

FMT2

Carpeta de
Montero Espinosa
(resuelta en 2009)

FMT2

Teoría



TEMARIO DE LA ASIGNATURA FMT2 2007/2008

Tema 1: Números reales.....	T-2
Tema 2: Numeros complejos.....	T-4
Tema 3: Espacios métricos. Topología.....	T-7
Tema 4: Sucesiones de números. Límites de sucesiones.....	T-15
Tema 5: Series de números.....	T-22
Tema 6: Continuidad en una variable. Límites de funciones.....	T-28
Tema 7: Derivación en una variable.....	T-32
Tema 8: Máximos y mínimos en una variable.....	T-35
Tema 9: Serie de Taylor en una variable.....	T-44
Tema 10: Continuidad en varias variables.....	T-47
Tema 11: Diferenciación en varias variables.....	T-50
Tema 12: Máximos y mínimos en varias variables.....	T-61
Tema 13: Serie de Taylor en varias variables.....	T-66
Tema 14: Sucesiones de funciones.....	T-67
Tema 15: Series de funciones. Series de potencias.....	T-69
Tema 16: Integración en una variable.....	T-71
Apéndices	
Binomio de Newton.....	T-79
Funciones Trigonómicas.....	T-80
Funciones Hiperbólicas.....	T-89
Tabla de derivadas.....	T-95
Tabla de integrales inmediatas.....	T-96

TEMA 1: LOS NÚMEROS REALES

1.1 Cotas de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$, un conjunto cualquiera de números reales.

- **Cota superior**: Todo número real mayor o igual que todos los elementos del conjunto A .
- **Cota inferior**: Todo número real menor o igual que todos los elementos del conjunto A .
- **Supremo**: La menor de las cotas superiores, si existe.
- **Ínfimo**: La mayor de las cotas inferiores, si existe.
- **Máximo**: El supremo si éste pertenece al conjunto.
- **Mínimo**: El ínfimo si éste pertenece al conjunto.

Axioma del supremo

Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente entonces el conjunto A tiene supremo.

Axioma del ínfimo

Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente entonces el conjunto A tiene ínfimo.

1.2 Cardinalidad

- **Cardinal** de un conjunto es su número de elementos.
- Dos conjuntos tienen el mismo cardinal si y sólo si se puede establecer una biyección entre ellos. En este caso se dice que son **equipotentes**.
- Un conjunto es **finito** si el único subconjunto equipotente con él es el mismo.
- Un conjunto es **infinito** si es equipotente con algún subconjunto propio.
- Un conjunto tiene cardinal **infinito numerable** si es equipotente a $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ tienen cardinal infinito numerable.
- Un conjunto tiene cardinal **infinito no numerable** si no es equipotente a $\mathbb{N}$ (y no es finito).
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ tienen cardinal infinito no numerable (Potencia del continuo).

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \text{Irracionales}$$

1.3 Estructura de $\mathbb{R}$

- La terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo donde las operaciones internas son la suma y productos habituales.
- Además la relación de orden $(\leq)$ entre números reales es "compatible con la suma y con el producto", lo que se expresa diciendo que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.
- Entre dos números reales cualesquiera existen infinitos racionales e infinitos irracionales, lo que se expresa diciendo que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son conjuntos **densos** de $\mathbb{R}$.
- Los números racionales e irracionales están tan juntos unos con otros que es imposible escoger un intervalo en la recta real que contenga únicamente números racionales o que contenga únicamente números irracionales (salvo que el intervalo esté compuesto por un solo punto).
- El conjunto $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ se denomina **recta real ampliada**, donde $-\infty$ y $+\infty$ son dos símbolos (no son números).

1.4 Otras definiciones y propiedades de $\mathbb{R}$

- **Propiedad arquimediana:** $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} / nx > y$.
- **Principio de encaje:** La intersección de una sucesión de intervalos encajados cerrados es siempre distinta del vacío.
- El producto de dos números racionales es siempre un número racional.

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} \\ y \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow xy \in \mathbb{Q}$$

- El producto de un número racional, distinto de cero, y de un número irracional es un número irracional.

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} - \{0\} \\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

- Sin embargo, el producto de dos números irracionales no es un número irracional (por ejemplo, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$).

- **Método de inducción**

Sea P una propiedad que pueden verificar todos los números naturales. Hacemos:

Base de inducción: verificamos que la propiedad P se cumple para 1.

Hipótesis de inducción: suponemos que P se cumple para n .

Paso de inducción: verificamos que P se cumple para $n + 1$ teniendo en cuenta la hipótesis.

Si esto sucede así entonces podemos afirmar que la propiedad P se cumple para todos los números naturales.

- **Valor absoluto:** $|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Propiedades: i) $|x + y| \leq |x| + |y|$

ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

iii) $|x / y| = |x| / |y| \quad \text{si } |y| \neq 0$

iv) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

v) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

- **Función signo:** $sign(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$ también $sign(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- **Parte entera:** $E(x) = p \in \mathbb{Z} \quad / \quad p \leq x < p + 1$

- **Parte decimal:** $dec(x) = x - E(x)$

TEMA 2: LOS NÚMEROS COMPLEJOS

2.1 Definiciones

- Un **número complejo** z es un par ordenado (a, b) de números reales donde,
 $a = \operatorname{Re}(z) = \text{parte real de } z$
 $b = \operatorname{Im}(z) = \text{parte imaginaria de } z$
- La **unidad imaginaria** (designada por i) es el número complejo $(0, 1)$. Además tenemos que $i = \sqrt{-1}$.
- El **afijo** de un complejo z es el punto del plano cartesiano de coordenadas (a, b) .

2.2 Formas de representar un número complejo

- Forma binómica: $z = (a, b)$
- Forma cartesiana: $z = a + bi$
- Forma polar: $z = \rho_\theta$
- Forma exponencial: $z = \rho e^{i\theta}$
- Forma módulo-argumental: $z = \rho(\cos \theta + \sin \theta i)$

Para pasar de una a otra forma hacemos:

Forma cartesiana a
forma polar

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan(b/a) \end{cases} \Rightarrow z = \rho_\theta$$

Forma polar a forma
cartesiana

$$z = \rho_\theta \Rightarrow \begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow z = a + bi$$

2.3 Operaciones con número complejos

Suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + bi) + (a_2 + bi) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + bi) \cdot (a_2 + bi) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} = (\rho \cdot \rho')_{\theta + \theta'}$$

Elemento inverso: $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$

$$z^{-1} = (\rho^{-1})_{-\theta}$$

2.4 Complejo conjugado

$\bar{z}$ = simétrico de z respecto eje Re

Forma cartesiana: Sea $z = a + bi$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = a - bi$

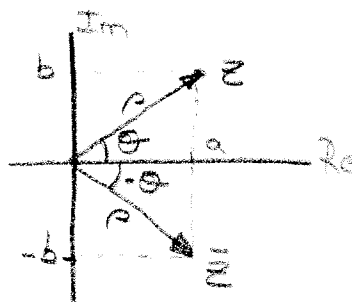
Forma polar: Sea $z = \rho_\theta$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = \rho_{-\theta}$

Propiedades: i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

ii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

iii) $\overline{\bar{z}} = z$

iv) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$



2.5 Modulo de un complejo

Sea $z = a + bi$, llamamos **módulo** de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Propiedades:
- i) $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}$
 - ii) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
 - iii) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (si $z \neq 0$)
 - iv) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, además $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
 - v) $|az| = |a| \cdot |z|$, $a \in \mathbb{R}$
 - vi) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2.6 Potencias y raíces

Sea el número complejo $z = \rho_\theta$,

- Potencia enésima:

$$z^n = (\rho^n)_{n\theta}$$

- Raíces enésimas:

$$\sqrt[n]{z} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Fórmula de Moivre

Un número complejo tiene n raíces enésimas

Tomaremos siempre esta fórmula como una definición

2.7 Exponenciales complejas

Fórmula de Euler : $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b)$

- Propiedades:
- i) $e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$
 - ii) $e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$
 - iii) Si $b \in \mathbb{R}$, $|e^{bi}| = 1$

2.8 Logaritmos complejos

Todo complejo $z = \rho_\theta$ posee infinitos logaritmos de la forma:

$$Lz = L|z| + i \arg(z) + 2k\pi i$$

2.9 Potencias complejas

Sean z y w números complejos,

$$z^w = e^{wLz}$$

- Propiedades:
- i) $z^w \cdot z^{w'} = z^{w+w'}$
 - ii) $z_1^w \cdot z_2^w = (z_1 \cdot z_2)^w$

2.10 Algunas cuestiones de interés

- El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y producto posee estructura de cuerpo y lo representamos $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado. Esto quiere decir que, dados dos números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, no se puede decir cual de los dos es mayor que el otro. Dicho de una forma gráfica, no existen los símbolos $>$ ó $<$ para los números complejos.

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz :
$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \overline{y_i} \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2$$

- Es conveniente manejar con soltura las potencias de la unidad imaginaria i :

$$\begin{array}{l} i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \\ i^5 = i \end{array}$$

y en general :

$$\begin{array}{l} i^{4n} = 1 \\ i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \end{array}$$

- Interpretación geométrica del producto de dos números complejos:
El producto de un número complejo z por otro complejo w de módulo unidad se puede interpretar geométricamente como un giro en sentido antihorario del afijo de z alrededor del origen y con un ángulo igual al argumento de w .
Si w no tiene módulo unidad además del giro se produce una traslación del afijo de z .
- Interpretación geométrica de las raíces n -ésimas de un número complejo z :
Los afijos de estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados y con centro el origen. Estos vértices se encuentran situados sobre una circunferencia de centro el origen y radio la raíz n -ésima del módulo de z .

TEMA 3: ESPACIOS MÉTRICOS Y TOPOLOGÍA

3.1. Conceptos generales

Definición. Sea X , un conjunto no vacío, una **métrica** definida en X es una aplicación $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que :

1. $\forall x, y \in X, \quad x \neq y \Leftrightarrow d(x, y) > 0$
2. $\forall x, y \in X, \quad x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$

Definición. Llamamos **espacio métrico** al par (X, d) formado por un conjunto X no vacío y una métrica definida en el mismo.

Definición. La **bola abierta** de centro a y radio r es el conjunto

$$B(a, r) \equiv B_r(a) = \{x \in X / d(x, a) < r\}$$

La **bola cerrada** de centro a y radio r es el conjunto

$$B(a, r) \equiv B_r(a) = \{x \in X / d(a, x) \leq r\}$$

La **esfera** de centro a y radio r es el conjunto

$$S(a, r) \equiv S_r(a) = \{x \in X / d(x, a) = r\}$$

Definición. La **distancia entre dos conjuntos** A y B no vacíos de un espacio métrico X es el número :

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

Definición. El **diámetro** de un conjunto A no vacío de un espacio métrico X es el número :

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$$

Definición. Un conjunto A está **acotado** en el espacio métrico $X \Leftrightarrow$ su diámetro es finito

Proposición. $A \subset X$ está acotado $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists r > 0 / A \subset B(x, r)$

El centro de la bola
siempre pertenece a la
bola

3.2 Conjuntos abiertos

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subset X$.

A es **abierto** si se puede expresar como unión cualquiera (en número finito o infinito de bolas abiertas).

A es abierto $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists r > 0 / B_r(x) \subseteq A \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

Llamamos **topología** T_d , a la familia de todos los subconjuntos abiertos de un espacio métrico.

Propiedades.

- X y $\emptyset$ son abiertos.
- La unión de una familia infinita de conjuntos abiertos es abierto.
- La intersección de una familia finita de conjuntos abiertos es abierto.

Conjuntos cerrados

X y $\emptyset$ son {abiertos y cerrados}

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subset X$.

A es **cerrado** si su complementario $X - A$ es abierto. $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
 $\Leftrightarrow F_r(A) \subset A$

Propiedades.

- X y $\emptyset$ son cerrados.
- La unión de una familia finita de conjuntos cerrados es cerrado.
- La intersección de una familia cualquiera de conjuntos cerrados es cerrado.

Entornos

Un entorno no tiene que ser obligatoriamente un abierto

Un **entorno** V de un punto $x \in X$ es todo subconjunto de X que contenga al menos un abierto que a su vez contenga a dicho punto x .

Al conjunto de los entornos de un punto lo llamamos $V(x)$.

Propiedades.

- Si $V \in V(x) \Rightarrow x \in V$
- Si $V \in V(x)$ y $V \subset U \Rightarrow U \in V(x)$
- Si $a, b \in X, a \neq b \Rightarrow \exists V \in V(a)$ y $\exists U \in V(b) / U \cap V = \emptyset$
- Toda bola abierta es entorno de su propio centro (entorno esférico).

3.3 Clasificación de puntos de un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subset X$.

Es necesario que :
 $a \in A$

$a \in X$ es un **punto interior** a $A \Leftrightarrow \exists V(a)/V \cap A = V$
 $\exists V(a)/V \subset A$
 $\exists r > 0 / B_r(a) \subseteq A$

Es necesario que :
 $a \notin A$

$a \in X$ es un **punto exterior** a $A \Leftrightarrow \exists V(a)/V \cap A = \emptyset$
 $\exists V(a)/V \subset X - A$
 $\exists r > 0 / B_r(a) \cap A = \emptyset$

$a \in X$ es un **punto frontera** de $A \Leftrightarrow \forall V(a)/V \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap (X - A) \neq \emptyset$
 $\forall V(a)/V \subset A \wedge V \subset X - A$
 $\forall r > 0 / B_r(a) \cap A \neq \emptyset \wedge B_r(a) \cap (X - A) \neq \emptyset$

$a \in X$ es un **punto adherente** a $A \Leftrightarrow \forall V(a)/V \cap A \neq \emptyset$
 $\forall r > 0 / B_r(a) \cap A \neq \emptyset$

$a \in X$ es un **punto de acumulación** de $A \Leftrightarrow \forall V(a)/(V - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$
 $\forall r > 0 / (B_r(a) - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$

$a \in X$ es un **punto aislado** de $A \Leftrightarrow \exists V(a)/(V - \{a\}) \cap A = \emptyset$
 $\exists r > 0 / (B_r(a) - \{a\}) \cap A = \emptyset$

Conjuntos notables

Conjunto interior de A , $\overset{\circ}{A} = \text{Int}(A)$ es el conjunto de los puntos interiores de A .

Conjunto exterior de A , $\text{Ext}(A)$ es el conjunto de los puntos exteriores de A .

Conjunto frontera de A , $\text{Fr}(A)$ es el conjunto de los puntos frontera de A .

Conjunto adherencia de A , $\bar{A} = \text{Adh}(A)$ es el conjunto de los puntos adherentes de A .

Conjunto derivado de A , $A' = A^d$ es el conjunto de los puntos de acumulación de A .

Conjunto aislado de A , $\text{Ais}(A)$ es el conjunto de los puntos aislado de A .

$$\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \text{Fr}(A)$$

Propiedad

Siempre se cumple que:

$$\bullet \quad X = A \cup (X - A)$$

$$\bullet \quad X = \overset{\circ}{A} \cup \text{Fr}(A) \cup \text{Ext}(A)$$

3.4. Propiedades de los conjuntos notables

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subset X$.

Conjunto interior de A , $\overset{\circ}{A} = \text{Int}(A)$:

- $\overset{\circ}{A} \subset A$
- $\overset{\circ}{A}$ es el mayor abierto contenido en A
- $\overset{\circ}{A} = A \Leftrightarrow A$ es abierto
- $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$
- $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
- $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B}$
- $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$

Conjunto exterior de A , $\text{Ext}(A)$

- $\text{Ext}(A) = X - \overset{\circ}{A}$
- $\text{Ext}(A) = X - \overline{A}$
- $\text{Ext}(A) = X - \overset{\circ}{A} - \text{Fr}(A)$

Conjunto frontera de A , $\text{Fr}(A)$

- $\text{Fr}(A)$ es cerrado siempre.
- $\text{Fr}(A) = X - \overset{\circ}{A} - \text{Ext}(A)$
- $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(X - A)$
- $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow A$ es abierto
- $\text{Fr}(A) \subset A \Leftrightarrow A$ es cerrado
- $\text{Fr}(A) = \emptyset \Leftrightarrow A$ es abierto y cerrado
- $\text{Fr}(A) \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$

Conjunto adherencia de A , $\bar{A} = Adh(A)$

- $A \subset \bar{A}$
- $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A
- $\bar{A} = A \Leftrightarrow A$ es cerrado
- $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$
- $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\bar{A} = A' \cup Ais(A)$
- $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$
- $\bar{A} = A' \cup A$
- A es **denso** en $X \Leftrightarrow \bar{A} = X$

Conjunto derivado de A , $A' = A^d$

- $A' \subset A \Leftrightarrow A$ es cerrado
- $A' = \emptyset \Leftrightarrow A$ es finito
- $A' \neq \emptyset \Leftrightarrow card(A) = \infty$
- A es **perfecto** $\Leftrightarrow A$ es cerrado y todos sus puntos son de acumulación

Conjunto aislado de A , $Ais(A)$

- $Ais(A) = A - A'$

3.5 Espacios normados

Definición. Sea E , un espacio vectorial sobre K , una **norma** definida en E es una aplicación $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que :

1. $\forall x \in E, \quad x \neq 0 \Leftrightarrow \|x\| > 0$
2. $\forall x \in E, \quad x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
4. $\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definición. Llamamos **métrica asociada** a la norma $\|\cdot\|$ a una aplicación $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Observaciones

- Un espacio normado es un caso particular de espacio métrico.
- Toda norma tiene asociada una métrica, pero no sucede lo mismo al contrario.

3.6 Compacidad

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subset X$.

Llamamos **recubrimiento** de X a una colección cualquiera de subconjuntos abiertos de X tales que cualquier punto de X pertenezca al menos a uno de ellos.

X es **compacto** si todo recubrimiento abierto de X admite al menos un subrecubrimiento finito.

Propiedades.

- La compacidad es una propiedad absoluta de los conjuntos.
- A es finito $\Rightarrow A$ es compacto.
- A es compacto $\Rightarrow A$ es cerrado y acotado.
- Si (X, d) es compacto y A es cerrado $\Rightarrow A$ es compacto.
- En los espacios métricos en los que todas las bolas cerradas de X son compactas se cumple que:

$$A \text{ es compacto} \Leftrightarrow A \text{ es cerrado y acotado.}$$
- En los espacios métricos $(\mathbb{R}, d_u)$, $(\mathbb{R}^2, d_u)$, ..., $(\mathbb{R}^n, d_u)$ todas las bolas cerradas son compactas.

Uniendo las dos últimas propiedades enunciadas obtenemos una importante caracterización de los conjuntos compactos de $(\mathbb{R}^n, d_u)$:

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ es compacto} \Leftrightarrow A \text{ es cerrado y acotado.}$$

3.7 Conexión

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subset X$.

X es **conexo** si no tiene subconjuntos propios que sean a la vez abiertos y cerrados.

Otra definición de conjunto conexo es la siguiente:

X es **conexo** si no se puede expresar como unión de dos subconjuntos de X abiertos y disjuntos.

Es decir, si podemos expresar X como unión de dos subconjuntos suyos abiertos y disjuntos es que X no es conexo.

Propiedades.

- La conexión es una propiedad absoluta de los conjuntos.
- A conexo y $A \subset B \subset \overline{A} \Rightarrow B$ es conexo.
- Si A es finito $\Rightarrow A$ es no conexo (salvo que A esté formado por un sólo punto).

Caso particular: $(\mathbb{R}^2, d_u)$

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es **conexo por caminos** si dados cualesquiera par de puntos de A existe al menos un camino (curva continua) dentro de A que los una.
- Si A es conexo por caminos $\Rightarrow A$ es conexo.
- Si A es no conexo por caminos no podemos asegurar que A sea no conexo.
- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es **convexo** si dados cualesquiera par de puntos de A existe una línea recta dentro de A que los una.
- Si A es convexo $\Rightarrow A$ es conexo.
- Si A es no convexo no podemos asegurar que A sea no conexo.

Caso particular: $(\mathbb{R}, d_u)$

- Los únicos conjuntos conexos son los intervalos (es indiferente que sean abiertos, cerrados, acotados o no acotados).

TEMA 4: SUCESIONES DE NÚMEROS

4.1 Conceptos generales

4.1.1 Definiciones

- Llamamos **sucesión** al recorrido de una aplicación entre $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Normalmente la denotamos como $(x_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Decimos que una sucesión (x_n) **converge** cuando:

$$\exists l \in \mathbb{R} \dots \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

- Cuando una sucesión (x_n) converja lo expresaremos simbólicamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_n x_n = \lim x_n = l \quad \text{ó} \quad (x_n) \rightarrow l$$

- Si una sucesión (x_n) no cumple la definición anterior diremos que **no converge**. Una sucesión no convergente puede serlo bien por que sus términos tienden a infinito o bien por que sus términos oscilan indefinidamente. De forma esquemática se puede ver de la siguiente manera:

$$x_n \begin{cases} x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} & \text{convergente} \\ \text{no convergente} & \begin{cases} x_n \rightarrow \pm \infty & \text{divergente} \\ x_n \rightarrow \nexists & \text{oscilante} \end{cases} \end{cases}$$

- Decimos que una sucesión (x_n) está **acotada** cuando el conjunto de puntos que forman la sucesión es un conjunto acotado.
- Decimos que (x_n) es **monótona creciente** si $x_{n+1} \geq x_n, n \in \mathbb{N}$.
Decimos que (x_n) es **monótona decreciente** si $x_{n+1} \leq x_n, n \in \mathbb{N}$.
Decimos que (x_n) es **estrictamente creciente** si $x_{n+1} > x_n, n \in \mathbb{N}$.
Decimos que (x_n) es **estrictamente decreciente** si $x_{n+1} < x_n, n \in \mathbb{N}$.
- Decimos que dos sucesiones (x_n) y (y_n) son **equivalentes** cuando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$$

- Decimos que una sucesión ε_n es un **infinitésimo** cuando su límite es cero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

- Notación “o” pequeña de Landau

Decimos que x_n es “o” pequeña de y_n cuando:

$$x_n = o(y_n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

Normalmente los infinitésimos se notan como ε_n

También se puede decir que “ x_n es despreciable frente a y_n ”

4.1.2 Propiedades y Teoremas

- Si una sucesión es convergente entonces su límite es único.
- Toda sucesión está formada por infinitos términos. Sin embargo, puede estar formada por un número finito o infinito de puntos.

- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$$

- Una sucesión (x_n) es convergente si y sólo si todo entorno de su límite contiene todos los términos de la sucesión salvo un número finito de ellos.

- Si (x_n) es convergente $\Rightarrow (x_n)$ es acotada.

- Si una sucesión (x_n) es monótona y acotada $\Rightarrow (x_n)$ es convergente.

- Sean dos sucesiones (x_n) e (y_n) . Se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow 0 \\ y_n \text{ acotada} \end{array} \right\} \Rightarrow x_n y_n \rightarrow 0$$

- Teorema del Sandwich (del Emparedado)

Sean tres sucesiones x_n, y_n, z_n tal que $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \geq n_0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$$

Observaciones

- Como se puede observar no es necesario que la sucesión y_n quede “emparedada” entre x_n y z_n desde los primeros términos. Basta que $x_n \leq y_n \leq z_n$ se cumpla a partir de un determinado n_0 .
- Es fundamental que las sucesiones x_n y z_n tengan el mismo límite ya que si no puede no cumplirse la tesis. Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow l' \\ z_n \rightarrow l \\ x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n \geq n_0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_n \rightarrow ?$$

Ojo:
El recíproco no es
cierto en general

Esta regla se suele
llamar “cero por
acotado”

Esta regla permite cal-
cular el límite de una
sucesión a partir de
otras dos sucesiones
cuyo límite es
conocido.

La sucesión z_n se llama
mayorante y la
sucesión x_n se llama
minorante

4.2 Métodos prácticos para calcular límites de sucesiones

No olvides nunca este paso. Algunas veces el límite no está indeterminado y basta con "pasar al límite" para obtener el resultado

- Paso al límite en el término general de la sucesión

Lo primero que debemos hacer es "pasar al límite", es decir, sustituir formalmente las n por el símbolo de infinito para obtener un resultado. A la hora de realizar este paso son de utilidad las propiedades básicas enunciadas en el siguiente punto.

- Operaciones elementales con límites de sucesiones

Sean las sucesiones (x_n) , (y_n) tales que $\lim x_n = a$ y $\lim y_n = b$:

1. $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = a + b$
2. $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = a - b$
3. $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = ab$
4. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}$ [siendo $b \neq 0$]
5. $\lim(x_n^{y_n}) = \lim x_n^{\lim y_n} = a^b$
6. $\lim(\ln x_n) = \ln(\lim x_n) = \ln a$
7. $\lim(\cos x_n) = \cos(\lim x_n) = \cos a$
8. $\lim(\sin x_n) = \sin(\lim x_n) = \sin a$

- Tipos de indeterminación:

Los límites de los cuales no podemos saber el resultado de antemano se llaman indeterminaciones y existen siete tipos:

1. $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n - y_n \rightarrow \infty - \infty$
2. $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \cdot y_n \rightarrow 0 \cdot \infty$
3. $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$
4. $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{0}{0}$
5. $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0 \Rightarrow x_n^{y_n} \rightarrow 0^0$
6. $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow 0 \Rightarrow x_n^{y_n} \rightarrow \infty^0$
7. $x_n \rightarrow 1, y_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n^{y_n} \rightarrow 1^\infty$

De esta forma, una vez hecho el "paso al límite" y simplificado el resultado siempre tenemos que estar en uno de los cuatro siguientes casos:

- El límite nos da un número real.
- El límite nos da infinito.
- El límite no existe (la sucesión es oscilante)
- El límite queda indeterminado (aparece una de las siete indeterminaciones).

En los tres primeros casos el límite está resuelto. En el último caso, aquel en el que aparece una indeterminación, probamos con alguno de los siguientes métodos.

- El número e

El límite siguiente define al número e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

El número e también se puede expresar de las siguientes formas. Sean ε_n un infinitésimo y $x_n \rightarrow \infty$. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

- Para la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en un cociente de polinomios se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{si } p = q \\ \infty & \text{si } p > q \end{cases}$$

- Para las indeterminaciones ∞^0 , 0^0 , 1^∞ siempre se hace:

IMPORTANTE:

$$a = e^{\ln a}, a \in \mathbb{R}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} \Rightarrow l = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln x_n^{y_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{y_n \ln x_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \ln x_n} = e^\lambda$$

- Para la indeterminación 1^∞ también es útil aplicar:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} \Rightarrow l = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n (x_n - 1)} = e^\lambda$$

- Criterio de Stolz:

Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ donde y_n es creciente y divergente. Se cumple que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

- Consecuencias del criterio de Stolz:

$$\text{-Criterio de la media aritmética: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = l$$

$$\text{-Criterio de la media geométrica: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = l$$

$$\text{-Criterio del cociente: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$$

Ojo: esto sólo es válido para la indeterminación uno elevado a infinito

Importante:

No se puede aplicar la regla de L'Hopital en límites de sucesiones. La regla de Stolz es el equivalente de la regla de L'Hopital para sucesiones

Todos estos criterios se demuestran a partir del criterio de Stolz

Recuerda:
Las equivalencias no
se pueden aplicar en
sumas ni en restas

- Sustitución de equivalencias en producto o cociente (nunca utilizar en sumas/restas):
Los infinitésimos equivalentes más usuales son para $\varepsilon_n \rightarrow 0$:

$$\underline{\sin \varepsilon_n \sim \arcsin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n}$$

$$\text{Sh } \varepsilon_n \sim \text{Arg Sh } \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$$

$$\underline{\text{tg } \varepsilon_n \sim \arcsin \text{tg } \varepsilon_n \sim \varepsilon_n}$$

$$\text{Th } \varepsilon_n \sim \text{Arg Th } \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$$

$$1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{\varepsilon_n^2}{2}$$

$$\text{Ch } \varepsilon_n - 1 \sim \frac{\varepsilon_n^2}{2}$$

$$\underline{e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n}$$

$$a^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \cdot \text{La} \quad (a > 0)$$

$$(1 + \varepsilon_n)^m - 1 \sim \varepsilon_n \cdot m$$

$$\text{L}(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n \quad \text{también} \quad \underline{\text{L} u_n \sim u_n - 1} \quad u_n \rightarrow 1$$

También hay equivalencias cuando $n \rightarrow \infty$:

$$a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_0 \sim a_p n^p$$

$$\text{L}(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p) \sim \text{L}(n^p) = p \text{L}(n)$$

$$n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \quad (\text{Fórmula de Stirling})$$

- Progresión geométrica

Definimos la **progresión geométrica** como $(x_n) = r^n$ donde r es la **razón** de la sucesión. Dependiendo del valor de la razón el límite toma los siguientes valores:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \pm 1 & \text{si } r = -1 \\ \pm \infty & \text{si } r < -1 \end{cases}$$

- Progresión aritmética

La **progresión aritmética** se define como $(x_n) = a + nd$ donde la constante d recibe el nombre de **diferencia**.

La progresión aritmética es siempre divergente, o sea el límite de una progresión aritmética es siempre infinito.

- Orden de los infinitos. Cuando $n \rightarrow \infty$ se cumple que:

$$\text{Ln} < n^a \quad (a > 0) < b^n \quad (b > 1) < n! < n^n$$

Se utilizan cuando aparecen en cociente, por ejemplo:

4.3 Subsucesiones. Límites subsecuenciales

Definiciones

- Llamamos **subsucesión** de una sucesión (x_n) a toda sucesión formada por términos de la dada, eligiendo los subíndices en orden estrictamente creciente.
- Se denominan **límites subsecuenciales** a los límites de cada subsucesión de una sucesión dada.
- Si una sucesión (x_n) presenta dos o más límites subsecuenciales diferentes entonces la sucesión no converge.

Sea $\mathbb{R}$, $(x_n) \subset \mathbb{R}$ y S el conjunto de los límites subsecuenciales de (x_n) .

- Denominamos **límite superior** de (x_n) a: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{S\}$.
- Denominamos **límite inferior** de (x_n) a: $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{S\}$.

Propiedades

- (x_n) es convergente $\Leftrightarrow \exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- Toda sucesión monótona (creciente o decreciente) que contiene una subsucesión convergente es convergente.
- Sea (x_n) una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = b$ y $a < b$. Entonces se cumple que:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = b$$

4.4 Sucesiones fundamentales o de Cauchy

Definición

- Sea (X, d) un espacio métrico. (x_n) es una **sucesión de Cauchy** cuando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Propiedades

- Toda sucesión de Cauchy está acotada.
- (x_n) es convergente $\Rightarrow (x_n)$ es sucesión de Cauchy
- En $(\mathbb{R}^n, d_u)$: (x_n) es convergente $\Leftrightarrow (x_n)$ es sucesión de Cauchy

4.5 Espacios Completos

Definición

- Un espacio métrico (X, d) es **completo** cuando las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes coinciden, es decir:

$$(x_n) \text{ es sucesión de Cauchy} \Leftrightarrow (x_n) \text{ es convergente}$$

Propiedades

- Sea $A \subseteq (X, d)$, A es completo $\Rightarrow A$ es cerrado
- Sea (X, d) completo y $A \subseteq (X, d)$, A es completo $\Leftrightarrow A$ es cerrado
- Los espacios métricos $(\mathbb{R}, d_u)$, $(\mathbb{R}^2, d_u)$, ..., $(\mathbb{R}^n, d_u)$ son completos.
- Cualquier espacio métrico con la métrica discreta es completo.

4.6 Teorema del Punto Fijo

Definición

- Sea (X, d) , se dice que una función $f: X \rightarrow X$ es **contractiva** en X si existe un número real α que sea $0 < \alpha < 1$, tal que:

$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$$

Teorema

- Sea (X, d) espacio métrico completo y $f: X \rightarrow X$ una función contractiva en él. Entonces existe un elemento $a \in X$, y sólo uno, tal que es $a = f(a)$.

TEMA 5: SERIES DE NÚMEROS

5.1 Conceptos generales

- Sea (a_n) una sucesión de números reales. Formemos a partir de ella otra sucesión (s_n) de la siguiente manera:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Dicha sucesión de sumas parciales así formada recibe el nombre de **serie** asociada a la sucesión (a_n) .

- La **suma enésima**, S_n se define como la suma de los n primeros elementos de (a_n) :

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

- El **resto enésimo**, R_n es la suma de los infinitos elementos de (a_n) desde el elemento $n+1$ hasta el "último":

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$$

- La **suma** de la serie, S es la suma de S_n y R_n . Normalmente se representa $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$S = S_n + R_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$$

- La serie es **convergente** $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S \in \mathbb{R}$

- Condición necesaria de convergencia:

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

En la práctica utilizaremos el contrarrecíproco, de forma que:

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es divergente}$$

- El carácter de una serie no cambia aunque suprimamos un número finito de términos.
- Las series se pueden dividir en dos grandes grupos:
 - Series de términos positivos (no negativos).
 - Series de términos cualesquiera (positivos y negativos).
- Dada una serie cualquiera $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ normalmente perseguimos dos objetivos:
 - Estudiar su carácter (convergente o divergente).
 - Calcular su suma, sólo en caso de ser convergente.

Esta condición muy importante

5.2 Criterios de convergencia de series de términos positivos

Los cuatro primeros se suelen llamar criterios automáticos

• Criterio del cociente. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k \begin{cases} \text{Si } k < 1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } k > 1 \text{ la serie diverge} \\ \text{Si } k = 1 \text{ caso dudoso} \end{cases}$

• Criterio de la raíz. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k \begin{cases} \text{Si } k < 1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } k > 1 \text{ la serie diverge} \\ \text{Si } k = 1 \text{ caso dudoso} \end{cases}$
si falla el cociente suele fallar la raíz

Lo utilizamos si el criterio del cociente falla

• Criterio de Raabe. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = k \begin{cases} \text{Si } k > 1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } k < 1 \text{ la serie diverge} \\ \text{Si } k = 1 \text{ caso dudoso} \end{cases}$

• Criterio del logaritmo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = k \begin{cases} \text{Si } k > 1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } k < 1 \text{ la serie diverge} \\ \text{Si } k = 1 \text{ caso dudoso} \end{cases}$

- Primer criterio de comparación.

$$\text{Si } a_n \leq b_n, \forall n > m \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \sum b_n \text{ es convergente} \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ \text{Si } \sum a_n \text{ es divergente} \Rightarrow \sum b_n \text{ es divergente} \end{cases}$$

- Segundo criterio de comparación.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } l \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen el mismo caracter} \\ \text{Si } l = 0 \text{ y } \sum b_n \text{ es convergente} \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \end{cases}$$

- Criterio de la armónica generalizada.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot a_n = k \neq 0 \begin{cases} \text{Si } \alpha > 1 \text{ la serie converge} \\ \text{Si } \alpha \leq 1 \text{ la serie diverge} \end{cases}$$

- Criterio de condensación de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ tiene el mismo caracter que } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$$

Caso particular del segundo criterio de comparación

5.3 Suma exacta de algunas series

La serie aritmética es siempre divergente

- Serie aritmética:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a + n d) \quad S_n = \frac{a_0 + a_n}{2} n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = \infty$$

- Serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = \frac{1}{1 - r} \quad \text{si } |r| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \quad S_n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = \frac{r}{1 - r} \quad \text{si } |r| < 1$$

- Serie aritmético-geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a + n d) b r^n \quad \text{si } |r| < 1$$

$$S_n = \left(\frac{a}{1-r} + d \frac{r - r^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{(a + n d) r^{n+1}}{1-r} \right) b \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = \left(\frac{a}{1-r} + \frac{d r}{(1-r)^2} \right) b$$

- Serie hipergeométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es hipergeométrica} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

$$S_n = \frac{a_1 \gamma - (\alpha n + \beta) a_n}{\gamma - \alpha - \beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = \frac{a_1 \gamma}{\gamma - \alpha - \beta} \quad \text{si } \alpha > 0, \quad \alpha + \beta < \gamma$$

- Serie telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) \quad S_n = x_1 - x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = x_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$$

Nota: La serie telescópica también puede venir definida de las siguientes formas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n-1} - x_n) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$$

Todas estas series son telescópicas

Se pueden utilizar para los criterios de comparación

5.4 Dos series patrón importantes

5.4.1 Serie geométrica

Se recomienda repasar los resultados sobre la progresión geométrica

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ se denomina **serie geométrica** de razón r . Vamos a estudiar su carácter calculando directamente su suma. Para ello vemos cuanto vale la suma de los n primeros términos:

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 + r$$

$$S_2 = 1 + r + r^2$$

$$\dots$$

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

$$rS_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n+1}$$

Ahora restamos la suma enésima menos la suma enésima multiplicada por la razón

$$S_n - rS_n = 1 + r - r + r^2 - r^2 + r^3 - r^3 + \dots + r^n - r^n - r^{n+1}$$

$$(1 - r)S_n = 1 - r^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \right)$$

Por tanto, según el valor de la razón r el anterior límite toma los siguientes resultados:

- 1) Convergente y de suma $S = \frac{1}{1 - r}$ si $|r| < 1$
- 2) Divergente a $+\infty$ si $r \geq 1$
- 3) Oscilante entre 0 y 1 si $r = -1$
- 4) Oscilante entre $-\infty$ y $+\infty$ si $r < -1$

Estos resultados se basan en el comportamiento de la progresión geométrica según el valor de r

Si la serie geométrica empieza en $n = 1$ en lugar de $n = 0$ el carácter de la serie se mantiene pero la suma cuando $|r| < 1$ varía. Para calcular la nueva suma podemos proceder como hemos hecho más arriba o bien optar por lo que vamos a hacer a continuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r} \Rightarrow r^0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r} - 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1 - r}$$

5.4.2 Serie armónica generalizada

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ se denomina **serie armónica generalizada** y su carácter según el valor de α lo admitiremos sin demostración:

Para $\alpha = 1$ obtenemos la conocida **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 1 & \text{convergente (no se sabe el valor de la suma exacta)} \\ \alpha \leq 1 & \text{divergente} \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \text{finito}$$

5.5 Series de términos cualesquiera (positivos y negativos)

5.5.1 Conceptos generales

Decimos que una **serie es de términos cualesquiera** si contiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos.

Si la serie sólo contiene términos negativos sacaremos el signo menos factor común fuera del sumatorio y nos queda una serie de términos positivos.

Si la serie presenta un número finito de términos negativos e infinitos términos positivos entonces suprimiremos los negativos y nos queda una serie de términos positivos.

Si la serie presenta un número finito de términos positivos e infinitos términos negativos entonces suprimiremos los positivos, sacamos factor común el signo menos y nos vuelve a quedar una serie de términos positivos.

Sea $\sum x_n$ una serie de términos cualesquiera (positivos y negativos), entonces siempre podemos expresarla como dos series, una que agrupa los términos positivos $\sum x'_n$ y otra que agrupa los términos negativos $\sum x''_n$:

$$\sum_n x_n = \sum_n x'_n - \sum_n x''_n$$

De esta forma, según el carácter de estas dos series, se pueden dar los siguientes casos:

$\sum_n x'_n$	$\sum_n x''_n$	$\sum_n x_n$
s' (converge)	s'' (converge)	$s' - s''$ (converge)
$+\infty$ (diverge)	s'' (converge)	$+\infty$ (diverge)
s' (converge)	$+\infty$ (diverge)	$-\infty$ (diverge)
$+\infty$ (diverge)	$+\infty$ (diverge)	$\zeta?$ (conv., div. u oscila)

La nomenclatura que utilizaremos es la siguiente:

- Si $\sum x'_n$ y $\sum x''_n$ convergen (primer caso de la tabla) decimos que la serie **converge incondicionalmente**. Esto significa que la serie converge aunque reordenemos los términos de la serie de cualquier forma.
- Si $\sum x'_n$ diverge o $\sum x''_n$ diverge (segundo y tercer caso de la tabla) diremos que la serie **diverge incondicionalmente**: esto significa que la serie diverge aunque reordenemos los términos de la serie.
- Si las dos series $\sum x'_n$ y $\sum x''_n$ divergen la serie tiene carácter **condicional**: esto significa que la serie converge o diverge dependiendo de cómo ordenemos los términos de la misma. En este caso puede cambiar hasta el valor de la suma de la serie dependiendo de cómo ordenemos los términos.

5.5.2 Convergencia absoluta

Definimos la convergencia absoluta de una serie de términos cualesquiera de la siguiente forma:

$$\sum_n a_n \text{ es absolutamente convergente} \Leftrightarrow \sum_n |a_n| \text{ es convergente}$$

por tanto:

$$\sum_n |a_n| \text{ diverge} \Leftrightarrow \sum_n a_n \text{ no converge absolutamente}$$

Propiedades de la convergencia absoluta:

- $\sum_n a_n$ converge absolutamente $\Leftrightarrow \sum_n a_n$ converge incondicionalmente
- $\sum_n a_n$ no converge absolut. $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{La serie diverge incondicionalmente} \\ \text{La serie tiene caracter condicional} \end{cases}$

5.5.3 Caso particular: Series alternadas

Una serie **alternada** es de la forma $\sum_n (-1)^n a_n$.

Para este tipo de series vale todo lo dicho para las series de términos cualesquiera (pues son un subconjunto de ellas). Pero además existe un criterio muy útil que sólo es válido para series alternadas.

Criterio de Leibnitz:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ |a_n| \geq |a_{n+1}| \end{array} \right\} \Leftrightarrow \sum_n (-1)^n a_n \text{ converge}$$

TEMA 6: CONTINUIDAD Y LÍMITES EN $\mathbb{R}$

6.1 Definiciones

6.1.1 Definición de continuidad

Decimos que f es **continua** en $a \in \mathbb{R}$ cuando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{R} .. |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{R} .. x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

Ambas definiciones son equivalentes

6.1.2 Definición de límite

Decimos que $f(x)$ tiene límite l cuando x tiende a a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ cuando,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{R} .. |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

6.1.3 Límites laterales

Límite por la izquierda: $l_1 = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

Límite por la derecha: $l_2 = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

6.1.4 Propiedades

- Las funciones elementales son continuas en todo su dominio de definición. Llamaremos funciones elementales a $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln x$, $\sqrt{x}$, polinomios, etc...
- La suma, resta, producto, cociente y composición de funciones continuas es una función continua.
- f es continua en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- Teorema de Bolzano:
Sea una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.
- Sea una función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un intervalo cerrado $[a, b]$. Se cumple que la imagen mediante f , $f([a, b])$ es también un intervalo de la forma $[c, d]$.

Esta es la forma práctica de estudiar la continuidad de una función

6.1.5 Clasificación de los puntos de discontinuidad

- Discontinuidad evitable: $\exists l_1, \exists l_2$ pero $l_1 = l_2 \neq f(a)$
- Discontinuidad de primera especie: $\exists l_1, \exists l_2$ pero $l_1 \neq l_2$
- Discontinuidad de segunda especie: $\begin{cases} i) & l_1 = \infty \quad \text{ó} \quad l_2 = \infty \\ ii) & \nexists l_1 \quad \text{ó} \quad \nexists l_2 \end{cases}$

6.2 Cálculo práctico de límites de funciones

Casi todo lo ya visto para límites de sucesiones nos es ahora de utilidad para calcular límites de funciones. Existen algunas diferencias entre las que cabe destacar:

- En sucesiones n siempre tiende a infinito ($n \rightarrow \infty$), mientras que en funciones la x puede tender a cualquier valor (finito o no), es decir $x \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$.
- La regla de Stolz no se aplica en funciones, a cambio aparece la regla de l'Hopital que viene a ser equivalente.
- Desaparece la equivalencia de Stirling pues no está definido el factorial de un número real.

Dicho esto, a continuación, a modo de resumen, se enumeran los métodos más usuales para resolver límites de funciones, muchos de ellos, como ya hemos comentado, adaptados de lo ya visto en límites de sucesiones.

- Sustitución de infinitésimos equivalentes en producto o cociente. Los infinitésimos equivalentes más usuales son para $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$:

$$\underline{\sin \varepsilon(x) \sim \arcsin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)}$$

$$\text{Sh } \varepsilon(x) \sim \text{Arg Sh } \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$

$$\underline{\text{tg } \varepsilon(x) \sim \arcsin \text{tg } \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)}$$

$$\text{Th } \varepsilon(x) \sim \text{Arg Th } \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$

$$1 - \cos \varepsilon(x) \sim \frac{\varepsilon(x)^2}{2}$$

$$\text{Ch } \varepsilon(x) - 1 \sim \frac{\varepsilon(x)^2}{2}$$

$$\underline{e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)}$$

$$a^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x) \cdot \text{La} \quad (a > 0)$$

$$(1 + \varepsilon(x))^m - 1 \sim \varepsilon(x) \cdot m$$

$$\underline{L(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)} \quad \text{también} \quad \underline{Lu(x) \sim u(x) - 1} \quad u(x) \rightarrow 1$$

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ también podemos sustituir en producto o cociente:

$$a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p \sim a_0 x^p$$

$$L(a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p) \sim L(x^p)$$

- Regla de l'Hopital:

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ con $g'(a) \neq 0$ y donde

tenemos que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ ó $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ entonces se cumple que:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Debemos estar atentos a este aspecto

Si tenemos indeterminaciones del tipo:

$$0 \cdot \infty \quad 0 \quad \infty - \infty$$

las convertimos en

$$0/0 \quad \text{ó} \quad \infty/\infty$$

de la misma forma que en sucesiones

Igual que en
sucesiones

- Para las indeterminaciones ∞^0 , 0^0 , 1^∞ siempre se hace:

$$l = \lim_{x \rightarrow a} f^g \Rightarrow Ll = L(\lim_{x \rightarrow a} f^g) = \lim_{x \rightarrow a} (L f^g) = \lim_{x \rightarrow a} g \cdot L f$$

Igual que en
sucesiones

- Para la indeterminación 1^∞ también se puede aplicar aplicar:

$$l = \lim_{x \rightarrow a} f^g \Rightarrow Ll = \lim_{x \rightarrow a} g(f-1)$$

- Para el cociente de polinomios existe la misma regla que en sucesiones (con $x \rightarrow \infty$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ \infty & \text{si } p > q \end{cases}$$

En funciones aparece otro caso interesante (que no existe en sucesiones): un cociente de polinomios con $x \rightarrow 0$. En este caso nos fijamos en los términos de menor grado de cada polinomio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots + a_{p+2} x^{p+2} + a_{p+1} x^{p+1} + a_p x^p}{\dots + b_{q+2} x^{q+2} + b_{q+1} x^{q+1} + b_q x^q} = \begin{cases} \infty & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p > q \end{cases}$$

- Teorema del Sandwich (del Emparedado)

Sean tres funciones f, g y h tal que $g < f < h$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} g = l \\ \lim_{x \rightarrow a} h = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f = l$$

"cero por acotado"

- Sean dos funciones f y g , tal que f está acotada y $\lim_{x \rightarrow a} g = 0$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f \cdot g = 0$$

- Orden de los infinitos. Sea $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$,

$$\ln f < f^a \ (a > 0) < a^f \ (a > 1) < f^f$$

Importante propiedad.
El recíproco no es
cierto en general

- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\text{Si } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$$

6.3 Estudio práctico de la continuidad de una función

- Todas las funciones elementales son continuas en sus dominios de definición. Consideraremos funciones elementales a los polinomios, $\sin x$, $\cos x$, Lx , $|x|$, e^x , $\sqrt{x}$.
- La suma, resta, producto, cociente (con denominador distinto de nulo) y composición de funciones continuas es siempre una función continua.
- Para estudiar la continuidad de una función f en un punto $x = a$ utilizaremos la siguiente caracterización:

$$f \text{ es continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- En caso de que nos pidan estudiar la continuidad sólo por la izquierda o por la derecha entonces aplicaremos lo siguiente:

$$f \text{ es continua por la izquierda en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

$$f \text{ es continua por la derecha en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

6.4 Continuidad uniforme

6.4.1 Definición

f es uniformemente continua en $A \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x, y \in A \text{ .. } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

6.4.2 Propiedades

- Si f es uniformemente continua en $A \Rightarrow f$ es continua en A .
- Si f es uniformemente continua en $A \Rightarrow f$ es uniformemente continua en $B \subset A$.
- Si f es continua en A y A es compacto $\Rightarrow f$ es uniformemente continua en A .
- Si $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in A \Rightarrow f$ es uniformemente continua en A .

Importante:
La continuidad uniforme siempre se define sobre un conjunto, nunca en un solo punto

TEMA 7: DERIVACIÓN EN $\mathbb{R}$

7.1 Definiciones

- $f(x)$ es **derivable** en $a \in \mathbb{R}$ cuando el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Estas dos formas de definir la derivada son totalmente equivalentes. Basta con hacer el cambio de variable:

$$x = a + h$$

para pasar de una a la otra.

$x = a + h$
 $\text{Si } x \rightarrow a$
 $x - a = h \rightarrow 0$

- Decimos que $f(x)$ es **derivable por la izquierda** en $a \in \mathbb{R}$ cuando el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a^-)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^-)$$

- Decimos que $f(x)$ es **derivable por la derecha** en $a \in \mathbb{R}$ cuando el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

- $f(x)$ es **derivable** en $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(a^-) = f'(a^+)$

- Las funciones elementales son derivables en todo su dominio de definición. Llamaremos funciones elementales a $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln x$, $\sqrt{x}$, polinomios, etc...

- La suma, resta, producto, cociente y composición de funciones derivables es una función derivable.

- Definimos la **diferencial** de $f(x)$ en el punto $a \in \mathbb{R}$ como:

$$df(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \rightarrow df(a)(h) = f'(a) \cdot h$$

- La función diferencial df de una función f es siempre una función continua.

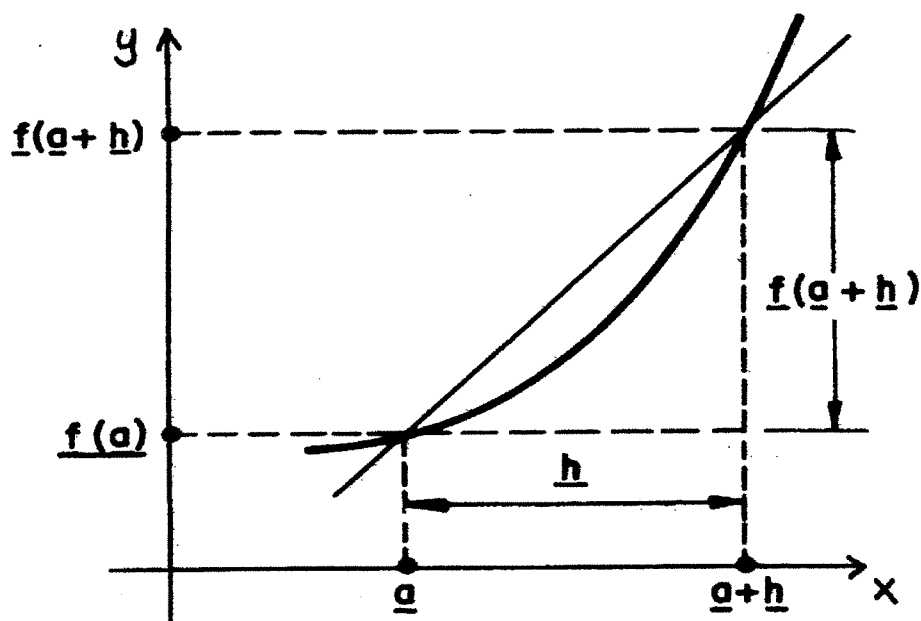
- $f(x)$ es **diferenciable** en $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ es **derivable** en $a \in \mathbb{R}$

En $\mathbb{R}$ que una función tenga derivada en un punto es necesario y suficiente para poder asegurar que es diferenciable en ese punto

7.2 Interpretación geométrica de la derivada y de la diferencial

- La función derivada representa gráficamente la pendiente de la recta tangente a la función en cada punto.
- La función diferencial de una función en un punto es gráficamente una recta que pasa por el origen y que tiene pendiente la derivada de la función en ese punto.
- Sea una función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La recta tangente a la gráfica de la función en un punto $x = a$ viene dada por la siguiente expresión:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



Fijate que la recta dibujada es secante a la curva pero conforme h tiende a cero la recta es "cada vez menos secante" hasta que llega a ser tangente a la curva

Ejemplo numérico:

Calcular la recta tangente y la diferencial de la función $f(x) = x^2$ en $x = 3$.

7.3 Teoremas

- Si $f(x)$ es derivable en $a \Rightarrow f(x)$ es continua en a

- Teorema de Rolle:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [a, b] \\ f(x) \text{ es derivable en } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$$

- Teorema de Lagrange o del valor medio:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [a, b] \\ f(x) \text{ es derivable en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Este teorema es una generalización del teorema de Rolle

- Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ y } g(x) \text{ continuas en } [a, b] \\ f(x) \text{ y } g(x) \text{ derivables en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

- Regla de la Cadena:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en (a, b) entonces la derivada de la función composición $(g \circ f)(x)$ es :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Notación importante

- Diremos que una función $f(x) \in C([a, b])$ si es continua en $[a, b]$.
- Diremos que una función $f(x) \in C^1([a, b])$ si tiene primera derivada y ésta es continua en $[a, b]$.
- En general, diremos que una función $f(x) \in C^r([a, b])$ si tiene derivadas hasta de orden r todas ellas continuas en $[a, b]$.
- Por ejemplo, sea $f(x)$ una función polinómica. Entonces diremos que $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ por que los polinomios son funciones que poseen infinitas derivadas todas ellas continuas.
- Se cumple que: $C \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots \supset C^\infty$

TEMA 8: MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN $\mathbb{R}$

8.1 Definiciones

A los máximos y mínimos de una función se les llama en general **extremos** de la función

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo relativo estricto** $\Leftrightarrow f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo relativo estricto** $\Leftrightarrow f(x_0) < f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo absoluto estricto** $\Leftrightarrow f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

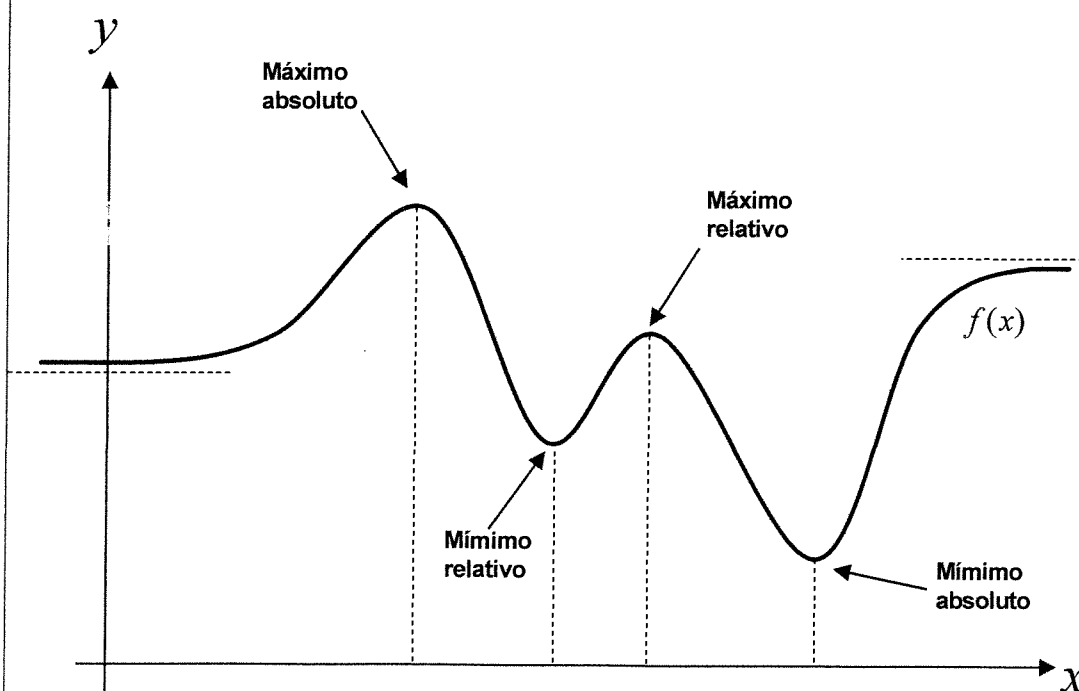
$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo absoluto estricto** $\Leftrightarrow f(x_0) < f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo relativo no estricto** $\Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo relativo no estricto** $\Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo absoluto no estricto** $\Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo absoluto no estricto** $\Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$



En resumen:

un máximo absoluto es el punto “más alto” de *toda* la función mientras que un máximo relativo es el punto más alto de *una parte* de la función.

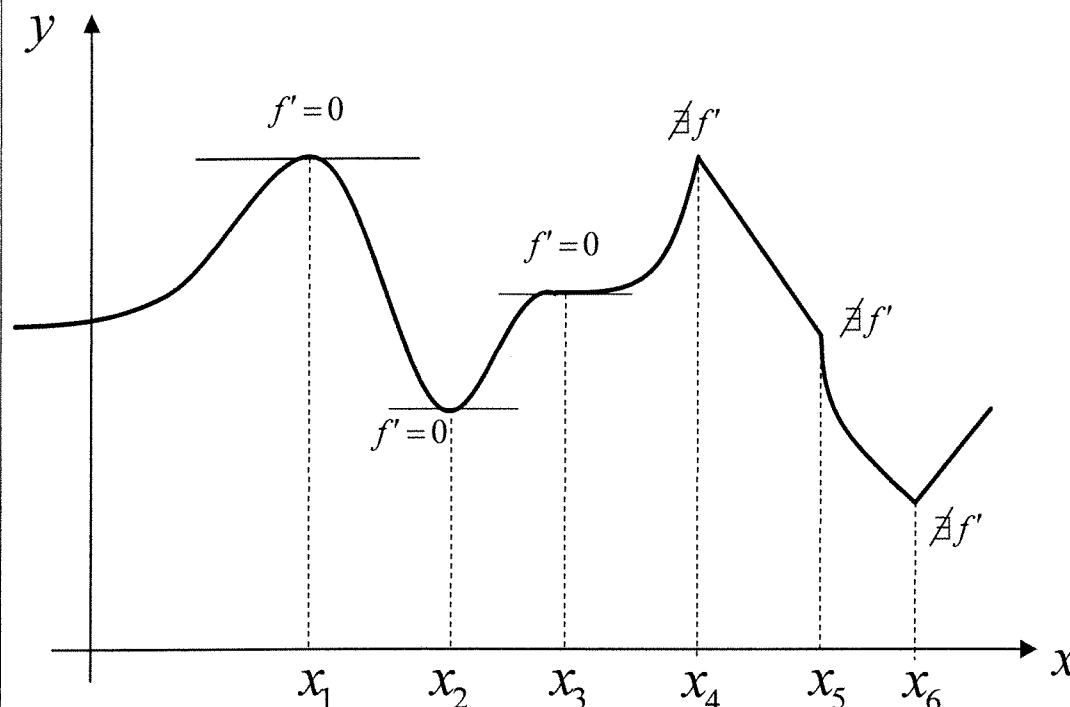
Análogamente, un mínimo absoluto es el punto “más bajo” de *toda* la función mientras que un mínimo relativo es el punto más bajo de *una parte* de la función.

8.2 Cálculo de los extremos

Condiciones necesarias de extremo

Lo primero que se hace siempre es determinar los **puntos estacionarios** o críticos de la función $f(x)$ (es decir, aquellos puntos que son candidatos a máximo o mínimo). Estos puntos se obtienen de aplicar las siguientes condiciones:

- Aquellos puntos $a \in \mathbb{R}$ / $f'(a) = 0$
- Aquellos puntos $a \in \mathbb{R}$ / $\nexists f'(a)$



Fíjate que en x_1 y x_2 la función presenta dos extremos, máximo y mínimo respectivamente. En ambos puntos la recta tangente a la función es horizontal y por tanto su pendiente es cero. Del tema anterior sabemos que la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función, por tanto podemos afirmar que en x_1 y x_2 se cumple que $f' = 0$.

Sin embargo en el punto x_3 la pendiente de la recta tangente en ese punto también es cero, es decir en x_3 también se cumple que $f' = 0$ pero en ese punto no hay extremo.

De todo esto concluimos lo siguiente:

Que la derivada de una función se anule en un punto es condición necesaria para que ese punto sea extremo pero no es una condición suficiente (porque hay puntos donde la derivada se anula y no son extremo)

Por otro lado en x_4 y x_6 la función presenta otro máximo y otro mínimo pero en esos dos puntos no existe la derivada de la función, sin embargo en x_5 tampoco existe la derivada y la función no tiene extremo en ese punto.

Por tanto la no existencia de derivada en un punto es condición necesaria pero no suficiente para que una función tenga extremo en ese punto.

Dicho de otra forma, los puntos donde no existe la derivada de la función son candidatos a extremo.

Condiciones suficientes de extremo

Una vez obtenidos los candidatos a extremo, es decir, aquellos puntos que cumplen alguna condición necesaria de extremo, estudiamos su carácter. Existen varias formas:

Se trata, en este caso, de utilizar directamente la definición de extremo

- Observar el valor de la función $f(x)$ en un entorno del candidato $a \in \mathbb{R}$:

Si $f(x) \geq f(a), \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow a$ es un mínimo relativo

Si $f(x) \leq f(a), \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow a$ es un máximo relativo

- Calcular la derivada segunda $f''(x)$ y sustituir en ella el candidato $a \in \mathbb{R}$:

Si $f''(a) > 0 \Rightarrow a$ es un mínimo relativo

Si $f''(a) < 0 \Rightarrow a$ es un máximo relativo

Si $f''(a) = 0 \Rightarrow a$ no es ni máximo ni mínimo

Este método sólo es recomendable si además vamos a calcular los puntos de inflexión

- Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función a un lado y a otro del candidato $a \in \mathbb{R}$. El estudio del crecimiento y el decrecimiento se hace mediante la derivada primera:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0, x < a \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x < a \\ f'(x) > 0, x > a \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x > a \end{array} \right\} \Rightarrow a \text{ es un mín. rel.}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0, x < a \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x < a \\ f'(x) < 0, x > a \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x > a \end{array} \right\} \Rightarrow a \text{ es un máx. rel.}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0, x < a \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x < a \\ f'(x) > 0, x > a \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x > a \end{array} \right\} \Rightarrow a \text{ no es máx ni mín.}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0, x < a \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x < a \\ f'(x) < 0, x > a \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x > a \end{array} \right\} \Rightarrow a \text{ no es máx ni mín.}$$

8.3 Cálculo de extremos restringidos a un subconjunto de $\mathbb{R}$

Algunas veces nos piden determinar los extremos de una función $f(x)$ restringida a un subconjunto A de $\mathbb{R}$.

En estos casos añadiremos a la lista de candidatos a máximo o mínimo la frontera del subconjunto A dado. De esta forma los candidatos serán:

- Aquellos puntos $a \in A$ / $\exists f'(a) = 0$
- Aquellos puntos $a \in A$ / $\nexists f'(a)$
- Los puntos frontera de $A \subset \mathbb{R}$

El ejemplo más común es el de calcular los extremos de una función restringida a un intervalo. En ese caso tendremos que estudiar como candidatos los extremos del intervalo además de los ya mencionados anteriormente.

En el caso del cálculo de extremos restringidos a un subconjunto existe un teorema de gran importancia que pasamos a enunciar:

Teorema de Weiestrass

Si $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado y acotado y f es continua en $A \Rightarrow f$ alcanza máx. y mín. absoluto en A .

compacto

8.4 Representación gráfica de funciones

Los pasos habituales para representar una función $y = f(x)$ son los siguientes:

Dominio

Es el conjunto de todos aquellos valores de x donde la función toma un valor real. Aquellos valores de x donde la función vale infinito o no existe quedan excluidos del dominio

Ejemplos:

- $f(x) = \sqrt{g(x)}$

En este caso el dominio de $f(x)$ son todos aquellos valores de x para los cuales $g(x) \geq 0$ ya que la raíz cuadrada de un número negativo no existe

- $f(x) = \ln(g(x))$

En este caso el dominio de $f(x)$ son todos aquellos valores de x para los cuales $g(x) > 0$ ya que el logaritmo neperiano de cero y de cualquier número negativo no existe.

