simplyjarod.com

IACR

Apuntes de clase

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE CIRCUITOS (IACR-1010)

Programa Marco y Objetivos

Materia: *Troncal* **Cuatrimestre:** *Segundo* **Créditos:** *4,5=3,0+1,5* **Curso:** *2009-2010*
Coordinador: *José M. Gil Gil* **Dpto:** *Electromagnetismo y Teoria de Circuitos.*

PROGRAMA

I. CONCEPTOS BÁSICOS DE CIRCUITOS.. (0,5 C)

Variables y elementos de circuito: activos (fuentes, fuentes controladas, A .O.) y pasivos (R, C, L). Lemas de Kirchhoff.

Objetivos: Conocer los elementos de circuito y sus relaciones tensión-corriente. Interconexión de elementos y Leyes de Kirchhoff. Escribir las ecuaciones de un circuito sencillo.

II. ANÁLISIS ELEMENTAL DE CIRCUITOS. .... (0,7 C)

Análisis elemental de Circuitos. Equivalencia de circuitos. Transformación de generadores. Thevenin y Norton. Circuitos con Amplificador Operacional.

Objetivos: Capacidad de analizar circuitos resistivos sencillos con /sin amplificadores operacionales y/o fuentes controladas (circuitos activos). Obtención de equivalentes de Thevenin y Norton de circuitos resistivos.

III. ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO... (1,0 C)

Caracterización de circuitos de 1er. y 2º orden. Condiciones iniciales. Respuesta a las señales escalón, sinusoidal y a otras excitaciones.

Objetivos: Obtener la respuesta en el tiempo de circuitos sencillos a excitaciones tipo escalón, pulso rectangular y sinusoidal. Identificar las respuestas libre y forzada de un circuito y los regímenes transitorio y permanente.

IV. ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL............. (1,0 C)

Análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal mediante fasores e impedancias. Superposición. Análisis sistemático de circuitos (nudos y mallas).

Objetivos: Análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal usando fasores e impedancias. Manejo de los métodos sistemáticos de nudos y mallas.

V. ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO Y TRANSFORMADORES....................................... (0,5 C)

Acoplamiento magnético, transformador perfecto, transformador ideal.

Objetivos: Analizar circuitos en régimen permanente sinusoidal que incluyan transformadores ideales, perfectos y dos bobinas acopladas como elementos de circuito.

VI. POTENCIA, ENERGÍA, RESONANCIA .... (0,8 C)

Energía y potencia en bobinas y condensadores. Potencia activa, reactiva y compleja. Adaptación de impedancias. Resonancia en circuitos RLC serie y paralelo.

Objetivos: Conocimiento de los conceptos de potencia y energía en elementos de circuito, y balance de potencia en un circuito. Conocer los conceptos de resonancia, factor de calidad y ancho de banda en circuitos resonantes. Diseño de redes L-C para adaptar impedancias.

BIBLIOGRAFÍA

- Circuitos y Señales: Introducción a los Circuitos Lineales y de Acoplamiento. R. E. Thomas, A. J. Rosa, Ed. Reverté

- Teoría de Circuitos. L. P. Huelsman, Prentice Hall

- Electric Circuit Analysis. D. E. Johnson, J. R. Johnson, J. L. Hilburn, P. D. Scott, Prentice Hall

- Análisis de Redes. M. E. Van Valkemburg, Ed. Limusa

- Basic Circuit Theory. Desoer, Kuh, Mc Graw Hill

- Engineering Circuit Analysis. J. R. Hayt, Kemmerly, Mc Graw Hill

- Linear Circuits. M. E. Van Valkenburg, B.K. Kinariwala. Prentice-Hall.

- Electric Circuits. J. W. Nilsson. Addison Wesley.

- An introduction to circuit analysis. A systems approach. D. E. Scott. McGraw Hill.

IACR
Jose A. Encinar
B-414
L 11-14h
M 13-14h, 15-16h
J 12-13h

Tema 1: Conceptos básicos de circuitos

11-feb-2010

1. Variables de un circuito

Variable fundamental: Carga (q) unidad Coulomb
$1 e^- = 1'6 \cdot 10^{-19}$ C

Intensidad de corriente: $i(t) = \frac{dQ}{dt}$ (Amperio)

- sentido "físico" de la corriente: sentido de movimiento de las cargas positivas
- sentido de referencia para la corriente: se define de forma arbitraria independientemente del fenómeno físico. Si $i(t) < 0 \Rightarrow$ el sentido elegido (de referencia) es contrario al físico.

Energía: W (Julios)

Tensión: variación de energía que experimentaría una carga unidad al moverse de A a B (tensión AB)

$$V = \frac{dW}{dq} \quad \left(\text{Voltio} = \frac{\text{Julio}}{\text{Coulomb}}\right)$$

- No depende del camino (sólo de A y B)
- No es necesario movimiento de cargas para que haya tensión
- Tiene una polaridad
  - sentido físico de la tensión

    $A^- \xrightarrow{\oplus\, q} B^+$ gana energía
  - sentido de referencia arbitrario. $V(t) < 0 \Rightarrow$ sentido de referencia contrario al físico.

Potencia: (Vatio / Watt); $1W = 1J/1s$

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = V \cdot i$$

Variables fundamentales

$$q \xrightarrow{\frac{dq}{dt}} i$$

$$w \xrightarrow{\frac{dw}{dq}} v$$

$$w \xrightarrow{\frac{dw}{dt}} p$$

Variables de señal (i, v)

2. Elementos de circuitos

Dispositivo: componente del circuito
(Resistencia, transistor, condensador)

dispositivos de 2 terminales: definimos la carga y tensión entre sus terminales.

Elemento de circuito: modelo ideal de dispositivo

Dispositivos activos: entregan potencia

Dispositivos pasivos: no entregan potencia

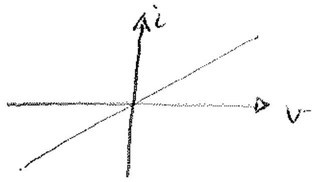
$\boxed{\begin{array}{l} i(t) \text{ sale por } \oplus \text{ en activos} \\ i(t) \text{ entra por } \oplus \text{ en pasivos} \end{array}}$

$p(t) = v \cdot i > 0 \Rightarrow$ transferencia de potencia del act. al pas.

$p(t) = v \cdot i < 0 \Rightarrow$ transferencia de potencia del pas. al act.

16-feb-2010

a) Resistencia



$R \geq 0$

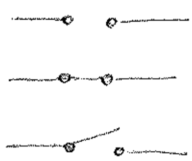
$P = iv = Ri^2 \geq 0$

Conductancia: $G = \frac{1}{R}$ (Ω^{-1}) ; $i = G \cdot V$

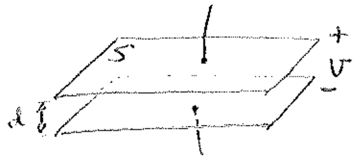
circuito abierto: $R \to \infty \Leftrightarrow G = 0 \Rightarrow i = 0$

cortocircuito: $R = 0 \Leftrightarrow G \to \infty \Rightarrow V = 0$

interruptor: cambia de cortocircuito a circuito abierto



b) Condensador



$$q = C \cdot V \; ; \; \boxed{C = \frac{q}{V}} \; ; \; 1F = \frac{1C}{1V}$$

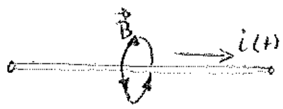
$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d} \quad \text{(Faradio, F)}$$

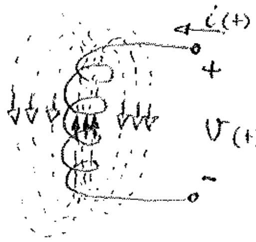
$$\boxed{i(t) = C \cdot \frac{dV}{dt}}$$

$$V(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t)\,dt + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\,dt$$

$$V(t) = V(t=0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\,dt$$

c) Bobina o Inductor





$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = L \cdot i(t)$$

$$\text{Inductancia} = \boxed{L = \frac{\Phi(t)}{i(t)}} \quad \text{(Henrio, H)}$$

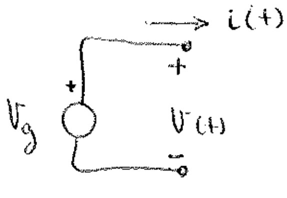
$$V(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(L \cdot i) = L\,\frac{di}{dt}$$

$$\boxed{V(t) = L \cdot \frac{di}{dt}}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} V(t)\,dt = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} V(t)\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} V(t)\,dt$$

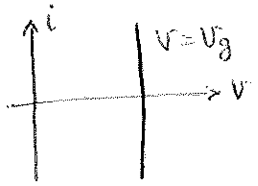
$$i(t) = i(t=0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} V(t)\,dt$$

d) Generador ideal de tensión

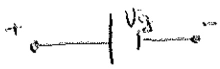


$V = V_g$

V_g = dato

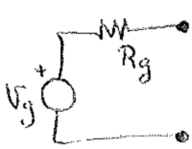


e) Generador corriente continua

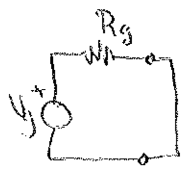


f) Generador corriente alterna

g) Generador real de tensión

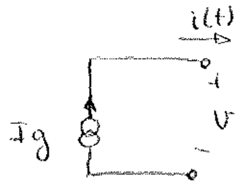


si cortocircuitamos la salida

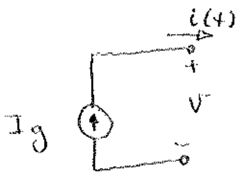


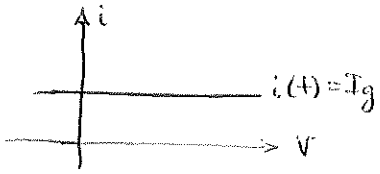
$$i = \frac{V_g}{R_g}$$

h) Generador ideal de corriente

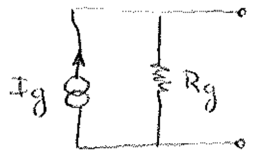


$i(t) = I_g$
$I_g = \text{dato}$





i) Generador real de corriente

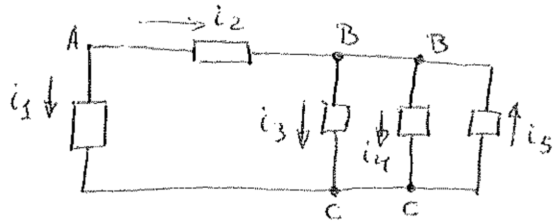


3. Leyes de Kirchhoff

Circuito: conjunto de dispositivos conectados entre sí
Nudo: punto de conexión eléctrica donde se conectan 2 ó más dispositivos. (algunos textos 3 ó más)

1ª ley:

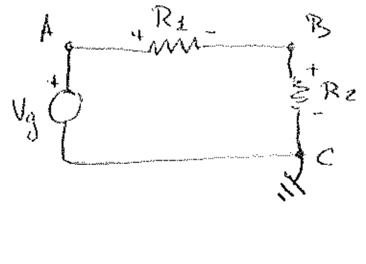
La suma algebraica de las i que entran en un nudo = 0
La suma de las i que entran = La suma de las i que salen



$$\left.\begin{aligned} A&: 0 = i_2 + i_1 \\ B&: i_2 + i_5 = i_3 + i_4 \\ C&: i_1 + i_3 + i_4 = i_5 \end{aligned}\right\}$$ siempre hay dependencia lineal

Nudo de masa / Nudo de tierra

se fija la tensión de un nudo a 0 V



así podemos hallar la tensión respecto a masa

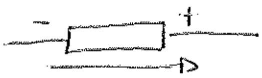
Malla: sucesión de dispositivos que forman un camino cerrado.

