simplyjarod.com

FIS1

Resúmenes

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

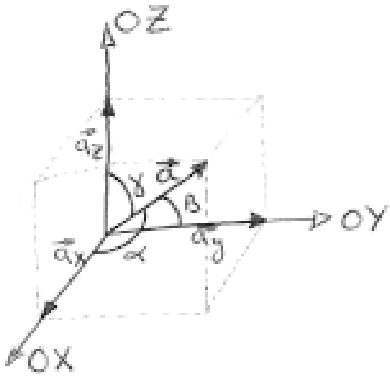
Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en simplyjarod.com

Tema 1: Mecánica

1. Vectores

a) Cosenos directores



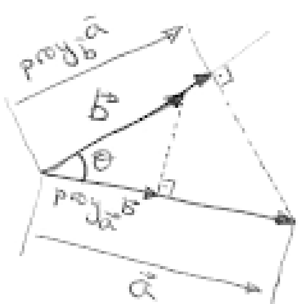
$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{a}$$
$$\cos(\beta) = \frac{a_y}{a}$$
$$\cos(\gamma) = \frac{a_z}{a}$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

b) Productos

i) Producto escalar

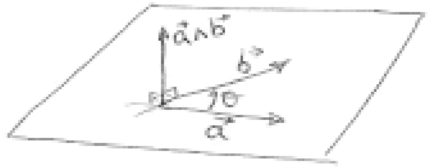
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot \text{proy}_{\vec{a}}\vec{b} = b \cdot \text{proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

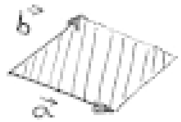


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$
$$\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

ii) Producto vectorial

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = a\,b\,\text{sen}(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$





$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \text{área}$

$\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{b})$

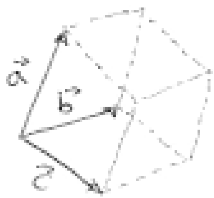
$(k\vec{a}) \wedge \vec{b} = k(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge (k\vec{b})$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

iii) Producto mixto

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \neq \vec{a}(\vec{c} \wedge \vec{b}) \neq \vec{c}(\vec{b} \wedge \vec{a})$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$



$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \text{volumen}$

iv) Doble producto vectorial

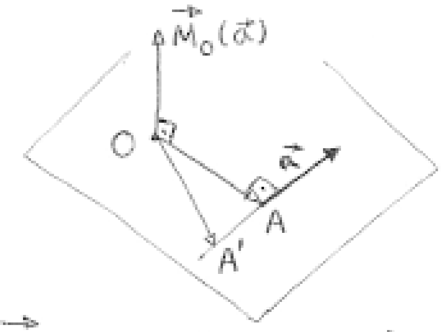
$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) & (\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{vmatrix}$$

c) Momentos

i) Momento central

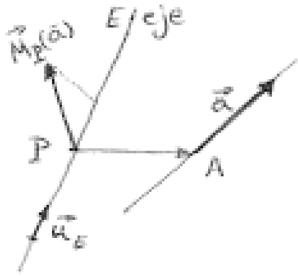
Momento central de $\vec{a}$ respecto a O



$\vec{M}_O(\vec{a}) = \vec{OA} \times \vec{a} = \vec{OA'} \times \vec{a}$

ii) Momento axial

Proyección del momento central respecto de un punto del eje



$\text{proy}_E\, \vec{M}_P(\vec{a}) = \vec{M}_P(\vec{a}) \cdot \vec{u}_E = (\vec{PA} \times \vec{a}) \cdot \vec{u}_E$

momento central de $\vec{a}$ respecto a P

2. Cinemática

a) Cinemática del punto

vector posición: $\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$ (m)

vector velocidad: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (m/s)

vector aceleración: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ (m/s²)

vector tangente unitario: $\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

vector normal unitario: $\vec{u}_n = \frac{\frac{d\vec{u}_t}{dt}}{\left|\frac{d\vec{u}_t}{dt}\right|} = \frac{|\vec{v}|}{a_n} \cdot \frac{d\vec{u}_n}{dt}$

vector binormal unitario: $\vec{u}_b = \vec{u}_t \times \vec{u}_n$

aceleración: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Rightarrow a^2 = a_t^2 + a_n^2$

aceleración tangencial: $a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$ (varía el módulo)

