simplyjarod.com

ALGE

Resúmenes

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

APLICACIONES

- Se basa en los conceptos de par ordenado y de producto cartesiano de conjuntos.
- Aplicaciones $\begin{cases} \text{- inyectivas} \\ \text{- sobreyectivas} \\ \text{- biyectivas} \end{cases}$

Producto Cartesiano

$$A \times B = \{ \underbrace{(x;y)}_{\text{pares ordenados de elementos}} \; x \in A, \; y \in B \}$$

no es conmutativo.

Grafo o correspondencia

$$C \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dominio de la correspondencia}}}{A} \times \underset{\text{codominio}}{B}$$

Grafo inverso de C

$$C^{-1} = \{ (b,a) \in B \times A \, / \, (a,b) \in C \}$$

Composición de G y H

$$H \circ G = \{ (x,z) \in A \times C \, / \, \exists y \in B, \; (x,y) \in G \wedge (y,z) \in H \}$$

propiedades: $K \circ (H \circ G) = (K \circ H) \circ G$ (asociativa)

$(H \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ H^{-1}$

$(G^{-1})^{-1} = G$

Función o aplicación

Es lo mismo escribir $y = f(x)$ que $(x,y) \in f$

con $f : A \mapsto B$
$x \mapsto y = f(x)$

f es una aplicación si $\begin{cases} \forall x \in A \quad \exists y \in B \, / \, (x,y) \in f \\ \forall x \in A \quad \forall y, z \in B \quad (x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Rightarrow y = z \end{cases}$

Imagen de una aplicación

$f \subset A \times B$; $(x,y) \in f \Rightarrow y$ es la imagen de $x \in A$ por f.

propiedades: $f(M) = \underbrace{\{ f(x) : x \in M \}}_{\text{subconjunto de } B}$ $\quad$ M subconjunto no vacío de A $\quad f : A \to B$, $M \subset A$

si $M = \emptyset$ $\quad f(\emptyset) = \emptyset$

Imagen de la inversa o preimagen de $P \subset B$

$$f^{-1}(P) = \{ x \in A \, / \, (x,y) \in f \wedge y \in P \} = \{ x \in A \, / \, f(x) \in P \}$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Extracción de aplicaciones de una correspondencia

Sea F una correspondencia de A en B. Decimos que hemos extraído una aplicación $f: A \mapsto B$ de la correspondencia F si $f \subset F$.

Aplicaciones importantes

Aplicación identidad: $i_A = \{(x,x) \in A \times A \quad \forall x \in A\}$

Aplicación constante: $c_b = \{(x,b) \in A \times B \quad \forall x \in A\}$ b cte.

Aplicación de inclusión: $j_A = \{(x,x) \in A \times X \quad \forall x \in A\}$

propiedades: ① $f: A \to B$

$L \subset M \subset A \Rightarrow f(L) = f(M)$

② $f(L \cup M) = f(L) \cup f(M)$

③ $f(L \cap M) = f(L) \cap f(M)$

④ $S \subset T \subset B \Rightarrow f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$

⑤ $S \subset T \subset B \Rightarrow f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$

⑥ $S, T \subset B \Rightarrow f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

Tipos de aplicaciones

$f: A \mapsto B$ es inyectiva (uno a uno) sii: $\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f: A \mapsto B$ es sobreyectiva (suprayectiva o sobre) sii $f(A) = B$

$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad y = f(x)$

$f: A \mapsto B$ es biyectiva si es inyectiva $\wedge$ sobreyectiva

$\forall y \in B \quad \exists! \, x \in A \; / \; y = f(x)$

Producto cartesiano de dos aplicaciones

Si A, B, C y D son conjuntos y $f: A \to B$, $g: C \to D$ son aplicaciones, podemos definir otra aplicación, $f \times g$, llamada producto cartesiano de f y g: $f \times g: A \times C \mapsto B \times D : (x,y) \mapsto (f(x), g(y))$

Si $f: A \to B$ y $g: C \to D$ son aplicaciones biyectivas $\Rightarrow f \times g$ tb.

