ÁLGEBRA LINEAL
Y
GEOMETRÍA

Un simple resumen de los conceptos más importantes
presentados de una forma clara y utilizable

MADRID, 2015–2016

Edited by

PABLO SÁNCHEZ YÁÑEZ

POLITÉCNICA
"Ingeniamos el futuro"

CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

2015

Primera edición: Junio 2015

Printed in the World

Prefacio

Este documento pretende servir de ayuda a todos los estudiantes de Ingeniería de Telecomunicación en la Universidad Politécnica de Madrid. En él se contemplan la mayoría de los conceptos impartidos en la asignatura de Álgebra Lineal del primer semestre del Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

No se pretende sin embargo elaborar un libro con toda la materia de la asignatura, ya que se van a dar muchos conceptos ya por entendidos y solo se tratarán aquellos de mayor importancia y dificultad. En realidad, el objeto de este manual no es más que el de servir como ayuda para la preparación de la asignatura, o como consulta para recordar algún concepto que se haya olvidado con el paso del tiempo.

Pablo Sánchez Yáñez

Índice general

Capítulo 1

Estructuras Algebraicas

1.1. Introducción

En este primer tema de **Estructuras Algebraicas** se tratarán algunos conceptos fundamentales para el progreso en la asignatura, ya que sin ellos nos va a resultar muy complicado seguir las explicaciones y demostraciones que se harán a lo largo del curso.

1.2. Estructuras algebraicas

1.2.1. Conjuntos

Se define un **conjunto** como la reunión de objetos a los que se denomina elementos. El número de elementos de un conjunto es el **cardinal**. El **conjunto vacío**, $\emptyset$ es aquel que no contiene a ningún elemento. Un conjunto cuyos elementos son vectores es un **espacio vectorial**. Un ejemplo de como se denotan los conjuntos es:

$$x \in A \rightarrow \text{ Elementos del conjunto de salida} \equiv \text{Preimágenes.}$$

$$f(x) \in B \rightarrow \text{ Elementos del conjunto de llegada} \equiv \text{Imágenes.}$$

Los conjuntos con los que habitualmente se trabaja en la asignatura, y que suelen aparecer en los exámenes son:

- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Vectores o tuplas de dos $\mathbb{R}$-componentes.
- $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Producto cartesiano.
- $\mathcal{J} : \big\{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : a,b \in \mathbb{C}\big\}$ i.e.: $(1+j, 2+3j) \in \mathbb{C}^2$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \{(a,b) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C}) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}\}$
- $\mathbb{Z}_2 \rightarrow$ Es un conjunto de dos elementos (código binario)

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$

1.2.2. Grupos

Sea un conjunto G cualquiera, no vacío, con una operación interna $+$. Diremos de la dupla $(G, +)$ es un **grupo** si cumple:

- Propiedad asociativa: $\forall x, y, z \in G, (x + y) + z = x + (y + z)$.
- Elemento neutro: $\exists\ e \in G\ /\ \forall x \in G, x + e = e + x = x$.
- Elemento opuesto: dado $x \in X, \exists \bar{x} \in X\ /\ x + \bar{x} = \bar{x} + x = e$.

Decimos que $(G, +)$ es un **grupo abeliano** si, además de todo lo anterior se cumple:

- Propiedad conmutativa: $\forall x, y \in G, x + y = y + x$.

1.2.3. Anillos

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío, y sean $+$ y $\cdot$ dos operaciones internas (suma y producto). Se dice que la terna $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un **anillo** si cumple:

- $(\mathcal{A}, +)$ es un grupo abeliano.
- Propiedad distributiva del producto: $\forall x, y, z \in X, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- La propiedad distributiva del producto respecto a la suma (se da por definida con la anterior).

1.2.4. Cuerpo

Sea $\mathcal{K}$ un conjunto no vacío y sean $+$ y $\cdot$ dos operaciones internas (suma y producto). Se dice que la terna $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ es un **cuerpo** si cumple:

- $(\mathcal{K}, +)$ es un grupo abeliano.
- $(\mathcal{K} - \{e\}, \cdot)$ es grupo.
- La propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Capítulo 2

Matrices y Sistemas de Ecuaciones

2.1. Introducción

No se van a tratar en este capítulo la definición de matriz, operaciones sencilla con matrices, determinantes o demás conceptos relacionados. Sino que se va a atacar directamente a aquella materia de clara utilidad en los problemas de la asignatura.

2.2. Operaciones con matrices y transformaciones

2.2.1. Rango de una matriz

Se define el **rango** de una matriz como el número de filas o columnas linealmente independientes que tiene la matriz. El rango de una matriz A se denota por $\mathrm{rang}(A)$. El mínimo rango que puede tener una matriz es uno, salvo la matriz nula que tiene $\mathrm{rang}(0) = 0$.

2.2.2. La matriz inversa

Se dice que A^{-1} es la matriz **inversa** de A si y solo si $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Para el cálculo de la matriz inversa se emplean fundamentalmente dos métodos, pero aquí solo se explicará uno de ellos.

- El método de **Gauss-Jordan** consiste en realizar operaciones elementales sobre la matriz $(A|I)$ hasta conseguir que A se convierta en I. En ese momento, la transformada de I es la matriz inversa, A^{-1}.

2.3. Sistemas de ecuaciones

2.3.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineal

Un sistema de lineal de m ecuaciones con n incógnitas se define de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Llamamos a las matrices:

- Matriz (A) de coeficientes, de dimensión $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathcal{K})$$

- Matriz de incógnitas (dimensión $n \times 1$) a la matriz compuesta por el vector $\mathbf{x_n}$.

- Matriz de términos independientes (dimensión $m \times 1$) al vector de datos $\mathbf{b}$.

Es habitual referirse a un sistema de ecuaciones de forma genérica como: $[A](\mathbf{x}) = (\mathbf{b})$.

2.3.2. Planteamiento y discusión de los sistemas de ecuaciones lineales

Probablemente cuando se va a resolver un ejercicio, en el enunciado no se de el sistema ya planteado como se explica en el apartado anterior, sino que haya que deducirlo (**plantearlo**) a partir de los datos provistos.

Por otra parte, antes de resolver un sistema, se habla de **discusión** del mismo en tanto en cuanto a averiguar si este tiene solución. La clave de este paso es la utilización del Teorema de **Rouché-Frobenius**, que consiste en un procedimiento sencillo para conocer la naturaleza del sistema:

1. A partir del sistema ya planteado se obtiene la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $A^* = (A|\mathbf{b})$

2. Ahora, se calcula el rango de ambas matrices aplicando el método explicado en la sección anterior, o de cualquier otro modo, y una vez calculados se comparan los resultados con el enunciado del teorema citado.

   - Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$ sistema **compatible determinado** (S.C.D.), la solución es única.
   - Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) < \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$ sistema **compatible indeterminado** (S.C.I.), infinitas soluciones.
   - Si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A^*) \Rightarrow$ el sistema es **incompatible** (S.I.), no tiene solución.

2.3.3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Para la **resolución** de un sistema de ecuaciones se va a emplear principalmente el método de **Gauss**. Este procedimiento se basa en la aplicación de un algoritmo, que es el de reducción de una matriz mediante transformaciones elementales a otra matriz equivalente con la que resolver el sistema sea trivial. Para la obtención de la **matriz reducida de Gauss** hay que seguir los siguientes pasos:

1. Comprobar que la matriz no está ya en forma reducida. Esto es posible saberlo observando que el coeficiente principal de cada columna está en alguna columna a la derecha del coeficiente principal en la fila anterior, y que los coeficientes por debajo de cada coeficiente principal (en su columna) son cero.

2. Se toma la primera columna no nula (columna pivote).

3. Se elige un coeficiente no nulo (habitualmente el primero) de la columna pivote en la posición del pivote.

4. Realizando transformaciones elementales por filas, se van anulando los coeficientes por debajo del pivote.

5. Se repite el proceso con la submatriz las veces que sea necesario.

La forma reducida de **Gauss-Jordan** se diferencia de la anterior en que todos los coeficientes principales son 1, y el coeficiente principal es el único elemento no nulo en su columna. Un ejemplo de matriz reducida de Gauss es

$$\begin{pmatrix} \bigotimes & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \bigotimes & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \bigotimes & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $\bigotimes$ un coeficiente principal o pivote, $*$ un elemento cualquiera, y 0 un elemento nulo.

Una **propiedad**, muy importante y reiteradamente utilizada, de las matrices reducidas que se acaban de exponer es que:

- El rango de una matriz reducida de Gauss-Jordan es igual al número de filas no nulas y, además siempre coincide con el número de columnas donde hay pivotes.

Otros métodos de resolución pueden emplearse como son:

- El método de **Cramer**, para S.C.D. Un sistema de ecuaciones lineales recibe el nombre de sistema de Cramer cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

  - El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
  - El determinante de la matriz de los coeficientes (matriz del sistema) es distinto de cero $\det(\mathcal{A}) \neq 0$

  Un sistema de Cramer es, por definición, compatible determinado, puesto que se cumple que $\text{rang}(\mathcal{A}) = \text{rang}(\mathcal{A}^*) = n$ (nº de incógnitas). Consideremos un sistema de Cramer, es decir, un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya expresión general en forma matricial es la siguiente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O bien,

$$[\mathcal{A}](\mathbf{x_n}) = (\mathbf{b})$$

La regla de Cramer nos da explícitamente la solución del sistema de ecuaciones para cada una de las i incógnitas, es decir

$$x_i = \frac{\det_i(\mathcal{A})}{\det(\mathcal{A})}$$

Siendo $\det_i(A)$ un determinante que resulta de sustituir la columna i en el determinante del sistema por otra formada por el vector de datos $\mathbf{b}$.

- Si el sistema es S.C.I., posee infinitas soluciones, y una forma de resolverlos es la siguiente:

Primero Se calcula el número de parámetros que serán necesarios para su solución. Hay dos formas de calcular este número:

- Nº Parámetros = Nº incógnitas − Nº de ecuaciones linealmente indep.
- Nº Parámetros = Nº incógnitas − rang(A^*)

Segundo Se asigna a las incógnitas sendos parámetros según la siguiente regla de preferencia:

1. Incógnita que no aparezca en ninguna ecuación.
2. Incógnita que aparezca en mayor número de ecuaciones.
3. Incógnita que vaya multiplicada por el coeficiente mayor.

Esta regla de asignación no es estrictamente correcta, pero sí facilitará la tarea en la mayoría de casos.

Tercero Se pasan todos los parámetros al lado de los términos independientes, y ya se ha llegado a un S.C.D. que se resuelve por cualquiera de los métodos anteriores.

ÁLGEBRA **Ejercicio 1** Examen final 21 de enero de 2015

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación: **2 puntos** **Tiempo:** **30** minutos

Sean $a, b \in \mathbb{Z}_2$ y $f_{ab} : \mathbb{Z}_2^2 \longmapsto \mathbb{Z}_2^3$ la aplicación tal que $f_{ab}(x, y) = \big(ax, bx, (a + b)(x + y)\big)$.

a) Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{Z}_2$ f_{ab} es lineal.

b) Hallar la matriz de f_{ab} respecto a las bases canónicas de $\mathbb{Z}_2^2$ y $\mathbb{Z}_2^3$.

c) Calcular $\dim\big(\mathrm{Img}(f_{ab})\big)$ en función de los parámetros a y b.

d) Determinar los valores de a y b para que el sistema de ecuaciones $f_{ab}(x, y) = (0, 1, 0)$ tenga solución única y calcularla.

Solución:

a) $\forall a, b \in \mathbb{Z}_2$ f_{ab} es lineal ya que $\forall a, b \in \mathbb{Z}_2$ $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}_2^2$ $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{Z}_2$

$$\begin{aligned} f_{ab}\big(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)\big) &= f_{ab}\big((\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_2, \mu y_2)\big) = f_{ab}(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \big(a(\lambda x_1 + \mu x_2), b(\lambda y_1 + \mu y_2), (a + b)(\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2)\big) \\ &= \lambda\big((ax_1, by_1, (a + b)(x_1 + y_1)\big) + \mu\big(ax_2, by_2, (a + b)(x_2 + y_2)\big) \\ &= \lambda f_{ab}(x_1, y_1) + \mu f_{ab}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

b) Las columnas de la matriz de f_{ab} respecto a las bases canónicas de $\mathbb{Z}_2^2$ y $\mathbb{Z}_2^3$ son las coordenadas de las imágenes de la base canónica de $\mathbb{Z}_2^2$ respecto a la base canónica de $\mathbb{Z}_2^3$, así pues

$$F_{ab} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

ya que $f_{ab}(1, 0) = (a, b, a + b)$ y $f_{ab}(0, 1) = (0, 0, a + b)$.

c) La $\dim\big(\mathrm{Img}(f_{ab})\big)$ coincide con el rango de la matriz F_{ab}, produciéndose los siguientes casos:

- Si $a = b = 0$, entonces $F_{00} = 0$ y $\dim\big(\mathrm{Img}(f_{00})\big) = \mathrm{rango}(F_{00}) = 0$.
- Si $a = 0$ y $b = 1$, aplicando operaciones elementales entre filas a la matriz F_{01},

$$F_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  se obtiene su forma reducida escalonada que tiene dos escalones, por lo que su rango es 2 y

$$\dim\big(\mathrm{Img}(f_{01})\big) = \mathrm{rango}(F_{01}) = 2.$$

- Si $a = 1$ y $b = 0$, aplicando operaciones elementales entre filas a la matriz F_{10},

$$F_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  se obtiene su forma reducida escalonada que tiene dos escalones, por lo que su rango es 2 y

$$\dim\big(\mathrm{Img}(f_{10})\big) = \mathrm{rango}(F_{10}) = 2.$$

- Si $a = 1$ y $b = 1$, aplicando operaciones elementales entre filas a la matriz F_{11},

$$F_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  se obtiene su forma reducida escalonada que tiene un escalón, por lo que su rango es 1 y

$$\dim\big(\mathrm{Img}(f_{10})\big) = \mathrm{rango}(F_{10}) = 1.$$

d) Según el teorema de **Rouché-Frobenius**, el sistema de ecuaciones $f_{ab}(x,y) = (0,1,0)$ expresado en forma matricial mediante

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ a+b & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tiene solución única si y solamente si el rango de la matriz de coeficientes, F_{ab}, coincide con el de la matriz ampliada y con el número de incógnitas, 2, por tanto sólo de las matrices de coeficientes que tengan rango 2 se puede obtener un sistema compatible determinado, en este caso

$$F_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las correspondientes matrices ampliadas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

tienen rangos 2 y 3, respectivamente, luego el sistema $f_{01}(x,y) = (0,1,0)$ es compatible determinado y el sistema $f_{10}(x,y) = (0,1,0)$ es incompatible.

Si $a = 0$ y $b = 1$, el sistema de ecuaciones $f_{ab}(x,y) = (0,1,0)$ es compatible determinado y es el único caso.

Como la matriz ampliada equivalente al sistema inicial es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ y la única solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es $x = 1$ $y = 1$, la única solución del sistema $f_{01}(x,y) = (0,1,0)$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

también es $x = 1$ $y = 1$.

Capítulo 3

Espacios Vectoriales

3.1. Introducción

Sea E un conjunto no vacío y $\mathcal{K}$ un cuerpo. Se dice que la terna $(E, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial** definido sobre $\mathcal{K}$ si se cumple

1. $+$ es una ley de composición interna que cumple:
   a) $E \times E \to E$
   b) $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \to \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1} + \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2}$
2. $\cdot$ es una ley de composición externa que cumple
   a) $\mathcal{K} \times E \to E$
   b) $k, \vec{\mathbf{v}} \to k\vec{\mathbf{v}}$

3.2. Subespacios vectoriales

Se le llama **subespacio vectorial** de E a cualquier subconjunto de E que tenga estructura de espacio vectorial.

Habitualmente, los subespacios vectoriales se expresan en forma cartesiana o bien en forma paramétrica:

- En **forma cartesiana** se define el subconjunto por sus ecuaciones cartesianas. Luego todos los elementos pertenecientes a ese subconjunto deben satisfacer estas ecuaciones. Ejemplos de subespacios en forma cartesiana son

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\right\}$$

$$S_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_3 = 0, x_1 + x_2 = 0\right\}$$

- En **forma paramétrica** se define el subconjunto empleando ecuaciones paramétricas, i.e.:

$$H = \left\{(\alpha, \beta - \alpha, 2\beta) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

$$M = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

3.3. Suma e intersección de subespacios

Sean M y N dos subespacios vectoriales de E,

- se define el **subespacio intersección** como:

$$M \cap N = \{\vec{\mathbf{v}} \in E : \vec{\mathbf{v}} \in M \wedge \vec{\mathbf{v}} \in N\}$$

la intersección de dos subespacios vectoriales es siempre otro subespacio vectorial;

- se define el **subespacio suma** como:

$$M + N = \{\vec{\mathbf{v}} \in E : \exists \vec{\mathbf{u}} \in M \ , \exists \vec{\mathbf{w}} \in N \ , \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{w}}\} \ .$$

Análogamente, se puede definir la suma de n subespacios vectoriales. La suma de espacios vectoriales (distinguir de unión) es siempre otro subespacio vectorial.

3.4. Suma directa. Subespacios complementarios

Se denomina **suma directa** la suma de dos subespacios M y N siempre y cuando cualquier vector de dicha suma pueda expresarse de una única forma como suma de vectores de M y de N. La suma directa de dos subespacios se denota como

$$M \oplus N = \{\vec{\mathbf{v}} \in E : \exists ! \vec{\mathbf{u}} \in M \ , \exists ! \vec{\mathbf{w}} \in N \ , \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{w}}\}$$

Si la suma de dos subespacios es directa, se cumple que

$$M \cap N = \left\{\vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}}\right\} .$$

Cuando dos subespacios son **sumplementarios**, equivale a decir que su suma es una suma directa, ya que

$$M \text{ y } N \text{ son sumplementarios} \Leftrightarrow \begin{cases} M \cap N = \left\{\vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}}\right\} \\ M + N = E \end{cases}$$

3.5. Dependencia lineal

3.5.1. Combinación lineal

Se dice que el vector $\vec{\mathbf{v}}$ es combinación lineal del siguiente conjunto de vectores $\{\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}\}$ si se puede explicar de la siguiente forma:

$$\vec{\mathbf{v}} = \alpha_1 \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} + \alpha_2 \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}} + \ldots + \alpha_n \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}$$

siendo $\alpha_i \in \mathcal{K}, \quad i = \{1, 2, ..., n\}$. El vector nulo siempre es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores

3.5.2. Dependencia lineal

Se dice que un conjunto de vectores $\{\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}\}$ son **linealmente dependientes** si existen unos escalares $\alpha_i \in \mathcal{K}, \quad i = \{1, 2, ..., n\}$, no todos nulos, tal que

$$\alpha_1 \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} + \alpha_2 \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}} + \ldots + \alpha_n \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}} \ .$$

A un conjunto de vectores linealmente dependientes también se le llama conjunto **ligado**. En cualquier conjunto de vectores donde se encuentre el vector nulo es ligado.

3.5.3. Independencia lineal

Se dice que un conjunto de vectores $\{\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{n}\}$ son **linealmente independientes** si para que se cumpla $\alpha_1\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1} + \alpha_2\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2} + \ldots + \alpha_n\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{n} = \vec{\mathbf{0}}_\mathbf{E}$. todos los escalares $\alpha_i \in \mathcal{K}, \quad i = \{1, 2, ..., n\}$ deben ser nulos. Este tipo de conjunto de vectores también se denomina conjunto **libre** .

3.6. Base y dimensión

3.6.1. Base de un espacio vectorial

Se dice que un conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{n}\}$ es una **base** de un espacio vectorial E si se cumple que:

- $\mathcal{B}$ es un sistema libre.
- $L(\mathcal{B}) = E$, es decir, que $\mathcal{B}$ es un sistema generador de E.

Dicho de otro modo, un conjunto de vectores es base de un espacio vectorial si es un conjunto libre y el número de elementos del conjunto es igual a la dimensión del espacio vectorial.

3.6.2. Dimensión de un espacio vectorial

Se denomina **dimensión** de un espacio vectorial al número de vectores que tiene una base de ese espacio. La relación de **Grassmann** expone que, siendo M y N dos subespacios de un subespacio vectorial E, se cumple

$$\dim(M + N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N),$$

en cambio, si se trata de una suma directa, es evidente deducir que

$$\dim(M \oplus N) = \dim(M) + \dim(N)$$

3.6.3. Cambio de base

Las **coordenadas** de un vector $\vec{\mathbf{v}}$ con respecto a una base $\mathcal{B}$ se definen como aquellos escalares por los que se multiplica cada vector de la base dada dando como resultado el vector $\vec{\mathbf{v}}$. Para un vector $\vec{\mathbf{v}}$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, sus coordenadas con respecto a la base canónica

$$\mathcal{B}_c = \{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, 0, 0), \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (0, 1, 0), \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (0, 0, 1)\}$$

son

$$\vec{\mathbf{v}} = \alpha\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + \beta\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + \gamma\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} \Longrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0), \gamma(0, 0, 1)$$

Se define el **cambio de base** como la expresión de un vector $\vec{\mathbf{v}}$ respecto de una base distinta de la que se define en un principio. Luego, sea la base canónica de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ definida anteriormente, y sea una base distinta de la canónica

$$\mathcal{B} = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}.$$

La matriz de cambio de base $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{B}_c$ es

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

Propiedades importantes de esta matriz son:

1. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c})^{-1}$
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_c} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$

Entonces, se contemplan los siguientes cambios de base:

- Cambio de base de **una base cualquiera a la base canónica**: Los datos que aportados han de ser siempre:
  - Una base
    $$\mathcal{B} = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}.$$
  - Un vector con coordenadas expresadas en la base $\mathcal{B}$:
    $$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B}} = (x, y, z)$$
    $$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B_c}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B}} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{21} & u_{22} & u_{32} \\ u_{31} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
- Cambio de base de **la base canónica a otra base cualquiera**: Los datos que aportados han de ser siempre:
  - Una base
    $$\mathcal{B} = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}.$$
  - Un vector con coordenadas expresadas en la base canónica $\mathcal{B}_c$:
    $$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B}} = (\alpha, \beta, \gamma)$$
    $$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B}} = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}})^{-1} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B_c}} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{21} & u_{22} & u_{32} \\ u_{31} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$
- Cambio de base de **dos bases cualesquiera**: Los datos que aportados han de ser siempre:
  - Una base
    $$\mathcal{B} = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}.$$
  - Otra base
    $$\mathcal{B}' = \{(w_{11}, w_{21}, w_{31}), (w_{12}, w_{22}, w_{32}), (w_{13}, w_{23}, w_{33})\}$$
  - Un vector con coordenadas expresadas en una de las bases $\mathcal{B}$:
    $$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B}} = (\alpha, \beta, \gamma)$$
    $$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B'}} = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}'})^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B}} \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B'}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_c} \mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B}} \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B'}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{B}}$$
    $$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{21} & w_{22} & w_{32} \\ w_{31} & w_{23} & w_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{21} & u_{22} & u_{32} \\ u_{31} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Otra forma de realizar este proceso, que engloba lo anterior es la siguiente:

1. Se construye el esquema:

$$\begin{tikzcd} B_2' \arrow[r, "C(f)"] \arrow[d, "M_{B_2'}^{B_2}"'] & B_3' \\ B_2 \arrow[r, "F"'] & B_3 \arrow[u, "M_{B_3}^{B_3'}"'] \end{tikzcd}$$

2. Dicho esquema se puede explicar fácilmente:

   - Arriba se pone la matriz final que queremos obtener y de qué base a qué base va.
   - Debajo la matriz que tenemos y también de dónde a dónde va.
   - Las matrices de los laterales se deducen por la dirección de las flechas.