aceleración normal: $a_n = \frac{v^2}{R}$ (varía la dirección)

b) Principales movimientos

i) MRU: Movimiento Rectilíneo Uniforme

$x = x_0 + vt$

$v = v_0$

ii) MRUA: Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$v = v_0 + at$

iii) MCU: Movimiento Circular Uniforme

$\varphi = \varphi_0 + \omega t$

$\omega = \omega_0$

iv) MCUA: Movimiento Circular Uniformemente Acelerado

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

c) Magnitudes angulares

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow v = \omega \cdot r$

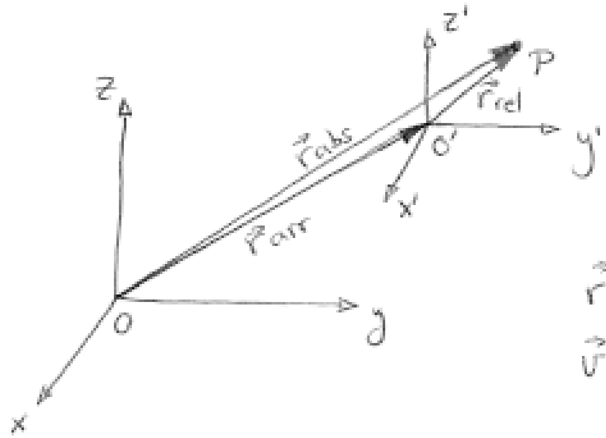
$\vec{a}_T = R\,\alpha \cdot \vec{u}_T \Rightarrow a_T = R \cdot \alpha$

$\vec{a}_N = R\,\omega^2 \cdot \vec{u}_N \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 2\pi f = \omega$

$f = \frac{1}{T}$ (Hz)

d) Movimiento relativo



$$\vec{r}_{abs} = \vec{r}_{arr} + \vec{r}_{rel}$$
$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{arr} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr} = \vec{v}_{rel} + (V_0 + \vec{\omega} \times \vec{r})$$
$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{cor} = \vec{a}_{rel} + (\vec{a}_0 + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) + $$
$$+ 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel})$$

3. Dinámica de la partícula

a) Leyes de Newton

Primera: Todo cuerpo tiende a conservar su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras no se ejerza sobre él una fuerza (o la suma de las fuerzas ejercidas sea igual a cero)

Segunda: Toda fuerza aplicada sobre un cuerpo, que no esté equilibrada, produce una aceleración que es proporcional a la fuerza.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Tercera: Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce otra fuerza de misma dirección pero sentido contrario sobre el primero, teniendo ésta el mismo módulo que la primera. (Principio de acción - reacción)

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

b) Momento lineal

momento lineal $= \vec{p} = m\vec{v}$ ($kg \cdot m/s$)

Si la resultante de las fuerzas exteriores es nula $\Rightarrow \vec{p} = cte$

c) Momento angular (o momento cinético)

Momento angular en el punto O de una partícula hallada en P

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \times \vec{p} = \vec{OP} \times m\vec{v} \qquad (Kg\ m^2/s)$$

d) Momento de una fuerza (o par de fuerzas)

Momento en el punto O de una fuerza aplicada en P

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{OP} \times \vec{F} \qquad (N \cdot m) \qquad \vec{M}_0(\vec{F}) = \frac{\partial \vec{L}_0}{\partial t}$$

4. Trabajo y energía

a) Trabajo

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (\text{Julios})$$

b) Potencia

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (\text{Watios})$$

c) Fuerzas conservativas y energía potencial

Una fuerza es conservativa si su rotacional es nulo: $\nabla \times \vec{F} = 0$

$$\vec{F} \text{ es conservativa} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

Si $\vec{F}$ es conservativo existe un potencial asociado tal que:

$$\vec{F} = -\nabla E_p \Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow E_p = -\int \vec{F} d\vec{r}$$

Si $\vec{F}$ es conservativa: $W_{AB} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$

por lo que en una trayectoria cerrada (A=B) es cero.

d) Energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (\text{Julios})$$

$$W_{\text{todas las fuerzas}\ AB} = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c \qquad \left(\begin{array}{c}\text{todas las fuerzas} \\ \text{incluye las} \\ \text{conservativas y} \\ \text{no conservativas}\end{array}\right)$$

e) Teorema de la Energía mecánica

$$W_{\substack{\text{fuerzas} \\ \text{NO conserv.}}\ AB} = E_{mec}(B) - E_{mec}(A) \ ; \ E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$$

