simplyjarod.com

CALC

Carpeta Montero

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en simplyjarod.com

Cálculo

Teoría

TEMA 1: LOS NÚMEROS REALES

1.1 Cotas de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$, un conjunto cualquiera de números reales.

- **Cota superior** :Todo número real mayor o igual que todos los elementos del conjunto A.
- **Cota inferior** : Todo número real menor o igual que todos los elementos del conjunto A.

- **Supremo:** La menor de las cotas superiores, si existe.
- **Ínfimo:** La mayor de las cotas inferiores, si existe.

- **Máximo:** El supremo si éste pertenece al conjunto.
- **Mínimo:** El ínfimo si éste pertenece al conjunto.

Axioma del supremo
Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente entonces el conjunto A tiene supremo.

Axioma del ínfimo
Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente entonces el conjunto A tiene ínfimo.

1.2 Cardinalidad

- **Cardinal** de un conjunto es su número de elementos.
- Dos conjuntos tienen el mismo cardinal si y sólo si se puede establecer una biyección entre ellos. En este caso se dice que son **equipotentes.**

- Un conjunto es **finito** si el único subconjunto equipotente con él es el mismo.
- Un conjunto es **infinito** si es equipotente con algún subconjunto propio.

- Un conjunto tiene cardinal **infinito numerable** si es equipotente a $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ tienen cardinal infinito numerable.

- Un conjunto tiene cardinal **infinito no numerable** si no es equipotente a $\mathbb{N}$.(y no es finito)
- $\mathbb{R}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ tienen cardinal infinito no numerable (Potencia del continuo).

1.3 Estructura de $\mathbb{R}$

- La terna $(\mathbb{R},+,\cdot)$ tiene estructura de cuerpo donde las operaciones internas son la suma y productos habituales.

- Además la relación de orden $(\leq)$ entre números reales es "compatible con la suma y con el producto", lo que se expresa diciendo que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.

- Entre dos números reales cualesquiera existen infinitos racionales e infinitos irracionales, lo que se expresa diciendo que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ son conjuntos **densos** de $\mathbb{R}$.

- Los números racionales e irracionales están tan juntos unos con otros que es imposible escoger un intervalo en la recta real que contenga únicamente números racionales o que contenga únicamente números irracionales (salvo que el intervalo esté compuesto por un solo punto).

- El conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ se denomina **recta real ampliada** , donde $-\infty$ y $+\infty$ son dos símbolos (no son números).

1.4 Otras definiciones y propiedades de $\mathbb{R}$

- **Propiedad arquimediana:** $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \ / \ nx > y$.

- **Principio de encaje:** La intersección de una sucesión de intervalos encajados cerrados es siempre distinta del vacío.

- El producto de dos números racionales es siempre un número racional.

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} \\ y \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow \ xy \in \mathbb{Q}$$

- El producto de un número racional, distinto de cero, y de un número irracional es un número irracional.

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} \ -\{0\} \\ y \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow \ xy \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

- Sin embargo, el producto de dos números irracionales no es un número irracional (por ejemplo, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$).

- **Método de inducción**

  Sea P una propiedad que pueden verificar todos los números naturales. Hacemos:

  Base de inducción: verificamos que la propiedad P se cumple para 1.
  Hipótesis de inducción: suponemos que P se cumple para n.
  Paso de inducción: verificamos que P se cumple para $n + 1$ teniendo en cuenta la hipótesis.

  Si esto sucede así entonces podemos afirmar que la propiedad P se cumple para todos los números naturales.

- **Valor absoluto:** $|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$

  Propiedades:
  i) $|x+y| \leq |x|+|y|$
  ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
  iii) $|x/y| = |x|/|y| \quad si \quad |y| \neq 0$
  iv) $||x|-|y|| \leq |x-y|$
  v) $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$

- **Función signo:** $sign(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{|x|}$ también $sign(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

- **Parte entera:** $E(x) = p \in \mathbb{Z} \quad / \quad p \leq x < p+1$

- **Parte decimal:** $\operatorname{dec}(x) = x - E(x)$

TEMA 2: LOS NÚMEROS COMPLEJOS

2.1 Definiciones

- Un **número complejo** z es un par ordenado (a, b) de números reales donde,
  $a = \text{Re}(z) =$ parte real de z
  $b = \text{Im}(z) =$ parte imaginaria de z
- La **unidad imaginaria** (designada por i) es el número complejo $(0,1)$. Además tenemos que $i = \sqrt{-1}$.
- El **afijo** de un complejo z es el punto del plano cartesiano de coordenadas (a, b).

2.2 Formas de representar un número complejo

- Forma binómica: $z = (a, b)$
- Forma cartesiana: $z = a + bi$
- Forma polar: $z = \rho_\theta$
- Forma exponencial: $z = \rho e^{\theta i}$
- Forma módulo-argumental: $z = \rho(\cos\theta + \sin\theta\, i)$

Para pasar de una a otra forma hacemos:

Forma cartesiana a forma polar

$$z = a + bi \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \arctan(b/a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = \rho_\theta$$

Forma polar a forma cartesiana

$$z = \rho_\theta \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a &= \rho\cos\theta \\ b &= \rho\sin\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = a + bi$$

2.3 Operaciones con número complejos

Suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} = (\rho \cdot \rho')_{\theta + \theta'}$$

Elemento inverso: $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$

$$z^{-1} = (\rho^{-1})_{-\theta}$$

2.4 Complejo conjugado

Forma cartesiana: Sea $z = a + bi$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = a - bi$

Forma polar: Sea $z = \rho_\theta$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = \rho_{-\theta}$

Propiedades: i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

ii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

iii) $\bar{\bar{z}} = z$

iv) $\text{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ $\quad \text{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

2.5 Modulo de un complejo

Sea $z = a + bi$, llamamos **módulo** de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propiedades:
i) $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z\overline{z}}$

ii) $|\text{Re}(z)| \leq |z|$, $|\text{Im}(z)| \leq |z|$

iii) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ (si $z \neq 0$)

iv) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, además $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

v) $|az| = |a| \cdot |z|, \quad a \in \mathbb{R}$

vi) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2.6 Potencias y raíces

Sea el número complejo $z = \rho_\theta$,

Fórmula de Moivre

- Potencia enésima:

$$z^n = (\rho^n)_{n\theta}$$

Un número complejo tiene n raíces enésimas

- Raíces enésimas:

$$\sqrt[n]{z} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

2.7 Exponenciales complejas

Tomaremos siempre esta fórmula como una definición

Fórmula de Euler : $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \,\text{sen}\, b)$

Propiedades:
i) $e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$

ii) $e^z \neq 0, \quad \forall z \in C$

iii) $Si \ b \in R, \quad |e^{bi}| = 1$

2.8 Logaritmos complejos

Todo complejo $z = \rho_\theta$ posee infinitos logaritmos de la forma:

$$\text{L}z = \text{L}|z| + i \ \arg(z) + 2k\pi i$$

2.9 Potencias complejas

Sean z y w números complejos,

$$z^w = e^{w\text{L}z}$$

Propiedades:
i) $z^w \cdot z^{w'} = z^{w+w'}$

ii) $z_1^w \cdot z_2^w = (z_1 \cdot z_2)^w$

2.10 Algunas cuestiones de interés

- El conjunto de los número complejos con las operaciones de suma y producto posee estructura de cuerpo y lo representamos $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

- $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado. Esto quiere decir que, dados dos números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, no se puede decir cual de los dos es mayor que el otro. Dicho de una forma gráfica, no existen los símbolos $>$ ó $<$ para los números complejos.

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum_{i=1} z_i \overline{y}_i\right|^2 \leq \sum_{i=1} |z_i|^2 \cdot \sum_{i=1} |y_i|^2$

- Es conveniente manejar con soltura las potencias de la unidad imaginaria i:

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \end{aligned} \qquad \text{y en general :} \qquad \begin{aligned} i^{4n} &= 1 \\ i^{4n+1} &= i \\ i^{4n+2} &= -1 \\ i^{4n+3} &= -i \end{aligned}$$

- Interpretación geométrica del producto de dos números complejos:
  El producto de un número complejo z por otro complejo w de modulo unidad se puede interpretar geométricamente como un giro en sentido antihorario del afijo de z alrededor del origen y con un ángulo igual al argumento de w.
  Si w no tiene módulo unidad además del giro se produce una traslación del afijo de z.

- Interpretación geométrica de las raíces n-ésimas de un número complejo z:
  Los afijos de estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados y con centro el origen. Estos vértices se encuentran situados sobre una circunferencia de centro el origen y radio la raíz n-ésima del módulo de z.

TEMA 3: CONTINUIDAD DE FUNCIONES

3.1 Cálculo de límites de funciones

Lo primero que debemos hacer al abordar el cálculo de un límite es "pasar al límite", lo que significa sustituir formalmente las x por el valor al que tiende para obtener un resultado.
A la hora de realizar este paso debemos tener en cuenta que:

$$f \to l \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(f) \to \text{sen}\, l$$
$$f \to l \quad \Rightarrow \quad \cos(f) \to \cos l$$
$$f \to l \quad \Rightarrow \quad \text{tg}(f) \to \text{tg}\, l$$
$$f \to l > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{L}(f) \to \text{L}\, l$$
$$f \to l \quad \Rightarrow \quad \sqrt{f} \to \sqrt{l}$$

Los límites de los cuales no podemos saber el resultado de antemano se llaman indeterminaciones y existen siete tipos:

1.- $f \to \infty \,,\, g \to \infty \quad \Rightarrow \quad f - g \to \infty - \infty$

2.- $f \to 0 \,,\, g \to \infty \quad \Rightarrow \quad f \cdot g \to 0 \cdot \infty$

3.- $f \to \infty \,,\, g \to \infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f}{g} \to \dfrac{\infty}{\infty}$

4.- $f \to 0 \,,\, g \to 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f}{g} \to \dfrac{0}{0}$

5.- $f \to 0 \,,\, g \to 0 \quad \Rightarrow \quad f^g \to 0^0$

6.- $f \to \infty \,,\, g \to 0 \quad \Rightarrow \quad f^g \to \infty^0$

7.- $f \to 1 \,,\, g \to \infty \quad \Rightarrow \quad f^g \to 1^\infty$

De esta forma, una vez hecho el "paso al límite" y simplificado el resultado siempre tenemos que estar en uno de los cuatro siguientes casos:

- El límite nos da un número real.
- El límite nos da infinito ∞ o menos infinito $-\infty$.
- El límite no existe (la sucesión es oscilante)
- El límite queda indeterminado (aparece una de las siete indeterminaciones).

En los tres primeros casos el límite está resuelto. En el último caso, aquel en el que aparece una indeterminación, tenemos que utilizar el resto de propiedades que a continuación se indican para intentar resolver la indeterminación.

- Operaciones elementales con límites de funciones

  Sean las sucesiones f, g tales que $\lim f = a$ y $\lim g = b$:

  1. $\lim(f+g) = \lim f + \lim g = a+b$
  2. $\lim(f-g) = \lim f - \lim g = a-b$
  3. $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g = a \cdot b$

4. $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim f}{\lim g} = \dfrac{a}{b}$ [siendo $b \neq 0$]

5. $\lim (f^g) = \lim f^{\lim g} = a^b$

6. $\lim (\ln f) = \ln\left(\lim f\right) = \ln a$

7. $\lim (\cos f) = \cos\left(\lim f\right) = \cos a$

8. $\lim (\operatorname{sen} f) = \operatorname{sen}\left(\lim f\right) = \operatorname{sen} a$

- Sustitución de infinitésimos equivalentes en producto o cociente. Los infinitésimos equivalentes más usuales son para $\varepsilon(x) \overset{x\to a}{\to} 0$:

$\operatorname{sen} \varepsilon(x) \sim \operatorname{arc\,sen} \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$ $\quad$ $\operatorname{Sh} \varepsilon(x) \sim \operatorname{Arg\,Sh} \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$

$\operatorname{tg} \varepsilon(x) \sim \operatorname{arc\,tg} \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$ $\quad$ $\operatorname{Th} \varepsilon(x) \sim \operatorname{Arg\,Th} \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$

$1 - \cos \varepsilon(x) \sim \dfrac{\varepsilon(x)^2}{2}$ $\quad$ $\operatorname{Ch} \varepsilon(x) - 1 \sim \dfrac{\varepsilon(x)^2}{2}$

$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)$ $\quad$ $a^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)\cdot \mathrm{L}a \quad (a > 0)$

$(1 + \varepsilon(x))^m - 1 \sim \varepsilon(x)\cdot m$

$\mathrm{L}(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$ también $\mathrm{L}\,u(x) \sim u(x) - 1 \qquad u(x) \to 1$

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ también podemos sustituir en producto o cociente:

$$a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p \sim a_0x^p$$
$$\mathrm{L}(a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p) \sim \mathrm{L}(x^p)$$

- Regla de l'Hopital:

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de $a \in \mathrm{R}$ con $g'(a) \neq 0$ y donde tenemos que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ ó $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ entonces se cumple que:

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Esta fórmula sirve para las tres indeterminaciones potenciales

- Para las indeterminaciones ∞^0, 0^0 , 1^∞ siempre se hace:

$$l = \lim_{x \to a} f^g = e^\lambda \quad \text{donde} \quad \lambda = \lim_{x \to a} g \cdot \mathrm{L}\, f$$

Esta fórmula sólo sirve sirve para la indeterminación de tipo uno elevado a infinito

- Para la indeterminación 1^∞ también se puede aplicar aplicar:

$$l = \lim_{x \to a} f^g = e^\lambda \quad \text{donde} \quad \lambda = \lim_{x \to a} g \cdot (f - 1)$$

Cociente de polinomios con x tendiendo a infinito

- Para el cociente de polinomios existe la misma regla que en sucesiones (con $x \to \infty$):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_0}{b_q x^q + b_{p-1} x^{q-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} 0 & si \quad p < q \\ \dfrac{a_p}{b_q} & si \quad p = q \\ \infty & si \quad p > q \end{cases}$$

Cociente de polinomios con x tendiendo a cero

- En funciones aparece otro caso interesante (que no existe en sucesiones): un cociente de polinomios con $x \to 0$. En este caso nos fijamos en los términos de <u>menor grado</u> de cada polinomio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dots + a_{p+2} x^{p+2} + a_{p+1} x^{p+1} + a_p x^p}{\dots + b_{q+2} x^{q+2} + b_{q+1} x^{q+1} + b_q x^q} = \begin{cases} \infty & si \quad p < q \\ \dfrac{a_p}{b_q} & si \quad p = q \\ 0 & si \quad p > q \end{cases}$$

- Teorema del Sandwich (del Emparedado)

  Sean tres funciones f, g y h tal que $g < f < h$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} g = l \\ \lim\limits_{x \to a} h = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} f = l$$

"cero por acotado"

- Sean dos funciones f y g, tal que f está acotada y $\lim\limits_{x \to a} g = 0$ entonces:

$$\lim_{x \to a} f \cdot g = 0$$

- Orden de los infinitos. Sea $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,

$$\ln f < f^a \ (a > 0) < a^f \ (a > 1) < f^f$$

Importante propiedad. El recíproco no es cierto en general

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\text{Si } \exists \lim_{x \to \infty} f(x) = l \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(n) = l$$

3.2 Definición de continuidad

3.2.1 Definición de continuidad

Ambas definiciones son equivalentes

Decimos que f es **continua** en $a \in \mathrm{R}$ cuando:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ \forall x \in R\ ..\left|x-a\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-f(a)\right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ \forall x \in R\ ..x \in (a-\delta\ ,\ a+\delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (f(a)-\ \varepsilon\ ,\ f(a)+\ \varepsilon)$$

3.2.2 Definición de límite

Decimos que $f(x)$ tiene límite l cuando x tiende a a, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ cuando,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ \forall x \in \mathbb{R}\ ..\left|x-a\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-l\right| < \varepsilon$$

3.2.3 Límites laterales

Límite por la izquierda: $l_1 = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

Límite por la derecha: $l_2 = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

3.2.5 Clasificación de los puntos de discontinuidad

1. Discontinuidad evitable: $\exists l_1\ ,\ \exists l_2$ pero $l_1 = l_2 \neq f(a)$
2. Discontinuidad de primera especie o salto finito: $\exists l_1\ ,\ \exists l_2$ pero $l_1 \neq l_2$
3. Discontinuidad de segunda especie: $\begin{cases} i) & l_1 = \infty \quad ó \quad l_2 = \infty \\ ii) & \nexists\, l_1 \quad ó \quad \nexists\, l_2 \end{cases}$

3.2.6 Propiedades prácticas

- Las funciones elementales son continuas en todo su dominio de definición. Llamaremos funciones elementales a $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$, $\sqrt{x}$, polinomios, etc...
- La suma, resta, producto, cociente y composición de funciones continuas es una función continua.

Esta es la forma práctica de estudiar la continuidad de una función

- f es continua en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- f es continua por la izquierda en $x = a^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$
- f es continua por la derecha en $x = a^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

3.2.7 Teoremas teóricos

Para todos los teoremas, sea una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$

- Teorema de Darboux:
  Si $f(a)<k<f(b)$ entonces existe $\xi\in\,]a,b[$ tal que $f(\xi)=k$

- Teorema de Bolzano:
  Si $f(a)<0$ y $f(b)>0$ entonces existe $\xi\in\,]a,b[$ tal que $f(\xi)=0$.

- Teorema de conservación de intervalos:
  Si f es continua en $[a,b]$ entonces su imagen $f([a,b])$ es un intervalo.

- Teorema de Weierstrass:
  Si f es continua en $[a,b]$ entonces f está acotada en $[a,b]$ y además existen máximo y mínimo de f en $[a,b]$.

TEMA 4: DERIVACIÓN

4.1 Definiciones

Estas dos formas de definir la derivada son totalmente equivalentes. Basta con hacer el cambio de variable:
$x = a + h$
para pasar de una a la otra.

- $f(x)$ es **derivable** en $a \in \mathbb{R}$ cuando el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

- Decimos que $f(x)$ es **derivable por la izquierda** en $a \in \mathbb{R}$ cuando el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a^-)$$

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^-)$$

- Decimos que $f(x)$ es **derivable por la derecha** en $a \in \mathbb{R}$ cuando el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a^+)$$

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

- $f(x)$ es **derivable** en $a \in \mathbb{R} \iff f'(a^-) = f'(a^+)$
- Las funciones elementales son derivables en todo su dominio de definición. Llamaremos funciones elementales a $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$, $\sqrt{x}$, polinomios, etc...
- La suma, resta, producto, cociente y composición de funciones derivables es una función derivable en su dominio.
- Definimos la **diferencial** de $f(x)$ en el punto $a \in \mathbb{R}$ como:

$$df(a): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$dx \to df(a) = f'(a) \cdot dx$$

En $\mathbb{R}$ que una función tenga derivada en un punto es necesario y suficiente para poder asegurar que es diferenciable en ese punto.

- La función diferencial df de una función f es siempre una función continua.
- $f(x)$ es **diferenciable** en $a \in \mathbb{R} \iff f(x)$ es **derivable** en $a \in \mathbb{R}$

4.2 Interpretación geométrica de la derivada y de la diferencial

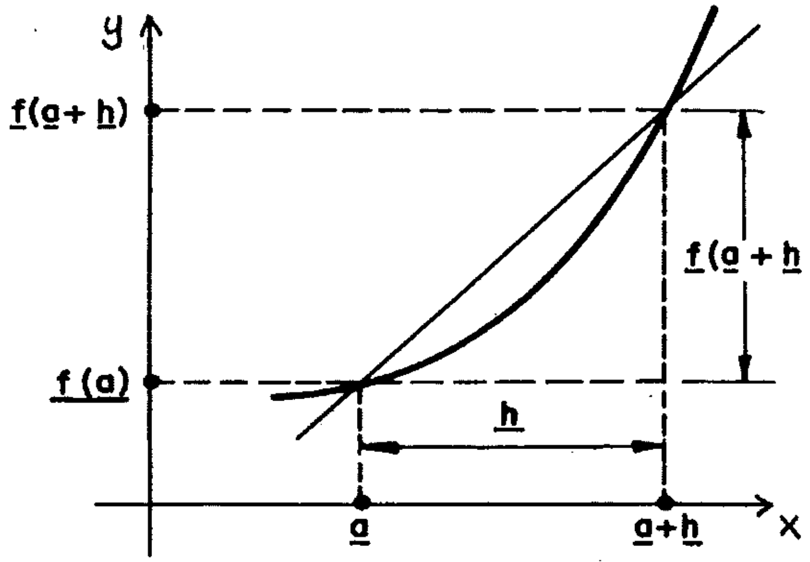
- La función derivada representa gráficamente la pendiente de la recta tangente a la función en cada punto.

- La función diferencial de una función en un punto es gráficamente una recta que pasa por el origen y que tiene pendiente la derivada de la función en ese punto.

- Sea una función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. La recta tangente a la gráfica de la función en un punto $x = a$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$$

Fíjate que la recta dibujada es secante a la curva pero conforme h tiende a cero la recta es "cada vez menos secante" hasta que llega a ser tangente a la curva



Ejemplo numérico:

Calcular la recta tangente y la diferencial de la función $f(x)=x^2$ en $x=3$.

$$f(x)=x^2 \Rightarrow f(3)=3^2=9$$

$$f'(x)=2x \Rightarrow f'(3)=6$$

$$y-f(3) = f'(3)(x-3) \Rightarrow y-9 = 6(x-3) \Rightarrow y-9 = 6x-18 \Rightarrow y = 6x-9$$

Por tanto la recta tangente es,

$$y = 6x-9$$

y la diferencial es,

$$dy = 6dx$$

4.3 Teoremas

- Si $f(x)$ es derivable en $a \Rightarrow f(x)$ es continua en a

- Teorema de Rolle:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [a,b] \\ f(x) \text{ es derivable en } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \ / \ f'(c) = 0$$

Este teorema es una generalización del teorema de Rolle

- Teorema de Lagrange o del valor medio:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [a,b] \\ f(x) \text{ es derivable en } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ c \in (a,b) \ / \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ y } g(x) \text{ continuas en } [a,b] \\ f(x) \text{ y } g(x) \text{ derivables en } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ c \in (a,b) \ / \ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

- Regla de la Cadena:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en (a, b) entonces la derivada de la función composición $(g \circ f)(x)$ es :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Notación importante

- Diremos que una función $f(x) \in C([a,b])$ si es continua en $[a, b]$.
- Diremos que una función $f(x) \in C^1([a,b])$ si tiene primera derivada y ésta es continua en $[a, b]$.
- En general, diremos que una función $f(x) \in C^r([a,b])$ si tiene derivadas hasta de orden r todas ellas continuas en $[a, b]$.
- Por ejemplo, sea $f(x)$ una función polinómica. Entonces diremos que $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ por que los polinomios son funciones que poseen infinitas derivadas todas ellas continuas.
- Se cumple que: $C \supset C^1 \supset C^2 \supset ... \supset C^\infty$

TEMA 5: FÓRMULA DE TAYLOR

5.1 Definiciones

Sea una función $f \in C^{n+1}([a,x])$, se cumple que existe un $\xi \in [a,x]$ tal que:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

o bien, en forma comprimida,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{P_{n,a}(x)} + \underbrace{\frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_{n,a}(x)}$$

A esta expresión la llamamos **fórmula de Taylor**. Más concretamente, $P_{n,a}(x)$ es el **polinomio de Taylor** de grado n en el punto a y $R_{n,a}(x)$ es el **resto de Lagrange** que, como veremos a continuación sirve para acotar el error.
En el caso particular en que $a = 0$ se suele llamar **fórmula de Mac Laurin.**
Si hacemos tender n a infinito, $n \to \infty$, entonces hablaremos de **serie de Taylor** que no es más que un polinomio con infinitos términos. En este caso no hay resto de Lagrange.

¡¡Piensa que esto es realmente útil!! Gracias a la fórmula de Taylor podemos estudiar funciones muy complicadas "sustituyéndolas" por polinomios, que son unas funciones muy sencillas y que sabemos manejar muy bien

La fórmula de Taylor-MacLaurin nos da una aproximación de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, x]$ mediante un polinomio de grado n. Dicho de otra forma, Taylor nos asegura que existe un polinomio de grado n que se comporta "casi" igual que nuestra función dentro del intervalo $[a, x]$. El error cometido entre la función $f(x)$ y el polinomio que la aproxima viene dado por el **resto de Lagrange:**

$$\text{Error} = \left| \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right|$$

Es de suponer que cuanto mayor es el grado del polinomio mejor es la aproximación a la función $f(x)$. Sin embargo, esto no es siempre así. Hay veces en que existe la fórmula de Taylor pues $f \in C^{n+1}([a,x])$ pero sin embargo no aproxima convenientemente a la función.

Condición necesaria y suficiente para representar una función como serie de Taylor

La condición necesaria y suficiente para que una función pueda expresarse como una serie de Taylor es que el resto de Lagrange tienda a cero. En estos casos la función queda perfectamente aproximada por la fórmula de Taylor de infinitos términos que llamaremos serie de Taylor (que no es más que una serie de potencias):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

5.2 Desarrollos en serie de Mac Laurin más usuales

A continuación se exponen los desarrollos de Mac Laurin más usuales. Conviene conocerlos perfectamente para, a partir de ellos, obtener otros más complejos.

Es importante recalcar que estos desarrollos están centrados en el origen $x = 0$. En caso de que nos pidan un desarrollo de Taylor en otro punto que no sea el origen tendremos que utilizar la fórmula general de la página anterior y olvidarnos de estos desarrollos.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad -\infty < x < \infty$

$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots \qquad a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ln^n a \qquad -\infty < x < \infty$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -\infty < x < \infty$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad -\infty < x < \infty$

$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad \operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -\infty < x < \infty$

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad -\infty < x < \infty$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad -1 < x < 1$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad -1 < x < 1$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \dots \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad -1 < x < 1$

Caso particular del anterior para $\alpha = -1$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad -1 < x < 1$

5.3 Cálculo práctico

Los procedimientos que podemos aplicar para obtener polinomios de Taylor de una función determinada son los siguientes:

Este procedimiento solo es aplicable en la práctica si la función es fácilmente derivable

Primer procedimiento

Nos basamos en la propia definición de serie de Taylor para calcular el desarrollo en serie de la función $f(x)$. Sólo es necesario exigir que $f(x)$ sea derivable en un intervalo abierto que contenga al centro x_0. La fórmula es la siguiente:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-x)^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Este es el método más habitual

Segundo procedimiento

Se trata de utilizar polinomios de Taylor de funciones elementales conocidas de antemano. Es decir, se puede obtener un polinomio de Taylor mediante operaciones elementales de otros polinomios de Taylor conocidos:

- Suma, multiplicación o cociente de series.
- Derivación de series.
- Integración de series.
- Composición de funciones dentro de una serie.

Es un caso particular del anterior

Tercer procedimiento

Muchas veces basta con aplicar la serie geométrica para obtener la serie de Taylor de una determinada función $f(z)$:

$$\frac{1}{1-f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(f(x))^n \qquad \text{si } |f(x)|<1$$

$$\frac{f(x)}{1-f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}(f(x))^n \qquad \text{si } |f(x)|<1$$

TEMA 6: MÁXIMOS Y MÍNIMOS

8.1 Definiciones

A los máximos y mínimos de una función se les llama en general extremos de la función

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo relativo estricto** $\Leftrightarrow$ $f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo relativo estricto** $\Leftrightarrow$ $f(x_0) < f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo absoluto estricto** $\Leftrightarrow$ $f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

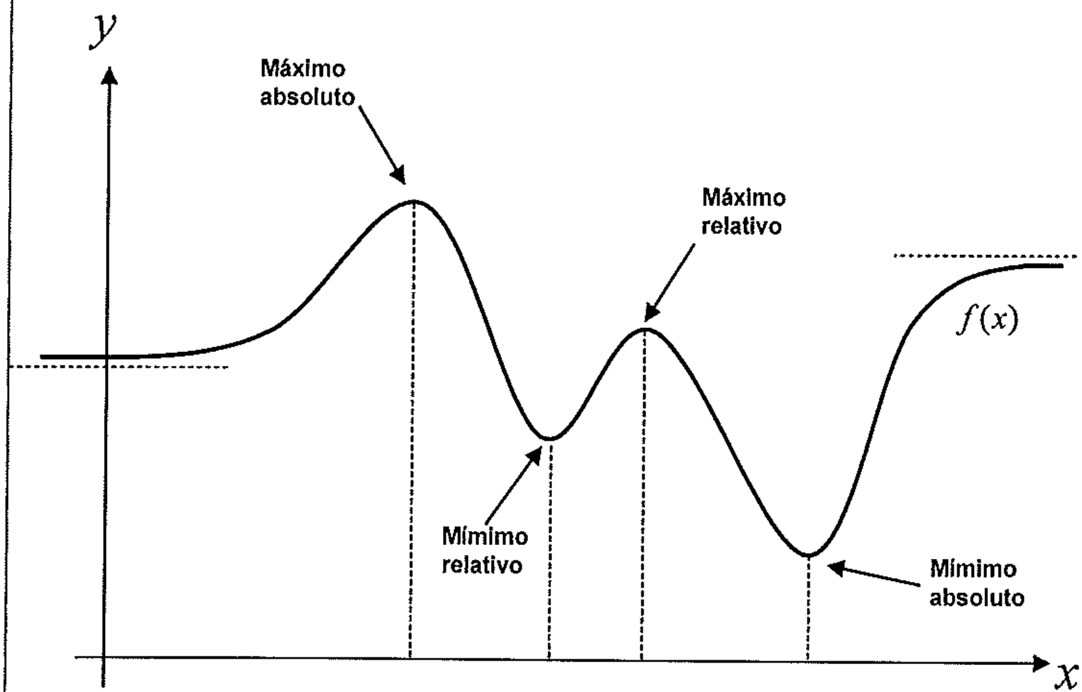
$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo absoluto estricto** $\Leftrightarrow$ $f(x_0) < f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo relativo no estricto** $\Leftrightarrow$ $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo relativo no estricto** $\Leftrightarrow$ $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo absoluto no estricto** $\Leftrightarrow$ $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo absoluto no estricto** $\Leftrightarrow$ $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$



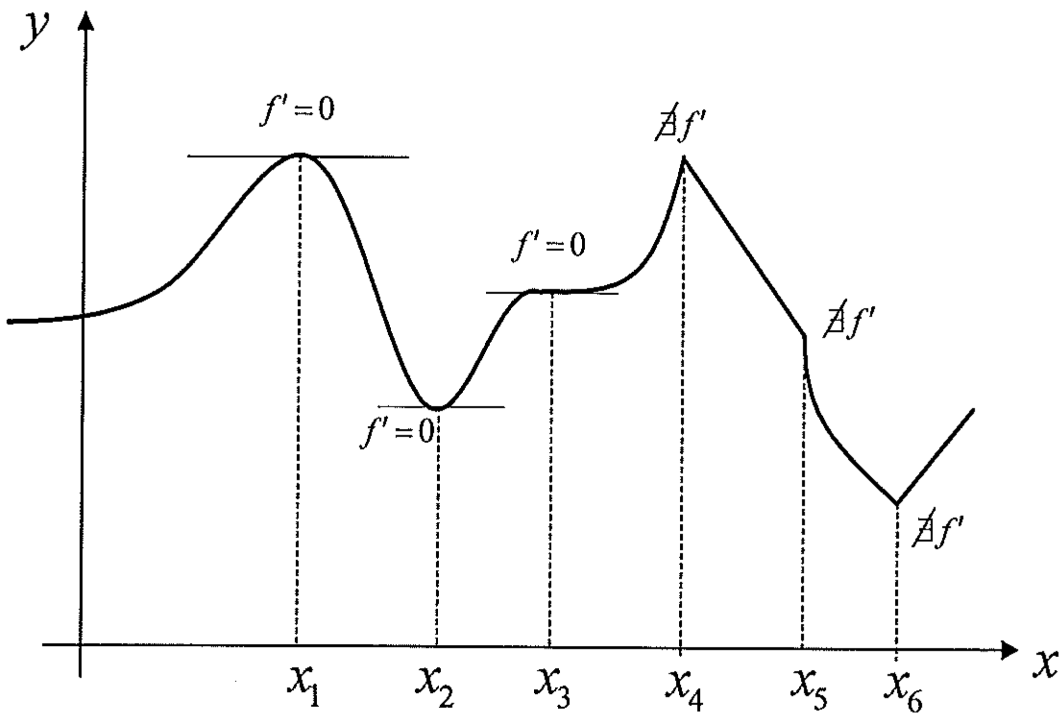
En resumen:
un máximo absoluto es el punto "más alto" de *toda* la función mientras que un máximo relativo es el punto más alto de *una parte* de la función.
Análogamente, un mínimo absoluto es el punto "más bajo" de *toda* la función mientras que un mínimo relativo es el punto más bajo de *una parte* de la función.