   Ahora solo debemos recorrer el sistema en sentido horario. Por ejemplo, para obtener $C(f)$:

$$C(f) = M_{B_3}^{B_3'} \cdot F \cdot M_{B_2'}^{B_2}$$

3. Y solo quedaría obtener dichas matrices, que si implican a la base canónica son muy sencillas de calcular. Recordemos que en un cambio de base de una base cualquiera a la canónica, la matriz que buscamos es $M_B^{B_c}$ y sus columnas son directamente los vectores de B. Si es al contrario, la matriz buscada es la inversa de la anterior.

Capítulo 4

Aplicaciones Lineales

4.1. Introducción

Sean $(E, +, \cdot)$, un espacio vectorial de dimensión n, y $(E', +, \cdot)$ otro espacio vectorial de dimensión m. Se dice que una aplicación $f : E \mapsto E'$ es una **aplicación lineal** si cumple que:

- $f(\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1} + \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2}) = f(\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1}) + f(\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2}), \quad \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{2} \in E$
- $f(k\vec{\mathbf{v}}) = kf(\vec{\mathbf{v}}), \quad \vec{\mathbf{v}} \in E, \quad k \in \mathcal{K}$

Sea $f : E \mapsto E'$ una aplicación lineal, dependiendo si es inyectiva, biyectiva o sobreyectiva también se le da el nombre de

- Si el espacio de salida y el de llegada son distintos ($E \neq E'$) puede ser
  - no inyectiva, no sobreyectiva, esto es un **homomorfismo**
  - inyectiva o **monomorfismo**
  - sobreyectiva o **epimorfismo**
  - biyectiva o **isomorfismo**
- Cuando coinciden el espacio de salida y el de llegada puede ser
  - no inyectiva, no sobreyectiva; o bien **endomorfismo**
  - biyectiva o **automorfismo**

4.2. Matriz asociada a una aplicación lineal

Si E y E' son dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{n}\}$ es una base de E, cualquier aplicación lineal $f : E \mapsto E'$ queda totalmente definida por el sistema $\{f(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}), \ldots, f(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{n})\}$.

Así, dada una base cualquiera $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{n}\}$ del espacio de salida E, cada aplicación lineal tiene asociada una matriz única en esa base, que se denomina **matriz asociada** a la aplicación lineal f. Esta matriz se construye poniendo como columnas las imágenes $\{f(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}), \ldots, f(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{n})\}$ de una base del espacio de salida.

Ejemplo: Encontrar una matriz asociada a la siguiente aplicación lineal,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \quad &\longmapsto \quad \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightsquigarrow f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - 3x_3) \end{aligned}$$

Tomando la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_c = \{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1,0,0), \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (0,1,0), \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (0,0,1)\}$

$$\begin{aligned} f(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}) &= f(1,0,0) = (2\cdot 1 + 0,\ 0 - 3\cdot 0) = (2,0) \\ f(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}) &= f(0,1,0) = (2\cdot 0 + 1,\ 1 - 3\cdot 0) = (1,1) \\ f(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}) &= f(0,0,1) = (2\cdot 0 + 0,\ 0 - 3\cdot 1) = (0,-3) \end{aligned}$$

Se construye la matriz asociada a f en la base canónica de salida y en la base canónica de llegada

$$\mathcal{A}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Si se tiene otra base distinta que no es la canónica se procede de la misma forma. Por ejemplo, tomando

$$\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1} = (-1,0,0), \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{2} = (1,1,0), \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{3} = (0,0,2)\}$$

operando queda

$$\begin{aligned} f(\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1}) &= f(-1,0,0) = (2\cdot(-1) + 0,\ 0 - 3\cdot 0) = (-2,0) \\ f(\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{2}) &= f(1,1,0) = (2\cdot 1 + 1,\ 1 - 3\cdot 0) = (2,1) \\ f(\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{3}) &= f(0,0,2) = (2\cdot 0 + 0,\ 0 - 3\cdot 2) = (0,-6) \end{aligned}$$

Y, por consiguiente, la matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}$ de salida y base canónica de llegada es,

$$\mathcal{A}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Acerca de lo que se acaba de explicar es importante hacer ciertas observaciones:

- En la matriz asociada a f, el número de filas coincide con la dimensión del espacio de llegada y el número de columnas con la dimensión del espacio de salida. Luego en los endomorfismos, esta matriz será cuadrada.
- Una vez se tiene la matriz asociada es posible utilizarla para obtener imágenes de la aplicación multiplicando por un vector del espacio inicial

$$f(\vec{\mathbf{v}}) = \mathcal{A}(f) \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

4.3. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Sea una aplicación lineal $f : E \mapsto E'$

- Se denomina **núcleo** de f al conjunto formado por todos los vectores de E cuya imagen, a través de f, es el elemento neutro de E'; y se denota como $\mathrm{Ker}(f)$. Es decir,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{\mathbf{v}} \in E : f(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E'}}\} = f^{-1}(\{\vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E'}}\})$$

El conjunto $\mathrm{Ker}(f)$ es un subespacio vectorial de E.

- Se denomina **imagen** de f al conjunto formado por todos los vectores de E' que son imagen de algún elemento de E. Es decir,

$$\text{Img}(f) = \{\vec{\mathbf{v}} \in E' : \exists \vec{\mathbf{u}} \in E, f(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{v}}\} = f(E)$$

El conjunto $\text{Img}(f)$ es un subespacio vectorial de E'. Se observa que la dimensión del subespacio imagen coincide con el rango de la matriz asociada a f

$$\dim(\text{Img}(f)) = \text{rang}(\mathcal{M}(f))$$

En conclusión,

$$\dim(\text{Img}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E)$$

Por otro lado, es posible deducir ciertos teoremas de las definiciones anteriores:

- f es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}}\}$
- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{rang}(\mathcal{M}(f)) = \dim(E')$

4.3.1. Cálculo práctico de Ker (f)

Para el cálculo del núcleo de una aplicación lineal se puede proceder de varias maneras, aquí se resumirán dos de ellas:

- Se construye la matriz asociada a f y se multiplica esta por un vector genérico $\vec{\mathbf{x}}$

$$\mathcal{A}(f)\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}},$$

es decir, para una aplicación de la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los cálculos a hacer serían

  - $\vec{\mathbf{v}} = x_1\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} + x_2\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} + x_3\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}},\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_2^3$. Siendo $\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}, \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}}$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{Z}_2^3$. $\vec{\mathbf{v}}$ va a ser el vector solución.
  - Se obtiene el sistema de ecuaciones operando con la matriz

$$\vec{\mathbf{0}} = 0\vec{\mathbf{e}}'_{\mathbf{1}} + 0\vec{\mathbf{e}}'_{\mathbf{2}} + 0\vec{\mathbf{e}}'_{\mathbf{3}} + 0\vec{\mathbf{e}}'_{\mathbf{4}} \Rightarrow \vec{\mathbf{0}} = (0,0,0,0) \in \mathbb{Z}_2^4$$

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene solución única, el vector $\vec{\mathbf{v}} = (0,0,0)$. Por lo tanto, en este caso, se puede observar que el núcleo está formado solo por el vector $\vec{\mathbf{v}} \longrightarrow \text{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$, que implica que su dimensión sera cero, $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$. Se recuerda que cuando un subespacio contiene solo al elemento neutro su dimensión es igual a 0.

- Se calcula el $\text{rang}(\mathcal{A})$, que es idéntico a la dimensión de la imagen de f. Del teorema

$$\dim(\text{Img}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E)$$

se deduce la dimensión del núcleo, $\dim(\text{Ker}(f))$, teniendo la del subespacio de salida, $\dim(E)$, y la de la imagen, $\dim(\text{Img}(f))$.

4.3.2. Cálculo práctico de $\mathrm{Img}(f)$

El conjunto Img(f) siempre es subespacio vectorial del espacio de llegada, aunque no todos los elementos del espacio de llegada son imagen, es decir, no tienen por qué tener pre-imagen.

Dimensión Se construye una base de $\mathrm{Img}(f)$ tomando tantos vectores linealmente independientes de la matriz asociada, $\mathcal{A}(f)$, como sea posible. Esto aporta una idea sobre la base de $\mathrm{Img}(f)$.

$$\mathcal{A}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \dim\left(\mathrm{Img}(f)\right) = \mathrm{rang}(\mathcal{A}(f))$$

Base Como se ha visto en el apartado anterior, el número máximo de vectores que contenga la base de $\mathrm{Img}(f)$ será el número máximo de vectores linealmente independientes. Entonces, se procede a calcular el rango de $\mathcal{A}(f)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow \det(\mathcal{M}) \neq 0 \rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{M}_3 \longrightarrow \mathrm{rang}(\mathcal{A}) = 3$$

Por tanto, se tiene una base de $\mathrm{Img}(f)$ formada por tres vectores.
Si el $\mathrm{rang}(A(f)) \neq \mathrm{máx} \rightarrow$ *se cogen para la base el número de columnas que indique el rango (normalmente las que contengan a más elementos nulos, ya que simplificará los cálculos)*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Img}(f)} = \{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$$

Img(f) Hay varias formas de expresar el conjunto imagen. Habitualmente se utilizan las ecuaciones paramétricas dadas por la combinación lineal

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{Img}(f) \leftrightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4) = \alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,1)$$
$$y_1 = \alpha \quad y_2 = \beta \quad y_3 = \gamma \quad y_4 = \alpha + \beta + \gamma$$

En general, cuando se pide calcular la imagen, se refiere a calcular las ecuaciones **paramétricas** del conjunto imagen. Se podría expresar así

$$\mathrm{Img}(f) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}_2^4 : y_1 = \alpha, y_2 = \beta, y_3 = \gamma, y_4 = \alpha + \beta + \gamma\}$$

o bien de esta forma

$$\mathrm{Img}(f) = \{(\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma) \in \mathbb{Z}_2^4 : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2\}$$

En el caso de que se nos pidan las ecuaciones **cartesianas** (o **implícitas**) de $\mathrm{Img}(f)$, teniendo en cuenta que para pasar de paramétricas a cartesianas solo hay que eliminar los parámetros

$$y_4 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\mathrm{Img}(f) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}_2^4 : y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 0\}$$

ÁLGEBRA **Ejercicio 1** 26 de junio de 2015

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

La respuesta se realizará única y exclusivamente en esta hoja. No se corregirán hojas adicionales.

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_2^3 \longmapsto \mathbb{Z}_2^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z).$$

a) Hallar $\mathrm{Ker}(f)$ indicando una base y la dimensión.

b) Hallar $\mathrm{Img}(f)$ indicando una base y la dimensión.

c) Demostrar que $B = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_2^3$.

d) Calcular la matriz de f respecto a la base B.

Solución:

a) $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_2^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_2^3 : x + y = 0, x + z = 0, y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_2^3 : x + y = 0, y + z = 0\} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}_2^3 : \alpha \in \mathbb{Z}_2\} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\} = L\Big(\{(1, 1, 1)\}\Big)$.

$B_K = \{(1, 1, 1)\}$ es una base de $\mathrm{Ker}(f)$ y su dimensión es 1.

b) $\mathrm{Img}(f) = \{f(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_2^3 : (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_2^3\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_2^3 : x = \alpha + \beta, y = \alpha + \gamma, z = \beta + \gamma\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_2^3 : x + y + z = 0\} = \{(\lambda, \mu, \lambda + \mu) \in \mathbb{Z}_2^3 : \lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2\} = L\Big(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}\Big)$.

$B_I = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de $\mathrm{Img}(f)$ y su dimensión es 2.

c) El conjunto $B = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ es libre porque el rango de la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B tiene rango 3, ya que realizando operaciones elementales entre filas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se obtiene una matriz con tres escalones.

Como la dimensión de $\mathbb{Z}_2^3$ es tres, cualquier conjunto libre con tres elementos es una base de $\mathbb{Z}_2^3$, luego B es una base de $\mathbb{Z}_2^3$.

d) La matriz cuyas columnas son las coordenadas de las imágenes mediante f de los vectores de la base canónica $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de Z_2^3 es la matriz del endomorfismo f,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

porque $f(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$ y $f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$.

La matriz cuyas columnas son las coordenadas de los elementos de la base B respecto a la base canónica B_c de $\mathbb{Z}_2^3$ es la matriz de cambio de la base B a la base canónica: $M_B^{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La inversa de la matriz $M_B^{B_c}$ es la matriz de cambio de la base canónica a la base B, $M_{B_c}^{B} = \left(M_B^{B_c}\right)^{-1}$, y puede calcularse mediante operaciones elementales entre filas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

resultando $M_{B_c}^{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

A partir de las matrices de cambio de base y de la expresión matricial de f respecto a la base canónica B_c, puede calcularse la matriz M de f respecto a la base B, ayudándose del siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z}_{2\,B}^{3} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_2^3}} & \mathbb{Z}_{2\,B_c}^{3} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}_{2\,B_c}^{3} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_2^3}} & \mathbb{Z}_{2\,B}^{3}\\
\overrightarrow{\mathbf{v}}_B & \xrightarrow{M_B^{B_c}} & \overrightarrow{\mathbf{v}}_{B_c} & \xrightarrow{F} & f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_{B_c}\right)_{B_c} & \xrightarrow{M_{B_c}^{B}} & f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_{B_c}\right)_{B}
\end{array}$$

$$M=M_{B_c}^{B}FM_B^{B_c}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Capítulo 5

Espacios euclídeos

5.1. Producto escalar

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un producto escalar en E es una aplicación de la forma

$$\begin{aligned} <,>: E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} &\rightarrow <\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}> \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

Bilinealidad Aplicación lineal en la primera y en la segunda variable

$$<\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}}', \vec{\mathbf{v}}> = <\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}> + <\vec{\mathbf{u}}', \vec{\mathbf{v}}> \qquad \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}', \vec{\mathbf{v}} \in E \tag{5.1}$$

$$<\alpha\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}> = \alpha <\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}> \qquad \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

$$<\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}'> = <\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}> + <\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}'> \qquad \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}' \in E \tag{5.3}$$

$$<\vec{\mathbf{u}}, \beta\vec{\mathbf{v}}> = \beta <\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}> \qquad \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in E \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

Simetría

$$<\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}> = <\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}> \tag{5.5}$$

Positividad

$$<\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}> \geq 0 \quad \forall \vec{\mathbf{u}} \in E \tag{5.6}$$

Además,

$$<\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}> = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} = \{\vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}}\} \tag{5.7}$$

5.1.1. Productos escalares más usuales

Ejemplos

- Producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$

$$<(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)> = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

- Producto escalar de las funciones continuas

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

En $\mathcal{C}([0,1])$*:*

$$(x,x^2) = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

- Producto escalar de las matrices de orden n

$$< A,B >= \mathrm{tr}(AB^t)$$

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

5.2. Espacios vectoriales euclídeos

Un **espacio euclídeo** es un espacio vectorial donde hay definido un producto escalar y se denota como $(E, <, >)$. El vector nulo $\vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}}$ es el único vector que es ortogonal a todos los vectores de E.

5.2.1. Subespacios ortogonales

- Dos vectores $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ son ortogonales si su producto escalar es cero, es decir $< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >= 0$.
- Un vector $\vec{\mathbf{u}}$ es ortogonal a un subespacio W si es ortogonal a cada uno de los vectores de W, es decir, $\forall \vec{\mathbf{v}} \in W, \;\; < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >= 0$.
- Un subespacio V es ortogonal a otro subespacio W si todos los vectores de V son ortogonales a cada uno de los vectores de W, es decir

$$\forall \vec{\mathbf{u}} \in V \land \forall \vec{\mathbf{v}} \in W, \;\; < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >= 0$$

- Si W es un subespacio vectorial de un espacio vectorial E, se denomina **complemento ortogonal** de W, y se denota por $W^\perp$, al subespacio vectorial formado por todos los vectores ortogonales a W

$$W^\perp = \{\vec{\mathbf{v}} \in E :< \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} >= 0 \; \forall \vec{\mathbf{w}} \in W\}$$

5.2.2. Norma (o módulo de un vector)

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathcal{K}$, una **norma** definida en E es una aplicación tal que

$$\begin{aligned} || \cdot || : E &\to \mathcal{K} \\ \vec{\mathbf{u}} &\to ||\vec{\mathbf{u}}|| = \sqrt{< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} >} \end{aligned}$$

El **ángulo** α **entre dos vectores** viene dado por la expresión

$$< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >= ||\vec{\mathbf{u}}|| \cdot ||\vec{\mathbf{v}}|| \cdot \cos\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >}{||\vec{\mathbf{u}}|| \cdot ||\vec{\mathbf{v}}||}$$

5.3. El método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Una base de un espacio euclídeo es **ortogonal** si sus vectores son ortogonales dos a dos. Una base **ortonormal** es una base ortogonal de vectores unitarios.

Dada una base cualquiera $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \dots \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{n}\}$ de un espacio vectorial, existe un **método** para obtener una base ortogonal a partir de esta, llamado *Método de ortogonalización de **Gram-Schmidt***, que consiste en los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
&\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} \\
&\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{2} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} - \frac{<\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1}>}{<\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1}>} \cdot \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1} \\
&\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{3} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} - \frac{<\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1}>}{<\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1}>} \cdot \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1} - \frac{<\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{2}>}{<\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{2}>} \cdot \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{2} \\
&\quad \vdots \\
&\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{<\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{n}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{i}>}{<\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{i}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{i}>} \cdot \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{i}
\end{aligned}$$

Una vez obtenida una base ortogonal $\{\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \dots \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n}\}$, a partir de la base original, es posible normalizarla. Para ello basta con dividir cada elemento de la base ortogonal entre su norma:

$$\vec{\mathbf{w}}_\mathbf{n} = \frac{\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n}}{||\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n}||} = \frac{\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n}}{\sqrt{<\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n}>}}$$

obteniendo así una base ortonormal $\{\vec{\mathbf{w}}_\mathbf{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\vec{\mathbf{w}}_\mathbf{1}, \dots \vec{\mathbf{w}}_\mathbf{n}\}$

5.4. La proyección ortogonal

Sea un espacio vectorial euclídeo $(E, <,>)$, en el que se consideran un subespacio $H < E$ y un vector $\vec{\mathbf{v}} \in E$. Se dice que

- El vector $\mathbf{proy}_H(\vec{\mathbf{v}})$ es **proyección ortogonal** de $\vec{\mathbf{v}}$ sobre H si $\mathbf{proy}_H(\vec{\mathbf{v}}) \in H$ y $\vec{\mathbf{v}} - \mathbf{proy}_H(\vec{\mathbf{v}}) \in H^\perp$.
- El vector $\mathbf{proy}_H(\vec{\mathbf{v}}) \in H$ es el **más próximo** a $\vec{\mathbf{v}}$ de entre los vectores de H si $||\vec{\mathbf{u}} - \mathbf{proy}_H(\vec{\mathbf{v}})||$ es el menor de los valores $||\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}||$, $\forall \vec{\mathbf{u}} \in V$ (**distancia mínima**).

Método práctico de cálculo

Sea un espacio vectorial euclídeo $(E, <,>)$, en el que se consideran un subespacio $H < E$ y un vector $\vec{\mathbf{v}} \in E$. Si H tiene dimensión finita y si $\{\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \dots \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n}\}$ es una base ortogonal de H, entonces existe la proyección ortogonal $\mathbf{proy}_H(\vec{\mathbf{p}})$ de $\vec{\mathbf{v}}$ sobre H, y es única

$$\mathbf{proy}_H(\vec{\mathbf{p}}) = \alpha_1 \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{1} + \alpha_2 \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{2} + \dots + \alpha_n \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{n}$$

donde los coeficientes α_1 vienen dados por

$$\alpha_i = \frac{<\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}_\mathbf{i}>}{||\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{i}||^2}$$

En cambio, si se tiene una base $\{\vec{\mathbf{w}}_\mathbf{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\vec{\mathbf{w}}_\mathbf{1}, \dots \vec{\mathbf{w}}_\mathbf{n}\}$ ortonormal, los coeficientes quedan

$$\alpha_i = <\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}_\mathbf{i}>$$

ÁLGEBRA **Ejercicio 2** Prueba final de evaluación continua 15 de diciembre de 2014

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación: **2 puntos** **Tiempo:** **30** minutos

Sea $\mathbb{R}_3[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial euclídeo de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales, con el producto escalar

$$< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calcular

a) Una base ortogonal del subespacio vectorial $U = \{\alpha + \beta x^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_3[x]$.

b) La proyección ortogonal del polinomio $p(x) = x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ sobre el subespacio vectorial U.

Solución:

a) Los polinomios 1 y x^2 generan U y son linealmente independientes,

$$U = \{\alpha + \beta x^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L\Big(\{1, x^2\}\Big),$$

luego $B = \{1, x^2\}$ es una base de U.

Aplicando el procedimiento de **Gram-Schmidt** al conjunto $B = \{p_1(x), p_2(x)\}$, se obtiene una base ortogonal, $B_o = \{q_1(x), q_2(x)\}$, de U :

- El primer vector de B_o es el primer vector de B, $q_1(x) = p_1(x) = 1$.
- El segundo vector de B_o es

$$q_2(x) = p_2(x) - \frac{< q_1(x), p_2(x) >}{< q_1(x), q_1(x) >} q_1(x) = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \,\mathrm{d}x} = x^2 - \frac{1}{3}.$$

$B_0 = \left\{1, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ es una base ortogonal de U.

b) A partir de la base ortogonal de U, $B_o = \{q_1(x), q_2(x)\}$, la proyección ortogonal del polinomio $p(x) = x^3$ sobre el subespacio vectorial U es

$$\begin{aligned}
\mathrm{proy}_U\big(p(x)\big) &= \frac{< p(x), q_1(x) >}{< q_1(x), q_1(x) >} q_1(x) + \frac{< p(x), q_2(x) >}{< q_2(x), q_2(x) >} q_2(x) = \frac{\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \,\mathrm{d}x} + \frac{\int_0^1 x^5 - \frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}x}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{45}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{15}{16}x^2.
\end{aligned}$$

También puede calcularse la proyección ortogonal de $p(x)$ sobre U sin necesidad de utilizar la base ortogonal B_o. Como $\mathrm{proy}_U\big(p(x)\big) \in U$, entonces $\mathrm{proy}_U\big(p(x)\big) = \alpha + \beta x^2$. Además, $p(x) - \mathrm{proy}_U\big(p(x)\big) = x^3 - \alpha - \beta x^2$ es ortogonal a los polinomios 1 y x^2 :

$$0 =< p(x) - \mathrm{proy}_U\big(p(x)\big), 1 >=< x^3 - \alpha - \beta x^2, 1 >= \int_0^1 x^3 - \alpha - \beta x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \alpha - \frac{\beta}{3},$$

$$0 =< p(x) - \mathrm{proy}_U\big(p(x)\big), x^2 >=< x^3 - \alpha - \beta x^2, x^2 >= \int_0^1 x^5 - \alpha x^2 - \beta x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{5}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales, $\alpha = -\frac{1}{16}$, $\beta = \frac{15}{16}$, resultando

$$\mathrm{proy}_U\big(p(x)\big) = -\frac{1}{16} + \frac{15}{16}x^2.$$

Capítulo 6

Diagonalización de Matrices: Autovalores y Autovectores

6.1. Introducción

Sea E un $\mathcal{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Sea también $f : E \to E$ una aplicación lineal y $\mathcal{A}$ la matriz asociada a f. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **autovalor** o valor propio de la matriz $\mathcal{A}$ si exixte algún vector $\vec{\mathbf{v}}$ no nulo de E tal que

$$A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$$

o bien

$$f(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}}$$

Si λ es el valor propia de $\mathcal{A}$ entonces los vectores no nulos de E que verifiquen la anterior relación se denominan **autovectores** o vectores propios de $\mathcal{A}$ asociados a λ. Cada vector propio está asociado a un único valor propio. No obstante, cada valor propio tiene asociados uno o más vectores propios.