Simetrías

Una función $y = f(x)$ puede tener simetría par, simetría impar o no tener simetrías.

- Decimos que una función tiene simetría par cuando $f(x) = f(-x)$, en este caso la función es simétrica respecto al eje Y. Por ejemplo: $y = x^2$
- Decimos que una función tiene simetría impar cuando $f(x) = -f(-x)$, en este caso la función es simétrica respecto al origen. Por ejemplo: $y = x^3$
- Si no se cumple ninguna de las dos condiciones anteriores entonces la función no tiene simetrías. Por ejemplo: $y = e^x$

Asíntotas

Horizontales: si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, entonces la recta $y = l$ es una asíntota vertical.

Verticales: si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.

Oblicuas: son rectas de la forma $y = mx + n$, donde

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

Hay que calcular la m siempre antes de la n

Puntos de corte con los ejes

- Puntos de corte de la función con el eje X

Hacemos $f(x) = 0$ y despejamos x . Pueden aparecer varias soluciones ya que la función puede cortar varias veces al eje X.

- Punto de corte de la función con el eje Y

Hacemos $y = f(0)$, es decir sustituimos $x = 0$ en la función y nos sale el valor de y (no hace falta despejar). Este punto es único aunque puede no existir.

Signo de la función

Se trata de estudiar los intervalos en los cuales la función está por encima del eje X (se dice que la función es positiva) y los intervalos en los cuales la función está por debajo del eje Y (se dice que la función es negativa).

Extremos y monotonía de la función

Estudiar la monotonía de una función significa estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la misma.

Para ello lo primero que hay que hacer es obtener los candidatos a extremo de la función como ya se ha explicado en este mismo tema.

Una vez obtenidos los candidatos a extremo se estudia en cada intervalo entre dos candidatos si la función es creciente o decreciente. Para ello basta con sustituir cualquier punto de intervalo en la derivada primera y comprobar si el resultado es positivo (creciente) o negativo (decreciente).

Puntos de inflexión y curvatura de la función

Los puntos de inflexión de una función son aquellos puntos donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

Estudiar la curvatura de una función significa estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de la misma.

Para ello lo primero que hay que hacer es obtener los candidatos a punto de inflexión. Estos candidatos se encuentran siempre en:

- Aquellos puntos $a \in \mathbb{R}$ / $f''(a) = 0$
- Aquellos puntos $a \in \mathbb{R}$ / $\nexists f'(a)$

Una vez obtenidos los candidatos a punto de inflexión se estudia en cada intervalo entre dos candidatos si la función es cóncava o convexa. Para ello basta con sustituir cualquier punto de intervalo en la derivada segunda y comprobar si el resultado es positivo ($\cup$) o negativo ($\cap$).

8.5 Algunas funciones elementales que conviene conocer

Función Logaritmo Neperiano

$$y = \ln(x) \Rightarrow x = e^y$$

- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

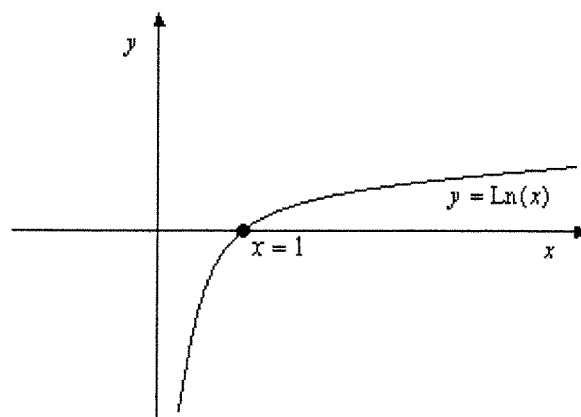
- $\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$

- $\ln(1) = 0$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(0) = -\infty$$

$$\ln(+\infty) = +\infty$$



- El valor de dentro del Logaritmo siempre ha de ser positivo

Función Exponencial

$$y = e^x$$

- Toda función elevada al exponente es siempre estrictamente positiva.

$$y = e^a \text{ con } a \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$$

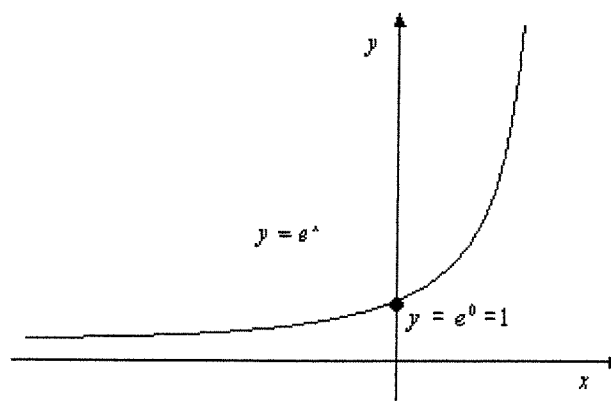
- $e^{2x} = e^x \cdot e^x$

- $a \cdot e^x + b \cdot e^x = (a+b) \cdot e^x$

- $e^0 = 1$

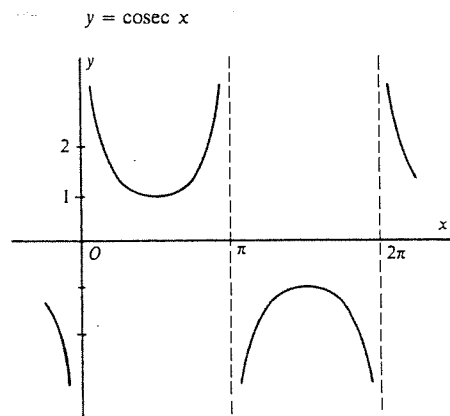
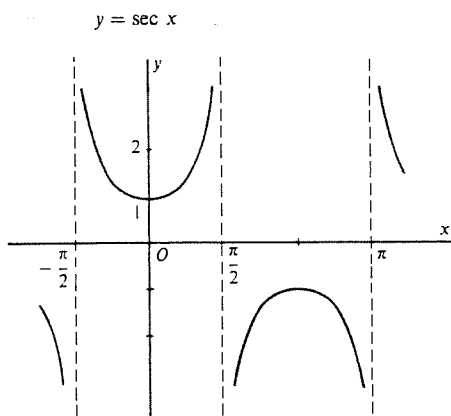
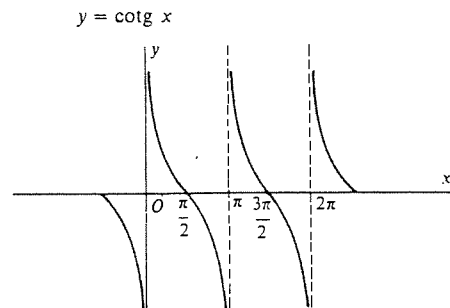
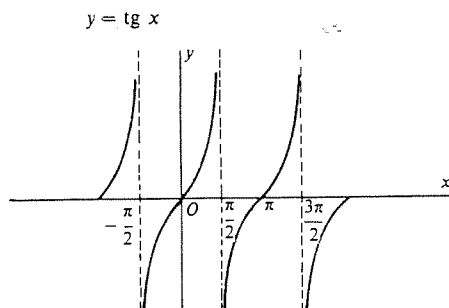
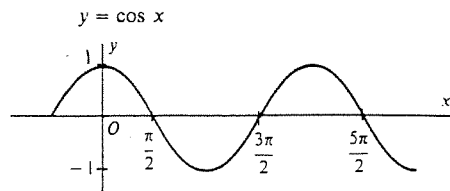
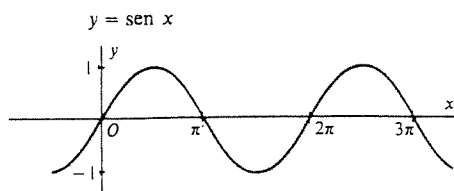
$$e^\infty = \infty$$

$$e^{-\infty} = 0$$

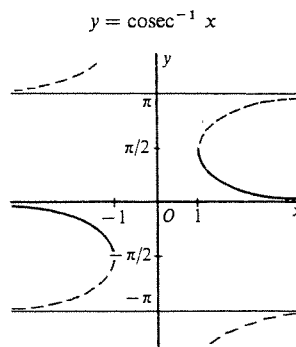
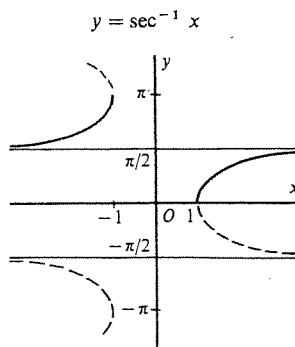
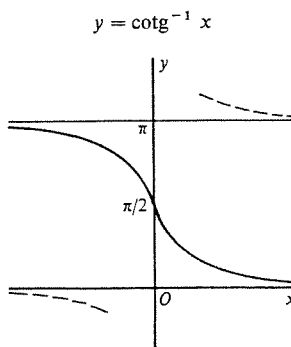
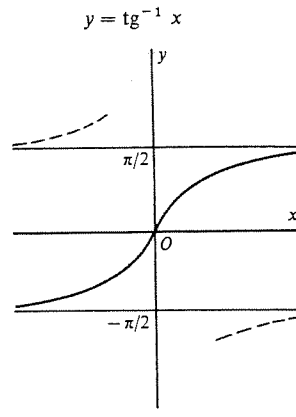
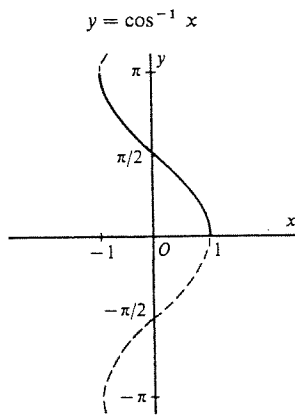
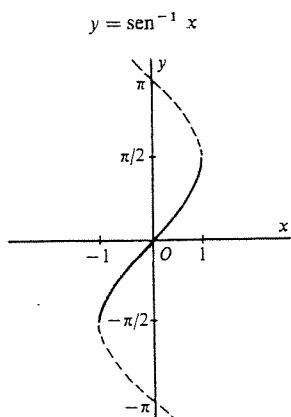


Funciones trigonométricas circulares

$y = \text{sen } x$
 $y = \cos x$
 $y = \text{tg } x$
 $y = \text{cotg } x$
 $y = \sec x$
 $y = \text{cosec } x$



$y = \text{sen}^{-1} x = \arcsen x$
 $y = \cos^{-1} x = \arccos x$
 $y = \text{tg}^{-1} x = \text{arctg } x$
 $y = \text{cotg}^{-1} x = \text{arccotg } x$
 $y = \sec^{-1} x = \text{arcsec } x$
 $y = \text{cosec}^{-1} x = \text{arccosec } x$



Funciones trigonométricas hiperbólicas

$$y = \sinh x = \text{sh } x$$

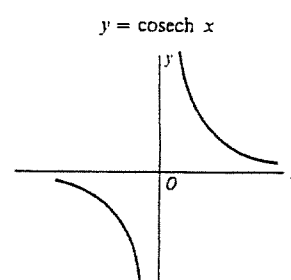
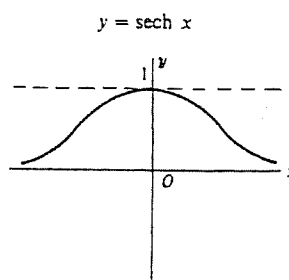
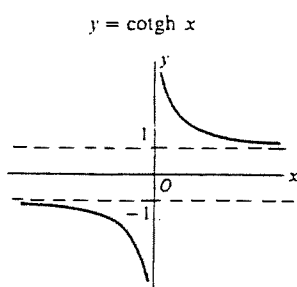
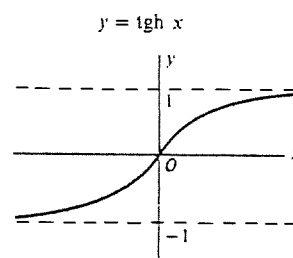
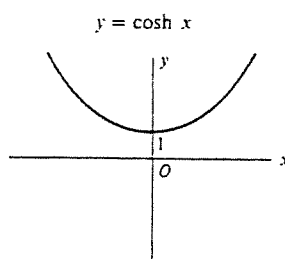
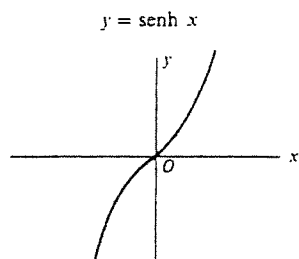
$$y = \cosh x = \text{ch } x$$

$$y = \text{th } x$$

$$y = \text{coth } x$$

$$y = \text{sech } x$$

$$y = \text{cosech } x$$



TEMA 9: FÓRMULA DE TAYLOR

9.1 Definiciones

Sea una función $f \in C^{n+1}([a, x])$, se cumple que existe un $\xi \in [a, x]$ tal que:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

o bien, en forma comprimida,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{P_{n,a}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_{n,a}(x)}$$

A esta expresión la llamamos **fórmula de Taylor**. Más concretamente, $P_{n,a}(x)$ es el **polinomio de Taylor** de grado n en el punto a y $R_{n,a}(x)$ es el **resto de Lagrange** que, como veremos a continuación sirve para acotar el error.

En el caso particular en que $a = 0$ se suele llamar **fórmula de Mac Laurin**.

Si hacemos tender n a infinito, $n \rightarrow \infty$, entonces hablaremos de **serie de Taylor** que no es más que un polinomio con infinitos términos. En este caso no hay resto de Lagrange.

¡¡Piensa que esto es realmente útil!! Gracias a la fórmula de Taylor podemos estudiar funciones muy complicadas "sustituyéndolas" por polinomios, que son unas funciones muy sencillas y que sabemos manejar muy bien

La fórmula de Taylor-MacLaurin nos da una aproximación de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, x]$ mediante un polinomio de grado n . Dicho de otra forma, Taylor nos asegura que existe un polinomio de grado n que se comporta "casi" igual que nuestra función dentro del intervalo $[a, x]$. El error cometido entre la función $f(x)$ y el polinomio que la aproxima viene dado por el **resto de Lagrange**:

$$\text{Error} = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right|$$

Es de suponer que cuanto mayor es el grado del polinomio mejor es la aproximación a la función $f(x)$. Sin embargo, esto no es siempre así. Hay veces en que existe la fórmula de Taylor pues $f \in C^{n+1}([a, x])$ pero sin embargo no aproxima convenientemente a la función.

Condición necesaria y suficiente para representar una función como serie de Taylor

La condición necesaria y suficiente para que una función pueda expresarse como una serie de Taylor es que el resto de Lagrange tienda a cero. En estos casos la función queda perfectamente aproximada por la fórmula de Taylor de infinitos términos que llamaremos **serie de Taylor** (que no es más que una serie de potencias):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

9.2 Desarrollos en serie de Mac Laurin más usuales

A continuación se exponen los desarrollos de Mac Laurin más usuales. Conviene conocerlos perfectamente para, a partir de ellos, obtener otros más complejos.

Es importante recalcar que estos desarrollos están centrados en el origen $x = 0$. En caso de que nos pidan un desarrollo de Taylor en otro punto que no sea el origen tendremos que utilizar la fórmula general de la página anterior y olvidarnos de estos desarrollos.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots \quad a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ln^n a \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad -1 < x < 1$$

Caso particular del anterior para $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad -1 < x < 1$$

9.3 Cálculo práctico

Los procedimientos que podemos aplicar para obtener la serie de Taylor de una determinada función son los siguientes:

Primer procedimiento

Nos basamos en la propia definición de serie de Taylor para calcular el desarrollo en serie de la función $f(x)$. Sólo es necesario exigir que $f(x)$ sea derivable en un abierto que contenga al centro x_0 . La fórmula es la siguiente:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots$$

Segundo procedimiento

Este es el método más habitual

Se trata de utilizar series de Taylor de funciones elementales conocidas de antemano. Es decir, se puede obtener una serie de Taylor mediante operaciones elementales de otras series conocidas:

- Suma, multiplicación o cociente de series.
- Derivación de series.
- Integración de series.
- Composición de funciones dentro de una serie.

Tercer procedimiento

Es un caso particular del anterior

Muchas veces basta con aplicar la serie geométrica para obtener la serie de Taylor de una determinada función $f(z)$:

$$\frac{1}{1-f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (f(x))^n \quad \text{si } |f(x)| < 1$$

$$\frac{f(x)}{1-f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} (f(x))^n \quad \text{si } |f(x)| < 1$$

TEMA 10: CONTINUIDAD EN $\mathbb{R}^n$

10.1 Introducción a las funciones de varias variables

Campos escalares

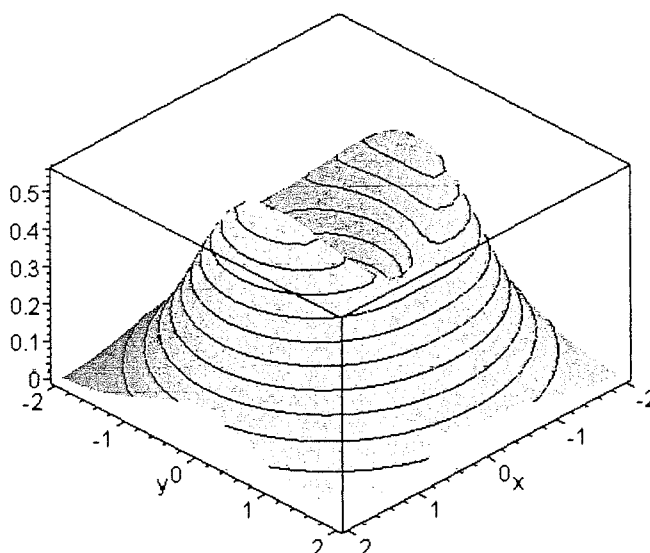
Llamamos **campo escalar** a una función del tipo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Las funciones reales de variable real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estudiadas en la parte III (y en cursos anteriores) son un caso particular de un campo escalar.

Nosotros centraremos nuestro estudio en funciones del tipo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Todo lo que se diga para este tipo de funciones es fácilmente generalizable a funciones de más variables.

Las funciones de dos variables tienen la ventaja de tener una interpretación geométrica muy clara: una función de dos variables se representa como una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$ al igual que las funciones de una variable se representan como una curva en el plano $\mathbb{R}^2$. Un ejemplo puede ser la siguiente función que acompañamos de su gráfica:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + 2y^2)}$$



Campos vectoriales

Llamamos **campo vectorial** a una función del tipo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Un campo vectorial siempre se puede descomponer en m campos escalares de la forma $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, m$. A la hora de estudiar alguna propiedad de un campo vectorial f (continuidad, diferenciabilidad, etc...) siempre estudiaremos por separado los m campos escalares que componen el campo vectorial. De esta forma, por ejemplo, diremos que un campo vectorial es continuo si lo son los m campos escalares que lo componen. De ahí la importancia de estudiar con detenimiento los campos escalares. Un ejemplo de campo vectorial es el siguiente:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = (2 \sin(xy), \ln(x + z))$$

A estas funciones se las denomina comúnmente "funciones de dos variables"

10.2 Continuidad y límites en $\mathbb{R}^n$

10.2.1 Definición de continuidad

$$f(x, y) \text{ es continua en } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Por tanto, el estudio de continuidad se reduce, básicamente a calcular un límite.

10.2.2 Cálculo práctico de límites de dos variables

- Vamos a centrarnos en calcular los límites de la forma:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

Si alguna vez aparece un límite que tienda a un punto genérico (x_0, y_0) haremos el siguiente cambio de variable:

$$x = u + x_0 \quad y = v + y_0$$

y de esta forma lo convertimos en un límite que ya tiende al $(0, 0)$.

- Coordenadas polares.

Se trata de hacer el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

de esta forma la expresión del límite pasa a ser:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho, \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

si $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow (x, y) \rightarrow (0, 0)$

que ya depende sólo de una variable y que, por tanto, ya podemos resolver utilizando las reglas usuales para límites de una variable.

- Límites radiales o direccionales.

Se trata de sustituir la variable y por $y = mx$ de forma que nos queda un límite de una sola variable que ya podemos resolver.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, mx) \rightarrow (0, 0)} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

si $x \rightarrow 0 \Rightarrow (x, mx) \rightarrow (0, 0)$

Esta es sólo una condición necesaria.

Esta es otra condición necesaria.

- Límites según otras trayectorias.

Se trata de sustituir la variable y por otras ecuaciones. Por ejemplo, parábolas, $y = mx^2$ o cualquier otra familia de curvas que se nos ocurra. de forma que nos queda un límite de una sola variable que ya podemos resolver.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x, mx^2) \rightarrow (0,0)} f(x, mx^2) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

- **Límites reiterados.**

Se trata de calcular los siguientes límites:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right)$$

$$l_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right)$$

• $l_1 \neq l_2 \Rightarrow \nexists \lim \Rightarrow \text{discon}$
 • $l_1 = l_2 \Rightarrow ??$
 si $\exists \lim$, $\lim = l_1 = l_2$
 • $l_1 = l_2 = f(x_0, y_0) \Rightarrow ??$
 si $\exists \lim$, $\lim = f(x_0, y_0)$

De esta forma, si ambos límites existen y son distintos podemos asegurar la NO existencia de límite.
 En los demás casos tenemos un candidato al límite ya que de existir debe ser el que aparece al calcular los límites reiterados.

- Teorema del Sandwich (del Emparedado)

Sean tres funciones $f, g, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g < f < h$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = l \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l$$

- Sean dos funciones $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x,y)$ está acotada y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ entonces:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0$$

TEMA 11: DIFERENCIACIÓN EN $\mathbb{R}^n$

11.1 Derivada direccional

La **derivada direccional** de la función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) según el vector unitario $v = (a, b)$ es:

$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(a, b)) - f((x_0, y_0))}{h}$$

¡Ojo!, el vector tiene que ser unitario

Si el vector no es unitario entonces se denomina **derivada según el vector** v

11.2 Derivadas parciales

Las derivadas parciales no son más que un caso particular de derivada direccional.

- La derivada parcial respecto a x de la función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{h}$$

La derivada parcial respecto a x toma el vector:

$$(a, b) = (1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

- La derivada parcial respecto a y de la función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) es:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(0, 1)) - f(x_0, y_0)}{h}$$

La derivada parcial respecto a y toma el vector:

$$(a, b) = (0, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

13.3 Vector gradiente

Llamamos **vector Gradiente** a la matriz formada por las derivadas parciales. Por ejemplo, para dimensiones dos y tres el gradiente es el siguiente:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow f(x, y) \end{aligned} \Rightarrow \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\rightarrow f(x, y, z) \end{aligned} \Rightarrow \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Así pues en general, para un campo escalar de n variables el vector gradiente será:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \Rightarrow \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

El vector gradiente es un caso particular de la matriz Jacobiana que pronto definiremos

Cálculo de la derivada direccional a partir del vector gradiente

La forma práctica de calcular una derivada direccional en la dirección del vector unitario v es utilizando el vector gradiente mediante la siguiente importante fórmula:

Se trata del producto escalar de dos vectores

$$D_v f = \nabla f \cdot v$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial s} = \nabla f(a,b) \cdot v$$

En concreto, para una función de dos variables $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la derivada direccional según el vector unitario $v = (a,b)$ en el punto (x_0, y_0) es:

$$D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) \cdot (a, b)$$

$$D_v f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot b$$

Observaciones

- Si nos piden que calculemos una derivada direccional pero nos dan un vector que no es unitario lo que hacemos es **convertirlo en unitario**. Para ello dividimos cada componente del vector entre su módulo y aplicamos la fórmula, es decir:

$$D_v f = \nabla f \cdot \frac{v}{|v|}$$

- Las derivadas parciales son casos particulares de derivadas direccionales.**
En concreto la derivada parcial con respecto a x es la derivada direccional con dirección el vector unitario $u = (1,0)$.
Igualmente la derivada parcial con respecto a y es la derivada direccional con dirección el vector unitario $u = (0,1)$.
- La derivada direccional es siempre máxima en la dirección del vector gradiente.**
Es decir, si escogemos como vector de dirección $v = \nabla f$ podemos asegurar que la derivada direccional toma el máximo valor posible que es:

$$D_v f = |\nabla f|$$

¡¡En ninguna otra dirección v la derivada direccional será mayor que esta cantidad!!

- La derivada direccional es siempre mínima en la dirección del opuesto al vector gradiente.**
Es decir, en este caso, si escogemos como vector de dirección $v = -\nabla f$ podemos asegurar que la derivada direccional toma el mínimo valor posible que es:

$$f'((x, y), v) = -|\nabla f|$$

- La derivada direccional es siempre nula en la dirección perpendicular al vector gradiente.**
En este caso, si escogemos como vector de dirección v un vector perpendicular al vector gradiente ∇f podemos asegurar que la derivada direccional vale cero.

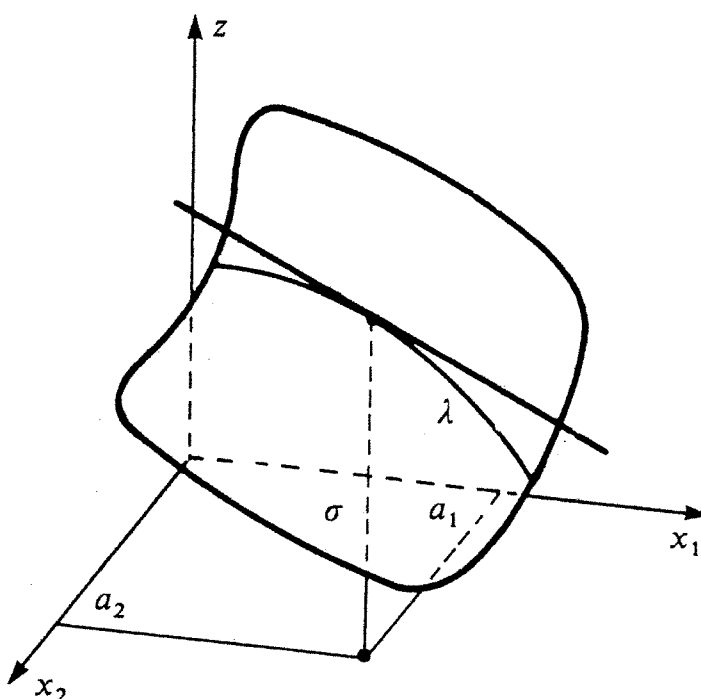
El máximo valor que puede alcanzar la derivada direccional siempre coincide con el módulo del vector gradiente

11.4 Interpretación gráfica de las derivadas parciales.

De la Parte III del temario ya sabemos que la derivada en un punto de una función de una variable se interpreta geoméricamente como la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Ahora se trata de generalizar esa interpretación a una función de dos variables. El problema en este caso, y a diferencia de lo que sucedía en funciones de una variable, es que la función es gráficamente una superficie... y en un punto de una superficie se pueden trazar infinitas rectas tangentes. Así pues, hace falta añadir un elemento más a los que ya tenemos. Además de la función y el punto tenemos que tener una dirección para trazar la recta. De esta forma surge la siguiente interpretación:

Dicho de forma menos rigurosa:
La derivada parcial con respecto a x es la pendiente de la recta tangente en la dirección del vector $(1,0)$.

Sea una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. La derivada parcial $D_1 f(a_1, a_2)$ con respecto a x_1 en el punto (a_1, a_2) de la función $f(x_1, x_2)$ se interpreta geoméricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie de ecuación $z = f(x_1, x_2)$ con el plano $y = a_2$ en el punto cuya coordenada x es a_1 . Esto se puede apreciar en la siguiente figura:



Análoga interpretación tiene la derivada parcial $D_2 f(a_1, a_2)$ con respecto a x_2 , y todas las derivadas direccionales $D_v f(a_1, a_2)$ que existen en ese punto (a_1, a_2) .

Sin embargo, de la existencia de las derivadas parciales $D_1 f(a_1, a_2)$ y $D_2 f(a_1, a_2)$ no resulta ninguna información relativa a $f(x_1, x_2)$ en los puntos cercanos al punto (a_1, a_2) . ¡¡Incluso la función podría ser discontinua en el punto existiendo en él las derivadas parciales!!.

De todo esto se concluye que el concepto de derivada no admite una generalización satisfactoria a funciones de varias variables cuando se define como límite de un cociente de diferencias. La noción restringida de derivada según un vector no permite definir aproximaciones de una función, y propiedades esenciales como la continuidad no quedan aseguradas con su existencia. De aquí surge la necesidad de definir el concepto de diferencial que pasamos a estudiar en el siguiente punto.

Fíjate que ésta es una gran diferencia con las funciones de una variable donde la derivabilidad implica la continuidad

11.5 La diferencial

Definición

La diferencial de una función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) es la siguiente función:

$$df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot k$$

$$(h, k) \rightarrow df(x_0, y_0)(h, k) = D_1 f(x_0, y_0) \cdot h + D_2 f(x_0, y_0) \cdot k$$

Esta es una diferencia importante con las funciones de una variable

Sin embargo no basta con que existan las derivadas parciales para que esta función exista. Para poder asegurar la existencia de la diferencial nos tenemos que apoyar en alguna de las siguientes condiciones.

Condiciones necesarias de diferenciabilidad

- Si $f(x, y)$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y)$ es continua en el punto (x_0, y_0)
 $f = \text{diferenciable en } (a, b) \Rightarrow f = \text{cont en } (a, b)$
- Si $f(x, y)$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y)$ tiene derivadas direccionales en cualquier dirección (incluyendo las derivadas parciales)

Condición suficiente de diferenciabilidad

- Si $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas en el punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0)
deriv. parc. cont en (a,b) $\Rightarrow$ diferenc en (a,b)

Otra forma equivalente de expresar lo mismo:

- Si $f(x, y) \in C^1$ en $(x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0)

Condición necesaria y suficiente

- Una función es diferenciable función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) si y sólo si:

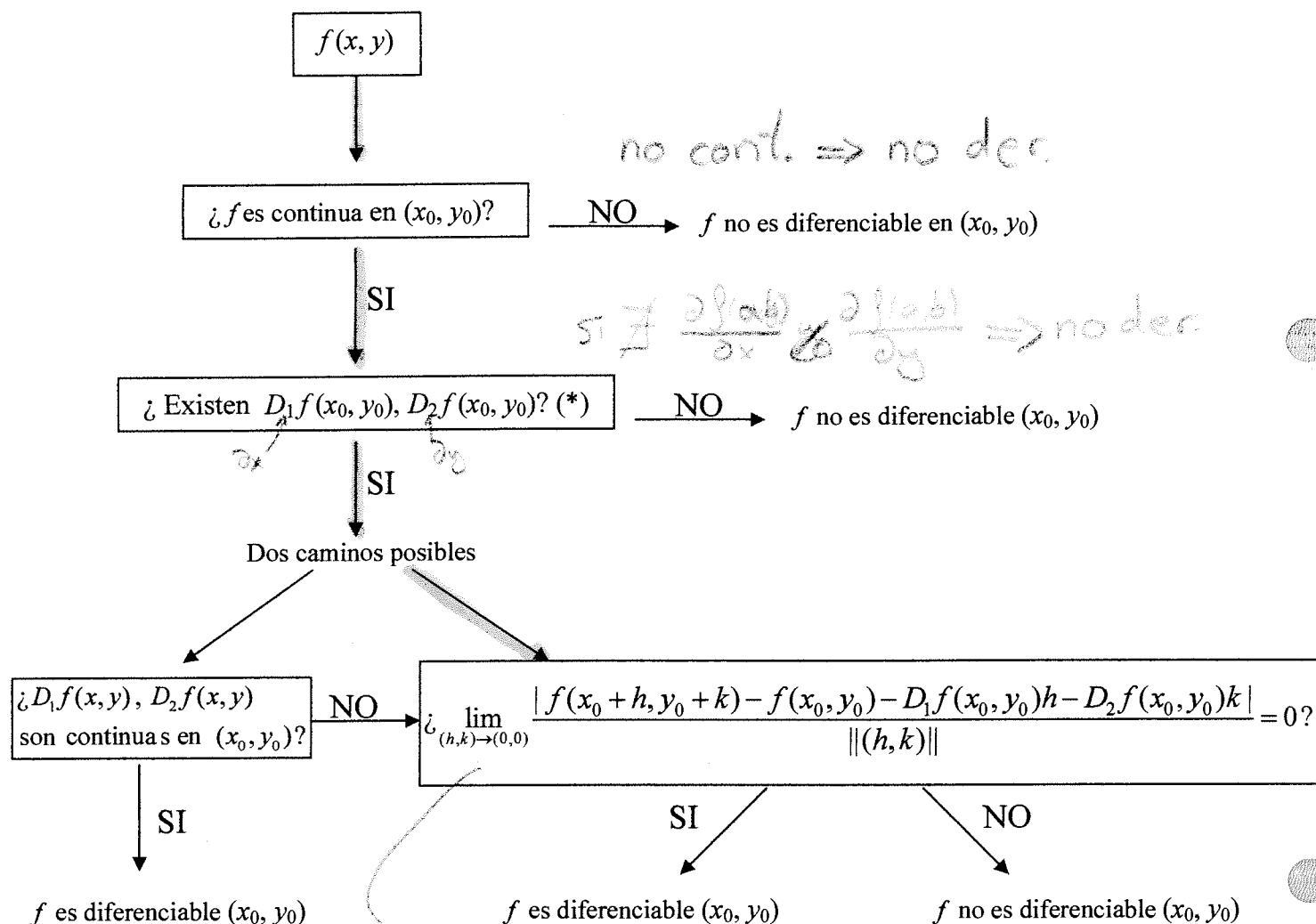
$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \cdot h - D_2 f(x_0, y_0) \cdot k|}{|(h, k)|} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} (x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} (y-b) \right]}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

Fijate que las barras del numerador son de valor absoluto pues se aplican a un escalar mientras que las del denominador son de módulo pues se aplican a un vector.

Esquema para el estudio de la diferenciabilidad en dos variables

A continuación se muestra un esquema que puede servir de ayuda para el estudio de la diferenciabilidad de una función de dos variables $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Aunque está hecho para funciones de dos variables por simplicidad, este esquema también sirve para estudiar la diferenciabilidad de funciones de tres ó más variables, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Es importante resaltar que este esquema no sustituye el estudio de la Teoría.



(*) En este paso además de comprobar la existencia de las derivadas parciales también se puede optar por comprobar la existencia de la derivada direccional en cualquier dirección v . Basta que la derivada direccional no exista al menos en una dirección para poder afirmar que la función f no es diferenciable y hemos acabado. Normalmente nos conformamos con estudiar la existencia de las derivadas parciales y continuar hacia abajo en el esquema, lo cual también es correcto.

11.6 Interpretación gráfica de la diferencial

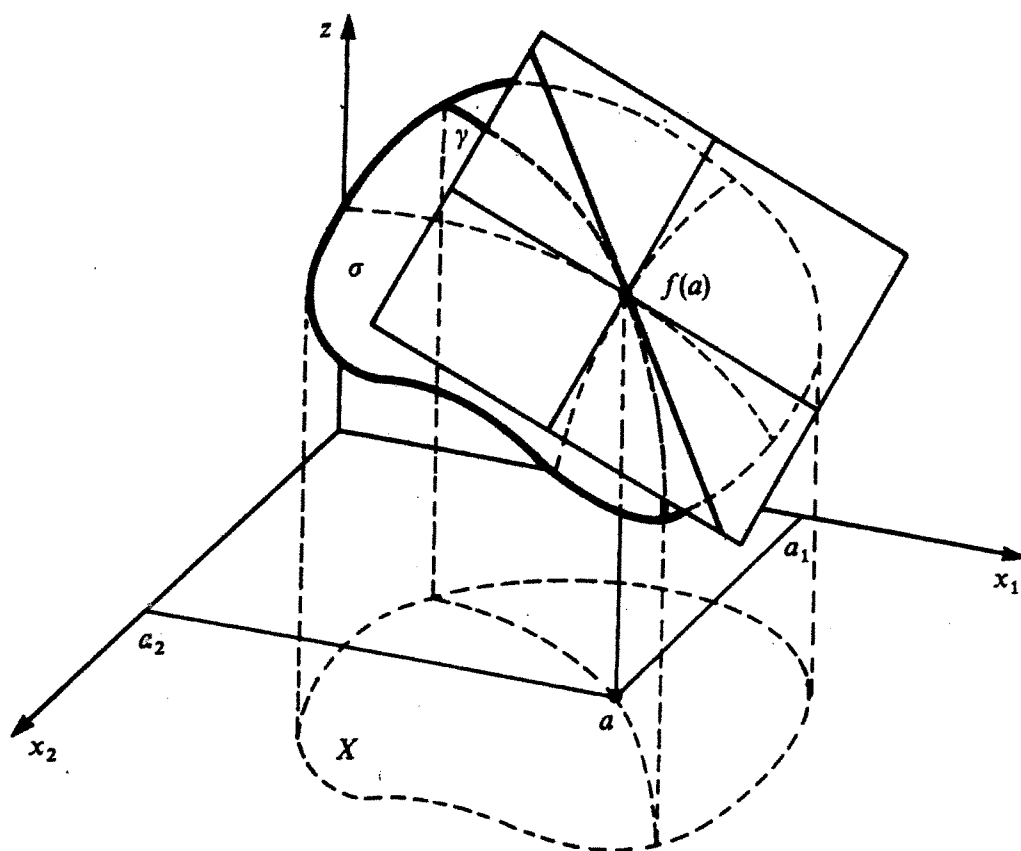
Supongamos una función $f(x, y)$ diferenciable en el punto (x_0, y_0)

La función diferencial df de la función f en un punto (x_0, y_0) es, gráficamente, un plano que pasa por el origen de coordenadas. De hecho se trata del plano tangente a la función en el punto (x_0, y_0) trasladado al origen de coordenadas.

La función diferencial df es por tanto, una aplicación lineal (homomorfismo) de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

La ecuación del plano tangente a la función diferenciable $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) viene dado por la siguiente expresión:

$$z - f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$$



Ejemplo numérico:

Calcular el plano tangente y la diferencial de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(1, 2)$.

Compara este ejemplo con el de una variable (página 33)

11.7 Derivadas de orden superior. Matriz Hessiana

Notación

Al igual que en funciones de una variable, en las funciones de varias variables también existen derivadas segundas, terceras, etc....

Para empezar con el caso más sencillo supongamos una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sus derivadas segundas serán:

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f & \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = D_{11} f \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = D_{12} f \end{cases} & \begin{array}{l} \text{Derivada segunda de } f \text{ con respecto} \\ \text{a } x \text{ dos veces} \\ \\ \text{Derivada segunda de } f \text{ primero con} \\ \text{respecto a } x \text{ y después con respecto} \\ \text{a } y \end{array} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f & \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = D_{21} f \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = D_{22} f \end{cases} & \begin{array}{l} \text{Derivada segunda de } f \text{ primero con} \\ \text{respecto a } y \text{ y después con respecto} \\ \text{a } x \\ \\ \text{Derivada segunda de } f \text{ con respecto} \\ \text{a } y \text{ dos veces} \end{array} \end{array}$$

A las dos derivadas centrales se las denomina **derivadas cruzadas**

Definición

En puntos ordinarios no hace falta utilizar la definición. Las derivadas segundas, terceras, etc... se calculan de la misma forma que las derivadas parciales. Es decir, se supone todo constante excepto la variable respecto a la cual estamos derivando

Las derivadas parciales segundas se calculan utilizando la misma definición que tenemos para las derivadas parciales primeras. Lo único que cambia es que ahora la función en vez de ser $f(x, y)$ es $D_1 f(x, y)$ o $D_2 f(x, y)$. De esta forma tenemos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = D_{11} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_1 f((x_0, y_0) + h(1, 0)) - D_1 f((x_0, y_0))}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = D_{12} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_1 f((x_0, y_0) + h(0, 1)) - D_1 f((x_0, y_0))}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = D_{22} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2 f((x_0, y_0) + h(0, 1)) - D_2 f((x_0, y_0))}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = D_{21} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2 f((x_0, y_0) + h(1, 0)) - D_2 f((x_0, y_0))}{h}$$

Las derivadas parciales sucesivas (terceras, cuartas, etc...) se calculan de forma similar.

Matriz Hessiana

Para una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definimos la **matriz Hessiana** de la siguiente forma:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}f & D_{12}f \\ D_{21}f & D_{22}f \end{pmatrix}$$

o sea, se trata de una matriz formada por las derivadas segundas de la función f .

En general para funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la matriz Hessiana queda:

$$Hf(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}f & \dots & D_{1n}f \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f & \dots & D_{nn}f \end{pmatrix}$$

Notación Importante

Sea una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. De forma análoga a como hicimos en funciones de una variable diremos que f es de **clase C^r** :

$$f \in C^r(D) \quad , \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

cuando f tenga derivadas parciales hasta orden r todas ellas continuas en D .

Teorema de Schwarz

Sea una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. El siguiente teorema nos asegura la **igualdad de las derivadas cruzadas** bajo ciertas hipótesis:

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) \in C^1 \\ \exists D_{12}f(x, y) \text{ y es continua} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists D_{21}f(x, y) \text{ y } D_{21}f(x, y) = D_{12}f(x, y)$$

11.8 Regla de la cadena. Derivación de funciones compuestas

La derivación de funciones compuestas se llama coloquialmente “regla de la cadena”.

La regla de la cadena en varias variables no es más que una generalización de la regla que se utiliza para una sola variable. Se trata, por tanto, de derivar composiciones de funciones de varias variables.

La mejor forma de ver cómo se utiliza es mediante un ejemplo.

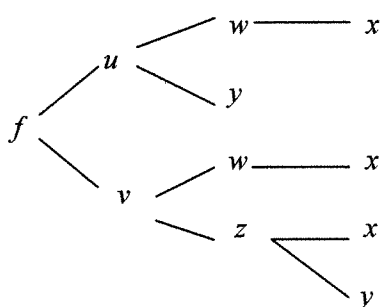
EJEMPLO

Sean las funciones $f(u, v)$, $u(w, y)$, $v(w, z)$, $w(x)$ y $z(x, y)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Aplicarlo al caso particular de $f(u, v) = \ln(u + v)$, $u(w, y) = \sin(wy)$,

$v(w, z) = \cos(wz^2)$, $w(x) = x^2$ y $z(x, y) = e^{x+y}$.

1.- Dibujar el árbol de dependencias:



2.- Hacer la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

3.- Calcular las derivadas que nos indican las fórmulas:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{u+v} ; \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{u+v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial w} = y \cos(wy) ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w \cos(wy) ; \quad \frac{\partial v}{\partial w} = -z^2 \sin(wz^2) ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -2zw \sin(wz^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}$$

4.- Sustituir:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u+v} w \cos(wy) + \frac{1}{u+v} (-2zw \sin(wz^2)) e^{x+y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{u+v} (y \cos(wy)) \cdot 2x + \frac{1}{u+v} (-z^2 \sin(wz^2)) \cdot 2x + \frac{1}{u+v} (-2zw \sin(wz^2)) e^{x+y} \end{aligned}$$

Un último paso consiste en sustituir todas las funciones para dejar el resultado solo en función de las variables x e y

11.9 Campos vectoriales

Llamamos **campo vectorial** a una función del tipo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Un campo vectorial siempre se puede descomponer en m campos escalares de la forma $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, m$.

Por ejemplo el siguiente campo vectorial:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = (x^2 y, x + y, x \sin(xy))$$

se puede descomponer en tres campos escalares que resultan ser funciones de dos variables que ya hemos estudiado en profundidad.

$$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f_1(x, y) = x^2 y \quad (x, y) \rightarrow f_2(x, y) = x + y$$

$$f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f_3(x, y) = x \sin(xy)$$

Un campo vectorial un poco más extraño es aquel que tiene $n = 1$, por ejemplo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \rightarrow f(x) = (x^2, \sqrt{x-3})$$

Las componentes de este tipo de campos vectoriales no son más que funciones de una variable:

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f_1(x) = x^2 \quad x \rightarrow f_2(x) = \sqrt{x-3}$$

Estas funciones las estudiaremos con los conocimientos de la parte III del temario

Continuidad de un campo vectorial

La continuidad de un campo vectorial se estudia a partir de sus componentes:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ es continua en } (x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ es continua en } (x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{para todo } i = \{1, \dots, m\}$$

Diferenciabilidad de un campo vectorial

La diferenciabilidad de un campo vectorial también se estudia a partir de sus componentes:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ es diferenciable en } (x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ es diferenciable en } (x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{para todo } i = \{1, \dots, m\}$$

Importante:

No confundir la matriz Jacobiana de un campo vectorial con la matriz Hessiana de un campo escalar

Fijate bien como están situadas las derivadas parciales. Cada variable se sitúa en una columna y cada componente en una fila. Cada fila es el gradiente de una componente del campo vectorial

Fijate que la matriz Jacobiana no tiene por qué ser siempre cuadrada

Matriz Jacobiana de un campo vectorial

En el caso de que tengamos un campo vectorial de la forma:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

las derivadas parciales respecto a cada una de sus componentes se ordenan en una matriz de orden $m \times n$ que llamaremos **matriz Jacobiana**:

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Algunos de los casos que utilizaremos más frecuentemente son los siguientes:

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y))$

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3))$

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))$

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

TEMA 12: MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN $\mathbb{R}^n$

12.1 Extremos en funciones de dos variables

Las definiciones de máximo y mínimo para funciones de dos variables son análogas a las ya vistas para funciones de una variable. La diferencia estriba en que ahora los extremos estarán sobre una superficie en vez de sobre una curva.

Puntos estacionarios o críticos de una función (candidatos a máximo o mínimo):

- Aquellos puntos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ / $\nabla f(x, y) = (0, 0)$
- Aquellos puntos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ / $f(x, y)$ no es diferenciable.

Una vez obtenidos los candidatos estudiamos su carácter. Existen dos formas:

- Calcular la matriz Hessiana $Hf(x, y)$ y sustituir en ella el candidato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

Si $|Hf(x_0, y_0)| > 0$ y $D_{11}f(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es un mínimo relativo

Si $|Hf(x_0, y_0)| > 0$ y $D_{11}f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es un máximo relativo

Si $|Hf(x_0, y_0)| < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ no es máximo ni mínimo (es un punto de silla).

Si $|Hf(x_0, y_0)| = 0 \Rightarrow$ ¡¡Caso dudoso!!

- Observar el valor de la función $f(x)$ en un entorno del candidato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

Si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, $\forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ es un mínimo relativo

Si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ es un máximo relativo

En el caso dudoso este método no nos dice nada acerca del carácter del candidato.

Esta es realmente la definición de extremo

12.2 Extremos en funciones de n variables

Sea una función de n variables,

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Supongamos que esta función f es de clase C^2 . Es decir $f \in C^2$.

Cuando te dicen que $f \in C^2$ quieren decir que la función f tiene todas sus derivadas parciales primeras y segundas y todas ellas son funciones continuas.

12.2.1 Primer paso: cálculo de los candidatos a ser máximo o mínimo

Lo primero que tenemos que hacer es encontrar los candidatos a ser máximo o mínimo. Estos puntos se llaman **puntos estacionarios** o **puntos críticos** de una función.

$$\text{Un punto } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ es estacionario} \Leftrightarrow \nabla f(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$$

Esto, puesto de forma más sencilla significa que:

$$\text{Un punto } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ es estacionario} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 f(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ D_n f(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Ahora, habrá que resolver un sistema con n ecuaciones y n incógnitas

12.2.2 Segundo paso: Estudio del punto candidato

1. Una vez obtenidos los candidatos estudiamos su carácter. Hay que tener claro que un punto candidato puede ser:

- Un máximo de la función f
- Un mínimo de la función f
- Un punto de silla de la función f (no es máximo ni mínimo)

2. El procedimiento para determinar qué es cada punto candidato empieza calculando la Matriz Hessiana Hf .

3. Una vez calculada la matriz Hessiana sustituimos en ella el candidato $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$Hf(x_1, \dots, x_n)$$

Esta matriz ya sólo tiene números pues hemos sustituido todas las variables por su valor en el punto que estamos estudiando

Para clasificar la matriz
Hessiana ver la
siguiente página

4. Una vez llegados a este punto pueden suceder uno sólo de los siguientes casos:

- Si $Hf(x_1, \dots, x_n)$ es definida positiva $\Rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ es un mínimo relativo
- Si $Hf(x_1, \dots, x_n)$ es definida negativa $\Rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ es un máximo relativo
- Si $Hf(x_1, \dots, x_n)$ es indefinida $\Rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ es un punto de silla (ni máx ni mín)
- Si $Hf(x_1, \dots, x_n)$ es semidefinida positiva o semidefinida negativa $\Rightarrow$ ¡¡Caso dudoso!! No sabemos qué es.

5. En los tres primeros ya hemos averiguado el carácter del punto candidato (máximo, mínimo o punto silla).

En el último caso tendremos que estudiar el carácter del candidato utilizando la definición de máximo y mínimo de una función:

Un punto $(x_{10}, \dots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ es **máximo** de $f \Leftrightarrow f(x_{10}, \dots, x_{n0}) \geq f(x_1, \dots, x_n)$

Un punto $(x_{10}, \dots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ es **mínimo** de $f \Leftrightarrow f(x_{10}, \dots, x_{n0}) \leq f(x_1, \dots, x_n)$

donde $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ son todos los puntos “cercaños” al punto candidato.

La forma de utilizar esta última definición la veremos directamente en los ejemplos.

12.2.3 Clasificación de la matriz Hessiana

Veamos dos métodos que nos van a permitir clasificar una la matriz Hessiana.

Método de los menores principales

Se trata de calcular todos los menores principales de la matriz Hessiana:

$$H_1 = a_{11} \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \dots \quad H_n = |Hf|$$

- Si $H_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es definida positiva
- Si $H_i > 0 \quad i = 1, \dots, n-1, H_n = 0 \Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es semidefinida positiva
- Si $(-1)^i H_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es definida negativa
- Si $(-1)^i H_i > 0 \quad i = 1, \dots, n-1, H_n = 0 \Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es semidefinida negativa
- Si $\exists i < n / H_i = 0 \Rightarrow$ Este método no resuelve (utilizar el de los autovalores).
- Cualquier otro caso $\Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es indefinida

Siempre que aparezca un menor nulo que no sea el último utilizaremos el método de los autovalores

Método de los autovalores

En este caso hay que calcular los autovalores de la matriz Hessiana:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Si $\lambda_i > 0 \quad \forall i \Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es definida positiva
- Si $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es semidefinida positiva
- Si $\lambda_i < 0 \quad \forall i \Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es definida negativa
- Si $\lambda_i \leq 0 \quad \forall i \Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es semidefinida negativa
- Cualquier otro caso $\Rightarrow Hf(x_1, \dots, x_n)$ es indefinida

Para utilizar este método se utiliza el el cálculo de autovalores estudiado en Álgebra

12.3 Cálculo de máximos y mínimos restringidos a un conjunto

Al igual que sucedía en funciones de una variable algunas veces nos pedirán determinar el máximo y el mínimo de una función $f(x, y)$ restringida a un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$. En estos casos añadiremos a la lista de candidatos a máximo o mínimo los puntos frontera del conjunto dado. De esta forma los candidatos serán:

- Aquellos puntos $(x_0, y_0) \in A$ / $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$
- Aquellos puntos $(x_0, y_0) \in A$ / $f(x_0, y_0)$ no es diferenciable.
- Los extremos de f sobre la frontera de $A \subset \mathbb{R}^2$

$\left. \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \end{array} \right\} \text{int } A$
 $\bullet \left\{ \begin{array}{l} \bullet \end{array} \right\} F \subset A$

Los conjuntos frontera tendrán normalmente (aunque no siempre) la siguiente forma $Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$. y pueden ser, por ejemplo, los puntos de una circunferencia o los lados de un cuadrado.

Para calcular los extremos de la función $f(x, y)$ restringida a $g(x, y) = 0$ podemos seguir dos procedimientos.

Primer procedimiento

Despejando y de la restricción obtenemos $y = g(x)$ para después sustituirla en la función quedando $f(x, y) = f(x, g(x))$ que ya es una función de una sola variable.

Segundo procedimiento (Multiplicadores de Lagrange)

Se trata de construir la siguiente función $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

$L(x, y, \lambda)$ es una función de tres variables de la que podemos calcular sus candidatos a extremo. Pues bien, los candidatos a extremo de la función $L(x, y, \lambda)$ coinciden con los de $f(x, y)$ restringida a $g(x, y) = 0$.

Teorema de Weierstrass.

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es compacto y $f(x, y)$ es continua en $A \Rightarrow f(x, y)$ alcanza máximo y mínimo absoluto en A

$\rightarrow$ cerrado
 $\rightarrow$ acotado

□□□

Análogo al de funciones de una variable

Conviene mirarse antes la serie de Taylor en una variable (Tema 9)

TEMA 13: FÓRMULA DE TAYLOR EN $\mathbb{R}^n$

Desarrollo de Taylor de orden uno

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función una vez derivable en un entorno del punto (x_0, y_0) . Entonces, existe un punto ξ en dicho entorno, tal que:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R_2 = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R_2$$

donde el término

$$R_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi)(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi)(y - y_0)^2$$

es el **resto de Lagrange**.

Esta expresión se llama desarrollo de Taylor de orden uno. Cuando el desarrollo se hace en el punto $(0, 0)$, entonces se llama desarrollo de **MacLaurin**.

Desarrollo de Taylor de orden dos

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en un entorno del punto (x_0, y_0) . Entonces, existe un punto ξ en dicho entorno, tal que:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} Hf(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R_3$$

operando la anterior expresión nos queda:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + R_3$$

donde

$$R_3 = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi)(x - x_0)^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi)(x - x_0)^2(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi)(x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi)(y - y_0)^3$$

es el **resto de Lagrange**.

TEMA 14: SUCESIONES DE FUNCIONES

Definiciones

- Llamamos **sucesión de funciones** a $(f_n(x)) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\}$ tal que cada $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Decimos que $(f_n(x))$ **converge puntualmente** hacia $f(x)$ cuando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- Decimos que $(f_n(x))$ **converge uniformemente en A** hacia $f(x)$ cuando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \forall x \in A \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- Convergencia puntual de $f_n(x)$ a $f(x)$ (función límite puntual) en " $\mathbb{R}$ "
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ = función límite puntual
- Convergencia uniforme de $f_n(x)$ a $f(x)$ en A:
 $f_n(x)$ converge a $f(x)$ uniformemente en A $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in A} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \right] = 0$

Propiedades

Esta es una condición necesaria de convergencia uniforme

- Si $(f_n(x))$ converge uniformemente en A hacia $f(x) \Rightarrow (f_n(x))$ converge puntualmente hacia $f(x)$

Forma práctica de utilizar el teorema:

Si $(f_n(x))$ no converge puntualmente en A hacia $f(x) \Rightarrow (f_n(x))$ no converge uniformemente hacia $f(x)$ en A.

- Si $(f_n(x))$ converge uniformemente en A hacia $f(x)$ y todos los términos de la sucesión son funciones continuas $\Rightarrow f(x)$ es continua en A.

Forma práctica de utilizar el teorema:

- $\left. \begin{array}{l} f_n(x) \text{ son continuas en } A \\ f(x) \text{ no es continua en } A \end{array} \right\} \Rightarrow (f_n(x)) \overset{\text{no}}{\text{converge}} \text{ uniformemente en } A \text{ hacia } f(x)$

Esta es una condición necesaria y suficiente de convergencia uniforme

- Si $(f_n(x))$ converge uniformemente en A hacia $f(x)$ si y sólo si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \{ |f_n(x) - f(x)| \} = 0$$

Forma práctica de utilizar el teorema:

Aplicaremos la anterior fórmula en tres pasos,

Paso 1: Obtenemos la expresión de la función $|f_n(x) - f(x)|$ que llamaremos $g(x)$ por comodidad. Es decir: $g(x) = |f_n(x) - f(x)|$.

Paso 2: calcularemos el máximo (o supremo) absoluto de la función $g(x)$ restringida al conjunto A . Para ello utilizaremos todo lo aprendido en el tema 8.

Paso 3: Finalmente se trata de hacer el límite cuando n tiende a infinito del valor del máximo (o supremo) obtenido en el paso anterior.

Importante:
Solo nos interesa la "altura" del máximo de $g(x)$, no el lugar donde se encuentra

- Si $(f_n(x))$ converge uniformemente en A hacia $f(x)$ y todos los términos de la sucesión son funciones integrables $\Rightarrow f(x)$ es integrable A .
- Sin embargo, aunque $(f_n(x))$ converge uniformemente en A hacia $f(x)$ y todos los términos de la sucesión sean funciones derivables esto no implica que $f(x)$ sea derivable A . Para que esto suceda hacen falta más hipótesis que en el caso de la continuidad y la integración.

TEMA 15: SERIES DE FUNCIONES

15.1 Series de funciones generales

En las series de funciones son aplicables todos los conceptos, propiedades y teoremas estudiados en "Series de números" y en "Sucesiones de funciones".

El objetivo principal cuando estudiemos una serie funcional será calcular su **campo de convergencia**, o sea aquellos valores de las x para los cuales la serie numérica resultante converge.

Otro objetivo será obtener la suma de la serie (cuando esto sea posible) dentro de su campo de convergencia. La suma de la serie en este caso es una función (no un número) que llamaremos $f(x)$.

Convergencia uniforme

Se dice que la serie de funciones $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en A hacia una función $f(x)$ si su sucesión de sumas parciales S_n converge uniformemente hacia $f(x)$.

Además de la definición anterior, para estudiar la convergencia uniforme tenemos además el siguiente criterio:

Criterio de Weierstrass

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie de funciones y sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales positivos convergente. Entonces se cumple que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall x \in A \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente en } A$$

Propiedades

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en A hacia $f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente hacia $f(x)$
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en A hacia $f(x)$ y todas las funciones de la serie son continuas $\Rightarrow f(x)$ es continua en A .
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en A hacia $f(x)$ y todas las funciones de la serie son integrables $\Rightarrow f(x)$ es integrable en A .
- Si las funciones $(f_n(x))$ son derivables, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente en A hacia $g(x)$ y existe un $a \in A$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(a)$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en A hacia $f(x)$ y además $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'(x)$.

Importante:
Una serie funcional se convierte en una serie numérica cuando sustituyes las x por un valor concreto

Por tanto para estudiar la convergencia uniforme de una serie de funciones basta con estudiar la convergencia uniforme de una sucesión de funciones (la sucesión de sumas parciales)

Y por tanto también converge puntualmente

Estas propiedades para series funcionales son análogas a las ya vistas para sucesiones funcionales

En todas las propiedades $f(x)$ representa la función suma de la serie

Una serie de potencias
no es más que un
polinomio de grado
infinito!!

x_0 es el centro de la
serie de potencias

Esta es una de las
características más
importantes de las
series de potencias

15.2 Series de potencias

15.2.1 Definición

Una **serie de potencias** es un tipo particular (y muy importante) de serie de funciones. Tienen la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Normalmente el centro suele ser el cero, $x_0 = 0$ así que la serie nos suele aparecer de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

15.2.2 Campo de convergencia

El campo de convergencia de una serie de potencias es siempre simétrico con respecto al centro x_0 de la serie.

Llamaremos **radio de convergencia** R a la distancia entre el centro y cualquiera de los extremos del campo de convergencia.

El radio de convergencia R siempre existe y siempre está entre uno de los tres siguientes casos:

1. $R = 0 \Rightarrow$ La serie de potencias sólo converge en su centro.
2. $R = \infty \Rightarrow$ La serie de potencias converge en toda la recta real.
3. $R \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ La serie de potencias converge en $(x_0 - R, x_0 + R)$, en este caso la serie puede converger también en los extremos del intervalo.

En el caso de las series de potencias bastan el criterio de la raíz y el criterio del cociente para calcular el radio de convergencia de cualquier serie. En concreto, siempre calcularemos el radio de cualquiera de las dos siguientes formas:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} ; R = \frac{1}{\rho}$$

15.2.3 Tipos de convergencia

- La serie de potencias converge absolutamente todo el campo de convergencia.
- La serie de potencias converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado contenido en el campo de convergencia.
- La serie de potencias diverge $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x > x_0 + R$ ó $x < x_0 - R$.
- En los extremos del campo de convergencia, es decir, en $x = x_0 - R$ y en $x = x_0 + R$ no se sabe el carácter de la serie ya que depende de cada caso. Lo que hacemos es sustituir el valor de la x y estudiamos su convergencia como si fuera una serie numérica.

TEMA 16: INTEGRACIÓN EN $\mathbb{R}$

También llamado
"Cálculo de primitivas"

16.1 Integración indefinida

Dada una función f se dice que otra función φ es **primitiva** de f si φ es derivable y es $\varphi' = f$.

La **integral indefinida** de f se define como el conjunto de todas las primitivas de f y se denota por $\int f(x) dx = \varphi(x) + c$

16.1.1 Integración por partes

Se trata de elegir una parte del integrando como u y la parte restante como dv . Después se obtienen du y v y se aplica la siguiente fórmula:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

16.1.2 Fórmulas de reducción

Aplicando reiteradamente la integración por partes, se pueden obtener fórmulas que expresan algunas integrales en función de otras más simplificadas.

16.1.3 Integración de funciones racionales

Ahora vamos a ver cómo calculamos integrales racionales (cociente de dos polinomios)

que son del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. Debemos distinguir dos casos:

Caso I Cuando $\text{grado } P(x) \geq \text{grado } Q(x)$

En este caso dividimos los dos polinomios, y nos da: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, donde

$C(x)$ es el cociente y $r(x)$ el resto. Entonces la integral $\int C(x) dx$ es inmediata.

Veremos cómo resolver la integral $\int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$ en el siguiente apartado.

Caso II Cuando grado $P(x) <$ grado $Q(x)$

En este caso se hallan las raíces del denominador $Q(x)$ y se descompone en fracciones simples, de esta forma, una vez calculados los coeficientes, cada fracción resulta ser una integral inmediata.

Veamos el caso más general: Sea $Q(x)$ un polinomio que tiene una raíz simple $x = a$, una raíz $x = b$ de multiplicidad r , dos raíces complejas conjugadas simples de la forma $x = a \pm bi$ y dos raíces complejas conjugadas de multiplicidad s de la forma $x = c \pm di$ entonces la descomposición en fracciones simples queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \left[\frac{B_1}{(x-b)^r} + \frac{B_2}{(x-b)^{r-1}} + \dots + \frac{B_r}{(x-b)} \right] + \left[\frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2} \right] +$$

$$+ \left[\frac{C_1x+D_1}{[(x-c)^2+d^2]^s} + \frac{C_2x+D_2}{[(x-c)^2+d^2]^{s-1}} + \dots + \frac{C_sx+D_s}{[(x-c)^2+d^2]} \right]$$

Pongamos un ejemplo numérico, supongamos $Q(x)$ un polinomio que tiene $x = 7$ una raíz simple, $x = 5$ una raíz cuádruple (multiplicidad cuatro), $x = 3 \pm 4i$ dos raíces complejas conjugadas simples y $x = 2 \pm i$ dos raíces complejas conjugadas triples. En este caso la descomposición en fracciones simples queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-7} + \left[\frac{B_4}{(x-5)^4} + \frac{B_3}{(x-5)^3} + \frac{B_2}{(x-5)^2} + \frac{B_1}{(x-5)} \right] + \left[\frac{Mx+N}{(x-3)^2+4^2} \right] +$$

$$+ \left[\frac{C_1x+D_1}{[(x-2)^2+1^2]^3} + \frac{C_2x+D_2}{[(x-2)^2+1^2]^2} + \frac{C_3x+D_3}{[(x-2)^2+1^2]} \right]$$

Una vez hecha la descomposición en fracciones simples, las integrales resultantes para las fracciones de raíces reales simples, reales múltiples y complejas simples, son casi inmediatas:

Tipo logarítmico: $\int \frac{A}{x-a} dx = K \ln |x-a| + c$

Tipo potencial: $\int \frac{B}{(x-b)^r} dx = -\frac{K}{(r-1)(x-b)^{r-1}} + c$

Tipo neperiano-arcotangente:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2} dx = \frac{M}{2} \ln[(x-p)^2+q^2] + \frac{Mp+N}{q} \arctg \frac{x-p}{q} + c$$

Para las fracciones resultantes de raíces complejas múltiples no sale una integral inmediata. En este caso (el de raíces complejas múltiples) es preferible utilizar un método alternativo llamado **método de Hermite** que permite simplificar los cálculos. Este método queda fuera de los objetivos del curso.

