www.simplyjarod.com

FMT1

Carpeta de Montero Espinosa (resuelta en 2009)

www.simplyjarod.com

FMT1
Teoría

www.simplyjarod.com

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA FMT1

Tema 1: Nociones de álgebra abstracta

Lógica
Conjuntos
Aplicaciones

Tema 2: Álgebra matricial y Sistemas de ecuaciones lineales

Operaciones matriciales
Inversas y rango matricial
Método de Gauss
Teorema de Rouché-Frobenius

Tema 3: Espacios Vectoriales

Conceptos fundamentales
Subespacios vectoriales
Dependencia e independencia lineal
Bases y dimensión

Tema 4: Aplicaciones lineales

Conceptos fundamentales
Núcleo e Imagen
Representación matricial

Tema 5: Productos escalares y ortogonalidad

Conceptos fundamentales
Ortogonalidad
Proyecciones ortogonales
Método de Gram-Schmidt

Tema 6: Autovalores y autovectores

Introducción
Subespacios propios
Diagonalización

www.simplyjarod.com

TEMA 1: NOCIONES BÁSICAS

1.1 Lógica de proposiciones

Al realizar razonamientos en matemáticas empleamos sentencias que están "conectadas" entre sí por conectivas lingüísticas. La lógica de proposiciones se ocupa del estudio de las conectivas lingüísticas entre proposiciones. Una proposición es una sentencia que puede ser verdadera (denotaremos por V) o falsa (denotaremos por F).

Las conectivas lingüística permiten construir proposiciones compuestas a partir de otras más simples. Así, si los símbolos p y q representan proposiciones genéricas, las conectivas lingüísticas más empleadas son las que aparecen en la siguiente tabla:

Conectiva lingüística	Conectivo lógico	Símbolo	Se escribe
no p	Negación	$\neg$	$\neg p$
p y q	Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$
p o q	Disyunción	$\vee$	$p \vee q$
Si p entonces q	Implicación	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$
p si y sólo si q	Equivalencia	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$

Llamaremos **forma proposicional** a cualquier expresión formada por:

a) variables proposicionales tales como $p, q, r, \ldots$
b) los conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$
c) los paréntesis (,).

Cada forma proposicional tiene asociada una tabla de verdad. La tabla de verdad asociada a una forma proposicional se puede construir sistemáticamente a partir del procedimiento empleado para construir dicha forma proposicional.

Una forma proposicional es una **tautología** si toma el valor V cualquiera que sea la forma en que asignemos los valores V ó F a las variables proposicionales que en ella intervienen.

Una forma proposicional es una **contradicción** si toma el valor F cualquiera que sea la forma en que asignemos los valores V ó F a las variables proposicionales que en ella intervienen.

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disyunción

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Implicación

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Equivalencia

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Ejemplo 1:

Vamos a construir la tabla de verdad de $(p \vee \neg q) \Rightarrow r$

Se establecen todas las posibles situaciones de verdad o falsedad de las variables que intervienen en el enunciado:

p	q	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	r	$(p \vee \neg q) \Rightarrow r$
V	V			V	
V	F			V	
F	V			V	
F	F			V	
V	V			F	
V	F			F	
F	V			F	
F	F			F	

Se van rellenando el resto de columnas teniendo en cuenta el significado de los conectivos lógicos:

p	q	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	r	$(p \vee \neg q) \Rightarrow r$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Ejemplo 2:

Ahora vamos a demostrar que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$ es una tautología construyendo su tabla de verdad. En este caso la rellenamos entera directamente:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

www.simplyjarod.com

1.2 Lógica de predicados

Hay deducciones que se realizan habitualmente en matemáticas para las que no es posible analizar su validez dentro del ámbito de la lógica de proposiciones estudiada en el punto anterior.

En lógica de predicados se distingue entre las propiedades y los objetos a los que dichas propiedades se refieren. Por ejemplo:
Supongamos la propiedad "ser primo" que simbolizamos por P y la propiedad "ser impar" que simbolizamos por I.

x es primo $\quad P(x)$
x es impar $\quad I(x)$

Ahora podemos aplicar estas propiedades a objetos concretos de forma que:

3 es primo $\quad P(3)$
5 es impar $\quad I(5)$

Diremos que un predicado es una **tautología** si toma el valor V independientemente de los objetos concretos del universo del discurso que coloquemos en lugar de sus variables.

Consideramos ahora la sentencia "*para todo objeto x se verifica P(x)*". La frase "*para todo objeto x*" se denomina **cuantificador universal** y se representa por $\forall x$.

Consideramos ahora la sentencia "*existe un objeto x se verifica P(x)*". La frase "*existe un objeto x*" se denomina **cuantificador existencial** y se representa por $\exists x$.

Muchas de ellas son propiedades muy obvias

Propiedades del cuantificador universal y el cuantificador existencial:

En cualquier universo de discurso, para todo predicado P y para toda variable x, la siguientes sentencias son verdaderas:

- $P(a) \Rightarrow \exists x\ P(x)$ [si un elemento concreto cumple una propiedad entonces existe un elemento que cumple la propiedad]
- $(\forall x\ P(x)) \Rightarrow P(a)$ [si una propiedad se cumple para todo elemento, se cumple para un elemento concreto]

Esta es el contrarrecíproco de la anterior. Recuerda que la implicación directa y su contrarrecíproco son equivalentes: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

- $\neg P(a) \Rightarrow \neg(\forall x\ P(x))$ [si un elemento concreto no cumple una propiedad entonces esa propiedad no se cumple para todo elemento]
- $(\forall x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ P(x))$ [si una propiedad se cumple para todo elemento, entonces existe algún elemento que la cumple]
- $\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x \neg P(x))$

www.simplyjarod.com

1.3 Teoría de conjuntos

1.3.1 Definiciones

Un **conjunto** es una reunión de objetos que llamaremos elementos.

El cardinal es un número natural

Llamaremos **cardinal de un conjunto** al número de elementos del conjunto.

Un conjunto A es **subconjunto** de un conjunto B, denotándose $A \subset B$, si todo elemento de A lo es de B.

El **conjunto vacío** $\varnothing$ es un conjunto que no contiene ningún elemento.

El **conjunto universal** X es aquel tal que todos los conjuntos son subconjuntos de él.

Si un elemento a **pertenece** a un conjunto A se denota $a \in A$.

Esta es una técnica para demostrar la igualdad muy utilizada en álgebra

Dos conjuntos son **iguales** si contienen los mismos elementos. Dicho de otra forma:

$$A = B \iff (A \subset B \text{ y } B \subset A)$$

1.3.2 Operaciones con conjuntos

Sean $A, B \subset X$ dos subconjuntos del conjunto universal X.

El complementario también se puede notar con un apóstrofe: $\overline{A} = A'$

Conjunto complementario : $\overline{A} = \{x \in X \ / \ x \notin A\}$

Intersección de conjuntos : $A \cap B = \{x \in X \ / \ x \in A \text{ y } x \in B\}$

Unión de conjuntos : $A \cup B = \{x \in X \ / \ x \in A \text{ o } x \in B\}$

Diferencia de conjuntos : $A - B = \{x \in X \ / \ x \in A \text{ y } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

Diferencia simétrica: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

Ejemplo:
Sean $A = \{1, 2, 3, a\}$ y $B = \{a, b, 2, 4\}$

$A \cap B = \{2, a\}$ $\qquad$ $A \cup B = \{1, 2, 3, a, b, 4\}$

Fíjate que la diferencia de conjuntos no es conmutativa

$A - B = \{1, 3\}$ $\qquad$ $B - A = \{b, 4\}$

$A \Delta B = \{1, 3, b, 4\}$

Son de especial relevancia las operaciones en las que intervienen el conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto universal X:

$A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cap X = A$

$A \cup \varnothing = A \qquad A \cup X = X$

$A - \varnothing = A \qquad \varnothing - A = \varnothing \qquad A - X = \varnothing \qquad X - A = \overline{A}$

$A \Delta \varnothing = A \qquad A \Delta X = X - A$

www.simplyjarod.com

1.3.3 Propiedades

Daremos las propiedades más interesantes de la unión,la intersección y el complementario.

Casi todas estas propiedades pueden representarse gráficamente mediante diagramas de Venn

Asociativa	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
Conmutativa	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
Idempotente	$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
Simplificación	$A\cup(B\cap A) = A$	$A\cap(B\cup A) = A$
Absorción	$A\cup X = X$	$A\cap\varnothing = \varnothing$
Distributiva	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
Morgan	$(A\cup B)' = A'\cap B'$	$(A\cap B)' = A'\cup B'$
Complementario	$(A')' = A$	

Estas dos propiedades se denominan Leyes de Morgan

1.3.4 Producto cartesiano

Se llama **producto cartesiano** de un conjunto A por otro B (en este orden) al conjunto formado por los pares (a, b) con $a\in A$ y $b\in B$ el cual se denota por $A\times B$.

Ejemplo:

Sean $A=\{2, 1, 4\}$ $B=\{a,b\}$

$A\times B=\{(2,a), (2,b), (1,a), (1,b), (4,a), (4,b)\}$

1.3.5 Conjunto de las partes de un conjunto

La familia de subconjuntos puede ser infinita

El conjunto de las **partes de un conjunto** A es el conjunto de todos los subconjuntos de A, denotándose $\mathcal{P}(A)$:

$$\mathcal{P}(A)=\{B \,/\, B\subset A\}$$

Ejemplo:

Los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son, a su vez, conjuntos

Sea $A=\{1, 2, 3\}$ $\mathcal{P}(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

1.3.6 Partición

Dado un conjunto A una familia de subconjuntos $A_1, A_2,\ldots, A_n$ es una **partición** de A si se verifica que:

$$A = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n \quad \text{y} \quad A_i\cap A_j=\varnothing \quad i\neq j$$

Ejemplo:

Sea $A=\{1, 2, 3, a, b, 7, 5, c\}$

Una posible partición de A es $A_1=\{7,b,1\}$ $A_2=\{2,3\}$ $A_3=\{a,c\}$ $A_4=\{5\}$

1.3.7 Teorema del Cardinal

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Se cumple que:

$$\text{card}(A\cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A\cap B)$$

www.simplyjarod.com

1.4 Aplicaciones

1.4.1 Definiciones

Sean dos conjuntos no vacíos A y B.

aplicación y función son términos sinónimos

Decimos que $f : A \to B$ es una **aplicación** (función) si a cada elemento del conjunto de partida A le hace corresponder un único elemento en el conjunto de llegada B:

$$f \text{ es aplicación } \Leftrightarrow \quad \forall x \in A \,..\, \exists! y \in B \;\; / \;\; y = f(x)$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$.

Sea $f : A \to B$ tal que $f(1) = c$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = a$, $f(5) = b$. En este caso decimos que f es una aplicación ya que cumple la definición anterior, es decir a cada elemento de A le corresponde un único elemento en el conjunto B.

Sin embargo $f : A \to B$ tal que $f(1) = c$, $f(1) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = a$, $f(5) = b$ no es una aplicación ya que al elemento $1 \in A$ le corresponden dos elementos de B.

Cuando f es una aplicación de cada elemento del espacio de salida sale una única "flecha"

Si nos piden demostrar que dos aplicaciones son iguales lo haremos así

- Igualdad de aplicaciones. Sean dos aplicaciones $f, g : A \to B$:

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A \,..\; f(x) = g(x)$$

- Los elementos del conjunto de salida A se denominan **preimágenes** de f.

- Los elementos del espacio de llegada B que tienen preimagen mediante f se denominan **imágenes** de f. (Ojo: no todos los elementos de B tienen que ser imágenes de una determinada aplicación f).

- Llamamos **imagen de** f al subconjunto de B formado por todos los elementos que tienen preimagen mediante f. Se denota Im(f):

$$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in B \;/\; \exists\, x \in A \,..\, f(x) = y \}$$

www.simplyjarod.com

1.4.2 Tipos de aplicaciones

Sea $f: A \to B$ una aplicación (función):

- Se dice que f es **inyectiva** si a cada elemento del conjunto imagen le corresponde sólo una preimagen en el conjunto de partida:

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow \quad \forall x,y \in A \;..\; f(y)=f(x) \;\Rightarrow\; y=x$$

Si f es inyectiva a cada elemento del espacio de llegada le llega una o ninguna flecha

- Se dice que f es **sobreyectiva** si el conjunto imagen de f, $\mathrm{Im}(f)$, coincide con el conjunto de llegada B:

$$f \text{ es sobreyectiva } \Leftrightarrow \quad \forall y \in B \;..\; \exists x \in A \;/\; f(x)=y$$

Si f es sobreyectiva a cada elemento del espacio de llegada le llega una o más flechas

- Se dice que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Si f es biyectiva a cada elemento del espacio de llegada le llega una y sola una flecha

www.simplyjarod.com

1.4.3 Imagen directa e imagen recíproca

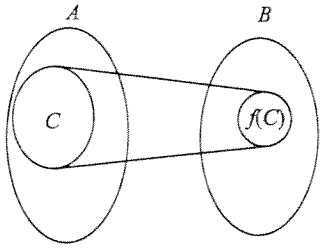
Fíjate que tanto la imagen directa como la imagen inversa son subconjuntos

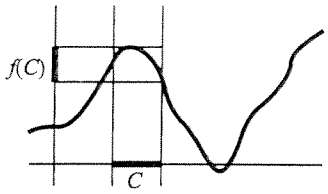
Sea $f : A \to B$ y $C \subseteq A$. Se denomina **imagen directa** de C mediante f a:

$$f(C) = \{y \in B \ / \ \exists x \in C .. y = f(x)\}$$

Propiedad principal:

$x \in C \Rightarrow f(x) \in f(C)$



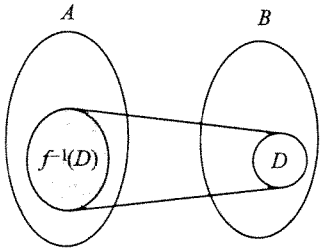


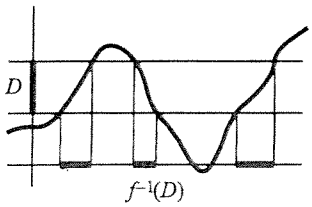
Sea $f : A \to B$ y $D \subseteq B$. Se denomina **imagen recíproca** de D mediante f a:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \ / \ f(x) \in D\}$$

Propiedad principal:

$x \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow f(x) \in D$





Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{a,b,c,d\}$

Sea la aplicación $f : A \to B$ tal que $f(1) = c$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = a$, $f(5) = b$

$\text{Im} f = f(A) = \{a,b,c\}$

$f(\{1,2\}) = \{b,c\}$

$f^{-1}(\{c\}) = \{1,3\}$

$f^{-1}(\{b,c\}) = \{1,2,3,5\}$

$f^{-1}(\{d\}) = \varnothing$

www.simplyjarod.com

Propiedades de la imagen directa y recíproca

Fíjate que en todas estas propiedades nos estamos refiriendo a la imagen recíproca y no a la aplicación inversa

Sea $f : A \to B$ y $C_1, C_2 \subseteq A$ $D_1, D_2 \subseteq B$

1.- $C_1 = \varnothing \Leftrightarrow f(C_1) = \varnothing$
$D_1 = \varnothing \Rightarrow f^{-1}(D_1) = \varnothing$

2.- $C_1 \subset C_2 \Rightarrow f(C_1) \subset f(C_2)$
$D_1 \subset D_2 \Rightarrow f^{-1}(D_1) \subset f^{-1}(D_2)$

3.- $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$
$f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$

4.- $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$
$f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$

5.- $C_1 \subset f^{-1}(f(C_1))$
$f(f^{-1}(D_1)) \subset D_1$

6.- $f(C_1) - f(C_2) \subset f(C_1 - C_2)$
$f^{-1}(D_1 - D_2) = f^{-1}(D_1) - f^{-1}(D_2)$

7.- si f es inyectiva $\Rightarrow \begin{cases} C_1 = f^{-1}(f(C_1)) \\ f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2) \end{cases}$

8.- si f es sobreyectiva $\Rightarrow D_1 = f(f^{-1}(D_1))$

www.simplyjarod.com

1.4.4 Composición de aplicaciones

Importante:
La composición de funciones no es conmutativa.

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones. Se define la aplicación composición como:

$$g \circ f : A \to C$$
$$x \to (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Ejemplo:

$$f : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\} \qquad g : \{a,b,c\} \to \{\alpha,\mu,\lambda\}$$

$$\begin{array}{lll} 1 & \to & f(1) = a \\ 2 & \to & f(2) = b \\ 3 & \to & f(3) = a \end{array} \qquad \begin{array}{lll} a & \to & f(a) = \lambda \\ b & \to & f(b) = \mu \\ c & \to & f(c) = \alpha \end{array}$$

$$g \circ f : \{1,2,3\} \to \{\alpha,\mu,\lambda\}$$
$$\begin{array}{lll} 1 & \to & (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = \lambda \\ 2 & \to & (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = \mu \\ 3 & \to & (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(a) = \lambda \end{array}$$

Propiedades

1.- f, g inyectivas $\Rightarrow$ $g \circ f$ inyectiva
2.- f, g sobreyectivas $\Rightarrow$ $g \circ f$ sobreyectiva
3.- f, g biyectiva $\Rightarrow$ $g \circ f$ biyectiva
4.- $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva
5.- $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow$ g sobreyectiva
6.- $g \circ f$ biyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva y g sobreyectiva

1.4.5 Composición de una aplicación con ella misma

Importante:
Si el espacio de salida y el espacio de llegada son distintos no se puede definir f^2

No hay que dejarse engañar con la notación:
cuando escribimos f^2 no significa que elevemos f al cuadrado, ¡eso no existe!

Sea $f : A \to A$ una aplicación definida entre dos conjuntos iguales, dicho de otra forma, el conjunto de salida y el conjunto de llegada es el mismo.
Definimos la aplicación f^2 como la composición de f con ella misma:

$$f^2 : A \to A$$
$$x \to f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

Análogamente se puede definir $f^3 = f \circ f \circ f$ donde se aplica f tres veces.
Y en general $f^n = f \circ .^{n)}. \circ f$ donde se aplica f n veces.

Se puede demostrar que:

$$\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f) \qquad \text{y en general} \qquad \mathrm{Im}(f^n) \subset \mathrm{Im}(f) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

www.simplyjarod.com

1.4.6 Aplicación inversa

Sea una aplicación:

$$f : A \to B$$
$$x \to f(x) = y$$

Solamente en el caso en que f es biyectiva se puede definir la aplicación inversa como:

$$f^{-1} : B \to A$$
$$y \to f^{-1}(y) = x$$

Observación:

No debemos confundir la aplicación inversa con la imagen recíproca. Ambos conceptos comparten la misma notación $f^{-1}(\bullet)$ pero tienen distinto significado. Siempre podremos identificar de cual de ellas se trata fijándonos en lo que hay dentro de los paréntesis:

- Si dentro de los paréntesis hay un elemento (normamente en letra minúscula) entonces se trata de la función inversa.
- Si dentro de los paréntesis hay un conjunto (normalmente en letra mayúscula) entonces se trata de la imagen recíproca.

1.4.7 Aplicación restricción

Definición

Sean A, B dos conjuntos y sea $f : A \to B$ una aplicación. Si restringimos el conjunto de salida a los elementos del subconjunto $C \subset A$ creamos una nueva aplicación $f|_C$ que llamaremos aplicación **f restringida al subconjunto C** y definimos como:

$$f|_C : C \to B$$
$$x \to f|_C(x) = f(x)$$

Lo que tiene que quedar claro es que todos los elementos de C se aplican mediante $f|_C$ en el mismo elemento de B en el que se aplicaban mediante f. Es decir:

$$f|_C(x) = f(x) \qquad \forall x \in C$$

Propiedades

- Si f es inyectiva $\Rightarrow$ $f|_C$ es inyectiva
- Si f es sobreyectiva, no podemos asegurar que $f|_C$ sea sobreyectiva.
- Si f es biyectiva $\Rightarrow$ $f|_C$ es inyectiva

- Si $f|_C$ es sobreyectiva $\Rightarrow$ f es sobreyectiva
- Si $f|_C$ es inyectiva, no podemos asegurar que f sea inyectiva
- Si $f|_C$ es biyectiva $\Rightarrow$ f es sobreyectiva

www.simplyjarod.com

1.5 Principio de inducción

Este es un método de demostración muy utilizado en Álgebra

Sea P una propiedad que pueden verificar todos los números naturales. Hacemos:

Base de inducción: verificamos que la propiedad P se cumple para 1.

Hipótesis de inducción: suponemos que P se cumple para n.

También se puede hacer para n-1 y n

Paso de inducción: verificamos que P se cumple para $n + 1$ teniendo en cuenta la hipótesis.

Si esto sucede así entonces podemos afirmar que la propiedad P se cumple para todos los números naturales.

1.6 Relaciones

1.6.1 Definición

Sea un conjunto A. Una **relación binaria** es un subconjunto de $A \times A$ donde están los elementos de A que satisfacen una cierta condición.
Para decir que dos elementos de A están relacionados se pone $a\ R\ b$.

1.6.2 Propiedades de una relación binaria

Las principales propiedades que puede cumplir una relación binaria son:

Reflexiva: $a\ R\ a \quad , \quad \forall a \in A$
Simétrica: $a\ R\ b \quad \Rightarrow \quad b\ R\ a \quad , \quad \forall a,b \in A$
Antisimétrica: $a\ R\ b \ \wedge \ b\ R\ a \quad \Rightarrow \quad a = b \quad , \quad \forall a,b \in A$
Transitiva: $a\ R\ b \ \wedge \ b\ R\ c \quad \Rightarrow \quad a\ R\ c \quad , \quad \forall a,b,c \in A$

1.6.3 Relaciones de equivalencia

Decimos que una relación binaria definida en un conjunto A es una **relación de equivalencia** si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Generalmente una equivalencia se representa por $\sim$; para indicar que a está relacionado con b se pone $a \sim b$ y se lee "a es equivalente a b".

Las clases de equivalencia forman una partición del conjunto A

La **clase de equivalencia** de un elemento $a \in A$ es el conjunto de todos los elementos relacionados con él. Normalmente se representa por $[a] = \{x \in A \ / \ x \sim a\}$.

Llamamos **conjunto cociente** al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia. Se designa por A/R.

1.6.4 Relaciones de orden

Decimos que una relación binaria definida en un conjunto A es una **relación de orden** si cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Generalmente una relación de orden se representa por $\leq$; para indicar que a está relacionado con b se pone $a \leq b$.

www.simplyjarod.com

1.7 Leyes de composición

1.7.1 Ley de composición interna

Definimos **ley de composición interna** u **operación interna** en un conjunto X como una aplicación:

$$\begin{aligned} * : X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\rightarrow x * y \end{aligned}$$

El conjunto X es no vacío.

Lo importante de una operación interna es que al operar x e y mediante $*$ el resultado siga perteneciendo a X.

Propiedades

Toda ley de composición interna $*$ puede cumplir (o no) las siguientes propiedades:

- Propiedad asociativa : $\forall\ x, y, z \ni X,\ \ (x * y) * z = x * (y * z)$
- Elemento neutro : $\exists\ e \in X / \ \forall\ x \in X,\ \ x * e = e * x = x$
- Elemento opuesto: dado $x \ni X$, $\exists\ \overline{x} \ni X / \ x * \overline{x} = \overline{x} * x = e$
- Propiedad conmutativa: $\forall\ x, y \ni X,\ x * y = y * x$

Si un conjunto cumple la propiedad asociativa para tres elementos también la cumple para n elementos.

Ejemplos

1) Sea la aplicación

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n, m) &\rightarrow n * m = -n - m \end{aligned}$$

Esta aplicación es una ley de composición interna que cumple la propiedad conmutativa pero no la asociativa.

2) Sea la aplicación

$$\begin{aligned} - : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\rightarrow n - m \end{aligned}$$

Esta aplicación no es una ley de composición interna para el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$.

3) Sea la aplicación

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$

Esta aplicación es una ley de composición interna para el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ que cumple todas las propiedades antes enunciadas.

1.7.2 Ley de composición externa

Definimos **ley de composición externa** u **operación externa** en un conjunto X sobre un conjunto K como una aplicación:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times X &\rightarrow X \\ (k, x) &\rightarrow k \cdot x \end{aligned}$$

Lo importante de una operación externa es que al operar $k \in K$ e $x \in X$ mediante $\cdot$ el resultado siga perteneciendo a X.

www.simplyjarod.com

1.8 Estructuras algebraicas

1.8.1 Grupos

Sea un conjunto G no vacío con una operación interna $+$ (que normalmente se le denomina suma).

Decimos que la dupla $(G, +)$ es un **grupo** si cumple:

- Propiedad asociativa : $\forall\ x, y, z \in G,\ \ (x+y)+z = x+(y+z)$
- Elemento neutro : $\exists\ e \in G /\ \forall\ x \in G,\ \ x+e = e+x = x$
- Elemento opuesto: dado $x \in X$, $\exists\ \overline{x} \in X /\ \ x+\overline{x} = \overline{x}+x = e$

Decimos que $(G, +)$ es **grupo abeliano** si, además de todo lo anterior, se cumple:

- Propiedad conmutativa: $\forall\ x, y \in G,\ x+y=y+x$

1.8.2 Anillos

Sea A un conjunto no vacío y sean $+$ y $*$ dos operaciones internas (normalmente se les denomina suma y producto).

Decimos que la terna $(A, +, *)$ es un **anillo** si cumple:

1) $(A, +)$ es un grupo abeliano.
2) Propiedad asociativa del producto : $\forall\ x, y, z \in X,\ \ (x * y) * z = x * (y * z)$
3) La propiedad distributiva del producto respecto de la suma :

$$\forall\ x, y, z \in A,\ \ (x+y) * z = x * z + y * z$$
$$x * (y+z) = x * y + x * z$$

1.8.3 Cuerpos

Sea K un conjunto no vacío y sean $+$ y $*$ dos operaciones internas (normalmente se les denomina suma y producto).

Decimos que la terna $(K, +, *)$ es un **cuerpo** si cumple:

1) $(K, +)$ es un grupo abeliano.
2) $(K-\{e\}, *)$ es grupo.
3) La propiedad distributiva del producto respecto de la suma

El elemento e representa al elemento neutro de la operación + (suma).

Lo mismo dicho de otra forma:

1) $(K, +)$ cumple las propiedades asociativa, elemento neutro, elemento opuesto y conmutativa.
2) $(K\text{-}\{e\}, *)$ cumple las propiedades asociativa, elemento neutro y elemento opuesto.
3) La propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

www.simplyjarod.com

2.1 Concepto de matriz

Diremos que una matriz de dimensión $m \times n$ es un conjunto de números colocados en m filas y n columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices se denotan con letras mayúsculas y en ocasiones acompañadas por su *dimensión* (número de filas y columnas, $A_{m\times n}$), mientras que sus elementos se denotan con el nombre de la matriz en minúscula acompañados por el número de fila y columna en el que se encuentran ($a_{i,j}$).

2.2 Operaciones con matrices

- **Suma de matrices**

La suma entre dos matrices se realiza sumando cada elemento de la primera matriz con el elemento de la misma posición de la segunda, por lo tanto para poder sumar dos matrices tienen que tener la misma dimensión.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 0+3 & 3-4 \\ 3+7 & 1+1 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Producto de un escalar por una matriz**

¡¡¡Cuidado!!! No hay que confundir esta operación con la que veremos más adelante de multiplicar un determinante por un escalar.

Para multiplicar una matriz por un número o escalar basta con multiplicar todos los elementos por ese número.

Ejemplo:

$$4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot 1 \\ 4\cdot 4 & 4\cdot 3 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 12 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$$

www.simplyjarod.com

- **Producto de matrices**

Cada elemento del producto de matrices se hace multiplicando escalarmente su fila correspondiente de la primera matriz con su columna correspondiente de la segunda, por lo tanto para poder multiplicar dos matrices tienen que coincidir el número de columnas de la primera con el número de filas de la segunda. Dicho de otra forma, sean las matrices $A_{m\times r}$ y $B_{s\times n}$. Estas matrices se podrán multiplicar solamente cuando $r = s$. El resultado será una matriz $C_{m\times n}$.

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4+1\cdot 2+1\cdot 5 & 2\cdot 3+1\cdot 1+1\cdot 6 \\ 3\cdot 4+4\cdot 2+2\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot 1+2\cdot 6 \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 15 & 13 \\ 30 & 25 \end{pmatrix}}$$

La multiplicación de matrices **no es conmutativa**. Debemos tener cuidado con esto ya que al despejar una ecuación, sacar una matriz de factor común o pasarla multiplicando a la inversa, hay que respetar el lado por el que la matriz va multiplicando.

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2+3\cdot 3 & 4\cdot 1+3\cdot 4 & 4\cdot 1+3\cdot 2 \\ 2\cdot 2+1\cdot 3 & 2\cdot 1+1\cdot 4 & 2\cdot 1+1\cdot 2 \\ 5\cdot 2+6\cdot 3 & 5\cdot 1+6\cdot 4 & 5\cdot 1+6\cdot 2 \end{pmatrix} = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 17 & 16 & 9 \\ 7 & 6 & 4 \\ 28 & 29 & 17 \end{pmatrix}}$$

2.3 Tipos de matrices

Existen varios tipos de matrices según sea su forma o cumplan unas determinadas propiedades.

- **Según su forma:**

Rectangular: Matriz con distinto número de filas que de columnas.

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cuadrada: Matriz con igual número de filas que de columnas. En estas matrices la dimensión viene denotada por un solo número.

Éstas son las matrices más comunes a lo largo del curso.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fila: Matriz de dimensión $1 \times n$ (una fila y n columnas).

$$A_{1\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Columna: Matriz de dimensión $m \times 1$ (1 columna y m filas).

Estas matrices suelen ser la representación matricial de vectores que veremos más adelante.

$$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se puede ver también como la matriz cuyos únicos elementos distintos de cero son los que están por encima de la diagonal principal.

Este tipo de matriz se utiliza sobre todo en la resolución de sistemas de ecuaciones.

Triangular superior: Toda matriz cuadrada cuyos términos por debajo de la diagonal principal son cero.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Se puede ver también como la matriz cuyos únicos elementos distintos de cero son los que están por debajo de la diagonal principal.

Triangular inferior: Toda matriz cuadrada cuyos términos por encima de la diagonal principal son cero.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Para este tipo de matrices la asignatura dedica todo un tema. Aprenderemos a calcularlas y todas sus propiedades.

En los tres tipos anteriores de matrices el determinante se calcula directamente multiplicando su diagonal principal

Diagonal: Matriz cuadrada en la que todos los elementos son cero excepto los de la diagonal principal.

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Esta matriz es de las más importantes del curso ya que aparece muy frecuentemente en operaciones con matrices y como veremos también es la matriz de una base canónica.

Unidad: Matriz diagonal en la que todos los elementos de su diagonal principal son unos. Se representa por I y es "el uno" de las matrices (al multiplicar cualquier matriz cuadrada por la identidad se queda igual).

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Escalar: Matriz diagonal que tiene un mismo número en toda la diagonal principal. Es el resultado de multiplicar la matriz identidad por un número (escalar).

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=3\cdot I$$

- **Según sus propiedades:**

Inversa de una matriz cuadrada A: Es una matriz que cumple que premultiplicada y postmultiplicada por la matriz A da como resultado la matriz identidad I. Se representa por A^{-1}. Como la división entre matrices no existe, será nuestra herramienta para despejar en ecuaciones matriciales cuando tenemos dos matrices multiplicando. No todas las matrices cuadradas tienen inversa, sólo aquellas cuyo determinante sea distinto de cero.

Las propiedades y definición de la inversa de una matriz son iguales que las del elemento inverso de los números normales.

A es invertible $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

www.simplyjarod.com

Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, entonces $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Regular: Matriz cuadrada que tiene inversa y por lo tanto determinante distinto de cero.

A regular $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

Singular: Matriz cuadrada que no tiene inversa y por lo tanto determinante igual a cero.

A singular $\Leftrightarrow \nexists A^{-1} \Leftrightarrow |A| = 0$

Transpuesta: Esta matriz se obtiene como resultado de aplicar a una matriz (que no tiene por qué ser cuadrada) la transformación de la transposición que consiste en cambiar las filas por las columnas. Se representa por A^t.

Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ entonces $A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$

Estas matrices aparecen sobre todo en el último tema de esta primera parte de Álgebra y en el cálculo de máximos y mínimos en la parte de cálculo.

Simétrica: Matriz cuadrada cumpliendo que $A = A^t$. Se la llama simétrica porque sus elementos son simétricos respecto a la diagonal principal.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Antisimétrica: Matriz cuadrada cumpliendo que $A = -A^t$. Sus elementos también son simétricos respecto de la diagonal principal pero con signos opuestos.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ -3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=-A$$

Ortogonal: Matriz cuadrada cumpliendo que $A^t = A^{-1}$ y para ello su determinante debe valer uno o menos uno.

A es ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^t\cdot A = A\cdot A^t = I \Rightarrow |A| = 1$ ó -1

Nula: Aquella que tiene todos sus elementos cero. Se representa por 0.

Idempotente: Matriz cuadrada que cumple que al multiplicarse por si misma no cambia, es decir, $A^2 = A$. Por lo tanto al elevarla a cualquier número se queda igual.

Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

www.simplyjarod.com

Nilpotente de orden p: Matriz cuadrada si se multiplica por sí misma p veces se obtiene la matriz nula, $A^p = 0$. Por lo tanto si elevamos esta matriz a un número mayor o igual a p nos queda la matriz nula.

Involutiva o unipotente: Matriz cuadrada es su propia inversa, es decir, cumple que $A^2 = I$. Por lo tanto si elevamos esta matriz a un número par nos da la matriz identidad pero si es impar nos da la matriz original.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

2.4 Determinante de una matriz

El determinante **es un número** que resulta de aplicarle una serie de operaciones a los elementos de una matriz cuadrada y se denota de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para calcular un determinante existen principalmente dos métodos. El más conocido, aunque sólo nos permite calcular determinantes de orden dos y tres, es el de la regla de Sarrus:

Regla de Sarrus para determinantes de orden dos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Regla de Sarrus para determinantes de orden tres:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

Para el cálculo de determinantes de cualquier orden, incluidos los de orden dos y tres, existe el método de los adjuntos. Para ver este método debemos aprender primero los conceptos de *menor complementario* y *adjunto* de un elemento de una matriz.

Menor complementario: el menor complementario de un elemento a_{ij} es el determinante que resulta de suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima, O sea, es el determinante de lo que queda al quitar la fila y la columna del elemento a_{ij}.

$$\text{En } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ el menor complementario del elemento } a_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Adjunto: se llama adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario una vez que se le ha puesto el signo que le corresponde. El signo será positivo si $i + j$ es par

www.simplyjarod.com

y el signo será negativo si $i+j$ es impar. Colocaremos las posiciones que cambian de signo según la forma de un tablero de ajedrez.

$$\text{En } A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&2\\0&1&0\end{pmatrix} \text{ el adjunto del elemento } a_{2,3}=(-1)\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=(-1)$$

Método de los adjuntos para el cálculo de determinantes:

Éste método consiste en escoger una fila o columna y sumar todos sus elementos multiplicados por su adjunto:

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\-1&3&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\3&2\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}=8-0+(-1)(-5)=13$$

Esto requiere normalmente muchas operaciones, por ejemplo para un determinante de 4x4 hay que hacer 4 determinantes de 3x3, para uno de 5x5 serían 5 determinantes de 4x4 o 20 determinantes de 3x3. Por eso antes de ponernos a operar los determinantes mediante este método utilizaremos las propiedades de los determinantes para conseguir una fila o columna con el mayor número de ceros posible y así reducir el número de operaciones.

- **Propiedades de los determinantes:**

→ El determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales:

$$|A|=|A^t|$$

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&2&3\\1&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&0\\-1&3&5\end{vmatrix}=6$$

Esta propiedad es muy útil sobre todo una vez veamos el tema de diagonalización ya que una matriz y su diagonal tienen el mismo determinante.

→ Los determinantes de dos matrices semejantes son iguales:

$$\text{Si } A=P\cdot D\cdot P^{-1}\Rightarrow|A|=|D|$$

→ Si se multiplica una fila o columna por un número el determinante es igual al número multiplicado por el determinante inicial.

$$\begin{vmatrix}2&2&4\\1&0&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\cdot1&2\cdot1&2\cdot2\\1&0&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)=-2$$

Hay que tener cuidado con esta propiedad porque pueden pedirnos calcular cuánto vale el determinante de una matriz por un número, y hay que tener en cuenta que al multiplicar la matriz por el número se multiplican todas sus filas, por lo tanto esto es igual el número elevado al número de filas por el determinante de la matriz:

En algunos exámenes han hecho preguntas sobre esta propiedad en la que casi todo el mundo se equivoca.

$$|k\cdot A_n|=k^n\cdot|A_n|,\quad k\in\mathbb{R}$$

$$\left|2\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}2\cdot1&2\cdot1&2\cdot2\\2\cdot1&2\cdot0&2\cdot(-1)\\2\cdot0&2\cdot0&2\cdot1\end{vmatrix}=2^3\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=8\cdot(-1)=-8$$

www.simplyjarod.com

→ El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes:

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 2$$

→ Si se intercambian dos filas o columnas de un determinante su valor cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2), \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

→ Si se suma a una fila o columna otra fila o columna multiplicada por un escalar el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2), \xrightarrow{C_2 = 2C_2 + C_3} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)$$

→ Si se suma a una fila o columna una combinación lineal de otras filas o columnas el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2), \xrightarrow{C_1 = C_1 + 2C_2 - C_3} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)$$

→ Si hay una fila o columna que es combinación lineal de las restantes filas o columnas el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{porque } C_3 = 2C_1 + C_2$$

→ Si hay una fila o columna con todos sus elementos nulos el determinante vale cero porque el cero es siempre linealmente dependiente.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 14 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

www.simplyjarod.com

2.5 Traza de una matriz

Es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada y se representa por $tr(A)$:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & -4 & 1\\ 6 & 3 & 9\end{pmatrix} \qquad tr(A) = 2-4+9 = 7$$

- **Propiedades de la traza:**

→ La traza de la suma de dos matrices cuadradas es igual a la suma de sus trazas:

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$$

$$tr\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=2,\ tr\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=3$$

$$tr\left[\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right]=tr\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}=2+3=5$$

→ La traza de una matriz multiplicada por un número es el número multiplicado por la traza de la matriz:

$$tr(k\cdot A)=k\cdot tr(A),\ k\in\mathbb{R}$$

$$tr\left[5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right]=tr\begin{pmatrix}5 & 0 & 5\\ 0 & 5 & 5\\ 5 & 5 & 5\end{pmatrix}=15=5\cdot tr\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=5\cdot 3$$

→ La traza del producto de dos matrices cuadradas es independiente del sentido de la multiplicación:

$$tr(A\cdot B)=tr(B\cdot A)$$

$$tr\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right]=tr\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}=6$$

$$tr\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right]=tr\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}=6$$

→ Las trazas de dos matrices semejantes son iguales:

Si $A=P\cdot D\cdot P^{-1}\Rightarrow tr(A)=tr(B)$

Esta propiedad será útil una vez veamos el tema de diagonalización si nos piden calcular la traza de una matriz de la que

www.simplyjarod.com

conocemos sus autovalores.

→ La traza de una matriz y su transpuesta son iguales:

$$tr(A) = tr(A^t)$$

$$tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = tr\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 8$$

Observaciones:
Fíjate que en general, $tr(AB) \neq tr(A)\,tr(B)$ y $tr(A^{-1}) \neq [tr(A)]^{-1}$.

2.6 Rango de una matriz

Para comprender qué es el rango de una matriz primero debemos conocer el concepto de combinación lineal.

Combinación lineal: Una fila o columna es combinación lineal o linealmente dependiente de las demás si podemos juntarlas todas en una ecuación lineal igualada a cero, o lo que es lo mismo, si podemos llegar a ella a partir de sumar o restar las demás multiplicadas por un número.

En la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

la tercera columna es combinación lineal de las otras dos ya que $C_3 = C_1 + 2C_2$

Se dice que un conjunto de filas o columnas son linealmente dependientes si se puede establecer entre ellas al menos una combinación lineal.

Rango de una matriz: Es el número de filas o columnas linealmente independientes que tiene la matriz. Se representa por $rg(A)$.

Para calcularlo primero buscaremos filas o columnas linealmente dependientes "a ojo" y las tacharemos.

Cuando no encontremos ninguna calcularemos los determinantes más grandes que podamos hacer con las filas y columnas restantes. Si encontramos alguno que sea distinto de cero, el rango será el orden de ese determinante.

Si no encontramos ninguno probaremos con los determinantes de un orden menor, y así sucesivamente hasta encontrar uno que sea distinto de cero.

- **Propiedades del rango:**

→ El mínimo rango que puede tener una matriz es uno, salvo la matriz nula (0) que tiene rango cero.

→ El máximo rango que puede tener una matriz es el mínimo entre el número de filas y el número de columnas.

→ El rango por filas coincide siempre con el rango por columnas.

→ Una matriz y su transpuesta siempre tienen el mismo rango. $rg(A) = rg(A^t)$

www.simplyjarod.com

2.7 Transformaciones de matrices

- **Matriz adjunta:**

Esta transformación consiste en sustituir cada elemento por su adjunto. Se denota por $adj(A)$ o por A^d :

$$adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Truco: Si cogemos cualquier fila o columna de la matriz adjunta y la multiplicamos escalarmente por la fila o columna correspondiente de la matriz original nos da como resultado el determinante de la matriz original.

- **Transposición de matrices:**

Se denomina así a la transformación de cambiar filas por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta transformación tiene una serie de propiedades que debemos aprender sobre todo para aplicarlas a la hora de despejar ecuaciones matriciales.

Propiedades de la transposición:

$\rightarrow \left(A^t\right)^t = A$

$\rightarrow (A+B)^t = A^t + B^t$

$\rightarrow (k\cdot A)^t = k\cdot A^t$

$\rightarrow (A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$

$\rightarrow A\cdot A^t = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$\rightarrow \left|A^t\right| = |A|$

$\rightarrow adj\left(A^t\right) = \left[adj(A)\right]^t$

¡¡¡Cuidado con esta propiedad!!! Fíjate que se cambian de orden.

www.simplyjarod.com

- **Matriz inversa**

Se dice que A^{-1} es la matriz **inversa** de A cuando se cumple que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Cálculo de la matriz inversa:

Existen principalmente dos métodos para calcular la inversa de una matriz, el que utilizaremos es el de la fórmula, mientras que el método de Gauss-Jordan sólo lo mencionaremos porque en la práctica no se usa y el del sistema de ecuaciones es tan laborioso que no merece la pena.

→ **Fórmula:** Cualquier matriz inversa de una matriz cuadrada se puede calcular mediante la siguiente fórmula.

$$A^{-1} = \frac{\left[adj(A)\right]^t}{|A|} = \frac{adj(A^t)}{|A|} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{(A^t)^d}{|A|}$$

Debido a las diferentes notaciones de la adjunta y a la propiedad que nos permite intercambiar el orden entre la transformación de adjunción y transposición, esta fórmula se puede escribir de cuatro maneras distintas, escoge la que más te guste.

Truco: Si calculas primero la matriz adjunta, puedes calcularte el determinante multiplicando escalarmente cualquier fila o columna de la adjunta por su correspondiente de la original y así ahorras operaciones y puedes comprobar si has calculado bien la matriz adjunta ya que todas las filas y columnas deben darte el mismo resultado.

→ **Método de Gauss-Jordan:** Este método consiste en realizar operaciones elementales sobre la matriz $(A \mid I)$ hasta conseguir que A se convierta en I. En ese momento la transformada de I es la matriz inversa A^{-1}.

→ **Método del sistema de ecuaciones:** Este método consiste en coger una matriz de incógnitas, aplicar las propiedades de la matriz inversa, despejar las ecuaciones y resolver:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y & 2x-y \\ z+t & 2z-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-y=0 \\ z+t=0 \\ 2z-t=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/3 \\ t = -1/3 \end{array}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Este método es muy poco práctico y extremadamente largo y laborioso ya que si tenemos que hacer una inversa de 3x3 tendremos que resolver un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas.

Truco: Para hacer inversas de dos por dos basta con cambiar de sitio los dos elementos de la diagonal principal, de signo los de la diagonal secundaria y dividirlos por el determinante.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \text{ entonces } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

www.simplyjarod.com

Propiedades de la matriz inversa:

→ La matriz inversa, si existe, es única.

→ Una matriz es regular (tiene inversa) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

→ Una matriz es singular (no tiene inversa) $\Leftrightarrow |A| = 0$.

→ $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

→ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

→ $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

¡¡¡Cuidado con esta propiedad!!! Fíjate que al igual que con la transposición, se cambian de orden

→ $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

→ $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$

2.8 Matrices ortogonales

Decimos que una matriz A es ortogonal cuando se cumple que $A^{-1} = A^t$. También podemos decir que A es ortogonal si $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$.

- **Propiedades de las matrices ortogonales:**

  → Si la matriz A es ortogonal entonces es regular (o sea, tiene inversa).

  → Si la matriz A es ortogonal su determinante sólo puede valer 1 ó -1.

  → Si la matriz A es ortogonal, entonces A^{-1} es ortogonal.

  → Si A y B son ortogonales, entonces AB y BA es ortogonal.

  → Si la matriz A es ortogonal, ninguna matriz obtenida como suma con A o producto de un escalar por A, es ortogonal.

www.simplyjarod.com

2.9 Relaciones entre matrices

- **Matrices equivalentes:**

Dos matrices A y B de dimensión $m \times n$, se dice que son **equivalentes** si existen dos matrices regulares R y S tales que $A = RBS$.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ son equivalentes ya que existen dos matrices $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ tal que:

$$A = RBS \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 16 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matrices congruentes:**

Dos matrices cuadradas A y B de orden n, se dice que son **congruentes** si existe una matriz regular R tal que $A = RBR^t$.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$ son congruentes ya que existe $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ tal que $A = RBR^t$

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Matrices semejantes:**

matriz regular $\Leftrightarrow$ tiene inversa $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Dos matrices cuadradas A y B de orden n, se dice que son **semejantes** si existe una matriz regular P tal que $A = PBP^{-1}$.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ son semejantes ya que existe $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tal que $A = PBP^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices semejantes:

→ Si A y B son semejantes $\Rightarrow$ $|A| = |B|$

→ Si A y B son semejantes $\Rightarrow$ A y B son equivalentes

→ Si A y B son semejantes $\Rightarrow$ $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$

→ Si A y B son semejantes $\Rightarrow$ A^n y B^n son semejantes

www.simplyjarod.com

2.10 Transformaciones elementales

Una **transformación elemental** sobre cierta matriz A consiste en multiplicar dicha matriz, por la derecha o por la izquierda, según el tipo de transformación, por una matriz invertible. Las transformaciones elementales son las siguientes:

Transformación	Ejemplo
Sumar a una columna un múltiplo de **otra**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{c_2=c_2+3c_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Multiplicar una columna por un escalar **no nulo**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{c_1=5c_1}]{} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Intercambiar dos columnas	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{c_1 \leftrightarrow c_2}]{} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Sumar a una fila un múltiplo de **otra**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{f_2=f_2+3f_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Multiplicar una fila por un escalar **no nulo**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{f_1=5f_1}]{} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Intercambiar dos filas	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{f_1 \leftrightarrow f_2}]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Como hemos dicho, cada transformación elemental se corresponde con la operación de multiplicar por una cierta matriz invertible.

En la siguiente tabla asociamos a cada transformación por columnas su correspondiente transformación inversa por filas.

Columnas: t_c	**Filas: t_f**
$c_i = c_i + \lambda c_j$	$f_j = f_j - \lambda f_i$
$c_i = \lambda c_i$	$f_i = \frac{1}{\lambda} f_i$
$c_i \leftrightarrow c_j$	$f_i \leftrightarrow f_j$

www.simplyjarod.com

2.11 Matrices particionadas

En muchas situaciones resulta útil particionar una matriz si el proceso da lugar a submatrices que permiten simplificar los cálculos

Dada una matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Podemos simplificarla de la siguiente manera:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

Donde cada elemento de esta matriz es, a su vez, otra matriz que tienen estas formas generales:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} \quad , \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} \end{pmatrix} , \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Con A_{11} y A_{22} matrices cuadradas y $1 \le i \le n$.

Producto de matrices particionadas

Puesto que el producto de matrices se efectúa multiplicando filas de la que premultiplica por columnas de la que postmultiplica, cuando el producto es de matrices particionadas, las particiones establecidas han de ser tales que permitan multiplicar y sumar las submatrices correspondientes. Por lo tanto, una vez elegida la partición en la matriz que premultiplica, la partición por filas de la matriz que postmultiplica ha de ser de la misma forma que la partición por columnas de la matriz que premultiplica.

Cálculo del determinante

$$\det(A) = \det(A_{22}) \cdot \det(A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12})$$

Cálculo de la inversa

La matriz inversa de A expresada de forma particionada es:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

donde:

$$B_{11} = \left(A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}\right)^{-1} \quad , \quad B_{12} = A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \cdot \left(A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}\right)^{-1}$$

$$B_{21} = A_{22}^{-1} \cdot A_{21} \cdot \left(A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}\right)^{-1} \quad , \quad B_{22} = \left(A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}\right)^{-1}$$

www.simplyjarod.com

2.12 Concepto de sistema lineal de ecuaciones

Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas se define de la siguiente forma:

Los coeficientes del sistema pueden ser reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Llamamos a las matrices:

Fíjate que la matriz de coeficientes A no tiene por qué ser cuadrada, es decir puede haber más incógnitas que ecuaciones o viceversa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$ matriz de coeficientes (dimensión m x n)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$$ matriz de incógnitas (dimensión n x 1)

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$$ matriz de términos independientes (dimensión m x 1)

Normalmente nos referiremos a un sistema de ecuaciones genérico de la siguiente forma:

$$Ax = b$$

En los sistemas de ecuaciones lineales nos pueden pedir tres cosas:

- Plantear el sistema a partir de un enunciado.
- Discutir el sistema (Decir si es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).
- Resolver el sistema (Calcular el valor de las incógnitas)

2.13 Planteamiento

Desgraciadamente para este paso no hay ninguna fórmula o mecanismo que podamos memorizar y que siempre funcione. Cada enunciado es distinto a todos los demás.
Lo único que tenemos que tener siempre presente es que lo primero que debemos hacer es **definir las incógnitas**. Es decir, escribir en el papel qué representa cada una de las incógnitas del enunciado. Hacer esto nada más empezar es fundamental.

www.simplyjarod.com

2.14 Discusión

Discutir un sistema consiste en averiguar, antes de resolverlo, si el sistema tiene solución (y en ese caso, cuántas).

Para discutir un sistema utilizaremos siempre el Teorema de Rouché- Frobenius. El procedimiento para discutir un sistema es el siguiente:

A partir del sistema lineal que nos dan (nosotros lo vamos a suponer de tres incógnitas por simplicidad, pero el método es igualmente válido para más incógnitas):

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\}$$

obtenemos la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada $A^* = [A \mid b]$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^* = [A \mid b] = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Ahora se trata de calcular el rango de las dos matrices, tanto de la matriz de coeficientes como de la ampliada. Estos rangos los podemos calcular como nosotros queramos utilizando los procedimientos ya vistos en el tema de Matrices.

Una vez que hemos calculado los dos rangos basta con aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius cuyo enunciado viene a continuación.

Teorema de Rouché-Frobenius

- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{n}^\text{o}$ incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado. El sistema tiene una única solución.
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < \text{n}^\text{o}$ incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado. El sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ $\Rightarrow$ El sistema es incompatible. El sistema no tiene ninguna solución.

www.simplyjarod.com

2.15 Resolución

Para resolver un sistema de ecuaciones vamos a basarnos principalmente en el método de Gauss. Para ello tenemos que aprender a reducir una matriz mediante transformaciones elementales (ya vistas en el tema de matrices) a otra matriz equivalente pero más sencilla con la que resolver el sistema sea trivial.

Decimos que dos matrices A y B son matrices **fila equivalentes** si cualquiera de ellas se puede obtener a partir de la otra mediante transformaciones elementales tipo fila.

Mediante transformaciones elementales se puede transformar cualquier matriz A en otra con determinadas características de modo que sean fila equivalentes. Aquí vamos a estudiar la forma reducida de Gauss y la forma reducida de Gauss- Jordan.

Forma reducida de Gauss

El **pivote** o **coeficiente principal de una fila** es el primer coeficiente distinto de cero de dicha fila.

