



# Indusbot

.com

Apuntes de 3ºGITI

Maria Ballesteros

APUNTES TRANSMISIÓN DEL CALOR

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes  
En [indusbol.com](http://indusbol.com) o  
[simplyjarod.com](http://simplyjarod.com)

# INTRO

## 1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

La Termotecnica deriva de la Termodinámica. No obstante, esta última no determina la velocidad a la que tiene lugar el proceso de transferencia calorífica, lo que precisamente es el objeto de la Termotecnica.

### ● ENERGÍA INTERNA (U)

La energía interna ( $U$ ) es una representación del contenido energético de un sistema a escala microscópica. Es una variable de estado.

En un sistema cerrado  $\Delta U = Q - W$ , así la energía no puede ser creada ni destruida, sino que su variación aparece en forma de calor o trabajo.

En un sistema abierto, se contabiliza también la variación de flujo entalpico entre las corrientes de entrada y salida  $\Delta U = Q - W + \sum h_j \cdot m_j$ . Aparece así el concepto de entalpía ( $h$ )  $h = U + PV$

Unidad de  $[U]$  y  $[h] \rightarrow \text{KJ/Kg}$

### ● CALOR (Q)

El calor es una forma de energía en tránsito. Se trata de la transferencia de parte de la energía interna (energía calorífica o térmica) de un sistema a otro, siempre que se encuentren a diferente temperatura. Por tanto, un cuerpo NO almacena calor, sino energía interna.

El calor se transmite en el sentido de las temperaturas decrecientes pero, en la interacción entre dos sistemas, obviamente las variaciones de energía interna son iguales y de sentido contrario.

El calor puede transferirse por 3 mecanismos: radiación, conducción y convección, aunque en la mayor parte de los procesos participan los tres mecanismos.

## VARIACIÓN DE ENERGÍA INTERNA ( $\Delta U$ ) DE UN SISTEMA

- Intercambio de calor sensible

Sin cambio de estado

$$\Delta U = Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T$$

$Q [J]$ ;  $m [Kg]$ ;  $\Delta T [K]$ ;  $c_p [J/Kg \cdot K]$

- Intercambio de calor latente

Con cambio de estado

$$\Delta U = Q = m \cdot H_{fg}$$

## CALOR ESPECÍFICO Y CALOR LATENTE

- Cantidad de calor que debe absorber 1kg de una sustancia para aumentar su temperatura 1K se denominó calor específico,  $c_p$ .
- Un sistema durante un cambio de fase está en equilibrio térmico a una temperatura dada. La cantidad de calor necesaria para transformar 1kg de sustancia de una fase a otra se le denominó calor latente de cambio de fase, que el función de la naturaleza de la sustancia, al igual que el específico.

## TEMPERATURA

Es una magnitud física que indica el contenido energético de un sistema, es decir, está relacionada directamente con la parte de la energía interna "sensible", asociada a los movimientos de las partículas del sistema.  
 $T = T(\bar{x}, t)$ ; la resolución de un problema de transmisión de calor pasa por conocer el mapa de temperaturas del sistema en todo momento.

## POTENCIA TÉRMICA

- Se denominó potencia térmica transmitida ( $q$ ), velocidad de transmisión de calor o, simplemente, transferencia de calor a la energía térmica transmitida por unidad de tiempo en régimen permanente. Tiene unidades de potencia (W)
- Definimos también la potencia térmica lineal ( $q'$ ) a la potencia térmica transmitida por unidad de longitud (W/m)
- Por último, el flujo de calor o potencia térmica por unidad de área es el flujo neto de energía calorífica que atraviesa una superficie (W/m²)

## ● UNIDADES FUNDAMENTALES Y DERIVADAS

- Masa: Kg
- Longitud: m
- Tiempo: s
- Temperatura: K (°C, F, ...)

- Fuerza: N
- Energía: J
- Potencia: W

### Unidades de CALOR (Q):

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

$$1 \text{ Kcal} = 1000 \text{ cal} = 4186 \text{ J}$$

$$1 \text{ caloría} = 1 \text{ Kcal}$$

$$1 \text{ kWh} = 860 \text{ Kcal} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ termial(te)} = 1,0 \cdot 10^6 \text{ cal}$$

$$1 \text{ Btu} = 0,252 \text{ Kcal}$$

### UNIDADES DE POTENCIA TÉRMICA

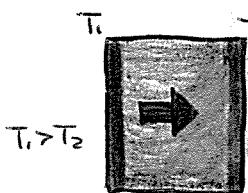
$$\begin{cases} 1 \text{ Kcal/h} = 1,16 \text{ W} \\ 1 \text{ CV} = 0,7355 \text{ kW} \end{cases}$$

$$q' \text{ (Pot. Térmica lineal)}: \text{W/m}$$

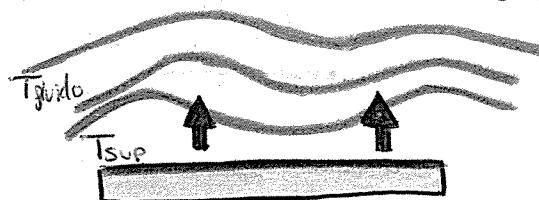
$$q'' \text{ (Flujo calor)}: \text{W/m}^2$$

## 2 MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

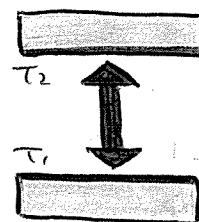
El calor puede transmitirse por conducción, convección y/o radiación, dando así generalmente los 3 mecanismos a la vez.



Conducción a través de un sólido/ líquido



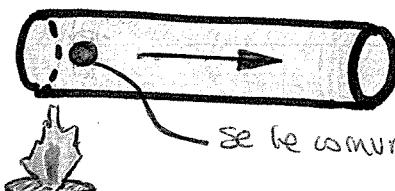
Convección desde una superficie a un fluido



Radiación entre superficies

## 2.1 CONDUCCIÓN

Transferencia de energía que tiene lugar en un soporte físico (sólido o fluido) de manera que la energía interna de las zonas de mayor temperatura se desplaza hacia las de menor temperatura.



TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN EL SENSO DE LA BARRA



Se le comunica energía a la molécula:



La conducción se produce por:

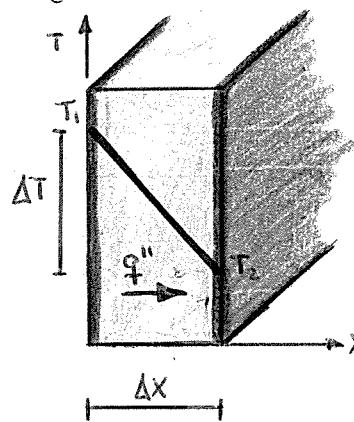
- (Choque de moléculas)
- (Flujo libre de electrones)
- (Vibración de red cristalina)

Choque molecular que hace migrar la energía en forma de calor de una molécula a otra.

En los metales se dan las 3 causas y por ello son los mejores conductores.

### LEY DE FOURIER

En este caso estacionario, la potencia térmica transmitida depende de la diferencia de temperaturas y de la reticularidad del material a través de su constante  $K$  (conductividad térmica)



Ley fundamental de la conducción

$$q = K \frac{A(T_1 - T_2)}{\Delta x} \quad (\text{W})$$

$$q'' = K \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (\text{W/m}^2)$$

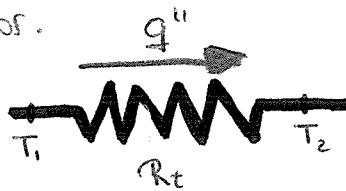
Unidades:  $\text{W} = [\text{K}] \frac{\text{m}^2 \text{K}}{\text{m}} ; [\text{K}] = \frac{\text{W}}{\text{mK}} \equiv \text{Conductividad térmica}$

$K$  depende del material y toma valores muy variables  $\approx (0,03 - 400)$

↑ aislante      ↑ metal

- Al cociente  $\frac{K}{\Delta x} \equiv$  conductancia térmica  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \right]$ , se invierte el  $\text{León de Ries}$  tenia térmica unitaria  $(\text{m}^2 \text{K})$  que viene a representar el impedimento que supone un metro para conducir calor.

$$q'' = \frac{\Delta T}{R_t} ; R_t = \frac{\Delta x}{K}$$



Paralelismo con ley de Ohm

$$I = \frac{U}{R_{el}} \quad I = \frac{U}{R_t}$$

## 2.2 CONVECCIÓN

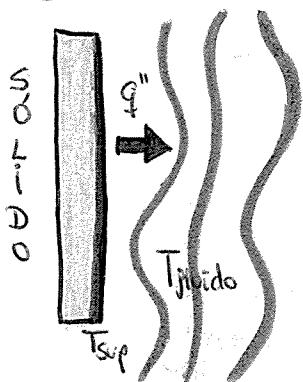
Mecanismo de transmisión de calor basado en el desplazamiento de masa en el seno de un fluido lo que origina la mezcla de unas zonas con otras y, por consiguiente, el intercambio de calor entre ellos.

Se produce también en el sentido de las temperaturas decrecientes y, aunque requiere de soporte fijo (un fluido) este no es fijo, sino que está en movimiento.

Tipos de convección

{ Natural: por diferencia de densidad → Libre  
Artificial o forzada

### LEY DE NEWTON



Podemos considerar que la transmisión de calor en la interfase sólido - líquido es por convección y se puede aplicar la ley de Fourier a dicha capa límite de espesor muy reducido  $\delta$

$$q(W) = K \frac{A \Delta T}{\delta} ; \text{ se define } \frac{K}{\delta} \text{ como el coeficiente pelicular}$$

$$\left[ \frac{K}{\delta} \right] = \left[ \frac{W}{m^2 K} \right] = h \Rightarrow q(W) = h \cdot A \cdot \Delta T ; \Delta T = T_{sup} - T_f$$

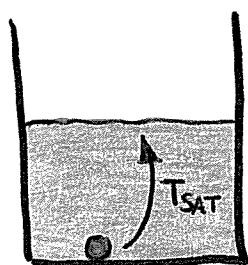
$$q(W) = h \cdot A \cdot (T_{sup} - T_{líquido})$$

Valores típicos del coeficiente de película  $h (W/m^2 K)$

|                             | Mín. | Máx.   |
|-----------------------------|------|--------|
| Convección libre gaseosa    | 5    | 25     |
| Convección forzada gaseosa  | 15   | 250    |
| Convección libre líquidos   | 50   | 1000   |
| Convección forzada líquidos | 100  | 15000  |
| Ebullición de líquidos      | 2500 | 25000  |
| Condensación de vapores     | 5000 | 100000 |

← Fenómenos de cambio de fase

## • Fenómenos de cambio de fase



La molécula se convierte en gas y sobe a la superficie  
↓  
Hay movimiento de fluido  
↓  
Convección

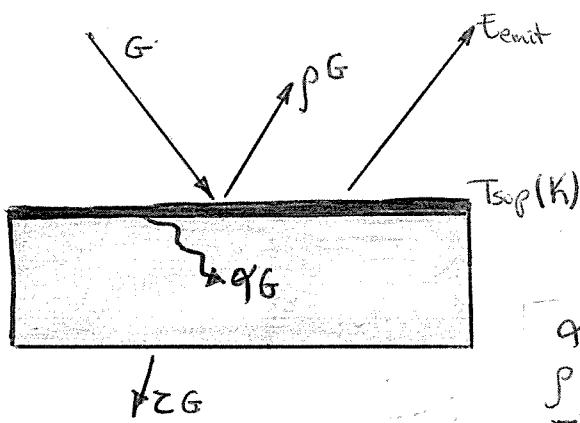


Vapor de agua 100°C  
Cede el calor latente de cambio de estado  
↓  
Se convierte en líquido y cae  
↓  
Hay movimiento de fluido  
↓  
Convección

## 2.3 RADIACIÓN

Todo cuerpo a temperatura por encima del cero absoluto emite radiación electromagnética. Esta radiación es emitida en todas direcciones y puede ser interceptada por otros cuerpos dando lugar a un intercambio radiante entre las superficies de dichos cuerpos.

La radiación no requiere un medio de transporte o soporte físico.



Intercambio neto radiante:

$$q''_{\text{rad}} = E_{\text{emit}} - \epsilon G \quad (\text{sentido saliente}); \text{ generalmente:}$$

$$q'' = (J - G)$$

Además de emitir, los cuerpos reciben radiación. A la energía recibida por unidad de tiempo y superficie de absorción se le llama irradiación  $G$  que puede ser reflejada, transmitida y/o absorbida:

$$\begin{aligned} q &= \text{absorvidad de la superficie} \\ \rho &= \text{reflectividad de la superficie} \\ \tau &= \text{transmisividad de la superficie} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} q + \rho + \tau &= 1 \\ \epsilon G & \xrightarrow{\rho G} \xrightarrow{\tau G} \end{aligned} \right.$$

## • LEY DE STEFAN-BOLTZMANN

$$E(W/m^2) = \epsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

$E$ : emitancia o potencia emitida de la superficie  
 $\epsilon$ : emisividad de la superficie, adimensional (0..1)

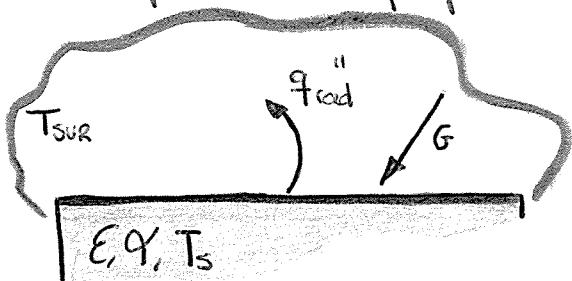
$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4; \text{ constante de Stefan-Boltzmann}$$

La superficie emite

$$E + \rho G = J$$

(RAYOS SIDA)

Caso particular: Superficie expuesta a un recinto que la contiene



$$q''_{\text{rad}} = E E_b(T_s) - q' G$$

Suponemos  $E = q \approx$  Podemos linearizar la ecuación = hipótesis de superficie gris

$$q''_{\text{rad}} = h_r (T_s - T_{\text{sur}}); \text{ con } h_r \text{ el coeficiente equivalente de radiación}$$

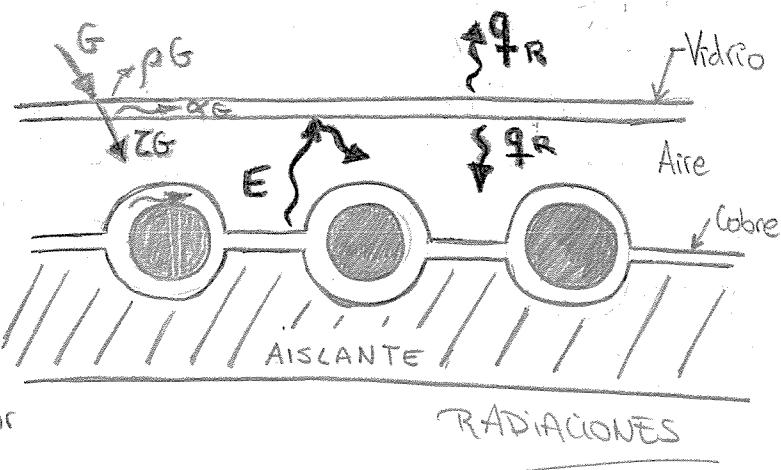
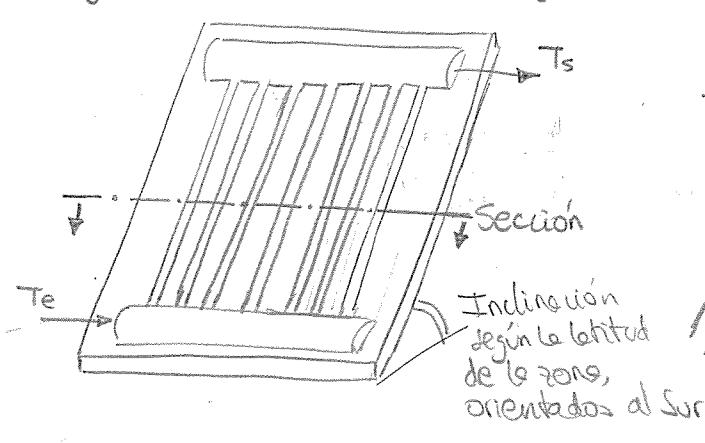
$$q_{\text{rad}} = E_s A_s \sigma (T_s^4 - T_{\text{sur}}^4)$$

Si además de tener la superficie expuesta a un entorno que la rodea a  $T_{\text{sur}}$  y sometida a convección de un fluido transparente a la radiación a  $T_a$ :

$$q'' = q''_{\text{conv}} + q''_{\text{rad}} = h (T_s - T_a) + h_r (T_s - T_{\text{sur}})$$

COLECCIÓN ② Describir los mecanismos de transmisión de calor en un panel solar.

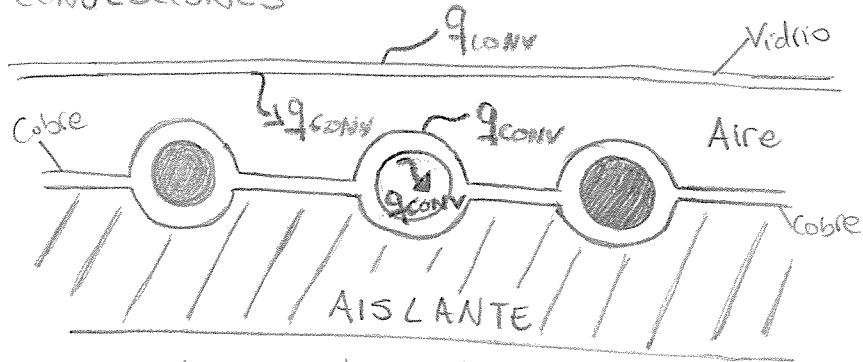
Un panel solar térmico es un dispositivo diseñado para recoger la energía radiada por el Sol y convertirla en energía térmica.



Ponen más tubos metálicos que transmiten muy bien el calor (por ejemplo, cobre) llenos con un fluido

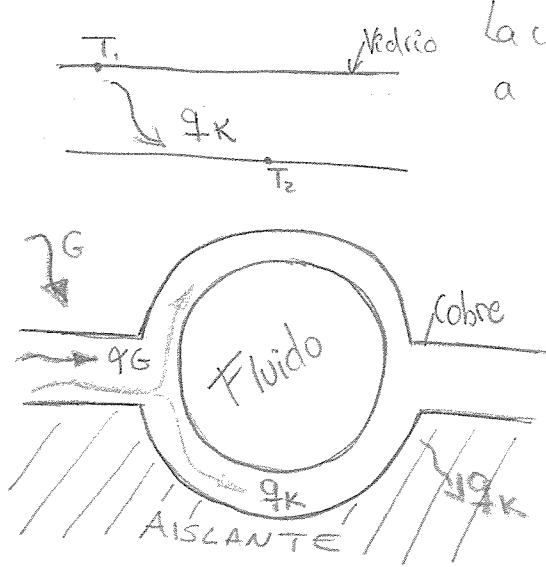
La energía radiante del Sol ( $G$ ) llega al cristal. El 99% aprox. se transmite a través del cristal, siendo el 1% restante absorbido o reflejado  $\equiv ZG, PG, qG$ . La energía que se transmite por el cristal incide sobre el plástico y los tubos de cobre que, a su vez, radian una energía  $E$ , que es reflejada casi en su totalidad por el cristal que actúa como efecto invernadero.  $\Rightarrow$  Cristal es transparente a ciertas longitudes de onda pero opaco a otras. También existe una pequeña radiación por parte del cristal

## CONVECCIONES



Sin embargo, dentro del tubo el fluido (generalmente agua y anticongelante) está bombeado y la convección es forzada. También existe convección entre el vidrio y el exterior.

## CONDUCcIONES



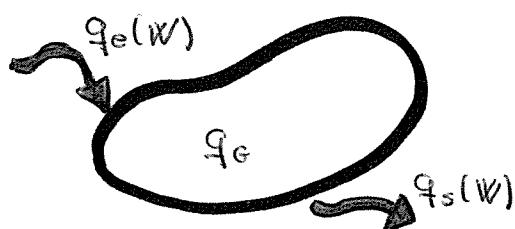
La conducción en el vidrio es mínima porque a penas existe diferencia de temperaturas.

Nota sobre radiación: Al cobre se le aplica una capa de pintura de alta absorvedad ( $\epsilon$ )

La conducción en el cobre es muy elevada por tratarse de un material metálico de elevado K, sin embargo, la conducción hacia el aislante es mínima por ser un material de vns K baja

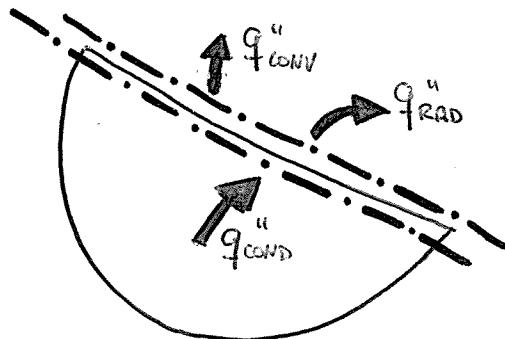
# 3 BALANCES ENERGÉTICOS

Cuerpo en reposo, no realiza trabajo



$$q_e + q_c - q_s = \frac{dU}{dt}$$

## BALANCE DE ENERGÍA A UNA SUPERFICIE



La superficie de control no enmienda ni move ni volumen.

La pared transmite calor por radiación, convección y conducción

$$q_{\text{cond}}'' - q_{\text{conv}}'' - q_{\text{rad}}'' = 0$$

COLECCIÓN ① Saber la temperatura superficial de la arena seca de una playa que alcanza su régimen permanente al exponer sombra a una irradiación solar de  $1000 \text{ W/m}^2$ , con una temperatura ambiente constante de  $30^\circ\text{C}$  y aire en calma que proporciona un coeficiente de convección de valor  $h = 15 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ . Se sabe que a partir de una profundidad de 70 cm existe una capa húmeda, de gran espesor, que se mantiene en equilibrio térmico con el agua del mar a una temperatura constante de  $20^\circ\text{C}$ . Considera que la superficie libre de la capa de arena seca es plana y horizontal, y que tiene una reflectividad del 40%.

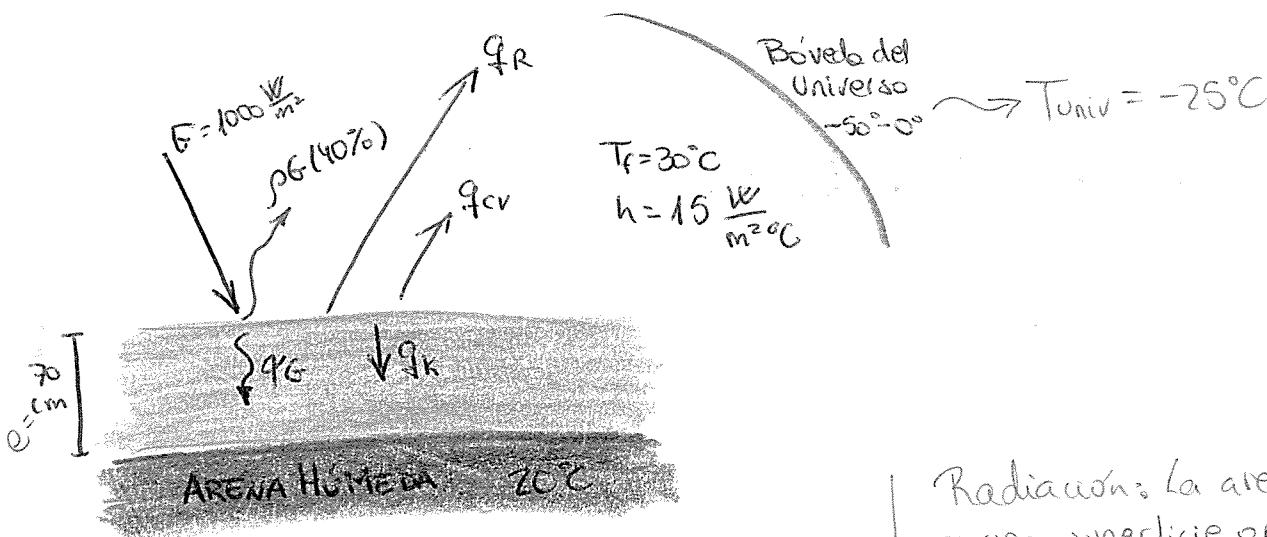
DATOS: Propiedades de la arena seca:

Conductividad ...  $K = 96 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$

Densidad .....  $\rho = 2150 \text{ kg/m}^3$

Calor específico ...  $c_p = 1,8 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$

Cuerpo gris .....  $\sigma = \epsilon$



La radiación absorbida  $\varphi_{GA}$   $\xrightarrow{q_K} \xrightarrow{q_{cv}} q_e$

$$\varphi_{GA} = q_K + q_{conv} + q_R$$

$$\varphi_{GA} = K_A \frac{T_{as} - T_{ah}}{e} + h_A (T_{as} - T_f) + \epsilon A \sigma (T_{as}^4 - T_{uni}^4)$$

$$0,6 \cdot 1000 = 0,6 \frac{T_{as} - 293,15}{0,7} + 15 \cdot (T_{as} - 303,15) + 0,6 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (T_{as}^4 - 248,15^4)$$

$$T_{as} \approx 324,72 \text{ K} \approx 52^\circ\text{C}$$

Radiación: La arena es una superficie opaca  $\tau = 0$ ; Dado  $\Rightarrow \rho = 0,4$ ;  $\tau + \rho + \alpha = 1$ ,  $\alpha = 0,6$

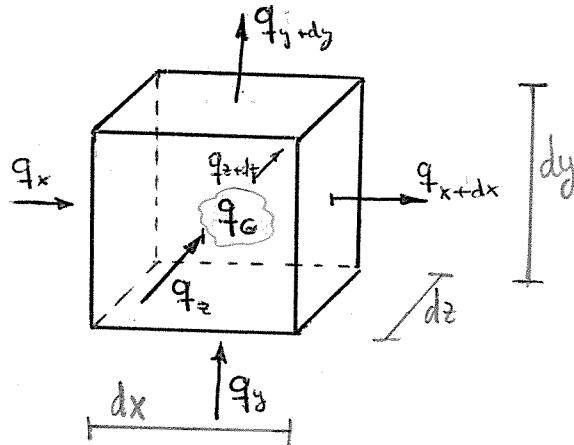
# Conducción

## Ecuación general de la conducción

### 1

#### OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL

Aplicamos un balance de energía a un volumen de control diferencial ( $dx dy dz$ ) en el interior de un sólido donde existe una fuente de calor uniformemente repartida  $q^* (W/m^3)$



La variación de la potencia térmica transferida en dirección  $x$  (igual para  $y$  o  $z$ ) puede expresarse como desarrollo en serie de Taylor

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} (dx)^2 + \dots \Rightarrow \text{despreciaremos los términos a partir de los derivados segundos}$$

Además, por la fuente de calor  $q_{gen} = q^* dv = q^* dx dy dz$

- BALANCE DE ENERGÍA  $q_e - q_s + q_{gen} = m C_p \frac{\partial T}{\partial t}$

$$q_x + q_y + q_z - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_y - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - q_z - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + q^* dx dy dz = \int C_p dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

- APLICAMOS LA LEY DE FOURIER  $q_x = -K \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -K \cdot dy dz \frac{\partial T}{\partial x}$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[ -K \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx - \frac{\partial}{\partial y} \left[ -K \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy - \frac{\partial}{\partial z} \left[ -K \frac{\partial T}{\partial z} \right] dz + q^* dx dy dz = \int C_p dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

$\frac{\partial}{\partial x} \left[ K \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{\partial T}{\partial z} \right] + q^* = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$

Ecuación general de la conducción del calor en régimen transitorio con fuente interior y parámetros dependientes de la temperatura.

# 2 CASOS PARTICULARES Y CONDICIONES DE CONTORNO

- Caso: Parámetros constantes ( $\rho, c_p, K$ )

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c_p} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q^*}{\rho c_p}$$

Difusividad térmica:

$$q^* = \frac{K}{\rho c_p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = q^* \nabla^2 T + \frac{q^*}{\rho c_p}$$

- Caso: ECUACIÓN DE POISSON - Régimen permanente con fuente interior

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q^*}{K} = 0 \quad \text{En 3 direcciones}$$

Thermalone puede dejararse el calor en alguna dirección quedando la ecuación de Poisson:

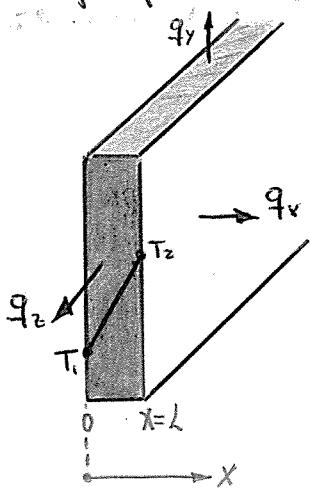
$$\text{En dos direcciones} \quad \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q^*}{K} = 0$$

$$\text{En una dirección} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q^*}{K} = 0$$

- Caso: ECUACIÓN DE LAPLACE - Régimen permanente sin fuente interior

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ y } q^* = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

## Ejemplo condición de contorno



Condición de régimen permanente sin frente interior.  
Despreciable la transmisión de calor en dirección  $y, z$  (áreas pequeñas)  $\Rightarrow$  Ecación de Laplace en una dirección

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = G_1; \quad T(x) = G_1 x + G_2$$

CONDICIONES DE CONTORNO  $\begin{cases} x=0 \rightarrow T=T_1 & \text{(1)} \\ x=L \rightarrow T=T_2 & \text{(2)} \end{cases}$

COND (1):  $T_1 = G_2$

COND (2):  $T_2 = G_1 L + G_2 \rightarrow G_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \Rightarrow T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$  Recta

## 3 ECUACIÓN GENERAL DE LA CONDUCCIÓN EN CILÍNDRICAS

COORDENADAS CILÍNDRICAS:  $\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}$

Cilíndricas

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Por tanto, la ecuación general queda

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( K r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( K \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q^* = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

En el caso de propiedades constantes:  $(\alpha = \frac{K}{\rho c_p})$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = q \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q^*}{\rho c_p}$$

Ecación general  
coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q^* = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

# 4

## ECUACIÓN GENERAL DE LA CONDUCCIÓN EN ESFÉRICAS

Ecuación gen conduc. cartesianas:

(COORDENADAS ESFÉRICAS)  $\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q^* = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Esféricas

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Por tanto, la ecuación general queda:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( K r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( K \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( K \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + q^* = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Para el caso de propiedades constantes

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{q^*}{c_p \cdot \rho}$$

# 5

## METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN

MÉTODO I para problema genérico de transmisión de calor por conducción

1. Plantear ecuación general de la difusión de calor en derivadas parciales
2. Integrar la ecuación general para obtener la expresión del campo de temperaturas
3. Plantear las condiciones de contorno iniciales, sobre la propia solución  $T(\bar{x}, t)$  ó sobre su gradiente  $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$
4. Ajustar los coeficientes de la solución para satisfacer dichas condiciones
5. Calcular los flujos de calor a partir de las derivadas parciales

## Método II para problema genérico de transmisión de calor por conducción

1. Plantear un balance térmico global, esto es, en todo el conjunto, aplicando las condiciones de frontera sobre el contorno del sistema
2. Plantear un balance térmico local, en el interior del sólido, aplicando la ley de Fourier.

### NOTA! Tipos de condiciones de frontera

- De primera clase:  $T(L, t) = T_{\text{sup}}$  (constante)
- De segunda clase: Flujo de calor constante en la superficie  

$$q''(L) = -K \frac{\partial T(L, t)}{\partial x}$$
- Superficie adiabática  $q''(L) = 0 = \frac{\partial T(L, t)}{\partial x}$
- De tercera clase: convección superficial ( $x=L$ )  

$$-K \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h(T(L, t) - T_{\text{fluido}})$$

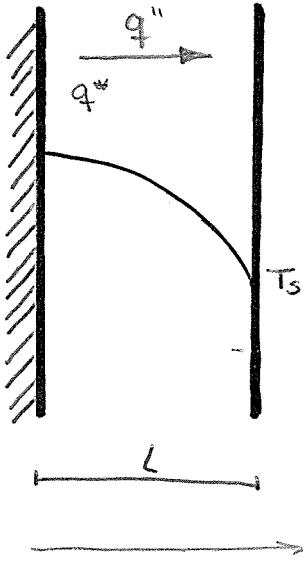
Ejemplo 1 (Cuaderno): Resolución de la ecuación de difusión de calor en régimen permanente para una pared plana con fuente interna uniformemente distribuida, adiabática en una de sus caras y temperatura superficial constante  $T_s$ , en la otra.

Ecación general de la conducción del calor

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q^* = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

O → Transmisión  
de calor  
unidireccional

O (régimen permanente)



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q^*}{K} = \text{cte}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q^*}{K} \cdot x + G_1$$

$$T(x) = -\frac{q^*}{K} \frac{x^2}{2} + G_1 x + G_2$$

Condiciones de contorno

- $q(x=0)=0 \Rightarrow$  Pared adiabática en el origen  $q = -K \frac{\partial T}{\partial x}$

$$q(x=0) = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = G_1 = 0$$

- $T(x=L)=T_s$

$$T(L) = -\frac{q^*}{K} \frac{L^2}{2} + 0 + G_2 = T_s; \quad G_2 = T_s + \frac{q^*}{2K} L^2$$

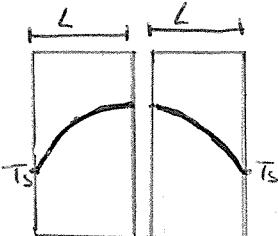
Por tanto

$$T(x) = -\frac{q^*}{2K} x^2 + T_s + \frac{q^*}{2K} L^2$$

$$\boxed{T(x) = \frac{q^*}{2K} (L^2 - x^2) + T_s}$$

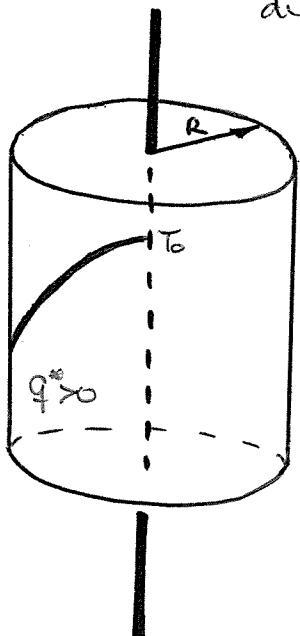
Perfil parabólico con valor máximo en la cara adiabática

Nota: La solución sería la misma que en el caso de una pared de espesor 2L con igual temperatura superficial  $T_s$  en ambas caras.



(Waderno)

Ejemplo 2: Resolución de la ecuación de difusión de calor en régimen permanente para un cilindro macizo de longitud infinita con fuente interna uniformemente distribuida y condición convectiva superficial



Ecación general conducción del calor en cilíndricos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = q \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q^*}{\rho C_p}$$

0 (régimen permanente)

Solo transmisión de calor en dirección radial

$$\frac{K}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q^*}{\rho C_p} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q^*}{K}, \quad r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} = -r \frac{q^*}{K}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -r \frac{q^*}{K}, \quad r \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{r^2}{2} \frac{q^*}{K} + G_1, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q^*}{2K} r + \frac{G_1}{r}$$

$$T(r) = -r^2 \frac{q^*}{4K} + G_1 \ln(r) + G_2$$

#### CONDICIONES DE CONTORNO

- Valor finito en el eje  $\rightarrow T_0$  (derredido)

$$G_1 = 0; \quad G_2 = T_0 \rightarrow T(r) = -r^2 \frac{q^*}{4K} + T_0$$

Perfil parabólico con valor máximo en el eje si  $q^* > 0$

- Condición convectiva superficial

$$q(R) = -K \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = h \left( T_R - T_{\text{fluído}} \right); \quad K \frac{q^*}{2K} R = h (T_R - T_{\text{fluído}})$$

$$T_R = \frac{q^* R}{2h} + T_{\text{fluído}} \quad \text{Obtenemos } T_0 = T_R + R^2 \frac{q^*}{4K} = \frac{R q^*}{2h} + T_{\text{fluído}} + R^2 \frac{q^*}{4K}$$

$$T_0 = T_{\text{fluído}} + \frac{R q^*}{2} \left( \frac{1}{h} + \frac{R}{2K} \right)$$

Por tanto

$$T(r) = T_{\text{fluído}} + \frac{R q^*}{2h} + \frac{q^*}{4K} (R^2 - r^2)$$

(Cuaderno)

Ejemplo 3: Resolución de la ecuación de difusión de calor en régimen permanente para una esfera sólida con fuente interna uniformemente distribuida y temperatura superficial constante  $T_s$

Ecavación general de la conducción en esféricas; propiedades constantes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = q \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \frac{q^*}{C_p \rho}$$

régimen permanente      Transmisión de calor en dirección radial

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{q^*}{K}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -r^2 \frac{q^*}{K}$$

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{r^3}{3} \frac{q^*}{K} + C_1, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q^*}{3K} r + \frac{C_1}{r^2}$$

$$T(r) = -\frac{q^*}{3K} \frac{r^2}{2} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

CONDICIONES DE CONTORNO

- Valor finito en el centro (descartado)

$$C_1 = 0; \quad C_2 = T_0 \rightarrow T(r) = T_0 - \frac{q^*}{3K} \frac{r^2}{2}$$

- $T(r=R)=T_s$

$$T_s = T_0 - \frac{q^*}{3K} \frac{R^2}{2}, \quad T_0 = T_s + \frac{q^*}{6K} R^2$$

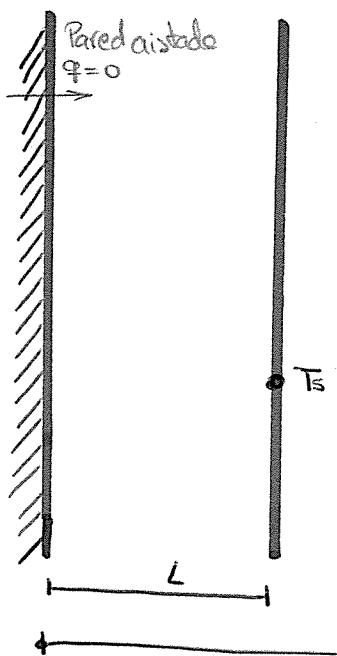
Por tanto, el perfil de temperaturas queda

$$T(r) = T_s + \frac{q^*}{6K} (R^2 - r^2)$$

Perfil parabólico con valor máximo en el centro para  $q^* > 0$

COLECCIÓN Una placa plana de espesor  $L$  y conductividad  $K$ , tiene una de sus caras perfectamente aislada (adiabática) y la otra se mantiene a una temperatura constante  $T_s$  ( $^{\circ}\text{C}$ ). En su interior se genera calor de acuerdo con la expresión  $q_x^* = q_0^* \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ . Determinar

- 1) Campo de temperaturas
- 2) Flujo térmico en la superficie
- 3) Posición y magnitud de la temperatura máxima.



① Como  $T_s = \text{cte}$  en el tiempo, estamos en régimen permanente

Consideramos despreciable la transmisión de calor en sentidos  $y, z$ .

Por tanto, la ecuación general de conducción de calor queda:

$$K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)^0 + q^* = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}^0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q^*}{K} = -\frac{q_0^*}{K} \left(1 - \frac{x}{L}\right), \text{ Integrando:}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q_0^*}{K} \left(x - \frac{x^2}{2L}\right) + G_1, \quad T(x) = -\frac{q_0^*}{K} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L}\right) + G_1 x + G_2$$

#### CONDICIONES DE CONTORNO

- $q(x=0) = 0$  por superficie adiabática

$$q_{x=0} = -K A \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \left( -\frac{q_0^*}{K} \left(x - \frac{x^2}{2L}\right) + G_1 \right) \right|_{x=0} = 0$$

Fourier

$$\Rightarrow G_1 = 0$$

- $T(x=L) = T_s$

$$T_s = \frac{-q_0^*}{K} \left( \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{6} \right) + G_2 ; \quad G_2 = T_s + \frac{q_0^* L^2}{3K}$$

$\frac{2L^2}{6}$

Por tanto; el perfil de temperaturas es:

$$T(x) = -\frac{q_0^*}{2K} x^2 + \frac{q_0^*}{6K} \frac{x^3}{L} + T_s + \frac{q_0^* L^2}{3K}$$

② Para calcular el flujo térmico en la superficie a  $T_s$  aplico Fourier

$$q''(x=L) = \left. \frac{q}{A} \right|_{x=L} = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = -K \left( \frac{-q_0^*}{K} \left( L - \frac{L}{2} \right) \right) = q_0^* \frac{L}{2}$$

③ Temperatura máxima y punto donde se alcanza

$$T_m(x=0) = T_s + \frac{q_0^* L^2}{3K}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-q_0^*}{K} \left( x - \frac{x^2}{2L} \right) = 0 \quad \begin{array}{l} x=0 \\ \downarrow 1 = \frac{x}{2L}, x=2L \end{array}$$

$$T(x=L) = T_s$$

Por tanto, si  $q_0^* > 0$ , la temperatura máxima tendrá un valor de  $T = T_s + (q_0^* L^2)/3K$  y se alcanzará en  $x=0$

Si embargo, si  $q_0^* < 0$ , el pared no generaría calor, sino que sería un sumidero y la temperatura máxima estaría en la superficie exterior, en  $x=L$ , y tendría un valor  $T = T_s$

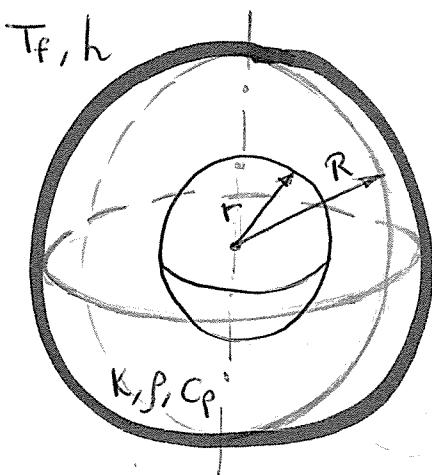
## COLECCIÓN

Se tiene una esfera maciza y homogénea de radio  $R$  (m), conductividad térmica  $K$  (W/mK), densidad  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) y calor específico  $C_p$  (kJ/kg K) sumergida en un fluido que se mantiene a una temperatura constante  $T_f$  (°C) y proporciona un coeficiente de convección natural  $h$  (W/m<sup>2</sup>K) sobre la superficie de la esfera.

Determinar, en régimen permanente, la temperatura de la superficie exterior y del centro de la esfera, así como la elevación del campo de temperatura en el interior de la misma, en los siguientes casos:

1) Inexistencia de fuentes y sumideros en el interior de la esfera ( $q^* = 0$  W/m<sup>3</sup>)

2) Existencia de una fuente térmica homogénea  $q^*$  (W/m<sup>3</sup>) en el interior de la esfera.