16.1.4 Integración de funciones trigonométricas

Productos de senos y cosenos

Son las integrales de la forma:

$$\int \sin mx \cos nx \, dx, \int \sin mx \sin nx \, dx, \int \cos mx \cos nx \, dx$$

Se usan las fórmulas:

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos(A - B) + \cos(A + B)$$

$$2 \sin A \cos B = \sin(A - B) + \sin(A + B)$$

Mediante estas fórmulas, se transforma el producto en suma, y se calculan las integrales que resultan que son inmediatas.

Potencias pares e impares de senos y cosenos

Las integrales $\int \sin^n x \, dx$ y $\int \cos^n x \, dx$ se pueden resolver mediante métodos elementales hasta $n = 5$. A partir de $n = 5$ se resuelven mediante fórmulas de reducción.

Funciones racionales de senos y cosenos

Las integrales racionales de senos y cosenos $R(\sin x, \cos x)$ se convierte en una integral racional con alguno de los siguientes cambios de variable:

$$\text{Caso general: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Casos particulares:

$$1) \text{ Si } R \text{ es impar en } \cos x: R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$$

$$\sin x = t \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-t^2}$$

$$2) \text{ Si } R \text{ es impar en } \sin x: R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$$

$$\cos x = t \quad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-t^2}$$

$$3) \text{ Si } R \text{ es par en } \sin x \text{ y } \cos x: R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$$

$$\operatorname{tg} x = t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

16.1.5 Integración de funciones irracionales

1) Integrales del tipo: $\int R(x^{p/q}, x^{r/s}, \dots, x^{u/v}) dx$, con $\frac{p}{q}, \dots, \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$

Se resuelven mediante el cambio de variable $x = t^\mu$ donde $\mu = \text{mcm}(q, s, \dots, v)$.

2) Integrales del tipo:

$$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{u/v}\right) dx, \text{ con } \frac{p}{q}, \dots, \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$$

Se resuelven mediante el cambio de variable $\frac{ax+b}{cx+d} = t^\mu$ donde $\mu = \text{mcm}(q, s, \dots, v)$.

3) Binomias: $\int x^r (a+bx^s)^p dx$ con $r, s, p \in \mathbb{Q}$

Lo primero que se hace es el cambio $t = x^s$ con lo que se reducen a forma simplificada:

$$\int t^q (a+bt)^p dt \text{ con } p, q \in \mathbb{Q}$$

Ahora aparecen tres posibles casos:

1º) Si $p \in \mathbb{Z}$ y $q = h/k \Rightarrow u = t^{1/k}$

2º) Si $q \in \mathbb{Z}$ y $p = h/k \Rightarrow u = (a+bt)^{1/k}$

3º) Si $p+q \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = 1/t$ y se reduce al caso 2º)

4) Irracionales cuadráticos: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

Cambios de variable:

- Si $a > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$$

- Si $c > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$$

- Si $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$

- Si $b = 0$, existen tres subcasos:

$$\int R(x, \sqrt{-ax^2+c}) dx \quad x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \sin t \Rightarrow \sqrt{-ax^2+c} = c \cos t$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2-c}) dx \quad x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \sec t \Rightarrow \sqrt{ax^2-c} = c \tan t$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+c}) dx \quad x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \operatorname{tg} t \Rightarrow \sqrt{ax^2+c} = c \sec t$$

Este es un caso general del anterior

Si no estamos en ninguno de estos tres casos entonces la expresión no es integrable elementalmente

16.2 Integración definida. Integral Riemann

16.2.1 Definición de función integrable Riemann

- Dado un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, llamamos **partición** del intervalo a una sucesión de puntos que cumplen: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ y la notamos como $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Al conjunto de todas las posibles particiones del intervalo $[a, b]$ se le denomina $\mathcal{P}([a, b])$.

- Llamamos **suma superior** de la función f en el intervalo $[a, b]$, al resultado de la suma:

$$s(P) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}), \text{ donde } M_i \text{ es el supremo de } f \text{ en el intervalo } (x_{i-1}, x_i).$$

- Llamamos **suma inferior** de la función f en el intervalo $[a, b]$, al resultado de la suma:

$$s(P) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}), \text{ donde } m_i \text{ es el ínfimo de } f \text{ en el intervalo } (x_{i-1}, x_i).$$

- Llamamos **integral superior** de la función f en el intervalo $[a, b]$, a:

$$\overline{\int_a^b f} = \sup \{s(P) / P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

- Llamamos **integral inferior** de la función f en el intervalo $[a, b]$, a:

$$\underline{\int_a^b f} = \inf \{S(P) / P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

- Si f es una función acotada en el intervalo $[a, b]$, se dice que es **integrable Riemann** si sus integrales inferior y superior coinciden, y en ese caso las representamos por $\int_a^b f$.
- Al conjunto de las funciones integrables Riemann en el intervalo $[a, b]$ lo denotaremos por $\mathcal{R}([a, b])$.

16.2.2 Propiedades de las funciones integrables

A continuación se enumeran algunas propiedades importantes de las funciones integrables:

- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en $[a, b]$ que tiene un número finito de discontinuidades, entonces f es integrable en $[a, b]$.

- Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables en $[a, b]$, entonces $f \pm g$ es integrable en $[a, b]$, y se cumple $\int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$.
- Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables en $[a, b]$, entonces $f \cdot g$ es integrable en $[a, b]$.
- Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es una función integrable en $[a, b]$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces λf es integrable en $[a, b]$, y $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.
- Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables en $[a, b]$, tales que $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ (Monotonía de la integral).
- Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es una función integrable en $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a, b]$, y $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

16.2.3 Teoremas importantes

Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces podemos definir la función $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice lo siguiente:

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una función derivable y su derivada es: $F'(x) = f(x)$.

Regla de Barrow

Si f es una función integrable en $[a, b]$, que admite primitiva F en el mismo intervalo, entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Teorema de la Media

Si f es integrable y continua en $[a, b]$ entonces existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

También se llama Teorema del valor medio del Cálculo Integral

16.2.4 Cálculo práctico de integrales definidas

Interpretación geométrica de la integral Riemman

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$. El valor $A = \int_a^b f(x) dx$ representa el área A bajo la curva $f(x)$ y por encima del eje x entre las abscisas $x = a$ y $x = b$.

A continuación se enumeran los casos más frecuentes en el cálculo de áreas planas, volúmenes y áreas de cuerpos de revolución y longitudes de curvas. Todos ellos se resuelven mediante el uso de la integral Riemann. Cualquier otro caso que pueda aparecer se reduce, normalmente, a alguno de los que aquí se enumeran.

Cálculo de áreas planas

Este caso es generalizable a más intervalos

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. si $f(x) \geq 0$ entre $[a, c]$ y $f(x) \leq 0$ entre $[c, b]$ entonces el área entre la función y el eje x viene dada por:

$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

Fijate que en este caso no hace falta exigir que las funciones sean positivas

- Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) \geq g(x)$ entre $[a, b]$ entonces el área entre ambas curvas en $[a, b]$ viene dada por la siguiente expresión:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Este caso es generalizable a más intervalos

- Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) \geq g(x)$ entre $[a, c]$ y $g(x) \geq f(x)$ entre $[c, b]$ entonces el área entre ambas curvas en $[a, b]$ viene dada por:

$$A = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

- Sea una función expresada en coordenadas polares $\rho = f(\theta)$ entonces el área situada entre esta curva y las rectas que pasan por el origen con pendientes θ_1 y θ_2 viene dada por:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

Los valores t_1 y t_2 se obtienen resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= f(t) \\ b &= g(t) \end{aligned}$$

- Sea la parametrización de la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $\gamma(t) = (x = f(t), y = g(t))$ entonces el área entre la curva y el eje x viene dada por:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} g(t) f'(t) dt$$

FMT2

Apéndices

Binomio de Newton

Funciones trigonométricas

Funciones hiperbólicas

Tabla de derivadas

Tabla de integrales inmediatas

BINOMIO DE NEWTON

La fórmula del binomio de Newton sirve para calcular expresiones del tipo $(a + b)^n$:

$$(a + b)^m = \binom{m}{0} a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \dots + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m$$

También nos podemos encontrar la fórmula expresada mediante un sumatorio:

$$(a + b)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a^{m-i} b^i \quad (a - b)^m = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} a^{m-i} b^i$$

Los números combinatorios se calculan con cualquiera de las dos fórmulas siguientes que son equivalentes:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! n!} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$$

Es conveniente saber algunas propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1 \quad \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = 1 \quad \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

El triángulo de Tartaglia es una regla nemotécnica que nos permite ahorrarnos el cálculo de los números combinatorios ya que para una m dada nos devuelve el número de términos del binomio y todos sus coeficientes:

	1					
$m=2$	1	2	1			
$m=3$	1	3	3	1		
$m=4$	1	4	6	4	1	
$m=5$	1	5	10	10	5	1
...	1	...	...	...	...	1

Las primeras potencias del binomio son:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a-b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^5 &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \end{aligned}$$

Recuerda que:
La definición de
número factorial es

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

¡Ojo!
El triángulo de Tartaglia
solamente nos informa
de los coeficientes de
los términos, no de los
exponentes a los que
van elevados a y b

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

DEFINICION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN TRIANGULO RECTANGULO

El triángulo ABC tiene un ángulo recto (90°) en C y lados de longitud a, b, c . Las funciones trigonométricas del ángulo A se definen de la siguiente manera:

$$5.1 \quad \text{seno de } A = \text{sen } A = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$5.2 \quad \text{coseno de } A = \cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$5.3 \quad \text{tangente de } A = \text{tg } A = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$5.4 \quad \text{cotangente de } A = \text{cotg } A = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$5.5 \quad \text{secante de } A = \sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$5.6 \quad \text{cosecante de } A = \text{cosec } A = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

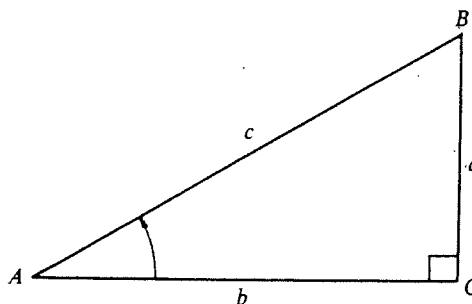


Fig. 5-1

EXTENSION DE LAS FUNCIONES PARA ANGULOS MAYORES DE 90°

Considérese un sistema de coordenadas xy [véanse las Figuras 5-2 y 5-3]. Las coordenadas de un punto P en el plano xy son (x, y) con x positiva sobre OX y negativa sobre OX' , e y positiva sobre OY y negativa sobre OY' . La distancia del punto P al origen O es positiva y se denota por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Un ángulo A formado a partir de OX en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj es considerado *positivo*. Si el ángulo se forma a partir de OX en el mismo sentido de dicho movimiento, entonces se considera *negativo*. Se llaman eje x y eje y a $X'OX$ y a $Y'OY$ respectivamente.

Los diferentes cuadrantes, indicados con los números romanos I, II, III, IV, son llamados, respectivamente, primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes. Por ejemplo, en la Figura 5-2, el ángulo A está en el segundo cuadrante, mientras que en la Figura 5-3 está en el tercero.

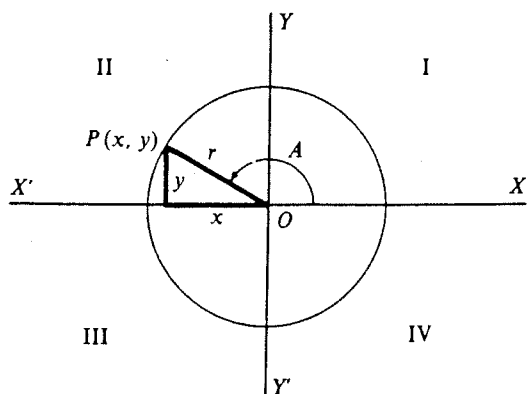


Fig. 5-2

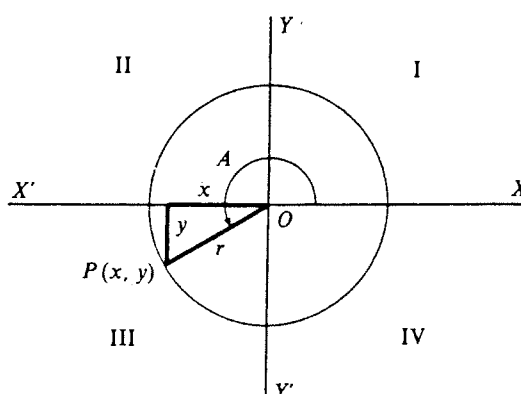


Fig. 5-3

Las funciones trigonométricas de un ángulo A de cualquier cuadrante se definen así:

- 5.7 $\operatorname{sen} A = y/r$
 5.8 $\cos A = x/r$
 5.9 $\operatorname{tg} A = y/x$
 5.10 $\operatorname{cotg} A = x/y$
 5.11 $\sec A = r/x$
 5.12 $\operatorname{cosec} A = r/y$

RELACIONES ENTRE GRADOS Y RADIANES

Un *radián* es aquel ángulo θ subtendido en el centro O de una circunferencia por un arco MN igual al radio r .

Como 2π radianes = 360° , tenemos que,

- 5.13 1 radián = $180^\circ/\pi = 57,29577\ 95130\ 8232\dots^\circ$
 5.14 $1^\circ = \pi/180$ radianes = $0,1745\ 32925\ 19943\ 2957\dots$ radianes.

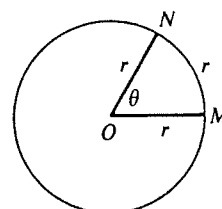


Fig. 5-4

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

- 5.15 $\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$
 5.16 $\operatorname{cotg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$
 5.17 $\sec A = \frac{1}{\cos A}$
 5.18 $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$
 5.19 $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$
 5.20 $\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A = 1$
 5.21 $\operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{cotg}^2 A = 1$

SIGNOS E INTERVALOS DE VARIACION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Cuadrante	$\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{cotg} A$	$\sec A$	$\operatorname{cosec} A$
I	$\begin{matrix} + \\ 0 \text{ a } 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ 1 \text{ a } 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \text{ a } \infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \infty \text{ a } 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ 1 \text{ a } \infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \infty \text{ a } 1 \end{matrix}$
II	$\begin{matrix} + \\ 1 \text{ a } 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ 0 \text{ a } -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ -\infty \text{ a } 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ 0 \text{ a } -\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ -\infty \text{ a } -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ 1 \text{ a } \infty \end{matrix}$
III	$\begin{matrix} - \\ 0 \text{ a } -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ -1 \text{ a } 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \text{ a } \infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \infty \text{ a } 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ -1 \text{ a } -\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ -\infty \text{ a } -1 \end{matrix}$
IV	$\begin{matrix} - \\ -1 \text{ a } 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \text{ a } 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ -\infty \text{ a } 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ 0 \text{ a } -\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ \infty \text{ a } 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ -1 \text{ a } -\infty \end{matrix}$

VALORES EXACTOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ALGUNOS ANGULOS

Angulo A en grados	Angulo A en radianes	sen A	cos A	tg A	cotg A	sec A	cosec A
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	$\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	1
105°	$7\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
120°	$2\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
165°	$11\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
180°	π	0	-1	0	$\mp \infty$	-1	$\pm \infty$
195°	$13\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
210°	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
225°	$5\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$4\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
255°	$17\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
270°	$3\pi/2$	-1	0	$\pm \infty$	0	$\mp \infty$	-1
285°	$19\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$-(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
300°	$5\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
345°	$23\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$-(2 - \sqrt{3})$	$-(2 + \sqrt{3})$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$-(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
360°	2π	0	1	0	$\mp \infty$	1	$\mp \infty$

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En todas las gráficas x está dado en radianes.

5.22 $y = \text{sen } x$

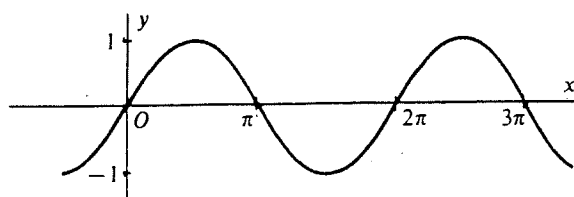


Fig. 5-5

5.23 $y = \cos x$

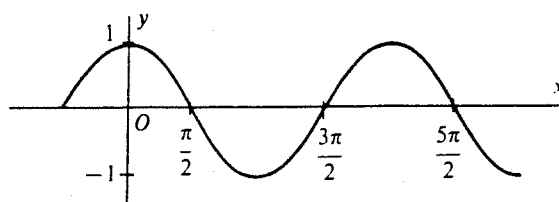


Fig. 5-6

5.24 $y = \text{tg } x$

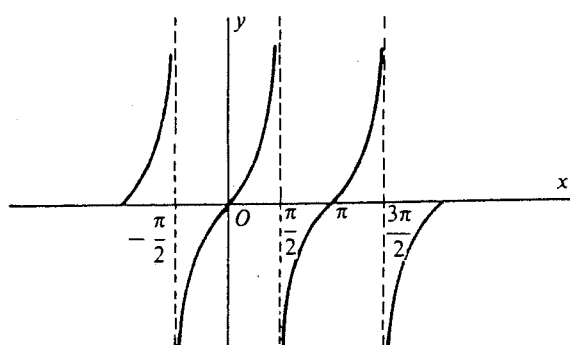


Fig. 5-7

5.25 $y = \text{cotg } x$

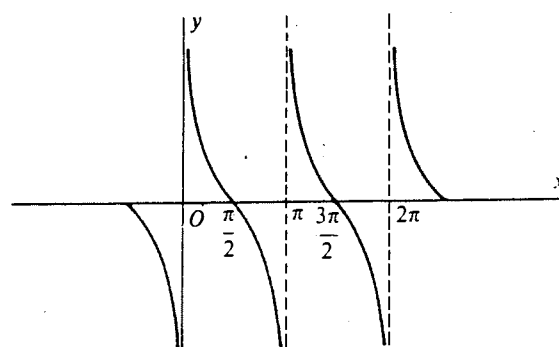


Fig. 5-8

5.26 $y = \sec x = \cos^{-1} x$

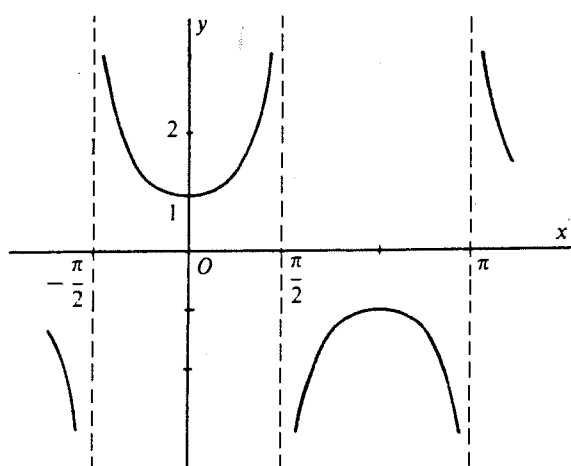


Fig. 5-9

5.27 $y = \text{cosec } x = \text{sen}^{-1} x$

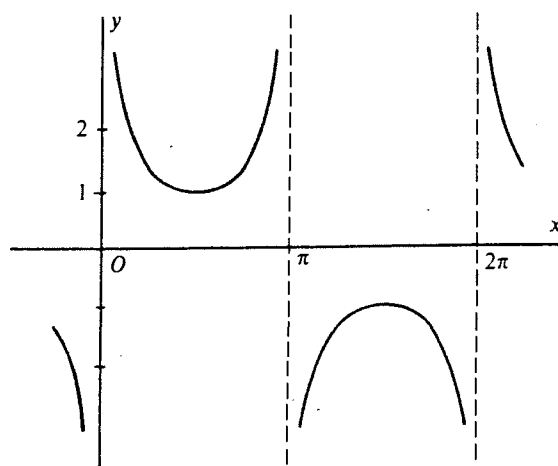


Fig. 5-10

FUNCIONES DE ANGULOS NEGATIVOS

5.28 $\text{sen}(-A) = -\text{sen } A$

5.29 $\cos(-A) = \cos A$

5.30 $\text{tg}(-A) = -\text{tg } A$

5.31 $\text{cosec}(-A) = -\text{cosec } A$

5.32 $\sec(-A) = \sec A$

5.33 $\text{cotg}(-A) = -\text{cotg } A$

FORMULAS DE ADICION

5.34 $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

5.35 $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

5.36 $\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$

5.37 $\operatorname{cotg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \mp 1}{\operatorname{cotg} A \pm \operatorname{cotg} B}$

FUNCIONES DE ANGULOS DE CUALQUIER CUADRANTE REDUCIDOS AL PRIMER CUADRANTE

	$-A$	$90^\circ \pm A$ $\frac{\pi}{2} \pm A$	$180^\circ \pm A$ $\pi \pm A$	$270^\circ \pm A$ $\frac{3\pi}{2} \pm A$	$k(360^\circ) \pm A$ $2k\pi \pm A$ $k = \text{entero}$
sen	$-\sin A$	$\cos A$	$\mp \sin A$	$-\cos A$	$\pm \sin A$
cos	$\cos A$	$\mp \sin A$	$-\cos A$	$\pm \sin A$	$\cos A$
tg	$-\operatorname{tg} A$	$\mp \operatorname{cotg} A$	$\pm \operatorname{tg} A$	$\mp \operatorname{cotg} A$	$\pm \operatorname{tg} A$
cosec	$-\operatorname{cosec} A$	$\sec A$	$\mp \operatorname{cosec} A$	$-\sec A$	$\pm \operatorname{cosec} A$
sec	$\sec A$	$\mp \operatorname{cosec} A$	$-\sec A$	$\pm \operatorname{cosec} A$	$\sec A$
cotg	$-\operatorname{cotg} A$	$\mp \operatorname{tg} A$	$\pm \operatorname{cotg} A$	$\mp \operatorname{tg} A$	$\pm \operatorname{cotg} A$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES DE LOS ANGULOS DEL PRIMER CUADRANTE

	$\sin A = u$	$\cos A = u$	$\operatorname{tg} A = u$	$\operatorname{cotg} A = u$	$\sec A = u$	$\operatorname{cosec} A = u$
sen A	u	$\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	$1/u$
cos A	$\sqrt{1-u^2}$	u	$1/\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}/u$
tg A	$u/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$1/\sqrt{u^2-1}$
cotg A	$\sqrt{1-u^2}/u$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{u^2-1}$
sec A	$1/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	u	$u/\sqrt{u^2-1}$
cosec A	$1/u$	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1+u^2}$

Para los otros cuadrantes, úsense los signos apropiados según se indica en la tabla precedente.

FORMULAS DEL ANGULO DOBLE

5.38

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

5.39

$$\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A = 2 \cos^2 A - 1$$

5.40

$$\operatorname{tg} 2A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$$

FORMULAS DEL ANGULO MITAD

5.41

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad \left[\begin{array}{l} + \text{ si } A/2 \text{ está en el I o II cuadrantes} \\ - \text{ si } A/2 \text{ está en el III o IV cuadrantes} \end{array} \right]$$

5.42

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad \left[\begin{array}{l} + \text{ si } A/2 \text{ está en el I o IV cuadrantes} \\ - \text{ si } A/2 \text{ está en el II o III cuadrantes} \end{array} \right]$$

5.43

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \quad \left[\begin{array}{l} + \text{ si } A/2 \text{ está en el I o III cuadrantes} \\ - \text{ si } A/2 \text{ está en el II o IV cuadrantes} \end{array} \right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} = \operatorname{cosec} A - \operatorname{cotg} A$$

FORMULAS DEL ANGULO MULTIPLO

5.44

$$\operatorname{sen} 3A = 3 \operatorname{sen} A - 4 \operatorname{sen}^3 A$$

5.45

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

5.46

$$\operatorname{tg} 3A = \frac{3 \operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 A}$$

5.47

$$\operatorname{sen} 4A = 4 \operatorname{sen} A \cos A - 8 \operatorname{sen}^3 A \cos A$$

5.48

$$\cos 4A = 8 \cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1$$

5.49

$$\operatorname{tg} 4A = \frac{4 \operatorname{tg} A - 4 \operatorname{tg}^3 A}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^4 A}$$

5.50

$$\operatorname{sen} 5A = 5 \operatorname{sen} A - 20 \operatorname{sen}^3 A + 16 \operatorname{sen}^5 A$$

5.51

$$\cos 5A = 16 \cos^5 A - 20 \cos^3 A + 5 \cos A$$

5.52

$$\operatorname{tg} 5A = \frac{\operatorname{tg}^5 A - 10 \operatorname{tg}^3 A + 5 \operatorname{tg} A}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 A + 5 \operatorname{tg}^4 A}$$

Véanse también las fórmulas 5.68 y 5.69.

POTENCIAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

$$5.53 \quad \sin^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A$$

$$5.57 \quad \sin^4 A = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2A + \frac{1}{8} \cos 4A$$

$$5.54 \quad \cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2A$$

$$5.58 \quad \cos^4 A = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2A + \frac{1}{8} \cos 4A$$

$$5.55 \quad \sin^3 A = \frac{3}{4} \sin A - \frac{1}{4} \sin 3A$$

$$5.59 \quad \sin^5 A = \frac{5}{8} \sin A - \frac{5}{16} \sin 3A + \frac{1}{16} \sin 5A$$

$$5.56 \quad \cos^3 A = \frac{3}{4} \cos A + \frac{1}{4} \cos 3A$$

$$5.60 \quad \cos^5 A = \frac{5}{8} \cos A + \frac{5}{16} \cos 3A + \frac{1}{16} \cos 5A$$

Véanse también las fórmulas 5.70 y 5.73.

SUMA, DIFERENCIA Y PRODUCTO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

$$5.61 \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$5.62 \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

$$5.63 \quad \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$5.64 \quad \cos A - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(B-A)$$

$$5.65 \quad \sin A \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos (A-B) - \cos (A+B) \}$$

$$5.66 \quad \cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos (A-B) + \cos (A+B) \}$$

$$5.67 \quad \sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin (A-B) + \sin (A+B) \}$$

FORMULAS GENERALES

$$5.68 \quad \sin nA = \sin A \left\{ (2 \cos A)^{n-1} - \binom{n-2}{1} (2 \cos A)^{n-3} + \binom{n-3}{2} (2 \cos A)^{n-5} - \dots \right\}$$

$$5.69 \quad \cos nA = \frac{1}{2} \left\{ (2 \cos A)^n - \frac{n}{1} (2 \cos A)^{n-2} + \frac{n}{2} \binom{n-3}{1} (2 \cos A)^{n-4} - \frac{n}{3} \binom{n-4}{2} (2 \cos A)^{n-6} + \dots \right\}$$

$$5.70 \quad \sin^{2n-1} A = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \left\{ \sin (2n-1)A - \binom{2n-1}{1} \sin (2n-3)A + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{n-1} \sin A \right\}$$

$$5.71 \quad \cos^{2n-1} A = \frac{1}{2^{2n-2}} \left\{ \cos (2n-1)A + \binom{2n-1}{1} \cos (2n-3)A + \dots + \binom{2n-1}{n-1} \cos A \right\}$$

$$5.72 \quad \sin^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2nA - \binom{2n}{1} \cos (2n-2)A + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} \cos 2A \right\}$$

$$5.73 \quad \cos^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2nA + \binom{2n}{1} \cos (2n-2)A + \dots + \binom{2n}{n-1} \cos 2A \right\}$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Si $x = \sin y$, entonces $y = \arcsin x = \sin^{-1} x$, es decir, *el ángulo cuyo seno es x o el seno inverso de x* es una función multiforme de x que puede considerarse como un conjunto de funciones uniformes llamadas *ramas*. Las demás funciones trigonométricas inversas también son multiformes.

A veces conviene seleccionar una determinada rama para algún propósito específico. Tal rama se denomina *rama principal* y sus valores se llaman *valores principales*. Así, al teclear en una calculadora $\arcsin 0,5$, aparecerá como respuesta 60° (o 1,0472 radianes), uno de los infinitos ángulos cuyo seno es 0,5.

VALORES PRINCIPALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Valores principales para $x \geq 0$	Valores principales para $x < 0$
$0 \leq \sin^{-1} x \leq \pi/2$	$-\pi/2 \leq \sin^{-1} x < 0$
$0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$	$\pi/2 < \cos^{-1} x \leq \pi$
$0 \leq \operatorname{tg}^{-1} x < \pi/2$	$-\pi/2 < \operatorname{tg}^{-1} x < 0$
$0 < \operatorname{cotg}^{-1} x \leq \pi/2$	$\pi/2 < \operatorname{cotg}^{-1} x < \pi$
$0 \leq \sec^{-1} x < \pi/2$	$\pi/2 < \sec^{-1} x \leq \pi$
$0 < \operatorname{cosec}^{-1} x \leq \pi/2$	$-\pi/2 \leq \operatorname{cosec}^{-1} x < 0$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

En todos los casos se da por entendido que se trata de valores principales.

$$5.74 \quad \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$$

$$5.80 \quad \sin^{-1} (-x) = -\sin^{-1} x$$

$$5.75 \quad \operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{cotg}^{-1} x = \pi/2$$

$$5.81 \quad \cos^{-1} (-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

$$5.76 \quad \sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \pi/2$$

$$5.82 \quad \operatorname{tg}^{-1} (-x) = -\operatorname{tg}^{-1} x$$

$$5.77 \quad \operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1} (1/x)$$

$$5.83 \quad \operatorname{cotg}^{-1} (-x) = \pi - \operatorname{cotg}^{-1} x$$

$$5.78 \quad \sec^{-1} x = \cos^{-1} (1/x)$$

$$5.84 \quad \sec^{-1} (-x) = \pi - \sec^{-1} x$$

$$5.79 \quad \operatorname{cotg}^{-1} x = \operatorname{tg}^{-1} (1/x)$$

$$5.85 \quad \operatorname{cosec}^{-1} (-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$$

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

En todas las gráficas y está dado en radianes. La parte continua de las curvas corresponde a los valores principales.

5.86 $y = \sin^{-1} x$

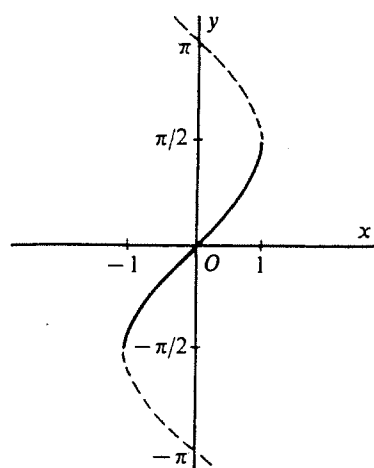


Fig. 5-11

5.87 $y = \cos^{-1} x$

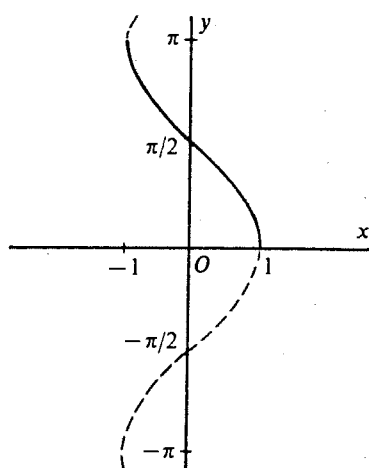


Fig. 5-12

5.88 $y = \tan^{-1} x$

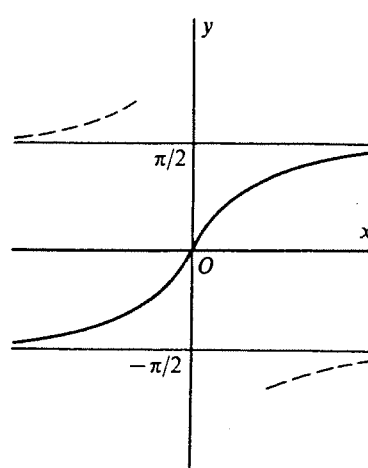


Fig. 5-13

5.89 $y = \cot^{-1} x$

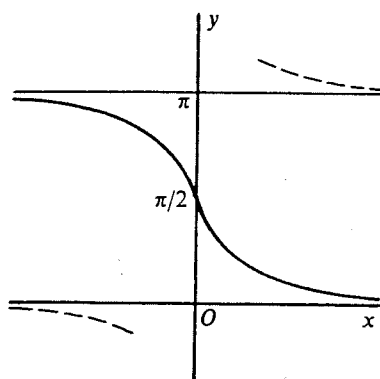


Fig. 5-14

5.90 $y = \sec^{-1} x$

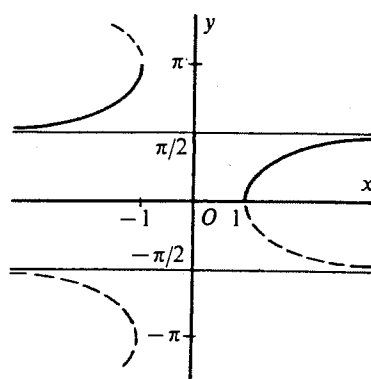


Fig. 5-15

5.91 $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

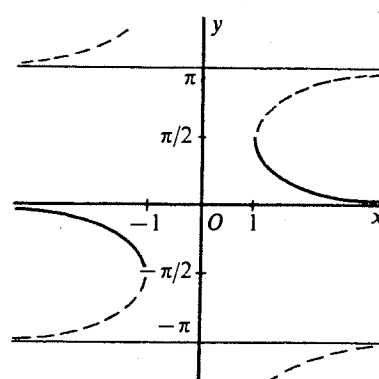


Fig. 5-16

RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y ANGULOS DE UN TRIANGULO PLANO

Las leyes siguientes son válidas para cualquier triángulo plano ABC de lados a, b, c y de ángulos A, B, C .

5.92 Ley de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

5.93 Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar.

5.94 Ley de las tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$$

Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar.

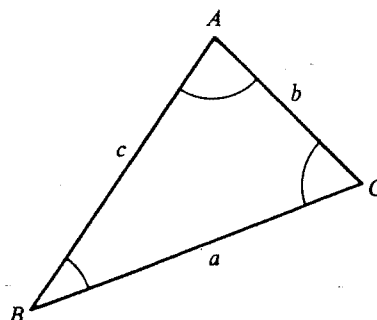


Fig. 5-17

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

15.1	<i>Seno hiperbólico de x</i>	$= \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
15.2	<i>Coseno hiperbólico de x</i>	$= \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
15.3	<i>Tangente hiperbólica de x</i>	$= \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
15.4	<i>Cotangente hiperbólica de x</i>	$= \operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
15.5	<i>Secante hiperbólica de x</i>	$= \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$
15.6	<i>Cosecante hiperbólica de x</i>	$= \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

15.7	$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
15.8	$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$
15.9	$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$
15.10	$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$
15.11	$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
15.12	$\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1$
15.13	$\operatorname{coth}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1$

FUNCIONES DE ARGUMENTOS NEGATIVOS

15.14	$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$	15.16	$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$	15.18	$\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$
15.15	$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$	15.17	$\operatorname{cosech}(-x) = -\operatorname{cosech} x$	15.19	$\operatorname{coth}(-x) = -\operatorname{coth} x$

FÓRMULAS DE ADICIÓN

$$15.20 \quad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$15.21 \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$15.22 \quad \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

$$15.23 \quad \operatorname{coth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{coth} x \operatorname{coth} y \pm 1}{\operatorname{coth} y \pm \operatorname{coth} x}$$

FÓRMULAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$15.24 \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

$$15.25 \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$$

$$15.26 \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

FÓRMULAS DEL ÁNGULO MITAD

$$15.27 \quad \operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}} \quad [+ \text{ si } x > 0, \quad - \text{ si } x < 0]$$

$$15.28 \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$$

$$15.29 \quad \operatorname{th} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} \quad [+ \text{ si } x > 0, \quad - \text{ si } x < 0]$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$$

FÓRMULAS DEL ÁNGULO MÚLTIPLO

$$15.30 \quad \operatorname{sh} 3x = 3 \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{sh}^3 x$$

$$15.31 \quad \operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x$$

$$15.32 \quad \operatorname{th} 3x = \frac{3 \operatorname{th} x + \operatorname{th}^3 x}{1 + 3 \operatorname{th}^2 x}$$

$$15.33 \quad \operatorname{sh} 4x = 8 \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x + 4 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

$$15.34 \quad \operatorname{ch} 4x = 8 \operatorname{ch}^4 x - 8 \operatorname{ch}^2 x + 1$$

$$15.35 \quad \operatorname{th} 4x = \frac{4 \operatorname{th} x + 4 \operatorname{th}^3 x}{1 + 6 \operatorname{th}^2 x + \operatorname{th}^4 x}$$

POTENCIAS DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

- 15.36 $\text{sh}^2 x = \frac{1}{2} \text{ch } 2x - \frac{1}{2}$
- 15.37 $\text{ch}^2 x = \frac{1}{2} \text{ch } 2x + \frac{1}{2}$
- 15.38 $\text{sh}^3 x = \frac{1}{4} \text{sh } 3x - \frac{3}{4} \text{sh } x$
- 15.39 $\text{ch}^3 x = \frac{1}{4} \text{ch } 3x + \frac{3}{4} \text{ch } x$
- 15.40 $\text{sh}^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \text{ch } 2x + \frac{1}{8} \text{ch } 4x$
- 15.41 $\text{ch}^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \text{ch } 2x + \frac{1}{8} \text{ch } 4x$

SUMA, RESTA Y PRODUCTO DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

- 15.42 $\text{sh } x + \text{sh } y = 2 \text{sh } \frac{1}{2}(x + y) \text{ch } \frac{1}{2}(x - y)$
- 15.43 $\text{sh } x - \text{sh } y = 2 \text{ch } \frac{1}{2}(x + y) \text{sh } \frac{1}{2}(x - y)$
- 15.44 $\text{ch } x + \text{ch } y = 2 \text{ch } \frac{1}{2}(x + y) \text{ch } \frac{1}{2}(x - y)$
- 15.45 $\text{ch } x - \text{ch } y = 2 \text{sh } \frac{1}{2}(x + y) \text{sh } \frac{1}{2}(x - y)$
- 15.46 $\text{sh } x \text{sh } y = \frac{1}{2} \{ \text{ch } (x + y) - \text{ch } (x - y) \}$
- 15.47 $\text{ch } x \text{ch } y = \frac{1}{2} \{ \text{ch } (x + y) + \text{ch } (x - y) \}$
- 15.48 $\text{sh } x \text{ch } y = \frac{1}{2} \{ \text{sh } (x + y) + \text{sh } (x - y) \}$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS EXPRESADAS EN TÉRMINOS DE LAS OTRAS

Vamos a suponer que $x > 0$. Si $x < 0$, úsease el signo apropiado según lo indican las Fórmulas 15.14 a 15.19.

	$\text{sh } x = u$	$\text{ch } x = u$	$\text{th } x = u$	$\text{coth } x = u$	$\text{sech } x = u$	$\text{cosech } x = u$
$\text{sh } x$	u	$\sqrt{u^2 - 1}$	$u/\sqrt{1 - u^2}$	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$\sqrt{1 - u^2}/u$	$1/u$
$\text{ch } x$	$\sqrt{1 + u^2}$	u	$1/\sqrt{1 - u^2}$	$u/\sqrt{u^2 - 1}$	$1/u$	$\sqrt{1 + u^2}/u$
$\text{th } x$	$u/\sqrt{1 + u^2}$	$\sqrt{u^2 - 1}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{1 - u^2}$	$1/\sqrt{1 + u^2}$
$\text{coth } x$	$\sqrt{u^2 + 1}/u$	$u/\sqrt{u^2 - 1}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{1 - u^2}$	$\sqrt{1 + u^2}$
$\text{sech } x$	$1/\sqrt{1 + u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1 - u^2}$	$\sqrt{u^2 - 1}/u$	u	$u/\sqrt{1 + u^2}$
$\text{cosech } x$	$1/u$	$1/\sqrt{u^2 - 1}$	$\sqrt{1 - u^2}/u$	$\sqrt{u^2 - 1}$	$u/\sqrt{1 - u^2}$	u

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

15.49 $y = \operatorname{sh} x$

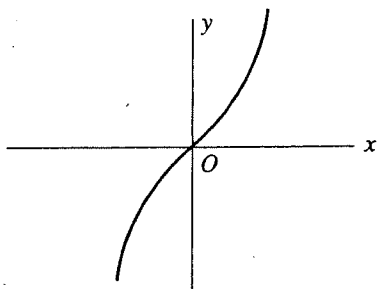


Figura 15.1

15.50 $y = \operatorname{ch} x$

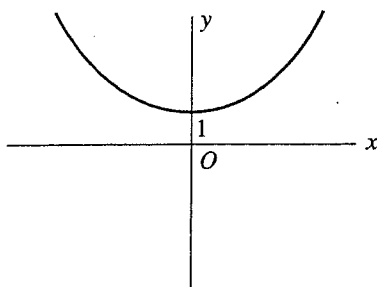


Figura 15.2

15.51 $y = \operatorname{th} x$

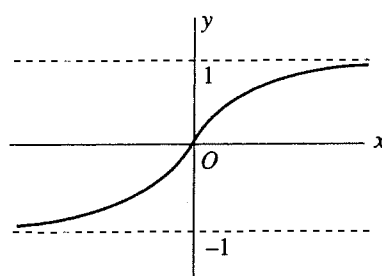


Figura 15.3

15.52 $y = \operatorname{coth} x$

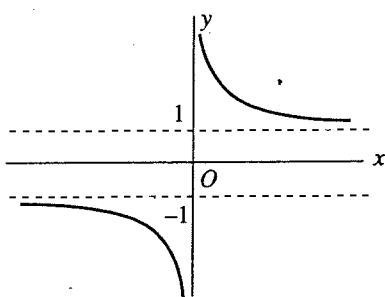


Figura 15.4

15.53 $y = \operatorname{sech} x$

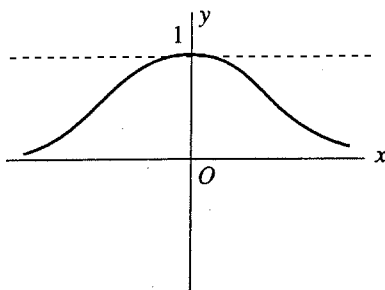


Figura 15.5

15.54 $y = \operatorname{cosech} x$

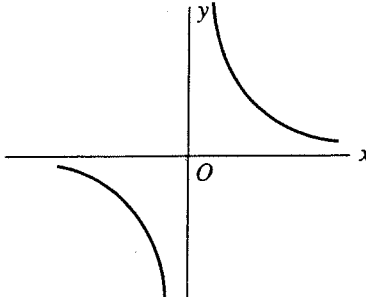


Figura 15.6

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Si $x = \operatorname{sh} y$, entonces $y = \operatorname{sh}^{-1} x$ es llamado el *seno hiperbólico inverso* de x . De manera similar se definen las demás funciones hiperbólicas inversas. Las funciones hiperbólicas inversas son multiformes, y al igual que en el caso de las funciones trigonométricas inversas [véase la página 57], nos limitaremos a los valores principales para los cuales pueden considerarse uniformes.

La lista siguiente cita los valores principales [a no ser que se indique lo contrario] de las funciones hiperbólicas inversas expresados por medio de funciones logarítmicas en el dominio en que son reales.

15.55 $\operatorname{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $-\infty < x < \infty$

15.56 $\operatorname{ch}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $x \geq 1$ [$\operatorname{ch}^{-1} x > 0$ es valor principal]

15.57 $\operatorname{th}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $-1 < x < 1$

15.58 $\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $x > 1$ o $x < -1$

15.59 $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$ $0 < x \leq 1$ [$\operatorname{sech}^{-1} x > 0$ es valor principal]

15.60 $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)$ $x \neq 0$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

- 15.61 $\operatorname{cosech}^{-1} x = \operatorname{sh}^{-1}(1/x)$
- 15.62 $\operatorname{sech}^{-1} x = \operatorname{ch}^{-1}(1/x)$
- 15.63 $\operatorname{coth}^{-1} x = \operatorname{th}^{-1}(1/x)$
- 15.64 $\operatorname{sh}^{-1}(-x) = -\operatorname{sh}^{-1} x$
- 15.65 $\operatorname{th}^{-1}(-x) = -\operatorname{th}^{-1} x$
- 15.66 $\operatorname{coth}^{-1}(-x) = -\operatorname{coth}^{-1} x$
- 15.67 $\operatorname{cosech}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosech}^{-1} x$

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

15.68 $y = \operatorname{sh}^{-1} x$

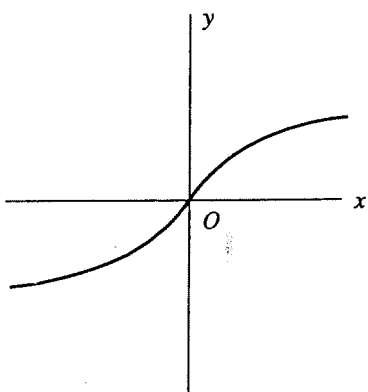


Figura 15.7

15.69 $y = \operatorname{ch}^{-1} x$

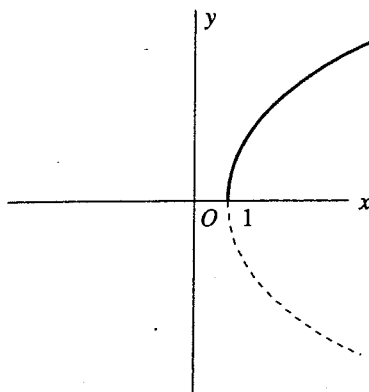


Figura 15.8

15.70 $y = \operatorname{th}^{-1} x$

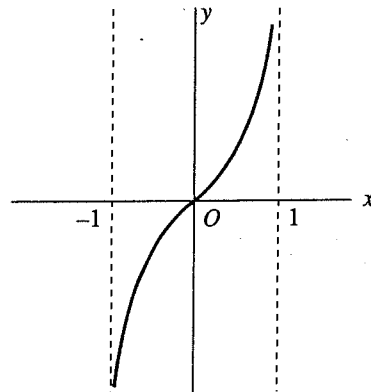


Figura 15.9

15.71 $y = \operatorname{coth}^{-1} x$

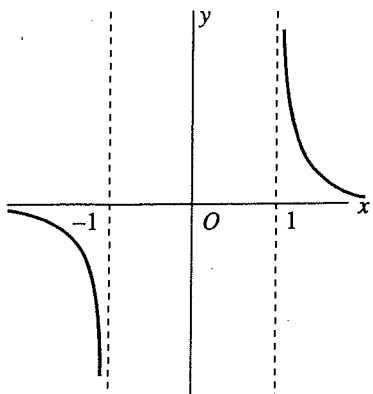


Figura 15.10

15.72 $y = \operatorname{sech}^{-1} x$

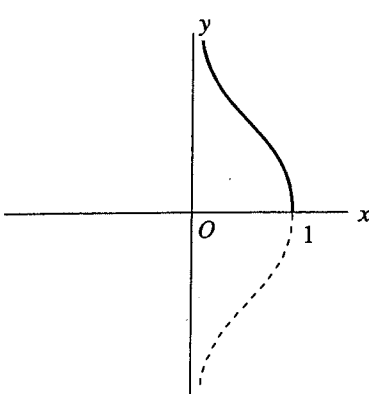


Figura 15.11

15.73 $y = \operatorname{cosech}^{-1} x$

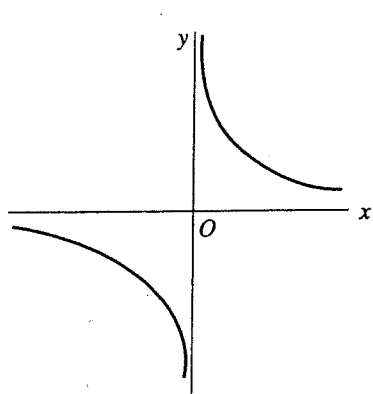


Figura 15.12

RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y LAS TRIGONOMÉTRICAS

15.74 $\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{sh} x$

15.78 $\sec(ix) = \operatorname{sech} x$

15.82 $\operatorname{th}(ix) = i \operatorname{tg} x$

15.75 $\cos(ix) = \operatorname{ch} x$

15.79 $\cotg(ix) = -i \operatorname{coth} x$

15.83 $\operatorname{cosech}(ix) = -i \operatorname{cosec} x$

15.76 $\operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{th} x$

15.80 $\operatorname{sh}(ix) = i \operatorname{sen} x$

15.84 $\operatorname{sech}(ix) = \sec x$

15.77 $\operatorname{cosec}(ix) = -i \operatorname{cosech} x$

15.81 $\operatorname{ch}(ix) = \cos x$

15.85 $\operatorname{coth}(ix) = -i \cotg x$

PERIODICIDAD DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

En las fórmulas que siguen, k es cualquier entero.

15.86 $\operatorname{sh}(x + 2k\pi i) = \operatorname{sh} x$

15.88 $\operatorname{th}(x + k\pi i) = \operatorname{th} x$

15.90 $\operatorname{sech}(x + 2k\pi i) = \operatorname{sech} x$

15.87 $\operatorname{ch}(x + 2k\pi i) = \operatorname{ch} x$

15.89 $\operatorname{cosech}(x + 2k\pi i) = \operatorname{cosech} x$

15.91 $\operatorname{coth}(x + k\pi i) = \operatorname{coth} x$

RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS Y LAS TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

15.92 $\operatorname{sen}^{-1}(ix) = i \operatorname{sh}^{-1} x$

15.98 $\cotg^{-1}(ix) = -i \operatorname{coth}^{-1} x$

15.93 $\operatorname{sh}^{-1}(ix) = i \operatorname{sen}^{-1} x$

15.99 $\operatorname{coth}^{-1}(ix) = -i \cotg^{-1} x$

15.94 $\cos^{-1} x = \pm i \operatorname{ch}^{-1} x$

15.100 $\sec^{-1} x = \pm i \operatorname{sech}^{-1} x$

15.95 $\operatorname{ch}^{-1} x = \pm i \cos^{-1} x$

15.101 $\operatorname{sech}^{-1} x = \pm i \sec^{-1} x$

15.96 $\operatorname{tg}^{-1}(ix) = i \operatorname{th}^{-1} x$

15.102 $\operatorname{cosec}^{-1}(ix) = -i \operatorname{cosech}^{-1} x$

15.97 $\operatorname{th}^{-1}(ix) = i \operatorname{tg}^{-1} x$

15.103 $\operatorname{cosech}^{-1}(ix) = -i \operatorname{cosec}^{-1} x$

TABLA DE DERIVADAS

$$(f^a)' = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$$

$$(\arcsen f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$$

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$(\arccos f)' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$(\arctg f)' = \frac{f'}{1+f^2}$$

$$(\log_a f)' = \frac{f'}{f} \cdot \log_a e$$

$$(\operatorname{sh} f)' = f' \cdot \operatorname{ch} f$$

$$(e^f)' = e^f \cdot f'$$

$$(\operatorname{ch} f)' = f' \cdot \operatorname{sh} f$$

$$(a^f)' = a^f \cdot \ln a \cdot f'$$

$$(\operatorname{th} f)' = f' \cdot \operatorname{sech}^2 f$$

$$(f^g)' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot \ln f \cdot g'$$

$$(\operatorname{coth} f)' = -f' \cdot \operatorname{cosech}^2 f$$

$$(\operatorname{sen} f)' = f' \cdot \cos f$$

$$(\operatorname{sech} f)' = -f' \cdot \operatorname{sech} f \cdot \operatorname{th} f$$

$$(\cos f)' = -f' \cdot \operatorname{sen} f$$

$$(\operatorname{cosech} f)' = -f' \cdot \operatorname{cosech} f \cdot \operatorname{coth} f$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} f)' &= (1 + \operatorname{tg}^2 f) \cdot f' = \\ &= \sec^2 f \cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f} \end{aligned}$$

$$(\operatorname{argsh} f)' = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{cotg} f)' &= (-1 - \operatorname{cotg}^2 f) \cdot f' = \\ &= -f' \cdot \operatorname{cosec}^2 f = \frac{-f'}{\operatorname{sen}^2 f} \end{aligned}$$

$$(\operatorname{argch} f)' = \frac{\pm f'}{\sqrt{f^2 - 1}}$$

$$(\sec f)' = f' \cdot \sec f \cdot \operatorname{tg} f$$

$$(\operatorname{argth} f)' = \frac{f'}{1 - f^2}$$

$$(\operatorname{cosec} f)' = -f' \cdot \operatorname{cosec} f \cdot \operatorname{cotg} f$$

$$(\operatorname{argcoth} f)' = \frac{f'}{1 - f^2}$$

$$(\operatorname{argsech} f)' = \frac{\mp f'}{f \sqrt{1 - f^2}}$$

$$(\operatorname{argcosech} f)' = \frac{\mp f'}{f \sqrt{1 + f^2}}$$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int f^a \cdot f' dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \text{Ln} |f|$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f$$

$$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\text{Ln } a}$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \text{sen } f$$

$$\int \text{sen } f \cdot f' dx = -\cos f$$

$$\int \sec^2 f \cdot f' dx = \text{tg } f$$

$$\int (1 + \text{tg}^2 f) \cdot f' dx = \text{tg } f$$

$$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \text{tg } f$$

$$\int \text{cosec}^2 f \cdot f' dx = -\cotg f$$

$$\int (1 + \cotg^2 f) \cdot f' dx = -\cotg f$$

$$\int \frac{f'}{\text{sen}^2 f} dx = -\cotg f$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsen f$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arcsen \frac{f}{a}$$

$$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \text{arctg } f$$

$$\int \frac{f'}{a^2+f^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg } \frac{f}{a}$$

$$\int \text{sh } f \cdot f' dx = \text{ch } f$$

$$\int \text{ch } f \cdot f' dx = \text{sh } f$$

$$\int \text{th } f \cdot f' dx = \ln(\text{ch } f)$$

$$\int \text{sech } f \cdot f' dx = \text{argsh}(\text{th } f)$$

$$\int \text{cosech } f \cdot f' dx = \ln\left(\text{th } \frac{f}{2}\right)$$

$$\int \text{sech}^2 f \cdot f' dx = \text{th } f$$

$$\int \text{cosech } f \cdot f' dx = -\coth f$$

$$\int \text{th}^2 f \cdot f' dx = f - \text{th } f$$

$$\int \frac{f'}{f^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{f-a}{f+a}\right)$$

$$\int \frac{f'}{a^2-f^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+f}{a-f}\right)$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arcsen\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2+f^2}} dx = \ln\left(f + \sqrt{f^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f^2-a^2}} dx = \ln\left(f + \sqrt{f^2-a^2}\right)$$

$$\int \frac{f'}{f \sqrt{f^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \text{arcsec} \left| \frac{f}{a} \right|$$

$$\int \frac{f'}{f \sqrt{a^2+f^2}} dx = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{f^2+a^2}}{f}\right)$$

$$\int \frac{f'}{f \sqrt{a^2-f^2}} dx = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2-f^2}}{f}\right)$$

FMT2

Ejercicios de clase

TEMA 2: NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

$$a) \quad |z| = \left| \frac{(3+5i)(-2+i)}{(2+i)(10-6i)} \right|$$

$$b) \quad w = \frac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}}$$

a)

Primero simplificamos la expresión del numerador y del denominador:

$$z = \frac{(3+5i)(-2+i)}{(2+i)(10-6i)} = \frac{-6+3i-10i+5i^2}{20-12i+10i-6i^2} = \frac{-6-7i-5}{20-2i+6} = \frac{-11-7i}{26-2i}$$

Ahora dividimos ambos complejos. Como están en forma binómica para dividir multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(-11-7i)(26+2i)}{(26-2i)(26+2i)} = \frac{-286-22i-182i-14i^2}{676+52i-52i-4i^2} = \frac{-286-204i+14}{676+4} = \\ &= \frac{-272-204i}{680} = -\frac{272}{680} - \frac{204}{680}i = -0,4-0,3i \end{aligned}$$

y ahora sólo falta calcular el módulo del complejo z :

$$|z| = \sqrt{(-0,4)^2 + (-0,3)^2} = \sqrt{0,16+0,09} = \sqrt{0,25} = 0,5$$

Solución : $|z| = 0,5$

b)

La única forma de realizar los cálculos del enunciado es pasar los números complejos a forma polar:

$$w_1 = 1+i \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \text{atan}(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{cases} \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

$$w_2 = i \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \theta = \text{atan}(1/0) = \pi/2 \quad (90^\circ) \end{cases} \Rightarrow w_2 = 1_{\pi/2}$$

De esta forma la expresión queda:

$$\begin{aligned} w &= \frac{w_1}{w_2} = \frac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}} = \frac{(\sqrt{2}_{\pi/4})^{100}}{1_0 + (1_{\pi/2})^{100}} = \frac{(\sqrt{2})^{100}_{100 \cdot \pi/4}}{1_0 + (1^{100})_{100 \cdot \pi/2}} = \frac{(2^{50})_{25\pi}}{1_0 + 1_{50\pi}} = \\ &= \frac{(2^{50})_{\pi}}{1_0 + 1_0} = \frac{-2^{50}}{1+1} = -\frac{2^{50}}{2} = -2^{49} \end{aligned}$$

Solución : $w = -2^{49}$

Utilizamos la fórmula de De Moivre:

$$(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$$

Importante: hemos tenido en cuenta que

$$25\pi = \pi$$

$$50\pi = 0$$

Ejercicio 2

Calcular las siguiente expresión: $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$

Lo primero que vamos a hacer es pasar los cuatro números complejos a forma polar:

$$z = \sqrt{3} - i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2 \\ \theta = \text{atan}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6 = 11\pi/6 \quad (-30^\circ = 330^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow z = 2_{11\pi/6}$$

$$z = \sqrt{3} + i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2 \\ \theta = \text{atan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \quad (30^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow z = 2_{\pi/6}$$

$$z = 1 + i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \text{atan}(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

$$z = 1 - i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \text{atan}(-1/1) = -\pi/4 = 7\pi/4 \quad (-45^\circ = 315^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{7\pi/4}$$

Ahora utilizamos la fórmula para dividir números complejos en forma polar que es:

Recuerda:

$$\frac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\theta'}$$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}} = \left(\frac{2}{2}\right)_{11\pi/6-\pi/6} = 1_{10\pi/6} = 1_{5\pi/3} = 1_{300^\circ}$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)_{\pi/4-7\pi/4} = 1_{-6\pi/4} = 1_{2\pi/4} = 1_{\pi/2} = 1_{90^\circ}$$

ahora utilizamos la fórmula de De Moivre para calcular las potencias:

Recuerda, la Fórmula de De Moivre es:

$$(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 = \left(\frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}}\right)^4 = (1_{5\pi/3})^4 = (1^4)_{4 \cdot 5\pi/3} = 1_{20\pi/3} = 1_{2\pi/3} = 1_{120^\circ}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}}\right)^5 = (1_{\pi/2})^5 = (1^5)_{5 \cdot \pi/2} = 1_{5\pi/2} = 1_{\pi/2} = 1_{90^\circ}$$

de forma que sustituyendo todo nos queda:

Recuerda:

$$\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} = (\rho \cdot \rho')_{\theta+\theta'}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 &= \left(\frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}}\right)^5 = (1_{5\pi/3})^4 \cdot (1_{\pi/2})^5 = 1_{2\pi/3} \cdot 1_{\pi/2} = \\ &= (1 \cdot 1)_{\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}} = 1_{\frac{4\pi+3\pi}{6}} = 1_{\frac{7\pi}{6}} = 1_{210^\circ} \end{aligned}$$

Por último, si queremos, podemos pasar el resultado a forma cartesiana:

$$z = 1_{210^\circ} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \rho \cos \theta = 1 \cdot \cos 210^\circ = -\sqrt{3}/2 \\ b = \rho \sin \theta = 1 \cdot \sin 210^\circ = -1/2 \end{array} \right\} \Rightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Ejercicio 5

Calcular la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a + nd) br^n$ en los casos en que sea posible.

Se trata de la serie aritmético-geométrica

$$S_0 = ab$$

$$S_1 = ab + (a + d)br$$

$$S_2 = ab + (a + d)br + (a + 2d)br^2$$

$$S_3 = ab + (a + d)br + (a + 2d)br^2 + (a + 3d)br^3$$

...

$$S_n = ab + (a + d)br + (a + 2d)br^2 + (a + 3d)br^3 + \dots + (a + nd)br^n$$

$$S_n = ab + abr + dbr + abr^2 + 2dbr^2 + abr^3 + 3dbr^3 + \dots + abr^n + ndbr^n$$

$$rS_n = abr + abr^2 + dbr^2 + abr^3 + 2dbr^3 + abr^4 + 3dbr^4 + \dots + abr^{n+1} + ndbr^{n+1}$$

$$S_n - rS_n = ab + abr - abr + dbr + abr^2 - abr^2 + 2dbr^2 - dbr^2 + abr^3 - abr^3 + 3dbr^3 - 2dbr^3 + \dots + ndbr^n - (n-1)dbr^n - abr^{n+1} - ndbr^{n+1}$$

$$(1-r)S_n = ab + dbr + dbr^2 + dbr^3 + \dots + dbr^n - abr^{n+1} - ndbr^{n+1}$$

$$(1-r)S_n = (a + dr + dr^2 + dr^3 + \dots + dr^n - ar^{n+1} - ndr^{n+1})b$$

$$(1-r)S_n = (a + d(r + r^2 + r^3 + \dots + r^n) - (a - nd)r^{n+1})b$$

y tenemos en el paréntesis interior una serie geométrica que convergerá cuando $|r| < 1$ a una suma enésima que es conocida:

$$(1-r)S_n = \left(a + d \frac{r - r^{n+1}}{1-r} - (a - nd)r^{n+1} \right) b$$

$$S_n = \left(\frac{a}{1-r} + d \frac{r - r^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{(a - nd)r^{n+1}}{1-r} \right) b$$

Una vez calculada la suma enésima S_n , falta calcular la suma total S para lo cual basta hacer el límite de S_n cuando n tiende a infinito.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-r} + d \frac{r - r^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{(a - nd)r^{n+1}}{1-r} \right) b = \left(\frac{a}{1-r} + d \frac{r}{(1-r)^2} \right) b$$

$$\text{Solución : } S = \left(\frac{a}{1-r} + d \frac{r}{(1-r)^2} \right) b \quad \text{si } |r| < 1$$

TEMA 10: CONTINUIDAD EN $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1

Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide estudiar la continuidad de $f(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$.

Al igual que sucede en funciones de una variable vamos a dividir el estudio en dos casos :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

En esta región la función f es un cociente de funciones elementales claramente continuas con denominador no nulo.Por tanto la función f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

- Si $(x, y) = (0, 0)$.

Este caso ya no es tan evidente por ello debemos aplicar la definición de continuidad en un punto,

$$f(x, y) \text{ es continua en } (0, 0) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

por tanto pasamos a calcular el límite. De las distintas formas que hay de resolverlo vamos a utilizar en esta ocasión un cambio de variable a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} &= \left[\begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \rho \sin \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\cancel{\rho^2} \cos \theta \sin \theta}{\cancel{\rho^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos \theta \sin \theta = \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

en este caso tenemos que el límite no existe ya que el resultado depende del ángulo θ con el que nos vamos acercando al origen.

