Introducción al Análisis de Circuitos

Un resumen fundamental

Pablo Sánchez Yáñez

The Publisher $\boxed{\mathcal{PSY}}$

Primera edición: Junio 2015

Printed in the World

Índice general

Capítulo 1

Introducción al Análisis de Circuitos (IACR)

Introducción

Este documento pretende servir de ayuda a todos los estudiantes de Ingeniería de Telecomunicación en la Universidad Politécnica de Madrid. En él se contemplan aquellas fórmulas más utilizadas en la resolución de los problemas de los examenes de la asignatura de IACR, así como pequeñas guías para la resolución de los mismos.

No se pretende, sin embargo, elaborar un libro con toda la materia de la asignatura, ya que se van a dar muchos conceptos por entendidos y solo se tratarán aquellos de mayor importancia y dificultad. Asimismo muchas fórmulas se citarán sin explicaciones mayores. En realidad, el objeto de este manual no es más que el de servir como consulta para dudas puntuales, o recordar algún concepto que se haya olvidado con el paso del tiempo.

A continuación se pasará a hacer un resumen de los objetivos y el programa de la asignatura.

Objetivos y plan de aprendizaje

El objetivo principal de esta asignatura es introducir al alumno al amplio mundo de los circuitos eléctricos y su funcionamiento. Para ello, se va a dividir en diferentes partes, adaptando el nivel de dificultad a cada momento y siguiendo una progresión lineal para el aprendizaje óptimo. Comenzando con circuitos resistivos, se definirán los principales teoremas de circuitos (lemas de Kirchoff) que serán para el alumno una herramienta indispensable para su progreso. Una vez se ha adquirido conocimiento de estas leyes, se pasa la equivalencia de circuitos (Thevenin y Norton), seguido de los Amplificadores Operacionales.

Posteriormente se inicia al alumno en el análisis de circuitos en el dominio del tiempo (circuitos RL y RC) de primer y segundo orden (régimen transitorio), para proseguir con el análisis en régimen permanente sinusoidal -RPS- también conocido como el dominio de los Fasores.

El siguiente temario que se imparte tiene que ver con el acoplamiento magnético y transformadores, donde será muy conveniente tener muy clara la materia anterior para un correcto entendimiento de los diversos conceptos.

Finalmente se imparten los conceptos de Potencia, Energía y Resonancia que serán materia teórica clave para los problemas de examen.

Capítulo 2

El Análisis Sistemático

Introducción

Es una práctica muy habitual en la docencia de esta asignatura el acostumbrar a los alumnos a utilizar un análisis paso a paso de cada elemento del circuito. Si bien eso es interesante en cuanto al aprendizaje, en los exámenes resta tiempo, luego es conveniente conocer una técnica más rápida que nos permita analizar los circuitos de una manera general. Por este motivo se le da tanta importancia al análisis sistemático, ya que es clave para el análisis óptimo.

Análisis por nudos

Más adelante veremos el análisis por mallas, pero es interesante emplear el análisis por nudos en una gran casuística. No es habitual que este sea el primer método en impartirse, pero su utilización puede facilitar mucho el análisis de un circuito. La fórmula a seguir es la siguiente:

$$V_{nudo}(\sum \frac{1}{Z_{nudo}}) - \sum V_{adyacente}(\frac{1}{Z_{union}}) = \sum I_g$$

Explicada, esta ecuación consiste en tomar como incógnitas las tensiones de los nudos del circuito y multiplicarlas por las distintas admitancias que están conectadas a ellos. Es decir, se realiza el producto de la tensión del nudo a analizar y la suma de admitancias que llegan a él, acto seguido se le resta el producto de las tensiones de los nudos adyacentes a este por las distintas admitancias que unen ambos nudos. Toda esta operación se iguala a la suma de los generadores de corriente que llegan al nudo. Se ha de tener en cuenta que para este lado de la igualdad los generadores de corriente que entran al nudo tendrán signo positivo, y negativo los que salen.