Composición de aplicaciones (= func de func)

$f: A \to B \qquad f \subset A \times B$

$g: B \to C \qquad g \subset B \times C$

$\Rightarrow g \circ f \subset A \times C$

$g \circ f = A \mapsto C = g[f(x)]$

$g \circ 1_B = g$

$1_B \circ f = f$

propiedades: f, g inyectivas $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva

f, g sobreyectivas $\Rightarrow g \circ f$ sobreyectiva

f, g biyectiva $\Rightarrow g \circ f$ biyectiva

$g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva

$g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva

$g \circ f$ biyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva $\wedge$ g sobreyectiva

Th. de caracterización de las aplicaciones biyectivas

Una aplicación $f: A \to B$ es biyectiva ssi f tiene una aplicación inversa $g: B \to A$ con $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$

$$\begin{cases} (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A \\ (f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1} \circ f = 1_A \\ f \circ f^{-1} = 1_B \end{cases}$$

$\Rightarrow f: A \to B$ biyectiva $\Rightarrow \exists g^{i}: B \to A \setminus g \circ f = 1_A \wedge f \circ g = 1_B$

Inversas parciales

inversa x la izd.: Si la aplicación $f: A \mapsto B$ es inyectiva pero no es sobreyectiva $\Rightarrow$ existe $\underbrace{g: B \to A \text{ (g inversa x la izd)}}$ $\setminus g \circ f = 1_A$
no es única depende del valor escogido de $a \in A$ para construir g.

inversa x la dcha.: $f: A \mapsto B$ es sobrectiva $\Rightarrow$ existe $\underbrace{g: B \to A}$ $\setminus f \circ g = 1_B$
no es única depende del valor de $b \in B$ escogido para construir g.

Restricción de una aplicación a un subconjunto

Supongamos que $f: X \to Y$ es una aplicación y que $j: A \to X$ con A subconjunto de X es la aplicación inclusión $\Rightarrow$
$f \circ j: A \to Y$ definida por $(f \circ j)(a) = f(j(a)) = f(a)$, $\forall a \in A$
se denomina restricción de f al subconjunto A y se denota
$$f \circ j = f|A$$

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Operación o ley de composición interna en A $(A \neq \emptyset)$

$$* : A \times A \longmapsto A$$
$$(a,b) \longmapsto c = *(a,b) = a * b$$

ej: suma de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{Z}$, de $M_{2\times 2}$

Ley de composición externa en A $(A \neq \emptyset)$ sobre B $(B \neq \emptyset)$

$$\star : B \times A \longmapsto A$$
$$(b,a) \longmapsto c = \star(b,a) = b \star a$$

ej: producto por un escalar, matriz por un número.

Ley de composición interna

- Es conmutativa : $\forall a, b \in A \quad a*b = b*a$
- Es asociativa : $\forall a, b, c \in A \quad (a*b)*c = a*(b*c)$
- Tiene elemento neutro único: $n \in A \ \forall a \in A \quad a*n = n*a = a$
- $a \in A$ es idempotente en $(A, *)$: $a*a = a$
- $a \in A$ admite simétrico en $(A, *)$: $\exists a' \in A \quad a*a' = a'*a = n$
- $b \in A$ es absorbente en $(A, *)$: $\forall a \in A \quad b*a = a*b = b$
- $a \in A$ es simplificable o regular: $\begin{cases} \forall x, y \in A & a*x = a*y \Rightarrow x = y \\ \forall x, y \in A & x*a = y*a \Rightarrow x = y \end{cases}$
- $a \in A$ es invertible $\begin{cases} \exists a' = \bar{a}' \in A \\ a*a^{-1} = a^{-1} \circledast a = 1 \end{cases}$
- $(A, \oplus, \circledast)$ $\to$ 0, 1 → elementos neutros
- $\circledast$ es distributiva respecto de $\oplus$: $\forall a, b, c \begin{cases} a \circledast (b \oplus c) = (a \circledast b) \oplus (a \circledast c) \\ (b \oplus c) \circledast a = (b \circledast a) \oplus (c \circledast a) \end{cases}$
- $\oplus$ es distributiva respecto de $\circledast$: $\forall a, b, c \begin{cases} a \oplus (b \circledast c) = (a \oplus b) \circledast (a \oplus c) \\ (b \circledast c) \oplus a = (b \oplus a) \circledast (c \oplus a) \end{cases}$