18-feb-2010

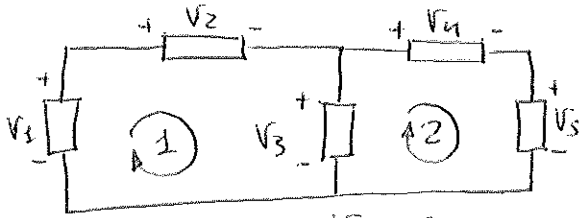
2ª ley

La suma algebraica de las caídas de tensión en una malla = 0
La suma de elevaciones = La suma de caídas


caida de tensión (signo ⊖)


elevación de tensión (signo ⊕)

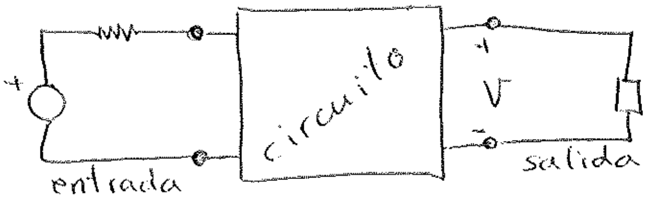
1) Definir el sentido de recorrido en cada malla.
2) Definir tensiones de referencia en cada elemento de la malla.



1: $V_1 - V_2 - V_3 = 0$
2: $V_3 - V_4 - V_5 = 0$

4. Problemas de análisis y diseño (síntesis)

* Análisis: determinar las señales de salida (v, i)
* Síntesis: proyectar un circuito para obtener una señal de salida o una relación $\frac{\text{entrada}}{\text{salida}}$

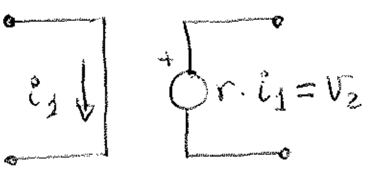


Tipos de ecuaciones:
→ Condiciones impuestas por los elementos: Relación v-i
→ Condiciones impuestas por las conexiones: Kirchhoff

5. Generadores dependientes (controlados/gobernados)

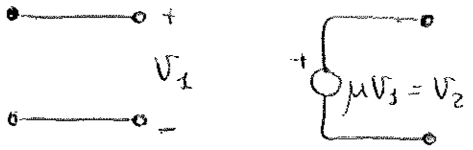
Generador de corriente o tensión cuya magnitud depende de una señal (i-v)

a) Generador de V controlado por i



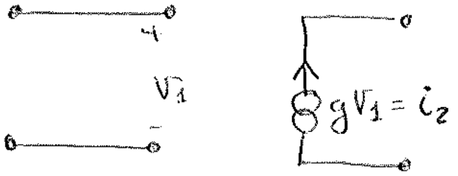
r = Transresistencia (Ω)

b) Generador de v controlado por v



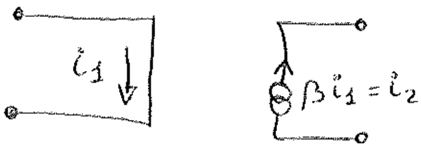
μ = ganancia de tensión (adimensional)

c) Generador de i controlado por v



g = Transconductancia (Ω^{-1})

d) Generador de i controlado por i



β = ganancia de corriente (adimensional)

23-feb-2010

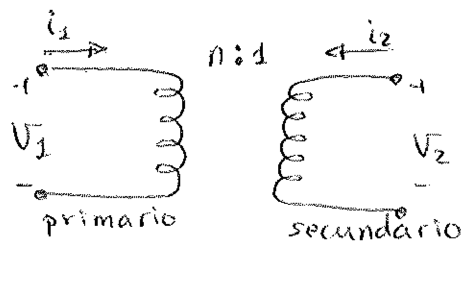
6. Desconexión de generadores

Generador ideal de tensión : desconectar $\Rightarrow$ $v = 0$ (cortocircuito)

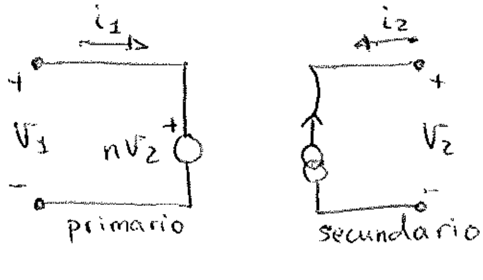
Generador ideal de corriente : desconectar $\Rightarrow$ $i = 0$ (circ. abierto)

Transformador ideal (pasivo)

4 terminales



$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= n v_2 \\ i_2 &= -n i_1 \end{aligned}}$$



Tema 2: Análisis elemental de circuitos

1. Circuitos equivalentes

Equivalente $\Leftrightarrow$ misma relación v-i en sus terminales

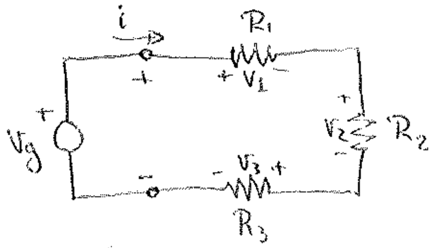
→ **Conexión serie**

misma corriente $\quad R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

→ **Conexión paralelo**

misma tensión $\quad \frac{1}{R} = G = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$

2. Divisor de tensión



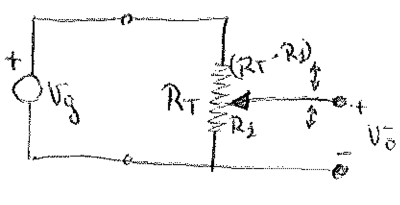
malla: $V_g - V_1 - V_2 - V_3 = 0$

$V_g = R_1 i + R_2 i + R_3 i$

$i = \dfrac{V_g}{R_1 + R_2 + R_3}$; $\quad V_1 = R_1 i$, $\quad V_2 = R_2 i$, $\quad V_3 = R_3 i$

$$\boxed{V_{Ri} = \frac{V_g \cdot R_i}{\sum_j R_j}}$$

3. Potenciómetro (resistencia variable)

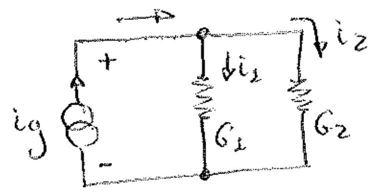


$0 \leq R_1 \leq R_T$

$0 \leq V_o \leq V_g$

$$V_o = \frac{R_1 \cdot V_g}{R_T}$$

4. Divisor de corriente

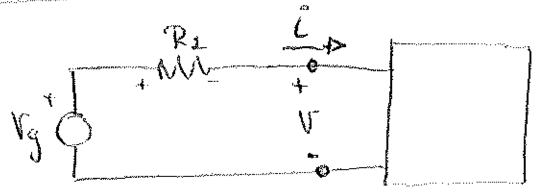


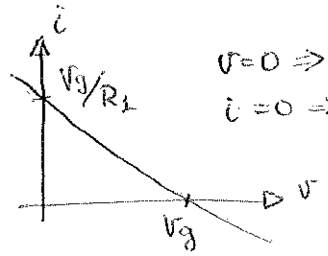
$$i_g = i_1 + i_2 = G_1 V + G_2 V$$

$$V = \frac{i_g}{G_1+G_2} = \frac{i_g}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}$$

$$\boxed{i_{Ri} = \frac{G_{Ri} \cdot i_g}{\sum_j G_j}} \quad ; \quad G = \frac{1}{R}$$

5. Equivalencia de generadores reales



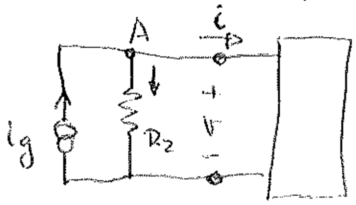


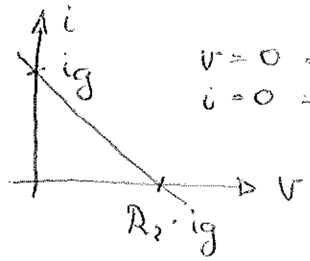
$V=0 \Rightarrow i = V_g/R_1$

$i=0 \Rightarrow V = V_g$

malla: $V_g = R_1 \cdot i + V$

$$i = \frac{V_g}{R_1} - \frac{V}{V_g}$$





$V=0 \Rightarrow i_g = i$

$i=0 \Rightarrow R_2 i_g = V$

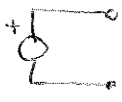
nudo A: $i_g = \frac{V}{R_2} + i$

25-feb-2010

→ Para que los dos generadores sean equivalentes es necesario que las dos gráficas sean idénticas:

$$i_g = \frac{V_g}{R_1} \quad y \quad V_g = i_g R_2$$

* Los generadores ideales de tensión no se pueden transformar



$R_g = 0 \Rightarrow i_g = \frac{V_g}{0} \to \infty$

* Los generadores ideales de corriente no se pueden transformar

$R_g \to \infty \Rightarrow V_g \to \infty$

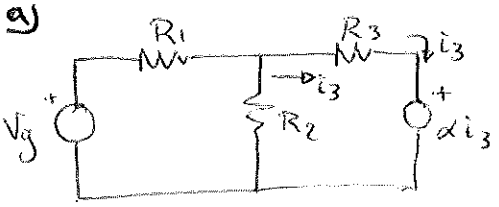
$G = 0$

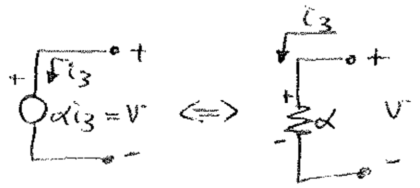
6. Transformación de generadores dependientes

* se transforman igual (cuidado con no perder la señal de control)

* caso particular: gen. depend. $\Leftrightarrow$ resistencia

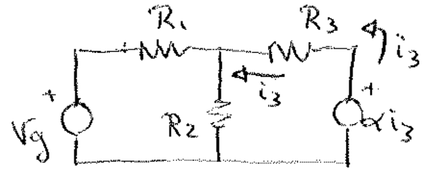
a)

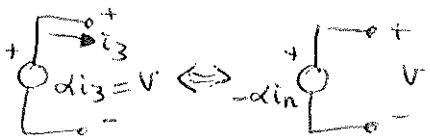


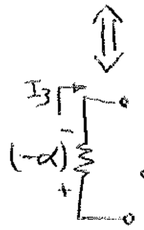


$$V = R_{eq} \cdot i_3 \; ; \quad R_{eq} = \alpha$$

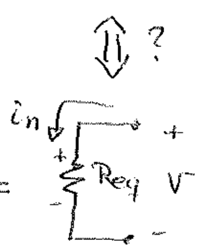
b)



