simplyjarod.com

ALGE

Carpeta Montero

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en simplyjarod.com

Álgebra

Teoría

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

Tema 1: Nociones de álgebra abstracta

Lógica
Conjuntos
Aplicaciones

Tema 2: Álgebra matricial y Sistemas de ecuaciones lineales

Operaciones matriciales
Inversas y rango matricial
Método de Gauss
Teorema de Rouché-Frobenius

Tema 3: Espacios Vectoriales

Conceptos fundamentales
Subespacios vectoriales
Dependencia e independencia lineal
Bases y dimensión

Tema 4: Aplicaciones lineales

Conceptos fundamentales
Núcleo e Imagen
Representación matricial

Tema 5: Productos escalares y ortogonalidad

Conceptos fundamentales
Ortogonalidad
Proyecciones ortogonales
Método de Gram-Schmidt

Tema 6: Autovalores y autovectores

Introducción
Subespacios propios
Diagonalización

TEMA 1: NOCIONES BÁSICAS

1.1 Lógica de proposiciones

Al realizar razonamientos en matemáticas empleamos sentencias que están "conectadas" entre sí por conectivas lingüísticas. La lógica de proposiciones se ocupa del estudio de las conectivas lingüísticas entre proposiciones. Una proposición es una sentencia que puede ser verdadera (denotaremos por V) o falsa (denotaremos por F).

Las conectivas lingüística permiten construir proposiciones compuestas a partir de otras más simples. Así, si los símbolos p y q representan proposiciones genéricas, las conectivas lingüísticas más empleadas son las que aparecen en la siguiente tabla:

Conectiva lingüística	**Conectivo lógico**	**Símbolo**	**Se escribe**
no p	Negación	$\neg$	$\neg p$
p y q	Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$
p o q	Disyunción	$\vee$	$p \vee q$
Si p entonces q	Implicación	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$
p si y sólo si q	Equivalencia	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$

Llamaremos **forma proposicional** a cualquier expresión formada por:

a) variables proposicionales tales como $p, q, r, \ldots$
b) los conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$
c) los paréntesis (,).

Cada forma proposicional tiene asociada una tabla de verdad. La tabla de verdad asociada a una forma proposicional se puede construir sistemáticamente a partir del procedimiento empleado para construir dicha forma proposicional.

Una forma proposicional es una **tautología** si toma el valor V cualquiera que sea la forma en que asignemos los valores V ó F a las variables proposicionales que en ella intervienen.

Una forma proposicional es una **contradicción** si toma el valor F cualquiera que sea la forma en que asignemos los valores V ó F a las variables proposicionales que en ella intervienen.

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disyunción

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Implicación

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Equivalencia

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Ejemplo 1:

Vamos a construir la tabla de verdad de $(p \vee \neg q) \Rightarrow r$

Se establecen todas las posibles situaciones de verdad o falsedad de las variables que intervienen en el enunciado:

p	q	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	r	$(p \vee \neg q) \Rightarrow r$
V	V			V	
V	F			V	
F	V			V	
F	F			V	
V	V			F	
V	F			F	
F	V			F	
F	F			F	

Se van rellenando el resto de columnas teniendo en cuenta el significado de los conectivos lógicos:

p	q	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	r	$(p \vee \neg q) \Rightarrow r$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Ejemplo 2:

Ahora vamos a demostrar que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$ es una tautología construyendo su tabla de verdad. En este caso la rellenamos entera directamente:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

1.2 Lógica de predicados

Hay deducciones que se realizan habitualmente en matemáticas para las que no es posible analizar su validez dentro del ámbito de la lógica de proposiciones estudiada en el punto anterior.

En lógica de predicados se distingue entre las propiedades y los objetos a los que dichas propiedades se refieren. Por ejemplo:
Supongamos la propiedad "ser primo" que simbolizamos por P y la propiedad "ser impar" que simbolizamos por I.

x es primo	$P(x)$
x es impar	$I(x)$

Ahora podemos aplicar estas propiedades a objetos concretos de forma que:

3 es primo	$P(3)$
5 es impar	$I(5)$

Diremos que un predicado es una **tautología** si toma el valor V independientemente de los objetos concretos del universo del discurso que coloquemos en lugar de sus variables.

Consideramos ahora la sentencia "*para todo objeto x se verifica P*(x)". La frase "*para todo objeto x* " se denomina **cuantificador universal** y se representa por $\forall x$.

Consideramos ahora la sentencia "*existe un objeto x se verifica P*(x)". La frase "*existe un objeto x* " se denomina **cuantificador existencial** y se representa por $\exists x$.

Muchas de ellas son propiedades muy obvias

Propiedades del cuantificador universal y el cuantificador existencial:

En cualquier universo de discurso, para todo predicado P y para toda variable x, la siguientes sentencias son verdaderas:

- $P(a) \Rightarrow \exists x\ P(x)$ [si un elemento concreto cumple una propiedad entonces existe un elemento que cumple la propiedad]

- $(\forall x\ P(x)) \Rightarrow P(a)$ [si una propiedad se cumple para todo elemento, se cumple para un elemento concreto]

Esta es el contrarrecíproco de la anterior. Recuerda que la implicación directa y su contrarrecíproco son equivalentes: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

- $\neg P(a) \Rightarrow \neg(\forall x\ P(x))$ [si un elemento concreto no cumple una propiedad entonces esa propiedad no se cumple para todo elemento]

- $(\forall x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ P(x))$ [si una propiedad se cumple para todo elemento, entonces existe algún elemento que la cumple]

- $\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x \neg P(x))$

1.3 Teoría de conjuntos

1.3.1 Definiciones

Un **conjunto** es una reunión de objetos que llamaremos elementos.

El cardinal es un número natural

Llamaremos **cardinal** de un conjunto al número de elementos del conjunto.

Un conjunto A es **subconjunto** de un conjunto B, denotándose $A \subset B$, si todo elemento de A lo es de B.

El **conjunto vacío** $\varnothing$ es un conjunto que no contiene ningún elemento.

El **conjunto universal** X es aquel tal que todos los conjuntos son subconjuntos de él.

Si un elemento a **pertenece** a un conjunto A se denota $a \in A$.

Esta es una técnica para demostrar la igualdad muy utilizada en álgebra

Dos conjuntos son **iguales** si contienen los mismos elementos. Dicho de otra forma:

$$A = B \iff (A \subset B \ \text{ y } \ B \subset A)$$

1.3.2 Operaciones con conjuntos

Sean $A, B \subset X$ dos subconjuntos del conjunto universal X.

El complementario también se puede notar con un apóstrofe: $\overline{A} = A'$

Conjunto complementario : $\overline{A} = \{x \in X \ / \ x \notin A\}$

Intersección de conjuntos : $A \cap B = \{x \in X \ / \ x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}$

Unión de conjuntos : $A \cup B = \{x \in X \ / \ x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}$

Diferencia de conjuntos : $A - B = \{x \in X \ / \ x \in A \ \text{ y } \ x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

Diferencia simétrica: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

Ejemplo:
Sean $A = \{1,2,3,a\}$ y $B = \{a,b,2,4\}$

$A \cap B = \{2,a\}$ $\qquad$ $A \cup B = \{1,2,3,a,b,4\}$

Fíjate que la diferencia de conjuntos no es conmutativa

$A - B = \{1,3\}$ $\qquad$ $B - A = \{b,4\}$

$A \Delta B = \{1,3,b,4\}$

Son de especial relevancia las operaciones en las que intervienen el conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto universal X:

$A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cap X = A$

$A \cup \varnothing = A \qquad A \cup X = X$

$A - \varnothing = A \qquad \varnothing - A = \varnothing \qquad A - X = \varnothing \qquad X - A = \overline{A}$

$A \,\Delta\, \varnothing = A \qquad A \,\Delta\, X = X - A$

1.3.3 Propiedades

Daremos las propiedades más interesantes de la unión,la intersección y el complementario.

Casi todas estas propiedades pueden representarse gráficamente mediante diagramas de Venn

Asociativa	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
Conmutativa	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
Idempotente	$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
Simplificación	$A\cup(B\cap A) = A$	$A\cap(B\cup A) = A$
Absorción	$A\cup X = X$	$A\cap\varnothing = \varnothing$
Distributiva	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
Morgan	$(A\cup B)' = A'\cap B'$	$(A\cap B)' = A'\cup B'$
Complementario	$(A')' = A$	

Estas dos propiedades se denominan Leyes de Morgan

1.3.4 Producto cartesiano

Se llama **producto cartesiano** de un conjunto A por otro B (en este orden) al conjunto formado por los pares (a, b) con $a\in A$ y $b\in B$ el cual se denota por $A\times B$.

Ejemplo:
Sean $A=\{2, 1, 4\}$ $B=\{a, b\}$

$A\times B = \{(2,a), (2,b), (1,a), (1,b), (4,a), (4,b)\}$

1.3.5 Conjunto de las partes de un conjunto

La familia de subconjuntos puede ser infinita

El conjunto de las **partes de un conjunto** A es el conjunto de todos los subconjuntos de A, denotándose $\mathcal{P}(A)$:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \,/\, B\subseteq A\}$$

Los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son, a su vez, conjuntos

Ejemplo:
Sea $A=\{1, 2, 3\}$ $\quad\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

1.3.6 Partición

Dado un conjunto A una familia de subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una **partición** de A si se verifica que:

$$A = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n \quad \text{y} \quad A_i\cap A_j=\varnothing \quad i\neq j$$

Ejemplo:
Sea $A=\{1, 2, 3, a, b, 7, 5, c\}$
Una posible partición de A es $A_1=\{7,b,1\}$ $\quad A_2=\{2,3\}$ $\quad A_3=\{a,c\}$ $\quad A_4=\{5\}$

1.3.7 Teorema del Cardinal

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Se cumple que:

$$\text{card}(A\cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A\cap B)$$

1.4 Aplicaciones

1.4.1 Definiciones

Sean dos conjuntos no vacíos A y B.

aplicación y función son términos sinónimos

Decimos que $f: A \to B$ es una **aplicación** (función) si a cada elemento del conjunto de partida A le hace corresponder un único elemento en el conjunto de llegada B:

$$f \text{ es aplicación} \iff \forall x \in A \,..\, \exists! y \in B \ / \ y = f(x)$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$.
Sea $f: A \to B$ tal que $f(1) = c$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = a$, $f(5) = b$. En este caso decimos que f es una aplicación ya que cumple la definición anterior, es decir a cada elemento de A le corresponde un único elemento en el conjunto B.
Sin embargo $f: A \to B$ tal que $f(1) = c$, $f(1) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = a$, $f(5) = b$ no es una aplicación ya que al elemento $1 \in A$ le corresponden dos elementos de B.

Cuando f es una aplicación de cada elemento del espacio de salida sale una única "flecha"

Si nos piden demostrar que dos aplicaciones son iguales lo haremos así

- Igualdad de aplicaciones. Sean dos aplicaciones $f, g: A \to B$:

$$f = g \iff \forall x \in A \,..\, f(x) = g(x)$$

- Los elementos del conjunto de salida A se denominan **preimágenes** de f.
- Los elementos del espacio de llegada B que tienen preimagen mediante f se denominan **imágenes** de f. (Ojo: no todos los elementos de B tienen que ser imágenes de una determinada aplicación f).
- Llamamos **imagen de** f al subconjunto de B formado por todos los elementos que tienen preimagen mediante f. Se denota $\text{Im}(f)$:

$$\text{Im}(f) = \{ y \in B \ / \ \exists\, x \in A \,..\, f(x) = y \}$$

1.4.2 Tipos de aplicaciones

Sea $f: A \to B$ una aplicación (función):

- Se dice que f es **inyectiva** si a cada elemento del conjunto imagen le corresponde sólo una preimagen en el conjunto de partida:

$$f \text{ es inyectiva} \iff \forall x,y \in A \; .. \; f(y)=f(x) \;\Rightarrow\; y=x$$

Si f es inyectiva a cada elemento del espacio de llegada le llega una o ninguna flecha

- Se dice que f es **sobreyectiva** si el conjunto imagen de f, $\mathrm{Im}(f)$, coincide con el conjunto de llegada B:

$$f \text{ es sobreyectiva} \iff \forall y \in B \; .. \; \exists x \in A \; / \; f(x)=y$$

Si f es sobreyectiva a cada elemento del espacio de llegada le llega una o más flechas

- Se dice que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Si f es biyectiva a cada elemento del espacio de llegada le llega una y sola una flecha

1.4.3 Imagen directa e imagen recíproca

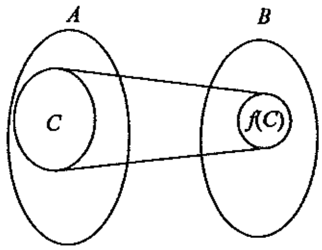
Fíjate que tanto la imagen directa como la imagen inversa son subconjuntos

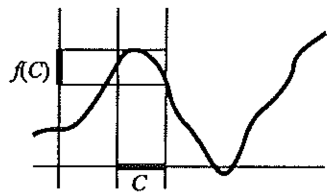
Sea $f: A \to B$ y $C \subseteq A$. Se denomina **imagen directa** de C mediante f a:

$$f(C) = \{y \in B \;/\; \exists x \in C .. y = f(x)\}$$

Propiedad principal:

$x \in C \Rightarrow f(x) \in f(C)$



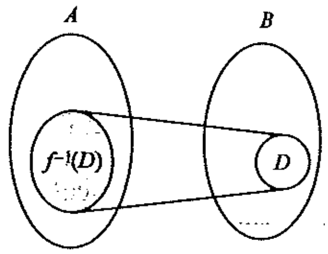


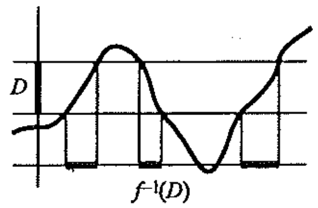
Sea $f: A \to B$ y $D \subseteq B$. Se denomina **imagen recíproca** de D mediante f a:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \;/\; f(x) \in D\}$$

Propiedad principal:

$x \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow f(x) \in D$





Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ $\quad B = \{a,b,c,d\}$

Sea la aplicación $f: A \to B$ tal que $f(1) = c$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = a$, $f(5) = b$

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \{a,b,c\}$$

$$f(\{1,2\}) = \{b,c\}$$

$$f^{-1}(\{c\}) = \{1,3\}$$

$$f^{-1}(\{b,c\}) = \{1,2,3,5\}$$

$$f^{-1}(\{d\}) = \varnothing$$

Propiedades de la imagen directa y recíproca

Sea $f : A \to B$ y $C_1, C_2 \subseteq A$ $D_1, D_2 \subseteq B$

Fíjate que en todas estas propiedades nos estamos refiriendo a la imagen recíproca y no a la aplicación inversa

1.- $$C_1 = \varnothing \Leftrightarrow f(C_1) = \varnothing$$
$$D_1 = \varnothing \Rightarrow f^{-1}(D_1) = \varnothing$$

2.- $$C_1 \subset C_2 \Rightarrow f(C_1) \subset f(C_2)$$
$$D_1 \subset D_2 \Rightarrow f^{-1}(D_1) \subset f^{-1}(D_2)$$

3.- $$f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$$
$$f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$$

4.- $$f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$$
$$f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$$

5.- $$C_1 \subset f^{-1}(f(C_1))$$
$$f(f^{-1}(D_1)) \subset D_1$$

6.- $$f(C_1) - f(C_2) \subset f(C_1 - C_2)$$
$$f^{-1}(D_1 - D_2) = f^{-1}(D_1) - f^{-1}(D_2)$$

7.- si f es inyectiva $\Rightarrow \begin{cases} C_1 = f^{-1}(f(C_1)) \\ f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2) \end{cases}$

8.- si f es sobreyectiva $\Rightarrow D_1 = f(f^{-1}(D_1))$

1.4.4 Composición de aplicaciones

Importante:
La composición de funciones no es conmutativa.

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones. Se define la aplicación composición como:

$$\begin{aligned} g \circ f :\ & A \to C \\ & x \to (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{lll} f:\{1,2,3\} \to \{a,b,c\} & \quad & g:\{a,b,c\} \to \{\alpha,\mu,\lambda\} \\ \quad 1 \to f(1) = a & & \quad a \to f(a) = \lambda \\ \quad 2 \to f(2) = b & & \quad b \to f(b) = \mu \\ \quad 3 \to f(3) = a & & \quad c \to f(c) = \alpha \end{array}$$

$$\begin{aligned} g \circ f : \{1,2,3\} &\to \{\alpha,\mu,\lambda\} \\ 1 &\to (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = \lambda \\ 2 &\to (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = \mu \\ 3 &\to (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(a) = \lambda \end{aligned}$$

Propiedades

1.- f, g inyectivas $\Rightarrow$ $g \circ f$ inyectiva
2.- f, g sobreyectivas $\Rightarrow$ $g \circ f$ sobreyectiva
3.- f, g biyectiva $\Rightarrow$ $g \circ f$ biyectiva
4.- $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva
5.- $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow$ g sobreyectiva
6.- $g \circ f$ biyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva y g sobreyectiva

1.4.5 Composición de una aplicación con ella misma

Importante:
Si el espacio de salida y el espacio de llegada son distintos no se puede definir f^2

No hay que dejarse engañar con la notación:
cuando escribimos f^2 no significa que elevemos f al cuadrado, ¡eso no existe!

Sea $f : A \to A$ una aplicación definida entre dos conjuntos iguales, dicho de otra forma, el conjunto de salida y el conjunto de llegada es el mismo.
Definimos la aplicación f^2 como la composición de f con ella misma:

$$\begin{aligned} f^2 :\ & A \to A \\ & x \to f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) \end{aligned}$$

Análogamente se puede definir $f^3 = f \circ f \circ f$ donde se aplica f tres veces.
Y en general $f^n = f \circ \overset{n)}{\cdots} \circ f$ donde se aplica f n veces.

Se puede demostrar que:

$\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ y en general $\mathrm{Im}(f^n) \subset \mathrm{Im}(f) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1.4.6 Aplicación inversa

Sea una aplicación:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) = y \end{aligned}$$

Solamente en el caso en que f es biyectiva se puede definir la aplicación inversa como:

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\to A \\ y &\to f^{-1}(y) = x \end{aligned}$$

Observación:

No debemos confundir la aplicación inversa con la imagen recíproca. Ambos conceptos comparten la misma notación $f^{-1}(\bullet)$ pero tienen distinto significado. Siempre podremos identificar de cual de ellas se trata fijándonos en lo que hay dentro de los paréntesis:

- Si dentro de los paréntesis hay un elemento (normamente en letra minúscula) entonces se trata de la función inversa.
- Si dentro de los paréntesis hay un conjunto (normalmente en letra mayúscula) entonces se trata de la imagen recíproca.

1.4.7 Aplicación restricción

Definición

Sean A, B dos conjuntos y sea $f : A \to B$ una aplicación. Si restringimos el conjunto de salida a los elementos del subconjunto $C \subset A$ creamos una nueva aplicación $f|_C$ que llamaremos aplicación ***f* restringida al subconjunto *C*** y definimos como:

$$\begin{aligned} f|_C : C &\to B \\ x &\to f|_C(x) = f(x) \end{aligned}$$

Lo que tiene que quedar claro es que todos los elementos de C se aplican mediante $f|_C$ en el mismo elemento de B en el que se aplicaban mediante f. Es decir:

$$f|_C(x) = f(x) \qquad \forall x \in C$$

Propiedades

- Si f es inyectiva $\Rightarrow$ $f|_C$ es inyectiva
- Si f es sobreyectiva, no podemos asegurar que $f|_C$ sea sobreyectiva.
- Si f es biyectiva $\Rightarrow$ $f|_C$ es inyectiva

- Si $f|_C$ es sobreyectiva $\Rightarrow$ f es sobreyectiva
- Si $f|_C$ es inyectiva, no podemos asegurar que f sea inyectiva
- Si $f|_C$ es biyectiva $\Rightarrow$ f es sobreyectiva

1.5 Principio de inducción

Este es un método de demostración muy utilizado en Álgebra

Sea P una propiedad que pueden verificar todos los números naturales. Hacemos:

<u>Base de inducción</u>: verificamos que la propiedad P se cumple para 1.

También se puede hacer para n-1 y n

<u>Hipótesis de inducción</u>: suponemos que P se cumple para n.

<u>Paso de inducción</u>: verificamos que P se cumple para $n + 1$ teniendo en cuenta la hipótesis.

Si esto sucede así entonces podemos afirmar que la propiedad P se cumple para todos los números naturales.

1.6 Relaciones

1.6.1 Definición

Sea un conjunto A. Una **relación binaria** es un subconjunto de $A \times A$ donde están los elementos de A que satisfacen una cierta condición.
Para decir que dos elementos de A están relacionados se pone $a\ R\ b$.

1.6.2 Propiedades de una relación binaria

Las principales propiedades que puede cumplir una relación binaria son:

Reflexiva: $a\ R\ a \quad , \quad \forall a \in A$
Simétrica: $a\ R\ b \quad \Rightarrow \quad b\ R\ a \quad , \quad \forall a,b \in A$
Antisimétrica: $a\ R\ b \ \wedge\ b\ R\ a \quad \Rightarrow \quad a = b \quad , \quad \forall a,b \in A$
Transitiva: $a\ R\ b \ \wedge\ b\ R\ c \quad \Rightarrow \quad a\ R\ c \quad , \quad \forall a,b,c \in A$

1.6.3 Relaciones de equivalencia

Decimos que una relación binaria definida en un conjunto A es una **relación de equivalencia** si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Generalmente una equivalencia se representa por $\sim$; para indicar que a está relacionado con b se pone $a \sim b$ y se lee "a es equivalente a b".

Las clases de equivalencia forman una partición del conjunto A

La **clase de equivalencia** de un elemento $a \in A$ es el conjunto de todos los elementos relacionados con él. Normalmente se representa por $[a] = \{x \in A \ / \ x \sim a\}$.

Llamamos **conjunto cociente** al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia. Se designa por A/R.

1.6.4 Relaciones de orden

Decimos que una relación binaria definida en un conjunto A es una **relación de orden** si cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Generalmente una relación de orden se representa por $\leq$; para indicar que a está relacionado con b se pone $a \leq b$.

1.7 Leyes de composición

1.7.1 Ley de composición interna

Definimos **ley de composición interna** u **operación interna** en un conjunto X como una aplicación:

$$\begin{aligned} * : X \times X &\rightarrow X \\ (x,y) &\rightarrow x * y \end{aligned}$$

El conjunto X es no vacío.

Lo importante de una operación interna es que al operar x e y mediante $*$ el resultado siga perteneciendo a X.

Propiedades

Toda ley de composición interna $*$ puede cumplir (o no) las siguientes propiedades:

Si un conjunto cumple la propiedad asociativa para tres elementos también la cumple para n elementos.

- Propiedad asociativa : $\forall\ x, y, z \ni X,\ \ (x * y) * z = x * (y * z)$
- Elemento neutro : $\exists\ e \in X /\ \forall\ x \in X,\ \ x * e = e * x = x$
- Elemento opuesto: dado $x \ni X$, $\exists\ \overline{x} \ni X /\ \ x * \overline{x} = \overline{x} * x = e$
- Propiedad conmutativa: $\forall\ x, y \ni X,\ x * y = y * x$

Ejemplos

1) Sea la aplicación

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n\ , m) &\rightarrow n * m = -n - m \end{aligned}$$

Esta aplicación es una ley de composición interna que cumple la propiedad conmutativa pero no la asociativa.

2) Sea la aplicación

$$\begin{aligned} - : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (n\ , m) &\rightarrow n - m \end{aligned}$$

Esta aplicación no es una ley de composición interna para el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$.

3) Sea la aplicación

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x\ , y) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$

Esta aplicación es una ley de composición interna para el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ que cumple todas las propiedades antes enunciadas.

1.7.2 Ley de composición externa

Definimos **ley de composición externa** u **operación externa** en un conjunto X sobre un conjunto K como una aplicación:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times X &\rightarrow X \\ (k, x) &\rightarrow k \cdot x \end{aligned}$$

Lo importante de una operación externa es que al operar $k \in K$ e $x \in X$ mediante $\cdot$ el resultado siga perteneciendo a X.

1.8 Estructuras algebraicas

1.8.1 Grupos

Sea un conjunto G no vacío con una operación interna $+$ (que normalmente se le denomina suma).

Decimos que la dupla $(G, +)$ es un **grupo** si cumple:

- Propiedad asociativa : $\forall\ x, y, z \in G,\ \ (x+y)+z = x+(y+z)$
- Elemento neutro : $\exists\ e \in G /\ \forall\ x \in G,\ \ x+e = e+x = x$
- Elemento opuesto: dado $x \in X$, $\exists\ \overline{x} \in X /\ \ x+\overline{x} = \overline{x}+x = e$

Decimos que $(G, +)$ es **grupo abeliano** si, además de todo lo anterior, se cumple:

- Propiedad conmutativa: $\forall\ x, y \in G,\ x+y=y+x$

1.8.2 Anillos

Sea A un conjunto no vacío y sean $+$ y $*$ dos operaciones internas (normalmente se les denomina suma y producto).

Decimos que la terna $(A, +, *)$ es un **anillo** si cumple:

1) $(A, +)$ es un grupo abeliano.
2) Propiedad asociativa del producto : $\forall\ x, y, z \in X,\ \ (x * y) * z = x * (y * z)$
3) La propiedad distributiva del producto respecto de la suma :

$$\forall\ x, y, z \in A,\ \ \begin{array}{l}(x+y) * z = x * z + y * z \\ x * (y+z) = x * y + x * z\end{array}$$

1.8.3 Cuerpos

Sea K un conjunto no vacío y sean $+$ y $*$ dos operaciones internas (normalmente se les denomina suma y producto).

Decimos que la terna $(K, +, *)$ es un **cuerpo** si cumple:

El elemento e representa al elemento neutro de la operación + (suma).

1) $(K, +)$ es un grupo abeliano.
2) $(K-\{e\}, *)$ es grupo.
3) La propiedad distributiva del producto respecto de la suma

Lo mismo dicho de otra forma:

1) $(K, +)$ cumple las propiedades asociativa, elemento neutro, elemento opuesto y conmutativa.
2) $(K-\{e\}, *)$ cumple las propiedades asociativa, elemento neutro y elemento opuesto.
3) La propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

TEMA 2: MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES .

2.1 Concepto de matriz

Diremos que una matriz de dimensión $m \times n$ es un conjunto de números colocados en m filas y n columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices se denotan con letras mayúsculas y en ocasiones acompañadas por su *dimensión* (número de filas y columnas, $A_{m\times n}$), mientras que sus elementos se denotan con el nombre de la matriz en minúscula acompañados por el número de fila y columna en el que se encuentran ($a_{i,j}$).

2.2 Operaciones con matrices

- **Suma de matrices**

La suma entre dos matrices se realiza sumando cada elemento de la primera matriz con el elemento de la misma posición de la segunda, por lo tanto para poder sumar dos matrices tienen que tener la misma dimensión.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 0+3 & 3-4 \\ 3+7 & 1+1 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Producto de un escalar por una matriz**

¡¡¡Cuidado!!! No hay que confundir esta operación con la que veremos más adelante de multiplicar un determinante por un escalar.

Para multiplicar una matriz por un número o escalar basta con multiplicar todos los elementos por ese número.

Ejemplo:

$$4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot 1 \\ 4\cdot 4 & 4\cdot 3 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 12 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$$

- **Producto de matrices**

Cada elemento del producto de matrices se hace multiplicando escalarmente su fila correspondiente de la primera matriz con su columna correspondiente de la segunda, por lo tanto para poder multiplicar dos matrices tienen que coincidir el número de columnas de la primera con el número de filas de la segunda. Dicho de otra forma, sean las matrices $A_{m\times r}$ y $B_{s\times n}$. Estas matrices se podrán multiplicar solamente cuando $r = s$. El resultado será una matriz $C_{m\times n}$.

$$\underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2\cdot4+1\cdot2+1\cdot5 & 2\cdot3+1\cdot1+1\cdot6 \\ 3\cdot4+4\cdot2+2\cdot5 & 3\cdot3+4\cdot1+2\cdot6 \end{pmatrix} = \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 15 & 13 \\ 30 & 25 \end{pmatrix}}$$

La multiplicación de matrices **no es conmutativa**. Debemos tener cuidado con esto ya que al despejar una ecuación, sacar una matriz de factor común o pasarla multiplicando a la inversa, hay que respetar el lado por el que la matriz va multiplicando.

$$\underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4\cdot2+3\cdot3 & 4\cdot1+3\cdot4 & 4\cdot1+3\cdot2 \\ 2\cdot2+1\cdot3 & 2\cdot1+1\cdot4 & 2\cdot1+1\cdot2 \\ 5\cdot2+6\cdot3 & 5\cdot1+6\cdot4 & 5\cdot1+6\cdot2 \end{pmatrix} = \underset{3\times3}{\begin{pmatrix} 17 & 16 & 9 \\ 7 & 6 & 4 \\ 28 & 29 & 17 \end{pmatrix}}$$

2.3 Tipos de matrices

Existen varios tipos de matrices según sea su forma o cumplan unas determinadas propiedades.

- **Según su forma:**

Rectangular: Matriz con distinto número de filas que de columnas.

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cuadrada: Matriz con igual número de filas que de columnas. En estas matrices la dimensión viene denotada por un solo número.

Éstas son las matrices más comunes a lo largo del curso.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fila: Matriz de dimensión $1 \times n$ (una fila y n columnas).

$$A_{1\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Columna: Matriz de dimensión $m \times 1$ (1 columna y m filas).

Estas matrices suelen ser la representación matricial de vectores que veremos más adelante.

$$A_{3\times1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se puede ver también como la matriz cuyos únicos elementos distintos de cero son los que están por encima de la diagonal principal.

Este tipo de matriz se utiliza sobre todo en la resolución de sistemas de ecuaciones.

Triangular superior: Toda matriz cuadrada cuyos términos por debajo de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se puede ver también como la matriz cuyos únicos elementos distintos de cero son los que están por debajo de la diagonal principal.

Triangular inferior: Toda matriz cuadrada cuyos términos por encima de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para este tipo de matrices la asignatura dedica todo un tema. Aprenderemos a calcularlas y todas sus propiedades.

En los tres tipos anteriores de matrices el determinante se calcula directamente multiplicando su diagonal principal

Diagonal: Matriz cuadrada en la que todos los elementos son cero excepto los de la diagonal principal.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es de las más importantes del curso ya que aparece muy frecuentemente en operaciones con matrices y como veremos también es la matriz de una base canónica.

Unidad: Matriz diagonal en la que todos los elementos de su diagonal principal son unos. Se representa por I y es "el uno" de las matrices (al multiplicar cualquier matriz cuadrada por la identidad se queda igual).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalar: Matriz diagonal que tiene un mismo número en toda la diagonal principal. Es el resultado de multiplicar la matriz identidad por un número (escalar).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\cdot I$$

- **Según sus propiedades:**

Las propiedades y definición de la inversa de una matriz son iguales que las del elemento inverso de los números normales.

Inversa de una matriz cuadrada A: Es una matriz que cumple que premultiplicada y postmultiplicada por la matriz A da como resultado la matriz identidad I. Se representa por A^{-1}. Como la división entre matrices no existe, será nuestra herramienta para despejar en ecuaciones matriciales cuando tenemos dos matrices multiplicando. No todas las matrices cuadradas tienen inversa, sólo aquellas cuyo determinante sea distinto de cero.

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \text{ entonces } A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Regular: Matriz cuadrada que tiene inversa y por lo tanto determinante distinto de cero.

$$A \text{ regular} \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Singular: Matriz cuadrada que no tiene inversa y por lo tanto determinante igual a cero.

$$A \text{ singular} \Leftrightarrow \nexists A^{-1} \Leftrightarrow |A| = 0$$

Transpuesta: Esta matriz se obtiene como resultado de aplicar a una matriz (que no tiene por qué ser cuadrada) la transformación de la transposición que consiste en cambiar las filas por las columnas. Se representa por A^t.

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \text{ entonces } A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

Estas matrices aparecen sobre todo en el último tema de esta primera parte de Álgebra y en el cálculo de máximos y mínimos en la parte de cálculo.

Simétrica: Matriz cuadrada cumpliendo que $A = A^t$. Se la llama simétrica porque sus elementos son simétricos respecto a la diagonal principal.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Antisimétrica: Matriz cuadrada cumpliendo que $A = -A^t$. Sus elementos también son simétricos respecto de la diagonal principal pero con signos opuestos.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ -3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=-A$$

Ortogonal: Matriz cuadrada cumpliendo que $A^t = A^{-1}$ y para ello su determinante debe valer uno o menos uno.

$$A \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow A^{-1}=A^t \Leftrightarrow A^t\cdot A = A\cdot A^t = I \Rightarrow |A| = 1 \text{ ó } -1$$

Nula: Aquella que tiene todos sus elementos cero. Se representa por 0.

Idempotente: Matriz cuadrada que cumple que al multiplicarse por si misma no cambia, es decir, $A^2 = A$. Por lo tanto al elevarla a cualquier número se queda igual.

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix} \; A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Nilpotente de orden p: Matriz cuadrada si se multiplica por sí misma p veces se obtiene la matriz nula, $A^p = 0$. Por lo tanto si elevamos esta matriz a un número mayor o igual a p nos queda la matriz nula.

Involutiva o unipotente: Matriz cuadrada es su propia inversa, es decir, cumple que $A^2 = I$. Por lo tanto si elevamos esta matriz a un número par nos da la matriz identidad pero si es impar nos da la matriz original.

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}, A\cdot A = A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2\cdot A = I\cdot A = A$$

2.4 Determinante de una matriz

El determinante **es un número** que resulta de aplicarle una serie de operaciones a los elementos de una matriz cuadrada y se denota de la siguiente manera:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix}a_{11} & \dots & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Para calcular un determinante existen principalmente dos métodos. El más conocido, aunque sólo nos permite calcular determinantes de orden dos y tres, es el de la regla de Sarrus:

Regla de Sarrus para determinantes de orden dos:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - cb$$

Regla de Sarrus para determinantes de orden tres:

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

Para el cálculo de determinantes de cualquier orden, incluidos los de orden dos y tres, existe el método de los adjuntos. Para ver este método debemos aprender primero los conceptos de *menor complementario* y *adjunto* de un elemento de una matriz.

Menor complementario: el menor complementario de un elemento a_{ij} es el determinante que resulta de suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima, O sea, es el determinante de lo que queda al quitar la fila y la columna del elemento a_{ij}.

$$\text{En } A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ el menor complementario del elemento } a_{2,3} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1$$

Adjunto: se llama adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario una vez que se le ha puesto el signo que le corresponde. El signo será positivo si $i+j$ es par y el signo será negativo si $i+j$ es impar. Colocaremos las posiciones que cambian de signo según la forma de un tablero de ajedrez.

En $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ el adjunto del elemento $a_{2,3}=(-1)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)$

Método de los adjuntos para el cálculo de determinantes:

Éste método consiste en escoger una fila o columna y sumar todos sus elementos multiplicados por su adjunto:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=8-0+(-1)(-5)=13$$

Esto requiere normalmente muchas operaciones, por ejemplo para un determinante de 4x4 hay que hacer 4 determinantes de 3x3, para uno de 5x5 serían 5 determinantes de 4x4 o 20 determinantes de 3x3. Por eso antes de ponernos a operar los determinantes mediante este método utilizaremos las propiedades de los determinantes para conseguir una fila o columna con el mayor número de ceros posible y así reducir el número de operaciones.

- **Propiedades de los determinantes:**

→ El determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales:

$$|A|=|A^t|$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 5\end{vmatrix}=6$$

Esta propiedad es muy útil sobre todo una vez veamos el tema de diagonalización ya que una matriz y su diagonal tienen el mismo determinante.

→ Los determinantes de dos matrices semejantes son iguales:

Si $A=P\cdot D\cdot P^{-1}\Rightarrow|A|=|D|$

→ Si se multiplica una fila o columna por un número el determinante es igual al número multiplicado por el determinante inicial.

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & 4\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\cdot1 & 2\cdot1 & 2\cdot2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)=-2$$

En algunos exámenes han hecho preguntas sobre esta propiedad en la que casi todo el mundo se equivoca.

Hay que tener cuidado con esta propiedad porque pueden pedirnos calcular cuánto vale el determinante de una matriz por un número, y hay que tener en cuenta que al multiplicar la matriz por el número se multiplican todas sus filas, por lo tanto esto es igual el número elevado al número de filas por el determinante de la matriz:

$$|k\cdot A_n|=k^n\cdot|A_n|,\quad k\in\mathbb{R}$$

$$\left|2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}2\cdot1 & 2\cdot1 & 2\cdot2\\ 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2\cdot(-1)\\ 2\cdot0 & 2\cdot0 & 2\cdot1\end{vmatrix}=2^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=8\cdot(-1)=-8$$

→ El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2$$

→ Si se intercambian dos filas o columnas de un determinante su valor cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2), \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

→ Si se suma a una fila o columna otra fila o columna multiplicada por un escalar el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2), \xrightarrow{C_2 = 2C_2 + C_3} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)$$

→ Si se suma a una fila o columna una combinación lineal de otras filas o columnas el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2), \xrightarrow{C_1 = C_1 + 2C_2 - C_3} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)$$

→ Si hay una fila o columna que es combinación lineal de las restantes filas o columnas el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{porque}\, C_3 = 2C_1 + C_2$$

→ Si hay una fila o columna con todos sus elementos nulos el determinante vale cero porque el cero es siempre linealmente dependiente.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 14 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.5 Traza de una matriz

Es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada y se representa por $tr(A)$:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\0 & -4 & 1\\6 & 3 & 9\end{pmatrix} \quad tr(A) = 2-4+9 = 7$$

- **Propiedades de la traza:**

→ La traza de la suma de dos matrices cuadradas es igual a la suma de sus trazas:

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$$

$$tr\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -1 & 3\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}=2,\ tr\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}=3$$

$$tr\left[\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -1 & 3\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right]=tr\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 0 & 4\\2 & 2 & 3\end{pmatrix}=2+3=5$$

→ La traza de una matriz multiplicada por un número es el número multiplicado por la traza de la matriz:

$$tr(k\cdot A)=k\cdot tr(A),\ k\in\mathbb{R}$$

$$tr\left[5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right]=tr\begin{pmatrix}5 & 0 & 5\\0 & 5 & 5\\5 & 5 & 5\end{pmatrix}=15=5\cdot tr\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}=5\cdot 3$$

→ La traza del producto de dos matrices cuadradas es independiente del sentido de la multiplicación:

$$tr(A\cdot B)=tr(B\cdot A)$$

$$tr\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\right]=tr\begin{pmatrix}6 & 3\\-3 & 0\end{pmatrix}=6$$

$$tr\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}\right]=tr\begin{pmatrix}1 & -1\\4 & 5\end{pmatrix}=6$$

→ Las trazas de dos matrices semejantes son iguales:

Si $A=P\cdot D\cdot P^{-1}\Rightarrow tr(A)=tr(B)$

Esta propiedad será útil una vez veamos el tema de diagonalización si nos piden calcular la traza de una matriz de la que conocemos sus autovalores.

→ La traza de una matriz y su transpuesta son iguales:

$$tr(A)=tr(A')$$

$$tr\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}=tr\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}=8$$

Observaciones: Fíjate que en general, $tr(AB) \neq tr(A)\,tr(B)$ y $tr(A^{-1}) \neq [tr(A)]^{-1}$.

2.6 Rango de una matriz

Para comprender qué es el rango de una matriz primero debemos conocer el concepto de combinación lineal.

Combinación lineal: Una fila o columna es combinación lineal o linealmente dependiente de las demás si podemos juntarlas todas en una ecuación lineal igualada a cero, o lo que es lo mismo, si podemos llegar a ella a partir de sumar o restar las demás multiplicadas por un número.

En la matriz $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$

la tercera columna es combinación lineal de las otras dos ya que $C_3 = C_1 + 2C_2$

Se dice que un conjunto de filas o columnas son linealmente dependientes si se puede establecer entre ellas al menos una combinación lineal.

Rango de una matriz: Es el número de filas o columnas linealmente independientes que tiene la matriz. Se representa por $rg(A)$.

Para calcularlo primero buscaremos filas o columnas linealmente dependientes "a ojo" y las tacharemos.

Cuando no encontremos ninguna calcularemos los determinantes más grandes que podamos hacer con las filas y columnas restantes. Si encontramos alguno que sea distinto de cero, el rango será el orden de ese determinante.

Si no encontramos ninguno probaremos con los determinantes de un orden menor, y así sucesivamente hasta encontrar uno que sea distinto de cero.

- **Propiedades del rango:**

→ El mínimo rango que puede tener una matriz es uno, salvo la matriz nula (0) que tiene rango cero.

→ El máximo rango que puede tener una matriz es el mínimo entre el número de filas y el número de columnas.

→ El rango por filas coincide siempre con el rango por columnas.

→ Una matriz y su transpuesta siempre tienen el mismo rango. $rg(A)=rg(A')$

2.7 Transformaciones de matrices

- **Matriz adjunta:**

Esta transformación consiste en sustituir cada elemento por su adjunto. Se denota por $adj(A)$ o por A^d:

$$adj\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ (-1)\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -3 & -4 & 3\end{pmatrix}$$

Truco: Si cogemos cualquier fila o columna de la matriz adjunta y la multiplicamos escalarmente por la fila o columna correspondiente de la matriz original nos da como resultado el determinante de la matriz original.

- **Transposición de matrices:**

Se denomina así a la transformación de cambiar filas por columnas.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 3\\ 8 & 2\end{pmatrix}$$

Esta transformación tiene una serie de propiedades que debemos aprender sobre todo para aplicarlas a la hora de despejar ecuaciones matriciales.

Propiedades de la transposición:

$\rightarrow (A^t)^t = A$

$\rightarrow (A+B)^t = A^t + B^t$

$\rightarrow (k\cdot A)^t = k\cdot A^t$

$\rightarrow (A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$ — ¡¡¡Cuidado con esta propiedad!!! Fíjate que se cambian de orden.

$\rightarrow A\cdot A^t = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$\rightarrow |A^t| = |A|$

$\rightarrow adj(A^t) = [adj(A)]^t$

- **Matriz inversa**

Se dice que A^{-1} es la matriz **inversa** de A cuando se cumple que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Cálculo de la matriz inversa:

Existen principalmente dos métodos para calcular la inversa de una matriz, el que utilizaremos es el de la fórmula, mientras que el método de Gauss-Jordan sólo lo mencionaremos porque en la práctica no se usa y el del sistema de ecuaciones es tan laborioso que no merece la pena.

→ **Fórmula:** Cualquier matriz inversa de una matriz cuadrada se puede calcular mediante la siguiente fórmula.

Debido a las diferentes notaciones de la adjunta y a la propiedad que nos permite intercambiar el orden entre la transformación de adjunción y transposición, esta fórmula se puede escribir de cuatro maneras distintas, escoge la que más te guste.

$$A^{-1} = \frac{\left[adj(A)\right]^t}{|A|} = \frac{adj(A^t)}{|A|} = \frac{\left(A^d\right)^t}{|A|} = \frac{\left(A^t\right)^d}{|A|}$$

Truco: Si calculas primero la matriz adjunta, puedes calcularte el determinante multiplicando escalarmente cualquier fila o columna de la adjunta por su correspondiente de la original y así ahorras operaciones y puedes comprobar si has calculado bien la matriz adjunta ya que todas las filas y columnas deben darte el mismo resultado.

→ **Método de Gauss-Jordan:** Este método consiste en realizar operaciones elementales sobre la matriz $(A \mid I)$ hasta conseguir que A se convierta en I. En ese momento la transformada de I es la matriz inversa A^{-1}.

→ **Método del sistema de ecuaciones:** Este método consiste en coger una matriz de incógnitas, aplicar las propiedades de la matriz inversa, despejar las ecuaciones y resolver:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y & 2x-y \\ z+t & 2z-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 2x-y=0 \\ z+t=0 \\ 2z-t=1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x = 1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/3 \\ t = -1/3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Este método es muy poco práctico y extremadamente largo y laborioso ya que si tenemos que hacer una inversa de 3x3 tendremos que resolver un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas.

Truco: Para hacer inversas de dos por dos basta con cambiar de sitio los dos elementos de la diagonal principal, de signo los de la diagonal secundaria y dividirlos por el determinante.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \text{ entonces } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz inversa:

→ La matriz inversa, si existe, es única.

→ Una matriz es regular (tiene inversa) $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

→ Una matriz es singular (no tiene inversa) $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$.

→ $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

→ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

¡¡¡Cuidado con esta propiedad!!! Fíjate que al igual que con la transposición, se cambian de orden

→ $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

→ $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

→ $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$

2.8 Matrices ortogonales

Decimos que una matriz A es ortogonal cuando se cumple que $A^{-1} = A'$. También podemos decir que A es ortogonal si $A \cdot A' = A' \cdot A = I$.

- **Propiedades de las matrices ortogonales:**

→ Si la matriz A es ortogonal entonces es regular (o sea, tiene inversa).

→ Si la matriz A es ortogonal su determinante sólo puede valer 1 ó -1.

→ Si la matriz A es ortogonal, entonces A^{-1} es ortogonal.

→ Si A y B son ortogonales, entonces AB y BA es ortogonal.

→ Si la matriz A es ortogonal, ninguna matriz obtenida como suma con A o producto de un escalar por A, es ortogonal.

2.9 Relaciones entre matrices

- **Matrices equivalentes:**

Dos matrices A y B de dimensión $m \times n$, se dice que son **equivalentes** si existen dos matrices regulares R y S tales que $A = RBS$.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ son equivalentes ya que existen dos matrices $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ tal que:

$$A = RBS \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 16 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrices congruentes:**

Dos matrices cuadradas A y B de orden n, se dice que son **congruentes** si existe una matriz regular R tal que $A = RBR'$.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$ son congruentes ya que existe $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ tal que $A = RBR'$

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Matrices semejantes:**

Dos matrices cuadradas A y B de orden n, se dice que son **semejantes** si existe una matriz regular R tal que $A = PBP^{-1}$.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ son semejantes ya que existe $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tal que $A = PBP^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices semejantes:

→ Si A y B son semejantes $\Rightarrow$ $|A| = |B|$

→ Si A y B son semejantes $\Rightarrow$ A y B son equivalentes

→ Si A y B son semejantes $\Rightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

→ Si A y B son semejantes $\Rightarrow$ A^n y B^n son semejantes

2.10 Transformaciones elementales

Una **transformación elemental** sobre cierta matriz A consiste en multiplicar dicha matriz, por la derecha o por la izquierda, según el tipo de transformación, por una matriz invertible. Las transformaciones elementales son las siguientes:

Transformación	**Ejemplo**
Sumar a una columna un múltiplo de **otra**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{c_2=c_2+3c_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Multiplicar una columna por un escalar **no nulo**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{c_1=5c_1}]{} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Intercambiar dos columnas	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{c_1\leftrightarrow c_2}]{} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Sumar a una fila un múltiplo de **otra**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{f_2=f_2+3f_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Multiplicar una fila por un escalar **no nulo**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{f_1=5f_1}]{} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Intercambiar dos filas	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{f_1\leftrightarrow f_2}]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Como hemos dicho, cada transformación elemental se corresponde con la operación de multiplicar por una cierta matriz invertible.

En la siguiente tabla asociamos a cada transformación por columnas su correspondiente transformación inversa por filas.

Columnas: t_c	**Filas: t_f**
$c_i = c_i + \lambda c_j$	$f_j = f_j - \lambda f_i$
$c_i = \lambda c_i$	$f_i = \dfrac{1}{\lambda} f_i$
$c_i \leftrightarrow c_j$	$f_i \leftrightarrow f_j$

2.11 Matrices particionadas

Dada una matriz cuadrada:

En muchas situaciones resulta útil particionar una matriz si el proceso da lugar a submatrices que permiten simplificar los cálculos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Podemos simplificarla de la siguiente manera:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

Donde cada elemento de esta matriz es, a su vez, otra matriz que tienen estas formas generales:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} \quad , \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Con A_{11} y A_{22} matrices cuadradas y $1 \le i \le n$.

Producto de matrices particionadas

Puesto que el producto de matrices se efectúa multiplicando filas de la que premultiplica por columnas de la que postmultiplica, cuando el producto es de matrices particionadas, las particiones establecidas han de ser tales que permitan multiplicar y sumar las submatrices correspondientes. Por lo tanto, una vez elegida la partición en la matriz que premultiplica, la partición por filas de la matriz que postmultiplica ha de ser de la misma forma que la partición por columnas de la matriz que premultiplica.

Cálculo del determinante

$$\det(A) = \det(A_{22}) \cdot \det(A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12})$$

Cálculo de la inversa

La matriz inversa de A expresada de forma particionada es:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

donde:

$$B_{11} = \left(A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}\right)^{-1} \quad , \quad B_{12} = A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \cdot \left(A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}\right)^{-1}$$

$$B_{21} = A_{22}^{-1} \cdot A_{21} \cdot \left(A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}\right)^{-1} \quad , \quad B_{22} = \left(A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}\right)^{-1}$$

2.12 Concepto de sistema lineal de ecuaciones

Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas se define de la siguiente forma:

Los coeficientes del sistema pueden ser reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Llamamos a las matrices:

Fíjate que la matriz de coeficientes A no tiene por qué ser cuadrada, es decir puede haber más incógnitas que ecuaciones o viceversa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$ matriz de coeficientes (dimensión m x n)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$$ matriz de incógnitas (dimensión n x 1)

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$$ matriz de términos independientes (dimensión m x 1)

Normalmente nos referiremos a un sistema de ecuaciones genérico de la siguiente forma:

$$Ax = b$$

En los sistemas de ecuaciones lineales nos pueden pedir tres cosas:

- Plantear el sistema a partir de un enunciado.
- Discutir el sistema (Decir si es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).
- Resolver el sistema (Calcular el valor de las incógnitas)

2.13 Planteamiento

Desgraciadamente para este paso no hay ninguna fórmula o mecanismo que podamos memorizar y que siempre funcione. Cada enunciado es distinto a todos los demás.
Lo único que tenemos que tener siempre presente es que lo primero que debemos hacer es **definir las incógnitas**. Es decir, escribir en el papel qué representa cada una de las incógnitas del enunciado. Hacer esto nada más empezar es fundamental.

2.14 Discusión

Discutir un sistema consiste en averiguar, antes de resolverlo, si el sistema tiene solución (y en ese caso, cuántas).

