A} = 0 \Rightarrow y = \frac{N I_z}{M A}$$

← Ecuación de una recta

ii) Análisis de deformaciones.



$$v'' = \frac{M}{EI_z}$$

$$u' = \frac{N}{EA}$$

se desprecia la comp axial

$$u \ll v$$

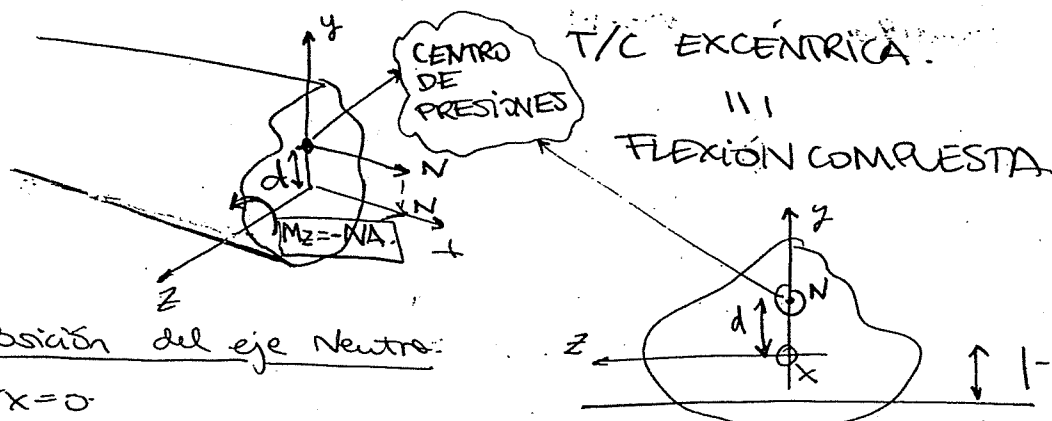
iii) Análisis de las energías.

$$W_{int} = W_{int}^{flexión} + W_{int}^{tracción} + W_{int}^{tracción/comp.}$$

$$\delta = \frac{2W_{int}^*}{2P}$$

TRACCIÓN/COMPRESIÓN EXCÉNTRICA

se dice que una sección está sometida a tracc/comp. excéntrica cuando sufre un esfuerzo normal que no pasa por el centro de gravedad

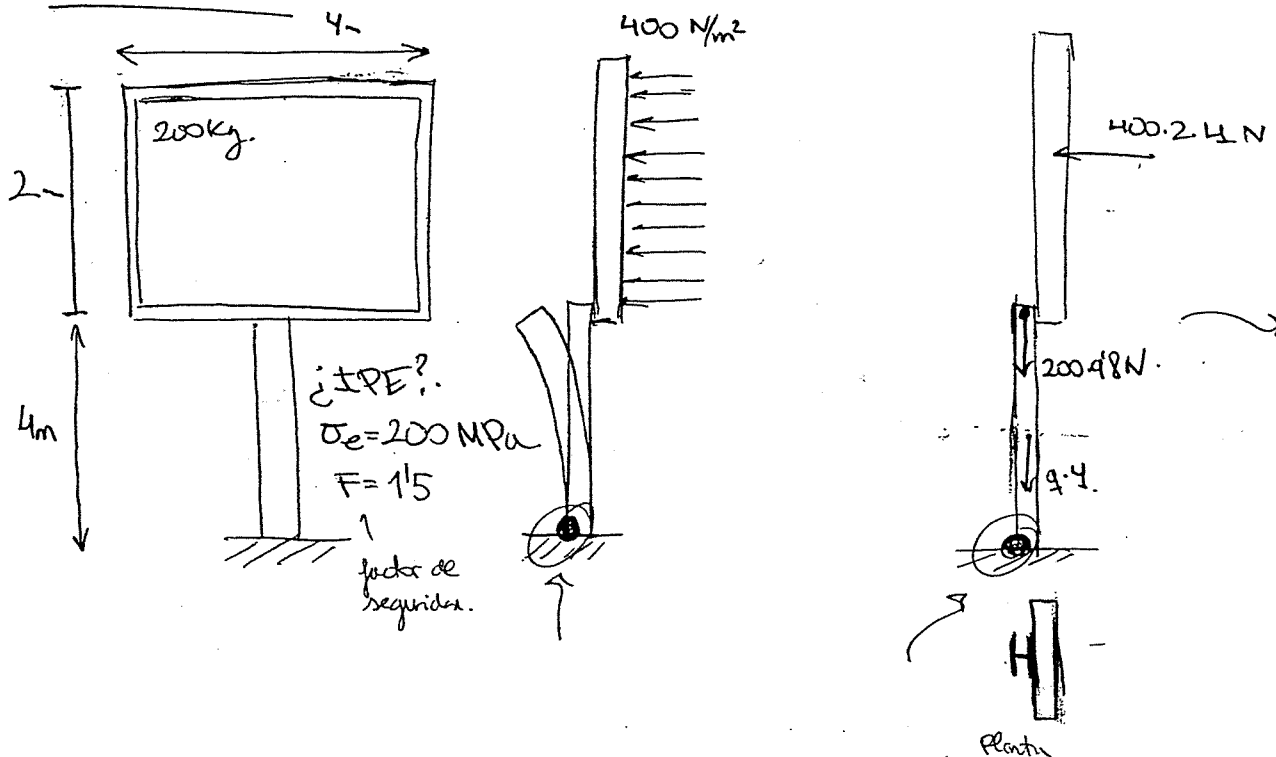


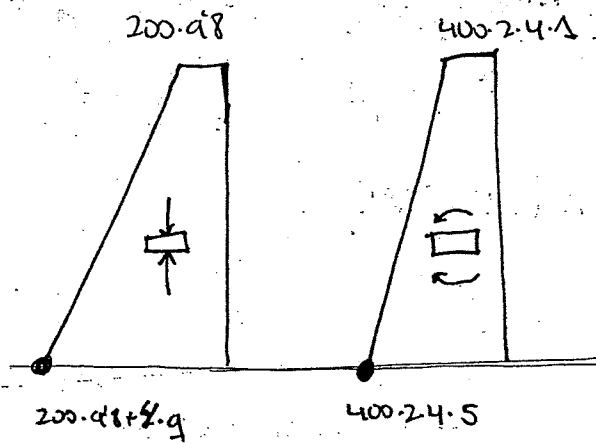
Posición del eje Neutro:

$$Ox = 0$$

$$-\frac{Mz}{I_{zy}} + \frac{N}{A} = 0; \quad +\frac{N \cdot d}{I_z} \cdot y + \frac{N}{A} = 0 \Rightarrow y = -\frac{I_z}{A \cdot d}$$

PROBLEMA.





La que mas ayte
es la parte de abajo

$$\frac{\sigma_c}{1.5} \geq |\sigma_{mix}| = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{200.918 + 4.g}{A} + \frac{400.4.2.5}{W_z}$$

133 MPa

Elegimos IPE 200 v

Probamos IPE 180 v

Probamos IPE 160 X

+ bords $\{g, W_z, A\}$

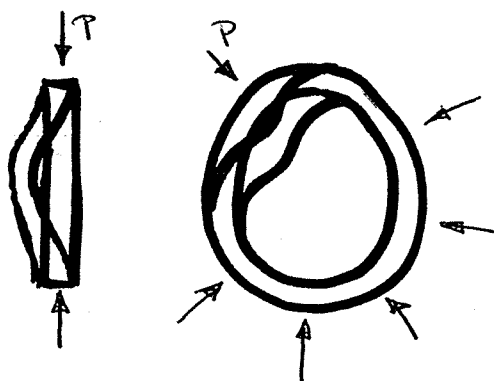
$$\boxed{\text{IPE 180}}, \sigma_x^{mix} = 100.4 \text{ MPa}$$

$$\text{IPE 160}, \sigma_x^{mix} = 137 \text{ MPa}$$

PANDEO

Lección 20: INESTABILIDAD

En estructuras la inestabilidad se da cuando existen extensas zonas sometidas a compresión.



Existe un:

- Momento desestabilizador $\equiv P\delta$
- Momento estabilizador $\equiv K\theta$

$P\delta > K\theta \Rightarrow$ Equilibrio inestable

$P\delta < K\theta \Rightarrow$ " estable

$K\theta = P\delta \Rightarrow$ Equilibrio indiferente
 $P = P_c \equiv$ carga crítica

$$P_c = \frac{K\theta}{\delta} \equiv \frac{K}{L}; \quad \delta = L\theta$$

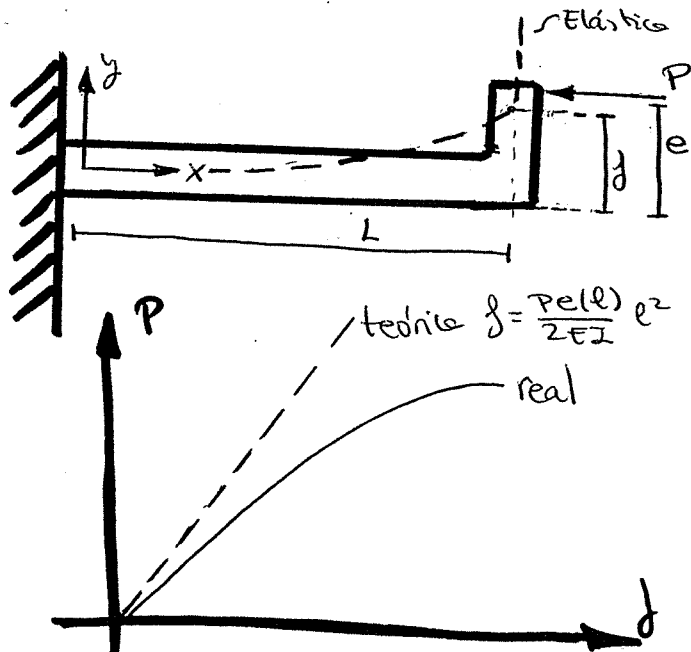
Además, no será aplicable la teoría de pequeños desplazamientos si $P > P_c$

En este caso $P\delta = PL \sin\theta = K\theta$; $\sin\theta = \left(\frac{K}{PL}\right)^{1/2} \theta$

$$\frac{P}{P_c} = \frac{\theta}{\sin\theta}$$

FALTAN CLAVES (ni idea de ventajas)

Lección 21: FÓRMULA DE EULER-ESBELTEZ

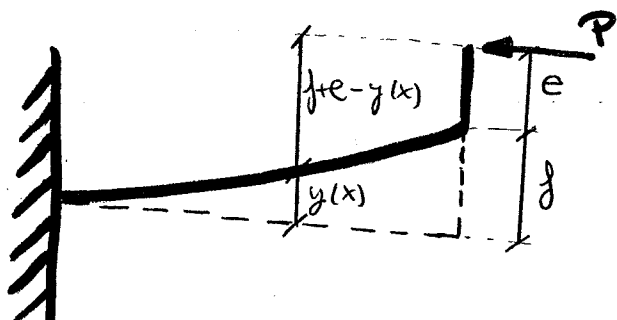


$$M(x) = P \cdot e(x) = EI y''$$

$$y = \frac{P \cdot e}{2EI} x^2; \quad \delta = y(x=L) = \frac{P \cdot e(L)}{2EI} L^2$$

La real se aleja de la teoría porque estamos planteando el equilibrio en la posición inicial, sin tener en cuenta las deformaciones de la barra.

Al deformarse la barra tenemos que el momento no se produce sobre lo que era antes $y=0$, sino sobre la elástica, ya que es ahí donde está la barra.



Plano de pandeo: xy
Eje de giro de las secciones: z

$$M(x) = P \cdot (f + e - y(x)) = EI y''$$

$$y'' = \frac{P}{EI} (f + e - y(x))$$

Estamos ante una EDO: $y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 (f + e)$, que es una EDO lineal completa. $\Rightarrow y = y_h + y_p \equiv$ sol gen. homogénea + sol particular de la completa

• Solución general de la homogénea: y_h

$$y_h'' + \alpha^2 y_h = 0; \quad \frac{r^2 + \alpha^2}{\text{Pol. característico}} = 0 \Rightarrow r = \pm \alpha i; \quad y_h = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x)$$

• Particular de la completa: Tanteamos un polinomio de grado cero

$$\text{A ojo se ve que } y_p = f + e$$

$$\text{Si no hubiéramos } y_p = C \rightarrow \text{Entrando en la EDO} \rightarrow 0 + \alpha^2 C = \alpha^2 (f + e) \rightarrow C = f + e$$

$\hookrightarrow$ ya que el término independiente es $\alpha^2 (f + e) \equiv$ grado 0

Por tanto: $y = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) + (f + e)$

Ahora, imponemos las condiciones de contorno, en este caso:

Empotramiento $\begin{cases} y'(0) = 0 & y' = C_1 \alpha \cos(\alpha x) - C_2 \alpha \sin(\alpha x) = 0; C_1 \alpha = 0 \rightarrow C_1 = 0 \\ y(0) = 0 & C_2 = -(f + e) \end{cases}$

Lo que buscamos es obtener $f \equiv \text{función}(P) \Leftrightarrow \text{función}(\alpha)$
 $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$

Para comprobarla con la teoría obtenida al inicio del tema

$$f = y(l) = -(f + e) \cos(\alpha l) + f + e = f(1 - \cos(\alpha l)) + e(1 - \cos(\alpha l))$$

$$f = e \frac{(1 - \cos(\alpha l))}{\cos(\alpha l)}$$

Se trata de una solución no lineal, ya que $\cos(\varphi l) = 0$

$$\Rightarrow f = \infty; \quad \cos(\varphi l) = 0 \Rightarrow \varphi l = n \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{P}{EI} l^2 = n^2 \frac{\pi^2}{4}$$

$\uparrow$
n° impar
 $n = 2q - 1$

$$P_{crit} = n^2 \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

 $\equiv \text{Cargas de Pandeo}$

Incluso en el caso de compresión pura hay pandeo si se llega a P_{crit} .

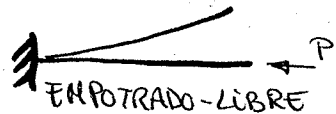
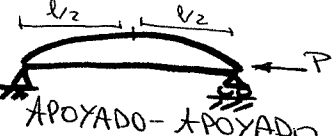
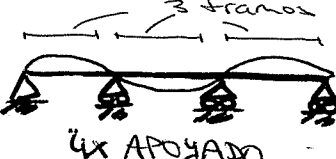
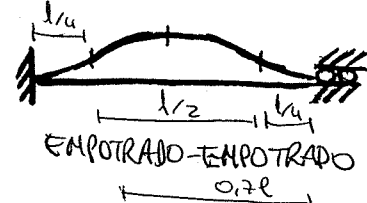
$$f = \frac{1 - \cos(\varphi l)}{\cos(\varphi l)} \cdot \frac{e}{\frac{1}{\cos(\varphi l)}} \quad \left| \quad f = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminado} \right.$$

si $\cos(\varphi l) = 0$

OTROS CASOS DE SUSTENTACIÓN

Resultan de resolver ecuaciones diferenciales para distintas situaciones de sustentación, como se ha hecho en el caso anterior.

Siempre responden a $P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2}$; siendo $l_p \equiv$ longitud de pandeo, es la longitud de la elástica entre dos puntos de inflexión consecutivos.

SUSTENTACIÓN	l_p	P_{crit}
 EMPOTRADO-LIBRE	$2l$	$\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$
 APOYADO-APOYADO	l	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$
 4x APOYADO	$\frac{l}{3} \leftarrow \text{n° de tramos}$	$\frac{\pi^2 EI}{\frac{l^2}{9}}$
 EMPOTRADO-EMPOTRADO	$0,5l$	$\frac{\pi^2 EI}{(0,5l)^2}$
 EMPOTRADO-APOYADO	$0,7l$	$\frac{\pi^2 EI}{(0,7l)^2}$

- A continuación, se define el concepto de esbeltez mecánica:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2} = \sigma_{crit} \cdot A$$

$$\left[\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2 A} = \frac{\pi^2 E}{l_p^2 \frac{I}{A}} = \frac{\pi^2 E}{l_p^2 i^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \right]; \text{ con } \lambda = \frac{l_p}{i} \equiv \text{esbeltez mecánica}$$

$\frac{I}{A}$ Recordamos radio giro $= \int i^2 dA = i^2 A = I$

NOTA

¿Cómo podemos minimizar el riesgo de pandeo?

Aumentando la P_{crit} , ya que así será más complicado llegar a producir la carga a partir de la cual se produce este fenómeno.

$$\uparrow \uparrow P_{crit} \left\{ \begin{array}{l} \lambda \downarrow \\ l_p \downarrow \\ i \uparrow \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} l_b \\ \text{sustentación} \uparrow \end{array} \equiv \text{Aumentar apoyos}$$

• CARGA DE PANDEO REAL

En la realidad no ocurre como hemos visto en el desarrollo teórico de Euler, deducido antes ($P_{crit Euler}$), sino que, al aumentar P_{crit} , la flecha no se va al ∞ , sino que va aumentando con la carga siguiendo una cierta linealidad.

Esta desviación se debe a que, en la obtención de la ecuación de Euler se ha perdido de la ecuación de la elástica simplificada $y'' = \frac{M'(x)}{EI}$. Para obtener el modelo real hay que emplear la ecuación de la elástica exacta: $\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M'(x)}{EI}$

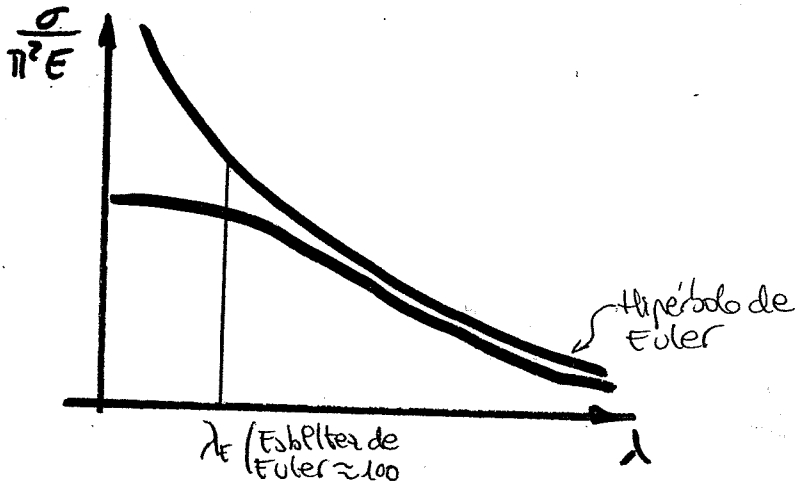
Al resolver la EDO correspondiente a la aplicación de la ecuación de la elástica exacta se tiene que $P_{crit real} < P_{crit Euler}$

Para diseñar se emplea la carga admisible a Pandeo que se obtiene a través del coeficiente de seguridad a Pandeo "n", de la siguiente manera:

$$\text{Manera: } P_{adm \text{ pandeo}} = \frac{P_{crit Euler}}{n}; \quad n > 1$$

$$n = \frac{\sigma_e}{\sigma_{adm}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{adm}}$$

Volviendo al concepto "hipérbola de Euler" $\frac{\sigma}{\pi E^2} = \frac{1}{\lambda^2}$



Observamos que para $\lambda < \lambda_E$ no derivamos notoriamente del Modelo de Euler

Debemos aplicar el método de los coeficientes "X"

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES "X" $\lambda < \lambda_E$

Se trata de determinar por tablas un coeficiente χ que reduce el área efectiva de resistir a compresión $\Rightarrow$ Traducimos el efecto de pandeo en una reducción de la sección $\rightarrow$ Una columna resiste una carga de compresión, P , si

Método

$$\sigma = \frac{P}{\chi A} \leq \sigma_{adm} \neq \sigma_e \text{ (tablas pág 13)}$$

Obtenido empíricamente por ensayo a compresión

a) Calcular esbeltez λ_y, λ_z $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_y = \frac{l_{py}}{i_y} \\ \lambda_z = \frac{l_{pz}}{i_z} \end{array} \right.$

b) Calcular la esbeltez de Euler: $\lambda_E = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_e}}$

y las esbeltez reducidas $\bar{\lambda}_y = \lambda_y / \lambda_E$; $\bar{\lambda}_z = \lambda_z / \lambda_E$

c) Determinar, a partir del tipo de sección, y el eje de pandeo la curva de pandeo, que puede ser a, b, c, d (Pág 15 tablas) o conocer ϕ .

d) Encontrar el valor de χ a partir de $\bar{\lambda}$ y ϕ (Pág 14 tablas).

También se puede calcular χ a partir de $\bar{\lambda}$ y ϕ con la expresión analítica de la pág. 12.

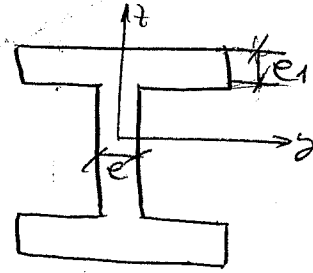
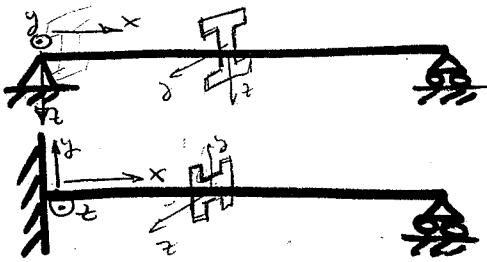
$$N_{crit} = \sigma_{adm} A \chi$$

Ejercicio

Una columna de sección HEB-300 colocada como se indica en la figura tiene longitud $l=8m$

Los apoyos en el plano xz son articulados y en xy, articulado y empotrado.

El material es acero S235, comprobar si la columna resiste 200 kN



a) λ_y, λ_z

$$\lambda_y = \frac{l_{py}}{i_y} \rightarrow \begin{cases} l_{py} = l = 8m \\ i_y = (I_x \text{ en tablas}) = 13cm \end{cases}$$

$$\lambda_y = \frac{800}{13} = 61.54$$

$$\lambda_z = \frac{l_{pz}}{i_z} \rightarrow \begin{cases} l_{pz} = 0.7l = 0.7 \cdot 8 \\ i_z = (I_y \text{ en tablas}) = 7.58cm \end{cases}$$

$$\lambda_z = \frac{0.7 \cdot 800}{7.58} = 73.88$$

?

no trabajaría con la per-
der de

b) $\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_E}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{225}} = 95.89$

Tablas en función de e o e_1 (coge la, el mejor)

$\lambda_E > \lambda_y$
 $\lambda_E > \lambda_z \Rightarrow$ Hay que aplicar aquí el método de los coeficientes!!!

$$\bar{\lambda}_y = 0.64$$

$$\bar{\lambda}_z = 0.77$$

c) Tablas pág 15 - Perfil laminado en I

$$\frac{h}{b} = \frac{300}{300} = 1 < 1.2$$

$$y \Rightarrow b (\gamma = 0.34)$$

$$z \Rightarrow c (\gamma = 0.49)$$

$$t = 19mm < 100mm$$

Es lo mejor!!

d) $\chi_y = 0.81$

$$\chi_z = 0.67$$

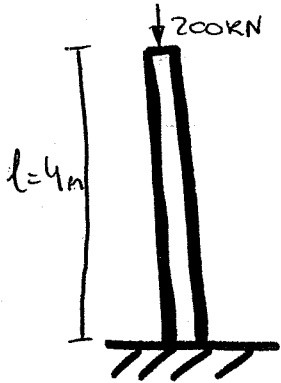
$$N_{crit} = \sigma_{adm} \cdot A \chi \Rightarrow N_{crit}(y) = 225 \cdot 149.1 \cdot 10^2 \cdot 0.81 = 2.72 MN$$

Especial T1

Se quiere dimensionar un soporte de longitud $l = 4\text{ m}$ que está sometido a una carga $P = 200\text{ kN}$ en su extremo superior (libre para desplazarse transversalmente) y empotrado en su parte inferior. Para dimensionamiento se usará sección anular de $\phi_{\text{ext}} = D = 200\text{ mm}$

Determinar espesor mínimo, redondeando a un número entero en mm, para que no exista riesgo de pandeo

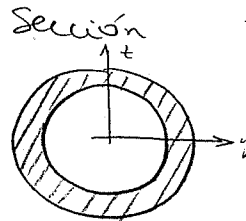
DATOS: Acero S275; $\sigma_{\text{adm}} = 180\text{ MPa}$; $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa}$



Aplico método Euler ($l_p = 2l$); $\lambda = \frac{l_p}{i}$

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$



Vamos a calcular I , dependiente del espesor

Sustituyendo en $P_{\text{crit}} = n P_{\text{adm. pandeo}} = \frac{\pi^2 E I(e)}{4l^2}$; sacaremos

$e_{\text{mín.}}$

$$n = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{275}{180} \quad (\text{se espesor mínimo } e < 16\text{ mm}) \rightarrow n = 1,527$$

$$I = \frac{1}{4} (\pi R_e^4 - \pi R_i^4) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D^4}{16} - \frac{D_i^4}{16} \right) = \frac{\pi}{64} (D^4 - (D - 2e)^4) = \frac{\pi}{64} (200^4 - (200 - 2e)^4) \text{ mm}^4$$

$$\textcircled{V} \quad 1,527 \cdot \underbrace{200.000}_{\text{Carga aplc}} = \underbrace{\left(\frac{\pi}{64} (200^4 - (200 - 2e)^4) \right)}_I \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{4 \cdot 4000^2}$$

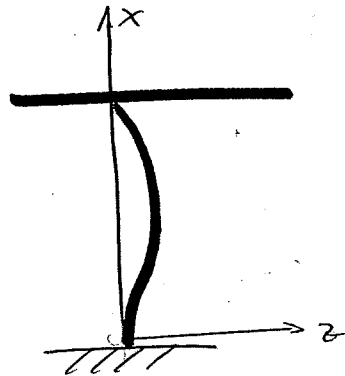
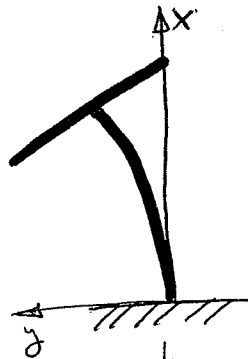
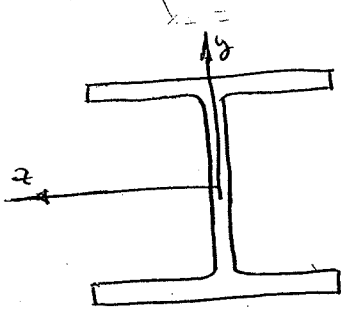
$$200^4 - (200 - 2e)^4 = \frac{1,527 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 4000^2 \cdot 64}{\pi^3 \cdot 2,1 \cdot 10^5} \quad , \quad e = 3,149\text{ mm}$$

Redondeando $\boxed{e = 4\text{ mm}}$

Especial T1

La mariposa de la figura, compuesta por un pilar HEB-180 de 4 m de altura orientado en los ejes de la figura, y una placa-forma superior, se puede deformar en el plano xy y en el xz según las formas representadas. Ante una carga vertical incremental, se pide determinar en cual de los planos se producirá el pandeo del pilar y el valor de P_{crit} de Euler.

Datos: Acero: $E_a = 210 \text{ GPa}$



$$P_c = \frac{\pi^2 E I}{l_p^2} = \frac{\pi^2 E A}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \lambda_{\max}(\lambda_z, \lambda_y)$$

$$l = 400 \text{ cm}$$

$$l_{pz} = 2l \text{ (por dibujo)}$$

$$i_z = 7.66 \text{ cm}$$

$$\lambda_z = \frac{400 \cdot 2}{7.66} = 104.44$$

$$l_{py} = 0.7l \text{ (por dibujo)}$$

$$i_y = 4.57 \text{ cm}$$

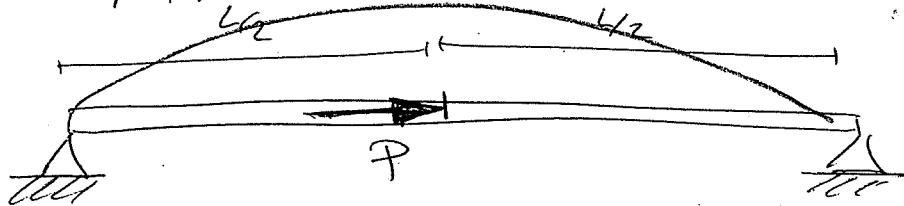
$$\lambda_y = \frac{0.7 \cdot 400}{4.57} = 61.27$$

Como $\lambda_z > \lambda_y \rightarrow P_{crit}(\lambda_z)$ Pandeará en plano xy .

$$P_c = \frac{\pi^2 E A}{\lambda_z^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 65.3 \cdot 10^2}{104.44^2} = 1241 \text{ kN}$$

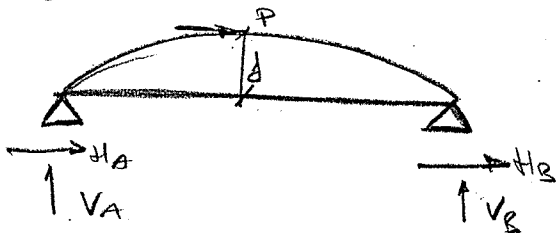
Calcular el valor crítico de la carga horizontal P aplicada en la sección media de la barra elástica de sección cte indicada en la figura, suponiendo que ambos apoyos son fijos.