6.2 Cálculo de los extremos

Condiciones necesarias de extremo

Lo primero que se hace siempre es determinar los **puntos estacionarios** o críticos de la función $f(x)$ (es decir, aquellos puntos que son candidatos a máximo o mínimo). Estos puntos se obtienen de aplicar las siguientes condiciones:

- Aquellos puntos $a \in \mathbb{R} \quad / \quad f'(a) = 0$
- Aquellos puntos $a \in \mathbb{R} \quad / \quad \nexists\, f'(a)$



Fíjate que en x_1 y x_2 la función presenta dos extremos, máximo y mínimo respectivamente.
En ambos puntos la recta tangente a la función es horizontal y por tanto su pendiente es cero. Del tema anterior sabemos que la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función, por tanto podemos afirmar que en x_1 y x_2 se cumple que $f' = 0$.

Sin embargo en el punto x_3 la pendiente de la recta tangente en ese punto también es cero, es decir en x_3 también se cumple que $f' = 0$ pero en ese punto no hay extremo.

De todo esto concluímos lo siguiente:
Que la derivada de una función se anule en un punto es condición necesaria para que ese punto sea extremo pero no es una condición suficiente (porque hay puntos donde la derivada se anula y no son extremo)

Por otro lado en x_4 y x_6 la función presenta otro máximo y otro mínimo pero en esos dos puntos no existe la derivada de la función, sin embargo en x_5 tampoco existe la derivada y la función no tiene extremo en ese punto.

Dicho de otra forma, los puntos donde no existe la derivada de la función son candidatos a extremo.

Por tanto la no existencia de derivada en un punto es condición necesaria pero no suficiente para que una función tenga extremo en ese punto.

Condiciones suficientes de extremo

Una vez obtenidos los candidatos a extremo, es decir, aquellos puntos que cumplen alguna condición necesaria de extremo, estudiamos su carácter. Existen varias formas:

Se trata, en este caso, de utilizar directamente la definición de extremo

- Observar el valor de la función $f(x)$ en un entorno del candidato $a \in \mathbb{R}$:

  Si $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow a$ es un mínimo relativo
  Si $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow a$ es un máximo relativo

Este método sólo es recomendable si además vamos a calcular los puntos de inflexión

- Calcular la derivada segunda $f''(x)$ y sustituir en ella el candidato $a \in \mathbb{R}$:

  Si $f''(a) > 0 \Rightarrow a$ es un mínimo relativo
  Si $f''(a) < 0 \Rightarrow a$ es un máximo relativo
  Si $f''(a) = 0 \Rightarrow a$ no es ni máximo ni mínimo

- Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función a un lado y a otro del candidato $a \in \mathbb{R}$. El estudio del crecimiento y el decrecimiento se hace mediante la derivada primera:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0\,,\ x < a \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x < a \\ f'(x) > 0\,,\ x > a \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x > a \end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ es un mínimo.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0\,,\ x < a \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x < a \\ f'(x) < 0\,,\ x > a \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x > a \end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ es un máximo}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0\,,\ x < a \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x < a \\ f'(x) > 0\,,\ x > a \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x > a \end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ no es máx ni mín.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0\,,\ x < a \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x < a \\ f'(x) < 0\,,\ x > a \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x > a \end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ no es máx ni mín.}$$

6.3 Cálculo de extremos restringidos a un subconjunto de $\mathbb{R}$

Algunas veces nos piden determinar los extremos de una función $f(x)$ restringida a un subconjunto $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
En estos casos añadiremos a la lista de candidatos a máximo o mínimo los extremos del intervalo dado. De esta forma los candidatos serán:

- Aquellos puntos $c \in [a,b]$ / $\exists f'(c) = 0$
- Aquellos puntos $c \in [a,b]$ / $\nexists f'(c)$
- Los extremos del intervalo: a y b

En el caso del cálculo de extremos restringidos a un subconjunto existe un teorema de gran importancia que pasamos a enunciar:

Teorema de Weiestrass

Si $A \subset \mathrm{R}$ es cerrado y acotado y f es continua en A $\Rightarrow$ f alcanza máx. y mín. absoluto en A

6.4 Representación gráfica de funciones

Los pasos habituales para representar una función $y = f(x)$ son los siguientes:

Dominio

Es el conjunto de todos aquellos valores de x donde la función toma un valor real.
Aquellos valores de x donde la función vale infinito o no existe quedan excluidos del dominio

Ejemplos:

- $f(x) = \sqrt{g(x)}$

  En este caso el dominio de $f(x)$ son todos aquellos valores de x para los cuales $g(x) \geq 0$ ya que la raíz cuadrada de un número negativo no existe

- $f(x) = \ln(g(x))$

  En este caso el dominio de $f(x)$ son todos aquellos valores de x para los cuales $g(x) > 0$ ya que el logaritmo neperiano de cero y de cualquier número negativo no existe.

Simetrías

Una función $y = f(x)$ puede tener simetría par, simetría impar o no tener simetrías.

- Decimos que una función tiene simetría par cuando $f(x) = f(-x)$, en este caso la función es simétrica respecto al eje Y. Por ejemplo: $y = x^2$

- Decimos que una función tiene simetría impar cuando $f(x) = -f(-x)$, en este caso la función es simétrica respecto al origen. Por ejemplo: $y = x^3$

- Si no se cumple ninguna de las dos condiciones anteriores entonces la función no tiene simetrías. Por ejemplo: $y = e^x$ no tiene simetría par ni impar.

Asíntotas

Horizontales: si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, entonces la recta $y = l$ es una asíntota vertical.

Verticales: si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.

Oblicuas: son rectas de la forma $y = mx + n$, donde

Hay que calcular la m siempre antes de la n

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right)$$

Puntos de corte con los ejes

- Puntos de corte de la función con el eje X

  Hacemos $f(x)=0$ y despejamos x. Pueden aparecer varias soluciones ya que la función puede cortar varias veces al eje X.

- Punto de corte de la función con el eje Y

  Hacemos $y=f(0)$, es decir sustituimos $x=0$ en la función y nos sale el valor de y (no hace falta despejar). Este punto es único aunque puede no existir.

Signo de la función

Se trata de estudiar los intervalos en los cuales la función está por encima del eje X (se dice que la función es positiva) y los intervalos en los cuales la función está por debajo del eje Y (se dice que la función es negativa).
Para definir los intervalos donde la función es positiva o negativa tendremos en cuenta los puntos donde la función corta al eje X (porque en ellos cambia de signo la función) y también las asíntotas verticales (porque en ellos puede cambiar de signo la función).

Extremos y monotonía de la función

Estudiar la monotonía de una función significa estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la misma.
Para ello lo primero que hay que hacer es obtener los candidatos a extremo de la función como ya se ha explicado en este mismo tema.
Una vez obtenidos los candidatos a extremo se estudia en cada intervalo entre dos candidatos si la función es creciente o decreciente. Para ello basta con sustituir cualquier punto de intervalo en la derivada primera y comprobar si el resultado en positivo (creciente) o negativo (decreciente).

Puntos de inflexión y curvatura de la función

Los puntos de inflexión de una función son aquellos puntos donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.
Estudiar la curvatura de una función significa estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de la misma.
Para ello lo primero que hay que hacer es obtener los candidatos a punto de inflexión. Estos candidatos se encuentran siempre en:

- Aquellos puntos $a \in \mathbb{R} \ / \ f''(a)=0$
- Aquellos puntos $a \in \mathbb{R} \ / \ \nexists\ f'(a)$

Una vez obtenidos los candidatos a punto de inflexión se estudia en cada intervalo entre dos candidatos si la función es cóncava o convexa. Para ello basta con sustituir cualquier punto de intervalo en la derivada segunda y comprobar si el resultado en positivo ($\cup$) o negativo ($\cap$).

6.5 Algunas funciones elementales que conviene conocer

Función Logaritmo Neperiano

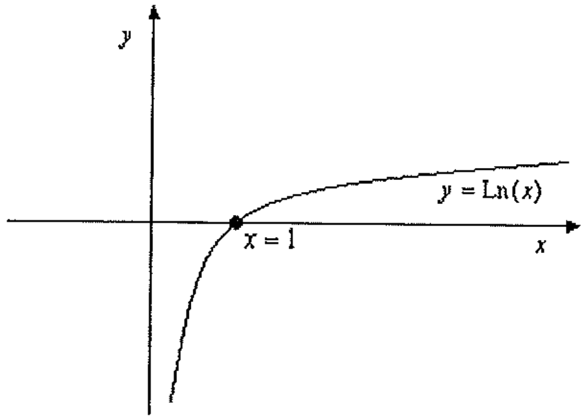
$$y = \ln(x) \Rightarrow x = e^{y}$$

- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^{a}) = a \cdot \ln(x)$
- $\ln(1) = 0$

  $\ln(e) = 1$

  $\ln(0^{+}) = -\infty$

  $\ln(+\infty) = +\infty$



- El valor de dentro del Logaritmo siempre ha de ser positivo

Función Exponencial

$$y = e^{x}$$

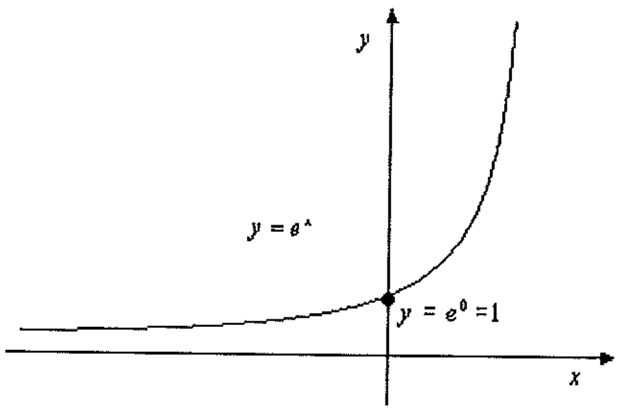
- Toda función elevada al exponente es siempre estrictamente positiva.

$$y = e^{a} \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$$

- $e^{2x} = e^{x} \cdot e^{x}$
- $a \cdot e^{x} + b \cdot e^{x} = (a+b) \cdot e^{x}$
- $e^{0} = 1$

  $e^{\infty} = \infty$

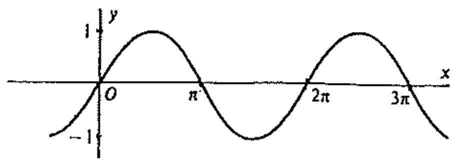
  $e^{-\infty} = 0$



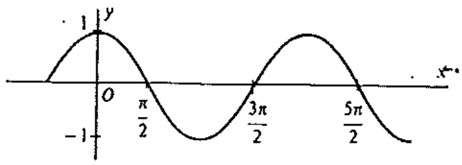
Funciones trigonométricas circulares

$y = \operatorname{sen} x$
$y = \cos x$
$y = \operatorname{tg} x$
$y = \operatorname{cotg} x$
$y = \sec x$
$y = \operatorname{cosec} x$

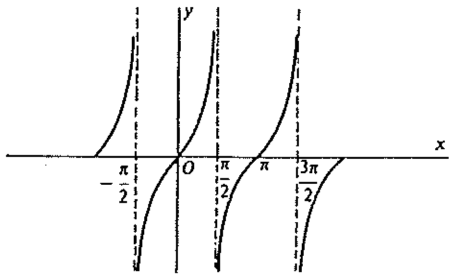
$y = \operatorname{sen} x$



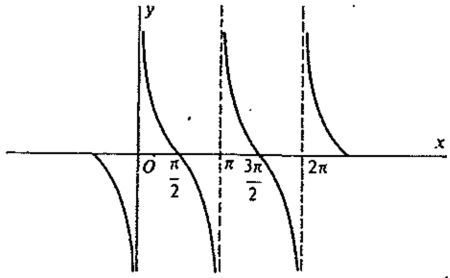
$y = \cos x$



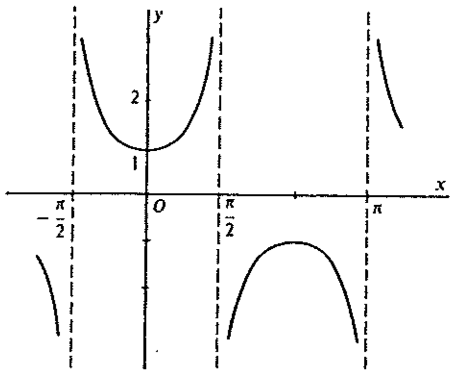
$y = \operatorname{tg} x$



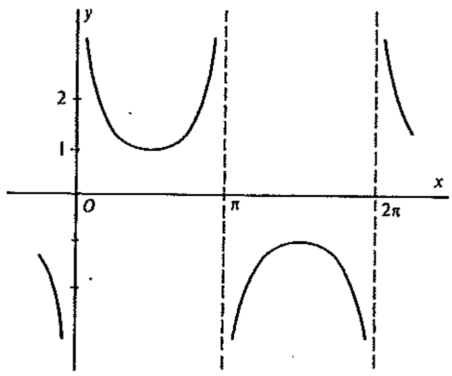
$y = \operatorname{cotg} x$



$y = \sec x$

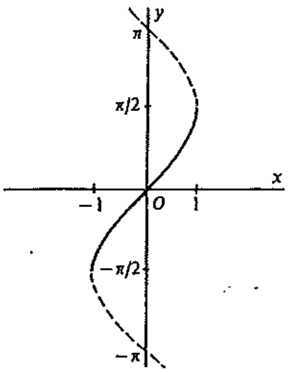


$y = \operatorname{cosec} x$

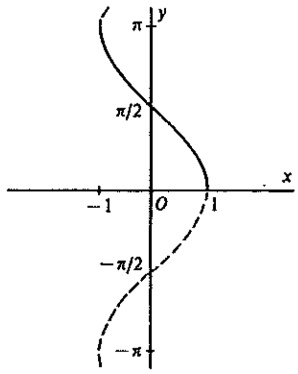


$y = \operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$
$y = \cos^{-1} x = \arccos x$
$y = \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x$
$y = \operatorname{cotg}^{-1} x = \operatorname{arccotg} x$
$y = \sec^{-1} x = \operatorname{arcsec} x$
$y = \operatorname{cosec}^{-1} x = \operatorname{arccosec} x$

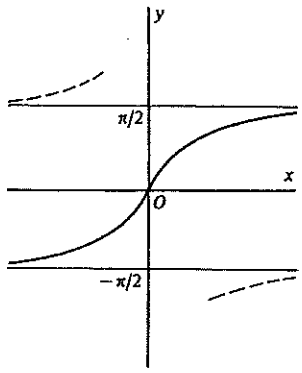
$y = \operatorname{sen}^{-1} x$



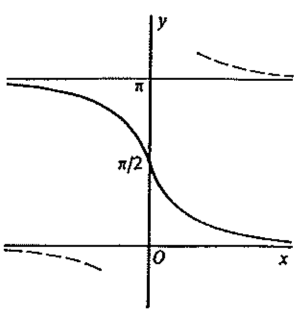
$y = \cos^{-1} x$



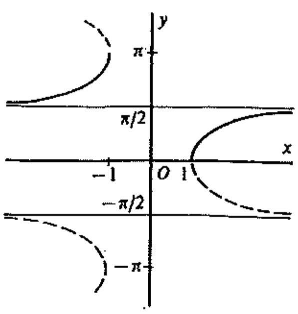
$y = \operatorname{tg}^{-1} x$



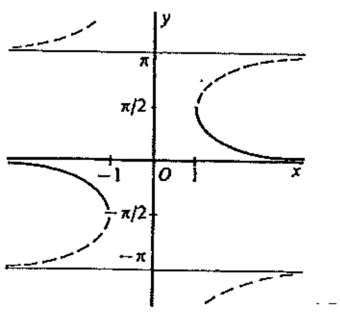
$y = \operatorname{cotg}^{-1} x$



$y = \sec^{-1} x$



$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$



Funciones trigonométricas hiperbólicas

$y = \operatorname{senh} x = \operatorname{sh} x$

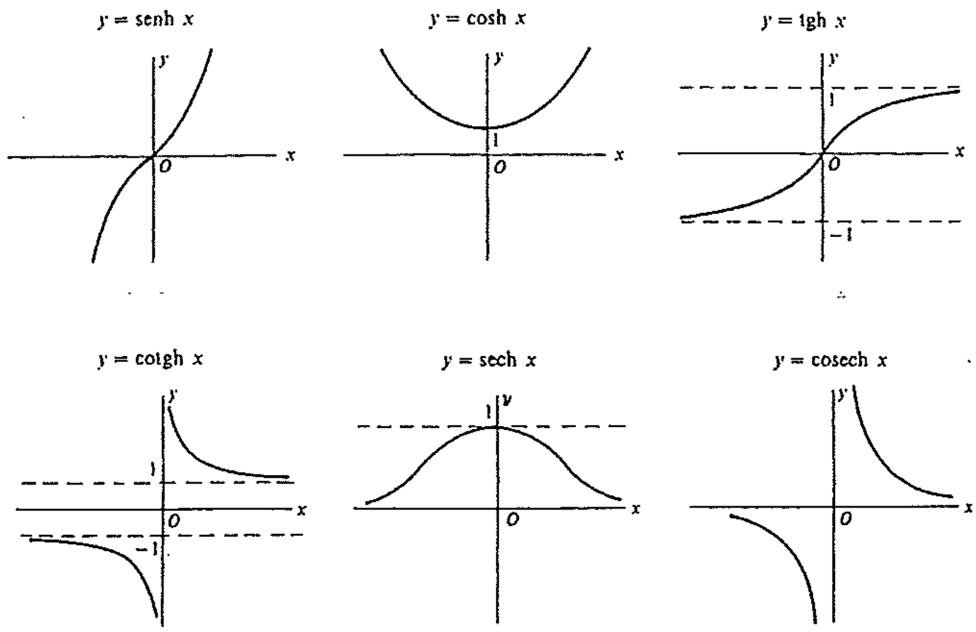
$y = \cosh x = \operatorname{ch} x$

$y = \operatorname{tgh} x$

$y = \operatorname{cotgh} x$

$y = \operatorname{sech} x$

$y = \operatorname{cosech} x$



TEMA 7: INTEGRACIÓN

También llamado "Cálculo de primitivas"

7.1 Integración indefinida

Dada una función f se dice que otra función F es **primitiva** de f si F es derivable y es $F' = f$.

La **integral indefinida** de f se define como el conjunto de todas las primitivas de f y se denota por $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

7.1.1 Integración por partes

Se trata de elegir una parte del integrando como u y la parte restante como dv. Después se obtienen du y v y se aplica la siguiente fórmula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Lo más difícil de la integración por partes, es elegir la *u*. Para ello utilizaremos la regla de los ALPES. Se trata de elegir como *u*, lo que primero encontremos dentro de la integral en el orden siguiente:

Arcos (arctg, arcsen, …
Logaritmos
Potencias
Exponenciales
Sinusoidales (seno o coseno)

7.1.3 Integración de funciones racionales

Ahora vamos a ver cómo calculamos integrales racionales (cociente de dos polinomios) que son del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$. Debemos distinguir dos casos:

<u>*Caso I*</u> Cuando grado $P(x) \geq$ grado $Q(x)$

En este caso dividimos los dos polinomios, y nos da: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, donde $C(x)$ es el cociente y $r(x)$ el resto. Entonces la integral $\int C(x)\,dx$ es inmediata.

Veremos cómo resolver la integral $\int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx$ en el siguiente apartado.

Caso II Cuando grado $P(x) <$ grado $Q(x)$

En este caso se hallan las raíces del denominador $Q(x)$ y se descompone en fracciones simples, de esta forma, una vez calculados los coeficientes, cada fracción resulta ser una integral inmediata.

Veamos el caso más general: Sea $Q(x)$ un polinomio que tiene una raíz simple $x = a$, una raíz $x = b$ de multiplicidad r, dos raíces complejas conjugadas simples de la forma $x = a \pm bi$ y dos raíces complejas conjugadas de multiplicidad s de la forma $x = c \pm di$ entonces la descomposición en fracciones simples queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \left[\frac{B_1}{(x-b)^r} + \frac{B_2}{(x-b)^{r-1}} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)}\right] + \left[\frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{C_1x+D_1}{\left[(x-c)^2+d^2\right]^s} + \frac{C_2x+D_2}{\left[(x-c)^2+d^2\right]^{s-1}} + \dots + \frac{C_sx+D_s}{\left[(x-c)^2+d^2\right]}\right]$$

Pongamos un ejemplo numérico, supongamos $Q(x)$ un polinomio que tiene $x = 7$ una raíz simple, $x = 5$ una raíz cuaduple (multiplicidad cuatro), $x = 3 \pm 4i$ dos raíces complejas conjugadas simples y $x = 2 \pm i$ dos raíces complejas conjugadas triples. En este caso la descomposición en fracciones simples queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-7} + \left[\frac{B_4}{(x-5)^4} + \frac{B_3}{(x-5)^3} + \frac{B_2}{(x-5)^2} + \frac{B_1}{(x-5)}\right] + \left[\frac{Mx+N}{(x-3)^2+4^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{C_1x+D_1}{\left[(x-2)^2+1^2\right]^3} + \frac{C_2x+D_2}{\left[(x-2)^2+1^2\right]^2} + \frac{C_sx+D_s}{\left[(x-2)^2+1^2\right]}\right]$$

Una vez hecha la descomposición en fracciones simples, las integrales resultantes para las fracciones de raíces reales simples, reales multiples y complejas simples, son casi inmediatas:

Tipo logarítmico: $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = K\ln|x-a| + c$$

Tipo potencial: $$\int \frac{B}{(x-b)^r}\,dx = -\frac{K}{(r-1)(x-b)^{r-1}} + c$$

Tipo neperiano-arcotangente:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}\,dx = \frac{M}{2}\ln\left[(x-p)^2+q^2\right] + \frac{Mp+N}{q}\operatorname{arctg}\frac{x-p}{q} + c$$

Para las fracciones resultantes de raíces complejas multiples no sale una integral inmediata. En este caso (el de raíces complejas multiples) es preferible utilizar un método alternativo llamado **método de Hermite** que permite simplificar los cálculos. Este método queda fuera de los objetivos del curso.

7.1.4 Integración de funciones trigonométricas

Productos de senos y cosenos

Son las integrales de la forma:

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx\,,\ \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx,\ \int \cos mx \cos nx\, dx$$

Se usan las fórmulas:

$$2\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

$$2\cos A \cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$

$$2\operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)$$

Mediante estas fórmulas, se transforma el producto en suma, y se calculan las integrales que resultan que son inmediatas.

Potencias pares e impares de senos y cosenos

Las integrales $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ y $\int \cos^n x\, dx$ se pueden resolver mediante métodos elementales hasta $n = 5$. A partir de $n = 5$ se resuelven mediante fórmulas de reducción.

Funciones racionales de senos y cosenos

Las integrales racionales de senos y cosenos $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se convierte en una integral racional con alguno de los siguientes cambios de variable:

Caso general: $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}\,,\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Casos particulares:

1) Si R es impar en $\cos x$: $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, -\cos x)$

$$\operatorname{sen} x = t \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}$$

2) Si R es impar en $\operatorname{sen} x$: $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(-\operatorname{sen} x, \cos x)$

$$\cos x = t \quad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2}$$

3) Si R es par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$: $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = R(-\operatorname{sen} x, -\cos x)$

$$\operatorname{tg} x = t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

7.1.5 Integración de funciones irracionales

1) **Integrales del tipo:** $\int R(x^{p/q}, x^{r/s}, \dots , x^{u/v})\, dx$, con $\frac{p}{q},\dots,\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$

Se resuelven mediante el cambio de variable $x = t^{\mu}$ donde $\mu = \text{mcm}(q, s, \dots , v)$.

Este es un caso general del anterior

2) **Integrales del tipo:**

$$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{u/v}\right)dx, \quad \text{con } \frac{p}{q},\dots \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$$

Se resuelven mediante el cambio de variable $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\mu}$ donde $\mu = \text{mcm}(q, s, \dots , v)$.

3) Binomias: $\int x^r (a+bx^s)^p\, dx$ con r, s, $p \in \mathbb{Q}$

Lo primero que se hace es el cambio $t = x^s$ con lo que se reducen a forma simplificada:

$$\int t^q (a+bt)^p\, dt \quad \text{con} \quad p,q \in \mathbb{Q}$$

Si no estamos en ninguno de estos tres casos entonces la expresión no es integrable elementalmente

Ahora aparecen tres posibles casos:

1º) Si $p \in \mathbb{Z}$ y $q = h/k \Rightarrow u = t^{1/k}$

2º) Si $q \in \mathbb{Z}$ y $p = h/k \Rightarrow u = (a+bt)^{1/k}$

3º) Si $p+q \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = 1/t$ y se reduce al caso 2º)

4) **Irracionales cuadráticos:** $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

Cambios de variable:

- Si $a > 0$ $\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$

- Si $c > 0$ $\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$

- Si $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ $\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$

- Si $b = 0$, existen tres subcasos:

$\int R\left(x, \sqrt{-ax^2+c}\right) dx \qquad x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \operatorname{sen} t \Rightarrow \sqrt{-ax^2+c} = c\cos t$

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2-c}\right) dx \qquad x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \sec t \Rightarrow \sqrt{ax^2-c} = c\operatorname{tg} t$

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+c}\right) dx \qquad x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \operatorname{tg} t \Rightarrow \sqrt{ax^2+c} = c\sec t$

7.2 Integración definida. Integral Riemann

7.2.1 Definición de función integrable Riemann

- Dado un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, llamamos **partición** del intervalo a una sucesión de puntos que cumplen: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = b$ y la notamos como $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Al conjunto de todas las posibles particiones del intervalo [a, b] se le denomina $\mathcal{P}([a, b])$.

- Llamamos **suma superior** de la función f en el intervalo $[a, b]$, al resultado de la suma: $s(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$, donde M_i es el supremo de f en el intervalo (x_{i-1}, x_i)

- Llamamos **suma inferior** de la función f en el intervalo $[a, b]$, al resultado de la suma: $s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$, donde m_i es el ínfimo de f en el intervalo (x_{i-1}, x_i)

- Llamamos **integral superior** de la función f en el intervalo $[a, b]$, a:

$$\overline{\int_a^b} f = \sup \{ s(P) \ / \ P \in \mathcal{P}([a, b]) \}$$

- Llamamos **integral inferior** de la función f en el intervalo $[a, b]$, a:

$$\underline{\int_a^b} f = \inf \{ S(P) \ / \ P \in \mathcal{P}([a, b]) \}$$

MUY IMPORTANTE:
Que una función sea integrable Riemman no significa que exista primitiva

- Si f es una función acotada en el intervalo $[a, b]$, se dice que es **integrable Riemann** si sus integrales inferior y superior coinciden, en ese caso las representamos por $\int_a^b f$

- Al conjunto de las funciones integrables Riemann en el intervalo $[a, b]$ lo denotaremos por $\mathcal{R}([a, b])$.

7.2.2 Propiedades de las funciones integrables

A continuación se enumeran algunas propiedades importantes de las funciones integrables:

Habitualmente se utilizan estos tres teoremas para ver si una función es integrable

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada en $[a, b]$ que tiene un número finito de discontinuidades, entonces f es integrable en $[a, b]$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones integrables en $[a, b]$, entonces $f \pm g$ es integrable en $[a, b]$, y se cumple $\int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$.

- Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ son funciones integrables en $[a, b]$, entonces $f\cdot g$ es integrable en $[a, b]$.

- Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, es una función integrable en $[a, b]$, y $\lambda\in\mathbb{R}$ entonces λf es integrable en $[a, b]$, y $\int_a^b \lambda f = \lambda\int_a^b f$.

- Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ son funciones integrables en $[a, b]$, tales que $f(x)\le g(x)\ \ \forall\, x\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f\le\int_a^b g$ (Monotonía de la integral).

- Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, es una función integrable en $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a, b]$, y $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

7.2.3 Teoremas importantes

Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces podemos definir la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice lo siguiente:

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es una función derivable y su derivada es: $F'(x)=f(x)$.

Regla de Barrow

Si f es una función integrable en $[a, b]$, que admite primitiva F en el mismo intervalo, entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

También se llama Teorema del valor medio del Cálculo Integral

Teorema de la Media

Si f es integrable y continua en $[a, b]$ entonces existe un punto $\xi\in\left[a,\,b\right]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

7.2.4 Cálculo práctico de integrales definidas

Interpretación geométrica de la integral Riemman

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)\geq 0$. El valor $A = \int_a^b f(x)\,dx$ representa el área A bajo la curva $f(x)$ y por encima del eje x entre las abcisas $x=a$ y $x=b$.

A continuación se enumeran los casos más frecuentes en el cálculo de áreas planas, volúmenes y áreas de cuerpos de revolución y longitudes de curvas. Todos ellos se resuelven mediante el uso de la integral Riemann. Cualquier otro caso que pueda aparecer se reduce, normalmente, a alguno de los que aquí se enumeran.