Para discutir un sistema utilizaremos siempre el Teorema de Rouché- Frobenius. El procedimiento para discutir un sistema es el siguiente:

A partir del sistema lineal que nos dan (nosotros lo vamos a suponer de tres incógnitas por simplicidad, pero el método es igualmente válido para más incógnitas):

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\}$$

obtenemos la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $A^* = [A \mid b]$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^* = [A \mid b] = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Ahora se trata de calcular el rango de las dos matrices, tanto de la matriz de coeficientes como de la ampliada. Estos rangos los podemos calcular como nosotros queramos utilizando los procedimientos ya vistos en el tema de Matrices.

Una vez que hemos calculado los dos rangos basta con aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius cuyo enunciado viene a continuación.

Teorema de Rouché-Frobenius

- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.
  El sistema tiene una única solución.

- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.
  El sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.
  El sistema no tiene ninguna solución.

2.15 Resolución

Para resolver un sistema de ecuaciones vamos a basarnos principalmente en el método de Gauss. Para ello tenemos que aprender a reducir una matriz mediante transformaciones elementales (ya vistas en el tema de matrices) a otra matriz equivalente pero más sencilla con la que resolver el sistema sea trivial.

Decimos que dos matrices A y B son matrices **fila equivalentes** si cualquiera de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales tipo fila.

Mediante transformaciones elementales se puede transformar cualquier matriz A en otra con determinadas características de modo que sean fila equivalentes. Aquí vamos a estudiar la forma reducida de Gauss y la forma reducida de Gauss- Jordan.

Forma reducida de Gauss

El **pivote** o **coeficiente principal de una fila** es el primer coeficiente distinto de cero de dicha fila.

NOTA:
Hay libros en los que, en la definición de forma reducida de Gauss, se exige que los pivotes valgan 1. Nosotros dejamos esa condición para la forma reducida de Gauss-Jordan

Una matriz está en forma reducida de Gauss, si:

1. Las filas no nulas están por encima de las filas nulas.
2. El coeficiente principal de cada fila está en alguna columna a la derecha del coeficiente principal de la fila anterior.
3. Los coeficientes por debajo de cada coeficiente principal (en su columna) son cero.

Ejemplo de matriz reducida de Gauss:

$$\begin{pmatrix} \otimes & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \otimes & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \otimes & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 = elementos nulos
$\otimes$ = coeficientes principales o pivotes
* = elementos cualesquiera

Obtención de la matriz reducida de Gauss

1. Tomamos la primera columna no nula (que llamaremos columna pivote)
2. Colocamos un coeficiente no nulo de la columna pivote en la posición pivote.
3. Mediante transformaciones elementales de filas, anulamos los coeficientes por debajo del pivote.
4. Repetimos el proceso con la submatriz que queda debajo de la fila que contiene al pivote.

Forma reducida de Gauss-Jordan (escalonada reducida)

Una matriz está en forma reducida de Gauss-Jordan, si:

1. Está en forma reducida de Gauss.
2. Todos los coeficientes principales son 1.
3. El coeficiente principal es el único elemento no nulo en su columna.

Ejemplo de matriz reducida de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 = elementos nulos
1 = elementos unidad
$*$ = elementos cualesquiera

Obtención de la matriz reducida de Gauss-Jordan

1. Hallamos la forma reducida de Gauss.
2. Se anulan los coeficientes por encima de cada pivote, empezando por el pivote más a la derecha.
3. Se transforman los pivotes en 1.

Propiedades

1. El rango de una matriz reducida de Gauss-Jordan es igual al número de filas no nulas y además siempre coincide con el número de columnas donde hay pivotes.
2. Toda matriz es fila equivalente a una única matriz reducida de Gauss-Jordan.
3. Si A y B están en forma reducida de Gauss-Jordan y son fila equivalentes, entonces son iguales.

Otros métodos de resolución

- Si el sistema es Compatible Determinado

Método de Cramer:

Este método consiste en calcular las soluciones mediante determinantes. La solución viene dada por el determinante que resulta de sustituir en la matriz A la columna de la incógnita que queremos despejar por la de resultados y dividirlo por el determinante de A:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|};\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|};\ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Es un método muy práctico y sistemático, pero tiene la pega de que para sistemas de más de tres ecuaciones requiere muchas cuentas.

- Si el sistema es Compatible Indeterminado

Los Compatibles Indeterminados poseen infinitas soluciones que dependen de los valores que le demos a unos parámetros, esto quiere decir que hay infinitas combinaciones de números que cumplen el sistema y que se sacan según unas reglas que se llaman *ecuaciones paramétricas*. Para resolverlos haremos lo siguiente:

Primero: Calculamos el número de parámetros que necesitamos para su solución:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Nº Parámetros} = \text{Nº de incógnitas} - \text{Nº de ecuaciones l.i.} \\ \text{Nº Parámetros} = \text{Nº de incógnitas} - Rg\left(A^*\right) \end{array}}$$

Segundo: Asignamos los parámetros a las incógnitas según la siguiente regla de preferencia:

1º – Incógnita que no aparezca en ninguna ecuación

2º – Incógnita que aparezca en mayor número de ecuaciones

3º – Incógnita que vaya multiplicada por el número mayor

Esta regla de preferencias no es infalible, existen casos en los que nos lleva a una mala asignación de parámetros, pero en la mayoría nos evitará complicaciones y simplificará las operaciones y los resultados.

Tercero: Pasamos todos los parámetros al lado de los términos independientes y ya tenemos un sistema Compatible Determinado con términos independientes con letras que podemos resolver mediante los métodos anteriores.

TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

3.1 Definición de espacio vectorial

También diremos que: "E es un K-e.v."

Sea E un conjunto no vacío y K un cuerpo. Se dice que la terna $(E, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial** definido sobre K si se cumple lo siguiente:

La condición a) nos dice que E es grupo abeliano con respecto a la operación interna

a) + es una ley de composición interna que cumple:

Los elementos de un espacio vectorial se llaman vectores y los denotaremos con una flechita encima para distinguirlos de los escalares

a1) Asociativa:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \quad , \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in E$$

a2) Elemento neutro:

$$\vec{v} + \vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{v} = \vec{v} \quad , \vec{v} \in E$$

Al elemento 0_E se le denomina elemento neutro del espacio vectorial

a3) Elemento inverso:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}_E \ , \ \vec{v} \in E$$

a4) Conmutativa:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad , \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \underline{E}$$

b) $\cdot$ es una ley de composición externa que cumple:

b1) Distributiva respecto a la suma de escalares:

$$(k_1 + k_2) \cdot \vec{v} = k_1 \cdot \vec{v} + k_2 \cdot \vec{v} \quad , \quad \vec{v} \in E \quad k_1, k_2 \in \mathrm{K}$$

b2) Distributiva respecto a la suma de vectores:

$$k \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = k \cdot \vec{v}_1 + k \cdot \vec{v}_2 \quad , \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E \quad k \in \mathrm{K}$$

b3) Asociativa mixta:

$$(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{v} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{v}) \quad , \quad \vec{v} \in E \quad k_1, k_2 \in \mathrm{K}$$

b4) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \ , \ \vec{v} \in E$

Primeras propiedades de un espacio vectorial

Ojo, no confundir: 0_E es el elemento neutro del espacio vectorial E mientras que 0 es el elemento neutro del cuerpo K

Sea $(E, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Sean $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$ y sean $k, k_1, k_2 \in$K. Se cumple que:

1. $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}_E$
2. $k \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$
3. Si $k \cdot \vec{v} = 0_E \Rightarrow k = 0$ ó $\vec{v} = \vec{0}_E$
4. $(-k) \cdot \vec{v} = (-k \cdot \vec{v})$
5. $k \cdot (-\vec{v}) = (-k \cdot \vec{v})$
6. Si $k \cdot \vec{v}_1 = k \cdot \vec{v}_2$ con $k \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$
7. Si $k_1 \cdot \vec{v} = k_2 \cdot \vec{v}$ con $\vec{v} \neq 0_E \Rightarrow k_1 = k_2$

3.2 Subespacios vectoriales

Llamamos **subespacio vectorial** de E a cualquier subconjunto de E que tenga estructura de espacio vectorial.

Sea H un subconjunto no vacío de E, $H \subset E$. Para probar que H es un subespacio vectorial de E tenemos dos posibilidades.

La primera es demostrar que H es un espacio vectorial, para ello deberíamos probar las ocho condiciones de espacio vectorial (a1-a4 y b1-b4). Esta opción, aunque posible, no útil en la práctica.

Lo haremos siempre de esta segunda forma

La segunda opción es utilizar la siguiente caracterización de subespacio vectorial:

Decimos que H es un **subespacio vectorial** de E (lo notaremos como $H < E$) si y sólo si:

a) $\vec{0}_E \in H$

b) Cumple simultáneamente:

Es importante recalcar que el + y el · que utilizamos para operar los elementos de H son la lcl y la lce de E

b₁) $\forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in H \;\Rightarrow\; \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in H$

b₂) $\forall\, \vec{v}_1 \in H, \forall k \in \mathrm{K} \;\Rightarrow\; k \cdot \vec{v}_1 \in H$

Las dos condiciones del apartado b) se pueden reunir en una sola:

$$\forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in H,\ \forall\, k_1, k_2 \in \mathrm{K} \text{ se cumple que } k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 \in H$$

Formas de expresar los subespacios vectoriales

Normalmente cuando nos den un subespacio vectorial nos lo escribirán en forma cartesiana o en forma paramétrica:

- Forma cartesiana

Nos definen el subconjunto por sus ecuaciones cartesianas. Por tanto todos los elementos que pertenecen a ese subconjunto deben satisfacer las ecuaciones cartesianas.
Ejemplos:

La dimensión de un subespacio siempre es la dimensión del espacio vectorial total menos el número de ecuaciones cartesianas linealmente independientes

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x + 4y = 0\}$ A viene definido por una ecuación cartesiana

$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - 2x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = 0\}$ S_3 viene definido por 2 ecu.cartesianas

- Forma parámetrica

Nos definen el subconjunto por sus ecuaciones paramétricas. Por tanto todos los elementos que pertenecen a ese subconjunto deben satisfacer las ecuaciones paramétricas, lo que quiere decir que exista algún valor de los parámetros que nos devuelva nuestro elemento.
Ejemplos:

$H = \{(\alpha, \beta - \alpha, 2\beta) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ H viene definido en forma paramétrica donde α y β son los parámetros.

La dimensión de un subespacio siempre coincide con el número de parámetros

$M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \beta \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ M viene definido en forma parámetrica.

3.3 Intersección y suma de subespacios

Sean M y N dos subespacios vectoriales de *E*. Dos tipos de subespacios vectoriales importantes son los siguientes:

- Se define el **subespacio intersección** como:

$$M \cap N = \{\vec{v} \in E : \vec{v} \in M \ \wedge \ \vec{v} \in N\}$$

La intersección de dos subespacios vectoriales es siempre otro subespacio vectorial.

Ojo:
No confundir la suma de subespacios con la unión de subespacios

- Se define el **subespacio suma** como:

$$M + N = \{\vec{v} \in E : \exists \vec{u} \in M, \exists \vec{w} \in N, \ \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}\}$$

Análogamente se puede definir la suma de n subespacios vectoriales:

$$H_1 + ... + H_n = \{ \vec{v} \in E : \exists \vec{u}_1 \in H_1, ... \exists \vec{u}_n \in H_n, \ \vec{v} = \vec{u}_1 + ... + \vec{u}_n \}$$

La suma de subespacios vectoriales es siempre otro subespacio vectorial.

- La unión de subespacios vectoriales no es, en general, subespacio vectorial. La unión de subespacios vectoriales carece, por tanto, de interés para la asignatura.

3.4 Suma directa. Subespacios suplementarios

- Decimos que la suma de dos subespacios M y N es **directa** si cualquier vector de dicha suma puede expresarse de una única forma como suma de vectores de M y N. A la suma directa de dos subespacios se la denota poniendo $M \oplus N$. Es decir:

Recuerda:
El símbolo $\exists!$ significa "existe un único"

$$M \oplus N = \{\vec{v} \in E : \exists! \, \vec{u} \in M, \exists! \, \vec{w} \in N, \ \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}\}$$

Importante:
Esta propiedad sólo es válida para <u>dos</u> subespacios vectoriales

Propiedad:
Si la suma de dos subespacios M y N del espacio vectorial E es **directa** siempre se cumple que:

$$M \cap N = \{\vec{0}_E\}$$

- Sea E un espacio vectorial y sean M y N dos subespacios de *E*, se dice que M y N son **suplementarios** cuando la suma de los dos subespacios es directa y además el resultado es el espacio vectorial total *E*. Es decir,

$$M \oplus N = E$$

lo que equivale a decir que:

Resumiendo:
Si dos espacios son suplementarios su intersección tiene que ser el neutro y su suma tiene que ser el total

$$M \text{ y } N \text{ son } \textbf{suplementarios} \Leftrightarrow \begin{cases} M \cap N = \{\vec{0}_E\} \\ M + N = E \end{cases}$$

3.5 Dependencia e independencia lineal

Combinación lineal

Se dice que el vector v es combinación lineal del conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ si se puede expresar de la siguiente forma:

$$v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$

Dependencia lineal

Decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente dependientes** si existen unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no todos nulos, tal que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E$. Es decir:

El 0_E del final se refiere al vector nulo no al número cero. No se debe confundir una cosa con la otra

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \text{ son l.d. } \Leftrightarrow \exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0,\ldots,0) \,/\, \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E$$

De manera más sencilla decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son linealmente dependientes si uno de ellos es combinación lineal del resto.
A un conjunto de vectores linealmente dependientes se le llama conjunto **ligado.**

Independencia lineal

Decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ **son linealmente independientes** si para que se cumpla $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E$ todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, deben ser nulos. Es decir:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \text{ son l.i.} \Leftrightarrow (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0,\ldots,0))$$

De manera más simple, decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son linealmente independientes si ninguno de ellos es combinación lineal del resto.
A un conjunto de vectores linealmente independientes se le llama conjunto **libre.**

Algunas Propiedades interesantes

A continuación se enumeran algunas propiedades interesantes:

- El vector nulo 0 siempre es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores.
- Cualquier conjunto de vectores donde esté el vector nulo es siempre un conjunto ligado.
- Un conjunto formado por un solo vector (que no sea el vector nulo) es siempre un conjunto libre.
- Si a un conjunto libre le quitas un vector sigue siendo un conjunto libre.
- Si a un conjunto libre le añades un vector entonces puede seguir siendo libre o convertirse en ligado.
- Si a un conjunto ligado le añades un vector sigue siendo un conjunto ligado.
- Si a un conjunto ligado le quitas un vector entonces puede seguir siendo ligado o convertirse en libre.

3.6 Variedad lineal

Sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ un subconjunto de vectores de E. Se define la **variedad lineal** de A como el conjunto de vectores de E formado por todas las combinaciones lineales de vec-tores de A. Es decir:

$$L(A) = \left\{\vec{v} \in E \,/\, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K} \,..\, v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n \right\}$$

Se dice que A es un sistema **generador** de $L(A)$.

Propiedades

- $L(A)$ es siempre subespacio vectorial.
- $L(A)$ es el mínimo subespacio de E que contiene al subconjunto A.
- $A \subset B \Rightarrow L(A) \subset L(B)$
- Si A es subespacio de E entonces $L(A) = A$
- $L(\varnothing) = \left\{\vec{0}_E\right\}$
- Sea B una base del subespacio vectorial M y B' base del subespacio vectorial N se cumple que:

$$L(B \cup B') = M + N$$

3.7 Base y dimensión

Base de un espacio vectorial

Se dice que un conjunto de vectores $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es **base** de un espacio vectorial E si se cumple que:

1) B es un sistema libre
2) $L(B) = E$ (B es un sistema generador de E)

También se puede utilizar esta otra caracterización:
Se dice que un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de un espacio vectorial si es un conjunto libre y el número de elementos del conjunto es igual a la dimensión del espacio vectorial.

Dimensión de un espacio vectorial

La dimensión es siempre un número natural

Al número de vectores que tiene cualquier base de un determinado espacio vectorial E se le denomina **dimensión.** Un espacio vectorial puede tener muchas bases pero todas tienen el mismo número de elementos. A ese número de elementos es al que llamamos dimensión del espacio vectorial.

Relación de Grassmann

Sean M y N dos subespacios de un espacio vectorial E. Se cumple que:

$$\dim(M + N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N)$$

Si la suma de los dos subespacios es directa la relación queda:

3.8 Resumen de las definiciones Espacios Vectoriales

Espacio vectorial

Terna $(E,+,\cdot)$ donde E es un conjunto, $+$ es una lci cumpliendo las condiciones a1-a4 y $\cdot$ es una lce cumpliendo las condiciones b1-b4.

Subespacio vectorial

$$H<E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, v_1, v_2 \in H,\ \forall\, k_1, k_2 \in \mathrm{K} \text{ se cumple que } k_1v_1 + k_2v_2 \in H$$

Subespacio suma

M y *N* son sub-espacios vectoriales

$$M+N = \{v\in E : \exists u \in M, \exists w \in N,\ v = u+w\}$$

Subespacio intersección

$$M \cap N = \{v \in E : v \in M \wedge v \in N\}$$

Suma directa

La suma es **directa** $\Leftrightarrow M\oplus N=\{v\in E : \exists!\, u\in M, \exists!\, w\in N, v=u+w\} \Leftrightarrow M\cap N=\{\vec{0}_E\}$

Subespacios suplementarios

$$M \text{ y } N \text{ son } \textbf{suplementarios} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} M\cap N=\{\vec{0}_E\} \\ M+N=E \end{cases}$$

Combinación lineal

$$v \text{ es combinación lineal de } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2,\dots, \vec{v}_n\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n$$

Dependencia lineal

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2,\dots, \vec{v}_n\} \text{ son l.d.} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0,\dots,0) \,/\, \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}_E$$

Conjunto ligado

Conjunto de vectores linealmente dependientes entre sí

Independencia lineal

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2,\dots, \vec{v}_n\} \text{ son l.i.} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}_E \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0,\dots,0))$$

Conjunto libre

Conjunto de vectores linealmente independientes entre sí

Subespacio engrendrado

$$L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2,\dots, \vec{v}_n\}) = \{\vec{v}_1 \in E \,/\, \exists \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathrm{K} \,..\, v = \alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n\}$$

Conjunto generador

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2,\dots, \vec{v}_n\} \text{ es generador de } H \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \vec{v} \in H \,..\, \exists \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathrm{K} \,/\, v = \alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n$$

Base

Un conjunto es base de H si es un conjunto libre y generador de H

Dimensión

Número de vectores que tiene cualquier base de un espacio vectorial

3.9 Resultados importantes sobre espacios vectoriales

A continuación se enuncian, sin demostración, una lista de proposiciones y resultados importantes sobre espacios vectoriales que son de gran utilidad.

- Sean E, E' dos K-e.v.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{l} E \subset E' \\ \dim(E) = \dim(E') \end{array}\right\} \Rightarrow \quad E = E'$$

- Sea E $\mathrm{K}-e.v.$ con $\dim(E) = n$ y sea un sistema de n vectores $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$. Se cumple que:

Fíjate que el número de vectores del sistema coincide con la dimensión de la base

Si $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ libre $\Rightarrow$ $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ es base de E

Si $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ generador de E $\Rightarrow$ $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ es base de E

- Sea E K-e.v. con $\dim(E) = n$.

Si un sistema de p vectores $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ es generador de E $\Rightarrow$ $p \geq \dim(E) = n$

Si un sistema de p vectores $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ es libre de E $\Rightarrow$ $p \leq \dim(E) = n$

- Sea E K-e.v. con $\dim(E) = n$.

Si a un sistema libre de n vectores $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ se le añade un vector se convierte en un sistema ligado.

- Teorema de existencia de base

Todo espacio vectorial E de dimensión finita tiene, al menos, una base.

- Teorema de equipotencia de bases

Todas las bases de un espacio vectorial E de dimensión finita tienen el mismo número de elementos.

- Teorema de extensión de base

En un espacio vectorial E de dimensión finita todo sistema libre de vectores puede completarse hasta obtener una base de E.

Lo que no dice el teorema es qué vectores hay que añadir para obtener la base

- Subespacios impropios de E

Sea E un K-e.v cualquiera. Los subconjuntos $\{\vec{0}_E\}$ y E son siempre subespacios vectoriales de E. Se denominan subespacios impropios.

3.10 Coordenadas de un vector respecto a una base

Por simplicidad vamos a explicar estos apartados para el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. En otros espacios vectoriales el razonamiento es similar.

Un vector $\vec{v}$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ tiene siempre unas coordenadas únicas $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ con respecto a la base canónica $B_c = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$:

$$\vec{v} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 \quad \Rightarrow \quad (\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

O sea, las coordenadas de un vector con respecto a una base se definen como los escalares por los que hay que multiplicar cada vector de la base para dar el vector v.
Sin embargo existen otras bases y la cuestión es saber qué coordenadas tendrá el vector v con respecto a otras bases que no sean la base canónica.

3.11 Cambio de base

Sea la base canónica de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:

$$B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Sea una base distinta de la base canónica:

$$B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$$

La matriz de cambio de base de la base B a la base canónica B_c es:

$$M_{B_c}^{B} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

Las propiedades más importantes de esta matriz son:

1. $M_{B}^{B_c} = \left(M_{B_c}^{B}\right)^{-1}$
2. $M_{B'}^{B} = M_{B'}^{B_c} \cdot M_{B_c}^{B}$

Este es el caso más simple que nos puede ocurrir

Cambio de base de una base cualquiera a la base canónica

Los datos que nos tienen que dar siempre son:

- Una base: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Un vector con coordenadas expresadas en la base B: $\vec{v}_B = (x, y, z)$

$$\vec{v}_{B_c} = M_{B_c}^{B}\,\vec{v}_B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cambio de base de la base canónica a otra base cualquiera

Los datos que nos tienen que dar son:

- Una base: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Un vector con coordenadas expresadas en la base canónica B_c: $\vec{v}_{Bc} = (\alpha, \beta, \gamma)$

Aplicamos la propiedad 1 de la matriz de cambio de base

$$\vec{v}_B = \left(M_{B_c}^{B}\right)^{-1} \vec{v}_{B_c} \;\Rightarrow\; \vec{v}_B = M_B^{B_c}\, \vec{v}_{B_c} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Cambio de base entre dos bases cualesquiera

Los datos que nos tienen que dar son:

- Una base: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Otra base: $B' = \{(w_{11}, w_{21}, w_{31}), (w_{12}, w_{22}, w_{32}), (w_{13}, w_{23}, w_{33})\}$
- Un vector con coordenadas expresadas en una de las bases B: $(\vec{v})_B = (\alpha, \beta, \gamma)$

Aplicamos las propiedades 1 y 2 de la matriz de cambio de base

$$\vec{v}_{B'} = \left(M_{B_c}^{B'}\right)^{-1} \cdot M_{B_c}^{B}\, \vec{v}_B \;\Rightarrow\; \vec{v}_{B'} = M_{B'}^{B_c} \cdot M_{B_c}^{B}\, \vec{v}_B \;\Rightarrow\; \vec{v}_{B'} = M_{B'}^{B}\, \vec{v}_B$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Obtención formal de la matriz de cambio de base

Antes hemos visto que la matriz de cambio de base de la base B a la base canónica B_c es:

$$M_{B_c}^{B} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a ver la demostración de por qué esto es así:

Esta es la demostración formal de cómo se obtiene la matriz de cambio de base de una base cualquiera a la base canónica

Sea la base canónica $B_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y sea otra base cualquiera $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ cuyas coordenadas vienen expresadas en función de la base canónica:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_{11}\vec{e}_1 + u_{21}\vec{e}_2 + u_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 &= u_{12}\vec{e}_1 + u_{22}\vec{e}_2 + u_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 &= u_{13}\vec{e}_1 + u_{23}\vec{e}_2 + u_{33}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Sea ahora un vector cualquiera expresado en coordenadas de la base B :

$$(x, y, z)_B = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

Se trata ahora de obtener las coordenadas del vector en la base canónica:

$$(x, y, z)_B = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 =$$

$$= x(u_{11}\vec{e}_1 + u_{21}\vec{e}_2 + u_{31}\vec{e}_3) + y(u_{12}\vec{e}_1 + u_{22}\vec{e}_2 + u_{32}\vec{e}_3) + z(u_{13}\vec{e}_1 + u_{23}\vec{e}_2 + u_{33}\vec{e}_3)$$

$$= xu_{11}\vec{e}_1 + xu_{21}\vec{e}_2 + xu_{31}\vec{e}_3 + yu_{12}\vec{e}_1 + yu_{22}\vec{e}_2 + yu_{32}\vec{e}_3 + zu_{13}\vec{e}_1 + zu_{23}\vec{e}_2 + zu_{33}\vec{e}_3$$

$$= xu_{11}\vec{e}_1 + yu_{12}\vec{e}_1 + zu_{13}\vec{e}_1 + xu_{21}\vec{e}_2 + yu_{22}\vec{e}_2 + zu_{23}\vec{e}_2 + xu_{31}\vec{e}_3 + yu_{32}\vec{e}_3 + zu_{33}\vec{e}_3$$

$$= (xu_{11} + yu_{12} + zu_{13})\vec{e}_1 + (xu_{21} + yu_{22} + zu_{23})\vec{e}_2 + (xu_{31} + yu_{32} + zu_{33})\vec{e}_3$$

$$= \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = (\alpha, \beta, \gamma)_{B_c}$$

Identificando coeficientes en las dos últimas igualdades obtenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha &= xu_{11} + yu_{12} + zu_{13} \\ \beta &= xu_{21} + yu_{22} + zu_{23} \\ \gamma &= xu_{31} + yu_{32} + zu_{33} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{B_c} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$$

que es la matriz de cambio de base de la base B a la base canónica B_c.

3.12 Espacios vectoriales utilizados durante el curso

1) El conjunto de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ con la ley de composición interna:

$$+: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2),(y_1,y_2) \to (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$$

y la ley de composición externa:

$$\bullet: \quad \mathbb{K} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$k\ ,(x_1,x_2) \to k\cdot(x_1,x_2)=(k\cdot x_1,\ k\cdot x_2)$$

es un espacio vectorial $(\mathbb{R}^2,+\ \cdot)$ sobre el cuerpo de los números reales. Es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Base canónica: $B_c = \{(1,0),(0,1)\}$

Elemento neutro: $(0,\ 0)$

Elemento inverso de $(x,\ y)$: $(-x,\ -y)$

Además se puede demostrar que todos subespacios propios de $(\mathbb{R}^2,+\ \cdot)$ son de la forma:

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, ax+by=0\} \qquad \dim(H)=1$$

que geométricamente se interpretan como las rectas que pasan por el origen.

2) El conjunto de los puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ con la ley de composición interna:

$$+: \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \to (x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,x_3+y_3)$$

y la ley de composición externa:

$$\bullet: \quad \mathbb{K} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$k\ ,(x_1,x_2,x_3) \to k\cdot(x_1,x_2,x_3)=(k\cdot x_1,k\cdot x_2,k\cdot x_3)$$

es un espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+\ \cdot)$ sobre el cuerpo de los números reales. Es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Base canónica: $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Elemento neutro: $(0,\ 0,\ 0)$

Elemento inverso de (x,y,z): $(-x,\ -y,\ -z)$

Además se puede demostrar que todos subespacios propios de $(\mathbb{R}^2,+\ \cdot)$ son de las dos formas siguientes:

$$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, ax+by+cz=0\} \qquad \dim(H)=2$$

$$H'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, ax+by+cz=0, a'x+b'y+c'z=0\} \qquad \dim(H)=1$$

donde H se interpreta geométricamente como los planos que pasan por el origen y H' se interpreta geométricamente como las rectas del espacio que pasan por el origen.

3) En general, el conjunto de los puntos del espacio $\mathbb{R}^n$ con la ley de composición interna:

$$\begin{array}{rcl} +: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) & \to & (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \end{array}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{array}{rcl} \cdot: \quad \mathbb{K} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ k\ ,\ (x_1,\dots,x_n) & \to & k\cdot(x_1,\dots,x_n)=(k\cdot x_1,\dots,k\cdot x_n) \end{array}$$

es un espacio vectorial ($\mathbb{R}^n$, + ·) sobre el cuerpo de los números reales. Es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Base canónica: $B_c = \{(1,0,0\dots,0),(0,1,0,\dots,0),(0,0,1,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,1)\}$

Elemento neutro: $(0,\ 0,\ 0\dots,\ 0)$

Elemento inverso de $(x_1,\dots,x_n)$: $(-x_1,\dots,-x_n)$

Las siguientes notaciones son equivalentes:
$P_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_2[x]$

4) El conjunto de los polinomios de grado menor o igual que dos con la ley de composición interna:

$$\begin{array}{rcl} +: \quad P_2(\mathbb{R}) \times P_2(\mathbb{R}) & \to & P_2(\mathbb{R}) \\ a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2 & \to & (a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2 \end{array}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{array}{rcl} \cdot: \quad \mathbb{R} \times P_2(\mathbb{R}) & \to & P_2(\mathbb{R}) \\ k\ ,\ a_0+a_1x+a_2x^2 & \to & k\cdot(a_0+a_1x+a_2x^2)=ka_0+ka_1x+ka_2x^2 \end{array}$$

es un espacio vectorial ($P_2(\mathbb{R})$), +, ·) sobre el cuerpo de los reales. Es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$

Base canónica: $B_c = \{1,\ x,\ x^2\}$

Elemento neutro: $0 + 0x + 0x^2$

Elemento inverso de $a_1+a_2x+a_3x^2$: $-a_1-a_2x-a_3x^2$

Las siguientes notaciones son equivalentes:
$P_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_n[x]$

5) En general el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con la ley de composición interna:

$$\begin{array}{rcl} +: \quad P_n(\mathbb{R}) \times P_n(\mathbb{R}) & \to & P_n(\mathbb{R}) \\ a_0+\dots+a_nx^n, b_0+\dots+b_nx^n & \to & (a_0+\dots+a_nx^n)+(b_0+\dots+b_nx^n)=(a_0+b_0)+\dots+(a_n+b_n)x^n \end{array}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{array}{rcl} \cdot: \quad \mathbb{R} \times P_n(\mathbb{R}) & \to & P_n(\mathbb{R}) \\ k\ ,\ a_0+\dots+a_nx^n & \to & k\cdot(a_0+\dots+a_nx^n)=ka_0+\dots+ka_nx^n \end{array}$$

es un espacio vectorial ($P_n(\mathbb{R})$), +, ·) sobre el cuerpo de los reales. Es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(P_n(\mathbb{R})) = n+1$

Base canónica: $B_c = \{1, x, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$

Elemento neutro: $0 + \ldots + 0x^n$ (polinomio nulo)

Elemento inverso de $a_0 + \ldots + a_n x^n$: $-a_0 - \ldots - a_n x^n$

6) El conjunto de las matrices cuadradas de orden dos $M_2(\mathbb{R})$ con la ley de composición interna:

$$\begin{array}{llll} +: & M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{array}{llll} \cdot: & \mathbb{R} \times M_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & k, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \rightarrow & k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \end{array}$$

es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial ($M_2(\mathbb{R})$, + ·) sobre el cuerpo de los reales. Es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$

Base canónica: $B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Elemento neutro: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Elemento inverso de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

7) En general el conjunto de las matrices de orden $n \times m$ con la ley de composición interna:

$$+: M_{n\times m}(\mathbb{R}) \times M_{n\times m}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

$$A \ , \ B \ \rightarrow A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

y la ley de composición externa:

$$\cdot: \mathbb{R} \times M_{n\times m}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

$$\alpha \ , \ B \ \rightarrow \alpha \cdot B = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

es un espacio vectorial ($M_{n\times m}(\mathbb{R})$), + ·) sobre el cuerpo de los reales. Es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(M_{n\times m}(\mathbb{R})) = n \times m$

Base canónica: $B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Elemento neutro: $(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (matriz nula)

Elemento neutro de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$: $\quad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nm} \end{pmatrix}$

8) Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. El conjunto $\mathcal{F}(X,E) = \{ f : X \to E \ / \ f \text{ es aplicacion} \}$ con la ley de composición interna:

$$\begin{aligned} +: \mathcal{F}(X,E) \times \mathcal{F}(X,E) &\to \mathcal{F}(X,E) \\ f,\ g &\to f+g \qquad \textit{donde } \ f+g : X \to E \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad x \to (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{aligned}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(X,E) &\to \mathcal{F}(X,E) \\ k,\ f &\to k\cdot f \qquad \textit{donde } \ k\cdot f : X \to E \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad x \to (k\cdot f)(x) = k\cdot f(x) \end{aligned}$$

es un espacio vectorial $(\mathcal{F}(X,E), +\ \cdot)$ sobre el cuerpo de los números reales. Es un $\mathbb{R}-$e.v.

En este caso se trata de un espacio vectorial no finitamente generado. Por tanto tiene dimensión infinita y no existen bases de este espacio vectorial.

Elemento neutro: $\begin{aligned} \Omega : \ & X \to E \\ & x \to \Omega(x) = 0_E \end{aligned}$ (aplicación nula)

Elemento inverso de $\begin{aligned} f : \ & X \to E \\ & x \to f(x) = f(x) \end{aligned}$: $\quad \begin{aligned} -f : \ & X \to E \\ & x \to (-f)(x) = -f(x) \end{aligned}$

9) El espacio vectorial $(\mathcal{F}(X,E),+\cdot)$ tiene muchos subespacios vectoriales, algunos de ellos muy conocidos. Nombramos a continuación los más importantes:

Recuerda que una sucesión se define como una aplicación de los números naturales en los reales

a) Si Tomamos $X=\mathbb{N}$ $E=\mathbb{R}$ tenemos $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\ /\ f \text{ es aplicacion}\}$ que es el espacio vectorial de las sucesiones de números reales (también de dimensión no finita).

Estas son las funciones que estudiaste en el Bachillerato y resulta que forman un espacio vectorial

b) Si Tomamos $X=\mathbb{R}$ $E=\mathbb{R}$ tenemos $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f \text{ es aplicacion}\}$ que es el espacio vectorial de las funciones reales de variable real (también de dimensión no finita).

Dentro de este espacio vectorial existen, a su vez, otros subespacios vectoriales como , por ejemplo:

i) $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ /\ f \text{ es continua}\}$ que es el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ (también de dimensión no finita).

No hay que olvidar que un polinomio es, en definitiva, una función

ii) $P(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f \text{ es un polinomio}\}$ que es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado cualquiera (también de dimensión no finita).

iii) $P_n(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f \text{ es un polinomio}\}$ que es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales hasta grado n (de dimensión $n+1$ finita).

Veremos lo que es una aplicación lineal en el tema siguiente

c) Sean E, E' dos $\mathbb{K}$-e.v de dimensión finita donde $\dim(E)=n$, $\dim(E')=m$. Definimos

$$\mathcal{L}(E,E')=\{f:E\to E'\ /\ f \text{ es aplicacion lineal}\}$$

que es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales (homomorfismos) de E en E' . Este espacio vectorial es de dimensión $n\times m$ finita.

d) Sea E un $\mathbb{K}$-e.v de dimensión finita donde $\dim(E)=n$. Definimos:

$$\operatorname{End}(E)=\{f:E\to E\ /\ f \text{ es aplicacion lineal}\}$$

que es el espacio vectorial de los endomorfismos de E. Este espacio vectorial es de dimensión n^2 finita.

Análogamente también se puede definir Fil(A)

10) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz con n columnas. Definimos el espacio vectorial $\mathrm{col}(A)$ como la variedad lineal generada por las columnas de la matriz A, es decir:

$$\mathrm{col}(A) = L[A^1, \ldots, A^n]$$

Es evidente que $\mathrm{col}(A)$ es un subespacio del espacio vectorial $M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ de las matrices columna. La dimensión de $\mathrm{col}(A)$ coincide siempre con el rango de la matriz A, o sea:

$$\dim(\mathrm{col}(A)) = \mathrm{rg}(A)$$

Este es un caso particular de $\mathbb{R}^n$ tomando $n=1$

En el caso de la lce, $\mathbb{R}$ hace de cuerpo y de espacio vectorial

11) $\mathbb{R}$ se puede definir como un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial con las siguientes operaciones interna y externa:

$$+:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \bullet:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x, y \to x+y \qquad k, x \to k\cdot x$$

Dimensión del espacio : $\dim(\mathbb{R}) = 1$

Base canónica: $B_c = \{1\}$

Elemento neutro: 0

Elemento inverso de x: $-x$

Por tanto $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras algebraicas: cuerpo y espacio vectorial simultáneamente. Lo mismo sucede con los números complejos $\mathbb{C}$ que son cuerpo y espacio vectorial.

Con este ejemplo queremos destacar la importancia del cuerpo sobre el que se define el espacio vectorial

12) En este último ejemplo vamos a estudiar las diferencias entre el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes complejos $(M_2(\mathbb{C}),+,\cdot)$ sobre el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ y el mismo espacio vectorial sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$.

Fíjate que el cuerpo de los coeficientes de la matriz no tienen por qué coincidir con el cuerpo sobre el que se define el espacio vectorial

- Sobre el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$:

Dimensión del espacio : $\dim(M_2(\mathbb{C})) = 8$

Base canónica:

$$B_c = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\right\}$$

- Sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$:

Dimensión del espacio : $\dim(M_2(\mathbb{C})) = 4$

Base canónica: $B_c = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

Conclusión: Como hemos comprobado en este ejemplo, aunque el conjunto, la lci y la lce son iguales, cambiar el cuerpo de escalares puede llevarnos a espacios vectoriales de dimensiones distintas.

TEMA 4: APLICACIONES LINEALES

4.1 Definición de aplicación lineal

Sean $(E, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión n y sea $(E', +, \cdot)$ otro espacio vectorial de dimensión m.
Decimos que una aplicación $f: E \to E'$ es una **aplicación lineal** si cumple que:

1. $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) \quad , \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$
2. $f(k\,\vec{v}) = k f(\vec{v}) \quad , \quad \vec{v} \in E \quad k \in \mathrm{K}$

Estas dos condiciones se pueden reunir en una sola. De esta forma diremos que f es una aplicación lineal si se cumple que:

$$f(k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2) = k_1 f(\vec{v}_1) + k_2 f(\vec{v}_2) \quad , \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E \qquad k_1, k_2 \in \mathrm{K}$$

A las aplicaciones lineales también se las llama **homomorfismos**

Primeras propiedades de una aplicación lineal

Sea $(E, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Sean $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$ y sean $k, k_1, k_2 \in \mathrm{K}$. Se cumple que:

1. $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_{E'}$ La imagen del elemento neutro de E es el elemento neutro de E'.
2. $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ La imagen del elemento inverso de $\vec{v}$ es el inverso de la imagen de $\vec{v}$.

4.2 Clasificación

Ojo:
Esto son definiciones, no necesitan demostración

Sea $f: E \to E'$ una aplicación lineal. Dependiendo si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva (o ninguna da las tres) toma los siguientes nombres,

$$E \neq E' \Rightarrow \begin{cases} \text{no inyectiva, no sobreyectiva} & \Rightarrow \text{homomorfismo} \\ \text{inyectiva} & \Rightarrow \text{monomorfismo} \\ \text{sobreyectiva} & \Rightarrow \text{epimorfismo} \\ \text{biyectiva (inyectiva + sobreyectiva)} & \Rightarrow \text{isomorfismo} \end{cases}$$

Importante:
En este caso la aplicación no puede ser "sólo inyectiva" o "sólo sobreyectiva"

Si el espacio de salida y el espacio de llegada coinciden entonces los nombre que toma f son distintos:

A los automorfismos también se les puede llamar endomorfismos biyectivos o, incluso, isomorfismos.

$$E = E' \Rightarrow \begin{cases} \text{no inyectiva, no sobreyectiva} & \Rightarrow \text{endomorfismo} \\ \text{biyectiva (inyectiva + sobreyectiva)} & \Rightarrow \text{automorfismo} \end{cases}$$

En este contexto se utiliza distintamente "imágenes" o "transformados" de una base

4.3 Matriz asociada a una aplicación lineal

El siguiente teorema fundamental establece un procedimiento para definir aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita. El teorema viene a decir que *si se conocen las imágenes de los vectores de una base del espacio de salida, la función lineal queda completamente determinada por una matriz.*
El teorema se enuncia a continuación:

> Si E y E' son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ es una base de E, cualquier función lineal $f: E \to E'$ queda totalmente determinada por el sistema $\{f(\vec{e}_1),...,f(\vec{e}_n)\}$

De esta forma, dada una base cualquiera $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ del espacio de salida E cada aplicación lineal tiene asociada una matriz única en esa base a la que llamamos **matriz asociada** a la aplicación lineal f.
Esta matriz se construye poniendo como columnas las imágenes $\{f(\vec{e}_1),...,f(\vec{e}_n)\}$ de una base del espacio de salida. Lo primero que tenemos que hacer cuando tenemos una aplicación lineal es encontrar una matriz asociada a la aplicación. La forma de hacerlo se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1:
Sea $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ una base del espacio vectorial E y sea $B'=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base del espacio vectorial E'. Se define la aplicación lineal $f: E \to E'$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= 4\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 \\ f(\vec{e}_2) &= 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 5\vec{u}_3 \\ f(\vec{e}_3) &= 6\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \end{aligned}$$

Entonces la matriz asociada a la aplicación f en la base B del espacio de salida y en la base B' del espacio de llegada es:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= (4,2,-1)_{B'} \\ f(\vec{e}_2) &= (3,-2,5)_{B'} \\ f(\vec{e}_3) &= (6,-1,0)_{B'} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_{B'}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, como acabamos de observar, se trata de tomar las coordenadas de las imágenes de los vectores de una base del espacio de partida y ponerlas en columnas dentro de la matriz, de esta forma se obtiene la matriz asociada a una aplicación lineal f en las base B de salida y en la base B' de llegada.

Ejemplo 2:
Encontrar una matriz asociada a la siguiente aplicación lineal,

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 3x_3)$$

Si tomamos, por ejemplo, la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $B_C = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0) = (2\cdot 1 + 0,\ 0 - 3\cdot 0) = (2, 0)$$
$$f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0) = (2\cdot 0 + 1,\ 1 - 3\cdot 0) = (1, 1)$$
$$f(\vec{e}_3) = f(0, 0, 1) = (2\cdot 0 + 0,\ 0 - 3\cdot 1) = (0, -3)$$

Por tanto la matriz asociada a f en la base canónica de salida y en la base canónica de llegada es,

Cuando se utilizan las bases canónicas se suelen omitir para no recargar la notación

$$A_{Bc}^{Bc}(f) = A(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}_{2\,x\,3}$$

Si tenemos otra base distinta que no es la canónica se procede de la misma forma. Por ejemplo, si tenemos la base $B = \{\vec{u}_1 = (-1,0,0), \vec{u}_2 = (1,1,0), \vec{u}_3 = (0,0,2)\}$:

Recuerda que las coordenadas son los escalares que multiplican a cada vector de la base

$$f(\vec{u}_1) = f(-1, 0, 0) = (2\cdot(-1) + 0,\ 0 - 3\cdot 0) = (-2, 0)$$
$$f(\vec{u}_2) = f(1, 1, 0) = (2\cdot 1 + 1,\ 1 - 3\cdot 0) = (3, 1)$$
$$f(\vec{u}_3) = f(0, 0, 2) = (2\cdot 0 + 0,\ 0 - 3\cdot 2) = (0, -6)$$

Por tanto la matriz asociada a f en la base B de salida y base canónica de llegada es,

$$A_{Bc}^{B}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}_{2\,x\,3}$$

Observaciones

- Fíjate que la matriz que obtenemos siempre está referida a unas bases dadas. Para cambiar la base de llegada (o la de salida) hay que hacer un "cambio de base".
- Es importante resaltar que en la matriz asociada a f el número de columnas coincide con la dimensión del espacio de salida y el número de filas coincide con la dimensión del espacio de llegada.
- En los endomorfismos (aplicaciones lineales donde el espacio de salida y el de llegada son el mismo) la matriz asociada es cuadrada.
- Una vez tenemos la matriz asociada podemos utilizarla para obtener imágenes de la aplicación, basta multiplicar la matriz por un vector del espacio inicial:

Esta fórmula es muy importante

$$\boxed{f(\vec{v}) = A(f)\cdot\vec{v}}$$

4.4 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

El núcleo se define solamente para aplicaciones lineales

Sea una aplicación lineal $f : E \to E'$
Llamamos **núcleo** de una aplicación lineal f, Ker(f), al conjunto formado por todos los vectores de E cuya imagen a través de f es el neutro de E'. Es decir,

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{v} \in E \,/\, f(\vec{v}) = \vec{0}_{E'}\} = f^{-1}(\{\vec{0}_{E'}\})$$

El conjunto Ker(f) es un subespacio vectorial de E.

Atención: Todas las aplicaciones tienen imagen (sean lineales o no), Lo que pasa es que cuando f es lineal Imf es subes-pacio vectorial

Llamamos **imagen** de una aplicación lineal f, Im(f), al conjunto formado por todos los vectores de E' que son imagen de algún elemento de E. Es decir,

$$\text{Im}(f) = \{\vec{w} \in E' \,/\, \exists\, \vec{v} \in E \,..\, f(\vec{v}) = \vec{w}\} = f(E)$$

El conjunto Im(f) es un subespacio vectorial de E'.
La dimensión del subespacio imagen coincide con el rango de la matriz asociada a f, o sea:

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(M(f))$$

Teoremas importantes

Sea una aplicación lineal $f: E \to E'$. Se cumple que:

- f es inyectiva $\Leftrightarrow$ Ker(f) $= \{\vec{0}_E\}$
- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ rg($M(f)$) = dim(E')
- dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E)
- Si $E = E'$ y f es inyectiva $\Rightarrow$ f es biyectiva
- Si $E = E'$ y f es sobreyectiva $\Rightarrow$ f es biyectiva

La mejor forma de entender esto es con los ejercicios de clase

Forma práctica de calcular los subespacios Ker(f) e Im(f) de una aplicación lineal f

Para obtener los subespacios Ker(f) e Im(f) de una aplicación lineal concreta procederemos siempre de la siguiente manera:

- Se plantean y resuelven las ecuaciones implícitas del Ker(f) que son:

$$A(f)\cdot x = \vec{0} \qquad x \in E$$

A partir de las ecuaciones implícitas, se obtienen las ecuaciones paramétricas y una base de ker(f).

- Se calcula el rg($A(f)$) y obtenemos la dimensión de Im(f).

- Para obtener una base de Im(f) tomamos tantas columnas linealmente independientes de la matriz asociada $A(f)$como nos diga la dimensión (que ya hemos calculado antes).

- Una vez obtenida la base, ponemos la Im(f) en forma de variedad lineal, a partir de ahí obtenemos las ecuaciones paramétricas y por último las ecuaciones implícitas.

4.5 Composición de aplicaciones lineales

Sean las aplicaciones lineales,

$$f : E \to E' \quad \text{con matriz asociada } M(f)$$

$$g : E' \to E'' \quad \text{con matriz asociada } M(g)$$

Recuerda que:
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Se cumple que:

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to E'' \\ \vec{v} &\to (g \circ f)(\vec{v}) = g(f(\vec{v})) \end{aligned}$$

Atención:
Fíjate que se dice al revés que se escribe

es otra aplicación lineal que llamaremos "aplicación f compuesta con g" y su matriz asociada es:

$$\boxed{M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)}$$

Es importante resaltar que para que la composición de dos aplicaciones lineales pueda llevarse a cabo el espacio final de la primera aplicación tiene que ser el mismo que el espacio inicial de la segunda aplicación.

La primera propiedad se sigue cumpliendo aunque f y g no sean lineales

Propiedades:

- $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$
- $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g)$

Ejemplo:
Vamos a calcular la matriz asociada de la aplicación composición de f con g donde

$$f: \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^3 \qquad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2 \qquad M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el espacio final de f es R^3 que es el mismo que el espacio inicial de g entonces podemos asegurar que existe la aplicación composición de f con g:

$$g \circ f: \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^2$$

y su matriz asociada es:

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 15 & 20 & 6 & 27 \end{pmatrix}$$

Sin embargo sin quisiéramos hacer la composición $f \circ g$ no podríamos ya que el espacio final de g no coincide con el espacio inicial de f.

4.6 Cambio de base en una aplicación lineal

Sea una aplicación lineal $f: E \rightarrow E'$ entre dos espacios vectoriales E y E'.
Hasta ahora hemos estado trabajando con las bases canónicas tanto del espacio de salida E como del espacio de llegada E'.
Cuando nosotros queremos saber la imagen de un vector de E con coordenadas en la base canónica a través de f hacemos lo siguiente:

$$f(\vec{v})_{B_c} = M_{B_c}^{B_c}(f)\cdot \vec{v}_{B_c} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y lo que obtenemos es un vector de E' con coordenadas en la base canónica de E'.

En este apartado lo que vamos a estudiar es como transformar la matriz $M_{B_c}^{B_c}(f)$ asociada a f, en el caso en que queramos utilizar una base distinta de la canónica en el espacio de salida, en el de llegada o en ambos.
Para lo que viene a continuación es muy importante dominar lo ya visto en el tema 3 sobre cambio de base en espacios vectoriales.

Cambio de base en el espacio de partida

Este es el caso más simple que nos puede ocurrir

Los datos que nos tienen que dar siempre son:

- Una base del espacio de partida E: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Un vector de E con coordenadas expresadas en la base B: $(v)_B = (x, y, z)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M_{B_c}^{B}(f)"] \arrow[r, bend left=40, "f"] \arrow[d, "M_{B_c}^{B}"'] & B_c \\ B_c \arrow[ur, "M_{B_c}^{B_c}(f)"'] & \end{tikzcd}$$

$$f(\vec{v})_{B_c} = M_{B_c}^{B_c}(f)\cdot M_{B_c}^{B}\cdot \vec{v}_B \quad \Rightarrow \quad f(x)_{B_c} = M_{B_c}^{B}(f)\cdot \vec{v}_B$$

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cambio de base en el espacio de llegada

Los datos que nos tienen que dar siempre son:

- Una base del espacio de llegada E': $B' = \{(w_{11}, w_{21}, w_{31}), (w_{12}, w_{22}, w_{32}), (w_{13}, w_{23}, w_{33})\}$
- Un vector de E con coordenadas expresadas en la base canónica: $(\vec{v})_{Bc} = (x, y, z)$

$$\begin{tikzcd}
B_c \arrow[r, "M_{B'}^{B_c}(f)"] \arrow[dr, "M_{B_c}^{B_c}(f)"'] & B' \\
 & B_c \arrow[u, "M_{B'}^{B_c}"']
\end{tikzcd}$$

$$f(\vec{v})_{B'} = M_{B'}^{B_c} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot \vec{v}_{B_c} \Rightarrow f(\vec{v})_{B'} = \left(M_{B_c}^{B'}\right)^{-1} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot \vec{v}_{B_c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\vec{v})_{B'} = M_{B'}^{B_c}(f) \cdot (\vec{v})_{B_c}$$

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cambio de base en el espacio de salida y en el espacio de llegada

Los datos que nos tienen que dar son:

- Una base del espacio de salida E: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Una base del espacio de llegada E': $B' = \{(w_{11}, w_{21}, w_{31}), (w_{12}, w_{22}, w_{32}), (w_{13}, w_{23}, w_{33})\}$
- Un vector de E con coordenadas expresadas en la base B: $(v)_B = (x, y, z)$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "M_{B_c}^{B}(f)"] \arrow[d, "M_{B_c}^{B}"'] & B' \\
B_c \arrow[r, "M_{B_c}^{B_c}(f)"'] & B_c \arrow[u, "M_{B'}^{B_c}"']
\end{tikzcd}$$

$$f(\vec{v})_{B'} = M_{B'}^{B_c} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot M_{B_c}^{B} \cdot \vec{v}_B \Rightarrow f(\vec{v})_{B'} = \left(M_{B_c}^{B'}\right)^{-1} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot M_{B_c}^{B} \cdot \vec{v}_B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\vec{v})_{B'} = M_{B'}^{B}(f) \cdot \vec{v}_B$$

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4.7 Resultados importantes sobre aplicaciones lineales

A continuación se enuncian, sin demostración, una lista de proposiciones y resultados importantes sobre aplicaciones lineales.