Frozamiento es NO conservativa

5. Sistemas de partículas

a) Centro De Masas (CDM)

$$\vec{r}_{cdm} = \vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad ; \quad \vec{r}_{cdm} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm}$$

b) Movimiento del CDM

$$\vec{v}_{cdm} = \frac{d\vec{r}_{cdm}}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

$$\vec{a}_{cdm} = \frac{d\vec{v}_{cdm}}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$$

c) Segunda Ley de Newton

Las Finternas se anulan dos a dos entre sí

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cdm} \quad ; \quad M = \sum m_i$$

d) Momento lineal

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{p} = M \cdot \vec{v}_{cdm}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad ; \quad \text{si } \sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte$$

e) Choques

Inelásticos: tras colisionar, los cuerpos permanecen juntos

$\vec{p} = cte$

Elásticos: los cuerpos chocan y se separan

$E_{cin} = cte \quad ; \quad \vec{p} = cte$

f) Momento angular

$$\vec{L}_o = \sum \vec{L}_{o_i} = \sum \vec{OP}_i \times \vec{p}_i \Rightarrow \vec{L}_o = \vec{L}_{cdm} + \vec{O}_{cdm} \times M \cdot \vec{v}_{cdm}$$

$$\sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext}) = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \quad ; \quad \text{si } \sum M_o(\vec{F}_{ext}) = 0 \Rightarrow \vec{L}_o = cte$$

g) Energía cinética

$$E_{cin} = T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

6. Sólido Rígido

a) Momento de inercia (I)

$I = \sum m_i r_i^2 \quad ; \quad I = \int r^2 dm$

$$\left.\begin{array}{l} I_x = \int y^2 dm \\ I_y = \int x^2 dm \end{array}\right\} r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow I = I_x + I_y$$

b) Teorema de Steiner

$I = I_{cdm} + md^2$

c) Energía

$$E_{cin_0} = T_0 = \underbrace{\frac{1}{2} M V_{cdm}^2}_{\text{traslación}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_0 \omega^2}_{\text{rotación}}$$

$E_{pot_0} = U_0 = mgh_0$

d) Momento angular

$$\vec{L}_0 = \underbrace{\overrightarrow{Ocdm} \times m\vec{v}_{cdm}}_{\text{traslación}} + \underbrace{I_0 \cdot \vec{\omega}}_{\text{rotación}} \begin{cases} O = \text{pto fijo} \Rightarrow \vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega} \\ O = cdm \Rightarrow \vec{L}_{cdm} = I_{cdm} \vec{\omega} \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$$

e) Dinámica del sólido rígido

traslación: $\vec{F} = M \vec{a}_{cdm}$

rotación: $\vec{M}_0 = I_0 \cdot \vec{\alpha} \longrightarrow$ sólo válida si O cumple alguna de las 3 condiciones:

- $O = cdm$
- $O =$ punto fijo
- O: su aceleración pasa por cdm

f) Teoremas de la Energía

$W_{\text{todas las fuerzas}} = \Delta E_{cin}$

$W_{\text{fuerzas no conservativas}} = \Delta E_{mec}$

Momentos de inercia

Disco = Cilindro macizo:

$$I_0 = \frac{1}{2} M R^2$$

Aro = Cilindro hueco:

$$I_0 = M R^2$$

Cuadrado: $I_G = \frac{1}{12} M L^2$

Varilla: $I_G = \frac{1}{12} M L^2$

$$I_{extremo} = \frac{1}{3} M L^2$$

Anexo a mecánica: Campo gravitatorio

1. Ley universal

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u_r} = m\vec{g}$$ ($\vec{u_r}$ atractivo entre los dos cuerpos)

2. Potencial

$$g = -\nabla V \Rightarrow V = -\int g\,dr = -\int \frac{GM}{r^2}dr = -\frac{GM}{r}$$

$$E_{pot} = mV = -G\frac{Mm}{r}$$

3. Velocidad de escape

$$E_{mec} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mV^2 - G\frac{Mm}{r}$$

$$E_{mec}(\infty) = 0 \Rightarrow E_{cin} = -E_{pot} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}V^2 = \frac{GM\cancel{m}}{r}$$

$$V_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2gr}$$

4. Movimientos

a) órbitas elípticas

ecuación elipse: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ área elipse $= \pi ab$