Ecación general de transmisión de calor por conducción en esferas, en régimen permanente y despreciando la transmisión en las direcciones no radiales →  
 $\rightarrow T(r, \theta, \phi, t) = T(r)$

$$K \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q^* = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = - \frac{q^*}{K} r^2; \text{ Integrando:}$$

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{q^*}{K} \frac{r^3}{3} + G_1, \quad T(r) = - \frac{q^*}{K} \frac{r^2}{6} - \frac{G_1}{r} + G_2 \quad (\#)$$

### CONDICIONES DE CONTORNO

- $T(r=0)$  es desconocido pero está acotado  $\rightarrow G_1 = 0$

- Condición convectiva en la superficie

$q_{\text{saliente}} = q_{\text{generado por balance}}$

Además  $q_{\text{saliente}} = q_{\text{convección}}$

$$\left. \begin{array}{l} q_{\text{convección}} = h A (T_R - T_F) \\ q_{\text{generado}} = q^* \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Igualando} \\ h \cdot \frac{4}{3} \pi R^2 (T_R - T_F) = q^* \frac{4}{3} \pi R^3 \end{array}$$

$$T_R - T_F = \frac{q^* R}{3 h}$$

$$T_R = \frac{q^* R}{3 h} + T_F$$

Por tanto:

$$T(r=R) = \frac{-q^*}{6K} R^2 + G_2 = \frac{q^* R}{3h} + T_F; \quad G_2 = \frac{q^* R^2}{6K} + \frac{q^* R}{3h} + T_F$$

(4)

Ecación del campo de temperaturas

Caso 2) Fuente térmica homogénea

$$T(r) = \frac{-q^*}{6K} r^2 + \frac{q^* R}{3h} + \frac{q^* R^2}{6K} + T_F$$

$$T_R = T_F + \frac{q^* R}{3h}$$

$$T_0 = T_F + \frac{q^* R}{3h} + \frac{q^* R^2}{6K}$$

Caso 1)  $q^* = 0 \text{ W/m}^3 \rightarrow T_R = T_0 = T_F \text{ fluido}$

$T(r) = T_F$  constante e igual a la temp del fluido

# CONDUCCIÓN

TEMA 3.I



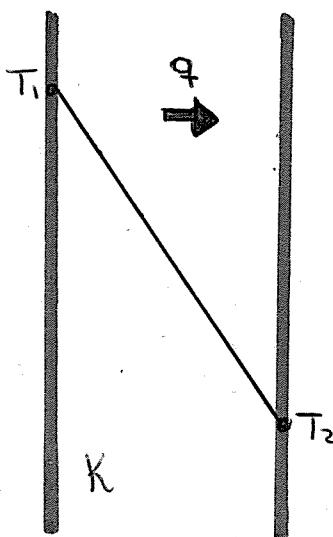
Conducción unidimensional en régimen permanente sin fuentes/sumideros

1

## CASO DE PLACA (Pared Plana)

Sea una placa plana. Tomando un sistema de coordenadas cartesianas ( $T = T(x, y, z, t)$ ), unidimensional ( $T = T(x, t)$ ); en régimen permanente ( $T = T(x)$ ) y sin fuentes ni sumideros ( $q^* = 0$ ), la ecuación general de transmisión de calor por conducción puede expresarse como (con propiedades termofísicas constantes):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q^*}{\rho C_p} \implies \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0; T(x) = C_1 x + C_2$$



Tomando condiciones de contorno (temperatura superficial conocida)

$$T(x=0) = T_1 \rightarrow C_2 = T_1$$

$$T(x=L) = T_2 \rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

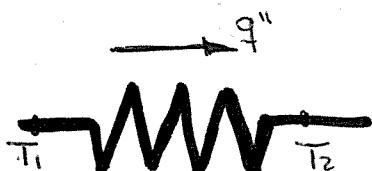
$$\text{Por tanto } T(x) = T_1 + \frac{\Delta T}{L} \cdot x$$

PERFIL DE  
TEMPERATURA  
LINEAL Y FLUJO  
DE CALOR CONSTANTE

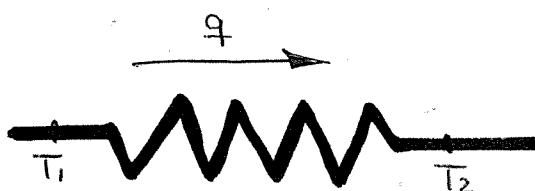
$$\frac{q}{A} = -K \frac{\partial T}{\partial x} = -K C_1 = -K \frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{K}{L} (T_1 - T_2)$$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{R_t}, R_t(\text{resist. térmica}) = \frac{L}{K}$$

CIRCUITO TÉRMICO EQUIVALENTE

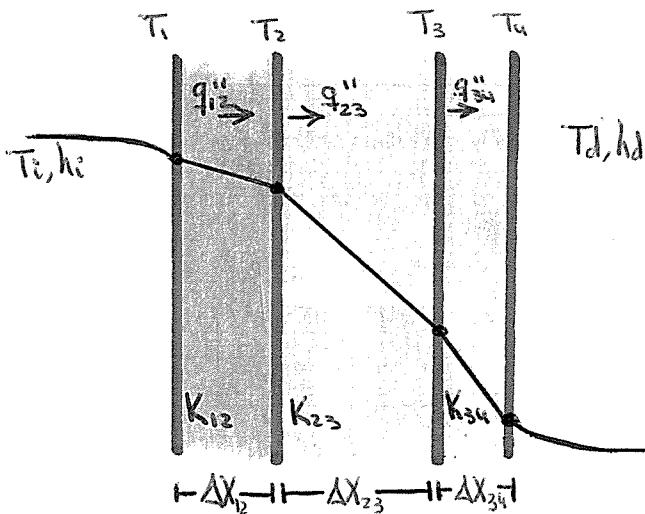


$$R_t'' = \frac{L}{K}$$



$$R_t = \frac{L}{AK}$$

# 2 PARED MULTICAPA



- Como estamos ante una pared plana, el calor es constante de forma que  $q''_{12} = q''_{23} = q''_{34} = q'' = \frac{q}{A}$

- Aplicando la ley de Fourier para la convección del calor  $\frac{q}{A} = -K \frac{\Delta T}{\Delta X}$ ;  $\Delta T = \frac{q}{A} \frac{\Delta X}{K}$
- Aplicando la ley de Newton para la convección del calor  $\frac{q}{A} = h \Delta T$ ;

Por tanto, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q}{A} = h_i (T_2 - T_i); \quad T_2 - T_i = \frac{q}{A} \frac{1}{h_i} \\ (T_1 - T_2) = \frac{q}{A} \frac{\Delta X_{12}}{K_{12}} \end{array} \right.$$

Sumando todos  
los ecuaciones  
obtenemos:

$$(T_1 - T_2) = \frac{q}{A} \frac{\Delta X_{12}}{K_{12}}$$

$$(T_2 - T_3) = \frac{q}{A} \frac{\Delta X_{23}}{K_{23}}$$

$$(T_3 - T_4) = \frac{q}{A} \frac{\Delta X_{34}}{K_{34}}$$

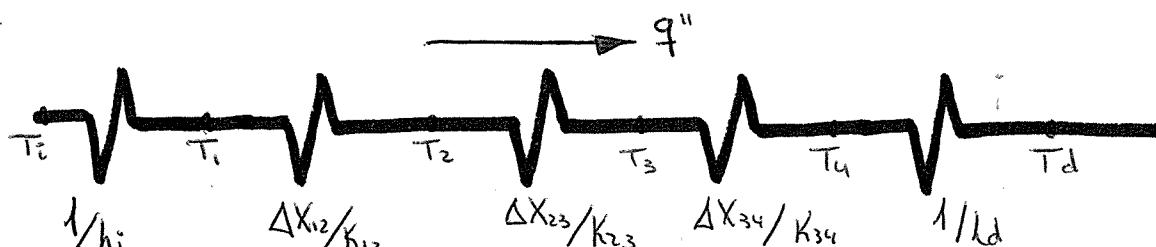
$$\frac{q}{A} = h_d (T_d - T_4); \quad T_d - T_4 = \frac{q}{A} \frac{1}{h_d}$$

$$T_1 - T_d = \frac{q}{A} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{\Delta X_{12}}{K_{12}} + \frac{\Delta X_{23}}{K_{23}} + \frac{\Delta X_{34}}{K_{34}} + \frac{1}{h_d} \right)$$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_d}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta X_{12}}{K_{12}} + \frac{\Delta X_{23}}{K_{23}} + \frac{\Delta X_{34}}{K_{34}} + \frac{1}{h_d}}$$

Con este resultado e introduciéndolo en las ecuaciones del sistema obtendremos  $T_1, T_2, T_3, T_4$  consiguiendo un perfil lineal como el de la figura superior

## Círculo térmico equivalente



Entonces

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_d}{R_e''}$$

siendo

$$R_e'' = \sum R_i''$$

$$R_i''(\text{convección}) = \frac{1}{h_i}$$

$$R_i''(\text{conductividad}) = \frac{\Delta x}{k}$$

## COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR (U)

Se trata de una conductancia térmica ( $\text{W/m}^2\text{K}$ ) calculada como la inversa de la resistencia térmica unitaria total (suma de resistencias térmicas de cada capa). También recibe el nombre de transmitancia

$$\frac{q}{A} = UAT$$

$$U = \frac{1}{\sum R_i''} = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \sum_j \frac{\Delta x_j}{k_j} + \frac{1}{h_d}} ; \text{ es característico de cada composición constructiva}$$

## RESISTENCIA TÉRMICA DE UNA CÁMARA DE AIRE

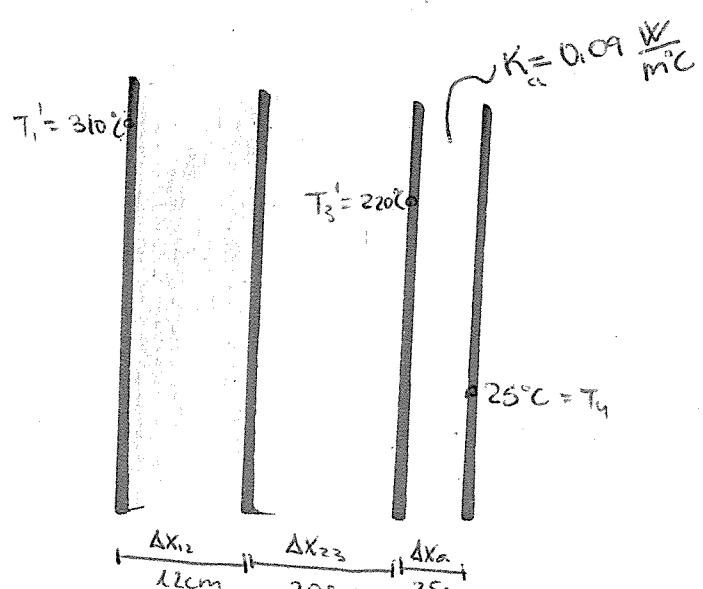
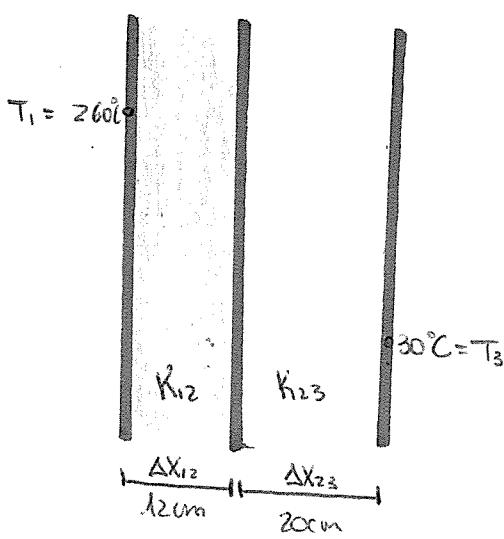
Es frecuente encontrar "capas" de aire entre las soluciones constructivas habituales. Esta lámina de aire suele caracterizarse directamente como una resistencia térmica de valor  $R''_{\text{aire}}$  ( $\text{m}^2\text{K/W}$ )

## RESISTENCIA TÉRMICA DE CONTACTO

En ocasiones, la discontinuidad física siempre existente entre dos materiales en contacto supone una discontinuidad en el perfil de temperatura, que puede ser tratada como si se añadiese una resistencia térmica adicional (resistencia de contacto)  $\rightarrow R''_{\text{cont}}$

Las resistencias de contacto se determinan de forma experimental para distintos pares de materiales. Valores habituales del orden de  $10^{-4} \text{ m}^2\text{K/W}$

colección ⑯ Una pared está compuesta por una capa de material A de 12 cm de espesor y otra de material B de 20 cm. Sabemos que las temperaturas de los sup. exteriores de las capas A y B son de 260°C y 30°C respectivamente. A la sup. exterior de la capa B se le añade un aislamiento de 2,5 cm de espesor ( $K = 0,09 \frac{W}{m^2 \cdot C}$ ). En estas condiciones se observa que la temperatura de la superficie de la capa A aumenta a 310°C y la de la unión entre B y el aislamiento llega a 220°C. Si la superficie del aislamiento está a 25°C ¿Cuál es el flujo de calor por metro cuadrado de superficie de la pared, "antes" y "después" de añadir el aislamiento?



$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{antes}} = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\Delta X_{12}}{K_{12}} + \frac{\Delta X_{23}}{K_{23}}} = \frac{260 - 30}{\frac{0,12}{K_{12}} + \frac{0,2}{K_{23}}} = \frac{230}{\frac{0,12}{0,12} + \frac{0,2}{0,2}} = \frac{230}{2} = 115 \frac{W}{m^2}$$

Usando (\*):

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{antes}} = \frac{230}{\frac{285}{702} - \frac{5}{18}} = 1794 \frac{W}{m^2}$$

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{desp}} = \frac{T_1' - T_u}{\frac{\Delta X_{12}}{K_{12}} + \frac{\Delta X_{23}}{K_{23}} + \frac{\Delta X_a}{K_a}} = \frac{310 - 25}{\frac{0,12}{K_{12}} + \frac{0,2}{K_{23}} + \frac{0,025}{0,09}} = \frac{285}{0,12 + 0,2 + 0,2778} = 702 \frac{W}{m^2}$$

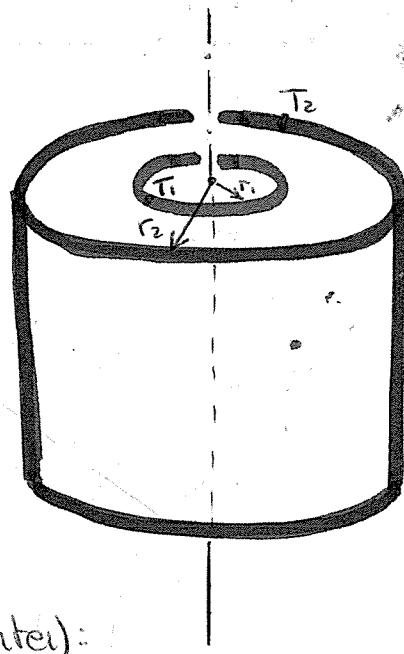
$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{desp}} = \frac{T_3' - T_4}{\frac{\Delta X_a}{K_a}} = \frac{220 - 25}{\frac{0,025}{0,09}} = \frac{195}{0,2778} = 702 \frac{W}{m^2}$$

$$\frac{310 - 25}{\frac{0,12}{K_{12}} + \frac{0,2}{K_{23}} + \frac{0,025}{0,09}} = 702, \quad \frac{285}{702} = \frac{0,12}{K_{12}} + \frac{0,2}{K_{23}} + \frac{5}{18}$$

$$\frac{0,12}{K_{12}} + \frac{0,2}{K_{23}} = \frac{285}{702} - \frac{5}{18} \quad (*)$$

# 3 CASO DE CILINDRO

Sea un cilindro con temperaturas de contorno conocidas. Tomando un sistema de coordenadas cilíndricas ( $T = T(r, \varphi, z, t)$ ), unidimensional ( $T = T(r, t)$ ), en régimen permanente ( $T = T(r)$ ) y sin fuentes ni sumideros ( $q'' = 0$ ), la ecuación general de transmisión de calor por conducción puede expresarse como (con prop. termofísicas constantes):



$$\frac{\partial T}{\partial t} = q' \nabla^2 T + \frac{q''}{\rho c_p} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 ,$$

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = G_1 ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{G_1}{r} ; \quad T(r) = G_1 \ln(r) + G_2$$

Tomando las condiciones de contorno

$$T(r=r_1) = T_1 \rightarrow T_1 = G_1 \ln(r_1) + G_2$$

$$G_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1/r_2)}$$

$$T(r=r_2) = T_2 \rightarrow T_2 = G_1 \ln(r_2) + G_2$$

$$G_2 = T_2 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1/r_2)} \ln r_2$$

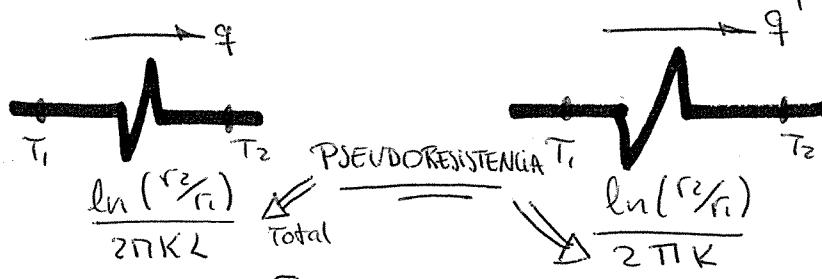
## PERFIL DE TEMPERATURAS LOGARÍTMICO

$$T(r) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1/r_2)} \ln \frac{r}{r_2} \quad \text{También:} \quad T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \ln \left( \frac{r}{r_1} \right)$$

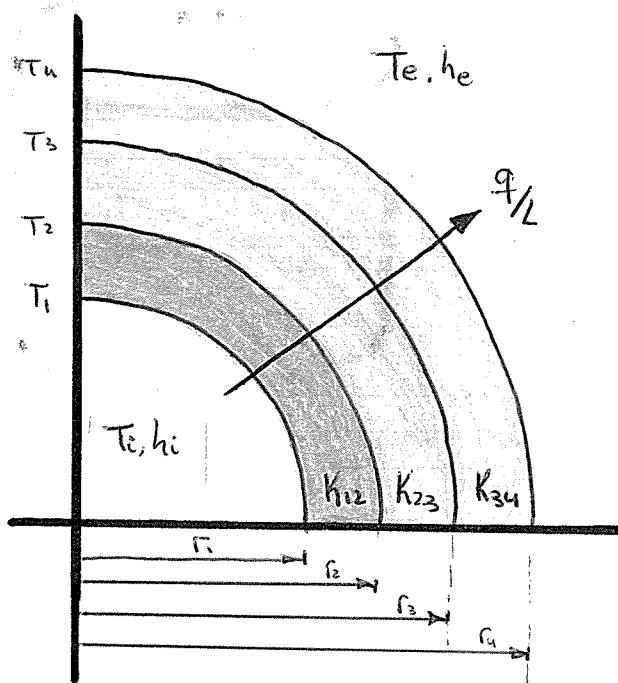
$$q = -KA \frac{\partial T}{\partial r} = -K 2\pi r L \cdot \frac{G_1}{r} = -K 2\pi L \cdot G_1 \quad \text{INDEP. DEL RADIO } r !!$$

$$\frac{q}{L} = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{2\pi K}$$

## CIRCUITO TÉRMICO EQUIVALENTE



# 4 CILINDRO MULTICAPAS



- Por simetría cilíndrica, el calor transmitido no depende del radio

$$\frac{q_{12}}{L} = \frac{q_{23}}{L} = \frac{q_{34}}{L} = \frac{q}{L}$$

- Aplicando la ley de Fourier para la conducción de calor

$$\frac{q}{L} = \frac{(T_i - T_j)}{\ln(r_j/r_i) / 2\pi K}$$

- Aplicando la ley de Newton para la convección de calor

$$\frac{q}{L} = h \frac{\Delta T}{L} = h 2\pi r \Delta T$$

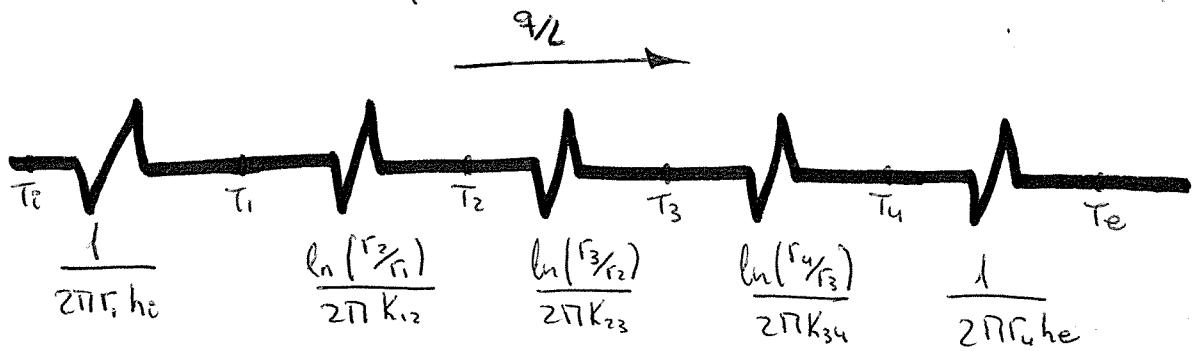
Por tanto, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q}{L} = 2\pi r_1 h_1 (T_1 - T_i), \quad T_i - T_1 = \frac{q}{L} \frac{1}{2\pi r_1 h_1} \\ \frac{q}{L} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi K_{12}}} ; \quad T_1 - T_2 = \frac{q}{L} \frac{1}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi K_{12}}} \\ \frac{q}{L} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi K_{23}}} ; \quad T_2 - T_3 = \frac{q}{L} \frac{1}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi K_{23}}} \\ \frac{q}{L} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi K_{34}}} ; \quad T_3 - T_4 = \frac{q}{L} \frac{1}{\frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi K_{34}}} \\ \frac{q}{L} = 2\pi r_4 h_e (T_4 - T_e); \quad T_4 - T_e = \frac{q}{L} \frac{1}{2\pi r_4 h_e} \end{array} \right.$$

Sumando las ecuaciones obtenemos

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi (T_i - T_e)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{K_{12}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{K_{23}} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{K_{34}} + \frac{1}{h_e r_4}}$$

## Círculo térmico equivalente



Entonces

$$q = \frac{T_c - T_e}{R_e}$$

siendo

$$R_e' = \sum R_i' \quad R_i'(\text{convección}) = \frac{1}{2\pi r_i h_i}$$

$$R_i'(\text{inducción}) = \ln(r_i / r_{i+1})$$

## COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR PARA CILINDROS (4)

De igual forma que definiamos  $U$  para placas en cilindros

$$q = U \cdot A_{\text{ext}} \cdot \Delta T \quad ; \quad \text{por convenio tomamos el área exterior}$$

$$U = \frac{q}{A_{\text{ext}} \Delta T} = \frac{q}{2\pi r_e L \Delta T} = \frac{q/L}{2\pi r_e \Delta T} = \frac{1}{\frac{r_e}{r_i h_i} + \frac{r_e \ln(r_2/r_1)}{K_{12}} + \frac{r_e \ln(r_3/r_2)}{K_{23}} + \frac{r_e \ln(r_4/r_3)}{K_{34}} + \frac{1}{h_e}}$$

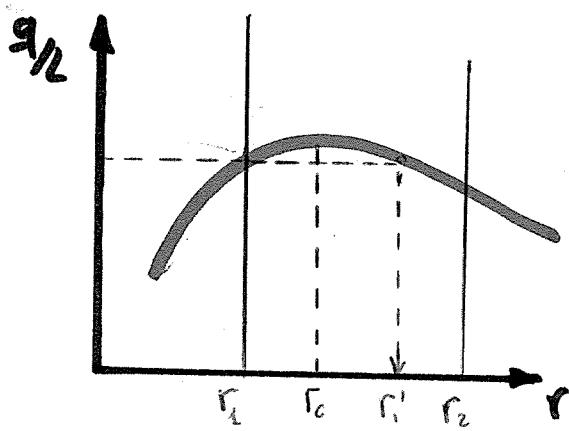
Observamos pues que, al aumentar las capas  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Aumenta área} \Rightarrow \text{Aumentan pérdidas (}\uparrow q\text{)} \\ \text{Disminuye } U \Rightarrow \text{Disminuyen pérdidas (}\downarrow q\text{)} \end{array} \right.$

Por tanto, no sabemos apriori si interesa o no añadir una nueva capa a un cilindro  $\rightarrow$  Concepto de RADIO CRÍTICO DE AISLAMIENTO.

④ Wedado, Convención  
disminuyen  $\rightarrow$  Aumenta  $U$   
- Ver pág. siguiente -

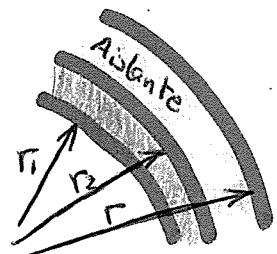
## RADIO CRÍTICO EN TUBERÍAS

Al aumentar el radio exterior de una tubería, la resistencia térmica de conducción aumenta ( $\uparrow$  pérdidas), el área exterior aumenta y la resistencia de convección disminuye ( $\downarrow$  pérdidas). Esto puede ocasionar que en determinadas circunstancias, disponer de un determinado espesor de aislante sea contraproducente.



Supongamos una tubería revestida de aislante ( $K_A$ ):

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi(T - T_e)}{\ln(\frac{r_2}{r_1}) + \frac{1}{K_A} + \frac{1}{h r}}$$



Diferenciando la función de pérdidas e igualando a cero obtenemos:

$$r_c = \frac{K_A}{h e}$$

Corresponde a un máximo de pérdidas

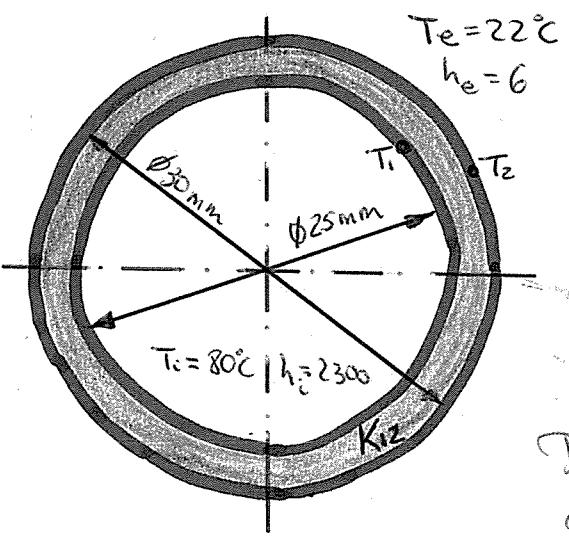
Por tanto:

- Para  $r_{TUB} < r_c$  (situación  $r_1$ ) aumentamos las pérdidas al añadir aislante hasta el punto en que perderíamos lo mismo ( $r'_1$ ) que sin aislante
- Para  $r_{TUB} > r_c$  cualquier adición de aislante disminuye las pérdidas

NOTA!! Es muy poco común que el radio de una tubería sea inferior al crítico

COLECCIÓN 17 Una tubería de cobre puro de diámetros 30/25 mm, atra-  
via un local a 22°C. Si el agua caliente que circula por su interior se encuentra a una temperatura media de masa de 80°C y los coef. de película interior y exterior son de 2300 y 6 W/m²K respectivamente, determinar:

1) Velocidad de transferencia de calor por unidad de longitud de tubería.



$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi (T_i - T_e)}{\frac{1}{h_i r_i} + \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{K_{12}} + \frac{1}{h_e r_2}} =$$

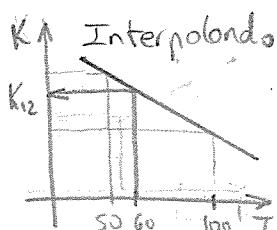
$$= \frac{2\pi (80 - 22)}{\frac{1}{2300 \cdot 0,0125} + \frac{\ln(\frac{30}{25})}{K_{12}} + \frac{1}{6 \cdot 0,015}}$$

Desconocemos la conductividad térmica de la tubería, pero está tabulada:

Para entrar en las tablas necesitamos saber a temperatura media de la tubería, también desconocida

Suponemos  $\bar{T}_{12} \approx 60^\circ\text{C} \rightarrow \text{TABLAS}$

$$\begin{cases} K(T=50^\circ\text{C}) = 399,15 \text{ °C} \\ K(T=100^\circ\text{C}) = 395,15 \text{ °C} \end{cases}$$



$$\frac{399,15 - K_{12}}{60 - 50} = \frac{K_{12} - 395,15}{100 - 60}$$

$$K_{12} = 398,35 \text{ W/mK}$$

Con este valor de  $K_{12}$  nos queda

$$\frac{q}{L} = 32,69 \text{ W/m}, \text{ con este valor, comprobamos la } \bar{T}_{12} \text{ supuesta}$$

$$\frac{q}{L} = h_i 2\pi r_i (T_i - T_1); T_1 = \frac{-32,69}{2300 \cdot 2\pi \cdot 0,0125} + 80 = 79,82^\circ\text{C} \quad | \quad \bar{T}_{12} = 79,815^\circ\text{C}$$

$$\frac{q}{L} = h_e 2\pi r_2 (T_2 - T_e); T_2 = \frac{32,69}{6 \cdot 2\pi \cdot 0,015} + 22 = 79,81^\circ\text{C}$$

↓  
No corresponde con lo estimado!!

El resultado obtenido es incorrecto pues la conductividad tomada no corresponde con el valor real, por haber sido dividido entre  $T_2$ .

Nos damos cuenta que  $T_1 \approx T_2$ , algo menor en la copa interna. Por consiguiente, y como el resultado obtenido no es correcto, iniciamos un proceso iterativo tomando un valor de  $\bar{T}_{12}$  próxima al obtenido anteriormente ( $79,813^\circ\text{C}$ )

Suponemos  $\bar{T}_{12} = 79,8^\circ\text{C}$ ; Interpolando entre los valores anteriores

$$\frac{399,15 - K_{12}}{39,8 - 50} = \frac{K_{12} - 395,15}{100 - 79,8}$$

$$K_{12} = 396,8$$

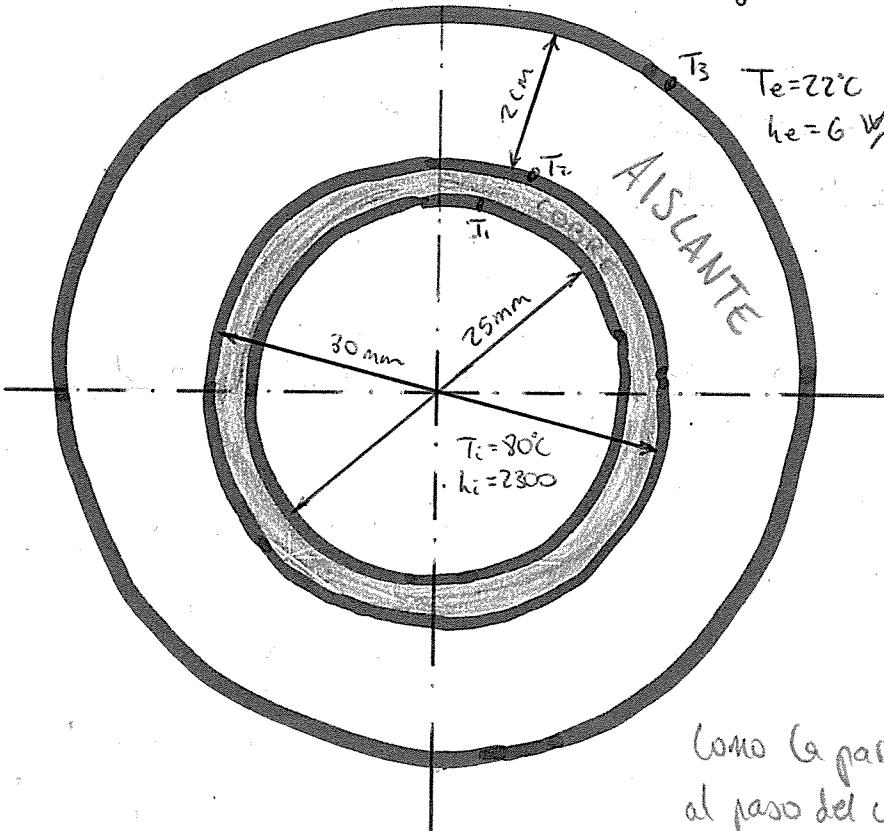
Con este valor calculamos  $\frac{q}{L}$

$$\boxed{\frac{q}{L} = 32,69 \text{ W/m}}$$

Ahora sí, mi suposición es correcta

Hemos obtenido el mismo valor ya que la pseudoresistencia  $\frac{\ln(30/25)}{K_{12}} \approx 10^{-4}$ , valor despreciable frente a los de las pseudoresistencias convectivas. Esto implica que no es influente el valor que tomemos de  $K_{12}$ , pues el sumando del denominador es supremable.

2) Velocidad de transmisión por unidad de longitud en el caso de aislante (tubería con 2 cm de espesor de manta de fibra de vidrio de densidad 48 Kg/m<sup>3</sup>)



$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi (T_i - T_e)}{\frac{1}{r_1 h_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{K_{12}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{K_{23}} + \frac{1}{r_3 h_e}}$$

$$= \frac{2\pi (80 - 22)}{\frac{1}{2300 \cdot 0,0125} + \frac{\ln(30/25)}{K_{12}} + \frac{\ln(30/25)}{K_{23}} + \frac{1}{0,035 \cdot 6}}$$

Como la pared 1,2 es metálica, su resistencia al paso del calor es mínima y, por ello, podemos despreciar el término  $\frac{\ln(30/25)}{K_{12}}$

Ahora necesitamos  $K_{23}$ , valor que miraremos en tablas suponiendo una temperatura media del aislante  $\bar{T}_{23} = \frac{T_2 + T_3}{2} \approx \frac{80 + 35}{2} \approx 57^\circ C$

Para esta temperatura, para mentar aislantes  
NO VIENE EN TABLAS  
(LOS VALORES PARA FIBRA DE VIDRIO  $\rho = 48 \text{ Kg/m}^3$ )

Podríamos tomar  $K_{23} = 904$  por tratarse de un aislante, pero INCORRECTA  $\rightarrow K_{23} = 0,0461 \frac{W}{mK}$

Comprobamos si la temperatura media es correcta

$$T_3 = T_e + \frac{q/L}{2\pi} \left( \frac{1}{r_3 h_e} \right) = 22 + 15,72 \frac{1}{2\pi (0,035 \cdot 6)} = 33,9^\circ C \quad \left. \right\} \bar{T}_{23} \approx 57^\circ C$$

$$T_2 = T_i - \frac{q/L}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1 h_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{K_{12}} \right) = 79,9^\circ C$$

↓  
Es correcta la estimación

$\frac{q}{L} = 15,72 \frac{W}{m}$

## NOTA !! Regla mnemotécnica

Pseudoresistencias entre (1) → (2)

$$T_2 = T_i - \left( \frac{q}{L} \frac{1}{2n} \right) \left( \frac{1}{h_i r_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{K_{12}} \right)$$

T que quiero calcular  
Porque  $T_i > T_1$  → Siempre

$$T_2 = T_e + \left( \frac{q}{L} \frac{1}{2n} \right) \left( \frac{\ln(r_3/r_2)}{K_{23}} + \frac{1}{r_3 h_e} \right)$$

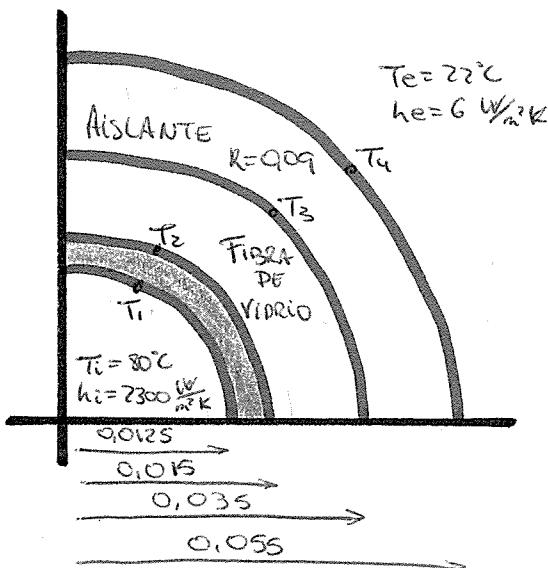
T en contraida  
Porque  $T_e < T_2$

Pseudoresistencias entre (2) → (3)

Prefiero la 1<sup>er</sup> forma ya que la 2<sup>da</sup> está en función de  $K_{23}$ , que es el valor estimado que se quiere contrastar.

3) Comparar los pérdidas horarias así obtenidos con los que se obtendrán al volcar:

a) Una capa de 2 cm de mortero de fibra de vidrio de densidad 48 kg/m<sup>3</sup> y sobre ésta, una capa de 2 cm de otro aislante  $K=0,09 \text{ W/mK}$



$$\frac{q}{L} = \frac{? \pi (T_i - T_e)}{\frac{1}{h_i r_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{K_{12}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{K_{23}} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{K_{34}} + \frac{1}{h_e r_4}}$$

O  
De nuevo, la pseudoresistencia de la capa metálica es despreciable

Volvemos a tener que estimar  $K_{23}$ .

$$\text{Suponemos } \bar{T}_{23} \approx \frac{80+40}{2} = 60^\circ \rightarrow \text{Tabla } K_{23} = 0,046 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

$$\text{Con este valor } \frac{q}{L} = 13,8 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

Comprobamos la suposición

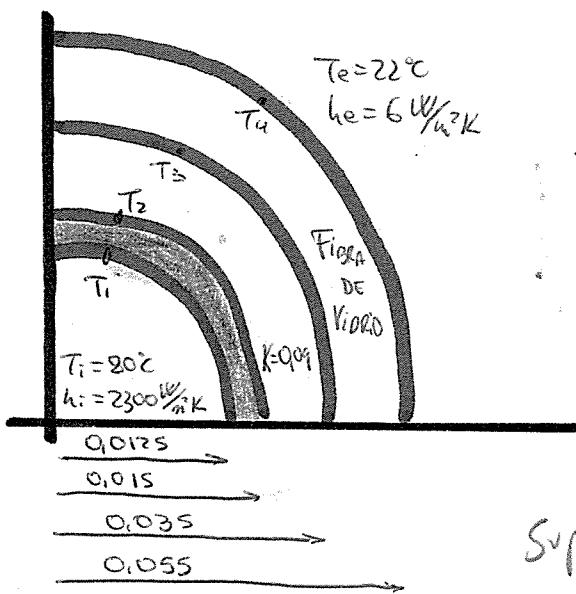
$$T_2 = T_i - \left( \frac{q}{L} \frac{1}{2n} \right) \left( \frac{1}{h_i r_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{K_{12}} \right) = 79,9^\circ \quad \left\{ \bar{T}_{23} \approx 60^\circ \text{ Suposición correcta} \right.$$

$$T_3 = T_e + \left( \frac{q}{L} \frac{1}{2n} \right) \left( \frac{\ln(r_3/r_2)}{K_{23}} + \frac{1}{h_e r_4} \right) = 39,6^\circ$$

$$\boxed{\frac{q}{L} = 13,8 \frac{\text{W}}{\text{m}}}$$

Algo menor que la que se obtendría calmando sólo la fibra de vidrio.

b) Una capa de 2cm de aislante de  $K=0,09 \text{ W/mK}$  y sobre ésta una capa de 2cm de manta de fibra de vidrio de densidad  $48 \text{ Kg/m}^3$



De nuevo

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi (T_i - T_e)}{\frac{1}{h_i} + \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1}T_2)}{K_{23}} + \frac{\ln(\frac{r_3}{r_2})}{K_{34}} + \frac{\ln(\frac{r_4}{r_3})}{h_e r_4} + \frac{1}{K_{23}}}$$

O (resistencia de paso del calor del cobre es despreciable)

$$K_{23} = 0,09$$

$K_{34}$  tenemos que estimarle

$$\text{Suponemos } T_{34} \approx 43^\circ\text{C} \rightarrow K_{34} = 0.0426 \quad \text{tablas INCROPERA}$$

$$\text{Con este valor } \frac{q}{L} = 15,8 \text{ W/m}$$

comprobamos la suposición:

$$T_4 = T_e + \frac{q}{L} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r_4 h_e} \right) = 29,6^\circ\text{C}$$

$$T_3 = T_i - \frac{q}{L} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{h_i r_1} + \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1}T_2)}{K_{23}} + \frac{\ln(\frac{r_3}{r_2})}{K_{34}} \right) = 56,3^\circ\text{C}$$

Por tanto:

$$\frac{q}{L} = 15,8 \text{ W/m}$$

Las pérdidas aumentan en comparación a las que obtuvimos colocando sólo la fibra de vidrio ( $15,72 \frac{\text{W}}{\text{m}}$ )

Conclusion: El mejor aislante (K menor) ha de estar siempre más interior que el aislante peor.