También lo podríamos haber visto mediante los límites radiales:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} &= [y = \lambda x] = \lim_{(x, \lambda x) \rightarrow (0, 0)} \frac{x \lambda x}{x^2 + (\lambda x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda \cancel{x^2}}{(1 + \lambda^2) \cancel{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \end{aligned}$$

en este caso tenemos que el límite no existe ya que el resultado depende de la pendiente λ de la recta con el que nos vamos acercando al origen.Así pues no se cumple la definición de continuidad en el punto $(0, 0)$ por lo que ya podemos afirmar que la función f no es continua en el punto $(0, 0)$.**Solución:** $f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Ejercicio 2

Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide estudiar la continuidad de $f(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$.

Al igual que sucede en funciones de una variable vamos a dividir el estudio en dos casos :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

En esta región la función f es un cociente de funciones elementales claramente continuas con denominador no nulo.

Por tanto la función f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

- Si $(x, y) = (0, 0)$.

Este caso ya no es tan evidente por ello debemos aplicar la definición de continuidad en un punto,

$$f(x, y) \text{ es continua en } (0, 0) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

por tanto pasamos a calcular el límite. De las distintas formas que hay de resolverlo vamos a utilizar en esta ocasión un cambio de variable a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} &= \begin{bmatrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{bmatrix} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \underbrace{\rho^2}_{\downarrow 0} \underbrace{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}_{\text{acotado}} = 0, \quad \forall \theta \end{aligned}$$

así pues, tenemos que el límite existe y, además, su valor coincide con el valor de la función en el punto $(0, 0)$. Es decir,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, 0) = 0 = f(0, 0)$$

por tanto se cumple la definición de continuidad en el punto $(0, 0)$ por lo que ya podemos afirmar que la función f es continua en el punto $(0, 0)$.

Solución : $f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$

Cuando aparece en el límite la expresión $x^2 + y^2$ el cambio a polares suele ser el método más directo y sencillo.

TEMA 11: DIFERENCIACIÓN EN $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1

Calcular las derivadas parciales de la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Recuerda que la notación:

$$D_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$$

es equivalente

Vamos a calcular primero la derivada parcial $D_1 f$:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Para calcular la derivada en esta región basta con aplicar las reglas usuales de derivación sin olvidarse de tratar a la variable y como si fuera una constante,

$$D_1 f(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - x^3(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Para $(x, y) = (0, 0)$

Como en este punto no podemos aplicar las reglas usuales de derivación calcularemos la derivada utilizando la definición,

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (h, 0)) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

Pasamos ahora a calcular la otra derivada parcial, $D_2 f$:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Para calcular la derivada en esta región volvemos a aplicar las reglas usuales de derivación pero esta vez es la variable y la que trataremos como si fuera una constante,

$$D_2 f(x, y) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x^3(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Para $(x, y) = (0, 0)$

Como en este punto no podemos aplicar las reglas usuales de derivación calcularemos la derivada utilizando la definición,

$$\begin{aligned} D_2 f(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + k(0, 1)) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (0, k)) - f(0, 0)}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0^3}{0^2 + k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Sol: } D_1 f = \begin{cases} \frac{x^4 + 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad D_2 f = \begin{cases} \frac{-2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 2

Calcular las derivadas parciales de la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Recuerda que la notación:

$$D_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$$

es equivalente

Vamos a calcular primero la derivada parcial $D_1 f$:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Para calcular la derivada en esta región basta con aplicar las reglas usuales de derivación sin olvidarse de tratar a la variable y como si fuera una constante,

$$D_1 f(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 y + y^3 - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Para $(x, y) = (0, 0)$

Como en este punto no podemos aplicar las reglas usuales de derivación calcularemos la derivada utilizando la definición,

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (h, 0)) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Pasamos ahora a calcular la otra derivada parcial, $D_2 f$:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Para calcular la derivada en esta región volvemos a aplicar las reglas usuales de derivación pero esta vez es la variable x la que trataremos como si fuera una constante,

$$D_2 f(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2) - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 + x y^2 - 2x y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - x y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Para $(x, y) = (0, 0)$

Como en este punto no podemos aplicar las reglas usuales de derivación calcularemos la derivada utilizando la definición,

$$\begin{aligned} D_2 f(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + k(0, 1)) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (0, k)) - f(0, 0)}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot k}{0^2 + k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

Observación:

Fíjate que esta función no es continua en $(0, 0)$ pero sin embargo sí que tiene derivadas parciales en ese punto

$$\text{Sol: } D_1 f = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad D_2 f = \begin{cases} \frac{x^3 - x y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 3

Calcular las derivadas parciales de la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Recuerda que la notación:

$$D_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$$

es equivalente

Vamos a calcular primero la derivada parcial $D_1 f$:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Para calcular la derivada en esta región basta con aplicar las reglas usuales de derivación sin olvidarse de tratar a la variable y como si fuera una constante,

$$D_1 f(x, y) = \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - x^2 y^2(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3 y^2 + 2xy^4 - 2x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Para $(x, y) = (0, 0)$

Como en este punto no podemos aplicar las reglas usuales de derivación calcularemos la derivada utilizando la definición,

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (h, 0)) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Pasamos ahora a calcular la otra derivada parcial, $D_2 f$:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Para calcular la derivada en esta región volvemos a aplicar las reglas usuales de derivación pero esta vez es la variable x la que trataremos como si fuera una constante,

$$D_2 f(x, y) = \frac{2x^2 y(x^2 + y^2) - x^2 y^2(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^4 y + 2x^2 y^3 - 2x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^4 y}{x^2 + y^2}$$

- Para $(x, y) = (0, 0)$

Como en este punto no podemos aplicar las reglas usuales de derivación calcularemos la derivada utilizando la definición,

$$\begin{aligned} D_2 f(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + k(0, 1)) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (0, k)) - f(0, 0)}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0^2 + k^2}{0^2 + k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Sol: } D_1 f = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad D_2 f = \begin{cases} \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 4

$$\text{Sea la función } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide estudiar la diferenciabilidad de $f(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$.

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

En esta región la función f es un cociente de funciones elementales diferenciables con denominador no nulo. Por tanto la función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

- Si $(x, y) = (0, 0)$.

Este caso ya no es tan evidente. Repasando el trabajo realizado hasta ahora en ejemplos anteriores tenemos que :

- 1) La función f es continua en el $(0, 0)$ (condición necesaria de diferenciabilidad).
- 2) Existen las derivadas parciales de f en el origen (otra condición necesaria).
Además esta condición es muy útil pues sabemos que si f es diferenciable en el origen la matriz asociada a la diferencial en ese punto sólo puede ser la matriz jacobiana de f en ese punto que en nuestro caso es la matriz $(0 \ 0)$.

Pues bien, sabiendo todo esto, tenemos dos formas de abordar el estudio:

- 1) Estudiar la continuidad de las derivadas primeras en el origen. (condición suficiente de diferenciabilidad)
- 2) Aplicar la definición de diferenciabilidad en un punto.

Optamos por la segunda. Por tanto vamos a aplicar la siguiente definición:

$f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$ si y sólo si

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \cdot h - D_2 f(x_0, y_0) \cdot k|}{|(h, k)|} = 0$$

Sustituimos en el anterior límite y lo calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(0+h, 0+k) - f(0,0) - D_1 f(0,0) \cdot h - D_2 f(0,0) \cdot k|}{|(h,k)|} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k|}{|(h,k)|} = \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| \frac{h^2 k^2}{h^2 + k^2} - 0 - 0 \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^2 k^2}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

que se trata de un límite de dos variables que volvemos a resolverlo mediante un cambio de variable a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}} &= \begin{bmatrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{bmatrix} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \rho^2 \sin^2 \theta}{(\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\rho^3 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^{3/2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \underbrace{\rho}_{\downarrow 0} \underbrace{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}_{\text{acotado}} = 0 \end{aligned}$$

por tanto podemos asegurar que f es diferenciable en $(0, 0)$

La continuidad y las derivadas parciales de esta función han sido estudiadas en ejercicios anteriores.

TEMA 14: SUCESIONES DE FUNCIONES

Ejercicio 1

Se considera la sucesión de funciones reales de variable real (f_n) , definidas como:

$$f_n(x) = e^{-nx} \quad x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \dots$$

- a) Encontrar el límite puntual de la sucesión (f_n) en $\mathbb{R}$.
 b) Estudiar la convergencia uniforme de (f_n) en $[0, \infty)$ y en el intervalo $[a, \infty)$ con $0 < a$.

$$f_n(x) = e^{-nx}; \quad x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \dots$$

PROTAGONISTA: Expresión en la cual aparece siempre

$$f_n(x) = e^{-nx} = \left\{ \begin{matrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \\ \vdots \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} e^{-x} \\ e^{-2x} \\ e^{-3x} \\ e^{-4x} \\ \vdots \end{matrix} \right\}$$

n : VARIA LA SUCESIÓN DENTRO DE LA SUCE

x : VARIABLE DE LA FUNCIÓN, ACTUARÁ COMO PARÁMETRO.

a)

LÍMITE PUNTUAL

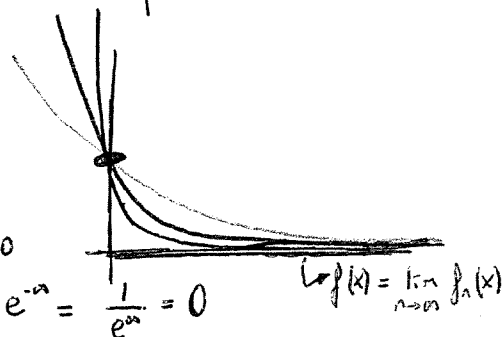
• CALCULAMOS EL SIGUIENTE LÍMITE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = \begin{cases} x=0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^0 = 1 \\ x>0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \\ x<0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = e^{\infty} = \infty \end{cases}$$

LÍMITE PUNTUAL DE $f_n(x) \equiv f(x)$

$$b_1) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ siendo } f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$



CONVERGENCIA UNIFORME

AL SER LA FUNCIÓN LÍMITE PUNTUAL $f(x)$ (DEFINIDA ANTERIORMENTE) UNA FUNCIÓN NO CONTINUA EN $\mathbb{R}$ Y AL SER LAS FUNCIONES $f_n(x)$ CONTINUAS EN TODO $\mathbb{R}$ (SE TRATA DE FUNCIONES EXPONENCIALES), PODEMOS AFIRMAR QUE LA SUCESIÓN $f_n(x)$ NO CONVERGE UNIFORMEMENTE A $f(x)$ EN $\mathbb{R}$.

b_2)

CONVERGENCIA UNIFORME EN $[a, \infty)$

• CALCULAMOS EL SIGUIENTE LÍMITE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in [a, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \right]$$

EN EL ABRILLO (LA) VIMOS QUE, EN $[a, +\infty)$ $f(x)$ ES CERO

$$e^{-nx} > 0 \quad \text{SIEMPRE} \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

$$g(x) = |e^{-nx} - 0| = |e^{-nx}| = e^{-nx} \Rightarrow g(x) = e^{-nx}$$

Hacemos $\sup_{x \in [a, +\infty)} g(x) \rightarrow \text{Máximo en } [a, +\infty)$

$g(x) = e^{-nx} \Rightarrow g'(x) = -ne^{-nx} < 0$ en $[a, +\infty) \Rightarrow g(x)$ DECRECE EN $[a, +\infty) \Rightarrow \text{Máximo estará al pto. qd decrece} \Rightarrow g(a)$ ES EL MÁXIMO

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\overset{<0}{-na}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 //$$

$\downarrow$
 e^{-na} ES MÁXIMO

CONCLUSIÓN: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

LA SUCESSION $f_n(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A $f(x)$ EN $[a, +\infty)$

Ejercicio 2
Tema 14Se considera la sucesión de funciones reales de variable real (f_n) , definidas como :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de (f_n) en $\mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2}; \quad x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$$

CONVERGENCIA PUNTUAL: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2}$

* $x=0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n \cdot 0^2}}{1} = 1$

* $x \neq 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\overset{<0}{nx^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{\infty \cdot e^{\infty}} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

Convergencia puntual: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \equiv f(x)$ siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

CONVERGENCIA UNIFORME: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right] \rightarrow g(x) = \left| \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} - 0 \right| = \left| \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} \right|$

ANTERIOREMENTE VIMOS QUE $f(x) \equiv 0$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2}$$

por qué $f(x) = 0$ si: $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

Buscamos $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) \rightarrow \text{Máximos}$

$$g'(x) = \frac{(-2nx)e^{-nx^2}(1+x^2) - (2xe^{-nx^2})}{(1+x^2)^2} = \frac{-2xe^{-nx^2} [n(1+x^2) + 1]}{(1+x^2)^2}$$

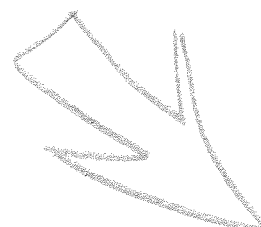
$$\text{sign}[g'(x)] = -\text{sign}[x] \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \text{ DECRECE} \\ x < 0 \rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \text{ CRECE} \end{cases} \Rightarrow \text{MÁXIMO EN } x=0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) = g(0) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 \rightarrow f_n(x) \text{ no converge uniformemente a } f(x) \text{ en } \mathbb{R}$$

$f_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x)$ en $\mathbb{R}$ porque $f(x)$ no es continua en $\mathbb{R}$ y todos los términos de $f_n(x)$ sí son continuos.

Repetido, explicado y detallado de otro modo a continuación

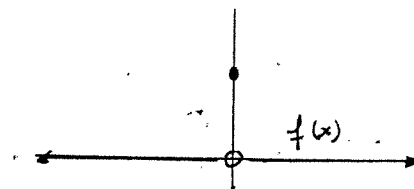


Se considera la sucesión de funciones reales de variable real (f_n) , definidas como :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de (f_n) en $\mathbb{R}$.

$$f_n = \left\{ \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}, \frac{e^{-2x^2}}{1+x^2}, \dots \right\}$$



$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} =$$

$$= \begin{cases} x=0; & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-0x^2}}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \\ x>0; & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{nx^2}(1+x^2)} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ x<0; & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{nx^2}(1+x^2)} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f \quad \text{siendo } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } |x|>0 \end{cases}$$

Al ser la función límite puntual $f(x)$ una función no continua y los términos de la sucesión de funciones continuas (por tratarse de un cociente de funciones claramente continuas en donde no se anula el denominador) podemos afirmar que $f_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

sin embargo hagamos el estudio de la caracterización:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$$

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} - 0 \right| = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2}$$

$$\begin{cases} g(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} \\ g(-x) = \frac{e^{-n(-x)^2}}{1+(-x)^2} = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} \end{cases} \quad g(x) = g(-x) \Rightarrow \text{par}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x^2)e^{nx^2}} = 0 \Rightarrow \text{Asintotas horizontales en } y=0$$

$$g(0) = 1$$

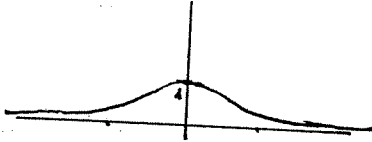
$$g(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cálculo de extremos relativos

$$g(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-e^{-nx^2} 2nx(1+x^2) - e^{-nx^2} 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-e^{-nx^2} (2nx + 2nx^3 + 2x)}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(n + nx^2 + 1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ 2nx^2 = -n-1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-n-1}{n}} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$



la imagen de uno de los máximos

$$g\left(\sqrt{\frac{-n-1}{n}}\right) = \frac{e^{-n\left(\sqrt{\frac{-n-1}{n}}\right)^2}}{1+\left(\sqrt{\frac{-n-1}{n}}\right)^2} = \frac{e^{-n-1}}{1+\frac{-n-1}{n}} = \frac{e^{-n-1}}{\frac{n-n-1}{n}} = \frac{e^{-n-1}}{\frac{-1}{n}} = -ne^{-n-1}$$

Hemos concluido que $g(x)$ alcanza su máximo (absoluto estricto) en $\mathbb{R}$ en el pto $x=0$, tomando un valor de 1

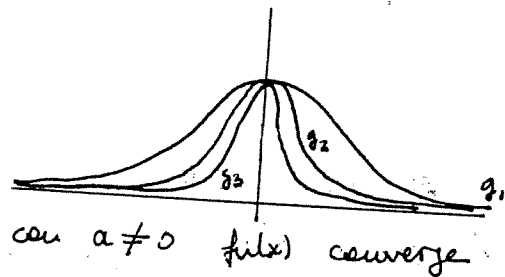
$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Hemos ratificado que $f_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x)$ en $\mathbb{R}$

EXTRA: ¿Y en otro subconjunto?

$$g(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2}$$

Se observa en el gráfico que en cualquier intervalo como $\underbrace{(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)}_A$ a $f(x)$.



$$1^\circ \quad g(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2}$$

$$2^\circ \quad \sup_{x \in A} |g(x)| \Rightarrow g(a) = g(-a) = \frac{e^{-na^2}}{1+a^2}$$

$$3^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+a^2)e^{na^2}} = 0 \Leftrightarrow f_n(x) \text{ converge uniformemente a } f(x) \text{ en } A$$

APÉNDICE: FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Hállense los valores de $z \in \mathbb{C}$ que verifican la siguiente condición:

$$\cosh^2 z - 3 \sinh z + 1 = 0$$

Recordando la identidad $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ podemos poner:

$$\cosh^2 z - 3 \sinh z + 1 = 0$$

$$(1 + \sinh^2 z) - 3 \sinh z + 1 = 0$$

$$1 + \sinh^2 z - 3 \sinh z + 1 = 0$$

$$\sinh^2 z - 3 \sinh z + 2 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en la variable $\sinh^2 z$ que pasamos a resolver :

$$\sinh z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \sinh z = 2 \\ \sinh z = 1 \end{cases}$$

Por tanto, $\sinh z = 2$ o bien $\sinh z = 1$. Veamos cada uno de los casos:

$$\bullet \quad \sinh z = 2 \Rightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 2 \Rightarrow e^z - e^{-z} = 4 \Rightarrow e^z - 4 - e^{-z} = 0$$

y ahora, multiplicando por e^z a ambos lados de la ecuación nos queda:

$$e^{2z} - 4e^z - 1 = 0 \Rightarrow (e^z)^2 - 4e^z - 1 = 0$$

que es otra ecuación de segundo grado esta vez en la variable e^z que resolvemos:

$$e^z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

de manera que z vale $e^z = 2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow z = \ln(2 \pm \sqrt{5})$

$$\bullet \quad \sinh z = 1 \Rightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 1 \Rightarrow e^z - e^{-z} = 2 \Rightarrow e^z - 2 - e^{-z} = 0$$

y ahora, multiplicando por e^z a ambos lados de la ecuación nos queda:

$$e^{2z} - 2e^z - 1 = 0 \Rightarrow (e^z)^2 - 2e^z - 1 = 0$$

que es otra ecuación de segundo grado esta vez en la variable e^z que resolvemos:

$$e^z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

de manera que z vale $e^z = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow z = \ln(1 \pm \sqrt{2})$

Solución : $z = \ln(2 \pm \sqrt{5}) \quad z = \ln(1 \pm \sqrt{2})$

FMT2

Preguntas de Test

TEST FMT2 – FEBRERO 2005

1. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Q}$ acotado inferiormente tiene:
 - a) mínimo.
 - b) supremo.
 - c) ninguna de las anteriores.
2. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado inferiormente tiene:
 - a) mínimo.
 - b) supremo.
 - c) ninguna de las anteriores.
3. Los números complejos que verifican la ecuación $\bar{z} = -z$ forman:
 - a) el eje real.
 - b) el eje imaginario.
 - c) ninguna de las anteriores.
4. $\sum_{n=0}^{50} i^n =$
 - a) 1
 - b) -1
 - c) i
5. El conjunto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right)$ es
 - a) vacío
 - b) abierto
 - c) compacto
6. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$ es
 - a) cerrado.
 - b) abierto.
 - c) ni abierto ni cerrado.
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$
 - a) 1
 - b) e^2
 - c) e
8. Dada la función $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow 1} D(x)$.
 - a) = 1
 - b) = 0
 - c) no existe

9. La función real $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ es

- a) decreciente.
- b) acotada.
- c) continua

10. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , y $f(a) = f(b)$ entonces

- a) existe $\xi \in (a, b) / f(\xi) = 0$
- b) existe un único $\xi \in (a, b) / f'(\xi) = 0$
- c) ninguna de las anteriores.

11. La derivada de $f(x) = \arcsen x$ es

- a) $(1+x^2)^{-1/2}$
- b) $(1-x)^{-1/2}$
- c) $(1-x^2)^{-1/2}$

12. Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Entonces f es

- a) monótona creciente
- b) inyectiva
- c) sobreyectiva

13. El gradiente de $f(x, y) = \sen x + e^{xy}$ en el punto $(0, 1)$ vale

- a) 0
- b) $(2, 0)$
- c) $(0, 2)$

14. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie real. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces

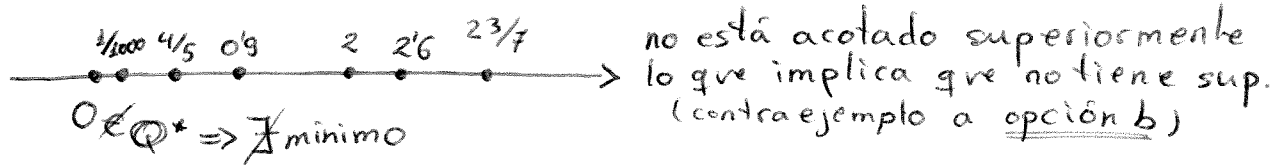
- a) la serie es convergente.
- b) la serie es divergente.
- c) Ninguna de las anteriores.

15. Siendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series reales con $a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

- a) si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente.
- b) si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente.
- c) ninguna de las anteriores

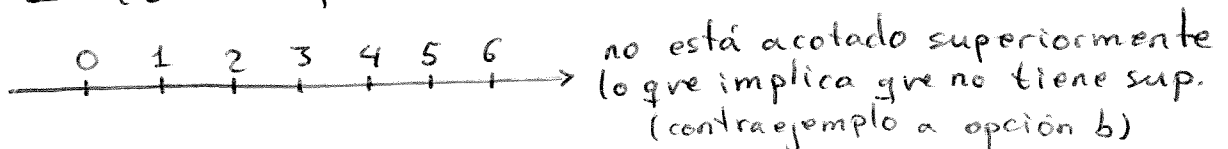
Test FMT2 - febrero 2005

① Contraejemplo:

 $\mathbb{Q}^+$ (Racionales positivos)

El ínfimo es la mayor de las cotas inferiores.

Si el ínfimo pertenece al conjunto se le llama mínimo.

Como el ínfimo de $\mathbb{Q}^+$ (el cero) no pertenece a $\mathbb{Q}^+ \Rightarrow \nexists \text{mínimo}$
descartada opción a Solución c② $\mathbb{Z}^+$ (Enteros positivos)

La mayor de todas las cotas inferiores es 1.

Se cumple que $1 \leq x \forall x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 1$ es el ínfimo de $\mathbb{Z}^+$
como además $1 \in \mathbb{Z}$ (el ínfimo $\in$ al conjunto) es mínimo.Solución a③ Sea $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$

$$\bar{z} = -z \Rightarrow a - bi = -a - bi \Rightarrow \begin{cases} a = -a \\ b = b \end{cases} \Leftrightarrow a = 0$$

Esto es: $\bar{z} = -z \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Rightarrow$ números situados en el
eje imaginarioSolución b

$$\textcircled{4} \sum_{n=0}^{50} i^n = \underbrace{[i^0 + i^1 + i^2 + i^3]}_0 + \underbrace{[i^4 + i^5 + i^6 + i^7]}_0 + \underbrace{[i^8 + \dots + i^{47}]}_0 + \underbrace{[i^{48} + i^{49} + i^{50}]}_0 = i$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = i^0 + [i^1 + i^2 + i^3 + i^4] + [i^5 + i^6 + i^7 + i^8] + [i^9 + \dots + i^{47}] + [i^{48} + i^{49} + i^{50}]$$

$$1 + \underbrace{[i - 1 - i + 1]}_0 + \underbrace{[i - 1 - i + 1]}_0 + \dots + \underbrace{[-i + 1]}_0 + i - 1 = i$$

Solución c

⑤ $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n}) = [0, 1) \cap [0, \frac{1}{2}) \cap [0, \frac{1}{3}) \cap [0, \frac{1}{4}) \cap [0, \frac{1}{5}) \dots = \{0\} \neq \emptyset$

Veamos que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n})$ es cerrado. Para ello comprobaremos que $A = \bar{A} \Rightarrow$ cerrado

$0 \in \bar{A}$, porque $\forall B(0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A$ cerrado
Evidentemente A es acotado, luego, por ser cerrado y acotado afirmamos que A es compacto. Solución c

⑥ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} ; A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \dots\}$$

$$A = \{0\} \cup \{\frac{1}{k\pi}\} ; k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$\bar{A} = \{u \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, B(u, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\} = A \Rightarrow \bar{A} = A \Rightarrow A \text{ cerrado}$$

Solución a

⑦ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2} =$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2} = 1^\infty ; \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} = e^{\ln \left|\frac{n^2+2}{n^2+1}\right|^{n^2}} = e^{n^2 \ln \left|\frac{n^2+2}{n^2+1}\right|}$$

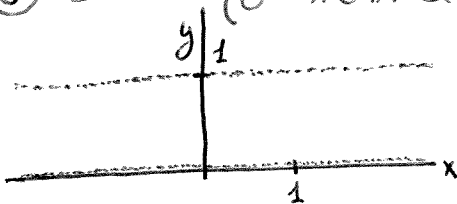
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln \left|\frac{n^2+2}{n^2+1}\right|} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} - 1\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{n^2+2 - n^2 - 1}{n^2+1}}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1}} = e^1 = e$$

$$\ln |u_n| \sim u_n - 1 \Leftrightarrow \ln |u_n| \rightarrow 1$$

Solución c

⑧ $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} D(x) = ??$

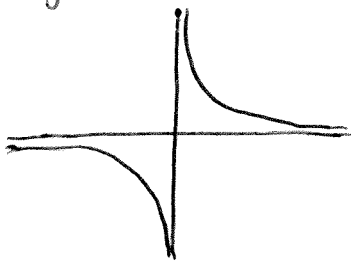


$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \nu, |x_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \rightarrow l$$

$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} D(x) : \underline{\text{Solución c}}$

Test FMT2 - febrero 2005

⑨ $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ es:



• $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ asintota horizontal $y = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow$ asintota vertical $x = 0$

• $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ impar $\Rightarrow$ simétrica respecto al origen

- $\forall x < 0, f(x) < 0 \Rightarrow \forall x < 0$ se desarrolla en el 3er cuadrante
- $\forall x > 0, f(x) > 0 \Rightarrow \forall x > 0, f(x)$ se desarrolla en el 1er cuadrante
- Si $\forall a < b, f(a) > f(b) \Rightarrow f(x)$ decreciente

No se cumple $\forall a$, pues si $a = -2 \Rightarrow f(a) = f(-2) = -\frac{1}{2}$ con $a < b$
 $b = 2 \Rightarrow f(b) = f(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(a) < f(b)$
No es decreciente

$f(x)$ en $\mathbb{R} - \{0\}$ es división de funciones continuas con denominador no nulo $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Solución c

⑬ $f(x, y) = \sin x + e^{xy} \quad \nabla f(0, 1) = ??$

$\nabla f(0, 1) = \left(\frac{\partial f(0, 1)}{\partial x}, \frac{\partial f(0, 1)}{\partial y} \right)$

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \cos x + ye^{xy}$
 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xe^{xy}$
 $\nabla f(0, 1) = (\cos 0 + 1 \cdot e^{0 \cdot 1}, 0 \cdot e^{0 \cdot 1}) = (2, 0)$

Solución b

⑭ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ entonces...

contraejemplo a)

$a_n = \frac{1}{n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$

Sin embargo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ No convergente

contraejemplo b)

$a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Sin embargo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ No divergente

Solución c (Ni converge, ni diverge)

TEST FMT2 – SEPTIEMBRE 2005

1. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ tiene
 - a) mínimo.
 - b) ínfimo.
 - c) ninguna de las anteriores.
2. Hay tantos números naturales pares como
 - a) reales.
 - b) racionales.
 - c) ninguna de las anteriores.
3. Indique cuál de estos números complejos tiene todas sus raíces cuartas sobre las bisectrices de los cuadrantes del plano.
 - a) $e^{i\pi/4}$.
 - b) $e^{i3\pi/4}$.
 - c) -1 .
4. $\sum_{n=0}^{3000} i^n =$
 - a) 1.
 - b) $2e^{i\pi/4}$.
 - c) $2e^{-i\pi/4}$.
5. En cualquier espacio normado completo se verifica que
 - a) toda sucesión es de Cauchy.
 - b) todo cerrado es completo.
 - c) ninguna de las anteriores.
6. Si $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ el conjunto $\{x \in [0,1] / f(x) = 0\}$ es
 - a) cerrado.
 - b) compacto.
 - c) ninguna de las anteriores.
7. Toda sucesión acotada de números reales tiene
 - a) límite.
 - b) al menos un límite subsecuencial.
 - c) son ciertas a) y b).
8. El límite de la sucesión $a_1 = \sqrt{5}$, $a_{n+1} = \sqrt{5+a_n}$ es
 - a) 1.
 - b) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$.
 - c) $5+\sqrt{5}$.

9. La función real $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ es
- de clase C^∞ en su dominio.
 - discontinua en su dominio.
 - ninguna de las anteriores.
10. Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, es continua
- en todo punto aislado de A .
 - en los puntos de acumulación de A .
 - ninguna de las anteriores.
11. Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Entonces f es
- sobreyectiva.
 - monótona.
 - ninguna de las anteriores.
12. La derivada direccional $D_u f$ de $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ en el punto $(1, 2)$, siendo u el vector unitario de ángulo $\pi/6$ con el eje OX , es
- $\frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$.
 - $\frac{13 + 3\sqrt{3}}{2}$.
 - ninguna de las anteriores.
13. El tercer término de la serie de MacLaurin de $f(x) = a^x$, con $a > 0$, es
- $\frac{(a \ln a)^3}{3!} x^3$.
 - $\frac{(\ln a)^2}{2!} x^2$.
 - f no se puede desarrollar.
14. Sea $a_n > 0, \forall n \geq 0$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$
- es necesariamente convergente.
 - es necesariamente divergente.
 - ninguna de las anteriores.
15. Si la serie de MacLaurin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de una función analítica $f(x)$ tiene radio de convergencia $R \neq 0$, entonces
- $f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.
 - $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \forall x \in (-R, R)$.
 - son ciertas a) y b).

Test FMT2 - septiembre 2005

- ① Contraejemplo a: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
 $\Rightarrow$ Cotas inferiores: $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$
 mayor de las cotas inferiores = 0
 $\inf(\mathbb{R}^+) = 0 \notin \mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathbb{R}^+$ no tiene mínimo

Contraejemplo b: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

- $\mathbb{Z}$ no está acotado inferiormente $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathbb{Z}$ no tiene cotas inferiores $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ No existe la mayor de las cotas inferiores de $\mathbb{Z} \Rightarrow \nexists \inf(\mathbb{Z})$

②

El conjunto de los números naturales pares tiene una cantidad de elementos infinitos numerable luego tiene tantos elementos como tiene cualquier conjunto que sea infinito numerable. En esta pregunta, b) Racionales, es un conjunto infinito numerable, luego hay tantos pares como racionales.

③

a) $e^{i\pi/4}$

$$z_a = e^{i\pi/4} = e^{i(\pi/4 + 2k\pi)}$$

$$\sqrt[4]{z_a} = \sqrt[4]{e^{i(\pi/4 + 2k\pi)}} = \left[e^{i(\pi/4 + 2k\pi)} \right]^{1/4} = e^{i(\pi/16 + k\pi/2)}, k=0,1,2,3$$

$$k=0 \Rightarrow \sqrt[4]{z_a} = e^{i\pi/16} = \cos(\pi/16) + i \sin(\pi/16)$$

El argumento de esta $\sqrt[4]{z_a}$ no es $\pi/4$ (sino que es $\pi/16$), luego no está situada sobre una de las bisectrices

luego a = falsa

b) $e^{i3\pi/4}$

$$z_b = \sqrt[4]{e^{i(3\pi/4)}} = \sqrt[4]{e^{i(3\pi/4 + 2k\pi)}} = e^{i(3\pi/16 + k\pi/2)}, k=0,1,2,3$$

$$k=0 \Rightarrow \sqrt[4]{z_b} = e^{i3\pi/16} = \cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16}$$

El argumento de esta $\sqrt[4]{z_b}$ no es $\pi/4$ (sino que es $3\pi/16$) luego no está situada sobre una de las bisectrices

luego b = falsa

c) -1

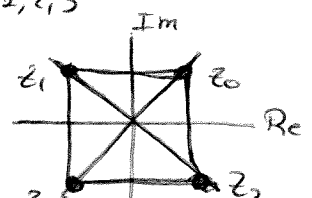
$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1 \cdot e^{i(\pi + 2k\pi)}} = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{4}}, k=0,1,2,3$$

$$k=0 \Rightarrow z_0 = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

$$k=1 \Rightarrow z_1 = e^{i3\pi/4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)$$

$$k=2 \Rightarrow z_2 = e^{i5\pi/4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1-i)$$

$$k=3 \Rightarrow z_3 = e^{i7\pi/4} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$$



$$④ \sum_{n=0}^{3000} i^n =$$

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = \left[i^0 + i^1 + i^2 + i^3 \right] + \left[i^4 + i^5 + i^6 + i^7 \right] + i^8 + \dots$$

$$= \left[1 + i + (-1) + (-i) \right] + \left[1 + i + (-1) + (-i) \right] + \dots$$

$$i^2 = \sqrt{-1}^2 \quad i^3 = i^2 \cdot i$$

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -1 \cdot i$$

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = 0 + 0 + \dots + \left[i^{2996} + i^{2997} + i^{2998} + i^{2999} \right] + i^{3000}$$

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = i^{3000} = 1 \Rightarrow \text{solución a}$$

⑤ Con la norma usual todo espacio completo es cerrado y todo espacio cerrado es completo.

⑥ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ solución b

$$A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = 0\}$$

$$A = \{x \in [0, 1] : x \in \mathbb{Q}\} \Rightarrow A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

A está formado por todos los racionales comprendidos en $[0, 1]$

$$a \text{ interior de } A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subset A$$

$$\overset{\circ}{A} = \text{int}(A) = \text{conjunto de puntos interiores de } A \quad (\overset{\circ}{A} = \emptyset \Rightarrow A \text{ no abierto})$$

$$A \text{ abierto} \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$$

$$a \text{ frontera de } A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \not\subset A \text{ y } B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$(\text{Fr}(A) = [0, 1])$$

$$a \text{ adherente de } A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$\bar{A} = \text{Conjunto de puntos adherentes de } A \quad (\bar{A} = [0, 1])$$

$$A \text{ cerrado} \Leftrightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A \text{ no cerrado}$$

$$\text{int} \cup \text{fr} = \text{adh} \leadsto \boxed{\overset{\circ}{A} \cup \text{Fr}(A) = \bar{A}}$$

Puesto que no es cerrado, a) queda descartada

Además no puede ser compacto (compacto = cerrado y acotado)

De ahí que b) sea falsa. Solución c

$$a \text{ punto acumulación de } A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, (B(a, \varepsilon) - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

$$a \text{ aislado de } A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$$

No es conexo porque no podemos pasar de un punto de A a otro sin salirnos de A (A no es de una pieza)

A no es conexo

- ⑦ Contraejemplo a: La sucesión $(-1)^n$ está acotada (pres todos sus elementos están comprendidos en $[-2, 2]$). Sin embargo, esta sucesión no tiene límite (oscila). evidentemente, por ello, la c) es falsa
solución b

Toda sucesión acotada de Reales tiene al menos un límite subsecuencial.

⑧ $a_1 = \sqrt{5}$
 $a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$

$$a_n = \{ \sqrt{5}, \sqrt{5+\sqrt{5}}, \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}, \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}}, \dots \}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

$$\text{Sea } l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n} \Rightarrow l = \sqrt{5 + l} \Rightarrow l^2 - l - 5 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Descartamos el negativo porque todos los términos de a_n son positivos y por tanto el límite l ha de ser positivo
solución b

⑨ Dominio de $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

- No es discontinua en su dominio porque no presenta problemas al ingresar en la expresión $\frac{1}{x}$ cualquier x que pertenezca a $\mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ b) falsa

C^∞ = función continua con $f'(x), f''(x), f'''(x) \dots$ continuas

$$f(x) = \frac{1}{x} ; f'(x) = \frac{-1}{x^2} ; f''(x) = \frac{2}{x^3} ; f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \dots$$

$$f^n(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad |num|: 1, 2, 6, 24 \dots$$

$$1!, 2!, 3!, 4! \dots$$

↪ No presenta problemas para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ luego todas las derivadas son continuas $\Rightarrow f$ es de clase C^∞

solución a

$C \Rightarrow$ continua $f(x)$

- ⑩ solución a Toda función es continua en sus puntos aislados

11) solución b

monótona: creciente o decreciente

12)

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial u} = \nabla f(1,2)u = \left(\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}, \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} \right)u$$

u = vector unitario de ángulo $\frac{\pi}{6}$

$$u = \frac{1}{\|u\|} (\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\|u\|} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\|u\| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \quad ; \quad u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial u} = \left(\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}, \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\bullet \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 3y \quad ; \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 3 - 6 = -3$$

$$\bullet \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3x + 8y \quad ; \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = -3 + 16 = 13$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial u} = (-3, 13) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{13}{2} \right) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

solución a

13)

Previo

$f(x) = \sin x$
Desarrollo de Taylor
de $f(x) = \sin x$ en el
punto $a=0$ (Desarrollo
de McLaurin)

Desarrollo/Polinomio de Taylor

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

para grado n

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin x \quad ; \quad f(0) = \sin 0 = 0 \\ f'(x) = \cos x \quad ; \quad f'(0) = \cos 0 = 1 \\ f''(x) = -\sin x \quad ; \quad f''(0) = -\sin 0 = 0 \\ f'''(x) = -\cos x \quad ; \quad f'''(0) = -\cos 0 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3 + \dots \\ p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \end{array}$$

El polinomio de Taylor de $\sin(x)$ en $a=0$ es (en grado n):

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$



Test FMT2 - septiembre 2005

⑬ Ahora sí:

Polinomio de McLaurin de $f(x) = a^x$ 3er término

$$p(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots$$

McLaurin $\Rightarrow$ Taylor con el punto = 0

polinomio Taylor de grado 1 = recta tangente

$$f(0) = a^0 = 1$$

$$f'(x) = 1 \cdot a^x \cdot \ln|a| \Rightarrow f'(0) = \ln|a|$$

$$f''(x) = a^x [\ln|a|]^2 \Rightarrow f''(0) = [\ln|a|]^2 \quad \left. \vphantom{f''(x)} \right\} \Rightarrow f^n(0) = [\ln|a|]^n$$

$$p(x) = 1 + \ln|a| \cdot x + \frac{[\ln|a|]^2}{2!} x^2 + \dots$$

3er término

solución b

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\ln|a|]^n}{n!} x^n$$

TEST FMT2 – FEBRERO 2006

1. Si un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ está acotado, el conjunto de sus cotas inferiores tiene:
 - a) máximo.
 - b) mínimo.
 - c) ninguna de las anteriores.
2. El conjunto de números irracionales es:
 - a) infinito numerable.
 - b) infinito no numerable.
 - c) acotado.
3. Todo número complejo no nulo tiene:
 - a) n raíces n -ésimas complejas distintas.
 - b) n raíces n -ésimas reales distintas.
 - c) al menos una raíz n -ésima no real.
4. Si z es un número complejo, entonces $z - \bar{z} =$
 - a) $2 \operatorname{Re} z$.
 - b) $2 \operatorname{Im} z$.
 - c) $2i \operatorname{Im} z$.
5. Sea $A = \{1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ está dotado de la normal usual. Todos los puntos de A son:
 - a) puntos interiores de A .
 - b) puntos de acumulación de A .
 - c) ninguna de las anteriores.
6. En $\mathbb{R}$ con la norma usual, la frontera de $\mathbb{Q}$ es:
 - a) $\mathbb{R}$
 - b) $\mathbb{Q}$
 - c) $\emptyset$
7. Si $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ y $f(x) = x D(x)$, se verifica que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 - a) $= 0$.
 - b) $= 1$.
 - c) no existe.
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2} =$
 - a) e^2 .
 - b) e .
 - c) $e + 2$.
9. Si $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \in \mathbb{N}$ y tanto (a_n) como (c_n) son sucesiones convergentes, entonces (b_n) :
 - a) es convergente.
 - b) es divergente.
 - c) ninguna de las anteriores.

10. La función real $f(x) = \text{sg}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) es continua en $\mathbb{R}$.
- b) es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- c) ninguna de las anteriores.

11. Si $f(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } x > 0 \\ -y & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

- a) = 0.
- b) no existe.
- c) ninguna de las anteriores.

12. Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, entonces:

- a) las derivadas parciales primeras de f existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$.
- b) las derivadas parciales segundas de f existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$.
- c) ninguna de las anteriores.

13. Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ y el sistema de ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ no tiene solución, entonces:

- a) f no tiene máximos relativos.
- b) f no es continua en ningún punto.
- c) ninguna de las anteriores.

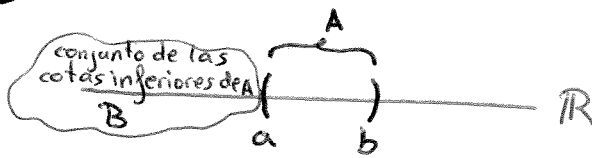
14. La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$ alcanza en $(0, 0)$

- a) un máximo relativo.
- b) un mínimo relativo.
- c) ni máximo ni mínimo.

15. Si $R \in \mathbb{R} - \{0\}$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces la suma de la serie es derivable en:

- a) $(-R, R)$.
- b) $[-R, R]$.
- c) $\mathbb{R}$.

①



Sea A el conjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado (sup. e inferiormente)

A acotado superiormente $\Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{R}; k_1 \geq x, \forall x \in A$

A acotado inferiormente $\Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{R}; k_2 \leq x, \forall x \in A$

A será de la forma (a, b) ó $[a, b]$ ó $(a, b]$ ó $[a, b)$

$B = \{ \text{conjunto de las cotas inferiores de } A \}$

$B = \{ k_2, k_2', k_2'', k_2''' \dots \leq x, \forall x \in A \} \Rightarrow B = (-\infty, a] \leftarrow \text{[cerrado]}$

esté incluido o no a en A , a siempre será cota inferior

La mayor de las cotas inferiores es $a \Rightarrow \inf(A) = a$

supremo = menor de las cotas superiores

ínfimo = mayor de las cotas inferiores

$$\inf(A) = a = \sup(B)$$

Como $\sup(B) = a$ y $a \in B(-\infty, a]$ resulta que ese

supremo se llama máximo. Así pues, el

máximo de B existe y la solución correcta es (a)

Ocorre igual con el ínfimo. Si la cota pertenece al conjunto se llama mínimo.

②

Nine Zulu Queens Ruled China

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

infinitos numerables infinitos no numerables

(a, b) (intervalo) infinito no numerable) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracionales) $\rightarrow$ infin. no numer.

Solución: (b)

③ Teorema fundamental del álgebra:

Todo número complejo no nulo tiene n raíces n -ésimas complejas distintas. Dicho de otro modo: todo polinomio de grado n tiene n raíces n -ésimas complejas distintas.

Solución: (a)

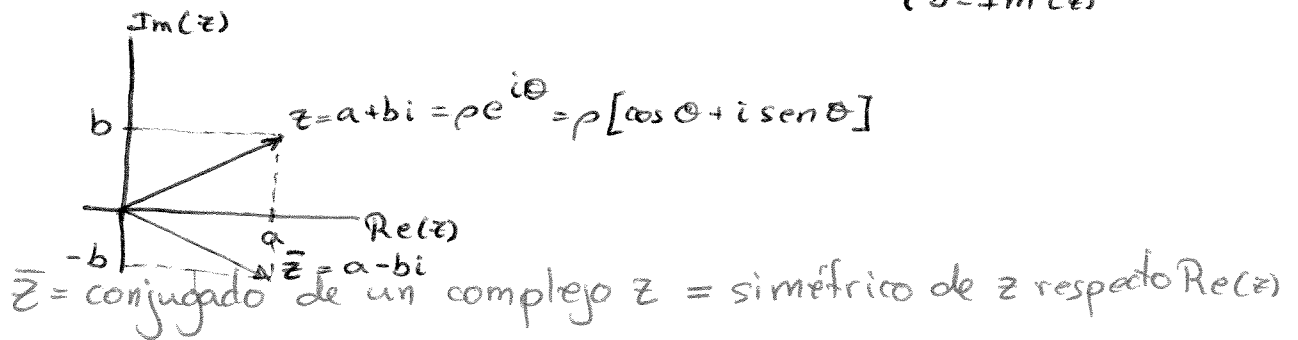
contraejemplo al b)

$$z = -4 \rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt{-4} = \pm 2i \notin \mathbb{R}$$

contraejemplo al c)

$$z = 16 \rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt{16} = \pm 4 \in \mathbb{R}$$

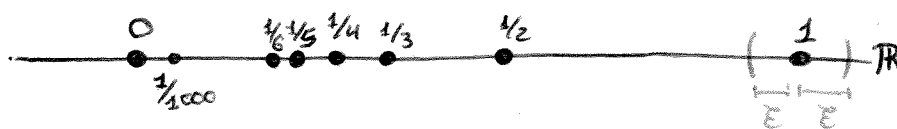
④ Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) \\ b = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$



$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = a - a + bi + bi = 2bi = 2i(\operatorname{Im} z)$$

Solución: (c)

⑤ $A = \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$



Bola de centro a y radio ε
 $B(a, \varepsilon)$



a es un punto interior de $A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0; B(a, \varepsilon) \subset A$
 a no es un punto interior de $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \not\subset A$

1 no es punto interior, pues la bola de radio ε y centro 1 no tiene todos sus elementos pertenecientes al conjunto A .

El conjunto A no tiene puntos interiores, el conjunto interior de A es el vacío.

opción (a) no es



5...

a es un punto de acumulación de $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, (B(a, \varepsilon) - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$
 a no es un punto de acumulación de $A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, (B(a, \varepsilon) - \{a\}) \cap A = \emptyset$

Cero es un punto de acumulación del conjunto, y es el único, luego no todos los puntos son puntos de acumulación
 luego, solución **(b)** no es

solución correcta: **(c)**

6

Entre dos $\mathbb{Q}$ hay infinitos $\mathbb{Q}$
 Entre dos $\mathbb{R}$ hay infinitos $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

a es un punto frontera de $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(a, \varepsilon) \not\subset A$
 a no es un punto frontera de $A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ ó $B(a, \varepsilon) \subset A$

$$\text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

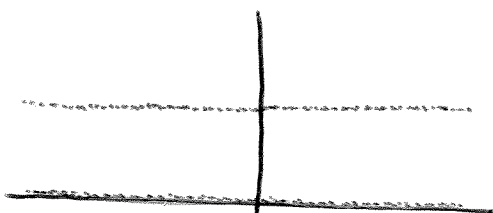
$$\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$$

solución **(a)**

ptos acumulación $(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

7

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$



Función de Dirichlet

ejemplos:

$$D(\sqrt{2}) = 0$$

$$D(\ln 6) = 0$$

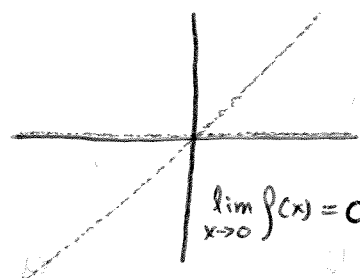
$$D(\pi) = 0$$

$$D(1/3) = 1$$

$$D(7/5) = 1$$

...

$$xD(x) = \begin{cases} 1 \cdot x = x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \cdot x = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

solución: **(a)**

8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} \right)^{n^2} = 1^\infty \text{ indet.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} \right)^{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \ln \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} \right)}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left[\frac{n^2+2}{n^2+1} - 1 \right]} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{n^2+2 - n^2 - 1}{n^2+1}} =$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1}} = e^1 = e$$

$$n^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2+2}{n^2+1} \right| \rightarrow \ln$$

$$\ln |u_n| \sim u_n - 1$$

sólo cuando $\ln \rightarrow 1$

solución: **(b)**

⑨

$$\begin{aligned}
 a_n &= -2 = \{-2, -2, -2, -2, \dots\} \rightarrow \text{convergente} \\
 b_n &= (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\} \rightarrow \text{oscilante} \\
 c_n &= 2 = \{2, 2, 2, 2, 2, \dots\} \rightarrow \text{convergente}
 \end{aligned}$$

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

convergente $\Rightarrow$ límite finito
 divergente $\Rightarrow$ límite infinito

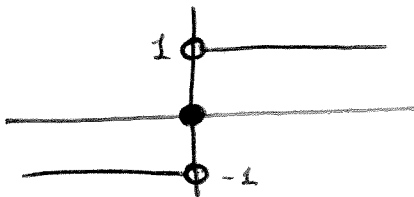
solución (c)

⑩

$$sg(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} sg(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} sg(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} sg(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \end{cases} \rightarrow \text{Diferentes} \Rightarrow \nexists \lim \Rightarrow sg(x) \text{ discontinua en } x=0$$

(continua en $\mathbb{R} - \{0\}$)



solución (b)

⑪

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0}} (y) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ y \rightarrow 0}} (-y) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Iguales} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

solución (a)

⑫

pág 54
 la a sería verdadera escrito del revés: si f tiene der. par. primeras continuas $\Rightarrow f$ diferenciable
 solución (c)

⑬

solución (a)

$C^1 = f$ tiene der. par. primeras continuas en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ diferenciable
 $\Rightarrow$ la segunda condición necesaria para ser extremo no se cumple nunca

$(\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = 0)$ sin solución $\Rightarrow$ el grad no se anula nunca
 la 1ª cond. de extremo no se cumple para nadie
 no hay extremos $\Leftarrow$ candidatos

⑭

solución (c)

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= x^2 - y^2 \\
 f'_x(x,y) &= 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
 f'_y(x,y) &= -2y = 0 \Leftrightarrow y = 0
 \end{aligned}$$

$(0,0)$ candidato

$$\begin{aligned}
 |Hf(x,y)| &= \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow |Hf(0,0)| &= -4 < 0 \Rightarrow \text{punto de silla}
 \end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II – Febrero 2008 E1 (test): 40 min.

Apellidos Nombre

DNI Grupo

La nota del examen se calculará sobre un total de 8 puntos como la suma de las notas de los ejercicios E1, E2 y E3.

La nota final de la asignatura (sobre 10 puntos) será la suma de las notas de este examen y de las pruebas P1 y P2.

- Puntuación del test (E1) sobre el total del examen: 2 puntos.
- El test consta de 10 preguntas. Cada una de ellas tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz a lo sumo una opción por pregunta. Acierto +0.2 Error -0.1 Blanco 0.

Sea $f(x) = x \operatorname{sen} x$. El conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1\}$.

- ☐ a) tiene infinitas cotas superiores.
- ☐ b) tiene una única cota superior.
- ☐ c) no tiene cotas superiores.

Para cualquier número complejo z no nulo, $\overline{z^{-1}}$ puede expresarse como

- ☐ a) $(\bar{z})^{-1}$.
- ☐ b) z^{-1} .
- ☐ c) $-z^{-1}$.

Sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| > 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. El conjunto $A \cap B$ es

- ☐ a) abierto.
- ☐ b) cerrado.
- ☐ c) conexo por caminos.

Todo polinomio de coeficientes reales y grado $2n + 1$, con $n \geq 1$, tiene necesariamente

- ☐ a) todas sus raíces reales.
- ☐ b) al menos una raíz real.
- ☐ c) un par de raíces complejas conjugadas.

Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si $|f(x, y)| \leq K$ en un entorno de $(0, 0)$ y $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = 1$, entonces

- ☐ a) el límite $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)g(x, y)$ existe.
- ☐ b) la función $f(x, y)g(x, y)$ está acotada en algún entorno de $(0, 0)$.
- ☐ c) la función $f(x, y)g(x, y)$ verifica $|f(x, y)g(x, y)| \leq K$ en algún entorno de $(0, 0)$.

6. La función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xye^{x+y}}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- ☐ a) es continua en $(0, 0)$.
☐ b) admite derivadas parciales en $(0, 0)$.
☐ c) es diferenciable en $(0, 0)$.

7. Si $\arctan$ denota la función arco-tangente tomando valores en $(-\pi/2, \pi/2)$, entonces $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$

- ☐ a) tiene un máximo absoluto en $(0, 0)$.
☐ b) tiene un mínimo absoluto en $(0, 0)$.
☐ c) no alcanza ni máximo ni mínimo absolutos en $(0, 0)$.

8. Si $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si

- ☐ a) la sucesión (a_n) es decreciente.
☐ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
☐ c) la sucesión de sumas parciales $\sum_{i=1}^n a_i$ es acotada.

9. El conjunto (o campo) de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ es

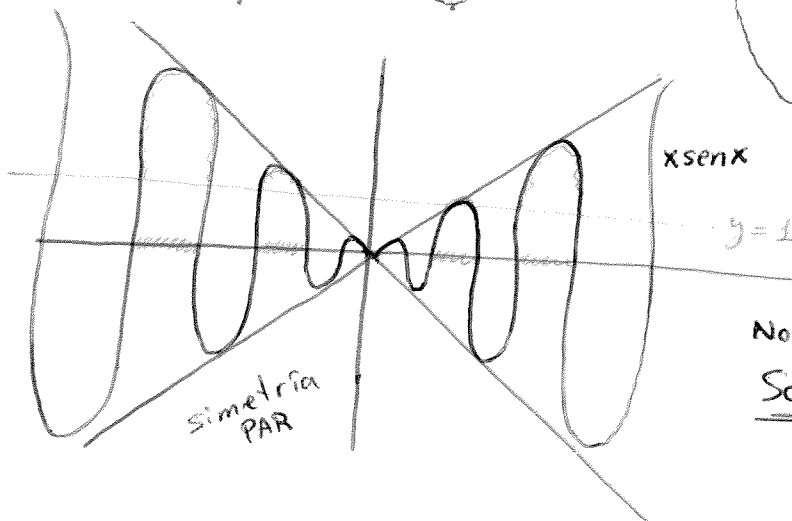
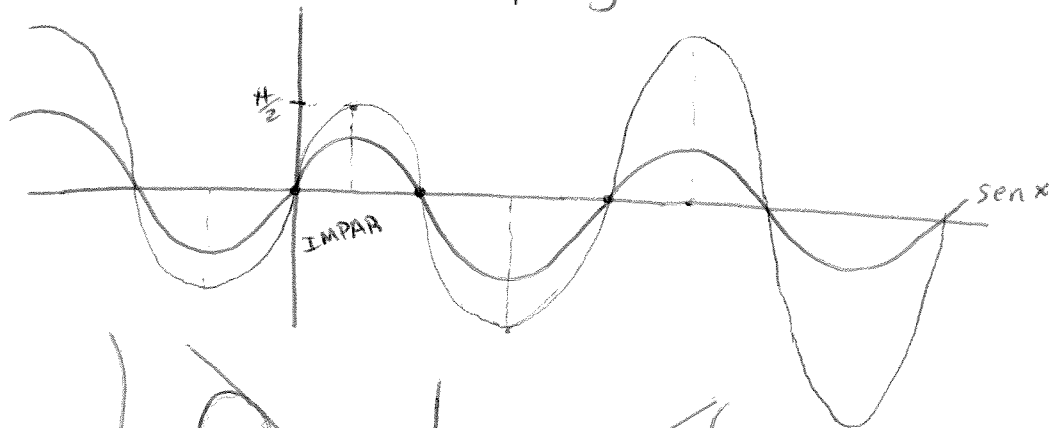
- ☐ a) $(-1, 1]$.
☐ b) $[-1, 1)$.
☐ c) $[-1, 1]$.

10. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, se verifica que

- ☐ a) $\int_a^b f(x) dx > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$.
☐ b) $\int_a^b f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$.
☐ c) $\int_a^b |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$.

Test febrero 2008

- ① $f(x) = x \sin x$ El conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1\} \dots$
 "curva seno del topólogo"



No tiene cotas superiores

Solución c

② $\overline{z^{-1}} = ?$

$$z = a+bi \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} \Rightarrow$$

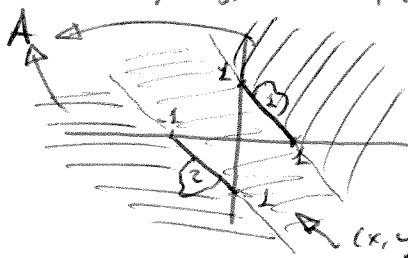
$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} \Rightarrow \overline{z^{-1}} = \frac{a+bi}{a^2+b^2}$$

$$z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi \Rightarrow (\bar{z})^{-1} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-bi} = \frac{1}{a-bi} \cdot \frac{a+bi}{a+bi} = \frac{a+bi}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow (\bar{z})^{-1} = \overline{(z^{-1})} \quad \text{solución a}$$

③ solución a

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| > 1\}$$



$$\textcircled{1} \cdot y = 1-x \Leftrightarrow x+y=1$$

$$\textcircled{2} \cdot y = -1-x \Leftrightarrow x+y=-1$$



(x, y) es tal que $-1 < x+y < 1 \Leftrightarrow |x+y| < 1$

B es círculo de centro $(0,0)$ y radio 1
 Por tanto, la intersección de A y B es
 Todos los puntos de $A \cap B$ son interiores $\Rightarrow$ abierto

④ solución b

Se trata de encontrar un polinomio de grado impar que contradiga a a) y a c)

$z^3 - 1 = 0$ (contraejemplo al a)), tiene 2 raíces complejas

$z(z-1)(z-2)=0$ (contraejemplo al c)), todas sus raíces son reales, luego NO hay un par de conjugadas

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II – 3 Septiembre 2008 P1 (test): 50 m.

Apellidos Nombre
 DNI Grupo

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz a lo sumo una opción por pregunta.
Acierto +0.2 Error -0.1 Blanco 0.
- Puntuación del test sobre el total del examen: **3 puntos.**

1. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene

- ☐ a) máximo.
☒ b) mínimo.
☐ c) ninguna de las anteriores.

2. Un conjunto de números reales acotado inferiormente tiene

- ☐ a) cota inferior, que además es única.
☒ b) ínfimo, que además es único.
☐ c) mínimo, que además es único.

3. Las raíces cúbicas de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ son

- ☒ a) $e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})}$, con $k = 0, \dots, 2$.
☐ b) $e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$, con $k = 0, \dots, 2$.
☐ c) $\sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})}$, con $k = 0, \dots, 2$.

4. $\operatorname{Im} \frac{1-i}{1+2i} =$

- ☐ a) $3i/5$.
☐ b) $-3i/5$.
☒ c) $-3/5$.

5. La intersección de una familia finita de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ es

- ☐ a) necesariamente un conjunto abierto.
☒ b) necesariamente un conjunto cerrado.
☐ c) ninguna de las anteriores.

El conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-1, 1 - 1/n]$ es

- ☒ a) abierto.
☐ b) cerrado.
☐ c) ninguna de las anteriores.

Toda sucesión acotada de números reales es necesariamente

- ☐ a) monótona.
☒ b) convergente.
☐ c) ninguna de las anteriores.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en la que $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ es convergente

- ☐ a) si y sólo si la sucesión (a_n) es convergente.
- ☐ b) si y sólo si $a_n \rightarrow 0$.
- ☒ c) ninguna de las anteriores.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Entonces

- ☐ a) necesariamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ es convergente.
- ☐ b) necesariamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ es divergente.
- ☒ c) ninguna de las anteriores.

El límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ y } x > 0 \\ -x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ y } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

- ☒ a) existe y es igual a 0.
- ☐ b) existe y es igual a 1.
- ☒ c) no existe.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

- ☐ a) Si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, entonces admite derivadas parciales en todo punto de $\mathbb{R}^2$, que además son continuas.
- ☐ b) Si f admite derivadas parciales en todo punto de $\mathbb{R}^2$, entonces es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.
- ☒ c) Si f admite derivadas parciales en todo punto de $\mathbb{R}^2$, y además son continuas, entonces f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Sea f una función diferenciable definida en $\mathbb{R}^2$. En todo subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^2$, la función f

- ☒ a) alcanza máximo y mínimo absolutos.
- ☐ b) es C^2 .
- ☐ c) es C^∞ .

Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Si el sistema de ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ tiene una única solución en $\mathbb{R}^2$, entonces

- ☒ a) f tiene un único extremo relativo.
- ☐ b) f puede tener más de un extremo relativo.
- ☐ c) f tiene a lo sumo un extremo relativo.

El polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x, y) = e^{x-y}$ en $(0, 0)$ es

- ☐ a) $1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2$.
- ☐ b) $1 + x - y + x^2 - xy + y^2$.
- ☐ c) $1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$.

iendo $f_n(x) = e^{x^n}$, la sucesión funcional (f_n)

- ☐ a) converge uniformemente en $[0, 1]$.
- ☐ b) converge puntual pero no uniformemente en $[0, 1]$.
- ☒ c) ninguna de las anteriores.

①

a) contraejemplo a máximo: subconjunto de pares
No tienen máximo

b) cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene la siguiente forma:

$\underbrace{\quad}_0 \quad n_1 \quad n_2 \quad \dots$

el más pequeño de todos los elementos de ese subconjunto (representado con n_1) seguro que es positivo (tal vez cero), presto que es un $\mathbb{N}$. es decir, cualquier número entre 0 y n_1 es cota inferior del subconjunto; y la mayor de todas esas cotas es n_1 . Como $n_1 \in$ conjunto y n_1 está siendo su ínfimo, n_1 es mínimo: siempre existe, en todo subconjunto de $\mathbb{N}$ un elemento situado más a la izquierda, que precisamente está siendo el mínimo.

Nota: No está sucediendo lo que tenemos en $(0,1) \subset \mathbb{R}$, donde podemos decir que existe el elemento situado más a la izquierda.

②

a) FALSA: $\forall$ conjunto acotado inferiormente, por estarlo, tiene ∞ cotas inferiores (nunca las cotas son únicas, siempre existen infinitas si existe alguna).

y contraejemplo: $(0,1)$ acotado inferiormente pero no tiene mínimo por la nota del ①.

más formalmente: la mayor de las cotas inferiores de $(0,1)$ es el cero y como $\notin$ al conjunto no es mín.

③

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$a^2 + b^2 = \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

$$\arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \theta \Rightarrow \theta = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

escogemos $\frac{\pi}{4}$ y no $\frac{5\pi}{4}$ porque al tener a y $b > 0$ nos encontramos en el 1º cuadr.

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}} = \left[e^{i[\frac{\pi}{4} + 2k\pi]} \right]^{1/3} = e^{i\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}} \quad (k=0,1,2)$$

④ solución c.

Nota: la parte imaginaria de un complejo $(a+bi)$ surge de considerar el sumando bi y suprimir la i . Es decir, la parte imaginaria de un complejo nunca contiene i .

$$\text{Im} \left(\frac{1-i}{1+2i} \right)$$

$$\text{Im} \left(\frac{1-i}{1+2i} \right) = \frac{-3}{5}$$

$$\frac{1-i}{1+2i} = \frac{1-2i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-1}{5} - \left(\frac{-3}{5} \right) i$$

⑤

solución b: (ver teoría) dibujando un par de conjuntos (intervalos) cerrados y cortándolos siempre es cerrado.