- Sea $f: E \to E'$ lineal y sea $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ un conjunto de vectores de E:

Si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ ligado $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ ligado

Si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ libre y f es inyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ libre

Si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ es generador de E $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ es generador de $\mathrm{Im}(f)$

Si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ es generador de E y f es sobreyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ es generador de E'

De las anteriores propiedades se desprenden las siguientes:

Si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ es base de E $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ es generador de $\mathrm{Im}(f)$

Si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ es base de E y f es inyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ es base de $\mathrm{Im}(f)$

Si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ es base de E y f es sobreyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ es generador de E'

Si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ es base de E y f es biyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ es base de E'

- Dados los K-*e.v.* E, E' y la aplicación lineal $f: E \to E'$. Se verifica que:

  1. La imagen directa de un subespacio vectorial mediante una aplicación lineal es también un subespacio vectorial. Es decir:

  $$\text{Sea } H \subset E, \ \text{Si } H < E \ \Rightarrow \ f(H) < E'$$

  Además se cumple que:

  $$\dim H \geq \dim f(H)$$

  2. La imagen recíproca de un subespacio vectorial mediante una aplicación lineal es también un subespacio vectorial. Es decir:

  $$\text{Sea } H' \subset E', \ \text{Si } H' < E' \ \Rightarrow \ f^{-1}(H') < E$$

Es un caso particular del e.v. $\mathbb{R}^n$ haciendo $n=1$

- Tomando $\mathbb{R}$ como un K-e.v. se verifica que las únicas aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son lineales (endomorfismos de $\mathbb{R}$) son de la forma:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = mx$$

$f(x)=3x$ lineal
$f(x)=\cos x$ no lineal
$f(x)=3x^2$ no lineal

donde $m \in \mathbb{R}$.
Geométricamente son las rectas que pasan por el origen donde m es la pendiente de la recta.

Los contenidos contrarios no se cumplen en general salvo que se añadan hipótesis adicionales

- Sea E un K-e.v. de dimensión finita y sea $f: E \to E$ un endomorfismo. Se cumple que:

a) $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ en general $\ker(f) \subset \ker(f^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$ en general $\operatorname{Im}(f^n) \subset \operatorname{Im}(f)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- Sean E, E' K-e.v. de dimensión finita y sea $f: E \to E'$ un homomorfismo. Se cumple que:

Si f es inyectiva $\Rightarrow$ $\dim(E) \leq \dim(E')$

Si f es sobreyectiva $\Rightarrow$ $\dim(E) \geq \dim(E')$

Si f es biyectiva $\Rightarrow$ $\dim(E) = \dim(E')$

- Tres aplicaciones lineales importantes

- Homomorfismo nulo:

$$\begin{aligned} \Omega: E &\to E' \\ \vec{v} &\to \Omega(\vec{v}) = \vec{0}_{E'} \end{aligned}$$

$$\ker(\Omega) = E$$
$$\operatorname{Im}(\Omega) = \{\vec{0}_{E'}\}$$
$$\Omega \circ f = f \circ \Omega = \Omega$$
$$\Omega^2 = \Omega \circ \Omega = \Omega$$

Solo tiene sentido entre espacios vectoriales iguales

- Endomorfismo identidad (es siempre inyectivo y sobreyectivo, por tanto, automorfismo):

$$\begin{aligned} Id_E: E &\to E \\ \vec{v} &\to Id_E(\vec{v}) = \vec{v} \end{aligned}$$

$$\ker(Id_E) = \{\vec{0}_E\}$$
$$\operatorname{Im}(Id_E) = E$$

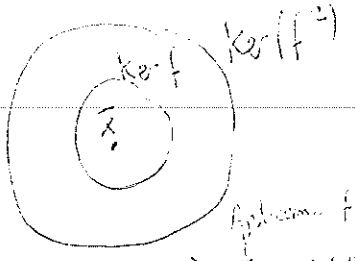
- Homomorfismo L_A (donde $A \in M_{m\times n}(\mathrm{K})$)

$$\begin{aligned} L_A: M_{n\times 1}(\mathrm{K}) &\to M_{m\times 1}(\mathrm{K}) \\ X &\to L_A(X) = AX \end{aligned}$$

La matriz asociada a L_A en las bases canónicas es la propia matriz A : $M(L_A) = A$

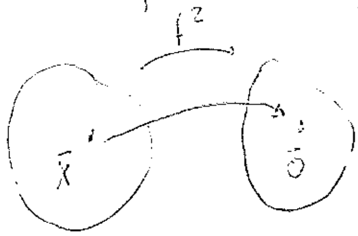
Además se cumple que: $\dim\big(\operatorname{Im}(L_A)\big) = \dim\big(\operatorname{col}(A)\big) = \operatorname{rg}(A)$

a) $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ $\quad$ $f^2 = f \circ f$

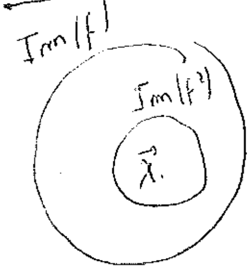


$f(\vec{0}) = \vec{0}$ por ser f lineal

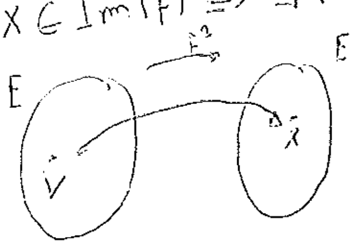
Sea $\vec{x} \in \ker f \Rightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} \xRightarrow{\text{Aplicamos } f} f(f(\vec{x})) = f(\vec{0}) \Rightarrow f^2(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{x} \in \ker(f^2)}$

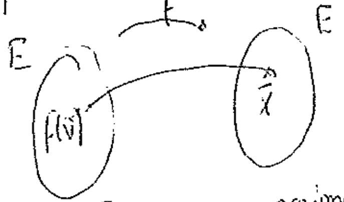


b) $Im(f^2) \subset Im(f)$



Sea $\vec{x} \in Im(f^2) \Rightarrow \exists \vec{v} \in E \,/\, f^2(\vec{v}) = \vec{x} \Rightarrow f(f(\vec{v})) = \vec{x} \Rightarrow \boxed{\vec{x} \in Im(f)}$





Porque $\vec{x}$ tiene una preimagen mediante la aplicación f que es $f(\vec{v})$

$\cancel{f(f(\vec{v})) = f(\vec{x}) \Rightarrow f^2(\vec{v}) = f(\vec{x})}$

La definición de isomorfismo está en la página T-52

4.8 Isomorfismos. Espacios vectoriales isomorfos

Decimos que $f: E \to E'$ es un **isomorfismo** si es una aplicación lineal y biyectiva.

Hablamos de la aplicación inversa

Si $f: E \to E'$ es isomorfismo entonces existe $f^{-1}: E' \to E$ y es isomorfismo. Además si $M(f)$ es la matriz asociada a f se cumple que la matriz asociada a f^{-1} es $M(f^{-1}) = \left(M(f)\right)^{-1}$

Sean E, E' K-e.v. Decimos que E y E' son **isomorfos** si existe una aplicación $f: E \to E'$ lineal y biyectiva (isomorfismo) entre ellos.

Ojo: esto solo es válido si los espacios son de dimensión finita

Si los espacios E, E' tienen dimensión finita existe una caracterización de los espacios isomor-fos que dada por el siguiente teorema:

$$E \text{ y } E' \text{ son isomorfos} \iff \dim(E) = \dim(E')$$

Si dos espacios vectoriales son isomorfos desde un punto de vista algebraico son "iguales" o "indistinguibles" en el sentido de que toda propiedad relacionada con la estructura de espacio vectorial que posea E se transfiere automáticamente al espacio E' a través del isomorfismo y recíprocamente. Es decir, aunque se trata de conjuntos distintos todas sus propiedades álgebrai-cas coinciden. Pero, ¿qué significa esto exactamente?. Vamos a intentar explicarlo a partir de algunos ejemplos ilustrativos:

- Isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$

Se puede demostrar que las siguientes aplicaciones f y f^{-1} son lineales y biyectivas , por tanto, isomorfismos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ & (a,b,c) & \to & ax^2+bx+c \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & ax^2+bx+c & \to & (a,b,c) \end{array}$$

De esta forma que a cada elemento $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ se puede "asignar" un polinomio ax^2+bx+c y viceversa. Por ejemplo, si $\{(1,0,1),(2,1,0)\}$ es libre en $\mathbb{R}^3$ entonces podemos afirmar $\{x^2+1,\ 2x^2+x\}$ es libre en $\mathbb{R}_2[x]$. Y así sucesivamente.

Este resultado se puede generalizar $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que quiere decir que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ son espacios vectoriales isomorfos. La notación es $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

- Isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$

Se puede demostrar que ambas aplicaciones f y f^{-1} son lineales y biyectivas , por tanto, isomorfismos.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & M_{3\times1}(\mathbb{R}) \\ & (a,b,c) & \to & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f^{-1}: & M_{3\times1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \to & (a,b,c) \end{array}$$

Fíjate que este isomorfismo nos permite trabajar con los vectores de $\mathbb{R}^3$ en "horizontal" o en "vertical" según nos convenga ya que algebraicamente son la misma cosa.

- Isomorfismo entre $M_2(\mathbb{R})$ y $M_{4\times 1}(\mathbb{R})$

Se puede demostrar que ambas aplicaciones f y f^{-1} son lineales y biyectivas, por tanto, isomorfismos.

$$f: \quad M_2(\mathbb{R}) \to M_{4\times1}(\mathbb{R}) \qquad\qquad f^{-1}: \quad M_{4\times1}(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Fíjate que este isomorfismo nos permite trabajar con los matrices cuadradas de orden 2 "como si fueran" matrices columna y por tanto como si fueran vectores de $\mathbb{R}^4$ (debido al isomorfismo de la página anterior que relaciona matrices columna con vectores de $\mathbb{R}^n$).

Isomorfismo entre matrices y aplicaciones lineales

A continuación vamos a hablar sobre un isomorfimo muy importante que es el que relaciona a las matrices con las aplicaciones lineales.

OJO:
Si cambiamos las bases cam-bia la matriz asociada

Sean E, E' K-e.v. de dimensión finita tal que $\dim(E) = n$, $\dim(E') = m$.
Existe una aplicación lineal biyectiva (isomorfismo) entre el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de E en E' L(E, E') y el espacio vectorial de las matrices *nxm*. Esto significa que, en unas bases determinadas, hay una relación uno a uno entre aplicaciones lineales y matrices o, dicho de otra forma, que a cada aplicación lineal le corresponde una única matriz y viceversa.
De aquí se deduce que la matriz asociada a cada aplicación lineal en unas bases dadas siempre existe y es única.

Dimensión del espacio vectorial de las aplicaciones lineales

Sean E, E' K-e.v. de dimensiones $\dim(E) = n$, $\dim(E') = m$.
Como consecuencia directa de los puntos anteriores se puede deducir que el K-espacio vectorial de las aplicaciones lineales de E en E', (L(E, E'), +, ·) tiene la misma dimensión que el espacio vectorial $M_{n\times m}$(K) de las matrices rectangulares de $n \times m$ ya que ambos espacios son isomorfos y por tanto han de tener la misma dimensión. Por tanto, $\dim(\text{L}(E, E')) = n\times m$.

Siguiendo el mismo razonamiento se deduce que el K-espacio vectorial (End(E), +, ·) de los endomorfismos de E en E tiene dimensión, dim((End(E)) = n^2 pues su matriz asociada siempre es cuadrada.

4.9 Formas lineales

Llamaremos **formas lineales** a las aplicaciones lineales de la forma $f: E \to \mathbb{R}$.
Es decir, las formas lineales no son más que aplicaciones lineales en las que el espacio de llegada es el cuerpo sobre el que está definido el espacio vectorial E.
Las formas lineales son siempre sobreyectivas.
El conjunto de las formas lineales de E forman el **espacio dual**, que no abordaremos en este curso.

4.10 Aplicación lineal restringida a un subespacio vectorial

Definición

Sean E, E' K-e.v. de dimensiones $\dim(E) = n$, $\dim(E') = m$. Sea $H < E$, subespacio vectorial de E. Sea $f: E \to E'$ lineal. Si restringimos el espacio vectorial de salida a los elementos del subespacio vectorial H creamos una nueva aplicación que llamaremos aplicación f **restringida al subespacio H** y denotaremos $f|_H : H \to E'$

Propiedades

- Siempre que restringimos una aplicación lineal f a un subespacio $H < E$ la aplicación resultante $f|_H$ sigue siendo lineal y además $f|_H(\vec{v}) = f(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in H$
- $\ker(f|_H) \subseteq \ker(f)$, más concretamente: $\ker(f|_H) = \ker(f) \cap H$
- $\text{Im}(f|_H) \subseteq \text{Im}(f)$, más concretamente: $\text{Im}(f|_H) = \text{Im}(f) \cap f(H)$

- Si f es inyectiva $\Rightarrow$ $f|_H$ es inyectiva
- Si f es sobreyectiva, no podemos asegurar que $f|_H$ sea sobreyectiva.
- Si f es biyectiva $\Rightarrow$ $f|_H$ es inyectiva

- Si $f|_H$ es sobreyectiva $\Rightarrow$ f es sobreyectiva
- Si $f|_H$ es inyectiva, no podemos asegurar que f sea inyectiva
- Si $f|_H$ es biyectiva $\Rightarrow$ f es sobreyectiva

TEMA 5: PRODUCTO ESCALAR. ORTOGONALIDAD .

5.1 Producto escalar

portante:
Por ahora nos restringimos a espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales

Sea E un $\mathbb{R}-$espacio vectorial. Un **producto escalar** en E es una aplicación de la forma:

$$<,>: E \times E \to \mathbb{R}$$
$$\vec{u},\vec{v} \to <\vec{u},\vec{v}>$$

que cumple las siguientes propiedades:

A las aplicaciones que cumplen 1 y 2 se las denomina formas bilineales (f.b.)

1. $<\vec{u}+\vec{u}',\vec{v}> = <\vec{u},\vec{v}> + <\vec{u}',\vec{v}> \quad \forall \vec{u},\vec{u}',\vec{v} \in E$
   $<\vec{u},\vec{v}+\vec{v}'> = <\vec{u},\vec{v}> + <\vec{u},\vec{v}'> \quad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{v}' \in E$
2. $<\alpha\vec{u},\vec{v}> = \alpha <\vec{u},\vec{v}> \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
   $<\vec{u},\beta\vec{v}> = \beta <\vec{u},\vec{v}> \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$

Bilineal

A las f.b. que cumplen 3 se las denomina f.b. ηétricas (f.b.s)

3. $<\vec{u},\vec{v}> = <\vec{v},\vec{u}> \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in E$ Simetría

A las f.b.s. que cumplen 4 se las denomina f.b.s definidas positivas

4. $<\vec{u},\vec{u}> \geq 0 \quad \forall \vec{u} \in E$, además $<\vec{u},\vec{u}> = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}_E$ Definida positiva

Nota: las condiciones 1 y 2 se pueden refundir en una sola de la siguiente manera,

$$<\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}',\vec{v}> = \alpha <\vec{u},\vec{v}> + \beta <\vec{u}',\vec{v}> \quad \forall \vec{u},\vec{u}',\vec{v} \in E \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$<\vec{u},\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}'> = \alpha <\vec{u},\vec{v}> + \beta <\vec{u},\vec{v}'> \quad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{v}' \in E \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Un **espacio vectorial euclídeo** es un espacio vectorial donde hay definido un producto escalar y se representa como $(E,<,>)$. El vector nulo $\vec{0}_E$ es el único vector que es ortogonal a todos los vectores del espacio E.

Algunos productos escalares usuales

Este es el producto escalar aprendido en el Bachillerato pero ¡ojo! no es el único producto escalar que se puede definir en R^n

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se puede definir el siguiente producto escalar:

$$<(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)> = x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

Este es el producto escalar que se utiliza para las series de Fourier. Tambien se puede definir sobre funciones continuas a trozos

- Sobre el espacio vectorial $(C[a,b],\mathbb{R})$ de las funciones continuas se define el siguiente un producto escalar:

$$<f,g> = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

- Sobre el espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden n:

$$<A,B> = \text{Traza}(AB^t)$$

- Sobre el espacio vectorial $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ de las matrices columna de $n\times 1$:

$$<A,B> = A^tB$$

Ejemplos:

- $\mathbb{R}^3$ $\langle (3,4,5),(1,2,6)\rangle = 3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 6 = \boxed{41}$

- $C([a,b])$ $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\cdot g\,dx$

$$\langle \overset{f}{x^2}, \overset{g}{x^3}\rangle = \int_0^1 x^2\cdot x^3\,dx = \frac{x^6}{6}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

- $M_2(\mathbb{R})$ $\langle A,B\rangle = \text{traza}(AB^t)$

$$\langle \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}, \underset{B}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}}\rangle = \text{traza}\begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 39 & 21 \end{pmatrix} = 17+21 = \boxed{38}$$

$$A\cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 39 & 21 \end{pmatrix}}$$

- $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ $\langle A,B\rangle = A^t B$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\rangle = (1\ 2\ 3)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6 = \boxed{32}$$

5.2 Subespacio ortogonal

Definición

vector-vector

- Dos vectores $\vec{u},\vec{v}$ son **ortogonales** si su producto escalar es cero, es decir $<\vec{u},\vec{v}> = 0$.

vector-subespacio

- Un vector $\vec{u}$ es **ortogonal** a un subespacio W si es ortogonal a cada uno de los vectores de W, es decir, $\forall \vec{v} \in W$ se cumple que $<\vec{u},\vec{v}> = 0$.
  Para ello, es necesario y suficiente que sea ortogonal a todos los vectores de una base de W.

Subespacio-subespacio

- Un subespacio V es **ortogonal** a un subespacio W si todos los vectores de V son ortogonales a cada uno de los vectores de W, es decir, $\forall \vec{u} \in V$ y $\forall \vec{v} \in W$ se cumple que $<\vec{u},\vec{v}> = 0$.
  Para ello, es necesario y suficiente que todos los vectores de una base de V sean ortogonales a todos los vectores de una base de W.

- Si W es un subespacio vectorial de un espacio vectorial E, llamamos **complemento ortogonal** de W, y lo representamos por $W^{\perp}$, al subespacio vectorial formado por todos los vectores ortogonales a W:

$$W^{\perp} = \left\{\vec{v} \in E \ / <\vec{v}, \vec{w}> = 0 \ \forall \ \vec{w} \in W\right\}$$

Propiedades

1. $E = W \oplus W^{\perp}$, es decir W y $W^{\perp}$ son suplementarios.
2. $\dim E = \dim W + \dim W^{\perp}$

Consecuencia directa de la propiedad 1

3. Si $W_1 \subset W_2$ son subespacios de E, entonces $W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$.
4. Si $W_1 \subset W_2$ y $W_1 \neq W_2$, entonces existe un vector no nulo de W_2 ortogonal a W_1.
5. Si $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es un sist. de vectores no nulos ortogonales dos a dos, entonces S es libre

5.3 Norma

Definición

La norma no es más que lo que en física se conoce como el módulo del vector

Sea E, un espacio vectorial sobre K, una **norma definida** en E es una aplicación:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: E &\to \mathrm{K} \\ \vec{u} &\to \|\vec{u}\| = \sqrt{<\vec{u}, \vec{u}>} \end{aligned}$$

$\|\bar{u}\|^2 = <\bar{u}, \bar{u}>$

El **ángulo α entre dos vectores** viene dado por la siguiente expresión:

$$<\vec{u},\vec{v}> = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Propiedades

1. $\forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} \neq 0 \iff \|\vec{u}\| > 0$
2. $\forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} = 0 \iff \|\vec{u}\| = 0$
3. $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathrm{K}, \ \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \ \|\vec{u}\|$
4. $\forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad \|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
5. $\forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad |<\vec{u},\vec{v}>| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
6. $\forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2<\vec{u},\vec{v}>$

5.4 Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Una base de un espacio vectorial euclídeo es **ortogonal** si sus vectores son ortogonales dos a dos. Una base **ortonormal** es una base ortogonal de vectores unitarios.

Dada una base cualquiera $\{\vec{e}_n : n \in \mathrm{N}\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de un espacio vectorial existe un método para obtener una base ortogonal.
Este proceso se llama "Método de ortogonalización de Gram-Schmidt" y es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{e}_1 \\
\vec{u}_2 &= \vec{e}_2 - \frac{<\vec{e}_2,\vec{u}_1>}{<\vec{u}_1,\vec{u}_1>}\cdot\vec{u}_1 \\
\vec{u}_3 &= \vec{e}_3 - \frac{<\vec{e}_3,\vec{u}_1>}{<\vec{u}_1,\vec{u}_1>}\cdot\vec{u}_1 - \frac{<\vec{e}_3,\vec{u}_2>}{<\vec{u}_2,\vec{u}_2>}\cdot\vec{u}_2 \\
\vec{u}_4 &= \vec{e}_4 - \frac{<\vec{e},\vec{u}_1>}{<\vec{u}_1,\vec{u}_1>}\cdot\vec{u}_1 - \frac{<\vec{e}_4,\vec{u}_2>}{<\vec{u}_2,\vec{u}_2>}\cdot\vec{u}_2 - \frac{<\vec{e}_4,\vec{u}_3>}{<\vec{u}_3,\vec{u}_3>}\cdot\vec{u}_3 \\
\ldots & \quad \ldots\ldots\ldots \\
\vec{u}_n &= \vec{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{<\vec{e}_n,\vec{u}_i>}{<\vec{u}_i,\vec{u}_i>}\cdot\vec{u}_i
\end{aligned}$$

Una vez obtenida una base ortogonal $\{\vec{u}_n : n \in \mathrm{N}\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ a partir de la base $\{\vec{e}_n : n \in \mathrm{N}\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de partida puede que necesitemos normalizarla. Para ello basta dividir cada elemento de la base ortogonal entre su norma:

$$\vec{w}_n = \frac{\vec{u}_n}{\|\vec{u}_n\|} = \frac{\vec{u}_n}{\sqrt{<\vec{u}_n,\vec{u}_n>}}$$

y así obtenemos una base ortonormal $\{\vec{w}_n : n \in \mathrm{N}\} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$.

$\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ base ortogonal $\overset{def}{\Longleftrightarrow} <\bar{u}_i, \bar{u}_j> = 0 \quad \forall i > j$

$B: \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ base no ortogonal

$\downarrow$ G.S.

$B' \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ base ortogonal

$B'' = \left\{\frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|}, \ldots, \frac{\bar{u}_n}{\|\bar{u}_n\|}\right\}$ Base ortonormal

5.5 Proyección ortogonal

Definición

Sea un espacio vectorial euclídeo $(E,<,>)$, en el que se consideran un subespacio $H < E$ y un vector $\vec{v} \in E$. Se dice que:

También se utiliza la siguiente notación:

$\vec{v}_H = \text{proy}_H(\vec{v})$

El vector $\vec{v}_H$ es **proyección ortogonal** de $\vec{v}$ sobre H si $\vec{v}_H \in H$ y $\vec{v}-\vec{v}_H \in H^{\perp}$.

El vector $\vec{v}_H \in H$ es el **más próximo** a $\vec{v}$ de entre los vectores de H si $\|\vec{v}-\vec{v}_H\|$ es el menor de los valores $\|\vec{v}-\vec{u}\|$, $\forall \vec{u} \in H$ **(distancia mínima)**.

Se verifica que las dos anteriores definiciones son equivalentes. Es decir, la proyección ortogonal $\vec{v}_H$ es el vector más próximo a $\vec{v}$ de entre los vectores de H. Además, cuando existe es única.

Método práctico de cálculo

Sea un espacio vectorial euclídeo $(E,<,>)$, en el que se consideran un subespacio $H < E$ y un vector $\vec{v} \in E$. Si H tiene dimensión finita y si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base ortogonal de H, entonces existe la proyección ortogonal $\vec{v}_H$ de $\vec{v}$ sobre H y es:

$$v_H = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{u}_n$$

donde los coeficientes vienen dados por:

Se llaman coeficientes de Fourier y son escalares, no vectores

$$\alpha_i = \frac{<\vec{v},\vec{u}_i>}{\|u_i\|^2} \qquad i=1,\ldots,n$$

Combinando las dos últimas expresiones nos queda la fórmula práctica:

Fórmula para bases ortogonales

$$\boxed{\vec{v}_H = \frac{<\vec{v},\vec{u}_1>}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 + \frac{<\vec{v},\vec{u}_2>}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2 + \ldots + \frac{<\vec{v},\vec{u}_n>}{\|\vec{u}_n\|^2}\vec{u}_n}$$

Si tenemos una base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ ortonormal (es decir, una base ortogonal que, además, cumple que $\|\vec{w}_i\| = 1$), entonces los coeficientes quedan:

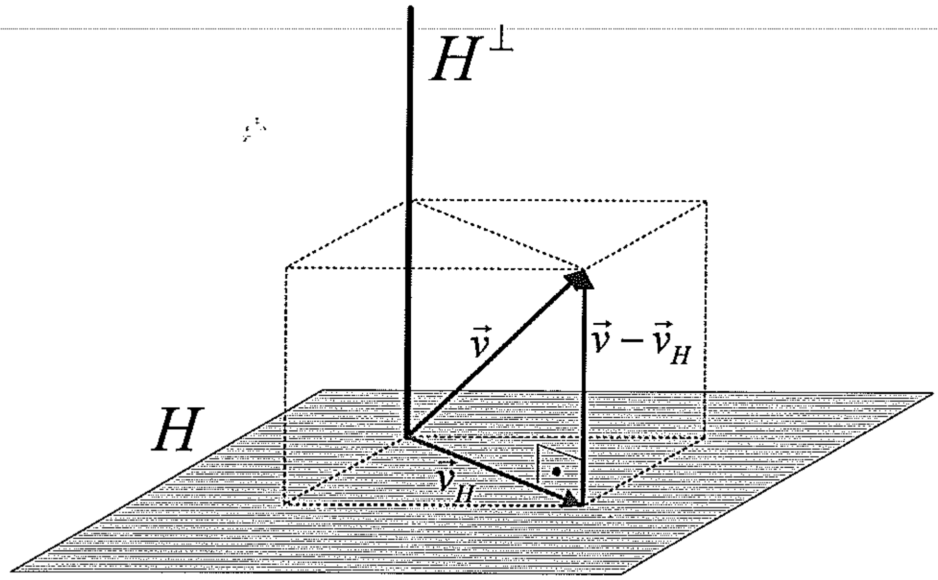
$$\alpha_i = <\vec{v},\vec{w}_i> \qquad i=1,\ldots,n$$

y la fórmula práctica queda así:

Fórmula para bases ortonormales

$$\boxed{\vec{v}_H = <\vec{v},\vec{w}_1>\vec{w}_1 + <\vec{v},\vec{w}_2>\vec{w}_2 + \ldots + <\vec{v},\vec{w}_n>\vec{w}_n}$$

Gráficamente en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual, la proyección ortogonal se puede representar de la siguiente forma:



En este dibujo hemos supuesto que H es un subespacio vectorial de dimensión 2, es decir, un plano.

En el dibujo anterior se puede apreciar todo lo explicado en la página anterior:

$$\vec{v}_H \in H \qquad , \qquad \vec{v}-\vec{v}_H \in H^{\perp}$$

Y además se observa que, de todos los vectores que hay en el plano *H*, el vector proyección ortogonal $\vec{v}_H$ es el vector más próximo al vector $\vec{v}$.

Por tanto $\vec{v}_H$ es el vector que está a mínima distancia de $\vec{v}$ siendo esta distancia el módulo (norma) del vector $\vec{v}-\vec{v}_H$:

$$\min\ d(\vec{v},H) = \|\vec{v}-\vec{v}_H\|$$

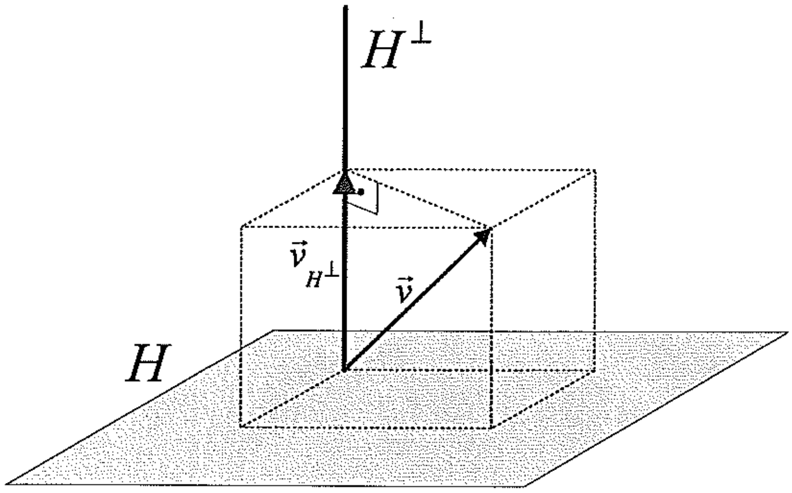
Además, también es útil la siguiente relación:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_H + \vec{v}_{H^{\perp}}}$$

Donde $\vec{v}_{H^{\perp}}$ es la proyección ortogonal del vector $\vec{v}$ sobre el complemento ortogonal de H, $H^{\perp}$.

Obviamente:

$$\vec{v}_{H^{\perp}} = \vec{v} - \vec{v}_H$$



TEMA 6: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES .

6.1 Definiciones

También se puede decir que "λ es autovalor del endomorfismo f "

Fíjate que si A es una matriz de orden n entonces v tiene que ser un vector de dimensiones nx1

Sea E un K-e.v de dimensión n.
Sea $f: E \to E$ una aplicación lineal y A la matriz asociada a f.
Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio** (autovalor) de la matriz A si existe algún vector $\vec{v}$ no nulo de E tal que:

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$$

Autovectores
Autovalores

o bien

$$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

Si λ es valor propio de A entonces los vectores no nulos de E que verifiquen la anterior relación se denominan **vectores propios** (autovectores) de A asociados a λ.

Cada vector propio está asociado a un único valor propio. Sin embargo cada valor propio tiene asociados uno o más vectores propios.

6.2 Cálculo de los valores propios

Por simplicidad explicaremos el proceso para una matriz de orden tres. Todo lo que vamos a mostrar es fácilmente generalizable a matrices de otros ordenes.
Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Los valores propios (autovalores) de la matriz A vienen determinados por las raíces de su polinomio característico,

$$|A - \lambda I| = 0$$

así pues, pasamos a calcular estas raíces,

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\lambda) = 0$$

- Al polinomio $P(\lambda)$ se le llama **polinomio característico** y las raíces de este polinomio son los valores propios (autovalores) de la matriz A.
- Llamamos **multiplicidad algebraica** de un autovalor λ_i, $m_a(\lambda_i)$, al número de veces que λ_i es raíz del polinomio característico.
- La suma de las multiplicidades algebraicas de todos los autovalores debe ser siempre igual al orden de la matriz.
- Al conjunto de autovalores se le denomina **espectro** de la matriz.

6.3 Cálculo de los vectores propios

Cada uno de los autovalores calculados en el apartado anterior tiene un conjunto de auto-vectores asociado. Este conjunto de autovectores asociados a un determinado autovalor forman siempre un subespacio vectorial S_{λ_i} que llamaremos **autoespacio** asociado a λ_i y que se define como:

$$S_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I) \quad \text{o bien} \quad S_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})$$

Aquí se trata de aplicar todo lo aprendido sobre subespacios vectoriales en el tema 4

Por tanto, se trata de estudiar el subespacio vectorial de los autovectores asociados a cada uno de los autovalores λ_i calculados en el punto anterior.

Las ecuaciones cartesianas del autoespacio S_{λ_i} asociado a λ_i siempre son:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A partir de aquí y empleando lo aprendido en el tema de espacios vectoriales podemos obtener la dimensión y una base del subespacio asociado a λ_i. Todos los vectores pertene-cientes a este subespacio vectorial son los autovectores de λ_i.

Llamamos **multiplicidad geométrica** de λ_i, $m_g(\lambda_i)$, a la dimensión del autoespacio aso-ciado a λ_i:

$$m_g(\lambda_i) = \dim(S_{\lambda_i}) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I)$$

Algunas propiedades de los autovalores y los autovectores

- Una matriz A y su traspuesta A^t tienen los mismos autovalores.
- Si A y B son semejantes tienen el mismo polinomio característico $P(\lambda)$ y por tanto los mismos autovalores.
- Si λ es autovalor de A, $k\lambda$ es autovalor de kA.
- Si λ es autovalor de A y A es regular, $\dfrac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.
- Si λ es autovalor de A, λ^n es autovalor de A^n.
- Si v es autovector de A asociado a λ, v es autovector de kA asociado a $k\lambda$.
- Si v es autovector de A asociado a λ, v es autovector de A^{-1} asociado a $\dfrac{1}{\lambda}$.
- Si v es autovector de A asociado a λ, v es autovector de A^n asociado a λ^n.
- El determinante de A es el producto de sus autovalores.
- La traza de A es la suma de los autovalores.
- Autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.
- Si dadas dos matrices A y B, están definidas sus matrices AB y BA entonces sus autovalores son los mismos.
- La multiplicidad geométrica de un autovalor siempre mayor que cero y menor o igual que la multiplicidad algebraica: $m_a(\lambda_i) \geq m_g(\lambda_i) > 0$

Otra forma de expresar esta propiedad: La suma de autoespa-cios siempre es directa

Antes de leer esta hoja conviene repasar el concepto y las propiedades de las matrices semejantes estudiado en el tema de matrices

6.4 Diagonalización de matrices

Sea $A \in M_n(\mathrm{K})$ una matriz cuadrada asociada a un determinado endomorfismo f.
Se denomina **diagonalización de una matriz** al proceso de búsqueda de una matriz de paso P (que puede existir o no), que permita expresar la matriz A como semejante a una matriz diagonal D:

$$A = PDP^{-1} \quad \text{o bien} \quad D = P^{-1}AP$$

También se habla de endomorfismos diagonalizables

Por tanto, diremos que una matriz es **diagonalizable** si existe tal matriz P que hace que se cumpla la igualdad anterior. En caso contrario, es decir, si no existe P, diremos que la matriz no es diagonalizable.

Condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable:

A es diagonalizable $\Longleftrightarrow m_a(\lambda i) = m_g(\lambda i) \ \forall \lambda i$

> Una matriz es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica de cada uno de sus autovalores coincide con su multiplicidad geométrica.

Además de la anterior proposición existen una serie de casos particulares que conviene tener presentes por su utilidad:

- Si una matriz de orden n tiene n autovalores distintos entonces es diagonalizable.
- Las matrices simétricas son diagonalizables.
- Las matrices idempotentes son diagonalizables.

Matrices diagonalizables

Si una matriz A es diagonalizable entonces podemos afirmar que existe una matriz diagonal formada por sus autovalores:

Lo explicamos con una matriz de orden 3 por comodidad. Evidentemente, todo lo dicho aquí es generalizable a matrices de orden n

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

de forma que A y D son semejantes: $A = PDP^{-1}$ o bien $D = P^{-1}AP$.
La matriz de paso P es una matriz formada por autovectores:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

Atención: Relacionar esta idea con lo ya visto de cambio de base en aplicaciones lineales (el tercer caso)

donde cada columna de la matriz P es un autovector asociado al autovalor que ocupa su misma columna en la matriz D. Es decir, el vector (e_{11}, e_{12}, e_{13}) tiene que ser un autovector asociado al autovalor λ_1, el vector (e_{21}, e_{22}, e_{23}) tiene que ser un autovector asociado al autovalor λ_2 y (e_{31}, e_{32}, e_{33}) tiene que ser un autovector asociado al autovalor λ_3.

Los autovectores de la matriz P forman siempre una base de $M_{3\times1}(\mathrm{K})$ (ó $\mathbb{R}^3$). Por tanto, también se puede decir que una matriz es diagonalizable si existe una base formada por autovectores respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal.

6.5 Aplicaciones de la diagonalización

Para entender bien ( ) punto mira antes el cambio de base en aplicaciones lineales (pág. T-44)

Diagonalización de endomorfismos

Si suponemos que la matriz A que diagonalizamos es la matriz asociada a un endomorfismo f entonces podemos entender la diagonalización de una matriz como un cambio de base de la aplicación lineal de forma que su matriz asociada pasa a ser una matriz diagonal:

$$D = P^{-1} A P$$

$$M_B^B(f) = \left(M_{B_c}^B\right)^{-1} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot M_{B_c}^B$$

Identificando ambas expresiones vemos que la matriz de paso P se puede entender como una matriz de cambio de base de B a B_c donde B es una base formada por autovectores y B_c es la base canónica.

Piensa que las matrices diagonales son muy sencillas de manejar y por ello este procedi-miento de diagonalización que hemos aprendido en este tema es muy útil de cara a tratar con endomorfismos ya que nos permite encontrar una base (formada por autovectores) respecto de la cual la matriz asociada al endomorfismo es lo más sencilla posible (una matriz diagonal).

Recuerda que también es posible obtener la potencia enésima de una matriz mediante el método de inducción

Potencia enésima de una matriz

A la hora de elevar una matriz a una potencia enésima podemos proceder multiplicando la matriz por ella misma n veces. Esto para valores altos de n resulta impracticable.
Sin embargo, si la matriz dada es diagonalizable los cálculos se simplifican muchísimo. El método consiste en hacer lo siguiente:

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD\,(P^{-1}P)\,D\,P^{-1} = P\,D^2\,P^{-1}$$

$$A^3 = (PDP^{-1})^3 = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD\,(P^{-1}P)\,D\,(P^{-1}P)\,DP^{-1} = P\,D^3\,P^{-1}$$

Teniendo en cuenta que $P^{-1}P = I$

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) =$$
$$= PD\,(P^{-1}P)\,D\,(P^{-1} \ldots P)\,D\,(P^{-1}P)\,DP^{-1} = P\,D^n\,P^{-1}$$

Por tanto la fórmula general que hemos obtenido es:

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1}$$

Teniendo en cuenta que, para matrices diagonales, se cumple que:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

APÉNDICE: EL CUERPO $\mathbb{Z}_2$

Leer antes la página T-15 para ver lo que es un cuerpo

El conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ tiene estructura de cuerpo con la suma y el producto.

El conjunto $\mathbb{Z}_2$ tiene la particularidad de que tiene sólo dos elementos (a diferencia del cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ que tiene infinitos elementos).

Todas las operaciones que se pueden realizar en $\mathbb{Z}_2$ se resumen a continuación:

Para la suma +

$$0+0=0$$
$$1+0=1$$
$$0+1=1$$
$$1+1=0$$

OJO CON ESTO ⇒ $1+1=0$

El elemento neutro de la suma es el 0
El elemento opuesto del 0 es el 0
El elemento opuesto del 1 es el 1

Para el producto ·

$$0\cdot 0=0$$
$$1\cdot 0=0$$
$$0\cdot 1=0$$
$$1\cdot 1=1$$

El elemento neutro del producto es el 1
El elemento inverso de 1 es el 1
el 0 no tiene inverso porque es el neutro del +

Así pues decimos que $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ es un cuerpo con las operaciones internas suma y producto.

Espacios vectoriales con $\mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

Si nos hablan del espacio vectorial $\mathbb{Z}_2^3$ se están refiriendo a vectores con tres componentes, donde cada componente es un elemento de $\mathbb{Z}_2$, es decir 0 ó 1.

$$(x,y,z)\in\mathbb{Z}_2^3 \quad \text{donde las tres componentes son 0 ó 1, es decir } x,y,z\in\mathbb{Z}_2$$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Se trata de la misma notación que cuando hablamos de $\mathbb{R}^3$. El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son los vectores de tres componentes, donde cada componente es un número real.

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad \text{donde las tres componentes son números reales, es decir } x,y,z\in\mathbb{R}$$

Igualmente se definen los elementos del espacio vectorial $\mathbb{Z}_2^n = \mathbb{Z}_2\times\ldots\times\mathbb{Z}_2$ como los vectores con n componentes donde cada componente pertenece a $\mathbb{Z}_2$, es decir, cada componente es 0 ó 1

<u>Ejemplo:</u>

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sabemos sumar dos vectores:

$$(1,2,3)+(-2,0,5)=(1-2,2+0,\ 3+5)=(-1,2,8)$$

Igualmente en el espacio vectorial $\mathbb{Z}_2^3$ se pueden sumar dos vectores:

OJO:
Presta atención a la primera componente

$$(1,1,0)+(1,0,1)=(1+1,1+0,\ 0+1)=(0,1,1)$$

Álgebra

Ejercicios de clase

TEMA 1: NOCIONES BÁSICAS

Ejercicio 1

Demostrar que la siguiente sentencia es verdadera para cualesquier predicado P :

$$\left(\exists x\ P(x)\right) \Leftrightarrow \neg\left(\forall x\left(\neg P(x)\right)\right)$$

Solución:

- Primero vamos a demostrar que $\underbrace{\left(\exists x\ P(x)\right)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\neg\left(\forall x\left(\neg P(x)\right)\right)}_{q}$ es verdadero.

Para ello tenemos que comprobar todos los casos de la tabla de verdad de la implicación:

En la tabla observamos que siempre que p sea falso (independientemente de lo que valga q) tenemos que $p \Rightarrow q$ es verdadero, así que no hace falta preocuparse por los dos primeros casos ya que el resultado es siempre verdadero.

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Observando la tabla vemos que para demostrar que $p \Rightarrow q$ es verdadero basta con probar que el tercer caso no se cumple nunca ya que en los demás casos $p \Rightarrow q$ siempre es verdadero.
Por tanto solo tenemos que probar que cuando p es Verdadero q también es verdadero. De esta forma eliminamos la posibilidad de que se produzca el tercer caso que es el único en el que $p \Rightarrow q$ es falso.

En efecto, si $\exists x\ P(x)$ es verdadero quiere decir que para algún objeto concreto a se cumple que $P(a)$ es verdadero. Por tanto, para ese objeto, $\neg P(a)$ es falso. Eso quiere decir que $\neg P(x)$ es Falso. Seguidamente $\forall x\left(\neg P(x)\right)$ también será falso y finalmente $\neg\forall x\left(\neg P(x)\right)$ es verdadero.

- Segundo vamos a demostrar que $\underbrace{\neg\left(\forall x\left(\neg P(x)\right)\right)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\left(\exists x\ P(x)\right)}_{q}$ es verdadero.

Para ello tenemos que comprobar otra vez todos los casos de la tabla de verdad de la implicación. Al igual que en el anterior razonamiento tenemos que demostrar que no puede darse el tercer caso de la tabla que es el único en el que $p \Rightarrow q$ es falso. Para ello tenemos que demostrar que cuando p es verdadero obligatoriamente q es verdadero.

Si $\neg\left(\forall x\left(\neg P(x)\right)\right)$ es verdadero tenemos que $\forall x\left(\neg P(x)\right)$ es falso lo que significa que $\neg P(x)$ no siempre se cumple o, lo que es lo mismo, existe algún objeto concreto a para el que $\neg P(a)$ es falso. Por tanto para ese objeto concreto $P(a)$ es verdadero y ello implica que $\exists x\ P(x)$ es verdadero.

Ejercicio 2

> Demostrar si la siguiente sentencia es verdadera o falsa para cualquiera que sea el predicado P :
>
> $$\neg(\forall x\ P(x)) \iff \forall x\ (\neg P(x))$$

Solución:

Vamos a demostrar que la equivalencia del enunciado es falsa probando que la implicación hacia la izquierda es falsa:

$$\underbrace{\neg(\forall x\ P(x))}_{p} \Rightarrow \underbrace{\forall x\ (\neg P(x))}_{q}$$

Para ello tenemos tenemos que probar que puede darse el tercer caso de la tabla:

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

es decir tenemos que probar que existen casos en los que p es verdadero y q es falsa. En esos casos $p \Rightarrow q$ es falsa.

En este caso $\forall x\ P(x)$ significa "todo número natural es par"

Consideremos el conjunto de los número naturales y sea $P(x)$ el predicado "x es par". En tal caso, $\forall x\ P(x)$ es falso (ya que, por ejemplo, 5 es un número natural que no es par) y por tanto $\neg(\forall x\ P(x))$ es verdadero.

Ahora bien, puesto que 2 es un número natural par tenemos que $P(2)$ es verdadero, luego $\neg P(2)$ es falso, luego $\neg P(x)$ no es siempre verdadero y por tanto $\forall x\ (\neg P(x))$ es falso.

Ejercicio 3

Demostrar si la siguiente sentencia es verdadera o falsa para cualesquiera que sean los predicados P y Q:

$$\neg\big(\forall x\big(P(x)\Rightarrow Q(X)\big)\big) \Leftrightarrow \exists x\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big).$$

Solución:

- Primero vamos a probar que $\underbrace{\neg\big(\forall x\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\big)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\exists x\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)}_{q}$ es V.

Para ello tenemos que comprobar todos los casos de la tabla de verdad de la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Observando la tabla vemos que para demostrar que $p \Rightarrow q$ es verdadero basta con probar que el tercer caso no se cumple nunca ya que en los demás casos $p \Rightarrow q$ siempre es verdadero.
Por tanto solo tenemos que probar que cuando p es verdadero q también es verdadero. De esta forma eliminamos la posibilidad de que se produzca el tercer caso que es el único en el que $p \Rightarrow q$ es falso.

En efecto, si $\neg\big(\forall x\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\big)$ es verdadero quiere decir que $\forall x\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)$ es falso lo que significa que si tomamos cualquier elemento concreto a se cumple que $P(a)\Rightarrow Q(a)$ es falso que quiere decir que $P(a)$ es verdadero y que $Q(a)$ es falso o, lo que es lo mismo que $P(a)$ es verdadero y $\neg Q(a)$ es verdadero por lo que $P(a)\wedge\neg Q(a)$ es verdadero y, consecuentemente $\exists x\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)$ es verdadero.

- Segundo vamos a demostrar que $\underbrace{\exists x\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\neg\big(\forall x\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\big)}_{q}$

Si $\exists x\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)$ es verdadero quiere decir que existe un elemento concreto a tal que $P(a)\wedge\neg Q(a)$ es verdadero. A su vez esto significa (mirando la tabla de verdad del "y" lógico) que $P(a)$ es verdadero y que $\neg Q(a)$ es verdadero o, lo que es lo mismo, $P(a)$ es verdadero y que $Q(a)$ es falso.
Por tanto $P(a)\Rightarrow Q(a)$ es falso por lo que $\forall x\ \big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)$ es falso concluyendo que $\neg\big(\forall x\ P(x)\Rightarrow Q(x)\big)$ es verdadero.

Ejercicio 4

Los dos primeros apartados son las leyes de De Morgan

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Demostrar que:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Ejercicio 5

Demostrar que, siendo A, B y C cualesquiera conjuntos, se verifican las siguientes relaciones:

a) $A \cap B = A \cap C$ y $A \cup B = A \cup C$ si, y sólo si, $B = C$.

b) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \varnothing$ si, y sólo si, $A = B$.

c) $A \cup B = B$ si, y sólo si, $A \cap B = A$.

d) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$.

e) Si $A \subset B$ y $C = B - A$, entonces $A = B - C$.

f) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

g) $(A \Delta B)' = (A' \cup B) \cap (A \cup B')$.

Ejercicio 6

Sea $f: X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Sean A y B dos subconjuntos de X y C y D dos subconjuntos de Y. Demostrar que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \subset f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

e) $f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$

f) $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$

g) $f^{-1}(f(X)) = X$

Ejercicio 7

I. Estudiar el carácter de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por:

$$f_1(x) = e^x \qquad f_2(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f_3(x) = \operatorname{tg} x \qquad f_4(x) = x^3$$

II. Restringir las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ a un dominio donde sean inyectivas:

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = \operatorname{sen} x$$

Ejercicio 8

Decir si las siguientes aplicaciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

a) $\begin{aligned} f: M_2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A &\to f(A) = |A| \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} f: \mathbb{R}_2[x] &\to \mathbb{R}_1[x] \\ p(x) &\to f(p(x)) = p'(x) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\to f(x) = (x, x) \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} f: P(X) &\to P(X) \\ A &\to P(A) = \overline{A} \end{aligned}$

Ejercicio 9

Sea las aplicaciones $f : A \to B$, $g : B \to C$. Demostrar las siguientes propiedades:

a) f, g inyectivas $\Rightarrow$ $g \circ f$ inyectiva

b) $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva

c) f, g sobreyectivas $\Rightarrow$ $g \circ f$ sobreyectiva

Ejercicio 10

Sea $f: X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Demostrar que se cumplen las siguientes propiedades:

a) f es inyectiva $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A,\ \forall A \subset X$

b) f es inyectiva $\Rightarrow f(A') \subset (f(A))',\ \forall A \subset X$

c) f es sobreyectiva $\Leftrightarrow f(f^{-1}(C)) = C,\ \forall C \subset Y$

Ejercicio 11

Sean $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ y $h:Y\to X$ aplicaciones entre conjuntos tales que se verifica $g\circ f=Id_X$ y $f\circ h=Id_Y$. Demostrar entonces se tiene:

a) $g=h=f^{-1}$

b) g y h son biyectivas.