RAS:

Si el aislante interno es peor

se pierde más

Análisis más allá

que el exterior

( $15,72 < 15,8$ )

b) P (W/m²) = ? tablas est

en la parte de arriba

en la parte de abajo

en la parte de arriba

en la parte de abajo

en la parte de arriba

en la parte de abajo

# 5 CASO DE ESFERA

Sea una esfera con temperaturas de contorno conocidas. Tomando un sistema de coordenadas esféricas ( $T = T(r, \varphi, \theta, t)$ ), unidimensional ( $T = T(r, t)$ ), en régimen permanente ( $T = T(r)$ ) y sin fuentes ni sumideros ( $q^* = 0$ ) la ecuación general de transmisión de calor por conducción puede expresarse (con las propiedades termodifusivas constantes):

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \nabla^2 T + \frac{q^*}{\rho C_p} ; \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 ; r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = C_1 ; \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$$

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Tomando las condiciones de contorno

$$T(r=r_1) = T_1 \rightarrow T_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 \quad C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}$$

$$T(r=r_2) = T_2 \rightarrow T_2 = -\frac{C_1}{r_2} + C_2 \quad C_2 = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \cdot \frac{1}{r_1}$$

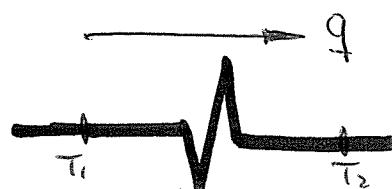
El perfil de temperatura queda  $\boxed{\frac{1}{r}}$

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

$$q = -KA \frac{\partial T}{\partial r} = -K 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = -K 4\pi r^2 \frac{C_1}{r^2} = -K 4\pi \cdot C_1 \quad \text{INDEP. DEL RADIO } r !!$$

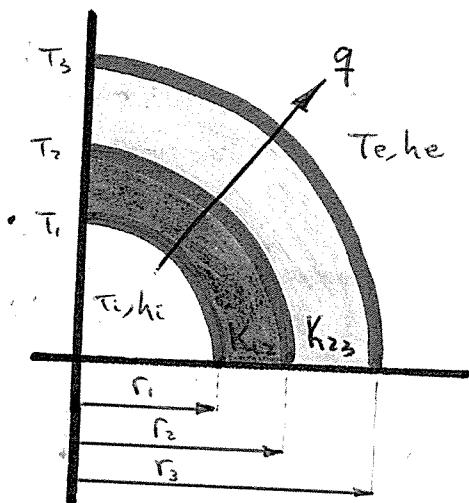
$$\boxed{q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \cdot \frac{4\pi K}{4\pi K}}$$

CIRCUITO TÉRMICO EQUIVALENTE



$$\frac{\left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}{4\pi K} \quad \text{PSEUDO RESISTENCIA}$$

# 6 ESFERA MULTICAPAS



- Por simetría esférica, el calor transmitido no depende del radio

$$q_{12} = q_{23} = q$$

- Aplicando la ley de Fourier para la conducción del calor

$$q = \frac{T_i - T_j}{\frac{1}{K_i} - \frac{1}{K_j}} \cdot \frac{4\pi r^2}{4\pi R}$$

- Aplicando la ley de Newton para la convección de calor

$$q = h \cdot A \cdot \Delta T = h \cdot 4\pi r^2 \Delta T$$

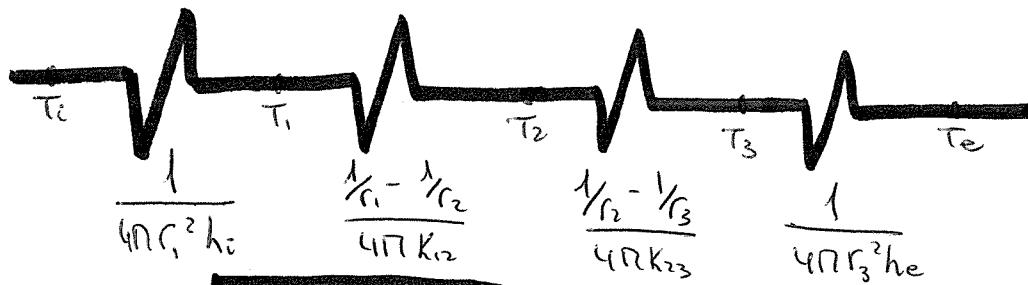
Por tanto, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 4\pi r_1^2 h_i (T_e - T_i) \\ q = \frac{T_i - T_2}{\frac{1}{K_i} - \frac{1}{K_2}} \cdot \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_1^2 K_{12}} \\ q = \frac{T_2 - T_3}{\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_3}} \cdot \frac{4\pi r_2^2}{4\pi r_2^2 K_{23}} \\ q = 4\pi r_3^2 h_e (T_3 - T_e) \end{array} \right.$$

Sumando las ecuaciones obtenemos la expresión de la potencia térmica

$$q = \frac{T_e - T_i}{\frac{1}{4\pi r_1^2 h_i} + \frac{\frac{1}{K_i} - \frac{1}{K_2}}{4\pi r_1^2 K_{12}} + \frac{\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_3}}{4\pi r_2^2 K_{23}} + \frac{1}{4\pi r_3^2 h_e}}$$

## Círculo térmico equivalente



Entonces

$$q = \frac{T_c - T_e}{R_t}$$

siendo

$$R_t = \sum R_i$$

$$R_t(\text{ext}) = \frac{1}{4\pi F \cdot h}$$

$$R_t(\text{int}) = \frac{1}{4\pi K_{ij}}$$

### COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR PARA ESFERAS (U)

De igual forma que definímos  $U$  para planos y cilindros, en esferas:

$$q = U A_{\text{ext}} \cdot \Delta T ; \text{ por convenio tomamos el área exterior}$$

Observamos de nuevo que, al aumentar los espesores ( $r \uparrow \uparrow$ )

$\left. \begin{array}{l} \text{Aumenta área} \Rightarrow \text{Aumentan pérdidas} \\ (q \uparrow) \\ \text{Disminuye } U \Rightarrow \text{Disminuyen pérdidas} \\ (\text{señal}) \\ \text{Resumen: disminuyen} \rightarrow \text{Aumenta } U \end{array} \right\}$

Es interesante estudiar de nuevo el concepto de RADIO CRÍTICO DE AISLAMIENTO

### RADIO CRÍTICO EN ESFERAS

Al igual que en el caso de geometrías cilíndricas, existe un radio crítico que maximiza las pérdidas de calor de una esfera. Haciendo un estudio similar al efectuado para los cilindros se llega al siguiente resultado:

$$r_c = \frac{2 K_e}{h_e}$$

Conducción unidimensional en régimen permanente con fuentes / sumideros

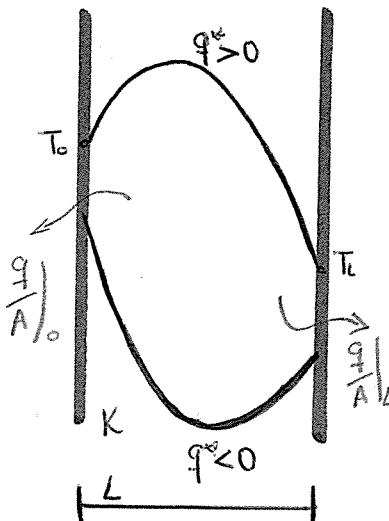
# 1

## CASO DE PLACA

Sea una placa plana. Tomando un sistema de coordenadas cartesianas ( $T = T(x, y, z, t)$ ), unidimensional ( $T = T(x, t)$ ), en régimen permanente ( $T = T(x)$ ) con una fuente de calor uniformemente repartida ( $q^* \text{ [W/m}^3\text{]}$ ) la ecuación general de transmisión de calor por conducción puede expresarse como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (\nabla^2 T) \cdot \alpha + \frac{q^*}{\rho C_p} \Rightarrow K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q^* = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q^*}{K},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q^*}{K} x + C_1; \quad T(x) = -\frac{q^*}{2K} x^2 + C_1 x + C_2$$



Tomando las condiciones de contorno

$$T(x=0) = T_0 \rightarrow C_2 = T_0$$

$$T(x=L) = T_L \rightarrow C_1 = \frac{T_L + \frac{q^*}{2K} L^2 - T_0}{L}$$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{q^*}{2K} x^2 + \left(\frac{q^* L}{2K} - \frac{(T_0 - T_L)}{L}\right) x + T_0$$

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS ES UNA PARÁBOLA

Sin embargo el flujo de calor deja de ser constante ya que  $\dot{q} = -KA \frac{dT}{dx}$  ; y la derivada no es constante

$$\frac{\dot{q}}{A} = -K \frac{dT}{dx} = +K \frac{T_0 - T_L}{L} + q^* x - \frac{q^* L}{2}$$

$\underbrace{\dot{q}}_{\text{Flujo de calor sin fuente } \dot{q}_{\text{sin fuente}}} \quad \underbrace{\frac{\dot{q}}{A}}_{\text{Flujo de calor a la fuente}}$

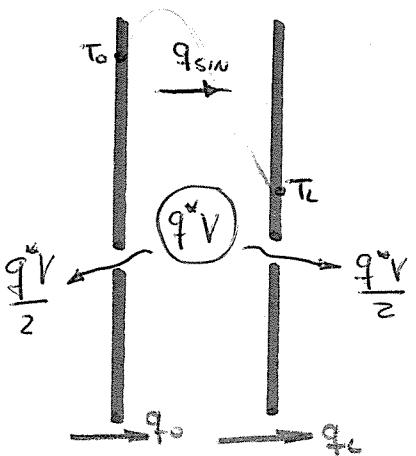
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{q}}{A}_0 = K \frac{T_0 - T_L}{L} - \frac{q^* L}{2} \\ \frac{\dot{q}}{A}_L = K \frac{T_0 - T_L}{L} + \frac{q^* L}{2} \end{array} \right.$$

La resta de ambas expresiones da el balance de energía del conjunto:

$$\frac{\dot{q}}{A}_L - \frac{\dot{q}}{A}_0 = \frac{q^* L}{2} - \left(-\frac{q^* L}{2}\right) = q^* L; \quad \frac{\dot{q}}{A}_L = \frac{\dot{q}}{A}_0 + q^* L; \quad \dot{q}_L = \dot{q}_0 + q^* A L$$

$$\dot{q}_L = \dot{q}_0 + q^* V_0$$

•  $q^* > 0$  y  $T_0 > T_L$



RECORDAR

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q}{A}|_L = K \frac{T_0 - T_L}{L} + \frac{q^* L}{2} \\ \frac{q}{A}|_0 = K \frac{T_0 - T_L}{L} - \frac{q^* L}{2} \end{array} \right.$$

Javorece  
Indusbox  
com

$\frac{q}{A}|_{\text{sin}}$  se opone a la fuente  
en 0

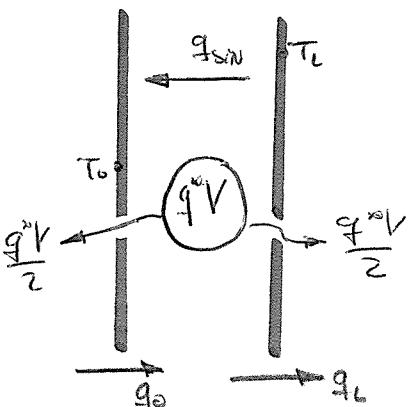
$$q_0 \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\text{sin}} < \frac{q^* V}{2} \rightarrow q_0 < 0 \\ q_{\text{sin}} > \frac{q^* V}{2} \rightarrow q_0 > 0 \end{array} \right.$$

$$q_L > 0$$

•  $q^* > 0$  y  $T_0 < T_L$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q}{A}|_L = K \frac{T_0 - T_L}{L} + \frac{q^* L}{2} \\ \frac{q}{A}|_0 = K \frac{T_0 - T_L}{L} - \frac{q^* L}{2} \end{array} \right.$$

$q_{\text{sin}}$  de opone a la fuente en 0  
 $q_{\text{sin}}$  favorece a la fuente en 0

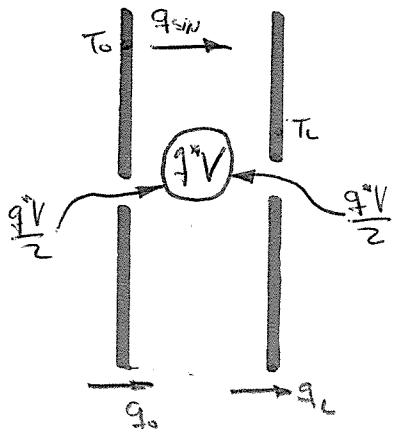


$$q_0 < 0$$

$$q_L \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\text{sin}} < \frac{q^* V}{2} \rightarrow q_L > 0 \\ q_{\text{sin}} > \frac{q^* V}{2} \rightarrow q_L < 0 \end{array} \right.$$

NOTA! Siempre tomaremos  $q_0$  y  $q_L$  en sentido positivo de avante de  $x > 0$ .

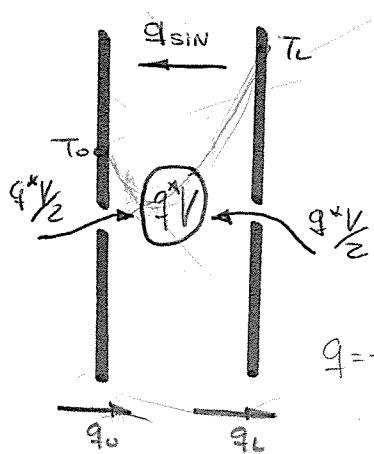
•  $q^* < 0$  y  $T_0 > T_L$



$$q_0 > 0$$

$$q_L \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\text{sin}} > \frac{q^* V}{2} \rightarrow q_L > 0 \\ q_{\text{sin}} < \frac{q^* V}{2} \rightarrow q_L < 0 \end{array} \right.$$

•  $q^* < 0$  y  $T_0 < T_L$   $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q^* V}{K} x + C_1 = 0, x =$

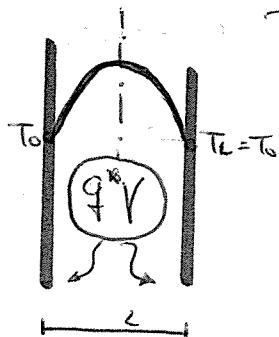


$$q_L < 0$$

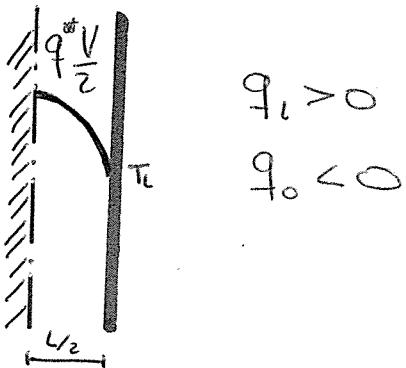
$$q_0 \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{sin} > \frac{q^* V}{2} \rightarrow q_0 < 0 \\ q_{sin} < \frac{q^* V}{2} \rightarrow q_0 > 0 \end{array} \right.$$

$$q = -K \frac{\partial T}{\partial x} = -K \left( -\frac{q^* V}{K} x + C_1 \right) = q^* x - KC_1$$

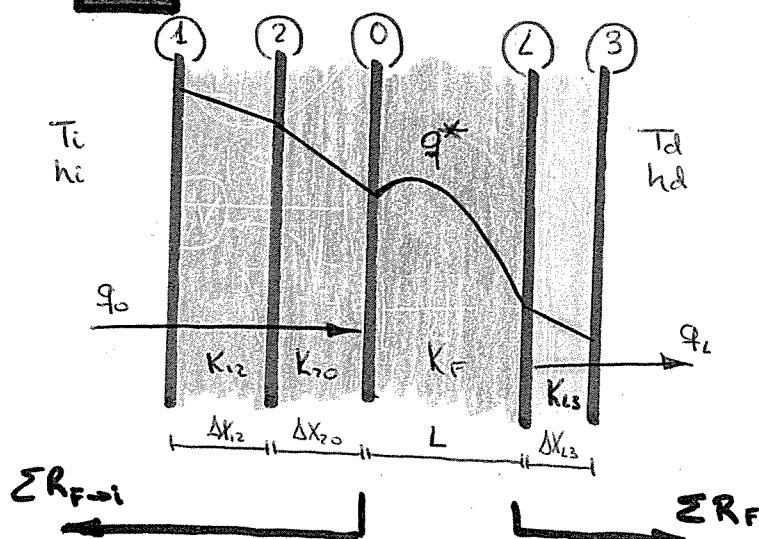
•  $T_0 = T_L$



Problema simétrico  $\rightarrow q_{sin} = 0$  equivalente al caso adiabático de la figura



## 2 PARED MULTICAPA CON FUENTE



$$\frac{q_0}{A} = U(T_i - T_a) - q^* L U \left( \frac{R_F}{2} + \sum R_{F,i} \right)$$

$$\frac{q_L}{A} = U(T_i - T_d) + q^* L U \left( \frac{R_F}{2} + \sum R_{F,i} \right)$$

Donde:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta X_{i2}}{K_{i2}} + \frac{\Delta X_{20}}{K_{20}} + \frac{L}{K_F} + \frac{\Delta X_{23}}{K_{23}} + \frac{1}{h_d}}$$

$$R_{F/2} = \frac{\Delta X_{0L}}{2 K_{0L}} = \frac{L}{2 K_F}$$

$$\sum R_{F,i} = \frac{\Delta X_{i2}}{K_{i2}} + \frac{1}{h_i}, \sum R_{F,i} = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\Delta X_{i2}}{K_{i2}} + \frac{\Delta X_{23}}{K_{23}}$$

Libro de problemas (3)

→ Se tiene un congelador cuyas paredes poseen las capas de la figura:

| $\frac{q_e}{A}$                 | COCINA            | $T_e = 30^\circ\text{C}$ ; $h_e = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ | $\Delta x (\text{mm})$ | $K (\text{W/m}^\circ\text{C})$ |
|---------------------------------|-------------------|---|------------------------|--------------------------------|
|                                 | PROTECTOR         |   | 2,5                    | 0,035                          |
|                                 | ALISANTE          |   | 95                     | 0,025                          |
|                                 | PROTECTOR         |   | 2,5                    | 0,035                          |
| $q^* = -3260 \text{ W/m}^2$     |                   |   | ?                      | 30                             |
|                                 | PROTECTOR (Chapa) |   | 30                     | 2,5                            |
| $T_i = -30^\circ\text{C}$       | CONGELADOR        | $T_i = -20^\circ\text{C}$                                   |                        |                                |
| $h_i = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$ |                   |   |                        |                                |

Se pide: 1) Espejo que debe tener la fuente para conseguir  $-30^\circ\text{C}$  en la superficie interior del congelador

2) Temperatura en la superficie exterior

① Queremos que  $T_i = -30^\circ\text{C}$ . Calculamos  $\frac{q_e}{A}$  aplicando la ley de Newton entre las temperaturas conocidas  $T_i$  y  $T_e$

$$\frac{q_e}{A} = h_i \cdot (T_i - T_e) = 50 \text{ W/m}^2$$

Ahora, para hallar el espejo de la fuente vamos a aplicar la siguiente expresión:

$$\frac{q_e}{A} = U(T_i - T_e) - q^* L u \left( \frac{R_F}{2} + \sum R_{F \rightarrow \text{exterior}} \right)$$

$$\left\{ U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x_{10}}{K_{10}} + \frac{L}{K_F} + \frac{\Delta x_{12}}{K_{12}} + \frac{\Delta x_{23}}{K_{23}} + \frac{\Delta x_{34}}{K_{34}} + \frac{1}{h_e}} = \frac{1}{4,2549 + 0,03 L} \quad \left( \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right)$$

$$T_i - T_e = -20 - 30 = -50 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$q^* = -3260 \text{ W/m}^2$$

$$R_F/2 = \frac{L}{2 \cdot 30} = \frac{1}{60} L \text{ (m)}$$

$$\sum R_{F \rightarrow \text{ext}} = 4,0429 \frac{\text{C m}^2}{\text{W}}$$

Sustituyendo estos valores y despejando  $L$ , obtenemos

$$L = 0,02 \text{ m}$$

② Ahora queremos calcular la temperatura en la superficie exterior, para ello, aplicando la ley de Newton para la transferencia de calor por convección

$$\frac{q_L}{A} = h_e (T_u - T_e); \quad T_u = T_e + \frac{q_L}{A} \frac{1}{h_e}$$

Necesitamos calcular  $\frac{q_L}{A}$ :  $\frac{q_L}{A} = \frac{q^o}{A} + q^* L = 50 + (-3260) \cdot 0,02 = -15,2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$   
 Este calor es, por tanto entrante a la fuente y  $T_u$  nos queda:

$$T_u = 30 - 15,2 \cdot \frac{1}{10} = \underline{\underline{28,5^\circ\text{C}}}$$



# Conducción Unidimensional en régimen permanente.

## Superficies extendidas

### 1 INTRODUCCIÓN ALETAS

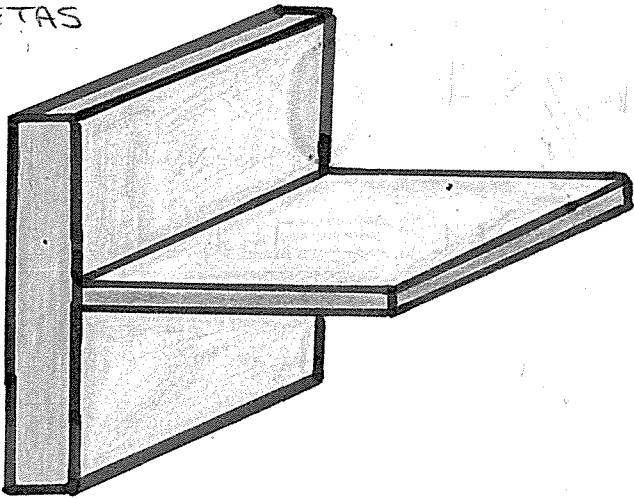
De acuerdo con la ley de Newton para incrementar el calor disipado por convección podemos aumentar la superficie de intercambio de calor. Aparecen las superficies adicionales o aletas.

La resolución de un problema con superficies adicionales pasa por resolver la ecuación de difusión de calor en el seno del material de la aleta y considerar la convección como condición de contorno. Para ello se considerará una geometría unidimensional correspondiente a una aleta de cierta longitud y espesor reducido frente a aquello.

#### ● TIPOS DE ALETAS

##### ■ Rectas

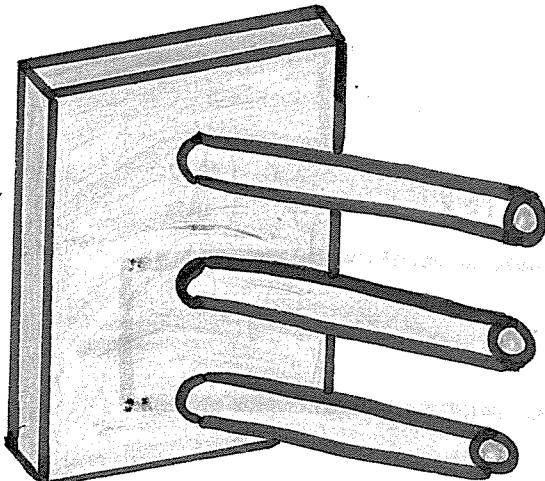
De espesor uniforme



También triangulares, trapezoidales, de sección parabólica,...

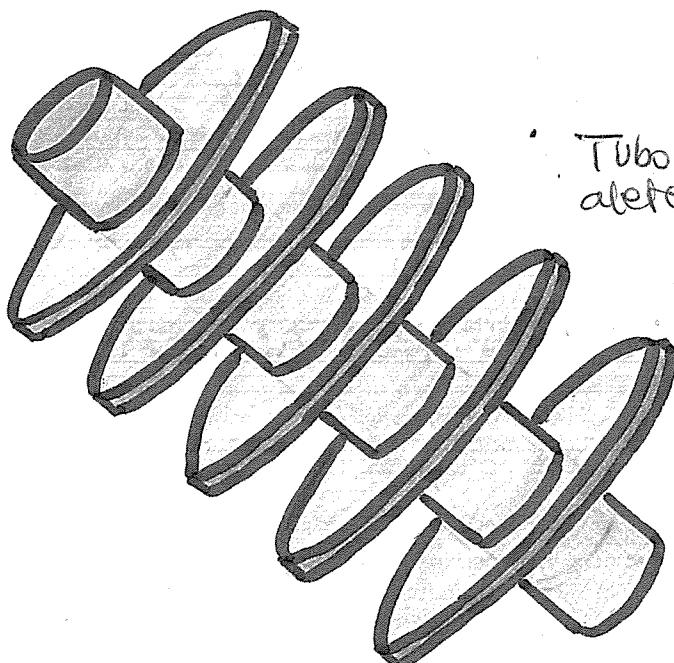
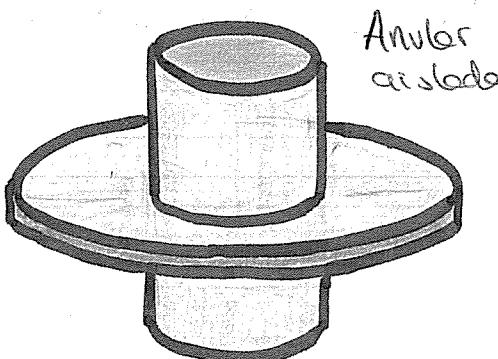
##### ■ De aguja

Cilíndricos

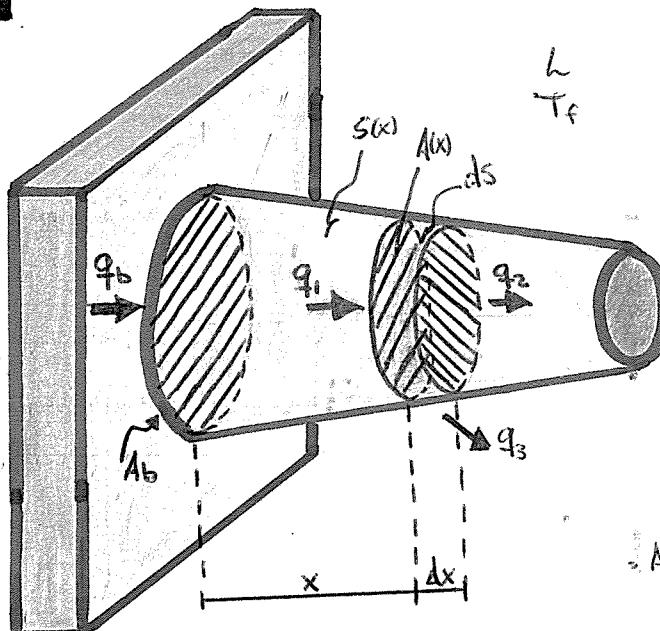


También troncocónicas, de sección parabólica,...

- Anulares



## 2 ECUACIÓN GENERAL DE LAS ALETAS



Por balance energético:

$$q_1 = q_2 + q_3$$

• Taylor, desarrollos:

$$q_2 = q_1 + \frac{d q_1}{dx} dx + \frac{1}{2!} \frac{d^2 q_1}{dx^2} (dx)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 q_1}{dx^3} (dx)^3 + \dots$$

Sustituyendo:

$$\frac{d q_1}{dx} dx + \frac{1}{2!} \frac{d^2 q_1}{dx^2} (dx)^2 + q_3 = 0$$

$$\begin{aligned} &\text{Aplicando} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Newton } q = h A \Delta T \\ \text{Fourier } q = -K \frac{dT}{dx} \end{array} \right. \\ & \text{Hacemos tender } dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

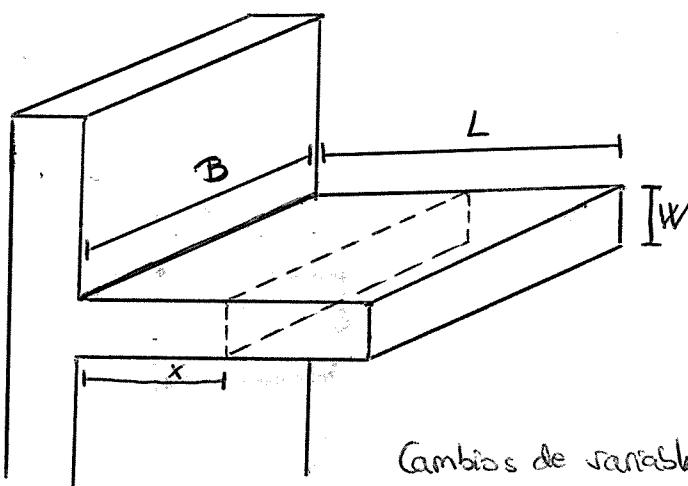
$$\frac{d}{dx} \left( -KA \frac{dT}{dx} \right) dx + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left( -KA \frac{dT}{dx} \right) (dx)^2 + h ds (T - T_f) = 0 ;$$

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left( -KA \frac{dT}{dx} \right) + \frac{1}{A 2!} \frac{d^2}{dx^2} \left( -KA \frac{dT}{dx} \right) dx + \frac{h}{A} \frac{ds}{dx} (T - T_f) = 0 ;$$

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left( -KA \frac{dT}{dx} \right) + \frac{h ds}{A dx} (T - T_f) = 0 ; \quad -\frac{K}{A} \left( \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} + A \frac{d^2 T}{dx^2} \right) + \frac{h ds}{A dx} (T - T_f) = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \frac{dT}{dx} + \frac{h}{K A} \frac{ds}{dx} (T - T_f) = 0$$

## ● Caso aleta recta de espesor uniforme



$$S = 2Bx + 2Wx = C \cdot x$$

$$A = W \cdot B = \text{cte}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \frac{dT}{dx} - \frac{h}{K} \frac{1}{A} \frac{ds}{dx} (T - T_f) = 0$$

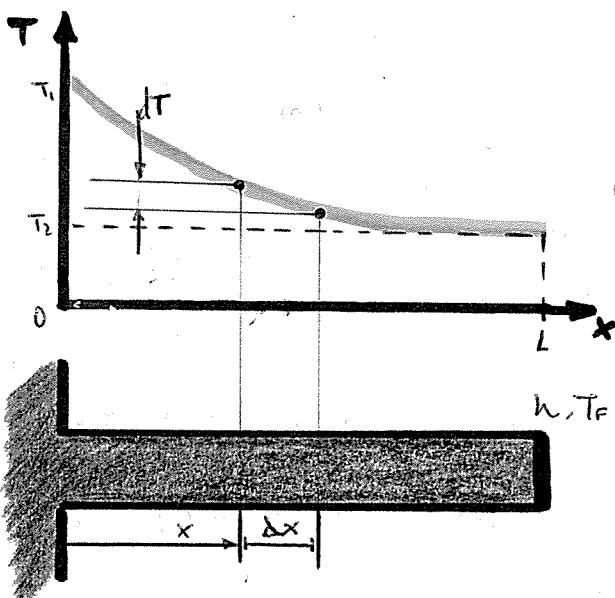
$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h}{K} \frac{C}{A} (T - T_f) = 0$$

Cambios de variable

$$\begin{cases} \theta = 1 - \frac{T_f}{T} \\ \alpha = \sqrt{\frac{h}{KA}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0 \quad \theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$

Para hallar los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$  es necesario imponer las condiciones de contorno.



Consideraremos las siguientes condiciones de contorno

1) Convección en el extremo

$$x=0 \rightarrow T = T_b$$

$$x=L \rightarrow -K \frac{dT}{dx} = h(T - T_f)$$

2) Adiabático en el extremo

$$x=0 \rightarrow T = T_b$$

$$x=L \rightarrow \frac{dT}{dx} = 0$$

3) Temperatura fija en el extremo

$$x=0 \rightarrow T = T_b$$

$$x=L \rightarrow T = T_f$$

4) Aleta infinita

$$x=0 \rightarrow T = T_b$$

$$x=L \rightarrow T = T_f$$

CASO 1: Convección en el extremo

$$x=0 \rightarrow T=T_b \Rightarrow x=0 \rightarrow \Theta=\Theta_b=T_b-T_f$$

$$x=L \rightarrow -K \frac{dT}{dx} = h_e(T-T_f) \Rightarrow x=L \rightarrow \frac{d\Theta}{dx} = -\frac{h_e}{K} \Theta$$

El perfil de temperaturas queda

$$\frac{\Theta}{\Theta_b} = \frac{T-T_f}{T_b-T_f} = \frac{Ch[m(L-x)] + H Sh[m(L-x)]}{Ch(mL) + H Sh(mL)} , \text{ con } \frac{H}{Ch} = \frac{h_e}{K m}$$

$$q = -KA \frac{dT}{dx} \Rightarrow q|_{x=L} = KmA \Theta_b \frac{Sh[mL] + H Ch[mL]}{(Ch[mL] + H Sh[mL])}$$

CASO 2: Extremo adiabático

$$\frac{\Theta}{\Theta_b} = \frac{Ch[m(L-x)]}{Ch(mL)} , q_{fin} = KmA \Theta_b + h(mL)$$

Podremos aproximar una aleta en caso 1 a uno de caso 2 bajo las siguientes hipótesis.

$$h = h_e \quad L_c = L + \frac{1}{2} W \quad (\text{largo corregido}) \Rightarrow q_{fin} = KmA \Theta_b + h(mL_c)$$

$$hW/K < 0,0625$$

CASO 3: Temperatura fija en el extremo

$$\Theta = \frac{\Theta_L Sh[mx] + \Theta_b Sh[m(L-x)]}{Sh(mL)}$$

$$q_{fin} = KmA \frac{\Theta_b ch(mL) - \Theta_L}{Sh(mL)}$$

CASO 4: Aleta infinita

$$\Theta = \Theta_b e^{-mx}$$

$$q_{fin} = KmA \Theta_b$$

## ● Parámetro $ML$

Comparando las expresiones correspondientes a los condiciones de extremo adiabático y aleta infinita se predice comprobar que:

La potencia disipada sería la misma si:  $th(ML) = 1$

Aprox.  $ML > 2,65$

El valor de la temperatura en el extremo sería el mismo

Si:  $e^{-mL} = \cosh^{-1}(mL)$ . Aprox.  $ML > 4,60$

Por tanto:

- Si  $ML > 2,65$  la aleta puede considerarse infinita a efectos del cálculo de la potencia disipada
- Si  $ML > 4,60$  la aleta se puede considerar infinita ( $T(x=L) = T_{Final}$ )
- $ML > 3$  aletas poco eficientes (gran parte de la aleta es improductiva)

Ver aletas de aguja y anulares 3.4 - 3.8 y 3.9 Cuaderno Beigel

## ● Efecto de aumento de longitud en aletas

La condición para que el calor disipado por la aleta aumente con la longitud es que  $th^2 > 1$

Para aletas rectas de espesor uniforme con  $h = h e^{x/L}$   $\frac{hW}{2K} < 1$

## ● RATIO

Compararemos el calor disipado a través de una aleta y el disipado por el mismo cuerpo sin aleta a través de la base o superficie primaria a la temperatura  $T_b$

El cociente es el ratio

$$(\text{aleta infinita}): q_{fin} = \sqrt{K C h A} \Theta_b$$

$$(\text{sin aleta}): q_{sin} = h A \Theta_b$$

$$\text{Ratio} = \left( \frac{K C}{h A} \right)^{1/2}$$

- $K$  debe ser alta (materiales metálicos como Cu, Al)
- El cociente  $C/A$  ha de ser elevado (aletas delgadas)
- $h$  pequeños (convección libre)

(en. Ratio  $> 2$ )

• Recordar  
 $G = 2B + 2W$  (perímetro)

# 3. EFECTIVIDAD

## • De una única aleta

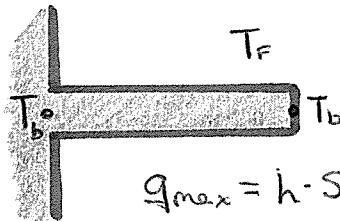
Se define la efectividad de una aleta como el cociente entre el calor disipado por la misma y el que disiparía en el caso de que toda la superficie de la aleta estuviese a la temperatura de la base

$$K = \frac{q_{\text{fin}}}{q_{\text{max}}} \in [0, 1]$$

adimensional

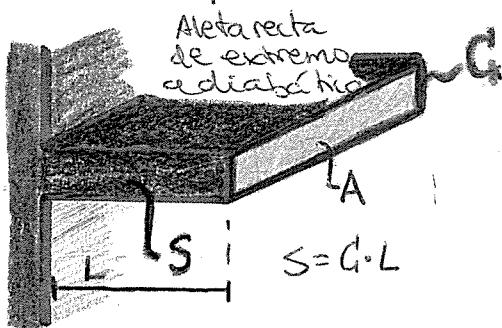
$$q_{\text{fin}} = h \cdot S \cdot (T_b - T_f) \cdot K$$

• Para  $q_{\text{max}}$  la situación sería:



$$q_{\text{max}} = h \cdot S \underbrace{(T_b - T_f)}_{\Theta_b}$$

$$K = \frac{q_{\text{fin}}}{h \cdot S \cdot \Theta_b} = \frac{K \cdot m \cdot A \cdot \Theta_b \cdot th(mL)}{h \cdot S \cdot \Theta_b} = \frac{\sqrt{\frac{hC}{KA}} KA \cdot th(mL)}{h \cdot S} = \frac{\sqrt{KA \cdot hC} \cdot th(mL)}{h \cdot GL} =$$



**ALETA RECTA**

$$K = \frac{th(mL)}{mL}$$

$$m = \sqrt{\frac{hC}{KA}}$$

La efectividad de una aleta disminuye a medida que la longitud del mejor.

Esta expresión también puede utilizarse para el caso de aleta recta con extremo abierto, corrigiendo la longitud de la aleta y en el supuesto de que  $h = h_e$

$$K = \frac{th(mL_c)}{mL_c}$$

con

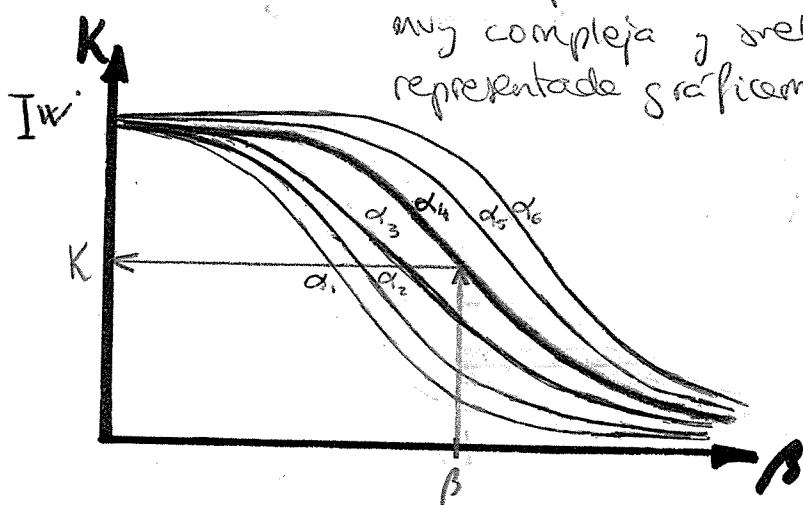
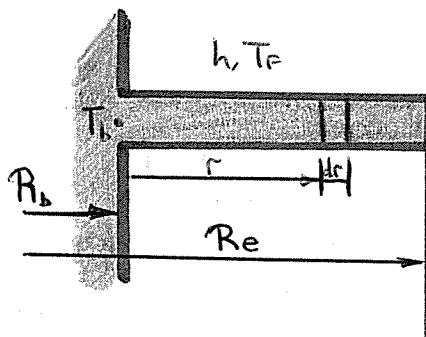
$$L_c = L + \frac{1}{2} w \quad (\text{long. corregida para aleta de espesor } w)$$

$$L_c = L + \frac{1}{4} D \quad (\text{long. corregida para aguja de diámetro } D)$$

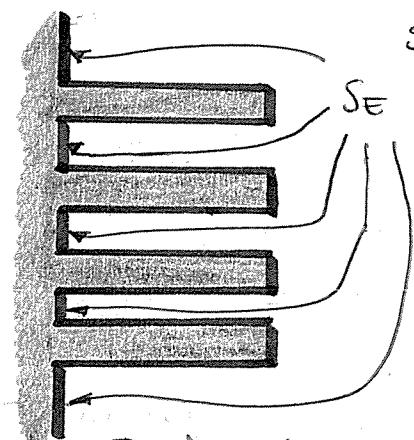
Para el caso de aletas anulares se define la efectividad en función de dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  tal que  $K = f(\alpha, \beta)$

$$\alpha = \frac{R_b}{Re}$$

$$\beta = n Re = Re \sqrt{\frac{2K}{K_w}}$$



### Estructuras aleteadas - eficiencia global



Ses: **S<sub>E</sub>**: Superficie expuesta al fluido de todo la estructura aleteada

S<sub>A</sub>: Superficie expuesta al fluido de ~~una sola~~ aleta

N: U<sup>total</sup> de aletas en la estructura aleteada

S<sub>A</sub>: Superficie expuesta al fluido de todos los aletas

S<sub>E</sub>: Superficie expuesta al fluido de la estructura libre de aletas.

$$\text{De forma que } S_A = N S_{A,i}; \quad S_E = S_E + S_A$$

La eficiencia global o total de una estructura aleteada se define como el calor que realmente intercambia el dispositivo con el fluido circundante y el máximo que podría intercambiar

$$\eta = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{(h_e S_E \Delta T_b + N h_e S_{A,i} \Delta T_b) K}{h_e S_E \Delta T_b}$$

$h_e$ : Coef. de película superficie exterior - fluido circundante

$\Delta T_b$ : Diferencia de temperaturas entre la base de la aleta y el fluido

$K$ : Efectividad de aleta simple

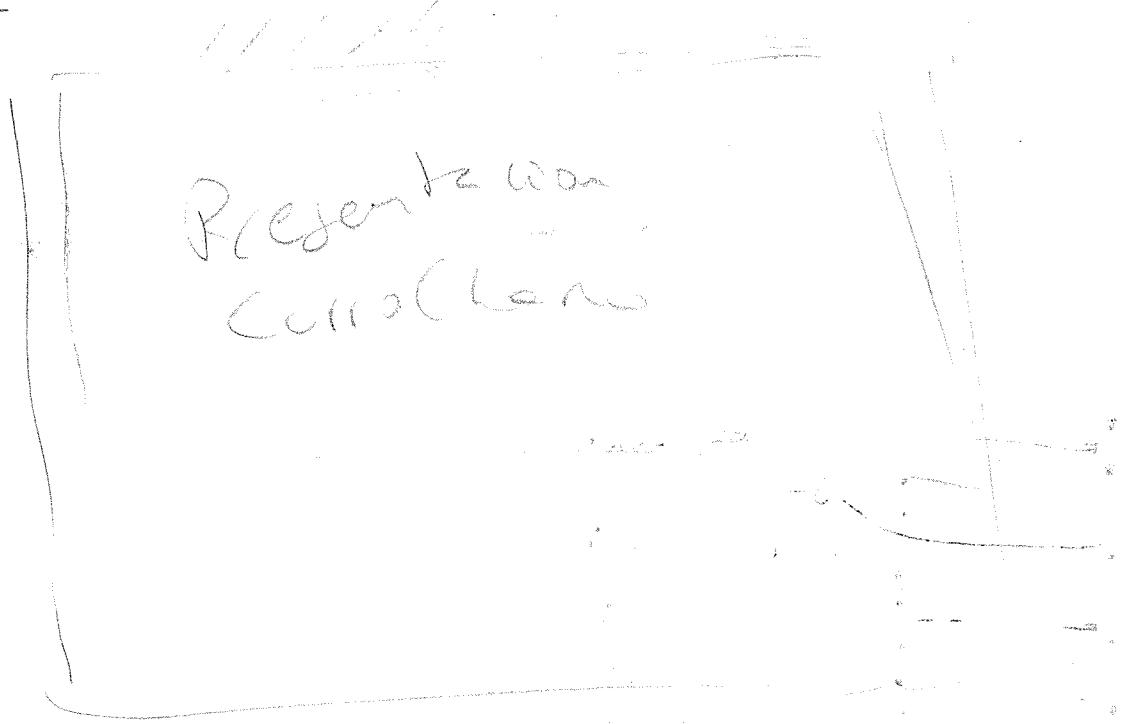
Desarrollando la expresión, obtenemos:

$$\eta = \frac{h_e S_e \theta_B + N h_e S_n \theta_B K}{h_e S_{ea} \theta_B} = \frac{S_e + S_n K}{S_{ea}} = \frac{(S_{ea} - S_n) + S_n K}{S_{ea}}$$

$$\eta = 1 - \frac{S_n (1-K)}{S_{ea}}$$

Eficiencia global y efectividad están relacionadas

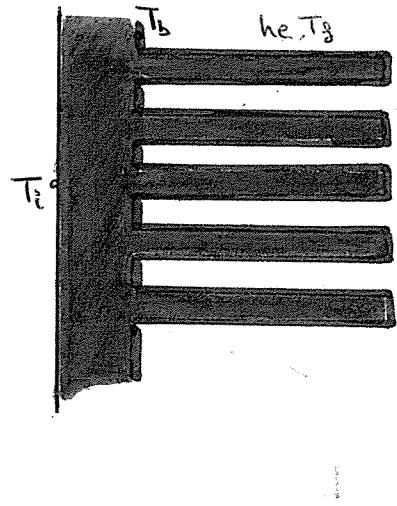
En la gráfica siguiente se representa dicha relación en función del ratio  $S_n / S_{ea}$  para diferentes valores de la efectividad  $K$  de la aleta



Conocida  $\eta$ , el calor realmente intercambiado puede componerse mediante la expresión  $q = \eta q_{max} = \eta h_e S_{ea} \theta_B$

que resulta útil cuando se conoce la temperatura de la base. Sin embargo lo habitual es que se conozca una temperatura interior determinada, y no la temperatura de la base. En este caso hay que encontrar una vía alternativa para el cálculo del calor intercambiado por la estructura aletada.

