Cálculo I

Un resumen de la asignatura

Pablo Sánchez Yáñez

Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
ETSIT (UPM)

Junio, 2015

Propiedades de los Irracionales ($\mathbb{I}$)

- La suma y diferencia de un número racional($\mathbb{Q}$) y de un irracional($\mathbb{I}$) es irracional.
- El producto $p = n \cdot m,\ n \in \mathbb{Q} - \{0\},\ m \in \mathbb{I} \longrightarrow p \in \mathbb{I}$.
- El cociente $c = \frac{n}{m},\ n \in \mathbb{Q} - \{0\},\ m \in \mathbb{I} \longrightarrow c \in \mathbb{I}$.
- El inverso de un número irracional es irracional.
- Sea un binomio, formado por un radical más un radical de segundo orden, o la suma de dos radicales de segundo orden, que es irracional. Entonces su conjugado es irracional.
- La raíz cuadrada de un número natural no cuadrado perfecto es un número irracional.

Equivalencias (infinitésimos)

- Si $f(x)$ es un infinitésimo en un entorno de $x = 0$:

Infinitésimo	Equivalente
$\sin f(x)$	$f(x)$
$\tan f(x)$	$f(x)$
$\arcsin f(x)$	$f(x)$
$\arctan f(x)$	$f(x)$
$1 - \cos f(x)$	$\frac{[f(x)]^2}{2}$
$\cos f(x)x$	$1 - \frac{[f(x)]^2}{2}$
$\ln f(x)$	$f(x) - 1$
$a^{f(x)} - 1$	$f(x) \ln a$

Cuadro: Tabla que amplía las posibilidades de cálculo de límites usando los infinitésimos equivalentes

Propiedades Prácticas

- Una función $f(x)$ es continua cuando:
  1. $\exists f(x)$
  2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$
  3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema

$f(x)$ es continua en a $\iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Teorema de Weierstrass

Si f es continua en [a,b] entonces f está acotada en [a,b] y, además existen máximo y mínimo de f en [a,b].

Definición

Definición de derivación

Se dice que una función es derivable en un punto x_0 si $\exists l$:

$$l = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Las funciones elementales son derivables en todo su dominio de definición. Son funciones elementales:

$$\sin x, \cos x, e^x, \ln x, \sqrt{x}, \mathcal{P}_n(x), \text{etc.}$$

Definición (Fórmula de Taylor)

Sea una función $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x])$, se cumple que existe un $\xi \in [a,x]$ tal que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\mathcal{P}_{n,a}(x)} + \underbrace{\frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\mathcal{R}_{n,a}(x)}$$

- Esta expresión se denomina fórmula de Taylor, $(\mathcal{P}_{n,a}(x))$ lo denominamos polinomio de Taylor de grado n en el punto a, y $(\mathcal{R}_{n,a}(x))$ resto de Lagrange (se emplea para acotar el error).
- Cuando el desarrollo de Taylor está centrado en el punto $x = 0$, la serie también se denomina de MacLaurin.

Ejemplo (Desarrollos en serie de MacLaurin más usuales)

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ |x| < \infty$
2. $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ln^n a, \ |x| < \infty$
3. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ |x| < \infty$
4. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \infty$
5. $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ |x| < \infty$
6. $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ |x| < \infty$
7. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \ |x| < 1$

Muy importante

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ |x| < 1$$

Definiciones

Definición (Valores Extremos)

- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un máximo (resp. mínimo) relativo (local) estricto si y solo si

$$f(x_0) > (<) f(x), \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un máximo (resp. mínimo) absoluto estricto si y solo si

$$f(x_0) > (<) f(x), \forall x \in (\mathbb{R})$$

En el caso de ser extremos no estrictos, simplemente se ha de cambiar las condiciones $>$ y $<$, por $\geq$ y $\leq$.

Cálculo práctico

Teorema (Condiciones necesarias para valores extremos)

Se han de determinar los puntos críticos de la función $f(x)$ (puntos candidatos). Estos se obtienen aplicando:

- *Aquellos puntos $a \in \mathbb{R}: \ f'(a) = 0$;*
- *Aquellos puntos $a \in \mathbb{R}: \ \nexists f'(a)$.*

Integración indefinida: Definición

Definición (Integral indefinida)

Dada una función f se dice que otra función F es **primitiva** de f si F es derivable tal que $F' = f$.
La **integral indefinida** de f se define como el conjunto de todas las primitivas de f y se denota por

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + k$$

Integración por partes

Definición

Se trata de elegir una parte del integrando como u y la parte restante como dv, aplicando la fórmula

$$\int u \cdot \mathrm{d}v = uv - \int v \cdot \mathrm{d}u$$

- Lo más complicado de la integración por partes es elegir la u, pero hay un truco denominado regla de los ALPES. Se trata de elegir como u lo primero que encontremos en la integral en el orden siguiente: Arcos (arcsen, arctg, ...), Logaritmos, Potencias, Exponenciales, Sinusoidales(cos, sen).