⑥

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-1, 1 - \frac{1}{n} \right] \text{ es } \dots$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-1, 1 - \frac{1}{n} \right] = \left(-1, 0 \right] \cup \left(-1, \frac{1}{2} \right] \cup \left(-1, \frac{2}{3} \right] \cup \left(-1, \frac{3}{4} \right] \cup \dots = \left(-1, 1 \right)$$

$1 - \frac{1}{n}$ según crece n ($n \rightarrow \infty$) $\Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$
tiende a uno, pero nunca es uno $\Rightarrow$ abierto.

solución a

⑦

$$(-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\} \text{ cumple:}$$

No monótona porque crece y decrece.

monótona $\Rightarrow$ siempre crece o siempre decrece

No es convergente porque oscila entre -1 y 1

solución c

P.ej: $\sin(n)$ y $\cos(n\pi)$ también podrían ser
contraejemplos: ninguna es monótona ni convergente

⑧

a) Tomando $a_n = \frac{1}{n} > 0$, tenemos que la sucesión es convergente, pues tiene límite y vale cero, luego cumplimos la hipótesis del enunciado. Sin embargo,
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, es decir, la serie no es converg.

solución a = falsa

888

b) FALSA: ya vimos que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ y $\sum \frac{1}{n}$ no converge

Nota: si fuese cierta la b) sería cierta la a)
habría dos ciertas $\Rightarrow$ imposible, es la c)
solución c

9

a) contraejemplo: tomando $a_n = \frac{1}{n^2}$ tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ que es convergente.}$$

$$\text{entonces } \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ que No es convergente}$$

b) contraejemplo: tomando $a_n = \frac{1}{n^3}$ tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \text{ que es convergente}$$

$$\text{entonces } \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ que es convergente.}$$

solución c

criterio de la armónica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ convergente} \Leftrightarrow p > 1$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} f(x); f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ y } x > 0 \\ -x^2 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ y } x < 0 \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

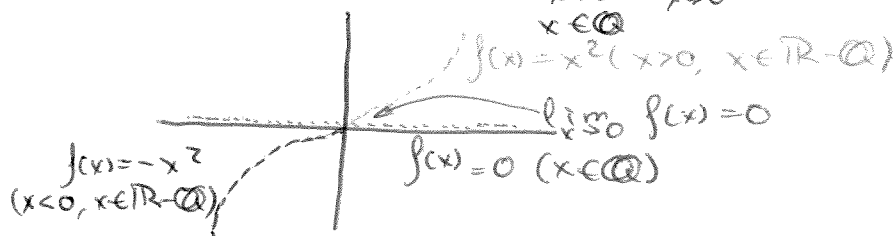
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$$

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\text{Para } x \in \mathbb{Q}, f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$x \in \mathbb{Q}$$

coinciden todos los
límites (laterales
para racionales e irracionales)
 $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$



⑫ solución c (teoría)

⑫ solución a (Teorema de Weierstrass)

⑬ solución c:

por tener $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ resulta que f es continua y sus derivadas primeras y segundas existen y son continuas. Las derivadas f_{ij} existen y son continuas por tanto es diferenciable.

Los candidatos a extremos de f son los que cumplen:

- $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = (0, 0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
una única solución $(x, y) \Rightarrow$ un único candidato (x, y)
- f no diferenciable $\rightarrow$ como sí es diferenciable de aquí no obtenemos candidatos.

solución c: tenemos un único candidato a ser extremo, que finalmente lo será o no: o no existen o existe uno (a lo sumo uno).

⑭ Polinomio de Taylor de grado 2 de la función de dos variables $f(x, y)$ en (x_0, y_0) .

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \end{aligned}$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \text{ en } (0, 0)$$

$$f(x_0, y_0) = f(0, 0) = e^{0-0} = e^0 = 1 \Rightarrow f(x_0, y_0) = 1$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^{x-y} \Rightarrow \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = e^{0-0} = 1 \Rightarrow \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -e^{x-y} \Rightarrow \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -e^{0-0} = -1 \Rightarrow \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = e^{x-y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = e^{x-y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -e^{x-y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = -1$$

$$f(x, y) = 1 + 1 \cdot x + (-1) \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot y^2$$

$$\text{Polinomio de Taylor} = 1 + x - y + \frac{1}{2} x^2 - x \cdot y + \frac{1}{2} y^2$$

solución c

(14) Another way (Empleando No el pol. Taylor de dos variables sino dos pol. Taylor de una var). Esto no puede hacerse siempre en este caso si podemos

$$f(x, y) = e^{x-y} = e^x e^{-y}$$

si hallamos el pol. Taylor de e^x y el de e^{-y} y los multiplicamos, obtendremos el pol. Taylor de la función e^{x-y} .

Pol. Taylor en $a=0$ de la función $f(x)$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

$$f(x) = e^x, a=0$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1; f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1; \dots; f^{(n)}(0) = 1$$

El pol. de Taylor centrado en $a=0$ de la función $f(x) = e^x$ es: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

pol Taylor en $a=0$ de $f(x) = e^x \Rightarrow e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!}}_{\text{pol. grado 2}} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\left. \begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ e^{-y} &= 1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \end{aligned} \right\} e^x e^{-y} = e^{x-y}$$

$$e^x \cdot e^{-y} = \left(1 - y + \frac{y^2}{2!}\right) + \left(x - xy\right) + \left(\frac{x^2}{2!}\right) + \dots$$

sólo consideramos aquellas multiplicaciones entre términos de forma que el resultado no supere grado 2.

Lo obtenido es el pol. de grado 2 de dos variables.

$x^2 y \Rightarrow \text{grado } 3!!!$

$$\text{Polinomio de Taylor} = 1 - y + \frac{y^2}{2} + x - xy + \frac{x^2}{2}$$

(15)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^x x^n \begin{cases} e & x=1 \\ 0 & x \in [0, 1) \end{cases} \rightarrow f(x)$$

la sucesión $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ en $[0, 1]$ por el teorema habitual, como $f(x)$ es discontinua en $[0, 1]$ y como las funciones de la sucesión son continuas en $[0, 1]$ concluimos que No hay convergencia uniforme de la sucesión a $f(x)$ en $[0, 1]$.

solución b)

TEMA 2: NÚMEROS COMPLEJOS

Febrero 95

Las soluciones de $\sqrt[3]{-1}$ son $\{1, i, -1\}$.

Recuerda que el número complejo $z = -1$ puesto en forma polar es $z = 1_\pi$

Tenemos que las raíces cúbicas de $z = -1 = 1_\pi = 1_{180}$ son,

$$\sqrt[3]{1_\pi} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{3} = \frac{(1+2k)\pi}{3} \quad \text{para } k=0,1,2 \end{cases}$$

Así pues, sustituyendo la k obtenemos las tres raíces cúbicas de -1 :

$$k=0 \Rightarrow z_1 = 1_{\pi/3} \quad k=1 \Rightarrow z_2 = 1_\pi = -1 \quad k=2 \Rightarrow z_3 = 1_{5\pi/3}$$

que no coinciden con las dadas en el enunciado (sólo coincide $z_2 = -1$). Así pues la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

Junio 95-Septiembre 95

 $z \neq \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Para acertar esta pregunta lo único que se debe tener claro es que los números reales son un subconjunto de los complejos. Dicho de otra manera, cualquier número real se puede tomar como un número complejo con parte imaginaria nula.

Así pues, por ejemplo,

$$z = 3 \quad \bar{z} = 3$$

Solución : No, Falso

Febrero 96

Si z_1, z_2 y z_3 son las raíces cúbicas complejas de $8i$, entonces $z_1 \cdot z_2 = (z_3)^2$

Ponemos el número complejo en forma polar:

$$z = 8i \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8 \\ \theta = \arctan(1/0) = \arctan(\infty) = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow z = 8_{\pi/2}$$

Por tanto las r raíces cúbicas de $z = 8i = 8_{\pi/2}$ son,

$$\sqrt[3]{8_{\pi/2}} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \varphi = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \frac{(1+4k)\pi}{6} \quad \text{para } k=0,1,2 \end{cases}$$

Así pues, sustituyendo la k obtenemos las tres raíces cúbicas de $8i$:

$$k=0 \Rightarrow z_1 = 2_{\pi/6} \quad k=1 \Rightarrow z_2 = 2_{5\pi/6} \quad k=2 \Rightarrow z_3 = 2_{9\pi/6}$$

y ahora sólo queda operar y comparar los resultados obtenidos:

$$z_1 \cdot z_2 = 2_{\pi/6} \cdot 2_{5\pi/6} = (2+2)_{\pi/6+5\pi/6} = 4_\pi$$

$$(z_3)^2 = z_3 \cdot z_3 = 2_{9\pi/6} \cdot 2_{9\pi/6} = (2+2)_{9\pi/6+9\pi/6} = 4_{18\pi/6} = 4_{3\pi} = 4_\pi$$

Solución : Sí, Verdadero

Ya que π y 3π son el mismo ángulo (180°)

Febrero 96

El elemento inverso de $(a, b) \in \mathbb{C} - \{0\}$ es $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$

Para dividir números complejos en forma cartesiana se multiplica y divide la fracción por el conjugado del denominador

Las notaciones:
 $z = x + iy = (x, y)$
 son equivalentes

Calculamos el elemento inverso de $(a, b) = a + bi$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + bi} &= \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 - abi + abi - b^2 i^2} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2(-1)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \end{aligned}$$

Solución : No, Falso

Junio 96

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $|e^{ix}| = 1$.

Sabemos que la notación exponencial de un número complejo z es $z = \rho e^{i\theta}$ donde ρ es el módulo de z y θ es el argumento de z . Así pues se trata de comparar ambas expresiones:

$$z = \rho e^{i\theta} = e^{ix} = 1 \cdot e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = x \end{cases}$$

O sea que la afirmación del enunciado es verdadera pues efectivamente $|e^{ix}| = 1$.

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 96

$$2(1 - i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Pasamos el primer número complejo (el que está en notación cartesiana) a forma exponencial y vemos si coincide con el segundo número complejo:

$$2(1 - i) = 2 - 2i = \left\{ \begin{aligned} \rho &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = \arctan(-1) = \frac{7\pi}{4} \quad (315^\circ) \end{aligned} \right\} = (2\sqrt{2})_{\frac{7\pi}{4}}$$

Por tanto, al tener ambos número igual módulo e igual argumento la igualdad es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 97

Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es $f(z) = ze^{i\pi/2}$ y $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\}$, entonces $f(A) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$.

Recuerda que:

$$\rho_\theta = \rho e^{i\theta}$$

El conjunto A se refiere a la recta real, es decir $A = \mathbb{R}$. Así pues, cogiendo cualquier elemento $r \in A = \mathbb{R}$ tenemos que:

$$f(r) = re^{i\pi/2} = r_{\pi/2} = ri$$

y está claro que la parte real es nula, $\operatorname{Re}(ri) = 0$, $\forall r \in \mathbb{R}$. Por lo que efectivamente,

$$f(A) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$$

y la afirmación del enunciado es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

Junio 97
Septiembre 02

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = i$$

Para hacer los cálculos hemos tenido en cuenta que:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{44} + i^{45} + i^{46} + i^{47} + i^{48} + i^{49} + i^{50} =$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \dots + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 =$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro quedando los tres últimos ($n = 48, 49$ y 50):

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \dots + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + 1 + i - 1 =$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = 1 + i - 1 = i$$

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 97

Suponemos que el 0 se refiere al $0+0i$

La recta $y = x$ es el lugar geométrico de los afijos del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + iz = 0\}$.

Sea $z = x + iy$,

$$\operatorname{Re}(z) + iz = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(x + iy) + i(x + iy) = 0 \Rightarrow x + ix + (-1)y = 0 \Rightarrow$$

$$x - y + xi = 0 + 0i \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Identificando los coeficientes de la parte real y de la parte imaginaria

Por tanto tenemos que el conjunto del enunciado está compuesto por un único elemento que es el $0+0i$, es decir $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + iz = 0\} = \{0 + 0i\}$. Así pues, la recta $y = x$ no es el lugar geométrico del afijo del complejo $0+0i$, por lo que la afirmación es falsa

Solución : No, Falso

Febrero 98

$$\forall K \in \mathbb{Z}, e^{ik\pi/2} = (-1)^k$$

Teniendo en cuenta que el número complejo $z = -1$ puesto en forma polar es $z = 1_{\pi/2}$ operamos y obtenemos:

Recuerda que:

$$\rho_\theta = \rho e^{i\theta}$$

$$e^{ik\pi/2} = (e^{i\pi/2})^k = (1 \cdot e^{i\pi/2})^k = (1_{\frac{\pi}{2}})^k = i^k$$

Solución : No, Falso

$$\text{Un valor de } \ln(1+i) \text{ es } \ln\sqrt{2} - i\frac{15\pi}{4}$$

Vamos a calcular todos los valores de $\ln(1+i)$:

$$z = 1+i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

y la expresión de todos los logaritmos del complejo z son :

$$\ln z = \ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i$$

y ahora igualamos :

$$\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i = \ln\sqrt{2} - i\frac{15\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i = -i\frac{15\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i = -i\frac{15\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{15\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi = -\frac{\pi}{4} - \frac{15\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi = -\frac{16\pi}{4} \Rightarrow 2k = -\frac{16}{4} \Rightarrow k = -2$$

por tanto para $k = -2$ nos queda el valor del enunciado.

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 98

Si $z \in \mathbb{C}$ tiene un módulo unidad, entonces $|1+z|^2 + |1-z|^2$ es un número real.

Observación:

Que z tenga módulo unidad es irrelevante en esta pregunta. Aunque z no tuviese módulo unidad la afirmación seguiría siendo igual de verdadera

Las expresiones $|1+z|$ y $|1-z|$ son módulos de números complejos y, por tanto, son siempre números reales no negativos. Así pues la expresión $|1+z|^2 + |1-z|^2$ es un número real siempre.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 99

$$\overline{e^{ix}} = e^{i(-x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ (El símbolo } \bar{z} \text{ representa el conjugado de } z).$$

Esto es una definición

En forma polar el conjugado de un número complejo z se define como:

$$\text{Sea } z \in \mathbb{C}, \text{ si } z = \rho_{\theta} \text{ entonces } \bar{z} = \overline{\rho_{\theta}} = \rho_{-\theta}$$

Así que en forma exponencial, de manera equivalente, tenemos que:

$$\text{Sea } z \in \mathbb{C}, \text{ si } z = \rho e^{i\theta} \text{ entonces } \bar{z} = \overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{i(-\theta)}$$

Por tanto la afirmación del enunciado es verdadera.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 99

Los números complejos z , tales que $z = \sqrt[n]{1+i}$, tienen sus argumentos en progresión aritmética.

El enunciado es verdadero para cualquier raíz enésima de cualquier número $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

En general las raíces enésimas de un número complejo cualquiera $z = \rho_{\theta}$ se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_{\theta}} = r_{\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

así que, en nuestro caso, tenemos que los argumentos se pueden poner de la forma:

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

que se trata de una progresión aritmética de primer término $a_0 = \theta/n$ y diferencia $d = 2\pi/n$.

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 99

Si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, los valores de $\sqrt[n]{z} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

En forma polar $z = \rho_{\theta} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ significa que $\theta \neq 0$ y $\theta \neq \pi$.

Ahora bien, en general las raíces enésimas de un número complejo en forma polar ρ_{θ} se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_{\theta}} = r_{\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

y para que $\sqrt[n]{z} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ se debe cumplir que $\varphi \neq 0$ y $\varphi \neq \pi$. Esto es siempre así ya que no existe un natural k que haga $\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi$ cuando $\theta \neq 0$ ó $\theta \neq \pi$. Se puede comprobar esto utilizando la ecuación de más arriba que relaciona ambas variables. Por tanto la afirmación del enunciado es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

Recuerda:
Una progresión aritmética viene definida por

$$a_k = a_0 + kd$$

donde,

a_k : término k-ésimo

a_0 : primer término

d : diferencia

Septiembre 99

$$|e^{-2z}| < 1 \text{ si y sólo si } \operatorname{Re}(z) \geq 0.$$

La proposición es falsa y lo veremos con el siguiente contraejemplo. Sea $z = i$ que claramente cumple la condición de la derecha, $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ que tomaremos como hipótesis. Sabemos que la notación exponencial de un número complejo z es $z = \rho e^{i\theta}$ donde ρ es el módulo de z y θ es el argumento de z . Así pues se trata de comparar ambas expresiones:

$$z = \rho e^{i\theta} = e^{-2z} = e^{-2i} = 1 \cdot e^{-2i} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -2 \end{cases}$$

Así pues el módulo es igual a 1 y por tanto no se cumple la tesis de la izquierda. Al no cumplirse una de las dos implicaciones la proposición es falsa.

Observación:
Si la condición de la izquierda hubiese sido

$$|e^{-2z}| \leq 1$$

la afirmación del enunciado sería cierta.

Solución : No, Falso

Febrero 00

$$|\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Sea $z = a + bi$ y, por tanto, $\bar{z} = a - bi$. Operamos :

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 - abi + abi - b^2 i^2} = \sqrt{a^2 - b^2(-1)} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}|$$

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 00

$$z^3 + z + 1 = 0 \text{ para } z = i.$$

Para comprobarlo basta con sustituir en la ecuación:

$$i^3 + i + 1 = i \cdot i^2 + i + 1 = i(-1) + i + 1 = -i + i + 1 = 1$$

Solución : No, Falso

Septiembre 00

Si $a \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces $z^a \notin \mathbb{R}$.Si escogemos $a = 2 \in \mathbb{R}$ y $z = i \in \mathbb{C}$ tenemos que:

$$z^a = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$$

Por tanto el ejemplo propuesto cumple las hipótesis del enunciado pero no la tesis. Así pues, la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

Febrero 01

$$(1)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right), k = 0, \dots, n-1$$

Recuerda que las siguientes expresiones son equivalentes:

$$e^x = \exp(x)$$

Se trata de ver cuales son las raíces enésimas de la unidad.

En general las raíces enésimas de un número complejo ρ_θ se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

así que, en nuestro caso, tenemos que las raíces enésimas de la unidad son,

$$\sqrt[n]{1_0} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{1} = 1 \\ \varphi = \frac{0 + 2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

que puestas en la forma exponencial quedan

$$r_\varphi = r e^{\varphi i} = r \exp(\varphi i) = 1 \cdot \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right) = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right)$$

que es justamente la expresión del enunciado.

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 01

Si $z \in \mathbb{C}$ y $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$, entonces $z \in \mathbb{R}$.

Para dividir números complejos en forma cartesiana se multiplica y divide la fracción por el conjugado del denominador que en este caso es $-i$

La afirmación es falsa y se puede demostrar tomando como contraejemplo $z = i$:

$$z = i \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1(-i)}{i \cdot (-i)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{-i^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{-(-1)}\right) = \operatorname{Re}(-i) = 0$$

pero sin embargo $z = i \notin \mathbb{R}$.

Solución : No, Falso

Febrero 02

Cualquier $z \in \mathbb{C}$ tiene n raíces n -ésimas distintas.

Existe un número complejo para el que no se cumple la afirmación. Se trata del complejo $z = 0$ que tiene n raíces n -ésimas pero son todas iguales (todas iguales a cero). Por tanto la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

Febrero 03

$$\sum_{i=1}^{40} i^n = 0.$$

Para hacer los cálculos hemos tenido en cuenta que:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

$$\sum_{n=1}^{40} i^n = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{37} + i^{38} + i^{39} + i^{40}$$

$$\sum_{n=1}^{40} i^n = i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \dots + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro (del 1º al 4º, del 5º al 8º, ..., del 37º al 40º):

$$\sum_{n=1}^{40} i^n = \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \dots + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 = 0$$

Solución : Sí, Verdadero

Septiembre 03

El lugar geométrico de los números complejos que verifican $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ es el eje OY

Fíjate que si tomamos como lugar geométrico el eje OY menos el $0+0i$ la afirmación ya sería cierta. Es decir, el único punto que no cumple la condición del enunciado es el $0+0i$

Para que fuese cierta al eje OY habría que quitarle el $z = 0+0i$ ya que para este número complejo ni siquiera está definido su inverso $\frac{1}{z}$ con respecto al producto de complejos. Por tanto la afirmación es falsa. Para el resto de los números del eje OY sí que se cumple la condición del enunciado.

Solución : No, Falso

Septiembre 03

$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ es el eje OY

Sea $z = a + bi$:

$$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \Rightarrow |a + bi| \leq |a| + |b| \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| \Rightarrow$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la desigualdad

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \leq (|a| + |b|)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \Rightarrow a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2|a||b|$$

y la anterior desigualdad se cumple siempre pues $2|a||b| \geq 0$.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 04

Fíjate que no es necesario calcular explícitamente las raíces cuadradas de $3 - 4i$

Recuerda: $i^2 = -1$

$$\sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i)$$

Lo más rápido es aplicar la definición de raíz cuadrada $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$:

$$(2 - i)^2 = (2 - i)(2 - i) = 4 - 2i - 2i + i^2 = 3 - 4i$$

$$(-2 + i)^2 = (-2 + i)(-2 + i) = 4 - 2i - 2i + i^2 = 3 - 4i$$

Así pues las raíces cuadradas de $3 - 4i$ son los números $2 - i$ y $-2 + i$. Por tanto, la afirmación del enunciado es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 04

Para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ los argumentos de las raíces n -ésimas de z forman una progresión aritmética.

En general las raíces n -ésimas de un número complejo cualquiera $z = \rho_\theta$ se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

así que, en nuestro caso, tenemos que los argumentos se pueden poner de la forma:

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

que se trata de una progresión aritmética de primer término $a_0 = \theta/n$ y diferencia $d = 2\pi/n$

Solución : Sí, Verdadero

Febrero 05

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = \quad \text{a) } 1 \quad \text{b) } -1 \quad \text{c) } i$$

Para hacer los cálculos hemos tenido en cuenta que:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{50} i^n &= i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{44} + i^{45} + i^{46} + i^{47} + i^{48} + i^{49} + i^{50} = \\ \sum_{n=0}^{50} i^n &= 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \dots + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 = \end{aligned}$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro quedando los tres últimos ($n = 48, 49$ y 50):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{50} i^n &= \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \dots + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + 1 + i - 1 = \\ \sum_{n=0}^{50} i^n &= 1 + i - 1 = i \end{aligned}$$

Solución : c)

Febrero 05

Los números complejos que verifican la ecuación $\bar{z} = -z$ forman:

- a) el eje real.
- b) el eje imaginario.
- c) ninguna de las anteriores.

Sea $z = x + yj$

$$\bar{z} = -z \Rightarrow \overline{(x + yj)} = -(x + yj) \Rightarrow x - yj = -x - yj \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

O sea, se trata del eje Y (eje imaginario).

Solución : b)

Septiembre 05

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = \quad \text{a) } 1 \quad \text{b) } 2e^{i\pi/4} \quad \text{c) } 2e^{-i\pi/4}$$

Hay que tener claro que en total hay 3001 términos en el sumatorio

Para hacer los cálculos hemos tenido en cuenta que:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{2996} + i^{2997} + i^{2998} + i^{2999} + i^{3000} =$$

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \dots + 1 + i - 1 - i + 1 =$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro (en total $3000/4=750$ grupitos de cuatro términos) quedando sin anular solamente el último ($n=3000$):

$$\sum_{n=0}^{3000} i^n = \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \dots + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + 1 = 1$$

Solución : c)

Septiembre 05

Indique cuál de estos números complejos tiene todas sus raíces cuartas sobre las bisectrices de los cuadrantes del plano.

- a) $e^{i\pi/4}$.
- b) $e^{i3\pi/4}$.
- c) -1 .

Tenemos que las raíces cuartas de $z = -1 = 1_\pi = 1_{180}$ son,

$$\sqrt[4]{1_\pi} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{(1+2k)\pi}{4} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

Así pues, sustituyendo la k obtenemos las cuatro raíces cuartas de -1 :

$$k=0 \Rightarrow z_1 = 1_{\pi/4} \quad k=1 \Rightarrow z_2 = 1_{3\pi/4}$$

$$k=2 \Rightarrow z_3 = 1_{5\pi/4} \quad k=3 \Rightarrow z_4 = 1_{7\pi/4}$$

que coinciden con los ángulos de las bisectrices (45° , 135° , 225° y 315°).

Solución : c)

Febrero 06

Todo número complejo no nulo tiene:

- a) n raíces n -ésimas complejas distintas.
- b) n raíces n -ésimas reales distintas.
- c) al menos una raíz n -ésima no real.

Nota:

El único número complejo que tiene todas sus raíces n -ésimas iguales es el nulo $0 + 0i$

La respuesta correcta es la a). Por teoría sabemos que cualquier número complejo (exceptuando el nulo $0 + 0i$) tiene n raíces n -ésimas distintas que vienen dadas por la siguiente expresión

$$\sqrt[n]{z} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Además, geométricamente, estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados con centro en el origen.

Solución : a)

Febrero 06

Si z es un número complejo, entonces $z - \bar{z} =$

- a) $2 \operatorname{Re} z$.
- b) $2 \operatorname{Im} z$.
- c) $2i \operatorname{Im} z$.

Sea $z = a + bi$, operando:

$$z - \bar{z} = a + bi - (\overline{a + bi}) = a + bi - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi = 2i \operatorname{Im} z$$

Solución : c)

Septiembre 06

Sea $z \in \mathbb{C}$. Si:

- a) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ se tiene que $|z| = 2$ y que $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$
- b) $z = 3 - 4i$ se tiene que $|z| = \sqrt{5}$ y que $\arg(z) = \arctg \frac{4}{3}$
- c) Ninguna de las anteriores.

La respuesta a) no es correcta porque el número complejo se encuentra en el tercer cuadrante ya que su parte real es negativa y su parte imaginaria también es negativa. Es decir, su argumento debería estar entre π y $\frac{3\pi}{2}$ (es decir, entre 180° y 270°) y sin embargo nos dicen que es $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (que son 45°) lo cual es imposible.

La respuesta b) tampoco es correcta por que el modulo de z es 5, y no $\sqrt{5}$. Efectivamente:

$$z = 3 - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Solución : c)

Importante:

Recuerda que la función $\arctg x$ tiene dos ángulos posibles para cada x . ¡pero en la calculadora sólo sale uno de ellos!, el otro se obtiene sumando π . Para saber cual de ellos es el verdadero argumento de nuestro número complejo nos tenemos que fijar en el cuadrante donde está el complejo

Febrero 07

Sea $z = re^{i\alpha}$ un número complejo no nulo. Entonces

- a) $-z = re^{-i\alpha}$.
 b) $-z = re^{i(\alpha+\pi)}$.
 c) $-z = re^{i(\alpha+\pi/2)}$.

Recuerda que:

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\text{Operando: } re^{i(\alpha+\pi)} = re^{i\alpha}e^{i\pi} = re^{i\alpha}(-1) = -re^{i\alpha} = -z$$

Solución : b)

Febrero 07

Las raíces enésimas de $1+i$ son

- a) $\sqrt[n]{2} e^{i\frac{\pi/4 + 2k\pi}{n}}$, con $k=1, \dots, n-1$
 b) $\sqrt[n]{2} e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{n}}$, con $k=0, \dots, n-1$
 c) $\sqrt[n]{2} e^{i\frac{\pi/4 + 2k\pi}{n}}$, con $k=0, \dots, n-1$

Lo primero que hacemos es pasar el número complejo a forma polar:

Recuerda que la forma polar y la forma exponencial son equivalentes:

$$\rho_\theta = \rho e^{i\theta}$$

$$w_1 = 1+i \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \text{atan}(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{cases} \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}_{\pi/4} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

Ahora utilizamos la fórmula de la raíz enésima:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = re^{i\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{para } k=0,1,\dots,n-1$$

que aplicada a nuestro caso queda:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} = re^{i\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{\sqrt{2}} = \sqrt[n]{2} \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi/4 + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{para } k=0,1,\dots,n-1$$

Luego la solución correcta es la c).

Solución : c)

TEST DE FMT2 - FEBRERO 2000

1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos acotados no vacíos, $A \subset B$, $A \neq B$, entonces $\sup(A) < \sup(B)$

Ponemos el siguiente ejemplo: $A = (1,3)$ $B = (0,3)$

Estos conjuntos cumplen las hipótesis del enunciado ya que:

- A y B son acotados, evidentemente.
- $(1,3) \subset (0,3) \Rightarrow A \subset B$
- $(1,3) \neq (0,3) \Rightarrow A \neq B$

Sin embargo no cumplen la tesis pues:

$$\sup(A) = \sup(B) = 3$$

Por tanto la afirmación del enunciado es falsa.

Solución : No, Falso

2. Existe una biyección entre los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ tiene cardinal infinito numerable (equipotente a $\mathbb{N}$), sin embargo los números reales tienen cardinal infinito no numerable por lo que no puede existir una biyección entre estos dos conjuntos ya que tienen distinto cardinal.

Solución : No, Falso

3. El conjunto $A = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, d_u)$

Para estudiar si A es cerrado vamos a utilizar el siguiente criterio:

$$A \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \text{Fr}(A) \subset A$$

En nuestro caso tenemos que el punto $0 \in \text{Fr}(A)$ ya que en cualquier bola abierta de centro el punto 0 hay puntos de A y puntos de $\mathbb{R} - A$. Como $0 \notin A$ tenemos que $A \not\subset \text{Fr}(A)$. Por tanto, A no es cerrado. Así pues la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

Recuerda que en $\mathbb{R}$
con la distancia usual
las bolas abiertas son
intervalos abiertos

$$4. \quad |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Sea $z = a + bi$ y, por tanto, $\bar{z} = a - bi$. Operamos :

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 - abi + abi - b^2 i^2} = \sqrt{a^2 - b^2(-1)} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}|$$

Solución : Sí, Verdadero

$$5. \quad z^3 + z + 1 = 0 \quad \text{para } z = i$$

Basta con sustituir en la ecuación:

$$i^3 + i + 1 = i \cdot i^2 + i + 1 = i(-1) + i + 1 = -i + i + 1 = 1 \neq 0$$

Solución : No, Falso

Fíjate que todas son inmediatas debido a las propiedades del valor absoluto.

6. La aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = |x|$ es una norma en el espacio vectorial $\mathbb{R}$.

Vamos a demostrar que f es una norma comprobando que cumple las cuatro condiciones de norma:

- 1) $|x| > 0$ si $x \neq 0$
- 2) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = |0| = 0$
- 3) $|\lambda x| = |\lambda| |x|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- 4) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Así pues f es, efectivamente, una norma.

Solución : Sí, Verdadero

7. Si la función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces es monótona.

Como f es inyectiva se cumple que si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, y por ello la función debe ser siempre creciente o siempre decreciente, es decir, monótona. Fíjate que si f tuviese un extremo, inmediatamente dejaría de ser inyectiva al existir dos preimágenes con la misma imagen.

Solución : Sí, Verdadero

8. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + \sin x$ es uniformemente continua.

En este caso es muy útil aplicar la propiedad que nos dice que si la derivada de una función está acotada entonces la función es uniformemente continua.

Calculando la derivada de $f(x)$ nos queda:

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

Claramente tenemos que $f'(x)$ es acotada entre 0 y 2 ya que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 1-1 \leq 1 + \cos x \leq 1+1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \cos x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 2$$

así pues al estar $f'(x)$ acotada podemos afirmar que $f(x)$ es uniformemente continua.

Solución : Sí, Verdadero

9. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$, entonces f es acotada.

La afirmación es verdadera y bastante intuitiva (basta dibujar una gráfica continua, sin levantar el lápiz del papel, con una asíntota horizontal para comprobar que estamos obligados a alcanzar un máximo y un mínimo absolutos en $[a, \infty)$). De todas formas exponemos a continuación la demostración rigurosa de porqué esto es así:

Recurrimos la definición formal de límite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \text{ si } \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \text{ tal que } \forall x > M, |f(x) - k| < \varepsilon$$

Tomando, por ejemplo $\varepsilon = 1$, se sabe que existe un $M > 0$ tal que si $x > M \Rightarrow |f(x) - l| < 1$ esto es, $f(x) \in (l-1, l+1)$ con lo que $f([M, +\infty)) \subset (l-1, l+1)$.

Por otra parte, como f es continua en el intervalo compacto $[a, M]$, por el teorema de Weierstrass existen y_1 mínimo e y_2 máximo tales que $f([a, M]) \subset [y_1, y_2]$. Por tanto:

$$f([a, +\infty)) = f([a, M]) \cup f([M, +\infty)) \subset [y_1, y_2] \cup (l-1, l+1)$$

Lo que prueba que f está acotada en $[a, \infty)$.

Solución : Sí, Verdadero

10. Sea la sucesión (a_n) con $a_n = \frac{1^n + (-1)^n}{2}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Dando valores a la n nos queda lo siguiente:

$$a_1 = \frac{1^1 + (-1)^1}{2} = 0, \quad a_2 = \frac{1^2 + (-1)^2}{2} = 1, \quad a_3 = \frac{1^3 + (-1)^3}{2} = 0, \quad a_4 = \frac{1^4 + (-1)^4}{2} = 1$$

Por lo que $a_n = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$ y claramente $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Solución : Sí, Verdadero

Fijate que, al ser continua, no existen asíntotas verticales

$$11. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{\frac{n^2+2}{n-3}} = e^2$$

Para calcular el límite de una sucesión lo primero que se debe hacer es el paso al límite, sustituyendo la n por infinito :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{\frac{n^2+2}{n-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n-3}} = 1^\infty$$

en este caso aparece una indeterminación que vamos a eliminar aplicando la fórmula,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1^\infty \quad \Rightarrow \quad L = e^A \quad \text{con} \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) b_n$$

por tanto el problema se reduce a calcular A :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} - 1 \right) \left(\frac{n^2+2}{n-3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n-1}{n-1} \cdot \frac{n^2+2}{n-3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} \cdot \frac{n^2+2}{n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4}{n^2-3n-n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4}{n^2-4n+3} = 2 \end{aligned}$$

y, una vez calculado A , el límite queda:

$$L = e^A = e^2$$

Solución : Sí, Verdadero

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} = 1$$

Recuerda que:

$$\sin \varepsilon \sim \varepsilon$$

siempre que $\varepsilon \rightarrow 0$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} = \infty^0 \quad \text{así pues} \quad L = e^\lambda \quad \text{donde}$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1/x)}{1/x} = [L'H] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$L = e^\lambda = e^0 = 1$ por lo que el enunciado es verdadero.

Solución : Sí, Verdadero

13. La sucesión de números reales (r^n) es convergente si y sólo si $|r| < 1$.

Supongamos $r = 1$ entonces nos queda la sucesión $(1)^n = 1, 1, 1, 1, \dots$ que es una sucesión constante y, por tanto, convergente con límite 1.

Esto quiere decir que:

La sucesión (r^n) es convergente si y sólo si $|r| \leq 1$.

Por lo que la afirmación del enunciado es falsa.

Solución : No, Falso

14. Sea la función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Fíjate que el enunciado no nos exige que la función sea continua, así pues podemos elegir, por ejemplo, la función:

$$f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Para esta función se cumplen las hipótesis del enunciado ya que $f(1) = -1 < 0$ y $f(3) = 1 > 0$.

Sin embargo, no se cumple la tesis ya que no existe ningún $\xi \in [1, 3]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Por tanto la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

NOTA: Si el enunciado exigiese que la función fuese continua entonces tendríamos el Teorema de Bolzano y la afirmación sería verdadera.

15. Sean la función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y el punto $a \in \mathbb{R}^n$. Si existe $D_{\vec{v}}f(a) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces f es diferenciable en a .

Tenemos que saber por teoría que la afirmación del enunciado es falsa. De hecho la afirmación correcta es justo al contrario, es decir, "Si f es diferenciable en a entonces existe $D_{\vec{v}}f(a) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ".

Solución : No, Falso

16. Toda función real de n variables, diferenciable en un punto $a \in \mathbb{R}^n$ admite derivadas parciales de primer orden en a .

Acabamos de decir en la pregunta anterior que “si una función es diferenciable en un punto a entonces existen todas las derivadas direccionales de la función en a ”. Las derivadas parciales no son más que derivadas direccionales. Por tanto, por supuesto que la función admite derivadas parciales en a .

Solución : Sí, Verdadero

17. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, entonces los extremos relativos de f y de $g = h \circ f$ se alcanzan en los mismos puntos.

El enunciado es verdadero.

Sea un punto $a \in \mathbb{R}^n$ donde f alcanza un extremo, por ejemplo, un máximo. En ese caso $f(a) > f(x) \quad \forall x \in B_r(a)$. Ahora bien,

$$f(a) > f(x) \Rightarrow h(f(a)) > h(f(x)) \Rightarrow (h \circ f)(a) > (h \circ f)(x) \Rightarrow g(a) > g(x)$$

El primer paso de la línea anterior es cierto ya que $h(x)$ es estrictamente creciente.

Solución : Sí, Verdadero

18. Toda sucesión de números reales, alternada y convergente, tiene límite cero.

Sea una sucesión de términos positivos $a_n = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

Llamamos sucesión alternada a la sucesión $x_n = (-1)^n a_n = \{a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots\}$

Supongamos que la sucesión a_n es convergente, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = \pm l \in \mathbb{R} \text{ o sea la sucesión alternada } x_n \text{ será oscilante entre } l \text{ y } -l.$$

Por tanto, la única forma de que x_n converja es que $l = 0$.

Solución : Sí, Verdadero

19. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} + 4}{n^{\beta} + 7}$ es convergente si y solamente si $\beta - \alpha > 1$.

Utilizamos el criterio de comparación del cociente. Para ello tomamos como serie patrón la serie armónica generalizada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{\alpha} + 4}{n^{\beta} + 7}}{\frac{1}{n^{\beta - \alpha}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta - \alpha}(n^{\alpha} + 4)}{n^{\beta} + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta - \alpha + \alpha} + 4n^{\beta - \alpha}}{n^{\beta} + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta} + 4n^{\beta - \alpha}}{n^{\beta} + 7} = 1$$

por tanto, al ser el límite finito ambas series tienen el mismo carácter. Como la serie patrón $\sum b_n$ es la serie armónica generalizada sabemos que esta serie converge cuando el exponente del denominador es mayor que uno. Aplicado a nuestro caso esto quiere decir que $\sum b_n$ converge cuando $\beta - \alpha > 1$. Por tanto la afirmación del enunciado es correcta.

Solución : Sí, Verdadero

20. Las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$, en donde $(a_n) \subset \mathbb{R}$, tienen el mismo radio de convergencia.

Vamos a calcular el radio de convergencia de la primera serie:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n} \right|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. (indeterminación ∞^0 que hay que resolver)

Como se puede observar el radio de convergencia de la primera serie coincide con el de la segunda, por tanto el enunciado es verdadero.

Solución : Sí, Verdadero

TEST DE FMT2 - FEBRERO 2001

1. Sea X un conjunto y d_d la distancia discreta. Entonces (X, d_d) es un espacio métrico completo.

Las únicas sucesiones de Cauchy en un espacio métrico con la distancia discreta son las sucesiones constantes (por ejemplo la sucesión $2, 2, 2, 2, \dots$).

Ahora bien, las sucesiones constantes son siempre convergentes.

Por tanto, con esta distancia, las sucesiones de Cauchy son siempre convergentes y esto significa, por definición, que el espacio métrico es completo.

Solución : Sí, Verdadero

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+2}$ es convergente.

Se trata de una serie alternada así que aplicamos el Criterio de Leibniz que dice,

$$\sum (-1)^n a_n \text{ es convergente} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

en nuestro caso nos queda que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0 \Leftrightarrow \text{La serie no es convergente.}$$

Solución : No, Falso

3. Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Se trata de la Regla de L'Hopital, pero no está correctamente formulada ya que faltan algunas de las hipótesis. Por ejemplo dentro de las hipótesis se debe exigir que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

Además también se debe exigir que $g'(x) \neq 0$.

Por tanto la afirmación del enunciado es falsa.

Solución : No, Falso

Recuerda:

Un espacio métrico es completo si todas sus sucesiones de Cauchy son convergentes.

El resultado del límite es el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado

4. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, |f(x)| < 1$.

$$\text{Entonces } \sum_{n=0}^{\infty} (f(x))^n = \frac{1}{1-f(x)}.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se trata de una serie geométrica y como en cada punto se cumple que f es menor que 1 tenemos que la serie geométrica es convergente y por tanto conocemos su suma dada por la siguiente expresión:

$$\text{Si } |r| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Por tanto la afirmación del enunciado es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

5. En $(\mathbb{R}, d_u)$ la unión finita de conjuntos conexos es un conexo.

Vamos a construir un contraejemplo para demostrar que la afirmación es falsa:

- Sea $A = (1, 2)$ conexo en $\mathbb{R}$ por tratarse de un intervalo de la recta real.
- Sea $B = (3, 4)$ conexo en $\mathbb{R}$ por idéntica razón.

Sin embargo la unión de ambos conjuntos $C = A \cup B = (1, 2) \cup (3, 4)$ no es conexo en $\mathbb{R}$ pues no se trata de un intervalo ni de un punto aislado.

Por tanto hemos demostrado que la unión finita de conjuntos conexos no siempre es un conjunto conexo, por lo que el enunciado es falso.

Solución : No, Falso

6. Sean (X, d) , (X', d') espacios métricos y $f: X \rightarrow X'$ continua. Entonces, si $A \subset X'$ es abierto, entonces $f(f^{-1}(A))$ es cerrado.

La proposición es falsa y para demostrarlo ponemos el siguiente contraejemplo:

- $(X, d) = (X', d') = (\mathbb{R}, d_u)$.
- Escogemos la función identidad $f(x) = x$.
- Por último elegimos el siguiente conjunto abierto de $\mathbb{R}$ $A = (1, 2)$.

Pues bien, con estos datos tenemos que:

- $f^{-1}((1, 2)) = (1, 2)$
- $f(f^{-1}((1, 2))) = (1, 2)$

que contradice el enunciado pues transforma un abierto en otro abierto a través de $f(f^{-1}(A))$ por lo que la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

Para estas operaciones te será muy útil una pequeña gráfica a modo de esquema

7. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ entonces f es continua en a .

Se trata de una de las definiciones de continuidad de una función f en un punto a .

Solución : Sí, Verdadero

Recuerda que las siguientes expresiones son equivalentes:

$$e^x = \exp(x)$$

8. $(1)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right), k = 0, \dots, n-1.$

Se trata de ver cuales son las raíces enésimas de la unidad.

En general las raíces enésimas de un número complejo ρ_θ se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

así que, en nuestro caso, tenemos que las raíces enésimas de la unidad son,

$$\sqrt[n]{1_0} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{1} = 1 \\ \varphi = \frac{0 + 2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

que puestas en la forma exponencial quedan

$$r_\varphi = r e^{\varphi i} = r \exp(\varphi i) = 1 \cdot \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right) = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right)$$

que es justamente la expresión del enunciado.

Solución : Sí, Verdadero

9. Entre $(-1, 1)$ y $\mathbb{R}$ existe una biyección.

Esta afirmación es cierta. De hecho existe una biyección entre $\mathbb{R}$ y cualquier intervalo de la forma (a, b) . Sin embargo demostrar esto no es trivial (y menos en un examen y para responder una pregunta de test) por lo que conviene saberlo de antemano.

Solución : Sí, Verdadero

10. Si $y_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$.

Para calcular el límite de una sucesión lo primero que se debe hacer es el paso al límite, sustituyendo la n por infinito :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(-1)^n n}\right)^{(-1)^n n} = 1^\infty$$

en este caso aparece una indeterminación que vamos a eliminar aplicando la fórmula,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1^\infty \quad \Rightarrow \quad L = e^A \quad \text{con} \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n$$

por tanto el problema se reduce a calcular A :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(-1)^n n} - 1\right)((-1)^n n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{(-1)^n n} = 1$$

y, una vez calculado A , el límite queda:

$$L = e^A = e^1 = e$$

Solución : Sí, Verdadero

11. El conjunto de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n! (x-1)^n$ es $C = \{1\}$.

Calculamos el radio de la serie de potencias dada:

$$\frac{1}{R} = \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

con lo que el radio queda:

$$R = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como el radio de convergencia es cero, $R = 0$, la serie sólo converge en su centro que, en este caso, se encuentra en el punto $x = 1$. Por tanto el conjunto de convergencia está formado por un único punto $C = \{1\}$. Así pues, la afirmación del enunciado es correcta.

Solución : Sí, Verdadero

12. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = a$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = a$.

Ponemos el siguiente contraejemplo:

- Escogemos la siguiente función $f(x) = \text{sen}(n\pi)$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}(n\pi) = 0$ (pues n sólo toma valores enteros positivos donde el seno siempre es nulo, por tanto el límite es cero).
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sen}(x\pi)$ no existe (es oscilante pues en el infinito la función seno puede tomar cualquier valor entre -1 y 1).

Por lo que la afirmación del enunciado es falsa.

Solución : No, Falso

13. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

La afirmación es incorrecta ya que $f(x) = x^2$ sí es uniformemente continua en $(0, 1)$. La demostración es la siguiente:

Para cualesquiera que sean los puntos x, y de $(0, 1)$ se verifica que

$$|f(x) - g(x)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2|x - y|$$

y, por tanto, dado un $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta < \varepsilon/2$ para asegurar que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para cualquier par de puntos x, y de $(0, 1)$ tales que $|x - y| < \delta$.

Solución : No, Falso

14. Sean $A \subset \mathbb{R}^2$, A abierto y no vacío, y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in C^2(A)$, entonces se cumple que $\forall a \in A, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

Se trata de uno de los posibles formas de enunciar el Teorema de Schwarz. El enunciado es totalmente correcto (tanto las hipótesis como la tesis), así que la afirmación es verdadera.

Solución : Sí, Verdadero

15. Sea $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{-1}$. Entonces, f es continua en su dominio.

La función es una hipérbola equilátera

$f(x) = \frac{1}{x}$ es una función racional, cuyo denominador sólo se anula en $x = 0$. Sabemos que las funciones racionales existen y son continuas en toda la recta real excepto los puntos en los que se anula su denominador. Ahora bien como, en este caso, el punto $x = 0$ está excluido del dominio de la función podemos afirmar que $f(x)$ es continua en todo su dominio

Solución : Sí, Verdadero

16. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, y $s = \sup A$. Entonces, $\forall \delta > 0, \exists a \in A \mid s - \delta < a \leq s$.

Vamos a razonarlo por reducción al absurdo. Supongamos que existe un δ para el cual no hay ningún $a \in A$ cumpliendo que $s - \delta < a$. De esta forma, si no hay ningún elemento del conjunto A mayor que $s - \delta$ quiere decir que $s - \delta$ es, al menos, cota superior de A , lo que nos lleva a una contradicción pues s es el supremo de A y $s - \delta < s$. Por tanto la respuesta es verdadera ya que para cualquier δ que elijamos siempre va a existir un $a \in A$ cumpliendo que $s < s - \delta < a$.

Solución : Sí, Verdadero

17. La ecuación $ax = b$, donde $a, b, x \in \mathbb{Z}$, tiene solución única.

Demostraremos que la afirmación es falsa mediante el siguiente contraejemplo:

Sea $a = 2$, $b = 3$ con lo que la ecuación dada queda:

$$2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Por tanto la ecuación propuesta no tiene solución entera.

Solución : No, Falso

18. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$. Entonces, existe $f'(0)$.

Tenemos que
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Así que podemos acotar esta función mediante la función $g(x) = x$,

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| < |x| \quad \forall x \neq 0$$

y ahora, utilizando la regla del emparedado, podemos afirmar que,

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{n \rightarrow 0} x = 0$$

luego, al ser el límite finito, f es derivable en 0 (es decir, existe $f'(0)$) y además, aunque no lo pedían, hemos averiguado su valor, $f'(0) = 0$.

Solución : Sí, Verdadero

19. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en A . Si $\forall x \in A \quad f'(x) = 0$, entonces $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A \quad f(x) = k$.

La afirmación es falsa y para demostrarlo construimos el siguiente contraejemplo:

- Elegimos el siguiente conjunto $A = (-2, -1) \cup (1, 2)$
- Y elegimos la siguiente función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En el ejemplo se cumplen claramente las hipótesis pero no se cumple que $f(x) = k \quad \forall x \in A$ por tanto la afirmación es falsa.

Observación: La proposición hubiese sido cierta si A hubiese sido conexo.

Solución : No, Falso

20. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y el sistema de ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ no tiene solución, entonces f no tiene extremos.

Como la función f pertenece a $C^1(\mathbb{R}^2)$ (es decir, f es derivable y con derivadas primeras continuas en todo $\mathbb{R}^2$) sabemos que sus extremos sólo pueden estar en los puntos en los que se anulan las derivadas parciales. Como el enunciado nos dice, además, que las derivadas primeras no se anulan en ningún punto de $\mathbb{R}^2$ podemos afirmar que f no tiene ni máximos ni mínimos en todo $\mathbb{R}^2$.

Solución : Sí, Verdadero

TEST DE FMT2 - FEBRERO 2002

Nota:

También podemos afirmar que a es el límite inferior de la sucesión aunque esto no es necesario saberlo para responder la pregunta.

1. Sea (a_n) una sucesión real tal que $\lim a_{2n+1} = a$, $\lim a_{2n} = b$ y $a < b$. Entonces $\overline{\lim} a_n = b$

Siempre que nos den las subsucesiones formadas por los números pares (a_{2n}) y por los impares (a_{2n+1}) sabemos que una de ellas va a ser el límite superior de la sucesión y la otra el inferior (siempre y cuando existan los límites de ambas subsucesiones, claro está). En este caso nos dicen que $a < b$ siendo b el límite de la subsucesión de números pares. Por tanto podemos afirmar que el límite superior de la sucesión es b , es decir $\overline{\lim} a_n = b$.

Solución : Sí, Verdadero

2. Todo espacio métrico completo está acotado.

Sabemos por teoría que el espacio métrico que más utilizamos $(\mathbb{R}, d_d)$ es completo y, sin embargo, se trata de un espacio métrico claramente no acotado. Así pues, la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

3. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in A$. Entonces f es constante en A .

Esta afirmación es falsa. Vamos a ver que no siempre se cumple mediante un contraejemplo:

- Sea el conjunto $A = (1,2) \cup (3,4)$
- Sea la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2 & \text{si } 3 < x < 4 \end{cases}$

Se puede comprobar que $f'(x) = 0$ pero la función no es constante en A .

Solución : No, Falso

Nota:

Si exigimos que el conjunto A sea conexo entonces la respuesta sería verdadero

4. Si $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Esta afirmación no siempre se cumple, por tanto es falsa. Basta el siguiente contraejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ y = \sqrt{18} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6 \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Solución : No, Falso

5. $f(x) = e^x + \cos x$ es uniformemente continua en $(0, 1)$.

En este caso es muy útil aplicar la propiedad que nos dice que si la derivada de una función está acotada entonces la función es uniformemente continua. Calculando la derivada de $f(x)$ nos queda:

$$f'(x) = e^x + \sin x$$

Tenemos que $f'(x)$ está acotada entre $f'(0) = 1$ y $f'(1) = e + \sin 1$. Así pues al estar $f'(x)$ acotada podemos afirmar que $f(x)$ es uniformemente continua.

Solución : Sí, Verdadero

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} &= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = [l' Hopital] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{0}}} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Solución : Sí, Verdadero

Fijate que sólo estamos diciendo que e^x está acotada en el intervalo $(0,1)$. Evidentemente la función e^x no es acotada en todo $\mathbb{R}$

7. Si $f(x, y) = \operatorname{sh} x + e^y$, la derivada direccional de f en el punto $(0, 0)$ es máxima en la dirección $(1, 1)$.

Sabemos por teoría que la derivada direccional es máxima en la dirección del vector gradiente. Por tanto tenemos que calcular el vector gradiente y particularizarlo en el punto $(0, 0)$:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (\operatorname{ch} x, e^y) \Rightarrow \nabla f(0, 0) = (\operatorname{ch} 0, e^0) = (1, 1)$$

Así que, podemos afirmar que en el punto $(0, 0)$ la derivada direccional de f es máxima en la dirección $(1, 1)$.

Solución : Sí, Verdadero

8. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$ converge únicamente en $x = 1$.

Para calcular el radio R de una serie de potencias del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hacemos:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto, al ser el radio igual a cero la serie de potencias converge únicamente en su centro que es $x_0 = 1$. Así que el enunciado es verdadero.

Solución : Sí, Verdadero

9. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - y^2$ alcanza un mínimo relativo en $(0, 0)$.

Aplicando el procedimiento usual tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} D_1 f = 2x = 0 \\ D_2 f = -2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ único punto estacionario}$$

Y el determinante de la matriz Hessiana particularizada en $(0, 0)$ nos queda:

$$|Hf(0, 0)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow (0, 0) \text{ Punto de silla}$$

Por tanto la afirmación del enunciado es falsa.

Solución : No, Falso

10. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ es convergente.

Si intercambiamos los sumandos multiplicando por -1 obtenemos la expresión de una serie telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = - \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$$

donde $a_n = \sqrt{n}$ y cuya suma viene dada por la expresión:

$$S = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 1 - \infty = -\infty \Rightarrow S = \infty$$

Al ser la suma de la serie infinito decimos que la serie es divergente.

Solución : No, Falso

11. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x) = (\cos x, e^x)$ y sea $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = (1, 1).$$

Tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0 \text{ por ser la base un número menor que 1.}$$

Así que sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos a_n, e^{a_n}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \cos a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} \right) = \left(\cos \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, e^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \right) = \\ &= (\cos 0, e^0) = (1, 1) \end{aligned}$$

Solución : Sí, Verdadero

12. Cualquier $z \in \mathbb{C}$ tiene n raíces n -ésimas distintas.

Existe un número complejo para el que no se cumple la afirmación. Se trata del complejo $z = 0$ que tiene n raíces n -ésimas pero son todas iguales (todas iguales a cero). Por tanto la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

En el último paso hemos cambiado el signo del resultado debido al signo menos que apareció en el paso anterior al multiplicar por -1

¡Ojo!:
En este límite no hay indeterminación ya que la base tiende a $2/3$. Es muy usual cometer el error de pensar que este tipo de límites tienen a la indeterminación 1^∞

13. Todo subconjunto de un espacio métrico discreto está acotado.

En la métrica discreta todas las distancias entre puntos distintos vale 1. Por tanto el diámetro de todos los conjuntos de más de un elemento es 1. Así pues, como todos los conjuntos en la métrica discreta tienen diámetro finito de valor 1 podemos afirmar que todos los conjuntos en esta métrica son acotados. La afirmación del enunciado es verdadera.

Solución : Si, Verdadero

14. Si (x_n) es una sucesión real tal que $x_n \leq x_{n+1}$ y $-\pi < x_n < \pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (x_n) converge.

Se trata de una sucesión monótonamente creciente $(x_n \leq x_{n+1})$ y además acotada entre $-\pi$ y π ($-\pi < x_n < \pi$) por tanto, por un teorema de la teoría, podemos afirmar que esta sucesión converge.

Solución : Sí, Verdadero

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos 2n\pi)^{n^2+3n}$ no existe.

Tenemos que $\cos 2n\pi = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, así pues el límite que nos están pidiendo es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos 2n\pi)^{n^2+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{n^2+3n} = 1^\infty = 1$$

Por tanto el límite existe y vale 1 por lo que la afirmación del enunciado es falsa.

Solución : No, Falso

16. Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en A , entonces $f \in C^1(A)$.

La afirmación es falsa ya que existen funciones que son diferenciables pero que no pertenecen a $C^1(A)$, es decir, no tienen derivadas parciales primeras continuas. Un ejemplo de una función a la que le sucede lo anterior es:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

De hecho, sabemos por teoría que la proposición correcta es justo al revés, es decir lo correcto es:

Si $f \in C^1(A)$ entonces f es diferenciable en A .

Solución : No, Falso

Importante:

No te confundas con la indeterminación 1^∞ . Esta indeterminación aparece cuando la base tiende a 1. Pero en nuestro caso la base vale 1 por lo que no hay indeterminación ya que 1 elevado a cualquier número siempre es 1.

17. Si (a_n) es una sucesión real, entonces $\overline{\lim} a_n \in \mathbb{R}$.

Recuerda que cuando una sucesión tiene límite tanto el límite inferior como el superior coinciden con el límite de la sucesión

Existen sucesiones de números reales que son divergentes, o sea, su límite vale infinito y, por tanto, también su límite superior e inferior valen infinito. Por ejemplo, sea la sucesión $(a_n) = n^2$,

$$\lim a_n = \lim n^2 = \infty \Rightarrow \overline{\lim} a_n = \lim a_n = \infty \notin \mathbb{R}$$

Solución : No, Falso

18. Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que existen $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$, entonces f es continua en $(0, 0)$.

Sabemos que en funciones de varias variables la derivabilidad no es condición suficiente de continuidad (a diferencia de funciones de una variable donde sí lo es). De hecho, existen muchas funciones de dos variables que tienen derivadas parciales en un punto y no son continuas en él. Uno de los ejemplos más utilizados es la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se puede probar que $D_1 f(0, 0) = 0$ y $D_2 f(0, 0) = 0$ y sin embargo f no es continua en $(0, 0)$, de hecho no tiene límite en ese punto (se prueba fácilmente utilizando polares). Por tanto la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

19. Si $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si no te acuerdas siempre tienes la posibilidad de calcular el desarrollo de Taylor empleando la fórmula pero es recomendable saberse los desarrollos más usuales para no perder demasiado tiempo

Tenemos que saber por teoría que el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = e^x$ es $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ que es justamente la que aparece en el enunciado. Por otra parte tenemos que la condición necesaria y suficiente para que una función pueda expresarse como una serie de Taylor es que el resto n -ésimo de la serie tienda a cero. Por tanto, la afirmación del enunciado es verdadera.

Solución : Si, Verdadera

$$20. \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge en } x_0 \in \mathbb{R} \right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ converge en } x_0 \in \mathbb{R} \right)$$

La afirmación es falsa. Para demostrarlo utilizaremos el siguiente contraejemplo:

$$\text{Sea } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$$

Ambas series de potencias están centradas en el mismo punto $x = 0$ por tanto falta comprobar si sus intervalos de convergencia son iguales:

$$R_1 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1$$

$$R_2 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}} = 1$$

para el cálculo de los radios hemos utilizado que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{a}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{\frac{a}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{a \ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \ln n}{n}} = e^0 = 1 \quad \forall a$$

Así pues, ambas series están centradas en el mismo punto y tienen el mismo radio de convergencia $R = 1$ pero el problema está en los extremos del intervalo de convergencia $(-1, 1)$ ya que nadie nos puede asegurar que en esos puntos las dos series se comporten igual. De hecho en $x = 1$ resulta que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \text{ en } x = 1 \text{ queda } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ que es convergente por ser armónica con } p = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \text{ en } x = 1 \text{ queda } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ que es divergente por ser armónica con } p = 1$$

Así pues los puntos en los que una serie y otra convergen no son los mismos y por tanto la afirmación del enunciado es falsa.

Solución : No, Falso

TEST DE FMT2 - FEBRERO 2003

1. Si $(x_n) \subset \mathbb{R}$ entonces $\overline{\lim} x_n \in \mathbb{R}$.

El límite superior de una sucesión de números reales puede ser un número real pero también puede ser $+\infty$ ó $-\infty$. Por ejemplo, para la sucesión $(x_n) = n^2 \subset \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^2 = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty \notin \mathbb{R}$$

Solución : No, Falso

2. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y creciente, entonces $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

La afirmación es falsa y como contraejemplo podemos poner la función $f(x) = x^3$ que es estrictamente creciente en todo su dominio, $\mathbb{R}$, y sin embargo en $x = 0$ su derivada se anula $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$.

Solución : No, Falso

3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

La afirmación es falsa y como contraejemplo se puede utilizar uno típico. Se trata de la serie armónica alternada $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$. Esta serie converge (por el criterio de Leibnitz ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0) \text{ pero sin embargo en valor absoluto no converge (ya que } \sum \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$$

es la serie armónica con exponente igual a uno que es divergente). De esta serie se dice, por tanto, que converge no absolutamente.

Solución : No, Falso

Cardinal: número de elementos de un conjunto

4. Existe una biyección entre $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$.

El conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de los números irracionales del cual sabemos por teoría que tiene cardinal infinito no numerable (igual que $\mathbb{R}$). Por otro lado $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales que tiene cardinal infinito numerable (igual que $\mathbb{N}$). Al no tener el mismo cardinal ambos conjuntos no son equipotentes y, por ello, no pueden existir una biyección entre ellos.

Solución : No, Falso

5. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, entonces $D_{12}f(x, y) = D_{21}f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

La afirmación es verdadera ya que se trata del teorema de Schwarz. (De hecho "sobran" hipótesis pues para afirmar la igualdad de las derivadas segundas cruzadas basta con exigir que f sea de clase C^1 , que exista una de las derivadas segundas cruzadas y que sea continua.)

Solución : Sí, Verdadero

6. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, existe $\xi \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$

Nota:
Existe otra versión de este teorema donde no se exige que la función sea continua, pero en ese caso también la tesis es distinta

Se trata del teorema del valor medio del cálculo integral pero falta la hipótesis de continuidad de f . Por tanto la afirmación es falsa.

Solución : No, Falso

7. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$ converge únicamente en $x = 1$.

Para calcular el radio R de una serie de potencias del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ hacemos:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto, al ser el radio igual a cero la serie de potencias converge únicamente en su centro que es $x_0 = 1$. Así que el enunciado es verdadero.

Solución : Sí, Verdadero

8. El conjunto $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z = 0\}$ es conexo.

Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Entonces el conjunto del enunciado es

$$\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0, y = 0\}$$

O sea, se trata del conjunto formado por todos los puntos de los ejes OX y OY incluido el origen. Este conjunto es claramente conexo por caminos por lo que es conexo.

Solución : Sí, Verdadero

Esta pregunta también cayó en el test del curso pasado (febrero 2002)

9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} &= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = [\text{l'Hopital}] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{0}}} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Solución : Sí, Verdadero

10. Para cualquiera dos puntos distintos $x, y \in \mathbb{R}^2$ existen entonces $U(x), V(y) \subset \mathbb{R}^2$ tales que $U(x) \cap V(y) \neq \emptyset$.

Esta es una de las propiedades de los entornos de un punto. Por tanto la afirmación es verdadera.

Solución : Si, Verdadero

11. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es impar y $f \in C^\infty$, entonces $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

La afirmación es falsa y como contraejemplo recurrimos de nuevo a la función $f(x) = x^3$ que es una función impar y de clase C^∞ . Se cumple que:

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) = 6 \neq 0$$

Solución : No, Falso

12. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ converge.

Vamos a sumar la serie para ver si es convergente. Primero calculamos la suma enésima:

$$S_n = (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

Ahora calculamos la suma total como el límite de la suma enésima:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) = \infty$$

y, como se puede observar la serie es divergente pues su suma es infinito.

Solución : No, Falso

13. Si $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = x^2$ y $P = \{0; 1; 2\}$ es una partición de $[0, 2]$, entonces la suma superior de Darvoux $S(f; P)$ es igual a 5.

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = M_1 (x_1 - x_0) + M_2 (x_2 - x_1)$$

donde $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ son los puntos de la partición y M_i es el máximo de la función $f(x)$ en el intervalo (x_{i-1}, x_i) . En nuestro caso:

En el intervalo $(0, 1)$ se alcanza el máximo en $x = 1$ y vale: $f(1) = 1^2 = 1$

En el intervalo $(0, 2)$ se alcanza el máximo en $x = 2$ y vale: $f(2) = 2^2 = 4$

De esta forma el resultado final es:

$$S(f; P) = M_1 (x_1 - x_0) + M_2 (x_2 - x_1) = 1 \cdot (1 - 0) + 4 \cdot (2 - 1) = 5$$

Solución : Si, Verdadero

14. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$, existe un entorno $\dot{U}(a)$ tal que $\forall x \in \dot{U}(a)$, $f(x) \neq 0$.

Al tratarse de un entorno perforado la afirmación es cierta. Si el entorno no fuera perforado la función podría valer $f(a) = 0$ siendo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ y no se cumpliría la afirmación.

Solución : Sí, Verdadero

15. En $\mathbb{R}^n$ el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|=1\}$ no es compacto.

Veamos cómo es este conjunto en $\mathbb{R}^2$ utilizando la definición de norma euclídea:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|=1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$$

que se trata del conjunto de los puntos de una circunferencia de centro el origen y radio unidad que es un conjunto cerrado (por ser una curva en $\mathbb{R}^2$) y acotado (por tener diámetro finito) y, por tanto, compacto. Este razonamiento es generalizable a $n \geq 2$.

