IACR

Carpeta de Montero Espinosa (resuelta en 2010)

IACR
Teoría

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA .

I. Conceptos básicos de circuitos (0,5 c)

Variables y elementos de circuito: activos (fuentes, fuentes controladas, A.O.) y pasivos (R, C, L). Lemas de Kirchhoff.

II. Análisis elemental de circuitos (0,7 c)

Análisis elemental de Circuitos. Equivalencia de circuitos. Thevenin y Norton. Circuitos con Amplificador Operacional. Movilidad y transformación de generadores.

III. Análisis en el dominio del tiempo (1,0 c)

Caracterización de circuitos de 1er. y 2° orden. Condiciones iniciales. Respuesta a las señales escalón, sinusoidal y a otras excitaciones.

IV. Análisis de Circuitos en Régimen Permanente Sinusoidal (1,0 c)

Análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal mediante fasores e impedancias. Superposición. Análisis sistemático de circuitos (nudos y mallas). Ejercicios.

V. Acoplamiento magnético y transformadores (0,5 c)

Acoplamiento magnético, transformador perfecto, transformador ideal.

VI. Potencia, Energía y Resonancia (0,8 c)

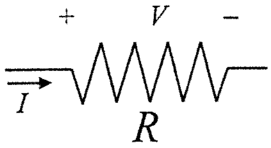
Energía en L's y C's. Potencia activa, reactiva y compleja. Adaptación de impedancias. Resonancia en circuitos RLC serie y paralelo.

TEMA 1: CONCEPTOS BÁSICOS DE CIRCUITOS

1.1 Resistencias

Las **resistencias** son dispositivos lineales que cumplen la **Ley de Ohm:** Una resistencia mantiene entre sus bornas una tensión proporcional a la corriente que la atraviesa. La unidad de resistencia es el ohmio (Ω).

Por tanto en una resistencia la relación entre la tensión y la corriente es lineal



$$V = R \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{V}{I} \quad (\Omega)$$

Esto no es más que una aplicación directa de la ley de Ohm

Importante: En una resistencia por la que no pasa corriente no cae tensión.

La **conductancia** se define como el inverso de la resistencia y tiene unidades de mhos ($\mho$):

$$G = \frac{1}{R} \quad (\mho)$$

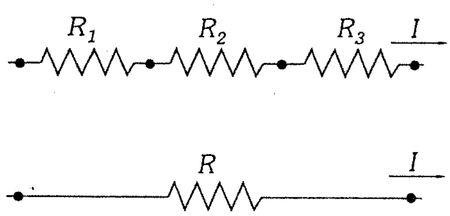
En el caso de las conductancias la ley de ohm se enuncia de forma inversa:

En ocasiones los circuitos pueden venir dados con conductancias en vez de resistencias

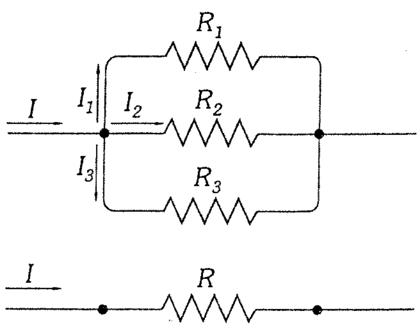
$$V = \frac{I}{G} \quad \Leftrightarrow \quad G = \frac{I}{V} \quad (\mho)$$

Asociación de resistencias

SERIE



PARALELO



$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

$$I_1 = I_2 = I_3$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

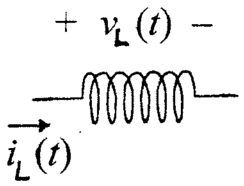
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

1.2 Bobinas

Una **bobina** es un cable de cobre enrollado entorno a un núcleo cilíndrico macizo.
La característica fundamental de una bobina es su **inductancia** L que se define como:



$$\boxed{L = \frac{\phi}{I} \quad \text{(Henrios)}}$$

donde ϕ es el flujo a través de la bobina e I es la corriente que circula por el cable.

A la hora de resolver circuitos debemos tener en cuenta tres cosas sobre las bobinas:

1. La relación entre tensión y corriente en bornas de una bobina es:

$$\boxed{v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad i_L(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t)\,dt}$$

2. Principio de continuidad de corriente a través de una bobina.

Excepto en el caso de variación de parámetros que veremos más adelante

La corriente a través de una bobina es una función continua del tiempo. Matemáticamente queremos decir que:

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-) \qquad \forall t_0$$

3. Una bobina en corriente continua (CC) se comporta como un cortocircuito (para hacer esta suposición se supone que ya se ha dado por finalizado el régimen transitorio).

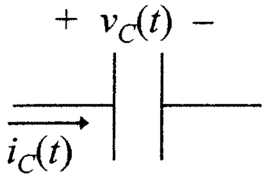
Asociación de bobinas

Las bobinas se asocian en serie y en paralelo siguiendo las mismas reglas que las resistencias.

1.3 Condensadores

Un **condensador** es un conjunto de dos placas o armaduras (conductoras) separadas por un dieléctrico (no conductor) donde las armaduras están en influencia total, es decir todas las líneas de campo *nacen* en una de ellas y *mueren* en la otra.

La **capacidad** C de un condensador se define como:



$$\boxed{C = \frac{Q}{V} \quad \text{(Faradios)}}$$

donde Q es la carga de una de las placas y V es la tensión entre las dos placas.

A la hora de resolver circuitos debemos tener en cuenta tres cosas sobre los condensadores:

1. La relación entre tensión y corriente en bornas de un condensador es:

$$\boxed{i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad v_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,dt}$$

2. Principio de continuidad de tensión en bornas de un condensador.
La tensión en bornas de un condensador es una función continua del tiempo. Matemáticamente queremos decir que:

Excepto en el caso de variación de parámetros que veremos más adelante

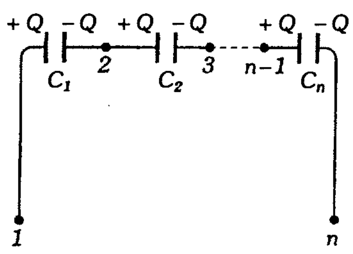
$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) \qquad \forall t_0$$

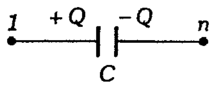
3. Un condensador en corriente continua (CC) se comporta como un circuito abierto (para hacer esta suposición se supone que ya se ha dado por finalizado el régimen transitorio).

Asociación de condensadores

La asociación de condensadores es al revés que las resistencias

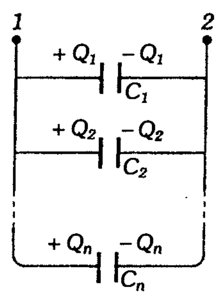
SERIE

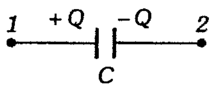




$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

PARALELO

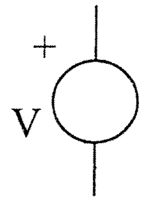




$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

1.4 Generador de tensión ideal

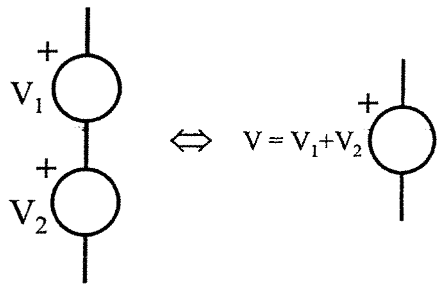
Un **generador (o fuente) de tensión** es un elemento circuital que mantiene una tensión determinada (que puede o no variar con el tiempo) entre sus bornas independientemente de la corriente que lo atraviese. Su símbolo circuital es:



Observaciones

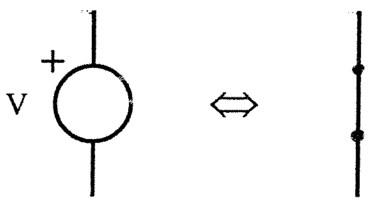
La asociación en serie de generadores de tensión es igual que la de las resistencias

- Cuando asociamos dos o más generadores de tensión en serie lo que hacemos es sustituirlos por un solo generador cuyo valor es la suma de todos los generadores. Para el caso de dos generadores en serie:



- No se pueden asociar generadores de tensión en paralelo (Fíjate que habría un nudo que tendría dos tensiones distintas a la vez, cosa que es imposible).

- Anular un generador de tensión significa sustituirlo por un cortocircuito:

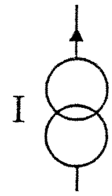


Generadores de tensión dependientes

Puede suceder que en nuestro circuito encontremos generadores de tensión que dependan de alguna magnitud del circuito (la corriente de alguna rama o la tensión de algún nudo), a este tipo de generadores se les denomina **generadores dependientes.**

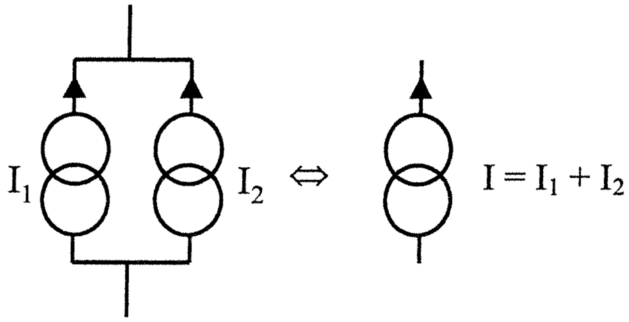
1.5 Generador de corriente ideal

Un **generador (o fuente) de corriente ideal** es un elemento circuital que mantiene una corriente determinada (que puede o no variar con el tiempo) a través suya independientemente de la tensión que haya en sus bornas. Su símbolo circuital es:



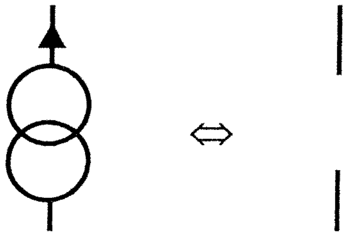
Observaciones

- Cuando asociamos dos o más generadores de tensión en paralelo lo que hacemos es sustituirlos por un solo generador cuyo valor es la suma de todos los generadores. Para el caso de dos generadores en paralelo:



- No se pueden asociar generadores de corriente en serie (Fíjate que la rama en que estuvieran los generadores tendría dos corrientes distintas simultáneamente, cosa que es imposible).

- Anular un generador de corriente significa sustituirlo por un circuito abierto:



Generadores de corriente dependientes

Puede suceder que en nuestro circuito encontremos generadores de corriente que dependan de alguna magnitud del circuito (la corriente de alguna rama o la tensión de algún nudo), a este tipo de generadores se les denomina **generadores dependientes**

1.6 Leyes de Kirchhoff

Los lemas de Kirchoff van a ser nuestra herramienta fundamental para este curso de análisis de circuitos. Las utilizaremos en la práctica totalidad de los ejercicios. En teoría de circuitos estas leyes son axiomáticas, por consiguiente son aceptadas sin demostración.

Primera ley de Kirchhoff. Ley de los nudos

Se enuncia diciendo que:

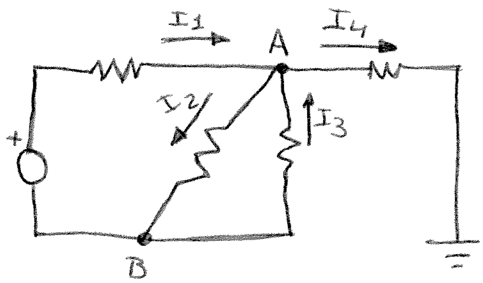
La suma de las corrientes que confluyen en un nudo es siempre igual a cero

O también:

Esto será lo que nosotros utilicemos habitualmente

La suma de las corrientes que "entran" en un nudo es igual a la suma de las corrientes que "salen" del nudo

Por ejemplo, consideremos un nudo genérico de una red cualquiera como el mostrado en la figura. En este caso tenemos que:



nudo A: $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$

nudo B: $I_2 = I_1 + I_3$

Segunda ley de Kirchhoff. Ley de las mallas

Se enuncia diciendo que:

La suma de las caídas y subidas de tensión a lo largo de una malla es siempre cero

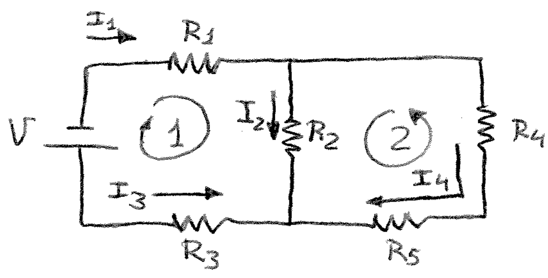
O también:

Esto será lo que nosotros utilicemos habitualmente

La suma de las caídas de tensión en una malla es igual a la suma de las elevaciones de tensión en esa misma malla

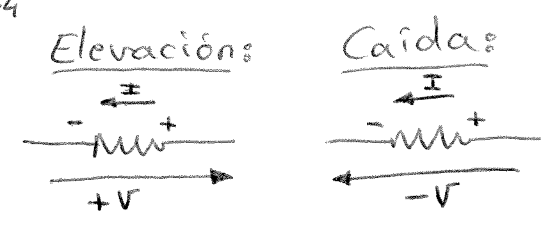
Para aplicar esta ley fijaremos un sentido de recorrido de la malla (por ejemplo, el que se señala en la siguiente figura) y partiendo de un elemento recorreremos el lazo en el sentido indicado:

- Si los signos de las tensiones de los elementos son primero signo + y luego signo – se considera caída de tensión
- Si los signos de las tensiones de los elementos son primero signo – , y luego signo + se considera elevación de tensión



malla 1: $-V - R_1I_1 - R_2I_2 + R_3I_3 = 0$

malla 2: $I_4R_5 + I_4R_4 - I_2R_2 = 0$



1.7 Nudo de referencia. Concepto de masa de un circuito.

Lo primero que debemos tener claro para entender el concepto de masa, es que las tensiones o potenciales en un circuito son magnitudes relativas, no absolutas.

Por tanto, es posible decir: "En esta resistencia hay una diferencia de potencial de 5 voltios". Eso significa que entre un extremo y otro de la resistencia hay una diferencia de potencial de 5 voltios. Fíjate que estamos midiendo la diferencia de tensión entre dos puntos del circuito.

Sin embargo no es posible decir: "En el punto A del circuito hay 5 voltios". Lo que podríamos decir sería: "En el punto A del circuito hay una diferencia de potencial de 5 voltios respecto al punto B".

Pues bien, en la práctica, por comodidad se suele definir un **punto del circuito al que se le asigna un valor de tensión de referencia de 0 voltios**. A ese nudo del circuito se le denomina **nudo de masa**.

Si se ha definido un nudo de masa en el circuito, sí se puede decir: "El nudo A del circuito está a 5 voltios", porque automáticamente se entenderá que lo que se quiere decir en realidad es: "El nudo A del circuito está a 5 voltios respecto a masa", o lo que es lo mismo: "Entre el nudo A del circuito y el nudo de masa, hay una diferencia de potencial de 5 voltios".

Veamos ahora algunos ejemplos de cómo representar el nudo de masa en un circuito:

TEMA 2: ANÁLISIS ELEMENTAL DE CIRCUITOS

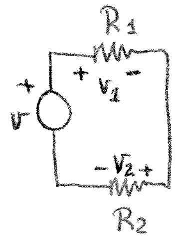
2.1 Divisor de tensión y de corriente

Para aplicar esto las resistencias tienen que estar en serie (debe circular por todas ellas la misma corriente)

Divisor de tensión

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$



Fórmula generalizada:

$$V_i = \frac{v \cdot R_i}{\sum_n R_n}$$

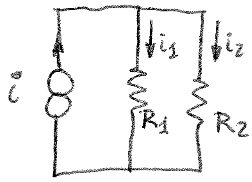
válido para n resistencias

Para aplicar esto, las resistencias tienen que estar en paralelo (todas ellas con la misma tensión)

Divisor de corriente

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$



Fórmula generalizada:

$$i_j = \frac{i \cdot G_j}{\sum_n G_n}$$

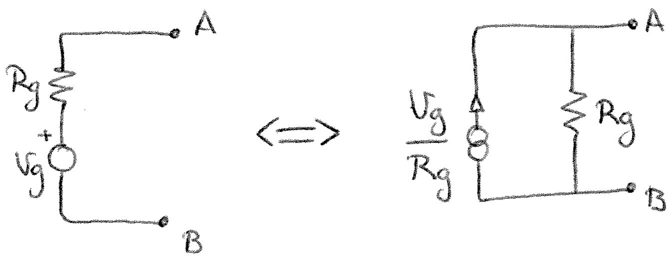
válido para n resistencias

$G = \frac{1}{R}$ (conductancia)

2.2 Equivalencia de generadores reales

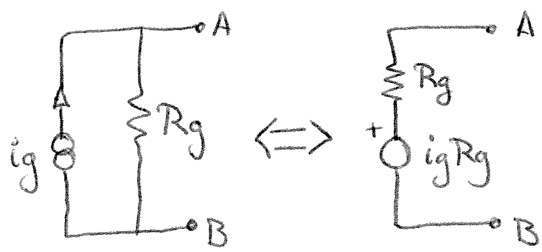
¡OJO! los generadores de tensión ideales (sin resistencia en serie) no se pueden transformar

Un generador de tensión real (es decir un generador de tensión ideal v_g en serie con un resistencia R) es equivalente a un generador de corriente real compuesto por un generador de corriente ideal de magnitud $i_g = \frac{v_g}{R}$ y una resistencia R en paralelo.



¡OJO! los generadores de corriente ideales (sin resistencia en paralelo) no se pueden transformar

Recíprocamente, un generador de corriente real (generador de corriente ideal de magnitud i_g en paralelo con una resistencia R) es equivalente a un generador de tensión real compuesto por un generador de tensión ideal de magnitud $v_g = i_g R$ y una resistencia R en serie.



2.3 Equivalencia de generadores dependientes

Vemos un ejemplo de esto en el ejercicio de clase 2.2

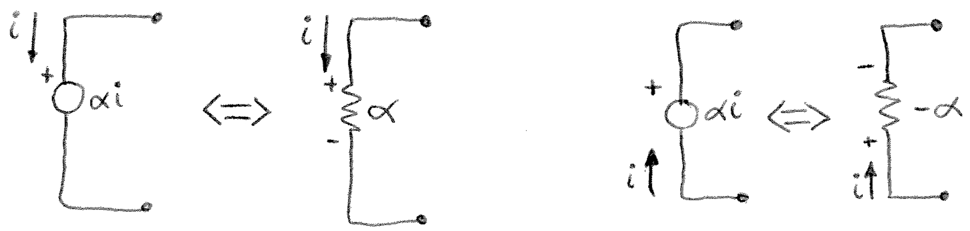
Se hace de la misma forma que con los generadores independientes pero hay que tener cuidado con la variable de control. Esta variable se debe conservar al realizar la transformación a la estructura equivalente, o de no ser así, obtener una ecuación que relacione esta variable de control con las variables del nuevo circuito resultante de aplicar la equivalencia.

2.4 Generador de tensión dependiente como resistencia

¡OJO! Un generador dependiente puede ser equivalente a una resistencia "negativa". El significado físico de esto es que dicho generador se está usando para representar un dispositivo activo

Un ejemplo de esto también aparece en el ejercicio de clase 2.2

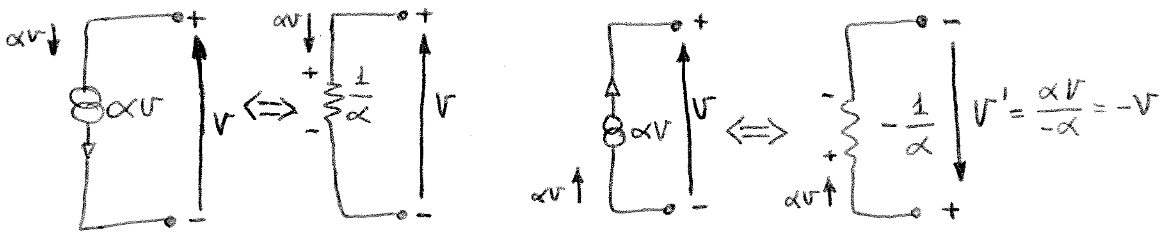
Si un generador de tensión de magnitud $v_g = \alpha i$ está controlado por la corriente que lo atraviesa, entonces se puede sustituir (es equivalente) a una resistencia de valor $R = \alpha$.



2.5 Generador de corriente dependiente como resistencia

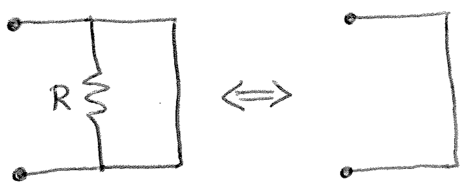
Si un generador de corriente de magnitud $i_g = \alpha v$ está controlado por la tensión a la que está sometido, entonces se puede sustituir (es equivalente) a una resistencia de valor $R = \dfrac{1}{\alpha}$

Esto se usa mucho en la asignatura CEAN de segundo curso



2.6 Resistencia en paralelo con cortocircuito

Cualquier estructura resistiva que esté en paralelo con un cortocircuito se puede eliminar

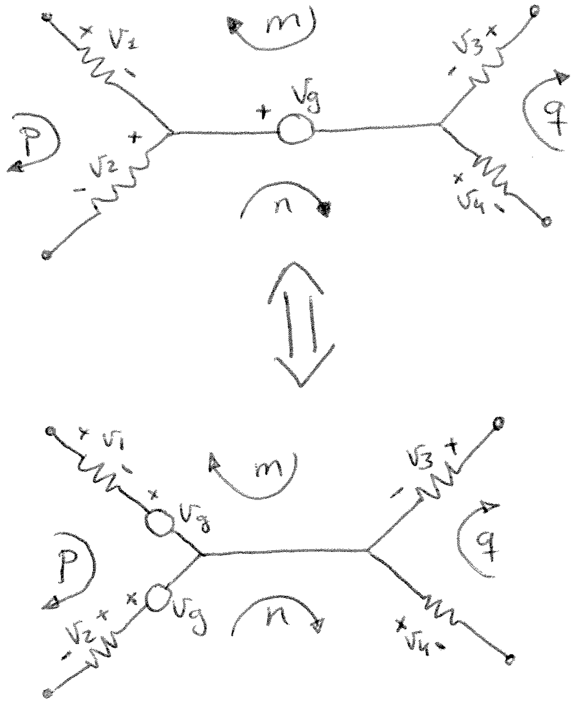


2.7 Movilidad de generadores de tensión y de corriente

Debido a las propiedades de los nudos y de las mallas los generadores ideales de corriente y tensión se pueden "mover" de las siguientes formas.

Generadores de tensión

Se sustituye un generador de tensión por otros de igual valor en otras ramas de manera que no se modifiquen las ecuaciones de las mallas

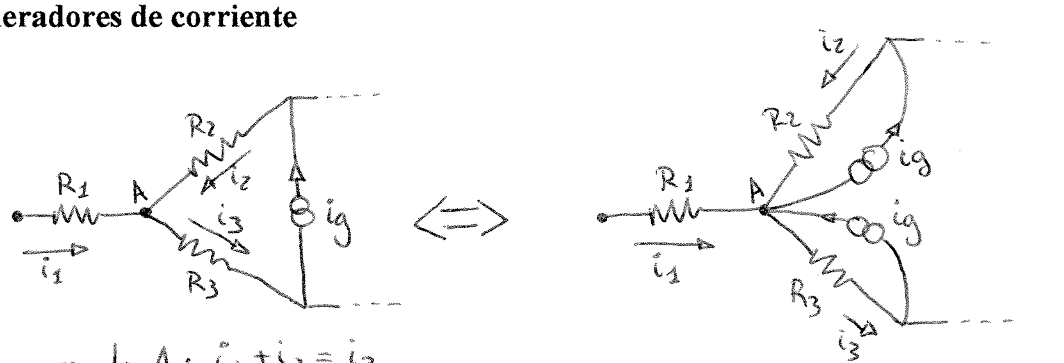


malla n: $V_2 - V_g - V_4 = 0$
malla m: $-V_3 + V_g + V_1 = 0$
malla p: $-V_1 - V_2 = 0$
malla q: $V_4 + V_3 = 0$

malla n: $V_2 - V_g - V_4 = 0$
malla m: $-V_3 + V_g + V_1 = 0$
malla p: $-V_1 - V_g + V_g - V_2 = 0$
malla q: $V_4 + V_3 = 0$

Generadores de corriente

Se sustituye un generador de corriente por otros de igual valor en otras ramas de manera que no se modifiquen las ecuaciones de los nudos

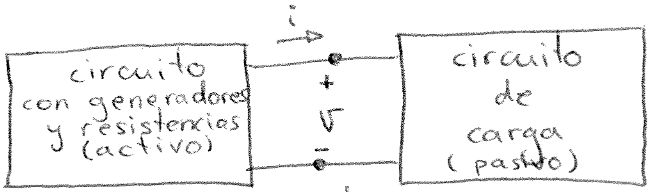


nudo A: $i_1 + i_2 = i_3$

nudo A: $i_1 + i_2 + i_g = i_3 + i_g$

2.8 Equivalentes de Thevenin y Norton

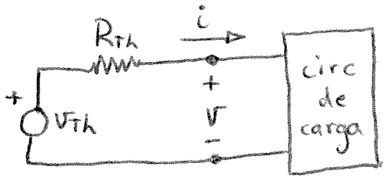
Un circuito formado por generadores y resistencias, como el de la figura:



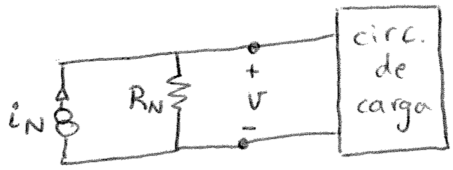
generadores y resistencias ⇒ circuito lineal

siempre se puede hacer equivalente a:

a) Circuito equivalente de Thevenin
Parámetros a calcular: v_{Th}, R_{Th}



b) Circuito equivalente de Norton
Parámetros a calcular: i_N, R_N



Observa que basta con calcular dos de los cuatro parámetros para poder obtener todos los demás.

Fíjate que estas dos últimas relaciones no son otra cosa que las de equivalencia entre generadores reales.

Se cumplen las siguientes relaciones:

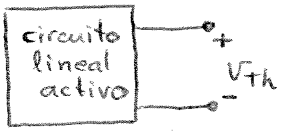
$$R_{Th} = R_N$$

$$v_{Th} = R_{Th} \cdot i_N$$

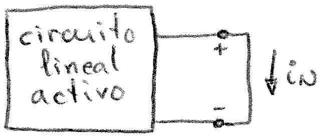
$$i_N = \frac{v_{Th}}{R_{Th}}$$

Cálculo de los parámetros:

1) v_{Th}: tensión en circuito abierto ($i=0$)



2) i_N: corriente en cortocircuito ($v=0$)



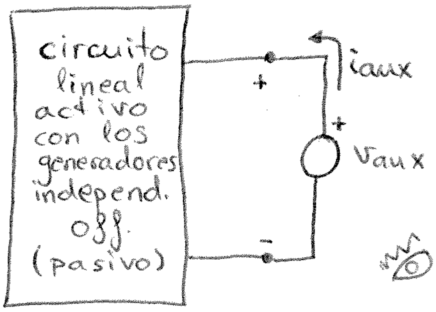
3) R_{Th}=R_N. Hay varias formas:

3.a) A partir de v_{Th} e i_N: $R_{Th} = R_N = \dfrac{v_{Th}}{i_N}$

3.b) Si se desconectan los generadores independientes, la resistencia equivalente del circuito resultante es R_{Th}=R_N (sólo válido si no existen gener. dependientes)

El método 3.b) sólo vale si no hay generadores dependientes en el circuito. Un ejemplo se ve en el ejercicio de clase 2.4

3.c) Se desconectan los generadores independientes y se utiliza un generador auxiliar (de tensión o corriente). Entonces se cumplirá:



$$R_{Th} = R_N = \frac{v_{aux}}{i_{aux}}$$

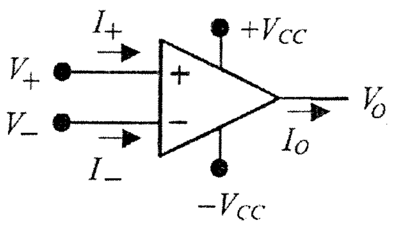
i_{aux} tiene que salir del polo positivo del gen.

El método 3.c) vale siempre. Un ejemplo de su uso está en el ejercicio de clase 2.5

2.9 Amplificador Operacional Ideal

El amplificador operacional ideal es una muy buena aproximación al funcionamiento del amplificador operacional real para simplificar los cálculos

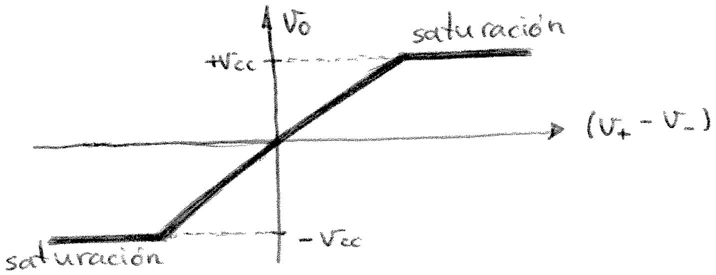
El **amplificador operacional ideal** es el último elemento circuital que vamos a utilizar en los circuitos de esta asignatura. Su configuración básica es la siguiente:



Las entradas se llaman **entrada inversora** (la del signo menos) y **entrada no inversora** (la del signo más). La salida es siempre una salida diferencial, es decir:

$$V_0 = A_d V_d = A_d(V_+ - V_-)$$

La función de transferencia (salida en función de las entradas) es la siguiente:



Características principales de un AO ideal

- Mientras el AO se encuentra no saturado se cumple el principio de "cortocircuito virtual" lo que quiere decir que se considera que las entradas inversora y no inversora están a la misma tensión:

$$\boxed{V_+ = V_-}$$

- Si el AO está saturado no se cumple el cortocircuito virtual (perdemos una ecuación) pero a cambio conocemos el valor de la salida $V_0 = \pm V_{CC}$ (a cambio ganamos otra ecuación).

Esta característica es importante a la hora de obtener relaciones en el circuito

- La corriente por las entradas inversora y no inversora se considera siempre nula:

$$\boxed{I_+ = I_- = 0}$$

Un amplificador operacional real tiene una ganancia e impedancia de entrada muy grandes (pero no infinitas) y una impedancia de salida muy pequeña (pero no nula)

- La ganancia de un AO ideal es infinita.
- La impedancia de entrada de un AO ideal es infinita.
- La impedancia de salida de un AO ideal es nula.
- Un circuito con AO ideales siempre se estudia utilizando la ley de Kirchoff para nudos (nunca se hace por mallas).

Ver ejercicio I.18

- **El nudo de salida del AO nunca se pone como ecuación (a no ser que te pidan la corriente que sale de dicho AO), ya que introduces una ecuación más, pero también una incógnita más.**

Ver ejercicio I.16

- **Nunca se debe plantear la ecuación del nudo de masa en circuitos con AOs**

APÉNDICE A: NÚMEROS COMPLEJOS

A.1 Definiciones

En ingeniería se utiliza "j" en vez de "i"

- Un **número complejo** z es un par ordenado (a, b) de números reales donde,
  $a = \mathrm{Re}(z)$ = parte real de z
  $b = \mathrm{Im}(z)$ = parte imaginaria de z
- La **unidad imaginaria** (designada por j) es el número complejo $(0,1)$. Además tenemos que $j = \sqrt{-1}$.
- El **afijo** de un complejo z es el punto del plano cartesiano de coordenadas (a, b).

A.2 Formas de representar un número complejo

Fíjate que en realidad son sólo dos formas:
- Representación con a y b
-Representación con ρ y θ

Usaremos principalmente la forma binómica y la exponencial

- Forma cartesiana: $z = (a, b)$
- Forma binómica: $z = a + jb$
- Forma polar: $z = \rho_\theta$
- Forma exponencial: $z = \rho e^{j\theta}$
- Forma módulo-argumental: $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

Para pasar de una a otra forma hacemos:

Forma binómica a forma polar

$$z = a + jb \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan(b/a) \end{array} \right\} \Rightarrow z = \rho \cdot e^{j\theta}$$

Forma polar a forma binómica

$$z = \rho \cdot e^{j\theta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array} \right\} \Rightarrow z = a + jb$$

A.3 Operaciones con número complejos

Suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

Resta: $z_1 - z_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

Recuerda que $j \cdot j = j^2 = -1$

Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = (\rho_1 \cdot \rho_2)e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

No es necesario aprender de memoria esta fórmula. La regla práctica consiste en multiplicar y dividir la fracción por el conjugado del denominador.

División: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \dfrac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Es útil recordar que:

$$\boxed{j^{-1} = \frac{1}{j} = -j}$$

Elemento inverso: $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + jb} = \dfrac{(a - jb)}{(a + jb)(a - jb)} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - j\dfrac{b}{a^2 + b^2}$

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho e^{j\theta}} = (\rho^{-1})e^{-j\theta}$$

A.4 Complejo conjugado

Forma binómica: Sea $z = a + jb$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = z^* = a - jb$

Forma polar: Sea $z = \rho e^{j\theta}$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = z^* = \rho e^{-j\theta}$

Propiedades: i) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

iv) $\overline{\overline{z}} = z$

v) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2j}$

A.5 Modulo de un complejo

Sea $z = a + jb$, llamamos **módulo** de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propiedades: i) $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \Rightarrow z\overline{z} = |z|^2$

iii) $si \quad z \neq 0 \qquad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|}$

iv) $|z| \geq 0, \quad |z| = 0$ sólo si $z = 0$

v) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

vi) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

A.6 Potencias y raíces complejas

Sea el número complejo $z = \rho \cdot e^{j\theta}$,

Fórmula de Moivre

- Potencia enésima:

$$z^n = \rho^n e^{jn\theta}$$

Un número complejo tiene n raíces enésimas

- Raíces enésimas:

$$\sqrt[n]{z} = re^{j\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Observación

Es conveniente manejar con soltura las potencias de la unidad imaginaria j:

$$j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1, j^5 = j$$

y en general : $j^{4n} = 1, j^{4n+1} = i, j^{4n+2} = -1, j^{4n+3} = -j$

A.7 Exponencial compleja

La fórmula de Euler se admite sin demostración

Fórmula de Euler : $\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}}$

Esta fórmula se puede aplicar a cualquier numero complejo de la forma $z = a + jb \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^{a+jb} = e^a e^{jb} = e^a(\cos b + j \operatorname{sen} b)$$

TEMA 3: ANÁLISIS DEL DOMINIO DEL TIEMPO.