NOTA:
Hay libros en los que, en la definición de forma reducida de Gauss, se exige que los pivotes valgan 1. Nosotros dejamos esa condición para la forma reducida de Gauss-Jordan

Una matriz está en forma reducida de Gauss, si:

1. Las filas no nulas están por encima de las filas nulas.
2. El coeficiente principal de cada fila está en alguna columna a la derecha del coeficiente principal de la fila anterior.
3. Los coeficientes por debajo de cada coeficiente principal (en su columna) son cero.

Ejemplo de matriz reducida de Gauss:

$$\begin{pmatrix} \otimes & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \otimes & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \otimes & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 = elementos nulos
$\otimes$ = coeficientes principales o pivotes
$*$ = elementos cualesquiera

Obtención de la matriz reducida de Gauss

1. Tomamos la primera columna no nula (que llamaremos columna pivote)
2. Colocamos un coeficiente no nulo de la columna pivote en la posición pivote.
3. Mediante transformaciones elementales de filas, anulamos los coeficientes por debajo del pivote.
4. Repetimos el proceso con la submatriz que queda debajo de la fila que contiene al pivote.

www.simplyjarod.com

Forma reducida de Gauss-Jordan (escalonada reducida)

Una matriz está en forma reducida de Gauss-Jordan, si:

1. Está en forma reducida de Gauss.
2. Todos los coeficientes principales son 1.
3. El coeficiente principal es el único elemento no nulo en su columna.

Ejemplo de matriz reducida de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 = elementos nulos
1 = elementos unidad
* = elementos cualesquiera

Obtención de la matriz reducida de Gauss-Jordan

1. Hallamos la forma reducida de Gauss.
2. Se anulan los coeficientes por encima de cada pivote, empezando por el pivote más a la derecha.
3. Se transforman los pivotes en 1.

Propiedades

1. El rango de una matriz reducida de Gauss-Jordan es igual al número de filas no nulas y además siempre coincide con el número de columnas donde hay pivotes.
2. Toda matriz es fila equivalente a una única matriz reducida de Gauss-Jordan.
3. Si A y B están en forma reducida de Gauss-Jordan y son fila equivalentes, entonces son iguales.

www.simplyjarod.com

Otros métodos de resolución

- Si el sistema es Compatible Determinado

Método de Cramer:

Este método consiste en calcular las soluciones mediante determinantes. La solución viene dada por el determinante que resulta de sustituir en la matriz A la columna de la incógnita que queremos despejar por la de resultados y dividirlo por el determinante de A:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}; \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}; \; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Es un método muy práctico y sistemático, pero tiene la pega de que para sistemas de más de tres ecuaciones requiere muchas cuentas.

- Si el sistema es Compatible Indeterminado

Los Compatibles Indeterminados poseen infinitas soluciones que dependen de los valores que le demos a unos parámetros, esto quiere decir que hay infinitas combinaciones de números que cumplen el sistema y que se sacan según unas reglas que se llaman *ecuaciones paramétricas*. Para resolverlos haremos lo siguiente:

Primero: Calculamos el número de parámetros que necesitamos para su solución:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{N° Parámetros} = \text{N° de incógnitas} - \text{N° de ecuaciones l.i.} \\ \text{N° Parámetros} = \text{N° de incógnitas} - Rg(A^*) \end{array}}$$

Segundo: Asignamos los parámetros a las incógnitas según la siguiente regla de preferencia:

1° – Incógnita que no aparezca en ninguna ecuación

2° – Incógnita que aparezca en mayor número de ecuaciones

3° – Incógnita que vaya multiplicada por el número mayor

Esta regla de preferencias no es infalible, existen casos en los que nos lleva a una mala asignación de parámetros, pero en la mayoría nos evitará complicaciones y simplificará las operaciones y los resultados.

Tercero: Pasamos todos los parámetros al lado de los términos independientes y ya tenemos un sistema Compatible Determinado con términos independientes con letras que podemos resolver mediante los métodos anteriores.

www.simplyjarod.com

TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

3.1 Definición de espacio vectorial

También diremos que: "E es un $\mathbb{K}$-e.v."

La condición a) nos dice que E es grupo abeliano con respecto a la operación interna

Los elementos de un espacio vectorial se llaman vectores y los denotaremos con una flechita encima para distinguirlos de los escalares

Al elemento 0_E se le denomina elemento neutro del espacio vectorial

Sea E un conjunto no vacío y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Se dice que la terna $(E, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial** definido sobre $\mathbb{K}$ si se cumple lo siguiente:

a) $+$ es una ley de composición interna que cumple:

a1) Asociativa:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \quad , \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in E$$

a2) Elemento neutro:

$$\vec{v} + \vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{v} = \vec{v} \quad , \quad \vec{v} \in E$$

a3) Elemento inverso:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}_E \ , \quad \vec{v} \in E$$

a4) Conmutativa:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad , \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$$

b) $\cdot$ es una ley de composición externa que cumple:

b1) Distributiva respecto a la suma de escalares:

$$(k_1 + k_2) \cdot \vec{v} = k_1 \cdot \vec{v} + k_2 \cdot \vec{v} \quad , \quad \vec{v} \in E \quad k_1, k_2 \in \mathbb{K}$$

b2) Distributiva respecto a la suma de vectores:

$$k \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = k \cdot \vec{v}_1 + k \cdot \vec{v}_2 \quad , \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E \quad k \in \mathbb{K}$$

b3) Asociativa mixta:

$$(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{v} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{v}) \quad , \quad \vec{v} \in E \quad k_1, k_2 \in \mathbb{K}$$

b4) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad , \quad \vec{v} \in E$

Primeras propiedades de un espacio vectorial

Ojo, no confundir: 0_E es el elemento neutro del espacio vectorial E mientras que 0 es el elemento neutro del cuerpo $\mathbb{K}$

Sea $(E, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Sean $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$ y sean $k, k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Se cumple que:

1. $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}_E$
2. $k \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$
3. Si $k \cdot \vec{v} = 0_E \Rightarrow k = 0$ ó $\vec{v} = \vec{0}_E$
4. $(-k) \cdot \vec{v} = (-k \cdot \vec{v})$
5. $k \cdot (-\vec{v}) = (-k \cdot \vec{v})$
6. Si $k \cdot \vec{v}_1 = k \cdot \vec{v}_2$ con $k \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$
7. Si $k_1 \cdot \vec{v} = k_2 \cdot \vec{v}$ con $\vec{v} \neq 0_E \Rightarrow k_1 = k_2$

www.simplyjarod.com

conjuntos: $A \subset B$
espacios: $C \lhd D$

A = subconjunto de B
C = subespacio de D

3.2 Subespacios vectoriales

Llamamos **subespacio vectorial** de E a cualquier subconjunto de E que tenga estructura de espacio vectorial.

Sea H un subconjunto no vacío de E, $H \subset E$. Para probar que H es un subespacio vectorial de E tenemos dos posibilidades.

La primera es demostrar que H es un espacio vectorial, para ello deberíamos probar las ocho condiciones de espacio vectorial (a1-a4 y b1-b4). Esta opción, aunque posible, no útil en la práctica.

La segunda opción es utilizar la siguiente caracterización de subespacio vectorial:

Lo haremos siempre de esta segunda forma

Decimos que H es un **subespacio vectorial** de E (lo notaremos como $H \lhd E$) si y sólo si:

a) $\vec{0}_E \in H$

b) Cumple simultáneamente:

b1) $\forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in H \;\Rightarrow\; \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in H$

b2) $\forall\, \vec{v}_1 \in H,\ \forall k \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; k \cdot \vec{v}_1 \in H$

Es importante recalcar que el + y el · que utilizamos para operar los elementos de H son la lci y la lce de E

Las dos condiciones del apartado b) se pueden reunir en una sola:

$$\forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in H,\ \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{K} \text{ se cumple que } k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 \in H$$

Formas de expresar los subespacios vectoriales

Normalmente cuando nos den un subespacio vectorial nos lo escribirán en forma cartesiana o en forma paramétrica:

dim (H) = dim (E) − nº ec. indep.

- Forma cartesiana

Nos definen el subconjunto por sus ecuaciones cartesianas. Por tanto todos los elementos que pertenecen a ese subconjunto deben satisfacer las ecuaciones cartesianas.
Ejemplos:

La dimensión de un subespacio siempre es la dimensión del espacio vectorial total menos el número de ecuaciones cartesianas linealmente independientes

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x + 4y = 0\}$ A viene definido por una ecuación cartesiana

$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - 2x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = 0\}$ S_3 viene definido por 2 ecu.cartesianas

dim (H) = nº de parámetros

- Forma parámetrica

Nos definen el subconjunto por sus ecuaciones paramétricas. Por tanto todos los elementos que pertenecen a ese subconjunto deben satisfacer las ecuaciones paramétricas, lo que quiere decir que exista algún valor de los parámetros que nos devuelva nuestro elemento.
Ejemplos:

La dimensión de un subespacio siempre coincide con el número de parámetros

$H = \{(\alpha, \beta - \alpha, 2\beta) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ H viene definido en forma paramétrica donde α y β son los parámetros.

$M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \beta \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ M viene definido en forma parámetrica.

www.simplyjarod.com

3.3 Intersección y suma de subespacios

Sean M y N dos subespacios vectoriales de E. Dos tipos de subespacios vectoriales importantes son los siguientes:

- Se define el **subespacio intersección** como:

$$M \cap N = \{\vec{v} \in E : \vec{v} \in M \ \wedge \ \vec{v} \in N\}$$

La intersección de dos subespacios vectoriales es siempre otro subespacio vectorial.

Ojo:
No confundir la suma de subespacios con la unión de subespacios

- Se define el **subespacio suma** como:

$$M + N = \{\vec{v} \in E : \exists \vec{u} \in M, \exists \vec{w} \in N, \ \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}\}$$

Análogamente se puede definir la suma de n subespacios vectoriales:

$$H_1 + \ldots + H_n = \{\, \vec{v} \in E : \exists \vec{u}_1 \in H_1, \ldots \exists \vec{u}_n \in H_n, \ \vec{v} = \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n \,\}$$

La suma de subespacios vectoriales es siempre otro subespacio vectorial.

- La unión de subespacios vectoriales no es, en general, subespacio vectorial. La unión de subespacios vectoriales carece, por tanto, de interés para la asignatura.

3.4 Suma directa. Subespacios suplementarios

- Decimos que la suma de dos subespacios M y N es **directa** si cualquier vector de dicha suma puede expresarse de una única forma como suma de vectores de M y N. A la suma directa de dos subespacios se la denota poniendo $M \oplus N$. Es decir:

Recuerda:
El símbolo $\exists!$ significa "existe un único"

$$M \oplus N = \{\vec{v} \in E : \exists! \, \vec{u} \in M, \exists! \, \vec{w} \in N, \ \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}\}$$

Propiedad:
Si la suma de dos subespacios M y N del espacio vectorial E es **directa** siempre se cumple que:

Importante:
Esta propiedad sólo es válida para dos subespacios vectoriales

$$M \cap N = \{\vec{0}_E\}$$

- Sea E un espacio vectorial y sean M y N dos subespacios de E, se dice que M y N son **suplementarios** cuando la suma de los dos subespacios es directa y además el resultado es el espacio vectorial total E. Es decir,

$$M \oplus N = E$$

lo que equivale a decir que:

Resumiendo:
Si dos espacios son suplementarios su intersección tiene que ser el neutro y su suma tiene que ser el total

$$M \text{ y } N \text{ son } \textbf{suplementarios} \Leftrightarrow \begin{cases} M \cap N = \{\vec{0}_E\} \\ M + N = E \end{cases}$$

Espacio vectorial total

www.simplyjarod.com

3.5 Dependencia e independencia lineal

Combinación lineal

Se dice que el vector v es combinación lineal del conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ si se puede expresar de la siguiente forma:

$$v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

Dependencia lineal

Decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente dependientes** si existen unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no todos nulos, tal que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E$. Es decir:

El 0_E del final se refiere al vector nulo no al número cero. No se debe confundir una cosa con la otra

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \text{ son l.d.} \Leftrightarrow \exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0,\ldots,0) \,/\, \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E$$

De manera más sencilla decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son linealmente dependientes si uno de ellos es combinación lineal del resto.
A un conjunto de vectores linealmente dependientes se le llama conjunto **ligado**.

ligado = l.d.

Independencia lineal

Decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente independientes** si para que se cumpla $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E$ todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, deben ser nulos. Es decir:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \text{ son l.i.} \Leftrightarrow (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0,\ldots,0))$$

De manera más simple, decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son linealmente independientes si ninguno de ellos es combinación lineal del resto.
A un conjunto de vectores linealmente independientes se le llama conjunto **libre**.

libre = l.i.

Algunas Propiedades interesantes

A continuación se enumeran algunas propiedades interesantes:

- El vector nulo 0 siempre es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores.
- Cualquier conjunto de vectores donde esté el vector nulo es siempre un conjunto ligado.
- Un conjunto formado por un solo vector (que no sea el vector nulo) es siempre un conjunto libre.
- Si a un conjunto libre le quitas un vector sigue siendo un conjunto libre.
- Si a un conjunto libre le añades un vector entonces puede seguir siendo libre o convertirse en ligado.
- Si a un conjunto ligado le añades un vector sigue siendo un conjunto ligado.
- Si a un conjunto ligado le quitas un vector entonces puede seguir siendo ligado o convertirse en libre.

www.simplyjarod.com

3.6 Variedad lineal

Sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ un subconjunto de vectores de E. Se define la **variedad lineal** de A como el conjunto de vectores de E formado por todas las combinaciones lineales de vectores de A. Es decir:

$$L(A) = \{\vec{v} \in E \ / \ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \ .. \ v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n\}$$

Se dice que A es un sistema **generador** de $L(A)$.

Propiedades

- $L(A)$ es siempre subespacio vectorial.
- $L(A)$ es el mínimo subespacio de E que contiene al subconjunto A.
- $A \subset B \Rightarrow L(A) \subset L(B)$
- Si A es subespacio de E entonces $L(A) = A$
- $L(\varnothing) = \{\vec{0}_E\}$
- Sea B una base del subespacio vectorial M y B' base del subespacio vectorial N se cumple que:

$$L(B \cup B') = M + N$$

3.7 Base y dimensión

Base de un espacio vectorial

Se dice que un conjunto de vectores $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es **base** de un espacio vectorial E si se cumple que:

n elementos

1) B es un sistema libre
2) $L(B) = E$ (B es un sistema generador de E) dim (E) = n

También se puede utilizar esta otra caracterización:
Se dice que un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de un espacio vectorial si es un conjunto libre y el número de elementos del conjunto es igual a la dimensión del espacio vectorial.

La dimensión es siempre un número natural

Dimensión de un espacio vectorial

Al número de vectores que tiene cualquier base de un determinado espacio vectorial E se le denomina **dimensión**. Un espacio vectorial puede tener muchas bases pero todas tienen el mismo número de elementos. A ese número de elementos es al que llamamos dimensión del espacio vectorial.

Relación de Grassmann

Sean M y N dos subespacios de un espacio vectorial E. Se cumple que:

$$\dim(M + N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N)$$

Si la suma de los dos subespacios es directa la relación queda:

$$\dim(M + N) = \dim(M) + \dim(N)$$

www.simplyjarod.com

3.8 Resumen de las definiciones Espacios Vectoriales

Espacio vectorial

Terna $(E, +, \cdot)$ donde E es un conjunto, $+$ es una lci cumpliendo las condiciones a1-a4 y $\cdot$ es una lce cumpliendo las condiciones b1-b4.

Subespacio vectorial

$$H \lhd E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, v_1, v_2 \in H,\ \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{K} \text{ se cumple que } k_1 v_1 + k_2 v_2 \in H$$

Subespacio suma

M y N son subespacios vectoriales

$$M + N = \{v \in E : \exists u \in M, \exists w \in N,\ v = u + w\}$$

Subespacio intersección

$$M \cap N = \{v \in E : v \in M \ \wedge\ v \in N\}$$

Suma directa

La suma es **directa** $\Leftrightarrow M \oplus N = \{v \in E : \exists!\, u \in M, \exists! w \in N,\ v = u + w\} \Leftrightarrow M \cap N = \{\vec{0}_E\}$

Subespacios suplementarios

$$M \text{ y } N \text{ son } \textbf{suplementarios} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} M \cap N = \{\vec{0}_E\} \\ M + N = E \end{cases}$$

Combinación lineal

$$v \text{ es combinación lineal de } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Dependencia lineal

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \text{ son l.d. } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0,\ldots,0) \ /\ \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E$$

Conjunto ligado

Conjunto de vectores linealmente dependientes entre sí

Independencia lineal

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \text{ son l.i. } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_E \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0,\ldots,0))$$

Conjunto libre

Conjunto de vectores linealmente independientes entre sí

Subespacio engrendrado

$$L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}) = \{\vec{v}_1 \in E \ /\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \,..\, v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n\}$$

Conjunto generador

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \text{ es generador de } H \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \vec{v} \in H \,..\, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \ /\ v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Base

Un conjunto es base de H si es un conjunto libre y generador de H

Dimensión

Numero de vectores que tiene cualquier base de un espacio vectorial

www.simplyjarod.com

3.9 Resultados importantes sobre espacios vectoriales

A continuación se enuncian, sin demostración, una lista de proposiciones y resultados importantes sobre espacios vectoriales que son de gran utilidad.

- Sean E, E' dos $\mathbb{K}$-e.v.

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} E \subset E' \\ \dim(E) = \dim(E') \end{array}\right\} \Rightarrow \quad E = E'$$

Fíjate que el número de vectores del sistema coincide con la dimensión de la base

- Sea E $\mathbb{K}$-e.v. con $\dim(E) = n$ y sea un sistema de n vectores $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$. Se cumple que:

  Si $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ libre $\Rightarrow$ $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ es base de E

  Si $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ generador de E $\Rightarrow$ $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ es base de E

- Sea E $\mathbb{K}$-e.v. con $\dim(E) = n$.

  Si un sistema de p vectores $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ es generador de E $\Rightarrow$ $p \geq \dim(E) = n$

  Si un sistema de p vectores $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ es libre de E $\Rightarrow$ $p \leq \dim(E) = n$

- Sea E $\mathbb{K}$-e.v. con $\dim(E) = n$.

  Si a un sistema libre de n vectores $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ se le añade un vector se convierte en un sistema ligado.

- Teorema de existencia de base

  Todo espacio vectorial E de dimensión finita tiene, al menos, una base.

- Teorema de equipotencia de bases

  Todas las bases de un espacio vectorial E de dimensión finita tienen el mismo número de elementos.

Lo que no dice el teorema es qué vectores hay que añadir para obtener la base

- Teorema de extensión de base

  En un espacio vectorial E de dimensión finita todo sistema libre de vectores puede completarse hasta obtener una base de E.

- Subespacios impropios de E

  Sea E un $\mathbb{K}$-e.v cualquiera. Los subconjuntos $\{\vec{0}_E\}$ y E son siempre subespacios vectoriales de E. Se denominan subespacios impropios.

www.simplyjarod.com

3.10 Coordenadas de un vector respecto a una base

Por simplicidad vamos a explicar estos apartados para el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. En otros espacios vectoriales el razonamiento es similar.

Un vector $\vec{v}$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ tiene siempre unas coordenadas únicas $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ con respecto a la base canónica $B_c = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$:

$$\vec{v} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 \quad \Rightarrow \quad (\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

O sea, las coordenadas de un vector con respecto a una base se definen como los escalares por los que hay que multiplicar cada vector de la base para dar el vector v.
Sin embargo existen otras bases y la cuestión es saber qué coordenadas tendrá el vector v con respecto a otras bases que no sean la base canónica.

3.11 Cambio de base

Sea la base canónica de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:

$$B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Sea una base distinta de la base canónica:

$$B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$$

La matriz de cambio de base de la base B a la base canónica B_c es:

$$M_{B_c}^{B} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

Las propiedades más importantes de esta matriz son:

1. $M_{B}^{B_c} = \left(M_{B_c}^{B}\right)^{-1}$
2. $M_{B'}^{B} = M_{B'}^{B_c} \cdot M_{B_c}^{B}$

Este es el caso más simple que nos puede ocurrir

Cambio de base de una base cualquiera a la base canónica

Los datos que nos tienen que dar siempre son:

- Una base: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Un vector con coordenadas expresadas en la base B: $\vec{v}_B = (x, y, z)$

$$\vec{v}_{B_c} = M_{B_c}^{B}\,\vec{v}_B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

www.simplyjarod.com

Cambio de base de la base canónica a otra base cualquiera

Los datos que nos tienen que dar son:

- Una base: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Un vector con coordenadas expresadas en la base canónica B_c: $\vec{v}_{Bc} = (\alpha, \beta, \gamma)$

Aplicamos la propiedad 1 de la matriz de cambio de base

$$\vec{v}_B = \left(M_{B_c}^{B}\right)^{-1} \vec{v}_{B_c} \Rightarrow \vec{v}_B = M_B^{B_c} \vec{v}_{B_c} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Cambio de base entre dos bases cualesquiera

Los datos que nos tienen que dar son:

- Una base: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Otra base: $B' = \{(w_{11}, w_{21}, w_{31}), (w_{12}, w_{22}, w_{32}), (w_{13}, w_{23}, w_{33})\}$
- Un vector con coordenadas expresadas en una de las bases B: $(\vec{v})_B = (\alpha, \beta, \gamma)$

Aplicamos las propiedades 1 y 2 de la matriz de cambio de base

$$\vec{v}_{B'} = \left(M_{B_c}^{B'}\right)^{-1} \cdot M_{B_c}^{B} \vec{v}_B \Rightarrow \vec{v}_{B'} = M_{B'}^{B_c} \cdot M_{B_c}^{B} \vec{v}_B \Rightarrow \vec{v}_{B'} = M_{B'}^{B} \vec{v}_B$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

www.simplyjarod.com

Obtención formal de la matriz de cambio de base

Antes hemos visto que la matriz de cambio de base de la base B a la base canónica B_c es:

$$M_{B_c}^{B} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a ver la demostración de por qué esto es así:

Esta es la demostración formal de cómo se obtiene la matriz de cambio de base de una base cualquiera a la base canónica

Sea la base canónica $B_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y sea otra base cualquiera $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ cuyas coordenadas vienen expresadas en función de la base canónica:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_{11}\vec{e}_1 + u_{21}\vec{e}_2 + u_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 &= u_{12}\vec{e}_1 + u_{22}\vec{e}_2 + u_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 &= u_{13}\vec{e}_1 + u_{23}\vec{e}_2 + u_{33}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Sea ahora un vector cualquiera expresado en coordenadas de la base B:

$$(x, y, z)_B = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

Se trata ahora de obtener las coordenadas del vector en la base canónica:

$$(x, y, z)_B = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 =$$

$$= x(u_{11}\vec{e}_1 + u_{21}\vec{e}_2 + u_{31}\vec{e}_3) + y(u_{12}\vec{e}_1 + u_{22}\vec{e}_2 + u_{32}\vec{e}_3) + z(u_{13}\vec{e}_1 + u_{23}\vec{e}_2 + u_{33}\vec{e}_3)$$

$$= xu_{11}\vec{e}_1 + xu_{21}\vec{e}_2 + xu_{31}\vec{e}_3 + yu_{12}\vec{e}_1 + yu_{22}\vec{e}_2 + yu_{32}\vec{e}_3 + zu_{13}\vec{e}_1 + zu_{23}\vec{e}_2 + zu_{33}\vec{e}_3$$

$$= xu_{11}\vec{e}_1 + yu_{12}\vec{e}_1 + zu_{13}\vec{e}_1 + xu_{21}\vec{e}_2 + yu_{22}\vec{e}_2 + zu_{23}\vec{e}_2 + xu_{31}\vec{e}_3 + yu_{32}\vec{e}_3 + zu_{33}\vec{e}_3$$

$$= (xu_{11} + yu_{12} + zu_{13})\vec{e}_1 + (xu_{21} + yu_{22} + zu_{23})\vec{e}_2 + (xu_{31} + yu_{32} + zu_{33})\vec{e}_3$$

$$= \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = (\alpha, \beta, \gamma)_{B_c}$$

Identificando coeficientes en las dos últimas igualdades obtenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha &= xu_{11} + yu_{12} + zu_{13} \\ \beta &= xu_{21} + yu_{22} + zu_{23} \\ \gamma &= xu_{31} + yu_{32} + zu_{33} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{B_c} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$$

que es la matriz de cambio de base de la base B a la base canónica B_c.

www.simplyjarod.com

3.12 Espacios vectoriales utilizados durante el curso

1) El conjunto de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ con la ley de composición interna:

$$\begin{array}{llll} +: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2),(y_1,y_2) & \rightarrow & (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2) \end{array}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{array}{llll} \bullet: & \mathbb{K} \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & k\ ,\ (x_1,x_2) & \rightarrow & k\cdot(x_1,x_2)=(k\cdot x_1,\ k\cdot x_2) \end{array}$$

es un espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +\cdot)$ sobre el cuerpo de los números reales. Es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Base canónica: $B_c = \{(1,0),(0,1)\}$

Elemento neutro: $(0,\ 0)$

Elemento inverso de $(x,\ y)$: $(-x,\ -y)$

Además se puede demostrar que todos subespacios propios de $(\mathbb{R}^2, +\cdot)$ son de la forma:

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by=0\} \qquad \dim(H)=1$$

que geométricamente se interpretan como las rectas que pasan por el origen.

2) El conjunto de los puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ con la ley de composición interna:

$$\begin{array}{llll} +: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) & \rightarrow & (x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,x_3+y_3) \end{array}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{array}{llll} \bullet: & \mathbb{K} \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & k\ ,\ (x_1,x_2,x_3) & \rightarrow & k\cdot(x_1,x_2,x_3)=(k\cdot x_1,k\cdot x_2,k\cdot x_3) \end{array}$$

es un espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +\cdot)$ sobre el cuerpo de los números reales. Es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Base canónica: $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Elemento neutro: $(0,\ 0,\ 0)$

Elemento inverso de (x,y,z): $(-x,\ -y,\ -z)$

Además se puede demostrar que todos subespacios propios de $(\mathbb{R}^2, +\cdot)$ son de las dos formas siguientes:

$$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / ax+by+cz=0\} \qquad \dim(H)=2$$

$$H'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / ax+by+cz=0, a'x+b'y+c'z=0\} \qquad \dim(H)=1$$

donde H se interpreta geométricamente como los planos que pasan por el origen y H' se interpreta geométricamente como las rectas del espacio que pasan por el origen.

www.simplyjarod.com

3) En general, el conjunto de los puntos del espacio $\mathbb{R}^n$ con la ley de composición interna:

$$+: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \rightarrow (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

y la ley de composición externa:

$$\cdot: \quad \mathbb{K} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$k\ ,\ (x_1,\dots,x_n) \rightarrow k\cdot(x_1,\dots,x_n) = (k\cdot x_1,\dots,k\cdot x_n)$$

es un espacio vectorial ($\mathbb{R}^n$, + ·) sobre el cuerpo de los números reales. Es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Base canónica: $B_c = \{(1,0,0\dots,0),(0,1,0,\dots,0),(0,0,1,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,1)\}$

Elemento neutro: $(0,\ 0,\ 0\dots,\ 0)$

Elemento inverso de $(x_1,\dots,x_n)$: $(-x_1,\dots,-x_n)$

Las siguientes notaciones son equivalentes:
$P_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_2[x]$

4) El conjunto de los polinomios de grado menor o igual que dos con la ley de composición interna:

$$+: \quad P_2(\mathbb{R}) \times P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$$
$$a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2 \rightarrow (a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2$$

y la ley de composición externa:

$$\cdot: \quad \mathbb{R} \times P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$$
$$k\ ,\ a_0+a_1x+a_2x^2 \rightarrow k\cdot(a_0+a_1x+a_2x^2) = ka_0+ka_1x+ka_2x^2$$

es un espacio vectorial $(P_2(\mathbb{R})), +, \cdot)$ sobre el cuerpo de los reales. Es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$

Base canónica: $B_c = \{1,\ x,\ x^2\}$

Elemento neutro: $0 + 0x + 0x^2$

Elemento inverso de $a_1+a_2x+a_3x^2$: $-a_1-a_2x-a_3x^2$

Las siguientes notaciones son equivalentes:
$P_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_n[x]$

5) En general el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con la ley de composición interna:

$$+: \quad P_n(\mathbb{R}) \times P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$$
$$a_0+\dots+a_nx^n, b_0+\dots+b_nx^n \rightarrow (a_0+\dots+a_nx^n)+(b_0+\dots+b_nx^n) = (a_0+b_0)+\dots+(a_n+b_n)x^n$$

y la ley de composición externa:

$$\cdot: \quad \mathbb{R} \times P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$$
$$k\ ,\ a_0+\dots+a_nx^n \rightarrow k\cdot(a_0+\dots+a_nx^n) = ka_0+\dots+ka_nx^n$$

es un espacio vectorial $(P_n(\mathbb{R})), +, \cdot)$ sobre el cuerpo de los reales. Es un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial.

www.simplyjarod.com

Dimensión del espacio : $\dim(P_n(\mathbb{R})) = n+1$

Base canónica: $B_c = \{1, x, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$

Elemento neutro: $0 + \ldots + 0x^n$ (polinomio nulo)

Elemento inverso de $a_0 + \ldots + a_n x^n$: $-a_0 - \ldots - a_n x^n$

6) El conjunto de las matrices cuadradas de orden dos $M_2(\mathbb{R})$ con la ley de composición interna:

$$+: \quad M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$$

y la ley de composición externa:

$$\cdot: \quad \mathbb{R} \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$k, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial $(M_2(\mathbb{R}), + \cdot)$ sobre el cuerpo de los reales. Es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

Dimensión del espacio : $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$

Base canónica: $B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Elemento neutro: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Elemento inverso de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

7) En general el conjunto de las matrices de orden $n \times m$ con la ley de composición interna:

$$+: M_{n\times m}(\mathbb{R}) \times M_{n\times m}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

$$A \ , \ B \rightarrow A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

y la ley de composición externa:

$$\cdot: \mathbb{R} \times M_{n\times m}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

$$\alpha \ , \ B \rightarrow \alpha \cdot B = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

es un espacio vectorial $(M_{n\times m}(\mathbb{R})), + \cdot)$ sobre el cuerpo de los reales. Es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

www.simplyjarod.com

Dimensión del espacio : $\dim(M_{nxm}(\mathbb{R})) = n \times m$

Base canónica: $B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Elemento neutro: $(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (matriz nula)

Elemento neutro de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$: $\quad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nm} \end{pmatrix}$

8) Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. El conjunto $\mathcal{F}(X,E) = \{f : X \to E \ / \ f \text{ es aplicacion}\}$ con la ley de composición interna:

$$\begin{aligned} +: \mathcal{F}(X,E) \times \mathcal{F}(X,E) &\to \mathcal{F}(X,E) \\ f,\ g &\to f+g \qquad \textit{donde} \quad f+g : X \to E \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad x \to (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{aligned}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(X,E) &\to \mathcal{F}(X,E) \\ k,\ f &\to k \cdot f \qquad \textit{donde} \quad k \cdot f : X \to E \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad x \to (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \end{aligned}$$

es un espacio vectorial $(\mathcal{F}(X,E), + \cdot)$ sobre el cuerpo de los números reales. Es un $\mathbb{R}-$e.v.

En este caso se trata de un espacio vectorial no finitamente generado. Por tanto tiene dimensión infinita y no existen bases de este espacio vectorial.

Elemento neutro: $\begin{aligned} \Omega : \ & X \to E \\ & x \to \Omega(x) = 0_E \end{aligned}$ (aplicación nula)

Elemento inverso de $\begin{aligned} f : \ & X \to E \\ & x \to f(x) = f(x) \end{aligned}$: $\begin{aligned} -f : \ & X \to E \\ & x \to (-f)(x) = -f(x) \end{aligned}$

9) El espacio vectorial $(\mathcal{F}(X,E), +\cdot)$ tiene muchos subespacios vectoriales, algunos de ellos muy conocidos. Nombramos a continuación los más importantes:

Recuerda que una sucesión se define como una aplicación de los números naturales en los reales

a) Si Tomamos $X=\mathbb{N}$ $E=\mathbb{R}$ tenemos $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \ / \ f \text{ es aplicacion}\}$ que es el espacio vectorial de las sucesiones de números reales (también de dimensión no finita).

Estas son las funciones que estudiaste en el Bachillerato y resulta que forman un espacio vectorial

b) Si Tomamos $X=\mathbb{R}$ $E=\mathbb{R}$ tenemos $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ / \ f \text{ es aplicacion}\}$ que es el espacio vectorial de las funciones reales de variable real (también de dimensión no finita).

Dentro de este espacio vectorial existen, a su vez, otros subespacios vectoriales como , por ejemplo:

i) $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua}\}$ que es el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ (también de dimensión no finita).

No hay que olvidar que un polinomio es, en definitiva, una función

ii) $P(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ / \ f \text{ es un polinomio}\}$ que es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado cualquiera (también de dimensión no finita).

iii) $P_n(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ / \ f \text{ es un polinomio}\}$ que es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales hasta grado n (de dimensión $n+1$ finita).

Veremos lo que es una aplicación lineal en el tema siguiente

c) Sean E, E' dos $\mathbb{K}$-e.v de dimensión finita donde $\dim(E)=n$, $\dim(E')=m$. Definimos

$$\mathcal{L}(E, E')=\{f:E\to E' \ / \ f \text{ es aplicacion lineal}\}$$

que es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales (homomorfismos) de E en E'. Este espacio vectorial es de dimensión $n\times m$ finita.

d) Sea E un $\mathbb{K}$-e.v de dimensión finita donde $\dim(E)=n$. Definimos:

$$\text{End}(E)=\{f:E\to E \ / \ f \text{ es aplicacion lineal}\}$$

que es el espacio vectorial de los endomorfismos de E. Este espacio vectorial es de dimensión n^2 finita.

Análogamente también se puede definir $\mathrm{Fil}(A)$

10) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz con n columnas. Definimos el espacio vectorial $\mathrm{col}(A)$ como la variedad lineal generada por las columnas de la matriz A, es decir:

$$\mathrm{col}(A) = \mathrm{L}[A^1,\dots,A^n]$$

Es evidente que $\mathrm{col}(A)$ es un subespacio del espacio vectorial $M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ de las matrices columna. La dimensión de $\mathrm{col}(A)$ coincide siempre con el rango de la matriz A, o sea:

$$\dim(\mathrm{col}(A)) = \mathrm{rg}(A)$$

Este es un caso particular de $\mathbb{R}^n$ tomando $n=1$

En el caso de la lce, $\mathbb{R}$ hace de cuerpo y de espacio vectorial

11) $\mathbb{R}$ se puede definir como un $\mathbb{R}-$espacio vectorial con las siguientes operaciones interna y externa:

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad \bullet : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x, y \to x+y \qquad\qquad k, x \to k\cdot x$$

Dimensión del espacio : $\dim(\mathbb{R}) = 1$

Base canónica: $B_c = \{1\}$

Elemento neutro: 0

Elemento inverso de x: $-x$

Por tanto $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras algebraicas: cuerpo y espacio vectorial simultáneamente. Lo mismo sucede con los números complejos $\mathbb{C}$ que son cuerpo y espacio vectorial.

Con este ejemplo queremos destacar la importancia del cuerpo sobre el que se define el espacio vectorial

Fíjate que el cuerpo de los coeficientes de la matriz no tienen por qué coincidir con el cuerpo sobre el que se define el espacio vectorial

12) En este último ejemplo vamos a estudiar las diferencias entre el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes complejos $(M_2(\mathbb{C}),+,\cdot)$ sobre el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ y el mismo espacio vectorial sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$.

- Sobre el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$:

  Dimensión del espacio : $\dim(M_2(\mathbb{C})) = 8$

  Base canónica:

$$B_c = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\right\}$$

- Sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$:

  Dimensión del espacio : $\dim(M_2(\mathbb{C})) = 4$

  Base canónica: $B_c = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

Conclusión: Como hemos comprobado en este ejemplo, aunque el conjunto, la lci y la lce son iguales, cambiar el cuerpo de escalares puede llevarnos a espacios vectoriales de dimensiones distintas.

TEMA 4: APLICACIONES LINEALES

4.1 Definición de aplicación lineal ≡ homomorfismo

Sean $(E, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión n y sea $(E', +, \cdot)$ otro espacio vectorial de dimensión m.
Decimos que una aplicación $f: E \to E'$ es una **aplicación lineal** si cumple que:

1. $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$
2. $f(k\,\vec{v}) = k f(\vec{v})$, $\vec{v} \in E$ $k \in \mathbb{K}$

Estas dos condiciones se pueden reunir en una sola. De esta forma diremos que f es una aplicación lineal si se cumple que:

$$f(k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2) = k_1 f(\vec{v}_1) + k_2 f(\vec{v}_2) \quad , \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{K}$$

A las aplicaciones lineales también se las llama **homomorfismos**

Primeras propiedades de una aplicación lineal

Sea $(E, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Sean $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$ y sean $k, k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Se cumple que:

1. $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_{E'}$ La imagen del elemento neutro de E es el elemento neutro de E'.
2. $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ La imagen del elemento inverso de $\vec{v}$ es el inverso de la imagen de $\vec{v}$.

4.2 Clasificación

Ojo:
Esto son definiciones, no necesitan demostración

Sea $f: E \to E'$ una aplicación lineal. Dependiendo si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva (o ninguna da las tres) toma los siguientes nombres,

$$E \neq E' \Rightarrow \begin{cases} \text{no inyectiva, no sobreyectiva} & \Rightarrow \text{homomorfismo} \\ \text{inyectiva} & \Rightarrow \text{monomorfismo} \\ \text{sobreyectiva} & \Rightarrow \text{epimorfismo} \\ \text{biyectiva (inyectiva + sobreyectiva)} & \Rightarrow \text{isomorfismo} \end{cases}$$

Importante:
En este caso la aplicación no puede ser sólo inyectiva o sólo sobreyectiva

Si el espacio de salida y el espacio de llegada coinciden entonces los nombre que toma f son distintos:

$$E = E' \Rightarrow \begin{cases} \text{no inyectiva, no sobreyectiva} & \Rightarrow \text{endomorfismo} \\ \text{biyectiva (inyectiva + sobreyectiva)} & \Rightarrow \text{automorfismo} \end{cases}$$

A los automorfismos también se les puede llamar endomorfismos biyectivos o, incluso, isomorfismos.

www.simplyjarod.com

4.3 Matriz asociada a una aplicación lineal

En este contexto se utiliza indistintamente "imágenes" o "transformados" de una base

El siguiente teorema fundamental establece un procedimiento para definir funciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita, en el sentido de que conocidas las imágenes de los elementos de una base del espacio de salida, la función lineal queda completamente determinada. El teorema se enuncia a continuación:

> Si E y E' son $\mathbb{K}$-e.v. y $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es una base de E, cualquier función lineal $f: E \to E'$ queda completamente determinada por el sistema $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$.

De esta forma, dada una base concreta $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ del espacio de salida E cada aplicación lineal tiene asociada una matriz única a la que llamamos **matriz asociada** a la aplicación lineal f. Esta matriz se construye poniendo como columnas las imágenes $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ de la base mediante f. Lo primero que tenemos que hacer cuando tenemos una aplicación lineal es encontrar su matriz asociada. La forma de hacerlo se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:
Encontrar la matriz asociada a la siguiente aplicación lineal,

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \to & f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 3x_3) \end{array}$$

Se trata de encontrar las imágenes una base, por ejemplo, la base canónica:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (2\cdot 1 + 0,\ 0 - 3\cdot 0) = (2, 0) \\ f(0, 1, 0) &= (2\cdot 0 + 1,\ 1 - 3\cdot 0) = (1, 1) \\ f(0, 0, 1) &= (2\cdot 0 + 0,\ 0 - 3\cdot 1) = (0, -3) \end{aligned}$$

Por tanto la matriz asociada a f es,

Cuando se utilizan las bases canónicas se suelen omitir para no recargar la notación

$$M_{Bc}^{Bc}(f) = M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Así pues, como acabamos de observar se trata de obtener las imágenes de los vectores de la base canónica del espacio de partida y ponerlas en columnas dentro de la matriz, de esta forma se obtiene la matriz asociada a una aplicación lineal f en las bases canónicas.

Observaciones

- Por supuesto la base utilizada no tiene que ser la base canónica aunque por comodidad en la mayoría de los casos es la que se utiliza. El uso de otras bases distintas a la canónica lo veremos más adelante.
- Es importante resaltar que en la matriz asociada a f el número de columnas coincide con la dimensión del espacio de salida y el número de filas coincide con la dimensión del espacio de llegada.
- En los endomorfismos (aplicaciones lineales donde el espacio de salida y el de llegada son el mismo) la matriz asociada es cuadrada.
- Una vez tenemos la matriz asociada podemos utilizarla para obtener imágenes de la aplicación, basta multiplicar la matriz por un vector del espacio inicial:

Esta fórmula es muy importante

$$f(\vec{v})_{B_c} = M_{B_c}^{B_c}(f)\cdot \vec{v}_{B_c}$$

www.simplyjarod.com

4.4 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Sea una aplicación lineal $f : E \to E'$

Llamamos **núcleo** de una aplicación lineal f, Ker(f), al conjunto formado por todos los vectores de E cuya imagen a través de f es el neutro de E'. Es decir,

El núcleo se define solamente para aplicaciones lineales

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{v} \in \overset{E}{E} \,/\, f(\vec{v}) = \vec{0}_{\overset{E'}{E'}}\} = f^{-1}(\{\vec{0}_{E'}\})$$

El conjunto Ker(f) es un subespacio vectorial de E.

Llamamos **imagen** de una aplicación lineal f, Im(f), al conjunto formado por todos los vectores de E' que son imagen de algún elemento de E. Es decir,

Atención: Todas las aplicaciones tienen imagen (sean lineales o no). Lo que pasa es que cuando f es lineal Imf es subespacio vectorial

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{w} \in \overset{E'}{E'} \,/\, \exists\, \vec{v} \in \overset{E}{E} .. f(\vec{v}) = \vec{w}\} = f(E)$$

El conjunto Im(f) es un subespacio vectorial de E'.

La dimensión del subespacio imagen coincide con el rango de la matriz asociada a f, o sea:

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}(f))$$

Teoremas importantes

Sea una aplicación lineal $f : E \to E'$. Se cumple que:

- f es inyectiva $\Leftrightarrow$ Ker(f) = $\{\vec{0}_E\}$
- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ rg($M(f)$) = dim(E')
- dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E) → dim espacio salida = dim Ker + dim Im
- Si $E = E'$ y f es inyectiva $\Rightarrow$ f es biyectiva
- Si $E = E'$ y f es sobreyectiva $\Rightarrow$ f es biyectiva

La mejor forma de entender esto es con los ejercicios de clase

Forma práctica de calcular los subespacios Ker(f) e Im(f) de una aplicación lineal f

Para obtener los subespacios Ker(f) e Im(f) de una aplicación lineal concreta procederemos siempre de la siguiente manera:

- Se calcula el rg(M(f)) y obtenemos la dimensión de Im(f).
- Se aplica tercer teorema del apartado anterior para obtener la dimensión del Ker(f).
- Se plantean y resuelven las ecuaciones cartesianas del Ker(f) que son:

$$\mathrm{M}(f)\,x = 0_{E'} \qquad x \in E$$

- Se plantean y resuelven las ecuaciones paramétricas de Im(f) que son:

$$y = M(f)\,p \qquad y \in E'$$

donde p indica un vector de parámetros.

www.simplyjarod.com

4.5 Composición de aplicaciones lineales

Sean las aplicaciones lineales,

$$f : E \to E' \quad \text{con matriz asociada } M(f)$$

$$g : E' \to E'' \quad \text{con matriz asociada } M(g)$$

Recuerda que:
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Se cumple que:

$$g \circ f : E \to E''$$
$$\vec{v} \to (g \circ f)(\vec{v}) = g(f(\vec{v}))$$

Atención:
Fíjate que se dice al revés que se escribe

es otra aplicación lineal que llamaremos "aplicación f compuesta con g" y su matriz asociada es:

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$$

Es importante resaltar que para que la composición de dos aplicaciones lineales pueda llevarse a cabo el espacio final de la primera aplicación tiene que ser el mismo que el espacio inicial de la segunda aplicación.

Propiedades:

La primera propiedad se sigue cumpliendo aunque f y g no sean lineales

- $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}\, f)$
- $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g)$

Ejemplo:
Vamos a calcular la matriz asociada de la aplicación composición de f con g donde

$$f: \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^3 \qquad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2 \qquad M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el espacio final de f es R^3 que es el mismo que el espacio inicial de g entonces podemos asegurar que existe la aplicación composición de f con g:

$$g \circ f: \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^2$$

y su matriz asociada es:

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 15 & 20 & 6 & 27 \end{pmatrix}$$

Sin embargo sin quisiéramos hacer la composición $f \circ g$ no podríamos ya que el espacio final de g no coincide con el espacio inicial de f.

www.simplyjarod.com

4.6 Cambio de base en una aplicación lineal

Sea una aplicación lineal $f: E \to E'$
Hasta ahora hemos estado trabajando con las bases canónicas tanto del espacio de salida E como del espacio de llegada E'.
Cuando nosotros queremos saber la imagen de un vector de E con coordenadas en la base canónica a través de f hacemos lo siguiente:

$$f(\vec{v})_{B_c} = M_{B_c}^{B_c}(f)\cdot \vec{v}_{B_c} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y lo que obtenemos es un vector de E' con coordenadas en la base canónica de E'.

En este apartado lo que vamos a estudiar es como transformar la matriz $M_{B_c}^{B_c}(f)$ asociada a f, en el caso en que queramos utilizar una base distinta de la canónica en el espacio de salida, en el de llegada o en ambos.
Para lo que viene a continuación es muy importante dominar lo ya visto en el tema 3 sobre cambio de base en espacios vectoriales.

Cambio de base en el espacio de partida

Este es el caso más simple que nos puede ocurrir

Los datos que nos tienen que dar siempre son:

- Una base del espacio de partida E: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Un vector de E con coordenadas expresadas en la base B: $(v)_B = (x, y, z)$

$$f(\vec{v})_{B_c} = M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot M_{B_c}^{B} \cdot \vec{v}_B \quad \Rightarrow \quad f(x)_{B_c} = M_{B_c}^{B}(f) \cdot \vec{v}_B$$

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cambio de base en el espacio de llegada

Los datos que nos tienen que dar siempre son:

- Una base del espacio de llegada E': $B' = \{(w_{11}, w_{21}, w_{31}), (w_{12}, w_{22}, w_{32}), (w_{13}, w_{23}, w_{33})\}$
- Un vector de E con coordenadas expresadas en la base canónica: $(\vec{v})_{Bc} = (x, y, z)$

$$f(\vec{v})_{B'} = M_{B'}^{B_c} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot \vec{v}_{B_c} \Rightarrow f(\vec{v})_{B'} = \left(M_{B_c}^{B'}\right)^{-1} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot \vec{v}_{B_c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\vec{v})_{B'} = M_{B'}^{B_c}(f) \cdot (\vec{v})_{B_c}$$

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

www.simplyjarod.com

Cambio de base en el espacio de salida y en el espacio de llegada

Los datos que nos tienen que dar son:

- Una base del espacio de salida E: $B = \{(u_{11}, u_{21}, u_{31}), (u_{12}, u_{22}, u_{32}), (u_{13}, u_{23}, u_{33})\}$
- Una base del espacio de llegada E': $B' = \{(w_{11}, w_{21}, w_{31}), (w_{12}, w_{22}, w_{32}), (w_{13}, w_{23}, w_{33})\}$
- Un vector de E con coordenadas expresadas en la base B: $(v)_B = (x, y, z)$

$$f(\vec{v})_{B'} = M_{B'}^{B_c} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot M_{B_c}^{B} \cdot \vec{v}_B \Rightarrow f(\vec{v})_{B'} = \left(M_{B_c}^{B'}\right)^{-1} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot M_{B_c}^{B} \cdot \vec{v}_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\vec{v})_{B'} = M_{B'}^{B}(f) \cdot \vec{v}_B$$

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

www.simplyjarod.com

4.7 Resultados importantes sobre aplicaciones lineales

A continuación se enuncian, sin demostración, una lista de proposiciones y resultados importantes sobre aplicaciones lineales.

- Sea $f: E \to E'$ lineal y sea $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ un conjunto de vectores de E:

Si $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ ligado $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ ligado

Si $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ libre y f es inyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ libre

Si $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es generador de E $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ es generador de $\mathrm{Im}(f)$

Si $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es generador de E y f es sobreyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ es generador de E'

De las anteriores propiedades se desprenden las siguientes:

Si $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es base de E $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ es generador de $\mathrm{Im}(f)$

Si $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es base de E y f es inyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ es base de $\mathrm{Im}(f)$

Si $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es base de E y f es sobreyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ es generador de E'

Si $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ es base de E y f es biyectiva $\Rightarrow$ $\{f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_n)\}$ es base de E'

- Dados los $\mathbb{K}$-*e.v.* E, E' y la aplicación lineal $f: E \to E'$. Se verifica que:

1. La imagen directa de un subespacio vectorial mediante una aplicación lineal es también un subespacio vectorial. Es decir:

$$\text{Sea } H \subset E, \quad \text{Si } H < E \;\Rightarrow\; f(H) < E'$$

Además se cumple que:

$$\dim H \geq \dim f(H)$$

2. La imagen recíproca de un subespacio vectorial mediante una aplicación lineal es también un subespacio vectorial. Es decir:

$$\text{Sea } H' \subset E', \quad \text{Si } H' < E' \;\Rightarrow\; f^{-1}(H') < E$$

Es un caso particular del e.v. $\mathbb{R}^n$ haciendo $n=1$

- Tomando $\mathbb{R}$ como un $\mathbb{K}$-e.v. se verifica que las únicas aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son lineales (endomorfismos de $\mathbb{R}$) son de la forma:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = mx \end{aligned}$$

donde $m \in \mathbb{R}$.
Geométricamente son las rectas que pasan por el origen donde m es la pendiente de la recta.

www.simplyjarod.com

Los contenidos contrarios no se cumplen en general salvo que se añadan hipótesis adicionales

- Sea E un K-e.v. de dimensión finita y sea $f: E \to E$ un endomorfismo. Se cumple que:

$$\ker(f) \subset \ker(f^2) \quad \text{en general} \quad \ker(f) \subset \ker(f^n) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f) \quad \text{en general} \quad \mathrm{Im}(f^n) \subset \mathrm{Im}(f) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Sean E, E' K-e.v. de dimensión finita y sea $f: E \to E'$ un homomorfismo. Se cumple que:

$$\text{Si } f \text{ es inyectiva} \Rightarrow \dim(E) \leq \dim(E')$$

$$\text{Si } f \text{ es sobreyectiva} \Rightarrow \dim(E) \geq \dim(E')$$

$$\text{Si } f \text{ es biyectiva} \Rightarrow \dim(E) = \dim(E')$$

- Tres aplicaciones lineales importantes

- Homomorfismo nulo:

$$\Omega: E \to E'$$
$$\vec{v} \to \Omega(\vec{v}) = \vec{0}_{E'}$$

$$\ker(\Omega) = E$$
$$\mathrm{Im}(\Omega) = \{\vec{0}_{E'}\}$$
$$\Omega \circ f = f \circ \Omega = \Omega$$
$$\Omega^2 = \Omega \circ \Omega = \Omega$$

Solo tiene sentido entre espacios vectoriales iguales

- Endomorfismo identidad (es siempre inyectivo y sobreyectivo, por tanto, automorfismo):

$$Id_E: E \to E$$
$$\vec{v} \to Id_E(\vec{v}) = \vec{v}$$

$$\ker(Id_E) = \{\vec{0}_E\}$$
$$\mathrm{Im}(Id_E) = E$$

- Homomorfismo L_A (donde $A \in M_{m\times n}(\mathrm{K})$)

$$L_A: M_{n\times 1}(\mathrm{K}) \to M_{m\times 1}(\mathrm{K})$$
$$X \to L_A(X) = AX$$

La matriz asociada a L_A en las bases canónicas es la propia matriz A: $M(L_A) = A$

Además se cumple que: $\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = \dim(\mathrm{col}(A)) = \mathrm{rg}(A)$

4.8 Isomorfismos. Espacios vectoriales isomorfos

La definición de isomorfismo está en la página T-52

Decimos que $f : E \to E'$ es un **isomorfismo** si es una aplicación lineal y biyectiva.

