www.simplyjarod.com

FIS1

Carpeta de Montero Espinosa (resuelta en 2009)

www.simplyjarod.com

FÍSICA 1
Teoría

www.simplyjarod.com

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA 2008/2009

Parte I : Mecánica

Tema 1: Vectores.Operadores vectoriales

Tema 2: Cinemática

Tema 3: Movimiento relativo

Tema 4: Dinámica de una partícula

Tema 5: Trabajo y energía

Tema 6: Sistemas de partículas

Tema 7: Sólido rígido.

Tema 8: Gravitación

ParteII : Electricidad y magnetismo

Tema 9: Electrostática

Tema 10: Condensadores. Dieléctricos

Tema 11: Corriente continua

Tema 12: Magnetostática

Tema 13: Inducción magnética

Tema 14: Corriente alterna

Tema 15: Ecuaciones de Maxwell

www.simplyjarod.com

FÍSICA 1
Mecánica

www.simplyjarod.com

TEMA 1: VECTORES. OPERADORES VECTORIALES

A continuación recordamos las operaciones vectoriales (que conocemos de bachillerato) que son necesarias para poder afrontar esta asignatura.

1.1 Vector geométrico

Definimos en primer lugar el concepto de vector geométrico: es un segmento orientado. Se suele expresar según sus componentes coordenadas, en cartesianas será:

$$\vec{a} = a_x\ \vec{u}_x + a_y\,\vec{u}_y + a_z\,\vec{u}_z$$

El módulo se puede entender como la longitud del vector

Siendo su módulo: $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$

Puede ser:

a) **Vector libre:** no está aplicado en ningún punto del espacio. Se define por sus componentes, dadas en un sistema de coordenadas. Ejemplo: resultante de un sistema de vectores deslizantes.
b) **Vector deslizante**: Se define por sus componentes y una recta soporte en la que se encuentra situado. Ejemplos: fuerzas aplicadas sobre sólidos rígidos, velocidad angular actuando sobre un sólido rígido.
c) **Vector fijo o ligado**: Se define por sus componentes y un punto de aplicación. Ejemplos: velocidad o aceleración de un punto de un sólido rígido, momento de una fuerza respecto de un punto

1.2 Obtención de un vector en cartesianas

Date cuenta de que el vector $\overrightarrow{BA}$ es idéntico al $\overrightarrow{AB}$ pero con un signo negativo delante

Generalmente un vector se obtiene mediante dos puntos, por ejemplo un punto A de coordenadas (A_x, A_y, A_z) y otro punto B de coordenadas (B_x, B_y, B_z).

Se obtiene restando las coordenadas de esta forma: "extremo menos origen"

-vector $\overrightarrow{AB}$: empieza en A y acaba en B, luego $(A_x - B_x,\ A_y - B_y,\ A_z - B_z)$

-vector $\overrightarrow{BA}$: empieza en A y acaba en B, luego $(B_x - A_x,\ B_y - A_y,\ B_z - A_z)$

1.2 Producto escalar de dos vectores

El resultado es un escalar(un número) y se obtiene mediante la expresión

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\theta}$$

Nota 1: Si $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ será porque uno de los dos es nulo o bien son perpendiculares

Nota 2: Si nos dan los vectores por sus coordenadas cartesianas como $\vec{a} = a_x\,\vec{u}_x + a_y\,\vec{u}_y + a_z\,\vec{u}_z$ y $\vec{b} = b_x\,\vec{u}_x + b_y\,\vec{u}_y + b_z\,\vec{u}_z$ el producto escalar lo podemos realizar también componente a componente como:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z}$$

www.simplyjarod.com

APLICACIONES DEL PRODUCTO ESCALAR

Recuerda que el ángulo formado por dos vectores se mide poniendo los dos vectores partiendo de un mismo punto, como las manecillas de un reloj

- Angulo que forman dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\,b}$$

- Proyección de un vector $\vec{a}$ en una dirección definida por un punto A y un punto B:

$$a_n = \vec{a}\cdot\vec{n} = a\,1\cos\theta \rightarrow a_n = a\cdot\cos\theta$$

Siendo $\vec{n}$ un vector unitario que apunta desde A hasta B que se obtendrá haciendo la operación: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} / \left|\overrightarrow{AB}\right|$

- Vector proyección:

$$\vec{a}_n = a_n\,\vec{n}$$

lo obtendremos multiplicando el módulo a_n obtenido antes , por el vector unitario $\vec{n}$

1.3 Producto vectorial de dos vectores

El resultado es un vector perpendicular al plano formado por los otros dos y cuyo sentido se determina por la regla de la mano derecha (abatiendo el primer vector sobre el segundo por el camino más corto)

Su módulo es $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = a\,b\,sen\theta$ y su expresión analítica en cartesianas es:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Darle la vuelta un producto vectorial es ponerle un signo menos delante $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$

Por último si $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ será porque uno de los dos sea nulo o bien porque sean paralelos.

1.4 Producto mixto de tres vectores

El resultado es un escalar.
Representa el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores supuestos aplicados en un mismo punto (y seis veces el volumen del tetraedro que forman sus extremos)

Se calcula con el determinante de las componentes de los vectores en base ortonormal. En cartesianas sería:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Por ultimo si $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ será porque o bien uno de los dos es nulo o bien son coplanarios o bien cuando dos de los tres son paralelos.

www.simplyjarod.com

1.5 Doble producto vectorial

El resultado es un nuevo vector. Se define como $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ y se puede expresar mediante

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

Por último si $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{0}$ será porque o bien uno de los tres es nulo o bien $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ O bien $\vec{c}$ es perpendicular al plano que definen $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

1.6 Operadores vectoriales

Llamamos **campos escalares** a las funciones del tipo $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Es decir, funciones que tienen dos o más variables independientes y que devuelven un número real.

$$\begin{aligned} f:\quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\to f(x,y,z) \end{aligned}$$

Llamamos **campos vectoriales** a las funciones del tipo $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Es decir, funciones que tienen dos o más variables independientes y que devuelven dos o más números reales.

Estos operadores también se pueden definir en coordenadas cilíndricas o esféricas

$$\begin{aligned} \vec{F}:\quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \to \vec{F}(x,y,z) &= \big(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z)\big) = \\ &= F_1(x,y,z)\vec{i}+F_2(x,y,z)\vec{j}+F_3(x,y,z)\vec{k} \end{aligned}$$

A continuación definimos los operadores gradiente, divergencia, rotacional y laplaciana en coordenadas cartesianas.

Gradiente

El gradiente opera siempre sobre un campo escalar y devuelve un campo vectorial.

El gradiente es un vector

$$\text{grad}\, f = \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

Divergencia

La divergencia es un escalar

$$\text{div}\,\vec{F} = \nabla\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

www.simplyjarod.com

El rotacional es un vector

Rotacional

$$\text{rot}\,\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

El laplaciano es un vector

Laplaciano

$$\text{div}(\text{grad}\, f) = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1.7 Campos solenoidales y campos irrotacionales

En el punto anterior hemos visto cómo se calcula de forma práctica el gradiente, la divergencia y el rotacional. Pasamos ahora a ver su interpretación física.

Gradiente

- Marca la variación de un campo escalar en todas las direcciones del espacio.
- La máxima variación en valor absoluto de un campo escalar en un punto dado será siempre en la dirección del vector gradiente.
- La mínima variación en valor absoluto será siempre en la dirección perpendicular al vector gradiente.

Divergencia

Sea un campo vectorial $\vec{B}$.

- La divergencia de $\vec{B}$ nos indica la presencia de fuentes escalares (también llamadas fuentes de tipo divergencia).
- Si $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ sabemos que:
  - $\vec{B}$ es un campo de tipo **solenoidal**
  - Sus líneas de campo son cerradas.
  - No tiene fuentes escalares (de tipo divergencia).

El ejemplo más típico de campo solenoidal es el campo magnético

- Si $\nabla\cdot\vec{B} > 0$ entonces hay una fuente del campo.
- Si $\nabla\cdot\vec{B} < 0$ entonces hay un sumidero.

www.simplyjarod.com

Rotacional

Sea un campo vectorial $\vec{E}$.

- El rotacional de $\vec{E}$ nos indica la presencia de fuentes vectoriales (también llamadas fuentes de tipo rotacional).

El ejemplo más típico de campo conservativo es el campo eléctrico, campo gravitatorio, etc.

- Si $\nabla \times \vec{E} = 0$ sabemos que:
  - $\vec{E}$ es un campo de tipo **conservativo** o **irrotacional**.
  - No tiene fuentes vectoriales (de tipo rotacional).

www.simplyjarod.com

2.1 Magnitudes cinemáticas del movimiento

2.1.1 Coordenadas cartesianas

La **trayectoria** del móvil se obtiene eliminando la variable t del anterior sistema.

Sea un móvil que se desplaza según las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

Vector posición

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad (m)$$

La velocidad es siempre tangente a la trayectoria

Vector velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \quad (m/s)$$

Vector aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z \quad (m/s^2)$$

Los puntos sobre las variables significan derivadas con respecto al tiempo:

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

2.1.2 coordenadas intrínsecas

vector tangente unitario: $\vec{u}_t = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

vector normal unitario: $\vec{u}_n = \dfrac{\dfrac{d\vec{u}_t}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{u}_t}{dt}\right|} = \dfrac{|\vec{v}|}{a_n}\cdot\dfrac{d\vec{u}_t}{dt}$

Apenas utilizaremos este tercer vector

vector binormal unitario: $\vec{u}_b = \vec{u}_t \times \vec{u}_n$

velocidad en coordenadas intrínsecas

$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{u}_t$$

aceleración en coordenadas intrínsecas

Siempre se cumple que:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n$$

por tanto definimos:

También se cumple que:

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{u}_t$$

$$a_n = \vec{a}\cdot\vec{u}_n$$

componente tangencial de la aceleración: $a_t = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$ (se encarga de variar el módulo de la velocidad)

componente normal aceleración normal: $a_n = \dfrac{|\vec{v}|^2}{\rho}$ (se encarga de variar la dirección)

radio de curvatura: $\rho = \dfrac{|\vec{v}|^2}{a_n}$

www.simplyjarod.com

2.2 Principales movimientos

2.2.1 Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

$$x = x_0 + vt$$

$$v = v_0$$

En un movimiento rectilíneo no hay aceleración normal. La aceleración total coincide con la tangencial

2.2.1 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + at$$

Esta tercera ecuación se obtiene de las dos primeras eliminando el tiempo t

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

2.2.3 Magnitudes Angulares

$\varphi \equiv$ espacio angular (rad)
$\omega \equiv$ velocidad angular (rad/s)
$\alpha \equiv$ aceleración angular (rad/s^2)

La relación entre las magnitudes lineales y las magnitudes angulares es la siguiente:

$$s = \varphi r$$

$$v = \omega r$$

r = radio ; ρ = radio de curvatura

Cuidado:
Se trata de la aceleración tangencial

$$a_t = \alpha r$$

Como en un movimiento circular el radio de curvatura es r, la aceleración normal se obtiene de la expresión anterior:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

IMPORTANTE:
En un movimiento circular **SIEMPRE** hay aceleración normal, aunque no haya aceleración angular α

2.2.4 Movimiento Circular Uniforme (MCU)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$$\omega = \omega_0$$

2.2.5 Movimiento Circular Uniformemente Acelerado (MCUA)

Estas ecuaciones son análogas a las del MRUA sin más que cambiar las variables lineales por las angulares

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Es útil conocer también:

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (s) — Tiempo que tarda en dar una vuelta completa

Frecuencia: $f = \frac{1}{T}$ (s^{-1}) — Número de vueltas que da en un segundo

2.3 Movimiento de proyectiles. Tiro parabólico

Denominamos proyectil a cualquier cuerpo lanzado cerca de la superficie terrestre. Si la velocidad que imprimimos al proyectil forma una cierta inclinación con la horizontal, la trayectoria que describirá será una parábola de segundo grado.

El estudio del movimiento se hace descomponiéndolo en dos:

-según eje X: como no existe aceleración el proyectil hace un MRU

IMPORTANTE: Fíjate que en este caso el eje Y está apuntando hacia arriba por eso la gravedad es negativa

-según eje Y: está sometido a la aceleración de la gravedad $g = 9{,}81\ m/s^2$, como es una aceleración contante, el proyectil describe un MRUA.

Ejemplo

Utilizamos un eje X positivo hacia la derecha y un eje Y positivo hacia arriba. Imprimimos al proyectil una velocidad de módulo v_0 formando un ángulo α con la horizontal

No hace falta memorizar estas fórmulas ya que todas ellas se deducen fácilmente en los problemas

$$\text{eje } X \text{ (MRU):} \quad \begin{cases} x = v_x t \\ v_x = v_0 \cos\alpha \end{cases}$$

$$\text{eje } Y \text{ (MRUA):} \quad \begin{cases} y = v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - g t \end{cases}$$

Trayectoria del móvil: $y = \operatorname{tg}\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2$

Alcance máximo: $x_{max} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$

Tiempo de vuelo: $t_{vuelo} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$

www.simplyjarod.com

TEMA 3: MOVIMIENTO RELATIVO

El movimiento relativo se encarga de estudiar el movimiento de un cuerpo en un sistema de referencia que se mueve (sistema móvil). En realidad cualquier medición de velocidad o de aceleración que hacemos en la naturaleza, la hacemos en un sistema móvil: la tierra está en continuo movimiento.

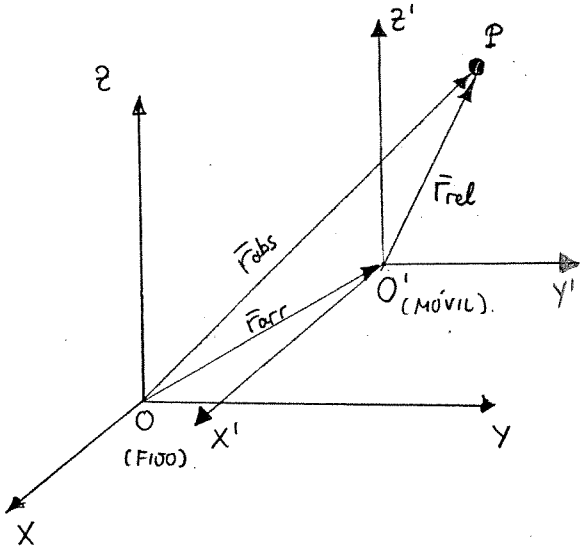
3.1 Movimiento referido a un sistema móvil (O´;X´,Y´,Z´) que se traslada paralelamente al (O;X,Y,Z) que es fijo

Imaginemos que tenemos un móvil puntal que llamaremos P

abs= posición, velocidad, aceleración **absoluta**

rel= posición, velocidad, aceleración **relativa**

arr= posición, velocidad, aceleración **de arrastre**



Definimos:

-(O;X,Y,Z) sistema de referencia fijo
-(O;X´,Y´,Z´) sistema de ref. móvil
- $\vec{r}_{abs}$ ≡ vector de posición respecto al sistema de referencia fijo
- $\vec{r}_{rel}$ ≡ vector de posición respecto al sistema de referencia móvil
- $\vec{r}_{arr}$ ≡ vector de posición del origen O´ en el sistema de referencia fijo

Del dibujo podemos observar directamente que: $\boxed{\vec{r}_{abs} = \vec{r}_{arr} + \vec{r}_{rel}}$ (1) posiciones

Si derivamos (1) con respecto del tiempo: $\boxed{\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{arr} + \vec{v}_{rel}}$ (2) velocidades

Si derivamos (2) con respecto del tiempo: $\boxed{\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{rel}}$ (3) aceleraciones

Viendo las relaciones anteriores podemos concluir:

-Movimiento absoluto: el que realiza el punto **P** respecto al sistema fijo

-Movimiento relativo: el que realiza el punto **P** respecto al sistema móvil

-Movimiento de arrastre: el que realiza **O´** respecto al sistema fijo

IMPORTANTE: $\vec{V}_{Abs} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr} = \vec{v}_r + (\vec{v}_o + \vec{\omega} \wedge \vec{r})$

Si busco la velocidad relativa y la aceleración relativa lo que haré será bloquear el movimiento de arrastre.

Si busco la velocidad de arrastre y la aceleración de arrastre lo que haré será bloquear el movimiento relativo.

$\vec{a}_A = \vec{a}_r + \vec{a}_a + \vec{a}_c = \vec{a}_r + (a_o + \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})) + (2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r))$

www.simplyjarod.com

3.2 Velocidades y aceleraciones angulares

Trabajar con el vector velocidad angular, tiene la ventaja que el vector velocidad lineal sale directo analíticamente

En realidad las velocidades angulares y aceleraciones angulares son vectores (en concreto vectores deslizantes), su dirección es siempre perpendicular al plano de la circunferencia, y su sentido se obtiene con la regla de la mano derecha: el pulgar es el vector $\vec{\omega}$ y el resto de los dedos dan el sentido de giro.

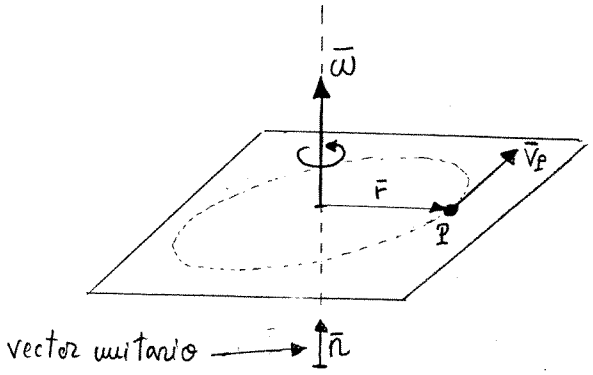
Si tenemos una partícula P realizando un movimiento circular con velocidad angular $\vec{\omega}$ el vector velocidad lineal se obtiene con el siguiente producto vectorial:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Date cuenta de que la velocidad es idéntica a la del movimiento circular, ya que si calculo el módulo:

$v_P = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$

$\omega\, r\, sen 90 = \omega\, r$



Como vemos en el dibujo el vector $\vec{\omega}$ va en la dirección de un vector unitario $\vec{n}$ luego lo puedo expresar de la siguiente forma: $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$

Ahora lo que buscamos es la **aceleración angular**, lo único que haremos será derivar $\vec{\omega} \Rightarrow \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \vec{n}) = \frac{d\omega}{dt}\vec{n} + \omega \frac{d\vec{n}}{dt} = \alpha \vec{n} + \omega \frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{\alpha} + \omega \frac{d\vec{n}}{dt}$$

Si el vector unitario $\vec{n}$ es de dirección constante $\Rightarrow \dfrac{d\vec{n}}{dt} = \vec{0}$

Pero en un caso general el vector unitario $\vec{n}$ es de dirección variable. Esto sucede porque existe un giro exterior que vendrá dado por una velocidad angular $\vec{\Omega}$. Si esto sucede, la formula que nos da la derivada del vector unitario es la siguiente:

$$\boxed{\frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{n}} \quad \textit{(formula de Poisson)}$$

De esta manera lo que buscábamos:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} + \omega(\vec{\Omega} \times \vec{n}) = \vec{\alpha} + (\vec{\Omega} \times \omega \vec{n}) \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} + (\vec{\Omega} \times \vec{\omega})}$$

Recapitulando:

$\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \equiv$ aceleración angular total

$\vec{\alpha} \equiv$ aceleración angular de $\vec{\omega}$ suponiendo que no cambia de dirección

$\vec{\Omega} \equiv$ velocidad angular que produce la variación de la dirección del vector $\vec{\omega}$

www.simplyjarod.com

3.3 Movimientos relativos más usuales que estudiamos

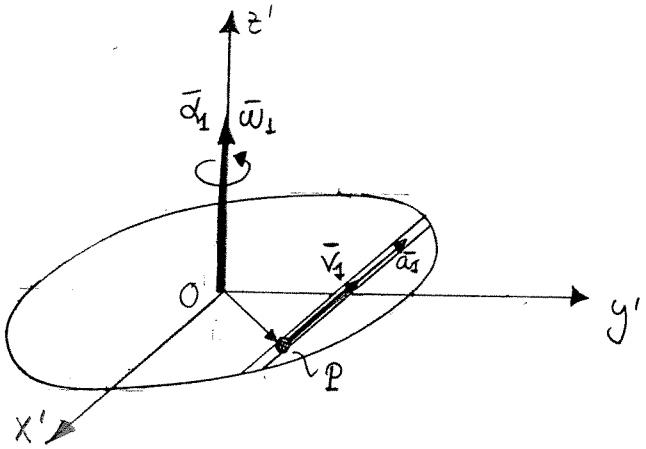
3.3.1 Partícula sometida a traslación más rotación

En primer lugar lo que hacemos es identificar cuál es el movimiento de arrastre y cuál es el movimiento relativo. Esto se observa fácilmente porque siempre hay un movimiento que predomina sobre otro, es decir, siempre hay una velocidad que mueve a otra, **los ejes del sistema móvil siempre se mueven con la velocidad de arrastre**, ya sea lineal o angular. En este caso vemos:

Date cuenta de que la rotación con $\vec{\omega}_1$ mueve a la velocidad $\vec{v}_1$

-Movimiento de arrastre: rotación con $\vec{\omega}_1$ y con $\vec{\alpha}_1$ (los ejes móviles giran con $\vec{\omega}_1$)

-Movimiento de relativo: traslación con $\vec{v}_1$ y con $\vec{a}_1$



Velocidad absoluta de P:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_{rel}=\vec{v}_1\\ \vec{v}_{arr}=\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OP}\end{array}\right\}\vec{v}_P=\vec{v}_{rel}+\vec{v}_{arr}\Rightarrow\ \boxed{\vec{v}_P=\vec{v}_1+\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OP}}$$

en realidad como $\overrightarrow{OP}$ coincide con el vector de posición : $\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}=\vec{v}_P=\vec{v}_1+\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OP}$

Aceleración absoluta de P: la obtenemos derivando $\vec{v}_P$

$$\vec{a}_P=\frac{d\vec{v}_P}{dt}=\frac{d\vec{v}_1}{dt}+\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OP})=\underbrace{\vec{a}_1+\vec{\omega}_1\times\vec{v}_1}_{\frac{d\vec{v}_1}{dt}}+\underbrace{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\overrightarrow{OP}+\vec{\omega}_1\times\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}}_{\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OP})}=$$

$$=\vec{a}_1+\vec{\omega}_1\times\vec{v}_1+\vec{\alpha}_1\times\overrightarrow{OP}+\vec{\omega}_1\times(\vec{v}_1+\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OP})=\vec{a}_1+\vec{\omega}_1\times\vec{v}_1+\vec{\alpha}_1\times\overrightarrow{OP}+\vec{\omega}_1\times\vec{v}_1+\vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OP})$$

agrupando nos queda finalmente:

$$\boxed{\vec{a}_P=\vec{a}_1+\vec{\alpha}_1\times\overrightarrow{OP}+\vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OP})+2\,\vec{\omega}_1\times\vec{v}_1}$$

La aceleración de coriolis surge cuando la velocidad lineal está modificando su dirección debido a un giro exterior a ella (Por ejemplo una canica que rueda sobre el suelo de un tren mientras el tren toma una curva)

siendo:

$\vec{a}_{rel}=\vec{a}_1\Rightarrow$ aceleración relativa

$\vec{a}_{arr}=\vec{\alpha}_1\times\overrightarrow{OP}+\vec{\omega}_1\times(\vec{\omega}_1\times\overrightarrow{OP})\Rightarrow$ aceleración de arrastre (tangencial y normal del giro)

$\vec{a}_{cor}=2\,\vec{\omega}_1\times\vec{v}_1\Rightarrow$ aceleración de coriolis

www.simplyjarod.com

3.3.2 Partícula sometida dos rotaciones

En este caso la rotación con $\vec{\omega}_1$ mueve a la rotación con $\vec{\omega}_2$

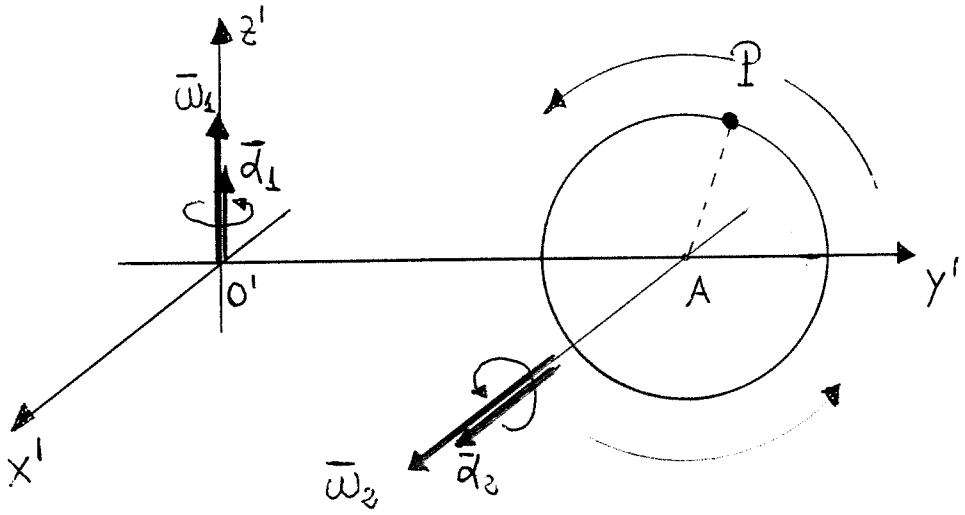
A $\vec{\omega}_1$ la llamamos **rotación principal**

A $\vec{\omega}_2$ la llamamos **rotación secundaria**

Identificamos en primer lugar siguiendo el criterio anterior, cuál es el movimiento relativo y cuál es el movimiento de arrastre.

-Movimiento de arrastre: rotación con $\vec{\omega}_1$ y con $\vec{\alpha}_1$ (los ejes móviles giran con $\vec{\omega}_1$)

-Movimiento de relativo: rotación con $\vec{\omega}_2$ y con $\vec{\alpha}_2$



Ahora la velocidad relativa sale del giro con $\vec{\omega}_2$

Esto **no** hay que aprendérselo de memoria, lo razonaremos en cada problema

De la misma forma que antes calculamos la velocidad y aceleración de P:

Velocidad absoluta de P:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{rel} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AP} \\ \vec{v}_{arr} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'P} \end{cases}$$

Aceleración absoluta de P: la obtenemos derivando $\vec{v}_P$ como en el caso anterior y resulta

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{cor} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{rel} = \vec{\alpha}_2 \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AP}) \\ \vec{a}_{arr} = \vec{\alpha}_1 \times \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'P}) \\ \vec{a}_{cor} = 2\ \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AP}) \end{cases}$$

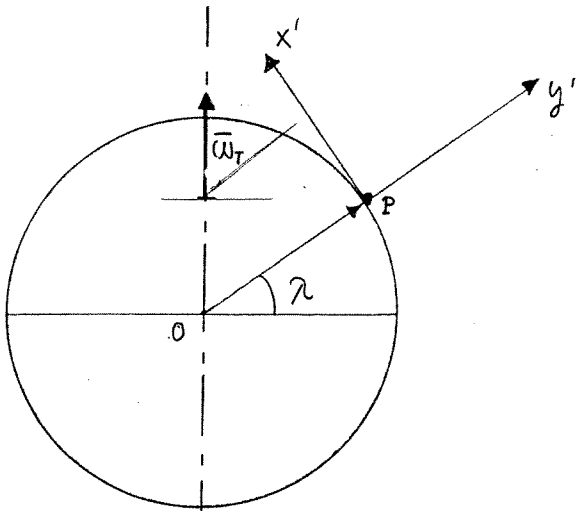
3.3.3 Movimiento relativo terrestre

La tierra está en continuo movimiento, así que el estudio de cualquier movimiento sobre la tierra es en realidad un movimiento relativo. La tierra gira con una velocidad angular de rotación $\vec{\omega}_T$, y hace que todo lo que esté sobre ella gire con esa velocidad angular, entonces vemos que la $\vec{\omega}_T$ es el **movimiento de arrastre**.

El periodo de rotación de la tierra es 1dia=24h=24*60*60s

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}\ (rad/s)$$

Imaginemos que tenemos un móvil que se desplaza por la superficie terrestre con una velocidad relativa a la tierra que llamaremos $\vec{v}_{rel}$ y una aceleración relativa que llamaremos $\vec{a}_{rel}$, y que está localizado a una **latitud** λ (partícula en traslación mas rotación)



Velocidad absoluta de P:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega}_T \times \overrightarrow{OP}}$$

Aceleración absoluta de P:

Ver punto 3.3.1

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{rel} + \underbrace{\vec{\alpha}_T \times \overrightarrow{OP}}_{\vec{\alpha}_T = \vec{0}} + \vec{\omega}_T \times (\vec{\omega}_T \times \overrightarrow{OP}) + 2\vec{\omega}_T \times \vec{v}_{rel} \Rightarrow$$

La tierra no tiene aceleración angular !!!

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{rel} + \underbrace{\vec{\omega}_T \times (\vec{\omega}_T \times \overrightarrow{OP})}_{\substack{aceleración \\ centrípeta}} + \underbrace{2\vec{\omega}_T \times \vec{v}_{rel}}_{\substack{aceleración \\ de\ coriolis}}}$$

Recuerda
$\lambda > 0$ hacia Norte
$\lambda < 0$ hacia Sur

La expresión del vector $\vec{\omega}_T$ en los ejes móviles dependerá de la latitud, así que si proyectamos el vector en los ejes móviles nos queda:

$$\vec{\omega}_T = \omega_T(\cos\lambda\ \vec{u}'_x + \operatorname{sen}\lambda\ \vec{u}'_y)$$

por último es bueno recordar las siguientes definiciones:

$$\left\{\begin{array}{c} \vec{a}_{centrífuga} = -\vec{a}_{centrípeta} \Rightarrow iguales\ y\ contrarrias \\ \vec{F}_{centrífuga} = m\,\vec{a}_{centrífuga} \\ \vec{F}_{centrípeta} = m\,\vec{a}_{centrífuga} \\ \vec{a}_{coriolis} = 2\vec{\omega}_T \times \vec{v}_{rel} \\ \vec{F}_{coriolis} = -m\,2\vec{\omega}_T \times \vec{v}_{rel} \Rightarrow contraria\ a\ \vec{a}_{coriolis} \end{array}\right\}$$

www.simplyjarod.com

TEMA 4: DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

4.1 Primera ley de Newton

Todo cuerpo tiende a conservar su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme mientras no se ejerza sobre él una fuerza.

De este principio se deduce que **fuerza** es toda causa capaz de vencer la inercia de los cuerpos. La fuerza se mide en Newton (N).

4.2 Segunda ley de Newton

Toda fuerza aplicada sobre un cuerpo, que no esté equilibrada, produce una aceleración que es proporcional a dicha fuerza.

Si la fuerza tiene siempre la misma dirección, se puede tomar esa dirección como eje de referencia y la ecuación fundamental de la Dinámica se puede expresar en forma escalar:

$$F = ma$$

En general, si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas simultáneamente la segunda ley de Newton toma la forma siguiente:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

4.3 Tercera ley de Newton

Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce otra fuerza igual y de sentido contrario sobre el primero (principio de acción y reacción)

4.4 Momento lineal

Se llama **cantidad de movimiento** o **momento lineal** de una partícula al vector que resulta de multiplicar la masa de la partícula por la velocidad que tiene:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \quad (kg\ m/s)$$

4.5 Momento angular en un punto O

El momento angular depende del punto donde lo calculemos

Lo utilizaremos a partir del tema 5

Se llama **momento angular** en el punto O (o **momento cinético)** de una partícula que se encuentra en un punto P con una cantidad de movimiento $\vec{p}$ al siguiente producto vectorial:

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{p} = \overrightarrow{OP} \times m\vec{v}} \quad (kg\ m^2/s\ )$$

Siendo $\overrightarrow{OP}$ el vector que nace en O y va hasta P (donde está la partícula).

4.6 Momento de una fuerza en un punto O

Los momentos de las fuerzas son los esfuerzos causantes de las rotaciones, las **cuales estudiamos a partir del tema 6**

Se llama **momento de una fuerza** en el punto O (o **par de fuerzas**) al siguiente producto vectorial:

$$\boxed{\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}} \quad (N\ m)$$

Siendo el punto P donde se encuentra aplicada la fuerza $\vec{F}$

www.simplyjarod.com

4.7 Fuerzas usuales que intervienen en los problemas de dinámica

- **Fuerza Normal *N*:**

  La fuerza normal entre dos superficies en contacto es la fuerza perpendicular que la superficie soporte ejerce sobre la superficie que se encuentra sobre ella. No tiene una fórmula explícita para calcularla. La notaremos siempre como $\vec{N}$.

- **Fuerza Peso *P*:**

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$

No confundir la masa (que se mide en kg) con el peso que es una fuerza y se mide en Newtons

donde $\vec{g}$ es un vector que apunta siempre hacia el suelo y que en la superficie terrestre tiene un valor de $\vec{g} = 9{,}8\ m/s^2$

- **Fuerza de rozamiento F_r:**

Tenemos un cuerpo apoyado sobre una superficie **rugosa**. Si aplicamos una fuerza y éste intenta deslizar aparecerá una fuerza igual y contraria llamada "fuerza de rozamiento", cuyo valor máximo será :

$$\boxed{F_r = \mu_{est} \cdot N}$$

En Física 1 no se suele hacer distinción entre el coeficiente estático y dinámico y normalmente lo nombrarán μ a secas

donde μ_{est} es una constante que depende de la superficie rugosa, llamada: **"coeficiente de rozamiento estático"**

.

Si aumentamos la fuerza aplicada hasta superar el valor de la fuerza de rozamiento máxima, conseguimos que el cuerpo comience a deslizar, sufriendo una fuerza de rozamiento:

$$\boxed{F_R = \mu_{din} \cdot N}$$

donde μ_{din} es una constante que depende de la superficie rugosa, llamada **"coeficiente de rozamiento dinámico"**.

Siempre se cumple: $\mu_{est} \geq \mu_{din}$ en otras palabras, me cuesta más hacer que un objeto pesado se mueva desde el reposo, que seguir empujándolo para mantener su estado de movimiento.

- **Fuerza elástica:**

Es la fuerza que ejerce un muelle cuando se le comprime o se le estira. El módulo de esta fuerza viene dado por:

$$\boxed{F = kx}$$

donde k es la constante elástica del muelle (N/m) que suele ser un dato y x **es la deformación** sufrida por el muelle (ya sea por compresión o por extensión).

Es importante no confundir la **longitud total del muelle** l con la deformación x, para ello hay que tener en cuenta que: $l = l_0 + x$ donde l_0 **es la longitud natural** del muelle (sin deformación).

Dirección y sentido de la fuerza elástica
Es muy importante señalar que la fuerza elástica es contraria a la deformación sufrida. Es decir, si comprimimos un muelle la fuerza elástica tiende a estirarlo para alcanzar su longitud natural; sin embargo si lo estiramos la fuerza elástica tiende a comprimirlo.

www.simplyjarod.com

5.1 Trabajo

El trabajo es una magnitud escalar

Cuando el punto de aplicación de una fuerza $\vec{F}$, realiza un desplazamiento elemental $d\vec{r}$ produce un **trabajo elemental** *dW*, cuyo valor es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se trata de un producto escalar de dos vectores

Si queremos calcular el trabajo a lo largo de una trayectoria entre A y B tenemos que integrar

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{(Julios)}$$

Si el trabajo sale positivo significa que la fuerza favorece al movimiento y si el trabajo es negativo se opone al movimiento (caso típico, la fuerza de rozamiento)

La forma de calcular esta integral dependerá de los datos que tengamos en cada caso:

- Si tenemos las componentes cartesianas de la fuerza $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ entonces

producto escalar

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x, F_y, F_z) \cdot (dx, dy, dz) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)$$

- Si tenemos el módulo de la fuerza y el ángulo formado por la fuerza y el $d\vec{r}$ entonces

Recuerda que el producto escalar también se puede expresar así:
$\vec{v} \cdot \vec{u} = v \cdot u \cdot \cos\alpha$
donde α es el ángulo que forma los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F\, dr \cos\alpha$$

donde F y dr son los módulos de $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ y α es el ángulo formado por la fuerza y el $d\vec{r}$.

- Si nos dan como dato (o podemos calcular) las ecuaciones paramétricas de la trayectoria $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ entonces tendremos que utilizar la siguiente expresión:

Esta es la definición de integral curvilínea que se ve en FMT3

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} F\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt$$

- Caso particular: (para Rozamiento)

  En el caso particular de que el módulo de la fuerza sea constante y el ángulo θ entre la fuerza y el $d\vec{r}$ también sea constante a lo largo de toda la trayectoria el trabajo se puede expresar como:

Esta es la fórmula conocida en el bachillerato donde se definía el trabajo como fuerza por espacio recorrido

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F \cdot dr \cdot \cos\theta = F \cos\theta \int_A^B dr = F\, S_{AB} \cos\theta$$

donde S_{AB} es el espacio recorrido entre A y B.

5.2 Potencia

La potencia es el trabajo desarrollado por unidad de tiempo

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{(Watios)}$$

www.simplyjarod.com

5.3 Fuerzas conservativas y Energía potencial

Importante:
Al vector simbólico ∇ se le denomina vector Nabla y se define como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

- Sea una fuerza $\vec{F}$. Decimos la fuerza es **conservativa** cuando su rotacional es nulo:

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

También se suele decir que el campo es irrotacional o que deriva de un potencial.

- En concreto, en dos dimensiones, $\vec{F} = (F_1, F_2)$:

$$\vec{F} \text{ es conservativa} \Leftrightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

- En concreto, en tres dimensiones, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$:

$$\vec{F} \text{ es conservativa} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{cases}$$

Esto se lee diciendo que "la fuerza es el menos gradiente de la energía potencial"

- Si una fuerza $\vec{F}$ es conservativa existe una función escalar E_p tal que

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

A este campo escalar se le llama **energía potencial** asociada a $\vec{F}$.

Nuestro problema siempre va a ser en una dimensión por lo que sustituimos el gradiente por una derivada donde u_r es un vector unitario genérico

- Por tanto, para calcular la energía potencial asociada a una determinada fuerza conservativa se hace siempre el siguiente razonamiento:

$$\vec{F} = -\nabla E_p \Rightarrow F\vec{u}_r = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r \Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow \boxed{E_p = -\int F\, dr}$$

- Por tanto no existe una sola expresión para la energía potencial. Lo que sucede es que hay tantas expresiones para la energía potencial como fuerzas conservativas distintas existen.

- Una partícula puede tener, en un instante dado, distintos tipos de energías potenciales (por ejemplo, gravitatoria y elástica).

- La fuerza de rozamiento $F_r = \mu N$ es el típico ejemplo de fuerza no conservativa. Es decir, no tiene energía potencial asociada.

Si F es conservativa:

Trabajo= Energía potencial inicial (A) menos energía potencial final

Esto es un caso particular de la anterior tomando $A = B$

Consecuencias de las fuerzas conservativas

- Si la fuerza $\vec{F}(x, y, z)$ es conservativa entonces el trabajo W entre los puntos A y B es independiente del camino (curva) y vale $\boxed{W_{AB} = E_p(A) - E_p(B)}$.

- Si la fuerza $\vec{F}(x, y, z)$ es conservativa entonces el trabajo W a lo largo de una trayectoria cerrada es cero.

www.simplyjarod.com

Energías potenciales usuales

En cada problema pintaremos el nivel de energía potencial (suelo) donde más nos convenga.

Energía potencial gravitatoria cerca de la superficie terrestre

$$E_p = mgh$$

- Es la energía potencial asociada de la fuerza peso $P = mg$
- Es nula en el suelo ($h = 0$)
- h va con signo: si está por encima del nivel de energía potencial será positiva y si está por debajo negativa

Energía potencial elástica

Siempre positiva !!

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

- Es la energía potencial asociada a la fuerza elástica $F = kx$
- Es nula cuando la deformación del muelle es cero ($x = 0$).

Energía potencial gravitatoria universal

Se utiliza en el tema 7 (Gravitación)

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

- Es la energía potencial asociada a la fuerza gravitatoria universal (ley Newton) $\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_x$
- Es nula cuando la distancia r entre M y m es infinita ($r = \infty$).
- La energía potencial cerca de la superficie terrestre es un caso particular de ésta.

Energía potencial eléctrica

Se utiliza en el tema 8 (Electrostática)

$$E_p = K\frac{Qq}{r}$$

- Es la energía potencial asociada a la fuerza eléctrica (ley de Coulomb) $F = K\frac{Qq}{r^2}$
- Es nula cuando la distancia r entre Q y q es infinita ($r = \infty$).

www.simplyjarod.com

5.4 Energía cinética

Se define la **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve a la velocidad v, mediante la expresión

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(Julios)}$$

La energía cinética es una magnitud escalar, positiva siempre !!

Teorema de la energía cinética

*La variación de energía cinética desde un punto A hasta un punto B es igual al trabajo producido por **todas las fuerzas que actúan** sobre la partícula (conservativas y no conservativas)*

Date cuenta que la variación o incremento de algo es siempre final menos inicial

$$W_{TODAS\ FUERZAS_{AB}} = E_c(B) - E_c(A)$$

5.5 Teorema de la energía mecánica

*La variación de energía mecánica desde un punto A hasta un punto B es igual al trabajo producido únicamente por **las fuerzas no conservativas** que actúan sobre la partícula*

Definimos la **energía mecánica** como la suma de la energía cinética y la energía potencial (en el caso de la energía potencial nos referimos a la suma de los distintos tipos de energía potencial).

$$W_{FNC_{AB}} = E\,mec(B) - E\,mec(A)$$

Las fuerzas no conservativas por excelencia son: la fuerza de rozamiento, las reacciones normales, la tensión en los hilos, etc. Aunque en casi todos los problemas que haremos la única que va a trabajar va a ser la fuerza de rozamiento.

www.simplyjarod.com

Teorema de la Energía cinética

$$\boxed{dW_{Fzas} = dE_{cin}}$$

Fuerzas
- conservativas → provienen de un potencial
  - $P = mg \rightarrow U_{peso} = mgh = -W_{peso}$
  - $F = -Kx \rightarrow U_{Fmuelle} = -\frac{1}{2}Kx^2$
- NO conservativas
  - Froz → problemas → $W_{FNC} = \Delta E_{mec}$
  - Reacciones → No trabajan nunca aunque parezca que sí

$$dW_{Fzas\ cons} + dW_{Fzas\ no\ cons} = dE_{cin}$$

$$-dU + dW_{FNC} = dE_{cin}$$

$$\int dW_{FNC} = \int dE_{cin} + \int dU$$

$$W_{FNC} = \Delta E_{cin} + \Delta U$$

$E_{cinf} - E_{cino}$ $\quad$ $U_f - U_o$

$$\boxed{W_{FNC} = E_{mecf} - E_{meco}}$$

$$W_{FNC} = \Delta E_{mec}$$

$$W_{todas\ Fzas} = \Delta E_{cin}$$

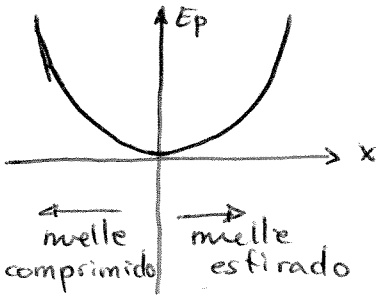
www.simplyjarod.com

Gráficas de Energía Potencial

→ Son gráficas que representan la energía potencial de una partícula en función de un parámetro (generalmente x, y, z ó r)

ej: Partícula con un muelle

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = cte \cdot x^2$$



→ Fuerzas de las que derivan las E_{pot}

- las fuerzas son conservativas

$$\vec{F} = -\text{grad}\, E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

como la E_p generalmente sólo depende de una variable ⇒ $E_p = E_p(x)$

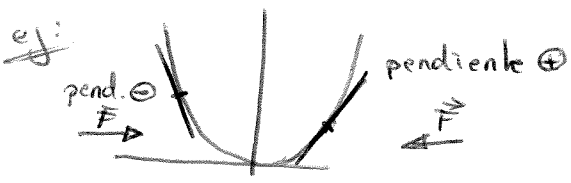
ej: muelle

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\vec{F} = -\text{grad}\, E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x$$

Dirección de las Fuerzas: según eje de la variable que corresp
Sentido: contrario a la pendiente de la gráfica

ej:



si pdte ⊕ ⇒ $\vec{F}$ es sentido ⊖
si pdte ⊖ ⇒ $\vec{F}$ es sentido ⊕

→ Puntos de equilibrio: se producen donde la pendiente de la gráfica es horizontal

$$\vec{F} = \vec{0} \rightarrow -\frac{\partial E_p}{\partial} = 0$$

- MÁXIMOS
  ↳ ptos equilibrio inestables

- MÍNIMOS
  ↳ ptos equilibrio estables

- E_p = cte

$$\boxed{\partial E_p = 0 \Rightarrow \text{puntos de equilibrio}}$$

TEMA 6: SISTEMAS DE PARTÍCULAS

El centro de masas (cdm) de un sistema es un punto en el cual está aplicado el peso total del sistema. Entonces podremos mantener todo el sistema en equilibrio simplemente sujetando con un dedo ese punto.

6.1 Posición del centro de masas

- Si tenemos un sistema discreto de partículas el vector posición de su cdm es:

Sistema discreto = Sistema formado por un número finito de partículas

$$\vec{r}_{cdm} = \vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}$$

siendo m_i la masa de la partícula i, $\vec{r}_{cdm}$ el vector de posición del centro de masas, y $\vec{r}_i$ el vector de posición de la partícula i.
Si expresamos $\vec{r}_{cdm} = x_{cdm}\vec{u}_x + y_{cdm}\vec{u}_y + z_{cdm}\vec{u}_z$ entonces podemos obtener cada componente por separado:

$$x_{cdm} = x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_{cdm} = y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_{cdm} = z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

- En caso de que el sistema de partículas sea continuo entonces:

$$\vec{r}_{cdm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

(∫ r dm ← suma infinita del producto r·m ; ∫ dm ← suma infinita de m)

siendo M la masa total del sistema, dm un diferencial de masa del sistema, $\vec{r}_{cdm}$ el vector de posición del centro de masas, y $\vec{r}$ el vector de posición del diferencial de masa.

$$x_{cdm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \qquad y_{cdm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \qquad z_{cdm} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

donde x, y, z **son las coordenadas del centro de masas del elemento diferencial** que tome-mos para realizar la integral.

- Utilización de simetrías en cuerpos homogéneos
  - Si el sistema tiene un plano de simetría el cdm se encuentra en ese plano
  - Si el sistema tiene un eje de simetría el cdm se encuentra en ese eje.
  - Si el sistema tiene un centro de simetría el cdm es ese punto.

Esto sucede frecuentemente en barras, discos, etc...

- En ocasiones lo que podemos hacer es dividir un cuerpo complejo de masa M en cuerpos más sencillos de masa m_i de los cuales conocemos las coordenadas $\vec{r}_{cdm_i}$ de su cdm. El cdm del cuerpo complejo se calcula

Fijate que lo que hacemos es "reemplazar" cada cuepo simple por su cdm y utilizamos la fórmula para sistemas discretos

$$\vec{r}_{cdm} = \frac{m_1\vec{r}_{cdm1} + m_2\vec{r}_{cdm2} + ... + m_n\vec{r}_{cdm_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

$$x_{cdm} = \frac{\sum m_i x_{cdm_i}}{\sum m_i} \qquad y_{cdm} = \frac{\sum m_i y_{cdm_i}}{\sum m_i} \qquad z_{cdm} = \frac{\sum m_i z_{cdm_i}}{\sum m_i}$$

www.simplyjarod.com

6.2 Movimiento del cdm

Velocidad del cdm

Si conocemos el vector de posición no tenemos más que derivar una vez respecto a t:

$$\vec{v}_{cdm} = \frac{d\,\vec{r}_{cdm}}{d\,t} \rightarrow \boxed{\vec{v}_{cdm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}}$$

Siendo $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,etc. Las velocidades de cada partícula del sistema.

Aceleración del cdm

Igualmente derivamos la velocidad respecto a t:

$$\vec{a}_{cdm} = \frac{d\,\vec{v}_{cdm}}{d\,t} \rightarrow \boxed{\vec{a}_{cdm} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + ... + m_n\vec{a}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}}$$

Siendo $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,etc. Las aceleraciones de cada partícula del sistema.

6.3 Segunda ley de Newton para sistemas

El cdm de un sistema de puntos se mueve como si fuera un punto material dotado de toda la masa del sistema, sobre el cual actúan todas las fuerzas exteriores que operan sobre el sistema.

Es la segunda ley de Newton que ya conocemos

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{cdm}}$$

siendo M la masa total del sistema (suma de las masas); $\vec{F}_{ext}$ las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema y $\vec{a}_{cdm}$ la aceleración del cdm.

Nota: consideramos solo las fuerzas exteriores al sistema, puesto que las interiores son fuerzas de cohesión entre las partículas que se van anulando dos a dos por acción y reacción (lo que hace una partícula a la otra es igual y contrario que lo que le hace la otra a la una)

6.4 Momento lineal del sistema

momento lineal = cantidad de movimiento

El momento lineal de un sistema de partículas es la suma de las cantidades de movimiento de cada partícula del sistema:

$$\boxed{\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n}$$

Fijándonos en la expresión anterior de la velocidad del cdm, obtenemos una expresión que también es muy importante

$$\boxed{\vec{p} = M\,\vec{v}_{cdm}}$$

www.simplyjarod.com

Teorema del momento lineal.

No es más que una consecuencia directa de derivar la ecuación anterior y de entrar en la segunda ley de newton

La derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de un sistema es igual a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte$$

Teorema de Conservación del momento lineal.

Esta conservación es fundamental para resolver choques de partículas y problemas similares

Si la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es nula entonces se conserva la cantidad de movimiento del sistema.

$$\text{Si} \quad \sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \overrightarrow{cte}$$

6.5 Choques de partículas

Son colisiones entre dos cuerpos que tiene lugar en un Δt muy corto, ejerciéndose mutuamente fuerzas relativamente grandes.
La colisión se produce en la línea de choque; que es la normal común a las dos superficies de contacto.

Al estudiar el sistema en el choque las fuerzas son nulas: las externas se anulan (pesos = normales) y las internas son iguales y contrarias (acción y reacción)

Las choques más usuales con las que trabajaremos serán:

- **Inelásticos:** Después de la colisión los cuerpos **permanecen juntos**: aplicamos conservación de $\vec{p}$ antes y después de la colisión.

- **Elásticos:** En estas colisiones **se conserva la energía cinética**: aplicamos conservación de $\vec{p}$ y E_c antes y después de la colisión.

Nota: En algunos libros suele ser habitual a la hora de resolver un choque conservar la velocidad del cdm en lugar de conservar $\vec{p}$: **es exactamente la misma condición** (ver la relación anterior entre $\vec{p}$ y $\vec{v}_{cdm}$).

www.simplyjarod.com

6.6 Momento angular del sistema

Ver punto 3.5 teoría

El momento angular del sistema, respecto a un punto O, es igual a la suma de los momentos angulares de cada partícula (situadas respectivamente en los puntos P_1 , P_2 ,etc.) respecto a un punto O:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O\,(1)} + \vec{L}_{O\,(2)} + ... + \vec{L}_{O\,(n)} = \overrightarrow{OP_1} \times \vec{p}_1 + \overrightarrow{OP_2} \times \vec{p}_2 + ... + \overrightarrow{OP_n} \times \vec{p}_n$$

Relación entre momentos angulares.

Es muy útil la relación que existe entre el momento angular en cualquier punto O y yel momento angular en el cdm

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{cdm} + \overrightarrow{Ocdm} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_{cdm} + \overrightarrow{Ocdm} \times M\,\vec{v}_{cdm}}$$

Teorema del momento angular.
La derivada respecto al tiempo del momento angular del sistema, es igual al momento resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema.

Lo utilizaremos mucho en el tema siguiente

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext}$$

Teorema de Conservación del momento angular.
Solamente se conserva el momento angular del sistema cuando el momento de las fuerzas exteriores es nulo.

$$\text{Si} \quad \sum \vec{M}_{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \overrightarrow{cte}$$

6.7 Energía cinética de un sistema

La energía cinética de un sistema es igual a la suma de las energías cinéticas de cada partícula del sistema

$$E_C = \frac{1}{2} \sum m_i\, v_i^{\,2}$$

6.8 Momento lineal y angular en el sistema cdm

El sistema cdm es un sistema de referencia móvil con origen O´en el cdm del sistema y sus ejes se trasladan paralelos a los ejes fijos. Las magnitudes calculadas relativas a este sistema se suelen denotar con "prima"

En ocasiones es útil estudiar el sistema tomando como sistema de referencia al cdm.

Cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento de un sistema, en su movimiento respecto al sistema cdm, es nula ya que la velocidad del centro de masas con respecto a él mismo es cero:

$$\vec{p}\,' = \vec{0}$$

Momento angular. El momento angular del sistema, en su movimiento respecto al sistema cdm, es

Las magnitudes con prima son con respecto al cdm

$$\vec{L}_O{}' = \vec{L}'_{O\,(1)} + \vec{L}'_{O\,(2)} + ... + \vec{L}'_{O\,(n)} = \overrightarrow{O'P_1} \times \vec{p}_1 + \overrightarrow{O'P_2} \times \vec{p}_2 + ... + \overrightarrow{O'P_n} \times \vec{p}_n$$

www.simplyjarod.com

TEMA 7: SÓLIDO RÍGIDO.

Es decir el sólido rígido es un sólido indeformable

Llamamos **sólido rígido** a toda la distribución continua de materia , en la cual la distancia entre los distintos puntos materiales que lo componen permanece constante bajo la acción de fuerzas exteriores.

7.1 Momento de inercia

El momento de inercia es un escalar y tiene unidades de kg m^2

Partículas puntuales

- El momento de inercia de una partícula material de masa *m* girando en torno a un eje situado a una distancia *r* es:

$$I = mr^2 \quad \text{(Siempre positivo)} \qquad I = \int r^2\, dm$$

- El momento de inercia de un sistema discreto de partículas en rotación es:

Sumamos los momentos de inercia de cada partícula

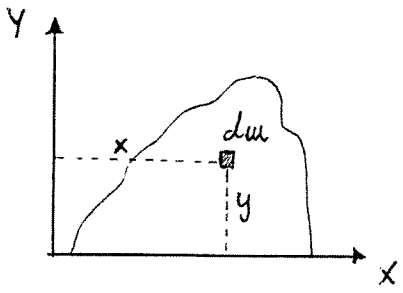
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 \quad \Rightarrow \quad I = \sum m_i r_i^2$$

Sólido rígido

- Se define momento de inercia de una masa con respecto de un eje X ó Y:

El dm debe ser puntual; estas integrales suelen ser dobles y triples

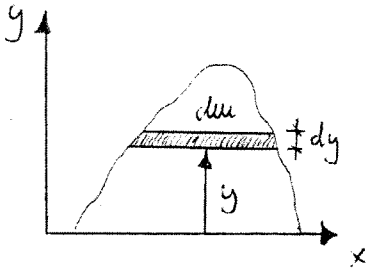
$$I_x = \int_{masa} y^2\, dm \qquad I_y = \int_{masa} x^2\, dm \qquad \text{(Siempre positivos)}$$



- Podemos tomar un *dm* que no sea puntual pero debe cumplir que todos sus puntos equidisten del eje respecto del cual calculamos el momento de inercia. Ejemplo:

Con esto conseguimos hacer integrales simples en lugar de dobles y triples

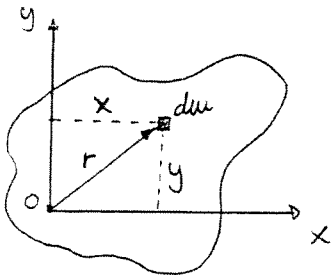
$$I_x = \int_{masa} y^2\, dm$$



www.simplyjarod.com

- Si queremos calcular el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al papel que llamaremos O lo haremos de la misma manera:

$$I_0 = \int_{masa} r^2 \, dm$$



En ocasiones puede resultar mas sencillo obtener I_0 mediante la integral o mediante esta relación según el problema

como $r^2 = x^2 + y^2$ se ve claramente que $I_0 = I_x + I_y$

- Si tenemos un cuerpo compuesto, el momento de inercia lo podemos obtener sumando los momentos de inercia de las diversas formas simples en que podemos descomponerlo.

Teorema de Steiner

Si conozco el momento de inercia del eje que pasa por el cdm de un sólido rígido puedo calcular el momento de inercia de cualquier eje paralelo

El momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje cualquiera es igual al momento de inercia de dicho cuerpo respecto de un eje paralelo al anterior que pase por el cdm más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

$$I = I_{cdm} + md^2$$

www.simplyjarod.com

7.2 Cinemática del sólido rígido

El movimiento plano más general que pueda tener un sólido rígido siempre lo podremos descomponer en un movimiento de traslación y en un movimiento de rotación

Traslación: Todos los puntos tienen la misma velocidad y aceleración.

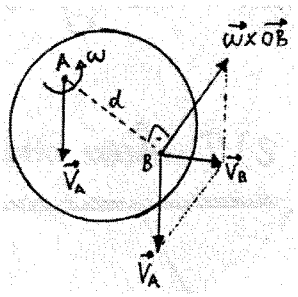
Rotación: La trayectoria de los puntos del sólido son círculos concéntricos.

7.3 Campo de velocidades y aceleraciones en un solido rígido

Velocidades: Si conocemos la velocidad angular de rotación $\vec{\omega}$ y la velocidad de un punto A, entonces podemos calcular la velocidad de cualquier otro punto B:

$\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular del movimiento de rotación

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}}$$



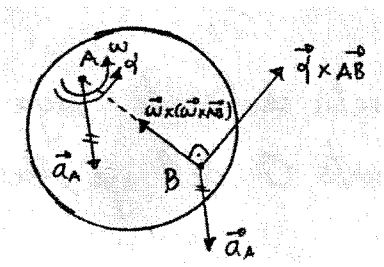
Para calcular la velocidad de B a partir de la de A hacemos lo siguiente:

- Le paso a B la velocidad de A.
- Aplico sobre A la velocidad angular $\vec{\omega}$ y calculo la velocidad que recibe B a consecuencia de esa rotación respecto de A.
- La velocidad total de B será la suma vectorial de las anteriores.

Aceleraciones: Si conocemos la velocidad angular de rotación $\vec{\omega}$, la aceleración angular $\vec{\alpha}$ y la aceleración de un punto A, entonces podemos calcular la aceleración de cualquier otro punto B:

siendo $\vec{\alpha}$ el vector aceleración angular del movimiento de rotación

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB})}$$



Para calcular la aceleración de B a partir de la de A:

- Le paso a B la aceleración de A.
- Aplico sobre A $\vec{\alpha}$ y calculo sobre B la correspondiente componente de aceleración (tangencial).
- Aplico sobre A $\vec{\omega}$ y calculo sobre B la correspondiente componente de aceleración (normal).

Fijate que al ser una rotación pura, el punto A realiza circunferencias.

Velocidad lineal: siempre era velocidad angular por radio

Aceleración lineal:

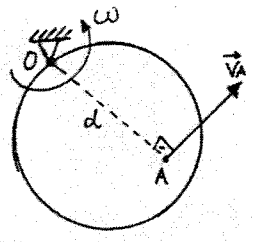
Suma de dos componentes:

-acel.tangencial: era siempre la acel.angular por el radio

-acel.normal: una de las maneras era velocidad angular al cuadrado por radio

Un ejemplo de rotación plana sería:

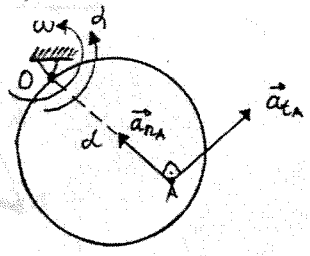
Velocidad lineal



$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} \qquad (\vec{\omega} = \omega \vec{k})$$

$$\left|\vec{V}_A\right| = \omega d$$

Aceleración lineal



$$\vec{a}_{t_A} = \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OA} \qquad (\vec{\alpha} = \alpha \vec{k})$$

$$\left|\overrightarrow{a_{t_A}}\right| = \alpha d$$

$$\overrightarrow{a_{n_A}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA})$$

$$\left|\overrightarrow{a_{n_A}}\right| = \omega^2 d$$

7.4 Energía de un sólido rígido

- **Energía cinética**

Suponemos un sólido rígido que se traslada con una velocidad v_{cdm} y hace una rotación con una velocidad angular ω

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2} M v_{cdm}^2}_{traslacion} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{cdm}\, \omega^2}_{rotacion}$$

Suma de dos términos: uno correspondiente a la traslación y otro a la rotación

En el caso de un sólido rígido con movimiento de rotación entorno a un eje que llamamos O su energía cinética viene dada por

$$E_c = \frac{1}{2} I_O\, \omega^2$$

- **Energía potencial**

Date cuenta que ahora sólo nos fijamos en la altura del cdm

$$E_p = m\, g\, h_{cdm}$$

7.4 Momento angular de un sólido rígido

El momento angular de un sólido respecto a un punto O viene dado por

$$\vec{L}_0 = \underbrace{\overrightarrow{O\,cdm} \times m \vec{v}_{cdm}}_{traslacion} + \underbrace{I_{cdm}\, \vec{\omega}}_{rotacion}$$

Suma de dos vectores: uno correspondiente a la traslación y otro a la rotación

$\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular del movimiento de rotación

Lo más habitual en nuestros problemas será:

- El punto O es punto fijo $\rightarrow$ $\vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}$
- El punto O coincide con el cdm $\rightarrow$ $\vec{L}_{cdm} = I_{cdm} \vec{\omega}$

www.simplyjarod.com

Teorema del Momento angular

La suma de los momentos de todas las fuerzas en un punto cualquiera O es igual a la derivada del momento angular en ese punto

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$$

Esta conservación junto con la de la cantidad de movimiento (tema5) es fundamental para choques de sólido rígido

Conservación: Si los momentos en O son nulos $\rightarrow \vec{L}_0 = \vec{cte}$

7.5 Dinámica del sólido rígido

Traslación: para estudiar este movimiento y las fuerzas que lo producen utilizaremos la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_{cdm}$$

Rotación: para estudiar este movimiento utilizamos la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación

$$\vec{M}_O = I_O\,\vec{\alpha}$$

siendo $\vec{\alpha}$ el vector aceleración angular del movimiento de rotación

IMPORTANTE: esta ecuación sólo es válida si el punto O cumple una de estas condiciones:
- Es el **cdm**
- No tiene aceleración. (ej: **puntos fijos)**
- Su aceleración pasa por el cdm. (ej: **E.I.R)**

7.6 Teoremas de la energía

Teorema de la energía cinética

$$W_F = E_{CIN_f} - E_{CIN_i}$$

W_F : trabajo de todas las fuerzas (conservativas o no) que actúan sobre el sólido.

Teorema de la energía mecánica

$$W_{FNC} = E_{MEC_f} - E_{MEC_i}$$

W_{FNC} : trabajo de las fuerzas NO CONSERVATIVAS que actúan sobre el sólido. Si éste es nulo (caso muy común) $\rightarrow$ $E_{MEC} = cte$

www.simplyjarod.com

7.7 Rodadura sin deslizamiento

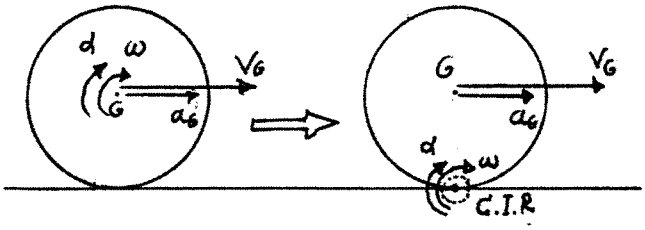
El eje instantáneo de rotación (e.i.r.) es un eje particular en los movimientos de rodadura sin deslizamiento. En un instante determinado el movimiento se puede entender como una rotación instantánea entorno al e.i.r. El e.i.r va cambiando de posición en cada instante, su velocidad es nula pero su aceleración no tiene porqué serlo. Con esta explicación es sencillo obtener las relaciones de rodadura sin deslizamiento:

La rodadura sin deslizamiento tiene mucho interés en Fisica1

$$v_{cdm} = \omega \cdot R$$

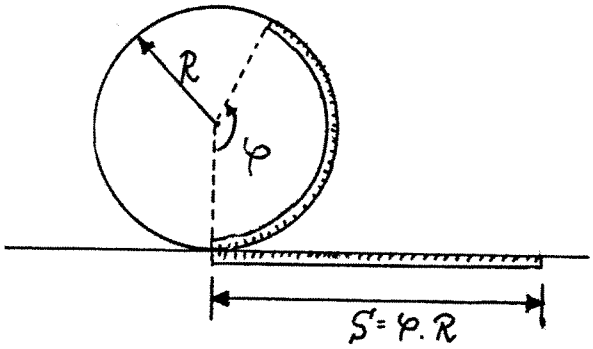
$$a_{cdm} = \alpha \cdot R$$

Siempre que estemos en rodadura sin deslizamiento utilizaremos estas relaciones



Siendo R el radio de la rueda

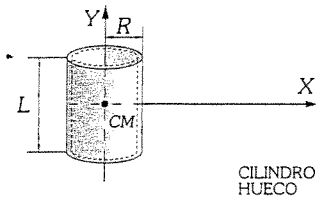
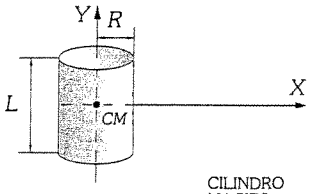
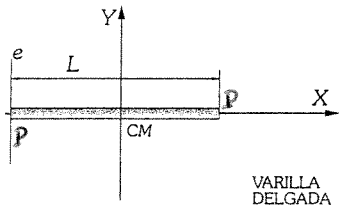
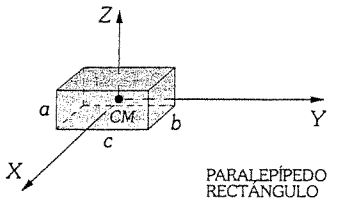
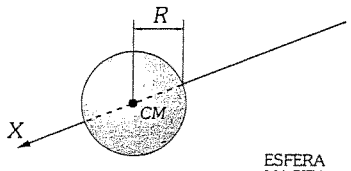
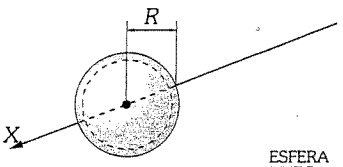
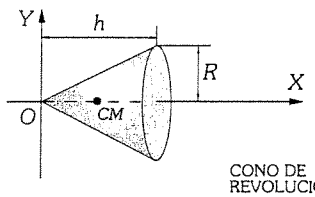
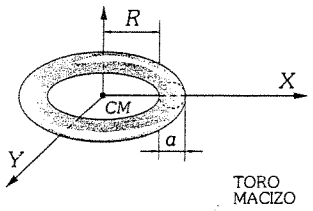
Otra forma sencilla de obtener las relaciones anteriores es a partir de la regla de la "cremallera"; esto es, que si la rueda va rodando sin deslizar su centro de masas se traslada una distancia $S = \theta \cdot R$ (donde θ es el ángulo girado por la rueda) si derivamos una y dos veces esta expresión con respecto del tiempo obtenemos las relaciones anteriores: $v_{cdm} = \omega \cdot R$ y $a_{cdm} = \alpha \cdot R$.