3.1 Régimen transitorio y régimen permanente

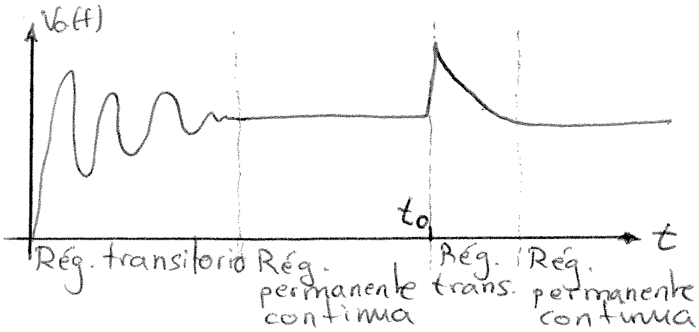
Las técnicas que vamos a estudiar en este tema, nos van a permitir analizar:

- El **régimen permanente** de un circuito: cómo se comporta el circuito cuando lleva un tiempo "largo" funcionando, es decir, una vez se han estabilizado las variables (corrientes y tensiones) del circuito.
- El **régimen transitorio** de un circuito: cómo se comporta el circuito durante periodos "cortos" de tiempo, en los momentos posteriores a que se haya producido un cambio en el circuito

Mediante la técnica de análisis fasorial (tema 4 y posteriores), podíamos analizar el régimen permanente de circuitos con generadores de tipo sinusoidal.

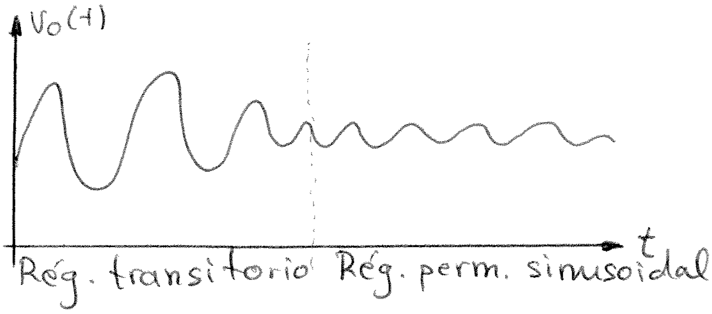
Esta técnica por tanto es más general que la de análisis fasorial, porque permite analizar regímenes permanentes cualquiera que sea el tipo de generador (es decir, no tiene que ser necesariamente sinusoidal), pero sobre todo, permite analizar regímenes transitorios, lo cual era imposible con el método de análisis fasorial.

Veamos un ejemplo gráfico que nos ayude a entender el concepto de régimen transitorio y régimen permanente:



En $t=0$ se enciende el generador de continua.

En $t=t_0$ se activa el conmutador o interruptor



En $t=0$ se enciende el generador sinusoidal

Cómo resolver este tipo de problema matemático es algo que se ve en la asignatura FMT4

El precio que hay que pagar al utilizar este tipo de análisis (que nos aporta una información tan completa del circuito) es que hay que resolver **problemas de valor inicial (PVI)**, o lo que es lo mismo, **ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales**. Las ecuaciones diferenciales que nos aparecerán serán EDOs lineales y de coeficientes constantes.

A continuación nos centraremos en como resolver dichos PVIs, distinguiendo entre los distintos casos que pueden aparecer

3.2 PVIs con EDO de primer orden.

Este es el caso más habitual en esta asignatura

Este tipo de PVIs es a los que vamos a llegar siempre que nuestro circuito contenga bobinas o condensadores (pero no ambos simultáneamente) además, por supuesto, de resistencias y generadores.

3.2.1 Término independiente constante

Las EDO lineales con coeficientes constantes de primer orden y con término independiente constante se pueden expresar siempre de la siguiente forma:

Lo primero que haremos siempre es expresar la EDO de esta forma

En este caso el término independiente de la EDO es CF que es un valor constante

$$\boxed{\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = CF}$$

donde los parámetros τ y CF son constantes reales que llamaremos *"constante de tiempo"* y *"condición final"* respectivamente.

Además, a la EDO siempre le acompaña una *"condición inicial"* (nos la darán como dato o tendremos que averiguarla nosotros) de la forma:

$$\boxed{y(0) = CI}$$

donde CI es una constante real que llamaremos *"condición inicial"*.

Es decir, el PVI (ecuación diferencial + condiciones iniciales) que tendremos que resolver en este caso será de la forma:

¡OJO! La fórmula sólo es válida si la condición inicial es *y(0)*. Si es *y(T)* veremos en los ejercicios como hacerlo.

$$\left.\begin{array}{l} \tau \dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = CF \\ y(0) = CI \end{array}\right\}$$

Para este caso tan sencillo la solución de sistema formado por la EDO y la condición inicial es de la forma:

Este caso tan sencillo se puede resolver directamente mediante una fómula, pero también se puede aplicar el método general, que es el que se ve en FMT4, y es el que usaremos para el resto de casos.

$$\boxed{y(t) = (CI - CF)e^{-\frac{t}{\tau}} + CF}$$

3.2.2 Término independiente no constante (dependiente del tiempo)

Si al analizar el circuito, llegamos a un PVI de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l}\tau\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=f(t)\\ y(0)=CI\end{array}\right\}$$

En este caso ya no existe una fórmula general que nos devuelva directamente el resultado de la EDO como sucede en el caso anterior. Ahora tendremos que aplicar la técnica aprendida en FMT4 para obtener la solución de la EDO. Esta técnica consiste en obtener la solución general de la EDO homogénea (SGH) y sumarle una solución particular de la EDO completa (SPC):

$$y(t)=y_H(t)+y_P(t)$$

Veamos los pasos a seguir:

1^er paso: Cálculo de la SGH (solución general de la EDO homogénea $\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=0$)

La constante K se determina en el quinto paso a partir de la condición inicial

Cuando la EDO es de primer grado, la SGH siempre va a tener la forma: $y_H(t)=Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

2º paso: Cálculo de la SPC (solución particular de la EDO completa $\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=f(t)$)

En cuanto a la SPC se puede demostrar que tiene siempre la misma forma que el término independiente $f(t)$. Por ejemplo:

Si $f(t)=at+b$ la SPC tendrá la forma: $y_P(t)=At+B$

Si $f(t)=e^{-at}$ la SPC tendrá la forma: $y_P(t)=Ae^{-at}$

Etc…

3^er paso: Cálculo de las constantes de la SPC

Las constantes A, B,… se calculan sustituyendo $y_P(t)$ en la EDO completa e identificando coeficientes.

4º paso: Cálculo de la SGC (solución general de la EDO completa SGC)

La obtenemos como:

$$y(t)=y_H(t)+y_P(t)$$

5º paso: Aplicación de la condición inicial

¡OJO! La CI siempre se usa en este paso y no en el primero

Por último, particularizamos la SGC para obtener la solución que nos interesa, usando la condición inicial $y(0)=CI$, lo que nos permitirá obtener el valor de la K, que aún estaba por determinar.

Nota: si no la dan como dato, la condición inicial $y(0)=CI$ se obtendrá de a partir de las condiciones de continuidad de corriente en las bobinas o de continuidad de tensión en los condensadores.

3.3 PVIs con EDO de segundo orden

Las EDO lineales con coeficientes constantes de segundo orden se pueden expresar siempre de la siguientes formas:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\omega_0\xi\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2\,y(t) = f(t)$$

donde los parámetros que aparecen en la EDO son los siguientes:

Habitualmente utilizaremos la segunda de las formas

$\omega_0 \equiv$ Pulsación propia (rad/s)

$\xi \equiv$ Coeficiente de amortiguamiento (adimensional)

Nosotros resolveremos siempre PVIs (problemas de valor inicial) que son el conjunto de una EDO y unas condiciones iniciales como se muestra a continuación:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\omega_0\xi\dfrac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2\,y(t) = f(t) \\ y(0) = CI_1 \\ y'(0) = CI_2 \end{array}\right\}}$$

Para resolverlo aplicamos, al igual que en el apartado anterior, la técnica aprendida en FMT4. Esta técnica consiste en obtener la solución general de la EDO homogénea (SGH) y sumarle una solución particular de la EDO completa (SPC). Más en detalle:

<u>1^er paso: Cálculo de la SGH</u>

Cuando la EDO es de segundo grado, la SGH puede tener distintas formas y la vamos a calcular a partir de la ecuación característica:

$$s^2 + 2w_0\xi s + w_0^2 = 0$$

De esta ecuación se obtienen tres casos:

- **Amortiguamiento supercrítico:** si $\xi > 1$
  En este caso las dos raíces de la ecuación característica son reales y distintas. Considerando $s_1 = \sigma_1,\ s_2 = \sigma_2 \in \mathbb{R}$ la SGH viene dada por:
  $$y_H(t) = K_1 e^{\sigma_1 t} + K_2 e^{\sigma_2 t}$$

Las constantes K_1 y K_2 se determinan en el 5º paso a partir de las condiciones iniciales

- **Amortiguamiento crítico:** si $\xi = 1$
  En este caso tenemos una raíz real doble de la ecuación característica que, además, sabemos que siempre es $s_{1,2} = -\omega_0 \in \mathbb{R}$ y la SGH viene dada por:
  $$y_H(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\omega_0 t}$$

- **Amortiguamiento subcrítico:** si $\xi < 1$
  En este caso obtenemos dos raíces complejas conjugadas de la ecuación característica $s_{1,2} = \lambda \pm j\theta$ y la solución viene dada por:
  $$y_H(t) = e^{\lambda t}(K_1 \cos\theta t + K_2 \operatorname{sen}\theta t)$$

2º paso: Cálculo de la SPC

En cuanto a la SPC se puede demostrar que tiene siempre la misma forma que el término independiente $f(t)$. Por ejemplo:

Si $f(t)=at+b$ la SPC tendrá la forma: $y_P(t)=At+B$
Si $f(t)=e^{-at}$ la SPC tendrá la forma: $y_P(t)=Ae^{-at}$
Si $f(t)=A$ la SPC tendrá la forma: $y_P(t)=B$
etc…

3^er^ paso: Cálculo de las constantes de la SPC

Las constantes A, B,… se calculan sustituyendo $y_P(t)$ en la EDO completa e identificando coeficientes.

4º paso: Cálculo de la SGC

La obtenemos como:

$$y(t)=y_H(t)+y_P(t)$$

¡OJO! Las condiciones iniciales siempre se usan en este paso y no en el primero

5º paso: Aplicación de la condiciones iniciales

Por último, particularizamos la SGC para obtener la solución que nos interesa, usando las condiciones iniciales $y(0)=CI_1$ e $y'(0)=CI_2$ lo que nos permitirá obtener el valor de las K_1 y K_2 que aún estaba por determinar.

Nota 1: La primera de las condiciones iniciales, siempre la obtendremos a partir de las condiciones de continuidad de corriente en las bobinas o de continuidad de tensión en los condensadores. La segunda la obtendremos a partir de la ecuación de un nudo o de una malla particularizada en $t=0^+$, como veremos en los ejercicios.

Nota 2: Por último, para expresar la solución final conviene tener en cuenta que:

$$K_1\cos\theta t + K_2\,\mathrm{sen}\,\theta t = K\cos(\theta t+\varphi)$$

donde:

$$K=\sqrt{K_1^2+K_2^2} \qquad \varphi=-\arctan\frac{K_2}{K_1}$$

3.4 Variación de parámetros

Hasta ahora para obtener las condiciones iniciales de primer orden nos hemos basado en los principios de continuidad de tensión en los condensadores y de continuidad de corriente en las inductancias:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) \qquad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

Sin embargo, podemos forzar discontinuidades en la corriente en una inductancia o en la tensión de una capacidad mediante conmutadores o interruptores. Por ejemplo, si abrimos un interruptor que esté en serie con una inductancia, la intensidad que pasa por la inductancia se interrumpirá bruscamente. De modo similar, ocurriría en el caso de un condensador que se cortocircuita cerrando un interruptor que lo pone en paralelo con un cortocircuito, la tensión se hace cero bruscamente.

Tampoco se cumple la continuidad de la tensión en un condensador si al cerrarse o abrirse un interruptor, se pone en paralelo con otro condensador, ya que entonces varía la capacidad del condensador resultante. De la misma manera no se cumple la continuidad de la corriente en una bobina si al cerrarse o abrirse un interruptor la bobina se pone en serie con otra, ya que la autoinductancia de la bobina resultante será distinta de la original.

Es decir, en estos ejemplos y otros, las condiciones iniciales primarias en $t = 0^-$ son diferentes de las condiciones iniciales en $t = 0^+$:

$$v_C(0^+) \neq v_C(0^-) \qquad i_L(0^+) \neq i_L(0^-)$$

A continuación explicamos como determinar en estos casos las condiciones iniciales en $t = 0^+$ en función de las condiciones en $t = 0^-$.

Circuito con capacidades

En el caso en que se produzca variación brusca de v_C en dos condensadores utilizaremos la Ley de conservación de la carga $q(0^-) = q(0^+)$:

Esta ecuación es fácilmente generalizable a más condensadores

$$C_1 v_{C1}(0^+) + C_2 v_{C2}(0^+) = C_1 v_{C1}(0^-) + C_2 v_{C2}(0^-)$$

Circuito con inductancias

En el caso en que se produzca variación brusca de i_L en dos bobinas utilizaremos la Ley de conservación del flujo magnético $\phi(0^-) = \phi(0^+)$:

Igualmente esta ecuación es fácilmente generalizable a más bobinas

$$L_1 i_{L1}(0^+) + L_2 i_{L2}(0^+) = L_1 i_{L1}(0^-) + L_2 i_{L2}(0^-)$$

Hay que tener cuidado con los signos de tensiones y corrientes, como veremos en los ejercicios

TEMA 4: RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL

A lo largo de estas hojas e_g se refiere v_g o i_g indistintamente, según se trate de una fuente de tensión o corriente

En este tema vamos a estudiar el Régimen Permanente Sinusoidal, abreviadamente RPS. Durante todo este tema vamos a suponer que el régimen transitorio ya ha acabado (o sea, "hace mucho tiempo que empezó a funcionar el circuito, o conmutó el último interruptor o se produjo el último cambio en un generador"). Además todas las fuentes del circuito, tanto de tensión como de corriente, deben ser de tipo sinusoidal de la forma:

$$e_g(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(2\pi f t + \varphi) \quad \text{ó}$$
$$e_g(t) = A\,sen(\omega t + \varphi) = A\,sen(2\pi f t + \varphi)$$

Si se cumplen esas condiciones, podremos sustituir el circuito por su "circuito fasorial" asociado y analizar éste. En el circuito fasorial, las tensiones y corrientes se sustituyen por su **fasor** correspondiente, y los elementos pasivos (resistencias, bobinas y condensadores) por su **impedancia** asociada. Más adelante veremos qué es un fasor, y qué es una impedancia.

Para poder analizar el circuito fasorial todos los generadores deben tener la misma pulsación (la misma frecuencia). Recuerda la relación entre la frecuencia y la pulsación:

En caso de que existan generadores con distinta pulsación tendremos que aplicar **superposición**

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{donde } T \text{ es el periodo de la señal sinusoidal}$$

Definición de fasor

Antes de nada, es importante dejar claro que **un fasor es un número complejo.**

En el caso de un generador tipo coseno obtendremos su fasor asociado de la siguiente forma:

$$e_g(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left[A\cos(\omega t + \varphi) + jA\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)\right] =$$
$$= \mathrm{Re}\left[A\left(\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)\right)\right] = \mathrm{Re}\left[Ae^{j(\omega t + \varphi)}\right] =$$
$$= \mathrm{Re}\left[Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[E_g\,e^{j\omega t}\right]$$

Resumiendo, podemos concluir que:

Para una fuente $e_g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ su **fasor** asociado siempre es $E_g = Ae^{j\varphi}$

Recuerda que:
$\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

En caso de que la función sea de tipo seno la transformaremos a coseno de la siguiente manera:

$$e_g(t) = A\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(\omega t + \varphi') \quad \text{con} \quad \varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

Impedancias de los elementos pasivos en RPS

Sean V e I los fasores asociados a las señales sinusoidales $v(t)$ e $i(t)$ (tensión y corriente sobre el elemento pasivo correspondiente). Definimos la **impedancia** Z de un elemento pasivo en un circuito en RPS como:

A veces interesa trabajar con **admitancias**. La admitancia de un elemento pasivo es el inverso de su impedancia:
$Y = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z}\ (\Omega^{-1})$

$$Z = \frac{V}{I} \quad (\Omega)$$

Muy importante: **La impedancia es un número complejo** en general, al ser el cociente de dos números complejos

Impedancia de la resistencia: $Z = \frac{V}{I} = R$

Impedancia del condensador: $Z = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$

Impedancia de la bobina: $Z = \frac{V}{I} = j\omega L$

Asociación de impedancias

Fíjate que la asociación de impedancias en un circuito fasorial cumple las mismas relaciones que la asociación de resistencias. De hecho en un circuito fasorial se trata a las impedancias de la misma manera que en el tema 2 tratábamos a las resistencias.

La impedancia equivalente de la asociación en serie de N impedancias, es:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$$

La impedancia equivalente a la asociación en paralelo de N impedancias, cumple la regla:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_N}$$ y en particular para sólo 2 impedancias: $Z_1 // Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

Análisis de circuitos fasoriales

Estos circuitos en que las tensiones y corrientes se han sustituido por sus fasores asociados, y los elementos pasivos por sus impedancias asociadas, se analizan exactamente igual a cómo hicimos con los circuitos con sólo generadores y resistencias, y es aplicable todo lo que aprendimos entonces (Tema 2). El único inconveniente es que al ser los fasores y las impedancias números complejos, en las cuentas aparecen números complejos.

Una vez resuelto el circuito fasorial (obtenemos el fasor de la tensión o corriente que nos pidan) obtendremos las señales deseadas en el dominio temporal aplicando la relación entre un fasor y la señal temporal que tiene asociada:

$$e(t) = \mathrm{Re}\left[E\, e^{j\omega t}\right]$$

Esto es lo que se utiliza en la práctica

Para un fasor de la forma $E = Ae^{j\varphi}$ su señal en el tiempo asociada es: $e(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Observaciones

Fíjate que aunque haya que trabajar con complejos, resulta más cómodo que tener que resolver ecuaciones diferenciales. Pero hay que recordar que este método sólo es válido para circuitos con generadores sinusoidales, y además sólo nos da información sobre el régimen permanente, y no sobre el régimen transitorio (intervalo de tiempo desde que se produce el último cambio en el circuito hasta que las tensiones y corrientes se "estabilizan", ya que una vez estabilizadas el circuito está en régimen permanente).

En resumen:

- Circuitos con sólo generadores y resistencias se analizan siempre en el dominio del tiempo independientemente de cómo sean los generadores (Tema 2)
- Circuitos donde aparezcan bobinas y condensadores y donde nos interese el régimen transitorio, se analizan en el domino del tiempo y aparecerán ecuaciones diferenciales (Tema 3)
- Circuitos con condensadores y bobinas donde los generadores sean sinusoidales, y sólo nos interese obtener las variables del circuito en régimen permanente, se analizan usando el circuito fasorial asociado y obteniendo después la señal deseada en el dominio del tiempo usando la relación entre el fasor de la señal y la señal en el dominio del tiempo (Tema 4)

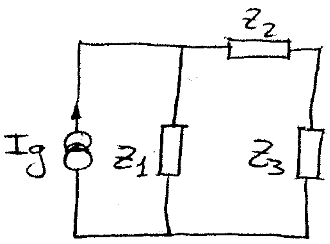
Estos métodos sólo sirven en circuitos fasoriales (tema 4) o en circuitos con sólo generadores y resistencias (tema 2)

4.2 Análisis sistemático de circuitos

En general se puede afirmar que un circuito que tiene B elementos y N nudos, tendrá:

- N – 1 ecuaciones de nudo linealmente independientes, que se pueden obtener usando las leyes de Kirchoff de las corrientes.
- B – N + 1 mallas independientes, de las que podemos obtener B – N + 1 ecuaciones de malla independientes aplicando las leyes de Kirchoff de las tensiones.

Por ejemplo el circuito de la figura:



$N = 3$ nudos $\Rightarrow N - 1 = 2$
2 ecuaciones de nudo independientes
$B = 4$ elementos $\Rightarrow B - N + 1 = 2$
2 ecuaciones de malla independientes

Existen dos métodos de análisis sistemático de circuitos, que permiten resolver de manera mecánica cualquier circuito. Las desventajas de estos métodos es que son poco intuitivos (el significado físico de lo que se está haciendo queda algo oculto), y, además en muchas ocasiones las operaciones requeridas para resolver los sistemas de ecuaciones que se obtienen son bastante tediosas. En cualquier caso es un método ideal para que lo usen los programas de ordenador que resuelven circuitos, ya que es sistemático y mecánico.

Método sistemático de análisis por nudos

Los pasos a seguir son:

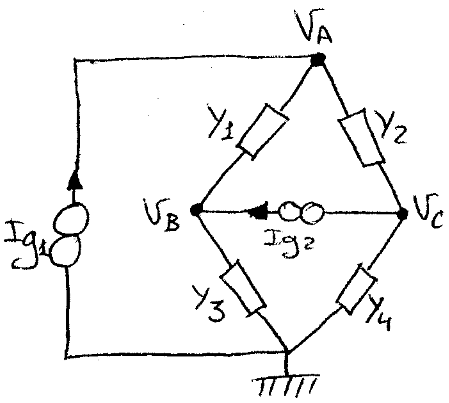
Fíjate que una vez conozcamos las tensiones en todos los nudos, será muy sencillo calcular la tensión o corriente en cualquier elemento del circuito. Por eso se dice que las tensiones en los nudos son variables generadoras.

- Se debe tomar un nudo de referencia (masa) al que se le asigna un valor de tensión de 0 voltios.
- Al resto de los nudos del circuito se les asigna una tensión (incógnita).
- La ecuación genérica del nudo i-ésimo será:

$$V_i \sum \text{Admitancias conectadas al nudo i} - \sum_{i \neq j} V_j \cdot \text{Admitancias entre los nudos i y j} = \sum \text{Corrientes que } \underline{\text{entran}} \text{ al nudo i (generadores)}$$

Se puede ver en el siguiente ejemplo:

$N = 4 \Rightarrow 3$ ecuaciones de nudo indep.



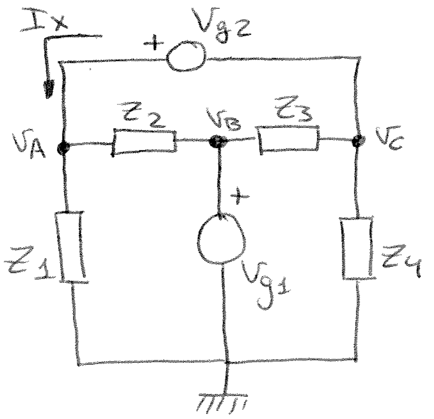
Nudo A: $V_A(Y_1+Y_2) - V_B Y_1 - V_C Y_2 = I_{g1}$

Nudo B: $V_B(Y_1+Y_3) - V_A Y_1 - 0 \cdot Y_3 = I_{g2}$

Nudo C: $V_C(Y_2+Y_4) - V_A Y_2 - 0 \cdot Y_4 = -I_{g2}$

sistema $\begin{cases} 3 \text{ ecs} \\ 3 \text{ incóg} \end{cases}$

Si en el circuito hay generadores de tensión, hay que tener un poco más de cuidado, como se ve en el siguiente ejemplo:



Nudo A: $V_A\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right) - V_B\frac{1}{Z_2} - 0\cdot\frac{1}{Z_1} = I_x$

Nudo B: $V_B = V_{g1}$

Nudo C: $V_C\left(\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right) - V_B\frac{1}{Z_3} - 0\,\frac{1}{Z_4} = -I_x$

extra: $V_A - V_C = V_{g2}$

sistema $\begin{cases} 4 \text{ ecuaciones} \\ 4 \text{ incógnitas} \end{cases}$

N = 4 nudos
N - 1 = 3 ec. indep.

Método sistemático de análisis por mallas

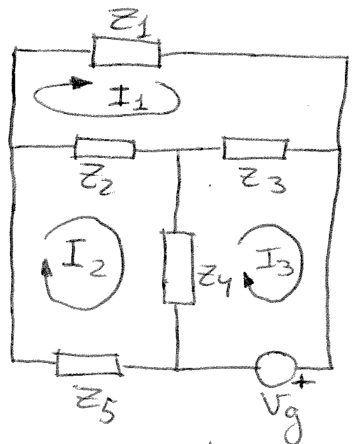
Los pasos a seguir son:

Fíjate que una vez conozcamos las "corrientes de malla", será muy sencillo calcular la tensión o corriente en cualquier elemento del circuito. Por eso se dice que las corrientes de malla son variables generadoras

- Se asigna a cada malla una "corriente de malla" (corriente circulatoria). Todas deben escogerse en el mismo sentido (todas a derechas o todas a izquierdas).
- La ecuación genérica de la malla n-ésima será:

$$I_n \sum_j Z_j \ \text{en la malla n} - \sum_{\substack{\text{resto}\\\text{mallas}\\\text{adyac.}}} I_m \cdot Z_k \ \text{(comunes a las mallas m y n)} = \sum \underline{\text{elevaciones}} \text{ de tensión (generadores)}$$

Se puede ver en el siguiente ejemplo:



malla 1: $I_1(Z_1+Z_2+Z_3) - I_2 Z_2 - I_3 Z_3 = 0$

malla 2: $I_2(Z_5+Z_4+Z_2) - I_1 Z_2 - I_3 Z_4 = 0$

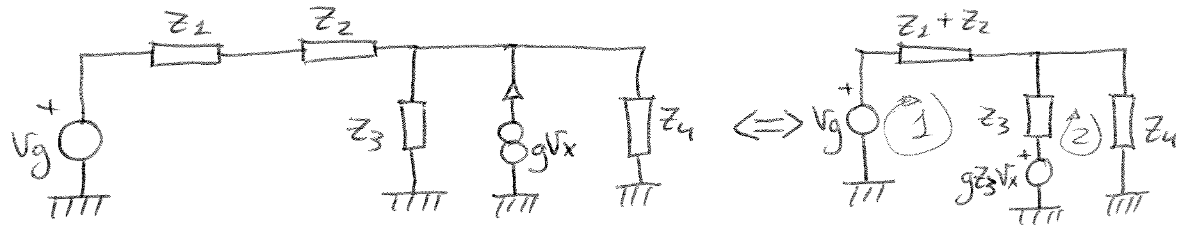
malla 3: $I_3(Z_3+Z_4) - I_1 Z_3 - I_2 Z_4 = -V_g$

sistema $\begin{cases} 3 \text{ ecuaciones} \\ 3 \text{ incógnitas} \end{cases}$

B = 6 elementos
N = 4 nudos
B - N + 1 = 3
3 ecuaciones de malla independientes

Si en el circuito hay generadores de corriente, hay que tener un poco más de cuidado, como se observa en los siguientes ejemplos:

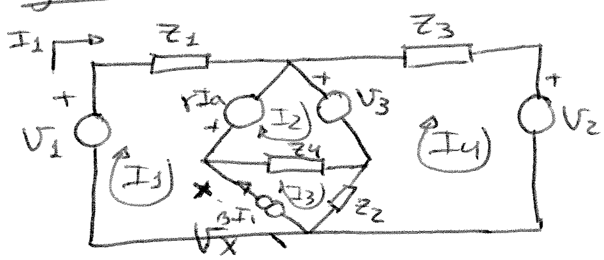
ej1)



$N = 5$ nudos
$B = 6$ elementos } $B - N + 1 = 2$ ec. malla indep.

malla 1: $I_1(Z_1 + Z_2 + Z_3) - I_2 Z_3 = V_g - g Z_3 V_x$
malla 2: $I_2(Z_3 + Z_4) - I_1 Z_3 = g V_x Z_3$
ec. extra: $V_x = Z_2 I_1$
} 3 ec. 3 incóg.

ej 2)



malla 1: $I_1 Z_1 = V_1 + rI_a - V_x$
malla 2: $I_2 Z_4 - I_3 Z_4 = -rI_a - V_3$
malla 3: $I_3(Z_2 + Z_4) - I_2 Z_4 - I_4 Z_2 = V_x$
malla 4: $I_4(Z_2 + Z_3) - I_3 Z_2 = V_3 - V_2$
extra: $\beta I_1 = I_3 - I_1$
extra': $I_a = I_3 - I_2$
} 6 ec. 6 incóg.

TEMA 5:BOBINAS ACOPLADAS. TRANSFORMADORES

5.1 Bobinas acopladas

Hasta ahora las bobinas con las que hemos estudiado trabajaban de forma independiente, es decir la existencia de otras bobinas en el mismo circuito no afectaba a una bobina concreta. Sin embargo esto no es cierto en la realidad ya que, en los circuitos en los que hay más de una bobina existe influencia de unas bobinas sobre otras. Cuando en un problema quieren que tengamos en cuenta el acoplamiento magnético nos lo indicarán dibujando un punto en una de las bornas de la bobina.

La caída de tensión en una bobina (la llamamos bobina 1) acoplada con otras $2, \ldots, k$ bobinas vendrá dada por la siguiente expresión en el dominio del tiempo:

En el caso de bobinas sin acoplamiento magnético (sin punto) la tensión viene dada exclusivamente por el primer término

$$v_{L1}(t) = \underbrace{L_1 \frac{di_1(t)}{dt}}_{\substack{\textit{tension} \\ \textit{autoinducida}}} \pm \underbrace{M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}}_{\substack{\textit{tension inducida} \\ \textit{por la bobina 2} \\ \textit{sobre} \text{ la bobina 1}}} \pm \ldots \pm \underbrace{M_{1k} \frac{di_k(t)}{dt}}_{\substack{\textit{tension inducida} \\ \textit{por la bobina k} \\ \textit{sobre} \text{ la bobina 1}}}$$

Y en trabajando con fasores en RPS:

Esto será lo que utilicemos habitualmente, ya que este tipo de problemas nos los suelen plantear en RPS

$$\boxed{V_{L1} = \underbrace{j\omega L_1 I_1}_{\substack{\textit{tension} \\ \textit{autoinducida}}} \pm \underbrace{j\omega M_{12} I_2}_{\substack{\textit{tension inducida} \\ \textit{por la bobina 2} \\ \textit{sobre} \text{ la bobina 1}}} \pm \ldots \pm \underbrace{j\omega M_{1k} I_k}_{\substack{\textit{tension inducida} \\ \textit{por la bobina k} \\ \textit{sobre} \text{ la bobina 1}}}}$$

Estas dos expresiones no se suelen utilizar en la práctica ya que L suele ser dato y para M existe una fórmula práctica más abajo N es el número de espiras de la bobina

$$L_i = \frac{N_i \phi_{ii}}{I_i}$$

Autoinductancia de la bobina i (Se mide en Henrios, H).

$$M_{i1} = \frac{N_1 \phi_{1i}}{I_i}$$ Inductancia mutua de la bobina i sobre la bobina 1 (También se mide en H).

Además para dos bobinas i y j cualesquiera se cumple que su inductancia mutua en la misma, es decir: $M_{ij} = M_{ji}$. La inductancia mutua entre dos bobinas se calcula de forma práctica como:

Esta es la fórmula práctica para calcular M_{ij}

$$\boxed{M_{ij} = K\sqrt{L_i L_j}}$$

siendo:

K suele ser dato por lo que esta fórmula tampoco se utiliza

$K = \sqrt{K_i K_j}$ Constante de acoplamiento entre dos bobinas i y j (si $K = 1$ entonces decimos acoplamiento perfecto).

Regla del punto

Una vez calculada la magnitud de cada término de V_L (tensión autoinducida y tensiones inducidas) falta por determinar el signo de cada una de las tensiones inducidas por las otras bobinas (los signos $\pm$ que están puestos en la fórmula). Pues bien, para determinar cada uno de estos signos se utiliza la denominada regla del punto que se enuncia como sigue:

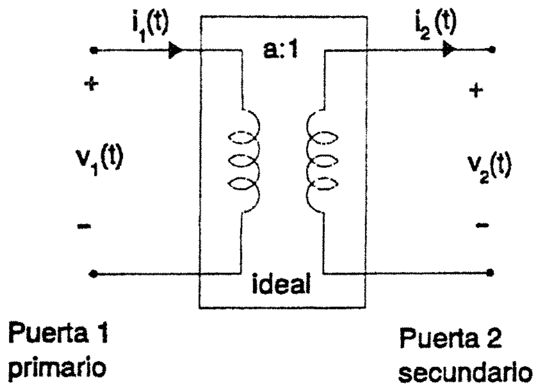
"La tensión inducida por una corriente tiene el signo positivo (+) en la borna homóloga por la que entra la corriente inductora"

Dicho de forma coloquial: por donde entre la corriente en la "otra" bobina (por el punto o por el no punto) es donde tenemos que poner el signo más (+) de la tensión inducida en "nuestra" bobina.