## 4 CALOR INTERCAMBIADO POR UNA ESTRUCTURA ALETEADA



Sea una temperatura interior conocida de la estructura aleteada,  $T_i$ .

A partir de las definiciones de coeficiente global de transmisión de calor y de resistencia térmica total:

$$\left. \begin{aligned} q &= U S_{EA} (T_i - T_g) \\ \frac{T_i - T_g}{q} &= \frac{1}{R_{TOT}} \end{aligned} \right\} U = \frac{1}{R_{TOT} S_{EA}}$$

La resistencia térmica total comprende todas las resistencias entre la temperatura interior conocida y la temperatura del fluido,udiéndose de la siguiente forma:  $R_{TOT} = \sum R_{i \rightarrow b} + \sum R_{b \rightarrow j}$

$$\text{La resistencia base-fluido exterior es: } R_{b \rightarrow j} = \frac{T_b - T_g}{q} = \frac{\theta_b}{q} \quad \left. \begin{aligned} q &= \eta h_e S_{EA} \theta_b \\ &= \frac{1}{\eta h_e S_{EA}} \end{aligned} \right.$$

Con lo que el coeficiente global queda

$$U = \frac{1}{R_{TOT} S_{EA}} = \frac{1}{(\sum R_{i \rightarrow b} + R_{b \rightarrow j}) S_{EA}} = \frac{1}{S_{EA} \sum R_{i \rightarrow b} + S_{EA} R_{b \rightarrow j}} = \frac{1}{S_{EA} \sum R_{i \rightarrow b} + \frac{1}{\eta h_e S_{EA}}} =$$

$$U = \frac{1}{S_{EA} \sum R_{i \rightarrow b} + \frac{1}{(1 - \frac{S_A}{S_{EA}}(1-K)) h_e}}$$

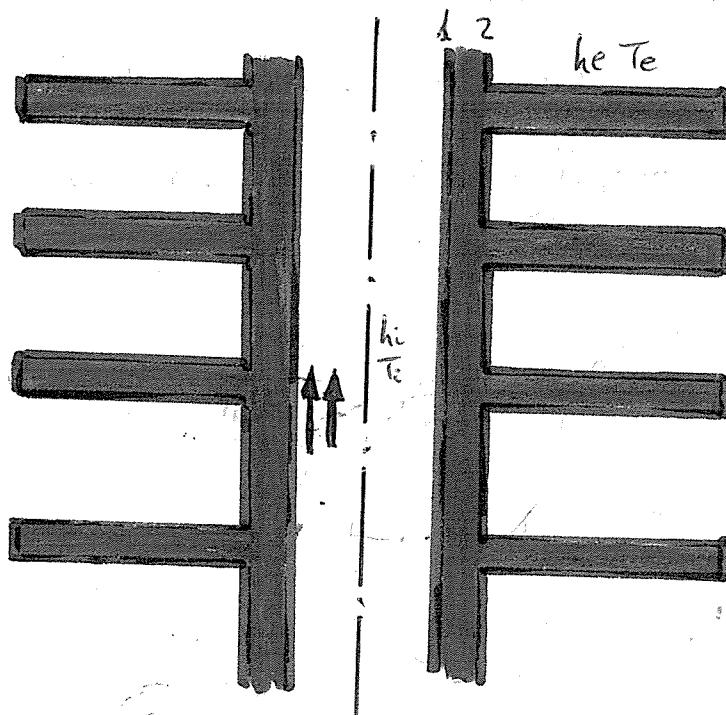
y el calor realmente disipado es:

$$q = U S_{EA} (T_i - T_j) = \frac{T_i - T_j}{\sum R_{i \rightarrow b} + \frac{1}{(1 - \frac{S_A}{S_{EA}}(1-K)) S_{EA} h_e}}$$

$$q = \frac{T_i - T_j}{\sum R_{i \rightarrow b} + \frac{1}{h_e (S_{EA} - S_A(1-K))}}$$

Expresión que permite calcular el calor sin necesidad de conocer la temperatura de la base.

## Caso particular: TUBO ALETEADO



En este caso lo habitual es conocer la temperatura  $T_e$  del fluido que circula por el interior del tubo

$$\frac{1}{ER_{t \rightarrow s}} = \frac{1}{h_i S_i} + \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi K_{12} H}$$

Siendo  $S_i$  = Sup. interior banada por el fluido interior a  $T_i$ .

$H$  = Altura del tubo aleteado

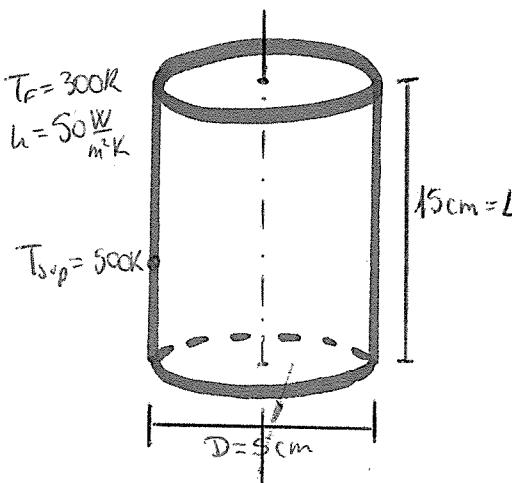
Entonces:

$$q = \frac{T_i - T_f}{\frac{1}{h_i S_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi K_{12} H} + \frac{1}{h [S_{EA} - S_A(1-K)]}}$$

Colección ④ El cilindro del motor de una motocicleta está construido con una aleación de aluminio y tiene 15cm de altura y 5cm de diámetro exterior. En condiciones de operación nominal, la superficie exterior del cilindro está a 300K en un ambiente a 300K con un coeficiente de convección de 50 W/m²K. Para mejorar la disipación térmica se añaden aletas axiales de espesor constante.

¿Cuál es el incremento de transferencia de calor que implica la adición de 5 aletas de 6 mm de espesor y 9 cm de diámetro exterior si se instalan sobre el cilindro con igual espaciamiento y sin resistencia de contacto?

DATOS:  $K_{Aluminio} (400K) = 186 \text{ W/mK}$

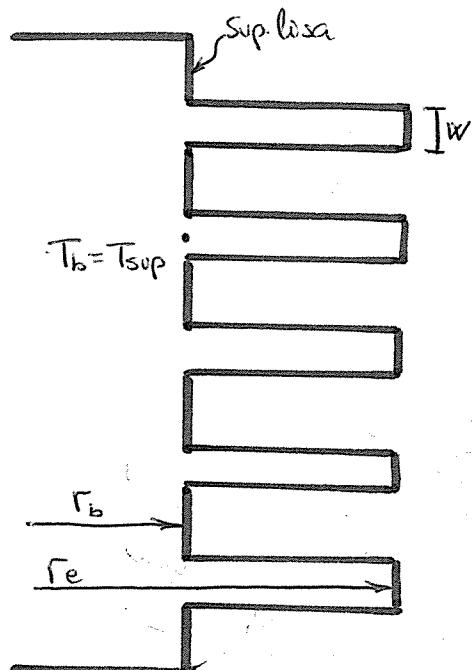


(Calculamos el calor transferido por el cilindro sin aletas (Ley de Newton)) Considerando transmisión de calor unidimensional

$$q = h S \cdot (T_{top} - T_F) = h \cdot 2\pi \frac{D}{2} L \cdot (T_{top} - T_F)$$

solo en la sup. lateral !!

$$q_{sin aletas} = 235,6 \text{ W}$$



Con las aletas el calor disipado será:

$$q = q_{\text{Liso}} + q_{\text{ALETAS}}$$

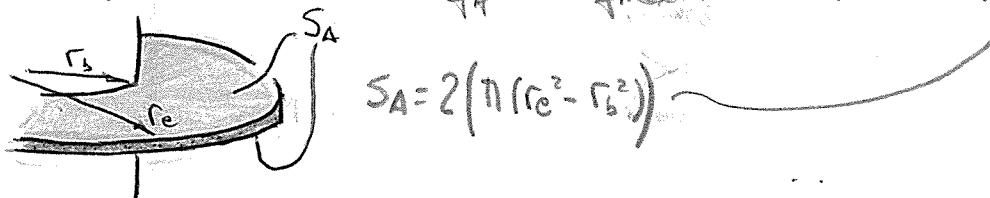
$$\bullet q_{\text{Liso}} = h \cdot S_{\text{lisa}} (T_{\text{sup}} - T_f) = h (\pi D L - \pi D s w) (T_{\text{sup}} - T_f)$$

$$q_{\text{Liso}} = h \pi D (L - 5w) (T_{\text{sup}} - T_f) = \underline{\underline{188,5 \text{ W}}}$$

$$\bullet q_{\text{ALETAS}} = N q_A$$

Necesitamos calcular el calor que disipa una aleta anular

$$w = 6 \text{ mm}; r_b = 2,5 \text{ cm}; r_e = 4,5 \text{ cm} \quad q_A = K q_{\text{max}} = K h S_A (T_b - T_f) = 28 \pi K$$

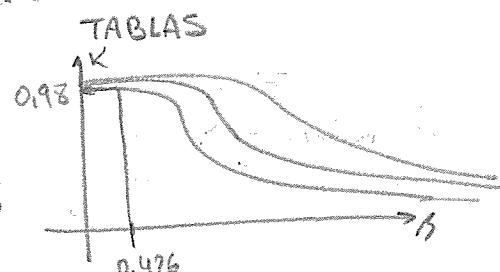


$$S_A = 2(\pi(r_e^2 - r_b^2))$$

Calculemos la efectividad  $K$  de una aleta anular

$$K = f(\alpha, \beta) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{r_b}{r_e} = \frac{2,5}{4,5} = 0,5$$

$$\beta = \text{Nr} = \sqrt{\frac{2h}{Kw}} \quad \text{Nr} = 0,426$$



$K \approx 0,98$ ; con este valor

$$q_A = 28 \pi \cdot 0,98 \quad \text{y} \quad q_{\text{ALETAS}} = 5 \cdot 28 \pi \cdot 0,98 \text{ W}$$

Por tanto:  $q = 619,5 \text{ W}$  y el incremento de transferencia de calor

$$\Delta q = 619,5 - 235,6 = 383,9 \text{ W} \rightarrow 163 \%$$

→ cuando en el exterior la temperatura sea de  $-5^{\circ}\text{C}$

colección 45

Se quiere instalar un tubo aletado en una habitación con sistema de calefacción que garantice una temperatura interior de  $25^{\circ}\text{C}$ . La habitación tiene una pared exterior con una superficie de  $12\text{ m}^2$  de muro y  $2\text{ m}^2$  de ventana con doble cristal de  $4\text{ mm}$  de espesor. El muro consta de  $2\text{ cm}$  de yeso,  $15\text{ cm}$  de ladrillo hueco,  $5\text{ cm}$  de manta de fibra de vidrio de densidad  $24\text{ Kg/m}^3$  y  $15\text{ cm}$  de ladrillo visto. Para el interior del tubo aletado circula agua caliente a  $70^{\circ}\text{C}$  con un coeficiente de calor de  $1400\text{ W/m}^2\text{ °C}$ . El tubo de  $3\text{ cm}$  de diámetro interior y  $1\text{ mm}$  de espesor fenderá por restringir el espesor, una longitud máxima de  $1\text{ m}$ . Las aletas de  $10\text{ cm}$  de diámetro exterior y  $1\text{ mm}$  de espesor serán, al igual que el tubo, de acero al carbono, y irán soldadas a éste con resistencia de contacto nula. Calcular el nº de aletas anulares requeridas.

$$T_e = -5^{\circ}\text{C}, h_e = 25 \quad A_m = 12\text{ m}^2$$

DATOS:

$$h_{ext\ parede} = 25 \text{ W/m}^2\text{ °C}$$

$$h_{int\ parede} = 10 \text{ W/m}^2\text{ °C}$$

$$h_{ext\ tubo} = 8 \text{ W/m}^2\text{ °C}$$

$$K_{ladrillohueco} = 0,69 \text{ W/m}\text{ °C}$$

$$K_{ladrillovisto} = 1,32 \text{ W/m}\text{ °C}$$

$$K_{yeso} = 0,48 \text{ W/m}\text{ °C}$$

$$K_{fibra} = 0,76 \text{ W/m}\text{ °C}$$

$$K_{acero} = 43 \text{ W/m}\text{ °C}$$

NOTA: Suponer que la habitación no intercambia calor con el resto del edificio y que todo transmisor de calor se realiza por la fachada exterior.

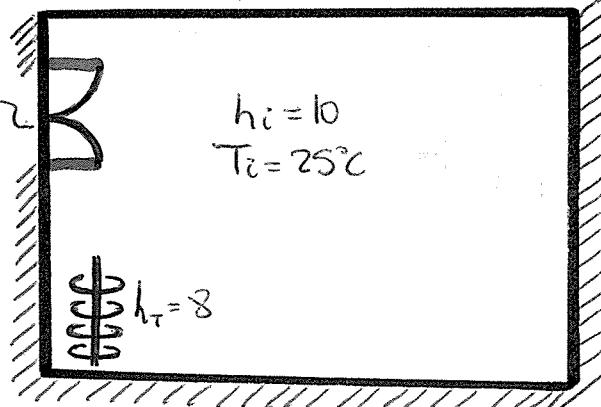
$$q_{tot} = q_m + q_v$$

• Pérdidas en el muro ( $q_m$ )

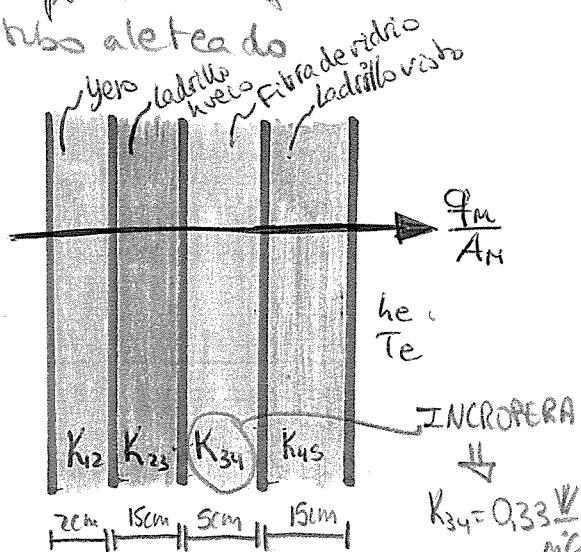
$$\frac{q_m}{A_m} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta X_{12}}{K_{12}} + \frac{\Delta X_{23}}{K_{23}} + \frac{\Delta X_{34}}{K_{34}} + \frac{\Delta X_{45}}{K_{45}} + \frac{1}{h_e}}$$

$$A_m = 12 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow q_m = 177,5 \text{ W}$$

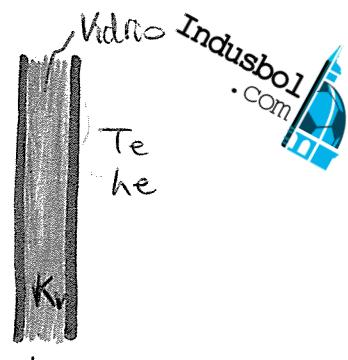


Vamos a calcular las pérdidas de calor de la habitación (muro y ventana) que tendrán que ser compensados por el calor que aporte el tubo aletado.

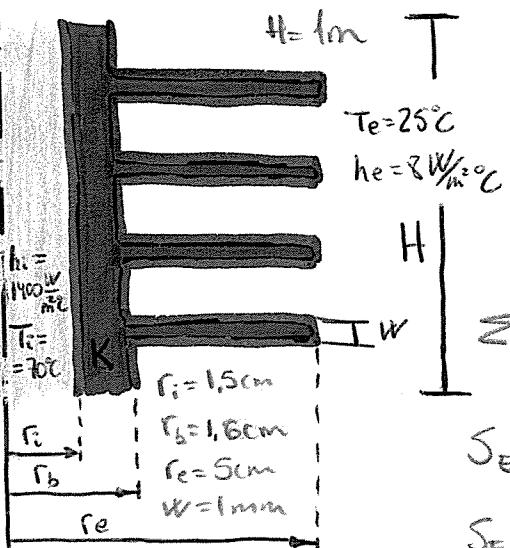


• Pérdidas en la rentaria

$$q_v = A_v \left( \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta X_v}{K_v} + \frac{1}{h_e}} \right) = 413,05 \text{ W}$$



Por tanto:  $q_{\text{TOTAL}} = 590,55 \text{ W}$ , que será el calor que tendrá que aportar el tubo aletado para mantener la habitación a  $25^\circ\text{C}$



Calcularmos el calor que disipa el tubo

$$q_{\text{TUBO ALET}} = \frac{T_i - T_e}{\sum R_{i-b} + \frac{1}{h_e (S_{EA} - S_A(1-K))}} \quad (*)$$

$$\sum R_{i-b} = \frac{1}{h_i S_i} + \frac{\ln(r_b/r_i)}{2\pi K H}, \quad S_i = 2\pi r_i H$$

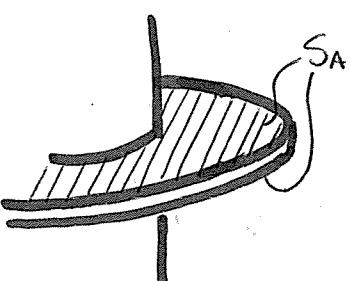
$$S_{EA} = S_E + S_A = S_E + NS_{SA}$$

$$S_E = 2\pi r_b (H - NW)$$

$$S_A = NS_{SA} = N \cdot 2(\pi(r_e^2 - r_b^2))$$

GRÁFICO (Pág 42)

$$K = f(\gamma, \beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{r_b}{r_e} = 0,31 \\ \beta = r_e \sqrt{\frac{2 h_e}{K W}} = 0,96 \end{array} \right\} \quad K \approx 0,8$$



Sustituyendo estas expresiones en (\*) obtenemos, para  $q_{\text{TUBO ALET}} = 590,55$

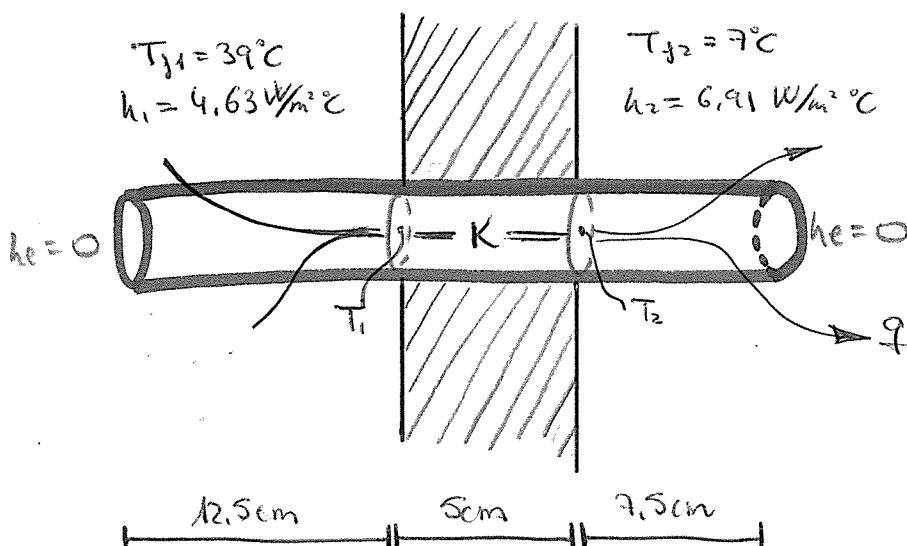
$$590,55 = \frac{1}{\frac{1}{1400 \cdot 2\pi 0,015 \cdot 1} + \frac{\ln(1,6/1,5)}{2\pi 43 \cdot 1}} + \frac{1}{\frac{8 \left( 2\pi \cdot 0,016 \cdot (4 \cdot N \cdot 10^{-3}) + 2\pi (0,05^2 - 0,016^2) \right) N (1 - (1 - 0,8))}{S_E}} + \frac{0,8}{S_A}$$

Despejando  $N$  obtenemos

$$N = 154,5 \approx 155 \text{ aletas}$$

A Corrochano le de 139 pero después de 20.000 intentos súper.

COLECCIÓN 40 Una barra metida de sección circular de teflón ( $K = 0.35 \frac{W}{mK}$ ) tiene 25 cm de longitud y 0,36 cm de diámetro y está expuesta a las condiciones térmicas de funcionamiento en régimen permanente indicadas en la figura, despreciando la convección en los extremos. Culgar, aplicando la teoría de aletas, las temperaturas en los puntos 1 y 2 de la barra indicados en la figura.



NOTA: Los medios 1 y 2 están perfectamente separados de la sup. adiabática

Por teoría de aletas con extremo adiabático

$$\left. \begin{aligned} -q &= K m_1 A_1 (T_1 - T_{f1}) \operatorname{Th}(m_1 L_1) \quad (1) \\ q &= K m_2 A_2 (T_2 - T_{f2}) \operatorname{Th}(m_2 L_2) \quad (2) \end{aligned} \right\}$$

Solo se transmite calor en sentido axial, no en radial:  $q = KA \frac{T_1 - T_2}{\Delta X_{12}}$

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow K m_1 A_1 (T_{f1} - T_1) \operatorname{Th}(m_1 L_1) = K m_2 A_2 (T_2 - T_{f2}) \operatorname{Th}(m_2 L_2)$$

$$m = \sqrt{\frac{h \cdot 2 \pi C}{KA}} \quad \sqrt{\frac{h_1 \cdot 2 \pi C}{KA}} (T_{f1} - T_1) \operatorname{Th}(m_1 L_1) = \sqrt{\frac{h_2 \cdot 2 \pi C}{KA}} (T_2 - T_{f2}) \operatorname{Th}(m_2 L_2)$$

$$\operatorname{Th}_1 \operatorname{Th}(m_1 L_1) (T_{f1} - T_1) = (T_2 - T_{f2}) \operatorname{Th}(m_2 L_2) \operatorname{Th}_2 \quad (\ast)(\ast)$$

Con  $(\ast)$  y  $(\ast\ast)$  podemos hallar  $T_1$  o  $T_2$

Bidimensional  
en régimen per-  
manente.  
MÉTODOS NUMÉRICOS

# CONDUCCIÓN

## 1 UTILIDAD DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

La resolución analítica de problemas de conducción de calor queda restringida a geometrías sencillas, condiciones de contorno parti-  
culares y, en la mayoría de los casos, las propiedades térmicas se  
consideran constantes. Cuando no responde nuestro problema a estas  
circunstancias y no es aceptable forzar las hipótesis, usaremos  
los métodos numéricos.

En particular, estudiaremos el método de diferencias finitas.

## 2 DISCRETIZACIÓN DEL ESCENARIO. MALLADO NODAL

Nuestro objetivo es resolver una ecuación de diferencias finitas que se satisfaga para puntos discretos espacio-temporales. La solución buscada - perfil de temperaturas - es del tipo  $T = T(x, y, z, t)$ .

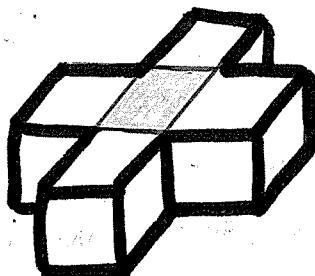
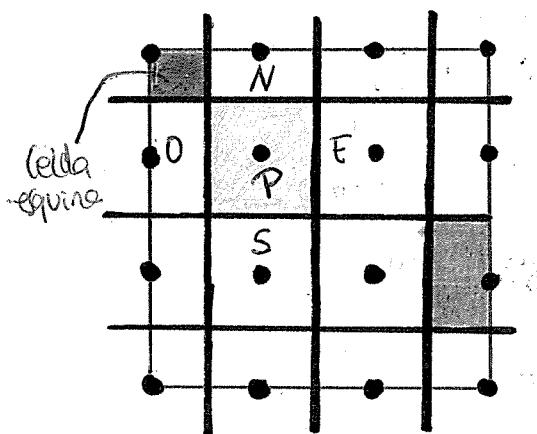
Para ello, es necesario discretizar el cuerpo objeto de estudio en intervalos espaciales y el tiempo en intervalos temporales (reg. transitorio).

El mallaño espacial establece puntos discretos ( $A_x, A_y, A_z$ ) de modo que la solución hallada en temperatura es representativa de una temperatura promedio de dicho nodo. Del mismo modo, el mallaño temporal establece instantes de tiempo discretos ( $\Delta t$ ) de modo que la solución hallada es representativa de un valor pro-  
medio en dicho intervalo.

## ● MALLADO ESPACIAL = MALLADO DE NODOS

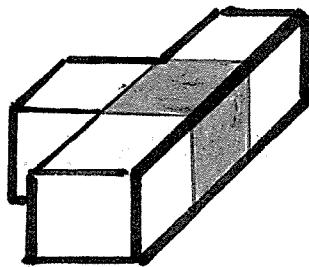
Generalmente dividimos el espacio en divisiones lo más regulares posible

- 1- Busco las temperaturas interesantes, y las asocio un nodo.
- 2- Trazo rectas paralelas a los ejes principales de la figura por los puntos medios entre nodos
- 3- Podremos obtener diferentes tipos de celos (interior, esquina, frontera, ...)



Celso interior

El calor se transmite por conducción entre los nodos que le rodean y el verde



Celso frontera

El volumen de la misma es la mitad del habitual.

Ademas, existe transmisión de calor por convección, en uno de sus superficies.

Proponemos un balance energético a cada nodo; por ejemplo, el nodo P:

$$q_{N \rightarrow P} + q_{E \rightarrow P} + q_{S \rightarrow P} + q_{W \rightarrow P} + q_p^* \Delta V = \frac{m C_p \Delta T_p}{\Delta t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{N \rightarrow P} = K (\Delta X \Delta Z) \frac{T_N - T_p}{\Delta Y} \\ q_{E \rightarrow P} = K (\Delta Y \Delta Z) \frac{T_E - T_p}{\Delta X} \\ q_{S \rightarrow P} = K (\Delta X \Delta Z) \frac{T_S - T_p}{\Delta Y} \\ q_{W \rightarrow P} = K (\Delta Y \Delta Z) \frac{T_W - T_p}{\Delta X} \end{array} \right.$$

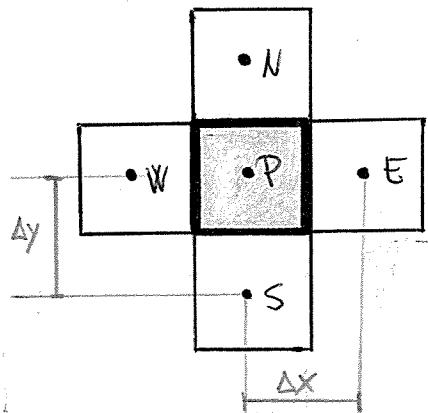
Siempre calores entrante al NODO!!

Este proceso se conoce como discretización de las ecuaciones mediante balance de energía nodal.

# 3 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES MEDIANTE BALANCE DE ENERGÍA NODAL

- Caso nodo interior sin fuente en régimen permanente

$$\sum q_e + q^* = 0; \quad q_{NP} + q_{WP} + q_{SP} + q_{EP} = 0$$



$$q_{NP} = \frac{T_N - T_P}{\frac{\Delta y}{K(\Delta x \Delta z)}}$$

$$q_{SP} = \frac{T_S - T_P}{\frac{\Delta y}{K(\Delta x \Delta z)}}$$

$$q_{WP} = \frac{T_W - T_P}{\frac{\Delta x}{K(\Delta y \Delta z)}}$$

$$q_{EP} = \frac{T_E - T_P}{\frac{\Delta x}{K(\Delta y \Delta z)}}$$

$$\frac{T_N - T_P}{\frac{\Delta y}{K(\Delta x \Delta z)}} + \frac{T_S - T_P}{\frac{\Delta y}{K(\Delta x \Delta z)}} + \frac{T_W - T_P}{\frac{\Delta x}{K(\Delta y \Delta z)}} + \frac{T_E - T_P}{\frac{\Delta x}{K(\Delta y \Delta z)}} = 0; \quad \text{Reordenando:}$$

$$K(\Delta x \Delta z) \frac{T_N + T_S - 2T_P}{\Delta y} + K(\Delta y \Delta z) \frac{T_E + T_W - 2T_P}{\Delta x} = 0; \quad \text{Dividiendo por } K(\Delta x \Delta z):$$

$$\frac{T_N + T_S - 2T_P}{(\Delta y)^2} + \frac{T_E + T_W - 2T_P}{(\Delta x)^2} = 0; \quad \text{que tratándose de un malla}$$

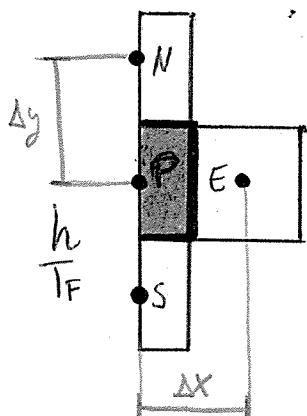
$$\text{regular } \Delta x = \Delta y : \quad T_N + T_S + T_E + T_W - 4T_P = 0$$

- Caso nodo frontera sin fuente de calor en régimen permanente

$$\sum q_e + q^* = 0; \quad q_{NP} + q_{EP} + q_{SP} + q_{FP} = 0$$

$$q_{NP} = \frac{T_N - T_P}{\frac{\Delta y}{K(\Delta x \Delta z / 2)}}, \quad q_{SP} = \frac{T_S - T_P}{\frac{\Delta y}{K(\Delta x \Delta z / 2)}}, \quad q_{EP} = \frac{T_E - T_P}{\frac{\Delta x}{K(\Delta y \Delta z)}}$$

$$q_{FP} = \frac{T_F - T_P}{\frac{1}{h(\Delta y \Delta z)}}$$



$$\frac{T_n - T_p}{\frac{\Delta y}{K(\Delta x \Delta z / 2)}} + \frac{T_s - T_p}{\frac{\Delta y}{K(\Delta x \Delta z / 2)}} + \frac{T_e - T_p}{\frac{\Delta x}{K(\Delta y \Delta z)}} + \frac{T_f - T_p}{\frac{1}{h(\Delta y \Delta z)}} = 0$$

Siendo el mallaado regular  $\Delta y = \Delta x$

$$\frac{1}{\Delta z} \frac{T_n + T_s + 2T_e - 4T_p}{2} + h(\Delta y \Delta z)(T_f - T_p) = 0$$

$$T_n + T_s + 2T_e + \frac{2h \Delta x}{K} T_f - 2 \left( \frac{h \Delta x}{K} + 2 \right) T_p = 0$$

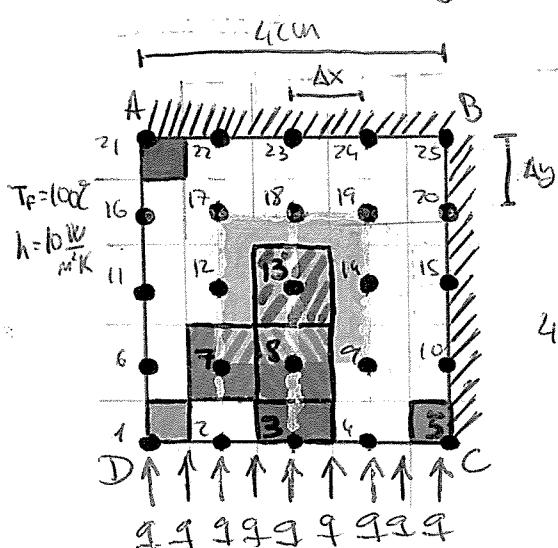
colección 53 Considerese una placa ABCD de  $4 \times 4$  cm y conductividad térmica  $K = 20 \text{ W/mK}$ , en la que las caras AB y BC están aisladas, y sobre la cara DC existe un flujo de calor  $q'' = 400 \text{ W/m}^2$ ; la cara AD está en contacto con un fluido a  $100^\circ\text{C}$  y un ambiente de  $10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  y su zona central (ombreada en la figura), de  $2 \times 2$  cm genera calor con una potencia térmica  $q'' = 800 \text{ W/m}^3$ . Obtener las ecuaciones nodales para los puntos 1, 3, 5, 7, 8, 13 y 21.

$$K = 20 \text{ W/mK}$$

$$q'' = 400 \text{ W/m}^2$$

$$q'' = 800 \text{ W/m}^3$$

13 y 21



#### Ecuación Nodo 1

Aplico balance de energía a la celda 1 (verde)

$$q_{6 \rightarrow 1} + q_{7 \rightarrow 1} + q'' \frac{\Delta x}{2} \Delta z + q_{F \rightarrow 1} + q''_1 = \frac{m C_p \Delta T}{\Delta t} \quad 0 \quad (reg. perm.)$$

$$R \left( \frac{\Delta x}{2} \Delta z \right) \frac{(T_6 - T_1)}{\Delta y} + K \left( \frac{\Delta y}{2} \Delta z \right) \frac{(T_2 - T_1)}{\Delta x} + q'' \frac{\Delta x}{2} \Delta z + \left( \frac{\Delta y}{2} \Delta z \right) (T_F - T_1) = 0$$

Simplificando  $\Delta z$  y, por mallaado regular  $\Delta x = \Delta y$  nos queda:

$$\frac{K}{2} (T_6 - T_1 + T_2 - T_1) + q'' \frac{\Delta x}{2} + h \frac{\Delta x}{2} (T_F - T_1) = 0$$

$$10 (T_6 + T_2 - 2T_1) + 7 - 0.05 T_1 = 0$$

$$\begin{cases} K = 20 \text{ W/mK} \\ q'' = 400 \text{ W/m}^2 \\ h = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}, T_F = 100 \\ \Delta x = 0.01 \text{ m} \end{cases}$$

$$10.05 T_1 - 10 T_2 - 10 T_6 = 7$$

• Ecuación Nodo 3 (celda verde oscura)

$$q_{8 \rightarrow 3} + q_{4 \rightarrow 3} + q^u \Delta x \Delta z + q_{2 \rightarrow 3} + q^* V_{63} = \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t};$$

$$K \left( \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \right) \frac{T_8 - T_3}{\Delta y} + K \left( \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \frac{T_4 - T_3}{\Delta x} + q^u \Delta x \Delta z + K \left( \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \frac{T_2 - T_3}{\Delta x} = 0;$$

$$K \left( T_8 - T_3 + \frac{1}{2} T_4 - \frac{1}{2} T_3 + \frac{1}{2} T_2 - \frac{1}{2} T_3 \right) + q^u \Delta x = 0,$$

$$40T_3 - 10T_2 - 10T_4 - 20T_8 = 4$$

• Ecuación Nodo 5 (celda azul clara)

$$q_{10 \rightarrow 5} + q^u \frac{\Delta x \Delta z}{2} + q_{4 \rightarrow 5} + q^* V_{65} = \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t};$$

$$K \left( \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\Delta y} \right) \frac{T_{10} - T_5}{\Delta y} + q^u \frac{\Delta x}{2} \Delta z + K \left( \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \frac{T_4 - T_5}{\Delta x} = 0; \quad \begin{array}{l} \text{simplificando } \Delta z \text{ y} \\ \text{como el malla do es} \\ \text{regular } (\Delta x = \Delta y) \end{array}$$

$$\frac{K}{2} (T_{10} - T_5 + T_4 - T_5) + \frac{q^u \Delta x}{2} = 0, \quad 20T_5 - 10T_4 - 10T_{10} = 2$$

• Ecuación Nodo 7 (celda rosa)

$$q_{12 \rightarrow 7} + q_{8 \rightarrow 7} + q_{2 \rightarrow 7} + q_{6 \rightarrow 7} + q^* V_{67} = \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t};$$

$$K \left( \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \right) \frac{T_8 - T_7}{\Delta y} + K \left( \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \frac{T_8 - T_7}{\Delta x} + K \left( \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \right) \frac{T_2 - T_7}{\Delta y} + K \left( \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \frac{T_6 - T_7}{\Delta x} + q^u \frac{\Delta x \Delta z}{2} = 0$$

$$K (T_{12} + T_8 + T_2 + T_6 - 4T_7) + q^u \frac{(\Delta x)^2}{4} = 0, \quad 80T_7 - 20T_6 - 20T_8 - 20T_2 - 20T_{12} = 0,02$$

• Ecuación Nodo 8 (celda naranja)

$$q_{13 \rightarrow 8} + q_{9 \rightarrow 8} + q_{3 \rightarrow 8} + q_{7 \rightarrow 8} + q^* V_{68} = \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t};$$

$$K \left( \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \right) \frac{T_{13} - T_8}{\Delta y} + K \left( \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \frac{T_9 - T_8}{\Delta x} + K \left( \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \right) \frac{T_3 - T_8}{\Delta y} + K \left( \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \frac{T_7 - T_8}{\Delta x} + q^u \Delta x \frac{\Delta y}{2} \Delta z = 0$$

$$K (T_{13} + T_9 + T_3 + T_7 - 4T_8) + q^u \frac{(\Delta x)^2}{2} = 0$$

$$80T_8 - 20(T_{13} + T_9 + T_3 + T_7) = 0,04, \quad 4T_8 - T_3 - T_7 - T_9 - T_{13} = 2 \cdot 10^{-3}$$

• ECUACIÓN NODO 13 (celdo marrón)

$$q_{18 \rightarrow 13} + q_{14 \rightarrow 13} + q_{8 \rightarrow 13} + q_{12 \rightarrow 13} + q^* V_{G13} = \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t}$$

$$K(\Delta x \Delta z) \frac{T_{18}-T_{13}}{\Delta y} + K(\Delta y \Delta z) \frac{T_{14}-T_{13}}{\Delta x} + K(\Delta x \Delta z) \frac{T_8-T_{13}}{\Delta y} + K(\Delta y \Delta z) \frac{T_{12}-T_{13}}{\Delta x} + q^* \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

$$K(T_{18}+T_{14}+T_{12}+T_8-4T_{13}) + q^*(\Delta x)^2 = 0; 80T_{13} - 20(T_{18}+T_{14}+T_{12}+T_8) = 0,08$$

$$4T_{13} - T_{18} - T_{14} - T_{12} - T_8 = 4 \cdot 10^{-3}$$

• ECUACIÓN NODO 21 (celde azul marino)

$$q_{22 \rightarrow 21} + q_{16 \rightarrow 21} + q_{F \rightarrow 21} = \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t}$$

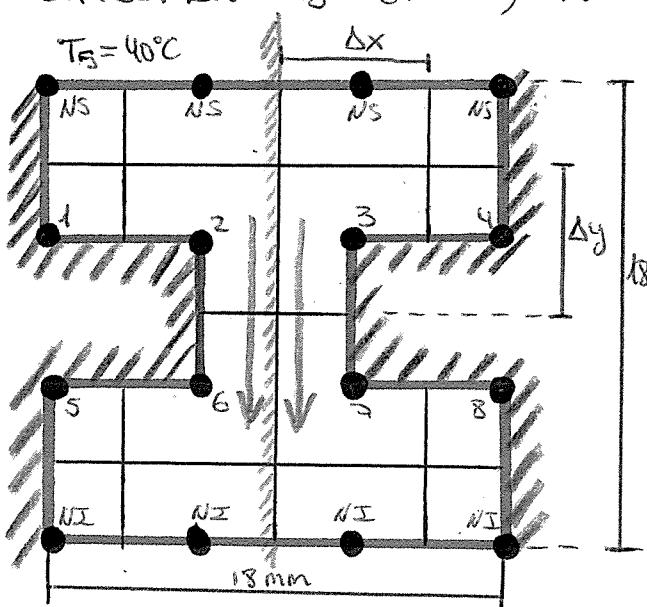
$$K\left(\frac{\Delta y}{2} \Delta z\right) \frac{T_{22}-T_{21}}{\Delta x} + K\left(\frac{\Delta x}{2} \Delta z\right) \frac{T_{16}-T_{21}}{\Delta y} + h\left(\frac{\Delta y}{2} \Delta z\right)(T_F - T_{21}) = 0;$$

$$\frac{K}{2} (T_{22} + T_{16} - 2T_{21}) + \frac{h \Delta y}{2} T_F - \frac{h \Delta y}{2} T_{21} = 0;$$

$$20,05 T_{21} - 10 T_{16} - 10 T_{22} = 5$$

Colocación Una raja en I de  $18 \times 18$  mm esté perfectamente aislada en sus caras laterales izquierdas y derechas, tal y como se representa en la figura adjunta. La cara superior se mantiene a  $40^\circ\text{C}$  y la inferior a  $15^\circ\text{C}$ . Glubr la velocidad de transmisión de calor por metro lineal de viga ( $\text{W/m}$ )

DATOS:  $\Delta x = \Delta y = 6 \text{ mm}$ ;  $K = 204 \text{ W/m}^\circ\text{C}$



El calor que recorre la viga puede expresarse como:

$$q = q_{2 \rightarrow 6} + q_{3 \rightarrow 7}$$

Como el problema es simétrico no hay transmisión de calor en sentido horizontal a través del pleno central

$$T_2 = T_3; T_6 = T_7$$

$$q_{2 \rightarrow 6} = q_{3 \rightarrow 7} \Rightarrow q = 2q_{2 \rightarrow 6}$$

$$q = 2 K \left( \frac{\Delta x}{2} \Delta z \right) \frac{(T_2 - T_6)}{\Delta y}, \quad \begin{array}{l} \text{Como nos piden el calor por metro} \\ \text{de viga} \quad \Delta z = 1 \\ \Delta x = \Delta y \end{array}$$

$$q = 204 (T_2 - T_6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } T_2 \rightarrow \text{Planteo ec. Nodo 2} \\ \text{Para } T_6 \rightarrow \text{u u u 6} \end{array} \right.$$

### Nodo 2

$$q_{1 \rightarrow 2} + q_{NS \rightarrow 2} + q_{3 \rightarrow 2}^{10} + q_{6 \rightarrow 2} = 0$$

$$K \left( \frac{\Delta y}{2} \Delta z \right) \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x} + K \Delta x \Delta z \frac{T_5 - T_2}{\Delta y} + 0 + \frac{204}{2} (T_6 - T_2) = 0$$

? → Planteo ecuación Nodo 1

$$\frac{204}{2} (T_1 - T_2) + \frac{204}{2} (T_5 - T_2) + \frac{204}{2} (T_6 - T_2) = 0$$

$$\boxed{T_1 + T_6 - 4T_2 + 80 = 0, (1)}$$

### Nodo 1

$$q_{5 \rightarrow 1} + q_{2 \rightarrow 1} = 0; \quad K \left( \frac{\Delta x}{2} \Delta z \right) \frac{T_5 - T_1}{\Delta y} + K \left( \frac{\Delta y}{2} \Delta z \right) \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{204}{2} (40 - T_1) + \frac{204}{2} (T_2 - T_1) = 0; \quad \boxed{40 - 2T_1 + T_2 = 0, (2)}$$

### Nodo 6

$$q_{2 \rightarrow 6} + q_{7 \rightarrow 6}^{10} + q_{NI \rightarrow 6} + q_{5 \rightarrow 6} = 0$$

$$\frac{204}{2} (T_2 - T_6) + 0 + K(\Delta x \Delta z) \frac{T_1 - T_6}{\Delta y} + K \left( \frac{\Delta y}{2} \Delta z \right) \frac{T_5 - T_6}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{204}{2} (T_2 - T_6) + \frac{204}{2} (15 - T_6) + \frac{204}{2} (T_5 - T_6) = 0$$

? Planteo ecuación Nodo 5

$$\boxed{T_2 + T_5 - 4T_6 + 30 = 0, (3)}$$

### Nodo 5

$$q_{6 \rightarrow 5} + q_{NI \rightarrow 5} = 0; \quad K \left( \frac{\Delta y}{2} \Delta z \right) \frac{T_6 - T_5}{\Delta x} + K \left( \frac{\Delta x}{2} \Delta z \right) \frac{T_1 - T_5}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{204}{2} (T_6 - T_5 + 15 - T_5) = 0; \quad \boxed{T_6 - 2T_5 + 15 = 0, (4)}$$

Resolviendo (1), (2), (3), (4):

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 + T_6 - 4T_2 + 80 = 0 \\ T_2 - 2T_1 + 40 = 0 \rightarrow T_1 = \frac{T_2 + 40}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 + T_5 - 4T_6 + 30 = 0 \\ T_6 - 2T_5 + 15 = 0 \rightarrow T_5 = \frac{T_6 + 15}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_2}{2} + 20 + T_6 - 4T_2 + 80 = 0, \quad -\frac{7}{2}T_2 + T_6 + 100 = 0 \\ T_2 + \frac{T_6}{2} + \frac{15}{2} - 4T_6 + 30 = 0, \quad \left( T_2 - \frac{7}{2}T_6 + 37,5 = 0 \right) \frac{7}{2} \end{array} \right.$$

$$\left( -\frac{49}{4} + 1 \right) T_6 + \frac{525}{4} + 100 = 0; \quad T_6 = \frac{231,25}{45/4} = \underline{\underline{20,6^{\circ}\text{C}}}$$

$$T_2 = \frac{7}{2}T_6 - 37,5 = \underline{\underline{34,4^{\circ}\text{C}}}$$

Por tanto:

$$\boxed{q = 204(T_2 - T_6) = \underline{\underline{2833,3 \text{ W/m}}}}$$

# CONDUCCIÓN

En régimen transitorio.  
Métodos analíticos.