Ejercicio 12

a) Inducir el valor de la suma

$$1+3+5+\ldots+(2n-1), \qquad n\in\mathbb{N}$$

observando sus valores para los primeros números naturales. Probar la fórmula por inducción.

b) Justificar por inducción la fórmula

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

c) Observando el comportamiento de los cocientes

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}, \qquad \frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{1+2+3+\ldots+n}$$

para los primeros números naturales, inducir fórmulas para las sumas de los cuadrados y los cubos de los n primeros números naturales. Probar la validez de estas fórmulas por inducción.

Ejercicio 1

Demostrar que la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

verifica la relación $A^n = 3^{n-1}A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, calcular A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3

Dada la matriz identidad I de orden tres, para cada uno de los vectores

- $\vec{v}_1 = (1, -1, -1) \in \mathbb{R}^3$,
- $\vec{v}_2 = (-1, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$,

se pide:

a) Hallar la matriz $H = I - \dfrac{2}{\vec{v}\,\vec{v}^T}(\vec{v}^T\vec{v})$.

b) Calcular H^T, H^2 y H^{-1}.

Ejercicio 4

Calcular la inversa de la siguiente matriz mediante el método de Gauss-Jordan :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a resolver este ejercicio mediante el método de Gauss-Jordan. Para ello realizaremos una serie de transformaciones elementales tipo fila :

recuerda que las transformaciones elementales se deben realizar en ambas matrices

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \quad \boxed{f_3 = f_3 - 2f_1} \quad \downarrow$$

la primera transformación elemental consiste en restar a la tercera fila la primera fila multiplicada por dos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \quad \boxed{f_2 = f_2 + 3f_1} \quad \downarrow$$

ahora se trata de sumar a la segunda fila tres veces la primera fila

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \quad \boxed{f_1 = f_1 + 2f_2} \quad \downarrow$$

ahora debemos sumar a la primera fila la segunda fila multiplicada por dos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \quad \boxed{f_3 = f_3 - 6f_2} \quad \downarrow$$

restamos a la tercera fila la segunda fila multiplicada por seis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -20 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \quad \boxed{f_3 = (-1/3)f_3} \quad \downarrow$$

sustituimos la tercera fila por un tercio de ella misma. además al resultado le cambiamos el signo.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20/3 & 2 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$
$$\boxed{f_2 = f_2 - f_3}$$ a la segunda fila le restamos la tercera fila
$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -11/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 20/3 & 2 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$
$$\boxed{f_1 = f_1 - f_3}$$ la última transformación elemental consiste en restar a la primera fila la tercera
$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -11/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 20/3 & 2 & -1/3 \end{array}\right)$$

Una vez que hemos conseguido la matriz identidad a la izquierda de la línea el proceso termina. La matriz inversa de A es la matriz que está a la derecha de la línea.

Solución : $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -11/3 & -1 & 1/3 \\ 20/3 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Comprobación :

Se puede comprobar fácilmente si el resultado que hemos obtenido es el correcto. Basta multiplicar la matriz A, que nos dan en el enunciado, por la matriz que hemos obtenido, A^{-1}. El resultado debe ser la matriz identidad I. En nuestro caso es así, ya que :

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -11/3 & -1 & 1/3 \\ 20/3 & 2 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ejercicio 5

Obtener la forma reducida de Gauss-Jordan de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Comienza por la primera columna distinta de cero empezando por la izquierda. Esta columna es una columna pivote. La posición de pivote es la superior.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Paso2. Selecciona un coeficiente distinto de cero de la columna pivote. Si es necesario intercambia filas para colocar este coeficiente en la posición de pivote.

Se intercambian las filas 1 y 3

El número recuadrado $\boxed{3}$ es el pivote

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Usa transformaciones elementales de fila para obtener ceros en todas las posiciones por debajo del pivote.

A la segunda fila se le suma la opuesta de la primera.

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Ignora la fila que contiene al pivote y todas las filas (si hay alguna) por encima de él. Aplica los pasos 1 a 3 a al submatriz que queda. Repite el proceso hasta que no queden filas distintas de cero que modificar.

Nos olvidamos de la primera fila.

Ahora la columna pivote es la segunda y el nuevo pivote es el $\boxed{2}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Se suma a la tercera fila la segunda fila multiplicada por –3/2.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

En esta última matriz no hace falta hacer nada pues ya está puesta en **forma reducida de Gauss**

Ahora nos olvidamos de las dos primeras filas. La columna pivote es la quinta y el pivote es el $\boxed{1}$. No hacemos nada pues ya está en forma reducida de Gauss

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 5. Empezando por el pivote que esté más a la derecha y procediendo hacia arriba y a la izquierda, conseguir, mediante transformaciones elementales de fila, hacer ceros los coeficientes por encima de cada pivote. Si un pivote no es igual a 1, multiplicar su fila por su inverso.

El pivote más a la izquierda está en la fila 3 y es un 1 por lo que no hace falta escalarlo. Para hacer ceros encima suyo se resta a la segunda fila dos veces la tercera fila y a la primera fila se le resta seis veces la tercera fila.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}$$

El siguiente pivote está en la fila 2. Escalamos la segunda fila para conseguir un 1 en la posición de pivote.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora conseguimos un cero en el lugar (1,2) sumando a la primera fila nueve veces la segunda.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Escalamos la primera fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

y ya tenemos la **forma reducida de Gauss-Jordan**

TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicio 1

a) Demostrar que el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la ley de composición interna:

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b),(c,d) & \to & (a,b)+(c,d) = (a+c,\, b+d) \end{array}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & K \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & k\,,(c,d) & \to & k\cdot(c,d) = (k\cdot c,\, k\cdot d) \end{array}$$

tiene estructura de espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R}$.

b) Estudiar si $\mathbb{R}^2$ es espacio vectorial con la misma ley de composición interna que en apartado anterior pero con la ley de composición externa siguiente:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & K \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & k\,,(c,d) & \to & k\cdot(c,d) = (k\cdot c^2,\, k\cdot d^2) \end{array}$$

Primero vamos a probar que $(\mathbb{R}^2,+)$ es grupo (condiciones a1-a4).

Fíjate que el signo + tiene distinto significado según el contexto en el que se encuentre: Cuando está entre dos vectores es la l.c.i pero cuando está entre dos escalares es el + habitual de los números reales

a1) + tiene propiedad asociativa

$$(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)\ ,\quad v_1, v_2, v_3 \in E$$

$$(x_1,x_2)+((y_1,y_2)+(z_1,z_2)) = (x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2) = (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2)$$

$$((x_1,x_2)+(y_1,y_2))+(z_1,z_2) = (x_1+y_1,x_2+y_2)+(z_1,z_2) = (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2)$$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$

$(\mathbb{R}^2,+)$ es semigrupo

a2) + tiene elemento neutro

$$v + 0 = 0 + v = v\ ,\ v \in E$$

El elemento neutro es (0,0). Efectivamente, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que:

$$(0,0)+(x,y) = (0+x,0+y) = (x,y)$$

$$(x,y)+(0,0) = (x+0,y+0) = (x,y)$$

$(\mathbb{R}^2,+)$ es monoide

a3) + tiene elemento inverso

$$v+(-v) = (-v)+v = 0\ ,\ v \in E$$

Todo elemento (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tiene un elemento inverso que es $(-x,-y)$. Efectivamente, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que:

$$(x,y)+(-x,-y) = (x-x,y-y) = (0,0)$$

$$(-x,-y)+(x,y) = (-x+x,-y+y) = (0,0)$$

$(\mathbb{R}^2,+)$ es grupo

Ambas expresiones son iguales porque el + habitual de los números reales es conmutativo (no hace falta probarlo)

a4) + tiene propiedad conmutativa

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad , \quad v_1, v_2 \in E$$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$(y_1, y_2) + (x_1, x_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2)$

$\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ es grupo abeliano

· es una ley de composición externa que cumple:

b1) Distributiva respecto a la suma de escalares

$$(k_1 + k_2)\, v = k_1 v + k_2 v \quad , \quad v \in E \quad k_1, k_2 \in K$$

$(k_1 + k_2) \cdot (x_1, x_2) = ((k_1 + k_2) \cdot x_1, (k_1 + k_2) \cdot x_2) = (k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_1, k_1 \cdot x_2 + k_2 \cdot x_2)$

$k_1 \cdot (x_1, x_2) + k_2 \cdot (x_1, x_2) = (k_1 \cdot x_1, k_1 \cdot x_2) + (k_2 \cdot x_1, k_2 \cdot x_2) = (k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_1, k_1 \cdot x_2 + k_2 \cdot x_2)$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

b2) Distributiva respecto a la suma de vectores

$$k\,(v_1 + v_2) = k\, v_1 + k\, v_2 \quad , \quad v_1, v_2 \in E \quad k \in K$$

$k \cdot ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = k \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (k \cdot (x_1 + y_1), k \cdot (x_2 + y_2)) = (k \cdot x_1 + k \cdot y_1, k \cdot x_2 + k \cdot y_2)$

$k \cdot (x_1, x_2) + k \cdot (y_1, y_2) = (k \cdot x_1, k \cdot x_2) + (k \cdot y_1, k \cdot y_2) = (k \cdot x_1 + k \cdot y_1, k \cdot x_2 + k \cdot y_2)$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{R}$

b3) Asociativa mixta

$$(k_1 k_2)\, v = k_1 (k_2\, v) \quad , \quad v \in E \quad k_1, k_2 \in K$$

$(k_1 \cdot k_2) \cdot (x_1, x_2) = ((k_1 \cdot k_2) \cdot x_1, (k_1 \cdot k_2) \cdot x_2) = (k_1 \cdot k_2 \cdot x_1,\ k_1 \cdot k_2 \cdot x_2)$

$k_1 \cdot (k_2 \cdot (x_1, x_2)) = k_1 \cdot (k_2 \cdot x_1, k_2 \cdot x_2) = (k_1 \cdot k_2 \cdot x_1,\ k_1 \cdot k_2 \cdot x_2)$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

b4)

$$1 \cdot v = v \quad , \quad v \in E$$

$1 \cdot (x_1, x_2) = (1 \cdot x_1,\ 1 \cdot x_2) = (x_1,\ x_2) \quad , \quad \forall (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$

Ejercicio 2

Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos constituyen subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones inducidas:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 4y = 0\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 1\}$

c) $C = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 / a \in \mathbb{R}\}$

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 4y^2 = 0\}$

Caracterizar de forma general todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$

$\boxed{a)}$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x+4y=0\}$ Forma cartesiana

$\boxed{a}$ ¿Elemento neutro de R? ¿$(0,0) \in A$?

$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$

$\boxed{b_1}$ $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$

Tenemos que demostrar que $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \in A$

Sumamos $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ y sust. en A

$$3(x_1+x_2)+4(y_1+y_2)=0$$

$$\underbrace{3x_1+4y_1}_{0}+\underbrace{3x_2+4y_2}_{0}=0$$

$$0+0=0$$

se cumple

$\boxed{b_2}$ $\forall (x_1,y_1) \in A, \forall k \in K$

Tenemos que demostrar que $k(x_1,y_1) \in A$

$k(x_1,y_1) = (kx_1, ky_1)$, sust. en A

$3kx_1+4ky_1=0$; $k\underbrace{(3x_1+4y_1)}_{0}=0$; $k \cdot 0 = 0$. Se cumple

$\boxed{\text{CONCLUSIÓN: } A < \mathbb{R}^2}$

$\boxed{b)}$ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x-y=1\}$

$\boxed{a}$ ¿$0,0 \in B$? $0-0 \neq 1 \Rightarrow (0,0) \notin B$, por tanto $\boxed{B \not< \mathbb{R}^2}$

$\boxed{c}$ $C = \{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \in \mathbb{R}\}$ F. Paramétrica

$\boxed{a}$ ¿$(0,0) \in C$?

Tomando $\alpha = 0 \longrightarrow (0,0) \in C$

$\boxed{b_1}$ $\forall (\alpha_1, 0), (\alpha_2, 0) \in C$

$(\alpha_1, 0) + (\alpha_2, 0) = (\alpha_1 + \alpha_2, 0) \in C$

$\boxed{b_2}$ $\forall (\alpha_1, 0) \in C, \forall K \in K$

$K.(\alpha_1, 0) = (K\alpha_1, 0) \in C$

$\boxed{\text{Conclusión} \quad C < \mathbb{R}^2}$

$\boxed{d}$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 4y^2 = 0\}$

$\boxed{a}$ ¿$(0,0) \in A$?

$3.0 + 4.0 = 0 \;;\; 0 = 0$

$\boxed{b_1}$ $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y sust. en A

$3(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2)^2 = 0 \;;\; 3x_1 + 3x_2 + 4y_1^2 + 4y_2^2 + 8y_1y_2 = 0 \;;$

$\underbrace{3x_1 + 4y_1^2}_{0} + \underbrace{3x_2 + 4y_2^2}_{0} + 8y_1y_2 = 0$

Luego $v_1 + v_2 \notin A$

$\boxed{\text{Conclusión: } A \not< \mathbb{R}^2}$

Ejercicio 3

Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos constituyen subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ con las operaciones inducidas:

a) $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - 2x_2 = 0\}$

b) $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 5x_1 - 2x_2 = 1\}$

c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x_1 - 2x_3 = 0, \ x_1 + x_2 = 0\}$

d) $S_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_3^2 = 0\}$

e) $S_5 = \{(a, b - a, 2b) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$

Caracterizar de forma general todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

$\boxed{a)}$ $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 = 0\}$

$\boxed{a}$ ¿$(0,0,0) \in S_1$?

$0 - 2 \cdot 0 = 0 \ ; \ 0 = 0 \Rightarrow (0,0,0) \in S_1$

$\boxed{b_1}$ $\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in S_1$

$(x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ y sust. en S_1

$x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2) = 0 \ ; \ \underbrace{x_1 - 2x_2}_{0} + \underbrace{y_1 - 2y_2}_{0} = 0 \ ; \ 0 = 0$

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \in S_1$

$\boxed{b_2}$ $\forall (x_1, x_2, x_3) \in S_1, \forall K \in \mathbb{K}$

$K(x_1, x_2, x_3) = (Kx_1, Kx_2, Kx_3)$ y sust. en S_1

$Kx_1 - 2Kx_2 = 0 ; K\underbrace{(x_1 - 2x_2)}_{0} = 0 \Rightarrow K \cdot 0 = 0.$

$K(x_1, x_2, x_3) \in S_1$

$\boxed{\text{CONCLUSIÓN: } S_1 < \mathbb{R}^3}$

$\boxed{b)}$ $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 5x_1 - 2x_2 = 1\}$

$\boxed{a}$ ¿$(0,0,0) \in S_1$?

$5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow 0 \neq 1 \Rightarrow (0,0,0) \notin S_2$

$\boxed{\text{CONCLUSIÓN } S_2 \not< \mathbb{R}^3}$

$\boxed{c}$ $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \; 2x_1 - 2x_3 = 0 \; ; \; x_1 + x_2 = 0\}$

$\boxed{a}$ ¿ $(0,0,0) \in S_3$?

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{array}\right\} \; 0 = 0 \implies (0,0,0) \in S_3$$

$\boxed{b_1}$ $\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in S_3$

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ y sust. en S_3

1ª ec: $2(x_1 + y_1) - 2(x_3 + y_3) = 0 \; ; \; \underbrace{2x_1 - 2x_3}_{0} \underbrace{+ 2y_1 - 2y_3}_{0} = 0$

2ª ec: $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 \; ; \; \underbrace{x_1 + x_2}_{0} \underbrace{+ y_1 + y_2}_{0} = 0$

$\boxed{b_2}$ $\forall (x_1, x_2, x_3) \in S_3$, $\forall K \in \mathbb{K}$

$K(x_1, x_2, x_3) = (Kx_1, Kx_2, Kx_3)$ y sust. en S_3

1ª ec: $2Kx_1 - 2Kx_3 = 0 \; ; \; K\underbrace{(2x_1 - 2x_3)}_{0} = 0 \implies 0 = 0$

2ª ec: $2Kx_1 + 2Kx_2 = 0 \; ; \; K\underbrace{(2x_1 + 2x_2)}_{0} = 0 \implies 0 = 0$

$K(x_1, x_2, x_3) \in S_3$

$\boxed{\text{CONCLUSIÓN: } S_3 < \mathbb{R}^3}$

e) S_5 =

Ejercicio 4

Lo hacemos para $n=3$

Se dice que una matriz es de Toeplitz si sus elementos son constantes sobre cada diagonal (es decir, el elemento (i, j) es de la forma a_{i-j}). Sea $\mathcal{T}_n$ el conjunto de las matrices de Toeplitz triangulares inferiores de orden n.

Analizar si $\mathcal{T}_n$ es un subespacio del espacio vectorial de las matrices triangulares de orden n, y en tal caso calcular su dimensión.

$$\mathcal{T}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \;/\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \dim(\mathcal{T}_3) = 3$$

$\boxed{a_1}$ $\forall A, B \in \mathcal{T}_3$, tenemos que probar que $A+B \in \mathcal{T}_3$

$$A+B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & 0 & 0 \\ \beta_1+\beta_2 & \alpha_1+\alpha_2 & 0 \\ \gamma_1+\gamma_2 & \beta_1+\beta_2 & \alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A+B \in \mathcal{T}_3}$

$\boxed{b_1}$ $\forall A \in \mathcal{T}_3$, $\forall K \in \mathbb{K}$

$$K \cdot A = K \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\alpha & 0 & 0 \\ K\beta & K\alpha & 0 \\ K\gamma & K\beta & K\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_3$$

$\boxed{a}$ ¿ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_3$?

$\alpha = \beta = \gamma = 0$, nos queda $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_3$

Conclusión: $\mathcal{T}_3 < M_3(\mathbb{R})$

Ejercicio 5

Estudiar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes y cuales son linealmente independientes.

a) $\{(1, 3), (1, 0)\}$ en $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$

b) $\{(1, 2), (-2, -4)\}$ en $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$

e) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ en $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

f) $\{(0, 1, 0), (2, 2, 1), (4, 7, 2)\}$ en $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

g) $\left\{\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 6\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ en $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

h) $\{x^2+1, 3x-2, 4x^2\}$ en $(P_2(\mathrm{R}), +, \cdot)$

i) $\{x^2+x-4, 3\}$ en $(P_2(\mathrm{R}), +, \cdot)$

j) $\{1, \cos 2t, \operatorname{sen}^2 t\}$ en $(C(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$

$\boxed{a)}$ $\{(1,3),(1,0)\}$ en $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$

Sea $\alpha(1,3)+\beta(1,0)=(0,0) \Rightarrow (\alpha,3\alpha)+(\beta,0)=(0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 3\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$

$\boxed{\text{CONCLUSIÓN: Vector libre (l.i)}}$

$\boxed{b)}$ $\{(1,2),(-2,-4)\}$ en $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$

Sea $\alpha(1,2)+\beta(-2,-4)=(0,0) \Rightarrow (\alpha,2\alpha)+(-2\beta,-4\beta)=(0,0)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha-2\beta=0\\ 2\alpha-4\beta=0\end{array}\right] \alpha=2\beta$. S.C.I (∞ sols.)

$\boxed{\text{CONCLUSIÓN: Vector ligado (l.d)}}$

$\boxed{g)}$ $\left\{\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 6\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ en $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

Sea $\alpha\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 6\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3\alpha+6\beta=0\\ 2\alpha+\gamma=0\\ \cancel{\alpha+2\beta=0}\end{array}\right] \begin{array}{l}\alpha=-2\beta\\ \gamma=-2\alpha=4\beta\end{array}$ S.C.I.

$\boxed{\text{CONCLUSIÓN: LIGADO (l.d.)}}$

Ejercicio 6

Calcular la dimensión y una base de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales. Calcular también un espacio suplementario para cada subespacio.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 4y = 0\}$

b) $C = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 / a \in \mathbb{R}\}$

c) $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 /\ x_1 - 2x_2 = 0\}$

d) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 /\ 2x_1 - 2x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = 0\}$

e) $S_5 = \{(a, b - a, 2b) \in \mathbb{R}^3 /\ a, b \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{a}$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x+4y=0\}$

• Ec. cartesiana: $3x+4y=0$

• Ec. paramétricas: $3x+4y=0 \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\frac{3}{4}\alpha \end{array} \right. \Rightarrow \{$ Ec. Parámetros de A

$A = \{(\alpha, -\frac{3}{4}\alpha) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \in \mathbb{R}\}$ forma paramétrica

$\boxed{\text{Dim}(A) = n^\circ \text{ parámetros} = 1}$ es el nº de vectores que tiene cualquier base de A

Tomamos $\alpha = 4 \rightarrow (4, -3)$

$\boxed{B_A = \{(4,-3)\}}$ una base de A

$\boxed{c}$ $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 = 0\}$

• Ec. cartesiana: $x_1 - 2x_2 = 0$

• Ec. paramétricas: $x_1 - 2x_2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_1 = 2\beta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\beta \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \end{array} \right.$ Ec. Param. de S_1

$S_1 = \{(2\beta, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ Forma paramétrica

$\boxed{\dim(S_1) = n^\circ \text{ parám.} = 2}$

Tomamos $\alpha = 1$, $\beta = 0$ $(0,0,1)$

" $\alpha = 0$, $\beta = 1$ $(2,1,0)$

$\boxed{B_{S_1} = \{(0,0,1), (2,1,0)\}}$

Ejercicio 7

Sean los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$M_1 = L\left[\{(1,0,0),(0,1,0)\}\right]$ $M_2 = L\left[\{(1,0,0),(0,0,1)\}\right]$ $M_3 = L\left[\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right]$

$N_1 = L\left[\{(1,0,0)\}\right]$ $N_2 = L\left[\{(0,1,0)\}\right]$ $N_3 = L\left[\{(0,0,1)\}\right]$

Se pide calcular la suma y la intersección en los siguientes casos:

a) M_1 y M_2 b) N_1 y N_2 c) M_1 y N_1 d) M_1 y N_3

Estudiar, además, si la suma es directa y si son suplementarios.

a) $M_1 = L[\{\overbrace{(1,0,0),(0,1,0)}^{\text{Base de } M_1}\}]$

$(x,y,z) \in M_1 \iff (x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = (\alpha,0,0) + (0,\beta,0)$

$M_1 = \{(\alpha,\beta,0) \in \mathbb{R}^3 / \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ "Plano xy"

$M_2 = L[\{\overbrace{(1,0,0),(0,0,1)}^{\text{base de } M_2}\}]$

$(x,y,z) \in M_2 \iff (x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,1) = (\alpha,0,0) + (0,0,\beta)$

$M_2 = \{(\alpha,0,\beta) \in \mathbb{R}^3 / \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ "Plano xz"

$M_1 \cap M_2 = \{(\alpha,0,0) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$M_1 + M_2 = L(B \cup B') = L(\{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\})$

$B = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ base de M_1

$B' = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$ base de M_2

$= L(\underbrace{\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}}_{\text{Base canónica de } \mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$

¿M_1 y M_2 son suma directa?

$M_1 \cap M_2 = \{(0,0,0)\} \to M_1$ y M_2 NO son suma directa

¿M_1 y M_2 son suplementarios? M_1 y M_2 no son suplementarios pq no son suma directa

Ejercicio 8 Sean las bases $B=\{(2,0),(0,3)\}$ y $B'=\{(1,1),(-1,1)\}$. Se pide:

a) Las coordenadas de un vector v en la base B son (2, 2). Calcular sus coordenadas con respecto a la base canónica.

b) Las coordenadas de un vector v en la base canónica son (3, 6). Calcular sus coordenadas con respecto a la base B.

c) Las coordenadas de un vector v en la base B' son (2, 2). Calcular sus coordenadas con respecto a la base canónica.

d) Las coordenadas un de vector v en la base canónica son (3, 6). Calcular sus coordenadas con respecto a la base B'.

e) Las coordenadas de un vector v en la base B son (1, 4). Calcular sus coordenadas con respecto a la base B'.

a) $B=\{\underbrace{(2,0)}_{\bar u_1},\underbrace{(0,3)}_{\bar u_2}\}$ $\quad B_c=\{\underbrace{(1,0)}_{\bar e_1},\underbrace{(0,1)}_{e_2}\}$ $\quad B'=\{\underbrace{(1,1)}_{\bar v_1},\underbrace{(-1,1)}_{\bar v_2}\}$

$\vec V_B=(2,2)=2\bar u_1+2\bar u_2$

¿$\vec V_{B_c}$? $B=\{(2,0),(0,3)\}$ $\quad M_{B_c}^{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ Matriz de cambio de base B a B_c

$\vec V_{B_c}=M_{B_c}^{B}\cdot \vec V_B$

$\vec V_{B_c}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ por tanto $\boxed{\vec V_{B_c}=(4,6)=4\bar e_1+6e_2}$

b) $\vec V_{B_c}=(3,6)=3\bar e_1+6\bar e_1$

¿V_B? $B=\{(2,0),(0,3)\}$ $\quad M_{B}^{B_c}=\left(M_{B_c}^{B}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&0\\0&\frac13\end{pmatrix}$

Ahora: $M_{B}^{B_c}\cdot\vec V_{B_c}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix}$

$\vec V_B=\left(\frac32,2\right)=\frac32\bar u_1+2\bar u_2$

Ejercicio 1

Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales. En las que sí lo sean obtener la matriz asociada en las bases canónicas así como los subespacios núcleo e imagen:

a) $f(x, y) = (-4x - 2y, 2x + y)$
b) $f(x, y) = (x - y, 2x + y, 3x)$
c) $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$
d) $f(x, y, z) = (z, y, x)$
e) $f(x, y, z) = (x + z, x + y + z)$
f) $f(x, y) = (x^2, y^2)$
g) $f(x, y) = (2x + y + 3, x + y)$

a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \rightarrow f(x, y) = (-4x - 2y, 2x + y)$

$\boxed{1}$ $\boxed{f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)} = f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$

$= (-4(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2) =$

$= (-4x_1 - 4x_2 - 2y_1 - 2y_2, 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2) \rightarrow (1)$

$\boxed{f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2)} = f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) =$

$= (-4x_1 - 2y_1 - 4x_2 - 2y_2, 2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2) \rightarrow (2)$

$\boxed{2}$ $f(k\bar{v}_1) = f(k \cdot (x_1, y_1)) = f(kx_1, ky_1) = (-4kx_1 - 2ky_1, 2kx_1 + ky_1)$

Conclusión: f es lineal

Ahora calculamos la matriz asociada a f en bases canónicas

$B_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$ B_c de $\mathbb{R}^2$

$f(1, 0) = (-4, 2)$
$f(0, 1) = (-2, 1)$

$A(f) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz asociada a f en bases canónicas

$\boxed{f(\vec{v}) = A(f)\cdot\vec{v}}$ fórmula práctica para calcular imágenes a partir de $A(f)$

<u>Núcleo de f - Ker(f)</u>

$$Ker(f) = \{\vec{v} \in E \,/\, f(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

$$\vec{v} \in Ker f \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow A(f)\cdot\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 0$$

$\boxed{Ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x + y = 0\}}$ F. cartesiana

$x = \alpha$
$y = -2\alpha$ $\Rightarrow$ $\boxed{Ker(f) = \{(\alpha, -2\alpha) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}}$ F. Paramétrica

$\boxed{dim(Ker(f)) = n^{o}\ parám. = 1}$

Tomando $\alpha = 1$; $(1,-2)$ Por tanto $\boxed{B_{Ker(f)} = \{(1,-2)\}}$

<u>Imagen de f</u>

$$Im(f) = \{\vec{v} \in E \,/\, \exists \vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = \vec{v}\}$$

$$dim(im(f)) = rg(A(f)) = 1$$

$$B_{Im f} = \{(-2,1)\}$$

Ahora, $Im f = L(\{(-2,1)\})$

$(x,y) \in Im f \Leftrightarrow (x,y) = \alpha(-2,1)$; $(x,y) = (-2\alpha, \alpha)$

$\boxed{Im(f) = \{(-2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}}$ F. Paramétrica

$\boxed{Im(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + 2y = 0\}}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x-y, 2x+y, 3x)$

$\boxed{f \text{ es lineal}}$

Matriz asociada a f en bases canónicas

$B_c = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$

$f(1,0) = (1,2,3)$

$f(0,1) = (-1,1,0)$

$$\boxed{A(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

Calculo de $Ker(f)$

$\vec{v} \in Ker f \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow A(f) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{Ker f = \{(0,0)\}}$

$\boxed{\dim(Ker(f)) = 0} \longrightarrow$ f es inyectiva

Cálculo de $Im(f)$

$rg(A(f)) = 2 \longrightarrow \boxed{\dim(Im(f)) = 2}$

$\boxed{B_{im_f} = \{(1,2,3),(-1,1,0\})}$

$Im(f) = L(\{(1,2,3),(-1,1,0)\})$

$(x,y,z) \in Im f \Longleftrightarrow (x,y,z) = \alpha(1,2,3) + \beta(-1,1,0)$

$(x,y,z) = (\alpha - \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha)$

$$\boxed{Im(f) = \{(\alpha - \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}}$$

$$\boxed{Im(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\} \text{ F. C.}}$$

Ejercicio 2

Se considera el subconjunto M de matrices cuadradas 2x2 definido de la forma siguiente:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} / \; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

y la aplicación $f : M \to M$ definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que M es un espacio vectorial y dar una base de él.
b) Demostrar que f es lineal y calcular la matriz asociada a f en la base encontrada en el apartado anterior.

Ejercicio 3

Sean E, E' $\mathbb{K}$-e.v. y Sea $f : E \to E'$ lineal. Demostrar que:

$$f \text{ inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \ker(f) = \{0_E\}$$

Ejercicio 4

Sean E, E' $\mathbb{K}$-e.v. y sea $f : E \to E'$ lineal. Demostrar que:

a) Si $(u_1,\dots,u_n)$ ligado $\Rightarrow$ $(f(u_1),\dots,f(u_n))$ ligado

b) Si $(u_1,\dots,u_n)$ libre y f inyectiva $\Rightarrow$ $(f(u_1),\dots,f(u_n))$ libre

c) Si $(u_1,\dots,u_n)$ es generador de E $\Rightarrow$ $(f(u_1),\dots,f(u_n))$ es generador de $\mathrm{Im}(f)$

d) Si $(u_1,\dots,u_n)$ es generador de E y f sobreyectiva $\Rightarrow$ $(f(u_1),\dots,f(u_n))$ es generador de E'

Ejercicio 5 Sea la aplicación lineal $f(x, y) = (x+y, 2x-y)$. Sean las bases $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ y $B' = \{(1, -1), (0, 1)\}$.
Se pide:

a) La matriz asociada a f tomando como referencia las bases canónicas tanto en el espacio de salida como en el de llegada.
b) La matriz asociada a f tomando como referencia la base B en el espacio de salida y la base canónica en el de llegada.
c) La matriz asociada a f tomando como referencia la base canónica en el espacio de salida y la base B' en el de llegada.
d) La matriz asociada a f tomando como referencia la base B en el espacio de salida y la base B' en el de llegada.

a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x+y, 2x-y)$

$B_C = \{(1,0), (0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$

$f(1,0) = (1,2)$

$f(0,1) = (1,-1)$

$$\boxed{A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Matriz asociada a f en bases canónicas

b) $B = \{(1,0), (1,1)\}$

~~$A^B_{B_C}(f)$~~

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A^B_{B_C}(f)"] \arrow[d, "M^B_{B_C}"'] & B_C \\ B_C \arrow[ur, "A(f)"'] & \end{tikzcd}$$

$A^B_{B_C}(f) = A(f) \cdot M^B_{B_C} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

[Matriz asociada a f en la base B del espacio de salida y en la B_C del espacio de llegada]

$B = \{(1,0), (1,1)\}$

$M^B_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [Matriz de cambio de base B a B_C]

c)

$$\begin{tikzcd} B_C \arrow[r, "A^{B_C}_{B'}(f)"] \arrow[dr, "A(f)"'] & B' \\ & B_C \arrow[u, "M^{B_C}_{B'}"'] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{A^{B_C}_{B'}(f)} = M^{B_C}_{B'} \cdot A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$$ [Matriz asociada a f en la base B_C en el espacio de salida y la base B del espacio de llegada]

$$B' = \{\underset{\downarrow}{(1,-1)}, \underset{\downarrow}{(0,1)}\}$$

$$M^{B'}_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad M^{B_C}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ [Matriz de cambio de base de B_C a B']

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right]$$

d)

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A^{B}_{B'}(f)"] \arrow[d, "M^{B}_{B_C}"'] & B' \\ B_C \arrow[r, "A(f)"'] & B_C \arrow[u, "M^{B_C}_{B'}"'] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{A^{B}_{B'}(f)} = M^{B_C}_{B'} \cdot A(f) \cdot M^{B}_{B_C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}$$ Matriz asociada a f en la base B del espacio de salida y la base B' del espacio de llegada

NOTA: $B = \{\underbrace{(1,0)}_{u_1}, \underbrace{(1,1)}_{u_2}\}$, $B' = \{\underbrace{(1,-1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1)}_{v_2}\}$

$$\vec{V}_B = (4,5)_B \Rightarrow \vec{V} = 4\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$$

¿$f(\vec{V}_B)_{B'}$? $\quad f(\vec{V})_{B'} = A^{B}_{B'}(f) \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 27 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$f(\vec{V})_{B'} = 14\vec{V}_1 + 27\vec{V}_2$$

TEMA 5: PRODUCTO ESCALAR. ORTOGONALIZACIÓN

Ejercicio 1

En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual se pide:

a) Determinar un vector unitario que sea ortogonal a los vectores (1,2,1,0), (0,-1,1,0) y (1,1,-2,1).

b) Obtener mediante el método de Gram-Schmidt una base de vectores ortonormales para el subespacio

$$V = L\{ (1,2,-1,0),(1,0,-2,1),(0,1,1,0) \}$$

Ejercicio 2

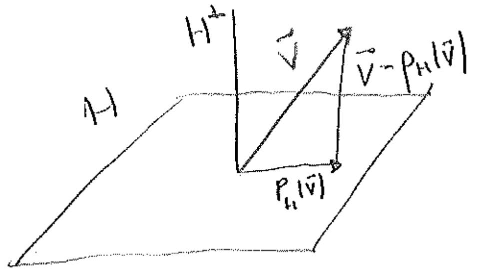
En el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^4, <,>)$ usual consideremos el vector $v = (7, 1, -6, 9)$ y subespacio $H = L\left[\{(1,-2,0,0),(0,1,2,1),(-1,0,1,1)\}\right]$. Calcular la proyección ortogonal de v sobre H.

Ejercicio 3

Sea $H < \mathbb{R}^n$. Demuestra que para cada $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\|v\|^2 = \|\operatorname{proy}_H(v)\|^2 + \|v - \operatorname{proy}_H(v)\|^2$$

Siendo proy_H la proyección ortogonal sobre H.



FORMA 1

$$\|p_H(\vec{v})\|^2 + \|\vec{v} - p_H(\vec{v})\| = \langle p_H(\vec{v}), p_H(\vec{v}) \rangle + \langle \vec{v} - p_H(\vec{v}), \vec{v} - p_H(\vec{v}) \rangle =$$

$$= \langle p_H(\vec{v}), p_H(\vec{v}) \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} - p_H(\vec{v}) \rangle \underbrace{- \langle p_H(\vec{v}), \vec{v} - p_H(\vec{v}) \rangle}_{\perp \; = 0} =$$

$$= \langle p_H(\vec{v}), p_H(\vec{v}) \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} - p_H(\vec{v}) \rangle =$$

$$= \langle p_H(\vec{v}), p_H(\vec{v}) \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle v, p_H(\vec{v}) \rangle =$$

$$= \|\vec{v}\|^2 + \langle p_H(\vec{v}), p_H(\vec{v}) \rangle - \langle \vec{v}, p_H(\vec{v}) \rangle =$$

$$= \|\vec{v}\|^2 + \langle p_H(\vec{v}) - \vec{v}, p_H(\vec{v}) \rangle = \|\vec{v}\|^2$$

FORMA 2

$$\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle (\vec{v} - p_H(\vec{v})) + p_H(\vec{v}), (\vec{v} - p_H(\vec{v}) + p_H(\vec{v}) \rangle$$

$$\cancel{= \langle v - p_H(\vec{v}), \vec{v} - p_H(\vec{v}) \rangle + \langle p_H(\vec{v}), \vec{v} \rangle =}$$

$$= \langle \vec{v} - p_H(\vec{v}), (v - p_H(\vec{v})) + p_H(\vec{v}) \rangle + \langle p_H(\vec{v}), (v - p_H(\vec{v})) + p_H(\vec{v}) \rangle =$$

$$= \langle \vec{v} - p_H(\vec{v}), v - p_H(\vec{v}) \rangle + \langle v - p_H(\vec{v}), p_H(\vec{v}) \rangle + \langle p_H(\vec{v}), v - p_H(\vec{v}) \rangle +$$

$$+ \langle p_H(\vec{v}), p_H(\vec{v}) \rangle = \|v - p_H(\vec{v})\|^2 + \|p_H(\vec{v})\|^2$$

TEMA 6: DIAGONALIZACIÓN

Ejercicio 1

Calcular los valores y vectores propios y diagonalizar, si es posible, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Recuerda que:
valor propio = autovalor
vector propio= autovector

Cálculo de los autovalores

Sabemos que los valores propios (autovalores) de la matriz A son las raíces de su polinomio característico,

$$|A - \lambda I| = 0$$

así pues, pasamos a calcular estas raíces,

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \;\Rightarrow\; \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Procura aplicar siempre que sea posible las propiedades de los determinantes antes de ponerte a calcularlos

ahora calculamos el determinante desarrollando por la primera fila para aprovechar los dos ceros que hay en ella,

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((3-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - 4\cdot(-1)\big) = 0$$

$$(1-\lambda)\big((3-\lambda)(-2-\lambda) + 4\big) = 0$$

$$(1-\lambda)(-6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos que,

$$\lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \lambda = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

por lo que el polinomio característico queda factorizado,

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Por tanto los valores propios (autovalores) de la matriz A son :

En este caso los tres autovalores tienen multiplicidad algebraica igual a uno

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & m_a(\lambda_1) &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 & m_a(\lambda_2) &= 1 \\ \lambda_3 &= -1 & m_a(\lambda_3) &= 1 \end{aligned}$$

Cálculo de los autovectores

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda_1 & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Tenemos un sistema con tres incógnitas y sólo dos ecuaciones linealmente independientes. Esto quiere decir que el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo asignamos a la incógnita x_3 el parámetro t, es decir hacemos $x_3 = t$ y ahora sustituyendo nos queda un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2t = 0 & \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - 2t \\ x_1 - x_2 - 3t = 0 & \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad -x_2 - 2t - x_2 - 3t = 0 \end{cases}$$

Así que nos queda:

$$-2x_2 - 5t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{5t}{2}$$

$$x_1 = -x_2 - 2t \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\left(-\frac{5t}{2}\right) - 2t \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{2}$$

Hemos particularizado t=1 por simplicidad pero se podría haber elegido cualquier otro valor para la t

Recuerda que la multiplicidad geométrica es, por definición la dimensión del autoespacio asociado

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$ son $S_{\lambda_1} = \left\{\left(\frac{t}{2}, -\frac{5t}{2}, t\right) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \left\{u = \left(\frac{t}{2}, -\frac{5t}{2}, t\right)\right\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_1}) = 1 = m_g(\lambda_1)$.

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda_2 & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 & \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 & \Rightarrow \quad x_2 + 4x_3 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 & \Rightarrow -x_2 - 4x_3 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Hemos llegado a una ecuación con dos incógnitas. Para resolverla asignamos a la incógnita x_3 el parámetro t, es decir hacemos $x_3 = t$ y sustituyendo nos queda:

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 + 4x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 + 4t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -4t \end{cases}$$

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_2 = 2$ son: $S_{\lambda_2} = \left\{(0, -4t, t) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \left\{v = (0, -4, 1)\right\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_2}) = 1 = m_g(\lambda_2)$.

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda_3 & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 & \Rightarrow 4x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 & \Rightarrow -x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Hemos llegado a una ecuación con dos incógnitas. Para resolverla asignamos a la incógnita x_3 el parámetro t, es decir hacemos $x_3 = t$ y sustituyendo nos queda:

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -t \end{cases}$$

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_3 = -1$ son: $S_{\lambda_3} = \{(0, -t, t) \in \mathbb{R}^3 \;/\; t \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \{w = (0, -1, 1)\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_3}) = 1 = m_g(\lambda_3)$.

Estudiamos si A es diagonalizable

Para ello observamos las multiplicidades algebraica y geométricas calculadas anteriormente:

	$m_a(\lambda_i)$	$m_g(\lambda_i)$
$\lambda_1 = 1$	1	1
$\lambda_2 = 2$	1	1
$\lambda_3 = -1$	1	1

En este caso también se puede afirmar que A es diagonalizable observando que es de orden 3 y tiene 3 autovalores distintos.

Así pues, como todos los autovalores tienen igual multiplicidad algebraica que geométrica la matriz A es diagonalizable y por tanto es semejante a una matriz diagonal D:

$$A = PDP^{-1}$$

donde la matriz P es una matriz en la que las columnas son los tres autovectores u, v y w que ya hemos calculado previamente.
Así pues nos que queda:

Importante:
Cada vector propio tiene que estar en la misma columna en que está su valor propio asociado

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejercicio 2

Calcular los valores y vectores propios y diagonalizar, si es posible, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los autovalores

Sabemos que los valores propios (autovalores) de la matriz A son las raíces de su polinomio característico,

$$|A - \lambda I| = 0$$

así pues, pasamos a calcular estas raíces,

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \;\Rightarrow\; \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ahora calculamos el determinante:

$$(2-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) - 3\cdot(-1)\cdot(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\big((2-\lambda)(-2-\lambda)+3\big) = 0$$

$$(1-\lambda)(-4 - \cancel{2\lambda} + \cancel{2\lambda} + \lambda^2 + 3) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0 \;\Rightarrow\; -(\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0$$

y aplicando diferencia de cuadrados (igual a suma por diferencia) nos queda el polinomio característico ya factorizado,

$$(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

Por tanto los valores propios (autovalores) de la matriz A son :

$$\lambda_1 = 1 \qquad m_a(\lambda_1) = 2$$
$$\lambda_2 = -1 \qquad m_a(\lambda_2) = 1$$

Cálculo de los autovectores

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

Tenemos tres incógnitas y solo una ecuación. Para resolverlo asignamos a la incógnita x_3 el parámetro α, es decir hacemos $x_3 = \alpha$ y además tomamos $x_2 = \beta$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ \cancel{-x_1 - 3x_3 = 0} \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 + 3x_3 = 0$$

Así que nos queda: $x_1 = -3\alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$ (ecuaciones paramétricas de $S_{\lambda 1}$)

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$ son $S_{\lambda_1} = \{(-3\alpha, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $B = \{ \ u = \underbrace{(-3, 0, 1)}_{\alpha=1,\ \beta=0}, v = \underbrace{(0, 1, 0)}_{\alpha=0,\ \beta=1} \ \}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_1}) = 2 = m_g(\lambda_1)$.

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ \cancel{-x_1 - x_3 = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_2 = -1$ son: $S_{\lambda_2} = \{(-\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $\alpha = 1$ y nos queda $B = \{w = (-1, 0, 1)\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_2}) = 1 = m_g(\lambda_2)$.

Estudiamos si A es diagonalizable

Para ello observamos las multiplicidades algebraica y geométricas ya calculadas:

	$m_a(\lambda_i)$	$m_g(\lambda_i)$
$\lambda_1 = 1$	2	2
$\lambda_2 = -1$	1	1

Así pues, como todos los autovalores tienen igual multiplicidad algebraica que geométrica la matriz A es diagonalizable y por tanto es semejante a una matriz diagonal D:

$$A = PDP^{-1}$$

Importante:
Cada vector propio tiene que estar en la misma columna en que está su valor propio asociado

donde la matriz P es una matriz en la que las columnas son los tres autovectores u, v y w que ya hemos calculado previamente. Así pues nos que queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejercicio 3

Recuerda que:
valor propio = autovalor
vector propio= autovector

Calcular los valores y vectores propios y diagonalizar, si es posible, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los autovalores

Sabemos que los valores propios (autovalores) de la matriz A son las raíces de su polinomio característico,

$$|A - \lambda I| = 0$$

así pues, pasamos a calcular estas raíces,

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

En este caso, al ser la matriz triangular, el polinomio característico sale factorizado directamente y los autovectores son:

$$\lambda_1 = 1 \qquad m_a(\lambda_1) = 2$$
$$\lambda_2 = -1 \qquad m_a(\lambda_2) = 1$$

Cálculo de los autovectores

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda_1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Fíjate que la única solución de este sistema es la solución nula

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Ojo con esto por que es muy importante!!

Además, como x_3 no aparece en el sistema podemos afirmar que puede tomar cualquier valor por lo que le asignamos un parámetro a $x_3 = t$.

Por tanto:

Recuerda que la multiplicidad geométrica es, por definición la dimensión del autoespacio asociado

- Los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$ son $S_{\lambda_1} = \{(0,\ 0,\ t) \in \mathbb{R}^3 \ /\ t \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \{u = (0,\ 0,\ 1)\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_1}) = 1 = m_g(\lambda_1)$.

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

Ahora, asignando un parámetro a $x_3 = t$ nos queda $x_2 = -2t$.

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_2 = -1$ son: $S_{\lambda_2} = \{(0, -2t, t) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \{v = (0, -2, 1)\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_2}) = 1 = m_g(\lambda_2)$.

Estudiamos si A es diagonalizable

Para ello observamos las multiplicidades algebraica y geométricas calculadas anteriormente:

	$m_a(\lambda_i)$	$m_g(\lambda_i)$
$\lambda_1 = 1$	2	1
$\lambda_3 = -1$	1	1

En este caso el autovalor $\lambda_1 = 1$ no tiene sus multiplicidades algebraica y geométrica iguales, por tanto podemos afirmar que A **no es diagonalizable**. Es decir, no existe ninguna matriz de paso P tal que A sea semejante a la matriz diagonal D.

Ahora ya sabemos que A no es diagonalizable. Pero nos surge la siguiente pregunta, ¿Por qué A no es diagonalizable?:
De manera coloquial podemos decir que el autoespacio S_{λ_1} no tiene suficientes vectores linealmente independientes para "rellenar" la matriz P. No tenemos vector para llenar la columna con interrogaciones, por tanto no se puede construir la matriz P.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{P}{\begin{pmatrix} 0 & ? & 0 \\ 0 & ? & -2 \\ 1 & ? & 1 \end{pmatrix}} \underset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 0 & ? & 0 \\ 0 & ? & -2 \\ 1 & ? & 1 \end{pmatrix}^{-1}}$$

Ejercicio 4

Sea J la matriz real de orden n $(n \geq 2)$ cuyos elementos son todos iguales a 1. Se pide:

a) Hallar los valores propios de matriz $J - I$.

b) Hallar bases de los subespacios propios de $J - I$. ¿Es dicha matriz diagonalizable?

Álgebra

Preguntas de Test

7. Preguntas tipo test

1.- [V] [F] La expresión $\forall x\ P(x) \Longrightarrow \exists y\ \neg Q(y)$ es lógicamente equivalente a $\forall y\ Q(y) \Longrightarrow \exists x\ \neg P(x)$.

2.- [V] [F] Si B es una forma escalonada reducida de Gauss de la matriz A, entonces las filas no nulas de B generan el espacio vectorial generado por todas las filas de A (espacio fila).

3.- [V] [F] Si X es un conjunto y $f : X \longmapsto X$ una función, entonces la unión de las imágenes por f de todos los subconjuntos de X es igual a X,

$$\bigcup_{A\subset X} f(A) = X.$$

4.- [V] [F] Si a y b son números reales no nulos, $A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ b & 2b \\ -a & -2a \end{pmatrix}$ y $A^{\mathrm{T}} \equiv {}^tA$ es la matriz traspuesta de A, entonces

$$\operatorname{rango}(A\ A^{\mathrm{T}}) = 2.$$

5.- [V] [F] El subespacio vectorial real de matrices reales 2×3,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda+\mu+\gamma & \lambda & \lambda+\mu+\gamma \\ 0 & \lambda+\mu+\gamma & \lambda \end{pmatrix} : \ \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

tiene dimensión 2.

6.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{8\times 6}(\mathbb{R})$ y $\operatorname{rango}(A) = 6$, entonces

$$\exists B \in \mathcal{M}_{6\times 8}(\mathbb{R}) \text{ tal que } AB = \mathrm{Id}_8\,.$$

7.- [V] [F] Sean X, Y y Z conjuntos y $f : X \longmapsto Y$ y $g : Y \longmapsto Z$ funciones.
$g \circ f$ es biyectiva si y sólo si f y g son biyectivas.

8.- [V] [F] Si A es una matriz cuadrada de orden n tal que para cualquier vector columna, b, de n filas el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ tiene solución, entonces el sistema homogéneo $A^{\mathrm{T}}X = 0$ tiene solución única. ($A^{\mathrm{T}} \equiv {}^tA$, matriz traspuesta de A).

9.- [V] [F] El conjunto de los números complejos, $\mathbb{C}$, con la suma usual de números complejos y el producto por escalares, $\lambda(x + yi) = \lambda x + (\lambda y)i$, tiene estructura de espacio vectorial respecto al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.

10.- [V] [F] Sean U y V subespacios de un espacio vectorial W.
$U \cup V$ es un subespacio vectorial si y solamente si $U \subset V$ o $V \subset U$.

11.- [V] [F] Si la función $p \operatorname{nand} q$ está definida por la tabla

p	q	$p \operatorname{nand} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

entonces

$$p \vee q \Longleftrightarrow (p \operatorname{nand} p) \operatorname{nand} (q \operatorname{nand} q).$$

12.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La sentencia

$$\exists x \Big(P(x) \Longrightarrow \big(Q(x) \vee R(x)\big)\Big)$$

equivale lógicamente a

$$\neg\Big(\forall x \ \big(P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge \neg R(x)\big)\Big).$$

13.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea X un conjunto. Para cualesquiera A, B, C, D, subconjuntos de X, se cumple

$$(A \cap B \cap C) \cap \big(A \cap (D - B) \cap (D - C)\big) = \emptyset.$$

14.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si X es un conjunto y A, B, C son subconjuntos de X, entonces

$$(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

15.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean A y B dos conjuntos, $\text{Id}_A : A \longmapsto A$ la función identidad y $f : A \longmapsto B$ y $g : B \longmapsto A$ dos funciones. Si $(g \circ f) = \text{Id}_A$, entonces $g = f^{-1}$.

16.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$. La función $f : A \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2$ es sobreyectiva.

17.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean $f : X \longmapsto Y$ una función entre los conjuntos X e Y.

$$\forall A \subset X \quad f^{-1}\big(f(A)\big) = A.$$

18.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $*$ representa la operación $x * y = x^y$, entonces el sistema algebraico $\big(\mathbb{N} - \{0\}, *\big)$ tiene elemento neutro.