Algebra de Boole $(A, \oplus, \odot)$

- **Definición:**
  1. Conmutativa : $\forall a, b, c \begin{cases} a \oplus b = b \oplus a \\ a \odot b = b \odot a \end{cases}$
  2. Tiene elemento neutro : $\exists \varnothing, \Omega \in A \quad \forall a \in A \begin{cases} a \oplus \varnothing = a \\ a \odot \Omega = a \end{cases}$
  3. Unicidad del complementario : $\forall a \in A \ \exists \bar{a} \in A \begin{cases} a \oplus \bar{a} = \Omega \\ a \odot \bar{a} = \varnothing \end{cases}$
  4. Distributiva : $\forall a, b, c \begin{cases} a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (c \oplus a) \\ a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (c \odot a) \end{cases}$

- **Propiedades:**

Idempotencia : $\forall a \in A \begin{cases} a \oplus a = a \\ a \odot a = a \end{cases}$

Los neutros cruzados son absorbentes : $\forall a \in A \begin{cases} a \oplus \Omega = \Omega \\ a \odot \varnothing = \varnothing \end{cases}$

Asociativa : $\forall a, b, c \in A \begin{cases} a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \\ a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c \end{cases}$

Absorción : $\forall a, b \in A \begin{cases} a \odot (a \oplus b) = a \\ a \oplus (a \odot b) = a \end{cases}$

Doble complementación : $\forall a \in A \quad \overline{(\bar{a})} = a$

Complementación de ambos neutros : $\begin{cases} \bar{\Omega} = \varnothing \\ \bar{\varnothing} = \Omega \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{matrix} \Omega \oplus \varnothing = \Omega \\ \Omega \odot \varnothing = \varnothing \end{matrix}$

Leyes de Morgan : $\forall a, b \in A \begin{cases} \overline{a \oplus b} = \bar{a} \odot \bar{b} \\ \overline{a \odot b} = \bar{a} \oplus \bar{b} \end{cases}$

Vocabulario

- si no cumple ninguna propiedad → Magma o grupoide
- asociativa → Semigrupo
- asociativa + elemento neutro → monoide
- asociativa + elemento neutro + elemento opuesto → grupo

Si además son conmutativas añadimos conmutativo o abeliano a su nombre

- $(A, +, \cdot)$

Un conjunto es un anillo cuando $(A, +)$ es un grupo abeliano y $(A, \circ)$ es un semigrupo y también cuando $\cdot$ es distributiva respecto de $+$.

Un anillo puede ser conmutativo, unitario o con divisor de cero $(a \cdot b = 0 \quad (a, b \neq 0))$.

En un anillo siempre $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

- Un conjunto es un cuerpo cuando le quitamos el 0.

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Metodos de solución de un sistema

Substitución, Igualación, Gauss, Kramer.
(Gauss = reducción)

Gauss: A matriz del sistema
A^* matriz ampliada del sistema

Sistema compatible determinado: $p = p^* = n$

Sistema compatible indeterminado: $p = p^* < n$

Sistema incompatible: $p \neq p^*$

p: nº de escalones de A
p^*: nº de escalones de A^*
n: nº de incognitas

Sistema homogeneo $p = p^*$

Operaciones con matrices:

Aplicación lineal asociada a A:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

a_{ij} son elementos → fila i, → columna j

vectores de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^m$ → fila $i \in \mathbb{R}^n$, → columna $j \in \mathbb{R}^m$

Conjunto de matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

- Si $m=n$, la matriz es cuadrada (= los elementos a_{ii} forman la diagonal principal de la matriz) $\Rightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Una matriz A es diagonal (= todo ceros menos la diagonal principal)
  $\Rightarrow a_{ij} = 0$
  $\forall i,j \quad i \neq j \quad i,j \in \{1 \dots n\}$
- A es triangular inferior (ceros por encima de la diagonal principal)
  $\Rightarrow \forall i,j \quad i<j \quad i,j \in \{1\dots n\} \quad a_{ij} = 0$
- A es triangular superior (ceros por debajo de la diagonal principal)
  $\Rightarrow \forall i,j \quad i>j \quad i,j \in \{1 \dots n\} \quad a_{ij} = 0$
- matriz cuadrada identidad $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
  $$(x_1 \dots x_n) \to f(x_1 \dots x_n) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$
  $$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ni} x_i \end{pmatrix}$$