Velocidad aerolar $= \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ (m^2/s)

Periodo $= T = \frac{\text{superficie}}{V_{aerolar}} = \frac{2\pi abm}{L}$

b) órbitas circulares

para que exista equilibrio $\Rightarrow |F_G| = |F_c| \Leftrightarrow \frac{GM\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{V^2}{\cancel{r}}$

Periodo $= T = \frac{\text{longitud}}{\text{Velocidad}} = \frac{2\pi r}{V}$

5. Leyes de Kepler

I. Los planetas describen órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos

II. Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales ($V_{aerolar} = cte$)

III. $$\frac{T^2}{a^3} = cte$$

Tema 3: Electricidad y magnetismo

1. Electrostática

a) Densidad de carga

Densidad volumétrica: $\rho = \frac{dq}{dV}$ $(C/m^3) \Rightarrow q_{Tot} = \iiint_V \rho \, dV$

Densidad superficial: $\sigma = \frac{dq}{dS}$ $(C/m^2) \Rightarrow q_{tot} = \iint_S \sigma \, dS$

Densidad lineal: $\lambda = \frac{dq}{dl}$ $(C/m) \Rightarrow q_{Tot} = \int_l \lambda \, dl$

b) Fuerza eléctrica:

$$F_e = K \frac{Qq}{r^2} \quad ; \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \quad ; \quad K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ \left(\frac{N m^2}{C^2}\right)$$

$$\vec{F}_e = Q\vec{E}$$

c) Teorema de Gauss

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos(\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \oiint d\Phi = \oiint E dS \cos(\alpha) \\ \Phi &= \frac{Q_{interior}}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \ \frac{Q_{int}}{\varepsilon} = \oiint E dS \cos(\alpha)$$

d) Potencial eléctrico

$$V = E \cdot r = K \frac{Q}{r} \ (V) \qquad E_{pot} = Q' \cdot V_{pot} \ (J)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{-dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr$$

2. Conductores y dieléctricos

$E_{\text{interior conductor}} = 0$

$V_{\text{interior conductor}} = cte$

$V_{\text{interior conductor}} = V_{\text{superficie conductor}}$

a) Energía electrostática

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint \varepsilon |E|^2 dV \quad (J)$$

b) Condensadores

$$C = \frac{Q}{V} \text{ (Faradios)} \Longrightarrow W_E = \frac{1}{2} C V^2 \text{ (J)}$$

- Condensadores en serie: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$
- Condensadores en paralelo: $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

Condensador plano: $C = \varepsilon \frac{S}{d}$; $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon_r C_0$$

3. Corriente eléctrica

a) Potencia (disipada y suministrada)

$$P = VI \quad (W)$$

b) Condensadores y bobinas

En corriente continua:

- Condensador = circuito abierto $\rightarrow W_C = \frac{1}{2} C V^2$ (J) No disipan Potencia
- Bobina = cortocircuito $\longrightarrow W_L = \frac{1}{2} L I^2$ (J) No disipan Potencia

c) Leyes de Kirchhoff

I) Ley de los nudos: $\sum I_{\text{entran}} = \sum I_{\text{salen}}$ (en un nudo)

II) Ley de las mallas: $\sum$ subidas $V = \sum$ caídas V (en una malla)

4. Magnetostática

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Densidad volumétrica: $\vec{J}_V = \frac{dI}{dS} \vec{u}$ (A/m^2)

Densidad superficial: $\vec{J}_S = \frac{dI}{dl} \vec{u}$ (A/m)

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$ ← Ley de Lorentz

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Ley de Ampère: $\int \vec{B} d\vec{l} = \mu I_{int}$

Ley de Biot y Savart: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$

Energía magnetostática: $W_H = \frac{1}{2\mu} \iiint_V |\vec{B}|^2 dV$ (J)

5. Inducción electromagnética

Flujo: $\Phi = \iint \vec{B} d\vec{S}$ (Webers)

Faraday: $fem = -n \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Leftrightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} = \frac{-\partial}{\partial t} \iint \vec{B} d\vec{S}$

$$\text{Valor medio} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)\, dt \quad (V)$$

$$\text{Valor eficaz} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)\, dt} \quad (V_{rms})$$