Datos: L, E, I



No es ninguno de los apoyos elásticos

Tenemos que resolver la EDO



$$\sum F = 0 \rightarrow H_A + H_B + P = 0$$

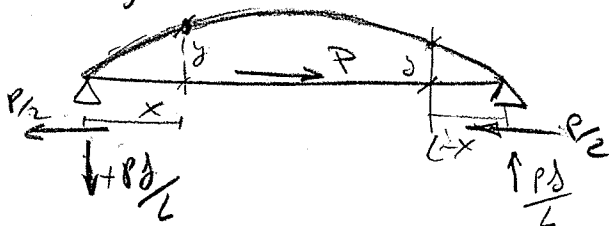
$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_A + V_B = 0$$

$$-P \frac{L}{2} + V_B L = 0; V_B = \frac{PL}{2}$$

$$V_A = -\frac{PL}{2}$$

Por simetría $H_A = H_B = \frac{P}{2}$

Ley de momentos



$$y'' = \frac{M_x}{EI}$$

$$M(x) = -\frac{PL}{2}x + \frac{P}{2}y; (x < \frac{L}{2})$$

$$M(x) = \frac{PL}{2}(L-x) - \frac{P}{2}y; (x > \frac{L}{2})$$

Se resuelve

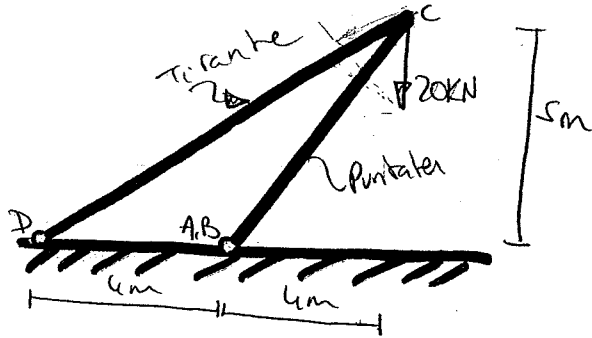
$EI y'' = M$ y se aplican c. contorno

Especial T1

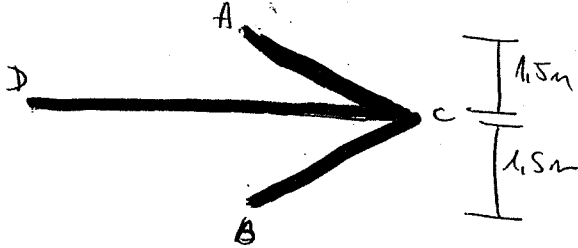
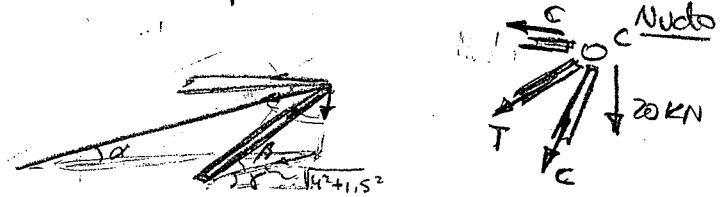
Do pontales de madera AC y BC { ver figura
Tirante de acero DC

Pontales: sección cuadrada { Del extremo C cuelga un peso de
Tirante: " circular { 20 kN. se pide:

a) Diámetro del tirante si $\sigma_{adm} = 60 \text{ MPa}$ para el acero



Necesito saber qué esfuerzo normal está soportando el tirante



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{8T}{\sqrt{89}} + \frac{8C \cdot 2}{\sqrt{173}} &= 0 \\ \frac{5T}{\sqrt{89}} - \frac{10C \cdot 2}{\sqrt{173}} &= -20 \cdot 10^3 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{10C}{\sqrt{173}} - \frac{20C}{\sqrt{173}} = +20 \cdot 10^3; \quad -C = +2 \cdot 10^3 \sqrt{173}$$

$$C = -26,306 \text{ kN}$$

$$T = 37,74 \text{ kN} \leftarrow T = \frac{26,306 \cdot 2}{\sqrt{173}} \cdot \sqrt{89}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} T_x: T \cos 9^\circ + 2C \cos 15^\circ \cos 4^\circ &= 0 \\ \frac{8}{\sqrt{8^2+5^2}} + \frac{2C}{\sqrt{4^2+1,5^2+5^2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{4^2+1,5^2}} &= 0 \\ \frac{8T}{\sqrt{8^2+5^2}} + \frac{8C}{\sqrt{4^2+1,5^2+5^2}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$F_y: 0 = 0$$

$$F_z: T \sin 9^\circ + 2C \sin 15^\circ \sin 4^\circ + 20000 = 0$$

$$\frac{5}{\sqrt{8^2+5^2}} + \frac{2C}{\sqrt{4^2+1,5^2+5^2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{4^2+1,5^2}} + 20000 = 0$$

$$\frac{5T}{\sqrt{8^2+5^2}} + \frac{10C}{\sqrt{4^2+1,5^2+5^2}} + 20000 = 0$$

Tirante

$$T = 37,74 \text{ kN} =$$

28,3 mm

$$\sigma_{adm} = \frac{T_{adm}}{A} = \frac{37,74 \cdot 10^3}{\pi \cdot \frac{D^2}{4}} = 60; \quad \rightarrow \boxed{D = 28,3 \text{ mm}}$$

2] Lado de la sección de los puntales sabiendo que su tensión crítica teórica de pandeo tiene como expresión en función de su esbeltez λ :

$$\sigma_{ct} = 29,3 - 0,194 \lambda \quad (\text{MPa}) \quad \lambda < 100 \quad n = 11$$

$$\sigma_{ct} = 99000 / \lambda^2 \quad (\text{MPa}) \quad \lambda > 100$$

Cuando tener en cuenta el como si hubiera un apoyo

$$l_p(\text{apoy-apoy}) = l = \sqrt{4^2 + 5^2 + 1,5^2} = L \text{ (m)}$$

$$\lambda = \frac{l_p}{a} = \frac{L}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{1}{12} a^3 \cdot a / a^2}} = \frac{L \sqrt{12}}{a}$$



$$I = \frac{1}{12} a^3 a$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{519}}{a} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{519}{a^2} = n$$

Los puntales soportan $C = 26,306 \cdot 10^3 \text{ N} = \sigma_{adm} A = \sigma_{adm} a^2$

$$\sigma_{adm} = \sigma_{teor} / 11 \Rightarrow \sigma_{teor} = \frac{26,303 \cdot 10^3}{a^2} \cdot 11 = \begin{cases} 29,3 - 0,194 \lambda & (1) \\ 99000 / \lambda^2 & (2) \end{cases}$$

Aplicando (1) $\Rightarrow \frac{26,303 \cdot 10^3}{a^2} \cdot 11 = 29,3 - 0,194 \cdot \frac{\sqrt{519} \cdot 10^3}{a}$
 Solo si $\lambda < 100$

$$a = 200,17 \text{ mm} \rightarrow \lambda = 113,8 > 100 \leftarrow \text{No valida}$$

Aplicando (2) $\Rightarrow \frac{26,303 \cdot 10^3}{a^2} \cdot 11 = \frac{99000}{\lambda^2} = \frac{99000}{\frac{L^2 \cdot 12}{a^2}} = \frac{99000 a^2}{12 \cdot (4^2 + 1,5^2 + 5^2) \cdot 10^6}$

$$a^4 = \frac{26,303 \cdot 10^3 \cdot 11 \cdot 12 \cdot (43,25) \cdot 10^6}{99000}$$

$$\lambda^2 = \frac{L^2 \cdot 12}{a^2}$$

$$a = 197,35 \text{ mm}$$

$$\lambda = 115,44 > 100 \text{ (valida)}$$

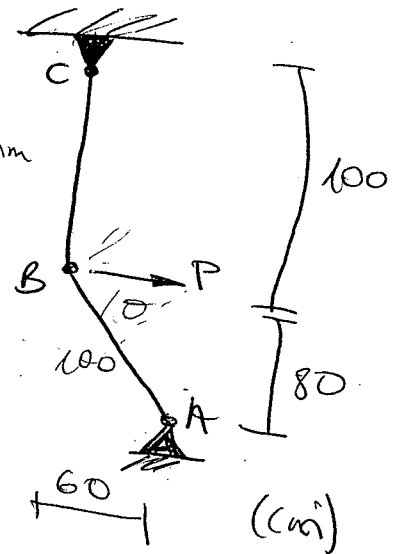
→ Dos barras de acero de sección recta cuadrada (3cm lado)
A, C apoyos fijos, B = rótula ⇒ BARRAS BIAPOXADAS

Calcular P_{crit} para la cual se alcanza la inst. según Euler

$$E = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \sigma_e = 200 \text{ MPa}$$

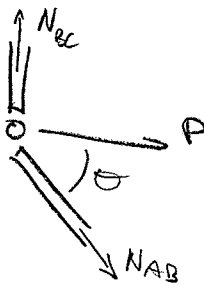
$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot \frac{1}{12} a^4}{l_p^2}, a = 3 \text{ cm} = 30 \text{ mm}$$

$l_p = l$



¿Cuál de las dos barras pandeará primero? La que este sometida a más P , por igualdad de $\lambda = \frac{l_p}{\sqrt{\frac{I}{A}}}$

Equil a nodo B



$$\begin{cases} P + N_{AB} \cos \theta = 0 \\ N_{BC} - N_{AB} \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Pandeará AB $\leftarrow N_{AB} > N_{BC} \leftarrow \begin{cases} N_{AB} = \frac{-P}{\cos \theta} = \frac{-P}{\frac{60}{100}} = -\frac{5P}{3} \\ N_{BC} = -\frac{5P}{3} \cdot \frac{8}{10} = -\frac{4P}{3} \end{cases}$

$$P_c = \frac{5P}{3} = \frac{\pi \cdot 210 \cdot \frac{1}{12} \cdot 30^4}{100^2} \Rightarrow \boxed{P_c = 84 \text{ kN}}$$

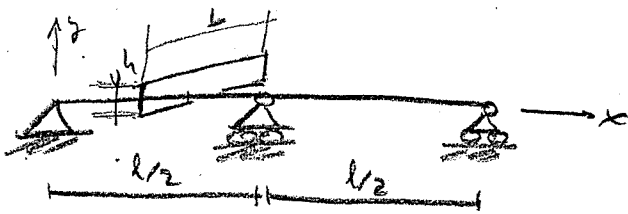
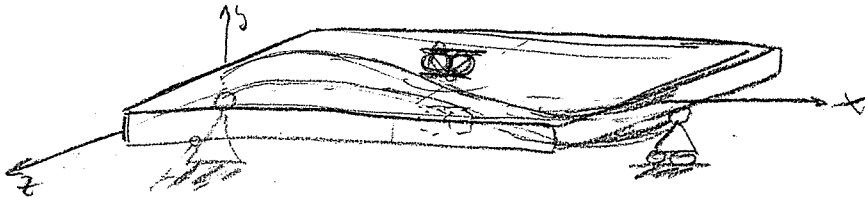
Comp. si $\lambda > \lambda_e$

$$\lambda = \frac{l_p}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{100}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{30^4}{30^2}}} = \frac{100 \sqrt{12}}{30} = 115,47$$

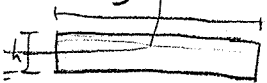
$$\lambda_e = \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} \pi = \sqrt{\frac{210 \cdot 10^9}{200}} \pi = 101,799$$

$\lambda > \lambda_e$
⇓
válido aplic. Euler

➔ Una columna elástica articulada en los extremos, de sección rectangular $b \times h$ está soportada lateralmente en la dirección de menor dimensión por rodillos en su punto medio C , pero desliza libremente en la dirección normal al papel. Hallar la relación b/h para que la resist. al pandeo sea la misma en ambos planos principales.

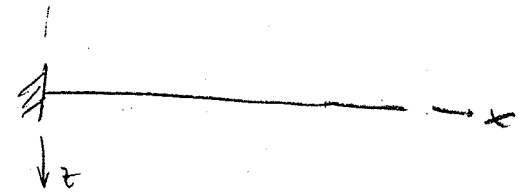


$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_x = \frac{1}{12} b h^3 \\ l_p = \frac{1}{2} l \end{array} \right. \quad \text{3x apoyados}$$



$$\int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{3} b \frac{h^3}{8} \cdot 2 = \frac{1}{12} b h^3$$

$$P_c = \frac{\pi^2 E \frac{1}{12} b h^3}{(\frac{1}{2} l)^2}$$



$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_y = \frac{1}{12} h b^3 \\ l_p = 2l \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi^2 E \frac{1}{12} h b^3}{4l^2} = P_c$$

$$\frac{\pi^2 E \frac{1}{12} b h^3 \cdot 4}{l^2} = \frac{\pi^2 E \frac{1}{12} b^3 h}{4l^2}, \quad 4h^2 = \frac{b^2}{4}, \quad \frac{b}{h} = \sqrt{16} = 4$$

$$\boxed{\frac{b}{h} = 4; b > h}$$

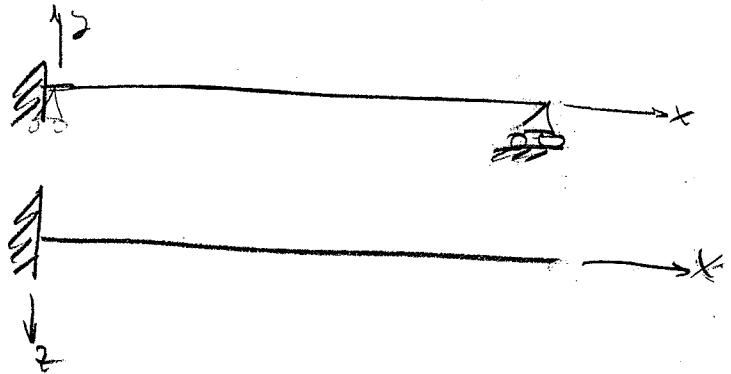
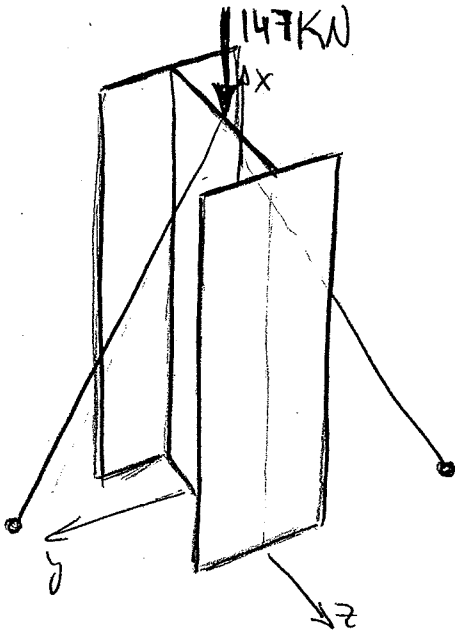
$$y = -\frac{96}{4} x = -24 \frac{x^2}{2}$$

Si hubiéramos considerado $h > b$

$$\begin{array}{l} (x, y) \Rightarrow I_x = \frac{1}{12} b h^3; \quad \frac{\pi^2 E \frac{1}{12} b^3 h}{l^2/4} \\ (x, z) \Rightarrow I_y = \frac{1}{12} h b^3; \quad \frac{\pi^2 E \frac{1}{12} h b^3}{4l^2} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{b^2}{l^2} 4 = \frac{h^2}{4l^2} \\ \frac{b^2}{h^2} = \frac{1}{16} \\ \frac{b}{h} = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Comunes

El pilar atornillado de la figura está empotrado en su base inferior y sometido a la carga en punta indicada (que incluye la tensión de los cables). Determinar su altura máxima si el perfil es HEB 140 de acero S235



Plano (x,y) $\rightarrow P_c(l)$

Plano (x,z) $\rightarrow P_c(l)$

Cojo lo mayor e igualo a 147 kN $\Rightarrow l$

$$(x,y) \quad P_c = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_z^2} \quad ; \quad \lambda_z = \frac{l_{pz}}{l_z} = \frac{0,7l}{3,5810} = 0,01955l$$

$$(x,z) \quad P_c = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_y^2} \quad ; \quad \lambda_y = \frac{l_{py}}{l_y} = \frac{2l}{59310} = 0,03373l$$

Plano de pandeo $\rightarrow$ El de menor $P_c \rightarrow$ El de mejor $\lambda \rightarrow \lambda_y \rightarrow$ Plano xz

$$\text{Por tanto} \quad 147 \cdot 10^3 = \frac{\pi^2 E A}{\lambda_y^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 43 \cdot 10^2}{0,03373^2}$$

$$l = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 43 \cdot 100}{147 \cdot 10^3 \cdot 0,03373^2} \xrightarrow{E=210 \cdot 10^3 \text{ MPa}, A=43 \text{ cm}^2} \boxed{l = 7.300 \text{ mm} \approx 7,3 \text{ m}}$$

$$\lambda = 142,7 \quad \left\{ \lambda > \lambda_e \rightarrow \text{Aplicable el método} \right.$$

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} \pi = \sqrt{\frac{210 \cdot 10^3}{235}} \pi = 93$$

Aplicando coef. de seguridad tenemos

$$P_{adm} = 147 \cdot 10^3 \text{ N} = \frac{P_{crit}}{n} \Rightarrow P_{crit} = P_{adm} \frac{\sigma_e}{\sigma} = P_{adm} \frac{\sigma_e}{\frac{\sigma_e}{\lambda^2}}$$

$$P_{crit} = A \sigma_e = 1,0105 \cdot 10^6$$

ESTA MAL

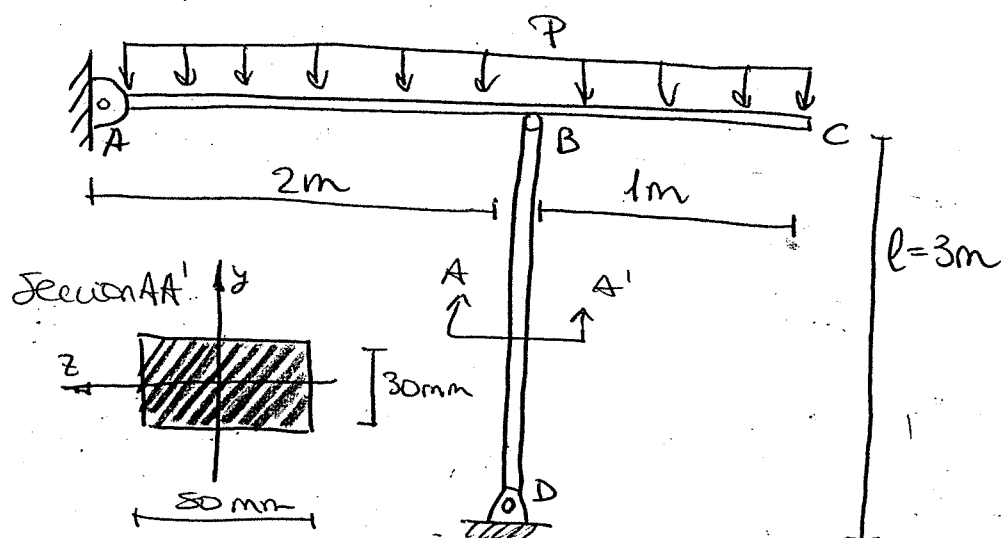
$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} = 147 \cdot 10^3 \cdot \frac{235}{\frac{\pi E}{\lambda^2}}$$

$$\frac{\pi^2 210 \cdot 10^3 \cdot 43 \cdot 100}{\lambda^2} = 147 \cdot 10^3 \frac{235 \lambda^2}{\pi \cdot 210 \cdot 10^3} \rightarrow \lambda = 114,24$$

$\lambda > \lambda_e \rightarrow \text{Aplicable}$

EJERCICIOS PÁNDEO (Resis II)

Examen 18-02-2005. Problema



Barra AC: Viga doble T de ala ancha (HEA)

Barra BD: Columna de acero sección AA'

Plano xz: Biarticulado
Plano xy: Biempotado

① Plano posible de pandeo

El plano posible de pandeo será el de mayor λ

Plano xy

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \frac{l_p}{i_z} \Rightarrow \begin{cases} l_p = 0,5l = 1,5 \cdot 10^3 \text{ mm} \\ i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} 50 \cdot 30^3}{50 \cdot 30}} = 8,66 \text{ mm} \end{cases} \rightarrow \lambda_2 = 173,21 \end{aligned}$$

Plano xz

$$\lambda_y = \frac{l_p}{i_y} \Rightarrow \begin{cases} l_p = l = 3 \cdot 10^3 \text{ mm} \\ i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} 30 \cdot 50^3}{30 \cdot 50}} = 14,43 \text{ mm} \end{cases} \rightarrow \lambda_y = 207,85$$

Como $\lambda_y > \lambda_z$, el posible plano de pandeo es el xz

② Calcular P máxima para que BD no pandee; aplicando:

a) La fórmula de Euler en el caso que sea aplicable

b) Método coeficientes

Acero A42

$E = 200 \text{ GPa}$

$\sigma_e = 260 \text{ MPa}$

$\sigma_{adm} = 150 \text{ MPa}$

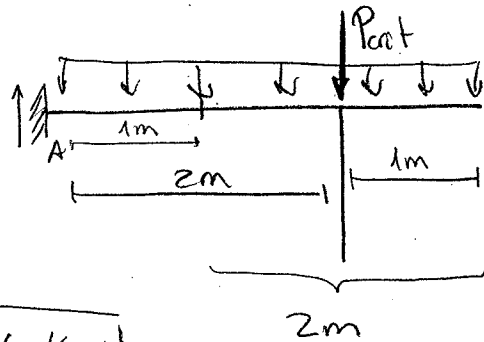
③

Calculamos esbeltez de Euler

$$\lambda_E = \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} \pi = \sqrt{\frac{200 \cdot 10^3}{260}} \pi = 87,13$$

Como $\lambda_y > \lambda_E$ podemos aplicar Teoría de Euler

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_y^2} = 68,54 \text{ kN}$$



Tomando momentos en A

$$(3p) \cdot 1,5 = P_{crit} \cdot 2 \quad ; \quad \boxed{P_{max} = 30,46 \text{ kN}}$$

④ Métodos de los coeficientes

Esbeltez reducida $\bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_E} = \frac{207,85}{87,13} = 2,38$

Tablas $\rightarrow C \rightarrow \eta = 0,49 \rightarrow \chi = 0,14$

$$N_{crit} = \frac{150 \cdot 10^6}{Pa} \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{m^2} \cdot 0,14 = 31,5 \text{ kN}$$

Denuevo

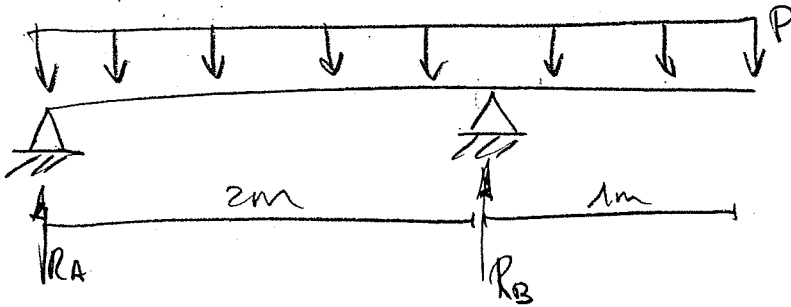
$$(3p) \cdot 1,5 = N_{crit} \cdot 2 \quad ; \quad \boxed{P_{max} = 14 \text{ kN}}$$

Método más seguro

$$n = \frac{P_{crit}}{N_{crit}} = \frac{68,54}{31,5} = 2,18$$

$$n_{Euler} = 1$$

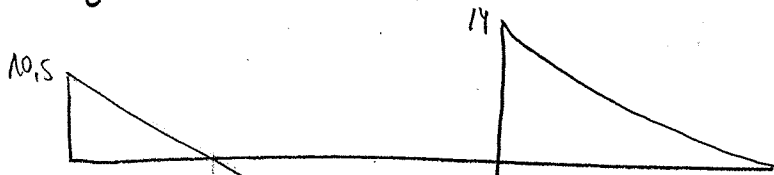
③ Determinar perfil de G doble T (HEA) si $S_{adm} = 150 \text{ MPa}$



Usamos los valores dimensionados por el método de coeficientes

$$q = 14 \text{ KN/m}; R_B = N_{crit} = 31.5 \text{ KN}; R_A = P \cdot 3 - R_B = 10.5 \text{ KN}$$

Diagramas T_y

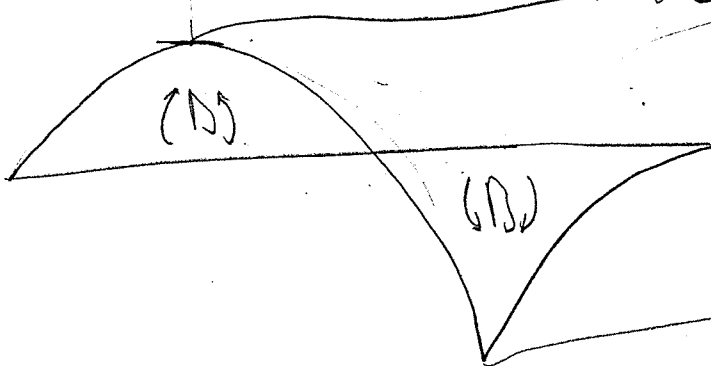


$$T_y = 10.5 - \frac{27.5}{2} x$$

$$T_y = 0 \rightarrow x = 0.76 \text{ m}$$

M_+

$$M_{t \max} = 10.5 \cdot x - \frac{27.5}{2} \frac{x^2}{2} \bigg|_{x=0.76} = 4 \text{ KN}\cdot\text{m}$$



$$M_{t \min} = \left(10.5 x - \frac{27.5}{2} \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_{x=3} = -6.5 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$|\sigma_{\max}| = \frac{6.5 \cdot 10^{-6}}{W} < 150 \text{ MPa}; W \geq 43.33 \text{ cm}^3$$

↓
I HEA-100

1-07-2005 CUESTIÓN 5

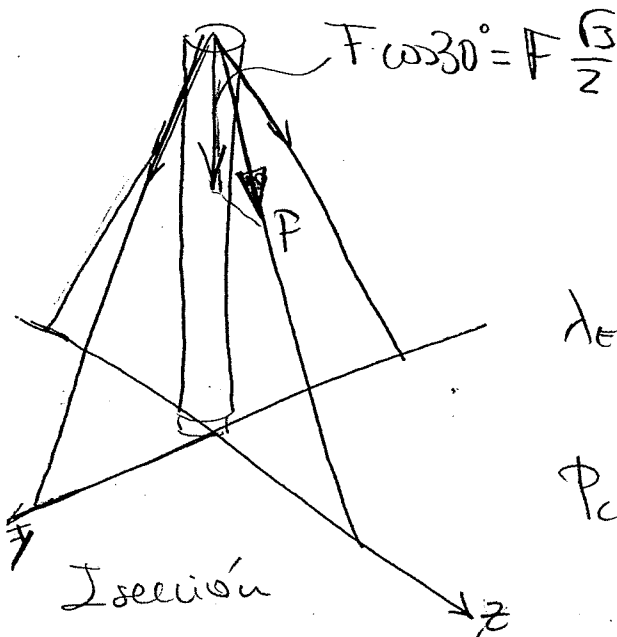
Horstil cilíndrico de 50 m $\phi = 300$ mm.