6.2. Cálculo de autovalores

Especificado para una matriz de orden tres, pero perfectamente generalizable a matrices de cualquier orden se explicará el proceso de cálculo de los vectores propios de la matriz $\mathcal{A}$ asociada a una aplicación f.

Sea la matriz

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Los autovalores de la matriz $\mathcal{A}$ vienen determinados por las raíces de su polinomio característico

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = |\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}|.$$

Así, ahora se pasa a obtener dichas raíces resolviendo la ecuación característica $\mathcal{P}(\lambda) = 0$

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Se denomina **multiplicidad algebraica** de un autovalor λ_i, $m_a(\lambda_i)$, al número de veces que λ_i es raíz del polinomio característico. La suma de las multiplicidades algebraicas de todos los autovalores debe ser igual al orden de la matriz, siempre.

6.3. Cálculo de autovectores

Como se venía diciendo, cada uno de los valores propios calculados va a tener un conjunto de autovectores asociado. Estos conjuntos forman siempre sendos subespacios vectoriales, denominados **autoespacios** asociados a λ_i, def

$$S_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i \mathcal{I})$$

Luego, las ecuaciones cartesianoas del autoespacio S_{λ_i} asociado a λ_i siempre son

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la ecuación matricial anterior es posible obtener la dimensión y una base del subespacio asociado a λ_i. Todos los vectores pertenecientes a este subespacio serán los autovectores de λ_i.

Se le llama **multiplicidad geométrica** de λ_i, $m_g(\lambda_i)$, a la dimensión del autoespacio asociado a λ_i

$$m_g(\lambda_i) = \dim(S_{\lambda_i}) = n - \mathrm{rang}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})$$

Nota: *Recordar que n es la dimensión del $\mathcal{K}$-espacio vectorial E*

6.4. Propiedades derivadas de los autovalores y autovectores

- Una matriz y su traspuesta tienen los mismos autovalores.
- Si A y B son semejantes tienen el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos autovalores.
- Si λ es autovalor de A, $k\lambda$ es autovalor dekA.
- El determinante de A es el producto de sus autovalores.
- La traza de A es la suma de sus autovalores.
- Aquellos autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

- Si dadas dos matrices A y B, están definidas sus matrices AB y BA, entonces sus autovalores son los mismos.
- La multiplicidad geométrica de un autovalor es siempre mayor que cero, y menor o igual que la multiplicidad algebraica:

$$m_a(\lambda_i) \geq m_g(\lambda_i) > 0$$

6.5. Diagonalización de matrices

Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ una matriz asociada a un endomorfismo f. Se denomina **diagonalización de una matriz** al proceso por el cual es posible obtener una matriz de paso P (que puede no existir), que permita expresar la matriz $\mathcal{A}$ como semejante a una matriz diagonal $\mathcal{D}$, tal que

$$\mathcal{A} = P\mathcal{D}P^{-1} \quad \text{o bien} \quad \mathcal{D} = P^{-1}\mathcal{A}P$$

Por lo tanto, se dice que una matriz es **diagonalizable** si existe tal matriz P que cumpla la igualdad anterior. De no existir esta, la matriz no es diagonalizable.

> **Teorema:** *Una matriz es diagonalizable si y solo si la multiplicidad algebraica de cada uno de sus autovalores coincide con su multiplicidad geométrica.*

- Si una matriz de orden n tiene n autovalores distintos, entonces es diagonalizable.
- Las matrices simétricas son diagonalizables.

Matrices diagonalizables

Si una matriz $\mathcal{A}$ es diagonalizable, entonces es posible afirmar la existencia de una matriz diagonal formada por sus autovectores. Un ejemplo con una matriz de orden tres es el siguiente

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

de forma que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son semejantes tal que $\mathcal{A} = P\mathcal{D}P^{-1}$ o bien $\mathcal{D} = P^{-1}\mathcal{A}P$. La matriz de paso P es una matriz formada por autovectores,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}^{-1},$$

donde cada columna es un autovector asociado al autovalor que ocupa su misma columna en la matriz $\mathcal{D}$. Es decir, para el vector (e_{11}, e_{21}, e_{31}) ha de ser un autovector asociado al autovalor λ_1.

Los autovectores de la matriz P forman siempre una base de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathcal{K})$ (o $\mathbb{R}^3$). Por consiguiente, también se puede deducir el siguiente teorema:

> **Teorema:** *Una matriz es diagonalizable si existe una base formada por autovectores, respecto a la cual, la matriz asociada a f es diagonal.*

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación: **2 puntos** **Tiempo:** **30** minutos

Sea $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tal que el autoespacio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

$$S_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\big\}$$

y el autoespacio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ es el complemento ortogonal de S_1, $S_{-1} = S_1^{\perp}$. Se pide:

a) Obtener las expresiones paramétricas de S_1 y de S_{-1}.

b) Calcular una base de S_1 y otra de S_{-1}.

c) Estudiar si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar su expresión diagonal.

d) Determinar la matriz de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

a) Una expresión paramétrica de S_1 es $S_1 = \big\{(\alpha, \beta, -\alpha + 2\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\big\}$.

Observando que

$$\forall (x, y, z) \in S_1 \; 0 = x - 2y + z = < (1, -2, 1), (x, y, z) >,$$

se concluye que el vector $\vec{\mathbf{v}} = (1, -2, 1)$ es ortogonal a S_1, luego $\vec{\mathbf{v}} \in S_{-1} = S_1^{\perp}$. Como estamos en $\mathbb{R}^3$ y la dimensión de S_1 es 2, la dimensión de su complemento ortogonal es 1 y $B_{-1} = \big\{(1, -2, 1)\big\}$ es una base de S_{-1}, por tanto

$$S_{-1} = S_1^{\perp} = L\Big(\big\{(1, -2, 1)\big\}\Big) = \big\{(\gamma, -2\gamma, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\big\}.$$

b) $B_1 = \big\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\big\}$ es una base de S_1 y $B_{-1} = \big\{(1, -2, 1)\big\}$ es una base de S_{-1},

c) El endomorfismo f es diagonalizable porque existe una base de $\mathbb{R}^3$,

$$B = B_1 \cup B_{-1} = \big\{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, -2, 1)\big\},$$

formada por autovectores de f.

Respecto a la base B, la expresión matricial del endomorfismo f es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) La matriz cuyas columnas son las coordenadas de los elementos de la base B respecto a la base canónica es la matriz de cambio de la base B a la base canónica: $M_B^{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La inversa de la matriz $M_B^{B_c}$ es la matriz de cambio de la base canónica a la base B, $M_{B_c}^{B} = \big(M_B^{B_c}\big)^{-1}$, y puede calcularse mediante operaciones elementales entre filas

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

resultando $M_{B_c}^{B} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

A partir de las matrices de cambio de base y de la expresión matricial de f respecto a la base B, puede calcularse la matriz de f respecto a la base canónica, F, ayudándose del siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R}^3_{B_c} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3_B & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3_B & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}} & \mathbb{R}^3_{B_c} \\
\overrightarrow{\mathbf{v}}_{B_c} & \xrightarrow{M^B_{B_c}} & \overrightarrow{\mathbf{v}}_B & \xrightarrow{D} & f\big(\overrightarrow{\mathbf{v}}_B\big)_B & \xrightarrow{M^{B_c}_B} & f\big(\overrightarrow{\mathbf{v}}_B\big)_{B_c}
\end{array}$$

$$F = M^{B_c}_B D M^B_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Anexo

Notación

A lo largo de este documento se ha venido utilizando una notación estandar, acorde a las fuentes empleadas para la elaboración del texto. No obstante, en los exámenenes de la asignatura es frecuente el empleo de una notación diferente para algunos elementos.

- Para denotar una matriz respecto a dos bases, por ejemplo
  - La matriz de cambio de base de una base cualquiera B a la base canónica B_c: en el documento se expresa como $\mathcal{M}_{B_c}^{B}$ entendiéndose la dirección del cambio de arriba a abajo $\downarrow$. No obstante en los exámenes de la asignatura se expresa al contrario $\mathcal{M}_{B}^{B_c}$, entendiendo el sentido de abajo a arriba $\uparrow$.
- Para denotar el producto escalar se ha utilizado en el documento la notación estándar $<,>$, sin embargo en los exámenes aparece la notación con paréntesis $(,)$

Aunque esto no es más que una aclaración y el empleo de cada una de las notaciones se deja a criterio del autor, es importante tenerlo en cuenta a la hora de interpretar los distintos elementos.

Repositorio de Demostraciones de Examen

ETS Ingenieros de Telecomunicación

Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sean $f, g : E \longmapsto E$ endomorfismos.

a) Demostrar que $\dim\big(\operatorname{Img}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Img}(g)\big) \Longleftrightarrow \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big)$.

b) Si $f^2 = f \circ f$ y $\operatorname{Img}(f^2) = \operatorname{Img}(f)$, demostrar que $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$.

Solución:

a) Para cualquier homomorfismo entre espacios vectoriales de dimensión finita, $h : V \longmapsto W$, se cumple la relación

$$\dim(V) = \dim\big(\operatorname{Ker}(h)\big) + \dim\big(\operatorname{Img}(h)\big).$$

En particular, para los endomorfismos f y g, se tiene

$$n = \dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big),$$
$$n = \dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big) + \dim\big(\operatorname{Img}(g)\big).$$

Basándonos en las relaciones anteriores, se comprueba la doble implicación:

- Si $\dim\big(\operatorname{Img}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Img}(g)\big)$, entonces

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Img}(g)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big).$$

- Si $\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big)$, entonces

$$\dim\big(\operatorname{Img}(g)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big).$$

b) Como $f^2 : E \longmapsto E$ es un endomorfismo, aplicando el resultado demostrado anteriormente a f y f^2, se deduce que si $\operatorname{Img}(f^2) = \operatorname{Img}(f)$, entonces $\dim\big(\operatorname{Img}(f^2)\big) = \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big)$ y

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(f^2)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big).$$

El subespacio $\operatorname{Ker}(f)$ está contenido en $\operatorname{Ker}(f^2)$ ya que si $\vec{\mathbf{u}} \in \operatorname{Ker}(f)$, entonces

$$f(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{y} \quad f^2(\vec{\mathbf{u}}) = f\Big(f(\vec{\mathbf{u}})\Big) = f(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}},$$

por lo que $\vec{\mathbf{u}} \in \operatorname{Ker}(f^2)$.

Los subespacios $\operatorname{Ker}(f^2)$ y $\operatorname{Ker}(f)$ coinciden porque tienen la misma dimensión finita y uno de ellos está contenido en otro, luego

$$\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f).$$

Repitiendo un razonamiento análogo, también se puede comprobar que si $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$, entonces $\operatorname{Img}(f^2) = \operatorname{Img}(f)$.

Sean H_1 y H_2 dos subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, V. Demostrar la fórmula de las dimensiones (**Grassmann**):

$$\dim H_1 + \dim H_2 = \dim(H_1 + H_2) + \dim(H_1 \cap H_2).$$

Solución:

Sea $B_0 = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{e_m}}\right\}$ una base de $H_1 \cap H_2$.

Como $H_1 \cap H_2 \subset H_1$ y $H_1 \cap H_2 \subset H_2$, por el teorema de extensión de una base, el conjunto B_0 puede completarse para obtener una base B_1 de H_1 y una base B_2 de H_2 :

$$B_1 = B_0 \cup S_1 = B_0 \cup \left\{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{u_r}}\right\} \quad \text{y} \quad B_2 = B_0 \cup S_2 = B_0 \cup \left\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{v_s}}\right\}.$$

El conjunto de vectores $B = B_0 \cup S_1 \cup S_2$ es una base de $H_1 + H_2$ ya que

- B es un sistema generador de $H_1 + H_2$.

  Cualquier vector $\overrightarrow{\mathbf{w}} \in H_1 + H_2$ puede expresarse de la forma $\overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ donde $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in H_1$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in H_2$.

  El vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ es combinación lineal de vectores de $B_1 = B_0 \cup S_1$ y el vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ es combinación lineal de vectores de $B_2 = B_0 \cup S_2$, por tanto, el vector $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ es combinación lineal de los vectores de $B = B_0 \cup S_1 \cup S_2$.

- B es un sistema linealmente independiente.

  Sean los escalares $\left\{\lambda_k\right\}_{k=1}^{m}$, $\left\{\alpha_i\right\}_{i=1}^{r}$ y $\left\{\beta_j\right\}_{j=1}^{s}$ tales que

  $$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \overrightarrow{\mathbf{e_k}} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overrightarrow{\mathbf{u_i}} + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \overrightarrow{\mathbf{v_j}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}. \tag{1}$$

  El vector

  $$\overrightarrow{\mathbf{w}} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \overrightarrow{\mathbf{e_k}} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overrightarrow{\mathbf{u_i}} = -\sum_{j=1}^{s} \beta_j \overrightarrow{\mathbf{v_j}}$$

  pertenece a H_1 porque es combinación lineal de los vectores de $B_0 \cup S_1$ y también pertenece a H_2 porque es combinación lineal de los vectores de S_2, luego $\overrightarrow{\mathbf{w}} \in H_1 \cap H_2$ y se puede expresar como combinación lineal de los vectores de B_0 :

  $$\overrightarrow{\mathbf{w}} = \sum_{l=1}^{m} \mu_l \overrightarrow{\mathbf{e_l}} = -\sum_{j=1}^{s} \beta_j \overrightarrow{\mathbf{v_j}},$$

  resultando

  $$\sum_{l=1}^{m} \mu_l \overrightarrow{\mathbf{e_l}} + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \overrightarrow{\mathbf{v_j}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

  Como B_2 es un sistema linealmente independiente,

  $$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0.$$

Sustituyendo los valores de los escalares β en la ecuación (1), se obtiene

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \overrightarrow{\mathbf{e_k}} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overrightarrow{\mathbf{u_i}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Al ser B_1 un sistema linealmente independiente,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0,$$

luego la única combinación lineal nula de los vectores de B es la trivial, cuando todos los escalares son cero.

Según el número de elementos de las bases de cada subespacio:

$$\dim(H_1 \cap H_2) = m, \quad \dim(H_1) = m + r, \quad \dim(H_2) = m + s, \quad \dim(H_1 + H_2) = m + r + s,$$

deduciéndose inmediatamente que

$$\boxed{\dim H_1 + \dim H_2 = \dim(H_1 + H_2) + \dim(H_1 \cap H_2)}.$$

a) Sea E un espacio vectorial euclídeo y $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in E$.

Demostrar que $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}$ son ortogonales si y sólo si $\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\| = \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|$.

b) Sea $f : V \longmapsto W$ una aplicación lineal e inyectiva entre espacios vectoriales.

Demostrar que todo conjunto de vectores linealmente independientes de V se transforma mediante f en un conjunto de vectores linealmente independientes de W.

Solución:

a) El producto escalar de $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ por $\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}$ es

$$< \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}} >=< \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} > + < \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} > - < \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} > - < \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} >= \|\overrightarrow{\mathbf{u}}\|^2 - \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|^2.$$

Los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}$ son ortogonales, $< \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}} >= 0$ si y solamente si $\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\|^2 - \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|^2 = 0$, que equivale a $\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\| = \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|$ por tratarse de números reales no negativos.

b) Sea $f : V \longmapsto W$ una aplicación lineal e inyectiva entre espacios vectoriales, y sea $S = \left\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}\right\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de V.

El conjunto $\left\{f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}\right), f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}\right), \ldots, f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_n}}\right)\right\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de W porque si

$$\lambda_1 f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}\right) + \lambda_2 f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}\right) + \cdots + \lambda_n f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_n}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

entonces, al ser lineal f,

$$f\left(\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v_n}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

como f es inyectiva,

$$\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

y como S es libre, entonces

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Cualquier conjunto finito de vectores libres se transforma –mediante una aplicación lineal e inyectiva– en un conjunto de vectores libres.

Sean U y V dos subespacios vectoriales de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, $(E, <\ ,\ >)$, y sea $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo suprayectivo. Se pide:

a) Demostrar que
$$U \subset V^{\perp} \Longleftrightarrow V \subset U^{\perp}.$$

b) Demostrar que toda base de E se transforma, mediante f, en una base de E.

Solución:

a) Aplicando que en espacios vectoriales euclídeos de dimensión finita se cumple
$$(U^{\perp})^{\perp} = U \quad \text{y} \quad U \subset V \Longrightarrow V^{\perp} \subset U^{\perp},$$
se tiene la doble implicación que demuestra la equivalencia:
$$U \subset V^{\perp} \Longrightarrow (V^{\perp})^{\perp} \subset U^{\perp} \Longleftrightarrow V \subset U^{\perp}$$
$$V \subset U^{\perp} \Longrightarrow (U^{\perp})^{\perp} \subset V^{\perp} \Longleftrightarrow U \subset V^{\perp}$$

b) Sea n la dimensión de E y $B = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\right\}$ una base de E.

Si f es un endomorfismo suprayectivo, entonces $\operatorname{Img}(f) = E$ y $B' = \left\{f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}\right), f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}\right), \ldots, f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_n}}\right)\right\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Img}(f) = E$.

Como B' es un sistema de generadores de E y su número de elementos es la dimensión de E, entonces B' es una base de E porque en un espacio vectorial de dimensión n, un sistema de generadores formado por exactamente n vectores es linealmente independiente y –consecuentemente– base.

Si E no es de dimensión finita, la afirmación no siempre es cierta. Sirva como contraejemplo el endomorfismo suprayectivo $f : \mathbb{R}[x] \longmapsto \mathbb{R}[x]$ tal que
$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots .$$

Claramente $B = \{1, x, x^2, \ldots\}$ es una base de $\mathbb{R}[x]$ pero $B' = \{f(1), f(x), f(x^2) \ldots\} = \{0, 1, x, \ldots\}$ no es una base de $\mathbb{R}[x]$ porque contiene al polinomio nulo.

Sea U un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $f : U \longmapsto U$ una aplicación lineal y A la matriz asociada a f respecto a una base de U. Se pide:

a) Demostrar que si f es inyectiva, entonces todo conjunto de vectores linealmente independientes de U se transforma mediante f en un conjunto de vectores linealmente independientes de U.

b) Demostrar que si A tiene forma triangular con los elementos de la diagonal principal diferentes entre sí, entonces f es diagonalizable.

Solución:

a) Sea $L = \{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes del espacio vectorial U y sea $f : U \longmapsto U$ una aplicación lineal inyectiva.

El conjunto $f(L) = \left\{ f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}\right), f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}\right), \dots, f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_n}}\right) \right\}$ es libre porque si se considera una combinación lineal de estos vectores igualada a cero

$$\lambda_1 f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}\right) + \lambda_2 f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}\right) + \cdots + \lambda_n f\left(\overrightarrow{\mathbf{v_n}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

por ser f una aplicación lineal,

$$f\left(\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v_n}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

por ser f inyectiva, el vector cero es el único cuya imagen es el vector cero, luego

$$\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

y como L es libre,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

concluyéndose que $f(L)$ es un conjunto libre.

b) Si A tiene forma triangular superior (o inferior),

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

el polinomio característico es

$$P(\lambda) = (\lambda - d_1)(\lambda - d_2)\cdots(\lambda - d_n)$$

que tiene grado n y n raíces distintas que coinciden con los elementos distintos de la diagonal principal. Como la dimensión de la matriz es n y hay n autovalores distintos, la matriz A es diagonalizable.

Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, U un subespacio vectorial de E, y $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in E$. Demostrar que:

a) $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{\mathbf{u}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|$.

b) $E = U \oplus U^{\perp}$.

Solución:

a) El producto escalar de $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ por $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$ es

$$< \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}} > = < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} > + < \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} > - < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} > - < \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} > = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{v}}\|^2.$$

Evidentemente, $< \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}} > = 0$ si y solamente si $\|\vec{\mathbf{u}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = 0$ o si y solamente si $\|\vec{\mathbf{u}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|$ puesto que tanto $\|\vec{\mathbf{u}}\|$ como $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ son números mayores o iguales que cero.

Los vectores $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$ pueden ser ortogonales sin que $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ sean iguales. Por ejemplo, si $\vec{\mathbf{u}} = -\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, entonces $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$, y $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$ son ortogonales con $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{v}}$.

b) Si $U = E$, la descomposición es evidente porque $E^{\perp} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$ y $E = E \oplus \{\vec{\mathbf{0}}\} = E \oplus E^{\perp}$.

Sea $\dim(E) = n$ y sea $B_U = \{\vec{\mathbf{e_1}}, \vec{\mathbf{e_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{e_p}}\}$, con $p < n$, una base del subespacio $U \subset E$.

Como cualquier conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio de dimensión finita puede completarse con nuevos vectores hasta formar una base del espacio vectorial, existen $n - p$ vectores de E, $\overrightarrow{\mathbf{e_{p+i}}}$ con $i = 1, 2, \ldots, n - p$ tales que

$$B = \{\vec{\mathbf{e_1}}, \vec{\mathbf{e_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{e_p}}, \overrightarrow{\mathbf{e_{p+1}}}, \overrightarrow{\mathbf{e_{p+2}}}, \ldots, \vec{\mathbf{e_n}}\}$$

es una base de E.

Aplicando el proceso de ortogonalización de **Gram-Schmidt** a la base B se obtiene una base ortogonal de E

$$B' = \{\vec{\mathbf{e'_1}}, \vec{\mathbf{e'_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{e'_p}}, \overrightarrow{\mathbf{e'_{p+1}}}, \overrightarrow{\mathbf{e'_{p+2}}}, \ldots, \vec{\mathbf{e'_n}}\}$$

con la propiedad de que el subespacio generado por los primeros p vectores de B coincide con el subespacio generado por los primeros p vectores de B'. Es decir,

$$B'_U = \{\vec{\mathbf{e'_1}}, \vec{\mathbf{e'_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{e'_p}}\}$$

es una base de U.

Cualquier vector $\vec{\mathbf{v}} \in E$ puede expresarse de manera única como combinación lineal de los elementos de B'

$$\vec{\mathbf{v}} = \underbrace{\lambda_1 \vec{\mathbf{e'_1}} + \lambda_2 \vec{\mathbf{e'_2}} + \cdots + \lambda_p \vec{\mathbf{e'_p}}}_{\in U} + \underbrace{\lambda_{p+1} \overrightarrow{\mathbf{e'_{p+1}}} + \lambda_{p+2} \overrightarrow{\mathbf{e'_{p+2}}} + \cdots + \lambda_n \vec{\mathbf{e'_n}}}_{\in U^{\perp}}$$

resultando que la combinación formada por los p primeros sumandos es un vector de U y la combinación formada por los $n - p$ últimos sumandos es un vector que pertenece al complemento ortogonal de U porque los vectores $\overrightarrow{\mathbf{e'_{p+1}}}, \overrightarrow{\mathbf{e'_{p+2}}}, \ldots, \vec{\mathbf{e'_n}}$ son ortogonales a una base de U.