Propiedades de linealidad:

def:
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$

⚠ } Se asocia la matriz $(f(e_1)\ f(e_2) \cdots f(e_n))$

$[e_i = (0\,0 \dots \overset{i}{1}\, 0\, 0\, 0 \dots)]$

→ Suma de 2 funciones lineales es una función lineal.

propiedades de la suma y del producto

$c(f+g) = cf + cg$
$(c+d)f = cf + df$
$c(df) = (cd)f$
$1f = f$

} válido tanto para funciones lineales como para matrices

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
$h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$
$(h+g) \circ f = h \circ f + g \circ f$
$c \in \mathbb{R}$: $(cg) \circ f = g \circ (cf) = c(g \circ f)$

- El elemento neutro existe ssi la matriz es cuadrada (ó la función lineal es un anillo no íntegro).
- Una aplicación es invertible ssi es biyectiva.
- Si existe inversa $\Rightarrow$ es única.
- Una matriz cuadrada A de orden n es invertible ssi $r(A) = n$.
- Si $\left.\begin{array}{l} f: S \to T \\ g: T \to U \end{array}\right\}$ son invertibles $\Rightarrow g \circ f: S \to U$ es invertible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- Si f es lineal (biyectiva) $\Rightarrow f^{-1}$ tb.
- Cuando no hay inversa es porque el sistema es incompatible.
  $\Rightarrow$ si A es invertible y de orden $n \Leftrightarrow r(A) = n$
- Si f y g tienen inversa $\Rightarrow fg$ tiene inversa. $(GF)^{-1} = F^{-1}G^{-1}$

Definiciones y vocabulario

- $\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\times n} = A^n$
- $\underbrace{A \ldots A}_{\times r} \cdot \underbrace{A \ldots A}_{\times s} = A^{r+s}$
- $A^1 = A$
- $A^0 = I_n$
- si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$
- Transpuesta hermítica (en $\mathbb{C}$)
  $A^H \to a^H_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\quad \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} 1-i & -i \end{pmatrix}$

$(A^t)^t = A$ $\quad (A+B)^T = A^T + B^T$ $\quad (\alpha A)^T = \alpha A^T$ $\quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$(A^H)^H = A$ $\quad (A+B)^H = A^H + B^H$ $\quad (\alpha A)^H = \bar{\alpha} A^H$ $\quad (A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H$

- $A^T = A \to$ A simétrica
  $A^T = -A \to$ A antisimétrica
  $A^H = A \to$ A hermítica. (la diagonal principal compuesta por reales).

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ si $B \cdot A = I_n \Rightarrow B$ inversa por la izd. de A

$B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

$C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ si $A \cdot C = I_m \Rightarrow C$ inversa por la dcha de A.

ESPACIOS VECTORIALES

Definición

$\mathbb{R} = \{(x_1, x_2 \dots x_n) / x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} / a_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall i \in \{1, \dots m\}, \forall j \in \{1, \dots n\} \right\}$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m / f$ es aplicación lineal$\}$

La suma de una aplicación lineal

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$
$(v, w) \mapsto v + w$ } grupo

La multiplicación de una aplicación lineal:

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$
$(\alpha, v) \mapsto \alpha v$ } cuerpo

Propiedades que satisfacen.

$v + w = w + v$

$u + (v + w) = (u + v) + w$

$\exists 0 \quad a + 0 = 0 + a = a$

$\forall u \ \exists -u \quad u + (-u) = (-u) + u = 0$

$a(\beta \cdot u) = (a\beta) u$

$\alpha(u + v) = au + av$

$(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$

$1u = u$

$\alpha \vec{0} = \vec{0}$

Ejemplo:

$+ : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$
$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ } espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{C}$-e.v.

$+ : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ } $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{R}$-e.v.

$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene det = 0 $\Rightarrow$ no es un e.v. xq nos salimos del conjunto

⑤

Vocabulario y notación

$\underbrace{C([a,b];\mathbb{R})}_{V} \equiv \underbrace{f:[a,b]\to\mathbb{R}}_{\text{esto es un e.v.}}$

$Ax=0$ ≡ sistema de ecuaciones homogeneo

$S\subset\mathbb{R}^n$ ≡ S subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^\infty = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad a_n\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}_n[x] \to$ grado como mucho n.