Cable arriba

Apoyo inferior fijo

F_{max} para pendeo

$E = 70 \text{ GPa}$



$$\lambda = \frac{l_p}{i} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l_p = l = 50 \text{ m} \\ i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{32} \phi^4}{\frac{\pi \phi^2}{4}}} = \frac{2\phi}{4\sqrt{2}} = 0,106 \end{array} \right.$$

Apoyado-apoyado

$$\lambda = 471,405$$

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} \pi \text{ no condensa } \sigma_c, \text{ aplicamos}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 E I}{l_p^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi}{64} 300^4}{(50 \cdot 10^3)^2} = 109,88 \text{ KN}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_y = I_z \\ I_o = \frac{\pi}{32} \phi^4 = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z) = \frac{1}{2} (I_x + 2I_y) ; I_y = \frac{1}{2} I_o = \frac{1}{2} \frac{\pi}{32} \phi^4 = \frac{\pi}{64} \\ I_y = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} = I_x \\ I_x = I_{xy} + I_{xz} \\ I_y = I_z = I_{xy} + I_{yz} = I_{xz} + I_{yz} \end{array} \right.$$

$$P_c = 4 F \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad F_{max} = \frac{P_c}{2\sqrt{3}} = 31,22 \text{ KN}$$

Cuestión 5 10-2-2006

Perfil tubular $140 \times 100 \times 6$ mm ($I_z = 690 \text{ cm}^4$, $I_y = 410 \text{ cm}^4$
 $A = 26,1 \text{ cm}^2$)

Plano $\rightarrow$ E-E
 Plano $\rightarrow$ E-L ¿Qué plano debe ser el biempotrado para mejor comportamiento a pandeo?

Possibilidades

$$\lambda = \frac{l_p}{i} \rightarrow \begin{cases} \text{E-E Plano XY} - l_p = 0,5l, i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \lambda_z = \frac{0,5l \cdot 10^2}{\sqrt{690/26,1}} = 9,72 l \\ \text{E-L Plano XZ} - l_p = 2l, i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \lambda_y = \frac{2l \cdot 10^2}{\sqrt{410/26,1}} = 50,46 l \\ \text{E-E Plano XZ} - l_p = 0,5l, i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \lambda_y = \frac{0,5l \cdot 10^2}{\sqrt{410/26,1}} = 12,62 l \\ \text{E-L Plano XY} \rightarrow l_p = 2l, i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \lambda_z = \frac{2l \cdot 10^2}{\sqrt{690/26,1}} = 38,9 l \end{cases}$$

La esbeltez máxima se minimiza colocando plano biempotrado en XZ y empotrado libre en XY

¿Altura mínima? Acero A-42, $\sigma_{adm} = 260 \text{ MPa}$

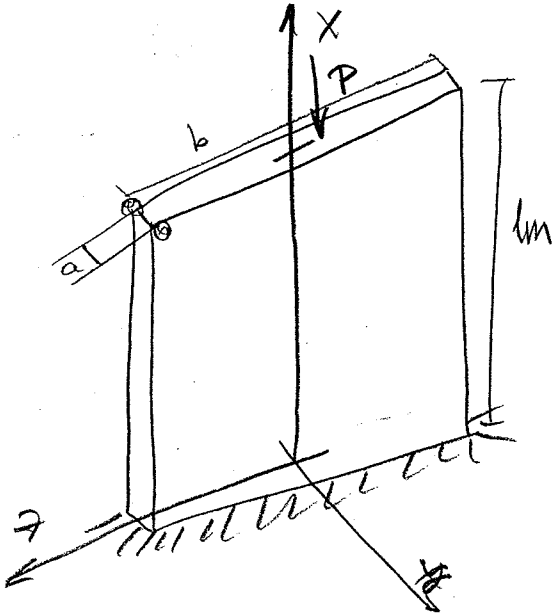
$$\lambda_E = \sqrt{\frac{E}{\sigma_E}} \pi =$$

Lo hace por método raro
 No tenemos σ_E de ese acero en tablas!!

Problema 2. 21/9/2007

$L = 1\text{m}$. Base empotrada y uno de los desplaz. horizontales de su sección sup. impedidos

$P = 15\text{KN}$. σ_{adm} ? S235, $E = 210\text{GPa}$, $\sigma_{adm} = 200\text{MPa}$



$$I_{yz} = 0,2l$$

$$I_{yz} = 0,2l$$

$$I_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} ab^3}{ab}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}}$$

$$I_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} ba^3}{ab}} = \sqrt{\frac{a^2}{12}}$$

$$I_y = \frac{2l\sqrt{12}}{b}$$

$$I_z = \frac{0,7l\sqrt{12}}{a}$$

Para minimizar sección buscamos que ambos planos de pandeo tengan la misma resistencia a pandeo

$$\frac{2l\sqrt{12}}{b} = \frac{0,7l\sqrt{12}}{a} \quad ; \quad 2a = 0,7b$$

$$b = 2,86a$$

Determinamos b

$$\lambda = \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} \quad ; \quad \lambda = \frac{2l\sqrt{12}\sqrt{\sigma_e}}{b\sqrt{12}\sqrt{E}}$$

$$\sigma_{adm} \geq \frac{N_{crit}}{A} = \frac{15 \cdot 10^3}{\frac{ab}{2,86} \cdot \lambda} = \frac{15 \cdot 10^3}{\frac{ab^2}{2,86} \cdot \lambda}$$

$$\lambda = 0,49$$

b (mm)	σ_e (MPa)	λ	χ	A (mm ²)	N/A χ
40	225	1,80	0,23	559,4	116
38	225	1,89	0,215	504,9	138
36	225	2,0	0,20	453,15	165
34	225	2,12	0,185	404,2	200

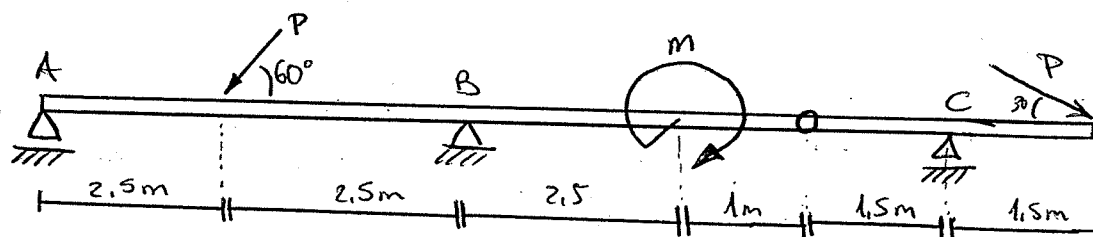
$$A_{min} = 404,2 \text{ mm}^2$$

Exámenes

RESISTENCIA DE MATERIALES

(II)
2ª MUERTE

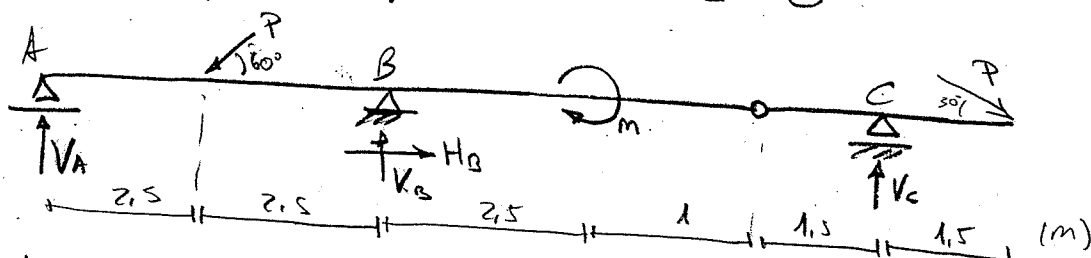
Resis I

EXAMEN **7-Feb-2003** Problema


1º Reacciones en A, B, C

Se trata de un sistema isostático ya que

$$GH = (r-3) + (3c-e) = 4-3 + 0-1 = 0$$



Aplicamos ecuaciones de equilibrio estático

$$\begin{aligned} \bullet \sum F_H = 0 &\rightarrow -P \cos 60^\circ + H_B + P \cos 30^\circ = 0, \quad \boxed{H_B = P \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -0.366 P} \\ \bullet \sum F_V = 0 &\rightarrow V_A + V_B + V_C - P \sin 60^\circ - P \sin 30^\circ = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Condición en B: $\sum M_{\text{rotura-derecha}} = \sum M_{\text{rotura-izq}} = 0$

$$\bullet \sum M_{\text{rot} \rightarrow \text{derech}} = V_C \cdot 1.5 - P \sin 30^\circ \cdot 3 = 0, \quad \boxed{V_C = \frac{3P/2}{1.5} = P}$$

De nuevo, por equilibrio estático

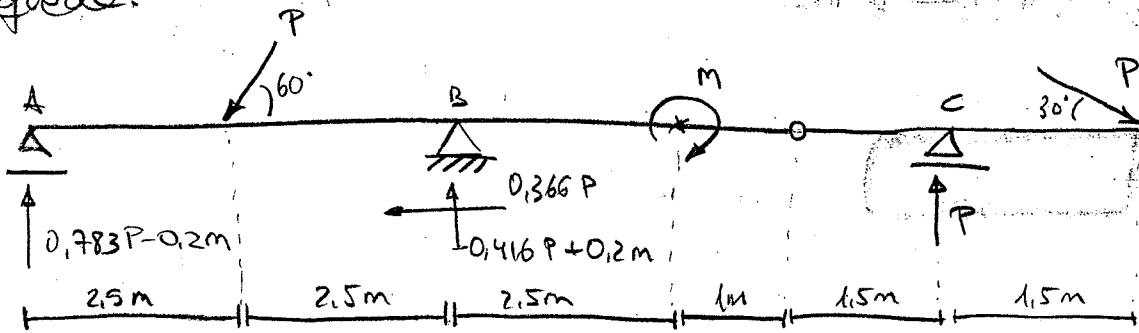
$$\bullet \sum M_B = 0 \rightarrow -V_A \cdot 5 + P \cdot \sin 60^\circ \cdot 2.5 - m + \overset{P}{V_C} \cdot 5 - P \sin 30^\circ \cdot 6.5 = 0$$

$$V_A = \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2.5 P - m + 5P - \frac{6.5}{2} P \right) \Rightarrow \boxed{V_A = 0.783 P - 0.2 m}$$

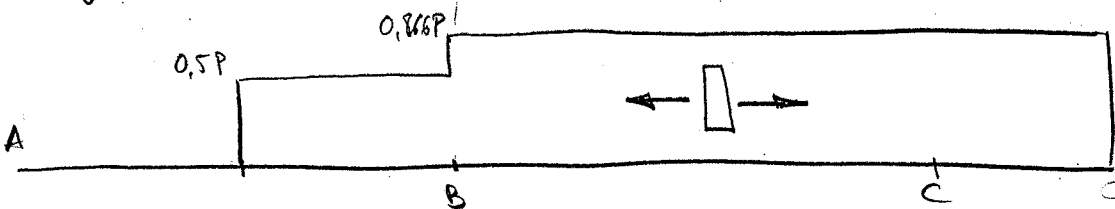
Aplicando (1) $V_B = P \sin 30^\circ + P \sin 60^\circ - V_A - V_C = P \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0.783 - 1 \right) + 0.2 m$

$$\boxed{V_B = -0.416 P + 0.2 m}$$

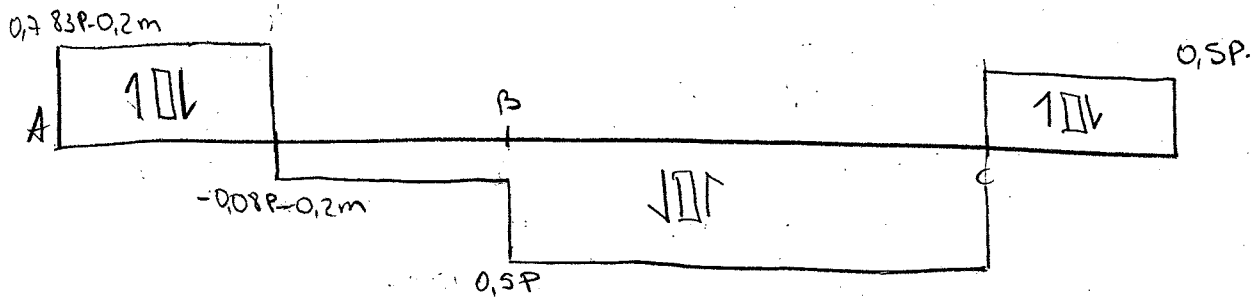
Dibujando la estructura de nuevo con las reacciones que da:



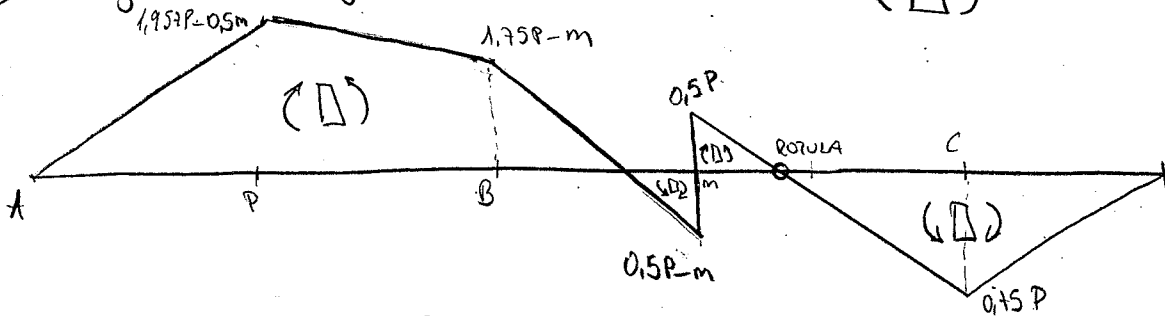
2° Diagrama de esfuerzos normales Crit signos $\leftarrow \square \rightarrow N^{\oplus}$



3° Diagrama de momentos Crit de signos $\uparrow \square \downarrow T_5^{\oplus}$



4° Diagrama de flexores Crit de signos $\uparrow \square \downarrow M_t^{\oplus}$



$$H_c = -P \cdot \sin 30^\circ \cdot 1.5 = -0.75P$$

$$M_{\text{ROTULA}} = 0$$

$$M_m = -P \cdot \sin 30^\circ \cdot 4 + P \cdot 2.5 = 0.5P \text{ (por la derecha)} \Rightarrow \text{Salto brusco por momento puntual}$$

$$M_p = (0.783P - 0.2m) \cdot 2.5 = 1.957P - 0.5m$$

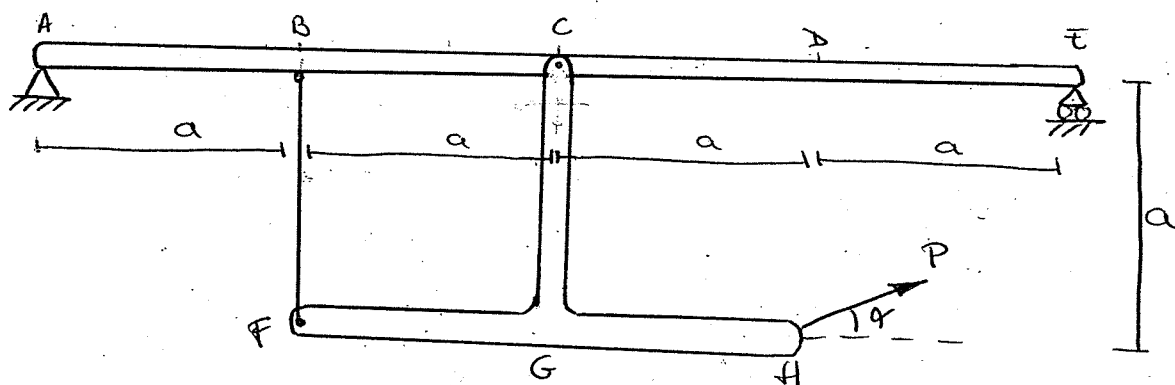
$$M_B = (0.783P - 0.2m) \cdot 5 - \sin 60^\circ P \cdot 2.5 = 1.75P - m$$

EXAMEN

18-Junio-2004

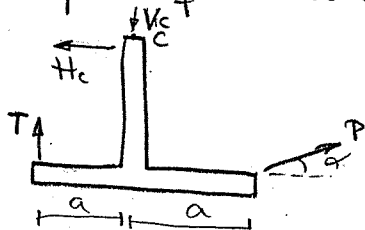
Resol T

Problema



1º) Determinar el intervalo de valores de θ para el cual el cable BF se mantiene en tensión.

Aplico equilibrio a la pieza CFGH



Por equilibrio estático

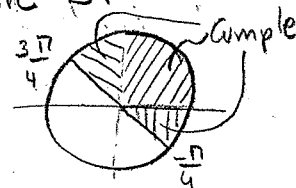
$$\sum F_H = 0 \rightarrow H_c = P \cos \theta$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow T + P \sin \theta = V_c \quad | \quad V_c = 2P \sin \theta + P \cos \theta$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow T \cdot a = P \sin \theta \cdot a + P \cos \theta \cdot a$$

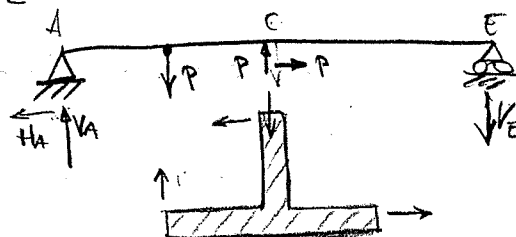
Por tanto $T = P(\sin \theta + \cos \theta)$ y para que el cable BF se mantenga en tensión $\Rightarrow T > 0 \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta > 0$

Por tanto $\boxed{-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}}$



2º) Diagramas de esfuerzos normales, cortantes y momentos flectores en barra AE para: $\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{4}$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\theta = 0}$ $\begin{cases} T = P(\sin 0 + \cos 0) = P \\ V_c = 2P \sin 0 + \cos 0 \cdot P = P \\ H_c = P \cos 0 = P \end{cases}$



Aplico equilibrio a la barra AE

$$\sum F_H = 0 \rightarrow P = H_A$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow V_A - P + P + V_E = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -Pa + P \cdot 2a - V_E \cdot 4a = 0; \quad V_E = \frac{+P}{4}$$

$$V_A = \frac{P}{4}$$

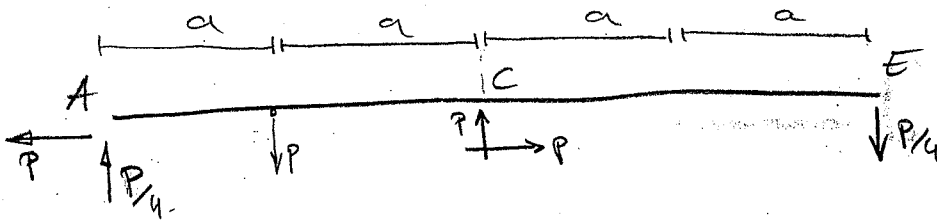


Diagrama esfuerzos normales $N \rightarrow N^{\oplus}$ (crit. signos) $\leftarrow \square \rightarrow$



Diagrama de cortante $T \rightarrow T^{\oplus}$ (crit. signos) $\updownarrow$

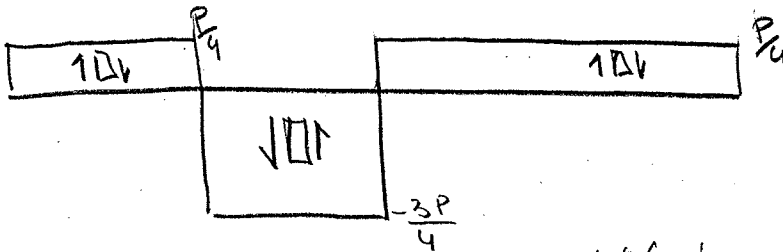
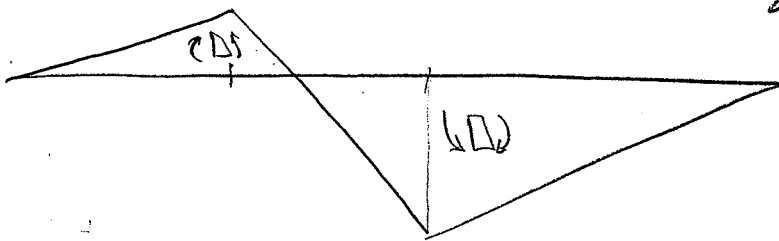


Diagrama de flexores $M \rightarrow M^{\oplus}$ (crit. signos) $(\square)$

EXAMEN **15-20-2012**

Cuestión 1: Eje aluminio / acero = ϕ
 longitudinales + tubo acero
 Se pide

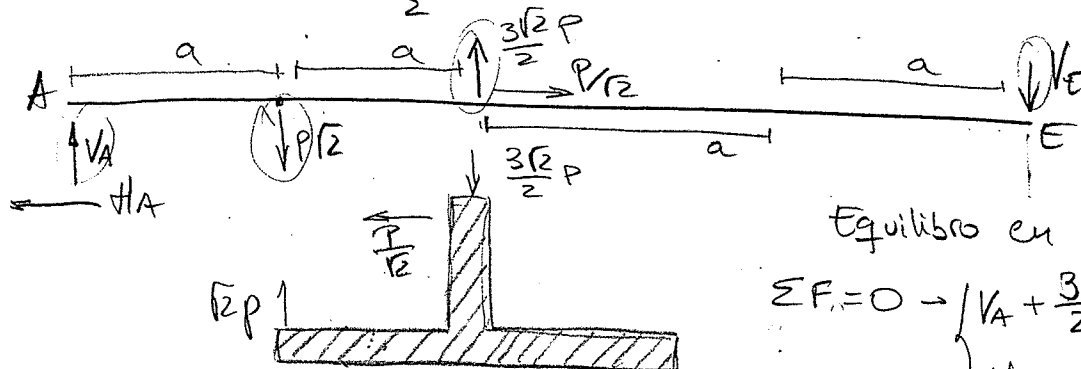


$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$T = P \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} P$$

$$V_c = 2P \frac{\sqrt{2}}{2} + P \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} P$$

$$H_c = P \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Equilibrio en $\overline{AE}$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow V_A + \frac{3\sqrt{2}}{2} P = P\sqrt{2} + V_E$$

$$H_A = P\sqrt{2}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -a P\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} P (2a) - V_E (4a) = 0$$

$$V_E = \frac{2\sqrt{2} P}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} P = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$V_A = P\left(\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

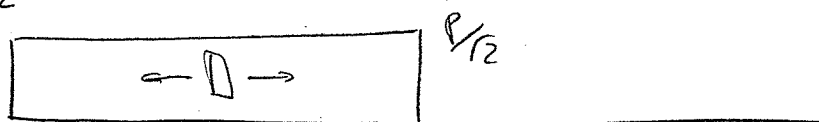
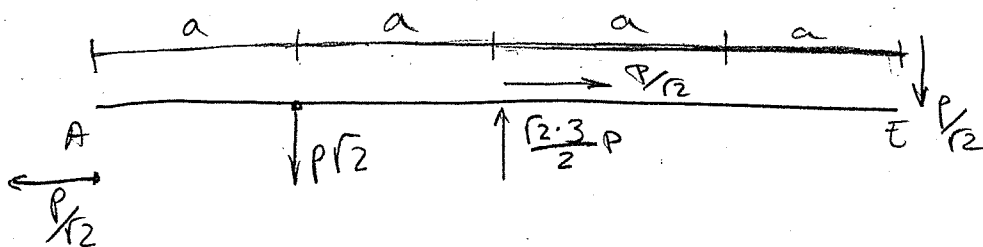


Diagrama N
 $\rightarrow \square \rightarrow N^+$

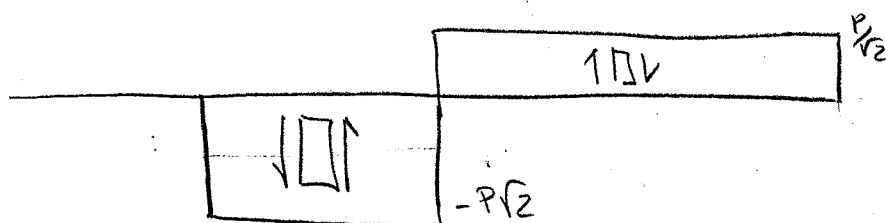


Diagrama T
 $\downarrow \square \downarrow T^+$

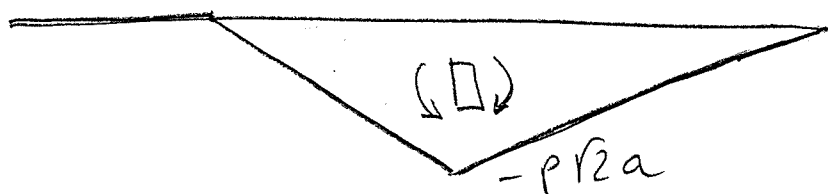
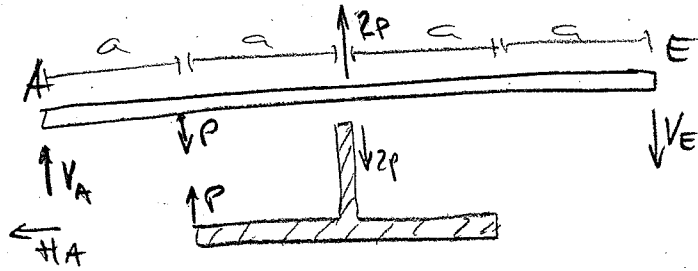


Diagrama M
 $(\square)$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} H_c &= 0 \\ V_c &= 2P \\ T &= P \end{aligned}$$



Por equilibrio elástico en barra AE:

$$\begin{aligned} \sum F &= 0 \quad \left\{ \begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A + 2P &= V_E + P \end{aligned} \right. \\ \sum M_A &= 0 \quad \left\{ \begin{aligned} -Pa + 2P(2a) - V_E(4a) &= 0 \\ V_E &= \frac{3P}{4} \\ V_A &= -\frac{P}{4} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

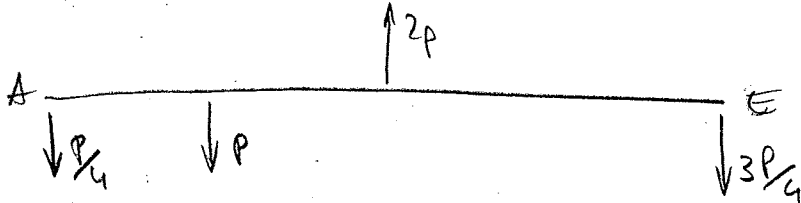


Diagrama N

Diagrama T

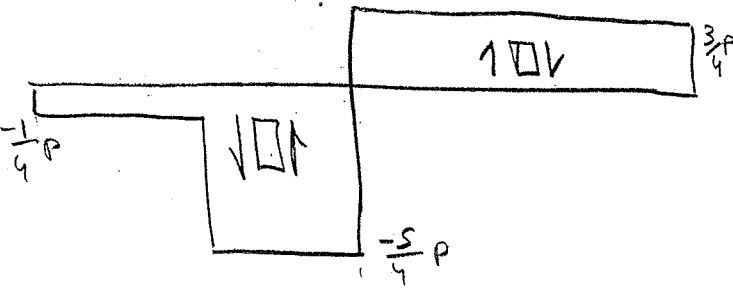
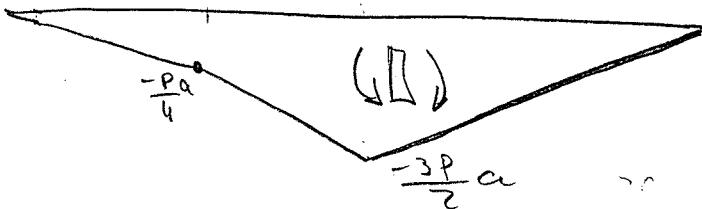