Esta fórmula para el análisis del circuito proporciona algunas de las incógnitas que se han de despejar para obtener el resultado pedido. Pero no basta con el análisis sólo de un nudo para obtener el sistema de ecuaciones necesario para la resolución del circuito. Para ello se ha de analizar cada uno de los nudos. Y una forma rápida de hacerlo es mediante la agrupación en matrices. Por ejemplo, para un caso de tres nudos:

$$\begin{pmatrix} \sum Y_{nudoA} & -Y_{uneB} & -Y_{uneC} \\ -Y_{uneA} & \sum Y_{nudoB} & -Y_{uneC} \\ -Y_{uneA} & -Y_{uneB} & \sum Y_{nudoC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum I_{gA} \\ \sum I_{gB} \\ \sum I_{gC} \end{pmatrix}$$

Un indicativo de que se está analizando bien el circuito es la simetría respecto a la diagonal principal de la matriz de admitancias. Luego el sistema es trivial resolverlo por la regla de Cramer.

Análisis por mallas

Una vez comprendido el análisis por nudos, el análisis por mallas es muy sencillo. Sistemáticamente se analiza de la misma forma, pero cambiando las variables independientes, que ahora pasan a ser las corrientes de cada malla; las admitancias ($\frac{1}{Z}$) por impedancias (Z), y los generadores de corriente por generadores de tensión, que tendrán signo positivo si suben o negativo si bajan.

$$I_{malla}(\sum Z_{nudo}) - \sum I_{adyacente}(Z_{union}) = \sum V_g$$

La matriz quedaría de la siguiente forma

$$[Z](I) = (V_g) \ ,$$

Que no es más que una matriz idéntica a la del análisis por nudos, pero cambiando las variables citadas anteriormente.

Inconvenientes

El análisis sistemático es muy útil en los circuitos resistivos y en circuitos que trabajan en Régimen Permanente Sinusoidal. No sirve, por otra parte para el análisis en régimen transitorio, ya que la relación entre los distinos componentes es en algunos casos diferencial (y no lineal como era en los demás circuitos).

Capítulo 3

Circuitos Equivalentes

Introducción

Aunque en esta asignatura no se vaya a emplear en exceso debido al resto del temario, es sumamente importante el concepto de circuito equivalente y sus aplicaciones son muy extensas. Más adelante se empleará lo aprendido en este apartado detalladamente de forma implícita, siendo incluso trivial la simplificación de la red circuital. Si bien cuando se habla de dos circuitos equivalentes se sobreeentiende que entre ellos hay una función de transferencia común, no es casual y, además no debe confundirse, que dos circuitos equivalentes son el mismo circuito ya que esta afirmación es falsa en la mayoría de casos.

A continuación se verán dos tipos de circuitos equivalentes, el de Thévenin y el de Norton.

Teorema de Thevenin. Circuitos Equivalentes

El teorema de Thevenin dice, no siendo muy riguroso por mi parte, que para un circuito activo resistivo (o en el caso de estar en el dominio de los fasores, cualquier circuito formado por generadores e impedancias) conectado a un circuito de carga (pasivo), va a existir una relación tal que

$$v_{TH} = R_{TH} i.$$

Tratándose esa v_{TH} de la tensión en las bornas de salida del circuito activo, o la tensión en bornas de la carga. Para calcularla, sencillamente hay que desconectar la carga del circuito y hallar dicha tensión en bornas de salida.

Un caso particular del teorema de Thevenin es el del circuito equivalente de Norton, luego esa i de la ecuación se identificará como i_N, y por consiguiente

$$i_N = \frac{v_{TH}}{R_{TH}}$$

Para calcularla se cortocircuitan las bornas de salida del circuito activo, y será esta corriente la que pase por ellas.

Resitencia Equivalente

R_{TH}, que sería la resistencia interna equivalente del circuito, se va a calcular de distintas formas dependiendo de los datos que se tengan. Es decir:

- Teniendo v_{TH} e i_N, se despeja R_{TH} de la ecuación anterior. Quedando

$$R_{TH} = \frac{v_{TH}}{i_N}$$

- Si no se tienen los datos requeridos para la forma anterior y el circuito no presenta generadores dependientes, la resistencia equivalente es la asociación, tras haber desconectado los generadores independientes, de todas las resistencias (o impedancias) que contenga la red.