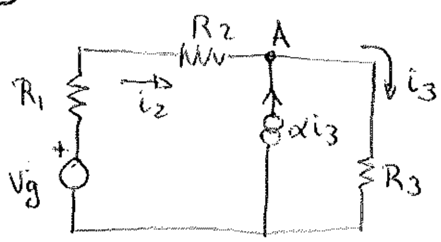




$$\Leftarrow \; R_{eq} = -\alpha \Leftarrow V = -\alpha i_n \equiv V = R_{eq} \cdot i_n \Leftarrow$$

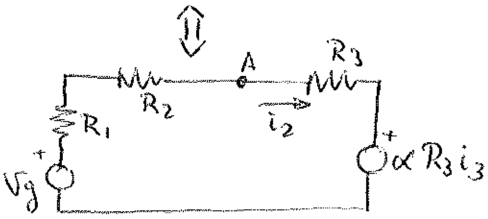


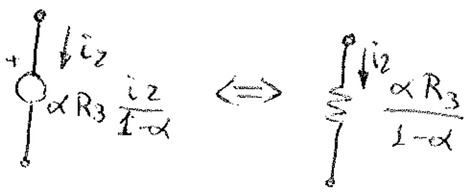
c)



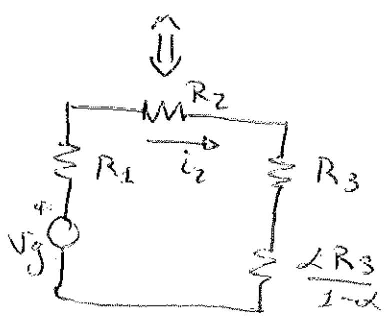
nudo A: $i_2 + \alpha i_3 = i_3$

$$i_3 = \frac{i_2}{1-\alpha}$$





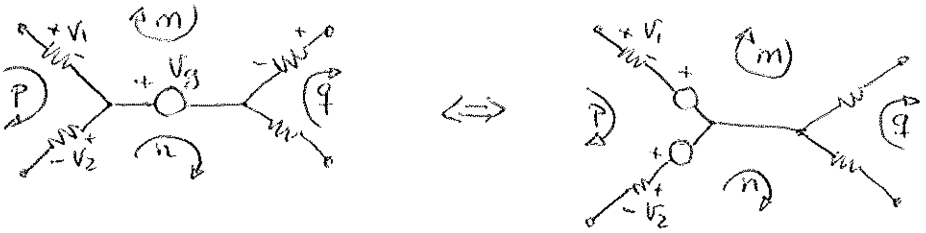
$$V = I R = \alpha R_3 \frac{i_2}{1-\alpha} \; ; \quad R = \frac{V}{I} = \frac{\alpha R_3}{1-\alpha}$$



$$i_2 = \frac{V_g}{R_1 + R_2 + R_3 + \frac{R_3 \alpha}{1-\alpha}}$$

7. Movilidad de generadores ideales

a) de tensión



será equivalente si se cumplen las mismas mallas de Kirchhoff

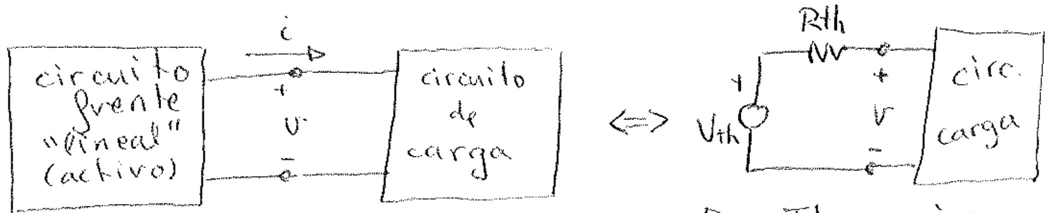
malla p: $\ldots + v_1 + v_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots + v_1 + \cancel{v_g} - \cancel{v_g} + v_2 = 0$

b) de corriente

será equivalente si se cumplen los mismos nudos de Kirchhoff

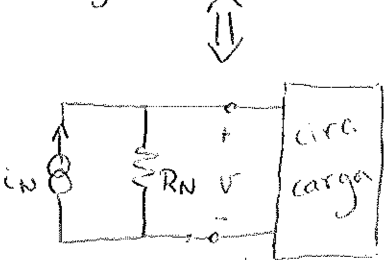
nudo A: la corriente que entra (i_g) vuelve a salir (i_g)

8. Circuitos equiv. de Thevenin y Norton



Eq. Thevenin

lineal ⇒ Gen's y Res's



Eq. Norton

4 parámetros:

V_{Th}, R_{Th}, V_N, R_N

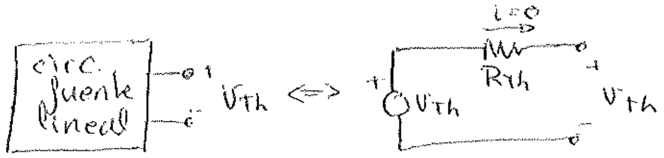
$$\boxed{\begin{array}{l} R_{Th} = R_N \\ V_{Th} = R_{Th} \cdot i_N \end{array}}$$

$i_{cc}(v=0) = i_N$

$v_{ca}(i=0) = V_{Th}$

8b. Cálculo de los circ. eq. Th. y Norton

a) V_{Th} . tensión en circ. abierto



b) $i_N = i_{cc}$: corriente de Norton en corto

$i_{cc} = i_N \frac{\cancel{R_N}}{\cancel{R_N}}$

c) $R_{Th} \equiv R_N$

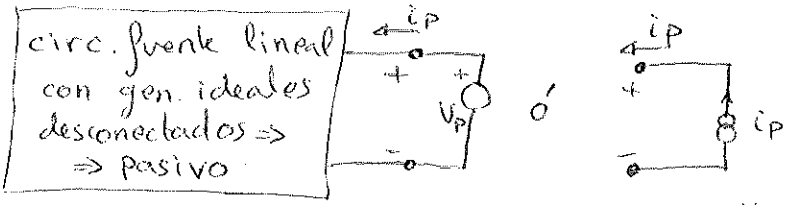
I) $R_{Th} = R_N = \frac{V_{Th}}{i_N}$

II) $R_{Th} = R_N$: R_{eq} con los gen desconectados

i) ∄ gen dependiente

$R_{eq} = R_{Th} = R_N$

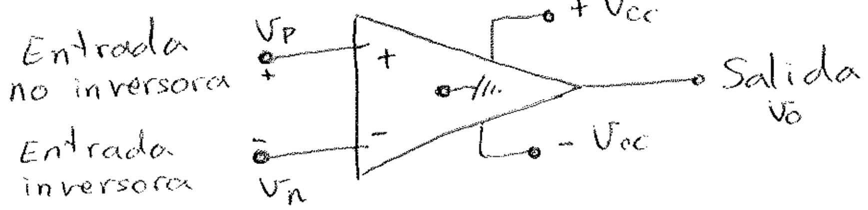
ii) colocar un gen de prueba (tensión o corriente)



$R_{Th} = R_{eq} = R_N = \frac{V_P}{i_P}$

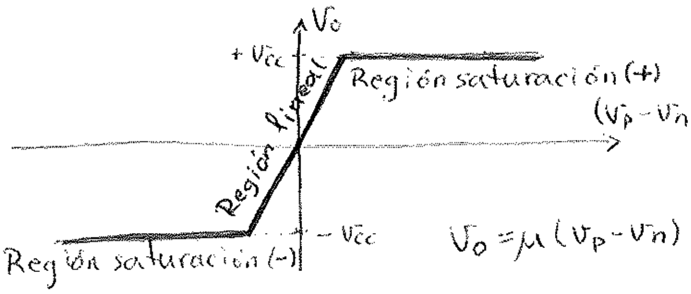
9-mar-2010

9. Amplificador operacional



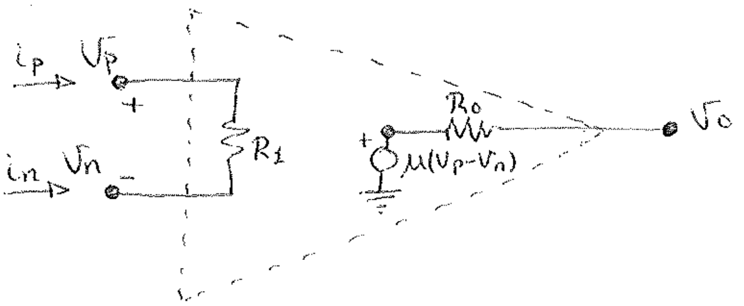
No podemos usar Kirchhoff en el nudo de masa, pues desconocemos sus corrientes.

Característica de transferencia



$V_o = \mu (V_p - V_n)$

Modelo de Amplificador Operacional



$$\boxed{v_o = \mu(v_p - v_n)}$$

Parámetro	Nombre	A.O. Real	A.O. Ideal
μ	Ganancia en bucle abierto	$10^5 - 10^7$	∞
R_1	Resistencia de entrada	$10^6 - 10^{13}\ \Omega$	∞ (c.a.)
R_o	Resistencia de salida	$10 - 100\ \Omega$	0 (c.c.)
$\pm V_{cc}$	Tensión de polarización	± 15 V	± 15 V

A.O. Ideal

$$\left.\begin{array}{l} R_1 \to c.a. \Rightarrow i_p = i_n = 0 \\ \mu \to \infty \ ; \ -V_{cc} \le V_o = \mu(v_p - v_n) \le V_{cc} \Rightarrow v_p = v_n \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{A.O. Ideal} \\ i_p = i_n = 0 \\ v_p = v_n \end{array}}$$

11-mar-2010

Tema 3: Análisis en el dominio del tiempo

1. Circuitos con Gen's, R's, L's y C's

a) Condensador

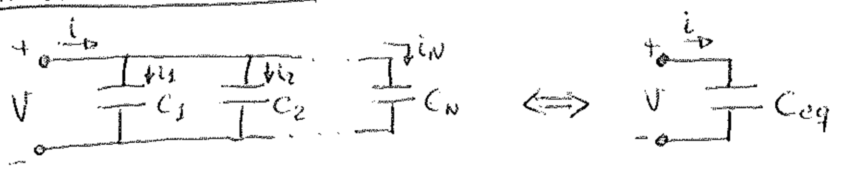
$q(t) = C \cdot V(t)$

$i_c(t) = C \cdot \dfrac{dV_c(t)}{dt}$

la carga q es continua

la tensión es continua $\Leftrightarrow$ C = cte

Condensadores en paralelo



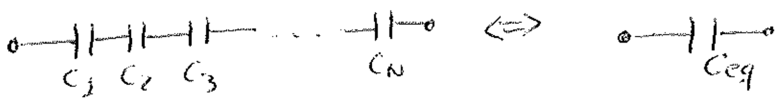
$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N$

$i = C_1 \dfrac{dV}{dt} + \dots + C_N \dfrac{dV}{dt}$

$i = (C_1 + \dots + C_N)\dfrac{dV}{dt} \Rightarrow i = C_{eq}\dfrac{dV}{dt}$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N}$$