ATENCIÓN: En rodadura sin deslizamiento, aunque la F_{ROZ} en general no es nula esta no trabaja.

www.simplyjarod.com

Momentos de inercia de algunos sólidos homogéneos.

Cuerpo	Momentos de inercia	Cuerpo	Momentos de inercia
 CILINDRO HUECO	CM: $I_{yy} = MR^2$ $I_{xx} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$	 CILINDRO MACIZO	CM: $I_{yy} = \frac{1}{2}MR^2$ $I_{xx} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
 VARILLA DELGADA	CM: $I_{yy} = \frac{1}{12}ML^2$ P: $I_{ee} = \frac{1}{3}ML^2$	 PARALEPÍPEDO RECTÁNGULO	$I_{xx} = \frac{1}{12}M(a^2+c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}M(b^2+c^2)$
 ESFERA MACIZA	$I_{xx} = \frac{2}{5}MR^2$	 ESFERA HUECA	$I_{xx} = \frac{2}{3}MR^2$
 CONO DE REVOLUCIÓN	$I_{xx} = \frac{3}{10}MR^2$ $I_{yy} = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{1}{10}Mh^2$	 TORO MACIZO	$I_{zz} = 2MR^2 + \frac{3}{2}Ma^2$ $I_{yy} = MR^2 + \frac{5}{4}Ma^2$

Cuadrado:

$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$

Aro = Cilindro hueco:

$I_o = MR^2$

Disco = Cilindro macizo:

$I_o = \frac{1}{2}MR^2$

www.simplyjarod.com

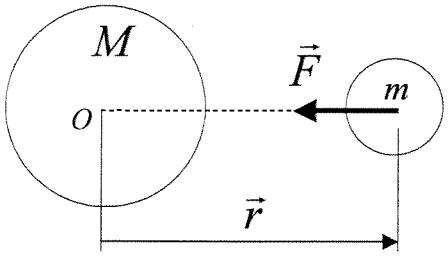
TEMA 8: CAMPO GRAVITATORIO

Los comentarios de esta columna van en arial 8

8.1 Ley de gravitación universal

Si tenemos dos masas M y m separadas una distancia r, éstas se ejercen mutuamente una fuerza atractiva según la línea que une sus centros cuya expresión es:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$$



Si consideramos únicamente la masa M, ésta produce una perturbación en el espacio que se manifiesta al aparecer cualquier otra masa m ejerciendo sobre ésta la fuerza atractiva gravitatoria. A esta perturbación se la denomina intensidad de campo gravitatorio o campo gravitatorio $\vec{g}$:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r = m\vec{g} \Rightarrow \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Observaciones

- Tanto la fuerza gravitatoria como la intensidad de campo son magnitudes vectoriales.
- El vector unitario $\vec{u}_r$ tiene como dirección la línea que une el centro de ambas masas. En la práctica sustituiremos $\vec{u}_r$ por los vectores $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ ó $\vec{u}_z$ según cada ejercicio.
- El sentido de $\vec{u}_r$ es siempre de atracción entre ambas masas. En la práctica el signo lo ponemos de acuerdo con el sistema de referencia de nuestro dibujo.
- $\vec{g} = 0$ y $\vec{F} = 0$ en el infinito.
- Llamamos G a la constante de la Gravitación Universal cuyo valor es de:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$$

- Las unidades de la intensidad de campo gravitatorio también se pueden expresar como:

$$\frac{N}{kg} = \frac{\cancel{kg} \cdot m/s^2}{\cancel{kg}} = m/s^2$$

  Por esa razón también nos podemos referir a g como "aceleración de la gravedad".

- Sólo en el caso de la superficie de la Tierra se cumple que:

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M_T}{R_T^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{\left(6{,}37 \cdot 10^{6}\right)^2} = 9{,}81\ \ (N/kg)$$

8.2 Potencial gravitatorio

Se demuestra fácilmente que $\vec{g}$ es un campo conservativo, de esta forma, tendrá asociado un potencial. Calculándolo con $\vec{g}$:

$$\vec{g} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{V = -G\frac{M}{r}}$$ Potencial gravitatorio (Siempre < 0)

RESUMEN: Una masa m influida por una masa M recibe:

- Una fuerza de atracción $\vec{F} = m\vec{g}$
- Una energía potencial $E_p = mV$

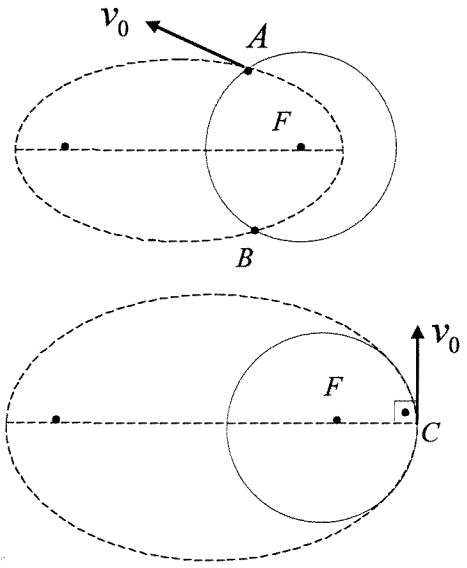
8.3 Movimiento de los planetas. Velocidad de escape

Los planetas y sus satélites describen trayectorias cónicas. El tipo de cónica depende de la energía mecánica total de la partícula:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = E_{cin} + E_{pot}$$

$E < 0 \rightarrow$ Trayectoria elíptica o circular.
$E = 0 \rightarrow$ Trayectoria parabólica.
$E > 0 \rightarrow$ Trayectoria hiperbólica.

En dichas trayectorias el planeta ocupa uno de los focos de la cónica.



Si lanzamos un satélite desde la superficie de la Tierra (punto A), vuelve a caer sobre ella en el punto B. La única excepción teórica para poder poner en órbita al satélite es lanzar al satélite horizontalmente (punto C) y con la suficiente velocidad como para que C sea el perigeo de la trayectoria.

Entre otras cosas, por eso los cohetes se lanzan con varias fases (en cada una de ellas se produce un cambio de trayectoria.

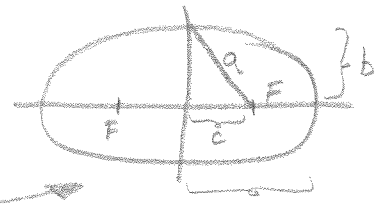
Si queremos que el satélite no regrese (que escape de la influencia gravitatoria) le tengo que dar la velocidad justa que haga que la trayectoria sea una parábola; es decir, que su energía mecánica total sea nula:

En el infinito: $E_{mec} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 \Rightarrow$

$$v_e = \sqrt{GM\frac{2}{R}} = \sqrt{gR^2\frac{2}{R}} = \sqrt{2gR}$$

Donde v_e es la velocidad de escape. Con esta velocidad el satélite llegaría al infinito con velocidad nula (gasta toda la energía cinética en llegar al infinito).

Órbitas elípticas



$$r_0 + r_1 = 2a \Rightarrow a = \frac{r_0 + r_1}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = a - r_0$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{ec. elipse}$$

El tiempo en recorrer la órbita, o período se calcula por medio de la velocidad areolar:

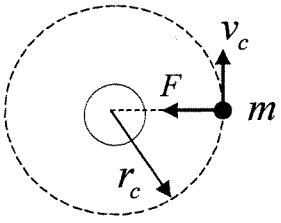
Velocidad aerolar: $v = \frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}_0|}{2m}$ (m^2/s)

πab = área elipse

Período en órbita elíptica: $T = \frac{\text{superficie}}{\text{vel. aerolar}} = \frac{\pi ab}{v_A} \Rightarrow T = \frac{2\pi abm}{L_0}$ (s)

Normalmente para calcular L_0 se buscan los valores en el apogeo o perigeo.

Órbitas circulares

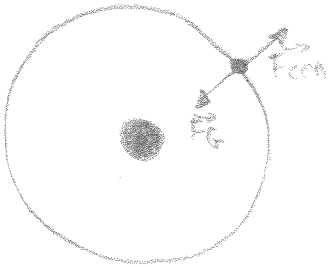


En las órbitas circulares se cumple:

$$F = ma_n$$

$$G\frac{Mm}{r_c^2} = m\frac{v_c^2}{r_c}$$

$$r_c v_c^2 = G\,M = cte$$

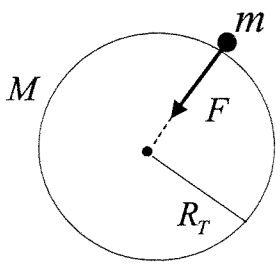


$|\vec{F}_G| = |\vec{F}_{cen}|$

$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$

$$T = \frac{\text{longitud}}{\text{velocidad}} = \frac{2\pi r_c}{v_c} \ (s)$$

En general, el producto GM se puede calcular para un cuerpo del que se conocen su radio y la aceleración de la gravedad en su superficie (la Tierra suele ser el caso más claro de aplicación) La fuerza de atracción gravitatoria sobre la superficie del planeta es el peso, y por lo tanto:



$$F = m\,g = G\frac{M\,m}{R_T^2} \Rightarrow g\,R_T^2 = G\,M$$

www.simplyjarod.com

8.4 Leyes de Kepler

Kepler enunció sus leyes basándose únicamente en sus experimentos (de forma empírica). Más tarde se demostró analíticamente que sus conclusiones eran correctas.

1. Los planetas describen orbitas elípticas con el sol en uno de los focos.
2. La velocidad areolar es constante (Ley de las áreas).
3. Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

www.simplyjarod.com

FÍSICA 1
Electromagnetismo

www.simplyjarod.com

9.1 Carga eléctrica

La carga eléctrica es una propiedad básica de la materia. La carga eléctrica puede ser positiva o negativa y, en términos generales, siempre se presenta por múltiplos enteros de la unidad fundamental de carga e. La carga del electrón es $-e$ y la del protón $+e$.

La unidad de carga del sistema internacional es el culombio (C).

La carga elemental expresada en culombios es:

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19} C$$

Los objetos se cargan por transferencia mutua de cargas eléctricas, usualmente en forma de electrones, de forma que la carga se conserva. Es decir, en un proceso no se crea ni se destruye carga.

9.2 Densidad de carga

La carga normalmente no se presenta de forma discreta (cargas sueltas, como sucedía en bachillerato) sino de forma continua en distribuciones lineales, superficiales o volumétricas. En ese caso utilizamos la **densidad de carga** que es una magnitud escalar.

En Física 1 como se supone que todavía no se conocen las integrales dobles y triples haremos todas estas cuentas con integrales simples

Densidad volumétrica de carga

$$\rho = \frac{dq}{dV} \ (\text{C/m}^3) \quad \Rightarrow \quad Q_T = \iiint_V \rho \, dV \ \ (\text{C})$$

Densidad superficial de carga

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \ (\text{C/m}^2) \quad \Rightarrow \quad Q_T = \iint_S \sigma \, dS \ \ (\text{C})$$

Densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \ (\text{C/m}) \quad \Rightarrow \quad Q_T = \int_L \lambda \, dl \ \ (\text{C})$$

Carga puntual

$$Q_T = q \ \ (\text{C})$$

www.simplyjarod.com

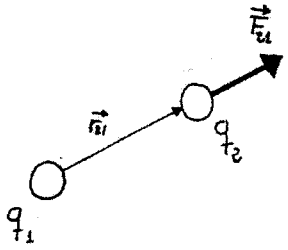
9.3 Fuerza eléctrica

La fuerza que actúa sobre una carga puntual fija q_2 , debida a la presencia de otra carga puntual fija q_1 es:

$$F_{21} = K\frac{|q_1 q_2|}{r_{21}^2}$$ (Newton)

Es atractiva si: signo $q_1 \neq$ signo q_2

Es repulsiva si: signo $q_1 =$ signo q_2



Aunque no lo ponemos la fuerza que actúa sobre la q_1 es igual y contraria a F_{21} (principio de acción y reacción);de manera que se cumple que:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

K es la llamada constante de Coulomb:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

ε es lo que se llama **coeficiente dieléctrico o permitividad**

Cuando el medio es el vacío se denotan: K_0, ε_0

$$K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \quad \frac{Nm^2}{C^2}$$

Principio de superposición: La fuerza sobre una carga en reposo debida a otras también fijas actuando simultáneamente, es igual a la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por cada una de ellas actuando por separado como si las demás no existiesen.(ver en los problemas)

9.4 Intensidad de campo eléctrico

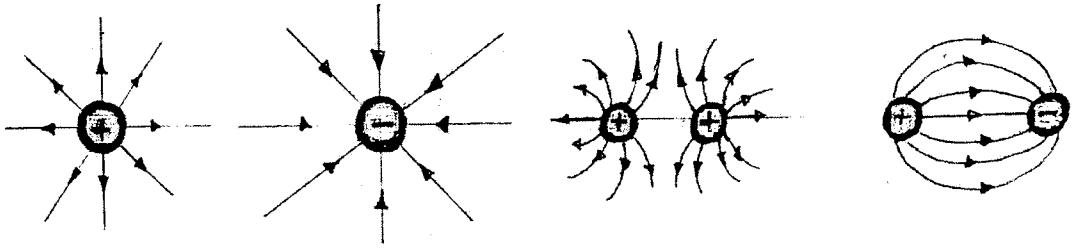
Se puede entender como la fuerza que actúa sobre la unidad de carga positiva, es decir, un culombio, colocado en el punto donde queremos calcular el campo eléctrico (Formula de Coulomb).

$$E = K\frac{q}{r^2}$$ *(N/C) ó (V/m)*

El campo eléctrico es un vector cuya dirección (en el caso de carga puntual) coincide con la línea que une la carga con el punto donde calculo el campo

Le llamaremos habitualmente **campo eléctrico** a secas, omitiendo la palabra "intensidad

(El campo eléctrico sale de las cargas positivas y entra en las negativas)



Hablaremos más sobre la permitividad eléctrica en lleguemos a la parte de dieléctricos

Por último la fuerza que recibe una carga Q en el seno de un campo eléctrico $\vec{E}$ es :

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

(Si la carga es + la fuerza va en el sentido de $\vec{E}$ si no, va en sentido contrario)

www.simplyjarod.com

Definimos el **desplazamiento eléctrico** como:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (C/m^2)$$

Esta expresión es válida para medios lineales e isótropos que son los que vamos a tener siempre en Física 1

El desplazamiento eléctrico sirve para describir el comportamiento de los materiales dieléctricos ante un campo eléctrico.

Cálculo práctico de la intensidad de campo eléctrico

La anterior expresión nos sirve para calcular la intensidad del campo eléctrico debida a una carga puntual. Sin embargo a nosotros nos van a pedir que calculemos el campo eléctrico creado por una distribución de cargas (discreta o continua). Para ello vamos a disponer de dos procedimientos:

– Aplicar el teorema de Gauss
– Método de las aportaciones infinitesimales (basado en el principio de superposición)

Pasamos a analizar cada uno de estos dos procedimientos en detalle.

9.5 Teorema de Gauss

El teorema de Gauss es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell

En ocasiones, si la carga cumple ciertas simetrías será muy sencillo calcular $\vec{E}$ por el teorema de Gauss: **esferas, planos indefinidos, hilos indefinidos y cilindros indefinidos.**

Se define **flujo eléctrico** como el número de líneas de campo que atraviesa una superficie. Siempre calcularemos el "diferencial de flujo" en un diferencial de área, y luego lo integramos en todo el área:

Diferencial de flujo: $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,d\vec{S}\cos\alpha$

$$\Phi = \oiint_{area} d\Phi = \oiint_{area} E\,dS\cos\alpha$$

El vector $d\vec{S}$ (*vector diferencial de area*)es un vector de dirección perpendicular al área sentido saliente y módulo dS
(Lo que mide el área diferencial)

Teorema de Gauss: Sea una superficie **cerrada** que llamaremos Gaussiana. El flujo de campo eléctrico que la atraviesa cumple:

$$\Phi = \frac{Q_T}{\varepsilon}$$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

(expresión valida solo cuando ε sea constante, sucederá en el 99% de los casos, sino se utiliza la expresión puesta en el margen)

Analíticamente se enuncia de la siguiente forma:
$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_T$

Recuerda que el desplazamiento eléctrico se define como:
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

Normalmente aplicaremos Gauss cuando nos pidan el campo eléctrico creado por una distribución de carga con simetría esférica, cilíndrica, planos indefinidos, etc. o cuando nos den el campo y nos pidan la carga que lo crea.

IMPORTANTE: Para que el problema nos salga sencillo y rentable hacerlo por el método de Gauss la superficie Gaussiana deberá cumplir alguna de estas dos propiedades en cada una de sus partes:

1ª Propiedad : $\vec{E}$ sea paralelo a $d\vec{S}$ (en general valdría con poder expresar $\cos\alpha$ matemáticamente) siendo E constante en S, entonces:
Si $\vec{E}$ es paralelo a $d\vec{S} \rightarrow d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,dS\cos 0 = E\,dS \rightarrow \boxed{\Phi = E\,S}$

2ª Propiedad: $\vec{E}$ sea perpendicular a $d\vec{S} \rightarrow d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,dS\cos 90 = 0 \rightarrow \boxed{\Phi = 0}$

www.simplyjarod.com

9.6 Método de las aportaciones infinitesimales

Siendo $\vec{u}_i$ un vector unitario en la dirección y sentido del campo creado por cada carga puntual

Principio de superposición: El campo creado por un conjunto de cargas fijas actuando simultáneamente, es igual a la suma vectorial de los campos creados por cada una de ellas actuando por separado como si las demás no existiesen.(ver en los problemas)

$$\vec{E} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon r_i^2} \cdot \vec{u}_i$$

Para calcular el campo creado por una **distribución continua de carga** nos basamos en este principio de superposición, siguiendo los siguientes pasos:

La dificultad de este método dependerá del tipo de distribuciones continuas

1er Paso: Cogemos un "trocito"(elemento diferencial de carga) de nuestra distribución, este trocito tendrá una carga dQ, y la consideraremos como carga puntual.

2º Paso: Calculamos el campo eléctrico vector que crea ese "trocito" con la fórmula de Coulomb, y lo dejamos en función de **una sola variable**

En muchos problemas, darnos cuenta de que hay simetrías (si las hay), nos puede ahorrar mucho trabajo

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \vec{u}$$

(diferencial de campo que crea el diferencial de carga)

3er Paso: Integramos el campo eléctrico que acabamos de calcular, en todo el recinto de la Distribución cargada (lineal, superficial o volumétrica). Esta integral será siempre integral simple, pues en el paso anterior hemos dejado el integrando en función de una sola variable

(Ver aplicación en los problemas de clase)

www.simplyjarod.com

9.7 Potencial eléctrico

Date cuenta de que el potencial no es un vector, es un **escalar** y por tanto su signo depende del signo de la carga que lo crea!!

Si tenemos una carga Q, el potencial que genera en un punto P a una distancia r viene dado por la formula de Coulomb:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r} \quad \textit{Voltios (V)}$$

Observaciones

- Debemos ser nosotros los que fijemos en cada caso el origen de potenciales, es decir, un punto del espacio donde el potencial vale cero. El origen de potenciales se tiene que situar en un punto donde no haya carga. Normalmente se elige el infinito (siempre que no hay carga allí).

- El potencial eléctrico es siempre **una función continua** en todo punto. Por tanto en cualquier punto $x = a$ donde hay un cambio de medio se cumple que:

$$\Phi(x = a^-) = \Phi(x = a^+)$$

- Se puede entender como la energía potencial que tendría la carga unidad, entonces si colocamos en el punto P (donde exista un potencial V_p) una carga Q', esta adquiere una **energía potencial electrostática:**

$$E_p = Q' V_p \quad \textit{Julios}$$

(Su signo será igual al signo de la carga por el signo del potencial)

¡¡¡**Recuerda esta fórmula!!!**

Nos vamos a encontrar algunos problemas con cargas puntuales en movimiento y nos pedirán datos sobre su velocidad, etc.

Aplicaremos el teorema de la energía mecánica, pero ahora en vez de tener energía potencial gravitatoria tendremos energía potencial electrostática

- Las cargas tienden siempre a tener menor energía potencial eléctrica. Por eso las cargas positivas tienden a los potenciales decrecientes y las cargas negativas tienden a los potenciales crecientes.

- Asimismo, El campo $\vec{E}$ tiene el sentido de los potenciales decrecientes, esto es, las líneas de campo van de los potenciales mayores a los potenciales menores.

Relación entre campo y potencial

Al ser el campo eléctrico conservativo o irrotacional, $\nabla \times \vec{E} = 0$, sabemos que existe una función potencial asociada que llamaremos **potencial eléctrico** **V** y que se relaciona con el campo de la siguiente forma:

El potencial eléctrico también se representa con la letra Φ

$$\vec{E} = -\nabla V = -\overrightarrow{grad}\, V$$

Recuerda: campo y potencial se relacionan con el gradiente

Esta expresión queda más simplificada en el caso de suponer una sola dimensión:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \Rightarrow E\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$$

Nuestro problema siempre va a ser en una dimensión por lo que sustituimos el gradiente por una derivada

donde se observa que hemos sustituido el gradiente por una derivada donde $\vec{u}_r$ es un vector unitario genérico.

www.simplyjarod.com

Forma práctica de calcular el potencial

Para calcular el potencial existen, al igual que para el campo, dos procedimientos:

– Calcular el potencial a partir del campo $\vec{E}$

– Utilizar el método de aportaciones infinitesimales para calcularlo directamente. En este caso no necesitamos el campo para nada.

Pasamos a detallar los dos métodos.

9.8 Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico

A partir de la relación deducida en la página anterior, si separamos diferenciales e integramos desde un punto B hasta un punto A tendremos que:

$$V(A) - V(B) = V_{AB} = -\int_B^A E\,dr$$

El dato del potencial de algún punto generalmente será dato en los problemas, si no nos dicen nada tomaremos como dato que el potencial en el infinito es nulo

Podemos observar que para conocer el potencial de un punto del espacio debemos conocer el potencial de otro punto, pues esta relación nos relaciona la **diferencia de potencial** de dos puntos con el campo. (Ver problemas)

9.9 Método de las aportaciones infinitesimales

Principio de superposición: El potencial creado por un conjunto de cargas fijas actuando simultáneamente, es igual a la suma escalar de los potenciales creados por cada una de ellas actuando por separado como si las demás no existiesen.(ver en los problemas)

Así pues, si tenemos un conjunto de cargas discretas sumaremos la contribución de cada carga:

$$V = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon\, r_i}$$

La dificultad de este método dependerá del tipo de distribuciones continuas

Para calcular el campo creado por una **distribución continua de carga** nos basamos en este principio de superposición, siguiendo los siguientes pasos:

1er Paso: Cogemos un "trocito"(elemento diferencial de carga) de nuestra distribución, este trocito tendrá una carga dQ, y la consideraremos como carga puntual.

2º Paso: Calculamos el potencial eléctrico que crea ese "trocito" con la fórmula de Coulomb, y lo dejamos en función de **una sola variable**

En muchos problemas, damos cuenta de que hay simetrías (si las hay), nos puede ahorrar mucho trabajo

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon\, r}$$

(diferencial de campo que crea el diferencial de carga)

3er Paso: Integramos el potencial eléctrico que acabamos de calcular, en todo el recinto de la Distribución cargada (lineal, superficial o volumétrica). Esta integral será siempre integral simple, pues en el paso anterior hemos dejado el integrando en función de una sola variable

(Ver aplicación en los problemas de clase)

www.simplyjarod.com

9.10 Conductores

En muchos materiales, tales como el cobre y otros metales, parte de los electrones pueden moverse libremente en el seno del material. Estos materiales se denominan **conductores**.
Los conductores tienen importantes propiedades:

Estas propiedades se utilizan con mucha frecuencia en la resolución de los problemas

- Si un conductor está cargado (tiene carga neta no nula) toda la carga se sitúa en su superficie.
- El campo eléctrico en el interior de un conductor es siempre nulo.
- El potencial en el interior de un conductor es siempre constante e igual al valor que toma en su superficie
- En la superficie del conductor el vector campo eléctrico es normal a la superficie y su módulo toma un valor:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

donde σ es la densidad superficial de carga del conductor.

Conductor aislado o conductor conectado

Decimos que un conductor está **aislado** cuando no está conectado a una pila. En esta situación la carga del conductor permanece constante ya que las cargas (electrones) no pueden salir ni entrar del conductor por ningún sitio.

Importante:
La tierra se puede entender como una pila de 0 V

Decimos que un conductor está **conectado** cuando algún punto de su superficie está unido a una pila o a tierra. En esta situación el potencial de todo el conductor permanece constante e igual al de la pila al que está conectado.
Cuando un conductor está conectado las cargas (electrones) pueden salir o entrar del conductor por el cable que le une a la pila por lo que la carga total del conductor puede variar.

Conductor descargado o cargado

Decimos que un conductor está **descargado** cuando su carga neta es nula. La carga neta es la suma de todas las cargas positivas y todas las cargas negativas que tiene el conductor. Por tanto que un conductor esté descargado no significa exactamente que no tenga carga sino que las cargas positivas están compensadas con las negativas de forma que al sumar todas sale cero.
Por ejemplo, en un conductor descargado con forma de corona esférica (que tiene por tanto dos superficies, una interior y otra exterior) puede suceder que en una de sus superficies se polarice una carga positiva de valor $+Q$. En ese caso, en la otra superficie del conductor se polarizará automáticamente una carga $-Q$ de forma al sumar ambas la carga total siga siendo cero.

Decimos que un conductor está **cargado** cuando su carga neta es distinta de cero. En este caso la carga estará situada en alguna de las superficies que tenga el conductor.

www.simplyjarod.com

9.11 Energía Electrostática

NOTA IMPORTANTE: Se trata de una densidad volumétrica

Recuerda: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

- La **densidad de energía electrostática** (energía por unidad de volumen) viene dada por la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon |\vec{E}|^2 \quad \text{(Julios/m}^3\text{)}$$

- La **energía electrostática** de un determinado volumen viene dada por la siguiente expresión:

Fíjate que se trata de integrar la densidad de energía anterior en un volumen

$$W_E = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon |\vec{E}|^2\,dV \quad \text{(Julios)}$$

donde la integral se extiende a todo el volumen donde se quiere calcular la energía. Si en ese volumen el campo toma diferentes expresiones entonces tenemos que hacer distintas integrales cada una con la expresión del campo correspondiente en cada región dentro del volumen.
Si nos piden la energía electrostática a secas (sin especificar la región o zona) entonces hay que calcularla en todo el espacio.

La energía potencial eléctrica de una carga puntual q debida a una carga puntual Q viene dada por

$$E_p = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r}$$

La energía potencial eléctrica de una carga puntual q debida a un conjunto de cargas puntuales Q_i se obtiene aplicando el **principio de superposición**

$$E_p = \sum_i \frac{Q_i q}{4\pi\varepsilon r_i}$$

www.simplyjarod.com

TEMA 10: CONDENSADORES. DIELÉCTRICOS .

10.1 Condensadores

Definiciones

Un **condensador** es un conjunto de dos placas o armaduras (conductores) separadas por el vacío o un dieléctrico (no conductor) donde las armaduras están en influencia total, es decir todas las líneas de campo *nacen* en una de ellas y *mueren* en la otra.

La **capacidad** C de un condensador se define como:

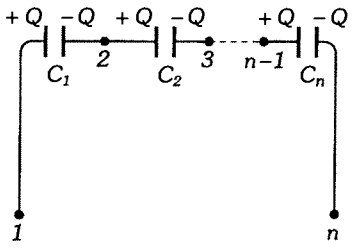
$$C = \frac{Q}{V} \text{ (Faradios)}$$

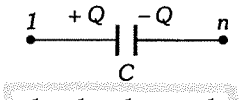
donde Q es la carga de una de las placas y V es la tensión entre las dos placas.

Asociación de condensadores

La asociación de condensadores es al revés que las resistencias

SERIE

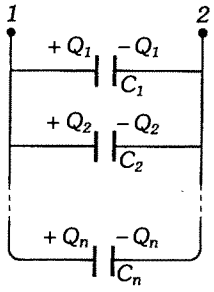


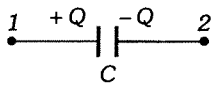


$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$
$$Q = Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n$$

PARALELO





$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

$$V = V_1 = V_2 = \ldots = V_n$$
$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$$

Energía almacenada por un condensador

$$W_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV \text{ (Julios)}$$

Tipos de condensadores

Dependiendo de su geometría los condensadores se pueden clasificar en tres tipos:

-Condensadores planos: sus placas son planas y paralelas entre sí

-Condensadores esféricos: sus placas son superficies esféricas concéntricas

-Condensadores cilíndricas: sus placas son superficies cilíndricas concéntricas

www.simplyjarod.com

El condensador plano es el que más se utiliza en Física 1

Condensador plano

La capacidad de un condensador C de placas planas de superficies S y distancia d entre ellas es:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

Suponiendo la placa izquierda está a V voltios y la placa derecha está a 0 voltios la tensión y el campo entre las placas es:

$$\Phi = \frac{V(d-x)}{d} \qquad \vec{E} = \frac{V}{d}\vec{u}_x$$

Condensador esférico

La capacidad de un condensador esférico de radios R_1 y R_2 entre placas $(R_2 > R_1)$ es:

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Suponiendo cargada positivamente la placa interior el campo y la tensión en la región entre las placas son:

$$\vec{E} = \frac{VR_1R_2}{r^2(R_2 - R_1)}\vec{u}_r \qquad \Phi = \frac{V}{r}\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}R_1$$

Observaciones:

-La carga Q es la misma en ambas armaduras pero la densidad de carga ρ_S es mayor en la armadura interior ya que tiene menor superficie:

$$Q(r = R_1) = -Q(r = R_2)$$
$$\sigma(r = R_1) \neq -\sigma(r = R_2)$$

-El campo siempre tiene el sentido de los potenciales decrecientes, es decir de la placa cargada positivamente a la placa cargada negativamente

-Si en vez de darnos el potencial de cada placa nos dan la diferencia de potencial entre las placas entonces sólo se puede calcular una de las dos constantes que aparecen en la expresión del potencial.

Condensador cilíndrico

La capacidad por unidad de longitud de un condensador cilíndrico de radios R_1 y R_2 entre placas $(R_2 > R_1)$ es:

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Las observaciones son las mismas que para el condensador esférico.

www.simplyjarod.com

10.2 Dieléctricos

Recuerda: La permitividad del dieléctrico la nombramos ε y siempre es mayor que la permitividad del vacío, ε_0.

Llamamos **dieléctricos** a los materiales aislantes (no conductores) en este tipo de materiales las cargas no tienen libertad de movimientos.
Las utilidades de los dieléctricos son muy variadas. Una de esas utilidades es la de aumentar la capacidad de un condensador. Esto se consigue introduciendo el dieléctrico entre las placas del condensador.

Permitividad eléctrica relativa:

Importante: $\varepsilon_r > 1$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \ (\text{F/m})$$

Susceptibilidad eléctrica:

$$\chi = \varepsilon - \varepsilon_0 \ (\text{F/m})$$

Susceptividad eléctrica relativa:

$$\chi_r = \frac{\chi}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - 1$$

También se le llama inducción eléctrica

Vector desplazamiento eléctrico:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \ (\text{C/m}^2)$$

Vector polarización:

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \ (\text{C/m}^2)$$

El vector polarización es nulo en el vacío

$$\vec{P} = \chi \vec{E} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Densidad de carga de polarización:

Estas cargas se sitúan en la superficie S del dieléctrico

$$\sigma_{ligada} = \vec{P} \cdot \vec{n}\Big|_S$$

Donde $\vec{n}$ es el vector perpendicular a la superficie del dieléctrico.

Este es el caso más usual

En particular, si el campo eléctrico que causa la polarización es normal a la superficie del dieléctrico entonces

$$\sigma_{ligada} = |\vec{P}|\Big|_S$$

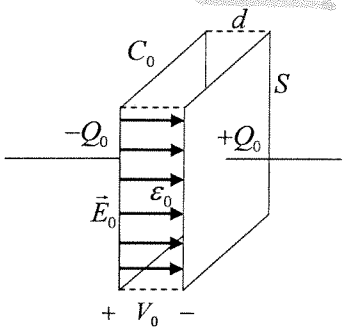
es decir, la densidad superficial de carga ligada nos da el módulo del vector polarización particularizado sobre la superficie del dieléctrico.

www.simplyjarod.com

Capacidad de un condensador relleno de dieléctrico

Sea un condensador con aire entre sus placas (sin dieléctrico) con una capacidad C_0, una carga Q_0 y sometido a una diferencia de potencial V_0. En su interior se estará generando un campo eléctrico $\vec{E}_0$.

En esta situación su capacidad viene dada por $C_0 = \frac{Q_0}{V_0}$



Para aumentar la capacidad de este condensador podemos introducir entre sus placas un dieléctrico de permitividad ε_r de forma que la nueva capacidad pasa a ser

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon_r C_0$$

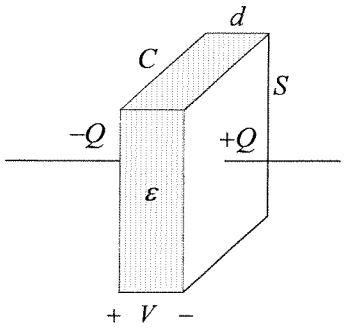
Ahora bien este proceso de introducir el dieléctrico lo podemos hacer de dos formas.

Fuente de alimentación = pila

- A carga constante: en este caso desconectamos la fuente de alimentación antes de introducir el dieléctrico. Las características del condensador quedan:

$$Q = Q_0$$
$$V = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$$
$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Se pueden deducir sabiendo $C = \varepsilon_r C_0$, $C = \frac{Q}{V}$

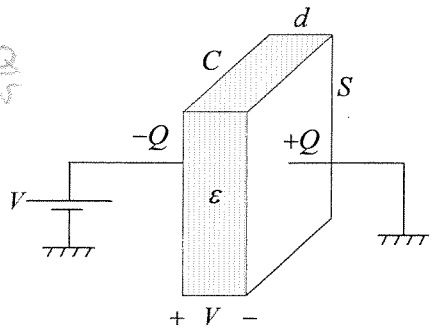


Al introducir un dieléctrico entre las placas de un condensador cargado y desconectado de su fuente de alimentación, la diferencia de potencial entre sus armaduras disminuye $V < V_0$ y al permanecer constante su carga, su capacidad habrá aumentado

- A potencial constante: en este caso se introduce en el dieléctrico sin desconectar la fuente de alimentación . Las características del condensador quedan:

$$Q = \varepsilon_r Q_0$$
$$V = V_0$$
$$E = E_0$$

Se pueden deducir sabiendo $C = \varepsilon_r C_0 = \frac{Q}{V}$

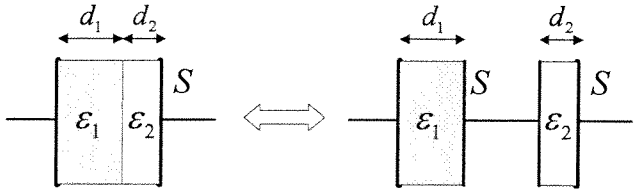


Al introducir un dieléctrico entre las placas de un condensador cargado y conectado a su fuente de alimentación, la diferencia de potencial entre sus armaduras permanecerá constante, entonces la fuente suministra más carga a las placas del condensador, aumentando su capacidad

www.simplyjarod.com

Estudio de condensadores con distintas capas de dieléctrico

Laminas de dieléctrico en serie



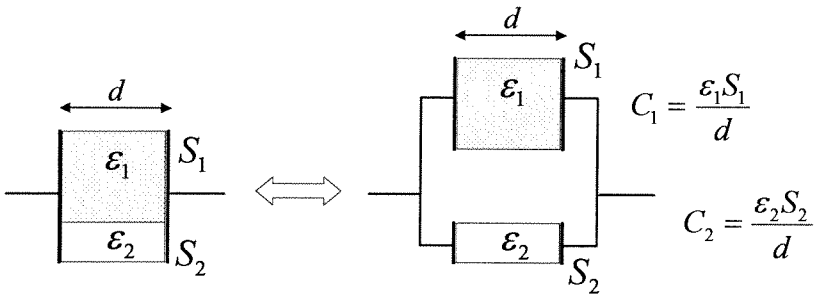
$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{d_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S} = \frac{1}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right) \Rightarrow C = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$$

En general si hay n láminas de dieléctrico :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \ldots + \frac{d_n}{\varepsilon_n S} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\varepsilon_i} \Rightarrow C = \frac{S}{\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{\varepsilon_i}}$$

Laminas de dieléctrico en paralelo

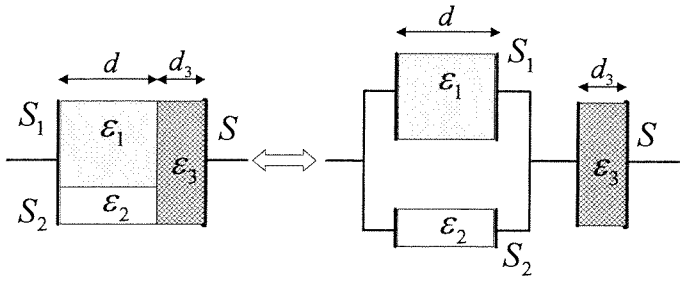


$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d} = \frac{1}{d}\left(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2\right) \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d}$$

En general si hay n láminas de dieléctrico :

$$C = C_1 + \ldots + C_n = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \ldots + \frac{\varepsilon_n S_n}{d} = \frac{1}{d}\left(\varepsilon_1 S_1 + \ldots + \varepsilon_n S_n\right) \Rightarrow C = \frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i S_i}{d}$$

Laminas de dieléctrico en paralelo en serie y en paralelo



www.simplyjarod.com

11.1 Elementos de un circuito de corriente continua

En los circuitos de corriente continua van a aparecer los siguientes elementos:

- Resistencias
- Pilas
- Condensadores
- Bobinas

Pasamos a describir el funcionamiento de cada uno.

Resistencias

- En corriente continua las resistencias se comportan siguiendo la ley de Ohm:

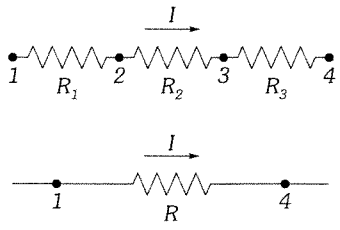
$$R = \frac{V}{I} \text{ (Ohmios)}$$

- Las resistencias no almacenan energía. Sólo disipan potencia (Energía disipada por segundo) que se calcula:

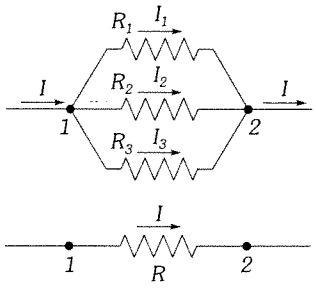
$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \text{ (Watios)}$$

- Asociación de resistencias

Serie: $R = R_1 + R_2 + .. + R_n$



Paralelo: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + .. + \frac{1}{R_n}$



Pilas

Importante:
Un pila mantiene una tensión constante entre sus bornas incluso si no pasa corriente por la pila!!

- Las pilas también se llaman generadores de tensión continua. Este dispositivo mantiene una tensión V_0 constante entre sus bornas independientemente de la corriente que la atraviese.

$$V = V_0 \text{ (Voltios)}$$

- Las pilas suministran potencia al circuito:

$$P = V_0 I \text{ (Watios)}$$

siendo I la corriente que atraviesa la pila

www.simplyjarod.com

Condensadores

No pasa I, si hay V

- En corriente continua los condensadores se comportan como circuitos abiertos, no pasa corriente por ellos aunque sí hay caída de potencial entre sus bornas.

- La energía almacenada entre las bornas de un condensador es:

$$W_C = \frac{1}{2}CV^2 \text{ (Julios)} \qquad W_c = \frac{1}{2} Q V$$

donde C es la capacidad del condensador medida en Faradios. Los condensadores no disipan potencia.

Bobinas

Si pasa I, no hay V

- En corriente continua las bobinas se comportan como cortocircuitos, pasa corriente por ellas pero no cae tensión entre sus bornas.

- La energía almacenada entre las bornas de una bobina es:

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 \text{ (Julio)}$$

donde L es la inductancia de la bobina medida en Henrios. La bobinas no disipan potencia.

www.simplyjarod.com

11.2 Leyes de Kirchhoff

Los lemas de Kirchoff son la herramienta fundamental para análizar circuitos eléctricos. Las utilizaremos en la practica totalidad de los ejercicios. En teoría de circuitos estas leyes son axiomáticas, por consiguiente son aceptadas sin demostración.

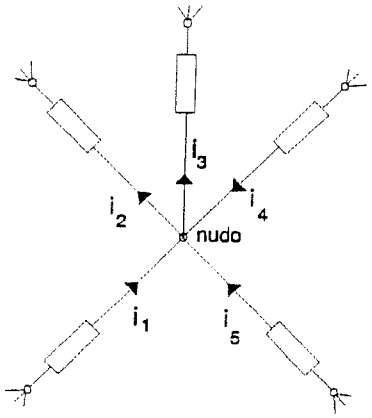
Primera ley de Kirchhoff. Ley de los nudos

Se enuncia diciendo que:

La suma de las corrientes que confluyen en un nudo es siempre igual a cero

Por ejemplo, consideremos un nudo genérico de una red cualquiera como el mostrado en la figura. En este caso tenemos que:

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$$



Importante: Todas las corrientes se consideran positivas en el sentido en que se indican

Segunda ley de Kirchhoff. Ley de las mallas

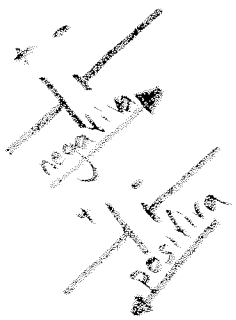
Se enuncia diciendo que:

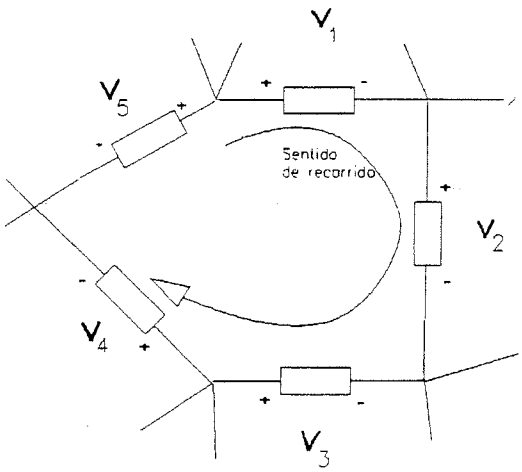
La suma de las caídas o subidas de tensión a lo largo de una malla es siempre cero

El sentido fijado para recorrer la malla no tiene porqué coincidir con el sentido de la corriente

Para aplicar esta ley fijamos un sentido de recorrido de la malla (por ejemplo, el que se señala en la siguiente figura) y partiendo de un elemento recorremos el lazo en el sentido indicado; si al llegar a un elemento entramos por el signo + entonces la tensión se considera negativa (es una caída de tensión); en caso contrario (entramos por el signo –), entonces la tensión se considera positiva (es una subida de tensión). En nuestro caso:

$$-v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0$$





www.simplyjarod.com

11.3 Análisis práctico de circuitos de corriente continua

Definiciones previas

Nudo: Punto de un circuito donde confluyen tres o más cables de un circuito.

Rama: Trozo de cable que une dos nudos consecutivos.

Malla: Conjunto de ramas que forman un lazo cerrado sin contener ninguna rama en el interior del lazo.

Cortocircuito: Trozo de cable en el que no hay diferencia de potencial entre sus extremos.

Circuito abierto: Trozo de cable partido en dos por el que no circula corriente.

Analizar un circuito de corriente continua en regimen estacionario significa calcular las corrientes por todas las ramas del circuito y la tensión en todos los nudos del mismo que serán constantes (no dependientes del tiempo t).

Para analizar un circuito se utilizan las leyes de Kirchoff de la página anterior. A continuación vamos a estudiar un procedimientos de resolución de circuitos (existen otros).

Primer procedimiento: Método de nudos y ramas

Los pasos a seguir para analizar un circuito de corriente continua en régimen estacionario son los siguientes:

1.- Dejamos en circuito abierto todos los condensadores que halla y en cortocircuito todas las bobinas que halla en el circuito.

2.- Contamos los nudos (n), las ramas (r) y las mallas (m). Siempre se debe cumplir que:

$$m = r-(n-1)$$

3.- Definimos una corriente para cada rama del circuito. El sentido que le pongamos da igual. Si al resolver el circuito alguna corriente sale negativa quiere decir que circula en sentido contrario al que hemos supuesto.

4.- Identificamos la borna positiva de cada elemento del circuito, para ello ponemos un signo positivo en la borna de mayor tensión de cada elemento. Hay que tener en cuenta que:

- En las resistencias la borna de mayor tensión es aquella por la que entra la corriente.
- En las pilas la borna de mayor tensión es siempre la del palo largo, independientemente de cómo circule la corriente a través de la pila.

Ten en cuenta que a los condensadores y a las bobinas no se las tiene en cuenta para este paso pues ya han sido sustituidas en el paso 2

5.- Aplicamos las leyes de Kirchoff a $n-1$ nudos.
En las ecuaciones de nudos pondremos positivas las corrientes que llegan al nulo y pondremos negativas las corrientes que salen del nudo.

6.- Aplicamos las leyes de Kirchoff a las m mallas.
En las ecuaciones de mallas elegimos un sentido de recorrido (horario o antihorario). Recorremos la malla en el sentido elegido y vamos pasando por cada elemento de la malla. Si al pasar por elemento entramos por el + se trata de una caída de tensión por lo que en la ecuación de la malla la pondremos con signo – y viceversa.

Importante: El sentido de recorrido de la malla no tiene porqué coincidir con el sentido de las corrientes que circulan por ella

7.- Contamos el número de ecuaciones ($m + n - 1$) y comprobamos que coincide con el número de incognitas (r).

8.- Finalmente, resolvemos el sistema para obtener la solución de las r corrientes de rama.

www.simplyjarod.com

12.1 Corriente eléctrica

Denominamos corriente eléctrica a la carga que atraviesa una determinada sección por unidad de tiempo:

$$I = \frac{Q}{t} \quad \text{o bien} \quad I = \frac{dq}{dt}$$

La unidad de corriente eléctrica del sistema internacional es el amperio (A).

12.2 Densidad de corriente

La corriente eléctrica hasta ahora se ha presentado en forma de corrientes filiformes (cables sin sección, como sucedía en bachillerato) pero a partir de ahora también se va a presentar en forma de distribuciones superficiales o volumétricas. En ese caso utilizamos la **densidad de corriente** que es una magnitud vectorial que describe la corriente que circula sobre una superficie o bien la corriente que circula por un volumen.

Importante: La densidad de corriente es una magnitud vectorial

Densidad volumétrica de corriente

$$\vec{J}_V = \frac{I}{S}\vec{u} \ \ (\text{A/m}^2) \qquad \text{o bien} \qquad \vec{J}_V = \frac{dI}{dS}\vec{u} = \frac{dq}{dS\,dt}\vec{u} \ \ (\text{A/m}^2)$$

Fíjate que las unidades de la densidad volumétrica de corriente son amperios entre metro cuadrado (no metro cúbico)

A partir de la densidad de corriente volumétrica puede obtenerse la corriente total que circula por un volumen integrando:

$$I_T = \iint_S \vec{J}_V \, d\vec{S} = \iint_S J_V dS \quad (\text{A})$$

En particular, si la densidad de corriente es constante tenemos que:

$$I_T = \iint_S J_V dS = J_V \iint_S dS = J_V \cdot S \quad (\text{A})$$

Densidad superficial de corriente

$$\vec{J}_S = \frac{I}{L}\vec{u} \ \ (\text{A/m}) \qquad \text{o bien} \qquad \vec{J}_S = \frac{dI}{dl}\vec{u} = \frac{dq}{dl\,dt}\vec{u} \ \ (\text{A/m})$$

A partir de la densidad de corriente superficial puede obtenerse la corriente total que circula por una superficie integrando:

$$I_T = \int_C \vec{J}_S \, d\vec{l} = \int_C J_S dl \quad (\text{A})$$

En particular, si la densidad de corriente es constante tenemos que:

$$I_T = \int_C J_S dl = J_S \int_C dl = J_S \cdot l \quad (\text{A})$$

www.simplyjarod.com

12.3 Fuerza asociada al campo magnético

Fuerza debida a un campo magnético $\vec{B}$ sobre una carga puntual q:

Ley de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Recuerda: Una corriente filiforme es un le

Fuerza debida a un campo magnético sobre un diferencial de corriente filiforme:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Si ahora queremos calcular la fuerza que ejerce el campo magnético sobre el total de la corriente filiforme lo que hacemos es integrar:

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

Caso particular: si la corriente filiforme es **rectilínea** y la fuerza constante a lo largo de toda la longitud entonces:

Este caso particular es muy habitual

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

12.4 Campo magnético

Importante: Normalmente se llama B al campo magnético pero esto no es correcto ya que B es la inducción magnética

La carga en movimiento crea un campo que llamamos campo magnético, se denota como $\vec{H}$ y se mide en Amperios/metro (A/m). Por tanto, la corriente eléctrica I es la fuente del campo magnético $\vec{H}$.

Nosotros habitualmente calcularemos $\vec{B}$ que es la inducción magnética o densidad de flujo magnético, se mide en Teslas (T) y su relación con el campo magnético es la siguiente:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Donde μ es la permeabilidad del medio que se mide en Henrios/metro (H/m).

Importante: No existe potencial magnético

Es conveniente recordar el valor de la permeabilidad en el vacío: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ N/A^2$

El campo magnético no es conservativo por lo que no lleva asociado una función potencial (no deriva de un potencial).

Cuando nos pidan calcular $\vec{B}$ tendremos dos métodos (análogamente al campo eléctrico):

- Aplicar la Ley de Ampère
- Método de las aportaciones infinitesimales (basado en el principio de superposición)

Pasamos a analizar cada uno de estos dos procedimientos.

www.simplyjarod.com

12.5 Ley de Ampère

La ley de Ampère permite resolver algunos problemas magnetostáticos de forma similar a como la ley de Gauss permite resolver determinadas situaciones electrostáticas. Para conseguirlo es necesario que la variación de la intensidad de campo magnético tenga una forma de variación sencilla y conocida a lo largo del contorno sobre el que se aplica la ley de Ampére.

$$\oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = I_T \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \mu I_T}$$

Lo que traducido a palabras quiere decir que: "la circulación de la inducción magnética a lo largo de una curva cerrada es igual a la corriente que agarra multiplicada por la permeabilidad del medio".

A partir de la Ley de Ampère se puede obtener el campo creado por muchas distribuciones simétricas de corriente.

12.6 Método de las aportaciones infinitesimales

"La inducción magnética producida por un elemento de corriente estacionaria en un punto del espacio, es un vector perpendicular al plano formado por el elemento de corriente $(d\vec{l})$ y el punto, y cuyo sentido viene dado por la regla de la mano derecha".

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

(ley de Biot y Savart)

Para calcular el campo creado por una **corriente eléctrica** (cable) nos basamos en el principio de superposición, siguiendo los siguientes pasos:

1er Paso: Cogemos un "trocito"(elemento diferencial de corriente) de nuestro cable, este trocito será $d\vec{l}$. sentido de $d\vec{\ell}$ = sentido de I

2º Paso: Calculamos el campo eléctrico vector que crea ese "trocito" con la fórmula de *Biot y Savart*, y lo dejamos en función de **una sola variable**

(diferencial de campo que crea el diferencial de corriente)

3er Paso: Integramos el campo magnético que acabamos de calcular, en todo el recinto de la Distribución cargada (lineal, superficial o volumétrica). Esta integral será siempre integral simple, pues en el paso anterior hemos dejado el integrando en función de una sola variable

(Ver aplicación en los problemas de clase)

www.simplyjarod.com

12.7 Energía Magnetostática

La energía magnética de un determinado volumen viene dada por la siguiente expresión:

$$W_H = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{B}\cdot\vec{H}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \mu\,|\vec{H}|^2\,dV = \frac{1}{2\mu}\iiint_V |\vec{B}|^2\,dV \qquad \text{(Julios)}$$

donde la integral se extiende a todo el volumen donde se quiere calcular la energía. Al igual que con el campo eléctrico, si en ese volumen el campo toma diferentes expresiones entonces tenemos que hacer distintas integrales cada una con la expresión del campo correspondiente en cada región dentro del volumen.

12.8 Campos magnéticos más usuales

Campo creado por un cable indefinido

El campo magnético creado por un cable indefinido a una distancia r del mismo se deduce por la ley de Ampére (también se puede hacer por aportaciones infinitesimales) y viene dado por:

Ley de Ampère: $\int B\,dl = \mu I$

Si $B = cte \Rightarrow \int B\,dl = B\int dl = B\cdot l$

circunferencia $\Rightarrow B\cdot l = B2\pi r$

(por ser un cable)

luego: $B2\pi r = \mu I \Rightarrow B = \frac{\mu I}{2\pi r}$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}\vec{u}_\varphi$$

Campo creado por una espira circular

Sea una espira circular situada sobre el plano XY, centrada en el origen y de radio a. El campo magnético sobre el eje z viene dado por:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu I}{2}\frac{a^2}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}\vec{u}_z$$

Solenoide muy largo (o indefinido)

Te puedes imaginar un solenoide como un montón de espiras puestas una encima de la otra de manera que forman un "tubo" indefinido

Un solenoide es un cable enrollado a una superficie cilindrica. Suponiendo que el solenoide tiene su eje a lo largo del eje z el campo en el interior viene dado por:

$$\vec{B} = \mu n I\vec{u}_z$$

Fíjate que el campo dentro de un solenoide es constante

Donde n es el número de espiras por unidad de longitud (espiras/metro).

Cable coaxial

Sea un cable coaxial de radios a, b y c orientado a lo largo del eje z. El campo magnético viene dado por:

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu I}{2\pi}\dfrac{r}{a^2}\vec{u}_\varphi & , \quad 0 \le r \le a \\ \dfrac{\mu I}{2\pi}\dfrac{1}{r}\vec{u}_\varphi & , \quad a \le r \le b \\ \dfrac{\mu I}{2\pi}\dfrac{c^2-r^2}{r(c^2-b^2)}\vec{u}_\varphi & , \quad b \le r \le c \\ 0 & , \quad c \le r \end{cases}$$

www.simplyjarod.com

TEMA 13: INDUCCIÓN MAGNÉTICA

13.1 Flujo magnético

Definimos el flujo magnético a través de una superficie de la siguiente forma:

Ver la definición de flujo en el tema 9

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad \text{(Webers)}$$

en caso de que el campo magnético sea constante a través de toda la superficie podemos sacarlo de la integral y entonces nos queda:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

13.2 Ley de Faraday

La primera expresión de la Ley de Faraday es la siguiente:

Siendo n el numero arrollamientos o numero de espiras

$$fem = -n\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B} d\vec{S}$$

donde la *fem* es la fuerza electromotriz inducida y se mide en voltios.

La segunda expresión de la Ley de Faraday es:

$$fem = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}$$

Ambas fórmulas vienen a decir lo mismo. En definitiva se han encontrado dos métodos de producir variación temporal del flujo y, por tanto, *fem* inducida. Estos métodos son, por una parte, la variación temporal de la inducción de campo magnético y por otro el movimiento del circuito donde se mide la fem inducida.

13.3 Ley de Lenz

Se trata de una ley cualitativa que interpreta el signo de la ley de Faraday y nos da información sobre el sentido de la corriente inducida. Se enuncia de la siguiente forma:

"El campo magnético inducido tiende a oponerse a la variación del flujo creado por el campo magnético inductor"

Una vez conocido el sentido del campo magnético inducido (que puede ser igual o de sentido contrario que el campo inductor) utilizamos la regla de la mano derecha para determinar en qué sentido debe circular la corriente inducida que genera dicho campo inducido.

Aunque exista campo magnético inductor, si no hay variación de flujo, no habrá campo magnético inducido.

www.simplyjarod.com

13.4 Coeficiente de inducción mutua

El **coeficiente de inducción mutua** entre dos corrientes filiformes se define como:

$$L_{2,1} = \frac{\Phi_{2,1}}{I_1} \quad \text{(Henrios)}$$

esto mismo dicho expresado con palabras significa:

$$L_{2,1} = \frac{\text{Flujo que atraviesa el contorno } C_2 \text{ debido a la corriente } I_1}{\text{Corriente que circula por el contorno } C_1}$$

Siempre se cumple que $L_{2,1}$ coincide con $L_{1,2}$. Ambos coeficientes también se les nombra M:

$$L_{2,1} = L_{1,2} = M$$

13.5 Coeficiente de autoinducción

Si ahora tenemos un solo circuito por el que circula una corriente de intensidad I, la corriente creará un campo magnético $\vec{B}$ que atraviesa al mismo circuito, creándose así un flujo:

$$\Phi_1 = L I_1 \Rightarrow L = \frac{\Phi_1}{I_1} \quad \text{(Henrios)}$$

La autoinducción es la característica principal de una bobina (igual que la capacidad lo es de un condensador)

donde L **es el coeficiente de autoinducción.**

13.6 Valor medio y valor eficaz

El **valor medio** de una señal periódica es:

$$< v(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt \quad \text{(voltios)}$$

El **valor eficaz** de cualquier señal periódica es:

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt} \quad \text{(voltios rms)}$$

Este resultado se utiliza con mucha frecuencia

NOTA: El valor eficaz de una señal sinusoidal $v(t) = A\text{sen}(wt)$ es siempre $v_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

www.simplyjarod.com

TEMA 14: CORRIENTE ALTERNA

En corriente alterna todas las fuentes de tensión del circuito deben ser de tipo sinusoidal de la forma:

$$v_g(t) = A\cos(wt+\varphi) \qquad \text{ó} \qquad v_g(t) = A\,\text{sen}(wt+\varphi)$$

El valor eficaz (sólo para señales sinusoidales) se define como:

$$V_{eficaz} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Además por ser la tensión una sinusoide también lo será la intensidad $i_g(t)$.

Para poder analizar el circuito todos los generadores deben tener la misma pulsación (frecuencia angular).

Definición de fasor

Antes de nada, es importante dejar claro que **un fasor es un número complejo.**

Para una fuente $v_g(t) = A\cos(wt+\varphi)$ su **fasor** asociado siempre es $V_g = Ae^{j\varphi}$

En caso de que la función sea de tipo seno la transformaremos a coseno de la siguiente manera:

$$v_g(t) = A\,\text{sen}(wt+\varphi) = A\cos\left(wt+\varphi-\frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(wt+\varphi'\right) \quad \text{con} \quad \varphi' = \varphi-\frac{\pi}{2}$$

Recuerda que:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

Definición de impedancia

Sean V e I los fasores asociados a las señales sinusoidales $v(t)$ e $i(t)$. Definimos la **impedancia** Z de un elemento pasivo en un circuito en corriente alterna como:

$$Z = \frac{V}{I} \quad (\Omega)$$

Muy importante: La impedancia es un número complejo al ser el cociente de dos números complejos

Las impedancias se asocian dentro de un circuito de la misma forma que las resistencias en CC.

Desfasaje φ de I respecto de V: $\quad \text{tg}\,\varphi = \dfrac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}$

Factor de potencia: $\quad \cos\varphi = \dfrac{R}{Z_{total}}$

Impedancias de los elementos pasivos en corriente alterna

Impedancia de la resistencia: $\quad Z = \dfrac{V}{I} = R$

Impedancia del condensador: $\quad Z = \dfrac{V}{I} = \dfrac{1}{jwC} = -\dfrac{1}{wC}j$

Impedancia de la bobina: $\quad Z = \dfrac{V}{I} = jwL$

www.simplyjarod.com

Aquí es donde empieza ELMG de segundo curso

TEMA 15: ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell no son más que las leyes de Gauss, Ampere y Faraday estudiadas en los temas anteriores. Maxwell modificó la ley de Ampere añadiendo un nuevo término. Gracias a este término quedaron relacionados el campo eléctrico y el campo magnético.

Ecuaciones de Maxwell en forma integral

El término añadido por Maxwell es el segundo del lado derecho

$$\oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D}\, d\vec{S} \quad \text{(Ley de Ampere)}$$

$$\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{(Ley de Faraday)}$$

$$\iint_S \vec{D}\, d\vec{S} = Q_T \quad \text{(Ley de Gauss)}$$

$$\iint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad \text{(Ley de Ampere)}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad \text{(Ley de Faraday)}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{(Ley de Gauss)}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

www.simplyjarod.com

APÉNDICE MATEMÁTICO

En este apéndice hemos recogido aquellas herramientas matemáticas que son necesarias para abordar los problemas de Física pero que todavía no se han explicado en las asignaturas de matemáticas.

- **Longitudes, superficies y volúmenes básicos**

-Longitud de una circunferencia de radio R: $l = 2\pi R$

-Longitud de un arco θ de circunferencia: $l = \theta R$

-Superficie de un circulo de radio R: $S = \pi R^2$

-Superficie de un sector circular: $S = \frac{\theta}{2} R^2$

-Superficie de una esfera de radio R: $S = 4\pi R^2$

-Volumen de una esfera de radio R: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

- Volumen de un cilindro de radio R y altura h: $V = \pi R^2 h$

-Superfície lateral de un cilindro de radio R y altura h: $S = 2\pi Rh$

- **Conversión de integrales dobles y triples a integrales simples**

Las integrales dobles y triples se explican en Matemáticas. Nosotros de momento en Física lo que haremos será transformarlas en integrales simples

Para todos los casos suponemos que $f(r)$ es una función que varía con la distancia al centro del sólido r.

-Integración de un disco macizo

$$\iint_S f(r)\,dS = \int f(r)\,2\pi r dr$$

-Integración de un cilindro macizo

$$\iiint_V f(r)\,dV = \int f(r)\,2\pi r h\,dr$$

-Integración de una esfera maciza

$$\iiint_V f(r)\,dV = \int f(r)\,4\pi r^2\,dr$$

Si la integral no tiene integrando (el integrando es 1) tenemos que:

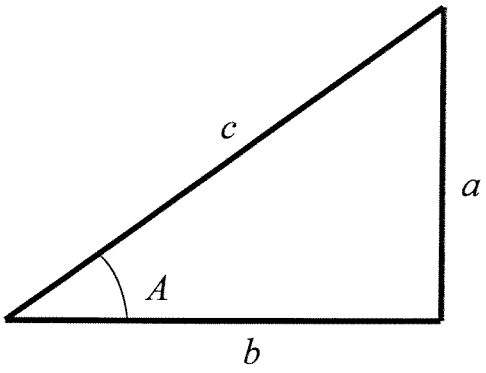
$$\int_L dl = L \qquad \iint_S dS = S \qquad \iiint_V dV = V$$

Recuerda que:

$$\int dx = x$$

www.simplyjarod.com

TRIGONOMETRÍA CIRCULAR



$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A} =$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{cotg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = \frac{b}{a}$$

Ecuación fundamental: $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Valores exactos de algunos ángulos

Ángulo A en grados	sen A	cos A	tg A
0º	0	1	0
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90º	1	0	∞

Ángulo en grados	Ángulo en radianes
0º	0
30º	$\pi/6$
45º	$\pi/4$
60º	$\pi/3$
90º	$\pi/2$
120º	$2\pi/3$
180º	π
270º	$3\pi/2$

Reducción al primer cuadrante

	$-A$	$90º+A$	$90º-A$	$180º+A$	$180º-A$	$270º+A$	$270º-A$
sen	$-\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\cos A$	$-\operatorname{sen} A$	$\operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$-\cos A$
cos	$\cos A$	$-\operatorname{sen} A$	$\operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$-\cos A$	$\operatorname{sen} A$	$-\operatorname{sen} A$
tg	$-\operatorname{tg} A$	$-\operatorname{cotg} A$	$\operatorname{cotg} A$	$\operatorname{tg} A$	$-\operatorname{tg} A$	$-\operatorname{cotg} A$	$\operatorname{cotg} A$

www.simplyjarod.com

	Seno	Coseno
Suma	$\operatorname{sen}(A+B)=\operatorname{sen}A\cos B+\cos A\operatorname{sen}B$	$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$
Diferencia	$\operatorname{sen}(A-B)=\operatorname{sen}A\cos B-\cos A\operatorname{sen}B$	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$
Ángulo doble	$\operatorname{sen}2A=2\operatorname{sen}A\cos A$	$\cos 2A=\cos^2 A-\operatorname{sen}^2 A$
Ángulo Mitad	$\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$	$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$
Exponencial compleja	$e^{iA}=\cos A+i\operatorname{sen}A$ $\cos A=\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2}$	$e^{-iA}=\cos A-i\operatorname{sen}A$ $\operatorname{sen}A=\frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}$

Transformaciones de productos en sumas	Transformaciones de sumas en productos
$\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B=\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))$	$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos A\cos B=\frac{1}{2}(\cos(A-B)+\cos(A+B))$	$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$
$\operatorname{sen}A\cos B=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A-B)+\operatorname{sen}(A+B))$	$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
	$\cos A-\cos B=2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{B-A}{2}$

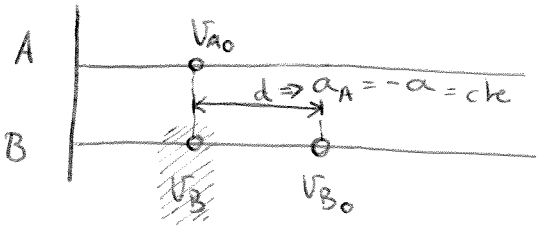
www.simplyjarod.com

FÍSICA 1
Ejercicios de clase

Tema 2

Ejercicio 3

Dos móviles A y B viajan a lo largo de una recta en el mismo sentido, siendo sus velocidades v_A y v_B. Cuando A se halla detrás de B a una distancia de d metros, es frenado con una aceleración negativa de $-a$ m/s^2, que se supone constante. Demostrar que, para que exista choque entre los móviles, es necesario que $v_A - v_B > (2ad)^{1/2}$.