- Asimismo, si existen generadores dependientes se va a conectar a las bornas de salida del circuito activo un generador auxiliar o bien de tensión, o bien de corriente, tal que

$$R_{TH} = \frac{v_{aux}}{i_{aux}}.$$

  NOTA: Es importante que i_{aux} entre por la borna positiva del circuito.

Capítulo 4

El Análisis en el Dominio del Tiempo

Introducción

Los condensadores y las bobinas son elementos del circuito que tienen memoria, y que por tanto, una de sus variables no puede cambiar repentinamente su valor. Antes de llegar al valor esperado *transita* siguiendo una función matemática desde el valor que tenía anteriormente. En el caso de los condensadores esa variable es su tensión, y en el de las bobinas, su corriente. Para hacer un análisis del régimen transitorio va a ser necesario entonces, resolver una ecuación diferencial de primer o segundo orden, según el circuito presente unos elementos u otros.

Guía para la resolución de problemas

A veces, analizar un circuito no es una tarea trivial y surgen diversas complicaciones a la hora de resolverlo. Para agilizar aquellos procesos que se realizan reiteradamente en todos los problemas de régimen transitorio, se propondrá a continuación una Guía con los pasos principales a seguir:

1. Lo primero es siempre tener en cuenta los intervalos de t y qué ocurre en cada uno de ellos. Habitualmente la clave se encuentra en $t = 0$.

2. Se analiza el circuito en $t < 0$ teniendo en cuenta que en régimen permanente, las bobinas se comportan como *cortocircuitos* y los condensadores como *circuito abierto*. Es adecuado dibujar el circuito aplicando estas condiciones para visualizar mejor el análisis.

3. Se esquematiza el circuito para $t \geq 0$. Teniendo siempre en cuenta las condiciones iniciales.

$$i_L(t = 0^+) = i_L(t = 0^-) \rightarrow {i_L}'(t)$$

$$v_C(t = 0^+) = v_C(t = 0^-) \rightarrow {v_C}'(t)$$

4. Se analiza finalmente el circuito en $t \geq 0$. Se busca una primera ecuación en función de $v_C(t)$ o $i_L(t)$. Y a partir de esta se determina una ecuación diferencial ordinaria lineal de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \lambda_1 \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \lambda_2 i_L = \phi \ ,$$

o bien,

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2} + \lambda_1 \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \lambda_2 v_C = \phi,$$

si el circuito es RLC. Si es de primer orden, la ecuación será de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \lambda_1 i_L = \phi \ ,$$

o respectivamente,

$$\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \lambda_1 v_C = \phi \ ,$$

5. Una vez se tiene la ecuación diferencial, se resolverá si lo piden, o se operará para obtener un resultado a partir de ella.

EDOs lineales de primer orden

Si nos encontramos ante una EDO lineal de primer orden su resolución es muy sencilla. Solo se han de seguir los siguientes pasos:

- Si por ejemplo la ecuación es del tipo

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + C i_L = F$$

Se sabe que para resolver la ecuación completa son necesarias una solución homogénea $i_{\mathcal{H}}$ y otra solución particular $i_{\mathcal{P}}$.

- En primer lugar se determina la solución homogénea, igualando la EDO original a 0, y obteniendo la ecuación característica

$$r + C \cdot 1 = 0.$$

Ahora, despejando r se sustituye su valor en

$$i_L(t) = \mathcal{A} \cdot e^{rt}$$

y esta será la solución de la homogénea.

- Para hallar la solución de la particular se ensaya una función solución del mismo tipo que el segundo miembro de la ecuación diferencial original. Por ejemplo, si F es una constante

  $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{K}}{\mathrm{d}t} + C \cdot \mathcal{K} = F,$$

  luego

  $$\mathcal{K} = \frac{F}{C}$$

  y, por tanto $i_{\mathcal{P}} = \mathcal{K}$.

- Finalmente, se tiene que la solución a la ecuación diferencial completa es de la forma

  $$i_L(t) = \mathcal{A} \cdot e^{rt} + \mathcal{K}\ ,$$

  pero todavía se desconoce el valor de $\mathcal{A}$.

- Para determinar A solamente hay que aplicar las condiciones iniciales del problema. En este caso el valor de i_L cuando $t = 0$.