Solución : No, Falso

16. Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^2$ entonces la matriz de Jacobi $f'(a)$ es simétrica.

La afirmación es falsa. Veamos un contraejemplo:

$$f(x, y) = (x^2, xy^2) \Rightarrow Jf(x, y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

que en general no es una matriz simétrica (sólo será simétrica si $y=0$).

Solución : No, Falso

17. No existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi n)^{n^2+3n}$.

Tenemos que $\cos 2n\pi = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, así pues el límite que nos están pidiendo es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos 2n\pi)^{n^2+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{n^2+3n} = 1^\infty = 1$$

Por tanto el límite existe y vale 1 por lo que la afirmación del enunciado es falsa.

Solución : No, Falso

La matriz que puede ser simétrica bajo ciertas hipótesis es la matriz Hessiana (Teorema de Schwarz)

Esta pregunta también es del test de febrero de 2002

Importante:
No te confundas con la indeterminación 1^∞ . Esta indeterminación aparece cuando la base tende a 1. Pero en nuestro caso la base vale 1 por lo que no hay indeterminación ya que 1 elevado a cualquier número siempre es 1.

$$18. \int \ln x \, dx = x \ln x + x + C.$$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

en este caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv}$$

ahora tenemos que calcular du y v . Para ello derivamos u e integramos dv ,

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int dx = x$$

de forma que sustituyendo en la fórmula obtenemos

$$I = \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Solución : No, Falso

$$19. \text{ Si } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tiene extremo relativo en } a \in \mathbb{R} \text{ entonces } f'(a) = 0 \text{ y } f''(a) \neq 0$$

La afirmación es falsa ya que una función puede tener un extremo relativo en un punto donde ni siquiera es derivable por lo que no tiene sentido hablar de si la derivada se anula en ese punto o no. Un ejemplo es la función valor absoluto $f(x) = |x|$ que tiene un mínimo en $x = 0$ y su derivada no se anula en ese punto.

Solución : No, Falso

$$20. \sum_{i=1}^{40} i^n = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{40} i^n = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{37} + i^{38} + i^{39} + i^{40} =$$

$$\sum_{n=1}^{40} i^n = i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \dots + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 =$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro (del 1° al 4°, del 5° al 8°, ..., del 37° al 40°):

$$\sum_{n=0}^{40} i^n = \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 + \dots + \underbrace{1 + i - 1 - i}_0 = 0$$

Solución : Sí, Verdadero

Esta pregunta también es del test de septiembre de 2002 pero el sumatorio llegaba hasta 50

TEST DE FMT2 - FEBRERO 2004

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$$

Recuerda que:

$$\sin \varepsilon \sim \varepsilon$$

siempre que $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1 \quad \text{donde hemos aplicado que } \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

Solución : Sí, Verdadero

2. La matriz hessiana de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2y^2 - x^3$ es simétrica

Recuerda que una matriz A es simétrica si

$$A = A'$$

$$Hf = \begin{pmatrix} D_{11}f & D_{12}f \\ D_{21}f & D_{22}f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{que es simétrica}$$

Solución : Sí, Verdadero

3. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces la serie converge para todo $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$.

Esta afirmación es falsa pues recuerda que una serie potencias puede converger en un extremo de su campo de convergencia y no converger en el otro. Por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ converge en $[-2, 2)$.

Solución : No, Falso

$$4. \sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i)$$

Fíjate que no es necesario calcular explícitamente las raíces cuadradas de $3 - 4i$

Lo más rápido es aplicar la definición de raíz cuadrada $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$:

$$(2 - i)^2 = (2 - i)(2 - i) = 4 - 2i - 2i + i^2 = 3 - 4i$$

$$(-2 + i)^2 = (-2 + i)(-2 + i) = 4 - 2i - 2i + i^2 = 3 - 4i$$

Recuerda: $i^2 = -1$

Así pues las raíces cuadradas de $3 - 4i$ son los números $2 - i$ y $-2 + i$. Por tanto, la afirmación del enunciado es cierta.

Solución : Sí, Verdadero

5. Si un subconjunto de $\mathbb{R}$ está acotado, entonces el conjunto de sus cotas inferiores tiene máximo.

Importante:

Recuerda que una cota inferior de A es todo número real menor o igual que todos los elementos del conjunto A .

La afirmación es correcta. Veamos un par de ejemplos para ilustrarlo:

Sea el intervalo (a, b) entonces el conjunto de sus cotas inferiores es $(-\infty, a]$ que claramente tiene un máximo en a .

Sea ahora el intervalo $[a, b)$ entonces el conjunto de sus cotas inferiores vuelve a ser $(-\infty, a]$ que tiene máximo en a .

Solución : Si, Verdadero

6. Para cualesquiera reales x, y se verifica $|x| - |y| \leq |x + y|$

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \geq |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2$$

Y extrayendo raíces cuadradas se obtiene la desigualdad del enunciado.

El único paso un poco más complicado es el tercero, el razonamiento seguido es el siguiente:

Es obvio que $|x|^2 = x^2$ y también $|y|^2 = y^2$. Por tanto se debe cumplir que $2xy \geq -2|x||y|$ lo que debemos comprobar para los cuatro casos posibles.

1er caso: $x, y > 0$ } en ambos casos se cumple que $2xy > -2|x||y|$

2º caso: $x, y < 0$

3er caso: $x > 0, y < 0$ } en ambos casos se cumple que $2xy = -2|x||y|$

4º caso: $x < 0, y > 0$

Solución : Sí, Verdadero

7. Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en A y $f'(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces f es constante en A .

Para demostrar que es falsa veamos el siguiente contraejemplo:

Sea $A = [1, 2] \cup [3, 4]$ y definimos la siguiente función:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ -1, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

La función f cumple todas las hipótesis de enunciado y sin embargo no es constante en A .

Solución : No, Falso

8. Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2\}$, el conjunto $A \cap B$ es conexo.

Los puntos de $A \cap B$ son aquellos que cumplen simultáneamente la ecuación de A y la ecuación de B :

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 1 - x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 1 - y \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto $A \cap B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right) \right\}$. Es decir $A \cap B$ es un conjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por dos puntos separados. Evidentemente $A \cap B$ no es conexo porque es imposible unir esos dos puntos por un camino (curva) completamente contenida en $A \cap B$. Fíjate que todos los puntos que hay entre $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$ no pertenecen a $A \cap B$.

Solución : No, Falso

9. Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\}$, entonces $\inf A = \sqrt{2}$.

$$x^2 > 2 \Rightarrow |x|^2 > 2 \Rightarrow |x| > \sqrt{2} \Rightarrow x > \sqrt{2} \text{ ó } x < -\sqrt{2}$$

Así pues el conjunto A resulta ser $A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ que no está acotado (ni superior ni inferiormente) y por tanto no tiene ínfimo.

Solución : No, Falso

10. Sea $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$.

Esta afirmación es falsa. Lo demostramos con el siguiente contraejemplo, sea la función $f(x) = \sin(\pi x)$.

$$x_n = f(n) = \sin(\pi n) = \{0, 0, 0, 0, \dots\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n) = 0$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\sin(\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Es decir $x_n = f(n)$ es la sucesión constantemente nula.

Sin embargo,

$$f(x) = \sin(\pi x) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x) = \sin(\infty) = ?? \quad \text{no existe}$$

Por tanto, dada una función $f(x)$, hemos probado que, aunque la sucesión $x_n = f(n)$ converja cuando $n \rightarrow \infty$, no es condición suficiente para que la función $f(x)$ converja cuando $x \rightarrow \infty$.

Solución : No, Falso

Date cuenta que estamos buscando la intersección de dos parábolas que van a ser dos puntos

11. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$

Para estudiar la convergencia uniforme de una serie funcional utilizamos el teorema de Weierstrass:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De esta forma hemos mayorado la serie funcional mediante una serie numérica convergente. Así pues podemos afirmar que la serie funcional converge uniformemente.

Solución : Sí, Verdadero

12. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $a \in \mathbb{R}$ y tiene máximo en a , entonces la matriz jacobiana de f en a es nula.

Recuerda que en el caso de campos escalares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la matriz jacobiana queda reducida a una matriz fila que llamamos gradiente. Es decir, el gradiente es un caso particular de matriz jacobiana. Dicho esto, si f es diferenciable, la condición necesaria para que un punto sea extremo de f es que su gradiente (es decir, su matriz jacobiana) se anule en ese punto. Por tanto la afirmación es verdadera.

Solución : Sí, Verdadero

13. Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Esta afirmación es verdadera por teoría y se debe al carácter completo de $\mathbb{R}$. Como ejemplo podemos tomar la sucesión $a_n = a + \frac{\pi}{n}$ que está formada por número irracionales (con infinitos decimales) y que tiende a cualquier al número $a \in \mathbb{R}$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Solución : Si, Verdadero

14. El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ es compacto.

Tenemos que: $xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, por tanto el conjunto A es, geoméricamente el conjunto formado por todos los puntos del eje Y y del eje X (incluido, claro está, el origen). Por tanto A no es un conjunto acotado (aunque sí es cerrado) y por ello A no es compacto.

Solución : No, Falso

15. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y creciente en $\mathbb{R}$, entonces $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

La afirmación es falsa. Basta tomar como contraejemplo la función $f(x) = x^3$ que es creciente en todo $\mathbb{R}$ y, sin embargo, su derivada en $x = 0$ es nula:

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

Solución : No, Falso

16. Para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ los argumentos de las raíces n -ésimas de z forman una progresión aritmética.

En general las raíces n -ésimas de un número complejo cualquiera $z = \rho_\theta$ se calculan de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = r_\varphi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

así que, en nuestro caso, tenemos que los argumentos se pueden poner de la forma:

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

que se trata de una progresión aritmética de primer término $a_0 = \theta/n$ y diferencia $d = 2\pi/n$

Solución : Sí, Verdadero

17. Cualquier sucesión $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{N}$.

Aplicamos la definición de continuidad, f es continua en $a \in \mathbb{N}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{N} \dots |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

O bien

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{N} \dots x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

Que se cumple siempre pues para cualquier epsilon basta con escoger un delta menor que uno, $\delta < 1$, de forma que el único número natural en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ es el propio a , por lo que su imagen, obviamente siempre va a estar en $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Solución : Sí, Verdadero

Recuerda:
La progresión aritmética viene definida por

$$a_k = a_0 + kd$$

donde,

a_k : término k -ésimo

a_0 : primer término

d : diferencia

Una forma un poco "extraña" de utilizar la definición de continuidad...

$$18. \text{ sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Vamos a comprobar si el desarrollo en serie de Mac Laurin (Taylor en $x = 0$) coincide con el del enunciado:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f(0) = \text{sen } 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen } x \Rightarrow f''(0) = -\text{sen } 0 = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

Por tanto la respuesta es verdadera.

Solución : Sí, Verdadero

$$19. \text{ Sea } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}. \text{ Si } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = l, \text{ entonces } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = l.$$

El que una función de dos variables tenga límite a lo largo de una dirección concreta no es condición suficiente para asegurar que existe el límite de la función. Como contraejemplo sirve la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0^2}{0^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

Solución : No, Falso

A partir de la cuarta derivada se empiezan a repetir

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{1}{e}.$$

Para calcular el límite de una sucesión lo primero que se debe hacer es el paso al límite, sustituyendo la n por infinito :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = 1^\infty$$

en este caso aparece una indeterminación que vamos a eliminar aplicando la fórmula,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1^\infty \quad \Rightarrow \quad L = e^\lambda \quad \text{con} \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n$$

por tanto el problema se reduce a calcular λ :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right)(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1} \right)(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n-1}{n+1} = -1$$

y, una vez calculado λ , el límite queda:

$$L = e^\lambda = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Solución : Sí, Verdadero

TEST DE FMT2 - FEBRERO 2005

1. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Q}$ acotado inferiormente tiene:

- a) mínimo.
- b) supremo.
- c) ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la c)

Para demostrar que la a) y la b) son falsas basta tomar como contraejemplo conjunto $[\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ que no tiene supremo (por que no está acotado superiormente) y tampoco tiene mínimo por que tan cerca como nosotros queramos de $\sqrt{2}$ hay números racionales pero $\sqrt{2}$ es irracional.

Solución : c)

2. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ acotado inferiormente tiene:

- a) mínimo.
- b) supremo.
- c) ninguna de las anteriores.

En este caso la respuesta correcta es la a). Esto es debido a que $\mathbb{Z}$ no es denso.

Solución : a)

3. Los números complejos que verifican la ecuación $\bar{z} = -z$ forman:

- a) el eje real.
- b) el eje imaginario.
- c) ninguna de las anteriores.

Sea $z = x + yj$

$$\bar{z} = -z \Rightarrow \overline{(x + yj)} = -(x + yj) \Rightarrow x - yj = -x - yj \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

O sea, se trata del eje Y (eje imaginario).

Solución : b)

4. $\sum_{n=0}^{50} i^n =$ a) 1 b) -1 c) i

Para hacer los cálculos hemos tenido en cuenta que:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{44} + i^{45} + i^{46} + i^{47} + i^{48} + i^{49} + i^{50} =$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \dots + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 =$$

Y los términos se anulan de cuatro en cuatro quedando los tres últimos ($n = 48, 49$ y 50):

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = 1 + \underbrace{i - 1 - i}_{0} + \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + \dots + \underbrace{1 + i - 1 - i}_{0} + 1 + i - 1 =$$

$$\sum_{n=0}^{50} i^n = 1 + i - 1 = i$$

Solución : c)

5. El conjunto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right)$ es

- a) vacío
- b) abierto
- c) compacto

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right) = [0, 1) \cap \left[0, \frac{1}{2}\right) \cap \left[0, \frac{1}{3}\right) \cap \dots = \{0\}$$

Por tanto el conjunto A es acotado y es cerrado (por que su complementario es abierto). Así pues A es compacto.

Solución : c)

6. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$ es

- a) cerrado.
- b) abierto.
- c) ni abierto ni cerrado.

$$x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = n\pi \Rightarrow x = \frac{1}{n\pi} \end{cases}$$

Por tanto: $\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} = \left\{ \pm \frac{1}{\pi}, \pm \frac{1}{2\pi}, \pm \frac{1}{3\pi}, \dots, \pm \frac{1}{n\pi}, \dots \right\} \cup \{0\}$ que se trata de un conjunto formado por los puntos de una sucesión convergente que incluye su límite. Por tanto se trata de un conjunto cerrado.

Solución : a)

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$ a) 1 b) e^2 c) e

Para calcular el límite de una sucesión lo primero que se debe hacer es el paso al límite, sustituyendo la n por infinito :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2} = 1^\infty$$

en este caso aparece una indeterminación que vamos a eliminar aplicando la fórmula,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1^\infty \quad \Rightarrow \quad L = e^\lambda \quad \text{con} \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) b_n$$

por tanto el problema se reduce a calcular λ :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} - 1 \right) n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2 - n^2 - 1}{n^2 + 1} \right) n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$$

y, una vez calculado λ , el límite queda:

$$L = e^\lambda = e$$

Solución : c)

8. Dada la función $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow 1} D(x)$.

- a) = 1
b) = 0
c) no existe

La respuesta correcta es la c). El límite no existe por que $x = 1$ es un racional y tan cerca como nosotros queramos de ese racional hay infinitos irracionales. Por tanto la función en las "cercanías" del $x = 1$ oscila entre 0 y 1.

Solución : c)

9. La función real $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ es

- a) decreciente. b) acotada. c) continua

La respuesta correcta es la c).

La función del enunciado es una hipérbola equilátera y no es acotada ya que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

Y tampoco es decreciente por que, aunque su derivada es siempre negativa en todo el dominio, al pasar de $x = 0^-$ a $x = 0^+$ crece.

Solución : c)

10. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , y $f(a) = f(b)$ entonces

- a) existe $\xi \in (a, b) / f(\xi) = 0$
- b) existe un único $\xi \in (a, b) / f'(\xi) = 0$
- c) ninguna de las anteriores.

Se trata del teorema de Rolle pero ninguna de las dos primeras es cierta. Basta tomar como contraejemplo la función constante $f(x) = 2$ en un intervalo cualquiera $[3, 5]$.

Solución : c)

11. La derivada de $f(x) = \arcsen x$ es

- a) $(1+x^2)^{-1/2}$
- b) $(1-x)^{-1/2}$
- c) $(1-x^2)^{-1/2}$

La respuesta es directa y se obtiene de cualquier tabla de derivadas

Solución : c)

12. Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Entonces f es

- a) monótona creciente
- b) inyectiva
- c) sobreyectiva

La respuesta correcta es la b)

Para ver que la a) es falsa basta tomar como contraejemplo $f(x) = -e^x$ que cumple la hipótesis del enunciado pero es monótona decreciente.

Para ver que la b) es falsa basta tomar como contraejemplo $f(x) = e^x$ que cumple la hipótesis del enunciado pero que no es sobreyectiva (ya que los números negativos no tienen preimagen mediante f)

Solución : b)

13. El gradiente de $f(x, y) = \sen x + e^{xy}$ en el punto $(0, 1)$ vale

- a) 0
- b) $(2, 0)$
- c) $(0, 2)$

$$D_1 f(x, y) = \cos x + ye^{xy} \Rightarrow D_1 f(0, 1) = \cos 0 + e^0 = 2$$

$$D_2 f(x, y) = 0 + xe^{xy} \Rightarrow D_2 f(0, 1) = 0$$

Por tanto $\nabla f(0, 1) = (2, 0)$

Solución : b)

14. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie real. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces

- a) la serie es convergente.
- b) la serie es divergente.
- c) Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la c)

Para ver que la a) es falsa basta tomar como contraejemplo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ que cumple la hipótesis del enunciado pero que diverge (es la serie armónica).

Para ver que la b) es falsa basta tomar como contraejemplo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que cumple la hipótesis del enunciado pero que converge.

Solución : c)

15. Siendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series reales con $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- a) si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente.
- b) si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente.
- c) ninguna de las anteriores

Se trata del primer criterio de comparación.

La respuesta a) es claramente falsa porque que la menorante converja no da información sobre la serie mayorante.

La respuesta b) puede parecer cierta pero realmente también es falsa por que en ningún sitio nos dicen que las series sean de términos positivos (es decir, no nos dicen que $0 \leq a_n \leq b_n$) así pues, aunque b_n converja a_n puede estar sumando $-\infty$ y por tanto ser divergente.

Por tanto, la respuesta correcta es la c).

Solución : c)

TEST DE FMT2 - FEBRERO 2006

Repetida del test de febrero 2004

1. Si un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ está acotado, el conjunto de sus cotas inferiores tiene:

- a) máximo.
- b) mínimo.
- c) ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la a). Veamos un par de ejemplos para ilustrarlo:

Sea el intervalo (a, b) entonces el conjunto de sus cotas inferiores es $(-\infty, a]$ que claramente tiene un máximo en a .

Sea ahora el intervalo $[a, b)$ entonces el conjunto de sus cotas inferiores vuelve a ser $(-\infty, a]$ que tiene máximo en a .

Solución : a)

2. El conjunto de números irracionales es:

- a) infinito numerable.
- b) infinito no numerable.
- c) acotado.

Sabemos por teoría (página T-1 de los apuntes) que el conjunto de los números irracionales es infinito no numerable (y por tanto equipolente a $\mathbb{R}$).

Solución : b)

3. Todo número complejo no nulo tiene:

- a) n raíces n -ésimas complejas distintas.
- b) n raíces n -ésimas reales distintas.
- c) al menos una raíz n -ésima no real.

La respuesta correcta es la a). Por teoría sabemos que cualquier número complejo (exceptuando el nulo $0 + 0i$) tiene n raíces n -ésimas distintas que vienen dadas por la siguiente expresión

$$\sqrt[n]{z} = r_{\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Además, geoméricamente, estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados con centro en el origen.

Solución : a)

Importante:
Recuerda que una **cota inferior** de A es todo número real **menor o igual** que todos los elementos del conjunto A .

Nota:
El único número complejo que tiene todas sus raíces n -ésimas iguales es el nulo $0 + 0i$

4. Si z es un número complejo, entonces $z - \bar{z} =$

- a) $2 \operatorname{Re} z$.
- b) $2 \operatorname{Im} z$.
- c) $2i \operatorname{Im} z$.

Sea $z = a + bi$, operando:

$$z - \bar{z} = a + bi - \overline{(a + bi)} = a + bi - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi = 2i \operatorname{Im} z$$

Solución : c)

5. Sea $A = \{1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ está dotado de la normal usual. Todos los puntos de A son:

- a) puntos interiores de A .
- b) puntos de acumulación de A .
- c) ninguna de las anteriores.

El conjunto es $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0\right\}$.

Si tomamos, por ejemplo, el elemento $1 \in A$ y definimos una bola abierta alrededor suyo que en $\mathbb{R}$ con la distancia usual no es más que un intervalo abierto centrado en el 1, $B_\varepsilon(1) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, se observa claramente que el intervalo no está contenido en A , luego el 1 no pertenece al interior de A . Además tomando $\varepsilon < \frac{1}{2}$ también se observa que $B_\varepsilon(1) - \{1\} = (1 - \varepsilon, 1) \cup (1, 1 + \varepsilon)$ no contiene ningún elemento de A por lo que el 1 tampoco es punto de acumulación de A . Por tanto la respuesta correcta es la c).

Solución : c)

6. En $\mathbb{R}$ con la norma usual, la frontera de $\mathbb{Q}$ es:

- a) $\mathbb{R}$
- b) $\mathbb{Q}$
- c) $\emptyset$

La respuesta correcta es la a) ya que, siguiendo la definición de conjunto frontera, si nosotros centramos una bola abierta (que no es más que un intervalo abierto) en cualquier número real, sabemos por la teoría del tema 1 que en ese intervalo (por muy pequeño que sea) siempre están mezclados números racionales e irracionales. Por tanto, todo número real cumple la definición de punto frontera de $\mathbb{Q}$ pues cualquier intervalo abierto centrado en ese número contiene elementos de $\mathbb{Q}$ y elementos que no son de $\mathbb{Q}$.

Solución : a)

7. Si $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ y $f(x) = x D(x)$, se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

- a) = 0.
- b) = 1.
- c) no existe.

La función f es $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ que es discontinua en toda la recta real salvo en el cero.

En $x = 0$ la función es continua ya que los irracionales son todos nulos y los racionales tienden a cero:

$$\text{Si } x \in \mathbb{Q}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Solución : a)

Este límite ya salió en el test de febrero 2005

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2} = .$

- a) e^2 .
- b) e .
- c) $e + 2$.

Para calcular el límite de una sucesión lo primero que se debe hacer es el paso al límite, sustituyendo la n por infinito :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2} = 1^\infty$$

en este caso aparece una indeterminación que vamos a eliminar aplicando la fórmula,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1^\infty \quad \Rightarrow \quad L = e^\lambda \quad \text{con} \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) b_n$$

por tanto el problema se reduce a calcular λ :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} - 1 \right) n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2 - n^2 - 1}{n^2 + 1} \right) n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$$

y, una vez calculado λ , el límite queda:

$$L = e^\lambda = e$$

Solución : b)

9. Si $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \in \mathbb{N}$ y tanto (a_n) como (c_n) son sucesiones convergentes, entonces (b_n) :

- a) es convergente.
- b) es divergente.
- c) ninguna de las anteriores.

Se trata de la regla del sándwich pero no han dicho que (a_n) y (c_n) tengan el mismo límite, por tanto (b_n) podría ser oscilante. Por ejemplo:

$$a_n = -1 - \frac{1}{n} \quad c_n = 1 + \frac{1}{n} \quad b_n = (-1)^n$$

Solución : c)

10. La función real $f(x) = sg(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) es continua en $\mathbb{R}$.
- b) es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- c) ninguna de las anteriores.

Se trata de la función signo que la tenemos definida y dibujada en la página T-2 de la teoría. La función signo es continua en todo punto salvo en el origen $x = 0$ donde tiene una discontinuidad de salto.

Solución : b)

11. Si $f(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } x > 0 \\ -y & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

- a) = 0.
- b) no existe.
- c) ninguna de las anteriores.

Este límite no está indeterminado pero hay que hacerlo en dos partes:

Si $x > 0$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0)} y = 0$

Si $x < 0$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^-, 0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0^-, 0)} -y = 0$

Por tanto el límite existe y vale 0.

Solución : a)

No hace falta polares, ni rectas ni nada por que no hay indeterminación

12. Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, entonces:

- a) las derivadas parciales primeras de f existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$.
- b) las derivadas parciales segundas de f existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$.
- c) ninguna de las anteriores.

La opción a) es falsa ya que es justo al revés, es decir: Si existen las derivadas parciales primeras de f y son continuas entonces f es diferenciable (condición suficiente de diferenciabilidad). De hecho existen funciones que son diferenciables con derivadas parciales no continuas (septiembre 2006 ejercicio 2).

Solución : c)

13. Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ y el sistema de ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ no tiene solución, entonces:

- a) f no tiene máximos relativos.
- b) f no es continua en ningún punto.
- c) ninguna de las anteriores.

Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ entonces f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (condición suficiente de diferenciabilidad) y por tanto continua en $\mathbb{R}^2$, luego la opción b) es falsa.

Sabemos, por tanto, que los únicos puntos candidatos a extremo de f son aquellos donde se anula el gradiente. Ahora bien, como el enunciado dice que el gradiente igualado a cero no tiene solución entonces no hay candidatos y si no hay candidatos no puede haber extremos.

Solución : a)

14. La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$ alcanza en $(0, 0)$

- a) un máximo relativo.
- b) un mínimo relativo.
- c) ni máximo ni mínimo.

La función es claramente de clase uno, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ por tratarse de un polinomio, por tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (condición suficiente de diferenciabilidad). Sabemos que los únicos puntos candidatos a extremo están donde se anula el gradiente:

$$\left. \begin{array}{l} D_1 f = 2x = 0 \\ D_2 f = -2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0, y = 0, \text{ por tanto } (x, y) = (0, 0) \text{ es el único candidato a extremo}$$

Pero el $(0, 0)$ no es extremo de f ya que :

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(1, 0) = 1^2 - 0^2 = 1 > f(0, 0)$$

$$f(0, 1) = 0^2 - 1^2 = -1 < f(0, 0)$$

Solución : c)

15. Si $R \in \mathbb{R} - \{0\}$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces la suma de la serie es derivable en:
- a) $(-R, R)$.
 - b) $[-R, R]$.
 - c) $\mathbb{R}$.

Recuerda que en los extremos del intervalo la serie de potencias no tiene porqué converger. Por consiguiente, si en $x = \pm R$ la serie no converge, no existirá la suma (es decir, la suma será infinito) y al no existir no puede ser derivable, lo que hace falsas las opciones b) y c).

Solución : a)

TEST DE FMT2 - FEBRERO 2007

1. El conjunto de números irracionales en el intervalo $(0, 1)$ tiene el mismo cardinal que:
- $\mathbb{N}$.
 - $\mathbb{Q}$.
 - $\mathbb{R}$.

Sabemos por teoría que cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ tiene cardinal infinito no numerable, es decir contiene el mismo número de elementos que toda la recta real. Por ello la respuesta correcta es la c).

Solución : c)

2. El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} / x^3 + 1 > 1\}$ tiene
- ínfimo.
 - supremo.
 - ninguna de las anteriores.

Las raíces cúbicas de -1 son:

$$z_1 = e^{\pi/3}$$

$$z_2 = -1$$

$$z_3 = e^{5\pi/3}$$

pero en este caso sólo nos interesa la raíz real

Operando: $x^3 + 1 > 0 \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow x > \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x > -1$

Por tanto: $\{x \in \mathbb{Q} / x^3 + 1 > 1\} = (-1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ cuyo ínfimo está en el -1 .

Solución : a)

3. Sea $z = re^{i\alpha}$ un número complejo no nulo. Entonces

- $-z = re^{-i\alpha}$.
- $-z = re^{i(\alpha+\pi)}$.
- $-z = re^{i(\alpha+\pi/2)}$.

Recuerda que:

$$e^{i\pi} = -1$$

Operando: $re^{i(\alpha+\pi)} = re^{i\alpha} e^{i\pi} = re^{i\alpha} (-1) = -re^{i\alpha} = -z$

Solución : b)

4. Las raíces n -ésimas de $1+i$ son

- a) $\sqrt[n]{2} e^{i \frac{\pi/4 + 2k\pi}{n}}$, con $k=1, \dots, n-1$
- b) $\sqrt[n]{2} e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{n}}$, con $k=0, \dots, n-1$
- c) $\sqrt[n]{2} e^{i \frac{\pi/4 + 2k\pi}{n}}$, con $k=0, \dots, n-1$

Lo primero que hacemos es pasar el número complejo a forma polar:

$$w_1 = 1+i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \text{atan}(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}_{\pi/4} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

Ahora utilizamos la fórmula de la raíz n -ésima:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = r e^{i\varphi} \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k=0,1,\dots,n-1 \end{array} \right.$$

que aplicada a nuestro caso queda:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} = r e^{i\varphi} \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{\sqrt{2}} = \sqrt[n]{2} \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi/4 + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k=0,1,\dots,n-1 \end{array} \right.$$

Luego la solución correcta es la c).

Solución : c)

Si nos dicen
"acotado" a secas
entendemos que está
acotado superior e
inferiormente

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío, cerrado y acotado. Si $a = \inf A$, entonces

- a) a es el máximo de A .
- b) a es el mínimo de A .
- c) ninguna de las anteriores.

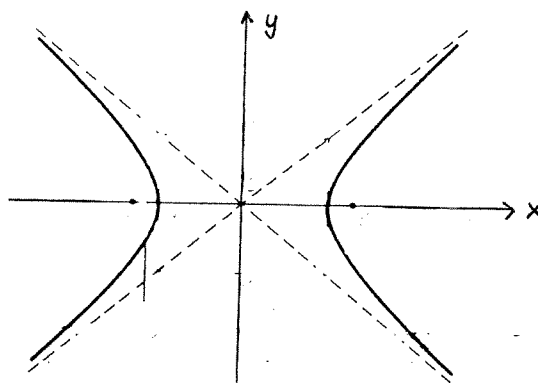
Por el teorema del ínfimo sabemos que por ser un conjunto acotado tiene ínfimo, que llamamos a , pero además nos dicen que se trata de un conjunto cerrado lo que quiere decir que su frontera también es parte del conjunto y por ello el ínfimo debe pertenecer a A que es la definición de mínimo. Por tanto a es a la vez el ínfimo y el mínimo de A .

Solución : b)

6. El conjunto $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1 \}$

- a) es abierto.
- b) es compacto.
- c) no es conexo.

Para resolver esta pregunta conviene saber que lo que nos están dando es una curva llamada hipérbola cuya gráfica es más o menos así:



El conjunto A no es abierto por tratarse de una curva en $\mathbb{R}^2$ (las curvas de $\mathbb{R}^2$ son siempre cerradas y no abiertas).

El conjunto A no es compacto porque no está acotado (la curva se va hacia el infinito)

Finalmente el conjunto A no es conexo porque no es conexo por caminos ya que por ejemplo no se pueden unir los puntos $(1, 0) \in A$ y $(-1, 0) \in A$ con un "camino" que esté totalmente contenido en A . Dicho de otra forma para ir del primer punto al segundo hay que salirse de A .

Solución : c)

7. Los límites inferior y superior de una sucesión real convergente (a_n) verifican:

- a) $\liminf a_n < \limsup a_n$.
- b) $\liminf a_n = \limsup a_n$.
- c) $\liminf a_n > \limsup a_n$.

Los límites superior e inferior sólo son diferentes cuando la sucesión no es convergente. En el caso de las sucesiones convergentes se cumple que

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$$

Solución : b)

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)^{n/2} =$$

- a) $e^{1/2}$.
- b) $e^{1/4}$.
- c) e .

Para calcular el límite de una sucesión lo primero que se debe hacer es el paso al límite, sustituyendo la n por infinito :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)^{n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/2} \right)^{n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n/4} = 1^\infty$$

en este caso aparece una indeterminación que vamos a eliminar aplicando la fórmula,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1^\infty \quad \Rightarrow \quad L = e^\lambda \quad \text{con} \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n$$

por tanto el problema se reduce a calcular λ :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) \frac{n}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-n}{n} \right) \frac{n}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{n}{4} = \frac{1}{4}$$

y, una vez calculado λ , el límite queda:

$$L = e^\lambda = e^{1/4}$$

Solución : b)

9. Sea $\sum a_n$ una serie real divergente. Entonces

- a) necesariamente $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.
- b) necesariamente $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- c) ninguna de las anteriores.

La serie $\sum \frac{1}{n}$ es divergente y sin embargo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ con lo que hemos probado que no es necesario que se cumpla $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Por tanto a) es falsa.

La serie $\sum n^2$ también es divergente y sin embargo $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty \neq 0$ con lo que hemos probado que no es necesario que se cumpla $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Por tanto b) también es falsa.

Solución : c)

Nota:

Fijate que ninguna de estas dos versiones es la que preguntan en este test

La teoría lo que dice es que si $\sum a_n$ es convergente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Lo que en la práctica significa que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ es divergente

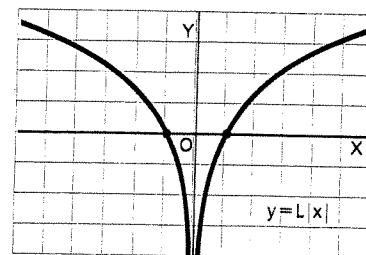
10. La función real $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, es

- a) es creciente en su dominio.
- b) es continua en su dominio.
- c) ninguna de las anteriores.

Si la expresamos como una función a trozos:

$$f(x) = \ln |x| = \begin{cases} \ln(-x) & , x < 0 \\ \ln(x) & , x > 0 \end{cases}$$

Y la representamos observamos que es continua
En todos los puntos menos en $x = 0$.



Solución : b)

11. Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ no es continua en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, entonces

- a) no puede existir ninguna de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
- b) necesariamente existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
- c) ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la c). Como contraejemplo para a) y b) podemos coger la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esta función no es continua en el origen $(0, 0)$, se puede probar por polares. Además su derivada parcial con respecto a x , $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ no existe en el origen pero la derivada parcial con respecto a y sí existe y vale $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Solución : c)

12. La derivada direccional de $f(x, y) = 3x + e^{xy^2}$ en el punto $(1, 0)$ es máxima en la dirección del vector

- a) $(3, 0)$
- b) $(3, 2)$
- c) $(4, 1)$

Sabemos por teoría que la derivada direccional es máxima en la dirección del vector gradiente. Por tanto tenemos que calcular el vector gradiente y particularizarlo en el punto $(1, 0)$:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (3, 2xye^{xy^2}) \Rightarrow \nabla f(1, 0) = (3, 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot e^0) = (3, 0)$$

Así que, podemos afirmar que en el punto $(1, 0)$ la derivada direccional de f es máxima en la dirección $(3, 0)$.

Solución : a)

13. La función $f(x, y) = x^2 + y$

- a) no posee extremos absolutos en $\mathbb{R}^2$.
- b) tiene un extremo relativo en $(1, 0)$.
- c) ninguna de las anteriores.

La función es claramente de clase uno, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ por tratarse de un polinomio, por tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (condición suficiente de diferenciabilidad). Sabemos por tanto que los únicos puntos candidatos a extremo están donde se anula el gradiente:

$$\left. \begin{array}{l} D_1 f = 2x = 0 \\ D_2 f = 1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{es decir, no existen puntos donde se anule el gradiente}$$

Por tanto f no tiene extremos en $\mathbb{R}^2$.

Solución : a)

14. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge puntualmente en

- a) $(-1, 1]$
- b) $[-1, 1)$
- c) $[-1, 1]$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = 1$$

Ahora probamos con los extremos,

Para $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente porque es la serie armónica.

Con esto ya hemos descartado las opciones a) y c) por lo que no hace falta seguir probando con $x = -1$.

Solución : b)

15. La serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$,

- a) converge uniformemente en $\mathbb{R}$.
- b) converge puntualmente pero no uniformemente en $\mathbb{R}$.
- c) ninguna de las anteriores.

Utilizamos el criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de series funcionales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Hemos encontrado una serie numérica convergente (armónica con exponente mayor que uno) que es mayor que la serie funcional dada para todo $\forall x \in \mathbb{R}$, por tanto la serie funcional converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Solución : a)

FMT2

Problemas

Febrero 99
Ejercicio 2

Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, se pide:

- a) Estudiar la continuidad de $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$
- a) Estudiar la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$.
- b) Determinar los extremos, si existen, de $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$.
- c) Justificar la existencia de máximo y mínimo de $f(x,y)$ en el conjunto:
 $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y calcularlos.

0) Estudiar la continuidad de $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$

• En $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ es división de funciones continuas con denominador no nulo, pues este sólo es cero en $(0,0) \notin \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

• En $(0,0)$ acudimos a la definición de continuidad

$$f(x,y) = \text{continua en } (a,b) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

aplicando polares:

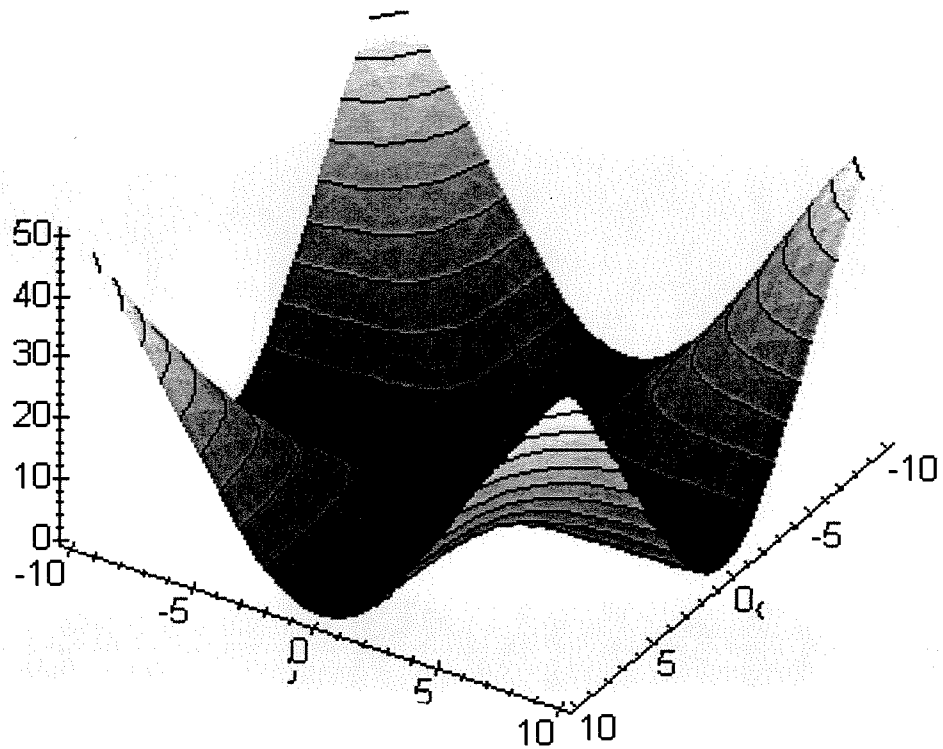
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cdot \overbrace{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}^{\text{infinitésimo} \cdot \text{acotado}}}{1} =$$

$$= \text{infinitésimo} \cdot \text{acotado} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow \text{continua en } (0,0)$$

$$\boxed{\boxed{f(x,y) = \text{continua en } \mathbb{R}^2}}$$

Representación gráfica de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$



Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$, se pide:

- Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$.
- Estudiar la conexión y la compacidad de $f^{-1}(\{1\})$.
- Estudiar la existencia de primeras derivadas parciales en $\mathbb{R}^2$.
- Comprobar que la derivada en la dirección del vector $v = (x,y)$ es nula en $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$.
- Estudiar los extremos relativos de $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$.

a) Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$

• La expresión $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ es una división, y por tanto, dará problemas cuando $x^2+y^2=0$, o sea, en $(0,0)$ que es el único punto que provoca esto. De ahí que nos excludan $(0,0)$ de la expresión.

• $f(0,0)$ se calcula aparte y vale 0.

• en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ se trata de una división de funciones continuas con denominador no nulo, pues este sólo es 0 en $(0,0) \notin \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

en $(0,0)$ acudimos a la definición de continuidad.

$$f(x,y) = \text{continua en } (a,b) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Para hallar el límite anterior disponemos de 3 herramientas

Herramienta ① Límites reiterados

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b) \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Análisis de los límites reiterados

I) Si alguno de los dos límites reiterados no existe, o si, existiendo ambos, sus valores son distintos, podemos asegurar que el $\lim f(x,y)$ no existe.

y con ello concluiríamos que $f(x,y)$ es discont. en (a,b)

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right] \neq \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right] \Rightarrow f(x,y)$ es

NO continua en $(0,0)$

II) Si ambos límites existen y sus valores coinciden, entonces NO podremos asegurar nada acerca de la existencia del límite inicial. No obstante, si el límite inicial existiese su valor sería el de los límites reiterados.

Herramienta ② Límites direccionales (según rectas)

$$y = mx; \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+m^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

Análisis de los límites direccionales

I) Si en el resultado final sobrevive alguna m , entonces el valor del límite valdrá una cosa u otra en función de cuánto valga m .

Tendrá ∞ valores $\Rightarrow$ el límite no existirá

II) Si no sobrevive ninguna m queda un resultado concreto, con el que haríamos un estudio similar al de los límites reiterados.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{1}{1+m^2} \Rightarrow$ tiene ∞ valores $\Rightarrow \nexists$ límite

$f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$

Herramienta ③ Polares "Empezar siempre por polares"

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Si $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta}{1} = \cos^2 \theta$$

Análisis de los Polares

Si sobrevive algún θ sólo, (es decir, sin estar acompañado de ningún ρ) en el resultado final, el límite podrá tomar infinitos valores y por ello no existirá.

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \cos^2 \theta \Rightarrow \infty$ valores $\Rightarrow \nexists$ límite

$f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$

En definitiva: $f(x,y) = \text{cont. en } (a,b) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$
al no existir el límite no se cumple la condición

$f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$

$f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Todo lo que tiende a 0 se llama infinitésimo

infinitésimo $\cdot$ acotado $= 0$

$\rho \cdot \cos \theta, \rho^3 \sin^2 \theta, \rho^2 \sin \theta \cos^2 \theta \dots \nrightarrow$ el límite vale 0

sin embargo:

$$\rho \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}, \rho^2 \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \dots$$

No es infinitésimo } habría que aplicar el cambio de variable explicado en teoría

Febrero 00
Ejercicio 2

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} [n x e^{-n x^2} - (n-1) x e^{-(n-1) x^2}]$, se pide:

- Calcular la suma parcial n-ésima, S_n .
- Determinar la función suma, $S(x)$, indicando su campo de convergencia C .
- Indicar si dicha serie converge uniformemente en C o en algún subconjunto no acotado de $\mathbb{R}$.

Serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n x e^{-n x^2} - (n-1) x e^{-(n-1) x^2}] = [x e^{-x^2} - 0] + [2x e^{-2x^2} - x e^{-x^2}] + \dots$$

a)

$$\sum_{n=1}^N [n x e^{-n x^2} - (n-1) x e^{-(n-1) x^2}] = \left[x e^{-x^2} - 0 + (2x e^{-2x^2} - x e^{-x^2}) + \dots + (N x e^{-N x^2} - (N-1) x e^{-(N-1) x^2}) \right] + \dots$$

Suma parcial N-ésima de los N primeros términos de la serie

$$+ \dots + (N-1) x e^{-(N-1) x^2} - (N-2) x e^{-(N-2) x^2} + N x e^{-N x^2} - (N-1) x e^{-(N-1) x^2}$$

$$\boxed{S_N(x) = \sum_{n=1}^N [n x e^{-n x^2} - (n-1) x e^{-(n-1) x^2}] = N x e^{-N x^2}}$$

b)

$$\text{Función Suma: } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [n x e^{-n x^2} - (n-1) x e^{-(n-1) x^2}] =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N [n x e^{-n x^2} - (n-1) x e^{-(n-1) x^2}] = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) \Rightarrow S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x)$$

$$S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N x e^{-N x^2} = x \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{e^{N x^2}} \right) = 0 \quad \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{por L'Hôp queda } \frac{1}{\text{algo}} = 0$$

- El campo de convergencia está formado por los valores de x que provocan que la suma de la serie anterior sea finita, y como hemos visto que el límite anterior existe y vale 0 siempre, concluimos que la serie es finita y vale cero para todo x , y por eso el campo de convergencia es $\mathbb{R}$

campo de convergencia

$$S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{S(x) = 0}$$

$$\boxed{C = \mathbb{R}}$$

C

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} [nx e^{-nx^2} - (n-1)x e^{-(n-1)x^2}]$ converge uniformemente a $S(x)=0$ en $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ La sucesión de sumas parciales N -ésimas $S_N(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ en $\mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - S(x)| \right] = 0$

$$|S_N(x) - S(x)| = |S_N(x)| = |Nx e^{-Nx^2}| = |N| \cdot |x| \cdot |e^{-Nx^2}| = N \cdot |x| \cdot e^{-Nx^2}$$

$|x|$ no derivable

- Puesto que no eliminamos el valor absoluto de la expresión, decidimos hacer un esbozo de la gráfica para buscar el supremo

→ gráfica de $y = N|x| e^{-Nx^2} = f(x)$

- $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ par
lo haremos para $x > 0$ y dibujaremos $g(x) = Nx e^{-Nx^2}$ por simetría par la extendemos a $x < 0$ y tendremos $f(x)$

Nota: la función $f(x)$ no será derivable en $x=0$ porque aparece $|x|$. Esto quiere decir que en 0 habrá un pico.

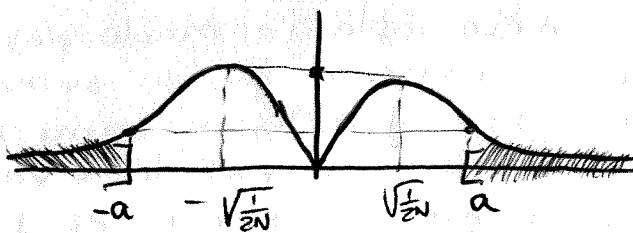
- $g(x) = Nx e^{-Nx^2}$; $g'(x) = N e^{-Nx^2} [1 - 2Nx^2] = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2N}}$

$g'(x) > 0$ si $x < \sqrt{\frac{1}{2N}}$ (g crece)

$g'(x) < 0$ si $x > \sqrt{\frac{1}{2N}}$ (g decrece)

Descartamos $\pm \sqrt{\quad}$ porque estamos en $x > 0$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$



$$\sup_{x \in \mathbb{R} - [-a, a]} |S_N(x) - S(x)| =$$

$$= N a e^{-Na^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - S(x)| &= N \sqrt{\frac{1}{2N}} e^{-N \frac{1}{2N}} = \\ &= N \sqrt{\frac{1}{2N}} e^{-\frac{1}{2}} = N \sqrt{\frac{1}{2N}} \frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{N}{2e}} \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [\sup \dots] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{N}{2e}} = \infty \neq 0$$

Al ser $\neq 0$ No converge uniformemente

Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, se pide:

- Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$.
- Estudiar la conexión y la compacidad de $f^{-1}(\{1\})$.
- Estudiar la existencia de primeras derivadas parciales en $\mathbb{R}^2$.
- Comprobar que la derivada en dirección del vector $\vec{v} = (y, -x)$ es nula en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.
- Estudiar los extremos relativos de $f(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$.

a) Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$

Vamos a dividir el estudio en dos casos :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

En esta región la función f es un cociente de funciones elementales claramente continuas con denominador no nulo.

Por tanto la función f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

- Si $(x, y) = (0, 0)$.

Este caso ya no es tan evidente por ello debemos aplicar la definición de continuidad en un punto,

$$f(x, y) \text{ es continua en } (0, 0) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

por tanto pasamos a calcular el límite. De las distintas formas que hay de resolverlo vamos a utilizar en esta ocasión un cambio de variable a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} &= \left[\begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos^2 \theta = \cos^2 \theta \end{aligned}$$

así pues, tenemos que el límite no existe ya que su valor depende del ángulo θ . Al no existir el límite decimos que f tiene una discontinuidad esencial en $(0, 0)$. Por tanto ya podemos afirmar que la función f no es continua en el punto $(0, 0)$.

Solución : $f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

NOTA:

Para calcular el límite se pueden utilizar otros métodos como por ejemplo calcular los límites direccionales (límites por rectas):

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = [y = \lambda x] = \lim_{(x, \lambda x) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + (\lambda x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1 + \lambda^2)x^2} = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

Como en este caso el límite depende del valor de λ podemos afirmar, al igual que antes, que el límite no existe.

Cuando aparece en el límite la expresión $x^2 + y^2$ el cambio a polares suele ser el método más directo y sencillo.

b) Estudiar la conexión y la compacidad de $f^{-1}(\{1\})$.

El conjunto $f^{-1}(\{1\})$ debe ser un subconjunto del $\mathbb{R}^2$ que es el dominio de la función. Vamos a calcular este subconjunto:

Recuerda que la expresión:

$(x, y) \in f^{-1}(\{a\})$
es equivalente a
 $f(x, y) = a$

$$(x, y) \in f^{-1}(\{1\}) \Rightarrow f(x, y) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

por tanto el conjunto buscado es:

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(x, 0) \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$$

que se trata del eje y quitándole el punto del origen $(0, 0)$.

O sea, dicho de forma sencilla, debemos estudiar si una recta (que en nuestro caso es el eje y) a la que hemos quitado un punto (que en nuestro caso es el origen) es un conjunto compacto y conexo.

Compacidad:

Sabemos que en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos compactos son equivalentes a los conjuntos que son cerrados y acotados. Nuestro conjunto $f^{-1}(\{1\})$ no está acotado (de hecho, una recta no puede estar contenida en ninguna bola con la distancia usual de $\mathbb{R}^2$). Por tanto $f^{-1}(\{1\})$ no es compacto.

Conexión:

Este conjunto no es conexo por caminos ya que a la recta le falta un punto. Además $f^{-1}(\{1\})$ tampoco es conexo.

Solución : $f^{-1}(\{1\})$ no es compacto ni conexo

c) Estudiar la existencia de primeras derivadas parciales en $\mathbb{R}^2$.

Vamos a calcular primero la derivada parcial $D_1 f$:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Para calcular la derivada en esta región basta con aplicar las reglas usuales de derivación sin olvidarse de tratar a la variable y como si fuera una constante,

$$D_1 f(x, y) = \frac{2x(x^2 + y^2) - x^2(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3 + 2xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Para $(x, y) = (0, 0)$

Como en este punto no podemos aplicar las reglas usuales de derivación calcularemos la derivada utilizando la definición,

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (h, 0)) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = \infty \end{aligned}$$

Por tanto $D_1 f(0, 0)$ no existe por que el límite diverge.

Ojo: lo primero no implica lo segundo

Recuerda:
las notaciones

$D_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$
son equivalentes

Pasamos ahora a calcular la otra derivada parcial, $D_2 f$:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Para calcular la derivada en esta región volvemos a aplicar las reglas usuales de derivación pero esta vez es la variable y la que trataremos como si fuera una constante,

$$D_2 f(x, y) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x^2 (2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Para $(x, y) = (0, 0)$

Como en este punto no podemos aplicar las reglas usuales de derivación calcularemos la derivada utilizando la definición,

$$\begin{aligned} D_2 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(0, 1)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + (0, h)) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

Solución: $D_1 f = \begin{cases} \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \text{no existe} & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$	$D_2 f = \begin{cases} \frac{-2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
--	---

d) Comprobar que la derivada en dirección del vector $\vec{v} = (y, -x)$ es nula en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

En el enunciado de este apartado hay otra errata. Donde pone $\vec{v} = (y, -x)$ debe poner $\vec{v} = (x, y)$. Esta vez la errata sí es relevante ya que cambia el resultado de este apartado según cojamos uno u otro vector. (De todas formas se informó de este error durante el examen).

Así pues vamos a resolver el apartado utilizando el vector correcto $\vec{v} = (x, y)$:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f &= Df \cdot \vec{v} = (D_1 f, D_2 f) \cdot (x, y) = \left(\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \cdot (x, y) = \\ &= \frac{2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

e) Estudiar los extremos relativos de $f(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$.

Los puntos en los que se anulan las derivadas parciales se llaman puntos estacionarios o puntos críticos.

Los extremos pueden presentarse sólo en los puntos en los que las derivadas parciales D_1f y D_2f se anulan o bien en aquellos puntos donde alguna de ellas no existe.

Vamos pues a calcular los posibles puntos extremos:

$$\left. \begin{aligned} D_1f(x, y) = 0 \\ D_2f(x, y) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \frac{-2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2xy^2 = 0 \\ -2x^2y = 0 \end{aligned} \right\}$$

el sistema obtenido cumple ambas ecuaciones cuando $x = 0$ o bien cuando $y = 0$.

Así pues tenemos que las soluciones son los pares $(x, 0)$ y $(0, y)$. A estos puntos hay que añadir además el $(0, 0)$ ya que en ese punto no existen las dos derivadas parciales. Así pues los posibles máximos o mínimos están entre los siguientes puntos:

$$(x, 0) \text{ donde la función vale } f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2 + 0^2} = 1$$

$$(0, y) \text{ donde la función vale } f(0, y) = \frac{0^2}{0^2 + y^2} = 0$$

$$(0, 0) \text{ donde la función vale } f(0, 0) = 0 \text{ por propia definición.}$$

Ahora se trata de comprobar si los posibles extremos que hemos calculado son máximos, son mínimos o no son nada.

Para ello, siguiendo el método general, tendríamos que obtener la matriz hessiana, particularizarla en los posibles puntos extremos y calcular su determinante. Pero, en esta ocasión el determinante sale cero en todos los casos. Es decir, estamos en el caso dudoso y este criterio no es capaz de decirnos si estamos ante un máximo un mínimo o ninguno de los dos.

Por tanto en este caso debemos utilizar un método algo más sutil como es el de intentar acotar la función. Esta vez tenemos suerte ya que podemos comprobar fácilmente que la función está acotada entre 0 y 1.

Efectivamente $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ya que tanto el numerador como el denominador son positivos al estar elevados al cuadrado.

Por otro lado tenemos que:

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1 \Rightarrow f(x, y) \leq 1$$

de esta forma tenemos que

$$0 \leq f(x, y) \leq 1$$

y por tanto podemos afirmar que :

f alcanza un mínimo en los puntos de la forma $(0, y)$ con $y \in \mathbb{R}$ donde $f(0, y) = 0$

f alcanza un máximo en los puntos de la forma $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ donde $f(x, 0) = 1$

Solución : f alcanza un mínimo en $(0, y)$ con $y \in \mathbb{R}$
 f alcanza un máximo en $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

El método de calcular el determinante de la matriz hessiana es muy sencillo pues es totalmente mecánico. Sin embargo, hay ocasiones, como ésta, en que no nos proporciona información

Septiembre 00
Ejercicio 2

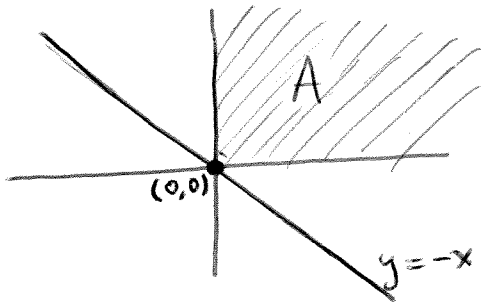
$$\text{Sea } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

- Estudie la continuidad de f en el primer cuadrante $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$
- Compruébese que f no alcanza extremo en el interior de A .
- Calcúlense los extremos de f en $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
- Estúdiese la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}$ de la sucesión de funciones $g_n(x) = f(x, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a)

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\} = \text{primer cuadrante}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & x+y \neq 0 \quad y \neq -x \\ 0 & x+y = 0 \quad y = -x \end{cases}$$



mientras que un punto (x, y) esté situado en el primer cuadrante y no esté situado sobre la recta $y = -x$, la función f será continua por ser división de funciones continuas sin denominador nulo.

Sólo hay un punto que está en el primer cuadrante y a la vez sobre la recta $y = -x$, y ese punto es el origen. Así pues, en $(0,0)$ tenemos denominador nulo y no podemos manejar la expresión de $f(x, y)$. Para estudiar la continuidad, aplicamos la definición.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \rho \sin \theta}{\rho (\cos \theta + \sin \theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta); \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin(2\theta)}{2}; \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

En principio, el límite que nos queda no estaría acotado porque para los ángulos $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$ tenemos denominador nulo ($\sin \theta = -\cos \theta$), la división sería infinito y no podríamos aplicar "infinitésimo acotado = 0". Sin embargo, como nos centramos sólo al primer cuadrante, ninguno de los puntos en él situado tiene un $\theta = \frac{3\pi}{4}$ o $\theta = \frac{7\pi}{4}$. Como en el 1º cuadr. todos los puntos cumplen $\sin \theta + \cos \theta \neq 0$, la división $\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta}$ está acotada $\Rightarrow$ "infinités. acot. = 0" $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0,0)$; por ser continua en $A - \{(0,0)\} \Rightarrow f(x, y)$ continua en A

b) compruebe que f no alcanza extremo en el int A

$$\text{Interior de } A = \dot{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

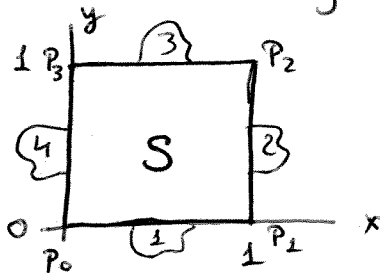
Candidatos a extremos:

$$\left. \begin{array}{l} * \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = (0, 0) \\ * \nexists df(x, y) \text{ (} f \text{ no diferenciable)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{condiciones} \\ \text{necesarias} \\ \text{pero} \\ \text{no suficientes} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y \cdot (x+y) - 1 \cdot xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x \cdot (x+y) - 1 \cdot xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0 \\ \nabla f(x, y) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in \dot{A} \\ \nabla f(x, y) = (0, 0) \text{ No aporta candidatos.} \end{array}$$

Las dos derivadas parciales primeras de f son continuas porque el denominador nunca es nulo en el interior de A . Como f es continua en el interior de A y sus derivadas primeras (las dos) son continuas en $\dot{A}$. Decimos que f es de clase C^1 en $\dot{A}$ y por tanto f es diferenciable en $\dot{A}$. La segunda condición no aporta candidatos.

c) Extremos de f en $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \subset A$



Calculemos por curiosidad $\bar{S}$:

$\bar{S}$ = puntos de adherencia de S

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es adherente de $S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$

$\bar{S} = S \Rightarrow S$ cerrado
además S acotado $\} S$ compacto

f continua en A , $S \subset A \Rightarrow f$ continua en S

Teorema Weierstrass: $\left\{ \begin{array}{l} \text{por ser } f \text{ continua en un compacto} \\ f \text{ alcanza extremos en dicho compacto} \end{array} \right.$

(I) Vimos en b) que f no alcanzaba extremos en el interior del primer cuadrante, así es que tampoco los alcanza en el interior de S .

Así pues f alcanzará los extremos en S en la frontera de S .

(II) $Fr(S) = \textcircled{1} \cup \textcircled{2} \cup \textcircled{3} \cup \textcircled{4} \cup \{P_0\} \cup \{P_1\} \cup \{P_2\} \cup \{P_3\}$ candidatos per sé (forma latina y pija de decir "porque quiero") "porque sí")

$$\textcircled{1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leq x \leq 1\} \Rightarrow f(x, y) \text{ es } f(x, 0) = 0$$

$$\textcircled{4} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \Rightarrow f(x, y) \text{ es } f(0, y) = 0$$

En $\textcircled{1}$ y $\textcircled{4}$ $f(x, y) = 0$; $\forall f(x, y) \in S, f(x, y) \geq 0$ (pues $x \geq 0$ e $y \geq 0$)

Todos los puntos situados en $\textcircled{1}$ y $\textcircled{4}$ dan lugar a los mínimos de f en S .

Mínimos de S : $(0, y_0), (x_0, 0)$ de valor $f(0, y_0) = f(x_0, 0) = 0$

$$\{2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x=1, 0 < y < 1\} \Rightarrow f(x, y) \text{ es } f(1, y) = \frac{y}{y+1} = \varphi_1(y)$$

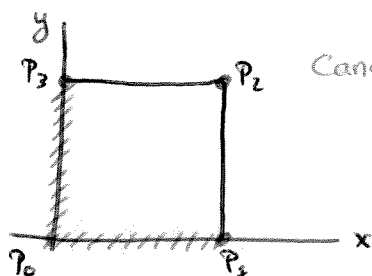
$$\varphi_1'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{y+1-y}{(y+1)^2} = 0 \text{ lo cual no ocurre nunca}$$

No hay extremos en $\{2\}$

$$\{3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y=1, 0 < x < 1\} \Rightarrow f(x, y) \text{ es } f(x, 1) = \frac{x}{x+1} = \varphi_2(y)$$

$$\varphi_2'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = 0 \text{ lo cual no sucede nunca}$$

No hay extremos en $\{3\}$



Candidatos

$$\begin{cases} f(x_0, 0) = 0 \\ f(0, y_0) = 0 \end{cases} \text{ mínimos}$$

$$f(1, 1) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{máximo}$$

d)

$$g_n(x) = f(x, n) = \begin{cases} \frac{xn}{x+n} & \text{si } x+n \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+n = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

como $0 \notin \mathbb{N} \Rightarrow f(x, n) = \frac{xn}{x+n}$

convergencia puntual:

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{xn}{x+n} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad g(x) = x$$

convergencia uniforme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| \right] = 0 \Leftrightarrow g_n(x) \text{ converge en } \mathbb{R} \text{ a } g(x) \text{ unif.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \underbrace{\frac{xn}{x+n}}_{\frac{xn}{x+n}} - \underbrace{x}_{x} \right| \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{x^2}{|x+n|} \right\} \right] \xrightarrow{\text{No acotada}} \Rightarrow \nexists \sup$$

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \frac{xn}{x+n} - x \right| = \left| \frac{-x^2}{x+n} \right| = \frac{|-x^2|}{|x+n|} = \frac{x^2}{|x+n|}$$

$g_n(x)$ No converge uniformemente a $g(x)$ en $\mathbb{R}$

Febrero 2001
Problema 1

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

a) (4 pts) Encontrar los valores máximos y mínimos de f en el conjunto A definido por $A = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

b) (3 pts) Siendo $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

estudiar la continuidad y la existencia de derivadas parciales de g en $\mathbb{R}^2$.

c) (1 pts) Comprobar que $x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = +g$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

d) (2 pts) Calcular $\text{grad}(g^2 - f)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ y la derivada direccional de $g^2 - f$ en $(1, 1)$ en la dirección de $h = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

a)

Tenemos que:

- El conjunto A es cerrado y acotado. Por tanto, A es compacto en $\mathbb{R}$.
- La función f es continua en todo $\mathbb{R}$ por tratarse de composición de funciones elementales continuas.

Así que podemos asegurar que:

- La función f alcanza máximo y mínimo en A .

Ahora bien, estos extremos se pueden alcanzar en el interior de A o en la frontera de A así que habrá que estudiar el comportamiento de la función en estos dos conjuntos:

- Interior de A , $\overset{\circ}{A}$

Por tratarse $\overset{\circ}{A}$ de un conjunto abierto y ser $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ podemos asegurar que los puntos estacionarios se encuentran únicamente donde se anulan las derivadas parciales:

$$\begin{cases} D_1 f = 2x - y = 0 \\ D_2 f = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Así pues, en el interior de A sólo hay un punto estacionario que es $a_0 = (0, 0)$.