5.2 Transformador ideal

5.2.1 Definición

Ahora vamos a definir un nuevo elemento circuital que llamaremos **transformador ideal** y cuyo símbolo y nomenclatura vienen representados en la siguiente figura:



El transformador ideal es un elemento de "dos pares de bornas" o "dos puertas" llamadas **primario y secundario.** Por tanto involucra a cuatro variables circuitales. Tomando como referencias de tensión y corriente las que se muestran en la figura anterior se cumplen las relaciones siguientes:

Importante:
Estas relaciones se siguen cumpliendo en Régimen Permanente Sinusoidal (Fasores)

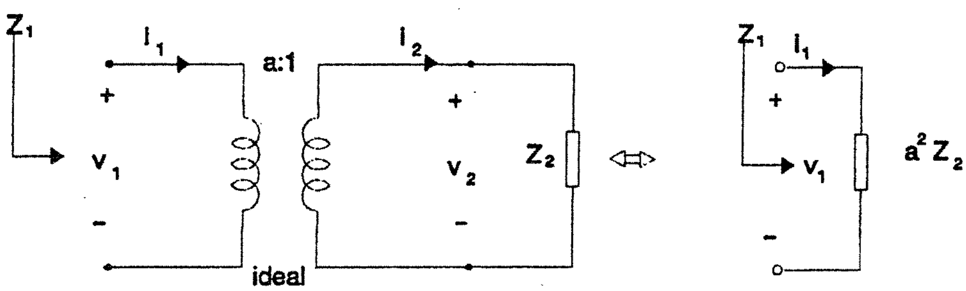
$$\boxed{\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = a} \quad \boxed{\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{1}{a}} \; ; \qquad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Fijate que n puede ser cualquier número real pero:
$a \neq 0 \quad y \quad a \neq \infty$

La constante real a recibe el nombre de **relación de transformación.**
Si cambiamos el sentido de circulación de i_1 e i_2 las relaciones se siguen verificando, pero el primario pasa a ser secundario y viceversa..

5.2.2 Transformación del nivel de impedancia

Supongamos un transformador ideal en cuyo secundario se conecta una impedancia Z_2. El circuito equivalente visto desde el primario, sería una impedancia $\boxed{Z_1 = a^2 Z_2}$:

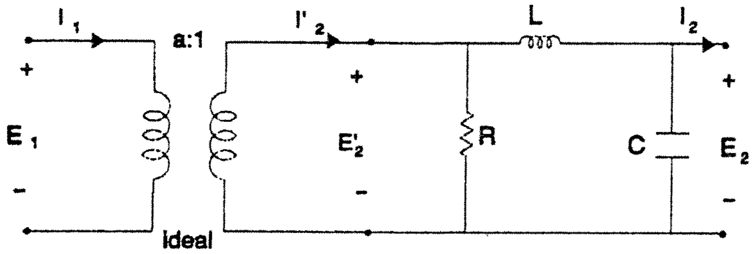


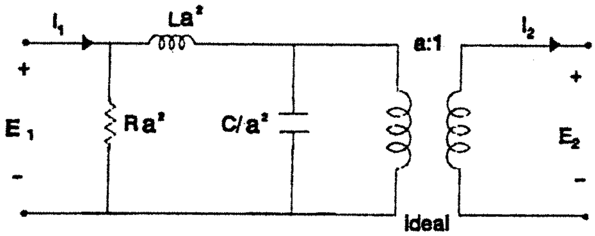
En efecto, suponiendo RPS (fasores) tenemos que:

$$V_1 = aV_2 \qquad I_1 = \frac{1}{a} I_2 \qquad \text{de donde} \qquad Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{aV_2}{\frac{1}{a} I_2} = a^2 \frac{V_2}{I_2} = a^2 Z_2$$

5.2.3 Transferencia de impedancias al primario

Basándonos en las relaciones entre las tensiones y las corrientes de un transformador ideal es inmediato demostrar la equivalencia entre las dos estructuras siguientes:





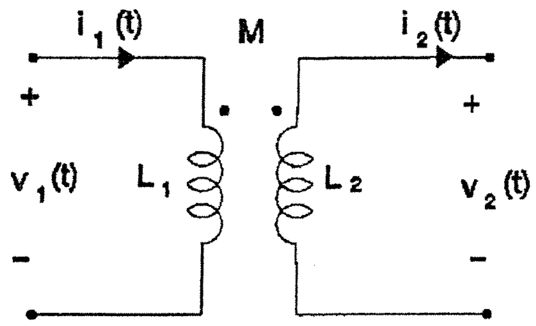
habiéndose pasado las impedancias del secundario al primario del transformador, previa multiplicación por la relación de transformación al cuadrado.

Obsérvese que R y L se multiplican por a^2 pero C se divide entre a^2. De todas maneras, trabajando con impedancias, es mejor pensarlo de la siguiente manera, que es mas fácil de recordar:

> Al pasar impedancias del secundario al primario de un transformador ideal, el valor de dichas impedancias se multiplica por a^2 (relación de transformación del transformador ideal)
>
> $$\begin{aligned} R &\rightarrow a^2 R \\ j\omega L &\rightarrow j\omega a^2 L \\ \frac{1}{j\omega C} &\rightarrow \frac{a^2}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega \frac{C}{a^2}} \end{aligned}$$

5.3 Transformador real

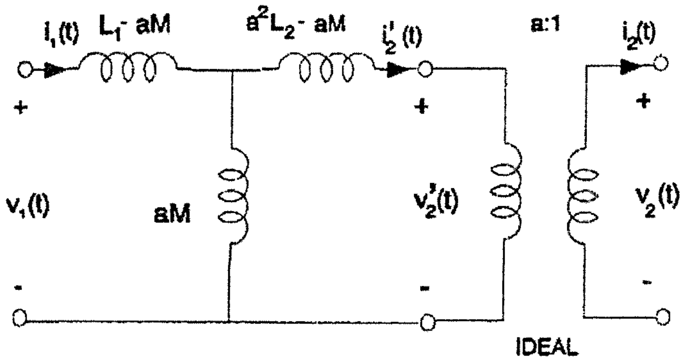
Un transformador real de dos arrollamientos es el conjunto formado por dos bobinas acopladas magnéticamente, pudiendo acceder a cada una de ellas por un par de terminales, tal como se muestra en la siguiente figura:



Donde M es la inductancia mutua entre las bobinas que, como ya sabemos, viene definida por $M = K\sqrt{L_1 L_2}$ donde K es la constante de acoplamiento.

Se puede demostrar que un transformador real se puede modelar mediante un transformador ideal y tres bobinas de la siguiente forma:

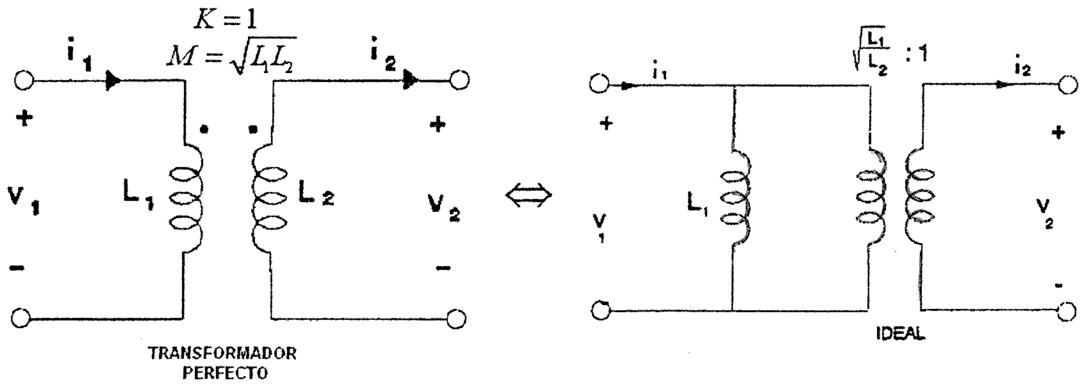
Circuito equivalente de un transformador real.



5.3.1 Transformador perfecto

Entre todos los transformadores reales nosotros solo vamos a estudiar un caso especial y es el que sucede cuando la constante de acoplamiento entre las bobinas es $K = 1$. En este caso decimos que tenemos un **transformador perfecto** y el circuito equivalente anterior queda simplificado de la siguiente manera:

Esto es lo que realmente nos interesa



Es decir, el transformador perfecto se puede modelar como un transformador ideal con $a = \sqrt{L_1 / L_2}$ en "paralelo" con la bobina del primario L_1.

TEMA 6: POTENCIA, ENERGÍA Y RESONANCIA .

6.1 Definiciones

Para definir los conceptos de potencia y energía vamos a suponer siempre que los circuitos trabajan en Régimen Permanente Sinusoidal (RPS). Por tanto, la corriente y la tensión vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \theta) \qquad v(t) = V_0 \cos(\omega t + \psi)$$

donde $I = |I_0| e^{j\theta}$, $V = |V_0| e^{j\psi}$ serán los correspondientes fasores asociados a la corriente y a la tensión.

Recuerda que w es la pulsación y se mide en rad/s

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sabemos que la expresiones generales de la potencia instánea y potencia media son :

$$\boxed{p(t) = v(t) \cdot i(t)} \qquad \boxed{P_{md} = \frac{1}{T} \int_T p(t)\, dt}$$

Veamos ahora como se particulariza en RPS para cada elemento circuital.

$$P_{med} = \frac{1}{2} Re[V^* I] = \frac{1}{2} Re[I^* Z^* I] = \frac{1}{2} Re[|I|^2 Z^*] =$$
$$= \frac{1}{2} Re[Z] \cdot |I|^2$$

Resistencia

La potencia instantánea en una resistencia es :

Al ser V un número complejo (fasor) las barras significan módulo.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{1}{2} |V| |I| \left(1 + \cos(2\omega t + \theta + \psi)\right)$$

Estas fórmulas para la potencia instantánea y media son aplicables a una impedancia Z cualquiera. Recuerda que una impedancia, en general es un número complejo.

La potencia media disipada en una resistencia viene dada por: $\boxed{P_{md} = \frac{1}{2} \frac{|V|^2}{Re[Z]} = \frac{1}{2} |I|^2 Re[Z]}$

La energía media entregada a una resistencia en un periodo T se expresa: $W_{md} = P_{md} T$

$\boxed{\begin{array}{l} Z = R + jX \text{ donde:} \\ R = Re[Z] \text{ resistencia} \\ X = Im[Z] \text{ reactancia} \end{array}}$

Inductancia

La potencia instantánea en una inductancia es :

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = L \frac{di(t)}{dt} \cdot i(t) = -\frac{1}{2} L\omega |I|^2 \operatorname{sen}(2\omega t + 2\theta)$$

Recuerda de física la relación entre energía instantánea W(t) y potencia instantánea p(t):

$$\boxed{p(t) = \frac{dW(t)}{dt}}$$

La potencia media de una inductancia es cero: $P_{md} = 0$

Es decir, por término medio, la inductancia no absorbe ni disipa potencia. Solo almacena energía para luego devolverla.

La energía magnética instantánea en una inductancia viene expresada por:

$$\boxed{T(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)}$$

A la energía en una bobina se la suele denotar con la letra T en vez de W

y su valor medio:

$$\boxed{T_{md} = \frac{1}{T} \int_T T(t)\, dt = \frac{1}{4} L |I|^2}$$

Capacidad

La potencia instantánea en una capacidad es :

$$p(t) = v(t)\cdot i(t) = -\frac{1}{2}C\omega\,|V|^2\,\mathrm{sen}(2\omega t + 2\psi)$$

La potencia media de una capacidad es cero: $P_{md} = 0$

Al igual que la inductancia, la capacidad no absorbe ni disipa potencia. Solo almacena energía que, luego, devuelve al circuito al que está conectada.

A la energía en una capacidad se la suele denotar con la letra U en vez de W

La energía eléctrica instantánea almacenada en una capacidad viene expresada por:

$$\boxed{U(t) = \frac{1}{2}C\,v^2(t)}$$

y su valor medio:

$$\boxed{U_{md} = \frac{1}{T}\int_T U(t)\,dt = \frac{1}{4}C|V|^2}$$

6.2 Potencias activa, reactiva y vectorial

Una red RLC es la formada por resistencias bobinas y condensadores

En el apartado anterior hemos visto cual es la potencia y la energía de cada elemento por separado. Veamos ahora como estudiar una red RLC de forma conjunta.
Para ello supongamos una red RLC en Régimen Permanente Sinusoidal y vista desde unos terminales AB. Supongamos también que la tensión y la corriente en las bornas AB vienen definidas otra vez por:

$$i(t) = I_0\cos(\omega t + \theta) \qquad v(t) = V_0\cos(\omega t + \psi)$$

donde $I = |I_0|e^{j\theta}$, $V = |V_0|e^{j\psi}$ serán los correspondientes fasores asociados a la corriente y a la tensión.

La potencia instantánea que recibe el circuito es entonces:

$$p(t) = v(t)\cdot i(t) = P_{md} + \frac{1}{2}|V||I|\cos(2\omega t + \theta + \psi)$$

Donde hace falta definir los siguientes conceptos:

Es lo mismo hablar de potencia activa, potencia media o potencia disipada. Se mide en W (vatios)

Potencia activa : $\boxed{P_{md} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[V^*I] = \frac{1}{2}|V||I|\cos\varphi}$

La potencia reactiva se mide en VAR (voltio-amperios reactivos)

Potencia reactiva: $\boxed{Q_{md} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}[V^*I] = \frac{1}{2}|V||I|\mathrm{sen}\,\varphi}$ ó $\boxed{Q_{md} = 2\omega(U_{md} - T_{md})}$

La potencia vectorial se mide en VA (voltio-amperios)

Potencia vectorial: $\boxed{\frac{1}{2}V^*I = P_{md} + jQ_{md}}$

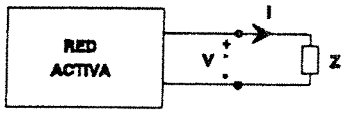
Fíjate que las potencias activas y reactivas son números reales, pero la potencia vectorial es un número complejo

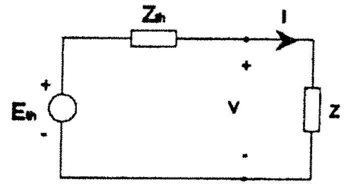
Factor de potencia: $\boxed{\cos\varphi = \cos(\theta - \psi)}$ donde $\theta = \arg I$ $\quad \psi = \arg V$

si $\varphi = 0$ entonces la potencia reactiva es nula, es decir, V e I están en fase.

6.3 Teorema de la Máxima Transferencia de Energía

Consideremos un circuito activo conectado a una impedancia de carga Z. Se trata de determinar las condiciones bajo las cuales el dipolo activo (red activa de dos bornas como la del dibujo) entrega la máxima potencia activa (potencia media) P_{md} a la impedancia Z, conectada en sus bornas. Para ello, calculamos el circuito equivalente de Thevenin del circuito activo, tal y como se indica en la figura de la derecha.





Recuerda que la impedancia es un número complejo. El asterisco se refiere al conjugado del complejo

Entonces, podemos afirmar que:
"La máxima transferencia de potencia de un dipolo activo a una carga conectada a sus bornas, se obtiene cuando la impedancia de carga es la conjugada de la impedancia del dipolo activo".
Es decir:

$$\boxed{Z(j\omega) = Z_{th}^{*}(j\omega)}$$

En ocasiones es más sencillo operar con admitancias

Recuerda que la admitancia es la inversa de la impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

y en general es también un número complejo.

Equivalentemente, también se puede enunciar el teorema para admitancias diciendo que "La máxima transferencia de potencia de un dipolo activo a una carga conectada a sus bornas, se obtiene cuando la admitancia de carga es la conjugada de la admitancia del dipolo activo".
Es decir:

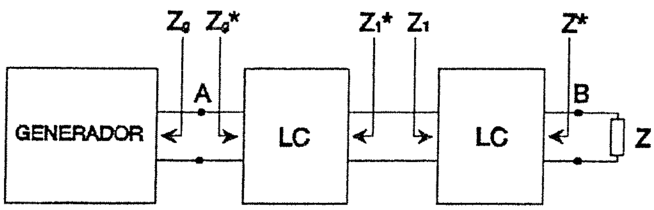
$$Y(j\omega) = Y_{th}^{*}(j\omega)$$

Cuando se verifican las anteriores condiciones (que son equivalentes) se dice que existe **adaptación conjugada de impedancias** entre generador (dipolo activo) y carga.

En general no es posible la adaptación de impedancias a todas las pulsaciones (frecuencias). Si se ha conseguido la adaptación conjugada a una determinada pulsación (frecuencia), no está garantizada la adaptación para otras frecuencias.

6.4 Adaptación de impedancias

Es frecuente encontrase con que al conectar una carga a un generador real, no se cumpla la adaptación conjugada de impedancias. Por consiguiente, es necesario intercalar circuitos (estructuras L-C puesto que no disipan potencia) con el fin de forzar la adaptación conjugada a algunas frecuencias, tal como se señala en la siguiente figura . Se trata de que en B, mirando hacia la izquierda se vea una impedancia Z^* que es la conjugada de Z.



Teorema de Everitt

El teorema de Everitt afirma que:

"En una estructura en cascada (como la de la anterior figura) si conseguimos adaptación de impedancias entre dos puntos cualesquiera entonces en todos los demás puntos también habrá adaptación conjugada"

6.5 Resonancia

En la mayor parte del tiempo el generador suministra potencia a la red RLC. Sin embargo, hay intervalos en los que el sentido del flujo de energía se invierte, recibiendo el generador parte de la energía (energía que retorna al generador), es decir $p(t) < 0$.Una situación muy interesante se produce cuando $\cos\varphi = 1$. En este caso no hay retorno de energía hacia el generador, solo hay un sentido de suministro de energía: del generador hacia el circuito.

Además, cuando $\cos\varphi = 1$, la potencia reactiva es nula (es decir, $Q_{md} = 0$). En esta situación se dice que el dipolo está en **resonancia**.

En estas condiciones, de la expresión $Q_{md} = 2\omega(U_{md} - T_{md})$ se deduce que la energía eléctrica media almacenada en el circuito es idéntica a la energía magnética media almacenada, $U_{md} = T_{md}$.
Por último, cuando el dipolo está en resonancia la impedancia es resistiva (la reactancia X es nula), o sea, la impedancia es un número real (parte imaginaria de la impedancia nula).

Recuerda que la impedancia y la admitancia en general son números complejos:

$Z = R + jX$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = G + jB$$

donde:
$G = Re[Y]$ conductancia

$B = Im[Y]$ susceptancia

Resumiendo todo lo anterior, tenemos varias definiciones equivalentes de **resonancia** para un circuito RLC (formado por R's, L's y C's):

- $Q_{md} = 0$
- $U_{md} = T_{md}$
- Impedancia real o Reactancia nula, $\mathrm{Im}(Z) = 0$
- Admitancia real o Susceptancia nula, $\mathrm{Im}(Y) = 0$
- $\cos(\varphi) = 1 \rightarrow \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \theta - \psi \rightarrow \theta = \psi$

Por último hacer notar que la resonancia solo se alcanza a una determinada pulsación ω_0 que llamamos **pulsación de resonancia**, que normalmente nos piden calcular.

Función de transferencia

La función de transferencia (en su expresión canónica) se define como:

$$\boxed{T(j\omega) = \frac{RESPUESTA}{EXCITACION}} = \boxed{\frac{j\omega k}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\dfrac{\omega_0}{Q}}}$$

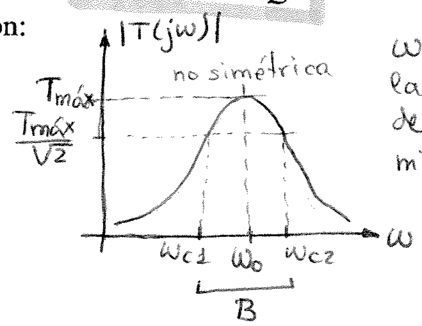
Donde k es una constante cualquiera

donde los parámetros que intervienen son:

$\omega_0 \equiv$ Pulsación de resonancia (rad/s)

$Q \equiv$ Factor de calidad (adim.)

$\boxed{B_\omega = \frac{\omega_0}{Q}} \equiv$ Ancho de banda (rad/s)



ω_{c1} y ω_{c2} son las pulsaciones de corte a potencia mitad (ó −3dB)

Casos particulares importantes

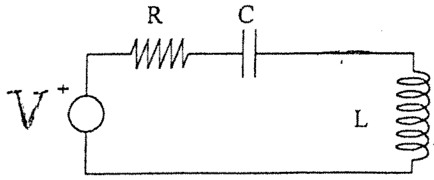
- <u>Circuito RLC serie</u>
  En este caso la función de transferencia viene dada por la admitancia del circuito:
  $$\boxed{T(j\omega) = \frac{I}{V} = Y(j\omega)}$$
- <u>Circuito RLC paralelo</u>
  En este caso la función de transferencia viene dada por la impedancia del circuito:
  $$\boxed{T(j\omega) = \frac{V}{I} = Z(j\omega)}$$

Casos particulares importantes

Describimos ahora con detalle los casos particulares enunciados en la página anterior por su especial relevancia y su frecuente uso práctico:

Circuito RLC serie

En este caso la función de transferencia viene dada por la admitancia del circuito:



$$T(j\omega) = \frac{I}{V} = Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{j\omega CR - \omega^2 LC + 1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{j\omega CR - \omega^2 LC + 1} = \frac{\dfrac{j\omega C}{LC}}{\dfrac{j\omega CR - \omega^2 LC + 1}{LC}} = \frac{j\omega \dfrac{1}{L}}{j\omega \dfrac{R}{L} - \omega^2 + \dfrac{1}{LC}}$$

Ahora, identificando en: $T(j\omega) = \dfrac{j\omega \dfrac{1}{L}}{\dfrac{1}{LC} - \omega^2 + j\omega \dfrac{R}{L}} = \dfrac{j\omega k}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \dfrac{\omega_0}{Q}}$

Recuerda que:

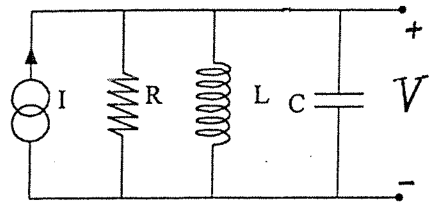
$$B_\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Obtenemos que:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad B_\omega = \frac{R}{L} \qquad Q = \frac{\omega_0}{B_\omega} = \frac{1/\sqrt{LC}}{R/L} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Circuito RLC paralelo

En este caso la función de transferencia viene dada por la impedancia del circuito:



$$T(j\omega) = \frac{V}{I} = Z(j\omega) = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{j\omega L} + j\omega C} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{j\omega L + R - \omega^2 CLR}{j\omega LR}} = \frac{j\omega LR}{j\omega L + R - \omega^2 CLR} = \frac{\dfrac{j\omega LR}{CLR}}{\dfrac{j\omega L + R - \omega^2 CLR}{CLR}} = \frac{j\omega \dfrac{1}{C}}{j\omega \dfrac{1}{CR} + \dfrac{1}{CL} - \omega^2}$$

Ahora, identificando en: $T(j\omega) = \dfrac{j\omega \dfrac{1}{C}}{\dfrac{1}{LC} - \omega^2 + j\omega \dfrac{1}{CR}} = \dfrac{j\omega k}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \dfrac{\omega_0}{Q}}$

Recuerda que:

$$B_\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Obtenemos que:

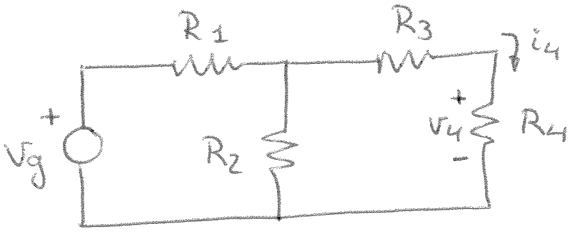
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad B_\omega = \frac{1}{RC} \qquad Q = \frac{\omega_0}{B_\omega} = \frac{1/\sqrt{LC}}{1/CR} = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

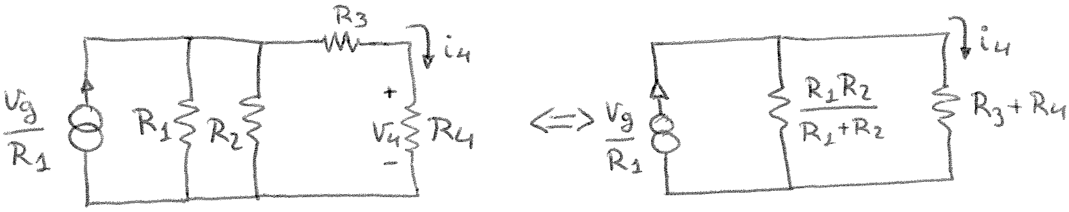
IACR
Ejercicios de clase

Tema 2º Análisis elemental de circuitos

Ejercicio 2.1

Obtener V_4 e i_4 aplicando equivalencia de generadores y divisores de tensión y/o corriente en el siguiente circuito:



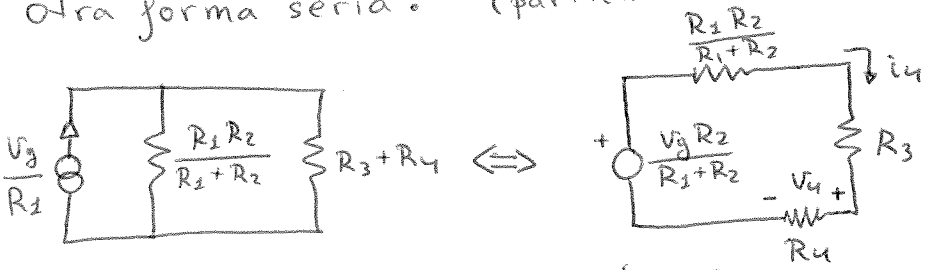


hallamos i_4 por división de corriente:

$$i_4 = \frac{V_g}{R_1} \cdot \frac{(R_3+R_4)^{-1}}{\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^{-1} + (R_3+R_4)^{-1}} = V_g \frac{1}{\cancel{R_1}} \cdot \frac{1}{\cancel{(R_3+R_4)}} \cdot \frac{1}{\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}{\cancel{R_1}R_2\cancel{(R_3+R_4)}}} =$$

$$\boxed{i_4 = V_g R_2 \cdot \frac{1}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}} \; ; \; \boxed{V_4 = R_4 \cdot i_4}$$

otra forma sería: (partiendo del último dibujo)



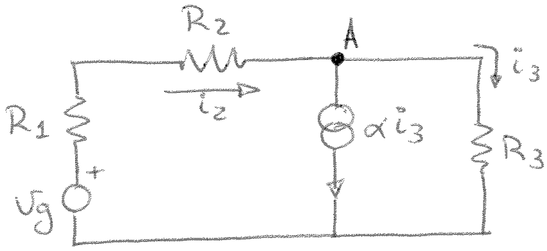
hallamos V_4 por divisor de tensión:

$$V_4 = \frac{V_g R_2}{R_1+R_2} \cdot R_4 \cdot \frac{1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3 + R_4} = \frac{V_g R_2 R_4}{R_1+R_2} \cdot \frac{1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2} + \frac{R_4(R_1+R_2)}{R_1+R_2}}$$

$$\boxed{V_4 = \frac{V_g R_2 R_4}{R_1R_2 + (R_1+R_2)(R_3+R_4)}} \; ; \; \boxed{\frac{V_4}{R_4} = i_4}$$

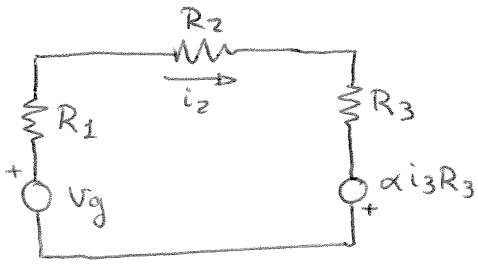
Ejercicio 2.2

Calcule el valor de i_2 en el siguiente circuito:

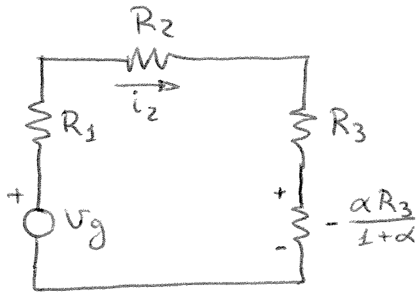


Hay que tener cuidado con las variables de control cuando se aplican transformaciones de generadores dependientes.
Se debe conservar la variable de control, o si se pierde, obtener una ecuación que la relacione con las variables que sí están en el circuito resultante de la transformación.

nudo A: $i_2 = \alpha i_3 + i_3 = i_3(1+\alpha) \Rightarrow i_3 = \dfrac{i_2}{1+\alpha}$



$\alpha i_3 R_3 = \alpha R_3 \dfrac{i_2}{1+\alpha}$



$$i_2 = \frac{V_2}{R_2}$$

hallamos V_2 por divisor de tensión:

$$V_2 = \frac{V_g R_2}{\underbrace{R_1 + R_2 + R_3 - \frac{\alpha R_3}{1+\alpha}}_{R_3\left(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) = R_3\left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha} - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}} = \frac{V_g R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_3}{1+\alpha}} \Rightarrow \boxed{i_2 = \frac{V_g}{R_1 + R_2 + \frac{R_3}{1+\alpha}}}$$

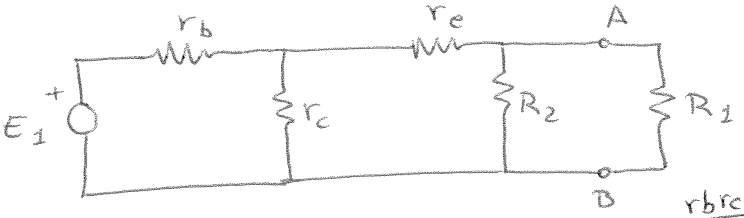
este cálculo también se puede hacer de otro modo:

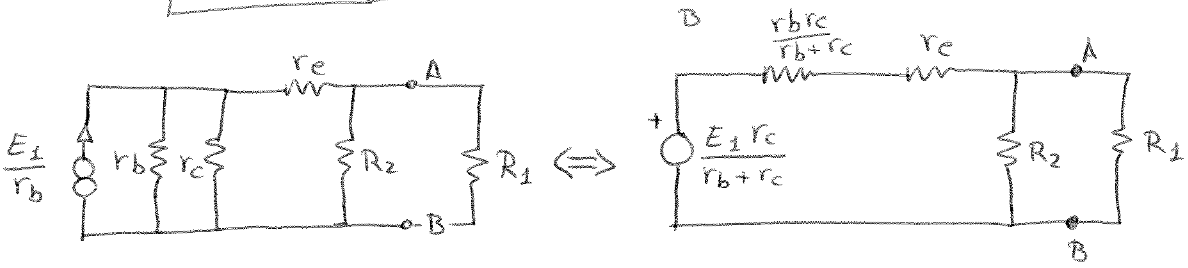
malla: $V_g - i_2 R_1 - i_2 R_2 - i_2 \dfrac{R_3}{1+\alpha} = 0$; $V_g = i_2\left(R_1 + R_2 + \dfrac{R_3}{1+\alpha}\right)$

$$\boxed{i_2 = \frac{V_g}{R_1 + R_2 + \frac{R_3}{1+\alpha}}}$$

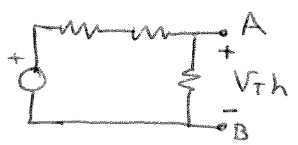
Ejercicio 2.3

Calcular el equivalente de Thevenin desde AB hacia la izquierda en el circuito de la figura:





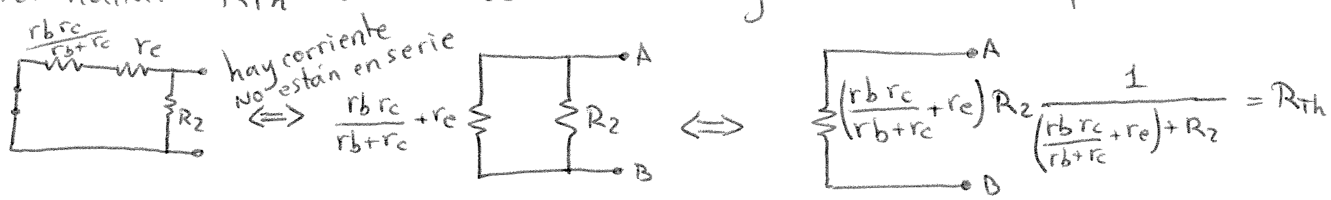
1) Para hallar V_{Th} dejamos AB en circuito abierto:



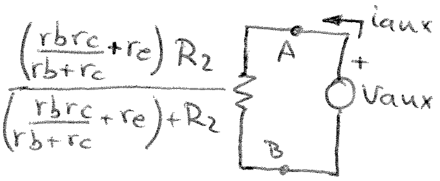
por divisor de tensión:

$$V_{Th} = \frac{E_1 r_c}{r_b+r_c} R_2 \cdot \frac{1}{\frac{r_b r_c}{r_b+r_c} + r_e + R_2}$$

3b) Para hallar R_{Th} desconectamos los generadores independientes:



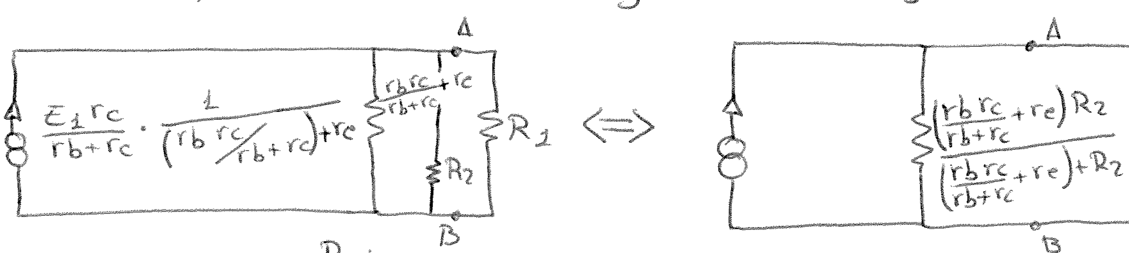
3c) Por curiosidad añadimos un generador auxiliar de tensión:

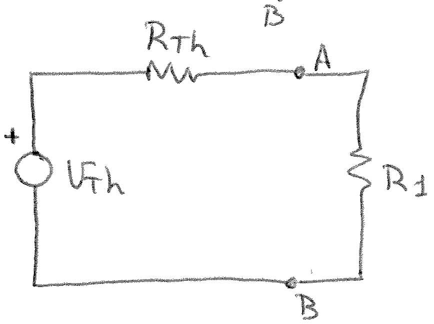


malla: $$\frac{\left(\frac{r_b r_c}{r_b+r_c}+r_e\right)R_2}{\left(\frac{r_b r_c}{r_b+r_c}+r_e\right)+R_2} i_{aux} = V_{aux}$$

$$R_{Th} = \frac{V_{aux}}{i_{aux}}$$

→ También podíamos haber seguido simplificando el circuito:





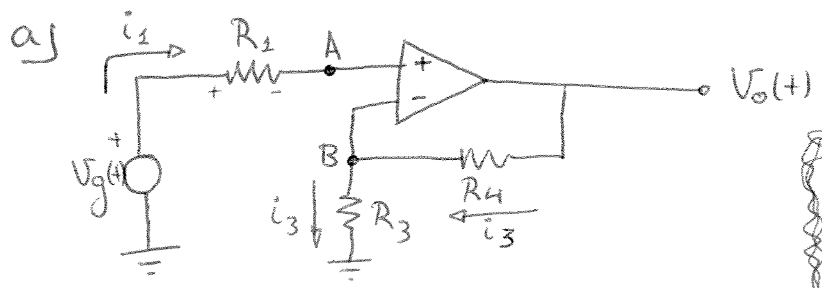
$$\boxed{R_{Th} = \frac{\left(\frac{r_b r_c}{r_b+r_c}+r_e\right)R_2}{\left(\frac{r_b r_c}{r_b+r_c}+r_e\right)+R_2}}$$

$$\boxed{V_{Th} = \frac{\frac{E_1 r_c}{r_b+r_c}}{\frac{r_b r_c}{r_b+r_c}+r_e} \cdot \frac{\left(\frac{r_b r_c}{r_b+r_c}+r_e\right)R_2}{\left(\frac{r_b r_c}{r_b+r_c}+r_e\right)+R_2}}$$

Ejercicio 2.5

Calcule la función de transferencia V_o/V_g de los circuitos:

a)

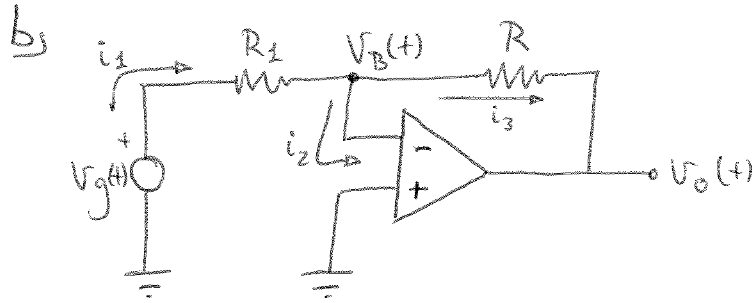


Función de un circuito con amplificador op.

ganancia $\begin{cases} >0 \Rightarrow \text{NO inversor} \\ <0 \Rightarrow \text{inversor} \\ =0 \Rightarrow \text{puta mierda} \end{cases}$

|ganancia| $\begin{cases} >1 \Rightarrow \text{amplificador} \\ <1 \Rightarrow \text{atenuador} \\ =1 \Rightarrow \text{búffer ó seguidor} \end{cases}$

b)



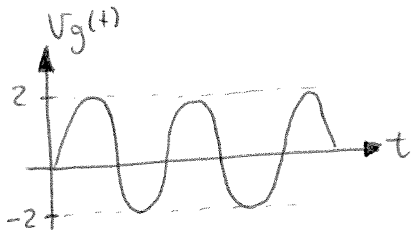
a) $i_1 = 0 \Rightarrow V_A = V_g - R_1 \cdot 0 \Rightarrow V_A = V_g$

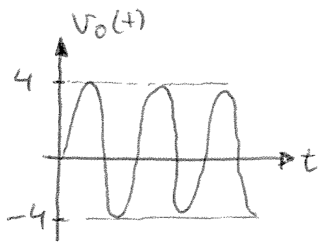
por divisor de tensión: $V_B = \dfrac{V_o R_3}{R_3 + R_4}$

entradas del amp. op: $V_A = V_B$

$$V_g = \frac{V_o R_3}{R_3+R_4} \; ; \quad \boxed{\frac{V_o}{V_g} = \frac{R_3+R_4}{R_3}} \text{ función transf.}$$

$$V_o = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) V_g$$





En este caso ...

ganancia: $1 + \frac{R_4}{R_3} > 0 \Rightarrow$ No inv.

|ganancia|: $1 + \frac{R_4}{R_3} > 1 \Rightarrow$ ampl.

Amplificador no inversor

b) entradas del amp. op.: $V_B = 0$; $i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_3$

$V_o = V_g - R_1 i_1 - R i_1 = V_g - i_1(R_1 + R)$

$V_B = 0 \Rightarrow V_o = -R i_3 = -R i_1$; $i_1 = \dfrac{-V_o}{R}$

$V_o = V_g + \dfrac{V_o}{R}(R_1 + R)$

$V_o = V_g + V_o + \dfrac{V_o R_1}{R}$

$$\boxed{\frac{V_o}{V_g} = \frac{-R}{R_1}} \text{ función transf.} \; ; \quad V_o = \frac{-R}{R_1} V_g \Rightarrow \frac{-R}{R_1} = \text{ganancia} < 0 \Rightarrow \text{inversor}$$

$$|\text{ganancia}| = \frac{R}{R_1} = \begin{cases} >1 \text{ si } R > R_1 \Rightarrow \text{amplif.} \\ <1 \text{ si } R_1 > R \Rightarrow \text{atenuador} \\ =1 \text{ si } R = R_1 \Rightarrow \text{búffer} \end{cases}$$

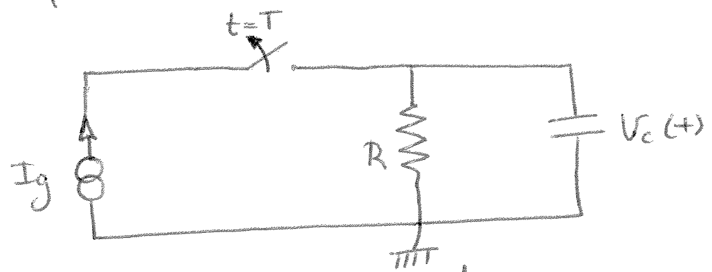
Tema 3: Análisis en el dominio del tiempo

Ejercicio 3.1

En el circuito de la figura:

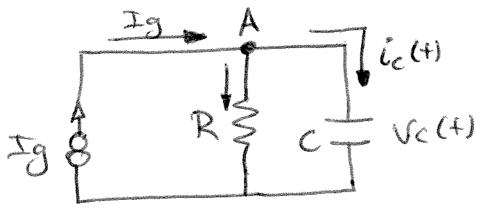
a) Primero considere que el interruptor está siempre cerrado y calcule el valor de la tensión en el condensador $V_c(t)$ para $t>0$ considerando que el condensador está inicialmente descargado, es decir, $V_c(t=0)=0\,V$.

b) Ahora considere que el interruptor se abre en $t=T$, siendo $T=5RC$. Calcule la evolución temporal de $V_c(t)$ para $t>0$.



a) C inicialmente descargado ⇒ no puedo trabajar en impedancias

$$V_c(0)=\frac{q(0)}{C}=0$$



$$\left.\begin{array}{l}\text{nudo A: } I_g = i_c(t) + \dfrac{V_c(t)}{R}\\ \text{condensador: } i_c(t) = C\cdot\dfrac{dV_c(t)}{dt}\end{array}\right\}$$

$$I_g = C\cdot\frac{dV_c(t)}{dt}+\frac{V_c(t)}{R}$$

$$C\frac{dV_c(t)}{dt}+\frac{1}{R}V_c(t)=I_g \iff \underbrace{CR\frac{dV_c(t)}{dt}+V_c(t)=I_gR}_{\text{EDO de 1}^{\text{er}}\text{ orden}}$$

Formamos el P.V.I.:

$$\left.\begin{array}{l}\text{EDO: } CR\dfrac{dV_c(t)}{dt}+V_c(t)=I_gR\\ \text{C.I.: } V_c(0)=0\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\tau = CR\\ CI=0\\ CF=I_gR\end{array}$$

Nota: La duración del régimen transitorio es aproximadamente cinco veces τ

Aplicamos la formula:

$$V_c(t)=(CI-CF)\,e^{-t/\tau}+CF \iff V_c(t)=-I_gR\,e^{-t/CR}+I_gR$$

$$\boxed{V_c(t)=I_gR\left(1-e^{-t/RC}\right)}\quad (t>0)$$

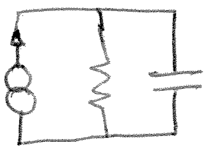
Otra forma de comprobar CF, es analizando el cto. tal y como sería una vez alcanzado el rég. permanente.

$$CF=\lim_{t\to\infty}V_c(t)=\lim_{t\to\infty}I_gR\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

$$CF=I_gR(1-0)=I_gR$$

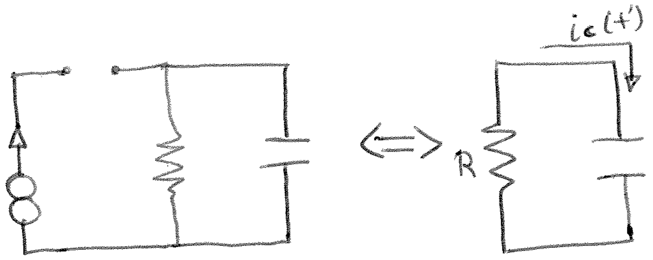
b) Ahora supondremos que el interruptor se abre en $t=T$. Por lo que tenemos dos intervalos de tiempo.

① $0<t<T$



$$V_c(t) = I_g R\left(1-e^{-t/RC}\right) \quad (0<t<T)$$

② $t>T$



$$\left.\begin{array}{l}\text{malla: } V_c(t') + R i_c(t') = 0 \\ \text{conden: } i_c(t') = C\dfrac{dV_c(t')}{dt'}\end{array}\right\}$$

$$V_c(t') + CR\frac{dV_c(t')}{dt'} = 0$$

Siempre que el intervalo no empiece en $t=0$, haremos el cambio de variable: $t' = t-T$, así $t=T \Rightarrow t' = t-T = T-T = 0$

Hallamos la CI:

$$V_c(t'=0) = V_c(t=T) = I_g R\left(1-e^{-T/RC}\right) = I_g R\left(1-e^{-5}\right)$$

El PVI será:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{EDO: } & V_c(t') + CR\dfrac{dV_c(t')}{dt'} = 0 \\ \text{CI: } & V_c(t'=0) = I_g R(1-e^{-5})\end{array}\right\} \begin{array}{l} V_c(t') = (CI-CF)e^{-t'/\tau} + CF \\ V_c(t') = I_g R(1-e^{-5})e^{-t'/RC}\end{array}$$

Cambiamos $t' \rightarrow t-T$

$$V_c(t-T) = V_c(t) = I_g R(1-e^{-5})e^{\frac{-t+T}{RC}} \quad (t>T)$$

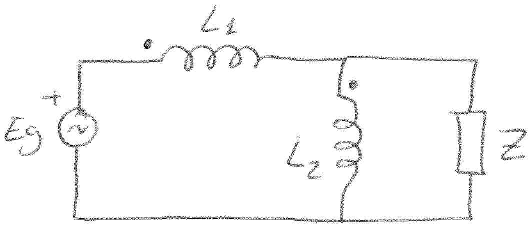
para $t>T$ tenemos:

$$\boxed{V_c(t) = I_g R(1-e^{-5})e^{-\frac{t}{RC}+5}}$$

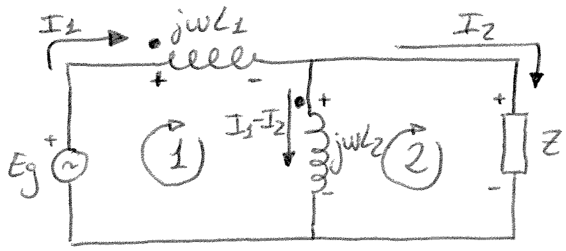
Tema 5: Acoplamiento magnético

Ejercicio 5.1

Analizar el siguiente circuito en RPS por mallas:



Primero analizamos el circuito sin considerar el acoplamiento magnético:



malla 1: $I_1 jwL_1 + (I_1 - I_2) jwL_2 = E_g$

malla 2: $I_2 Z = (I_1 - I_2) jwL_2$

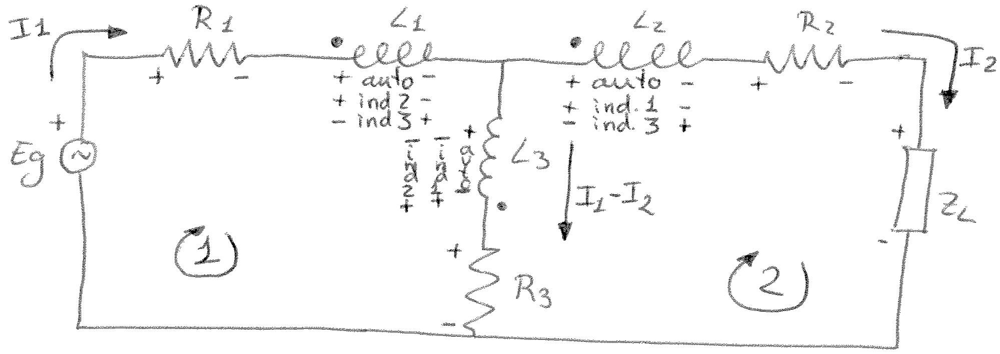
Ahora lo haremos considerando el acoplamiento mag.:

malla 1: $\underbrace{\underbrace{I_1 jwL_1}_{\text{tensión bobina 1}} + \underbrace{(I_1 - I_2) jw M_{12}}_{\text{tensión inducida por la bobina 2 sobre 1}}}_{\text{tensión total sobre bobina 1}} + \underbrace{\underbrace{(I_1 - I_2) jwL_2}_{\text{tensión bobina 2}} + \underbrace{I_1 jwM_{12}}_{\text{tensión ind por 1 sobre 2}}}_{\text{tensión total sobre bobina 2}} = E_g$

malla 2: $I_2 Z = (I_1 - I_2) jwL_2 + I_1 jwM_{12}$

Ejercicio 5.2

Analizar el siguiente circuito RPS por mallas:



malla 1: $\underbrace{I_1 R_1}_{R_1} + \underbrace{I_1 j\omega L_1}_{\text{auto } 1} + \underbrace{(I_1 - I_2) j\omega L_3}_{\text{auto } 3} + \underbrace{I_2 j\omega M_{12}}_{\text{ind } 12} + \underbrace{(I_1 - I_2) R_3}_{R_3} =$

$$= E_g + \underbrace{(I_1 - I_2) j\omega M_{13}}_{\text{ind } 13} + \underbrace{I_1 j\omega M_{13}}_{\text{ind } 13} + \underbrace{I_2 j\omega M_{23}}_{\text{ind } 23}$$

malla 2: $\underbrace{I_2 j\omega L_2}_{\text{auto } 2} + \underbrace{I_1 j\omega M_{12}}_{\text{ind } 12} + \underbrace{I_2 R_2}_{R_2} + \underbrace{Z_L I_2}_{Z_L} + \underbrace{I_1 j\omega M_{13}}_{\text{ind } 13} +$

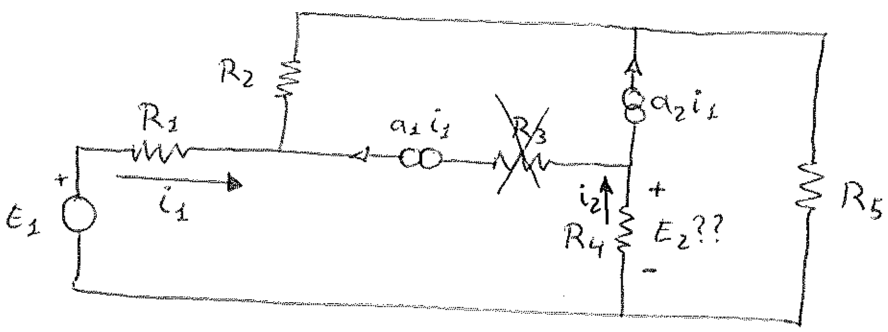
$$+ \underbrace{I_2 j\omega M_{23}}_{\text{ind } 23} = \underbrace{(I_1 - I_2) j\omega M_{23}}_{\text{ind } 23} + \underbrace{(I_1 - I_2) R_3}_{R_3} + \underbrace{j\omega L_3 (I_1 - I_2)}_{\text{auto } 3}$$

IACR
Problemas del libro

Capítulo I : Análisis elemental de circuitos

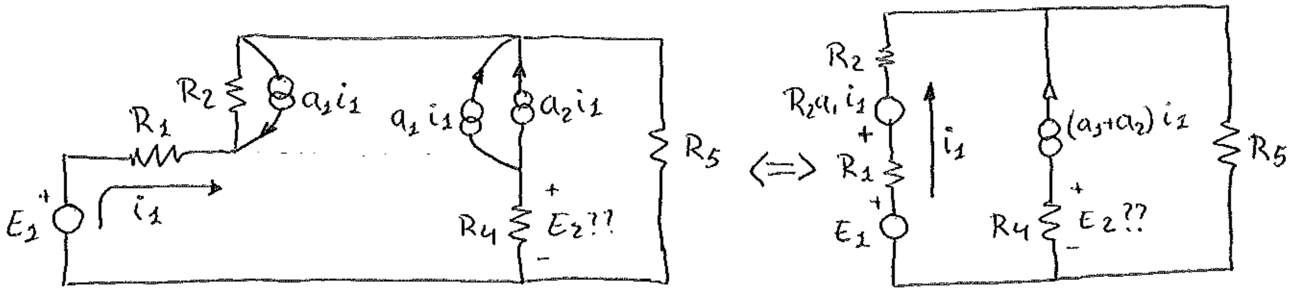
Problema I-1

Hallar la tensión E_2 en el circuito de la figura:

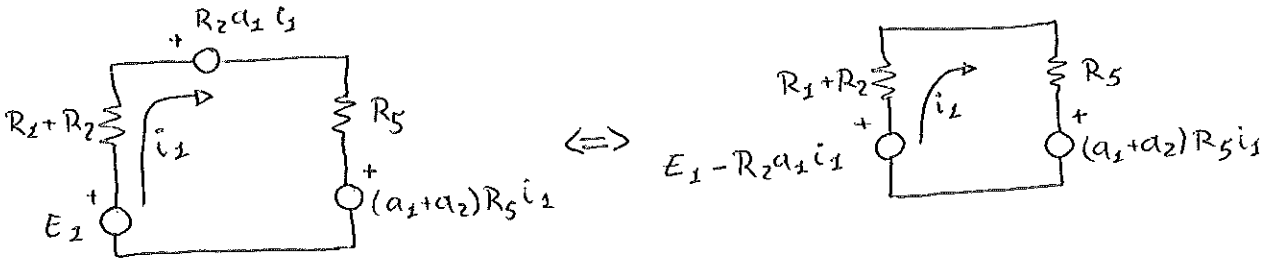


El valor de R_3 no influye en la corriente que circula por su rama, porque dicha corriente viene fijada por el generador, no por la resistencia. Por esto, podemos sustituir R_3 por una resistencia nula (cortocircuito).

$$E_2 = R_4 \cdot i_2 \quad ; \quad i_2 = i_1 (a_1 + a_2)$$



$E_2 = -R_4 (a_1 + a_2) i_1$ (por el mismo motivo, podemos suprimir R_4)



malla: $E_1 - R_2 a_1 i_1 - (R_1 + R_2) i_1 - R_5 i_1 - (a_1 + a_2) R_5 i_1 = 0$

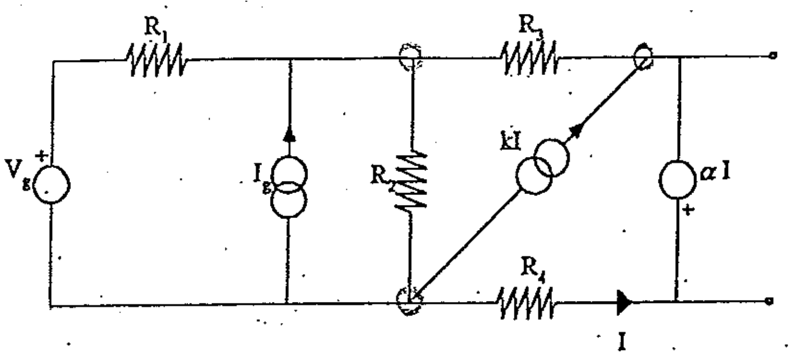
$$E_1 = i_1 \left[R_2 a_1 + R_2 + R_1 + R_5 + (a_1 + a_2) R_5 \right]$$

$$i_1 = \frac{E_1}{R_2(a_1+1) + R_1 + R_5(1 + a_1 + a_2)}$$

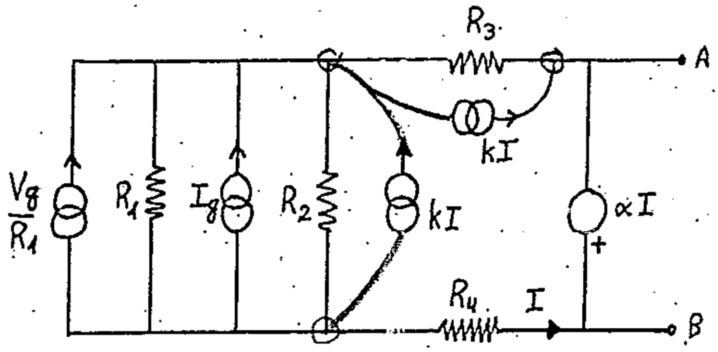
$$E_2 = -R_4 (a_1 + a_2) i_1 \implies \boxed{E_2 = \frac{-E_1 \cdot R_4 (a_1 + a_2)}{R_2(1 + a_1) + R_1 + R_5 (1 + a_1 + a_2)}}$$

PROBLEMA I-7

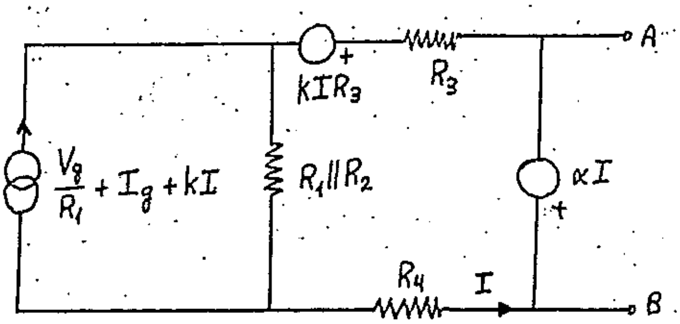
Calcular el circuito equivalente de Thèvenin del circuito de la figura.



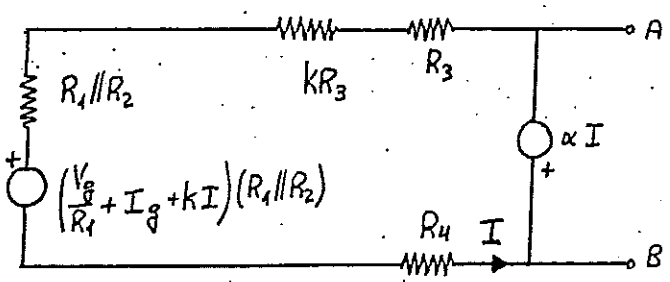
Antes de calcular V_{th} y R_{th} reducimos el circuito lo más posible:



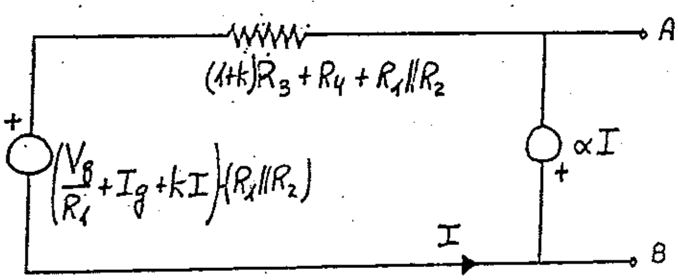
- Pasamos el generador de tensión V_g a corriente.
- Aplicamos movilidad de generadores al generador de corriente kI.



- Sumamos los tres generadores de corriente que están en paralelo
- Asociamos R_1 y R_2 en paralelo
- Pasamos el generador kI en paralelo con R_3 a tensión.



- Pasamos el generador de corriente que nos queda a tensión.
- Sustituimos el generador kIR_3 por una resistencia de valor kR_3



A partir de este circuito, simplificado al máximo, calculamos V_{th} y R_{th}.

Cálculo de V_{th}

Calculamos la tensión entre las bornas A y B en circuito abierto

Malla: $\left(\frac{V_g}{R_1}+I_g+kI\right)\cdot(R_1 \| R_2) + I\left(R_4+(1+k)R_3+R_1\|R_2\right)+\alpha I = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow I\left(k(R_1\|R_2)+R_4+(1+k)R_3+R_1\|R_2+\alpha\right) = -\left(\frac{V_g}{R_1}+I_g\right)(R_1\|R_2) \Rightarrow$$

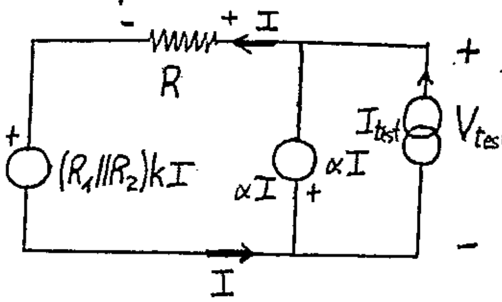
$$\Rightarrow I = \frac{-\left(\frac{V_g}{R_1}+I_g\right)\cdot(R_1\|R_2)}{k(R_1\|R_2)+R_4+(1+k)R_3+R_1\|R_2+\alpha} = \frac{-\left(\frac{V_g}{R_1}+I_g\right)\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{k\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_4+(1+k)R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{-\left(\frac{V_g}{R_1}+I_g\right)\cdot\frac{R_1R_2}{\cancel{R_1+R_2}}}{\frac{kR_1R_2+(R_4+(1+k)R_3+\alpha)(R_1+R_2)+R_1R_2}{\cancel{R_1+R_2}}} = \frac{-(V_g/R_1+I_g)\cdot R_1R_2}{(1+k)R_1R_2+\left(R_4+(1+k)R_3+\alpha\right)(R_1+R_2)}$$

Ahora, $$\boxed{V_{th} = V_{AB} = -\alpha I = \frac{(V_g/R_1+I_g)\cdot R_1R_2\alpha}{(1+k)R_1R_2+\left(R_4+(1+k)R_3+\alpha\right)(R_1+R_2)}}$$

Cálculo de R_{th}

Anulamos los generadores independientes $I_g=0$, $V_g=0$ y ponemos un generador de prueba:



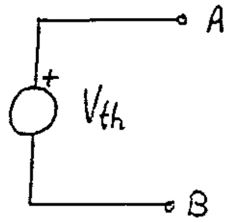
donde $R=(1+k)R_3+R_4+R_1\|R_2 > 0$

Ahora: $R_{th} = \frac{V_{test}}{I_{test}} = \frac{-\alpha I}{I_{test}}$ y debemos calcular I

Malla izquierda: $(R_1\|R_2)kI + IR + \alpha I = 0 \Rightarrow I\cdot\underbrace{\left(R_1\|R_2+R+\alpha\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow I = 0$!!

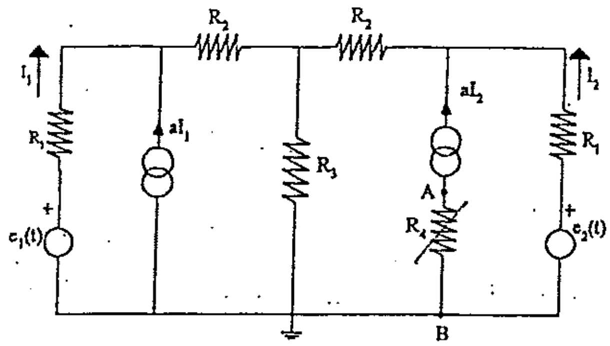
Por tanto: $\boxed{R_{th} = \frac{-\alpha I}{I_{test}} = \frac{0}{I_{test}} = 0\,\Omega}$

El circuito se comporta como una fuente de tensión ideal de valor V_{th}:

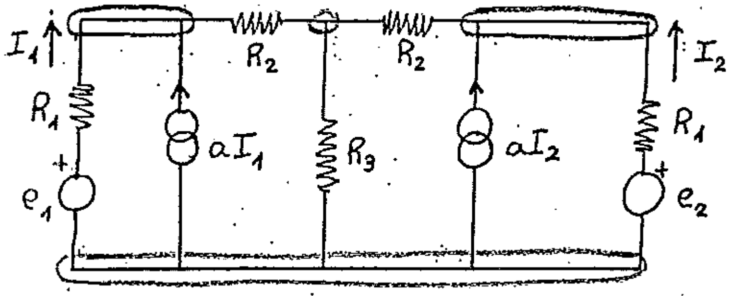


PROBLEMA I-9

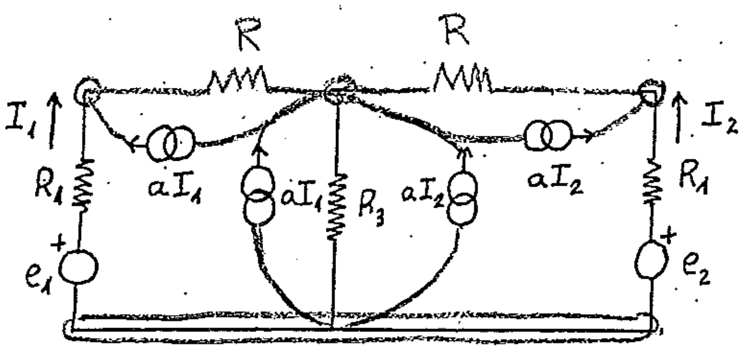
En el circuito de la figura, hallar V_{AB}



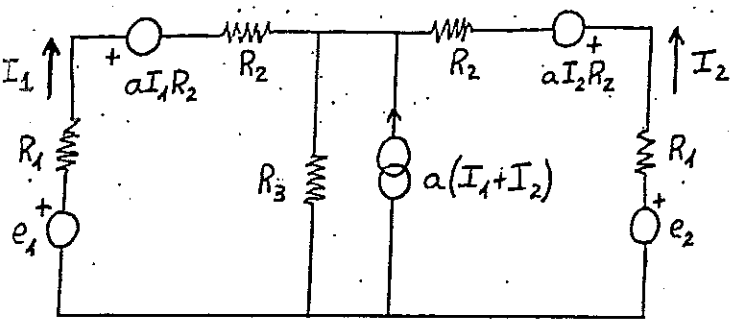
DATOS: $e_1(t) = e_2(t) = \cos(5\ 10^3)$ (V)
$R_1 = 500\ (\Omega)$
$R_2 = 20\ (\Omega)$
$R_3 = 1\ (K\Omega)$
$R_4 = 2\ (K\Omega)$
$a = 50$



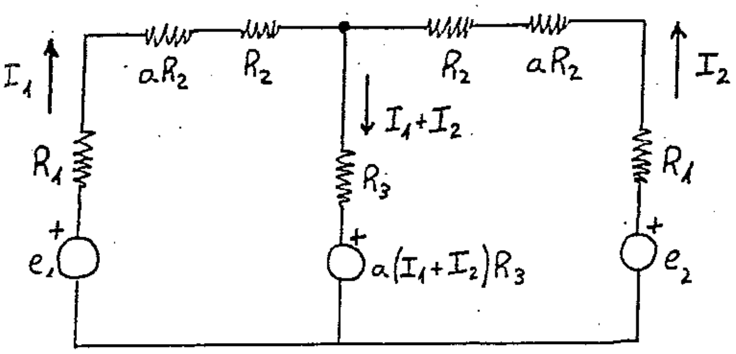
Nos fijamos en que $\boxed{V_{AB} = -aI_2R_4}$
Nuestro objetivo es, por tanto, calcular I_2.
Lo primero que hacemos es quitar R_4 ya que la corriente no varía por esa rama, pues hay un generador de corriente.



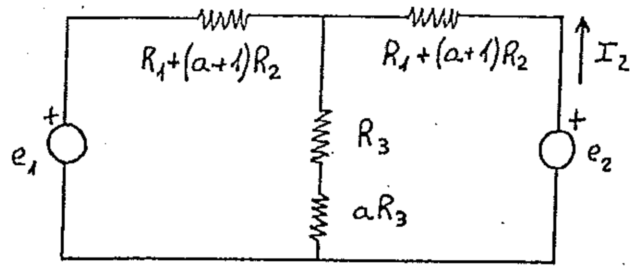
Aplicamos movilidad de generadores de corriente.