$t_{distancia\ d} = t^*$

A: $V_A = V_{0_A} + at \;;\; V_A = V_{0_A} - at^*$

$r_A = r_{0_A} + V_0 t + \frac{1}{2}at^2 \;;\; r_A = r_{0_A} + V_{0_A}t^* - \frac{a}{2}t^{*2}$

B: $V_B = V_{0_B} + at^* = V_{0_B}$

$r_B = r_{0_B} + V_{0_B}t^* + \frac{1}{2}at^* = r_{0_B} + V_{0_B}t^*$

$V_A - V_B = -at^*$

$\sqrt{2ad} =$

$r_B - r_A = d = r_{0_B} - r_{0_A} + V_{0_B}t^* - V_{0_A}t^* + \frac{a}{2}t^{*2}$

$d = r_{0_B} - r_{0_A} + (V_{0_B} - V_{0_A})t^* + \frac{a}{2}t^{*2}$

$2ad = 2a(r_{0_B} - r_{0_A}) + 2a(V_{0_B} - V_{0_A})t^* + 2a\left(\frac{a}{2}t^{*2}\right)$

$\sqrt{2ad} = \sqrt{2a(r_{0_B} - r_{0_A}) + 2a(V_{0_B} - V_{0_A})t^* + a^2 t^{*2}}$

www.simplyjarod.com

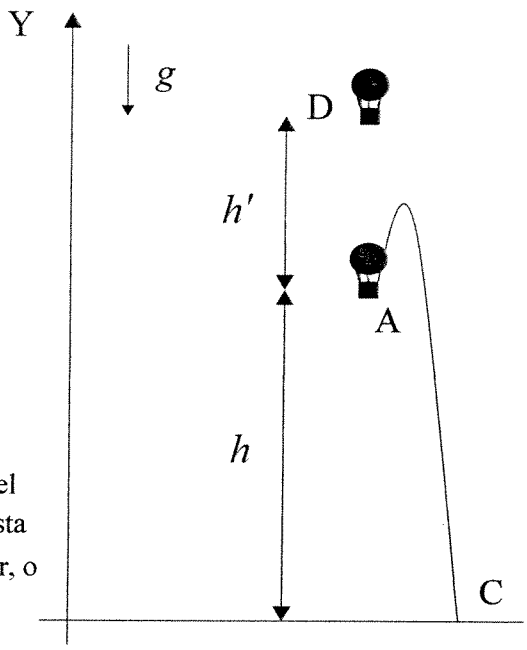
ETSI Telecomunicación

Problema 27 del cuadernillo de clase

Desde un globo que sube con velocidad constante de 24 m/s se deja caer una bomba que explota al llegar al suelo. Si el sonido de la explosión se oye en el globo 12 segundos después del lanzamiento ¿cuál era la altura del globo sobre el suelo en el momento del lanzamiento?. La velocidad del sonido es de 340 m/s, $g = 9{,}8$ m/s.

Tenemos los siguientes datos en el enunciado:

$$v_G = 24\ m/s$$
$$t_T = 12\,s$$
$$v_S = 340\ m/s$$
$$g = 9{,}8\ m/s^2$$



A continuación, vamos a ir explicando las ecuaciones necesarias para la resolución:

- Caída de la bomba desde A hasta C
  Hay que tener en cuenta que la bomba, al salir del globo, tiene velocidad inicial igual a la velocidad del globo v_G. Es decir, la bomba empieza subiendo hasta que detiene su ascensión y entonces empieza a bajar, o sea, un *tiro vertical*:

Fíjate que la aceleración de la gravedad g es siempre negativa por que está referida al eje Y.

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ahora bien, para obtener el tiempo t_{AC} que tarda la bomba en llegar desde el globo (posición A) al suelo (posición C) tenemos que hacer la altura $y = 0$. Además tenemos que la altura inicial de la bomba es $y_0 = h$ y su velocidad inicial, como ya hemos dicho, es $v_0 = v_G$. Con todo esto obtenemos la primera ecuación:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = h + v_G t_{AC} - \frac{1}{2} g t_{AC}^2 \quad [1]$$

- Expansión del sonido desde el suelo hasta el globo.
  Se trata de un MRU. La altura total que debe recorrer el sonido desde C hasta D es $y = h + h'$ donde t_{CD} es el tiempo que tarda el sonido en recorrer esta distancia:

$$h + h' = 0 + v_S t_{CD} \qquad [2]$$

- Espacio h' que sube el globo desde que suelta la bomba hasta que escucha el sonido de la explosión. Se trata de un MRU:

$$h' = v_G t_T \quad [3]$$

- Tiempo total desde que la bomba sale del globo hasta que se escucha el sonido de la explosión en el globo:

$$t_{AC} + t_{CD} = t_T \qquad [4]$$

Por tanto nos encontramos con el siguiente sistema formado por cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} [1] \quad 0 = h + v_G t_{AC} - \dfrac{1}{2} g t_{AC}^2 \\ [2] \quad h + h' = v_S t_{CD} \\ [3] \quad h' = v_G t_T \\ [4] \quad t_T = t_{AC} + t_{CD} \end{cases}$$

Sistemas de 4 ecuaciones con 4 incognitas: h, h', t_{AC}, t_{CD}

Eliminamos la ecuación [3] sustituyéndola en la [2]

$$\begin{cases} [1] \quad 0 = h + v_G t_{AC} - \dfrac{1}{2} g t_{AC}^2 \\ [2] \quad h + v_G t_T = v_S t_{CD} \\ [4] \quad t_T = t_{AC} + t_{CD} \end{cases}$$

Sistemas de 3 ecuaciones con 3 incognitas: h, t_{AC}, t_{CD}

Numéricamente, sustituyendo todos los datos:

$$\begin{cases} [1] \quad 0 = h + 24 t_{AC} - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t_{AC}^2 \\ [2] \quad h + 24 \cdot 12 = 340 t_{CD} \\ [4] \quad 12 = t_{AC} + t_{CD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [1] \quad 0 = h + 24 t_{AC} - 4{,}9 t_{AC}^2 \\ [2] \quad h + 288 = 340 t_{CD} \\ [4] \quad 12 = t_{AC} + t_{CD} \end{cases}$$

Resolvemos despejando h en [1] y despejando t_{CD} en [4]:

$$\left.\begin{array}{l} [2] \quad h = 340 t_{CD} - 288 \\ [3] \quad t_{CD} = 12 - t_{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow h = 340(12 - t_{AC}) - 288 \Rightarrow h = 3792 - 340 t_{AC}$$

y ahora sustituimos en [1]:

$$0 = h + 24 t_{AC} - 4{,}9 t_{AC}^2 \Rightarrow 0 = 3792 - 340 t_{AC} + 24 t_{AC} - 4{,}9 t_{AC}^2 \Rightarrow 4{,}9 t_{AC}^2 + 316 t_{AC} - 3792 = 0$$

La segunda solución no tiene sentido físico

$$t_{AC} = \frac{-316 \pm \sqrt{316^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-3792)}}{9{,}8} = \frac{-316 \pm 417{,}3}{9{,}8} = \begin{cases} t_{AC} = 10{,}34\, s \\ \cancel{t_{AC} = -74{,}83\, s} \end{cases}$$

Por último:

$$h = 4{,}9 t_{AC}^2 - 24 t_{AC} = 4{,}9 \cdot 10{,}34^2 - 24 \cdot 10{,}34 = 275{,}7\, m$$

Solución: $h = 275{,}7\ m$

www.simplyjarod.com

Tema 2

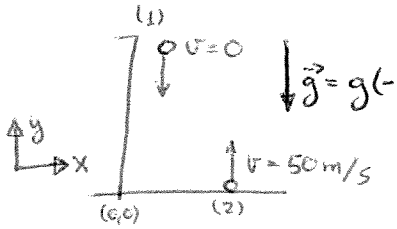
Ejercicio 5

Desde una altura de 80 m se deja caer un cuerpo en el mismo instante en que se lanza otro desde el suelo hacia arriba con una velocidad de 50 m/s. Calcular:

a) El tiempo que tarda en cruzarse.
b) A qué altura se cruzan.
c) Qué velocidad tiene cada uno en ese momento.
d) Dónde se encuentra el segundo cuando el primero llega al suelo.

Tema 2

Ejercicio 5



$y_{(1)} = v_{0(1)}\,t + \frac{1}{2}at^2 + y_{0(1)}$

$v_{(1)} = v_{0(1)} + at$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{(1)} &= 80 + 0\cdot t + \tfrac{1}{2}(-9{,}8)t^2 \\ v_{(1)} &= 0 + a\cdot t = -9{,}8\cdot t \end{aligned}}$$

(2) $$\boxed{\begin{aligned} y_{(2)} &= 0 + 50\,t + \tfrac{1}{2}(-9{,}8)\,t^2 \\ v_{(2)} &= 50 + (-9{,}8)\cdot t \end{aligned}}$$

a=cte; $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$v = v_0 + at$

1) tiempo que tardan en cruzarse

Cuando se cruzan $\Rightarrow y_{(1)} = y_{(2)}$

$$\left.\begin{aligned} y_{(1)} &= 80 - \frac{9{,}8}{2}t^2 \\ y_{(2)} &= 50\,t - \frac{9{,}8}{2}t^2 \end{aligned}\right\} \quad 80 - \frac{g}{2}t^2 = 50\,t - \frac{g}{2}t^2$$

$$\boxed{t = \frac{80}{50} = 1{,}6\,s} = t^*$$

2)

$y_1(t^*) = y_2(t^*) = 50\cdot(1{,}6) + \frac{1}{2}(-9{,}8)(1'6)^2$

$$\boxed{y_1(t^*) = y_2(t^*) = 67'45\,m}$$

3)

$$\boxed{\begin{aligned} v_1(t^*) &= -g\,t^* = -9{,}8\cdot 1{,}6 = -15{,}68\ m/s \\ v_2(t^*) &= 50 - g\,t^* = 34'32\ m/s \end{aligned}}$$

4)

$$\boxed{y_2(t^{**}) = 50\cdot 4{,}04 - \frac{9{,}8}{2}\cdot 4{,}04^2 = 122\,m}$$

↳ tiempo para el que $y_{(t)} = 0$

$y_{(1)} = 0 \Rightarrow 80 - \frac{g}{2}t^2 = 0$; $t^{**} = \sqrt{\frac{2\cdot 80}{9'8}} = 4{,}04\,s$

www.simplyjarod.com

Tema 2
Ejercicio 7

Un ciclista cesa de pedalear y adquiere una aceleración que viene dada por la expresión $a = -k.v^2$ en donde k es una constante y v la velocidad. Suponiendo que dejó de pedalear cuando llevaba una velocidad de 10km/h y que transcurridos 30 segundos la velocidad disminuyó hasta los 4 km/h; calcular:

a) El valor de la constante k.
b) La expresión que determina la aceleración cuando cesó el pedaleo.
c) La distancia recorrida en un tiempo t.

$a = -kv^2 = \frac{dv}{dt}$; $-k\,dt = \frac{dv}{v^2}$

1) Valor de k?

Condiciones iniciales:

$t = 0 \Rightarrow v_0 = 10\,km/h = 2'78\,m/s$

$t = 30s \Rightarrow v_{30} = 4\,km/h = 1,11\,m/s$

$\int_{t=0}^{t=30} -k\,dt = \int_{v_0}^{v_{30}} \frac{1}{v^2}\,dv$; $-kt\Big|_0^{30} = \frac{-1}{v}\Big|_{v_0}^{v_{30}}$

$-k(30-0) = -\frac{1}{v}(1,11 - 2,78) = \frac{-1}{v_{30}} - \frac{-1}{v_0}$

$-30k = \frac{-1}{v_{30}} + \frac{1}{v_0}$; $k = \frac{\frac{1}{v_{30}} - \frac{1}{v_0}}{30}$

$\boxed{k = 0,018}$

2)

$a = -kv^2$ esto es $a = a(v)$ y yo quiero $a = a(t)$

necesito $v = v(t) \rightarrow a = -k[v(t)]^2 = a(t)$

$a = -kv^2 = \frac{dv}{dt}$; $\int_{t_0}^{t} -k\,dt = \int_{v_0}^{v=v(t)} \frac{dv}{v^2}$

$-k \cdot t\Big|_{t_0}^{t} = \frac{-1}{v}\Big|_{v_0}^{v}$; $-k(t-0) = -\frac{1}{v(t)} + \left(+\frac{1}{v_0}\right)$

$\frac{1}{v(t)} = kt + \frac{1}{v_0}$; $v(t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}}$

$\boxed{a = -k(v(t))^2 = -0,018 \cdot \frac{1}{\left(0,018t + \frac{1}{0,36}\right)^2}}$

3)

$v(t) = \frac{1}{0,018t + 0,36}$

$v = \frac{dr}{dt}$; $\int dr = \int v\,dt$

$\frac{1}{0,018t + 0,36} = \frac{dr}{dt}$; $\int_0^{r(t)} dr = \int_0^t \frac{dt}{0,018t + 0,36}$; $r(t) - r(0) = \frac{1}{0,018}\int_0^t \frac{0,018\,dt}{0,018t + 0,36} =$

$= \frac{1}{0,018}\ln(0,018t + 0,36)\Big|_0^t$

$\boxed{r(t) = \frac{1}{0,018}\ln\frac{0,018t + 0,36}{0,36}}$

$\ln A - \ln B = \ln\frac{A}{B}$

www.simplyjarod.com

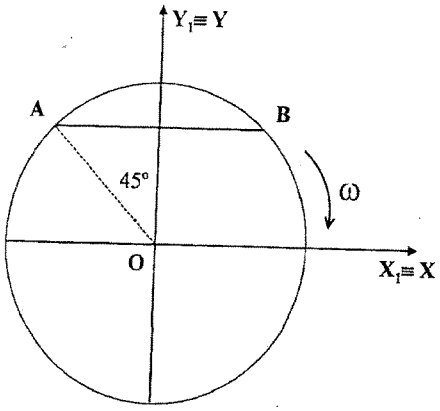
TEMA 3: MOVIMIENTO RELATIVO

Ejercicio 1

Una plataforma circular de radio $R = 1\ m$ gira con velocidad angular constante ω en un plano horizontal, alrededor de un eje que pasa por su centro O. Un punto P parte de A y se desplaza sobre la plataforma siguiendo el segmento AB con velocidad relativa constante $v_r = 0.2\ ms^{-1}$. Se supone que en el instante inicial, el sistema de referencia fijo (O, X_1, Y_1, Z_1) y el móvil (O, X, Y, Z) coinciden, como indica la figura.

Cuando la plataforma ha girado un ángulo $\varphi = \pi/4$ en el sentido indicado, P se encuentra en el punto medio del segmento AB. En esta posición, determinar:

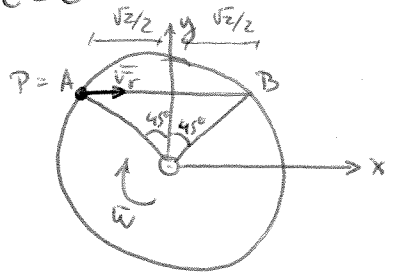
a) La velocidad angular de la plataforma.
b) La velocidad absoluta de P expresada en el sistema fijo.
c) La aceleración absoluta de P respecto al sistema fijo.



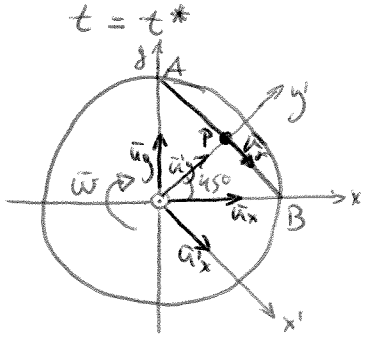
$\vec{\omega} = \omega\,(-\vec{u}_z)$

Sistema fijo = $\{O, x, y, z\}$
Sistema móvil = $\{O', x', y', z'\}$ $\Big\}$ $O = O'$, $z = z'$

$t = 0$



$t = t^*$



$$\vec{u}'_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_y$$
$$\vec{u}'_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_y$$
$$\vec{u}'_z = \vec{u}_z$$

$\vec{v}_r = v_r\,\vec{u}'_x$

$\vec{\omega} = \omega(-\vec{u}_z) = \omega(-\vec{u}'_z)$

mov. relativo: traslación de P sobre $\overline{AB}$

mov. arrastre: rotación del disco

a) ω?

ω = cte

$\varphi = \pi/4$ en el mismo t en que P va de A a $\frac{\overline{AB}}{2}$

(1) tiempo de P en ir de A a $\overline{AB}/2$

$x' = x'_0 + v_{0\,rel}\,t + \frac{1}{2}\cancel{a_{rel}^{0}}\,t^2$

$0 = -\sqrt{2}/2 + 0{,}2\,t$; $t^* = \sqrt{2}/0{,}4\ s$

(2) Disco: MCU

$\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{1}{2}\cancel{\alpha^{0}}\,t^2$

$\frac{\pi}{4} = 0 + \omega \cdot t^*$; $\omega = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{0{,}4}{\sqrt{2}} = 0{,}222\ rad/s$

$\boxed{\vec{\omega} = 0'222\,(-\vec{u}_z)}$

www.simplyjarod.com

b) $\bar{V}_{abs} \Big|_{\{u_x, u_y, u_z\}} = \bar{V}_{arr} + \bar{V}_{rel}$ $\qquad \bar{V}_{rel} = 0'2\ \bar{u}'_x$

$\bar{V}_{rel} = v_r \cdot \bar{u}'_x$

$\bar{V}_{arr} = 0 + \bar{\omega} \times \bar{OP}$ = traslación + rotación

$\bar{V}_{arr} = 0,111 \cdot \sqrt{2}\ \bar{u}'_x$

$\boxed{\bar{V}_{abs} = 0,2\ \bar{u}'_x + 0,111\sqrt{2}\ \bar{u}'_x = 0,252\ u_x - 0,252\ \bar{u}_y\ m/s}$

$u'_x = \frac{\sqrt{2}}{2} u_x - \frac{\sqrt{2}}{2} u_y$

$\omega_y = \frac{\sqrt{2}}{2} u_x + \frac{\sqrt{2}}{2} u_y$

c) $a_{abs} = a_{arr} + a_{rel} + 2(\bar{\omega} \times V_{rel})$

$a_{arr} = \underbrace{a_{O'}^{\,0}}_{\text{traslación}} + \underbrace{\overbrace{\bar{\omega} \times (\omega \times \bar{OP})}^{a_n} + \overbrace{\alpha \times \bar{OP}}^{a_t,\ 0}}_{\text{rotación}}$

* $a_{arr} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{OP})$ $\qquad V_{rel} = cte \Rightarrow a_r = 0$
* $a_{rel} = 0$
* $a_{cor} = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_{rel}) = 2 \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ 0 & 0 & -0'222 \\ 0'2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2[-0,0444]\, u'_y =$

$= -6,279 \cdot 10^{-2} (\bar{u}_x + \bar{u}_y)$

$a_{arr} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{OP}) = \omega^2 \cdot d = (0,222)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (-u'_y)$

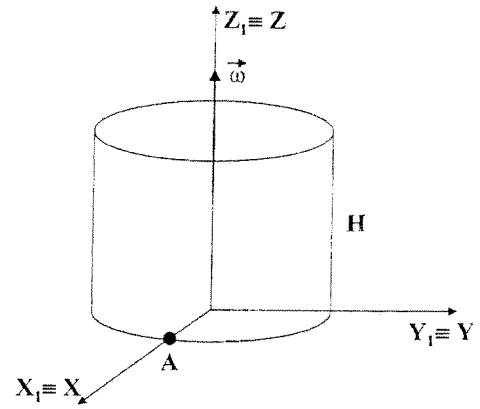
$\boxed{a_{abs(P)} = a_{arr} + a_{rel} + a_{cor} = 0'08743\ (u_x + u_y)\ m/s^2}$

www.simplyjarod.com

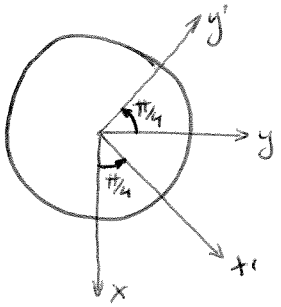
Ejercicio 2

Un cilindro de radio $R = 1\ m$ y altura $H = 1\ m$ gira con velocidad angular constante dando una vuelta completa en 5 minutos. En la posición inicial (indicado en la figura), hay un insecto en reposo en el punto A. Cuando el cilindro comienza a girar el insecto sube verticalmente por una generatriz del cilindro, con aceleración relativa constante, de forma que cuando el cilindro ha girado un ángulo de 45°, el insecto ha recorrido exactamente la altura H. Obtener, expresando el resultado en el sistema móvil $(OXYZ)$ y en la posición final del insecto:

a) El vector de posición.
b) La velocidad relativa y la velocidad de arrastre.
c) La aceleración relativa, la aceleración de arrastre y la complementaria.
d) La velocidad absoluta expresada en el sistema fijo.
e) La aceleración absoluta expresada en el sistema fijo.



2π rad en 5 min = 300 s $\Rightarrow$ $\omega = \frac{\pi}{150}$ rad/s



$$\begin{cases} \bar{u}'_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{u}_y \\ \bar{u}'_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{u}_y \\ \bar{u}'_z = \bar{u}_z \end{cases}$$

movimiento relativo: traslación del bicho por la generatriz
movimiento arrastre: rotación del cilindro

Mov. rel. (dirección z')

traslación: $a = a_{rel} = cte$

$z' = z'_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_{rel} t^2$

$1 = 0 + 0\,t + \frac{1}{2} a_{rel} t^2$, $\boxed{a_{rel} = \frac{2}{t^2} = \frac{2}{(t_{de\ \pi/4})^2} = \frac{2 \cdot 4}{75^2} = 1'42 \cdot 10^{-3}\ m/s^2}$

$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{300}{8} = \frac{75}{2}$ s

$\boxed{\bar{a}_{rel} = 1'42 \cdot 10^{-3}\ \bar{u}'_z}$

www.simplyjarod.com

a) Vector de posición?

$\bar{r} = R\bar{u}'_x + H\bar{u}'_z$; $R = 1$, $H = 1$

$$\boxed{\bar{r} = \bar{u}'_x + \bar{u}'_z}$$

b) V_{rel}? V_{arr}?

MRUA: $\bar{V}_{rel} = \bar{V}_{0_{rel}} + a_{rel} \cdot t = 0 + 1{,}42 \cdot 10^{-3} \cdot t = 1{,}42 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{75}{2}$

$V_{rel} = 5{,}33 \cdot 10^{-2}$ m/s $\quad \boxed{\bar{V}_{rel} = 5{,}35 \cdot 10^{-2}\, \bar{u}'_z \text{ m/s}}$

$\boxed{\bar{V}_{arr} = \bar{\omega} \times \overline{OP}} = \bar{\omega} \times \bar{R}$

$$\bar{\omega} \times \overline{OP} = \begin{vmatrix} \bar{u}'_x & \bar{u}'_y & \bar{u}'_z \\ 0 & 0 & \frac{2\pi}{300} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{\bar{V}_{arr} = +\frac{2\pi}{300}\bar{u}'_y} = 2{,}09 \cdot 10^{-2}\bar{u}'_y$$

c) $\bar{a}_{rel}$? $\bar{a}_{arr}$? $\bar{a}_{cor}$?

$\bar{V}_{arr} = \underbrace{\bar{V}_0}_{\text{traslac}} + \underbrace{\bar{\omega} \times \overline{OP}}_{\text{rotación}}$

$\bar{a}_{rel} = \frac{d\bar{V}_{rel}}{dt}$

$a_{arr} = \underbrace{a_0}_{\text{traslac}} + \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OP})}_{a_n \text{ (rotación)}} + \underbrace{\bar{\alpha} \times \overline{OP}}_{a_t \text{ (rotac)}}$ (rotación)

$\bar{a}_{cor} = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r)$

$\boxed{a_{rel} = 1{,}42 \cdot 10^{-3}\ m/s^2}$

$\boxed{a_{cor} = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_{rel}) = 0}$

$\boxed{a_{arr} = \underbrace{\bar{a}_{0'}}_{\text{no traslac}} + (\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OP})) + (\underbrace{\bar{\alpha}}_{\bar{\omega} = cte} \times \overline{OP})}$; $a_{arr} = \omega^2 R\,(-\bar{u}'_x) = 4'39 \cdot 10^{-4}(-\bar{u}'_x)$

d) V_{abs} en el sistema fijo

$\bar{V}_{abs} = \bar{V}_{rel} + \bar{V}_{arr}$

$\bar{V}_{abs} = -1{,}478 \cdot 10^{-2}\,\bar{u}_x + 1{,}478 \cdot 10^{-2}\bar{u}_y + 5{,}33 \cdot 10^{-2}\,u_z$ m/s

e) a_{abs} en el sistema fijo

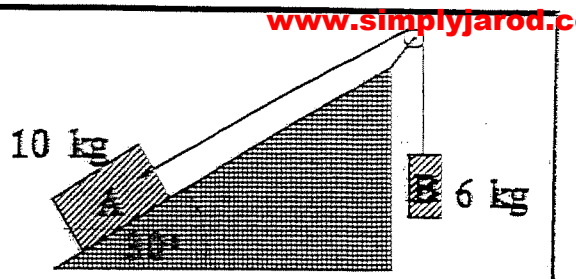
$\bar{a}_{abs} = \bar{a}_{rel} + \bar{a}_{arr} + \bar{a}_{cor}$

$a_{abs} = -3{,}1 \cdot 10^{-4}\bar{u}_x - 3{,}1 \cdot 10^{-4}\bar{u}_y + 1{,}42 \cdot 10^{-3}\,u_z$

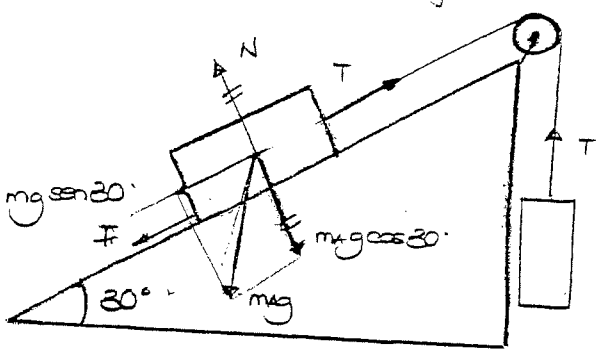
www.simplyjarod.com

Ejercicio 2
Tema 4

Si se desprecia el peso de la polea y el coeficiente de rozamiento entre la masa A y el plano es $\mu = 0.2$, calcular la tensión de la cuerda y la aceleración de los cuerpos en el sistema de la figura.



1ª Hip. Sube A baja B



$F = \mu \cdot N = \mu \cdot m_A g \cos 30°$

$\sum F = m_B \cdot a \Rightarrow m_B g - T = m_B \cdot a$

$\sum F = m_A \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow T - m_A g \operatorname{sen}30° - \mu m_A \cos 30° = m \cdot a$

$m_B g - m_A g \operatorname{sen}30° - \mu m_A \cdot g \cos 30° = (m_A + m_B) a$

$$\Rightarrow a = \frac{m_B \cdot g - m_A \cdot g (\operatorname{sen}30° + \mu \cos 30°)}{m_B + m_A} = \frac{6 \cdot 9.8 - 10 \cdot 9.8 \left(\frac{1}{2} + 0.2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{6+10}$$

$\Rightarrow a = -0.45$ (ojo que hay rozamiento) No se mueve así

2ª Hip. baja A sube B.

Tenemos que cambiar el planteamiento poniendo F al contrario (mismo sentido que la tensión)

$\sum F = m_B a \Rightarrow T - m_B g = m_B \cdot a$

$\sum F = m_A \cdot a \Rightarrow m_A g \operatorname{sen}30° - T - \mu m_A g \cos 30° = m_A \cdot a$

$$\Rightarrow a = \frac{m_A g (\operatorname{sen}30° - \mu \cos 30°) - m_B g}{m_A + m_B} = -1.67 \ (m/s^2)$$ Tampoco se mueve así

Luego concluimos que el sistema está en equilibrio

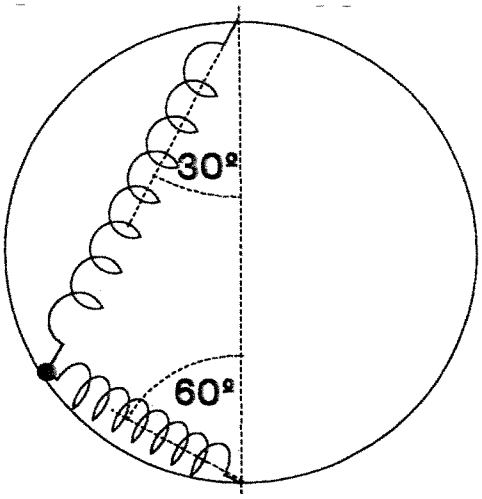
$T - m_B g = m_B \cdot a \Rightarrow T - m_B g = 0 \Rightarrow \boxed{T = m_B g = 6 \cdot 9.8 = 58.8 N}$

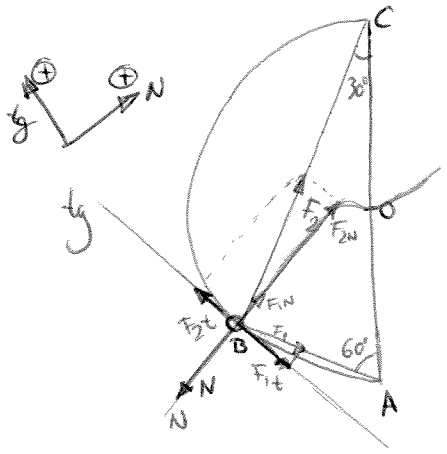
www.simplyjarod.com

Tema 4
Ejercicio 3

Un arco circular de alambre de radio R está situado en un plano horizontal. Una bolita atravesada por el alambre y de masa M, puede moverse sin rozamiento a lo largo del mismo. La bolita está unida mediante dos muelles iguales de constante elástica k y de longitud R/2 cuando no están deformados.

a) Calcular la aceleración de la bolita en el instante en que se suelta desde la posición dibujada en la figura.
b) Hallar la fuerza que ejerce el alambre sobre la bolita y la que ejerce ésta sobre el alambre.





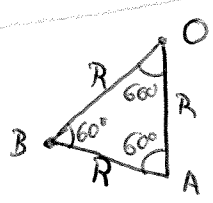
$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

$\Sigma F_n = F_{2n} + F_{1n} - N = 0$

$\Sigma F_t = F_{2t} - F_{1t} = m a_t$

Calculamos F_1 y F_2

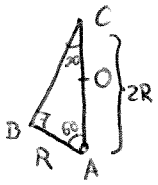
	0	30	45	60	90
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0



$\overline{BA} = \overline{OA} = R$

$F_2 \operatorname{sen} 30 - F_1 \operatorname{sen} 60 = m a_t$

$a_t = \dfrac{F_2 \frac{1}{2} - F_1 \frac{\sqrt{3}}{2}}{m}$



$\overline{AC} = 2R$

$\overline{BC} = 2R \cos 30°$

a)

$$a_t = \frac{KR}{4m}(\sqrt{3}-1)\ m/s^2$$

b)

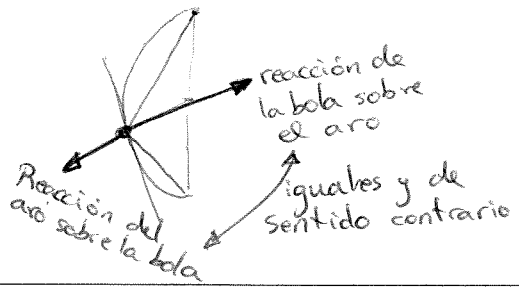
$$N = \frac{KR}{4}(7-\sqrt{3})\ N$$

$\overline{AB} = R = l_{f_1}$

$F_1 = Kx = K(l_{f_1} - l_{o_1}) = K\left(R - \frac{R}{2}\right)$

$BC = 2R\cos 30°$

$F_2 = Kx = K\left(2R\cos 30 - \frac{R}{2}\right)$



Repetido detrás

www.simplyjarod.com

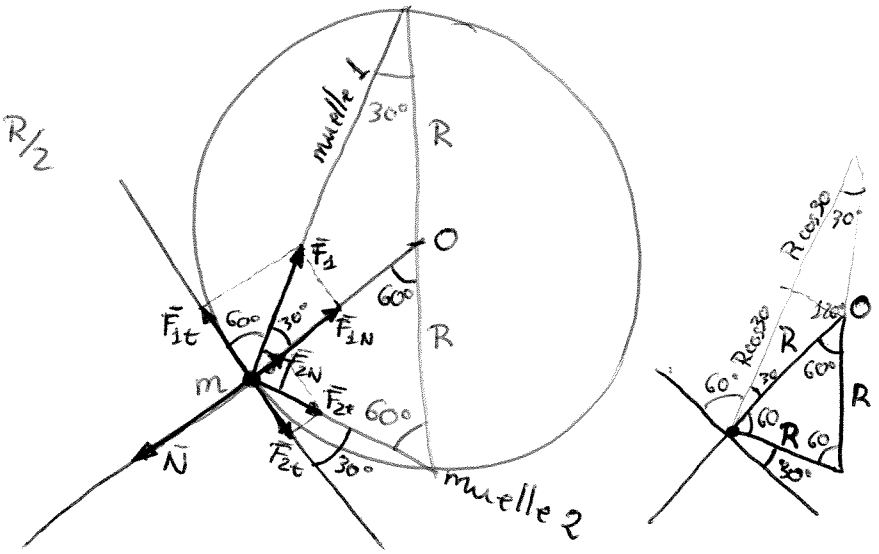
$F_{roz} = 0$

$k_1 = k_2 = k$

longitud natural $= R/2$

a) a

b) N



a) $\Sigma F_N = 0$

$|\vec{F}_{1N}| + |\vec{F}_{2N}| = |\vec{N}|$

$\Sigma F_t = m \cdot a_t$

$F_{1t} - F_{2t} = m \cdot a_t$; $a_t = \dfrac{F_{1t} - F_{2t}}{m}$; $F_{1t} = F_1 \cos 60° = F_1/2$

$F_{2t} = F_2 \cos 30° = 2F_2/\sqrt{3}$

$$a_t = \left(\frac{F_1}{2} - \frac{2F_2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{m} = (*)$$

$$F_1 = k x_1 = k(\ell - \ell_{nat}) = k\left(2R\cos 30° - \frac{R}{2}\right) = k\left(R\sqrt{3} - \frac{R}{2}\right)$$

$$F_2 = k x_2 = k(\ell - \ell_{nat}) = k(R - R/2) = k\,\frac{R}{2}$$

$$(*)\ a_t = \frac{k}{m}\left(\frac{R\sqrt{3} - \frac{R}{2}}{2} - \frac{2R}{\sqrt{3}2}\right) = \frac{Rk}{m}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1/2}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{Rk}{m}\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{Rk}{m}\left(\frac{2\cdot 3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} - \frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = \frac{Rk}{4m}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\frac{Rk}{4m}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\ m/s^2 = a_t}$$

b)

$\Sigma F_N = 0$

$F_{1N} + F_{2N} = N$

$F_{1N} = F_1 \cos 30° = 2F_1/\sqrt{3}$; $F_1 = k\left(R\sqrt{3} - \frac{R}{2}\right)$

$F_{2N} = F_2 \operatorname{sen} 30° = F_2/2$; $F_2 = k\,\frac{R}{2}$

$$F_{1N} + F_{2N} = \frac{2F_1}{\sqrt{3}} + \frac{F_2}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot kR\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{kR}{4} = kR\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] =$$

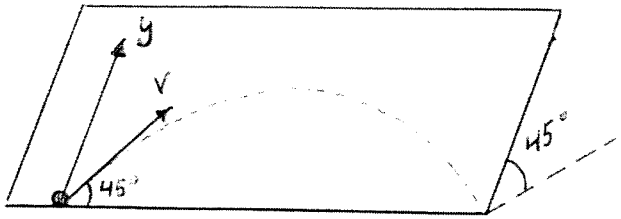
$$= kR\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\right) = kR\left(\frac{8\sqrt{3}-4}{4\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right) =$$

$$= kR\left(\frac{9\sqrt{3}-4}{4\sqrt{3}}\right) = \boxed{kR\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ N = N}$$

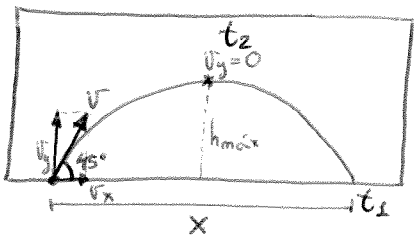
www.simplyjarod.com

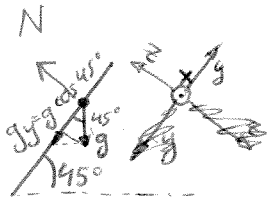
Ejercicio 4

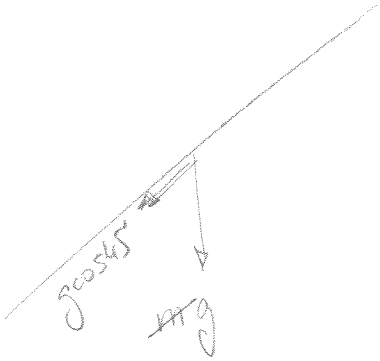
Por un plano inclinado liso se suelta una bolita con velocidad v. ¿Qué distancia horizontal recorrerá antes de deslizarse fuera del plano? La línea de máxima pendiente del plano forma 45° con la horizontal. ¿Cuál es la máxima altura sobre la horizontal que subirá?



Dato: $\vec{v}$







En x →

M.R.U. $\Rightarrow v_{0x} = v_{gx} = cte$

$a = 0$, $v = cte$ $\Big\}$ $r = r_0 + v_0 t$; $x = 0 + v_{0x} t_1$

$\frac{x}{2} = 0 + v_{0x} t_2$; $t_2 = \frac{x}{2 v_{0x}}$

↑ En y

M.R.U.A $\Rightarrow \exists a = g = cte$

$v = v_0 + at$, $r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $\Big\}$

$v_{(t_2)} = v_{0y} - g\cos 45\, t_2 = 0 \Rightarrow v_{0y} = g\cos 45\, t_2$

$y = 0 + v_{0y} t_1 - \frac{g\cos 45}{2}(t_1)^2 = 0 \Rightarrow v_{0y} t_1 = \frac{g\cos 45}{2}(t_1)^2$

$h_{máx} = 0 + v_{0y} t_2 - \frac{g\cos 45}{2}(t_2)^2$

$x = v_{0x} t_1$; $t_1 = \frac{x}{v_{0x}}$

$v_{0y} = \frac{g\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{x}{v_{0x}}$

$$\boxed{x = v_{0x} \cdot t_1 = \frac{v_{0x}\, v_{0y} \cdot 2}{g\cos 45°} \text{ metros (m)}}$$

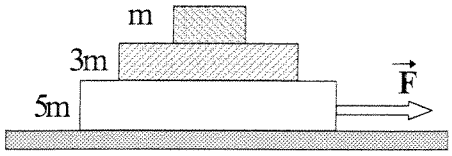
$$h_{máx} = v_{0y} \cdot t_2 - \frac{g\sqrt{2}}{4}(t_2)^2$$

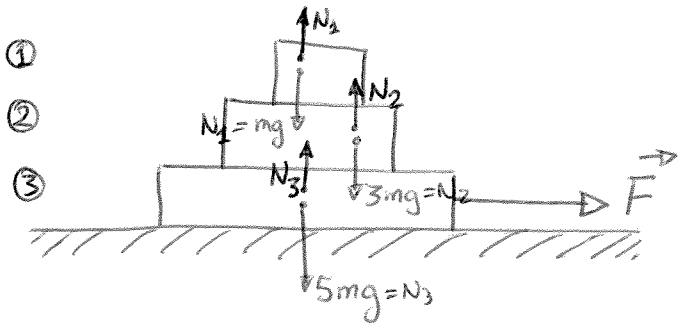
$$\boxed{h_{máx} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \frac{x}{2} - \frac{g\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{x^2}{4 v_{0x}^2}}$$

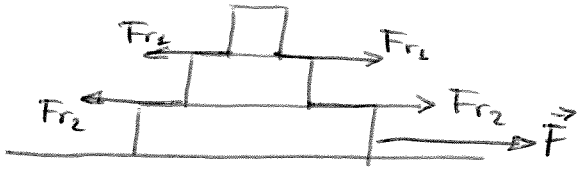
www.simplyjarod.com

Ejercicio 5

Tres bloques del mismo material se encuentran apilados como se ve en la figura. El coeficiente de rozamiento entre el bloque mayor y el plano horizontal puede despreciarse. Determinar razonadamente el mínimo valor del coeficiente de rozamiento entre los bloques que permita a estos desplazarse conjuntamente cuando se aplique la fuerza horizontal F.
Datos: F, m, g.







Bloque 1

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 - mg = 0$; $\boxed{N_1 = mg}$

$\Sigma F_x = m_1 a$ → caso límite: justo antes de deslizar

$F_{r_1} = m_1 a$

$F_{r_1} = \mu N_1 = ma$; $\mu mg = ma$

$\boxed{\mu g = a}$

Bloque 2

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - N_1 - 3mg = 0 \xrightarrow{N_1 = mg}$ $\boxed{N_2 = 4mg}$

$\Sigma F_x = m_2 a \Rightarrow F_{r_2} - F_{r_1} = m_2 a = \mu N_2 - \mu N_1$; $\mu 4mg - \mu mg = 3\mu mg = m_2 a$

$\boxed{\mu g = a}$

Bloque 3

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_3 - 5mg - N_2 = 0$; $\boxed{N_3 = 9mg}$

$\Sigma F_x = m_3 a \Rightarrow F - F_{r_2} = m_3 a$; $F - \mu 4mg = 5ma$; $\boxed{\mu = \frac{F}{9mg}}$

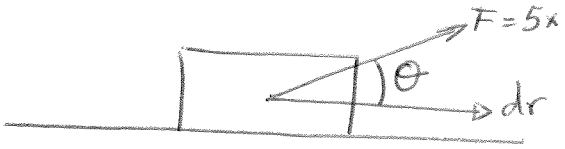
www.simplyjarod.com

TEMA 5: TRABAJO Y ENERGÍA

Ejercicio 1

Un bloque de 20 kg es empujado sobre una superficie horizontal sin rozamiento, por una fuerza F, que forma un ángulo θ con la trayectoria. Durante el movimiento, la fuerza aumenta según la relación $F = 5x$, donde F está en newton y x en metros. El ángulo varía también según la ley: $\cos\theta = 0{,}70 - 0{,}02x$. ¿Cuánto trabajo habrá realizado la fuerza mientras el cuerpo se ha desplazado desde $x = 10\ m$ hasta $x = 20\ m$?

$m = 20\ kg$



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\theta$$
$$= 5x\,dx\,(0{,}7 - 0{,}02x)$$
$$dW = (3{,}5x - 0{,}1x^2)\,dx$$
$$W = \int_{10}^{20} (3{,}5x - 0{,}1x^2)\,dx = \left[3'5\,\frac{x^2}{2} - 0{,}1\,\frac{x^3}{3}\right]_{10}^{20} = 291'7\ J$$

www.simplyjarod.com

Ejercicio 2

Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{u}_x + 3xy\vec{u}_y$ para trasladar una partícula desde el punto (0, 0) al (2, 4) según los siguientes caminos:

a) Por la recta que une dichos puntos.
b) A lo largo del eje OX, desde el origen hasta el punto (2, 0) y, desde allí, paralelamente al eje OY hasta el punto (2, 4).
c) A lo largo de la parábola $y = x^2$. ¿Es conservativa dicha fuerza? (F, x, y, en unidades arbitrarias).

a)

① Particularizar la fuerza al camino:
Tengo que parametrizar la trayectoria:
trayectoria recta: (0,0) → (2, 4)

$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$ $\quad \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{4-0} \Rightarrow y = 2x$ $\quad \boxed{\begin{matrix} x = t \\ y = 2t \end{matrix}}$ parametrizada

$\bar{F} = (y^2 - x^2)\bar{u}_x + 3xy\,\bar{u}_y = ((2t)^2 - t^2)\bar{u}_x + (3t(2t))\bar{u}_y =$
$= 3t^2\bar{u}_x + 6t^2\bar{u}_y$

② $d\bar{r}$

$\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y = t\bar{u}_x + 2t\bar{u}_y$
(x = t, y = 2t)

$\bar{r}(x,y)$
$\bar{r} \rightarrow \bar{r}(t) \rightarrow \frac{d\bar{r}}{dt} = 1\bar{u}_x + 2\bar{u}_y$

$d\bar{r} = (1\bar{u}_x + 2\bar{u}_y)dt$

$\bar{F} \cdot d\bar{r} = (3t^2\bar{u}_x + 6t^2\bar{u}_y)(1dt\,\bar{u}_x + 2dt\,\bar{u}_y)$

$\bar{F}d\bar{r} = 3t^2dt + 12t^2dt$

$W = \int \bar{F}d\bar{r} = \int_{t=0}^{t=2} 15t^2dt = 5t^3\Big|_0^2 = 40\,J$

www.simplyjarod.com

b) W_{AC}

① Parametrizo $\bar{AC}$

$$\begin{matrix} x=t \\ y=0 \end{matrix}\Big\} \quad F(x,y) = -t^2\,\bar{u}_x$$

② $\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y = t\bar{u}_x + 0\bar{u}_y$ ($x=t$, $y=0$); $\frac{d\bar{r}}{dt} = 1\bar{u}_x + 0\bar{u}_y \rightarrow d\bar{r} = dt\cdot\bar{u}_x$

③ $W = \int dW = \int F\,dr = \int(-t^2\bar{u}_x)(dt\,\bar{u}_x) = \int_{x=0}^{x=2} -t^2\,dt = -\frac{t^3}{3}\Big|_0^2$ (haciendo el producto escalar)

$$W_{AC} = -\tfrac{8}{3}\ \text{Julios}$$

W_{CB}

① Parametrizo $\bar{CB}$

$$\begin{matrix} x=2 \\ y=t \end{matrix}\Big\} \quad F(x,y) = (t^2-2^2)\,\bar{u}_x + 3(2\cdot t)\,\bar{u}_y$$

② $\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y = 2\bar{u}_x + t\bar{u}_y$ ($x=2$, $y=t$); $\frac{d\bar{r}}{dt} = 1\bar{u}_y$; $d\bar{r} = \bar{u}_y\,dt$

③ $W = \int dW = \int F\,dr = \int[(t^2-4)\bar{u}_x + 6t\bar{u}_y][\bar{u}_y\,dt] = \int_{t_c=0}^{t_B=4} 6t\,dt = 3t^2\Big|_0^4$

$$W_{CB} = 48\ \text{Julios}$$

$$W_{total} = W_{AB} = W_{AC} + W_{CB} = -\tfrac{8}{3}\,J + 48\,J$$

c) $y = x^2$

① Parametrización de la curva

$$\begin{matrix} x=t \\ y=t^2 \end{matrix}\Big\}$$

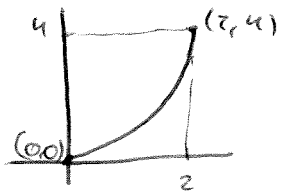
② Particularizo la fuerza al camino

$$F = ((t^2)^2 - t^2)\,\bar{u}_x + 3\,t\,t^2\,\bar{u}_y = (t^4-t^2)\,\bar{u}_x + 3t^3\,\bar{u}_y$$

$$\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y = t\bar{u}_x + t^2\bar{u}_y = \bar{r}(t)$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 1\bar{u}_x + 2t\bar{u}_y;\quad d\bar{r} = 1\,dt\,\bar{u}_x + 2t\,dt\,\bar{u}_y$$

③ $W = \int dW = \int F\,dr = \int_0^2 [(t^4-t^2)\bar{u}_x + 3t^3\bar{u}_y]\cdot[dt\,\bar{u}_x + 2t\,dt\,\bar{u}_y]$



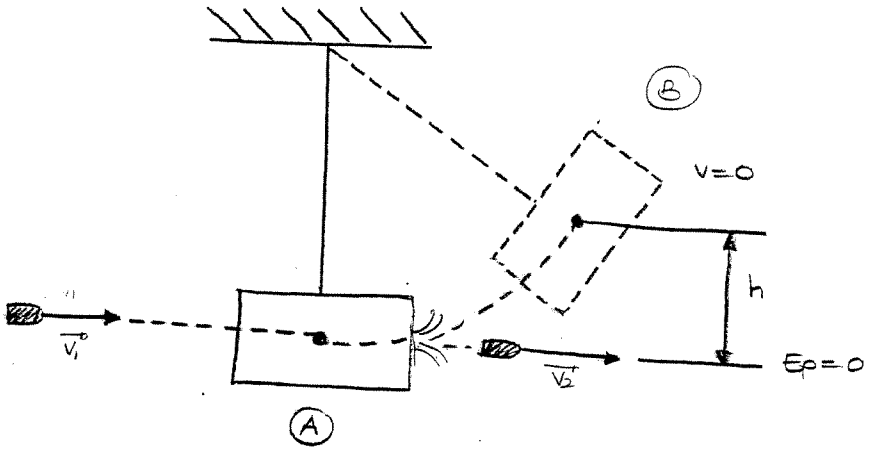
$$\int_{t=0}^{t=2} (t^4\,dt - t^2\,dt + 6t^4\,dt) = 42'13\ J$$

www.simplyjarod.com

Ejercicio 5

Un bloque de masa M, está suspendido mediante un hilo de longitud L y masa despreciable. Una bala de masa m, que se mueve siguiendo la horizontal del bloque, con velocidad v_1, impacta con éste atravesándole y saliendo con velocidad $v_2 = 1/5\ v_1$. Determinar:

a) La altura h que se eleva el *c.d.m.* del péndulo, suponiendo que no hay pérdidas de energía.
b) La pérdida de energía mecánica, si la altura alcanzada por el péndulo hubiera sido de 3/4 h.



a) Principio de conservación de la energía:

$$E_{mA} = E_{mB} \Longrightarrow \underbrace{\frac{m v_1^2}{2}}_{\text{bala}} + \underbrace{0}_{\text{bloque}} = \underbrace{\frac{m v_2^2}{2}}_{\text{bala}} + \underbrace{Mgh}_{\text{bloque}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2) = Mgh \Longrightarrow \boxed{h = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2Mg}} = \frac{m\left(v_1^2 - \left(\frac{v_1}{5}\right)^2\right)}{2Mg} =$$

$$= \frac{m \cdot \frac{24}{25} v_1^2}{2Mg} = \frac{24}{50} \frac{m v_1^2}{Mg} = \boxed{\frac{12}{25} \frac{m v_1^2}{Mg}}$$

b) Teniendo en cuenta la pérdida de E_{mec}.

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 + Mgh' + E_{perdida} \Longrightarrow E_{perdida} = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2} - Mgh\left(\frac{3}{4}h\right)$$

$$\Longrightarrow E_{perdida} = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 - \frac{v_1^2}{25}\right) - Mg \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{25} \frac{m v_1^2}{Mg} = \frac{24}{50} m \cdot v_1^2 - \frac{36}{100} m v_1^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_{perdida} = \frac{3}{25} m \cdot v_1^2}$$

www.simplyjarod.com

a) Si no hay pérdidas de energía, la energía que pierde la bala, es la energía que gana el bloque

$$E_{\text{perdida bala}} = E_{c_1} - E_{c_2} = \frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{1}{2}mV_2^2 = \frac{1}{2}m\left(V_1^2 - \frac{1}{25}V_1^2\right) =$$

$$= \frac{24}{50}mV_1^2 = \frac{12}{25}mV_1^2$$

E_c ganada por el bloque $= \frac{12}{25}mV_1^2$ J

$$\left.\begin{aligned} E_{mec_A} &= \frac{12}{25}mV_1^2 \\ E_{mec_B} &= Mg.h \end{aligned}\right\} \frac{12}{25}mV_1^2 = Mgh \Rightarrow \boxed{h = \frac{12mV_1^2}{25Mg}}$$

b) Ahora el bloque gana lo que pierde la bala menos las pérdidas adicionales:

$$E_c \text{ ganada bloque} = \frac{12}{25}mV_1^2 - E_{perd.}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{mec_A} &= \frac{12}{25}mV_1^2 - E_{perd.} \\ E_{mec_B} &= M.g\frac{3}{4}h \end{aligned}\right\} \frac{12}{25}mV_1^2 - E_{perd} = Mg\frac{3}{4}h$$

$$\boxed{E_{perd}} = \frac{12}{25}mV_1^2 - Mg\frac{3}{4}h =$$

$$= \frac{12}{25}mV_1^2 - Mg\frac{3}{4}\cdot\frac{12mV_1^2}{25Mg} = \left(\frac{12}{25} - \frac{36}{100}\right)V_1^2m = \frac{12}{100}mV_1^2 = \boxed{\frac{3}{25}mV_1^2}$$

www.simplyjarod.com

Ejercicio 6

Una partícula de masa $m = 2\,kg$ se mueve en un campo de fuerzas cuya energía potencial es $E_p = x^4 - 8x^2 - 1$, en unidades del S.I.

a) Calcular las posiciones de los puntos de equilibrio estable e inestable.
b) Si la energía total de la partícula es de -10 julios, obtener la velocidad máxima de la partícula y, gráficamente, identificar las zonas en las que puede moverse la partícula, indicando el tipo de movimiento que realizará.
c) Determinar la aceleración de la partícula en el punto $x = 1$ m.

$m = 2kg$

$E_p = x^4 - 8x^2 - 1$

a) $\vec{F} = -\,\text{grad}\,E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x$

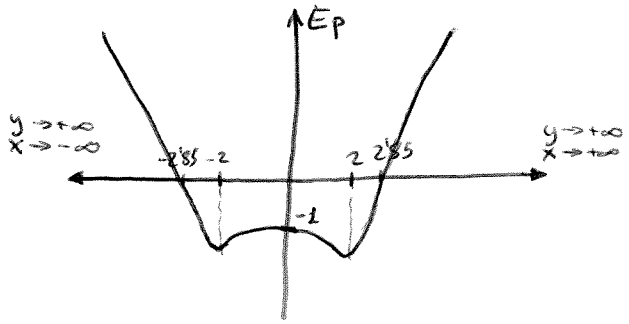
ptos equilibrio: $E_q \rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$

Equilibrio $\vec{F} = \vec{0} = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x$

$\frac{dE_p}{dx} = 4x^3 - 16x = x(4x^2 - 16) = 0 \rightarrow$ **x = 0**

↳ $4x^2 - 16 = 0$; **$x = \pm 2$**

Para saber si el equilibrio es estable, inestable ó indiferente, vamos a verlo a partir de la gráfica del apartado 2.



$\lim_{x\to+\infty} E_p = \lim_{x\to+\infty} (x^4 - 8x^2 - 1) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} E_p = \lim_{x\to-\infty} (x^4 - 8x^2 - 1) = +\infty$

cortes con los ejes:

$y = 0 \Rightarrow E_p = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 - 1 = 0$

$t^2 - 8t - 1 = 0$

$t_1 = -0{,}123 = x^2$

$t_2 = 8{,}123$; $x_1 = 2'85\,m$, $x_2 = -2{,}85\,m$

$x = 0 \Rightarrow$ **$y = -1$**

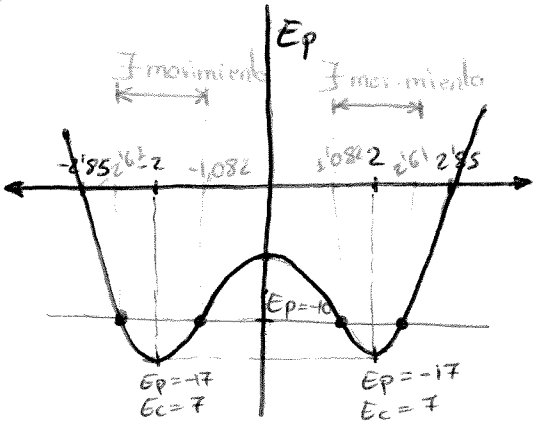
Equilibrio

$x = 0 \quad E_p'' < 0$
$x = 2 \quad E_p'' > 0$
$x = -2 \quad E_p'' > 0$

b) $E_{tot} = -10\,J$

E_{pot} puede ser ⊕ ó ⊖

$\frac{1}{2}mv^2 = E_{cin}$ sólo puede ser ⊕ ⇒ el movimiento está restringido a unos intervalos de "x"



$-10 = E_{pot} + E_{cin}$

$E_c = 0 \Rightarrow$ cuerpo parado $\Rightarrow E_p = E_M = -10\,J$

$E_p = -10 = x^4 - 8x^2 - 1$; **$x = \pm 1{,}082$**, **$x = \pm 2{,}61$**

Para moverse $\Rightarrow E_c > 0 \Rightarrow E_p < -10$

Será máx cuando $E_c = \text{máx} \Rightarrow E_{p\,min} = -17$

$E_{c\,máx} = 7 = \frac{1}{2}m\,v_{máx}^2$; $m = 2\,kg$

$$\boxed{v_{máx} = \sqrt{\frac{14}{2}} = \sqrt{7}\ m/s}$$

www.simplyjarod.com

9)

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$F\vec{u}_x = m a \vec{u}_x$; $a = \frac{F}{m}$

$F = -\vec{grad}\, E_p = -4x^3 + 16x$; $F(-1) = -4 + 16 = 12\ N$

(apartado a)

$a = \frac{F}{m} = \frac{12}{2} = 6\ m/s^2$

$a(x=1) = 6\ m/s^2$

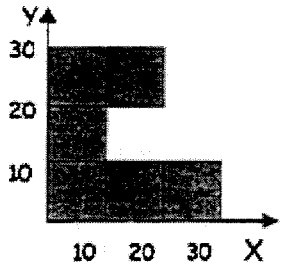
www.simplyjarod.com

TEMA 6: SISTEMA DE PARTÍCULAS

Ejercicio 1

Calcúlese la posición del C.D.M. de los siguientes cuerpos:

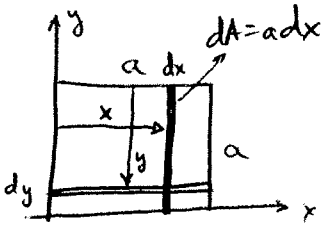
a) una placa cuadrada homogénea de densidad ρ y de lado a.
b) una placa triangular homogénea de densidad ρ, de base B y altura H.
c) un sector circular homogéneo de densidad ρ, de radio R y ángulo interior α.
d) una barra de longitud L de densidad: $\rho(x) = ax$, $x \in [0, L]$.
e) la placa homogénea de la figura de densidad ρ.



$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\, dm}{m} = \begin{cases} x_G = \frac{\int x\, dm}{m} \\ y_G = \frac{\int y\, dm}{m} \\ z_G = \frac{\int z\, dm}{m} \end{cases}$$

Sistema continuo

a)



$$X_G = \frac{\int x\, dm}{M}$$

$$M = \rho \cdot \text{Área} = \rho a^2$$

$$\rho = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA}; \quad \rho\, dA = dm$$

$$\rho\, dA = \rho a\, dx$$

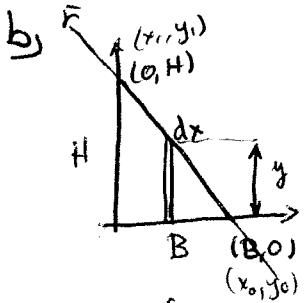
$$X_G = \frac{\int x \rho\, dA}{M} = \frac{\int x \rho a\, dx}{\rho a^2}$$

$$X_G = \frac{\rho a}{\rho a^2}\int_0^a x\, dx = \frac{1}{a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{1}{a}\,\frac{a^2}{2} = \frac{a}{2}$$

$$Y_G = \frac{\int y\, dm}{M} \qquad \int y\, dm = \int y \rho a\, dy$$

se hace igual

b)



Ecuación de r

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}; \quad \frac{x - B}{0 - B} = \frac{y - 0}{H - 0}; \quad y_r = \frac{(x - B)H}{-B}$$

$$X_G = \frac{\int x\, dm}{\int dm}$$

$$dm = \rho\, y_r\, dx = \rho\left(-\frac{H}{B}(x - B)\right) dx$$

$$\int x\, dm = \int x \rho\left(-\frac{H}{B}(x - B)\right) dx = -\frac{\rho H}{B}\int_{x=0}^{x=B}(x^2 - Bx)\, dx =$$

$$= -\frac{\rho H}{B}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{Bx^2}{2}\right]_{x=0}^{x=B} = -\frac{\rho H}{B}\left[-\frac{B^3}{6}\right] =$$

$$= \frac{\rho H B^2}{6}$$

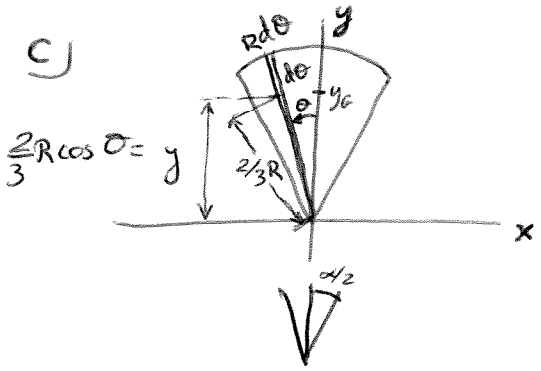
$$M = \int dm = \rho \cdot \text{Área} = \rho\,\frac{1}{2}BH$$

$$X_G = \frac{\frac{\rho H B^2}{6}}{\frac{1}{2}\rho B H} = \frac{1}{3}B$$

con Y_G igual

www.simplyjarod.com

c)



$$y_G = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$$

$$\int y\,dm = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{2}{3}R\cos\theta \; \underbrace{\rho \frac{1}{2}R^2 d\theta}_{dm = \rho\, dA} =$$

$$dA = \frac{1}{2}R\,d\theta\,R$$

$$= \frac{\rho R^3}{3}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\alpha/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{\rho R^3}{3}\operatorname{sen}\theta\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} =$$

$$= \frac{\rho R^3}{3}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\rho R^3}{3}\,2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

$$\int dm = \int \rho \frac{1}{2}R^2 d\theta = \frac{\rho R^2}{2}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\alpha/2} d\theta = \frac{\rho R^2}{2}\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$y_G = \frac{\frac{\rho R^3}{3}\left(2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\rho R^2}{2}\alpha} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

Algo hay mal.

No hacer mucho caso !!

www.simplyjarod.com

Ejercicio 3

Dos partículas de masas $m_1 = 1g$ y $m_2 = 10g$ se aproximan a lo largo de una recta llevando cada una de ellas una cantidad de movimiento de 100 g cm/s.

a) ¿Cuál es su velocidad relativa?
b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas?
c) Cual es la aceleración del c.d.m.?
d) ¿Cuál es la energía cinética total?
e) Si la masa m_1 sale del choque con una velocidad de 50 cm/s y una desviación de 30º respecto a su trayectoria inicial, ¿cuál es la velocidad de la otra masa?
f) ¿Cuál es la energía cinética total después del choque? ¿Cuál es la variación de la energía cinética Q?

$m_1 = 1\,g = 10^{-3}\,kg$

$m_2 = 10\,g = 10 \cdot 10^{-3}\,kg = 10^{-2}\,kg$

$\vec{p} = 100\,g\,\frac{cm}{s} \cdot \frac{1\,kg}{1000\,g} \cdot \frac{1\,m}{100\,cm} = 10^{-3}\,kg\,m/s$

a)

$\vec{v}_{rel\,2,1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

$\vec{v}_{rel\,1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = 10^{-3}\,kg\,m/s$; $v_1 = \frac{p_1}{m_1} = 1\,m/s$

$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = 10^{-3}\,kg\,m/s$; $v_2 = \frac{p_2}{m_2} = 0{,}1\,m/s$

$\vec{v}_{rel\,2,1} = -0{,}1\,\vec{u}_x - (1\,\vec{u}_x) = -1{,}1\,\vec{u}_x$

$\vec{v}_{rel\,1,2} = 1\,\vec{u}_x - (-0{,}1\,\vec{u}_x) = +1{,}1\,\vec{u}_x$

b)

$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_{Gi}}{\sum m_i}$; $\frac{d\vec{r}_G}{dt} = \vec{v}_G = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum m_i}$

$\vec{v}_{cdm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{10^{-3} \cdot 1\,\vec{u}_x + 10^{-2} \cdot (-0{,}1\,\vec{u}_x)}{10^{-3} + 10^{-2}} =$

$= \frac{10^{-3}\vec{u}_x - 10^{-3}\vec{u}_x}{10^{-3} + 10^{-2}} = 0$

c)

$\vec{a}_{cdm} = \frac{d\vec{v}_{cdm}}{dt} = \frac{\sum m_i a_i}{\sum m_i}$ como $v = cte \Rightarrow a = 0$

$\vec{a}_{cdm} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2} = 0$

www.simplyjarod.com

d) $E_{cin_{tot}} = E_{cin_1} + E_{cin_2}$

$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 =$

$= \frac{1}{2} 10^{-3} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} 10^{-2} \cdot 0'1^2 = 5'5 \cdot 10^{-4}$ Julios

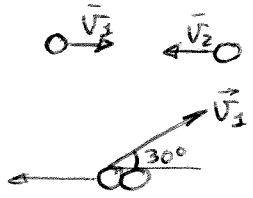
e)

$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{sist} = cte$

$\vec{p}_{sist} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_G$

$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

$(m_1 + m_2) \vec{v}_G = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$



como $\vec{p} = cte$

$\vec{p}_0 = \vec{p}_f$

$(m_1 + m_2) \vec{v}_{G_0} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$

$v_{1f} = 50$ cm/s $= 0'5$ m/s ; $\vec{v}_{1f} = 0'5 (\cos 30 \vec{u}_x + \text{sen} 30 \vec{u}_y)$

$m_1 \vec{v}_G^{\,0} = m_1 \cdot 0'5 (\cos 30 \vec{u}_x + 30 \sin \vec{u}_y) + m_2 (\vec{v}_2)$

$\vec{v}_2 = \frac{-(10^{-3} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{4} \vec{u}_x + \frac{1}{4} \vec{u}_y))}{10^{-2}} = -4'33 \cdot 10^{-2} \vec{u}_x - 0'025 \vec{u}_y$ m/s

f) $E_{cin_{sist\,f}} = E_{cin_{1f}} + E_{cin_{2f}} =$

$= \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 =$ ¡v_1 y v_2 en módulo!