19.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ El predicado $\neg\exists x\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$ equivale lógicamente a $\forall x\big(P(x) \vee \neg Q(x)\big)$.

20.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f : \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, entonces $\text{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$.

21.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean U y V dos subespacios vectoriales de dimensión finita del $\mathbb{K}$-espacio vectorial W. Si

$$\dim(U) = \dim(V) = \dim(U + V),$$

entonces $U = V$.

22.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $(E, <\ ,\ >)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo y sean U, V subespacios vectoriales de E.

$$\{\vec{v} \in E : \vec{v} \perp (U + V)\} = \{\vec{v} \in E : \vec{v} \perp U\} + \{\vec{v} \in E : \vec{v} \perp V\}.$$

23.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Existe un subespacio vectorial, V, de $\mathbb{R}^5$ tal que $\dim(V) = \dim\left(V^\perp\right)$.

24.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ El sistema de vectores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es libre si y solamente si $\{\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}\}$ es libre.

25.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$, entonces $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = B$.

26.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es semejante a la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27.- V F La matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ no es invertible si y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor de A.

28.- V F $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1.

29.- V F Sea $(E, <\,,\,>)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo y $\vec{u}, \vec{v} \in E$.

$$\vec{u} = \vec{v} \Longleftrightarrow \forall \vec{w} \in E \ \ <\vec{u}, \vec{w}> = <\vec{v}, \vec{w}>.$$

30.- V F Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A = B \Longleftrightarrow \forall C \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \ AC = BC.$$

31.- V F El predicado $\neg\forall x\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$ equivale lógicamente al predicado $\exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$.

32.- V F Si todos los coeficientes de la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tienen parte imaginaria no nula, entonces A no puede tener autovalores reales.

33.- V F El conjunto de matrices formado por las soluciones de la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene estructura de espacio vectorial.

34.- V F Si $f : E \longmapsto E'$ es una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y H es un subespacio de E, entonces $\dim\big(f(H)\big) \leq \dim(H)$.

35.- V F El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1^k & 1^{k+1} & 1^{k+2} \\ (-2)^k & (-2)^{k+1} & (-2)^{k+2} \\ 3^k & 3^{k+1} & 3^{k+2} \end{pmatrix}$ es 3 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

36.- V F Dadas las funciones lineales $h : E \longmapsto E'$ y $f : E' \longmapsto E''$ entre los $\mathbb{K}$- espacios vectoriales E, E' y E'', se verifica

$$\operatorname{Img}(f \circ h) = \operatorname{Img}(f) \Longleftrightarrow h \text{ es sobreyectiva.}$$

37.- V F Si el conjunto de las soluciones del sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ coincide con el conjunto de las soluciones del sistema de ecuaciones lineales $B\vec{x} = \vec{b}$, entonces $A = B$.

38.- V F Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A^{120} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

39.- V F Sean U y V subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E. Si $U \cap V \neq \{\vec{0}\}$, entonces $U \cup V$ es un subespacio vectorial.

40.- V F Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son autovectores linealmente independientes de un endomorfismo f, entonces $f(\vec{u})$ y $f(\vec{v})$ son linealmente independientes.

41.- V F Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo. Si $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $P^{\mathrm{T}}P = \mathrm{Id}_n$, entonces $m \geq n$.

42.- V F Sea $(E, <\,,>)$ un espacio vectorial euclídeo y G un conjunto de vectores de E. El proceso de Gram-Schmidt aplicado a G produce siempre una base ortogonal de E.

43.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea V, $V \neq \{\vec{0}\}$, un subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, E. La proyección ortogonal sobre V, $\text{proy}_V : E \longmapsto E$, es un endomorfismo diagonalizable.

44.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $B = A^2$, entonces el polinomio característico de B es el cuadrado del polinomio característico de A, $P_B(\lambda) = P_A^2(\lambda)$.

45.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean $n, p \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A y $A^p = 0$, entonces $\lambda = 0$.

46.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f : E \longmapsto E$ es una función lineal entre espacios vectoriales tal que $\text{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$ y $\text{Ker}(f) \oplus f(E) = E$, entonces para cualquier base B de E, la matriz de f respecto de B, $M_B^B(f)$, tiene alguna columna nula.

47.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si A es una matriz diagonalizable, entonces A^2 también lo es.

48.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única para cada $\vec{b} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ si y sólo si el cero no es autovalor de A.

49.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A es singular, $\vec{b} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{b} = \vec{x}$ tiene solución única.

50.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si 0 es el único autovalor de la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$ (A es nilpotente).

51.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Todo autovector $\vec{w} \in V$ del endomorfismo $f : V \longmapsto V$ también es autovector del endomorfismo $cf : V \longmapsto V$.

52.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita no es inyectivo, entonces el término independiente de su polinomio característico es 0.

53.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si V es un espacio vectorial real de dimensión n y $f : V \longmapsto V$ un endomorfismo, entonces la suma de las multiplicidades algebraicas de los autovalores de f es n.

54.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Toda matriz de rango máximo es diagonalizable.

55.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ El endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (y, z, -y)$$

es diagonalizable.

56.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La aplicación $< \, , \, >: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que

$$< \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} >= a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$$

es un producto escalar.

57.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Existe una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} D.$$

58.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea D una forma diagonal de la matriz diagonalizable A. Si la matriz A no es invertible, entonces D no es invertible.

59.- [V] [F] Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, n. Cualquier subconjunto de V formado por más de n vectores distintos es generador de V.

60.- [V] [F] Si $f : X \longmapsto Y$ es una aplicación entre los conjuntos X e Y y A y A' son subconjuntos de Y, entonces $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') = f^{-1}(A \cap A')$.

61.- [V] [F] $\forall x \in X \ \Big(\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big) \wedge P(x) \Big) \Longrightarrow Q(x)$.

62.- [V] [F] Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. La dimensión del subespacio fila de A coincide con la dimensión del subespacio columna de A.

63.- [V] [F] Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión impar y $f : V \longmapsto V$ es una aplicación lineal, entonces $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Img}(f)$.

64.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, entonces el rango de AA^{T} es 1.

65.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$ y A es invertible, entonces todas las submatrices cuadradas de A de orden $n-1$ son invertibles.

66.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ es compatible determinado si y solamente si $\mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}\,\big(A|\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\big)$.

67.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$, entonces los sistemas lineales $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ y $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tienen las mismas soluciones.

68.- [V] [F] Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longmapsto V$ una aplicación lineal, entonces $\mathrm{Img}(f \circ f) \subset \mathrm{Img}(f)$.

69.- [V] [F] El predicado $\neg\exists x \ \big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$ equivale lógicamente al predicado $\forall x \ \big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$.

70.- [V] [F] Si $f : X \longmapsto Y$ es una aplicación entre conjuntos y $B \subset Y$, entonces $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap f(X)$.

71.- [V] [F] Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ endomorfismos tales que $\dim\Big(\mathrm{Ker}\,(f)\Big) = \dim\Big(\mathrm{Img}\,(g)\Big)$, entonces $\dim\Big(\mathrm{Ker}\,(g)\Big) = \dim\Big(\mathrm{Img}\,(f)\Big)$.

72.- [V] [F] Si el endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ tiene n autovalores distintos, entonces el rango de f es n.

73.- [V] [F] La matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$ es singular si y sólo si existe un autovalor de A, λ, tal que $\mathrm{Ker}(A)$ está contenido en el subespacio propio asociado a λ.

74.- [V] [F] Sea $(E, <\ ,\ >)$ un espacio vectorial euclídeo y $\overrightarrow{\mathrm{u}}, \overrightarrow{\mathrm{v}} \in E$.
Si $\big\{\overrightarrow{\mathrm{w}} \in E : <\overrightarrow{\mathrm{u}}, \overrightarrow{\mathrm{w}}> = 0\big\} = \big\{\overrightarrow{\mathrm{w}} \in E : <\overrightarrow{\mathrm{v}}, \overrightarrow{\mathrm{w}}> = 0\big\}$, entonces $\overrightarrow{\mathrm{u}} = \overrightarrow{\mathrm{v}}$.

75.- [V] [F] Las matrices cuadradas, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soluciones de la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forman un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

76.- V F El conjunto $H = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(-5) = 0\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial real de polinomios en la indeterminada x y con coeficientes reales, $\mathbb{R}[x]$.

77.- V F La matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una de las matrices de cambio de base entre las bases $B_1 = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ y $B_2 = \{1, x, x^2\}$ del espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales y grado menor que 2, $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

78.- V F La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{C})$ admite inversa por la izquierda.

79.- V F Existe un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Img}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x+y| = 1\}$.

80.- V F Si la matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es singular, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^p = 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

81.- V F $\forall x\ \exists y\ P(x,y) \Longrightarrow \exists y\ \forall x\ P(x,y)$.

82.- V F Si $U_1 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$ y $U_3 = \{(c,c) : c \in \mathbb{R}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$, entonces $U_1 + U_2 + U_3$ es suma directa.

83.- V F La dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita, V, coincide con el cardinal de un conjunto formado por el mayor número posible de vectores de V linealmente independientes.

84.- V F Si $f : E \longmapsto E'$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un sistema libre de E, entonces $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ es un sistema libre de E'.

85.- V F Sean U, V y W conjuntos, $f : U \longmapsto V$ y $g : V \longmapsto W$ funciones y $E = g(f(U))$. Si $g \circ f : U \longmapsto E$ es isomorfismo, entonces f y g son biyectivas.

86.- V F El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ es 2.

87.- V F Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ es una matriz obtenida al aplicar a la matriz A una operación elemental entre filas, entonces las columnas i y j de A son linealmente independientes si y sólo si las columnas i y j de B son linealmente independientes.

88.- V F Si λ_1 y λ_2 son autovalores distintos de la matriz A, entonces

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 \,\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 \,\mathrm{Id}) = \emptyset.$$

89.- V F En el espacio vectorial real $\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \longmapsto \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, la operación

$$< f(x), g(x) > = \frac{1}{2}\big(f(0)g(0) + f(1)g(1)\big)$$

es un producto escalar.

90.- V F Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, F un subespacio vectorial de E y $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo, entonces

$$\dim\big(f^{-1}(F)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(F \cap \mathrm{Img}(f)\big).$$

91.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si U, V y W son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f: U \longmapsto V$ y $g: V \longmapsto W$ aplicaciones lineales, entonces

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = f^{-1}\big(\operatorname{Ker}(g)\big).$$

92.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $(E, <\ ,\ >)$ es un espacio euclídeo y $\vec{v_0} \in E$, entonces la aplicación $f_{\vec{v_0}}: E \longmapsto E$ tal que

$$f_{\vec{v_0}}(\vec{x}) = <\vec{v_0}, \vec{x}> \vec{x}$$

es inyectiva.

93.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $X = \{a, b, c, d\}$.

$$\exists \text{ una función } f: X \longmapsto X \text{ tal que } \forall x \in X \ f\big(\{x\}\big) \cap \{x\} = \emptyset.$$

94.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $ad + bc = 1$, entonces el rango de A es 2.

95.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y A una matriz regular. Si $AB = 0$, entonces $B = 0$.

96.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Diremos que $T \subset E$ es **liberado sindical** si y sólo si

$$\forall \vec{v} \ \Big(\vec{v} \in T \Longrightarrow \vec{v} \notin L(T - \{\vec{v}\})\Big).$$

Alguno de los siguientes conjuntos es **liberado sindical**: E, $\{\vec{0}\}$, $\emptyset$.

97.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $T \subset E$ y $\vec{v} \in T$.

$$L(T) = L\Big(T - \{\vec{v}\}\Big) + L\Big(\{\vec{v}\}\Big).$$

98.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ El sistema $S = \{\operatorname{sen} x,\ 1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^7\}$ es un sistema libre en el espacio vectorial real de las funciones reales de variable real continuas, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

99.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable e invertible, entonces A^{-1} también es diagonalizable.

100.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo. Si $P \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $P^{\mathrm{T}}P = \mathrm{Id}_n$, entonces $\operatorname{rango}(P) = n$.

101.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si todas las raíces del polinomio característico de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son reales, entonces A es diagonalizable.

102.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea X un conjunto tal que $\forall x \in X \ \big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$ y sea $a \in X$. Si se verifica $\neg P(a)$, entonces necesariamente se verifica $\neg Q(a)$.

103.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $(E, <\ ,\ >)$ es un espacio vectorial euclídeo y $\vec{v_0} \in E$, la aplicación $f_{\vec{v_0}}: E \longmapsto E$ tal que

$$f_{\vec{v_0}}(\vec{x}) = <\vec{v_0}, \vec{x}> \vec{v_0}$$

es inyectiva.

104.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si U y V son subespacios vectoriales de un espacio vectorial E tales que $U \oplus V = E$, entonces $\forall \vec{v} \in E \ (\vec{v} \in U \vee \vec{v} \in V)$.

105.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean A y B conjuntos y $f : A \longmapsto B$ y $g : B \longmapsto A$ funciones. Si $g \circ f = \mathrm{Id}_A$, entonces f es sobreyectiva.

106.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ es un sistema libre del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E, $\overrightarrow{w} \in E$ y $\overrightarrow{w} \notin L\Big(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}\Big)$, entonces $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}\}$ es un sistema libre.

107.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Existen matrices A, cuadradas, con coeficientes reales, invertibles y 2×2 tales que $A^{-1} = -A$.

108.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ es una matriz obtenida al aplicar a la matriz A una operación elemental entre filas, entonces las filas i y j de A son linealmente independientes si y sólo si las filas i y j de B son linealmente independientes.

109.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Todo subespacio vectorial, S, de un espacio vectorial de dimensión finita, E, es el núcleo de alguna aplicación lineal $f : E \longmapsto E$.

110.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $f \in \mathrm{End}(E)$ y $f^2 = f \circ f$, entonces

$$f^2 = 0 \Longleftrightarrow f(E) \subset \mathrm{Ker}(f).$$

111.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{rango}(AB) = \mathrm{rango}(B)$, entonces B es invertible.

112.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean U, V y W subespacios del espacio vectorial euclídeo $(E, < \,,\, >)$. Si $U \perp V$ y $V \perp W$, entonces $U \perp W$.

113.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, S, $S' \subset E$ y $\overrightarrow{u} \in E$. Si $L\Big(S \cup \{\overrightarrow{u}\}\Big) = L\Big(S' \cup \{\overrightarrow{u}\}\Big)$, entonces $S = S'$.

114.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Una función $f : X \longmapsto X$ es inyectiva si y sólo si $f\big(f^{-1}(X)\big) \subset X$.

115.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si s filas de una matriz A son linealmente dependientes, entonces A contiene s columnas linealmente dependientes.

116.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz $A = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ B & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ verifica $A^2 = \mathrm{Id}_{2n}$.

117.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$. Para cada $\overrightarrow{b} \in \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{R})$, el sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ tiene una única solución.

118.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Todos los autovalores de una matriz cuadrada 2×2, simétrica y con coeficientes reales son números reales.

119.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f : E \longmapsto E$ es un endomorfismo y H un subespacio vectorial de E, entonces H es un autoespacio de f asociado a un autovalor $\lambda \neq 0$ si y sólo si $f(H) = H$.

120.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si U y V son dos autoespacios de A tales que $U \oplus V$, entonces A es diagonalizable.

121.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $Q = (\overrightarrow{q_1} \;\; \overrightarrow{q_2} \;\; \cdots \;\; \overrightarrow{q_r})$ una matriz real de orden $n \times r$ tal que $Q^{\mathrm{T}}Q = \mathrm{Id}_r$. La mínima distancia de $\overrightarrow{u} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ al subespacio $\mathrm{Col}(Q)$ es igual a

$$\sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2 - \sum_{i=1}^{r} < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{q_i} >^2}.$$

122.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Dada la función $f : X \longmapsto X$, se verifica que $f \circ f = f \Longleftrightarrow f = \mathrm{Id}_X$.

123.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Dadas las aplicaciones lineales $f : E \longmapsto E'$ y $g : E \longmapsto E'$ y el subespacio vectorial $H \subset E$, se verifica que $f(H) + g(H) = (f+g)(H)$.

124.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^2$ es sobreyectiva si y solo si las funciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son linealmente independientes, donde $\pi_1(x,y) = x$ y $\pi_2(x,y) = y$.

125.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si rango$(AB)$ = rango(B), entonces A es invertible.

126.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $\vec{\mathrm{b}} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ y $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y es invertible, entonces el sistema $A\vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}$ tiene solución si y sólo si el sistema $(P^{-1}AP)\vec{\mathrm{x}} = P^{-1}\vec{\mathrm{b}}$ tiene solución.

127.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\mathrm{Img}(f)$ es un autoespacio asociado a un autovalor distinto de 0, entonces f es diagonalizable.

128.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ verifica que existe n tal que $A^n = 0$, entonces 0 es el único autovalor de A.

129.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ En el espacio vectorial euclídeo $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ con el producto escalar

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

la norma del vector $f(x) = x$ es $\dfrac{2\pi^3}{3}$.

130.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y rango$(A) = m$, entonces existe $R \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ tal que $AR = \mathrm{Id}_n$.

131.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea A una matriz cuadrada de orden n. Los autovalores de A y A^{T} coinciden.

132.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $S = \{\vec{\mathrm{u_1}}, \vec{\mathrm{u_2}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_r}}\}$ un conjunto de vectores de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, E, y sea $\{\vec{\mathrm{v_1}}, \vec{\mathrm{v_2}}, \ldots, \vec{\mathrm{v_r}}\}$ el sistema obtenido al aplicar el método de **Gram-Schmidt** a S. Si $\vec{\mathrm{v_j}} = \vec{0}$, con $j > 1$, entonces el vector $\vec{\mathrm{u_j}}$ depende linealmente de $\{\vec{\mathrm{u_1}}, \vec{\mathrm{u_2}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_{j-1}}}\}$.

133.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea f una aplicación lineal entre los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales U y V. El sistema de vectores $\{\vec{\mathrm{u_1}}, \vec{\mathrm{u_2}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_s}}\} \subset U$ es libre si y sólo si $\left\{f(\vec{\mathrm{u_1}}), f(\vec{\mathrm{u_2}}), \ldots, f(\vec{\mathrm{u_s}})\right\} \subset V$ es libre.

134.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $< , >$ un producto escalar en E y U y V dos subespacios vectoriales de E, entonces

$$U \subset V \Longrightarrow U^{\perp} \subset V^{\perp}.$$

135.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y f un endomorfismo de E. Si $\vec{\mathrm{u}}$ y $\vec{\mathrm{v}}$ son autovectores de f, entonces $\vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{v}}$ es un autovector de f.

136.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la forma escalonada reducida de **Gauss** de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces A y G tienen los mismos autovalores.

137.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $E = \mathrm{L}(\vec{\mathrm{u_1}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_n}}) + \mathrm{L}(\vec{\mathrm{v_1}}, \ldots, \vec{\mathrm{v_m}}) \Longleftrightarrow \{\vec{\mathrm{u_1}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_n}}, \vec{\mathrm{v_1}}, \ldots, \vec{\mathrm{v_m}}\}$ es una base de E.

138.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f \in \mathrm{End}(E)$, entonces $f \circ f = f \Longleftrightarrow f = \mathrm{Id}_E$.

139.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Dadas las aplicaciones $f : X \longmapsto Y$ y $g : Y \longmapsto Z$, se verifica que $g \circ f : X \longmapsto Z$ es biyectiva si y solo si f y g son biyectivas.

140.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces no existe $f : E \longmapsto E$ lineal tal que $\text{Img}(f) = \text{Ker}(f)$.

141.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si A es una matriz cuadrada de orden n tal que para cualquier vector columna $\overrightarrow{b}$ de n filas el sistema de ecuaciones $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ tiene solución, entonces la ecuación homogénea $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ tiene solución única.

142.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Para cualquier función, $f : X \longmapsto Y$, se cumple $f^{-1}\big(f(X)\big) = X$.

143.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La función $f : X \longmapsto Y$ es biyectiva si y sólo si $f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.

144.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La función real de variable real $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ pertenece al espacio vectorial generado por el conjunto de funciones reales de variable real $G = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$.

145.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Las matrices cuadradas, con coeficientes reales, de dimensión 2×2 e invertibles forman un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de dimensión 2×2.

146.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ En una matriz A con coeficientes reales, el mayor número posible de filas linealmente independientes coincide con el mayor número posible de columnas linealmente independientes.

147.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si A y B son conjuntos cualesquiera, entonces los conjuntos $A - B$, $B - A$ y $A \cap B$ son disjuntos entre sí.

148.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si A y B son conjuntos cualesquiera, entonces $(A \triangle B) \cup (A \triangle B) = A \triangle B$.

149.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si E_1 y E_2 son matrices elementales de dimensión $n \times n$, entonces $E_1 E_2 = E_2 E_1$.

150.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La unión de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de un espacio vectorial, $V \neq \{0\}$, es igual a V.

151.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, entonces $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

152.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Todo endomorfismo biyectivo es diagonalizable.

153.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Todo endomorfismo diagonalizable es biyectivo.

154.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f : V \longmapsto W$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, entonces $\dim V = \dim\big(\text{Ker}(f)\big) + \dim\big(\text{Img}(f)\big)$.

155.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ En el espacio vectorial euclídeo $\mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$ con el producto escalar

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, \mathrm{d}x,$$

el módulo del vector $f(x) = \cos x$ es π ($\|\cos x\| = \pi$).

156.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ En el espacio vectorial euclídeo $\mathcal{C}\big([-\pi, \pi]\big)$ con el producto escalar

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, \mathrm{d}x,$$

el módulo del vector $f(x) = \operatorname{sen} x$ es π ($\|\operatorname{sen} x\| = \pi$).

157.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, entonces $\text{Img}(f) \subset \text{Img}(f^2)$.

158.- [V] [F] La matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ puede ser la matriz de un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

159.- [V] [F] La matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ puede ser la matriz de un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

160.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Id}_n + A + A^2 + \cdots + A^p = 0$, entonces A es invertible.

161.- [V] [F] El subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{v_1} = (2,1,0)$, $\vec{v_2} = (0,1,2)$ y $\vec{v_3} = (3,2,1)$ coincide con el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{u_1} = (1,1,1)$ y $\vec{u_2} = (1,0,-1)$.

162.- [V] [F] Sea $f : X \longmapsto Y$ una aplicación entre los conjuntos X e Y y A y A' subconjuntos de X, entonces $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cup A')$.

163.- [V] [F] El sistema homogéneo

$$\begin{cases} mx + (m+1)y + 2z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x + (m+2)y + z = 0 \end{cases}$$

tiene solución única para cualquier valor $m \in \mathbb{R}$.

164.- [V] [F] Si $f : V \longmapsto V$ es un endomorfismo del espacio vectorial V y U es un subespacio vectorial de V, entonces $\dim(U) \geq \dim\big(f(U)\big)$.

165.- [V] [F] Las matrices, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soluciones de la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forman un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

166.- [V] [F] Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es invertible, entonces $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ también es invertible.

167.- [V] [F] Sea $(g \circ f) : V \overset{f}{\longmapsto} V \overset{g}{\longmapsto} V$ el endomorfismo composición de los endomorfismos f y g del espacio vectorial V. Si $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, entonces $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f)$.

168.- [V] [F] La matriz –asociada a las bases $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ y $B' = \{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \ldots, \vec{e'_n}\}$ de $\mathbb{R}^n$– de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ tal que $\forall i = \{1, 2, \ldots, n\}$ $f(\vec{e_i}) = \vec{e'_i}$ es la matriz identidad de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

169.- [V] [F] Si $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ es una base de un espacio vectorial V y $\vec{v} \in V$, entonces $B' = \{\vec{e_1} + \vec{v}, \vec{e_2} + \vec{v}, \vec{e_3} + \vec{v}\}$ también es una base de V.

170.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ y $\mathrm{rango}(A) = m$, entonces existe $L \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ tal que $LA = I_n$.

171.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y es invertible, entonces $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Id}_n + A + A^2 + \cdots + A^p = 0$.

172.- [V] [F] El subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{v_1} = (2,1,0)$ y $\vec{v_2} = (0,1,2)$ coincide con el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{u_1} = (1,1,1)$, $\vec{u_2} = (1,0,-1)$ y $\vec{u_3} = (3,2,1)$.

173.- V F Sea $f : X \longmapsto Y$ una aplicación entre los conjuntos X e Y y A y A' subconjuntos de X, entonces $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cap A')$.

174.- V F El sistema homogéneo

$$\begin{cases} (m-1)x + 2z = 0 \\ x + (m+1)y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

es compatible determinado para cualquier valor $m \in \mathbb{R}$.

175.- V F Si $f : V \longmapsto V$ es un endomorfismo del espacio vectorial V y U es un subespacio vectorial de V, entonces $\dim(U) \leq \dim\big(f(U)\big)$.

176.- V F Las matrices, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soluciones de la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forman un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

177.- V F Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $\forall \vec{v} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ $A\vec{v} = B\vec{v}$, entonces $A = B$.

178.- V F Sea $(g \circ f) : V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V$ el endomorfismo composición de los endomorfismos f y g del espacio vectorial V. Si $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, entonces $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(g)$.

179.- V F La matriz asociada a la aplicación $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{Id}(\vec{v}) = \vec{v}$ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, es siempre la matriz identidad.

180.- V F Si $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ es una base de un espacio vectorial V entonces $B' = \{\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_2} + \vec{e_3}, \vec{e_3} + \vec{e_1}\}$ también es una base de V.

181.- V F Sea $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. La suma de las multiplicidades geométricas de los autovalores de f es n.

182.- V F Sea $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ un endomorfismo. Si el conjunto de todos los autovectores de f tiene estructura de subespacio vectorial, entonces f es diagonalizable.

183.- V F Si la matriz asociada al endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ respecto a la base B es simétrica, entonces f es diagonalizable.

184.- V F Sea $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (3x + y + 5z, 7y, 7z)$. El conjunto

$$S_3 = \{(\alpha, 4\alpha - 5\beta, \beta) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 3$ de f.

185.- V F La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

186.- V F En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ con el producto escalar

$$< p(x), q(x) > = < a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 > = \sum_{i=0}^{2} a_ib_i,$$

la norma del vector $p(x) = 1 + x^2$ es 2 ($\|1 + x^2\| = 2$).

187.- V F Si, respecto a la base B, la matriz del endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\exists \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{v}) = 5\vec{v}$.

188.- V F En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1[X] = \{p(x) = a_0 + a_1 x : \; a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, la operación

$$< p(x), q(x) >= \frac{1}{2}\big(p(0)q(0) + p(1)q(1)\big)$$

es un producto escalar.

189.- V F Si el rango de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es 1, entonces A es diagonalizable.

190.- V F Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tiene k autovalores distintos, entonces rango$(A) \leq k$.

191.- V F Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y son semejantes, entonces $A - \lambda \text{ Id}_n$ y $B - \lambda \text{ Id}_n$ también son matrices semejantes $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

192.- V F La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puede ser la matriz de un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

193.- V F Aplicando únicamente operaciones elementales entre filas, cualquier matriz de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puede reducirse a una de las siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

194.- V F Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, n. Cualquier subconjunto de V formado por más de n vectores distintos es linealmente dependiente.

195.- V F Sea $f : X \longmapsto Y$ una aplicación entre los conjuntos X e Y y A y A' subconjuntos de X, entonces $f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')$.

196.- V F $\forall x \in X \; \Big(\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big) \wedge \neg Q(x)\Big) \Longrightarrow \neg P(x)$.

197.- V F Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. El subespacio fila de A coincide con el subespacio columna de A.

198.- V F Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longmapsto V$ una aplicación lineal. Si $\text{Ker}(f) = \text{Img}(f)$, entonces la dimensión de V es un número par.

199.- V F Si $A \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$, entonces AA^{T} es invertible.

200.- V F Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y rango$(A) = n$, entonces todas las submatrices cuadradas de A de orden $n-1$ tienen rango $n-1$.

201.- V F Si $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ y $\vec{b} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$, el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible si y solamente si rango$(A) = $ rango $\big(A|\vec{b}\big)$.

202.- V F Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces los sistemas lineales $(x_1, x_2, \cdots, x_n)A = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ y $A^{\text{T}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tienen las mismas soluciones.

203.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longmapsto V$ una aplicación lineal, entonces $\text{Ker}(f \circ f) \subset \text{Ker}(f)$.

204.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$ (A es nilpotente), entonces 0 es el único autovalor de la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

205.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Todo autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ del endomorfismo $f : V \longmapsto V$ también es autovalor del endomorfismo $cf : V \longmapsto V$.

206.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores del endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, entonces el polinomio característico de f es $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$.

207.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si el término independiente del polinomio característico de un endomorfismo $f : V \longmapsto V$ de un espacio vectorial de dimensión finita es 0, entonces f no es inyectivo.

208.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Toda matriz diagonalizable tiene rango máximo.

209.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y $f : V \longmapsto V$ un endomorfismo. El escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de f si y sólo si $\text{Ker}(f - \lambda \text{ Id}) \neq \{\vec{0}\}$.

210.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ El endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (y, z, y)$$

es diagonalizable.

211.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La matriz de cambio de base que diagonaliza a una matriz diagonalizable, es única.

212.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Los vectores $\{(1, -1, 0), (1, 1, -2), (1, 1, 1)\}$ son una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios del endomorfismo cuya matriz asociada a la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

213.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea D una forma diagonal de la matriz diagonalizable A. Si la matriz A es invertible, entonces D es invertible.

214.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\forall A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ $\text{mín}(n, m) \leq \text{rango}(A) \leq \text{máx}(n, m)$.

215.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longmapsto V$ una aplicación lineal. Si $\dim\big(\text{Img}(f)\big) = \dim\big(\text{Img}(f \circ f)\big)$, entonces $\text{Ker}(f) \cap \text{Img}(f) = \{\vec{0}\}$.

216.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f : E \longmapsto E'$ es una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y T es un conjunto de vectores de E, entonces $\vec{v} \in L(T) \Longrightarrow f(\vec{v}) \in L\big(f(T)\big)$.

217.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Todas las funciones de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}_2$ son lineales.

218.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si las columnas de la matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son ortogonales entre sí, entonces A no es invertible.

219.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea E un espacio vectorial euclídeo. Existe un subespacio vectorial de E que es ortogonal a todos los vectores de E.

220.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces el conjunto $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : BA = 0\}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

221.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y B_1 y B_2 son dos conjuntos de vectores de E que generan –respectivamente– los subespacios $L(B_1)$ y $L(B_2)$, entonces

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset \Longleftrightarrow L(B_1) + L(B_2) \text{ es suma directa.}$$

222.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Sea $F \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$.

$$FF^{\mathrm{T}} = \mathrm{Id}_p \Longleftrightarrow \text{Las filas de } F \text{ son un sistema ortonormal.}$$

223.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y B, B' dos bases de E. Si $f : E \longmapsto E$ es una función lineal sobreyectiva y A es la matriz de f respecto a las bases B y B', entonces A es invertible.

224.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El vector $\vec{\mathrm{v}} \in E$ es combinación lineal de los vectores $\{\vec{\mathrm{u_1}}, \vec{\mathrm{u_2}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_n}}\} \subset E$ si y sólo si $\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1\vec{\mathrm{u_1}} + \lambda_2\vec{\mathrm{u_2}} + \cdots + \lambda_n\vec{\mathrm{u_n}} + \lambda_{n+1}\vec{\mathrm{v}} = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0.$$

225.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Si $f : E \longmapsto E'$ es una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y T es un conjunto de vectores de E, entonces $\vec{\mathrm{v}} \in L(T) \Longleftrightarrow f(\vec{\mathrm{v}}) \in L(f(T))$.

226.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Sea $F \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$.

$$FF^{\mathrm{T}} = \mathrm{Id}_p \Longleftrightarrow \text{Las columnas de } F \text{ son un sistema ortonormal.}$$

227.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Si las columnas de la matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son ortogonales entre sí, entonces A es invertible.

228.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ El subconjunto de las matrices con coeficientes reales, cuadradas de dimensión n e invertibles no es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

229.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Todo endomorfismo real, $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, tiene algún autovalor real.

230.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Si U y V son subespacios vectoriales de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo de dimensión finita $(E, <\ ,\ >)$, entonces $U \subset V^{\perp} \Longleftrightarrow V \subset U^{\perp}$.

231.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ La aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ determinada por las relaciones

$$f(1,1,1) = (3,2,1), \quad f(0,1,1) = (0,1,2), \quad f(0,0,1) = (-1,0,1)$$

es biyectiva.

232.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo. Si f es suprayectivo, entonces toda base de E se transforma, mediante f, en una base de E.

233.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, $\vec{\mathrm{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, P invertible. Los conjuntos de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{\mathrm{b}}$ y $(PA)\vec{x} = \vec{\mathrm{b}}$, coinciden.

234.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ Si la matriz real $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$, entonces $\beta = 0$.

235.- $\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ $\lambda = 0$ es un autovalor de la función $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ que a cada vector de $\mathbb{R}^2$ le hace corresponder el mismo vector girado un ángulo α alrededor del origen.

236.- [V] [F] Existe una base B del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ respecto a la cual, la matriz de la función identidad, $\mathrm{Id}_n : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, tiene la forma

$$M_B^B(\mathrm{Id}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

237.- [V] [F] Si p, q y r son proposiciones, entonces

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Longleftrightarrow p.$$

238.- [V] [F] Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A es singular y $\overrightarrow{\mathrm{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) - \{\overrightarrow{0}\}$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathrm{x}} = \overrightarrow{\mathrm{b}}$ tiene solución.

239.- [V] [F] Sea $(A, +, .)$ un anillo. Si $x, y, z \in A - \{0\}$, entonces

$$x.y = z.y \Longrightarrow x = z.$$

240.- [V] [F] La suma de los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \{(\alpha, \beta, 0, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{(\gamma, 0, 0, \delta) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

es directa.

241.- [V] [F] Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $T \subset E$ y $\overrightarrow{\mathrm{v}} \in T$.

$$\overrightarrow{\mathrm{v}} \in L\Big(T - \{\overrightarrow{\mathrm{v}}\}\Big) \Longleftrightarrow L(T) = L\Big(T - \{\overrightarrow{\mathrm{v}}\}\Big).$$

242.- [V] [F] Sea $\{\overrightarrow{\mathrm{u_1}}, \overrightarrow{\mathrm{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{u_n}}\}$ el resultado de la ortogonalización por Gram-Schmidt del conjunto $\{\overrightarrow{\mathrm{v_1}}, \overrightarrow{\mathrm{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{v_n}}\}$. El conjunto de vectores $\{\overrightarrow{\mathrm{u_1}}, \overrightarrow{\mathrm{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{u_n}}\}$ tiene algún vector nulo si y sólo si $\{\overrightarrow{\mathrm{v_1}}, \overrightarrow{\mathrm{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{v_n}}\}$ es ligado.

243.- [V] [F] Si las matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son diagonalizables mediante la misma matriz invertible, P, entonces $AB = BA$.

244.- [V] [F] Si la multiplicidad geométrica de todos los autovalores de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es 1, entonces A es diagonalizable.

245.- [V] [F] La matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es diagonalizable para cualquier valor real de α.

246.- [V] [F] Si U y V son dos subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-espacio vectorial euclídeo E, entonces

$$U \oplus V \Longrightarrow U^\perp \oplus V^\perp.$$

247.- [V] [F] Toda función $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ impar $(f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R})$ es lineal.

248.- [V] [F] Si la función $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ verifica

$$\left.\begin{array}{c} f(\alpha x + \beta y, 0) = \alpha f(x, 0) + \beta f(y, 0) \\ \text{y} \\ f(0, \alpha x + \beta y) = \alpha f(0, x) + \beta f(0, y) \end{array}\right\} \quad \forall \alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R},$$

entonces f es lineal.

249.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea U un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos. Si todos los autovalores del endomorfismo $f : U \longmapsto U$ son reales, entonces f es diagonalizable.

250.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, $f : \mathbb{K}^n \longmapsto \mathbb{K}^m$ una aplicación lineal, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz de f respecto a las bases canónicas y $\mathrm{Col}(A)$ el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^m$ generado por las columnas de A, entonces

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Col}(A)\big) = n.$$

251.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea E un espacio vectorial real y $\left\{\vec{\mathrm{v}}, \vec{\mathrm{u_1}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_n}}\right\} \subset E$.

El vector $\vec{\mathrm{v}}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{\mathrm{u_1}}, \vec{\mathrm{u_2}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_n}}$ si y solamente si

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, 0, \ldots, 0)\} \quad \text{tales que} \quad \vec{\mathrm{v}} + \alpha_1\vec{\mathrm{u_1}} + \alpha_2\vec{\mathrm{u_2}} + \cdots + \alpha_n\vec{\mathrm{u_n}} = \vec{0}.$$

252.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : E \longmapsto E'$ una aplicación lineal entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $\left\{\vec{\mathrm{u_1}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_n}}\right\} \subset E$ un sistema libre y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$.

$$\forall \vec{\mathrm{v}} \in E \quad \left(f(\vec{\mathrm{v}}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathrm{u_i}}\Big) \Longrightarrow \vec{\mathrm{v}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathrm{u_i}} \right).$$

253.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\exists f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ lineal y sobreyectiva.

254.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo y $F \subset E$. Si $F^{\perp}$ es un subespacio vectorial de E, entonces F es un subespacio vectorial de E.

255.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $A^2 = 0$, entonces A es singular.

256.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean R y S subespacios vectoriales del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E. Si $R \cup S$ es un subespacio vectorial de E, entonces o bien $R \subset S$ o bien $S \subset R$.

257.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{R}_n[x]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n y con coeficientes reales.

Si $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ y $p(x) \neq 0$, entonces el conjunto $\{p(x), p'(x), p''(x), \ldots, p^{n-1)}(x)\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$.

258.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si λ es un autovalor del endomorfismo f del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E, entonces el endomorfismo $f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ no es inyectivo.

259.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si p y q son proposiciones, entonces $p \Longleftrightarrow \big(\neg p \Longrightarrow (q \wedge \neg q)\big)$.

260.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $\vec{\mathrm{v}}$ es un autovector de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y A tiene inversa, entonces $\vec{\mathrm{v}}$ es un autovector de $A + A^{-1}$.

261.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $(E, <\ ,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Si $\left(\vec{\mathrm{u_1}}, \vec{\mathrm{u_2}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_n}}\right) \subset E$ es el resultado de aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a $\left(\vec{\mathrm{w_1}}, \vec{\mathrm{w_2}}, \ldots, \vec{\mathrm{w_n}}\right)$, entonces $\vec{\mathrm{u_{i+1}}} \in \left\{\vec{\mathrm{u_1}}, \vec{\mathrm{u_2}}, \ldots, \vec{\mathrm{u_i}}\right\}^{\perp}$ para cada $1 \leq i < n$.

262.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : E \longmapsto E$ es una función lineal tal que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$, entonces para cualquier base B de E, la matriz de f respecto a la base B, $M_B(f)$, tiene alguna columna nula.

263.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo y sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Si la columna $k \in \{1..m\}$ de A es nula y existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $PA = B$, entonces la columna k de B también es nula.

264.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\forall\ \{c_1, c_2, c_3\} \subset \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ no tiene solución múltiple.

265.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $(E, <\ ,>)$ un espacio vectorial euclídeo.

$$\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in E \quad < <\vec{u}, \vec{v}> \vec{v},\ <\vec{u}, \vec{v}> \vec{u}\ > = <\vec{u}, \vec{v}>^3 .$$

266.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ El conjunto $E = \big\{(x, y, 5) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$ con las operaciones

$$\begin{aligned} + &: E \times E \longmapsto E \quad \text{definida como} \quad (x_1, y_1, 5) + (x_2, y_2, 5) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 5) \\ \cdot &: \mathbb{R} \times E \longmapsto E \quad \text{definida como} \quad \alpha \cdot (x, y, 5) = (\alpha x, \alpha y, 5) \end{aligned}$$

tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

267.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Si B_1 y B_2 son bases ortonormales de dos subespacios suplementarios de E, entonces $B_1 \cup B_2$ es una base ortonormal de E.

268.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La única matriz $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que cumple $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es $B = 0$.

269.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita. Si f es diagonalizable y tiene un único autovalor, entonces la matriz de f respecto a cualquier base de E es diagonal.

270.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean F y H dos subespacios vectoriales de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, E, y sea la aplicación $g : F \times H \longmapsto E$ tal que $g(x, y) = x + y$. Si $F + H = E$, entonces g es biyectiva.

271.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\big((p \vee q) \wedge (\neg p)\big) \Longrightarrow q$ es una tautología.

272.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\big((p \wedge q) \vee (\neg p)\big) \Longrightarrow q$ es una tautología.

273.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces

$$A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A.$$

274.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea X un conjunto y $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.

$$\overline{(A \cap B \cap C)} \cup \overline{(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})} = X.$$

275.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea X un conjunto y $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.

$$\overline{(A \cap B) \cup \overline{(C \cap B)}} = \overline{A} \cap B \cap C.$$

276.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea X un conjunto, $A \subset X$ y $f : X \longmapsto X$ una función. Si $f(A) \subset A$, entonces $A \subset f^{-1}(A)$.

277.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea X un conjunto, $A \subset X$ y $f : X \longmapsto X$ una función.

$$f(A) \subset A \Longleftrightarrow A \subset f^{-1}(A).$$

278.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : X \longmapsto Y$ una aplicación entre conjuntos. f es inyectiva si y solamente si $\forall A \subset X$ $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

279.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : X \longmapsto Y$ una aplicación entre conjuntos. Si f es inyectiva, entonces $\forall A \subset X$ $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

280.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean $f : X \longmapsto Y$ y $g : Y \longmapsto X$ aplicaciones entre conjuntos.

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X \Longrightarrow f \text{ es inyectiva.}$$

281.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean $f : X \longmapsto Y$ y $g : Y \longmapsto X$ aplicaciones entre conjuntos.

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X \Longrightarrow g \text{ es sobreyectiva.}$$

282.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean $f : X \longmapsto Y$, $g : Y \longmapsto X$ y $h : Y \longmapsto X$ aplicaciones entre conjuntos. Si $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ y $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$, entonces f es biyectiva y $g = h = f^{-1}$.

283.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean $f : X \longmapsto Y$, $g : Y \longmapsto X$ y $h : X \longmapsto X$ aplicaciones entre conjuntos. Si $h \circ g \circ f$ y $f \circ h \circ g$ son sobreyectivas y $g \circ f \circ h$ inyectiva, entonces f, g y h son biyectivas.

284.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $(G, +)$ un grupo abeliano, $a, b, c \in G$ y $f : G \longmapsto G$ una función biyectiva. Si $f(a) + f(b) = f(c)$, entonces $a + b = c$.

285.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times3}(\mathbb{R})$ admite inversa por la derecha.

286.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times3}(\mathbb{R})$ admite inversa por la izquierda.

287.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si existen $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C})$, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{y}$, tales que $A\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{y}$, entonces A no es invertible.

288.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $AB = \mathrm{Id}_n$, entonces $B = A^{-1}$.

289.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^2 = A$ y $A \neq \mathrm{Id}_n$, entonces A es singular.

290.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, P invertible. Los conjuntos de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ y $(PA)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, coinciden.

291.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\overrightarrow{b} \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{C})$, G es una forma reducida de Gauss de la matriz A y el sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ es compatible, entonces el sistema $G\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ también lo es.

292.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $k > 1$ es el menor número natural tal que cualquier subconjunto de k o más vectores del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es linealmente dependiente, entonces la dimensión de V es $k-1$.

293.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, entonces $\dim\big(\mathrm{Col}(A)\big) = m$.

294.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, entonces $\dim\big(\mathrm{Col}(A)\big) \leq n$.

295.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $V \subset \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ es el $\mathbb{K}$-subespacio vectorial generado por las matrices $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ y $A = \big(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz cuyas columnas son los vectores $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$, entonces las columnas de A que ocupan las posiciones de las columnas pivote de su forma reducida de Gauss forman una base de V.

296.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $V \subset \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ es el $\mathbb{K}$-subespacio vectorial generado por las matrices $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ y $A = \big(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz cuyas columnas son los vectores $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$, entonces las columnas pivote de la forma reducida de Gauss de A forman una base de V.

297.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si H y G son subespacios de un espacio vectorial E tales que $\dim(H)+\dim(G) = \dim(E)$, entonces $H + G = E$.

298.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A, B \subset V$.

$$L(A \cup B) = L(A) \cup L(B).$$

299.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $\mathbb{R}[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es una base de $\mathbb{R}[x]$.

300.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean U y V dos subespacios vectoriales de dimensión finita del $\mathbb{K}$-espacio vectorial W. Si

$$\dim(U) = \dim(V) = \dim(U \cap V),$$

entonces $U = V$.

301.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f : E \longmapsto E'$ es una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $U, V \subset E$ son subespacios vectoriales de E tales que $f(U + V) = f(U) \oplus f(V)$, entonces $(U + V) \cap \text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.

302.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f : E \longmapsto E'$ es una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $U, V \subset E$ son subespacios vectoriales de E tales que $(U + V) \cap \text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0}\}$, entonces $f(U + V) = f(U) \oplus f(V)$.

303.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : E \longmapsto E'$ un homomorfismo entre espacios vectoriales. La imagen por f de cualquier sistema ligado de E es un sistema ligado de E'.

304.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : E \longmapsto E'$ un homomorfismo entre espacios vectoriales. La imagen por f de cualquier conjunto generador de E es un conjunto generador de E'.

305.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea $f : E \longmapsto E'$ un homomorfismo entre espacios vectoriales. Si existe una base $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E tal que $\left\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})\right\}$ es una base de E', entonces f es un isomorfismo.

306.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $f, g : E \longmapsto E$ son endomorfismos, entonces $\dim\left(\text{Img}(f \circ g)\right) \geq \dim\left(\text{Img}(f)\right)$.

307.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : U \longmapsto V$ un homomorfismo. Si $\text{Img}(f)$ es de dimensión finita, entonces V es de dimensión finita.

308.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : U \longmapsto V$ un homomorfismo. Si V es de dimensión finita, entonces U es de dimensión finita.

309.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : U \longmapsto V$ un homomorfismo. Si V y $\text{Ker}(f)$ son de dimensión finita, entonces U es de dimensión finita.

310.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $F \subset V$ un subespacio vectorial de V y $f : V \longmapsto V$ un endomorfismo.

$$\dim(F) = \dim\left(F \cap \text{Ker}(f)\right) + \dim\left(f(F)\right).$$

311.- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : E \longmapsto E$ es un endomorfismo, entonces

$$\text{Img}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E.$$

312.- [V] [F] Sean E y E' dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, U y V subespacios vectoriales de E y $f : E \longmapsto E'$ un homomorfismo.

$$E = U \oplus V \Longrightarrow \operatorname{Img}(f) = f(U) \oplus f(V).$$

313.- [V] [F] Existen homomorfismos $f, g : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tales que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = g\big(\operatorname{Img}(f)\big)$.

314.- [V] [F] Sea $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo del $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita E. f es automorfismo si y solamente si $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

315.- [V] [F] Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual y el subespacio $H \subset \mathbb{R}^3$.

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{u} \text{ es el vector más próximo a } \vec{v} \text{ en } H \Longleftrightarrow \vec{v} - \vec{u} \text{ es ortogonal a } H.$$

316.- [V] [F] $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ $\operatorname{Col}(A) = \big(\operatorname{Ker}(A^{\mathrm{T}})\big)^{\perp}$.

317.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ es una matriz con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces $(\operatorname{Img}(A))^{\perp} = \operatorname{Ker}\big(A^{\mathrm{T}}\big)$.

318.- [V] [F] Si $\vec{v}$, $\vec{w}$ son dos vectores ortonormales del espacio vectorial euclídeo $(V, < , >)$, entonces

$$< \vec{v}, \vec{w} > \vec{u} = < \vec{w}, \vec{u} > \vec{v} \quad \forall \vec{u} \in V.$$

319.- [V] [F] Sea E un espacio vectorial euclídeo. El complemento ortogonal de un subespacio $V \subset E$, es el menor subespacio de E tal que todos sus elementos son ortogonales a V.

320.- [V] [F] Si E es un espacio vectorial euclídeo, $V, W \subset E$ son los subespacios generados por los vectores $\vec{v}, \vec{w} \in E$, respectivamente, y V', W' son los subespacios generados por las proyecciones ortogonales de $\vec{v}$ sobre W y de $\vec{w}$ sobre V, respectivamente, entonces

$$V + W = V' + W'.$$

ÁLGEBRA Test-A 15 de noviembre de 2010

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada. **Calificación:** máx $\{0, \text{Aciertos} - 4\}$ $\boxed{\text{40 minutos}}$

1. Una base del subespacio vectorial $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0, x-y+z=0\}$ es $\boxed{\{(1,0,-1)\}}$

2. La matriz respecto a las bases canónicas de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,2)$ y $f(-1,1) = (0,2)$ es $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$.

3. Respecto a las bases canónicas, la matriz de la aplicación lineal (función de codificación) $g : \mathbb{Z}_2^2 \longmapsto \mathbb{Z}_2^3$ tal que $g\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$ es $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix}$.

4. El rango de una matriz del homomorfismo $\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}) \overset{+}{\longmapsto} \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$ es $\boxed{2}$.

5. Respecto a la base $B = \{(1,2),(-1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$, la matriz del giro positivo de 90° alrededor del origen es $G = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{-2} \\ \boxed{5} & \boxed{-3} \end{pmatrix}$.

6. $\boxed{\text{F}}$ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0,1])$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

7. $\boxed{\text{F}}$ Si $f \circ g$ es una aplicación lineal, entonces f y g son aplicaciones lineales.

8. $\boxed{\text{F}}$ Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \longmapsto W$ una aplicación lineal. Si $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$ es una base de V, entonces $\left(f(\vec{v_1}), f(\vec{v_2}), \ldots, f(\vec{v_n})\right)$ es una base de $\text{Img}(f)$.

9. $\boxed{\text{V}}$ Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ puede expresarse de forma única como suma de una matriz simétrica y de otra antisimétrica.

10. $\boxed{\text{F}}$ Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_2^2 \longmapsto \mathbb{Z}_2^4$ sobreyectiva.

11. $\boxed{\text{V}}$ Una aplicación lineal puede estar asociada a más de una matriz.

12. $\boxed{\text{V}}$ Sean B y B' bases de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. La matriz de cambio de base de B a B' admite inversa.

13. $\boxed{\text{V}}$ Sea $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ una base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, V. Independientemente de los valores $a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $\left\{ \left(\vec{v_1} + \sum_{i=2}^{n} a_i \vec{v_i}\right), \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \right\}$ es base de V.