Cálculo de áreas planas

Este caso es generalizable a más intervalos

- Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. si $f(x)\geq 0$ entre $[a,c]$ y $f(x)\leq 0$ entre $[c,b]$ entonces el área entre la función y el eje x viene dada por:

$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

Fíjate que en este caso no hace falta exigir que las funciones sean positivas

- Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ siendo $f(x)\geq g(x)$ entre [a, b] entonces el área entre ambas curvas en $[a,b]$ viene dada por la siguiente expresión:

$$A = \int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\,dx$$

Este caso es generalizable a más intervalos

- Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ siendo $f(x)\geq g(x)$ entre $[a,c]$ y $g(x)\geq f(x)$ entre $[c,b]$ entonces el área entre ambas curvas en $[a,b]$ viene dada por:

$$A = \int_a^c \left(f(x)-g(x)\right)\,dx + \int_c^b \left(g(x)-f(x)\right)\,dx$$

- Sea una función expresada en coordenadas polares $\rho = f(\theta)$ entonces el área situada entre esta curva y las rectas que pasan por el origen con pendientes θ_1 y θ_2 viene dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\,d\theta$$

Los valores t_1 y t_2 se obtienen resolviendo las siguientes ecuaciones:

$a = f(t)$

$b = g(t)$

- Sea la parametrización de la curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}$ siendo $\gamma(t)=(x=f(t), y=g(t))$ entonces el área entre la curva y el eje x viene dada por:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,f'(t)\,dt$$

TABLA DE DERIVADAS

$$\left(f^a\right)' = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$$

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$(\text{Ln } f)' = \frac{f'}{f}$$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$

$$\left(\log_a f\right)' = \frac{f'}{f} \cdot \log_a e$$

$$\left(e^f\right)' = e^f \cdot f'$$

$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

$$\left(a^f\right)' = a^f \cdot \ln a \cdot f'$$

$$(f^g)' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot \ln f \cdot g'$$

$(u^v)' = v \cdot$

$$(\text{sen } f)' = f' \cdot \cos f$$

$$(\cos f)' = -f' \cdot \text{sen } f$$

$$(\text{tg } f)' = \left(1 + \text{tg}^2 f\right) \cdot f' = \sec^2 f \cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f}$$

$$(\text{cotg } f)' = \left(-1 - \text{cotg}^2 f\right) \cdot f' = -f' \cdot \text{cosec}^2 f = \frac{-f'}{\text{sen}^2 f}$$

$$(\sec f)' = f' \cdot \sec f \cdot \text{tg } f$$

$$(\text{cosec } f)' = -f' \cdot \text{cosec } f \cdot \text{cotg } f$$

$$(\text{arcsen } f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$$

$$(\arccos f)' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$$

$$(\text{arctg } f)' = \frac{f'}{1+f^2}$$

$$(\text{sh } f)' = f' \cdot \text{ch } f$$

$$(\text{ch } f)' = f' \cdot \text{sh } f$$

$$(\text{th } f)' = f' \cdot \text{sech}^2 f$$

$$(\text{coth } f)' = -f' \cdot \text{cosech}^2 f$$

$$(\text{sech } f)' = -f' \cdot \text{sech } f \cdot \text{th } f$$

$$(\text{cosech } f)' = -f' \cdot \text{cosech } f \cdot \text{coth } f$$

$$(\text{argsh } f)' = \frac{f'}{\sqrt{f^2+1}}$$

$$(\text{argch } f)' = \frac{\pm f'}{\sqrt{f^2-1}}$$

$$(\text{argth } f)' = \frac{f'}{1-f^2}$$

$$(\text{arg coth } f)' = \frac{f'}{1-f^2}$$

$$(\text{arg sech } f)' = \frac{\mp f'}{f\sqrt{1-f^2}}$$

$$(\text{arg cosech } f)' = \frac{\mp f'}{f\sqrt{1+f^2}}$$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int f^{a}\cdot f'\,dx=\frac{f^{a+1}}{a+1}$$

$$\int \frac{f'}{f}\,dx=\operatorname{Ln}|f|$$

$$\int e^{f}\cdot f'\,dx=e^{f}$$

$$\int a^{f}\cdot f'\,dx=\frac{a^{f}}{\operatorname{Ln} a}$$

$$\int \cos f\cdot f'\,dx=\operatorname{sen} f$$

$$\int \operatorname{sen} f\cdot f'\,dx=-\cos f$$

$$\int \sec^{2} f\cdot f'\,dx=\operatorname{tg} f$$

$$\int \left(1+\operatorname{tg}^{2} f\right)\cdot f'\,dx=\operatorname{tg} f$$

$$\int \frac{f'}{\cos^{2} f}\,dx=\operatorname{tg} f$$

$$\int \operatorname{cosec}^{2} f\cdot f'\,dx=-\operatorname{cotg} f$$

$$\int \left(1+\operatorname{cotg}^{2} f\right)\cdot f'\,dx=-\operatorname{cotg} f$$

$$\int \frac{f'}{\operatorname{sen}^{2} f}\,dx=-\operatorname{cotg} f$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^{2}}}\,dx=\operatorname{arcsen} f$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{a^{2}-f^{2}}}\,dx=\operatorname{arcsen}\frac{f}{a}$$

$$\int \frac{f'}{1+f^{2}}\,dx=\operatorname{arctg} f$$

$$\int \frac{f'}{a^{2}+f^{2}}\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{f}{a}$$

$$\int \operatorname{sh} f\cdot f'\,dx=\operatorname{ch} f$$

$$\int \operatorname{ch} f\cdot f'\,dx=\operatorname{sh} f$$

$$\int \operatorname{th} f\cdot f'\,dx=\ln(\operatorname{ch} f)$$

$$\int \operatorname{sech} f\cdot f'\,dx=\operatorname{argsh}(\operatorname{th} f)$$

$$\int \operatorname{cosech} f\cdot f'\,dx=\ln\left(\operatorname{th}\frac{f}{2}\right)$$

$$\int \operatorname{sech}^{2} f\cdot f'\,dx=\operatorname{th} f$$

$$\int \operatorname{cosech} f\cdot f'\,dx=-\operatorname{coth} f$$

$$\int \operatorname{th}^{2} f\cdot f'\,dx=f-\operatorname{th} f$$

$$\int \frac{f'}{f^{2}-a^{2}}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{f-a}{f+a}\right)$$

$$\int \frac{f'}{a^{2}-f^{2}}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+f}{a-f}\right)$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{a^{2}-f^{2}}}\,dx=\operatorname{arcsen}\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{a^{2}+f^{2}}}\,dx=\ln\left(f+\sqrt{f^{2}+a^{2}}\right)$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f^{2}-a^{2}}}\,dx=\ln\left(f+\sqrt{f^{2}-a^{2}}\right)$$

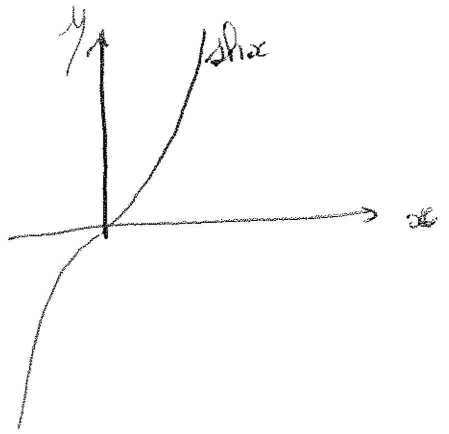
$$\int \frac{f'}{f\sqrt{f^{2}-a^{2}}}\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{f}{a}\right|$$

$$\int \frac{f'}{f\sqrt{a^{2}+f^{2}}}\,dx=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{f^{2}+a^{2}}}{f}\right)$$

$$\int \frac{f'}{f\sqrt{a^{2}-f^{2}}}\,dx=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^{2}-f^{2}}}{f}\right)$$

Funciones hyperbolicas

$$\text{senh}x = \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ continua y derivable



$\text{senh}(0) = 0$

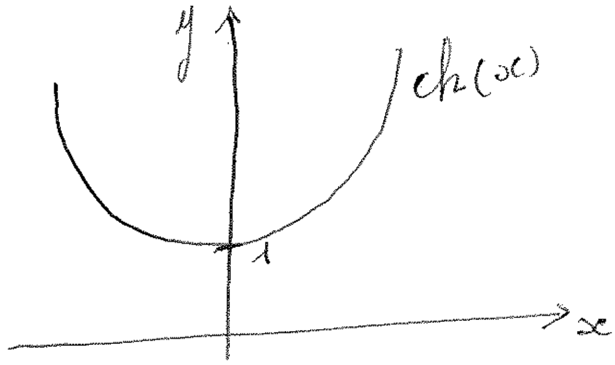
$\lim_{x \to -\infty} \text{sh}x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \text{sh}x = +\infty$

$\Rightarrow$ senhx no es una función acotada

$(\text{senh}(x))' = \cosh(x)$

$$\cosh x = \text{ch}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$\cosh(0) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} \text{ch}\, x = +\infty$

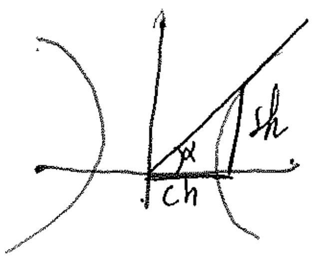
$\lim_{x \to +\infty} \text{ch}\, x = +\infty$

$(\cosh x)' = \text{senh}(x)$

Curiosidades

1) $\boxed{\text{hyp}}$ $\boxed{\cos}$ calculadora

2)



3) La curva del coshx se llama catenaria

TEMA 9: SUCESIONES DE NÚMEROS

9.1 Conceptos generales

9.1.1 Definiciones

De manera informal podemos definir sucesión como un conjunto infinitos números reales en un orden dado

- Llamamos **sucesión** al recorrido de una aplicación entre $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- Normalmente la denotamos como $(x_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

- Decimos que una sucesión (x_n) **converge** cuando:

$$\exists l \in \mathbb{R} .. \forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_o \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |x_n - l| < \varepsilon$$

- Cuando una sucesión (x_n) converja lo expresaremos simbólicamente :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n} x_n = \lim x_n = l \qquad \text{ó} \qquad (x_n) \to l$$

- Si una sucesión (x_n) no cumple la definición anterior diremos que **no converge.**
Una sucesión no convergente puede serlo bien por que sus términos tienden a infi-nito o bien por que sus términos oscilan indefinidamente.
De forma esquemática se puede ver de la siguiente manera:

$$x_n \begin{cases} x_n \to l \in \mathbb{R} & \text{convergente} \\ \text{no convergente} & \begin{cases} x_n \to \pm\infty & \text{divergente} \\ x_n \to \nexists & \text{oscilante} \end{cases} \end{cases}$$

- Decimos que una sucesión (x_n) está **acotada** cuando el conjunto de puntos que forman la sucesión es un conjunto acotado.

- Decimos que (x_n) es **monótona creciente** si $x_{n+1} \geq x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Decimos que (x_n) es **monótona decreciente** si $x_{n+1} \leq x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Decimos que (x_n) es **estrictamente creciente** si $x_{n+1} > x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Decimos que (x_n) es **estrictamente decreciente** si $x_{n+1} < x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Decimos que dos sucesiones (x_n) y (y_n) son **equivalentes** cuando :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$$

Normalmente los infinitésimos se notan como ε_n

- Decimos que una sucesión ε_n es un **infinitésimo** cuando su límite es cero:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

También se puede decir que "x_n es despreciable frente a y_n"

- Notación "o" pequeña de Landau
Decimos que x_n es "o" pequeña de y_n cuando:

$$x_n = o(y_n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

9.1.2 Propiedades y Teoremas

- Si una sucesión es convergente entonces su límite es único.

- Toda sucesión está formada por infinitos términos. Sin embargo, puede estar formada por un número finito o infinito de puntos.

Ojo:
El recíproco no es cierto en general

- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(n) = l$$

- Una sucesión (x_n) es convergente si y sólo si todo entorno de su límite contiene todos los términos de la sucesión salvo un número finito de ellos.

- Si (x_n) es convergente $\Rightarrow$ (x_n) es acotada.

- Si una sucesión (x_n) es monótona y acotada $\Rightarrow$ (x_n) es convergente.

- Sean dos sucesiones (x_n) e (y_n). Se cumple que:

Esta regla se suele llamar "cero por acotado"

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to 0 \\ y_n \text{ acotada} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_n y_n \to 0$$

Esta regla permite calcular el límite de una sucesión a partir de otras dos sucesiones cuyo límite es conocido.

La sucesión z_n se llama **mayorante** y la sucesión x_n se llama **minorante**

- Teorema del Sandwich (del Emparedado)

  Sean tres sucesiones x_n , y_n , z_n tal que $x_n \le y_n \le z_n$, $\forall n \ge n_0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = l$$

  Observaciones

  - Como se puede observar no es necesario que la sucesión y_n quede "emparedada" entre x_n y z_n desde los primeros términos. Basta que $x_n \le y_n \le z_n$ se cumpla a partir de un determinado n_0.

  - Es fundamental que las sucesiones x_n y z_n tengan el mismo límite ya que si no puede no cumplirse la tesis. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to l' \\ z_n \to l \\ x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n \ge n_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_n \to ?$$

9.2 Métodos prácticos para calcular límites de sucesiones

No olvides nunca este paso. Algunas veces el límite no está indeterminado y basta con "pasar al límite" para obtener el resultado

- Paso al límite en el término general de la sucesión

  Lo primero que debemos hacer es "pasar al límite", es decir, sustituir formalmente las n por el símbolo de infinito para obtener un resultado. A la hora de realizar este paso son de utilidad las propiedades básicas enunciadas en el siguiente punto.

- Operaciones elementales con límites de sucesiones

  Sean las sucesiones (x_n), (y_n) tales que $\lim x_n = a$ y $\lim y_n = b$:

  1. $\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = a + b$
  2. $\lim (x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = a - b$
  3. $\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = ab$
  4. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n} = \dfrac{a}{b}$ [siendo $b \neq 0$]
  5. $\lim (x_n^{y_n}) = \lim x_n^{\lim y_n} = a^b$
  6. $\lim (\ln x_n) = \ln(\lim x_n) = \ln a$
  7. $\lim (\cos x_n) = \cos(\lim x_n) = \cos a$
  8. $\lim (\operatorname{sen} x_n) = \operatorname{sen}(\lim x_n) = \operatorname{sen} a$

- Tipos de indeterminación:

  Los límites de los cuales no podemos saber el resultado de antemano se llaman indeterminaciones y existen siete tipos:

  1. $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad x_n - y_n \to \infty - \infty$
  2. $x_n \to 0$, $y_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad x_n \cdot y_n \to 0 \cdot \infty$
  3. $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{\infty}{\infty}$
  4. $x_n \to 0$, $y_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{0}{0}$
  5. $x_n \to 0$, $y_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad x_n^{y_n} \to 0^0$
  6. $x_n \to \infty$, $y_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad x_n^{y_n} \to \infty^0$
  7. $x_n \to 1$, $y_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad x_n^{y_n} \to 1^\infty$

De esta forma, una vez hecho el "paso al límite" y simplificado el resultado siempre tenemos que estar en uno de los cuatro siguientes casos:

- El límite nos da un número real.
- El límite nos da infinito.
- El límite no existe (la sucesión es oscilante)
- El límite queda indeterminado (aparece una de las siete indeterminaciones).

En los tres primeros casos el límite está resuelto. En el último caso, aquel en el que aparece una indeterminación, probamos con alguno de los siguientes métodos.

- El número e

El límite siguiente define al número e: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

El número e también se puede expresar de las siguientes formas. Sean ε_n un infinitésimo y $x_n \to \infty$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\varepsilon_n\right)^{1/\varepsilon_n} = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

- Para la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en un cociente de polinomios se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p + a_1n^{p-1}+\ldots+a_p}{b_0n^q + b_1n^{q-1}+\ldots+b_q} = \begin{cases} 0 & si \quad p<q \\ \frac{a_0}{b_0} & si \quad p=q \\ \infty & si \quad p>q \end{cases}$$

IMPORTANTE:

$\boxed{a=e^{\ln a}, a\in\mathbb{R}}$

- Para las indeterminaciones ∞^0, 0^0, 1^∞ siempre se hace:

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} \Rightarrow l = \lim_{n\to\infty} e^{\ln x_n^{y_n}} = \lim_{n\to\infty} e^{y_n \ln x_n} = e^{\lim_{n\to\infty} y_n \ln x_n} = e^\lambda$$

Ojo: esto sólo es válido para la indeterminación uno elevado a infinito

- Para la indeterminación 1^∞ también es útil aplicar:

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} \Rightarrow l = e^{\lim_{n\to\infty} y_n(x_n-1)} = e^\lambda$$

Importante:
No se puede aplicar la regla de L'Hopital en límites de sucesiones.
La regla de Stolz es el equivalente de la regla de L'Hopital para sucesiones

- Criterio de Stolz:

Sea $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ donde y_n es creciente y divergente. Se cumple que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l$$

Todos estos criterios se demuestran a partir del criterio de Stolz

- Consecuencias del criterio de Stolz:

-Criterio de la media aritmética: $\lim_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = l$

-Criterio de la media geométrica: $\lim_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} = l$

-Criterio del cociente: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = l$

Recuerda: Las equivalencias no se pueden aplicar en sumas ni en restas

- Sustitución de equivalencias en producto o cociente (nunca utilizar en sumas/restas):

Los infinitésimos equivalentes más usuales son para $\varepsilon_n \to 0$:

$$\operatorname{sen} \varepsilon_n \sim \operatorname{arc\,sen} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n \qquad \operatorname{Sh} \varepsilon_n \sim \operatorname{Arg\,Sh} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_n \sim \operatorname{arc\,tg} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n \qquad \operatorname{Th} \varepsilon_n \sim \operatorname{Arg\,Th} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$$

$$1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{\varepsilon_n^2}{2} \qquad \operatorname{Ch} \varepsilon_n - 1 \sim \frac{\varepsilon_n^2}{2}$$

$$e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \qquad a^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \cdot \mathrm{L}a \quad (a > 0)$$

$$(1+\varepsilon_n)^m - 1 \sim \varepsilon_n \cdot m$$

$$\mathrm{L}(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n \quad \text{también} \quad \mathrm{L}u_n \sim u_n - 1 \qquad u_n \to 1$$

También hay equivalencias cuando $n \to \infty$:

La equivalencia de Stirling es exclusiva de sucesiones. No existe para funciones

$$a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_0 \sim a_p n^p$$

$$\mathrm{L}(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p) \sim \mathrm{L}(n^p) = p\mathrm{L}(n)$$

$$n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \qquad \text{(Fórmula de Stirling)}$$

- Progresión geométrica

Definimos la **progresión geométrica** como $(x_n) = r^n$ donde r es la **razón** de la sucesión. Dependiendo del valor de la razón el límite toma los siguientes valores:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad r > 1 \\ 1 & \text{si} \quad r = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |r| < 1 \\ \pm 1 & \text{si} \quad r = -1 \\ \pm\infty & \text{si} \quad r < -1 \end{cases}$$

- Progresión aritmética

La **progresión aritmética** se define como $(x_n) = a + nd$ donde la constante d recibe el nombre de **diferencia.**

La progresión aritmética es siempre divergente, o sea el límite de una progresión aritmética es siempre infinito.

- Orden de los infinitos. Cuando $n \to \infty$ se cumple que:

$$\mathrm{L}n < n^a \ (a>0) < b^n \ (b>1) < n! < n^n$$

Se utilizan cuando aparecen en cociente, por ejemplo:

9.3 Subsucesiones. Límites subsecuenciales

límites de la subsucesiones $\Rightarrow$ límite de oscilación

Definiciones

- Llamamos **subsucesión** de una sucesión (x_n) a toda sucesión formada por términos de la dada, eligiendo los subíndices en orden estrictamente creciente.
- Se denominan **límites subsecuenciales** a los límites de cada subsucesión de una sucesión dada.
- Si una sucesión (x_n) presenta dos o más límites subsecuenciales diferentes entonces la sucesión no converge.

Sea R, $(x_n) \subset \mathbb{R}$ y S el conjunto de los límites subsecuenciales de (x_n).

- Denominamos **límite superior** de (x_n) a: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup\{S\}$.
- Denominamos **límite inferior** de (x_n) a: $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\{S\}$.

Propiedades

- (x_n) es convergente $\Leftrightarrow$ $\exists \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$
- Toda sucesión monótona (creciente o decreciente) que contiene una subsucesión convergente es convergente.
- Sea (x_n) una sucesión tal que $\lim x_{2n+1} = a$, $\lim x_{2n} = b$ y $a < b$. Entonces se cumple que:

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim x_{2n+1} = a$$

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim x_{2n} = b$$

TEMA 10: SERIES DE NÚMEROS

10.1 Conceptos generales

- Sea (a_n) una sucesión de números reales. Formemos a partir de ella otra sucesión (s_n) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

  Dicha sucesión de sumas parciales así formada recibe el nombre de **serie** asociada a la sucesión (a_n).

- La **suma enésima,** S_n se define como la suma de los n primeros elementos de (a_n):

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

- El **resto enésimo,** R_n es la suma de los infinitos elementos de (a_n) desde el elemento $n+1$ hasta el "último":

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$$

- La **suma** de la serie, S es la suma de S_n y R_n .Normalmente se representa $S = \sum_n^{\infty} a_n$.

$$S = \sum_n^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{S_n} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots}_{R_n}$$

- La serie es **convergente** $\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

- Condición necesaria de convergencia:

Esta condición muy importante

$$\text{Si } \sum_n^{\infty} a_n \text{ es convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

  En la práctica utilizaremos el contrarrecíproco, de forma que:

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_n^{\infty} a_n \text{ es divergente}$$

- El carácter de una serie no cambia aunque suprimamos un número finito de términos.

- Las series se pueden dividir en dos grandes grupos:
  - Series de términos positivos (no negativos).
  - Series de términos cualesquiera (positivos y negativos).

Esquema práctico para el estudio de una serie de términos positivos

IMPORTANTE: Las series de términos positivos convergen o divergen, nunca oscilan.

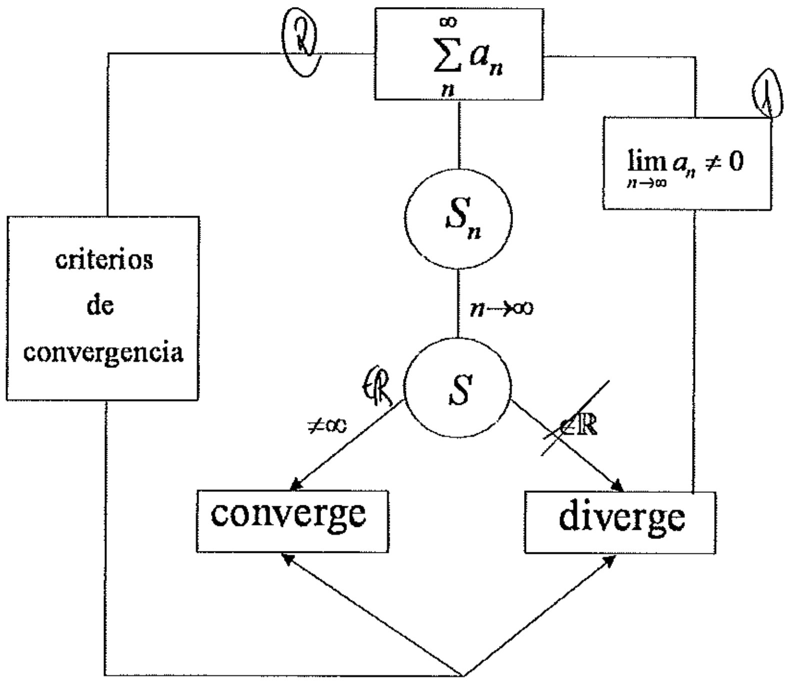
Dada una serie de términos positivos $\sum_{n}^{\infty} a_n$ normalmente perseguimos dos objetivos:

- Estudiar su carácter (convergente o divergente).
- Calcular su suma, sólo en caso de ser convergente.

El siguiente esquema sintetiza los procedimientos habituales a seguir:

Atención: No confundir nunca el termino general de la serie x_n con la suma enésima de la serie S_n

Los cuatro primeros se suelen llamar criterios automáticos



Lo más habitual si sólo queremos obtener el carácter de la serie (convergente o divergente) es utilizar directamente un criterio de convergencia (ver página siguiente). Estos criterios nos dirán directamente si una serie es convergente o divergente. El único inconveniente es que, en el caso es que la serie sea convergente, los criterios no nos dicen cuánto vale la suma (es decir, nos dicen que la suma es finita pero no nos dicen cual es su valor).

Otra posibilidad consiste en intentar sumar la serie directamente, el problema aquí es que no todas las series son fáciles de sumar (¡aunque sean convergentes!). En las siguientes páginas aprenderemos métodos para sumar algunas series que serán las que nos pidan en los ejercicios. En todo caso obtener la suma de una serie siempre se hace en dos pasos: primero se calcula la suma enésima, es decir, la suma de los n primeros términos. Tras ello se procede a hacer el límite de la suma enésima cuando n tiende a infinito.

Finalmente existe un tercer procedimiento para ver directamente si una serie es divergente. Consiste comprobar la condición necesaria de convergencia de la página anterior: si el límite cuando n tiende a infinito del término general de la serie no tiende a cero la serie es divergente siempre. El problema aquí es que si el límite sale cero no podemos asegurar nada sobre el carácter de la serie.

10.2 Criterios de convergencia de series de términos positivos

Estos cuatro primeros criterios de llaman automáticos

- Criterio del cociente. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k \begin{cases} \text{Si } k<1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } k>1 \text{ la serie diverge} \\ \text{Si } k=1 \text{ caso dudoso} \end{cases}$

- Criterio de la raíz. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k \begin{cases} \text{Si } k<1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } k>1 \text{ la serie diverge} \\ \text{Si } k=1 \text{ caso dudoso} \end{cases}$

Lo utilizamos si el criterio del cociente falla

- Criterio de Raabe. $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = k \begin{cases} \text{Si } k>1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } k<1 \text{ la serie diverge} \\ \text{Si } k=1 \text{ caso dudoso} \end{cases}$

- Criterio del logaritmo $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = k \begin{cases} \text{Si } k>1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } k<1 \text{ la serie diverge} \\ \text{Si } k=1 \text{ caso dudoso} \end{cases}$

- Primer criterio de comparación.

$$\text{Si } a_n \le b_n,\ \forall n > m \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \sum b_n \text{ es convergente } \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ \text{Si } \sum a_n \text{ es divergente } \Rightarrow \sum b_n \text{ es divergente} \end{cases}$$

- Segundo criterio de comparación.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in R \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } l \ne 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen el mismo caracter} \\ \text{Si } l = 0 \text{ y } \sum b_n \text{ es convergente } \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \end{cases}$$

Caso particular del segundo criterio de comparación

- Criterio de la armónica generalizada.

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot a_n = k_{\ne\infty}^{\ne 0} \begin{cases} \text{Si } \alpha > 1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } \alpha \le 1 \text{ la serie diverge} \end{cases}$$

- Criterio de condensación de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{tiene el mismo caracter que} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$$

10.3 Suma exacta de algunas series

La serie aritmética es siempre divergente

- Serie aritmética:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a+nd) \qquad S_n = \frac{a_0+a_n}{2}n \xrightarrow{n\to\infty} S = \infty$$

- Serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \qquad S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \xrightarrow{n\to\infty} S = \frac{1}{1-r} \qquad \text{si } |r| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \qquad S_n = \frac{r-r^{n+1}}{1-r} \xrightarrow{n\to\infty} S = \frac{r}{1-r} \qquad \text{si } |r| < 1$$

- Serie aritmético-geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a+nd)\, br^n \qquad \text{si } |r| < 1$$

$$S_n = \left(\frac{a}{1-r} + d\,\frac{r-r^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{(a+nd)\,r^{n+1}}{1-r}\right)b \xrightarrow{n\to\infty} S = \left(\frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}\right)b$$

- Serie hipergeométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{es hipergeométrica} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$$

$$S_n = \frac{a_1\gamma - (\alpha n+\beta)a_n}{\gamma-\alpha-\beta} \xrightarrow{n\to\infty} S = \frac{a_1\gamma}{\gamma-\alpha-\beta} \qquad \text{si } \alpha > 0, \quad \alpha+\beta<\gamma$$

- Serie telescópica:

Todas estas series son telescópicas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n+1}) \qquad S_n = x_1 - x_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} S = x_1 - \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$$

Nota: La serie telescópica también puede venir definida de las siguientes formas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n-1} - x_n) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$$

Se pueden utilizar para los criterios de comparación

10.4 Dos series patrón importantes

10.4.1 Serie geométrica

Se recomienda repasar los resultados sobre la progresión geométrica

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ se denomina **serie geométrica** de razón r. Vamos a estudiar su carácter calculando directamente su suma. Para ello vemos cuanto vale la suma de los n primeros términos:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 1 + r \\ S_2 &= 1 + r + r^2 \\ \dots & \quad \dots \\ S_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \\ rS_n &= r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n+1} \end{aligned}$$

Ahora restamos la suma enésima menos la suma enésima multiplicada por la razón

$$S_n - rS_n = 1 + r - r + r^2 - r^2 + r^3 - r^3 + \dots + r^n - r^n - r^{n+1}$$

$$(1-r)S_n = 1 - r^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \quad \Rightarrow \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}\right)$$

Por tanto, según el valor de la razón r el anterior límite toma los siguientes resultados:

1) Convergente y de suma $S = \dfrac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$
2) Divergente a $+\infty$ si $r \geq 1$
3) Oscilante entre 0 y 1 si $r = -1$
4) Oscilante entre $-\infty$ y $+\infty$ si $r < -1$

Estos resultados se basan en el comportamiento de la progresión geométrica según el valor de r

Si la serie geométrica empieza en $n = 1$ en lugar de $n = 0$ el carácter de la serie se mantiene pero la suma cuando $|r| < 1$ varía. Para calcular la nueva suma podemos proceder como hemos hecho más arriba o bien optar por lo que vamos a hacer a continuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \Rightarrow r^0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} - 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$$

10.4.2 Serie armónica generalizada

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ se denomina **serie armónica generalizada** y su carácter según el valor de α lo admitiremos sin demostración:

Para $\alpha = 1$ obtenemos la conocida serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 1 & \text{convergente (no se sabe el valor de la suma exacta)} \\ \alpha \leq 1 & \text{divergente} \end{cases}$$

10.5 Series de términos cualesquiera (positivos y negativos)

10.5.1 Conceptos generales

Decimos que una **serie es de términos cualesquiera** si contiene infinitos términos positi-vos e infinitos términos negativos.

Si la serie sólo contiene términos negativos sacaremos el signo menos factor común fuera del sumatorio y nos queda una serie de términos positivos.

Si la serie presenta un número finito de términos negativos e infinitos términos positivos entonces suprimiremos los negativos y nos queda una serie de términos positivos.