$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n / a_i\in\mathbb{R} \quad n\in\mathbb{N}\}$

Ejemplo e.v:

$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\left.\begin{array}{l}(\mathbb{Z}_2,+) \text{ es un grupo abeliano}\\ \{\mathbb{Z}_2-\{0\},\cdot\} \text{ es un grupo abeliano}\end{array}\right\} \Rightarrow (\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

$\left.\begin{array}{l} + : \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2\\ \cdot : \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2\end{array}\right\}$ satisface las propiedades del e.v.

$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{Z}_2 \text{ binario}\\ \mathbb{Z}_2^8 \text{ byte}\end{array}}$

$\mathbb{R}^2$ (un vector con 2 componentes)

$F \subset E \Rightarrow F^{-1} \subset E$

matriz singular ≡ matriz no invertible
matriz regular ≡ matriz invertible.

Giro de ángulo $\varnothing$ positivo $\begin{pmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$ $(1,0) \sim (\cos a, \operatorname{sen} a)$
$(0,1) \sim (-\operatorname{sen} a, \cos a)$

simétrico en $\mathbb{R}^3$ respecto a $x=y \equiv f(x,y,z) = y,x,z$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Un conjunto siempre es un subconjunto de sí mismo.

Si f es invertible $\Rightarrow$ es biyectiva.

- Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución $\Rightarrow$ su sistema homogeneo tiene solución.
- A y B conjuntos: $A \subset B \Leftrightarrow A \in P(B)$ $\boxed{V}$
  ~~______~~ : $A \subset B \Leftrightarrow A \subset P(B)$ $\boxed{F}$ ⚠
- $f: A \mapsto B$ es una aplicación sobreyectiva $\Leftrightarrow (\forall s,t \in B // f^{-1}(s) = f^{-1}(t) \Rightarrow S=T)$

Base y dimensión de un espacio vectorial

- Un conjunto finito de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ de un espacio vectorial V se dice que es un sistema de generadores de V si todo elemento de V puede escribirse como una combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_k$.

Obs: - Todo conjunto finito de vectores que contiene al elemento neutro es linealmᵗ dependiente.
- Todo conjunto finito de vectores linealmᵗ independientes no puede contener un subconjunto de vectores que sean linealmᵗ dependientes.

- Un conjunto finito de vectores $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ se dice que es una base de un espacio vectorial V si se cumplen las 2 siguientes condiciones:
  1) Los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ son linealmᵗ independientes.
  2) Todo elemento de V es una combinación lineal de los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.
  ($\equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ sea generador de V)

  → No todo sistema de generadores de un e.v V es una base.

  → $\bar{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ 1 ocupa el lugar j (base canónica).

- Si V es un e.v que posee una base con n elementos, cualesquiera $n+1$ vectores de V son linealmᵗ dependientes.
- Todas las bases de un mismo e.v V poseen el mismo nº de elementos.
- El nº de elementos que posee una base cualquiera de un espacio vectorial V recibe el nombre de dimensión de V. ($\dim(V)$)
  $V = \{\bar{0}\} \to V$ tiene dimensión cero.
  → La dimensº de $\mathbb{K}^n$ es n
  → La dimensº de $P_{\mathbb{A}}^{(n)}[x]$ es $n+1$
  → La dimensº de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es $m \times n$
- Sea V un e.v. de dimensº n. Todo conjunto de n vectores de V que sean linealmᵗ independientes son una base de V.
- Sea V un e.v. de dimensº finita n, todo conjunto de vectores linealmᵗ independientes de V puede completarse para obtener una base, es decir, dados k vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \dots \bar{e}_k$, $k < n$ linealmᵗ independientes, existen $n-k$ vectores $\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n$ de V tal que el conjunto $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k \dots \bar{e}_n\}$ es una base de V.
- $\dim(V) = n$, sea S un sistema de generadores de V y $S = S_1 \cup S_2$ siendo S_1 y S_2 disjuntos. Si los elementos de S_2 son combinación lineal de los elementos de S_1, S_1 es tb un sistema de generadores de V.

- Sea S un sistema de generadores de un e.v V de dimensº n; podemos encontrar un subconjunto S_1 de S que sea una base de V.
- Un conjunto infinito S de elementos de un e.v V se dice linealmᵗ independiente si cualquier subconjunto de S es linealmᵗ independiente. En caso contrario S se dice linealmᵗ dependiente.
- Un e.v. V en el que se puede encontrar un subconjunto S linealmᵗ independiente y con infinitos elementos, se dice que tiene dimensº infinita.