Condensadores en serie



$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$$

b) Bobina

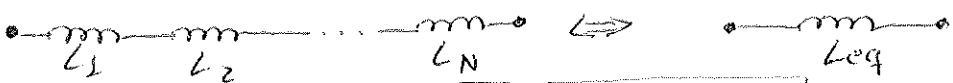
$\phi_L(t) = L \cdot i_L(t)$

$V_L(t) = \dfrac{d\phi_L}{dt} = L \cdot \dfrac{di}{dt}$

el flujo $\phi(t)$ es continuo

la corriente es continua $\Leftrightarrow$ L = cte

Bobinas en serie



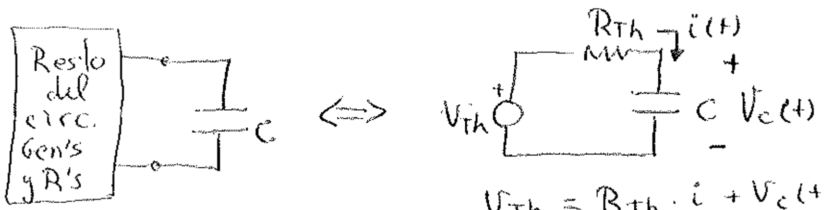
$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N}$$

Bobinas en paralelo

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}}$$

2. Circuitos de primer orden (Ec. diferenciales de primer orden)

Circuitos con 1 solo condensador (RC serie)

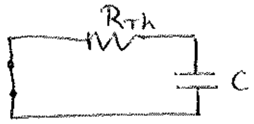


Circuito RC serie

$$\left.\begin{array}{l} V_{Th} = R_{Th} \cdot i + V_c(t) \\ i(t) = C \dfrac{dV_c}{dt} \end{array}\right\} \boxed{V_{Th} = R_{Th} C \dfrac{dV_c}{dt} + V_c}$$

Ec. dif. de 1^er orden

Veamos la respuesta del circuito en entrada nula:
entrada nula ⇒ ($V_{Th} = 0$)



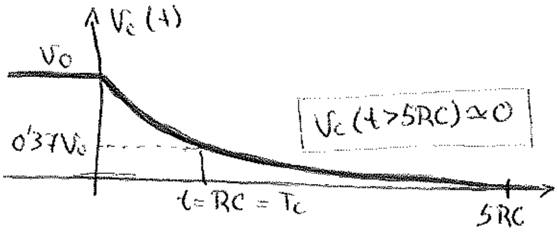
$$V_{Th} = R_{Th} C \frac{dV_c}{dt} + V_c$$

$$0 = R_{Th} C \frac{dV_c}{dt} + V_c \leftarrow \text{Ec. dif. homogénea}$$

se ensaya:

$$\left.\begin{array}{l} V_c(t) = k e^{st} \\ \dfrac{dV_c}{dt} = k s e^{st} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 = R_{Th} C [\cancel{K} s \cancel{e^{st}}] + \cancel{K} \cancel{e^{st}} \\ 0 = R_{Th} C s + 1 \; ; \; s = \dfrac{-1}{R_{Th} C} \end{array}$$

ec. característica



$V_c(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$; condición inicial ⇒ $V(t=0) = V_0$

$V_c(t=0) = k e^0 = V_0 \Rightarrow K = V_0$

$V_c(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC} \Rightarrow RC = T_c$ (constante de tiempo)

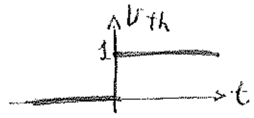
La respuesta del circuito depende de: cte de tiempo y C.I ($V(t=0) = V_0$)

16-mar-2010

Respuesta al escalón

$RC \cdot \dfrac{dV}{dt} + V = V_{Th}(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



$V_{Th}(t) = A u(t)$

para $t \geq 0$, ec. diferencial

$RC \dfrac{dV}{dt} + V(t) = A \Rightarrow$ solución: $V(t) = \underbrace{V_n(t)}_{\text{Resp. natural}} + \underbrace{V_f(t)}_{\text{Resp. forzada}}$

* Respuesta natural ($V_{Th} = 0$; entrada nula)
Solución general de la ec. dif. homogénea

$$RC \frac{dV}{dt} + V(t) = 0 \longrightarrow V(t) = k \cdot e^{-t/RC}$$

* Respuesta forzada (depende del generador)
Solución particular de la ec. dif. completa

$$V_f(t) = B \text{ (cte)} \longrightarrow RC \cdot 0 + B = A \Rightarrow V_f(t) = B = A$$

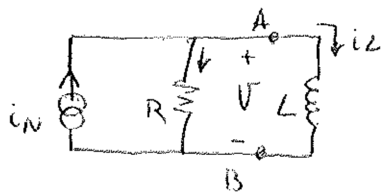
sustituyendo...

$RC \dfrac{dV}{dt} + V(t) = A$

$$\boxed{V(t) = (V_0 - A)\, e^{-t/RC} + A}$$

$V(t) = V_n(t) + V_f(t) = K e^{-t/RC} + A \rightarrow V(t=0) = K \cdot e^0 + A = V_0 \Rightarrow K = V_0 - A$

RL paralelo (dual del RC serie)



nudo A: $i_N = \frac{V}{R} + i_L$

$V(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}$

$$\boxed{\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = i_N(t)}$$ Ec. dif. 1er orden

Señal escalón: $i_N(t) = A \cdot u(t)$

$t \geq 0 \Rightarrow \quad GL\frac{di_L}{dt} + i_L = A$

$i_L(t) = \underset{natural}{i_{Ln}(t)} + \underset{forzada}{i_{Lf}(t)}$

* Respuesta natural:

$GL\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$ se ensaya $i_{Ln}(t) = Ke^{st}$

ec. característ. $GLKse^{st} + 1 = 0$; $s = \frac{-1}{GL}$; $i_{Ln}(t) = Ke^{-t/GL}$

cte tiempo $T_c = GL$

* Respuesta forzada

se ensaya $i_{Lf} = B$ (cte)

$GL\cdot 0 + B = A \Rightarrow i_{Lf} = B = A$

Respuesta:

$i_L(t) = Ke^{-t/GL} + A$; C.I. $(i_L(t=0) = I_0)$

$i_L(0) = K \cdot 1 + A = I_0 \Rightarrow K = I_0 - A$

	C.I.	T_c	A generador
RC serie	V_0	RC	A
RL paralelo	I_0	GL	A

Respuesta al escalón para circ. de 1er orden

ec. dif: $T_c \cdot \frac{dx}{dt} + x(t) = A \cdot u(t)$

respuesta: $X(t) = (C.I. - C.F.)\, e^{-\frac{t}{T_c}} + C.F.$

CI: $x(t=0^+)$
Tc: identificando coef.
CF: $x(t\to\infty) \Rightarrow$ corr. cont.

Condiciones iniciales mediante interruptores

interruptor: cambia el circuito en $t=0$.

C.F. $(t\to\infty)$ para $t<0 \longrightarrow$ C.I. en $(t=0^+)$

carga $q(t)$ $(v(t))$ en C's
flujo mg $\phi(t)$ $(i_L(t))$ en L's

son continuos $V_c(t=0^-) = V_c(t=0^+)$
$i_L(t=0^-) = i_L(t=0^+)$

Variación de parámetros

C o L cambia en $t=0$

Condensador:

$$q(0^-) = q(0^+)$$

$$C(t=0^-)\cdot V(t=0^-) = C(t=0^+)\cdot V(t=0^+) \; ; \; C(0^-) \neq C(0^+)$$

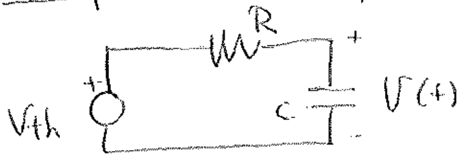
Bobina:

$$\phi(t=0^-) = \phi(t=0^+)$$

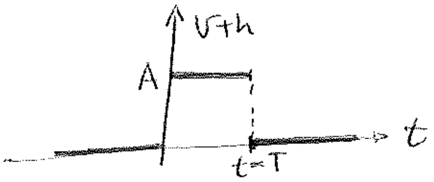
$$L(t=0^-)\cdot i_L(t=0^-) = L(t=0^+)\cdot i_L(t=0^+) \; ; \; L(0^-) \neq L(0^+)$$

18-mar-2010

Respuesta al pulso rectangular



$$V_{Th} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ A & 0 \leq t < T \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$



Ec. dif. $RC\cdot\frac{dV}{dt} + V(t) = V_{Th}$

Resolveremos 2 veces la respuesta escalón

1) Respuesta al escalón en $t=0$

$$V(t) = (CI - CF)\, e^{-t/T_c} + CF \; ; \; T_c = RC \; ; \; CF: V(t\to\infty) = A$$

$$V(t) = A\cdot C\cdot 1 - e^{-t/RC} \; ; \; 0 \leq t < T$$

2) Respuesta al escalón en $t=T$

la fórmula sólo sirve para $t=0$

hacemos un cambio de variable $t' = t-T$; si $t=T \Rightarrow t'=0$

$$V(t') = (CI' - \cancel{CF'})\, e^{-t/T_c} + \cancel{CF'}$$

$$CI' \Rightarrow V(t'=0) = V(t=T^-) = V(t=T^+) \; ; \; V(t=T) = A(1-e^{-T/RC})$$

$$CF' \Rightarrow V(t'\to\infty) = 0$$

$$V(t') = A(1-e^{-T/RC})\cdot e^{-t'/RC}$$

como $t' = t-T \Rightarrow V(t) = A(1-e^{-T/RC})\cdot e^{T-t/RC} \; ; \; t \geq T$

23-mar-2010

Respuesta sinusoidal

$$V_{Th} = A \cdot \cos(\omega t) \cdot u(t) \quad ; \quad u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ A\cos(\omega t) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{RC \frac{dV}{dt} + V(t) = A \cos(\omega t) \cdot u(t)} \text{ ec. dif. } 1^{er} \text{ orden}$$

$$V(t) = V_n(t) + V_f(t)$$

$$\boxed{V_n(t) = k e^{-t/RC}} \text{ (gen. apagado)}$$

Respuesta forzada: $(t \geq 0)$

se ensaya: $V_f(t) = a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t)$

$$\frac{dV_f}{dt} = -a\omega \operatorname{sen}(\omega t) + b\omega \cos(\omega t)$$

$$RC\left[-a\omega \operatorname{sen}(\omega t) + b\omega \cos(\omega t)\right] + a\cos \omega t + b \operatorname{sen}(\omega t) = A\cos(\omega t)$$

$$(-RCa\omega + b)\operatorname{sen}(\omega t) + (RCb + a)\cos(\omega t) = A\cos(\omega t) \quad \forall t \geq 0$$

$$\hookrightarrow (-RCa\omega + b) = 0 \qquad \hookrightarrow (RCb + a) = A$$

$$\left.\begin{matrix} -RCa\omega + b = 0 \\ RCb + a = A \end{matrix}\right\} \quad a = \frac{A}{1+(\omega RC)^2} \; ; \; b = \frac{A\omega RC}{1+(\omega RC)^2}$$