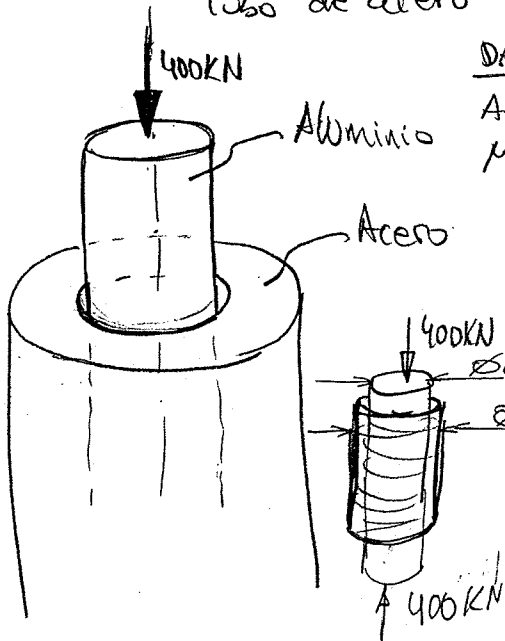
Diagrama M



EXAMEN 13-Julio-2012 Revis1

Verificación Eje aluminio $\rightarrow \varnothing = 80 \text{ mm}$
Tubo de acero con presión interna

se pide $\varnothing$ int tubo para
presión de contacto eje/tubo
nula al actuar sobre el alu-
minio F axial compresión
de 400 kN



DA700

Al: $E = 70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
 $\nu = 1/3$

La tensión sobre el aluminio $\sigma_x = \frac{N}{A}$

es $\sigma_x = \frac{-400 \cdot 10^3}{\pi 40^2} = \frac{-250}{\pi} \text{ MPa}$

Queremos conocer la deformación
de la sección del eje ($\Delta \phi$)

$$\Delta L = \int_L \frac{N}{EA} dx = \frac{-400 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^9 \cdot \pi 40^2} L = \frac{L}{280\pi}$$

El volumen ha de conservarse

$V_i = \pi R_i^2 \cdot L$
 $V_f = \pi R_f^2 \cdot (L + \Delta L)$
 $\Rightarrow \pi 40^2 \cdot L = \pi R_f^2 \cdot L \left(1 + \frac{1}{280\pi}\right)$

$$\Rightarrow R_f = \sqrt{\frac{40^2}{1 + \frac{1}{280\pi}}} = 40,02276 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{\varnothing_f = 80,046 \equiv \varnothing \text{ int tubo para no presión}}$$

Otra forma: Método más exacto

Por tracción pura $\epsilon_\theta = \epsilon_z = \epsilon_r = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta \phi}{\phi} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x);$

$$\frac{\Delta \phi}{\phi} = \frac{-1}{3E} \left(\frac{-250}{\pi} \right) \Rightarrow \Delta \phi = \frac{250}{3E\pi} \cdot 80 = \frac{250}{3 \cdot 70 \cdot 10^9 \pi} = 0,0303 \text{ mm}$$

$$\boxed{\varnothing_f = 80,0303 \text{ mm}}$$

Exercício 2

Viga indeformável $L = 4\text{ m}$

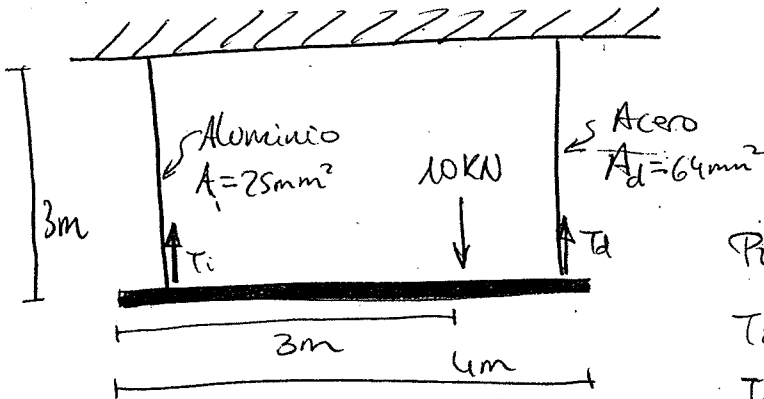
Dados

$$E_{\text{acero}} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_{\text{al}} = 0,6 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

de pedir:

- 1) Tensão de cada hilo
- 2) Alongamento de cada hilo



Por equilíbrio a la Viga

$$T_i + T_d = 10.000$$

$$T_d \cdot 4 = 10000 \cdot 3, \quad T_d = 7,5 \text{ kN}$$

$$T_i = 2,5 \text{ kN}$$

Los hilos están sometidos a tracción

Hilo Aluminio, $A = 25 \text{ mm}^2$, $E_{\text{al}} = 0,6 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma = \frac{N}{A} = 100 \text{ MPa}$

$$N = T_i = 2,5 \text{ kN} > 0 \text{ (tracción)} \Rightarrow \Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA} dx = \frac{2500}{0,6 \cdot 10^5 \cdot 25} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ (mm)}$$

$$\Delta L = 5 \text{ mm} \Rightarrow$$

Hilo izquierdo: $N = 2,5 \text{ kN}$ (tracción)
Aluminio $\Delta L = 5 \text{ mm}$
 $\sigma = 100 \text{ MPa}$

Hilo Acero

$$A = 64 \text{ mm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

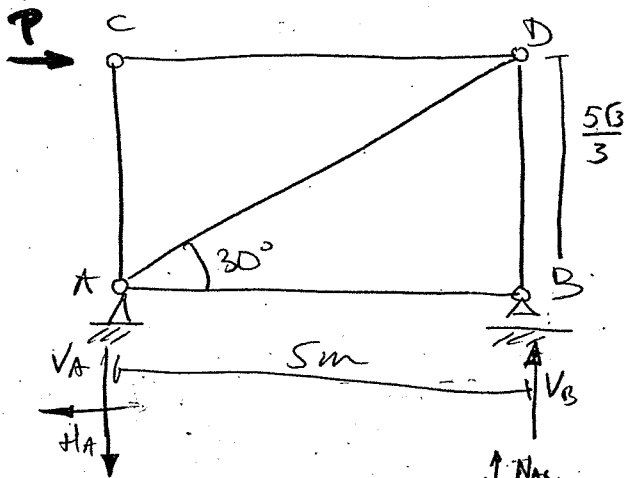
$$N = T_d = 7,5 \text{ kN}$$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA} dx = \frac{7500}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 64} \cdot 3 \cdot 10^3 = 1,67 \text{ mm}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = 117,2 \text{ MPa}$$

Hilo de la derecha: $N = 7,5 \text{ kN}$
Acero $\Delta L = 1,67 \text{ mm}$
 $\sigma = 117,2 \text{ MPa}$

Ejercicio 3

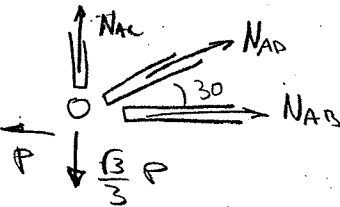


Se pide: Esfuerzos en barras indicando si son de tracción o compresión

Por equilibrio estático a la totalidad del sistema

$$\left. \begin{aligned} \sum \vec{F} = 0 &\rightarrow P = H_A \\ &\rightarrow V_A = V_B \\ \sum M_A = 0 &\rightarrow P \frac{5\sqrt{3}}{3} = V_B \cdot 5 \end{aligned} \right\} V_A = V_B = \frac{\sqrt{3}}{3} P$$

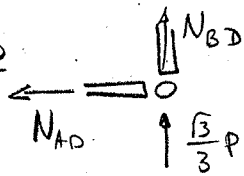
Equilibrio al nodo A



$$N_{AC} + \sin 30^\circ N_{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} P \quad (1)$$

$$N_{AB} + \cos 30^\circ N_{AD} = P \quad (2)$$

Equilibrio al nodo B



$$\left. \begin{aligned} N_{BD} &= \frac{\sqrt{3}}{3} P \\ N_{AD} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

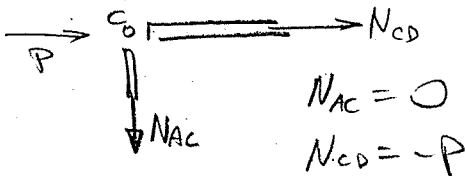
Barra BD: $N = -\frac{\sqrt{3}}{3} P = -0.578 P$
compresión

Entrando en (2) $\rightarrow 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{AD} = P \Rightarrow N_{AD} = \frac{2P}{\sqrt{3}}$

Barra AB no soporta esfuerzos $N = 0$

Barra AD: $N = 1.155 P$, de tracción

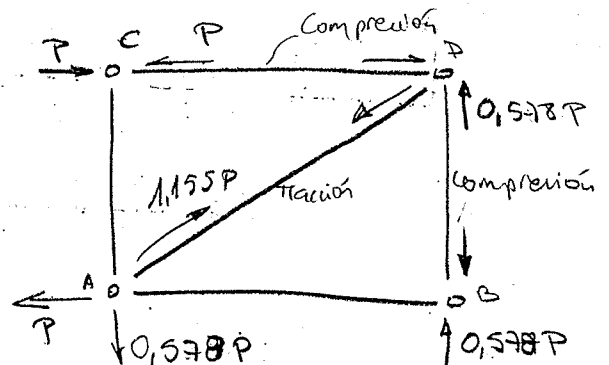
Equilibrio al nodo C



$$\begin{aligned} N_{AC} &= 0 \\ N_{CD} &= -P \end{aligned}$$

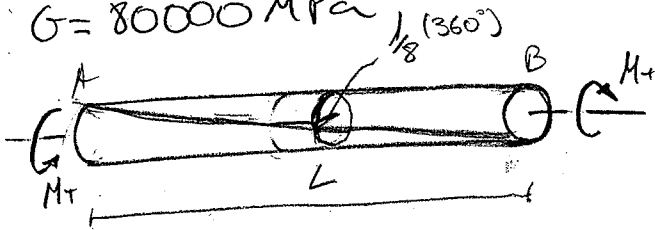
Barra AC no soporta esfuerzos $N = 0$

Barra CD: $N = -P$, de compresión



Cuestión 4

Tensión Máxima al girar $\frac{1}{8}$ de vuelta las secciones extremas de una barra de longitud $L = 600 \text{ mm}$ y $\phi = 5 \text{ mm}$
 $G = 80000 \text{ MPa}$



$$\theta (\text{giro de la sección}) = \frac{M_t}{G I_0} L = \frac{360}{8} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

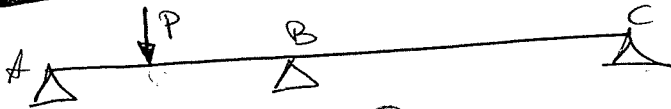
$$I_0 = \frac{\pi}{32} (D_o^4 - D_i^4) = \frac{625}{32} \pi \Rightarrow M_t = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{I_0 G}{L} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{625 \cdot 8 \cdot 10^4}{600}$$

$$C_{\text{max}} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t R}{I_0} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{625 \cdot 8 \cdot 10^4}{32 \cdot 600} \cdot \frac{322.5}{625 \pi} = 261.8 \text{ MPa}$$

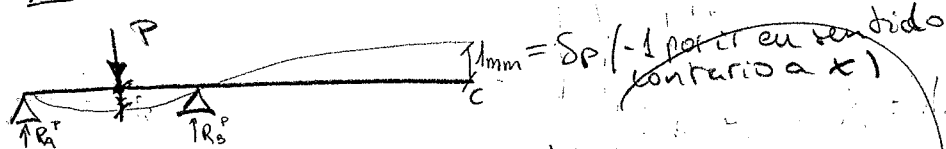
EXAMEN 3-Feb-2007 Pens 1

$P = 50 \text{ kN}$

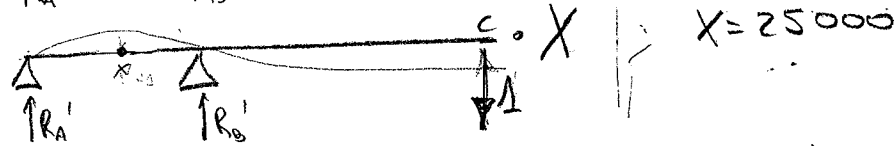
Cuestión 3



Sistema P



Sistema 1



Calculo del desplazamiento eficaz respecto a la inóvula hiperent.

$$X = -\frac{\delta_P^0}{\delta_1^0}, \quad \delta_1^0 = \frac{1}{25} \frac{\text{mm}}{\text{kN}} (\text{sensido descendente})$$

Por superposición

$$\delta_P^0 = \delta_P^0 + \delta_{1 \cdot 1}^0 = 1 \text{ mm}$$

Aplicando M.B

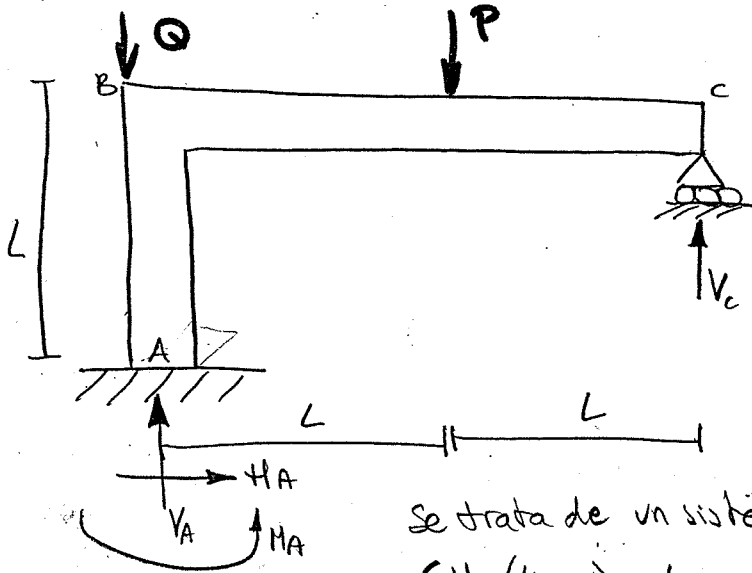
$$\delta_P^0 P = \delta_1^0 \cdot X \Rightarrow \delta_1^0 = -2 \text{ mm}$$

$$\delta_P^0 = 1 + 2 = 3 \text{ mm}$$

$$\frac{-2}{50} = -\frac{1}{25} \frac{\text{mm}}{\text{kN}}$$

EXAMEN 22-Feb-2010 Revis 2

Problema



$P = 4000 \text{ N}$

$Q = ?$

Adicionalmente

- $Q_{\min}$ para $N_{AB} \leq 0$

DATOS:
Secciones $\square I_l = 100 \text{ mm}$
 $E = 30 \text{ GPa}$, $L = 1 \text{ m}$

Se trata de un sistema hiperestático

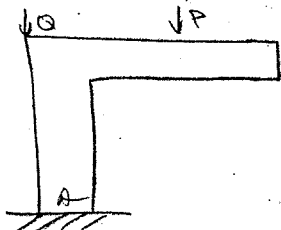
$G.H. = (4-3) + (0-0) = 1$

Vamos a aplicar el método de MOHR

- 1) elegimos incógnita hiperestática V_c

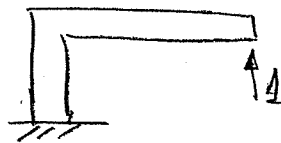
- 2) Descomposición del sistema

Sistema P



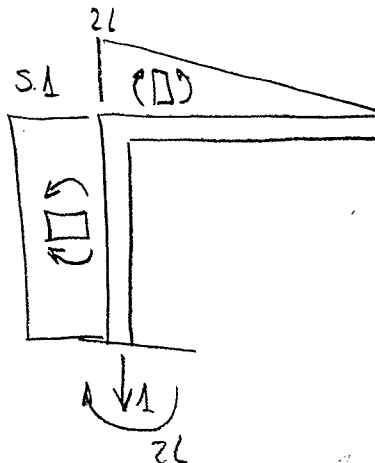
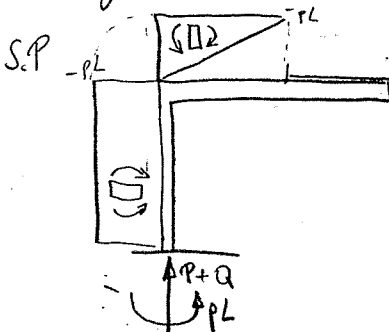
$$\begin{aligned} \sum F = 0 &\rightarrow V_A^{\textcircled{1}} = Q + P \\ \sum M_A = 0 &\rightarrow \begin{cases} H_A^{\textcircled{1}} = 0 \\ M_A^{\textcircled{1}} = PL \end{cases} \end{aligned}$$

Sistema 1



$$\begin{aligned} \sum F = 0 &\rightarrow \begin{cases} V_A^{\textcircled{0}} + 1 = 0 \\ H_A^{\textcircled{0}} = 0 \\ M_A^{\textcircled{0}} + 2L = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 3) Leyes de momentos

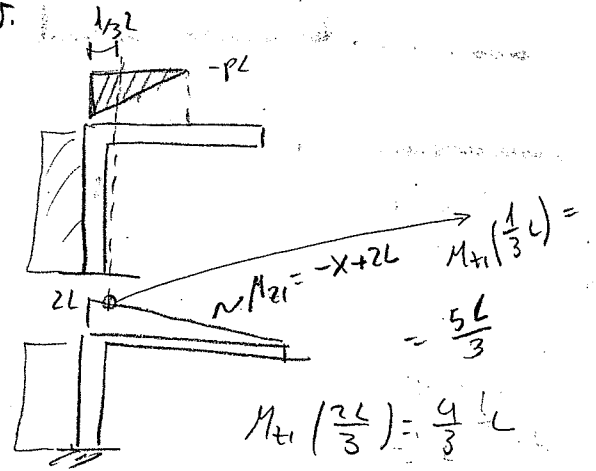


• 4) Condición de compatibilidad de mov.

$$\delta_c = 0 = \delta_c^P + \delta_c^1 \cdot X, \quad X = \frac{-\delta_c^P}{\delta_c^1}$$

$$\delta_c^P = \int_0^L \frac{M_z^P \cdot M_z^1}{EI} dx$$

$$\delta_c^1 = \int_0^L \frac{M_z^1 \cdot M_z^1}{EI} dx$$



$$\delta_c^P = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} PL L \right) \frac{5L}{3} + \frac{1}{EI} (PL L) 2L = \frac{1}{EI} PL^3 \left(\frac{5}{6} + 2 \right) = \frac{17}{6} \frac{1}{EI} PL^3$$

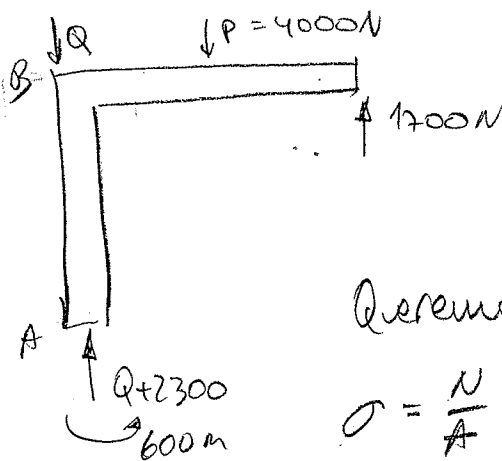
$$\delta_c^1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} 2L \cdot 2L \right) \frac{4L}{3} + \frac{1}{EI} (2L L) 2L = \frac{L^3}{EI} \left(\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{20}{3} \frac{1}{EI} L^3$$

$$X = \frac{\frac{17}{6} \frac{1}{EI} PL^3}{\frac{20}{3} \frac{1}{EI} L^3} = \frac{17}{40} P = 1700 N$$

$$V_A = V_A^0 + X \quad V_A^1 = Q + P - 1700 = Q + 2300$$

$$M_A = 0$$

$$M_A = M_A^0 + X M_A^1 = PL - 2L \cdot 1700 = +4000 - 2 \cdot 1700 = 600 \text{ Nm}$$



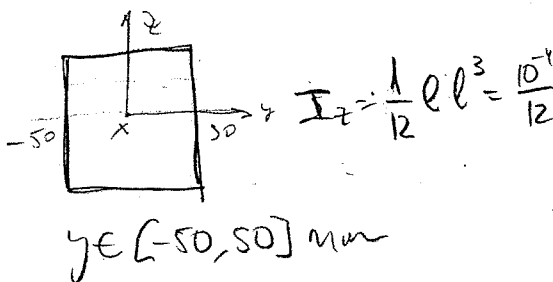
Barra AB en compresión con

$$N = -Q - 2300 \text{ (N)}$$

$$M_z = -600 \text{ (Nm)}$$

Queremos $\sigma_x \leq 0$, se pide $Q_{\min}$

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} \leq 0 \Rightarrow -\frac{Q+2300}{10^{-2}} + \frac{600}{I_z} \leq 0$$



$$\sigma_{\max} = -(Q+2300)100 + \frac{600 \cdot 0,05}{\frac{10^{-4}}{12}} \leq 0$$

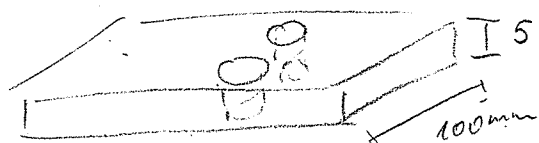
$$\frac{1}{100} (3,6 \cdot 10^6) = Q + 2300$$

$$Q = 33,7 \text{ KN}$$

EXAMEN 19-Julio-2012

Version 1

Taladro central $\sigma = \frac{N}{A} < 200 \text{ MPa}; \frac{20 \cdot 10^3}{(100-2\phi)5} < 200$



$$10000 < 200 \cdot 5 \cdot 100 - 200 \cdot 5 \cdot 2\phi$$

$$\phi < \frac{20\phi \cdot 5\phi - 20\phi\phi}{1\phi \cdot 2\phi\phi} = \frac{100-20}{2} = 40$$

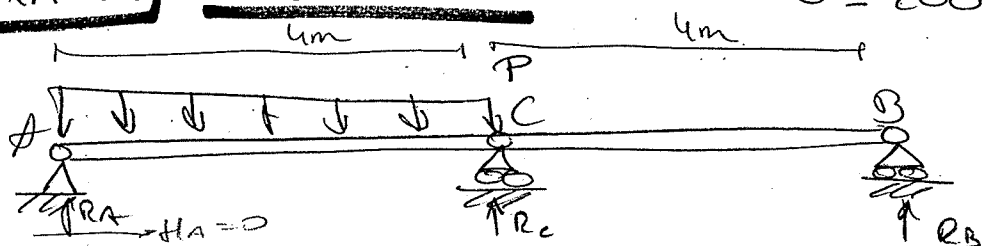
$$\phi < 400 \text{ mm}$$

Taladros inf./sup $\sigma = \frac{N}{A}; \frac{0}{\dots} < 200$

EXAMEN 1-Julio-2005

$$E = 200 \text{ GPa}; I_z = 80 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

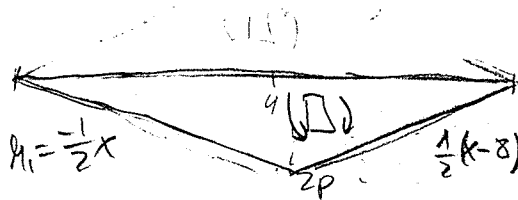
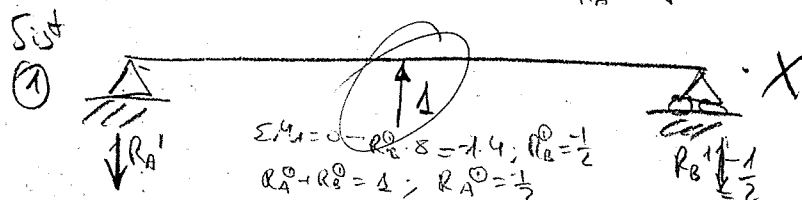
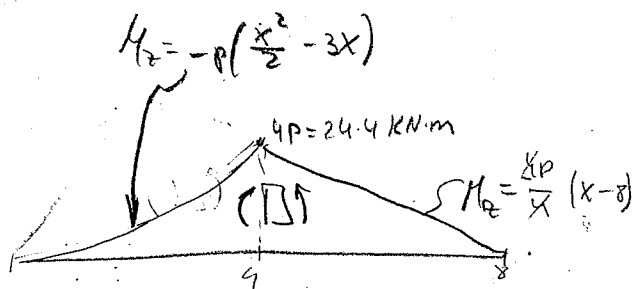
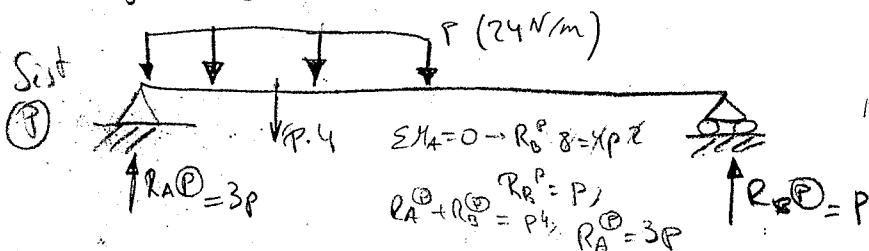
En C el soporte de asiento 12mm



1º Reacciona en apoyos

1º aplicando Mohr:

Eligo incógnita hiperestática $\rightarrow R_C$



$$\delta_c = -0.012 \text{ m} = \delta_c^{\text{P}} + \delta_c^{\text{X}}$$

$$\delta_c^{\text{P}} = \int_0^4 \frac{M_2 \cdot M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (-P(\frac{x^2}{2} - 3x))(\frac{1}{2}x) dx + \int_4^8 (xP(x-8))(\frac{1}{2}(x-8)) dx \right] = \frac{2.4 \cdot 10^{-2} + 1.6 \cdot 10^{-2}}{-4.010^{-2} \text{ m}} \text{ HACIA ABAJO}$$

$$\delta_c^{\text{X}} = \int_0^4 \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (\frac{1}{2}x)^2 dx + \int_4^8 (\frac{1}{2}(x-8))^2 dx \right] = 0.67 \cdot 10^{-3}$$

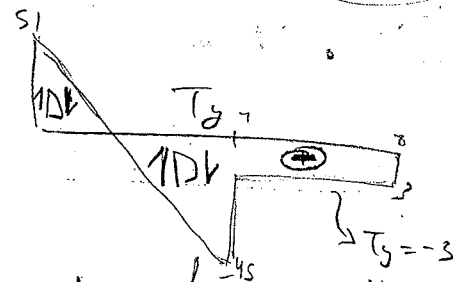
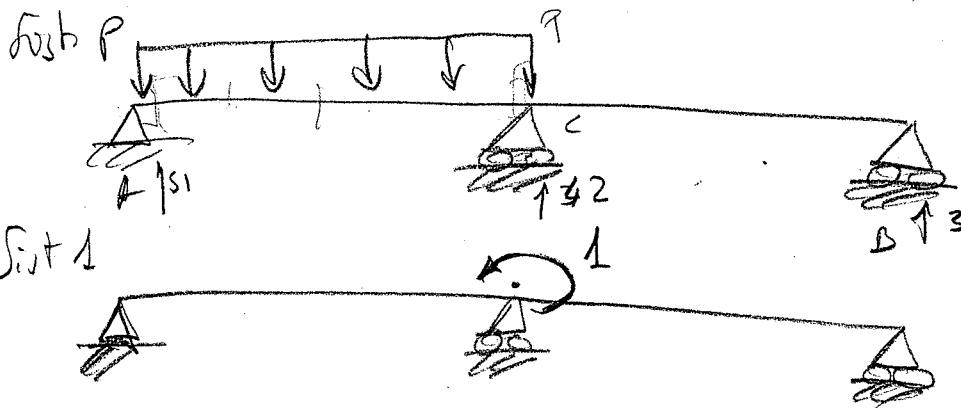
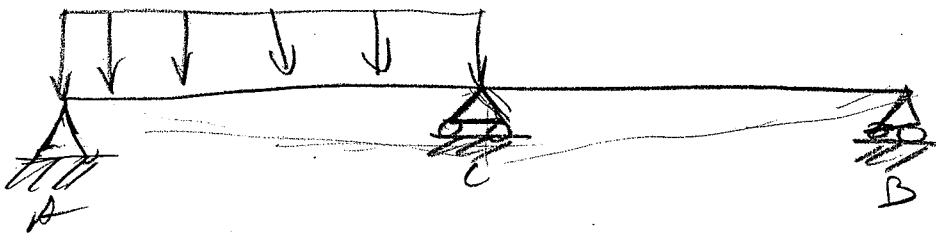
Por tanto $-40 + 0.67 \cdot 10^{-4} X = -12 \Rightarrow X = 42 \text{ KN} = P_c$

$R_A = R_A^{\text{f}} + R_A^{\text{c}} \cdot X = 3p - \frac{1}{2} \cdot 42 = 51 \text{ KN}$