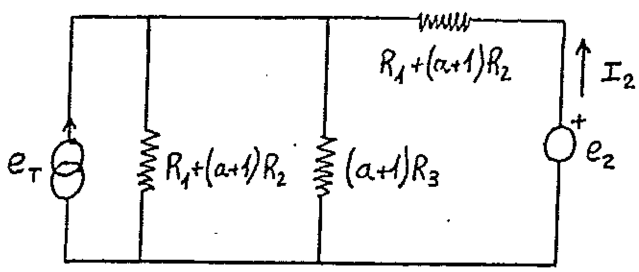
Transformamos los generadores de corriente a tensión y sumamos los dos generadores de corriente que están en paralelo.



Transformamos el generador central de corriente a tensión. También transformamos en resistencias los generadores de tensión controlados por la corriente que los atraviesa.

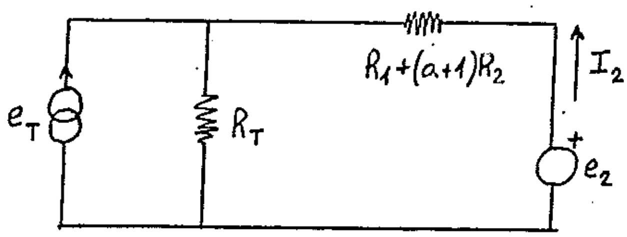


Transformamos en resistencia el generador de tensión central que depende de la corriente que lo atraviesa. Desaparece I_1 que ya no se utiliza para nada.



La parte derecha no la tocamos para conservar I_2. Transformamos el generador izquierdo a tensión donde

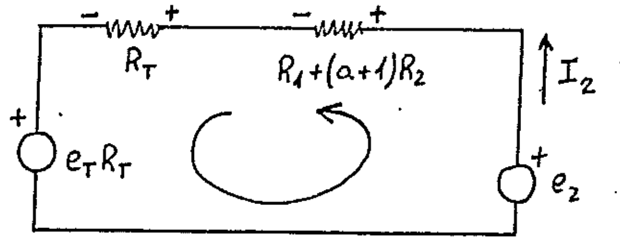
$$e_T = \frac{e_1}{R_1+(a+1)R_2} = \frac{\cos(5\cdot 10^3 t)}{500+(50+1)\cdot 20} = \frac{\cos(5\cdot 10^3 t)}{1520}$$



$$R_1+(a+1)R_2 = 500+(50+1)\cdot 20 = 1520\,\Omega$$

$$(a+1)R_3 = (50+1)\cdot 1000 = 51000\,\Omega$$

$$R_T = [R_1+(a+1)R_2] \,\|\, [(a+1)R_3] = 1520 \,\|\, 51000 = 1476\,\Omega$$



$$e_T R_T = \frac{\cos(5\cdot 10^3 t)}{1520}\cdot 1476 = 0{,}971\cos(5\cdot 10^3 t)$$

recorremos la malla en sentido antihorario:

$$I_2(R_1+(a+1)R_2) + I_2 R_T + e_T R_T = e_2 \Rightarrow I_2(R_1+(a+1)R_2+R_T) = e_2 - e_T R_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{e_2 - e_T R_T}{R_1+(a+1)R_2+R_T} = \frac{\cos(5\cdot 10^3 t) - 0{,}971\cos(5\cdot 10^3 t)}{1520 + 1476} = 9{,}66\cdot 10^{-6}\cos(5\cdot 10^3 t)$$

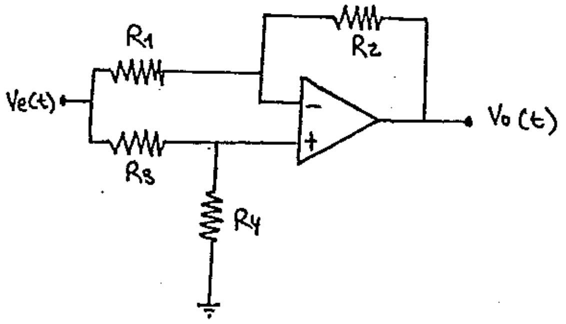
Por tanto:

$$V_{AB} = -R_4 a I_2 = -2000\cdot 50\cdot 9{,}66\cdot 10^{-6}\cos(5\cdot 10^3 t) = -0{,}966\cos(5\cdot 10^3 t)$$

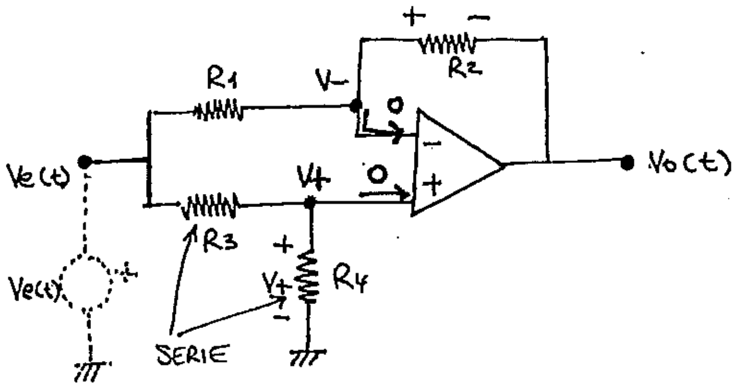
$$\boxed{V_{AB} = -0{,}966\cos(5\cdot 10^3 t)}$$

PROBLEMA I-10

En el circuito de la figura calcular $V_o(t)$, sabiendo que $V_e(t) = \cos(10^6 t)$ V, $R_1 = 10\ k\Omega$, $R_2 = 1\ k\Omega$, $R_3 = R_4$ y el Amp. Op. es ideal.



SOLUCIÓN:



• NUDO DE V+ : (DIV. DE TENSIÓN)

$$V_+ = V_e \frac{R_4}{R_3+R_4} \quad (1)$$

• NUDO DE V− :

$$\frac{V_e - (V_-)}{R_1} = 0 + \frac{(V_-) - V_o}{R_2} \quad (2)$$

• CCV: $V_+ = V_-$ (3)

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (V_+, V_-, V_o)

(3) en (1) : $V_- = V_e \dfrac{R_4}{R_3+R_4} \xrightarrow{R_3=R_4} V_- = \dfrac{V_e}{2}$ y sust. en (2),

$$\frac{V_e - \frac{V_e}{2}}{R_1} = \frac{\frac{V_e}{2} - V_o}{R_2} \rightarrow \frac{V_e}{2R_1} = \frac{V_e}{2R_2} - \frac{V_o}{2R_2} \rightarrow \frac{V_e}{2}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] = -\frac{V_o}{R_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_o = -\frac{R_2}{2}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] V_e$$

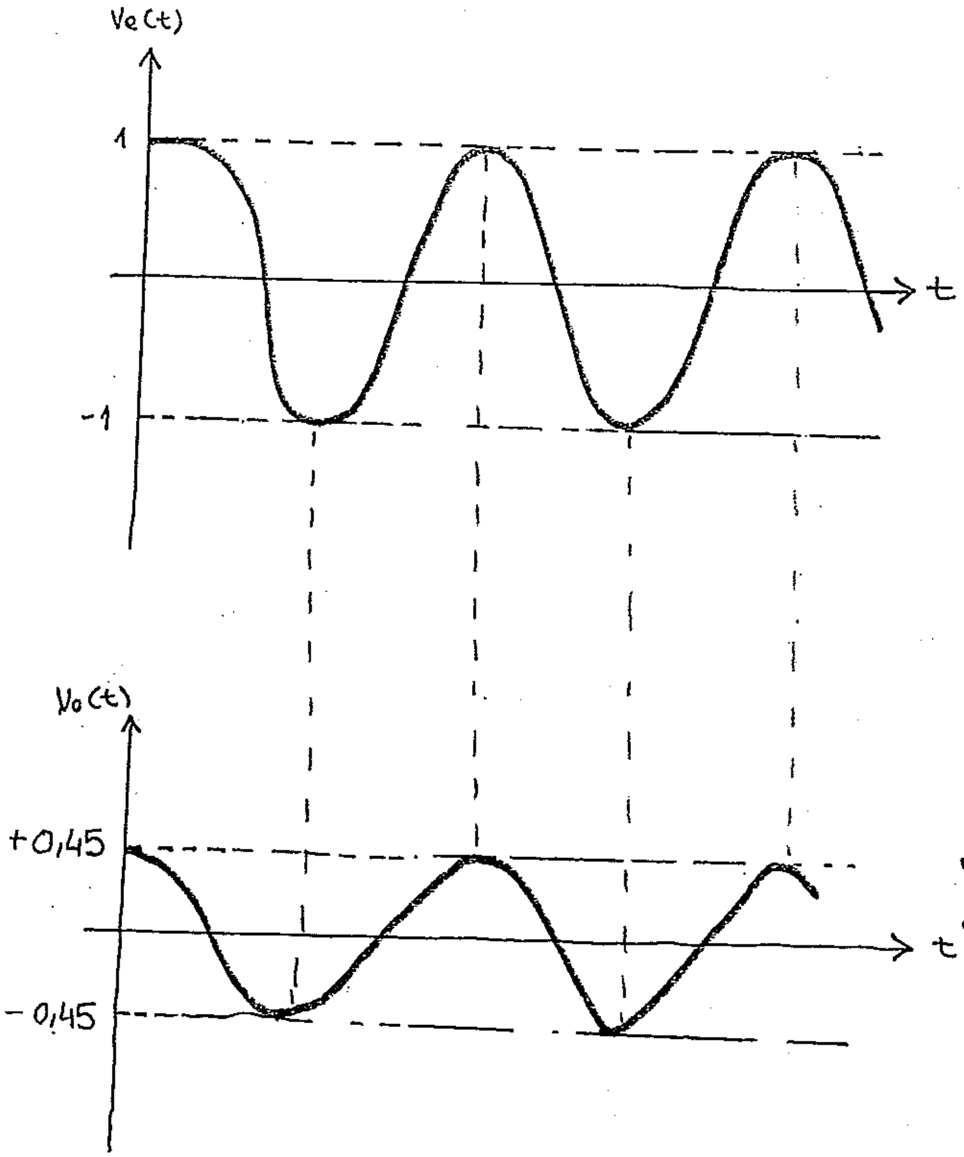
$$V_o = \left(-\frac{R_2}{2R_1} + \frac{1}{2}\right) V_e \rightarrow \boxed{V_o(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) V_e(t)}$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$V_o(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{10}\right) \cdot \cos(10^6 t) = \underbrace{\boxed{0'45}}_{\text{ganancia}} \overbrace{\cos(10^6 t)}^{V_e(t)}$$

ATENUADOR NO INVERSOR

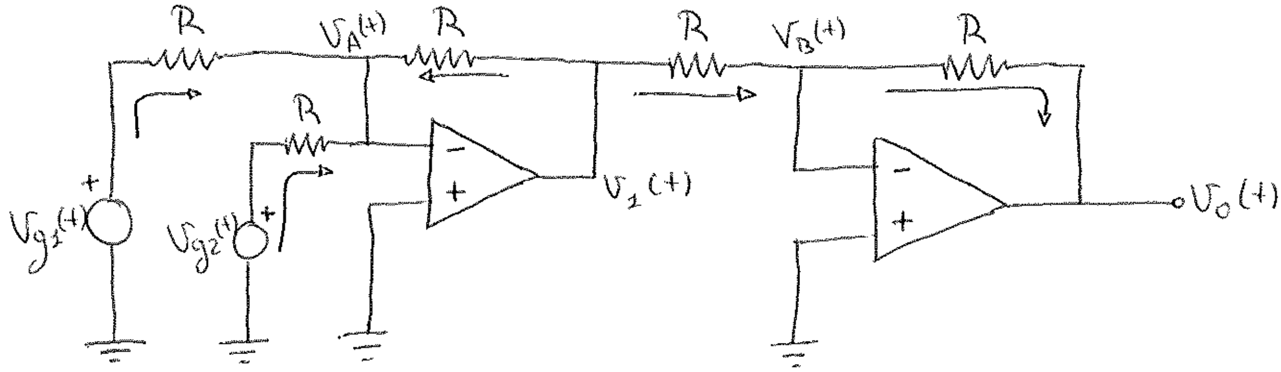
|ganancia| < 1 ganancia < 0



- NO INVIERTE
- ATENÚA

Problema I-11

Calcular, en el circuito de la figura, el valor de la tensión de salida $V_o(t)$ para cualquier tipo de generadores de entrada $V_{g1}(t)$ y $V_{g2}(t)$. Indicar la función que realiza el circuito.



$$\left.\begin{array}{l} \text{Nudo A: } \dfrac{V_{g1}-V_A}{R} + \dfrac{V_{g2}-V_A}{R} + \dfrac{V_1-V_A}{R} = 0 \\ \text{Nudo B: } \dfrac{V_1-V_B}{R} = \dfrac{V_B-V_o}{R} \\ \text{por amp. op. 1: } V_A = 0 \\ \text{por amp. op. 2: } V_B = 0 \end{array}\right\}$$

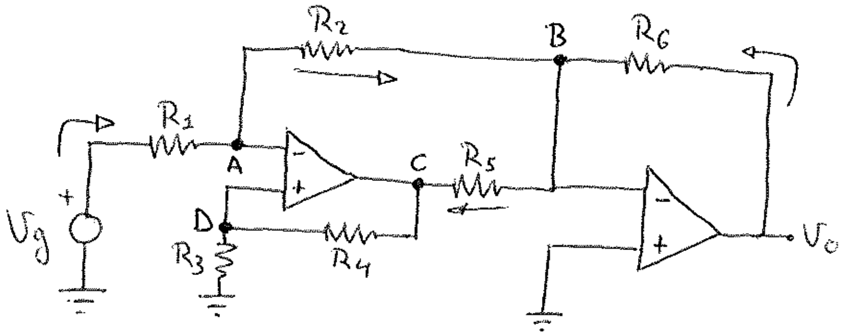
sistema
4 ecuaciones
4 incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_{g1}}{R} + \dfrac{V_{g2}}{R} + \dfrac{V_1}{R} = 0 \;;\; V_1 = -(V_{g1}+V_{g2}) \\ \dfrac{V_1}{R} = \dfrac{-V_o}{R} \;;\; V_o = -V_1 \end{array}\right\} \boxed{V_o(t) = V_{g1}(t) + V_{g2}(t)}$$

se trata de un circuito sumador

Problema I-12

En el circuito de la figura calcular la relación V_o/V_g suponiendo que los dos Amp. Op. son ideales de la ganancia infinita.



Nudo A: $\dfrac{V_g - V_A}{R_1} = \dfrac{V_A - V_B}{R_2}$ [1]

Nudo B: $\dfrac{V_A - V_B}{R_2} + \dfrac{V_o - V_B}{R_6} = \dfrac{V_B - V_C}{R_5}$ [2]

Nudo D: $V_D = \dfrac{V_C \cdot R_3}{R_3 + R_4}$ [3]

amp. op:

$V_A = V_D$ [4]

$V_B = 0$ [5]

[5] en [1] $\Rightarrow \dfrac{V_g - V_A}{R_1} = \dfrac{V_A}{R_2} \Rightarrow V_A\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_1}\right) = \dfrac{V_g}{R_1} \Rightarrow V_A = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} V_g$ ①

[5] en [2] $\Rightarrow \dfrac{V_A}{R_2} + \dfrac{V_o}{R_6} + \dfrac{V_C}{R_5} = 0$ ②

[4] en [3] $\Rightarrow V_A = V_C \dfrac{R_3}{R_3 + R_4} \Rightarrow V_C = V_A \dfrac{R_3 + R_4}{R_3}$ ③

③ en ② $\Rightarrow \dfrac{V_A}{R_2} + \dfrac{V_o}{R_6} + V_A \dfrac{R_3 + R_4}{R_3 + R_5} = 0 \Rightarrow V_o = -V_A R_6 \dfrac{(R_3R_5 + R_2(R_3 + R_4))}{R_2 R_3 R_5}$

① en ② $\Rightarrow V_o = -R_6 \dfrac{R_3R_5 + R_2R_3 + R_2R_4}{R_2 R_3 R_5} \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} V_g$

$$\boxed{\frac{V_o}{V_g} = \frac{-R_6}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_3R_5 + R_2R_3 + R_2R_4}{R_3 R_5}}$$

Problema I - 13

En el circuito de la figura calcular:

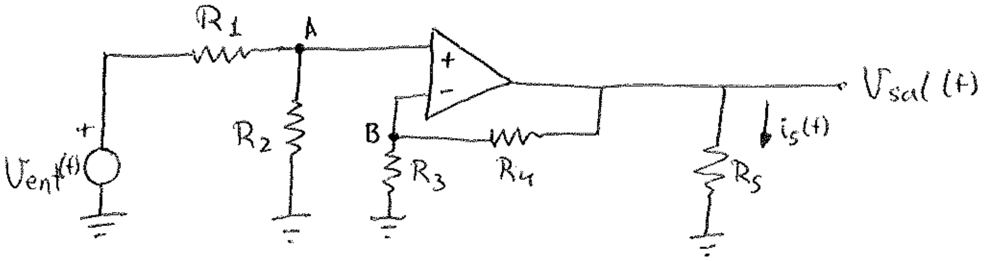
a) Relación V_{sal}/V_{ent}

b) El valor de R_2 para que la resistencia vista en la entrada sea de $1K\Omega$, sabiendo que $R_1 = 500\Omega$

c) La expresión temporal de la corriente a través de R_5, $i_5(t)$, para los siguientes datos:

$V_{ent}(t) = 10\cos(10^3 t + \pi/4)\ V$; $R_1 = 500\Omega$, $R_3 = R_4 = 2K\Omega$

$R_5 = 10\Omega$. Si no resolvió el b) tome $R_2 = R_1$.



a) Nudo A: (div. tensión) $V_A = \dfrac{V_{ent}\cdot R_2}{R_1+R_2}$

Nudo B: (div. tensión) $V_B = \dfrac{V_{sal}\cdot R_3}{R_3+R_4}$

amp. op. $V_A = V_B$

$$\frac{V_{ent}\cdot R_2}{R_1+R_2} = \frac{V_{sal}\cdot R_3}{R_3+R_4} \Rightarrow \frac{V_{sal}}{V_{ent}} = \frac{R_3+R_4}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_2}{R_3}$$

$$\boxed{\frac{V_{sal}}{V_{ent}} = \frac{R_3+R_4}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_2}{R_3}}$$

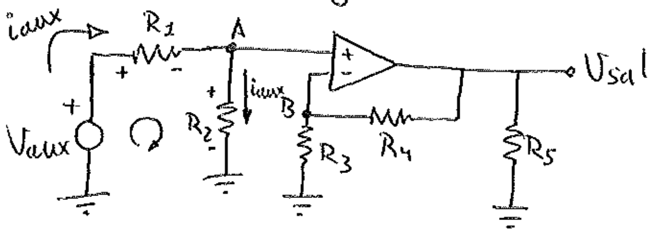
c)

$$i_5(t) = \frac{V_{sal}(t)}{R_5} = \frac{R_3+R_4}{R_3}\cdot\frac{V_{ent}\cdot R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{R_5} \xrightarrow{R_1=R_2} i_5(t) = \frac{R_3+R_4}{R_3}\cdot\frac{V_{ent}}{2R_5}$$

$$\boxed{i_5(t) = \frac{2\cdot 10^3 + 2\cdot 10^3}{2\cdot 10^3}\cdot\frac{10\cos(10^3 t + \pi/4)}{2\cdot 10} = \cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{4}\right)\ (A)}$$

b) Cálculo de Rent. Método del generador de prueba:

Desconectar gen. independientes $\Rightarrow R_{ent} = \dfrac{V_{aux}}{i_{aux}}$ (con gen. prueba)



malla:

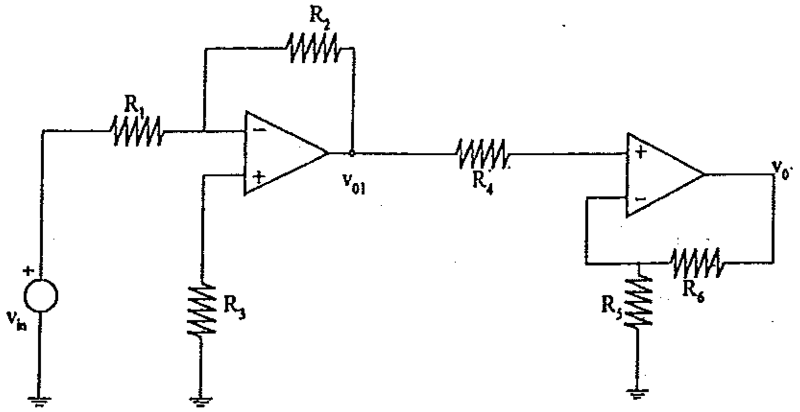
$$R_1\cdot i_{aux} + R_2\cdot i_{aux} = V_{aux} \Rightarrow R_{ent} = \frac{V_{aux}}{i_{aux}} = R_1+R_2 \xrightarrow[R_1=500\Omega]{R_{ent}=1K\Omega} \boxed{R_2 = 500\Omega}$$

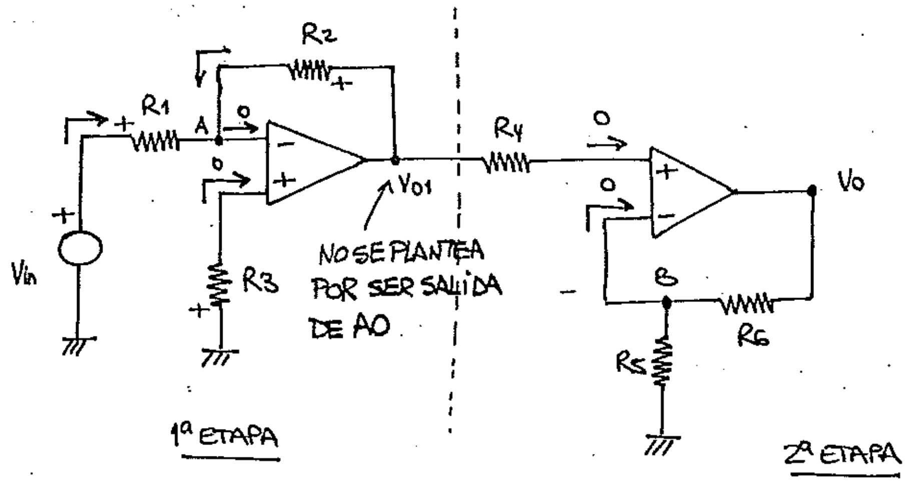
El circuito de la figura está formado por dos etapas.

a) Calcule la relación v_{01}/v_{in} en la primera etapa, y relación v_0/v_{01} en la segunda:

b) Para $v_{in}(t) = 10^{-3}\cos(10^6 t)$ V; $R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = 100\ K\Omega$; $R_3 = R_4 = 1\ K\Omega$; $R_5 = R_6 = 2.2\ K\Omega$; calcule la expresión temporal de la señal de salida $v_0(t)$.

c) Explique la función que realiza el circuito.





a)

- 1ª ETAPA:
  - NUDO A: $\dfrac{V_{in}-V_A}{R_1} + \dfrac{V_{01}-V_A}{R_2} = 0 \quad (1)$
  - CCV: $V_A = 0 \quad (2)$

$$\left.\right\} \frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_{01}}{R_2} = 0 \ ; \ \frac{V_{in}}{R_1} = -\frac{V_{01}}{R_2}$$

$$\frac{V_{01}}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

- 2ª ETAPA:
  - NUDO B: $V_B = V_0 \dfrac{R_5}{R_5+R_6} \quad (1)$
  - CCV: $V_B = V_{01} \quad (2)$

$$\left.\right\} V_{01} = V_0 \frac{R_5}{R_5+R_6}$$

$$\frac{V_0}{V_{01}} = 1 + \frac{R_6}{R_5}$$

b)

$$\frac{V_o}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}\left(1+\frac{R_6}{R_5}\right) \longrightarrow V_o = -\frac{R_2}{R_1}\left(1+\frac{R_6}{R_5}\right)V_{in} \longrightarrow$$

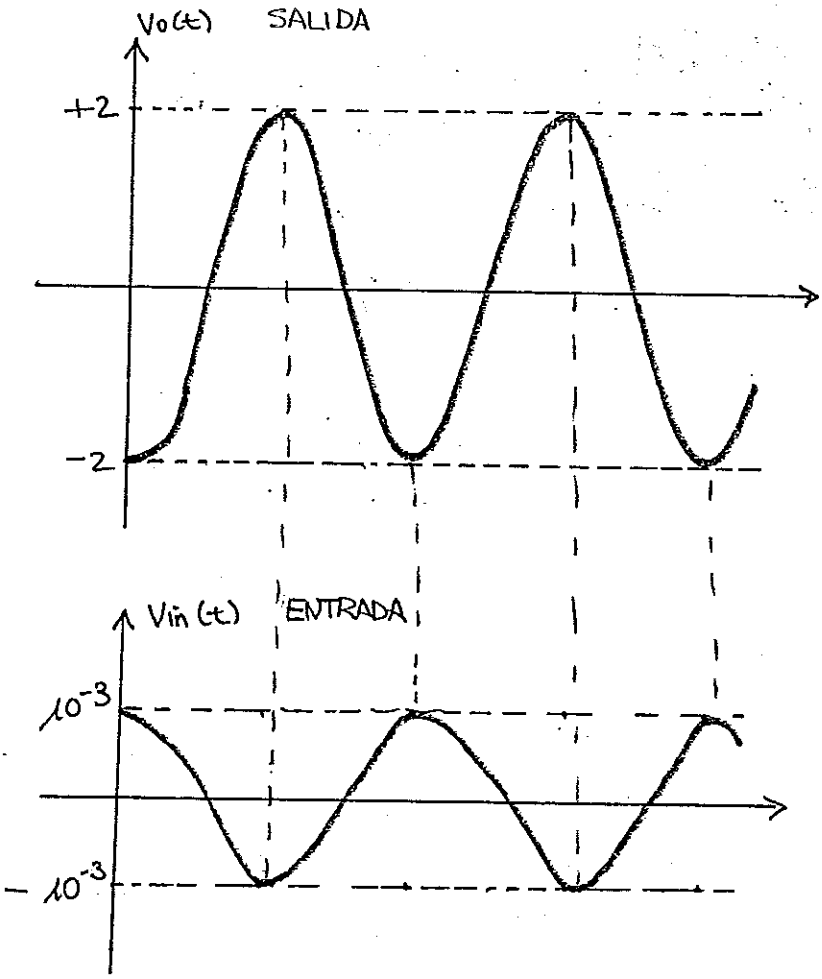
$$\longrightarrow V_o = -\frac{\cancel{100}\cdot 10^3}{\cancel{100}}(1+1) = -2000\ V_{in}$$

$$V_o(t) = \underbrace{-2000}_{\text{ganancia}} \cdot V_{in}(t)$$

$$V_o(t) = -2000 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(10^6 t)\ (V)$$

$$\boxed{V_o(t) = -2 \cdot \cos(10^6 t)\ \ (V)}$$

c)



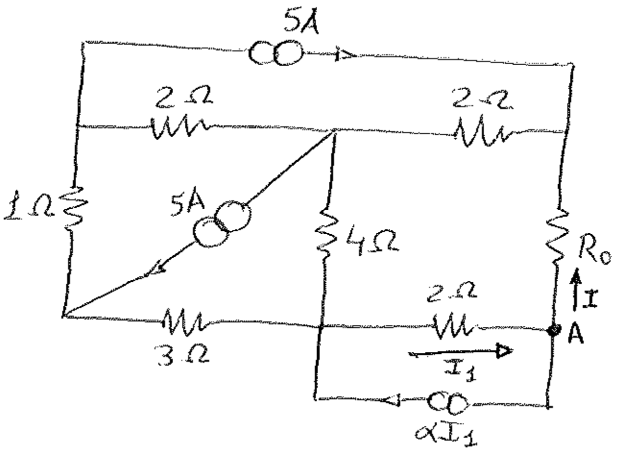
- INVIERTE
- AMPLIFICA

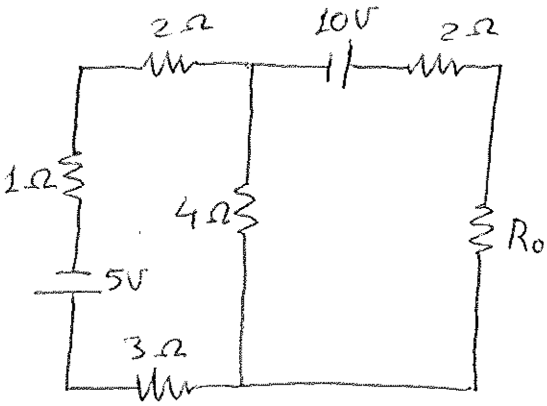
Ganancia = −2000
|Ganancia| = 2000 > 1 ⟶ AMPLIFICADOR
Ganancia < 0 ⟶ INVERSOR

} AMPLIFICADOR INVERSOR

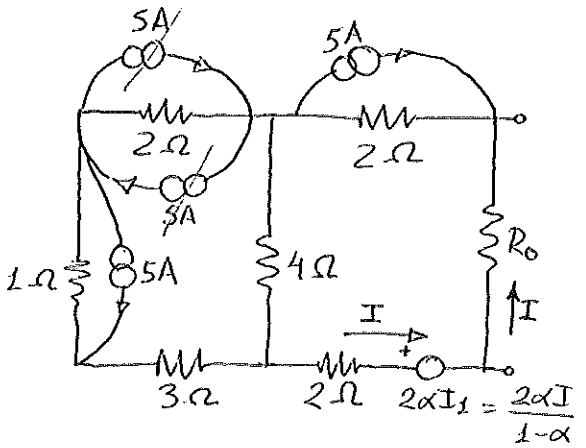
Problema I-15

Calcule el valor de α para que los dos circuitos de la figura sean equivalentes en bornas de Ro. Realice únicamente transformaciones circuitales, sin resolver el circuito.

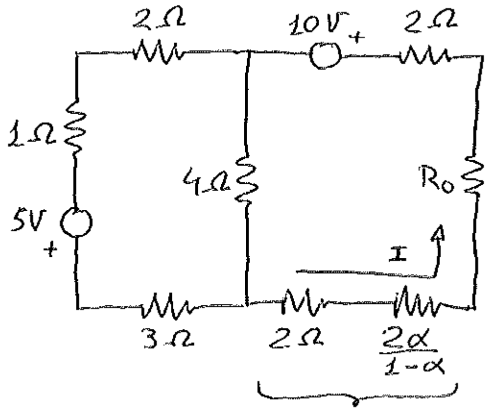




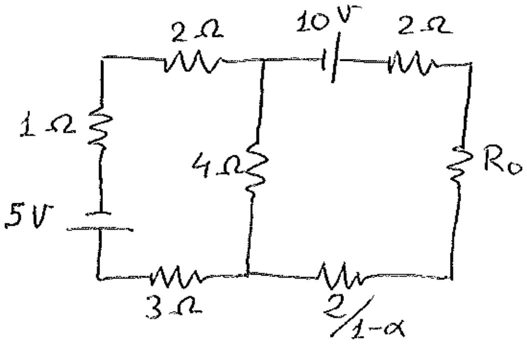
Nudo A: $I_1 = \alpha I_1 + I \Rightarrow I_1 = \dfrac{I}{1-\alpha}$



$\Longleftrightarrow$



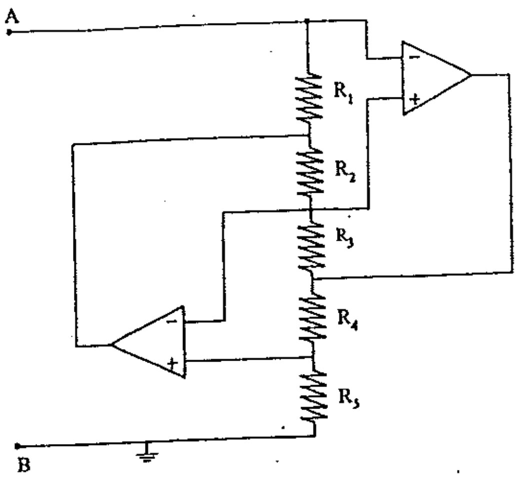
$$2 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} = \frac{2(1-\alpha)+2\alpha}{1-\alpha} = \frac{2}{1-\alpha}$$

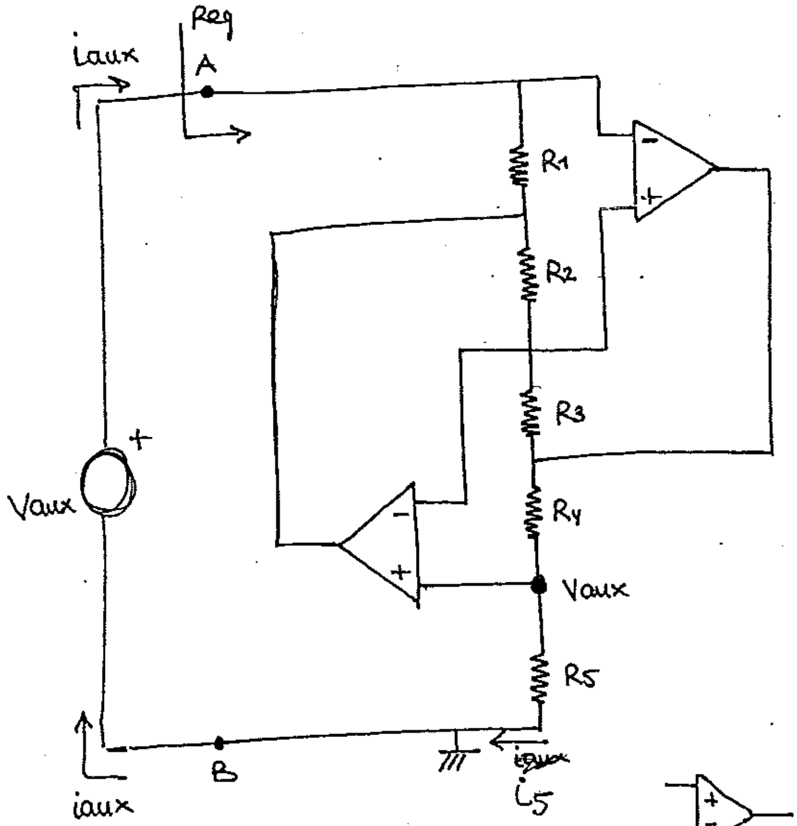


Para que éste circuito sea equivalente al que nos dan en bornas de Ro, es necesario anular la resistencia $\frac{2}{1-\alpha}$, es decir:

$$\frac{2}{1-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \pm\infty}$$

Calcular la resistencia equivalente (R_{eq}) a la derecha de los terminales AB.