En definitiva, cualquier vector de E puede descomponerse como la suma de un vector de U con otro vector de $U^{\perp}$, luego $E \subset U + U^{\perp}$, pero como $U + U^{\perp} \subset E$ por tratarse de subespacios de E, también se cumple $E = U + U^{\perp}$.

Además, la suma es directa porque el único vector que pertenece a la intersección de U y $U^{\perp}$ es el vector nulo, puesto que si $\vec{\mathbf{u}} \in U \cap U^{\perp}$, entonces $\vec{\mathbf{u}} \in U$ y $\vec{\mathbf{u}} \in U^{\perp}$, luego $< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} > = 0$ y $\vec{\mathbf{u}} = \{0\}$, luego

$$E = U \oplus U^{\perp}.$$

Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, U un subespacio vectorial de E, $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in E$ y $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo. Demostrar que:

a) $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son ortogonales si y solamente si $\|\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathbf{u}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|^2$.

b) Si λ_1 y λ_2 son autovalores distintos de f, y $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son autovectores asociados a los autovalores λ_1 y λ_2, respectivamente, entonces $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son linealmente independientes.

Solución:

a) Aplicando las propiedades del producto escalar,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}\|^2 &= < \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} > = < \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} > + < \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} > + < \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} > + < \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} > \\ &= \|\overrightarrow{\mathbf{u}}\|^2 + 2 < \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} > + \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|^2.\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathbf{u}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|^2$ si y solamente si $< \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} > = 0$, es decir, si $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son ortogonales.

b) Sean λ_1 y λ_2 autovalores distintos de f, y $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ autovectores asociados a los autovalores λ_1 y λ_2, respectivamente.

Sean α y β escalares y $\alpha\overrightarrow{\mathbf{u}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ una combinación lineal de los autovectores $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ que genera el vector nulo. De esta relación, se desprende que

$$\alpha\overrightarrow{\mathbf{u}} = -\beta\overrightarrow{\mathbf{v}}.$$

Aplicando f a la combinación lineal considerada, la linealidad de f y que $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son autovectores, se obtiene

$$f\big(\alpha\overrightarrow{\mathbf{u}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{v}}\big) = \alpha f\big(\overrightarrow{\mathbf{u}}\big) + \beta f\big(\overrightarrow{\mathbf{v}}\big) = \alpha\lambda_1\overrightarrow{\mathbf{u}} + \beta\lambda_2\overrightarrow{\mathbf{v}},$$

y como $f\big(\overrightarrow{\mathbf{0}}\big) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, resulta

$$\lambda_1\alpha\overrightarrow{\mathbf{u}} + \lambda_2\beta\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Sustituyendo $\alpha\overrightarrow{\mathbf{u}} = -\beta\overrightarrow{\mathbf{v}}$ en esta última igualdad, se obtiene

$$-\lambda_1\beta\overrightarrow{\mathbf{v}} + \lambda_2\beta\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

o, equivalentemente,

$$\beta(\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Como $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ porque $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ es un autovector y $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ porque se trata de autovalores distintos, tiene que ser $\beta = 0$.

Si $\beta = 0$, entonces $\alpha\overrightarrow{\mathbf{u}} = -\beta\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, y como $\overrightarrow{\mathbf{u}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, al ser un autovector, se concluye que $\alpha = 0$.

En definitiva, la única combinación lineal de los autovectores $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ que origina el vector nulo es la que tiene nulos todos sus escalares, por tanto $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son linealmente independientes.

Una aplicación lineal, $f : V \longmapsto W$, entre espacios vectoriales euclídeos es ortogonal si y solamente si

$$\forall \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in V \quad < f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{y}}) >=< \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} > .$$

Sean $f : V \longmapsto W$ y $g : W \longmapsto U$ aplicaciones ortogonales. Demostrar que:

a) $\forall \overrightarrow{\mathbf{x}} \in V \ \|f(\overrightarrow{\mathbf{x}})\| = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|$.

b) El ángulo que forman dos vectores no nulos de V, $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in V$, coincide con el ángulo que forman sus imágenes mediante f, $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{y}}) \in W$.

c) f es inyectiva.

d) $g \circ f : V \longmapsto U$ es ortogonal.

e) Si $V = W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de f, entonces $|\lambda| = 1$.

Solución:

a) $\forall \overrightarrow{\mathbf{x}} \in V$

$$\|f(\overrightarrow{\mathbf{x}})\|^2 =< f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) >=< \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} >= \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2,$$

como $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \geq 0$ y $\|f(\overrightarrow{\mathbf{x}})\| \geq 0$, entonces $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| = \|f(\overrightarrow{\mathbf{x}})\|$.

b) El coseno del ángulo α que forman los vectores no nulos $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in V$ es

$$\cos\alpha = \frac{< \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} >}{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \ \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|}.$$

El coseno del ángulo β que forman los vectores no nulos[7] $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{y}}) \in V$ es

$$\cos\beta = \frac{< f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{y}}) >}{\|f(\overrightarrow{\mathbf{x}})\| \ \|f(\overrightarrow{\mathbf{y}})\|}.$$

Como $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| = \|f(\overrightarrow{\mathbf{x}})\|$, $\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| = \|f(\overrightarrow{\mathbf{y}})\|$ y $< \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} >=< f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{y}}) >$, entonces $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ y $\alpha = \beta$ porque $\alpha, \beta \in [0, \pi]$.

c) Una aplicación ortogonal, f, es inyectiva porque $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$.

La imagen mediante f de cualquier vector no nulo tiene que ser distinta del vector nulo ya que si hubiera algún vector $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in V$ tal que $\overrightarrow{\mathbf{x}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ y $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, se llegaría a una contradicción con la condición de ortogonalidad porque $< \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} >= \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 > 0$ por ser $\overrightarrow{\mathbf{x}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ mientras que $< f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) >=< \overrightarrow{\mathbf{0}}, \overrightarrow{\mathbf{0}} >= 0$ y no podría cumplirse

$$< f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) >=< \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} > .$$

d) Por ser g y f ortogonales, $\forall \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in V$

$$< g \circ f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), g \circ f(\overrightarrow{\mathbf{y}}) >=< g\Big(f(\overrightarrow{\mathbf{x}})\Big), g\Big(f(\overrightarrow{\mathbf{y}})\Big) >=< f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{y}}) >=< \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} >,$$

luego $g \circ f$ es lineal –por ser composición de aplicaciones lineales– y ortogonal.

e) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de f, entonces existe $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in V$, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tal que $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}}$.

Al ser f ortogonal, $< f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) >=< \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} >= \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2$.

Además, $< f(\overrightarrow{\mathbf{x}}), f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) >=< \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}}, \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}} >= \lambda^2 < \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} >= \lambda^2\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2$.

En consecuencia, $\lambda^2 = 1$ y $|\lambda| = 1$.

---

[7] La aplicación lineal f es inyectiva, por lo que la imagen de vectores no nulos también son vectores no nulos. Véase el apartado **c)**.

Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, U un subespacio vectorial de E, y $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in E$. Demostrar que:

a) Si $\|\vec{\mathbf{u}}\| \neq 0$ y $\|\vec{\mathbf{v}}\| \neq 0$, entonces $\|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\| \cos\alpha$, siendo α el ángulo formado por los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.

b) $< \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \vec{\mathbf{v}} > = < \vec{\mathbf{u}}, \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) >$.

Solución:

a) Aplicando las propiedades del producto escalar y la fórmula del coseno del ángulo α comprendido entre los vectores no nulos $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$, $\cos\alpha = \frac{<\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}>}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\|}$, se obtiene la fórmula buscada

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2 &= < \vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}} > = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - 2 < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} > \\ &= \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\| \frac{< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\| \cos\alpha.\end{aligned}$$

b) $\forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in E$

$$\begin{aligned}< \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \vec{\mathbf{v}} > &= < \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \left(\vec{\mathbf{v}} - \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}})\right) + \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) > \\ &= < \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \vec{\mathbf{v}} - \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) > + < \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) > \\ &= < \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) >\end{aligned}$$

porque $\operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}) \in U$ y $\vec{\mathbf{v}} - \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) \in U^{\perp}$.

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}< \vec{\mathbf{u}}, \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) > &= < \left(\vec{\mathbf{u}} - \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}})\right) + \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}), > \\ &= < \vec{\mathbf{u}} - \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}), > + < \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) > \\ &= < \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) >\end{aligned}$$

porque $\vec{\mathbf{u}} - \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}) \in U^{\perp}$ y $\operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) \in U$.

En definitiva, la aplicación lineal proyección ortogonal sobre un subespacio es autoadjunta:

$$\forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in E \quad < \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{u}}), \vec{\mathbf{v}} > = < \vec{\mathbf{u}}, \operatorname{proy}_U(\vec{\mathbf{v}}) > .$$

a) Sea $(E, < \ , \ >)$ un espacio vectorial euclídeo, sea U un subespacio vectorial de E y $B_U = \{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}\}$ una base ortogonal de U.

Demostrar que $\forall \overrightarrow{\mathbf{v}} \in E$

$$\operatorname{proy}_U \left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_1}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_1}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_2}} + \cdots + \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_n}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_n}}, \overrightarrow{\mathbf{u_n}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_n}}.$$

b) Sean $f : V \longmapsto W$ y $g : W \longmapsto U$ dos aplicaciones lineales entre espacios vectoriales.

Demostrar que $\operatorname{Img}(g \circ f) \subset \operatorname{Img}(g)$.

Solución:

a) El vector

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_1}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_1}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_2}} + \cdots + \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_n}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_n}}, \overrightarrow{\mathbf{u_n}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_n}}$$

pertenece a U porque es composición lineal de los vectores de una base de U.

Además, $\overrightarrow{\mathbf{v}} - \overrightarrow{\mathbf{p}}$ es ortogonal a todos los elementos de la base ortogonal de U, B_U, porque $\forall i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{\mathbf{u_i}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} - \overrightarrow{\mathbf{p}} > &= < \overrightarrow{\mathbf{u_i}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} - \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_1}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_1}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_2}} + \cdots + \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_n}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_n}}, \overrightarrow{\mathbf{u_n}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_n}} > \\ &= < \overrightarrow{\mathbf{u_i}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} > - \frac{< \overrightarrow{\mathbf{u_i}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_i}}, \overrightarrow{\mathbf{u_i}} >} < \overrightarrow{\mathbf{u_i}}, \overrightarrow{\mathbf{u_i}} > = 0, \end{aligned}$$

luego $\overrightarrow{\mathbf{v}} - \overrightarrow{\mathbf{p}}$ es ortogonal a todos los vectores de U.

En consecuencia,

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_1}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_1}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_2}} + \cdots + \frac{< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_n}} >}{< \overrightarrow{\mathbf{u_n}}, \overrightarrow{\mathbf{u_n}} >} \overrightarrow{\mathbf{u_n}}$$

es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sobre U, $\overrightarrow{\mathbf{p}} = \operatorname{proy}_U \left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)$.

b) Si $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \operatorname{Img}(g \circ f)$, entonces existe $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in V$ tal que $(g \circ f)\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{u}}$, o bien $g\Big(f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)\Big) = \overrightarrow{\mathbf{u}}$, es decir,

$$\exists \overrightarrow{\mathbf{w}} = f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) \in W \quad g\left(\overrightarrow{\mathbf{w}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{u}},$$

luego $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \operatorname{Img}(g)$.

Si todos los elementos de $\operatorname{Img}(g \circ f)$ pertenecen a $\operatorname{Img}(g)$, entonces $\operatorname{Img}(g \circ f) \subset \operatorname{Img}(g)$.

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sean $f, g : E \longmapsto E$ endomorfismos.

a) Demostrar que $\dim\big(\operatorname{Img}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Img}(g)\big) \Longleftrightarrow \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big)$.

b) Si $f^2 = f \circ f$ y $\operatorname{Img}(f^2) = \operatorname{Img}(f)$, demostrar que $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$.

Solución:

a) Para cualquier homomorfismo entre espacios vectoriales de dimensión finita, $h : V \longmapsto W$, se cumple la relación

$$\dim(V) = \dim\big(\operatorname{Ker}(h)\big) + \dim\big(\operatorname{Img}(h)\big).$$

En particular, para los endomorfismos f y g, se tiene

$$n = \dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big),$$
$$n = \dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big) + \dim\big(\operatorname{Img}(g)\big).$$

Basándonos en las relaciones anteriores, se comprueba la doble implicación:

- Si $\dim\big(\operatorname{Img}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Img}(g)\big)$, entonces

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Img}(g)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big).$$

- Si $\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big)$, entonces

$$\dim\big(\operatorname{Img}(g)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big).$$

b) Como $f^2 : E \longmapsto E$ es un endomorfismo, aplicando el resultado demostrado anteriormente a f y f^2, se deduce que si $\operatorname{Img}(f^2) = \operatorname{Img}(f)$, entonces $\dim\big(\operatorname{Img}(f^2)\big) = \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big)$ y

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(f^2)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big).$$

El subespacio $\operatorname{Ker}(f)$ está contenido en $\operatorname{Ker}(f^2)$ ya que si $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \operatorname{Ker}(f)$, entonces

$$f(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad \text{y} \quad f^2(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = f\Big(f(\overrightarrow{\mathbf{u}})\Big) = f(\overrightarrow{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

por lo que $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \operatorname{Ker}(f^2)$.
Los subespacios $\operatorname{Ker}(f^2)$ y $\operatorname{Ker}(f)$ coinciden porque tienen la misma dimensión finita y uno de ellos está contenido en otro, luego

$$\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f).$$

Repitiendo un razonamiento análogo, también se puede comprobar que si $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$, entonces $\operatorname{Img}(f^2) = \operatorname{Img}(f)$.

Demostrar que:

a) La matriz $A_{ab} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ no es diagonalizable para ningún par de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Existen matrices no nulas $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, tales que rango$(A) =$ rango $\big(A|\overrightarrow{\mathbf{b}}\big)$ y el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ no es compatible determinado.

Solución:

a) El polinomio característico de la matriz A_{ab} es

$$P(\lambda) = |A_{ab} - \lambda \operatorname{Id}_3| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda)^2$$

y los autovalores de A_{ab} dependen de los parámetros a y b :

- Si $a = b$, sólo hay un autovalor de multiplicidad algebraica 3.
  El subespacio propio asociado al único autovalor $\lambda = a$ es

$$S_a = \operatorname{Ker}(A_{ab} - a\operatorname{Id}_3) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\big\}$$
$$= \big\{(\alpha,\beta,0) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\big\} = L\Big(\big\{(1,0,0),(0,1,0)\big\}\Big).$$

  Al haber solamente un autoespacio de dimensión 2, sólo se pueden encontrar 2 autovectores linealmente independientes y es imposible encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A_{ab}, luego la matriz no es diagonalizable.

- Si $a \neq b$, los autovalores son $\lambda_1 = a$ con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = b$ con multiplicidad algebraica 2.
  El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = a$ es

$$S_a = \operatorname{Ker}(A_{ab} - a\operatorname{Id}_3) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 1 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 0\big\} = \big\{(\alpha,0,0) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = L\Big(\big\{(1,0,0)\big\}\Big).$$

  El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = b$ es

$$S_b = \operatorname{Ker}(A_{ab} - b\operatorname{Id}_3) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, z = 0\big\} = \big\{(0,\alpha,0) : \alpha \in \mathbb{R}\big\} = L\Big(\big\{(0,1,0)\big\}\Big).$$

  Sólo es posible encontrar dos autovectores linealmente independientes, luego no existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A_{ab}, luego A_{ab} no es diagonalizable.

La matriz A_{ab} no es diagonalizable para ningún par de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Existen matrices no nulas $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, tales que $\text{rango}(A) = \text{rango}\left(A|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$ y el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ no es compatible determinado.

Las matrices no nulas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ cumplen:

- $\text{rango}(A) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = \text{rango}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \text{rango}\left(A|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$.
- El sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ no es compatible determinado porque sus soluciones son $x = 0$, $y = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $f : V \longmapsto V$ un endomorfismo, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dos autovalores distintos de f y S_λ y S_μ los subespacios propios asociados a los autovalores λ y μ, respectivamente. Demostrar que

$$S_\lambda \cap S_\mu = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}.$$

b) Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y $A \in \mathcal{M}_{n\times(n+1)}(\mathbb{R})$ la matriz de f respecto a las bases canónicas. Demostrar que

- f no es inyectiva.
- Si el rango de A es máximo, entonces $\forall \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ es compatible indeterminado.

Solución:

a) Se demuestra comprobando la doble inclusión:

- $\{\overrightarrow{\mathbf{0}}\} \subset S_\lambda \cap S_\mu$ porque el subespacio formado únicamente por el vector cero está contenido en cualquier subespacio y la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.
- Si $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in S_\lambda \cap S_\mu$, entonces $f(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $f(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mu\overrightarrow{\mathbf{v}}$ cumpliéndose

$$\overrightarrow{\mathbf{0}} = f(\overrightarrow{\mathbf{v}}) - f(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \lambda\overrightarrow{\mathbf{v}} - \mu\overrightarrow{\mathbf{v}} = (\lambda - \mu)\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

  y como $\lambda \neq \mu$ resulta que $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ y se concluye que

$$S_\lambda \cap S_\mu \subset \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}.$$

Los dos conjunto son iguales porque se incluyen mutuamente, $S_\lambda \cap S_\mu = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y $A \in \mathcal{M}_{n\times(n+1)}(\mathbb{R})$ la matriz de f respecto a las bases canónicas. Demostrar que

- La dimensión de la imagen de f no puede ser superior a n porque n es la dimensión del espacio de llegada.

  En estas condiciones, f no puede ser inyectiva porque –razonando por **reducción al absurdo**– si lo fuera, entonces $\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = 0$ y la fórmula

$$\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big)$$

  conduciría a $n+1 = \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big)$ que contradice el que la dimensión de la imagen de f no es superior a n.
- Si el rango de A es máximo, entonces $\operatorname{rango}(A) = n$.

  $\forall \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ la matriz ampliada $\big(A|\overrightarrow{\mathbf{b}}\big) \in \mathcal{M}_{n\times(n+2)}(\mathbb{R})$ y su rango también es n porque no puede ser superior al número de filas, luego para cualquier término independiente, $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, el sistema $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ es compatible porque coinciden los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada. Además, es compatible indeterminado porque el número de incógnitas es $n+1$ pues $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{(n+1)\times 1}(\mathbb{R})$.

Repositorio de Tests

ETS Ingenieros de Telecomunicación

Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información

ÁLGEBRA **Test A** Prueba final de evaluación continua 17 de diciembre de 2012

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada **Calificación:** $\frac{3}{10}$ máx $\{0, \text{Aciertos} - 3\}$ **Tiempo:** **20** minutos

1. F Sean p y q proposiciones. $\big(q \wedge (p \Longrightarrow q)\big) \Longrightarrow \neg q$.

2. V Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación no sobreyectiva entre los conjuntos A y B, entonces $f^{-1}(B) = A$.

3. V Sea G la forma reducida escalonada de Gauss de la matriz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Si algún elemento de la última fila de G no es cero, entonces cualquier sistema de ecuaciones lineales que tenga a A como matriz de coeficientes es compatible determinado.

4. F Sean V_1 y V_2 subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Si B_1 y B_2 son, respectivamente, bases de V_1 y V_2, entonces $B_1 \cap B_2$ es una base de $V_1 \cap V_2$.

5. F Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Si $\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{v_r}}\}$ es una base de $\text{Ker}(f)$ y $\{\overrightarrow{\mathbf{w_1}}, \overrightarrow{\mathbf{w_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{w_s}}\}$ es una base de $\text{Img}(f)$, entonces $\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{v_r}}, \overrightarrow{\mathbf{w_1}}, \overrightarrow{\mathbf{w_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{w_s}}\}$ es una base de V.

6. F La aplicación $< \, , \, >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_2 y_2$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

7. F Si $n > 1$ y $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ es un endomorfismo biyectivo, entonces $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ autovalor de } f\} \neq \emptyset$.

8. V Sea $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo. f es inyectivo si y sólo si 0 no es un valor propio.

Soluciones preguntas de test de la prueba final de evaluación continua

Ejercicio 0.1 *Tablas de verdad*

Si p y q son proposiciones, estudiar si las siguientes proposiciones

a) $\big(q \wedge (p \Longrightarrow q)\big) \Longrightarrow \neg q$.

b) $\big(q \wedge (p \Longrightarrow q)\big) \Longrightarrow q$.

son tautologías.

Solución:

a) La proposición $\big(q \wedge (p \Longrightarrow q)\big) \Longrightarrow \neg q$ no es una tautología, como se refleja en su tabla de verdad:

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \wedge (p \Longrightarrow q)$	$\big(q \wedge (p \Longrightarrow q)\big) \Longrightarrow \neg q$
V	V	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

b) La proposición $\big(q \wedge (p \Longrightarrow q)\big) \Longrightarrow q$ es una tautología, como se refleja en su tabla de verdad:

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \wedge (p \Longrightarrow q)$	$\big(q \wedge (p \Longrightarrow q)\big) \Longrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

Ejercicio 0.2 *Propiedades de la imagen recíproca Demostrar que si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación entre los conjuntos A y B, entonces $f^{-1}(B) = A$.*

Solución:

La imagen recíproca del conjunto destino, B, de una aplicación coincide con el conjunto de partida A porque

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in A : f(x) \in B\big\},$$

y por ser f una aplicación, para todos los elementos del conjunto de partida, A, existe una única imagen que pertenece al conjunto de llegada B.

Da igual que la aplicación sea o no sea inyectiva o sobreyectiva. La igualdad se cumple para todas las funciones.

Ejercicio 0.3 *Forma reducida escalonada con última fila no nula*

Sea G la forma reducida escalonada de Gauss de la matriz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de tal manera que la última fila de G no es cero.

Discutir el carácter de un sistema de ecuaciones que tenga a la matriz A como

a) *Matriz de coeficientes.*

b) *Matriz ampliada.*

Solución:

a) Si A es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, entonces el número de ecuaciones es 4, el número de incógnitas es 4, el rango de la matriz de coeficientes es 4 –porque hay un pivote en la cuarta y última fila de la forma reducida escalonada–, y el rango de la matriz ampliada también es cuatro porque no puede ser más.

El sistema es compatible determinado.

b) Si A es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, el número de ecuaciones es 4, el número de incógnitas es 3, el rango de la matriz ampliada es 4 –porque hay un pivote en la cuarta y última fila de la forma reducida escalonada–, y el rango de matriz de coeficientes es 3.

El sistema es incompatible.

Ejercicio 0.4 *Intersección de las bases de dos subespacios Sean B_1 y B_2 bases, respectivamente, de los subespacios vectoriales V_1 y V_2, del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. ¿Es $B_1 \cap B_2$ una base de $V_1 \cap V_2$?*

Solución:

La respuesta es no.

Por ejemplo, si en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ consideramos los subespacios $V_1 = \mathbb{R}^2$ y $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$ con las bases $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 1)\}$, es inmediato observar que $B_1 \cap B_2 = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$ no es una base de $V_1 \cap V_2 = V_2$.