Integración de funciones racionales

Si tenemos una integral que es cociente de dos polinomios $\int \frac{\mathcal{P}(x)}{\mathcal{Q}(x)} \mathrm{d}x$. Debemos distinguir 2 casos:

1. El grado de $\mathcal{P}(x) \geq$ grado de $\mathcal{Q}(x)$. En este caso dividimos los dos polinomios, y nos da

$$\frac{\mathcal{P}(x}{\mathcal{Q}(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{\mathcal{Q}(x)}$$

   donde $C(x)$ es el cociente y $r(x)$ el resto. Entonces la integral del primer sumando es inmediata. La del otro sumando veremos como resolverla en el caso siguiente.

2. El grado de $\mathcal{P}(x) <$ grado de $\mathcal{Q}(x)$. En este caso se hallan las raíces del denominador y se descompone en fracciones simples.

Integración impropia de primera especie

Son aquellas que tienen el intervalo de integración no acotado:

1. Si f es continua en $[a,\infty)$ entonces
$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\mathrm{d}x$$
2. Si f es continua en el intervalo $(-\infty,b]$ entonces
$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)\mathrm{d}x$$
3. Si f es continua en el intervalo $(-\infty,\infty)$ entonces
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x \int_c^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

Estudio de la convergencia de las integrales impropias

- Hay otros tres casos similares para las integrales impropias de segunda especie, (intervalo de integración acotado donde la función tiene una discontinuidad de salto infinito):
  1. f es continua en $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b.
  2. f es continua en $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en b.
  3. f es continua en $[a, b]$ excepto en algún punto $c \in [a, b]$ donde tiene una discontinuidad infinita.

  Se estudiarían las mismas integrales que en los casos de primera especie cambiando los límites de integración.
- Para todos los dos tipo, en los dos primeros casos diremos que la integral impropia converge si el límite existe ($\mathbb{R}$). De lo contrario (si vale infinito o $\nexists$) diremos que la integral diverge.

Estudio de una serie de términos positivos

Convergencia de una serie de términos positivos

Si deseamos estudiar la convergencia de una serie de términos positivos

$$\sum_{n}^{\infty} a_n$$

donde a_n es el término general.

- Es condición necesaria para la convergencia que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pero no es suficiente.
- El siguiente paso es utilizar los criterios de convergencia

Criterios de convergencia (I)

En primer lugar probamos con estos dos criterios:

Criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

- Si $k < 1$ la serie converge
- Si $k > 1$ la serie diverge
- Si $k = 1$ caso dudoso

Criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

- Si $k < 1$ la serie converge
- Si $k > 1$ la serie diverge
- Si $k = 1$ caso dudoso

Criterios de convergencia (II)

Cuando obtenemos un caso dudoso lo mejor es recurrir a:

Criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = k$$

- Si $k > 1$ la serie converge
- Si $k < 1$ la serie diverge
- Si $k = 1$ caso dudoso

Criterio del logaritmo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = k$$

- Si $k > 1$ la serie converge
- Si $k < 1$ la serie diverge
- Si $k = 1$ caso dudoso

Si continuamos en caso dudoso probaremos:

Primer criterio de comparación

Si $a_n \leq b_n, \forall n > m \Rightarrow$

- Si $\sum b_n$ es convergente $\Rightarrow \sum a_n$ es convergente
- Si $\sum a_n$ es divergente $\Rightarrow \sum b_n$ es divergente

Segundo criterio de comparación

Tenemos que $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = l \Rightarrow$

- Si $l \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter.
- Si $l = 0$ y $\sum b_n$ es convergente $\Rightarrow \sum a_n$ es convergente.
- Si $l = \infty$ y $\sum b_n$ es divergente $\Rightarrow \sum a_n$ es divergente.

ETSIT UPM

Suma exacta de algunas series

Serie aritmética

Es una serie que es siempre divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a+nd) \qquad S_n = \frac{a_0 + a_n}{2} n \xrightarrow{n\to\infty} S = \infty$$

Serie geométrica

La serie geométrica real de término inicial $a \in \mathbb{R}$ no nulo y de razón $r \in \mathbb{R}$ es convergente si y solamente si $|r| < 1$. En tal caso, su suma vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Series patrón (I)

Serie geométrica (cont.)