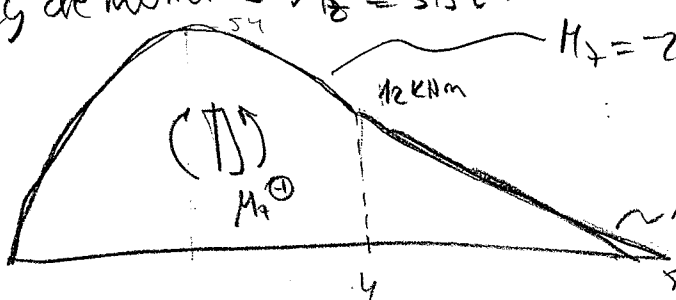
$R_B = R_B^{\text{f}} + R_B^{\text{c}} \cdot X = p - \frac{1}{2} \cdot 42 = 3 \text{ KN}$

2) Giro en C, indicando sentido

SI
3



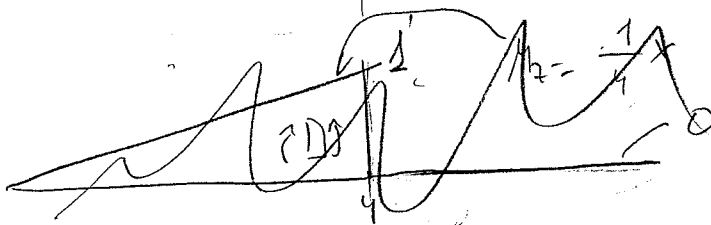
Ley de momentos $M_x = 51x - P$



$M_x = -24 \frac{x^2}{2} + 51x$

$\phi \quad T_y - 51 = \frac{96}{4} (x)$
 $T_y = -24x + 51$
 $M_x = -24 \frac{x^2}{2} + 51x$

$M_x = \frac{-12}{4} (x+8) = -3(x-8)$



Se delta de las mano

Con el método de la ec. elástica $\leftarrow$ Usarlo SIEMPRE que haya cargas univ. distribuidas

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x + \frac{R_A}{3!} \langle x-0 \rangle^3 + \frac{R_C}{3!} \langle x-4 \rangle^3 + \frac{P}{4!} [\langle x-0 \rangle^4 - \langle x-4 \rangle^4]$$

Cond. por eq. estat

$$R_A + R_B + R_C = P \cdot 4 \rightarrow (1)$$

$$R_C \cdot 4 + R_B \cdot 8 = P \cdot 4 \cdot 2 \rightarrow (2)$$

Cond. por apoyos

$$y(x=0) = 0 \rightarrow y_0 = 0$$

$$y(x=4) = -0,012 \rightarrow EI \cdot 0,012 = EI\theta_0 \cdot 4 + \frac{R_A}{3!} 4^3 + \frac{P}{4!} (4^4 - 0) \rightarrow (3)$$

$$y(x=8) = 0 \rightarrow 0 = EI\theta_0 \cdot 8 + \frac{R_A}{3!} 8^3 + \frac{R_C}{3!} 4^3 + \frac{P}{4!} (8^4 - 4^4) \rightarrow (4)$$

Resolvemos:

$$\begin{cases} R_A + R_B + R_C = 24 \cdot 4 \cdot 10^3 & (1) \\ R_A \frac{4^3}{3!} + EI\theta_0 \cdot 4 = -EI \cdot 0,012 - \frac{24 \cdot 10^3}{4!} (4^4) & (3) \\ R_A \frac{8^3}{3!} + \frac{R_C 4^3}{3!} + EI\theta_0 \cdot 8 = - \frac{24 \cdot 10^3}{4!} (8^4 - 4^4) & (4) \\ R_B \cdot 8 + R_C \cdot 4 = 24 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow R_A = 51 \text{ KN}$$

$$R_B = 3 \text{ KN}$$

$$R_C = 47 \text{ KN}$$

$$EI\theta_0 = -120000$$

$$EI_y = -120000x + \frac{51000}{3!}x^3 + \frac{42000}{3!}(x-4)^3 + \frac{24000}{4!}(x^3 - 2x^2 - 2x + 4)$$

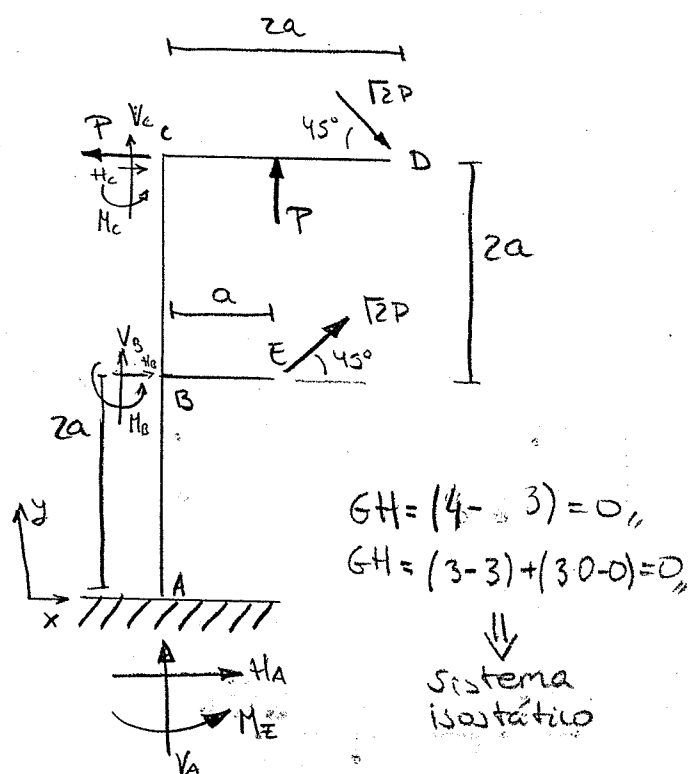
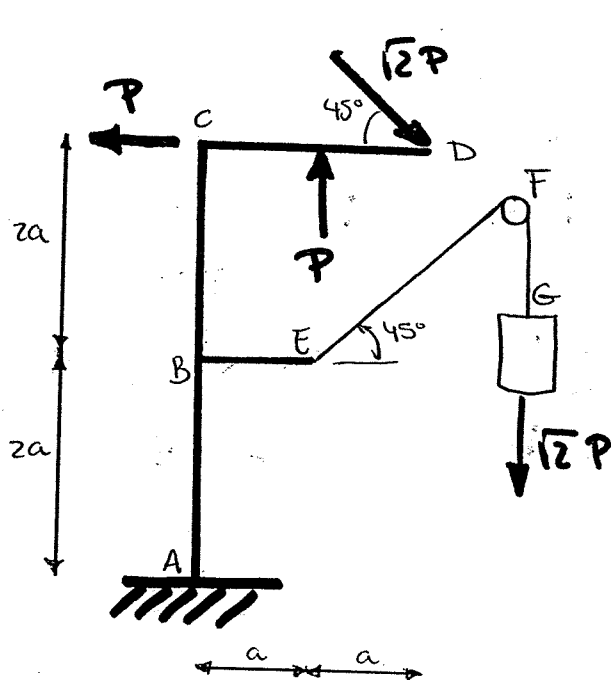
$$EI_\theta = -120000 + \frac{51000x^2}{2} + \frac{42000}{2}(x-4)^2 + \frac{24000}{4!}$$

Ejercicios Módulo 1

Colección

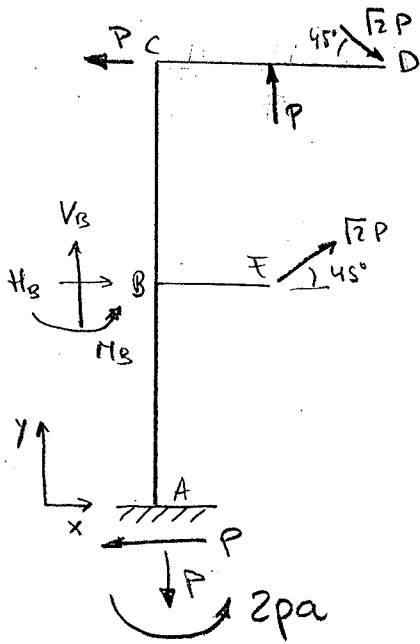
13 En la estructura de la figura EG es un cable y F una polea de radio despreciable.

Dibuje los diagramas acotados de esfuerzos en el semipórtico ABCD, indicando claramente el criterio de signos seguido en cada barra.



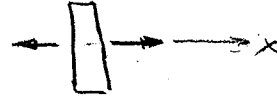
Reacciones: Condiciones de equilibrio.
ESTÁTICO

$$\begin{cases}
 \sum F_x = 0 \rightarrow H_A + P - P + P = 0 \rightarrow H_A = -P \\
 \sum F_y = 0 \rightarrow V_A + P + P - P = 0 \rightarrow V_A = -P \\
 \sum M_A = 0 \rightarrow H_2 - P \cdot 2a + P \cdot a + P \cdot 4a - P \cdot 4a - P \cdot 2a + P \cdot a = 0 \\
 H_2 = P \cdot 2a
 \end{cases}$$

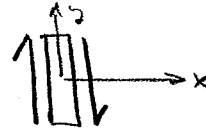


Criterio de signos $\oplus$

Esfuerzo normal (N)



Esfuerzo cortante: T_y



Momento flector: M_z

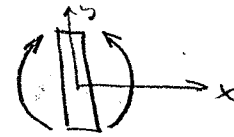
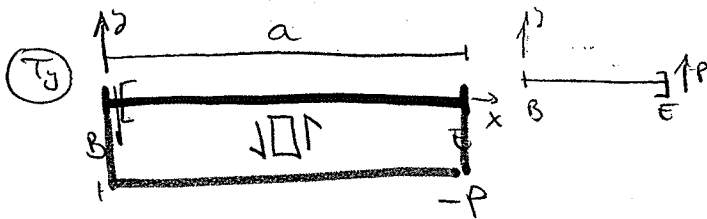
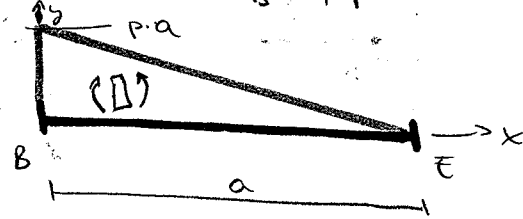


DIAGRAMA ESFUERZO NORMAL,
CORTANTE Y DE MOMENTO PARA
CALCULAR R. INTERNAS EN B,
POR BARRA $\overline{BE}$



Por tanto $\rightarrow V_B = +P$

Por tanto $\rightarrow H_B = +P$



$M_B = +pa$

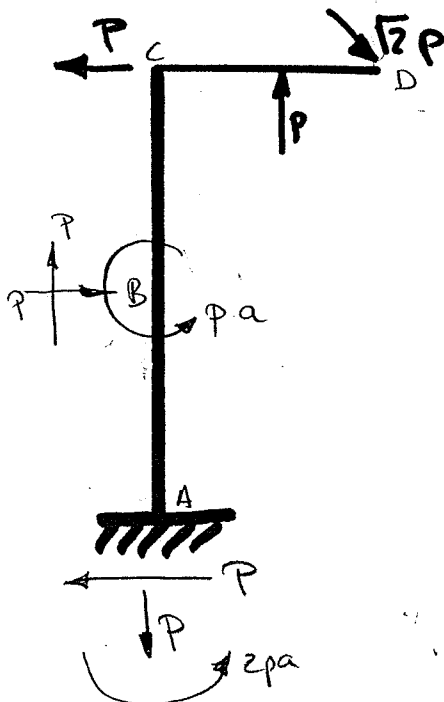


DIAGRAMA ESFUERZO NORMAL: N

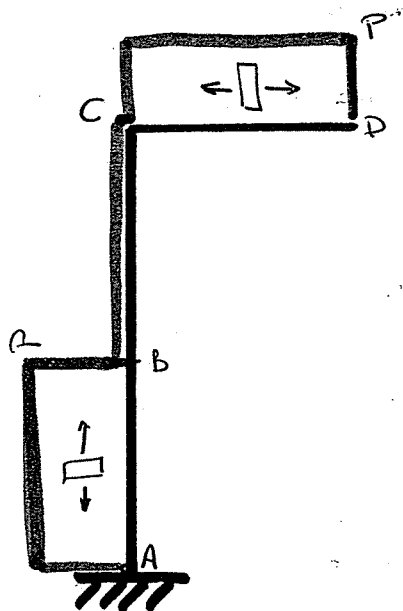


DIAGRAMA ESFUERZO ORTANTE: T_y

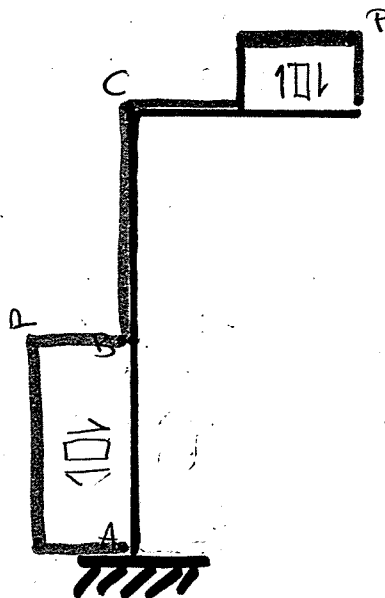
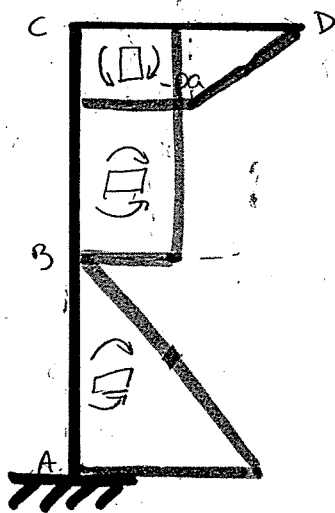


DIAGRAMA MOMENTO FLECTOR: M_z



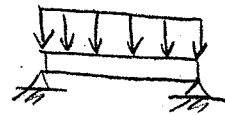
CUESTIONARIO PASA/NO PASA: Parcial I

● Si consideramos un sólido prismático en el plano xy con una carga uniforme distribuida actuando en dirección normal a su directriz

- a) ley de esfuerzos cortantes es lineal
- b) ley de esfuerzos cortantes es constante
- c) ley de momentos flectores es parabólica

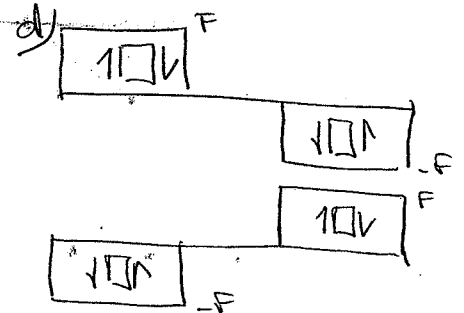
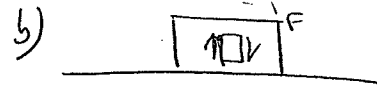
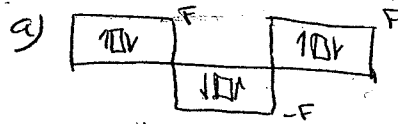
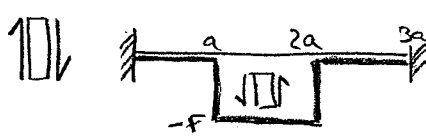
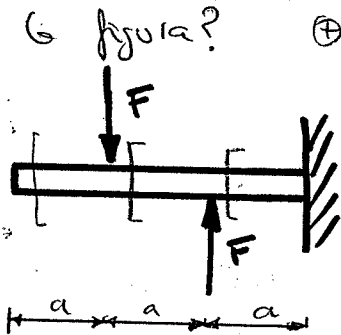
d) correctas a y c

e) correctas b y c

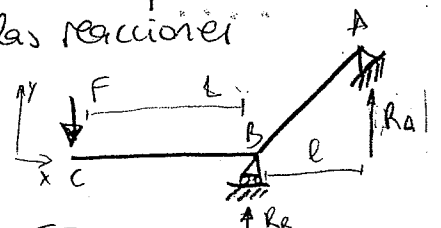
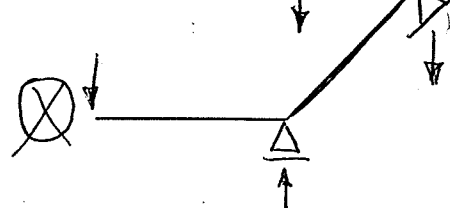
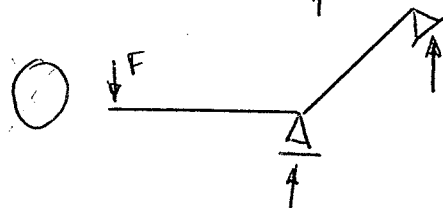
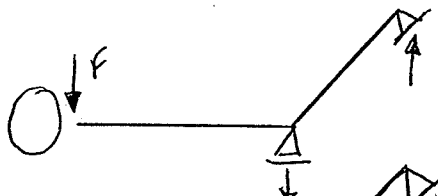
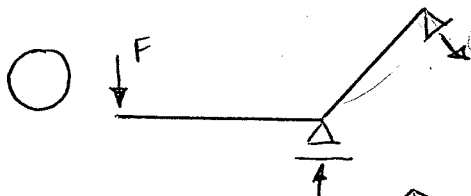


$T_x \rightarrow$ lineal
 $M_x \rightarrow$ parabólica

● Cual de los siguientes diagramas de cortantes corresponde a la figura?



● En la viga de la figura sometida a la carga F , marque la opción correcta relativa a las direcciones y sentidos de las reacciones de los apoyos.



$$\sum F_y = 0 \rightarrow F + R_B + R_A = 0$$

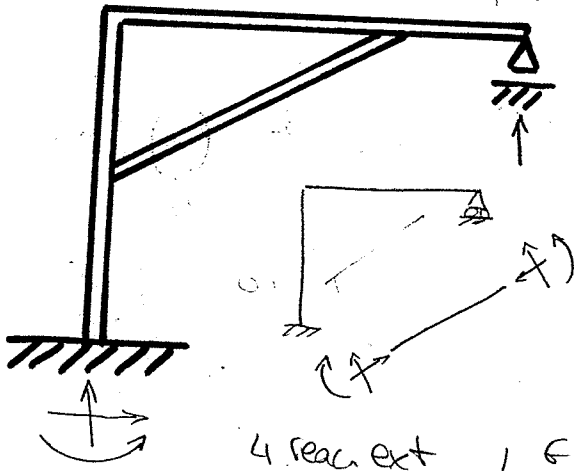
$$\sum M_z = 0 \rightarrow F \cdot L + R_A \cdot l = 0$$

$$R_A = -\frac{FL}{l}$$

$$R_B = -F - R_A = F \left(\frac{L}{l} - 1 \right)$$

4

● Marque la opción correcta relativa al grado de hiperestaticidad (GH) de la estructura plana de la figura



☐ GH = 1

☐ GH = 2

☐ GH = 3

☒ GH = 4

4 reac. ext.
6 reac. int.
2 subscpt.
3 ec. eq. estat

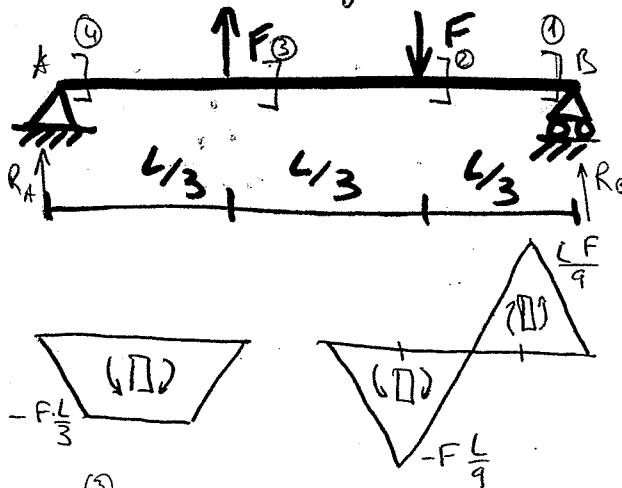
$GH = r - p.e$

$GH = 10 - 2 \cdot 3 = 4$

plano
 $GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e)$

$GH = (4 - 3) + (3 \cdot 1 - 0) = 4$

● Indica el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura

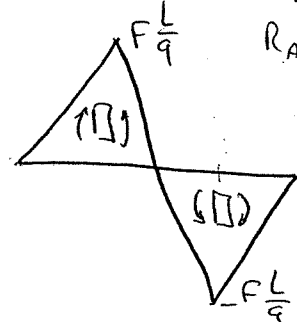
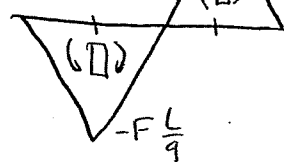
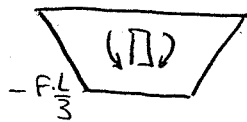
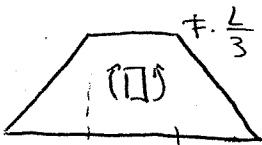


$R_A + R_B = 0$

$R_B \cdot \frac{L}{3} - F \cdot \frac{2L}{3} + F \cdot \frac{L}{3} = 0$

$R_B = \frac{1}{3} F \uparrow$

$R_A = -\frac{1}{3} F \downarrow$



① $\sum M_A = 0$

② $\sum F_y = 0$

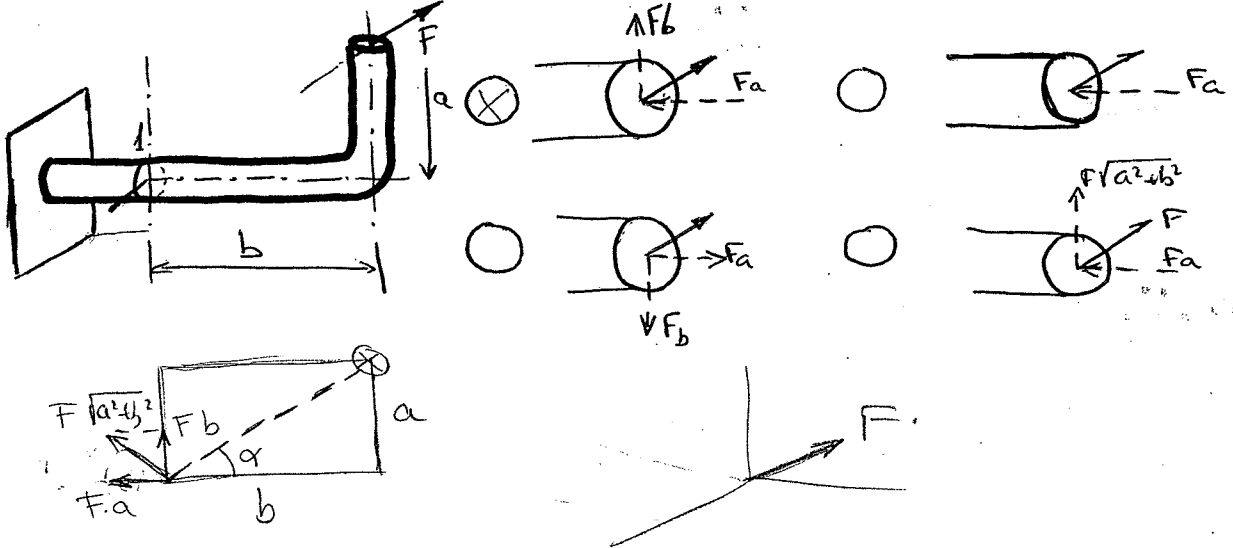
$M_A = R_B \cdot \frac{L}{3} = \frac{1}{9} F$

③ $\sum F_x = 0$

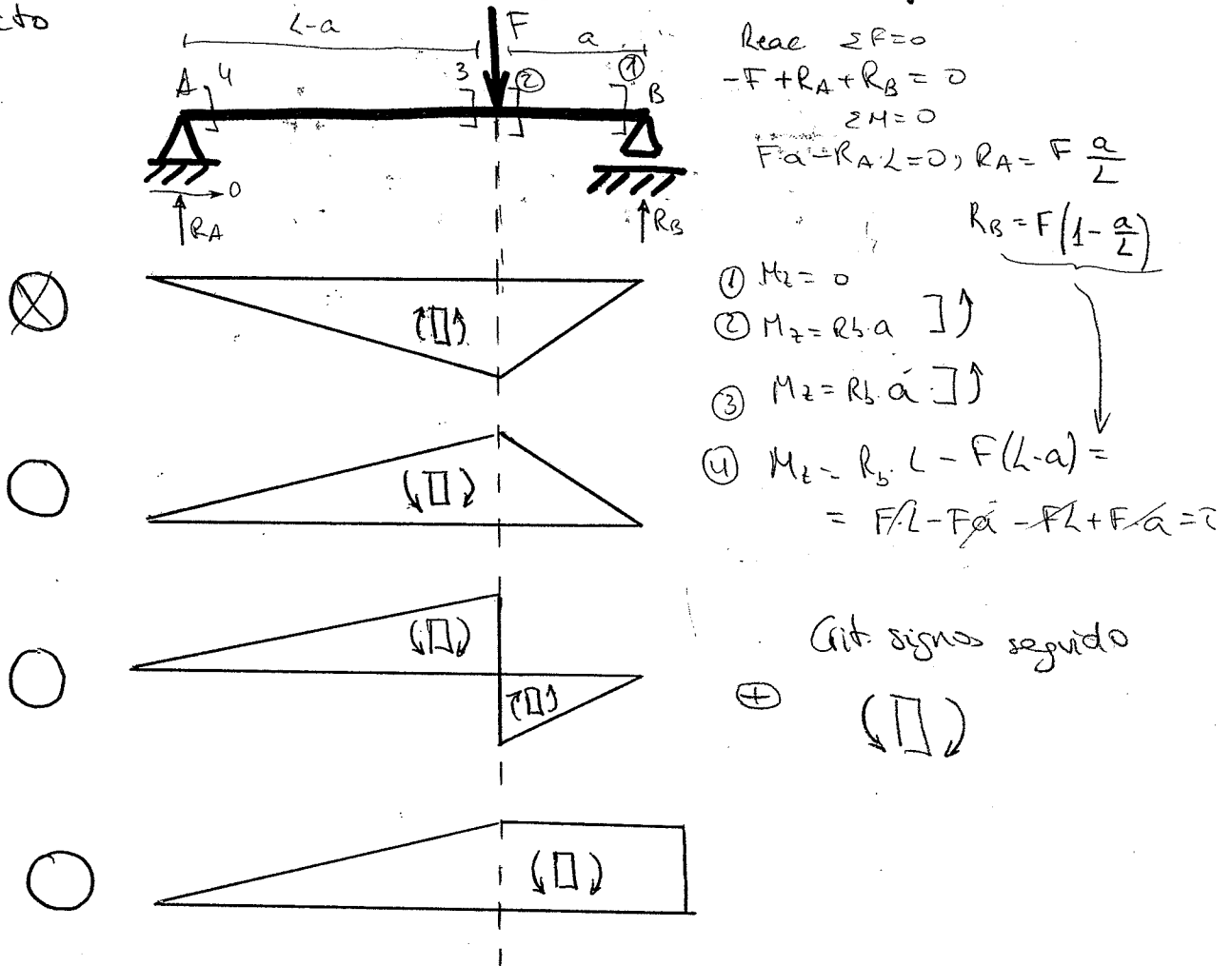
$M_A = R_B \cdot \frac{2}{3} L - F \cdot \frac{L}{3} = \frac{1}{3} F \cdot \frac{2}{3} L - F \cdot \frac{L}{3} = \frac{2FL - 3FL}{9} = -\frac{1}{9} FL$

④ $\sum M_B = 0$
 $R_B L - F \cdot \frac{2}{3} L + F \cdot \frac{1}{3} L = 0$

● Marque la opción correcta de los esfuerzos internos presentes en la sección 1 de la figura (los esfuerzos correspondientes a momentos se han indicado con líneas discontinuas)

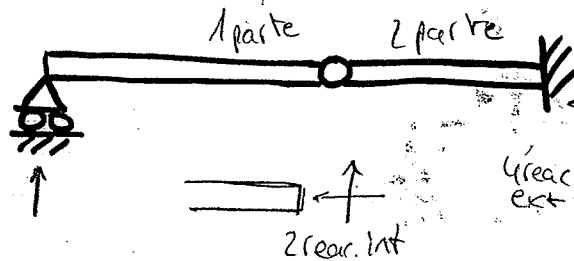


● En la viga de la figura marcar el diagrama de momentos flectores correcto



● El grado de indeterminación estática de la estructura de la figura

es:



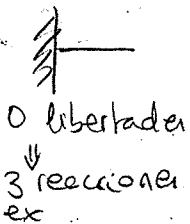
$$GH = r - p \cdot e = 6 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e) =$$

caso plano

$$= (4 - 3) + (3 \cdot 0 - 1) = 0$$

● ¿Cómo influyen las libertades de una estructura en su grado de indeterminación estática?