Utilizamos el método del gen. auxiliar:

a) Desconectamos los gen. ind.

b) Ponemos un gen. de prueba

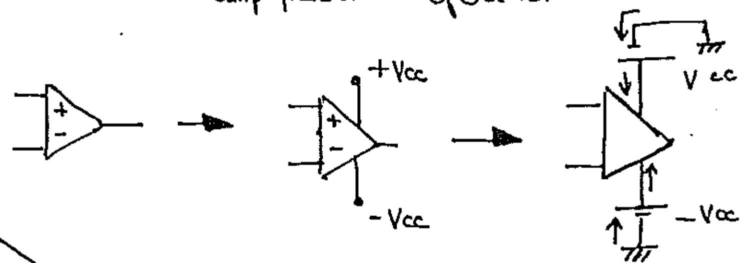
$$R_{eq} = \frac{V_{aux}}{I_{aux}}$$

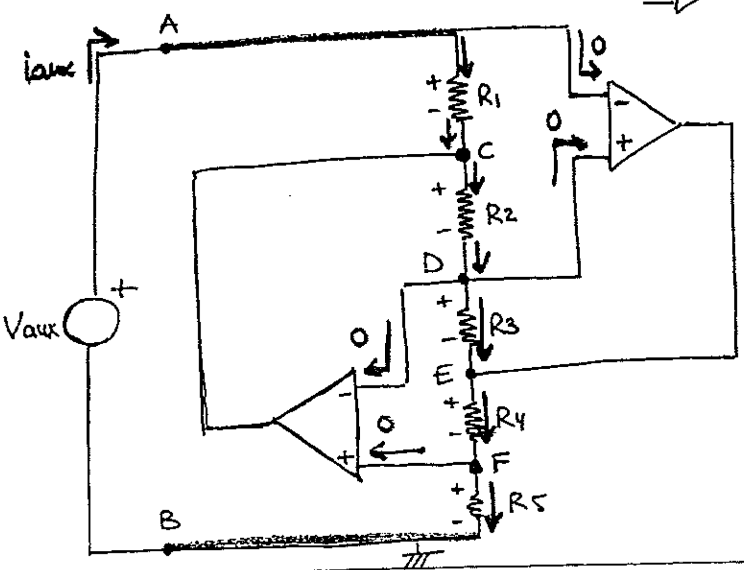
* Voy a hacerlo mal: $\boxed{i_5 = I_{aux}}$

LEY DE OHM: $V_{aux} = R_5 \cdot i_{aux} \rightarrow$

$$\rightarrow R_{eq} = \frac{V_{aux}}{i_{aux}} = R_5$$

NUNCA se debe plantear la ecuación del nudo de masa en cto con amplificadores operacionales





- NUDO A: $i_{aux} = \frac{V_{aux} - V_C}{R_1}$ (1)
- NUDO D: $\frac{V_C - V_D}{R_2} = \frac{V_D - V_E}{R_3}$ (2)
- NUDO F: $\frac{V_E - V_F}{R_4} = \frac{V_F - 0}{R_5}$ (3)
- CCV1: $V_D = V_{aux}$ (4)
- CCV2: $V_D = V_F$ (5)

Sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas : $V_C, V_D, V_E, V_F, \frac{V_{aux}}{i_{aux}}$

Ok! pq busco $\frac{V_{aux}}{i_{aux}}$

Por (4) y (5) : $V_D = V_F = V_{aux}$ y Sust. en (1): $i_{aux} = \frac{V_{aux} - V_C}{R_1}$ (1)

(2) : $\frac{V_C - V_{aux}}{R_2} = \frac{V_{aux} - V_E}{R_3}$ (2)

(3) : $\frac{V_E - V_{aux}}{R_4} = \frac{V_{aux}}{R_5}$ (3)

Despejamos en (3) : $V_E = R_4 V_{aux}\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4}\right) = V_{aux} \frac{R_4 + R_5}{R_5}$

se sust. en (2) : $\frac{V_C - V_{aux}}{R_2} = \frac{V_{aux} - V_{aux}\frac{R_4+R_5}{R_5}}{R_3} \rightarrow$

$$\rightarrow V_C = R_2 V_{aux}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} - \frac{R_4+R_5}{R_3R_5}\right) = \cancel{R_2} \cdot V_{aux} \frac{R_2R_5 + R_3R_5 - (R_4+R_5)R_2}{\cancel{R_2}R_3R_5} =$$

$$= V_{aux} \frac{R_2R_5 + R_3R_5 - (R_4+R_5)R_2}{R_3R_5} = V_{aux} \frac{R_3R_5 - R_2R_4}{R_3R_5}$$

Sust. V_C en (1) :

$$i_{aux} = \frac{1}{R_1}\left[V_{aux} - V_{aux}\frac{R_3R_5 - R_2R_4}{R_3R_5}\right] = \frac{V_{aux}}{R_1}\left(\frac{\cancel{R_3R_5} - \cancel{R_3R_5} + R_2R_4}{R_3R_5}\right) =$$

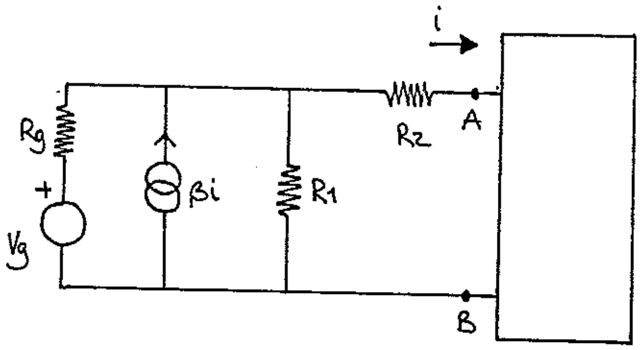
$$= \frac{V_{aux}}{R_1}\left(\frac{R_2R_4}{R_3R_5}\right)$$

$$\frac{i_{aux}}{V_{aux}} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3R_5} \rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{V_{aux}}{i_{aux}} = \frac{R_1R_3R_5}{R_2R_4}}$$

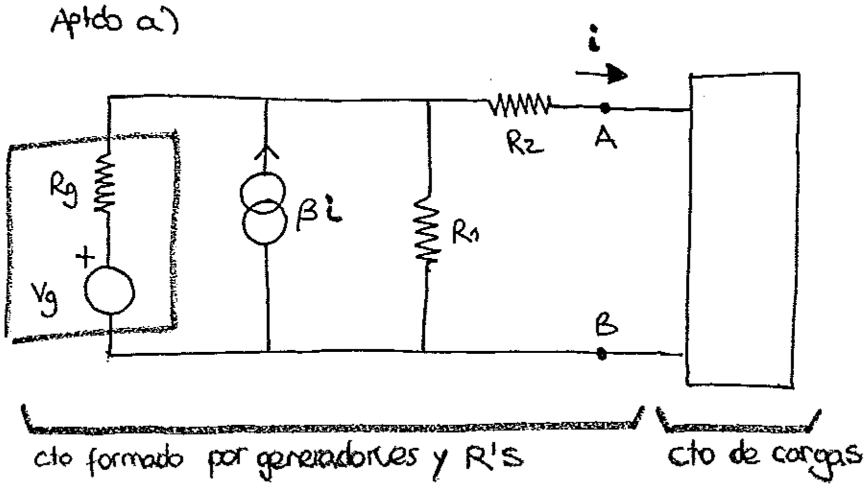
PROBLEMA 1-17

a) Reduzca el circuito de la figura, a la izquierda de los terminales AB, a un generador real de tensión mediante transformaciones circuitales.

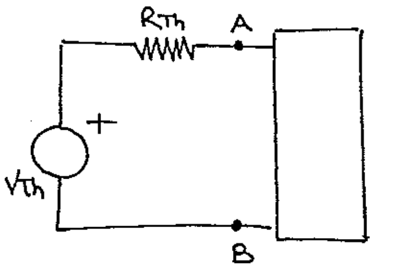
b) Calcule el valor de β (en función de R_g, R_1 y R_2) para conseguir que dicho generador fuera ideal.

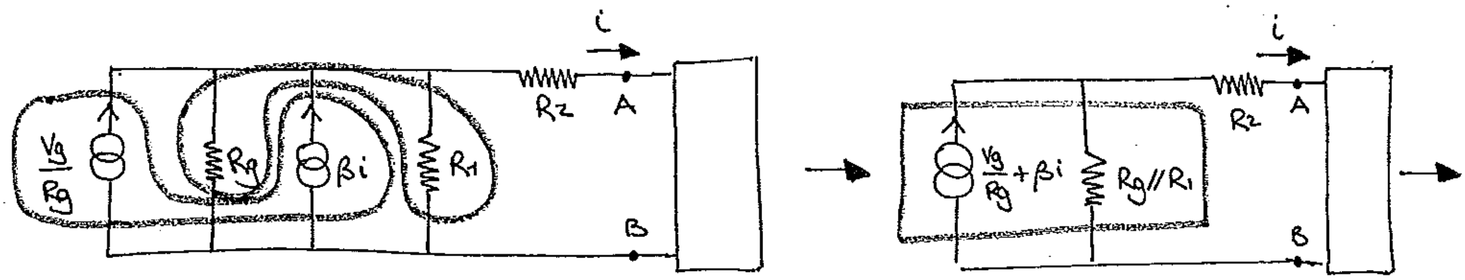


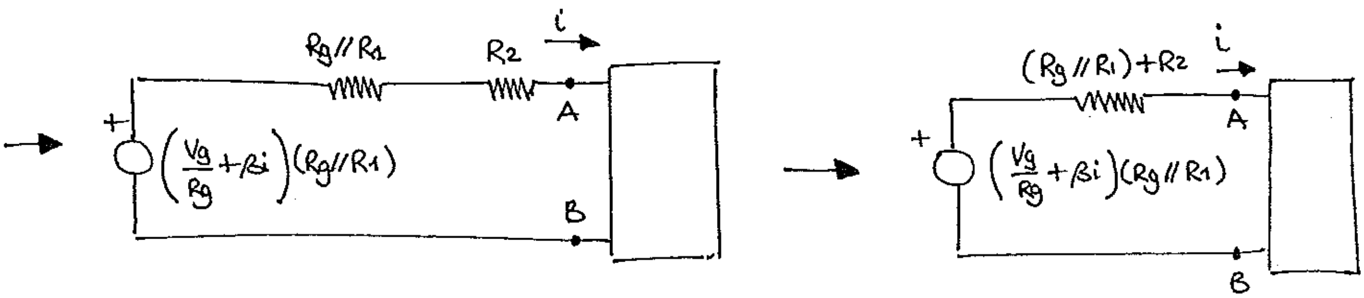
Aptdo a)



Me piden que lo reduzca a:

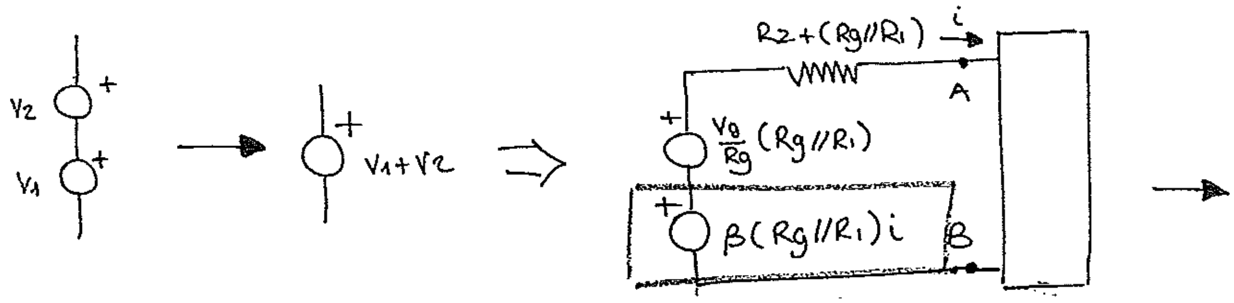


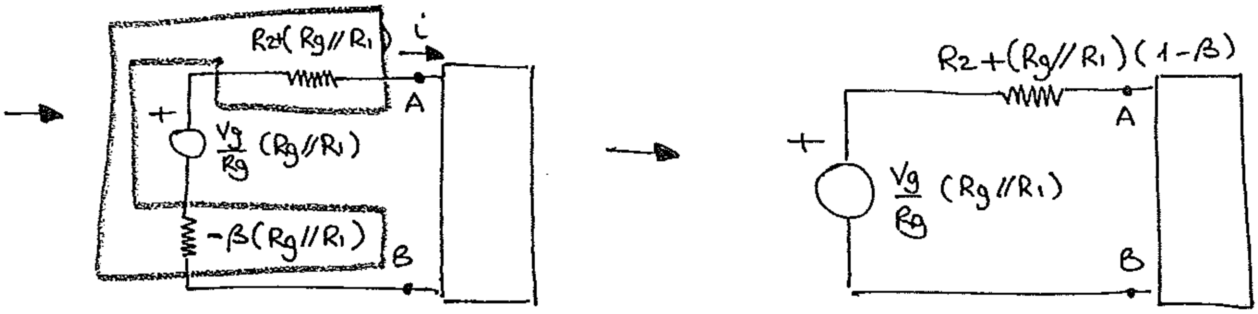




¡IMPORTANTE! : este todavía no es el circuito equivalente de Thevenin, pq el generador de tensión es dependiente, y en un circuito equivalente de Thevenin el generador debe ser independiente.

Por tanto: $\left(\frac{V_g}{R_g}+\beta i\right)(R_g/\!/R_1) = \frac{V_g}{R_g}(R_g/\!/R_1) + \beta(R_g/\!/R_1)\,i$





Esto sí es el equivalente de Thevenin:

$$V_{Th} = \frac{V_g}{R_g}(R_g//R_1) = \frac{V_g}{\cancel{R_g}}\,\frac{\cancel{R_g}\cdot R_1}{R_g+R_1} = \frac{V_g R_1}{R_g+R_1}$$

$$R_{Th} = R_2 + (R_g//R_1)(1-\beta) = R_2 + (1-\beta)\frac{R_g R_1}{R_g+R_1}$$

Aptado b)

GENERADOR IDEAL : $R_{Th}=0$

$$R_2 + (1-\beta)\frac{R_g R_1}{R_g + R_1} = 0$$

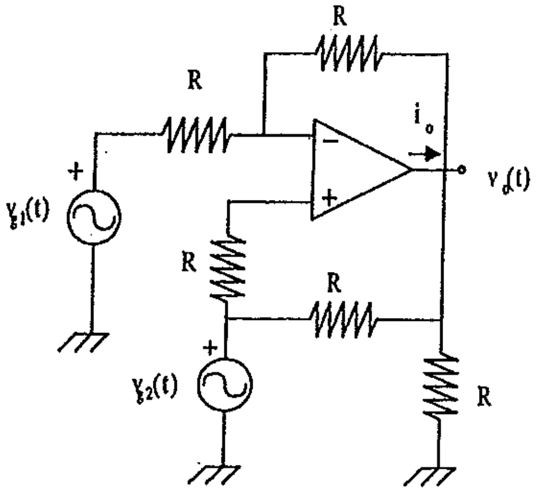
$$R_2 = \frac{R_g R_1}{R_g+R_1}(\beta-1)$$

$$\frac{R_2(R_g+R_1)}{R_g R_1} = \beta-1$$

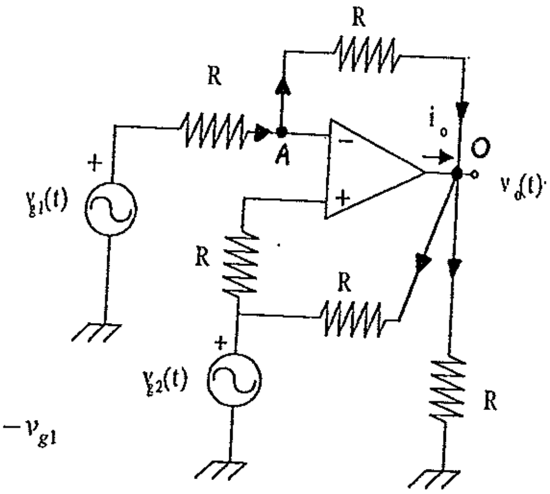
$$\beta = 1 + \frac{R_2(R_g+R_1)}{R_g R_1}$$

PROBLEMA I-18 (JUNIO 1998)

En el circuito de la figura, calcular el valor de la corriente de salida del amplificador operacional $i_0(t)$:



Como es un AO ponemos las ecuaciones de los nudos:



Nudo A: $\dfrac{v_{g1}-v_{g2}}{R} = \dfrac{v_{g2}-v_0}{R}$ [1]

Nudo O: $\dfrac{v_{g2}-v_0}{R} + i_0 = \dfrac{v_0-0}{R} + \dfrac{v_0-v_{g2}}{R}$ [2]

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas: i_0 y v_0

Ahora despejamos v_0 de la ecuación [1]:

$$\frac{v_{g1}-v_{g2}}{R} = \frac{v_{g2}-v_0}{R} \Rightarrow v_{g1}-v_{g2} = v_{g2}-v_0 \Rightarrow v_0 = 2v_{g2}-v_{g1}$$

y, a continuación, sustituimos en [2] y despejamos i_0:

$$\frac{v_{g2}-v_0}{R} + i_0 = \frac{v_0-0}{R} + \frac{v_0-v_{g2}}{R} \Rightarrow i_0 = \frac{v_0}{R} + 2\frac{v_0-v_{g2}}{R} \Rightarrow i_0 = \frac{v_0+2v_0-2v_{g2}}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_0 = \frac{3v_0-2v_{g2}}{R} \Rightarrow i_0 = \frac{3(2v_{g2}-v_{g1})-2v_{g2}}{R} \Rightarrow i_0 = \frac{6v_{g2}-3v_{g1}-2v_{g2}}{R}$$

Así pues, la solución es:

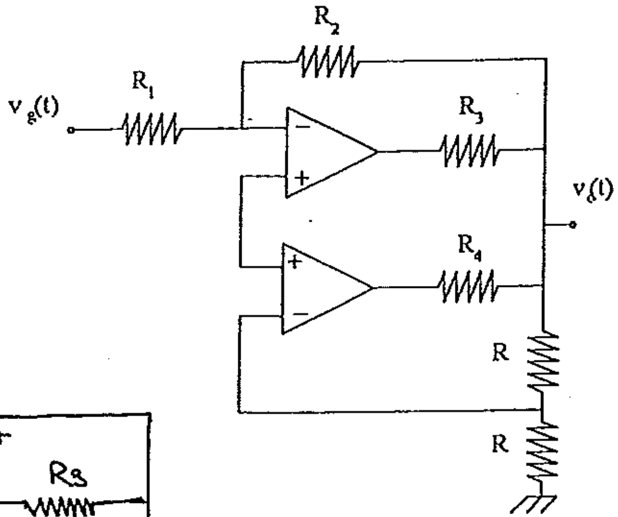
$$\boxed{\textbf{Solución :} \quad i_0(t) = \frac{4v_{g2}(t) - 3v_{g1}(t)}{R} \quad (A)}$$

NOTA IMPORTANTE:

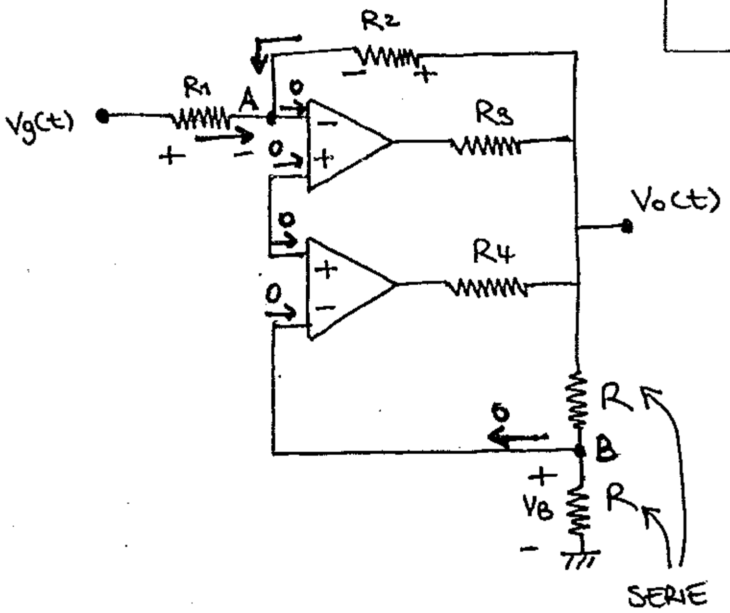
Fíjate que no es habitual poner el nudo de salida entre las ecuaciones pero en este caso es totalmente necesario pues la incógnita es, precisamente, la corriente de salida del AO

PROBLEMA I-20 (SEPTIEMBRE 1999)

En el circuito de la figura, suponiendo amplificadores operacionales ideales, obtener la relación que debe existir entre las resistencias R_1 y R_2 para que la tensión de salida $v_o(t)$ sea exactamente la tensión de entrada $v_g(t)$ invertida (cambiada de signo).



SOLUCIÓN:



• NUDO A: $\frac{V_g - V_A}{R_1} + \frac{V_0 - V_A}{R_2} = 0$ (1)

• NUDO B: DIVIS. DE TENSIÓN

$$V_B = V_0 \frac{R}{R+R} = \frac{V_0}{2} \quad (2)$$

• CCV: $V_A = V_B$ (3)

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (V_A, V_B, V_0)

(3) en (2): $V_A = \frac{V_0}{2}$

Sustituimos en (1): $\frac{V_g - \frac{V_0}{2}}{R_1} + \frac{V_0 - \frac{V_0}{2}}{R_2} = 0 \rightarrow \frac{V_g}{R_1} - \frac{V_0}{2R_1} + \frac{V_0}{2R_2} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{V_0}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = -\frac{V_g}{R_1} \rightarrow V_0 = -\frac{2V_g}{R_1\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} \rightarrow V_0 = -\frac{2V_g}{\cancel{R_1}\frac{R_1 - R_2}{\cancel{R_1}R_2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_0 = -\frac{2R_2}{R_1 - R_2} V_g$$

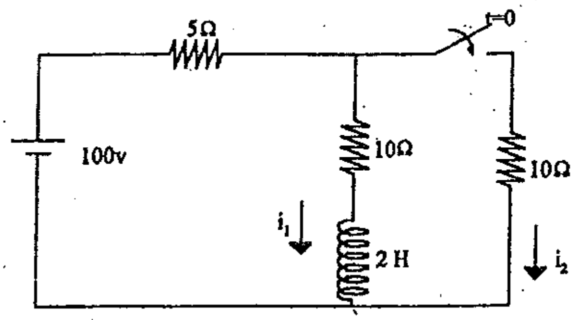
$$\boxed{V_0 = \underbrace{\frac{2R_2}{R_2 - R_1}}_{\text{ganancia}} V_g}$$

DATO: $V_0 = -V_g \Rightarrow V_0 = -1 \cdot V_g \Rightarrow \frac{2R_2}{R_2 - R_1} = -1 \rightarrow 2R_2 = R_1 - R_2$

$$\boxed{3R_2 = R_1}$$

PROBLEMA II-1

En el circuito de la figura se cierra el interruptor en $t = 0$. Determinar las corrientes i_1 e i_2.

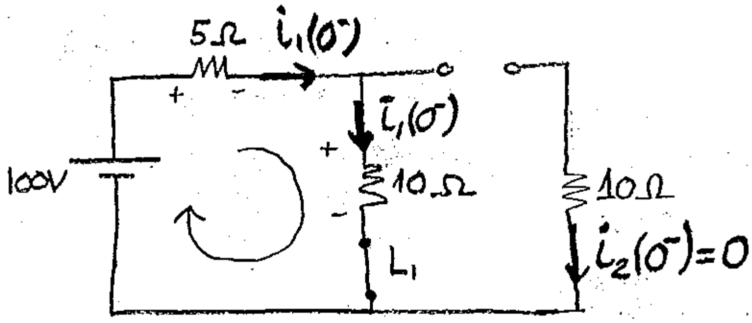


Tenemos 2 intervalos de tiempo:

① $t<0$

② $t>0$

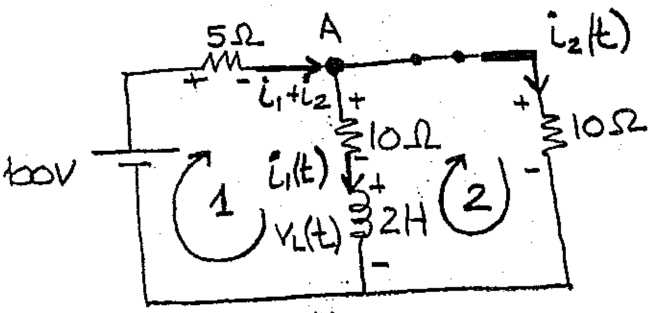
Analizamos ① $t<0$. En particular nos interesa $t=0^-$. El cto. en ese instante estará en régimen permanente de continua, así que



MALLA: $10i_1(0^-)+5i_1(0^-)=100$

$$i_1(0^-)=\frac{100}{15}=\frac{20}{3}\ (A)$$

Analizamos ② $t>0$:



$$\left.\begin{aligned}&\text{MALLA 1: } 100=5(i_1(t)+i_2(t))+10i_1(t)+V_L(t)\ (1)\\&\text{MALLA 2: } 10i_2(t)=V_L(t)+10i_1(t)\ (2)\\&\text{BOBINA: } V_L(t)=2\frac{di_1(t)}{dt}\ (3)\end{aligned}\right\}$$

3 ecs. 3 incóg.: $i_1(t)$, $i_2(t)$, $V_L(t)$

De (2): $i_2(t)=i_1(t)+\frac{V_L(t)}{10}$. Sustituimos en (1)

$$100=5i_1(t)+5\left[i_1(t)+\frac{V_L(t)}{10}\right]+10i_1(t)+V_L(t)\rightarrow 20i_1(t)+\frac{3}{2}V_L(t)=100\ (1')$$

Sust. (3) en (1'): $20i_1(t)+3\frac{di_1(t)}{dt}=100$

Buscamos $\tau \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = \cdots$

Div. entre 3 : $\frac{3}{20}\frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = 5$ EDO de 1^er^ orden con térm. indpte cte.

La CI es $i_1(0^+) = i_1(0^-) = \frac{20}{3}$ (A)

$i_1(t)$ corriente en bobina
función continua de t

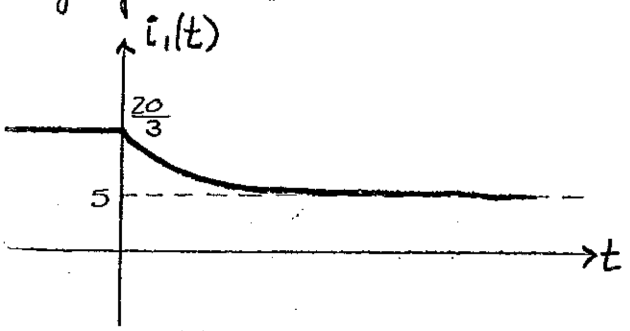
Así que el PVI es:

$$\left.\begin{aligned} \tau\left(\frac{3}{20}\right)\frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = (5) \quad CF \\ i_1(0^+) = \left(\frac{20}{3}\right) \quad CI \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & i_1(t) = (CI-CF)e^{-\frac{t}{\tau}} + CF,\ t>0 \\ & i_1(t) = \left(\frac{20}{3} - 5\right)e^{-\frac{20}{3}t} + 5,\ t>0 \\ & \boxed{i_1(t) = 1{,}67 \cdot e^{-\frac{20}{3}t} + 5\ (A),\ t>0} \end{aligned}$$

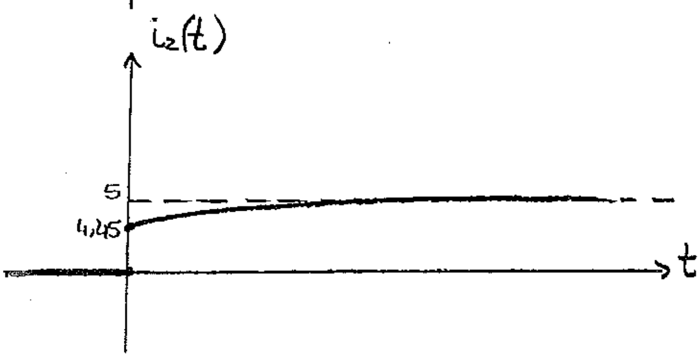
En cuanto a $i_2(t)$, sabemos por (2) que:

$$\boxed{i_2(t) = i_1(t) + \frac{V_L(t)}{10}} = i_1(t) + \frac{2}{10}\frac{di_1(t)}{dt} = \cdots = \boxed{-0{,}555e^{-\frac{20}{3}t} + 5,\ t>0}$$

Gráficamente:



Nota: es continua en t=0 puesto que se trata de la corriente por una bobina



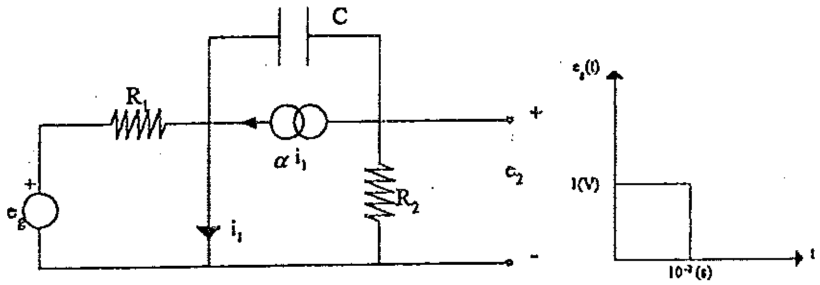
Nota: $i_2(t)$ no es corriente en bobina, ni tensión en condensador, por lo que no tiene porqué ser continua. Por ejemplo, $i_2(t)$ es discontinua en t=0

PROBLEMA II-4

En el circuito de la figura:

a) Formular la ecuación diferencial con $e_2(t)$ como variable.

b) Suponiendo que el condensador está inicialmente descargado, calcular la tensión de salida en t=5 ms, y t=20 ms.

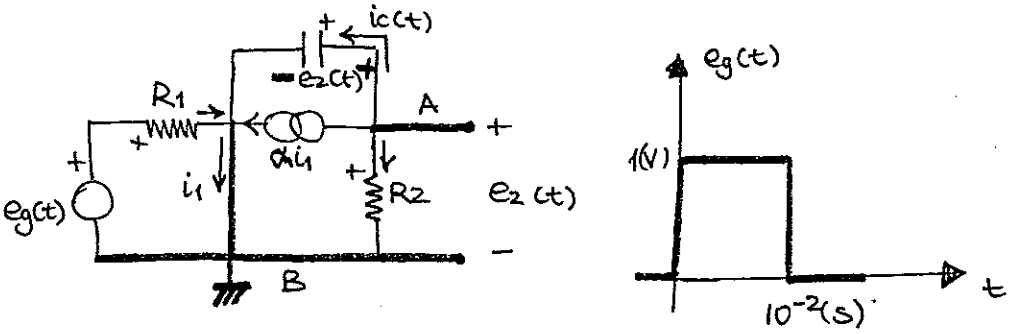


DATOS: $C = 1(\mu F)$

$\alpha = 0{,}99$

$R_1 = 100(\Omega)$

$R_2 = 100(\Omega)$



• NUDO A: $0 = i_c(t) + \alpha i_1(t) + \dfrac{e_2(t)}{R_2}$ (1)

• NUDO B: $\dfrac{e_g(t) - 0}{R_1} + \alpha i_1(t) + i_c(t) = i_1(t)$ (2)

• CONDENSADOR: $i_c(t) = C\dfrac{d e_2(t)}{dt}$ (3)

Sistema de 3 ecua. y 3 incógnitas: $\boxed{e_2(t)}$, $i_1(t)$, $i_c(t)$

(3) en (1):

$$0 = C\frac{de_2(t)}{dt} + \alpha i_1(t) + \frac{e_2(t)}{R_2} \quad ①$$

$$\frac{e_g(t)}{R_1} + \alpha i_1(t) + \frac{C\, d e_2(t)}{dt} = i_1(t) \quad ②$$

Lo reordeno:

$$C\frac{de_2(t)}{dt} + \frac{e_2(t)}{R_2} + \alpha i_1(t) = 0$$

De ① despejo $i_1(t)$:

$$i_1(t) = -\frac{C}{\alpha}\frac{de_2(t)}{dt} - \frac{e_2(t)}{\alpha R_2}$$

Sustituimos en ②:

$$C\frac{de_2(t)}{dt} + \frac{e_g(t)}{R_1} = (1-\alpha)\left(-\frac{C}{\alpha}\frac{de_2(t)}{dt} - \frac{e_2(t)}{\alpha R_2}\right)$$

$$C\frac{de_2(t)}{dt} + \frac{e_g(t)}{R_1} = \frac{(\alpha-1)}{\alpha}\left(C\frac{de_2(t)}{dt} + \frac{e_2(t)}{R_2}\right)$$

$$\frac{C}{\alpha}\frac{de_2(t)}{dt} - \frac{\alpha-1}{\alpha R_2}\, e_2(t) = -\frac{e_g(t)}{R_1}$$

Buscamos la forma estándar →

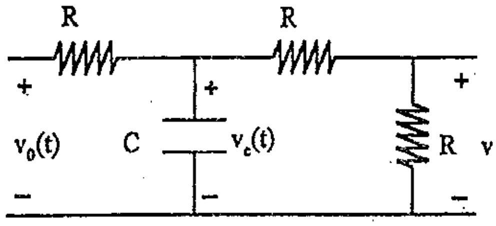
→ Multiplicamos $\times \dfrac{\alpha R_2}{1-\alpha}$

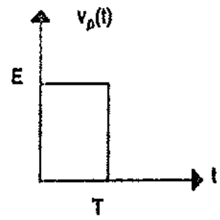
$$\boxed{\frac{R_2 C}{1-\alpha}\frac{de_2(t)}{dt} + e_2(t) = \frac{\alpha R_2\, e_g(t)}{(\alpha-1)\, R_1}}$$

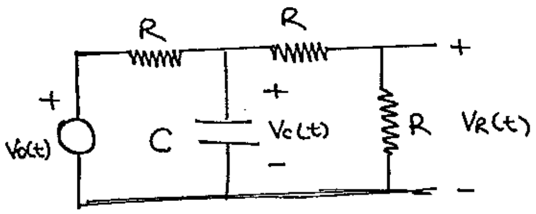
EDO con $e_2(t)$ como variable

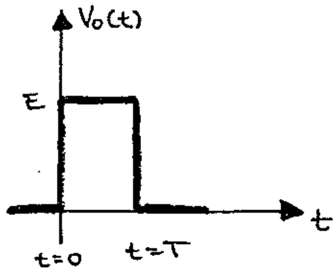
PROBLEMA II-5

En el circuito de la figura, el condensador se encuentra inicialmente descargado. Obtener la ecuación diferencial con $v_c(t)$ como variable. Calcular el ancho del pulso T, para que en $t = T$ la tensión $v_R(t)$ sea el 20% de E.