- Frontera de A , $Fr(A)$

La frontera de A se compone de los cuatro vértices del cuadrado y de sus cuatro lados que, matemáticamente, los podemos expresar como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1, -1) & a_2 &= (1, -1) & a_3 &= (-1, 1) & a_4 &= (1, 1) \\ L_1 &= \{x = 1, -1 < y < 1\} & L_2 &= \{x = -1, -1 < y < 1\} \\ L_3 &= \{y = 1, -1 < x < 1\} & L_4 &= \{y = -1, -1 < x < 1\} \end{aligned}$$

Calculamos los extremos de la función f restringida al conjunto L_1 :

$\varphi(y) = f(1, y) = 1 - y + y^2$ que se trata de una función de una variable de la que podemos calcular sus puntos estacionarios igualando su derivada primera a cero:

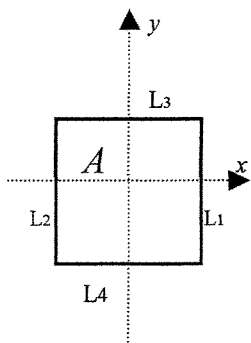
Estamos aplicando un teorema importante de la teoría

El interior de cualquier conjunto siempre es abierto

Recuerda:
las notaciones

$$D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

son equivalentes



$$\phi'(y) = -1 + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow a_5 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

y procediendo de igual forma con los otros tres lados del cuadrado nos queda que,

Extremo de f sobre el lado L_2

$$\phi(y) = f(-1, y) = 1 + y + y^2 \Rightarrow \phi'(y) = +1 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_6 = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

Extremo de f sobre el lado L_3

$$\phi(x) = f(x, 1) = x^2 - x + 1 \Rightarrow \phi'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow a_7 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Extremo de f sobre el lado L_4

$$\phi(x) = f(x, -1) = x^2 + x + 1 \Rightarrow \phi'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_8 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

Por tanto, una vez examinados tanto el interior como la frontera de A , tenemos que los máximos y mínimos de la función sólo pueden estar en uno de los nueve puntos que hemos localizado (uno en el interior de A y los demás en la frontera).

Así pues sólo nos queda evaluar la función en cada uno de esos puntos y ver dónde se encuentra el máximo y el mínimo de la función:

$$\begin{aligned} a_0 &= (0, 0) &\Rightarrow f(0, 0) &= 0 \\ a_1 &= (-1, -1) &\Rightarrow f(-1, -1) &= 1 \\ a_2 &= (1, -1) &\Rightarrow f(1, -1) &= 3 \\ a_3 &= (-1, 1) &\Rightarrow f(-1, 1) &= 3 \\ a_4 &= (1, 1) &\Rightarrow f(1, 1) &= 1 \\ a_5 &= (1, 1/2) &\Rightarrow f(1, 1/2) &= 3/4 = 0,75 \\ a_6 &= (-1, -1/2) &\Rightarrow f(-1, -1/2) &= 3/4 = 0,75 \\ a_7 &= (1/2, 1) &\Rightarrow f(1/2, 1) &= 3/4 = 0,75 \\ a_8 &= (-1/2, -1) &\Rightarrow f(-1/2, -1) &= 3/4 = 0,75 \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que f alcanza el mínimo en A en el punto $(0, 0)$ donde f vale 0 y alcanza el máximo en los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ donde f vale 3.

Solución : Mínimo de f : 0 en $(0, 0)$ Máximos de f : 3 en $(1, -1)$ y $(-1, 1)$

b)

Lo primero que tenemos que hacer es simplificar la función $g(x, y)$:

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 - xy + y^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Así pues podemos poner que,

$$g(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \Rightarrow g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De esta forma, al ser $g(x)$ composición de funciones elementales continuas podemos asegurar que $g(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Fíjate en que, tal y como queda $g(x)$, no tiene sentido definirla a trozos

Vamos a calcular ahora la derivada parcial $D_1 g$:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Para calcular la derivada en esta región basta con aplicar las reglas usuales de derivación sin olvidarse de tratar a la variable y como si fuera una constante,

$$D_1 f(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- Para $(x, y) = (0,0)$

Como en este punto no podemos aplicar las reglas usuales de derivación calcularemos la derivada utilizando la definición,

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + (h,0)) - f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1 & \text{si } h < 0 \\ 1 & \text{si } h > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Fíjate que el límite no existe pues depende del valor de h . Si h es negativo el límite es -1 pero si h es positivo el límite vale 1

Procediendo de manera análoga con la derivada parcial con respecto a y obtenemos que:

- $D_2 f(x, y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
- $D_2 f(0,0)$ no existe.

Por tanto podemos asegurar que $g(x)$ tiene derivadas parciales en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Solución : $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y posee derivadas parciales en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

c)

$$\begin{aligned} x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} &= x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + y \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = g \end{aligned}$$

d)

Primero obtenemos la función $g^2 - f$:

$$g^2 - f = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - (x^2 - xy + y^2) = x^2 + y^2 - x^2 + xy - y^2 = xy$$

Ahora calculamos el gradiente de la función,

$$\text{grad}(g^2 - f) = \nabla(g^2 - f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(g^2 - f), \frac{\partial}{\partial y}(g^2 - f) \right) = (y, x)$$

Las notaciones
 $\text{grad } f \equiv \nabla f$
son equivalentes

Y ahora, para calcular la derivada direccional que nos piden utilizamos la siguiente expresión,

$$D_h f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot h$$

que en nuestro caso queda,

$$D_h(g^2 - f)(1,1) = \nabla(g^2 - f)(1,1) \cdot h = (1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

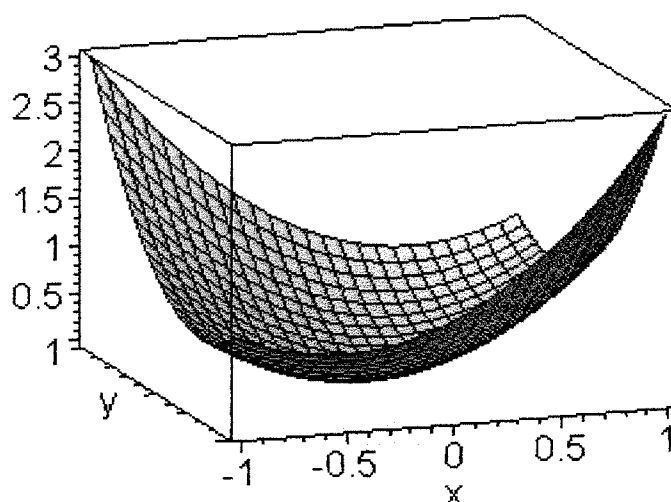
Solución : Gradiente: $\nabla(g^2 - f) = (y, x)$

Derivada direccional: $D_h(g^2 - f)(1,1) = \sqrt{2}$

Gráficas de las funciones utilizadas en el ejercicio:

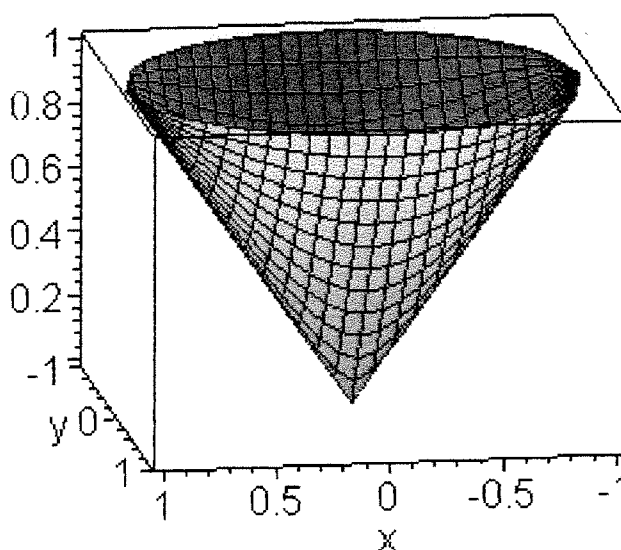
Gráfica de la función
 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

restringida al recinto A.
En el dibujo se puede apreciar como los máximos se alcanzan en $(-1, 1)$ y $(-1,1)$ donde f vale 3. El mínimo se alcanza en $(0,0)$ donde la función vale 0.



Gráfica de la función
 $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Fíjate que se trata de un cono con vértice en $(0,0)$. Se puede apreciar, por tanto, que no es diferenciable en $(0,0)$ pues en ese punto la función posee un "pico" por el que se puede pasar más de un plano tangente.



Febrero 2001
Problema 2

Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$.

- (4 pts) Comprobar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) < 1$ y $g(x) \leq g(a)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (3 pts) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión funcional (f_n) , siendo $f_n = (g(x))^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (3 pts) Estudiar la compacidad, conexión y completitud del conjunto $g(A)$, donde $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

a)

Al tratarse de una función racional con denominador siempre distinto de cero podemos asegurar que su dominio de definición es toda la recta real $\mathbb{R}$.

Además como $g \in C^1$ sabemos que sus máximos y mínimos se encuentran en los puntos donde se anula su derivada primera.

$$g'(x) = \frac{2x(1+x^4) - x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2x + 2x^5 - 4x^5}{(1+x^4)^2} = \frac{2x - 2x^5}{(1+x^4)^2} = \frac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2}$$

que igualando a cero da como soluciones,

$$2x(1-x^4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-x^4 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{1} \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

así pues $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ son los puntos estacionarios (o críticos) de g .

Para comprobar si son realmente máximos o mínimos calculamos la derivada segunda,

$$g''(x) = \frac{(2-10x^4)(1+x^4)^2 - (2x-2x^5)2(1+x^4)4x^3}{(1+x^4)^4} = \frac{6x^8 - 24x^4 + 2}{(1+x^4)^2}$$

y sustituimos los puntos estacionarios en ella obteniendo los siguientes resultados,

- $g''(0) = 2 > 0 \Rightarrow x = 0$ es un mínimo donde la función vale $g(0) = 0$
- $g''(1) = -2 < 0 \Rightarrow x = 1$ es un máximo donde la función vale $g(1) = \frac{1}{2}$
- $g''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow x = -1$ es un máximo donde la función vale $g(-1) = \frac{1}{2}$

Para poder esbozar la gráfica de la función ya sólo falta saber que pasa cuando la función tiende a infinito, o sea, si tiene asíntotas horizontales,

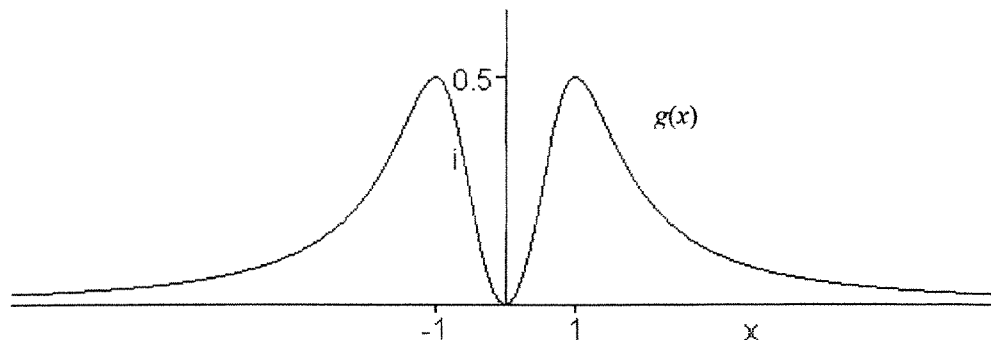
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$$

lo que significa que $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función.

Por último, es interesante darse cuenta que la función es siempre positiva, es decir, está siempre sobre el eje x ($g(x) \geq 0$).

Con todos estos datos ya podemos hacer un dibujo de la gráfica de la función y, basándonos en ella, contestar al primer apartado del problema.

Existen otras formas más "elegantes" de hacerlo pero ésta quizás sea la más familiar para todos



Tomando la gráfica como referencia vemos que haciendo $a = 1$ tenemos que $g(a) = g(1) = 0,5 < 1$ y $g(x) \leq g(a) = 0,5$ para cualquier x ya que se trata del máximo de la función. Igual conclusión obtenemos si hacemos $a = -1$. Con esto queda resuelto el primer apartado del ejercicio.

Solución : $a = 1$, $a = -1$

b)

- Convergencia puntual:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (g(x))^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1 + x^4} \right)^n = 0$$

ya que

$$0 \leq \frac{x^2}{1 + x^4} < 1 \quad \text{para cualquier } x \in \mathbb{R}$$

Solución : La sucesión (f_n) converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función $f(x) = 0$.

- Convergencia uniforme:

Para estudiar la convergencia uniforme utilizaremos el procedimiento habitual basado en siguiente proposición:

$$f \text{ es uniformemente convergente en } \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Vamos a ir construyendo la expresión por partes:

$$f_n(x) - f(x) = \left(\frac{x^2}{1 + x^4} \right)^n - 0 = \left(\frac{x^2}{1 + x^4} \right)^n$$

El valor absoluto no modifica la expresión en este caso pues nuestra función es siempre positiva:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left(\frac{x^2}{1 + x^4} \right)^n$$

Recuerda que:
Si $|r| < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

Esta es una proposición muy útil de convergencia uniforme que conviene saberse muy bien.

Los extremos de esta función se alcanzan en los mismos puntos que en el apartado a) por tanto:

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

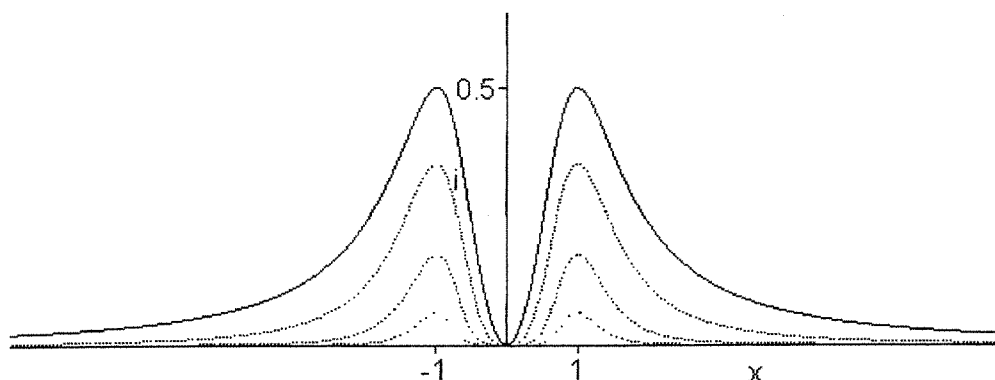
Por último calculando el límite nos queda que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Por tanto la sucesión (f_n) converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función nula.

Solución : La sucesión (f_n) converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función $f(x) = 0$.

En la siguiente gráfica puedes observar la convergencia de (f_n) hacia $f(x) = 0$:



Volvemos a utilizar que si $|r| < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

En esta gráfica se puede observar la función $(g(x))^n$ para distintos valores de n . En concreto hemos utilizado $n=1$, $n=2$, $n=5$ y $n=20$.

Fíjate como la función tiende a cero confundiéndose con el eje x

c)

Tomando como referencia la gráfica de $g(x)$ que hemos dibujado en el apartado a) podemos ver que el recorrido de la función es $[0, 1/2]$. Ahora bien, el único punto donde la función vale cero es en $x=0$ y este punto no pertenece al conjunto A . El resto de los puntos del recorrido se alcanzan en algún lugar de A . Por tanto, tenemos que,

$$g(A) = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

- **Compacidad:**

En la recta real los conjuntos compactos son aquellos que son cerrados y acotados. En este caso $g(A)$ es acotado pero no es cerrado pues el intervalo es abierto por la izquierda. Por tanto $g(A)$ no es compacto en $\mathbb{R}$.

- **Conexión:**

En la recta real los conjuntos conexos son los intervalos y los puntos aislados. En nuestro caso $g(A)$ es un intervalo. Por tanto $g(A)$ no es conexo en $\mathbb{R}$.

- **Completitud:**

Para que un conjunto sea completo es condición necesaria que sea cerrado. En nuestro caso $g(A)$ no es cerrado por lo que podemos asegurar que $g(A)$ no es completo.

Solución : $g(A)$ es conexo, pero no es compacto ni es completo.

Septiembre 01
Ejercicio 1

Se considera la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, donde $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

- a) Determinése su campo de convergencia C .
b) Calcúlese su suma $S(x)$ y su resto n -ésimo $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ en C .
c) ¿Es cierto que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente } A \subset \mathbb{R} \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0 \right),$$

donde $M_n = \sup_{x \in A} R_n(x)$?

- d) Estúdiase la convergencia uniforme de la serie en los conjuntos C , $C - \{0\}$ y $C - [-a, a]$ con $a > 0$.

$n=0!!!$

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{1} \quad n=0 \\ \frac{x^2}{1+x^2} \quad n=1 \\ \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \quad n=2 \end{array} \right\} \equiv \text{sucesión de funciones}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots \equiv \text{serie de funciones}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \dots$$

a) El campo de convergencia de la serie (suma) de funciones es el conjunto de valores de x que una vez sustituidas en la expresión de la serie hacen que el valor de dicha suma sea finito.

serie = suma

serie geométrica $\left\{ \begin{array}{l} \text{1er término} = x^2 \\ \text{razón} = r = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\}$

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{x^2 - 0}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2$

1er término último término x razón

sólo válido para $|r| < 1$

$$x=0 \Rightarrow S(x) = S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = f_0(0) + f_1(0) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$$

Sustituyendo $x=0$ en la serie funcional, el valor de dicha serie es 0 (finito), luego la serie es convergente.

$0 < \infty$
 $0 \in \text{campo converg.}$

como vemos, la fórmula anterior es válida, y por tanto la serie es convergente para $x \neq 0$. $x=0$ lo estudiamos a parte.

Ya sabíamos que $x \neq 0$ provocaba tener $|r| < 1$, lo que implicaba que la serie también fuese convergente. Así pues, la serie es convergente siempre, y por ello su campo de convergencia es $C = \mathbb{R}$

$$\boxed{C = \mathbb{R}}$$

b) Valor de la suma $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

$$S(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = [f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_N(x)] + [f_{N+1}(x) + \dots]$$

$\rightarrow R_N(x) = \text{Resto } N\text{-ésimo}$

$\rightarrow S_N(x) = \text{Suma } N\text{-ésima} \rightarrow \text{hasta el término } N$
(es decir $N+1$ términos)

$$S(x) = S_N(x) + R_N(x)$$

$$R_N(x) = S(x) - S_N(x)$$

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_N(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^N} =$$

$$S_N(x) = \frac{(1+x^2)^{N+1} - 1}{(1+x^2)^N} \Leftrightarrow x \neq 0$$

Válido para $x \neq 0$ porque hemos usado la fórmula con $|r| < 1$; para $x=0$ hemos de hacerlo por separado, pero sabemos que $f_0(0) + f_1(0) + f_2(0) + \dots + f_N(0) = 0$ (de casualidad sustituyendo $x=0$ en $S_N(x)$ resulta 0)

último término $\times$ razón = $x^2 - \frac{x^2}{(1+x^2)^N} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{N+1} - 1}{(1+x^2)^N}$

1er término $\frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}} = \frac{x^2(1+x^2)}{x^2} = 1+x^2$

razón

Suma N -ésima $S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$:

$$S_N(x) = \begin{cases} \frac{(1+x^2)^{N+1} - 1}{(1+x^2)^N} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Resto N -ésimo: $\begin{cases} x \neq 0 \Rightarrow R_N(x) = S(x) - S_N(x) = (1+x^2) - S_N(x) = (1+x^2) \frac{(1+x^2)^N}{(1+x^2)^N} - \frac{(1+x^2)^{N+1} - 1}{(1+x^2)^N} = \frac{1}{(1+x^2)^N} \\ x = 0 \Rightarrow R_N(x) = S(x) - S_N(x) = 0 - 0 = 0 \end{cases}$

Resto N -ésimo $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) = S(x) - S_N(x)$

$$R_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)^N} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- c) La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ en $A \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow$ La sucesión de sus sumas parciales N -ésimas $S_N(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ en $A \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in A} \{ |S_N(x) - S(x)| \} \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} M_N = 0$
- $\downarrow$
 $|R_N(x)| \rightarrow M_N$
- Si, es cierto.

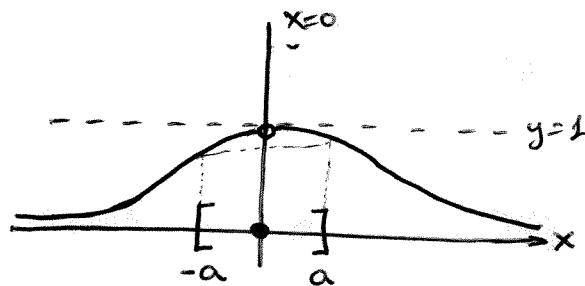
- d) Haremos uso de las equivalencias del apartado c) para responder a la convergencia uniforme del apartado d)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente en } A \subset \mathbb{R} \text{ a } S(x) \right) \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in A} |R_N(x)| \right] = 0$$

parece pues útil dibujar la gráfica de $R_N(x)$, buscar su supremo y sustituir en el límite para resolverlo

Gráfica de $R_N(x)$

- * $R_N(x) = R_N(-x) \Rightarrow$ Par
- * $R_N(x) > 0; R_N(x) \leq 1$
- * $\lim_{x \rightarrow \infty} R_N(x) = 0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$ asíntota
- * derivable siempre (pues denominador $\neq 0$) $\Rightarrow$ ~~picos~~



- En $\mathbb{R}$, el supremo de $R_N(x)$ es 1, igual ocurre en $\mathbb{R} - \{0\}$ así pues, el $\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in A} |R_N(x)| \right]$ es igual a 1; al no ser cero se tiene que esta suma no converge uniformemente en $\mathbb{R}$ ni en $\mathbb{R} - \{0\}$
- En $\mathbb{R} - [-a, a]$, el supremo (según la gráfica) es $R_N(a)$
 $R_N(a) = \frac{1}{(1+a^2)^N}$, y el límite quedaría pues
 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(1+a^2)^N} \right] = 0$; al ser nulo tenemos que
 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sí converge uniformemente en $\mathbb{R} - [-a, a]$

Febrero 02
Ejercicio 2

Se considera la sucesión funcional (f_n) donde $f_n(x) = \frac{\cos^2 nx}{2^{nx}}$.

a) Encontrar la función límite $f = \lim f_n$ en $[0, \infty)$, y estudiar la convergencia uniforme de (f_n) en $[0, \infty)$ y $[a, \infty)$ con $a > 0$.

b) Estudiar la convergencia uniforme de la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ en el conjunto $[1, \infty)$.

c) Calcular una cota de error $R_n(1)$ que se comete si la serie se aproxima por la n -ésima suma parcial, o sea, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) \approx \frac{\cos^2 1}{2} + \frac{\cos^2 2}{2^2} + \dots + \frac{\cos^2 n}{2^n}$.

d) estudiar si tiene mínimo el conjunto $\{R_n(1), n \in \mathbb{N}\}$.

$$f_n(x) = \frac{\cos^2 nx}{2^{nx}} = \left\{ \frac{\cos^2 x}{2^x}, \frac{\cos^2 2x}{2^{2x}}, \frac{\cos^2 3x}{2^{3x}}, \dots \right\}$$

expresión en la que aparecen x y n sucesión de funciones

a) convergencia puntual de $f_n(x)$ a $f(x)$ en $[0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 nx}{2^{nx}} = \begin{cases} x=0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 0}{2^0} = \frac{1}{1} = 1 \\ x>0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{nx}} \cdot \cos^2 nx = \text{infinitésimo acotado} = 0 \end{cases}$$

x actúa como parámetro

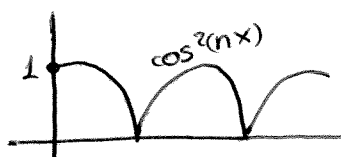
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 nx}{2^{nx}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ en $[0, +\infty)$

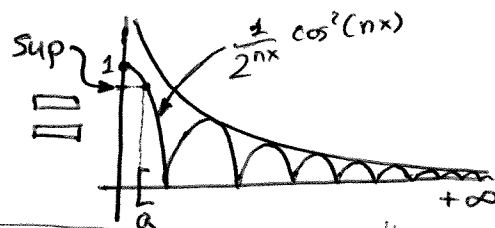
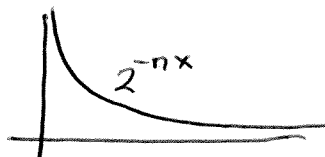
Como $f(x)$ es discontinua en $[0, \infty)$, y dado que las $f_n(x)$ son continuas en $[0, \infty)$ podemos asegurar que $f_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x)$ en $[0, \infty)$.

En $[a, \infty)$ con $a > 0$, $f(x)$ deja de ser discontinua, luego no podemos aplicar el teorema habitual y necesitamos emplear la definición de converg. unif.

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0, \infty)} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [a, \infty)} \left| \frac{\cos^2(nx)}{2^{nx}} - 0 \right| = \sup_{x \in [a, \infty)} \left| \frac{\cos^2(nx)}{2^{nx}} \right| \\ &= \sup_{x \in [a, \infty)} \frac{\cos^2(nx)}{2^{nx}} = \sup_{x \in [a, \infty)} 2^{-nx} \cdot \cos^2(nx) \end{aligned}$$



$\otimes$



$$\sup_{x \in [a, \infty)} \frac{1}{2^{nx}} \cos^2(nx) = \frac{1}{2^{na}} \cdot \cos^2(na) \neq 0 \Rightarrow \text{converge uniformemente a } f(x) \text{ en } [a, \infty)$$

b) Convergencia uniforme de: en $[1, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{2^{nx}} = \frac{\cos^2 x}{2^x} + \frac{\cos^2 2x}{2^{2x}} + \dots + \frac{\cos^2 Nx}{2^{Nx}} + \dots = S(x)$$

↳ Suma N-ésima $S_N(x)$ ↳

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{2^{nx}}$ converge uniformemente en $[1, \infty)$ a $S(x)$, si y sólo si la sucesión de sumas parciales $S_N(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ en $[1, \infty)$ y esto último ocurre si y sólo si $\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in [1, \infty)} |S_N(x) - S(x)| \right] = 0$.

Necesitamos conocer $S_N(x)$ para sustituir en el límite, pero nunca podremos obtener una expresión para $S_N(x)$, ya que en este problema no es geométrica ni telescópica.

Aplicamos el CRITERIO de Weierstrass (No el teorema)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{2^{nx}} &= \frac{\cos^2 x}{2^x} + \frac{\cos^2(2x)}{2^{2x}} + \dots + \frac{\cos^2(Nx)}{2^{Nx}} + \dots \leq \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^{2x}} + \dots + \frac{1}{2^{Nx}} + \dots \\ &\leq \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^{2x}} + \dots + \frac{1}{2^{2N}} + \dots \quad \begin{array}{l} x \geq 1 \Rightarrow Nx \geq N \Rightarrow 2^{Nx} \geq 2^N \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2^{Nx}} \leq \frac{1}{2^N} \end{array} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{2^{nx}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 1 < \infty \Rightarrow \text{convergente}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{2^{nx}} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{Serie de num. convergente}} \xrightarrow{\text{Weierstrass}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{2^{nx}} \text{ converge uniformemente en } [1, \infty).$$

Septiembre 02
Ejercicio 2

$$1. \text{ Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

1a) Estudiar su continuidad.

1b) Calcular $D_1 f(0, 0)$, $D_2 f(0, 0)$, $D_1 f(1, 1)$, $D_2 f(1, 0)$.1c) Hallar el conjunto de puntos donde la función f es diferenciable.1d) Estudiar si el conjunto $f^{-1}(\{0\})$ es abierto, cerrado, conexo y compacto.

2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - x - y + y^2$. Encontrar los máximos y los mínimos de f en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2\}$.

1a) Estudiar su continuidad

- Sea A el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} = \{(0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : y_0 \in \mathbb{R}\}$
- En $\mathbb{R}^2 - A$, $f(x, y)$ no presenta problemas porque el denominador es no nulo al tener $x \neq 0$ por estar fuera de $A \Rightarrow f(x, y)$ es división de funciones continuas en $\mathbb{R}^2 - A$ con denominadores no nulo $\Rightarrow f(x, y)$ continua en $\mathbb{R}^2 - A$.
- La continuidad en puntos de A (con la forma $(0, y_0)$) se estudia con la definición:

$$f \text{ continua en } (0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} f(x, y) = f(0, y_0)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} \frac{x^2 - y^2}{x} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{y^2}{x} \right) = \left[\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} x \right] - \left[\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} \frac{y^2}{x} \right] =$$

$$= 0 - \frac{y_0^2}{0} \rightarrow \begin{cases} \text{si } y_0 \neq 0 \Rightarrow \lim \pm \infty \Rightarrow \nexists \lim \Rightarrow f \text{ NO continua en } A \text{ con } y_0 \neq 0 \\ \text{si } y_0 = 0 \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = (*) \end{cases}$$

$$\text{polares} \quad (*) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho \cos \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\rho \cos \theta} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}; \quad \text{Puesto que no disponemos de un infinitésimo por un acotado } (\theta = \pi/2 \text{ provoca un } \infty) \text{ no podemos asegurar nada del límite anterior.}$$

Acudimos a reiterados

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0^2}{x} = 0$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{0} = \infty \Rightarrow \nexists$$

Puesto que son distintos (uno no existe) podemos afirmar que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ tampoco existe ($y_0 = 0$)

 f no es continua en A f continua en $\mathbb{R}^2 - A$

1b) Calcular $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$, $D_1 f(1,1)$, $D_2 f(1,0)$

$$\begin{aligned} \boxed{D_1 f(0,0)} &= \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + \lambda(1,0)] - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda,0) - 0}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^2 - 0^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^2}{\lambda^2} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{D_2 f(0,0)} &= \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + \lambda(0,1)] - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0,\lambda) - 0}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0,\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{0}{\lambda} = \boxed{0} \leftarrow f(0, \text{algo}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{D_1 f(1,1)} &= \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(1,1) + \lambda(1,0)] - f(1,1)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda+1,1) - 0}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\lambda+1)^2 - 1^2}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1^2}{\lambda^2 + \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda(\lambda+2)}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{0+2}{0+1} = \boxed{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{D_2 f(1,0)} &= \frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(1,0) + \lambda(0,1)] - f(1,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(1,\lambda) - 1}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{1^2 - \lambda^2}{1} - 1 \right) \frac{1}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-\lambda^2}{\lambda} = -0 = \boxed{0} \end{aligned}$$

Puesto que $(1,1)$ y $(1,0)$ tienen coordenada x no nula, las dos últimas derivadas podríamos haberlas calculado derivando de la expresión de $f(x,y)$ para $x \neq 0$, como hacemos a continuación:

$$x \neq 0; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x \cdot x - (x^2 - y^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}; \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 2$$

$$x \neq 0; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-2y \cdot x - (x^2 - y^2) \cdot 0}{x^2} = \frac{-2y}{x}; \quad \frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = 0$$

1c) Hallar el conjunto de puntos donde f es diferenciable

En 1a) vimos que f era no continua en A , por lo que

f no será diferenciable en A

En $\mathbb{R}^2 - A$, f es división de funciones diferenciables con denominador no nulo, luego:

f será diferenciable en $\mathbb{R}^2 - A$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0\}$$

Febrero 2003
Ejercicio 2

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ con $f_1(x,y) = e^{x-y}$ y $f_2(x,y) = x + \sin y$ y sea $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(u,v) = u - v$.

a) Estudiar el carácter abierto, cerrado, conexo y compacto de la preimagen $A = f_1^{-1}(\{1\}) \subset \mathbb{R}^2$.

b) Estudiar los extremos de f_2 y calcular el valor de la expresión:

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) \text{ en el punto } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

c) Estudiar la diferenciabilidad de la composición $F = g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$.

d) Calcular la diferencial de F en un punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y la derivada direccional de F en $(0,0)$ según el vector $v = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \rightarrow (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

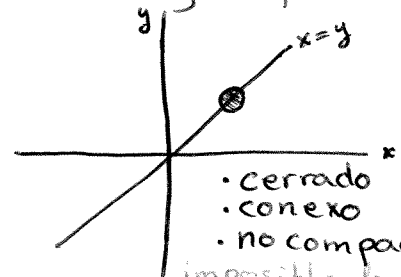
$$(x,y) \rightarrow (e^{x-y}, x + \sin y)$$

a) Estudiar el carácter abierto, cerrado, conexo y compacto de

$$f_1^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x,y) = 1\}$$

$$f_1^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x-y} = 1\}$$

$$f_1^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$$



imposible de explicar ahora. Se verá en temas 3

b) Estudiar los extremos de f_2 y calcular el valor de la expresión

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) \text{ en } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$b_1) f_2(x,y) = x + \sin y$$

Candidatos a extremos de $f_2(x,y)$: (nec., no suf.)

* $\nabla f_2(x,y) = (0,0) \rightarrow$ No aporta candidatos

* $\nabla f_2(x,y) \neq (0,0) \rightarrow$ No aporta candidatos

Por ser necesarias y no hay candidatos, f_2 no tiene extremos

$$* \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = \cos y$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = \cos y \end{array} \right\} \nabla f_2(x,y) = (1, \cos y) \neq (0,0), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{No aporta candidatos}$$

* Por otro lado, podemos estudiar la diferenc. de f_2 de dos formas:

- f_2 es diferenciable por ser suma de funciones difer.
- f_2 es diferenciable porque sus dos der. parc. son continuas.

En definitiva, f_2 es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, luego la diferencial existe siempre, y la condición de que no exista la diferencial no se cumpla nunca.

De la segunda condición no extraemos candidatos

b2)

$$f_2(x,y) = e^{x-y} \begin{cases} \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = e^{x-y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = -e^{x-y} \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial x^2} = e^{x-y} \\ \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial x \partial y} = -e^{x-y} \\ \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial y \partial x} = -e^{x-y} \\ \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial y^2} = e^{x-y} \end{cases}$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Schwarz (ver teorema) y por ello las derivadas cruzadas son iguales

$$f_2(x,y) = x + \sin y \Rightarrow \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial^2 y} = -\sin y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial y^2} \left[\frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial y^2} \right] = -\sin y \cdot e^{x-y}$$

en $(\pi/2, \pi/2) = -1$

c)

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

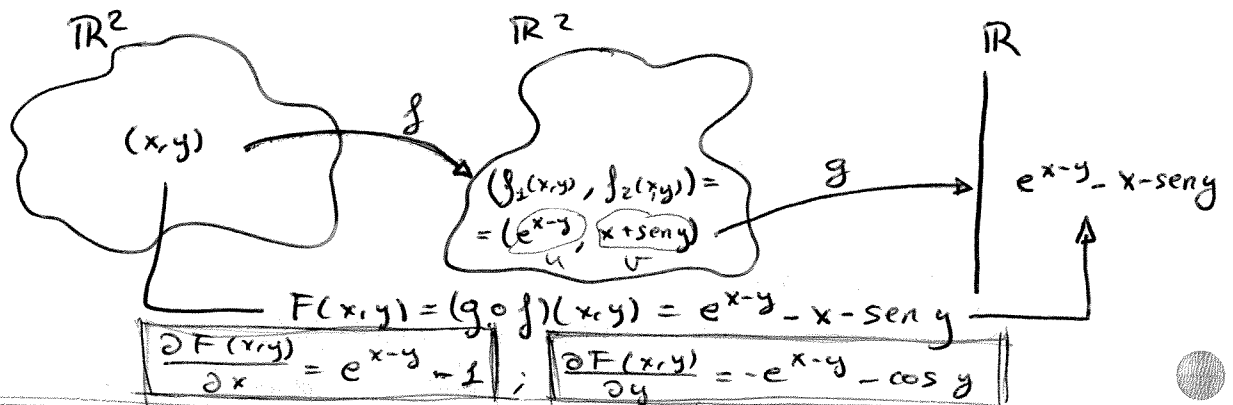
$$(u,v) \mapsto (u-v)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \mapsto (f_2(x,y), f_2(x,y))$$

$$(x,y) \mapsto (e^{x-y}, x + \sin y)$$

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(e^{x-y}, x + \sin y) = e^{x-y} - x - \sin y$$



$F = g \circ f$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y se puede explicar por dos motivos:

- * g es dif. en $\mathbb{R}^2$ y g es dif. en $\mathbb{R}^2$, luego $g \circ f$ será dif.
- * Las der. par. de F existen y son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, luego F es diferenciable en $\mathbb{R}^2$
- * $F(x,y) = e^{x-y} - x - \sin y$ es suma de funciones diferenciables

d)

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial v} = \nabla F(0,0) \cdot v = \left(\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}, \frac{\partial F(0,0)}{\partial y} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = (0, -2) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$dF(h,k)(a,b) = \frac{\partial F(a,b)}{\partial x} h + \frac{\partial F(a,b)}{\partial y} k = (e^{a-b} - 1)h + (-e^{a-b} - \cos b)k$$

la derivada direccional se puede hacer con el vector $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ porque su módulo es unitario. Si no fuese un vector unitario, habría de dividirlo entre su módulo para hacer que sí lo fuera.

Septiembre 03
Ejercicio 1

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = (x+y)^2 \cos(x-y) + (x-y)^2 \cos(x+y)$

- Estudiar la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$ y calcular la diferencial de f en $(0,0)$.
- ¿Presenta la función f extremo en $(0,0)$?
- Estudiar la continuidad de la función

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

donde $f(x, y)$ es la función del enunciado.

- Estudiar el carácter de abierto, cerrado, conexo y compacto del conjunto de puntos de discontinuidad de la función $g(x, y)$ del apartado anterior.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = (x+y)^2 \cos(x-y) + (x-y)^2 \cos(x+y)$$

a)

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2(x+y) \cos(x-y) - (x+y)^2 \sin(x-y) + 2(x-y) \cos(x+y) + (x-y)^2 \sin(x+y)$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2(x+y) \cos(x-y) + (x+y)^2 \sin(x-y) - 2(x-y) \cos(x+y) - (x-y)^2 \sin(x+y)$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

Las derivadas parciales de f son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por lo que afirmamos que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y por ello es diferenciable en $\mathbb{R}^2$

② Función diferencial en $(0,0)$

$$df(h, k)(0,0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} \underbrace{h}_{dx} + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \underbrace{k}_{dy} = 0h + 0k = 0$$

$$df(h, k)(0,0) = 0 = (\Omega = \text{función nula}) \text{ álgebra}$$

La diferencial de f en el $(0,0)$ es la función nula

NOTA: La diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$ podría justificarse con el siguiente razonamiento: f es suma, producto y composición de funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$

b) c) Presenta en $(0,0)$ extremos?

ojo
super
super
chunga

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 2+2=4 & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 2-2=0 \\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 2+2=4 \end{cases}$$

$$|H f(0,0)| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0 \quad 4 > 0 \Rightarrow \underline{(0,0) \text{ mínimo}}$$

c)

$$f(x,y) = (x+y)^2 \cos(x-y) + (x-y)^2 \cos(x+y)$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $g(x,y)$ es suma, producto y composición de funciones continuas con denominador no nulo.

g continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ En $(0,0)$ aplicamos la definición

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^2} \left[\rho^2 (\cos\theta + \sin\theta)^2 \cos(\rho(\cos\theta - \sin\theta)) + \right. \\ &\quad \left. + \rho^2 (\cos\theta - \sin\theta)^2 \cos(\rho(\cos\theta + \sin\theta)) \right] \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(\cos\theta + \sin\theta)^2 \overset{1}{\cos(\rho(\cos\theta - \sin\theta))} + (\cos\theta - \sin\theta)^2 \overset{1}{\cos(\rho(\cos\theta + \sin\theta))} \right] \\ &\quad \text{(inf. acotado)} \quad \text{(inf. acotado)} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2 = g(0,0) \end{aligned}$$

$$\text{como } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 2 = g(0,0) \Rightarrow \underline{\text{continua en } (0,0)}$$

En definitiva, g es continua en todo $\mathbb{R}^2$

d)

El conjunto de puntos de discontinuidad de g es el vacío, ya que g no es discontinua nunca. Y el vacío es abierto, cerrado, conexo, compacto.

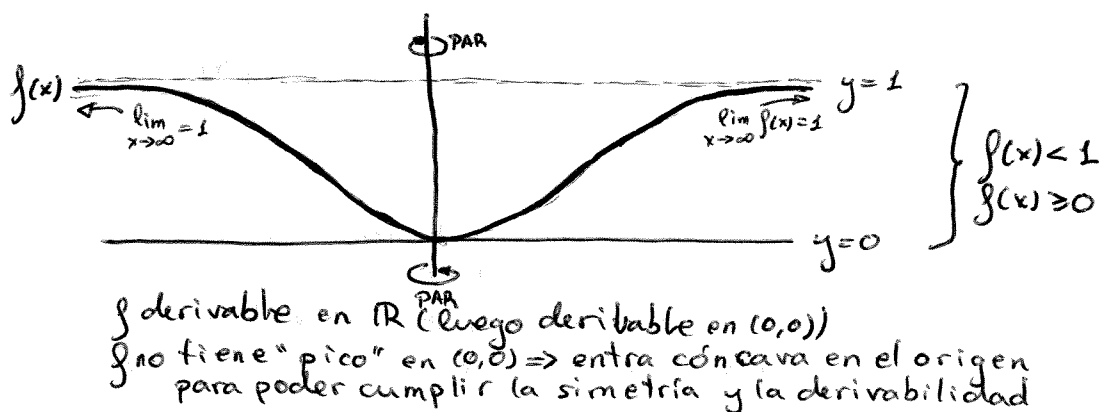
$\emptyset$ es abierto, cerrado, conexo, compacto

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

- Construir la gráfica de $f(x)$
- Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión (f_n) , donde $f_n(x) = [f(x)]^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- Determinar el conjunto de convergencia y la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
- Siendo $x_n = \frac{2-11n}{2n+11} + \frac{2^{-n}n}{n+1}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x) = (f(x), \sin x)$, calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$

a) gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

- numerador: $x^2 \geq 0$
- denominador: $1+x^2 \geq 1 > 0$
- $\left. \begin{array}{l} x^2 \geq 0 \\ 1+x^2 \geq 1 > 0 \end{array} \right\} \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1$
- simetría: PAR (respecto OY)
 $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x)$
- asíntotas:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \Rightarrow$ asíntota $y=1$
- crecimiento
 $f'(x) = 2 \frac{x}{(1+x^2)^2}$; $\text{sign}[f'(x)] = \begin{cases} \oplus & x > 0 \Rightarrow \text{creciente} \\ \ominus & x < 0 \Rightarrow \text{decreciente} \end{cases}$
- corte con los ejes:
 $\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=f(x)=0 \\ y=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \end{array} \right\} (0,0) \text{ corte con ambos ejes}$



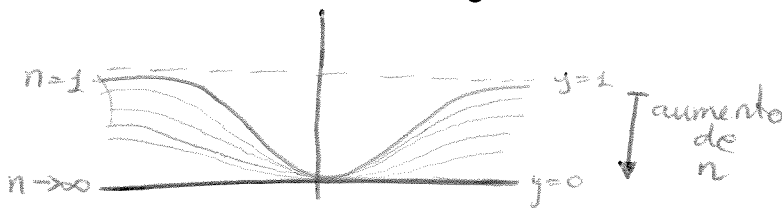
b) Convergencia puntual de $f_n(x) = [f(x)]^n = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2}, \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2, \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3, \dots \right\}$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{1+x^2} \right]^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\frac{x^2}{1+x^2} \in [0, 1)$
Como la base está entre $[0, 1)$
al elevarla a $n \rightarrow \infty$ el resultado es cero.

El conjunto de valores de x que provoca que el límite anterior exista y sea finito es $\mathbb{R}$, luego ese mismo $\mathbb{R}$ será el Dominio de la función límite puntual $f(x)$ y también será el conjunto donde hay convergencia puntual.

La sucesión $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)=0$ en $\mathbb{R}$



Si la función límite puntual $f(x)$ hubiese sido discontinua en $\mathbb{R}$, como las funciones de $f_n(x)$ son todas continuas en $\mathbb{R}$, podríamos aplicar el teorema habitual y decir que no hay convergencia uniforme de f_n a f en $\mathbb{R}$.

Ahora bien, si es continua y no podemos aplicar el teorema: habrá convergencia uniforme o no y para decidirlo acudimos a la definición siguiente.

$$f_n(x) \text{ converge uniformemente a } f(x)=0 \text{ en } \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \right] = 0$$

$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{ |f_n(x)| \} = 1$

A tenor de la gráfica hemos podido extraer la conclusión de que la menor de las cotas superiores (denominada supremo) es el valor uno.

Sustituyendo en el límite, vemos que éste vale $1 \neq 0$ y no hay convergencia uniforme de $f_n(x)$ a $f(x)=0$ en $\mathbb{R}$

Si el supremo $\in$ a la gráfica sería máximo en vez de supremo.

$$c) f_n(x) = [f(x)]^n = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2}, \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2, \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3, \dots \right\}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

$$S(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \dots$$

La serie anterior es geométrica porque de un término llegamos al siguiente multiplicando por algo que se llama razón y que es la misma a lo largo de toda la serie.

$$S(x) = \underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{1^{\text{er término}}} + \underbrace{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2}_{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \cdot \frac{x^2}{1+x^2}} + \underbrace{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3}_{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{1+x^2}} + \dots$$

↓ razón

Serie geométrica:

1er término: $\frac{x^2}{1+x^2}$

razón: $r = \frac{x^2}{1+x^2}$

$$S(x) = \frac{1^{\text{er término}} - r \cdot \text{último término}}{1 - r}$$

$$S(x) = \frac{\frac{x^2}{1+x^2} - 0 \cdot \frac{x^2}{1+x^2}}{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}$$

último término $\cancel{A}$

La fórmula de la suma de la serie geométrica se construye siguiendo los siguientes argumentos:

Suma Serie geométrica { Numerador: 1er término - (último término $\times$ razón)
Denominador: 1 - razón

$S(x) = x^2$ { La fórmula descrita anteriormente únicamente es válida si y sólo si el valor absoluto de la razón es menor que uno. En nuestro caso sólo es válida si $\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right| < 1$, lo cual ocurre siempre.
Si es ≥ 1 la suma es ∞

El conjunto de valores de x que provoca que la suma de las infinitas funciones sea un valor finito es el llamado conjunto/campo de convergencia. Como la serie era geométrica, vimos que su valor era finito (convergía) si el valor absoluto de la razón era menor que uno, lo cual ocurría $\forall x$. Así pues, sea quien sea x , el valor de la suma $S(x)$ es finito, y el campo/conjunto de convergencia es $\mathbb{R}$. El valor de la suma hemos visto que es x^2

$$d) x_n = \frac{2 - \pi n}{2n + \pi} + \frac{2^{-n} n}{n+1}$$

Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x) = (f(x), \sin x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \pi n}{2n + \pi} + \frac{2^{-n} n}{n+1}\right)\right) =$$

$$= g\left(\frac{-\pi}{2} + 0\right) = \left(f\left(\frac{-\pi}{2}\right), \sin \frac{-\pi}{2}\right) = \left(\frac{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}, -1\right) = \left(\frac{\pi^2}{4 + \pi^2}, -1\right)$$

Febrero 2004
Ejercicio 2

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cos \frac{x}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

- Estudiar la continuidad de f
- Calcular las derivadas parciales de f en $(0, 0)$ y en $(0, 1)$
- Estudiar la diferenciable de f en $(0, 0)$
- Calcular la derivada de f en el punto $(0, 1)$ según la dirección del vector $(-1, 2)$.

a) Estudiar la continuidad de f

- Sea A el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\} = \{(x_0, -x_0) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \in \mathbb{R}\}$. En $\mathbb{R}^2 - A$ la expresión de $f(x, y)$ tiene denominador no nulo (pues en $\mathbb{R}^2 - A$, $x+y \neq 0$)
- En $\mathbb{R}^2 - A$ $f(x, y)$ es continua
- Estudiamos por separado y aplicando la definición la continuidad de $f(x, y)$ en los puntos de A (con la forma $(x_0, -x_0)$).

$$f(x, y) \text{ será continua en } A \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, -x_0)} f(x, y) = f(x_0, -x_0) = 0$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, -x_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, -x_0)} xy \cos \frac{x}{x+y} = x_0(-x_0) \cos \frac{x_0}{x_0 - x_0} =$$

$$= -(x_0^2) \cos \frac{x_0}{0} \leftarrow \text{tiende a } 0$$

$$\bullet \text{ Si } x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} -(0)^2 \cos \left(\frac{0}{0} \right) = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{cont. en } (0, 0) \quad \begin{matrix} (x_0, -x_0) \\ \text{si } x_0 = 0 \end{matrix}$$

Nota: dentro del " $\cos(\frac{0}{0})$ " tenemos como numerador un 0 como un plano y en el denominador algo que tiende a 0. Así pues no tenemos una indeterminación, pues para ello habrían de tender tanto num. como denom. a 0. Así pues tenemos $\cos 0 = 1$

$$\bullet \text{ Si } x_0 \neq 0 \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, -x_0)} -(x_0^2) \cos \frac{x_0}{0} = -x_0^2 \cdot \cos \infty = \nexists$$

Nota: En este caso no aparece " $0 \cdot \cos \infty$ " o " $\text{infinitésimo} \cdot \cos \infty$ ", por tanto, el límite no existe. (Anteriormente si existía porque aparecía " $0 \cdot \cos \infty$ ")

En definitiva, tenemos que:

- * $f(x, y)$ continua en $\mathbb{R}^2 - A$
- * $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \Rightarrow \Rightarrow f(x, y)$ continua en $(0, 0)$
- * $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, -x_0)} f(x, y) = \nexists$ si $x \neq 0 \Rightarrow \Rightarrow f(x, y)$ no cont. en $A - \{(0, 0)\}$

$$f(x, y) \text{ continua en } (\mathbb{R}^2 - A) \cup \{(0, 0)\}$$

II

$$f(x, y) \text{ continua en } \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0 \text{ con } x \neq 0\}$$

b) Calcular las derivadas parciales en $(0,0)$ y $(0,1)$.

b₁) **(0,0)** En $(0,0)$ nos vemos obligados a aplicar la definición de derivada parcial, puesto que $(0,0)$ cumple $x+y=0$

$$\left(\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + \lambda(1,0)] - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda,0)}{\lambda} = \right.$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda \cdot 0 \cdot \cos \frac{\lambda}{\lambda+0}}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 1 \cdot 0 \cdot \cos 1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + \lambda(0,1)] - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0,\lambda)}{\lambda} = \right.$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \lambda \cdot \cos \frac{0}{0+\lambda}}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 0 \cdot 1 \cdot \cos \frac{0}{\lambda} = 0$$

que las dos hayan valido lo mismo (0) es casual

b₂) **(0,1)** Para hallar las der. parciales en $(0,1)$, puesto que $(0,1)$ cumple $x+y \neq 0$, tenemos dos métodos: aplicar la definición (pues es válida siempre) ó derivar directamente la expresión de f cuando $x+y \neq 0$

$$\left(\frac{\partial f(0,1)}{\partial x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,1) + \lambda(1,0)] - f(0,1)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda,1) - f(0,1)}{\lambda} = \right.$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda \cdot 1 \cdot \cos \frac{\lambda}{\lambda+1} - 0 \cdot 1 \cdot \cos \frac{0}{0+1}}{\lambda} = \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \cos \frac{\lambda}{\lambda+1} \right) - \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} 0 \cdot \cos \frac{0}{1} \right) =$$

$$= \left(\cos \frac{1}{2} \right) - (0 \cdot \cos 1) = 1 - 0 \cdot 1 = 1 - 0 = 1$$

$$\left(\frac{\partial f(0,1)}{\partial y} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,1) + \lambda(0,1)] - f(0,1)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0,\lambda+1) - f(0,1)}{\lambda} = \right.$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{0 \cdot (\lambda+1) \cos \frac{0}{\lambda+1+0} - 0 \cdot 1 \cdot \cos \frac{0}{0+1}}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{0 \cdot (\lambda+1) \cos \frac{0}{\lambda+1}}{\lambda} = 0$$

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \cos \left(\frac{x}{x+y} \right) + xy \left(-\sin \left(\frac{x}{x+y} \right) \right) \cdot \left(\frac{x+y-x}{(x+y)^2} \right); \frac{\partial f(0,1)}{\partial x} = 1 + 0 \cdot \frac{1}{1^2} = 1 \right)$$

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \cos \frac{x}{x+y} + xy \left(-\sin \frac{x}{x+y} \right) \cdot \left(\frac{x+y-x}{(x+y)^2} \right); \frac{\partial f(0,1)}{\partial y} = 0 + 0 \cdot \dots = 0 \right)$$

Aplicando definición

Directamente

c) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$

Si en el apartado a) hubiésemos concluido que f no era continua en $(0,0)$, ahora diríamos que f no es diferenciable en $(0,0)$. Pero como f es continua en $(0,0)$ no podemos asegurar nada acerca de la diferenciabilidad de f en $(0,0)$. Para estudiarla aplicaremos la definición:

$$f \text{ diferenciable en } (0,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}(y-0) \right]}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x \cdot y \cdot \cos \frac{x}{x+y}) - 0 - [0 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-0)]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos \frac{x}{x+y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \rho \sin \theta \cos \left(\frac{\rho \cos \theta}{\rho \cos \theta + \rho \sin \theta} \right)}{\sqrt{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta \cos \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right)}{\sqrt{\rho^2}} =$$

como $\rho = \text{distancia}$
 $\rho > 0 \Rightarrow |\rho| = \rho$

$$= \left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \right) \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right) = \text{infinitésimo} \cdot \text{acotado} = 0$$

aunque para $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\cos \theta + \sin \theta = 0$
"cos" sigue siendo acotado

Por ser nulo el límite anterior deducimos

que f diferenciable en $(0,0)$

d) Calcular la derivada de f en $(0,1)$ según la dirección del vector $(-1,2)$

$$\frac{\partial f(0,1)}{\partial \vec{v}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,1) + \lambda(-1,2)] - f(0,1)}{\lambda} =$$

No es lo mismo la derivada direccional que la derivada según la dirección

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(-\lambda, 1+2\lambda) - f(0,1)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(-\lambda)(1+2\lambda) \cos \left(\frac{-\lambda}{-\lambda+1+2\lambda} \right) - 0}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} -(1+2\lambda) \cos \left(\frac{-\lambda}{1+\lambda} \right) = -(1+2 \cdot 0) \cos \left(\frac{0}{1+0} \right) = -1 \cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$$

→ Otro método más rápido:

$$\frac{\partial f(0,1)}{\partial \vec{v}} = \underbrace{\nabla f(0,1)}_{\text{gradiente}} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial f(0,1)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,1)}{\partial y} \right) \cdot (-1,2) =$$

Operador Nabla

$$\vec{v} = (-1,2)$$

$$= (1,0) \cdot (-1,2) = 1(-1) + 0 \cdot 2 = \underline{\underline{-1}}$$

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sqrt{\frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- a) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
 b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
 c) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

a) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$

- En $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $f(x,y)$ es continua por ser suma, producto y composición de funciones continuas con denominador no nulo. Además, en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ podrá ser derivada siguiendo las normas de derivación habituales.
- En $(0,0)$ estudiaremos la continuidad y derivabilidad acorde a las definiciones.

$$f(x,y) = \text{cont en } (a,b) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \theta \sqrt{\frac{| \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta |}{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \cancel{\rho} \sin \theta \sqrt{\frac{| \rho^2 | (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) |}{\rho^2}} = \sin \theta \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \sqrt{|\cos 2\theta|} = \\ &\quad \text{como } \rho = \text{distancia, } \rho > 0; |\rho| = \rho \\ &= \sin \theta \cdot \text{infinitésimo} \cdot \text{acotado} = \sin \theta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{como } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f \text{ cont. en } (0,0)$$

 $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$ b) Calcular $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(a,b) + \lambda(1,0)] - f(a,b)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, 0) - 0}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{0 \cdot \sqrt{\frac{|\lambda^2 - 0^2|}{\lambda^2 + 0^2}}}{\lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{0 \cdot \frac{\sqrt{|\lambda^2|}}{\sqrt{\lambda^2}}}{\lambda} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(a,b) + \lambda(0,1)] - f(a,b)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0, \lambda) - 0}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda \cdot \sqrt{\frac{|0^2 - \lambda^2|}{0^2 + \lambda^2}}}{\lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2}}{\sqrt{\lambda^2}}}{\lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2}} = 1$$

$$\boxed{\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 1}$$

c) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$

Como f es continua en $(0,0) \Rightarrow$ puede ser dif. en $(0,0)$

Como existen $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \Rightarrow$ puede ser dif. en $(0,0)$

No obstante, con estos dos datos no podemos asegurar nada acerca de la diferenciabilidad de f en $(0,0)$, por lo que aplicamos la definición.

$$f(x,y) = \text{dif. en } (a,b) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) \right]}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - [0 \cdot x + 1 \cdot y]}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$\rho > 0 \Rightarrow |\rho| = \rho$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \cdot \sqrt{\frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2}} - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \theta \sqrt{\frac{\rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}} - \rho \sin \theta}{\sqrt{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\cancel{\rho} \sin \theta \sqrt{\frac{\cancel{\rho}^2 \cdot |\cos 2\theta|}{\cancel{\rho}^2}} - \cancel{\rho} \sin \theta}{\cancel{\rho}^2} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sin \theta \left(\sqrt{\frac{|\cos 2\theta|}{1}} - 1 \right) = \sin \theta \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{|\cos 2\theta|} - 1) = \cancel{0}$$

como θ puede tomar ∞ valores, el límite no sería único, por lo que no existe.

Si no existe, no es igual a cero, por lo que

$f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$

no obstante si es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por ser suma, producto y composición de funciones diferenciables

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

Febrero 2005
Ejercicio 1

I. Demuestre, mediante el uso de la definición de límite, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

II. Considere la función $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy^2 + y^3$

a) Estudie la existencia y, en su caso, el carácter (máximo o mínimo) de los extremos relativos y absolutos de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Estudie la existencia y, en su caso, el carácter de los extremos absolutos de f en

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x\}$$

II.

a) Estudie la existencia y, en su caso, el carácter (máx./mín.) de los extremos relativos y absolutos de f en $\mathbb{R}^2$.

Candidatos a extremos: (condiciones neces. pero no suf.)

$$\bullet \nabla f(x, y) = (0, 0)$$

$$\bullet \nexists df(x, y)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= x - y^2 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -2xy + 3y^2 \end{aligned} \right\} \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = (x - y^2, -2xy + 3y^2)$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 = 0; x = y^2 & \begin{matrix} x=0 \\ x=9/4 \end{matrix} \\ -2xy + 3y^2 = 0; -2y^3 + 3y^2 = 0 & \begin{matrix} y=0 \\ y=3/2 \end{matrix} \\ y^2(-2y+3)=0 & \end{cases}$$

- Los puntos que cumplen la primera condición son $P_1 = (0, 0)$ $P_2 = (9/4, 3/2)$
- Como vemos, tanto $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ como $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ son continuas siempre, luego f es diferenciable en todo punto (también podemos decir que al ser suma de funciones diferenciables, pues es un polinomio, f es diferenciable). Por tanto, la condición " $\nexists df(x, y)$ " no se cumple nunca, puesto que f es diferenciable siempre; con ello vemos que la segunda condición no aporta candidatos.

Candidatos a extremos: (nec., no suf.)

$$\bullet \nabla f(x, y) = (0, 0) \rightarrow \text{candidatos } P_1 = (0, 0) \text{ y } P_2 = (9/4, 3/2)$$

$$\bullet \nexists df(x, y) \rightarrow \text{no aporta candidatos (} f \text{ diferenc. en } \mathbb{R}^2 \text{)}$$

- Lo anterior nos indica que puntos que no sean $(0, 0)$ ni $(9/4, 3/2)$ no podrán ser en ningún caso extremos de f .
- Pero tampoco sabemos con total seguridad si esos dos puntos son extremos de f (sólo son candidatos).

Para determinarlo acudimos a la matriz Hessiana



matriz Hessiana = $H f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$

$f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy^2 + y^3 = \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x - y^2 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2xy + 3y^2 \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 1 \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -2y \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -2y \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y} = -2x + 6y \end{cases}$

$H f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -2y & -2x+6y \end{pmatrix} \begin{cases} P_1 = (0,0); H f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_2 = (3/4, 3/2); H f(3/4, 3/2) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3/2 \end{pmatrix} \end{cases}$

• $|H f(3/4, 3/2)| = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2} < 0 \Rightarrow P_2 = (3/4, 3/2)$ es un punto de silla
ni máximo ni mínimo

• $|H f(0,0)| = 0 \Rightarrow$ el método de la Hessiana no aporta información.

$\hookrightarrow f(0,h) = \frac{0^2}{2} - 0y^2 + h^3 \begin{cases} h = -1 : f(0,-1) = (-1)^3 < 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0) \text{ No es mínimo} \\ h = 1 : f(0,1) = 1^3 > 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0) \text{ No es máximo} \end{cases}$

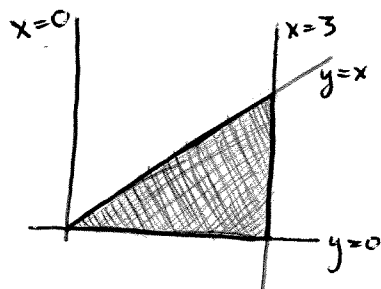
hacer $f(0,h)$ o $f(h,0)$ de modo que quede h elevado a un impar
si no funciona: tantear. * tantear para encontrar un punto que sea mayor y otro menor para demostrar que no es máximo ni mínimo

Candidatos a extremos (nec, no suf.)

* $\nabla f(x,y) = (0,0) \begin{cases} P_1 = (0,0) \Rightarrow f(0,-1) < f(0,0) < f(0,1) \Rightarrow (0,0) \text{ No extrem} \\ P_2 = (3/4, 3/2) \Rightarrow |H f(3/4, 3/2)| < 0 \Rightarrow f(3/4, 3/2) = \frac{27}{32} \text{ No extremo (punto silla)} \end{cases}$

* $\nabla f(x,y) \rightarrow$ no aporta candidatos

b) $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy^2 + y^3 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x\}$



cerrado + acotado = compacto

Teorema Weierstrass:

Puesto que $f(x,y)$ es continua en A (de hecho es continua en $\mathbb{R}^2$ y $A \subset \mathbb{R}^2$) y dado que A es un conjunto cerrado y acotado (compacto), sabemos que $f(x,y)$ alcanza máximo y mínimo en dicho conjunto.

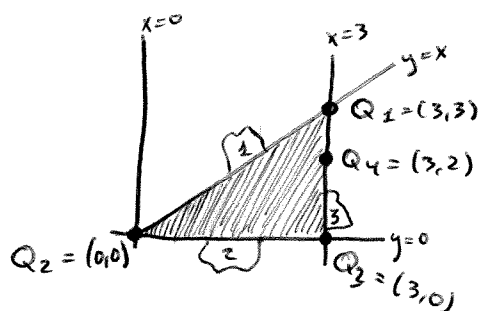




(I) Interior de A: aquí, nos quedamos con todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ que resultaron ser extremos de f en el estudio desarrollado en el apartado anterior (si el enunciado no pidiese el apartado a) tendríamos que hacerlo). De todos estos puntos considerados seleccionamos como posibles candidatos los situados dentro de A (No sobre las fronteras).

En nuestro caso no hay ningún extremo en $\mathbb{R}^2$, luego no hay ninguno en el interior de A y no seleccionamos ningún candidato.