Ejercicio 0.5 *Unión de las bases del núcleo y la imagen de un homomorfismo Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v_r}}\}$ una base de* $\operatorname{Ker}(f)$ *y $\{\overrightarrow{\mathbf{w_1}}, \overrightarrow{\mathbf{w_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{w_s}}\}$ una base de* $\operatorname{Img}(f)$.

¿Es $\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v_r}}, \overrightarrow{\mathbf{w_1}}, \overrightarrow{\mathbf{w_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{w_s}}\}$ una base de V.

Solución:

La respuesta es no.

En general, los elementos de $\operatorname{Img}(f)$ no tiene que pertenecer a V.

Si se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y) = (x, x, y, y)$, no tiene sentido afirmar que $f(1, 0) = (1, 1, 0, 0)$ forma parte de una base de $\mathbb{R}^2$ porque no pertenece a $\mathbb{R}^2$.

Aun tratándose de un endomorfismo, $f : V \longmapsto V$, la respuesta sería no.

Por ejemplo, en la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (0, x)$, $\{(0, 1)\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(f)$ y de $\operatorname{Img}(f)$ pero $\{(0, 1)\} \cup \{(0, 1)\} = \{(0, 1)\}$ no es una base de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 0.6 *Ejemplo de función que no es producto escalar*

Demostrar que la aplicación $< \, , \, >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_2 y_2$ no es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

El vector $(1, 0)$ es distinto del vector $(0, 0)$ y $< (1, 0), (1, 0) >= 0$, luego no se cumple

$$< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} >= 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}},$$

luego la aplicación $< \, , \, >$ no es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 0.7 *Autovalores de un endomorfismo biyectivo*

Sea $n > 1$ y sea $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ un endomorfismo biyectivo.

¿Es $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda$ autovalor de $f\} \neq \emptyset$?

Solución:

Hay endomorfismos reales y biyectivos que no tienen autovalores.

El endomorfismo $f = \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (y, -x)$ tiene como matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y no tiene autovalores porque su polinomio característico no tiene raíces reales

$$|A - \lambda \operatorname{Id}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

El rango de la matriz A es 2, por lo que f es sobreyectiva, y la dimensión del núcleo de f es 0, por lo que f es inyectiva, y biyectiva.

En este caso, $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ autovalor de } f\} = \emptyset$.

Ejercicio 0.8 *Inyectividad y autovalores*
Sea $f : E \longmapsto E$ *un endomorfismo de un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial.*
Demostrar que f *es inyectivo si y sólo si* 0 *no es un valor propio.*

Solución:
Teniendo en cuenta que

- Un endomorfismo es inyectivo si y solamente si su núcleo es el vector nulo,
- 0 es un valor propio de un endomorfismo si y solamente si su núcleo es distinto del vector nulo,

un endomorfismo es inyectivo si y solamente si 0 no es un valor propio.

ÁLGEBRA **Test D** 21 de enero de 2013

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada **Calificación:** $\frac{2}{5}$ máx $\{0, \text{Aciertos} - 4\}$ **Tiempo:** $\boxed{\textbf{30}\text{ minutos}}$

1. $\boxed{\text{F}}$ Sean p y q proposiciones. $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$

2. $\boxed{\text{F}}$ Si A es un conjunto y $f, g : A \longrightarrow A$ son funciones biyectivas, entonces $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. $\boxed{\text{F}}$ Si $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$, entonces $(a \cdot c = b \cdot c) \Longrightarrow (a = b)$.

4. $\boxed{\text{V}}$ Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo y $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

$$\forall \vec{\mathbf{v}} \in \operatorname{Col}(A) \ \text{ el sistema de ecuaciones } A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{v}} \text{ es compatible.}$$

5. $\boxed{\text{V}}$ Sea $H \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Si todos los elementos de la diagonal principal de $H^{\mathrm{T}}H$ son nulos, entonces H es la matriz nula.

6. $\boxed{\text{V}}$ La unión de todos los subespacios vectoriales de un espacio vectorial es un subespacio vectorial.

7. $\boxed{\text{V}}$ Si V es suma directa de los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_n \subset V$, $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, entonces cualquier vector $\vec{\mathbf{v}} \in V$ puede descomponerse de manera única como $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{v_i}}$ con $\vec{\mathbf{v_i}} \in V_i$.

8. $\boxed{\text{V}}$ La aplicación $T : \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}^5$ definida por $T(f) = \big(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\big)$, es lineal.

9. $\boxed{\text{V}}$ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada al endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto a las bases canónicas, entonces f es biyectiva.

10. $\boxed{\text{F}}$ Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo. Si $f \circ f = 0$, entonces $\operatorname{Ker}(f \circ f) = \{\vec{\mathbf{0}}\}$.

11. $\boxed{\text{F}}$ Sea $\big(V, <\ ,\ >\big)$ un espacio vectorial euclídeo.

$$\forall \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in V \ \ \|\vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}\| = \langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle.$$

12. $\boxed{\text{F}}$ Sea $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ con el producto escalar habitual. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \|\lambda \vec{\mathbf{v}}\| = \lambda \|\vec{\mathbf{v}}\|$.

13. $\boxed{\text{F}}$ Sea E es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son autovalores de f, entonces $\lambda - \mu$ también es un autovalor de f.

14. $\boxed{\text{V}}$ Si $(E, <\ ,\ >)$ es un espacio vectorial euclídeo, $f : E \longmapsto E$ es un endomorfismo, $\lambda \neq 0$ es un autovalor de f y $\vec{\mathbf{v}}$ es un autovector asociado a λ, entonces

$$\text{signo} < \vec{\mathbf{v}}, f(\vec{\mathbf{v}}) >= \text{signo}\, \lambda.$$

Soluciones preguntas de test del examen final de enero 2013

Ejercicio 0.1 *Tablas de verdad*
Sean p y q proposiciones.
¿Es $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$ una tautología?

Solución:
$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$ no es una tautología.
Si p toma el valor de verdad V y q toma el valor de verdad F, entonces $\neg(p \wedge q)$ toma el valor V mientras que $(\neg p) \wedge (\neg q)$ toma el valor F.

Ejercicio 0.2 *Inversa de la composición de funciones biyectivas*
Sea A un conjunto y $f, g : A \longrightarrow A$ funciones biyectivas.
Demostrar que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Solución:
Si f y g son funciones biyectivas, entonces

$$(f \circ g) \circ \big(g^{-1} \circ f^{-1}\big) = f \circ \big(g \circ g^{-1}\big) \circ f^{-1} = f \circ \big(\operatorname{Id}\big) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \operatorname{Id},$$
$$\big(g^{-1} \circ f^{-1}\big) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ \big(f^{-1} \circ f\big) \circ g = g^{-1} \circ \big(\operatorname{Id}\big) \circ g = g^{-1} \circ g = \operatorname{Id}.$$

Es muy importante observar que la función inversa de la composición de funciones biyectivas es la composición en orden contrario de las funciones inversas. Así, si $f, g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ son $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = 2x$, la función inversa de $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{2x}$ es

$$(f \circ g)^{-1}(y) = (g^{-1} \circ f^{-1})(y) = \frac{y^3}{2}$$

y no

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^3.$$

Ejercicio 0.3 *Divisores de cero en $\mathbb{Z}_2$*
Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$.
¿Es verdadera $(a \cdot c = b \cdot c) \Longrightarrow (a = b)$?

Solución:
La implicación no es verdadera porque para los elementos de $\mathbb{Z}_2$ $a = 0$, $b = 1$ y $c = 0$ se tiene $a \cdot c = b \cdot c$ mientras que $a \neq b$.
Por ser $\mathbb{Z}_2$ un cuerpo, no tiene divisores de cero, luego si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, la implicación $(a \cdot c = b \cdot c) \Longrightarrow (a = b)$ es cierta.

Ejercicio 0.4 *Espacio columna de la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales*
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo y $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.
Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

$$\forall \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \operatorname{Col}(A) \quad \textit{el sistema de ecuaciones } A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{v}} \textit{ es compatible determinado.}$$

Solución:
El subespacio $\operatorname{Col}(A) \in \mathbb{K}^n$ está generado por las columnas de A consideradas como vectores de $\mathbb{K}^n$. Si $A = \begin{pmatrix}\overrightarrow{\mathbf{c_1}} & \overrightarrow{\mathbf{c_2}} & \cdots & \overrightarrow{\mathbf{c_m}}\end{pmatrix}$, entonces $\operatorname{Col}(A) = L\Big(\big\{\overrightarrow{\mathbf{c_1}}, \overrightarrow{\mathbf{c_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{c_m}}\big\}\Big)$. Cualquier vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \operatorname{Col}(A)$, puede expresarse como combinación lineal de las columnas de A,

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{c_1}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{c_2}} + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{\mathbf{c_m}} = \begin{pmatrix}\overrightarrow{\mathbf{c_1}} & \overrightarrow{\mathbf{c_2}} & \cdots & \overrightarrow{\mathbf{c_m}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix},$$

luego el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{v}}$ es compatible porque al menos tiene una solución.

Sin embargo, el sistema anterior puede tener más de una solución. Por ejemplo, el espacio columna de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

es $\mathrm{Col}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ mientras que el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ es compatible indeterminado porque el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada, pero es menor que el número de incógnitas.

Ejercicio 0.5 *Producto de una matriz por su traspuesta*

Sea $H \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Demostrar que si todos los elementos de la diagonal principal de $H^T H$ son nulos, entonces H es la matriz nula.

Solución:

Si $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{T}} H &= \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & \cdots & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{11}^2 + h_{21}^2 + \cdots + h_{n1}^2 & - & \cdots & - \\ - & h_{12}^2 + h_{22}^2 + \cdots + h_{n2}^2 & \cdots & - \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ - & - & \cdots & h_{1n}^2 + h_{2n}^2 + \cdots + h_{nn}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si todos los elementos de la diagonal principal son nulos, entonces

$$\forall j = 1, 2, \ldots, n \ \sum_{i=1}^{n} h_{ij}^2 = 0.$$

Como la única posibilidad de que la suma de números reales no negativos sea cero es que todos los números sean cero,

$$\forall i, j = 1, 2, \ldots, n \ h_{ij} = 0,$$

concluyéndose que la matriz H es la matriz nula.

Ejercicio 0.6 *Unión de todos los subespacios vectoriales de un espacio vectorial*

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

"La unión de todos los subespacios vectoriales de un espacio vectorial es un subespacio vectorial".

Solución:

La afirmación es cierta.

La unión de todos los subespacios vectoriales de un espacio vectorial E es el espacio vectorial E porque se cumple la doble inclusión:

- E es un subespacio vectorial de E, luego E debe estar contenido en la unión de todos los subespacios de E.
- La unión de subespacios de E está contenida en E.

Como E es un subespacio vectorial de E, la unión de todos los subespacios de E es un subespacio vectorial de E.

Ejercicio 0.7 *Unicidad de la representación originada por una suma directa*

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Demostrar que si V es suma directa de los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_n \subset V$, $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, entonces cualquier vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in V$ puede descomponerse de manera única como $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{v_i}}$ con $\overrightarrow{\mathbf{v_i}} \in V_i$.

Solución:

Sea $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in V$ un vector que puede descomponerse de dos maneras como suma de elementos de los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_n$,

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{v_i}} \text{ con } \overrightarrow{\mathbf{v_i}} \in V_i \quad \text{ y } \quad \overrightarrow{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{w_i}} \text{ con } \overrightarrow{\mathbf{w_i}} \in V_i.$$

Restando ambas expresiones,

$$\overrightarrow{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{\mathbf{v_i}} - \overrightarrow{\mathbf{w_i}}\right) \text{ con } \overrightarrow{\mathbf{v_i}} - \overrightarrow{\mathbf{w_i}} \in V_i.$$

Despejando el vector perteneciente a V_1 de la expresión anterior, se obtiene

$$\overrightarrow{\mathbf{w_1}} - \overrightarrow{\mathbf{v_1}} = \sum_{i=2}^{n} \left(\overrightarrow{\mathbf{v_i}} - \overrightarrow{\mathbf{w_i}}\right) \text{ con } \overrightarrow{\mathbf{v_i}} - \overrightarrow{\mathbf{w_i}} \in V_i.$$

El primer término de la igualdad, $\overrightarrow{\mathbf{w_1}} - \overrightarrow{\mathbf{v_1}}$, es un vector de V_1 y el segundo término, $\sum_{i=2}^{n} \left(\overrightarrow{\mathbf{v_i}} - \overrightarrow{\mathbf{w_i}}\right)$, es un elemento de $\bigcup_{i=2}^{n} V_i$, luego

$$\overrightarrow{\mathbf{w_1}} - \overrightarrow{\mathbf{v_1}} \in V_1 \cap \Big(\bigcup_{i=2}^{n} V_i\Big).$$

Por tratarse de una suma directa, $V_1 \cap \Big(\bigcup_{i=2}^{n} V_i\Big) = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, luego $\overrightarrow{\mathbf{w_1}} - \overrightarrow{\mathbf{v_1}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{w_1}} = \overrightarrow{\mathbf{v_1}}$.

Repitiendo el razonamiento anterior para $i = 2, 3, \ldots, n$, se concluye que

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \ \overrightarrow{\mathbf{v_i}} = \overrightarrow{\mathbf{w_i}},$$

luego, si un subespacio V es suma directa de subespacios, cualquier vector de V sólo puede representarse de una manera como suma de un elemento de cada subespacio.

Ejercicio 0.8 *Aplicación lineal del espacio vectorial de las aplicaciones reales de variable real, en $\mathbb{R}^5$*

Demostrar que la aplicación $T : \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}^5$ definida por $T(f) = \big(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\big)$, es lineal.

Solución:

El conjunto de las funciones reales de variable real, $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma de funciones. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, y el producto por un escalar, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Sean $f, g \in \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\alpha f + \beta g) &= \big((\alpha f + \beta g)(1), (\alpha f + \beta g)(2), (\alpha f + \beta g)(3), (\alpha f + \beta g)(4), (\alpha f + \beta g)(5)\big) \\ &= \big(\alpha f(1) + \beta g(1), \alpha f(2) + \beta g(2), \alpha f(3) + \beta g(3), \alpha f(4) + \beta g(4), \alpha f(5) + \beta g(5)\big) \\ &= \alpha\big(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\big) + \beta\big(g(1), g(2), g(3), g(4), g(5)\big) = \alpha T(f) + \beta T(g). \end{aligned}$$

T es una aplicación lineal entre espacios vectoriales reales.

Ejercicio 0.9 *Matriz de una aplicación lineal biyectiva*

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *la matriz asociada al endomorfismo* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *respecto a las bases canónicas. ¿Es* f *biyectiva?*

Solución:

Aplicando operaciones elementales entre filas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

se deduce que el rango de A es 3, luego la dimensión de $\mathrm{Img}(f)$ es 3, y la aplicación es sobreyectiva.

Si el rango de A es 3, el sistema homogéneo que tiene a A como matriz de coeficientes es compatible determinado, luego el único vector cuya imagen es el vector cero es el propio vector cero, $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, por tanto, la aplicación es inyectiva.

Al ser inyectiva y sobreyectiva, la función lineal f que tiene a A como matriz asociada respecto a las bases canónicas, es biyectiva.

Ejercicio 0.10 *Núcleo de la aplicación nula*

Sea E *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y* $f : E \longmapsto E$ *un endomorfismo tal que* $f \circ f = 0$*. Calcular* $\mathrm{Ker}(f \circ f)$.

Solución:

$\forall \overrightarrow{\mathbf{v}} \in E$, $(f \circ f)(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, luego todos los vectores de E pertenecen al núcleo de $f \circ f$, luego

$$\mathrm{Ker}(f \circ f) = E.$$

Ejercicio 0.11 *Desigualdad de Cauchy-Schwartz*

Sea $(V, <\ ,\ >)$ *un espacio vectorial euclídeo.*

¿Es cierto que

$$\forall \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in V \ \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \ \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \leq \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle ?$$

Solución:

La desigualdad es falsa.

En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual, si $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 0)$ y $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (-1, 0)$, entonces $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \ \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| = 1$ y $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = -1$. En este caso, $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| > \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle$.

Ejercicio 0.12 *Propiedades del producto escalar*

Sea $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ *con el producto escalar habitual.*

¿Es cierto que $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \|\lambda \overrightarrow{\mathbf{v}}\| = \lambda \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|$?

Solución:

La igualdad no es cierta.

Si se considera el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual, el vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 1)$ y el escalar $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$, se tiene $\|\lambda \overrightarrow{\mathbf{v}}\| = \|(-1, 1)\| = \sqrt{2}$ y $\lambda \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\| = (-1)\|(1, 1)\| = -\sqrt{2}$.

Claramente, $\|\lambda \overrightarrow{\mathbf{v}}\| \neq \lambda \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|$.

Ejercicio 0.13 *Diferencia de autovalores*

Sea E *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y* $f : E \longmapsto E$ *un endomorfismo.*

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

"Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son autovalores de f, entonces $\lambda - \mu$ también es un autovalor de f".

Solución:

La afirmación es falsa.

Los únicos autovalores del endomorfismo de matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ son $\lambda = 1$ y $\mu = 3$. El número real $\lambda - \mu = -2$ no es un autovalor de A.

Ejercicio 0.14 *Autovalores y producto escalar*

Sea $(E, < \ , \ >)$ un espacio vectorial euclídeo, $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo, $\lambda \neq 0$ un autovalor de f y $\vec{\mathbf{v}}$ un autovector asociado a λ.

Demostrar que

$$\text{signo} < \vec{\mathbf{v}}, f(\vec{\mathbf{v}}) >= \text{signo}\,\lambda.$$

Solución:

$$\text{signo} < \vec{\mathbf{v}}, f(\vec{\mathbf{v}}) >= \text{signo} < \vec{\mathbf{v}}, \lambda\vec{\mathbf{v}} >= \text{signo}\Big(\lambda < \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} > \Big) = \text{signo}\Big(\lambda\|\vec{\mathbf{v}}\|^2\Big) = \text{signo}\,\lambda.$$

ÁLGEBRA **Test A** Prueba final de evaluación continua 16 de diciembre de 2013

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada **Calificación:** $\frac{3}{10}$ máx $\{0, \text{Aciertos} - 3\}$ **Tiempo:** **20** minutos

1. V Sean p y q proposiciones,
$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p).$$

2. V Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación entre los conjuntos A y B, entonces
$$\forall C \subset A \qquad C \subset f^{-1}\big(f(C)\big).$$

3. F Para cualquier $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ y para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que rango$(A) = n$, existe $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

4. F Sea G la forma reducida escalonada de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Si $\overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ es solución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, entonces $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ también es solución del sistema de ecuaciones lineales $G\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

5. F Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, V subespacios vectoriales distintos de E tales que $U + V = E$. Si $B_U = \{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_r}}\}$ es una base de U y $B_V = \{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v_s}}\}$ es una base de V, entonces $B = \{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_r}}, \overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v_s}}\}$ es una base de E.

6. F Sea $(E, <\ ,\ >)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo. Si para todo vector $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in E$ se verifica $< f\big(\overrightarrow{\mathbf{u}}\big), \overrightarrow{\mathbf{u}} >= 0$, entonces f es el endomorfismo nulo.

7. F Sea $f : U \longmapsto V$ una aplicación lineal entre $\mathbb{R}$ espacios vectoriales, y W un subconjunto de U. Si $f(W)$ es un subespacio vectorial de V, entonces W es un subespacio vectorial de U.

8. V La dimensión del complemento ortogonal de la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto a las bases canónicas es $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es 0.

Soluciones preguntas de test de la prueba final de evaluación continua

Ejercicio 0.1 *Tablas de verdad*

Si p y q son proposiciones, entonces $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$.

Solución:

La proposición $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$ es una tautología, como se refleja en su tabla de verdad:

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Longrightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Ejercicio 0.2 *Propiedades de la imagen recíproca*

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación entre los conjuntos A y B. Demostrar que $\forall C \subset A \quad C \subset f^{-1}\big(f(C)\big)$. ¿Es cierta la inclusión contraria?

Solución:

Si $x \in C$, entonces $f(x) \in f(C)$ y $x \in f^{-1}\big(f(C)\big)$ porque

$$f^{-1}\big(f(C)\big) = \big\{x \in A : f(x) \in f(C)\big\}.$$

Si cualquier elemento de C pertenece a $f^{-1}\big(f(C)\big)$, entonces $C \subset f^{-1}\big(f(C)\big)$.

La inclusión $f^{-1}\big(f(C)\big) \subset C$ no siempre es cierta. Por ejemplo, si $A = \{a, b\}$, $B = \{b\}$, $C = \{a\}$ y $f : A \longmapsto B$ es $f(a) = f(b) = b$, entonces $f(C) = \{b\}$ y

$$f^{-1}\big(f(C)\big) = f^{-1}\big(\{b\}\big) = \{a, b\} = A \supsetneqq C.$$

Ejercicio 0.3 *Compatibilidad y rango igual al número de incógnitas*

Sea $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{rango}(A) = m$. *¿Existe $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ tal que $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$?*

Solución:

La igualdad entre el rango de la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y el número de incógnitas no es suficiente para asegurar la compatibilidad del sistema.

Por ejemplo, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es 2, y el sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es incompatible.

Ejercicio 0.4 *Soluciones de sistemas con una matriz de coeficientes y con su forma reducida escalonada*

Sea G la forma reducida escalonada de la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ y sea $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$.

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

"Si $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ y $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, entonces $G\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$".

Solución:

La implicación es falsa.

Las forma reducida escalonada de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se cumple

$$A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathbf{b}},$$

mientras que

$$G\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

Ejercicio 0.5 *Base de una suma de subespacios igual al espacio vectorial*

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, U, V subespacios vectoriales de E, $B_U = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{u_r}}\right\}$ una base de U y $B_V = \left\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{v_s}}\right\}$ una base de V.

Demostrar o buscar un contraejemplo para la siguiente proposición:

$$U + V = E \Longrightarrow B = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{u_r}}, \overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{v_s}}\right\} \text{ es una base de } E.$$

Solución:

La implicación es falsa.

En R^3 la suma de los subespacios $U = L\Big(\big\{(1,0,0),(0,1,0)\big\}\Big)$ y $U = L\Big(\big\{(1,1,1),(0,1,1)\big\}\Big)$ es igual a $\mathbb{R}^3$,

$$U + V = \mathbb{R}^3,$$

pero $B = \big\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1),(0,1,1)\big\}$ no es una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 0.6 *Caracterización del endomorfismo nulo según el producto escalar*

Sea $(E, <\ ,\ >)$ un espacio vectorial euclídeo y se $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo tal que

$$\forall \overrightarrow{\mathbf{u}} \in E \quad < f(\overrightarrow{\mathbf{u}}), \overrightarrow{\mathbf{u}} >= 0.$$

¿Es f el endomorfismo nulo?

Solución:

El endomorfismo nulo cumple la condición del enunciado, pero hay otros endomorfismos no nulos que también cumplen esa condición.

En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual, el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (-y,x)$ cumple

$$< f(x,y),(x,y) >=< (-y,x),(x,y) >= -xy + xy = 0$$

y no es el endomorfismo nulo.

Ejercicio 0.7 *Imágenes de subconjuntos por aplicaciones lineales*

Sea $f : U \longmapsto V$ una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sea S un subconjunto de U.