Si ↑ libertades $\Rightarrow$ ↓ GH
↓
↓ reacciones exterior

a) Depende del tipo de libertad

b) Sólo disminuyen GH si la hiperestaticidad es de origen interno

c) Aumentan GH

d) Disminuyen GH

● El grado de hiperestaticidad de una estructura depende del n° de fuerzas y momentos externos aplicados sobre ella

a) Falso b) Cierto para los momentos y falso para las fuerzas

c) Verdadero c) Cierto para las fuerzas puntuales y falso para los momentos

● El n° de ecuaciones de reacción en estructuras de 2 y 3 dimensiones son, respectivamente

a) 6 y 4

b) 4 y 2

c) 6 y 3

d) 3 y 2

EXTRA

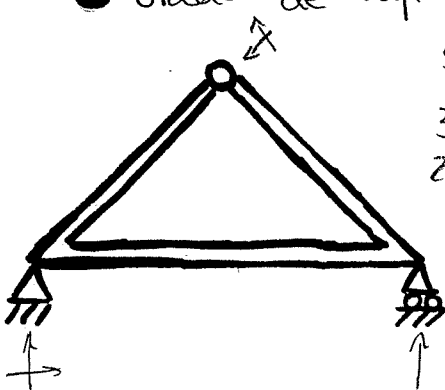
● Grado de hiperestaticidad de la figura

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Isostático

3 reac. ext
2 internos

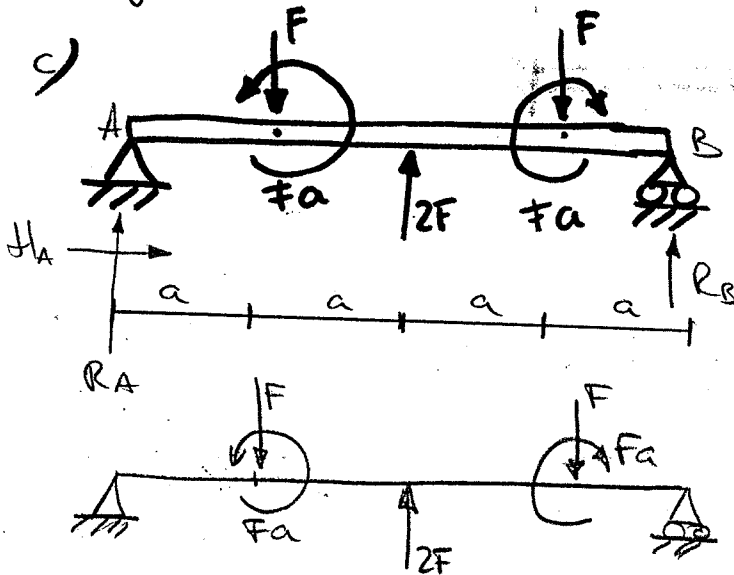
$$GH = r - p \cdot e = 5 - 1 \cdot 3 = 2$$

$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e) = (3 - 3) + (3 \cdot 1 - 1) = 2$$



11 Colección

Hallar las reacciones y dibujar los diag. de esfuerzos de las barras siguientes

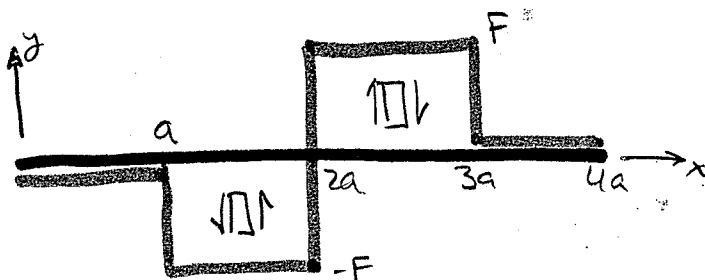


Por equilibrio estático:

Reacciones

$$\begin{aligned} \sum F &= 0 \\ H_A &= 0 \\ R_A - F + 2F - F + R_B &= 0 \\ \sum M_A &= 0 \\ -Fa + Fa + 2Fa - Fa - Fa + R_B 4a &= 0 \\ R_B &= 0 \\ R_A &= 0 \end{aligned}$$

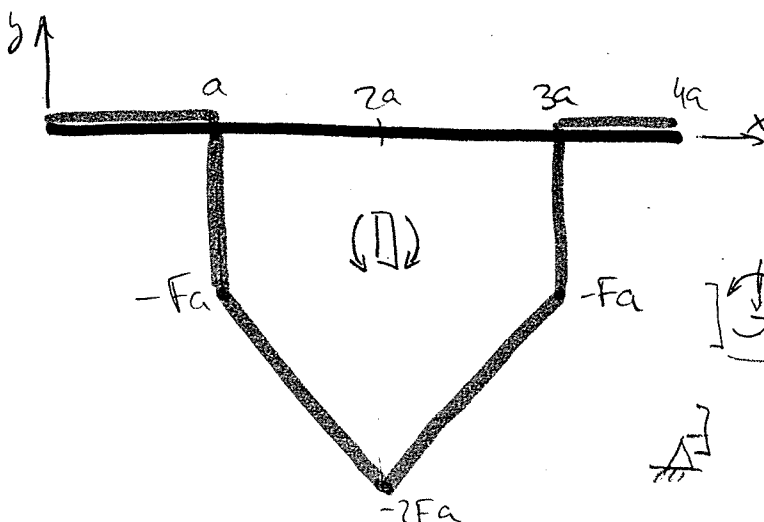
DIAGRAMA T_y



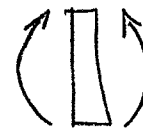
Criterio de signos $\oplus$



DIAGRAMA M_z



Criterio signos $\oplus$



$$M_t = -Fa - Fa = -2Fa$$

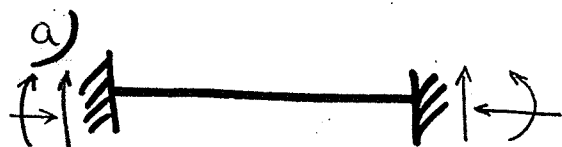
$$M_t = -Fa - Fa + 2Fa = -Fa$$

$$M_t = -Fa - Fa + Fa + Fa = 0$$

$$M_t = -Fa - Fa + 2Fa + Fa - Fa = 0$$

Colectión

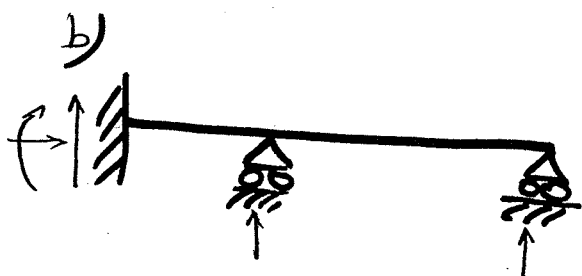
1.15 Determinar GH



$$GH = r - p \cdot e = 6 - 1 \cdot 3 = 3$$

$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e) = (6 - 3) + (3 \cdot 0 - 0) = 3$$

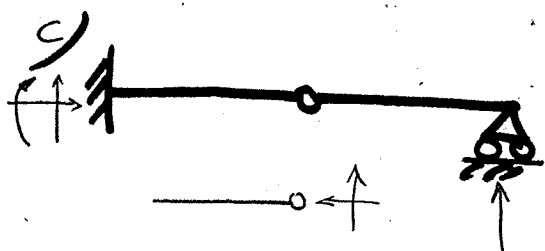
↑
plano



$$GH = r - p \cdot e = 5 - 1 \cdot 3 = 2$$

$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e) = (5 - 3) + (3 \cdot 0 - 0) = 2$$

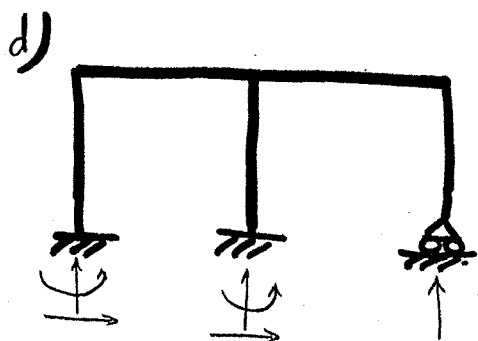
↑
plano



$$GH = r - p \cdot e = 6 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e) = (4 - 3) + (3 \cdot 0 - 1) = 0$$

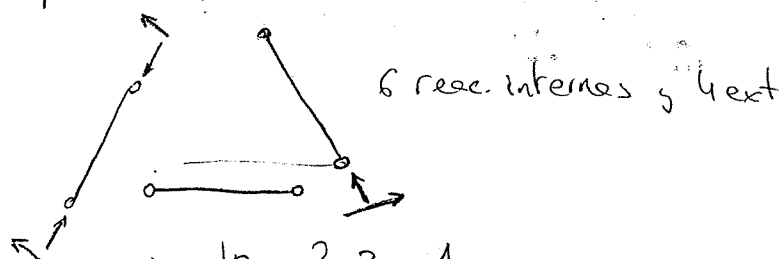
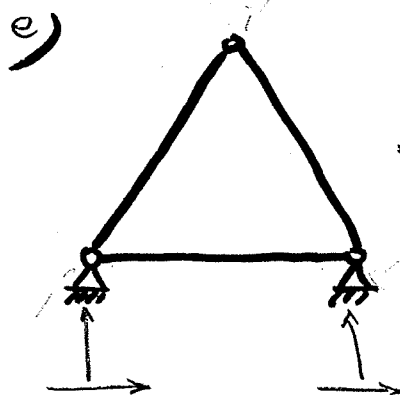
↑
plano



$$GH = 7 - 1 \cdot 3 = 4$$

$$GH = (7 - 3) + (3 \cdot 0 - 0) = 4$$

↑
plano

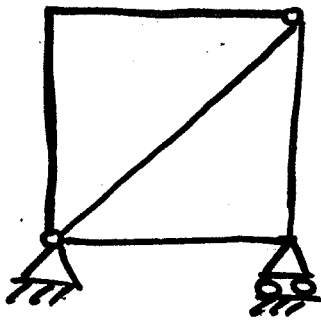


$$GH = 10 - 3 \cdot 3 = 1$$

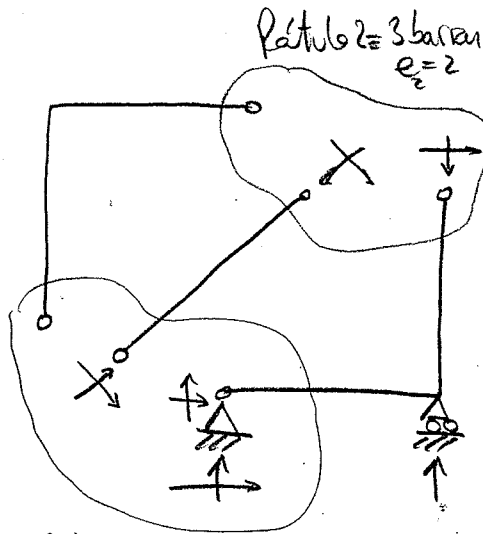
$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e) = (4 - 3) + (3 \cdot 1 - 3) = 1$$

↑
plano

f)



3 reac. ext / 8 int



Rotulo 2 = 3 barras ligadas
 $e_2 = 2$

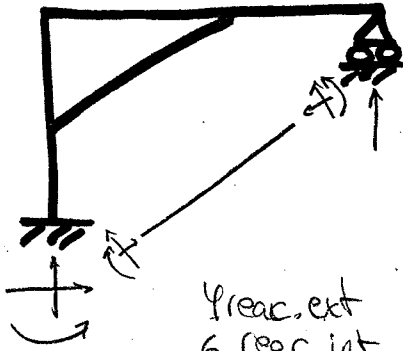
$$GH = r - p \cdot e = 11 - 3 \cdot 3 = 2$$

$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e) = (3 - 3) + (3 \cdot 2 - 1)$$

$$GH = 2$$

Rotulo 1 = 3 barras ligadas
 $e_1 = 2$

g)

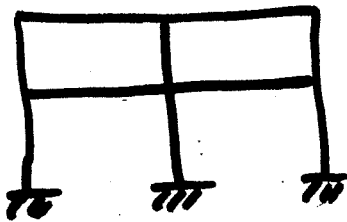


4 reac. ext
6 reac. int

$$GH = r - p \cdot e = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

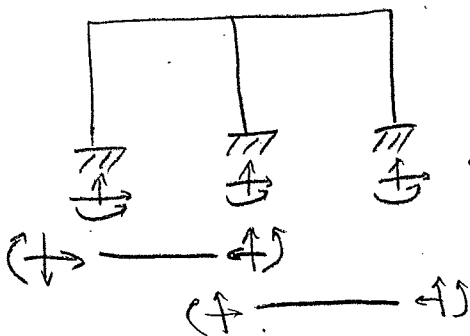
$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e) = (4 - 3) + (3 \cdot 1 - 0) = 4$$

h)



$$GH = r - p \cdot e = 7 - 3 \cdot 3 = 1$$

$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e) = (3 - 3) + (3 \cdot 2 - 0) = 3$$



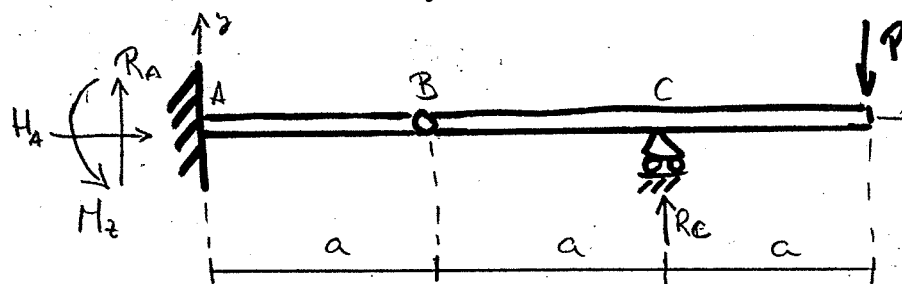
9 reac. ext

12 reac. int

114

Selección

Diagramas de esfuerzos de la estructura



$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_A + R_C - P = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + R_C \cdot 2a - P \cdot 3a = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_C \cdot a - P \cdot 2a = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow R_A \cdot a - M_A = 0 \quad (4)$$

Reacciones COND. EQUILIBRIO ESTÁTICO

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_A + R_C - P = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + R_C \cdot 2a - P \cdot 3a = 0 \quad (2)$$

Cond. enlace: Rótula $M_B = 0$, $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gira frontal: } R_C \cdot a - P \cdot 2a = 0 \quad (3) \\ \text{Gira dorsal: } R_A \cdot a - M_A = 0 \quad (4) \end{array} \right.$

$$(3) \rightarrow R_C = 2P \xrightarrow{(1)} R_A = P - 2P = -P \xrightarrow{(4)} M_A = -Pa \xrightarrow{(2)} -Pa + 4Pa - 3Pa = 0$$

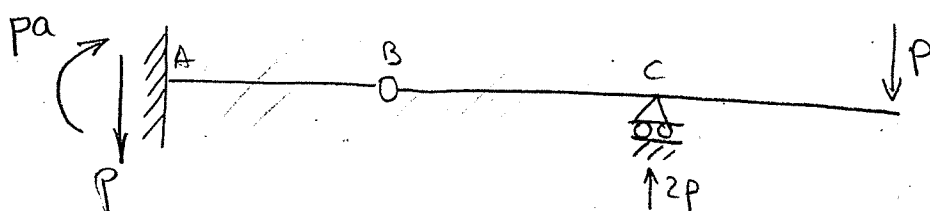
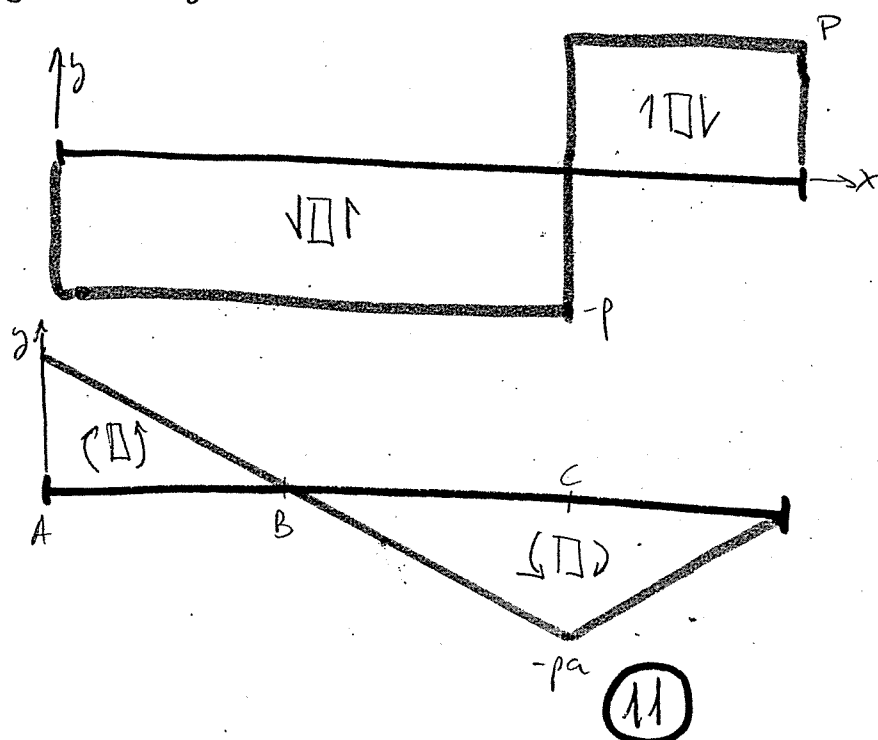
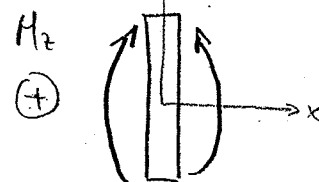
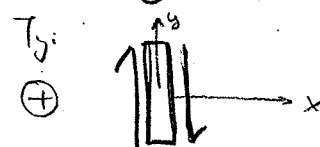


Diagrama T_y y M_z :



Criterio de signos



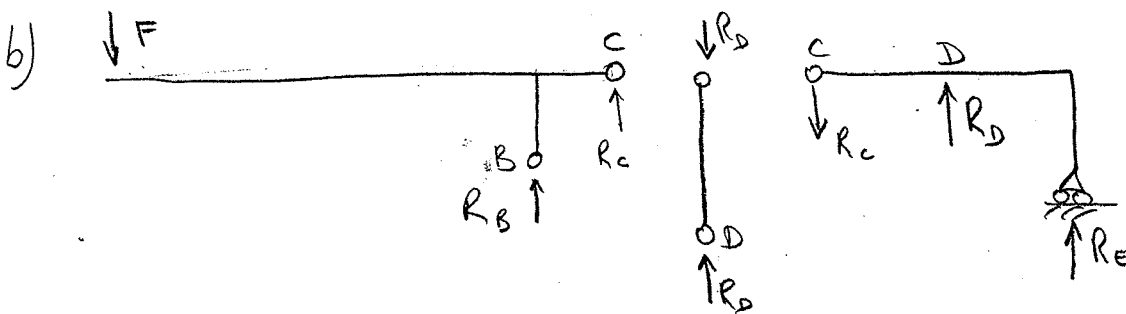
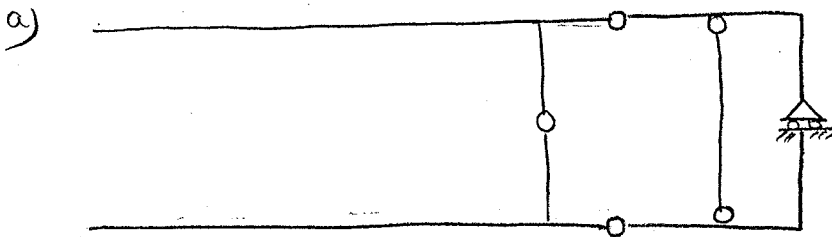
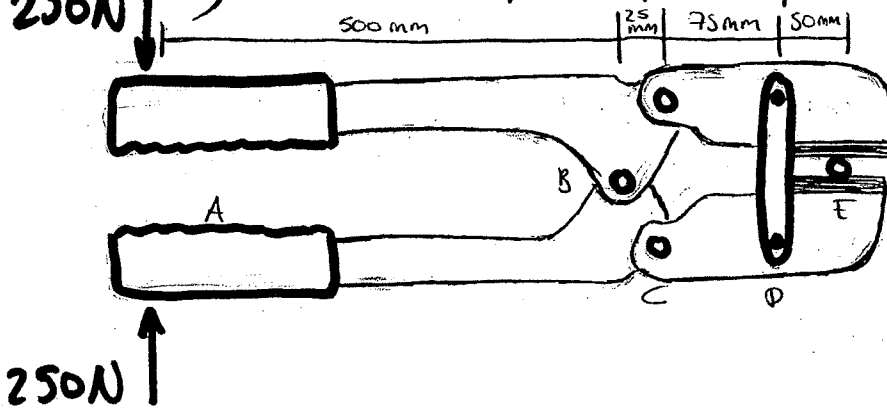
1.6

a) Modelizar la mordaza de la figura mediante un esquema de barras

b) Aislar cada uno de los elementos del conjunto dibujando sin realizar los cálculos, las acciones que se ejercen sobre cada uno de ellos.

Palancas ABC
Bieles verticales con origen en D
Vijilla CDE

c) Determinar la fuerza que se ejerce en E.



$$c) \sum M^{\odot} = 0 \rightarrow R_E \cdot 50 + R_C \cdot 75 = 0$$

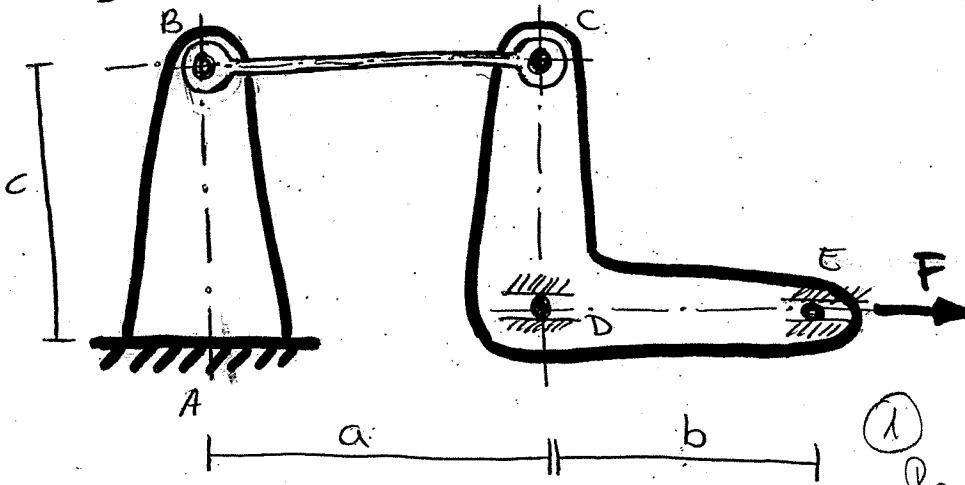
$$\sum M^{\odot} = 0 \rightarrow R_C \cdot 25 + F \cdot 500 = 0 \rightarrow R_C = \frac{-F \cdot 500}{25}$$

$$R_E = \frac{-R_C \cdot 75}{50} = \frac{F \cdot 500 \cdot 75}{25 \cdot 50} = 7500 \text{ N}$$

$$R_E = 7500 \text{ N}$$

1/2 Sistema plano de 4 barras: Barra vertical AB empotrada en su base, dos barras perpendiculares CD y DE rigidamente unidos, una barra horizontal BC biarticulada. Los nudos D y E están guiados mediante correderas para que no pueden desplazarse verticalmente. En el extremo E se aplica una fuerza horizontal F. Se pide:

- 1) Reacciones en apoyos
- 2) Leyes y diagramas de esfuerzos en todas las barras



$$GH = r \cdot p \cdot e$$

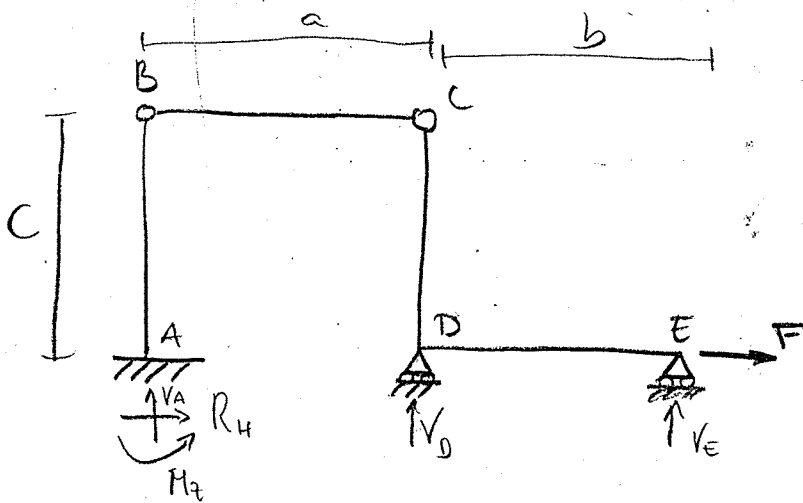
$$GH = (5+4) - 3 \cdot 3 = 0$$

$$GH = (r_{ext} - 3) + (3c - e)$$

$$GH = (5-3) + (3 \cdot 0 - 2) = 0$$

Isostático

1) Reacciones: Por EQUILIBRIO ESTÁTICO



$$(1) \rightarrow R_H = -F$$

$$(3) \rightarrow V_E = -F \frac{c}{b} \xrightarrow{(1)} V_D = \frac{-V_E(a+b) - Fc}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \left(F \frac{c}{b} (a+b) - Fc \right) = \frac{1}{a} \left(F \frac{c \cdot a}{b} \right) \Rightarrow$$

$$V_D = F \frac{c}{b}$$

$$(2) \rightarrow V_A = -V_E - V_D = F \frac{c}{b} - F \frac{c}{b} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_H = 0 \rightarrow R_H + F = 0 \\ R_H = -F \quad (1) \\ \Sigma F_V = 0 \rightarrow V_A + V_D + V_E = 0 \quad (2) \\ \Sigma M_2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_E b + F \cdot c = 0 \\ V_E = -F \frac{c}{b} \quad (3) \\ V_A \cdot a + M_2 + R_H c = 0 \quad (4) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} R_H c + M_2 = 0 \quad (5) \\ V_E(a+b) + Fc + V_D a = 0 \quad (6) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (5): M_2 = -R_H c = Fc \\ (4): M_2 = -R_H c + V_A a = Fc \end{array} \right. \quad \text{OK}$$

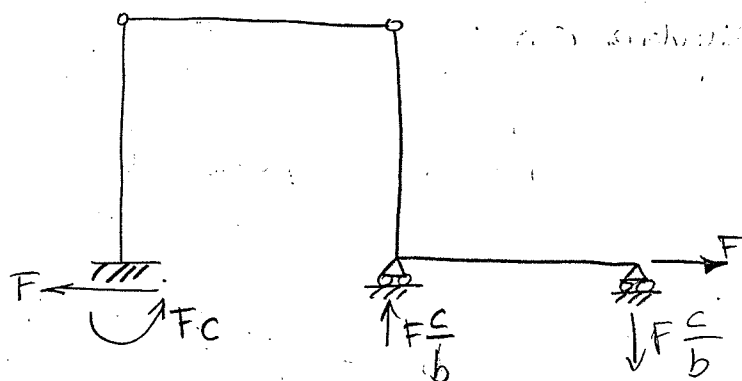
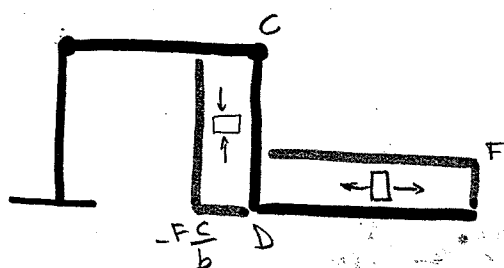
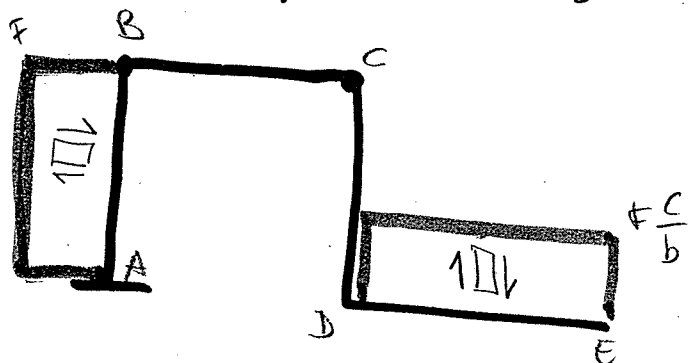