EDOs lineales de segundo orden

Si nos encontramos ante una EDO lineal de segundo orden su resolución ya no es tan sencilla como lo era la de una EDO de primer orden. Aun así su resolución se puede llevar a cabo a partir de los siguientes pasos:

- Vamos a tomar como referencia la ecuación diferencial

  $$\lambda_1 \frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2} + \lambda_2 \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \lambda_3 v_C = \phi(t),$$

- Antes de nada se ha de tener en cuenta que la solución de una ecuación diferencial de este tipo tiene dos partes. Si bien $v_C(t)$ es una solución de la ecuación anterior, se descompone en

  $$v_C(t) = v_C(t)_{\mathcal{H}} + v_C(t)_{\mathcal{P}}\ .$$

  Es decir, una solución homogénea y una particular, igual que lo hacían las EDOs de primer orden.

- En primer lugar se construye la ecuación característica a partir de la ecuación homogénea. Para ello, es muy conveniente ordenar los coeficientes de la forma siguiente

  $$\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_C = \frac{\phi(t)}{\lambda_1},$$

  que igualando a 0 queda

  $$\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_C = 0.$$

Así, la ecuación característica resulta

$$r^2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} r + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = 0.$$

- Las raíces de la ecuación característica pueden ser de las siguientes formas:

  1. Reales y distintas: $r_1 \neq r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. En este caso la solución homogénea es
  $$v_C(t)_{\mathcal{H}} = \mathcal{A}_1 e^{r_1 t} + \mathcal{A}_2 e^{r_2 t}\ .$$
  Se denomina **Amortiguamiento Supercrítico** y r_1, r_2 siempre < 0.
  2. Real de multiplicidad 2: $r_1 = r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Para este caso la solución es
  $$v_C(t)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) e^{r_1 t}$$
  Se denomina **Amortiguamiento Crítico**, y r_1 siempre < 0.
  3. Complejas conjudadas: $r_1 = r_2{}^*;\ r_1, r_2 \in \mathbb{C}$. En este último caso la solución es de la forma
  $$v_C(t)_{\mathcal{H}} = \mathcal{A} e^{r_1 t} + \mathcal{A}^* e^{r_1^* t}\ .$$
  Teniendo en cuenta que
  $$r_1 = -a + jb,$$
  $$r_2 = -a - jb.$$
  La solución a este **Amortiguamiento Subcrítico** también puede expresarse como
  $$v_C(t)_{\mathcal{H}} = 2\mathrm{Re}\left\{\mathcal{A}_1 \cdot e^{r_1 t}\right\} = 2|\mathcal{A}_1| e^{-at} \cos\left(bt + \varphi\right)$$
  Ahora bien, un método más rápido para obtener estas raíces complejas es directamente aplicando
  $$r_{1,2} = -\omega_0 k \pm j\omega_0 \sqrt{1 - k^2}\ .$$
  Por tanto, recordando
  $$r^2 + \frac{a_1}{a_2} r + \frac{a_0}{a_2} = 0$$
  y sabiendo
  $$2\omega_0 k = \frac{a_1}{a_2},$$
  $$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}.$$
  Finalmente, sustituyendo
  $$r_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

- Una vez conocida la solución homogénea todavía quedaría calcular la solución particular de la completa. Para ello, igual que en las EDOs de primer orden, se ensaya una solución del mismo tipo que $\phi(t)$, en nuestro caso. Después se sustituye esta solución en la ecuación original y se determinan los valores que regirán la solución particular (una constante en caso de una solución constante, etc.)

- Si bien ya tenemos la solución homogénea y la particular, la solución completa es la suma de estas. Pero aun quedan por conocer las constantes de la solución homogénea antes calculada. Para averiguarlas se aplican las condiciones iniciales, que aportarán los datos suficientes para llegar a un sistema de ecuaciones cuyas soluciones serán los valores buscados.