Cambio de base

$$\underbrace{B}_{\text{base antigua}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n\} \quad y \quad \underbrace{B'}_{\text{base nueva}} = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \dots, \bar{e}_n'\}$$

$$\bar{e}_1' = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \dots + a_{n1}\bar{e}_n$$
$$\vdots$$
$$\bar{e}_n' = a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$$

⇒ La nueva base se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = M_B^{B'}$$

. La matriz A del cambio de base de B a B' es invertible y su inversa es la matriz del cambio de base de B' a B. :

$$M_{B'}^{B} = (M_B^{B'})^{-1} = A^{-1}$$

coordenadas de $\bar{x}$ en matriz = $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = AX'$$

Subespacios vectoriales. Intersección y suma de subespacios vectoriales

- Un subespacio vectorial de un e.v V es un subconjunto V_1 de V, que a su vez es un e.v con las operaciones definidas en V.

  V_1 es un e.v si
  - Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in V_1 \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V_1$
  - Si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{u} \in V_1 \Rightarrow a\vec{u} \in V_1$
- Dados 2 subespacios vectoriales V_1 y V_2 de un e.v V podemos definir su intersección: $V_1 \cap V_2 = \{\frac{\vec{u}}{\vec{u}} \in V_1 \text{ y } \vec{u} \in V_2\}$

  y su suma: $V_1 + V_2 = \{\vec{u}_1 + \frac{\vec{u}_2}{\vec{u}_1} \in V_1, \vec{u}_2 \in V_2\}$

- $\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$ = para cualesquiera subespacios vectoriales V_1 y V_2 de un e.v. V de dimensº finita.

- Un e.v. V es suma directa de 2 de sus subespacios V_1 y V_2 si:
  - → $V_1 + V_2 = V$
  - → $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$

Utilizamos la notacº $V = V_1 \oplus V_2$ para indicar que V es suma directa de los subespacios vectoriales V_1 y V_2.

- Sean V_1 y V_2 subespacios vectoriales de un e.v V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - → $V = V_1 \oplus V_2$
  - → Para todo $\vec{v} \in V$ existe una descomposicº única de la forma $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ con $\vec{v_1} \in V_1$ y $\vec{v_2} \in V_2$.

- $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{m} V_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \dim(V_i)$.

Definicº de la aplicacº lineal (A.L)

- Sean V y W e.v; una A.L A de V en W es una aplicacº $A: V \mapsto W$ tal que:
  - → $A(\vec{v}+\vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ para todo $\vec{v}, \vec{w} \in V$
  - → $A(a\vec{v}) = a A(\vec{v})$ para todo $a \in \mathbb{K}$ y todo $\vec{v} \in V$.

  V y W deben ser e.v. sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

- $A\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \vec{v_j}\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j A(\vec{v_j}) \qquad c_j \in \mathbb{K}$ y $\vec{v_j} \in V$

- Sea A una A.L entre los e.v V y W. se tienen los siguientes resultados:
  1) La imagen del elemento neutro de V mediante A es el elemento neutro de W $A(\vec{0}) = \vec{0}$.
  2) La imagen mediante A del opuesto de un elemento $\vec{v}$ de V es el opuesto de $A(\vec{v})$, es decir, $A(-\vec{v}) = -A(\vec{v})$.

- Sea $A: V \to W$ una A.L. entre e.v. La imagen mediante A de cualquier subespacio vectorial de V es un subespacio vectorial de W.

- Si el subespacio vectorial V_1 tiene $\{\vec{v_1}, \dots \vec{v_k}\}$ como base, todo elemento w de W_1 puede escribirse como combinacº lineal de los vectores $A(\vec{v_1}), \dots, A(\vec{v_k})$. Esto es cierto ya que tomando $A(\vec{v}) = \vec{w}$ se tiene que

$$\vec{w} = A(\vec{v}) = A\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \vec{v_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j A(\vec{v_j})$$

Por tanto coincide con el subespacio generado por los vectores $A(\vec{v_1}) \dots A\vec{v_k}$ es decir $W_1 = \mathcal{L}(A(\vec{v_1}) \dots A(\vec{v_k}))$