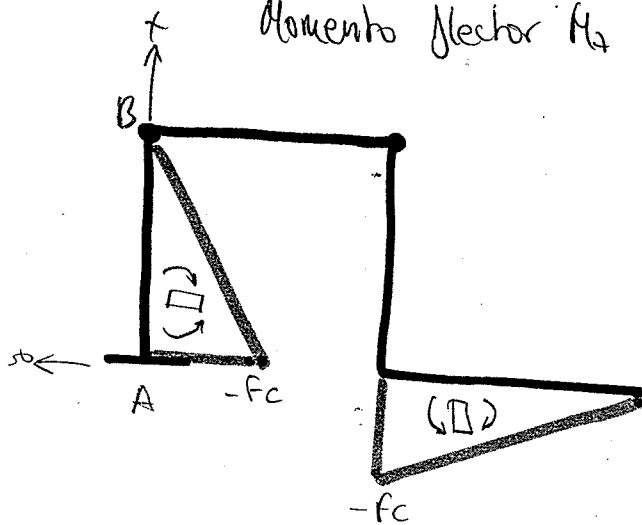
DIAGRAMA: Esfuerzo normal N



Esfuerzo constante T_2



Momento flexor M_x



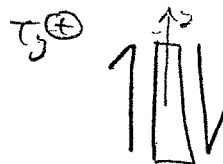
Criterio de signos



Barra CD $\rightarrow N = -\frac{Fc}{b}$

Barra DE $\rightarrow N = F$

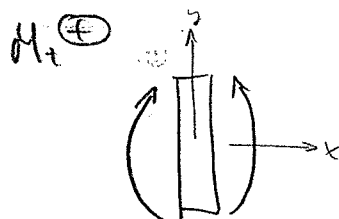
Criterio de signos



Barra AB $\rightarrow T_2 = F$

Barra DE $\rightarrow T_2 = F \frac{c}{b}$

Criterio de signos

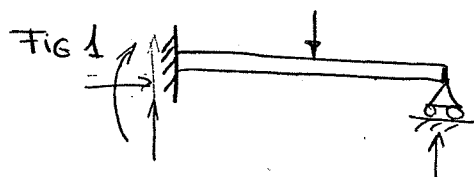


Barra AB $\rightarrow M_x = F(x+c)$

Especial T1

11

- 1) Identificar las reacciones en la sustentación
- 2) Determinar el GH mediante $GH = (r-3) + (3c-e)$
- 3) Dividir en subsistemas internamente isostáticos y calcular GH como $GH = n - p \cdot e$

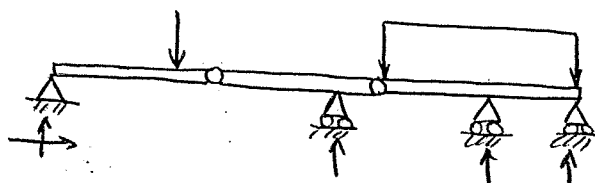


1) 4 reac. en la sustentación

2) $GH = (4-3) + (3 \cdot 0 - 0) = 1$

3) La estructura es internamente isost. $\rightarrow p=1$ (1 parte) $\rightarrow GH = 4 - 1 \cdot 3 = 1$

Fig 2



1) 5 reac. en la sustentación

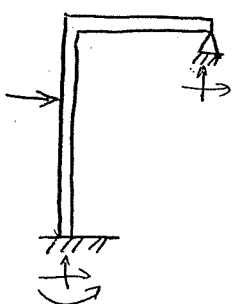
2) $GH = (5-3) + (3 \cdot 0 - 2) = 0$



$p=3$ partes int. isostat

$GH = 9 - 3 \cdot 3 = 0$

Fig 3

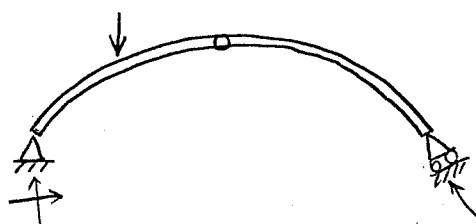


1) 5 reac. en la sustentación

2) $GH = (5-3) + (3 \cdot 0 - 0) = 2$

3) Es int. isostático $\rightarrow p=1 \rightarrow GH = 5 - 1 \cdot 3 = 2$

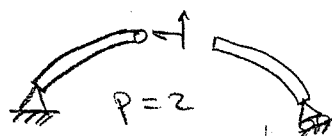
Fig 4



1) 3 reac. en la sustentación

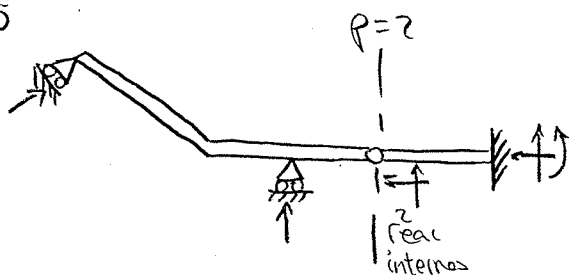
2) $GH = (3-3) + (3 \cdot 0 - 1) = -1$

3)



$GH = 5 - 2 \cdot 3 = -1$

Fig 5



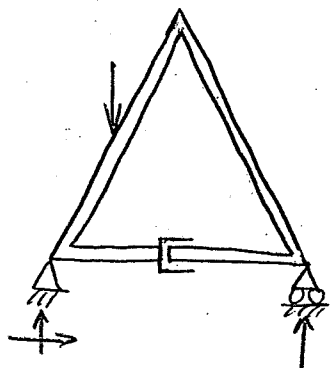
1) 5 reac. en la sustentación

2) $GH = (5-3) + (3 \cdot 0 - 1) = 1$

3) $p=2 \rightarrow GH = 7 - 2 \cdot 3 = 1$

Fig 6

?

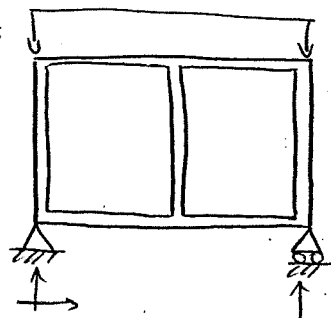


1) 3 reacciones en la sustentación

2) $GH = (3-3) + (3 \cdot 1 - 1) =$

3)

Fig 7



1) 3 reac. en los apoyos

2) $GH = (3-3) + (3 \cdot 2 - 0) = 6$

3) $p=2$; $GH = 15 - 3 \cdot 3 = 6$

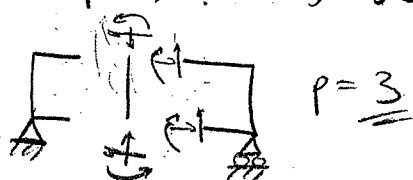
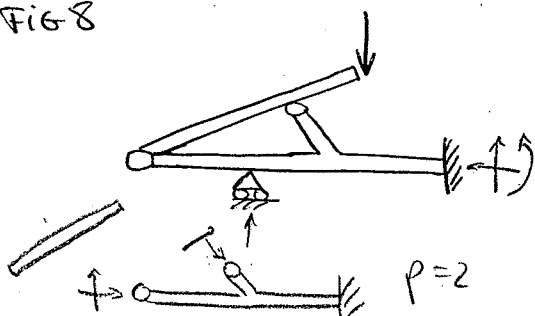


Fig 8

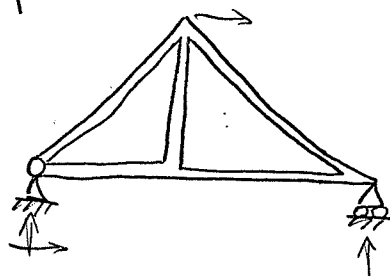


1) 4 reac. en los apoyos

2) $GH = (4-3) + (3 \cdot 1 - 2) = 2$

3) $GH = 8 - 2 \cdot 3 = 2$

Fig 9



1) 3 reacciones en los apoyos

2) $GH = (3-3) + (3 \cdot 2 - 1) = 5$

3) $GH = 14 - 3 \cdot 3 = 5$

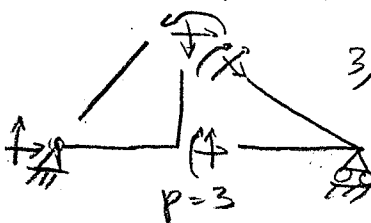
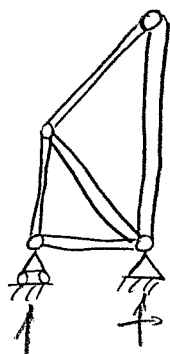


Fig. 10



1) 3 reac. en los apoyos

2) $GH = (3-3) + (3 \cdot 2 - 6) = 0$

3)

$GH = 15 - 3 \cdot 5 = 0$

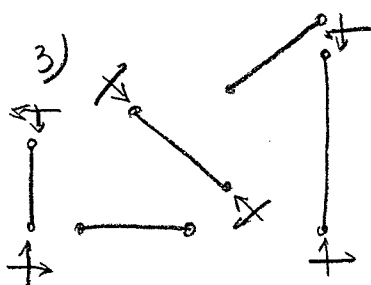
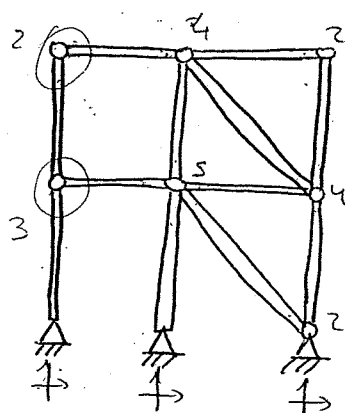
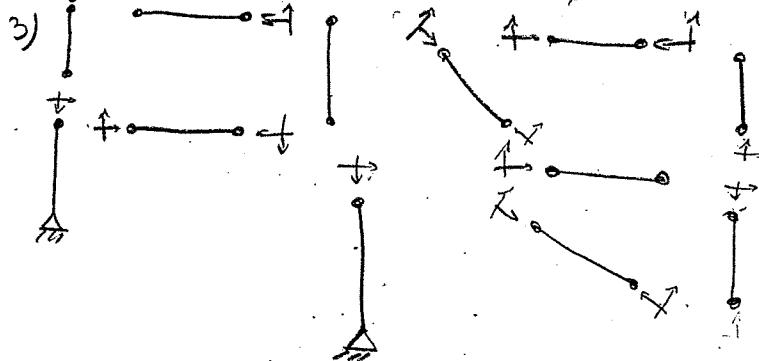


FIG 15



1) 6 reacciones en apoyos

2) $G \cdot H = (6 - 3) + (3 \cdot 4 - 15) = 0$

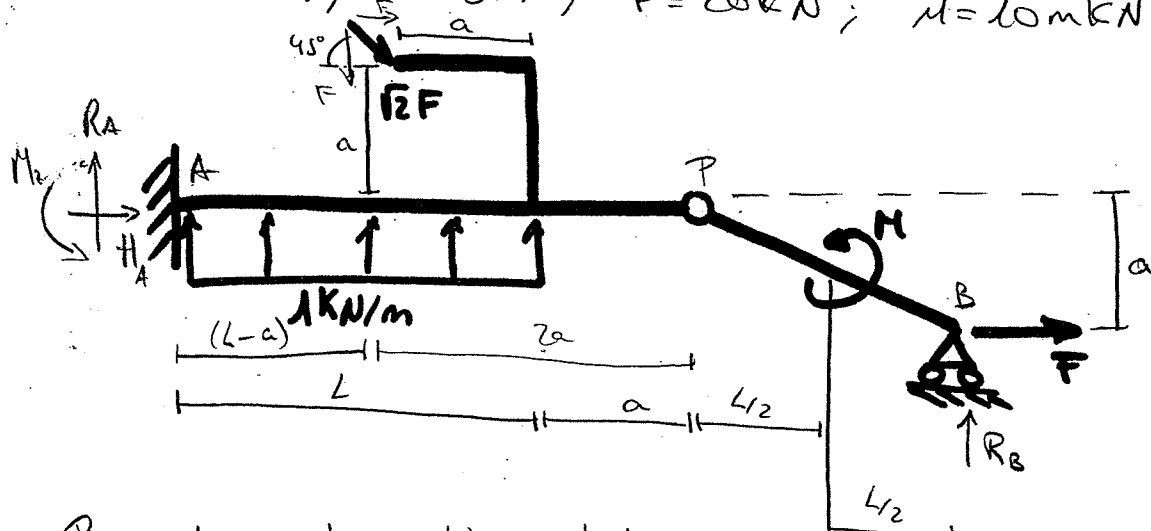


$G \cdot H = 3 \cdot 6 - 12 \cdot 3 = 0$

Ejercicio T1

1.3

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos internos del sólido de la figura para los siguientes valores de los parámetros $L = 10 \text{ m}$; $a = 5 \text{ m}$; $F = 20 \text{ kN}$; $M = 10 \text{ mKN}$



$G \cdot H = (4 - 3) - (10 - 1) = 0$
Isostático

Por condiciones de equilibrio estático calculo las reacciones:

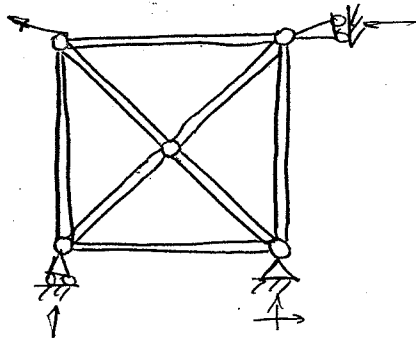
$$\begin{cases} \sum F_H = 0 \rightarrow H_A + F + F = 0 \rightarrow H_A = -2F = -40 \text{ kN} \\ \sum F_V^{(kN)} = 0 \rightarrow R_A + 1 \cdot L - F + R_B = 0 \rightarrow R_A = \frac{M + Fa}{L} + F - L = 21 \text{ kN} \\ \sum M_A^{\circ} = 0 \rightarrow M_A - Fa - F(L-a) + M + Fa + R_B(2L+a) + 1L(L-a) = 0 \end{cases}$$

Cond. rótula $\rightarrow \sum M^{\circ} = 0$ en ambos lados $\rightarrow F \cdot a + R_B L + M = 0 \rightarrow R_B = \frac{-M - Fa}{L} = -11 \text{ kN}$

$M_A = R_A(L+a) + Fa - 2Fa + L \cdot 2a = 315 \text{ mKN}$
 $21 \cdot 15 + 100 - 200 + 100$

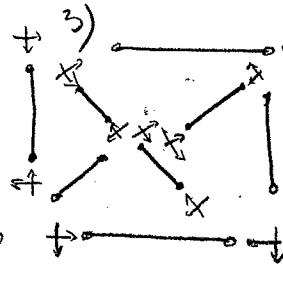
$M_A = Fa + F(L-a) - M - Fa - R_B(2L+a) - L(L-a) = 315 \text{ mKN O.K.}$

Fig 11



1) 4 reac. en los apoyos

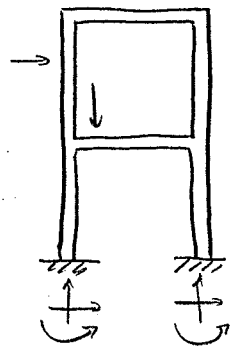
2) $GH = (4 - 3) + (3 \cdot 4 - 11) = 2$



3) $GH = 26 - 8 \cdot 3 = 2$

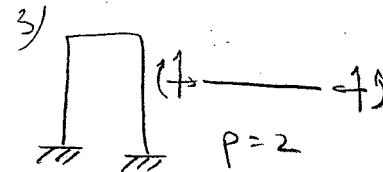
$P = 8$

Fig 12



1) 6 reacciones en los apoyos

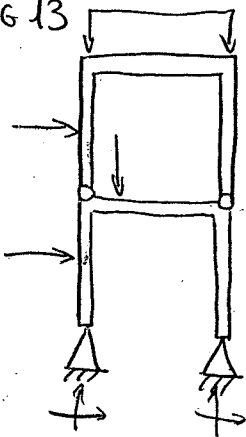
2) $GH = (6 - 3) + (3 \cdot 1 - 0) = 6$



3) $GH = 12 - 2 \cdot 3 = 6$

$P = 2$

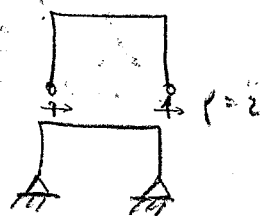
Fig 13



1) 4 reacciones en apoyos

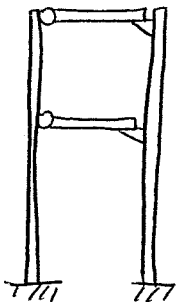
2) $GH = (4 - 3) + (3 \cdot 1 - 2) = 2$

3) $GH = 8 - 2 \cdot 3 = 2$



$P = 2$

Fig 14



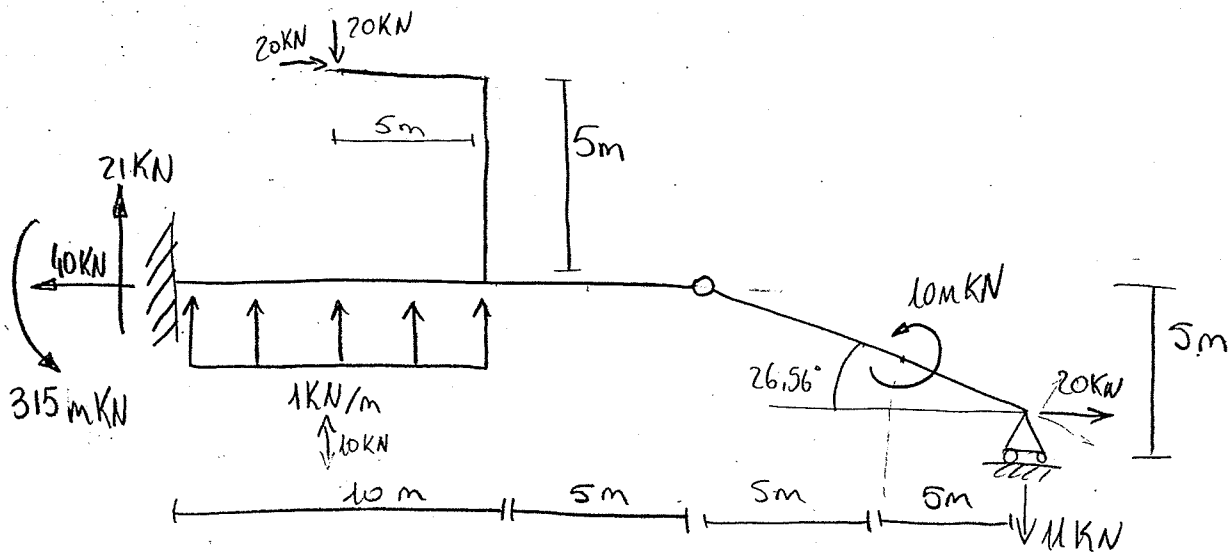


DIAGRAMA: Esfuerzo normal N

Crit. signos
 $N \oplus \leftarrow \square \rightarrow$
 Crit. signos
 $T_s \oplus \downarrow \square \uparrow$

Crit. signos
 $M \oplus (\square \curvearrowright)$

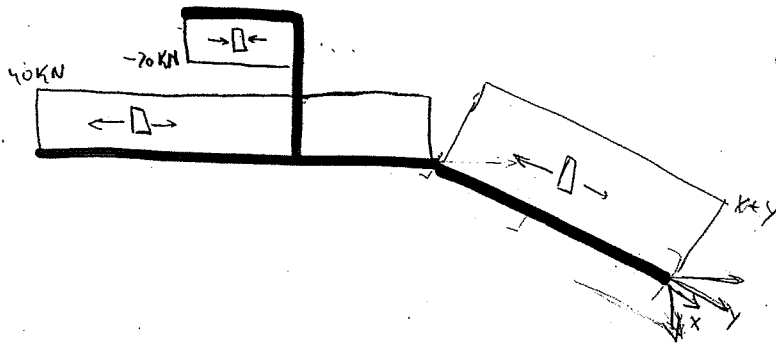
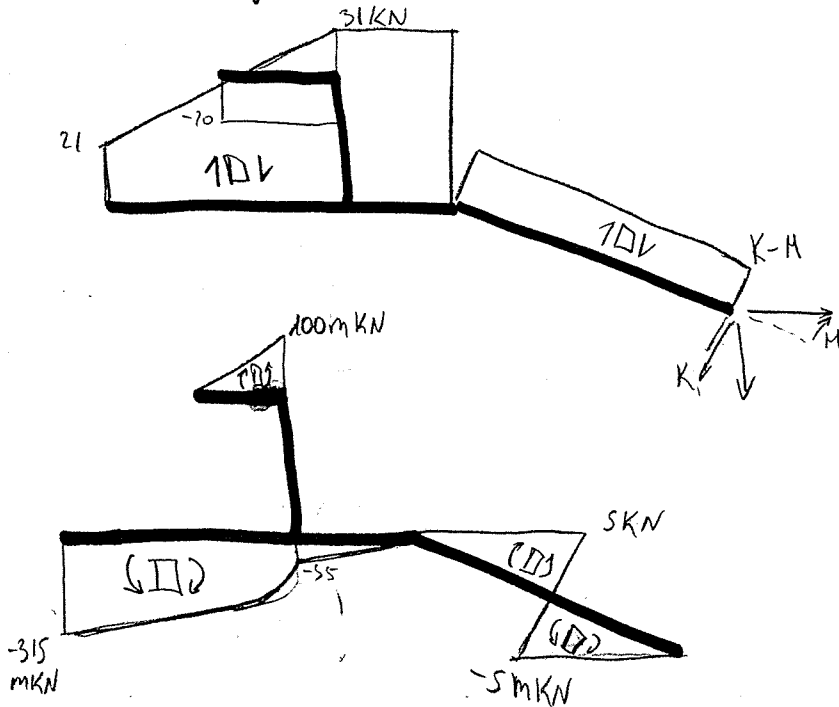
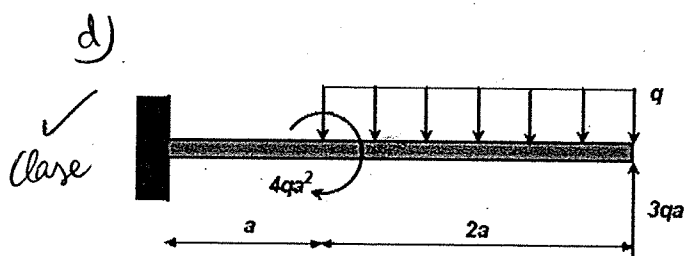
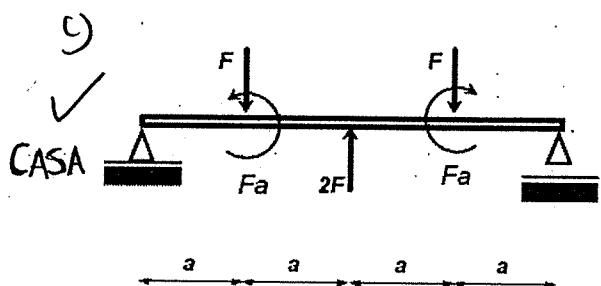
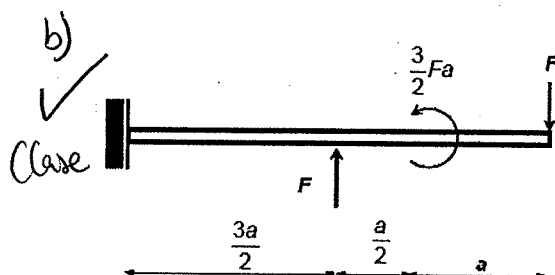
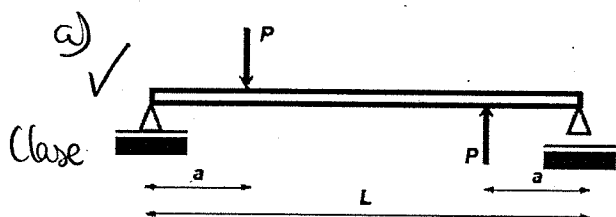


Diagrama esfuerzo cortante T_s , y momento M

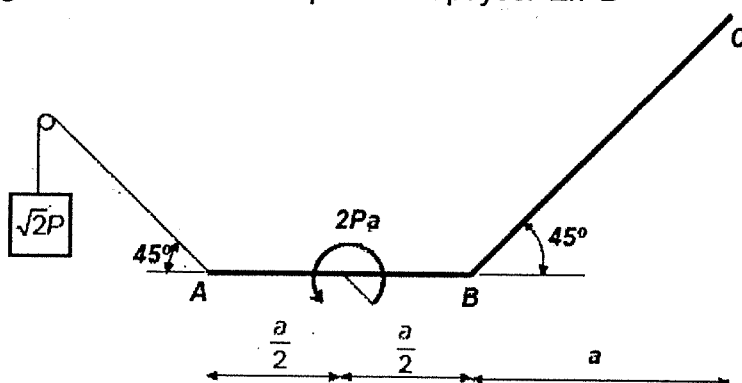


PROBLEMAS DE RESISTENCIA DE MATERIALES
MÓDULO 1: INTRODUCCIÓN. CURSO 2012-13

1.1.- Hallar las reacciones de los enlaces y dibujar los diagramas de esfuerzos de las barras siguientes:



1.2.- La estructura plana de la figura está sustentada por dos apoyos. En B están impedidos todos los desplazamientos y en C está impedido el desplazamiento perpendicular a BC. El cable se apoya en una polea de radio despreciable y se une a la estructura en A. Dibuje los diagramas acotados de esfuerzos en ABC, indicando claramente el criterio de signos seguido para cada barra.



Indusbol.com

(1)

Indusbol.com

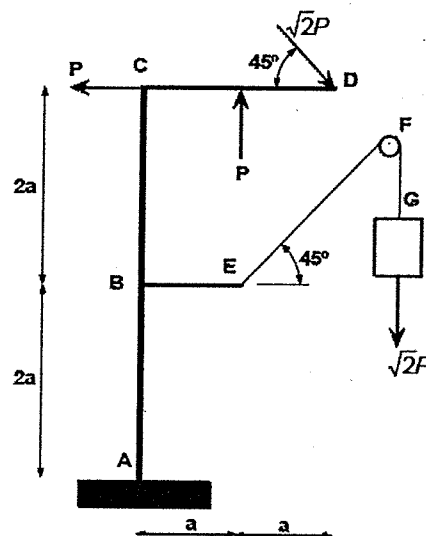
Indusbol.com

Indusbol.com

CASA

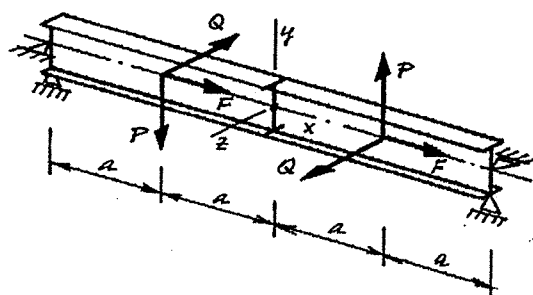
1.3.- En la estructura de la figura, EG es un cable y F una polea de radio despreciable.

Dibuje los diagramas acotados de esfuerzos en el semipórtico ABCD, indicando claramente el criterio de signos seguido en cada barra.