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

"Si $f(S)$ es un subespacio vectorial, entonces S es un subespacio vectorial".

Solución:

La afirmación es falsa.

La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x-y, x-y)$ es una aplicación lineal y $S = \{(1,1)\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que no es un subespacio vectorial, mientras que $f(S) = \big\{f(1,1)\big\} = \big\{(0,0)\big\}$ sí es un subespacio vectorial.

Ejercicio 0.8 *Complemento ortogonal de la imagen de una aplicación lineal*

Calcular el complemento ortogonal de la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *cuya matriz respecto a la base canónica es*

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

La imagen de la aplicación lineal f está generada por los vectores que tienen como coordenadas respecto a la base canónica las columnas de la matriz F,

$$\mathrm{Img}(f) = L\Big(\big\{(1,1),(-1,0)\big\}\Big) = \mathbb{R}^2.$$

El complemento ortogonal de $\mathbb{R}^2$ es el subespacio nulo,

$$\big(\mathrm{Img}(f)\big)^{\perp} = \big(\mathbb{R}^2\big)^{\perp} = \big\{(0,0)\big\}.$$

La dimensión del complemento ortogonal de la imagen de la aplicación lineal f es 0.

ÁLGEBRA **Test A** 13 de enero de 2014

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada **Calificación:** $\frac{2}{5}$ máx $\{0, \text{Aciertos} - 4\}$ **Tiempo:** **30** minutos

---

1. $\boxed{\text{V}}$ Sean p y q proposiciones. $\big((p \,\text{nand}\, q)\,\text{nand}(p \,\text{nand}\, q)\big) \iff \big((p \,\text{nor}\, p)\,\text{nor}(q \,\text{nor}\, q)\big)$.

2. $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación en el conjunto X. $\forall A \subset X \quad f^{-1}\big(f(A)\big) = f\big(f^{-1}(A)\big)$.

3. $\boxed{\text{F}}$ Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Si $\dim\big(\text{Ker}(A)\big) > 0$, entonces para todo $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tiene infinitas soluciones.

4. $\boxed{\text{F}}$ Si $G \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la forma reducida escalonada de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces los autovalores de A y de G son iguales.

5. $\boxed{\text{V}}$ Sea $m < n$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.
$$\text{rango}(A) = m \Longrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \; P \text{ invertible y } \; PA = \begin{pmatrix} \text{Id}_m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. $\boxed{\text{V}}$ Sea $S = \{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}\}$ un conjunto de $n \geq 2$ vectores no nulos de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V.
$$S \;\text{ libre } \iff \forall i = 2, 3, \dots, n \quad L\big(\overrightarrow{\mathbf{v_i}}\big) \cap \Big(L\big(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}\big) + L\big(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}\big) + \cdots + L\big(\overrightarrow{\mathbf{v_{i-1}}}\big)\Big) = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}.$$

7. $\boxed{\text{V}}$ Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. $\text{rango}(A) = m \iff \forall \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}) \; \exists \overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \; A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

8. $\boxed{\text{F}}$ Si $B_E = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \overrightarrow{\mathbf{e_3}}\}$ es una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E, y $B_{E'} = \{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \overrightarrow{\mathbf{u_3}}\}$ es un conjunto libre del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E', entonces la aplicación lineal $f : E \longmapsto E'$ tal que
$$f\big(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}\big) = \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \overrightarrow{\mathbf{u_3}}, \; f\big(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}\big) = \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \; f\big(\overrightarrow{\mathbf{e_3}}\big) = \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + 2\overrightarrow{\mathbf{u_2}} + \overrightarrow{\mathbf{u_3}}$$
es inyectiva.

9. $\boxed{\text{V}}$ Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $G = \{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}\}$ un sistema generador de E. Si no existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}\} - \{\overrightarrow{\mathbf{u_i}}\}$ sea generador de E, entonces G es una base de E.

10. $\boxed{\text{V}}$ Sea $f : E \longmapsto E'$ una aplicación lineal entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sean U y V subespacios vectoriales de E tales que $U + V$ es suma directa. Si f es inyectiva, entonces $f(U) + f(V)$ es suma directa.

11. $\boxed{\text{F}}$ Si a, b son números reales distintos, entonces la matriz $A_{ab} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

12. $\boxed{\text{F}}$ Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si AB es una matriz simétrica, entonces A y B son simétricas.

13. $\boxed{\text{F}}$ En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual, la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 1, 1)$ sobre el subespacio vectorial $H = L\Big(\big\{(1, 0, 2)\big\}\Big)$ es $\text{proy}_H(1, 1, 1) = \Big(\frac{6}{5}, 0, \frac{3}{5}\Big)$.

14. $\boxed{\text{V}}$ Sea $\big(V, <\,,\,>\big)$ un espacio euclídeo. $\forall \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in V \;\; << \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} > \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} >=< \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} >^2$.

Soluciones preguntas de test del examen final del 13 de enero de 2014

Ejercicio 0.1 *Tablas de verdad*
Si p y q son proposiciones, entonces

a) $\big((p \operatorname{nand} p) \operatorname{nand} (q \operatorname{nand} q)\big) \iff \big((p \operatorname{nor} q) \operatorname{nor} (p \operatorname{nor} q)\big)$.

b) $\big((p \operatorname{nand} q) \operatorname{nand} (p \operatorname{nand} q)\big) \iff \big((p \operatorname{nor} p) \operatorname{nor} (q \operatorname{nor} q)\big)$.

Solución:

a) La proposición $\big((p \operatorname{nand} p) \operatorname{nand} (q \operatorname{nand} q)\big) \iff \big((p \operatorname{nor} q) \operatorname{nor} (p \operatorname{nor} q)\big)$ es una tautología, como se refleja en la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \operatorname{nand} p$	$q \operatorname{nand} q$	$(p \operatorname{nand} p) \operatorname{nand} (q \operatorname{nand} q)$	$p \operatorname{nor} q$	$(p \operatorname{nor} q) \operatorname{nor} (p \operatorname{nor} q)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	F

b) La proposición $\big((p \operatorname{nand} q) \operatorname{nand} (p \operatorname{nand} q)\big) \iff \big((p \operatorname{nor} p) \operatorname{nor} (q \operatorname{nor} q)\big)$ es una tautología, como se refleja en la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \operatorname{nand} q$	$(p \operatorname{nand} q) \operatorname{nand} (p \operatorname{nand} q)$	$p \operatorname{nor} p$	$q \operatorname{nor} q$	$(p \operatorname{nor} p) \operatorname{nor} (q \operatorname{nor} q)$
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F

Ejercicio 0.2 *Imagen de la imagen recíproca e imagen recíproca de la imagen de un conjunto*
Sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación en un conjunto X.
Determinar el valor de verdad del siguiente predicado:

$$\forall A \subset X \quad f^{-1}\big(f(A)\big) = f\big(f^{-1}(A)\big).$$

Solución:
El predicado es falso.
Sea el conjunto $X = \{a, b\}$, $A = \{b\}$ y $f : X \longmapsto X$ tal que

$$f(a) = f(b) = a.$$

En esta situación, $f(A) = \{a\}$ y

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}\big(\{a\}\big) = X$$

mientras que $f^{-1}(A) = \emptyset$ y

$$f\big(f^{-1}(A)\big) = f(\emptyset) = \emptyset.$$

Claramente, $f^{-1}\big(f(A)\big)$ y $f\big(f^{-1}(A)\big)$ son distintos.

Ejercicio 0.3 *Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales con núcleo de la matriz de coeficientes distinto del trivial*
Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.
Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

> *"Si* $\dim\big(\operatorname{Ker}(A)\big) > 0$, *entonces para todo* $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *el sistema de ecuaciones lineales* $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ *tiene infinitas soluciones"*

Solución:

La afirmación es falsa.

El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ es 1 y la dimensión del núcleo de A es 2 porque

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(A) &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\big\} = \big\{(\alpha,\beta,-\alpha-\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\big\} \\ &= L\Big(\big\{(1,0,-1),(0,1,-1)\big\}\Big). \end{aligned}$$

Por otra parte, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es incompatible y no tiene solución.

Ejercicio 0.4 *Autovalores de A y de su forma escalonada reducida*

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y sea $G \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la forma reducida escalonada de A.

Poner un contraejemplo que evidencie que los autovalores de A y de G no tienen que ser iguales.

Solución:

La forma reducida escalonada de **Gauss** de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Los autovalores de A son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ mientras que el único autovalores de G es $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2.

Ejercicio 0.5 *Forma escalonada reducida con matrices cuyo rango coincide con el número de columnas*

Sea $m < n$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Demostrar que

$$\operatorname{rango}(A) = m \Longrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ P \textit{ invertible y } \ PA = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Encontrar la matriz P correspondiente a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Si $\operatorname{rango}(A) = m$, entonces la forma reducida escalonada de A tiene m columnas pivote, C^i con $i = 1,2,\ldots,m$ que tienen cero en todas sus posiciones salvo en la posición i que tienen un uno. Estas columnas pivote ocupan exactamente m columnas de A, luego la forma reducida escalonada de A es

$$A \equiv \Big(C^1 | C^2 | \cdots | C^m\Big) \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cada operación elemental entre filas de una matriz A se realiza multiplicando una matriz elemental por la izquierda de la matriz A, de tal manera que la forma reducida escalonada de **Gauss** es igual al producto de una matriz invertible –obtenida al multiplicar una tras otra y por la izquierda, las matrices elementales asociadas a las operaciones elementales entre filas– por la matriz A. Por tanto, existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $PA = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m \\ 0 \end{pmatrix}$.

Una manera de 'recordar' las operaciones elementales que se realizan en una matriz hasta alcanzar la forma reducida escalonada de **Gauss** es adjuntar a la derecha de la matriz A la matriz identidad y realizar las operaciones elementales en esta matriz ampliada. El resultado final será una matriz que tiene a la izquierda la forma reducida escalonada y a la derecha la matriz invertible que multiplicada por A proporciona la forma reducida escalonada.

Para la matriz del enunciado,

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

por lo que

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ejercicio 0.6 *Condición de independencia lineal*

Sea $S = \{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}\}$ *un conjunto de* $n \geq 2$ *vectores no nulos de un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* V. *Demostrar que*

$$S \ \textit{ libre } \iff \forall i = 2, 3, \dots, n \quad L(\overrightarrow{\mathbf{v_i}}) \cap \Big(L(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}) + L(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}) + \dots + L(\overrightarrow{\mathbf{v_{i-1}}})\Big) = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}.$$

Solución:

- S libre $\Longrightarrow \forall i = 2, 3, \dots, n \quad L(\overrightarrow{\mathbf{v_i}}) \cap \Big(L(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}) + L(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}) + \dots + L(\overrightarrow{\mathbf{v_{i-1}}})\Big) = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$.

  Si para algún índice $i = 2, 3, \dots, n$ existe $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tal que

  $$\overrightarrow{\mathbf{v}} \in L(\overrightarrow{\mathbf{v_i}}) \cap \Big(L(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}) + L(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}) + \dots + L(\overrightarrow{\mathbf{v_{i-1}}})\Big),$$

  entonces

  $$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{v_i}} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\mathbf{v}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \dots + \lambda_{i-1} \overrightarrow{\mathbf{v_{i-1}}},$$

  resultando que

  $$\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \dots + \lambda_{i-1} \overrightarrow{\mathbf{v_{i-1}}} - \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{v_i}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

  con $\lambda_i \neq 0$ porque $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, lo que supone una contradicción con que el subconjunto de vectores de S $\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathbf{v_i}}\}$ sea linealmente independiente.

- S libre $\Longleftarrow \forall i = 2, 3, \dots, n \quad L(\overrightarrow{\mathbf{v_i}}) \cap \Big(L(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}) + L(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}) + \dots + L(\overrightarrow{\mathbf{v_{i-1}}})\Big) = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$.

  Sea $\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ una combinación lineal nula de los vectores de S.

  Transponiendo términos, se observa la existencia de un vector que pertenece a $L(\overrightarrow{\mathbf{v_n}})$ y a $L(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}) + L(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}) + \dots + L(\overrightarrow{\mathbf{v_{n-1}}})$ ya que

  $$-\lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v_n}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \dots + \lambda_{n-1} \overrightarrow{\mathbf{v_{n-1}}}.$$

  Por hipótesis, $-\lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ y $\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \dots + \lambda_{n-1} \overrightarrow{\mathbf{v_{n-1}}}\,\overrightarrow{\mathbf{0}}$.

  Como $\overrightarrow{\mathbf{v_n}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, se tiene $\lambda_n = 0$.

  Si $\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \dots + \lambda_{n-1} \overrightarrow{\mathbf{v_{n-1}}}\,\overrightarrow{\mathbf{0}}$, entonces hay un vector que pertenece a $L(\overrightarrow{\mathbf{v_{n-1}}})$ y a $L(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}) + L(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}) + \dots + L(\overrightarrow{\mathbf{v_{n-2}}})$ ya que

  $$-\lambda_{n-1} \overrightarrow{\mathbf{v_{n-1}}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \dots + \lambda_{n-2} \overrightarrow{\mathbf{v_{n-2}}},$$

  resultando que $\lambda_{n-1} = 0$ y $\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} + \dots + \lambda_{n-2} \overrightarrow{\mathbf{v_{n-2}}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

  Repitiendo el proceso hasta llegar a $\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, y teniendo en cuenta que $\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v_1}} = -\lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v_2}}$, se concluye que $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \lambda_i = 0$ por lo que S es un sistema libre.

La condición de que los vectores de S no sean nulos es ineludible porque si –por ejemplo– el último vector de S fuera nulo y los demás linealmente independientes, el sistema no sería libre pero se cumpliría la condición $\forall i = 2, 3, \ldots, n \quad L(\overrightarrow{\mathbf{v_i}}) \cap \Big(L(\overrightarrow{\mathbf{v_1}}) + L(\overrightarrow{\mathbf{v_2}}) + \cdots + L(\overrightarrow{\mathbf{v_{i-1}}}) \Big) = \{ \overrightarrow{\mathbf{0}} \}$.

Ejercicio 0.7 *Rango de la matriz de coeficientes igual al número de filas*

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Determinar si la siguiente equivalencia es verdadera o falsa:

$$\text{rango}(A) = m \Longleftrightarrow \forall \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}) \ \exists \overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \ A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

Solución:

- $\text{rango}(A) = m \Longrightarrow \forall \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}) \ \exists \overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \ A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

  Si rango(A) coincide con el número de filas de la matriz A, entonces el número de filas (ecuaciones) de A es menor o igual que el número de columnas (incógnitas),

  $$m \leq n \leq n+1,$$

  por lo que al añadir una nueva columna a la matriz A, el rango no puede aumentar, esto es, no se modifica, luego

  $$\forall \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}) \ \ \text{rango}(A|\overrightarrow{\mathbf{b}}) = \text{rango}(A) = m \leq n.$$

  En el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ el rango de la matriz de coeficientes, A, coincide con el rango de la matriz ampliada, $A|\overrightarrow{\mathbf{b}}$, y es menor que el número de incógnitas, n, luego el sistema es compatible y existe $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

- $\forall \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}) \ \exists \overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \ A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}} \Longrightarrow \text{rango}(A) = m$

  Para $i = 1, 2, \ldots, m$, se considera la matriz columna $\overrightarrow{\mathbf{b_i}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ cuyos elementos son cero menos el que ocupa la fila i que vale 1.

  Para cada $\overrightarrow{\mathbf{b_i}}$, existe $\overrightarrow{\mathbf{x_i}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $A\overrightarrow{\mathbf{x_i}} = \overrightarrow{\mathbf{b_i}}$, de tal manera que la matriz $X = \big(\overrightarrow{\mathbf{x_1}}|\overrightarrow{\mathbf{x_2}}|\cdots|\overrightarrow{\mathbf{x_m}}\big) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ cuyas columnas son las matrices $\overrightarrow{\mathbf{x_i}}$ es la inversa por la derecha de A ya que

  $$AX = A\big(\overrightarrow{\mathbf{x_1}}|\overrightarrow{\mathbf{x_2}}|\cdots|\overrightarrow{\mathbf{x_m}}\big) = \big(A\overrightarrow{\mathbf{x_1}}|A\overrightarrow{\mathbf{x_2}}|\cdots|A\overrightarrow{\mathbf{x_m}}\big) = \big(\overrightarrow{\mathbf{b_1}}|\overrightarrow{\mathbf{b_2}}|\cdots|\overrightarrow{\mathbf{b_m}}\big) = \text{Id}_m\,.$$

  El rango de un producto de matrices es menor o igual que el rango de cada uno de los factores, por lo que

  $$m = \text{rango}(\text{Id}_m) = \text{rango}(AX) \leq \text{rango}(A).$$

  Además, el rango de A no puede ser superior al número de filas de A, luego rango$(A) \leq m$.

  La única manera de que se cumplan las dos desigualdades anteriores es que rango$(A) = m$.

La equivalencia es verdadera.

Ejercicio 0.8 *Aplicación lineal inyectiva*

Sea $B_E = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \overrightarrow{\mathbf{e_3}}\}$ una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E, y $B_{E'} = \{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \overrightarrow{\mathbf{u_3}}\}$ un conjunto libre del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E'.

Estudiar si las aplicaciones lineales $f, g : E \longmapsto E'$ tales que

a) $f(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}) = \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \overrightarrow{\mathbf{u_3}}, \ f(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}) = \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ f(\overrightarrow{\mathbf{e_3}}) = \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + 2\overrightarrow{\mathbf{u_2}} + \overrightarrow{\mathbf{u_3}}$.

b) $g(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}) = \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \overrightarrow{\mathbf{u_3}}, \ g(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}) = \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ g(\overrightarrow{\mathbf{e_3}}) = \overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \overrightarrow{\mathbf{u_2}} + 2\overrightarrow{\mathbf{u_3}}$.

son inyectivas.

Solución:

a) La aplicación lineal, f, es inyectiva si y solamente si $\operatorname{Ker}(f) = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}_E\}$.
Sea $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \gamma\overrightarrow{\mathbf{e_3}}$ un vector de E cuya imagen sea el vector nulo,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{0}}_{E'} &= f(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = f(\lambda\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \gamma\overrightarrow{\mathbf{e_3}}) = \lambda f(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}) + \mu f(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}) + \gamma f(\overrightarrow{\mathbf{e_3}}) \\ &= \lambda(\overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \overrightarrow{\mathbf{u_3}}) + \mu\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \gamma(\overrightarrow{\mathbf{u_1}} + 2\overrightarrow{\mathbf{u_2}} + \overrightarrow{\mathbf{u_3}}) = (\lambda+\gamma)\overrightarrow{\mathbf{u_1}} + (\mu+2\gamma)\overrightarrow{\mathbf{u_2}} + (\lambda+\gamma)\overrightarrow{\mathbf{u_3}}.\end{aligned}$$

Como los vectores de $B_{E'}$ son linealmente independientes, la única combinación lineal suya que proporciona el vector nulo es la trivial, luego las coordenadas del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ respecto a la base B_E son soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{cases}\lambda+\gamma=0\\ \mu+2\gamma=0\\ \lambda+\gamma=0\end{cases}$$

Evidentemente, no es compatible determinado porque hay dos ecuaciones iguales. Sus soluciones son

$$\{(\gamma, 2\gamma, -\gamma) : \gamma \in \mathbb{K}\},$$

resultando que

$$\operatorname{Ker}(f) = \{\gamma\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + 2\gamma\overrightarrow{\mathbf{e_2}} - \gamma\overrightarrow{\mathbf{e_3}} : \gamma \in \mathbb{K}\} \neq \{\overrightarrow{\mathbf{0}}_E\}.$$

La función f no es inyectiva.

b) La matriz de g respecto a las bases B_E y $B_{E'}$ es

$$G = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

luego el rango de G es 3 y la dimensión de la imagen de g es 3. Como la suma de la dimensión de la imagen y la dimensión del núcleo tiene que ser 3, la dimensión del núcleo de g es 0 y $\operatorname{Ker}(g) = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$.
g es inyectiva porque el núcleo de g está formado únicamente por el vector nulo.

Ejercicio 0.9 *Mínimo número de generadores de un espacio vectorial*
Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $G = \{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}\}$ un sistema generador de E. Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

“Si no existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}\} - \{\overrightarrow{\mathbf{u_i}}\}$ sea generador de E, entonces G es una base de E”.

Solución:
La demostración se realiza por **reducción al absurdo** suponiendo que G no es una base y llegando a una contradicción con la hipótesis de que no se puede quitar ningún vector del conjunto G sin que pierda la condición de generador.
Supongamos que G no es una base de E.
Como G es un sistema generador de E, si no es base de E es porque es un sistema ligado, luego existe una combinación lineal no nula de los vectores de G que produce el vector $\overrightarrow{\mathbf{0}}$. Así pues, existe

$$\lambda_1\overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{u_2}} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{\mathbf{u_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

con algún escalar distinto de cero. Sea, por ejemplo, $\lambda_i \neq 0$, entonces

$$\overrightarrow{\mathbf{u_i}} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\overrightarrow{\mathbf{u_1}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_i}\overrightarrow{\mathbf{u_2}} - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\overrightarrow{\mathbf{u_{i-1}}} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\overrightarrow{\mathbf{u_{i+1}}} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\overrightarrow{\mathbf{u_n}}.$$

El vector $\overrightarrow{\mathbf{u_i}}$ puede expresarse como combinación lineal de los restantes vectores de G, luego el conjunto $\{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_{i-1}}}, \overrightarrow{\mathbf{u_{i+1}}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}\}$ es un generador de E, contradiciendo la hipótesis de partida.
Como no puede sostenerse que G no sea una base de E, entonces G es una base de E.
Utilizando otras palabras, se ha demostrado que en un espacio vectorial de dimensión finita, E, cualquier conjunto generador de E que tenga el menor número posible de elementos es una base de E.

Ejercicio 0.10 *Aplicación lineal inyectiva y suma directa de imágenes*

Sea $f : E \longmapsto E'$ una aplicación lineal entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sean U y V subespacios vectoriales de E tales que $U + V$ es suma directa.

Demostrar que si f es inyectiva, entonces $f(U) + f(V)$ es suma directa.

Solución:

La demostración se realiza por **reducción al absurdo** suponiendo que $f(U) \cap f(V) \neq \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$ y llegando a una contradicción con la hipótesis de que $U + V$ sea suma directa.

Sea $\overrightarrow{\mathbf{w}} \in f(U) \cap f(V)$ y $\overrightarrow{\mathbf{w}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Como $\overrightarrow{\mathbf{w}} \in f(U)$, existe $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in U$ tal que $f(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = \overrightarrow{\mathbf{w}}$, y como $\overrightarrow{\mathbf{w}} \in f(V)$, existe $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in V$ tal que $f(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{w}}$.

Por ser f inyectiva y $f(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = f(\overrightarrow{\mathbf{v}})$, entonces $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{v}}$, lo que indica que

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

porque $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{v}} \in U \cap V = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$, al ser una suma directa, pero $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ no puede ser el vector nulo porque su imagen por f no es el vector nulo, $f(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = \overrightarrow{\mathbf{w}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, obteniéndose la contradicción buscada.

Ejercicio 0.11 *Diagonalización de una matriz dependiendo de dos parámetros y con dos autovalores*

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

"Si a, b son números reales distintos, entonces la matriz $A_{ab} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ no es diagonalizable".

Solución:

La afirmación es falsa.