Hablamos de la aplicación inversa

Si $f : E \to E'$ es isomorfismo entonces existe $f^{-1} : E' \to E$ y es isomorfismo. Además si $M(f)$ es la matriz asociada a f se cumple que la matriz asociada a f^{-1} es $M(f^{-1}) = \left(M(f)\right)^{-1}$

Sean E, E' $\mathbb{K}$-e.v. Decimos que E y E' son **isomorfos** si existe una aplicación $f : E \to E'$ lineal y biyectiva (isomorfismo) entre ellos.

Ojo: esto solo es válido si los espacios son de dimensión finita

Si los espacios E, E' tienen dimensión finita existe una caracterización de los espacios isomorfos que dada por el siguiente teorema:

$$E \text{ y } E' \text{ son isomorfos} \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(E')$$

Si dos espacios vectoriales son isomorfos desde un punto de vista algebraico son "iguales" o "indistinguibles" en el sentido de que toda propiedad relacionada con la estructura de espacio vectorial que posea E se transfiere automáticamente al espacio E' a través del isomorfismo y recíprocamente. Es decir, aunque se trata de conjuntos distintos todas sus propiedades álgebrai-cas coinciden. Pero, ¿qué significa esto exactamente?. Vamos a intentar explicarlo a partir de algunos ejemplos ilustrativos:

- Isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$

Se puede demostrar que las siguientes aplicaciones f y f^{-1} son lineales y biyectivas , por tanto, isomorfismos:

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ (a,b,c) & \to & ax^2+bx+c \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f^{-1}: \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}^3 \\ ax^2+bx+c & \to & (a,b,c) \end{array}$$

De esta forma que a cada elemento $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ se puede "asignar" un polinomio ax^2+bx+c y viceversa. Por ejemplo, si $\{(1,0,1),(2,1,0)\}$ es libre en $\mathbb{R}^3$ entonces podemos afirmar $\{x^2+1,\ 2x^2+x\}$ es libre en $\mathbb{R}_2[x]$. Y así sucesivamente.

Este resultado se puede generalizar $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que quiere decir que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ son espacios vectoriales isomorfos. La notación es $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

- Isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y $M_{3\times1}(\mathbb{R})$

Se puede demostrar que ambas aplicaciones f y f^{-1} son lineales y biyectivas , por tanto, isomorfismos.

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \to & M_{3\times1}(\mathbb{R}) \\ (a,b,c) & \to & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f^{-1}: M_{3\times1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \to & (a,b,c) \end{array}$$

Fíjate que este isomorfismo nos permite trabajar con los vectores de $\mathbb{R}^3$ en "horizontal" o en "vertical" según nos convenga ya que algebraicamente son la misma cosa.

- Isomorfismo entre $M_2(\mathbb{R})$ y $M_{4\times 1}(\mathbb{R})$

Se puede demostrar que ambas aplicaciones f y f^{-1} son lineales y biyectivas , por tanto, isomorfismos.

$$f: \quad M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad\qquad f^{-1}: \quad M_{4\times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Fíjate que este isomorfismo nos permite trabajar con los matrices cuadradas de orden 2 "como si fueran" matrices columna y por tanto como si fueran vectores de $\mathbb{R}^4$ (debido al isomorfismo de la página anterior que relaciona matrices columna con vectores de $\mathbb{R}^n$).

Isomorfismo entre matrices y aplicaciones lineales

A continuación vamos a hablar sobre un isomorfimo muy importante que es el que relaciona a las matrices con las aplicaciones lineales.

Sean E, E' K-e.v. de dimensión finita tal que $\dim(E) = n$, $\dim(E') = m$.
Existe una aplicación lineal biyectiva (isomorfismo) entre el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de E en E' $\mathcal{L}(E, E')$ y el espacio vectorial de las matrices nxm. Esto significa que, en unas bases determinadas, hay una relación uno a uno entre aplicaciones lineales y matrices o, dicho de otra forma, que a cada aplicación lineal le corresponde una única matriz y viceversa.
De aquí se deduce que la matriz asociada a cada aplicación lineal en unas bases dadas siempre existe y es única.

OJO:
Si cambiamos las bases cambia la matriz asociada

Dimensión del espacio vectorial de las aplicaciones lineales

Sean E, E' K-e.v. de dimensiones $\dim(E) = n$, $\dim(E') = m$.
Como consecuencia directa de los puntos anteriores se puede deducir que el K-espacio vectorial de las aplicaciones lineales de E en E', $(\mathcal{L}(E, E'), +, \cdot)$ tiene la misma dimensión que el espacio vectorial $M_{n\times m}(\mathrm{K})$ de las matrices rectangulares de $n \times m$ ya que ambos espacios son isomorfos y por tanto han de tener la misma dimensión. Por tanto, $\dim(\mathcal{L}(E, E')) = n \times m$.

Siguiendo el mismo razonamiento se deduce que el K-espacio vectorial $(\mathrm{End}(E), +, \cdot)$ de los endomorfismos de E en E tiene dimensión , $\dim((\mathrm{End}(E)) = n^2$ pues su matriz asociada siempre es cuadrada.

www.simplyjarod.com

4.9 Formas lineales

Llamaremos **formas lineales** a las aplicaciones lineales de la forma $f : E \to \mathbb{R}$.
Es decir, las formas lineales no son más que aplicaciones lineales en las que el espacio de llegada es el cuerpo sobre el que está definido el espacio vectorial E.
Las formas lineales son siempre sobreyectivas.
El conjunto de las formas lineales de E forman el **espacio dual**, que no abordaremos en este curso.

4.10 Aplicación lineal restringida a un subespacio vectorial

Definición

Sean E, E' $\mathbb{K}$-e.v. de dimensiones $\dim(E) = n$, $\dim(E') = m$. Sea $H < E$, subespacio vectorial de E. Sea $f : E \to E'$ lineal. Si restringimos el espacio vectorial de salida a los elementos del subespacio vectorial H creamos una nueva aplicación que llamaremos aplicación f **restringida al subespacio** H y denotaremos $f|_H : H \to E'$

Propiedades

- Siempre que restringimos una aplicación lineal f a un subespacio $H < E$ la aplicación resultante $f|_H$ sigue siendo lineal y además $f|_H(\vec{v}) = f(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in H$
- $\ker\left(f|_H\right) \subseteq \ker(f)$, más concretamente: $\ker\left(f|_H\right) = \ker(f) \cap H$
- $\mathrm{Im}\left(f|_H\right) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, más concretamente: $\mathrm{Im}\left(f|_H\right) = \mathrm{Im}(f) \cap f(H)$

- Si f es inyectiva $\Rightarrow$ $f|_H$ es inyectiva
- Si f es sobreyectiva, no podemos asegurar que $f|_H$ sea sobreyectiva.
- Si f es biyectiva $\Rightarrow$ $f|_H$ es inyectiva

- Si $f|_H$ es sobreyectiva $\Rightarrow$ f es sobreyectiva
- Si $f|_H$ es inyectiva, no podemos asegurar que f sea inyectiva
- Si $f|_H$ es biyectiva $\Rightarrow$ f es sobreyectiva

www.simplyjarod.com

TEMA 5: PRODUCTO ESCALAR. ORTOGONALIDAD .

5.1 Producto escalar

Importante:
Por ahora nos restringimos a espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales

Sea E un $\mathbb{R}-$espacio vectorial. Un **producto escalar** en E es una aplicación de la forma:

$$<,>: E \times E \to \mathbb{R}$$
$$\vec{u},\vec{v} \to <\vec{u},\vec{v}>$$

que cumple las siguientes propiedades:

A las aplicaciones que cumplen 1 y 2 se las denomina formas bilineales (f.b.)

1. $<\vec{u}+\vec{u}',\vec{v}> = <\vec{u},\vec{v}> + <\vec{u}',\vec{v}> \quad \forall \vec{u},\vec{u}',\vec{v} \in E$
   $<\vec{u},\vec{v}+\vec{v}'> = <\vec{u},\vec{v}> + <\vec{u},\vec{v}'> \quad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{v}' \in E$

2. $<\alpha\vec{u},\vec{v}> = \alpha <\vec{u},\vec{v}> \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
   $<\vec{u},\beta\vec{v}> = \beta <\vec{u},\vec{v}> \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$

A las f.b. que cumplen 3 se las denomina f.b. simétricas (f.b.s)

3. $<\vec{u},\vec{v}> = <\vec{v},\vec{u}> \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in E$

A las f.b.s. que cumplen 4 se las denomina f.b.s definidas positivas

4. $<\vec{u},\vec{u}> \geq 0 \quad \forall \vec{u} \in E$, además $<\vec{u},\vec{u}> = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}_E$

Nota: las condiciones 1 y 2 se pueden refundir en una sola de la siguiente manera,

$$<\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}',\vec{v}> = \alpha <\vec{u},\vec{v}> + \beta <\vec{u}',\vec{v}> \quad \forall \vec{u},\vec{u}',\vec{v} \in E \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$
$$<\vec{u},\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}'> = \alpha <\vec{u},\vec{v}> + \beta <\vec{u},\vec{v}'> \quad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{v}' \in E \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Un **espacio vectorial euclídeo** es un espacio vectorial donde hay definido un producto escalar y se representa como $(E,<,>)$. El vector nulo $\vec{0}_E$ es el único vector que es ortogonal a todos los vectores del espacio E.

Algunos productos escalares usuales

Este es el producto escalar aprendido en el Bachillerato pero ¡ojo! no es el único producto escalar que se puede definir en $\mathbb{R}^n$

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se puede definir el siguiente producto escalar:

$$<(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)> = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

Este es el producto escalar que se utiliza en FMT4. Tambien se puede definir sobre funciones continuas a trozos

- Sobre el espacio vectorial $(C[a,b],\mathbb{R})$ de las funciones continuas se define el siguiente un producto escalar:

$$<f,g> = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

- Sobre el espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden n:

$$<A,B> = \text{Traza}(AB^t)$$

- Sobre el espacio vectorial $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ de las matrices columna de $n\times 1$:

$$<A,B> = A^tB$$

www.simplyjarod.com

5.2 Subespacio ortogonal

Definición

vector-vector

- Dos vectores $\vec{u},\vec{v}$ son **ortogonales** si su producto escalar es cero, es decir $<\vec{u},\vec{v}> = 0$.

vector-subespacio

- Un vector $\vec{u}$ es **ortogonal** a un subespacio W si es ortogonal a cada uno de los vectores de W, es decir, $\forall \vec{v} \in W$ se cumple que $<\vec{u},\vec{v}> = 0$.
  Para ello, es necesario y suficiente que sea ortogonal a todos los vectores de una base de W.

Subespacio-subespacio

- Un subespacio V es **ortogonal** a un subespacio W si todos los vectores de V son ortogonales a cada uno de los vectores de W, es decir, $\forall \vec{u} \in V$ y $\forall \vec{v} \in W$ se cumple que $<\vec{u},\vec{v}> = 0$.
  Para ello, es necesario y suficiente que todos los vectores de una base de V sean ortogonales a todos los vectores de una base de W.

- Si W es un subespacio vectorial de un espacio vectorial E, llamamos **complemento ortogonal de W**, y lo representamos por $W^{\perp}$, al subespacio vectorial formado por todos los vectores ortogonales a W:

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in E \ / <\vec{v}, \vec{w}> = 0 \ \forall \ \vec{w} \in W\}$$

Propiedades

Consecuencia directa de la propiedad 1

1. $E = W \oplus W^{\perp}$, es decir W y $W^{\perp}$ son suplementarios.
2. $\dim E = \dim W + \dim W^{\perp}$
3. Si $W_1 \subset W_2$ son subespacios de E, entonces $W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$.
4. Si $W_1 \subset W_2$ y $W_1 \neq W_2$, entonces existe un vector no nulo de W_2 ortogonal a W_1.
5. Si $S = \{\vec{u}_1,...,\vec{u}_n\}$ es un sist. de vectores no nulos ortogonales dos a dos, entonces S es libre

5.3 Norma

Norma euclídea = norma-2 = Norma

La norma no es más que lo que en física se conoce como el módulo del vector

Definición

Sea E, un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, una **norma** definida en E es una aplicación:

$$\|\cdot\|: E \to \mathbb{K}$$
$$\vec{u} \to \boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{<\vec{u},\vec{u}>}}$$

El **ángulo α entre dos vectores** viene dado por la siguiente expresión:

$$<\vec{u},\vec{v}> = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Propiedades

1. $\forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} \neq 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| > 0$
2. $\forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0$
3. $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \, \|\vec{u}\|$
4. $\forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad \|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ Desigualdad triangular
5. $\forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad |<\vec{u},\vec{v}>| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
6. $\forall \vec{u},\vec{v} \in E \quad 2<\vec{u},\vec{v}> = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

www.simplyjarod.com

5.4 Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Una base de un espacio vectorial euclídeo es **ortogonal** si sus vectores son ortogonales dos a dos. Una base **ortonormal** es una base ortogonal de vectores unitarios.

Dada una base cualquiera $\{\vec{e}_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ de un espacio vectorial existe un método para obtener una base ortogonal.
Este proceso se llama "Método de ortogonalización de Gram-Schmidt" y es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{e}_1 \\
\vec{u}_2 &= \vec{e}_2 - \frac{<\vec{e}_2, \vec{u}_1>}{<\vec{u}_1, \vec{u}_1>} \cdot \vec{u}_1 \\
\vec{u}_3 &= \vec{e}_3 - \frac{<\vec{e}_3, \vec{u}_1>}{<\vec{u}_1, \vec{u}_1>} \cdot \vec{u}_1 - \frac{<\vec{e}_3, \vec{u}_2>}{<\vec{u}_2, \vec{u}_2>} \cdot \vec{u}_2 \\
\vec{u}_4 &= \vec{e}_4 - \frac{<\vec{e}_4, \vec{u}_1>}{<\vec{u}_1, \vec{u}_1>} \cdot \vec{u}_1 - \frac{<\vec{e}_4, \vec{u}_2>}{<\vec{u}_2, \vec{u}_2>} \cdot \vec{u}_2 - \frac{<\vec{e}_4, \vec{u}_3>}{<\vec{u}_3, \vec{u}_3>} \cdot \vec{u}_3 \\
\dots \quad & \quad \dots\dots \\
\vec{u}_n &= \vec{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{<\vec{e}_n, \vec{u}_i>}{<\vec{u}_i, \vec{u}_i>} \cdot \vec{u}_i
\end{aligned}
$$

Una vez obtenida una base ortogonal $\{\vec{u}_n : n \in \mathrm{N}\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ a partir de la base $\{\vec{e}_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ de partida puede que necesitemos normalizarla. Para ello basta dividir cada elemento de la base ortogonal entre su norma:

$$\vec{w}_n = \frac{\vec{u}_n}{\|\vec{u}_n\|} = \frac{\vec{u}_n}{\sqrt{<\vec{u}_n, \vec{u}_n>}}$$

y así obtenemos una base ortonormal $\{\vec{w}_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$.

www.simplyjarod.com

5.5 Proyección ortogonal

Definición

Sea un espacio vectorial euclídeo $(E,<,>)$, en el que se consideran un subespacio $H < E$ y un vector $\vec{v} \in E$. Se dice que:

También se utiliza la siguiente notación:

$\vec{v}_H = \text{proy}_H(\vec{v})$

El vector $\vec{v}_H$ es **proyección ortogonal** de $\vec{v}$ sobre H si $\vec{v}_H \in H$ y $\vec{v} - \vec{v}_H \in H^{\perp}$.

El vector $\vec{v}_H \in H$ es el **más próximo** a $\vec{v}$ de entre los vectores de H si $\|\vec{v} - \vec{v}_H\|$ es el menor de los valores $\|\vec{v} - \vec{u}\|$, $\forall \vec{u} \in H$ (**distancia mínima**).

Se verifica que las dos anteriores definiciones son equivalentes. Es decir, la proyección ortogonal $\vec{v}_H$ es el vector más próximo a $\vec{v}$ de entre los vectores de H. Además, cuando existe es única.

Método práctico de cálculo

Sea un espacio vectorial euclídeo $(E,<,>)$, en el que se consideran un subespacio $H < E$ y un vector $\vec{v} \in E$. Si H tiene dimensión finita y si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base ortogonal de H, entonces existe la proyección ortogonal $\vec{v}_H$ de $\vec{v}$ sobre H y es:

$$v_H = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{u}_n$$

donde los coeficientes vienen dados por:

$$\text{proy}_H v = \frac{<\vec{v},u_1>}{<u_1,u_1>}u_1 + \frac{<v,u_2>}{<u_2,u_2>}u_2 + \ldots + \frac{<v,u_n>}{<u_n,u_n>}$$

Se llaman **coeficientes de Fourier** y son escalares, no vectores

$$\alpha_i = \frac{<\vec{v},\vec{u}_i>}{\|u_i\|^2} \qquad i = 1,\ldots,n$$

Combinando las dos últimas expresiones nos queda la fórmula práctica:

Fórmula para bases ortogonales

$$\boxed{\underset{\text{proy}_H v}{\vec{v}_H} = \frac{<\vec{v},\vec{u}_1>}{\underset{<u_1,u_1>}{\|\vec{u}_1\|^2}}\vec{u}_1 + \frac{<\vec{v},\vec{u}_2>}{\underset{<u_2,u_2>}{\|\vec{u}_2\|^2}}\vec{u}_2 + \ldots + \frac{<\vec{v},\vec{u}_n>}{\underset{<u_n,u_n>}{\|\vec{u}_n\|^2}}\vec{u}_n}$$

Si tenemos una base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ ortonormal (es decir, una base ortogonal que, además, cumple que $\|\vec{w}_i\| = 1$), entonces los coeficientes quedan:

$$\alpha_i = <\vec{v},\vec{w}_i> \qquad i = 1,\ldots,n$$

y la fórmula práctica queda así:

Fórmula para bases ortonormales

$$\boxed{\vec{v}_H = <\vec{v},\vec{w}_1>\vec{w}_1 + <\vec{v},\vec{w}_2>\vec{w}_2 + \ldots + <\vec{v},\vec{w}_n>\vec{w}_n}$$

TEMA 6: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

6.1 Definiciones

Sea E un $\mathbb{K}$-e.v de dimensión n.
Sea $f: E \to E$ una aplicación lineal y A la matriz asociada a f.

También se puede decir que "λ es autovalor del endomorfismo f"

Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio** (autovalor) de la matriz A si existe algún vector $\vec{v}$ no nulo de E tal que:

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$$

Fíjate que si A es una matriz de orden n entonces v tiene que ser un vector de dimensiones nx1

o bien

$$\boxed{f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}}$$

Si λ es valor propio de A entonces los vectores no nulos de E que verifiquen la anterior relación se denominan **vectores propios** (autovectores) de A asociados a λ.

Cada vector propio está asociado a un único valor propio. Sin embargo cada valor propio tiene asociados uno o más vectores propios.

6.2 Cálculo de los valores propios

Por simplicidad explicaremos el proceso para una matriz de orden tres. Todo lo que vamos a mostrar es fácilmente generalizable a matrices de otros ordenes.
Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Los valores propios (autovalores) de la matriz A vienen determinados por las raíces de su polinomio característico,

polinomio característico
$P(\lambda) = |A - \lambda Id|$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \text{autovalores}$$

así pues, pasamos a calcular estas raíces,

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$$

- Al polinomio $P(\lambda)$ se le llama **polinomio característico** y las raíces de este polinomio son los valores propios (autovalores) de la matriz A.
- Llamamos **multiplicidad algebraica** de un autovalor λ_i, $m_a(\lambda_i)$, al número de veces que λ_i es raíz del polinomio característico.
- La suma de las multiplicidades algebraicas de todos los autovalores debe ser siempre igual al orden de la matriz.
- Al conjunto de autovalores se le denomina **espectro** de la matriz.

$A_n \in E^n$

$\sum m_a(\lambda_i) = \dim E = n$

www.simplyjarod.com

6.3 Cálculo de los vectores propios

Cada uno de los autovalores calculados en el apartado anterior tiene un conjunto de autovectores asociado. Este conjunto de autovectores asociados a un determinado autovalor forman siempre un subespacio vectorial S_{λ_i} que llamaremos **autoespacio** asociado a λ_i y que se define como:

$$S_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I) \quad \text{o bien} \quad S_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})$$

Aquí se trata de aplicar todo lo aprendido sobre subespacios vectoriales en el tema 4

Por tanto, se trata de estudiar el subespacio vectorial de los autovectores asociados a cada uno de los autovalores λ_i calculados en el punto anterior.

Las ecuaciones cartesianas del autoespacio S_{λ_i} asociado a λ_i siempre son:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A partir de aquí y empleando lo aprendido en el tema de espacios vectoriales podemos obtener la dimensión y una base del subespacio asociado a λ_i. Todos los vectores pertenecientes a este subespacio vectorial son los autovectores de λ_i.
Llamamos **multiplicidad geométrica** de λ_i, $m_g(\lambda_i)$, a la dimensión del autoespacio asociado a λ_i:

$$m_g(\lambda_i) = \dim(S_{\lambda_i}) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I)$$
$= \dim(E) - n^{\circ}$ ec. libres

Algunas propiedades de los autovalores y los autovectores

- Una matriz A y su traspuesta A^t tienen los mismos autovalores.
- Si A y B son semejantes tienen el mismo polinomio característico $P(\lambda)$ y por tanto los mismos autovalores.
- Si λ es autovalor de A, $k\lambda$ es autovalor de kA.
- Si λ es autovalor de A y A es regular, $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.
- Si λ es autovalor de A, λ^n es autovalor de A^n.
- Si v es autovector de A asociado a λ, v es autovector de kA asociado a $k\lambda$.
- Si v es autovector de A asociado a λ, v es autovector de A^{-1} asociado a $\frac{1}{\lambda}$.
- Si v es autovector de A asociado a λ, v es autovector de A^n asociado a λ^n.
- El determinante de A es el producto de sus autovalores.
- La traza de A es la suma de los autovalores.
- Autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.
- Si dadas dos matrices A y B, están definidas sus matrices AB y BA entonces sus autovalores son los mismos.
- La multiplicidad geométrica de un autovalor siempre mayor que cero y menor o igual que la multiplicidad algebraica: $m_a(\lambda_i) \geq m_g(\lambda_i) > 0$

Otra forma de expresar esta propiedad:
La suma de autoespacios siempre es directa

Antes de leer esta hoja conviene repasar el concepto y las propiedades de las matrices semejantes estudiado en el tema de matrices

6.4 Diagonalización de matrices

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada asociada a un determinado endomorfismo f.
Se denomina **diagonalización de una matriz** al proceso de búsqueda de una matriz de paso P (que puede existir o no), que permita expresar la matriz A como semejante a una matriz diagonal D:

$$A = PDP^{-1} \text{ o bien } D = P^{-1}AP$$

También se habla de endomorfismos diagonalizables

Por tanto, diremos que una matriz es **diagonalizable** si existe tal matriz P que hace que se cumpla la igualdad anterior. En caso contrario, es decir, si no existe P, diremos que la matriz no es diagonalizable.

Condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable: matriz diagonalizable $\Longleftrightarrow$ $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$

> Una matriz es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica de cada uno de sus autovalores coincide con su multiplicidad geométrica.

Además de la anterior proposición existen una serie de casos particulares que conviene tener presentes por su utilidad:

- Si una matriz de orden n tiene n autovalores distintos entonces es diagonalizable.
- Las matrices simétricas son diagonalizables.
- Las matrices idempotentes son diagonalizables.

Matrices diagonalizables

Si una matriz A es diagonalizable entonces podemos afirmar que existe una matriz diagonal formada por sus autovalores:

Lo explicamos con una matriz de orden 3 por comodidad. Evidentemente, todo lo dicho aquí es generalizable a matrices de orden n

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

A y B semejantes $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ A y B tienen los mismos autovalores con los mismos multip

de forma que A y D son semejantes: $A = PDP^{-1}$ o bien $D = P^{-1}AP$.
La matriz de paso P es una matriz formada por autovectores:

Atención: Relacionar esta idea con lo ya visto de cambio de base en aplicaciones lineales (el tercer caso)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

donde cada columna de la matriz P es un autovector asociado al autovalor que ocupa su misma columna en la matriz D. Es decir, el vector (e_{11}, e_{12}, e_{13}) tiene que ser un autovector asociado al autovalor λ_1, el vector (e_{21}, e_{22}, e_{23}) tiene que ser un autovector asociado al autovalor λ_2 y (e_{31}, e_{32}, e_{33}) tiene que ser un autovector asociado al autovalor λ_3.

Los autovectores de la matriz P forman siempre una base de $M_{3\times1}(\mathbb{K})$ (ó $\mathbb{R}^3$). Por tanto, también se puede decir que una matriz es diagonalizable si existe una base formada por autovectores respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal.

www.simplyjarod.com

6.5 Aplicaciones de la diagonalización

Para entender bien este punto mira antes el cambio de base en *aplicaciones lineales* (pág. T-44)

Diagonalización de endomorfismos

Si suponemos que la matriz A que diagonalizamos es la matriz asociada a un endomorfismo f entonces podemos entender la diagonalización de una matriz como un cambio de base de la aplicación lineal de forma que su matriz asociada pasa a ser una matriz diagonal:

$$D = P^{-1} A P$$

$$M_B^B(f) = \left(M_{B_c}^B\right)^{-1} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f) \cdot M_{B_c}^B$$

Identificando ambas expresiones vemos que la matriz de paso P se puede entender como una matriz de cambio de base de B a B_c donde B es una base formada por autovectores y B_c es la base canónica.

Piensa que las matrices diagonales son muy sencillas de manejar y por ello este procedimiento de diagonalización que hemos aprendido en este tema es muy útil de cara a tratar con endomorfismos ya que nos permite encontrar una base (formada por autovectores) respecto de la cual la matriz asociada al endomorfismo es lo más sencilla posible (una matriz diagonal).

Recuerda que también es posible obtener la potencia enésima de una matriz mediante el método de inducción

Potencia enésima de una matriz

A la hora de elevar una matriz a una potencia enésima podemos proceder multiplicando la matriz por ella misma n veces. Esto para valores altos de n resulta impracticable.
Sin embargo, si la matriz dada es diagonalizable los cálculos se simplifican muchísimo. El método consiste en hacer lo siguiente:

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD\,(P^{-1}P)\,D\,P^{-1} = P\,D^2\,P^{-1}$$

$$A^3 = (PDP^{-1})^3 = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD\,(P^{-1}P)\,D\,(P^{-1}P)\,DP^{-1} = P\,D^3\,P^{-1}$$

Teniendo en cuenta que $P^{-1}P = I$

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) =$$
$$= PD\,(P^{-1}P)\,D\,(P^{-1} \ldots P)\,D\,(P^{-1}P)\,DP^{-1} = P\,D^n\,P^{-1}$$

Por tanto la fórmula general que hemos obtenido es:

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1}$$

Teniendo en cuenta que, para matrices diagonales, se cumple que:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

www.simplyjarod.com

FMT1
Ejercicios de clase

www.simplyjarod.com

TEMA 1: NOCIONES BÁSICAS

Ejercicio 1

Demostrar que la siguiente sentencia es verdadera para cualesquier predicado P :

$$\left(\exists x\ P(x)\right) \Leftrightarrow \neg\left(\forall x\ \left(\neg P(x)\right)\right)$$

Solución:

- Primero vamos a demostrar que $\underbrace{\left(\exists x\ P(x)\right)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\neg\left(\forall x\ \left(\neg P(x)\right)\right)}_{q}$ es verdadero.

En la tabla observamos que siempre que p sea falso (independientemente de lo que valga q) tenemos que $p \Rightarrow q$ es verdadero, así que no hace falta preocuparse por los dos primeros casos ya que el resultado es siempre verdadero.

Para ello tenemos que comprobar todos los casos de la tabla de verdad de la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Observando la tabla vemos que para demostrar que $p \Rightarrow q$ es verdadero basta con probar que el tercer caso no se cumple nunca ya que en los demás casos $p \Rightarrow q$ siempre es verdadero.
Por tanto solo tenemos que probar que cuando p es Verdadero q también es verdadero. De esta forma eliminamos la posibilidad de que se produzca el tercer caso que es el único en el que $p \Rightarrow q$ es falso.

En efecto, si $\exists x\ P(x)$ es verdadero quiere decir que para algún objeto concreto a se cumple que $P(a)$ es verdadero. Por tanto, para ese objeto, $\neg P(a)$ es falso. Eso quiere decir que $\neg P(x)$ es Falso. Seguidamente $\forall x\left(\neg P(x)\right)$ también será falso y finalmente $\neg\forall x\left(\neg P(x)\right)$ es verdadero.

- Segundo vamos a demostrar que $\underbrace{\neg\left(\forall x\ \left(\neg P(x)\right)\right)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\left(\exists x\ P(x)\right)}_{q}$ es verdadero.

Para ello tenemos que comprobar otra vez todos los casos de la tabla de verdad de la implicación. Al igual que en el anterior razonamiento tenemos que demostrar que no puede darse el tercer caso de la tabla que es el único en el que $p \Rightarrow q$ es falso. Para ello tenemos que demostrar que cuando p es verdadero obligatoriamente q es verdadero.

Si $\neg\left(\forall x\ \left(\neg P(x)\right)\right)$ es verdadero tenemos que $\forall x\ \left(\neg P(x)\right)$ es falso lo que significa que $\neg P(x)$ no siempre se cumple o, lo que es lo mismo, existe algún objeto concreto a para el que $\neg P(a)$ es falso. Por tanto para ese objeto concreto $P(a)$ es verdadero y ello implica que $\exists x\ P(x)$ es verdadero.

Ejercicio 2

Demostrar si la siguiente sentencia es verdadera o falsa para cualquiera que sea el predicado P :

$$\neg\left(\forall x\ P(x)\right) \Leftrightarrow \forall x\ \left(\neg P(x)\right)$$

Solución:

Vamos a demostrar que la equivalencia del enunciado es falsa probando que la implicación hacia la izquierda es falsa:

$$\underbrace{\neg\left(\forall x\ P(x)\right)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\forall x\ \left(\neg P(x)\right)}_{q}$$

Para ello tenemos tenemos que probar que puede darse el tercer caso de la tabla:

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

es decir tenemos que probar que existen casos en los que p es verdadero y q es falsa. En esos casos $p \Rightarrow q$ es falsa.

En este caso $\forall x\ P(x)$ significa "todo número natural es par"

Consideremos el conjunto de los número naturales y sea $P(x)$ el predicado "x es par". En tal caso, $\forall x\ P(x)$ es falso (ya que, por ejemplo, 5 es un número natural que no es par) y por tanto $\neg\left(\forall x\ P(x)\right)$ es verdadero.

Ahora bien, puesto que 2 es un número natural par tenemos que $P(2)$ es verdadero, luego $\neg P(2)$ es falso, luego $\neg P(x)$ no es siempre verdadero y por tanto $\forall x\ \left(\neg P(x)\right)$ es falso.

Ejercicio 3

Demostrar si la siguiente sentencia es verdadera o falsa para cualesquiera que sean los predicados P y Q:

$$\neg\left(\forall x\left(P(x)\Rightarrow Q(X)\right)\right)\Leftrightarrow\ \exists x\left(P(x)\wedge\neg Q(x)\right).$$

Solución:

- Primero vamos a probar que $\underbrace{\neg\left(\forall x\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\right)}_{p}\Rightarrow\underbrace{\exists x\left(P(x)\wedge\neg Q(x)\right)}_{q}$ es V.

Para ello tenemos que comprobar todos los casos de la tabla de verdad de la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Observando la tabla vemos que para demostrar que $p \Rightarrow q$ es verdadero basta con probar que el tercer caso no se cumple nunca ya que en los demás casos $p \Rightarrow q$ siempre es verdadero.
Por tanto solo tenemos que probar que cuando p es verdadero q también es verdadero. De esta forma eliminamos la posibilidad de que se produzca el tercer caso que es el único en el que $p \Rightarrow q$ es falso.

En efecto, si $\neg\left(\forall x\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\right)$ es verdadero quiere decir que $\forall x\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)$ es falso lo que significa que si tomamos cualquier elemento concreto a se cumple que $P(a)\Rightarrow Q(a)$ es falso que quiere decir que $P(a)$ es verdadero y que $Q(a)$ es falso o, lo que es lo mismo que $P(a)$ es verdadero y $\neg Q(a)$ es verdadero por lo que $P(a)\wedge\neg Q(a)$ es verdadero y, consecuentemente $\exists x\left(P(x)\wedge\neg Q(x)\right)$ es verdadero.

- Segundo vamos a demostrar que $\underbrace{\exists x\left(P(x)\wedge\neg Q(x)\right)}_{p}\Rightarrow\underbrace{\neg\left(\forall x\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\right)}_{q}$

Si $\exists x\left(P(x)\wedge\neg Q(x)\right)$ es verdadero quiere decir que existe un elemento concreto a tal que $P(a)\wedge\neg Q(a)$ es verdadero. A su vez esto significa (mirando la tabla de verdad del "y" lógico) que $P(a)$ es verdadero y que $\neg Q(a)$ es verdadero o, lo que es lo mismo, $P(a)$ es verdadero y que $Q(a)$ es falso.
Por tanto $P(a)\Rightarrow Q(a)$ es falso por lo que $\forall x\ \left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)$ es falso concluyendo que $\neg\left(\forall x\ P(x)\Rightarrow Q(x)\right)$ es verdadero.

www.simplyjarod.com

Ejercicio 4

Calcular la inversa de la siguiente matriz mediante el método de Gauss-Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a resolver este ejercicio mediante el método de Gauss-Jordan. Para ello realizaremos una serie de transformaciones elementales tipo fila :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_3 = f_3 - 2f_1}$$

la primera transformación elemental consiste en restar a la tercera fila la primera fila multiplicada por dos

recuerda que las transformaciones elementales se deben realizar en ambas matrices

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_2 = f_2 + 3f_1}$$

ahora se trata de sumar a la segunda fila tres veces la primera fila

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_1 = f_1 + 2f_2}$$

ahora debemos sumar a la primera fila la segunda fila multiplicada por dos

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_3 = f_3 - 6f_2}$$

restamos a la tercera fila la segunda fila multiplicada por seis

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -20 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_3 = (-1/3)f_3}$$

sustituimos la tercera fila por un tercio de ella misma. además al resultado le cambiamos el signo.

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20/3 & 2 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_2 = f_2 - f_3}$$

a la segunda fila le restamos la tercera fila

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -11/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 20/3 & 2 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_1 = f_1 - f_3}$$

la última transformación elemental consiste en restar a la primera fila la tercera

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -11/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 20/3 & 2 & -1/3 \end{array}\right)$$

Una vez que hemos conseguido la matriz identidad a la izquierda de la línea el proceso termina. La matriz inversa de A es la matriz que está a la derecha de la línea.

Solución : $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -11/3 & -1 & 1/3 \\ 20/3 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Comprobación :

Se puede comprobar fácilmente si el resultado que hemos obtenido es el correcto. Basta multiplicar la matriz A, que nos dan en el enunciado, por la matriz que hemos obtenido, A^{-1}. El resultado debe ser la matriz identidad I. En nuestro caso es así, ya que :

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -11/3 & -1 & 1/3 \\ 20/3 & 2 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ejercicio 5

Obtener la forma reducida de Gauss-Jordan de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Comienza por la primera columna distinta de cero empezando por la izquierda. Esta columna es una columna pivote. La posición de pivote es la superior.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Paso2. Selecciona un coeficiente distinto de cero de la columna pivote. Si es necesario intercambia filas para colocar este coeficiente en la posición de pivote.

Se intercambian las filas 1 y 3

El número recuadrado $\boxed{3}$ es el pivote

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Usa transformaciones elementales de fila para obtener ceros en todas las posiciones por debajo del pivote.

A la segunda fila se le suma la opuesta de la primera.

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Ignora la fila que contiene al pivote y todas las filas (si hay alguna) por encima de él. Aplica los pasos 1 a 3 a al submatriz que queda. Repite el proceso hasta que no queden filas distintas de cero que modificar.

Nos olvidamos de la primera fila.

Ahora la columna pivote es la segunda y el nuevo pivote es el $\boxed{2}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Se suma a la tercera fila la segunda fila multiplicada por –3/2.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

En esta última matriz no hace falta hacer nada pues ya está puesta en **forma reducida de Gauss**

Ahora nos olvidamos de las dos primeras filas. La columna pivote es la quinta y el pivote es el $\boxed{1}$. No hacemos nada pues ya está en forma reducida de Gauss

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 5. Empezando por el pivote que esté más a la derecha y procediendo hacia arriba y a la izquierda, conseguir, mediante transformaciones elementales de fila, hacer ceros los coeficientes por encima de cada pivote. Si un pivote no es igual a 1, multiplicar su fila por su inverso.

El pivote más a la izquierda está en la fila 3 y es un 1 por lo que no hace falta escalarlo. Para hacer ceros encima suyo se resta a la segunda fila dos veces la tercera fila y a la primera fila se le resta seis veces la tercera fila.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}$$

El siguiente pivote está en la fila 2. Escalamos la segunda fila para conseguir un 1 en la posición de pivote.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora conseguimos un cero en el lugar (1,2) sumando a la primera fila nueve veces la segunda.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Escalamos la primera fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

y ya tenemos la **forma reducida de Gauss-Jordan**

TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicio 1

a) Demostrar que el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la ley de composición interna:

$$\begin{aligned} +: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a,b),(c,d) &\rightarrow (a,b)+(c,d) = (a+c,\, b+d) \end{aligned}$$

y la ley de composición externa:

$$\begin{aligned} \bullet: \quad \mathbb{K} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ k\,,\,(c,d) &\rightarrow k\cdot(c,d) = (k\cdot c,\, k\cdot d) \end{aligned}$$

tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

b) Estudiar si $\mathbb{R}^2$ es espacio vectorial con la misma ley de composición interna que en apartado anterior pero con la ley de composición externa siguiente:

$$\begin{aligned} \bullet: \quad \mathbb{K} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ k\,,\,(c,d) &\rightarrow k\cdot(c,d) = (k\cdot c^2,\, k\cdot d^2) \end{aligned}$$

a) Primero vamos a probar que $(\mathbb{R}^2,+)$ es grupo (condiciones a1-a4).

Fíjate que el signo + tiene distinto significado según el contexto en el que se encuentre: Cuando está entre dos vectores es la l.c.i pero cuando está entre dos escalares es el + habitual de los números reales

a1) + tiene propiedad asociativa

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)\ ,\quad v_1, v_2, v_3 \in E$$

$$(x_1,x_2)+((y_1,y_2)+(z_1,z_2)) = (x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2) = (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2)$$

$$((x_1,x_2)+(y_1,y_2))+(z_1,z_2) = (x_1+y_1,x_2+y_2)+(z_1,z_2) = (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2)$$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$

$(\mathbb{R}^2,+)$ es semigrupo

a2) + tiene elemento neutro

$$v + 0 = 0 + v = v\ ,\quad v \in E$$

El elemento neutro es $(0,0)$. Efectivamente, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que:

$$(0,0)+(x,y) = (0+x,0+y) = (x,y)$$

$$(x,y)+(0,0) = (x+0,y+0) = (x,y)$$

$(\mathbb{R}^2,+)$ es monoide

a3) + tiene elemento inverso

$$v + (-v) = (-v) + v = 0\ ,\quad v \in E$$

Todo elemento (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tiene un elemento inverso que es $(-x,-y)$. Efectivamente, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que:

$$(x,y)+(-x,-y) = (x-x,y-y) = (0,0)$$

$$(-x,-y)+(x,y) = (-x+x,-y+y) = (0,0)$$

$(\mathbb{R}^2,+)$ es grupo

Ambas expresiones son iguales porque el + habitual de los números reales es conmutativo (no hace falta probarlo)

a4) + tiene propiedad conmutativa

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad , \quad v_1, v_2 \in E$$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$(y_1, y_2) + (x_1, x_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2)$

$(\mathbb{R}^2, +)$ es grupo abeliano

$\cdot$ es una ley de composición externa que cumple:

b1) Distributiva respecto a la suma de escalares

$$(k_1 + k_2)\, v = k_1 v + k_2 v \quad , \quad v \in E \quad k_1, k_2 \in \mathbb{K}$$

$(k_1 + k_2) \cdot (x_1, x_2) = ((k_1 + k_2) \cdot x_1, (k_1 + k_2) \cdot x_2) = (k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_1, k_1 \cdot x_2 + k_2 \cdot x_2)$

$k_1 \cdot (x_1, x_2) + k_2 \cdot (x_1, x_2) = (k_1 \cdot x_1, k_1 \cdot x_2) + (k_2 \cdot x_1, k_2 \cdot x_2) = (k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_1, k_1 \cdot x_2 + k_2 \cdot x_2)$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

b2) Distributiva respecto a la suma de vectores

$$k\,(v_1 + v_2) = k\, v_1 + k\, v_2 \quad , \quad v_1, v_2 \in E \quad k \in \mathbb{K}$$

$k \cdot ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = k \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (k \cdot (x_1 + y_1), k \cdot (x_2 + y_2)) = (k \cdot x_1 + k \cdot y_1, k \cdot x_2 + k \cdot y_2)$

$k \cdot (x_1, x_2) + k \cdot (y_1, y_2) = (k \cdot x_1, k \cdot x_2) + (k \cdot y_1, k \cdot y_2) = (k \cdot x_1 + k \cdot y_1, k \cdot x_2 + k \cdot y_2)$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{R}$

b3) Asociativa mixta

$$(k_1 k_2)\, v = k_1 (k_2 v) \quad , \quad v \in E \quad k_1, k_2 \in \mathbb{K}$$

$(k_1 \cdot k_2) \cdot (x_1, x_2) = ((k_1 \cdot k_2) \cdot x_1, (k_1 \cdot k_2) \cdot x_2) = (k_1 \cdot k_2 \cdot x_1,\ k_1 \cdot k_2 \cdot x_2)$

$k_1 \cdot (k_2 \cdot (x_1, x_2)) = k_1 \cdot (k_2 \cdot x_1, k_2 \cdot x_2) = (k_1 \cdot k_2 \cdot x_1,\ k_1 \cdot k_2 \cdot x_2)$

Ambas expresiones son iguales $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

b4)

$$1 \cdot v = v \quad , \quad v \in E$$

$1 \cdot (x_1, x_2) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2) = (x_1, x_2) \quad , \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

www.simplyjarod.com

Ejercicio 2

Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos constituyen subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones inducidas:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 4y = 0\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 1\}$

c) $C = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 / a \in \mathbb{R}\}$

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 4y^2 = 0\}$

Caracterizar de forma general todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$

www.simplyjarod.com

26-oct-2009

ejercicio de clase 2

Tema 3: Espacios vectoriales

a) $A = \{(x,y) \in \overbrace{\mathbb{R}^2}^{E\text{(Espacio vectorial)}} : 3x+4y=0\} = \{(4,-3),(-4,3),(1,-\frac{3}{4}),(-10,\frac{15}{2})\ldots\}$

El conjunto A es el formado por todos los vectores de dos coordenadas tales que cumplen el siguiente requisito: tres veces la primera coordenada + 4 veces la segunda coordenada da como resultado cero.

→ Diremos que A tiene estructura EspacioVectorial si y sólo si se satisfacen las siguientes tres propiedades:

O_E = elemento neutro puede ser o no = 0

a) $O_E \in A$ $\quad (O_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in A)$

b1) $\forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in A \Rightarrow \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in A$

Sea $\bar{v}_1 = (x_1, y_1) \in A \Rightarrow$ Por pertenecer a A, $3x_1+4y_1=0$

Sea $\bar{v}_2 = (x_2, y_2) \in A \Rightarrow 3x_2+4y_2=0$

$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

$\bar{v}_1+\bar{v}_2$ será elemento de A si $3(x_1+x_2)+4(y_1+y_2)=0$

$$3(x_1+x_2)+4(y_1+y_2) = (3x_1+4y_1)+(3x_2+4y_2) = 0+0=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in A$$

b2) $\forall k \in \mathbb{R}, \forall v \in A \Rightarrow kv \in A$

Sea $\bar{v} = (x,y) \in A \Rightarrow 3x+4y=0$

$k\bar{v} = (kx, ky) \in A \Leftrightarrow 3(kx)+4(ky)=0$, lo cual se cumple porque $3(kx)+4(ky) = k(3x+4y) = k \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall \bar{v} \in A$, $k\bar{v} \in A$

Por satisfacerse las condiciones a, b1 y b2, tenemos que A es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

→ Dimensión de A:

dim(subespacio) = dim(Espacio) − núm. de ec. independ.

dim(A) = dim($\mathbb{R}^2$) − nº ec. indep.

$\dim(A) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$
- Las bases de A (existen infinitas) tienen todas un elemento
- En la forma paramétrica de A aparece un parám.

(0,0) está prohibido como base

Una base de A es aquella que contenga un elemento que cumpla lo dicho en su ecuación ($3x+4y=0$); por ej:

$B_A = \{(1, -\frac{3}{4})\}$

www.simplyjarod.com

$B_A = \{(1, -\frac{3}{4})\}$

$B'_A = \{(4, -3)\}$

$B''_A = \{(10, -\frac{15}{2})\}$

$\vdots$

Pasemos a forma paramétrica

Como $\dim(A) = 1 \Rightarrow$ Aparece un parámetro

Parametrizamos:

$x = \alpha$

$y \Rightarrow 3x + 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}x \Rightarrow y = \frac{-3}{4}\alpha$

$(x, y) = (\alpha, \frac{-3}{4}\alpha)$

Forma paramétrica $\rightarrow$ $A = \{(\alpha, -\frac{3}{4}\alpha) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\underset{\alpha=4}{(4,-3)}, \underset{\alpha=1}{(1, -\frac{3}{4})} \dots\}$

$\hookrightarrow \dim(A) = 1$ (aparece 1 sólo parámetro)

Las bases de A (existen infinitas) tienen un único elemento:

$A = \{(\alpha, -\frac{3}{4}\alpha) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}\} =$

$= \{\alpha \underbrace{(1, -\frac{3}{4})}_{\text{Base}} \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}\} =$

todo elemento de A puede expresarse como combinación lineal de $(1, -\frac{3}{4})$, luego $(1, -\frac{3}{4})$ forma una base de A: $B_A = \{(1, -\frac{3}{4})\}$

$= \{\frac{\alpha}{4}(4, -3) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$B'_A = \{(4, -3)\}$

Subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

$(\dim(A) = 1)$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\} =$

$= \{(\alpha, -\frac{3}{4}\alpha) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}\} =$

$= \mathcal{L}\{\underbrace{(1, -\frac{3}{4})}_{\text{Base}}\}$

www.simplyjarod.com

Ejercicio 2

En el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^4, <,>)$ usual consideremos el vector $v = (7, 1, -6, 9)$ y subespacio $H = L\left[\{(1,-2,0,0),(0,1,2,1),(-1,0,1,1)\}\right]$. Calcular la proyección ortogonal de v sobre H.

www.simplyjarod.com

Tema 5 - ejercicio de clase 2

- espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$
- subespacio $H = \mathcal{L}\{\overbrace{(1,-2,0,0)}^{e_1}, \overbrace{(0,1,2,1)}^{e_2}, \overbrace{(-1,0,1,1)}^{e_3}\}$ $\dim H = 3$
- vector $v = (7,1,-6,9)$ • Calcular $\text{proy}_H v$

Como vemos, una base de H es $\{(1,-2,0,0),(0,1,2,1),(-1,0,1,1)\}$ Dicha base no es ortogonal porque existe una pareja de elementos de esa base cuyo producto escalar es no nulo: $\langle e_1, e_2\rangle = \langle (1,-2,0,0),(0,1,2,1)\rangle = 1\cdot 0 - 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 = -2 \neq 0$
Para hallar la proyección de un elemento sobre un subespacio, nos resulta imprescindible trabajar con una base ortogonal de dicho subespacio, de la cual aún no disponemos. Para conseguirla, acudimos al método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

$$u_1 = e_1$$
$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1$$
$$u_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle e_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2$$

$$u_1 = e_1 \Rightarrow u_1 = (1,-2,0,0)$$
$$u_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (0,1,2,1) - \frac{\langle (0,1,2,1),(1,-2,0,0)\rangle}{\langle (1,-2,0,0),(1,-2,0,0)\rangle}(1,-2,0,0)$$
$$u_2 = (0,1,2,1) + \frac{2}{5}(1,-2,0,0) \Rightarrow u_2 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 2, 1\right)$$
$$u_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle e_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2$$
$$u_3 = (-1,0,1,1) - \frac{\langle (-1,0,1,1),(1,-2,0,0)\rangle}{\langle (1,-2,0,0),(1,-2,0,0)\rangle}(1,-2,0,0) - \frac{\langle (-1,0,1,1),(\frac{2}{5},\frac{1}{5},2,1)\rangle}{\langle (\frac{2}{5},\frac{1}{5},2,1),(\frac{2}{5},\frac{1}{5},2,1)\rangle}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},2,1\right) =$$
$$= (-1,0,1,1) + \frac{1}{5}(1,-2,0,0) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},2,1\right)$$
$$u_3 = \left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Gram-Schmidt

$\{\overbrace{(1,-2,0,0)}^{e_1}, \overbrace{(0,1,2,1)}^{e_2}, \overbrace{(-1,0,1,1)}^{e_3}\}$ Base NO ortogonal de H $(\exists e_1, e_2 : \langle e_1, e_2\rangle \neq 0)$

$\{\overbrace{(1,-2,0,0)}^{u_1}, \overbrace{\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},2,1\right)}^{u_2}, \overbrace{\left(-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}^{u_3}\}$ Base ortogonal de H $(\langle u_i, u_j\rangle = 0, \forall i \neq j)$

NO tocarlos!! No simplificar!!

www.simplyjarod.com

$$\left(\underbrace{\dim(H)}_{3} = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{4} - \underbrace{n^{\circ}\text{ ec. libres}}_{1}\right)$$

A partir de este momento sí podemos aplicar la fórmula de la proyección ortogonal sobre H porque disponemos de una base ortogonal de H.

Proyección ortogonal de v sobre $H = \mathcal{L}\{u_1, u_2, u_3\}$ (base ortogonal)

$$\text{proy}_H(v) = \underbrace{\frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1}_{\text{proy}_{u_1} v} + \underbrace{\frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2}_{\text{proy}_{u_2} v} + \underbrace{\frac{\langle v, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle} u_3}_{\text{proy}_{u_3} v}$$

$$\langle v, u_1\rangle = \langle (7,1,-6,9), (1,-2,0,0)\rangle = 5$$
$$\langle u_1, u_1\rangle = \langle (1,-2,0,0), (1,-2,0,0)\rangle = 5$$
$$\langle v, u_2\rangle = \langle (7,1,-6,9), (\tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{5}, 2, 1)\rangle = 0$$
$$\langle v, u_3\rangle = \langle (7,1,-6,9), (-1, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})\rangle = -3$$
$$\langle u_3, u_3\rangle = \langle (-1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}), (-1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})\rangle = \tfrac{3}{2}$$

$$\text{proy}_H v = \frac{5}{5}(1,-2,0,0) + \frac{0}{\sim} \sim + \frac{-3}{3/2}\cdot(-1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})$$

$$\boxed{\text{proy}_H v = u_1 - 2u_3 = (3,-1,0,-1)}$$

No necesario en el problema. Hecho por gusto.