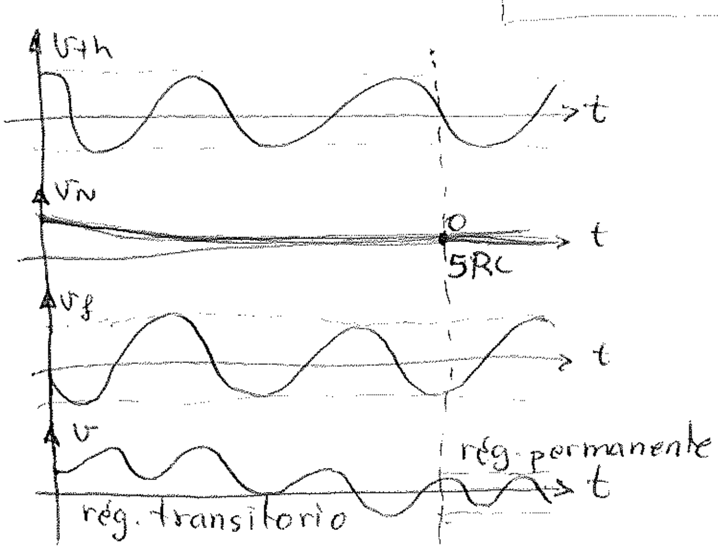
$$\boxed{V_f(t) = \frac{A\cos(\omega t)}{1+(\omega RC)^2} + \frac{A\omega RC \operatorname{sen}(\omega t)}{1+(\omega RC)^2}}$$

$$V(t) = k e^{-t/RC} + \frac{A\cos(\omega t)}{1+(\omega RC)^2} + \frac{A\omega RC \operatorname{sen}(\omega t)}{1+(\omega RC)^2}$$

C.I. $\Rightarrow V_0 = (V(t=0^+))$ (dato)

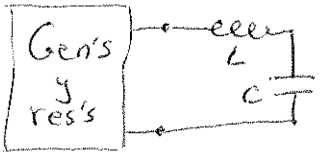
$$V(t=0) = k \cdot e^0 + \frac{A \overset{1}{\cos(0)}}{1+(\omega RC)^2} + \cancel{\frac{A\omega RC \overset{0}{\operatorname{sen}(0)}}{1+(\omega RC)^2}} = V_0$$

$$K = V_0 - \frac{A}{1+(\omega RC)^2} \; ; \quad \boxed{V(t) = \left(V_0 - \frac{A}{1+(\omega RC)^2}\right)e^{-t/RC} + \frac{A\cos(\omega t) + \omega RC A \operatorname{sen}(\omega t)}{1+(\omega RC)^2}}$$



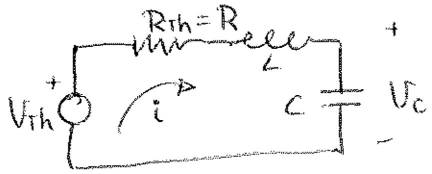
3. Circuitos de segundo orden (Ec. diferenciales segundo orden)

circuito RLC serie



malla: $V_{Th}(t) = R \cdot i + L\frac{di}{dt} + V_c(t)$

$i(t) = C\frac{dV_c}{dt}$



$$\boxed{V_{Th} = RC\frac{dV_c}{dt} + LC\frac{d^2V_c}{dt^2} + V_c(t)}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} = s^n}$$

Entrada nula ($V_{Th} = 0$)

$$LC\frac{d^2V_c}{dt^2} + RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = 0$$

se ensaya: $V_c(t) = k \cdot e^{st}$; $LCK \cdot s^2 \cancel{e^{st}} + RC\cancel{K}s\cancel{e^{st}} + \cancel{K}\cancel{e^{st}} = 0$

$\boxed{LCs^2 + RCs + 1 = 0}$ ec. característica

$LC = \frac{1}{\omega_0^2}$; ω_0 = pulsación propia

$RC = \frac{2\xi}{\omega_0}$; ξ = coeficiente de amortiguamiento

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}s + 1 = 0$$

equivalentes

$$\boxed{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = 1}$$

$s = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}$; $s = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \omega_0$

3 casos para las soluciones de s:

① $(RC)^2 > 4LC$ ($\xi > 1$) $\Rightarrow$ 2 raíces reales distintas

$\boxed{V_c(t) = k_1 \cdot e^{-a_1 t} + k_2 \cdot e^{-a_2 t}}$ respuesta sobreamortiguada (super crítico)

② $(RC)^2 = 4LC$ ($\xi = 1$) $\Rightarrow$ 1 raíz real doble

$\boxed{V_c(t) = (k_1 + k_2 t) \cdot e^{-at}}$ amortiguamiento crítico

③ $(RC)^2 < 4LC$ ($\xi < 1$) $\Rightarrow$ 2 raíces complejas conjugadas

$\boxed{V_c(t) = k_1 e^{-at} \cdot e^{jbt} + k_2 e^{-at} \cdot e^{-jbt}}$ respuesta subamortiguada (sub-crítico)

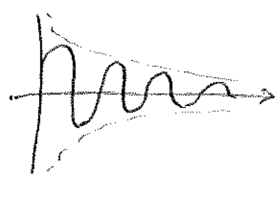
k_1, k_2 conj. $\Rightarrow k_2 = k_1^*$

$V_c(t) = e^{-at}(k_1 e^{jbt} + k_1^* e^{-jbt}) = 2e^{-at}\,\mathrm{Re}[k_1 \cdot e^{jbt}]$

$k_1 = |k_1| \cdot e^{j\varphi_1}$; $V_c(t) = 2e^{-at}\,\mathrm{Re}[|k_1| e^{j\varphi_1} e^{jbt}]$

$V_c(t) = 2|k_1| e^{-at} \cdot \mathrm{Re}[e^{j(bt+\varphi_1)}]$

$V_c(t) = (2|k_1| e^{-at}) \cos(bt + \varphi_1)$



Cálculo de las constantes k_1, k_2 (válido para ① y ③)

$$V_c(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

① $V_c(t=0^+) = V_0$ (dato)

$$V_c(t=0) = k_1 \cdot e^0 + k_2 \cdot e^0 = V_0 \quad [1]$$

② Corriente en Li, $i(t=0) = I_0$ (dato)

$$\left.\frac{dV_c}{dt}\right|_{t=0^+} \qquad i(t)\Big|_{t=0} = C \left.\frac{dV_c}{dt}\right|_{t=0} \rightarrow \left.\frac{dV_c}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{i(t=0)}{C} = \frac{I_0}{C}$$

$$\left.\frac{dV_c}{dt}\right|_{t=0} = k_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} \cdot s_1 + k_2 s_2 e^{s_2 t}\Big|_{t=0} = k_1 s_1 + k_2 s_2$$

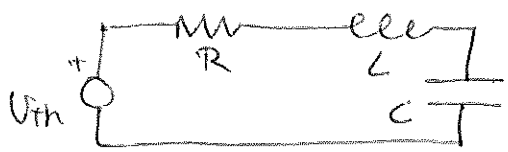
$$k_1 s_1 + k_2 s_2 = \frac{I_0}{C} \quad [2]$$

sólo válido para ① y ③

con [1] y [2] ... $\boxed{k_1 = \frac{s_2 V_0 - I_0/C}{s_2 - s_1} \;;\; k_2 = \frac{-s_1 V_0 + I_0/C}{s_2 - s_1}}$

25-mar-2010

Respuesta al escalón



$$LC\frac{d^2V_c}{dt} + RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = A\,u(t)$$

$$V_c(t) = V_{cn}(t) + V_{cf}(t)$$

resp. natural (ya estudiada): 3 casos $\xi < 1$ $\xi = 1$ $\xi > 1$

resp. forzada $V_{cf}(t) = B$ (cte)

$$LC \cdot 0 + RC \cdot 0 + B = A \Rightarrow V_f = B = A$$

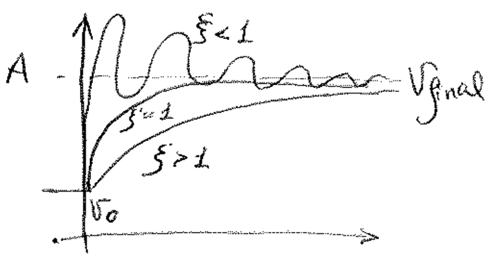
resp. total: $V_c(t) = V_n(t) + A$ (3 casos)

$$V_c(t) = \underbrace{k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}}_{C.I.} + A \quad (\xi > 1, \xi < 1)$$

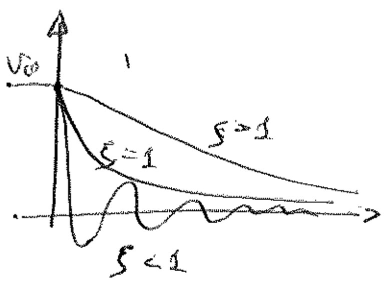
$$V_c(t=0) = V_0$$

$$i(t=0) = C\frac{dV_c}{dt} = I_0$$

resp. escalón

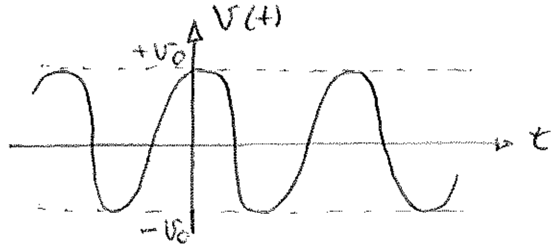


resp. natural



Tema 4: Análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal

1. Señales sinusoidales



$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Amplitud: V_0

Pulsación: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Fase: φ

1er máximo: $\omega t_m + \varphi = 0$

$t_m = \frac{-\varphi}{\omega}$

$\varphi > 0$: la señal se adelanta

$\varphi < 0$: la señal se retrasa

Propiedades:

→ La suma de dos sinusoides de ω es una sinusoide de pulsación ω.

→ El producto de una constante por una sinusoide es otra sinusoide.

→ La derivada (e integral) de una sinusoide es otra sinus.

Circuitos con todos los gen. indep. sinusoidales

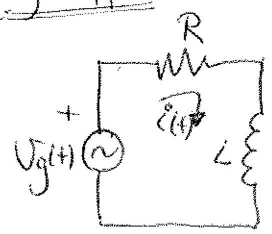
- Relaciones $v - i$: $v = R \cdot i$, $v = L \frac{di}{dt}$, $i = C \frac{dv}{dt}$

  si i (o v) es sinusoidal $\Rightarrow$ v (o i) es sinusoidal

- Kirchhoff: $\left.\begin{matrix} \sum v_i(t) = 0 \\ \sum i_n(t) = 0 \end{matrix}\right\}$ la suma de sinusoides es otra sinusoide

Todas las señales en el circuito serán sinusoides

Ejemplo:



$V_g(t) = V_m \cos(\omega t)$

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I)$??

$V_g(t) = R\, i(t) + L \frac{di}{dt}$

$V_m \cos(\omega t) = R I_m \cos(\omega t) - L I_m \omega \,\text{sen}(\omega t + \varphi_I)$

Calcular respuesta forzada

I_m??

φ_I??