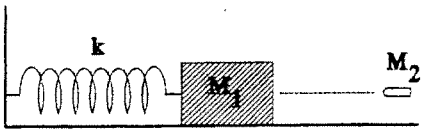
$= \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5^2 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}05^2 = 1{,}375 \cdot 10^{-4}$ Julios

$Q = \Delta E_{cin_{sist}} = E_{cin_f} - E_{cin_0} = -4'125 \cdot 10^{-4}$ Julios

www.simplyjarod.com

Ejercicio 4

Un bloque de masa M_1 se halla en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento es μ. Entre el bloque y una pared vertical se fija un muelle de constante k, inicialmente no deformado. Una bala de masa M_2 alcanza el bloque y se incrusta en él. Hallar la velocidad inicial de la bala en función del desplazamiento máximo x de la masa y de M_1, M_2, μ, k, g.



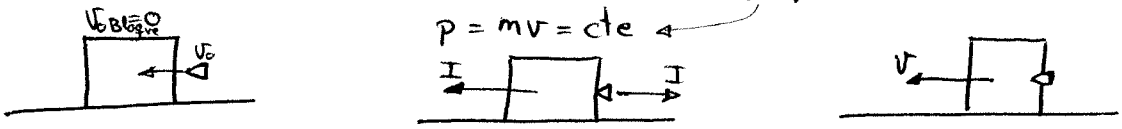
2 partes

(1º) Choque bala - masa

ANTES $(t-dt)$ CHOQUE t DESPUÉS $(t+dt)$

$\Sigma F_{ext} dt = \Sigma I_{ext} = 0 = m dv = d(mv)$

$p = mv = cte$



Para el choque me interesa definir el sistema = bala + Bloque

$$m_{BL}\,\bar{v}_{BL} + m_{BA}\cdot\bar{v}_{BA} = cte$$

$$m_{BL}\,\bar{v}_{BL_0} + m_{BA}\,\bar{v}_{BA_0} = m_{BL}\,\bar{v}_{BL_F} + m_{BA}\,\bar{v}_{BA_F} = m_{Tot}\,\bar{v}_{cdm_{sist.}}$$

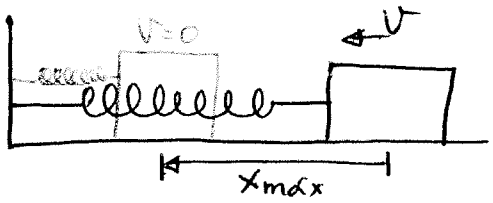
como se incrusta $\Rightarrow \bar{v}_{BL_F} = \bar{v}_{BA_F} = \bar{v}_F$

$$m_{BL}\,\bar{v}_{BL_0} + m_{BA}\,\bar{v}_{BA_0} = (m_{BL} + m_{BA})\,\bar{v}_F$$

($\bar{v}_{BL_0} = 0$)

$$m_2\,\bar{v}_0 = (m_1 + m_2)\,\bar{v}$$

(2º) Movimiento del bloque con la bala incrustada



$$W_{FNC} = E_{mec_f} - E_{mec_0}$$

$$W_{Fr}$$

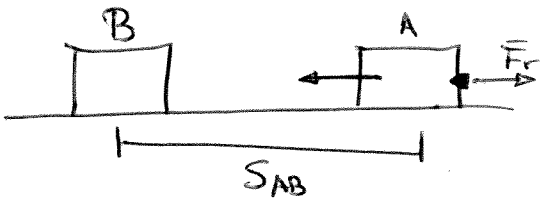
$$\int W_{F_r}$$

$$\downarrow$$

$$F_{NCONS}$$

www.simplyjarod.com

WFNC



$$W_{F_r} = \int dW_F = \int F_{roz} \cdot d\bar{s} =$$
$$= \int -F_r\, ds = \int -\mu N \cdot ds =$$
$$= -\mu N \int_A^B ds = -\mu N\, S_{AB}$$

$$W_{F_r} = -\mu \overbrace{(m_1 + m_2)\, g}^{\text{Normal}}\, x_{máx}$$

$$E_{cin\,f} = 0 = \frac{1}{2} m \cancel{v_B^2}^{0}$$

$$W_{FNC} = E_{mec\,f} - E_{mec\,0}$$

$$E_{cin\,0} = \frac{1}{2} m \boxed{v^2} \rightarrow \text{1ª parte } v = \frac{m_2}{m_1+m_2} v_0$$

$$E_{pot\,0} = E_{pot\,peso_0} + E_{pot\,muelle} = mg\cancel{h}^{0} + \frac{1}{2} k x^2 =$$
$$= 0 + \frac{1}{2} k \cancel{(\ell - \ell_0)}^{0} = 0 + 0 = 0$$

$$E_{pot\,f} = E_{pot\,peso_f} + E_{pot\,muelle\,f} = mg\cancel{h}^{0} + \frac{1}{2} k (x_{máx})^2 =$$
$$= \frac{1}{2} k (x_{máx})^2$$

$$W_{FNC} = -\mu(m_1+m_2)\, g\, x_{máx} = \left(0 + \frac{1}{2} k (x_{máx})^2\right) - \left(0 + \frac{1}{2} m \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} v_0\right)^2\right)$$

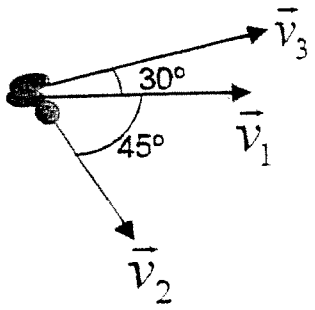
Despejamos v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\left[\frac{1}{2} k x_{máx}^2 + \mu(m_1+m_2)\, g\, x_{máx}\right] 2 (m_1+m_2)}{m_2^2}}$$

www.simplyjarod.com

Ejercicio 6

Un proyectil explosiona en tres fragmentos de masa $m_1 = 2kg$, $m_2 = 1kg$ y $m_3 = 3kg$ tal y como se muestra en la figura. Los módulos de las velocidades son $v_1 = 1\,m/s$, $v_2 = 2\,m/s$, $v_3 = 4\,m/s$. Calcular el vector velocidad justo antes de la explosión.



$$\Sigma \bar{F}_{exteriores} = m \cdot \bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{p} = cte$$

$$m_1 \bar{v}_{1o} + m_2 \bar{v}_{2o} + m_3 \bar{v}_{3o} = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + m_3 \bar{v}_3$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,\bar{v}_0 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + m_3 \bar{v}_3$$

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = 1\ \bar{u}_x \\ \bar{v}_2 = 2\ (\cos 45°\,\bar{u}_x - \operatorname{sen} 45°\,\bar{u}_y) \\ \bar{v}_3 = 4\ (\cos 30°\,\bar{u}_x + \operatorname{sen} 30°\,\bar{u}_y) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} m_1 = 2\ kg \\ m_2 = 1\ kg \\ m_3 = 3\ kg \end{array}$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,\bar{v}_0 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + m_3 \bar{v}_3$$

$$(2 + 1 + 3)\,\bar{v}_0 = 2 \cdot 1\,\bar{u}_x + 2(\cos 45°\,\bar{u}_x - \operatorname{sen} 45°\,\bar{u}_y) + 3 \cdot 4(\cos 30°\,\bar{u}_x + \operatorname{sen} 30°\,\bar{u}_y)$$

$$6\,\bar{v}_0 = 2\,\bar{u}_x + \sqrt{2}\,\bar{u}_x - \sqrt{2}\,\bar{u}_y + 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{u}_x + \frac{1}{2}\,\bar{u}_y\right)$$

$$6\,\bar{v}_0 = 2\,\bar{u}_x + \sqrt{2}\,\bar{u}_x - \sqrt{2}\,\bar{u}_y + 6\sqrt{3}\,\bar{u}_x + 6\,\bar{u}_y$$

$$6\,\bar{v}_0 = (2 + \sqrt{2} + 6\sqrt{3})\,\bar{u}_x + (6 - \sqrt{2})\,\bar{u}_y$$

$$\bar{v}_0 = (2'3)\,\bar{u}_x + (0,76)\,\bar{u}_y \quad m/s$$

www.simplyjarod.com

TEMA 7: SÓLIDO RÍGIDO

Ejercicio 1

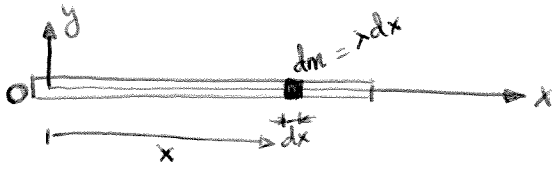
Hallar el momento de inercia de los siguientes cuerpos homogéneos con respecto a los ejes que se indican:

a) Varilla delgada de longitud l y masa m respecto a un eje perpendicular que pasa por un extremo.
b) Varilla delgada de longitud l y masa m respecto a un eje perpendicular por su centro.
c) Hoja cuadrada de lado L y masa M respecto a un eje paralelo a uno de sus lados y que pasa por su centro.
d) Tubo cilíndrico de pared delgada de masa m y radio R.
e) Cilindro macizo de masa m y radio R.

I = momento de inercia

Sólido Rígido $\begin{cases} \Sigma \bar{F}_{sist} = m\bar{a}_G \quad \text{(traslación)} \\ \Sigma \bar{M} = I\bar{\alpha} \end{cases}$ $\boxed{I = \int r^2 dm}$

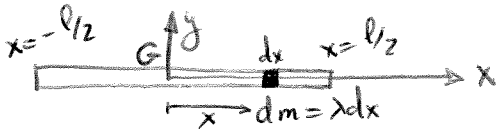
a)



$\lambda = \frac{m}{\ell}$

$$\int_{x=0}^{x=\ell} x^2 \lambda dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=\ell} = \lambda \frac{\ell^3}{3} = \frac{1}{3} m \ell^2 = I_O$$

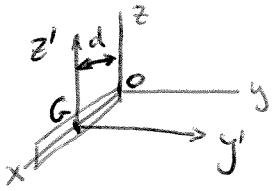
b)



$$\int_{x=-\ell/2}^{x=\ell/2} x^2 \lambda dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\ell/2}^{x=\ell/2} = \frac{m}{\ell}\left[\frac{(\ell/2)^3}{3} - \frac{(-\ell/2)^3}{3}\right] = \frac{1}{12} m \ell^2 = I_G$$

b) "Another way"

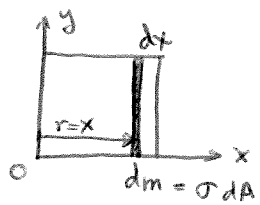
Fórmula Steiner:



$\boxed{I_O = I_G + md^2}$

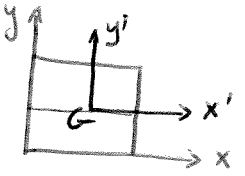
$\boxed{I_G = I_O - md^2 = \frac{1}{3} m\ell^2 - m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m\ell^2}$

c)



$$I_y = \int r^2 dm = \int_{x=0}^{x=\ell} x^2 \sigma \, dx \cdot \ell \qquad r = x, \; dm = \sigma dA$$

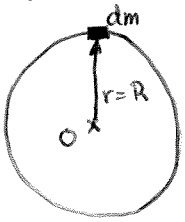
$$I_y = \ell\sigma \frac{x^3}{3}\Big]_0^\ell = \frac{1}{3} m \ell^2 \qquad \sigma = \frac{m}{\ell^2}$$



$$I_G = \int x^2 dm = \int_{x=-\ell/2}^{x=\ell/2} x^2 \sigma (\ell dx) = \frac{1}{12} m \ell^2$$

www.simplyjarod.com

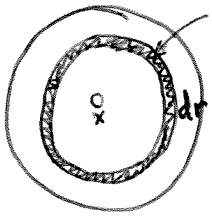
Aro:



$$\boxed{I_O = \int r^2 dm = R^2 \int dm = R^2 m}$$

$r = R = cte$

Disco:



$$I_O = \int r^2 dm = \int_{r=0}^{r=R} r^2 \sigma\, 2\pi r\, dr$$

$$\boxed{I_O = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2}$$

d) Cilindro hueco

Independiente de la altura
Sólo depende de los ejes
} $\Rightarrow I_{aro} \equiv I_{\substack{cilindro \\ hueco}}$

$I_{disco} \equiv I_{\substack{cilindro \\ macizo}}$

www.simplyjarod.com

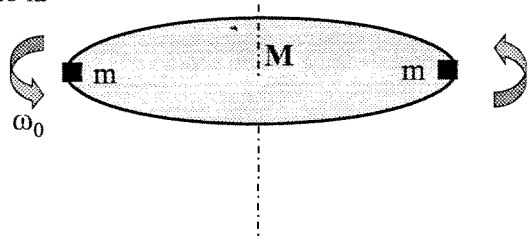
Ejercicio 2

Dos hombres de igual masa m, se hallan de pie en los extremos del diámetro de una mesa giratoria de masa $M = 2m$ y radio R. La mesa gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular ω_0. En un momento dado los hombres se acercan simultáneamente al centro de la mesa. Calcular:

a) Valor de la velocidad angular con que girará la mesa.

b) Trabajo realizado por los hombres en su movimiento.

c) En su recorrido hacia el centro de la mesa, ¿a qué distancia del eje experimentarán los hombres la máxima fuerza centrífuga?

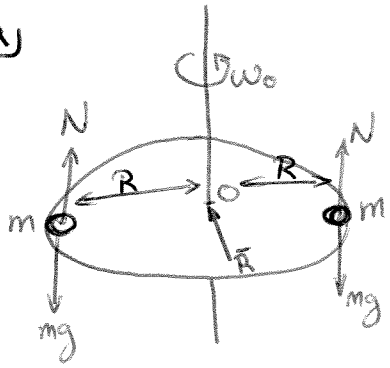


Sólido rígido: $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \rightarrow \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow m\vec{v}_G = cte$

Sólido rígido: $\Sigma \vec{M}_P = I_P \vec{\alpha} \rightarrow \Sigma \vec{M}_{P\,ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_P = cte$

- Si $I_{P/to}$ fijo: $P = O$ (fijo) (En "O" sólo si es fijo) $\vec{L}_{O\,sist} = I_O \vec{\omega}$
- Si $I_{P/to}$ fijo: $P = G$ (en "G" siempre)

a)



$\Sigma \vec{M}_{ext} = 0$ ($\vec{R}$ no da momentos en "O")

$\vec{L}_{ext} = cte$

$\begin{cases} \vec{L}_{ext}^{\,antes} = I_O \vec{\omega}_0 \\ \vec{L}_{ext}^{\,desp} = I_O \vec{\omega} \end{cases}$

$I_{O\,Antes} = I_{O\,disco} + I_{O\,masas}$

$M = 2m \rightarrow \frac{1}{2}MR^2 \quad 2mR^2$

$I_{O\,Antes} = 3mR^2$

$I'_{O\,desp} = I_{O\,disco} + I'_{O\,masas}$

$\frac{1}{2}MR^2 + m \cdot 0^2$

$\begin{cases} \vec{L}_{ext} = 3mR^2\vec{\omega}_0 \\ \vec{L}'_{ext} = mR^2\vec{\omega} \end{cases}$

$\vec{L}_{ext} = \vec{L}'_{ext}$

$3mR^2\vec{\omega}_0 = mR^2\vec{\omega}$; $\boxed{3\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}}$

b) $W = \Delta E_{cin} = \frac{1}{2} I'_O \omega^2 - \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{1}{2} mR^2 (3\omega_0)^2 - \frac{1}{2}(3mR^2)\omega_0^2$

$\boxed{W = 3mR^2\omega_0^2}$

www.simplyjarod.com

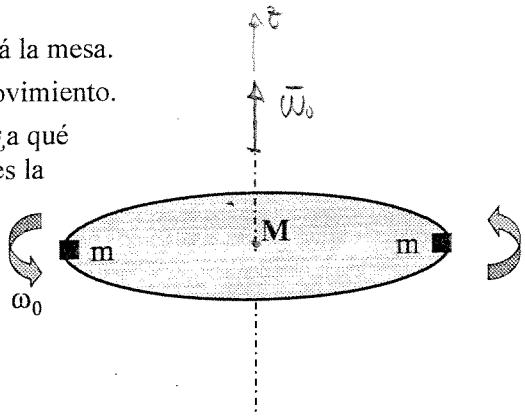
Ejercicio 2

Dos hombres de igual masa m, se hallan de pie en los extremos del diámetro de una mesa giratoria de masa $M = 2m$ y radio R. La mesa gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular ω_0. En un momento dado los hombres se acercan simultáneamente al centro de la mesa. Calcular:

a) Valor de la velocidad angular con que girará la mesa.

b) Trabajo realizado por los hombres en su movimiento.

c) En su recorrido hacia el centro de la mesa, ¿a qué distancia del eje experimentarán los hombres la máxima fuerza centrífuga?



a) $\vec{L}_0 = cte$

$\vec{L}_{0\,ANTES} = \frac{1}{2} M R^2 \vec{\omega}_0 + 2mR^2 \vec{\omega}_0 = (mR^2\omega_0 + 2mR^2)\vec{u}_z = 3mR^2\omega_0\vec{u}_z$

$\vec{L}_{0\,DESP} = \frac{1}{2} M R^2 \omega \vec{u}_z = mR^2\omega\vec{u}_z$

$3mR^2\omega_0 = mR^2\omega_0 \Rightarrow \boxed{\omega = 3\omega_0}$

b) $W = E_{cin\,f} - E_{cin\,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2\right)\omega_0^2 =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}2mR^2 \cdot 9\omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2mR^2 + 2mR^2\right)\omega_0^2 = 3mR^2\omega_0^2$

c) $F_i = m.a$ la fuerza de inercia será máxima cuando la aceleración sea máxima

$\{a_n = \omega^2 r\}$ (1)

Consideramos el movimiento angular desde la posición inicial (borde) hasta una posición en la que los hombres están a una distancia r del eje.

$\vec{L}_{0\,ANTES} = 3mR^2\omega_0\vec{u}_z$

$\vec{L}_{0\,DESP} = \frac{1}{2}MR^2\omega\vec{u}_z + 2mr^2\omega\vec{u}_z = (mR^2\omega + 2mr^2\omega)\vec{u}_z = (R^2+2r^2)m\omega\vec{u}_z$

igualando: $3mR^2\omega_0 = (R^2+2r^2)m\omega \Rightarrow \omega = \frac{3R^2\omega_0}{R^2+2r^2}$ $\Rightarrow$ entrando en (1)

$a_n = \frac{9R^4\omega_0^2}{(R^2+2r^2)^2}\cdot r \Rightarrow a_n = 9R^4\omega_0^2\frac{r}{(R^2+2r^2)^2}$ $\Rightarrow$ máxima a_n: $\frac{da_n}{dr} = 0$

www.simplyjarod.com

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 9R^4\omega_0^2 \frac{(R^2+2r^2)^2 - r\,2(R^2+2r^2)\cdot 4r}{(R^2+2r^2)^4} = 0 \longleftrightarrow R^2+2r^2-8r^2=0$$

$$R^2-6r^2=0 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{R^2}{6}} \Rightarrow \boxed{r=\frac{R}{\sqrt{6}}} \; 0'408R$$

www.simplyjarod.com

Ejercicio 3

Una barra homogénea de longitud l y masa M, inicialmente en reposo, puede moverse libremente y sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Una masa puntual M se mueve con velocidad v sobre la citada superficie y en dirección normal a la barra, chocando con ella en uno de sus extremos, de forma perfectamente elástica. Admitiendo que después del choque la masa puntual sigue sobre la misma dirección inicial, determinar, en el sistema de referencia de la figura:

1°
a) La velocidad del c.d.m. de la barra después del choque.
b) La velocidad de la masa puntual después del choque.
c) La velocidad de rotación de la barra alrededor de su c.d.m.

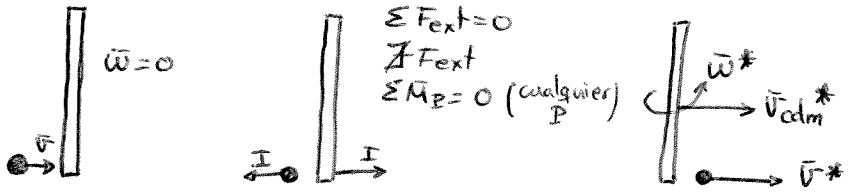
Si el eje que pasa por el c.d.m. de la barra y es normal a la superficie fuera fijo, y la barra pudiera girar alrededor de él sin rozamiento.

2°
d) ¿Se conservaría la cantidad de movimiento del sistema?
e) ¿Se conservaría el momento cinético?
f) ¿Cuál sería ahora la velocidad de la masa puntual después del choque?
g) ¿Cuál sería ahora la velocidad de rotación de la barra alrededor del eje normal a la superficie y que pasa por su c.d.m.?

1º) v_{cdm} de la barra después del choque

$\nexists$ ptos fijos, $\nexists$ $\bar{F}$ exteriores al sistema

ANTES (t^*-dt) CHOQUE (t^*) DESPUÉS (t^*+dt)



$\Sigma \bar{F}_{ext} = \bar{0} \longrightarrow \bar{P}_{sist} = cte$

$\Sigma \bar{M}_{\substack{ext \\ P=G}} = \bar{0} \longrightarrow \bar{L}_{\substack{sist \\ P=G}} = cte$

Choque elástico $\Rightarrow$ se conserva la E_{cin} sistema

$\vec{P}_{sist} = (m\bar{v}_1 + m\bar{v}_2)_{antes} = (m\bar{v}_1 + m\bar{v}_2)_{después}$

$m v \bar{u}_x + m\,\bar{0}^{0} = m v^* \bar{u}_x + m v^*_{cdm} \bar{u}_x$

$v \bar{u}_x = v^* \bar{u}_x + v^*_{cdm} \bar{u}_x$

$\Sigma M_G = 0 \Rightarrow \bar{L}_G = cte = \bar{L}_{Antes} = \bar{L}_{después}$

$\bar{L}_{G\,antes} + \bar{L}_{cdm\,antes} = \bar{L}_{después} + \bar{L}_{cdm\,después}$

$\bar{L}_G = \frac{1}{2} m v (\bar{u}_z) = \frac{1}{2} m v^* (\bar{u}_z) + I_G \omega^*$

$m v \frac{l}{2} = m v^* \frac{l}{2} + \frac{1}{12} m l^2 \omega^*$; $\boxed{v = v^* + \frac{1}{6} \omega^* l}$

www.simplyjarod.com

$$E_{cin\,antes} = E_{cin\,desp}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \cancel{E_{cin\,cdm}}^{0} = \frac{1}{2}mv^{*2} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_{cdm}^{*2}}_{E_{cin\,trasl\ barra}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_G\omega^{*2}}_{E_{cin\,rot\ barra}} \qquad \left(I_G = \frac{1}{12}ml^2\right)$$

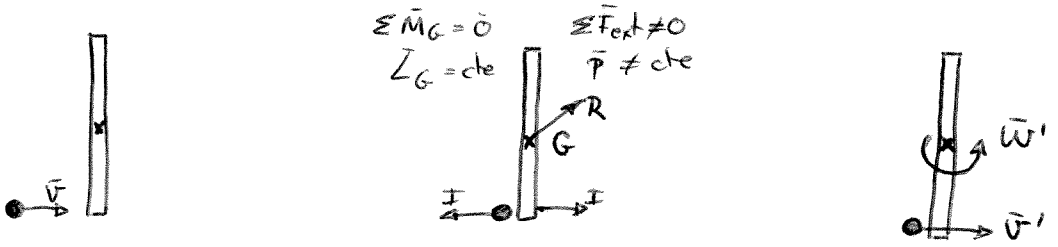
$$v^2 = v^{*2} + v_{cdm}^{*2} + \frac{1}{12}l^2\omega^{*2}$$

$$\boxed{\vec{v}_{cdm}^{*} = \frac{2v}{5}\vec{u}_x;} \quad \boxed{\vec{v}^{*} = \frac{3v}{5}\vec{u}_x;} \quad \boxed{\vec{\omega}^{*} = \frac{12v}{5l}\vec{u}_z}$$

a) b) c)

2º)

ANTES | CHOQUE | DESPUÉS



$$\vec{L}_G = cte = \vec{L}_G^{antes} = \frac{l}{2}mv(\vec{u}_z) = \frac{l}{2}mv' + I_G\omega' = \vec{L}_G^{después}$$

$$\boxed{v = v' + \frac{1}{6}\omega' l}$$

Es lógico que quede el mismo resultado que antes la razón es simple: antes $\exists\, \vec{v}_{cdm}^{*}$ pero no daba momento angular en G, pues pasaba por G. Ahora $\nexists\, \vec{v}_{cdm}^{*}$ porque la barra sólo puede girar, no desplazarse. Así que tampoco existe $\vec{L}_G$ debido a velac. trasl. barra

Se sigue conservando la Energía

$$E_{cin\ sist}^{antes} = E_{cin\ sist}^{después}$$

No tenemos traslac. barra

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I_G\omega'^2 \;;\; v^2 = v'^2 + \frac{1}{12}l^2\omega'^2$$

$$\boxed{v' = \frac{v}{2}} \;;\; \boxed{\omega' = \frac{3v}{l}}$$

www.simplyjarod.com

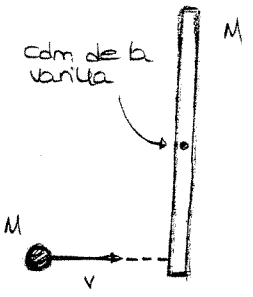
Ejercicio 4

Una varilla delgada, homogénea, de masa M y longitud l, está en reposo sobre una superficie plana horizontal, sobre la cual puede moverse sin rozamiento. Una partícula, de masa M, se dirige a la varilla con velocidad v normal a ella, chocando con uno de sus extremos. Determinar:

a) La velocidad del c.d.m. del sistema antes y después del choque. ¿Depende de la naturaleza del choque?
b) La cantidad de movimiento del sistema.
c) El momento cinético del sistema respecto a su c.d.m. ¿depende de la naturaleza del choque?

Si la partícula se queda pegada en el extremo de la varilla después del choque.

d) Velocidad angular del sistema después del choque.
e) Energía cinética del sistema después del choque.



- $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Longrightarrow \vec{p}$: cte (Puede moverse sin rozamiento)
- $\sum \vec{M}_{ext} = 0 \Longrightarrow \vec{L}$: cte
- choque inelástico $\Longrightarrow E \neq$ cte (la part. y la var. quedan pegadas)

Velocidad del cdm de la varilla

a) $\boxed{v_{cdm} = \frac{M \cdot v + M \cdot 0}{2M} = \frac{v}{2}}$

Después del choque (teniendo en cuenta que $\vec{p}$: cte)

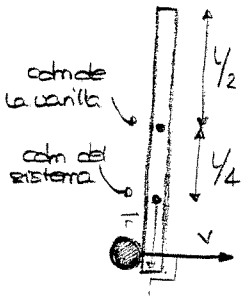
$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \Longrightarrow 2M v_{cdm} = 2M v'_{cdm} \Longrightarrow v_{cdm} = v'_{cdm}$

$\boxed{v'_{cdm} = \frac{v}{2}}$ (Velocidad del cdm del sistema partícula varilla)

La velocidad del cdm no depende de que el choque sea elástico o inelástico (naturaleza del choque)

b) $\boxed{\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{despues} = 2M \cdot \frac{v}{2} = M \cdot v}$

c) No, solo depende de que haya o no momentos exteriores



Justo antes:

$\vec{L} = \vec{L}_{part} + \vec{L}_{var}^{\,\nearrow 0}$ (antes del choque está quieta)

$\vec{L}_{part} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times M\vec{v}$

$L_{part} = r \cdot M \cdot v \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{l}{4} \cdot M \cdot v \cdot \operatorname{sen}90^\circ = \frac{l}{4} Mv$

www.simplyjarod.com

Vectorialmente:

$$\vec{L} = \vec{L}_{part} = \frac{L}{4} M v \cdot \vec{u_z} \quad (kg \cdot m^2/s)$$

como $\vec{L}$ se conserva:

$$\boxed{\vec{L}' = \frac{L}{4} M v \cdot \vec{u_z}}$$

d) Aplicamos conservación de $\vec{L}$ ¡I del sistema!

$$L_{antes} = L_{después} \Longrightarrow \frac{L}{4} M v = I \omega$$

$$\Longrightarrow \omega = \frac{LMv}{4I}$$

Calculamos I como $I_{part} + I_{varilla}$

$$I_{part} = M \cdot r^2 = M \cdot \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{ML^2}{16}$$

$$I_{varilla} \longrightarrow \text{Por Steiner} \longrightarrow = \frac{7}{48} M \cdot L^2$$

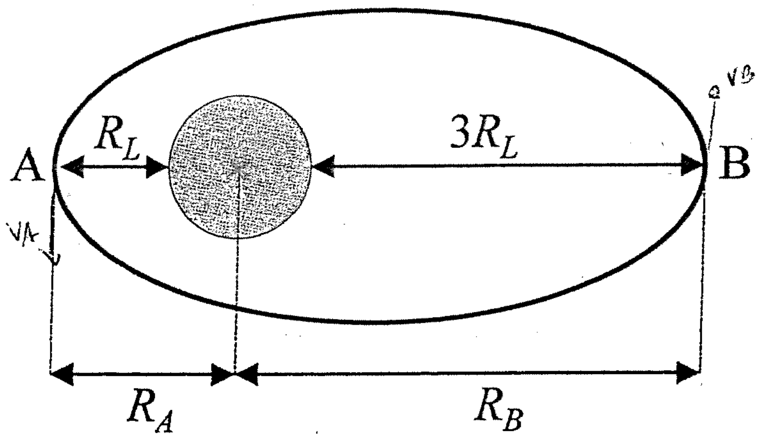
$$\Longrightarrow I = \frac{5}{24} M \cdot L^2 \Longrightarrow \boxed{\omega = \frac{6}{5} \frac{v}{L} \vec{u_z}} \quad (rad/s)$$

Una nave espacial realiza una órbita elíptica alrededor de la luna. Si las alturas desde el perigeo y el apogeo a la superficie lunar son de un radio, R_L y 3 radios lunares, $3R_L$ respectivamente. Se pide:

a) La velocidad mínima de la nave en la órbita.

c) La velocidad areolar del satélite (el área barrida por el vector de posición en la unidad de tiempo).

DATOS: radio lunar $R_L = 1738$ km; aceleración de la gravedad lunar en su superficie $g_L = 1.54\ \mathrm{m/s^2}$; masa de la nave $m = 52$ Tm.



Distancia al perigeo
$R_A = 2R_L = 2 \cdot 1738 = 3476\ km$

Distancia al apogeo
$R_B = 4R_L = 4 \cdot 1738 = 6952\ km$

a)
Aplicamos la conservación de energía : EM = cte

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{M_L m}{R_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{M_L m}{R_B}$$

Ahora, como la masa de la luna M_L no es dato utilizamos $g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} \Rightarrow GM_L = g_L R_L^2$ de forma que nos queda:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{g_L R_L^2 m}{R_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{g_L R_L^2 m}{R_B} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{g_L R_L^2}{R_A} = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{g_L R_L^2}{R_B}}\ [1]$$

En segundo lugar aplicamos la conservación del momento angular $\vec{L} = cte$ = Occwn x m·V (mv sen90°)

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B \Rightarrow L_A = L_B \Rightarrow R_A m v_A \operatorname{sen}90° = R_B m v_B \operatorname{sen}90° \Rightarrow \boxed{R_A v_A = R_B v_B}\ [2]$$

Por tanto hemos obtenido el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} [1]\ \frac{1}{2}v_A^2 - \frac{g_L R_L^2}{R_A} = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{g_L R_L^2}{R_B} \\ [2]\ R_A v_A = R_B v_B \end{array}\right\} \text{sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas : } v_A, v_B$$

www.simplyjarod.com

resolvemos el sistema:

de la [2]: $R_A v_A = R_B v_B \Rightarrow \boxed{v_A = \frac{R_B}{R_A} v_B = \frac{4R_L}{2R_L} v_B = 2v_B}$

Sustituimos en la [1]:

$$\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{1}{2}v_B^2 = \frac{g_L R_L^2}{R_A} - \frac{g_L R_L^2}{R_B} \Rightarrow \frac{1}{2}(2v_B)^2 - \frac{1}{2}v_B^2 = \frac{g_L R_L^2}{R_A} - \frac{g_L R_L^2}{R_B} \Rightarrow \frac{3}{2}v_B^2 = g_L R_L^2 \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{2g_L R_L^2}{3}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) = \frac{2 \cdot 1{,}54 \cdot (1738 \cdot 10^3)^2}{3}\left(\frac{1}{3476 \cdot 10^3} - \frac{1}{6952 \cdot 10^3}\right) = 446{,}1 \cdot 10^3$$

Así pues, sacando la raíz cuadrada queda: $\boxed{v_B = 667{,}9\, m/s = 2404\ km/h}$ ⇐

b)

$$v_{aerolar} = \frac{dS}{dt} = \dot{S} = \frac{L}{2m} = \frac{r_B m v_B}{2m} = \frac{r_B v_B}{2} = \frac{6952 \cdot 10^3 \cdot 667{,}9}{2} = 2{,}322 \cdot 10^9\, m^2/s$$

Velocidad aerolar constante en toda la órbita (ley de las áreas): $\boxed{v_{aerolar} = 2{,}322 \cdot 10^9\, m^2/s}$ ⇐

www.simplyjarod.com

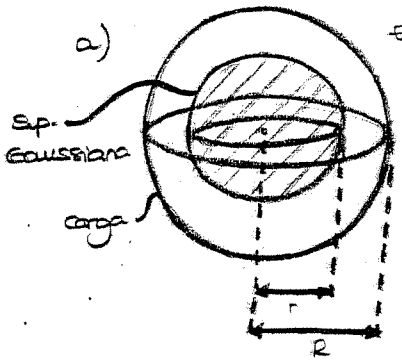
Ejercicio 1

Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio creado por las siguientes distribuciones de carga:

a) Una superficie esférica de radio R y densidad superficial de carga σ.
b) Una esfera maciza de radio R y densidad volumétrica de carga ρ constante.
c) Una esfera maciza de radio R y densidad volumétrica de carga $\rho = ar$.
d) Un hilo indefinido de diámetro despreciable y densidad lineal de carga λ.
e) Una superficie cilíndrica indefinida de radio R y densidad superficial de carga σ.
f) Una cilindro macizo de radio R y densidad volumétrica de carga ρ constante.
g) Una cilindro macizo de radio R y densidad volumétrica de carga $\rho = \rho_0(a-br)$
h) Un plano indefinido de grosor despreciable y densidad superficial de carga σ.

Resolución por Gauss

a)

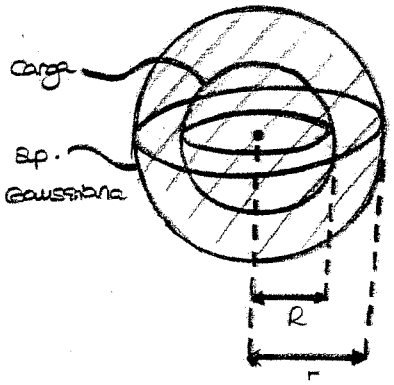


Esfera hueca; $r<R$ dentro no hay carga.

$Q_T = 0$

Por Gauss: $\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon} \Longrightarrow \oint \vec{E}\,d\vec{S} = 0$

$\boxed{\vec{E} = 0}$



$r>R$

$Q_T = \iint \sigma\,dS = \sigma \iint dS = \sigma S = \sigma \cdot 4\pi R^2$ (C)

(superficie de la esfera de radio R.)

$\iint \vec{E}\,d\vec{S} \Longrightarrow \left[\vec{E} = E\cdot\vec{u}_r\right] \Longrightarrow \iint E\cdot\vec{u}_r\,dS\cdot\vec{u}_r = \iint E\,dS$ ($\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r = 1$)

$= \iint E\,dS = E\iint dS = E\cdot S = E\cdot 4\pi r^2$ (Wb)

(E: cte. sobre la sup. gaussiana)

[
- Nota: Coordenadas esféricas

Definimos un nuevo vector unitario $\vec{u}_r$ ($\hat{r}$) (Radial)

$\vec{u}_r$: Parte del origen y apunta en cualquier dirección hacia el infinito.
]

$$\frac{Q_T}{\varepsilon} = \iint \vec{E}\,d\vec{S} \Longrightarrow \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon} = E 4\pi r^2 \Longrightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon r^2}$$

Por tanto:

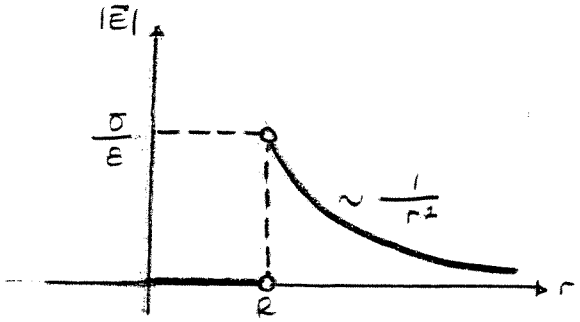
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon r^2}\vec{u}_r}$$

Esfera	Cilindro
Volumen: $\frac{4}{3}\pi r^3$	Volumen: $\pi r^2 \cdot h$
$\frac{dvol}{dr} = 4\pi r^2$	$\frac{dvol}{dr} = 2\pi r \cdot h$
$dvol = 4\pi r^2\,dr$	$dvol = 2\pi r\,dr\,h$

www.simplyjarod.com

Uniendo ambos casos:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < R \\ \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon r^2}\,\vec{u}_r, & r > R \end{cases}$$



b) Esfera maciza

r < R

- $Q_T = \iiint \rho\, dV = \rho \iiint dV = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3$ (c)
- $\iint \vec{E}\, d\vec{S} = \iint E\, dS = E \iint dS = E \cdot S = E\, 4\pi r^2$ (Wb)

$$\Longrightarrow \frac{Q_T}{\varepsilon} = \iint \vec{E}\, d\vec{S} \Longrightarrow \frac{4\pi \rho r^3}{3\varepsilon} = E\, 4\pi r^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon}\,\vec{u}_r}$$

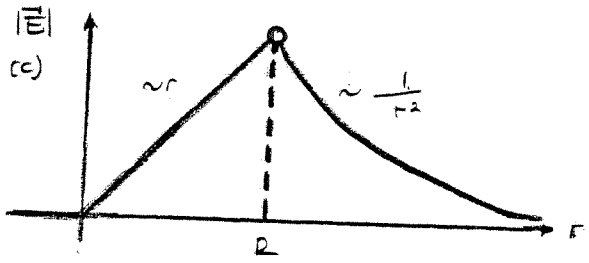
r > R

- $Q_T = \iiint \rho\, dV = \rho V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$ (c) (ρ cte)
- $\iint \vec{E}\, d\vec{S} = ES = E \cdot 4\pi r^2$ (Wb)

$$\Longrightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon r^2}\,\vec{u}_r}$$

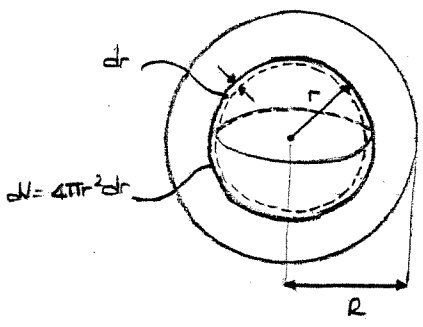
Finalmente:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon r^2}\,\vec{u}_r, & r > R \\ \dfrac{\rho r}{3\varepsilon}\,\vec{u}_r, & r < R \end{cases}$$



c) Esfera maciza con $\rho = ar$ **r < R**

- $Q_T = \iiint \rho\, dV \Longrightarrow$ ρ no se puede sacar de la integral porque depende de r ← ¡OJO!



$$V = \iiint dV = \int_{r=0}^{r=R} 4\pi r^2\, dr = 4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right] = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$Vol_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\frac{dvol}{dr} = 4\pi R^2$

$dvol = 4\pi R^2 dr$

www.simplyjarod.com

Continuación del Ejercicio 1 del tema 9

- $Q_T = \iiint \rho(r)\,dV = \int_0^r ar \cdot 4\pi r^2\,dr = \int_0^r 4\pi a r^3\,dr = 4\pi a \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^r = \pi a r^4$ (C)
- $\iint \vec{E}\,d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2$ (Wb)

Por Gauss:

$$\frac{\pi a r^4}{\varepsilon} = E\,4\pi r^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{ar^2}{4\varepsilon}\vec{u}_r}$$

$\boxed{r > R}$

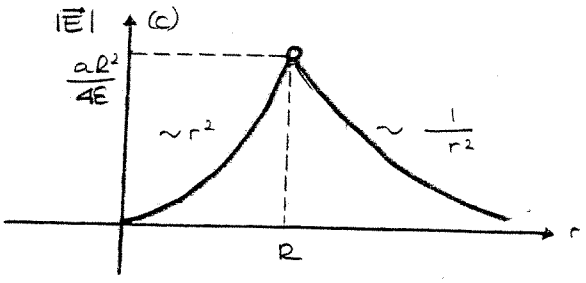
- $Q_T = \iiint \rho\,dV = \int_0^R ar\,4\pi r^2\,dr = \pi a R^4$ (C)
- $\iint \vec{E}\,d\vec{S} = E 4\pi r^2$ (Wb)

Por Gauss:

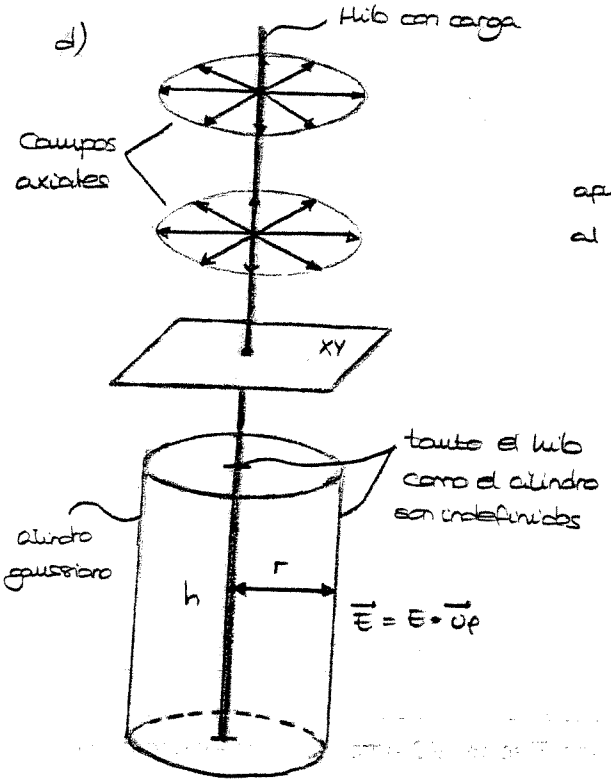
$$\frac{\pi a R^4}{\varepsilon} = E 4\pi r^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{aR^4}{4\varepsilon r^2}\vec{u}_r}$$

En conclusión:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{ar^2}{4\varepsilon}\vec{u}_r & ; \ r < R \\ \frac{aR^4}{4\varepsilon r^2}\vec{u}_r & ; \ r > R \end{cases}$$



d)



Coordenadas cilíndricas:

$\vec{u}_\rho$ = vector unitario que sale del eje z y apunta en cualquier dirección que sea paralela al plano XY (axiales)

- $Q_T = \int \lambda\,dL = \lambda \cdot \int dL = \lambda \cdot L = \lambda \cdot h$
- $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E \cdot \vec{u}_\rho \cdot dS \cdot \vec{u}_\rho =$

$$= \oiint E \cdot dS \cdot \vec{u}_\rho \vec{u}_\rho = \oiint E\,dS =$$

www.simplyjarod.com

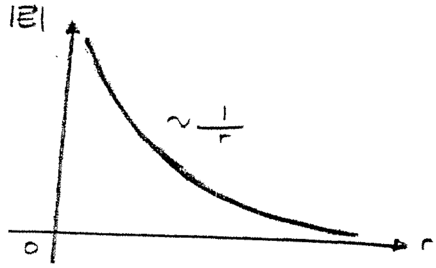
$$= \iint_{\text{tapa}} \vec{E}d\vec{S}^{\,0} + \iint \vec{E}d\vec{S} + \iint_{\text{tapa}} \vec{E}d\vec{S}^{\,0} = \iint_{\text{lateral}} E\cdot dS = E\cdot\iint dS = E\cdot S = E\cdot 2\pi r\cdot h \ (Wb)$$

↑ Superficie lateral del cilindro.

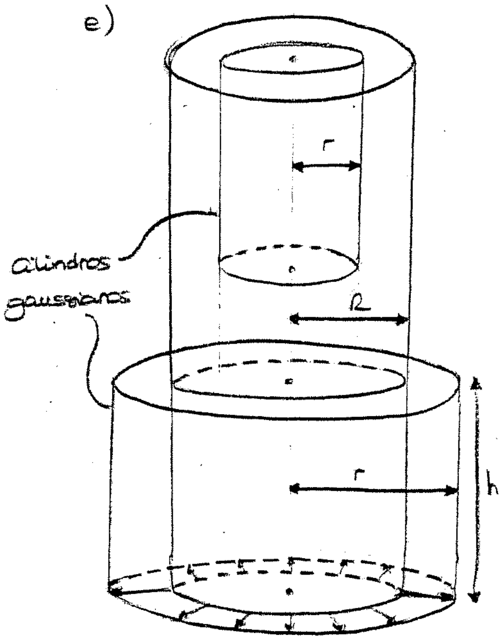
Las líneas de campo $\vec{E}$ son paralelas a las tapas del cilindro por lo que no hay flujo a través de ellas.

Por tanto:

$$\frac{\lambda h}{\varepsilon} = E\cdot 2\pi r h \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{u_\rho}} \ (Wb/C)$$



e)



Cilindro hueco

$\boxed{r<R}$

$$Q_T = 0 \Longrightarrow \oint \vec{E}d\vec{S} = 0 \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$$

$\boxed{r>R}$

- $Q_T = \iint \sigma dS = \sigma S = \sigma\cdot 2\pi R h \ (C)$
- $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = ES = E\cdot 2\pi r h$

$$\Longrightarrow \frac{\sigma 2\pi R h}{\varepsilon} = E 2\pi r h \Longrightarrow \frac{\sigma R}{\varepsilon} = Er$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma R}{\varepsilon r}\vec{u_\rho}}$$

Uniendo ambas:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} \ ; & r<R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon r}\vec{u_\rho} \ ; & r>R \end{cases}$$

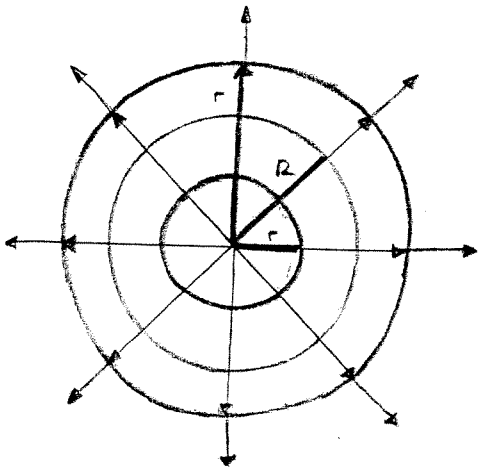
f) El mismo dibujo pero las líneas nacen en el centro del cilindro.

$\boxed{r<R}$

- $Q_T = \iiint \rho dV = \rho \iiint dV = \rho V = \rho\cdot \pi r^2 h \ (C)$
- $\iint \vec{E}d\vec{S} = E\cdot S = E\cdot 2\pi r h$

$$\Longrightarrow \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon} = E\cdot 2\pi r h \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon}\vec{u_r}}$$

www.simplyjarod.com



$\boxed{r > R}$

- $Q_T = \iiint \rho dV = \rho \iiint dV = \rho V = \rho \pi R^2 h$ (c)
- $\oint \vec{E} d\vec{S} =$ idem $r < R$

$$\frac{Q_T}{\varepsilon} = \oint \vec{E} d\vec{S} \longrightarrow \frac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon} = 2\pi r h \longrightarrow$$

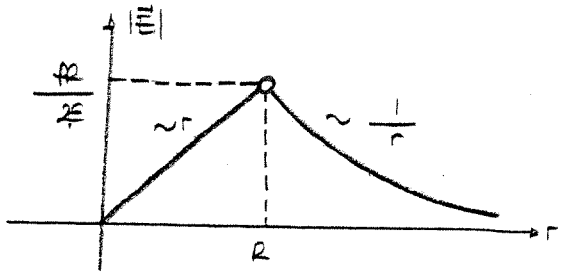
$$\longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon r} \vec{u_\rho}}$$

Por Gauss:

$$\frac{Q_T}{\varepsilon} = \iint \vec{E} d\vec{S} \longrightarrow \frac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon} = 2\pi r h \longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon r} \vec{u_\rho}}$$

Finalmente:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon} \vec{u_\rho}, & r < R \\ \frac{\rho R^2}{2\varepsilon r} \vec{u_\rho}, & r > R \end{cases}$$



g) Cilindro macizo con ρ variable.

$\boxed{r < R}$ No se puede sacar al ser variable

- $Q_T = \iiint \rho(r)\, dV \longrightarrow$ [Para cilindros: $\iiint f(r) dV = \int f(r) \cdot 2\pi r h\, dr$] $\longrightarrow$

$$= \int_{r=0}^{r=r} \rho_0 (a - br) 2\pi r h\, dr = 2\pi \rho_0 h \int_0^r (a - br) r\, dr = 2\pi \rho_0 h \left[a\frac{r^2}{2} - \frac{br^3}{3} \right]_0^r =$$

$$= 2\pi \rho_0 h \left(a\frac{r^2}{2} - \frac{br^3}{3} \right) \text{ (c)}$$

- $\iint \vec{E} d\vec{S} = ES = E \cdot 2\pi r h$

Por Gauss:

$$\frac{Q_T}{\varepsilon} = \iint \vec{E} d\vec{S} \longrightarrow \frac{2\pi \rho_0 h}{\varepsilon} \left(\frac{ar^2}{2} - \frac{br^3}{3} \right) = E \cdot 2\pi r h \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(\frac{ar}{2} - \frac{br^2}{3} \right) \vec{u_\rho}}$$

¡Ojo! El cilindro que tiene carga es el original, el de radio R, los gaussianos solo están para poder medir.

www.simplyjarod.com

$r > R$

- $Q_T = \iiint \rho(r)\, dV = \int_{r=0}^{r=R} \rho_0 (a - br)\, 2\pi r h\, dr = \rho_0 2\pi h \left(\frac{aR^2}{2} - \frac{bR^3}{3} \right)$

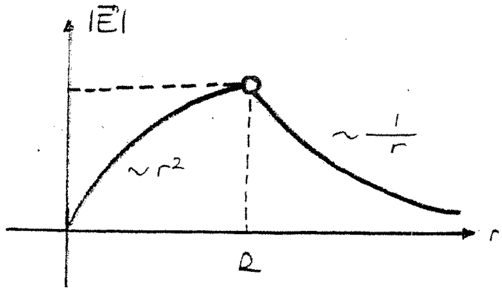
- $\iint \vec{E}\, d\vec{S}$: ídem $r < R$

Por Gauss:

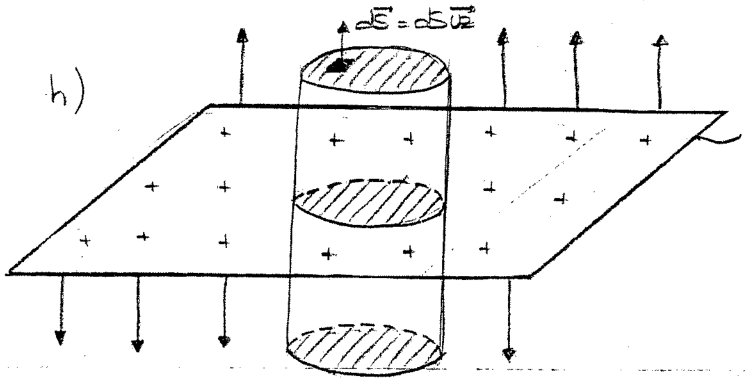
$$\frac{\rho_0 2\pi h}{\varepsilon} \left(\frac{aR^2}{2} - \frac{bR^3}{3} \right) = E \cdot 2\pi r h \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon r} \left(\frac{aR^2}{2} - \frac{bR^3}{3} \right) \vec{u_\rho}} \quad (N/C)$$

Finalmente:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{\varepsilon} \left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{br}{3} \right) \vec{u_\rho} , & r < R \\ \dfrac{\rho_0 R^2}{\varepsilon r} \left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{bR}{3} \right) \vec{u_\rho} , & r > R \end{cases}$$



h)



Plano XY (indefinido)

- $Q_T = \iint \sigma\, dS = \sigma \iint dS = \sigma S \quad (C)$

- $\iint \vec{E}\, d\vec{S} = \iint_{\text{tapa sup}} \vec{E}\, d\vec{S} + \iint_{\text{lateral}} \vec{E}\, d\vec{S} \;(\to 0) + \iint_{\text{tapa inf}} \vec{E}\, d\vec{S} =$

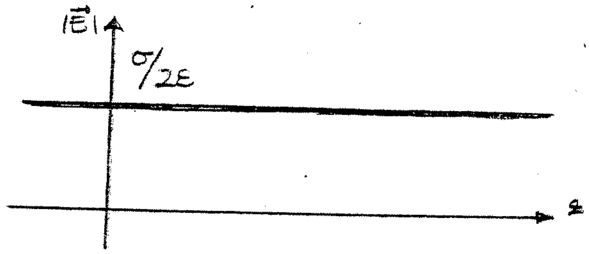
$= 2 \iint_{\text{tapa}} \vec{E}\, d\vec{S} = 2ES \quad (Wb)$

↖ superficie de la tapa del prisma

Por Gauss:

$$\frac{Q_T}{\varepsilon} = \iint \vec{E}\, d\vec{S} \Longrightarrow \frac{\sigma S}{\varepsilon} = 2ES \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \vec{u_z}}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon} \vec{u_z} , & z < 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon} \vec{u_z} , & z > 0 \end{cases}$$



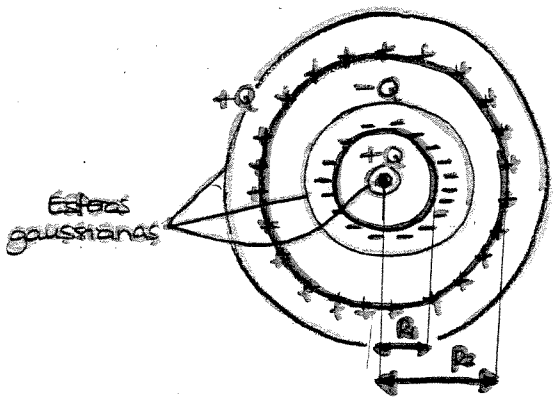
www.simplyjarod.com

Ejercicio 2

Una esfera conductora, descargada y de radio R_2, tiene un hueco de forma esférica concéntrica y de radio R_1. En el centro se sitúa una carga puntual $+Q$.

a) Si la esfera está aislada, ¿Cuál es la distribución de cargas que aparecen en ella?

b) Calcular el campo y el potencial eléctrico en las distintas regiones del espacio.



a) Descargada: carga neta nula

Aislada: no hay vía de carga o descarga ⟹ carga de

Calculamos $\vec{E}$ en las distintas zonas:

$\boxed{r < R_1}$

- $Q_T = Q$
- $\iint \vec{E}\,d\vec{S} = ES = E\,4\pi r^2 \Longrightarrow \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}\,\vec{u}_r$

$\boxed{R_1 < r < R_2}$

$\vec{E} = 0$ (por ser el interior de un conductor)

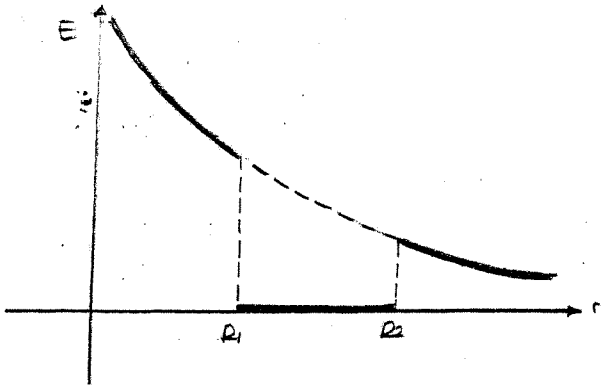
$\Longrightarrow \iint \vec{E}\,d\vec{S} = 0 \Longrightarrow$ (Gauss) $\Longrightarrow Q_T = 0$

$\boxed{r > R_2}$

- $Q_T = +Q - Q + Q = Q$
- $\iint \vec{E}\,d\vec{S} = E\,4\pi r^2 \Longrightarrow \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\vec{u}_r$

Uniendo los tres casos:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}\,\vec{u}_r, & r < R_1 \\ 0, & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon}\,\vec{u}_r, & r > R_2 \end{cases}$$



b) Calculamos el potencial. Para ello ponemos el origen de potenciales en el infinito, porque no hay carga. $V(r=\infty) = 0$

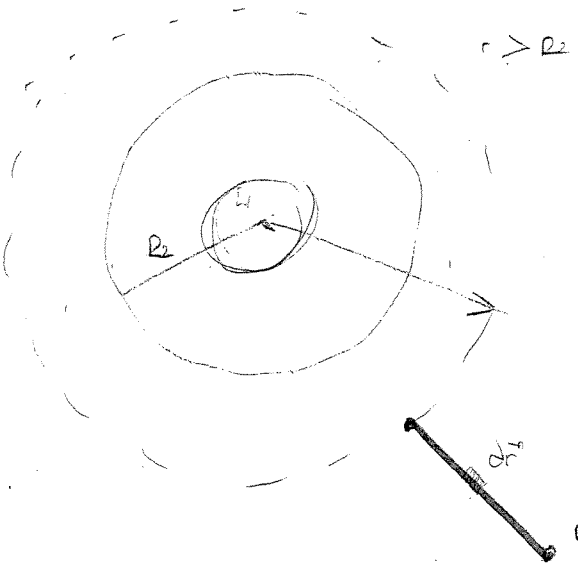
$$V(A) = -\int_{\text{origen}}^{A} \vec{E}\,d\vec{l}$$

$\boxed{r > R_2}$

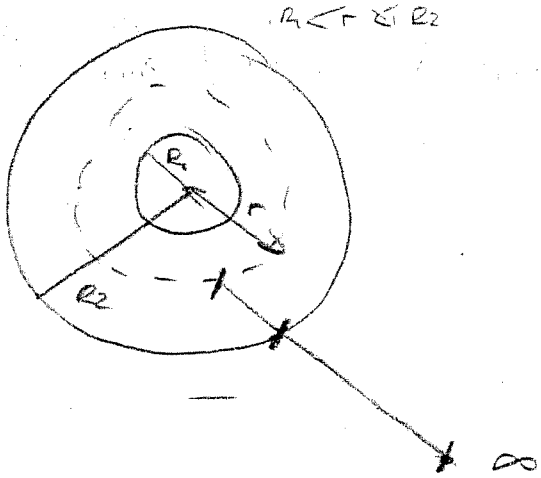
$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\,d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} E\,\vec{u}_r\,dr\,\vec{u}_r = -\int_{\infty}^{r} E\,dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

www.simplyjarod.com

$r > R_2$



$R_1 < r < R_2$



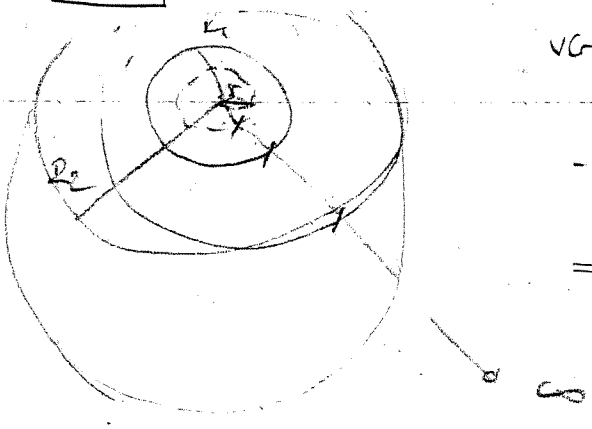
$$V(r) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{-1}{r} - \frac{-1}{\infty}\right) = \frac{Q}{4\pi r\varepsilon}$$

$R_1 < r < R_2$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\,d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r}E\,dr = -\int_{\infty}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr - \int_{R_2}^{r}0\,dr \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_2}$$

$r < R_1$

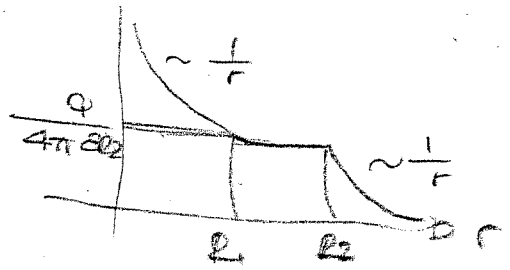


$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\,d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r}E\,dr = -\int_{\infty}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr + -\int_{R_2}^{R_1}0\,dr - \int_{R_1}^{r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r}\right)$$

Uniendo los tres casos:

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}, & r > R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R_2}, & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{r}\right), & r < R_1 \end{cases}$$



← El potencial en el interior de un conductor es siempre cte)

www.simplyjarod.com

Ejercicio 3

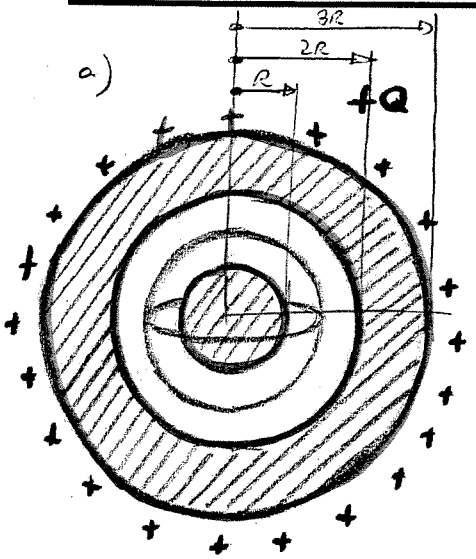
Una esfera conductora de radio R, descargada, se rodea de una corona esférica concéntrica de radios 2R y 3R, también conductora y con carga Q. Calcular:

a) El campo eléctrico en las distintas regiones del espacio.
b) El potencial eléctrico en las distintas regiones del espacio.

Si en estas condiciones se conecta la esfera interior a tierra. Calcular:

c) La nueva distribución de cargas que aparece sobre las esferas y los potenciales en las diferentes regiones del espacio.
d) El campo eléctrico en las diferentes regiones del espacio.
e) La variación de energía al conectar a tierra la esfera interior.

a)



conductor interior: Descargado y aislado

conductor exterior: Cargado y aislado

$r<R$

$\vec{E}=0$ (por ser el interior de un conductor).

$R<r<2R$

$Q=0 \Longrightarrow \left\| \vec{E}d\vec{S}=0 \right. \Longrightarrow \vec{E}=0$

$2R<r<3R$

$\vec{E}=0$ (porque estamos en el interior del segundo conductor)

$r>3R$

- $Q_T = Q$
- $\left\| \vec{E}d\vec{S} = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \right. \Longrightarrow \frac{Q}{\varepsilon} = E\,4\pi r^2 \Longrightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r$

Conclusión:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \;, & r < 3R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r \;, & r > 3R \end{cases}$$

b) Para calcular el potencial eléctrico situamos el origen de potencial en el infinito.