A modo de comprobación, vamos a encontrar las ec. cartesianas de H para confirmar que, efectivamente, $e_1, e_2, e_3, u_1, u_2, u_3$, $\text{proy}_H v \in H$, pues verifican la ec. hallada

$\dim(H) = \dim(\mathbb{R}^4) - n^{\circ}$ ec. libres; $3 = 4 - 1 \to 1$ ec. libre

$$\begin{array}{l} (\mathbb{R}^4) \\ (e_1) \\ (e_2) \\ (e_3) \end{array} \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y - 3z + 5t = 0$$

por adjuntos

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} y & z & t \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} x & z & t \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(y - z + t) - 2(x - z + 2t) =$$
$$= -2x - y + 3z - 5t = 0$$

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - 3z + 5t = 0\}$$

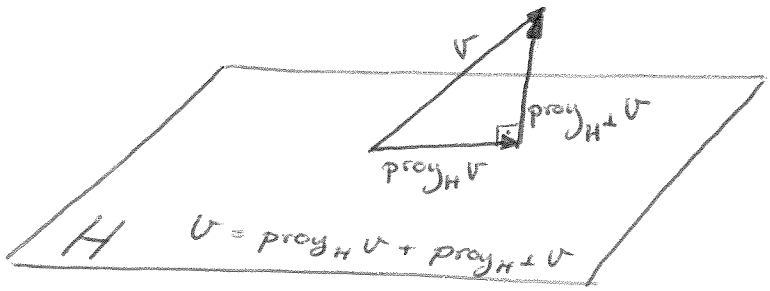
esta ecuación la cumplen $e_1, e_2, e_3, u_1, u_2, u_3, \text{proy}_H v$

Si $\text{proy}_H v$ es correcta en la ecuación $\Rightarrow$ todo está bien

Comprobación

www.simplyjarod.com

También a modo de comprobación, y sobre todo porque resultará ser un esquema imprescindible, desarrollamos lo siguiente:



$v = (7, 1, -6, 9)$

$\text{proy}_H v = (3, -1, 0, -1)$

$$\boxed{\text{proy}_{H^\perp} v = v - \text{proy}_H v = (4, 2, -6, 10)}$$

Otra comprobación es que el producto escalar de $\text{proy}_{H^\perp} v$ con cualquier elemento de H es 0. En particular:

$$\langle \text{proy}_{H^\perp} v, e_1 \rangle = \langle \text{proy}_{H^\perp} v, e_2 \rangle = \langle \text{proy}_{H^\perp} v, e_3 \rangle =$$

$$= \langle \text{proy}_{H^\perp} v, u_1 \rangle = \langle \text{proy}_{H^\perp} v, u_2 \rangle = \langle \text{proy}_{H^\perp} v, u_3 \rangle =$$

$$= \langle \text{proy}_{H^\perp} v, \text{proy}_H v \rangle = 0$$

TEMA 6: DIAGONALIZACIÓN

Ejercicio 1

Calcular los valores y vectores propios y diagonalizar, si es posible, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Recuerda que:
valor propio = autovalor
vector propio= autovector

Cálculo de los autovalores

Sabemos que los valores propios (autovalores) de la matriz A son las raíces de su polinomio característico,

$$|A - \lambda I| = 0$$

así pues, pasamos a calcular estas raíces,

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Procura aplicar siempre que sea posible las propiedades de los determinantes antes de ponerte a calcularlos

ahora calculamos el determinante desarrollando por la primera fila para aprovechar los dos ceros que hay en ella,

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((3-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - 4\cdot(-1)\big) = 0$$

$$(1-\lambda)\big((3-\lambda)(-2-\lambda) + 4\big) = 0$$

$$(1-\lambda)(-6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos que,

$$\lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \lambda = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

por lo que el polinomio característico queda factorizado,

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

Por tanto los valores propios (autovalores) de la matriz A son :

En este caso los tres autovalores tienen multiplicidad algebraica igual a uno

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & m_a(\lambda_1) &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 & m_a(\lambda_2) &= 1 \\ \lambda_3 &= -1 & m_a(\lambda_3) &= 1 \end{aligned}$$

www.simplyjarod.com

Cálculo de los autovectores

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda_1 & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Tenemos un sistema con tres incógnitas y sólo dos ecuaciones linealmente independientes. Esto quiere decir que el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo asignamos a la incógnita x_3 el parámetro t, es decir hacemos $x_3 = t$ y ahora sustituyendo nos queda un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2t = 0 \\ x_1 - x_2 - 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - 2t \quad \Rightarrow \quad -x_2 - 2t - x_2 - 3t = 0$$

Así que nos queda:

$$-2x_2 - 5t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{5t}{2}$$

$$x_1 = -x_2 - 2t \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\left(-\frac{5t}{2}\right) - 2t \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{2}$$

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$ son $S_{\lambda_1} = \left\{\left(\frac{t}{2}, -\frac{5t}{2}, t\right) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \left\{u = \left(\frac{t}{2}, -\frac{5t}{2}, t\right)\right\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_1}) = 1 = m_g(\lambda_1)$.

Hemos particularizado t=1 por simplicidad pero se podría haber elegido cualquier otro valor para la t

Recuerda que la multiplicidad geométrica es, por definición la dimensión del autoespacio asociado

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda_2 & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \quad \Rightarrow -x_2 - 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Hemos llegado a una ecuación con dos incógnitas. Para resolverla asignamos a la incógnita x_3 el parámetro t, es decir hacemos $x_3 = t$ y sustituyendo nos queda:

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 + 4x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 + 4t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -4t \end{cases}$$

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_2 = 2$ son: $S_{\lambda_2} = \left\{(0, -4t, t) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \left\{v = (0, -4, 1)\right\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_2}) = 1 = m_g(\lambda_2)$.

www.simplyjarod.com

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda_3 & 4 \\ 1 & -1 & -2-\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow 4x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow -x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Hemos llegado a una ecuación con dos incógnitas. Para resolverla asignamos a la incógnita x_3 el parámetro t, es decir hacemos $x_3 = t$ y sustituyendo nos queda:

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + t = 0 \Rightarrow x_2 = -t \end{cases}$$

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_3 = -1$ son: $S_{\lambda_3} = \{(0, -t, t) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \{w = (0, -1, 1)\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_3}) = 1 = m_g(\lambda_3)$.

Estudiamos si A es diagonalizable

Para ello observamos las multiplicidades algebraica y geométricas calculadas anteriormente:

	$m_a(\lambda_i)$	$m_g(\lambda_i)$
$\lambda_1 = 1$	1	1
$\lambda_2 = 2$	1	1
$\lambda_3 = -1$	1	1

En este caso también se puede afirmar que A es diagonalizable observando que es de orden 3 y tiene 3 autovalores distintos.

Así pues, como todos los autovalores tienen igual multiplicidad algebraica que geométrica la matriz A es diagonalizable y por tanto es semejante a una matriz diagonal D:

$$A = PDP^{-1}$$

donde la matriz P es una matriz en la que las columnas son los tres autovectores u, v y w que ya hemos calculado previamente.
Así pues nos que queda:

Importante:
Cada vector propio tiene que estar en la misma columna en que está su valor propio asociado

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejercicio 2

Calcular los valores y vectores propios y diagonalizar, si es posible, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los autovalores

Sabemos que los valores propios (autovalores) de la matriz A son las raíces de su polinomio característico,

$$|A - \lambda I| = 0$$

así pues, pasamos a calcular estas raíces,

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ahora calculamos el determinante:

$$(2-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) - 3\cdot(-1)\cdot(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\big((2-\lambda)(-2-\lambda)+3\big) = 0$$

$$(1-\lambda)(-4 - \cancel{2\lambda} + \cancel{2\lambda} + \lambda^2 + 3) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow -(\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0$$

y aplicando diferencia de cuadrados (igual a suma por diferencia) nos queda el polinomio característico ya factorizado,

$$(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

Por tanto los valores propios (autovalores) de la matriz A son :

$$\lambda_1 = 1 \qquad m_a(\lambda_1) = 2$$
$$\lambda_2 = -1 \qquad m_a(\lambda_2) = 1$$

Cálculo de los autovectores

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Tenemos tres incógnitas y solo una ecuación. Para resolverlo asignamos a la incógnita x_3 el parámetro α, es decir hacemos $x_3 = \alpha$ y además tomamos $x_2 = \beta$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ \cancel{-x_1 - 3x_3 = 0} \end{cases} \Rightarrow x_1 + 3x_3 = 0$$

Así que nos queda: $x_1 = -3\alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$ (ecuaciones paramétricas de $S_{\lambda 1}$)

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$ son $S_{\lambda_1} = \{(-3\alpha, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $B = \{ \ u = \underbrace{(-3, 0, 1)}_{\alpha=1,\ \beta=0}, \ v = \underbrace{(0, 1, 0)}_{\alpha=0,\ \beta=1} \ \}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_1}) = 2 = m_g(\lambda_1)$.

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ \cancel{-x_1 - x_3 = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_2 = -1$ son: $S_{\lambda_2} = \{(-\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $\alpha = 1$ y nos queda $B = \{w = (-1, 0, 1)\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_2}) = 1 = m_g(\lambda_2)$.

Estudiamos si A es diagonalizable

Para ello observamos las multiplicidades algebraica y geométricas ya calculadas:

	$m_a(\lambda_i)$	$m_g(\lambda_i)$
$\lambda_1 = 1$	2	2
$\lambda_2 = -1$	1	1

Así pues, como todos los autovalores tienen igual multiplicidad algebraica que geométrica la matriz A es diagonalizable y por tanto es semejante a una matriz diagonal D:

$$A = PDP^{-1}$$

Importante: Cada vector propio tiene que estar en la misma columna en que está su valor propio asociado

donde la matriz P es una matriz en la que las columnas son los tres autovectores u, v y w que ya hemos calculado previamente. Así pues nos que queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejercicio 3

Recuerda que:
valor propio = autovalor
vector propio= autovector

Calcular los valores y vectores propios y diagonalizar, si es posible, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los autovalores

Sabemos que los valores propios (autovalores) de la matriz A son las raíces de su polinomio característico,

$$|A - \lambda I| = 0$$

así pues, pasamos a calcular estas raíces,

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

En este caso, al ser la matriz triangular, el polinomio característico sale factorizado directamente y los autovectores son:

$$\lambda_1 = 1 \qquad m_a(\lambda_1) = 2$$
$$\lambda_2 = -1 \qquad m_a(\lambda_2) = 1$$

Cálculo de los autovectores

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda_1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Fíjate que la única solución de este sistema es la solución nula

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Ojo con esto por que es muy importante!!

Además, como x_3 no aparece en el sistema podemos afirmar que puede tomar cualquier valor por lo que le asignamos un parámetro a $x_3 = t$.

Por tanto:

Recuerda que la multiplicidad geométrica es, por definición la dimensión del autoespacio asociado

- Los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$ son $S_{\lambda_1} = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \{u = (0, 0, 1)\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_1}) = 1 = m_g(\lambda_1)$.

www.simplyjarod.com

- Autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3$$

Ahora, asignando un parámetro a $x_3 = t$ nos queda $x_2 = -2t$.

Por tanto:

- Los autovectores asociados a $\lambda_2 = -1$ son: $S_{\lambda_2} = \{(0, -2t, t) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R}\}$.
- Ahora para obtener una base hacemos $t = 1$ y nos queda $B = \{v = (0, -2, 1)\}$.
- Por último la dimensión es $\dim(S_{\lambda_2}) = 1 = m_g(\lambda_2)$.

Estudiamos si A es diagonalizable

Para ello observamos las multiplicidades algebraica y geométricas calculadas anteriormente:

	$m_a(\lambda_i)$	$m_g(\lambda_i)$
$\lambda_1 = 1$	2	1
$\lambda_3 = -1$	1	1

En este caso el autovalor $\lambda_1 = 1$ no tiene sus multiplicidades algebraica y geométrica iguales, por tanto podemos afirmar que A **no es diagonalizable**. Es decir, no existe ninguna matriz de paso P tal que A sea semejante a la matriz diagonal D.

Ahora ya sabemos que A no es diagonalizable. Pero nos surge la siguiente pregunta, ¿Por qué A no es diagonalizable?:
De manera coloquial podemos decir que el autoespacio S_{λ_1} no tiene suficientes vectores linealmente independientes para "rellenar" la matriz P. No tenemos vector para llenar la columna con interrogaciones, por tanto no se puede construir la matriz P.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ? & 0 \\ 0 & ? & -2 \\ 1 & ? & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ? & 0 \\ 0 & ? & -2 \\ 1 & ? & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

www.simplyjarod.com

FMT1
Tests de examen

www.simplyjarod.com

FMTJ Preguntas test

③ $(A\cap B\cap C)\cap(A\cap\underbrace{(D-B)}_{D\cap\bar{B}}\cap\underbrace{(D-C)}_{D\cap\bar{C}})=\emptyset$

$D-B = D\setminus B =$ D menos B = D excepto B

$D\setminus B = \{x : x\in D$ y $x\notin B\}$; $x\notin B \Rightarrow x\in\bar{B}$

$D\setminus B = D-B = \bar{B}$ = complementario de B

$D\setminus B = \{x : x\in D$ y $x\in\bar{B}\}$

$D-B = D\setminus B = D\cap\bar{B}$

$(A\cap B\cap C)\cap(A\cap(D\cap\bar{B})\cap(D\cap\bar{C})) =$

$= A\cap B\cap C\cap A\cap D\cap\bar{B}\cap D\cap\bar{C} =$

$=\underbrace{(A\cap A)}_{A}\cap\underbrace{(B\cap\bar{B})}_{\emptyset}\cap\underbrace{(C\cap\bar{C})}_{\emptyset}\cap\underbrace{(D\cap D)}_{D} = A\cap\underbrace{\emptyset\cap\emptyset}_{\emptyset}\cap D = (A\cap D)\cap\emptyset = \emptyset$

Solución Verdadera

④ $(A\cup B)\cap C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

Lo realmente cierto es lo siguiente:

$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(7+3)\cdot 2 = (7\cdot 2)+(3\cdot 2)$

$(A\cup C)\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup C$

Solución Falsa

Contraejemplo:

$A=\{1,2,3\}$

$B=\{4,5\}$

$C=\{2,4,6\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

$(A\cup B)\cap C=\{2,4\}$

$(A\cup C)=\{1,2,3,4,6\}$

$(B\cup C)=\{2,4,5,6\}$

$(A\cup C)\cap(B\cup C)=\{2,4,6\}$

distintos falso

www.simplyjarod.com

(6) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$

$\overset{0_{\mathbb{R}^2}}{\overset{\shortparallel}{(0,0)}} \notin A \Rightarrow A$ no es subespacio

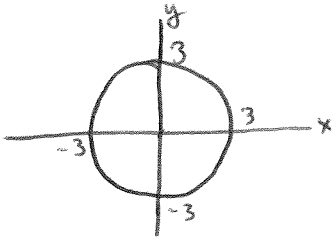
Ecuación de la circunferencia:

Centro $= (x_0, y_0)$ Radio $= r$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$f: A \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x^2$ } f no es aplic. lineal

Circunferencia
Centro $(0,0)$
radio $= 3$



Sea $(x,y) \in A \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

$x^2 = 9 - y^2 \Rightarrow f(x,y) = x^2 = 9 - y^2$

$\forall (x,y) \in A,\ f(x,y) = 9 - y^2$

$\forall (x,y) \in A,\ y \in [-3,3] \Rightarrow y^2 \in [0,9] \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 - y^2 \in [0,9]$

$\forall (x,y) \in A,\ f(x,y) \in [0,9] \Rightarrow Im(f) = [0,9] \neq \mathbb{R}$ (espacio de llegada)

Solución FALSA $\Leftarrow$ f NO sobreyectiva

- Como la imagen de f no coincide con el espacio de llegada de f resulta que f NO es sobreyectiva.
- Podríamos haber visto que, por ejemplo, el número 16 no podría ser generado porque para ello x tendría que ser 4 y en la circunferencia A como mucho las x valen 3.

(10) $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ es aplic. lineal $\Rightarrow Ker(f) \neq \{\vec{0}\}$

$Ker(f) \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow$ No inyectiva

$$\dim\begin{pmatrix}\text{Espacio}\\ \text{Salida}\end{pmatrix} = \dim Ker f + \dim Im f$$

$$\dim \mathbb{R}^{n+1} = \dim Ker f + \dim Im f$$

$$n + 1 = \dim Ker f + \dim Im f$$

Solución Verdadera

$Im f \triangleleft \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim Im f \leq \dim \mathbb{R}^n = n \Rightarrow \dim Im f \leq n$

$\dim Im f \leq n \Rightarrow \underbrace{\dim Ker f + \dim Im f}_{n+1} \leq \dim(Ker f) + n$

$n + 1 \leq \dim(Ker f) + n$; $1 \leq \dim Ker f \Rightarrow \dim Ker f \neq 0$

$Ker f \neq \{0\} \Rightarrow f$ no inyectiva

$\dim Ker f \neq 0 \Rightarrow Ker f \neq \{\vec{0}\}$

Toda función con espacio de salida de dimensión superior a la de su espacio de llegada es NO inyectiva

www.simplyjarod.com

(11) $[\dim U = \dim V = \dim(U+V)] \Rightarrow U = V$

$\dim U = \dim(U+V)$

Veamos que $U \subset U+V$

Sea $x \in U \Rightarrow x = x + \bar{0}_V$: $\left\{ \begin{array}{l} x \in U \\ \bar{0}_V \in V \end{array} \right. \Rightarrow x \in U+V$

$\forall x \in U,\ x \in U+V \Rightarrow U \subset U+V$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dim U = \dim U+V \\ U \subset U+V \end{array}\right\} U = U+V \\ \left.\begin{array}{l} \dim V = \dim U+V \\ V \subset U+V \end{array}\right\} V = U+V \end{array}\right\} U = V$$

Solución Verdadera

(13) $\exists V \triangleleft \mathbb{R}^5 : \dim V = \dim V^{\perp}$

$\underbrace{\dim \mathbb{R}^5}_{5} = \dim V + \dim V^{\perp}$ $\left\{ \begin{array}{l} V \triangleleft \mathbb{R}^5 \\ V^{\perp} \triangleleft \mathbb{R}^5 \end{array} \right.$

$5 = \dim V + \dim V^{\perp} \Rightarrow \dim V \neq \dim V^{\perp}$

Solución Falsa

(16)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es semejante a $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A y B no tienen los mismos autovalores con las mismas multiplicidades $\Rightarrow$ A y B no son semejantes

$$\left.\begin{array}{l} \text{si llueve} \Rightarrow \text{hay nubes} \\ \text{si no hay nubes} \Rightarrow \text{no llueve} \end{array}\right\} \begin{array}{l} M \Rightarrow N \\ \text{no } N \Rightarrow \text{no } M \end{array}$$

A y B son semejantes $\Rightarrow$ A y B tienen los mismos autovalores con las mismas multiplicidades

A y B son semejantes $\Leftrightarrow \exists P : A = PBP^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Autovalores de A: } 2 \text{ y } 3 \\ \text{Autovalores de B: } 1, 2 \text{ y } 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{como no coinciden los autovalores} \\ \text{A y B no son semejantes} \end{array}$$

- Si coincidiesen los autovalores y las multiplicidades A y B podrian ser o no semejantes.

Solución Falsa

www.simplyjarod.com

(17) $A \in M_n(\mathbb{C})$ no es invertible $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ es autovalor de A

$\lambda = 0$ es autovalor $\Leftrightarrow |A - \lambda Id| = 0$ para $\lambda = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |A - 0Id| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow$ A no invertible

Solución Verdadera

(14) $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es libre $\Leftrightarrow$ $\{\bar{u} - \bar{v}, \bar{u} + \bar{v}\}$ es libre

(I) $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ libre $\Rightarrow$ $\{\bar{u} - \bar{v}, \bar{u} + \bar{v}\}$ libre

$\bar{u} + \bar{v}$ y $\bar{u} - \bar{v}$ son independientes $\Leftrightarrow$ (la combinación lineal de $u+v$ y $u-v$ igualada a cero $(\alpha(u+v) + \beta(u-v) = 0)$ implica tener, necesariamente, los escalares usados en ella nulos $(\alpha = \beta = 0)$.

Partiremos pues de la expresión $\alpha(u+v) + \beta(u-v) = 0$ y llegaremos a obtener $\alpha = \beta = 0$. En el camino emplearemos el dato dado como hipótesis:

u y v son independientes

y esto significa que: para tener $\lambda u + \mu v = 0$ obligatoriamente ha de ser $\lambda = \mu = 0$.

$$\alpha(u+v) + \beta(u-v) = 0 \Rightarrow \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\lambda} u + \underbrace{(\alpha-\beta)}_{\mu} v = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\alpha = \beta = 0}$$

(II) $\{u+v, u-v\}$ libre $\Rightarrow$ $\{u, v\}$ libre

Queremos ver que la combinación lineal de u y v igualada a cero supone tener necesariamente escalares nulos.

$\alpha u + \beta v = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

Partiremos de $\alpha u + \beta v = 0$, emplearemos la hipótesis de que $u+v$ y $u-v$ son libres (es decir $\lambda(u+v) + \mu(u-v) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda = \mu = 0$) y llegaremos a ver que $\alpha = \beta = 0$

$$\alpha u + \beta v = 0 \Rightarrow \text{sean} \begin{cases} u + v = s \\ u - v = r \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u = \frac{1}{2}(s+r) \\ v = \frac{1}{2}(s-r) \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(s+r) + \frac{1}{2}(s-r) = 0$$

$$\frac{1}{2}[\alpha(s+r) + \beta(s-r)] = 0$$

$$\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)s + (\alpha-\beta)r] = 0$$

$$\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\lambda}(u+v) + \underbrace{(\alpha-\beta)}_{\lambda}(u-v) = 0 \rightarrow \left.\begin{cases} \lambda = \alpha + \beta = 0 \\ \mu = \alpha - \beta = 0 \end{cases}\right\} \underline{\alpha = \beta = 0}$$

Solución Verdadera

www.simplyjarod.com

(19) similar a 20 = V

$\bar{u} = \bar{v} \Leftrightarrow \forall \bar{w} \in E \quad \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$

(I) $u = v \Rightarrow \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle, \ \forall w \in E$

(II) $\underbrace{\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle, \ \forall w \in E}_{} \Rightarrow u = v$

$\langle u, w \rangle - \langle v, w \rangle = 0, \ \forall w \in E$

$\langle u - v, w \rangle = 0, \ \forall w \in E \Rightarrow u - v = 0$

$u - v = 0 \Rightarrow \underline{u = v}$

Solución Verdadera

(22)

Contraejemplo:

$A = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}$ Autovalores: $|A - \lambda Id| = 0$

Solución Falsa

$\begin{vmatrix} i-\lambda & i \\ i & i-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ ; \ (i-\lambda)^2 - i^2 = 0$

$\lambda^2 - 2i\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2i) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \in \mathbb{R} \\ \lambda = 2i \notin \mathbb{R} \end{cases}$

(23) similar a 56, 137 y 148; 137 = V, 148 = F

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es espacio vectorial

$X \in M_2(\mathbb{R})$

$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \rightarrow \alpha = 1 \\ \beta + \delta = 0 \rightarrow \beta = -1 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 1 \end{cases}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ El conjunto de soluciones de la ecuación es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Solución Falsa

como $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ No es del conjunto
No se trata de un e.v.

(25)

$$\begin{pmatrix} 1^k & 1^{k+1} & 1^{k+2} \\ (-2)^k & (-2)^{k+1} & (-2)^{k+2} \\ 3^k & 3^{k+1} & 3^{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (-2)^k & (-2)^{k+1} & (-2)^{k+2} \\ 3^k & 3^{k+1} & 3^{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-2)^k & (-2)^{k+1} - (-2)^k & (-2)^{k+2} - (-2)^k \\ 3^k & 3^{k+1} - 3^k & 3^{k+2} - 3^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-2)^k & (-2)^k[-2-1] & (-2)^k[(-2)^2 - 1] \\ 3^k & 3^k \cdot [3-1] & 3^k[3^2 - 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-2)^k & -3(-2)^k & 3(-2)^k \\ 3^k & 2 \cdot 3^k & 8 \cdot 3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Determinante $\neq 0 \Rightarrow$ rg 3 $\Rightarrow$ Solución verdadera

www.simplyjarod.com

(26)

$h: E \to E'$
$f: E' \to E''$ $\quad Im(f \circ h) = Im\, f \Leftrightarrow h$ sobreyectiva??

h sobreyectiva $\Rightarrow Im(f \circ h) = Im\, f$

$\left.\begin{array}{l} h: E \to E' \text{ lineal} \\ f: E' \to E'' \text{ lineal} \\ h \text{ sobreyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow Im(f \circ h) = Im\, f$

Para demostrar la igualdad entre dos subespacios demostraremos la doble inclusión.

(I) h sobreyectiva $\Rightarrow \underbrace{Im(f \circ h) \subset Im\, f}_{\text{se cumple siempre}}$

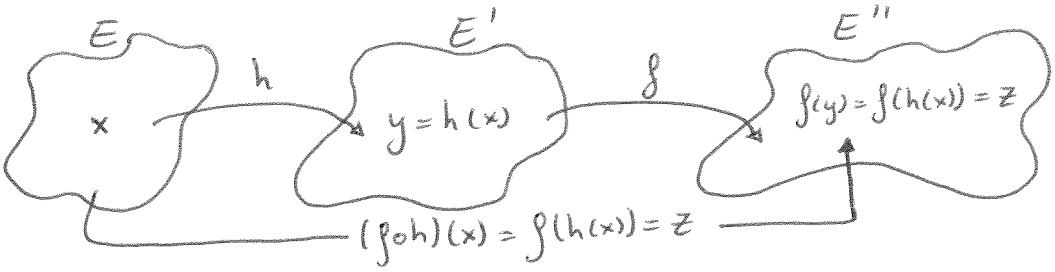
$Im(f \circ h) \subset Im\, f$ se cumple con independencia de si h es o no es sobreyectiva.

Sea $z \in Im(f \circ h) \Rightarrow \exists x \in E : (f \circ h)(x) = z$

$z = (f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(y) \Rightarrow \exists y \in E' : f(y) = z$

$\underline{z \in Im(f)}$

$x \in E \Rightarrow h(x) \in Im(h) \subset E'$
$h(x) \in E' \Rightarrow y = h(x) \in E'$



(II) h sobreyectiva $\Rightarrow Im\, f \subset Im(f \circ h)$

$z \in Im\, f \Rightarrow \exists y \in E' : f(y) = z$
h sobreyectiva $\Rightarrow Im(h) = E'$
$y \in E',\ E' = Im(h) \Rightarrow y \in Im(h) \Rightarrow \exists x \in E : y = h(x)$

$\left.\right\} \exists x \in E : f(h(x)) = z \Rightarrow \exists x \in E : (f \circ h)(x) = z$
$z \in Im(f \circ h)$

Esta demostración se ha podido desarrollar porque nos decían que h es sobreyectiva. Sin este dato no está garantizada la existencia de la x en E, luego la inclusión $Im(f) \subset Im(f \circ h)$ no es válida siempre; tan sólo es válida con h sobreyectiva.

<u>Solución falsa</u>, tan sólo se cumple en uno de los dos sentidos. No es un $\Leftrightarrow$

www.simplyjarod.com

(27)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} n \text{ ecuaciones} \\ n \text{ incógnitas} \end{array}$$

Sistema I:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Sistema II:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+2y=0 \\ 2x-2y=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

$Ax = b = Bx$ y sin embargo $A \neq B$

Solución falsa

(28)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{120} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ??$$ Solución verdadera

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = -Id \Rightarrow A^{120} = (A^2)^{60} = (-Id)^{60} = (-1)^{60} \cdot Id^{60} = Id$$

(29) Si $U \cap V \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow U \cup V$ es subespacio??

Intersección de subespacios es un subespacio
Unión de subespacios puede o no ser un subespacio

$U = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ con } (x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)$
$\dim(U) = 2$ $\quad = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \equiv$ plano XY

$V = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,0,1)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ con } (x,y,z) = \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1)\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y = 0\} \equiv$ plano XZ

$$\left.\begin{array}{l} U = \{(\alpha,\beta,0)\} \\ V = \{(\lambda,0,\mu)\} \end{array}\right\} U \cup V$$ No es subespacio porque no se verifica la segunda de las condiciones

$$\left.\begin{array}{l} (0,1,0) \in U \Rightarrow (0,1,0) \in U \cup V \\ (0,0,1) \in V \Rightarrow (0,0,1) \in U \cup V \end{array}\right\} \underbrace{(0,1,0) + (0,0,1)}_{(0,1,1)} \notin U \cup V$$

$$(0,1,1) \left.\begin{array}{l} \notin U \\ \notin V \end{array}\right\} \Rightarrow \notin U \cup V$$

la unión generalmente NO es subespacio

Solución Falsa

www.simplyjarod.com

(31) <u>Solución Falsa</u> (es verdadera en sentido contrario) que es lo que dice la pregunta 100.

(100) $\exists n \in \mathbb{N} : A^n = 0$ (A nilpotente de orden n) $\Rightarrow \lambda = 0$ es el único autovalor de A

Demostremos que si $\lambda \neq 0$ es autovalor de A $\Rightarrow A^n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Sea $\lambda \neq 0$ un autovalor de A asociado al autovector $v \neq 0$

$$\Rightarrow Av = \lambda v \Rightarrow AAv = A\lambda v \Rightarrow A^2 v = \lambda \underbrace{(Av)}_{\lambda v} \Rightarrow A^2 v = \lambda^2 v \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow A^n v = \lambda^n v$$

como $\lambda \neq 0$, $\lambda^n \neq 0$; además $v \neq 0 \Rightarrow \lambda^n \cdot v \neq 0 \Rightarrow A^n v \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow A^n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Solución verdadera</u>

(30) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ autovectores libres de un endomorfismo $f \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\bar{u})$ y $f(\bar{v})$ son libres.

u autovector de $f \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$; $f(u) = \lambda u$ $(u \neq 0)$
v autovector de $f \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{C}$; $f(v) = \lambda v$ $(v \neq 0)$

u y v libres $\Rightarrow$ cuando veamos $(\alpha u + \beta v = 0) \Leftrightarrow (\alpha = \beta = 0)$

Se pretende ver que $f(u)$ y $f(v)$ son libres y esto se conseguirá cuando veamos que si una combinación lineal de $f(u)$ y $f(v)$ es nula entonces necesariamente los escalares de esa combinación serán nulos.

$$\gamma f(u) + \delta f(v) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \delta = 0$$

$$\gamma f(u) + \delta f(v) = 0 \Rightarrow \underbrace{\gamma(\lambda u)}_{\alpha} + \underbrace{\delta(\mu v)}_{\beta} = 0 \Rightarrow \alpha u + \beta v = 0$$

$$\alpha u + \beta v = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \gamma\lambda = 0 \\ \beta = \delta\mu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma = \delta = 0$$

Si nos dijeran que u y v están asociados a autovalores No nulos sí tendríamos $\gamma = \delta = 0$, y en este caso sí sería cierto; como no nos lo dicen concluimos:

<u>Solución Falsa</u>

www.simplyjarod.com

(33) El término independiente del polinomio característico es nulo $\Leftrightarrow$ f No inyectiva

($\Rightarrow$)

El polinomio característico tiene la forma:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + 0$$

por lo que una de las raíces del polinomio igualado a cero es $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ es autovalor de $f \Rightarrow$ autoespacio asociado a $\lambda = 0$ es $Ker(f)$ y el/los elementos de la base del $Ker(f)$ son autovectores asociados a $\lambda = 0$.

Al menos uno de los elementos de $B_{Ker(f)}$ es No nulo, pues es autovector $\Rightarrow Ker(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ No inyectiva

($\Leftarrow$) f No inyectiva $\Rightarrow$ término indep. del pol. caract. nulo

f No inyectiva $\Rightarrow \exists u, v : u \neq v$ con $f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) - f(v) = 0$ por ser lineal $f(u-v) = 0 \Rightarrow f(u-v) = 0(u-v) \Rightarrow 0$ es autovalor asociado a $(u-v)$ (distinto de cero por ser $u \neq v$, luego $u-v$ es autovector)

$\Rightarrow \lambda = 0$ es autovalor $\Rightarrow$ el polinomio característico se anula para $\lambda = 0 \Rightarrow$ el término independiente del polin. característico es nulo.

Solución Verdadera

(35) Toda matriz de rg máximo es diagonalizable

Contraejemplo: se trata de encontrar una matriz de rango máximo No diagonalizable

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ autovalores: $\lambda = 1$

$$\left.\begin{array}{l} m_a(\lambda=1) = 2 \\ m_g(\lambda=1) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} m_a(\lambda=1) \neq m_g(\lambda=1) \\ \text{por lo que } A \text{ no es} \\ \text{diagonalizable} \end{array}$$

sin embargo, sí tiene rg máx.

$$|A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \left.\begin{array}{l} 0x + y = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

$\dim S_{\lambda_1} = \dim \mathbb{R}^2 - n^o ec.$

$2 - 1$

$\dim S_{\lambda_1} = 1 = m_g$

Solución Falsa

www.simplyjarod.com

(37) Habitualmente las preguntas en las que piden determinar si se trata o no de un producto escalar suelen ser falsas por la siguiente razón:

La expresión que nos dan probablemente incumpla alguna de las 4 condiciones necesarias para ser producto escalar.

Siempre apostaremos por que la expresión que nos den no será producto escalar [PERO PODRÍA SERLO] comprobando que no satisface lo siguiente:

El producto escalar de un elemento no nulo consigo mismo es cero, y esto contradice a la propiedad 4. Si encontramos un elemento así, entonces No es producto escalar. En caso contrario podría serlo.

Norma negativa $\Rightarrow$ No producto escalar

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2+1+(-3)+2+1+(-3)=0$$

y $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ No producto escalar

Solución Falsa

(41) $\left.\begin{array}{l} f: X \to Y \text{ aplicación} \\ A \subset Y,\ A' \subset Y \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') = f^{-1}(A \cap A')$

La igualdad entre subespacios se demuestra con la doble inclusión: ($\subset$ y $\supset$)

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') \subset f^{-1}(A \cap A')$$

$$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A \\ x \in f^{-1}(A') \Rightarrow f(x) \in A' \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in A \cap A'$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(A \cap A')$$

leidas de derecha a izquierda las implicaciones también son ciertas, luego:

Solución Verdadera

www.simplyjarod.com

(44) $f: V \to V$ es lineal ; $\dim V = \text{impar} \Rightarrow \operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$

$\underbrace{\dim(V)}_{\text{impar}} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

Supongamos que fuese $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$

Sea $r = \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2r$

como $2r \neq$ impar (contradicción) Negamos lo supuesto inicialmente para evitar la contradicción

Solución verdadera $\Leftarrow \operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f \Leftarrow$

(45) Sea $A \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists a_1, a_2, a_3 \dots a_n \in \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$A^T = (a_1, a_2 \dots a_n) \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$

$$AA^T = \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} \underset{1\times n}{(a_1 a_2 \dots a_n)} \Rightarrow \underset{n\times n}{AA^T} = \begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_na_n \end{pmatrix}$$

$rg(AA^T) = 1$, porque todas las columnas son proporcionales a una dada.

Solución verdadera

OJO: si todos los elementos son cero $rg(AA^T) \neq 1$ por lo que sería falsa

(46)

Contraejemplo:

Solución falsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; |A| = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

↳ Determinante nulo para esta submatriz lo que implica que no es invertible

(52) $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \text{(I) } \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} g \end{array}\right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Im} f$

$\left.\begin{array}{l} \dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \\ \dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} f \end{array}\right\}$ $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} f$

$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f - \dim \operatorname{Im} g}_{\text{cero por hipótesis (I)}} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} g - \dim \operatorname{Im} f}_{\dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Im} f}$

Solución verdadera

www.simplyjarod.com

(57) $H = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(-5) = 0 \}$ es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$ conjunto de polinomios tales que su primera derivada evaluada en $x = -5$ es nula.

a) $0_{\mathbb{R}[x]} = \underbrace{0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n + \dots}_{\text{Su derivada en } x=-5 \text{ es nula} \Rightarrow \in H} \in H$

b) $p(x) \in H,\ q(x) \in H \Rightarrow p(x) + q(x) \in H$

$p(x) \in H \Rightarrow p'(-5) = 0$

$q(x) \in H \Rightarrow q'(-5) = 0$

$(p(x)+q(x))'\big|_{x=-5} = \underbrace{p'(-5)}_{0} + \underbrace{q'(-5)}_{0} = 0$

b) $k \in \mathbb{R},\ p(x) \in H \Rightarrow kp(x) \in H$ $\Rightarrow p(x) + q(x) \in H$

$p(x) \in H \Rightarrow p'(-5) = 0$ $\quad (kp(x))'\big|_{x=-5} = kp'(-5) = k \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow kp'(-5) = 0$

por cumplirse a) b) b) se tiene que H es subespacio

Solución verdadera

(59) $A = (1\ \ 2\ \ -1) \in M_{1\times 3}(\mathbb{C})$ admite inversa por la izq.

Supongamos cierto el enunciado $\Rightarrow \exists B \in M_{3\times 1}(\mathbb{C}) : B(1, 2\ -1) = Id$

$(3\times 1)\cdot(1\times 3) = 3\times 3$

Sea $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow B(1.2\ -1) = \begin{pmatrix} b_1 & 2b_1 & -b_1 \\ b_2 & 2b_2 & -b_2 \\ b_3 & 2b_3 & -b_3 \end{pmatrix}$

$B(1\ 2\ -1) = Id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & 2b_1 & -b_1 \\ b_2 & 2b_2 & -b_2 \\ b_3 & 2b_3 & -b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} b_1 = 1 \\ 2b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \end{array}\right\}$ simultáneamente $b_1 = 1,\ b_1 = 0$ contradicción !!

solución falsa

Para evitar la contradicción negamos lo supuesto inicialmente acerca de que $\exists B \Rightarrow \nexists B$: no existe inversa por la izquierda de $(1\ 2\ -1)$

(60) $Im\, f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| = 1 \}$

Si el conjunto anterior fuese de veras imagen de una aplicación entonces sería un subespacio vectorial; dicho de otro modo, si ni siquiera fuese sube.v. $\Rightarrow$ no sería imagen de ninguna f.

$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \notin Im\, f \Rightarrow Im\, f$ NO es sube.v. $\Rightarrow$

$\Rightarrow Im\, f$ no puede ser imagen de ninguna aplic. lineal.

Solución falsa

www.simplyjarod.com

(60) De otro modo

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal $\Rightarrow f(0,0) = (0,0) \Rightarrow \exists (0,0) \in \mathbb{R}^2 : f(0,0) = (0,0)$

$(0,0) \in \operatorname{Im} f$ (si f es lineal, entonces el neutro de su espacio de llegada siempre pertenece a la imagen de f porque existe para él una preimagen en el espacio de salida, que es siempre el neutro)

Sin embargo $(0,0) \notin \operatorname{Im} f$ porque para él tenemos $|x+y| = |0+0| \neq 1$

(61) $A \in M_n(\mathbb{K})$ singular $\Rightarrow \nexists A^{-1} \Rightarrow |A| = 0$ entonces...

... existe $p \in \mathbb{N} : A^p = 0 \in M_n(\mathbb{K})$

Contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A \text{ singular}$$

solución falsa

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 1^p & 0 \\ 0 & 0^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$ singular $\Rightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ A^p \neq 0$

$\rightarrow$ por ser diagonal $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & b \\ c & d^p \end{pmatrix}$

(63)

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \text{eje } OX \\ U_2 = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} = \text{eje } OY \\ U_3 = \{(c,c) : c \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \text{recta } x = y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow U_1 + U_2 + U_3$ es suma directa

Dos subespacios están en suma directa $\Leftrightarrow A \cap B = 0_E$

$(U_1 + U_2) \cap U_3 = \{(0,0)\} \Leftrightarrow (U_1 + U_2)$ y U_3 están en suma directa

$U_1 + U_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \exists (a,0) \in U_1, \exists (0,b) \in U_2 \text{ con } (a,b) = (a,0) + (0,b)\}$

Todo elemento de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como suma de un elemento de U_1 y un elemento de U_2; $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$

$(U_1 + U_2) \cap U_3 = \mathbb{R}^2 \cap U_3 = U_3 \neq \{(0,0)\} \Rightarrow U_1 + U_2 + U_3$ No es suma directa

Another way:

Solución falsa

$$\left.\begin{array}{l} (1,1) = \underbrace{(1,0)}_{\in U_1} + \underbrace{(0,1)}_{\in U_2} + \underbrace{(0,0)}_{\in U_3} = \\ \quad = (2,0) + (0,2) + (-1,-1) \end{array}\right\}$$

No son únicos los sumandos de $U_1, U_2, U_3 \Rightarrow U_1 + U_2 + U_3$ no es suma directa.

www.simplyjarod.com

(67)

Las operaciones elementales entre filas y columnas no alteran el rango de la matriz.

A la fila n-ésima le restaremos n veces la primera, y en la matriz obtenida haremos lo mismo pero ahora restando a la fila n-ésima n veces la segunda. Lo obtenido será una matriz de cinco filas cuyas tres últimas serán nulas. Así pues el rango es 2.

Solución verdadera

(70)

Sea $f(x) = x^2 - x = x(x-1)$: $f(0)=0$, $f(1)=0$

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \frac{1}{2}\left[f(0)f(0) + f(1)f(1)\right] = \frac{1}{2}[0+0] = 0$$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\langle f(x), f(x)\rangle = 0 \\ \text{y sin embargo} \\ f(x) \neq \Omega\end{array}\right\} \Rightarrow$ No se trata de un producto escalar (ppdad 4 del pto escalar)

Solución falsa

(75)

$f_{\vec{v}} : E \to E$; $f_{\vec{v}}(\vec{x}) = \langle \vec{v}, \vec{x}\rangle \vec{v}$

$x \to \langle \vec{v}, \vec{x}\rangle \vec{v}$

$(x,y) \to \langle v, (x,y)\rangle v$

$\operatorname{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \langle v, (x,y)\rangle = 0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f = v^{\perp} \neq \{(0,0)\} \Rightarrow f$ No inyectiva

No inyectiva $\Rightarrow$ Solución falsa

www.simplyjarod.com

7. Preguntas tipo test

1.- [V] [F] Si la función $p \operatorname{nand} q$ está definida por la tabla

p	q	$p \operatorname{nand} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

entonces

$$p \vee q \Longleftrightarrow (p \operatorname{nand} p) \operatorname{nand} (q \operatorname{nand} q).$$

2.- [V] [F] La sentencia

$$\exists x \left(P(x) \Longrightarrow (Q(x) \vee R(x)) \right)$$

equivale lógicamente a

$$\neg \left(\forall x \ (P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge \neg R(x)) \right).$$

✓3.- [V] [F] Sea X un conjunto. Para cualesquiera A, B, C, D, subconjuntos de X, se cumple

$$(A \cap B \cap C) \cap (A \cap (D - B) \cap (D - C)) = \emptyset.$$

✓4.- [V] [F] Si X es un conjunto y A, B, C son subconjuntos de X, entonces

$$(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

5.- [V] [F] Sean A y B dos conjuntos, $\mathrm{Id}_A : A \longmapsto A$ la función identidad y $f : A \longmapsto B$ y $g : B \longmapsto A$ dos funciones. Si $(g \circ f) = \mathrm{Id}_A$, entonces $g = f^{-1}$.

✓6.- [V] [F] Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$. La función $f : A \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2$ es sobreyectiva.

7.- [V] [F] Sean $f : X \longmapsto Y$ una función entre los conjuntos X e Y.

$$\forall A \subset X \quad f^{-1}(f(A)) = A.$$

8.- [V] [F] Si $*$ representa la operación $x * y = x^y$, entonces el sistema algebraico $(\mathbb{N} - \{0\}, *)$ tiene elemento neutro.

9.- [V] [F] El predicado $\neg \exists x \ P(x) \Longrightarrow Q(x)$ equivale lógicamente a $\forall x \ P(x) \vee \neg Q(x)$.

✓10.- [V] [F] Si $f : \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, entonces $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$.

✓11.- [V] [F] Sean U y V dos subespacios vectoriales de dimensión finita del $\mathbb{K}$-espacio vectorial W. Si

$$\dim(U) = \dim(V) = \dim(U + V),$$

entonces $U = V$.

12.- [V] [F] Sea $(E, <\ ,\ >)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo y sean U, V subespacios vectoriales de E.

$$\{\vec{v} \in E : \vec{v} \perp (U + V)\} = \{\vec{v} \in E : \vec{v} \perp U\} + \{\vec{v} \in E : \vec{v} \perp V\}.$$

www.simplyjarod.com

13.- V F Existe un subespacio vectorial, V, de $\mathbb{R}^5$ tal que $\dim(V) = \dim\left(V^{\perp}\right)$.

14.- V F El sistema de vectores $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\}$ del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es libre si y solamente si $\{\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\}$ es libre.

15.- V F Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$, entonces $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = B$.

16.- V F La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es semejante a la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

17.- V F La matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ no es invertible si y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor de A.

18.- V F $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1.

19.- V F Sea $(E, <\ ,\ >)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo y $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in E$.

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \Longleftrightarrow \forall \vec{\mathbf{w}} \in E \ < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}} > = < \vec{\mathbf{v}}, \ \vec{\mathbf{w}} > .$$

20.- V F Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A = B \Longleftrightarrow \forall C \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \ AC = BC.$$

21.- V F El predicado $\neg\forall x\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$ equivale lógicamente al predicado $\exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$.

22.- V F Si todos los coeficientes de la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tienen parte imaginaria no nula, entonces A no puede tener autovalores reales.

23.- V F El conjunto de matrices formado por las soluciones de la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene estructura de espacio vectorial.

24.- V F Si $f : E \longmapsto E'$ es una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y H es un subespacio de E, entonces $\dim\big(f(H)\big) \leq \dim(H)$.

25.- V F El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1^k & 1^{k+1} & 1^{k+2} \\ (-2)^k & (-2)^{k+1} & (-2)^{k+2} \\ 3^k & 3^{k+1} & 3^{k+2} \end{pmatrix}$ es 3 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

26.- V F Dadas las funciones lineales $h : E \longmapsto E'$ y $f : E' \longmapsto E''$ entre los $\mathbb{K}$- espacios vectoriales E, E' y E'', se verifica

$$\mathrm{Img}(f \circ h) = \mathrm{Img}(f) \Longleftrightarrow h \text{ es sobreyectiva.}$$

27.- V F Si el conjunto de las soluciones del sistema de ecuaciones lineales $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ coincide con el conjunto de las soluciones del sistema de ecuaciones lineales $B\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, entonces $A = B$.

28.- V F Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A^{120} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

www.simplyjarod.com

29.- [V] [F] Sean U y V subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E. Si $U \cap V \neq \{\vec{0}\}$, entonces $U \cup V$ es un subespacio vectorial.

30.- [V] [F] Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son autovectores linealmente independientes de un endomorfismo f, entonces $f(\vec{\mathbf{u}})$ y $f(\vec{\mathbf{v}})$ son linealmente independientes.

31.- [V] [F] Si 0 es el único autovalor de la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$ (A es nilpotente).

32.- [V] [F] Sea V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Todo autovector $\vec{\mathbf{w}} \in V$ del endomorfismo $f : V \longmapsto V$ también es autovector del endomorfismo $cf : V \longmapsto V$.

33.- [V] [F] Si un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita no es inyectivo, entonces el término independiente de su polinomio característico es 0.

34.- [V] [F] Si V es un espacio vectorial real de dimensión n y $f : V \longmapsto V$ un endomorfismo, entonces la suma de las multiplicidades algebraicas de los autovalores de f es n.

35.- [V] [F] Toda matriz de rango máximo es diagonalizable.

36.- [V] [F] El endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (y, z, -y)$$

es diagonalizable.

37.- [V] [F] La aplicación $< \, , \, >: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que

$$< \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} >= a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$$

es un producto escalar.

38.- [V] [F] Existe una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} D.$$

39.- [V] [F] Sea D una forma diagonal de la matriz diagonalizable A. Si la matriz A no es invertible, entonces D no es invertible.

40.- [V] [F] Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión finita, n. Cualquier subconjunto de V formado por más de n vectores distintos es generador de V.

41.- [V] [F] Sea $f : X \longmapsto Y$ una aplicación entre los conjuntos X e Y y A y A' subconjuntos de Y, entonces $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') = f^{-1}(A \cap A')$.

42.- [V] [F] $\forall x \in X \ \Big((P(x) \Longrightarrow Q(x)) \wedge P(x) \Big) \Longrightarrow Q(x)$.

43.- [V] [F] Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. La dimensión del subespacio fila de A coincide con la dimensión del subespacio columna de A.

44.- [V] [F] Si V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión impar y $f : V \longmapsto V$ es una aplicación lineal, entonces $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Img}(f)$.

www.simplyjarod.com

45.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, entonces el rango de AA^{T} es 1.

46.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y A es invertible, entonces todas las submatrices cuadradas de A de orden $n-1$ son invertibles.

47.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, el sistema lineal $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ es compatible determinado si y solamente si rango(A) = rango $\left(A|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right)$.

48.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces los sistemas lineales $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tienen las mismas soluciones.

49.- [V] [F] Si V es un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longmapsto V$ una aplicación lineal, entonces $\mathrm{Img}(f \circ f) \subset \mathrm{Img}(f)$.

50.- [V] [F] El predicado $\neg\exists x\ \big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$ equivale lógicamente al predicado $\forall x\ \big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$.

51.- [V] [F] Si $f : X \longmapsto Y$ es una aplicación entre conjuntos y $B \subset Y$, entonces $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap f(X)$.

52.- [V] [F] Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ endomorfismos tales que $\dim\big(\mathrm{Ker}\,(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Img}\,(g)\big)$, entonces $\dim\big(\mathrm{Ker}\,(g)\big) = \dim\big(\mathrm{Img}\,(f)\big)$.

53.- [V] [F] Si el endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ tiene n autovalores distintos, entonces el rango de f es n.

54.- [V] [F] La matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es singular si y sólo si existe un autovalor de A, λ, tal que $\mathrm{Ker}(A)$ está contenido en el subespacio propio asociado a λ.

55.- [V] [F] Sea $(E, <\ ,\ >)$ un espacio vectorial euclídeo y $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in E$.
Si $\left\{\overrightarrow{\mathbf{w}} \in E :< \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} >= 0\right\} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{w}} \in E :< \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} >= 0\right\}$, entonces $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{v}}$.

56.- [V] [F] Las matrices cuadradas, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soluciones de la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forman un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

57.- [V] [F] El conjunto $H = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(-5) = 0\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial real de polinomios en la indeterminada x y con coeficientes reales, $\mathbb{R}[x]$.

58.- [V] [F] La matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una de las matrices de cambio de base entre las bases $B_1 = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ y $B_2 = \{1, x, x^2\}$ del espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales y grado menor que 2, $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

59.- [V] [F] La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{C})$ admite inversa por la izquierda.

60.- [V] [F] Existe un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Img}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| = 1\}$.

www.simplyjarod.com

61.- [V] [F] Si la matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es singular, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^p = 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

62.- [V] [F] $\forall x\ \exists y\ P(x,y) \Longrightarrow \exists y\ \forall x\ P(x,y)$.

63.- [V] [F] Si $U_1 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$ y $U_3 = \{(c,c) : c \in \mathbb{R}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$, entonces $U_1 + U_2 + U_3$ es suma directa.

64.- [V] [F] La dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita, V, coincide con el cardinal de un conjunto formado por el mayor número posible de vectores de V linealmente independientes.

65.- [V] [F] Si $f : E \longmapsto E'$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un sistema libre de E, entonces $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ es un sistema libre de E'.

66.- [V] [F] Sean U, V y W conjuntos, $f : U \longmapsto V$ y $g : V \longmapsto W$ funciones y $E = g(f(U))$. Si $g \circ f : U \longmapsto E$ es isomorfismo, entonces f y g son biyectivas.

67.- [V] [F] El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ es 2.

68.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ es una matriz obtenida al aplicar a la matriz A una operación elemental entre filas, entonces las columnas i y j de A son linealmente independientes si y sólo si las columnas i y j de B son linealmente independientes.

69.- [V] [F] Si λ_1 y λ_2 son autovalores distintos de la matriz A, entonces

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 \mathrm{Id}) = \emptyset.$$

70.- [V] [F] En el espacio vectorial real $\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \longmapsto \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, la operación

$$< f(x), g(x) >= \frac{1}{2}\big(f(0)g(0) + f(1)g(1)\big)$$

es un producto escalar.

71.- [V] [F] Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, F un subespacio vectorial de E y $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo, entonces

$$\dim\big(f^{-1}(F)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(F \cap \mathrm{Img}(f)\big).$$

72.- [V] [F] Si U, V y W son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : U \longmapsto V$ y $g : V \longmapsto W$ aplicaciones lineales, entonces

$$\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}\big(\mathrm{Ker}(g)\big).$$

73.- [V] [F] Si $(E, <>)$ es un espacio vectorial euclídeo y $\vec{\mathrm{v}} \in E$, entonces la aplicación $f_{\vec{\mathrm{v}}} : E \longmapsto E$ tal que

$$f_{\vec{\mathrm{v}}}(\vec{\mathrm{x}}) =< \vec{\mathrm{v}}, \vec{\mathrm{x}} > \vec{\mathrm{x}}$$

es inyectiva.

www.simplyjarod.com

74.- [V] [F] Sea X un conjunto tal que $\forall x \in X \ (P(x) \Longrightarrow Q(x))$ y sea $a \in X$. Si se verifica $\neg P(a)$, entonces necesariamente se verifica $\neg Q(a)$.

75.- [V] [F] Si $(E, <>)$ es un espacio vectorial euclídeo y $\vec{\mathbf{v}} \in E$, entonces la aplicación $f_{\vec{\mathbf{v}}} : E \longmapsto E$ tal que

$$f_{\vec{\mathbf{v}}}(\vec{\mathbf{x}}) =< \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{x}} > \vec{\mathbf{v}}$$

es inyectiva.