Si la serie presenta un número finito de términos positivos e infinitos términos negativos entonces suprimiremos los positivos, sacamos factor común el signo menos y nos vuelve a quedar una serie de términos positivos.

Sea $\sum x_n$ una serie de términos cualesquiera (positivos y negativos), entonces siempre podemos expresarla como dos series, una que agrupa los términos positivos $\sum x_n'$ y otra que agrupa los términos negativos $\sum x_n''$:

$$\sum_n^{\infty} x_n = \sum_n^{\infty} x_n' - \sum_n^{\infty} x_n''$$

De esta forma, según el carácter de estas dos series, se pueden dar los siguientes casos:

$\sum_n^{\infty} x_n'$	$\sum_n^{\infty} x_n''$	$\sum_n^{\infty} x_n$
s' (converge)	s'' (converge)	$s'-s''$ (converge)
$+\infty$ (diverge)	s'' (converge)	$+\infty$ (diverge)
s' (converge)	$+\infty$ (diverge)	$-\infty$ (diverge)
$+\infty$ (diverge)	$+\infty$ (diverge)	¿? (conv., div. u oscila)

La nomenclatura que utilizaremos es la siguiente:

- Si $\sum x_n'$ y $\sum x_n''$ convergen (primer caso de la tabla) decimos que la serie **converge incondicionalmente.** Esto significa que la serie converge aunque reordenemos los términos de la serie de cualquier forma.

- Si $\sum x_n'$ diverge o $\sum x_n''$ diverge (segundo y tercer caso de la tabla) diremos que la serie **diverge incondicionalmente**: esto significa que la serie diverge aunque reordene-mos los términos de la serie.

- Si las dos series $\sum x_n'$ y $\sum x_n''$ divergen la serie tiene carácter **condicional**: esto signi-fica que la serie converge o diverge dependiendo de cómo ordenemos los términos de la misma. En este caso puede cambiar hasta el valor de la suma de la serie dependiendo de cómo ordenemos los términos.

10.5.2 Convergencia absoluta

Definimos la convergencia absoluta de una serie de términos cualesquiera de la siguiente forma:

$$\sum_{n}^{\infty} a_n \text{ es } \textbf{absolutamente convergente} \iff \sum_{n}^{\infty} |a_n| \text{ es convergente}$$

por tanto:

$$\sum_{n}^{\infty} |a_n| \text{ diverge} \iff \sum_{n}^{\infty} a_n \text{ no converge absolutamente}$$

Propiedades de la convergencia absoluta:

- $\sum_{n}^{\infty} a_n$ converge absolutamente $\iff \sum_{n}^{\infty} a_n$ converge incondicionalmente
- $\sum_{n}^{\infty} a_n$ no converge absolut. $\iff \begin{cases} \text{La serie diverge incondicionalmente} \\ \text{La serie tiene caracter condicional} \end{cases}$

10.5.3 Caso particular: Series alternadas

Una serie **alternada** es de la forma $\sum_{n}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Para este tipo de series vale todo lo dicho para las series de términos cualesquiera (pues son un subconjunto de ellas). Pero además existe un criterio muy útil que sólo es válido para series alternadas.

Criterio de Leibnitz:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ |a_n| \geq |a_{n+1}| \end{array}\right\} \iff \sum_{n}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ converge}$$

Cálculo

Ejercicios de clase

TEMA 1: NÚMEROS REALES

Ejercicio 1

Dibujar las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$

b) $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2}$

d) $f(x) = |x+1| + |x-1|$

e) $f(x) = x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$

Estos ejemplos nos servirán para familiarizarnos con las funciones que contienen valor absoluto.

Las funciones que contienen valor absoluto siempre se convierten en funciones a trozos.

TEMA 2: NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $|z| = \left| \dfrac{(3+5i)(-2+i)}{(2+i)(10-6i)} \right|$ b) $w = \dfrac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}}$

a)
Primero simplificamos la expresión del numerador y del denominador:

$$z = \frac{(3+5i)(-2+i)}{(2+i)(10-6i)} = \frac{-6+3i-10i+5i^2}{20-12i+10i-6i^2} = \frac{-6-7i-5}{20-2i+6} = \frac{-11-7i}{26-2i}$$

Ahora dividimos ambos complejos. Como están en forma binómica para dividir multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$z = \frac{(-11-7i)\ (26+2i)}{(26-2i)\ (26+2i)} = \frac{-286\ \ -22i\ \ -182i\ \ -14i^2}{676+52i-52i-4i^2} = \frac{-286-204i+14}{676+4} =$$

$$= \frac{-272-204i}{680} = -\frac{272}{680} - \frac{204}{680}i = -0,4-0,3i$$

y ahora sólo falta calcular el módulo del complejo z:

$$|z| = \sqrt{(-0,4)^2+(-0,3)^2} = \sqrt{0,16+0,09} = \sqrt{0,25} = 0,5$$

Solución : $|z| = 0,5$

b)
La única forma de realizar los cálculos del enunciado es pasar los números complejos a forma polar:

$$w_1 = 1+i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \text{atan}(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

$$w_2 = i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \theta = \text{atan}(1/0) = \pi/2 \quad (90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow w_2 = 1_{\pi/2}$$

De esta forma la expresión queda:

Utilizamos la fórmula de De Moivre:

$$(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$$

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}} = \frac{\left(\sqrt{2}_{\pi/4}\right)^{100}}{1_0+(1_{\pi/2})^{100}} = \frac{\left(\sqrt{2}^{100}\right)_{100\cdot\pi/4}}{1_0+\left(1^{100}\right)_{100\cdot\pi/2}} = \frac{\left(2^{50}\right)_{25\pi}}{1_0+1_{50\pi}} =$$

$$= \frac{\left(2^{50}\right)_{\pi}}{1_0+1_0} = \frac{-2^{50}}{1+1} = -\frac{2^{50}}{2} = -2^{49}$$

Importante: hemos tenido en cuenta que

$25\pi = \pi$

$50\pi = 0$

Solución : $w = -2^{49}$

Ejercicio 2

Calcular las siguiente expresión: $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$

Lo primero que vamos a hacer es pasar los cuatro números complejos a forma polar:

$$z=\sqrt{3}-i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1}=2 \\ \theta = \operatorname{atan}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6 = 11\pi/6 \ \ (-30^\circ = 330^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow z = 2_{11\pi/6}$$

$$z=\sqrt{3}+i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1}=2 \\ \theta = \operatorname{atan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \ (30^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow z = 2_{\pi/6}$$

$$z=1+i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \operatorname{atan}(1/1) = \pi/4 \ \ (45^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

$$z=1-i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \operatorname{atan}(-1/1) = -\pi/4 = 7\pi/4 \ \ (-45^\circ = 315)\end{array}\right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{7\pi/4}$$

Ahora utilizamos la fórmula para dividir números complejos en forma polar que es:

Recuerda: $\frac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\theta'}$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}} = \left(\frac{2}{2}\right)_{11\pi/6-\pi/6} = 1_{10\pi/6} = 1_{5\pi/3} = 1_{300^\circ}$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)_{\pi/4-7\pi/4} = 1_{-6\pi/4} = 1_{2\pi/4} = 1_{\pi/2} = 1_{90^\circ}$$

ahora utilizamos la fórmula de De Moivre para calcular las potencias:

Recuerda, la Fórmula de De Moivre es: $(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 = \left(\frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}}\right)^4 = \left(1_{5\pi/3}\right)^4 = (1^4)_{4\cdot 5\pi/3} = 1_{20\pi/3} = 1_{2\pi/3} = 1_{120^\circ}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}}\right)^5 = \left(1_{\pi/2}\right)^5 = (1^5)_{5\cdot\pi/2} = 1_{5\pi/2} = 1_{\pi/2} = 1_{90^\circ}$$

de forma que sustituyendo todo nos queda:

Recuerda: $\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} = (\rho\cdot\rho')_{\theta+\theta'}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}}\right)^5 = \left(1_{5\pi/3}\right)^4 \cdot \left(1_{\pi/2}\right)^5 = 1_{2\pi/3}\cdot 1_{\pi/2} =$$

$$= (1\cdot 1)_{\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}} = 1_{\frac{4\pi+3\pi}{6}} = 1_{\frac{7\pi}{6}} = 1_{210^\circ}$$

Por último, si queremos, podemos pasar el resultado a forma cartesiana:

$$z = 1_{210^\circ} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \rho\cos\theta = 1\cdot\cos 210^\circ = -\sqrt{3}/2 \\ b = \rho \operatorname{sen}\theta = 1\cdot \operatorname{sen} 210^\circ = -1/2\end{array}\right\} \Rightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Ejercicio 1

Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot 3^{-n}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(2n+2)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2n}}}$

$(a>0\ (b>1)$

$\ln < n^a < b^n < n! < n^n$

$e < 3 < \pi$

$\simeq 2'71 \quad \simeq 3'14$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\overset{a_n}{\frac{e^n\cdot 3^{-n}}{n!}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{3^n n!}$

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{3^{n+1}((n+1)!)}}{\frac{e^n}{3^n n!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n+1}\ 3^n n!}{e^n\ 3^{n+1}(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e}{3\cdot(n+1)}$$

$= 0$

$0\in\mathbb{R}$ y $0<1$ por tanto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot 3^{-n}}{n!}$ es convergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\overset{a_n}{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\cdot\frac{2}{5} \underset{\uparrow}{=} 1\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$\lim\sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n} \overset{\infty^0}{=} e^{\lambda} \underset{\uparrow}{=} 0$

$\lambda = \lim\frac{1}{n}\ln(n)$

$\frac{2}{5}<1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ converge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)} \right) a_n$

Aplicamos el criterio del cociente.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+3) \to \text{impares}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+4) \to \text{pares}}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+3}{2n+4} = 1$$

entonce como $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ pues no se sabe si converge o no.

Entonces aplicamos el criterio de Raabe.

$$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \cancel{\lim_{n \to \infty} n \cdot a \neq 0}$$

$$= \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{(\cancel{2n}+4) - (\cancel{2n}+3)}{2n+4} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} n \frac{1}{2n+4}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+4} = 1/2$$

$1/2 < 1 \Rightarrow$ la serie es divergente.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2n}}} \right) a_n$ aplicamos el criterio del logaritmo.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{1/\sqrt[3]{n^{2n}}} \right)}{\ln(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{n^{2n}}\right)}{\ln n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2n}{3} \cancel{\ln n}}{\cancel{\ln n}} = \infty$$

$\infty > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^{2n}}}$ es convergente.

Ejercicio 2

Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n+3)(4n-1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{L}(n+1)}$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{n}{(4n+3)(4n-1)}}^{a_n}$

Aplicamos 2º criterio de comparación

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{(4n+3)(4n-1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{16n^2-4n+12n-3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{16} \in \mathbb{R}-\{0\}$$

- Por tanto Σa_n y Σb_n tienen el mismo carácter (las dos convergen o las 2 divergen).
- Además sabemos que $\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n}$ diverge porque es una serie armónica con $\alpha = 1$

$\Rightarrow \boxed{\Sigma a_n \text{ diverge}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}}^{a_n}$ Aplicamos el 2º criterio de comparación

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)^{1/3}}{(n+1)(n)^{1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1/6}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,n^{1/6}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}+n^{1/6}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{7/6}+n^{1/6}}}{\frac{1}{n^{7/6}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/6}}{n^{7/6}+n^{1/6}} = 1 \in \mathbb{R}-\{0\}$$

$$\frac{\frac{n^{7/6}}{n^{7/6}}}{\frac{n^{7/6}+n^{1/6}}{n^{7/6}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

- Por tanto Σa_n y Σb_n tienen el mismo carácter.
- Además sabemos $\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n^{7/6}}$ converge porque es una serie armónica con $\alpha = 7/6$. $\Rightarrow \Sigma a_n$ converge.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ a_n

Primer criterio de comparación

$\ln(n) < n$

$\Rightarrow \frac{\ln(n)}{n^3} < \frac{n}{n^3} \Rightarrow \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^3}}_{\text{minorante}} < \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{mayorante}}$ convergente porque es una serie armónica $\alpha = 2 > 1$

$\Rightarrow \frac{\ln(n)}{n^3}$ es convergente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

Primer criterio de comparación

$\ln(\cancel{n}+1) < n+1$

$\Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{n+1} < 1$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{minorante}} < \underbrace{\frac{1}{\ln(n+1)}}_{\text{mayorante}}$

Tenemos que averiguar el caracter de $\sum \frac{1}{n+1}$

Aplicamos el 2º criterio de comparación.

$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = 1$

Por tanto la serie $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.

$\Rightarrow \sum \frac{1}{\ln(n+1)}$ diverge.

Ejercicio 3

Sumar la siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n+2}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+2^n}{3^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot(3n-2)}{8\cdot 11\cdot 14\cdot \ldots \cdot(3n+5)}$

a) $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{4^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n \cdot 4^2} = \frac{1}{4^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

$= \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ Es una serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$

y primer término $a_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n}_{S_n} + \underbrace{a_{n+1} + \cdots\cdots}_{R_n}}_{S}$$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n$

Calculamos la suma de ~~una serie~~ $\sum^{\infty} r^n$, 1 geométrica.

$S_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n$

$$\Rightarrow \frac{r S_n = r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + \cdots + r^{n+1}}{S_n - rS_n = r - r^{n+1}}$$

$\Rightarrow S_n(1-r) = r(1-r^n)$

$\Rightarrow S_n = \frac{(1-r^n)r}{1-r}$ Finalmente $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-r^n)r}{1-r}$

$= \frac{r}{1-r}$, si $|r|<1$

$\lim r^n = \begin{cases} \infty & r>0 \\ 1 & r=1 \\ 0 & |r|<1 \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n+2}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{16\cdot 3} = \frac{1}{48}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2+2^n}{3^n}}_{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} + \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 2\frac{1/3}{1-1/3} + \frac{2/3}{1-2/3} = 1 + 2 = 3$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{ne^{-2n}}_{a_n} = \sum n \frac{1}{e^{2n}} = \sum n \frac{1}{(e^2)^n} = \sum n \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = \sum (\overset{a}{0} + \overset{d}{1} \cdot n)\left(\overset{r}{\frac{1}{e^2}}\right)^n$$

$$= \cancel{\frac{0}{1-\frac{1}{e^2}}} + \frac{1 \cdot 1/e^2}{(1-1/e^2)^2} = \frac{1/e^2}{\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)^2} = \frac{1/e^2}{\frac{(e^2-1)^2}{(e^2)^2}} = \frac{e^2}{(e^2-1)^2}$$

c) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\overset{a}{2} + \overset{d}{1}n)\left(\overset{r}{\frac{1}{3}}\right)^n$$

$$= \frac{2}{1-1/3} + \frac{1 \cdot 1/3}{(1-1/3)^2}$$

$$= \frac{2}{\frac{2}{3}} + \frac{1/3}{4/9}$$

$$= 3 + \frac{3}{4}$$

$$= 15/4$$

Ejercicio 4

Sumar la siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n+1)(n+3)}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ a_n

$n^2+3n+2=0 \Rightarrow n = \frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} \begin{cases} n=-1 \\ n=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)}$

$\Rightarrow 1 = A(n+2) + B(n+1)$

$n=-1$ $\quad 1 = A(-1+2) + B(-1+1) \Rightarrow 1 = A$

$n=-2$ $\quad 1 = A(-2+2) + B(-2+1) \Rightarrow 1 = B$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ $\Rightarrow$ Esta serie es telescópica.

$S_n = \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right)}_{n=1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right)}_{n=2} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right)}_{n=3} + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

$S_{100} = 1/2 - 1/102$

$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = 1/2$

Cálculo

Preguntas de Test

TEMA 1: NÚMEROS REALES

Febrero 98	Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ pueden ponerse en correspondencia biyectiva.
Septiembre 98	$\{\ x\in\mathbb{R} : \lvert x-1\rvert + \lvert x+1\rvert \leq 2\ \} = \{\ x\in\mathbb{R} :\ \lvert x\rvert \leq 2\}$
Febrero 99	Si $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica $\big\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \big\rvert < \lvert x-y\rvert$.
Septiembre 99	$\sqrt{x^2} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Febrero 00	Existe una biyección entre los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.
Febrero 01	Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ y $s = \sup A$. Entonces, $\forall \delta > 0, \exists a \in A \mid s-\delta < a \leq s$.
Febrero 01	La ecuación $ax = b$, donde a, b, $x \in \mathbb{Z}$, tiene solución única.
Febrero 01	Entre $(-1\,,\,1)$ y $\mathbb{R}$ existe una biyección.

Septiembre 01	Si $A=\{x\in\mathbb{R}:x^2+x<2\}$, entonces $\sup A=2$
Febrero 02	Si $x,y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, entonces $xy\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
Septiembre 02	Si $A\subset\mathbb{R}$ y $B=\{-x:x\in A\}$, entonces $\sup B=-\sup A$.
Febrero 03	Existe una biyección entre $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$
Septiembre 01 Septiembre 02 Septiembre 03	Si $x,y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, entonces $x+y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
Febrero 00 Septiembre 03	Sean $A,B\subset\mathbb{R}$ conjuntos acotados no vacíos tales que $A\subset B$ y $A\neq B$. Entonces $\sup A<\sup B$.
Febrero 04	Si un subconjunto de $\mathbb{R}$ está acotado, entonces el conjunto de sus cotas inferiores tiene máximo.
Febrero 04	Si $A=\{x\in\mathbb{R}:x^2>2\}$, entonces $\inf A=\sqrt{2}$.
Febrero 04	Para cualesquiera reales x,y se verifica $\lvert x\rvert-\lvert y\rvert\leq\lvert x+y\rvert$

Febrero 05 Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Q}$ acotado inferiormente tiene:
a) mínimo. b) supremo. c) ninguna de las anteriores.

Febrero 05 Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado inferiormente tiene:
a) mínimo. b) supremo. c) ninguna de las anteriores.

Septiembre 05 Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ tiene
a) mínimo. b) ínfimo. c) ninguna de las anteriores.

Septiembre 05 Hay tantos números naturales pares como
a) reales. b) racionales. c) ninguna de las anteriores.

TEMA 2: NÚMEROS COMPLEJOS

Febrero 95	Las soluciones de $\sqrt[3]{-1}$ son $\{1, i, -1\}$
Junio 95 Septiembre 95	$z \neq \bar{z}\ \forall z \in \mathbb{C}$.
Septiembre 95	Si $z \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$, entonces $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{z + \bar{z}}{z + \bar{z}^{-1}} z^2 = kz$
Febrero 96	El elemento inverso de $(a,b) \in \mathbb{C} - \{0\}$ es $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$
Septiembre 96	$2(1-i) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$
Febrero 98	$\forall K \in \mathbb{Z},\quad e^{ik\pi/2} = (-1)^k$

Septiembre 99	$\lvert e^{-2z} \rvert < 1$ si y sólo si $\operatorname{Re}(z) \geq 0$.
Febrero 00	$\lvert \overline{z} \rvert = \sqrt{z\overline{z}}$, $\forall z \in \mathbb{C}$
Febrero 00	$z^3 + z + 1 = 0$ para $z = i$.
Septiembre 00	Si $a \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces $z^a \notin \mathbb{R}$.
Febrero 01	$(1)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$
Septiembre 01	Sea $z \in \mathbb{C}$, si $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ entonces $z \in \mathbb{R}$
Febrero 02	Cualquier $z \in \mathbb{C}$ tiene n raíces n-ésimas distintas

Febrero 03	Se cumple que $\sum_{n=0}^{40} i^n = 0$
Septiembre 03	El lugar geométrico de los números complejos que verifican $\mathrm{Re}\frac{1}{z} = 0$ es el eje OY
Septiembre 03	$\lvert z \rvert \leq \lvert \mathrm{Re}\, z \rvert + \lvert \mathrm{Im}\, z \rvert$ para todo $z \in \mathbb{C}$
Febrero 04	$\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$
Febrero 04	Para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ los argumentos de las raíces n-ésimas de z forman una progresión aritmética.
Junio 97 Septiembre 02 Febrero 05	Se cumple que $\sum_{n=0}^{50} i^n = i$
Septiembre 05	Indique cual de estos números complejos tiene todas sus raíces cuartas sobre las bisectrices de los cuadrantes del plano: a) $e^{i\pi/4}$ b) $e^{i3\pi/4}$ c) -1

TEMA 2: NÚMEROS COMPLEJOS

Febrero 95

Las soluciones de $\sqrt[3]{-1}$ son $\{1, i, -1\}$.

Recuerda que el número complejo $z = -1$ puesto en forma polar es $z = 1_\pi$

Tenemos que las raíces cúbicas de $z = -1 = 1_\pi = 1_{180}$ son,

$$\sqrt[3]{1_\pi} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \varphi = \dfrac{\pi + 2k\pi}{3} = \dfrac{(1+2k)\pi}{3} \quad para \quad k = 0,1,2 \end{cases}$$

Así pues, sustituyendo la k obtenemos las tres raíces cúbicas de -1:

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = 1_{\pi/3} \qquad k = 1 \Rightarrow z_2 = 1_\pi = -1 \qquad k = 2 \Rightarrow z_3 = 1_{5\pi/3}$$

que no coinciden con las dadas en el enunciado (sólo coincide $z_2 = -1$).Así pues la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

Junio 95-Septiembre 95

$z \neq \bar{z} \; \forall z \in \mathbb{C}$.

Para acertar esta pregunta lo único que se debe tener claro es que los números reales son un subconjunto de los complejos. Dicho de otra manera, cualquier número real se puede tomar como un número complejo con parte imaginaria nula.
Así pues, por ejemplo,

$$z = 3 \qquad \bar{z} = 3$$

Solución : No, Falso

Febrero 96

Si z_1, z_2 y z_3 son las raíces cúbicas complejas de $8i$, entonces $z_1 \cdot z_2 = (z_3)^2$

Ponemos el número complejo en forma polar:

$$z = 8i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8 \\ \theta = \arctan(1/0) = \arctan(\infty) = \pi/2 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 8_{\pi/2}$$

Por tanto las r raíces cúbicas de $z = 8i = 8_{\pi/2}$ son,

$$\sqrt[3]{8_{\pi/2}} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \varphi = \dfrac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \dfrac{(1+4k)\pi}{6} \quad para \quad k = 0,1,2 \end{cases}$$

Así pues, sustituyendo la k obtenemos las tres raíces cúbicas de $8i$:

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = 2_{\pi/6} \qquad k = 1 \Rightarrow z_2 = 2_{5\pi/6} \qquad k = 2 \Rightarrow z_3 = 2_{9\pi/6}$$

y ahora sólo queda operar y comparar los resultados obtenidos:

$$z_1 \cdot z_2 = 2_{\pi/6} \cdot 2_{5\pi/6} = (2+2)_{\pi/6 + 5\pi/6} = 4_\pi$$

$$(z_3)^2 = z_3 \cdot z_3 = 2_{9\pi/6} \cdot 2_{9\pi/6} = (2+2)_{9\pi/6 + 9\pi/6} = 4_{18\pi/6} = 4_{3\pi} = 4_\pi$$

Ya que π y 3π son el mismo ángulo (180º)

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 96

$$\text{El elemento inverso de } (a,b) \in \mathbb{C}-\{0\} \text{ es } \left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

Para dividir números complejos en forma cartesiana se multiplica y divide la fracción por el conjugado del denominador

Las notaciones: $z = x + iy = (x, y)$ son equivalentes

Calculamos el elemento inverso de $(a,b) = a + bi$:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-abi+abi-b^2i^2} = \frac{a-bi}{a^2-b^2(-1)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\,i = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Solución : No, Falso

Junio 96

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $|e^{ix}| = 1$.

Sabemos que la notación exponencial de un número complejo z es $z = \rho e^{i\theta}$ donde ρ es el módulo de z y θ es el argumento de z. Así pues se trata de comparar ambas expresiones:

$$z = \rho e^{i\theta} = e^{ix} = 1 \cdot e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = x \end{cases}$$

O sea que la afirmación del enunciado es verdadera pues efectivamente $|e^{ix}| = 1$.

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 96

$$2(1-i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Pasamos el primer numero complejo (el que está en notación cartesiana) a forma exponencial y vemos si coincide con el segundo número complejo:

$$2(1-i) = 2-2i = \left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = \arctan(-1) = \frac{7\pi}{4} \ \ (315^{\circ}) \end{array}\right\} = (2\sqrt{2})_{\frac{7\pi}{4}}$$

Por tanto, al tener ambos número igual módulo e igual argumento la igualdad es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 97

> Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es $f(z)=ze^{i\pi/2}$ y $A=\{z\in\mathbb{C}: I(z)=0\}$, entonces $f(A)=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)=0\}$.

Recuerda que: $\rho_\theta=\rho e^{i\theta}$

El conjunto A se refiere a la recta real, es decir $A=\mathbb{R}$. Así pues, cogiendo cualquier elemento $r\in A=\mathbb{R}$ tenemos que :

$$f(r)=re^{i\pi/2}=r_{\pi/2}=ri$$

y está claro que la parte real es nula, $\mathrm{Re}(ri)=0$, $\forall r\in\mathbb{R}$. Por lo que efectivamente,

$$f(A)=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)=0\}$$

y la afirmación del enunciado es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

Junio 97
Septiembre 02

> $$\sum_{n=0}^{50} i^n = i$$

Para hacer los cálculos hemos tenido en cuenta que:

$i^{4n}=1$

$i^{4n+1}=i$

$i^{4n+2}=-1$

$i^{4n+3}=-i$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = i^0+i^1+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+\ldots+i^{44}+i^{45}+i^{46}+i^{47}+i^{48}+i^{49}+i^{50}=$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = 1+i-1-i+1+i-1-i+\ldots+1+i-1-i+1+i-1=$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro quedando los tres últimos ($n=48$, 49 y 50):

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = \underbrace{1+i-1-i}_{0}+\underbrace{1+i-1-i}_{0}+\ldots+\underbrace{1+i-1-i}_{0}+1+i-1=$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = 1+i-1=i$$

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 97

Suponemos que el 0 se refiere al $0+0i$

> La recta $y=x$ es el lugar geométrico de los afijos del conjunto $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)+iz=0\}$.

Sea $z=x+iy$,

$$\mathrm{Re}(z)+iz=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}(x+iy)+i(x+iy)=0 \;\Rightarrow\; x+ix+(-1)y=0 \;\Rightarrow$$

Identificando los coeficientes de la parte real y de la parte imaginaria

$$x-y+xi=0+0i \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-y=0 \\ x=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; x=y=0$$

Por tanto tenemos que el conjunto del enunciado está compuesto por un único elemento que es el $0+0i$, es decir $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)+iz=0\}=\{0+0i\}$. Así pues, la recta $y=x$ no es el lugar geométrico del afijo del complejo $0+0i$, por lo que la afirmación es falsa

Solución : No, Falso

Febrero 98

$\forall K \in \mathbb{Z},\ e^{ik\pi/2} = (-1)^k$

Teniendo en cuenta que el número complejo $z=-1$ puesto en forma polar es $z = 1_{\pi/2}$ operamos y obtenenos:

Recuerda que:
$\rho_\theta = \rho e^{i\theta}$

$$e^{ik\pi/2} = \left(e^{i\pi/2}\right)^k = \left(1\cdot e^{i\pi/2}\right)^k = (1_{\frac{\pi}{2}})^k = i^k$$

Solución : No, Falso

Un valor de $\ln(1+i)$ es $\ln\sqrt{2} - i\dfrac{15\pi}{4}$

Vamos a calcular todos los valores de $\ln(1+i)$:

$$z = 1+i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

y la expresión de todos los logaritmos del complejo z son :

$$\ln z = \ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i$$

y ahora igualamos :

$$\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i = \ln\sqrt{2} - i\frac{15\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i = -i\frac{15\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i = -i\frac{15\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{15\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi = -\frac{\pi}{4} - \frac{15\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi = -\frac{16\pi}{4} \Rightarrow 2k = -\frac{16}{4} \Rightarrow k = -2$$

por tanto para $k=-2$ nos queda el valor del enunciado.

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 98

Si $z \in \mathbb{C}$ tiene un módulo unidad, entonces $|1+z|^2 + |1-z|^2$ es un número real.

Observación:
Que z tenga módulo unidad es irrelevante en esta pregunta. Aunque z no tuviese módulo unidad la afirmación seguiría siendo igual de verdadera

Las expresiones $|1+z|$ y $|1-z|$ son módulos de números complejos y, por tanto, son siempre números reales no negativos. Así pues la expresión $|1+z|^2 + |1-z|^2$ es un número real siempre.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 99

$\overline{e^{ix}} = e^{i(-x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (El símbolo $\overline{z}$ representa el conjugado de z).

En forma polar el conjugado de un número complejo z se define como:

Esto es una definición

$$\text{Sea } z \in \mathbb{C}, \text{ si } z = \rho_\theta \text{ entonces } \overline{z} = \overline{\rho_\theta} = \rho_{-\theta}$$

Así que en forma exponencial, de manera equivalente, tenemos que:

$$\text{Sea } z \in \mathbb{C}, \text{ si } z = \rho e^{i\theta} \text{ entonces } \overline{z} = \overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{i(-\theta)}$$

Por tanto la afirmación del enunciado es verdadera.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 99

Los números complejos z, tales que $z = \sqrt[6]{1+i}$, tienen sus argumentos en progresión aritmética.

El enunciado es verdadero para cualquier raíz enésima de cualquier número $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

En general las raíces enésimas de un número complejo cualquiera $z = \rho_\theta$ se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Recuerda:
Una progresión aritmética viene definida por
$a_k = a_0 + kd$
donde,
a_k: término k-ésimo
a_0: primer término
d: diferencia

así que, en nuestro caso, tenemos que los argumentos se pueden poner de la forma:

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

que se trata de una progresión aritmética de primer término $a_0 = \theta/n$ y diferencia $d = 2\pi/n$.

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 99

Si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, los valores de $\sqrt[n]{z} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

En forma polar $z = \rho_\theta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ significa que $\theta \neq 0$ y $\theta \neq \pi$.

Ahora bien, en general las raíces enésimas de un número complejo en forma polar ρ_θ se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

y para que $\sqrt[n]{z} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ se debe cumplir que $\varphi \neq 0$ y $\varphi \neq \pi$. Esto es siempre así ya que no existe un natural k que haga $\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi$ cuando $\theta \neq 0$ ó $\theta \neq \pi$. Se puede comprobar esto utilizando la ecuación de más arriba que relaciona ambas variables. Por tanto la afirmación del enunciado es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 99

$|e^{-2z}| < 1$ si y sólo si $\text{Re}(z) \geq 0$.

La proposición es falsa y lo veremos con el siguiente contraejemplo. Sea $z = i$ que claramente cumple la condición de la derecha, $\text{Re}(z) \geq 0$ que tomaremos como hipótesis. Sabemos que la notación exponencial de un número complejo z es $z = \rho e^{i\theta}$ donde ρ es el módulo de z y θ es el argumento de z. Así pues se trata de comparar ambas expresio-nes:

$$z = \rho e^{i\theta} = e^{-2z} = e^{-2i} = 1 \cdot e^{-2i} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -2 \end{cases}$$

Observación: Si la condición de la izquierda hubiese sido $|e^{-2z}| \leq 1$ la afirmación del enunciado sería cierta.