## 1 INTRODUCCIÓN

Métodos TRANSITORIOS } Capacidad  
Sól. analíticos  
Dif. finitas + métodos numéricos

En este tema trataremos de resolver de forma analítica problemas de transferencia de calor en régimen transitorio en los que buscaremos  $T(x, y, z, t)$  así como  $Q$  intercambiado durante el transitorio.

Recordemos los conceptos:

Conductividad:  $\kappa$  p. para transmitir calor por conducción

Difusividad térmica:  $\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$

Rapidez con la que un material se adapta a su entorno

Capacidad calorífica  $\approx$  cap. para almacenar calor.

## 2 MÉTODO DE LA CAPACITANCIA

Asume que la temperatura del sólido es uniforme especialmente en todo momento, lo que implica que el gradiente de temperaturas dentro del sólido es despreciable.  $\rightarrow T(x, t) = T(t)$

Será aplicable cuando la resistencia a la conducción dentro del sólido sea pequeña comparada con la resistencia a la convección al fluido que lo rodea o la de radiación al entorno.

Balance de energía:  $q_e - q_s + q_{gen}^{(1)} = q_{abs}$

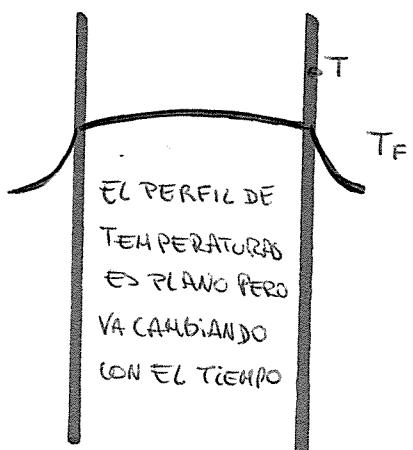
$m_c p$

Se considera exclusivamente transmisión de calor por convección

$$-hA_s(T - T_j) = V\rho C_p \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{-hA_s}{V\rho C_p} \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{T - T_j}; \quad \frac{-hA_s}{V\rho C_p} t = \ln \frac{T - T_j}{T_i - T_j}$$

$$T - T_j = (T - T_j)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{con } \tau = \frac{V\rho C_p}{hA}$$



La constante de tiempo  $\tau$  también puede expresarse como:

$$\tau = \frac{V_p C_p}{h A_s} = \frac{1}{h A_s} (V_p C_p) = R_t \cdot C_t ; \text{ donde } C_t \text{ es la capacitancia térmica}$$

$\downarrow$

$C_t = m C_p = V_p C_p \left[ \frac{J}{K} \right]$

[s]

Con la fórmula anterior podemos deducir:

- El tiempo necesario para que el cuerpo alcance una determinada temperatura.

$$T - T_f = (T_i - T_f) e^{-t/\tau} \rightarrow t = -\tau \ln \left( \frac{T - T_f}{T_i - T_f} \right)$$

- También el calor o energía transferida durante el proceso desde el momento inicial hasta un instante  $t$ .

$$Q = \int_0^t q dt = \int_0^t h A (T - T_f) dt = h A (T_i - T_f) \int_0^t e^{-t/\tau} dt = h A (T_i - T_f) \tau \left( -e^{-t/\tau} \right)_0^t$$

$$Q = \rho V C_p (T_i - T_f) \left[ 1 - e^{-t/\tau} \right]$$

#### • CRITERIO DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

El método sólo es válido si se cumple la hipótesis de particide, esto es,  $R_h = \frac{L}{K}$  (resistencia conductiva) es despreciable frente a

$$R_h = \frac{1}{h} \text{ (resistencia convectiva)} \implies \frac{L/K}{1/h} = \frac{hL}{K} < 0,01$$

$$L = \text{Longitud característica} \xrightarrow{\substack{\text{Semiesferas en placas} \\ \text{Radio en cilindros}}} \text{en otras simetrías } L = \frac{V}{A}$$

También aceptable si  $hL/K < 0,1$

Como veremos ahora, la condición para aplicar capacitancia es:

$$Bi = \frac{hL}{K} < 0,01$$

# 3 NÚMEROS ADIMENSIO NALES

} Fourier  
} Biot

En lo que sigue será de gran interés definir los números adimensionales de Fourier ( $F_0$ ) y Biot ( $Bi$ )

$$F_0 = \frac{\alpha t}{L^2}$$

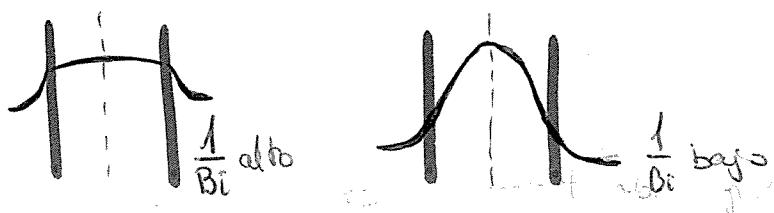
, es un parámetro adimensional del tiempo

$\alpha$  = difusividad térmica  $K/c_p$   
 $t$  = tiempo  
 $L$  = long. corac.

$$Bi = \frac{hL}{K}$$

Muestra el gradiente de temperatura en el interior del cuerpo frente al gradiente de temp. superficial

$h$  = Coef. de convección  
 $K$  = conductividad



## COLECCIÓN

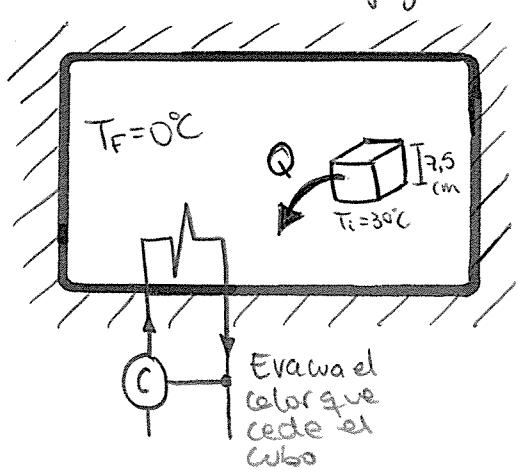
- ② Un cubo de aceite de 7,5 cm de lado se encuentra inicialmente a  $30^\circ\text{C}$  que se sumerge en un tanque de refrigeración perfectamente aislado, donde se encuentra un fluido que se mantiene a  $0^\circ\text{C}$ . Al lado de 4 min. de enfriamiento se han extraído 8,6 Kcal del cubo.

Determinar:

1) Coef. de transf. de calor por convección medio de todas las superficies del cubo

2) Temperatura media del cubo 4 minutos después del inicio de la refrigeración.

3) Temperatura del vértice del cubo 5 minutos después del inicio de la refrigeración



1) Vamos a intentar aplicar el método de la capacitancia:

$$Q = \rho V c_p (T_i - T_f) [1 - e^{-t/\tau}]$$

$$Q(4 \text{ min}) = 8,6 \text{ Kcal} = 8,6 \text{ Kcal} \cdot \frac{1000 \text{ J}}{1 \text{ Kcal}} \cdot \frac{4,18 \text{ J}}{1 \text{ Kcal}} = 3,5948 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\tau = C_t R_t = \rho V c_p \cdot \frac{1}{hA} = \rho L^3 c_p / h L^2 = \frac{\rho c_p L}{6h}$$

$$\text{TABLAS: } \rho_{\text{cu}} = 8954 \text{ Kg/m}^3$$

$$c_{\text{pcu}} = 383,1 \frac{\text{J}}{\text{Kg K}}$$

Por tanto  $t = 4 \text{ min} = 240 \text{ s}$

$$35948 = 8954 \cdot 0,075^3 \cdot 383,1 (30 - 0) [1 - e^{-240 \frac{6}{8954 \cdot 383,1 \cdot 0,075}}]$$

$$e^{-\frac{-240 \cdot 6}{8954 \cdot 383,1 \cdot 0,075}} = 0,17; -1,76 = \frac{-240 \cdot 6}{8954 \cdot 383,1 \cdot 0,075}$$

$$h = 314,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Pero hemos de comprobar si se cumple la hipótesis de capilaridad

$$Bi \leq 0,1 \rightarrow Bi = \frac{h L_c}{K_{\text{sol}}} = \frac{314,5 \cdot \frac{1}{4}}{383,1} = \frac{314,5 \cdot \frac{1}{612}}{383,1} = 0,01$$

Se cumple la hipótesis  $\rightarrow$  La temperatura es homogénea en el tubo

$$T(\bar{r}, t) = T(t)$$

2)  $T_{\text{media}}(4 \text{ min}) = T(t=4 \text{ min})$

$$T - T_f = (T_i - T_f) e^{-t/\tau}, T = 30 e^{-\frac{240}{6 \cdot 314,5}}$$

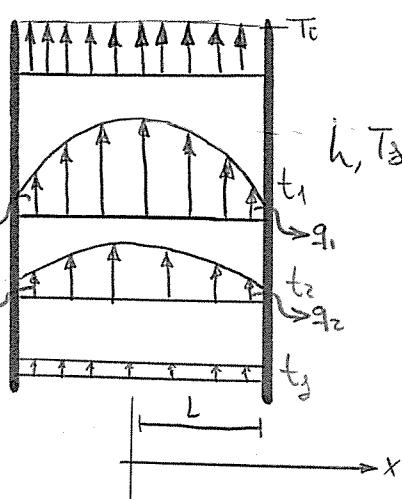
$$T(t=240 \text{ s}) = 5,16^\circ \text{C}$$

3) Turbidez ( $t = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}$ )  $\Rightarrow$   $T$  independiente de la posición por cumplirse la cond. del método de capilaridad

$$T(t=300 \text{ s}) = 30 e^{-\frac{-300 \cdot 6 \cdot 314,5}{8954 \cdot 383,1 \cdot 0,075}} = 3,3^\circ \text{C}$$

## 4 RESOLUCIÓN GENERAL

Se aplicará la ecuación general de la conducción de calor en una única dirección lo estudiaremos para el caso particular de una pared plana sin generación de calor:



$$T = T(x, t)$$

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q^0 = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Necesarios

- 2 cond. de contorno
- $x=0; x=L$
- 1 cond. inicial
- $T(x, 0) = T_i$

La ecuación es muy complicada → Cambios de variable:

Recordemos  $F_0 = \frac{\partial t}{L^2}$  [Instante genérico en el que se define  $\Theta^*$ ]

La solución obtenida es:

$$\Theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \exp(-\lambda_n F_0)) \cos(\lambda_n \xi)$$

$$\begin{aligned} T &= T(x, t) \\ \Theta^* &= \Theta^*(x, t) \\ \Theta &= \Theta^*(\xi, t) \end{aligned}$$

$$\Theta^* = \Theta^*(\xi, t)$$

Donde

|  |
|--|
| $C_n = \frac{4 \sin(\delta_n)}{2 \delta_n + \sin(2 \delta_n)}$ |
|--|

$$\delta_n \tan(\delta_n) = Bi$$

Tomaremos las seis primeras soluciones de la ecuación trascendente que están tabuladas → (Pág 53 Cuaderno de apuntes)

| Bi  | $\delta_1$ | $\delta_2$ | ... | $\delta_6$ | ... |
|-----|------------|------------|-----|------------|-----|
| 0.2 |            |            |     |            |     |
| ∞   |            |            |     |            |     |

# 5 SIMPLIFICACIÓN - HEISLER

cuando  $F_0 > 0.2$  (espacios reducidos y tiempos de cálculo suficientemente largos) la serie infinita de la anterior solución puede aproximarse por el primer término.

$$\Theta^* = G_1 \exp(-\delta_i^2 F_0) \omega(\delta_i, \xi)$$

$$\text{En } x=0 \rightarrow \xi = \frac{x}{L} = 0 \rightarrow \Theta^*(x=0) = \Theta^*(\xi=0) = \Theta_0^* = G_1 \exp(-\delta_i^2 F_0)$$

- GRÁFICO I DE HEISLER  $\Theta_0^* = f(B_i, F_0)$

$\Theta_0^*$  varía entre 0 y 1 ya que

$$\Theta_0^* = \frac{T_0 - T_d}{T_i - T_d} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_0^*(t=0) = 1 \\ \Theta_0^*(t \rightarrow \infty) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} T_0 = T_d \\ T_0 = T_i \end{array}$$

- GRÁFICO II DE HEISLER

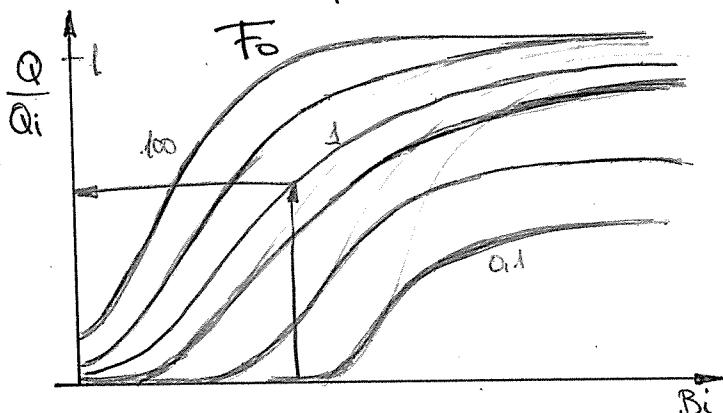
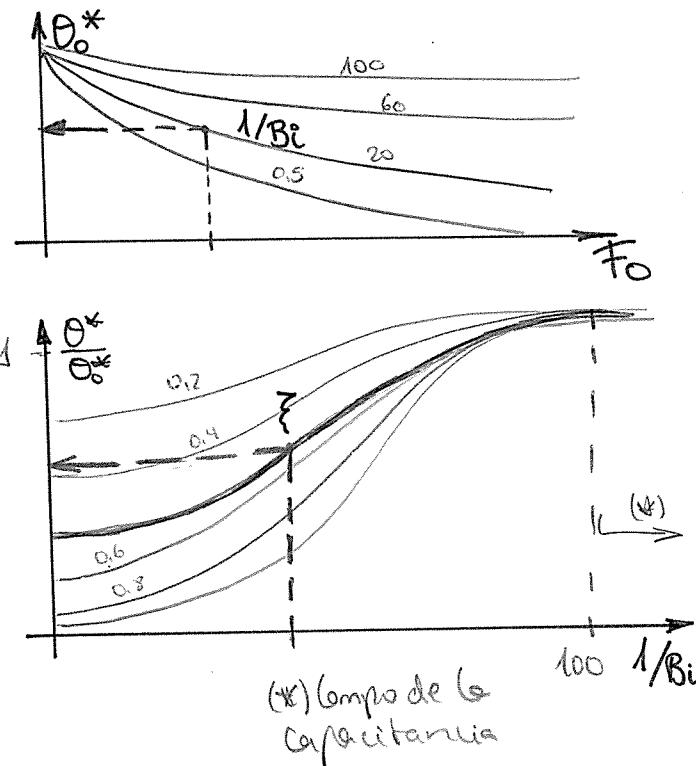
$$\frac{\Theta^*}{\Theta_0^*} = \omega(\delta_i, \xi) = f(B_i, \xi)$$

$$\frac{\Theta^*}{\Theta_0^*} = \frac{(T - T_d)/(T_i - T_d)}{(T_0 - T_d)/(T_i - T_d)} = \frac{T - T_d}{T_0 - T_d} //$$

- GRÁFICO III DE HEISLER

$$Q = f(B_i, F_0) \approx \text{Cálor intercambiado}$$

$$Q_i = m C_p (T_i - T_d) \approx \text{Máx calor que podríamos intercambiar}$$



### Algunos ejemplos:

1) T en un punto y en un instante:

$$x \rightarrow \xi \quad \text{Gráfico I: } \frac{F_0}{1/B_i} \left\{ \theta^* \right\}$$

$$t \rightarrow F_0 \quad \Delta T? \rightarrow \Delta \theta? \rightarrow \text{Gráfico II: } \frac{\xi}{1/B_i} \left\{ \frac{\theta^*}{\theta_0^*} \right\} \quad \theta^* = \frac{T - T_F}{T_i - T_F} \rightarrow T_{ii}$$

2) Al cabo de que tiempo se da una T en un punto

$$x \rightarrow \xi \quad \text{Gráfico II: } \frac{1/B_i}{\xi} \left\{ \theta^* / \theta_0^* \rightarrow \theta^* \text{ se anula} \rightarrow \theta_0^* \right\}$$

$$t \rightarrow F_0 \rightarrow \text{Gráfico I: } \frac{\theta_0^*}{1/B_i} \left\{ F_0 = \frac{q t}{L^2} \rightarrow t_{ii} \right\}$$

3) Temperatura media de la placa  $T_m$  en instante t

$$MC_p (\bar{T} - T_f) = Q_i - Q \quad \underline{\cdot \left( \frac{1}{Q_i} \right)} \quad \frac{MC_p (\bar{T} - T_f)}{Q} = \frac{Q_i - Q}{Q_i}$$

$$\frac{MC_p (\bar{T} - T_f)}{MC_p (T_i - T_f)} = 1 - \frac{Q}{Q_i} ; \quad \frac{\bar{T} - T_f}{T_i - T_f} = 1 - \left( \frac{Q}{Q_i} \right) \quad \text{Grafico III de Heister, } \begin{cases} B_i & \rightarrow Q \\ F_0 & \rightarrow Q_i \end{cases}$$

NOTA!!

Placas planas

Cilindros

### GRÁFICOS

similares en placas o cilindros

3 gráficos en ambos casos

### CAMBIO DE VARIABLE

$$T \rightarrow \theta^* = \frac{T - T_f}{T_i - T_f} ; \quad x \rightarrow \xi = \frac{x}{L} ; \quad t \rightarrow F_0 = \frac{q t}{L^2}$$

$$T \rightarrow \theta ; \quad r \rightarrow p = \frac{r}{R} ; \quad t \rightarrow F_0$$

colección

5) Gran horno industrial con superficie interior de  $800 \text{ m}^2$  abierta por ladrillo refractario que se mantiene a  $600^\circ\text{C}$ . Se suspende horizontalmente en el interior del horno un cilindro metálico de 8m de longitud y 6cm de diámetro, con una temperatura inicial uniforme de  $20^\circ\text{C}$ , procediéndose a su calentamiento por convección natural debida al aire, combinado con la radiación térmica procedente del material refractario. Suponiendo despreciable la transmisión de calor por los extremos del cilindro, se pide:

- 1) Tiempo (s) que debe permanecer el cilindro en el interior del horno para alcanzar en su superficie una temperatura de  $580^\circ\text{C}$
- 2) Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) que alcanzará en dicho instante el eje del cilindro
- 3) Energía (J) acumulada en el cilindro durante el tratamiento térmico.

DATOS: Cilindro metálico

$$\text{Difusividad} = q' = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Emissividad} = \epsilon = 0,50$$

$$\text{Conductividad} = R = 18 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

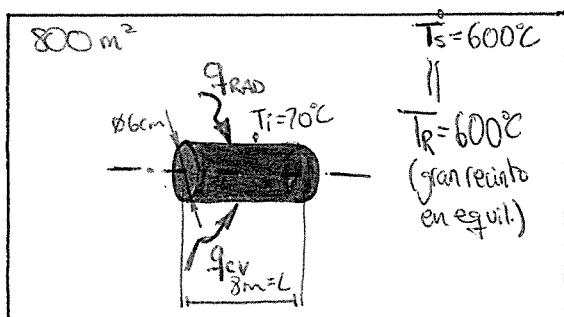
$$\text{Coef. de película} = h = 15 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$$

Ladrillo refractario

$$\text{Difusividad} = q = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Emissividad} = \epsilon = 0,75$$

$$\text{Conductividad} = K = 1,2 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$



Calculo Biot para comprobar si es aplicable el método de la capa límite

$$Bi = \frac{hR}{K} = \frac{hc\tau R}{K}$$

No dan como dato el coeficiente de película  $h$  correspondiente a la convección.

Necesitamos el  $h$  combinado, para ello:

$$q_{\text{RAD}} = \epsilon_c A_c \sigma (T_e^4 - T_c^4) = h_R A_c (T_e - T_c); \quad h_R = \frac{\epsilon_c \sigma (T_e^4 - T_c^4)}{T_e - T_c}$$

$$h_R = \frac{0,5 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (873,15^4 - 573,15^4)}{873,15 - 573,15}$$

$$h_R = 44,78 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

(Necesito calcularlo es variable con el tiempo)

$$T_c = \frac{T_i + T_e}{2} = \frac{20 + 580}{2} = 300$$

$T_e = 580$  (valor para el que me piden calcular el tiempo)

Por tanto, el coeficiente  $h$  combinado:

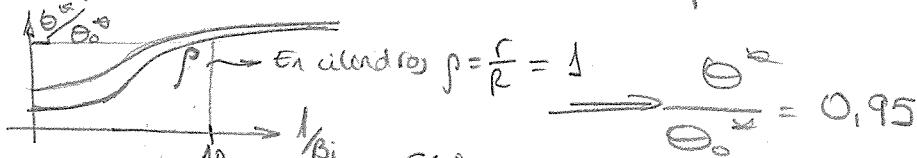
$$h = h_{cv} + h_{rad} = 15 + 44,78 = 59,78 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\beta_i = \frac{59,78 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{18} = 0,0996 \approx 0,1 \quad \text{No es aconsejable aplicar caputania.}$$

Reamemos si podemos aplicar Heisler. ( $F_0 > 0,2$ ):  $F_0 = \frac{q \cdot t}{R^2}$

• Gráfico 2 Heisler

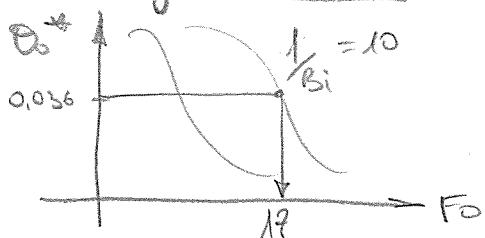
$$\frac{1}{Bi} = 10$$



$$\frac{\Theta^*}{\Theta_0^*} = 0,95$$

$$\frac{\Theta^*}{\Theta_0^*} = 0,95; \quad \Theta_0^* = \frac{\Theta^*}{0,95} = \frac{T - T_F}{T_i - T_F} = \frac{580 - 600}{(20 - 600) \cdot 0,95} = 0,0363$$

• Gráfico 1 Heisler



$$F_0 \approx 17 (> 0,2 \text{ cumple hipótesis})$$

A lo mejor le debe ser 0,0036 ??

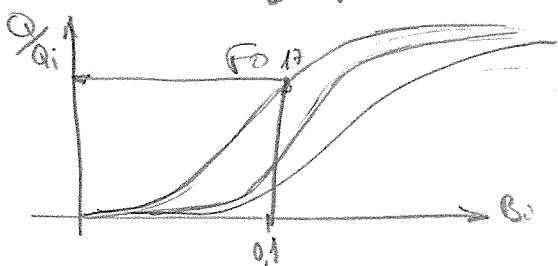
$$\textcircled{1} \quad [t = \frac{F_0 R^2}{q} = \frac{17 \cdot 0,03^2}{4,5 \cdot 10^{-6}} = 3400]$$

$$\textcircled{2} \quad \Theta_0^* = 0,0363 = \frac{T_0 - T_F}{T_i - T_F}, \quad T_0 = 0,0363(20 - 600) + 600$$

$$T_0 = 57,9^\circ\text{C}$$

No hay grandes gradientes de temperatura entre la superficie ( $580^\circ$ ) y el eje ( $57,9^\circ\text{C}$ ), por ello la caputania era casi aplicable.

③ En el tercer gráfico de Heisler obtenemos  $\frac{Q}{Q_i}$ :



$$\frac{Q}{Q_i} = 0,96, \quad Q = 0,96 Q_i$$

$$Q = 0,96 M C_p (T_i - T_F)$$

$$Q = 0,96 \cdot \rho_{dens} \cdot V_{sol} \cdot C_p (T_i - T_F) = \frac{K}{q} 0,96 \cdot \pi R^2 L (T_i - T_F)$$

$$[Q = \frac{18}{4,5 \cdot 10^{-6}} 0,96 \cdot \pi (3 \cdot 10^2)^2 / 8 | 20 - 600 | = 5,1 \cdot 10^7 \text{ J (absorbidas > 0)}]$$

Extra Calcular la  $\bar{T}_m$  de la pieza al final del tratamiento

$$\frac{\bar{T}_m - T_F}{T_i - T_F} = 1 - \frac{Q}{Q_i} = 1 - 0,96 = 0,04; \quad \bar{T}_m = T_F + 0,04 (T_i - T_F)$$
$$\bar{T}_m \approx 579.^\circ C \quad ??$$

# CONDUCCIÓN

En régimen transitorio.  
Métodos numéricos

## 1

### MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

De nuevo aplicaremos el método de las diferencias finitas como hicimos en régimen permanente, con la complicación adicional de la dependencia de la temperatura con el tiempo.

Se trata de un método aproximado para determinar temperaturas en puntos discretos (nodos) de un sistema físico y en tiempos discretos en un transitorio térmico.

- Procedimiento
  - Representar el sistema físico mediante una red nodal (malla)
  - Discretizar el tiempo mediante  $\Delta t \rightarrow t = p; \Delta t; p=0,1,2,\dots$
  - Aplicar el método de balance de energía para obtener las ecuaciones en diferencias finitas para cada nodo de temperatura conocida
  - Resolver las ecuaciones para cada  $t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

Nomenclatura

- $T_{(m,n)}^p$  → identificador del instante de tiempo en el que el cálculo se realiza.
- $T_{(m,n)}$  → identificadores del nodo en el malla de dos dimensiones

## 2 BALANCE DE ENERGÍA

Para cualquier nodo se cumple  $q_e + q^* = q_{awn}$ .

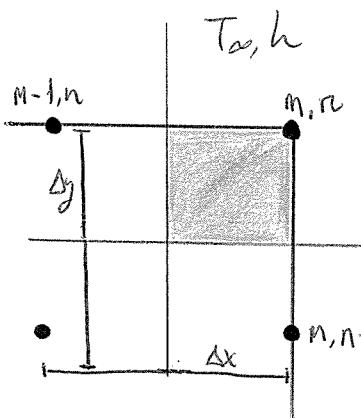
Discretizando la variación de la temperatura con el tiempo

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \rightarrow$$

$$q_{entregar al nodo} + q^* = \rho V C \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t}$$

Aparecen dos métodos para evaluar los términos del balance de energía en función del tiempo: EXPLÍCITO e IMPLÍCITO

## 3 Los Dos Métodos: Explícito e Implícito



### CASO EJEMPLO

#### 1) Método explícito

LOS TÉRMINOS ASOCIADOS A LOS CALORES QUE LLEGAN A LA CELDA SE EVALÚAN EN EL INSTANTE DE TIEMPO "p".

$$\Delta z = \Delta$$

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} + q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} + q_{\infty \rightarrow (m,n)} = m C_p \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t}$$

$$K \left( \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) \frac{T_{m-1,n}^p - T_{m,n}^p}{\Delta x} + K \left( \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \right) \frac{T_{m,n-1}^p - T_{m,n}^p}{\Delta y} + h \left( \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \right) (T_{\infty}^p - T_{m,n}^p) + h \left( \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) (T_{\infty}^p - T_{m,n}^p) = \\ = \rho \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2} \cdot 1 \cdot C_p \cdot \frac{(T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p)}{\Delta t}$$

#### 2) Método implícito

LOS TÉRMINOS ASOCIADOS A LOS CALORES QUE LLEGAN A LA CELDA SE EVALÚAN EN EL INSTANTE "p+1".

$$K \left( \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) \frac{T_{m-1,n}^{p+1} - T_{m,n}^{p+1}}{\Delta x} + K \left( \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \right) \frac{T_{m,n-1}^{p+1} - T_{m,n}^{p+1}}{\Delta y} + h \left( \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \right) (T_{\infty}^{p+1} - T_{m,n}^{p+1}) + h \left( \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) (T_{\infty}^{p+1} - T_{m,n}^{p+1}) = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{2} \cdot 1 \cdot C_p \frac{(T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p)}{\Delta t}$$

NOTA II N° de Fourier  $F_0$  en diferencias finitas

$$F_0 = \frac{q \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$N^2 \text{ Biot} \longrightarrow \beta_i = \frac{h \Delta x}{k}$$

## ● VENTAJAS E INCONVENIENTES

### Método explícito

- El sistema de ecuaciones es muy sencillo, obtenemos los valores de las temperaturas requeridas explícitamente

- Limitación del valor  $\Delta t$

CRITERIO DE ESTABILIDAD

### Método implícito

- El sistema de ecuaciones en diferencias finitas con N incógnitas es de difícil solución

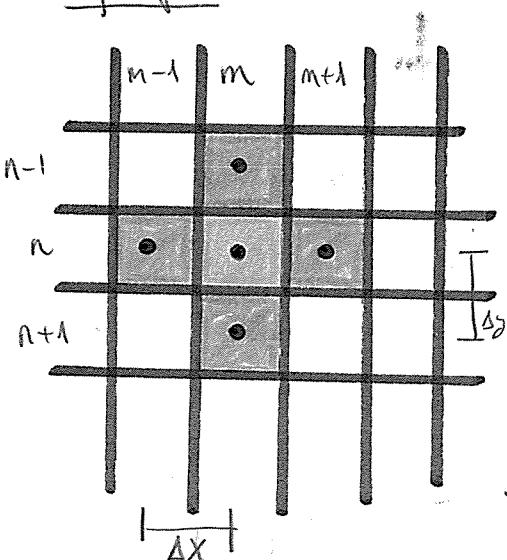
- La solución es estable  $\forall \Delta t$   
- incondicionalmente estable -

## ● CRITERIO DE ESTABILIDAD

En el método explícito, una vez realizado el balance al nodo:

$$T_{m,n}^{p+1} = \underbrace{\left( \dots \right)}_{>0 \text{ !!}} T_{m,n}^p + \dots$$

Ejemplo: nodo INTERIOR  $\rightarrow$  cond. de estabilidad M. EXPL (W70)



$$\begin{aligned}
 & q_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} + q_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} + q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} + q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} + q_{(m,n) \rightarrow (m+1,n)} + q_{(m,n) \rightarrow (m-1,n)} + q_{(m,n) \rightarrow (m,n+1)} + q_{(m,n) \rightarrow (m,n-1)} V_G = \\
 & = m C_p (T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p) \\
 & K \cdot (\Delta x \Delta z) \frac{T_{m,n+1}^p - T_{m,n}^p}{\Delta z} + K(\Delta y \Delta z) \frac{T_{m+1,n}^p - T_{m,n}^p}{\Delta x} + K(\Delta x \Delta y) \frac{T_{m,n-1}^p - T_{m,n}^p}{\Delta z} + \\
 & + K(\Delta y \Delta z) \frac{T_{m-1,n}^p - T_{m,n}^p}{\Delta x} = \Delta x \Delta z \Delta t C_p (T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p)
 \end{aligned}$$

$$\text{Condición} \Rightarrow \Delta x = \Delta y \rightarrow T_{m,n+1}^p + T_{m+1,n}^p + T_{m,n-1}^p + T_{m-1,n}^p - 4T_{m,n}^p = \frac{1}{q} (\Delta x)^2 \frac{(T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p)}{\Delta t}$$

$$F_0 (T_{m,n+1}^p + T_{m+1,n}^p + T_{m,n-1}^p + T_{m-1,n}^p) + (1-4F_0) T_{m,n}^p = T_{m,n}^{p+1}$$

$$F_0 = \frac{q \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$\text{COND DE ESTAB} \rightarrow 1-4F_0 > 0; F_0 \leq \frac{1}{4}; \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4q}$$

Se considera siempre la condición de estabilidad más restrictiva y se aplicará a todo el método.

Los nodos con condición más restrictiva son los que están más expuestos al fluido, por tanto

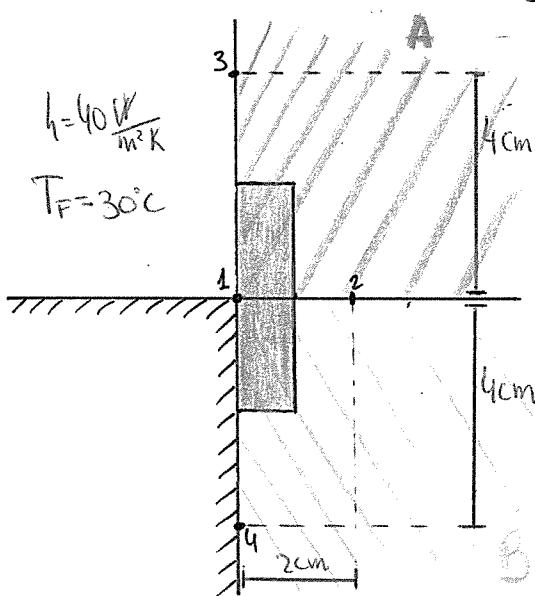
Nodo int < Nodo con esquina < Nodo pared < Nodo esquina interior

RESULTADOS PARA: Malla regular  $\Delta x = \Delta y$  (Pág 69 wade/no apuntar)

|                          | Ecuación del nodo   | ( criterio de estabilidad )         |
|--------------------------|---|-------------------------------------|
| Nodo interior            | $T^{p+1} = F_0(T_e + T_w + T_s + T_n) + (1 - 4F_0)T^p$  | $1 - 4F_0 > 0$                      |
| Nodo frontera            | $T^{p+1} = F_0(2T_e + T_w + T_s + 2B_i T_f) + (1 - 4F_0 - 2B_i F_0)T^p$                             | $1 - 4F_0 - 2B_i F_0 > 0$           |
| Nodo de esquina interior | $T^{p+1} = \frac{2}{3}F_0(2T_e + T_w + 2T_n + T_s + 2B_i T_f) + (1 - 4F_0 - \frac{4}{3}B_i F_0)T^p$ | $1 - 4F_0 - \frac{4}{3}B_i F_0 > 0$ |
| Nodo de esquina exterior | $T^{p+1} = 2F_0(T_e + T_s + 2B_i T_f) + (1 - 4F_0 - 4B_i F_0)T^p$                                   | $1 - 4F_0 - 4B_i F_0 > 0$           |

### COLECCIÓN 17

Determinar la condición de estabilidad cuando se utiliza el método explícito de los diferenciales finitos en el cálculo de la temperatura en régimen transitorio del nodo 1 de la figura adjunta.



| Material | $K (\text{W/m}^\circ\text{C})$ | $\rho (\text{kg/m}^3)$ | $C_p (\text{kJ/kg}^\circ\text{C})$ |
|----------|--------------------------------|------------------------|------------------------------------|
| A        | 20                             | 7800                   | 0,46                               |
| B        | 1,2                            | 1600                   | 0,85                               |

$$\begin{aligned}\Delta x &= 2\text{ cm} \\ \Delta y &= 4\text{ cm} \\ \Delta z &= 1\end{aligned}$$

Planteo balance energético al nodo 1 (método explícito  $\equiv \text{Sup. P}$ )

$$q_{3 \rightarrow 1} + q_{2 \rightarrow 1} + q_{4 \rightarrow 1} + q_{F \rightarrow 1} + q^* V_G = \frac{mc_p(T_i^{P+1} - T_i^P)}{\Delta t}$$

$$K_A \left( \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \right) \frac{T_3^P - T_1^P}{\Delta y} + K_A \left( \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) \frac{T_2^P - T_1^P}{\Delta x} + K_B \left( \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) \frac{T_2^P - T_1^P}{\Delta x} + K_B \left( \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \right) \frac{T_4^P - T_1^P}{\Delta y} + h \left( \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) (T_F - T_1^P) = \frac{mc_p(T_i^{P+1} - T_i^P)}{\Delta t} = (\rho_A V_A C_{pA} + \rho_B V_B C_{pB}) \frac{(T_i^{P+1} - T_i^P)}{\Delta t}$$

$$\frac{K_A}{4} (T_3^P - T_1^P) + K_A (T_2^P - T_1^P) + K_B (T_2^P - T_1^P) + \cancel{K_B \frac{1}{4} (T_4^P - T_1^P)} + h \Delta x (T_F - T_1^P) = \\ = \underbrace{\left( \rho_A \left( \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) C_{pA} + \rho_B \left( \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) C_{pB} \right)}_W \frac{T_i^{P+1} - T_i^P}{\Delta t}$$

Agrupamos los términos en  $T_1^P$

$$Z - \left( \frac{K_A}{4} + K_A + K_B + \frac{K_B}{4} + h \Delta x \right) T_1^P = W \frac{T_i^{P+1} - T_i^P}{\Delta t}$$

$$Z \frac{\Delta t}{W} + \underbrace{\left[ 1 - \left[ \frac{\Delta t}{W} \left( \frac{5}{4} K_A + \frac{5}{4} K_B + h \Delta x \right) \right] T_1^P \right]}_{> 0 \equiv \text{Cond de estabilidad}} = T_1^{P+1}$$

$$\frac{\Delta t}{W} \left( \frac{5}{4} K_A + \frac{5}{4} K_B + 2h \right) < 1 ; \Delta t < \frac{W}{\frac{5}{4} (K_A + K_B) + h \Delta x}$$

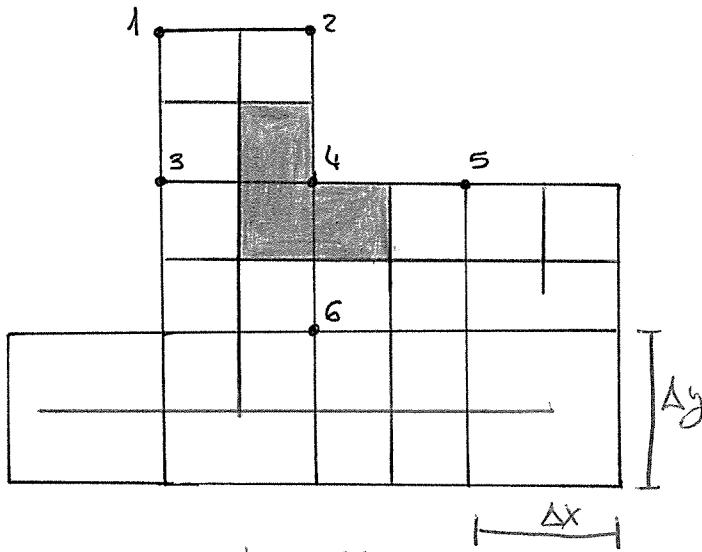
$$W = 7800 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 460 + 1600 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 850 = 989,6 \quad | \quad \boxed{\Delta t < \frac{989,6}{27,3} = 36,25 \text{s}}$$

$$\frac{5}{4} (K_A + K_B) + h \Delta x = \frac{5}{4} (20 + 12) + 40 \cdot 10^{-2} = 27,3$$

colección 73 La figura adjunta representa la sección transversal de una pieza de gran longitud en la que se va a realizar un análisis de la distribución de temperaturas en régimen transitorio utilizando el método de diferencias finitas. La pieza se encuentra inicialmente a  $100^\circ\text{C}$  y el fluido que la rodea cambia bruscamente su temperatura a  $0^\circ\text{C}$ . Determinar la temperatura del nodo 4, transcurrido 1 minuto desde que se inicia el tratamiento térmico.