76.- [V] [F] Si U y V son subespacios vectoriales de un espacio vectorial E tales que $U \oplus V = E$, entonces $\forall \vec{\mathbf{v}} \in E \ (\vec{\mathbf{v}} \in U \vee \vec{\mathbf{v}} \in V)$.

77.- [V] [F] Sean A y B conjuntos y $f : A \longmapsto B$ y $g : B \longmapsto A$ funciones. Si $g \circ f = \mathrm{Id}_A$, entonces f es sobreyectiva.

78.- [V] [F] Si $\{\vec{\mathbf{v_1}}, \vec{\mathbf{v_2}}\}$ es un sistema libre del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E, $\vec{\mathbf{w}} \in E$ y $\vec{\mathbf{w}} \notin L\Big(\{\vec{\mathbf{v_1}}, \vec{\mathbf{v_2}}\}\Big)$, entonces $\{\vec{\mathbf{v_1}}, \vec{\mathbf{v_2}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ es un sistema libre.

79.- [V] [F] Existen matrices A, cuadradas, con coeficientes reales, invertibles y 2×2 tales que $A^{-1} = -A$.

80.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ es una matriz obtenida al aplicar a la matriz A una operación elemental entre filas, entonces las filas i y j de A son linealmente independientes si y sólo si las filas i y j de B son linealmente independientes.

81.- [V] [F] Todo subespacio vectorial, S, de un espacio vectorial de dimensión finita, E, es el núcleo de alguna aplicación lineal $f : E \longmapsto E$.

82.- [V] [F] Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $f \in \mathrm{End}(E)$ y $f^2 = f \circ f$, entonces

$$f^2 = 0 \Longleftrightarrow f(E) \subset \mathrm{Ker}(f).$$

83.- [V] [F] Si A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$, entonces B es invertible.

84.- [V] [F] Sean U, V y W subespacios del espacio vectorial euclídeo $(E, < \ , \ >)$. Si $U \perp V$ y $V \perp W$, entonces $U \perp W$.

85.- [V] [F] Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, S, $S' \subset E$ y $\vec{\mathbf{u}} \in E$. Si $L\Big(S \cup \{\vec{\mathbf{u}}\}\Big) = L\Big(S' \cup \{\vec{\mathbf{u}}\}\Big)$, entonces $S = S'$.

86.- [V] [F] Una función $f : X \longmapsto X$ es inyectiva si y sólo si $f\big(f^{-1}(X)\big) \subset X$.

87.- [V] [F] Si s filas de una matriz A son linealmente dependientes, entonces A contiene s columnas linealmente dependientes.

88.- [V] [F] Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz $A = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ B & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ verifica $A^2 = \mathrm{Id}_{2n}$.

89.- [V] [F] Sea $A \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{\mathbf{0}}\}$. Para cada $\vec{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{R})$, el sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ tiene una única solución.

90.- [V] [F] Todos los autovalores de una matriz cuadrada 2×2, simétrica y con coeficientes reales son números reales.

www.simplyjarod.com

91.- [V] [F] Si $f : E \longmapsto E$ es un endomorfismo y H un subespacio vectorial de E, entonces H es un autoespacio de f asociado a un autovalor $\lambda \neq 0$ si y sólo si $f(H) = H$.

92.- [V] [F] Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si U y V son dos autoespacios de A tales que $U \oplus V$, entonces A es diagonalizable.

93.- [V] [F] Sea $Q = \begin{pmatrix} \overrightarrow{q_1} & \overrightarrow{q_2} & \cdots & \overrightarrow{q_r} \end{pmatrix}$ una matriz real de orden $n \times r$ tal que $Q^{\mathrm{T}}Q = \mathrm{Id}_r$. La mínima distancia de $\overrightarrow{u} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ al subespacio $\mathrm{Col}(Q)$ es igual a

$$\sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2 - \sum_{i=1}^{r} < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{q_i} >^2}.$$

94.- [V] [F] Dada $f : X \longmapsto X$, se verifica que $f \circ f = f \Longleftrightarrow f = \mathrm{Id}_X$.

95.- [V] [F] Dadas las aplicaciones lineales $f : E \longmapsto E'$ y $g : E \longmapsto E'$ y el subespacio vectorial $H \subset E$, se verifica que $f(H) + g(H) = (f + g)(H)$.

96.- [V] [F] Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^2$ es sobreyectiva si y solo si las funciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son linealmente independientes, donde $\pi_1(x, y) = x$ y $\pi_2(x, y) = y$.

97.- [V] [F] Sean A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$, entonces A es invertible.

98.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $\overrightarrow{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ y $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y es invertible, entonces el sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ tiene solución si y sólo si el sistema $(P^{-1}AP)\overrightarrow{x} = P^{-1}\overrightarrow{b}$ tiene solución.

99.- [V] [F] Sea $f : E \longmapsto E$ un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\mathrm{Img}(f)$ es un autoespacio asociado a un autovalor distinto de 0, entonces f es diagonalizable.

100.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ verifica que existe n tal que $A^n = 0$, entonces 0 es el único autovalor de A.

101.- [V] [F] En el espacio vectorial euclídeo $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ con el producto escalar

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, \mathrm{d}x,$$

la norma del vector $f(x) = x$ es $\dfrac{2\pi^3}{3}$.

102.- [V] [F] Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $\mathrm{rg}(A) = m$, entonces existe $R \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ tal que $AR = \mathrm{Id}_n$.

103.- [V] [F] Sea A una matriz cuadrada de orden n. Los autovalores de A y A^{T} coinciden.

104.- [V] [F] Sea $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_r}\}$ un conjunto de vectores de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, E, y sea $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_r}\}$ el sistema obtenido al aplicar el método de **Gram-Schmidt** a S. Si $\overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{0}$, con $j > 1$, entonces el vector $\overrightarrow{u_j}$ depende linealmente de $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_{j-1}}\}$.

105.- [V] [F] Sea f una aplicación lineal entre los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales U y V. El sistema de vectores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_s}\} \subset U$ es libre si y sólo si $\left\{f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \ldots, f(\overrightarrow{u_s})\right\} \subset V$ es libre.

106.- [V] [F] Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $< , >$ un producto escalar en E y U y V dos subespacios vectoriales de E, entonces

$$U \subset V \Longrightarrow U^{\perp} \subset V^{\perp}.$$

www.simplyjarod.com

ETSI Telecomunicación
Febrero 1993

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Consideramos el $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathcal{F}(A,\mathbb{R}),+,\cdot)$ donde

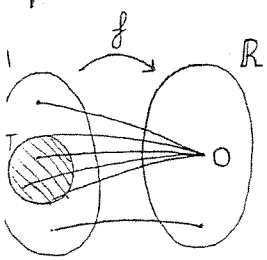
$$\mathcal{F}(A,\mathbb{R}) = (f : A \to \mathbb{R}),$$
$$\forall f,g \in \mathcal{F}(A,,\mathbb{R}),\quad \forall x \in A,\quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \text{ y}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R}),\ \forall x \in A,\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$\forall T \subseteq A$ definimos el conjunto $N(T) = \{ f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \mid \forall x \in T \quad f(x) = 0 \}$.

Sean $T, S \subseteq A$, $T \neq 0$, $S \neq 0$. Probar que:

1) $N(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$.
2) $N(S) \cap N(T) = N(S \cup T)$.
3) $S \subseteq T \Rightarrow N(T) \subseteq N(S)$
4) i) $N(T) \cap N(A-T) = \{0\}$ $\wedge^{ii)}$ $N(T) + N(A-T) = \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$

Las funciones f que pertenecen a $N(T)$ son



todas aquellas que se comportan como la del dibujo.

1-) Claramente $N(T) \subseteq \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$

Sea la función nula $\Omega : A \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow \Omega(x) = 0 \in \mathbb{R}$

Se ample que $\Omega \in N(T)$ ya que $\forall x \in T$, $\Omega(x) = 0 \in \mathbb{R}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in N(T)$ se cumple que $(f, g \in N(T))$

$\forall x \in T$, $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$

Por tanto $N(T) < \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$.

2-) Sea $f \in N(S) \cap N(T) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in N(S) \Rightarrow \forall x \in S \ f(x) = 0 \\ f \in N(T) \Rightarrow \forall x \in T \ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in S \cup T \ldots f(x) = 0 \Leftrightarrow f \in N(S \cup T)$

3-) Si $f \in N(T)$ entonces $\forall x \in T \ldots f(x) = 0$

Por tanto, como $S \subset T$ se cumple que $\forall x \in S \subset T \ldots f(x) = 0 \Rightarrow f \in N(S)$

4-) i) $\underline{\overset{\Omega}{\{0\}} \subseteq N(T) \cap N(A-T)}$

Claramente ya que $N(T) \cap N(A-T) < \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$

$\underline{N(T) \cap N(A-T) \subseteq \overset{\Omega}{\{0\}}}$

Sea $f \in N(T) \cap N(A-T) \Rightarrow \begin{cases} f \in N(T) \Rightarrow \forall x \in T \ldots f(x) = 0 \\ f \in N(A-T) \Rightarrow \forall x \in A-T \ldots f(x) = 0 \end{cases}$ luego $\forall x \in A \ldots f(x) = 0 \in \mathbb{R}$. luego $f =$

$\forall x \in T \cup (A-T)$

www.simplyjarod.com

ii)

$N(T) + N(A-T) \subseteq \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$

Claramente ya que $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ es el espacio total

$\mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \subseteq N(T) + N(A-T)$

Sea $f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$

Consideremos ahora $h: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in T \\ f(x) & \text{si } x \in A-T \end{cases}$ y $p: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A-T \\ f(x) & \text{si } x \in T \end{cases}$

Claramente se cumple que $h \in N(T)$ y $p \in N(A-T)$

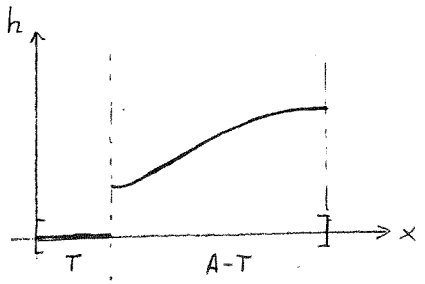
Además se cumple que $f = h + p$ ya que el dominio es A y el codominio es $\mathbb{R}$ para ambos miembros de la igualdad y además:

$$\forall x \in A \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in T \Rightarrow (h+p)(x) = h(x) + p(x) = 0 + f(x) = f(x) \\ \text{ó} \\ x \in A-T \Rightarrow (h+p)(x) = h(x) + p(x) = f(x) + 0 = f(x) \end{array} \right\} \text{ luego } \forall x \in A,\ (h+p)(x) = f(x)$$

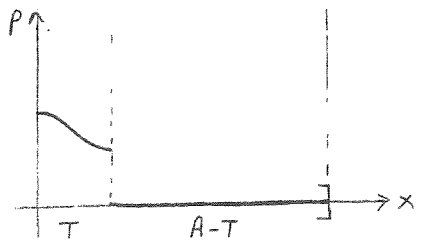
Conclusión: hemos logrado descomponer la f de la forma: $f = \overset{\in N(T)}{h} + \overset{\in N(A-T)}{p}$ luego $f \in N(T) + N(A-T)$ por definición de suma de subespacios vectoriales.

Ejemplo gráfico con $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$

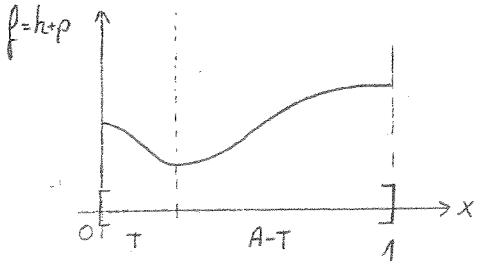
$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x)$



+



=



Sea el cuerpo $\mathbb{K}=\{\bar{0},\bar{1}\}$

www.simplyjarod.com

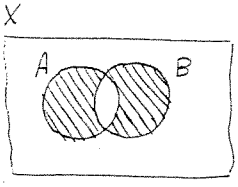
ETSI Telecomunicación
Febrero 1993

Sea un conjunto $X \neq \varnothing$. Consideramos el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $(P(X), \Delta, \cdot)$ donde:

$$\Delta : P(X)\times P(X) \to P(X) \qquad (A, B) \to A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$$

$$\cdot : \mathbb{K}\times P(X) \to P(X) \qquad (k, B) \to k\cdot A = \begin{cases} A & si\ k=\bar{1} \\ \varnothing & si\ k=\bar{0} \end{cases}$$

$A\Delta B$



Si C es un subconjunto de X, definimos $f_C : P(X) \to P(X)$
$A \to f_C(A) = A\cap C$

Probar que:

1) $\forall C \in P(X)$, $f_C : P(X) \to P(X)$ es un endomorfismo.

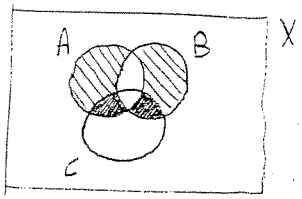
2) $\mathrm{Im}(f_C) = \{A \in P(X) / A \subset C\}$

3) La aplicación $F : P(X) \to \mathrm{End}(P(X))$ es un monomorfismo.
$C \to F(C) = f_C$

Para empezar: Sabemos que $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ es grupo abeliano y ϕ es el neutro de Δ.

1) f_C es lineal

$\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ .. $f_C(A\Delta B) = f_C(A)\Delta f_C(B)$. En efecto,



$f_C(A\Delta B) = f_C(A)\Delta f_C(B) \Rightarrow (A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$

Demostrémoslo mediante cálculo proposicional:

$x\in(A\Delta B)\cap C \Leftrightarrow [(x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\in B \wedge x\notin A)] \wedge x\in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B \wedge x\in C)\vee(x\in B \wedge x\notin A \wedge x\in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A\cap C \wedge x\notin B\cap C)\vee(x\in B\cap C \wedge x\notin A\cap C)$

$\Leftrightarrow [x\in(A\cap C)-(B\cap C)]\vee[x\in(B\cap C)-(A\cap C)] \Leftrightarrow x\in\left((A\cap C)-(B\cap C)\right)\cup\left((B\cap C)-(A\cap C)\right) \Leftrightarrow x\in(A\cap C)\Delta(B\cap C)$

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall A\in\mathcal{P}(X)$ .. $f_C(\lambda A) = \lambda f_C(A)$. En efecto,

Si $\lambda=\bar{1}$ $\quad f_C(\bar{1}A) = f_C(A) = A\cap C$
$\bar{1}f_C(A) = \bar{1}\cdot(A\cap C) = A\cap C$

Si $\lambda=\bar{0}$ $\quad f_C(\lambda A) = f_C(\phi) = \phi\cap C = \phi$
$\lambda f_C(A) = \lambda\cdot A = \phi$

Por tanto queda demostrado que $f_C : P(X) \to P(X)$ es homomorfismo y, por tanto, endomorfismo.

www.simplyjarod.com

2) $Im(f_C) = \{A \in \mathcal{P}(X) \,/\, A \subset C\} = \mathcal{P}(C)$

$\boxed{\subset}$ Sea $T \in Im(f_C)$ .. $\exists B \in \mathcal{P}(X) / f_C(B) = T$ Ahora bien $f_C(B) = B \cap C = T$ Por tanto $T \subset C$ luego $T \in \mathcal{P}(C)$

$\boxed{\supset}$ Sea $T \in \mathcal{P}(C)$, considerando $T \in \mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{P}(X)$) se cumplirá $f_C(T) = T \cap C \overset{T \subseteq C}{=} T$, luego $T \in Im(f_C)$

3) $F: \mathcal{P}(X) \longrightarrow End(\mathcal{P}(X))$
$C \longrightarrow F(C) = f_C$

[F es una auténtica aplicación ya que $\forall C \in \mathcal{P}(X)$, f_C es única y, según lo demostrado en 1) $f_C \in End(\mathcal{P}(X))$.

F es lineal

$\forall C, D \in \mathcal{P}(X)$ .. $F(C \Delta D) = F(C) + F(D)$. En efecto

$F(C\Delta D) = f_{C\Delta D} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$A \longrightarrow f_{C\Delta D}(A) = A \cap (C \Delta D)$

Por la propiedad distributiva de $\cap$ respecto de Δ demostrada en 1.

$F(C) + F(D) = f_C + f_D : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$A \longrightarrow (f_C + f_D)(A) = \underbrace{f_C(A)}_{\in \mathcal{P}(X)} \Delta \underbrace{f_D(A)}_{\in \mathcal{P}(X)} = (A \cap C) \Delta (A \cap D)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall C \in \mathcal{P}(X)$ .. $F(\lambda C) = \lambda F(C)$. En efecto,

Si $\lambda = \bar{1} \Rightarrow F(\lambda C) = \lambda F(C)$ ya que
$F(\lambda C) = f_{\lambda C} = f_C : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$A \longrightarrow A \cap C$

$\lambda F(C) = \lambda f_C : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$A \longrightarrow \lambda f_C(A) = \lambda(A \cap C) = A \cap C$

Si $\lambda = \bar{0} \Rightarrow F(\lambda C) = \lambda F(C)$ ya que
$F(\lambda C) = f_{\lambda C} = f_\emptyset : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$A \longrightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$

$\lambda F(C) = \lambda f_C : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$A \longrightarrow \lambda f_C(A) = \lambda(A \cap C) = \emptyset$

F es inyectiva

Demostraremos que $Ker(F) = \{\emptyset\}$

$\boxed{\supset}$ Se cumple por ser $Ker(F) < \mathcal{P}(X)$

$\boxed{\subset}$ Sea $C \in Ker(F)$ .. $F(C) = f_C = \Omega : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$A \longrightarrow f_C(A) = \Omega(A) = A \cap C = \emptyset$

y de aquí se deduce que $C = \emptyset$ ya que $\emptyset$ es el único conjunto que intersecado con cualquier otro sale $\emptyset$. Por tanto $C \in \{\emptyset\}$

ETSI Telecomunicación
Septiembre 1995

Sea $(E,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Se recuerda que dos subespacios vectoriales H_1 y H_2 de E son ortogonales si $\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2 \quad <x,y>=0$.
Probar que:

1) Si H_1 y H_2 son subespacios ortogonales entonces $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.
2) Si f es un endomorfismo de E satisface la condición:
$$\forall u \in E \ \ \|f(u)\| = \|u\|$$
entonces f transforma subespacios ortogonales en subespacios ortogonales.
3) Si f es un endomorfismo de E que satisface la condición:
$$\forall x,y \in E \qquad <f(x),y> = <x,f(y)>$$
y u es un autovector de f entonces $\forall v \in E,\ <v,u>=0 \Rightarrow <f(v),u>=0$

1) si H_1 y H_2 son subespacios ortogonales $\Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{0_E\}$
Se trata de demostrar la igualdad entre los subespacios $H_1 \cap H_2$ y $\{0_E\}$, lo que se consigue demostrando la dobre inclusión.

(I) $\{0_E\} \subset H_1 \cap H_2 \rightarrow$ Se cumple siempre (ortogonales o no)

$\left.\begin{array}{l} H_1 \text{ subespacio} \Rightarrow 0_E \in H_1 \\ H_2 \text{ subespacio} \Rightarrow 0_E \in H_2 \end{array}\right\} 0_E \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow$ Todo elemento de $\{0_E\}$ pertenece a $H_1 \cap H_2 \Rightarrow \{0_E\} \subset H_1 \cap H_2$

(II) $H_1 \cap H_2 \subset \{0_E\}$
Se trata de ver que todo elemento de $H_1 \cap H_2$ pertenece a $\{0_E\}$ (luego, dicho elemento será 0_E).

Sea $u \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \begin{cases} u \in H_1: \text{Como } H_1 \text{ y } H_2 \text{ son ortogonales} \\ \quad <\underset{\in H_1}{x}, \underset{\in H_2}{y}> = 0,\ \forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2 \\ u \in H_2: \text{En el anterior } \forall y \in H_2 \\ \quad \text{podemos meter } u = y \\ \quad <x,u> = 0,\ \forall x \in H_1 \Rightarrow u = 0_E \end{cases}$

2) $f: E \rightarrow E$ endomorfismo: $\|f(u)\| = \|u\|$
f transforma subespacios ortogonales en subespacios ortogon.
Sean H_1 y H_2 dos subespacios ortogonales.
Queremos ver que $f(H_1)$ y $f(H_2)$ también son ortogonales.
Pretendemos pues ver que todo elemento $u \in f(H_1)$ es ortogonal a todo elemento $v \in f(H_2)$. $(<u,v>=0)$

$u \in f(H_1) \Rightarrow \exists x \in H_1 : f(x) = u$
$v \in f(H_2) \Rightarrow \exists y \in H_2 : f(y) = v$

$\|f(x)\| = \|x\|$ hipótesis

$<u,v> = <f(x), f(y)> = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\|f(x)+f(y)\|^2}_{\|f(x+y)\|^2} - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right] = <x,y> = 0$

$<a,b> = \frac{1}{2}\left[\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right] \leftarrow \|a+b\|^2 = <a+b,a+b> = <a,a> + <a,b> + <b,a> + <b,b>$
$= \|a\|^2 + 2<a,b> + \|b\|^2$

www.simplyjarod.com

c)

$$\langle f(v), u \rangle \underset{\text{hipótesis}}{=} \langle v, f(u) \rangle \underset{u \text{ autovector}}{=} \langle v, \lambda u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle \underset{\text{hipótesis}}{=} \lambda \cdot 0 = 0$$

ETSI Telecomunicación Febrero 1996

Una derivación en el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes complejos $\mathbb{C}[x]$ es una aplicación $D:\mathbb{C}[x]\to\mathbb{C}[x]$ que satisface las dos propiedades siguientes:

$$\text{i)}\quad \forall p,q\in\mathbb{C}[x],\ D(p+q)=D(p)+D(q)$$
$$\text{ii)}\quad \forall p,q\in\mathbb{C}[x], D(p\cdot q)=p\cdot D(q)+q\cdot D(p)$$

Por ejemplo, la aplicación $\frac{d}{dx}:\mathbb{C}[x]\to\mathbb{C}[x]$ que a cada polinomio le asocia su polinomio derivado, es una derivación que además satisface otras propiedades adicionales, como por ejemplo, $\frac{d}{dx}(x)=1 \ \wedge\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right)=2$. Siendo D una derivación en $\mathbb{C}[x]$, probar que:

a) $D(0)=0 \ \wedge\ D(1)=0$

b) Siendo $\alpha\neq 0$ un polinomio constante, obtener $D(\alpha^{-1})$ en función de $D(\alpha)$.

c) Probar las siguientes propiedades: 1. $\forall n\in\mathbb{N},\ D(n)=0$

2. $\forall n\in\mathbb{N},\ D\left(x^n\right)=nx^{n-1}D(x)$

d) La expresión de $D\left(D(x^2)\right)$ depende de $D\left(D(x)\right)$ y de $D(x)$. Obtener dicha expresión.

e) Demostrar que el conjunto $\left\{D\in F\left(\mathbb{C}[x],\mathbb{C}[x]\right)/D\ \textit{es un derivacion}\right\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{C}[x]$ en $\mathbb{C}[x]$, $F\left(\mathbb{C}[x],\mathbb{C}[x]\right)$.

f) Si D y D' son derivaciones. ¿Es $D\circ D'$ una derivación? Pruébese o encuéntrese un contraejemplo.

En el segundo igual aplicamos la propiedad i) de derivación

En el segundo igual aplicamos la propiedad ii) de derivación

En la segunda implicación aplicamos la propiedad ii) de derivación

a)

- $D(0)=D(0+0)=D(0)+D(0)\Rightarrow D(0)=D(0)+D(0)\Rightarrow D(0)-D(0)=D(0)\Rightarrow D(0)=0$
- $D(1)=D(1\cdot 1)=1\cdot D(1)+1\cdot D(1)=D(1)+D(1)\Rightarrow D(1)=D(1)+D(1)\Rightarrow D(1)-D(1)=D(1)\Rightarrow D(1)=0$

b) Partimos de lo ya demostrado en el apartado a):

$$D(1)=0\ \Rightarrow\ D\left(\alpha\alpha^{-1}\right)=0\ \Rightarrow\ \alpha D\left(\alpha^{-1}\right)+\alpha^{-1}D(\alpha)=0\ \Rightarrow\ \alpha D\left(\alpha^{-1}\right)=-\alpha^{-1}D(\alpha)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ D\left(\alpha^{-1}\right)=-\alpha^{-2}\cdot D(\alpha)$$

c) Demostramos ambas propiedades por inducción:

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ D(n)=0$

<u>Base:</u> Para $n=1$ se cumple que $D(1)=0$ (probado en el apartado a)).

<u>Hipótesis:</u> Supongamos que $D(n)=0$ es cierto.

<u>Paso:</u> $D(n+1)=D(n)+D(1)=0+0=0$

2. $\forall n\in\mathbb{N},\ D\left(x^n\right)=nx^{n-1}\cdot D(x)$

<u>Base:</u> Para $n=1$ se cumple que $D(x^1)=1\cdot x^{1-1}\cdot D(x)=x^0\cdot D(x)=D(x)$

<u>Hipótesis:</u> Supongamos que $D\left(x^n\right)=nx^{n-1}D(x)$ es cierto.

<u>Paso:</u> $D\left(x^{n+1}\right)=D\left(x\cdot x^n\right)=xD\left(x^n\right)+x^nD(x)=x\left(nx^{n-1}D(x)\right)+x^nD(x)=$

$$=nx^n\cdot D(x)+x^nD(x)=(nx^n+x^n)\cdot D(x)+D(x)=(n+1)x^nD(x)$$

En el primer paso aplicamos el resultado del apartado c2) y en el segundo la propiedad ii) de derivación

d)

$$D\left(D\left(x^2\right)\right) = D\left(2x\left(Dx\right)\right) = 2x\cdot D\left(D\left(x\right)\right) + D\left(x\right)\cdot D\left(2x\right) = 2x\,D\left(D\left(x\right)\right) + D\left(x\right)\cdot D\left(x+x\right) =$$
$$= 2xD\left(D\left(x\right)\right) + D\left(x\right)\left(D\left(x\right)+D\left(x\right)\right) = 2x\,D\left(D\left(x\right)\right) + 2\left(D\left(x\right)\right)^2$$

e)

Sean D y D' derivaciones. Tenemos que comprobar que $D + D'$ es una derivación.
Para comprobar que la aplicación $D + D'$ es una derivación tenemos que ver si cumple las dos propiedades i) y ii):

i) $\forall p,q \in \mathbb{C}[x]$,

$$\left(D+D'\right)\left(p+q\right) = D\left(p+q\right) + D'\left(p+q\right) = D\left(p\right) + D\left(q\right) + D'\left(p\right) + D'\left(q\right) =$$
$$= \left(D+D'\right)\left(p\right) + \left(D+D'\right)\left(q\right)$$

ii) $\forall p,q \in \mathbb{C}[x]$,

$$\left(D+D'\right)\left(p\cdot q\right) = D\left(p\cdot q\right) + D'\left(p\cdot q\right) = \left[pD\left(q\right) + qD\left(p\right)\right] + \left[pD'\left(q\right) + qD'\left(p\right)\right] =$$
$$= pD\left(q\right) + pD'\left(q\right) + qD\left(p\right) + qD'\left(p\right) = p\left(D+D'\right)\left(q\right) + q\left(D+D'\right)\left(p\right)$$

Sean ahora D una derivación y $\alpha \in \mathbb{C}$. Veamos que αD es una derivación.
Para comprobar que la aplicación αD es una derivación tenemos que ver si cumple las dos propiedades i) y ii):

i) $\forall p,q \in \mathbb{C}[x]$, $\left(\alpha D\right)\left(p+q\right) = \alpha D\left(p+q\right) = \alpha\left(D\left(p\right) + D\left(q\right)\right) = \left(\alpha D\left(p\right) + \alpha D\left(q\right)\right)$

ii) $\forall p,q \in \mathbb{C}[x]$, $\left(\alpha D\right)\left(p\cdot q\right) = \alpha D\left(p,q\right) = \alpha\left(pD\left(q\right) + qD\left(p\right)\right) = p\left(\alpha D\right)\left(q\right) + q\left(\alpha D\right)\left(p\right)$

e) Si D y D' son derivaciones. ¿Es $D \circ D'$ una derivación?

La respuesta es que no. El contrajemplo es el siguiente:

Sea $\frac{d}{dx} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$, la derivación usual de polinomios (que viene en en enunciado).

Según sabemos:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right) = 2 \text{ (viene como dato en el enunciado).}$$

pero, sin embargo:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x\cdot x\right) = x\frac{d^2}{dx^2}\left(x\right) + x\frac{d^2}{dx^2}\left(x\right) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(x\right)\right) + x\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(x\right)\right) =$$
$$= x\frac{d}{dx}\left(1\right) + x\frac{d}{dx}\left(1\right) = x\cdot 0 + x\cdot 0 = 0$$

ETSI Telecomunicación
Febrero 1999

a) Comprobar que toda matriz cuadrada con elementos reales, A, de orden dos, satisface a su polinomio característico igualado a cero.

b) Se considera el subespacio vectorial engendrado por las sucesivas potencias de una matriz cuadrada de orden dos con elementos reales $I_2, A, A^2, A^3 \ldots$. Determinar la dimensión y una base del subespacio.

a) Una matriz de dos filas y dos columnas satisface su polinomio característico igualado a cero.

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$ una matriz de 2×2

$\boxed{\text{Su polinomio característico}}$ será

$$\boxed{p(\lambda) = |A - \lambda I|} = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

El polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)\cdot 1$$

Si la matriz A satisface su polinomio característico igualado a cero es porque sustituyendo λ por A en dicho polinomio e igualando a cero se cumple todo correctamente.

$$p(\lambda \equiv A) = 0 \Leftrightarrow A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\cdot \overset{Id}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)Id = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} +$$

$$+ (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ elemento a elemento vemos que se cumple

b) El subespacio vectorial engendrado por las sucesivas potencias de A ($A^0 = Id, A, A^2, A^3, A^4 \ldots$) es el formado por todos los elementos que pueden escribirse como combinación lineal de dichas potencias de A (es decir, por elementos de la forma $\alpha_0 Id + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 \ldots$)

Dicho subespacio se representa como $\mathcal{L}\{Id, A, A^2, A^3 \ldots\}$

Lo anterior nos indicaría que la base es $\{Id, A, A^2, A^3 \ldots\}$ luego la dimensión sería ∞ (∞ elementos)

Para evitar que la dimensión sea ∞, sospechamos que alguna de las potencia de A dependen linealm. de otras, en cuyo caso serán eliminadas.

www.simplyjarod.com

apartado a: $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)Id = 0$

$A^2 = (a+d)A + (ad-bc)Id \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : A^2 = \alpha A + \beta Id$

$\Rightarrow A^2$ depende linealm. de A y de Id

A^2 puede ser eliminada de la supuesta base anterior

$\mathcal{L}\{Id, A, A^2, A^3 \dots\} = \mathcal{L}\{Id, A, A^3, A^4 \dots\}$

Sospechamos que esta dependencia lineal le ocurre también a A^3, A^4, A^5. Para demostrarlo, aplicamos inducción.

Teorema de inducción

paso 1: comprobamos que A^n depende linealmente de Id y de A para algún valor concreto de $n \in \mathbb{N}$

$A^2 = (a+d)A + (ad-bc)Id \Rightarrow A^2$ depende de A y Id

paso 2: afirmamos que la condición que queremos demostrar (A^n depende linealmente de Id y de A $\forall n \geq 2$) se cumple para algún $n_0 \geq 2$

$\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : A^{n_0} = \alpha A + \beta Id$ (A^{n_0} d. l. de A y Id)

Será empleado en el paso 3

paso 3: demostramos que la condición que deseamos verificar se cumple para $n_0 + 1$

Es decir, buscamos ver que $\exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R} : A^{n_0+1} = \gamma A + \delta Id$ (A^{n_0} d. l. de Id y A)

$$A^{n_0+1} = \underbrace{A^{n_0}}_{\alpha A + \beta Id} A = (\alpha A + \beta Id) \cdot A = \alpha \underbrace{A^2}_{(a+d)A + (ad-bc)Id} + \beta A =$$

$$= \alpha\left((a+d)A + (bc-ad)Id\right) + \beta A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{n_0+1} = \underbrace{\left(\alpha(a+d) + \beta\right)}_{\gamma} A + \underbrace{\left(\alpha(bc-ad)\right)}_{\delta} Id \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R} : A^{n_0+1} = \gamma A + \delta Id \Rightarrow A^{n_0+1}$ d. l. de A e Id

$\Longrightarrow A^n$ depende linealmente de Id y A $\forall n \geq 2$

A^n puede ser eliminado de $\mathcal{L}\{Id, A, A^2, A^3 \dots\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{Id, A, A^2 \dots\} = \mathcal{L}\{Id, A\}$

su base es $\{Id, A\} \Rightarrow \dim = 2$

www.simplyjarod.com

Sea E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión n. Sea una base de E $B = \{e_1, \dots, e_n\}$.
Se considera la aplicación lineal $f: E \to E$ definida por:

$$f(e_i) = e_{i+1} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n-1 \qquad \text{y} \qquad f(e_n) = 0$$

Determinar razonadamente:

a) Si f es o no automorfismo (aplicación lineal y biyectiva cuyo espacio origen y espacio final es el mismo).

b) Si f no es endomorfismo (aplicación lineal cuyo espacio origen y espacio final es el mismo) alterar la definición de f hasta convertirlo en endomorfismo y obtener, en cualquier caso, la matriz asociada.

c) Calcular la matriz asociada a f^n (composición de f n veces) e interpretar su significado.

a) $f: E \to E$

Tenemos los transformados de una base:

$f(e_1) = e_2$

$f(e_2) = e_3$

$\vdots$

$f(e_{n-1}) = e_n$

$f(e_n) = 0$ luego $e_n \in \ker(f) \Leftrightarrow \ker f \neq \{0\} \Leftrightarrow f$ no inyectiva $\Leftrightarrow$ $\boxed{f \text{ no es automorfismo}}$

b)

f es un endomorfismo!!! (no hace falta hacer nada)

Al pedirme la matriz asociada y no concretar base de referencia elegimos por comodidad B:

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \dots + 0 \cdot e_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ f(e_{n-1}) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_n \\ f(e_n) = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

www.simplyjarod.com

c)

$$f^2 : E \longrightarrow E$$

$$e_1 \longrightarrow f^2(e_1) = f(f(e_1)) = f(e_2) = e_3$$
$$e_2 \longrightarrow f^2(e_2) = f(f(e_2)) = f(e_3) = e_4$$
$$\vdots$$
$$e_{n-2} \longrightarrow f^2(e_{n-2}) = f(f(e_{n-2})) = f(e_{n-1}) = e_n$$
$$e_{n-1} \longrightarrow f^2(e_{n-1}) = f(f(e_{n-1})) = f(e_n) = 0_E$$
$$e_n \longrightarrow f^2(e_n) = f(f(e_n)) = f(0) = 0_E$$

$$M_B^B(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(M_B^B(f)\right)^2$$

$$f^{n-1} : E \longrightarrow E$$

$$e_1 \longrightarrow f^{n-1}(e_1) = e_n$$
$$e_2 \longrightarrow f^{n-1}(e_2) = 0$$
$$\vdots$$
$$e_n \longrightarrow f^{n-1}(e_n) = 0$$

$$M_B^B(f^{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(M_B^B(f)\right)^{n-1}$$

En general se cumple que:

$$f^i : E \longrightarrow E$$
$$e_1 \longrightarrow e_{1+i}$$
$$\vdots$$
$$e_{n-i} \longrightarrow e_n$$
$$e_{n-i+1} \longrightarrow 0$$
$$e_n \longrightarrow 0$$

Y por último:

$$f^n : E \longrightarrow E$$
$$e_1 \longrightarrow 0$$
$$\vdots$$
$$e_n \longrightarrow 0$$

$$M_B^B(f^n) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (0) = \left(M_B^B(f)\right)^n$$

$f^n = 0 = \Omega$ es el homomorfismo nulo

Lo que sucede es que f es un endomorfismo nilpotente de índice de nilpotencia n cuya matriz $M_B^B(f)$ es nilpotente de orden de nilpotencia n.

ETSI Telecomunicación
Septiembre 2000

Si consideramos en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ sus estructuras habituales de $\mathbb{R}$-e.v. y la aplicación lineal de $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$M_{B_2}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con B_3 y B_2 las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Siendo $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,1),(0,1)\}$, obtener las matrices

$$M_{B_2}^{B}(f),\quad M_{B'}^{B_3}(f),\quad M_{B'}^{B}(f)$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$f(x,y,z) = (y+2z,\ 2x+y+z)$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$ matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de los espacios de salida ($\mathbb{R}^3$) y de llegada ($\mathbb{R}^2$)

$f(1,0,0)$ $f(0,1,0)$ $f(0,0,1)$

Problema estrella cambios de bases

a) matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ del espacio de salida ($\mathbb{R}^3$) y respecto de la canónica del espacio de llegada ($\mathbb{R}^2$)

$B_3 \xrightarrow{M_{B_2}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} ②} B_2$

canónica de $\mathbb{R}^3$ $\to\to\to$ canónica de $\mathbb{R}^2$

① $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$

sus columnas son los elem. de B (Matriz del cambio de base que transforma coordenadas referidas a B en coordenadas referidas a B_3)

$$\boxed{M_{B_2}^{B}(f) = \overset{②}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \overset{①}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

* colocar en orden inverso a como te las encuentras

si el camino negro es de sentido contrario al azul: se pone la matriz inversa.

www.simplyjarod.com

b) Matriz asociada a f respecto de la base canónica del espacio de salida ($\mathbb{R}^3$) y respecto $B' = \{(1,1),(0,1)\}$ del espacio de llegada ($\mathbb{R}^2$)

$$\begin{tikzcd}
B_3 \arrow[r, "M_{B_2}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, shift right=3ex] \arrow[r, shift left=3ex] & B_2 \arrow[d, shift right=3ex] \\
B' \arrow[u, shift right=3ex] \arrow[u, shift left=3ex] &
\end{tikzcd}$$

(canónica de $\mathbb{R}^3$) (canónica de $\mathbb{R}^2$)

flechas siempre $\rightarrow$ y $\uparrow$ nunca $\leftarrow$ ó $\downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sus columnas son los elmentos de B' (Matriz del cambio de base que transforma coordenadas referidas a B' en coordenadas referidas a B_2

Inversa!! por ser el camino negro de sentido contrario al azul

$$M_{B'}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{B'}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

c) Matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1,1,1),(0,1,1)(0,0,1)\}$ del espacio de salida ($\mathbb{R}^3$) y respecto de la base $B' = \{(1,1)(0,1)\}$ del espacio de llegada ($\mathbb{R}^2$)

$$\begin{tikzcd}
B_3 \arrow[r, "M_{B_2}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, shift right=3ex] \arrow[r, shift left=3ex] & B_2 \arrow[d, shift right=3ex] \\
B \arrow[u, shift right=3ex] \arrow[u, shift left=3ex] \arrow[u, shift left=6ex] \arrow[u, shift left=9ex] \arrow[r] & B' \arrow[u, shift right=3ex] \arrow[u, shift left=3ex]
\end{tikzcd}$$

(canónica de $\mathbb{R}^3$) (canónica de $\mathbb{R}^2$)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{M_{B'}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

www.simplyjarod.com

ETSI Telecomunicación
Febrero 2001

Se define la aplicación lineal

espacio salida — espacio llegada

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \to (x,y,-x-y)$$

Se pide:

1. Determinar $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
2. Obtener las dimensiones y bases de $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
3. Encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores de $\ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Determinar razonadamente si f puede ser un automorfismo (aplicación lineal y biyectiva).
5. Obtener la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
6. Calcular sus valores y vectores propios.
7. Obtener $M_B(f)$ más simple indicando respecto a qué base (la matriz diagonal o de Jordan).

Se trata de un criterio seguido para transformar vectores de tres coordenadas en vectores de tres coordenadas.

Ej: $(1,2,3) \longrightarrow f(1,2,3) = (1,2,-3)$
$(0,1,2) \longrightarrow f(0,1,2) = (0,1,-1)$

5. Matriz asociada a la aplicación f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

es aquella cuyas columnas son las imágenes por f de los elementos de la base canónica del espacio de salida $\mathbb{R}^3$ referidos a la base canónica del espacio de llegada $\mathbb{R}^3$.

Espacio de salida: $\mathbb{R}^3$

Base canónica del espacio de salida: $B^{\mathbb{R}^3}_{can} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

1ª columna: Imagen de $(1,0,0) = f(1,0,0) = (1,0,-1)$
2ª columna: Imagen de $(0,1,0) = f(0,1,0) = (0,1,-1)$
3ª columna: Imagen de $(0,0,1) = f(0,0,1) = (0,0,0)$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA 1: la cantidad de columnas coincide con la dimensión del espacio de salida y la cantidad de filas con la dim. del de llegada

NOTA 2: Si nos pidieran calcular la matriz respecto de otra base distinta de la canónica, tendríamos que multiplicar la matriz por otra convenientemente hallada (sep-00, sept-09)

NOTA 3: cuando transformemos elementos y las imágenes sean polinomios, es evidente que las imágenes no se pueden poner en matrices por ser polinomios, salvaremos el problema refiriendo el polinomio a la base usual del espacio convenido (feb-2006, ej.2). $\Rightarrow -1(3)+(1)x + 0x^2 \to (-1,1,0)$

NOTA 4: significado de la matriz:

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \to (x,y,-x-y)$

$$(x,y,z) \longrightarrow M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, -x-y)$$

$$f(x,y,z) = M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

www.simplyjarod.com

1.
2. → Núcleo de la aplicación f:

Es el subespacio contenido en el espacio de salida formado por todos los elementos cuya imagen es el neutro del espacio de llegada:

$$\text{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = \vec{0}_{\text{Espacio llegada}}\}$$

espacio salida

→ Imagen de la aplicación f:

Es el subespacio contenido en el espacio de llegada formado por todos los elementos para los cuales existe algún otro elemento en el espacio de salida de forma que la imagen de este último es igual al primero:

$$\text{Im}(f) = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } f(x,y,z) = (u,v,w)\}$$

$$\dim\left(\begin{smallmatrix}\text{Espacio}\\ \text{salida}\end{smallmatrix}\right) = (\dim(\text{Ker}(f))) + (\dim(\text{Im}(f)))$$

Núcleo →

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = (\dim(\text{Ker}(f))) + (\dim(\text{Im}(f)))$$

$$\boxed{\text{Ker}(f)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,-x-y) = (0,0,0)\}$$

$$= \{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0,\ y=0,\ -x-y=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0,\ y=0\}$$

$$= \boxed{\{(0,0,\alpha) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{nº ec. indep.} = \text{nº parámetros} = 3-2 = 1$$

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = 1}$$

Las bases de Ker tienen un elemento: $\{(0,0,1)\}$

Imagen →

$$\dim\left(\begin{smallmatrix}\text{Espacio}\\ \text{salida}\end{smallmatrix}\right) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 1 + \dim(\text{Im}(f))$$

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = 3-1 = 2} \Rightarrow$$ Las bases de $\text{Im}(f)$ tienen 2 elementos

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{nº ec. indep.} = 2 = 3 - \text{ec. libres}$$; $\text{Im}(f)$ necesita una ecuación

$$f(x,y,z) = (\underset{u}{x}, \underset{v}{y}, \underset{w}{-x-y}) \Rightarrow w = -u-v \Rightarrow u+v+w=0$$

$$\boxed{\text{Im}(f)} = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u+v+w=0\}$$

$$= \boxed{\{(\alpha,\beta,-\alpha-\beta) \in \mathbb{R}^3 : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}}$$

$(1,2,3) \notin \text{Im}(f)$

$(1,2,-3) \in \text{Im}(f)$

$f(1,2,0) = (1,2,-3)$

$$\boxed{B_{\text{Im}(f)} = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\} \text{ libres}}$$

3. La base que contiene elementos de la base de la imagen y elementos de la base del núcleo resulta de unir los dos vectores de la base de la imagen y el vector de la base del núcleo (comprobamos previamente que son linealmente independientes).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Base}_{\text{Ker}(f)} = \{(0,0,1)\} \\ B_{\text{Im}(f)} = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\end{array}\right\} \text{comprobamos que son independientes} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{libres}$$

puesto que son libres $\boxed{B_{\mathbb{R}^3} = \{(0,0,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}}$

febrero 2001

www.simplyjarod.com

4. Determinar si es un automorfismo (aplic. lineal + biyect.)

a) Aplicación lineal

Demostración de que f es una aplicación lineal:

① $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow f(v_1) = f(x_1, y_1, z_1) = (x_1, y_1, -x_1-y_1)$

$v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow f(v_2) = f(x_2, y_2, z_2) = (x_2, y_2, -x_2-y_2)$

$v_1+v_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$f(v_1+v_2) = f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, -x_1-x_2-y_1-y_2)$

$f(v_1)+f(v_2) = (x_1, y_1, -x_1-y_1) + (x_2, y_2, -x_2-y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, -x_1-x_2-y_1-y_2)$

luego $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ $\longrightarrow$ f es aplicación lineal

② $f(kv) = k f(v)$ $\forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall v \in \mathbb{R}^3$

Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; $kv = (kx, ky, kz)$

$$\left.\begin{array}{l} f(kv) = f(kx, ky, kz) = (kx, ky, -kx-ky) \\ k f(v) = k\cdot(x, y, -x-y) = (kx, ky, -kx-ky) \end{array}\right\} f(kv) = k\cdot f(v)$$

b) Biyectividad: inyectiva + sobreyectiva

Inyectiva $\left\{\begin{array}{l} f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \ \forall x, y \\ f \text{ no inyectiva} \Leftrightarrow \exists\, x, y : f(x) = f(y) \text{ y sin embargo } x \neq y \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2,\pi) = (1,2,-3) \\ f(1,2,e) = (1,2,-3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(1,2,\pi) = f(1,2,e) \\ \text{y sin embargo} \\ (1,2,\pi) \neq (1,2,e) \end{array} \Rightarrow \underline{\text{no inyectiva}}$$

Sobreyectiva $\left\{\begin{array}{l} f \text{ sobreyectiva} \Leftrightarrow \forall y, \exists x : f(x) = y \\ f \text{ no sobreyectiva} \Leftrightarrow \exists y : \nexists x \text{ con } f(x) = y \end{array}\right.$

$\nexists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (1, 2, 3) \Rightarrow$ <u>no sobreyectiva</u>

- También podíamos haber visto que f no es inyectiva así: Sabemos que el núcleo de f está formado por el neutro si y sólo si f es inyectiva. Como hemos visto que el núcleo de f no está formado sólo por el neutro, podemos afirmar que f no es inyectiva.
- También podíamos concluir que f no es sobreyectiva así: Sabemos que la imagen de f es el espacio de llegada si y sólo si f es sobreyectiva. Hemos visto que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Luego la imagen de f no es $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ no es sobreyectiva.

Al no ser f ni inyectiva ni sobreyectiva, no es biyectiva, por lo que, a pesar de ser aplicación lineal, $\boxed{\text{NO es un automorfismo.}}$

Es un endomorfismo

ETSI Telecomunicación
Septiembre 2001

1. Sean E y E' dos K-$e.v.$ y $f: E \to E'$ una función lineal, demostrar que si $(u_1,...,u_n) \in E^n$ es un sistema de vectores de E, se cumple que

$$rg\left(f(u_1),...,f(u_n)\right) \leq rg\left(u_1,...,u_n\right)$$

2. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, demostrar que $rg(AB) \leq rg(B)$.
3. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, demostrar que $rg(AB) \leq rg(A)$.

1. Consideremos $V = L\left(u_1,.....,u_n\right)$ y la función restricción de f a V:

$$\begin{aligned} f|_V : V &\to E' \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

se cumple que:

- $rg\left(u_1,...,u_n\right) = \dim L\left(u_1,...,u_n\right) = \dim V$.
- $rg\left(f(u_1),...,f(u_n)\right) = rg\left(f|_V(u_1),....,f|_V(u_n)\right) = \dim\left(\operatorname{Im}\left(f|_V\right)\right)$.

Por otro lado al ser $f|_V$ una función lineal y V de dimensión finita se verifica:

$$\dim(V) = \dim\left(\ker(f|_V)\right) + \dim\left(\operatorname{Im}(f|_V)\right)$$

y por tanto

$$\dim(V) \geq \dim\left(\operatorname{Im}(f|_V)\right) \Rightarrow rg\left(u_1,...,u_n\right) \geq rg\left(f(u_1),...,f(u_n)\right) \quad .$$

2. Sean $B^1,....,B^n$ las columnas de B y sea el endomorfismo columnas:

$$\begin{aligned} L_A : M_{n\times 1}(\mathbb{C}) &\to M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \\ X &\to L_A(X) = AX \end{aligned}$$

que sabemos que es lineal. Entonces se cumple que:

- $rg(B) = rg(B^1,....,B^n)$
- $rg(AB) = rg(AB^1,....,AB^n) = rg\left(L_A\left(B^1\right),....,L_A\left(B^n\right)\right)$

y por el problema anterior:

$$\begin{aligned} rg(L_A(B^1),....,L_A(B^n)) &\leq rg(B^1,....,B^n) \\ rg(AB^1,....,AB^n) &\leq rg(B^1,....,B^n) \\ rg(AB) &\leq rg(B) \end{aligned}$$

3. Aplicando las propiedades de las matrices traspuestas:

$$rg(AB) = rg\left((AB)^T\right) = rg\left(B^T A^T\right) \leq rg\left(A^T\right) = rg(A)$$

ETSI Telecomunicación
Febrero 2002

1. Demostrar que si U, V y W son subespacios vectoriales de un cierto espacio vectorial, entonces
$$(U\cap V)+(U\cap W)\subset U\cap(V+W)$$

2. Demostrar que si $S+R$ es una suma directa, entonces si $T_S=(v_1,\dots,v_n)$ es un sistema libre de S y $T_R=(u_1,\dots,u_m)$ es un sistema libre de R, el sistema $(v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_m)$ es un sistema libre de $S+R$.

1. U, V, W = subespacios. Demostrar: $(U\cap V)+(U\cap W)\subset U\cap(V+W)$

- Por ser U, V y W subespacios, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} U\cap V = \text{subespacio} \\ U\cap W = \text{subespacio}\end{array}\right\}(U\cap V)+(U\cap W) = \text{subespacio}$$

$V+W$ = subespacio $\Rightarrow U\cap(V+W)$ = subespacio

- Se trata de demostrar que el subespacio $(U\cap V)+(U\cap W)$ está contenido en el subespacio $U\cap(V+W)$. Esto se consigue considerando un elemento cualquiera (todos) del espacio contenido y ver que también pertenece al que contiene.

(I). Sea $a\in((U\cap V)+(U\cap W)) \Rightarrow \exists p\in(U\cap V)$ y $\exists q\in(U\cap W): a=p+q$

$$\left.\begin{array}{l} p\in(U\cap V)\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p\in U \\ p\in V\end{array}\right\} p\in U \\ q\in(U\cap W)\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q\in U \\ q\in W\end{array}\right\} q\in U \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si } p\in U \text{ y } q\in U \Rightarrow (p+q)\in U \\ a=p+q \Rightarrow a\in U\end{array}$$

Queremos demostrar que:
$a\in((U\cap V)+(U\cap W)) \Rightarrow a\in(U\cap(V+W))$
$a\in U$
$a\in(V+W)$

Acabamos de ver que:
(I) $\forall a\in((U\cap V)+(U\cap W)),\ a\in U$
Por otro lado veamos:
(II) $\forall a\in((U\cap V)+(U\cap W)),\ a\in(V+W)$

(II). Sea $a\in((U\cap V)+(U\cap W)) \Rightarrow \exists p\in(U\cap V), \exists q\in(U\cap W): a=p+q$

$$\left.\begin{array}{l} p\in(U\cap V)\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p\in U \\ p\in V\end{array}\right\} p\in V \\ q\in(U\cap W)\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q\in U \\ q\in W\end{array}\right\} q\in W \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si } p\in V \text{ y } q\in W \Rightarrow (p+q)\in(V+W) \\ a=p+q \Rightarrow a\in(V+W)\end{array}$$

Acabamos de ver que:
(II) $\forall a\in((U+V)+(U\cap W)),\ a\in(V+W)$

$$\left.\begin{array}{l}(I)\\(II)\end{array}\right\} \Rightarrow \forall a\in((U\cap V)+(U\cap W)),\ a\in(\overset{I}{U}\cap(\overset{II}{V+W})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((U\cap V)+(U\cap W))\subset(U\cap(V+W))$$

www.simplyjarod.com

2.

hipótesis [1]: si $S+R$ es suma directa $\Rightarrow S \cap R = \{\vec{0}_E\}$

hipótesis [2]: $T_S = \{v_1 \dots v_n\}$ libre $\Rightarrow v_1 \dots v_n$ linealmente independientes

La condición $[\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}_E]$
(combinación lineal de $v_1 \dots v_n$ igualada al neutro del Espacio)
implica tener, necesariamente, todos los escalares nulos:
es decir: $[\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0]$

$[*] = [\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}_E] \Rightarrow [\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0]$ {Definición de independencia lineal

hipótesis [3]: $T_R = \{u_1 \dots u_n\}$ libre $\Rightarrow u_1 \dots u_n$ son l.i.