- La imagen mediante una A.L de un subespacio vectorial de dimens° $\mathbb{K}$ es un subespacio vectorial de dimensión no superior a k.
- Sea $B = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \dots, \bar{e_n}\}$ una base de un e.v V y sean $\bar{w_1}, \bar{w_2}, \dots, \bar{w_n}$ n vectores cualesquiera de otro e.v W. En estas condiciones, existe una única A.L. A de V en W tal que:

$$A(\bar{e_j}) = \bar{w_j} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Matriz de una A.L. Operaciones con aplicaciones lineales

- Si los e.v: V y W coinciden y en ambos se toma la misma base B para representar una aplicac° A, su matriz se dice que está dada con respecto a la base B.
- Si A y B son elementos de $\mathcal{L}(V; W)$, definimos su suma mediante

¿a que se refiere?

$$(A+B)(\bar{v}) = A(\bar{v}) + B(\bar{v}) \text{ para todo } \bar{v} \in V.$$

- Si A es un elemento de $\mathcal{L}(V; W)$ y c es un elemento de $\mathbb{K}$, definimos la multiplicación de c por A mediante:

$$(cA)(\bar{v}) = c(A(\bar{v})) \text{ para todo } \bar{v} \in V.$$

- Sean V y W dos e.v. sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$; el conjunto $\mathcal{L}(V; W)$ de las A.L entre V y W, con las operaciones anteriormᵗ definidas, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.
- Sean V y W e.v de dimensiones n y m, respectivamᵗ, entonces, el e.v $\mathcal{L}(V, W)$ tiene dimensión $n \times m$.

- $M(B \circ A) = M(B) \cdot M(A)$

Cambio de Base para A.L

V tiene como bases B y B' para pasar de B a B' usamos C

W ——— $\bar{B}$ y $\bar{B}'$ ——— $\bar{B}$ a $\bar{B}'$ ——— D

De B a $\bar{B}$ usamos A

De B' a $\bar{B}'$ usamos A'

$$\Rightarrow A' = D^{-1} A C$$

$$A' = C^{-1} A C$$

Aplicac° lineales inyectivas y suprayectivas. Núcleo y rango de una A.L.

- Sean V y W 2 e.v. sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y A una A.L. de V en W.

A es inyectiva $\Leftrightarrow (A(\bar{x}) = A(\bar{y}) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y})$ $\equiv$ A es un monomorfismo

A es suprayectiva $\Leftrightarrow (\bar{y} \in W$ existe $\bar{x} \in V$ tal que $A(\bar{x}) = \bar{y}) \Leftrightarrow A(V) = W$

siendo $A(V)$ la imagen de V mediante A. $\equiv$ A es un epimorfismo

biyectiva $\equiv$ isomorfismo.

- $A: V \to W$

el núcleo de A, $\ker(A)$, es el conjunto de todos los $\bar{v} \in V$ tal que $A(\bar{v}) = \bar{0}$

$$\ker(A) = \{\bar{v} \in V / A(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$

El subconjunto $\ker(A)$ no es nunca vacío, ya que $\bar{0} \in \ker(\bar{A})$; esto se deduce de que $A(\bar{0}) = \bar{0}$.

- Si $A: V \mapsto W$ es una A.L entre e.v, $\ker(A)$ es un subespacio vectorial de V.
- Una A.L $A: V \to W$ es inyectiva $\Leftrightarrow \ker(A) = \{\bar{0}\}$
- A es suprayectiva $\Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{img}(A)}_{\leq V} = W$

- Sean V y W dos e.v de los cuales V es de dimens° finita y sea $A: V \to W$ una A.L

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{img}(A)) = \dim(V)$$

- Sea A una A.L entre V y W, ambos de dim. finita n y m. Sea A la matriz A.L en 2 bases cualesquiera de V y W, para encontrar el núcleo de A es necesario resolver el sistema:

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{coordenadas de } v \in V} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\dim(\ker(A) = \dim(V) - r(A)$
- $\dim(\mathrm{img}(A)) = r(A)$
- Sean V y W e.v. de dim. finita y $A: V \to W$ una A.L
  - $\to$ A es inyectiva $\Leftrightarrow r(A) = \dim(V)$
  - $\to$ A es suprayectiva $\Leftrightarrow r(A) = \dim(W)$
  - $\to$ A es biyectiva $\Leftrightarrow r(A) = \dim(V) = \dim(W)$

- Sean V y W e.v. de dim finita n y sea $A: V \to W$ una A.L, las siguientes condiciones son equivalentes:
  a) A es biyectiva
  b) A es inyectiva
  c) $\ker(A) = \{\bar{0}\}$
  d) A es suprayectiva
  e) El rango de A es n

- Decimos que 2 e.v son isomorfos si podemos encontrar un isomorfismo entre ellos. Para que esto ocurra entre e.v de dim. finita ambos han de ser de la misma dim. El recíproco tb es cierto.