14. $\boxed{\text{F}}$ Si U y V son subespacios de $\mathbb{R}^5$ tales que $\dim(U) = \dim(V) = 4$, entonces $U + V = \mathbb{R}^5$.

TEST PARCIAL 15-11-2010

1º) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0,\ x-y+z=0\}$ ∘∘∘ S es una recta que pasa por el origen

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x+y+\alpha=0 \\ x-y+\alpha=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+2\alpha=0 \\ z=\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{array}\right.$$

$S = \{ \cancel{\alpha \in} (\alpha, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}$ forma paramétrica

$\dim(S) = n^{\circ}$ parámetros $= 1$

Tomando $\alpha = 1$: $\boxed{B_S = \{(1,0,-1)\}}$

2º) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad B = \{(1,1),(-1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$

$f(1,1) = (2,2)$

$f(-1,1) = (0,2)$

$A^{B}_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ matriz asociada a f en la base B de salida y en la base canónica B_c de llegada

CAMBIO DE BASE

$$\begin{tikzcd} B_c \arrow[r, "A^{B_c}_{B_c}(f)"] \arrow[d, "M^{B_c}_{B}"'] & B_c \\ B \arrow[ur, "A^{B}_{B_c}(f)"'] & \end{tikzcd}$$

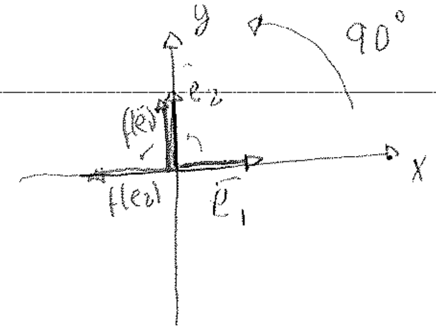
$A^{B_c}_{B_c}(f) = A^{B}_{B_c}(f) \cdot M^{B_c}_{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$B = \{(1,1),(-1,1)\}$

$M^{B}_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{B_c}_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

5º) $B = \{(1,2),(-1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$



$B_c = \{\underbrace{(1,0)}_{\vec{e}_1}, \underbrace{(0,1)}_{\vec{e}_2}\}$

~~$f(1,0)$~~
~~$f(0,1)$~~

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 \end{cases}$$

$$f(1,0) = (0,1)$$
$$f(0,1) = (-1,0)$$

$$\left[\begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}\right]$$

$$\boxed{A_{B_c}^{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

matriz asociada a f en las bases canónicas de salida y llegada siendo f un giro de 90° positivo

Ahora hay que hacer un cambio de base en la salida y en la llegada

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A_B^B(f)"] \arrow[d, "M_{B_c}^B"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \\ B_c \arrow[r, "A(f)"'] & B_c \arrow[u, "M_B^{B_c}"'] \end{tikzcd}$$

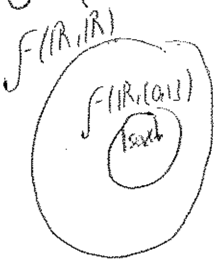
$$A_B^B(f) = M_{\text{final}(B)}^{\text{inicial}(B_c)} \cdot A(f) \cdot M_{B_c}^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,2),(-1,-1)\}$

$M_{B_c}^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $M_B^{B_c} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

6º) ¿$\mathcal{F}(\mathbb{R},[0,1]) < \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?



$$H < F \iff \begin{cases} \boxed{a}\ 0_E \in H \quad ✓ \\ \boxed{b_1}\ \text{Si } \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in H \Rightarrow \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in H \quad X \\ \boxed{b_2}\ \text{si } \bar{v}_1 \in H, k \in K \Rightarrow k\bar{v}_1 \in H \quad X \end{cases}$$

$\mathcal{F}(\mathbb{R},[0,1])$ no es un subespacio vectorial

$$\underbrace{|\operatorname{sen} x|}_{\in \mathcal{F}(\mathbb{R},[0,1])} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in \mathcal{F}(\mathbb{R},[0,1])} \notin \mathcal{F}(\mathbb{R},[0,1])$$

11º) La matriz asociada a una aplicación f es distinta dependiendo de la base elegida en el espacio de salida y en el de llegada
(V)

12º) $B = \{(1,1),(1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$
(V)

$M_{Bc}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Al ser los vectores de una base son libres, por lo que el determinante nunca es $\emptyset$ y siempre admite inversa

13º) Sea $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base de $E \stackrel{?}{\Rightarrow} \{v_1 + \sum a\vec{v}_i, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es base de V
(V)

$\boxed{n=2}$ si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de $E \Rightarrow \{\vec{v}_1 + a_2 v_2, \vec{v}_2\}$ es base de V

Como $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es base de E y tiene 2 vectores, entonces la $\dim(E) = 2$

y como $\{\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2, \vec{v}_2\}$ tiene 2 vectores, basta con demostrar que es libre

Sea $\boxed{\alpha(\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}}$

$$\alpha\vec{v}_1 + \alpha a_2\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\alpha\vec{v}_1 + \vec{v}_2(\alpha a_2 + \beta) = \vec{0}$$

y como $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es libre

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ a_2\alpha + \beta = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{Es libre, por lo que es base}}$

14º) $\dim(U) = 4$ Suponiendo $U = V \to U + V = U \neq \mathbb{R}^5$
(F) $\dim(V) = 4$

4º) $+ : M_{2\times1}(\mathbb{R}) \times M_{2\times1}(\mathbb{R}) \to M_{2\times1}(\mathbb{R})$

$$rg(A(+)) = \dim(Im(+)) = \dim(M_{2\times1}(\mathbb{R})) = 2$$

Álgebra

Problemas de examen

Sea $A \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Supongamos que la primera columna de A, A^1 es distinta de cero. Demuestra que existe una matriz $V \in M_{q\times 1}(\mathbb{R})$, tal que $A = A^1 V^T$ (V^T es la matriz transpuesta de V).

Dado un polinomio $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{C}[x]$ y una matriz $C \in M_n(\mathbb{C})$, $q(C)$ es la matriz

$$q(C) = b_m C^m + b_{m-1}C^{m-1} + \ldots + b_1 C + b_0 I_n \in M_n(\mathbb{C})$$

Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $p(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado r con $a_0 \neq 1$. Demuestra que si $p(A) = I_n$ entonces A es invertible.

1. Demostrar que si U, V y W son subespacios vectoriales de un cierto espacio vectorial, entonces
$$(U \cap V)+(U \cap W) \subset U \cap (V+W)$$

2. Demostrar que si $S+R$ es una suma directa, entonces si $T_S=(v_1,\dots,v_n)$ es un sistema libre de S y $T_R=(u_1,\dots,u_m)$ es un sistema libre de R, el sistema $(v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_m)$ es un sistema libre de $S+R$.

1)

2) ① Si $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\} \subset S$ es libre
② Si $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\} \subset R$ es libre
③ Si $S+R$ es suma directa
$\Longrightarrow \{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\}$ es libre

Sea $\boxed{\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_n\vec{v}_n+\beta_1\vec{u}_1+\dots+\beta_m\vec{u}_m=0}$ [1]

Para demostrar que $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m\}$ es libre, tenemos que probar que todos los escalares de la expresión [1] son nulos.

Definimos $\vec{w}=\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_n\vec{v}_n \longrightarrow \vec{w}\in S$ [2]

Ahora sustituimos $\vec{w}$ en [1] y nos queda

$$\vec{w}+\beta_1\vec{u}_1+\dots+\beta_m\vec{u}_m=0$$
$$\vec{w}=-\beta_1\vec{u}_1-\dots-\beta_m\vec{u}_m \Rightarrow \vec{w}\in R$$

Por tanto, $\left.\begin{array}{l}\vec{w}\in S\\ \vec{w}\in R\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{w}\in S\cap R$

$\vec{w} \in S \cap R \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por la hipótesis} \\ (3)}}{\Rightarrow} \vec{w} \in \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}$

$S + R$ suma directa $\Rightarrow S \cap R = \{\vec{0}\}$

Ahora sustituimos $\vec{w} = \vec{0}$ en [2]

$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \Rightarrow \boxed{\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n}$ y como

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es libre (por hip. (1)), podemos afirmar que

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Finalmente sustituimos los $\alpha_i = 0$ en [1]

$\cancel{0 \vec{v}_1 + \dots + 0 \vec{v}_n} + \beta_1 \vec{u}_1 + \dots + \beta_m \vec{u}_m = \vec{0}$

Por la hip (2), $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es libre, por lo que $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Consideramos el $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathcal{F}(A,\mathbb{R}),+,\cdot)$ donde

$$\mathcal{F}(A,\mathbb{R}) = \{ f : A \to \mathbb{R} \},$$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(A,,\mathbb{R}),\quad \forall x \in A,\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ y}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R}),\ \forall x \in A,\quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$\forall T \subseteq A$ definimos el conjunto $N(T) = \{ f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \mid \forall x \in T \quad f(x) = 0 \}$.

Sean $T, S \subseteq A$, $T \neq 0$, $S \neq 0$. Probar que:

a) $N(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$.

b) $N(S) \cap N(T) = N(S \cup T)$.

c) $S \subseteq T \Rightarrow N(T) \subseteq N(S)$

d) $N(T) \cap N(A-T) = \{ 0 \} \quad \wedge \quad N(T) + N(A-T) = \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$

ETSI Telecomunicación Febrero 1996

Una derivación en el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes complejos $\mathbb{C}[x]$ es una aplicación $D:\mathbb{C}[x]\to\mathbb{C}[x]$ que satisface las dos propiedades siguientes:

$$\text{i)}\quad \forall p,q\in\mathbb{C}[x],\ D(p+q)=D(p)+D(q)$$
$$\text{ii)}\quad \forall p,q\in\mathbb{C}[x], D(p\cdot q)=p\cdot D(q)+q\cdot D(p)$$

Por ejemplo, la aplicación $\frac{d}{dx}:\mathbb{C}[x]\to\mathbb{C}[x]$ que a cada polinomio le asocia su polinomio derivado, es una derivación que además satisface otras propiedades adicionales, como por ejemplo, $\frac{d}{dx}(x)=1 \;\wedge\; \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^2)\right)=2$. Siendo D una derivación en $\mathbb{C}[x]$, probar que:

a) $D(0)=0 \wedge D(1)=0$

b) Siendo $\alpha\neq 0$ un polinomio constante, obtener $D(\alpha^{-1})$ en función de $D(\alpha)$.

c) Probar las siguientes propiedades: 1. $\forall n\in\mathbb{N},\ D(n)=0$

2. $\forall n\in\mathbb{N},\ D(x^n)=nx^{n-1}D(x)$

d) La expresión de $D(D(x^2))$ depende de $D(D(x))$ y de $D(x)$. Obtener dicha expresión.

e) Demostrar que el conjunto $\{D\in F(\mathbb{C}[x],\mathbb{C}[x])\,/\,D \textit{ es un derivacion}\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{C}[x]$ en $\mathbb{C}[x]$, $F(\mathbb{C}[x],\mathbb{C}[x])$.

f) Si D y D' son derivaciones. ¿Es $D\circ D'$ una derivación? Pruébese o encuéntrese un contraejemplo.

En el segundo igual aplicamos la propiedad i) de derivación

a)

- $D(0)=D(0+0)=D(0)+D(0) \Rightarrow D(0)=D(0)+D(0) \Rightarrow D(0)-D(0)=D(0) \Rightarrow D(0)=0$

En el segundo igual aplicamos la propiedad ii) de derivación

- $D(1)=D(1\cdot 1)=1\cdot D(1)+1\cdot D(1)=D(1)+D(1) \Rightarrow D(1)=D(1)+D(1) \Rightarrow D(1)-D(1)=D(1) \Rightarrow D(1)=0$

b) Partimos de lo ya demostrado en el apartado a):

En la segunda implicación aplicamos la propiedad ii) de derivación

$$D(1)=0 \Rightarrow D(\alpha\alpha^{-1})=0 \Rightarrow \alpha D(\alpha^{-1})+\alpha^{-1}D(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha D(\alpha^{-1})=-\alpha^{-1}D(\alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D(\alpha^{-1})=-\alpha^{-2}\cdot D(\alpha)$$

c) Demostramos ambas propiedades por inducción:

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ D(n)=0$

Base: Para $n=1$ se cumple que $D(1)=0$ (probado en el apartado a)).

Hipótesis: Supongamos que $D(n)=0$ es cierto.

Paso: $D(n+1)=D(n)+D(1)=0+0=0$

2. $\forall n\in\mathbb{N},\ D(x^n)=nx^{n-1}\cdot D(x)$

Base: Para $n=1$ se cumple que $D(x^1)=1\cdot x^{1-1}\cdot D(x)=x^0\cdot D(x)=D(x)$

Hipótesis: Supongamos que $D(x^n)=nx^{n-1}D(x)$ es cierto.

Paso: $D(x^{n+1})=D(x\cdot x^n)=xD(x^n)+x^nD(x)=x(nx^{n-1}D(x))+x^nD(x)=$
$$=nx^n\cdot D(x)+x^nD(x)=(nx^n+x^n)\cdot D(x)+D(x)=(n+1)x^nD(x)$$

En el primer paso aplicamos el resultado del apartado c2) y en el segundo la propiedad ii) de derivación

d)

$$D\left(D\left(x^2\right)\right) = D\left(2x(Dx)\right) = 2x\cdot D\left(D(x)\right) + D(x)\cdot D(2x) = 2xD\left(D(x)\right) + D(x)\cdot D(x+x) =$$
$$= 2xD\left(D(x)\right) + D(x)\left(D(x)+D(x)\right) = 2xD\left(D(x)\right) + 2\left(D(x)\right)^2$$

e)

Sean D y D' derivaciones. Tenemos que comprobar que $D + D'$ es una derivación.
Para comprobar que la aplicación $D + D'$ es una derivación tenemos que ver si cumple las dos propiedades i) y ii):

i) $\forall p,q \in \mathbb{C}[x]$,
$$(D+D')(p+q) = D(p+q) + D'(p+q) = D(p) + D(q) + D'(p) + D'(q) =$$
$$= (D+D')(p) + (D+D')(q)$$

ii) $\forall p,q \in \mathbb{C}[x]$,
$$(D+D')(p\cdot q) = D(p\cdot q) + D'(p\cdot q) = \left[pD(q) + qD(p)\right] + \left[pD'(q) + qD'(p)\right] =$$
$$= pD(q) + pD'(q) + qD(p) + qD'(p) = p(D+D')(q) + q(D+D')(p)$$

Sean ahora D una derivación y $\alpha \in \mathbb{C}$. Veamos que αD es una derivación.
Para comprobar que la aplicación αD es una derivación tenemos que ver si cumple las dos propiedades i) y ii):

i) $\forall p,q \in \mathbb{C}[x]$, $(\alpha D)(p+q) = \alpha D(p+q) = \alpha\left(D(p) + D(q)\right) = \left(\alpha D(p) + \alpha D(q)\right)$

ii) $\forall p,q \in \mathbb{C}[x]$, $(\alpha D)(p\cdot q) = \alpha D(p,q) = \alpha\left(pD(q) + qD(p)\right) = p(\alpha D)(q) + q(\alpha D)(p)$

e) Si D y D' son derivaciones. ¿Es $D \circ D'$ una derivación?

La respuesta es que no. El contrajemplo es el siguiente:

Sea $\frac{d}{dx} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$, la derivación usual de polinomios (que viene en en enunciado).

Según sabemos:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right) = 2$$ (viene como dato en el enunciado).

pero, sin embargo:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right) = \frac{d^2}{dx^2}(x\cdot x) = x\frac{d^2}{dx^2}(x) + x\frac{d^2}{dx^2}(x) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x)\right) + x\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x)\right) =$$
$$= x\frac{d}{dx}(1) + x\frac{d}{dx}(1) = x\cdot 0 + x\cdot 0 = 0$$

Septiembre 2006
Ejercicio 3

Sea el espacio vectorial real de los polinomios en la indeterminada x, con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2, $\mathbb{R}_2[x]=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$, y sea $F=\left\{(1+x^3)\,p(x) : p(x)\in\mathbb{R}_2[x]\right\}$. Se pide:

a) Demostrar que existe $n \in N$ tal que F es un subespacio vectorial del espacio vectorial real de los polinomios en la indeterminada x, con coeficientes reales y de grado menor o igual que n, $\mathbb{R}_n[x]=\left\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n : a_0, a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$.

b) Hallar una base y la dimensión de F.

c) Calcular $F+\mathbb{R}_2[x]$. ¿Se trata de una suma directa?.

Junio 2008
Ejercicio 2

Sean H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, V. Demostrar la fórmula de las dimensiones de Grassmann,

$$\dim(H_1)+\dim(H_2)=\dim(H_1+H_2)+\dim(H_1\cap H_2)$$

Calcula la dimensión de Im A siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Sabemos por teoría que $\dim \operatorname{Im} A = rang(A)$, por tanto, para resolver el ejercicio calcularemos el rango de la matriz:

$$rang\, A = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el rango de esta matriz usaremos el método de Gauss:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} f3-f1 \to f3 \\ f4+f1 \to f4 \end{Bmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} f2+f3 \to f3 \\ f4+4f2 \to f4 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} f2+f3 \to f3 \\ f4+4f2 \to f4 \end{Bmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como las dos últimas filas de esta matriz son ceros, no debemos tenerlas en cuenta para calcular el rango. Luego el rango de la matriz que buscamos es $4-2=2$.

Por tanto $\dim \operatorname{Im} A = 2$.

Solución : $\dim \operatorname{Im} A = 2$

Sean $f: E \to E'$ y $g: E' \to E''$ dos funciones lineales tales que f es sobreyectiva. Sean $(u_1,...,u_r)$ una base del ker (f) y $(w_1,...,w_s)$ una base del ker (g). Probar que:

a) Si $(v_1,...,v_s)$ son vectores de E tales que $f(v_i) = w_i$, entonces $(u_1,...,u_r,v_1,...,v_s)$ es una base del $\ker(g \circ f)$.

b) Si $(e_1,...,e_r,e_{r+1},...,e_{r+s})$ es una base del $\ker(g \circ f)$ y $(e_1,...,e_r)$ es una base del ker (f), entonces $(f(e_{r+1}),...,f(e_{r+s}))$ es una base del ker (g).

Sea E un R- espacio vectorial de dimensión finita y $f: E \to E$ una función lineal no nula tal que $f^2 = f \circ f = f$. Demostrar que:

a) $\operatorname{Im}(f) = \ker(Id_E - f)$

b) $(Id_E - f)^2 = Id_E - f$

c) $\operatorname{Im}(Id_E - f) = \ker(f)$

d) $\operatorname{Im}(f) \cap \ker() = \{0\}$

e) Si $(u_1, \ldots, u_r)$ es una base de $\operatorname{Im}(f)$ y $(w_1, \ldots, w_s)$ es una base de $\ker(f)$, entonces $(u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s)$ es una base de E.

f) Existe una base B de E tal que

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

$E \quad f: E \to E \quad f^2 = f$ (idempotente)

$\therefore f^2(\vec{v}) = f(f(\vec{v})) = f(\vec{v})$

a) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(Id_E - f)$ (igualdad de conjuntos)

$\boxed{\subset}$ $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(Id_E - f)$

Sea $\vec{v} \in \operatorname{Im}(f) \to \exists \vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = \vec{v} \xRightarrow[\text{aplicamos } f]{} f(f(\vec{u})) = f(\vec{v}) \to$

$\Rightarrow f^2(\vec{u}) = f(\vec{v}) \xRightarrow{\text{Por hip.}} f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \Rightarrow \vec{v} = f(\vec{v}) \to$

$\Rightarrow \vec{v} - f(\vec{v}) = 0 \underset{Id_E(\vec{v}) = \vec{v}}{\Rightarrow} Id_E(\vec{v}) - f(\vec{v}) = \vec{0} \xrightarrow{f(\vec{u}) = \vec{v}}$

$\Rightarrow (Id_E - f)(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \in \operatorname{Ker}(Id_E - f)$

$\boxed{\supset}$ $\operatorname{Ker}(Id_E - f) \subset \operatorname{Im}(f)$

Sea $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(Id_E - f) \to (Id_E - f)(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow Id_E(\vec{v}) - f(\vec{v}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} - f(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \in \operatorname{Im}(f)$

b) $(Id_E - f)^2 = (Id_E - f)$ (igualdad de funciones)

$$\boxed{f = g \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = g(x) \ \forall x}$$

- $(Id_E - f)(\vec{v}) = Id_E(\vec{v}) - f(\vec{v}) = \vec{v} - f(\vec{v})$
- $(Id_E - f)^2(\vec{v}) = (Id_E - f)\Big((Id_E - f)(\vec{v})\Big) = (Id_E - f)\big(\vec{v} - f(\vec{v})\big) =$

$$= Id_E(\vec{v} - f(\vec{v})) - f(\vec{v} - f(\vec{v})) = Id_E(\vec{v}) - Id_E(f(\vec{v})) - f(\vec{v}) + f(f(\vec{v}))$$

$$= \vec{v} - f(\vec{v}) - f(\vec{v}) + f^2(\vec{v}) \underset{f^2 = f}{=} \vec{v} - f(\vec{v})$$

ETSI Telecomunicación
Febrero 2002

Sea E un K-espacio vectorial de dimensión n y $f : E \to E$ un endomorfismo de E. Se pide:

a) Demostrar que si $rg(f) = rg(f \circ f)$ entonces $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$

b) Demostrar que $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$ si y sólo si n es par, $rg(f) = n/2$ y $f \circ f = 0$.

Dados los $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión finita E y E' y la aplicación lineal $f : E \to E'$, demostrar:

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

ETSI Telecomunicación
Septiembre 1999

Sea E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión n. Sea una base de E $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$.
Se considera la aplicación lineal $f:E\to E$ definida por:

$$f(e_i)=e_{i+1} \quad \text{para} \quad i=1,\ldots,n-1 \qquad \text{y} \qquad f(e_n)=0$$

Determinar razonadamente:

a) Si f es o no automorfismo (aplicación lineal y biyectiva cuyo espacio origen y espacio final es el mismo).

b) Si f no es endomorfismo (aplicación lineal cuyo espacio origen y espacio final es el mismo) alterar la definición de f hasta convertirlo en endomorfismo y obtener, en cualquier caso, la matriz asociada.

c) Calcular la matriz asociada a f^n (composición de f n veces) e interpretar su significado.

a) $f:E\to E$

Tenemos los transformados de una base:

$f(e_1)=e_2$

$f(e_2)=e_3$

$\vdots$

$f(e_{n-1})=e_n$

$f(e_n)=0$ luego $e_n\in Ker(f) \Leftrightarrow Ker f\neq\{0\} \Leftrightarrow f$ no inyectiva $\Leftrightarrow \boxed{f \text{ no es automorfismo}}$

b)

f es un endomorfismo!!! (no hace falta hacer nada)

Al pedirme la matriz asociada y no concretar base de referencia elegimos por comodidad B:

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1)=0\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3+\ldots+0\cdot e_n \\ \vdots \\ f(e_{n-1})=0\cdot e_1+0\cdot e_2+\ldots+1\cdot e_n \\ f(e_n)=0 \end{array}\right\} \quad \boxed{M_B^B(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c)

$f^2 : E \longrightarrow E$

$e_1 \rightarrow f^2(e_1) = f(f(e_1)) = f(e_2) = e_3$

$e_2 \rightarrow f^2(e_2) = f(f(e_2)) = f(e_3) = e_4$

$\vdots$

$e_{n-2} \rightarrow f^2(e_{n-2}) = f(f(e_{n-2})) = f(e_{n-1}) = e_n$

$e_{n-1} \rightarrow f^2(e_{n-1}) = f(f(e_{n-1})) = f(e_n) = 0_E$

$e_n \rightarrow f^2(e_n) = f(f(e_n)) = f(0) = 0_E$

$$M_B^B(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(M_B^B(f)\right)^2$$

$f^{n-1} : E \rightarrow E$

$e_1 \rightarrow f^{n-1}(e_1) = e_n$

$e_2 \rightarrow f^{n-1}(e_2) = 0$

$\vdots$

$e_n \rightarrow f^{n-1}(e_n) = 0$

$$M_B^B(f^{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(M_B^B(f)\right)^{n-1}$$

En general se cumple que:

$f^i : E \longrightarrow E$

$e_1 \longrightarrow e_{1+i}$

$\vdots$

$e_{n-i} \longrightarrow e_n$

$e_{n-i+1} \longrightarrow 0$

$e_n \longrightarrow 0$

Y por último:

$f^n : E \longrightarrow E$

$e_1 \longrightarrow 0$

$\vdots$

$e_n \longrightarrow 0$

$$M_B^B(f^n) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (0) = \left(M_B^B(f)\right)^n$$

$\vdots$

$f^n = 0 = \Omega$ es el homomorfismo nulo

Lo que sucede es que f es un endomorfismo nilpotente de índice de nilpotencia n cuya matriz $M_B^B(f)$ es nilpotente de orden de nilpotencia n.

Sean E un K- espacio vectorial y $A \subseteq \{f : E \to E \mid f \text{ es endomorfismo}\}$. Se dice que un subespacio vectorial H de E es <u>A-invariante</u> si $\forall f \in A \quad f(H) \subseteq H$.

Probar que:

1) Si H y K son subespacios A-invariantes, entonces $H \cap K$ y $H + K$ también son A-invariantes.

2) Si $A = \{g\}$, H y K son A-invariantes y $H \cap K = \{0\}$, entonces el subespacio suma $g(H) + g(K)$ es una suma directa.

Se dice que E es <u>A-simple</u> si los únicos subespacios A-invariantes son E y $\{0\}$.

3) Probar que si $f \in \text{End}(E)$ y $\forall g \in A \quad f \circ g = g \circ f$ entonces:

   a) $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ son A-invariantes.

   b) Si E es A-simple y $f \neq 0$ (endomorfismo nulo), entonces f es invertible.

Sea un conjunto $X \neq \varnothing$. Sea el cuerpo $\mathbb{K} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Consideramos el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $(P(X), \Delta, \cdot)$ donde:

$$\begin{array}{ll} \Delta : P(X) \times P(X) \to P(X) \\ \quad (A, B) \quad \to A\Delta B = (A-B) \cup (B-A) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \cdot : \mathbb{K} \times P(X) \to P(X) \\ \quad (k, B) \quad \to k \cdot A = \begin{cases} A & si \ k = \overline{1} \\ \varnothing & si \ k = \overline{0} \end{cases} \end{array}$$

Si C es un subconjunto de X, definimos $\begin{array}{l} f_C : P(X) \to P(X) \\ \qquad A \quad \to f_C(A) = A \cap C \end{array}$

Probar que:

1) $\forall C \in P(X)$, $f_C : P(X) \to P(X)$ es un endomorfismo.

2) $\operatorname{Im}(f_C) = \{A \in P(X) / A \subset C\}$

3) La aplicación $\begin{array}{l} F : P(X) \to \operatorname{End}(P(X)) \\ \qquad C \quad \to F(C) = f_C \end{array}$ es un monomorfismo.

Si consideramos en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ sus estructuras habituales de $\mathbb{R}$-e.v. y la aplicación lineal de $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$M_{B_2}^{B_3}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con B_3 y B_2 las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Siendo $B=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,1),(0,1)\}$, obtener las matrices

$$M_{B_2}^{B}(f),\quad M_{B'}^{B_3}(f),\quad M_{B'}^{B}(f)$$

ETSI Telecomunicación
Septiembre 2000

Si consideramos en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ sus estructuras habituales de $\mathbb{R}$-e.v. y la aplicación lineal de $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

salida

llegada

$$M_{B_2}^{B_3}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(2\times 3)} \qquad f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

con B_3 y B_2 las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Siendo $B=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,1),(0,1)\}$, obtener las matrices

$$M_{B_2}^{B}(f),\ \ M_{B'}^{B_3}(f),\ \ M_{B'}^{B}(f)$$

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \to f(x,y,z) = \underset{(2\times3)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{(3\times1)}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \Rightarrow f(x,y,z) = (y+2z,\ 2x+y+z)$$

($\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ MATRIZ ASOCIADA A f RESPECTO DE LA BASE CANÓNICA B_3 DE $\mathbb{R}^3$ Y RESPECTO DE LA BASE CANÓNICA B_2 DE $\mathbb{R}^2$)

- MATRIZ ASOCIADA A f RESPECTO DE LA BASE $B=\{(1,1,1),(0,1,1)(0,0,1)\}$ DEL ESPACIO DE SALIDA Y RESPECTO DE LA BASE CANÓNICA DEL ESPACIO DE LLEGADA.

$$\underset{\text{en } B}{(1,2,3)} = 1(1,1,1)+2(0,1,1)+3(0,0,1) = \underset{\text{en } B_3}{(1,3,6)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} B_3 \text{ canónica} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] & B_2 \text{ canónica} \\ B_{(x,y,z)} \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[ur, "M_{B_2}^{B}(f)"'] & \end{tikzcd}$$

transforma coord. referidas a B en coord. ref. a B_3

sus columnas son los elementos de B

Problema $\Rightarrow$ $M_{B_e}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- MATRIZ ASOCIADA A f RESPECTO DE LA BASE ~~B_2 DE LA BASE~~ CANÓNICA DEL ESPACIO DE SALIDA RESPECTO DE LA BASE $B'=\{(1,1)(0,1)\}$ DEL ESPACIO DE LLEGADA.

$$\begin{tikzcd} B_3 \text{ canónica} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[dr] & B_2 \text{ canónica} \\ & B' \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}"'] \end{tikzcd}$$

de donde sales — $M_{B'}^{B_3}(f)$ — a donde llegas

→ sus columnas son los elementos de B' y transforma coord referidas a B' en coord. rel. a B.

$$M_{B'}^{B_3}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\boxed{-1}}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

↳ transforma coord referidas a B_2 en coord referidas a B'

- MATRIZ ASOCIADA A f RESPECTO DE LA BASE $B = \{(1,1,1),(0,1,1)(0,0,1)\}$ DEL ESPACIO DE SALIDA Y RESPECTO A LA BASE $B' = \{(1,1),(0,1)\}$ DEL ESPACIO DE LLEGADA

sus columnas son los elementos de B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

transforma referido a B en coord. ref. a B_3

$$\begin{tikzcd}
B_3 \text{ canónica} \arrow[r] & B_2 \text{ canónica} \\
B \arrow[u] \arrow[r, "M^B_{B'}(f)"'] & B' \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

sus columnas son elementos de B'

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

transforma coord ref. a B' en coord. ref a B_2

$$M^B_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ETSI Telecomunicación
Septiembre 2002

Ejercicio 2

Sea E un $\mathbb{R}$-e.v, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal y w un vector de E que no pertenece a $\ker(f)$. Probar que:

a) Para todo $v \in E$, existe $u \in \ker(f)$ y existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $v = u + kw$.

b) Si $(v_1, ..., v_r)$ es una base del $\ker(f)$, entonces $(w, v_1, ..., v_r)$ es base de E.

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita y $f: E \to F$ una aplicación lineal suprayectiva. Demuéstrese que si H es un subespacio de E entonces

$$E = H \oplus \ker(f) \Rightarrow H \text{ y } F \text{ son isomorfos}$$

Tenemos que probar que H y F tienen la misma dimensión

E y E' son isomorfos $\Longleftrightarrow \dim(E) = \dim(E')$

1.º Utilizamos la ecuación de las dimensiones

$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) \Rightarrow \boxed{\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(F)}$

2.º Por la ecuación de Grassman; $\dim(H + H') = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H \cap H')$

$\dim(H + \ker(f)) = \dim(H) + \dim(\ker(f)) - \dim(H \cap \ker(f)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\dim(E) = \dim(H) + \dim(\ker(f)) - \underbrace{\dim(\{\vec{0}\})}_{0}}$

Por hipótesis
$E = H + \ker(f)$
$H \cap \ker(f) = \{\vec{0}\}$ Por ser suma directa

$$\left.\begin{array}{l}\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(F) \\ \dim(E) = \dim(\ker f) + \dim H\end{array}\right\} \boxed{\dim(F) = \dim(H)}$$

Febrero 2008
Ejercicio 2

Sea $f:V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim(V)=n$ y $\dim(W)=m$.

Demostrar que f es inyectiva si y solamente si existe una aplicación lineal $g:W \to V$ tal que la composición $(g \circ f):V \to V$ es la función identidad.

Septiembre 2006
Ejercicio 1

Sean U, V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo K y $f : U \mapsto V$ y $g : V \mapsto W$ aplicaciones lineales. Se pide demostrar que:

a) $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$.

b) $\dim(\ker(g \circ f) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))$.

Junio 2006
Ejercicio 1

Sea E un $\mathbb{k}$ - espacio vectorial de dimensión finita y $f,\ g \in \operatorname{End}(E)$, endomorfismos de E. Demostrar que

$$\ker(f) \subset \ker(g) \iff \exists h \in \operatorname{End}(E) \text{ tal que } g = h \circ f$$

1. Sean E y E' dos *K-e.v.* y $f : E \to E'$ una función lineal, demostrar que si $(u_1,...,u_n) \in E^n$ es un sistema de vectores de E, se cumple que

$$rg\left(f(u_1),...,f(u_n)\right) \leq rg\left(u_1,...,u_n\right)$$

2. Sean $A,B \in M_n(\mathbb{C})$, demostrar que $rg(AB) \leq rg(B)$.
3. Sean $A,B \in M_n(\mathbb{C})$, demostrar que $rg(AB) \leq rg(A)$.

1. Consideremos $V = L\left(u_1,......,u_n\right)$ y la función restricción de f a V:

$$\begin{aligned} f\big|_V : V &\to E' \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

se cumple que:

- $rg\left(u_1,...,u_n\right) = \dim L\left(u_1,...,u_n\right) = \dim V$.
- $rg\left(f(u_1),...,f(u_n)\right) = rg\left(f\big|_V(u_1),....,f\big|_V(u_n)\right) = \dim\left(\mathrm{Im}\left(f\big|_V\right)\right)$.

Por otro lado al ser $f\big|_V$ una función lineal y V de dimensión finita se verifica:

$$\dim(V) = \dim\left(\ker(f\big|_V)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(f\big|_V)\right)$$

y por tanto

$$\dim(V) \geq \dim\left(\mathrm{Im}(f\big|_V)\right) \Rightarrow rg\left(u_1,...,u_n\right) \geq rg\left(f(u_1),...,f(u_n)\right) \ .$$

2. Sean $B^1,....,B^n$ las columnas de B y sea el endomorfismo columnas:

$$\begin{aligned} L_A : M_{n\times1}(\mathbb{C}) &\to M_{n\times1}(\mathbb{C}) \\ X &\to L_A(X) = AX \end{aligned}$$

que sabemos que es lineal. Entonces se cumple que:

- $rg(B) = rg(B^1,....,B^n)$
- $rg(AB) = rg(AB^1,....,AB^n) = rg\left(L_A\left(B^1\right),....,L_A\left(B^n\right)\right)$

y por el problema anterior:

$$\begin{aligned} rg(L_A(B^1),....,L_A(B^n)) &\leq rg(B^1,....,B^n) \\ rg(AB^1,....,AB^n) &\leq rg(B^1,....,B^n) \\ rg(AB) &\leq rg(B) \end{aligned}$$

3. Aplicando las propiedades de las matrices traspuestas:

$$rg(AB) = rg\left((AB)^T\right) = rg\left(B^T A^T\right) \leq rg\left(A^T\right) = rg(A)$$

Se define la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\to (x,y,-x-y) \end{aligned}$$

Se pide:

1. Determinar $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.
2. Obtener las dimensiones y bases de $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.
3. Encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores de $\ker(f)$ y de $\operatorname{Im}(f)$.
4. Determinar razonadamente si f puede ser un automorfismo (aplicación lineal y biyectiva).
5. Obtener la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
6. Calcular sus valores y vectores propios.
7. Obtener $M_B(f)$ más simple indicando respecto a qué base (la matriz diagonal o de Jordan).

IMPORTANTE

Se define la aplicación lineal

$$\overbrace{f:\mathbb{R}^3}^{\text{Espacio de salida}} \to \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{Espacio de llegada}}$$

$$(x,y,z) \to (x,y,-x-y)$$

Se pide:

1. Determinar $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.
2. Obtener las dimensiones y bases de $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.
3. Encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores de $\ker(f)$ y de $\operatorname{Im}(f)$.
4. Determinar razonadamente si f puede ser un automorfismo (aplicación lineal y biyectiva).
5. Obtener la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. EMPEZAR X MATRIZ
6. Calcular sus valores y vectores propios. (Tema 6)
7. Obtener $M_B(f)$ más simple indicando respecto a qué base (la matriz diagonal o de Jordan).

5. Obtener la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Los espacios de salida y de llegada.

➡ Matriz cuyas columnas son los trasformados (las imágenes) de los elementos de la base canónica del espacio de salida

Espacio de salida: $\mathbb{R}^3 \to$ BASE CANÓNICA: $B_{CAN}^{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

1ª columna: trasformado de $(1,0,0) \Rightarrow f(1,0,0) = (1,0,-1-0) = (1,0,-1)$

2ª columna: trasformado de $(0,1,0) \Rightarrow f(0,1,0) = (0,1,-0,-1) = (0,1,-1)$

3ª columna: trasformado de $(0,0,1) \Rightarrow f(0,0,1) = (0,0,0)$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA 1

En ocasiones, a la hora de hacer los trasformados de los elementos canónica del espacio de salida no nos quedarán vectores sino matrices, polinomios, etc. Es evidente que en estos casos no podremos construir las columnas directamente, pero haremos algo llamado "REFERENCIA A LA BASE USUAL" de espacio de llegada.

Ej: $B_{CAN}^{\mathbb{R}_3[x]} = \{1, x, x^2, x^3\}$ $\quad \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \to$ BASE CANÓNICA

$p(x) \to p'(x) \qquad B_{CAN}^{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$

1ª columna: $f(1) = 0 \to$ En $B_{CAN}^{\mathbb{R}_2[x]}$ 0 es $(0,0,0)$

2ª columna: $f(x) = 1 \to$ En $B_{CAN}^{\mathbb{R}_2[x]}$ 1 es $(1,0,0)$

3ª columna: $f(x^2) = 2x \to (0,2,0)$ para $2x = \underline{0\cdot 1} + \underline{2x} + \underline{0\cdot x^2}$

4ª columna: $f(x^3) = 3x^2 \to (0,0,3)$

$$\Rightarrow M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

NOTA 2

Nótese que la matriz obtenida siempre tiene

- tantas filas marque la ~~dirección~~ dimensión del espacio de llegada
- tantas columnas como marque la " del espacio de salida

NOTA 3

Veamos que representa la matriz.

$$f(x,y,z) = (x, y, -x-y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(todo esto es lo referente al apartado 5)

1. Apartado 1: ~~Determinar Ker(f) e Img(f) y (2) obtener sus~~ dimensiones y bases.

NÚCLEO DE LA APLICACIÓN LINEAL F:

Es el subespacio contenido en el espacio de salida formado por todos los elementos tales que su imagen por la aplicación es el neutro del espacio de llegada.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ u \in E : f(u) = 0_{E'} \}$$

I. Núcleo de f:

$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, -x-y) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0, y=0, -x-y=0\} =$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0, y=0\} = \{(0,0,\alpha) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$

* $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) -$ nº ec. indep $= 3-2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$
* $\dim(\mathrm{Ker}(f)) =$ nº parámetros indep. $= 1(\alpha) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x=0, y=0\} = \{(0,0,\alpha) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(0,0,1), (0,0,\pi), (0,0,\sqrt{2})\}$

* Base del núcleo: uno de los que forman parte, da igual pero x comodidad (0,0,1)

$$B_{\mathrm{Ker}(f)} = \{(0,0,1)\}$$

II. En definitiva, calcular el Ker(f) es hacer:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M(f)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(x,y,z)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(0,0,0)} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

IMPORTANTE SACAR 1º LA DIMENSIÓN.

I. Imagen de f

Es el subespacio contenido en el espacio de llegada formado por todos los elementos para los cuales existe ~~uno~~ en el espacio de salida cuya imagen es el mismo; $\mathrm{Im}(f) = \{ w \in E' : \exists v \in E \text{ con } f(v) = w \}$

* $\dim(\mathrm{Im}(f)) = Rg(M(f))$

$$Rg(M(f)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

* $\dim(\underbrace{\text{ESPACIO SALIDA}}_{\mathbb{R}^3}) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$
  $\quad 3 \qquad\qquad\qquad 1 \qquad\qquad\qquad 2$

$\boxed{\text{NOTA 4}}$

La fórmula anterior nos sirve para ver que todo el problema presenta las dimensiones adecuadas (sirve a modo de comprobación) Incluso podemos calcular una dimensión u otra en esa fórmula

Vamos a hallar las ecuaciones cartesianas de la imagen. (seguimos en el 1º)

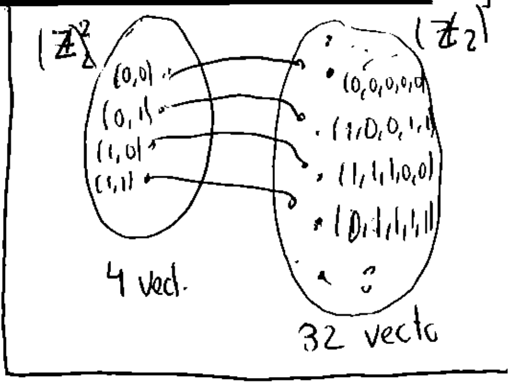
$$f : \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{salida}} \to \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{llegada}}$$

Sea la función $f:\mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^5$ tal que $f(x,y)=(x+y,x,x,y,y)$ y sea $g:\mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^5$ la aplicación lineal cuya matriz respecto a las bases canónicas es $G=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que f es una aplicación lineal.
b) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.
c) Calcular $Ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ y especificar sus dimensiones.
d) ¿Existe alguna relación entre $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Im}(g)$? Razonar la respuesta.

$(\mathbb{Z}_2)^2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$\mathrm{card}((\mathbb{Z}_2)^2) = 4$



$f: (\mathbb{Z}_2)^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^5$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+y, x, x, y, y)$

a) $\boxed{1}$ $f(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) = f(\vec{v}_1)+f(\vec{v}_2)$

$\bullet\ f(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) =$

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in (\mathbb{Z}_2)^2$ $\quad \| \quad = (x_1+x_2+y_1+y_2,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ y_1+y_2)$

$\bullet\ f(\vec{v}_1)+f(\vec{v}_2) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) = (x_1+y_1, x_1, x_1, y_1, y_1) + (x_2+y_2, x_2, x_2, y_2, y_2)$

$= (x_1+x_2+y_1+y_2,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ y_1+y_2)$

$\boxed{2}$ $f(K\vec{v}_1) = Kf(\vec{v}_1)$

$\bullet\ f(K\vec{v}_1) = f(K(x_1,y_1)) = f(Kx_1, Ky_1) = (Kx_1+Ky_1, Kx_1, Kx_1, Ky_1, Ky_1)$

$\bullet\ K f(\vec{v}_1) = K f(x_1,y_1) = K(x_1+y_1, x_1, x_1, y_1, y_1) =$

$= (Kx_1+Ky_1, Kx_1, Kx_1, Ky_1, Ky_1)$

$\forall (x_1,y_1) \in (\mathbb{Z}_2)^2$
$\forall K \in \mathbb{Z}_2$

b) $B_C = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de $(\mathbb{Z}_2)^2$

$$f(1,0) = (1+0, 1, 1, 0, 0) = (1,1,1,0,0)$$
$$f(0,1) = (0+1, 0, 0, 1, 1) = (1,0,0,1,1)$$

$$F = A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a f a base canónicas de $(\mathbb{Z}_2)^2$ y $(\mathbb{Z}_2)^5$

c) Cálculo de Ker(f)

$\vec{v} \in \ker(f) \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow A(f) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \\ x=0 \\ y=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}}$ Por tanto, es una función inyectiva $\ker(f) = \{(0,0)\}$

$\dim \ker(f) = 0$

Cálculo de Im(f)

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = rg(A(f)) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Para obtener una base de Im(f) se toman tantas columnas l.i. de la A(f) como nos deja la dimensión

$B_{Im} = \{(1,0,0,1,1),(1,1,1,0,0)\}$ base de Im(f)

$\mathrm{Im}(f) = L(\{(1,0,0,1,1),(1,1,1,0,0)\})$

$(x,y,z,t,u) \in \mathrm{Im} f \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x,y,z,t,u) = \alpha(1,0,0,1,1) + \beta(1,1,1,0,0)$

$(x,y,z,t,u) = (\alpha+\beta, \beta, \beta, \alpha, \alpha)$, por tanto,

F. Paramétrica $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{(\alpha+\beta, \beta, \beta, \alpha, \alpha) \in (\mathbb{Z}_2)^5 / \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\}}$

F. Extensiva $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{\underset{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}}{(0,0,0,0,0)}, \underset{\substack{\alpha=0 \\ \beta=1}}{(1,1,1,0,0)}, \underset{\substack{\alpha=1 \\ \beta=0}}{(1,0,0,1,1)}, \underset{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}{(0,1,1,1,1)}\}}$

d) Calculamos Im(g)

$G = A(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\dim(\mathrm{Im}(g)) = rg(A(g)) = 2$

$B_{Im} = \{(1,0,0,1,1),(0,1,1,1,1)\}$

$\mathrm{Im}(g) = L(\{(1,0,0,1,1),(0,1,1,1,1)\})$

$(x,y,z,t,u) \in \mathrm{Im} g \Longleftrightarrow (x,y,z,t,u) = \alpha(1,0,0,1,1) + \beta(0,1,1,1,1)$

$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)}$

F. Paramétrica $\boxed{\mathrm{Im}(g) = \{(\alpha, \beta, \beta, \alpha+\beta, \alpha+\beta)} \in (\mathbb{Z}_2)^5, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\}$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

a) Determinar su polinomio característico.
b) Calcula los autovalores de A.
c) Determina las multiplicidades algebraicas y geométricas de los autovalores calculados en el apartado anterior.
d) Halla bases de los autoespacios asociados.
e) Responda al apartado 1 en el supuesto de que A sea diagonalizable. En caso contrario responda al apartado 2.

1. Halla una matriz diagonal, D, semejante a A, la matriz de paso P y la relación entre A, P y D.
2. Explica las causas por las que A no es diagonalizable. Obtener una matriz triangular T semejante a A y la matriz de paso. Escribe la relación entre A, P y T.

a, b) $|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) + 8(3-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(3-\lambda)}_{\lambda=3}\underbrace{[(5-\lambda)(-1-\lambda)+8]}_{\lambda=1 \;\; \lambda=3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 & m_a(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 & m_a(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

$m_a(\lambda_1) = 2$

c, d) 1) Autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1$; S_{λ_2}

$(A - \lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow (A - I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-1 & 0 & -4 \\ 0 & 3-1 & 0 \\ 2 & 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 2y = 0 \\ \cancel{2x - 2z = 0} \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} x = z = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Ec. cartesiana

$S_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0, y = 0\}$ forma cartesiana

$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$; $S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}$ F. Paramétrica

$\dim(S_{\lambda_2}) = 1 \xRightarrow{\text{Def.}} m_g(\lambda_1) = 1$

Tomando $\alpha = 1$: $\boxed{B_{S_{\lambda_2}} = \{(1,0,1)\} \text{ base de } S_{\lambda_1}}$

2) Autoespacio asociado a $\lambda_1 = 3$: S_{λ_1}

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \Rightarrow (A - 3I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-3 & 0 & -4 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 2 & 0 & -1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2x - 4z = 0}$$

$$S_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 4z = 0\}$$ Forma cartesiana

$$\underset{x-2z}{2x - 4z = 0} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow S_{\lambda_1} = \{(2\beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$ F. Paramétrica

$$\mathrm{Dim}(\lambda_1) = 2 \Rightarrow \boxed{mg(\lambda_1) = 2}$$

$$\boxed{B_{S_{\lambda_1}} = \{\underset{\substack{\alpha=1 \\ \beta=0}}{(0,1,0)}, \underset{\substack{\alpha=0 \\ \beta=1}}{(2,0,1)}\}}$$ Base de S_{λ_1}

e) ¿A es diagonalizable?

$$\boxed{A \text{ es diagonalizable} \Leftrightarrow m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \ \forall \lambda_i}$$

	m_a	m_g	
$\lambda_1 = 3$	2	2	✓
$\lambda_2 = 1$	1	1	✓

} A es diagonalizable (aptdo. 1)

1: A es diagonalizable, lo que significa que A es semejante a una matriz diagonal: $A = PDP^{-1}$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \underset{P}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{D}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}$$

Se rellena con los autovalores (dependiendo de ~~la~~ su m_a)

Septiembre 2006
Ejercicio 2

Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ definido por

$$f(x,y,z,u) = (2x+y+z+u,\ x+2y+z+u,\ z,\ u)$$

Se pide:

a) Hallar la matriz de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

b) Calcular los autovalores de f.

c) Hallar los subespacios propios (autoespacios) asociados a los autovalores de f.

d) Hallar si es posible una base de $\mathbb{R}^4$ respecto a la cual la matriz de f sea diagonal.

a)
$$f(1,0,0,0) = (2,1,0,0)$$
$$f(0,1,0,0) = (1,2,0,0)$$
$$f(0,0,1,0) = (1,1,1,0)$$
$$f(0,0,0,1) = (1,1,0,1)$$

$$A(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Matriz asociada a f en las B_c de $\mathbb{R}_4$

b) $|A - \lambda I| = 0$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0}_{\text{Polinomio característico}} \Longrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (doble)} \\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3,\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda = 1 & m_a(\lambda = 1) = 3 \\ \lambda = 3 & m_a(\lambda = 3)\ 1 \end{array}}$$

$\sum m_a(\lambda_i) = n$ ← orden de la matriz

c) Autoespacio asociado a $\lambda=1$: $S_{\lambda=1}$

$\ulcorner (A-\lambda_i I)\vec{x}=\vec{0} \lrcorner$

$(A-\lambda_i I)\vec{x}=\vec{0}$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z+u=0 \\ x+y+z+u=0 \\ \cancel{0=0} \\ \cancel{0=0} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 \text{ ec.} \\ 4 \text{ incóg.} \end{array}$$

$\boxed{x+y+z+u=0}$ Ecu. cartesiana de $S_{\lambda=1}$

$\boxed{S_{\lambda=1}=\{(x,y,z,u)\in\mathbb{R}^4 / x+y+z+u=0\}}$ F. Cartesiana

$\boxed{S_{\lambda=1}=\{(\alpha,\beta,\gamma,-\alpha-\beta-\gamma)\in\mathbb{R}^4 / \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}}$

$\boxed{\dim(S_{\lambda=1}) = n^{o} \text{ parámetros} = 3} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{m_g(\lambda=1)=3}$

$\boxed{B_{S_{\lambda=1}}=\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}}$

Autoespacio de $\lambda=3$: $S_{\lambda=3}$

$(A-\lambda_2 I)\vec{x}=\vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} -x+y+z+u=0 \\ x-y+z+u=0 \\ -2z=0 \\ -2u=0 \end{array}\right.$$

$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ u=0 \end{array}\right]$

$S_{\lambda=3}=\{(x,y,z,u)\in\mathbb{R}^4 / x-y=0;\ u=0,\ z=0\}$

$S_{\lambda=3}=\{(\alpha,\alpha,0,0)\in\mathbb{R}^4 / \alpha\in\mathbb{R}\}$

$\dim(S_{\lambda=3})=1 \Longleftrightarrow m_g(\lambda=3)=1$

$B_{S_{\lambda=3}}=\{(1,1,0,0)\}$

$\dim(S_{\lambda=3}) = n^{o} = \dim(\mathbb{R}^4) - n^{o}\text{ ecs} = 4-3=1$

d) ¿A es diagonalizable?