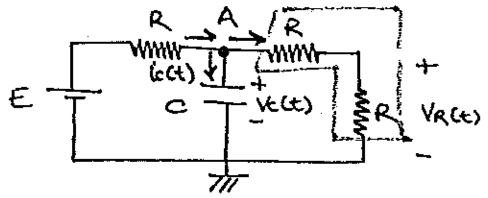




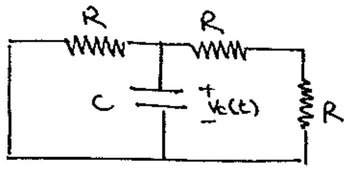


DATO: condensador inicialm. descargado: $V_C(t=0) = 0$ V.

① $0 < t < T$ ¿$V_C(t)$, $0<t<T$?



② $t > T$ ¿$V_C(t)$, $t>T$?



Analizamos ①: $0<t<T$

NUDO A: $\dfrac{E - V_C(t)}{R} = i_C(t) + \dfrac{V_C(t) - 0}{2R}$ (1)

CONDENSADOR: $i_C(t) = C\dfrac{dV_C(t)}{dt}$ (2)

Sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas: $\boxed{V_C(t)}$, $i_C(t)$

(2) en (1):

$$\frac{E}{R} - \frac{V_C(t)}{R} = C\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{V_C(t)}{2R} \rightarrow$$

$$\rightarrow C\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{V_C(t)}{R}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{E}{R}$$

$$C\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{3}{2R}\boxed{V_C(t)} = \frac{E}{R}$$

Buscamos: $\tau\dfrac{dV_C(t)}{dt} + \boxed{V_C(t)} = CF$, por lo que multiplico por $\dfrac{2R}{3}$:

$$\boxed{\frac{2RC}{3}\cdot\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = \frac{2E}{3}}$$

EDO de primer orden con término indep. de → FÓRMULA

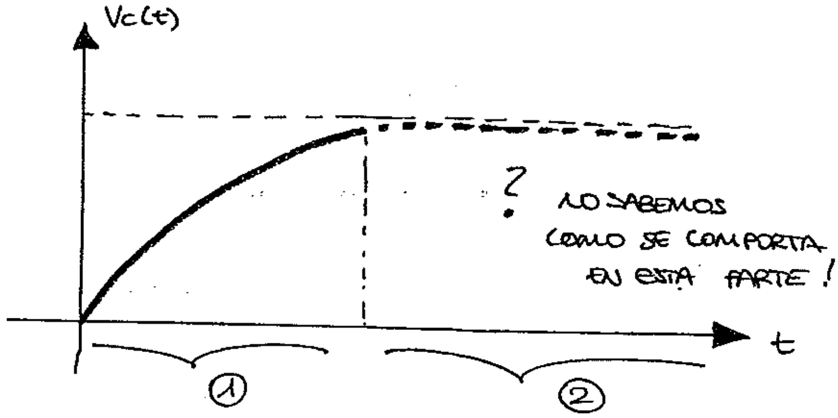
Necesito la $\boxed{CI \equiv V_C(t=0^+) = 0 \text{ (DATO)}}$

El PVI será:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\boxed{\frac{2RC}{3}}}_{\tau} \dfrac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = \overbrace{\boxed{\frac{2E}{3}}}^{CF} \\ V_C(t=0^+) = \underbrace{\boxed{0}}_{CI} \end{array}\right\}$$

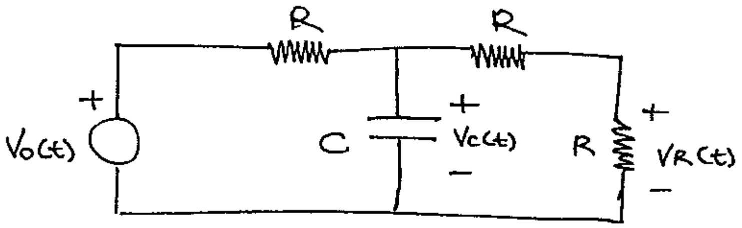
$$V_C(t) = (CI - CF)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + CF \quad , \quad 0<t<T$$

$$V_C(t) = -\frac{2E}{3} e^{\frac{-t}{\frac{2RC}{3}}} + \frac{2E}{3} \longrightarrow \boxed{V_C(t) = \frac{2E}{3}\left(1 - e^{-\frac{3t}{2RC}}\right) (V) \quad , \quad 0<t\leq T}$$



$$CF = \lim_{t\to\infty} V_C(t) = \frac{2E}{3}$$

Me piden T para que $V_R(t=T) = 0'2E$



Div. de tensión: $V_R(t) = V_C(t)\dfrac{R}{R+R} \longrightarrow V_R(t) = \dfrac{V_C(t)}{2}$

$$\boxed{V_R(t) = \frac{E}{3}\left(1 - e^{-\frac{3t}{2RC}}\right) (V) \quad , \quad 0<t\leq T}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_R(t=T) = \dfrac{E}{3}\left(1 - e^{-\frac{3T}{2RC}}\right) \\ V_R(t=T) = 0'2E \end{array}\right\} \quad \frac{\cancel{E}}{3}\left(1 - e^{-\frac{3T}{2RC}}\right) = 0'2\cancel{E} \; ; \; 1 - e^{-\frac{3T}{2RC}} = 0'6 \; ; \; e^{-\frac{3T}{2RC}} = 0'4 \; ; \; -\frac{3T}{2RC} = \ln 0'4$$

$$\boxed{T = -\frac{2RC \ln 0'4}{3} = 0'61\,RC}$$

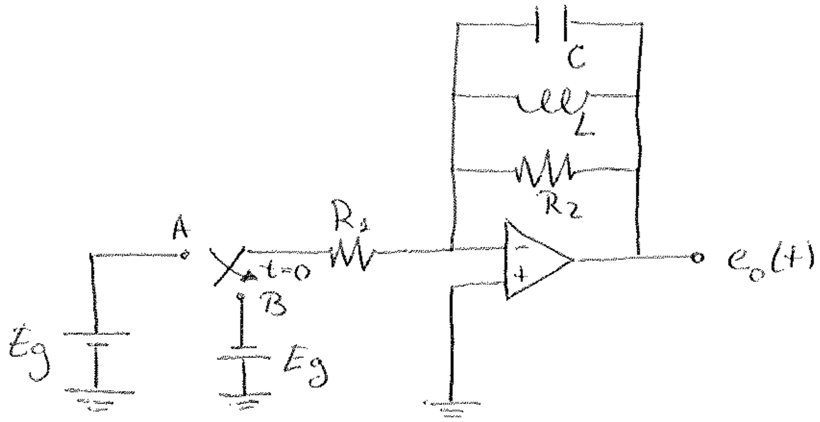
Problema II - 8

En el circuito de la figura el interruptor se encuentra en la posición A para $t<0$ y en $t=0$ conmuta a la posición B. Calcular:

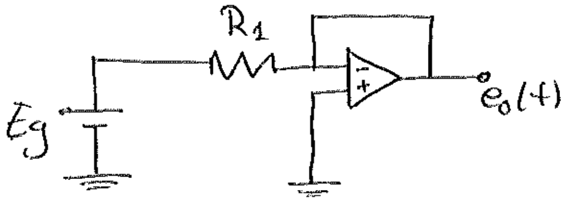
a) CI para la tensión de salida $e_o(t)$, es decir, $e_o(0^+)$ y $\left.\frac{de_o}{dt}\right|_{t=0^+}$

b) $e_o(t)$ para $t>0$. Indicar de qué tipo de amortiguamiento se trata y dibujar la función $e_o(t)$.

Datos: $E_g = 1V$, $L = 0{,}1\,mH$, $C = 1\,\mu F$, $R_1 = R_2 = 10\Omega$

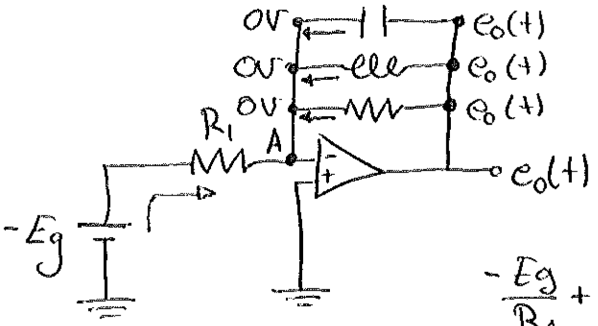


a) En $t<0$ $(t=0^-)$ el cto. está en rég. perm. continua.



$e_o(0^-) = 0\,V$

En $t>0$ $(t=0^+)$



nudo A: $\frac{-E_g - 0}{R_1} + i_c(t) + i_L(t) + \frac{e_o(t)}{R_2} = 0$

conden: $i_c(t) = C\,\frac{de_o(t)}{dt}$

bobina: $e_o(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt}$

$$-\frac{E_g}{R_1} + C\frac{de_o(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int e_o(t)\,dt + \frac{e_o(t)}{R_2} = 0$$

derivamos toda la expresión para evitar la integral:

$$\cancel{-\frac{d}{dt}\left[\frac{E_g}{R_1}\right]}^{0} + C\,\frac{d^2e_o(t)}{dt^2} + \frac{1}{L}\,e_o(t) + \frac{1}{R_2}\,\frac{de_o(t)}{dt} = 0$$

Buscamos la forma: $\frac{d^2 e_o(t)}{dt^2}+2\omega_0\xi\frac{de_o(t)}{dt}+\omega_0^2 e_o(t)=f(t)$

$$\frac{d^2 e_o(t)}{dt^2}+\frac{1}{R_2C}\frac{de_o(t)}{dt}+\frac{1}{LC}e_o(t)=0 \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{R_2C}=2\omega_0\xi\\ \frac{1}{LC}=\omega_0^2\end{cases}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=10^5 \text{ rad/s} \Rightarrow 2\omega_0\xi=\frac{1}{R_2C} \Rightarrow \xi=\frac{1}{2\omega_0 R_2C}=0'5<1$$

Amortiguamiento subcrítico / Respuesta subamortiguada

$\boxed{e_o(0^+)=e_o(0^-)=0\text{ V}}$ ← tensión en C función continua

Teníamos:

$$-\frac{E_g}{R_1}+C\frac{de_o(t)}{dt}+i_L(t)+\frac{e_o(t)}{R_2}=0 \xrightarrow{t=0^+} C\frac{de_o(0^+)}{dt}+i_L(0^+)+\frac{1}{R_2}e_o(0^+)=\frac{E_g}{R_1}$$

$$C e_o'(0^+)-\frac{E_g}{R_1}+\frac{0}{R_2}=\frac{E_g}{R_1} \Rightarrow e_o'(0^+)=\frac{2E_g}{R_1C}$$

PVI:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2 e_o(t)}{dt^2}+\frac{1}{R_2C}\frac{de_o(t)}{dt}+\frac{1}{LC}e_o(t)=0\\ &e_o(0^+)=0\\ &e_o'(0^+)=\frac{2E_g}{R_1C}\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\frac{d^2 e_o(t)}{dt^2}+10^5\frac{de_o(t)}{dt}+10^{10}e_o(t)=0\\ &e_o(0^+)=0\\ &e_o'(0^+)=2\cdot 10^5\end{aligned}$$

1) SG Homogénea:

$$s^2+10^5 s+10^{10}=0 \Rightarrow s=-5\cdot10^4\pm j\frac{\sqrt3}{2}10^5 \begin{cases}\lambda=-5\cdot10^4\\ \theta=\frac{\sqrt3}{2}10^5\end{cases}$$

$$e_{oH}(t)=e^{\lambda t}\left[k_1\cos(\theta t)+k_2\,\text{sen}(\theta t)\right]=e^{-5\cdot10^4 t}\left[k_1\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}10^5 t\right)+k_2\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt3}{2}10^5 t\right)\right]$$

2) SPC $=0$ (por ser homogénea)

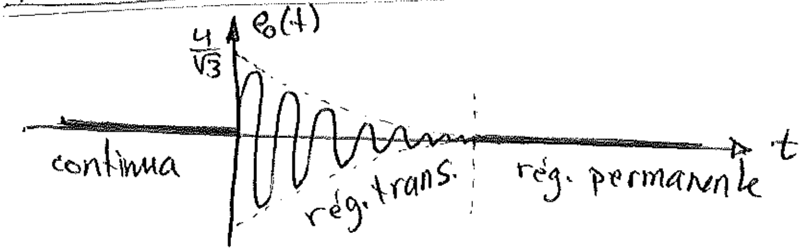
3) SGC $=$ SGH $+$ SPC $= e_{oH}(t)+0$

4) Imponemos las CI para hallar k_1 y k_2

$$e_o(0^+)=0 \Rightarrow e^0\left[k_1\cos(0)+k_2\,\text{sen}(0)\right]=0 \Rightarrow k_1=0$$

$$e_o'(0)=k_2\left[-5\cdot10^4 e^0\,\text{sen}(0)+e^0\frac{\sqrt3}{2}10^5\cos(0)\right] \Rightarrow k_2=\frac{4}{\sqrt3}=2,31$$

$$\boxed{e_o(t)=\frac{4}{\sqrt3}e^{-5\cdot10^4 t}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt3}{2}10^5 t\right)} \quad t>0$$



PROBLEMA II-9 (FEBRERO 1995)

El circuito de la figura está en regimen permanente en $t<0$. En el instante $t=0$ el interruptor conmuta de la posición 1 a la 2. Se pide:

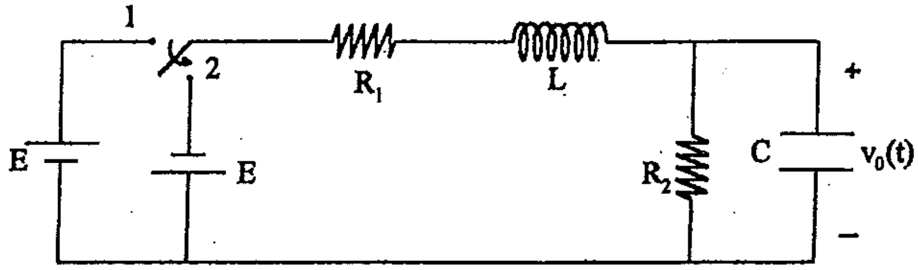
a) La ecuación diferencial para $t \geq 0$ en función de $v_0(t)$.

b) Calcular las condiciones iniciales en $t=0^+$ para $v_0(t=0^+)$ y $dv_0(t)/dt\big|_{t=0^+}$

c) Calcular la pulsación propia y el coeficiente de amortiguamiento. Escribir cualitativamente (sin hacer cálculos) la expresión de $v_0(t)$ y dibujarla.

d) Suponiendo la bobina cortocircuitada (L=0), calcular $v_0(t)$ para $t \geq 0$ y dibujarla.

DATOS: $R_1 = R_2 = 100\Omega$; $L = 20\,mH$; $C = 1\,\mu F$; $E = 20V$

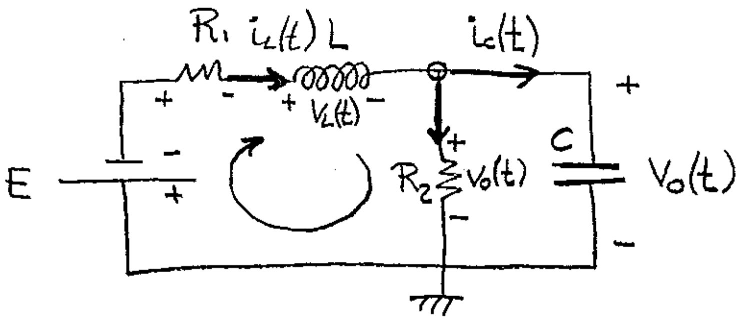


Tenemos 2 intervalos de tiempo

① $t<0$

② $t>0$

a) Analizamos ② $t>0$



NUDO: $i_L(t) = \dfrac{V_o(t)}{R_2} + i_c(t)$ (1)

COND: $i_c(t) = C\dfrac{dV_o(t)}{dt}$ (2)

MALLA: $E + R_1 i_L(t) + V_L(t) + V_o(t) = 0$ (3)

BOBINA: $V_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ (4)

Sust. (2) en (1) y (4) en (3)

NUDO: $i_L(t) = \dfrac{V_o(t)}{R_2} + C\dfrac{dV_o(t)}{dt}$ (1')

MALLA: $E_1 + R_1 i_L(t) + L\dfrac{di_L(t)}{dt} + V_o(t) = 0$ (2')

Stma. 2 ecs. 2 incóg: $i_L(t)$, $V_o(t)$

Despejamos $i_L(t)$ de (1'): $i_L(t) = C\dfrac{dV_o(t)}{dt} + \dfrac{1}{R_2}V_o(t) \longrightarrow \dfrac{di_L(t)}{dt} = C\dfrac{d^2V_o(t)}{dt^2} + \dfrac{1}{R_2}\dfrac{dV_o(t)}{dt}$

Sust. en (2'): $E + R_1\left[C\dfrac{dV_o(t)}{dt} + \dfrac{1}{R_2}V_o(t)\right] + L\left[C\dfrac{d^2V_o(t)}{dt^2} + \dfrac{1}{R_2}\dfrac{dV_o(t)}{dt}\right] + V_o(t) = 0$

$$LC\frac{d^2V_o(t)}{dt^2}+\left(R_1C+\frac{L}{R_2}\right)\frac{dV_o(t)}{dt}+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)V_o(t)=-E$$

Sustituimos valores: $20\cdot10^{-9}\frac{d^2V_o(t)}{dt^2}+3\cdot10^{-4}\frac{dV_o(t)}{dt}+2V_o(t)=-20$

Buscamos la forma: $\frac{d^2V_o(t)}{dt^2}+2\omega_o\xi\frac{dV_o(t)}{dt}+\omega_o^2V_o(t)=f(t)$

Así que dividimos entre $20\cdot10^{-9}$:

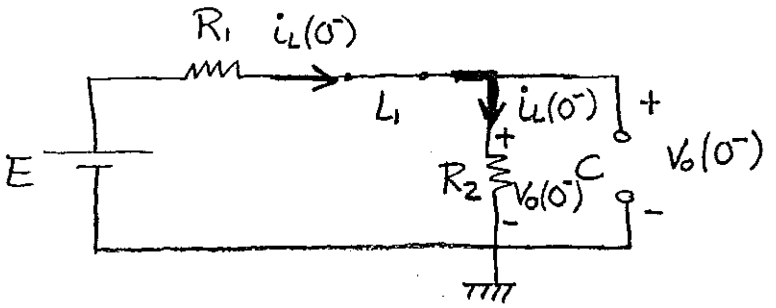
$$\boxed{\frac{d^2V_o(t)}{dt^2}+\underbrace{15000}_{2\omega_o\xi}\frac{dV_o(t)}{dt}+\underbrace{10^8}_{\omega_o^2}V_o(t)=-10^9}$$

EDO de 2° orden

c) $\omega_o^2=10^8 \longrightarrow \boxed{\omega_o=10^4\ \frac{rad}{s}}$ PULSACIÓN PROPIA

$2\omega_o\xi=15000 \longrightarrow \boxed{\xi=\frac{15000}{2\cdot10^4}=0{,}75<1}$ AMORTIGUAMIENTO SUBCRÍTICO

b) Analizamos $t=0^-$. El cto está en régimen permanente de continua.



Div. tensión: $V_o(0^-)=E\frac{R_2}{R_1+R_2}=10(V)$

$i_L(0^-)=\frac{V_o(0^-)}{R_2}=0{,}1\ (A)$

En $t=0^+$ tenemos que:

$\boxed{V_o(0^+)}=V_o(0^-)=\boxed{10\ (V)}$ por ser tensión en C (función continua)

Necesitamos $\frac{dV_o}{dt}(0^+)=V_o'(t)\big|_{t=0^+}$

Usamos (1'): $i_L(t)=\frac{V_o(t)}{R_2}+C\frac{dV_o(t)}{dt}\xrightarrow{t=0^+}i_L(0^+)=\frac{V_o(0^+)}{R_2}+C\frac{dV_o}{dt}(0^+)$

Además $i_L(t)$ es corriente en bobina (f. cont): $i_L(0^+)=i_L(0^-)=0{,}1$

$0{,}1=\frac{10}{100}+C\frac{dV_o}{dt}(0^+)\longrightarrow\boxed{\frac{dV_o}{dt}(0^+)=0}$

Así que el PVI es:

$$\frac{d^2V_o(t)}{dt^2}+15000\frac{dV_o(t)}{dt}+10^8V_o(t)=-10^9$$

$$V_o(0^+)=10$$

$$\frac{dV_o}{dt}(0^+)=0$$

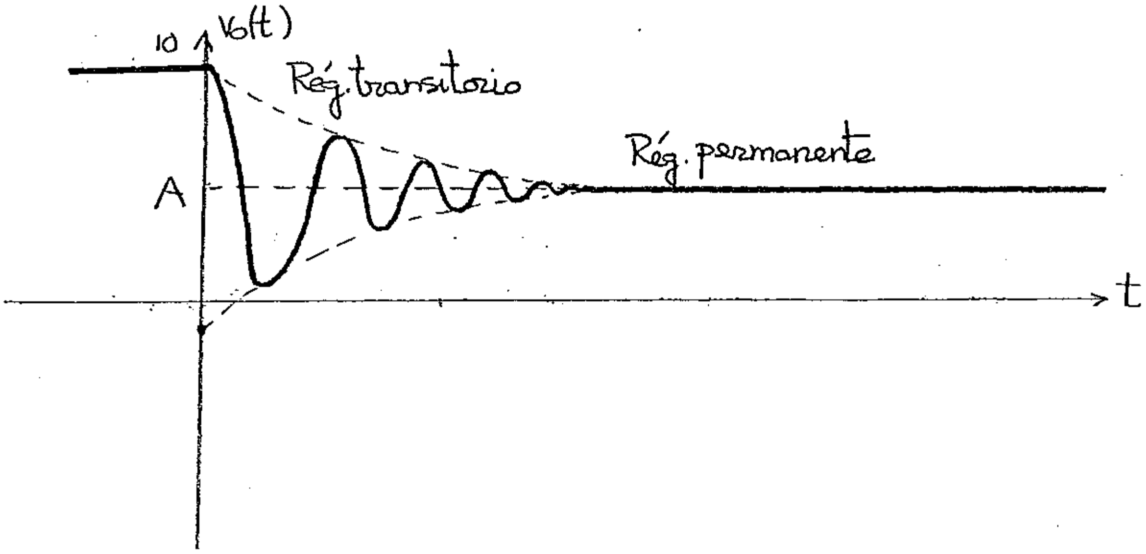
No piden resolver, sólo escribir "cualitativamente" $V_o(t)$ y dibujarla

Sabemos que: $V_o(t)=V_{oH}(t)+V_{op}(t)$ es decir SGC = SGH + SPC

Así que: $V_o(t)=\underbrace{e^{\lambda t}\left[K_1\cos\theta t+K_2\operatorname{sen}\theta t\right]}_{\text{SGH porque } \xi<1}+\underbrace{A}_{\text{SPC porque } f(t)=-10^9=\text{cte}}$

Además como $K_1\cos\theta t+K_2\operatorname{sen}\theta t=K\cos(\theta t+\varphi)$, podemos escribir:

$$V_o(t)=Ke^{\lambda t}\cos(\theta t+\varphi)+A\ ,\ t>0$$



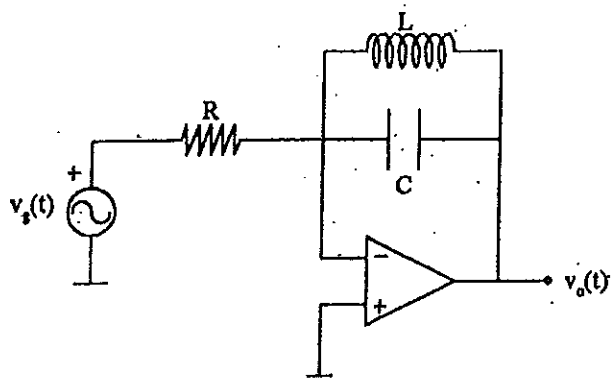
PROBLEMA II-10 (FEBRERO 1996)

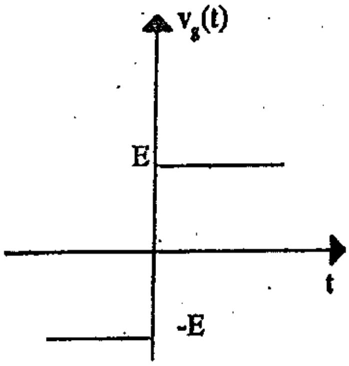
En el circuito de la figura se pide calcular:

a) Condiciones iniciales en $t = 0^+$ para $v_0(t)$ y su derivada respecto de t.

b) La ecuación diferencial para la variable $v_0(t)$.

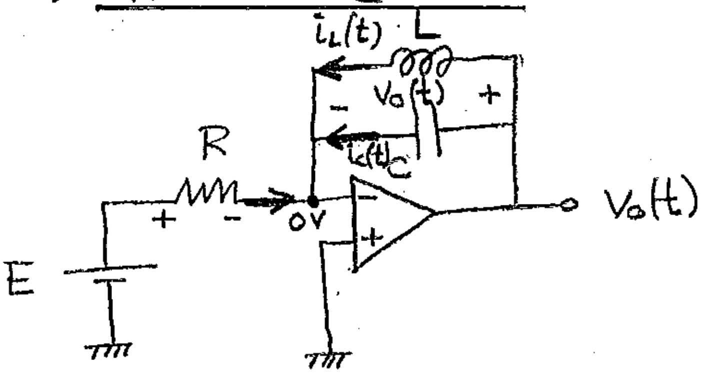
c) $v_0(t)$ para $t \geq 0$.





Comenzamos obteniendo la EDO en $V_o(t)$. Tenemos 2 intervalos $\begin{cases} ① \ t<0 \to V_g(t) = -E \\ ② \ t>0 \to V_g(t) = E \end{cases}$

b) Analizamos ② $t>0$:



$$\left.\begin{array}{l} \text{NUDO: } \dfrac{E-0}{R} + i_C(t) + i_L(t) = 0 \quad ① \\ \text{COND: } i_C(t) = C\dfrac{dV_o(t)}{dt} \quad ② \\ \text{BOBINA: } V_o(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ \qquad\downarrow \\ i_L(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int V_o(t)dt \quad ③ \end{array}\right\}$$

③ y ② en ①: $$\frac{E}{R} + C\frac{dV_o(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int V_o(t)dt = 0$$

Derivamos para eliminar la integral:

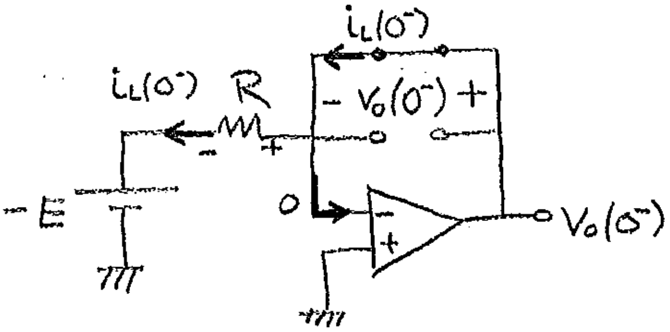
$$\cancel{\frac{d}{dt}}\left(\frac{E}{R}\right)^{\nearrow 0} + C\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + \frac{1}{L}V_o(t) = 0 \longrightarrow C\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + \frac{1}{L}V_o(t) = 0$$

Buscamos la forma estándar: $$\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + 2\omega_0\xi\frac{dV_o(t)}{dt} + \omega_0^2 V_o(t) = f(t)$$

Div. por C: $\boxed{\frac{d^2 V_o(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} V_o(t) = 0}$ EDO de 2º orden homogénea.

a) Obtenemos las CI's: $V_o(t=0^+)$, $\frac{dV_o}{dt}(t=0^+)$

Cto. en $t=0^-$: Se encuentra en régimen permanente de continua



$V_o(0^-) = 0$ porque hay un cortocirc.

$$i_L(0^-) = \frac{0-(-E)}{R} = \frac{E}{R}$$

Cto en $t=0^+$:

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{E}{R}$ porque la corriente por bobina es función continua del tiempo

$\boxed{V_o(0^+) = V_o(0^-) = 0}$ porque la tensión en condensador es función continua del tiempo.

Para obtener $\frac{dV_o}{dt}(t=0^+)$:

NUDO: $\frac{E}{R} + i_C(t) + i_L(t) = 0$

COND: $i_C(t) = C\frac{dV_o(t)}{dt}$

$$\frac{E}{R} + C\frac{dV_o(t)}{dt} + i_L(t) = 0$$

$$\Big\downarrow t=0^+$$

$$\frac{E}{R} + C\frac{dV_o}{dt}(0^+) + \underbrace{i_L(0^+)}_{\frac{E}{R}} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dV_o}{dt}(0^+) = -\frac{2E}{RC}}$$

c) El PVI es:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2 V_o(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} V_o(t) = 0 \\ V_o(0^+) = 0 \\ \frac{dV_o}{dt}(0^+) = -\frac{2E}{RC} \end{array}\right\}$$

Resolvemos el PVI:

<u>Paso 1</u>: SGH $\quad \dfrac{d^2V_o(t)}{dt^2}+\dfrac{1}{LC}V_o(t)=0 \xrightarrow{\text{Ec. caract}} s^2+\dfrac{1}{LC}=0 \longrightarrow$

$\longrightarrow s^2=-\dfrac{1}{LC} \longrightarrow s=\pm\sqrt{\dfrac{-1}{LC}}=\pm j\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\overset{\lambda}{0}\pm j\overset{\theta}{\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

$SGH \equiv V_{oH}(t)=e^{\lambda t}\left[K_1\cos\theta t+K_2 \operatorname{sen}\theta t\right]=K_1\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}+K_2\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$

<u>Pasos 2 y 3</u>: Como la EDO es homogénea $SPC\equiv V_{op}(t)=0$

<u>Paso 4</u>: $SGC=SGH+\cancel{SPC}^{\,0}$; $\quad V_o(t)=V_{oH}(t)+\cancel{V_{op}(t)}^{\,0}$

<u>Paso 5</u>: usamos las CIs para determinar K_1 y K_2

$\overline{V_o(0^+)=0} \longrightarrow K_1\cancel{\cos 0}^{\,1}+K_2\cancel{\operatorname{sen} 0}^{\,0}=0 \longrightarrow K_1=0 \longrightarrow V_o(t)=K_2\operatorname{sen}\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$

$$\frac{dV_o}{dt}(t)=\frac{K_2}{\sqrt{LC}}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

$\dfrac{dV_o}{dt}(0^+)=-\dfrac{2E}{RC} \longrightarrow \dfrac{K_2}{\sqrt{LC}}\cos 0=-\dfrac{2E}{RC} \rightarrow K_2=\dfrac{-2E\sqrt{LC}}{RC}=\dfrac{-2E}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

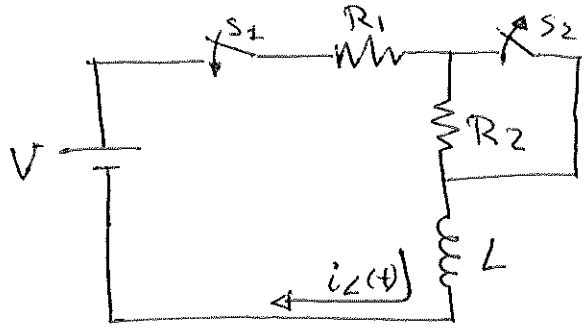
Así que:

$$\boxed{V_o(t)=-\frac{2E}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\operatorname{sen}\frac{t}{\sqrt{LC}},\quad t>0}$$

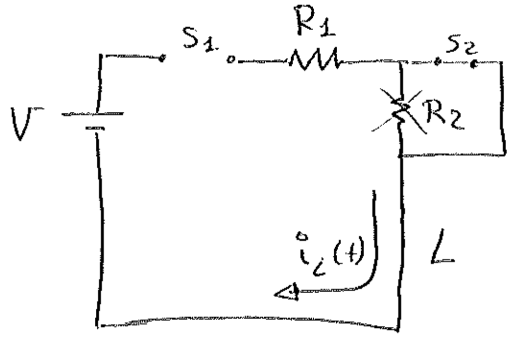
Problema II - 13

En el circuito de la figura el interruptor S_1 se cierra en $t=0$. Después de 4 ms se abre S_2. Calcule la corriente por la bobina.