- Dado cualquier nº natural n, todos los espacios vectoriales de dim. n sobre un mismo cuerpo son isomorfos.

- Supongamos que A es un isomorfismo entre 2 e.v V y W de dim n, $\Rightarrow$ su rango es n $\Rightarrow$ $M(A)$ de A (en cualquier base) es invertible. ¿?
  La inversa de $M(A)$ es la matriz de la aplicacº inversa de A.

sistema homogeneo ≡ Subespacio vectorial.

$$\dim(P) = \underset{\text{nº de incógnitas}}{n} - \underbrace{\operatorname{rang}(P)}_{\text{rango de la matriz asociada}}$$

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$

T. $\left.\begin{array}{l}\dim(V) = n \\ \dim(W) = m\end{array}\right\} \Rightarrow \dim(\mathcal{L}(V, W)) = m \times n$

$$\begin{tikzcd}
B_V \quad X \quad \boxed{\mathbb{K}^n} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"] & \boxed{\mathbb{K}^m} \quad Y \quad B_W \arrow[d, "P"] \\
B'_V \quad X' \quad \boxed{\mathbb{K}^n} \arrow[r, "F'"] & \boxed{\mathbb{K}^m} \quad Y' \quad B'_W
\end{tikzcd}$$

$Y = FX$
$X = QX'$
$Y' = F'X'$
$Y = PY'$

$\Rightarrow F' = P^{-1} F Q$

Homomorfismo ≡ A.L
Monomorfismo ≡ A.L inyectiva
Epimorfismo ≡ A.L sobreyectiva
Isomorfismo ≡ A.L biyectiva
Endomorfismo ≡ A.L $(V = W)$
Automorfismo ≡ (Endo + Iso) morfismo

$f \circ f = f$ idempotente
$f \circ f = 0$ nilpotente

f inyectiva $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V)$
f sobreyectiva $\Rightarrow \dim(W) + \dim(\ker(f)) = \dim(V)$
$\Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$
$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = W$

$\mathcal{L}$ base de $V \Rightarrow f(\mathcal{L})$ genera a $f(V)$

$\mathcal{L}$ base de $V \wedge f$ sobreyectiva $\Rightarrow f(\mathcal{L})$ genera a W

~~$W \subseteq f(\mathcal{L})$~~

$\mathcal{L}$ base de $V \wedge f$ biyectiva $\Rightarrow f(\mathcal{L})$ base de W.

$$\left.\begin{array}{l} r(A)=n \\ r(B)=m \end{array}\right\} \Rightarrow r(A \circ B) \leq \min\{n,m\}$$

$$r(f) = \dim(Im(f)) \leq \dim(V)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(F) \leq n \\ r(F) \leq m \end{array}\right| \Rightarrow r(F) \leq \min\{n,m\}$$

$\left.\begin{array}{l} \{0\} \leq V \\ V \leq V \end{array}\right\} \to$ sub. e.v impropios $\quad \left.\begin{array}{l} S \leq V \\ S \neq \{0\}\ S \neq V \end{array}\right\}$ sub. e.v propios

$S \subset V$ es un sub e.v de V
- $S \neq \emptyset$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall v_1, v_2 \in S \quad \alpha v_1 + \beta v_2 \in S$

g biyectiva $\Rightarrow r(g \circ f) = r(f)$

f biyectiva $\Rightarrow r(g \circ f) = r(g)$

- f suprayectiva $\Leftrightarrow Im(f) \geq W$

$\Rightarrow Im(f) = W$

$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V)$

$Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow f$ es inyectiva

$Im(f) = W \Leftrightarrow f$ inyectiva

$\dim(Im(f)) \leq \dim(W)$

$\dim(Ker(f)) \leq \dim(V)$