Así pues el módulo es igual a 1 y por tanto no se cumple la tesis de la izquierda. Al no cumplirse una de las dos implicaciones la proposición es falsa.

Solución : No, Falso

Febrero 00

$|\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}} \; \forall z \in \mathbb{C}$

Sea $z = a + bi$ y, por tanto, $\bar{z} = a - bi$. Operamos :

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 - abi + abi - b^2 i^2} = \sqrt{a^2 - b^2(-1)} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}|$$

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 00

$z^3 + z + 1 = 0$ para $z = i$.

Para comprobarlo basta con sustituir en la ecuación:

$$i^3 + i + 1 = i \cdot i^2 + i + 1 = i(-1) + i + 1 = -i + i + 1 = 1$$

Solución : No, Falso

Septiembre 00

Si $a \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces $z^a \notin \mathbb{R}$.

Si escogemos $a = 2 \in \mathbb{R}$ y $z = i \in \mathbb{C}$ tenemos que:

$$z^a = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$$

Por tanto el ejemplo propuesto cumple las hipótesis del enunciado pero no la tesis. Así pues, la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

Febrero 01

$(1)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$

Recuerda que las siguientes expresiones son equivalentes:

$e^x = \exp(x)$

Se trata de ver cuales son las raíces enésimas de la unidad.
En general las raíces enésimas de un número complejo ρ_θ se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

así que, en nuestro caso, tenemos que las raíces enésimas de la unidad son,

$$\sqrt[n]{1_0} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{1} = 1 \\ \varphi = \dfrac{0 + 2k\pi}{n} = \dfrac{2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

que puestas en la forma exponencial quedan

$$r_\varphi = r\,e^{\varphi i} = r\exp(\varphi i) = 1 \cdot \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right) = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right)$$

que es justamente la expresión del enunciado.

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 01

Si $z \in \mathbb{C}$ y $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$, entonces $z \in \mathbb{R}$.

Para dividir números complejos en forma cartesiana se multiplica y divide la fracción por el conjugado del denominador que en este caso es $-i$

La afirmación es falsa y se puede demostrar tomando como contraejemplo $z = i$:

$$z = i \in C \quad y \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1(-i)}{i \cdot (-i)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{-i^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{-(-1)}\right) = \operatorname{Re}(-i) = 0$$

pero sin embargo $z = i \notin \mathbb{R}$.

Solución : No, Falso

Febrero 02

Cualquier $z \in C$ tiene n raíces n-ésimas distintas.

Existe un número complejo para el que no se cumple la afirmación. Se trata del complejo $z = 0$ que tiene n raíces n-ésimas pero son todas iguales (todas iguales a cero). Por tanto la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

Febrero 03

$\sum_{i=1}^{40} i^n = 0$.

Para hacer los cálculos hemos tenido en cuenta que:

$i^{4n} = 1$

$i^{4n+1} = i$

$i^{4n+2} = -1$

$i^{4n+3} = -i$

$$\sum_{n=1}^{40} i^n = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \ldots + i^{37} + i^{38} + i^{39} + i^{40}$$

$$\sum_{n=1}^{40} i^n = i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro (del 1° al 4°, del 5° al 8°, ... , del 37° al 40°):

$$\sum_{n=0}^{40} i^n = \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + \ldots + \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} = 0$$

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 03

El lugar geométrico de los números complejos que verifican $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ es el eje OY

Fíjate que si tomamos como lugar geométrico el eje OY menos el $0+0i$ la afirmación ya sería cierta. Es decir, el único punto que no cumple la condición del enunciado es el $0+0i$

Para que fuese cierta al eje OY habría que quitarle el $z = 0+0i$ ya que para este número complejo ni siquiera está definido su inverso $\frac{1}{z}$ con respecto al producto de complejos. Por tanto la afirmación es falsa. Para el resto de los números del eje OY sí que se cumple la condición del enunciado.

Solución : No, Falso

Septiembre 03

$|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ es el eje OY

Sea $z = a + bi$:

$$|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \Rightarrow |a+bi| \leq |a| + |b| \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b| \Rightarrow$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la desigualdad

$$\Rightarrow a^2+b^2 \leq (|a|+|b|)^2 \Rightarrow a^2+b^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \Rightarrow a^2+b^2 \leq a^2 + b^2 + 2|a||b|$$

y la anterior desigualdad se cumple siempre pues $2|a||b| \geq 0$.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 04

Fíjate que no es necesario calcular explícitamente las raíces cuadradas de $3-4i$

$$\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$$

Lo más rápido es aplicar la definición de raíz cuadrada $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$:

Recuerda: $i^2 = -1$

$$(2-i)^2 = (2-i)(2-i) = 4-2i-2i+i^2 = 3-4i$$
$$(-2+i)^2 = (-2+i)(-2+i) = 4-2i-2i+i^2 = 3-4i$$

Así pues las raíces cuadradas de $3-4i$ son los números $2-i$ y $-2+i$. Por tanto, la afirmación del enunciado es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 04

Para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ los argumentos de las raíces n-ésimas de z forman una progresión aritmética.

En general las raíces enésimas de un número complejo cualquiera $z = \rho_\theta$ se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0,1,\dots,n-1 \end{cases}$$

Recuerda:
Una progresión aritmética viene definida por
$a_k = a_0 + kd$
donde,
a_k: término k-ésimo
a_0: primer término
d: diferencia

así que, en nuestro caso, tenemos que los argumentos se pueden poner de la forma:

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

que se trata de una progresión aritmética de primer término $a_0 = \theta/n$ y diferencia $d = 2\pi/n$

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 05

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = \qquad a)\ 1 \qquad b)\ -1 \qquad c)\ i$$

Para hacer los cálculos hemos tenido en cuenta que:

$i^{4n} = 1$
$i^{4n+1} = i$
$i^{4n+2} = -1$
$i^{4n+3} = -i$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{44} + i^{45} + i^{46} + i^{47} + i^{48} + i^{49} + i^{50} =$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \dots + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 =$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro quedando los tres últimos ($n = 48$, 49 y 50):

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + \dots + \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + 1 + i - 1 =$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = 1 + i - 1 = i$$

Solución : c)

Febrero 05

Los números complejos que verifican la ecuación $\overline{z} = -z$ forman:
a) el eje real.
b) el eje imaginario.
c) ninguna de las anteriores.

Sea $z = x + yj$

$\overline{z} = -z \;\Rightarrow\; \overline{(x+yj)} = -(x+yj) \;\Rightarrow\; x \cancel{-yj} = -x \cancel{-yj} \;\Rightarrow\; x = -x \;\Rightarrow\; 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

O sea, se trata del eje Y (eje imaginario).

Solución : b)

Septiembre 05

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = \qquad a)\ 1 \qquad b)\ 2e^{i\pi/4} \qquad c)\ 2e^{-i\pi/4}$$

Hay que tener claro que en total hay 3001 téminos en el sumatorio

Para hacer los cálculos hemos tenido en cuenta que:

$i^{4n} = 1$

$i^{4n+1} = i$

$i^{4n+2} = -1$

$i^{4n+3} = -i$

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \ldots + i^{2996} + i^{2997} + i^{2998} + i^{2999} + i^{3000} =$$

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 + i - 1 - i + 1 =$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro (en total 3000/4=750 grupitos de cuatro términos) quedando sin anular solamente el último ($n = 3000$):

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + \ldots + \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + 1 = 1$$

Solución : c)

Septiembre 05

Indique cuál de estos números complejos tiene todas sus raíces cuartas sobre las bisectrices de los cuadrantes del plano.
a) $e^{i\pi/4}$. b) $e^{i3\pi/4}$. c) -1.

Tenemos que las raíces cuartas de $z = -1 = 1_\pi = 1_{180}$ son,

$$\sqrt[4]{1_\pi} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \varphi = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} = \dfrac{(1+2k)\pi}{4} \quad \text{para} \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

Así pues, sustituyendo la k obtenemos las cuatro raíces cuartas de -1:

$$k = 0 \;\Rightarrow\; z_1 = 1_{\pi/4} \qquad k = 1 \;\Rightarrow\; z_2 = 1_{3\pi/4}$$
$$k = 2 \;\Rightarrow\; z_3 = 1_{5\pi/4} \qquad k = 3 \;\Rightarrow\; z_3 = 1_{7\pi/4}$$

que coinciden con los ángulos de las bisectrices (45º, 135º, 225º y 315º).

Solución : c)

Febrero 06

Todo número complejo no nulo tiene:

a) n raíces n-ésimas complejas distintas.

b) n raíces n-ésimas reales distintas.

c) al menos una raíz n-ésima no real.

Nota:
El único número complejo que tiene todas sus raíces enésimas iguales es el nulo 0 + 0*i*

La respuesta correcta es la a). Por teoría sabemos que cualquier número complejo (exceptuando el nulo $0+0i$) tiene n raíces n-ésimas distintas que vienen dadas por la siguiente expresión

$$\sqrt[n]{z} = r_{\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Además, geométricamente, estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados con centro en el origen.

Solución : a)

Febrero 06

Si z es un número complejo, entonces $z-\overline{z} =$

a) $2\,\mathrm{Re}\,z$.

b) $2\,\mathrm{Im}\,z$.

c) $2i\,\mathrm{Im}\,z$.

Sea $z = a + bi$, operando:

$$z-\overline{z} = a+bi - \overline{(a+bi)} = a+bi - (a-bi) = a+bi - a+bi = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}\,z$$

Solución : c)

Septiembre 06

Sea $z \in \mathbb{C}$. Si:

a) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ se tiene que $|z| = 2$ y que $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

b) $z = 3-4i$ se tiene que $|z| = \sqrt{5}$ y que $\arg(z) = \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}$

c) Ninguna de las anteriores.

Importante:
Recuerda que la función arctg*x* tiene dos ángulos posibles para cada *x*. ¡pero en la calculadora sólo sale uno de ellos!, el otro se obtiene sumando π. Para saber cual de ellos es el verdadero argumento de nuestro número complejo nos tenemos que fijar en el cuadrante donde está el complejo

La respuesta a) no es correcta porque el número complejo se encuentra en el tercer cuadrante ya que su parte real es negativa y su parte imaginaria también es negativa. Es decir, su argumento debería estar entre π y $\frac{3\pi}{2}$ (es decir, entre 180° y 270°) y sin embargo nos dicen que es $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (que son 45°) lo cual es imposible.

La respuesta b) tampoco es correcta por que el modulo de z es 5, y no $\sqrt{5}$. Efectivamente:

$$z = 3-4i \Rightarrow z = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Solución : c)

Febrero 07

Sea $z = re^{i\alpha}$ un número complejo no nulo. Entonces

a) $-z = re^{-i\alpha}$.

b) $-z = re^{i(\alpha+\pi)}$.

c) $-z = re^{i(\alpha+\pi/2)}$.

Recuerda que:
$e^{i\pi} = -1$

Operando: $re^{i(\alpha+\pi)} = re^{i\alpha}e^{i\pi} = re^{i\alpha}(-1) = -re^{i\alpha} = -z$

Solución : b)

Febrero 07

Las raíces enésimas de $1+i$ son

a) $\sqrt[n]{2}\, e^{i\frac{\pi/4+2k\pi}{n}}$, con $k=1, ..., n-1$

b) $\sqrt[2n]{2}\, e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}}$, con $k=0, ..., n-1$

c) $\sqrt[2n]{2}\, e^{i\frac{\pi/4+2k\pi}{n}}$, con $k=0, ..., n-1$

Lo primero que hacemos es pasar el número complejo a forma polar:

Recuerda que la forma polar y la forma exponencial son equivalentes:
$\rho_\theta = \rho e^{i\theta}$

$$w_1 = 1+i \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \rho & = & \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta & = & \operatorname{atan}(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}_{\pi/4} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

Ahora utilizamos la fórmula de la raíz enésima:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = re^{i\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta+2k\pi}{n} \quad \text{para} \quad k = 0,1,\dots,n-1 \end{cases}$$

que aplicada a nuestro caso queda:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}} = re^{i\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{\sqrt{2}} = \sqrt[2n]{2} \\ \varphi = \dfrac{\theta+2k\pi}{n} = \dfrac{\pi/4+2k\pi}{n} \quad \text{para} \quad k = 0,1,\dots,n-1 \end{cases}$$

Luego la solución correcta es la c).

Solución : c)

CALCULO - 4/10/2010 Prueba 1 (VA). 10 puntos (= 10 % NOTA FINAL)

Apellidos .... *Nombre* ....

DNI .... *Grupo* .... Tiempo 50 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 **Error** -0.4 En blanco 0.

	SI	NO	
1	☐	☒	Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\}$, entonces, $\max A = \sqrt{2}$.
2	☒	☐	Si los conjuntos A y B son numerables, entonces $A \cup B$ es numerable.
3	☒	☐	Siendo $x > -1$ y n natural, se verifica que $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
4	☐	☒	Si $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $a + b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
5	☐	☒	El conjunto de números irracionales que verifican la condición $\lvert x\rvert < \sqrt{2}$ es numerable.
6	☐	☒	La desigualdad $\lvert x\rvert > \min\{x, -x\}$ se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$.
7	☐	☒	La desigualdad en $\mathbb{R}$, $\left\lvert \frac{x+1}{2x-1} \right\rvert > \frac{1}{2}$, se cumple si y sólo si $x > \frac{1}{2}$.
8	☐	☒	Siendo $\lvert z\rvert$ el módulo de un complejo z, la igualdad $\lvert z_1 + z_2\rvert = \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$ se verifica si y sólo si $z_1 \in \mathbb{R}$ y $z_2 \in \mathbb{R}$.
9	☒	☐	Las cuatro raíces cuartas de -4 son: $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.
10	☒	☐	$\left\lvert \frac{1}{1+3i} - \frac{1}{1-3i} \right\rvert = \frac{3}{5}$.

CALCULO - 4/11/2010 Prueba 2 (VA). 20 puntos (= 20 % NOTA FINAL)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 90 minutos**

PARTE (A): TEST (10 PUNTOS)

- Cada pregunta de test tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 Error -0.4 En blanco 0.

	SI	**NO**	
1	☒	☐	Si $\{a_n\}$ es una sucesión acotada superiormente, y $\{b_n\}$ una sucesión acotada inferiormente, la sucesión $\{(a_n - b_n)\}$ está acotada superiormente.
2	☐	☒	Si la sucesión real $\{a_n\}$ es acotada, entonces es convergente.
3	☒	☐	Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es continua, siendo $a < b$, se verifica necesariamente que la imagen $f([a,b])$ es un intervalo cerrado.
4	☐	☒	Existe $a \in \mathbf{R}$ tal que la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(x) = a$ si $x = 0$, es continua.
5	☐	☒	Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), siendo $a < b$, entonces existe un único valor $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$.
6	☐	☒	Sean $A = (0,1) \cup (2,3)$ y la función $f : A \to \mathbf{R}$ tal que $\forall x \in A,\ f'(x) = 0$. Entonces f es constante en A.
7	☐	☒	Si la función $f + g$ es derivable en $a \in \mathbf{R}$, entonces las funciones f y g son derivables en $a \in \mathbf{R}$.
8	☒	☐	Sea la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -x^2$ si $x < 0$. Entonces f es derivable en todo $\mathbf{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = 2\lvert x \rvert$.
9	☒	☐	La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n^2\pi+1}{n}\right)$ es divergente.
10	☐	☒	Una serie $\sum(a_n + b_n)$ es convergente si y sólo si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes.

PARTE (B): EJERCICIOS (10 PUNTOS)

- Responda a cada pregunta en el espacio previsto al efecto. **Puntuación:** Correcto +2.5 **Error** 0 En blanco 0.

---

1. El límite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ es igual a ☐

2. El límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$ es igual a ☐

3. El límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$ es igual a ☐

4. El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = xe^{x^2}$ en torno a 0 es ☐

CÁLCULO - 13/12/2010 Prueba 3. 10 puntos (= 10 % NOTA FINAL)

Apellidos .... *Nombre* ....

DNI .... *Grupo* .... Tiempo 90 minutos

SE PROHIBE EL USO DE CUALQUIER TIPO DE CALCULADORA

PARTE (A): TEST (5 PUNTOS)

- Cada pregunta de test tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 **Error -0.4** En blanco 0.

SI NO

1 ☒ ☐ La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{3n}$ converge para todo $x \in \left(-2^{1/3}, 2^{1/3}\right)$.

2 ☐ ☒ Si el límite puntual de una sucesión de funciones continuas es una función continua, entonces la convergencia de dicha sucesión es uniforme.

3 ☐ ☒ La sucesión funcional definida por $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente en el intervalo $(-1, 1)$ a la función $f(x) = 0$.

4 ☐ ☒ Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces converge para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq |x_0|$.

5 ☒ ☐ El desarrollo en serie de Taylor en torno a 0 de la función $x \operatorname{sen} x$ es $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+2}$

PARTE (B): EJERCICIOS (5 PUNTOS)

- Responda cada pregunta en el espacio previsto al efecto. **Aclaración:** Error 0 En blanco 0.

1. **(1.5 puntos)** El conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ para los que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ converge es ☐

2. **(1.5 puntos)** Si $|x| < 1$ la suma de la serie $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots$ es igual a ☐

3. **(2 puntos)** La sucesión funcional definida por $f_n(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 + e^{-nx}}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función

$f(x) =$ ☐

Cálculo

Problemas de examen

CÁLCULO – Prueba 2 (2011-12) 7 de noviembre de 2011

Apellidos...

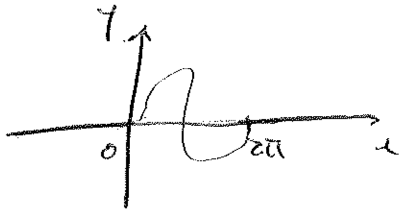
Nombre.............................. *DNI* .... *Grupo* ....

Nota

Esta prueba supondrá **2 puntos** de la calificación final de los alumnos de evaluación continua.

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0, \\ \operatorname{sen}(x)\Big[1 - \cos(x)\Big], & \text{si} \quad 0 \le x \le 2\pi, \\ 0, & \text{si} \quad 2\pi < x. \end{cases}$$



a) [0,7 puntos] Estudie si f es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) [0,5 puntos] Estudie si f' es continua en $\mathbb{R}$.

c) [0,2 puntos] Calcule la integral definida $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$.

d) [0,6 puntos] Demuestre que f tiene máximo y mínimo absolutos en $\mathbb{R}$. Calcule para qué valores de x se alcanzan.

---

a) Continuidad

$x \neq 0 \quad x \neq 2\pi$

f es continua en $(-\infty, 0) \cup (2\pi, \infty)$ por ser una función constante (función nula)
y f es continua en $(0, 2\pi)$ por ser producto de funciones continuas ($\operatorname{sen} x$, $\cos x$)

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(x)(1 - \cos(x)) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$
- $f(0) = \operatorname{sen}(0)(1 - \cos(0)) = 0$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

- $\lim_{x \to 2\pi^-} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^-} \operatorname{sen}(x)(1 - \cos(x)) = 0$
- $\lim_{x \to 2\pi^+} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^+} \cancel{\operatorname{sen}(x)}\ 0 = 0$ $\Rightarrow \lim f(x) = \lim f(x) = 0 = f(2\pi)$
- $f(2\pi) = \operatorname{sen}(2\pi)(1 - \cos(2\pi)) = 0$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 2\pi$

$\Rightarrow f$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad

$x \neq 0,\ x \neq 2\pi$

f es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2\pi, \infty)$ por ser una función constante (función nula) y f es derivable en $(0, 2\pi)$ por ser producto de funciones derivables ($\operatorname{sen} x$, $\cos x$)

$x = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(h)(1-\cos(h))}{h} \underset{\uparrow}{=}$$

$\operatorname{sen} \varepsilon \sim \varepsilon\ (\varepsilon \to 0)$
$1-\cos\varepsilon \sim \frac{\varepsilon^2}{2}\ (\varepsilon \to 0)$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{2} = 0$$

$$f'(0^-) = f'(0^+) = 0$$

$\Rightarrow f$ es derivable en $x = 0$

$x = 2\pi$

$$f'(2\pi^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2\pi+h) - f(2\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(2\pi+h)(1-\cos(2\pi+h)) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} h(1-\cos h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{2} = 0$$

$$f'(2\pi^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2\pi+h) - f(2\pi)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$\Rightarrow f'(2\pi^-) = f'(2\pi^+) = 0$

$\Rightarrow f$ es derivable en $x = 2\pi$

$\Rightarrow f$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

~~$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x \cos x$~~
~~$\cos x \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$~~
~~$\cos x \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$~~

b) ~~Obtenemos~~ $f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \cos x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x & 0 < x < 2\pi \\ 0 & x \geq 2\pi \end{cases}$

Continuidad de $f'(x)$:

$x \neq 0,\ x \neq 2\pi$

$f'(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ por ser la función nula y es continua en $(0, 2\pi)$ por ser suma y producto de funciones continuas ($\cos x$, $\operatorname{sen} x$)

en $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \qquad f'(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$\Big\}\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$

$\Rightarrow f'(x)$ es continua en $x = 0$

$\underline{x = 2\pi}$

- $\lim_{x \to 2\pi^-} \cos x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \cos 2\pi - \cos^2 2\pi + \operatorname{sen}^2 2\pi = 1 - 1 + 0 = 0$

- $\lim_{x \to 2\pi^+} 0 = 0$

$\lim_{x \to 2\pi^-} f'(x) = \lim_{x \to 2\pi^+} f'(x) = f'(2\pi) = 0$

- $f'(2\pi) = 0$

$\Rightarrow f'(x)$ es continua en $x = 2\pi$

$\Rightarrow f'(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

Por tanto $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$$\int_a^b 0\,dx = 0$$

$$\int 0\,dx = k$$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx$

$= \cancel{\int_{-\pi}^{0} 0\,dx}^{\,0} + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x (1 - \cos x)\,dx$

$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

$= \left[\frac{(1-\cos^2 x)^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos^2 \pi}{2} - \cancel{\frac{1-\cos^2 0}{2}}^{\,0}$

$= 2$

$= \left[-\cos x \right]_0^{\pi} - \left[\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} \right]_0^{\pi}$

$= -\cos \pi - (-\cos(0)) - \left(\cancel{\frac{\operatorname{sen}^2 \pi}{2}}^{\,0} - \cancel{\frac{\operatorname{sen}^2 0}{2}}^{\,0} \right)$

$= (-1) - (-1) = 2$

d) Teorema de Weierstrass.

f es continua en $[a, b] \Rightarrow f$ alcanza máximo y mínimo absoluto (global) en $[a, b]$

$f(x)$ es continua en $[0, 2\pi]$, por tanto por el teorema de Weierstrass $f(x)$ tiene máximo y mínimos absolutos en $[0, 2\pi]$

$f(\pi/4) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad 1 > 0$

Por tanto el máximo absoluto de $f(x)$ será un valor estrictamente positivo y como $f(x)=0$ $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (2\pi, \infty)$ podemos asegurar que ~~f(x)~~ $f(x)$ tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2}\right) = -1(1-0) = -1 < 0$$

De la misma manera podemos asegurar que $f(x)$ tiene mínimo absoluto en $\mathbb{R}$

Sabemos que el máximo y el mínimo absolutos están en $[0, 2\pi]$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 0$$

$$-2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}$$

$$= \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \; x = \frac{4\pi}{3} \end{array}\right\} \text{candidatos a extremo}$$

Sustituimos en la función (ya hemos demostrado que existen)

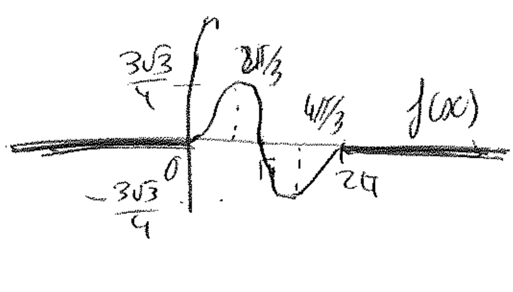
$f(0) = 0$ $\quad$ $f(2\pi) = 0$

$$f(2\pi/3) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = +\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$x = \frac{2\pi}{3}$ es el máximo absoluto de $f(x)$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(1 - \cos\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$x = \frac{4\pi}{3}$ es el mínimo absoluto de $f(x)$.



Febrero 00
Ejercicio 2

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\,x\,e^{-nx^2} - (n-1)\,x\,e^{-(n-1)x^2}\right]$, se pide :

a) Calcular la suma parcial n-ésima, S_n.
b) Determinar la función suma, $S(x)$, indicando su campo de convergencia C.
c) Indicar si dicha serie converge uniformemente en C o en algún subconjunto no acotado de $\mathbb{R}$.

dominio de la función suma

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right) \to$ es telescópica $\sum(x_n - x_{n-1})$ a_n

$$S_n(x) = \underbrace{\cancel{xe^{-x^2}} - 0}_{\substack{1^{er}\text{ término}\\ a_1\ (n=1)}} + \underbrace{\cancel{2xe^{-2x^2}} - \cancel{xe^{-x^2}}}_{\substack{2^{o}\text{ término}\\ a_2\ (n=2)}} + \underbrace{\cancel{3xe^{-3x^2}} - \cancel{2xe^{-2x^2}}}_{\substack{3^{er}\text{ término}\\ a_3\ (n=3)}} + \ldots + \underbrace{nxe^{-nx^2} - \cancel{(n-1)xe^{-(n-1)x^2}}}_{a_n}$$

$$= nxe^{-nx^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto la función suma n-ésima es: $S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to S_n(x) = nxe^{-nx^2}$

b) $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} =$

$$= x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(e^{x^2})^n} = x \cdot 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Orden de los infinitos
$\ln < n^a < b^n < n! < n^n$
$a>0 \quad b>1$

Por tanto la función suma total es:

(dominio de la función) campo de convergencia

$$\boxed{\begin{array}{l} S: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to S(x) = 0 \end{array}} \qquad \boxed{C = \mathbb{R}}$$

c) Para estudiar la convergencia uniforme de la serie del enunciado tenemos que estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $S_n(x) = nxe^{-nx^2}$ calculada en el apartado a.

$S_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-nx^2}$ converge uniformemente a $S(x) = 0$ en $\mathbb{R}$ si y sólo si

el $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} \{ \underbrace{|S(x) - S_n(x)|}_{①} \}}_{②}}_{③} = 0$

① $g(x) = |S_n(x) - S(x)| = |nxe^{-nx^2} - 0| = |nxe^{-nx^2}|$

$= |n||x||e^{-nx^2}| = ne^{-nx^2}|x|$

$\Rightarrow g(x) = |x|ne^{-nx^2} = \begin{cases} -xne^{-nx^2} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ xne^{-nx^2} & x>0 \end{cases}$

② Tenemos que calcular el máximo (o supremo) de $g(x)$ en $\mathbb{R}$

La función es par (simétrica respecto al eje y, $g(-x) = g(x)$) por tanto sólo estudiamos para $x \geq 0$.

Buscamos los máximos de $g(x)$ en $[0, \infty)$

$g(x) = xne^{-nx^2}$, $x \geq 0$

$g'(x) = ne^{-nx^2} + nx(-2nx)e^{-nx^2}$

$= ne^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow ne^{-nx^2}(1-2nx^2) = 0 \Leftrightarrow 1-2nx^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2n}}$

pero como estamos en $[0, \infty)$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt{\frac{1}{2n}}$ candidato a extremo.

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de $g(x)$:

	0		$\sqrt{\frac{1}{2n}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

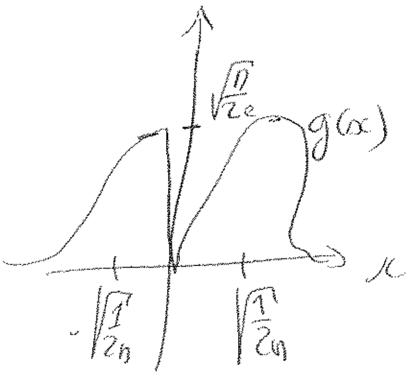
Por tanto $g(x)$ tiene un máximo en $x=\sqrt{\frac{1}{2n}}$ y por ser par también tiene otro máximo en $x=-\sqrt{\frac{1}{2n}}$

y la altura de los dos máximos es la misma y vale:

$$g\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right)=\left|\frac{1}{\sqrt{2n}}\right| n\, e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2n}}\, n\, e^{-1/2}$$

$$=\frac{\sqrt{n}\, e^{-1/2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sqrt{e}}=\sqrt{\frac{n}{2e}}$$



(3) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2e}}=+\infty\neq 0$

$\Rightarrow$ $S_n(x)$ no converge uniformemente a $S(x)$ en $\mathbb{R}$ y por ello

$\boxed{\text{la serie de funciones del enunciado no converge uniformem}^{te}\text{ a } S(x) \text{ en } \mathbb{R}}$

Septiembre 00
Ejercicio 1

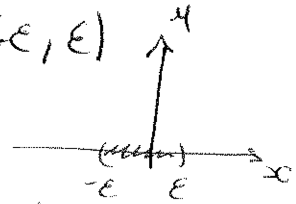
Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

a) Analizar, en la métrica actual, el carácter abierto o cerrado del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x)=0\}$

b) ¿Existe algún entorno V_0 del origen, tal que $f \in C^1(V_0)$?.

c) Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n} f(x_n)$, donde, $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$

$V_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$



b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

si $\boxed{x \neq 0}$ $x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ es continua y derivable y de clase C^1 una composición de funciones elementales $(x^2, \operatorname{sen} x, \frac{1}{x})$

si $\boxed{x = 0}$ continuidad $\lim_{x\to 0} \overset{0}{x^2} \underbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}_{\text{acotado}} = 0 = f(0) \Rightarrow f$ es continua en $x=0$

derivabilidad $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0 \in \mathbb{R}$

Por tanto f es derivable en $x=0$ y $f'(0) = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Continuidad de $f'(x)$ en $x=0$: $\lim_{x\to 0} 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ $\nexists$, por tanto $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$ y $f'(x)$ no es continua $\Rightarrow f$ no es de clase C^1

Conclusión f es continua en todo $\mathbb{R}$ f es derivable en todo $\mathbb{R}$ ~~y~~ pero f' es sólo continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ por tanto f no es de clase C' en $x=0$ y por ello no existe ningún entorno de $x=0$ ~~en V_0~~ donde $f \in C'$.