DATOS:

$$\begin{aligned} q &= 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ K &= 2 \text{ W/m}^\circ\text{C} \\ \Delta x = \Delta y &= 2 \text{ cm} \\ h &= 50 \text{ W/m}^\circ\text{C} \end{aligned}$$



Usaremos el método explícito

Como tenemos malla regular ( $\Delta x = \Delta y$ ), la condición de estabilidad es la más restrictiva (nodo más expuesto al fluido  $\Rightarrow z=1$ )

$$1 - 4F_o - 4BiF_o > 0, \quad F_o(1+Bi) < \frac{1}{4}$$

$$Bi = \frac{h\Delta x}{K} = \frac{50 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2} = 0,5$$

$$F_o = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta t}{(2 \cdot 10^{-2})^2} = 1,5 \cdot 10^{-3} \Delta t$$

$$\Delta t(1+0,5) < \frac{1}{4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}$$

$$\Delta t = \frac{1}{4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}$$

$$\boxed{\Delta t < 111,1 \text{ s}}$$

Como necesito  $T_u$  en 1 min (60s) puedo tomar intervalos de  $\Delta t$  de 1 min ya que se mantienen por debajo de los 111s, valor de la condición de estabilidad

Planteo el balance energético al nodo 4

$$q_{2 \rightarrow u} + q_{3 \rightarrow u} + q_{6 \rightarrow u} + q_{5 \rightarrow 4} + q_{F \rightarrow 4} + q_{F \rightarrow u} = \frac{mc_p (T_4^{P+1} - T_4^P)}{\Delta t}$$

$$K \left( \frac{\Delta x \Delta z}{2} \right) \frac{(T_2^P - T_4^P)}{\Delta y} + K \left( \Delta y \Delta z \right) \frac{(T_3^P - T_4^P)}{\Delta x} + K \left( \Delta x \Delta z \right) \frac{T_6^P - T_4^P}{\Delta y} + K \left( \frac{\Delta z \Delta z}{2} \right) \frac{T_5^P - T_4^P}{\Delta x} +$$

$$+ h \left( \frac{\Delta y \Delta z}{2} \right) (T_F - T_4^P) + h \left( \frac{\Delta x \Delta z}{2} \right) (T_F - T_4^P) = \rho (\Delta x \Delta y \Delta z) c_p \left( \frac{T_4^{P+1} - T_4^P}{\Delta t} \right); \quad \rho c_p = \frac{K}{q} = \frac{3}{0,6 \cdot 10^{-6}}$$

$$\overline{T_2^P - T_4^P + 2(T_3^P - T_4^P) + 2(T_6^P - T_4^P) + T_5^P - T_4^P + 0,5(0 - T_4^P) + 0,5(0 - T_4^P)}$$

$$= \frac{2}{0,6 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{3}{4} 2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{T_4^{P+1} - T_4^P}{\Delta t}; \quad \underbrace{\frac{T_2^P + 2T_3^P + 2T_6^P + T_5^P}{1000}} - \underbrace{\frac{0,7 T_4^P}{1000}} = \frac{T_4^{P+1} - T_4^P}{\Delta t}$$

Como  $\Delta t = 60$

|                 | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_u$ | $T_s$ | $T_6$ |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0               | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   | 100   |
| $\Delta t = 60$ |       |       |       | ?     |       |       |

Sustituyendo en la ecuación nodal (\*)

$$0,6 + 0,7 = \frac{T_4^{P+1} - 100}{60}; \quad \boxed{T_4^{P+1} = 94^\circ C, \text{ a los } 60s}$$



# APÉNDICE CALOR

326 que es

## TEMA 1: Introducción

- CONDUCCIÓN → Ley de Fourier  $q_k = -k A \frac{\partial T}{\partial x}$
- CONVECCIÓN → Ley de Newton  $q_{conv} = h A (T_{sup} - T_{líquido})$
- RADIACIÓN → Ley de Stefan-Boltzmann  $E \left( \frac{W}{m^2} \right) = \epsilon \sigma T^4$   
 $q_{rad} = E A \sigma (T_{sup}^4 - T_{líquido}^4)$

## TEMA 2: Conducción. Ecación general

### • EC. GENERAL CARTESIANAS

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \frac{\partial T}{\partial z} \right] + q^* = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

### • RÉGIMEN PERMANENTE → Laplace (sin frente) y Poisson (con frente)

$$\text{Poisson} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q^*}{k} = 0$$

$$\text{Laplace} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

### • EC. GENERAL CILÍNDRICAS

$$\frac{\partial T}{\partial t} = q \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q^*}{\rho c_p}$$

### • EC. GENERAL ESFÉRICAS

$$\frac{\partial T}{\partial t} = q \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \frac{q^*}{\rho c_p}$$

## TEMA 3: Conducción unidimensional en régimen permanente sin fuentes/suministros

**I**

- PLACA PLANA - PARED MULTICAPA - Perfil temp. lineal

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_d}{R_t''}, \quad R_t'' = \sum R_i''$$

Cuidado!!

$$R_i''_{\text{conv}} = \frac{1}{h_i}$$

$$R_i''_{\text{cond}} = \frac{\Delta X}{K_i}$$

materiales

$$R = \frac{\Delta X}{K_i \frac{1}{3}}$$

Ver problema  
① libro.

$$\frac{q}{A} = U (T_i - T_d), \quad U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \sum \frac{\Delta X}{K_i} + \frac{1}{h_d}}$$

- CILINDRO - CILINDRO MULTICAPA - Perfil temp. logarítmico

$$\frac{q}{L} = \frac{T_i - T_e}{R_t'}, \quad R_t' = \sum R_i'$$

$R_i'_{\text{conv}} = \frac{1}{2\pi r h}$

$R_i'_{\text{cond}} = \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\pi K_i}$

- RADIO CRÍTICO CILINDROS

$$r_c = \frac{K_A}{h_e}$$

- ESFERA - ESFERA MULTICAPA - Perfil de temp.  $\delta(1/\rho)$

$$q = \frac{T_i - T_e}{R_t}; \quad R_t = \sum R_i$$

$R_i'_{\text{conv}} = \frac{1}{4\pi r_i^2 h}$

$R_i'_{\text{cond}} = \frac{1/r_i - 1/r_{i+1}}{4\pi K_i}$

- RADIO CRÍTICO ESFERAS

$$r_c = \frac{2 K_A}{h_e}$$

## TEMA 3: Conducción unidimensional en régimen permanente

### II con fuentes/sumideros

- PLACA PLANA: Perfil de temperaturas parabólico

$$\left. \begin{array}{l} \frac{q_0}{A} = K \frac{T_0 - T_L}{L} - \frac{q^* L}{2} \\ \frac{q_L}{A} = K \frac{T_0 - T_L}{L} + \frac{q^* L}{2} \end{array} \right\} q_L = q_0 + q^* V_{01}$$

- PARED MULTICAPA CON FUENTE

$$\frac{q_0}{A} = U (T_i - T_a) - q^* L U \left( \frac{R_F}{2} + \sum R_j \rightarrow d \right)$$

$$\frac{q_L}{A} = U (T_i - T_a) + q^* L U \left( \frac{R_F}{2} + \sum R_j \rightarrow i \right)$$

Para cilindro y esfera podemos aplicar estas fórmulas (ver libro)

## TEMA 3: Conducción unidimensional en régimen permanente.

### III Superficies extendidas.

- Ecuación GENERAL:  $\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{1}{A} \frac{dT}{dx} \frac{dT}{dx} - \frac{h}{K} \frac{1}{A} \frac{ds}{dx} (T - T_F) = 0$ ; muy compleja

- (A) ALETA RECTA DE ESPESOR UNIFORME:

Solución a la EDO:  $\frac{d^2 \Theta}{dx^2} - m^2 \Theta = 0 \rightarrow \Theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$

Cambios:  $\Theta = T - T_F$   
 $m = \sqrt{\frac{hC}{KA}}$

Condiciones de contorno.

- EFFECTIVIDAD  $K$

Aleta recta  $K = \frac{Th(mL)}{mL} \rightarrow (mL/K)$  en tablas modernas

Aletas anulares  $\rightarrow \alpha = \frac{R_b}{R_e} / Re \rightarrow$  Tablas  
 $\beta = \sqrt{\frac{2h}{K_W}} Re$

(3)

- Estructura aleteadas - eficiencia global

$$\eta = 1 - \frac{S_A}{S_{EA}} (1-K) ; \quad q = \eta \cdot h S_{EA} \theta_b$$

Hay otras fórmulas que relacionan K con η

- Géneros intercambiados por la estructura aleteada

Ver apuntes - cuaderno (circuitos equivalentes) - problema 43 colección

## TEMA 4: Conducción bidimensional en régimen permanente. Métodos numéricos.

- Balance de energía al nodo

$$\sum q_e + q^* V_e = 0 ;$$

Volumen de generación

siempre entrante al nodo

$$\sum q_e = \overbrace{q_{N \rightarrow P} + q_{E \rightarrow P} + q_{S \rightarrow P} + q_{O \rightarrow P}}^{q_{N \rightarrow P}} = K (\Delta x \Delta z) \frac{T_N - T_P}{\Delta z}$$

## TEMA 5: Conducción en régimen transitorio. Métodos analíticos.

- MÉTODO DE CA (CAPACITANCIA) Si  $Bi = \frac{hL}{K} < 0,01$

$$T - T_f = (T_i - T_f) e^{-t/\tau} ; \quad \text{donde } \tau = \frac{\rho V C_p}{h A_s}$$

$$Q = \rho V C_p (T_i - T_f) [1 - e^{-t/\tau}]$$

- SOLUCIÓN GENERAL

$$\theta^\infty = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-S_n^2 F_0) \cos(S_n \xi)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{4 \sin(\delta_n)}{2 \delta_n + \sin(2 \delta_n)} \\ \delta_n \tan(\delta_n) &= Bi \end{aligned}$$

Tomaremos los 6 primeros términos de la serie de la ecuación trascendente que están tabulados.

- HEISLER      si     $F_0 = \frac{\alpha t}{L^2} > 0.2$

Gráfico 1  $\rightarrow \Theta_0^* = f(B_i, F_0)$ ,       $\Theta_0^* = \frac{T_0 - T_F}{T_i - T_F}$        $\left\{ \begin{array}{l} \Theta_0^*(t=0) = 1 \\ \Theta_0^*(t=\infty) = 0 \end{array} \right.$

Gráfico 2  $\rightarrow \frac{\Theta^*}{\Theta_\infty^*} = f(B_i, \xi)$ ;       $\frac{\Theta^*}{\Theta_\infty^*} = \frac{T - T_F}{T_i - T_F}$

Gráfico 3  $\rightarrow Q = f(B_i, F_0)$ ;       $Q_i = m c_p (T_i - T_F)$

## TEMA 5: Conducción en régimen transitorio. Métodos numéricos.

### II

- Balance energético al nodo:      Igual que en reg. permanente pero  $\sum q \neq 0$  (no igualado a cero)

$$\sum q_{\text{entrante}} + q^* \cdot \Theta_0 = \rho V c_p \frac{T_{mn}^{p+1} - T_{mn}^p}{\Delta t}$$

- MÉTODO EXPLÍCITO: Los celos que llegan a la celde se evaluan en el instante  $p$ :  $(T_{mn}^p)$

- MÉTODO IMPLÍCITO: Los celos que llegan a la celde se evaluan en el instante  $p+1$ :  $(T_{mn}^{p+1})$

CRITERIO DE ESTABILIDAD — Método explícito. Limitación  $\Delta t$

$$T_{mn}^{p+1} = \underbrace{\left( \quad \right)}_{>0} T_{mn}^p + \dots$$



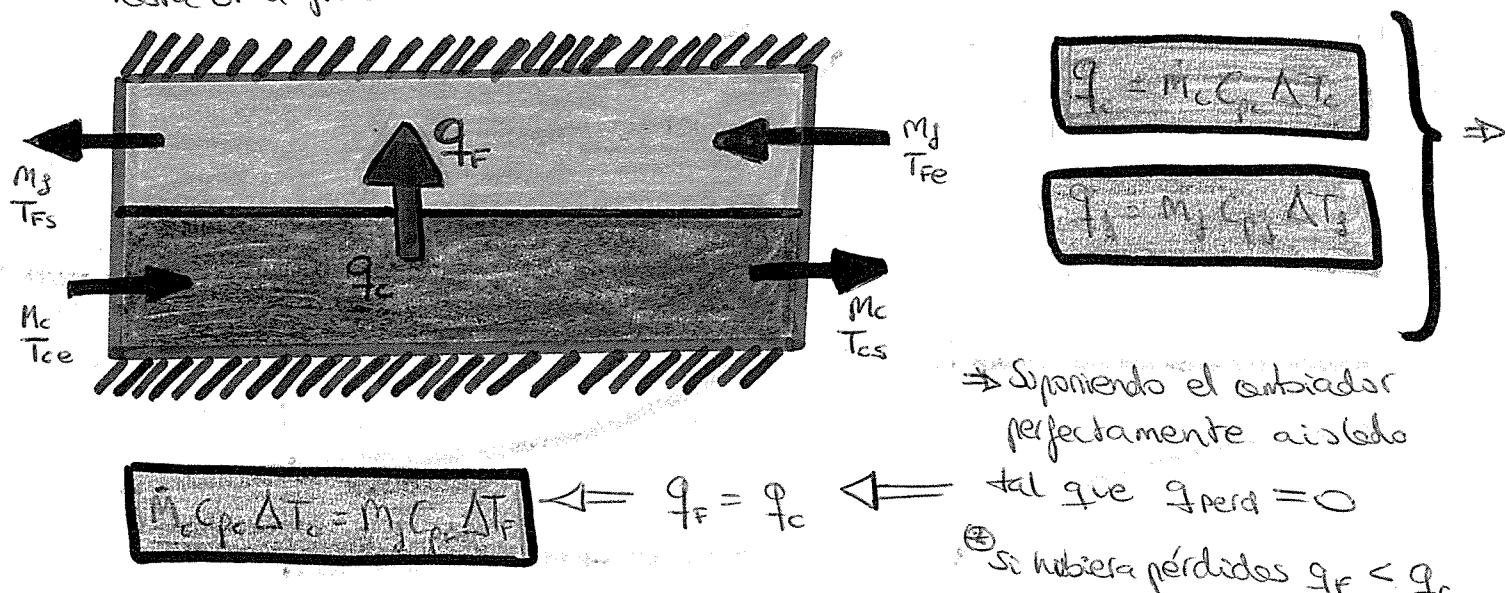
# CAMBIADORES

## Intercambiadores de calor. Análisis

### 1 INTRODUCCIÓN

Los mecanismos de transferencia de calor pueden ser aprovechados artificialmente en equipos industriales conocidos como intercambiador de calor.

En ellos la potencia térmica se transfiere desde una corriente caliente hasta otra fría.



Existe gran variedad de diseños de cambiadores en función de diversos factores como:

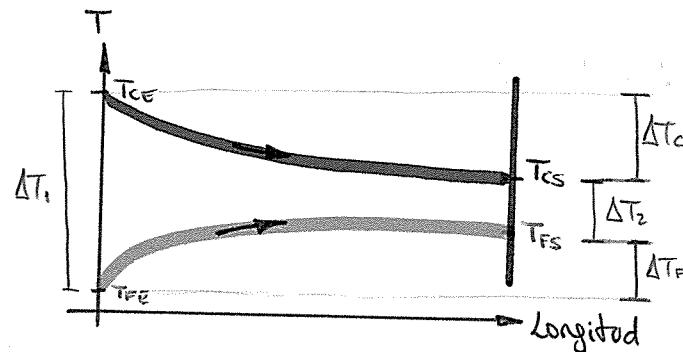
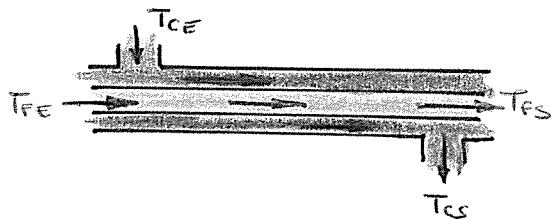
- Forma de transmisión de calor
- Según la ubicación de los fluidos
- Segundo los mecanismos de transferencia
- Fluidos implicados
- Según la construcción
- Según la aplicación

Algunos tipos:

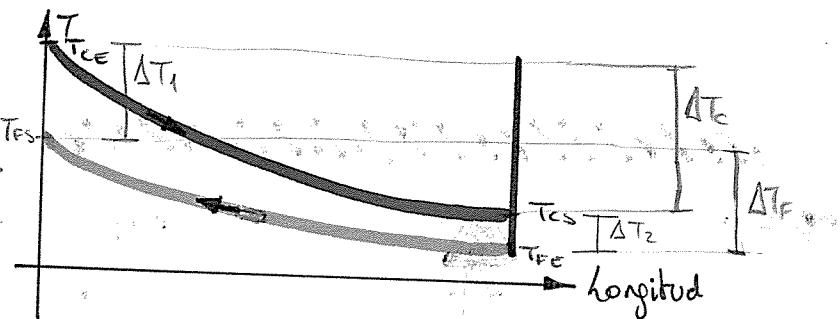
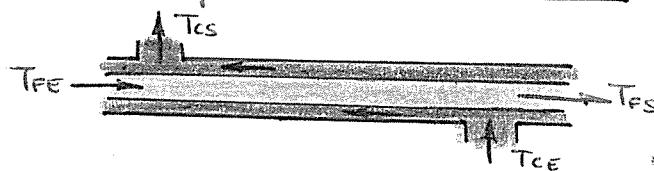
- Intercambiadores de placas
- " de cercas y tubos
- " de flujos cruzados
- " de tubos concéntricos

# 2 TIPOS DE FLUJO

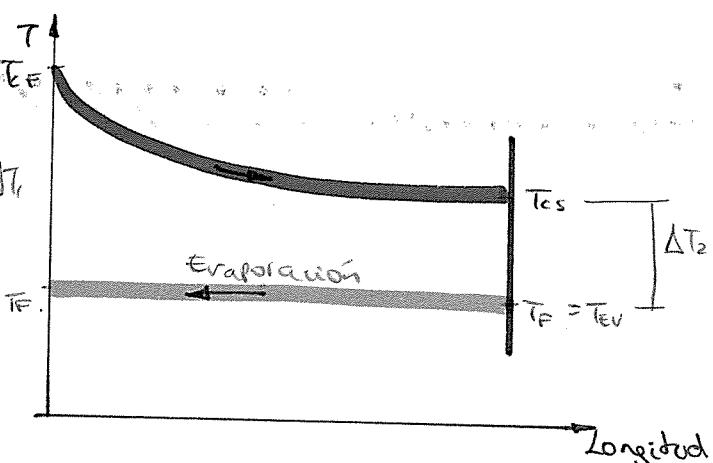
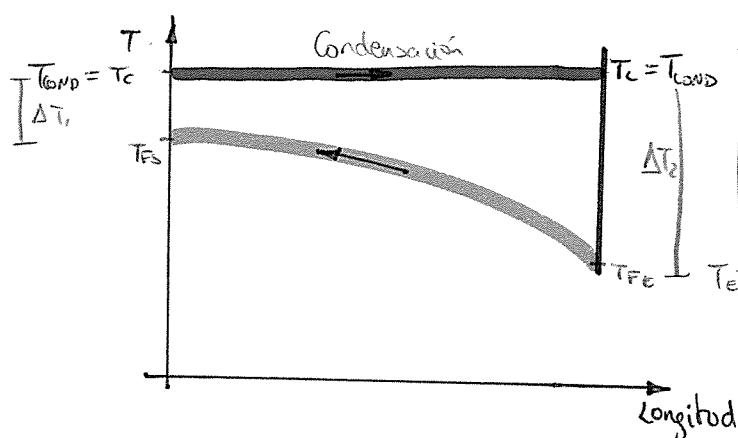
## Flujo paralelo equioriente



## Flujo paralelos en contracorriente



## Con cambio de fase



En los intercambiadores con cambio de fase es indiferente la disposición de los fluidos en contracorriente o equioriente.

# 3 MÉTODO DE ANÁLISIS DE $\Delta T_m$

## Diferencia media de temperatura $\Delta T_m$

- Para un correcto análisis del intercambio térmico de calor es necesario conocer el valor más representativo de  $\Delta T$  entre corriente a lo largo del intercambiador  $\Delta T_m$
- Se debe cumplir  $Q = U \cdot A \cdot \Delta T_m$

Importante: El fluido frío nunca podrá calentarse por encima de la temperatura máxima del fluido caliente, ni éste podrá enfriarse por debajo de la temperatura mínima del fluido frío.

### Para los intercambiadores de doble tubo

$$Q = U \cdot A \cdot \Delta T_m = U \cdot A \cdot \Delta T_{log}$$

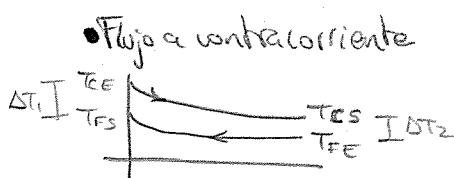
Definiremos a continuación  $\Delta T_m$  o incremento de temperatura logarítmica media.

$$\Delta T_{log} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)}$$

• Flujo equicorriente



$$\Delta T_{log} = \frac{(T_{ce} - T_{fe}) - (T_{cs} - T_{fs})}{\ln \left( \frac{T_{ce} - T_{fe}}{T_{cs} - T_{fs}} \right)}$$



$$\Delta T_{log} = \frac{(T_{ce} - T_{fs}) - (T_{cs} - T_{fe})}{\ln \left( \frac{T_{ce} - T_{fs}}{T_{cs} - T_{fe}} \right)}$$

### Si el intercambiador no es de doble tubo

$$\Delta T_m = F \cdot \Delta T_{log}$$

Deseable:  
 $F > 0,75$

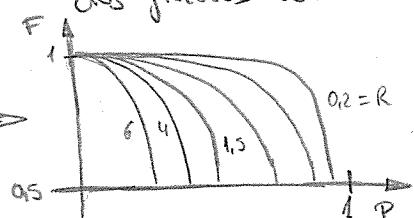
$F$ : Factor de forma dependiente de dos parámetros  $F = F(P, R)$

- $P$  (también efectividad): Representa la efectividad del fluido frío (relación entre el salto térmico que experimenta y el salto térmico máximo posible)
- $R$  (capacidad): Relación de capacidades térmicas de los dos fluidos del intercambiador.

$$P = \frac{q_d}{q_{max}} = \frac{m_s C_p (T_{fs} - T_{fe})}{m_{air} C_p (T_{ce} - T_{fe})}$$

$$R = \frac{m_s C_p}{m_{air} C_p} = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{fs} - T_{fe}}$$

$F$  tabulado para cada tipo de cambiador



NOTA!! Dentro del U del intercambiador hay que considerar el ensuciamiento del intercambiador de calor.  
Las incrustaciones dificultan el flujo de calor.

NOTA!! En los intercambiadores con cambio de fase: condensadores y evaporadores

- $F = 1$  siempre

~~W~~

$$\text{Condensador } R = \frac{T_{CE} - T_{CS}}{T_{FS} - T_{FE}} = 0 \\ T_{CE} = T_{CS}$$

~~HV~~

$$\text{Evaporador } R = \infty \\ R_{FE} = R_{FS}$$

## 4 MÉTODO NTU

- Definimos NTU (nº de unidades de transmisión)

$$NTU = \frac{UA}{(\dot{m}C_p)_m} = \frac{\Delta T_{max}}{\Delta T_m}$$

- Definimos razón de flujos  $C_R$

$$C_R = R_C !!$$

$$C_R = \frac{(\dot{m}C_p)_{min}}{(\dot{m}C_p)_{max}}$$

En condensador y evaporador  $C_R = 0$  siempre

- Efectividad del intercambiador: función de la geometría del cambiador y su distribución de corrientes

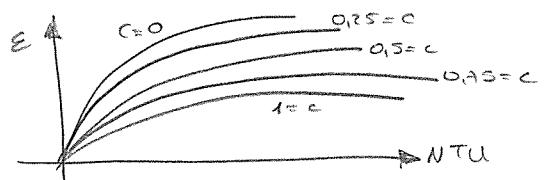
$$\epsilon = f(NTU, C_R)$$

Está tabulado para djs cambiadores

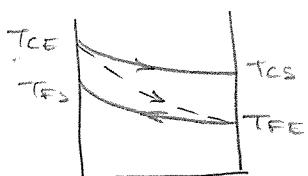
$$\epsilon = \frac{q}{q_{max}}$$

$$\dot{m}_C C_{pc} < \dot{m}_F C_{pf} \quad \text{CASO 1}$$

$$\dot{m}_F C_{pf} < \dot{m}_C C_{pc} \quad \text{CASO 2}$$

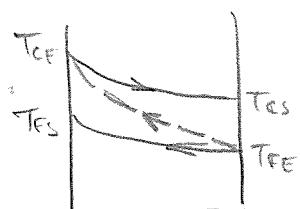


(1): En este caso la efectividad estará limitada por el fluido caliente



$$\epsilon = \frac{\dot{m}_C C_{pc} (T_{CE} - T_{CS})}{\dot{m}_C C_{pc} (T_{CE} - T_{FE})} = \frac{T_{CE} - T_{CS}}{T_{CE} - T_{FE}}$$

(2): En este caso la efectividad viene limitada por el fluido frío



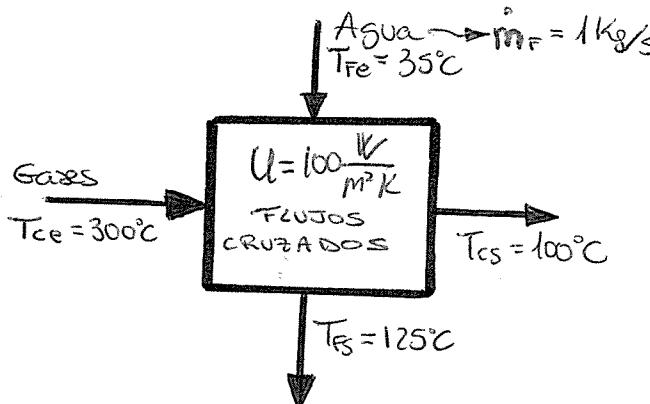
$$\epsilon = \frac{\dot{m}_F C_{pf} (T_{FS} - T_{FE})}{\dot{m}_F C_{pf} (T_{CE} - T_{FE})} = \frac{T_{FS} - T_{FE}}{T_{CE} - T_{FE}}$$

VER FÍN  
TEMA  
y Waderns

Existen gráficos y expresiones analíticas que permiten relacionar  $\epsilon$ ,  $C_R$  y  $NTU$  para distintas geometrías y disp. de flujo

## → Problema clase (by Corrochano → inventado)

Se tiene un cambiador de flujos cruzados:  $C_{PF} = 4197 \frac{Kcal}{kg \cdot K}$



Área del cambiador por el método NTU:

$$NTU = \frac{UA}{(mC_p)_{min}}$$

$$C_R = \frac{(mC_p)_{min}}{(mC_p)_{max}} ; \quad \epsilon = \frac{q}{q_{max}}$$

$\dot{m}_F C_{PF} = 1 \cdot 4197 \frac{W}{K}$ ,  $\dot{m}_c \cdot C_{pc} = ?? \Rightarrow$  Balance de energía al intercambiador

$$q_F = q_c = \dot{m}_F C_{PF} \Delta T_F = \dot{m}_c \cdot C_{pc} \cdot \Delta T_c, \quad \dot{m}_c \cdot C_{pc} = \frac{4197 \cdot (125 - 35)}{300 - 100}$$

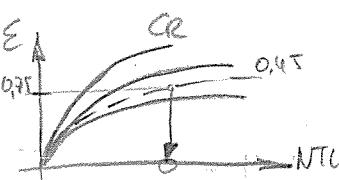
$$\dot{m}_c C_{pc} = 1888,65 \frac{W}{K}$$

Por tanto  $(mC_p)_{min} = \dot{m}_c C_{pc} = 1889 \frac{W}{K}$

$$\dot{m}_F C_{PF} = 4197 \frac{W}{K} \quad \Rightarrow \quad C_R = \frac{1889}{4197} = 0,45$$

Podríamos ir con estos valores

$$C_R = 0,45 > \epsilon = 0,75 \rightarrow \text{se sacrifica}$$



$$\epsilon = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{Fe}} = \frac{200}{265} = 0,75$$

$$\Rightarrow NTU = 2,2$$

$$NTU = \frac{100 \cdot A}{1889} = 2,2 \rightarrow A = 41,56 \text{ m}^2$$

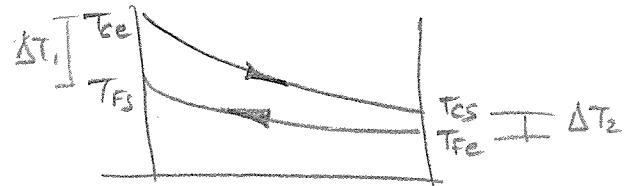
Realizar el mismo cálculo aplicando el método de la temperatura log. media

Como no se trata de un cambiador de doble tubo

$$q = UA \Delta T_m$$

$$\Delta T_m = F \Delta T_{en}$$

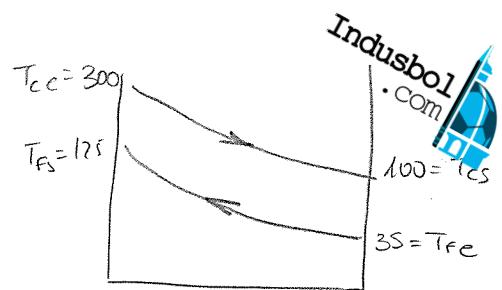
$$\Delta T_{en} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} = \frac{175 - 65}{\ln \left( \frac{175}{65} \right)} = 111,06^\circ C$$



$$\Delta T_1 = 300 - 125 = 175$$

$$\Delta T_2 = 100 - 35 = 65$$

Aluubo  $\neq$  Combiador de flujos cruzados



$$P = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{125 - 35}{300 - 35} = 0,34$$

$$R = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{fs} - T_{fe}} = \frac{300 - 100}{125 - 35} = 2,2$$

$$\Rightarrow F = 0,88 \quad (\text{gráfico})$$

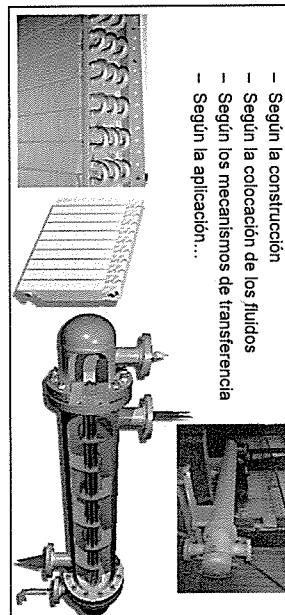
$$q = UA \Delta T_m = UA \cdot F \Delta T_{em} = 100 \cdot A \cdot 0,88 \cdot 111,06 = \underbrace{\dot{m}_f C_p f}_{4197} \frac{\Delta T_f}{95} \Delta T_F$$

$$\boxed{A = \frac{4197 \cdot 95}{0,88 \cdot 111,06 \cdot 100} = 38,6 \approx \underline{\underline{39 \text{ m}^2}}}$$

## Intercambiadores de calor

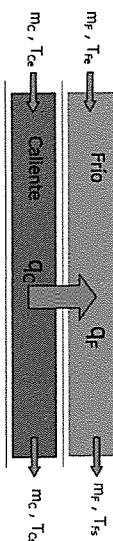
Incropera: Cap. 11  
Temario: Cap. 4

- Existe gran variedad de diseños de intercambiadores de calor en función de diversos factores:
  - Forma de la transmisión de calor
  - Fluidos implicados
  - Según la construcción
  - Según los mecanismos de transferencia
  - Según la aplicación...



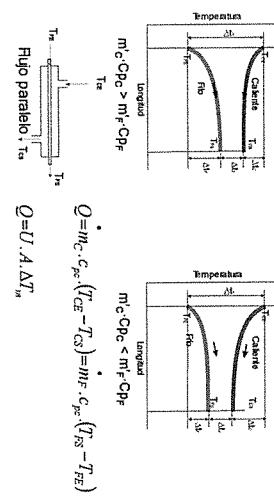
## Introducción

- Los mecanismos de transferencia de calor pueden ser aprovechados artificialmente en equipos industriales conocidos como intercambiadores de calor
- En ellos la potencia térmica se transfiere desde una corriente caliente hasta otra fría



## Tipos de flujo - I

### • Flujo paralelo

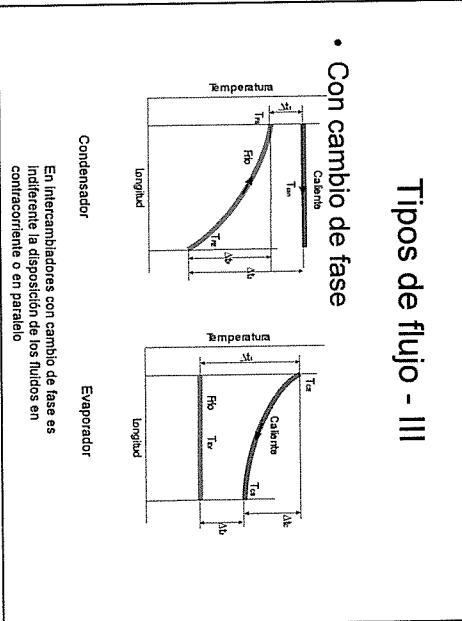
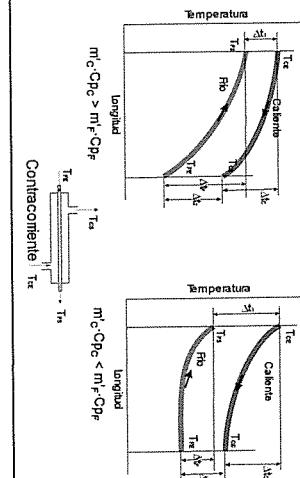


- Habitualmente se considera que no existen pérdidas hacia el exterior →  $q_F = q_C$
- Si las hubiera →  $q_F < q_C$



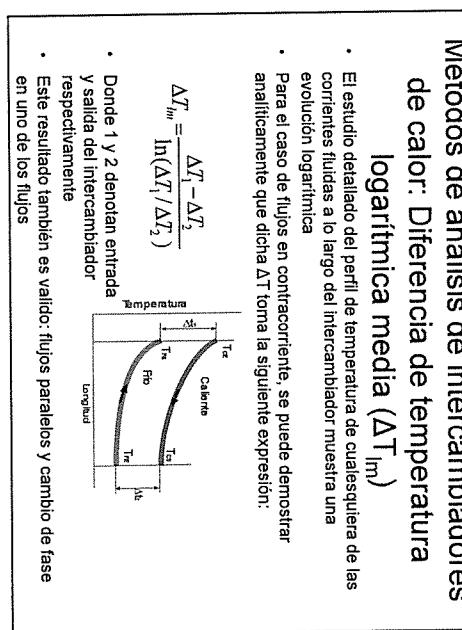
## Tipos de flujo - II

- En contracorriente



## Métodos de análisis de intercambiadores de calor: Diferencia media de temperatura $\Delta \bar{T}_m$

- Para un correcto análisis del intercambio térmico de calor es necesario conocer el valor más representativo de  $\Delta T$  entre corrientes a lo largo del intercambiador
- Además debe cumplir:  $Q = U \cdot A \cdot \Delta T_m$
- Pero los perfiles de temperatura de los fluidos no son constantes
  - Contracorriente, equicorriente (o paralelo), condensación, evaporación, flujos cruzados y paso múltiple
- Importante: El fluido frío nunca podrá calentarse por encima de la temperatura máxima del fluido caliente, ni éste deberá enfriarse por debajo de la temperatura mínima del fluido frío



Condensador  
En intercambiadores con cambio de fase es  
indiferente la disposición de los fluidos en  
contracorriente o en paralelo



## Métodos de análisis de intercambiadores de calor: Diferencia de temperatura logarítmica media ( $\Delta T_{lm}$ )



$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)}$$

$$Q = \dot{m}_c \cdot c_{pc} \cdot (T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f \cdot c_{pf} \cdot (T_{fs} - T_{fe})$$

Si  $\Delta T_1 = \Delta T_2$ , se tiene un intercambiador equilibrado, y en este caso:  $\Delta T_{lm} = \Delta T_1 = \Delta T_2$

$$Q = U \cdot A \cdot \Delta T_{lm}$$

$$\Delta T_1 = T_{ce} - T_{fs}$$

$$\Delta T_2 = T_{cs} - T_{fe}$$

## Métodos de análisis de intercambiadores de calor: Factor de corrección del $\Delta T_{lm}$

$$Q = \dot{m}_c \cdot C_{pc} \cdot (T_{ce} - T_{cs}) = U \cdot A \cdot \Delta T_{lm}$$

$$\Delta T_{lm} = (R, P) \Delta T_m$$

$$P = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{A}{B} < 1$$

$$R = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{fs} - T_{fe}} = \frac{C}{A}$$

$F = F(R, P)$  de intercambiador  
y fluido por tubos

Nomenclatura alternativa: "T" fluido por carcasa

$$(P) > 0.75$$

Para distintas configuraciones de intercambiador

y fluido por tubos

## Métodos de análisis de intercambiadores de calor: Factor de corrección del $\Delta T_{lm}$

- Para los casos no descritos anteriormente

- Se corrige  $\Delta T_{lm}$  obtenido con la expresión anterior con un factor  $F$  dependiente de dos parámetros:

- Efectividad ( $P$ ): Representa la efectividad del fluido frío (relación entre el ratio térmico que experimenta y salto térmico máximo posible (performance))

- Capacidad ( $R$ ): Relación de capacidades térmicas de los dos fluidos del intercambiador

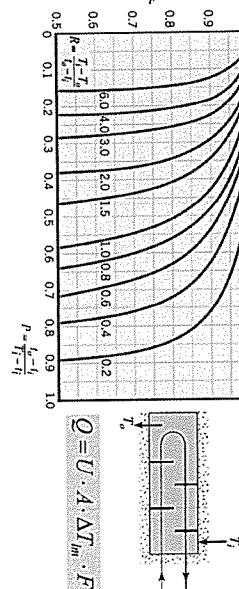
$$P = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{A}{B}$$

$$R = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{fs} - T_{fe}} = \frac{C}{A}$$

- La aplicación de este método exige el conocimiento previo del mapa de temperaturas (al menos una de las temperaturas de salida y las dos de entrada).
- Si se desconocen ambas temperaturas finales entonces será necesario suponer una de ellas para estimar  $P$  y verificarla posteriormente.

## Métodos de análisis de intercambiadores de calor: Factor de corrección del $\Delta T_{lm}$

- Factor de corrección para un intercambiador de calor de carcasa y tubos (un paso por carcasa y dos por tubos)



$$Q = U \cdot A \cdot \Delta T_{lm} \cdot F$$

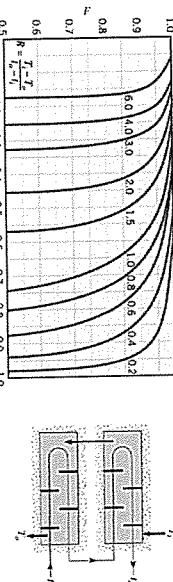
$$R = \frac{T_c - T_f}{T_e - T_i}$$

$$P = \frac{T_f - T_e}{T_i - T_e}$$



### Métodos de análisis de intercambiadores de calor: Factor de corrección del $\Delta T_{in}$

- Factor de corrección para un intercambiador de calor de carcasa y tubos (dos pasos por carcasa, cuatro pasos por los tubos)



$$\dot{Q} = U \cdot A \cdot \Delta T_{in} \cdot F$$

### Métodos de análisis de intercambiadores de calor: Método NTU

- La efectividad es la relación entre el calor intercambiado entre dos corrientes fluidas y el máximo que se podría haber intercambiado entre ellas.

$$\varepsilon = \frac{q}{q_{\max}} \quad q_{\max,ctr} = (\dot{m}_r \cdot C_p)_{\min} \cdot (T_{ex} - T_{fe})$$

$$\varepsilon = \frac{T_{fe} - T_{re}}{T_{ex} - T_{fe}} \quad \dot{m}_r \cdot C_{pr} < \dot{m}_e \cdot C_{pe} \quad \varepsilon = \frac{T_{ex} - T_{re}}{T_{ex} - T_{fe}} \quad \dot{m}_r \cdot C_{pr} > \dot{m}_e \cdot C_{pe}$$

- La relación de capacidad

$$C_R = \frac{(\dot{m} \cdot C_p)_{\min}}{(\dot{m} \cdot C_p)_{\max}}$$

Cambio de fase: Cr=0

### Métodos de análisis de intercambiadores de calor: Método NTU

- Número de unidades de transmisión (NTU).

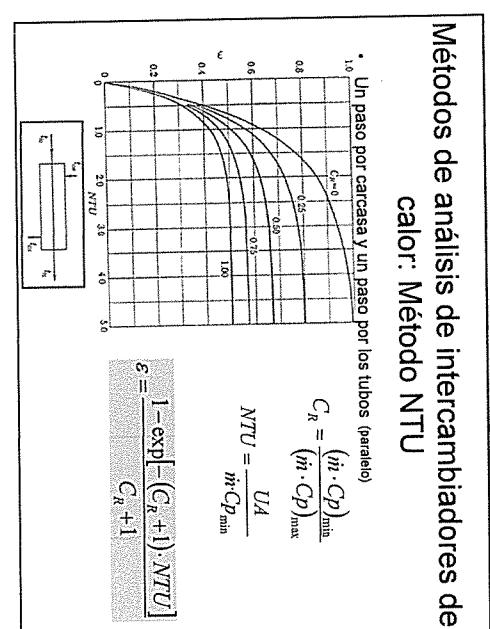
$$NTU = \frac{UA}{(\dot{m} \cdot Cp)_{\min}} = \frac{\Delta T_{\max}}{\Delta T_m}$$

- Razón de flujos ( $C_R$ , o  $R_C$ ):

$$C_R = \frac{(\dot{m}_r \cdot C_p)_{\min}}{(\dot{m}_r \cdot C_p)_{\max}}$$

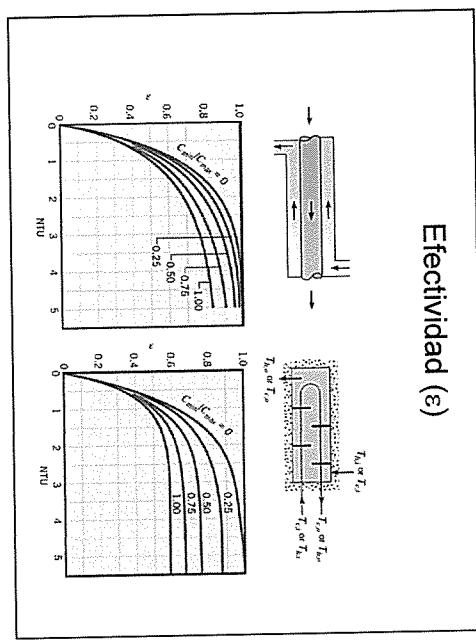
- Efectividad del intercambiador: función de la geometría del intercambiador y su distribución de corrientes.

$$\varepsilon = f(NTU, C_R)$$





## Efectividad ( $\varepsilon$ )



## Problema Intercambiadores 1

- En un cambiador a contracorriente se desea enfriar aceite desde 200°C hasta 50°C, merced a un flujo de agua que entra en el cambiador a 20°C
    - Datos del aceite: 1kg/s, Cp=2kJ/kg°C
    - Datos del agua: 0.5 kg/s, Cp=4kJ/kg°C
  - a) Determinarse el área de transferencia que debe tener el cambiador, sabiendo los siguientes datos:
    - $h$  del agua = 1000 W/m<sup>2</sup>°C
    - $h$  del aceite = 500 W/m<sup>2</sup>°C
    - Espesor del tubo = 2 mm
    - Conductividad del tubo = 20 W/m°C
- NOTA: Se puede considerar que el tubo es de pared delgada, asimilable por tanto a una pared plana

## Efectividad ( $\varepsilon$ )

Corrientes paralelas equicorrente

$$\varepsilon = \frac{1 - e^{[-\ln(1+C)]}}{1+C}$$

Contracorriente

$$\varepsilon = \frac{1 - e^{[-\ln(1+C)]}}{1+C} e^{[-\ln(1+C)]}$$

$$\text{Para } C=1$$

$$\varepsilon = \frac{NTU}{1+NTU}$$

Flujos cruzados sin mezclar

$$\varepsilon = 1 - \exp \left[ \frac{NTU^{0.5} e^{[-\ln(1+C)]}}{Cn} - 1 \right]$$

Un paso por carcasa 2x4x6, por tubos

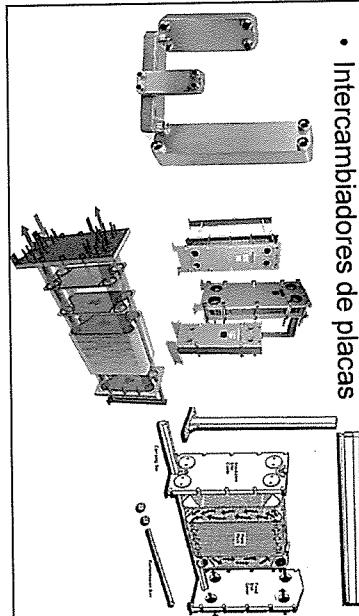
## Problema Intercambiadores 1

- En un cambiador a contracorriente se desea enfriar aceite desde 200°C hasta 50°C, merced a un flujo de agua que entra en el cambiador a 20°C
  - Datos del aceite: 1kg/s, Cp=2kJ/kg°C
  - Datos del agua: 0.5 kg/s, Cp=4kJ/kg°C
- b) Determinar también su efectividad
- c) Dibujar esquemáticamente la evolución de las temperaturas del aceite y del agua
- d) ¿Puede clasificarse el intercambiador de una manera determinada, dadas sus prestaciones térmicas?