$r>3R$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} E\,dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

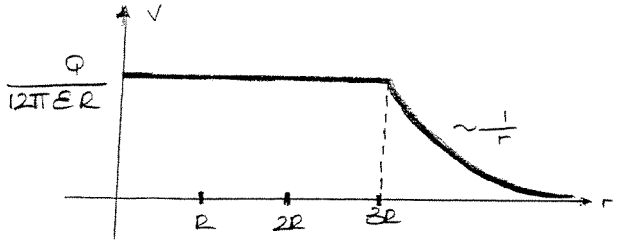
www.simplyjarod.com

$r < 3R$

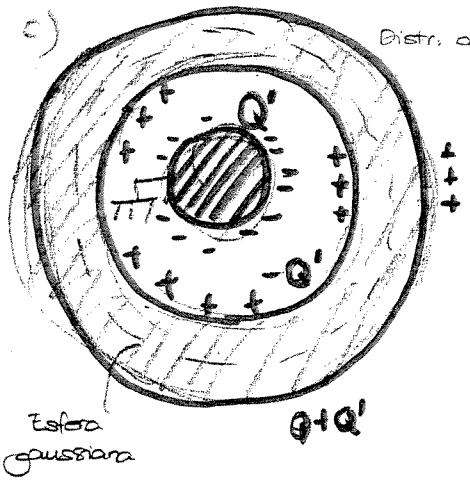
$$V(r) = -\int_{\infty}^{3R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr - \int_{3R}^{r} 0\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon 3R} = -\frac{Q}{12\pi\varepsilon R}$$

Expresamos el potencial como una función a trozos:

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{12\pi\varepsilon R}, & r \leq 3R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}, & r \geq 3R \end{cases}$$



c)



- Al conectar a tierra las cargas positivas se van
- Valor de Q' a determinar
- Como dentro de un conductor no hay campo sabemos que al meter una esfera gaussiana la carga que hay dentro es cero

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon} \Longrightarrow Q_T = 0$$

Forma de resolver la 2ª parte del problema

$V \leftarrow E \leftarrow Q'$

$E(Q') \rightarrow V(Q')$ opero con Q' como si fuera conocido y aplico que $V(r=R)=0$

$$V(r=R) = -\int_{\infty}^{R} E(Q')\,d\vec{r} = 0$$

↳ de aquí saco Q'

$Q' = f(Q)$

d) Campo eléctrico

$r < R$

$\vec{E} = 0$ (Por ser el interior de un conductor)

$V \leftarrow E \leftarrow Q'$

Para aplicar $V=0$ necesito y para saber E necesito

$R < r < 2R$

$$\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon} \Longrightarrow \dots \Longrightarrow \vec{E} = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon r^2}\,\vec{u}_r$$

$2R < r < 3R$

$\vec{E} = 0$ (Por ser el interior de un conductor)

$r > 3R$

$$\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon} \Longrightarrow \dots \Longrightarrow \vec{E} = \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon R}\,\vec{u}_r$$

Ahora para calcular Q' hacemos lo siguiente:

Sabemos que $V(r=R) = 0$

$$V(r=R) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\,d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} E\,dr = -\int_{\infty}^{3R} \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr - \int_{3R}^{2R} 0\,dr - \int_{2R}^{R} \frac{Q'}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr = 0$$

www.simplyjarod.com

$$\Longrightarrow V(r) = -\frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{3R} - \frac{Q'}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-1}{r}\right]_{2R}^{R} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon 3R} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{-1}{R} - \frac{-1}{2R}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{Q'}{3R} + \frac{Q}{3R} - \frac{Q'}{R} + \frac{Q'}{2R} = 0 \Longrightarrow \boxed{Q' = \frac{-2}{5}Q}$$

Sustituyendo el campo nos queda:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < R \\ \dfrac{-Q}{10\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r, & R < r < 2R \\ 0, & 2R < r < 3R \\ \dfrac{3Q}{20\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r, & r > 3R \end{cases}$$

e) Ahora calculamos el potencial:

$\boxed{r > 3R}$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\,d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r}E\,dr = -\int_{\infty}^{r}\frac{3Q}{20\pi\varepsilon r^2}\,dr = \frac{3Q}{20\pi\varepsilon r}$$

$\boxed{2R < r < 3R}$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{3R}\frac{3Q}{20\pi\varepsilon r^2}\,dr - \int_{3R}^{r}0\,dr = \frac{Q}{20\pi\varepsilon R}$$

$\boxed{R < r < 2R}$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{3R}\frac{3Q}{20\pi\varepsilon r^2}\,dr - \int_{3R}^{2R}0\,dr - \int_{2R}^{r}\frac{-Q}{10\pi\varepsilon r^2}\,dr = \frac{Q}{20\pi\varepsilon R} + \frac{Q}{10\pi\varepsilon}\left(\frac{-1}{2R} + \frac{1}{r}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{Q}{20\pi\varepsilon R} + \frac{-Q}{20\pi\varepsilon R} + \frac{Q}{10\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

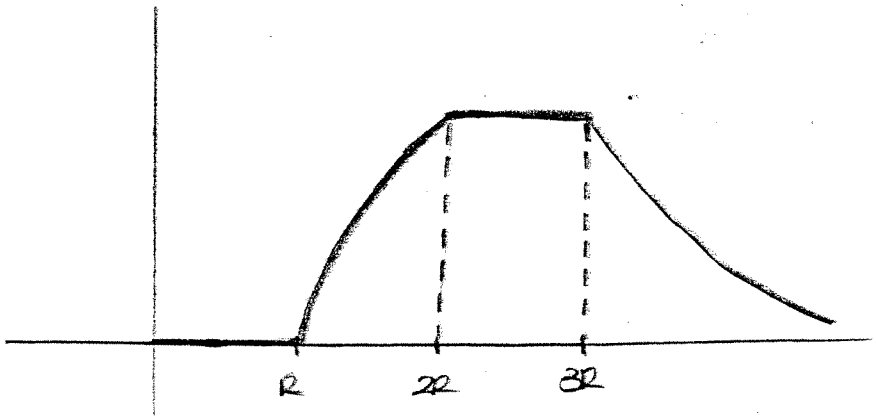
$\boxed{r < R}$

$V(r) = 0$ (Está directamente conectado a tierra)

Si unimos todos los trozos tenemos la función potencial:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \dfrac{Q}{10\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}\right), & R < r < 2R \\ \dfrac{Q}{20\pi\varepsilon R}, & 2R < r < 3R \\ \dfrac{3Q}{20\pi\varepsilon r}, & r > 3R \end{cases}$$

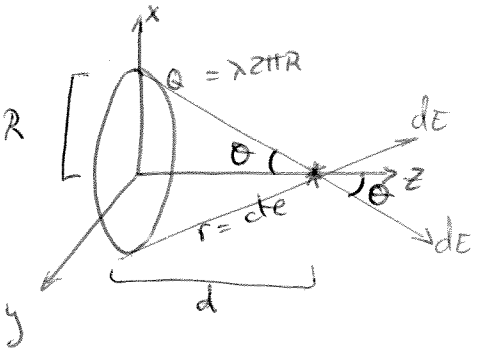
www.simplyjarod.com



www.simplyjarod.com

Ejercicio 4

Calcular el campo eléctrico y el potencial sobre el eje Z de un anillo circular de carga situado sobre el plano XY y centrado en el origen. El anillo tiene radio R y está cargado con una carga Q distribuida uniformemente.



Por simetría se anulan todas las componentes del campo excepto las $\vec{E}_z$

$$E_T = E_z = \int dE_z \qquad dE_z = dE\cos\theta$$

$$\begin{cases} dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon r^2} \\ \cos\theta = \dfrac{d}{r} = \dfrac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} \end{cases}$$

$$E_T = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon(R^2+d^2)} \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} =$$

$$= \frac{d}{4\pi\varepsilon(R^2+d^2)^{3/2}} \underbrace{\int dq}_{Q}$$

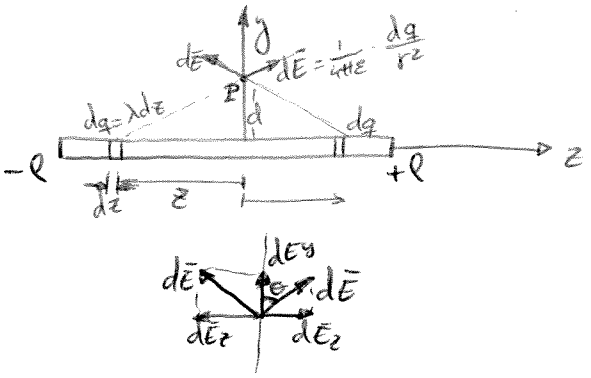
$$E_T = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon(R^2+d^2)^{3/2}}$$

www.simplyjarod.com

Ejercicio 6

Calcular el campo eléctrico sobre los puntos del eje Y creado por una distribución lineal de carga λ uniformemente distribuida a lo largo del eje Z, de longitud $2l$ y centrada en el origen.

Dato: $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$



$E_z = \int dE_z = 0$ (se anulan por simetría)

$E_T = E_y = \int dE_y$; $dE_y = dE\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{z^2+d^2}}$

$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon(z^2+d^2)}$

$E_T = E_y = \int dE_y = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon(z^2+d^2)} dz$

$dE_y = dE\cos\theta = \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon(z^2+d^2)^{3/2}} dz$

$E_y = \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon} \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{1}{(z^2+d^2)^{3/2}} dz = \frac{\lambda \cdot 2\ell}{4\pi\varepsilon \cdot d\sqrt{d^2+\ell^2}} = E_T$

$$\bar{E}_T = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{2\ell}{d\sqrt{d^2+\ell^2}} \bar{u}_y$$

www.simplyjarod.com

TEMA 10: CONDENSADORES. DIELÉCTRICOS

Ejercicio 1

Un condensador de armaduras planas de superficie 100 cm^2, separadas 4 mm, se carga hasta adquirir un potencial entre sus armaduras de $V_0 = 1200\ V$. Se pide calcular:

a) El valor de la capacidad, la carga y la d.p.p entre las armaduras.

Una vez separado de la fuente de carga, se llena el espacio entre las armaduras de un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 6$. Calcular:

b) El nuevo valor de la capacidad, la carga y la d.p.p.

Suponga ahora que se introduce el dieléctrico pero sin desconectar la batería. Calcular:

c) El nuevo valor de la capacidad, la carga y la d.p.p.

$V_0 = 1200\ V$

$S = 100\ cm^2 = 10^{-2}\ m^2$

$d = 4\ mm = 0{,}004\ m$

a) $C = \frac{Q}{V}$ condensador plano: $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-3}} = 2'21\cdot 10^{-11}\ F$

$Q = CV = 2{,}21\cdot 10^{-11}\cdot 1200 = 26{,}52\cdot 10^{-9}\ C$

$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9$; $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}$

b) Proceso a carga constante, $\varepsilon_r = 6$

$Q = Q_0 = 26'52\cdot 10^{-9}\ C$

$C = \varepsilon_r \cdot C_0 = 6\cdot 2'21\cdot 10^{-11} = 13'26\cdot 10^{-11}\ F$

$C = \frac{Q}{V}$; $V = \frac{Q}{C} = \frac{26'52\cdot 10^{-9}}{13'26\cdot 10^{-11}} = 200\ V$

c) Proceso a potencial constante; $\varepsilon_r = 6$

$V = V_0 = 1200\ V$

$C = \varepsilon_r \cdot C_0 = 6\cdot 2'21\cdot 10^{-11} = 13'26\cdot 10^{-11}\ F$

$C = \frac{Q}{V}$; $Q = C\cdot V = 13'26\cdot 10^{-11}\cdot 1200 = 159'12\cdot 10^{-9}\ C$

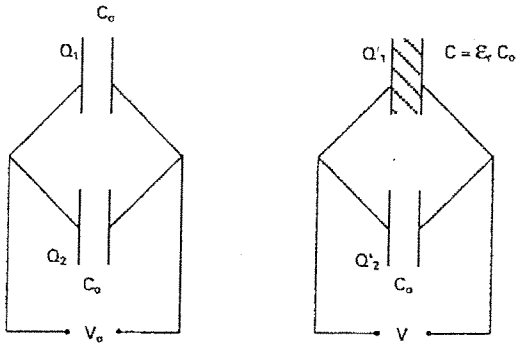
www.simplyjarod.com

Ejercicio 2

igual que Jun. 95

Dos condensadores idénticos de capacidad C_0 se conectan en paralelo y se cargan hasta una tensión V_0, en ese momento se desconectan de la fuente de carga. A continuación se introduce en uno de ellos un dieléctrico de permitividad relativa ε_r que llena el espacio entre armaduras. Calcular:

a) La carga de cada condensador antes y después de introducir el dieléctrico.
b) La tensión después de introducir el dieléctrico.
c) La energía almacenada en cada condensador y por el conjunto antes de introducir el dieléctrico.
d) La energía almacenada por cada condensador y por el conjunto después de introducir el dieléctrico.



a, b) Proceso a carga constante ⇒ Carga del sistema permanece constante.

* Antes de introducir el dieléctrico: $Q_T = Q_1 + Q_2$
* Después de introducir el dieléctrico: $Q_T' = Q_1' + Q_2'$

$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \quad (1)$$

En un condensador: $C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C \cdot V$

Condensador ①: $Q_1 = C_0 \cdot V_0$ ⟶ Después: $Q_1' = \varepsilon_r \cdot C_0 \cdot V$

Condensador ②: $Q_2 = C_0 V_0$ ⟶ Después: $Q_2' = C_0 \cdot V$

Entrando en (1): $2 C_0 V_0 = \varepsilon_r C_0 V + C_0 V \Rightarrow$

$$\boxed{V = \frac{2}{1+\varepsilon_r} V_0}$$

Carga de cada uno:

	ANTES	DESP.
$Q_1 =$	$C_0 V_0$	$\varepsilon_r C_0 \frac{2V_0}{1+\varepsilon_r}$
$Q_2 =$	$C_0 V_0$	$C_0 \frac{2V_0}{1+\varepsilon_r}$

www.simplyjarod.com

c) Energía almacenada por cada una y por el conjunto antes del dieléctrico:

$$W_{C_1} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

$$W_{C_2} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

$$W_T = W_{C_1} + W_{C_2} = C_0 V_0^2$$

d) Lo mismo después.

$$W'_{C_1} = \frac{1}{2} Q'_1 V' = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} 2 C_0 V_0 \frac{2 V_0}{\varepsilon_r + 1} = \frac{2 \varepsilon_r}{(\varepsilon_r + 1)^2} C_0 V_0^2$$

$$W'_{C_2} = \frac{1}{2} Q'_2 V' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(\varepsilon_r + 1)^2} \cdot C_0 V_0^2$$

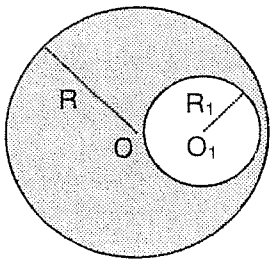
$$W_T = W'_1 + W'_2 = \frac{2 C_0 V_0^2}{\varepsilon_r + 1}$$

www.simplyjarod.com

TEMA 12: MAGNETOSTÁTICA

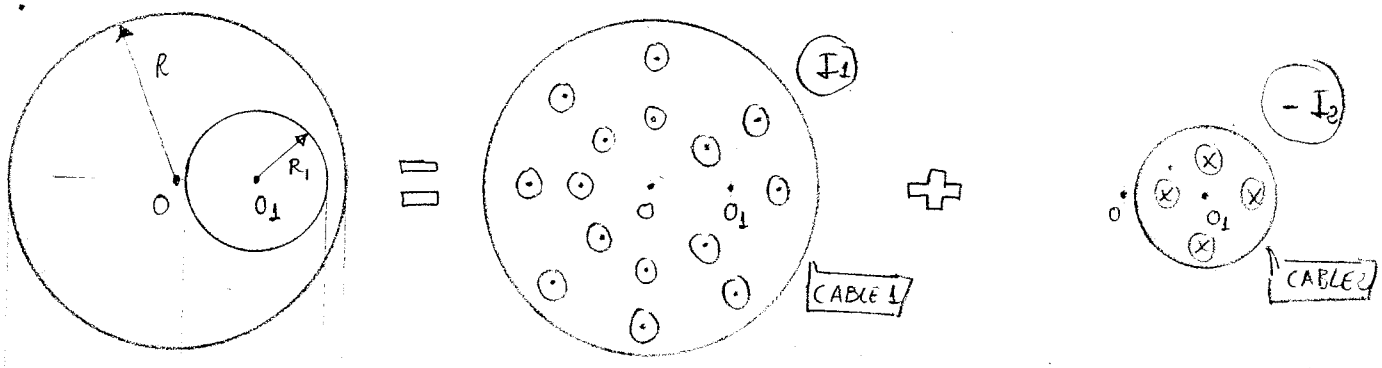
Ejercicio 1

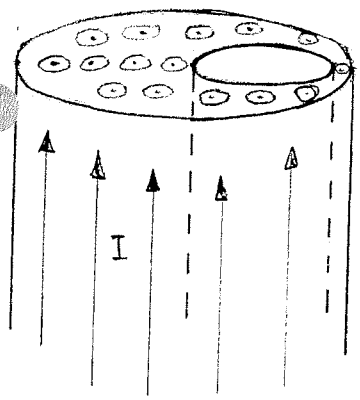
La figura representa la sección recta de un conductor cilíndrico indefinido. Se hace circular una corriente eléctrica constante de intensidad I distribuida uniformemente por la sección del conductor. Calcular la intensidad del campo magnético en el interior de la cavidad. (Dar el resultado en forma vectorial).



⇨ Estrategia: para abordar el problema de forma cómoda, diremos que este conductor es equivalente a componer dos: uno de sección circular R por el que circula una intensidad I_1 más otro de sección circular R_1 y centro O_1 por el que circula una intensidad contraria $-I_2$

Esta estrategia es muy frecuente cuando tenemos huecos. (ver también SEPT. 2002)



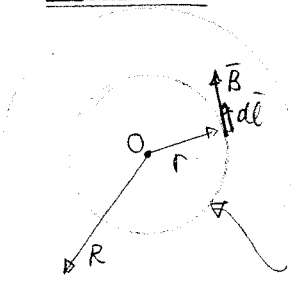


La suma de ambos nos da una sección con la intensidad del enunciado I

La densidad volumétrica es constante y tiene el valor que teníamos en la sección original (con hueco):

$$\lambda_V = \frac{I}{\text{Área}} = \frac{I}{\pi R^2 - \pi R_1^2} = \frac{I}{\pi(R^2 - R_1^2)}$$

CABLE 1



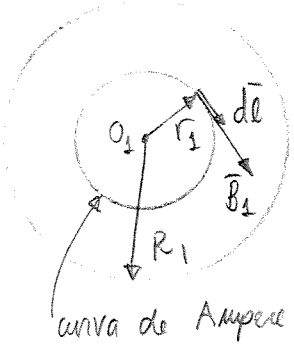
$$\oint_C \bar{B}\, d\bar{l} = \mu I_{TOT} \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu \cdot \underbrace{\frac{I}{\pi(R^2 - R_1^2)} \cdot \pi r^2}_{I_{TOT}}$$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi(R^2 - R_1^2)} \cdot r$$

www.simplyjarod.com

CABLE 2

Nota: el campo creado por este va al revés, puesto que la intensidad también va al revés

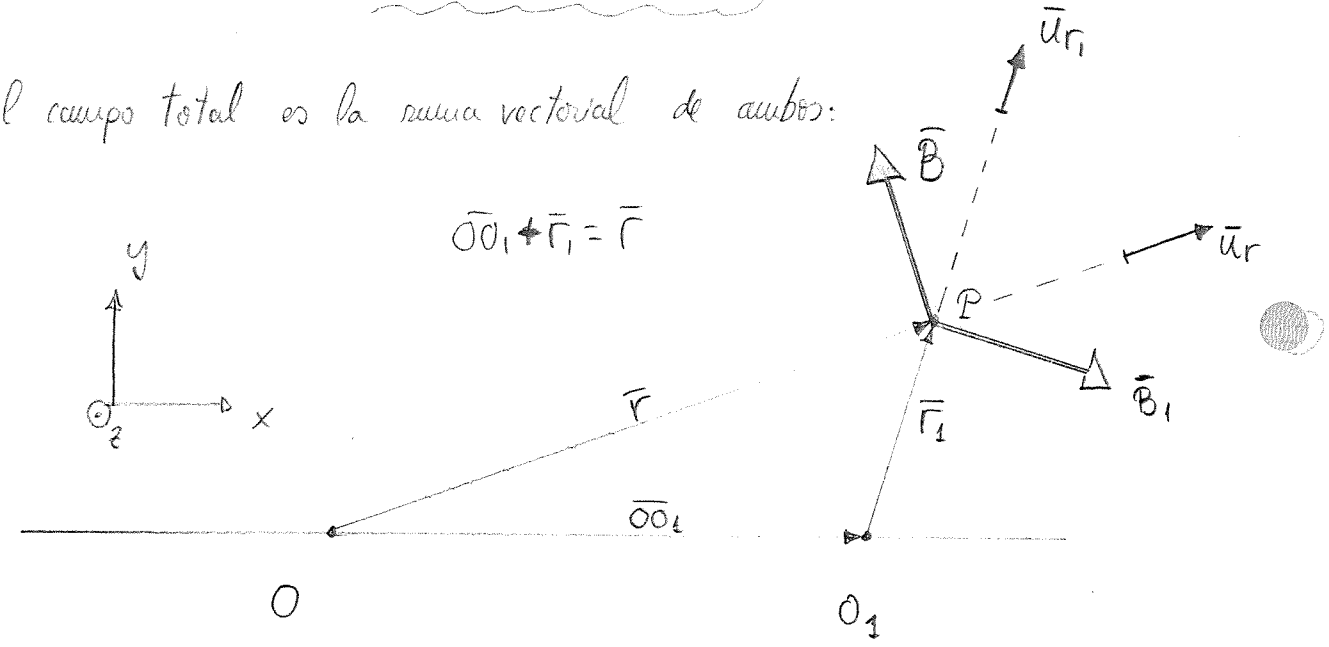


$$\oint_{\Gamma_1} \bar{B}_1 \cdot d\bar{l} = \mu I_{TOT} \Rightarrow B_1 \cdot 2\pi r_1 = \mu \frac{I}{\pi(R^2 - R_1^2)} \pi r_1^2$$

$$\boxed{B_1 = \frac{\mu I}{2\pi(R^2 - R_1^2)} \cdot r_1}$$

El campo total es la suma vectorial de ambos:

$$\bar{OO_1} + \bar{r}_1 = \bar{r}$$



* La dirección del campo $\bar{B}$ viene dada por: $\bar{u}_z \times \bar{u}_r$ (vectores unitarios)

* La dirección del campo $\bar{B}_1$ viene dada por: $\bar{u}_z \times -\bar{u}_{r_1}$ (vectores unitarios)

Con lo que:

$$\bar{B}_{TOT} = \bar{B} + \bar{B}_1 = \frac{\mu I}{2\pi(R^2 - R_1^2)} r\,(\bar{u}_z \times \bar{u}_r) + \frac{\mu I}{2\pi(R^2 - R_1^2)} r_1\,(\bar{u}_z \times -\bar{u}_{r_1}) =$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi(R^2 - R_1^2)} \left[r(\bar{u}_z \times \bar{u}_r) + r_1(\bar{u}_z \times -\bar{u}_{r_1}) \right] = \frac{\mu I}{2\pi(R^2 - R_1^2)} \left[(\bar{u}_z \times \underbrace{r\bar{u}_r}_{\bar{r}}) + (\bar{u}_z \times -\underbrace{r_1\bar{u}_{r_1}}_{\bar{r}_1}) \right] =$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi(R^2 - R_1^2)} \cdot \left[\bar{u}_z \times \underbrace{(\bar{r} - \bar{r}_1)}_{\bar{OO_1}} \right]$$

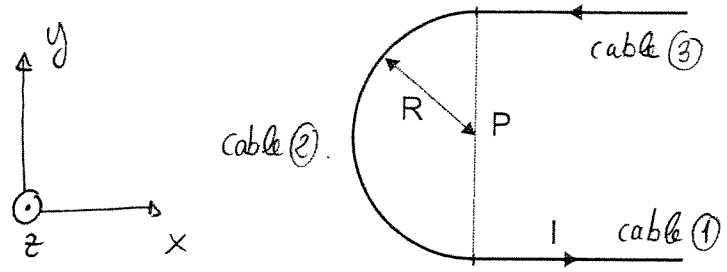
$$\boxed{\bar{B}_{TOT} = \frac{\mu I}{2\pi(R^2 - R_1^2)} \cdot \bar{u}_z \times \bar{OO_1}}$$

$\Rightarrow$ Campo constante en todo el hueco.

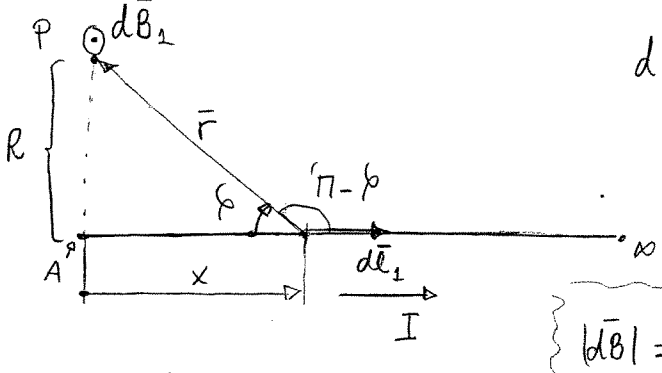
www.simplyjarod.com

Ejercicio 2

Un hilo conductor de gran longitud se curva en forma de horquilla, como se muestra en la figura. Calcular la intensidad del campo magnético en el centro P de la semicircunferencia, si circula una corriente de intensidad *I*.



CAMPO CREADO POR CABLE 1 ¡OJO! hilo semi-indefinido ⇒ aportaciones infinit.



$$d\bar{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,d\bar{l}\times\bar{r}}{r^3}$$

$$|d\bar{B}| = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I\,dl\,.\,r\,\mathrm{Sen}(\pi-\varphi)}{r^3}$$ (dl = dx, Sen(π−φ) = Sen φ)

$$\boxed{|d\bar{B}| = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I.\mathrm{Sen}\varphi}{r^2}\,dx}$$

Lo dejamos todo en función de φ.

- $r.\mathrm{Sen}\varphi = R \rightarrow r = \frac{R}{\mathrm{Sen}\varphi}$
- $tg\varphi = \frac{R}{x} \rightarrow x = \frac{R}{tg\varphi} = \frac{R\cos\varphi}{\mathrm{Sen}\varphi}$ → Diferencio:

$$dx = R.\frac{-\mathrm{Sen}\varphi.\mathrm{Sen}\varphi - \cos\varphi.\cos\varphi}{\mathrm{Sen}^2\varphi}\,d\varphi = \frac{-R\,(\underbrace{\mathrm{Sen}^2\varphi+\cos^2\varphi}_{1})}{\mathrm{Sen}^2\varphi}\,d\varphi$$

$$dx = \frac{-R}{\mathrm{Sen}^2\varphi}\,d\varphi$$

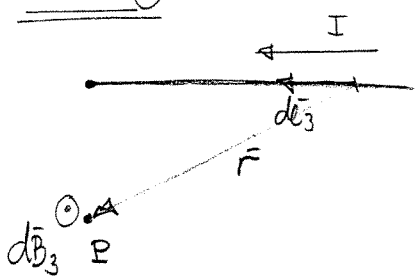
Con lo que: $$|d\bar{B}| = \frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{I.\mathrm{Sen}\varphi}{R^2/\mathrm{Sen}^2\varphi}\cdot\frac{-R}{\mathrm{Sen}^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\mu I}{4\pi R}(-)\mathrm{Sen}\varphi\,d\varphi$$

$$|\bar{B}| = \int_{cable}|d\bar{B}| = \int_{A=\pi/2}^{\infty=0}\frac{\mu I}{4\pi R}(-\mathrm{Sen}\varphi)\,d\varphi = \frac{\mu I}{4\pi R}\cos\varphi\Big]_{\pi/2}^{0} = \frac{\mu I}{4\pi R}$$

www.simplyjarod.com

vectorialmente: $\boxed{\bar{B}_1 = \frac{\mu I}{4\pi R}\,\bar{u}_z}$

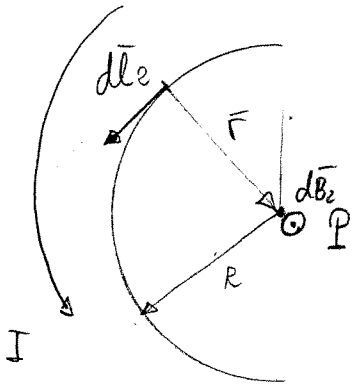
CABLE (3)



Lleva exactamente la misma dirección y sentido de el creado por el cable (1) y como es geométricamente idéntico:

$$\boxed{\bar{B}_3 = \frac{\mu I}{4\pi R}\,\bar{u}_z}$$

CABLE (2)



$$d\bar{B}_2 = \frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{I\,d\bar{l}_2 \times \bar{r}}{r^3}$$

$$|d\bar{B}_2| = \frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl_2 \cdot R\,\mathrm{Sen}\,90}{R^3} = \frac{\mu I}{4\pi R^2}\,dl_2$$

$$|\bar{B}_2| = \int_{\text{cable}\,(2)} |d\bar{B}_2| = \int_{\text{cable}(2)} \frac{\mu I}{4\pi R^2}\,dl_2 = \frac{\mu I}{4\pi R^2}\left(\int_{\text{cable}\,(2)} dl_2\right)$$

$l_2 = \pi \cdot R$

$$|\bar{B}_2| = \frac{\mu I}{4R}$$

vectorialmente: $\boxed{\bar{B}_2 = \frac{\mu I}{4R}\,\bar{u}_z}$

Con lo que Sumando los tres

$$\bar{B}_{TOT} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3 = \left(\frac{\mu I}{4R\pi} + \frac{\mu I}{4R} + \frac{\mu I}{4R\pi}\right)\bar{u}_z = \frac{\mu I}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1 + \frac{1}{\pi}\right)\bar{u}_z$$

$$\boxed{\bar{B}_{TOT} = \frac{\mu I}{4R}\left(\frac{2}{\pi} + 1\right)\bar{u}_z}$$

www.simplyjarod.com

FÍSICA 1
Problemas de examen

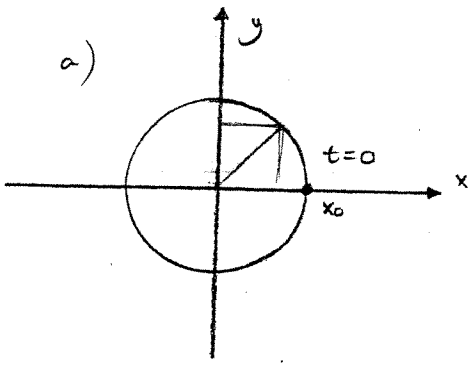
www.simplyjarod.com

FÍSICA 1
Mecánica

1. Un móvil se desplaza en el plano XY siguiendo una trayectoria circular. Si su coordenada x en función del tiempo es: $x = x_0 \cos(kt^2)$ determinar, **deduciendo todas las expresiones utilizadas:**

a) La coordenada y en función del tiempo y su velocidad.
b) El vector aceleración y sus componentes tangencial y normal a la trayectoria.
c) Demostrar a partir de la componente normal de la aceleración que el radio del círculo es x_0.

a)



$x(t) = x_0 \cdot \cos(kt^2)$

$x(t=0) = x_0 \cdot \cos 0 = x_0$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = x_0^2 \Longrightarrow y = \sqrt{x_0^2 - x^2} =$

$= \sqrt{x_0^2 - x_0^2 \cos^2(kt^2)} = \sqrt{x_0^2 (1 - \cos^2(kt^2))} =$

$= \sqrt{x_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2(kt^2)} = x_0 \cdot \operatorname{sen}(kt^2)$

$\Longrightarrow \boxed{y(t) = x_0 \operatorname{sen}(kt^2)}$

Entonces:

$\vec{r} = x_0 \cos(kt^2)\vec{u_x} + x_0 \operatorname{sen}(kt^2)\vec{u_y} = (x_0 \cos(kt^2), x_0 \operatorname{sen}(kt^2))$

$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} = \boxed{(-2kt\, x_0 \operatorname{sen}(kt^2), 2kt\, x_0 \cos(kt^2))}$ (m/s)

$|\vec{v}| = \sqrt{(2kt x_0)^2 (\operatorname{sen}^2(kt^2) + \cos^2(kt^2))} = 2kt x_0$ (m/s)

b) Aceleración

$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} = -2kx_0 \operatorname{sen}(kt^2) - 2kt\, x_0 \cos(kt^2) \cdot 2kt,\ 2kx_0 \cos(kt^2) - 2kt\, x_0 \operatorname{sen}(kt^2))$

$= \boxed{(-2kx_0 \operatorname{sen}(kt^2) - 4k^2t^2 x_0 \cos(kt^2),\ 2kx_0 \cos(kt^2) - 4k^2t^2 x_0 \operatorname{sen}(kt^2))}$

$|\vec{a}|^2 = (-2kx_0 \operatorname{sen}(kt^2) - 4k^2t^2 x_0 \cos(kt^2))^2 + (2kx_0 \cos(kt^2) - 4k^2t^2 x_0 \operatorname{sen}(kt^2))^2$

$= 4k^2 x_0^2 \operatorname{sen}^2(kt^2) + 16k^4t^4 x_0^2 \cos^2(kt^2) + 2(2kx_0 \operatorname{sen}(kt^2))(4k^2t^2 x_0 \cos(kt^2)) +$

$+ 4k^2 x_0^2 \cos^2(kt^2) + 16k^4t^2 x_0 \operatorname{sen}^2(kt^2) - 2(2kx_0 \cos(kt^2))(4k^2t^2 x_0 \operatorname{sen}(kt^2))$

$= 4k^2 x_0^2 + 16k^4 t^4 x_0^2 k^4$

$\Longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{4k^2 x_0^2 (1 + 4k^2t^4)} = 2kx_0 \sqrt{1 + 4k^2t^4}$

www.simplyjarod.com

$$\boxed{a_t} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt}(2kt x_0) = \boxed{2kx_0} \ (m/s^2)$$

$$\vec{a_t} = 2kx_0 \cdot \vec{u_t} \quad (m/s^2)$$

$$\Longrightarrow a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Longrightarrow \boxed{a_n} = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{\cancel{4k^2x_0} + 16k^4t^4x_0^2 - \cancel{4k^2x_0}} =$$

$$= \sqrt{16k^4t^4x_0^2} = \boxed{4k^2t^2x_0} \quad (m/s^2)$$

$$\vec{a_n} = 4k^2t^2x_0 \ \vec{u_n} \quad (m/s^2)$$

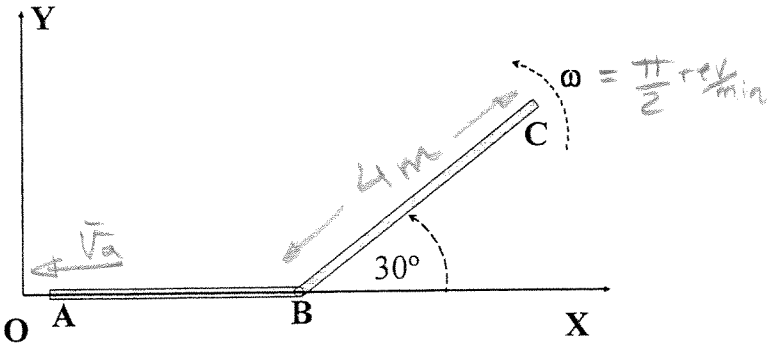
a) $\boxed{\rho} = \dfrac{|\vec{v}|^2}{a_n} \Longrightarrow \rho = \dfrac{(2kt x_0)^2}{4k^2t^2x_0} = \dfrac{4k^2t^2x_0^2}{4k^2t^2x_0} = \boxed{x_0}$

↑ Radio de curvatura de una circunferencia. (cte)

www.simplyjarod.com

SEPTIEMBRE 2007

1.- Una varilla AB lleva articulada en el extremo B otra varilla BC, de 4 m de longitud, como indica la figura. La primera se mueve horizontalmente con velocidad v_A de 3 m/s hacia el origen de coordenadas O, mientras la segunda gira con velocidad angular $\omega = \pi/2$ revoluciones/minuto en el sentido indicado en la figura. Cuando el ángulo que forma la varilla con la horizontal es de 30°, calcular las componentes cartesianas de la velocidad del extremo C de la varilla.



Mov. arrastre → traslación varilla AB

Mov. relativo → giro BC (respecto de AB)

Mov. arr

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = -3\,\vec{u}_x \ m/s$$

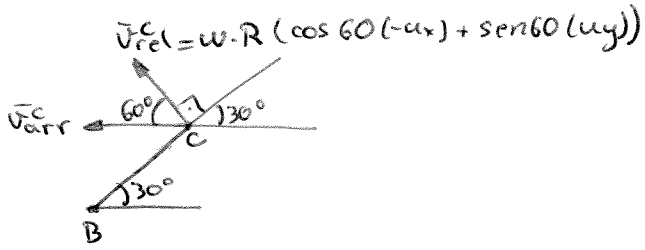
Mov. rel

$$\omega = \frac{\pi}{2}\frac{rev}{min}\cdot\frac{2\pi\,rad}{1\,rev}\cdot\frac{1\,min}{60s} = \frac{\pi^2}{60}\ rad/s$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}^{\,c}_{arr} + \vec{v}^{\,c}_{rel}$$

$$\vec{v}^{\,c}_{arr} = -3\,\vec{u}_x \ m/s$$

$$\vec{v}^{\,c}_{rel} = \omega R\left(\frac{1}{2}(-u_x) + \frac{\sqrt{3}}{2}u_y\right)$$



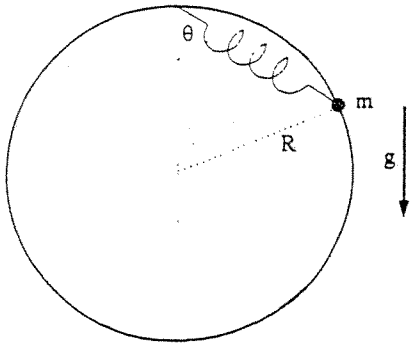
$$\vec{v}_C = -3{,}329\,\vec{u}_x + 0{,}57\,\vec{u}_y$$

www.simplyjarod.com

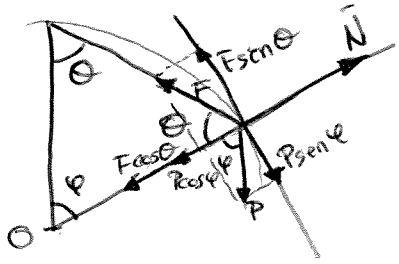
FEBRERO 1996

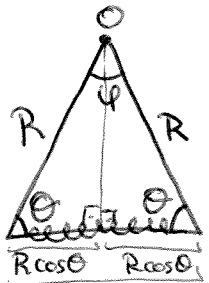
1. Una partícula de masa **m = 5kg** está unida al extremo de un resorte de constante **k = 200 N/m**. La partícula está obligada a moverse sobre un carril circular de radio **R = 0.5 m**, en un plano vertical. El otro extremo del resorte está sujeto al punto más alto del carril. Sabiendo que la longitud natural del resorte es l_0 **= 0.25 m** y que la aceleración de la gravedad es **g = 10 m s^{-2}**, calcular:

   a) En el equilibrio, el ángulo que forma el resorte con la vertical (θ).
   b) Fuerza que ejerce el carril sobre la partícula en la posición de equilibrio.
   c) Si se considera como origen de energía potencial gravitatoria el punto más bajo del carril, ¿cuál sería la energía potencial total de la partícula en una cierta posición θ?
   d) Si la partícula se lleva hasta la posición θ = 45° y se suelta, ¿cuál será la velocidad máxima que alcanza?



a) θ en la posición de equilibrio $\Rightarrow \Sigma \vec{F} = \vec{0}$





$\varphi = \pi - 2\theta$

$l_{final} = 2R\cos\theta = 2\cdot\frac{1}{2}\cos\theta = \cos\theta$

$x = 2R\cos\theta - \frac{1}{4}$

$x = \cos\theta - \frac{1}{4}$

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F\,sen\theta = P\,sen\varphi$

$K x\, sen\theta = mg\, sen\varphi$

$200\cdot(\cos\theta - \frac{1}{4})\,sen\theta = 50\, sen\varphi$

$(4\cos\theta - 1)\,sen\theta = sen\varphi$

$4\cos\theta\, sen\theta - sen\theta = sen\varphi$

$2\cdot 2\cos\theta\, sen\theta - sen\theta = sen\varphi$

$4x\, sen\theta = sen\varphi$

$4x\, sen\theta = sen(\pi - 2\theta)$

$4x\, sen\theta = sen\pi\cos 2\theta - \cos\pi\, sen 2\theta$ (−1; $sen\pi = 0$)

$4x\, sen\theta = sen 2\theta$

$4x\, sen\theta = 2\, sen\theta\cos\theta$

$2x = \cos\theta$

$2(\cos\theta - \frac{1}{4}) = \cos\theta$

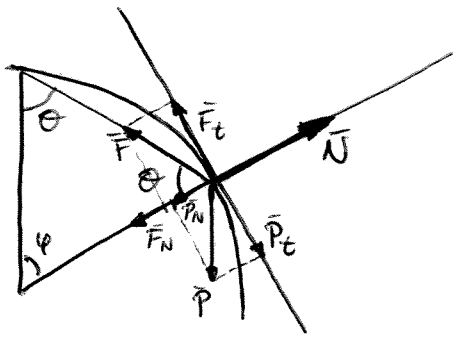
$2\cos\theta - \frac{1}{2} = \cos\theta$

$\frac{1}{2} = \cos\theta;\ \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}\ rad}$

$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha\, sen\beta$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha\, sen\beta$
$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - \cos\alpha\, sen\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha\, sen\beta$
$sen\ 2\alpha = 2\, sen\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

www.simplyjarod.com

b) Normal



$$F = k \cdot x = 200\left(\cos\theta - \tfrac{1}{4}\right) =$$
$$= 200\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) = 200 \cdot \tfrac{1}{4} = 50\,N$$
$$P = mg = 50\ kg\,m/s^2 = 50\,N$$

Equilibrio $\Rightarrow \sum \bar{F} = \bar{0}$

$$|\bar{F}_N| + |\bar{P}_N| = |\bar{N}|$$

$$F_N = F \cdot \cos\theta = F/2$$
$$P_N = P \cdot \cos\varphi = P\cos(\pi - 2\theta) =$$
$$= P \cdot \cos\left(\pi - \tfrac{2\pi}{3}\right) = P\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) =$$
$$= P \cdot 1/2$$

$$\left.\begin{aligned} F_N &= F/2 \\ P_N &= P/2 \end{aligned}\right\} \quad F_N + P_N = N$$

$$\left.\begin{aligned} F_N &= F/2 = \tfrac{50}{2} = 25\,N \\ P_N &= P/2 = \tfrac{50}{2} = 25\,N \end{aligned}\right\} \quad \boxed{N = 50\,N}$$

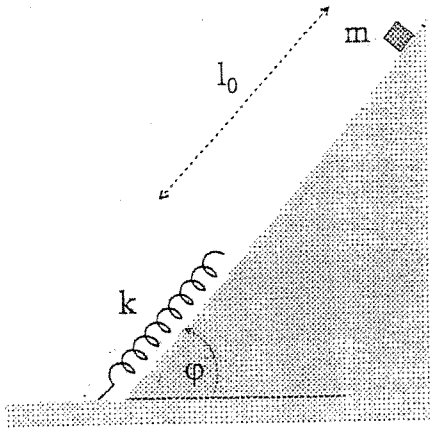
en sentido hacia el exterior de la circunferenc

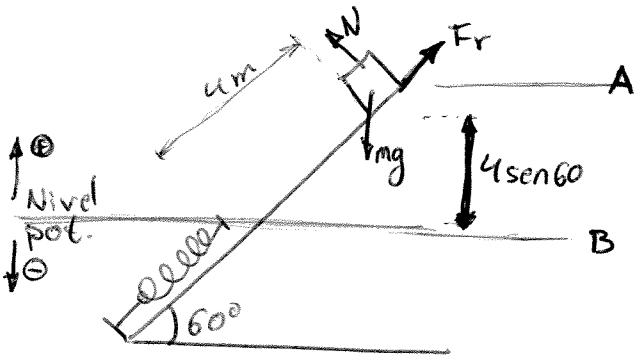
www.simplyjarod.com

FEBRERO 2003

1. Un paquete de masa m = 2 kg se encuentra inicialmente en reposo sobre un plano inclinado de pendiente $\varphi = 60°$, a una distancia $l_0 = 4$ m del extremo de un resorte de constante elástica k = 100 N/m, sujeto a la base del plano. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el paquete y el plano es $\mu = 0{,}2$ calcular:

a) Velocidad que el paquete tiene justo antes de contactar con el resorte.
b) Máxima comprensión del resorte.
c) Al rebotar el paquete, ¿a qué distancia llega de su posición inicial?





a) $W_{FNC}_{A\to B} = (Ecin_B + Epot_B) - (Ecin_A + Epot_A)$ (Epot_B = 0, Ecin_A = 0)

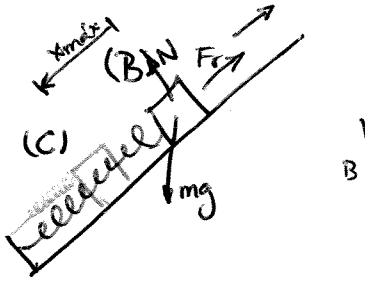
$W_{FNC}_{A\to B} = Ecin_B - Epot_A = -Fr \cdot S = -\mu m g \cos 60° \cdot 4$

$$\begin{cases} Epot_A = m g h_A = m g 4 \operatorname{sen} 60° \\ Ecin_B = \frac{1}{2} m V_B^2 = \end{cases}$$

$W_{FNC}_{A\to B} = \frac{1}{2} m V_B^2 - mg 4 \operatorname{sen} 60° = -\mu m g \cos 60° \cdot 4$

$$V_B = \sqrt{2[g l_0 \operatorname{sen} 60° - \mu g \cos 60° l_0]} = 7'74 \text{ m/s}$$

b)



conservativas: $\begin{cases} E_{P\,(C)}^{muelle} = \frac{1}{2} K x_{max}^2 \\ E_{P\,(B)}^{muelle} = \frac{1}{2} K x^2 = 0 \end{cases}$

$W_{FNC}_{B\to C} = Emec_C - Emec_B$

$(Ecin_C + Ep_{mg}^C + Ep_{muelle}^C) - (Ecin_B + Epot_{peso}^B + Epot_{muelle}^B)$

www.simplyjarod.com

$$W_{FNC} = -F_r \cdot x_{máx} = -\mu N x_{máx} = -\mu \; mg\cos\varphi \, x_{máx}$$

$$E_{cin}^{C} = 0$$

$$E_{pot}^{C} = E_{pot\,peso}^{C} + E_{pot\,muelle}^{C} = mg(-x_{máx}\cdot \operatorname{sen}60°) + \frac{1}{2}k x_{máx}^2$$

$$E_{cin}^{B} = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$E_{pot}^{B} = E_{pot\,peso}^{B} + E_{pot\,muelle}^{B} = mgh_B^{0} + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^{0} = 0 + 0 = 0$$

$$W_{FNC}^{B\to C} = E_{mec\,f} - E_{mec\,0} = -\mu mg\cos 60\, x_{máx} =$$

$$= -mg\, x_{máx} \operatorname{sen}60 + \frac{1}{2}k x_{máx}^2 - \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\frac{1}{2}k x_{máx}^2 + (\mu\cos 60 - \operatorname{sen}60)\, mg\, x_{máx} - \frac{1}{2} m v_B^2 = 0$$

$$50x^2 - 15'014x - 59'91 = 0$$

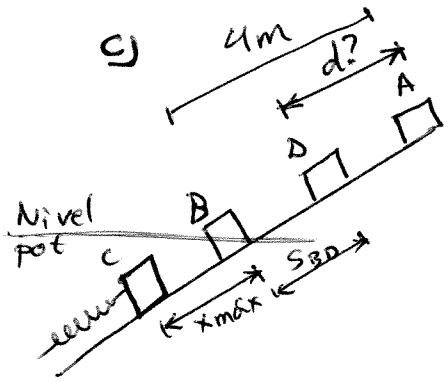
$$x_1 = -0{,}95 \leftarrow \text{NO}$$

$$x_2 = +1'25$$

como supusimos antes $x_{máx}$ el valor de x_1 (negativo) implica que el muelle no se comprime, sino que se alarga, es decir $-x_{máx}$

$$\boxed{x_{máx} = 1'25\ m}$$

c)



$$W_{FNC} = E_{mec\,f} - E_{mec\,0}$$

$$W_{FNC} = -\mu mg\cos\varphi \underbrace{(x_{máx} + s_{BD})}_{s_{CD}}$$

$$E_{cin}^{C} = 0$$

$$E_{cin}^{D} = 0$$

$$E_{pot}^{C} = mgh = mg(-x_{máx}\operatorname{sen}60) + \frac{1}{2}k x_{max}^2$$

$$E_{pot}^{D} = mgh = mg(s_{BD}\operatorname{sen}60°) + \frac{1}{2}k 0^2$$

$$-2'45 - 1'96 s_{BD} = 16'97 s_{BD} - 56'91$$

$$s_{BD} = 2'87\ m$$

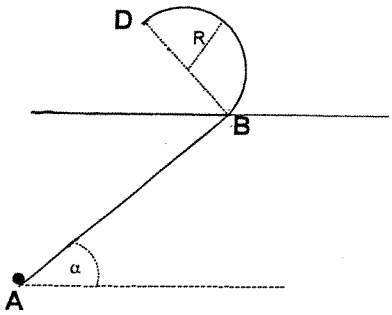
$$d = 1'13\ m$$

www.simplyjarod.com

ETSI TELECOMUNICACIÓN - EXAMEN FÍSICA 1

FEBRERO 2007

1.- Un punto material de masa 2 kg sale desde A con una velocidad inicial de 25 m/s y asciende por una guía inclinada un ángulo de 30º, de 2 m de longitud y sin rozamiento, como indica la figura. A partir de B la guía tiene forma semicircular de 1 metro de radio. Obtener:



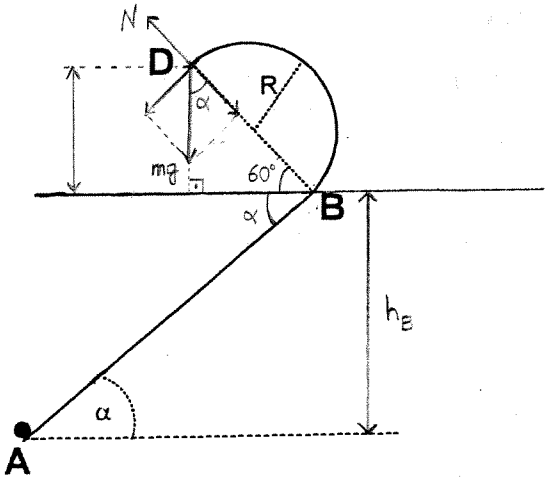
a) El vector cantidad de movimiento en B.
b) La velocidad en D.
c) La reacción de la guía en D.

Solución:

Lo primero obtenemos la altura de los puntos B y D utilizando trigonometría:

$$h_B = 2\,\text{sen}\,30^\circ = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$h_D = h_B + 2R\,\text{sen}\,60^\circ = 1 + 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3} = 2{,}732$$



a) Obtenemos la velocidad en B por energías:

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow \frac{1}{2}v_A^2 = gh_B + \frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_A^2 = 2gh_B + v_B^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_A^2 = 2gh_B + v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gh_B} = \sqrt{25^2 - 2\cdot 9{,}8\cdot 1} = 24{,}6 \text{ m/s}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}_B = m(v_B\cos\alpha\,\vec{u}_x + v_B\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{u}_y) = 2\cdot(24{,}6\cos 30^\circ\,\vec{u}_x + v_B\,\text{sen}\,30^\circ\,\vec{u}_y) = 42{,}6\vec{u}_x + 24{,}6\vec{u}_y \text{ kg m/s}$$

b) Obtenemos la velocidad en D también por energías:

$$E_{mA} = E_{mD} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_D + \frac{1}{2}mv_D^2 \Rightarrow \frac{1}{2}v_A^2 = gh_D + \frac{1}{2}v_D^2 \Rightarrow v_A^2 = 2gh_D + v_D^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_D = \sqrt{v_A^2 - 2gh_D} = \sqrt{25^2 - 2\cdot 9{,}8\cdot 2{,}732} = 23{,}9 \text{ m/s}$$

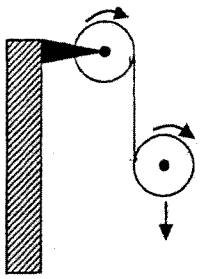
c)

$$\sum F = ma_n \Rightarrow N + mg\cos\alpha = m\frac{v_D^2}{R} \Rightarrow N = m\left(\frac{v_D^2}{R} - g\cos\alpha\right) = 2\cdot\left(\frac{23{,}9^2}{1} - 9{,}8\cdot\cos 30^\circ\right) = 1125{,}45 \text{ N}$$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2007

2.- Dos poleas cilíndricas, ambas de masa M y radio R, están ligadas por una cuerda como muestra la figura. Hallar la aceleración del centro de masas de la polea que cae.



Solución:

- Polea Fija (rotación):

$$T \cdot R = I\alpha_1 \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_1 \Rightarrow T = \frac{1}{2}MR\alpha_1 \quad (1)$$

$$a_1 = \alpha_1 R \quad (2)$$

- Polea Móvil (rotación):

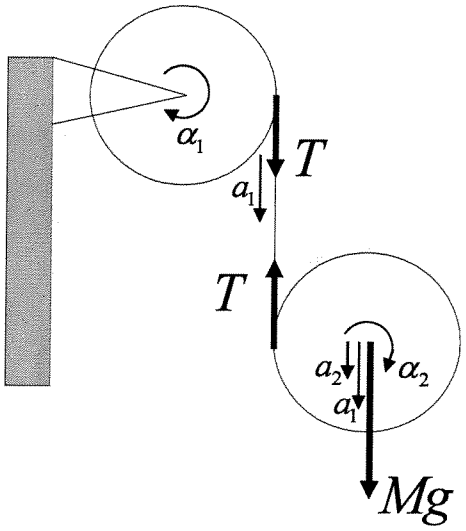
$$T \cdot R = I\alpha_2 \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}MR\alpha_2 \quad (3)$$

$$a_2 = \alpha_2 R \quad (4)$$

- Polea Móvil (traslación):

$$Mg - T = Ma \quad (5)$$

$$a = a_1 + a_2 \quad (6)$$



Ahora se tenemos que resolver el sistema:

De (1) y (3) obtenemos: $\alpha_1 = \alpha_2$ y por tanto $a_1 = a_2$

Y ahora, entrando en la (5):

$$Mg - T = M(a_1 + a_2) \Rightarrow Mg - T = M2a_1 \Rightarrow Mg - \frac{1}{2}MR\alpha_1 = M2a_1 \Rightarrow Mg - \frac{1}{2}MR\frac{a_1}{R} = M2a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Mg - \frac{1}{2}Ma_1 = 2Ma_1 \Rightarrow Mg = 2Ma_1 + \frac{1}{2}Ma_1 \Rightarrow g = 2a_1 + \frac{1}{2}a_1 \Rightarrow g = \frac{5}{2}a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{5}g$$

Así pues, $a = a_1 + a_2 = 2a_1 = \frac{4}{5}g$

$$\boxed{a = \frac{4}{5}g \ (\text{m/s}^2)}$$

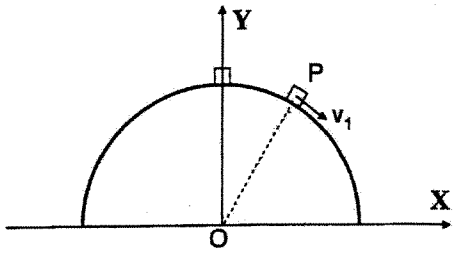
www.simplyjarod.com

ETSI TELECOMUNICACIÓN - EXAMEN DE FÍSICA 1

FEBRERO 2009

1.- En el punto más alto de una pista semicircular de radio R si halla una partícula de masa m. En un momento dado se rompe el equilibrio y la partícula empieza a deslizarse sin rozamiento por la pista. Si P es la posición en que la partícula se separa de la pista, se pide calcular:

a) Coordenadas el punto P.
b) Vector cantidad de movimiento de la partícula en P.
c) Vector momento angular de la partícula en P respecto al origen de coordenadas.

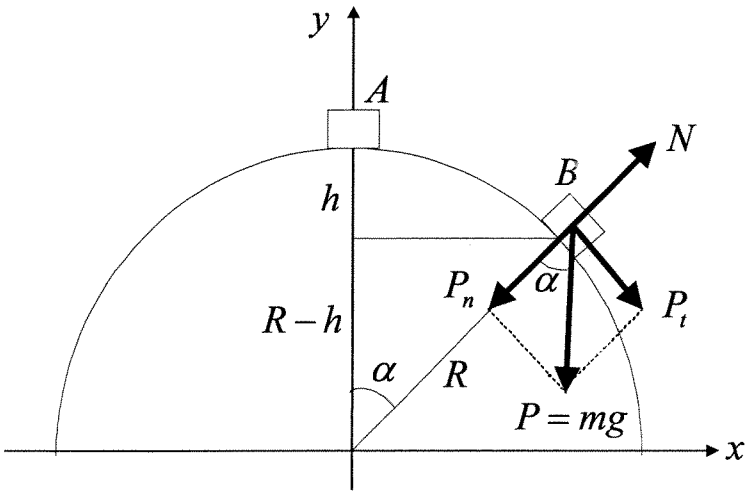


(Los resultados deberán expresarse en función de los datos: radio R; masa m; y aceleración de la gravedad, g. Los vectores de los apartados b y c, deben venir indicados con sus componentes cartesianas).

Solución:

a) El cuerpo abandonará la esfera cuando la fuerza normal N sea nula. Desde un sistema no inercial solidario al cuerpo, el cuerpo abandonará la esfera cuando la fuerza centrífuga se iguale a la componente normal del peso P_n:

$$P_n = ma_n \Rightarrow P\cos\alpha = ma_n \Rightarrow mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow g\cos\alpha = \frac{v^2}{R} \quad [1]$$



Ahora aplicamos el teorema de conservación de la energía tomando como nivel cero de energía potencial el plano que contiene al punto donde el cuerpo abandona la superficie esférica:

$$E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B} \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

Y ahora tenemos que relacionar al altura h con el ángulo α :

$$R - h = R\cos\alpha \Rightarrow h = R - R\cos\alpha \Rightarrow h = R(1-\cos\alpha)$$

www.simplyjarod.com

Para terminar sustituimos los valores de v^2 y h en la ecuación [1] y nos queda:

$$g\cos\alpha = \frac{v^2}{R} \Rightarrow g\cos\alpha = \frac{2gh}{R} \Rightarrow g\cos\alpha = \frac{2gR(1-\cos\alpha)}{R} \Rightarrow \cos\alpha = 2(1-\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 2-2\cos\alpha \Rightarrow 3\cos\alpha = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2}{3} = 48°11'$$

Finalmente para obtener las coordenadas del punto P hacemos:

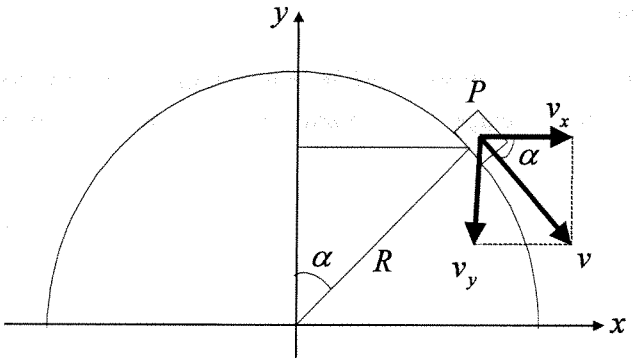
$$x = R\,\text{sen}\,\alpha = R\,\text{sen}\,48°11' = 0,75R$$
$$y = R\cos\alpha = R\cos 48°11' = 0,67R$$

Solución: $P(0'75R\ ,\ 0'67R)$

b)

Según se muestra en la figura:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v\cos\alpha\,\vec{i} - v\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{j}$$



El módulo del vector velocidad se puede calcular recurriendo al apartado a):

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2gR\left(1-\tfrac{2}{3}\right)} = \sqrt{\tfrac{2}{3}gR} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{gR} = 0,82\sqrt{gR}$$

Así pues:

$$\vec{v} = v\cos\alpha\,\vec{i} - v\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{j} = 0,67v\,\vec{i} - 0,75v\,\vec{j} = 0,67\cdot 0,82\sqrt{gR}\,\vec{i} - 0,75\cdot 0,82\sqrt{gR}\,\vec{j} = 0,55\sqrt{gR}\,\vec{i} - 0,61\sqrt{gR}\,\vec{j}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = 0,55m\sqrt{gR}\,\vec{i} - 0,61m\sqrt{gR}\,\vec{j} = m\sqrt{gR}\left(0,55\vec{i} - 0,61\vec{j}\right)$$

Solución: $\vec{p} = m\sqrt{gR}\left(0,55\vec{i} - 0,61\vec{j}\right)$

c)

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OP} \times \vec{p} = (0'75R\ ,\ 0'67R,\ 0) \times m\sqrt{gR}\,(0'55,\ -0'61,0) = m\sqrt{gR}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0'75R & 0'67R & 0 \\ 0'55 & -0'61 & 0 \end{vmatrix} = -0,826mR\sqrt{gR}\,\vec{k}$$

www.simplyjarod.com

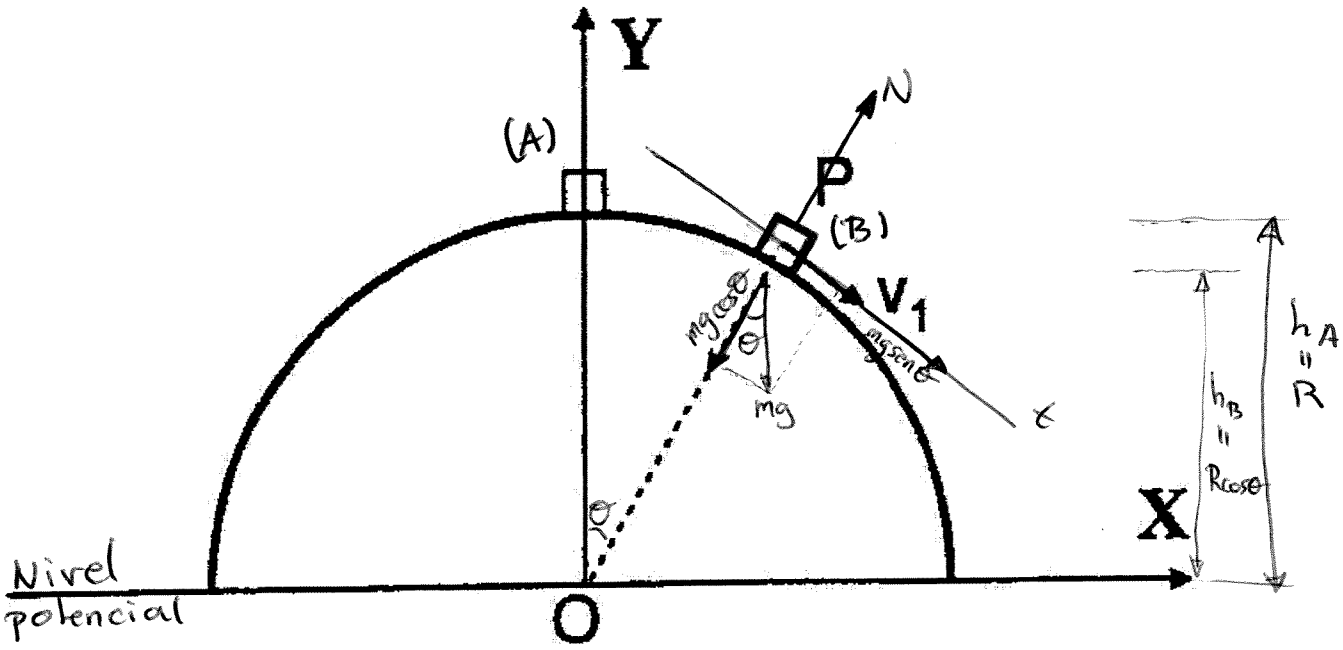
FEBRERO 2009

Ejercicio 1

En el punto más alto de una pista semicircular de radio R si halla una partícula de masa m. En un momento dado se rompe el equilibrio y la partícula empieza a deslizarse sin rozamiento por la pista. Si P es la posición en que la partícula se separa de la pista, se pide calcular:

a) Coordenadas el punto P.
b) Vector cantidad de movimiento de la partícula en P.
c) Vector momento angular de la partícula en P respecto al origen de coordenadas.

(Los resultados deberán expresarse en función de los datos: radio R; masa m; y aceleración de la gravedad, g. Los vectores de los apartados b y c, deben venir indicados con sus componentes cartesianas).



a) Condición de despegue:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \begin{cases} +\searrow u_t : mg\,sen\theta = ma_t \\ +\swarrow u_n : mg\cos\theta - N = m a_n = m\frac{v^2}{R} \end{cases}$$

Ecuación de la energía:

$$W_{FNC} = E_{mec_f} - E_{mec_0} = 0 \;;\; E_{mec_0} = E_{mec_f}$$

$$E_{pot_{A_0}} + E_{cin_{A_0}} = E_{pot_{B_f}} + E_{cin_{B_f}}$$

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR\cos\theta$$

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v_B^2}{R}$$

$$\frac{1}{2}mgR\cos\theta = \frac{1}{2}m\frac{v_B^2}{R}$$

$$mgR = \frac{3}{2}mgR\cos\theta \;;\; \cos\theta = \frac{2}{3} \;;\; \theta = \arccos\frac{2}{3}$$

$$sen\,\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$P = (x_P, y_P) = (R\,sen\theta, R\cos\theta)$$

$$\boxed{P = (x_P, y_P) = \left(\frac{\sqrt{5}R}{3}, \frac{2R}{3}\right)}$$

www.simplyjarod.com

b)

$$\bar{p} = m\bar{v} = m\sqrt{\tfrac{2}{3}gR}\,\bar{u}_t = m\sqrt{\tfrac{2}{3}gR}\,(\cos\theta\,\bar{u}_x - \operatorname{sen}\theta\,\bar{u}_y) \quad \text{kg}\,\tfrac{m}{s}$$

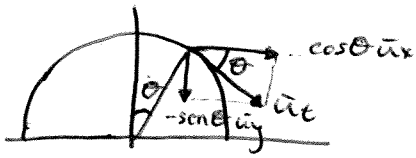
$\bar{v}$?; $v = \sqrt{\tfrac{2}{3}gR}$

$$mg\cos\theta = m\frac{v_B^2}{R}$$

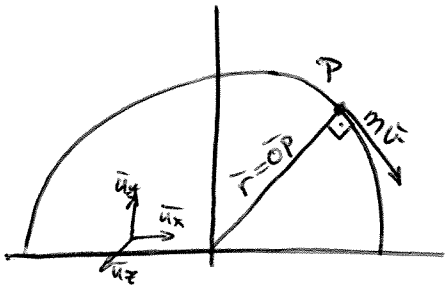
$$v_B^2 = gR\cos\theta = \frac{2}{3}gR$$

$$v_B = \sqrt{\tfrac{2}{3}gR} \quad (\text{en } P)$$

$$\bar{u}_t = \cos\theta\,\bar{u}_x - \operatorname{sen}\theta\,\bar{u}_y$$



c)



$$\vec{L} = \bar{OP} \times m\bar{v} = |\bar{OP}| \cdot |m\bar{v}| \cdot \operatorname{sen}90^\circ\,(-\bar{u}_z)$$

$$\boxed{\vec{L}_O = R \cdot m\sqrt{\tfrac{2}{3}gR}\,(-\bar{u}_z)}$$

1. Un protón se mueve en un campo de energías dado por: $E_p = E_0\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{x}\right)\right]$, donde E_0 es una constante positiva.

a) Dibujar el diagrama de energías $E_p = E_p(x)$ e indicar sobre la gráfica el valor de x_0.