$f \in C'(\mathbb{R}-\{0\})$

Febrero 2001
Problema 2

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$.

a) (4 ptos) Comprobar que existe $a\in\mathbb{R}$ tal que $g(a)<1$ y $g(x)\le g(a)$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

b) (3 ptos) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión funcional (f_n), siendo $f_n=(g(x))^n$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

c) (3 ptos) Estudiar la compacidad, conexión y completitud del conjunto $g(A)$, donde $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

a)

Al tratarse de una función racional con denominador siempre distinto de cero podemos asegurar que su dominio de definición es toda la recta real $\mathbb{R}$.

Además como $g\in C^1$ sabemos que sus máximos y mínimos se encuentran en los puntos donde se anula su derivada primera.

$$g'(x)=\frac{2x(1+x^4)-x^2\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}=\frac{2x+2x^5-4x^5}{(1+x^4)^2}=\frac{2x-2x^5}{(1+x^4)^2}=\frac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2}$$

que igualando a cero da como soluciones,

$$2x(1-x^4)=0\ \Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 1-x^4=0\ \Rightarrow\ x^4=1\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt[4]{1}\ \Rightarrow\ x=\pm 1\end{cases}$$

así pues $x=0,\ x=1,\ x=-1$ son los puntos estacionarios (o críticos) de g.

Para comprobar si son realmente máximos o mínimos calculamos la derivada segunda,

Existen otras formas más "elegantes" de hacerlo pero ésta quizás sea la más familiar para todos

$$g''(x)=\frac{(2-10x^4)(1+x^4)^2-(2x-2x^5)2(1+x^4)4x^3}{(1+x^4)^4}=\frac{6x^8-24x^4+2}{(1+x^4)^2}$$

y sustituimos los puntos estacionarios en ella obteniendo los siguientes resultados,

- $g''(0)=2>0\ \Rightarrow\ x=0$ es un mínimo donde la función vale $g(0)=0$
- $g''(1)=-2<0\ \Rightarrow\ x=1$ es un máximo donde la función vale $g(1)=\dfrac{1}{2}$
- $g''(-1)=-2<0\Rightarrow\ x=-1$ es un máximo donde la función vale $g(-1)=\dfrac{1}{2}$

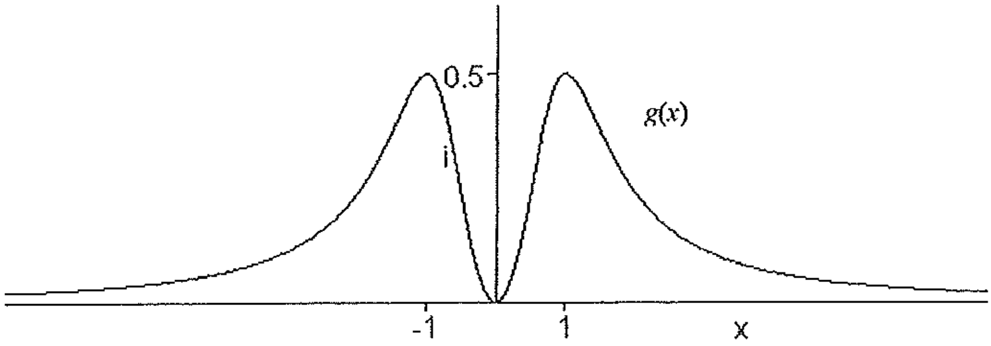
Para poder esbozar la gráfica de la función ya sólo falta saber que pasa cuando la función tiende a infinito, o sea, si tiene asíntotas horizontales,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1+x^4}=0$$

lo que significa que $y=0$ es una asíntota horizontal de la función.

Por último, es interesante darse cuenta que la función es siempre positiva, es decir, está siempre sobre el eje x ($g(x)\ge 0$).

Con todos estos datos ya podemos hacer un dibujo de la gráfica de la función y, basándonos en ella, contestar al primer apartado del problema.



Tomando la gráfica como referencia vemos que haciendo $a = 1$ tenemos que $g(a) = g(1) = 0{,}5 < 1$ y $g(x) \le g(a) = 0{,}5$ para cualquier x ya que se trata del máximo de la función. Igual conclusión obtenemos si hacemos $a = -1$.
Con esto queda resuelto el primer apartado del ejercicio.

Solución : $a = 1$, $a = -1$

b)

- Convergencia puntual:

Recuerda que:
Si $|r| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (g(x))^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^4}\right)^n = 0$$

ya que

$$0 \le \frac{x^2}{1+x^4} < 1 \quad \text{para cualquier } x \in \mathbb{R}$$

Solución : La sucesión (f_n) converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función $f(x) = 0$.

- Convergencia uniforme:

Para estudiar la convergencia uniforme utilizaremos el procedimiento habitual basado en siguiente proposición:

$$f \text{ es uniformemente convergente en } \mathbb{R} \iff \lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Esta es una proposición muy útil de convergencia uniforme que conviene saberse muy bien.

Vamos a ir construyendo la expresión por partes:

$$f_n(x) - f(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^4}\right)^n - 0 = \left(\frac{x^2}{1+x^4}\right)^n$$

El valor absoluto no modifica la expresión en este caso pues nuestra función es siempre positiva:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left(\frac{x^2}{1+x^4}\right)^n$$

Los extremos de esta función se alcanzan en los mismos puntos que en el apartado a) por tanto:

$$\sup\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Por último calculando el límite nos queda que:

Volvemos a utilizar que si $|r| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left| f_n(x) - f(x) \right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

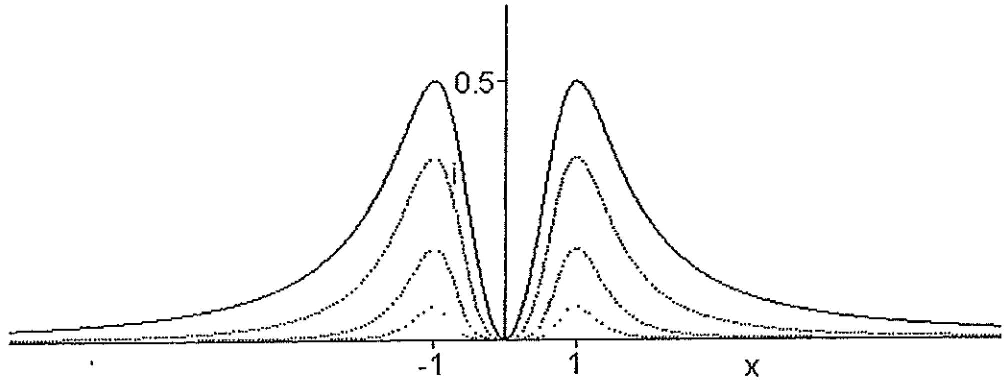
Por tanto la sucesión (f_n) converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función nula.

Solución : La sucesión (f_n) converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función $f(x) = 0$.

En la siguiente gráfica puedes observar la convergencia de (f_n) hacia $f(x) = 0$:

En esta gráfica se puede observar la función $(g(x))^n$ para distintos valores de n. En concreto hemos utilizado n =1, n =2, n =5 y n =20.

Fíjate como la función tiende a cero confundiéndose con el eje x



c)

Tomando como referencia la gráfica de $g(x)$ que hemos dibujado en el apartado a) podemos ver que el recorrido de la función es [0, 1/2]. Ahora bien, el único punto donde la función vale cero es en x=0 y este punto no pertenece al conjunto A. El resto de los puntos del recorrido se alcanzan en algún lugar de A. Por tanto, tenemos que,

$$g(A) = \left(0, \tfrac{1}{2}\right]$$

- Compacidad:
  En la recta real los conjuntos compactos son aquellos que son cerrados y acotados. En este caso $g(A)$ es acotado pero no es cerrado pues el intervalo es abierto por la izquierda. Por tanto $g(A)$ no es compacto en $\mathbb{R}$.
- Conexión:
  En la recta real los conjuntos conexos son los intervalos y los puntos aislados. En nuestro caso $g(A)$ es un intervalo. Por tanto $g(A)$ no es conexo en $\mathbb{R}$.
- Completitud:
  Para que un conjunto sea completo es condición necesaria que sea cerrado. En nuestro caso $g(A)$ no es cerrado por lo que podemos asegurar que $g(A)$ no es completo.

Solución : $g(A)$ es conexo, pero no es compacto ni es completo.

Septiembre 01
Ejercicio 1

Se considera la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, donde $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

a) Determínese su campo de convergencia C.

b) Calcúlese su suma $S(x)$ y su resto n-ésimo $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ en C.

c) ¿Es cierto que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente } A \subset \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} M_n = 0\right),$$

donde $M_n = \sup_{x \in A} R_n(x)$?

d) Estúdiese la convergencia uniforme de la serie en los conjuntos C, $C - \{0\}$ y $C - [-a, a]$ con $a > 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ donde $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$

a) y b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ r

$$S(x) = x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}_{\text{Serie geométrica de razón } \frac{1}{1+x^2}} \Rightarrow \begin{cases} S(x) = x^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n & \text{si } x \neq 0 \\ S(x) = x^2 \dfrac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x^2 \dfrac{1}{\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}} = \dfrac{x^2(1+x^2)}{(1+x^2)-1} = 1+x^2 & \\ S(0) = 0^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Entonces la función suma queda:

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to S(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{(converge.)}$$

El campo de convergencia es $\mathbb{R}$.

Ahora calculamos la función suma enésima:

$$S_n(x) = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = x^2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x^2 \frac{\frac{(1+x^2)^{n+1}-1}{(1+x^2)^{n+1}}}{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$= \frac{\cancel{(1+x^2)}\left((1+x^2)^{n+1}-1\right)}{(1+x^2)^{\cancel{n+1}}} = \frac{(1+x^2)^{n+1}-1}{(1+x^2)^n}, \quad \text{si } x \neq 0$$

si $x = 0$ $S_n(0) = 0$

Entonces la suma enésima queda:

$$S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to S_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x^2)^{n+1} - 1}{(1+x^2)^n} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

finalmente, calculamos la función resto enésimo

si $x \neq 0$ $\quad R_n(x) = S(x) - S_n(x) = 1 + x^2 - \dfrac{(1+x^2)^{n+1} - 1}{(1+x^2)^n}$

$$= \frac{\cancel{(1+x^2)^{n+1}} - \cancel{(1+x^2)^{n+1}} + 1}{(1+x^2)^n} = + \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

si $x = 0$ $\quad R_n(0) = 0$

$$R_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to R_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x^2)^n} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Septiembre 2004
Ejercicio 2

Se considera la sucesión de funciones reales de variable real (f_n), definidas como :

$$f_n(x)=\frac{1+x^2}{1+x^{2n}} \qquad x\in\mathbb{R},\ n=1,2,3,\ldots$$

a) Encontrar el límite puntual de la sucesión (f_n) en $\mathbb{R}$.

b) Estudiar la convergencia uniforme de (f_n) en $\mathbb{R}$ y en el intervalo $[-a, a]$ con $0<a<1$.

a) $f_n(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^{2n}} \rightarrow \left\{ \cancel{\dfrac{1+x^2}{1+x^2}}\ 1;\ \dfrac{1+x^2}{1+x^4};\ \dfrac{1+x^2}{1+x^6};\ \dfrac{1+x^2}{1+x^8}\ldots+\dfrac{1+x^2}{1+x^{2n}}\ldots \right\}$

$\rightarrow f$? función límite puntual.

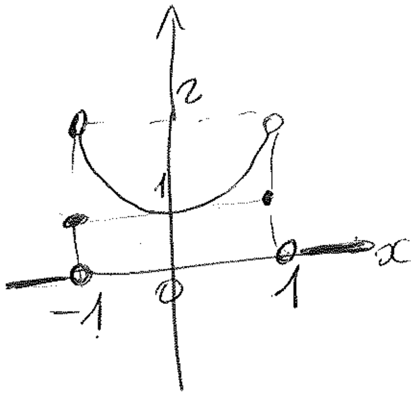
$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & r>1 \\ 1 & r=1 \\ 0 & -1<r<1 \\ \nexists & r=-1 \\ \pm\infty & r<-1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+x^2}{1+x^{2n}} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1+(x^{2n})}=0 \text{ si } x>1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x^{2n}}=1 \text{ si } x=1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x^{2n}}=1+x^2 \quad -1<x<1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x^{2n}}=1 \text{ si } x=-1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x^{2n}}=0 \quad x<-1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} \infty & x>1 \\ 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } -1<x<1 \\ 1 & x=-1 \\ \infty & x<-1 \end{cases}$$

Por tanto la función límite puntual es:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \begin{cases} 0 & x<-1 \\ 1 & x=-1 \\ 1+x^2 & -1<x<1 \\ 1 & x=1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$



ó

$$= \begin{cases} 1+x^2 & |x|<1 \\ 1 & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

Septiembre 2005
Ejercicio 1

1. Desarrolle en serie de Taylor en torno a cero (serie de MacLaurin) la función

$$f(x) = \arctan x$$

empleando operaciones con series de potencias.

2. Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)}. \qquad (1)$$

a) Estudie si es compacto el conjunto de valores reales de p para los que la serie (1) converge.

b) Calcule la suma de la serie (1) para $p = 1$. [Sugerencia: calcule la suma parcial n-ésima mediante descomposición en fracciones simples.]

c) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

[Indicación: si resolvió el apartado b), puede utilizar el hecho de que, para $p = 0$, la serie (1) suma 1/12.]

2) a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ segundo criterio de comparación

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{p+\alpha}}{n^3+\dots} = 1 \in \mathbb{R}-\{0\}$$

$\Leftrightarrow p+\alpha = 3$

Por tanto: si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow \sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter

. Además, sabemos que $\sum b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ es convergente si $\alpha > 1$

así pues $\sum a_n$ es convergente si $\alpha > 1$ $\quad 3-p > 1$

$3 > p+1$

$\boxed{2 > p}$

p tiene que ser est. $<$ que 2 para que $\sum a_n$ sea convergente.

Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3} = \frac{A(n+2)(n+3)+B(n+1)(n+3)+C(n+2)(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\Rightarrow n = A(n+2)(n+3) + B(n+1)(n+3) + C(n+2)(n+1)$$

$\boxed{n=-1}$ $\quad -1 = 2A \Rightarrow A = -1/2$

$\boxed{n=-2}$ $\quad -2 = -B \Rightarrow B = 2$

$\boxed{n=-3}$ $\quad -3 = 2C \Rightarrow C = -3/2$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1/2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{-3/2}{n+3}\right)$$

$$S_n = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)}_{a_1} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)}_{a_2} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1} + 2\,\frac{1}{n} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{n+1}\right)}_{a_{n-2}}$$

$$+ \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n} + 2\,\frac{1}{n+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{n+2}\right)}_{a_{n-1}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1} + 2\,\frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{n+3}\right)}_{a_n}$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n+1}\right)\right) + 2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \dots \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+3}$$

$$\left(n \geq 1 \quad S_n \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{(n+2)!}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{(n+3)!}\right)\right)$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n+2}\right) + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$-3/2\left(1/4 + 1/5 + \dots + \frac{1}{n+1}\right) - 3/2\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$$

Lo verde por sus coeficientes y sumados entre ellos hace 0.

$$2x - \frac{1}{2}x - 3/2\,x = 0$$

$$\Rightarrow S_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n+2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$$

$$S_n = \frac{3}{4}+\frac{2}{n+2}-\frac{3}{2n+4}-\frac{3}{2n+6}$$

finalmente la suma total (S)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 3/4$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ a_n Serie telescópica

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{(n+2)}+\frac{B}{(n+3)} = \frac{A(n+3)+B(n+2)}{(n+2)(n+3)}$$

$$\Rightarrow 1 = A(n+3)+B(n+2)$$

$\boxed{n=-3}$ $B = \cancel{1}$

$\boxed{n=-2}$ $A = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{x_n} - \underbrace{\frac{1}{n+3}}_{x_{n+1}}\right)$$

$$S_n = \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)}_{a_1}+\underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{5}\right)}_{a_2}+\dots\underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n+2}}-\frac{1}{n+3}\right)}_{a_n}$$

$$S_n = \frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

Finalmente la suma total es:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}-\frac{1}{n+3} = 1/3$$

TEST:

- La suma superior de la función $\operatorname{sen} x$ en $[0,2\pi]$ asociada a la partición $P=\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\}$ es igual a π. V

- Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente, con $f(a)>0$, $f(b)<0$ entonces $\left|\int_a^b f(x)dx\right| < \int_a^b |f(x)|\,dx$ V

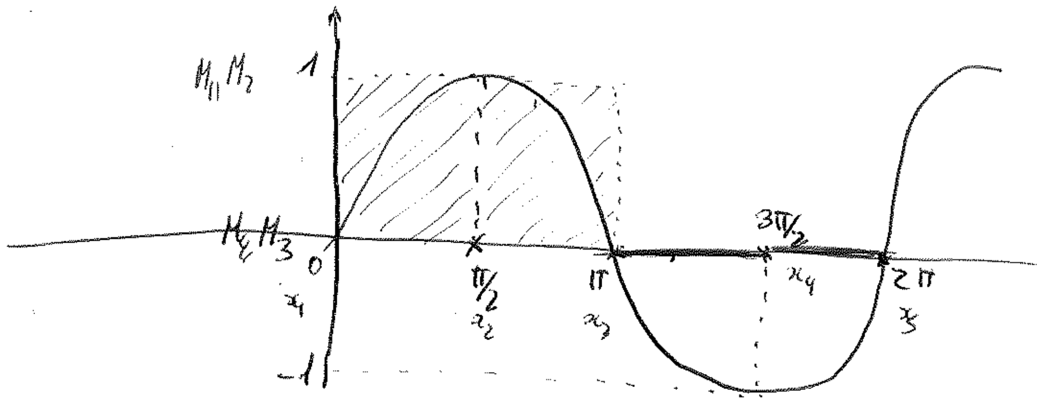
EJERCICIO:

Sea $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[-1,0) \\ x^2 & \text{si } x\in[-1,0]\end{cases}$ Entonces la integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ es igual a $\boxed{\frac{4}{3}}$

PROBLEMA:

Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=|2x-1|$ que verifica $F(0)=0$.

Test 1:

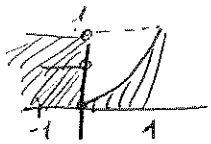


$$S(P)=\sum_{i=1}^{4} \overbrace{M_i}^{\text{altura}}\overbrace{(x_{i+1}-x_i)}^{\text{base}} = M_1(x_2-x_1)+M_2(x_3-x_2)+M_3(x_4-x_3)+M_4(x_5-x_4)$$

$$=1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+1\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\cancel{0\cdot\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)}+\cancel{0\cdot\left(2\pi-\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

$s(P)=-\pi$



Ejercicio

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[-1,0) \\ x^2 & \text{si } [0,1]\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}1\,dx+\int_0^1 x^2dx = x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

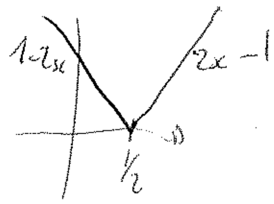
$$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Problema:

$$f(x) = |2x-1| = \begin{cases} -2x+1 & f(x)<0 \\ 2x-1 & x>0 \end{cases} = \begin{cases} -2x+1, & 2x-1<0 \\ 2x-1, & 2x-1>0 \end{cases}$$

Por tanto $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & 2x<1 \\ 2x-1 & 2x\geq 1. \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1-2x & x<\frac{1}{2} \\ 2x-1 & x\geq\frac{1}{2} \end{cases}$

si $x<\frac{1}{2}$



$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int 1-2x\,dx$$
$$= x - \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + c_1 = x - x^2 + c_1$$

si $x>\frac{1}{2}$,

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int 2x-1\,dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x^2 - x + c_2$$
$$= x^2 - x + c_2$$

Por tanto $F(x) = \begin{cases} x - x^2 + c_1 & \text{si } x<\frac{1}{2} \\ x^2 - x + c_2 & \text{si } x>\frac{1}{2} \end{cases}$

Falta calcular las ctes de integración c_1 y c_2

para obtener c_1 utilizamos que:

$$F(0) = 0$$

$$0 - 0^2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = $$

Para obtener c_2: Sabemos que $F(x)$ es derivable por lo tanto es continua

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} F(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} x - x^2 + c_1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} F(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (x^2 - x + c_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + c_2 = \frac{-1}{4} + c_2$$

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \begin{cases} x - x^2, & x<\frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{2} & x\geq\frac{1}{2} \end{cases}$$

ETSI
Telecomunicación
Febrero 2011
Ejercicio 2

Sea la sucesión de funciones $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $f_n(x) = x^{n+1} - x^n$. Se pide:

a) Encontrar su campo de convergencia y la función límite puntual.
b) Estudiar su convergencia uniforme en el intervalo $I = (0,1)$.

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$

a) Convergencia puntual:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n(x-1) = (x-1)\lim_{n\to\infty} x^n$$

$$= \begin{cases} \infty, & x>1 \\ 0, & x=1 \\ 0, & -1<x<1 \\ (-2)\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \text{oscila } (\text{entre } \pm 2) & x=-1, \nexists \lim \\ (x-1)\lim_{n\to\infty} x^n \text{ oscila } (\text{entre } \pm\infty) & x<-1 \ \nexists \lim \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La función límite puntual queda:

$$\boxed{\begin{array}{l} f: (-1,1] \to \mathbb{R} \\ \quad x \to f(x) = 0 \end{array}}$$

El campo de convergencia $\mathcal{C}$ es $(-1,1]$

El campo de convergencia son los valores de x para los cuales f_n converge.

b) La sucesión $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en $(0,1) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,1)} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$

Ejercicio 4.4

Sea f una función tal que $f(2)=-3$ y $f'(x)=\sqrt{x^2+5}$. Si $g(x)=x^2 f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$,

Calcula la ecuación de la recta tangente a la tangente a la gráfica de g en el punto $x=2$.

$y = f'(a)(x-a) + f(a) \qquad a=2$

$y = g'(2)(x-2) + g(2)$

$g'(x) = 2x f\left(\frac{x}{x-1}\right) + x^2 f'\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}$

$g'(2) = 4 f(2) + 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{2-1}\right)^2+5} \cdot (-1)$

$= -12 + 12 \cdot (-1)$

$= -24$

$g(2) = 2^2 f(2)$

$= 4 \cdot (-3)$

$= -12$

$y = -24(x-2) - 12$

$= -24x + 48 - 12$

$= -24x + 36$

Recta tangente de $g(x)$ en $x=2$

$y = g'(2)(x-2) + g(2)$

$g(2) = 2^2 f(2) = 4 f(2) = -12$

$1.(x-1) - 1. x$

$g'(x) = 2x f\left(\frac{x}{x-1}\right) + x^2 \cdot f'\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x}{x-1}\right)'$

$= 2x f\left(\frac{x}{x-1}\right) + x^2 f'\left(\frac{x}{x-1}\right) \frac{-1}{(x-1)^2}$

$\left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

$g'(2) = 2 \cdot 2\, f\left(\frac{2}{2-1}\right) + 2^2 f'\left(\frac{2}{2-1}\right) \cdot \frac{-1}{(2-1)^2}$

$= 4 f(2) - 4 f'(2) = 4 \cdot (-3) - 4 \cdot 3 = -24$

$f'(2) = \sqrt{2^2+5} = \sqrt{9} = 3$

$y = -24x + 36$

Ejercicio 4.3

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función derivable tal que $f(0)=0$ y $f'(0)=2$. Se pide calcular $F'(0)$:

a) $F(x)=f\left(x-\operatorname{tg}x\right)$

b) $F(x)=f\left(f(x)-\operatorname{tg}x\right)$

c) $F(x)=f\left(f(\operatorname{sen}x)-\operatorname{tg}x\right)$

Regla de la cadena

$$(g\circ f)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

a) $F(x)=f(x-\operatorname{tg}x)$

$$\Rightarrow F'(x)=f'(x-\operatorname{tg}x)\cdot(x-\operatorname{tg}x)'$$
$$=f'(x-\operatorname{tg}x)\cdot\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$
$$\Rightarrow F'(0)=f'(0-\operatorname{tg}0)\cdot\left(1-\frac{1}{\cos^2 0}\right)$$
$$=f'(0)\cdot 0=2\cdot 0=0$$

b) $F(x)=f(f(x)-\operatorname{tg}x)$

$$F'(x)=f'(f(x)-\operatorname{tg}x)\cdot(f(x)-\operatorname{tg}x)'$$
$$=f'(f(x)-\operatorname{tg}x)\cdot\left(f'(x)-\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$
$$F'(0)=f'(f(0))\cdot\left(f'(0)-\frac{1}{\cos^2 0}\right)$$
$$=2\cdot 1$$
$$=2$$

c) $F(x)=f(f(\operatorname{sen}x)-\operatorname{tg}x)$

$$F'(x)=f'(f(\operatorname{sen}x)-\operatorname{tg}x)\cdot(f(\operatorname{sen}x)-\operatorname{tg}x)'$$
$$\cancel{=f'(f(\operatorname{sen}x)-\operatorname{tg}x)\cdot\left(f'(\operatorname{sen}x)-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}$$

$$\cancel{F'(0)=f'(0)\cdot(f'(0)-1)}$$
$$\cancel{=2\cdot(-1)}$$
$$\cancel{=-2}$$

$$F'(x) = f'(f(\operatorname{sen} x) - \operatorname{tg} x) \cdot \left(f'(\operatorname{sen}(x)) \cdot \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$F'(0) = f'(0) \cdot (f'(0) \cdot 1 - 1)$$

$$= 2 \cdot 1$$

Cálculo – Grupo 11.1 – Entrega 2

última fecha de entrega: 25 de octubre 2011

1. Sean dos funciones, f y g, definidas en un entorno de un valor a, en el que cumplen que: $f(x) < g(x)$, y que tienen ambas límite en a.
   a) Demuestre que entonces se cumple que $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.
   b) ¿Es posible que ambos límites sean iguales? Justifique la respuesta.

2. Calcule los límites:

   $$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{sen}(x^2)} \qquad \text{b) } \lim_{x\to\infty} x - \frac{x\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0} e^x - \sqrt{1-2x}$$

3. Suponga que la función f cumple que existen dos constantes $L, \delta \in \mathbb{R}$ tales que:

   $$\forall x \in (c-\delta, c+\delta),\ |f(x) - f(c)| \leq L|x-c|.$$

   Demuestre entonces que f es continua en c.

4. Demuestre que si f es continua en $a \in \mathbb{R}$ y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

5. Sea la función

   $$f(x) = \frac{\cosh(x) - 1}{\sinh(x)}.$$

   a) Encuentre el mayor conjunto de $\mathbb{R}$ donde la expresión pueda ser definida.
   b) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en ese conjunto y estudie si f y f' pueden ser extendidas por continuidad a todo $\mathbb{R}$.
   c) Dibuje las gráficas de f y de f'.

6. Sea la función

   $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ x^x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   a) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f.
   b) Halle los extremos de f, tanto relativos como absolutos, y estudie su concavidad.
   c) Halle el polinomio de Taylor de grado 4 de f en torno a $x_0 = 1$. ¿Es posible construir el polinomio de Taylor de grado 4 de f en torno a $x_0 = 0$ (considerando valores de x positivos)?

5) $f(x) = \dfrac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x}$

a) Dominio de $f(x)$

$\operatorname{senh} x = 0 \Rightarrow x = 0$

Por tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x}$$

b) Continuidad:

$f(x)$ Es continua en su dominio ($D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$) por ser cociente de funciones continuas.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x} \underset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x - 0}{\cosh x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = 0$$

Por tanto, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ pero $\nexists f(0) \Rightarrow$ En $x = 0$ tenemos una discontinuidad evitable.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ debemos extenderla de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

de forma que $g(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

Derivabilidad:

$f(x)$ es derivable ($D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$) en su dominio porque es un cociente de funciones derivables siendo su función derivada:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{senh}x \cdot \operatorname{senh}x - (\cosh x - 1)\cosh x}{\operatorname{senh}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{senh}^2 x - \cosh^2 x + \cosh x}{\operatorname{senh}^2 x} =$$

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$$= \frac{-1 + \cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)} = \frac{\cosh(x) - 1}{\operatorname{senh}^2(x)}$$

$D(f') = \mathbb{R} - \{0\}$

El dominio de f' es $\mathbb{R} - \{0\}$ ($\operatorname{senh} 0 = 0$)

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-1 + \cosh x}{\operatorname{senh}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x - 0}{2x}$$

l'Hopital
$\operatorname{senh} \varepsilon \sim \varepsilon$
$(\varepsilon \to 0)$

l'Hopital

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh}(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

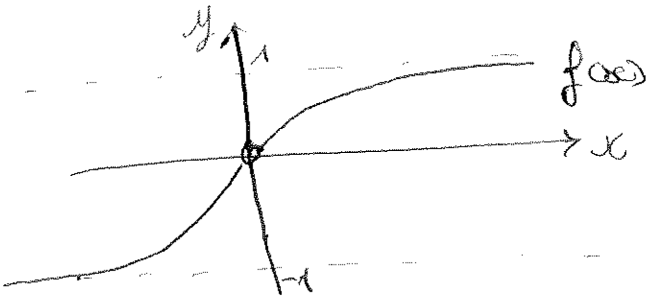
$\operatorname{senh} \varepsilon \sim \varepsilon$
$(\varepsilon \to 0)$

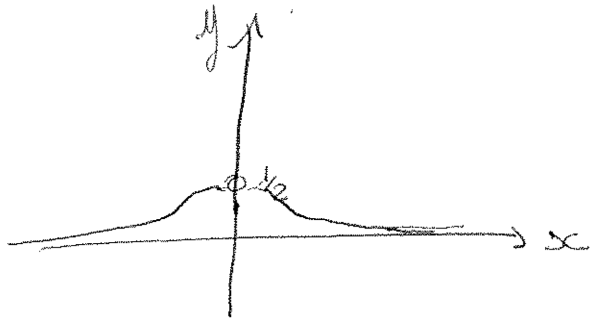
Extendemos $f'(x)$ para que sea continua:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh}^2 x} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

$h(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

c)





6) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x^x, & x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

a) <u>Continuidad.</u>

$x>0$, $f(x)$ es continua por ser composición de funciones continuas.

$x=0$, f es continua por la derecha en $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lambda} = e^0 = 1$$

$$\lambda = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

$f(0) = 1$

Entonces, f es continua por la derecha en $x=0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$\Rightarrow f$ es continua en todo su dominio.

<u>Derivabilidad</u>

$x>0$ $f(x)$ es derivable por ser composición de funciones derivables.