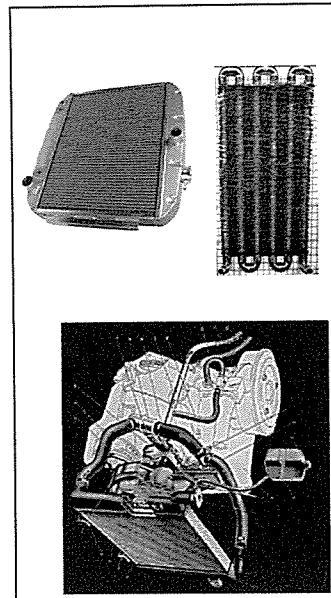
## Ejemplos de intercambiadores

- Intercambiadores de placas



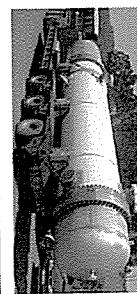
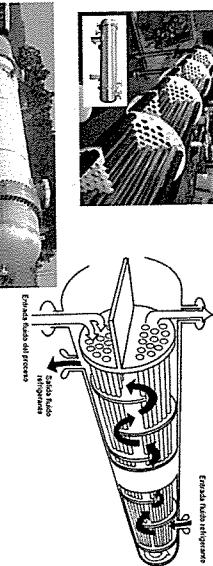
## Ejemplos de intercambiadores

- Flujo cruzados



## Ejemplos de intercambiadores

- Intercambiadores de carcasa y tubos



**Problema Intercambiadores 2**

Se desea enfriar para su almacenamiento 250 l/h de leche desde 38°C a una temperatura segura < 13°C. El fluido refrigerante es agua entrando a 10°C al cambiador a razón de 720 l/h. Para ello se dispone un intercambiador de tubos cuya tubería interior tiene 50 mm de diámetro. Los fluidos circulan a contracorriente. El coeficiente global de transmisión de calor es de 1000 W/m<sup>2</sup>K.

Determinar:

- 1) El tamaño óptimo del cambiador (U.A) necesario para llevar a cabo el enfriamiento.
- 2) La longitud de los tubos.
- 3) El calor intercambiado y la temperatura de salida del agua.
- 4) La temperatura de salida de la leche Y del agua en caso de que el flujo de agua se doble, asumiendo que se mantiene el tamaño óptimo calculado en (1).

Propiedades (constantes):

|       | Densidad (kg/m <sup>3</sup> ) | C calor específico (J/kgK) |
|-------|-------------------------------|----------------------------|
| Aqua  | 1000                          | 4187                       |
| Lecce | 1030                          | 3860                       |

NOTA:- Para un cambiador en contracorriente puede aplicarse:

$$NTU = \frac{1}{C_n - 1} \ln \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon C_n - 1} \right)$$

$$\epsilon = \frac{1 - \exp[NTU(C_n - 1)]}{1 + C_n \exp[NTU(C_n - 1)]}$$



## Diseño intercambiadores

- La mayor efectividad se encuentra en los cambiadores en contra corriente (c.c.), con menores saltos térmicos y además menores tensiones mecánicas.
- Se tiene gráficos de  $\epsilon$  para las geometrías y disposiciones más comunes.
- En el caso de flujos equilibrados ( $C_R=1$ ), el salto entre las corrientes fría y caliente del intercambiador permanece constante, lo que optimiza el problema de las tensiones térmicas, pero proporciona una efectividad menor.

## Comentarios

- El método NTU resulta adecuado para el cálculo de diseño del intercambiador en el caso de partir de sus características constructivas.
- El método de la  $\Delta T_{lm}$  resulta adecuado para el caso en que se conocen las temperaturas de los fluidos a la entrada y a la salida.
- Se suele sobredimensionar el intercambiador para corregir el efecto de la suciedad a lo largo de la operación del mismo, lo que lleva a modificación de  $U$  y de la pérdida de carga.

## Comentarios

- Un NTU muy alto no resulta idóneo, a no ser que el intercambiador sea equilibrado. En estos, la diferencia de temperatura entre fluido caliente y frío se mantiene casi constante, por lo que la transferencia de calor se mantiene alta a lo largo de todo él.
- En caso contrario, hay una amplia longitud del intercambiador en la que la transmisión es muy pobre, pues la diferencia de  $T$  es muy pequeña. Es decir, se gasta dinero en fabricar una parte que aporta muy poco al objetivo de buscado de transferir calor.
- No siempre cabe ir hacia un intercambiador equilibrado, pues las temperaturas de entrada y salida de ambos fluidos lo pueden impedir. Caso aparte son los generadores de vapor, evaporadores y condensadores ( $C_R=0$ ) que nunca pueden ser equilibrados, pero pueden (deben a veces) tener tamaños muy grandes

## Cálculo del rendimiento de un intercambiador

- Método de la diferencia de temperatura logarítmica media:
  - Problema tipo: Conocidos los datos de intercambio térmico, dimensionar el intercambiador.
    - Se conocen: ambos fluidos, uno de los caudales y todas las temperaturas que deseas calcular; tipo de intercambiador de calor; tamaño
    - 1. Cálculo de las temperaturas medias de ambos fluidos
    - 2. Cálculo de la potencia térmica por balance de energía del conjunto ( $q$ )
    - 3. Cálculo del caudal que falla,  $q=m \cdot C_p \cdot \Delta T$
    - 4. Selección del tipo de intercambiador de calor. En su caso, del diámetro de los tubos



## Cálculo del rendimiento de un intercambiador

- Método de la diferencia de temperatura logarítmica media:
  - Problema tipo: Conocidos los datos de intercambio térmico, dimensionar el intercambiador.
  - 5. Comprobar si las pérdidas de carga son admisibles
  - 6. Cálculo de la  $\Delta T_m$  ( $\Delta T_m = F \cdot \Delta T_{lm}$ )
  - 7. Cálculo del producto  $U \cdot A$
  - 8. Cálculo del coeficiente global teórico "impío" de transferencia de calor (en su caso calcular  $h_i$ ,  $h_e$ )
  - 9. Cálculo del coeficiente global "sucio" en caso de que corresponda añadiendo las resistencias térmicas de ensuciamiento
  - 10. Cálculo de la superficie de intercambio,  $A$ , a partir del producto  $U \cdot A$

## Cálculo del rendimiento de un intercambiador

- Método NTU:
  - Problema tipo: conocer la geometría de un intercambiador de calor estimar su comportamiento térmico
    - Se conoce: tipo de intercambiador,  $U \cdot A$ , ambos fluidos, caudal del fluido con menor capacidad y las temperaturas de entrada de ambos fluidos
    - Desea calcular: temperaturas de salida y calor intercambiado
  - 1. Se elige un flujo mecánico, lado frío
  - 2. Cálculo de la relación de capacidades,  $Cr$  (o  $Rc$  o  $C$ )
  - 3. Cálculo del NTU
  - 4. Cálculo de la efectividad del intercambiador con  $Cr$  y  $NTU$
  - 5. Cálculo de las temperaturas de salida
  - 6. Cálculo del calor total intercambiado

## Resistencias térmicas de ensuciamiento

| Fluido  | Resistencia térmica de ensuciamiento |
|---|--------------------------------------|
| Agua de red ( $v < 1 \text{ m/s}$ )           | 1,8e-4                               |
| Aqua de mar ( $v > 1 \text{ m/s}$ )           | 1,8e-4                               |
| Aqua de río ( $v > 1 \text{ m/s}$ )           | 7,0e-4                               |
| Aqua tratada de torre ( $v > 1 \text{ m/s}$ ) | 3,5e-4                               |
| Aqua tratada de alimentación a calderas       | 1,8e-4                               |
| Vapor de agua                                 | 9,0e-5                               |
| Refrigerante vapor                            | 3,5e-4                               |
| Refrigerante líquido                          | 1,8e-4                               |
| Gas natural                                   | 1,8e-4                               |
| Aire comprimido                               | 3,5e-4                               |
| Aceite vegetal                                | 5,2e-4                               |

## Valores representativos del coeficiente global de transmisión de calor en intercambiadores con fluidos habituales

| Fluido                                     | Coeficiente global de transmisión de calor |
|--|--|
| Aire/aire, flujos cruzados                 | 10-50                                      |
| Aire/fuera, flujos cruzados                | 25-80                                      |
| Aire/fuera, tubos                          | 850-1700                                   |
| Aqua/fuera, carcasa y tubos                | 110-350                                    |
| Aqua/fuera, carcasa y tubos                | 1100-5600                                  |
| Aqua/condensador de vapor, carcasa y tubos | 800-1400                                   |
| Aqua/condensador frén, carcasa y tubos     | 450-900                                    |
| Aqua/salina/mare, carcasa y tubos          | 500-1100                                   |



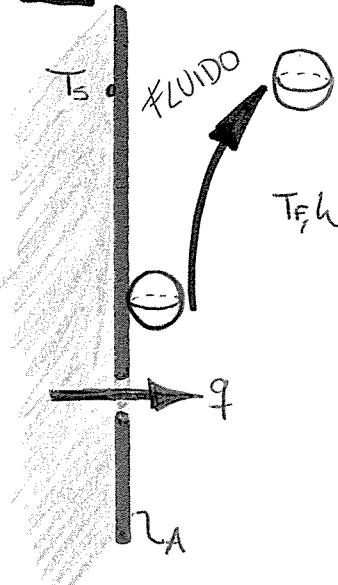
# CONVECCIÓN

Convección Forzada

Convección Libre

-CORRELACIONES-

## 1 INTRODUCCIÓN



La convección se trata de un mecanismo de transmisión de calor que tiene lugar en un fluido debido a la conducción y al transporte de energía como consecuencia del movimiento del fluido, producido bien de forma natural o por medios mecánicos.

De forma general existen tres tipos de convección:

{ Convección libre: Movimiento por variaciones de densidad  
 Convección forzada: Producida por un equipo mecánico  
 Convección con cambio de fase: Ebullición y condensación

La ley fundamental de la convección es la ley de Newton:

$$q = h A (T_s - T_f)$$

El coeficiente de película o coeficiente de transmisión de calor por convección ( $h$ ) es una conductancia térmica ( $\text{W/m}^2\text{K}$ )

No se trata de una propiedad del material, sino que depende de:

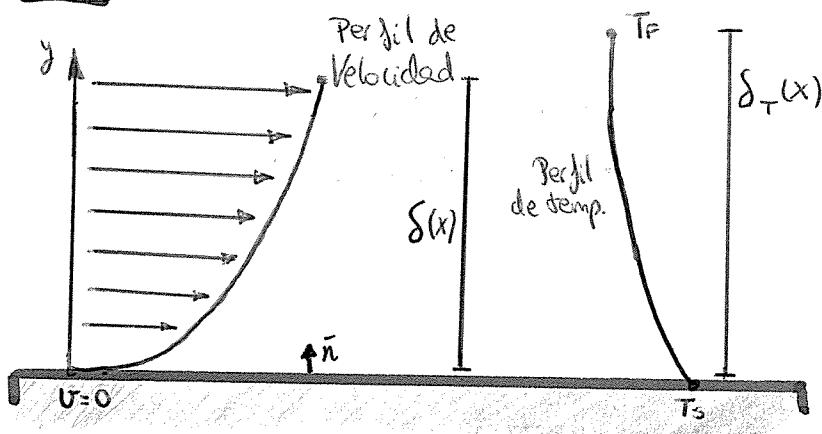
{ Las propiedades del fluido  
 La geometría de la superficie

(La hidrodinámica del movimiento del fluido a lo largo de la superficie)

VALORES TÍPICOS DE  $h$  ( $\text{W/m}^2\text{K}$ ):

| Proceso                        | Min  | Máx    |
|--------------------------------|------|--------|
| Convección libre en gases      | 5    | 25     |
| Convección forzada en gases    | 15   | 250    |
| Convección libre en líquidos   | 50   | 1600   |
| Convección forzada en líquidos | 100  | 15000  |
| Ebullición de líquidos         | 2500 | 25000  |
| Condensación de vapor          | 5000 | 100000 |

## 2 CONCEPTO DE CAPA LÍMITE HIDRODINÁMICA Y TÉRMICA



ya que el movimiento del fluido es el responsable principal del proceso de convección, es necesario caracterizar su comportamiento en la vecindad de la superficie. Esto exige determinar:

- Módulo y dirección de la velocidad
- Presión
- Temperatura
- Densidad del fluido

• Capa límite térmica: Zona donde el gradiente de temperatura es gradual variando desde  $T_s$  hasta  $T_f$   $\rightarrow$  Espesor  $\delta_t(x)$

• Capa límite de velocidad: Zona donde el gradiente de velocidad es evidente por lo que no puede despreciarse el efecto de la viscosidad:  $\mu \approx$  Coef. de viscosidad dinámica  $\left[ \frac{kg}{ms} \right]$   
 $\downarrow$   
 Espesor  $\delta_v(x)$

Aceptando que el fluido en contacto con la superficie tiene velocidad nula, entonces en las proximidades de ésta el calor se transmitirá por conducción en el seno del fluido, por lo que, combinando las leyes de Fourier y de Newton.

$$q = hA(T_s - T_f) = -K_F A \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{y=0} \rightarrow h = \frac{-K_F \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_s - T_f}$$

Nuestro objetivo va a ser por tanto determinar el gradiente de temperatura en la capa límite para así poder calcular el coeficiente de transferencia.

En un primer estudio podemos decir que:

$$T = T(x, y, \underline{u}, \underline{v}, \rho, P)$$

Campo de velocidades

Introducimos las siguientes variables adimensionales:

$$x^* = x/L; y^* = y/L; u^* = \frac{u}{U}; v^* = \frac{v}{U}; T^* = \frac{T - T_F}{T_s - T_F}$$

$$\text{De forma que: } T^* = T^*(x^*, y^*, Re, Gr, Pr)$$

Aparecen los siguientes números adimensionales:

- Número de Reynolds:

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{UL\rho}{\mu}$$

\*  $D$  = viscosidad cinemática  
 $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$

El nº de Reynolds relaciona fuerza de inercia con las fuerzas viscoas. Un valor de Re alto indica la prevalencia de las fuerzas de inercia mientras que valores pequeños indican la importancia del término de fricción → se emplea en convección forzada

- Número de Grashof:

$$Gr = \frac{\rho L^3 \beta \Delta T}{\nu^2} = \frac{\rho L^3 \beta P^2 \Delta T}{\mu^2}$$

$\beta$ : coef. de dilatación térmica  
- Tablas  
- GIo aire  
 $\Delta T = 1/T_F(K)$

Relaciona las fuerzas de empuje con las viscoas. Es equivalente al nº de Reynolds pero en convección libre, esto es, en campos de velocidad inducidos por gradientes de densidad debidos a variaciones de temperatura.

- Número de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\rho C_p}{K}$$

Relaciona la difusión de la cantidad de movimiento debido al efecto de la viscosidad con la difusión de calor por conducción en el fluido.

Mide la importancia del transporte por difusión del momento en la capa límite de velocidad frente al transporte de energía en la capa límite térmica.

Es propiedad termodifusiva.

Razón entre espesores de las capas límite hidrodinámica y térmica  
 $\delta_r(x), \delta(x)$

## ● Número de Nusselt

$$\bar{Nu} = Nu_z = \frac{hL}{K_F}$$

Se trata de una expresión adimensional del coeficiente de película

$$Nu = f(Re, Gr, Pr)$$

El problema se reduce a determinar los 3 números adimensionales  $\rightarrow$   
 $\rightarrow Nu \rightarrow h$

## 3 CONVECCIÓN FORZADA Y LIBRE. DIFERENTES TIPOS DE FLUJOS

### • Convección forzada (despreciamos la disipación viscosa)

Se desprecia el efecto de las fuerzas de empuje frente a las de inercia, así como la disipación de calor debido a la viscosidad.

Esta hipótesis es válida para gases y líquidos de baja viscosidad pero no sería aceptable para, por ejemplo, aceite.

$$Nu = f(Re, Pr)$$

### • Convección libre

No existen fuerzas de inercia sino de tipo neutral, por lo que las velocidades del fluido son pequeñas y se puede despreciar la disipación viscosa.

$$Nu = f(Gr, Pr) = f(Ra, Pr)$$

### ● Número de Rayleigh

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

Muestra si el régimen es laminar o turbulento en convección libre.

## Tipos de flujos

Laminar ~ (Mixto)  
 Turbulento

- En flujo laminar el movimiento del fluido es ordenado en líneas de flujo sensiblemente paralelas. La difusión de la velocidad de movimiento y la difusión de calor son reducidas, lo que es equivalente a decir que los coeficientes de película  $h$  son bajos.

En convección forzada, para el caso de placas planas suele considerarse flujo laminar si  $Re < 5 \cdot 10^5$  (\*\*)

- En flujo turbulento, el movimiento del fluido es muy irregular, caracterizándose por grandes fluctuaciones de velocidad en todas direcciones. Esto aumenta la transferencia transversal de momento y energía, aumentando así la fricción y el calor transferido, por tanto  $h$  mayores.

En convección forzada, para el caso de placas planas, suele considerarse flujo turbulento si  $Re > 5 \cdot 10^5$  (\*\*)

En convección libre se usa el n° de Rayleigh ( $Ra$ ) ya que  $Re = 0$  para determinar la mejor o menor laminaridad.

④ Reynolds crítico.  $Re_c = \frac{\chi_c U_{\infty} P}{\mu}$

CUIDADO  
 $Re_c > 5 \cdot 10^5 \rightarrow$  MIXTAS NO TURBULENTES  
 $Re_c < 5 \cdot 10^5 \rightarrow$  LAMINAR

→ Para resolver los problemas usaremos el formulario de correcciones del final del capítulo

## Metodología

- 1) Determinar geometría del problema
- 2) Estimar las temperaturas implicadas
- 3) Decidir si se requiere un valor local o promedio
- 4) Calcular  $Re$  o  $Ra$  para determinar el régimen de flujo
- 5) Seleccionar la corrección adecuada

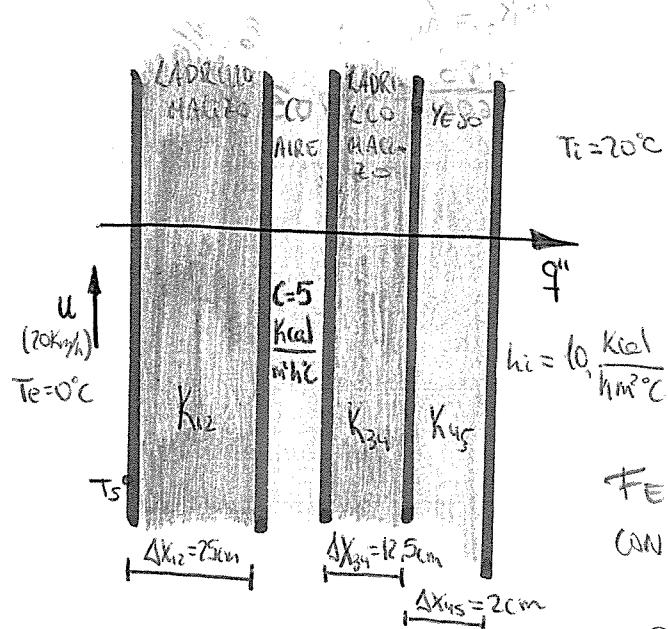
COLECCIÓN

15

Una pared de 25 m de longitud está formada por:

- 1 pie (25cm) de ladrillo macizo ( $K = 0.6 \text{ Kcal/hm}^{\circ}\text{C}$ )
- Génera de aire de conductancia  $C = 5 \text{ Kcal/m}^2\text{h}^{\circ}\text{C}$
- $\frac{1}{2}$  pie (12.5cm) de ladrillo macizo ( $K = 0.6 \text{ Kcal/hm}^{\circ}\text{C}$ )
- 2 cm de enlucido de yeso ( $K = 0.4 \text{ Kcal/hm}^{\circ}\text{C}$ )

La pared está sometida a la acción de un viento que fluye paralelo a ella a  $20 \text{ Km/h}$  a una temperatura de  $0^{\circ}\text{C}$ . Sabiendo que el coeficiente de transmisión superficial interior vale  $10 \text{ Kcal/hm}^2\text{h}^{\circ}\text{C}$ , determinar las pérdidas térmicas, por hora,  $\text{m}^2$  de pared si la temperatura en el interior es de  $20^{\circ}\text{C}$ .



Se pide:

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta X_{12}}{K_{12}} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{\Delta X_{34}}{K_{34}} + \frac{\Delta X_{45}}{K_{45}} + \frac{1}{h_i}}$$

???

Problema de Wavycción ~ Calculo  $h_e$

FENÓMENO DE CONVECCIÓN FORZADA (relevado)  
CON FLUJO PARALELO A LA PLACA PLANA

$$Re = \frac{UL\rho}{\mu} = \frac{20000}{3600} \cdot 25 \quad \rho$$

Prop. termo-físicas del aire tabuladas para una temperatura media de película

$$T_{mp} = \frac{T_s + T_f}{2} = \frac{T_s + 0}{2} \quad \text{Supongo } T_s = 5^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 1,2809 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad T_{mp} = 2,5^{\circ}\text{C}$$

$$\eta = 17,32 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

$$K = 24,78 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^{\circ}\text{C}}$$

$$Pr = 0,7175$$

$$Re = \frac{200}{36} \cdot 25 \cdot 1,2809 \quad \leftarrow$$

$$Re = 1,027 \cdot 10^5 > 5 \cdot 10^5$$

## Correlaciones para flujo mixto

$$\bullet \text{Re} < 10^3 \approx 100$$

$$\bullet \text{Re} > 10^3 \rightarrow Nu_L = [0,228 \cdot Re_L (\log_{10} Re_L)^{-2,584} - 872] Pr^{1/3} = 12893,9$$

$$Nu_L = \frac{\bar{h} L}{K_F} \rightarrow \bar{h} = \frac{Nu_L \cdot K_F}{L} = 12,52 \frac{W}{m^2 K}$$

Entramos en la expresión (\*) o de pérdidas:

$$\frac{q}{A} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_e} + \frac{\Delta X_{12}}{K_{12}} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{\Delta X_{34}}{K_{34}} + \frac{\Delta X_{45}}{K_{45}} + \frac{1}{h_i}}$$

$$\frac{q}{A} = 21,75 \frac{W}{m^2}$$

Comprobamos hipótesis  $T_s = 5^\circ C$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_e = 12,52 \frac{W}{m^2 K} \\ \Delta X_{12} = 0,25 m; K_{12} = 0,6 \frac{W}{K \cdot m} \cdot \frac{1000 \text{ cal}}{1 \text{ kcal}} \cdot \frac{4180}{3600} \cdot \frac{1 \text{ K}}{1 \text{ cal}} = 0,125 \text{ m} \\ C_{23} = 5 \cdot \frac{4180}{3600} = 5,703 \frac{W}{m^2 C} \\ K_{34} = K_{12} = 0,696 \frac{W}{m^2} \\ K_{45} = 0,4 \frac{4180}{3600} = 0,469 \frac{W}{m^2 C}; \Delta X_{45} = 0,02 \\ h_i = 10 \frac{4180}{3600} = 11,67 \frac{W}{m^2 C} \end{array} \right.$$

$$\frac{q}{A} = h_e (T_s - T_e); T_s = T_e + \frac{q}{A} \frac{1}{h_e} = 1,737^\circ C \rightarrow \text{No se cumple la suposición}$$

$$\text{Introducimos con } T_s = 1,73^\circ C \rightarrow T_{mp} = \frac{1,73+0}{2} = 0,865^\circ C$$

$$\text{Prop. termofísicas} \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1,2784 \frac{kg}{m^3} \\ \mu = 17,24 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{ms} \\ K = 24,19 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2 C} \\ Pr = 0,919 \end{array} \right. \rightarrow Re_L = \frac{U L P}{\mu} = 1,039 \cdot 10^7$$

$$Nu_L = 130 \cdot 17,7 = \frac{\bar{h} L}{K_F}$$

$$\frac{q}{A} = 21,75 \frac{W}{m^2} \rightarrow \bar{h}_e = 12,58$$

Comprobamos hipótesis "  $T_s = 1,737^\circ C$ "

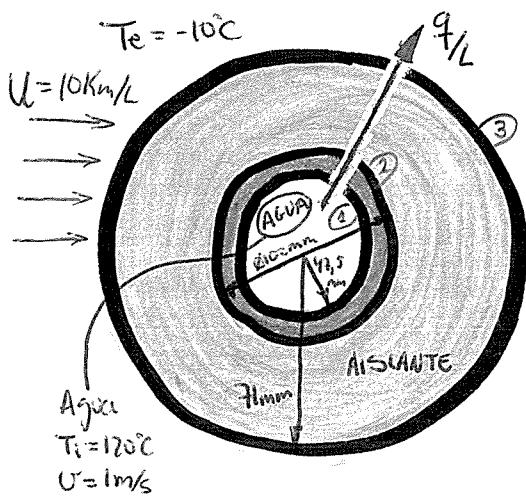
$$T_s = T_e + \frac{q}{A} \frac{1}{h_e} = 1,73$$

Se cumple hipótesis

$$\frac{q}{A} = 21,75 \frac{W}{m^2} = 21,75 \frac{J}{s \cdot m^2} \cdot \frac{3600 s}{1 h} = 7,83 \cdot 10^4 \frac{J}{m^2 h}$$

Pérdidas térmicas  
por hora y  $m^2$   
de pared

Una tubería de acero al carbono ordinario, de 102 mm de diámetro exterior y espesor normal (3,5 mm) se encuentra aislada mediante una capa de fibra de vidrio de densidad 32 kg/m<sup>3</sup> de 20 mm de espesor. Si por el interior de la tubería circula agua sobrecalentada a 120°C a 1 m/s, calcular las pérdidas de calor por metro lineal cuando el viento sopla en dirección perpendicular a la tubería a -10°C y 1012 h/h.



Se pide:

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi(T_i - T_e)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{K_{12}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{K_{23}} + \frac{1}{h_2 r_2}}$$

Necesitamos por tanto calcular los coeficientes de película exterior e interior.

### • Coeficiente de película interior ( $h_1$ ), cálculo:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{UD\rho}{\mu}; \quad \text{Supongo } T_b = 120^\circ\text{C} \rightarrow \begin{cases} \rho = 943,16 \text{ kg/m}^3 \\ K = 0,669 \text{ W/m°C} \\ \nu = 0,2321 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ Pr = 1,47 \end{cases}$$

$$Re_D = \frac{0,095 \cdot 943,16}{0,2321 \cdot 10^{-6}} = 386041 > 2300 \rightarrow \begin{cases} \text{convección forzada} \\ \text{flujo turbulento} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Interior de} \\ \text{tubería} \end{cases}$$

$$10^4 < Re_D < 10^6$$

• Hipótesis  $|T_s - T_b| < 6^\circ\text{C}$

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{0,8} \cdot Pr^n, \text{ con } n = 0,3 \text{ ya que } T_s < T_b$$

$$Nu_D = 760,73 = \frac{h_i D}{K_F} \rightarrow h_i = \frac{760,73 \cdot 0,669}{0,095} = 5357,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{°C}}$$

Coeficiente de pérticula exterior ( $h_e$ ), cálculo:

$$Re_0 = \frac{UD\bar{\rho}}{\mu}, \quad T_f = -10^\circ C \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Propiedades} \\ \text{Aire seco} \\ \text{a Patm} \end{array}$$

$$U = 10 \frac{Km}{h} = \frac{25}{9} m/s$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho = 1,3113 \text{ kg/m}^3 \\ K = 23,77 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2\text{C} \\ \mu = 17,01 \cdot 10^{-6} \text{ kg/ms} \\ Pr = 0,721 \end{array} \right\}$$

$$Re_0 = \frac{25}{9} \cdot \frac{0,142 \cdot 1,3113}{17,01 \cdot 10^{-6}} = 30407,7 < 10^6$$

Tenemos convección forzada, flujo normal a 1 tubo

$$Nu_0 = C \cdot Re_0^{m} \cdot Pr^n \left( \frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,3}, \quad \begin{array}{l} \text{Necesito estimar } Pr_s \text{ a } T_s \\ Pr_s \approx Pr \rightarrow \text{Por tanto no es} \\ \text{necesario estimarlo} \end{array}$$

$$Nu_0 = 0,26 \cdot 30407,7^{0,6} \cdot 0,721^{0,3} = 112,77 = \frac{h_e D}{K_f}$$

$$10^3 < Re < 2 \cdot 10^5 \Rightarrow C = 0,26$$

$$m = 0,6$$

$$Pr < 10 \Rightarrow n = 0,37$$

$$\downarrow \quad h_e = \frac{112,7 \cdot 23,77 \cdot 10^{-3}}{0,142} = 18,88 \frac{W}{m^2 K}$$

Con los valores de  $h_i$  y  $h_e$ , el valor de  $\frac{q}{L}$  será:

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi (120 - (-10))}{\frac{1}{5357,1 \cdot 47,5 \cdot 10^{-3}} + \frac{\ln(\frac{S_1}{47,5})}{K_{12}} + \frac{\ln(\frac{S_1}{S_2})}{K_{23}} + \frac{1}{18,88 \cdot 0,071}}$$

Estimo  $K_{12}$  y  $K_{23}$  }  $K_{12} (\bar{T}_m = 120^\circ C) = 42,8 \frac{W}{mK}$  (no coincide con valor tabla cuadernillo)

$$\left. \begin{array}{l} K_{23} (\bar{T}_m = \frac{120 + (-10)}{2} = 55^\circ C) = 0,041 \frac{W}{mK} \end{array} \right\}$$

$$\frac{q}{L} = \frac{260\pi}{3,929856 \cdot 10^{-3} + 1,661120 \cdot 10^{-3} + 8,06961572 + 0,746001432}$$

$$\boxed{\frac{q}{L} = 92,64 \frac{W}{m}}$$

A corregirlo le  
deba 104,4

## Comprueba hipótesis

$$T_1 = T_e - \frac{q}{2} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{h_{e1}} + \frac{\ln(\frac{T_1}{T_b})}{K_{12}} \right) = 119,94^\circ C \approx 120^\circ \rightarrow \begin{array}{l} \text{Suposición } T_b = 120^\circ C \\ \text{para prop agua OK} \end{array}$$

$$T_2 = T_e - \frac{q}{2} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{h_{e1}} + \frac{\ln(\frac{T_1}{T_2})}{K_{12}} \right) = 119,92 \approx 120^\circ$$

$$\bar{T}_{12} = \frac{119,94 + 119,92}{2} = 119,93^\circ C \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Suposición para cálculo} \\ K_{12} \text{ OK} \end{array}$$

$$T_3 = T_e + \frac{q}{2} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{h_{e3}} \right) = 1,0^\circ C \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Habíamos supuesto } T_3 = T_s = -10^\circ C \\ \text{de forma que } \bar{T}_{23} = 55 \end{array}$$

$$\bar{T}_{23} = (119,92 + 1) \frac{1}{2} = 60,5^\circ C \longrightarrow \text{A } 60,5^\circ C \text{ la } K_{air} = K_{23} \text{ sigue siendo 0,041}$$

Por tanto, podemos considerar correcto el cálculo

Faltaría ajustar el  $P_{rs}$   
que habíamos despreciado  
 $P_{rs}(T=1^\circ C) \approx P_r(T=-10^\circ C)$

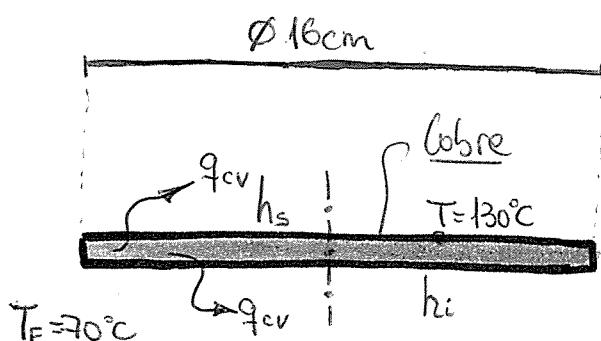
$Nu_D$  no varía  $\rightarrow$  cálculos correctos

$$q_L = 92,64 \frac{W}{m}$$

COLECCIÓN

de cobre

Una placa horizontal delgada de 16 cm de diámetro se mantiene a  $130^\circ\text{C}$  en un gran depósito de agua cuya temperatura es  $70^\circ\text{C}$ . La placa transfiere calor por convección desde sus superficies inferior y superior. Determine la razón de calor que se suministra a la placa, necesaria para mantener la temperatura de  $130^\circ\text{C}$ .



El calor pedido será:

$$q = A h_s (T - T_F) + A h_i (T - T_F) = \\ = (h_s + h_i) A (T - T_F)$$

Necesito  $h_s$  y  $h_i$ , coeficientes de película de convección libre alrededor de placa horizontal caliente

$$L_c = \frac{A}{P} = \frac{\pi (\frac{D}{2})^2}{2\pi \frac{D}{2}} = \frac{D}{4} = 4\text{ cm}$$

$$Nu_{lc} = f(Ra, Pr)$$

$$\text{siendo } Ra = Gr \cdot Pr$$

Propiedades

$$\bar{T}_{mp} = \frac{130 + 70}{2} = 100^\circ\text{C}$$

del agua

$$\beta = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

$$\rho = 958,39 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 2,819 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms}$$

$$Pr = 1,79, K = 0,665 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

$$Gr = \frac{\rho L^3 \beta P^2 |\Delta T|}{\mu^2} = \frac{9,8(0,04)^3 \cdot 7,5 \cdot 10^{-4} \cdot (130 - 70) \cdot 958,39^3}{(2,819 \cdot 10^{-4})^2} = 3,26 \cdot 10^8$$

$$Ra = Gr \cdot Pr = 3,26 \cdot 10^8 \cdot 1,79 = 5,84 \cdot 10^8 \rightarrow Nu_{lc} = 0,15 Ra_{lc}^{4/3} = 125,4$$

$$Nu_{lc} = \frac{h_s L_c}{K_f}; h_s = \underline{2084 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}}$$

•  $h_i$  (cara inferior): mismas prop. y misma  $\bar{T}_{mp}$   $\rightarrow Ra = 5,84 \cdot 10^8$

$$Nu_{lc} = 0,27 Ra_{lc}^{4/3} = 41,97 = \frac{h_i L_c}{K_f} \rightarrow h_i = \underline{697,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}}$$

Por tanto  $\boxed{q = 3,36 \text{ KW}}$

Falta problema "tinchiller" → Perezay

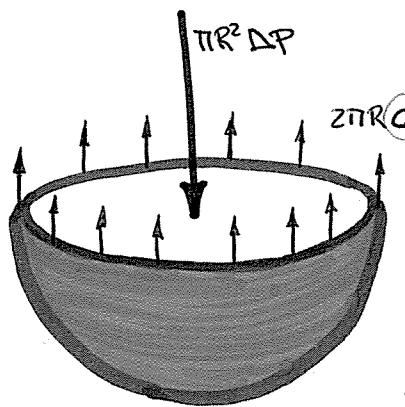
# EBULLICIÓN

## 1 INTRODUCCIÓN

La ebullición se produce cuando un fluido en estado líquido se pone en contacto con una superficie caliente a temperatura superior a la de saturación del fluido ( $T_{sup} > T_{sat}$ ). El líquido se evapora a  $T_j$ ,  $P$  constante, absorbiendo una cantidad de calor igual al calor latente de cambio de fase ( $h_f$ )

Debemos distinguir ebullición de evaporación. La evaporación es un proceso de difusión por diferencias de concentración que se da en la interfase líquido-gas, aplicándose la presión de vapor (del orden de 100 veces menor que la atmosférica). La ebullición, sin embargo, se da en la interfase sólido-líquido.

Se distinguen dos tipos de ebullición:



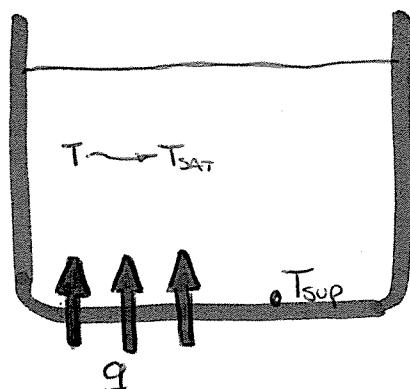
$\left. \begin{array}{l} \text{En piscina (pool boiling)} \approx \text{Convección libre} \\ \text{Por convección forzada} \approx \text{El movimiento del fluido responde a variaciones de presión impuestas externamente} \end{array} \right\}$

El fenómeno de la ebullición está muy relacionado con la formación de burbujas. Por equilibrio líquido-vapor, el balónce de fuerzas sobre una burbuja esférica de radio  $R$ :

$$\pi R^2 (P_{vap} - P_{iq}) = 2\pi R \sigma$$

$$P_{vap} = P_{iq} + \frac{2\sigma}{R}$$

## 2 GENERALIDADES



Calor transferido en términos convectivos  $q = hA(T_{sup} - T_{sat})$   
En el momento en el que el líquido está saturado, cualquier aporte de calor provoca la ebullición

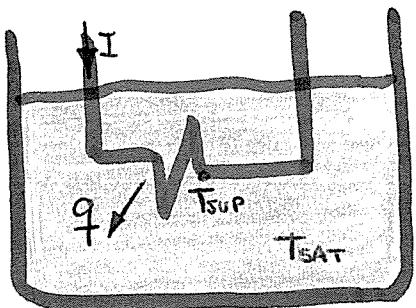
Calor transferido en términos de vapor generado:

- Aplica fórmulas de convección hasta  $T_{sup} - T_j > 5^\circ C$  (si no la burbuja se separa)
- A partir de este punto  $\rightarrow q = m h_f$

$$q = m v_{ap} h_f$$

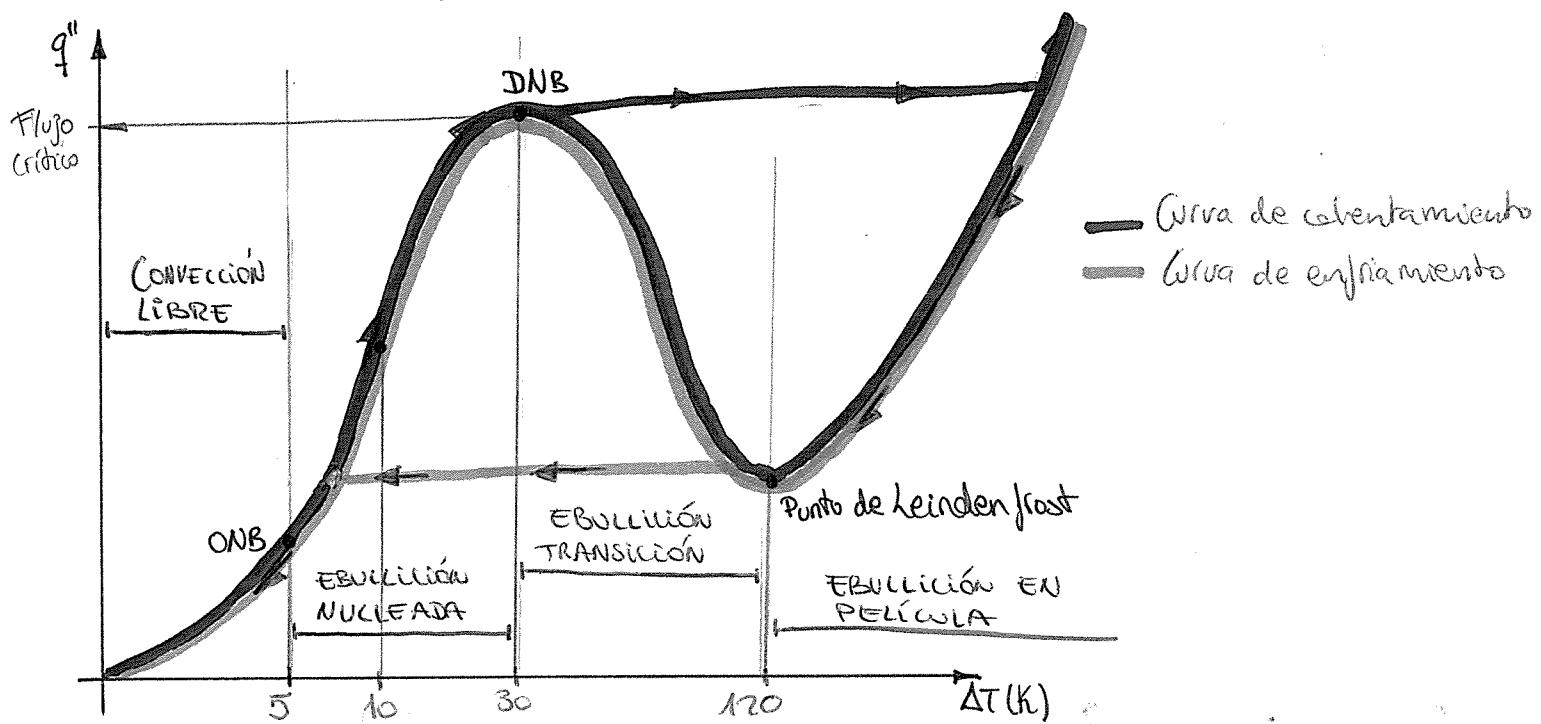
Calor latente

# 3 EBULLICIÓN EN PISCINA



Experimento de Nukiyama

Nukiyama consiguió describir la forma de ebullición presentada a continuación variando la potencia eléctrica suministrada a una resistencia sumergida en una masa líquida, conocida, por efecto Joule, la  $T_{sup}$  de la resistencia caliente y la temperatura de saturación  $T_{sat}$  de la masa líquida en función.



## 1) Fase ebullición por convección libre

Punto ONB en el que se inicia el burbujeo [ $(T_{sup} - T_{sat}) \approx 5K$ ]. Hasta ese momento el fluido asciende en un tipo de movimiento caracterizado por convección natural.