Capítulo 5

El Régimen Permanente Sinusoidal

Introducción

A la hora de analizar un circuito eléctrico, hay ciertos recursos indispensables que, de no ser por ellos se complicaría exageradamente la tarea. Los *fasores* son de ese tipo de herramienta que facilita el estudio del circuito. El principal inconveniente que, en un principio, se les puede notar es el dominio en el que se trabaja con ellos. Un fasor es un número complejo con su módulo y su argumento, su parte real y su parte imaginaria, y que funciona en el dominio de la frecuencia. Por este motivo es necesario transformar algunos de los componentes, que ahora dejan de llamarse resistencias, bobinas o condensadores, para llamarse *impedancias* (Z) o su inverso, *admitancias* (Y). Estos nuevos componentes tienen una gran ventaja, y es que sus variables se relacionan de forma lineal, como en una resistencia, por la ley de Ohm.

Explicados uno a uno, los distintos componentes se definen con las siguientes ecuaciones:

- Resistencia: $Z_R = R \rightarrow V = ZI$.

- Bobina: $Z_L = j\omega L \rightarrow V = ZI$.

- Condensador: $Z_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow V = ZI$.

Como se puede comprobar, lo que se decía sobre la relación lineal entre la tensión y la corriente es cierto. Y además, otra ventaja de los fasores es que se trabaja con corriente continua, es decir, no hay régimen transitorio. Por otro lado, hay que mencionar la importancia que tiene aquí el análisis sistemático.

Los Fasores

Como se venía diciendo, los fasores son una herramienta sencilla de utilizar si se tiene un buen manejo de los números complejos, ya que se van a utilizar en todo momento en el dominio transformado. En primer lugar, los generadores, que van a pasar de ser de la forma

$$v_g(t) = |V_g| \cos{(\omega t + \varphi)} \ ,$$

para convertirse en sencillamente

$$V_g = |V_g| e^{j\varphi}.$$

En realidad lo más complicado es realizar la transformación de un dominio a otro, pero sabiendo que

$$v(t) = V_o \cos{(\omega t + \varphi)} = V_o \cdot \mathrm{Re}[e^{j(\omega t + \varphi)}] = \mathrm{Re}[V_o \cdot e^{j\omega t} e^{j\varphi}] = \mathrm{Re}[V \cdot e^{j\omega t}],$$

resulta más sencillo encontrar la relación entre los dos dominios.

Capítulo 6

El Acoplamiento Magnético

Introducción

> *Sea una espira por la que circula una corriente eléctrica. Sabemos que crea un campo magnético y, por lo tanto, existirá un flujo a través de la superficie definida por la espira*

Al fin y al cabo un solenoide o, como es más comúnmente llamado, una bobina, no es más que un conjunto de espiras. Luego, se sabe que a una cierta distancia colocada una de otra, una bobina crean un flujo en la próxima debido al campo magnético creado por la corriente eléctrica que circula por la primera. A este fenómeno se le llama acoplamiento magnético y viene regulado por un coeficiente de inducción mutua o inductancia mutua (M). Este coeficiente aparece ligado a la tensión que la segunda bobina induce en la primera.

Los solenoides en los que se produce este fenómeno son de dos tipos según su sentido de giro, es decir dependen de cómo se haya bobinado su devanado. Para diferenciarlos se coloca en su representación gráfica, un punto en la entrada de aquellos que hayan sido bobinados en el mismo sentido de giro. Es decir, si se tienen dos bobinas acopladas con corrientes i_1 e i_2, y ambas corrientes entran o salen por el punto, los flujos (y las tensiones inducidas) se suman; si no, se restan:

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t};$$

$$v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

Guía para la resolución de problemas

El proceso de análisis de un circuito que presente acoplamiento magnético no es excesivamente más complicado que otro que en el que este fenómeno no se produzca. Únicamente hay que tener claros ciertos conceptos y unos determinados pasos a seguir que a continuación se muestran:

1. Antes de nada se ha de analizar el circuito como si no se produjese tipo alguno de acoplamiento, sacando las ecuaciones que permitirían resolver el circuito de no ser por la inducción entre bobinas.