La condición $[\beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0_E]$
(combinación lineal de $u_1 \dots u_m$ igualada al neutro del Espacio)
implica tener, necesariamente, todos los escalares nulos:
es decir: $[\beta_1 = \dots = \beta_m = 0]$

$[**] = [\beta_1 u_1 + \dots \beta_m u_m = \vec{0}_E] \Rightarrow [\beta_1 = \dots = \beta_n = 0]$ {Definición de independ. lineal

Se pide que, bajo las tres hipótesis anteriores, se demuestre que: $\{v_1 \dots v_n, u_1, \dots, u_m\}$ es libre

Esto se consigue viendo que:

$[***] = [\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \dots \beta_m u_m = 0_E] \Rightarrow [\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0]$

Sean $\begin{cases} v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \\ u = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \\ v_1 \dots v_n \in S \text{ (subespacio)} \end{array}\right\}$ $v \in S \longrightarrow v \in (S \cap R)$

$[***] \rightarrow v + u = 0_E \Rightarrow v = -u \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = -\beta_1 u_1 - \dots - \beta_m u_m \\ u_1 \dots u_m \in R \text{ (subespacio)} \end{array}\right\}$ $v \in R$

$\left.\begin{array}{l} v \in (S \cap R) \\ [1]\ S \cap R = \{0_E\} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} v = 0_E \\ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_E \\ \text{si según [2] } v_1 \dots v_n = \text{libres} \\ \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \text{ por } [*] \end{array}\right.$

Acudiendo con $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ a $[***]$ nos queda $[**]$ y por la hipótesis [3] deducimos que $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$.
Partiendo de $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0_E$ hemos llegado a ver que todos los escalares son nulos; y esto significa que $v_1 \dots v_n, u_1 \dots u_m$ son libres, es decir:

$$\boxed{\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\} \text{ es libre}}$$

ETSI Telecomunicación
Febrero 2002

Sea E un K-espacio vectorial de dimensión n y $f: E \to E$ un endomorfismo de E. Se pide:

a) Demostrar que si $rg(f) = rg(f \circ f)$ entonces $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

b) Demostrar que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ si y sólo si n es par, $rg(f) = n/2$ y $f \circ f = 0$.

a) Demostrar $rg(f) = rg(f \circ f) \Rightarrow \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$

Se trata de demostrar la igualdad entre los subespacios $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ y $\{0_E\}$, y esto se consigue mediante la correspondiente doble inclusión.

(I) $\{0_E\} \subset \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$

Sea $u \in \{0_E\} \Rightarrow u = 0_E$

Queremos ver que $u \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$

$\ker(f)$ subespacio $\Rightarrow 0_E \in \ker(f)$ (de hecho $f(0_E) = 0_E$ por ser una aplicación lineal)

$\mathrm{Im}(f)$ subespacio $\Rightarrow 0_E \in \mathrm{Im}(f)$ (de hecho, $\exists 0_E \in E : f(0_E) = 0_E$)

$0_E \in (\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f))$

$\forall u \in \{0_E\}, u \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \{0_E\} \subset \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$

(II) $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0_E\}$

Hemos visto que la anterior inclusión se cumplía siempre, sin necesidad de emplear la hipótesis de igualdad de rangos dada. Por eso sospechamos que, en esta segunda inclusión, será absolutamente vital emplear dicha hipótesis para avanzar.

Sea $\alpha \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in \ker(f) \Rightarrow f(\alpha) = 0_E \\ \alpha \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists \beta \in E : f(\beta) = \alpha \end{cases}$

$f(f(\beta)) = f(\alpha) = 0_E \Rightarrow (f \circ f)(\beta) = 0_E$

Es aquí donde vemos que hay que usar $Rg(f) = R(f \circ f)$ $\longrightarrow$ $\beta \in \ker(f \circ f)$ (*)

hipótesis: $Rg(f) = Rg(f \circ f)$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f \circ f))$

$f: E \to E$

$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

$f \circ f: E \to E$

$\dim(E) = \dim(\ker(f \circ f)) + \dim(\mathrm{Im}(f \circ f))$

Restando y viendo que $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im} f \circ f$

$\Rightarrow \dim \ker(f) = \dim \ker f \circ f$

$\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f \circ f))$

www.simplyjarod.com

- Que dos espacios tengan la misma dimensión no significa que sean el mismo.
- Sin embargo, si tienen la misma dimensión y uno está contenido en el otro, sí son el mismo.

Veamos que $\ker(f) \subset \ker(f \circ f)$

$$x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0_E \Rightarrow f(f(x)) = f(0_E) \Rightarrow (f \circ f)(x) = 0_E \Rightarrow x \in \ker(f \circ f)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f \circ f)) \\ \ker(f) \subset \ker(f \circ f) \end{array}\right\} \ker(f) = \ker(f \circ f)$$

$$(*) \quad \left.\begin{array}{l} \beta \in \ker(f \circ f) \\ \quad\;\; \| \\ \ker(f) \end{array}\right\} \beta \in \ker(f) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(\beta) = 0_E \\ f(\beta) = \alpha \end{array}\right\} \alpha = 0_E$$

$$\alpha \in \{0_E\} \Rightarrow \forall \alpha \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f),\ \alpha \in \{0_E\}$$

$$\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \{0_E\}$$

Febrero 2002

www.simplyjarod.com

b) Demostrar: $Ker(f) = Im(f) \Leftrightarrow \dim(E) = n$ par, $Rg(f) = \frac{n}{2}$ y $f \circ f = \Omega$

Ω = homomorfismo nulo

Se trata de demostrar una doble implicación, de modo que probamos cada una de las implicaciones:

($\Rightarrow$) $Ker(f) = Im(f) \Rightarrow \dim(E) = n$ par, $Rg(f) = \frac{n}{2}$ y $f \circ f = \Omega$

$\Omega \rightarrow$ aplicación lineal que transforma todo elemento en neutro

$Ker(f) = Im(f) \Rightarrow \dim(Ker(f)) = \dim(Im(f))$

Si dos espacios son iguales $\Rightarrow$ tienen la misma dim.

Sin embargo, dos espacios con la misma dim, no tienen por qué ser iguales

Ahora bien, si comparten dimensión y uno está contenido en el otro, entonces sí serán el mismo.

Sea $r = \dim(Ker(f)) = \dim(Im(f))$; $r \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\dim(E)}_{n} = \underbrace{\dim(Ker(f))}_{r} + \underbrace{\dim(Im(f))}_{r} \Rightarrow n = 2r \Rightarrow n = \text{par}$$

$$Rg(f) = \underbrace{\dim(Im(f))}_{r} \Rightarrow Rg(f) = r$$

$$\left.\begin{array}{l} Rg(f) = r \\ \dim(E) = n = 2r \Rightarrow r = \frac{n}{2} \end{array}\right\} Rg(f) = \frac{n}{2}$$

Para demostrar que $f \circ f = \Omega$, comprobaremos que la imagen mediante $f \circ f$ de cualquier elemento de E es precisamente $\vec{0}_E$

$(f \circ f)(u) = f(f(u)) = f(v)$; $v = f(u) \in Ker(f)$; $f(v) = 0_E$

Imagen de u mediante $f \circ f$ $\left\{ u \in E \right.$ si $u \in E \Rightarrow f(u) \in Im(f) = Ker(f)$

$\forall u \in E \ (f \circ f)(u) = 0_E \Rightarrow f \circ f = \Omega$ (homomorfismo nulo)

($\Leftarrow$) $\dim(E) = n$ par, $Rg(f) = \frac{n}{2}$, $f \circ f = \Omega \Rightarrow Ker(f) = Im(f)$

$$\left.\begin{array}{l} Rg(f) = \frac{n}{2} \\ \dim(Im(f)) = Rg(f) \end{array}\right\} \dim(Im(f)) = \frac{n}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(E) = n \\ \dim(E) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) \end{array}\right\} \Rightarrow n = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$$

$$\dim(Ker(f)) = \frac{n}{2} = \dim(Im(f))$$

Acabamos de ver que, si $\dim(E) = n$ y $Rg(f) = \frac{n}{2}$, entonces $\dim(Ker(f)) = \dim(Im(f))$

Aún nos falta por usar la hipótesis $f \circ f = \Omega$, y queremos ver que uno de los Ker o Im está contenido en el otro para, gracias a la igualdad de sus dimensiones, concluir que son el mismo.

Así pues, buscamos demostrar $f \circ f = \Omega \Rightarrow Im(f) \subset Ker(f)$

www.simplyjarod.com

Sea $\alpha \in Im(f) \Rightarrow \exists \beta \in E \; ; \; f(\beta) = \alpha \rightarrow$ aplicamos f a ambos lados

$f(f(\beta)) = f(\alpha) = (f \circ f)(\beta)$ $\quad f \circ f = \Omega$

$(f \circ f)(\beta) = 0_E, \; \forall \beta \in E$

$\Rightarrow 0_E = f(\alpha) \Rightarrow \alpha \in Ker(f)$

$\forall \alpha \in Im(f), \; \alpha \in Ker(f)$ (empleando $f \circ f = \Omega$)

Si $f \circ f = \Omega \Rightarrow Im(f) \subset Ker(f)$

Con $dim(E) = n$ y $Rg(f) = \frac{n}{2}$, obtuvimos $dim\,Ker = dim\,Im$

con $(f \circ f) = \Omega$ obtuvimos $Im(f) \subset Ker(f)$

Si $dim(E) = n$, $Rg(f) = \frac{n}{2}$ y $f \circ f = \Omega \Rightarrow Ker(f) = Im(f)$

ETSI Telecomunicación
Febrero 2003

Sea $A \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ tal que $\text{rg}(A) = 1$. Supongamos que la primera columna de A, A^1 es distinta de cero. Demuestra que existe una matriz $V \in M_{q\times 1}(\mathbb{R})$, tal que $A = A^1 V^T$ (V^T es la matriz transpuesta de V).

A es una matriz de p filas y q columnas con elementos $\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} rg(A)=1 \\ A^1 \neq 0 \end{array}\right\}$ número de columnas libres $= 1$
al ser $A^1 \neq 0$, concluimos que todas las demás son proporcionales.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & \alpha_1 a_1 & \alpha_2 a_1 & \cdots & \alpha_{q-1} a_1 \\ a_2 & \alpha_1 a_2 & \alpha_2 a_2 & & \alpha_{q-1} a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p & \alpha_1 a_p & \alpha_2 a_p & \cdots & \alpha_{q-1} a_p \end{pmatrix}}_{p\times q} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}}_{A^1 \; (p\times 1)} \underbrace{(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})}_{V^T \; (1\times q)}$$

Si $V^T = (1, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{q-1}) \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{q-1} \end{pmatrix} \in M_{q\times 1}(\mathbb{R})$

Calcula la dimensión de $\operatorname{Im} A$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Sabemos por teoría que $\dim \operatorname{Im} A = rang(A)$, por tanto, para resolver el ejercicio calcularemos el rango de la matriz:

$$rang\ A = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el rango de esta matriz usaremos el método de Gauss:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} f3-f1 \to f3 \\ f4+f1 \to f4 \end{Bmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} f2+f3 \to f3 \\ f4+4f2 \to f4 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} f2+f3 \to f3 \\ f4+4f2 \to f4 \end{Bmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como las dos últimas filas de esta matriz son ceros, no debemos tenerlas en cuenta para calcular el rango. Luego el rango de la matriz que buscamos es $4-2=2$.

Por tanto $\dim \operatorname{Im} A = 2$.

Solución : $\dim \operatorname{Im} A = 2$

ETSI Telecomunicación
Febrero 2003

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita y $f: E \to F$ una aplicación lineal suprayectiva. Demuéstrese que si H es un subespacio de E entonces

sobreyectiva.

$$E = H \oplus \ker(f) \quad \Rightarrow \quad H \text{ y } F \text{ son isomorfos}$$

E y F: subespacios vectoriales de dimensión finita
$f: E \to F$ aplicación lineal sobreyectiva

Comprobaremos que H y F son isomorfos cuando veamos que tienen la misma dimensión; es decir, empleando las hipótesis aportadas, buscamos llegar a $\dim(H) = \dim(F)$

- Hipótesis $E = H \oplus \ker(f) \Rightarrow H$ y $\ker(f)$ son suplementarios
  H y $\ker(f)$ son subespacios de E

$\Downarrow$
Sumadirecta
$E = H + \ker(f)$
$H \cap \ker(f) = \{0_E\}$

$(\#) \to \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

$\to$ Fórmula de Grassman $(\#\#)$ $\begin{cases} \dim(H + \ker(f)) = \dim(H) + \dim(\ker(f)) - \dim(H \cap \ker(f)) \\ \dim(E) = \dim(H) + \dim(\ker(f)) - \underbrace{\cancel{\dim\{0_E\}}}_{0} \end{cases}$

Restando: $(\#) - (\#\#)$: $\dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(H) = 0$
$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(H)$

- Hipótesis $f: E \to F$ sobreyectiva $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = F$
  la imagen de una apl. sobreyectiva es el espacio de llegada de la aplicación.

$\boxed{\dim(H) = \dim(F)} \Rightarrow H$ y F son isomorfos

Isomorfos = misma dimensión

ETSI Telecomunicación
Febrero 2003
Sección B2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

a) Determinar su polinomio característico.
b) Calcula los autovalores de A.
c) Determina las multiplicidades algebraicas y geométricas de los autovalores calculados en el apartado anterior.
d) Halla bases de los autoespacios asociados.
e) Responda al apartado 1 en el supuesto de que A sea diagonalizable. En caso contrario responda al apartado 2.

1. Halla una matriz diagonal, D, semejante a A, la matriz de paso P y la relación entre A, P y D.
2. Explica las causas por las que A no es diagonalizable. Obtener una matriz triangular T semejante a A y la matriz de paso. Escribe la relación entre A, P y T.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to f(x,y,z) = A_{3\times3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-4z \\ 3y \\ 2x-z \end{pmatrix}$

$f(x,y,z) = (5x-4z, 3y, 2x-z)$

a) Polinomio característico: $P(\lambda) = |A - \lambda Id|$

$P(\lambda) = |A - \lambda Id| = \left| \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (5-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1) - 8(\lambda-3) = (\lambda-3)\left[(5-\lambda)(\lambda+1) - 8\right] =$

$= (\lambda-3)\left[-\lambda^2+4\lambda-3\right] = (\lambda-3)(\lambda-1)(-\lambda+3)$

$\boxed{P(\lambda) = (\lambda-3)^2(1-\lambda)}$

b) Los autovalores son las raices del polinomio característico igualado a cero. $\boxed{\lambda_1 = 1}$ $\boxed{\lambda_2 = 3}$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)^2(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

c) $\to$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \; ; \; m_a(\lambda_1 = 1) = 1 \; ; \; m_g(\lambda_1 = 1) = 1 \\ \lambda_2 = 3 \; ; \; m_a(\lambda_2 = 3) = 2 \; ; \; \underbrace{m_g(\lambda_2 = 3) = 2}_{\text{hecho en d)}} \end{cases}$

m_a = multiplicidad algebraica

La suma de las multiplicidades algebraicas ha de ser igual a la dimensión del espacio vectorial en el que nos hallamos (entrada y salida)

$\sum m_a(\lambda_i) = \dim(E)$ $\quad \sum m_a(\lambda_i) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

www.simplyjarod.com

d) Para hallar los autoespacios o valores propios procederemos de la siguiente manera: en la expresión $A-\lambda Id$ sustituiremos λ por cada uno de los autovalores, y la matriz resultante será la asociada de una aplicación a la que le calcularemos el núcleo. Dicho núcleo será el autoespacio asociado al autovalor que sustituimos en $A-\lambda Id$, y los elementos de las bases de los autoespacios serán los autovectores asociados. Además, la dim del autoespacio es la multiplicidad geométrica del autovalor asociado, y su multiplicidad algebraica será la cantidad de veces que aparece dicho valor como raíz del polinomio característico.

- $\lambda_1 = 1$; $A-\lambda_1 Id = A - 1Id = A - Id = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\ker(A-\lambda_1 Id);\ \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{f(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-4z=0 \\ 2y=0 \\ 2x-2z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x-z=0 \\ y=0 \end{array}$$

$$\ker(A-\lambda_1 Id) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-z=0,\ y=0\} = S_{\lambda_1}$$

$$\dim(S_{\lambda_1}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{nº ec. indep} = 3-2 = 1$$

$$\dim(S_{\lambda_1}) = 1 \overset{c)}{\Rightarrow} \boxed{m_g(\lambda_1 = 1) = 1} \qquad \boxed{B_{S_{\lambda_1}} = \{(1,0,1)\}}$$

Comprobación:

$f(1,0,1) = 1\,(1,0,1) \Rightarrow 1$ autovalor del autovector $(1,0,1)$

- $\lambda_2 = 3$; $A-\lambda_2 Id = A - 3Id = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$\ker(A-\lambda_2 Id);\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-4z=0 \\ 2x-4z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \end{array}\right\} 2x-4z=0$$

$$\ker(A-\lambda_2 Id) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x-4z=0\} = S_{\lambda_2}$$

$$\dim(S_{\lambda_2}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{nº ec. ind.} = 3-1 = 2$$

$$\dim(S_{\lambda_2}) = 2 \overset{c)}{\Rightarrow} \boxed{m_g(\lambda_2 = 3) = 2}$$

$$\boxed{B_{S_{\lambda_2}} = \{(2,0,1),(0,1,0)\}}$$

cualquiera que cumpla la ecuación

$B_{S_{\lambda_2}} = \{(2,0,1),(0,1,0)\}$

obligatorio que sean libres entre sí.

prohibido el $(0,0,0)$

NOTA: Las multiplicidades geométricas pueden calcularse de otro modo:

- la correspondiente al autovalor λ_i surge de la resta entre la dim del espacio en que trabajamos ($\mathbb{R}^3$) y el rg $(A-\lambda_i Id)$

febrero 2003 - sección B2

www.simplyjarod.com

Resumen:

Autovalores:

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 3$

Multiplicidades: (*)

$m_a(\lambda_1 = 1) = 1 = m_g(\lambda_1 = 1) = 1 \Rightarrow$

$m_a(\lambda_2 = 3) = 2 = m_g(\lambda_2 = 3) = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ diagonalizable

Autovectores: (Elementos de las bases de los autoespacios)

$u_1 = (1,0,1) \rightarrow (1,0,1) = 1(1,0,1)$

$u_2 = (2,0,1) \rightarrow (2,0,1) = 3(2,0,1)$

$u_3 = (0,1,0) \rightarrow (0,1,0) = 3(0,1,0)$

(*) Las multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden para cada autovalor, luego la matriz es diagonalizable, es decir:

ej $\exists P$ (matriz regular o invertible): $A = PDP^{-1}$ con D diagonal

P = matriz de paso

Los el. de la diagonal son los autovalores $\rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

como $\lambda_2 = 3$ sale dos veces $\Big\}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

El orden de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ da igual como se ponga.

respetar orden

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Sus columnas son los autovectores de A, ordenados adecuadamente

Comprobación:

$\exists P$ (invertible) : $A = PDP^{-1}$ con D diagonal

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$A^n = [PDP^{-1}]^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \ldots \overset{n \text{ veces}}{\ldots} (PDP^{-1}) =$

Si A = diagonalizable

$= PD(P^{-1}P^{-1})D(P^{-1}P) \ldots D(P^{-1}P)DP^{-1} =$

$= PD(Id)D(Id) \ldots \overset{n \text{ veces}}{\ldots} D(Id)DP^{-1} =$

$= PD \overset{n \text{ veces}}{\ldots} DP^{-1} = PD^nP^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$$

ETSI Telecomunicación
Febrero 2003

Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

Recuerda que los autovalores de una matriz son las soluciones de:
$|A-\lambda I|=0$

Para saber cuando la matriz A es diagonalizable, estudiamos en primer lugar sus autovalores.

Hallamos $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

Ahora calculamos el determinante:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)(\alpha-\lambda)$$

Por tanto los autovalores son las soluciones de la ecuación:

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(\alpha-\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda=3 \\ \lambda=\alpha \end{cases}$$

Ahora distinguimos los siguientes casos:

<u>CASO I</u>: $\alpha \neq 2 \ y \ \alpha \neq 3$

En este caso la matriz es diagonalizable por que tiene tres valores propios distintos.

<u>CASO II</u>: $\alpha=2$

En este caso la matriz tiene los siguientes autovalores:

$\lambda=2$ con multiplicidad algebraica igual a 2
$\lambda=3$ con multiplicidad algebraica igual a 1

Estudiamos la multiplicidad geométrica de los autovalores:

- Multiplicidad geométrica de $\lambda=3$

Como la multiplicidad algebraica del autovalor 3 es 1, la multiplicidad geométrica también será 1 ya que sabemos por teoría que:

$$m_a(\lambda_i) \geq m_g(\lambda_i) > 0$$

- Multiplicidad geométrica de $\lambda=2$:

La multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda=2$ es $3-rang(A-2I)$. Ahora bien:

$$rang(A-2I)=rang\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1.$$

Por tanto la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda=3$ es $3-1 = 2$.

Entonces, si $\alpha=2$

	AUTOVALOR	
	$\lambda=2$	$\lambda=3$
Multiplicidad algebraica	2	1
Multiplicidad geométrica	2	1

Como todos los autovalores cumplen que su multiplicidad algebraica es igual a su multiplicidad geométrica, la matriz es diagonalizable.

<u>CASO III</u>: $\alpha=3$

En este caso la matriz tiene los siguientes autovalores:

$\lambda=2$ con multiplicidad algebraica igual a 1
$\lambda=3$ con multiplicidad algebraica igual a 2

- Multiplicidad geométrica de $\lambda=2$

Como la multiplicidad algebraica del autovalor 2 es 1, la multiplicidad geométrica también será 1.

- Multiplicidad geométrica de $\lambda=3$:

La multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda=3$ es $3-rang(A-3I)$. Ahora bien:

$$rang(A-3I)=rang\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=2$$

Por tanto la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda=3$ es $3-2 = 1$.

Entonces, si $\alpha=3$:

	AUTOVALOR	
	$\lambda=2$	$\lambda=3$
Multiplicidad algebraica	1	2
Multiplicidad geométrica	1	1

En este caso, el autovalor $\lambda=3$ tiene distintas multiplicidades algebraica y geométrica, por tanto la matriz A no es diagonalizable.

Por tanto, el único valor de α para el que la matriz A no es diagonalizable es $\alpha=3$.

Solución : $\alpha = 3$

www.simplyjarod.com

ETSI Telecomunicación
Febrero 2003

Sea $P \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $P^2 = P$. Se pide:

a) Calcular los autovalores de P.
b) Demostrar que $M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$
c) Demostrar que P es diagonalizable.

a)

Si λ es autovalor de P, por definición sabemos que existe $0 \neq X \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tal que $PX = \lambda X$.

Si multiplicamos por P a ambos lados tendremos que:

$$P \cdot PX = P\lambda X \Rightarrow P^2X = \lambda PX \Rightarrow PX = \lambda \cdot \lambda X \Rightarrow PX = \lambda^2 X.$$

Así pues:

$$\left.\begin{array}{l} PX = \lambda X \\ PX = \lambda^2 X \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda X = \lambda^2 X \quad \text{y como } X \neq 0 \text{ tenemos que } \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$$

b)

- En primer lugar veamos que $\ker P \oplus \operatorname{Im} P$ (es decir, veamos que $\ker P$ y $\operatorname{Im} P$ son suma directa)

Para comprobar que la suma es directa debemos demostrar que $\ker P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$

$\underline{\{0\} \subset \ker P \cap \operatorname{Im} P}$

Se cumple el contenido pues la intersección de dos subespacios vectoriales es siempre subespacio vectorial y cualquier subespacio vectorial contiene al elemento neutro.

$\underline{\ker P \cap \operatorname{Im} P \subset \{0\}}$

Sea $X \in \ker P \cap \operatorname{Im} P$ $[X \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})]$ entonces $\left\{\begin{array}{l} X \in \ker P \text{ por lo que } PX = 0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \\ X \in \operatorname{Im} P \text{ por lo que } \exists Z \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \,/\, PZ = X \end{array}\right.$

Por lo tanto, podemos hacer:

$$X = PZ \underset{P=P^2}{=} P^2Z = PPZ = P(PZ) = PX = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow X \in \{0\}$$

Así pues queda demostrado que $\boxed{\ker P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}}$, por lo que la suma es directa.

www.simplyjarod.com

- Ahora tenemos que demostrar que $M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = \ker P + \operatorname{Im} P$

Por la fórmula de las dimensiones se tiene que:

$$\dim(M_{n\times 1}(\mathbb{C})) = \dim(\ker P) + \dim(\operatorname{Im} P)$$

Por otro lado, la fórmula de Grassmann nos dice que: 0 ya que $\ker P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$

$$\dim(\ker P + \operatorname{Im} P) = \dim(\ker P) + \dim(\operatorname{Im} P) - \cancel{\dim(\ker P \cap \operatorname{Im} P)}$$

Por tanto, igualando ambas expresiones obtenemos que: $\dim(M_{n\times 1}(\mathbb{C})) = \dim(\ker P + \operatorname{Im} P)$ [1]

Por otro lado tenemos que claramente $\ker P + \operatorname{Im} P < M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ [2] (por ser $\ker P < M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, $\operatorname{Im} P < M_{n\times 1}($

Debido a que se cumplen [1] y [2] está demostrado que $\boxed{M_{n\times 1} = \ker P + \operatorname{Im} P}$

Así pues,

$$\left.\begin{array}{l} \ker P \cap \operatorname{Im} P = \{0\} \\ M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = \ker P + \operatorname{Im} P \end{array}\right\} \Rightarrow M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$$

c) Sabemos que $\ker P = \ker(P - 0\cdot I) = S_0$ es el subespacio asociado al autovalor nulo, $\lambda = 0$.

Veamos ahora que $\operatorname{Im} P = S_1$, donde S_1 es el subespacio asociado al autovalor uno, $\lambda = 1$.

Sea $0 \neq X \in \operatorname{Im} P \,..\, \exists Z \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \,/\, PZ = X \Rightarrow P(PZ) = PX \Rightarrow P^2 Z = PX \Rightarrow PZ = PX \Rightarrow X = PX \Rightarrow$

$\Rightarrow PX - X = 0 \Rightarrow (P - I)X = 0 \Rightarrow X \in \ker(P - I) = S_1$

Por tanto, tenemos que $\ker P = S_0$ y $\operatorname{Im} P = S_1$ y como en el apartado anterior hemos demostrado que $M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = \ker(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$ tenemos que $M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = S_0 \oplus S_1$.

Ahora bien, sabemos por teoría que, cuando dos subespacios son suma directa se puede construir una base del subespacio suma sin más que unir los vectores de las respectivas bases de los subespacios.

En nuestro caso, como $M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = S_0 \oplus S_1$, resulta que podemos construir una base de autovectores de $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ uniendo los autovectores de una base del autoespacio S_0 y los autovectores de una base del autoespacio S_1.

Al existir una base de $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ formada por autovectores queda demostrado que P es diagonalizable.

ETSI Telecomunicación
Febrero 2003

Sea $W = L\left(\{(1,0,1,2),(1,1,0,-1)\}\right) < \mathbb{R}^4$. Calcular la proyección ortogonal del vector $u = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ sobre el subespacio W.

Recuerda que para proyectar sobre un subespacio necesitamos que este esté generado por una base ortonormal.

En primer lugar vamos a ortonormalizar el subespacio sobre el que queremos proyectar, para eso hacemos uso del proceso de Gram Schmidt al subespacio $W = L\{e_1, e_2\}$

Por tanto:

$$u_1 = e_1 = (1,0,1,2)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{<e_2,u_1>}{<u_1,u_1>} \cdot u_1 = (1,1,0,-1) - \frac{\langle (1,1,0,-1),(1,0,1,2)\rangle}{\langle (1,0,1,2),(1,0,1,2)\rangle}(1,0,1,2) =$$

$$(1,1,0,-1) - \frac{(1-2)}{(1+1+4)}(1,0,1,2) = (1,1,0,-1) + \left(\frac{1}{6},0,\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right) = \left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)$$

Hemos conseguido que $W = L\left\{(1,0,1,2),\left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)\right\}$ esté generado por una base ortogonal. Ahora sólo resta normalizar, es decir, dividir los vectores por su norma.

Por tanto:

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,0,1,2)}{\|(1,0,1,2)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{7}{6},1,\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)}{\frac{\sqrt{102}}{6}} = \left(\frac{7\sqrt{102}}{102},\frac{\sqrt{102}}{17},\frac{\sqrt{102}}{102},\frac{-2\sqrt{102}}{51}\right)$$

Por último aplicamos la fórmula de proyección:

$$\text{proy}_W(u) = \langle u,w_1\rangle w_1 + \langle u,w_2\rangle w_2 = \left\langle (1,1,1,1),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right) +$$

$$= \left\langle (1,1,1,1),\left(\frac{7\sqrt{102}}{102},\frac{\sqrt{102}}{17},\frac{\sqrt{102}}{102},\frac{-2\sqrt{102}}{51}\right)\right\rangle\left(\frac{7\sqrt{102}}{102},\frac{\sqrt{102}}{17},\frac{\sqrt{102}}{102},\frac{-2\sqrt{102}}{51}\right) =$$

$$= \left(\frac{23}{17},\frac{10}{17},\frac{13}{17},\frac{16}{17}\right)$$

Solución : $\text{proy}_W(u) = \left(\frac{23}{17},\frac{10}{17},\frac{13}{17},\frac{16}{17}\right)$

ETSI Telecomunicación
Febrero 2004
Sección B1
Ejercicio 1

Demuéstrese el siguiente resultado. Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y un producto $<,>: E \times E \to \mathbb{R}$ escalar en E. Sea W un subespacio de E. Para cada $v \in E$ se tiene que

$$\|v - \text{proy}_W(v)\| \leq \|v - w\| \quad , \quad w \in W$$

Donde proy_W es la proyección ortogonal sobre W y $\|.\|$ es la norma asociada a $<,>$.

$$\|v-w\|^2 = \|\overbrace{(v - \underbrace{\text{proy}_W(v)})}^{a} + \overbrace{(\text{proy}_W(v) - w)}^{b}\|^2 =$$

sumamos y restamos $\text{proy}_W(v)$

$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2<a,b>$

$$= \|v - \text{proy}_W(v)\|^2 + \|\text{proy}_W(v) - w\|^2 + 2 < \underbrace{v - \text{proy}_W(v)}_{[1]}, \underbrace{\text{proy}_W(v) - w}_{[2]} >$$

$\in W^\perp$ $\quad$ $\in W$

[1] $v = \text{proy}_W(v) + \text{proy}_{W^\perp}(v) \Rightarrow v - \text{proy}_W(v) = \text{proy}_{W^\perp}(v) \Rightarrow v - \text{proy}_W(v) \in W$

[2] $\left.\begin{array}{l} \text{proy}_W(v) \in W \\ w \in W \\ W \text{ subespacio vectorial} \end{array}\right\} \Rightarrow [\text{proy}_W(v) - w] \in W$

$$\Rightarrow \|v-w\|^2 = \|v - \text{proy}_W(v)\|^2 + \overbrace{\|\text{proy}_W(v) - v\|^2}^{\geq 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|v-w\|^2 \geq \|v - \text{proy}_W(v)\|^2 \Rightarrow \|v-w\| \geq \|v - \text{proy}_W(v)\|$$

ETSI Telecomunicación
Junio 2004
Ejercicio 1

Dado un polinomio $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{C}[x]$ y una matriz $C \in M_n(\mathbb{C})$, $q(C)$ es la matriz

$$q(C) = b_m C^m + b_{m-1}C^{m-1} + \ldots + b_1 C + b_0 I_n \in M_n(\mathbb{C})$$

Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $p(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado r con $a_0 \neq 1$. Demuestra que si $p(A) = I_n$ entonces A es invertible.

Demostraremos que A es invertible cuando encontremos una expresión válida para su inversa A^{-1} (la búsqueda de dicha expresión nos hará usar los datos del enunciado)

$p(A) = Id$

$$A^{-1} = A^{-1} \cdot Id = A^{-1} \cdot p(A) = A^{-1}\left[a_r A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \ldots + a_1 A + a_0 Id\right]$$

$$A^{-1} = a_r A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \ldots + a_1 Id + a_0 A^{-1}$$

$$A^{-1} - a_0 A^{-1} = a_r A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \ldots + a_1 Id$$

$$(1-a_0)A^{-1} = a_r A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \ldots + a_1 Id$$

$$A^{-1} = \frac{a_r A^{r-1} + a_{r-1}A^{r-2} + \ldots + a_1 Id}{1-a_0}$$

Como el enunciado dice que $a_0 \neq 1$ se puede dividir entre $(1-a_0)$

La expresión anterior de A^{-1} es correcta y existe porque:

- el denominador es no nulo ($a_0 \neq 1$)
- el numerador existe porque existe el polinomio indicado en el enunciado.

Como la expresión anterior es válida, se tiene que A^{-1} existe $\Rightarrow$ A es invertible

www.simplyjarod.com

ETSI Telecomunicación
Junio 2004
Sección B1

Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcular el rango de A.
2. Halla la forma reducida de Gauss-Jordan, J de A.
3. Considera la aplicación $A: M_{4\times1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times1}(\mathbb{R})$ definida por $x \mapsto Ax$, $x \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$. ¿Es inyectiva?.
4. El sistema $Ax = b$ tiene solución para cada $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$
5. ¿Es $B_{\ker A} = \left([0\ -1\ 0\ 1]^T\right)$ una base de $\ker A$?
6. Calcula los autovalores de A, indicando su multiplicidad algebraica.
7. Para cada autovalor de A calcula su multiplicidad geométrica.
8. ¿Es A diagonalizable?
9. Para cada autovalor λ de A calcula una base de su autoespacio asociado S_λ.
10. Sea $v = [1\ 1\ 1\ 1]^T$. Calcula la proyección ortogonal de v sobre S_μ donde μ es el autovalor de A de mayor valor absoluto.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_4 = F_2 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$ $\boxed{rg(A) = 3}$ = nº filas ≠ nulo de la matriz reducida de Gauss

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_3/2}{\overset{F_1 = F_1/2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$ matriz reducida de Gauss / Jordan (pág T-21)

3) $A : M_{4\times1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{4\times1}(\mathbb{R})$
$x \longrightarrow Ax$ donde: A = matriz asociada a la aplicación

Si A es inyectiva será $x=0$ el $\ker(A) = \{0\}$ (Matriz columna nula)

$\boxed{M_{4\times1}(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^4 \text{ son isomorfos}}$

Calculamos el $\ker(A)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{matrix} 3 \text{ ec} \\ 4 \text{ incog} \end{matrix}\right\} 1 \text{ parám} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = 0 \\ t = \alpha \end{cases}$$

www.simplyjarod.com

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} \in M_{4\times1}(\mathbb{R}) \;/\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \qquad \dim(\ker A) = 1$$

Como $\ker A \neq \{0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Longrightarrow$ $\boxed{\text{A no es inyectiva}}$

4) Discutimos el sistema $\underset{4\times4}{A}\underset{4\times1}{x} = \underset{4\times1}{b}$

- En a): $rg(A) = 3 < n^\circ$ incógnitas $\Longrightarrow$ seguro que $Ax = b$ no es S.C.D seguro
- Para ver si $Ax = b$ es S.C.I o S.I vemos el rango de $(A|b)$ $\forall b$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_4 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underset{\sim}{F_4 = F_4 - F_2}$$

tomando x ejemplo $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$rg(A|b) = 4 = n^\circ$ de filas no nulas de la matriz reducida de Gauss

Por tanto $rg(A) \neq rg(A|b) \Longrightarrow$ sist. Incompatible

Así pues, $\boxed{Ax = b \text{ no siempre tiene solución}}$

5) del ap 3):

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \in M_{4\times1}(\mathbb{R}) \;/\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim(\ker A) = 1 = n^\circ$ parámetros ; Tomando $\alpha = 1$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{(0,-1,0,1)^T\}$$ sí es base de $\ker A$

www.simplyjarod.com

6) $|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{x adjuntos}}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - (2-\lambda)\right] \overset{!!!}{=} (2-\lambda)^2\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = 0 \rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = 2} \text{ (doble)} \\ (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \cancel{1} + \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{1} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0} \; \boxed{\lambda = 2} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = 0 : ma(\lambda=0) = 1 \\ \lambda = 2 : ma(\lambda=2) = 3 \end{array}}$$

7) Calculamos $mg(\lambda_i)$ con la fórmula [T-51]

$$\boxed{mg(\lambda) = n - rg(A - \lambda_i I)}$$

n → órden de la matriz

- $\underline{\underline{\lambda = 0}}$: $\boxed{mg(\lambda=0)} = n - rg(A - 0I) = 4 - rg(A) = \boxed{4-3=1}$
- $\underline{\underline{\lambda = 2}}$: $\boxed{mg(\lambda_2=2)} = n - rg(A - 2I) = 4 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{4-1=3}$

8) Para $\lambda=0$: $ma(\lambda=0) = 1 = mg(\lambda=0) = 1$
Para $\lambda=2$: $ma(\lambda=2) = 3 = mg(\lambda=2) = 3$
$\Big\}$ $\boxed{A \text{ diagonalizable}}$

9) Para $\lambda=0$ calculamos $S_{\lambda=0}$

$(A-0I)x = 0 \longrightarrow Ax = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = 0 \\ t = \alpha \end{cases}$

$S_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \in M_{4\times1}(\mathbb{R}) \,/\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \overset{!!!}{=} \ker A$

$$\boxed{B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$ Base de $S_{\lambda=0}$

Nota: Cuando el 0 es autovalor de A entonces ker(A) es su autoespacio asociado.

www.simplyjarod.com

Para $\lambda = 2$ Calculamos $S_{\lambda=2}$:

3par. $\Leftarrow \begin{cases} 1ec \\ 4inc \end{cases}$

$$(A-2I)X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \cancel{-y+t=0} \\ y-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\beta \\ y=\alpha \\ z=\gamma \\ t=\alpha \end{cases}$$

$$S_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix} \in M_{4\times1}(\mathbb{R}) \;/\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

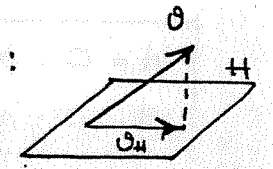
10) $\mu = \max\{0, 2\} = 2$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

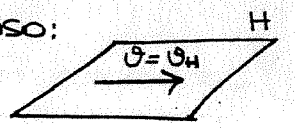
pertenece al subespacio tomando $\alpha = \beta = \gamma = 1$

$\vartheta \in S_\mu$

Normalmente:



En este caso:



Por tanto la proyección ortogonal de ϑ sobre (S_μ) es el mismo ϑ

$$\boxed{proy_{S_\mu}(\vartheta) = \vartheta}$$

ETSI Telecomunicación
Junio 2004
Sección B2
Ejercicio 2

Enuncia condiciones necesarias y suficientes para que una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ no tenga autovalores reales. Justifica las condiciones propuestas.

Sea $A \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Autovalores:

$$|A - \lambda Id| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

$$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

Los autovalores no serán reales si y sólo si el discriminante de la raiz es negativo.

Es decir: A no tiene autovalores reales $\Leftrightarrow (a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0$

A no tiene autovalores reales $\Leftrightarrow (\text{Traza}(A))^2 - 4\det(A) < 0$

A no tiene autovalores reales $\Leftrightarrow (\text{Traza}(A))^2 < 4\det(A)$

dice "Enuncia"

Una matriz de dos filas y dos columnas no tiene autovalores reales si y sólo si el cuadrado de su traza es menor que cuatro veces su determinante

www.simplyjarod.com

Prueba que toda aplicación lineal $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene un autovalor real .

$f: \mathbb{R}^{1\,\text{columna}} \to \mathbb{R}^{1\,\text{fila}}$ aplicación lineal $\Rightarrow f$ tiene una matriz asociada tal que $f(x) = Ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$x \to f(x) = Ax \Rightarrow f(x) = ax \quad A = a \in M_{1\times 1}$

Autovalores de A:

$$|A - \lambda Id| = 0 = |a - \lambda Id|; \quad \left.\begin{array}{l}\lambda = a \\ a \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

ETSI Telecomunicación
Septiembre 2004
Sección B2
Ejercicio 2

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Se dice que B es semejante a A si y solo si existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$. Prueba los siguientes resultados.

a) A es semejante a sí misma.
b) Si B es semejante a A entonces A es semejante a B.
c) Si B es semejante a A y C es semejante a B, entonces C es semejante a A.

a) A semejante a sí misma:

$$A = Id^{-1} \cdot A \cdot Id \Rightarrow \exists Id;\ A = (Id)^{-1} A (Id) \Rightarrow \boxed{A \text{ semejante a } A}$$

b) B semejante a A $\Rightarrow$ A semejante a B

B semejante a A $\Rightarrow B = P^{-1}AP$

$$B = P^{-1}AP$$
$$BP^{-1} = P^{-1}APP^{-1} = P^{-1}A$$
$$PBP^{-1} = PP^{-1}A = A \longrightarrow \text{llamando } P^{-1} = Q \text{ tenemos } P = Q^{-1}$$
$$Q^{-1}BQ = A \Rightarrow \exists Q : A = Q^{-1}BQ \Rightarrow \boxed{A \text{ semejante a } B}$$

c) $\left.\begin{array}{l} B \text{ semejante a } A \\ C \text{ semejante a } B \end{array}\right\} \Rightarrow C$ semejante a A

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ semejante a } B \Rightarrow C = P^{-1}BP \\ B \text{ semejante a } A \Rightarrow B = Q^{-1}AQ \end{array}\right\} C = P^{-1}Q^{-1}AQP$$

sea $QP = M$

$$\boxed{M^{-1} = (QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}}$$

$$C = M^{-1}AM \Rightarrow \boxed{C \text{ semejante a } A}$$

ETSI Telecomunicación
Febrero 2005

Ejercicio 2

Una matriz P cuadrada de orden n con coeficientes reales se dice que es ortogonal si $P^T P = I_n$. Sea $<,>$ el producto escalar de $\mathbb{R}^n$.

a) Sea P una matriz ortogonal de orden n, demuestra que $\forall u,v \in \mathbb{R}^n$, $<Pu,Pv> = <u,v>$ y que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de P entonces $|\lambda| = 1$.

b) Halla la matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que Az es la reflexión de $z \in \mathbb{R}^2$ respecto de la recta de $\mathbb{R}^2$ de ecuación $x = y$.

a) $P_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

P ortogonal $\Rightarrow <Pu,Pv> = <u,v>, \forall u,v \in \mathbb{R}^n$

$u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$
$P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\Big\}$ $Pu \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

Igualmente $\Big\}$ $Pv \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ $\Big\}$ $<Pu, Pv>$

$<Pu, Pv> = (Pv)^T Pu = v^T P^T P u = v^T (P^T P) u$

$<n\times 1, n\times 1> = (1\times n)\cdot(n\times 1) = 1\times 1 =$ numerito

$v^T (P^T P) u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis} \\ P^T P = I_n}}{=} v^T Id\, u = v^T u = <u,v>$

a2) si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $P \Rightarrow |\lambda| = 1$

Sea λ un autovalor de $P \Rightarrow f(v) = \lambda v$ con $v \in \mathbb{R}^n$ autovector asociado y $f(v) = Pv$

$\Rightarrow Pv = \lambda v$

P ortogonal $\Rightarrow <Pu,Pv> = <u,v>, \forall u,v \in \mathbb{R}^n$

tomando $u = v$, tenemos que $<Pv, Pv> = <v,v>$

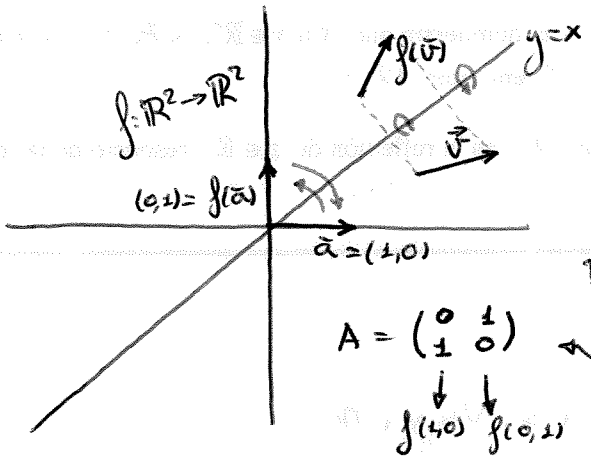
$<Pv, Pv> = <v,v>$
$<\lambda v, \lambda v> = <v,v>$ $\Big\}$ $\Rightarrow <\lambda v, \lambda v> = <v,v> \Rightarrow \lambda^2 <v,v> = <v,v>$

$|\lambda| = 1 \Leftarrow \lambda = \pm 1 \Leftarrow \lambda^2 = 1$ ☠

☠ Podemos dividir por $<v,v>$ porque ese producto escalar es no nulo (el producto escalar de alguien consigo mismo sólo es 0 si ese alguien es el 0) y $v \neq 0$ porque v es autovector.

www.simplyjarod.com

b)



$B_{can}^{\mathbb{R}^2} = \{(1,0), (0,1)\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow$

$f(1,0) \quad f(0,1)$

Las columnas son las imágenes en columna de los elementos de la base canónica del espacio

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

ETSI Telecomunicación
Junio 2005

Ejercicio 3

Sea E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión finita y f un endomorfismo de E tal que

$$\forall x, y \in E, \qquad < x, f(y) > \; = \; < f(x), y >$$

Demostrar que $\mathrm{Im} f$ y $\ker f$ son subespacios ortogonales tales que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker f$.

$\dim(E) < \infty$

$f: E \to E$ endomorfismo

$< x, f(y) > = < f(x), y >, \ \forall x, y \in E$

a) Demostrar $\mathrm{Im} f$ y $\mathrm{Ker} f$ son ortogonales

Sean $u \in \mathrm{Ker} f$ y $v \in \mathrm{Im} f$ cualesquiera

queremos ver que $< u, v > = 0$

$< u, v > = < u, f(w) > = < f(u), w > = < 0_E, w > = 0$

$v \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists w \in E : f(w) = v \qquad f(u) = 0_E \ (u \in \mathrm{Ker} f)$

b) $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$

Demostraremos que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ cuando:

(I) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$

Anteriormente vimos que el núcleo y la imagen son ortogon. sólo en este problema, gracias a la hipótesis dada. Por ello (por ser ortogonales) su $\cap$ es 0_E

Ortogonales $\Rightarrow \cap = 0_E$

(II) $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$

Grassmann:

$\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(\mathrm{Ker} \cap \mathrm{Im}) \to 0$

Fórmula de las dimensiones:

$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim(E) \\ \left.\begin{array}{l} \mathrm{Ker}(f) \lhd E \\ \mathrm{Im}(f) \lhd E \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \lhd E \end{array}\right\} \Rightarrow E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$$

por ser de dimensiones iguales, al estar uno contenido en otro $\Rightarrow$ son iguales

ETSI Telecomunicación
Septiembre 2005
Sección B1

En el espacio vectorial de polinomios en una indeterminada x, con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2, $\mathbb{R}_2[x]$, se considera el producto escalar

$$< p,q > = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$$

Se pide:

a) Determinar $H^{\perp}$ siendo $L(\{x,x^2\}) = H$

b) Calcular $\text{proy}_H(p)$ para cada $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

$< p(x), q(x) > = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$
$(p, q \in \mathbb{R}_2[x])$

$p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \exists\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = p(x)$
$\Rightarrow p'(x) = a_1 + 2a_2 x \,,\; p''(x) = 2a_2$
$\Rightarrow p(0) = a_0 \,,\; p'(0) = a_1 \,,\; p''(0) = 2a_2$

$q(x) \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \exists\, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} : b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = q(x)$
$\Rightarrow q'(x) = b_1 + 2b_2 x \,,\; q''(x) = 2b_2$
$\Rightarrow q(0) = b_0 \,,\; q'(0) = b_1 \,,\; q''(0) = 2b_2$

$< p(x), q(x) > = < a_0 + a_1 x + a_2 x^2, b_0 + b_1 x + b_2 x^2 > =$
Muy importante
$= p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) =$
$= a_0 b_0 + a_1 b_1 + 2a_2 2b_2$ simplificará los cálculos

b) $H = \mathcal{L}\{x, x^2\} = \{ r(x) \in \mathbb{R}_2[x] : \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ con } r(x) = \alpha x + \beta x^2 \}$

No en el examen

Puesto que nos piden la proyección ortogonal sobre H, nos es necesario manejar una base ortogonal de H. Si encontramos una base no ortogonal de H, deberemos ortogonalizarla mediante Gram-Schmidt para poder aplicar la fórmula de la proyección. Si la base que encontramos ya es ortogonal, podríamos aplicar directamente la fórmula de la proyección sin necesidad de aplicar Gram-Schmidt previamente.

$< x, x^2 > = < 0 + 1x + 0x^2, 0 + 0x + 1x^2 > = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

Toda pareja de elementos de la base de H (de hecho sólo hay una) tiene producto escalar nulo, luego la base de H es ortogonal. Así pues, podemos aplicar la fórmula de la ortogonalidad

www.simplyjarod.com

No dudemos: $\boxed{\langle a_0+a_1x+a_2x^2,\ b_0+b_1x+b_2x^2\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + 4a_2b_2}$

$$\text{proy}_H\, p(x) = \frac{\langle p(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}\, x + \frac{\langle p(x), x^2\rangle}{\langle x^2, x^2\rangle}\, x^2$$

$\langle p(x), x\rangle = \langle \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2,\ 0+1x+0x^2\rangle = \alpha_1$

$\langle x, x\rangle = \langle 0+x+0x^2,\ 0+x+0x^2\rangle = 1$

$\langle p(x), x^2\rangle = \langle \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2,\ 0+0x+1x^2\rangle = 4\alpha_2$

$\langle x^2, x^2\rangle = \langle 0+0x+1x^2,\ 0+0x+1x^2\rangle = 4$

$$\boxed{\text{proy}_H\, p(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = p(x) - p(0)}$$

a) Para hallar $H^\perp$ veremos qué forma tienen los polinomios $p(x) = \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2$ que pertenecen a él

$$p(x) = \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2 \Rightarrow \langle p(x), r(x)\rangle = 0,\ \forall r(x)\in H$$

Imponiendo que el producto escalar de $p(x)$ con los elementos de la base de H sea nulo nos garantizamos que $p(x)$ sea ortogonal a todos los elementos de H.