2. Definición de fasor

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta \;;\quad \cos\theta = \text{Re}[e^{j\theta}]$$

$$V(t) = V_0\cos(\omega t + \varphi_v) = V_0 \cdot \text{Re}[e^{j(\omega t + \varphi_v)}]$$

$$V(t) = \text{Re}[V_0\, e^{j\varphi_v} \cdot e^{j\omega t}] \;;\; V(t) = \text{Re}[V\, e^{j\omega t}]$$

$$\boxed{\text{Fasor: } V = V_0\, e^{j\varphi} \Longleftarrow \begin{cases} \text{módulo} = \text{amplitud de la señal} \\ \text{fase} = \text{fase de la señal} \end{cases}}$$

Relaciones V-I:

$$V = V_0\, e^{j\varphi_v} \;;\quad I = I_0\, e^{j\varphi_I}$$

Impedancia: $Z = \frac{V}{I} = R + jX$ ⟨ R: resistencia; X: reactancia

Admitancia: $Y = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z}\ (\Omega^{-1}) = G + jB$ ⟨ G: conductancia; B: susceptancia

a) Resistencia:

$$V(t) = R\, i(t)$$

$$\text{Re}[V e^{j\omega t}] = R \cdot \text{Re}[I e^{j\omega t}] \;;\; \text{Re}[V e^{j\omega t}] - \text{Re}[RI e^{j\omega t}] = 0$$

$$\text{Re}[(V - RI)e^{j\omega t}] = 0,\ \forall t \Leftrightarrow (V - RI) = 0 \Rightarrow \underset{\text{en fasores}}{V = RI} \ \left(\text{Ley de Ohm}\right)$$

$$Z_R = \frac{V}{I} = R \ (\text{real})$$

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = G \ (\text{real})$$

$$\boxed{Z_R = R}$$

b) Bobina:

$$V(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$\text{Re}[V e^{j\omega t}] = L\frac{d}{dt}\text{Re}[I e^{j\omega t}] = \text{Re}[L I j\omega e^{j\omega t}]$$

$$\text{Re}[(V - j\omega L I)e^{j\omega t}] = 0,\ \forall t \Leftrightarrow V - j\omega L I = 0$$

$$Z_L = \frac{V}{I} = j\omega L \ (\text{imag.})$$

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} \ (\text{imag}) = \frac{-j}{\omega L}$$

$$\boxed{Z_L = j\omega L}$$

c) Condensador:

$$i(t) = C\frac{dV}{dt}$$

$$\text{Re}[I e^{j\omega t}] = C\frac{d}{dt}\text{Re}[V e^{j\omega t}] = \text{Re}[C V j\omega e^{j\omega t}] \;;\; \text{Re}[(I - j\omega C V)e^{j\omega t}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (I - j\omega C V) = 0$$

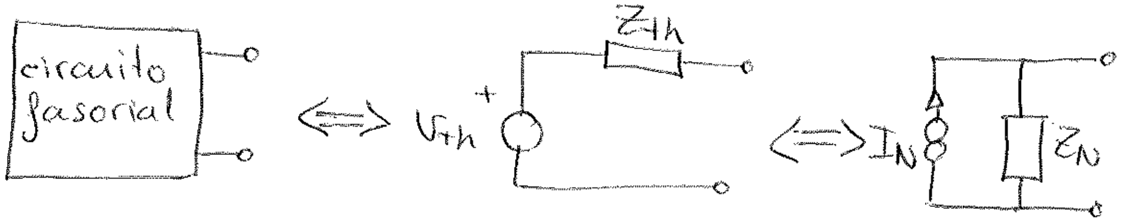
$$Z_C = \frac{1}{Y_C} = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C} \ (\text{imag})$$

$$Y_C = \frac{I}{V} = j\omega C \ (\text{imag})$$

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{j\omega C}}$$

20-abr-2010

3. Thevenin y Norton con fasores



$$Z_{Th} = Z_N = \frac{V_{Th}}{I_N}$$

$V_{Th} \Rightarrow V$ (circuito abierto)

$I_N \Rightarrow I$ (cortocircuito)

4. Técnica de análisis

sabiendo... (en circuitos lineales)

$e_1 \longrightarrow s_1$ $\quad e_1 + e_2 \longrightarrow s_1 + s_2$

$e_2 \longrightarrow s_2$ $\quad k e_1 \longrightarrow k e_2$

siendo
e = entrada
s = salida

podemos hacer...

técnica de análisis: (con varios gen. ind)

1) desconectar todos los gen. ind. menos uno y calcular la salida
2) Hacer 1) para cada generador
3) sumar todas las salidas

caso particular:

gen. sinusoidales de distinta ω $\Rightarrow$ No podemos definir fasores

1) desconectar todos los gen. ind. excepto los que tengan $\omega = \omega_1$
2) se definen fasores e impedancias
3) se resuelve en fasores y se pasa a señal en (t)
4) repetir 1) 2) 3) para $\omega_2, \omega_3, \omega_4 \ldots$
5) sumar las señales en el dominio del tiempo

nunca sumamos fasores (pues son de diferentes ω)

27-abr-2010

a) Análisis por nudos

Variables generadoras: tensiones de nudos

* Nudo de referencia (masa)
* Tensiones de nudo (referidas a masa)

A partir de la tensión en cada nudo calcularemos:

- La tensión en cada elemento (diferencia de tensiones)
- La corriente en cada elemento $\left(\frac{\text{diferencia de tensión}}{\text{impedancia}}\right)$

resolveremos el sistema: $\begin{cases} N-1 \text{ ecuaciones} \\ N-1 \text{ incógnitas} \end{cases}$

Ecuación del nudo i:

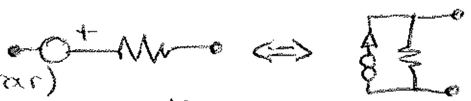
$$\boxed{V_i\,(\Sigma \text{ Admitancias conectadas a } i) - \sum_{j\neq i} V_j\,(\text{Admitancias entre } i\text{-}j) = \Sigma \text{ gen. corriente que entran en } i}$$

Recordemos la regla de Cramer:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p \\ a_2 & b_2 & q \\ a_3 & b_3 & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Modificaciones para circuitos con gen. tensión

Tenemos tensión y necesitamos corriente.

método 1: convertirlo 
(ya podemos operar)

método 2: terminal a masa 

(evitamos una incóg)

método 3: introducir I_x 

28-abr-2010

b) Análisis por mallas

Variables generadoras: corrientes de mallas

A partir de la corriente en cada malla calcularemos:

→ La corriente en cada elemento (diferencia de corrientes)

→ La tensión en cada elemento (dif. corriente · impedancia)

sistema: $\begin{cases} B-N+1 & \text{ec. independientes;} \\ B-N+1 & \text{incógnitas} \end{cases}$ B = nº elementos; N = nº nudos

Ecuación de la malla n:

$$\boxed{I_n \left(\sum_j Z_j \text{ en la malla } n \right) - \sum_{\substack{m \\ \text{(mallas adyacentes)}}} I_m \left(Z_K \begin{smallmatrix} \text{comunes a} \\ \text{las mallas} \\ m \text{ y } n \end{smallmatrix} \right) = \sum \begin{smallmatrix} \text{elevaciones} \\ \text{por gen. tensión} \end{smallmatrix}}$$

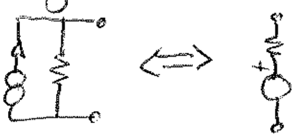
→ Ecuación sólo válida si y sólo si:

* Todas las corrientes de malla giran en el mismo sentido
* No hay ninguna malla contenida dentro de otra
* El circuito es plano (no hay cruces de hilos)

Modificaciones para circuitos con gen. corriente

tenemos corriente y necesitamos tensión.

método 1: convertirlo

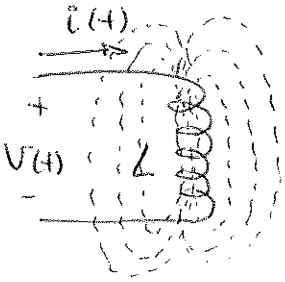


método 2: introducir V_x

$\begin{cases} 1 \text{ incógnita más } (V_x) \\ 1 \text{ ec. más } (I_g = I_n - I_m) \end{cases}$

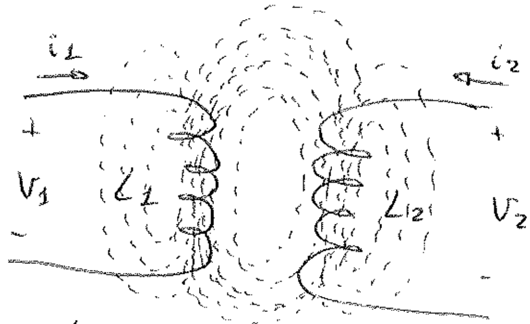
4-may-2010

Tema 5: Bobinas acopladas y transformadores



$\phi(t) = L \cdot i(t)$

$V(t) = \dfrac{d\phi}{dt} = L \dfrac{di}{dt}$



$L_1 : \phi_1(t) = \phi_{11}(t) + \phi_{12}(t)$

$L_2 : \phi_2(t) = \phi_{22}(t) + \phi_{21}(t)$

K: coeficiente del número de espiras que llegan a L_2 desde L_1

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1(t) = L_1 i_1(t) \pm M i_2(t) \\ \phi_2(t) = L_2 i_2(t) \pm M i_1(t)\end{array}\right\} \begin{cases} L_1 = k_{11} N_1^2 \\ L_2 = k_{22} N_2^2 \\ M = k_m N_1 N_2 \end{cases}$$

N = núm. espiras

$$V_1(t) = \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2(t) = \frac{d\phi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

1. Regla del punto

* Se coloca un punto (•) en los extremos que tienen igual sentido de giro.
* flujos (tensiones inducidas):
  * se suman: las corrientes entran (o salen) las dos por el punto
  * se restan: una corriente entra y otra sale

2. Régimen Permanente Sinusoidal

$V = L \dfrac{di}{dt} \longrightarrow V = jwLI$

señales	fasores
$\dfrac{d}{dt}$ $\longrightarrow$	jw

$V_1 = jwL_1 I_1 \pm jwM I_2$

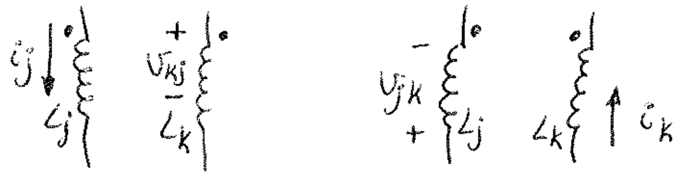
$V_2 = jwL_2 I_2 \pm jwM I_1$

3. Análisis de circuitos con bobinas acopl.

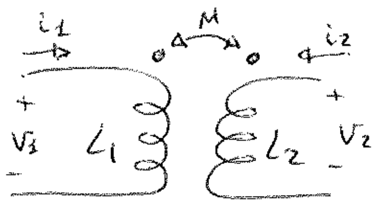
a) Por mallas

criterio del punto:

La tensión inducida tiene signo positivo en el lugar homólogo al de entrada de la corriente que la origina.