$\boxed{T^{\underline{ma}} \quad A \text{ es diagonalizable} \iff m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \ \forall \lambda_i}$

	m_a	m_g
$\lambda = 1$	3 = 3	
$\lambda = 3$	1 = 1	

✓ A es diagonalizable. Implica

(1) Existe una base ~~de au~~ formada por autovectores, respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal

$$\boxed{\text{La base es } B = \{\underbrace{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)}_{B_{S_{\lambda=1}}}, \underbrace{(1,1,0,0)}_{B_{S_{\lambda=3}}}\}}$$

Base de $\mathbb{R}_4$ formada por autovectores,

Finalmente la matriz asociada a f en la base B,

$$\boxed{A_B^B(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

(2) A es semejante a una matriz diagonal, es decir, se cumple: $A = PDP^{-1}$

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

Febrero 2006
Ejercicio 2

El conjunto $\mathbb{R}_3[x] = \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,3\}$ de los polinomios en la indeterminada x, de grado menor o igual que 3 y con coeficientes reales tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar real.

Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}_3[x] \mapsto \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(p(x)) = p(x) - p'(x)$. Se pide:

a) Hallar la matriz de f respecto a la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Calcular el núcleo de f y comprobar que $f^{-1}(p(x)) = p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)$

c) Encontrar $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ tal que $p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x) = x^3 + x + 1$.

d) Hallar los autovalores de f y sus subespacios propios asociados. ¿Existe una base de autovectores de f?

$$f: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$$
$$p(x) \longrightarrow f(p(x)) = p(x) - p'(x)$$

a) $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$

$f(1) = 1$
$f(x) = x - 1$
$f(x^2) = x^2 - 2x$
$f(x^3) = x^3 - 3x^2$

$f(1) = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$
$f(x) = -1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$
$f(x^2) = 0\cdot 1 - 2\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3$
$f(x^3) = 0\cdot 1 + 0\cdot x - 3\cdot x^2 + 1\cdot x^3$

$$A(f) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ matriz asociada a f en la base B de salida y de llegada.

b) 1. Cálculo del $\ker(f)$

$$A(f)\cdot\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 = 0 \\ a_1 - 2a_2 = 0 \\ a_2 - 3a_3 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0 + 0x + 0x^2 + 0x^3\}}$

2. Comprobar $f^{-1}(p(x)) = p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)$

Aplicamos f a ambos lados,

$$\underbrace{f(f^{-1}(p(x)))}_{Id(p(x)) = p(x)} = f(p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x))$$

$$p(x) = f(p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x))$$

Por tanto se trata de comprobar que la imagen del vector $p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)$ es el vector $p(x)$

$f(p(x)+p'(x)+p''(x)+p'''(x)) = p(x)+p'(x)+p''(x)+p'''(x) - (p(x)+p'(x)+p''(x)+p'''(x))' =$

$= p(x) - p^{IV}(x) = p(x)$

$p^{IV}(x)=0$ pq si derivamos 4 veces un polinomio de grado 3 sale 0

c) Encontrar $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ / $x^3+x+1 = p(x)+p'(x)+p''(x)+p'''(x)$

Aplicando la expresión del aptado b)

$$\underbrace{x^3+x+1}_{f^{-1}(p(x))} = p(x)+p'(x)+p''(x)+p'''(x)$$

Aplicamos f

$$f(f^{-1}(p(x))) = f(x^3+x+1) \Rightarrow Id(p(x)) = f(x^3+x+1) \Rightarrow p(x) = f(x^3+x+1)$$

$$p(x) = x^3+x+1 - (x^3+x+1)' = \boxed{x^3-3x^2+x}$$

d) Autovalores: $|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^4 = 0$

$$\boxed{\lambda = 1 \mid m_a = 4}$$

Autoespacio: $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (A-I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \alpha \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}}$$

$S_{\lambda=1} = \{(\alpha, 0, 0, 0) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\dim(S_{\lambda=1}) = 1 \rightarrow m_g(\lambda=1) = 1$

$B_{S_{\lambda=1}} = \{(1, 0, 0, 0)\}$

No, no existe ya que A no es diagonalizable.

$m_a(\lambda=1) \neq m_g(\lambda=1)$

Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

Recuerda que los autovalores de una matriz son las soluciones de:
$|A-\lambda I|=0$

Para saber cuando la matriz A es diagonalizable, estudiamos en primer lugar sus autovalores.

Hallamos $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

Ahora calculamos el determinante:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)(\alpha-\lambda)$$

Por tanto los autovalores son las soluciones de la ecuación:

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(\alpha-\lambda)=0\Rightarrow\begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda=3 \\ \lambda=\alpha \end{cases}$$

Ahora distinguimos los siguientes casos:

CASO I: $\alpha\neq 2 \ y \ \alpha\neq 3$

En este caso la matriz es diagonalizable por que tiene tres valores propios distintos.

CASO II: $\alpha=2$

En este caso la matriz tiene los siguientes autovalores:

$\lambda=2$ con multiplicidad algebraica igual a 2
$\lambda=3$ con multiplicidad algebraica igual a 1

Estudiamos la multiplicidad geométrica de los autovalores:

- Multiplicidad geométrica de $\lambda=3$

Como la multiplicidad algebraica del autovalor 3 es 1, la multiplicidad geométrica también será 1 ya que sabemos por teoría que:

$$m_a(\lambda_i)\geq m_g(\lambda_i)>0$$

- Multiplicidad geométrica de $\lambda=2$:

La multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda=2$ es $3-rang(A-2I)$. Ahora bien:

$$rang(A-2I)=rang\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1.$$

Por tanto la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda=3$ es 3 – 1 = 2.

Entonces, si $\alpha=2$

	AUTOVALOR	
	$\lambda=2$	$\lambda=3$
Multiplicidad algebraica	2	1
Multiplicidad geométrica	2	1

Como todos los autovalores cumplen que su multiplicidad algebraica es igual a su multiplicidad geométrica, la matriz es diagonalizable.

CASO III: $\alpha=3$

En este caso la matriz tiene los siguientes autovalores:

$\lambda=2$ con multiplicidad algebraica igual a 1
$\lambda=3$ con multiplicidad algebraica igual a 2

- Multiplicidad geométrica de $\lambda=2$

Como la multiplicidad algebraica del autovalor 2 es 1, la multiplicidad geométrica también será 1.

- Multiplicidad geométrica de $\lambda=3$:

La multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda=3$ es $3-rang(A-3I)$. Ahora bien:

$$rang(A-3I)=rang\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=2$$

Por tanto la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda=3$ es 3 – 2 = 1.

Entonces, si $\alpha=3$:

	AUTOVALOR	
	$\lambda=2$	$\lambda=3$
Multiplicidad algebraica	1	2
Multiplicidad geométrica	1	1

En este caso, el autovalor $\lambda=3$ tiene distintas multiplicidades algebraica y geométrica, por tanto la matriz A no es diagonalizable.

Por tanto, el único valor de α para el que la matriz A no es diagonalizable es $\alpha=3$.

$\boxed{\textbf{Solución: } \alpha = 3}$

Sea el endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$f_a(x_1,x_2,x_3) = A_a\vec{x}^T = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 2a & 2a & 2 \\ 3a & 3a & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Según los valores de $a \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Hallar $\text{Ker}(f_a)$. Especificar una base de $\text{Ker}(f_a)$.
b) Hallar $\text{Img}(f_a)$. Especificar una base de $\text{Img}(f_a)$.
c) Comprobar que $\vec{v} = (1,2,3)$ es un vector propio de f_a y calcular los autovalores de f_a.
d) Hallar, si es posible, una matriz $P_a \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P_a^{-1}\ A_a P_a$ sea diagonal.

$$A(f_a) = A_a = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 2a & 2a & 2 \\ 3a & 3a & 3 \end{pmatrix}$$ Matriz asociada a f_a en bases canónicas

a) Cálculo de $\text{Ker}(fa) \longrightarrow f_a(\vec{v}) = \vec{0}$

$$A(fa) \cdot \vec{V} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 2a & 2a & 2 \\ 3a & 3a & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[3 \text{ incog}]{1 \text{ ec.}} \begin{cases} ax_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ \cancel{2ax_1 + 2ax_2 + 2x_3 = 0} \\ \cancel{3ax_1 + 3ax_2 + 3x_3 = 0} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ker}(fa) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3 \mid ax_1 + ax_2 + x_3 = 0\}}$$

$$\boxed{\text{Ker}(fa) = \{(\alpha, \beta, -a\alpha - a\beta) \in \mathbb{R}_3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}}$$

$$\boxed{\text{Dim}(\text{Ker}(fa)) = 2} \quad \boxed{B_{\text{Ker} fa} = \{(1, 0, -a), (0, 1, -a)\}}$$

b) Cálculo de $\text{Img}(fa) \longrightarrow \{\vec{V} \mid f(\vec{w}) = \vec{V}\}$

$\text{Dim}(\text{Img}(fa)) = rg\, A_a = 1$

$B_{\text{Img}}(fa) = \{(a, 2a, 3a)\}$ → $(1,2,3)$ [*]

$\text{Img}(fa) = L(B_{img}) = L\{(a, 2a, 3a)\} = \alpha(a, 2a, 3a)$

$\text{Img}(fa) = \{(+\alpha a, 2\alpha a, 3\alpha a) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ F. Paramétrica

→ $\{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha)\}$ *[Mejor, ya que nos quitamos la "a"]

$$\boxed{\text{Img}(fa) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 = 0,\ 3x_1 - x_3 = 0\}}$$

c) $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

$A \cdot \vec{v} = \underbrace{\lambda}_{\text{Autovalor}} \cdot \vec{v} \longrightarrow$ Autovector

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 2a & 2a & 2 \\ 3a & 3a & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} a+2a+3 \\ 2a+4a+6 \\ 3a+6a+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+3 \\ 6a+6 \\ 9a+9 \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{3a+3}\ \boxed{\underbrace{(3a+3)}_{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{v}}$$

Efectivamente, $\vec{v} = (1,2,3)$ es un autovector de A asociado al autovalor $\lambda = 3a+3$

Autovalores

$|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a & 1 \\ 2a & 2a-\lambda & 2 \\ 3a & 3a & 3-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(2a-\lambda)(3-\lambda) + 6a^2 + 6a^2 - 3a(2a-\lambda) - 2a^2(3-\lambda) \ldots - 6a(a-\lambda) = \cdots = 0$$

$$= (2a^2 - a\lambda - 2a\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) + 12a^2 - 6a^2 + 3a\lambda - 6a^2 + 6a^2\lambda - 6a^2(a\lambda)$$

$$= 3a\lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 = \boxed{(3a+3)\lambda^2 - \lambda^3} = 0$$

$$\lambda^2(3a+3-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, & ma(\lambda_1 = 0) = 2 \\ \lambda_2 = 3a+3, & ma(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

d) $\boxed{!!!}$ Tenemos que calcular los autoespacios:

1. Autoespacio asociado a $\lambda = 0$: S_{λ_1}

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow A \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$S_{\lambda_1} = Ker(f) = \{(\alpha, \beta, -a\alpha - a\beta) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$dim(S_{\lambda_1}) = 2 \qquad B_{S_{\lambda_1}} = \{(1,0,-a), (0,1,-a)\}$

$mg(S_{\lambda_1}) = 2$

2. Autoespacio asociado a $\lambda = 3a+3$

$S_{\lambda_2} = \mathcal{L}\{(1,2,3)\} = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$Dim(S_{\lambda_2}) = 1 \quad mg(S_{\lambda_2}) = 1$

$B_{S_{\lambda_2}} = \{(1,2,3)\}$

$$P_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -a & -a & 3 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que toda matriz cuadrada con elementos reales, A, de orden dos, satisface a su polinomio característico igualado a cero.

b) Se considera el subespacio vectorial engendrado por las sucesivas potencias de una matriz cuadrada de orden dos con elementos reales $I_2, A, A^2, A^3 \ldots$. Determinar la dimensión y una base del subespacio.

Junio 2008
Ejercicio 1

a) Hallar todas las matrices $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ tales que $A^2 = A$.

b) Demostrar que si $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ es un endomorfismo idempotente entonces solamente $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1 = 1$ pueden ser autovalores de f.

Utiliza el teorema que sigue para hallar una matriz B tal que $B^2 = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Teorema. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizable y con todos sus autovalores reales y no negativos. Entonces existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ con autovalores no negativos tal que $B^2 = A$.

Demostración. Si A es diagonalizable existe S invertible tal que $L = S^{-1}AS$ es diagonal. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son autovalores de A, para cada i perteneciente a $\{1, 2, \ldots, n\}$ sea $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ y

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Entonces $M^2 = L$ y si $B = SMS^{-1}$, entonces los autovalores de B son $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ y, además,

$$B^2 = \left(SMS^{-1}\right)\left(SMS^{-1}\right) = SM^2S^{-1} = SLS^{-1} = A$$

Se dice que una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es una raíz cuadrada de $B \in M_n(\mathbb{K})$ si $A^2 = B$. Demuestra que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces toda matriz cuadrada $B \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalizable tiene raíz cuadrada. ¿Es cierto este resultado si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?, razona tu respuesta.

Prueba que toda aplicación lineal $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene un autovalor real .

Enuncia condiciones necesarias y suficientes para que una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ no tenga autovalores reales. Justifica las condiciones propuestas.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Se dice que B es semejante a A si y solo si existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$. Prueba los siguientes resultados.

a) A es semejante a sí misma.
b) Si B es semejante a A entonces A es semejante a B.
c) Si B es semejante a A y C es semejante a B, entonces C es semejante a A.

Junio 2006
Ejercicio 2

Sea $M_n(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n y con coeficientes reales y sea $f: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ tal que:

$$f(M) = s(M)\mathrm{I}d_n$$

siendo $s(M) = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} \in \mathbb{R}$, la suma de todos los elementos de la matriz $M = (m_{ij})$. Se pide:

a) Demostrar que f es un endomorfismo.
b) Determinar los autovalores de f.
c) Demostrar que f es diagonalizable.
d) Para $n=2$, diagonalizar f y especificar la base correspondiente.

Febrero 2008
Ejercicio 3

Sea $(\mathbb{R}_2[x], \ <\ ,\ >)$ el espacio vectorial euclídeo de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2, $\mathbb{R}_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, con el producto escalar $<p(x),q(x)>=\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$.

Sea la aplicación lineal $D:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ tal que a todo polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$ le hace corresponder su derivada.

a) Obtener los autovalores y autovectores de D y estudiar si es diagonalizable.
b) Encontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], \ <\ ,\ >)$.

Sea $P \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $P^2 = P$. Se pide:

a) Calcular los autovalores de P.

b) Demostrar que $M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$

c) Demostrar que P es diagonalizable.

ETSI Telecomunicación
Febrero 2007

Ejercicio 2

a) Demostrar que $A \in M_n(K)$ es invertible si y sólo si A no tiene autovalores nulos.

b) Sean $f, g, h: E \mapsto E$ tres endomorfismos del K-espacio vectorial E. Demostrar que si $\lambda = 0$ no es autovalor de los endomorfismos $g \circ f$ y $h \circ g$ entonces f, g y h son biyectivos.

c) Si $A \in M_n(K)$ es una matriz invertible, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sus autovalores y los $S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2}, \ldots, S_{\lambda_n}$ autoespacios correspondientes, calcular los autovalores y los autoespacios de A^{-1}.

ETSI Telecomunicación
Septiembre 1995

Sea $(E,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Se recuerda que dos subespacios vectoriales H_1 y H_2 de E son ortogonales si $\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2 \quad <x,y>=0$.
Probar que:

1) Si H_1 y H_2 son subespacios ortogonales entonces $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.
2) Si f es un endomorfismo de E satisface la condición:
$$\forall u \in E \ \| f(u) \| = \| u \|$$
entonces f transforma subespacios ortogonales en subespacios ortogonales.
3) Si f es un endomorfismo de E que satisface la condición:
$$\forall x, y \in E \qquad < f(x), y > = < x, f(y) >$$
y u es un autovector de f entonces $\forall v \in E,\ <v,u>=0 \Rightarrow <f(v),u>=0$

Junio 2008
Ejercicio 3

Sea el subespacio vectorial $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y=0, y+z=0\}$ del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual. Se pide:

a) Obtener una base ortonormal del subespacio ortogonal a E.
b) Hallar la proyección ortogonal del vector $\vec{v}=(1,2,3)$ sobre el subespacio E.

Sea $W = L\left(\{(1,0,1,2),(1,1,0,-1)\}\right) < \mathbb{R}^4$ .Calcular la proyección ortogonal del vector $u=(1,1,1,1)\in\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio W.

Recuerda que para proyectar sobre un subespacio necesitamos que este esté generado por una base ortonormal.

En primer lugar vamos a ortonormalizar el subespacio sobre el que queremos proyectar, para eso hacemos uso del proceso de Gram Schmidt al subespacio $W = L\{e_1,e_2\}$

Por tanto:

$$u_1 = e_1 = (1,0,1,2)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{<e_2,u_1>}{<u_1,u_1>}\cdot u_1 = (1,1,0,-1) - \frac{\langle(1,1,0,-1),(1,0,1,2)\rangle}{\langle(1,0,1,2),(1,0,1,2)\rangle}(1,0,1,2) =$$

$$(1,1,0,-1) - \frac{(1-2)}{(1+1+4)}(1,0,1,2) = (1,1,0,-1) + \left(\frac{1}{6},0,\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right) = \left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)$$

Hemos conseguido que $W = L\left\{(1,0,1,2),\left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)\right\}$ esté generado por una base ortogonal. Ahora sólo resta normalizar, es decir, dividir los vectores por su norma.

Por tanto:

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,0,1,2)}{\|(1,0,1,2)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)}{\frac{\sqrt{102}}{6}} = \left(\frac{7\sqrt{102}}{102},\frac{\sqrt{102}}{17},\frac{\sqrt{102}}{102},\frac{-2\sqrt{102}}{51}\right)$$

Por último aplicamos la fórmula de proyección:

$$\operatorname{proy}_W(u) = \langle u,w_1\rangle w_1 + \langle u,w_2\rangle w_2 = \left\langle(1,1,1,1),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right) +$$

$$= \left\langle(1,1,1,1),\left(\frac{7\sqrt{102}}{102},\frac{\sqrt{102}}{17},\frac{\sqrt{102}}{102},\frac{-2\sqrt{102}}{51}\right)\right\rangle\left(\frac{7\sqrt{102}}{102},\frac{\sqrt{102}}{17},\frac{\sqrt{102}}{102},\frac{-2\sqrt{102}}{51}\right) =$$

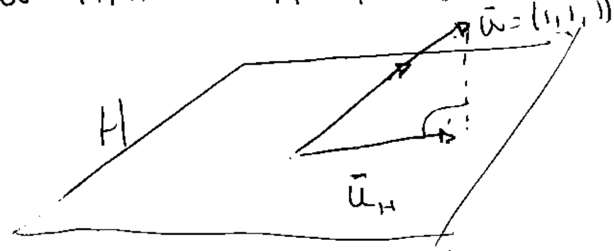
$$= \left(\frac{23}{17},\frac{10}{17},\frac{13}{17},\frac{16}{17}\right)$$

Solución : $\operatorname{proy}_W(u) = \left(\frac{23}{17},\frac{10}{17},\frac{13}{17},\frac{16}{17}\right)$

1. Halla el vector v, del subespacio de $\mathbb{R}^3$ que tiene por ecuación implícita $x - y + 2z = 0$ que está a menor distancia (considerando la distancia definida por la norma usual) del vector (1, 1, 1).

2. Sea $A = \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$, calcular una base de ker$A$ y una base de ImA.

$\mathbb{R}^3 \quad \bar{u} = (1,1,1) \qquad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ forma cartesiana



1^er^ paso: obtenemos una base de H

$x - y + 2z = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \longrightarrow H = \{(\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

2 parámetros

forma paramétrica

$\mathrm{Dim}(H) = 2$

nº parámetros

$B_H = \{(1,1,0), (-2,0,1)\}$ base de H

$\alpha = 1, \beta = 0 \qquad \alpha = 0, \beta = 1$

no ortogonal pq $\langle (1,1,0), (-2,0,1) \rangle = -2 \neq 0$

2º paso: calculamos una base ortogonal de H. Método de G-S

$\bar{u}_1 = \bar{e}_1 = \boxed{(1,1,0)}$

$\bar{u}_2 = e_2 - \frac{\langle \bar{e}_2, \bar{u}_1 \rangle}{\langle \bar{u}_1, \bar{u}_1 \rangle} \bar{u}_1 = (-2,0,1) - \frac{\langle (-2,0,1), (1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle} =$

$= (-2,0,1) - \left(\frac{-2}{2}\right) \cdot (1,1,0) = \boxed{(-1,1,1)}$

Por tanto, $B' = \{(1,1,0), (-1,1,1)\}$ Base ortogonal de H

3^er^ paso: calculamos la proyección ortogonal

$\vec{u}_H = p_H(\bar{u}) = \frac{\langle \bar{u}, \bar{u}_1 \rangle}{\langle \bar{u}_1, \bar{u}_1 \rangle} \bar{u}_1 + \frac{\langle \bar{u}, \bar{u}_2 \rangle}{\langle \bar{u}_2, \bar{u}_2 \rangle} \vec{u}_2 = \frac{\langle (1,1,1), (1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle} \cdot (1,1,0) +$

$+ \frac{\langle (1,1,1), (-1,1,1) \rangle}{\langle (-1,1,1), (-1,1,1) \rangle} (-1,1,1) = \frac{2}{2}(1,1,0) + \frac{1}{3}(-1,1,1) =$

Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcula el complemento ortogonal del subespacio $\ker(A^T)$.
Nota: Se considera el producto escalar habitual en $M_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

Sea $(E,<>)$ un espacio euclídeo de dimensión finita y H, S dos subespacios vectoriales de E tal que $S \subset H$. Sea $v \in E$. Probar que si v_H es el vector de H que dista menos de v y v_S es el vector de S que dista menos de v, entonces $v_H - v_S$ es ortogonal a v_S.

ETSI Telecomunicación
Febrero 2004
Sección B1
Ejercicio 1

Demuéstrese el siguiente resultado. Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y un producto $<,>: E\times E \rightarrow \mathbb{R}$ escalar en E. Sea W un subespacio de E. Para cada $v\in E$ se tiene que

$$\|v-\text{proy}_W(v)\| \leq \|v-w\| \quad , \quad w\in W$$

Donde proy_W es la proyección ortogonal sobre W y $\|.\|$ es la norma asociada a $<,>$.

Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas 2 x 2 con coeficientes reales y con el producto escalar

$$<A,B> = \text{Traza}(AB^T)$$

siendo la traza de una matriz cuadrada la suma de los elementos de su diagonal. Se pide:

a) Construir una base ortogonal del subespacio vectorial S de las matrices simétricas 2 x 2 con coeficientes reales, a partir de la base

$$B = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Hallar la proyección ortogonal de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sobre S.

c) Hallar la proyección ortogonal de A sobre el complemento ortogonal de S, $S^\perp$.

d) Calcular $\min_{X\in S}\{\|A-X\|\}$.

Antes de empezar hacemos lo siguiente:

$$< \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} > = \text{traza}(A.B^t) = \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \cancel{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

a) $B = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{\bar{u}_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}^{\bar{u}_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{\bar{u}_3} \right\}$ base del subespacio S, no es una base orto. pq:

$$<\bar{u}_2, \bar{u}_3> = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > = 1+1+1-1 = 2 \neq 0$$

Método de Gram-Schmidt:

$$\vec{V}_1 = \vec{u}_1 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{u}_2 - \frac{<\vec{u}_2, \vec{V}_1>}{<\vec{V}_1, \vec{V}_1>} \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} >} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{-1+1+1-1}{1+1+1+1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\bar{V}_3 = \bar{u}_3 - \frac{<\bar{u}_3, \bar{V}_1>}{<\bar{V}_1, \bar{V}_1>} \bar{V}_1 - \frac{<\bar{u}_3, \bar{V}_2>}{<\bar{V}_2, \bar{V}_2>} \cdot \bar{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base ortogonal de S

b) ¿$A_S = P_S(A)$? $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P_S(A) = \frac{\langle A, \bar{v}_1 \rangle}{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle} \bar{v}_1 + \frac{\langle A, \bar{v}_2 \rangle}{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle} \bar{v}_2 + \frac{\langle A, \bar{v}_3 \rangle}{\langle \bar{v}_3, \bar{v}_3 \rangle} \bar{v}_3$$

Sólo si la base es ortogonal $\xrightarrow{} (\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\})$

$$\boxed{P_S(A)} = \bar{0} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}}$$

c) $\bar{V} = \bar{V}_S + \bar{V}_{S^\perp}$

$$A = A_S + A_{S^\perp} \Rightarrow A_{S^\perp} = A - A_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $\min d(A, S) = \|A - A_S\| = \|A_{S^\perp}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ m

T.I.

Sea $(V,<,>)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de V. Si $\|.\|$ es la norma inducida por el producto escalar $<,>$ demostrar que.

a) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si y solamente si $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son ortogonales. PÁG 83

b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$.

c) $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$ si y solamente si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales. DOS NORMAS NO PUEDEN SER $\perp$.

d) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si solamente si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

a) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si y solamente si $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son ortogonales.

$<u+v, u-v> = <u+v, u> - <u+v, v>$

$[<u,u>+<v,u>] - [<u,v>+<v,v>] = <u,u> + \cancel{<v,u>} - \cancel{<u,v>} - <v,v> =$ ¡SON IGUALES!

$<u,u> - <v,v> = \|u\|^2 - \|v\|^2$

$<u+v, u-v>$ es cero si y sólo si $\|u\|^2 = \|v\|^2$

ORTOGONALES si y sólo si EXCLUIMOS EL $\pm$ PORQUE LAS NORMAS NUNCA PUEDEN SER NEGATIVAS.

b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = <u+v, u+v> = \underbrace{<u,u>}_{\|u\|^2} + \underbrace{<u,v> + <v,u>}_{\text{IGUALES}} + \underbrace{<v,v>}_{\|\vec{v}\|^2} = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2<u,v>$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = <u-v, u-v> = \underbrace{<u,u>}_{\|u\|^2} - \underbrace{<v,u> - <u,v>}_{\text{IGUALES}} + \underbrace{<v,v>}_{\|v\|^2} = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2<u,v>$

$\Rightarrow$ Sumando

$\|u+v\|^2 + \|\bar{u}-\bar{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\cancel{<u,v>} + \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\cancel{<u,v>} = 2(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2)$

c) $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$ si y solamente si $\|\vec{u}\|$ y $\|\vec{v}\|$ son ortogonales.

En el apartado a) vimos que dos elementos tienen igual norma si y sólo si su suma y su resta son ortogonales. Aplicando esto a los elementos $u+v$ y $u-v$, decimos que dichos elementos tienen igual norma si y sólo si su suma ($2u$) y su resta ($2v$) son ortogonales lo cual se cumple si y sólo si u y v son ortogonales. Por tanto $u+v$ y $u-v$ tienen igual norma si y sólo si u y v son ortogonales.

d) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = <u+v, u+v> = \underbrace{<u,u>}_{\|u\|^2} + \underbrace{<u,v> + <v,u>}_{\text{IGUALES}} + \underbrace{<v,v>}_{\|v\|^2} = \|\bar{u}\|^2 + \|\vec{v}\| + 2<u,v> =$

$= \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow 2(u,v) = 0 \Leftrightarrow <u,v> = 0 \Leftrightarrow u, v$ son ortogonales.

Febrero 2006
Ejercicio 3

Sean U y V dos subespacios vectoriales de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, $(E,<,>)$. Demostrar que:

a) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$.

b) Si $U\subset V$, entonces $V^{\perp}\subset V^{\perp}$.

c) $(U\cap V)^{\perp}=U^{\perp}+V^{\perp}$.

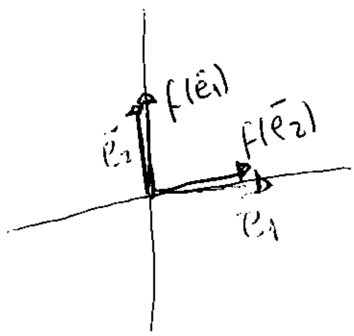
d) $(U+V)^{\perp}=U^{\perp}\cap V^{\perp}$.

Una matriz P cuadrada de orden n con coeficientes reales se dice que es ortogonal si $P^T P = I_n$. Sea $<,>$ el producto escalar de $\mathbb{R}^n$.

a) Sea P una matriz ortogonal de orden n, demuestra que $\forall u,v \in \mathbb{R}^n$, $<Pu,Pv> = <u,v>$ y que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de P entonces $|\lambda| = 1$.

b) Halla la matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que Az es la reflexión de $z \in \mathbb{R}^2$ respecto de la recta de $\mathbb{R}^2$ de ecuación $x = y$.

b) Reflexión = simetría



$B_c = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$

$f(e_1) = \bar{e}_2 \Rightarrow f(1,0) = (0,1)$

$f(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 \Rightarrow f(0,1) = (1,0)$

$$\boxed{A(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Matriz asociada a f en bases canónicas

Febrero 2006
Ejercicio 1

Sea $(E,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y sea $f: E \mapsto E$ un endorfismo tal que

$$<f(\vec{u}), f(\vec{v})> = <\vec{u},\vec{v}> \qquad \forall \vec{u},\vec{v} \in E.$$

Demostrar que:

a) f es un isomorfismo.

b) Si λ es un valor propio de f, entonces $|\lambda| = 1$.

c) f transforma una base ortogonal de E en una base ortogonal de E.

Ejercicio 3

Sea E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión finita y f un endomorfismo de E tal que

$$\forall x, y \in E, \quad < x, f(y) > \; = \; < f(x), y >$$

Demostrar que $\mathrm{Im} f$ y $\ker f$ son subespacios ortogonales tales que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker f$.

En el espacio vectorial de polinomios en una indeterminada x, con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2, $\mathbb{R}_2[x]$, se considera el producto escalar

$$<p,q> = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$$

Se pide:

a) Determinar $H^{\perp}$ siendo $L\left(\left\{x, x^2\right\}\right)$.

b) Calcular $\text{proy}_H(p)$ para cada $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

Dado E un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial de dimensión n, dotado de un producto escalar $<\_,\_>$ y un endomorfismo $f : E \to E$, probar que si $v_1,...,v_n$ es una base ortogonal de E formada por vectores propios de f, entonces para todo $u,w \in E$ se verifica que

$$<u,f(w)> = <f(u),w>$$

$$<u,f(w)> = <u,f(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n)> =$$

$$= <u,\alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_n f(v_n)> =$$

$$= \alpha_1 <u,f(v_1)> + ... + \alpha_n <u,f(v_n)> =$$

$$= \alpha_1 <u,\lambda_1 v_1> + ... + \alpha_n <u,\lambda_n v_n> =$$

(*)

$$= \beta_1 \lambda_1 \alpha_1 <v_1,v_1> + ... + \beta_n \lambda_n \alpha_n <v_n,v_n> =$$

$$= <\beta_1 \lambda_1 v_1, \alpha_1 v_1> + ... + <\beta_n \lambda_n v_n, \alpha_n v_n> =$$

$$= <\beta_1 f(v_1), \alpha_1 v_1> + ... + <\beta_n f(v_n), \alpha_n v_n> =$$

$$= <\beta_1 f(v_1) + ... + \beta_n f(v_n),\ \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n> =$$

$$= <f(\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n),\ \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n> = <f(u),\ w>.$$

En (*) hemos hecho lo siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_1 <u,\lambda_1 v_1> &= \alpha_1 <\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n\ ,\lambda_1 v_1> = \\ &= \alpha_1 <\beta_1 v_1,\lambda_1 v_1> + \alpha_1 <\beta_2 v_2,\lambda_1 v_1> + ... + \alpha_1 <\beta_n v_n,\lambda_1 v_1> = \\ &= \beta_1 \lambda_1 \alpha_1 <v_1,v_1> + \beta_2 \lambda_1 \alpha_1 \underbrace{<v_2,v_1>}_{=0} + ... + \beta_n \lambda_1 \alpha_1 \underbrace{<v_n,v_1>}_{=0} = \\ &= \beta_1 \lambda_1 \alpha_1 <v_1,v_1> \end{aligned}$$

análogamente: $\alpha_2 <u,\lambda_2 v_2> = \beta_2 \lambda_2 \alpha_2 <v_2,v_2>$

$\alpha_3 <u,\lambda_3 v_3> = \beta_3 \lambda_3 \alpha_3 <v_3,v_3>$

....

y en general : $\alpha_i <u,\lambda_i v_i> = \beta_i \lambda_i \alpha_i <v_i,v_i>$, $\forall i \in \{1,...,n\}$

Junio 2006
Ejercicio 3

Sea el vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ y sea la matriz $M_{\vec{x}} = \dfrac{\vec{x}\,\vec{x}^T}{\vec{x}^T\,\vec{x}} = \dfrac{1}{\|\vec{x}\|^2}(\vec{x}\,\vec{x}^T)$. Se pide:

a) Demostrar que $M_{\vec{x}}\,\vec{v} = \text{proy}_{\vec{x}}(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

b) Demostrar que $M_{\vec{x}}$ es simétrica.

c) Demostrar que $M_{\vec{x}}$ no es invertible.

d) Demostrar que $(\text{I}d_n - M_{\vec{x}})\vec{v} = \text{proy}_{x^\perp}(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

e) Hallar la proyección de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre el complemento ortogonal al subespacio generado por $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ETSI Telecomunicación
Junio 2004
Sección B1

Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcular el rango de A.
2. Halla la forma reducida de Gauss-Jordan, J de A.
3. Considera la aplicación $A: M_{4\times1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times1}(\mathbb{R})$ definida por $x \mapsto Ax,\ x \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$. ¿Es inyectiva?.
4. El sistema $Ax = b$ tiene solución para cada $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$
5. ¿Es $B_{\ker A} = \left([0\ -1\ 0\ 1]^T\right)$ una base de $\ker A$?
6. Calcula los autovalores de A, indicando su multiplicidad algebraica.
7. Para cada autovalor de A calcula su multiplicidad geométrica.
8. ¿Es A diagonalizable?
9. Para cada autovalor λ de A calcula una base de su autoespacio asociado S_λ.
10. Sea $v = [1\ 1\ 1\ 1]^T$ .Calcula la proyección ortogonal de v sobre S_μ donde μ es el autovalor de A de mayor valor absoluto.

Se definen las aplicaciones lineales $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ y $G:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$T(x_1,x_2,x_3) = (x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ -x_1,\ x_2 + 2x_3)$$
$$G(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_4,\ -x_1 + x_2 + 3x_4,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

1. Calcular las matrices asociadas a T y a G respecto de las bases canónicas correspon - dientes.
2. ¿Es T inyectiva?.
3. Calcula la dimensión de Im(G).
4. Sea $H:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$H(x_1,x_2,x_3) = (-x_1 + x_2 - 3x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + 12x_3,\ -3x_1 - 4x_2 - 10x_3)$$

   y definimos $K = (G \circ T) - H$. Calcula los autovalores de K, indicando su multiplicidad algebraica y geométrica.
5. ¿Es K diagonalizable?.
6. Halla la matriz asociada a K^n respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Test-A 4 de febrero 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada. **Calificación:** $\text{máx}\left\{0, \frac{\text{Aciertos} - \text{Fallos}}{5}\right\}$ 40 minutos

1.- ☒ V ☐ F Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo. Si $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $P^{\mathrm{T}}P = \mathrm{Id}_n$, entonces $m \geq n$.

2.- ☐ V ☒ F Sea $(E, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo y G un conjunto de vectores de E. El proceso de Gram-Schmidt aplicado a G produce siempre una base ortogonal de E.

3.- ☒ V ☐ F Sea V, $V \neq \{\overrightarrow{0}\}$, un subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, E. La proyección ortogonal sobre V, $\mathrm{proy}_V : E \longmapsto E$, es un endomorfismo diagonalizable.

4.- ☐ V ☒ F Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $B = A^2$, entonces el polinomio característico de B es el cuadrado del polinomio característico de A, $P_B(\lambda) = P_A^2(\lambda)$.

5.- ☒ V ☐ F Sean $n, p \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A y $A^p = 0$, entonces $\lambda = 0$.

6.- ☐ V ☒ F Si $f : E \longmapsto E$ es una función lineal entre espacios vectoriales tal que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ y $\mathrm{Ker}(f) \oplus f(E) = E$, entonces para cualquier base B de E, la matriz de f respecto de B, $M_B^B(f)$, tiene alguna columna nula.

7.- ☒ V ☐ F Si A es una matriz diagonalizable, entonces A^2 también lo es.

8.- ☒ V ☐ F Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. El sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ tiene solución única para cada $\overrightarrow{b} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ si y sólo si el cero no es autovalor de A.

9.- ☐ V ☒ F Si B es una forma reducida de Gauss de la matriz no nula $A \neq 0$, entonces las columnas pivote de B son una base del espacio columna de A.

10.- ☒ V ☐ F Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A es singular, $\overrightarrow{b} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ y $\overrightarrow{b} \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{b} = \overrightarrow{x}$ tiene solución única.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Ejercicio 1 4 de febrero de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Si $k \in \mathbb{Z}$, el conjunto de polinomios en la indeterminada x, con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ y de grado menor o igual que k, $(\mathbb{Z}_2)_k[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k : \ a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_2\}$, es un $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial.

Sea la aplicación $f : (\mathbb{Z}_2)_1[x] \longmapsto (\mathbb{Z}_2)_5[x]$ tal que

$$f(a_0 + a_1x) = (a_0 + a_1x)(1 + x^2 + x^4).$$

a) Demostrar que f es una aplicación lineal.

b) Hallar la matriz de f respecto a las bases $B_1 = \{1, x\}$ de $(\mathbb{Z}_2)_1[x]$ y $B_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ de $(\mathbb{Z}_2)_5[x]$.

c) Demostrar que f es inyectiva.

d) Calcular $f^{-1}(\{1 + x + x^5,\ 1 + x + x^2 + x^5\})$.

e) Hallar $p(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x]$ tal que $f(p(x))$ sólo se diferencie de $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ en un término.

$(\mathbb{Z}_2)_k[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k / a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_2\}$

$f : (\mathbb{Z}_2)_1[x] \to (\mathbb{Z}_2)_5[x]$

$(a_0 + a_1x) \to f(a_0+a_1x) = (a_0+a_1x)\cdot(1+x^2+x^4)$

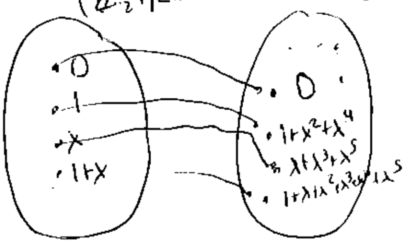
$0+0\cdot x \to f(0+0x) = (0+0x)(1+x^2+x^4) = 0$

$1+0\cdot x \to f(1+0x) = (1+0x)(1+x^2+x^4) = 1+x^2+x^4$

$0+1\cdot x \to f(0+1x) = (0+1x)(1+x^2+x^4) = x+x^3+x^5$

$1+1\cdot x \to f(1+1x) = (1+1x)(1+x^2+x^4) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$

$(\mathbb{Z}_2)_1[x]$ $(\mathbb{Z}_2)_5[x]$



f es inyectiva

f no es sobreyectiva

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 2** 4 de febrero de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea $B = \{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}\}$ una base del espacio vectorial E de dimensión finita $n \neq 0$ y sean f y g dos endomorfismos de E.

a) Demostrar que si los vectores de B son vectores propios a la vez de f y de g, entonces $f \circ g = g \circ f$.

b) Suponiendo que los vectores de B son vectores propios de f correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, todos diferentes entre sí, y que $f \circ g = g \circ f$, probar que los vectores de B son también vectores propios de g.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 3** 4 de febrero de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

El conjunto $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios de una variable, x, y con coeficientes reales es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Se define la aplicación $<\,,\,>: \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longmapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i,\ \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j \right\rangle = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \alpha_k \beta_k.$$

Se pide:

a) Comprobar que $<\,,\,>$ es un producto escalar en $\mathbb{R}[x]$.

b) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left\langle x^n - 1,\ \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j \right\rangle = 0$ si y sólo si $\beta_0 = \beta_n$.

c) Hallar un conjunto ortogonal –según el producto escalar $<\,,\,>$– a partir de $\{x-1, x^2-1,\ x^3-1\}$.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Test 1 de septiembre 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada. **Calificación:** $\max\left\{0, \frac{2(\text{Aciertos} - \text{Fallos})}{5}\right\}$ 40 minutos

1. $\boxed{\text{V}}$ Si p, q y r son proposiciones, entonces

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Longleftrightarrow p.$$

2. $\boxed{\text{F}}$ Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A es singular y $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) - \{\overrightarrow{0}\}$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tiene solución.

3. $\boxed{\text{F}}$ Sea $(A, +, .)$ un anillo. Si $x, y, z \in A - \{0\}$, entonces

$$x.y = z.y \Longrightarrow x = z.$$

4. $\boxed{\text{F}}$ La suma de los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \{(\alpha, \beta, 0, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{(\gamma, 0, 0, \delta) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

es directa.

5. $\boxed{\text{V}}$ Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $T \subset E$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in T$.

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} \in L\Big(T - \{\overrightarrow{\mathbf{v}}\}\Big) \Longleftrightarrow L(T) = L\Big(T - \{\overrightarrow{\mathbf{v}}\}\Big).$$

6. $\boxed{\text{V}}$ Sea $\{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}\}$ el resultado de la ortogonalización por Gram-Schmidt del conjunto $\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}\}$. El conjunto de vectores $\{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u_n}}\}$ tiene algún vector nulo si y sólo si $\{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v_n}}\}$ es ligado.

7. $\boxed{\text{V}}$ Si las matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son diagonalizables mediante la misma matriz invertible, P, entonces $AB = BA$.

8. $\boxed{\text{F}}$ Si la multiplicidad geométrica de todos los autovalores de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es 1, entonces A es diagonalizable.

9. $\boxed{\text{F}}$ La matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es diagonalizable para cualquier valor real de α.

10. $\boxed{\text{F}}$ Si U y V son dos subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-espacio vectorial euclídeo E, entonces

$$U \oplus V \Longrightarrow U^{\perp} \oplus V^{\perp}.$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 1** 1 de septiembre de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_2)^3 \longmapsto (\mathbb{Z}_2)^4$ tal que $f(x, y, z) = (x, x + y, y + z, z)$. Se pide:

a) Hallar la matriz de f respecto a las bases canónicas de $(\mathbb{Z}_2)^3$ y $(\mathbb{Z}_2)^4$.

b) Demostrar que f es inyectiva.

c) Calcular $\text{Img}(f)$ especificando su dimensión y una base.

d) Hallar la matriz de f respecto a las bases $B'_3 = \{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ de $(\mathbb{Z}_2)^3$ y $B'_4 = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$ de $(\mathbb{Z}_2)^4$.

$$f : (\mathbb{Z}_2)^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^4$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (x, x+y, y+z, z)$$

a) $B_C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de $(\mathbb{Z}_2)^3$

$$f(1,0,0) = (1,1,0,0)$$
$$f(0,1,0) = (0,1,1,0)$$
$$f(0,0,1) = (0,0,1,1)$$

$$\boxed{A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Matriz asociada a f en bases canónicas de $(\mathbb{Z}_2)^3$ y $(\mathbb{Z}_2)^4$

b) f es inyectiva $\Longleftrightarrow \text{Ker} f = \{\vec{0}\}$

Calculamos el núcleo de $\text{Ker}(f)$

$$\vec{x} \in \text{Ker} f \Rightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow A(f)\cdot\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}}$$

$\vec{x} = (x,y,z)$ $\quad \vec{0} = (0,0,0,0)$

Por tanto $\boxed{\text{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}} \Longrightarrow \boxed{f \text{ sí es inyectiva}}$

c) Calculamos la Im(f)

$$\dim(\mathrm{Im} f) = rg(A(f)) \Rightarrow rg(A(f)) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3}$$

Para obtener una base de la imagen, tomamos tantas columnas de $A(f)$ linealmente independientes como nos diga la dimensión (en este caso 3)

$$\boxed{B_{im} = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}}$$

Por tanto, $\mathrm{Im} f = L(\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\})$

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow (x,y,z,t) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) + \gamma(0,0,1,1)$$

$$(x,y,z,t) = (\alpha, \alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma)$$

Así pues,

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{(\alpha, \alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma) \in (\mathbb{Z}_2)^4 \,/\, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}_2\}}$$

$$\begin{aligned}
&\boxed{x = \alpha} \\
&y = \alpha+\beta \Rightarrow y = x + z - t \Rightarrow x - y + z - t = 0 \\
&z = \beta+\gamma \Rightarrow z = \beta + t \Rightarrow \boxed{\beta = z - t} \\
&\boxed{t = \gamma}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z,t) \in (\mathbb{Z}_2)^4 \,/\, x - y + z - t = 0\}}$$

d)
$$\begin{tikzcd}
B_3' \arrow[r, "A^{B_3'}_{B_4'}(f)"] \arrow[d, "M^{B_3'}_{B_c}"'] & B_4' \arrow[d, dash, "M^{B_c}_{B_4'}"] \\
B_c \arrow[r, "A(f)"'] & B_c
\end{tikzcd}$$

$$A^{B_3'}_{B_4'} = M^{B_c}_{B_4'} \cdot A(f) \cdot M^{B_3'}_{B_c} =$$

$$M^{B_c}_{B_4'} =$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 2** 1 de septiembre de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sean λ_1 y λ_2 autovalores distintos de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$.
Demostrar que:

a) $S_{\lambda_1} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{v}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

b) Si $\vec{v_1}$ es un autovector asociado a λ_1 y $\vec{v_2}$ es un autovector asociado a λ_2, entonces $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ es un conjunto libre de $\mathbb{R}^n$.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 — Ejercicio 3 — 1 de septiembre de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea $S = \{f_1(x) = e^{3x},\ f_2(x) = xe^{3x},\ f_3(x) = x^2e^{3x}\}$ un subconjunto del espacio vectorial real de las funciones reales de variable real $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, sea $U = L(S)$ la variedad lineal de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ generada por S, y sea $D : U \longmapsto U$ la aplicación lineal que a cada función de U le hace corresponder su función derivada:

$$D(f(x)) = f'(x).$$

Se pide:

a) Demostrar que S es una base de U.

b) Hallar la matriz de D respecto a la base S.

c) Calcular $\mathrm{Ker}(D)$ y $\mathrm{Img}(D)$ especificando una base de cada subespacio.

d) Obtener los autovalores y los subespacios propios de D. ¿Es D diagonalizable?

$S=\{e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$ $\quad U=L(S)$ $\quad D: U \to U$, $f(x) \to f'(x) = D(f(x))$

b) Matriz asociada a D en la base S

$S=\{e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$ es una base de U (se dem. en a))

$D(e^{3x}) = (e^{3x})' = 3e^{3x} = 3e^{3x} + 0\,xe^{3x} + 0x^2e^{3x}$

$D(xe^{3x}) = (xe^{3x})' = e^{3x}(1+3x) = 1e^{3x} + 3 \cdot xe^{3x} + 0x^2e^{3x}$

$D(x^2e^{3x}) = (x^2e^{3x})' = e^{3x}(2x+3x^2) = 0\cdot e^{3x} + 2\cdot xe^{3x} + 3x^2e^{3x}$

$A(D) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Matriz asociada a D en la base S de salida y de llegada

c) Calcular el Ker(D)

$A(D)\cdot \bar{v} = \bar{0} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} 3x+y=0 \\ 3y+2z=0 \\ 3z=0 \end{matrix}\right] \to \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\mathrm{Ker}\,D = \{(0,0,0)_S\}$

$\mathrm{Ker}\,D = \{0e^{3x} + 0\cdot xe^{3x} + 0\cdot x^2 e^{3x}\} = \{0\}$ Función nula

Calcular de Im(D)

$\dim(\mathrm{Im}(D)) = rg(A(D)) = 3$

$B_{Im(D)} = \{(3,0,0)_S, (1,3,0)_S, (0,2,3)_S\} \longrightarrow$

$B_{Im(D)} = \{3e^{3x}, e^{3x} + 3xe^{3x}, 2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}\}$ Base de Im(D)

P68

Finalmente

$\mathrm{Im}(D) = \mathcal{L}(\{3e^{3x}, e^{3x}+3xe^{3x}, 2xe^{3x}+3x^2e^{3x}\})$

$f(x) \in \mathrm{Im}(D) \Leftrightarrow f(x) = 3\alpha e^{3x} + \beta(e^{3x}+3xe^{3x}) + \gamma(2xe^{3x}+3x^2e^{3x}) =$

$= (3\alpha+\beta)e^{3x} + (3\beta+2\gamma)xe^{3x} + (\cancel{\beta}+3\gamma)x^2e^{3x}$

$\mathrm{Im}(D) = \{(3\alpha+\beta, 3\beta+2\gamma, \cancel{\beta}+3\gamma)_S \in U \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(\mathrm{Im}(D)) = \dim(U) \\ \mathrm{Im}(D) \subset U \end{array}\right\} \mathrm{Im}(D) = U$$

d) Autovalores

$|A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \underbrace{(3-\lambda)^3}_{\text{Polinomio Característico}} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 3}$

$m_a(\lambda=3) = 3$

Autoespacio asociado a $\lambda = 3$: subespacio vectorial formado por todos los autovectores asociado a un determinado autovalor

$(A - \lambda I)\vec{X} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\lambda=3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{S_{\lambda=3} = \{(x,y,z)_S \mid y=0, z=0\}}$ forma cartesiana

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ ecu param de $S_{\lambda=3}$

2 ecu, 3 incog $\Rightarrow$ 1 param

$\boxed{S_{\lambda=3} = \{(\alpha,0,0)_S \mid \alpha \in \mathbb{R}\}}$

$\dim(S_{\lambda=3}) = 1$ (nº de parám.)