## 2) Fase ebullición nucledo

El flujo de calor se incrementa alcanzando  $q''_{max}$  en  $\Delta T \approx 30K$ . Se distinguen dos subfases:

- En la primera se forman burbujas aisladas que ascienden agitando el líquido, lo que incrementa  $h_f$  y con ello  $q''$ . El intercambio de calor es mayoritariamente por contacto directo del líquido sobre la superficie.
- $\Rightarrow (T_{sup} - T_{sat}) \approx 10K \equiv$  PUNTO DE INFLEXIÓN

- En la segunda fase la formación de burbujas es tan intensa que se forman columnas o chorros de vapor hacia la superficie libre del fluido. Esto dificulta el contacto del líquido con la superficie por lo que el flujo de calor continúa ascendiendo pero a menor velocidad. Si se incrementa más la diferencia de temperaturas se alcanza el valor máximo del flujo, denominado flujo crítico o crisis de ebullición nucleada DNB, aproximadamente cuando  $(T_{sup} - T_{sat}) \approx 30K$

### 3) Fase de ebullición de transición

La formación de burbujas es muy rápida y origina una fina película de vapor en torno a la superficie caliente. Dicha película supone una resistencia térmica adicional, y el flujo de calor y la disminuyen sensiblemente. Al aumentar la temperatura superficial la película crece hasta extenderse a toda la superficie alcanzándose el mínimo local de flujo de calor  $\rightarrow$  Punto de Leidenfrost.

### 4) Fase de ebullición de película

Por encima del punto de Leidenfrost la superficie se halla cubierta por un manto de vapor. A medida que la temperatura de la superficie aumenta, la transferencia de calor por radiación a través de la película de vapor hace que el flujo de calor se incremente nuevamente de forma indefinida hasta superar la resistencia mecánica del hilo conductor.

## HISTERESIS EN LA EBUILLICIÓN

En las cercanías del punto crítico cualquier pequeña variación de potencia (flujo de calor) puede conducir directamente a un punto en la zona de ebullición en película, con el consiguiente y dramático incremento de la temperatura superficial.

Por ello, en la práctica se trabaja en las cercanías del punto crítico, para obtener la mejor efectividad en la transferencia de calor, pero de forma conservadora con el margen de seguridad necesario para evitar fallos catastróficos.

Siendo necesario recorrer la curva de ebullición en sentido inverso, desde la zona de ebullición en película, al alcanzar el punto de Leidenfrost, un pequeño descenso en el flujo de calor puede conducir directamente a la zona de ebullición nucleada.

### ● OTRAS CONSIDERACIONES

- Influencia del grado de sobrefluido:  $T_{sf} - T_{fg}$  {
  - Eb. en convección lóbulo:  $q''$  aumenta  $\Delta T^{5/4}$
  - Eb. nucleado:  $\Delta T$  no tiene influencia pero el valor de los flujos mínimos y máximos aumentan linealmente con  $\Delta T$
  - Eb. en película:  $q''$  aumenta proporcionalmente con  $\Delta T$
- Influencia de la rugosidad de la superficie {
  - Eb. en película no tiene influencia
  - Eb. nucleado  $q''$  si la sup. es rugosa ya que la rugosidad favorece la nucleación determinante para formar burbujas

colección  Hacer!!

# RADIACIÓN

## 1 FUNDAMENTOS

Todo cuerpo, por el hecho de estar a una temperatura por encima de 0K emite radiación electromagnética.

Esta radiación se emite en todas direcciones y puede ser interceptada por otros cuerpos dando lugar a un intercambio radiante entre las superficies de dichos cuerpos → La radiación es siempre un fenómeno en la superficie de los cuerpos.

- No necesita soporte fijo para propagarse

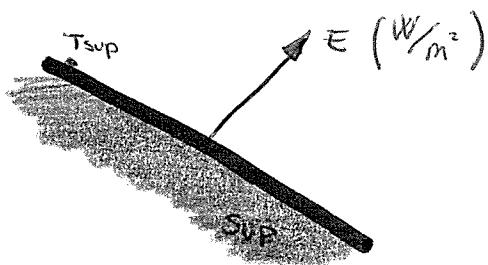
Las emisiones electromagnéticas se caracterizan por parámetros como su frecuencia ( $\nu$ ) o su longitud de onda ( $\lambda$ ) [ $\lambda\nu=c$ ]

| Tipo           | $\lambda (\text{nm})$ |
|----------------|-----------------------|
| Rayos Cósmicos | $< 10^{-8}$           |
| Rayos Gamma    | $10^{-8} - 10^{-4}$   |
| Rayos X        | $10^{-5} - 0,1$       |
| Ultravioleta   | $0,1 - 0,4$           |
| Visible        | $0,4 - 0,7$           |
| Infrarrojo     | $0,7 - 1000$          |
| Radio y TV     | $> 1000$              |

Se consideran  
radiación  
térmica

## 2 POTENCIA EMISIVA, RADIOSIDAD, IRRADIACIÓN

La POTENCIA EMISIVA de una superficie es la velocidad de emisión de energía por unidad de área de dicha superficie. ( $E$ )



La RADIOSIDAD de una superficie es la velocidad de emisión de energía por unidad de área de dicha superficie. Notese que incluye tanto la energía reflejada como la emisión debida a temperatura. ( $J$ )  $J = E + \rho G$

La IRRADIACIÓN ( $G$ ) es el flujo de energía radiante que incide sobre una superficie. Comprende la radiación incidente desde todos los direcciones. ( $\text{W/m}^2$ )

### ● Absorción, reflexión y transmisión

Uniendo en un solo medio, la radiación incidente puede experimentar

3 fenómenos:

- Ser absorbida por el medio
- Ser reflejada por el medio
- Ser transmitida por el medio.

- La absorvidad ( $\alpha$ ) o absorbancia determina la fracción de la radiación absorbida por una superficie. Tiene dependencia espectral y direccional.
- La reflectividad ( $\rho$ ) o reflectancia determina la fracción de la radiación reflejada por una superficie. Tiene dependencia espectral y direccional.
- La transmisividad ( $\tau$ ) o transmetancia determina la fracción de la radiación transmitida por una superficie. Tiene dependencia espectral y direccional y, en medios opacos,  $\tau=0$ .

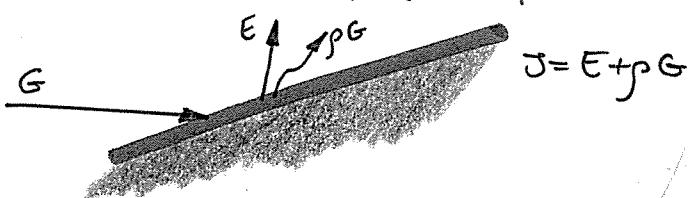
$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

# 3 LEYES DE RADIACIÓN

## ● INTERCAMBIO NETO DE RADIACIÓN

El calor neto que abandona una superficie por radiación es:

$$q = A(J - G)$$



## NOTA TEÓRICA !! Cuerpo negro

Antes de empezar con las leyes fundamentales de la radiación necesitamos definir el concepto de CUERPO NEGRO

Un cuerpo negro es aquél que absorbe la totalidad de la radiación que incide sobre su superficie. Por consiguiente, no refleja ni transmite radiación. Se trata de una idealización del perfecto emisor que permite "calificar" el resto de superficies por comparación con este patrón.

No debe confundirse una superficie de color negro con un cuerpo negro. El color negro solo hace referencia a la ausencia de emisión en el espectro visible ( $0,4 - 0,7 \mu\text{m}$ ), lo que no impide la existencia de radiación emitida en otro rango de  $\lambda$ .

Propiedades → • El cuerpo negro es el absorbente perfecto de la radiación incidente  
• El cuerpo negro es el perfecto emisor, ningún cuerpo puede emitir más que un cuerpo negro a la misma temperatura  
• El cuerpo negro es un emisor/receptor dijoso.

## ● LEY DE DISTRIBUCIÓN DE PLANCK

La potencia emisivapectral, o potencia emisiva para una determinada longitud de onda, del cuerpo negro es

$$E_{b,\lambda}(\lambda, T) = \frac{2hc_0^2}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{hc_0}{\lambda KT}\right) - 1 \right]} \pi \left( \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \mu\text{m}} \right)$$

## LEY DE STEFAN-BOLTZMANN

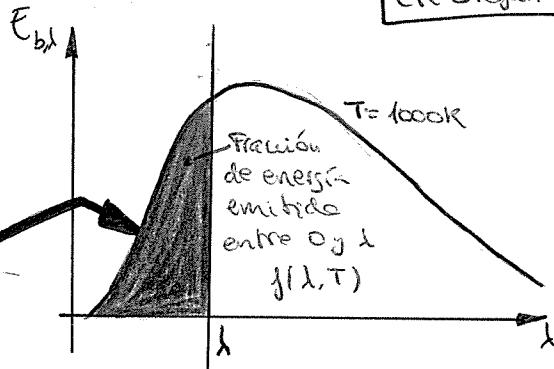
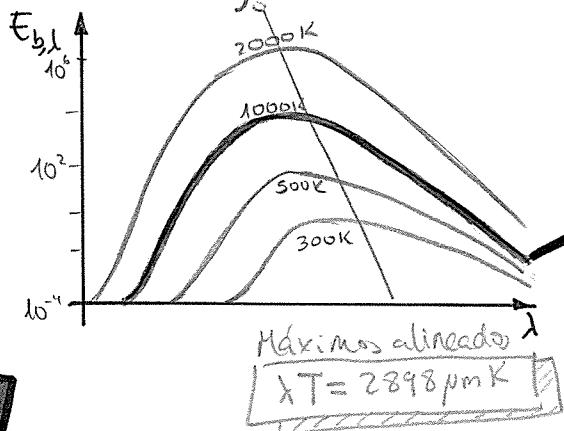
Integrando la distribución de Planck para todos los longitudes de onda se obtiene la potencia emisiva total ( $\text{W/m}^2$ ) del cuerpo negro:

$$E_b(T) = \int_{\lambda_1}^{\infty} E_{b,\lambda} d\lambda = \sigma T^4$$

$$E_b = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

Cte Stefan-Boltzmann



## 4 SUPERFICIES REALES. EMISIVIDAD

Ninguna superficie puede emitir más potencia radiante que un cuerpo negro a la misma temperatura. Se define la EMISIVIDAD o emitancia como la relación entre la radiación emitida por una superficie y la emitida por un cuerpo negro a la misma temperatura.

Por tanto, la potencia emisiva de una superficie cuálquiera es:

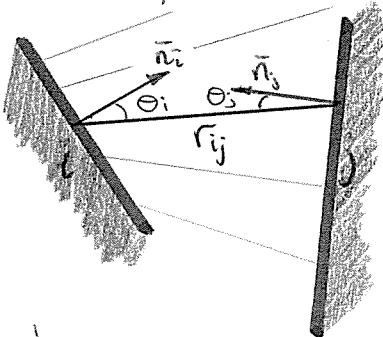
$$\epsilon E_b = \epsilon \sigma T^4$$

# 5 FACTORES DE FORMA

El escenario a considerar es un conjunto de  $n$  superficies a distinta temperatura, lo que implica el intercambio de energía radiante entre todas ellas. Obviamente, las dimensiones y posiciones relativas de éstas juegan un papel fundamental en la solución del problema.

Es necesario determinar la fracción de la radiación que abandona una superficie y es interceptada por otra.

Para ello se define el factor de forma,  $F_{ij}$ , como la fracción de la radiación que abandona la superficie  $i$  y es interceptada por la  $j$ .



$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \iint_{f_{ij}} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r_{ij}^2} dA_i dA_j; \text{ Abandona } i \text{ y llega a } j$$

$$F_{ji} = \frac{1}{A_j} \iint_{f_{ij}} \frac{\cos \theta_j \cos \theta_i}{\pi r_{ij}^2} dA_i dA_j; \text{ Abandona } j \text{ y llega a } i$$

Por tanto:

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

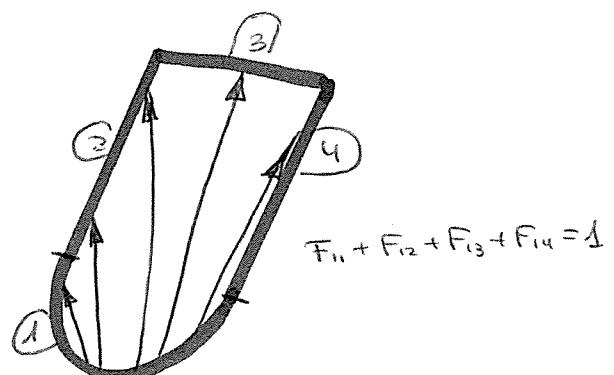
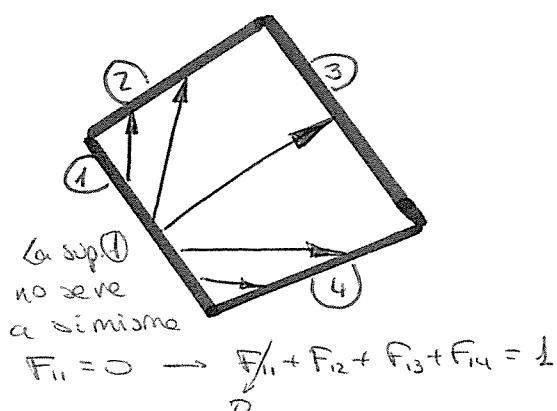
• Propiedad de reciprocidad

$$F_{ij} \in [0, 1]$$

Otras propiedades:

• Propiedad de recinto cerrado: Si  $j$  superficies forman un recinto cerrado y lo estás estudiando por dentro, entonces:

Ejemplos:

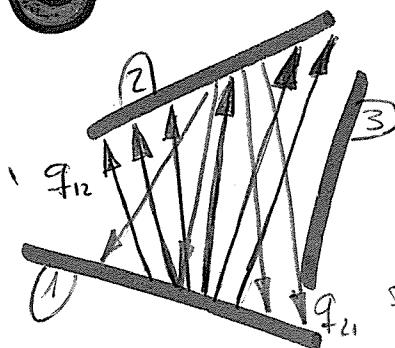


- Propiedad aditiva: Si una superficie está dividida en subáreas ( $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, \dots, A_{in}$ ) tal que  $\sum_n A_{in} = A_i$  entonces:

$$A_i F_{ij} = \sum_n A_{in} F_{ijn} \geq F_{ij} \geq \sum_n F_{ijn}$$

Factores de forma entre sop. típicas en libro de apunte (7.2, Pág 20)

## 6 INTERCAMBIO RADIANTE NETO



El flujo que llega a ② procedente de ①

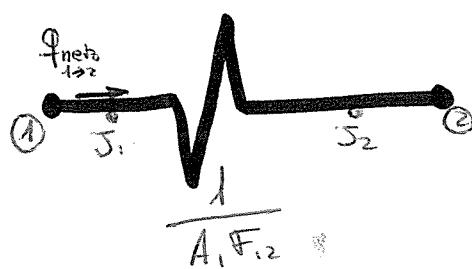
El flujo que llega a ① procedente de ②

Por tanto, el intercambio neto de energía radiante por unidad de tiempo desde la sop. ① a la ②

$$q_{\text{neto}} = q_{12} - q_{21} = A_1 J_1 F_{12} - A_2 J_2 F_{21} = \frac{1}{A_1 F_{12}} (J_1 - J_2)$$

$$A_2 F_{21} = A_1 F_{12}$$

Podemos plantear un circuito eléctrico equivalente



$$(J_1 - J_2) = \frac{1}{A_1 F_{12}} q_{\text{neto}}$$

Finalmente:

$$q_i = \left( \begin{array}{l} \text{Cálculo total} \\ \text{que abandona} \\ \text{la sop. } i \end{array} \right) = \sum_j q_{ij}$$

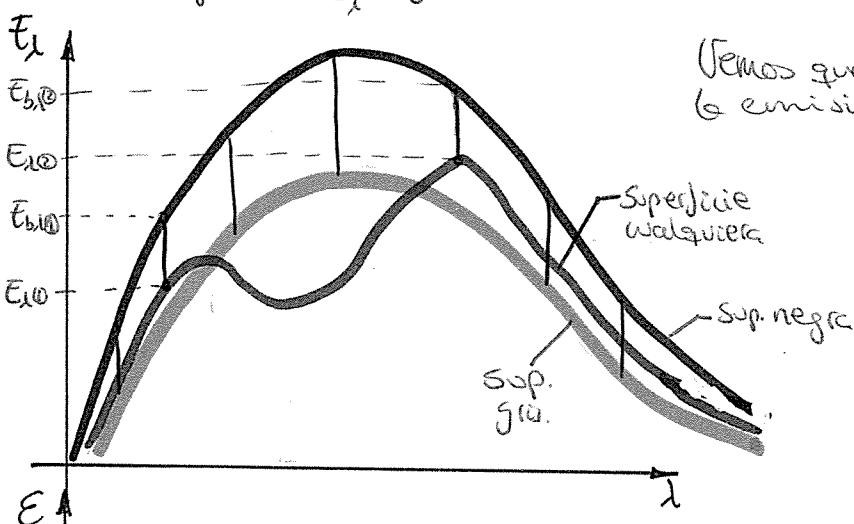
## CÁLCULO DE RADIOSIDADES ( $J$ ) PARA DIFERENTES TIPOS DE SUP. $J = E + \rho G$

- Negras → Son el perfecto emisor  
Son el perfecto absorbedor  $\Rightarrow \sigma = 1$  } No transmiten  $T = 0$   
 $E_b = \sigma T^4$   
 $J_b = E_b + \rho G$  →  $J_b = E_b = \sigma T^4$  } No reflejan  $\rho = 0$

### • Grises

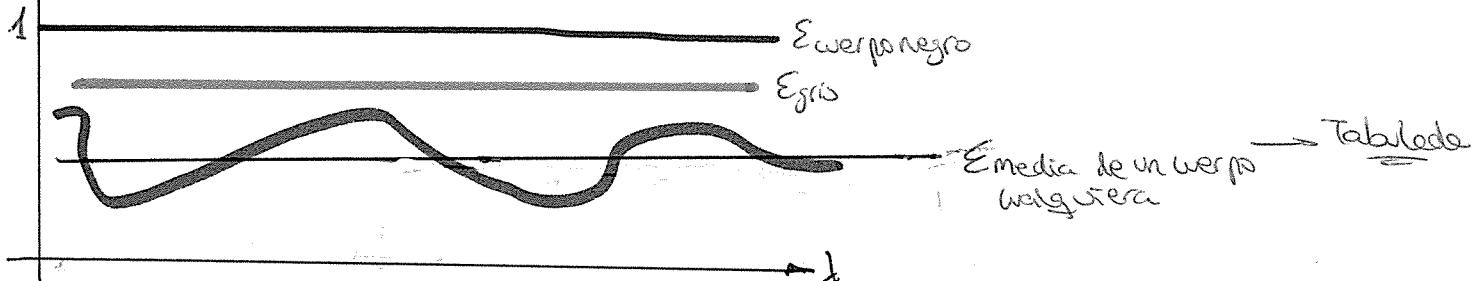
La ley de Kirchoff para superficies grises determina que  $\sigma = E$

De esta forma  $E_\lambda \neq f(\lambda) \rightarrow E_\lambda = \text{cte} = E$



(Tenemos que, para una superficie cualquiera, la emisividad  $\sigma = \frac{E_\lambda}{E_{b\lambda}}$  es función del  $\lambda$ )

Sin embargo, el cociente  $\frac{E_\lambda}{E_{b\lambda}}$  en la sup. gris es constante, por tanto las superficies grises tienen  $\sigma$  independiente de  $\lambda$  y constante.



### Superficies grises y opacas

$$\sigma + \rho + T = 1 \rightarrow \sigma + \rho = 1 \rightarrow \rho = 1 - \sigma \therefore J = E E_b + \rho G$$

$\uparrow$

Opaca  
( $T=0$ )      Gris  
 $\sigma=\epsilon$

$$J_{gris} = \epsilon \sigma T^4 + (1-\epsilon) G$$

Obtendremos un sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones como superficie tenga el problema.

### • Adiabáticas radiantes

Son superficies que cumplen  $q_{RAD} = 0$

Están bien aisladas térmicamente por el lado no radiante y con convección despreciable en la cara radiante. El balance de energía sobre esta superficie es nulo, por lo que devuelve todo la energía radiante que le llega.

Se pueden considerar como sup negas:

$$J = E_b = \sigma T^4$$

### • Virtuales:

Las superficies virtuales no existen, las usamos para cerrar recintos

$$J = 0$$

### ● CIRCUITO ELECTRICO EQUIVALENTE $\rightsquigarrow$ Sup. Opaca y Grisea

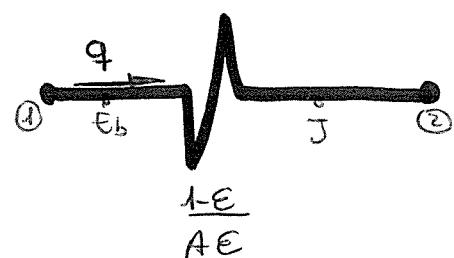
Partimos de:  $q_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{12} (J_1 - J_2) \quad ; \quad q = (J - G) A \quad (*)$

Muchas veces podremos considerar las superficies como grises por lo que desarrollaremos un método para calcular calor neto y radios idénticos de superficies grises y opacas

$$\begin{aligned} \text{GRIS} &= \epsilon = \epsilon \quad P + \sigma + \tau = 1 \\ \text{OPACA} &= \tau = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad P = 1 - \epsilon \quad \rightarrow \quad J = \epsilon E_b + (1 - \epsilon) G; \quad G = \frac{J - \epsilon E_b}{1 - \epsilon}$$

$$\xrightarrow{(*)} q = A \left( J - \frac{J - \epsilon E_b}{1 - \epsilon} \right) \rightarrow \underbrace{\frac{J - \epsilon E_b - J + \epsilon E_b}{1 - \epsilon}}_{\frac{\epsilon}{A}} =$$

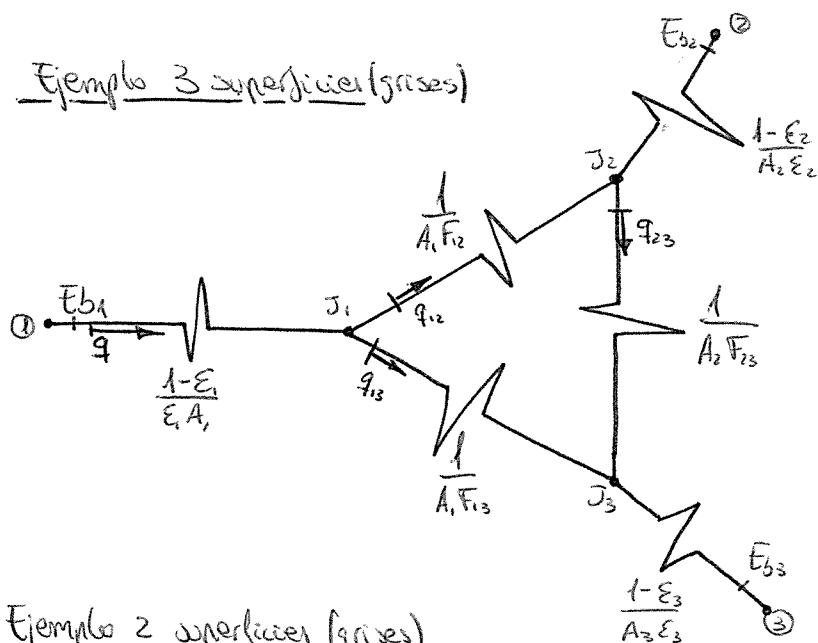
$$q = \frac{E_b - J}{(1 - \epsilon)} \frac{A \epsilon}{A \epsilon}$$



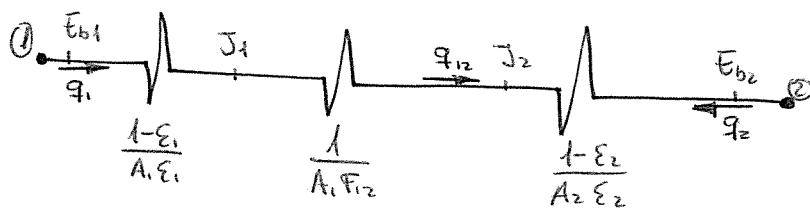
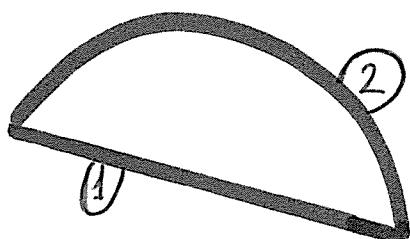
Para el caso sup negra:  $\epsilon = 1$

$$E_b = J$$

Ejemplo 3 superficies (grises)



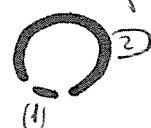
Ejemplo 2 superficies (grises)



Otro caso intercombinado entre dos superficies grises:

Consideremos, como ejemplo:

$$\frac{A_1}{A_2} \ll 1$$



$F_{11} = 0$ ; por ser la sup. plana, no se ve así misma

$$F_{11} + F_{12} = 1 \rightarrow F_{12} = 1$$

$$q = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}}$$

$$\underline{E_{b1} - E_{b2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)}$$

$$\left\{ q = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + 0} = \sigma \varepsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

## CASO N SUPERFICIES

### Paso a paso

≈ Guiaburros by Corrochano

Intercambio neto entre múltiples superficies que forman un recinto cerrado  
(si no fuese cerrado cerraríamos el recinto con sup. virtuales)

## 1) CÁLCULO DE RAYOS SIDADES

### 1.A Superficie negra

- Conozco  $T \rightarrow J = E_b = \sigma T^4$
- Conozco  $q \rightarrow q_i = A_i (J_i - \sum_j F_{ij} J_j)$

### 1.B Adiabáticas cerradoras

- Conozco  $T \rightarrow J = E_b = \sigma T^4$
- Conozco  $q$  (siempre  $q=0$ )  $\rightarrow 0 = J_i - \sum_j F_{ij} J_j$

### 1.C Superficie gris

- Conozco  $T \rightarrow \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i} (\overline{E}_{bi} - \overline{J}_e) = J_i - \sum_j F_{ij} J_j$
- Conozco  $q \rightarrow q_i = A_i (J_i - \sum_j F_{ij} J_j)$

### 1.D Superficie virtual

Si el recinto es lo suficientemente grande  $J = E_b$

## 2) Cálculo de calores netos

### 2.A Negras, grises y virtuales (Como saliente de ?)

$$q_i = A_i (J_i - \sum_j F_{ij} J_j)$$

### 2.B Adiabáticas cerradoras

$$q = 0$$

### 3º Calculo de la temperatura a partir de los caloros netos

#### 3.A) Negras y adiabáticas radiantes

$$J_i = \sigma T_i^4 \rightarrow T_i = \sqrt[4]{\frac{J_i}{\sigma}}$$

#### 3.B) Grises

$$q_i = \frac{\epsilon_i A_i}{1 - \epsilon_i} (E_{bi} - J_i) \rightarrow \text{Despejo } E_{bi} \rightarrow E_{bi} = \sigma T_i^4 \rightarrow T_i = \sqrt[4]{\frac{E_{bi}}{\sigma}}$$

#### 3.C) Virtuales

Las superficies virtuales no existen, por consiguiente no tienen temperatura.

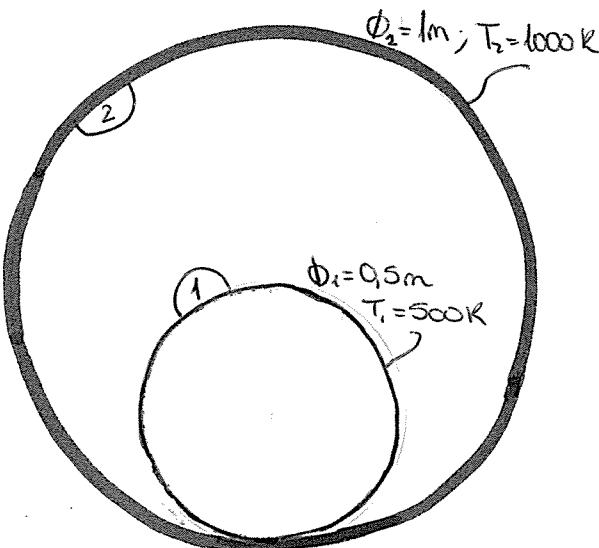
#### colección

Una superficie esférica de 0,5m de diámetro que se mantiene a  $T_1 = 500K$  está apoyada sobre la sup. interior de otra superficie esférica de 1m de diámetro que está a  $T_2 = 1000K$ . Si ambas sup. se consideran cuerpos negros, determinar:

1) Factor de fijación con la que la esfera grande se ve a sí misma

2) Intercambio térmico radiante entre ambas sup.

① Se pide  $F_{22}$



•  $F_{11} = 0$  ya que cualquier radiación que abandona ① es recibida por ②

• Prop. de recuento cerrado

$$\sum_j F_{ij} = 1 \quad \begin{cases} F_{11} + F_{12} = 1 \rightarrow F_{12} = 1 \\ F_{21} + F_{22} = 1 \end{cases}$$

• Prop. reciproide

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} ; \quad F_{21} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{4\pi(\frac{\phi_1}{2})^2}{4\pi(\frac{\phi_2}{2})^2} = \frac{\phi_1^2}{\phi_2^2}$$

$$F_{21} = 0,25$$

$$\text{J como } F_{22} = 1 - F_{21} \Rightarrow F_{22} = 0,75$$

"El 75% de la radiación que abandona ② es recibida por la misma ②"

$$\text{Sup. negras } J = E_b = \sigma T^4$$

$$\text{y } q_{12} = A_1 F_{12} (J_1 - J_2) = 4\pi \left(\frac{A_1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$q_{12} = -41749 \text{ W}$ ; visto como saliente de ①. Como de  $q_{12} < 0$  es:

$\dot{q} = 41749 \text{ W}$  saliente de ② hacia ① es el calor neto del sistema

Aplicando el "guisaburros-Corrochano"

1) Rayos emitidos de Sup. negra con  $T$  conocida;

$$J_1 = E_{b1} = \sigma T_1^4$$

$$J_2 = E_{b2} = \sigma T_2^4$$

2) Calores netos

$$q_{ij} = A_i (J_2 - \sum_j F_{ij} J_j), \quad q_{12} = A_1 (J_1 - F_{12} J_1 - F_{12} \frac{1}{2} J_2) = A_1 (J_1 - J_2)$$

colección 127

Sistema de transmisión de calor formado por dos sup. esféricas concéntricas. El espacio comprendido entre ambas sup. está ocupado por un gas transparente a la radiación que proporciona un coeficiente  $h$  de convección natural de  $20 \text{ W/m}^2\text{C}$  en la superficie de la esfera interior ① y de  $10 \text{ W/m}^2\text{C}$  en la sup. de la esfera exterior ②. (blower)

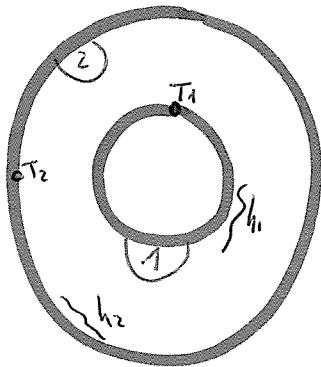
1) Intercambio térmico en razón combinada por convección y radiación

2) Temperatura media del gas de relleno

DATOS

| Esfera 1  | Esfera 2 |
|---|----------|
| Radio (m)   | 0,5      |
| Densidad ( $\text{kg/m}^3$ )                      | 2500     |
| Calor específico ( $\text{KJ/Kg}^\circ\text{C}$ ) | 0,5      |
| Conductividad ( $\text{W/m}^\circ\text{C}$ )      | 52       |
| Emissividad                                       | 0,8      |
| Temperatura (K)                                   | 1000     |

Consideraremos a las superficies como grises por tener  $\epsilon = \text{cte}$



$$q = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A_1 \epsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1}{A_2 \epsilon_2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \\ T_1 = 1000, T_2 = 500 \text{ K} \\ \epsilon_1 = 0,8, \epsilon_2 = 0,5 \\ A_1 = 4\pi r_1^2 = \pi \text{ m}^2 \\ A_2 = 4\pi r_2^2 = 4\pi \text{ m}^2 \end{array} \right\}$$

$$\hookrightarrow F_{12} = 1 - F_{11} = 1$$

( $1 \approx 0$  se re asimismo)

Sustituyendo los datos

$$\frac{q}{R} = 111330 \text{ W por radiación}$$

Por convección:  $q_{1 \rightarrow G} = q_{G \rightarrow 2} \rightarrow h_1 A_1 (T_1 - T_G) = h_2 A_2 (T_G - T_2)$

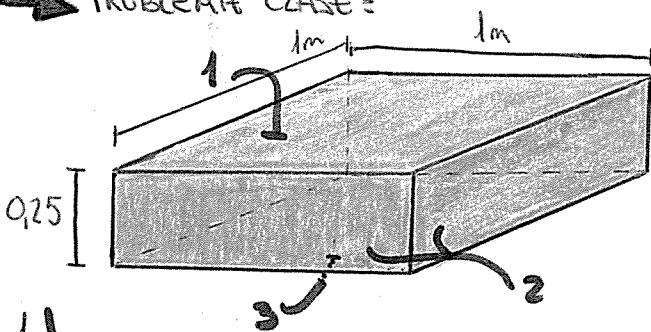
$$-T_G(h_1 A_1 + h_2 A_2) = -h_2 A_2 T_2 - h_1 A_1 T_1; T_G = \frac{h_1 A_1 T_1 + h_2 A_2 T_2}{h_1 A_1 + h_2 A_2}$$

2)  $T_G = 667 \text{ K} \text{ (temperatura media del gas)}$

Por tanto

$$q_{\text{TOTAL}} = q_R + q_{cv} = 111330 + h_1 A_1 (T_1 - T_G) = 132274 \text{ W}$$

→ PROBLEMA CLASE:



- ①: Superficie superior
- ②: Superficie lateral
- ③: Superficie inferior = Adiabática radiante

$$\epsilon_1 = 0.9, \epsilon_2 = 0.3$$

$$T_1 = 700 \text{ K}, T_2 = 500 \text{ K}$$

11

Incluye una potencia eléctrica  $q_{el}$  sobre ①; determinar  $q_{el}$  y  $T_3$  para mantener el régimen permanente.

Usamos "guiaburros"

11) Cálculo de rayos ideales

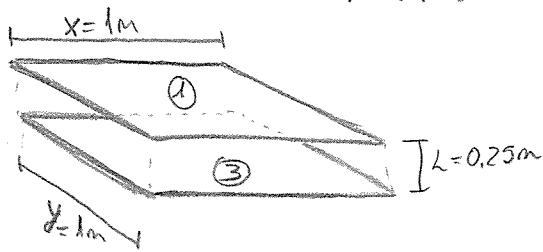
① ② ≡ Sup. grisas

$$\frac{\epsilon_i}{1-\epsilon_i} (\epsilon_{bi} - J_i) = J_i - \sum F_{ij} J_j$$

$$\boxed{\text{Sup. 1}} \Rightarrow \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_1} (\sigma T_1^4 - J_1) = J_1 - (F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3) \quad (*)$$

Necesito los factores de forma

CUADERNO DE CAÑO → Factores de forma para disposiciones geométricas  
habitales → Rectángulos alineados



$$X = \frac{x}{L} = \frac{1}{0.25} = 4$$

$$Y = \frac{y}{L} = 4$$

$$F_{13} = \frac{2}{16\pi} \left( \dots \right)$$

$$F_{13} = 0,632 \rightarrow F_{12} = 1 - F_1 - F_{13} = 0,368 ; F_{11} = 0$$

Sustituyendo estos valores en (\*):

$$\frac{0,9}{1-0,9} (\sigma \cdot 700^4 - J_1) = J_1 - 0,368 J_2 - 0,632 J_3 \quad (1)$$

$$\boxed{\text{Sup 2}} \Rightarrow \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} (\sigma T_e^4 - J_2) = J_2 - F_{21} J_1 - F_{22} J_2 - F_{23} J_3 \quad (***)$$

• Calculemos los factores de forma

$$\text{Por reciprocidad } A_1 F_{12} = A_2 F_{21} ; \begin{cases} A_1 = 1 \cdot 1 = 1 \text{ m}^2 \\ A_2 = 0,25 \cdot 1,4 = 1 \text{ m}^2 \end{cases} \rightarrow F_{21} = F_{12} = 0,368$$

$$\text{Por simetría } F_{21} = F_{23} = 0,368 ; F_{22} = 1 - F_{21} - F_{23} = 0,264$$

• Sustituyendo en (\*\*):

$$\frac{0,3}{1-0,3} (\sigma \cdot 500^4 - J_2) = J_2 - 0,368 J_1 - 0,264 J_2 - 0,368 J_3 \quad (2)$$

$\boxed{\text{Sup 3}} \Rightarrow$  Adiabático rerradiante

$$q=0 \rightarrow 0 = J_3 - \sum_j F_{3j} J_j \Rightarrow 0 = J_3 - F_{31} J_1 - F_{32} J_2 - F_{33} J_3$$

• Calculando factores de forma, por simetría con 1:

$$F_{31} = 0,632 ; F_{32} = 0,368 ; F_{33} = 0$$

$$\text{Por tanto: } \underline{J_3 - 0,632 J_1 - 0,368 J_2 = 0} \quad (3)$$

Tenemos 3 ecuaciones (1), (2) y (3); con 3 incógnitas ( $J_1, J_2, J_3$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{0,9}{1-0,9} + 1 \right) J_1 - 0,368 J_2 - 0,632 J_3 = \frac{0,9}{1-0,9} \sigma \cdot 700^4 \\ - 0,368 J_1 + \left( 1 - 0,264 + \frac{0,3}{1-0,3} \right) J_2 - 0,368 J_3 = \frac{0,3}{1-0,3} \sigma \cdot 500^4 \\ - 0,632 J_1 - 0,368 J_2 + J_3 = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo:  $J_1 = 13,34 \text{ KW/m}^2$

$$J_2 = 9,26 \text{ KW/m}^2$$

$$J_3 = 11,84 \text{ KW/m}^2$$

### 2) Cálculo de calor netos

$$\textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2} \rightarrow \text{Gases} \Rightarrow q_1 = A_1 (J_1 - \sum_j F_{ij} J_j)$$

$$q_1 = A_1 (J_1 - F_{11} J_1 - F_{12} J_2 - F_{13} J_3) = 2,45 \text{ KW} = 2450 \text{ W}$$

Para mantener el régimen permanente, el calor neto seleniente de 1 ha de ser igual al aportado por la potencia eléctrica  $q_{el}$

$$q_{el} \Rightarrow \boxed{q_{el} = 2450 \text{ W}}$$

$$q_2 = 0 \text{ (adiabático)}$$

$$q_2 = A_2 (J_2 - F_{21} J_1 - F_{22} J_2 - F_{23} J_3) = -2450 \text{ W}$$

### 3) Cálculo de temperaturas

$$T_1 = 700 \text{ K}$$

$$T_2 = 500 \text{ K}$$

$$T_3 \rightarrow \textcircled{3} \text{ es adiabático radiante} \rightarrow J_3 = \sigma T_3^4 \rightarrow T_3 = \sqrt[4]{\frac{J_3}{\sigma}}$$

$$\boxed{T_3 = 676 \text{ K}}$$

2) Considerar un gas transparente a la radiación con  $h = 4 \text{ W/m}^2\text{K}$   
Determinar la temperatura del gas considerando las temperaturas del apartado anterior.

$$q_{1 \rightarrow G} + q_{2 \rightarrow G} + q_{3 \rightarrow G} = 0$$

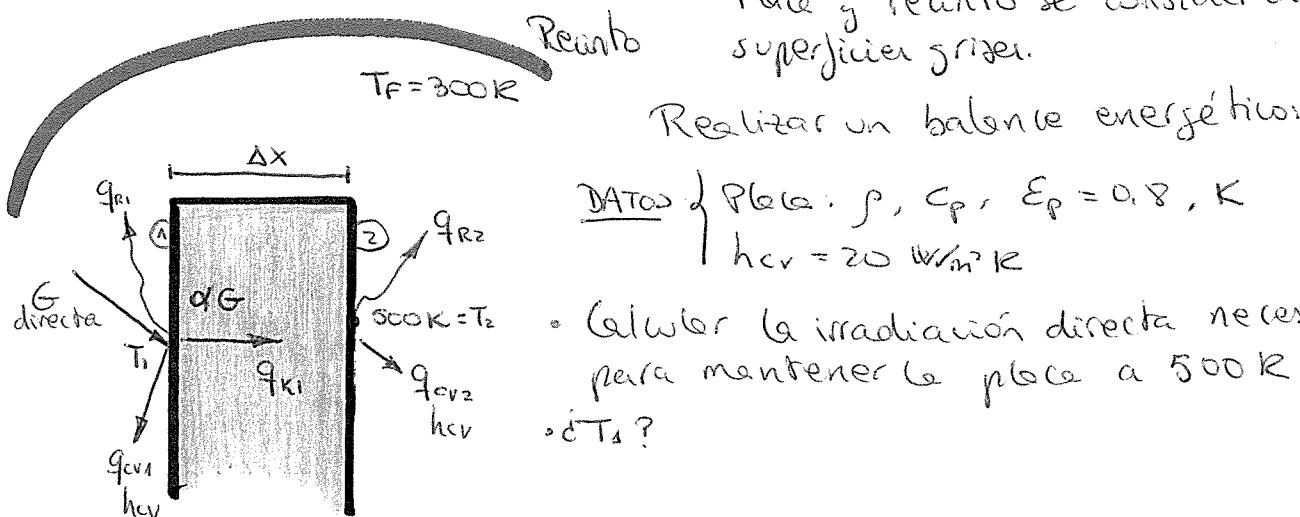
$$KA_1(T_1 - T_G) + KA_2(T_2 - T_G) + KA_3(T_3 - T_G) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} A_1 = A_2 = A_3 \\ h = 4 \end{array} \right\}$$

$$700 + 500 + 676 - 3T_G = 0$$

$$\boxed{T_G = 625,3 \text{ K}}$$

→ Ejercicio clase: Se tiene una placa en un reúnto a 300 K

Placa y reúnto se consideran superficies grises.



### • Balance energético a la superficie ①

Como estamos en régimen permanente lo que se absorbe en la radiación ( $q_R$ ) se disipa

|                          |               |   |   |
|--------------------------|---------------|---|---|
| Radiación ( $q_{R1}$ )   | $\Rightarrow$ | $q_R = q''_{cv1} + q''_{k1} + q''_{R1}$ | Si no aumentaría el contenido energético y no estaríamos en régimen permanente. |
| Convección ( $q_{cv1}$ ) | $\Rightarrow$ |   |   |
| Conducción ( $q_{k1}$ )  | $\Rightarrow$ |   |   |

$$Aq_R = KA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} + hA(T_1 - T_F) + EA\sigma(T_1^4 - T_R^4) \quad (*)$$

CUERPO PEQUEÑO    DENTRO DE UNO    GRANDE !!!

Como la superficie es gris  $\Rightarrow \epsilon = \epsilon_p = 0,8$

Tenemos dos incógnitas  $\left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ q_R \end{array} \right\} \rightarrow$  Necesitamos otra ecuación  $\Rightarrow$

Balance energético a la superficie ②

• Balance energético a la superficie ②:

$$q_{k1} = q_{cr_2} + q_{r_2} \Rightarrow KA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = hA(T_2 - T_F) + E_2 A \sigma (T_2^4 - T_F^4) \quad (***)$$

Despejamos  $T_1$  de (\*\*\*): Entrando en (\*\*) obtenemos G