2. Dejando a un lado las ecuaciones anteriores, se calculan las tensiones de acoplamiento inducidas, que en RPS son de la forma

$$j\omega MI \ .$$

3. Una vez calculadas estas se deduce su signo según los sentidos de las corrientes. Una forma rápida de averiguar el signo es pensar que, si la corriente entra por el punto, la tesión tendrá el + en el punto. También se puede recurrir a lo que se explicaba en la introducción del capítulo *"si se tienen dos bobinas acopladas con corrientes i_1 e i_2, y ambas corrientes entran o salen por el punto, los flujos (y las tensiones inducidas) se suman; si no, se restan"*.

4. Por último, se dibuja el circuito teniendo en cuenta los nuevos datos (tensiones inducidas), y se corrigen las ecuaciones del principio.

El Transformador

> *Un transformador son dos o más bobinados que se hallan suficientemente próximos, sobre un soporte de material magnético, denominado núcleo, que canaliza el flujo, y que presenta cierta resistencia a dicho flujo, denominada reluctancia*

Un tipo de transformador especial es el transformador ideal, que tiene como característica más destacable, que la relación de espiras, a, también llamada relación de transformación, es constante. Luego sus ecuaciones son

$$a = \frac{N_1}{N_2} \longrightarrow a = \frac{v_1}{v_2} = \frac{i_2}{i_1}.$$

En los problemas de transformadores es habitual el proceso de trasladar la impedancia a la vista del secundario al primario, multiplicándola por la relación de transformación al cuadrado, a^2. Esta traslación facilita, sin duda, el análisis de la red y es más que recomendable en la mayoría de los casos.

Otro tipo de transformador que aparece habitualmente en problemas de la asignatura, es el transformador *perfecto*. Este se diferencia del *ideal* en que su número de espiras no es infinito. La relación de transformación para este transformador es de la forma

$$a = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

Capítulo 7

Potencia, Energía y Resonancia

Potencia y Energía

La energía y la potencia medidas en un elemento del circuito están directamente relacionadas. Se puede calcular la potencia instantánea entregada por un dispositivo mediante

$$p(t) = v(t)i(t).$$

Y la energía total cedida como

$$w(t) = \int v(t)i(t)\mathrm{dt}.$$

Por otro lado, se sabe que los generadores ceden potencia, que las resistencias la absorbe, y que las bobinas y condensadores ambas cosas.

Sin embargo se puede ver que las relaciones citadas no van a ser muy sencillas de manejar a la hora de hacer cálculos con dispositivos como condensadores y bobinas, ya que su corriente y su tensión, respectivamente, se obtienen a partir de operaciones diferenciales. Luego, una vez más, se van a analizar la mayoría de circuitos en Régimen Permanente Sinusoidal. Se tiene entonces que

$$P = VI.$$

Aunque lo que habitualmente se pide en exámenes y la mayoría de problemas en realación a la potencia es

- Potencia media
$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V|^2}{Z} = \frac{1}{2}|I|^2 Z.$$

- Potencia media máxima (disponible)

$$\bar{P}_{máx} = \frac{1}{8}\frac{|V_g|^2}{Z_g}.$$

- Potencia media absorbida

$$\bar{P} = \frac{1}{2}|V_g||I|\cos\varphi,$$

  siendo $\cos\varphi$ el factor de potencia.

- Potencia vectorial

$$\hat{P}_{AB} = \frac{1}{2}V_{AB}^{*}I_{AB}$$

Y sobre la energía:

- Energía magnética (en bobinas):

$$W_M = \frac{1}{4}L|I|^2$$

- Energía eléctrica (en condensadores):

$$W = \frac{1}{4}C|V|^2$$

Resonancia

El fenómeno de resonancia es un estado de baja resistencia de un sistema físico ante una excitación armónica exterior. Este sistema puede ser mecánico, como un edificio o un puente, pero estos no son objeto de la asignatura. Sin embargo en los sistemas eléctricos, se dice que

> *Una red está en resonancia cuando las energías medias almacenadas en bobinas y condensadores son iguales.*

$$W_E^{md} = W_M^{md}$$

Este fenómeno ocurre siempre a una frecuencia determinada, denominada frecuencia de resonancia, f_o, que da lugar a la pulsación de resonancia,

$$\omega_o = 2\pi f_o.$$

Cuando un circuito está en resonancia la potencia absorbida es máxima. Es decir, toda la potencia es absorbida por la red y no se devuelve nada al generador. A esa frecuencia del generador el circuito se hace resistivo. Es común buscar el estado de resonancia en un circuito eléctrico para aprovechar su máxima potencia, p. e.: en un equipo de música, interesa que el amplificador entregue toda la potencia a los altavoces y no que transforme a esa energía en calor. Otra opción para comprobar si un circuito está en resonancia es verificar que la parte imaginaria de su impedancia sea nula, $\mathrm{Im}[Z] = 0$.