Clase

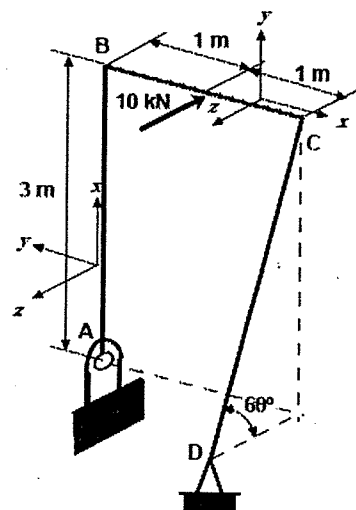
1.4.- Para la viga simplemente apoyada indicada en la figura, se pide determinar todos los esfuerzos (N , T_y , T_z , M_T , M_y , M_z) en la sección central.



1.5.- El apoyo A de la estructura de la figura, en la que CD es un cable, impide todos los desplazamientos y giros, excepto el giro alrededor de la dirección paralela a BC.

Se pide:

- Esfuerzo normal en el cable CD (aplique equilibrio rotacional en A respecto a la dirección paralela a BC).
- Esfuerzos en la sección del nudo B perteneciente a la barra BC
- Esfuerzos en la sección del nudo B perteneciente a la barra AB



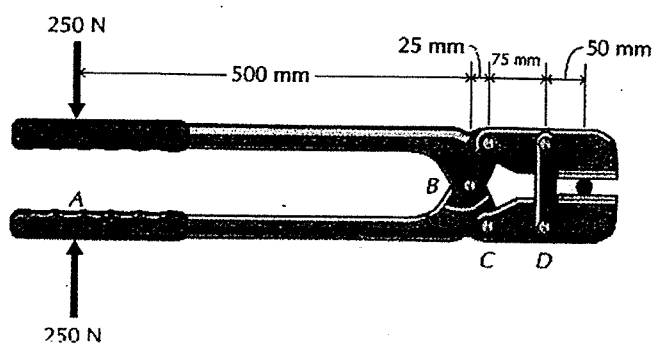
CASA

1.6.- a.- Modelizar la mordaza de la figura mediante un esquema de barras.

b.- Aislar cada uno de los elementos del conjunto (palanca ABC, biela

vertical con origen en D y cuchilla CDE), dibujando (sin realizar los cálculos), las acciones que se ejercen sobre cada uno de ellos.

c.- Determinar la fuerza que se ejerce en E.



... ..
... ..
... ..
... ..
... ..

... ..

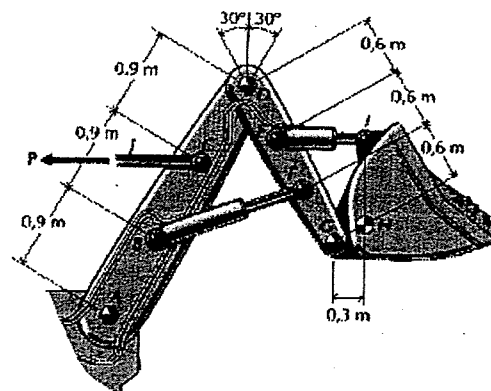
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..
... ..
... ..

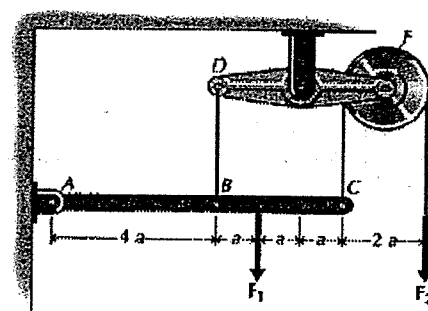
... ..
... ..
... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..
... ..
... ..

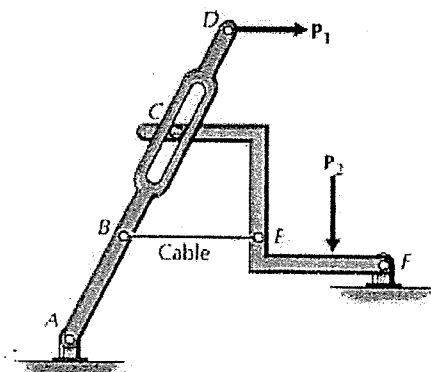
- 1.7.- a.- Modelizar el brazo de excavadora de la figura mediante un esquema de barras.
b.- Aislar cada uno de los elementos del conjunto (pala, actuadores hidráulicos y bielas), dibujando (sin realizar los cálculos), las acciones que se ejercen sobre cada uno de ellos.
c.- Calcular el valor de la acción del actuador EI sobre la pala, las acciones sobre el pasador G y el valor de P, en función del peso F de la pala (aplicado en H).



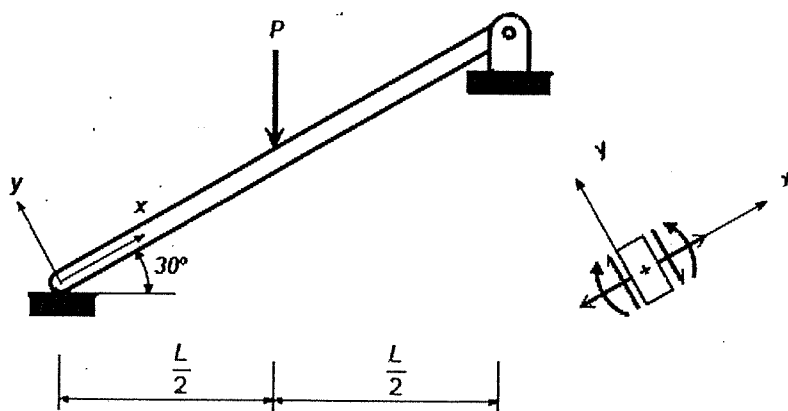
- 1.8.- a.- Modelizar la estructura de la figura mediante un esquema de barras.
b.- Aislar cada uno de los elementos del conjunto (barra ABC, biela DEF, barra vertical con origen en E y polea), dibujando (sin realizar los cálculos), las acciones que se ejercen sobre cada uno de ellos.
c.- Determinar el valor de F_1 en función de F_2 .



- 1.9.- a.- Modelizar la estructura de la figura mediante un esquema de barras.
b.- Aislar cada uno de los elementos del conjunto (barra AD, barra quebrada CEF y cable), dibujando (sin realizar los cálculos), las acciones que se ejercen sobre cada uno de ellos.



- 1.10.- En la barra de la figura, el extremo inferior se apoya sin rozamiento en el terreno y el extremo superior está unido al apoyo con un pasador cilíndrico también sin rozamiento. Trazar los diagramas de esfuerzos y momentos en la barra, para el criterio de signos indicado.



... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

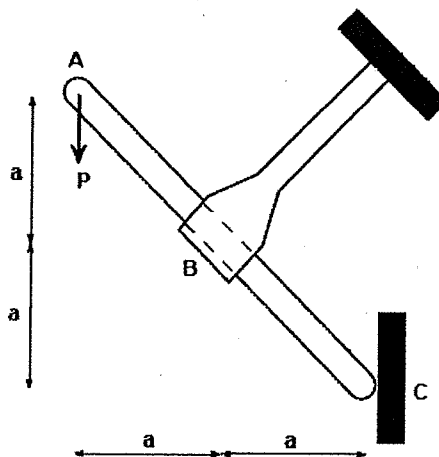
... ..
... ..
... ..

... ..
... ..
... ..

1.11.- Determine los valores de las acciones exteriores sobre la barra AC de la

estructura de la figura, teniendo en cuenta que:

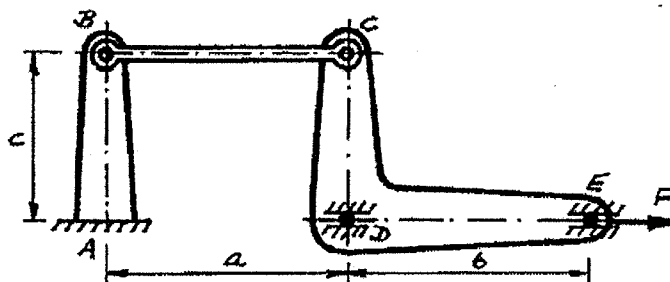
- El collar B sólo tiene permitido el desplazamiento en la dirección AC.
- Son despreciables los rozamientos en el apoyo C y en el collar B.



1.12.- El sistema plano de la figura está formado por 4 barras: Una barra vertical AB empotrada en su base; dos barras perpendiculares CD y DE rígidamente unidas; una barra horizontal BC biarticulada. Los nudos D y E están guiados mediante

correderas para que no puedan desplazarse verticalmente. En el extremo E se aplica una fuerza horizontal F. Se pide:

- 1.- Reacciones en los apoyos.
- 2.- Leyes y diagramas de esfuerzos en todas las barras.



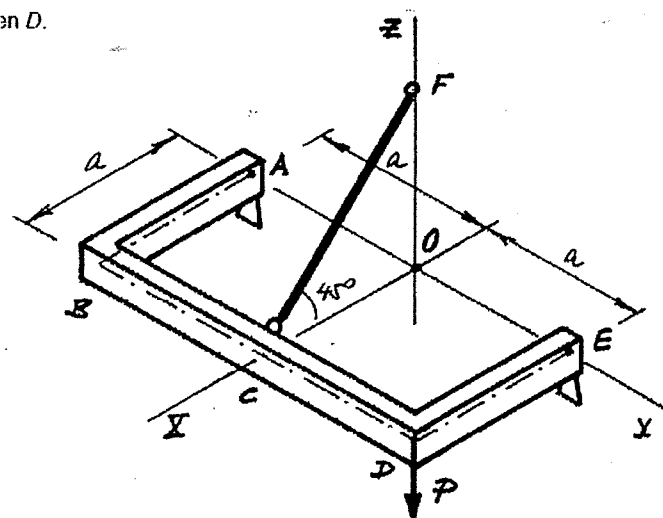
1.13.- La figura muestra el sistema formado por las tres barras unidas rígidamente AB, BCD, y DE; y el tirante biarticulado CF, inclinado a 45° en el plano XZ. Las barras son de la misma sección, que tiene un eje de simetría paralelo al eje Z; y la sección del tirante tiene un área Ω .

En A hay un apoyo que restringe todos los desplazamientos de la sección;

en E hay otro apoyo que restringe los desplazamientos según los ejes X y Z; y

en F está anclado el tirante. El sistema está sometido a la fuerza vertical P, aplicada en D.

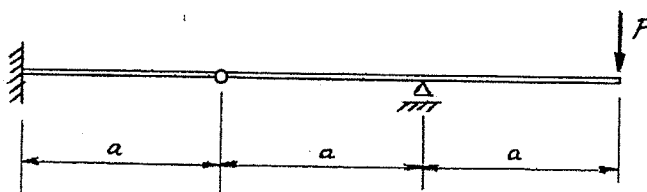
Se pide determinar las reacciones en la sustentación





1.14.- Dibujar los diagramas acotados de esfuerzos de la viga de la figura

✓ Base
CASA

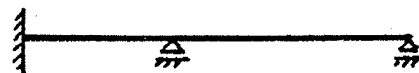


1.15.- Determinar el grado de hiperestaticidad en cada uno de los 8 sistemas planos de la figura

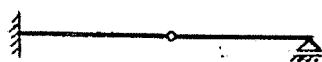
✓ a)
clase
CASA



✓ b)
clase
CASA



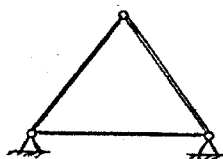
✓ c)
CASA



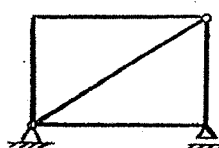
✓ d)
CASA



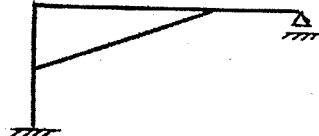
✓ e)
CASA



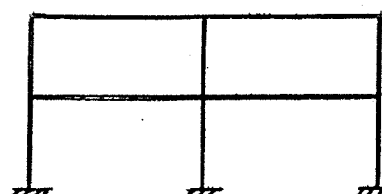
✓ f)
clase
CASA



✓ g)
clase



✓ h)
CASA



For the purpose of this study, the following data was collected:

1. 15

A)

RESISTENCIA DE MATERIALES EJEMPLO PRUEBA EVALUACIÓN CONTINUA

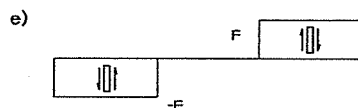
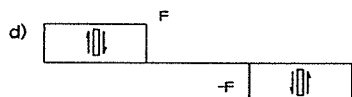
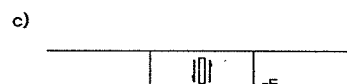
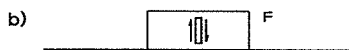
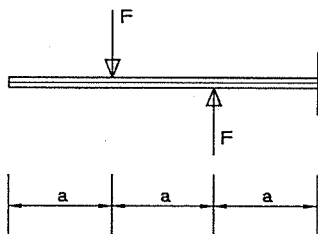
CUESTIÓN 1

Si consideramos un sólido prismático en el plano XY con una carga uniformemente distribuida actuando en dicho plano en dirección normal a su directriz, indique la opción correcta:

- a) La ley de esfuerzos cortantes es lineal
- b) La ley de esfuerzos cortantes es constante
- c) La ley de momentos flectores es parabólica
- d) Son correctas la a) y la c)
- e) Son correctas la b) y la c)

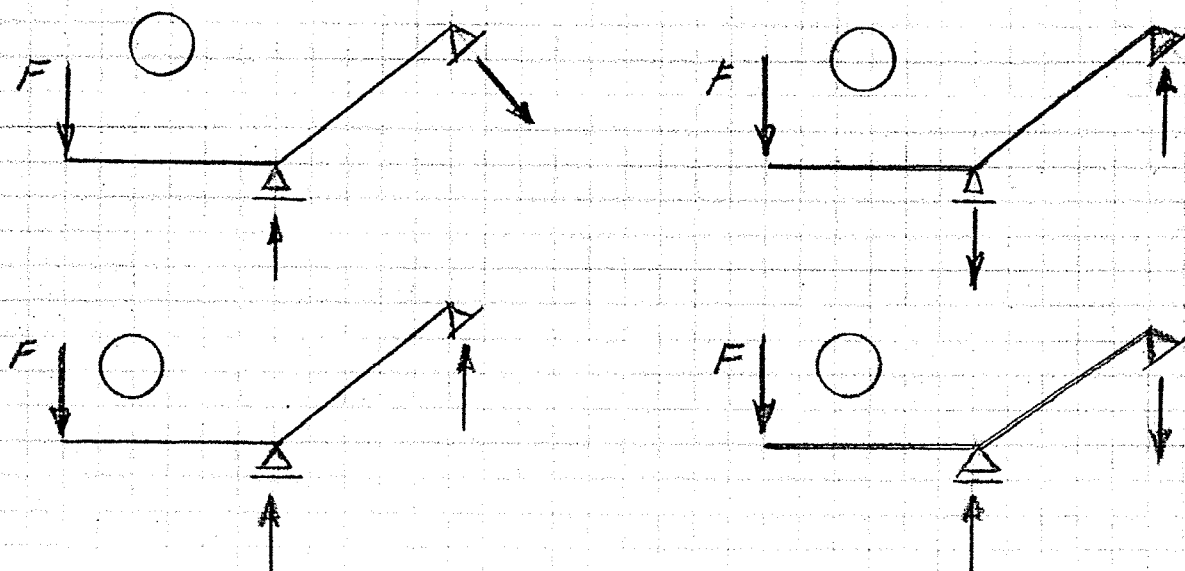
CUESTIÓN 2

Indique cual de los siguientes diagramas de cortantes corresponde a la viga de la figura

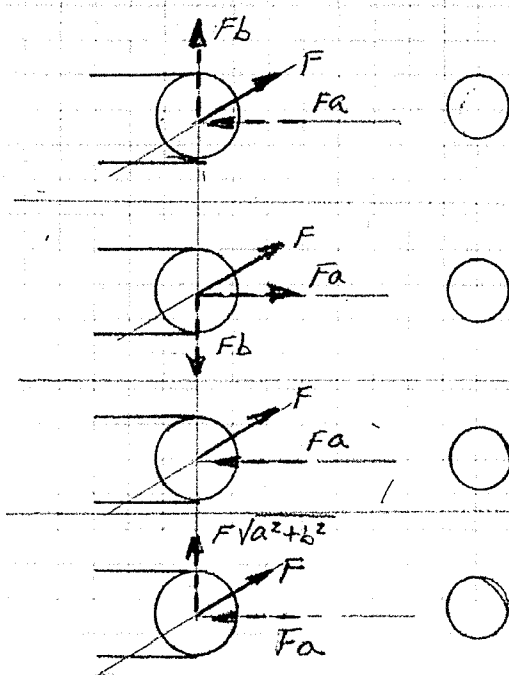
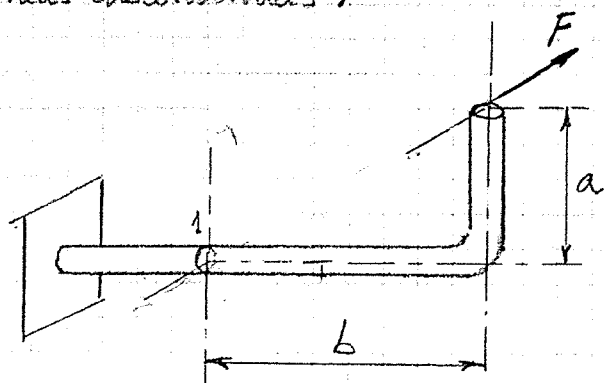




1) En la viga de la figura sometida a la carga F , marque la opción correcta relativa a las direcciones y sentidos de las reacciones de los enlaces

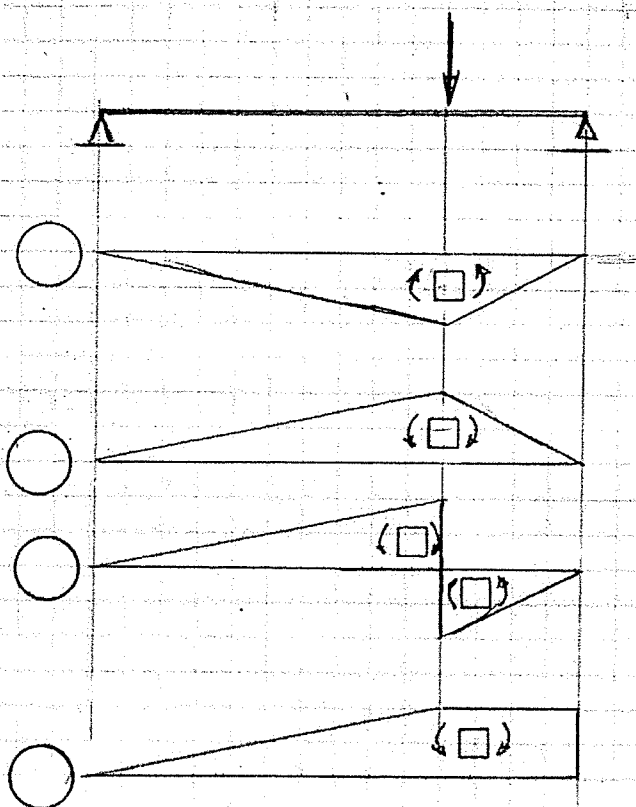


2) Marque la opción correcta de los esfuerzos internos presentes en la sección 1 de la figura (los esfuerzos correspondientes a momentos se han indicado con líneas discontinuas).

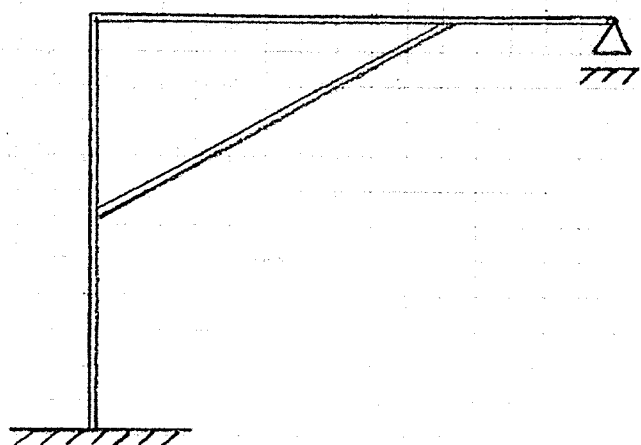




3) En la viga de la figura marcar el diagrama de momentos flectores correcto



5) Marque la opción correcta relativa al grado de hiperestaticidad (G.H.) de la estructura plana de la figura



- ☐ $GH = 1$
- ☐ $GH = 2$
- ☐ $GH = 3$
- ☐ $GH = 4$

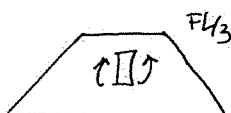
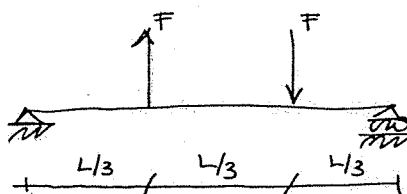
ETSI INDUSTRIALES (U.P.M.)

Resistencia de Materiales

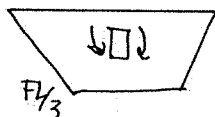
Duración de la prueba: 20 minutos

R M - -
Nº matrícula Respuestas

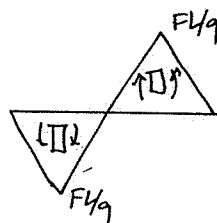
1. Indica el diagrama de momentos flectores de la estructura de la figura:



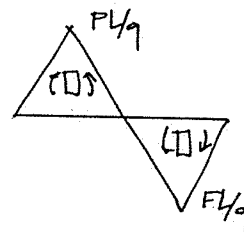
(a)



(b)



(c)



(d)

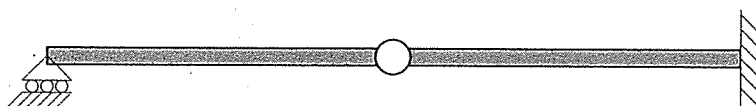
a)

b)

c)

d)

2. El grado de indeterminación estática de la estructura en la figura es



a) 3

b) 1

c) 0

d) 2

3. ¿Cómo influyen las libertades de una estructura en su grado de indeterminación estática (GH)?

a) Depende del tipo de libertad
hiperestaticidad es de origen interno

b) Sólo disminuyen GH si la
Aumentan GH

d) Disminuyen



4. El grado de hiperestaticidad de una estructura depende del número de fuerzas y momentos externos aplicados sobre ésta.

- a) Falso. b) Cierto para los momentos y falso para las fuerzas.
c) Verdadero. d) Cierto para los fuerzas puntuales y falso para los momentos.

5. El número de ecuaciones de reacción en estructuras de 2 y 3 dimensiones son, respectivamente,

- a) 6 y 4. b) 4 y 2. c) 6 y 3. d) 3 y 2.

... ..
... ..
... ..
... ..

... ..

RESISTENCIA DE MATERIALES
PROBLEMAS GRUPO T1. CURSO 2012-2013

MÓDULO 1. INTRODUCCIÓN

PROBLEMA 1.1

Para los sistemas planos de barras prismáticas de la figura, se pide:

- 1) Identificar las reacciones en la sustentación.
- 2) Determinar el grado de hiperestaticidad mediante la expresión:
 $GH = (r-3) + (3c-e)$
- 3) Realizar los cortes necesarios para descomponerlo en parte internamente isostáticas, y determinar el GH mediante el balance general de incógnitas y ecuaciones de equilibrio ($GH = n - p - e$)

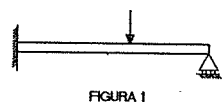


FIGURA 1

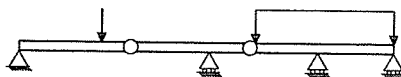


FIGURA 2

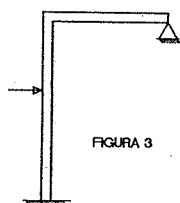


FIGURA 3

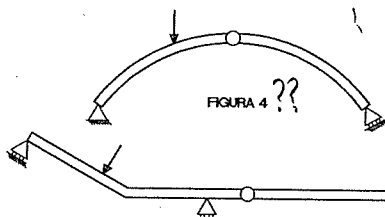


FIGURA 4 ??

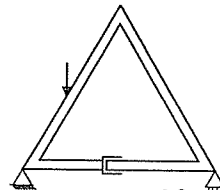


FIGURA 6 ??

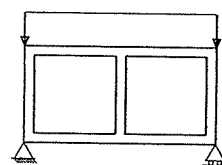


FIGURA 7

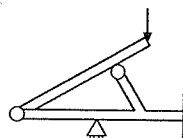


FIGURA 8

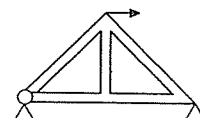


FIGURA 9

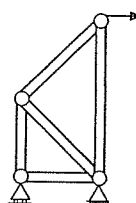


FIGURA 10

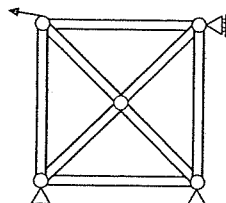


FIGURA 11

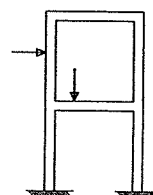


FIGURA 12

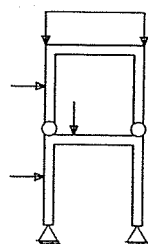


FIGURA 13

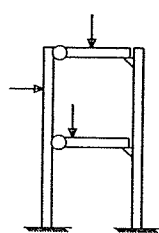


FIGURA 14 ??

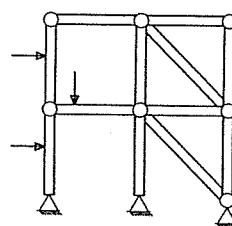


FIGURA 15

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

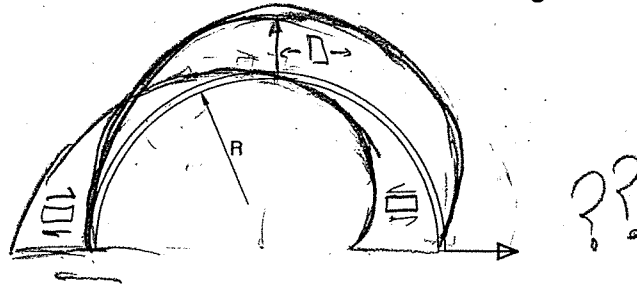
INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

INDUSBOL.COM

PROBLEMA 1.2

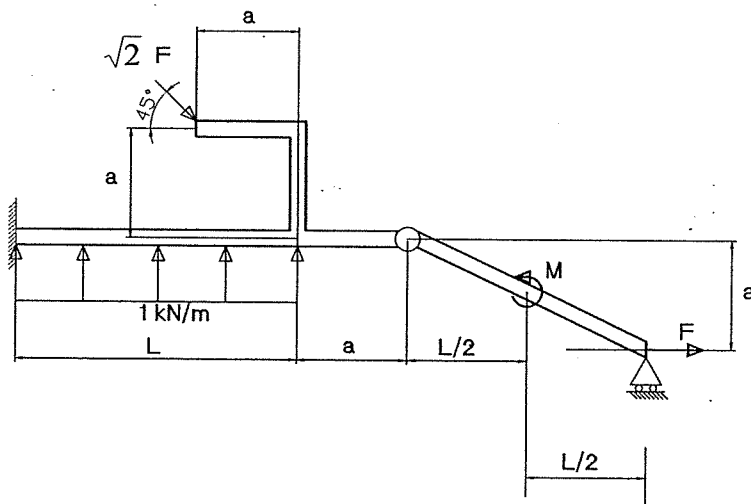
Dibujar los diagramas de esfuerzos internos del sólido de la figura



PROBLEMA 1.3

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos internos del sólido de la figura, para los siguientes valores de los parámetros:

$L = 10 \text{ m}$; $a = 5 \text{ m}$; $F = 20 \text{ kN}$; $M = 10 \text{ mkN}$





INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

INDUSTRIAL

PROBLEMA 1.4

La estructura plana de barras de la figura está empotrada en el punto A y cuelga de un tirante DE. Además se coloca una rótula en el punto C. Se pide:

- 1) Comprobar que la estructura es isostática con cualquiera de las expresiones de balance de incógnitas y ecuaciones.
- 2) Calcular las reacciones externas en el apoyo A y la tracción T en el tirante.
- 3) Dibujar los diagramas de esfuerzos (axil, cortante y momento flector) en la barra BC.

Nota: el espesor de las barras se considera despreciable.