Es decir: $\langle p(x), x\rangle = \langle \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2,\ 0+1x+0x^2\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\langle p(x), x^2\rangle = \langle \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2,\ 0+0x+1x^2\rangle = 0 \Rightarrow 4\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

Si $p(x) = \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2 \in H^\perp \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow H^\perp = \{ p(x)\in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2 \text{ con } \alpha_1 = \alpha_2 = 0\}$

$H^\perp = \{ p(x)\in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = \alpha_0 \text{ con } \alpha_0\in\mathbb{R}\}$

$$\boxed{H^\perp = \mathbb{R}}$$

ETSI Telecomunicación
Septiembre 2005
Sección B2

Dado E un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión n, dotado de un producto escalar $<\_,\_>$ y un endomorfismo $f: E \to E$, probar que si $v_1,\ldots,v_n$ es una base ortogonal de E formada por vectores propios de f, entonces para todo $u, w \in E$ se verifica que

$$<u, f(w)> = <f(u), w>$$

$$<u, f(w)> = <u, f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n)> =$$

$$= <u, \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n)> =$$

$$= \alpha_1 <u, f(v_1)> + \ldots + \alpha_n <u, f(v_n)> =$$

$$= \alpha_1 <u, \lambda_1 v_1> + \ldots + \alpha_n <u, \lambda_n v_n> =$$

(*)

$$= \beta_1 \lambda_1 \alpha_1 <v_1, v_1> + \ldots + \beta_n \lambda_n \alpha_n <v_n, v_n> =$$

$$= <\beta_1 \lambda_1 v_1, \alpha_1 v_1> + \ldots + <\beta_n \lambda_n v_n, \alpha_n v_n> =$$

$$= <\beta_1 f(v_1), \alpha_1 v_1> + \ldots + <\beta_n f(v_n), \alpha_n v_n> =$$

$$= <\beta_1 f(v_1) + \ldots + \beta_n f(v_n), \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n> =$$

$$= <f(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n), \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n> = <f(u), w>.$$

En (*) hemos hecho lo siguiente:

$$\alpha_1 <u, \lambda_1 v_1> = \alpha_1 <\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n, \lambda_1 v_1> =$$
$$= \alpha_1 <\beta_1 v_1, \lambda_1 v_1> + \alpha_1 <\beta_2 v_2, \lambda_1 v_1> + \ldots + \alpha_1 <\beta_n v_n, \lambda_1 v_1> =$$
$$= \beta_1 \lambda_1 \alpha_1 <v_1, v_1> + \beta_2 \lambda_1 \alpha_1 \underbrace{<v_2, v_1>}_{=0} + \ldots + \beta_n \lambda_1 \alpha_1 \underbrace{<v_n, v_1>}_{=0} =$$
$$= \beta_1 \lambda_1 \alpha_1 <v_1, v_1>$$

análogamente: $\alpha_2 <u, \lambda_2 v_2> = \beta_2 \lambda_2 \alpha_2 <v_2, v_2>$

$\alpha_3 <u, \lambda_3 v_3> = \beta_3 \lambda_3 \alpha_3 <v_3, v_3>$

....

y en general : $\alpha_i <u, \lambda_i v_i> = \beta_i \lambda_i \alpha_i <v_i, v_i>$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Febrero 2006
Ejercicio 1

Sea $(E,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y sea $f: E \mapsto E$ un endorfismo tal que

$$<f(\vec{u}), f(\vec{v})> = <\vec{u},\vec{v}> \qquad \forall \vec{u},\vec{v} \in E.$$

Demostrar que:

a) f es un isomorfismo.

b) Si λ es un valor propio de f, entonces $|\lambda| = 1$.

c) f transforma una base ortogonal de E en una base ortogonal de E.

a) Demostraremos que f es un isomorfismo cuando demostremos que es biyectiva.

Demostraremos que es inyectiva cuando veamos que $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$ para ello supondremos $x \in \ker(f)$ y veremos que necesariamente $x = 0$.

$$<x, y> = <f(x), f(y)> \underset{x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0_E}{=} <0_E, f(y)> = 0$$

$$<x, y> = 0, \forall y \in E \Rightarrow x = 0_E$$

$$\forall x \in \ker(f),\ x = 0_E \Rightarrow \ker(f) = \{0_E\} \Rightarrow f \text{ inyectiva}$$

$$f: E \to E \quad \dim E = \underbrace{\cancel{\dim(\ker(f))}}_{\dim\{0_E\}} + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ \mathrm{Im}(f) \subset E \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = E \Rightarrow f \text{ sobreyectiva}$$

b) (ver P53 (febrero 2005))

c)

$\{x_1 \dots x_n\}$ base de E ortogonal $\Rightarrow \{f(x_1) \dots f(x_n)\}$ base de E ortogonal

$$\left.\begin{array}{l} \{x_1 \dots x_n\} \text{ base} \Rightarrow \{x_1 \dots x_n\} \text{ independientes} \\ f \text{ inyectiva (gracias a a)} \end{array}\right\} \underbrace{\{f(x_1) \dots f(x_n)\}}_{n \text{ elementos}} \text{ libres}$$

Tenemos n elementos independientes en un espacio de dimensión n ($\dim(E) = n$, sus bases tienen n elementos) así pues $\{f(x_1), \dots f(x_n)\}$ es base de E

$\{x_1 \dots x_n\}$ ortogonal $\Rightarrow <x_i, x_j> = 0\ \forall i \neq j \Rightarrow \{f(x_1) \dots f(x_n)\}$ ortogonal

Febrero 2006
Ejercicio 2

El conjunto $\mathbb{R}_3[x] = \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,3\}$ de los polinomios en la indeterminada x, de grado menor o igual que 3 y con coeficientes reales tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar real.

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \mapsto \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(p(x)) = p(x) - p'(x)$. Se pide:

a) Hallar la matriz de f respecto a la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Calcular el núcleo de f y comprobar que $f^{-1}(p(x)) = p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)$

c) Encontrar $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ tal que $p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x) = x^3 + x + 1$.

d) Hallar los autovalores de f y sus subespacios propios asociados. ¿Existe una base de autovectores de f?

$f: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ → Subespacio vectorial formado por todos los polinomios de grado menor o igual que tres cuyos coeficientes son reales.

$p(x) \longrightarrow p(x) - p'(x)$

$f(p(x)) = p(x) - p'(x)$

$\mathbb{R}_3[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

a) Matriz de f respecto de la base $\underbrace{B = \{1, x, x^2, x^3\}}_{\text{canónica de } \mathbb{R}_3[x]}$ de $\mathbb{R}_3[x]$

Sus columnas son las imágenes de la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ referidos a la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ (al ser polinomios dichas imágenes no podrán ser colocadas directamente en columnas; tendremos que referirlos a la base B mediante sus coordenadas.

Espacio de salida: $\mathbb{R}_3[x]$

Base canónica: $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

1ª columna: $f(1) = 1 - (1)' = 1 - 0 \Rightarrow f(1) = 1 = 1(1) + 0x + 0x^2 + 0x^3 \Rightarrow$ $f(1)$ es $(1,0,0,0)$ en $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

2ª columna: $f(x) = x - (x)' = x - 1 \Rightarrow f(x) = x - 1 = -1 + 1x + 0x^2 + 0x^3 \Rightarrow$ $f(x)$ es $(-1,1,0,0)$ en $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

3ª columna: $f(x^2) = x^2 - (x^2)' = x^2 - 2x \Rightarrow f(x^2) = x^2 - 2x = 0 - 2x + 1x^2 + 0x^3 \Rightarrow$ $f(x^2)$ es $(0,-2,1,0)$ en $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

4ª columna: $f(x^3) = x^3 - (x^3)' = x^3 - 3x^2 \Rightarrow f(x^3) = x^3 - 3x^2 = 0 + 0x - 3x^2 + 1x^3 \Rightarrow$ $f(x^3)$ es $(0,0,-3,1)$ en $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$$\boxed{M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

www.simplyjarod.com

b) Calcular el núcleo de f y comprobar que

$$f^{-1}(p(x)) = p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : f(p(x)) = 0_{\mathbb{R}_3[x]}\} =$$
$$= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) - p'(x) = 0_{\mathbb{R}_3[x]}\} =$$
$$= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = p'(x)\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}_3[x]}\}$$

El único polinomio de grado ≤ 3 que coincide con su derivada es el 0.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}_3[x]}\}} \Rightarrow \text{inyectiva}$$

NOTA: Hasta ahora hemos calculado el núcleo y la matriz de f. Vamos a ver qué sentido tiene dicha matriz y otra forma de hallar el núcleo

$$f(p(x)) = f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = f(a_0, a_1, a_2, a_3) = M_f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_2 - 3a_3 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0 - a_1, a_1 - 2a_2, a_2 - 3a_3, a_3) =$$
$$= (a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)x + (a_2 - 3a_3)x^2 + a_3x^3 =$$
$$= \underbrace{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)}_{p(x)} - \underbrace{(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2)}_{p'(x)} = p(x) - p'(x)$$

b2)

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \to 3x \quad f(2) = 6 \\ f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad y \to \frac{y}{3} \quad f^{-1}(6) = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(6) = 2 \\ (f^{-1} \circ f)(x) = x \Rightarrow \boxed{(f^{-1} \circ f) = Id} \end{array}$$

Para demostrar que f^{-1} es la inversa de f comprobaremos que la composición en uno y otro orden es la Id

$$\Rightarrow (f \circ f^{-1})(p(x)) = f(f^{-1}(p(x))) = f(p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)) =$$
$$= [p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)] - [p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)]' =$$
$$= p(x) - \cancel{p^{IV}(x)}^{\,0} = p(x).$$

la cuarta derivada de un polinomio de grado 3 es 0

$$\Rightarrow (f^{-1} \circ f)(p(x)) = f^{-1}(f(p(x))) = f^{-1}(p(x) - p'(x)) = (p(x) - p'(x)) + (p(x) -$$
$$- p'(x))' + (p(x) - p'(x))'' + (p(x) - p'(x))''' = p(x) - \cancel{p^{IV}(x)}^{\,0} = p(x)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (f \circ f^{-1})(p(x)) = p(x); \forall p(x) \Rightarrow f \circ f^{-1} = Id \\ (f^{-1} \circ f)(p(x)) = p(x); \forall p(x) \Rightarrow f^{-1} \circ f = Id \end{array}\right\} \boxed{f^{-1} \text{ es la inversa de } f}$$

Febrero 2006 - ejercicio 2

www.simplyjarod.com

c) Encontrar $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$; $p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x) = x^3 + x + 1$

$$p(x) = f^{-1}(p(x)) = x^3 + x + 1$$

$$f(f^{-1}(p(x))) = f(x^3 + x + 1)$$

$$\downarrow$$

$$p(x) = (x^3 + x + 1) - (3x^2 + 1)$$

$$\boxed{p(x) = x^3 - 3x^2 + x}$$

Junio 2006
Ejercicio 3

Sea el vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ y sea la matriz $M_{\vec{x}} = \dfrac{\vec{x}\,\vec{x}^T}{\vec{x}^T\,\vec{x}} = \dfrac{1}{\|\vec{x}\|^2}(\vec{x}\,\vec{x}^T)$. Se pide:

a) Demostrar que $M_{\vec{x}}\,\vec{v} = \text{proy}_{\vec{x}}(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

b) Demostrar que $M_{\vec{x}}$ es simétrica.

c) Demostrar que $M_{\vec{x}}$ no es invertible.

d) Demostrar que $(\text{Id}_n - M_{\vec{x}})\vec{v} = \text{proy}_{x^\perp}(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

e) Hallar la proyección de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre el complemento ortogonal al subespacio generado por $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$M_{\vec{x}} = \frac{\vec{x}\,\vec{x}^T}{\vec{x}^T\vec{x}}$$

$$x \in M_{n\times 1} \Rightarrow x^T \in M_{1\times n} \Rightarrow xx^T \in M_{n\times n}$$

$$x^T \in M_{1\times n} \Rightarrow x \in M_{n\times 1} \Rightarrow x^Tx \in M_{1\times 1} \Rightarrow x^Tx \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x^Tx = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \qquad M_{\vec{x}} = \frac{\vec{x}\,\vec{x}^T}{\vec{x}^T\vec{x}} = \frac{xx^T}{\langle x, x\rangle} = \frac{xx^T}{\|x\|^2}$$

a) $$M_x V = \frac{xx^T}{\langle x, x\rangle} V = \frac{x^T V}{\langle x, x\rangle} x = \frac{\langle x, v\rangle}{\langle x, x\rangle} x = \text{proy}_x V$$

b) A es simétrica $\Leftrightarrow A = A^T$

$$(M_x)^T = \left(\frac{xx^T}{\|x\|^2}\right)^T = \frac{(xx^T)^T}{\|x\|^2} = \frac{(x^T)^T x^T}{\|x\|^2} = \frac{xx^T}{\|x\|^2} = M_x$$

c) A es invertible $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|M_x| = \left|\frac{xx^T}{\|x\|^2}\right| = \frac{|xx^T|}{\|x\|^2} \; ; |M_x| = 0 \Rightarrow \nexists\, M_x^{-1}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad xx^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}(x_1, x_2, \dots x_n) = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n \end{pmatrix}$$

$$x^T = (x_1\ x_2 \dots x_n) \qquad |xx^T| = 0 \rightarrow$$ Todas las columnas son proporcionales entre sí

www.simplyjarod.com

d) $\text{proy}_x(v) + \text{proy}_{x^\perp}(v) = v$

$$\text{proy}_{x^\perp} v = v - \underbrace{\text{proy}_x v}_{\text{a) } M_x v} = Id\, v - M_x v = (Id - M_x)\, v$$

e)

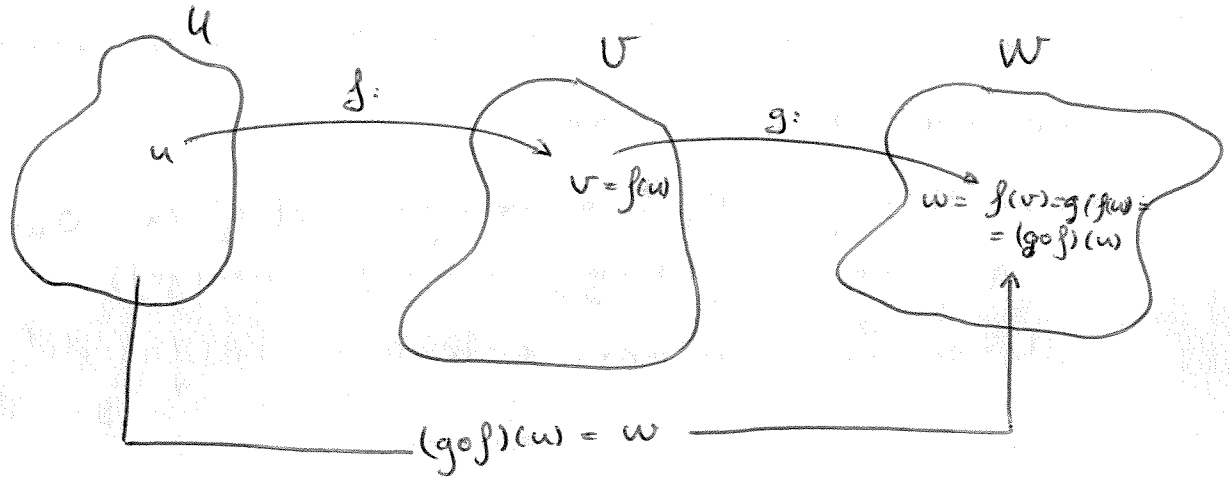
sol: $\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \\ -1/5 \end{pmatrix}$

Septiembre 2006
Ejercicio 1

Sean U, V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo K y $f: U \mapsto V$ y $g: V \mapsto W$ aplicaciones lineales. Se pide demostrar que:

a) $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$.

b) $\dim(\ker(g \circ f) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))$.



a) $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$ Demostraremos con la doble inclusión pues se trata de una igualdad entre subespacios

① $\ker(g \circ f) = \{u \in U : (g \circ f)(u) = \vec{0}_W\}$

② $\ker(g) = \{v \in V : g(v) = \vec{0}_W\}$

③ $f^{-1}(\ker(g)) = \{u \in U : f(u) \in \ker(g)\}$

(I) $x \in \ker(g \circ f) \overset{①}{\Rightarrow} (g \circ f)(x) = \vec{0}_W \Rightarrow g(f(x)) = \vec{0}_W \overset{②}{\Rightarrow} f(x) \in \ker(g) \overset{③}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(\ker(g))$

$x \in \ker(g \circ f) \Rightarrow x \in f(\ker(g))$

$\forall x \in \ker(g \circ f),\ x \in f^{-1}(\ker g) \Rightarrow \ker(g \circ f) \subset f^{-1}(\ker(g))$

(II) leyendo de derecha a izquierda también es válido

$\forall x \in f^{-1}(\ker g),\ x \in \ker(g \circ f) \Rightarrow f^{-1}(\ker g) \subset \ker(g \circ f)$

Por (I) y (II) $\Rightarrow$ $\boxed{\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))}$

www.simplyjarod.com

b) $\dim(\ker(g\circ f)) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))$

Vamos a empezar por sacar a escena al menos dos de los tres subespacios protagonistas en la fórmula. Como $\ker(f)$ y $\ker(g\circ f)$ están contenidos ambos en U, intuimos que uno puede estar contenido en el otro, el otro podría estar contenido en el uno o ambos. Cuando tengamos esta relación veremos cómo ajustarla a la fórmula.

Veamos que $\ker(f) \subset \ker(g\circ f)$

$$x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0_V \overset{*}{\Rightarrow} g(f(x)) = g(0_V) \Rightarrow (g\circ f)(x) = 0_W \Rightarrow x \in \ker(g\circ f)$$

$$\forall x \in \ker(f),\ x \in \ker(g\circ f) \Rightarrow \ker(f) \subset \ker(g\circ f)$$

Todas las implicaciones anteriores leídas del revés son ciertas siempre a excepción de la $\overset{*}{\Rightarrow}$ que sólo es válida cuando g es inyectiva. Así pues:

$$g \text{ inyectiva} \Rightarrow \ker(g\circ f) \subset \ker f$$

En nuestro problema como g es cualquiera no podemos asegurar $\ker(g\circ f) \subset \ker f$. Sólo si g inyectiva tendremos el $=$

$$\underset{\text{(válido siempre)}}{\ker(f) \subset \ker(g\circ f)} \Rightarrow \underbrace{\dim(\ker f)}_{n} \leq \dim(\ker g\circ f)$$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \dim(\ker g\circ f) = m+n$$

Tomando $\dim(\ker(g\circ f)) = m+n$ y siendo $\dim(\ker(f)) = n$ tenemos $\dim(\ker(f)) \leq \dim(\ker(g\circ f))$

$$\underbrace{\dim(\ker(g\circ f))}_{m+n} \leq \underbrace{\dim(\ker(f))}_{n} + \dim(\ker(g))$$

si probamos que $\dim(\ker(g)) \geq m$, habremos demostrado la fórmula

Si tenemos p elementos pertenecientes a un espacio vectorial de dim q (cada uno de los p-elementos tiene pues q-coordenadas) y si además $p > q$ entonces podemos asegurar que hay alguno de los p-elementos que dependen de algún otro.

P-ej: 3 vectores de $\mathbb{R}^2$ seguro que son dependientes

P-ej: en $\mathbb{R}^3$ hay 0, 1, 2, o 3 vectores libres, nunca 4

www.simplyjarod.com

Septiembre 2006 - ejercicio 1

Los sistemas libres en un espacio de dim = q tienen a lo sumo q-elementos. Las bases del espacio de dim = q tienen q-elementos. Por tanto, las bases del espacio de dim = q son entonces los sistemas libres con el mayor número posible de elementos.

$\overbrace{\{f(y_1), \dots, f(y_m)\}}^{m \text{ elementos}}$ libres $\Rightarrow$ las bases de Ker(g) tienen más de m elementos

$\in \ker g$

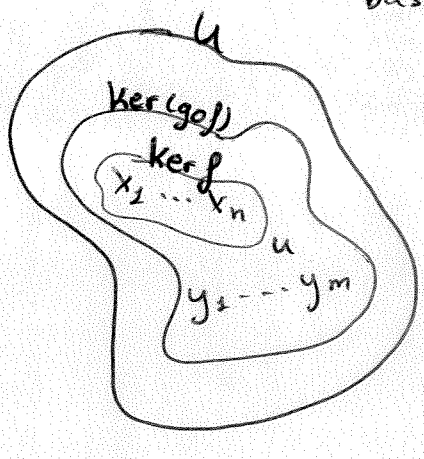
Si demostramos que existe una cantidad de m elem. independientes del Ker(g) habremos demostrado que las bases del Ker(g) tienen como poco m elementos (pues dijimos que las bases son los sistemas libres con mayor número de elementos). Es decir, demostrar que los sistemas libres del Ker(g) tienen como mucho m-elementos equivale a demostrar que la $\dim(\ker(g)) \geq m$

Así pues, escogeremos m elementos del Ker(g) y veremos que son independientes.

$\dim(\ker f) = n \Rightarrow$ las bases de Ker(f) tienen n elementos $\Rightarrow B_{\ker f} = \{x_1 \dots x_n\}$

$\ker(f) \subset \ker(g \circ f) \Rightarrow$ Podemos extender las bases de Ker(f) para obtener las bases de Ker(g∘f) $\Rightarrow B_{\ker(g\circ f)} = \{\underbrace{x_1 \dots x_n}_{n}, \overbrace{\underbrace{y_1 \dots y_m}_{m}}^{\notin \ker f}\}$ $n+m$

$\Rightarrow \dim(\ker(g \circ f)) = n+m$



Sea $\{f(y_1) \dots f(y_m)\}$ un sistema de m elementos. Si vemos que son independientes (libres) tendremos que $\dim(\ker(g)) \geq m$ porque habrá un sistema de Ker(g) que será libre y contendrá al menos m elementos, luego las bases de Ker(g) tendrán m elementos o más.

www.simplyjarod.com

$f(y_1) \dots f(y_m)$ independientes cuando veamos que su combinación lineal igualada a cero supone tener escalares nulos, es decir, pretendemos partir de $\alpha_1 f(y_1) + \dots + \alpha_m f(y_m) = 0_V$ y queremos llegar a $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

$\alpha_1 f(y_1) + \dots + \alpha_m f(y_m) = 0_V \Rightarrow f(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m) = 0_V$

$\Rightarrow \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m \in Ker(f) \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m$ puede escribirse como comb. lineal de los elementos $\{x_1 \dots x_n\}$ que forman base del $Ker(f) \Rightarrow \exists\, \beta_1, \dots \beta_n \in \mathbb{R}$:

$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n \Rightarrow$

$= (-\beta_1) x_1 + \dots + (-\beta_n) x_n + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m = 0$

$\{x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m\}$ base de $Ker(g \circ f) \Rightarrow \{x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m\}$ libres

$\Rightarrow -\beta_1 = \dots = -\beta_n = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$

En particular: $\alpha_n = \dots = \alpha_m = 0$

Como los $f_{y_1}, \dots, f_{y_m}$ son independientes tenemos que $\dim(Ker\, g) \geq m$ y la fórmula del enunciado queda demostrada.

www.simplyjarod.com

Septiembre 2006
Ejercicio 2

Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ definido por

$$f(x,y,z,u) = (2x+y+z+u,\ x+2y+z+u,\ z,\ u)$$

Se pide:

a) Hallar la matriz de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

b) Calcular los autovalores de f.

c) Hallar los subespacios propios (autoespacios) asociados a los autovalores de f.

d) Hallar si es posible una base de $\mathbb{R}^4$ respecto a la cual la matriz de f sea diagonal.

a) La matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es aquella cuyas columnas son las imágenes, por f, de los elementos que forman la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

$f(1,0,0,0) = (2,1,0,0)$

$f(0,1,0,0) = (1,2,0,0)$

$f(0,0,1,0) = (1,1,1,0)$

$f(0,0,0,1) = (1,1,0,1)$

$$M = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) AUTOVALORES DE f: $|A-\lambda I| = 0$.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda)\right] =$$

$$= (1-\lambda)^2\left[(4+\lambda^2-4\lambda)-1\right] = (1-\lambda)^2\left[\lambda^2-4\lambda+3\right] = (1-\lambda)^2(\lambda-1)(\lambda-3) =$$

$= (\lambda-1)^3(\lambda-3) \longrightarrow$ Polinomio característico.

$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \longrightarrow ma(\lambda_1) = 3$ $\quad \sum ma(\lambda_i) = 4 = n$

$\lambda_2 = 3 \longrightarrow ma(\lambda_2) = 1$

c) AUTOVECTORES.

$\lambda_1 = 1$

$$\ker(A-\lambda I) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+u=0 \\ x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\gamma \\ (\alpha, -\beta-\gamma, \end{cases}$$

$S_{\lambda_1=1} = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 : x+y+u+z=0\}$

$\dim(S_{\lambda_1}) = \dim \mathbb{R}^4 - \text{rec.} = 4-1 = 3 \Rightarrow \dim(S_{\lambda_1=1}) = 3$.

Hay 3 vectores en las bases $\rightarrow$ 3 autovectores

$B_{\lambda_1} = \{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\}$

www.simplyjarod.com

$\lambda_2 = 3$

$$\operatorname{Ker}(A-3I) \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=u=0} \\ -x+y=0 \\ \boxed{x=y} \end{cases}$$

$S_{\lambda_2=3} = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 : x=y,\ z=u=0\}$.

$\dim(S_{\lambda_2=3}) = 4-3 = 1 \longrightarrow$ 1 autovector

$B_{S_{\lambda_2}} = \{(1,1,0,0)\}$

d) La base respecto de la cual la matriz asociada a la aplicación lineal es diagonal es aquella formada por los autovectores de A. (existirá siempre y cuando la matriz A sea diagonalizable).

A sí diagonalizable xq. $ma(\lambda_1=1)=3=mg(\lambda_1=1)$ y $ma(\lambda_2=3)=1=mg(\lambda_2=3)$

$\Rightarrow$ la base $B = \{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1),(1,1,0,0)\}$ es aquella respecto de la cual la matriz A es diagonal.

Septiembre 2006
Ejercicio 3

Sea el espacio vectorial real de los polinomios en la indeterminada x, con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2, $\mathbb{R}_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, y sea $F=\{(1+x^3)\,p(x) : p(x)\in\mathbb{R}_2[x]\}$. Se pide:

a) Demostrar que existe $n \in N$ tal que F es un subespacio vectorial del espacio vectorial real de los polinomios en la indeterminada x, con coeficientes reales y de grado menor o igual que n, $\mathbb{R}_n[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n : a_0, a_1,\ldots, a_n\in\mathbb{R}\}$.

b) Hallar una base y la dimensión de F.

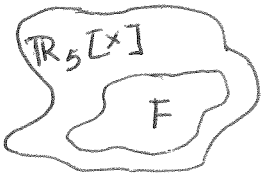
c) Calcular $F+\mathbb{R}_2[x]$. ¿Se trata de una suma directa?.

a) Demostrar que existe un n; F sea subespacio de $\mathbb{R}_n[x]$

$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$

$F = \{(1+x^3)p(x) ; p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\} = \{(1+x^3)(a_0+a_1x+a_2x^2) \in \mathbb{R}_5[x] :$
$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_0x^3 + a_1x^4 + a_2x^5 \in \mathbb{R}_5[x]\}$

F es el conjunto de polinomios, de grado menor o igual a cinco, que cumplen los siguientes tres requisitos:



- 1. $a_0 \rightsquigarrow$ el término independiente coincide con el coeficiente de x^3
- 2. $a_1 \rightsquigarrow$ el coeficiente de x coincide con el de x^4
- 3. $a_2 \rightsquigarrow$ el coeficiente de x^2 coincide con el de x^5

Demostración: F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_5[x]$

a) $0_{\mathbb{R}_5[x]} \in F$ $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 \in F$ por cumplir 1. 2. y 3.

b1) $\forall p_1(x), p_2(x) \in F$, $p_1(x) + p_2(x) \in F$

$p_1(x) \in F \Rightarrow \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : p_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^5$

$p_2(x) \in F \Rightarrow \exists\, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} : p_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_0 x^3 + \beta_1 x^4 + \beta_2 x^5$

$p_1(x) + p_2(x) = (\alpha_0+\beta_0) + (\alpha_1+\beta_1)x + (\alpha_2+\beta_2)x^2 + (\alpha_0+\beta_0)x^3 + (\alpha_1+\beta_1)x^4 + (\alpha_2+\beta_2)x^5$

cumple los tres requisitos $\Rightarrow p_1(x) + p_2(x) \in F$

b2) $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall p(x) \in F$, $kp(x) \in F$

$p(x) \in F \Rightarrow \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^5$

$kp(x) = k\alpha_0 + k\alpha_1 x + k\alpha_2 x^2 + k\alpha_0 x^3 + k\alpha_1 x^4 + k\alpha_2 x^5$

cumple los tres requisitos $\Rightarrow kp(x) \in F$

$\Rightarrow$ Por satisfacerse a), b1) y b2) concluimos que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n[x]$; $n=5$

$F \triangleleft \mathbb{R}_5[x] \triangleleft \mathbb{R}_6[x] \ldots$

$$\boxed{F \triangleleft \mathbb{R}_n[x],\ \forall n \geq 5 ;\ n \in \mathbb{N}}$$

www.simplyjarod.com

b) Hallar una base y la dimensión de F

$$F = \{ (1+x^3)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \in \mathbb{R}_5[x] : \underbrace{a_0, a_1, a_2}_{} \in \mathbb{R} \}$$

$$\boxed{\dim(F) = 3}$$

3 parámetros $\Rightarrow \dim(F) = 3$

$$= \{ a_0(1+x^3) + a_1(x+x^4) + a_2(x^2+x^5) \in \mathbb{R}_5[x] : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

Todos los elementos de F pueden escribirse como combinación lineal de $(1+x^3), (x+x^4), (x^2+x^5) \Rightarrow$ que forman base de F.

$$\boxed{B_F = \{ 1+x^3, x+x^4, x^2+x^5 \}}$$

c) Calcular $F + \mathbb{R}_2[x]$ ¿Es una suma directa?

- Sospechamos que $F + \mathbb{R}_2[x]$ da como resultado a $\mathbb{R}_5[x]$, debido al siguiente motivo: tanto F como $\mathbb{R}_2[x]$ son subespacios contenidos en $\mathbb{R}_5[x]$, luego inferimos que el valor de la suma es $\mathbb{R}_5[x]$ pues es un espacio que contiene a los dos que se suman.
- Lo anterior es una sospecha, para darla una justificación debemos demostrarlo:

Demostremos $F + \mathbb{R}_2[x] = \mathbb{R}_5[x]$

Se trata de demostrar una igualdad entre subespacios, que se consigue con la correspondiente doble inclusión.

(I) $F + \mathbb{R}_2[x] \subset \mathbb{R}_5[x]$

$p(x) \in F + \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \exists\, r(x) \in F$ y $\exists\, s(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = r(x) + s(x)$

$r(x) \in F \Rightarrow \exists\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} : r(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_0 x^3 + a_1 x^4 + a_2 x^5$

$s(x) \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \exists\, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} : s(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$r(x) + s(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + a_0 x^3 + a_1 x^4 + a_2 x^5$

$$\left.\begin{array}{l} r(x) + s(x) \in \mathbb{R}_5[x] \\ r(x) + s(x) = p(x) \end{array}\right\} \quad p(x) \in \mathbb{R}_5[x]$$

además, $r(x)$ y $s(x)$ son únicos, pero en este caso da igual.

(II) $\mathbb{R}_5[x] \subset F + \mathbb{R}_2[x]$

$p(x) \in \mathbb{R}_5[x] \Rightarrow \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ $\quad p(x) \in F + \mathbb{R}_2[x]$

$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$

$p(x) = \alpha_0 + \alpha_3 - \alpha_3 + \alpha_1 x + \alpha_4 x - \alpha_4 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_5 x^2 - \alpha_5 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$

$p(x) = \underbrace{(\alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5)}_{\in F} + \underbrace{((\alpha_0 - \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_4)x + (\alpha_2 - \alpha_5)x^2)}_{\in \mathbb{R}_2[x]}$

c2) suma directa

Si verificamos que $F \cap \mathbb{R}_2[x] = \{0_{\mathbb{R}_5[x]}\}$ entonces habremos probado que $F + \mathbb{R}_2[x]$ es una suma directa.

Sea $p(x)$ un elemento de $F \cap \mathbb{R}_2[x]$

$$p(x) \in F \cap \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \begin{cases} p(x) \in F & \Rightarrow \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^4 + \alpha \\ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] & \Rightarrow \exists\, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} : p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^5 \\ p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 \end{array}\right\}$$

Identificando coeficientes:

$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x$

$\Rightarrow p(x) = 0_{\mathbb{R}_5[x]}$

Acabamos de ver que si un elemento $p(x) \in F \cap \mathbb{R}_2[x]$, forzosamente $p(x) = 0_{\mathbb{R}_5[x]}$, luego $F \cap \mathbb{R}_2[x] = \{0_{\mathbb{R}_5[x]}\}$ y con ello concluimos que $F + \mathbb{R}_2[x]$ es suma directa

www.simplyjarod.com

ETSI Telecomunicación
Febrero 2007

Ejercicio 1

Sea el endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$f_a(x_1, x_2, x_3) = A_a \vec{x}^T = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 2a & 2a & 2 \\ 3a & 3a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Según los valores de $a \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Hallar $\mathrm{Ker}(f_a)$. Especificar una base de $\mathrm{Ker}(f_a)$.
b) Hallar $\mathrm{Img}(f_a)$. Especificar una base de $\mathrm{Img}(f_a)$.
c) Comprobar que $\vec{v} = (1,2,3)$ es un vector propio de f_a y calcular los autovalores de f_a.
d) Hallar, si es posible, una matriz $P_a \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P_a^{-1} A_a P_a$ sea diagonal.

$f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{f_a} f(x_1, x_2, x_3) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$f_a(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 2a & 2a & 2 \\ 3a & 3a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + ax_2 + x_3 \\ 2ax_1 + 2ax_2 + 2x_3 \\ 3ax_1 + 3ax_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$f_a(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + ax_2 + x_3, 2ax_1 + 2ax_2 + 2x_3, 3ax_1 + 3ax_2 + 3x_3)$

a) $\mathrm{Ker}(f_a) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)\}$

$\mathrm{Ker}(f_a) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (ax_1 + ax_2 + x_3, 2ax_1 + 2ax_2 + 2x_3, 3ax_1 + 3ax_2 + 3x$
$= f(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)\}$

$\mathrm{Ker}(f_a) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (ax_1 + ax_2 + x_3 = 0, 2ax_1 + 2ax_2 + 2x_3 = 0, 3ax_1 \cdots = 0$

$\mathrm{Ker}(f_a) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : ax_1 + ax_2 + x_3 = 0\}$

$\dim(\mathrm{Ker}\, f_a) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{nº ec. indep.} = 3 - 1 = 2$

$B_{\mathrm{Ker}(f_a)} = \{(1, 0, -a), (0, 1, -a)\}$

b) $\mathrm{Im}(f_a) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)\}$

$f_a(x_1, x_2, x_3) = (\underbrace{ax_1 + ax_2 + x_3}_{y_1}, \underbrace{2ax_1 + 2ax_2 + 2x_3}_{y_2}, \underbrace{3ax_1 + 3ax_2 + 3x_3}_{y_3})$

$\dim \mathrm{Esp\ Sal} = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f \Rightarrow 3 = 2 + \dim \mathrm{Im} f;\ \dim \mathrm{Im} f = 1$

$\dim \mathrm{Im} f = \dim$ Espacio que la contiene (llegada) $-$ nº ec indep $\Rightarrow 1 = 3 - 2;$ nº ec $= 2$

$\mathrm{Im}(f_a) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 - y_2 = 0, 3y_1 - y_3 = 0\}$

$\dim \mathrm{Im}(f_a) = 1 \Rightarrow B_{\mathrm{Im}(f_a)} = \{(1, 2, 3)\}$

www.simplyjarod.com

c) autovalores de f_a:

$$P(\lambda)=0;\quad |A-\lambda Id|=0;\quad \begin{vmatrix} a-\lambda & a & 1 \\ 2a & 2a-\lambda & 2 \\ 3a & 3a & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$[\underbrace{(a-\lambda)(2a-\lambda)}_{\lambda^2-3a\lambda+2a^2}(3-\lambda)+6a^2+6a^2]-[3a(2a-\lambda)+6a(a-\lambda)+2a^2(3-\lambda)]=0$$

$$[3\lambda^2-\cancel{9a\lambda}+\cancel{6a^2}-\lambda^3+3a\lambda^2-\cancel{2a^2\lambda}+\cancel{12a^2}]-[\cancel{18a^2}-\cancel{9a\lambda}-\cancel{2a^2\lambda}]=0$$

$$-\lambda^3+3(a+1)\lambda^2=0;\quad -\lambda^2[\lambda-3(a+1)]=0$$

Autovalores

- $a\neq-1$ $\begin{cases}\lambda_0=0 & \dots\ m_a(\lambda_0)=2\\ \lambda_1=3(a+1) & \dots\ m_a(\lambda_1)=1\end{cases}$

- $a=-1$ $\{\lambda_0=0 \quad \dots\ m_a(\lambda_0)=3$

Cálculo del autoespacio asociado al autovalor $\lambda_0=0$

$$S_{\lambda_0}=\mathrm{Ker}(A-\lambda_0 Id)=\mathrm{Ker}(A)$$

- Si el 0 está entre los autovalores de la matriz, el autoespacio asociado a dicho autovalor nulo es el núcleo de la aplicación asociada a la matriz.
- En nuestro problema, ya hemos calculado $\mathrm{Ker}(f_a)$, y como $\lambda_0=0$ es autovalor, resultará que $\mathrm{Ker}(f_a)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: ax_1+ax_2+x_3=0\}$ es el autoespacio asociado a $\lambda_0=0$. Como los elementos de la base del autoespacio son los autovectores, y dado que $B_{\mathrm{Ker}(f_a)}=\{(1,0,-a),(0,1,-a)\}$ tenemos que $(1,0,-a)$ y $(0,1,-a)$ son los autovectores de $\lambda_0=0$ (considerando $a\neq-1$)
- Además, en este caso, $m_g(\lambda_0)=2$ (pues la dimensión del autoespacio, que es el núcleo, es 2 según vimos.

$f(1,2,3)=(3a+3,6a+6,9a+9)=\{3(a+1)(1,2,3)\Rightarrow(1,2,3)$ es el autovector asociado a $\lambda_1=\{3(a+1)$

con $a\neq-1$, para $\lambda_1=3(a+1)$, $m_a(\lambda_1)=1$, $m_g(\lambda_1)=1$ $\quad m_g(\lambda_*)\leq m_a(\lambda_*)$

d) Vemos que $m_a=m_g$ en $a\neq-1$, $\Rightarrow A=$ diagonaliz $\Rightarrow\exists P: A=PDP^{-1};\ D=P^{-1}AP$ tal que P tiene como columnas los autovect. A, es decir $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-a&-a&3\end{pmatrix}$

Resumen

Autovalores

$a\neq-1$ $\begin{cases}\lambda_0=0 \longrightarrow m_a(\lambda_0)=2,\ m_g(\lambda_0)=2\\ \lambda_1=3(a+1)\longrightarrow m_a(\lambda_1)=1,\ m_g(\lambda_1)=1\end{cases}$

$a=-1$ $\{\lambda_0=0 \longrightarrow m_a(\lambda_0)=3,\ m_g(\lambda_0)=2$

ETSI Telecomunicación
Febrero 2007

Ejercicio 2

a) Demostrar que $A \in M_n(K)$ es invertible si y sólo si A no tiene autovalores nulos.

b) Sean $f, g, h: E \mapsto E$ tres endomorfismos del K-espacio vectorial E. Demostrar que si $\lambda = 0$ no es autovalor de los endomorfismos $g \circ f$ y $h \circ g$ entonces f, g y h son biyectivos.

c) Si $A \in M_n(K)$ es una matriz invertible, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sus autovalores y los $S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2}, ..., S_{\lambda_n}$ autoespacios correspondientes, calcular los autovalores y los autoespacios de A^{-1}.

a) Se pretende probar que se cumple la doble implicación

A invertible $\Leftrightarrow$ A no tiene autovalores nulos

A no invertible $\Leftrightarrow$ A tiene autovalor $\lambda = 0$

A tiene $\lambda = 0$ como autovalor $\Rightarrow$ $|A - \lambda Id| = 0$ se cumple para $\lambda = 0$ $\Rightarrow |A - 0Id| = 0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ A NO es invertible

Leído de derecha a izquierda se siguen cumpliendo las implicaciones, luego se cumple la doble implicación.

Hemos demostrado que A no invertible $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ es autovalor de A

Esto equivale a decir que A invertible $\Leftrightarrow$ A no tiene $\lambda = 0$ como autovalor.

b)

$$\left.\begin{array}{l} f: E \to E \text{ lineal} \\ g: E \to E \text{ lineal} \\ h: E \to E \text{ lineal} \\ \lambda = 0 \text{ no es autovalor de } g \circ f \text{ ni de } h \circ g \end{array}\right\} \Rightarrow f, g \text{ y } h \text{ son biyectivos}$$

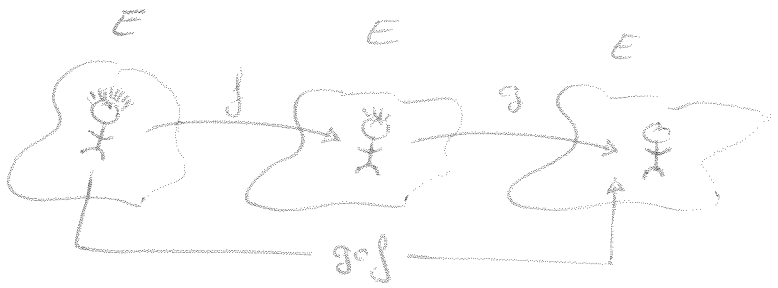
$\hookrightarrow$ las matrices asociadas a $g \circ f$ y a $h \circ g$ son invertibles, lo que quiere decir que $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas

$\dim E = \dim \operatorname{Im} f$

$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} f \triangleleft E \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \Rightarrow f$ sobreyect

$(g \circ f)$ biyectiva $\begin{cases} (g \circ f) \text{ inyectiva} \Rightarrow f \text{ inyectiva} \Rightarrow \ker f = \{0_E\} \\ \qquad \dim(\ker f) = 0 \\ (g \circ f) \text{ sobreyectiva} \Rightarrow g \text{ sobreyectiva} \Rightarrow \operatorname{Im} g = E \end{cases}$



www.simplyjarod.com

$f: E \to E \Rightarrow \dim E = \dim \cancel{\ker f}^{\,0} + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim E = \dim \operatorname{Im} f$

$$\left.\begin{array}{l} \dim E = \dim \operatorname{Im} f \\ \operatorname{Im} f \triangleleft E \end{array}\right\} \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \Rightarrow f \text{ sobreyectiva}$$

$g: E \to E \Rightarrow \dim E = \dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g$

$\dim \ker g = 0 \to \ker g = \{0_E\} \Rightarrow g$ inyectiva

$\to f$ biyectiva

$\to g$ biyectiva

$h \circ g$ biyectiva $\to h \circ g$ sobreyectiva $\Rightarrow h$ sobreyectiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(h) = E \Rightarrow \dim \operatorname{Im} h = \dim E$

$h: E \to E \to \dim E = \dim \ker h + \dim \operatorname{Im} h \Rightarrow \dim \ker h = 0$

$\ker h = \{0_E\} \Rightarrow h$ inyectiva

$\to h$ biyectiva

c)

Sea λ_i un autovalor asociado v_i:

Entonces se cumple $A v_i = \lambda_i v_i$

$$A v_i = \lambda_i v_i \Rightarrow A^{-1} A v_i = A^{-1} \lambda_i v_i \Rightarrow v_i = A^{-1} \lambda_i v_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} v_i = \frac{1}{\lambda_i} v_i$$

autovector asociado a $\frac{1}{\lambda_i}$

$\hookrightarrow$ autovalor de A^{-1}

Los autovalores de la matriz inversa son los inversos de los autovalores de la matriz sin invertir. Los autovectores son los mismos. Esto provoca que los autoespacios sean los mismos porque son generados por los autovectores.

www.simplyjarod.com

ETSI Telecomunicación
Febrero 2007

Ejercicio 3

Sea $(V,<,>)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de V. Si $\|.\|$ es la norma inducida por el producto escalar $<,>$ demostrar que.

a) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si y solamente si $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son ortogonales.

b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$.

c) $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$ si y solamente si $\|\vec{u}\|$ y $\|\vec{v}\|$ son ortogonales.

d) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si solamente si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

a) $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| \iff \bar{u}+\bar{v}$ y $\bar{u}-\bar{v}$ son ortogonales.

$$<\bar{u}+\bar{v},\bar{u}-\bar{v}> \underset{\text{P.LIN}}{=} <\bar{u},\bar{u}-\bar{v}> + <\bar{v},\bar{u}-\bar{v}> \underset{\text{P. LINEAL}}{=} <\bar{u},\bar{u}> + <\bar{u},-\bar{v}> + <\bar{v},\bar{u}> + <\bar{v},\bar{v}>$$

$$\underset{\text{P.LIN}}{=} <\bar{u},\bar{u}> - <\bar{u},\bar{v}> + <\bar{u},\bar{v}> - <\bar{v},\bar{v}> = <\bar{u},\bar{u}> - <\bar{v},\bar{v}> = \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2$$

$\|a\|^2 = <a,a>$

$<a,b> = <b,a>$

$\Rightarrow <\bar{u}+\bar{v},\bar{u}-\bar{v}> = \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2$. Entonces, $<\bar{u}+\bar{v},\bar{u}-\bar{v}> = 0 \iff \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2 = 0$

$\iff \|\bar{u}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 \iff \|\bar{u}\| = \pm\|\bar{v}\|$ Descarto el signo $\ominus$ xq las normas son siempre ≥ 0.

Por tanto, $<\bar{u}+\bar{v},\bar{u}-\bar{v}> = 0 \iff \|\bar{u}\| = \|\bar{v}\|$; es decir $\bar{u}+\bar{v}$, $\bar{u}-\bar{v}$ ortogonales si y sólo si $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\|$.

b) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left[\|u\|^2 + \|v\|^2\right]$

$$\|u+v\|^2 = <u+v,u+v> = <u,u> + <u,v> + <v,u> + <v,v> =$$
$$= <u,u> + <v,v> + 2<u,v>.$$
$$\|u-v\|^2 = <u-v,u-v> = <u,u> - <u,v> - <v,u> + <v,v> =$$
$$= <u,u> + <v,v> - 2<u,v>.$$

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = <u,u> + <v,v> + 2<u,v> + <u,u> + <v,v> - 2<u,v>$$
$$= 2<u,u> + 2<v,v> = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right). \text{ cqd.}$$

c) $\|u+v\| = \|u-v\| \iff \|u\|$ y $\|v\|$ son ortogonales.

Demostramos en el apartado a) que la norma de dos elementos es la misma si y sólo si la suma de esos elementos es ortogonal a la resta. En el caso c), lo anterior queda: $u+v = u-v \iff 2u$ y $2v$ ortogonal $\underset{\text{LINEAL}}{\iff}$ u y v ortogonales.

www.simplyjarod.com

d) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u$ y v son ortogonales.

$$\|u+v\|^2 = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\cancel{\langle u,v\rangle}^{\,0}$$

$\langle u,v\rangle = 0$ xq u y v ortog.

Febrero 2008
Ejercicio 1

Sea la función $f:\mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^5$ tal que $f(x,y)=(x+y,x,x,y,y)$ y sea $g:\mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^5$ la aplicación lineal cuya matriz respecto a las bases canónicas es $G=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que f es una aplicación lineal.
b) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.
c) Calcular $Ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ y especificar sus dimensiones.
d) ¿Existe alguna relación entre $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Im}(g)$? Razonar la respuesta.

a) Demostrar que f es aplicación lineal

Si f es aplicación lineal, verifica:

a) $f(u+v)=f(u)+f(v) \quad \forall u,v \in \mathbb{Z}_2^2$

Sea $u=(x,y)\in\mathbb{Z}_2^2 \Rightarrow f(u)=f(x,y)=(x+y,x,x,y,y)$

Sea $v=(x',y')\in\mathbb{Z}_2^2 \Rightarrow f(v)=f(x',y')=(x'+y',x',x',y',y')$

$(u+v)=(x+x',y+y') \Rightarrow f(u+v)=f(x+x',y+y')=(x+x'+y+y',x+x',x+x',y+y',y+y')$

$f(u+v)=f(u)+f(v)$ c.q.d.

b) $f(kv)=k\cdot f(u) \quad \forall k\in\mathbb{R}$ y $\forall v\in\mathbb{Z}_2^2$

$v=(x,y)\in\mathbb{Z}_2^2 \Rightarrow kv=k(x,y)=(kx,ky)$; $f(kv)=f(kx,ky)=$
$=(kx+ky,kx,kx,ky,ky)=k(x+y,x,x,y,y)=k\,f(x,y)=$
$=k\,f(v) \Rightarrow kf(v)=f(kv) \quad \forall v\in\mathbb{Z}_2^2$ y $\forall k\in\mathbb{R}$ c.q.d.

b) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas

Matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{Z}_2^2$ y de $\mathbb{Z}_2^5$

Es aquella cuyas columnas son los transformados o imágenes de los elementos de la base canónica del espacio de salida, referidos a la base canónica del espacio de llegada

Espacio de salida de f: $\mathbb{Z}_2^2$

Base canónica de $\mathbb{Z}_2^2$: $B_{\mathbb{Z}_2^2}=\{(1,0),(0,1)\}$

1ª columna $f(1,0)=(1,1,1,0,0)$
2ª columna $f(0,1)=(1,0,0,1,1)$

$$\boxed{M(f)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}}$$

www.simplyjarod.com

c) Calcular $Ker(f)$ e $Im(f)$ y sus dimensiones

Núcleo de f: Subespacio contenido en el espacio de salida de la aplicación de f formado por todos los elementos cuyo transformado sea el neutro del espacio de llegada.

$$Ker(f) = \{u \in \mathbb{Z}_2^2 : f(u) = 0_{\mathbb{Z}_2^5}\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}_2^2 : f(x,y) = (0,0,0,0,0)\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}_2^2 : (x+y, x, x, y, y) = (0,0,0,0,0)\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}_2^2 : x+y=0, x=0, x=0, y=0, y=0\}$$

$$Ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_2^2 : x=0, y=0\} \Rightarrow Ker(f) = \{(0,0)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ker(f) = \{0_{\mathbb{Z}_2^2}\} \Rightarrow f \text{ inyectiva} \Rightarrow \text{si } f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$$

$\boxed{\dim(Ker(f)) = 0}$ pues aunque tenga 1 elemento, es $\vec{0}$

Imagen de f: Subespacio contenido en el espacio de llegada formado por todos aquellos elementos para los cuales existe al menos uno en el espacio de salida cuya imagen sea dicho elemento.

$$Im(f) = \{v \in \mathbb{Z}_2^5 : \exists u \in \mathbb{Z}_2^2 \text{ con } f(u) = v\}$$

$$\dim\begin{pmatrix}\text{espacio}\\ \text{salida}\end{pmatrix} = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) \Rightarrow 2 = 0 + \dim Im(f)$$

$$Rg(M(f)) = \dim(Im(f)) = 2 \qquad \boxed{\dim(Im(f)) = 2}$$

$$\dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{Z}_2^5) - \text{nº ec. indep.}$$
$$2 = 5 - 3$$

$$(x,y) \longrightarrow (\underset{w_1}{x+y}, \underset{w_2}{x}, \underset{w_3}{x}, \underset{w_4}{y}, \underset{w_5}{y}) \leftarrow \begin{pmatrix} w_2 = w_3 \\ w_4 = w_5 \\ w_1 = w_2 + w_4 \end{pmatrix}$$

$$Im(f) = \{(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \in \mathbb{Z}_2^5 : w_2 - w_3 = 0, w_4 - w_5 = 0, w_1 - w_2 - w_4 = 0\}$$

d) Relación entre $Im(f)$ e $Im(g)$

$$g : \mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^5$$
$$(x,y) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y, y, x+y, x+y)$$

$\mathbb{Z}_2$ es el conjunto formado por todos los posibles restos que se obtienen al dividir un número entero entre 2, es decir, 0 y 1

$$\mathbb{Z}_2^2 = \{(0,0), (1,1), (0,1), (1,0)\}$$
$$Im(f) = \{f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1)\}$$
$$Im(f) = \{(0,0,0,0,0), (1,0,0,1,1), (1,1,1,0,0), (0,1,1,1,1)\}$$
$$Im(g) = \{g(0,0), g(0,1), g(1,0), g(1,1)\}$$
$$Im(g) = \{(0,0,0,0,0), (0,1,1,1,1), (1,0,0,1,1), (1,1,1,0,0)\}$$

$$\boxed{Im(f) = Im(g)}$$

Febrero 2008
Ejercicio 2

Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$.

Demostrar que f es inyectiva si y solamente si existe una aplicación lineal $g: W \to V$ tal que la composición $(g \circ f): V \to V$ es la función identidad.

$$\left.\begin{array}{l} f: V \to W \\ \dim(V) = n \\ \dim(W) = m \end{array}\right\} \quad f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow \exists g;\ (g \circ f): V \to V = Id \quad g: W \to V$$

Se trata de demostrar una doble implicación, así es que probamos cada una de las implicaciones de forma separada

(I) f inyectiva $\Rightarrow \exists\, g: W \to V \mid (g \circ f) = Id$

Se trata de demostrar la existencia de tal función g, de modo que nuestro objetivo es construir la expresión de dicha función.