Si $a = 1$ y $b = 0$, entonces los autovalores de A_{10} son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad algebraica 2.

La dimensión del autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1$ sólo puede ser 1 y la dimensión del autoespacio asociado a $\lambda_2 = 0$ es 2 porque $A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1 y

$$S_0 = \mathrm{Ker}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\} = \{(\alpha, -\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L\Big(\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}\Big).$$

Como la suma de las multiplicidades geométricas de los autovalores es 3 que coincide con el número de filas (o de columnas) de la matriz, A_{10} es diagonalizable.

Ejercicio 0.12 *Matrices cuyo producto es una matriz simétrica*

Sean A y B matrices cuadradas de la misma dimensión. ¿Es cierta la siguiente afirmación:

"Si AB es una matriz simétrica, entonces A y B son simétricas"?

Solución:

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no son simétricas mientras que su producto sí lo es:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego la afirmación es falsa.

Ejercicio 0.13 *Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio de dimensión 1*

En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual, calcular la proyección ortogonal de vector $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 1, 1)$ sobre el subespacio vectorial $H = L\Big(\{(1, 0, 2)\}\Big)$.

Solución:

La proyección ortogonal de un vector $\vec{\mathbf{u}}$ sobre el subespacio generado por el vector $\vec{\mathbf{v}}$, $H = L\left(\{\vec{\mathbf{v}}\}\right)$, es

$$\mathrm{proy}_H\left(\vec{\mathbf{u}}\right) = \frac{<\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}>}{<\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}>}\ \vec{\mathbf{v}}.$$

En el caso que nos ocupa,

$$\mathrm{proy}_H(1,1,1) = \frac{<(1,1,1),(1,0,2)>}{<(1,0,2),(1,0,2)>}\ (1,0,2) = \frac{3}{5}\ (1,0,2) = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5}\right).$$

Ejercicio 0.14 *Propiedades del producto escalar*

Sea $(E, < \, , >)$ un espacio vectorial euclídeo.

Demostrar que

$$\forall\ \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in E\ \ << \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} > \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} > = < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >^2 .$$

Solución:

Por la linealidad en cada componente y por la conmutatividad:

$$<< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} > \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} > = < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} > < \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} > = < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >^2 .$$

ÁLGEBRA **Test** 25 de junio de 2014

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada **Calificación:** $\frac{2\,\text{máx}\{0,\text{Aciertos}-4\}}{5}$ **Tiempo:** $\boxed{\textbf{40}\text{ minutos}}$

1. $\boxed{\text{F}}$ Una matriz real $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y solamente si la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con su multiplicidad geométrica.

2. $\boxed{\text{V}}$ La matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene $\boxed{0}$ autovalores reales distintos.

3. $\boxed{\text{F}}$ Si $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ es un endomorfismo que sólo tiene un autovalor, entonces todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ son autovectores de f.

4. $\boxed{\text{V}}$ La dimensión del subespacio propio (autoespacio) de la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ asociado al autovalor $\lambda = 1$ es $\boxed{1}$.

5. $\boxed{\text{V}}$ Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ es diagonalizable si y solamente si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de f.

6. $\boxed{\text{V}}$ La dimensión del núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ tal que $\forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n \; f(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$ es $\boxed{n}$.

7. $\boxed{\text{V}}$ Si $f : X \longmapsto Y$ es una aplicación entre los conjuntos X e Y y A y A' son subconjuntos de Y, entonces $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') = f^{-1}(A \cap A')$.

8. $\boxed{\text{V}}$ Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo. Si $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $P^{\mathrm{T}}P = \mathrm{Id}_n$, entonces $m \geq n$.

9. $\boxed{\text{F}}$ Sea E un espacio vectorial real y $\left\{\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u_1}}, \ldots, \vec{\mathbf{u_n}}\right\} \subset E$.
El vector $\vec{\mathbf{v}}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{u_1}}, \vec{\mathbf{u_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{u_n}}$ si y solamente si
$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, 0, \ldots, 0)\} \quad \text{tales que} \quad \vec{\mathbf{v}} + \alpha_1\vec{\mathbf{u_1}} + \alpha_2\vec{\mathbf{u_2}} + \cdots + \alpha_n\vec{\mathbf{u_n}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

10. $\boxed{\text{V}}$ Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ es una matriz obtenida al aplicar a la matriz A una operación elemental entre filas, entonces las columnas i y j de A son linealmente independientes si y sólo si las columnas i y j de B son linealmente independientes.

11. $\boxed{\text{F}}$ Los vectores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ de un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita son ortogonales si y solamente si son linealmente independientes.

12. $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : E \longmapsto E'$ un homomorfismo entre espacios vectoriales.
Si existe una base $B = \{\vec{\mathbf{e_1}}, \vec{\mathbf{e_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{e_n}}\}$ de E tal que $\left\{f(\vec{\mathbf{e_1}}), f(\vec{\mathbf{e_2}}), \ldots, f(\vec{\mathbf{e_n}})\right\}$ es libre, entonces f es un isomorfismo.

13. $\boxed{\text{V}}$ Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La función $f : A \longmapsto B$ definida mediante las relaciones: $f(a) = 4$, $f(b) = 3$, $f(c) = 1$, $f(d) = 2$, $f(e) = 2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

14. $\boxed{\text{F}}$ Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, V son subespacios vectoriales de E, entonces
$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(E) \Longrightarrow E = U \oplus V.$$

Soluciones preguntas de test del examen final del 25 de junio de 2014

Ejercicio 0.1 *Condición necesaria y suficiente de diagonalización 1*
Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

> *"Una matriz real $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y solamente si la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con su multiplicidad geométrica".*

Solución:
Una matriz real $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y solamente si la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con su multiplicidad geométrica y la suma de las multiplicidades algebraicas (o geométricas) es el orden de M (en este caso, 3).

No se puede prescindir de que la suma de las multiplicidades algebraicas coincida con el orden de la matriz, pues hay matrices reales no diagonalizables en las que coinciden las multiplicidades algebraicas y geométricas de sus autovalores mientras que la suma, de unas o de otras, no es la dimensión de la matriz.

El polinomio característico de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1),$$

por lo que M sólo tiene un autovalor real de multiplicidad algebraica y geométrica 1. La matriz M no es diagonalizable porque no se puede encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por tres autovectores de M. Solamente se puede encontrar un autovector que sea linealmente independiente.

La afirmación es falsa.

Ejercicio 0.2 *Matriz sin autovalores reales*

Hallar los autovalores reales de la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:
El polinomio característico de la matriz M es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda - \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2$$

que no tiene raíces reales, luego la matriz M no tiene ningún autovalor real.

Ejercicio 0.3 *Endomorfismo con un único autovalor*
Encontrar un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ con un único autovalor y tal que no todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ sean autovectores de f.

Solución:
Respecto a la base canónica, la matriz del endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (y,0)$ es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de M es $P(\lambda) = \lambda^2$, luego el único autovalor de f es $\lambda = 0$.
El vector $\vec{\mathbf{u}} = (1,0)$ no es autovector de f porque

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f\left(\vec{\mathbf{u}}\right) = f(1,0) = (0,1) \neq \alpha \vec{\mathbf{u}}.$$

Hay endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ con un único autovalor real y en donde no todos los vectores son autovectores.

Ejercicio 0.4 *Dimensión de un subespacio propio asociado a un autovalor*

Calcular la dimensión del subespacio propio (autoespacio) de la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *asociado al autovalor* $\lambda = 1$.

Solución:

La dimensión del subespacio propio (autoespacio) de la matriz M asociado al autovalor $\lambda = 1$, o multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda = 1$, es la dimensión de $\mathrm{Ker}(M - \mathrm{Id}_3)$.

El rango de la matriz $M - \mathrm{Id}_3$ es 2 porque su forma reducida escalonada tiene dos escalones:

$$M - \mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego la dimensión de $\mathrm{Ker}(M - \mathrm{Id}_3)$ es $3 - \mathrm{rango}(M - \mathrm{Id}_3) = 1$.

Una base de $\mathrm{Ker}(M - \mathrm{Id}_3)$ es $B = \big\{(1, 1, -1)\big\}$.

Ejercicio 0.5 *Condición necesaria y suficiente de diagonalización 2*

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

> *"Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ es diagonalizable si y solamente si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de f".*

Solución:

La afirmación es verdadera porque se cumple la doble implicación:

- Si f es diagonalizable, entonces existe una base $B = \big\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\big\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que su matriz, F, respecto a la base B es diagonal,

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  Las columnas de la matriz F son las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B respecto a la propia base B, por lo que

$$\forall i = 1, 2 \ldots, n \;\; f\big(\overrightarrow{\mathbf{e_i}}\big) = \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{e_i}},$$

  luego todos los vectores de B son autovectores y los autovalores son los elementos de la diagonal de F.

- Recíprocamente, si existe una base, $B = \big\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\big\}$, de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de f, entonces la matriz de f respecto a B es diagonal porque sus columnas son las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B respecto a la propia base B y

$$\forall i = 1, 2 \ldots, n \;\; f\big(\overrightarrow{\mathbf{e_i}}\big) = 0\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + 0\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \cdots + \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{e_i}} + \cdots + 0\overrightarrow{\mathbf{e_{n-1}}} + 0\overrightarrow{\mathbf{e_n}},$$

  luego f es diagonalizable.

Ejercicio 0.6 *Dimensión del núcleo de la aplicación nula*

Calcular la dimensión del núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ *tal que* $\forall \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n \; f\big(\overrightarrow{\mathbf{v}}\big) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Solución:

La aplicación nula transforma cualquier vector en el vector nulo, luego el núcleo de la aplicación nula es $\mathbb{R}^n$ y $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = n$.

Ejercicio 0.7 *Propiedades de la imagen recíproca*

Demostrar que si $f : X \longmapsto Y$ *es una aplicación entre los conjuntos* X *e* Y *y* B *y* B' *son subconjuntos de* Y*, entonces* $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

Solución:

Véase el apartado **d)** del **Ejercicio 1.24**, *Propiedades de la imagen recíproca*, del **Material de trabajo y complemento** de la asignatura.

Ejercicio 0.8 *Rango de matrices cuyo producto por su traspuesta es la identidad*

Sea $\mathbb{K}$ *un cuerpo conmutativo. Demostrar que si* $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y* $P^T P = \mathrm{Id}_n$*, entonces* $m \geq n$.

Solución:

Véase el apartado **a)** del **Ejercicio 2.27**, *Rango de matrices cuyo producto por su traspuesta es la identidad*, del **Material de trabajo y complemento** de la asignatura.

Ejercicio 0.9 *Definición de combinación lineal*

Sea E *un espacio vectorial real y* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}\right\} \subset E$. *Analizar si la siguiente definición es correcta:*

"El vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ *es combinación lineal de los vectores* $\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}$ *si y solamente si*

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n - \left\{(0,0,\ldots,0)\right\} \quad \textit{tales que} \quad \overrightarrow{\mathbf{v}} + \alpha_1\overrightarrow{\mathbf{u_1}} + \alpha_2\overrightarrow{\mathbf{u_2}} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{\mathbf{u_n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}\text{''.}$$

Solución:

La definición no es correcta. Véase el **Ejercicio 3.16**, *Definición de combinación lineal*, del **Material de trabajo y complemento** de la asignatura.

Ejercicio 0.10 *Subespacios fila y columna: operaciones elementales entre filas*

Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *y* $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *es una matriz obtenida al aplicar a la matriz* A *una operación elemental entre filas, entonces las columnas* i *y* j *de* A *son linealmente independientes si y sólo si las columnas* i *y* j *de* B *son linealmente independientes.*

Solución:

Véase el apartado **c)** del **Ejercicio 3.9**, *Subespacios fila y columna: operaciones elementales entre filas*, del **Material de trabajo y complemento** de la asignatura.

Ejercicio 0.11 *Ortogonalidad e independencia lineal*

Encontrar un contraejemplo que prueba la falsedad de la siguiente afirmación:

"Los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ *de un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita son ortogonales si y solamente si son linealmente independientes".*

Solución:

Véase el **Ejercicio 5.15**, *Ortogonalidad e independencia lineal*, del **Material de trabajo y complemento** de la asignatura.

Ejercicio 0.12 *Imagen de una base del espacio de partida*

Sea $f : E \longmapsto E'$ *un homomorfismo entre espacios vectoriales.*

Encontrar un contraejemplo que pruebe la falsedad de la siguiente afirmación:

"Si existe una base $B = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\}$ *de* E *tal que* $\left\{f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}\right), f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}\right), \ldots, f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_n}}\right)\right\}$ *es libre, entonces* f *es un isomorfismo".*

Solución:

La aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x, y, 0)$ cumple las hipótesis del enunciado porque la imagen mediante f de la base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$,

$$f(B) = \{f(1, 0), f(0, 1)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

es un conjunto libre.

Sin embargo, f no es sobreyectiva porque el vector $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ no pertenece a la imagen de f,

$$\mathrm{Img}(f) = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

luego f no es un isomorfismo.

Ejercicio 0.13 *Aplicaciones inyectivas y sobreyectivas*

Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Determinar si la función $f : A \longmapsto B$ definida mediante las relaciones:

$$f(a) = 4, \quad f(b) = 3, \quad f(c) = 1, \quad f(d) = 2, \quad f(e) = 2,$$

es inyectiva o sobreyectiva.

Solución:

La función f no es inyectiva porque hay dos elementos distintos de A que tienen la misma imagen:

$$f(d) = f(e) = 2.$$

La función f no es sobreyectiva porque no hay ningún elemento de A cuya imagen sea el elemento $5 \in B$.

$$f(A) = \{1, 2, 3, 4\} \subsetneqq B.$$

Ejercicio 0.14 *Suma de las dimensiones de dos subespacios igual a la dimensión del espacio vectorial*

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, V subespacios vectoriales de E.

Demostrar con un contraejemplo que la siguiente proposición es falsa:

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(E) \Longrightarrow E = U \oplus V.$$

Solución:

Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, $U = L\Big(\{(1, 0, 0)\}\Big) \subset \mathbb{R}^3$ y $V = L\Big(\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}\Big) \subset \mathbb{R}^3$.

Las dimensiones de los subespacios son $\dim(U) = 1$ y $\dim(V) = 2$, por lo que

$$\dim(U) + \dim(V) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

pero $U + V = V \subsetneqq \mathbb{R}^3$ y, además, $U + V$ no puede ser suma directa porque $U \neq \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$ y $U \subset V$.

ÁLGEBRA **Test A** Prueba final de evaluación continua 15 de diciembre de 2014

APELLIDOS: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

NOMBRE: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | DNI: | | | | | | | | | |

Atención: Marque la opción deseada **Calificación:** $\frac{3}{10}$ máx $\{0, \text{Aciertos} - 3\}$ **Tiempo:** $\boxed{\textbf{20}\text{ minutos}}$

1.- $\boxed{\text{F}}$ Sean p, q y r proposiciones,

$$\big((p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow q)\big) \Longleftrightarrow \big((p \wedge r) \Longrightarrow q\big).$$

2.- $\boxed{\text{V}}$ Si $\overrightarrow{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ y $\mathrm{Id}_2 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathrm{Id}_2 - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^{\mathrm{T}} - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

3.- $\boxed{\text{V}}$ Si la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ se ha obtenido realizando una cantidad finita de operaciones elementales entre filas en la matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, entonces los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices ampliadas son A y B tienen el mismo conjunto de soluciones.

4.- $\boxed{\text{V}}$ Sean B y B' bases de un espacio vectorial de dimensión finita, V. Conocidas las coordenadas de un vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in V$ respecto a la base B, la matriz de cambio de la base B a la base B' permite obtener las coordenadas del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ respecto a la base B'.

5.- $\boxed{\text{V}}$ En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, simétricas y con coeficientes reales, las coordenadas de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ respecto a la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ son

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

6.- $\boxed{\text{V}}$ Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ es una aplicación lineal, entonces

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f \circ f)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Img}(f)\big) - \dim\big(\mathrm{Img}(f \circ f)\big).$$

7.- $\boxed{\text{V}}$ En un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, $(E, <\,,\,>)$, no existe ningún subespacio vectorial $U \subset E$ tal que $U^{\perp} = \emptyset$.

8.- $\boxed{\text{F}}$ Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 2 y $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo. Si f tiene un único valor propio, entonces todos los vectores de E son vectores propios de f.

Soluciones preguntas de test de la prueba final de evaluación continua

Ejercicio 0.1 *Principio de refutación*
Demostrar que si p y q son proposiciones, entonces

$$\big((p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow q)\big) \Longleftrightarrow \big((p \wedge r) \Longrightarrow q\big)$$

no es una tautología.

Solución:
La implicación
$$\big((p \wedge r) \Longrightarrow q\big) \Longrightarrow \big((p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow q)\big)$$
no es una tautología ya que el antecedente puede ser cierto y el consecuente falso como sucede cuando los valores de verdad de p, q y r son F, F y V respectivamente:

- El valor de verdad de $(F \wedge V) \Longrightarrow F$ es V porque el antecedente es F.
- El valor de verdad de $(F \Longrightarrow F) \wedge (V \Longrightarrow F)$ es F porque el valor de verdad de $V \Longrightarrow F$ es F.

Para que una equivalencia como

$$\big((p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow q)\big) \Longleftrightarrow \big((p \wedge r) \Longrightarrow q\big)$$

sea una tautología, tienen que serlo las dos implicaciones. En este caso, hay una implicación que no lo es.

Ejercicio 0.2 *Operaciones matriciales*
Si $\overrightarrow{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ *y* $\mathrm{Id}_2 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *calcular*

a) $\mathrm{Id}_2 - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^T - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^T + \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^T + \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^T$.

b) $\mathrm{Id}_2 - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^T - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^T - \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^T - \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^T$.

Solución:
Al ser

$$\overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene

a) $\mathrm{Id}_2 - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^{\mathrm{T}} - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\mathrm{Id}_2 - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^{\mathrm{T}} - \overrightarrow{\mathbf{e_1}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^{\mathrm{T}} - \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}}^{\mathrm{T}} - \overrightarrow{\mathbf{e_2}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_2}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 0.3 *Operaciones elementales entre filas y sistemas de ecuaciones lineales*
Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

> *"Si la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ se ha obtenido realizando una cantidad finita de operaciones elementales entre filas en la matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, entonces los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices ampliadas son A y B tienen el mismo conjunto de soluciones".*

Solución:
La afirmación es cierta ya que las operaciones elementales entre las filas de la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales no modifican las soluciones del sistema inicial.

Ejercicio 0.4 *Matriz de cambio de base*

Sean B y B' bases de un espacio vectorial de dimensión finita, V.

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

> *"Conocidas las coordenadas de un vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in V$ respecto a la base B, la matriz de cambio de la base B a la base B' permite obtener las coordenadas del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ respecto a la base B' ".*

Solución:

La implicación es cierta.

En un espacio vectorial de dimensión finita, la matriz de cambio de la base B a la base B', $M_B^{B'}$, permite obtener las coordenadas del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ respecto a la base B' a partir de las coordenadas de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, $(v_1, \ldots, v_n)_B$ en la base B sin más que realizar la multiplicación

$$M_B^{B'} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix},$$

obteniéndose las coordenadas de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ en la base B', $(v_1', \ldots, v_n')_B'$, colocadas como una columna.

Ejercicio 0.5 *Coordenadas en el espacio de matrices simétricas*

En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, simétricas y con coeficientes reales, calcular las coordenadas de las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ respecto a la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución:

La matriz M puede expresarse como combinación lineal de las matrices de la base B :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego las coordenadas de la matriz M respecto a la base B del $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, simétricas y con coeficientes reales son $(1, 1, 2)$.

La matriz N puede expresarse como combinación lineal de las matrices de la base B :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego las coordenadas de la matriz N respecto a la base B del $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, simétricas y con coeficientes reales son $(2, 2, 1)$.

Ejercicio 0.6 *Relación entre las dimensiones del núcleo y la imagen de f y de $f \circ f$*

Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Demostrar que

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f \circ f)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Img}(f)\big) - \dim\big(\mathrm{Img}(f \circ f)\big).$$

Solución:

Tanto f como $f \circ f$ son endomorfismos del espacio vectorial V, por lo que se cumple

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Img}(f)\big), \\ \dim(V) &= \dim\big(\mathrm{Ker}(f \circ f)\big) + \dim\big(\mathrm{Img}(f \circ f)\big). \end{aligned}$$

Restando la primera igualdad de la segunda, se obtiene

$$0 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f \circ f)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Img}(f \circ f)\big) - \dim\big(\mathrm{Img}(f)\big)$$

y equivalentemente

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f \circ f)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Img}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Img}(f \circ f)\big).$$

Ejercicio 0.7 *Subespacios con complemento ortogonal vacío*

Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) *"En un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, $(E, < \ , \ >)$, no existe ningún subespacio vectorial $U \subset E$ tal que $U^{\perp} = \emptyset$".*

b) *"En un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, $(E, < \ , \ >)$, no existe ningún subespacio vectorial $U \subset E$ tal que $U^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$".*

Solución:

a) La afirmación es cierta.

El complemento ortogonal de cualquier subespacio vectorial es un subespacio vectorial y $\emptyset$ no es un subespacio vectorial, luego $\emptyset$ no puede ser el complemento ortogonal de ningún subespacio de E.

b) La afirmación es falsa.

Sí existe un subespacio vectorial cuyo complemento ortogonal es el subespacio nulo: $E^{\perp} = \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$.

Ejercicio 0.8 *Endomorfismos con un único autovalor*

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 2 y $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo.

¿Es cierto que si f tiene un único valor propio, entonces todos los vectores de E son vectores propios de f?

Solución:

La afirmación es falsa.

El endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, y)$ tiene un único autovalor, $\lambda = 1$, porque su matriz respecto a la base canónica es

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es $P(\lambda) = (1 - \lambda)^2$, y hay vectores de $\mathbb{R}^2$ que no son autovectores de f, por ejemplo

$$f(1, 1) = (2, 1) \neq 1(1, 1).$$

ÁLGEBRA **Test A** Examen final 21 de enero de 2015

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada **Calificación:** $\frac{2}{5}$ máx $\{0, \text{Aciertos} - 4\}$ **Tiempo:** $\boxed{\textbf{30} \text{ minutos}}$

1.- $\boxed{\text{V}}$ Sean p, q y r proposiciones, $\Big(\big((p \wedge q) \Longrightarrow (q \wedge r)\big) \wedge (r \Longrightarrow q)\Big) \Longrightarrow \big(p \Longrightarrow p\big)$.

2.- $\boxed{\text{F}}$ La aplicación nula $f : \mathbb{Z}_2^3 \longmapsto \mathbb{Z}_2^5$ tal que $\forall \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{Z}_2^3 \; f\big(\overrightarrow{\mathbf{v}}\big) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, es inyectiva.

3.- $\boxed{\text{F}}$ El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

4.- $\boxed{\text{V}}$ El endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ es diagonalizable si y solamente si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f.

5.- $\boxed{\text{V}}$ Si el endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ tiene n autovalores distintos, entonces es diagonalizable.

6.- $\boxed{\text{V}}$ Todos los autovalores del endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ son raíces del polinomio característico de f.

7.- $\boxed{\text{V}}$ En el $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 y con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, las coordenadas del polinomio $p = (x+1)^3$ respecto a la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ son $(1, 1, 1, 1)$.