Se puede estudiar su carácter calculando directamente su suma. Sabiendo que

$$S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

1. Convergente y de suma $S = \frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$
2. Divergente a $+\infty$ si $r \geq 1$
3. Oscilante entre 0 y 1 si $r = -1$
4. Oscilante entre $-\infty$ y $+\infty$ si $r < -1$

Series patrón (II)

Serie armónica generalizada

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ se denomina serie **armónica generalizada** y su carácter según el valor de α lo admitiremos sin demostración

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 1 & \text{convergente} \\ \alpha \leq 1 & \text{divergente} \end{cases}$$

Para el valor de $\alpha = 1$ obtenemos la conocida serie **armónica**.

Series alternadas: Estudio y definición

Definición (Serie alternada)

Una **serie alternada** se compone de un término que la hace alternar entre valores positivos y negativos y, p.e. una serie a_n como las que se han visto anteriormente, de términos positivos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Para estas series se estudia:

- La convergencia absoluta
- Las condiciones de Leibniz

Convergencia absoluta

En general: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge abs. $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Estudio de la convergencia absoluta

En este tipo de series, la convergencia absoluta se sabe si:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge (le quitamos } (-1)^n\text{)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ converge abs.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ converge incond.}$$

Si no es abs. convergente, podemos estudiar si es condicionalmente convergente (o incond. divergente) con las **condiciones de Leibniz**.

El criterio de Leibnitz

Las condiciones de Leibnitz

Una **serie alternada** converge *si y solo si* se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $a_{n+1} \leq a_n$

Siendo a_n la parte que aporta los términos positivos a la serie alternada.

Es importante que se den las **dos** condiciones anteriores, si no la serie alternada diverge incondicionalmente.

ETSIT UPM

Conceptos previos

Definición (Sucesión de funciones)

Se le llama **sucesión de funciones** a $(f_n(x)) = \{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}$ tal que cada $f_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Teorema (de la convergencia uniforme)

Si $(f_n(x))$ **converge uniformemente** *en* A *hacia* $f(x) \Rightarrow (f_n(x))$ *converge puntualmente hacia* $f(x)$ *(se emplea el recíproco).*

$(f_n(x))$ **converge uniformemente** *en* A *hacia* $f(x)$ **si y solo si**

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$$

Definición: serie funcional

Definición

Se denomina **serie de funciones** a la suma de las infinitas funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Al igual que sucedía con las series de números, en las series de funciones se persiguen dos objetivos:

- Estudio de la convergencia puntual
- Calcular la suma de la serie

Conceptos previos sobre la convergencia

Al contrario que en las series numéricas, las series funcionales convergen para un conjunto de valores de x y no converge para otros.

Definición (Campo de convergencia)

El conjunto de valores de x para los que la serie converge se denomina **campo de convergencia**, C, de la serie.
En los puntos del campo de convergencia la serie converge **puntualmente**.

Definición (Convergencia uniforme)

La serie $\sum f_n(x)$ **converge uniformemente** en C hacia $S(x)$ si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} \{|S_n(x) - S(x)|\} = 0$$

Teorema (Criterio de Weierstrass)

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)$ *una serie de funciones y sea* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de números reales positivos convergente. Entonces se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall x \in A \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente en A.

Series de potencias

Definición (Series de potencias)

Se llama **serie de potencias** centrada en $x_0 \in \mathbb{R}$ a cualquier serie funcional de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

con $a_n \in \mathbb{R},\ n \geq 0$. En particular, si $x_0 = 0$ se dice que la serie de potencias está centrada en el origen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Radio de convergencia

Se llama **radio de convergencia** de la serie $\sum a_n(x-x_0)^n$ al número ($\mathbb{R}$ o ∞) que denota la distancia entre el centro y cualquiera de los extremos del campo de convergencia C.
Una forma de calcularlo es mediante el criterio de la raíz y el criterio del cociente:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Una vez calculado R, pueden darse los siguientes casos:

1. $R = 0 \Rightarrow$ La serie de potencias solo converge en su centro, x_0.
2. $R = \infty \Rightarrow$ La serie de potencias converge en toda la recta real.
3. $R \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ La serie de potencias converge en un intervalo centrado en x_0.

Tipos de convergencia

Si R es el radio de convergencia de la serie $\sum a_n(x-x_0)^n$, entonces:

- La serie converge puntualmente si $|x-x_0|<R$, es decir en el intervalo abierto (x_0-R, x_0+R).
- La serie diverge si $|x-x_0|>R$.
- En $|x-x_0|=R$, es decir, en $x=x_0\pm R$ la serie puede ser convergente o divergente (hay que estudiarlos en cada caso).
- La serie de potencias converge absolutamente en todo C.
- La serie de potencias converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado $[a,b]\subset\{|x-x_0|>R\}$

Series de Taylor

Definición (Serie de Taylor)

Las series de Taylor son un caso particular de las series de potencias donde los coeficientes a_n vienen dados por:

$$a_n = \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}$$

De forma que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$