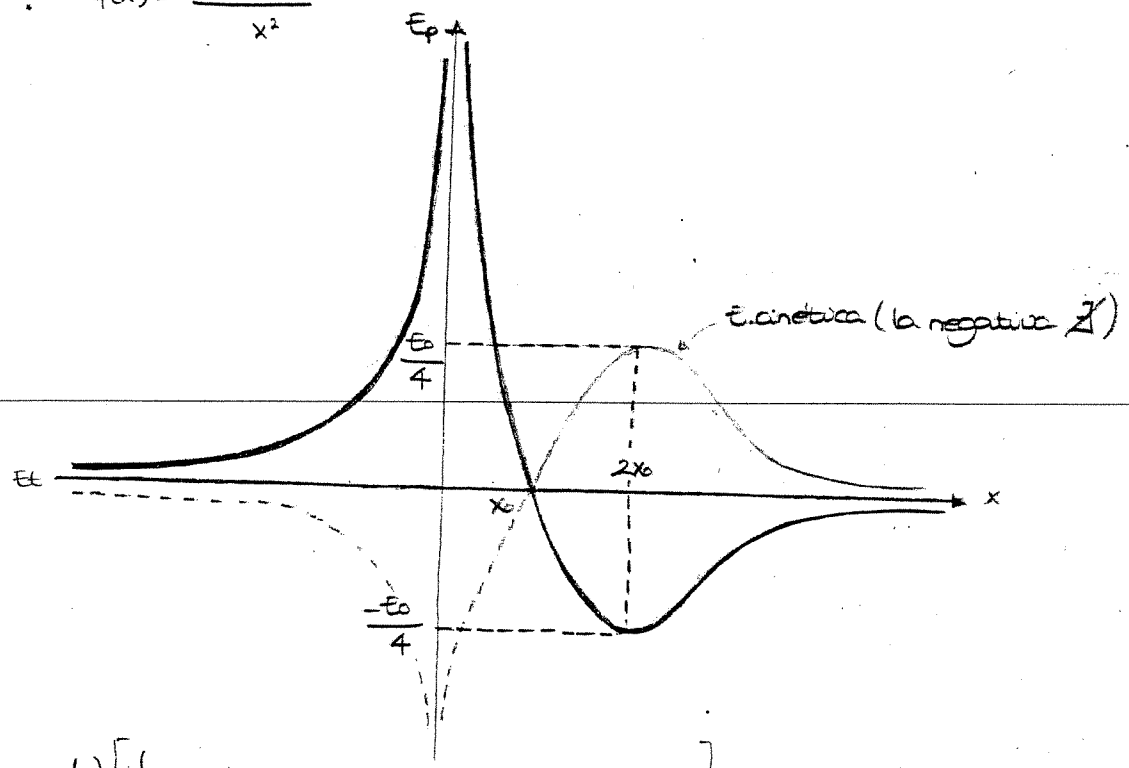
b) Calcular las posiciones de equilibro y energía potencial mínima.

c) En el caso de que la energía total de la partícula sea $E_t = 0$, dibújese la función correspondiente a la energía cinética y, a partir de ella, razonar el movimiento de la partícula, sus límites y calcular el valor máximo de velocidad.

d) Responder a las mismas preguntas del apartado anterior, en el supuesto de que la energía total sea $E_t = -E_0/9$.

$$E_p = E_0\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right] = \frac{E_0 x_0^2 - E_0 x_0 x}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{a - bx}{x^2}$$



b) [mínimo ⟹ equilibrio estable ; máximo ⟹ equilibrio inestable]

Hay un punto de equilibrio estable en $x = 2x_0$

$E_{p\,min} = E_p(2x_0) = \frac{E_0}{4}$

www.simplyjarod.com

c) $E_t = E_p + E_c \Longrightarrow E_c = E_t - E_p \Longrightarrow (E_t = 0) \Longrightarrow E_c = -E_p$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \geq 0$!!!

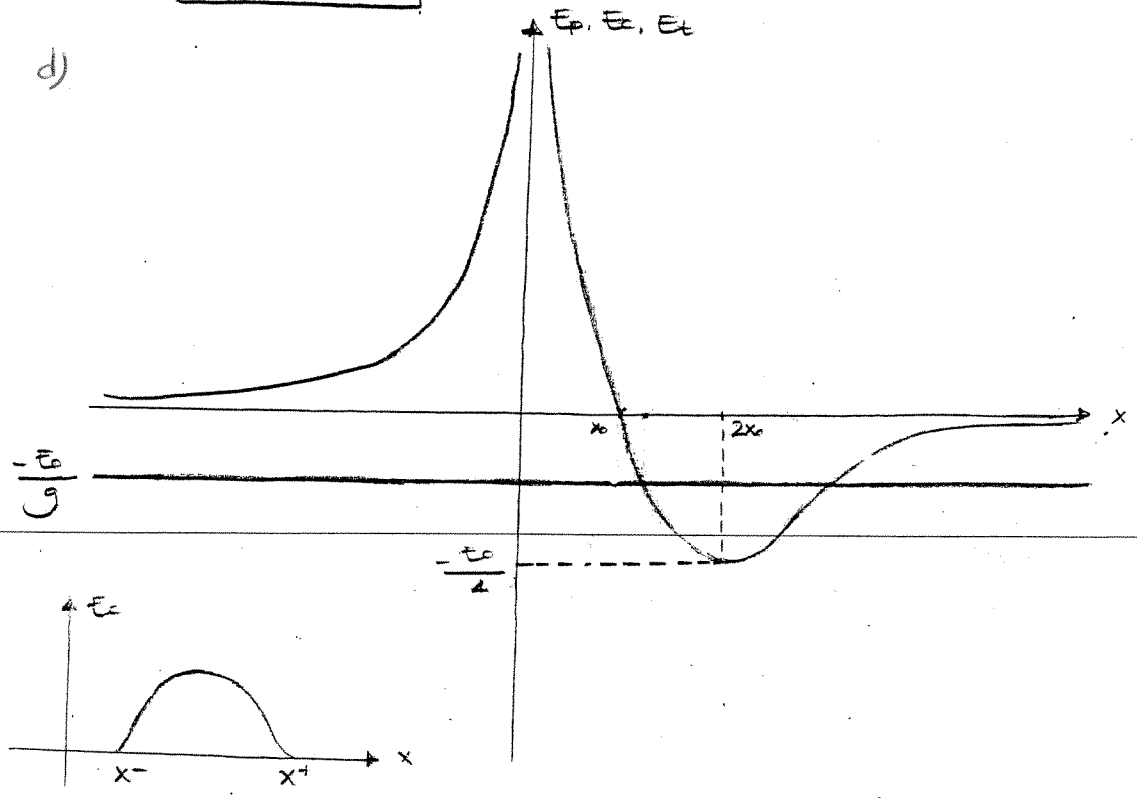
La partícula acelera en $x = x_0$ y $x = 2x_0$ y después va decelerando entre $x = 2x_0$ y $x \to \infty$ sin llegar a pararse nunca.

Límites: $[x_0, \infty)$

$E_{cmax} = E_c(2x_0) = -E_{pmin} = \frac{E_0}{4} \Longrightarrow \frac{1}{2} m V_{max}^2 = \frac{E_0}{4}$

$\Longrightarrow \boxed{V_{max} = \sqrt{\frac{E_0}{m2}}} \ (m/s)$

d)



Límites $[x^-, x^+] = [1.14x_0, 7.69x_0]$

$x^- = 1.14x_0$

$x^+ = 7.69x_0$

$E_{cmax} = E_T - E_{pmin} = \frac{-E_0}{9} - \left(\frac{E_0}{4}\right) = \frac{5E_0}{36}$

$\Longrightarrow \boxed{V_{max} = \left(\frac{5E_0}{18m}\right)^{1/2}}$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2008

1.- Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje X sujeta a una energía potencial $E_p = 1 + 2x - 2x^2$ julios, cuando x viene en metros. En el caso de que la energía mecánica total de la partícula sea $E_1 = 2$ julios, calcular:

a) en qué punto x_m del eje x alcanza un mínimo de velocidad v_m y el valor de ésta

b) la fuerza F_m que actúa sobre la partícula en x_m.

En el supuesto de que la energía mecánica total de la partícula fuera $E_2 = 1$ julio, calcular:

c) en qué puntos x'_m del eje x se alcanzaría ahora la velocidad mínima v'_m y cuanto valdría esta;

d) el valor de las fuerzas que actúan sobre la partícula en x'_m.

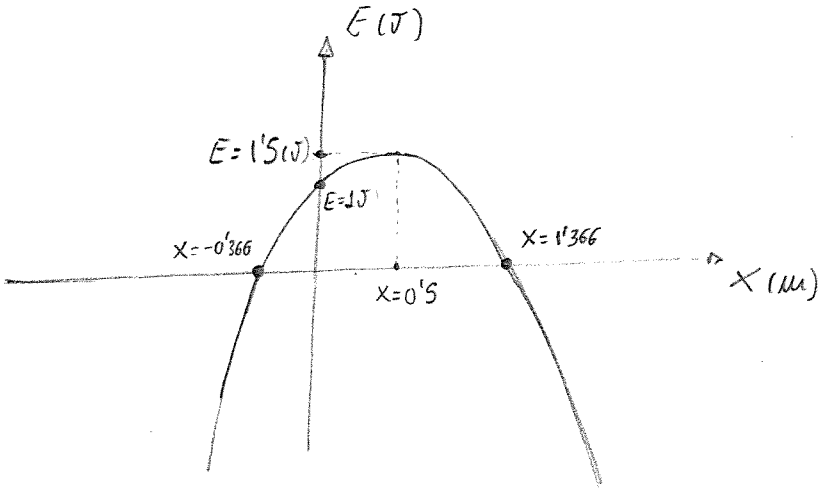
Dato: $m = 250$ g.

a)

En primer lugar pintamos la gráfica:

- cortes eje E_p: $X = 0 \rightarrow E_p = 1 + 2\cdot 0 - 2\cdot 0^2 = 1\,(J)$
- cortes eje X: $E_p = 0 \rightarrow -2x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-2)\cdot 1}}{2(-2)} = \begin{cases} x = 1'366\,m \\ x = -0'366\,m \end{cases}$
- máximos y mínimos: $dE_p/dx = 0 \Rightarrow -4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 0'5\,m$

$E_p(x = 0'5) = 1'5\,(J)$



a) Como las fuerzas son conservativas $\Rightarrow E_{mec} = cte$, en concreto $E_{mec} = 2\,(J)$

$$E_c + E_p = 2 \Rightarrow \{E_c = 2 - E_p = 2 - [1 + 2x - 2x^2] = 2x^2 - 2x + 1$$

E_{cmin} se dará cuando E_p sea máxima: en $X = 0'5\,m$

Luego $E_{cmin} = 2\cdot 0'5^2 - 2\cdot 0'5 + 1 = 0'5\,(J) = \frac{1}{2} m \cdot v_{min}^2 \Rightarrow v_{min} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 0'5}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 0'5}{250\cdot 10^{-3}}} = 2\,m/s \Rightarrow$ **$v_{min} = 2\,m/s$ en $x_m = 0'5\,m$**

www.simplyjarod.com

b) $\bar{F} = -\text{grad}\, E_p = -\frac{dE_p}{dx}\bar{u}_x = -(-4x+2)\bar{u}_x = (4x-2)\bar{u}_x$

$\bar{F}(x=0'5\,m) = (4\cdot 0'5 - 2)\bar{u}_x = \bar{0}$ ⇒ Lógico, en $x=0'5$ m hay un máximo, que es un punto de equilibrio!!

c) Si ahora $E_{mec} = 1\,(J)$ ⇒ $E_c + E_p = 1\,(J)$

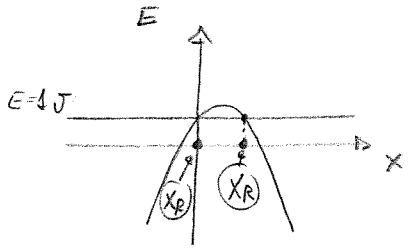
$E_{c\,min}$ cuando $E_{p\,max}$ ⇒ $E_{c\,min} + E_{p\,max} = 1$ ⇒ $E_{c\,min} = 1 - 1'5 = -0'5$ J

(1'5)

Esto es imposible tener energía cinética negativa!! Tendremos que ver dónde se mueve la partícula: buscamos puntos de retorno:

$E_{c_R} + E_{p_R} = 1 \rightarrow E_{p_R} = 1 \Rightarrow -2x_R^2 + 2x_R + 1 = 1 \Rightarrow -2x_R^2 + 2x_R = 0$

$x_R[-2x_R + 2] = 0$ → $x_R = 0$; $x_R = 1$ m ⇒ El movimiento se dará conservando E_{mec}!! ⇒ Puntos de la curva de E_p con energía menor a 1 J



movimientos: $\{(-\infty, 0]$ y $[1, +\infty)\}$.

En estos intervalos, la mayor E_p es: $E_{p_{max}} = 1\,(J)$

Luego: $E_{p\,max} + E_{c\,min} = 1\,(J) \Rightarrow E_{c\,min} = 0 \Rightarrow V_m' = 0$

Luego: Mínima velocidad: $V_{min} = 0$ m/s en $x=0$ y $x=1$ m

d) $\bar{F}(x=0) = (4\cdot 0 - 2)\bar{u}_x = -2\bar{u}_x$ (N)

$\bar{F}(x=1) = (4\cdot 1 - 2)\bar{u}_x = 2\bar{u}_x$ (N)

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2009

Ejercicio 2

De un disco metálico de masa M y radio R se recorta un disco interior concéntrico de radio R/2. Quedan constituidos así la corona exterior y el disco interior. Se pide calcular:

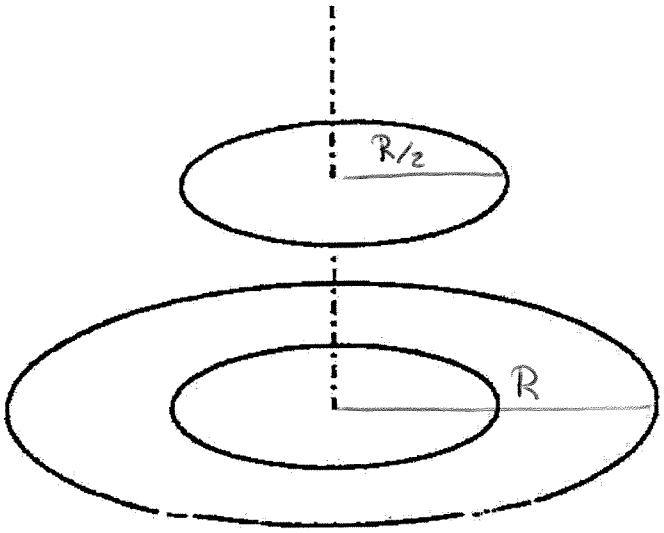
a) El momento de inercia del disco interior respecto a su eje principal.
b) El momento de inercia de la corona respecto a su eje principal.

(*Los resultados deben venir expresados exclusivamente en función de M y R).*

Con los dos elementos se pasa a realizar la experiencia siguiente: Se hace girar la corona con una velocidad angular ω, mientras el disco interior, que está apartado, permanece en reposo. Estando girando la corona, se acopla el disco interior en el hueco, observando que el conjunto completo pasa a girar ahora con una velocidad angular ω'. Suponiendo conocida ω, se pide calcular:

c) El valor de ω'
d) La energía que se pierde al efectuar el acoplamiento.

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi R^2}$$



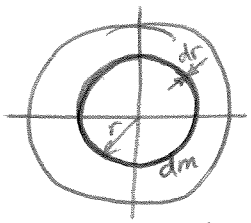
a) Disco grande

$\sigma = m/S$; $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$

Disco interior

$$m' = \sigma S' = \sigma \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sigma \pi R^2 = \frac{1}{4}\frac{M}{\pi R^2}\pi R^2 = \frac{M}{4}$$

Demostración momento de inercia de un disco de radio R/2



$dm = \sigma 2\pi r dr$

$$I_0 = \int r^2 dm = \int_0^{R/2} \sigma 2\pi r^3 dr = 2\pi\sigma\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{R/2} =$$

$$= 2\pi\sigma \cdot \frac{R^4}{4\cdot 2^4} = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{(R/2)^4}{4} = \frac{M}{2R^2}\frac{R^4}{2^4} =$$

$$= \frac{1}{2^5} m R^2 = \frac{1}{32} m R^2$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{32} m R^2}$$

www.simplyjarod.com

b)

$$I_{o\ \text{disco radio R}} = I_{o\ \text{disco interior}} + I_{o\ \text{corona circular}}$$

$$I_{o\ \text{disco R}} = \int_0^R r^2 dm = \underbrace{\int_0^{R/2} r^2 dm}_{I_{o\ \text{disco int}}} + \underbrace{\int_{R/2}^{R} r^2 dm}_{I_{o\ \text{corona}}}$$

$$\boxed{I_{o\ \text{corona circular}} = \underbrace{I_{o\ \text{disco R}}}_{\frac{1}{2}MR^2} - \underbrace{I_{o\ \text{disco int}}}_{\frac{1}{32}mR^2} = \frac{15}{32} mR^2 \ (\text{kg}\cdot\text{m}^2)}$$

c)

$$\vec{L}^{\circ}_{sist} = \text{cte} = \bar{L}^{\circ}_{corona} + \bar{L}^{\circ}_{disco}$$

$$\bar{L}^{\circ}_{antes\ sist} = \cancel{\bar{L}^{\circ}_{disco\ int}}^{\,0} + \bar{L}^{\circ}_{corona} = \frac{15}{32} mR^2\omega$$

($\omega = 0$, $v_a = 0$; $I_o\omega$)

$$\bar{L}^{\circ}_{desp\ sist} = \bar{L}^{\circ}_{disco\ int} + \bar{L}^{\circ}_{corona} = \bar{L}^{\circ}_{disco\ grande} = \frac{1}{2} mR^2\omega'$$

$$\frac{15}{32}\cancel{m}R^2\omega = \frac{1}{2}\cancel{m}R^2\omega' ; \quad \boxed{\omega' = \frac{30}{32}\omega = \frac{15}{16}\omega}$$

d) $-\Delta E_{mec} = E_{perdida} = E_{cin_o} - E_{cin_f}$

$$= \frac{1}{2} I_o \omega_o^2 - \frac{1}{2} I_o \omega'^2$$

(I_o: corona; I_o: todo)

$$\boxed{E_{perdida} = \frac{+15}{1024} mR^2\omega^2}$$

SEPTIEMBRE 2003

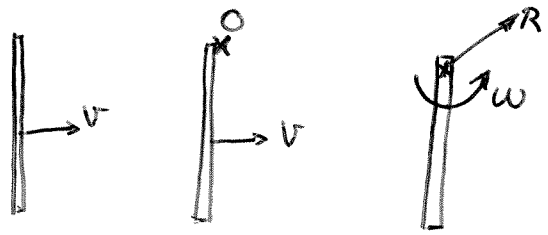
2. Una barra de longitud l, masa M y diámetro despreciable, tiene un movimiento de traslación, sin rozamiento, con velocidad v sobre un plano horizontal, siendo el vector velocidad perpendicular a la barra. Si el extremo de la barra impacta contra un eje fijo, perpendicular al plano, y queda sujeto a él, pudiendo girar en torno al mismo:

a) ¿Qué magnitudes se conservan antes del choque y después del choque?, ¿Por qué?
b) Calcular la variación del momento lineal, del momento angular respecto al eje y de la energía cinética en el choque.
c) ¿Cuál es la velocidad angular de giro de la barra en torno al eje, inmediatamente después del choque?

a) * $\Sigma \bar{F}_{ext} \neq \bar{0}$ (porque el clavo(eje) ejerce una reacción R) $\Rightarrow \bar{p} \neq cte$

* $\Sigma \bar{M}^o_{ext} = 0 \longrightarrow \bar{L}^o = cte$

* Energías (a simple vista no lo sé)



c) (necesario para calcular el b)

$\bar{L}$ partículas $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$

$\bar{L}^o$ sólido rígido
$\bar{L}^o = I_o \bar{\omega} = \overline{OG} \times m \bar{v}_G + I_G \bar{\omega}$
$\bar{L}^G = I_G \bar{\omega}$

$\bar{L}^o_{antes} = \frac{l}{2} m v (\bar{u}_z) \qquad \bar{L}^o_{desp} = I_o \bar{\omega} = \frac{1}{3} m l^2 \omega (\bar{u}_z)$

$\frac{l}{2} m v (\bar{u}_z) = \frac{1}{3} m l^2 \omega (\bar{u}_z)$

$\bar{\omega} = \frac{3}{2} \frac{v}{l} (\bar{u}_z)$ $\qquad \boxed{\bar{\omega} = \frac{3}{2} \frac{v}{l} (\bar{u}_z)}$

b) $\bar{L}^o = cte \Rightarrow \Delta \bar{L} = \bar{0}$

$\Delta \bar{p} = \bar{p}_{final} - \bar{p}_{inicial} = m \bar{v}_{G_f} - m \bar{v}_{G_o} = m \omega \frac{l}{2} - m v =$

$= m \frac{3}{2} \frac{v}{l} \frac{l}{2} - m v = -\frac{1}{4} m v$; $\boxed{\Delta \vec{p} = -\frac{1}{4} m v}$

$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2} I_o \omega - \left(\frac{1}{2} m v_{G_o}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_o^2 \right) =$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m l^2 \left(\frac{3}{2} \frac{v}{l} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} m v^2 = -\frac{1}{8} m v^2$

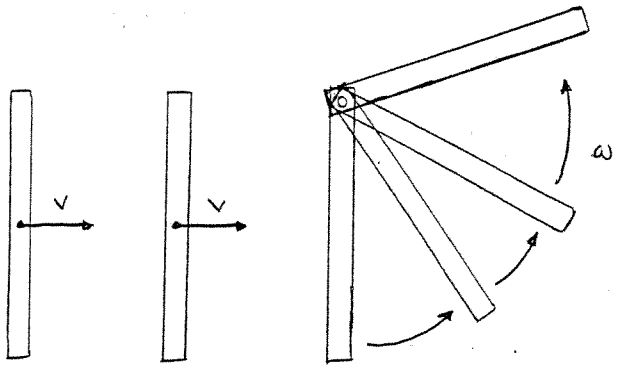
$\boxed{\Delta E_{cin} = -\frac{1}{8} m v^2}$

www.simplyjarod.com

SEPTIEMBRE 2003

2. Una barra de longitud l, masa M y diámetro despreciable, tiene un movimiento de traslación, sin rozamiento, con velocidad v sobre un plano horizontal, siendo el vector velocidad perpendicular a la barra. Si el extremo de la barra impacta contra un eje fijo, perpendicular al plano, y queda sujeto a él, pudiendo girar en torno al mismo:

a) ¿Qué magnitudes se conservan antes del choque y después del choque?, ¿Por qué?
b) Calcular la variación del momento lineal, del momento angular respecto al eje y de la energía cinética en el choque.
c) ¿Cuál es la velocidad angular de giro de la barra en torno al eje, inmediatamente después del choque?



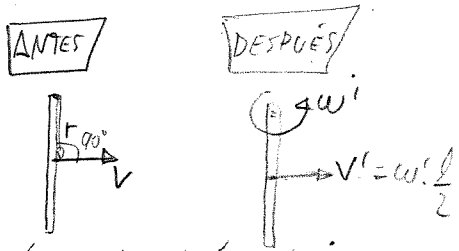
$\boxed{\vec{L} = cte}$

$\boxed{\vec{p} \neq cte}$

a) $\vec{p}$ no se conserva porque existe una fuerza externa, que es la reacción del eje, que impide que la barra se mueva libremente.

$\vec{L}$ si se conserva la fuerza externa anterior no tiene momento al estar aplicada sobre el eje.

La energía no se conserva ya que el choque es inelástico, esto significa que invierte energía en la unión de la barra y el eje.



c) ¿ω? $\boxed{L = cte}$

$\vec{L}_{antes} = \vec{L}_{después} \Longrightarrow L_{antes} = L_{después}$

$\frac{l}{2} Mv \cdot \text{sen}90° = I \cdot \omega' \Longrightarrow \left[I = \frac{1}{3} Ml^2 \right] \Longrightarrow \frac{\cancel{l}}{2} \cancel{M} v = \frac{1}{3} \cancel{M} l^{\cancel{2}} \omega'$

$\Longrightarrow \boxed{\omega' = \frac{3}{2} \frac{v}{L}}$ (rad/s)

$\bar{p} \neq \bar{cte}$

b) $p_{antes} = M \cdot v$

$p_{después} = M \cdot v' = M \cdot \omega' \frac{L}{2} = M \frac{3}{2} \frac{v}{\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{L}}{2} = \frac{3}{4} Mv = \frac{3}{4} p_{antes}$

$\left[\begin{array}{l} v = \omega R \\ v' = \omega' \frac{L}{2} \end{array} \right]$

www.simplyjarod.com

$\boxed{\Delta p} = p_{después} - p_{antes} = \frac{3}{4}Mv - Mv = \boxed{-\frac{1}{4}Mv}$ (kg m/s)

$\vec{\Delta p} = -\frac{1}{4}Mv \cdot \vec{u}_x$

$\boxed{\vec{\Delta L} = 0}$ porque se conserva

$E_{antes} = \frac{1}{2}Mv^2$

$E_{después} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ML^2\left(\frac{3}{2}\frac{v}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ML^2\frac{3\cdot 3}{4}\frac{v^2}{L^2} = \frac{3}{8}Mv^2$

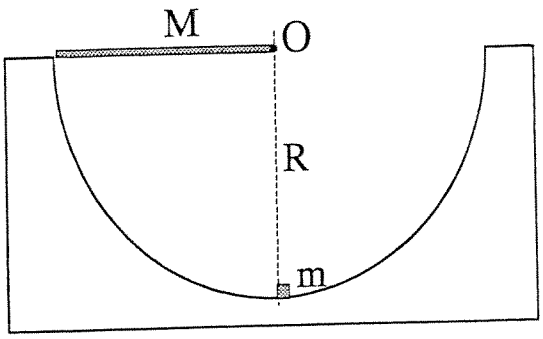
$\boxed{\Delta E} = E_{después} - E_{antes} = \frac{3}{8}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv^2 = \boxed{-\frac{1}{8}Mv^2}$ (J)

www.simplyjarod.com

JUNIO 2007

2. En el punto más bajo de una pista semicircular de radio R se halla una partícula de masa m en reposo. Una varilla de longitud R y masa M = 3m, que puede girar alrededor de un eje que pasa por el punto O, se halla en el instante inicial en posición horizontal. Calcular:

a) Velocidad angular de la varilla un momento antes de que choque con la partícula m.
b) Supuesto el choque elástico, calcular la velocidad con que sale despedida la partícula y la velocidad angular de la varilla después del choque.
c) Altura hasta la que asciende la partícula.



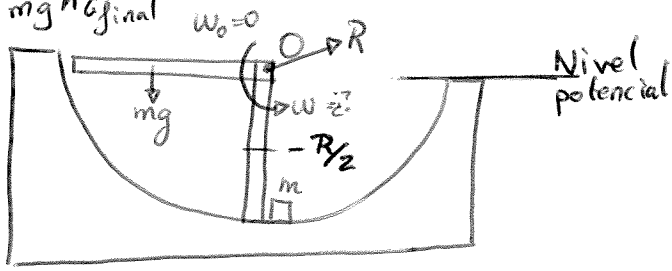
a) conservación Energía

$$\underbrace{\frac{1}{2}mV_{G_0}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_0^2}_{E_{cin}} + mgh_{G_0} = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_{G_{final}}$$

(si $\nexists$ pto fijo): $\frac{1}{2}I_0\omega_0^2 + mgh_{G_0} = \frac{1}{2}I_0\omega^2 + mgh_{G_{final}}$

$0 + 0 = \frac{1}{2}I_0\omega^2 + mg\left(-\frac{R}{2}\right)$

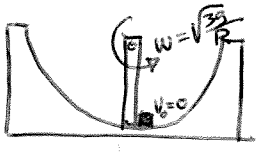
$mg\frac{R}{2} = \frac{1}{2}I_0\omega^2;\ \omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_0}}$



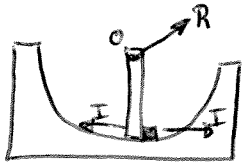
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{MgR}{I_0}} = \sqrt{\frac{3mgR}{\frac{1}{3}3mR^2}} = \sqrt{\frac{3g}{R}}\ \text{rad/s}}$$

b)

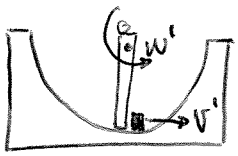
ANTES



CHOQUE



DESPUÉS



$\exists R \Rightarrow \Sigma T_{ext} \neq 0$

$\Sigma \tilde{M} = \tilde{F}\cdot d$

$\Sigma \tilde{M}^{\circ} = 0 \Rightarrow$ ∠°sche

Choque elástico ⇒ conservación de la energía.

$E_{cin\ sist}^{ANT} = E_{cin\ sist}^{DESP}$; sistema = varilla + partícula

$\cancel{E_{cin\ partic}} + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_0\omega'^2 + \frac{1}{2}mV'^2$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}MR^2\right)\left(\frac{3g}{R}\right) = \frac{1}{2}(mR^2)(\omega'^2) + \frac{1}{2}mV'^2 \rightarrow \frac{3}{2}mgR = \frac{1}{2}mR^2(\omega')^2 + \frac{1}{2}m(V')^2$ (I)

www.simplyjarod.com

Conservación del momento angular

$$L^{o}_{sist\,Antes} = L^{o}_{sist\,Desp.}$$

$$L^{o}_{sist\,antes} = \underbrace{\vec{r}\cdot m\vec{v}}_{\text{partícula}=0} + \underbrace{\overline{OG}\times m\vec{v}_G + I_G\omega}_{\text{varilla}\;=\;I_o\omega}$$

$$0 + I_o\sqrt{\frac{3g}{R}} = mR^2\sqrt{\frac{3g}{R}}\,(\vec{u}_z)$$

$$L^{o}_{sist\,desp} = \underbrace{Rmv'(\vec{u}_z)}_{\text{partícula}} + \underbrace{mR^2(\omega')}_{\text{varilla}\;=\;I_o\omega'} = m(\omega' R^2 + Rv')\,\vec{u}_z$$

$$mR^2\sqrt{\frac{3g}{R}} = m(\omega' R^2 + Rv')\;;\quad R^2\sqrt{\frac{3g}{R}} = (\omega' R + v')R\;;$$

$$\sqrt{3gR} = \omega' R + v' \quad \text{(II)}$$

$$\text{(I)} \Rightarrow \frac{3}{2}mgR = \frac{1}{2}mR^2(\omega')^2 + \frac{1}{2}m(v')^2$$

$$\left.\right\} \quad v' = \sqrt{3gR} - \omega' R \qquad v'^2 = 3gR + \omega'^2R^2 - 2\sqrt{3gR}\cdot\omega' R$$

$$\frac{3}{2}mgR = \frac{1}{2}mR^2\omega'^2 + \frac{1}{2}m\left(3gR + \omega'^2R^2 - 2\sqrt{3gR}\,\omega' R\right)$$

$$\frac{3}{2}gR = \frac{1}{2}R^2\omega'^2 + \frac{3}{2}gR + \frac{1}{2}\left(+\omega'^2R^2 - 2\sqrt{3gR}\,\omega' R\right)$$

$$0 = \frac{1}{2}R\omega'^2 + \frac{\omega'^2}{2}R - \sqrt{3gR}\,\omega'$$

$$0 = 1\cdot R\omega'^2 - \sqrt{3gR}\,\omega'\;;\quad 0 = \omega'(R\omega' - \sqrt{3gR}) \left\langle \begin{array}{l}\omega' = 0\\ R\omega' - \sqrt{3gR} = 0\end{array}\right.$$

$$\left\langle \begin{array}{l}\omega' = 0\\ R\omega' - \sqrt{3gR} = 0\;;\; \omega' = \sqrt{\frac{3g}{R}}\end{array}\right\} \quad \boxed{\omega' = 0}$$

$\rightarrow$ No tiene sentido (es la misma que la inicial)

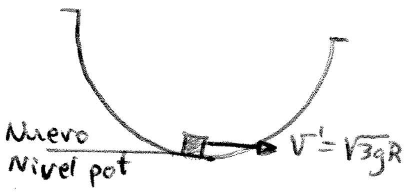
$$\boxed{v' = \sqrt{3gR} - \omega' R = \sqrt{3gR}}$$

c)

$$E_{mec} = cte$$

$$E_{cin_o} + E_{pot_o} = E_{cin_f} + E_{pot_f}$$

(con $E_{pot_o} = 0$ y $E_{cin_f} = 0$)



$$\frac{1}{2}mv'^2 = mgh$$

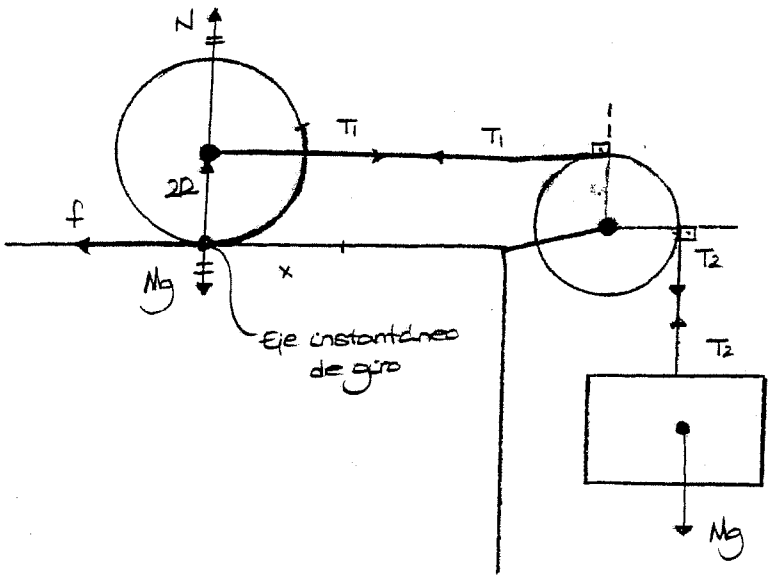
$$h = \frac{1}{2}\frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2}\,\frac{3gR}{g} = \frac{3}{2}R$$

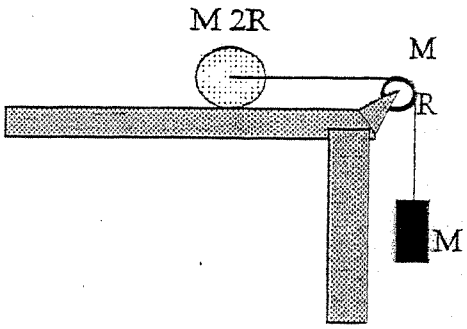
$$\boxed{h = \frac{3}{2}R}$$

2. En la figura, se representa un cilindro de masa M y radio 2R en una superficie horizontal, con un eje del que tira una cuerda, unida a una masa M, después de pasar por una polea de masa M y radio R, que gira sobre su eje sin fricción. El hilo no resbala sobre la polea, y el cilindro rueda sin deslizar por la superficie horizontal, calcular:

a) ¿qué aceleración tendrá el bloque de masa M?

b) Cuando el bloque de masa M haya descendido una altura h, ¿qué energía cinética tendrá el disco?





a)

(1) cilindro: $T_1 - f = M \cdot a$

(2) $T_1 2R = I_1 \alpha_1$

(3) Polea: $T_2 R - T_1 R = I_2 \alpha_2$

(4) Bloque: $Mg - T_2 = M \cdot a$

condiciones de rodadura:

(5) $x = \theta_1 2R \Longrightarrow a = \alpha_1 2R$

(6) $y = \theta_2 R \Longrightarrow a = \alpha_2 R$

Donde:

$I_1 = \frac{3}{2} M(2R)^2 = 6MR^2$

$I_2 = \frac{1}{2} MR^2$

Igualando (5) y (6):

$\alpha_1 2R = \alpha_2 R \Longrightarrow \boxed{\alpha_2 = 2\alpha_1}$

En (3):

$T_2 R - T_1 R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_2$

$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} MR\alpha_2$

En (2):

$T_1 \cdot 2R = 6MR^2 \alpha_1 \Longrightarrow T_1 = 3MR\alpha_1$

$T_2 = \frac{1}{2} MR\alpha_2 + 3MR\alpha_1 \Longrightarrow$

www.simplyjarod.com

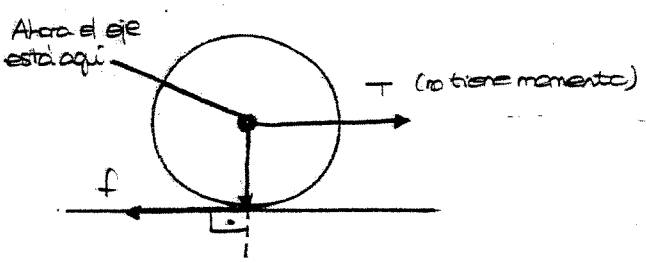
$\Longrightarrow T_2 = MR\alpha_1 + 2MR\alpha_1 = 4MR\alpha_1$

Por último sustituyendo T_2 en (4):

$Mg \cdot 4R\alpha_1 = Ma \Longrightarrow Mg\,4M\cancel{R}\alpha_1 = \cancel{M}\alpha_1 2R \Longrightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{g}{6R}}\ (rad/s^2)$

$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{\alpha_1}{2R} = \frac{g}{3}\ (m/s^2)}$

Otra forma de hacerlo:



donde $I_1 = \frac{1}{2}M(2R)^2$

$I_2 = \frac{1}{2}MR^2$

Cilindro: $T_1 - f = Ma$

$f \cdot 2R = I_1'\alpha_1$

Polea: $T_2R - T_1R = I_2\alpha_2$

Bloque: $Mg - T_2 = Ma$

$a = \alpha_1 2R$

$a = \alpha_1 R$

Resolviendo volvemos a obtener los mismos resultados.

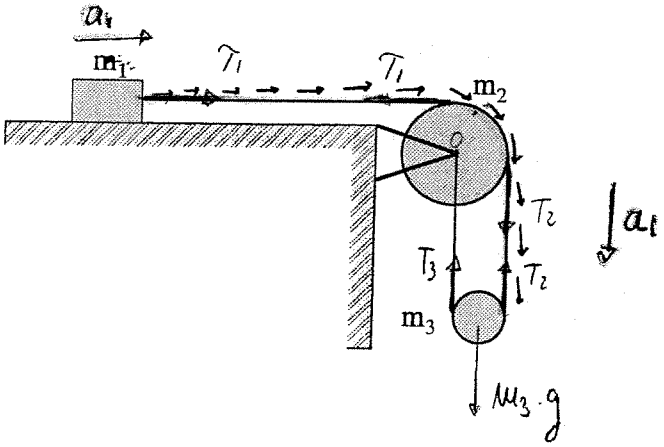
$V^2 = \cancel{V_0^2}^{0} + 2\frac{g}{3}h \Rightarrow V = \sqrt{2\frac{g}{3}h}$ ya que $\omega = \frac{V}{2R} = \frac{\sqrt{2\frac{g}{3}h}}{2R}$

$E_c = \frac{1}{2}M\cdot\left(\sqrt{2\frac{g}{3}h}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M4R^2\cdot\frac{2\frac{g}{3}h}{4R^2} = Mgh + \frac{1}{2}Mgh = \frac{1}{2}Mgh$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 1999

2. En el sistema de la figura: la masa $m_1 = 1$ kg, se mueve sobre una mesa horizontal sin rozamiento, la polea fija tiene una masa $m_2 = 2$ kg y radio $R = 0{,}2$ m, y la polea móvil tiene masa $m_3 = 3$ kg y radio $R/2$. Calcular las tensiones de las cuerdas, la aceleración con la que se mueve m_1 y la aceleración angular con la que gira m_3. Dato: $g = 10$ m/s^2



Masa m_1

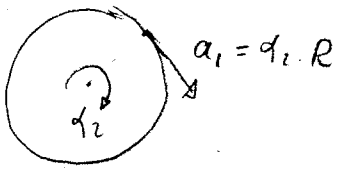
Traslación: $F_x = m \cdot a_x \rightarrow T_1 = m_1 a_1 \Rightarrow \boxed{T_1 = a_1}$ (1)

Polea m_2

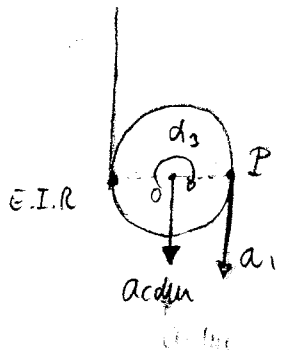
Rotación: $M_0 = I_0 \cdot \alpha_2 \Rightarrow T_2 R - T_1 R = \frac{1}{2} m_2 R^2 \alpha_2$; a_1/R

$T_2 \cdot 0'2 - T_1 \cdot 0'2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0'2^2 \cdot \frac{a_1}{0'2}$

$\boxed{T_2 - T_1 = a_1} \rightarrow \boxed{T_2 = 2a_1}$ (2)



Polea móvil m_3



Como el punto P sabemos que tiene aceleración a_1 ya sabemos α_3: $a_1 = \alpha_3 \cdot 2R_3 \Rightarrow a_1 = \alpha_3 \cdot 2 \cdot \frac{R}{2}$

$\boxed{a_1 = \alpha_3 \cdot R}$ $\boxed{a_{cdm} = \alpha_3 \cdot R/2} \rightarrow \boxed{a_{cdm} = \frac{a_1}{2}}$

Traslación: $F_y = m \cdot a_y$

$-T_2 - T_3 + m_3 \cdot g = m_3 \cdot a_{cdm}$

Luego: $-2a_1 - T_3 + m_3 g = m_3 \cdot \frac{a_1}{2} \Rightarrow -2a_1 - T_3 + 30 = \frac{3}{2} a_1$

$\boxed{-T_3 + 30 = \frac{7}{2} a_1}$ (3)

Rotación $\Rightarrow M_0 = I_0 \cdot \alpha \Rightarrow T_3 \cdot R/2 - T_2 \cdot R/2 = \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{R}{2}\right)^2 \alpha_3$

$T_3 - 2a_1 = \frac{1}{2} m_3 \cdot R/2 \cdot a_1/R \Rightarrow T_3 - 2a_1 = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot a_1 \Rightarrow \boxed{T_3 = \frac{11}{4} a_1}$ (4)

www.simplyjarod.com

Resolviendo con (3) y (4)

$T_3 = 13'2 (N)$

$a_1 = 4'8 (m/s^2)$

Entonces:

$a_{cdm} = 2'4 (m/s^2)$

$T_2 = 9'6 (N)$

$T_1 = 4'8 (N)$

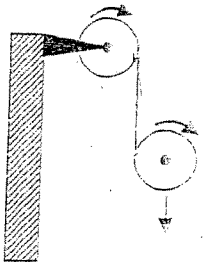
$\alpha_3 = \frac{2'4}{0'2/2} = 24 \, rad/s^2$

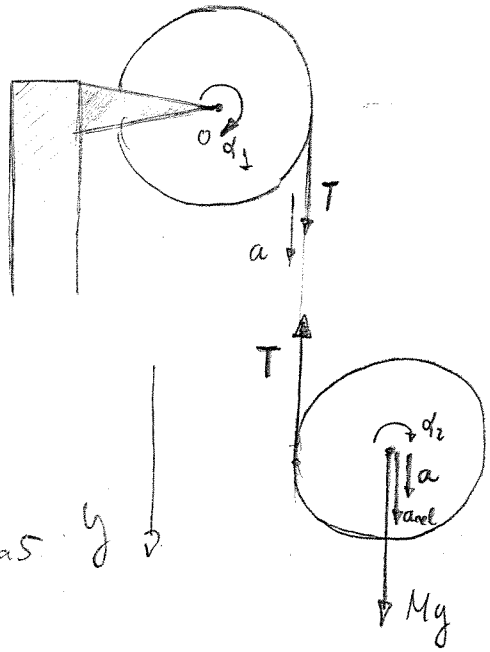
www.simplyjarod.com

ENERO 2007

2. Dos poleas cilíndricas, ambas de masa M y radio R, están ligadas por una cuerda como muestra la figura. Hallar la aceleración del centro de masas de la polea que cae.

Dato: Momento de inercia de la polea respecto a su eje: $\frac{1}{2} M R^2$





Casi igual que el 3 del Tema 5

POLEA 1 $M_O = I_O \alpha$ (+)

$T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_1 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} M R \alpha_1}$ (1)

$\boxed{a = \alpha_1 \cdot R}$ (2)

POLEA 2

Traslación: $F_y = M \cdot a_y$

$\boxed{Mg - T = M \cdot (a_{rel} + a)}$ (3)

Rotación: $M_G = I_G \cdot \alpha$ (+)

$T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \alpha_2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} M R \alpha_2}$ (4)

$\boxed{a_{rel} = \alpha_2 \cdot R}$ (5)

Con (1) y (4) $\Rightarrow \{\alpha_1 = \alpha_2\}$

dejamos T y a_{rel} en función de a:

$T = \frac{1}{2} M R \frac{a}{R} = \frac{1}{2} M a$; $a_{rel} = a$

entrando en (3): $Mg - \frac{1}{2} Ma = M(a + a) \Rightarrow g = 2a + \frac{1}{2} a$

$g = \frac{5}{2} a \Rightarrow \{a = \frac{2}{5} g\}$ y $\{a_{rel} = \frac{2}{5} g\}$

$\boxed{a_{TOT} = a + a_{rel} = \frac{4}{5} g}$

www.simplyjarod.com

SEPTIEMBRE 2004

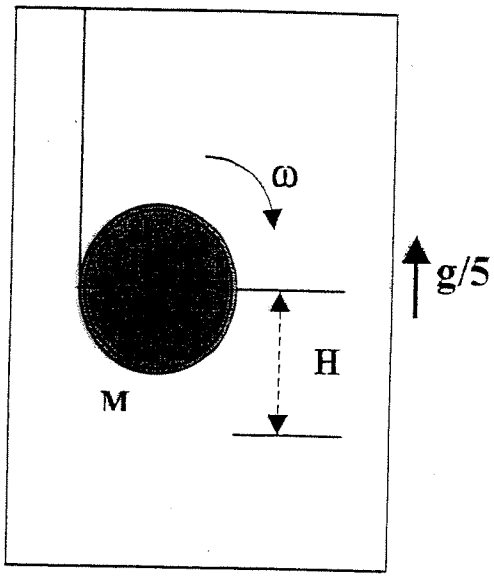
2.- En la figura, un ascensor sube con una aceleración de **g/5**. Del techo cuelga una cuerda en la que está enrollado un cilindro de masa **M** y radio **R**. Si el cilindro en su descenso, *rueda sin deslizar*, se pide:

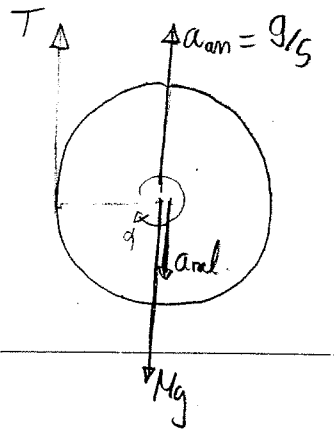
a) Aceleraciones relativa y absoluta del c.d.m. del disco.

b) Fuerza que ejerce la cuerda sobre el techo del ascensor.

c) Si parte del reposo, velocidad angular del cilindro cuando su c.d.m. haya descendido una altura **H** respecto del ascensor.

***DATOS**: Los resultados deben ir exclusivamente en función de **M**, **R**, **g** y **H**.*





TRASLACIÓN $F = M.a$

$Mg - T = M(a_{rel} - g/5)$ ①

ROTACIÓN $M = I.\gamma$ (eje G.)

$T.R = \frac{1}{2}MR^2\gamma = \frac{1}{2}MR\gamma$ ②

CONDICIÓN RODADURA SIN DESLIZ $a = \gamma.R$

$a_{rel} = \gamma.R$ ③.

Con ③ entro en ②: $T = \frac{1}{2}M.a_{rel}$ → entrando en ①

$Mg - \frac{1}{2}Ma_{rel} = Ma_{rel} - M.g/5 \Rightarrow \frac{6g}{5} = \frac{3}{2}a_{rel} \Rightarrow \boxed{a_{rel} = 4/5\,g}$

$\bar{a}_{abs} = \bar{a}_{am} + \bar{a}_{rel} = g/5\,\bar{u}_y - \frac{4}{5}g\,\bar{u}_y \Rightarrow \bar{a}_{abs} = -3/5\,g\,u_y \Rightarrow \boxed{a_{abs} = 3/5\,g}$

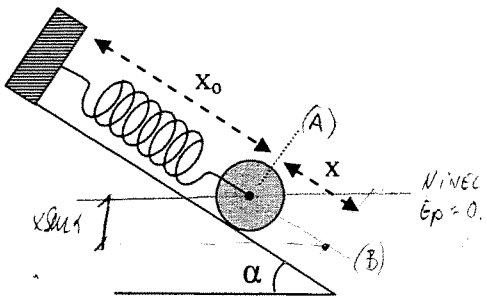
b) $\boxed{T = \frac{1}{2}M.a_{rel} = \frac{1}{2}M.\frac{4}{5}g = \frac{2}{5}Mg}$

c) $V_{rel}^2 = V_{0rel}^2 + 2a_{rel}.H \Rightarrow V_{rel} = \sqrt{2.4/5\,gH} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{V_{rel}}{R} = \sqrt{\frac{8gH}{5R^2}}}$

www.simplyjarod.com

SEPTIEMBRE 2007 Vamos P.14.

2.- Un cilindro de masa M y radio R está en un plano inclinado, sujeto por un muelle de constante recuperadora k a un punto fijo como muestra la figura. El cilindro se deja en libertad desde la posición $x = x_o$ (muelle sin estirar, ni comprimir). Sabiendo que en su movimiento el cilindro rueda sin deslizar, hallar:



a) La máxima distancia x hasta la que llega el cilindro.

Tomando la posición en que se encuentra el c.d.m. del cilindro en las condiciones del apartado a) como origen de energía potencial gravitatoria, calcular:

b) Valor de x en la que la velocidad del centro de masas del cilindro es máxima.

Dato: Momento de inercia del cilindro respecto a su eje: ½ M R²

a) Aunque exista rozamiento, este no trabaja $\Rightarrow E_{mec\,A} = E_{mec\,B}$

$$E_{mec(A)} = \cancel{E_{c_A}}^{0} + \cancel{E_{p_A}}^{0} + \cancel{E_{muelle\,A}}^{0} = 0$$

$$E_{mec\,B} = \cancel{E_{c_B}}^{0} + E_{p_B} + E_{muelle_B} = -Mg\,x\operatorname{sen}\alpha + \tfrac{1}{2}Kx^2$$

igualando: $-Mg\,x\operatorname{sen}\alpha + \tfrac{1}{2}Kx^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{2Mg\operatorname{sen}\alpha}{K}}$

b). $E_{mec\,A} = E_{mec\,C}$ Siendo C el pto donde tenemos máxima velocidad

$$E_{mec\,A} = 0$$

$$E_{mec\,C} = \tfrac{1}{2}MV_c^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_c^2 + \tfrac{1}{2}Kx^2 - Mg\,x\operatorname{sen}\alpha$$

$$V_c = \dot{x} \;;\; \omega_c = \frac{\dot{x}}{R}$$

Luego: $E_{mec\,C} = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}MR^2\dfrac{\dot{x}^2}{R^2} + \tfrac{1}{2}Kx^2 - Mg\,x\operatorname{sen}\alpha =$

$$= \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}Kx^2 - Mg\,x\operatorname{sen}\alpha$$

igualando: $\tfrac{3}{4}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}Kx^2 - Mg\,x\operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\dfrac{4}{3M}\left(Mg\,x\operatorname{sen}\alpha - \tfrac{1}{2}Kx^2\right)}$

Buscamos el máximo:

www.simplyjarod.com

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = 0 \; ; \; \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{4}{3M}\left(Mgx\,Sen\varphi - \tfrac{1}{2}Kx^2\right)} = 0.$$

$$\frac{d}{dx}\left(Mgx\,Sen\varphi - \tfrac{1}{2}Kx^2\right)^{1/2} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}\left(Mgx\,Sen\varphi - \tfrac{1}{2}Kx^2\right)^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot\left(Mg\,Sen\varphi - K.x\right) = 0$$

Entonces: $\dfrac{Mg\,Sen\varphi - Kx}{2\sqrt{Mgx\,Sen\varphi - \tfrac{1}{2}Kx^2}} = 0 \Leftrightarrow Mg\,Sen\varphi - Kx = 0$

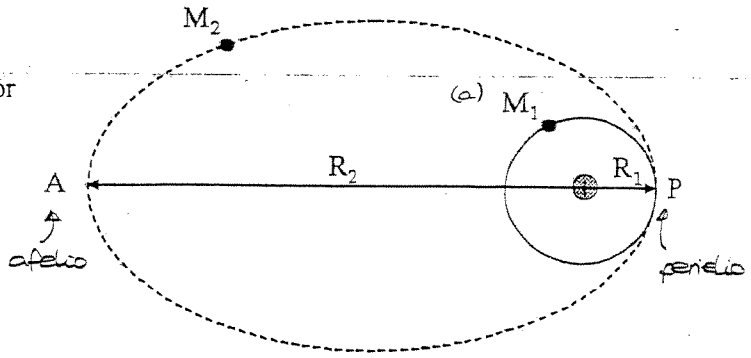
$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{Mg\,Sen\,\alpha}{K}}$$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2000

1. En el año 2050, la conquista del espacio lleva a los europeos y a los americanos a competir por la conquista de un planeta en un lejano sistema solar. Para el estudio previo del planeta cada uno de ellos envía y coloca en órbita un satélite, de masas M_1 y M_2, iguales. El satélite europeo (M_1) describe una trayectoria circular de radio R_1 y el americano (M_2) una trayectoria elíptica con distancias mínima y máxima R_1 y R_2, como se indica en la figura. Sabiendo que el período orbital del satélite europeo es de 60.6 días, calcular:

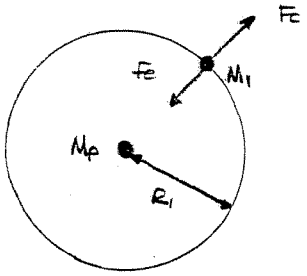
a) La masa del planeta.
b) La velocidad de cada satélite en el punto P.
c) ¿Cuál de los dos satélites tiene mayor energía? Justificar la respuesta.



Datos: $R_1 = 10^{11}$ m, $R_2 = 3'8\ 10^{11}$ m, $G = 6'67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

[Problema 75 del libro]

a)



$|\vec{F}_g| = |F_c| \Longrightarrow G\frac{M_p M_1}{R_1^2} = m \cdot a_n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow G\frac{M_p M_1}{R_1^2} = M_1\frac{v_1^2}{R_1}$

$\left[\rho = \frac{|\vec{v}_1|^2}{a_n} \Longrightarrow a_n = \frac{|\vec{v}_1|^2}{\rho} = \frac{v_1^2}{R_1}\right]$

$\Longrightarrow G\frac{M_p}{R_1} = v_1^2 \Longrightarrow M_p = \frac{v_1^2 R_1}{G}$

Para calcular v_1 utilizamos el periodo que nos G dan como dato:

$$T = \frac{2\pi R_1}{v_1} \Longrightarrow v_1 = \frac{2\pi R_1}{T} = \frac{2\pi\ 10^{11}}{60.6 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 11943 \text{ m/s}$$

Sustituyendo:

$$M_p = \frac{(11943)^2 \cdot 10^{11}}{6.67 \cdot 10^{-11}} = 2.16 \cdot 10^{31} \text{ kg}$$

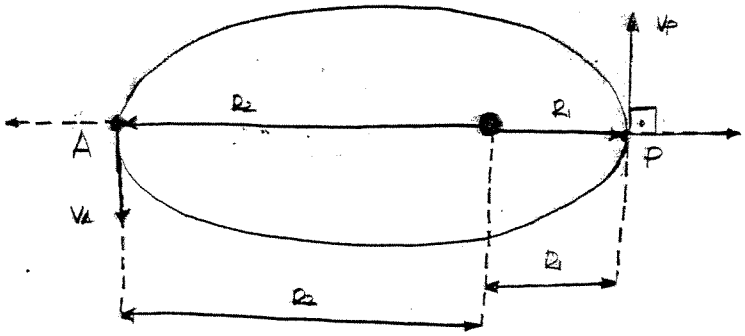
b) $\exists v_1, v_2$?

Europeo: $v_1 = 11943$ m/s

Americano: $v_p = 151000$ m/s

Aplicamos los principios de conservación de la energía y del momento angular en los puntos P y A

www.simplyjarod.com



$\vec{L_P} = \vec{L_A} \Longrightarrow L_P = L_A$

$\Longrightarrow R_1 \cdot M_2 v_P \operatorname{sen} 90° = R_2 \cdot M_2 \cdot \operatorname{sen} 90° \cdot v_A$

$\Longrightarrow R_1 v_P = R_2 \cdot v_A \quad (1)$

$E_P = E_A \Longrightarrow \frac{1}{2} M_2 v_P^2 - G\frac{M_P M_2}{R_1} = \frac{1}{2} M_2 v_A^2 - G\frac{M_P M_2}{R_2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{1}{2} v_P^2 - G\frac{M_P}{R_1} = \frac{1}{2} v_A^2 - G\frac{M_P}{2} \quad (2)$

Tenemos un sistema de ecuaciones formado por (1) y (2):

$$\begin{cases} R_1 v_P = R_2 v_A \\ \frac{1}{2} v_P^2 - G\frac{M_P}{R_1} = \frac{1}{2} v_A^2 - G\frac{M_P}{2} \end{cases}$$

$\Longrightarrow v_P = \frac{R_2}{R_1} v_A \Longrightarrow v_P = 3.8\, v_A$

$\Longrightarrow \frac{1}{2} (3.8\, v_A)^2 - \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2.16 \cdot 10^{31}}{3.8 \cdot 10^{11}} = \frac{1}{2} v_A^2 - \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2.16 \cdot 10^{31}}{10^{11}}$

$\Longrightarrow v_A = 39\,736\ (m/s) \Longrightarrow \boxed{v_P = 151\,000\ (m/s)}$

Velocidad lineal máxima del satélite americano.

c) Comparando energías en el punto P:

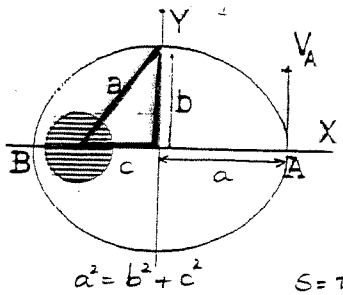
Como la energía potencial de ambos satélites es la misma (mismo punto e idéntico peso) lo que deberas tener en cuenta en la energía cinética, como ésta es proporcional a la velocidad^2 y $v_P > v_1 \Longrightarrow$ Tendrá más energía el satélite americano.

www.simplyjarod.com

FEBRERO 1995

1. Se desea colocar un satélite artificial, de masa m (<< M_{Tierra}), alrededor de la Tierra, de modo que describa una ecuación dada por:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=R_T^{\,2}$$



$a^2 = b^2 + c^2$ $\quad S = \pi \cdot ab$

Sabiendo que el radio de la Tierra es aproximadamente R_T = 6.400 km, que la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre es g = 9.8 m/s^2, y que la Tierra se halla en un foco de la elipse, calcular:

a) velocidad v_A con la que debe pasar por A
(*Sugerencia: Considérense los correspondientes teoremas de conservación en los puntos A y B*)

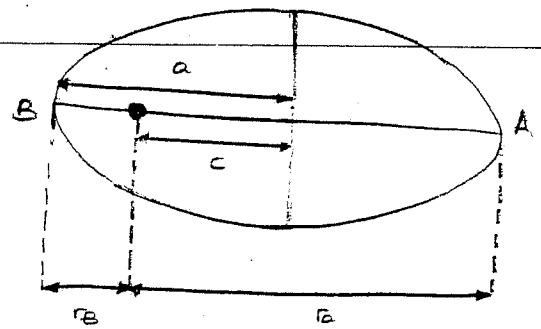
b) velocidad aerolar (dS/dt) y período de movimiento de satélite.
(*Ayuda: El área de la elipse es πab*)

Pasamos la ecuación a la forma canónica:

$$\frac{x^2}{16R_T^2}+\frac{y^2}{9R_T^2}=1 \Longrightarrow \left(\frac{x}{4R_T}\right)^2+\left(\frac{y}{3R_T}\right)^2=1 \Longrightarrow \begin{cases} a = 4R_T = 25.6\cdot10^6\ m \\ b = 3R_T = 19.2\cdot10^6\ m \end{cases}$$

Calculamos c:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(16-9)R_T^2}=16.9\cdot10^6 m$$



$r_B = a - c = 8.7\cdot10^6 m$

$r_A = a + c = 42.5\cdot10^6 m$

a) Aplicamos los principios de conservación

$$\vec{L_A}=\vec{L_B} \Longrightarrow L_A = L_B \Longrightarrow r_A \cdot m \cdot v_A \cdot \operatorname{sen}90^\circ = r_B \cdot m \cdot v_B \cdot \operatorname{sen}90^\circ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r_A \cdot v_A = r_B \cdot v_B$$

$$E_A = E_B \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{r_B} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left[g=\frac{GM}{R_T^2} \Longrightarrow g\cdot R_T^2 = GM\right] \Longrightarrow \frac{1}{2}v_A^2 - \frac{gR_T^2}{r_A} = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{gR_T^2}{r_B}$$

* Muy frecuente que no den el valor de GM por lo que habrá que hacer la operación que hay entre corchetes

www.simplyjarod.com

Reduciendo:

$$\Longrightarrow v_B = \frac{r_A}{r_B} v_A \Longrightarrow v_B = 4.89\, v_A$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} v_A^2 - \frac{g R_T^2}{r_A} = \frac{1}{2} (4.89\, v_A)^2 - \frac{g R_T^2}{r_B}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \left(v_A^2 - 4.98^2 v_A^2 \right) = g R_T^2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \Longrightarrow \boxed{v_A = 1790.1 \ (m/s)}$$

$v_B = 8743 \ (m/s)$

b) $\boxed{V = \frac{|\vec{L}|}{2m}} = \frac{r_A \, m \cdot v_A \cdot \cancel{\operatorname{sen} 90^\circ}^{1}}{2m} = \frac{r_A \cdot v_A}{2} = \frac{1790.1 \cdot 42.5 \cdot 10^6}{2} = \underline{8.8 \cdot 10^{10} \ m^2/s}$

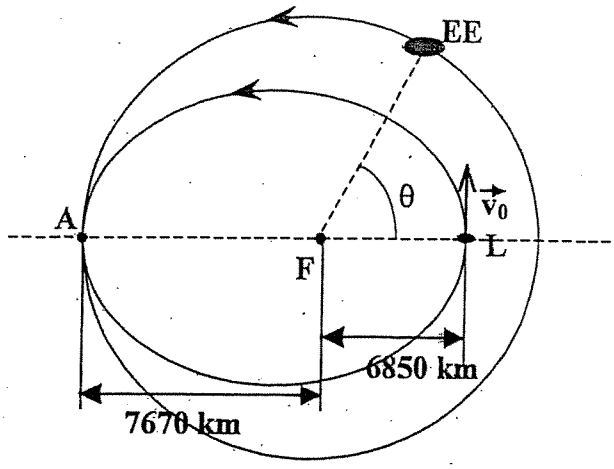
$\boxed{T = \frac{\pi a b}{\text{Vareolar}}} = \frac{\pi \cdot 25.6 \cdot 10^6 \cdot 19.2 \cdot 10^6}{8.8 \cdot 10^{10}} = \underline{40\,686.5}$

www.simplyjarod.com

EXAMEN DE FÍSICA - FEBRERO 2004

Ejercicio 1

La estación espacial de la figura **EE**, realiza una órbita circular de radio **R = 7670 km** alrededor de la Tierra y tiene una masa $\mathbf{m_E = 4420\ kg}$. Se envía desde la posición **L** una lanzadera con aprovisionamiento, con una órbita de aproximación elíptica a una distancia de **6850 km** del centro de la Tierra, que ocupa un foco de la elipse (véase la figura). Si el acoplamiento entre la lanzadera y la estación tiene lugar en la posición **A** con **velocidad relativa nula**, se pide:



a) La velocidad v_A de la estación EE en el punto **A** y la velocidad v_0 de lanzamiento de la lanzadera.

b) La energía mecánica y el vector momento angular de los dos objetos espaciales respecto al centro de la Tierra, F.

c) Los periodos de la estación espacial y de la lanzadera.

d) El ángulo θ que da la posición relativa de la estación y la lanzadera en el momento del lanzamiento.