8.- $\boxed{\text{V}}$ En el espacio vectorial euclídeo de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, $\mathbb{R}_2[x] = \big\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\big\}$ con el producto escalar $< p(x), q(x) >= \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$, el coseno del ángulo que forman los polinomios $p(x) = 1$ y $q(x) = x^2$ es $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

9.- $\boxed{\text{V}}$ La proyección ortogonal de $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 1, 1)$ sobre el subespacio $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0,\; y + z = 0\big\}$ es $\text{proy}_S\big(\overrightarrow{\mathbf{v}}\big) = \Big(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\Big)$.

10.- $\boxed{\text{V}}$ Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, entonces $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11.- $\boxed{\text{F}}$ La suma de los subespacios $U = L\Big(\big\{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\big\}\Big)$ y $V = L\Big(\big\{(0,1,1,0), (1,0,0,1)\big\}\Big)$, de $\mathbb{R}^4$, es directa.

12.- $\boxed{\text{V}}$ Si una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V tiene n elementos, entonces la dimensión de V es n.

13.- $\boxed{\text{V}}$ Sea A un conjunto y $f, g : A \longrightarrow A$ aplicaciones. $(f \circ g = \text{Id}_A) \Longrightarrow \big(\forall x \in A \; f(x) = (f \circ g \circ f)(x)\big)$.

14.- $\boxed{\text{F}}$ $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \; \exists f : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ lineal tal que $\forall \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \; f\big(\overrightarrow{\mathbf{v}}\big) = A\overrightarrow{\mathbf{v}}$.

Soluciones preguntas de test del examen final del 21 de enero de 2015

Ejercicio 0.1 *Propiedades de la implicación*
Si p, q y r son proposiciones, demostrar que la proposición

$$\Big(\big((p \wedge q) \Longrightarrow (q \wedge r)\big) \wedge (r \Longrightarrow q)\Big) \Longrightarrow \big(p \Longrightarrow p\big)$$

es una tautología.

Solución:
Una implicación es falsa únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.
El consecuente de la implicación dada, $p \Longrightarrow p$, es una tautología, luego el valor de verdad de la implicación

$$\Big(\big((p \wedge q) \Longrightarrow (q \wedge r)\big) \wedge (r \Longrightarrow q)\Big) \Longrightarrow \big(p \Longrightarrow p\big)$$

es siempre verdadero y, consecuentemente, es una tautología.

Ejercicio 0.2 *Inyectividad de la aplicación lineal nula*
Determinar cuándo la aplicación lineal nula es inyectiva.

Solución:
Si $f : U \longmapsto V$ es la aplicación lineal nula entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, entonces $\operatorname{Img}(f) = \left\{\overrightarrow{\mathbf{0}}\right\}$ y $\dim\big(\operatorname{Img}(f)\big) = 0$.
Aplicando la fórmula de las dimensiones,

$$\dim(U) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Img}(f)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big).$$

Una aplicación es inyectiva si y solamente si la dimensión de su núcleo es cero, luego la aplicación lineal nula f es inyectiva si y solamente si $\dim(U) = 0$.
La aplicación lineal nula es inyectiva única y exclusivamente cuando el espacio de partida es el espacio nulo.

Ejercicio 0.3 *Cálculo del polinomio característico*
Calcular el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:
El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Ejercicio 0.4 *Condición necesaria y suficiente de diagonalización*
Demostrar que el endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ es diagonalizable si y solamente si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f.

Solución:
"$\Longrightarrow$" Si f es diagonalizable, entonces existe una base $B = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\right\}$ respecto a la cual la expresión matricial de f es de la forma $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Las columnas de la matriz D son las coordenadas respecto a la base B de las imágenes por f de los vectores de la base B, por lo que

$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}\right) = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{e_1}},\ f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}\right) = \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_n}}\right) = \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{e_n}}$$

y todos los vectores de la base B son autovectores de f, luego existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f.

"$\Longleftarrow$" Si existe una base de $\mathbb{R}^n$, $B = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\right\}$, formada por autovectores de f, entonces

$$\forall i = 1, 2 \ldots, n \ f\left(\overrightarrow{\mathbf{e_i}}\right) = \lambda_i \overrightarrow{\mathbf{e_i}}$$

por lo que la matriz de f respecto a la base B es $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ que es diagonal.

Ejercicio 0.5 *Diagonalización de un endomorfismo con el máximo número de autovalores distintos*

Demostrar que si el endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ tiene n autovalores distintos, entonces es diagonalizable.

Solución:

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2$ son los autovalores de f y $\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}$ son autovectores asociados respectivamente a cada autovalor, entonces

$$B = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\right\}$$

son n vectores linealmente independientes porque los autovalores son distintos.

Como la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n, B es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f, luego f es diagonalizable.

Ejercicio 0.6 *Relación entre los autovalores y las raíces del polinomio característico*

Demostrar que todos los autovalores del endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ son raíces del polinomio característico de f.

Solución:

Si A es la matriz de f respecto a una determinada base y λ_0 es un autovalor de f, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda_0 \overrightarrow{\mathbf{x}}$ tiene solución no nula, lo que equivale a que el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $(A - \lambda_0 \operatorname{Id}_n)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ es compatible indeterminado.

Si $(A - \lambda_0 \operatorname{Id}_n)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ es compatible indeterminado, entonces el rango de la matriz de coeficientes no es n y su determinante es cero, $|A - \lambda_0| = 0$.

El polinomio característico de f es $P_\lambda(f) = |A - \lambda|$, luego λ_0 es una raíz del polinomio característico de f.

Cualquier autovalor de f es raíz del polinomio característico de f.

Ejercicio 0.7 *Coordenadas en un espacio de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$*

En el $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 y con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, calcular las coordenadas del polinomio $p = (x + 1)^3$ respecto a la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Solución:

Desarrollando el polinomio $p(x)$, se obtiene

$$p(x) = (x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)^2 = (x + 1)(x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$$

luego las coordenadas de $p(x)$ respecto a la base B son $(1, 1, 1, 1)$.

Ejercicio 0.8 *Coseno del ángulo que forman dos polinomios*

En el espacio vectorial euclídeo de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ *con el producto escalar* $< p(x), q(x) >= \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$, *calcular el coseno del ángulo que forman los polinomios* $p(x) = 1$ *y* $q(x) = x^2$.

Solución:

Si α es el ángulo que forman los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}_2[x]$,

$$\cos\alpha = \frac{< p(x), q(x) >}{\|p(x)\|\ \|q(x)\|} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} p^2(x)\,\mathrm{d}x}\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} q^2(x)\,\mathrm{d}x}} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x}\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Ejercicio 0.9 *Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio*

Hallar la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ *sobre el subespacio* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 0,\ y+z = 0\}$.

Solución:

La dimensión del subespacio vectorial S es 1 porque está descrito por dos ecuaciones implícitas independientes.

El conjunto $B = \{(1,-1,1)\}$ es una base de S porque $(1,-1,1) \in S$, $(1,-1,1) \neq (0,0,0)$ y la dimensión de S es 1.

Fijada la base B de S, la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ sobre S es

$$\mathrm{proy}_S(1,1,1) = \frac{< (1,1,1),(1,-1,1) >}{< (1,-1,1),(1,-1,1) >}(1,-1,1) = \frac{1}{3}(1,-1,1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Ejercicio 0.10 *Cálculo de inversas*

Calcular la inversa de la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Solución:

Aplicando operaciones elementales entre filas,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

se obtiene que $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 0.11 *Suma directa de subespacios*

Determinar si la suma de los subespacios $U = L\Big(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}\Big)$ *y* $V = L\Big(\{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}\Big)$ *es directa en* $\mathbb{R}^4$.

Solución:

No se trata de una suma directa porque $U \cap V \neq \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$ ya que $(1,1,1,1) \in U$ y $(1,1,1,1) \in V$.

Ejercicio 0.12 *Dimensión de un espacio vectorial*

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación

"Si una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V tiene n elementos, entonces la dimensión de V es n".

Solución:

La afirmación es cierta.

Basándose en la propiedad de que "si una base de un espacio vectorial V tiene n elementos, entonces todas las bases de V tienen n elementos", se define la dimensión de V como el número de elementos que tiene cualquier base de V.

Ejercicio 0.13 *Producto escalar asociado a un endomorfismo*

Sea A un conjunto y $f, g : A \longrightarrow A$ aplicaciones.

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente implicación

$$(f \circ g = \mathrm{Id}_A) \Longrightarrow \big(\forall x \in A \ f(x) = (f \circ g \circ f)(x)\big).$$

Solución:

La implicación es cierta.

Si $f \circ g = \mathrm{Id}_A$, entonces $\forall x \in A \ (f \circ g)(x) = x$ resultando que $\forall x \in A$

$$(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g)\big(f(x)\big) = f(x).$$

Ejercicio 0.14 *Matriz asociada a una aplicación lineal*

Determinar si el valor de verdad del siguiente predicado

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \ \exists f : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}) \text{ lineal tal que } \forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \ f\big(\vec{\mathbf{v}}\big) = A\vec{\mathbf{v}}.$$

Solución:

El predicado es falso.

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ no existe ninguna aplicación lineal

$$f : \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

que tenga a A como matriz asociada respecto a alguna base porque las matrices de f tienen que tener 3 filas y 2 columnas. El producto $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no es posible.

ÁLGEBRA **Test D** 26 de junio de 2015

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada **Calificación:** $\frac{2\,\text{máx}\{0,\text{Aciertos}-4\}}{5}$ **Tiempo:** **40** minutos

1.- $\boxed{\text{F}}$ Sean p y q proposiciones. $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \big(p \ \text{nor}(q\,\text{nor}\ q)\big)$.

2.- $\boxed{\text{F}}$ Si hay tres autovectores distintos del endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, entonces f es diagonalizable.

3.- $\boxed{\text{V}}$ Si A es un conjunto, entonces $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$.

4.- $\boxed{\text{F}}$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\big(\mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R}), \cdot\big)$ es un grupo abeliano.

5.- $\boxed{\text{V}}$ Sea $f : E \longmapsto E'$ un homomorfismo entre espacios vectoriales.
Si $B = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\}$ es una base de E, entonces $\text{Img}(f) = L\left(\left\{f(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}), f(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}), \ldots, f(\overrightarrow{\mathbf{e_n}})\right\}\right)$.

6.- $\boxed{\text{V}}$ La dimensión del subespacio propio (autoespacio) de la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ asociado al autovalor $\lambda = 0$ es 2.

7.- $\boxed{\text{F}}$ Sea $H \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Si todos los elementos de la diagonal principal de $H^{\mathrm{T}}H$ son 1, entonces las columnas de H forman un sistema ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

8.- $\boxed{\text{V}}$ Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. El sistema homogéneo de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ es compatible indeterminado si y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor de A.

9.- $\boxed{\text{V}}$ En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ con el producto escalar

$$< a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 >= \sum_{i=0}^{2} a_ib_i,$$

el módulo del polinomio $p(x) = 1 + x - x^2$ es $\sqrt{3}$.

10.- $\boxed{\text{V}}$ En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual, la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 1, -1)$ sobre el subespacio $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ es $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

11.- $\boxed{\text{F}}$ Si $f, g : V \longmapsto V$ son endomorfismos de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, entonces

$$\dim\big(\text{Img}(f)\big) = \dim\big(\text{Ker}(g)\big) + \dim\big(\text{Img}(g \circ f)\big).$$

12.- $\boxed{\text{F}}$ Cualquier combinación lineal de dos soluciones de un sistema compatible indeterminado de ecuaciones lineales también es solución del sistema.

13.- $\boxed{\text{F}}$ Sean $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vectores de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, E. Si $\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\}$ es libre y $\{\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\}$ es libre, entonces $\dim\Big(L\big(\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\}\big)\Big) = 3$.

14.- La dimensión del subespacio vectorial $S = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2) : M = M^{\mathrm{T}}\}$ es 3.

Soluciones preguntas de test del examen final del 26 de junio de 2015

Ejercicio 0.1 *Propiedades de la función lógica nor*

Sean p y q proposiciones.

Demostrar que $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg\big(p\ \text{nor}(q\,\text{nor}\ q)\big)$ *es una tautología.*

Solución:

Construyendo la tabla de verdad de $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg\big(p\ \text{nor}(q\,\text{nor}\ q)\big)$,

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q\,\text{nor}\,q$	$p\,\text{nor}(q\,\text{nor}\,q)$	$\neg\big(p\,\text{nor}(q\,\text{nor}\,q)\big)$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \neg\big(p\,\text{nor}(q\,\text{nor}\,q)\big)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

se comprueba que se trata de una proposición que sólo toma el valor V.

Ejercicio 0.2 *Autovectores distintos de un endomorfismo*

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

"Si hay tres autovectores distintos del endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, entonces f es diagonalizable".

Solución:

Cualquier endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ que tenga un autovector, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, tiene más de tres autovectores distintos porque todos los vectores no nulos del subespacio

$$L\Big(\big\{\overrightarrow{\mathbf{v}}\big\}\Big) = \big\{\alpha\overrightarrow{\mathbf{v}} : \alpha \in \mathbb{R}\big\}$$

son autovectores de f.

En particular, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, $2\overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $3\overrightarrow{\mathbf{v}}$ serían tres autovectores distintos de f. Esto no quiere decir que los tres autovectores sean linealmente independientes.

Los vectores $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2,0,0)$ y $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (3,0,0)$ son tres autovectores distintos del endomorfismo $f(x,y,z) = (x, y+z, z)$ que no es diagonalizable porque sólo tiene un autovalor, $\lambda = 1$, de multiplicidad geométrica 2, por lo que no se puede conseguir una base de autovectores de f.

La afirmación es falsa.

Ejercicio 0.3 *Pertenencia e inclusión del conjunto vacío en las partes de un conjunto*

¿Es cierto que si A es un conjunto cualquiera, entonces $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$?

Solución:

El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto, luego si A es un conjunto, entonces $\emptyset \subset A$.

En particular, $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto, luego $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$.

Como los elementos del conjunto $\mathcal{P}(A)$ son los conjuntos contenidos en A y $\emptyset$ está contenido en A, entonces $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

La afirmación es cierta.

Ejercicio 0.4 *Estructura del producto de matrices cuadradas*

Demostrar que la siguiente afirmación es falsa:

"$\forall p \in \mathbb{N}$ $\big(\mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R}), \cdot\big)$ es un grupo abeliano".

Solución:

La demostración de la falsedad de un predicado puede realizarse por medio de un contraejemplo.

Sea $p = 2$. La matriz cuadrada $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ no es la matriz nula y no tiene inversa, luego $\big(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \cdot\big)$ no es un grupo porque hay matrices no nulas que no tienen inversa.

Ejercicio 0.5 *Definición de imagen de un homomorfismo*

Sea $f : E \longmapsto E'$ *un homomorfismo entre espacios vectoriales y* $B = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\}$ *una base de* E.

Demostrar que $\operatorname{Img}(f) = L\left(\left\{f(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}), f(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}), \ldots, f(\overrightarrow{\mathbf{e_n}})\right\}\right)$.

Solución:

La igualdad conjuntística es cierta porque se cumple la doble inclusión:

"⊂" Si $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \operatorname{Img}(f)$, entonces existe $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in E$ tal que $f(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = \overrightarrow{\mathbf{v}}$.

Por ser B una base de E, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tales que

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{\mathbf{e_n}}$$

y como f es lineal,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{v}} = f(\overrightarrow{\mathbf{u}}) &= f(\lambda_1\overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{\mathbf{e_n}}) \\ &= \lambda_1 f(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}) + \lambda_2 f(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}) + \cdots + \lambda_n f(\overrightarrow{\mathbf{e_n}}) \in L\left(\left\{f(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}), f(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}), \ldots, f(\overrightarrow{\mathbf{e_n}})\right\}\right)\end{aligned}$$

luego

$$\operatorname{Img}(f) \subset L\left(\left\{f(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}), f(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}), \ldots, f(\overrightarrow{\mathbf{e_n}})\right\}\right).$$

"⊃" Como $\left\{f(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}), f(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}), \ldots, f(\overrightarrow{\mathbf{e_n}})\right\} \subset \operatorname{Img}(f) = \left\{f(\overrightarrow{\mathbf{u}}) : \overrightarrow{\mathbf{u}} \in E\right\}$ y $\operatorname{Img}(f)$ es un subespacio vectorial, entonces

$$L\left(\left\{f(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}), f(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}), \ldots, f(\overrightarrow{\mathbf{e_n}})\right\}\right) \subset \operatorname{Img}(f).$$

Ejercicio 0.6 *Dimensión de un autoespacio de un endomorfismo*

Calcular la dimensión del subespacio propio (autoespacio) de la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *asociado al autovalor* $\lambda = 0$.

Solución:

El subespacio propio de M asociado al autovalor $\lambda = 0$ es

$$S_0 = \operatorname{Ker}(M - 0\,\mathrm{Id}_3) = \operatorname{Ker}(M) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\} = \{(\alpha, 0, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L\Big(\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}\Big).$$

Como los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$ son linealmente independientes, forman una base de S_0 por lo que la dimensión del subespacio propio de M asociado al autovalor $\lambda = 0$ es 2.

Ejercicio 0.7 *Columnas ortonormales de una matriz*

Sea $H \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Determinar la veracidad o la falsedad de la siguiente afirmación:

> *"Si todos los elementos de la diagonal principal de* $H^T H$ *son 1, entonces las columnas de* H *forman un sistema ortonormal de* $\mathbb{R}^n$*".*

Solución:

La afirmación es falsa.

La diagonal del producto de la traspuesta de la matriz simétrica $H = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ por H está formada única y exclusivamente por unos,

$$H^{\mathrm{T}} H = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y las columnas de la matriz H no son ortogonales porque son iguales y no nulas.

Ejercicio 0.8 *Existencia de autovalor* $\lambda = 0$

Sea $n \in \mathbb{N}$ *y* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Demostrar que el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ *es compatible indeterminado si y sólo si* $\lambda = 0$ *es autovalor de* A.

Solución:

$\lambda = 0$ es autovalor de A si y solamente si existe $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n - \{\overrightarrow{\mathbf{0}}\}$ tal que $A\overrightarrow{\mathbf{v}} = 0\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, lo que equivale a que el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene solución distinta de la trivial y, por tratarse de un sistema homogéneo, equivale a que el sistema sea compatible indeterminado.

Ejercicio 0.9 *Módulo de un polinomio*

En el $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ *con el producto escalar*

$$< a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 >= \sum_{i=0}^{2} a_ib_i,$$

calcular el módulo del polinomio $p(x) = 1 + x - x^2$.

Solución:

$$\|p(x)\| = \sqrt{< p(x), p(x) >} = \sqrt{< 1 + x - x^2, 1 + x - x^2 >} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

Ejercicio 0.10 *Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio de dimensión 2*

En $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar habitual, calcular la proyección ortogonal del vector* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 1, -1)$ *sobre el subespacio* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

Solución:

El conjunto $B = \{(1, 1, -2), (1, -1, 0)\}$ es una base ortogonal del subespacio S.

La proyección ortogonal de vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sobre el subespacio S es

$$\text{proy}_S(1, 1, -1) = \frac{< (1, 1, -2), (1, 1, -1) >}{< (1, 1, -2), (1, 1, -2) >}(1, 1, -2) + \frac{< (1, -1, 0), (1, 1, -1) >}{< (1, -1, 0), (1, -1, 0) >}(1, -1, 0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

Ejercicio 0.11 *Relación entre las dimensiones de la imagen y el núcleo de dos endomorfismos*

Sean $f, g : V \longmapsto V$ *endomorfismos de un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* V.

Demostrar mediante un contraejemplo que la relación

$$\dim\big(\text{Img}(f)\big) = \dim\big(\text{Ker}(g)\big) + \dim\big(\text{Img}(g \circ f)\big)$$

no es correcta.

Solución:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ la aplicación nula y sea $g : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y) = (0, x)$.

Evidentemente, $\text{Img}(f) = \{(0, 0)\}$ y $\dim\big(\text{Img}(f)\big) = 0$.

El núcleo de g es $\text{Ker}(g) = \{(0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = L\Big(\{(0, 1)\}\Big)$ y su dimensión es $\dim\big(\text{Ker}(g)\big) = 1$.

La composición $g \circ f$ es la aplicación nula, por lo que $\dim\big(\text{Img}(g \circ f)\big) = 0$.

Para las funciones consideradas,

$$\dim\big(\text{Img}(f)\big) = 0 \text{ mientras que } \dim\big(\text{Ker}(g)\big) + \dim\big(\text{Img}(g \circ f)\big) = 1 + 0 = 1.$$

Ejercicio 0.12 *Combinación lineal de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales*
Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

"Cualquier combinación lineal de dos soluciones de un sistema compatible indeterminado de ecuaciones lineales también es solución del sistema".

Solución:
La afirmación es falsa.
Si $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son soluciones del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{w}}$ y $\lambda + \mu \neq 1$, entonces $\lambda\overrightarrow{\mathbf{u}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{v}}$ no es solución del sistema $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{w}}$ porque

$$A\big(\lambda\overrightarrow{\mathbf{u}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{v}}\big) = \lambda A\overrightarrow{\mathbf{u}} + \mu A\overrightarrow{\mathbf{v}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{w}} + \mu\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{\mathbf{w}} \neq \overrightarrow{\mathbf{w}}.$$

Concretamente, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 0)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (2, -1)$ son soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

y $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (3, -1)$ no es solución de dicho sistema.

Ejercicio 0.13 *Dimensión del subespacio vectorial generado por tres vectores independientes dos a dos*
Sean $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}$ *vectores de un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial,* E *tales que* $\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\}$ *es libre y* $\{\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\}$ *es libre.*
¿Es $\dim\Big(L\Big(\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\}\Big)\Big) = 3$*?*

Solución:
La dimensión del subespacio generado por $\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\}$ tiene que ser superior a 2, pero puede no ser 3.
En $\mathbb{R}^2$, los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (0, 1)$ y $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (1, 1)$ cumplen las condiciones del enunciado porque $\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\}$ es libre y $\{\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\}$ es libre, mientras que

$$\dim\Big(L\Big(\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\}\Big)\Big) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2.$$

Ejercicio 0.14 *Subespacio vectorial de las matrices simétricas en* $\mathbb{Z}_2$
Calcular la dimensión del subespacio vectorial $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z}_2) = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2) : M = M^T\}$

Solución:
Véase el apartado **d)** del **Ejercicio 3.56**, *Los subespacios vectoriales de matrices simétricas y de matrices antisimétricas*, del **Material de trabajo y complemento** de la asignatura, donde se realiza el cálculo en el cuerpo $\mathbb{R}$.
Las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ son de la forma

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} = m_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + m_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } M_{11}, m_{12}, m_{22} \in \mathbb{Z}_2,$$

luego las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

generan $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z}_2)$.
También son linealmente independientes porque la única combinación lineal suya

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

que proporciona la matriz nula es $\lambda = \mu = \gamma = 0$.
En definitiva, forman una base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{Z}_2)$ y

$$\mathcal{S}_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es un subespacio vectorial de dimensión 3.

Bibliografía

[1] Academia Montero-Espinosa, Cuaderno de *Álgebra*, España, 2012.

[2] de Burgos, Juan, Curso de Álgebra y Geometría, Alhambra Universidad, España, 1982

[3] Hernández, Eugenio, Álgebra y Geometría, Addison-Wesley Iberoamericana, EUA, 1994.