$\boxed{x=0}$ f es derivable por la derecha $\Rightarrow$ $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

existe y es $\underbrace{\text{finito}}_{\in \mathbb{R}}$.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} \underset{\text{l'hopital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x(\ln x + 1)}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^x}_{\to 1} \underbrace{(\ln(x) + 1)}_{\to -\infty} = -\infty$$

Por tanto $f(x)$ no es derivable por la derecha en $x=0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
y es derivable en $\mathbb{R}^+ - \{0\}$

b) Extremos: (max y min.)

$$f'(x) = x^x(\ln(x)+1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x^x(\ln(x)+1) = 0$$

$\Rightarrow$ $x^x \neq 0$ ó $\ln(x) + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $\ln x = -1$

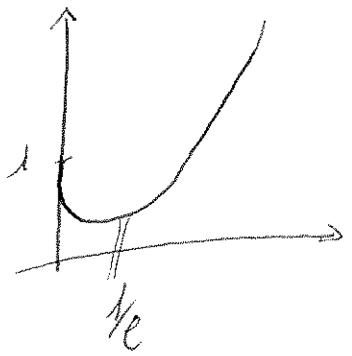
$x = e^{-1}$

único candidato a extremo

Estudiamos el crecimiento y el decrecimiento de la función

	$(0, \frac{1}{e})$	$(\frac{1}{e}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

$\Rightarrow$ en $x = \dfrac{1}{e}$ hay un mínimo absoluto


1
1/e

monteroespinosa.com
Area de Descargas Integrales

Tema 4. Integración. Ejercicios

CÁLCULO. CURSO 2011-12
Ricardo Riaza. Grupo 12.1

Nota: los ejercicios 4.1, 4.2 y 4.3 son evaluables y por tanto de entrega obligatoria.

Cada grupo deberá:

- escribir el número de grupo y el nombre y apellidos de los integrantes del mismo en todas las hojas que entregue;
- identificar claramente el número de cada ejercicio.

Los ejercicios evaluables se entregarán junto con los del tema 3, el **jueves 3 de noviembre** no más tarde de las 13:00 h.

4.1. Calcule las primitivas de las siguientes funciones

(a) $e^x \operatorname{sen} 2x$

(b) $\dfrac{x^5 - 2x^3}{x^4 - 2x^2 + 1}$

(c) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

Indicaciones: (a) integre dos veces por partes.
(b) divida y descomponga en fracciones simples.
(c) cambio de variable $x = -1 + t^2$.

4.2. La longitud de una curva diferenciable $y = f(x)$ entre los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) (con $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$) puede calcularse como

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Calcule de esta forma la longitud de la curva $y = k \cosh \frac{x}{k}$, $k > 0$, entre el punto $(0, k)$ y un punto arbitrario (x, y) de la curva (con $x > 0$).

4.3. Considere la función $f(x) = x^3 - 4x$.

(a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1, -3)$.

(b) Calcule el otro punto de corte de la tangente obtenida en (a) y la curva $y = f(x)$.

(c) Calcule el área delimitada por la curva y la recta tangente entre ambos puntos de corte.

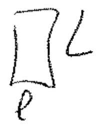
SIGUE EN EL REVERSO

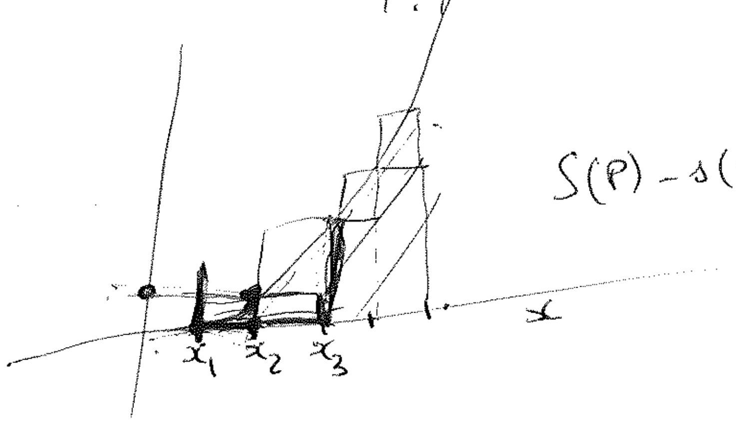
$y' = f'(a)(x-a) + f(a)$

[1] S. L. Salas, E. Hille y G. J. Etgen, *Calculus*, Volumen I, cuarta edición española (traducción de la octava edición en inglés), Reverté, 2002.

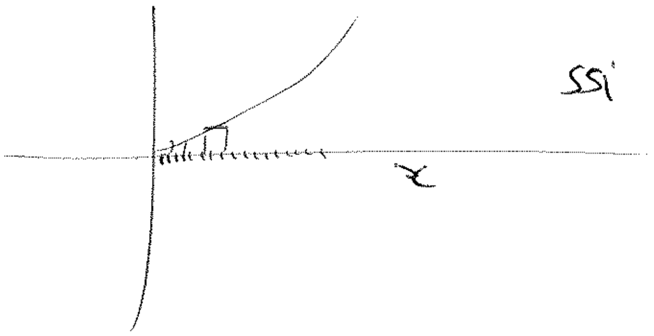
Independientemente de la entrega de los ejercicios evaluables anteriormente indicados, son de interés los ejemplos y ejercicios del capítulo 5 y de las secciones 8.1, 8.2 y 8.5 del libro de Salas, Hille y Etgen. Sobre integración de funciones hiperbólicas: ejercicios 33-46 p. 434, 31-43 p. 438. Véanse también los ejemplos 1 y 2 de la página 567, los ejemplos 1, 2, 4, 5 y 6 de la sección 10.7 y los ejercicios de esta sección que involucran integrales impropias en intervalos no acotados.

$l \times L$





$S(P) - s(P) =$



ssi $S(P) = s(P) \Rightarrow \exists \int$

Nota: $\int x - \frac{x}{x^4-2x^2+1} = \int x - \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx = \int x\,dx - \int x(x^2-1)^{-2}\,dx$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2(x^2-1)} + C$

4.3) $f(x) = x^3 - 4x$

Polinomio de Taylor recta tangente de grado 1

a) $(1 ; -3)$ no hace falta porque tenemos la func.

$f'(x) = 3x^2 - 4$; $f'(1) = -1$

eq Tangente: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\cancel{-3 = f'(1)}$

Entonces la recta tangente es:

$y = -1.(x-1) - 3 \Rightarrow \boxed{y = -x - 2}$

b) $\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 4x \\ y = -x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 4x = -x - 2 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ x=-2 & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \lfloor 0 \end{array}$$

$x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x^2 - 2x + 1) = (x+2)(x-1)^2 = 0$

$\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

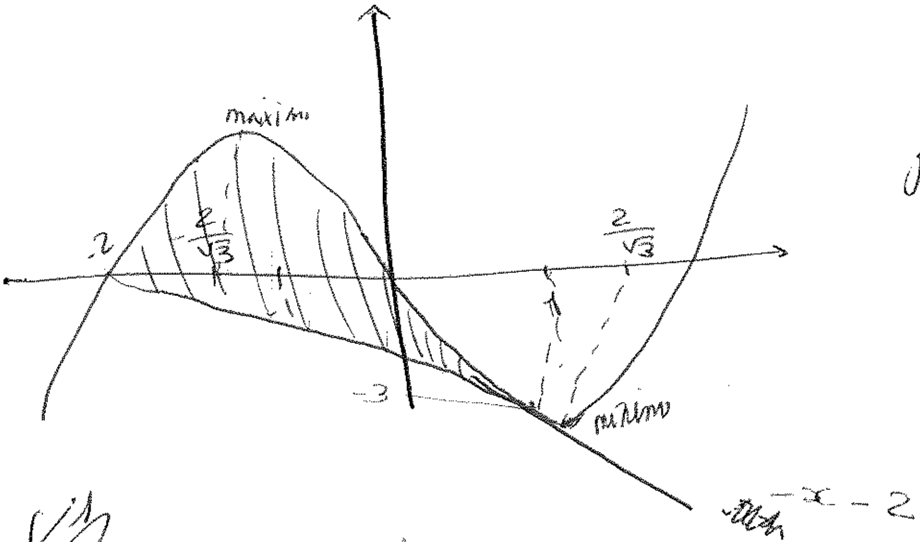
máximos y mínimos. $f(0) = 0$

$y' = 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

$y'' = 6x$

$y''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 6\frac{2}{\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ un mínimo

$y''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -6\frac{2}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ un máximo.



$f(x) = x^3 - 4x$

$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} x^3 - 4x \, dx - \int_{-2}^{1} -x - 2 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{1} - \left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{1}$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{12}{2} - 4 \right)$$

$$= \frac{1 - 6 + 8}{4} - \frac{\cancel{16} - 24 \cancel{-16}}{4} = \frac{3}{4} - \frac{-24}{4} = \frac{27}{4} \, m^2$$

4.1) c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}\,(2+x)} dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{(2\underbrace{-1+t^2}_{x})\underbrace{t}_{\sqrt{x+1}}} \cdot \overbrace{2t\,dt}^{dx} = \int \frac{2}{+1+t^2} dt = 2\int \frac{1}{+1+t^2} dt$

$= 2\operatorname{arctg}(t) + c$

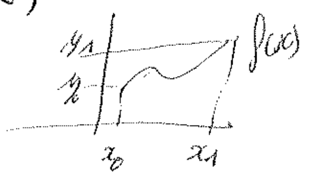
$x = -1 + t^2$

$\Rightarrow t = \sqrt{x+1}$

$\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2t \, dt$

$$= 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) + c$$

4.2)



$\sqrt{x^2} = |x|$

longitud : $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ (esto son metros)

$f(x) = k\cosh\dfrac{x}{k}$, $k>0$ entre $(0,k)$ y (x,y)
$\quad x_0 = 0,\ y_0 = k,\ x_1 = x,\ y_1 = y$

$f'(x) = +\cancel{k}\, \operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{k}\right) \cancel{k} \cdot \dfrac{1}{k}$

$= + \operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{k}\right)$

$ch^2 x - sh^2 x = 1$

Longitud : $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+\left(\operatorname{senh}\left(\tfrac{x}{k}\right)\right)^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{ch^2\left(\tfrac{x}{k}\right)}\,dx = \int_0^x ch\frac{x}{k}\,dx$

siempre >0

$= k\, sh\left(\dfrac{x}{k}\right)$ (m)

$x = -1$ 1

$x = -2$ 2

4.1) $\int e^x \text{sen } 2x \, dx$ $\to$ producto normalmente por partes.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Arco
Log
Potencia
Exponencial
Seno o coseno

$u(x) = e^x \qquad du = e^x dx$

$dv = \text{sen } 2x\,dx \to v = \int dv = \int \text{sen } 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$\Rightarrow \quad uv - \int v\,du = -\frac{1}{2}e^x\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos x\, e^x dx$

$$= -\frac{e^x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \underbrace{\cos 2x}_{u}\,\underbrace{e^x dx}_{dv}$$

$$= -\frac{e^x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\left(\text{sen } 2x \cdot \frac{e^x}{2} - \int \frac{1}{2}\text{sen } 2x\, e^x dx\right).$$

$$= -\frac{e^x}{2}\cos 2x + \frac{e^x}{4}\text{sen } 2x - \frac{1}{4}\int e^x \text{sen } 2x\,dx.$$

$\Rightarrow \int e^x \text{sen } 2x\,dx = -\frac{e^x}{2}\cos 2x + \frac{e^x}{4}\text{sen } 2x - \frac{1}{4}\int e^x \text{sen } 2x\,dx.$

$$\frac{5}{4}\int e^x \text{sen } 2x\,dx = e^x\left(\frac{1}{4}\text{sen}(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)$$

$$= \frac{4}{5}e^x\left(\frac{1}{4}\text{sen}(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)$$

$$= \frac{e^x}{5}\left(\text{sen}(2x) - 2\cos(2x)\right) + C$$

b) $\int \frac{x^5-2x^3}{x^4-2x^2+1}\,dx$

como el grado del ~~denominador~~ numerador que el grado del denominador tenemos que dividir.

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 2x^3 \text{ dividendo} & x^4-2x^2+1 \text{ divisor} \\ \cline{2-2} -x^5 - 2x^3 \;\; x & x \text{ cociente} \\ \hline -x \text{ resto.} & \end{array}$$

$\int u^a \cdot u'\,dx = \frac{u^{a+1}}{a+1}$

$Cd + r = D$

$$\Rightarrow \int x - \frac{x}{x^4-2x^2+1}\,dx$$

$$\frac{x}{x^4-2x^2+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$x^4-2x^2+1=0 \Rightarrow z^2-2z+1=0 \Rightarrow (z-1)^2=0 \Rightarrow z=1$ (doble)

$z=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ (doble) $\begin{cases} x=1 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=-1 \end{cases}$

Sacamos denominador común:

$$\frac{x}{\cancel{(x-1)^2(x+1)^2}} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{\cancel{(x-1)^2(x+1)^2}}$$

$x = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$

$\boxed{x=1}$ $\quad 1 = B(1+1)^2 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$\boxed{x=-1}$ $\quad -1 = D4 \Rightarrow D = -\frac{1}{4}$

$\boxed{x=0}$ $\quad 0 = -A + B + C + D \Rightarrow A = C$

$\boxed{x=2}$ $\quad 2 = 9A + 9\underset{1/4}{B} + 3A + \underset{-1/4}{D} \Rightarrow \cancel{2} = 12A + \cancel{2} \Rightarrow A=0$

$C=0$

$$\Rightarrow \int x\,dx - \int \frac{1/4}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1/4}{(x+1)^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{1}{4(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{4(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int x\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{(x^2-1)2} + C$$

$$\boxed{\frac{x}{(x-a)(x-b)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}}$$

TEMA 6: EXTREMOS. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Ejercicio 1

Esbozar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-|x|}$ b) $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$ c) $f(x) = e^{(x-1)\sqrt{|x-2|}}$

Ejercicio 2 de Taylor

Polinomio de Taylor

Primera forma de calculo: $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)$

Segunda forma de calculo:

Calculamos el polinomio de Taylor a partir de otros ya conocidos (sumando, restando ...)

$n x=0$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{x}$

$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \frac{1}{1-x} = (\operatorname{arcsen} x)'$

poly de orden 3 serie → orden infinito

a) $f(x) = e^x + \operatorname{sen} x$

$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \dots\right) + \left(x - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \dots\right)$

$= 1 + 2x + \frac{x^2}{2!} \dots$

Por tanto $P_3(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2}$

b) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{arcsen} x$

$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3!} \dots\right)$

$= \underbrace{x + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{1 \cdot (x + \frac{x^3}{3!} \dots)} - \frac{x^3}{2!} \dots = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} \dots = x - \frac{x^3}{3} \dots$

Por tanto $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3}$

c) $f(x) = tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{3!} \dots}{1 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots} = x + \frac{x^3}{3} + \dots$

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{3!} + \dots & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \cline{2-2} -x + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} \dots & x + \frac{x^3}{3} + \dots \\ \cline{1-1} \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{4!} \dots & \\ -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{6} + \dots & \\ \cline{1-1} \frac{x^5}{8} \dots & \end{array}$$

$x \times 1 = x$

$-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{2!} = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{3}$

$P_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln(1+x)} = \dfrac{1}{1 + (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots)} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + \dots$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \\ \cline{2-2} -1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots & 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{14x^3}{6} \\ \cline{1-1} 0 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots & \\ x + x^2 - \frac{x^3}{2} \dots & \\ \cline{1-1} \frac{3x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} \dots & \\ -\frac{3x^2}{2} - \frac{3x^3}{2} \dots & \\ \cline{1-1} 0 - \frac{14x^3}{6} \dots & \\ + \frac{14x^3}{6} & \end{array}$$

$\Rightarrow P_3(x) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x = 1$

Vamos a calcularlo a partir del pdi obtenido en d) ej 1

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots (-1)^n (x-1)^n$$

derivamos a ambos lados

$$-\frac{1}{x^2} = 0 - 1 + 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 - \dots$$

$$-\frac{1}{x^2} = -1 + 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 \dots$$

$$\frac{1}{x^2} = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^3 - 4(x-1)^3$$

$$P_3(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3$$

d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= x^2 + \dots$$

$$P_3(x) = x^2$$

Otra forma $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} \dots\right)$$

$$= + \frac{(2x)^2}{4} \dots$$

$$P_3(x) = \frac{(2x)^2}{4} = x^2$$

Ej 3 de Taylor

$x \cos(3x)$

→ $f(x) = x \cos(3x)$ en $x=0$ de orden 3

aplicamos composición

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

$$\cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \dots (-1)^n \frac{(3x)^{2n}}{2n!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{3^4x^4}{4!}$$

$$x \cdot \cos(3x) = x \cdot \left(1 - \frac{3^2x^2}{2!} + \frac{3^4x^4}{4!} \dots\right)$$

$$= x - \frac{3^2x^3}{2!} + \frac{3^4x^5}{4!} \dots$$

$$P_3(x) = x - \frac{3^2x^3}{2!}$$

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ en $x=0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2!} + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3!} \dots$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^3}{3!} \dots$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{(x^2 + \dots)}{2!} + \frac{(x^3 + \dots)}{3!}$$

$$= 1 + x \cancel{- \frac{x^3}{3!}} + \frac{x^2}{2!} \cancel{+ \frac{x^3}{3!}}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Tema 6: Extremos

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-|x|} = \begin{cases} \dfrac{e^x}{1-(-x)} & si\ x<0 \\ \dfrac{e^x}{1-x} & si\ x>0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{1+x} & si\ x<0 \\ \dfrac{e^x}{1-x} & si\ x>0 \end{cases}$

$|x| = \begin{cases} -x & si\ x \leq 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Dominio: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

Simetrías: no tiene

Puntos de corte

Eje y: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{e^0}{1-|0|} = 1 \Rightarrow (0, 1)$

Eje x: $y = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ e^x > 0}}{0 =} \dfrac{e^x}{1-|x|}$ $\nexists$

Asíntotas

Horizontales

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1-x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{-1} = -\infty$ $\nexists$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1+x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1} = 0$ $\boxed{y = 0}$

Verticales

Tenemos dos $x = 1$ $x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{e^x}{1+x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{e^x}{1+x} = +\infty$

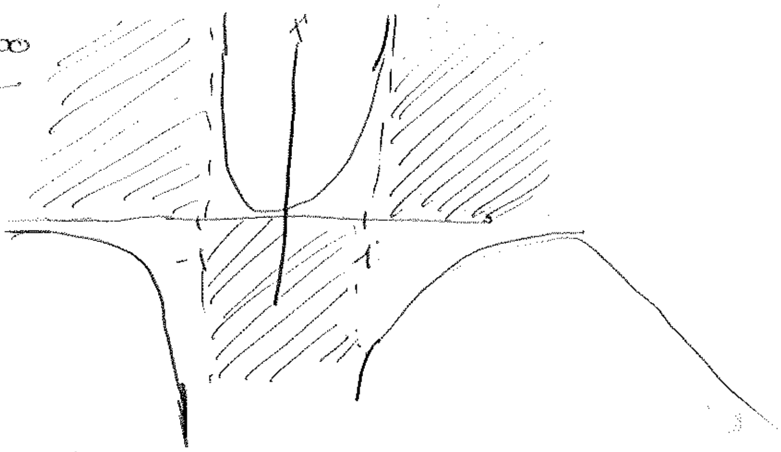
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{1-x} = -\infty$$

Signo de la función:

	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 1$	$1 \quad +\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

idea de la función



Cálculo de extremos (= mínimos y máximos)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} & \text{si } x<0 \\[2ex] \dfrac{e^x(1-x) + e^x}{(1-x)^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) \begin{cases} \dfrac{x e^x}{(1+x)^2} & \text{si } x<0 \\[2ex] \dfrac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Vemos si es derivable en 0: (x la cuenta de la regla)

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right| \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \nexists\, f'(0) \Rightarrow x = 0$$ es un candidato a extremo.

$x<0$, $x \in (-\infty, 0)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x e^x}{(1+x)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (-\infty, 0)$

$x>0$, $x\in(0,\infty)$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \in(0,\infty)$$

Lista de candidatos a extremos

- $x=0$ pq $\nexists\, f'(0)$
- $x=2$ pq $f'(2)=0$

nota: En general, los candidatos a extrema de una función cualquiera están en aquellos pts donde la derivada se anula y en los que la derivada no existe.

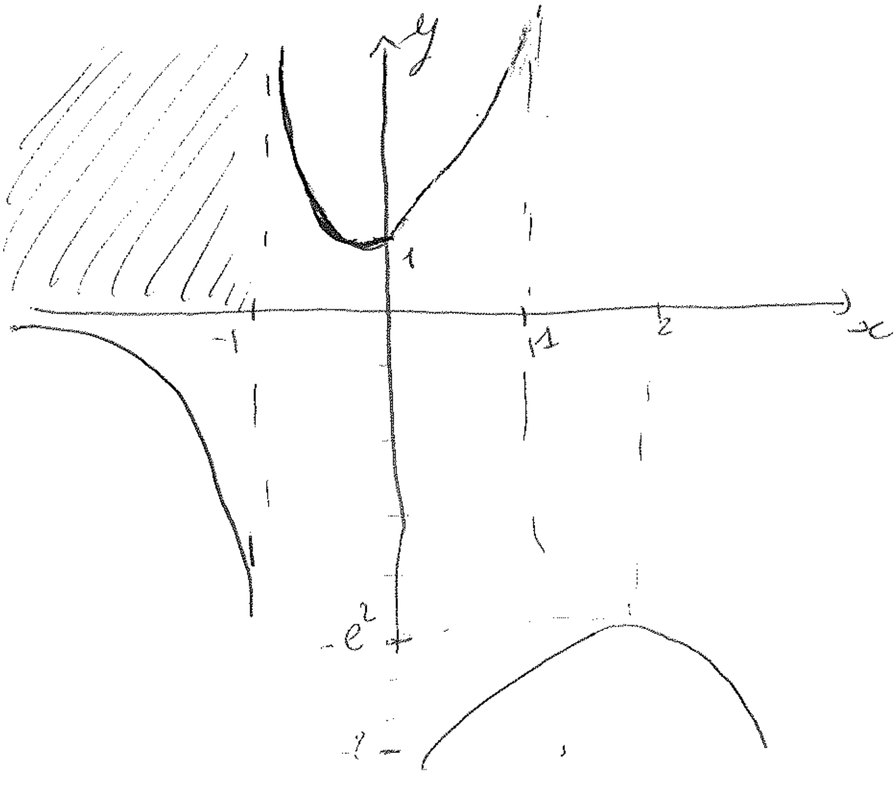
Estudio de la monotonía

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$ 1	$\nearrow$	$\nearrow$ $\frac{e^2}{-1}$	$\searrow$

Por tanto

$x=0$ mínimo (no derivable) $\Rightarrow y=\frac{e^0}{1-|0|}=1$ (mín)

$x=2$ máximo (derivable) $\Rightarrow y=-e^2$



b) $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}} = \begin{cases} \dfrac{x}{e^{x-1}} & x>1 \\[2mm] \dfrac{x}{e^{-x+1}} & 0<x<1 \\[2mm] \dfrac{-x}{e^{-x+1}} & x<0 \end{cases}$

$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ f(x) & f(x) \geq 0 \end{cases}$

$|x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x e^{x-1} & x<0 \\ x e^{x-1} & 0<x<1 \\ x e^{1-x} & x>1 \end{cases}$$

$\boxed{\dfrac{x}{e^{x-1}} = x e^{-(x-1)} = x e^{-x+1}}$

Dominio $D(f) = \mathbb{R}$

Simetrías No tiene

Puntos de corte:

Eje y; $x = 0$, $y = \dfrac{|0|}{e^{|0-1|}} = 0$ $(0,0)$

Eje x: $y = 0$, $0 = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}} \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

Asíntotas

horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{1-x} = 0$ $\boxed{y=0}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x e^{x-1} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-1}{-e^{1-x}} = 0$ $\boxed{y=0}$

verticales: no tiene.

Signo de la función

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$+$	

$$f'(x) = \begin{cases} \cancel{-e^{x-1} \ldots x e^{x-1} \ldots} \\ e^{x-1}(-1-x), & x<0 \\ e^{x-1}(x+1), & 0<x<1 \\ e^{1-x}(1-x), & x>1 \end{cases}$$

~~Candidatos~~ cálculos a extremos

$x=0$ (por la cuenta de la hoja)

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -e^{-1} \\ f'(0^+) = e^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists f'(0) \Rightarrow \boxed{x=0} \text{ candidato a extremo.}$$

$x=1$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \\ f'(1^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists f'(1) \Rightarrow \boxed{x=1} \text{ candidato a extremo}$$

Si $x<0$

$e^{x-1}(-1-x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$ candidato a extremo.

$0<x<1$

$e^{x-1}(x+1) = 0 \Rightarrow \cancel{x=-1} \in (0,1)$

$x>1$

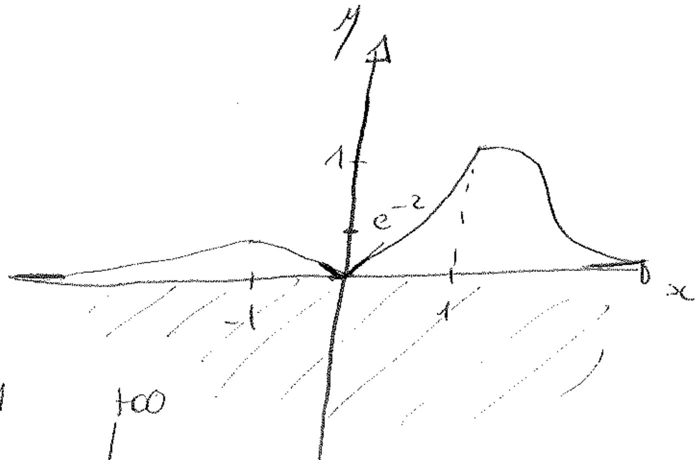
$e^{1-x}(1-x) = 0 \Rightarrow \cancel{x=1} \notin (1,\infty$

Lista de candidatos

$x=0$ pq no existe $f'(0)$

$x=1$ ——————— $f'(1)$

$x=-1$ pq $f'(-1)=0$



Monotonía de la función

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	+	−	
$f(x)$	↗	e^{-2} ↘	0 ↗	1 ↘	
		max derivable	min no derivable	max no derivable	

Calcular ~~el error~~ $\ln(1,1)$ con un polinomio de Taylor de grado 2 y acotar el error cometido.

$f(x) = \ln(1+x)$ en $a=0$

$\sqrt{1+1} = \sqrt{1+x}$
$= (1+x)^{1/2}$
$=$
$(1+x)^{\alpha}$ par $T-5.2$

$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\cdot x'$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}}_{P_{2,0}(x)} + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-0)^3}_{R_{2,0}}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x)^3$$

~~Error~~ $\ln(1+x) \simeq P_{2,0}(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$

$\ln(1+0,1) \simeq P_{2,0}(0,1) = 0,1 - \dfrac{(0,1)^2}{2}$

$= \cancel{0,995}\ 0,995.$

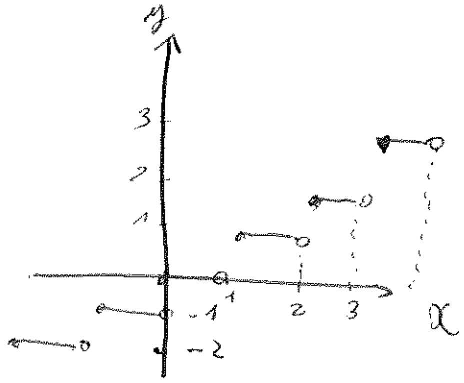
Ahora vamos a calcular el error cometido:

$$|Error| = \left|\frac{\frac{2}{(1+\xi)^3}}{3!}(x-0)^3\right| = \left|\frac{2}{3!(1+\xi)^3}x^3\right|$$

$$\underset{x=0,1}{=} \left|\frac{2}{3!(1+\xi)^3}(0,1)^3\right| \underset{\xi\,[0,\,0'1]}{\leq} \left|\frac{2}{3!(1+0)^3}(0,1)^3\right| = \frac{2}{6}(0,1)^3 = \frac{0,001}{3}$$

$|Error| < \dfrac{0,001}{3}$

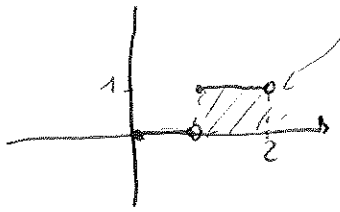
$$\int_0^2 x + [x]\,dx \quad \text{donde } [x] = E(x)$$



$$\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 [x]\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \int_0^2 [x]\,dx$$

$$= 2 + \int_0^2 [x]\,dx = 2 + 1 = 3$$

$P_n[x] = a_0 + a_1 x$



$$\int_0^2 [x]\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx = 1$$

Calcular $\int_0^{\infty} \frac{1}{2^{[x]}}\,dx$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

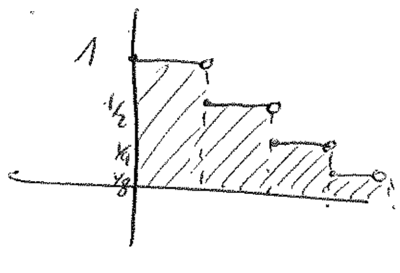
$$f(x) = \frac{1}{2^0} = 1$$

$$\frac{1}{2^{[x]}} = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{8} & 3 \leq x < 4 \\ \vdots & \end{cases}$$

$1 \leq x < 2 \; [x] = 1 \; f(x) = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \; f(x) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$3 \leq x < 4 \; [x] = 3 \quad f(x) = \frac{1}{8}$



$n \leq x \leq n+1 \Rightarrow [x] = n \quad f(x) = \frac{1}{2^n}$

$\int_0^2 \frac{1}{2^{[x]}}\,dx = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad \int_0^3 \frac{1}{2^{[x]}}\,dx = \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2^{[x]}}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Tema 3. Derivación. Extremos

Ejercicios

CÁLCULO. CURSO 2011-12
Ricardo Riaza. Grupo 12.1

Nota: los ejercicios 3.1, 3.2 y 3.3 son evaluables y por tanto de entrega obligatoria.

Cada grupo deberá:

- escribir el número de grupo y el nombre y apellidos de los integrantes del mismo en todas las hojas que entregue;
- identificar claramente el número de cada ejercicio.

Los ejercicios evaluables se entregarán junto con los del tema 4, en la fecha de entrega que se especificará más adelante.

3.1. Estudie la continuidad y derivabilidad de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

¿En qué puntos es continua la derivada?

3.2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x+1)^3 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{2x+1}{x+1} & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales, intervalos de convexidad y concavidad y puntos de inflexión.

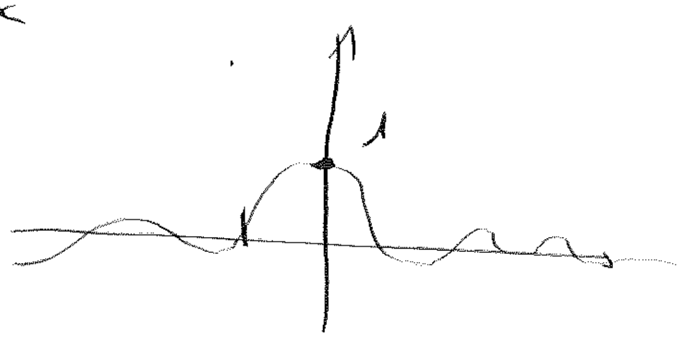
3.3. Acote el error cometido al aproximar la función $\operatorname{sen} x$ por su polinomio de MacLaurin de grado 3 en $(-\pi/2, \pi/2)$.