(II) Frontera de A: $Fr(A) = \textcircled{1} \cup \textcircled{2} \cup \textcircled{3} \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$ (candidatos)



Candidatos:

$$Q_1 = (3, 3)$$

$$Q_2 = (0, 0)$$

$$Q_3 = (3, 0)$$

$$Q_4 = (3, 2)$$

$$\textcircled{1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x \quad 0 < x < 3\}$$

Con $y = x$ acudimos a $f(x, y)$ y queda:

$$f(x, y) = \varphi_1(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_1'(x) = x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \textcircled{1} \quad \text{sin candidatos}$$

$$\textcircled{2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \quad 0 < x < 3\}$$

Con $y = 0$ acudimos a $f(x, y)$ y queda:

$$f(x, 0) = \varphi_2(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{igual que } \textcircled{1} \quad \text{sin candidatos}$$

$$\textcircled{3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3 \quad 0 < y < 3\}$$

Con $x = 3$ acudimos a $f(x, y)$ y queda:

$$f(3, y) = \frac{9}{2} - 3y^2 + y^3 = \varphi_3(y)$$

$$\varphi_3'(y) = 3y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \notin \textcircled{3} \\ y = 2 \in \textcircled{3} \\ x = 3 \end{cases}$$

Candidato $Q_4 = (3, 2) \leftarrow$

$$\left. \begin{array}{l} f(3, 3) = 9/2 \\ f(0, 0) = 0 \\ f(3, 0) = 9/2 \\ f(3, 2) = 1/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máximos en } (3, 3) \text{ y } (3, 0) \quad \text{(de valores } 9/2) \\ \text{mínimo en } (0, 0) \quad \text{(de valor 0)} \end{array}$$

Septiembre 2005
Ejercicio 1

1. Desarrolle en serie de Taylor en torno a cero (serie de MacLaurin) la función

$$f(x) = \arctan x$$

empleando operaciones con series de potencias.

2. Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)}. \quad (1)$$

a) Estudie si es compacto el conjunto de valores reales de p para los que la serie (1) converge.

b) Calcule la suma de la serie (1) para $p = 1$. [Sugerencia: calcule la suma parcial $n = \infty$ mediante descomposición en fracciones simples.]

c) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

[Indicación: si resolvió el apartado b), puede utilizar el hecho de que, para $p = 0$, la serie (1) suma $1/12$.]

1)

Como sabemos, el polinomio de Taylor - MacLaurin se calcula mediante la fórmula descrita en el tema 9 (en el 13 se hace con 2 variables). Pero en este problema no nos dejan emplear dicha fórmula y nos obligan a manejar series de potencias.

Sospechamos que algo deberemos hacer con $\arctg x$ para transformarlo en otra función que sea suma de una serie de potencias conocida y gracias a esta serie obtendremos el polinomio de Taylor de $\arctg x$.

$$\arctg(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int [1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots] dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

derivado $\downarrow$ $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$ $\uparrow$ Integral

serie geométrica de razón $-x^2$ $\Leftrightarrow |x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

$$\boxed{\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)}$$

$$\left. \begin{aligned} \arctg(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + C \\ \arctg(0) &= 0 = 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{5} - \dots + C \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = 0; \arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

a) ¿Valores de p para los que converge?

2° criterio por comparación

$$b_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^p n^\alpha}{(n+1)(n+2)(n+3)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p+\alpha}}{\underbrace{(n+1)}_{\sim n} \underbrace{(n+2)}_{\sim n} \underbrace{(n+3)}_{\sim n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p+\alpha}}{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p+\alpha-3}$$

tomando $p+\alpha-3=0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0 \rightarrow 2^\circ$ criterio $\rightarrow \sum a_n$ y $\sum b_n$ igual carácter

$$\sum a_n \text{ y } \sum \frac{1}{n^\alpha} = \sum \frac{1}{n^{3-p}} \rightarrow \sum \frac{1}{n^{3-p}} \text{ convergente} \Leftrightarrow 3-p > 1$$

$$p < 2$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ convergente} \Leftrightarrow p < 2} \Leftrightarrow p \in (-\infty, 2)$$

no acotado

No compacto

b) Calcule la suma para p=1

$$p=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3} = \frac{A(n+2)(n+3) + B(n+1)(n+3) + C(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^2(A+B+C) + n(5A+4B+3C) + 6A+3B+2C}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\begin{cases} 0 = A+B+C \\ 1 = 5A+4B+3C \\ 0 = 6A+3B+2C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 2 \\ C = -3/2 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-1/2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{-3/2}{n+3} \right] = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+3} \right] =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N+1} \right) + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N+2} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{N+3} \right) \right] =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{2}{N+2} - \frac{3}{2(N+2)} - \frac{3}{2(N+3)} \right] = -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{p=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$\frac{1}{4} + p=0 \Rightarrow \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II – Febrero 2006

2.1 (1 punto) Demuestre, utilizando la definición de límite de una sucesión, que si $0 \leq a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2.2 (0.6 puntos) Estudie la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}.$$

2.3 (1 punto) Determine el campo de convergencia (o conjunto de convergencia) de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right) x^n.$$

2.4 (0.6 puntos) Calcule el límite puntual de la sucesión funcional

$$f_n(x) = \cos \frac{x}{n}, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.5 (3 puntos) Analice si la convergencia de la sucesión funcional del apartado 2.4 es uniforme en $[0, 1]$.

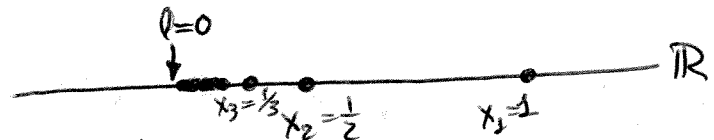
La sucesión x_n
tiene límite l
si y sólo si

ejemplo: $\begin{cases} x_n = \frac{1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \end{cases}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, |x_n - l| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Queremos ver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$



Si $\varepsilon = 0,1 = \frac{1}{10} \Rightarrow \forall n \geq 11, \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{10}$
 $-\frac{1}{10} < \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \Rightarrow N = 11$

Si $\varepsilon = 0,01 = \frac{1}{100} \Rightarrow \forall n \geq 101, \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow N = 101$

relación ε - N : $N = E\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ $E[\text{algo}] = \text{parte Entera de algo}$
 $E\pi = 3, Ee = 2$

(2.1) $\left. \begin{matrix} 0 \leq a_n \leq b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\hookrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, |b_n - 0| < \varepsilon$

$|b_n| < \varepsilon$ por hipótesis $0 \leq a_n \leq b_n$
 $\hookrightarrow |a_n| < \varepsilon \leftarrow |a_n| \leq |b_n|$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, |a_n - 0| < \varepsilon$

$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0} \text{ c.q.d.}$

2.2 Convergencia de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = -\sin 1 + \sin \frac{1}{2} - \sin \frac{1}{3} + \sin \frac{1}{4} - \sin \frac{1}{5} \dots$$

criterio de Leibniz $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$

Leibniz $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ |a_n| > |a_{n+1}| \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \text{convergente}$

* $a_n = \sin \frac{1}{n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0$ cuando el ángulo es muy pequeño. El $\sin(\text{de algo}) = (\text{de algo})$

$|a_n| > |a_{n+1}|$
 $n < n+1$ $|a_n| = \left| \sin \frac{1}{n} \right| > \left| \sin \frac{1}{n+1} \right| = |a_{n+1}|$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sin \frac{1}{n} > \sin \frac{1}{n+1}$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ |a_n| > |a_{n+1}| \end{array} \right\}$ por Leibniz $\Rightarrow$ convergente

$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \right] < \infty$ (convergentes)

2.3 Campo de convergencia de:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right) x^n \equiv$ serie de potencias

$a_n = \text{coeficientes}$ $(x-0)^n$; $x_0 = 0 \equiv$ centro de la serie

Intervalo de convergencia = $(x_0 - R, x_0 + R)$; $R = \frac{1}{\rho}$

$a_n = \sin \frac{1}{n} \Rightarrow \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left| \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\sin(\frac{1}{n})} \right| \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right|$ $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$; $R = \frac{1}{\rho} = 1$ $\frac{1}{n+1}$ es muy pequeño

Intervalo de converg: $(-1, 1)$

Calculado el intervalo de convergencia, el siguiente paso es calcular la convergencia en los extremos:

$x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cdot (-1)^n < \infty$ (convergente) $\leftarrow$ visto en 2.2

$x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right) 1^n$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Criterio del cociente} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_{n+1}}{a_n} \right] = 1 \text{ (caso dudoso)} \end{array} \right\}$ No determina la converg/diverg. Cuando falla el cociente suele fallar el criterio de la raíz

Criterio de Raabe, pues $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ya la tenemos calculada

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right] \right) = 0 < 1 \Rightarrow$ diverge

Campo de convergencia: $[-1, 1)$

Podríamos ver la divergencia de la serie usando otro criterio:

Segundo criterio de comparación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } l \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen el mismo carácter} \\ \text{si } l = 0 \Rightarrow \sum b_n \text{ converg} \Rightarrow \sum a_n \text{ converg} \end{cases}$$

Como vemos, necesitamos proponer quien es b_n para construir el lim anterior y resolverlo.

Propondremos siempre que b_n sea $b_n = \frac{1}{n^p}$ y después ajustaremos p en función de lo que nos interese.

$$\begin{aligned} a_n &= \sin \frac{1}{n} \\ b_n &= \frac{1}{n^p} \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^p}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^p \cdot \sin \frac{1}{n}) \\ \sin \frac{1}{n} &\sim \frac{1}{n} \end{aligned} \right.$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^p}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-1} \stackrel{p=1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^0 = 1$$

$$\text{si } p=1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

Como el límite es no nulo, el 2º criterio de comparación nos dice que a_n y b_n tienen el mismo carácter.

Puesto que $\frac{1}{n}$ diverge $\sin \frac{1}{n}$ también

Hemos visto (de dos modos) que la serie diverge para $x=1$, luego el extremo 1 será descartado del campo de convergencia:

El intervalo de convergencia era: $(-1, 1)$

El campo de convergencia es: $[-1, 1)$

2.4) límite puntual

$$f_n(x) = \cos \frac{x}{n} \quad x \in [0, 1] \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{n} = \begin{cases} x=0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 0 = 1 \\ x \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{n} = \cos \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \right) \\ \quad x \in [0, 1] \\ \quad = \cos \left(x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = \cos(x \cdot 0) = 1 \end{cases}$$

la sucesión de funciones $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) = 1$ en $[0, 1]$

2.5) convergencia uniforme

$$f_n(x) \text{ converge uniformemente a } f(x) = 1 \text{ en } [0, 1] \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| -\left(\cos \frac{x}{n} - 1\right) \right| = 1 - \cos \frac{x}{n}$$

$$\cos \frac{x}{n} \in [-1, 1] \Rightarrow \cos \frac{x}{n} - 1 \leq 0$$

$$g(x) = 1 - \cos \frac{x}{n} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} \geq 0 \text{ en } x \in [0, 1]$$

$$g \text{ creciente} \Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} g(x) = g(1)$$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = g(1) = \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{sí converge uniformemente}$$

$$\boxed{f_n(x) \text{ converge uniformemente a } f(x) = 1 \text{ en } [0, 1]}$$

Considérese las funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como sigue:

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)), \text{ con } f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x, y) = x^2 y - y^3 \quad \text{y} \quad g(x, y) = e^{x+y^2}$$

- Calcule la diferencial en $(1, 1)$ de la función $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F = g \circ f$.
- Aproxime g mediante el polinomio de Taylor de segundo grado en el origen, y utilice dicho resultado para aproximar el número e .
- Si $x(t) = \cos t$, $y(t) = e^t$ y $h(t) = f_2(x(t), y(t))$, calcule $\frac{dh}{dt}(0)$ utilizando la regla de la cadena.

a) Lo primero que hacemos es obtener la función F como composición de f y g :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = g(f_1(x, y), f_2(x, y)) = g(x - y, x^2 y - y^3) = \\ &= e^{x-y+(x^2 y - y^3)^2} = e^{x-y+x^4 y^2 + y^6 - 2x^2 y^4} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow F(x, y) = e^{x-y+x^4 y^2 + y^6 - 2x^2 y^4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (1 + 4x^3 y^2 - 4xy^4) e^{x-y+x^4 y^2 + y^6 - 2x^2 y^4} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) = (1 + 4 - 4) e^0 = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = (-1 + 2x^4 y + 6y^5 - 8x^2 y^3) e^{x-y+x^4 y^2 + y^6 - 2x^2 y^4} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = (-1 + 2 + 6 - 8) e^0 = -1$$

$$dF_{(1,1)}(h, k) = \frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) \cdot h + \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) \cdot k = 1 \cdot h + (-1) \cdot k = h - k$$

Así pues la diferencial de F en $(1, 1)$ es:

$$dF_{(1,1)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(h, k) \rightarrow dF_{(1,1)}(h, k) = h - k$$

b) Para este apartado lo más cómodo es hacerlo con series de Taylor de una variable:

$$g(x, y) = e^{x+y^2} = e^x \cdot e^{y^2} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) \cdot \left(1 + y^2 + \frac{y^4}{2!} + \dots\right) = 1 + x + y^2 + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

donde hemos utilizado la serie de Taylor de la función e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Para la serie de Taylor de e^{y^2} hemos sustituido $x = y^2$ en el desarrollo anterior:

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + \frac{(y^2)^2}{2!} + \frac{(y^2)^3}{3!} + \dots = 1 + y^2 + \frac{y^4}{2!} + \frac{y^6}{3!} + \dots$$

En el último paso hemos multiplicado las dos series de Taylor y nos hemos quedado solo con los términos hasta segundo grado

Por tanto el polinomio de Taylor de $g(x, y)$ en el origen es:

$$g(x, y) \approx p_2(x, y) = 1 + x + y^2 + \frac{x^2}{2}$$

Nota: También se puede obtener este resultado utilizando la serie de Taylor en dos variables pero no es estrictamente necesario.

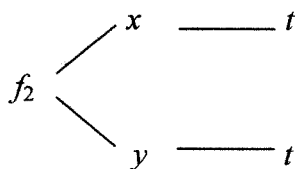
Para aproximar el número e basta sustituir el polinomio obtenido en el punto $(1, 0)$:

Recuerda:

$$e = 2,71828182...$$

$$g(1, 0) \approx p_2(1, 0) \Rightarrow e^{1+0^2} \approx 1 + 1 + 0^2 + \frac{1^2}{2} \Rightarrow e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{e \approx 2,5}$$

c) Dibujamos el árbol de dependencias:



calculamos las derivadas que vamos a necesitar:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = x^2 - 3y^2$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\operatorname{sen} t$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = e^t$$

Y ahora aplicando la regla de la cadena queda:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2xy \cdot (-\operatorname{sen} t) + (x^2 - 3y^2)e^t$$

ahora si particularizamos para $t = 0$ hay que tener en cuenta que:

$$x(t) = \cos t \Rightarrow x(0) = \cos 0 = 1$$

$$y(t) = e^t \Rightarrow y(0) = e^0 = 1$$

Es decir, cuando $t = 0$ tenemos que $(x, y) = (1, 1)$. Así pues, sustituyendo:

$$\frac{dh}{dt}(0) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 1) \cdot \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 1) \cdot \frac{dy}{dt}(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-\operatorname{sen} 0) + (1^2 - 3 \cdot 1^2)e^0 = 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 = -2$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{dh}{dt}(0) = -2}$$

Septiembre 2006
Ejercicio 1

I. Demuestre que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$, y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $f(x_0)$, entonces $F = g \circ f$ es continua en x_0 .

II. Considere la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \sqrt[3]{1+x} \cos \frac{x}{n}$.

a) Estudie la convergencia puntual y uniforme de la sucesión en $\mathbb{R}$.

b) Estudie la derivabilidad del límite puntual $f(x)$ de la sucesión funcional anterior.

c) Indique si es abierto el subconjunto de $\mathbb{R}$ donde el límite puntual $f(x)$ es derivable.

$$\text{II. } f_n(x) = \sqrt[3]{1+x} \cos \frac{x}{n} = \left\{ \sqrt[3]{1+x} \cos x, \sqrt[3]{1+x} \cos \frac{x}{2}, \sqrt[3]{1+x} \cos \frac{x}{3}, \dots \right\}$$

x actuará como parámetro

n fija la posición de la función en la sucesión

Convergencia puntual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1+x} \cos \frac{x}{n} = \sqrt[3]{1+x} \cos \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \right) = \sqrt[3]{1+x} \cos(0) = \sqrt[3]{1+x} = f(x)$$

La sucesión de funciones $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $\mathbb{R}$ (porque el límite existe para todo $x \in \mathbb{R}$)

$$f_n(x) \text{ converge uniformemente a } f(x) = \sqrt[3]{1+x} \text{ en } \mathbb{R} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$$

$$g(x) = \left| \sqrt[3]{1+x} \cos \frac{x}{n} - \sqrt[3]{1+x} \right| = \left| \sqrt[3]{1+x} (\cos \frac{x}{n} - 1) \right| = \left| \sqrt[3]{1+x} \right| \cdot \left| \cos \frac{x}{n} - 1 \right|$$

Dado que el $\cos$ está acotado entre -1 y 1 , veremos que $(\cos \frac{x}{n} - 1)$ está entre -2 y 0 (ambos incluidos), luego $|\cos \frac{x}{n} - 1|$ está entre 0 y 2 . Por otro lado, $|\sqrt[3]{1+x}|$ no está acotado (pues a mayor sea x , mayor es el módulo) en definitiva $g(x) = |\sqrt[3]{1+x}| \cdot |\cos \frac{x}{n} - 1|$ no está acotada en $x \in \mathbb{R}$, por tanto, no hay supremo en $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right] \neq 0 \Rightarrow \text{no converge}$$

Otro modo de verlo: tomando $x = \frac{n+1}{2}$, $g(x) = \sqrt[3]{1+\frac{n+1}{2}} \rightarrow \infty \neq 0$

Solución: $f_n(x)$ no converge a $f(x)$ en $\mathbb{R}$ uniformemente

b)

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

$$f'(x) = ((1+x)^{1/3})' = \frac{1}{3} (1+x)^{-2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

Como vemos, la expresión de $f'(x)$ da problemas en $x = -1$, pues denominador = nulo, luego será válida $\forall x \neq -1$.

Para $x = -1$ acudimos a la definición

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^{1/3}}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^{-2/3} =$$

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \pm \infty$$

Como el límite anterior es infinito se considera que no existe $\Rightarrow$ tampoco existe $f'(-1)$.

f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$
no derivable en $x = -1$

c)

El conjunto $\mathbb{R} - \{-1\}$ es abierto

Septiembre 2006
Ejercicio 2

Considere la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Estudie la continuidad de f en $(0, 0)$.
- Estudie la existencia de las derivadas parciales primeras de f en $\mathbb{R}^2$ y, en su caso, su continuidad en $(0, 0)$.
- Estudie la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

a) Estudie la continuidad de f en $(0, 0)$

En $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $f(x, y)$ es suma, producto y composición de funciones continuas con denominador no nulo (pues este sólo es cero en $(0, 0) \notin \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$).

$f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

En $(0, 0)$ acudimos a la definición de continuidad:

$$f(x, y) \text{ continua en } (a, b) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

aplicando polares:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)}} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} = (*) \end{aligned}$$

$\sqrt{\rho^2} = |\rho|$ PERO como ρ es una distancia $\rho > 0 \Rightarrow |\rho| = \rho$

$$(*) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{\rho} = \text{infinitésimo} \cdot \text{acotado} = 0$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \Rightarrow \text{continua en } (0, 0)$$

$f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$

en caso de que fuera: $\lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{\rho} = \operatorname{sen} \infty = \nexists$

b) Estudie la existencia de las derivadas parciales primeras de f en $\mathbb{R}^2$ y, en su caso, su continuidad en $(0,0)$.

• En $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ podemos derivar la expresión de $f(x,y)$ para hallar las derivadas parciales $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$, pero sólo serán válidas en $(a,b) \neq (0,0)$.

Para hallar $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ hemos de acudir a la definición:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(a,b) + \lambda(1,0)] - f(a,b)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + (\lambda,0)] - f(0,0)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\lambda^2 + 0^2) \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 0^2}}}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\lambda \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda^2}} \right) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot \sin \frac{1}{|\lambda|} = \text{infinitésimo} \cdot \text{acotado} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(a,b) + \lambda(0,1)] - f(a,b)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + (0,\lambda)] - f(0,0)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0,\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(0^2 + \lambda^2) \sin \frac{1}{\sqrt{0^2 + \lambda^2}}}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot \sin \frac{1}{|\lambda|} = 0\end{aligned}$$

Para hallar las derivadas parciales de f en un punto $\neq (0,0)$ tenemos dos opciones:

① aplicar la definición, pues siempre es válida. La definición es muy útil para hallar una derivada en un punto en concreto, pero para hallar las derivadas en un punto genérico o en ∞ puntos es más útil derivar directamente la expresión.

② derivar directamente la expresión, siguiendo las normas habituales de derivación.

si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \left[2x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] + \left[(x^2+y^2) \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right] = \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ = intercambiando x por y en $f(x,y)$, vemos que queda lo mismo, luego $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ surge de intercambiar x por y en $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. (Si en este intercambio $f(x,y)$ no quedase igual, no podríamos hacer este truco, habría que derivar tanto una como otra).

Conclusión:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}\end{aligned}$$

b₂) ... y, en su caso, su continuidad en (0,0)

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$: En $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ si es continua, por ser suma, división y composición de continuas.

En (0,0) aplicamos la definición.

$$f(x,y) = \text{cont. en } (a,b) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[2 \cdot \rho \cos \theta \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} - \frac{\rho \cos \theta}{\sqrt{\rho^2}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \right] = \text{como } \rho = \text{distan} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(2 \rho \cos \theta \cdot \sin \frac{1}{\rho} - \frac{\rho \cos \theta}{\rho} \cdot \cos \frac{1}{\rho} \right) = \text{como } \rho > 0 \\ &= 2 \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \cos \theta \cdot \sin \frac{1}{\rho} - \left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \cos \theta \cdot \cos \frac{1}{\rho} \right) = |\rho| = \rho \\ &= 2 \cos \theta \left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \sin \frac{1}{\rho} \right) - \cos \theta \left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \cos \frac{1}{\rho} \right) = 0 - \cancel{\infty} = \cancel{\infty} \\ &\quad \text{infinitésimo acotado} \quad \cos \infty = \cancel{\infty} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ no es continua en } (0,0) \text{ si es continua en } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}$$

igual ocurre con $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Conclusión: las derivadas parciales no son continuas en (0,0), luego no podemos asegurar nada acerca de la diferenciabilidad de f en (0,0). (Si ambas hubiesen sido continuas en (0,0), f hubiera sido diferenciable en (0,0). Nos vemos obligados a aplicar la definición de diferenciabilidad en (0,0).

c) Estudie la diferenciabilidad de f en (0,0).

$$f(x,y) = \text{diferen. en } (a,b) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) \right]}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}(y-0) \right]}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0??$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}}{\sqrt{\rho^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \frac{1}{\rho} = \\ &= \text{infinitésimo acotado} = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{f(x,y) \text{ es diferenciable en } (0,0)}}$$

Febrero 2007
Ejercicio 1

I. Demuestre, utilizando la definición de límite, que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

II. Considere la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
- Estudie la existencia de las derivadas primeras y la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.
- Estudie si f alcanza un extremo local en $(0, 0)$.

II a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$

- En $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $f(x, y)$ es producto y composición de funciones continuas con denominador no nulo (pues este sólo es cero en $(0, 0) \notin \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$)

$f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

- en $(0, 0)$ acudimos a la definición de continuidad

$$f(x, y) = \text{continua en } (a, b) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \theta \cdot \sin \frac{1}{\rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \sin \theta \cdot \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \sin \frac{1}{\rho^2}$$

$$= \sin \theta \cdot \text{infinitésimo} \cdot \text{acotado} = \sin \theta \cdot 0 = 0$$

$$\text{como } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \Rightarrow \underline{f(x, y) = \text{cont. en } (0, 0)}$$

$$\underline{\underline{f(x, y) = \text{cont. en } \mathbb{R}^2}}$$

b) Estudie la existencia de las derivadas primeras y la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$

- En $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ podemos derivar directamente la expresión de $f(x, y)$ respecto a x e y .
- En $(0, 0)$ aplicaremos la definición

Derivada parcial (primera) de $f(x, y)$ en (a, b) :

$$f'_x(x, y)|_{(a, b)} = D_1 f(x, y)|_{(a, b)} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{(a, b)} = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(a, b) + \lambda(1, 0)] - f(a, b)}{\lambda}$$

dirección
si es $X: (1, 0)$
si es $Y: (0, 1)$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + \lambda(1,0)] - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda,0)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{0 \cdot \sin \frac{1}{\lambda^2}}{\lambda} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(a,b) + \lambda(0,1)] - f(a,b)}{\lambda}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + \lambda(0,1)] - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0,\lambda)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda \cdot \sin \frac{1}{\lambda^2}}{\lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\lambda^2} = \nexists$$

$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \nexists$	Al no existir una de las der. par. de f en $(0,0)$. Podemos afirmar que: $f(x,y) = \text{no derivable en } (0,0)$
--	---	---

Supongamos que las dos derivadas parciales de f hubiesen existido en $(0,0)$. Para estudiar la diferenciabilidad tendríamos dos métodos:

Hacer siempre este $\rightarrow$

① Aplicar la definición de derivabilidad:
 $f(x,y)$ es der. en $(a,b) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) \right]}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$

Al no existir $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$, el límite que hay que hallar tampoco existe, por lo que su valor no es cero, luego no es diferen. en $(0,0)$

② Calcular las derivadas parciales de f en todo $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} y \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + y \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \nexists & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ no es continua en } (0,0) \text{ (pues el límite por polares da } \infty) \\ \text{si también } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \text{ fuese no continua en } (0,0) \text{ tendríamos que hacer } \textcircled{1} \end{array} \right.$

Conclusión:

f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por ser producto y composición de funciones diferenciables.
 (En $(0,0)$ no es diferenciable porque no existe parcial respecto a y)

Si sucede esto, nos veremos obligados a hacer ①, habiendo perdido tiempo en ② y sin sacar conclusiones.

Febrero 07
Ejercicio 3

Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{n3^n}, n \in \mathbb{N}$$

- Determine su intervalo de convergencia. Indique si la serie es convergente en los extremos del intervalo.
- Indique el conjunto de puntos donde la suma $S(x)$ de la serie de potencias es derivable y calcule $S'(\sqrt{3})$.
- Para $x=3$, calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n x^n)$ siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función $f(t) = (e^t, \cos t + \sin t)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{n3^n}, n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n = \frac{a_1}{1} x^1 + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_3}{3} x^3 + \dots + \frac{a_k}{k} x^k + \dots$$

serie de potencias de x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n3^n} \right) (x-x_0)^n$$

$x_0 = \text{centro de la serie}$
 $a_n = \text{términos o coef. de la serie}$

en este problema $x_0 = 0$

a) Intervalo de convergencia

INTERVALO DE CONVERGENCIA: $(x_0 - R, x_0 + R)$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|; \quad R = \frac{1}{l}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{1}{n3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n3^n}{(n+1)3^n \cdot 3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}; \quad l = \frac{1}{3}; \quad R = 3$$

Radio de convergencia

Intervalo de convergencia: $(-3, 3)$

Intervalo de convergencia: conjunto de valores de x que, una vez sustituidos en la serie de potencias, el resultado de dicha serie es un valor finito.

Ejemplos: $x=0 \in (-3, 3) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3 + \dots = 0$

$x \notin (-3, 3)$ la suma sería infinita.

la serie es un valor finito, luego es convergente. Por eso $x=0$ pertenece al intervalo de convergencia

$x=1 \in (-3, 3)$ No sabemos el valor de la suma en principio, pero si sabemos que su valor es finito (por pertenecer al intervalo de convergencia)



Siempre, en todos los problemas, los extremos del intervalo de convergencia serán estudiados aparte. Es decir, los sustituiremos en la serie de potencias y veremos si la suma resultante es convergente o divergente.

Extremos: $x = -3$ y $x = 3$

Extremo $x = +3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n} \cdot 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$$

$$\sum \frac{1}{n} = \infty$$

$x = 3$ provoca tener serie divergente (infinita) $\Rightarrow$
 $x = 3$ No pertenece al intervalo de convergencia

Extremo $x = -3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n} (-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n} (-1)^n 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} =$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = -\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\right] =$$

$$= \ln \frac{1}{2} < \infty$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$$

$x = -3$ provoca una suma finita $\Rightarrow$
 $x = -3$ sí pertenece al intervalo de convergencia

Intervalo de convergencia: $[-3, 3)$

Cualquier valor de x comprendido entre $[-3, 3)$ hace que la serie adopte un valor finito. Cualquier valor de x fuera de ese intervalo hace que la serie se vaya al infinito.

El razonamiento de la convergencia en $x = -3$ puede hacerse empleando el criterio de Leibniz (ver teoría temas 5)

Intervalo de convergencia: $(-3, 3)$

Campo de convergencia: $[-3, 3)$
 (conjunto)

b)

Una vez hecho el estudio de los extremos del intervalo de convergencia, vimos que incluíamos uno de ellos ($x = -3$). Entonces, el intervalo $(-3, 3)$ se convirtió en el $[-3, 3)$. Se dice que el primero $(-3, 3)$ intervalo sin hacerse el estudio de los extremos es el intervalo de convergencia, y se dice que el segundo $[-3, 3)$ intervalo resultante tras estudiar los extremos es el campo o conjunto de convergencia.

Siempre [La serie de potencias es derivable en el interior del campo de convergencia, que es el intervalo de convergencia.

Es decir, si $S(x)$ es el valor de la suma de la serie de potencias entonces podremos hacer uso de su derivada siempre que x pertenezca al intervalo de converg.

b.2)

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n = \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{81}x^3 + \dots = S(x) \quad \text{derivando}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x^2 + \dots = S'(x)$$

$$S'(x) = \text{serie geométrica} \left\{ \begin{array}{l} \text{1er término: } \frac{1}{3} \\ \text{razón: } \frac{1}{3}x \end{array} \right\} = \frac{\frac{1}{3} - 0}{1 - \frac{1}{3}x} = S'(x)$$

$$S'(x) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3-x)/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(3-x)} = \frac{1}{3-x} \Rightarrow \boxed{S'(\sqrt{3}) = \frac{1}{3-\sqrt{3}}}$$

$$S'(x) \xrightarrow{\text{Integrando}} S(x)$$

$$\frac{1}{3-x} \longrightarrow \ln \left| \frac{3}{3-x} \right|$$

$$\boxed{S(x) = \ln \left| \frac{1}{3-x} \right| + \ln |3| = \ln \left| \frac{3}{3-x} \right|}$$

$$S'(x) = \frac{dS(x)}{dx} = \frac{1}{3-x}$$

$$S(x) = \int dS(x) = \int \frac{1}{3-x} dx = -\int \frac{-1}{3-x} dx =$$

$$= -\ln |3-x| + C = S(x)$$

$$S(x) = \ln \left| \frac{1}{3-x} \right| + C$$

Calculamos C:

$$\left. \begin{array}{l} S(0) = 0 = \ln \left| \frac{1}{3} \right| + C \\ S(0) = \sum a_n 0^n = a_0 + a_1 0 + \dots = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} C = -\ln \left| \frac{1}{3} \right| \\ C = \ln |3| \end{array}$$

por curiosidad ...

Nota: En $S(x) = \ln \left| \frac{3}{3-x} \right|$ vemos que:

Para $x=0$ queda que $S(0) = 0 = \ln |1|$

Para $x=-3$ queda que $S(-3) = \ln \left| \frac{1}{2} \right|$ (visto en el estudio del extremo)

Para $x=3$ queda que $S(3) = \ln \infty = \infty$ (suma infinita)
de ahí que $x=3$ no está en el campo de convergencia.

Para $x > 3$ manejamos $\ln$ de negativos (la suma no tiene sentido).

c) $x=3$ calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n x^n)$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(t) = (e^t, \cos t + \sin t)$

$$x=3 \Rightarrow a_n x^n = a_n 3^n = \frac{1}{n 3^n} 3^n = \frac{1}{n}$$

$$x=3 \Rightarrow f(a_n x^n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) = f(0) = (e^0, \cos 0 + \sin 0) = (1, 1)$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II – Septiembre 2007

P2

Apellidos Nombre
DNI Grupo

- Puntuación de este problema sobre el total del examen: 4 puntos.

2.1 (1 punto) Demuestre que toda sucesión (x_n) monótona creciente y acotada superiormente es convergente.

2.2 Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2.2(a) (1.5 puntos) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

2.2(b) (1.5 puntos) Justifique la existencia de extremos absolutos de f en $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ y calcúlelos.

Septiembre 2007
ejercicio 2.2

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Continuidad y diferenciabilidad

- En $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $f(x,y)$ es suma y división y composición de funciones continuas (y diferenciables) con denom. no nulo (pues sólo se anula en $(0,0)$). Así pues, f es continua (y diferenciable) en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
- En $(0,0)$ aplicamos la definición de continuidad y diferenciabilidad

$$f \text{ cont en } (0,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho \sin^3 \theta = \\ &= 2 \cdot \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin^3 \theta \stackrel{\text{infinitésimo} \cdot \text{acotado}}{=} 2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f \text{ continua en } (0,0)$$

f continua en $\mathbb{R}^2$

derivadas parciales en $(0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + \lambda(1,0)] - f(0,0)}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, 0) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{0}{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0,0) + \lambda(0,1)] - f(0,0)}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0, \lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda^3}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\lambda} = 2 \end{aligned}$$

$$f \text{ diferenciable en } (0,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}(y-0) \right]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

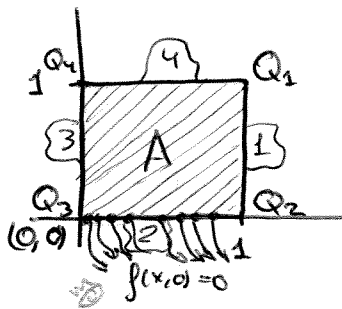
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{2y^3}{x^2+y^2} - 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2y \frac{y^2 - (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho \sin \theta \frac{\rho^2 \sin^2 \theta - \rho^2}{(\rho^2)^{3/2}} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho \sin \theta \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^3} - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3 \sin \theta}{\rho^3} = \cancel{A} - \cancel{A} = \cancel{A} \end{aligned}$$

f no diferenciable en $(0,0)$

f diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$



b) Justifique la existencia de extremos absolutos de f en $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ y calcúlelos.



Teorema de Weierstrass
Puesto que A es cerrado y acotado (compacto) y dado que f es cont en A (vimos que $f = \text{cont en } \mathbb{R}^2$ y $A \subseteq \mathbb{R}^2$). El teorema afirma que f alcanza máximo y mínimo en A .

(I) Interior de A :

candidatos a extremos

$$a) \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{-2y^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2y^4 + 6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

- las dos derivadas se anulan simultáneamente si y sólo si $y=0$

- puesto que los puntos con $y=0 \notin \text{int } A$, vemos que no obtenemos ningún candidato con la condición $\nabla f(x,y) = 0$

Candidatos a extremos

b) $\nabla f(x,y)$

- vimos en el apartado anterior, para que el único punto para el que no existe la diferencial es el $(0,0) \notin \text{int } A$. Ninguna de las dos condiciones nos aporta candidatos, luego no hay extremos en el interior de A

(II) Frontera de $A = \text{Fr } A = \textcircled{1} \cup \textcircled{2} \cup \textcircled{3} \cup \textcircled{4} \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$

$$\textcircled{1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=1 \ 0 < y < 1\} \Rightarrow f(x,y) = f(1,y) = \varphi_1(y) = \frac{2y^3}{y^2+1}$$

$$\varphi_1'(y) = 2y^2 \frac{(y^2+3)}{(y^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow y=0 \notin \textcircled{1} \Rightarrow \text{sin candidatos}$$

$$\textcircled{2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0 \ 0 < x < 1\} \Rightarrow f(x,y) = f(x,0) = 0$$

$$\textcircled{3} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0 \ 0 < y < 1\} \Rightarrow f(x,y) = f(0,y) = \varphi_3(y) = 2y$$

$$\varphi_3'(y) = 2 = 0 \Leftrightarrow 2=0 \Rightarrow \text{Imposible} \Rightarrow \text{sin candidatos}$$

$$\textcircled{4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=1 \ 0 < x < 1\} \Rightarrow f(x,y) = f(x,1) = \varphi_4(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

$$\varphi_4'(x) = 2 \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x=0 \notin \textcircled{4} \Rightarrow \text{sin candidatos}$$

Candidatos:

- $Q_1 = (1,1) \rightarrow f(1,1) = 1$
- $Q_2 = (1,0) \rightarrow f(1,0) = 0$
- $Q_3 = (0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$
- $Q_4 = (0,1) \rightarrow f(0,1) = 2$
- $eje ox \ (0 < x < 1) \rightarrow f(x,y) = 0$

Máximos en $Q_4 = (0,1)$ (valor = 2)
mínimos en $(x,0)$ (valor = 0, siendo $x \leq 1$)

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II – Septiembre 2007

P3

Apellidos Nombre

DNI Grupo

- Puntuación de este problema sobre el total del examen: 3 puntos.

3. Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.1 (1 punto) Estudie la convergencia puntual (y, en su caso, el límite puntual) de la sucesión funcional $(f_n(x))$ en $\mathbb{R}$.3.2 (2 puntos) Estudie la convergencia uniforme de $(f_n(x))$ en los intervalos:3.2(a) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.3.2(b) $(1, \infty)$.

3.1) $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}} = \left\{ \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+x^4}, \frac{1}{1+x^6}, \frac{1}{1+x^8}, \dots \right\}$$

$n=1 \quad n=2 \quad n=3 \quad n=4$

Expresión en la que aparecen n y x

n : fija la posición de la función en la sucesión
 x : actúa como parámetro

Convergencia puntual de la sucesión $f_n(x)$ a la función $f(x)$ (función límite puntual) en $\mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x^n)^2} = \frac{1}{1+(x^n)^2}$$

x actúa como parámetro

 x actúa como parám. =

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(0^n)^2} = 1 \\ 0 < x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x^n)^2} = 1 \quad x^n = 0 \quad (0 < x < 1) \\ -1 < x < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x^{2n})^2} = 1 \quad \text{base } \in (0,1) \Rightarrow (x^2)^n \rightarrow 0 \\ x > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x^n)^2} = 0 \\ x < -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x^n)^2} = 0 \\ x=1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(1^n)^2} = \frac{1}{2} \quad 1^\infty = 1 \\ x=-1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(1^n)^2} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

puesto que la función es par, lo que ocurra entre -1 y 0 ocurre entre 0 y 1 .
 $1^\infty = 1$: un uno como una casa elevado a $\infty = 1$
 si la base tiende a 1 y el exp. tiende a ∞ es una indeterminación

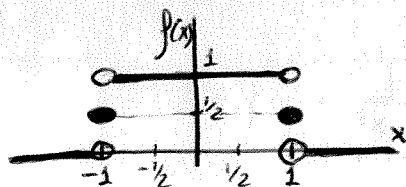
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1, |x| < 1 \\ 0 & x > 1 \text{ ó } x < -1, |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & x = \pm 1, |x| = 1 \end{cases}$$



Función límite puntual $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \end{cases}$

La sucesión de funciones $f_n(x)$ converge puntualmente a la función límite puntual $f(x)$ (definida anteriormente) en $\mathbb{R}$. (Escogemos $\mathbb{R}$ porque se trata del conjunto de valores de x que provocan que los límites hallados en el desarrollo de la resolución existan y sean finitos, diremos que $\mathbb{R}$ es el dominio de la función límite puntual)

3.2) Estudie la convergencia uniforme en:



a) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

• Si $f(x)$ fuese discontinua en el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, como las $f_n(x)$ son continuas en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, aplicando el teorema habitual concluiríamos que no hay convergencia uniforme de $f_n(x)$ en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

• Pero... $f(x)$ si es continua en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, lo que significa que no podemos aplicar el Teorema Habitual. Acudimos pues a la definición de

convergencia uniforme de $f_n(x)$ a $f(x)$ en A :

$$f_n(x) \text{ converge a } f(x) \text{ uniformemente en } A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in A} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \right] = 0$$

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)|$$

$$g(x) = \left| \frac{1}{1+x^{2n}} - 1 \right| = \left| \frac{1}{1+x^{2n}} - \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n}} \right| = \left| \frac{-x^{2n}}{1+x^{2n}} \right| = \frac{|-x^{2n}|}{|1+x^{2n}|}$$

$$\begin{aligned} |-x^{2n}| &= |-1| \cdot |x^{2n}| = |(x^n)^2| = x^{2n} \\ |1+x^{2n}| &= 1+x^{2n} \end{aligned}$$

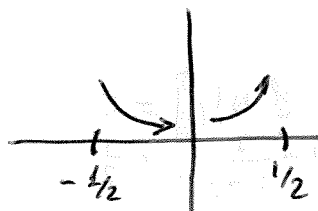
$$g(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

$$g'(x) = \frac{2n(x^{2n-1})(1+x^{2n}) - x^{2n}(2nx^{2n-1})}{(1+x^{2n})^2} = \frac{2nx^{2n-1}}{(1+x^{2n})^2}$$

$$\text{sign}(g'(x)) = \text{sign} \left[\frac{2nx^{2n-1}}{(1+x^{2n})^2} \right] = \text{sign} [x^{2n-1}]$$

positivo impar

$\rightarrow x > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$
 $\rightarrow x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$



$$g'(x) > 0 \quad \text{si } x > 0 \quad (g \text{ creciente})$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{si } x < 0 \quad (g \text{ decreciente})$$

$$\sup_{x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \{g(x)\} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^n}{1 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in A} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \right] = 0$$

$\downarrow$
 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $\downarrow$
 $g(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n} = 0$$

Puesto que el límite anterior es nulo, concluimos que: la sucesión $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x) = 1$ en el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b) $(1, \infty)$

- Si la función límite puntual $f(x)$ fuese discontinua en $(1, \infty)$, al ser las funciones f_n continuas en un infinito, podríamos aplicar el Teorema Habitual y afirmar que $f_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x)$ en $(1, \infty)$.
- Sin embargo... $f(x)$ si es continua en $(1, \infty)$, luego el teorema habitual no es de aplicación, y por tanto hemos de emplear la definición de convergencia uniforme.

convergencia uniforme de $f_n(x)$ a $f(x)$ en $(1, \infty)$:

$$f_n(x) \text{ converge a } f(x) \text{ uniformemente en } (1, \infty) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in (1, \infty)} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \right] = 0$$

$\downarrow$
 $g(x)$

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{1+x^{2n}} - 1 \right| = \frac{|1 - (1+x^{2n})|}{|1+x^{2n}|} = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \Rightarrow$$

$x \in (1, \infty)$ $x^{2n} > 0 \text{ en } (1, \infty)$

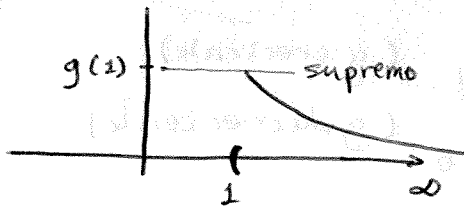
$$g(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2nx^{2n-1}}{(1+x^{2n})^2}$$

$$1+x^{2n} > 0 \Rightarrow |1+x^{2n}| = 1+x^{2n}$$

$$\text{sign}[g'(x)] = \text{sign} \left[\frac{-2nx^{2n-1}}{(1+x^{2n})^2} \right] = \text{sign}[-x^{2n-1}] \Rightarrow g'(x) < 0 \text{ en } (1, \infty)$$

$x \in (1, \infty) \Rightarrow x > 0$ $g \text{ decreciente}$





$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in (1, \infty)} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \right] = 0$$

$$g(1) = \frac{1}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \neq 0$$

Puesto que el límite anterior es no nulo tenemos que la sucesión funcional $f_n(x)$ no converge uniformemente a $f(x) = 0$ en $(1, \infty)$.

Febrero 2008
Ejercicio 1

Considere las funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ siguientes:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g(t) = (\alpha t, \beta t)$$

donde α y β son constantes reales no nulas.

- Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
- Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.
- Enuncie la regla de la cadena para la diferenciación de $h_2 \circ h_1$, con $h_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $h_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.
- Calcule las matrices jacobianas $f'(g(0))$ y $g'(0)$.
- Calcule la composición $F = f \circ g$. Estudie si $F'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$ y comente el resultado.

a) Continuidad

f continua en $\mathbb{R}^2$

- En $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ es suma, composición y producto de funciones continuas con denominador no nulo (pues éste sólo es cero en $(0, 0) \notin \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \Rightarrow f$ continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
- En $(0, 0)$ acudimos a la definición de continuidad

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

infinit. acotado = 0

b) Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$

- En $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $f(x, y)$ es suma, producto y composición de funciones diferenciables con denominador no nulo (pues éste sólo es cero en $(0, 0) \notin \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \Rightarrow f$ diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
- En $(0, 0)$ acudimos a la definición de diferenciabilidad.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \left[\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} (x-0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} (y-0) \right]}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \Rightarrow \text{difer. en } (0, 0)$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0, 0) + \lambda(1, 0)] - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^2 \cdot 0}{\lambda^2 + 0^2} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{0}{\lambda^3} = 0$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f[(0, 0) + \lambda(0, 1)] - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0, \lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \lambda}{0^2 + \lambda^2} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{0}{\lambda^3} = 0$$

vector gradiente = matriz Jacobiana

Extra:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) \quad \nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

La matriz Jacobiana de una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tiene m filas y n columnas y surge de derivar las m -coordenadas de la función cada una de ellas respecto de sus n -variables.

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \rightarrow (x^2z, y - z^2)$$

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xz & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2z \end{pmatrix}$$

Nota: si la función es $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, la matriz Jacobiana tendrá una fila y dos columnas, por lo que será un vector al cual se le llamará gradiente.
Igualmente ocurre con $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Volviendo a nuestro límite de la diferenciabilidad...

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \left[\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}(y-0) \right]}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \left[\left(\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} \right) (x-0, y-0) \right]}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - Jf(0, 0) \cdot (h, k)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow \text{función diferencial de la función } f: df(h, k)(0, 0) = Jf(0, 0)(h, k)$$

$$\Rightarrow 0h + 0k = 0$$

$$df(h, k)(0, 0) = 0$$

Volviendo a nuestro problema...

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \left[\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}(y-0) \right]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow \text{diferen. en } (0, 0)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 (\cos^2 \theta \sin^2 \theta) \sqrt{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos^2 \theta \sin \theta \Rightarrow \nexists \Rightarrow f \text{ no diferenciable en } (0, 0)$$

$$\boxed{f \text{ diferenciable en } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}}$$

d) Calcule las matrices jacobianas $f'(g(0))$ y $g'(0)$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t) \rightarrow (\underbrace{\alpha t}_{g_1(t)}, \underbrace{\beta t}_{g_2(t)}) ; \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

$$g'(t) = Jg(t) = \begin{pmatrix} \frac{dg_1(t)}{dt} \\ \frac{dg_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow Jg(0) = g'(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(0) = (\alpha \cdot 0, \beta \cdot 0) = (0, 0) ; f'(g(0)) = f'(0, 0)$$

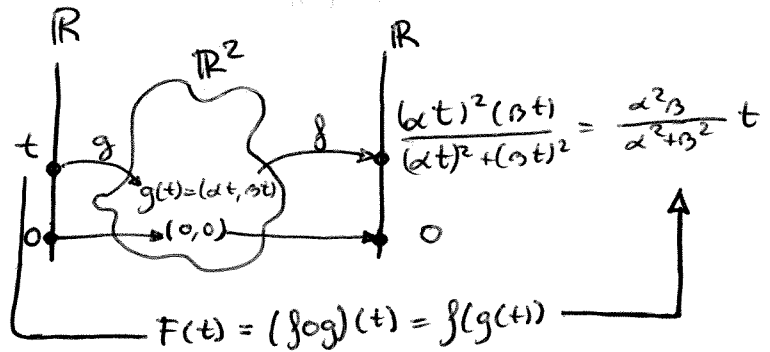
$$f'(0, 0) = Jf(0, 0) = \left(\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} \right) \Rightarrow \boxed{f'(g(0)) = Jf(g(0)) = (0, 0)}$$

e) Calcule $F = f \circ g$

e) Estudie si $F'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$ y comente el resultado

$$e_1) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow (\alpha t, \beta t) \\ (\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) \\ (0, 0) \rightarrow 0$$



$$\boxed{F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} t}$$

como el resultado para $t=0$ es el mismo que aquí

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} t, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

omitimos esta

$$e_2) F'(0) = JF(0) = \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\left. \begin{aligned} g'(0) &= Jg(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ f'(g(0)) &= Jf(0, 0) = (0, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(g(0)) g'(0) = (0, 0) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \neq$$

$$\neq \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = F'(0) \text{ (pues } \alpha \neq 0, \beta \neq 0) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow F'(0) \neq f'(g(0)) g'(0)}$$

• En lo que sigue contestamos al apartado e) enunciando la regla de la cadena para diferenciación de funciones compuestas y comentamos el resultado del apartado d)

c) Sean $h_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $h_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ dos funciones, con h_1 diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y h_2 diferenciable en $\mathbb{R}^m$, entonces la función $(h_2 \circ h_1)$ será diferenciable en $\mathbb{R}^n$, y también se cumplirá la siguiente igualdad entre sus Jacobianas.

$$(h_2 \circ h_1)'(u) = h_2'(h_1(u)) h_1'(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Volviendo a nuestro problema...

El comentario pedido en e) es el siguiente:

→ Sustituyendo g por h_1 y f por h_2 en el enunciado anterior de la regla de la cadena, deducimos que si f fuese diferenciable en $\mathbb{R}^2$, como g es diferenciable en $\mathbb{R}$, se cumpliría la igualdad de jacobianas

$F'(0) = f'(g(0)) g'(0)$. Pero f no es diferenciable en $(0,0)$ (visto en el b) así es que no podemos asegurar que dicha igualdad se cumpla, de hecho no se cumple.

Febrero 2008
Ejercicio 2

1.- Sea $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ para $x \geq 0$.

Demostrar que $f_n(x)$ es acotada.

2.- Estudie la convergencia uniforme de la sucesión funcional $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en los intervalos:

a) $[0, c]$ con $0 < c < 1$.

b) $[b, \infty]$ con $b > 1$.

c) $[1, \infty]$.

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \text{ para } x \geq 0$$

1. Demostrar que $f_n(x)$ es acotada

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = \left\{ \begin{array}{c} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \dots \end{array} \right\} = \left\{ \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x^2}, \frac{x^3}{1+x^3}, \frac{x^4}{1+x^4} \dots \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{numerador} = x^n \geq 0 \\ \text{denominador} = 1+x^n \geq 1 \end{array} \right\} \frac{x^n}{1+x^n} \geq 0 \\ x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0 \Rightarrow 1+x^n \geq x^n; 1+x^n > x^n; \frac{x^n}{1+x^n} < 1 \end{array} \right\} 0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} < 1$$

$$\boxed{0 \leq f_n(x) < 1} \quad \forall x \geq 0$$

2. Estudie la convergencia uniforme de la sucesión funcional f_n en:

Antes de analizar la convergencia pedida del 2., debemos estudiar la convergencia puntual correspondiente, debido al siguiente motivo:

- Si quisiésemos aplicar el teorema habitual para decidir la no convergencia, nos resultaría absolutamente imprescindible conocer quien es la función límite puntual $f(x)$. (Deberíamos determinar su discontinuidad en el intervalo considerado para poder aplicar el teorema y llegar a la no convergencia uniforme).

- Si no pudiésemos aplicar el teorema habitual (Es decir, si la función (límite puntual $f(x)$) fuese continua en el intervalo). Nos veríamos obligados a emplear la definición de convergencia uniforme, en cuya expresión aparece la misma $f(x)$.

Vemos pues que, en ambos casos, es necesario conocer la expresión de $f(x)$, por lo que, en cada uno de los apartados empezaremos hallando $f(x)$ para estudiar la converg. uniforme

2a) Convergencia puntual de $f_n(x)$ a $f(x)$ en $[0, c]$, con $0 < c < 1$
 $[0, c]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$
 $0 < c < 1$ $x \in [0, c] \subseteq [0, 1)$
 $0 < c < 1 \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow x^n \rightarrow 0$

$f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) = 0$ en $[0, c]$
 con $0 < c < 1$

Al ser $f(x)$ continua en $[0, c]$ no podemos aplicar el teorema habitual y acudimos a la definición.

$f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x) = 0$ en $[0, c]$ $(0 < c < 1)$ $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in [0, c]} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \right] = 0$

$$g(x) = \frac{|x^n|}{|1+x^n|} = \frac{x^n}{1+x^n}$$

$$g(x) = \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| = \frac{|x^n|}{|1+x^n|}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0 \Rightarrow |x^n| = x^n$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 1+x^n > 0 \Rightarrow |1+x^n| = 1+x^n$$

$$g'(x) = \frac{n x^{n-1} (1+x^n) - x^n \cdot n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{n x^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

$$\text{sign}[g'(x)] = \text{sign} \left[\frac{n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} \right] = \text{sign}[x^{n-1}] = \text{positivo}$$

$x \in [0, c] \subseteq [0, 1) \Rightarrow x \geq 0$

$$g(x) \text{ crece en } [0, c] \Rightarrow \text{supremo en } [0, c] \quad g(c) = \frac{c^n}{1+c^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in [0, c]} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \right] = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{c^n}{1+c^n} \right] = 0, \text{ porque } 0 < c < 1$$

Dado que el límite anterior es nulo, concluimos que $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x) = 0$ en $[0, c]$ con $0 < c < 1$

2b)

$[b, \infty)$
 $b > 1$

Convergencia puntual de $f_n(x)$ a $f(x)$ en $[b, \infty)$ con $b > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} 1$$

$x \in [b, \infty)$ con $b > 1$
 $x > 1 \Rightarrow x^n \rightarrow \infty$

La sucesión f_n converge puntualmente a $f(x) = 1$ en $[b, \infty)$ es el conjunto de valores de x para los cuales existe y es finito el límite anterior, y por eso es el dominio de la función límite puntual $f(x)$

$$f: [b, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 1$$



Como $f(x)$ es continua en $[b, \infty)$, no podemos aplicar el teorema habitual y acudimos a la definición de convergencia uniforme.

$$f_n(x) \text{ converge uniformemente a } f(x) = 1 \text{ en } [b, \infty) \text{ con } b > 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in [b, \infty)} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$$

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} - \frac{1+x^n}{1+x^n} \right| = \left| \frac{-1}{1+x^n} \right| = \frac{1}{1+x^n}$$

$$g'(x) = \frac{-n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} \quad \text{sign}[g'(x)] = \text{sign} \left[\frac{\overset{\text{neg}}{-n x^{n-1}}}{\underset{\text{positivo}}{(1+x^n)^2}} \right] = \text{sign}[-x^{n-1}]$$

$x \in [b, \infty) \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0$

$$g'(x) < 0 \Rightarrow g(x) \text{ decrece en } [b, \infty) \quad \text{signo negativo con } x \geq 0$$

$$\sup_{x \in [b, \infty)} g(x) = g(b) = \frac{1}{1+b^n}$$

$$f_n(x) \text{ converge uniformemente a } f(x) = 1 \text{ en } [b, \infty) \text{ con } b > 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+b^n} = 0, \text{ pues } b > 1 \Rightarrow b^n \rightarrow \infty$$

Puesto que el límite anterior es nulo, concluimos que $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x) = 1$ en $[b, \infty)$ con $b > 1$.

2c)

$[1, \infty)$

Convergencia puntual de $f_n(x)$ a $f(x)$ en $[1, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 1 & x > 1 \text{ (apartado anterior)} \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$$

~~2d)~~ Vemos que $f(x)$ es discontinua en $[1, \infty)$, y como las f_n de x son continuas en $[1, \infty)$, a través del teorema habitual, deducimos que $f_n(x)$ no converge uniformem. a $f(x)$ en $[1, \infty)$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS II – 3 Septiembre 2008

P3

Apellidos Nombre
 DN Grupo

■ Puntuación de este problema sobre el total del examen: **3 puntos**.

1.1 (1 punto) Estudie la convergencia uniforme de la serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (1)$$

en el intervalo $(-1, 1)$.

1.2 (1 punto) Calcule el conjunto o campo de convergencia de la serie funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (2)$$

1.3 (1 punto) Calcule la suma de la serie funcional (2) en su intervalo de convergencia.

3.1 Convergencia uniforme en $(-1, 1)^*$ de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N + \dots}_{\text{Suma } N\text{-ésima}} = \frac{1}{1-x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Progresión geométrica} \\ \text{1er término: } 1 \\ \text{razón: } x \end{array} \right\} S(x) = \frac{1-0}{1-x} *$$

$$S_N(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N \rightarrow S_N(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}$$

* Nota: Las fórmulas de $S(x)$ y $S_N(x)$ sólo son válidas cuando el valor absoluto de la razón es menor que uno, es decir, cuando $|x| < 1$, lo que supone trabajar en el intervalo $(-1, 1)$ dado por el enunciado.

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente a $S(x)$ en $(-1, 1)$ si y sólo si la sucesión de sucesiones parciales $S_N(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ en $(-1, 1)$, lo cual ocurre si y sólo si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in (-1, 1)} \{ |S_N(x) - S(x)| \} \right] = 0$$

$$|S_N(x) - S(x)| = \left| \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|1 - x^{N+1} - 1|}{|1-x|} = \frac{|-x^{N+1}|}{|1-x|} = \frac{|x|^{N+1}}{|1-x|}$$

$$\sup_{x \in (-1, 1)} \{ |S_N(x) - S(x)| \} = \sup_{x \in (-1, 1)} \frac{|x|^{N+1}}{|1-x|} = \sup_{x \in (-1, 1)} \left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right| =$$

$$\sup_{x \in (-1, 1)} \left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right|$$

Estudio de $\frac{x^{N+1}}{1-x}$:

$$\begin{aligned} \text{Derivada: } \frac{(N+1)x^N(1-x) + x^{N+1} \cdot 1}{(1-x)^2} &= \frac{(N+1)x^N - (N+1)x^{N+1} + x^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(N+1)x^N - Nx^{N+1}}{(1-x)^2} = \frac{x^N(N+1-Nx)}{(1-x)^2} = \frac{x^N(1-N(x-1))}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

la derivada de $x=0$ es nula y para $1-N(x-1)=0 \Leftrightarrow x = \frac{1+N}{N}$

La función $\frac{x^{N+1}}{1-x}$ tiene un extremo en $x = \frac{1+N}{N}$, y al ser éste un máximo sabemos que el supremo (la función, al ser valor absoluto, siempre es positiva, por lo que descartamos $x=0$). Al hacer $N \rightarrow \infty$, este extremo tenderá a ser 1, luego el límite quedará $\frac{1}{1-1}$, que surge de sustituir $x=1$ en la expresión $\left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right|$. Puesto que el límite no está acotado No hay convergencia uniforme.

3.2 Calcule el campo o conjunto de convergencia de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} \right)}_{a_n} \underbrace{(x-x_0)^n}_{(x-x_0)^n}; \quad x_0=0 = \text{centro de la serie}$$

Intervalo de convergencia: $(x_0 - R, x_0 + R)$

$$R = \frac{1}{\rho}; \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1 = \rho$$

$$\boxed{R = 1/1 = 1}$$

Intervalo de convergencia: $(-1, 1)$

Estudio de extremos:

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ (Divergente)}$$

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = -\ln 2 < \infty \text{ (convergente)}$$

Campo de convergencia: $[-1, 1)$

3.3) Calcule la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ en su intervalo de converg.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = S(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n} = 1 + x + x^2 + \dots = S'(x) \quad \text{derivando}$$

$$S'(x) = \frac{1-0}{1-x}$$

$$S'(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{dS(x)}{dx}; \quad S(x) = \int dS(x) = \int \frac{-1}{1-x} dx$$

$$S(x) = -\ln|1-x| = \ln\left|\frac{1}{1-x}\right| + C$$

$$S(x) = \ln\left|\frac{1}{1-x}\right| + C \quad \left\{ \begin{array}{l} \ln\left|\frac{1}{1-0}\right| + C = 0 \\ \ln|1| = -C = 0; \quad C = 0 \end{array} \right.$$

$$S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$$

$$\boxed{S(x) = \ln\left|\frac{1}{1-x}\right|}$$

Para saber el valor de $S(x)$ obtenemos primero $S'(x)$, pues es una progresión geométrica, por lo que podemos aplicar la fórmula $S'(x) = \frac{1^{\text{er término}} - \text{últ. término} \cdot \text{razón}}{1 - \text{razón}}$ y luego integrar para obtener $S(x)$

Apellidos Nombre
DNI Grupo Tiempo 50 minutos

(Describe con todo detalle cada paso y justifique sus razonamientos. Respuestas que no cumplan estos requisitos obtendrán MUY POCA o NINGUNA PUNTUACIÓN)

Considere dos funciones $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R})$ arbitrarias, salvo que sus segundas derivadas no se anulan, y construya la función $F(u, v) = f_1(u) + f_2(v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (1 punto) Estudie y clasifique los extremos de $F(u, v)$.

(b) (1 punto) Sean ahora $u(x, t) = x + at$, $v(x, t) = x - at$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ y considere la composición $\varphi(x, t) = f_1(u(x, t)) + f_2(v(x, t))$. Use la regla de la cadena para hallar expresiones simplificadas de las derivadas parciales, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

(c) (0.5 punto) Usando el resultado anterior, compruebe que $\varphi(x, t)$ cumple la ecuación de D'Alembert, ecuación de onda unidimensional,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow f_1(u)$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow f_2(v)$$

$$F(u, v) = f_1(u) + f_2(v)$$

↑ ↑
expresiones que dependen
únicamente de u y v
por separado

a) Candidatos a extremos de F

$$(I) \nabla F(u, v) = (0, 0)$$

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (f_1(u) + f_2(v)) = \frac{\partial f_1(u)}{\partial u} + \frac{\partial f_2(v)}{\partial u} = f_1'(u)$$

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial v} = f_2'(v) \text{ (igual que lo anterior)}$$

$$\nabla F(u, v) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v} \right) = (f_1'(u), f_2'(v)) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1'(u) = 0 \\ f_2'(v) = 0 \end{cases}$$

u candidato a extremo de f_1
 v candidato a extremo de f_2 } (u, v) candidato a extremo de F

(II) otros posibles candidatos de F surgen de estudiar la diferenciableidad de F (Si F no es diferenc. en un punto, entonces ese punto es candidato)

Como $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ las parciales de F existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$
de aquí no sacamos candidatos

clasificación

$$HF(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1''(u) & 0 \\ 0 & f_2''(v) \end{pmatrix}$$

$$|HF(u,v)| = f_1''(u) \cdot f_2''(v) \neq 0 \quad \forall (u,v)$$

Nos aseguramos que el determinante es no nulo porque las dos derivadas segundas son no nulas por hipótesis

$$\textcircled{1} \underbrace{f_1''(u) > 0}_{u \text{ mínimo de } f_1}, \underbrace{f_2''(v) > 0}_{v \text{ mínimo de } f_2} \Rightarrow |HF(u,v)| > 0 \Rightarrow (u,v) \text{ mínimo}$$

$$\textcircled{2} f_1''(u) > 0, f_2''(v) < 0 \Rightarrow |HF(u,v)| < 0 \Rightarrow (u,v) \text{ punto silla}$$

$$\textcircled{3} f_1''(u) < 0, f_2''(v) > 0 \Rightarrow |HF(u,v)| < 0 \Rightarrow (u,v) \text{ punto silla}$$

$$\textcircled{4} \underbrace{f_1''(u) < 0}_{u \text{ máximo de } f_1}, \underbrace{f_2''(v) < 0}_{v \text{ máximo de } f_2} \Rightarrow |HF(u,v)| > 0 \Rightarrow (u,v) \text{ máximo}$$

b) $\varphi(x,t) = f_1(u(x,t)) + f_2(v(x,t)) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f_1(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f_1(u)}{\partial u} + \frac{\partial f_2(v)}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial f_1(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f_2(v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial f_1(u)}{\partial u} - \frac{\partial f_2(v)}{\partial v} \right)$$

c) Se trata simplemente de hallar las derivadas segundas que aparecen en la fórmula, sustituir en ella y ver que se cumple.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_2}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \cdot a \right] = a \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \right] = a^2 \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2} \right]$$

$$\boxed{a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}}$$

D'Alembert