4. Transformador perfecto



$L_1 = K_{11} \cdot N_1^2$

$L_2 = K_{22} N_2^2$

$M = K_m N_1 N_2$

$$V_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$
$$V_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

$$\sqrt{L_1 L_2} = N_1 N_2 \sqrt{K_{11} K_{22}}$$

$$\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{K_m}{\sqrt{K_{11} \cdot K_{22}}} = \sqrt{\underbrace{\frac{K_m}{K_{11}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{K_m}{K_{22}}}_{\leq 1}} = K$$

coef. acoplamiento $0 \leq K \leq 1$

$$\boxed{M = K \sqrt{L_1 L_2}}$$

inducción mutua — coef. acoplamiento

si $K = 0 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow$ tensiones inducidas $= 0$ (no hay acoplamiento)

si $K = 1 \Rightarrow M = \sqrt{L_1 L_2} \Rightarrow$ acoplamiento máx (transformador perfecto)

transformador perfecto $\Leftrightarrow K = 1 \Leftrightarrow K_m = K_{11} = K_{22}$

$$V_1(t) = K_m N_1^2 \cdot \frac{di_1}{dt} \pm K_m N_1 N_2 \frac{di_2}{dt} = K_m N_1 \left[N_1 \frac{di_1}{dt} \pm N_2 \frac{di_2}{dt} \right]$$

$$V_2(t) = \pm K_m N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} + K_m N_2^2 \frac{di_2}{dt} = K_m N_2 \left[\pm N_1 \frac{di_1}{dt} + N_2 \frac{di_2}{dt} \right]$$

$$\frac{V_1(t)}{V_2(t)} = \pm \frac{N_1}{N_2} = n \text{ (relación de transformación)}$$

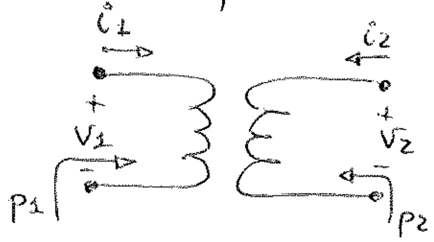
$$\boxed{\underbrace{V_1(t)}_{\text{primario}} = n \underbrace{V_2(t)}_{\text{secundario}}}$$

5. Transformador ideal

1) es transformador perfecto
2) $N_1, N_2 \to \infty \Rightarrow L_1, L_2, M \to \infty \Rightarrow \phi = L \cdot i$

$\infty \cdot 0$
puede funcionar sin apenas i

$\hookrightarrow$ No se produce fenómeno energético
no hay disipación ni almacenamiento de energía
pot instantánea en 1^{ario} = potencia inst. en 2^{ario} $(\forall t)$



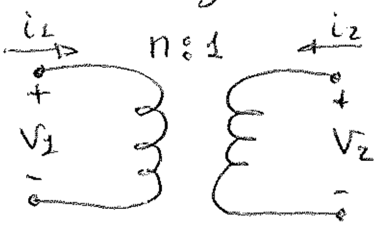
$p_1(t) = v_1(t) \cdot i_1(t)$
$p_2(t) = v_2(t) \cdot i_2(t)$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{pol. entra } 1^{ario} = \text{pol. sale } 2^{ario} \\ v_1(t) i_1(t) = - v_2(t) i_2(t) \end{array}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{-i_2}{i_1} = n \; ; \; \boxed{\underbrace{i_2(t)}_{\text{secundario}} = -n \underbrace{i_1(t)}_{\text{primario}}}$$

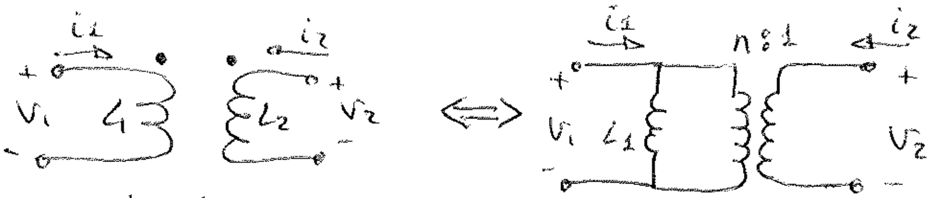
por ser perfecto también cumple: $v_1(t) = n\, v_2(t)$

si el transformador es ideal:



$$\boxed{\begin{array}{l} v_1 = n v_2 \\ i_2 = -n i_1 \end{array}}$$

circuito equivalente del transf. perfecto



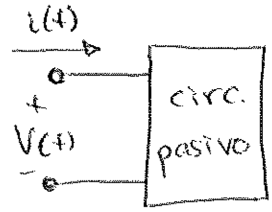
$K = 1$
$M = \sqrt{L_1 L_2}$

$n = \pm \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

11-may-2010

Tema 6: Potencia, energía y resonancia

1. Potencia en RPS



$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi_V) = Re[V_0 e^{j\varphi_V} e^{j\omega t}]$

$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) = Re[I_0 e^{j\varphi_I} e^{j\omega t}]$

$\left.\begin{array}{l} \underline{V} = V_0 e^{j\varphi_V} \\ \underline{I} = I_0 e^{j\varphi_I} \end{array}\right\}$ en fasores

Potencia instantánea:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = V_0 I_0 \cos(\omega t + \varphi_V) \cos(\omega t + \varphi_I) =$$

$$= \underbrace{\frac{V_0 I_0}{2} \cos(\varphi_I - \varphi_V)}_{\text{cte}} + \underbrace{\frac{V_0 I_0}{2} \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)}_{\text{sinusoide } 2\omega}$$

señales sinusoidales: $2\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$

$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega(t+T) + \varphi) \Rightarrow \omega T = 2\pi$

Potencia media: valor medio en 1 periodo

$$P_{med} = \frac{1}{T}\int_{t'}^{t'+T} p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

desarrollando... $P_{med} = \frac{V_0 I_0}{2} \cos\overbrace{(\varphi_I - \varphi_V)}^{\theta}$

$$P_{med} = \frac{V_0 I_0}{2} Re[e^{j(\varphi_I - \varphi_V)}] = \frac{1}{2} Re[\underbrace{V_0 e^{-j\varphi_V}}_{V^*} \cdot \underbrace{I_0 e^{j\varphi_I}}_{I}]$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} Re[V^* I] = \frac{1}{2} Re[V I^*]$$

en un circuito pasivo: $(V = I \cdot Z)$

$$P_{med} = \frac{1}{2} Re[V^* I] = \frac{1}{2} Re[Z^* I^* I] = \frac{1}{2} Re[Z^* |I|^2]$$

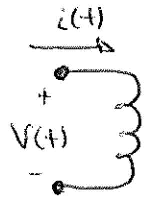
$$P_{med} = \frac{|I|^2}{2} Re[Z^*] = \frac{I_0^2}{2} R \qquad Z^* = R - jX$$

$$P_{med} = I_{ef}^2 R \Rightarrow I_{ef}^2 = \frac{I_0^2}{2} \Rightarrow I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

I_{ef} = valor de una corriente continua para disipar sobre R una potencia igual a la P_{med} en alterna

$$P_{med} = \frac{V_0^2}{2} G = V_{ef}^2 \cdot G \ ; \ V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \ , P_{med} = \frac{|I|}{2} \frac{|V|}{|Z|} R$$

Potencia y energía en bobinas:



$$\left.\begin{aligned} p(t) &= V(t)\cdot i(t) \\ V(t) &= L\cdot\frac{di}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} p(t) &= L\,i(t)\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{L}{2}\, i^2(t)\right] \\ p(t) &= \frac{dW}{dt} \end{aligned}$$

$$W_m(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)\,dt = \frac{L}{2}\, i^2(t)$$

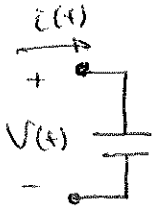
Energía magnética instantánea almacenada en L:

$$W_{mL} = \frac{L}{2}|I|^2\cos^2(\omega t + \varphi_I) \quad (J)$$

$$\boxed{W_{medL} = \frac{1}{T}\int_0^T W_{mL}(t)\,dt = \frac{L}{4}|I|^2} \quad (J)$$

$$\boxed{P_{med\,L} = \frac{|I|^2}{2}\mathrm{Re}[Z^*] = \frac{|I|^2}{2}\mathrm{Re}[-j\omega L] = 0}$$

Potencia y energía en condensadores:



$$\left.\begin{aligned} p(t) &= V(t)\,i(t) \\ i(t) &= C\,\frac{dV}{dt} \end{aligned}\right\} \quad p(t) = C\,V(t)\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{C}{2}\,V^2(t)\right]$$

Energía eléctrica instantánea almacenada en C:

$$W_{ec} = \int_0^T p(t)\,dt = \frac{C}{2}V^2(t) = \frac{C}{2}|V|^2\cos^2(\omega t + \varphi_V)$$

$$\boxed{W_{medC} = \frac{1}{T}\int_0^T W_{ec}(t)\,dt = \frac{C}{4}|V|^2} \,(J)$$

$$\boxed{P_{medC} = \frac{|V|^2}{2}\mathrm{Re}[j\omega C] = 0}$$

2. Potencia activa, reactiva y vectorial

$$P_{med} = P_{disipada} = P_{activa} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[V^* I] \quad (W)$$

$$P_{vect} = \frac{1}{2}V^* I = \frac{1}{2}|I|^2 Z^* = \frac{|V|^2}{2}Y \quad (V\cdot A)$$

$P_{vect} = P_{med} + jQ_{med}$ (VAR); Q_{med}: potencia reactiva media

$$P_{vect} = \frac{|V|\cdot|I|}{2}e^{j\overbrace{(\varphi_I - \varphi_V)}^{\theta}} \Rightarrow P_{vect} = \frac{|V|\cdot|I|}{2}(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$\cos\theta = 1 \Rightarrow Q_{med} = 0$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow P_{med} = 0$

3. Conservación de la pot. compleja

(T. Tellegen)

Pvect entregada al circ = Σ pot. vect. en cada elem.

$$\frac{1}{2} V^* I = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} V_k^* I_k$$

En R: $\frac{1}{2} V_k^* I_k = \frac{1}{2} |I_k|^2 R_k$

En L: $\frac{1}{2} V_k^* I_k = \frac{1}{2} |I_k|^2 (-jwL_k)$

En C: $\frac{1}{2} V_k^* I_k = \frac{1}{2} |V_k|^2 jwC_k$

$$P_{med} = \sum_{k=1}^{NR} \frac{1}{2} |I_k|^2 R_k$$

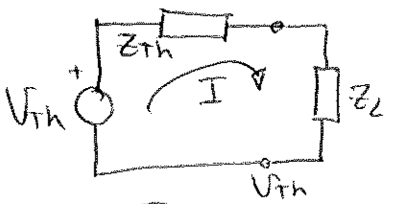
$$jQ_{med} = \frac{jw}{2} 4 \left[\sum_{m=1}^{NC} \frac{C_m}{4} |V_m|^2 - \sum_{l=1}^{NL} \frac{L_l}{4} |I_l|^2 \right]$$

Resonancia: $\sum_m W_{med}\big|_{C_m} = \sum_l W_{med}\big|_{L_l}$

13-may-2010

4. Máxima transferencia de potencia

a) Fuente fija



$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$$
$$Z_L = R_L + jX_L$$
$$Z_{Th} + Z_L = (R_{Th} + R_L) + j(X_{Th} + X_L)$$

$$I = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_L}$$

$$P_{med}\big|_{Z_L} = \frac{|I|^2}{2} Re[Z_L^*] = \frac{1}{2} \frac{|V_T|^2 R_L}{(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2} \quad \text{(ha de ser máx)}$$

$\to$ suponemos $(X_{Th}+X_L)^2 = 0$ (para hacer mínimo el denom.)