$m_g(\lambda=3) = \dim(S_{\lambda=3}) = 1$

¿es $A(D)$ diagonalizable?

A es diagonalizable $\Longleftrightarrow m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \quad \forall i$

En nuestro caso:

	m_a		m_g
$\lambda=3$	3	$\neq$	1

$\times \Rightarrow$ A no es diagonalizable

a) Para probar que S es ~~ge~~ base de U tenemos que demostrar que S es generador de U y S es libre

* En el enunciado dicen directamente que $U = L(S)$, por tanto S es generador de U (por definición)
* Falta demostrar que S es libre:

Sea $\boxed{\alpha e^{3x} + \beta x e^{3x} + \gamma x^2 e^{3x} = 0}$ [1] → Función nula

para probar que S es libre tenemos que demostrar que todos los escalares de [1] son nulos

Damos valores a la x

$$\left.\begin{array}{l} x=0: \ \alpha e^0 + \beta \cdot \cancel{0} e^0 + \gamma \cdot \cancel{0} e^0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ x=1: \ \alpha \cancel{e^3} + \beta e^3 + \gamma e^3 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ x=-1: \ \alpha e^{-3} - \beta e^{-3} + \gamma e^{-3} = 0 \rightarrow \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}} \Rightarrow S \text{ es libre}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Test-A 30 de enero 2010

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada. **Calificación:** $\max\left\{0, \dfrac{\text{Aciertos} - \text{Fallos}}{3}\right\}$ 40 minutos

1. $\boxed{\text{V}}$ p y q son proposiciones, entonces $p \Longleftrightarrow (\neg p \Longrightarrow (q \wedge \neg q))$.

2. $\boxed{\text{V}}$ Si $\vec{v}$ es un autovector de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y A tiene inversa, entonces $\vec{v}$ es un autovector de $A + A^{-1}$.

3. $\boxed{\text{V}}$ Sea $(E, < , >)$ un espacio vectorial euclídeo. Si $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}) \subset E$ es el resultado de aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a $(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_n})$, entonces $\overrightarrow{u_{i+1}} \in \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_i}\}^{\perp}$ para cada $1 \leq i < n$.

4. $\boxed{\text{F}}$ Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : E \longmapsto E$ es una función lineal tal que $\text{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$, entonces para cualquier base B de E, la matriz de f respecto a la base B, $M_B(f)$, tiene alguna columna nula.

5. $\boxed{\text{V}}$ Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo y sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Si la columna $k \in \{1..m\}$ de A es nula y existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $PA = B$, entonces la columna k de B también es nula.

6. $\boxed{\text{V}}$ $\forall \{c_1, c_2, c_3\} \subset \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ no tiene solución múltiple.

7. $\boxed{\text{V}}$ Sea $(E, < , >)$ un espacio vectorial euclídeo.
$$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in E \quad << \vec{u}, \vec{v} > \vec{v},\ < \vec{u}, \vec{v} > \vec{u}\ > = < \vec{u}, \vec{v} >^3.$$

8. $\boxed{\text{V}}$ El conjunto $E = \{(x, y, 5) : x, y \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones
$$+ \ : E \times E \longmapsto E \quad \text{definida como} \quad (x_1, y_1, 5) + (x_2, y_2, 5) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 5)$$
$$\cdot \ : \mathbb{R} \times E \longmapsto E \quad \text{definida como} \quad \alpha \cdot (x, y, 5) = (\alpha x, \alpha y, 5)$$
tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

9. $\boxed{\text{F}}$ Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Si B_1 y B_2 son bases ortonormales de dos subespacios suplementarios de E, entonces $B_1 \cup B_2$ es una base ortonormal de E.

10. $\boxed{\text{F}}$ La única matriz $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que cumple $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es $B = 0$.

11. $\boxed{\text{V}}$ Sea $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita. Si f es diagonalizable y tiene un único autovalor, entonces la matriz de f respecto a cualquier base de E es diagonal.

12. $\boxed{\text{F}}$ Sean F y H dos subespacios vectoriales de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, E, y sea la aplicación $g : F \times H \longmapsto E$ tal que $g(x, y) = x + y$. Si $F + H = E$, entonces g es biyectiva.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Ejercicio 1 30 de enero de 2010

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sean $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ y $B' = \{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3}, \vec{e'_4}, \vec{e'_5}, \vec{e'_6}\}$ bases de los $\mathbb{Z}_2$-espacios vectoriales $\mathbb{Z}_2^3$ y $\mathbb{Z}_2^6$, respectivamente, y sea la función $f : \mathbb{Z}_2^3 \longmapsto \mathbb{Z}_2^6$ tal que

$$f(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}) = x_1\vec{e'_1} + x_2\vec{e'_2} + x_3\vec{e'_3} + x_1\vec{e'_4} + x_2\vec{e'_5} + x_3\vec{e'_6}.$$

$f((x_1, x_2, x_3)_{B_1}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)_{B_2}$

Se pide:

a) Demostrar que f es una aplicación lineal entre los $\mathbb{Z}_2$-espacios vectoriales $\mathbb{Z}_2^3$ y $\mathbb{Z}_2^6$.

b) Hallar la matriz, F, de la aplicación lineal f respecto a las bases B y B'.

c) Calcular $\operatorname{Ker}(f)$ e $\operatorname{Img}(f)$ y especificar sus dimensiones. ¿Es f inyectiva?

d) Hallar $F^T F$. ¿Existe alguna relación entre $\operatorname{Ker}(F^T)$ y $\operatorname{Img}(F)$?

$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ $B_2 = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4, \bar{e}'_5, \bar{e}'_6\}$ $f : (\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^6$

~~$x_1 e_1 + x_2 e_2$~~

a) $\boxed{1}$ $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ $[\forall x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3,\ y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3 \in (\mathbb{Z}_2)^3]$

$\to \bullet f(\vec{u}+\vec{v}) = f((x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) + (y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3)) = f((x_1+y_1)\bar{e}_1 + (x_2+y_2)\bar{e}_2 + (x_3+y_3)\bar{e}_3)$

$\| = (x_1+y_1)\bar{e}'_1 + (x_2+y_2)\bar{e}'_2 + (x_3+y_3)\bar{e}'_3 + (x_1+y_1)\bar{e}'_4 + (x_2+y_2)\bar{e}'_5 + (x_3+y_3)\bar{e}'_6$

$\to \bullet f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = f(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) + f(y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3) =$

$= (x_1\bar{e}'_1 + x_2\bar{e}'_2 + x_3\bar{e}'_3 + x_1\bar{e}'_4 + x_2\bar{e}'_5 + x_3\bar{e}'_6) + (y_1\bar{e}'_1 + y_2\bar{e}'_2 + y_3\bar{e}'_3 + y_4\bar{e}'_4 + y_2\bar{e}'_5 + y_3\bar{e}'_6)$

$= (x_1+y_1)\bar{e}'_1 + (x_2+y_2)\bar{e}'_2 + (x_3+y_3)\bar{e}'_3 + (x_1+y_1)\bar{e}'_4 + (x_2+y_2)\bar{e}'_5 + (x_3+y_3)\bar{e}'_6$

$\boxed{2}$ $f(k \cdot \vec{v}) = k \cdot f(\vec{v})$

$\to \bullet f(k\cdot\vec{v}) = f(k(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3)) = f(kx_1\bar{e}_1 + kx_2\bar{e}_2 + kx_3\bar{e}_3) =$

$\| = kx_1\bar{e}'_1 + kx_2\bar{e}'_2 + kx_3\bar{e}'_3 + kx_1\bar{e}'_4 + kx_2\bar{e}'_5 + kx_3\bar{e}'_6$

$\to \bullet k f(\vec{v}) = k \cdot f(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) = k(x_1\bar{e}'_1 + x_2\bar{e}'_2 + x_3\bar{e}'_3 + x_1\bar{e}'_4 + x_2\bar{e}'_5 + x_3\bar{e}'_6)$

$= kx_1\bar{e}'_1 + kx_2\bar{e}'_2 + kx_3\bar{e}'_3 + kx_1\bar{e}'_4 + kx_2\bar{e}'_5 + kx_3\bar{e}'_6$

$[\forall x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \in (\mathbb{Z}_2)^3,\ \forall k \in \mathbb{Z}_2]$

$\boxed{f \text{ es lineal}}$

b) $¿A_{B'}^{B}$? Para obtener la matriz asociada $A_{B'}^{B}(f)$ necesitamos tener las imágenes de los vectores de la base B y además deben estar referidas a la base B'

$f(\vec{e}_1) = f(1\cdot\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3) = 1\vec{e}_1' + 0\vec{e}_2' + 0\vec{e}_3' + 1\vec{e}_4' + 0\vec{e}_5' + 0\vec{e}_6' = \vec{e}_1' = (1,0,0,1,0,0)_{B'}$

$f(\vec{e}_2) = f(0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3) = (0,1,0,0,1,0)_{B'}$

$f(\vec{e}_3) = f(0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3) = (0,0,1,0,0,1)_{B'}$

$$\boxed{A_{B'}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Calculo del Ker(f)

$$\vec{v} \in Ker(f) \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow A\cdot\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}}$$

$\boxed{\text{Por tanto } Ker(f) = \{0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3\}}$

$Dim(Ker(f)) = 0 \rightarrow \boxed{f \text{ es inyectiva}}$

Imagen (f)

$Dim(Im(f)) = rg(A_{B'}^{B}) = 3$

$B_{Imf} = \{(1,0,0,1,0,0)_{B'}, (0,1,0,0,1,0)_{B'}, (0,0,1,0,0,1)_{B'}\}$

$\boxed{Im(f) = L\{B_{Imf}\} = \{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha,\beta,\gamma)_{B'} \in \mathbb{Z}_2^6 / \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}_2\}}$

$y_1\vec{e}_1' + y_2\vec{e}_2' + y_3\vec{e}_3' + y_4\vec{e}_4' + y_5\vec{e}_5' + y_6\vec{e}_6' \in Im$ ~~$\Leftrightarrow$~~ $\alpha(\vec{e}_1' + \vec{e}_4') +$

$\Leftrightarrow \vec{v} = \alpha(\vec{e}_1' + \vec{e}_4', \vec{e}_2' + \vec{e}_5', \vec{e}_3' + \vec{e}_6') \Longrightarrow \vec{v} = \alpha\vec{e}_1' + \beta\vec{e}_2' + \gamma\vec{e}_3' + \alpha\vec{e}_4' + \beta\vec{e}_5' + \gamma\vec{e}_6'$

d) $$F\cdot F^T = \underset{3\times 6}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ker(F^T) \Rightarrow \underset{6\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cancel{(x_1\ x_2\ x_3)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = -\alpha \\ x_5 = -\beta \\ x_6 = -\gamma \end{cases}$$

$$\boxed{Ker(F^T) = \{\alpha\vec{e}_1' + \beta\vec{e}_2' + \gamma\vec{e}_3' - \alpha\vec{e}_4' - \beta\vec{e}_5' - \gamma\vec{e}_6'\} \in \mathbb{Z}_2^6 / \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}_2\}}$$

Conclusión: $Im(f) = Ker(F^T)$, ya que en $\mathbb{Z}_2$ no importa el signo $[-1 = 1]$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Ejercicio 2 30 de enero de 2010

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ una función lineal y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un valor propio (autovalor) de f con multiplicidad geométrica s y multiplicidad algebraica r siendo $s < r$.

a) Probar que existe una base B en $\mathbb{R}^n$ tal que la matriz de f asociada a B es $M_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\,\mathrm{Id}_s & H \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ donde α es un autovalor de la matriz $A \in \mathcal{M}_{n-s}(\mathbb{R})$ y $H \in \mathcal{M}_{s\times(n-s)}(\mathbb{R})$.

b) Probar que existe $\overrightarrow{v_0} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{v_0} \notin \mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id}_n)$ tal que $f(\overrightarrow{v_0}) = \alpha\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{w}$ donde $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id}_n)$. Indicación: utilizar los resultados del apartado **a)**.

c) Calcular $(f-\alpha\,\mathrm{Id}_n)(\overrightarrow{v_0})$ y $(f-\alpha\,\mathrm{Id}_n)^2(\overrightarrow{v_0})$. ¿Coinciden $\mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id}_n)$ y $\mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id}_n)^2$?

P71

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Ejercicio 3 30 de enero de 2010

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, < , >)$ con el producto escalar habitual y la base canónica B.

Sea $B_1 = \{(2,1,0), (-1,2,0), (1,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, sea $B_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ obtenida al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a B_1 y sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ que verifica $f(\vec{v_1}) = \vec{v_1}$, $f(\vec{v_2}) = \vec{0}$, $f(\vec{v_3}) = \vec{0}$. Se pide:

a) Determinar B_2.

b) Hallar la matriz de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) Demostrar que $\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3\ < f(\vec{u}), \vec{v} > = < \vec{u}, f(\vec{v}) >$.

$f(\vec{v_1}) = \vec{v_1}$
$f(\vec{v_2}) = \vec{0}$
$f(\vec{v_3}) = \vec{0}$

$B_1 = \{ \underbrace{(2,1,0)}_{\vec{e_1}}, \underbrace{(-1,2,0)}_{\vec{e_2}}, \underbrace{(1,1,1)}_{\vec{e_3}} \}$ base de $\mathbb{R}^3$

$B_2 = \{ \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

a) Método de G-S

$\boxed{\vec{u_1} = \vec{e_1} = (2,1,0)}$

$\boxed{\vec{u_2}} = \vec{e_2} - \frac{<\vec{e_2}, \vec{u_1}>}{<\vec{u_1}, \vec{u_1}>}\vec{u_1} = (-1,2,0) - \cancel{\frac{<(-1,2,0),(2,1,0)>}{<(2,1,0),(2,1,0)>}}^{=0}(2,1,0) = \boxed{(-1,2,0)}$

$\boxed{\vec{u_3}} = \vec{e_3} - \frac{<\vec{e_3}, \vec{u_1}>}{<\vec{u_1}, \vec{u_1}>}\vec{u_1} - \frac{<\vec{e_3}, \vec{u_2}>}{<\vec{u_2}, \vec{u_2}>}\vec{u_2} = (1,1,1) - \frac{<(1,1,1),(2,1,0)>}{<(2,1,0),(2,1,0)>}(2,1,0) - \frac{<(1,1,1),(-1,2,0)>}{<(-1,2,0),(-1,2,0)>}(-1$

$= (1,1,1) - \frac{3}{5}(2,1,0) - \frac{1}{5}(-1,2,0) = (1,1,1) - \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 0\right) - \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) = \boxed{(0,0,1)}$

$B_1' = \{ \underbrace{(2,1,0)}_{\vec{u_1}}, \underbrace{(-1,2,0)}_{\vec{u_2}}, \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{u_3}} \}$ Base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$\|\vec{u_1}\| = \sqrt{<(2,1,0),(2,1,0)>} = \sqrt{5}$

$\|\vec{u_2}\| = \sqrt{<(-1,2,0),(-1,2,0)>} = \sqrt{5}$

$\|\vec{u_3}\| = 1$

Finalmente:

$B_2 = \{ \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \} = \left\{ \frac{\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|}, \frac{\vec{u_2}}{\|\vec{u_2}\|}, \frac{\vec{u_3}}{\|\vec{u_3}\|} \right\}$

$B_2 = \left\{ \frac{(2,-1,0)}{\sqrt{5}}, \frac{(-1,2,0)}{\sqrt{5}}, (0,0,1) \right\} =$

$= \boxed{\left\{ \underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right)}_{\vec{v_1}}, \underbrace{\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)}_{\vec{v_2}}, \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{v_3}} \right\}}$ Base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

b) $B_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$

$$\begin{cases} f(\vec{v_1}) = \vec{v_1} \Rightarrow f\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0\right) = \left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0\right)\\ f(\vec{v_2})=\vec 0 \Rightarrow f\left(\frac{-1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5},0\right)=(0,0,0)\\ f(\vec{v_3})=\vec0 \Rightarrow f(0,0,1)=(0,0,0)\end{cases}$$

Imágenes de la base B_2 mediante f.

$$A^{B_2}_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a f respecto la base B_2 del espacio de salida y la base canónica en el espacio de llegada.

$$\begin{tikzcd} B_c \arrow[r, "A(f)"] \arrow[d, "M^{B_c}_{B_2}"'] & B_c \\ B_2 \arrow[ur, "A^{B_2}_{B_c}(f)"'] & \end{tikzcd}$$

$$A(f) = A^{B_2}_{B_c}(f) \cdot M^{B_c}_{B_2} = A^{B_2}_{B_c}(f)\left(M^{B_2}_{B_c}\right)^{-1}$$

$$A(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt5} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Matriz asociada a f en ~~el espacio~~ B_c tanto en el espacio de salida como en el de llegada.

$M^{B_2}_{B_c}$ Matriz de cambio de base de B_2 a B_c dentro del mismo espacio vectorial.

$$M^{B_c}_{B_2} = \left(M^{B_2}_{B_c}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt5} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = B$ (conjuntos)
Doble contenido
$a = b$ (elementos)
se calcula por ambos lados y se compara.
$f = g$ (aplicaciones)

c) $B_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ $\boxed{\langle f(\vec u), \vec v\rangle = \langle \vec u, f(\vec v)\rangle \quad \forall\ \vec u, \vec v \in \mathbb{R}^3}$

Como B_2 es una base de $\mathbb{R}^3$ (ortonormal) podemos expresar $\vec u$ y $\vec v$ como como comb. lineal de los $\vec v$ de B_2.

$\vec v = \alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} + \gamma \vec{v_3} = (\alpha, \beta, \gamma)_{B_2}$

$\vec u = \lambda \vec{v_1} + \mu \vec{v_2} + \varepsilon \vec{v_3} = (\lambda, \mu, \varepsilon)_{B_2}$

$f(\vec v) = f(\alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} + \gamma \vec{v_3}) = \alpha f(\vec{v_1}) + \beta f(\vec{v_2}) + \gamma f(\vec{v_3}) = \alpha \vec{v_1} + \cancel{\beta \vec 0} + \cancel{\gamma \vec 0} = \alpha \vec{v_1}$

f lineal

$f(\vec u) = f(\lambda \vec{v_1} + \mu \vec{v_2} + \varepsilon \vec{v_3}) = \lambda f(\vec{v_1}) + \mu f(\vec{v_2}) + \varepsilon f(\vec{v_3}) = \lambda \vec{v_1} + \mu \cdot \vec 0 + \varepsilon \cdot \vec 0 = \lambda \vec{v_1}$

Ahora:

$\langle f(\vec u), \vec v\rangle = \langle \lambda \vec{v_1}, \underline{\alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} + \gamma \vec{v_3}}\rangle = \langle \lambda \vec{v_1}, \alpha \vec{v_1}\rangle + \langle \lambda \vec{v_1}, \beta \vec{v_2}\rangle + \langle \lambda \vec{v_1}, \gamma \vec{v_3}\rangle =$

$\lambda\alpha \underbrace{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1}\rangle}_{\|\vec{v_1}\|^2} + \lambda\beta \overbrace{\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}\rangle}^{=0 \text{ pq } \vec{v_1} \perp \vec{v_2}} + \lambda\gamma \overbrace{\langle \vec{v_1}, \vec{v_3}\rangle}^{=0} = \lambda\alpha \underbrace{\|\vec{v_1}\|^2}_{=1} = \boxed{\lambda\alpha}$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 1** 1 de septiembre de 2010

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : E \to E$ una función lineal tal que $f \circ f = -f$. Probar que:

a) $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Img}(f)$.

b) $\mathrm{Img}(f) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

c) Para todo $\vec{v} \in E$ se verifica que $\vec{v} \in \mathrm{Img}(f) \iff f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

d) f es diagonalizable.

a) $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(f)$

Sea $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E) \Rightarrow (f+\mathrm{Id}_E)(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{v}) + \mathrm{Id}_E(\vec{v}) = \vec{0}$

$\Rightarrow f(\vec{v}) + \vec{v} = 0 \Rightarrow -f(\vec{v}) = \vec{v} \Rightarrow f(-\vec{v}) = \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)}$

$f \circ f = -f$

b) $\mathrm{Img}(f) \subset \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$

Sea $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists\, \vec{w} \in E \,/\, f(\vec{w}) = \vec{v} \xRightarrow{\text{Aplicamos } f} f(f(\vec{w})) = f(\vec{v}) \Rightarrow$

$\Rightarrow -f(\vec{w}) = f(\vec{v}) \Rightarrow -\vec{v} = f(\vec{v}) \Rightarrow f(\vec{v}) + \vec{v} = 0 \Rightarrow f(\vec{v}) + \underbrace{\mathrm{Id}_E(\vec{v})}_{\mathrm{Id}(\vec{v}) = \vec{v}} = 0$

$\Rightarrow (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$

c) $\forall \vec{v} \in E,\ \vec{v} \in \mathrm{Im}(f) \iff f(\vec{v}) = -\vec{v}$ [De a) y b) $\to$ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$]

$\vec{v} \in \mathrm{Im} f \iff \vec{v} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \overset{\text{Def Ker}}{\iff} (f + \mathrm{Id}_E)(\vec{v}) = \vec{0} \iff f(\vec{v}) + \mathrm{Id}_E(\vec{v}) = \vec{0} \iff$

$\iff f(\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0} \iff f(\vec{v}) = -\vec{v}$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 2** 1 de septiembre de 2010

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Considerando el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R}) = \{f : [-\pi,\pi] \longmapsto \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, se define la aplicación $<\ ,\ >: \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Se pide:

a) Demostrar que $<\ ,\ >$ es un producto escalar.

b) Calcular el módulo del vector $f(x) = 2x^3 \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$.

c) Aplicar el método de Gram-Schmidt al conjunto $\{1, x, x^2\} \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ para obtener un conjunto ortogonal.

b) $f(x) = 2x^3 \in \mathcal{C}((-\pi,\pi),\mathbb{R})$

$$\|2x^3\| = \sqrt{\langle \underbrace{2x^3}_{f}, \underbrace{2x^3}_{g}\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^3\cdot 2x^3\,dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 4x^6\,dx} = \sqrt{\left[4\cdot\frac{x^7}{7}\right]_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\frac{4\pi^7}{7} - 4\frac{(-\pi)^7}{7}} = \boxed{\sqrt{\frac{8\pi^7}{7}}}$$

c) $\{\underbrace{1}_{\vec{e_1}}, \underbrace{x}_{\vec{e_2}}, \underbrace{x_2}_{\vec{e_3}}\}$

Método de G-S

$$\boxed{\vec{v_1} = \vec{e_1} = 1}$$

$$\boxed{\vec{v_2} = \vec{e_2} - \frac{\langle \vec{e_2}, \vec{v_1}\rangle}{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1}\rangle}\vec{v_1} = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 = x}$$

$$\langle x, 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x\cdot 1\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} = \boxed{0}$$

$$\vec{v_3} = \vec{e_3} - \frac{\langle \vec{e_3}, \vec{v_1}\rangle}{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1}\rangle}\vec{v_1} - \frac{\langle \vec{e_3}, \vec{v_2}\rangle}{\langle \vec{v_2}, \vec{v_2}\rangle}\vec{v_2} = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x = x^2 - \frac{\frac{2\pi^3}{3}}{2\pi}\cdot 1 - \frac{0}{\langle x, x\rangle}x = \boxed{x^2 - \frac{\pi^2}{3}}$$

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{\frac{2\pi^3}{3}}$$

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{2\pi}$$

$$\boxed{\left\{1,\ x,\ x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right\} \text{ Conjunto ortogonal}}$$

Condiciones para ser producto escalar

bilineal
$$\begin{cases} 1.\ \langle \bar{a}+\bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \\ \quad \langle \bar{a}, \bar{b}+\bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \\ 2.\ \langle k\bar{a}, \bar{b} \rangle = k \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \\ \quad \langle \bar{a}, k\bar{b} \rangle = k \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \end{cases}$$

3. simétrico. $\langle a, \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle$

Definida positiva. 4. $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle \geq 0 \quad \forall \bar{a} \ (\langle \bar{a}, a \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0})$

③. $\langle , \rangle$ es simétrico

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) f(x)\, dx = \langle g, f \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{C}((-\pi,\pi), \mathbb{R})$$

① $$\langle f+g, h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (f+g)(x) \cdot h(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x)+g(x))\, h(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) h(x) + g(x) h(x)\, dx$$

Suma de funciones: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) h(x)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} g(x) h(x)\, dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \quad \forall f, g, h \in \mathcal{C}((-\pi,\pi), \mathbb{R})$$

② $$\langle kf, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (kf)(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} k f(x) g(x)\, dx = k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx = k \langle f, g \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{C}((\pi,\pi,$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 3** 1 de septiembre de 2010

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Según los valores de $a \in \mathbb{R}$, diagonalizar las matrices

a) $A = \begin{pmatrix} a & a & -a \\ a & a & -a \\ a & a & -a \end{pmatrix}$.

"Diagonalizar" $\Leftrightarrow$ "Decir si es diagonalizable y en caso de que lo sea calcular D y P de forma que $A = PDP^{-1}$"

b) $B = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ -a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $A = \begin{pmatrix} a & a & -a \\ a & a & -a \\ a & a & -a \end{pmatrix}$

Autovalores

⊛ HACER EN CASA!

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & a & -a \\ a & a-\lambda & -a \\ a & a & -a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2(-a-\lambda) - 2a^3 + a^2(a-\lambda) - a^2(a-\lambda) - a^2(-a-\lambda) = -(a^2+\lambda^2-2a\lambda)(a+\lambda) \cancel{-2a^3} + \cancel{a^3} - a^2\lambda - a^3 + a^2\lambda + \cancel{a^3} + a^2\lambda = -a^3 - a^2\lambda - a\lambda^2 - \lambda^3 + 2a^2\lambda + 2a\lambda^2 - a^3 + a^2\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + a\lambda^2 = \boxed{-\lambda^2(\lambda - a)}$$

POLINOMIO CARACTERÍSTICO.

$P(\text{car.}) = 0 \qquad -\lambda^2(\lambda - a) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 & (\text{Doble}) \\ \lambda = a. & (\text{simple}) \end{cases}$

Si $a \neq 0$

$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda = 0 & ma(\lambda=0) = 2 \\ \lambda = a & ma(\lambda = a) = 1 \end{array}}$

Si $a = 0$

$\boxed{\lambda = 0 \quad ma(\lambda=0) = 3}$

Caso $a \neq 0$

Autoespacio asociado a $\lambda = 0$: $S_{\lambda=0}$

$\boxed{(A - \lambda I)x = 0} \Longrightarrow (A - 0I)x = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a & -a \\ \cancel{a} & \cancel{a} & \cancel{-a} \\ \cancel{a} & \cancel{a} & \cancel{-a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow ax + ay - az = 0 \Rightarrow a(x + y - z) = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - z = 0}$

Ec. cartesiana de $S_{\lambda=0}$

$x + y - z = 0 \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$

$S_{\lambda=0} = \{(\alpha, \beta, \alpha+\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ ec} \\ 3 \text{ incog} \end{array}\right\}$ 2 parámetros

$\dim(S_{\lambda=0}) = 2 \Longleftrightarrow \boxed{mg(\lambda=0) = 2}$

(nº parámetros)

$\boxed{ma \geq mg > 0}$

$\boxed{B_{S_{\lambda=0}} = \{\underset{\substack{\alpha=1 \\ \beta=0}}{(1,0,1)}, \underset{\substack{\alpha=0 \\ \beta=1}}{(0,1,1)}\}}$ Base de $S_{\lambda=0}$

Autoespacio asociado $\lambda = a$ $\quad S_{\lambda=a}$

$$\boxed{(A - \lambda I)x = 0} \Rightarrow (A - aI)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a-a & a & -a \\ a & a-a & -a \\ a & a & -a-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ \cancel{a} & \cancel{a} & \cancel{-2a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} ay - az = 0 \Rightarrow \quad y - z = 0 \\ ax - az = 0 \Rightarrow \quad x - z = 0 \end{array}\right\}$$ Ec cartesianas de $S_{\lambda=a}$

$$\left.\begin{array}{l} y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{array}\right.$$

$\left.\begin{array}{l} 2\text{ ec.} \\ 3\text{ incog} \end{array}\right\}$

$S_{\lambda=a} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\dim(S_{\lambda=a}) = 1 \Rightarrow \boxed{mg(\lambda = a) = 1}$

$Base = \{\underset{\alpha=1}{(1,1,1)}\}$ base de $S_{\lambda=a}$

¿Es A Diagonalizable?

	ma	mg
$\lambda = 0$	2	2
$\lambda = a$	1	1

$\Rightarrow$ A es diagonalizable, es decir A es semejante a una matriz diagonal.

$A = PDP^{-1}$

$$\begin{pmatrix} a & a & -a \\ a & a & -a \\ a & a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Da igual el orden en ese caso

D = autovalores

P = autovectores

<u>Caso a = 0</u>

Sustituyendo queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matriz nula es diagonalizable por ser diagonal

Todas las matrices diagonales son siempre diagonalizables, ya que siempre son semejantes a ellas mismas tomando como matriz de paso $P = I$

$D = PDP^{-1} = IDI^{-1}$

b) $B = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ -a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Autovalores

$$|B - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ -a & -\lambda & -a \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(-\lambda)^2 = -\lambda^2(a-\lambda) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \text{ (doble)} \\ \lambda = a \text{ (simple)} \end{cases}$$

Si $a \neq 0$

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda = 0 & ma(\lambda=0) = 2 \\ \lambda = a & ma(\lambda=a) = 1 \end{matrix}}$$

Si $a = 0$

$$\boxed{\lambda = 0 \quad ma(\lambda=0) = 3}$$

Caso $a \neq 0$

Autoespacio asociado a $\lambda = 0$

$$\boxed{(B - \lambda I)x = 0} \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ \cancel{-a} & \cancel{0} & \cancel{-a} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = ax + az = 0$$

$$\boxed{x + z = 0}$$

ec. cartesiana de $S_{\lambda=0}$

$\left.\begin{matrix} 1 \text{ ec.} \\ 3 \text{ inc} \end{matrix}\right\}$ 2 parámetros $\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha \end{cases}$ $\quad S_{\lambda=0} = \{(\alpha, \beta, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\dim(S_{\lambda=0}) = 2 \Rightarrow \boxed{mg(\lambda=0) = 2}$

$$\boxed{B_{S_{\lambda=0}} = \{\underset{\substack{\alpha=1 \\ \beta=0}}{(1,0,-1)}, \underset{\substack{\alpha=0 \\ \beta=1}}{(0,1,0)}\}}$$

Autoespacio asociado a $\lambda = a$

$$\begin{pmatrix} a-a & 0 & a \\ -a & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ -a & -a & -a \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} az = 0 \\ -ax - ay - az = 0 \end{matrix}\right\}$$

$\begin{matrix} z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{matrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} 1 \text{ ec} \\ 2 \text{ inc} \end{matrix}\right\}$ 1 par.

$S_{\lambda=a} = \{(\alpha, -\alpha, 0) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\dim(S_{\lambda=a}) = 1 \Leftrightarrow \boxed{mg(\lambda = a) = 1}$

$\boxed{B = \{(1,-1,0)\}}$ Base $S_{\lambda=a}$

¿Es B diagonalizable?

B es diagonalizable, es decir B es semejante a una matriz diagonal. $B = PDP^{-1}$

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ -a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{D}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}} \underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 1** 27 de enero de 2011

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_2^3 : x + y + z = 0\}$ y sea $W = L\Big(\{(0,1,0,1,0)\}\Big) \subset \mathbb{Z}_2^5$.
Determinar una aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_2^3 \longmapsto \mathbb{Z}_2^5$ tal que $\mathrm{Ker}(f) = V$ y $\mathrm{Img}(f) = W$. ¿Es única?

$$\left.\begin{array}{l} Ker(f) = V = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_2)^3 / x+y+z=0\} \\ Im(f) = W = L(\{(0,1,0,1,0)\}) \end{array}\right] \quad f: (\mathbb{Z}_2)^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^5$$

Pasamos el <u>Ker (f)</u> a paramétrica

$$x+y+z=0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha-\beta \end{cases} \qquad Ker(f) = V = (\alpha, \beta, -\alpha-\beta) \in (\mathbb{Z}_2^3) / \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\}$$

$$\dim(Ker(f)) = 2$$

$$B_{Ker f} = \{(1,0,+1), (0,1,+1)\}$$

De forma extensiva: $Ker f = \{(0,0,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$

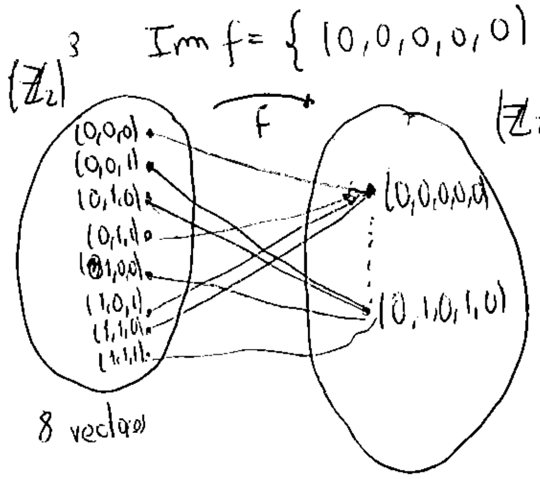
Pasamos la Im (f) a forma paramétrica

$$Im(f) = L(\{(0,1,0,1,0)\})$$

$$(x,y,z,t,u) \in Im f \iff (x,y,z,t,u) = \alpha(0,1,0,1,0) = (0,\alpha,0,\alpha,0)$$

$$Im f = \{(0,\alpha,0,\alpha,0) \in (\mathbb{Z}_2)^5 / \alpha \in \mathbb{Z}_2\}$$

$$Im f = \{(0,0,0,0,0), (0,1,0,1,0)\}$$



FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 2** 27 de enero de 2011

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ con n autovalores distintos y sea g un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ que conmuta con f.

Probar que todo autovector de f es un autovector de g, y que se puede obtener una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de g.

P77 0

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 **Ejercicio 3** 27 de enero de 2011

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}_1[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ con el producto escalar $< a_0 + a_1 x, b_0 + b_1 x >= a_0 b_0 + a_1 b_1$. Se pide:

a) Calcular un polinomio unitario, $q(x) \in \mathbb{R}_1[x]$, que sea ortogonal a $p(x) = 1 + x$. ¿Es único?

b) Hallar un polinomio $r(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ que forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con $p(x) = 1 + x$.

c) Obtener –en $\mathbb{R}_1[x]$ y respecto a la base canónica– la matriz del giro alrededor del origen y de ángulo π.

d) ¿Qué polinomio se obtiene al girar el polinomio $s(x) = 3 + 2x \in \mathbb{R}_1[x]$ un ángulo π alrededor del origen? Comprobar el resultado.

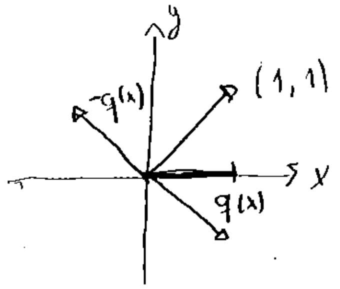
$\mathbb{R}_n[x] \sim \mathbb{R}^{n+1}$ (Isomorfos)

En concreto: $\mathbb{R}_1[x] \sim \mathbb{R}^2$

$a_0 + a_1 x \in \mathbb{R}_1[x] \sim (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$

a) Calcular $q(x) \ / \ q(x) \perp p(x) = 1+x$ $\qquad 1+x \sim (1,1)$

Calcular $(x,y) \in \mathbb{R}_2 \ / \ (x,y) \perp (1,1)$



$(x,y) \perp (1,1) \iff \langle (x,y),(1,1) \rangle = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\alpha \end{array}}$

$q(x) = (\alpha, -\alpha)$ Tomando $\alpha = 1$

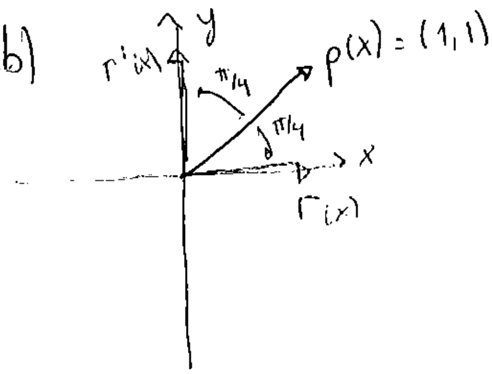
$q(x) = (1,-1)$

$\| q(x) \| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$q(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow q(x) \boxed{= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} x}$

$\boxed{\text{No es único}}$

b)



$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\langle p(x), r(x) \rangle}{\|p(x)\| \|r(x)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{\langle (1,1),(a_0,a_1) \rangle}{\|(1,1)\| \, \|(a_0,a_1)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{a_0 + a_1}{\sqrt{1+1}\sqrt{a_0^2+a_1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ ~~$\sqrt{a_0^2+a_1^2}$~~

$a_0 + a_1 = \sqrt{a_0^2 + a_1^2} \Rightarrow (a_0 + a_1)^2 = a_0^2 + a_1^2$

$a_0 = 0, \ a_1 = k$

$a_0 = \quad , \ a_1 = 0$

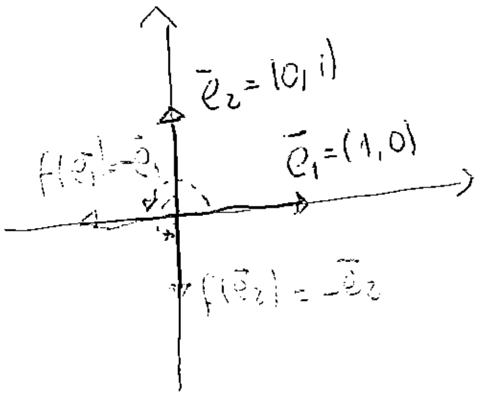
P78

$r(x) = (K, 0) \longrightarrow r(x) = K$

$r'(x) = (0, K) \longrightarrow r'(x) = Kx$

c) Matriz de giro

Al ser $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}^2$ espacios vectoriales isomorfos, la matriz de giro va a ser la misma.



$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 \Rightarrow f(1,0) = (-1,0)$

$f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \Rightarrow f(0,1) = (0,-1)$

$$\boxed{A(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Matriz asociada a f en la B_c de $\mathbb{R}^2$ siendo f un giro de ángulo π rad

d) $p(x) = 3 + 2x \in \mathbb{R}_1[x] \sim (3,2) \in \mathbb{R}^2$

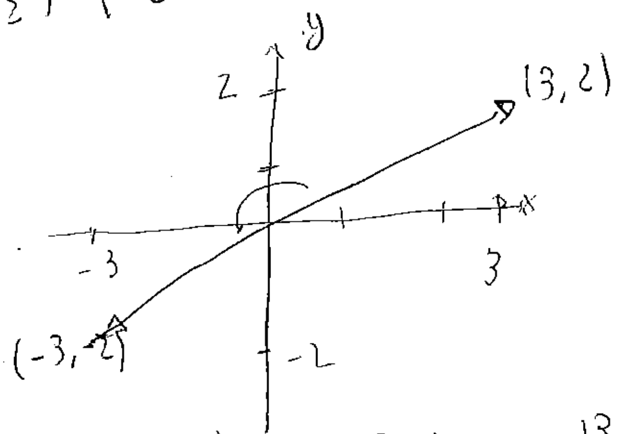
$$f(3,2) = A(f)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$f(3,2) = (-3,-2)$

o, lo que es lo mismo.

$f(3+2x) = -3-2x$



Comprobación:

$$\cos\alpha = \frac{\langle s(x), f(s(x))\rangle}{\|s(x)\| \cdot \|f(s(x))\|} = \frac{\langle (3,2), (-3,-2)\rangle}{\|(3,2)\| \cdot \|(-3,-2)\|} = \frac{-9-4}{\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{-13}{13} = -1$$

$$\boxed{\alpha = \pi}$$

ÁLGEBRA | Ejercicio 1 | 1 de julio de 2011

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sean las aplicaciones lineales $g : \mathbb{Z}_2^2 \longmapsto \mathbb{Z}_2^5$ y $h : \mathbb{Z}_2^5 \longmapsto \mathbb{Z}_2^3$ tales que

$$g\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad h\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ c_3 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + b_1 + b_2 \\ c_2 + b_1 \\ c_3 + b_2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular las matrices G y H asociadas a las funciones g y h.

b) Estudiar si son inyectivas y/o sobreyectivas las funciones g y h.

c) Calcular el producto de las matrices H y G.

d) Determinar el núcleo y la imagen de las funciones g y h. ¿Qué relación hay entre $\mathrm{Img}(g)$ y $\mathrm{Ker}(h)$?

e) Codificar $w = (0, 1) \in \mathbb{Z}_2^2$ utilizando la función g para obtener la palabra codificada $p = g(w)$. Modificar un bit de la palabra codificada, p, para obtener una nueva palabra, q. ¿Cuánto vale $h(q)$?

a) $g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow G = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} h(1,0,0,0,0) = (1,0,0) \\ h(0,1,0,0,0) = (0,1,0) \\ h(0,0,1,0,0) = (1,1,0) \\ h(0,0,0,1,0) = (0,0,1) \\ h(0,0,0,0,1) = (1,0,1) \end{array}\right\} H = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

b) Cálculo de Ker(g)

$$G.\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1+b_2=0 \\ b_1=0 \\ b_1=0 \\ b_2=0 \\ b_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=0 \\ b_2=0 \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}(g) = \{(0,0)\} \Rightarrow \boxed{g \text{ es inyectiva}}$

G es sobreyectiva $\iff \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathbb{Z}_2^5)$

$\dim(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{rg}(G) = 2$, $\quad \dim(\mathbb{Z}_2^5) = 5$

$2 \neq 5$ $\boxed{g \text{ no es sobreyectiva}}$

Cálculo de Ker(h)

$$H.\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ c_3 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + b_1 + b_2 = 0 \\ c_2 + b_1 = 0 \\ c_3 + b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\alpha-\beta \\ c_2 = -\alpha \\ b_1 = \alpha \\ c_3 = -\beta \\ b_2 = \beta \end{cases} \quad Ker(h) = \{(-\alpha-\beta, -\alpha, \alpha, -\beta, \beta) \in \mathbb{Z}_2^5 / \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\}$$

$\boxed{\text{h no es inyectiva}}$

$$\left.\begin{array}{l} Dim(Im(h)) = 3 \\ Dim(E') = Dim(\mathbb{Z}_2^3) = 3 \end{array}\right\} \boxed{\text{h es sobreyectiva}}$$

c)
$$H.G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{5\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times2} = \vec{0}$$

d) $Ker(g) = \{(0,0)\}$

$Im(g) = L\{(1,1,1,0,0), (1,0,0,1,1)\} = \{(\alpha+\beta, \alpha, \alpha, \beta, \beta) \in \mathbb{Z}_2^5 / \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\}$

$Ker(h) = \{(-\alpha-\beta, -\alpha, \alpha, -\beta, \beta) \in \mathbb{Z}_2^5 / \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\}$

$\cancel{Im(h) = L\{(0,1,0), (1,1,0), (0,0,1)\} = (\beta, \alpha+\beta, \gamma)}$

$\boxed{Im(g) = ker(h)}$

$$\left.\begin{array}{l} dim(Im(h)) = dim(\mathbb{Z}_2^3) \\ Im(h) \subset (\mathbb{Z}_2^3)_{\mathbb{Z}_2} \end{array}\right\} \Longrightarrow Im(h) = (\mathbb{Z}_2)^3$$

e) $w = (0,1) \in (\mathbb{Z}_2)^2$

$$g(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{p = g(w) = (1,0,0,1,1)}$$

Modificamos el primer bit y nos queda $\bar{q} = (0,0,0,1,1)$

$\boxed{h(\bar{q}) = (1,0,0)}$

ÁLGEBRA Ejercicio 2 1 de julio de 2011

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

1. Sea $\left(V, <\,,\,>\right)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo, y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de V, y $\|\ \|$ la norma inducida por el producto escalar $<\,,\,>$. Demostrar que

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \text{ si y solamente si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son ortogonales.}$$

2. Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_1[x] = \{p(x) = a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$. Se pide:

   a) Demostrar que $< p(x), q(x) >= p(1)q(1) + p(2)q(2)$ es un producto escalar en $\mathbb{R}_1[x]$.

   b) Calcular todos los polinomios $q(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ que sean unitarios y ortogonales a $p(x) = 1 + x$.

1. $\|\vec{u}+\hat{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Longleftrightarrow \hat{u}$ y $\hat{v}$ son ortogonales

$\|\vec{u}+\hat{v}\|^2 = <\vec{u}+\hat{v}, \vec{u}+\hat{v}> = <\vec{u}, \vec{u}+\hat{v}> + <\hat{v}, \vec{u}+\hat{v}> =$

$= <\vec{u},\vec{u}> + <\vec{u},\hat{v}> + <\vec{v},\vec{u}> + <\hat{v},\vec{v}> =$

$= <\vec{u},\vec{u}> + 2<\vec{u},\vec{v}> + <\hat{v},\vec{v}> =$

$= \|\vec{u}\|^2 + \|\hat{v}\|^2 + \underbrace{2<\vec{u},\hat{v}>}_{\overset{\|}{0} \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}} = \|\vec{u}\|^2 + \|\hat{v}\|^2$

2. $\mathbb{R}_1[X] = \{p(x) = a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$ $\quad <p(x), q(x)> \; p(1)q(1) + p(2)q(2)$

Simetría

$<p(x), q(x)> = p(1)q(1) + p(2)q(2) = q(1)p(1) + q(2)p(2) = <q(x), p(x)>$

Bilinealidad $\quad \forall p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_1[x]$

- $<p(x)+r(x), q(x)> = (p(1)+r(1))\cdot q(1) + (p(2)+r(2))q(2) =$ $= p(1)q(1) + r(1)q(1) + p(2)q(2) + r(2)q(2)$
- ~~<p(x), q(x)> + r <p(x), r(x)>~~ $= p(1)q(1) + r(1)q(1) + p(2)q(2) + r(2)q(2)$ $= p(1)q(1) + p(2)q(2) + r(1)q(1) + r(2)q(2)$
- $<p(x), q(x)> + <r(x), q(x)> = p(1)q(1) + p(2)q(2) + r(1)q(1) + r(2)q(2)$
- $<\lambda p(x), q(x)> = \lambda p(1)q(1) + \lambda p(2)q(2)$
- $\lambda <p(x), q(x)> = \lambda(p(1)q(1) + p(2)q(2)) = \lambda p(1)q(1) + \lambda p(2)q(2)$

Definida positiva

$<p(x), p(x)> = p(1)p(1) + p(2)p(2) = (p(1))^2 + (p(2))^2 \geq 0 \;\forall p(x) \in \mathbb{R}_1[X]$

Tomando $p(X) = 0 + 0X$ nos queda que $<p(X), p(X)> = (0+0\cdot 1)^2 + (0+0\cdot 2)^2 = 0$

2. b) $p(x) = 1+x$

$q(x) \perp p(x) \iff \langle p(x), q(x) \rangle = 0$

Sea $q(x) = \cancel{a_0+a_1 x} \; a+bx$

$\langle \underbrace{1+x}_{p(x)}, \underbrace{a+bx}_{q(x)} \rangle = \underbrace{(1+1)}_{p(1)}\underbrace{(a+b)}_{q(1)} + \underbrace{(1+2)}_{p(2)}\underbrace{(a+2b)}_{q(2)} = 0$

$2a+2b+3a+6b=0 \Rightarrow 5a+8b=0$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \alpha \\ b &= -\frac{5}{8}\alpha \end{aligned}}$$

$q(x) = \alpha - \frac{5}{8}\alpha . x$

Tomando $\alpha = 1 \longrightarrow q(x) = 1 - \frac{5}{8}x$ ortogonal pero no unitario

$\boxed{\|q\|} = \sqrt{\langle q(x), q(x) \rangle} = \sqrt{q(1)q(1)+q(2)q(2)} = \sqrt{\frac{9}{64}+\frac{4}{64}} = \boxed{\sqrt{\frac{13}{64}}}$

$\frac{q(x)}{\|q(x)\|} = \frac{1-\frac{5}{8}x}{\frac{\sqrt{13}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{5}{8}x\right) = \boxed{\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{-5}{\sqrt{13}}x}$ ortogonal a $p(x)$ y unitario

ÁLGEBRA | Ejercicio 3 | 1 de julio de 2011

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Para la matriz $A = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$, se pide:

a) Calcular el polinomio característico de A y los autovalores (valores propios) de A.

b) Hallar los autoespacios (subespacios propios) de A especificando sus dimensiones.

c) Demostrar que A es diagonalizable y especificar todas sus formas diagonales.

d) Calcular una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la cual A sea diagonal.

a) $|A-\lambda I| = 0$

$$\left|\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\cdot(-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda)-2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)}_{p(x)} = 0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = 2\\ \lambda_3 = -1\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}\lambda = -1 & ma = 1\\ \lambda = 1 & mg = 1\\ \lambda = 2 & ma = 1\end{array}}$$

b) Autoespacio asociado a $\lambda = -1$: $S_{\lambda=-1}$

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ $(A+I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2x + z = 0\\ 2y + z = 0\\ \cancel{x+y+z=0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \alpha\\ y = \alpha\\ z = -2\alpha\end{cases}$$

$$S_{\lambda=-1} = \{(\alpha, \alpha, -2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathrm{Dim}(S_{\lambda=-1}) = 1 \qquad mg(S_{\lambda=-1}) = 1$$

$$B_{S_{\lambda=-1}} = \{(1,1,-2)\}$$

Autoespacio asociado a $\lambda = 1$: $S_{\lambda=1}$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (A - I)\cdot\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

$$S_{\lambda=1} = \{(\alpha, -\alpha, 0) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathrm{Dim}(S_{\lambda=1}) = 1 \qquad mg(S_{\lambda=1}) = 1$$

$$B(S_{\lambda=1}) = \{(1, -1, 0)\}$$

Autoespacio asociado a $\lambda = 2$: $S_{\lambda=2}$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ \cancel{x + y - 2z = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$S_{\lambda=2} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathrm{Dim}_{S_{\lambda=2}} = 1 \qquad mg(S_{\lambda=2}) = 1$$

$$B_{S_{\lambda=2}} = \{(1, 1, 1)\}$$

c) A es diagonalizable $\Longleftrightarrow ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i) \;\forall \lambda_i$ ✓

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $B = \{(1, 1, -2), (+1, -1, 0), (1, 1, 1)\}$