DATOS: Radio de la Tierra $\mathbf{R_T = 6370\ km}$; masa lanzadera $\mathbf{m_L = 884\ kg}$; $\mathbf{g = 9.8\ m/s^2}$

AYUDA: *El semieje menor de la elipse vale* $b = 7248\ km$. *Área de la elipse* $= \pi ab$, *siendo* a *el semieje mayor.*

a)

Estación orbital (órbita circular)

Llamamos v_E a la velocidad orbital de la estación orbital en cualquier punto de su trayectoria circular. Esta velocidad es constante a lo largo de toda la circunferencia:

$$F_c = F_g \Rightarrow \cancel{m_E}\frac{v_E^2}{R_A} = \frac{GM_T\cancel{m_E}}{R_A^2} \Rightarrow v_E^2 = \frac{GM_T}{R_A} \Rightarrow v_E^2 = \frac{gR_T^2}{R_A} \Rightarrow v_E = \sqrt{\frac{gR_T^2}{R_A}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_E = \sqrt{\frac{gR_T^2}{R_A}} = \sqrt{\frac{3{,}976\cdot 10^{14}}{7{,}67\cdot 10^6}} = 7199{,}88\ m/s$$

Lanzadera (órbita elíptica)

Aplicamos el principio de conservación del momento angular $\vec{L}$. Como el momento angular es constante tiene que ser igual en el punto O de partida de la lanzadera y en el punto A de acoplamiento.

Como la velocidad de la lanzadera varía con la posición llamaremos v_A a la velocidad de la lanzadera en el punto A y v_0 a la velocidad de la lanzadera en el punto O de lanzamiento.

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_A \Rightarrow L_0 = L_A \Rightarrow r_A m_L v_A \underbrace{\operatorname{sen} 90^\circ}_{=1} = r_0 m_L v_0 \underbrace{\operatorname{sen} 90^\circ}_{=1} \Rightarrow r_A \cancel{m_L} v_A = r_0 \cancel{m_L} v_0 \Rightarrow r_A v_A = r_0 v_0$$

Ahora bien, el enunciado dice claramente que en A la **velocidad relativa de ambos objetos es nula** lo que, físicamente, significa que $v_A = v_E$. Por tanto en la ecuación sólo hay una incógnita que es v_0:

$$r_A v_A = r_0 v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{r_A v_A}{r_0} = \frac{7{,}67\cdot 10^6 \cdot 7199{,}88}{6{,}85\cdot 10^6} = 8061{,}77\ m/s$$

www.simplyjarod.com

b)

Estación orbital (órbita circular)

$$\left.\begin{aligned} E_p &= -\frac{GM_T m_E}{R_A} = -\frac{gR_T^2 m_E}{R_A} = \frac{3{,}976\cdot 10^{14}\cdot 4420}{7{,}67\cdot 10^6} = -2{,}29\cdot 10^{11}\,J \\ E_C &= \frac{1}{2}m_E v_A^2 = \frac{1}{2}\cdot 4420\cdot 7199{,}88^2 = 1{,}1456\cdot 10^{11}\,J \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_{mEE} = -1{,}14\cdot 10^{11}\ J$$

$$\vec{L}_{0E} = \vec{r}_A \times m_E\vec{v}_E \Rightarrow L_{0E} = r_A m_E v_E \underbrace{\operatorname{sen} 90^\circ}_{=1} = r_A m_E v_E = 2{,}44\cdot 10^{14}\ kg\,m^2/s \Rightarrow \vec{L}_{0E} = 2{,}44\cdot 10^{14}\vec{k}\ \ kg\,m^2/s$$

Lanzadera (órbita elíptica)

$$\left.\begin{aligned} E_p &= -\frac{GM_T m_E}{R_A} = -\frac{gR_T^2 m_L}{R_A} = \frac{3{,}976\cdot 10^{14}\cdot 884}{7{,}67\cdot 10^6} = -4{,}58\cdot 10^{10}\,J \\ E_C &= \frac{1}{2}m_L v_A^2 = \frac{1}{2}\cdot 884\cdot 7199{,}88^2 = 2{,}29\cdot 10^{11}\,J \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_{mL} = -2{,}29\cdot 10^{10}\ J$$

Como sabemos que el momento angular se conserva lo calculamos allí donde sabemos que es más sencillo que es punto A pues la velocidad y el vector posición forman un ángulo de 90º.

$$\vec{L}_{0L} = \vec{r}_A \times m_L\vec{v}_A \Rightarrow L_{0L} = r_A m_L v_A \underbrace{\operatorname{sen} 90^\circ}_{=1} = r_A m_L v_A = 4{,}88\cdot 10^{13}\ kg\,m^2/s \Rightarrow \vec{L}_{0L} = 4{,}88\cdot 10^{13}\vec{k}\ \ kg\,m^2/s$$

c)

Estación orbital (órbita circular)

$$T = \frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{velocidad}} = \frac{2\pi R_A}{v_A} = \frac{2\pi\cdot 7{,}67\cdot 10^6}{7199{,}88} = 6693{,}44\ s$$

Lanzadera (órbita elíptica)

$$T = \frac{\text{area de la elipse}}{\text{velocidad aerolar}} = \frac{\pi ab}{v_{aerolar}} = \frac{\pi\cdot\left(\frac{r_A + r_0}{2}\right)\cdot b}{\frac{L_{0L}}{2m_L}} = \frac{\pi\cdot\left(\frac{7{,}67\cdot 10^6 + 6{,}85\cdot 10^6}{2}\right)\cdot 7{,}248\cdot 10^6}{\frac{4{,}88\cdot 10^{13}}{2\cdot 884}} = 5989\,s$$

d)

La lanzadera tiene que recorrer media elipse para llegar desde el punto 'L' hasta el punto 'A'.
Esto quiere decir que la lanzadera tarda medio periodo en llegar al punto 'A' partiendo desde el punto 'L':

$$\frac{T_L}{2} = \frac{5986}{2} = 2993\,s$$

Por tanto, para la estación espacial EE :

$$\left.\begin{aligned} \text{Si en}\quad T_E = 6693\,segundos &\xrightarrow{\text{recorre}} 2\pi\ rad \\ \text{entonces en}\ \frac{T_L}{2} = 2993\,segundos &\xrightarrow{\text{recorrera}} \alpha\ rad \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{T_L}{2}\cdot 2\pi}{T_E} = \frac{2993\cdot 2\pi}{6693} = 2{,}8\,rad = 0{,}89\pi\,rad$$

Por tanto: $\theta = \pi - 0{,}89\pi = 0{,}105\pi\ rad = 0{,}33\,rad \simeq 19^\circ$

www.simplyjarod.com

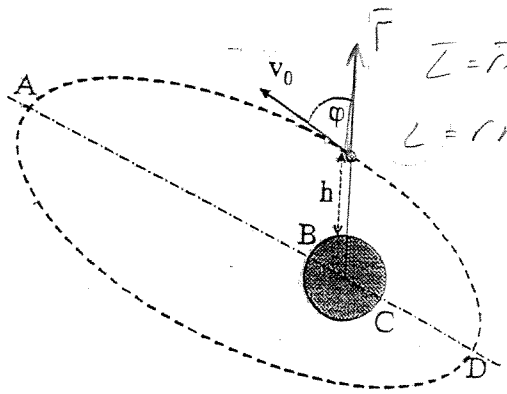
SEPTIEMBRE 1999

1. Desde una altura h = 4000 km sobre la superficie de la Tierra se lanza un satélite con una velocidad v_0 = 8.000 m/s formando un ángulo $\varphi = 60°$ con la vertical. Calcular:

a) Distancias máxima (AB) y mínima (CD) a la Tierra que alcanzará dicho satélite en su trayectoria elíptica.

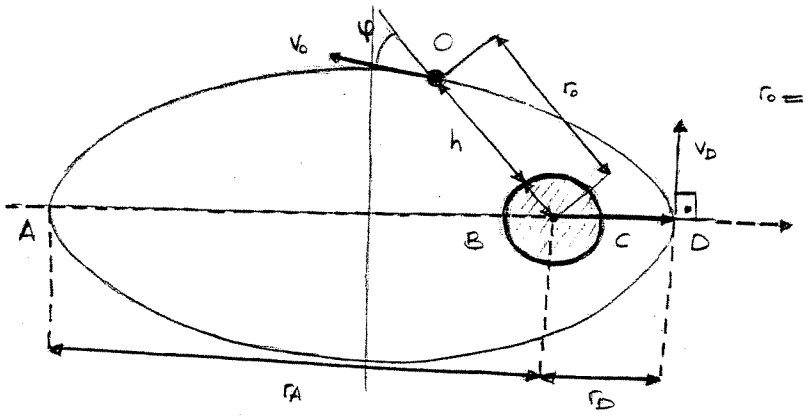
b) Velocidad del satélite al pasar por dichas posiciones.

Datos: *Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre* $g = 10\ m/s^2$ *y radio de la Tierra* $R_T = 2/\pi\ 10^7$ m.



$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$L = r\,m\,v\,\mathrm{sen}\,\varphi$



$r_0 = R_T + h = \frac{2}{\pi} 10^7 + 4 \cdot 10^6 = 10.4 \cdot 10^6$

$10'37 \cdot 10^6$

a) b)

$\vec{L_0} = \vec{r_0} \times m\vec{v_0} \Longrightarrow L_0 = r_0 \cdot m \cdot v_0 \cdot \mathrm{sen}\,\varphi = 10.4 \cdot 10^6 \cdot m \cdot 8000 \cdot \mathrm{sen}\,60° = 7.2 \cdot 10^{10} m$

Ahora bien, como $\vec{L}$ es de en toda la órbita:

$L_A = L_0 \Longrightarrow r_A \cdot m v_A \cdot \mathrm{sen}\,90° = 7.2 \cdot 10^{10} m \Longrightarrow r_A v_A = 7.2 \cdot 10^{10}$ (1)

$L_D = L_0 \Longrightarrow r_D m v_D \cdot \mathrm{sen}\,90° = 7.2 \cdot 10^{10} m \Longrightarrow r_D v_D = 7.2 \cdot 10^{10}$ (2)

Aplicando conservación de la energía:

$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{Mm}{r_0} = \left[g R_T^2 = GM_T\right] \Longrightarrow \frac{m v_0^2}{2} - \frac{g R_T^2 m}{r_0} = -6.97 \cdot 10^6 m\ [J]$

$E_A = E_0 \Longrightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 - G\frac{M_T m}{r_A} = -6.97 \cdot 10^6 m \Longrightarrow \frac{v_A^2}{2} - \frac{g R_T^2}{r_A}$ (3)

$E_D = E_0 \Longrightarrow \frac{1}{2} m v_D^2 - G\frac{M_T m}{r_D} = -6.97 \cdot 10^6 m \Longrightarrow \frac{v_D^2}{2} - \frac{g R_T^2}{r_D}$ (4)

Ya tenemos un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas.

$$\begin{cases} r_A v_A = 7.2 \cdot 10^{10} \\ r_D v_D = 7.2 \cdot 10^{10} \\ \frac{v_A^2}{2} - \frac{g R_T^2}{r_A} = -6.97 \cdot 10^6 \\ \frac{v_D^2}{2} - \frac{g R_T^2}{r_D} = -6.97 \cdot 10^6 \end{cases}$$

www.simplyjarod.com

$$\begin{cases} v_A r_A = 7.2 \cdot 10^{10} \\ v_D r_D = 7.2 \cdot 10^{10} \\ \frac{v_A^2}{2} - \frac{4.05 \cdot 10^{14}}{r_A} = -6.94 \cdot 10^6 \\ \frac{v_D^2}{2} - \frac{4.05 \cdot 10^{14}}{r_D} = -6.94 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Resolvemos (genérico)

$$\begin{cases} rv = 7.2 \cdot 10^{10} \\ \frac{v^2}{2} - \frac{4.05 \cdot 10^{14}}{r} = -6.94 \cdot 10^6 \end{cases} \Longrightarrow \text{Multiplicamos por } 2r^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r^2 v^2 - 4.05 \cdot 10^{14} \cdot 2 \cdot r = -6.94 \cdot 10^6 \cdot 2r^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 13.88 r^2 - 8.1 \cdot 10^{14} r + 5.18 \cdot 10^{21} = 0 \begin{cases} r = 50.5 \cdot 10^6 = r_A \\ r = 7.296 \cdot 10^6 = r_D \end{cases}$$

Finalmente:

$AB = r_A - R_T = 43447$ Km

$CD = r_D - R_T = 928$ Km

$v_A = 1442$ m/s

$v_b = 9847$ m/s

$r_0 = R_T + h = \frac{2}{\pi} 10^7 + 4\,10^6$

$L_0 = r_0 m v_0 \operatorname{Sen} \beta = \left(\frac{2}{\pi} \cdot 10^7 + 4 \cdot 10^6\right) m 8000 \cdot \operatorname{Sen} 60 = 7'182 \cdot 10^{10} m$

$E_{m_0} = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M_T m}{r_0}$ (Sabemos $g = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow G M_T = g R_T^2$) $= \frac{1}{2} m 8000^2 - \frac{g R_T^2 m}{r_0} = -7'097 \cdot 10^6$

Conservamos E y L entre 0 y A.

$E_{m_0} = E_{m_A} \Rightarrow -7'097 \cdot 10^6 m = \frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{M_T m}{r_A} \Rightarrow -6'354 \cdot 10^6 = 0'5 v_A^2 - \frac{g R_T^2}{r_A} \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \frac{v_A^2}{2} - \frac{4'053 \cdot 10^{14}}{r_A} = -6'354 \cdot 10^6 \right\} (1)$$

$L_0 = L_A \Rightarrow 7'182 \cdot 10^{10} m = r_A m v_A \operatorname{Sen} 90° \rightarrow \{ r_A \cdot v_A = 7'182 \cdot 10^{10} \}$ (2)

De (2) $v_A = \frac{7'182 \cdot 10^{10}}{r_A}$ en (1) $\left\{ \frac{(7'182 \cdot 10^{10})^2}{2} \cdot \frac{1}{r_A^2} - \frac{4'053 \cdot 10^{14}}{r_A} = -6'354 \cdot 10^6 \right\} \times r_A^2$

$-6'354 \cdot 10^6 \cdot r_A^2 + 4'053 \cdot 10^{14} r_A - \frac{(7'182 \cdot 10^{10})^2}{2} = 0 \rightarrow r_A = 7'17 \cdot 10^6 m \equiv r_D$

$r_A = 56'6 \cdot 10^6 m$ ✓

$AB = r_A - R_T = 50.234$ Km

$CD = r_D - R_T = 803'8$ Km

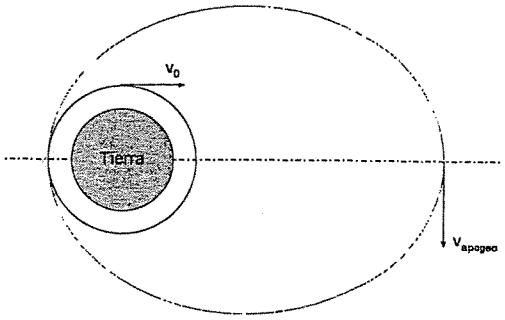
$v_A = 1268'9$ m/s

$v_D = 10016'7$ m/s

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2008

2.- Una nave espacial de masa m = 1000 kg gira en una órbita estable a una distancia de 500 km sobre la superficie de la tierra.



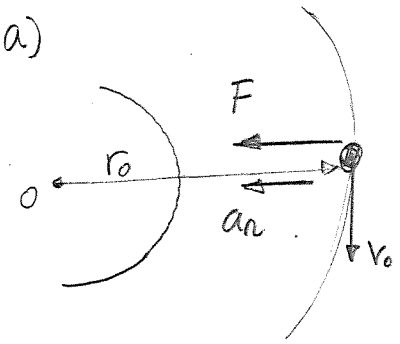
a) Velocidad de la nave en la órbita circular, v_0

En un momento dado, la estación de control decide activar los propulsores de la nave para que esta se ponga en una órbita espacial elíptica alrededor de la Tierra, con un apogeo de $3\ 10^4$ km.

b) Velocidad de la nave en el apogeo
c) Energía mínima que deben liberar los propulsores

Nota: *Apogeo: punto de la órbita más lejano del centro de la Tierra*
Datos: $g_{\text{en la superficie de la Tierra}} = 9.8\ m/s^2$, $R_{tierra} = (2/\pi)\ 10^7\ m$;

a)



2ª Ley Newton: $F = m \cdot a$

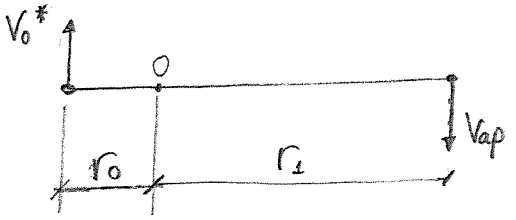
$$G\frac{M m}{r_0^2} = m \cdot \frac{V_0^2}{r_0} \Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$$

Sabiendo: $\cdot\ r_0 = R_T + d = \frac{2}{\pi}\cdot 10^7 + 500\cdot 10^3 = 6866197'72368\ m$

$\cdot\ g = \frac{GM}{R_T^2} \Rightarrow GM = g R_T^2 = 9'8\left[\frac{2}{\pi}\cdot 10^7\right]^2$

Tenemos que: $\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{9'8\left[\frac{2}{\pi}\cdot 10^7\right]^2}{6866197'72368}} = 7605'627\ m/s}$

b) Al liberar energía los propulsores, la velocidad V_0 cambiará a un valor V_0^*



2 Ecs, 2 incógnitas:

$\cdot\ L_0 = cte \Rightarrow V_0^* r_0 m = V_{ap} \cdot r_1 \cdot m$

$$V_0^*\left(\frac{2}{\pi}\cdot 10^7 + 500\cdot 10^3\right) = V_{ap}\ 3\cdot 10^7 \quad (1)$$

$\cdot\ E_{mec} = cte$

$$\frac{1}{2} m V_0^{*2} - G\frac{M m}{r_0} = \frac{1}{2} m V_{ap}^2 - G\frac{M m}{r_1} \Rightarrow \frac{V_0^{*2}}{2} - \frac{g R_T^2}{r_0} = \frac{V_{ap}^2}{2} - \frac{g R_T^2}{r_1}$$

$$\frac{V_0^{*2}}{2} - \frac{9'8\left(\frac{2}{\pi}\cdot 10^7\right)^2}{\frac{2}{\pi}\cdot 10^7 + 500\cdot 10^3} = \frac{V_{ap}^2}{2} - \frac{9'8\left(\frac{2}{\pi}\cdot 10^7\right)^2}{3\cdot 10^7} \quad (2)$$

www.simplyjarod.com

Resolviendo ① y ②: $\boxed{\begin{array}{l} V_0^* = 9445'47 \text{ m/s} \\ V_{op} = 2161'81 \text{ m/s} \end{array}}$

c) La energía que liberarán los propulsores será la diferencia de energías cinéticas entre V_0 y V_0^*

$$E_{prop} = \frac{1}{2} m V_0^{*2} - \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m (V_0^{*2} - V_0^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (9445'47^2 - 7605'627^2) = 15685637630'8 \text{ (J)}.$$

www.simplyjarod.com

FÍSICA 1
Electromagnetismo

www.simplyjarod.com

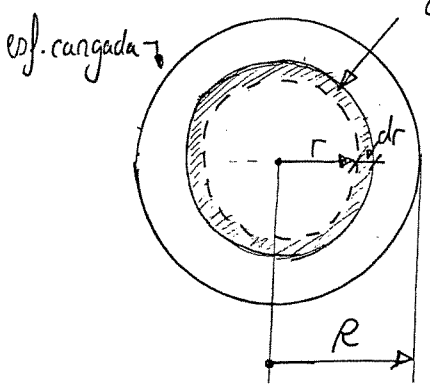
FEBRERO 1995

MANUEL CARBÓ

3. Se dispone de dos distribuciones de carga de forma esférica, de igual radio R e igual carga eléctrica total Q. La primera distribución tiene toda la carga situada sobre la superficie con densidad superficial de carga constante; la segunda, posee una densidad volumétrica de carga que decrece linealmente desde el centro hacia el exterior, según la expresión: $\rho = \rho_0\left(1-\frac{r}{3R}\right)$ para r < R. Hallar:

a) El valor de ρ_0.
b) El campo eléctrico a una distancia r < R, para ambas distribuciones.
c) El campo eléctrico a una distancia r > R, para ambas distribuciones.

a) Esfera maciza con densidad variable: Calculamos la carga integrando.



$$Q = \iiint_{esfera} \rho \cdot dVol = \int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{3R}\right)\cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= \rho_0 4\pi\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{12R}\right]_0^R = \pi\rho_0 R^3$$

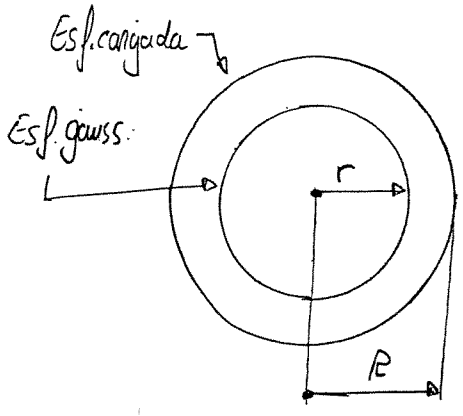
Despejando: $\boxed{\rho_0 = \frac{Q}{\pi R^3}}$

b)

Primer caso: Esfera hueca $\boxed{E=0}$ $r<R$ (Ver ap. a) ej 1. Tema 7)

Segundo caso: Esf. maciza $\boxed{r<R}$

Th. Gauss: $\oint_{esf.\,gauss} \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon}$

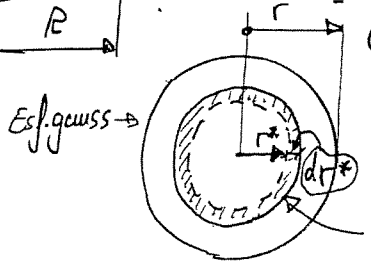


* $\oint_{esf.\,gauss} \bar{E}\cdot d\bar{S} = E\cdot 4\pi r^2$

* $Q_T \equiv$ carga encerrada dentro de la esf. =

$$= \iiint_{esf.\,gauss} \rho \cdot dVol = \int_0^r \rho_0\left(1-\frac{r^*}{3R}\right)\cdot 4\pi r^{*2} dr^* =$$

$$= 4\pi\rho_0\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{12R}\right]$$



$dVol = 4\pi r^{*2} dr^*$

www.simplyjarod.com

Aplicamos el teorema de Gauss:

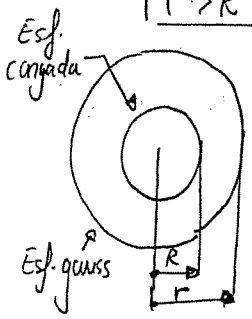
$$E \cancel{4\pi r^2} = \frac{\cancel{4\pi}\rho_0\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^{\cancel{4}2}}{\cancel{12}R}\right]}{\varepsilon} \Rightarrow \left\{E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} r - \frac{\rho_0}{12\varepsilon \cdot R} r^2\right\}$$

Campo radial, luego: $\boxed{\bar{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} r - \frac{\rho_0}{12\varepsilon \cdot R} r^2}$

c)

Primer caso: esf. hueca con carga Q.

$\boxed{r > R}$



$$\oiint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$\left\{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot r^2}\right\} \longrightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \bar{u}_r}$$

Segundo caso: esf. maciza con carga Q.

$\boxed{r > R}$ Análogo al anterior, las esferas por fuera son indistinguibles: $\boxed{\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \bar{u}_r}$

FEBRERO 1995

3. Se dispone de dos distribuciones de carga de forma esférica, de igual radio R e igual carga eléctrica total Q. La primera distribución tiene toda la carga situada sobre la superficie con densidad superficial de carga constante; la segunda, posee una densidad volumétrica de carga que decrece linealmente desde el centro hacia el exterior, según la expresión: $\rho = \rho_0\left(1-\frac{r}{3R}\right)$ para r < R. Hallar:

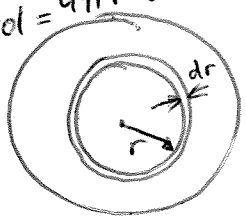
a) El valor de ρ_0.
b) El campo eléctrico a una distancia r < R, para ambas distribuciones.
c) El campo eléctrico a una distancia r > R, para ambas distribuciones.
d) La energía electrostática en cada caso.

Radio R } 1ª distribución: Superficie esférica
Carga Q } 2ª distribución: Esfera maciza (ρ variable)

$\rho = \rho_0\left(1-\frac{r}{3R}\right)$ para $r < R$

a)

$dvol = 4\pi r^2 dr$



$dq = \rho\, dvol$
$dq = \rho\, 4\pi r^2 dr$

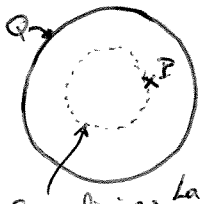
$$Q_T = \int dq = \iiint_{vol} \rho\, dvol = \int_{r=0}^{r=R} \rho_0\left(1-\frac{r}{3R}\right) 4\pi r^2 dr$$

$$= \rho_0 4\pi\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{12R}\right]_{r=0}^{r=R} = \pi\rho_0 R^3$$

$$\boxed{\rho_0 = \frac{Q_T}{\pi R^3}}$$

b) $r < R$, $\vec{E}$?

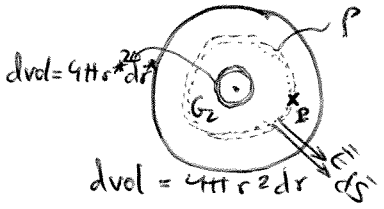
I Superficie esférica



Superficie de Gauss } La superficie de Gauss no encierra carga, así:

$$\oiint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon} \Rightarrow E = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$$

II Esfera maciza



$$\oiint_G \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q_{int\,G_2}}{\varepsilon} = \oiint_{G_2} E\, ds = E \iint_{G_2} ds = E\, S_{G_2} = E\, 4\pi r^2$$

($\vec{E} \parallel d\vec{S}$; E = cte en G_2)

$$q_{int_{G_2}} = \iiint \rho\, dvol = \int_{r^*=0}^{r^*=r} \rho_0\left(1-\frac{r^*}{3R}\right) 4\pi r^{*2} dr^*$$

$$q_{int_{G_2}} = 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{12R}\right)$$

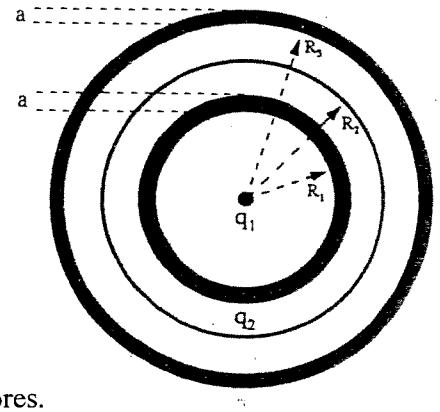
$$E\, 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{12R}\right)}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\vec{E} = \rho_0\left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{12R}\right)\vec{u}_r}$$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 1996

4. Se considera el dispositivo de la figura con dos casquetes esféricos conductores, concéntricos, de espesor **a** y radios interiores $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_3}$, respectivamente. En el centro se coloca una carga puntual $\mathbf{q_1}$ y entre los dos casquetes conductores se coloca una carga $\mathbf{q_2 = 2.5\ q_1}$ distribuida uniformemente en una superficie esférica de grosor despreciable y radio $\mathbf{R_2}$. Se pide:

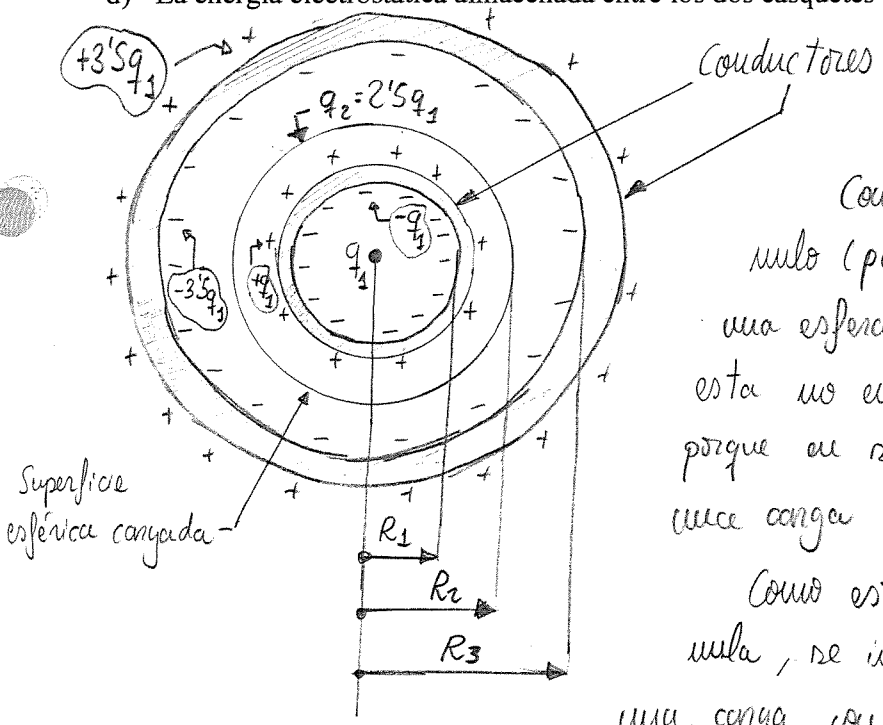


a) Distribución de las cargas en situación electrostática. Muéstrese en la figura.

b) El vector campo eléctrico en las distintas regiones del espacio.

c) El potencial eléctrico en cada región del espacio.

d) La energía electrostática almacenada entre los dos casquetes conductores.



* Conductor pequeño:

Como el campo en su interior es nulo (por ser conductor), si trazamos una esfera gaussiana en su interior esta no encerrará carga $Q_T = 0$, esto es porque en su superficie interior se induce una carga con valor $-q_1$.

Como este conductor tenía carga neta nula, se induce en su superficie exterior una carga con valor $+q_1$.

* Conductor grande: por ser conductor el campo en su interior es nulo, si trazamos como siempre una esfera gaussiana en su interior, esta no encerrará carga $Q_T = 0$, esto es porque en su superficie interior se induce una carga de valor $-(q_1 - q_1 + q_1 + q_2) = -(q_1 + 2'5\,q_1) = -3'5\,q_1$

Como este conductor tenía carga neta nula, se induce en su sup. exterior una carga $+3'5\,q_1$

[NOTA] A falta de datos del enunciado, hemos supuesto como es habitual, que los conductores están aislados y descargados.

www.simplyjarod.com

b) Vector campo eléctrico.

$\boxed{r < R_1}$ ⇒ campo creado por carga puntual, fórmula Coulomb: $\boxed{\bar{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\bar{u}_r}$

$\boxed{R_1 < r < R_1 + a}$ ⇒ dentro del 1er conductor: $\boxed{\bar{E} = \bar{0}}$

$\boxed{R_1 + a < r < R_2}$ ⇒ campo creado por superf. esférica con carga q_1: $\boxed{\bar{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\bar{u}_r}$

$\boxed{R_2 < r < R_3}$ ⇒ campo creado por superf. esférica con carga q_1 + campo creado por una superf. esf. con carga $q_2 = 2'5 q_1$ ⇒ $\boxed{\bar{E} = \frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\bar{u}_r}$

$\boxed{R_3 < r < R_3 + a}$ ⇒ dentro segundo conductor $\boxed{\bar{E} = \bar{0}}$

$\boxed{r > R_3 + a}$ ⇒ campo creado por superf esf. con carga $3'5 q_1$ ⇒ $\boxed{\bar{E} = \frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\bar{u}_r}$

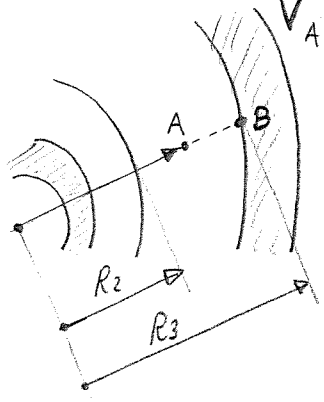
c) Potencial eléctrico: (Siempre lo calculamos en orden contrario al campo)

$\boxed{r \geq R_3 + a}$ $\quad V = -\int_{\infty}^{r} E\,dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr = \boxed{\frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon r} = V}$

$\boxed{r = R_3 + a}$ $\quad V(r = R_3 + a) = \boxed{\frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon (R_3 + a)} = V}$

$\boxed{R_3 + a \geqslant r \geqslant R_3}$ $\quad \boxed{V = \frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon (R_3 + a)}}$ ⇒ El potencial dentro de un conductor es constante y vale lo mismo que en su superficie.

$\boxed{R_3 \geqslant r \geqslant R_2}$



$V_A - V_B = -\int_B^A E \cdot dr \Rightarrow V_A - \frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon (R_3 + a)} = -\int_{R_3}^{r} \frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr$

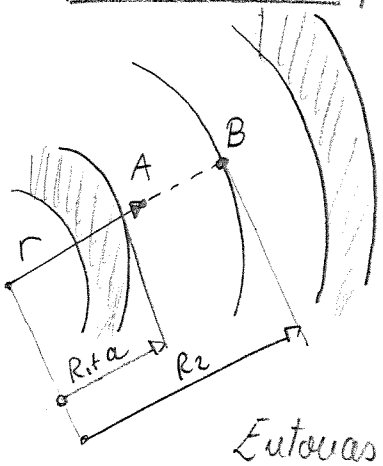
$\left(V_B = \frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon (R_3 + a)}\right.$ apartado anterior$\left.\right)$

Luego: $V_A = \boxed{\frac{3'5 q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_3 + a} + \frac{1}{r} - \frac{1}{R_3}\right] = V}$

www.simplyjarod.com

Febrero 1996, Continuación

$\boxed{R_2 \geq r \geq R_1 + a}$



$$V_A - V_B = -\int_B^A E\,dr$$

$$\left(V_B = V(r=R_2) = \frac{3'5\cdot q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_3+a} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right] \quad \text{(apartado anterior)} \right)$$

Entonces:

$$V_A - \frac{3'5\,q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_3+a} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right] = -\int_{R_2}^{r} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr$$

Haciendo la integral y despejando V_A:

$$\boxed{V_A = \frac{3'5\,q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_3+a} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right] + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right] = V}$$

$\boxed{r = R_1 + a}$

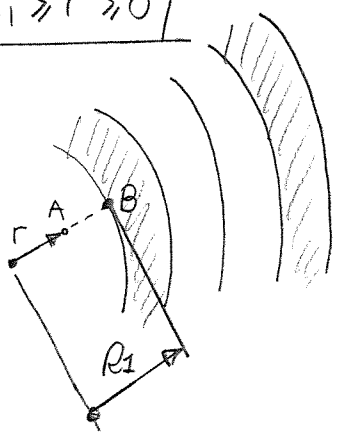
$$\boxed{V_A(r=R_1+a) = \frac{3'5\cdot q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_3+a} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right] + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_1+a} - \frac{1}{R_2}\right] = V}$$

$\boxed{R_1 + a \geq r \geq R_1}$

$$\boxed{V = \frac{3'5\,q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_3+a} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right] + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_1+a} - \frac{1}{R_2}\right]}$$

(por ser conductor) ↑

$\boxed{R_1 \geq r \geq 0}$



$$V_A - V_B = -\int_B^A E\,dr = -\int_{R_1}^{r} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr$$

$$\left(V_B = \frac{3'5\,q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_3+a} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right] + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_1+a} - \frac{1}{R_2}\right] \right)$$

Despejo V_A y realizo la integral

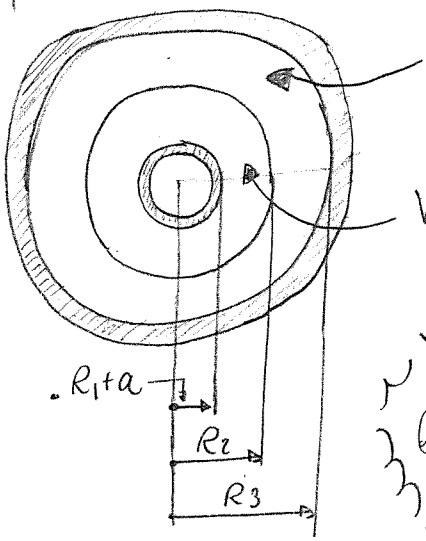
www.simplyjarod.com

$$V_A = \boxed{\frac{3'5q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_3+a}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1+a}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right)=V}$$

d) Energía electrostática almacenada entre los dos conductores.

De la teoría: $W_\varepsilon = \frac{1}{2}\iiint_{vol} \varepsilon\, E^2\, dVol$

Siendo Vol el volumen comprendido entre los dos conductores. Como el campo entre los dos conductores cambia de expresión 2 veces, tendremos que dividir el volumen en dos partes: Vol ① y Vol ②



Vol ②: con un campo $E_2 = \frac{3'5q_1}{4\pi\varepsilon r^2}$

Vol ①: con un campo $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}$

Como integramos en un volumen esférico la expresión del dVol es la de siempre:

$$dVol = 4\pi r^2 dr$$

Con lo que:

$$W_\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\int_{vol_1}\varepsilon E_1^2\, dVol + \int_{vol_2}\varepsilon E_2^2\, dVol\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{R_1+a}^{R_2}\varepsilon\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_{R_2}^{R_3}\varepsilon\left(\frac{3'5q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr\right] =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[\left[\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1+a}-\frac{1}{R_2}\right)\right]+\left[\frac{(3'5q_1)^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)\right]\right] = W_E}$$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2009

Ejercicio 3

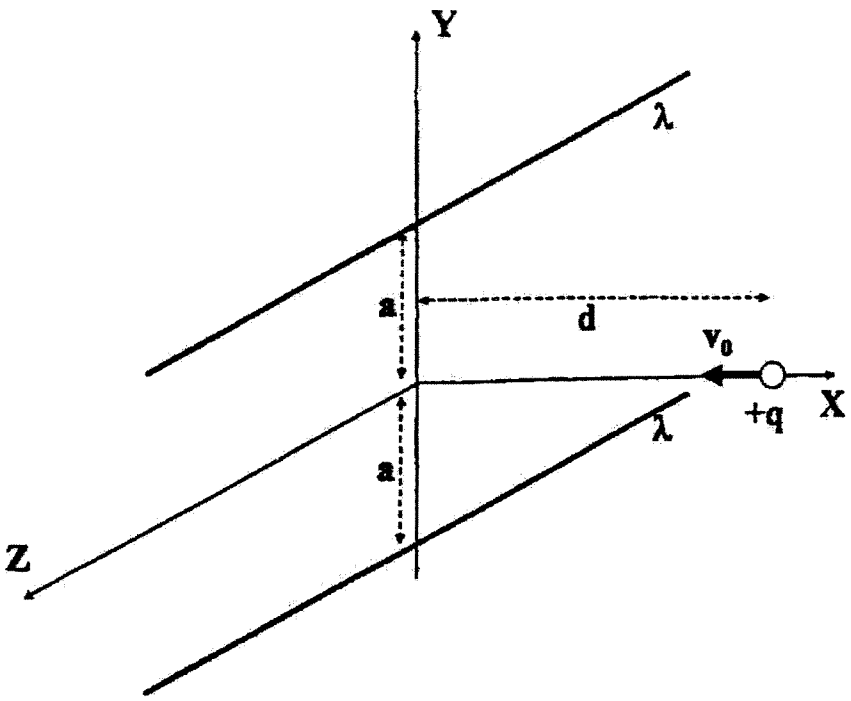
Dos hilos metálicos de gran longitud y con densidad lineal de carga +λ se extienden a lo largo de (0,**a**,z) y (0,-**a**,z) tal y como se indica en la figura. Se pide:

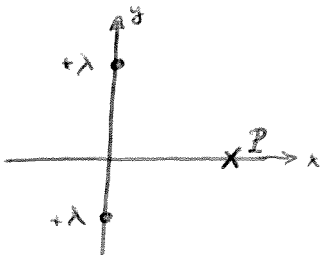
a) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto del eje X.

Si en el punto (d,0,0) se coloca una carga +**q**, y masa **m**, y se lanza con velocidad v_0 hacia el origen de coordenadas, se pide:

b) Calcular el valor de la velocidad v_0 para que la carga atraviese el plano de los hilos (x=0)

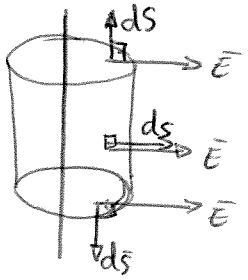
(*Expresar los resultados en función de* λ, **m**, **a**, **d** y **q**)





a)

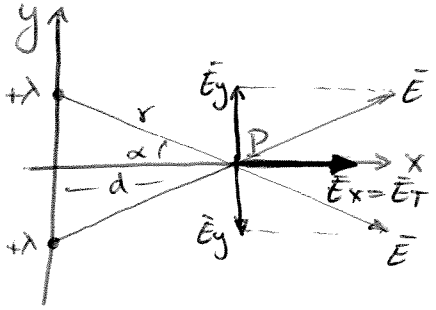
Campo creado por el hilo



$$\int \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E\,S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E\,2\pi r\,h = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \lambda h$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\vec{u}_\rho}$$



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ ;\ E_x = E\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{d}{r} \qquad E_x = \frac{\lambda\, d}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

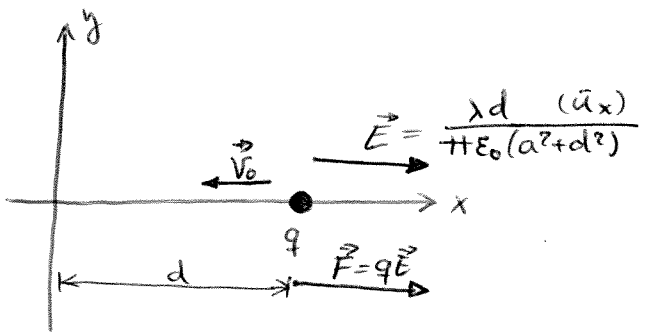
$$E_T = 2E_x = 2E_x(\vec{u}_x)$$

$$r^2 = a^2 + d^2$$

$$\boxed{\vec{E}_T = \frac{2\lambda d}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda d}{\pi\varepsilon_0 (a^2+d^2)}(\vec{u}_x)}$$

www.simplyjarod.com

b)



$$\left.\begin{aligned}\bar{F}=m\bar{a}\\ \bar{F}=q\bar{E}\end{aligned}\right\} ma = qE \qquad a(x)=\frac{q}{m}E(x)$$

$$a(x)=\frac{q}{m}\frac{\lambda x}{\pi\varepsilon_0(a^2+x^2)}$$

$$a=\frac{dv}{dt}\rightarrow a(x)=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dx}\rightarrow\int_{x=d}^{x=0}a(x)dx=\int_{v=-V_0}^{v=0}v\,dv$$

$$\int_{x=d}^{x=0}\frac{q}{m}\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)dx=\frac{v^2}{2}\Big]_{v=-V_0}^{v=0}=\frac{1}{2}\frac{q\lambda}{\pi\varepsilon_0 m}\cdot\ln\left[(a^2+x^2)\right]_{x=d}^{x=0}$$

$$\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 m}\ln\frac{a^2}{a^2+d^2}=0-\frac{(-V_0)^2}{2}=-\frac{V_0^2}{2}\rightarrow V_0^2=\frac{-q\lambda}{\pi\varepsilon_0 m}\ln\frac{a^2}{a^2+d^2}=$$

$$=\frac{q\lambda}{\pi\varepsilon_0 m}\ln\frac{a^2+d^2}{a^2}$$

$$\boxed{V_0=\sqrt{\frac{q\lambda}{\pi\varepsilon_0 m}\cdot\ln\frac{a^2+d^2}{a^2}}}$$

Para que la carga atraviese el campo

$$V_0>\sqrt{\frac{q\lambda}{\pi\varepsilon_0 m}\ln\frac{a^2+d^2}{a^2}}$$

www.simplyjarod.com

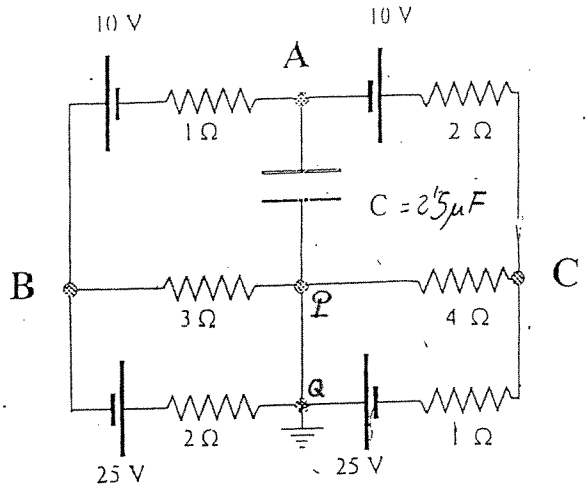
FEBRERO 2002

5. En el circuito de la figura, calcular:

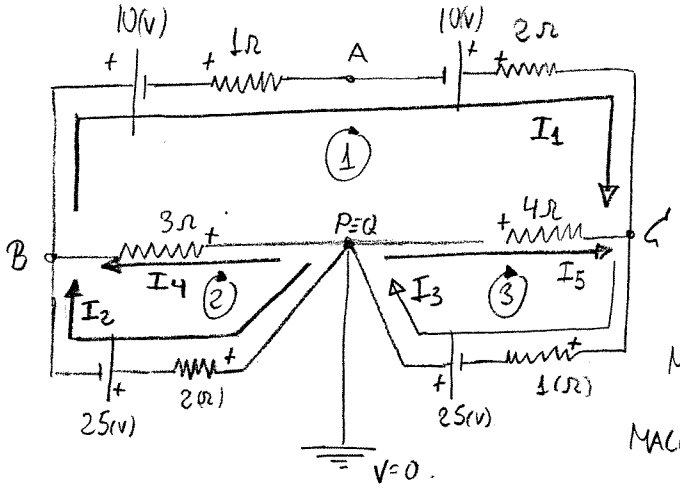
a) Intensidades en cada una de las ramas, indicando el sentido de ellas

b) Potencial eléctrico de los puntos A, B y C

c) Energía almacenada en el condensador.



a) Simplificamos circuito: · La rama AP tiene condensador ⇒ La quitamos.
· Como el cable PQ no tiene ningún elemento ⇒ el punto P y Q están al mismo potencial ⇒ unimos P y Q



· Planteamos ecuaciones:

NUDO B: $I_2 + I_4 = I_1$ (1)

NUDO C: $I_1 + I_5 = I_3$ (2)

MALLA (1): $-10 - I_1(1+2) + 10 + 4I_5 - 3I_4 = 0$ (3)

MALLA (2): $3I_4 - 2I_2 - 25 = 0$ (4)

MALLA (3): $-4I_5 - I_3 \cdot 1 + 25 = 0$ (5)

Resolvemos: $I_1 = 1$(A); $I_2 = -4'4$(A); $I_3 = 5'8$(A); $I_4 = 5'4$(A); $I_5 = 4'8$(A)

Balance de potencias:

$P_{gen} = -I_1 \cdot 10 + I_1 \cdot 10 - I_2 \cdot 25 + I_3\, 25 = 255$ (W)

$P_{res} = I_1^2(1+2) + I_2^2 \cdot 2 + I_3^2 \cdot 1 + I_4^2 \cdot 3 + I_5^2 \cdot 4 = 255$(W)

} ⇒ ¡OK!

b) Tomando como referencia P: vamos sumando potenciales de camino a B, A y C

$V_B = 0 - 3I_4 = -16'2$(V)

$V_A = V_B - 10 - I_1 \cdot 1 = -16'2 - 10 - 1 = -27'2$(V)

$V_C = -I_5 \cdot 4 = -19'2$(V)

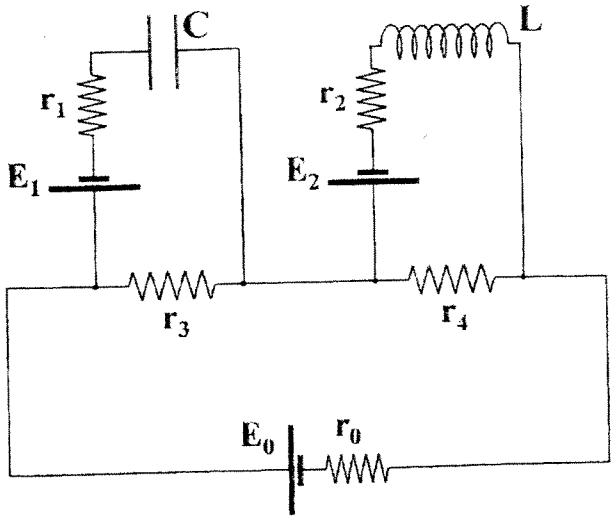
c) Condensador entre A y P ⇒ $W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} 2'5 \cdot 10^{-6} \cdot (-27'2 - 0)^2 = 9'25 \cdot 10^{-4}$(J)

$(V_A - V_P)^2$

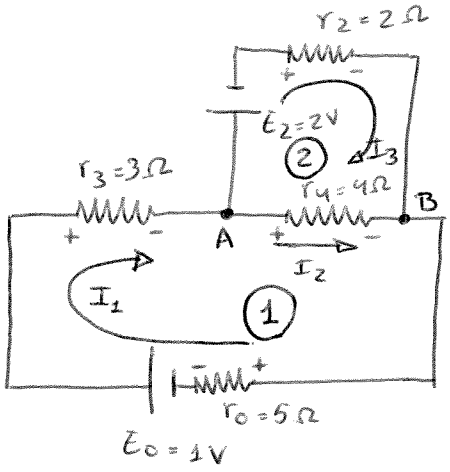
SEPTIEMBRE 2003

4. En el circuito de la figura, en regimen permanente, se pide calcular:

a) Energía eléctrica almacenada en el condensador.
b) Energía magnética almacenada en la bobina.
c) Energía disipada por segundo en r_4



Datos: $E_0 = 1$ V, $E_1 = 3$ V, $E_2 = 2$ V, $L = 80$ mH, $C = 5\mu$F, $r_0 = 5\ \Omega$, $r_1 = 1\ \Omega$, $r_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $r_4 = 4\ \Omega$



$$\left.\begin{array}{l} A:\ I_1 = I_2 + I_3 \\ 1:\ -I_1 r_0 + E_0 - I_1 r_3 - I_2 r_4 = 0 \\ 2:\ -E_2 - r_2 I_3 + I_2 r_4 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I_2 + I_3 \\ -5I_1 + 1 - 3I_1 - 4I_2 = 0 \\ -2 - 2I_3 + 4I_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} I_1 = I_2 + I_3 \\ +8I_1 + 4I_2 - 1 = 0 \\ 4I_2 - 2I_3 - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

$I_1 = -0{,}036$ A
$I_2 = 0{,}32$ A
$I_3 = -0{,}36$ A

$$I_1 = \frac{1 - 4I_2}{8}\ ;\ I_3 = \frac{4I_2 - 2}{2}\ ,\ I_2 = 0{,}32\,A$$

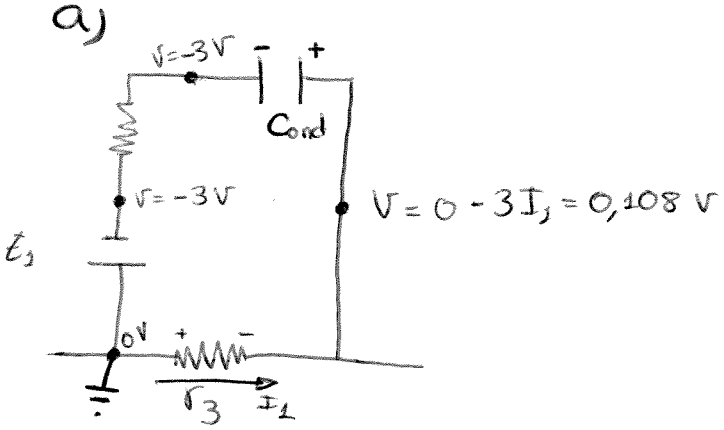
$$I_2 = \frac{1-4I_2}{8} - \frac{4I_2 - 2}{2}\ ;\ 8I_2 = 1 - 4I_2 - (16I_2 - 8)$$

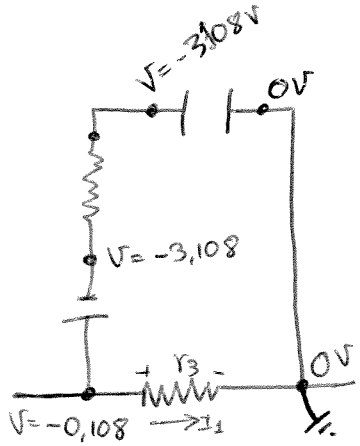
$$28I_2 = 1 + 8\ ;\ I_2 = \frac{9}{28}$$

Balance de potencias:

$$P_{gen} = VI = I_1 E_0 - I_3 E_2 = 0{,}684\ W$$
$$P_{res} = VI = RI^2 = 5 \cdot I_1^2 + 3I_1^2 + 2I_3^2 + 4I_2^2 = 0'68\ W \quad \text{ok!!}$$

a)

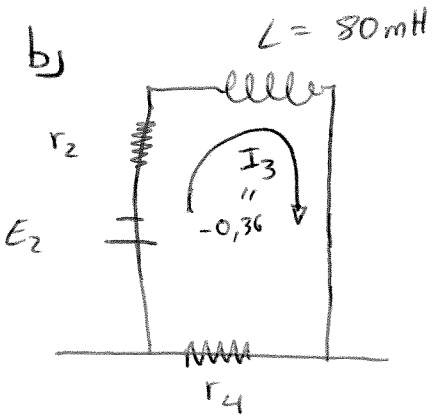




$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot (-3'108)^2 = 2{,}41 \cdot 10^{-5}\ J$$

www.simplyjarod.com

b)



$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

$$W = \frac{1}{2} 80 \cdot 10^{-3} \cdot (-0,36)^2 = 5,184 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

c)

Energía disipada por segundo $\equiv P_{disipada} = V \cdot I$

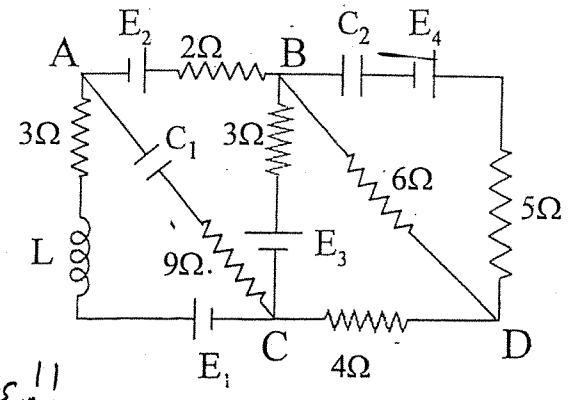
$$P_{disipada\ en\ r_4} = R_4 I_2^2 = 4 \cdot (0,32)^2 = 0,4096 \text{ W}$$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2004

4. Se considera el circuito de la figura en régimen permanente (corriente continua). Se pide:

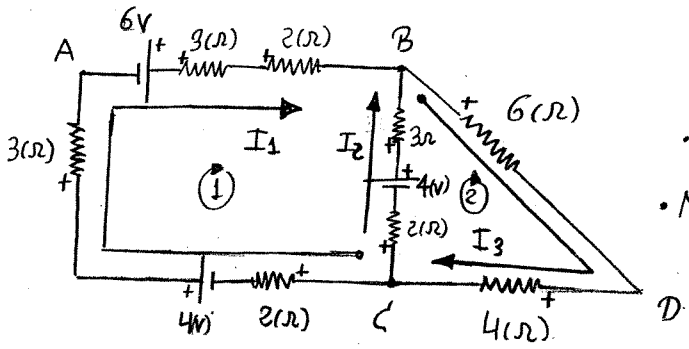
a) Calcular las intensidades que circulan por los generadores.
b) Obtener la d.d.p. $V_A - V_C$ y $V_B - V_C$.
c) Energías almacenadas en los condensadores.
d) Energía almacenada en la bobina.



DATOS: $C_1 = 0.4\ \mu F$, $C_2 = 1.2\ \mu F$, $L = 1.6\ mH$
$E_1\,(4V, 2\Omega)$, $E_2\,(6V, 3\Omega)$, $E_3\,(4V, 2\Omega)$, $E_4\,(4V, 2\Omega)$.

a)

- Atención a las resistencias internas de los generadores!!
- Quitamos las ramas que tengan condensadores ⇒ No circula corriente por ellas.
- Las bobinas en corriente continua ⇒ Cortocircuito.



Ecuaciones:

- Nudo B: $I_1 + I_2 = I_3$ (1)
- Malla ①: $-I_1(2+3+3+2) + I_2(3+2) + 4 + 6 - 4 = 0$ (2)
- Malla ②: $-I_3(6+4) - I_2(2+3) + 4 = 0$ (3)

Resolviendo el sistema: $I_1 = 0'55\,(A)$; $I_2 = -0'1\,(A)$; $I_3 = 0'45\,(A)$

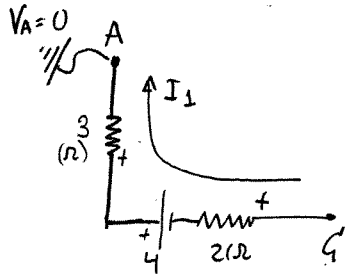
Comprobamos balance de potencias:

$P_{gen} = 6 \cdot I_1 + 4 \cdot I_1 + 4 \cdot I_2 = 10 \cdot 0'55 + 4 \cdot (-0'1) = 5'1\,(W)$ ¡OK!

$P_{res} = I_1^2(2+3+3+2) + I_2^2(2+3) + I_3^2(4+6) = 5'1\,(W)$

b)

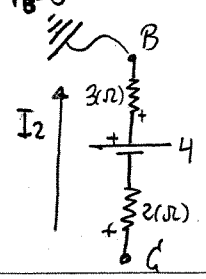
- Obtener $V_A - V_C$ → Cortocircuitamos A a tierra y vamos hasta C sumando los potenciales:



$V_C = 0 + 3I_1 - 4 + 2 \cdot I_1 = -1'25\,(V)$

$V_A - V_C = 0 - (-1'25) = 1'25\,(V)$

- Obtener $V_B - V_C$ → Cortocircuitamos B a tierra y vamos hasta C sumando los potenciales:



$V_C = 3 \cdot I_2 - 4 + 2I_2 = -4'5\,(V)$

$V_B - V_C = 0 - (-4'5) = 4'5\,(V)$

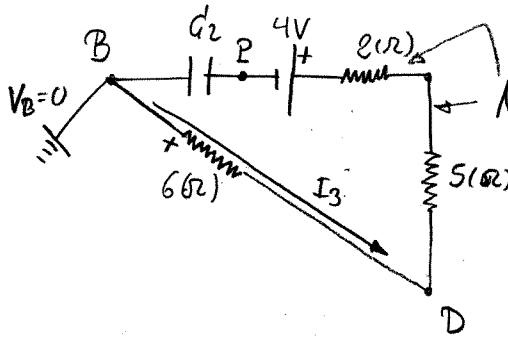
www.simplyjarod.com

c) $W_C = \frac{1}{2} C V^2$ Siendo V la d.d.p entre armaduras del condensador

- Condensador C_1: Como por la rama AC no circula corriente, al la resistencia no hay caída de potencial ⇒ la d.d.p. del condensador 1 coincide con la calculada antes. $V_A - V_C$.

$$W_{C_1} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0'4 \cdot 10^{-6} (1'25)^2 = 3'125 \cdot 10^{-7} (J)$$

- Condensador C_2:



Buscamos. $V_B - V_P$ ⇒ Conecto B a tierra y voy hasta P anotando potenciales:

$V_P = -I_3 \cdot 6 - 4 = -6'7$ (V) ⇝ Con lo que $V_B - V_P = 0 - (-6'7) = 6'7$(V) = V_2

$$W_{C_2} = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = \frac{1}{2} 1'2 \cdot 10^{-6} \cdot 6'7^2 = 2'693 \cdot 10^{-5} (J)$$

d) $W_L = \frac{1}{2} L \cdot I^2$

Como la intensidad que atraviesa la bobina es I_1:

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \, I_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1'6 \cdot 10^{-3} \cdot 0'55^2 = 2'42 \cdot 10^{-4} (J)$$

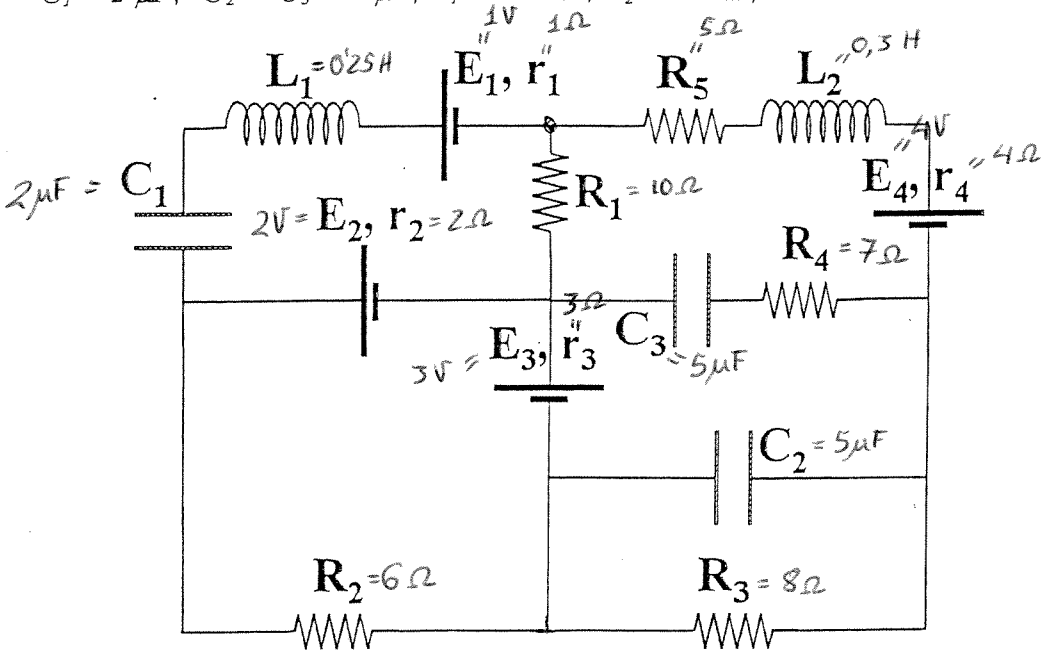
www.simplyjarod.com

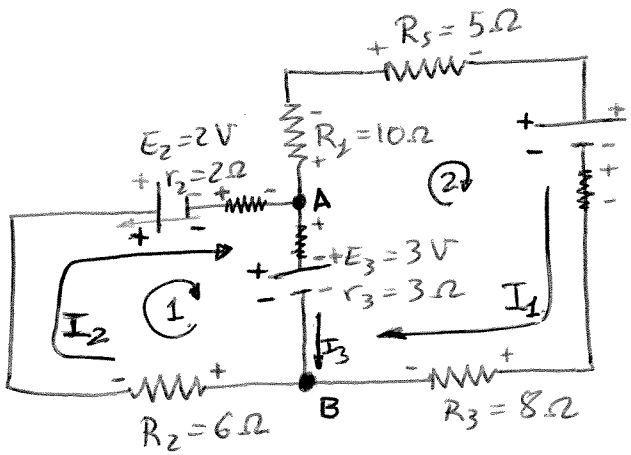
SEPTIEMBRE 2002

5. El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente (corriente continua), se pide:

a) las intensidades que circulan en cada tramo
b) la carga y polaridad de los condensadores
c) la energía almacenada en las bobinas

Datos: $E_1 = 1\ V$, $r_1 = 1\ \Omega$; $E_2 = 2\ V$, $r_2 = 2\ \Omega$; $E_3 = 3\ V$, $r_3 = 3\ \Omega$; $E_4 = 4\ V$, $r_4 = 4\ \Omega$;
$R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 6\ \Omega$; $R_3 = 8\ \Omega$; $R_4 = 7\ \Omega$; $R_5 = 5\ \Omega$;
$C_1 = 2\ \mu F$; $C_2 = C_3 = 5\ \mu F$; $L_1 = 0.25\ H$; $L_2 = 0.3\ H$;





En las resistencias el sentido de la I marca las bornas: entra con mayor V (+) sale con menos V (−)

a)

Nudo A: $I_2 = I_1 + I_3$

~~(Nudo B: $I_3 + I_1 = I_2$)~~

① : $-R_2 I_2 - E_2 - r_2 I_2 - E_3 - r_3 I_3 = 0$ (caída de tensión)

② : $-R_1 I_1 - R_5 I_1 - E_4 - r_4 I_1 - R_3 I_1 + E_3 + r_3 I_3 = 0$

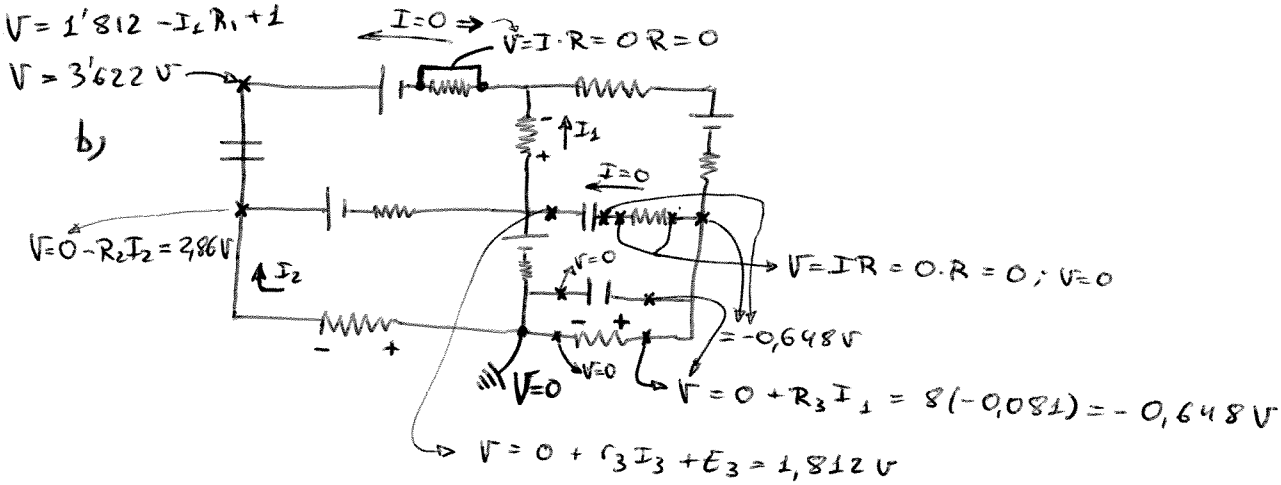
Comprobar Potencias:

$P_{generadores} = P_{disipada\ resistencias}$

Siempre hay que comprobar potencias para asegurarnos. Dejarlo escrito.