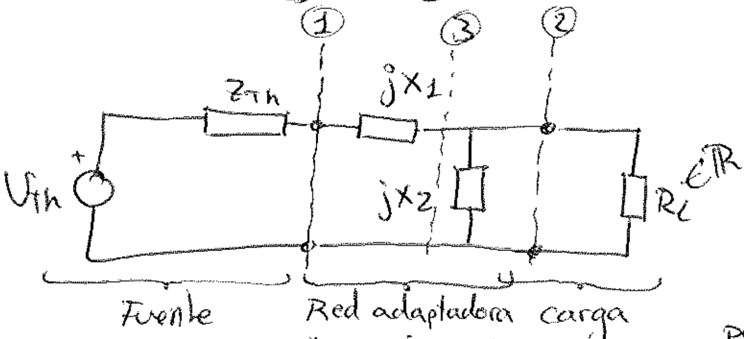
$$\to \frac{\partial P_{med}|_{Z_L}}{\partial R_L} = \frac{|V_T|^2}{2} \cdot \frac{1(R_{Th}+R_L)^{\cancel{2}} - R_L 2 \cancel{(R_{Th}+R_L)}}{(R_{Th}+R_L)^{\cancel{4}3}}$$

$\to$ igualamos a cero: $|V_T|^2 [(R_{Th}+R_L) - 2R_L] = 0$

obtenemos dos condiciones: $\left. \begin{aligned} X_{Th} &= -X_L \\ R_{Th} &= R_L \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{Z_L = Z_{Th}^*}$

$$P_{máx}\big|_{Z_L} = \frac{|V_{Th}|^2}{2} \cdot \frac{R_{Th}}{(2R_{Th})^2} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}}$$

b) Fuente y carga fijos



"Reactiva" → por ser reactiva NO se disipa potencia en ① ② ③ hay misma potencia

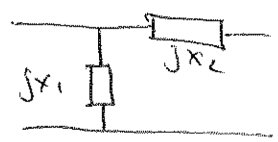
por facilidad en cálculos, operamos en ③:

$Z_{izq} = Z_{Th} + jX_1$ $\qquad$ $Z_{der} = Z_{izq}^*$

$Z_{der} = \dfrac{jR_L X_2}{R_L + X_2}$ $\qquad$ $\dfrac{jR_L X_2}{R_L + jX_2} = R_T - jX_T - jX_1$

$$\left.\begin{aligned} jR_L X_2 &= (R_L + jX_2)\left[R_T - j(X_T - X_1)\right] \\ jR_L X_2 &= -R_L j(X_T + X_1) + jX_2 R_T \\ 0 &= R_L R_T + X_2(X_T + X_1) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} X_2 &= \frac{-R_L R_T}{X_T + X_1} \\ X_1 &= -X_{Th} \pm \sqrt{R_T(R_L - R_T)} \end{aligned}$$

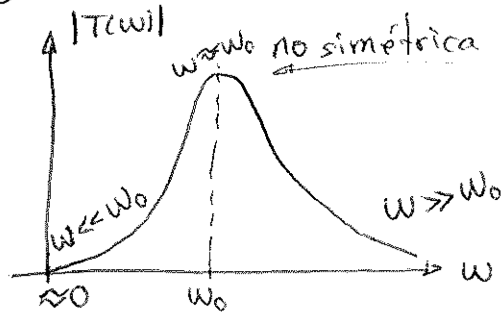
si $R_L < R_T$



18-may-2010

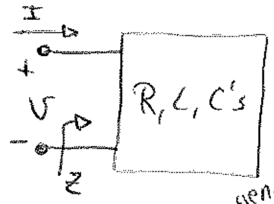
5. Resonancia

Función de transferencia: $T(\omega) = \dfrac{\text{Respuesta}}{\text{Excitación}} \leftarrow$ gen. indep.



$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$ (ver ancho de banda)

Recordemos:



$P_V = \frac{1}{2} V^* I = \frac{1}{2} Z^* |I|^2 = \frac{1}{2} |V|^2 Y = P_{med} + jQ_{med}$

$Z(\omega) = \dfrac{V}{I} = R(\omega) + jX(\omega)$

gen. tensión $T(\omega) = \dfrac{\text{Respuesta}}{\text{Excitación}} = \dfrac{I}{V_g} = Y(\omega) = \dfrac{P_{med} + jQ_{med}}{\frac{1}{2} \cdot |V_g|^2}$

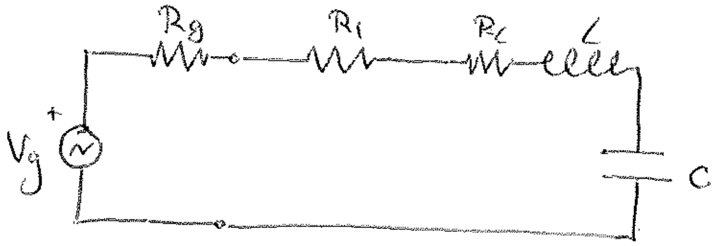
gen. corriente $T(\omega) = \dfrac{\text{Respuesta}}{\text{Excitación}} = \dfrac{V}{I_g} = Z(\omega) = \dfrac{P_{med} + jQ_{med}}{\frac{1}{2} \cdot |I_g|^2}$

Pulsación de resonancia: ω_0

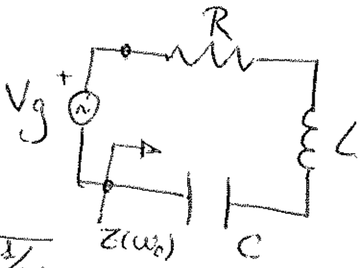
$$\boxed{\omega = \omega_0 \; ; \; Q_{med}(\omega_0) = 0}$$

a) Circuito RLC serie:

R_L = resistencia interna bobina.



$\Longleftrightarrow$



$$T(\omega) = \frac{Resp.}{Excit} = \frac{I}{V_g} = Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\omega_0 \Leftrightarrow Q_{med}(\omega_0) = 0 \Leftrightarrow T(\omega) \text{ es real} \Leftrightarrow j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{T(\omega_0) = \frac{1}{R} = Y(\omega)}$$

$\boxed{Z(\omega_0) = R}$ en resonancia

$$\boxed{I(\omega_0) = V_g Y(\omega_0) = \frac{V_g}{R}}$$

$$P_{med} = \frac{1}{2}|I|^2 \cdot R = \frac{1}{2}\frac{|V_g|^2}{R}$$

$$W_L(t) = \frac{L}{2} i^2(t) \Rightarrow W_{med}\Big|_L = \frac{L}{4}\frac{|V_g|^2}{R^2}$$

$$W_C(t) = \frac{C}{2} V_C^2(t) \Rightarrow W_{med}\Big|_C = \frac{|V_g|^2 L}{4R^2}$$

coinciden por estar en resonancia

$$W_L(t) + W_C(t) = \frac{L}{2}\frac{|V_g|^2}{R^2} = cte$$

Factor de calidad del circuito: Q

$$Q = 2\pi \frac{W_{almacenada\ máxima}}{\text{Energía disipada en 1 periodo}} = \frac{2\pi\, W_{alm\, máx}}{T \cdot P_{med}}$$

$$Q(\omega_0) = \omega_0 \frac{W_{alm\, max}}{P_{med}} = \omega_0 \frac{L/2 \; \frac{|V_g|^2}{R^2}}{\frac{|V_g|^2}{2R}} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$\boxed{Q(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Ancho de banda a potencia mitad:

$$B\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} \; ; \; P_{med}(\omega_{c1}, \omega_{c2}) = \frac{1}{2} P_{med}(\omega_0)$$

$$P_{med}(\omega_0) = \frac{|V_g|^2}{2R} = \frac{1}{2}|I|^2 \cdot R = \frac{1}{2}|V_g|^2 |Y|^2 R \Rightarrow |Y| = \frac{1}{\sqrt{2}R} = \frac{1}{|Z|}$$

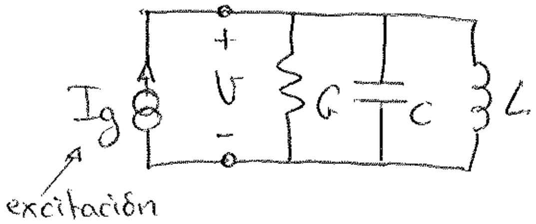
$$\boxed{|Z| = \sqrt{2}R} \quad \omega_c^2 LC \mp RC\,\omega_c - 1 = 0 \Rightarrow \omega_{c1,2} = \frac{\pm RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} \geq 0$$

$$B_\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \boxed{B_\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

$$B_f = f_{c2} - f_{c1} = \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{2\pi} = \frac{B_\omega}{2\pi} \qquad \boxed{Q = \frac{\omega_0}{B_\omega} = \frac{f_0}{B_f}}$$

b) Circuito RLC paralelo

20-may-2010



función de transferencia:

$$T(\omega) = \frac{Resp}{Exc} = \frac{V}{I_g} = Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)} =$$

$$T(\omega) = \frac{1}{G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}}$$

Pulsación de resonancia:

$$\left.\begin{array}{l} T(\omega_0) \in \mathbb{R} \\ Z(\omega_0) \in \mathbb{R} \\ Y(\omega_0) \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow j\omega_0 C + \frac{1}{j\omega L} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow Z(\omega_0) = \frac{1}{G} = R$$

$$V(\omega_0) = I_g \frac{1}{G} \neq 0$$

$$I_C = V j\omega_0 C = \frac{I_g}{G} j\omega_0 C \neq 0$$

$$I_L = V \frac{1}{j\omega_0 L} = \frac{I_g}{G} \frac{1}{j\omega_0 L} = \frac{-j I_g}{G} \omega_0 C = -I_C \neq 0$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} \frac{|I_g|^2}{G} \Rightarrow W_{med}\Big|_C = \frac{C}{4} |V|^2 = \frac{C}{4} \frac{|I_g|^2}{G^2}$$

$$W_{med}\Big|_L = \frac{L}{4} |I_L|^2 = \frac{C}{4} \frac{|I_g|^2}{G^2}$$

Factor de calidad Q.

$$Q(\omega_0) = \omega_0 \frac{W_{m\acute{a}x}}{P_{med}} = \frac{\omega_0 C}{G}$$

$$Q_p(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{C}{G} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Respuesta en frecuencias:

$$T(\omega) = \frac{j\omega/C}{-\omega^2 + \frac{j\omega G}{C} + \frac{1}{LC}} \underset{\frac{G}{C} = \frac{\omega_0}{Q}}{=} \frac{j\omega/C}{-\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$$\boxed{T(\omega) = K \frac{j\omega}{-\omega^2 + j\omega\underbrace{\frac{\omega_0}{Q}}_{B_\omega} + \omega_0^2}}$$