Para definir plenamente la aplicación g (y demostrar por tanto su existencia) nos bastaría con encontrar su matriz asociada, la cual se construye situando por columnas las imágenes de los elementos de una base de W (espacio de salida de g). Así pues, tendremos solucionado el problema cuando construyamos una base de W y conozcamos las imágenes por g de todos los elementos de dicha base.

a) <u>Construcción de una base de W:</u>

* $\dim(W) = m \Rightarrow$ Las bases de W tienen m elementos
* $f: V \to W \Rightarrow \underbrace{\dim(V)}_{n} = \underbrace{\dim(Ker(f))}_{0} + \dim(Im(f)) \Rightarrow \underbrace{\dim(Im(f)) = n}_{\text{Las bases de } Im(f) \text{ tienen } n \text{ elementos}}$

  f inyectiva $\Rightarrow Ker(f) = 0_V \Rightarrow \dim(Ker(f)) = 0$
* $\left.\begin{array}{l} \dim(W) = m,\ \dim(Im(f)) = n \\ Im(f) \triangleleft W \end{array}\right\} \Rightarrow n \leq m$

La base de W escogida es la siguiente:

$$B_W = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\substack{n \text{ elementos} \\ \text{que son} \\ \text{base de } Im(f)}}, \underbrace{v_{n+1}, \dots v_m}_{\substack{m-n \text{ elementos} \\ \text{(no pertenecen} \\ \text{a } Im(f))}} \}$$

$v_i \in Im(f),\ \forall i = 1, 2, \dots n$

Teorema de Extensión de base

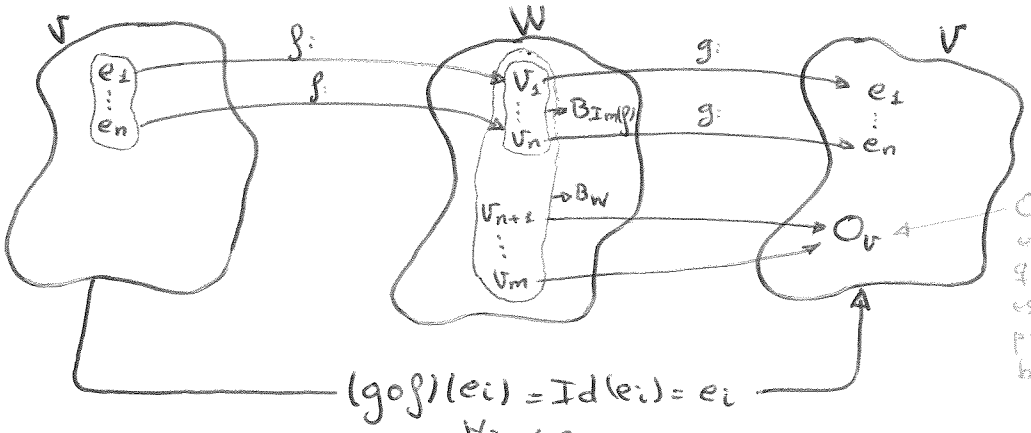
Hemos considerado $Im(f)$ y trabajado con una base de él $(v_1, \dots, v_n)$ para agregarle $m-n$ elementos independientes y que no son ninguna combinación lineal de los componentes de dicha base. Hemos obtenido pues, m elementos independientes entre sí y pertenecientes a un espacio de dim m, luego forman base.

www.simplyjarod.com

b) Definición de la aplicación g

Buscamos las imágenes que han de tener los elementos de W para que, finalmente, se cumpla lo que pretendemos demostrar: $(g \circ f) = Id$

$$v_i \in Im(f),\ \forall i = 1, 2, \dots n \Rightarrow \exists\, e_1 \dots e_n \in V : f(e_1) = v_1, \dots, f(e_n) = v_n$$



Ou porque es el único elemento que sabemos que está en V y no pertenece a la base de V

$$(g \circ f)(e_i) = Id(e_i) = e_i$$
$$\forall i = 1, 2, \dots n$$

$$g(v_i) = \begin{cases} e_i & i = 1 \dots n \\ 0_V & i = n+1 \dots m \end{cases}$$

(II) $\exists g : W \to V \mid (g \circ f) = Id \Rightarrow f$ inyectiva

Reducción al absurdo:

Empezaremos suponiendo que, bajo la condición de que existe una función $g \mid (g \circ f) = Id$, se tiene que f es no inyectiva (nótese que estamos negando lo que queremos demostrar, puesto que queremos probar que f es inyectiva) La demostración consiste en encontrar una contradicción combinando el hecho de que f sea no inyectiva con la hipótesis que nos dan acerca de $(g \circ f) = Id$

f no inyectiva $\Rightarrow \exists\, x, y \in V : x \neq y$ pero $f(x) = f(y)$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$$

por hipótesis $(g \circ f) = Id \Rightarrow Id(x) = Id(y) \Rightarrow x = y$

contradicción

Para evitar esta contradicción, negamos lo supuesto inicialmente (f no inyectiva) lo que nos afirma que f inyectiva

Por (I) y (II) queda demostrado

Febrero 2008
Ejercicio 3

Sea $(\mathbb{R}_2[x], <\ ,\ >)$ el espacio vectorial euclídeo de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual que 2, $\mathbb{R}_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2 : a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$, con el producto escalar $<p(x),q(x)>=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)\,dx$.

Sea la aplicación lineal $D:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ tal que a todo polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$ le hace corresponder su derivada.

a) Obtener los autovalores y autovectores de D y estudiar si es diagonalizable.
b) Encontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], <\ ,\ >)$.

$D: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$
$p(x) \longrightarrow p'(x)$

$p(x)\in\mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \exists\, a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R} : p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$
$D[p(x)] = D(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x = p'(x)$

a) Autovalores y autovectores. ¿Diagonalizable?

Sea λ un autovalor de D cuyo autovector asociado es $p(x)$

$D[p(x)] = \lambda p(x)$

$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ $\left\{\begin{array}{l} D[p(x)] = a_1+2a_2x \\ \lambda p(x) = \lambda(a_0+a_1x+a_2x^2)\end{array}\right\}$ $a_1+2a_2x = \lambda(a_0+a_1x+a_2x^2)$

$\rightarrow$ identificando coeficientes: $\left\{\begin{array}{lll} x^2: & \lambda a_2 = 0 & (ec.1) \\ x^1: & \lambda a_1 = 2a_2 & (ec.2) \\ x^0: & \lambda a_0 = a_1 & (ec.3)\end{array}\right.$

Supongamos que $\lambda\neq 0 \Rightarrow$ (ec.1) $a_2=0 \rightarrow$ (ec.2) $\lambda a_1 = 0 \Rightarrow a_1=0 \rightarrow$
$\rightarrow$ (ec.3) $\lambda a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

Entonces, si $\lambda\neq 0$, $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 = 0+0x+0x^2 \Rightarrow p(x)=0_{\mathbb{R}_2[x]}$

- Lo anterior nos indica que si $\lambda\neq 0$, entonces, uno de los autovectores sería el neutro de $\mathbb{R}_2[x]$, lo cual es imposible por el siguiente motivo: los autovectores son elementos de la base del autoespacio, y por tanto nunca pueden ser el neutro.
- Para evitar esta contradicción, negamos lo que supusimos inicialmente acerca de que $\lambda\neq 0$. Así pues $\boxed{\lambda=0}$ El único autovalor posible que tiene la aplicación es 0.
- La suma de las multiplicidades algebraicas de todos los autovalores es igual al orden de la matriz asociada o lo que es lo mismo, la dimensión del espacio de salida de la aplicación

www.simplyjarod.com

- En nuestro caso, la dim del espacio de salida (y de llegada) es 3. ($\mathbb{R}_2[x]$ tiene dim = 3 porque necesitamos 3 parámetros para determinar un polinomio de grado menor o igual que 2; $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$) con lo que el orden de la matriz es 3 y la suma de las m_a es 3. Como $\lambda = 0$ es el único autovalor posible, resulta que su multiplicidad algebraica es 3.

$$\boxed{\lambda = 0 \quad m_a(\lambda=0) = 3}$$

multiplicidad geométrica = dim (autoespacio asociado)

- Acudiendo a la expresión $D(p(x)) = \lambda p(x)$ y sustituyendo $\lambda = 0$ queda que los autovectores $p(x)$ han de cumplir $D(p(x)) = 0$. Como $D(p(x)) = a_1 + 2a_2 x = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

* Los autovectores $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ han de cumplir $a_1 = a_2 = 0$
* Los autovectores $p(x)$ son de la forma $p(x) = a_0$ con $a_0 \in \mathbb{R}$
* Las constantes son los autovectores

<u>En resumen:</u> la derivada de una constante es cero veces ella misma, luego el cero es el autovalor asociado a la constante (que es el autovector.

Autoespacio: $S_{\lambda=0} = \{\underbrace{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a_1 = 0, a_2 = 0}_{p(x) = a_0 \in \mathbb{R}}\}$

$\dim(S_{\lambda=0}) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) - n^o$ ec. independientes

$\dim(S_{\lambda=0}) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow m_g(\lambda=0) = 1$

$S_{\lambda=0} = \{a_0 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow S_{\lambda=0} = \mathbb{R} \Rightarrow \dim(S_{\lambda=0}) = \dim \mathbb{R} = 1 \Rightarrow m_g(\lambda=0) = 1$

El autoespacio es el espacio generado por los autovectores, y como los autovectores son las constantes, se tiene que el autoespacio es $\mathbb{R}$

Hemos visto que la multiplicidad algebraica del autovalor $\lambda = 0$ (único que existe) es 3, mientras que la geométrica es 1. Al no coincidir dichas multiplicidades para al menos un autovalor (el único) concluimos que la aplicación D no es diagonalizable.

D es diagonalizable $\Leftrightarrow m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$

Febrero 2008 - ejercicio 3

www.simplyjarod.com

Método alternativo: (igualito que sept-09)

$$D: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$
$$p(x) \longrightarrow p'(x)$$

$p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \exists\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$D(p(x)) = D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x = p'(x)$

Matriz asociada a D respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$

Estas bases son $B = \{1, x, x^2\}$

1ª columna: $D(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2 \equiv (0,0,0)$ en $B = \{1, x, x^2\}$

2ª columna: $D(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 \equiv (1,0,0)$ en $B = \{1, x, x^2\}$

3ª columna: $D(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2 \equiv (0,2,0)$ en $B = \{1, x, x^2\}$

La matriz asociada tiene por columnas a las imágenes de los elementos de la base B referidos a la base B, canónica de $\mathbb{R}_2[x]$

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$|M - \lambda Id| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 0 \quad m_a(\lambda = 0) = 3}$$

Autoespacio:

$$\ker(M - \lambda Id) = \ker(M - 0) = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : D[p(x)] = 0\} =$$
$$= \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p'(x) = 0\} = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = cte\} =$$
$$= \mathbb{R} \Rightarrow B_{\mathbb{R}} = \{a_0\} \Rightarrow m_g(\lambda = 0) = 1 = \dim(\mathbb{R})$$

autovector $a_0 \in \mathbb{R}$

como $(m_a(\lambda = 0) = 3) \neq (1 = m_g(\lambda = 0)) \Rightarrow$ D no diagonalizable

www.simplyjarod.com

b) base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], <,>)$

$p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$

$< p(x), q(x) > = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$

Base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$: $B = \{ \underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{x}, \underset{e_3}{x^2} \}$

$< e_1, e_2 > = < 1, x > = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow$ ortogonales

$< e_2, e_3 > = < x, x^2 > = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow$ ortogonales

$< e_3, e_1 > = < x^2, 1 > = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ NO ortogonales

Existe una pareja con producto escalar $\neq 0 \Rightarrow B$ no es ortogonal
Para ortogonalizarla acudimos al método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Gram-Schmidt

$u_1 = e_1$

$u_2 = e_2 - \frac{< e_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1$

$u_3 = e_3 - \frac{< e_3, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 - \frac{< e_3, u_2 >}{< u_2, u_2 >} u_2$

$u_1 = e_1 \Rightarrow u_1 = 1$; $< u_1, u_1 > = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|u_1\| = \sqrt{< u_1, u_1 >} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$u_2 = e_2 - \frac{< e_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 \Rightarrow u_2 = x - \frac{< x, 1 >}{< 1, 1 >} \cdot 1 \Rightarrow u_2 = x - \frac{0}{2} \cdot 1$

$u_2 = x$ $\quad < u_2, u_2 > = \int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|u_2\| = \sqrt{< u_2, u_2 >} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$

$u_3 = e_3 - \frac{< e_3, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 - \frac{< e_3, u_2 >}{< u_2, u_2 >} u_2 = x^2 - \frac{< x^2, 1 >}{< 1, 1 >} 1 - \frac{< x^2, x >}{< x, x >} x =$

$u_3 = x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \|u_3\| = \sqrt{< u_3, u_3 >} = \sqrt{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3})dx} = \sqrt{\frac{2}{5} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9}}$

$\|u_3\| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$; $\frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)$

Base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$: $B' = \{ 1, x, x^2 - 1/3 \}$

Base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$: $B'' = \{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1) \}$

$$\boxed{\text{Base ortonormal de } (\mathbb{R}_2[x], <,>) = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1) \right\}}$$

Junio 2008
Ejercicio 1

a) Hallar todas las matrices $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ tales que $A^2 = A$.

b) Demostrar que si $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ es un endomorfismo idempotente entonces solamente $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1 = 1$ pueden ser autovalores de f.

a) Sea $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}: A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\to A^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc = a & (ec.1) \\ b(a+d) = b & (ec.2) \\ c(a+d) = c & (ec.3) \\ bc+d^2 = d & (ec.4) \end{cases}$$

(ec.2) $\to b(a+d-1) = 0$ $\to$ caso ① $b \neq 0 \Rightarrow (a+d-1) = 0;\ a+d = 1$
$\to$ caso ② $b = 0$

① si $b \neq 0 \Rightarrow d = 1-a$

(ec.1) $\Rightarrow c = \dfrac{a(1-a)}{b}$ $\qquad A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a(1-a)}{b} & 1-a \end{pmatrix}$

② $b = 0 \Rightarrow$ (ec.1) $\Rightarrow a^2 = a \to a = 0$ ó $a = 1$

(ec.4) $\Rightarrow d^2 = d \to d = 0$ ó $d = 1$

2.1 $a = 0$, $d = 0$, $b = 0$ $\quad$ (ec.3) $\to c(a+d) = c$; $c\underbrace{(a+d-1)}_{0+0-1} = 0$; $c = 0$ $\qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.2 $a = 1$, $d = 1$, $b = 0$ $\quad$ (ec.3) $\to c\underbrace{(a+d-1)}_{(1+1-1)} = 0 \Rightarrow c = 0$ $\qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.3 $a = 1$, $d = 0$, $b = 0$ $\quad$ (ec.3) $\Rightarrow c\underbrace{(a+d-1)}_{(1+0-1)} = 0 \Rightarrow c =$ libre $\qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$

2.4 $a = 0$, $d = 1$, $b = 0$ $\quad$ (ec.3) $\to c\underbrace{(a+d-1)}_{(0+1-1)} = 0 \Rightarrow c =$ libre $\qquad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$

www.simplyjarod.com

(ec.3) $\rightarrow$ $c(a+d-1)=0$ $\rightarrow$ ③ $c \neq 0 \Rightarrow a+d=1$; $d = 1-a$

④ $c=0$ $\qquad b = \frac{d(1-d)}{c}$

$\hookrightarrow$ (ec.1) $a^2=a \Rightarrow a=0$ ó $a=1$

(ec.4) $d^2=d \Rightarrow d=0$ ó $d=1$

$$A' = \begin{pmatrix} a & \frac{d(1-d)}{c} \\ c & 1-a \end{pmatrix}$$

A' equivalente a A_1

casos $\begin{cases} a=0 & d=0 \\ a=1 & d=1 \end{cases}$ $\rightarrow$ similares a 2.1 y 2.2

$\downarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a=1, d=0 \Rightarrow A_6 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a=0, d=1 \Rightarrow A_7 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Las matrices $A_1 \ldots A_7$ señaladas anteriormente son todas aquellas de 2×2 que satisfacen $A^2=A$

b) Endomorfismo idempotente $\Rightarrow$ $f \circ f = f$

Sea λ un autovalor de f; entonces:

$\exists v \in \mathbb{C}^2 : f(v) = \lambda v$

Aplicando f a ambos lados: $\underbrace{f(f(v))}_{(f\circ f)(v) = f(v) = \lambda v} = \underbrace{f(\lambda v)}_{\lambda f(v) = \lambda \cdot \lambda v}$

$\lambda v = \lambda^2 v$

$\lambda(-\lambda+1)v = 0$

$v \neq 0$ porque v es el autovector asociado a λ; por ser autovector es elemento de la base de un autoespacio, lo que implica que es no nulo.

$\lambda(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ó} \\ \lambda = 1 \end{cases}$

Comentario en relación a a)

Si un endomorfismo f tiene a la matriz asociada A, entonces $f \circ f$ tendrá como matriz asociada a A^2

si $f \circ f = f \Rightarrow A^2 = A$, con lo que podemos responder intuitivamente (NO en examen) al b) calculando todos los autovalores de $A_1 \ldots A_7$ y comprobando que son todos 0.

Junio 2008
Ejercicio 3

Sea el subespacio vectorial $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y=0, y+z=0\}$ del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual. Se pide:

a) Obtener una base ortonormal del subespacio ortogonal a E.
b) Hallar la proyección ortogonal del vector $\vec{v}=(1,2,3)$ sobre el subespacio E.

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y=0 \ ; \ y+z=0\}$$

Vamos a hallar el subespacio ortogonal a E ($E^\perp$):

$$E^\perp=\{(x,y,z)=u\in\mathbb{R}^3 : u\perp E\}=\{(x,y,z)=u\in\mathbb{R}^3 : \underline{\langle u,v\rangle=0 \ \forall v\in E}\}$$

Para que se cumpla esto nos basta con exigir que $u\perp$ a todos los elementos de una base de E.

$\Longrightarrow \dim(E)=\dim(\mathbb{R}^3)-$ nº ecuaciones implícitas l.i

$\Longrightarrow \dim(E)=3-2 \Longrightarrow \dim(E)=1$

$\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{Las bases de } E \text{ tienen un elemento.} \\ \dim(E^\perp)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(E) \Longrightarrow \dim(E^\perp)=2 \end{cases}$ (Las bases de $E^\perp$ tienen 2 elementos)

$(\dim(\mathbb{R}^3)=\dim(E)+\dim(E^\perp))$

$\Longrightarrow B_E=(2,1,-1) \Longrightarrow$ los elementos $(x,y,z)=u\in\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a $(2,1,-1)$ son aquellos que cumplen $\langle(x,y,z),(2,1,-1)\rangle=0$; es decir, satisfacen $2x+y-z=0$.

$\rightsquigarrow$ Los elementos ortogonales a una base de E son ortogonales a todos los elementos del subespacio E.

$\rightsquigarrow$ Los elementos $(x,y,z)=u\in\mathbb{R}^3$ que cumplen $2x+y-z=0$ son los ortogonales a E y, por tanto, son los que forman $E^\perp$.

$\rightsquigarrow$ $E^\perp=\{(x,y,z)=u\in\mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0\}$

$\dim(E^\perp)=\dim(\mathbb{R}^3)-$ nº ec. imp. ind. $=3-1 \Longrightarrow \dim(E^\perp)=2$

$$B_{E^\perp}=\{\underbrace{(0,1,1)}_{e_1},\underbrace{(1,0,2)}_{e_2}\}$$

a)

www.simplyjarod.com

$\mathcal{B}_{E^\perp} = \{e_1, e_2\}$; $\langle e_1, e_2 \rangle \neq 0 = 2 \Rightarrow$ base no ortogonal

Ortogonalización de Gram-Schmidt

$u_1 = e_1 \Longrightarrow u_1 = (1,1,0)$

$u_2 = e_2 - \dfrac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \Longrightarrow u_2 = (1,-1,1)$

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y=0 \ , \ y+z=0\}$; $\dim(E) = 1$; $\mathcal{B}_E = \{(2,1,-1)\}$

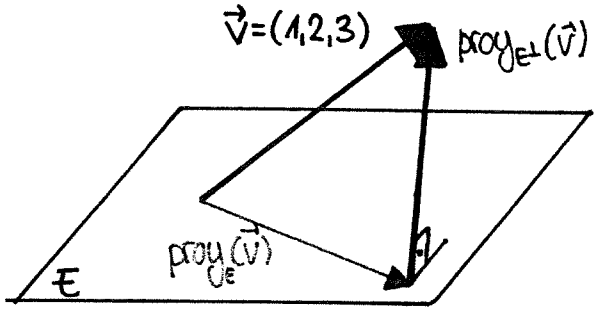
$E^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0\}$ $\dim(E^\perp) = 2$

$\mathcal{B}_{E^\perp} = \{(0,1,1),(1,0,2)\}$

(base ortogonal) $\rightarrow \mathcal{B}'_{E^\perp} = \{(0,1,1),(1,-1,1)\}$

(base ortonormal) $\rightarrow \mathcal{B}''_{E^\perp} = \{(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\}$

b)



$$\boxed{\vec{v} = proy_E(\vec{v}) + proy_{E^\perp}(\vec{v})}$$

Lo calculamos con la proyección de $E^\perp$, ya que $\dim(E) = 1$ y nunca vamos a tener una base ortogonal de E.

$\Rightarrow proy_E(\vec{v}) = \vec{v} - proy_{E^\perp}(\vec{v})$

$proy_{E^\perp}(\vec{v}) = \dfrac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \dfrac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \Longrightarrow proy_{E^\perp}(\vec{v}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{6}, \frac{19}{6}\right)$

utilizamos base ORTOGONAL

$proy_E(\vec{v}) = (1,2,3) - \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{6}, \frac{19}{6}\right)$

$proy_E(\vec{v}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$

www.simplyjarod.com

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Test-A 4 de febrero 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada. **Calificación:** $\text{máx}\left\{0, \dfrac{\text{Aciertos} - \text{Fallos}}{5}\right\}$ 40 minutos

1.- [X] [F] Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo. Si $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $P^{\mathrm{T}}P = \mathrm{Id}_n$, entonces $m \geq n$.

2.- [V] [X] Sea $(E, <\,,>)$ un espacio vectorial euclídeo y G un conjunto de vectores de E. El proceso de Gram-Schmidt aplicado a G produce siempre una base ortogonal de E.

3.- [X] [F] Sea V, $V \neq \{\overrightarrow{0}\}$, un subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, E. La proyección ortogonal sobre V, $\mathrm{proy}_V : E \longmapsto E$, es un endomorfismo diagonalizable.

4.- [V] [X] Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $B = A^2$, entonces el polinomio característico de B es el cuadrado del polinomio característico de A, $P_B(\lambda) = P_A^2(\lambda)$.

5.- [X] [F] Sean $n, p \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A y $A^p = 0$, entonces $\lambda = 0$.

6.- [V] [X] Si $f : E \longmapsto E$ es una función lineal entre espacios vectoriales tal que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ y $\mathrm{Ker}(f) \oplus f(E) = E$, entonces para cualquier base B de E, la matriz de f respecto de B, $M_B^B(f)$, tiene alguna columna nula.

7.- [X] [F] Si A es una matriz diagonalizable, entonces A^2 también lo es.

8.- [X] [F] Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. El sistema $A\overrightarrow{\mathrm{x}} = \overrightarrow{\mathrm{b}}$ tiene solución única para cada $\overrightarrow{\mathrm{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ si y sólo si el cero no es autovalor de A.

9.- [V] [X] Si B es una forma reducida de Gauss de la matriz no nula $A \neq 0$, entonces las columnas pivote de B son una base del espacio columna de A.

10.- [X] [F] Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A es singular, $\overrightarrow{\mathrm{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ y $\overrightarrow{\mathrm{b}} \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{\mathrm{b}} = \overrightarrow{\mathrm{x}}$ tiene solución única.

www.simplyjarod.com

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 — Ejercicio 1 — 4 de febrero de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** — Tiempo estimado: **30 minutos**

Si $k \in \mathbb{Z}$, el conjunto de polinomios en la indeterminada x, con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ y de grado menor o igual que k, $(\mathbb{Z}_2)_k[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k : \ a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_2\}$, es un $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial.

Sea la aplicación $f : (\mathbb{Z}_2)_1[x] \longmapsto (\mathbb{Z}_2)_5[x]$ tal que

$$f(a_0 + a_1x) = (a_0 + a_1x)(1 + x^2 + x^4).$$

a) Demostrar que f es una aplicación lineal.

b) Hallar la matriz de f respecto a las bases $B_1 = \{1, x\}$ de $(\mathbb{Z}_2)_1[x]$ y $B_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ de $(\mathbb{Z}_2)_5[x]$.

c) Demostrar que f es inyectiva.

d) Calcular $f^{-1}\big(\{1 + x + x^5,\ 1 + x + x^2 + x^5\}\big)$.

e) Hallar $p(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x]$ tal que $f\big(p(x)\big)$ sólo se diferencie de $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ en un término.

$f : (\mathbb{Z}_2)_1[x] \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)_5[x]$

Polinomios de grado 1 como máximo cuyos coef. son de $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Polinomio de grado menor o igual a 5 cuyos coeficientes son de $(\mathbb{Z}_2) = \{0, 1\}$

Conjunto de restos que pueden obtenerse al dividir un núm. entero (de $\mathbb{Z}$) entre 2.

$(\mathbb{Z}_2)_1[x] = \{a_0 + a_1x : a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_2\} =$

$= \{a_0 + a_1x : a_0 = 0, 1,\ a_1 = 0, 1\} =$

$= \{0 + 0x,\ 0 + 1x,\ 1 + 0x,\ 1 + 1x\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_2)_1[x] = \{0, 1, x, 1 + 1x\}$

[pares $\equiv 0$
impares $\equiv 1$ $(1+1) = 0$]

$f(a_0 + a_1x) = (a_0 + a_1x)(1 + x^2 + x^4)$

$f(p(x)) = p(x)(1 + x^2 + x^4)$

a) Demostrar que f = aplicación lineal

1. $f(p(x) + q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$, $\forall\, p(x), q(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x]$

Sea $p(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x] \Rightarrow \exists\, a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_2 : p(x) = a_0 + a_1x$

Sea $q(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x] \Rightarrow \exists\, b_0, b_1 \in \mathbb{Z}_2 : q(x) = b_0 + b_1x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$

$f(p(x) + q(x)) = f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x) = (a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x)(1 + x^2 + x^4) =$

$= (a_0 + a_1x)(1 + x^2 + x^4) + (b_0 + b_1x)(1 + x^2 + x^4) = f(p(x) + q(x))$

www.simplyjarod.com

2. $f(kp(x)) = k \cdot f(p(x)) \quad \forall k \in \mathbb{R}$ y $\forall p(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x]$

$p(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x] \Rightarrow \exists a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_2 : p(x) = a_0 + a_1 x$

$kp(x) = ka_0 + ka_1 x \Rightarrow f(kp(x)) = f(ka_0 + ka_1 x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(kp(x)) = (ka_0 + ka_1 x)(1 + x^2 + x^4) = k(a_0 + a_1 x)(1 + x^2 + x^4)$

$f(kp(x)) = k(f(p(x)))$

b) Matriz de f respecto de las bases $B_1 = \{1, x\}$ y $B_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ (canónicas del espacio de salida $(\mathbb{Z}_2)_1[x]$ y del espacio de llegada $(\mathbb{Z}_2)_5[x]$ respectivamente.

Sus columnas son los transformados (imágenes) mediante f de los elementos (polinomios) de la base canónica del espacio de salida referidos a la base canónica del espacio de llegada.

Espacio de salida: $(\mathbb{Z}_2)_1[x] \Rightarrow$ base canónica $B_1 = \{1, x\}$

1ª columna: $f(1) = (1)(1 + x^2 + x^4) = 1 \cdot 1 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + 1x^4 + 0x^5$

en $B_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ es $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ ← Coordenadas de $f(1)$ en B_5

2ª columna: $f(x) = (x)(1 + x^2 + x^4) =$

$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0x^2 + 1x^3 + 0x^4 + 1x^5$

en $B_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ es $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ ← Coordenadas de $f(x)$ en B_5

$$\boxed{M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Demostrar que f es inyectiva

1er método Veremos que $Ker(f) = \{0_{(\mathbb{Z}_2)_1[x]}\}$, lo cual equivale a decir que f es inyectiva.

$Ker(f) = \{p(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x] : f(p(x)) = 0_{(\mathbb{Z}_2)_5[x]}\} =$

$= \{p(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x] : p(x)(1 + x^2 + x^4) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5\}$

$Ker(f) = \{p(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x] : p(x) = 0 + 0x\} \Rightarrow Ker = 0_E \Rightarrow$ $\underline{f \text{ inyectiva}}$

2º método Aprovechando que f sólo transforma 4 elementos (los 4 polinomios de $(\mathbb{Z}_2)_1[x] = \{0, 1, x, 1+x\}$), calcularemos las 4 imágenes correspondientes y, si vemos que ninguna comparte imagen con otra (imágenes diferentes las 4) entonces hemos demostrado la inyectividad

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1 + x^2 + x^4 \\ f(x) &= x + x^3 + x^5 \\ f(0) &= 0 \\ f(1+x) &= (1+x) + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \end{aligned}\right\} \text{ ninguna imagen igual}$$

$\forall p(x), q(x) \in (\mathbb{Z}_2)_1[x]$, $f(p(x)) \neq f(q(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{f \text{ inyectiva}}$

febrero 2009 - ejercicio 1

www.simplyjarod.com

d) Calcular $f^{-1}(\{1+x+x^5,\ 1+x+x^2+x^5\})$

$Im(f) = \{f(0),\ f(1),\ f(x),\ f(1+x)\}$

$Im(f) = \{0,\ 1+x^2+x^4,\ x+x^3+x^5,\ 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\}$

El conjunto $f^{-1}(\{1+x+x^5,\ 1+x+x^2+x^5\})$ es el formado por los polinomios de $(\mathbb{Z}_2)_1[x]$ tales que su imagen es, o bien $1+x+x^5$, o bien $1+x+x^2+x^5$. Como vemos, las imágenes de los elementos de $(\mathbb{Z}_2)_1[x]$ sólo pueden ser $0,\ 1+x^2+x^4,\ x+x^3+x^5,\ 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ luego no hay ningún polinomio de $(\mathbb{Z}_2)_1[x]$ que tenga por imagen a $1+x+x^5$ ni a $1+x+x^2+x^5$

Así pues $f^{-1}(1+x+x^5,\ 1+x+x^2+x^5) = \emptyset$

e)

Como vemos, $f(1+x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ sólo se diferencia de $1+x+x^2+x^3+x^4$ en el último término x^5.

www.simplyjarod.com

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Ejercicio 2 4 de febrero de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea $B = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ una base del espacio vectorial E de dimensión finita $n \neq 0$ y sean f y g dos endomorfismos de E.

a) Demostrar que si los vectores de B son vectores propios a la vez de f y de g, entonces $f \circ g = g \circ f$.

b) Suponiendo que los vectores de B son vectores propios de f correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, todos diferentes entre sí, y que $f \circ g = g \circ f$, probar que los vectores de B son también vectores propios de g.

$B = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es una base de E $[\dim(E) = n \neq 0]$

$f: E \to E$ (aplicación lineal) endomorfismo

$g: E \to E$ (aplicación lineal) endomorfismo

a) $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ vectores propios de f y g $\Longrightarrow$ $f \circ g = g \circ f$

se trata de demostrar la igualdad entre dos funciones, y esto se consigue viendo, por ejemplo, que comparten su matriz asociada; puesto que la matriz asociada a cada una de ellas tiene por columnas a las imágenes de los componentes de una base de salida, tenemos que ambas funciones serán la misma si se satisface $(g \circ f)(v_i) = (f \circ g)(v_i)$, $\forall v_i \in \mathbb{R}$.

- $f \circ g: E \to E$; $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de E $\Longrightarrow$
  $\Longrightarrow$ la matriz asociada a $f \circ g$ respecto de la base B es la que tiene por columna i-ésima a $(f \circ g)(v_i)$.

- $g \circ f: E \to E$; $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de E $\Longrightarrow$
  $\Longrightarrow$ la matriz asociada a $g \circ f$ respecto de la base B es la que tiene por columna i-ésima a $(g \circ f)(v_i)$.

Ambas matrices serán la misma si $(f \circ g)(v_i) = (g \circ f)(v_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$, y con ello las funciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ coincidirán. Así pues, para demostrar que $(f \circ g) = (g \circ f)$ basta con ver que $(g \circ f)(v_i) = (f \circ g)(v_i)$.

www.simplyjarod.com

$$(g\circ f)(v_i) = g[f(v_i)] \underset{\substack{v_i \text{ autovector } f \\ \Downarrow \\ f(v_i)=\lambda_i v_i}}{=} g(\lambda_i v_i) \underset{g \text{ lineal}}{=} \lambda_i g(v_i) \underset{\substack{v_i \text{ autovector de } g \\ \Downarrow \\ g(v_i)=\beta_i v_i}}{=} \lambda_i \beta_i v_i$$

$$(f\circ g)(v_i) = f[g(v_i)] \underset{\substack{v_i \text{ autovector } g \\ \Downarrow \\ g(v_i)=\beta_i v_i}}{=} f(\beta_i v_i) \underset{f \text{ lineal}}{=} \beta_i f(v_i) \underset{\substack{v_i \text{ autovector de } f \\ \Downarrow \\ f(v_i)=\lambda_i v_i}}{=} \beta_i \lambda_i v_i$$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $(g\circ f)(v_i) = (f\circ g)(v_i) = \lambda_i \beta_i v_i \quad \forall i = 1,\dots,n.$

(λ_i es el autovalor asociado al autovector v_i de f)

(β_i es el autovalor asociado al autovector v_i de g)

$\Longrightarrow$ Como $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ es base de E y las imágenes $(f\circ g)(v_i)$ coinciden con las $(g\circ f)(v_i)$, $\forall i = 1,\dots,n$.

$\Longrightarrow$ $(f\circ g) = (g\circ f)$

) v_i autovector asociado a λ_i de f.

$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ distintos entre sí. $\Longrightarrow$ $ma(\lambda_i) = 1$, $\forall i = 1,\dots,n$.

Como $0 < mg(\lambda_i) \leq ma(\lambda_i)$ y $ma(\lambda_i) = 1 \Longrightarrow mg(\lambda_i) = 1 \ \forall i$

$$\left.\begin{array}{l} mg(\lambda_i) = \dim(S_{\lambda_i}) \\ mg(\lambda_i) = 1 \ \forall i \end{array}\right\} \dim(S_{\lambda_i}) = 1, \ \forall i = 1,\dots,n$$

$f\circ g = g\circ f$

se pretende probar que los v_i son vectores propios de g.

$g(v_i) = \alpha_i v_i \Longrightarrow$ v_i es autovector de g asociado al autovalor α_i

$$\left.\begin{array}{l} (g\circ f)(v_i) = g[f(v_i)] = g(\lambda_i v_i) = \lambda_i g(v_i) \\ (f\circ g)(v_i) = f[g(v_i)] \end{array}\right\} f[g(v_i)] = \lambda_i g(v_i)$$

$\hookrightarrow$ $g(v_i)$ es el autovector de f asociado al autova λ_i.

* $\dim(S_{\lambda_i}) = 1$

Una base de S_{λ_i} es $\{v_i\}$ $\Longrightarrow$ Todos los elementos de S_{λ_i} son proporcionales a v_i, es decir, pueden ser escritos en la forma $\alpha_i v_i$; además, también son escritos como imágenes de f.

el autovector es el componente de la base; $\dim(S_{\lambda_i}) = 1$).

Pertenece

$g(v_i)$ es el autovector de f

www.simplyjarod.com

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 — Ejercicio 3 — 4 de febrero de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** — Tiempo estimado: **30 minutos**

El conjunto $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios de una variable, x, y con coeficientes reales es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Se define la aplicación $<\,,\,>: \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longmapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i, \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j \right\rangle = \sum_{k=0}^{\text{mín}(n,m)} \alpha_k \beta_k.$$

Se pide:

a) Comprobar que $<\,,\,>$ es un producto escalar en $\mathbb{R}[x]$.

b) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left\langle x^n - 1, \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j \right\rangle = 0$ si y sólo si $\beta_0 = \beta_n$.

c) Hallar un conjunto ortogonal –según el producto escalar $<\,,\,>$– a partir de $\{x-1, x^2-1, x^3-1\}$.

$$\left\langle \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i}_{\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_n x^n}, \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j}_{\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_m x^m} \right\rangle = \underbrace{\sum_{k=0}^{\min(n,m)} \alpha_k \cdot \beta_k}_{\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_k\beta_k}$$

↳ k es el mínimo entre m y n porq si m=10 y n=5 las parejas "acab" en n=5.

c)

$\langle x-1, x^2-1 \rangle = \langle \underbrace{-1}_{\alpha_0}+\underbrace{1}_{\alpha_1}\cdot x, \underbrace{-1}_{\beta_0}+\underbrace{0}_{\beta_1}\cdot x+\underbrace{1}_{\beta_2}\cdot x^2 \rangle = [(-1)(-1)+(1\cdot 0)] = 1$

$[n=1, m=2]$ — $x \to$ no se usan!

$\langle x-1, x^3-1 \rangle = \langle \underbrace{-1}_{\alpha_0}+\underbrace{1}_{\alpha_1}\cdot x, \underbrace{-1}_{\beta_0}+\underbrace{0}_{\beta_1}\cdot x+\underbrace{0}_{\beta_2}\cdot x^2+\underbrace{1}_{\beta_3}\cdot x^3 \rangle = 1$

$[n=1, m=3]$

$\langle x^2-1, x^3-1 \rangle = \langle \underbrace{-1}_{\alpha_0}+\underbrace{0}_{\alpha_1}\cdot x+\underbrace{1}_{\alpha_2}\cdot x^2, \underbrace{-1}_{\beta_0}+\underbrace{0}_{\beta_1}\cdot x+\underbrace{0}_{\beta_2}\cdot x^2+\underbrace{1}_{\beta_3}\cdot x^3 \rangle = 1$

$[n=2, m=3]$

ortogonalización de: $\{\underbrace{x-1}_{e_1}, \underbrace{x^2-1}_{e_2}, \underbrace{x^3-1}_{e_3}\} \Longrightarrow$ Gram-Schmidt

* $u_1 = e_1 \Longrightarrow u_1 = x-1$
* $u_2 = e_2 - \dfrac{\langle e_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (x^2-1) - \dfrac{1}{2}(x-1) = x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$
* $u_3 = e_3 - \dfrac{\langle e_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \dfrac{\langle e_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = (x^3-1) - \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1/2}{3/2}\left(x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\right) =$

$= \cancel{x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$

$= x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

www.simplyjarod.com

Ya tenemos el conjunto ortogonal pedido:

$$\left\{ x-1,\ x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \right\}$$

$$\mathcal{B}=\left\{ \underbrace{x-1}_{u_1},\ \underbrace{x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}_{u_2},\ \underbrace{x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}_{u_3} \right\}$$

$$\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_1,u_3\rangle=\langle u_2,u_3\rangle=0 \Longrightarrow \text{ORTOGONAL!!}$$

))

$$\boxed{\Big\langle \underbrace{x^n-1}_{\substack{\alpha_0=-1,\ \alpha_n=1 \\ \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_{n-1}=0}},\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m}\beta_j x^j}_{\beta_0+\beta_1 x+\dots+\beta_m x^m}\Big\rangle}=0 \iff \beta_0=\beta_n$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\beta_0+\beta_n & \text{si } m\geq n \\ -\beta_0 & \text{si } m<n \end{cases} \longrightarrow (\text{Si } m<n \Rightarrow \alpha_n \text{ no tiene pareja})$$

Caso $m\geq n$

(i) $\langle x^n-1,\ \sum_{j=0}^{m}\beta_j x^j\rangle=0 \Longrightarrow \beta_0=\beta_n$

$$\langle x^n-1,\ \sum_{j=0}^{m}\beta_j x^j\rangle=0 \Rightarrow -\beta_0+\beta_n=0 \Longrightarrow \beta_n=\beta_0$$

(ii) $\beta_0=\beta_n \Longrightarrow \langle x^{n-1},\ \sum_{j=0}^{m}\beta_j x_j\rangle=0$

$$\beta_n-\beta_0=0 \Longrightarrow \langle x^{n-1},\ \sum_{j=0}^{m}\beta_j x_j\rangle=0=\beta_n-\beta_0=0$$

Caso $m<n$

(iii) $\langle x^n-1,\ \sum_{j=0}^{m}\beta_j x_j^j\rangle=0 \Rightarrow \beta_0=\beta_n$

$$\langle x^n-1,\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m}\beta_j x^j}_{\beta_0+\beta_1 x+\dots+\beta_m x^m+\dots+\underbrace{0}_{\beta_n=0}x^n}\rangle=\underbrace{-\beta_0}_{}=0 \Longrightarrow \beta_0=0 \Longrightarrow \beta_n=\beta_0=0$$

Por hipótesis el producto escalar es nulo, y como su valor en este caso $m<n$ es $-\beta_0$ tenemos $\beta_0=0$; por otro lado, vemos que $\beta_n=0$, luego se cumple $\beta_0=\beta_n$.

(iv) $\beta_0=\beta_n \Rightarrow \langle x^n-1,\ \sum_{j=0}^{m}\beta_j x^j\rangle$

$$\langle x^n-1,\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m}\beta_j x^j}_{\beta_n=0\ (m<n)}\rangle=0$$

Por hipótesis, $\beta_0=\beta_n$, luego como $\underline{\beta_n=0}$ según vemos, $\beta_0=0$, y en particular $-\beta_0=0$. Como el producto escalar vale $-\beta_0$, tenemos que el producto escalar es nulo.

Por (i), (ii), (iii) y (iv) queda demostrado

www.simplyjarod.com

a)

1. $\langle p(x)+q(x), r(x)\rangle = \langle p(x), r(x)\rangle + \langle q(x), r(x)\rangle \quad \forall p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \\ q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_m x^m = \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j \end{array}\right\} p(x)+q(x) = \sum_{\ell=0}^{\max(m,n)} (\alpha_\ell + \beta_\ell) x^\ell$$

$$r(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_r x^r = \sum_{k=0}^{r} \gamma_k x^k$$

$$\Longrightarrow \langle p(x)+q(x), r(x)\rangle = \left\langle \sum_{\ell=0}^{\max(m,n)} (\alpha_\ell + \beta_\ell) x^\ell, \sum_{k=0}^{r} \gamma_k x^k \right\rangle =$$

$$= \sum_{z=0}^{z=\min[\max(m,n),r]} (\alpha_z + \beta_z)\gamma_z = \sum_{z=0}^{\min[\max(m,n),r]} \left[(\alpha_z \gamma_z) + (\beta_z \gamma_z)\right] = \sum_{z=0}^{\min[\max(m,n),r]} \alpha_z \gamma_z + \sum_{z=0}^{\min[\max(m,n),r]} \beta_z \gamma_z =$$

$$= \langle p(x), r(x)\rangle + \langle q(x), r(x)\rangle$$

2. $\langle kp(x), q(x)\rangle = k\langle p(x), q(x)\rangle \quad \forall k \in \mathbb{R},\ \forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$kp(x) = k\alpha_0 + k\alpha_1 x + \dots + k\alpha_n x^n = k \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$$

$$\langle kp(x), q(x)\rangle = \left\langle k \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i, \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} k\alpha_i x^i, \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j \right\rangle =$$

$$= \sum_{s=0}^{\min(n,m)} k \cdot \alpha_s \cdot \beta_s = k \cdot \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \alpha_s \beta_s = k\langle p(x), q(x)\rangle$$

3. $\langle p(x), q(x)\rangle = \langle q(x), p(x)\rangle$

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i, \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j \right\rangle = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \beta_k \alpha_k =$$

$$= \left\langle \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \right\rangle = \langle q(x), p(x)\rangle$$

4. $\langle p(x), p(x)\rangle \geq 0 \quad (\langle p(x), p(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0)$

$$\langle p(x), p(x)\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 \geq 0$$ (SUMA DE CUADRADOS SIEMPRE NO NULA)

igualdad a cero sólo se cumple cuando $\alpha_i = 0,\ \forall i = 1, \dots, n$, es decir, únicamente

www.simplyjarod.com

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Test 1 de septiembre 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Atención: Marque la opción deseada. **Calificación:** máx $\left\{0, \dfrac{2(\text{Aciertos} - \text{Fallos})}{5}\right\}$ 40 minutos

1. [V] Si p, q y r son proposiciones, entonces

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Longleftrightarrow p.$$

2. [F] Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A es singular y $\vec{\mathbf{b}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) - \{\vec{\mathbf{0}}\}$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ tiene solución.

3. [F] Sea $(A, +, .)$ un anillo. Si $x, y, z \in A - \{0\}$, entonces

$$x.y = z.y \Longrightarrow x = z.$$

4. [F] La suma de los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \{(\alpha, \beta, 0, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{(\gamma, 0, 0, \delta) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

es directa.

5. [V] Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $T \subset E$ y $\vec{\mathbf{v}} \in T$.

$$\vec{\mathbf{v}} \in L\Big(T - \{\vec{\mathbf{v}}\}\Big) \Longleftrightarrow L(T) = L\Big(T - \{\vec{\mathbf{v}}\}\Big).$$

6. [V] Sea $\{\vec{\mathbf{u_1}}, \vec{\mathbf{u_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{u_n}}\}$ el resultado de la ortogonalización por Gram-Schmidt del conjunto $\{\vec{\mathbf{v_1}}, \vec{\mathbf{v_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{v_n}}\}$. El conjunto de vectores $\{\vec{\mathbf{u_1}}, \vec{\mathbf{u_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{u_n}}\}$ tiene algún vector nulo si y sólo si $\{\vec{\mathbf{v_1}}, \vec{\mathbf{v_2}}, \ldots, \vec{\mathbf{v_n}}\}$ es ligado.

7. [V] Si las matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son diagonalizables mediante la misma matriz invertible, P, entonces $AB = BA$.

8. [F] Si la multiplicidad geométrica de todos los autovalores de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es 1, entonces A es diagonalizable.

9. [F] La matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es diagonalizable para cualquier valor real de α.

10. [F] Si U y V son dos subespacios vectoriales del $\mathbb{K}$-espacio vectorial euclídeo E, entonces

$$U \oplus V \Longrightarrow U^{\perp} \oplus V^{\perp}.$$

www.simplyjarod.com

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Ejercicio 1 1 de septiembre de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_2)^3 \longmapsto (\mathbb{Z}_2)^4$ tal que $f(x, y, z) = (x, x + y, y + z, z)$. Se pide:

a) Hallar la matriz de f respecto a las bases canónicas de $(\mathbb{Z}_2)^3$ y $(\mathbb{Z}_2)^4$.

b) Demostrar que f es inyectiva.

c) Calcular $\mathrm{Img}(f)$ especificando su dimensión y una base.

d) Hallar la matriz de f respecto a las bases $B'_3 = \{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ de $(\mathbb{Z}_2)^3$ y $B'_4 = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$ de $(\mathbb{Z}_2)^4$.

$$f : (\mathbb{Z}_2)^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^4$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x, x+y, y+z, z)$$

a) La matriz asociada a f respecto a la base canónica de $(\mathbb{Z}_2)^3$ es:

1ª columna: $f(1,0,0) = (1,1,0,0)$
2ª columna: $f(0,1,0) = (0,1,1,0)$
3ª columna: $f(0,0,1) = (0,0,1,1)$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Recordemos que al trabajar con $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, el cero representa los pares y el uno los impares. $1+1=2=0$
- La matriz anterior es la referida a las bases canónicas; en el aptdo d) cambiará.

b) Para demostrar que f es inyectiva comprobaremos que su nucleo es el cero.

$$\ker(f) = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_2)^3 : f(x,y,z) = (0,0,0,0)\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_2)^3 : (x, x+y, y+z, z) = (0,0,0,0)\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_2)^3 : x=0,\ x+y=0,\ y+z=0,\ z=0\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_2)^3 : x=0,\ y=0,\ z=0\} \Rightarrow \ker(f) = \{(0,0,0)\}$$

Nota: $(\mathbb{Z}_2)^3$ tiene ocho elementos $(0,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\ldots$ hallando las imágenes de estos ocho elementos y comprobando que todas son distintas tendremos que f es inyectiva.

www.simplyjarod.com

c) $\dim(\mathbb{Z}_2)^3 = \underbrace{\dim(\ker f)}_{0} + \dim(\operatorname{Im} f)$ $\Big\}$ $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$

$3 = 0 + 3$

$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim((\mathbb{Z}_2)^4) - n^o \text{ ec. indep}$ $\Big\}$ 1 ecuación

$3 = 4 - 1$

$$f: (x, y, z) \longrightarrow (\underset{u_1}{x}, \underset{u_2}{x+y}, \underset{u_3}{y+z}, \underset{u_4}{z})$$

La relación que guardan u_1, u_2, u_3, u_4 es $u_1+u_2+u_3+u_4=0$
En realidad lo anterior sería $2x+2y+2z$, pero... teniendo $\mathbb{Z}_2$, todos los $2\cdot * = 0$

La base de la imagen está formada por 3 elementos (porque $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$) y estos elementos resultan ser 3 columnas de la matriz linealmente indep.
Hay 3 independientes porque $rg = 3$

d)

$$\begin{tikzcd}
B_3 \arrow[rr, "M(f) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix}"] & & B_4 \\
B_3' \arrow[u, "\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{pmatrix}"] \arrow[rr, "M^{B_3'}_{B_4'}(f)"] & & B_4' \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1 \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

B_3 (canónica de $(\mathbb{Z}_2)^3$) $\qquad$ B_4 (canónica de $(\mathbb{Z}_2)^4$)

Sus colum. son los elem. de B_3' $\qquad$ Sus columnas son los elem. de B_4'

$$M^{B_3'}_{B_4'}(f) = \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{pmatrix}$$

Hacer el cálculo teniendo en cuenta que es $\mathbb{Z}_2$

www.simplyjarod.com

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1 Ejercicio 3 1 de septiembre de 2009

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

Puntuación máxima: **2 puntos** Tiempo estimado: **30 minutos**

Sea $S = \{f_1(x) = e^{3x},\ f_2(x) = xe^{3x},\ f_3(x) = x^2e^{3x}\}$ un subconjunto del espacio vectorial real de las funciones reales de variable real $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, sea $U = L(S)$ la variedad lineal de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ generada por S, y sea $D : U \longmapsto U$ la aplicación lineal que a cada función de U le hace corresponder su función derivada:

$$D(f(x)) = f'(x).$$

Se pide:

a) Demostrar que S es una base de U.

b) Hallar la matriz de D respecto a la base S.

c) Calcular $\mathrm{Ker}(D)$ y $\mathrm{Img}(D)$ especificando una base de cada subespacio.

d) Obtener los autovalores y los subespacios propios de D. ¿Es D diagonalizable? feb 08 - 3

a) $S = \{e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$

Demostraremos que S es base de U (espacio generado por los elementos de S o sea, la variedad lineal de S) cuando veamos que S es un sistema libre generador de U. Que S es generador de U es evidente (S es generador del espacio que genera, al que llamamos U). Nos falta entonces ver que S es libre, para lo cual suponemos combinación lineal de sus elementos nulos y pedimos tener sus escalares nulos.

$$\alpha e^{3x} + \beta x e^{3x} + \gamma x^2 e^{3x} = 0$$

$$e^{3x}[\alpha + \beta x + \gamma x^2] = 0$$

$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0 \rightarrow$ Esta ecuación se cumple $\forall x$ luego se cumple para 3 valores concretos de x que escojamos

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ x=1 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0 \\ x=-1 \Rightarrow \alpha-\beta+\gamma=0 \end{array}\right\} \alpha=\beta=\gamma=0$$

www.simplyjarod.com

b)

La matriz asociada a D respecto de S es aquella cuyas columnas son las imágenes de los elementos de S, referidas a la base S.

Las imágenes no serán vectores, sino funciones, luego tendremos que manejar las coordenadas de esas imágenes en S.

1ª columna: $D(e^{3x}) = 3e^{3x} = 3\cdot e^{3x} + 0x e^{3x} + 0x^2 e^{3x} \rightarrow (3,0,0)$ en S

2ª columna: $D(xe^{3x}) = 3xe^{3x} + e^{3x} = 1\cdot e^{3x} + 3\cdot xe^{3x} + 0x^2e^{3x} \rightarrow (1,3,0)$ en S

3ª columna: $D(x^2e^{3x}) = 2xe^{3x} + 3x^2e^{3x} = 0e^{3x} + 2xe^{3x} + 3xe^{3x} \rightarrow (0,2,3)$ en S

$$M_S(D) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nunca se pone como base al elemento (0,0,0)

Ver feb-2008 - 3

No se puede dar base.