Es posible calcular un **factor de calidad**, Q, como el cociente de la energía máxima almacenada y la potencia media absorbida. Para los circuitos que habitualmente se preguntan, Q se puede expresar como:

- Factor de calidad del circuito RLC Serie
$$Q = \frac{\omega L}{R},$$
que coincide con el factor de calidad de una bobina.
- Factor de calidad del circuito RLC Paralelo
$$Q = \frac{\omega C}{G},$$
coincidente con el Q del condensador.

Volviendo al tema de la resonancia, es interesante conocer la pulsación de resonancia, ω_o, de los circuitos RLC en serie y en paralelo. En realidad tienen la misma expresión, que es
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
Esto sucede de este modo porque como se venía diciendo, la frecuencia de resonancia es aquella ω_0 a la cual la impedancia equivalente de un circuito es puramente real, es decir, que la parte imaginaria es nula.

En un circuito RLC serie se tiene:
$$Z_{equiv} = \alpha + \beta \Longrightarrow \beta(\omega_0)$$
En un circuito RLC paralelo:
$$Y_{equiv} = \alpha + \beta \Longrightarrow \beta(\omega_0)$$
Por tanto, operando se obtiene que si
$$Y_{eq} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \alpha + \beta$$
Entonces
$$\alpha = \frac{1}{R} \qquad \beta = \omega C - \frac{1}{\omega L} = \frac{LC\omega^2 - 1}{\omega L}$$
$$\beta = 0 \Longrightarrow LC\omega_o^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
NOTA: En serie RLC, si está en resonancia, LC pueden sustituirse por un cortocircuito. Al mismo tiempo, en paralelo RLC, si está en resonancia, LC pueden sustituirse por circuito acierto.

Apéndice

Relaciones más importantes

A veces pasamos mucho tiempo sin ver ningún circuito y es normal que se nos olviden ciertas relaciones.

- La ley de Ohm, es la relación más sencilla, pero también es la más importante, $V = RI$, es la expresión más general para corriente continua.
- Las relaciones en un circuito RLC son quizá las que más se olvidan con el paso del tiempo. Para un circuito RLC serie:

  1. En R (resistencias)
  $$v_R = Ri(t)$$
  2. En L (bobinas)
  $$v_L = L\frac{\mathrm{d}i_l(t)}{\mathrm{d}t}$$
  3. En C (condensadores)
  $$v_C = \frac{1}{C}\int i_c(t)\mathrm{d}t$$

- En el caso de un RLC paralelo, analizando por nudos:

  1. En R
  $$i_R = Gv(t)$$
  2. En C
  $$i_C = C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}$$
  3. En L
  $$i_L = \frac{1}{L}\int v_l(t)\mathrm{d}t$$

La Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales recibe el nombre de sistema de Cramer cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
- El determinante de la matriz de los coeficientes (matriz del sistema) es distinto de cero $\det(\mathcal{A}) \neq 0$

Un sistema de Cramer es, por definición, compatible determinado, puesto que se cumple que $\text{rang}(\mathcal{A}) = \text{rang}(\mathcal{A}^*) = n$ (nº de incógnitas). Consideremos un sistema de Cramer, es decir, un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya expresión general en forma matricial es la siguiente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O bien,

$$[\mathcal{A}](\mathbf{x_n}) = (\mathbf{b})$$

La regla de Cramer nos da explícitamente la solución del sistema de ecuaciones para cada una de las i incógnitas, es decir

$$x_i = \frac{\det_i(\mathcal{A})}{\det(\mathcal{A})}$$

Siendo $\det_i(A)$ un determinante que resulta de sustituir la columna i en el determinante del sistema por otra formada por el vector de datos $\mathbf{b}$.