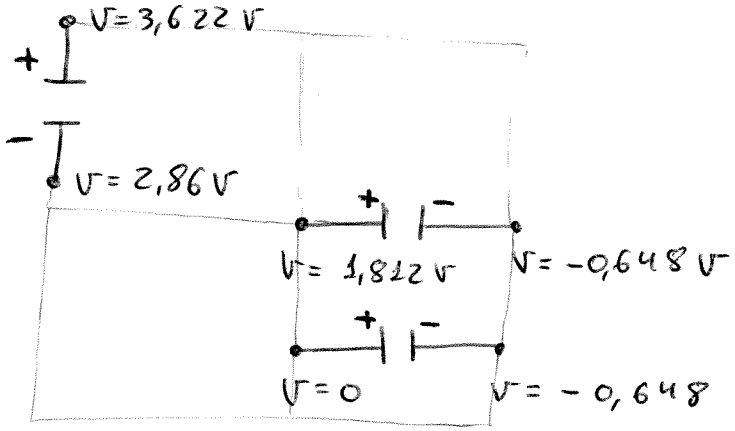
$I_1 = -0{,}081\ A$
$I_2 = -0{,}477\ A$
$I_3 = -0'396\ A$

www.simplyjarod.com



Polaridad condensadores:

⊕ donde haya mayor V
⊖ donde haya menos



$Q_1 = C_1|V_1| = 1'524 \cdot 10^{-6}$ C

$Q_2 = C_2|V_2| = 3'24 \cdot 10^{-6}$ C

$Q_3 = C_3|V_3| = 12'3 \cdot 10^{-6}$ C

c) $W_L = \frac{1}{2} L I^2$

$W_1 = \frac{1}{2} L_1 \cancel{I^2}^{\,0} = 0$

$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_1^2 = 0'98 \cdot 10^{-3}$ J

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2006

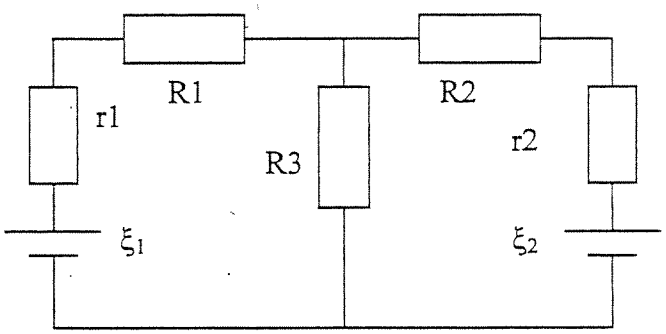
Problema 4.

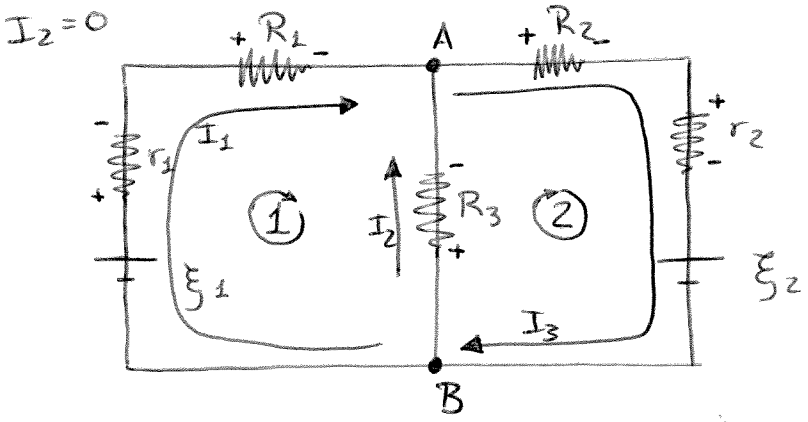
Sea el circuito de la figura. Determinar ξ_2 para que la intensidad que pasa por R3 sea 0. Para este valor de ξ_2 determinar:

a) que relación existe entre ξ_1 y ξ_2,
b) la potencia suministrada por ξ_1
c) cuanto vale la potencia disipada en R1

Datos: ξ_1, r1, r2, R1, R2, R3

Intensidad de $R_3 = 0$
$\Leftrightarrow I_2 = 0$





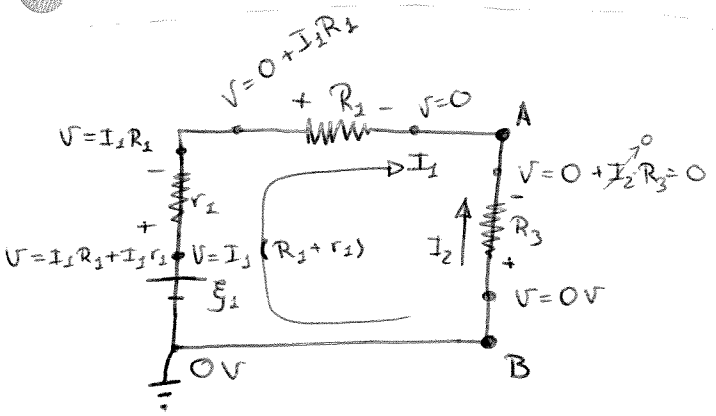
$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ \xi_1 - r_1 I_1 - R_1 I_1 - R_3 I_2 = 0 \\ + R_3 I_2 + R_2 I_3 + r_2 I_3 + \xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + \cancel{I_2}^{\,0} \;;\; I_3 = I_1 \\ \xi_1 - I_1(r_1 + R_1) - \cancel{R_3 I_2}^{\,0} = 0 \\ \xi_2 + I_3(R_2 + r_2) + \cancel{R_3 I_2}^{\,0} = 0 \end{cases}$$

$$\xi_1 - I_1(r_1 + R_1) = \xi_2 + I_3(R_2 + r_2)$$

a) $$\boxed{\xi_2 = \xi_1 - I_1(R_2 + r_2 + r_1 + R_1)}$$

I_1 ??



$$V_{\xi_1} = I_1(R_1 + r_1)$$

$$P = IV = I^2 R$$

$$P = I_1^2 R_1$$

$$\boxed{P = R_1 \cdot \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{R_2 + r_2 + r_1 + R_1}\right)^2}$$

$$\boxed{P = IV = I_1^2 (R_1 + r_1)\ (W)}$$ b)

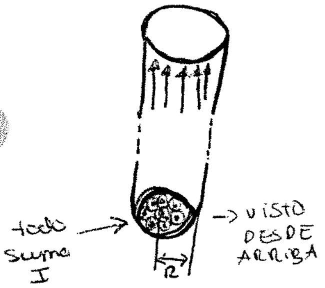
FEBRERO 2001

4. Por un cable largo (→ INDEFINIDO) y recto de sección transversal circular de radio R circula una corriente I. La densidad de corriente a través de la sección circular no es constante sino que varía de la forma $j = \alpha r$, siendo α una constante y r la distancia al eje. Calcular:

a) Valor de la constante α.
b) Expresión del campo magnético B en $r < R$ y en $r > R$, en función de la corriente I.
c) Energía magnética en el interior del cable, por metro de longitud, en función de la corriente I.

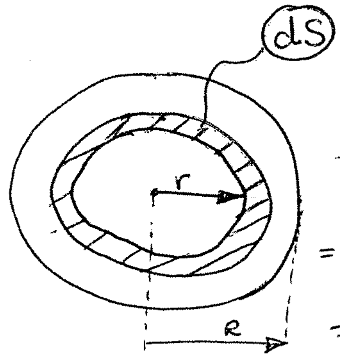
- Por todo el cable circula I ⇒ pero distribuida!!
- Densidad volumétrica de corriente ⇒ $J_V = \alpha \cdot r$

a) ¿α?



como me dan $\overline{J_V}$ ⇒ Sabemos:

$$I = \iint_{sección} J_V \cdot dS$$ (I: DATO)



$dS = 2\pi r \cdot dr$ →

$$\to \int \alpha \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi\alpha \frac{r^3}{3}\Big]_0^r = 2\pi\alpha \frac{r^3}{3}\Big]_0^R = \frac{2\pi\alpha}{3} \cdot R^3 = I$$

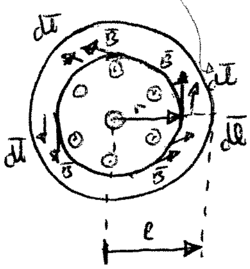
$$\alpha = \frac{3I}{2\pi R^3}$$

b) Inducción B en todas regiones:

$r \leq R$ (Como sabemos que los campos infinitos rectos crean campos B tangentes a circunferencias ⇒ Ampere).

$$\oint_C \overline{B} \cdot \overline{dl} = \mu \cdot I_T$$

$$\oint_C B \cdot dl \cdot \cos 0 = B 2\pi r$$



$$I_T = \iint J_V \, dS = \int_0^r \alpha \cdot r 2\pi r \cdot dr = 2\pi\alpha \frac{r^3}{3}\Big]_0^r = 2\pi\alpha \frac{r^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3I}{2\pi R^3}$$

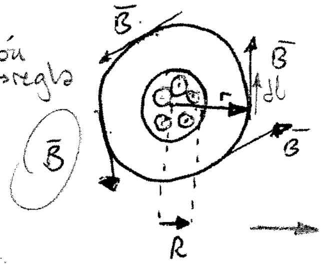
$$I_T = \frac{2\pi}{3}\alpha r^3 = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3I}{2\pi R^3} r^3$$

$$\boxed{I_T = \frac{I}{R^3} \cdot r^3}$$

- Luego: $B 2\pi r = \mu \cdot \frac{I}{R^3} \cdot r^3$ ⇒ $\boxed{B = \frac{\mu \cdot I}{2\pi R^3} \cdot r^2}$

→ Si la intensidad va según u_z ⇒ $\boxed{\overline{B} = \frac{\mu I}{2\pi R^3} \cdot r^2 \cdot \overline{u_\theta}}$

$r > R$



sección B → regla mano dcha.

- $\oint \overline{B} \cdot \overline{dl} = B \cdot 2\pi r$
- $I_T = I$
- Luego: $B 2\pi r = \mu I$ ⇒ $\boxed{B = \frac{\mu \cdot I}{2\pi r}}$ → Un hilo indefinido crea el mismo campo que un hilo con sección fuera de él.

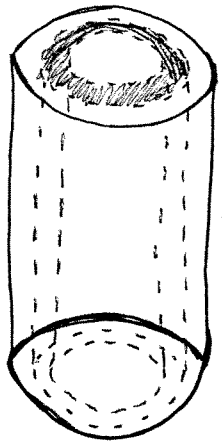
→ Si la I va según z: $\boxed{\overline{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \overline{u_\theta}}$

www.simplyjarod.com

c) Energía magnética dentro del cable por unidad de longitud.

Tomo un trozo de cable (cilindro) de 1m de altura;

$$W_H = \frac{1}{2\mu}\iiint |\vec{B}|^2 dv$$



$$dv = 2\pi r\, dr\, h^{=1} = 2\pi r dr$$

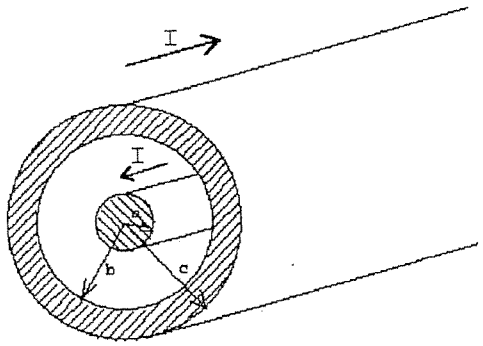
$$\rightarrow = \frac{1}{2\mu}\int_0^R \left(\frac{\mu I}{2\pi R^3}\cdot r^2\right)^2 2\pi r dr = \ldots = \boxed{\frac{\mu I^2}{24\pi} = W_H} \rightarrow \text{Energía (u. longitud)}$$

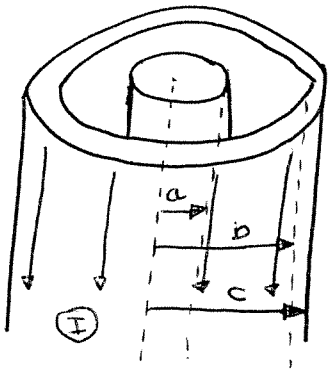
www.simplyjarod.com

SEPTIEMBRE 2004

4. Se tienen dos cilindros concéntricos, como se indica en la figura, por los que circula una corriente I uniformemente distribuida en su sección, pero en sentido contrario. Calcular el campo magnético en todas las regiones del espacio:

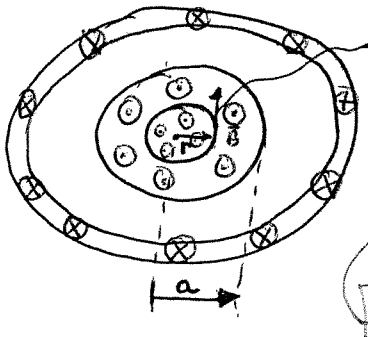
$r<a$; $a<r<b$; $b<r<c$; $r>c$.





TEOREMA DE AMPERE: $\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu \cdot I_T$

1º Dentro del pequeño: $r<a$



$\cdot \oint \bar{B}\,d\bar{l} = B2\pi r$

$\cdot I_T = \iint J_{V1}\cdot d\bar{S} = J_V \iiint dS =$ ($S_C = \pi r^2$)

$= \frac{I}{\pi a^2}\cdot \pi r^2 = \frac{I}{a^2} r^2$

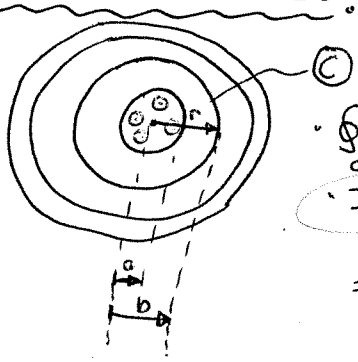
(J_V)

$$J_{V1} = \frac{I}{\text{Área}1} = \frac{I}{\pi a^2} = cte$$

Luego: $B2\pi r = \mu \frac{I}{a^2} r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu I}{2\pi a^2} r \Rightarrow$ (I_T)

$$\Rightarrow \boxed{\bar{B} = \frac{\mu I}{2\pi a^2} \cdot r\,\bar{u}_\theta}$$

2º En el hueco $a<r<b$:



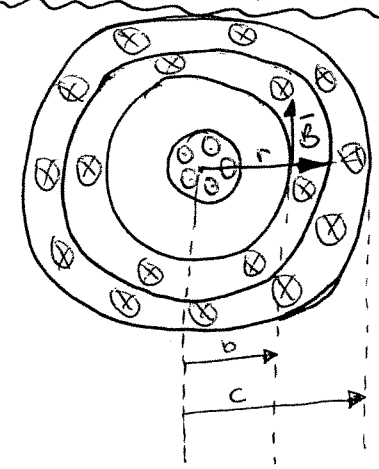
$\cdot \oint_C \bar{B}d\bar{l} = B2\pi r$

$\cdot I_T = I$

$B2\pi r = \mu \cdot I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{B} = \frac{\mu I}{2\pi r}\bar{u}_\theta}$$

3º Dentro del grande: $b<r<c$:



Porque ahora en el cilindro coaxial, la intensidad va en sentido contrario

$\cdot \oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = B2\pi r$

$\cdot I_T = I - \iint_{\text{encerrada por } r} J_{V2}\cdot d\bar{S} \Rightarrow I - J_{V2}\cdot \iiint_{\text{encerrada por } r} dS = I - \frac{I}{\pi(c^2-b^2)}\pi(r^2-b^2) =$

($S_{cerrada} = \pi r^2 + \pi b^2$)

$$I = \left(1 - \frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)$$

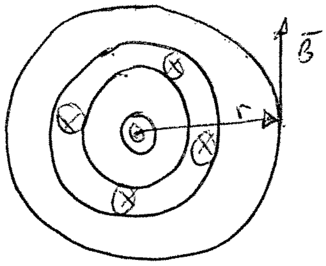
$\cdot J_{V2} = \frac{I}{\text{Área}^2} = \frac{I}{\pi c^2 - \pi b^2} = \frac{I}{\pi(c^2-b^2)} = cte$

Aplico Ampere:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}\cdot\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu I}{2\pi r}\cdot\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}}$$

www.simplyjarod.com

4º Fuera r>c



- $\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = B \cdot 2\pi r$
- $\boxed{I_r = I - I = 0}$

Aplico ampere: $B\,2\pi r = \mu \cdot 0$

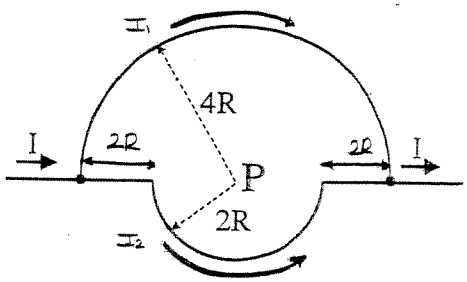
$$\boxed{\bar{B} = \bar{0}}$$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 1999

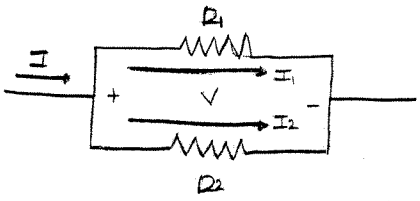
4. Se construye un circuito eléctrico como el de la figura, formado por un hilo conductor de igual resistencia por unidad de longitud en cada uno de sus tramos. Si por la entrada y salida del circuito circula una corriente eléctrica *I*, calcular:

a) La corriente que circula por cada uno de los semicírculos.
b) El campo magnético que se crea en el punto *P*.



$\rho = \frac{R}{L}$ resistencia por unidad de longitud (Densidad lineal de resistencia)

Circuito equivalente:



$R_1 = \rho \cdot L_1 = \rho \cdot \underbrace{2\pi \cdot 4R / 2}_{\text{long. } \frac{1}{2} \text{ circunferencia radio } 4R} (\Omega) = 4\pi R \rho \ (\Omega)$

$R_2 = \rho \cdot L_2$

$L_2 = 2R + 2\pi \cdot 2R / 2 + 2R = 4R + 2\pi R = R(4 + 2\pi)$

$\Longrightarrow R_2 = \rho \cdot R(4 + 2\pi) \ (\Omega)$

a) $I = I_1 + I_2$

Ley de Ohm: $R_1 = \frac{V}{I_1}$ y $R_2 = \frac{V}{I_2}$

Igualando V:

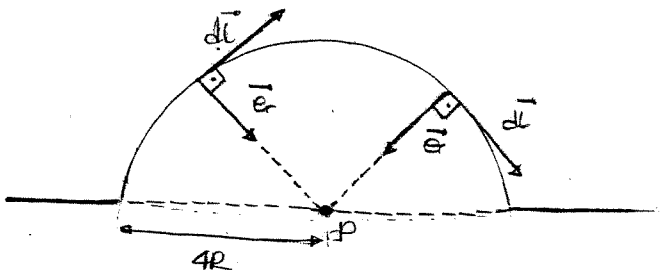
$R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 \Longrightarrow I_1 = \frac{R_2}{R_1} I_2$

$I = I_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{R_1 I_2 + R_2 I_2}{R_1} \Longrightarrow I_2 = \frac{R_1}{R_2 + R_1} I \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{I_2 = \frac{4\rho\pi R I}{4\pi\rho R + 2\rho R(2+\pi)}} = \frac{4\pi I}{6\pi + 4} = \frac{2\pi}{3\pi + 2} I = \boxed{0.65 I} \ (A)$

$\Longrightarrow \boxed{I_1 = I - I_2 = 0.45 I} \ (A)$

b) $d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi r^2} (d\vec{L} \times \vec{e}_r)$ [Aportaciones infinitesimales]

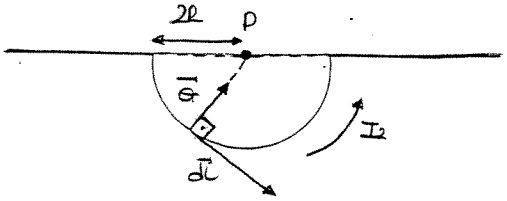


$|d\vec{L} \times \vec{e}_r| = |d\vec{L}| \cdot |\vec{e}_r| \cdot \operatorname{sen}\alpha = dL \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} 90° = dL$

$|d\vec{B}| = dB = \frac{\mu I}{4\pi r^2} dL$

www.simplyjarod.com

$$B_1 = \int \frac{\mu I_1}{4\pi (4R)^2}\, dl = \frac{\mu I_1}{4\pi\, 16R^2} \cdot L_1 = \frac{\mu I_1 (2\pi 4R)}{4\pi\, 16 R^2 \cdot 2} = \frac{\mu I_1}{16R} \quad (-\vec{u_z})$$



$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = \ldots = dL$$

$$|d\vec{B}| = dB = \frac{\mu I_2}{4\pi (2R)^2}\, dL$$

$$B_2 = \int \frac{\mu I_2}{4\pi \cdot (2R)^2}\, dl = \frac{\mu I_2}{4\pi \cdot 4R^2} \cdot L_2 = \frac{\mu I_2 (2\pi \cdot 2R)}{4\pi \cdot 4R^2 \cdot 2} = \frac{\mu I_2}{8R} \quad (\vec{u_z})$$

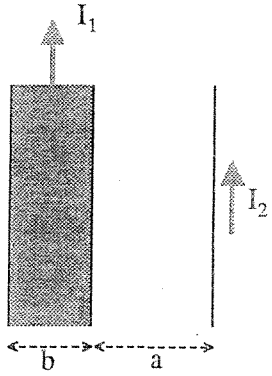
$$\Longrightarrow \vec{B_T} = \vec{B_1} + \vec{B_2} = \left(\frac{-\mu I_1}{16R} + \frac{\mu I_2}{8R} \right) \vec{u_z}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B_T} = \frac{\mu}{8R} \left(I_2 - \frac{I_1}{2} \right) = 0.041 \frac{\mu I}{R} \vec{u_z}} \quad (T)$$

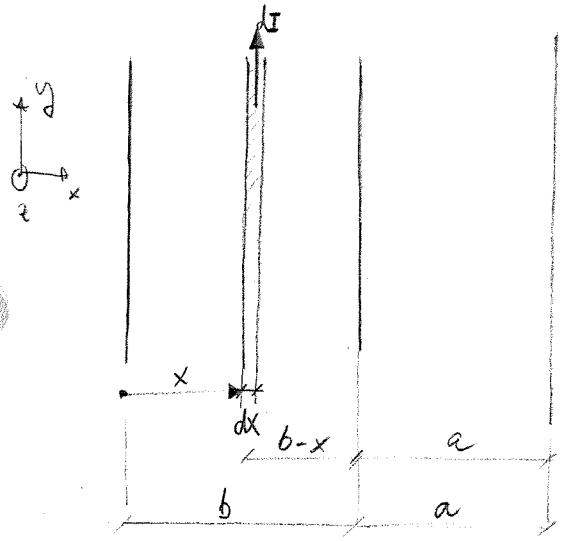
www.simplyjarod.com

SEPTIEMBRE 1999

4. Una cinta plana de anchura b y longitud infinita es recorrida por una corriente de intensidad I_1. A una distancia a de la cinta, y en su mismo plano, se halla un hilo rectilíneo, también infinito, por el que circula una corriente de intensidad I_2. Calcular la fuerza de interacción, por unidad de longitud, entre ambas.



Densidad superficial de corriente $J_S = \frac{I_1}{b}$



La corriente que circula por cada banda

$$dI = J_S \cdot dx = \frac{I_1}{b} \cdot dx$$

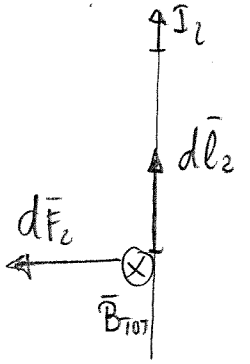
Campo que crea: $dB = \frac{\mu dI}{2\pi d}$

$$dB = \frac{\mu \cdot I_1/b \cdot dx}{2\pi \cdot (a+b-x)}$$

$$B_{TOT} = \int_{cinta} dB = \int_0^b \frac{\mu I_1}{2\pi b(a+b-x)} dx = \frac{\mu I_1}{2\pi b} \cdot (-) \ln(a+b-x) \Big]_0^b =$$

$$= -\frac{\mu I_1}{2\pi b} \left(\ln(a+b-b) - \ln(a+b) \right) = \frac{\mu I_1}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a}$$

Vectorialmente: $\bar{B}_{TOT} = -\frac{\mu I_1}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a} \bar{u}_z$



Fuerza que actúa sobre I_2.

$$d\bar{F}_2 = I_2 \cdot d\bar{l}_2 \times \bar{B}_{TOT}$$

$$d\bar{F}_2 = I_2 \cdot dl_2 \bar{u}_y \times \frac{(-)\mu I_1}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a} \bar{u}_z =$$

$$= -\frac{\mu I_2 I_1}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a} \underbrace{(\bar{u}_y \times \bar{u}_z)}_{\bar{u}_x} dl_2 = -\frac{\mu I_1 I_2}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a} \bar{u}_x dl_2$$

Luego: $\boxed{d\bar{F}_2/dl_2 = -\frac{\mu I_1 I_2}{2\pi b} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \bar{u}_x}$ Fuerza por ud. de longitud.

Por acción y reacción la fuerza es igual y contraria.

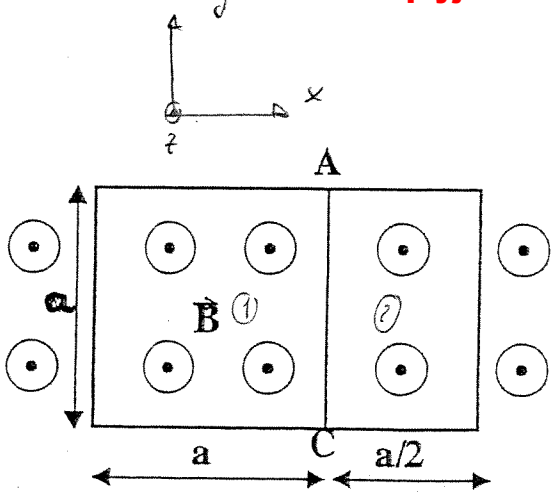
www.simplyjarod.com

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2000

4.- Un dispositivo plano realizado con hilos conductores, está en una región de campo mágnetico uniforme y dependiente del tiempo en la forma: $\mathbf{B(t)= 0.11\ t}$, con dirección y sentido según la figura. Los hilos tienen una resistencia por unidad de longitud de valor $\rho = 2$ **ohm/m**. Se pide:

a) Las intensidades inducidas que circulan por cada tramo (realizar un circuito equivalente).
b) La d.d.p. $V_A - V_C$
c) La potencia disipada en todo el sistema. Verifíquese el principio de conservación de la energía en el circuito. $a = 0'2 m$



a) Lo primero que hacemos es obtener la fem inducida en cada espira que será equivalente a poner una pila.

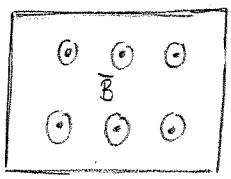
* Flujo espira ①

$S_1 = a^2$

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_1} 0'11t\ \vec{u}_z \cdot dS_1 \cdot \vec{u}_z = 0'11t \iint_{S_1} dS_1\ \vec{u}_z\cdot\vec{u}_z = 0'0044t\ (Wb)$$

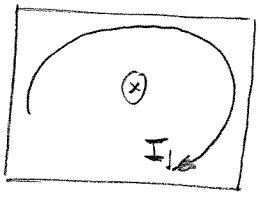
$$\boxed{\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = \ominus\ 0'0044\ (V)}$$

↳ El signo menos significa que la corriente inducida es tal que se opone a la variación de flujo.



campo inductor aumenta saliendo del papel

La espira se opone → Debe crear un campo entrando al papel para contrarrestar el aumento de campo saliente.



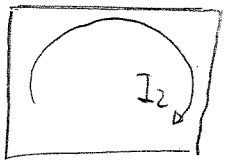
aparece una corriente inducida tal que crea ese campo entrante.

* Flujo espira ②

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{S}_2 = B\cdot S_2 = 0'0022t\ (Wb)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -0'0022\ (V)}$$

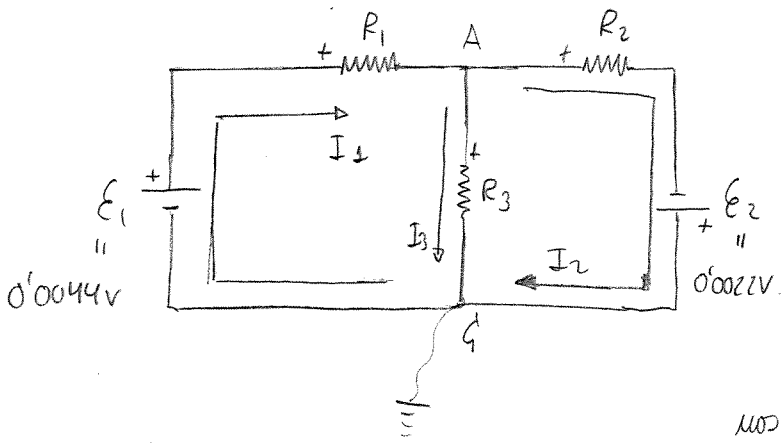
igualmente:



PCU

www.simplyjarod.com

Con lo que el circuito equivalente: ¡OJO! Una vez que hemos visto cómo van las intensidades colocamos los generadores como deben ir: La corriente entra por el polo pequeño y sale por el grande



¡OJO! No pondremos el signo ⊖ que nos sale al obtener ε nunca!!

Obtenemos R_1, R_2, R_3:

$$\begin{cases} R_1 = \rho L_1 = 2 \cdot 3 \cdot a = 1'2\ \Omega \\ R_2 = \rho L_2 = 2\left(a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = 0'8\ \Omega \\ R_3 = \rho L_3 = 2 \cdot a = 0'4\ \Omega \end{cases}$$

Resolvemos el circuito:

Nudo A: $I_1 = I_2 + I_3$

Malla 1 ↻ $\Rightarrow -0'0044 + I_3 \cdot R_3 + I_1 R_1 = 0$

Malla 2 ↻ $\Rightarrow -0'0022 + I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} I_1 = 0'0035\,(A) \\ I_2 = 0'003\,(A) \\ I_3 = 0'5 \cdot 10^{-3}\,(A) \end{cases}}$$

c) $P_{dis} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 22 \cdot 10^{-6}\ W$

$P_{gen} = \varepsilon_1 I_1 + \varepsilon_2 I_2 = 22 \cdot 10^{-6}\ W$

b) $V_A - \cancel{V_C}^{\,0} = V_A$ Conectamos el nudo C a tierra.

$V_A = 0 + I_3 \cdot R_3 = 0'5 \cdot 10^{-3} \cdot 0'4 = 0'2 \cdot 10^{-3}\,(V)$

www.simplyjarod.com

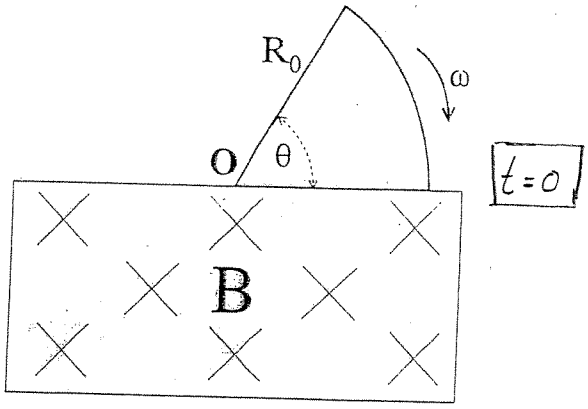
FEBRERO 2004

5. Un circuito de autoinducción despreciable y resistencia óhmnica $R = 2\Omega$, tiene forma de sector circular de radio $R_0 = 0.3$ m y ángulo $\theta = \pi/3$. El circuito gira respecto a un eje que pasa por su vértice y es perpendicular al plano del circuito, con velocidad angular $\omega = 1000$rev/min, en el sentido de las agujas de un reloj. En su rotación pasa por una zona donde existe un campo magnético homogéneo de 1 Tesla, perpendicular al plano del circuito. Si en el instante inicial el circuito se halla en la posición que se muestra en la figura, se pide:

a) F.e.m. inducida en el circuito en función del tiempo. Representar dicha función y calcular el valor eficaz de dicha f.e.m.

b) Intensidad máxima que pasa por el circuito.

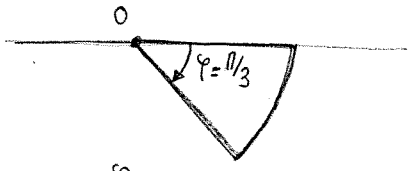
c) Momento de la fuerza que es necesario ejercer sobre el sector para que éste gire con ω constante.



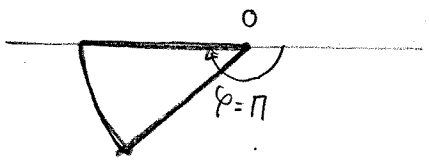
$$\omega = 1000\frac{\text{rev}}{\text{min}}\cdot\frac{1\,\text{min}}{60\,s}\cdot\frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\text{rev}} = \frac{100\pi}{3}\ \text{rad/s}$$

Sólo se induce f.e.m cuando la espira está entrando o está saliendo, que es cuando tenemos variación de flujo.

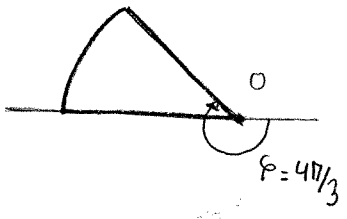
Veamos los instantes de tiempo: La espira realiza un m.c.u $\Rightarrow \varphi = \omega\cdot t$



$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi/3}{\frac{100\pi}{3}} = \frac{1}{100}\,(s)$$



$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{100\pi}{3}} = \frac{3}{100}\,(s)$$



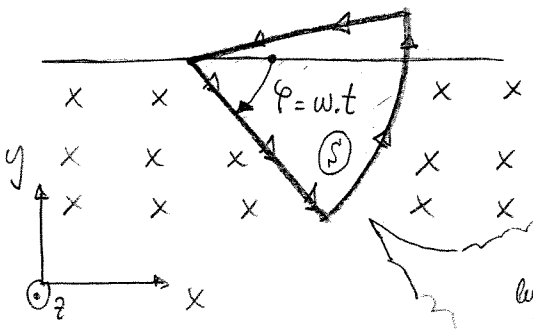
$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{4\pi/3}{\frac{100\pi}{3}} = \frac{4}{100}\,(s)$$

f.e.m $\quad 0 < t < \frac{1}{100}\,(s)$

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S -1\,\vec{u}_z\cdot dS\,\vec{u}_z = +\iint_S dS = S =$$

$$= \frac{\varphi}{2}R_0^2 = \frac{\omega\cdot t}{2}R_0^2 = \frac{\frac{100\pi}{3}t}{2}0'3^2 = 4'712\,t$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -4'712\,(V)} \Leftrightarrow 0 \le t \le \frac{1}{100}$$



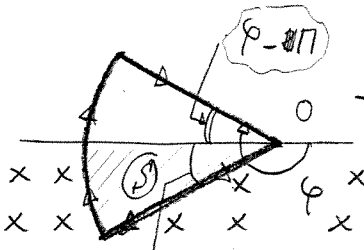
el flujo del campo inductor aumenta en sentido entrante al papel luego el flujo del campo inducido aumenta en sentido saliente al papel $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ corriente inducida en sentido antihorario.

f.e.m $\quad \frac{1}{100} \le t \le \frac{3}{100}$

f.e.m $= \mathcal{E} = 0 \Rightarrow$ ¡¡No hay variación de flujo!!

www.simplyjarod.com

$\frac{3}{100} < t < \frac{4}{100}$



Flujo del inductor disminuye en sentido entrante ⇒ flujo del inducido aumenta en sentido entrante ⇒ corriente en sentido horario

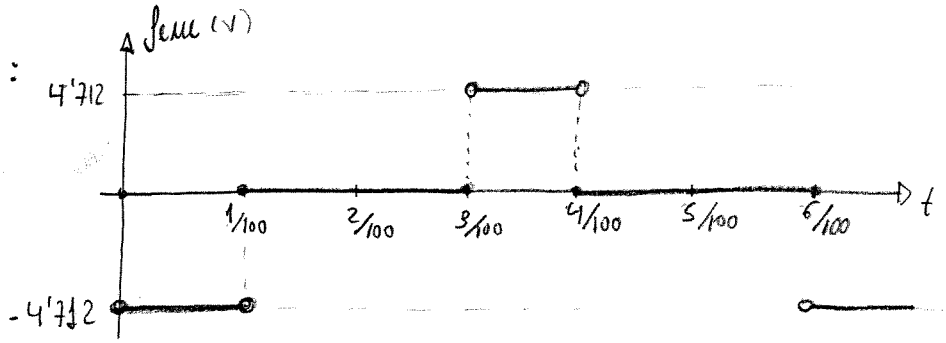
$\pi/3 - (\varphi - 4\pi) = \frac{4\pi}{3} - \varphi$

$$\Phi = \iint_S \bar{B}\cdot d\bar{S} = B\cdot S = 1\cdot\frac{\frac{4\pi}{3}-\varphi}{2}\cdot R_0^2 = \frac{\frac{4\pi}{3}-\frac{100\pi t}{3}}{2}\cdot 0'3^2$$

$$\Phi = 0'19 - 4'712\,t \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 4'712\ (V)$$

$\frac{4}{100} \le t \le \frac{6}{100}$ $\quad f_{em} = 0$ ¡¡ No varía el flujo !!..

Luego:



función periódica de periodo $T = \frac{6}{100}$ (1)

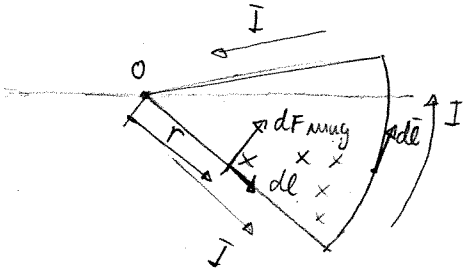
$$\boxed{V_{ef}^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{E}^2\,dt = \frac{100}{6}\left[\int_0^{1/100}(-4'71^2)\,dt + \int_{1/100}^{3/100} 0\,dt + \int_{3/100}^{4/100} 4'71^2\,dt + \int_{4/100}^{6/100} 0\,dt\right] =$$

$$= \frac{100}{6}\left[4'71^2\cdot\frac{1}{100}\cdot 2\right] = \boxed{7'40\ (V)^2} \Rightarrow \boxed{V_{ef} = 2'721\ (V)}$$

b) Por la ley de Ohm: $\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{4'712}{2} = 2'356\ (A)}$

c) Recuerdo de dinámica: para girar con $\omega = cte \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\Sigma \text{ Momentos} = 0}$

Obtenemos el momento de la fuerza magnética.



$$d\bar{F}_{mag} = I\,d\bar{l}\times\bar{B} \Rightarrow |d\bar{F}_{mag}| = I\cdot dl\cdot B\cdot \underbrace{\sin 90}_{1}$$

$$dM_0 = dF_{mag}\cdot r = I\cdot dr\cdot B\cdot r = IB\cdot r\cdot dr$$

$$M_0 = \int dM_0 = IB\int_0^{R_0} r\,dr = I\cdot B\cdot\frac{R_0^2}{2} \Rightarrow$$

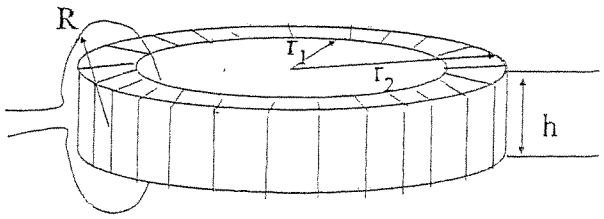
$$\boxed{M_0 = 2'356\cdot 1\cdot\frac{0'3^2}{2} = 0'106\ N\cdot m}$$ ~ tenemos que aplicar con un motor un momento en valor absoluto

www.simplyjarod.com

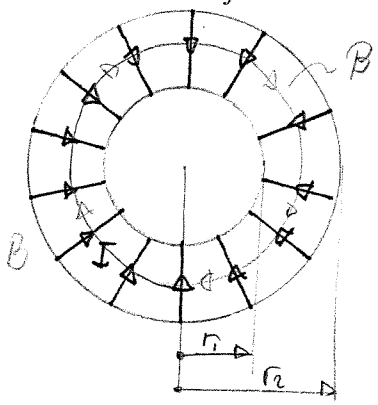
FEBRERO 2003

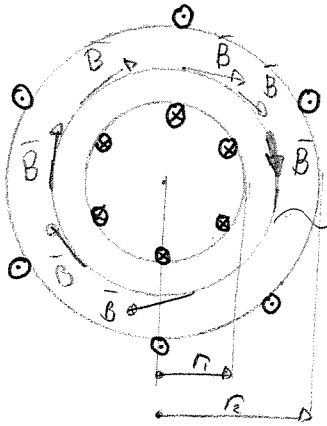
5. Sea un arrollamiento de forma toroidal, de sección rectangular, radio interior r_1, radio exterior r_2, altura h, con n espiras, por el que pasa una intensidad $I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$.

a) Calcular el campo magnético en su interior en función de la distancia al eje del toroide.
b) Flujo magnético a través de una espira del arrollamiento toroidal.
c) Si el arrollamiento toroidal se rodea con una espira de radio R, determinar la fuerza electromotriz inducida en la espira.
d) Determinar la fuerza electromotriz inducida en el toroide cuando la corriente $I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ pasa por la espira en vez de pasar por el arrollamiento toroidal.



Nota: Un toroide de sección rectangular es una figura geométrica que se obtiene al hacer girar un rectángulo 360° alrededor de un eje exterior al rectángulo y paralelo a uno de sus lados.



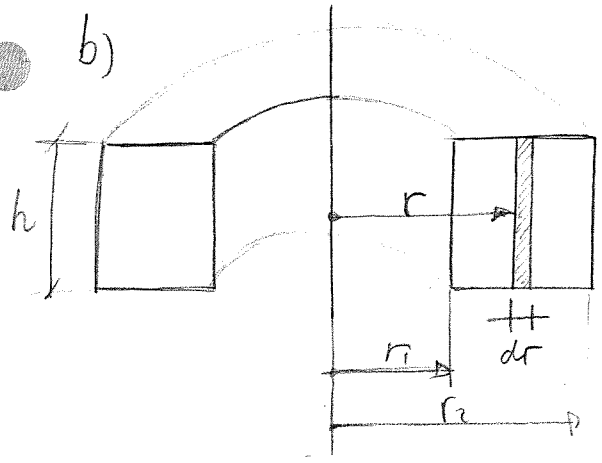


curva de ampere

Toroide: crea un campo magnético tangente a la circunf. de radio r

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu I_{Tot} \longrightarrow B\cdot 2\pi r = \mu n I \longrightarrow \left\{ B = \frac{\mu n I}{2\pi r} \right\} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu n I_0}{2\pi r}\operatorname{Sen}\omega t}$$

b)



$$\Phi = \iint_{espira} \bar{B}\cdot d\bar{S} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu n I_0}{2\pi r}\cdot \operatorname{Sen}(\omega t)\, h\, dr =$$

$$= \frac{\mu n I_0 h}{2\pi}\operatorname{Sen}(\omega t)\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu n I_0 h}{2\pi}\cdot \operatorname{Sen}(\omega t)\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

c) El flujo que atraviesa la espira circular es el mismo.

$$\left\{ \Phi = \frac{\mu n I_0 h}{2\pi}\cdot \operatorname{Sen}(\omega t)\cdot \ln\frac{r_2}{r_1} \right\}$$

www.simplyjarod.com

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu n I_0 \omega h}{2\pi} \cos(\omega t) \ln\frac{r_2}{r_1} \quad (V)$$

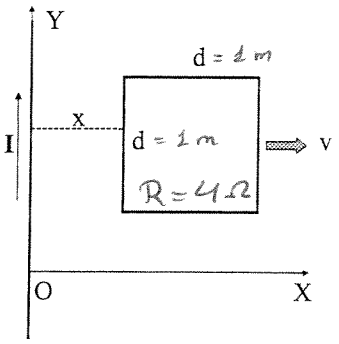
d) De teoría: "La inducción que crea una espira sobre otra es siempre igual que la que crea la segunda sobre la primera"

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu n I_0 \omega h}{2\pi} \cos(\omega t) \ln\frac{r_2}{r_1}$$

www.simplyjarod.com

JUNIO 2004

5. La figura muestra un conductor infinitamente largo situado en el eje OY por el que circula una corriente de intensidad $I = 2$ A. Una espira conductora cuadrada, de lado $d = 1$ m, y resistencia $R = 4\ \Omega$, situada en el plano OXY se aleja con velocidad constante de 1 m/s y dirección paralela al eje OX. Obtener:

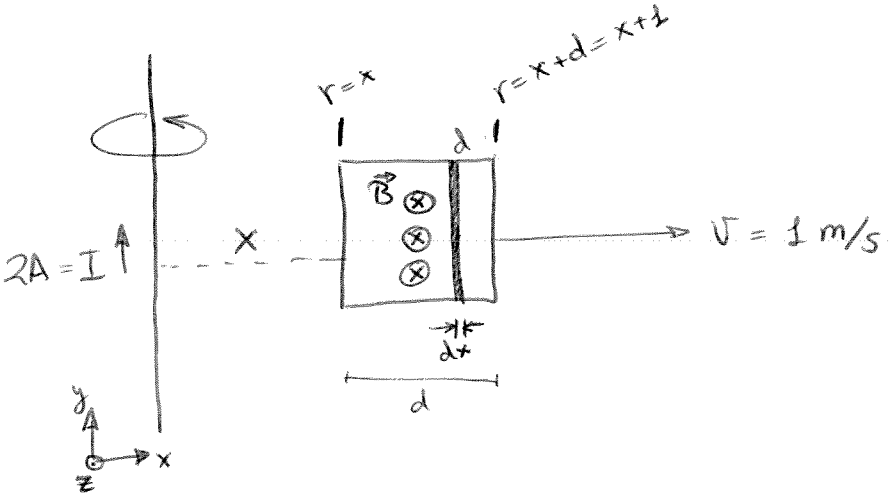


a) El flujo en función de la distancia x al eje OY

b) La fuerza electromotriz inducida en función del tiempo, suponiendo que la espira parte sin velocidad inicial desde el eje OY

c) El sentido y valor de la intensidad inducida en la espira en función del tiempo.

Dato: $\mu o = 4\ \pi\ 10^{-7}\ H/m$



a) Φ en función de x

$$\phi = \int \bar{B}\,d\bar{S} \qquad \bar{B}\,d\bar{S} = B\,dS = \frac{\mu I}{2\pi r}\cdot d\cdot dr$$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \qquad \phi = \int \frac{\mu I d}{2\pi r}\,dr = \frac{\mu I d}{2\pi}\ln r\Big]_{r=x}^{r=x+d} = 4\cdot 10^{-7}\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$$

b) suponiendo $x_0 = 0$, $v = cte$, $a = 0 \Rightarrow x = v\cdot t$

$$fem = -\frac{d\phi}{dt} \quad ; \quad \phi = 4\cdot 10^{-7}\ln\left(\frac{vt+1}{vt}\right) \overset{v=1}{=} 4\cdot 10^{-7}\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)$$

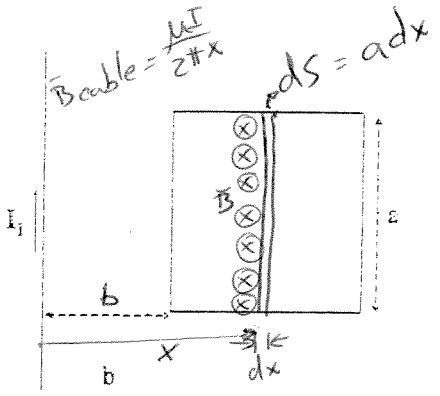
$$fem = 4\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{t(t+1)}$$

c) ϕ disminuye $\Rightarrow$ campo inducido en sentido entrante al papel $\Rightarrow$ I tiene sentido horario

www.simplyjarod.com

ENERO 2007

5. Sobre un plano horizontal se halla una espira cuadrada de lado a y resistencia R. En el mismo plano, y a una distancia b de uno de sus lados, hay un hilo rectilíneo indefinido por el que circula una corriente I_1.



a) Calcular el coeficiente de inductancia mutua entre el hilo y el circuito.

Si la corriente que pasa por el hilo varía con el tiempo según la expresión: $I_1 = I_0\, e^{-\alpha t}$

b) Hallar la f.e.m. inducida en el circuito y la intensidad que circula por el mismo, indicando y justificando el sentido en que lo hace (despréciese la autoinducción del circuito)

c) Fuerza de interacción entre el hilo y el circuito.

Datos numéricos: a = 10 cm, b = 2 cm, I_0 = 10 A, $\alpha = 5\ s^{-1}$, R = 100 Ω

coeficiente de inductancia mutua $= L_{espira,cable} = \dfrac{\Phi_{espira,cable}}{I_{cable}}$

$$\Phi = \iint_S \bar{B}\cdot d\bar{S} = \int_{x=b}^{x=a+b} \frac{\mu I}{2\pi x}\, a\,dx = \frac{\mu I a}{2\pi} \ln x \Big|_{x=b}^{x=a+b} = \frac{\mu I a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)$$

($\bar{B} \parallel d\bar{S}$)

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu a \ln\frac{a+b}{b}}{2\pi}$$

b)

$I_1 = I_0\, e^{-\alpha t}$ → decrece

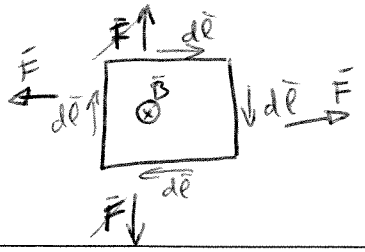
$$\Phi = \frac{\mu a \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)}{2\pi} I_0 e^{-\alpha t}$$

$$\mathcal{E} = \text{f.e.m} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) I_0 e^{-\alpha t}(-\alpha)$$

$$R = \frac{V}{I} \Leftrightarrow R = \frac{\mathcal{E}}{I}\ ;\ I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\alpha \mu a I_0}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) e^{-\alpha t}$$

c) $d\bar{F} = I\, d\bar{\ell} \times \bar{B}$ $\xrightarrow{\text{para los lados verticales...}}$ $F = I\ell B$

I_1, B son ctes en los cables verticales y $d\bar{\ell} \perp \bar{B}$



$\bar{F} = I a \frac{\mu I_1}{2\pi b}$ ←

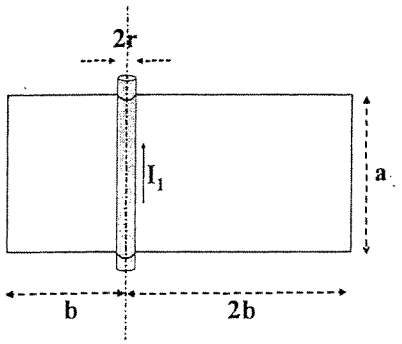
$F = I a \frac{\mu I_1}{2\pi (a+b)}$ →

$$\bar{F}_T = \bar{u}_x \left[\frac{I a \mu I_1}{2\pi(a+b)} - \frac{I a \mu I_1}{2\pi b}\right]$$

www.simplyjarod.com

SEPTIEMBRE 2007

5.- Un conductor rectilíneo, de longitud indefinida y radio r, circula una corriente de intensidad I_1. Alrededor del conductor se halla una espira rectangular, tal como se muestra en la figura, de lados a y 3b.



a) Calcular el flujo magnético neto que atraviesa dicha espira y el coeficiente de inductancia mutua entre el conductor y la espira.

Si se hace girar la espira alrededor del eje del conductor con velocidad angular ω,

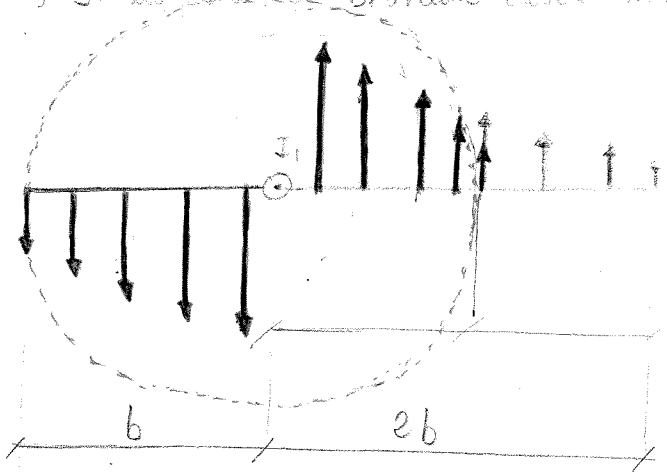
b) ¿Cuál será la f.e.m. inducida en la espira?

Si la espira permanece inmóvil, en la posición de la figura, y se hace variar la corriente que pasa por el hilo, de modo que $I_1 = Io \text{ sen } \omega t$,

b) ¿Cuánto valdrá la f.e.m. inducida en la espira? ¿Cuál es su valor máximo?

Nota: *Supóngase despreciable el radio del conductor comparado con las dimensiones de la espira*

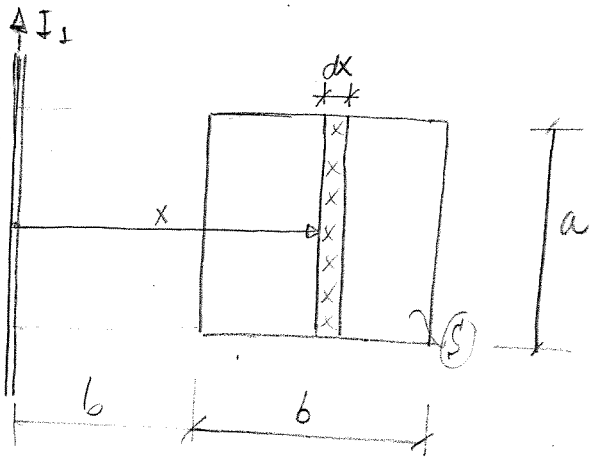
a) Si miramos el sistema desde arriba



Campo creado por hilo indefinido:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi d}$$

El flujo azul total es nulo, ya que por simetría se anula.



$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_b^{2b} \frac{\mu I_1}{2\pi x}\cdot a\,dx = \frac{\mu I_1 a}{2\pi}\int_b^{2b}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\mu I_1 a}{2\pi}\ln x\Big]_b^{2b} = \frac{\mu I_1 a}{2\pi}\ln\frac{2b}{b} = \boxed{\frac{\mu I_1 a}{2\pi}\ln 2 = \Phi_{espira,\,cable}}$$

$$\boxed{L_{espira,\,cable} = \frac{\Phi_{espira,\,cable}}{I_1} = \frac{\mu a}{2\pi}\ln 2}$$

www.simplyjarod.com

b) Si la espira gira no se produce f.em. ya que el flujo magnético es constante en todo momento porque las líneas de campo son circulares.

c) Si la intensidad vale: $I_i = I_0 \cdot \text{Sen}(\omega t)$

$$\Phi = \frac{\mu I_0 \text{Sen}(\omega t) \cdot a}{2\pi} \ln 2$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu I_0 a \ln 2}{2\pi} \omega \cos(\omega t)}$$

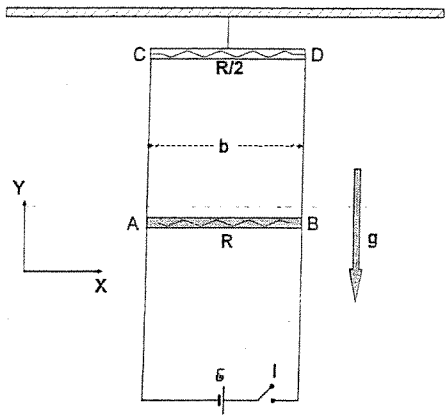
$$\boxed{\mathcal{E}_{max} = \frac{\mu I_0 a \ln 2}{2\pi} \omega}$$

✻ Para que $\mathcal{E}$ sea máx $\cos(\omega t) = -1$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2006

5. El circuito de la figura, que cuelga verticalmente, consta de 2 guías metálicas sobre las que puede deslizar la varilla metálica AB, de masa m, haciendo buen contacto eléctrico. Se considera que todos los tramos del circuito tienen resistencia despreciable, a excepción de la varilla AB que tiene una resistencia R y el tramo CD que tiene una resistencia R/2.



Si se cierra el interruptor I, calcular:

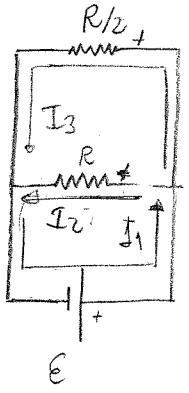
a) Campo magnético que habría que aplicar al circuito para que la varilla permaneciese en equilibrio. Indicar la dirección y sentido del mismo.

Si se abre el interruptor, se rompe el equilibrio y la varilla cae verticalmente deslizando por las guías metálicas. Calcular:

b) Fuerza debida al campo magnético cuando la varilla lleva una velocidad v

c) Velocidad límite que alcanzaría la varilla

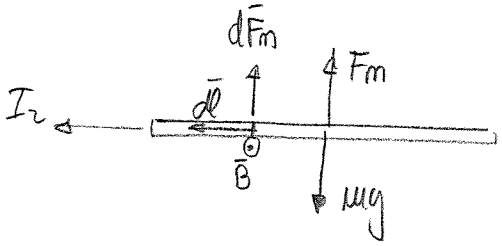
a) Si se cierra el interruptor:



$I_1 = I_2 + I_3$ (1)

$I_2 R - I_3 R/2 = 0 \rightsquigarrow I_2 = I_3/2$ (2)

$\mathcal{E} = I_2 R \Rightarrow \boxed{I_2 = \mathcal{E}/R}$

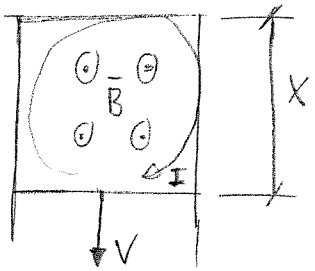


$d\bar{F}_m = I\, d\bar{l} \times \bar{B}$

$|d\bar{F}_m| = I\, dl\, B \Rightarrow F_m = \int_{cable} I\, dl\, B = I B b$

$IB\cdot b = mg \Rightarrow B = \frac{mg}{Ib} = \frac{mg}{\mathcal{E}/R\, b} \Rightarrow \boxed{\bar{B} = \frac{mg}{\mathcal{E}/R\, b}\,\bar{u}_z}$

b)



$\Phi = \int \bar{B}\cdot d\bar{S} = \int B\,\bar{u}_z \cdot dS\,\bar{u}_z = BS = B\,b\,x$

$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\,b\,v \Rightarrow \boxed{I = \frac{B b v}{R/2 + R} = \frac{2Bbv}{3R}}$

$F_m = IBb = \frac{2B^2 b^2 v}{3R}$

c) $mg - \frac{2B^2 b^2 v}{3R} = m\,a$

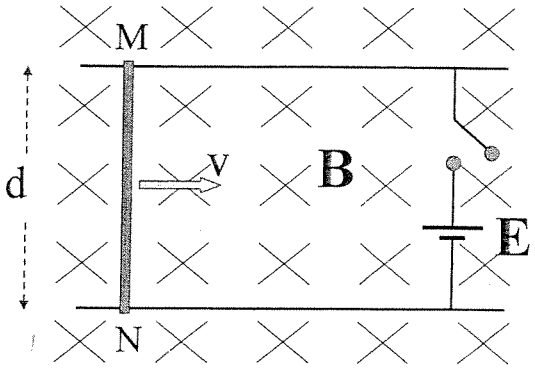
$a = 0 \Rightarrow v = \frac{mg\,3R}{2B^2 b^2} =$

P 76

www.simplyjarod.com

SEPTIEMBRE 2004

5.- En un plano horizontal se encuentran 2 hilos conductores, rectilíneos y paralelos, separados una distancia d, de resistencia despreciable, conectados a un generador de f.e.m. E. Sobre los hilos se halla una varilla conductora, de resistencia R, que puede moverse sobre ellos. Todo el sistema está inmerso en el interior de un campo magnético homogéneo de valor B, tal como indica la figura. Al cerrar el interruptor, la varilla saldrá despedida hacia la derecha de la figura con velocidad v. Calcular:



a) Diferencia de potencial inducida entre los extremos de la varilla, M y N.

b) Intensidad de la corriente que recorre el circuito, especificando el sentido de la misma.

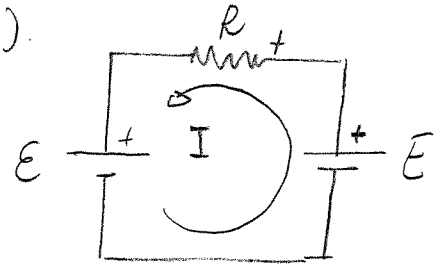
c) Fuerza de amortiguamiento electromagnético que actúa sobre la varilla.

d) Ecuación diferencial que rige el movimiento de la varilla y velocidad límite que alcanzará.

a) $\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot(d\,(a-vt)) = Bda - Bdvt$

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bdv}$$ intensidad inducida horaria $\boxed{I}$

b)

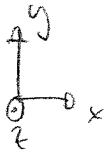


Como la barra se mueve hacia la derecha ⇒ la corriente debe ir en sentido antihorario. $E > \mathcal{E}$

$$\boxed{I = \frac{E - VBd}{R}}$$

c)

$$d\vec{F} = I\cdot d\vec{l}\times\vec{B} = I\cdot dl\,(-\vec{u}_y)\times B\,(-\vec{u}_z) = IB\,dl\,\vec{u}_x$$



$$\boxed{\vec{F} = IB\,d\,\vec{u}_x = \frac{E - VBd}{R}\cdot B\cdot d\,\vec{u}_x}$$

$$\boxed{\vec{F}_{mag} = \left(\frac{EBd}{R} - \frac{B^2d^2V}{R}\right)\vec{u}_x}$$

www.simplyjarod.com

d) $F_x = m \cdot a_x \Rightarrow \frac{\mathcal{E} B \cdot d}{R} - \frac{B^2 d^2}{R} V = m \frac{dV}{dt}$

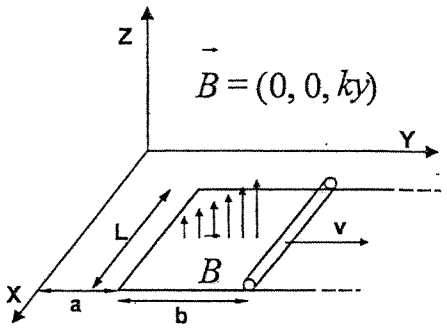
$$\boxed{m \frac{dV}{dt} + \frac{B^2 d^2}{R} V = \frac{\mathcal{E} B d}{R}} \Rightarrow \text{Ec. diferencial}$$

Velocidad límite: $a = 0$ $\quad \boxed{V = \frac{\mathcal{E}}{Bd}}$

www.simplyjarod.com

FEBRERO 2008

5.- Unos raíles conductores paralelos, separados una distancia L, están conectados por otro conductor perpendicular a ellos, todos de resistencia despreciable. Sobre estos raíles se sitúa una barra de longitud L y resistencia R que puede deslizarse sobre ellos sin rozamiento manteniendo un buen contacto eléctrico. Este sistema está inmerso en un campo magnético (0, 0, ky), donde k es una constante. Calcular:

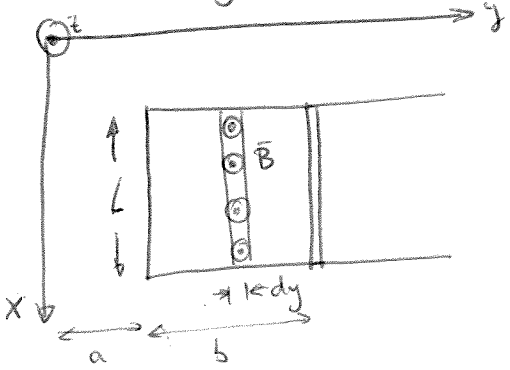


a) Flujo magnético a través del circuito formado por los raíles, el conductor y la barra en el instante que se muestra en la figura.

b) Si la barra se mueve con velocidad constante v = (0, v, 0), indicar el sentido de la corriente inducida en el circuito formado por los raíles, el conductor y la barra, razonando la respuesta.

c) Suponiendo que en el instante inicial la barra está a una distancia "a" del eje X (b=0), calcular el valor de la corriente inducida del apartado b), en función del tiempo y de las constantes: k, a, L, R, v

$\vec{B} = ky\,u_z$



$$\phi = \int B\,dS = \int_{y=a}^{y=r} k\cdot y\cdot L\,dy = kL\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=a}^{y=r}$$

$$= \frac{kL}{2}\left[r^2 - a^2\right]$$

en $a+b=r$; $\phi = \frac{kL}{2}\left[(a+b)^2 - a^2\right]$

b) $\uparrow\phi \Rightarrow$ Espira crea una fem contraria a esa variación de ϕ de forma que crea una intensidad de sentido horario.

c)

$$\phi = \frac{kL}{2}(r^2 - a^2)$$

$$\phi(t) = \frac{kL}{2}\left[(a+vt)^2 - a^2\right]$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\;;\quad \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{kL}{2}\left[2(a+vt)\right] = -kLv(a+vt)$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{+kLv(a+vt)}{R} \quad \text{(sentido horario)}$$