[1] S. L. Salas, E. Hille y G. J. Etgen, *Calculus*, Volumen I, cuarta edición española (traducción de la octava edición en inglés), Reverté, 2002.

Con independencia de la entrega de los ejercicios evaluables recogidos arriba, las secciones 3.1 a 3.3, 3.5, 3.6, 4.1 a 4.8 y 7.1 del libro de Salas, Hille y Etgen contienen una gran cantidad de ejemplos y ejercicios. Derivación de funciones hiperbólicas: ejercicios 1-18 y 26-28 p. 434, 1-13 y 19-28 p. 438. Polinomio de Taylor: ejercicios 1-38 p. 679 y 1-6 p. 683. *Nota:* como en otros capítulos, la temática de muchos ejercicios se repite y buena parte de ese material es conocido de bachillerato. No es necesario hacer todos los ejercicios: cada alumno deberá hacer aquéllos que le sean suficientes para afianzar cada concepto.

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

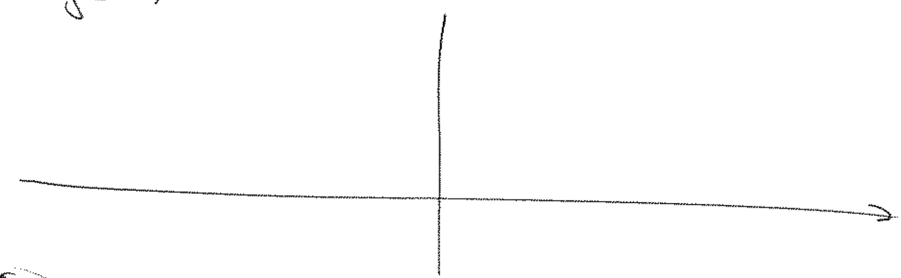
sinc



$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)}{2!} + \dots$

en torno a 0

$f(0)$



e^{x} en torno x_0 hasta grado 2.

$f(x_0)$

e^{x}

Curvatura = concavidad y convexidad

Puntos de inflexión

$x < -1$

$f''(x) = -6(x+1)$ $\quad -6(x+1) = 0$ $\quad f''(x) \neq a \Rightarrow$ ~~no existen~~ candidato a pt. de inflexión

$x = -1$

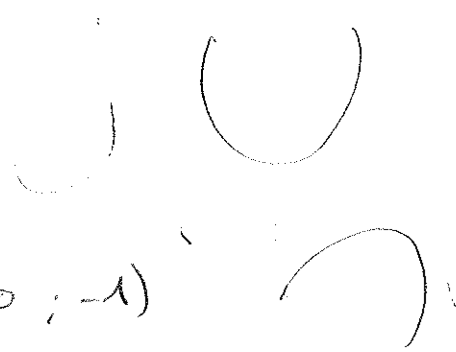
$x > -1$

$$f''(x) = -\frac{2(x+1)}{(x+2)^4} = \frac{-2}{(1+x)^3}$$

$$\frac{-2}{(1+x)^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \nexists \text{ Pts de inflexión.}$$

Curvatura

	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	



$f(x)$ es convexa $(\cup)$ en $(-\infty ; -1)$

$f(x)$ es concava $(\cap)$ en $(-1 ; +\infty)$

$x = -1$ es un pt de inflexión.

3.3) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$f(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!}}_{P_{3,0}(x)} + \text{Error } R_{3,0}(x)$$

$f^{(n+1)}$

$$\boxed{\text{Error} = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \quad \text{con } \xi \in [a, x]}$$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$

$$|\text{Error}| = \left|\frac{\operatorname{sen}(\xi)}{4!}(x-0)^4\right| \quad \text{siendo } \xi \in [0, x]$$

sustituimos x por $\pi/2$

$$|\text{Error}| = \left|\frac{\operatorname{sen}(\xi)}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right| \quad \text{siendo } \xi \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Finalmente el error es máximo cuando $\xi = \frac{\pi}{2}$

$$|\text{Error}| < \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right| \Rightarrow 0 < |\text{Error}| < \frac{\pi^4}{24 \cdot 16}$$

3.2)

$$f(x) = \begin{cases} 2-(x+1)^3 & x \leq -1 \\ \dfrac{2x+1}{x+1} & x > -1 \end{cases}$$

<u>Continuidad $x=-1$</u>:

$$\lim_{x \to -1^-} 2-(x+1)^3 = 2$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = \infty$$

Si f es derivable en $x=a \Rightarrow f$ es c en $x=a$

Si f no es continua en $x=a \Rightarrow f$ no es derivable en $x=a$

discontinuidad de salto infinito.

Por tanto $f(x)$ no es continua ni derivable en $x=-1$

<u>Máximos y mínimos</u>

- $\boxed{x < -1}$; $f'(x) = -3(x+1)^2$

$-3(x+1)^2 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x+1 = 0 \iff \boxed{x=-1}$

- $x > -1$ $\quad f'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2x - 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$\frac{1}{(x+1)^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$ 2		$-\infty$ $\nearrow$

$f(x)$ es $\searrow$ en $(-\infty; -1)$

$f(x)$ es $\nearrow$ en $(-1; +\infty)$

No hay extremos.

Calculamos la derivada $f'(x)$:

$x<0 \quad f'(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

$x>0 \quad f'(x) = e^x$

Por tanto: $f' : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ (dominio de f')

$\qquad x \to f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} & x<0 \\ e^x & x>0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de $f'(x)$.

$\underline{x \neq 0}$ $f'(x)$ es continua por ser resta y cociente de funciones continuas ($\operatorname{sen} x$, $\cos x$, x, x^2) con denominador no nulo.

$\underline{x = 0}$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1\cdot\cancel{\cos x} - x\operatorname{sen} x - \cancel{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\cancel{x}\operatorname{sen} x}{2\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$$

$\Rightarrow$ f' no es continua en $x=0$. por tanto. $f'(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$.

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\quad f \in C^1(\mathbb{R}-\{0\}))$

3.1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x<0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

<u>Continuidad</u>

$x \neq 0$ f es continua por ser cociente de funciones continuas ($\operatorname{sen} x$ y x) con denominador no nulo si $x<0$ y e^x si $x>0$.

$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{sen} \varepsilon = \varepsilon \\ \varepsilon \to 0}}{=} 1$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1$ $\quad f(0) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$.

Conclusión f es continua en todo $\mathbb{R}$. $(\forall x \in \mathbb{R})$

<u>Derivabilidad</u>:

Si $x \neq 0$ f es derivable por ser cociente de funciones derivables ($\operatorname{sen} x$, x) con denominador no nulo si $x<0$ y e^x si $x>0$.

Si $x=0$

$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen} h}{h} - e^0}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} h - h}{h^2} \underset{\substack{\uparrow \\ L'H}}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos h - 1}{2h} \underset{\substack{\uparrow \\ L'H}}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} h}{2} = 0$

$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$

$\Rightarrow f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = 1$ por tanto f no es derivable en $x=0$.

$\Rightarrow f$ es derivable para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

NOMBRE 1: NOMBRE 2: NOMBRE 3: NOMBRE 4: NOMBRE 5:	Grupo nº:

Ejercicios 3.1 - Derivación. Extremos.

Ejercicio 1.
Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida a trozos

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{1-e^{(x-a)}} & \text{si} \quad x\neq a,\\[2ex] \lambda \quad \text{si} \quad x=a.\end{cases}$$

a) Obtener el valor de λ para que f sea continua en su dominio.
b) Hallar $f'(a)$.

Ejercicio 2.
Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida a trozos

$$f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{x^3}{6} & \text{si} \quad x<0,\\[2ex] 0 \quad \text{si} \quad x=0,\\[2ex] sen x \quad \text{si} \quad x>0.\end{cases}$$

a) Si f es de clase k en $\mathbb{R}$, $f\in C^k(\mathbb{R})$. ¿Cuánto vale k?.
b) Obtener, para valores de x positivos, el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden menor o igual que k, en un entorno de $x_0=0$, con su correspondiente resto de Lagrange.

Ejercicio 3.
Dada la función real $f(x)=x+arctan(x)-sen^2(x)$:
a) Estudiar si es invertible en el abierto $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.
b) Hallar, si existe, $\left(f^{-1}\right)'(0)$, la derivada de la función inversa en el punto $f(x)=0$.

Ejercicio 4.
Sea la función real $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^3+|9x^2-4|$.
a) Hallar sus extremos absolutos.
b) Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.
c) Hacer un boceto de su gráfica.

Ejercicio 3 Cálculo Grp. 15

$f(x) = x + \arctan(x) - \text{sen}^2(x)$

a) $f'(x) = \underbrace{1 + \frac{1}{1+x^2}}_{>1} - \underbrace{2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x}_{\text{acotado}}$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{1+x^2} - \underbrace{\text{sen}(2x)}_{\text{acotado entre } -1 \text{ y } 1}}_{>0} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x \cos x$

f es invertible

b) ¿$(f^{-1})'(0)$?

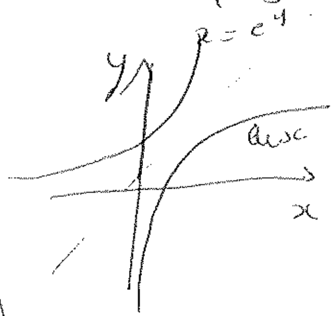
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)}$$

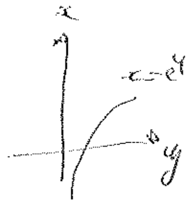
$f(x) = 0$
$\Rightarrow x = 0$
$\Rightarrow f^{(-1)}(0) = 0$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{1+0^2} - \text{sen}\,0} = \frac{1}{2}$$

Una función es invertible cuando su derivada no cambia de signo. (es decir nunca vale 0).

f es invertible en $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$





Es $f(x) = \ln x$ invertible en $(0,\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in (0,\infty)$
($x > 0$)

$\Rightarrow f(x)$ es invertible

$f(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow y = \ln x$

$\Rightarrow x = e^{f(x)} \quad \Leftrightarrow x = e^{y}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y$

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= f(x) \\ x &= f^{-1}(y) \end{aligned}}$$

$y = f(x)$
$x = f^{-1}(y)$

Ejercicio 2

$C^k \to$ la función es derivable k veces y su derivada ^{k} es continua

$f \in C^1([a,b]) \Leftrightarrow f$ es derivable en $[a,b]$ y f' es continua en $[a,b]$

$f \in C^2([a,b]) \Leftrightarrow f(x)$ si es derivable dos veces en $[a,b]$ y $f'(x)$ y $f''(x)$ son continuas en $[a,b]$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{6} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

si $x \neq 0$, f es derivable

$\cancel{x}=0$ (x la cuenta de la vieja)

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array}\right\} f'(0) = f'(0^+) \Rightarrow \exists f'(0) = 1 \quad ②$$

Por tanto $f(x)$ es derivable en $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} 1 - \frac{x^2}{2} = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

$f'(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ ①

con ① y ② $f \in C^1(\mathbb{R})$

[...]

b) $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{n+1!}(x-\xi)^{n+1}$

$\xi \in [0, x]$

$\operatorname{sen} x, f(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!}$

Integral de Riemman

Partición $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Suma superior de Riemman: $\boxed{S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_{i+1} - x_i)}$

Suma inferior de Riemman: $\boxed{s(f,P) = \sum_{i=1}^{m} m_i (x_{i+1} - x_i)}$

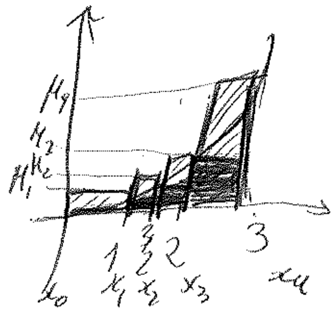
donde M es el máximo de f en $[x_i, x_{i+1}]$

—— m —— mínimo ——

Ejemplo: $[0,3]$ $\quad P = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$ $\quad f(x) = x^2$

nos piden la suma superior de f con la partición P

$S(f,P)$ y $s(f,P)$



$S(f,P) = 1 + \cancel{\tfrac{3}{2}} \cdot 2{,}25 + \cancel{\tfrac{3}{3}}\, 4 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 1$

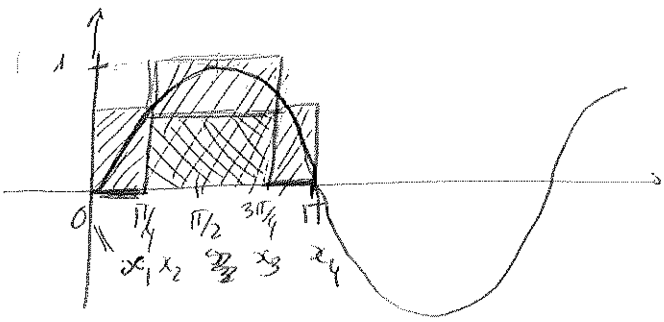
$= 1 + 1{,}125 + 2 + 9$

$= \boxed{13{,}125}$. Aprox. por exceso.

$s(f,P) = 0 + 0{,}5 + 1{,}125 + 4 = 5{,}625$

$$\int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0}{3} = 9$$

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad [0, \pi] \qquad P = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$



$$S(f,P) = M_1(x_2 - x_1) + M_2(x_3 - x_2) + M_3(x_4 - x_3)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$
$$= 2\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$$

$$s(f,P) = m_1(x_2 - x_1) + m_2(x_3 - x_2) + m_3(x_4 - x_3)$$
$$= 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 0.$$
$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

$$\text{Área} = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2.$$

Ejercicio 1

Deriva las siguientes funciones utilizando el Teorema fundamental del Cálculo:

a) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{t}\,dt$ b) $F(x) = \int_{-x^3}^{x^3} \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2 t}$ c) $F(x) = \int_0^x x^2 f(t)dt$

d) $F(x) = \int_3^{\int_1^x \operatorname{sen}^3 x} \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^6 t + t^2}$ e) $F(x) = \int_2^{e^{\int_1^{x^2} \operatorname{tg}\sqrt{t}\,dt}} \frac{1}{\ln s}\,ds$

Teorema fundamental del cálculo:

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Si $f(t)$ es continua $\Rightarrow F(x)$ es derivable y $F'(x) = f(x)$

Ejemplo: $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \Rightarrow F'(x) = e^{x^2}$ continua

Generalización 1: $F(x) = \int_a^{b(x)} f(t)\,dt$

$F'(x) = f(b(x)) \cdot b'(x)$

generalización 2

Sea $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$

$F'(x) = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$

continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

a) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{t}\,dt$

$F'(x) = f(x^3) \cdot 3x^2 - f(x^2) \cdot 2x$

$= \frac{e^{x^3}}{x^{\cancel{3}}} \cdot 3\cancel{x^2} - \frac{e^{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot 2\cancel{x}$

$= \frac{3e^{x^3}}{x} - \frac{2e^{x^2}}{x}$

$= \frac{3e^{x^3} - 2e^{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$

continua.

b) $F(x) = \int_{-x^3}^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt$

$F'(x) = f(x^3)\cdot 3x^2 - f(-x^3)\cdot (-3x^2)$

$= \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x^3)}\cdot 3x^2 + \frac{3x^2}{1+\operatorname{sen}(-x^3)}\cdot$

$= \frac{3x^2}{1+\operatorname{sen}^2(x^3)} + \frac{3x^2}{1+\operatorname{sen}^2(-x^3)}$

$= \frac{6x^2}{1+\operatorname{sen}^2(x^3)}$

c) $F(x) = \int_0^x x^2 f(t)\, dt$

$= x^2 \int_0^x f(t)\, dt$

$F'(x) = 2x \cdot \int_0^x f(t)\, dt - \cancel{2}x^2 f(x)$

Ejercicio 2

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt - x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \int_0^x \operatorname{sen}(t^3)dt - x}{x^4}$

continua

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt - x}{x^3} \underset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = \dfrac{1}{3}$

$e^{\varepsilon} - 1 \sim \varepsilon \ (\varepsilon \to 0)$

continuo

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \int_0^x \operatorname{sen}(t^3)dt - x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 \cdot \int_0^x \operatorname{sen}(t^3)dt - x}{x^4} \underset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3) - 1}{4x^3} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \int_0^x \operatorname{sen}(t^3)dt}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^3}}{4\cancel{x^3}} = \dfrac{1}{4}$

$\operatorname{sen}\varepsilon \sim \varepsilon \ (\varepsilon \to 0)$

Ejercicio 4

Calcula la recta tangente a la curva $\overset{f(x)}{y} = \int_{x^2}^{\sqrt{\pi}/2} \operatorname{tg}(t^2)\,dt$ en $x = \sqrt[4]{\pi/4}$.

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = f'\left(\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\right)\left(x - \sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\right) + f\left(\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\right)$$

- $$F\left(\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\right) = \int_{\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right)^2}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \operatorname{tg}(t^2)\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \operatorname{tg}(t^2)\,dt = 0$$

$$\left(\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\left(\tfrac{\pi}{4}\right)^{1/4}\right)^2 = \left(\tfrac{\pi}{4}\right)^{2/4} = \sqrt{\tfrac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- $$F'(x) = \operatorname{tg}\left(\left(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right)\cdot 0 - \operatorname{tg}\left((x^2)^2\right)\cdot 2x$$

$$= -\operatorname{tg}(x^4)\cdot 2x$$

$$F'\left(\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\right) = -\operatorname{tg}\left(\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\right)^4 \cdot 2\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot 2\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}$$

$$= -2\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}$$

- $$y = -2\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\left(x - \sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\right) + 0$$

$$= -2\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\,x + 2\sqrt{\tfrac{\pi}{4}}$$

TEMA 9: SUCESIONES DE NÚMEROS

Septiembre 95	Sean las sucesiones $(x_n),(y_n)\subset\Re$, con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\, y_n = 0$.
Septiembre 96	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = e$
Septiembre 96	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n-3}{3n+4}} = e$
Junio 97	Si (a_n) es una sucesión convergente de números reales positivos, con límite no nulo, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$.
Febrero 98	Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = a$.
Septiembre 99	Sea (x_n) una sucesión de números reales. Si $(\|x_n\|)$ converge, entonces (x_n) también converge.

Test de sucesiones

Sept 95

Falso

falta decir q. x_n esta acotada

Contraejemplo $x_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$y_n = n^2$ $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

$\lim \overset{\to 0}{x_n} \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n}} \cdot n^{\cancel{2}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

$y_{n^2} = n^2 \Rightarrow y_n = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 \ldots\} \to \infty$

$x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\} \to 0$

Regla de "0 por acotado"

$\left.\begin{array}{l}\lim x_n = 0 \\ y_n \text{ acotada}\end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} \underset{0}{x_n} \underset{\text{acotado}}{y_n} = 0$

F. I: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Sep 96:

Falso. $\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(2 + \frac{2}{\infty}\right)^{\frac{\infty}{2}} = 2^\infty = \infty$

Sep 96

Falsa. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n-3}{3n+4}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{3n+4}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Junio 97

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ (siendo $l \neq 0$)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} 1/n} = l^0 = 1$

Verdadero

Feb 98 Verdadero

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \;\xcancel{\Leftarrow}\!\!\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = \ell$$

Ejemplo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \underset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

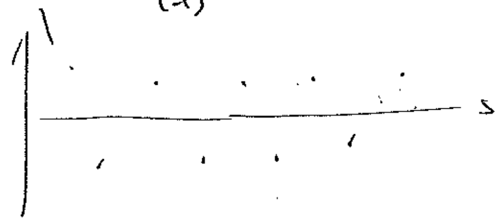
Por tanto si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln}{n} = 0$

Sep. 99

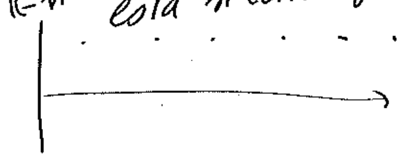
Falso $|x_n|$ converge $\cancel{\Rightarrow}$ x_n tb converge.

$x_n = (-1)^n$

$(-1)^n$



$|(-1)^n|$ esta sí converge.



Una sucesión (x_n)

$$(x_n) = \begin{cases} \text{converge} & x_n \to \ell \in \mathbb{R} \quad x_n = \frac{1}{n} \to 0 \in \mathbb{R} \\ \text{no converge} \begin{cases} \text{diverge} & x_n \to \infty \quad n^2 \to \infty \\ \text{oscila} & x_n \to \nexists \quad (-1)^n \to \nexists \end{cases} \end{cases}$$

1	Septiembre 08	Si las sucesiones $(x_n),(y_n),(z_n)\subset\Re$ cumplen $x_n \le z_n \le y_n \quad \forall n\in\mathrm{N}$, siendo (x_n) e (y_n) convergentes, entonces (z_n) es convergente.
2	Septiembre 08	Si $(x_n),(y_n)\subset\Re^+$ son monótonas y $x_n > y_n \quad \forall n\in\mathrm{N}$, entonces la sucesión $(x_n - y_n)$ es monótona.
3	Febrero 09	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n^2+2}{n-3}} = e^2$
4	Septiembre 09	Toda sucesión de números reales, alternada y convergente, tiene límite 0.
5	Febrero 2010	La sucesión recurrente $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ y $\boxed{a_n = a_{n-2}}$ para $n\ge 3$, es convergente. oscila entre 0 y 1 $\boxed{F}$ regla de recurrencia $a_3=1$ $a_4=0$ $a_5=1$
6	Septiembre 2010	No existe $\lim \left[\cos(2\pi n)\right]^{n^2+3n}$. $\boxed{F}$ par → 0

① Falsa contraejemplo $x_n = \left(-1-\frac{1}{n}\right)_{<-1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-1-\frac{1}{n}\right) = -1$ convergente

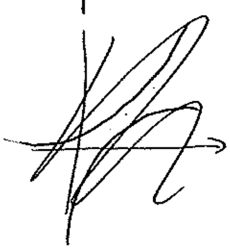
$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)_{>1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ convergente

$z_n = (-1)^n$

$-1-\frac{1}{n} < (-1)^n < 1+\frac{1}{n}$

$z_n = (-1)^n \to \nexists$ oscila

$\cos 2\pi$ $1^{n^2+3n} \to 0$



② Falsa $x_n = \{1;2;3;4;5;6;7\ldots\} \nearrow$

$y_n = \{1{,}1;2{,}9;3{,}1;4'9;5'1;6'9;7'1\ldots\} \nearrow$

$x_n - y_n = \{0'1, 0'9, 0'1, 0'9 \ldots\} \to$ oscilante

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n^2+2}{n-3}} = e^{\lambda} \to e^2$

$\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2}{n-3}\left(\dfrac{n+1}{n-1}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2}{n-3}\cdot\dfrac{2}{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+4}{n^2-n-3n+3} = 2$

(4) $\boxed{V.}$

Sea $a_n > 0 \quad \forall n$

$x_n = (-1)^n a_n$ es una suces° alternada

Ej: $x_n = (-1)^n \frac{1}{n} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\}$

(5) $\lim_{n \to \infty} [\cos(2\pi n)]^{n^2+3n} = 1^{\infty} = \underline{\underline{1}}$

no hay indeterminación

Nota $\lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{1}^{\overbrace{n^2+3n}^{\infty}} = 1^{\infty}$ F.I.

① Junio 96, Febrero 98, Febrero 00	Una sucesión de números reales (r^n) es convergente si y sólo si $\|r\|<1$.
④ Febrero 01	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1} = e^2$
③ Febrero 03	$\lim_{n\to\infty}\frac{a+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+...+\sqrt[n]{a}}{n} = 1$, en donde $a>0$.
③ Septiembre 03, Febrero 05	Sea f un función variable real. Si $\lim_{n\to\infty} f(n)=a$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$.
④ Septiembre 06	El límite de la sucesión (a_n), en donde $a_n=\frac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}$, es $\frac{1}{4}$.
⑥ Febrero 07	La sucesión de números reales (x_n) en donde $x_n = n \cdot \cos(n\pi/2)$, converge en la recta real ampliada $\overline{\mathfrak{R}}$.

① → Falso porque ~~se~~ se olvida $\underbrace{\text{de } r=1}_{\to 0}$.

$\boxed{V}$ (r^n) es convergente a 0 ssi $|r|<1$

$\boxed{F}$ (r^n) es convergente a 0 ssi $|r|\leq 1$

② → Falso $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1} \quad 1^{\infty} = \cancel{e} \; e^{\lambda}$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}(2n+1)\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(2n+1)\frac{(n+1)-(n+2)}{n+2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}(2n+1)\frac{-1}{n+2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-2n-1}{n+2} = -2$$

$\Rightarrow \quad e^{-2}$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{a+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+...+\sqrt[n]{a}}^{a_n}}{\underbrace{n}_{b_n}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{a+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+...+\sqrt[n]{a}}^{a_n}-\overbrace{(a+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+...\sqrt[n-1]{a})}^{a_{n-1}}}{n-(n-1)}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}}{1} = (a)^{1/n} = 1$

④ Falso

converge

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{1^3+2^3+\dots n^3}^{a_n}}{\underbrace{n^4}_{b_n}} \underset{\text{Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\dots+n^3-(1^3+2^3+\dots+(n-1)^3)}{n^4-(n-1)^4}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4-(\cancel{2}n^2-2n+1)(n^2-2n+1)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4-(n^4-2n^3+n^2-2n^3+4n^2-2n+n^2-2n+1)}$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4-(n^4-4n^3+6n^2-4n+1)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{+4n^3-6n^2+4n-1}$

Verdadero

$= +\frac{1}{4}$

(6) $n\cdot\cos(\pi n/2)$ $\to$ oscila entre 0, ∞ y $-\infty$.

$n=1$ $x_1 = 1\cos(\pi/2) = 1\cdot 0 = 0$

$n=2$ $x_2 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 2\cos\pi = -2$

$n=3$ $x_3 = 3\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\cdot 0 = 0$

$n=4$ $x_4 = 4\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 3\cdot 1 = 4$

TEMA 9: SUBSUCESIONES

V	Septiembre 95	Sea $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, entonces la sucesión (x_n) es convergente en $\overline{\mathbb{R}}$
F	Febrero 96 Febrero 98	En el espacio métrico (X,d) se considera la sucesión (a_n). Si las subsucesiones (a_{2n}) y (a_{2n+1}) son convergentes, entonces la sucesión (a_n) también lo es.
	Febrero 00	Sea la sucesión (a_n), con $a_n = \dfrac{1^n + (-1)^n}{2}$, entonces $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$
	Septiembre 03	Dadas las sucesiones $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ y $z_n = x_n + y_n$, se verifica que $\underline{\lim}\, z_n = \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$.
F	Febrero 05	Sea (a_n) una sucesión tal que $\lim a_{2n+1} = a$, $\lim a_{2n} = b$ y $a < b$. Entonces $\overline{\lim}\, a_n = b$
F	Febrero 06 Febrero 07	Si (a_n) es una sucesión real, entonces $\overline{\lim}\, a_n \in \mathbb{R}$.
	Septiembre 09	Si $(x_n) \subset \mathbb{R}$ y $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, entonces (x_n) es convergente en $\mathbb{R}$.

Sept 2003

$x_n = \frac{1}{n} \to 0$ $\quad \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = 0$

$\overline{\lim}\, y_n = 1$ $\quad \underline{\lim}\, y_n = 0$

$\overline{\lim}\, z_n = 1$ $\quad \underline{\lim}\, z_n = 0$

Ejercicio 3

Calcula los siguientes límites:

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $(a>0)$, *ii)* $\lim_{n\to\infty} n^{-3/n}$,

iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $(a,b>0)$, *iv)* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $(a,b>0)$,

v) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$, *vi)* $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})$,

vii) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$, $=3$ *viii)* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-3n}\right)^{\frac{n^2-1}{2n}} = e^{3/2}$

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ $(a>0)$

$= \lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$

ii) $\lim_{n\to\infty} n^{-3/n} \underset{\infty^0}{=} e^{\lambda}$

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{-3}{n} \cdot \ln n = 0$

iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \overset{a>b}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n \cdot \frac{a^n+b^n}{a^n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} a \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^n}+\frac{b^n}{a^n}}$

$= a \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\underbrace{\left(\frac{b}{a}\right)^n}_{0}} = a$

si $a=b$ $\lim \sqrt[n]{a^n+a^n} = \lim \sqrt[n]{2a^n} = \cancel{\lim} 2^{1/n} \cdot a = a$

si $a<b$ $\lim = b$.

Conclusión: $\lim \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}$

$$v)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \overset{\infty(\infty-\infty)}{=} \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \lim n\cdot\frac{(\cancel{n^2}+1)-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} (*)$$

$$= \lim \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}}$$

$$= \lim\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}+1} = \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

$$(*) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\cdot\frac{n^2+1}{n^2}}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}+1\right)}$$

$$= \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = 1/2$$

Ejercicio 4

Calcula los siguientes límites:

$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \operatorname{sen} n\pi$, *ii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n(e^{1/n} - e^{\operatorname{sen} 1/n})}{1 - n \operatorname{sen} 1/n}$,

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n}$, *iv)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,

v) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$, *vi)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$,

vii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}$, *viii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \cdots + n\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

i) $\lim_{n\to\infty} \overset{\infty}{\frac{n}{\pi}} \cdot \overset{0}{\operatorname{sen} n.\pi} = 0$ No hay indeterminación

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}^{a_n}}{\underbrace{\ln(n)}_{b_n}} \underset{\text{Stolz}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(\cancel{1+\frac{1}{2}+\cdots}+\frac{1}{n})}^{a_n} - \overbrace{(\cancel{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}})}^{a_{n-1}}}{\ln(n) - \ln(n-1)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\ln(n) - \ln(n-1)}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)}$

$\underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\frac{n}{n-1} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\frac{\cancel{n} - (\cancel{n} - 1)}{n-1}}$

$\ln u \to u - 1 \ (u \to 1)$

$a^b = e^{a \ln b}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\frac{1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$

v) $\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\exp}{2^n}}{\underset{\text{factorial}}{n!}} = \frac{k}{\infty} = 0$

vi) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

iv) Equivalencia de stirling: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \sqrt[n]{e^{-n}} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{-1} (2\pi n)^{1/2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e}{(2\pi n)^{1/2n}} = e$$

∞^0

$(2\pi n)^{1/2n} \to 1$

1^∞

$\lambda = \lim \exp \cdot (\text{base} - 1)$

∞^0

$\lambda = \lim \exp \cdot \ln(\text{base})$

$$\lambda = \lim \frac{1}{2n} \ln(2\pi n)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to} \frac{\ln(2\pi) + \ln(n)}{n}$$

$$= 0$$

vii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \, n^{n-1}}{n(n-1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n(n-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{n^n}{(n-1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = 0 \cdot e^\lambda = 0$$

1^∞

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n-1} - 1\right) = \cancel{\lim_{n\to\infty} \dots}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-(n-1)}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$