Datos: $R_1 = 50\,\Omega$ $R_2 = 100\,\Omega$ $L = 0'1$ H $V = 100$ V



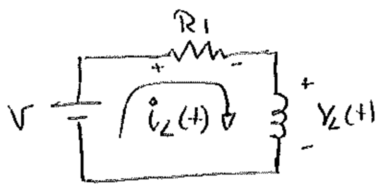
① $t<0 \Rightarrow$ régimen permanente de continua



$$\boxed{i_L(t) = 0\ ;\ t<0}$$

$$i_L(0^-) = 0 = i_L(0^+)$$

② $0 < t < T = 4\,ms$



$$\left.\begin{array}{l} \text{malla: } V = i_L(t)R_1 + V_L(t) \\ V_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{array}\right\}$$

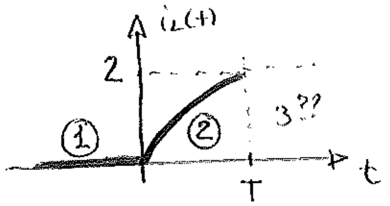
$$R_1 i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = V \Rightarrow \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{V}{R}$$

PVI:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\dfrac{L}{R_1}}_{\tau}\dfrac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \overbrace{\dfrac{V}{R}}^{CF} \\ i_L(0^+) = 0 \to CI \end{array}\right\}$$

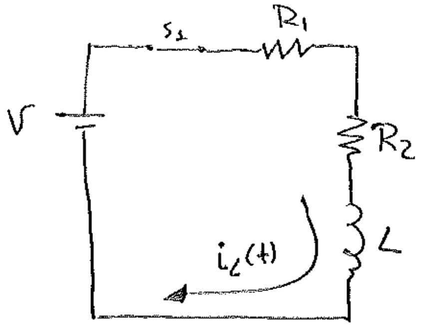
$$i_L(t) = (CI - CF)\,e^{-\frac{t}{\tau}} + CF \quad 0<t<T$$

$$i_L(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}}\right) \quad 0<t<T$$



$$\boxed{i_L(t) = 2(1 - e^{-500t})\ (A);\ 0<t<T}$$

③ $t > T = 4ms$



Resulta ser el mismo circuito que en el caso anterior salvo que R_1 ahora es R_1+R_2, luego aprovecharemos la EDO modificando el valor de la resistencia.

$$\frac{L}{R_1+R_2}\frac{di_L(t')}{dt'} + i_L(t') = \frac{V}{R_1+R_2}$$

$$CI: \quad i_L(t'=0^+) = i_L(t=T^+) = i_L(t=T^-) \underset{T=4ms}{=} 2(1-e^{-2}) \simeq 1'73 \text{ (A)}$$

PVI:

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{\frac{L}{R_1+R_2}}_{\tau}\frac{di_L(t')}{dt'} + i_L(t') = \overbrace{\frac{V}{R_1+R_2}}^{CF} \\ &\underbrace{i_L(t'=0^+) = 1'73}_{CI} \end{aligned}\right\}$$

$$i_L(t') = (CI - CF)\, e^{-t'/\tau} + CF \;;\; t'>0$$

$$i_L(t') = 1'06\, e^{-1500t'} + \frac{2}{3} \text{ (A)} \;;\; t'>0$$

$$t' = t - T$$

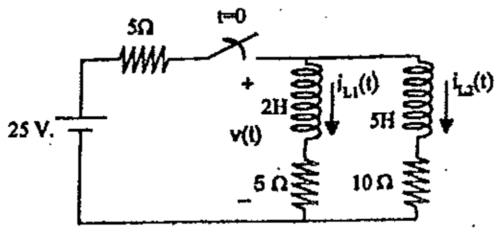
$$\boxed{i_L(t) = 1'06\, e^{-1500(t-T)} + \frac{2}{3} \text{ (A)} \;;\; t>T}$$

Finalmente:

$$\boxed{i_L(t) = \begin{cases} 0 \;, & t<0 \\ 2(1-e^{-500t}) \text{ (A)}, & 0<t<T \\ 1'06 \cdot e^{-1500(t-4\cdot 10^{-3})} + \dfrac{2}{3} \text{ (A)} & t>4ms \end{cases}}$$

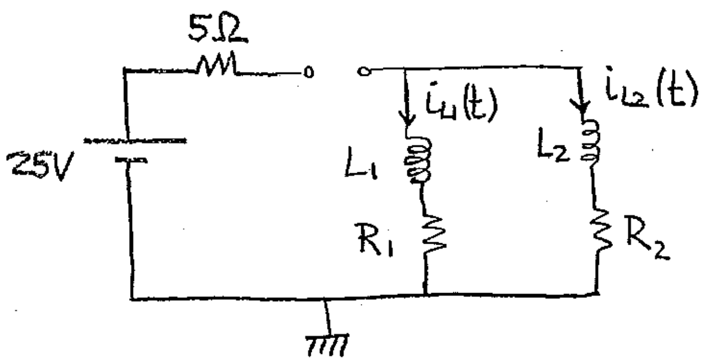
PROBLEMA II-15

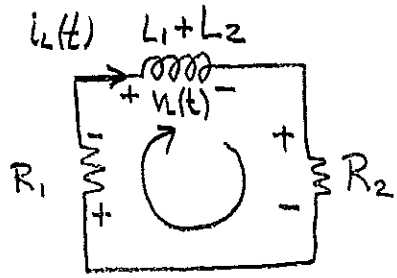
La red de la figura está en régimen permanente con el interruptor cerrado. En $t = 0$ se abre el interruptor. Hallar las corrientes por las dos bobinas y la tensión $v(t)$ para $t > 0$.



Hay 2 intervalos de tiempo: 1 $t<0$ 2 $t>0$

Analizamos 2 $t>0$ para obtener la EDO





En este intervalo las 2 bobinas están en serie, y circula por ellas una corriente $i_L(t) = i_{L2}(t) = -i_{L1}(t)$ (Ver dibujo de arriba).

MALLA: $R_1 i_L(t) + V_L(t) + R_2 i_L(t) = 0$ (1)

BOBINA: $V_L(t) = (L_1+L_2)\dfrac{di_L(t)}{dt}$ (2)

(2) en (1):

$$(R_1+R_2)i_L(t) + (L_1+L_2)\frac{di_L(t)}{dt} = 0$$

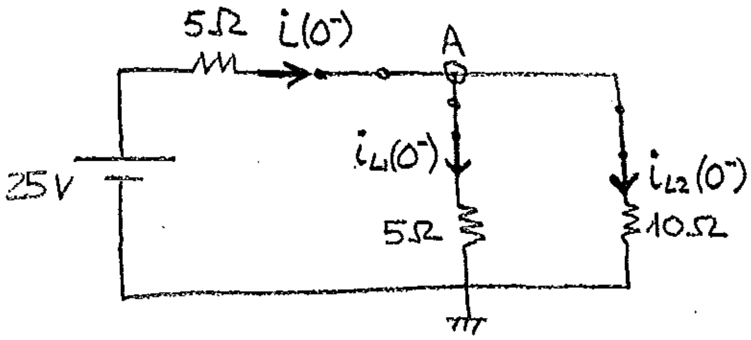
Buscamos $\tau \dfrac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \ldots$

Dividimos por R_1+R_2: $\dfrac{L_1+L_2}{R_1+R_2}\dfrac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0 \rightarrow \boxed{\dfrac{7}{15}\dfrac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0}$

EDO de 1er orden con térm. indpte cte.

Ahora necesitamos las CIs. Para obtenerlas, necesitamos analizar el intervalo $t<0$. En particular $t=0^-$

Cto en $t=0^-$: Está en régimen permanente de continua

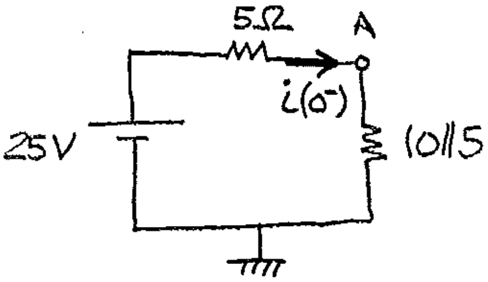


Por divisor de corriente:

$$i_{L1}(0^-) = i(0^-)\frac{10}{10+5} = \frac{2}{3}i(0^-)$$

$$i_{L2}(0^-) = i(0^-)\frac{5}{10+5} = \frac{1}{3}i(0^-)$$

Calculamos $i(0^-)$:



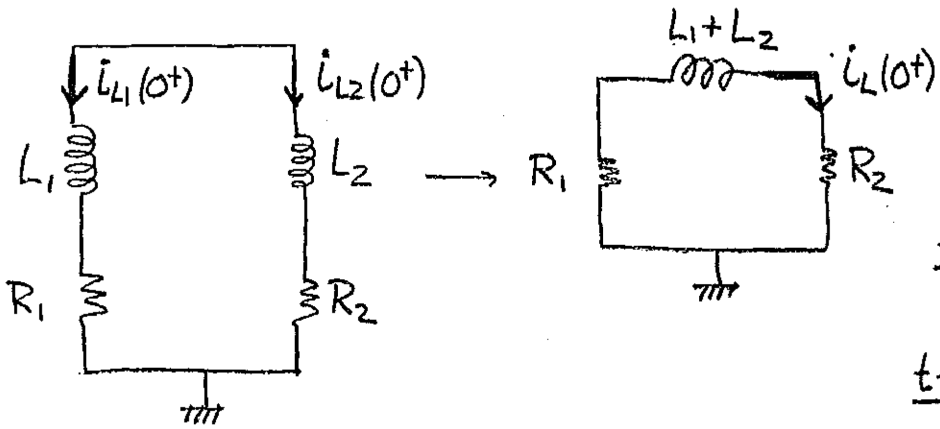
$$i(0^-) = \frac{25-0}{5+10/\!/15} = \frac{25}{5+\frac{10\cdot 5}{10+15}} = 3\,(A)$$

por lo que:

$i_{L1}(0^-) = 2\,(A)$

$i_{L2}(0^-) = 1\,(A)$

Cto en $t=0^+$:



Hay variación de parámetros puesto que en:

$t=0^-$: $i_{L1}(0^-) = 2\,(A)$

$i_{L2}(0^-) = 1\,(A)$

$t=0^+$: $i_{L1}(0^+) = -i_{L2}(0^+)$

por lo que no es posible que $i_{L1}(0^+) = 2\,(A)$

$i_{L2}(0^+) = 1\,(A)$

Hay que aplicar continuidad del flujo magnético: $\phi(0^+) = \phi(0^-)$

$\phi(0^+) = (L_1+L_2)\,i_L(0^+)$ o lo que es igual $\phi(0^+) = -L_1 i_{L1}(0^+) + L_2 i_{L2}(0^+)$

puesto que $i_L(0^+) = -i_{L1}(0^+) = i_{L2}(0^+)$

$\phi(0^-) = -L_1\, i_{L1}(0^-) + L_2 i_{L2}(0^-)$

En resumidas cuentas:

$$\left.\begin{aligned}\phi(0^+) &= (L_1+L_2)\,i_L(0^+)\\ \phi(0^-) &= -L_1\, i_L(0^-) + L_2\, i_{L2}(0^+)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\phi(0^+)=\phi(0^-)} (L_1+L_2)\,i_L(0^+) = -i_{L1}(0^-)L_1 + i_{L2}(0^-)L_2$$

Así que: $$\boxed{i_L(0^+) = \frac{i_{L2}(0^-)L_2 - i_{L1}(0^-)L_1}{L_1+L_2} = \frac{1\cdot 5 - 2\cdot 2}{7} = \frac{1}{7}\ (A)}$$

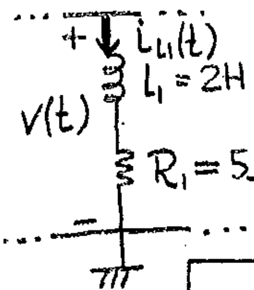
El PVI es:

$$\left.\begin{aligned}\overset{\tau}{\frac{7}{15}}\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) &= \overset{CF}{0}\\ i_L(0^+) &= \underset{CI}{\frac{1}{7}}\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} i_L(t) &= (CI-CF)e^{-\frac{t}{\tau}} + CF,\ t>0\\ i_L(t) &= \frac{1}{7}e^{-\frac{15}{7}t},\ t>0\end{aligned}$$

Así que: $$i_{L1}(t) = -i_L(t) = -\frac{1}{7}e^{-\frac{15}{7}t},\ t>0$$

$$i_{L2}(t) = i_L(t) = \frac{1}{7}e^{-\frac{15}{7}t},\ t>0$$

Lo que me piden es $v(t)$, $t>0$. Mirando el cto del enunciado vemos que:



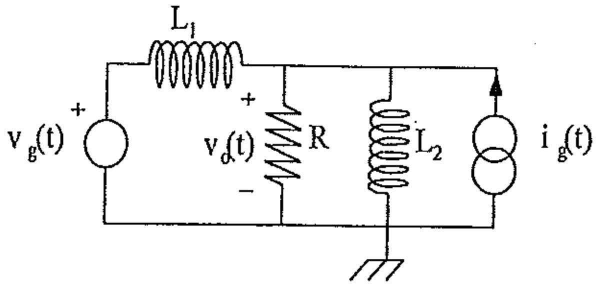
$$v(t) = L_1\frac{di_{L1}(t)}{dt} + R_1 i_{L1}(t) = 2\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{15}{7}\right)e^{-\frac{15}{7}t} +$$

$$+\ 5\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)e^{-\frac{15}{7}t} = \left(\frac{30}{49} - \frac{5}{7}\right)e^{-\frac{15}{7}t} \longrightarrow$$

$$\boxed{v(t) = \frac{-5}{49}e^{-\frac{15}{7}t},\ t>0}$$

PROBLEMA III-3

Calcular $v_0(t)$ en el siguiente circuito:



DATOS:

$v_g(t) = 100\cos(2\,10^3 t - \pi/6)\ (V)$

$i_g(t) = 0{,}05\cos(2\,10^3 t)\ (A)$

$L_1 = 0{,}25\,(H);\ L_2 = 2H;\ R = 500\,(\Omega)$

Los fasores asociados a las fuentes son:

$$v_g(t) = 100\cos(2\cdot10^3 t - \pi/6) \quad \Rightarrow \quad V_g = 100e^{-\frac{\pi}{6}j} = 100\cos(-\pi/6) + 100\operatorname{sen}(-\pi/6)j = 86{,}6 - 50j$$

$$i_g(t) = 0{,}05\cos(2\cdot10^3 t) \quad \Rightarrow \quad I_g = 0{,}05e^{0j} = 0{,}05 + 0j = 0{,}05$$

Hacemos la ecuación del nudo:

$$\text{Nudo:}\quad \frac{V_g - V_0}{jwL_1} + I_g = \frac{V_0 - 0}{R} + \frac{V_0 - 0}{jwL_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_g}{jwL_1} + I_g = V_0\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jwL_2} + \frac{1}{jwL_1}\right)$$

Despejando el fasor V_0, sustituyendo los valores y operando nos queda:

$$V_0 = \frac{\dfrac{V_g}{jwL_1} + I_g}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jwL_2} + \dfrac{1}{jwL_1}} = \frac{\dfrac{86{,}6-50j}{j2000\cdot0{,}25} + 0{,}05}{\dfrac{1}{500} + \dfrac{1}{j2000\cdot2} + \dfrac{1}{j2000\cdot0{,}25}} =$$

$$= \frac{\dfrac{86{,}6-50j}{500j} + 0{,}05}{2\cdot10^{-3} - 0{,}25\cdot10^{-3}j - 2\cdot10^{-3}j} = \frac{\dfrac{86{,}6-50j}{500}(-j) + 0{,}05}{2\cdot10^{-3} - 2{,}25\cdot10^{-3}j} = \frac{\dfrac{-86{,}6j-50}{500} + 0{,}05}{2\cdot10^{-3} - 2{,}25\cdot10^{-3}j} =$$

$$= \frac{-173\cdot10^{-3}j - 0{,}1 + 0{,}05}{2\cdot10^{-3} - 2{,}25\cdot10^{-3}j} = \frac{-50\cdot10^{-3} - 173\cdot10^{-3}j}{2\cdot10^{-3} - 2{,}25\cdot10^{-3}j} = \frac{(-50-173j)\cdot\cancel{10^{-3}}}{(2-2{,}25j)\cdot\cancel{10^{-3}}} = \frac{-50-173j}{2-2{,}25j} =$$

$$= \frac{-50-173j}{2-2{,}25j}\,\frac{2+2{,}25j}{2+2{,}25j} = \frac{-100 - 112{,}5j - 346j + 389{,}25}{2^2 + 2{,}25^2} = \frac{289{,}25 - 458{,}5j}{9{,}06} = 31{,}92 - 50{,}61j$$

$$V_0 = 31{,}92 - 50{,}61j \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{31{,}92^2 + (-50{,}61)^2} = 59{,}8 \\ \theta = \operatorname{atan}\left(\dfrac{-50{,}61}{31{,}92}\right) = -1 = -0{,}32\pi \ (-57{,}3^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow V_0 = 59{,}8e^{j-0{,}32\pi}$$

Por tanto el fasor es $V_0 = 59{,}8e^{-j0{,}32\pi}$ y pasándolo al tiempo nos queda:

$$v_0(t) = \operatorname{Re}\left[V_0 e^{jwt}\right] = \operatorname{Re}\left[59{,}8e^{-j0{,}32\pi}e^{j2\cdot10^3 t}\right] = \operatorname{Re}\left[59{,}8e^{j(2\cdot10^3 t - 0{,}32\pi)}\right]$$

Así pues, la solución es:

$$\boxed{\textbf{Solución :}\quad v_0(t) = 59{,}8\cos(2\cdot10^3 t - 0{,}32\pi)}$$

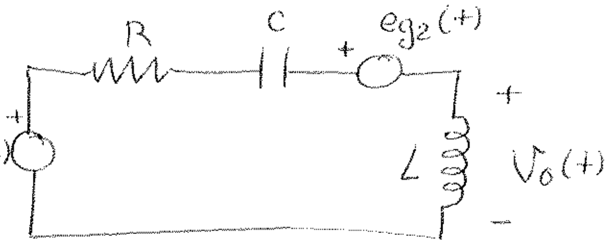
Problema III - 4

Calcule $V_o(t)$:

$e_{g1}(t) = 200 \cos(2 \cdot 10^3 t)$ (V)

$e_{g2}(t) = 100 \operatorname{sen}(2 \cdot 10^3 t)$ (V)

$R = 200\,\Omega$; $C = 1\mu F$; $L = 1mH$



$\omega = 2 \cdot 10^3$ rad/s $\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 318'31$ Hz $\Rightarrow T = \frac{1}{f} = 3'14$ ms

Antes de analizar...

(I) Obtenemos fasores de los generadores y las señales:

$e_{g1}(t) = 200 \cos(2 \cdot 10^3 t) = 200 \cos(2 \cdot 10^3 t + 0) \Rightarrow E_{g1} = 200 e^{j \cdot 0} = 200$ (V)

$e_{g2}(t) = 100 \operatorname{sen}(2 \cdot 10^3 t) = 100 \cos(2 \cdot 10^3 t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow E_{g2} = 100\, e^{-\frac{\pi}{2} j} = -100j$ (V)

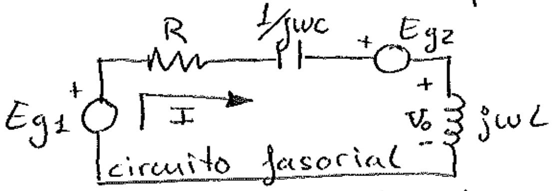
$v_o(t) = V_o$

(II) Obtenemos las impedancias de los elementos pasivos:

$R\,(\Omega) \longrightarrow R\,(\Omega)$

$C\,(F) \longrightarrow \frac{1}{j\omega C}\,(\Omega)$

$L\,(H) \longrightarrow j\omega L\,(\Omega)$



Ahora analizamos el circuito fasorial obtenido:

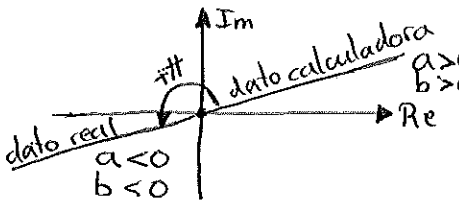
malla: $RI + \frac{I}{j\omega C} + E_{g2} + j\omega L I = E_{g1}$

$I\left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L\right) = E_{g1} - E_{g2} \Rightarrow I = \frac{E_{g1} - E_{g2}}{R - \frac{1}{\omega C} j + j\omega L} = \frac{200 + 100j}{200 + j\left(2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}\right)}$

$I = \frac{200 + j100}{200 - j498} = \frac{2 + j}{2 - j4'98} = \frac{(2+j)(2+j4'98)}{(2-j4'98)(2+j4'98)} = \frac{4 + j\,2 \cdot 4'98 + 2j + j^2 4'98}{\left(\sqrt{2^2 + 4'98^2}\right)^2} = \frac{-0'98}{28'8004} + \frac{j\,11'96}{28'8004}$

$I = \frac{-0'98}{28'8004} + \frac{j\,11'96}{28'8004}$ (A) $\Rightarrow V_o = j\omega L I = j \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{-0'98}{28'8004} + j\frac{11'96}{28'8004}\right)$

$V_o = \frac{-23'92}{28'8004} + j\left(\frac{-1'96}{28'8004}\right)$; $V_o = a + jb$

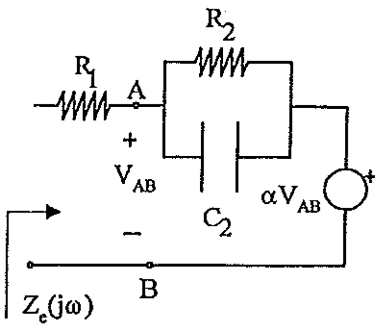


$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = 0'83$

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = 0'08176$ rad $\xrightarrow{+\pi}$ $3'2233$ rad (ojo Dos ángulos con la misma tangente)

$V_o = 0'83 \cdot e^{j\,3'223}$ (V) $\Rightarrow \boxed{V_o(t) = 0'83 \cdot \cos(2 \cdot 10^3 t + 3'223)}$

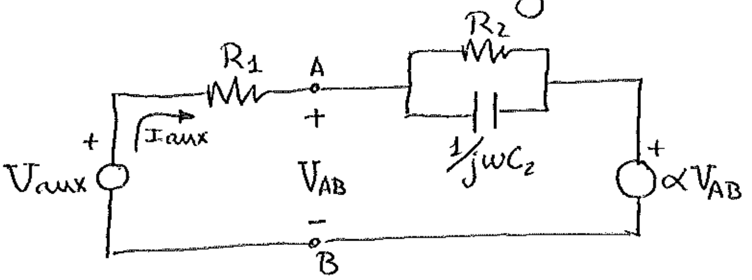
Calcular la impedancia de entrada del circuito de la figura.



Para calcular la impedancia de entrada usaremos el método del generador auxiliar:

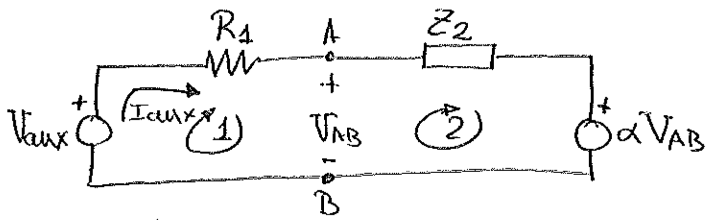
- desconexión de gen. independientes
- colocación de un gen. auxiliar

$$\left.\right\} Z_e = \frac{V_{aux}}{I_{aux}}$$



$$Z_2 = R_2 // \frac{1}{j\omega C_2}$$

$$Z_2 = \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$



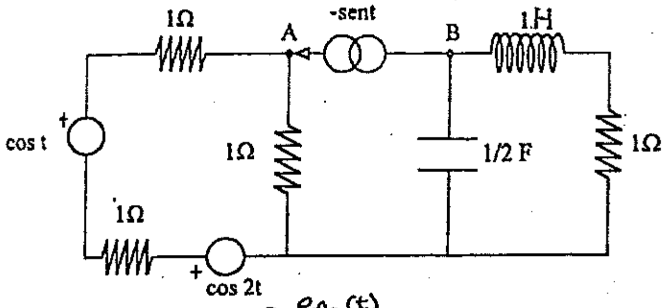
$$\left.\begin{array}{l} \text{malla 1: } R_1 I_{aux} + V_{AB} = V_{aux} \\ \text{malla 2: } Z_2 I_{aux} + \alpha V_{AB} = V_{AB} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{sistema} \\ \text{2 ecs.} \\ \text{2 incóg.} \end{array}$$

$$I_{aux} R_1 + \frac{Z_2 I_{aux}}{1-\alpha} = V_{aux} \Rightarrow I_{aux}\left(R_1 + \frac{Z_2}{1-\alpha}\right) = V_{aux}$$

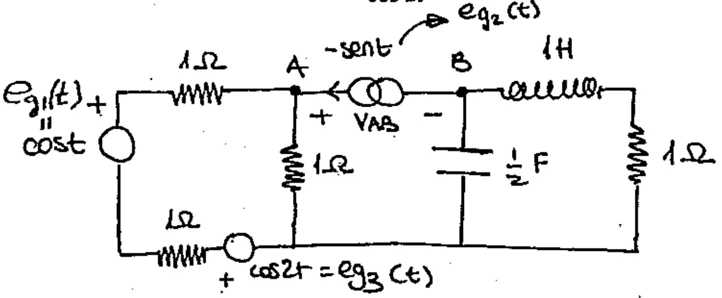
$$\boxed{Z_e = \frac{V_{aux}}{I_{aux}} = R_1 + \frac{Z_2}{1-\alpha} = R_1 - \frac{R_2}{1+j\omega R_2 C_2} \cdot \frac{1}{1-\alpha}}$$

PROBLEMA III-8

En el circuito de la figura, calcular $v_{AB}(t)$.



$V_{AB}(t) = V_A(t) - V_B(t)$

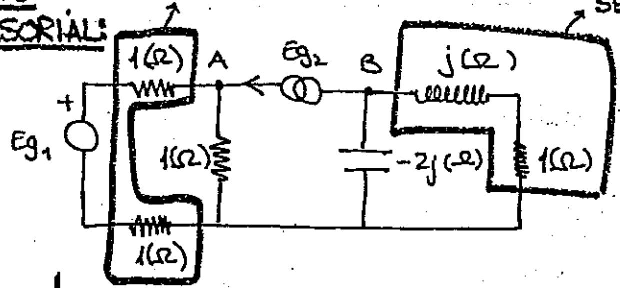


- $e_{g_1}(t) = \cos t \rightarrow \omega = 1\,rad/s$
- $e_{g_2}(t) = -\text{sen}\,t \rightarrow \omega = 1\,rad/s$
- $e_{g_3}(t) = \cos 2t \rightarrow \omega = 2\,rad/s$

Hay que aplicar SUPERPOSICIÓN

(1) $\omega = 1\,rad/s \rightarrow \cancel{\omega \neq 1\,rad/s} \rightarrow \overline{V}_{AB1} \rightarrow V_{AB_1}(t)$

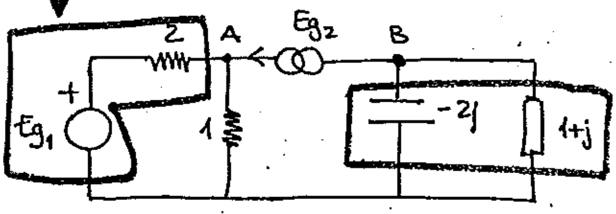
CTO FASORIAL:



FASORES :

- $e_{g_1}(t) = \cos t \rightarrow E_{g_1} = 1\cdot e^{j0} = 1\,V$
- $e_{g_2}(t) = -\text{sen}\,t = -\cos(t - \frac{\pi}{2}) \rightarrow E_{g_2} = -e^{-j\frac{\pi}{2}} = j\,(A)$ $-j$

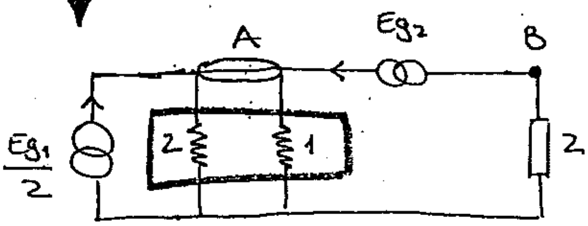
$\text{sen}\,\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$



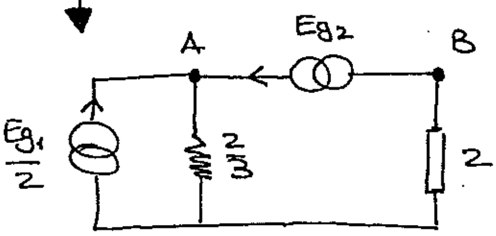
IMPEDANCIAS :

$\frac{1}{2}F \rightarrow \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\cdot 1\cdot \frac{1}{2}} = -2j\,(\Omega)$

$1H \rightarrow j\omega L = j\,(\Omega)$

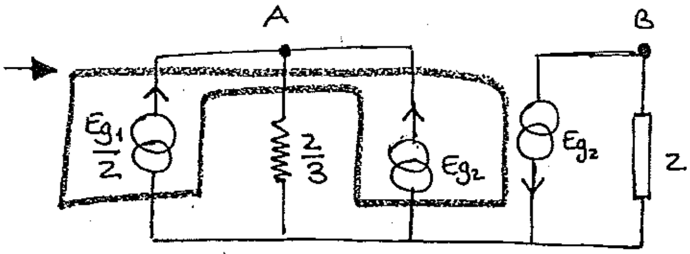


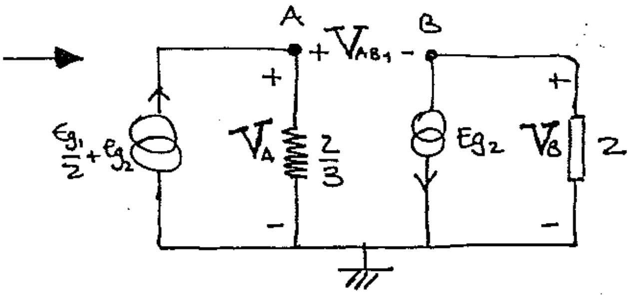
$$(-2j)\,//\,(1+j) = \frac{-2j\,(1+j)}{-2j+1+j} = \frac{-2j-2j^2}{1-j} = \frac{2\,\cancel{(1-j)}}{\cancel{1-j}} = 2(\Omega)$$



$2\,//\,1 = \frac{2}{3}(\Omega)$

$\rightarrow$



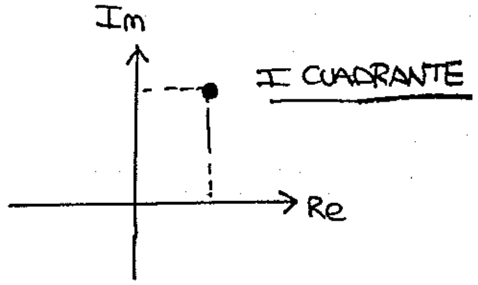


$V_{AB_1} = V_A - V_B$

$V_A = \frac{2}{3}\left(\frac{Eg_1}{2} + Eg_2\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + j\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}j \quad (V)$

$V_B = -2Eg_2 = -2j \quad (V)$

$V_{AB_1} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}j \rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 8/3 \end{cases}$

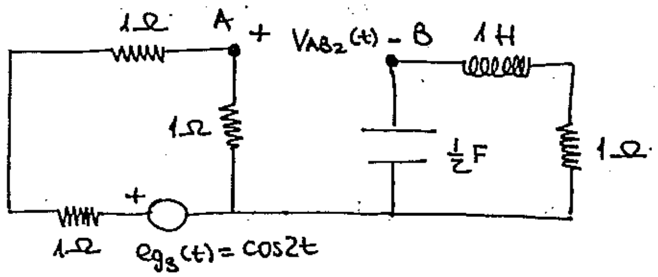


$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = 2'687$

$\theta = \text{arctg}\,\frac{b}{a} = 1'45 \text{ rad}$

$V_{AB_1} = 2'687 \cdot e^{j1'45} \quad (V) \rightarrow V_{AB_1}(t) = \underline{\underline{2'687 \cdot \cos(t + 1'45) \quad (V)}}$

(2) $\omega = 2 \text{ rad/s} \rightarrow \omega \cancel{\neq 2 \text{ rad/s}} \rightarrow V_{AB_2} \rightarrow V_{AB_2}(t)$



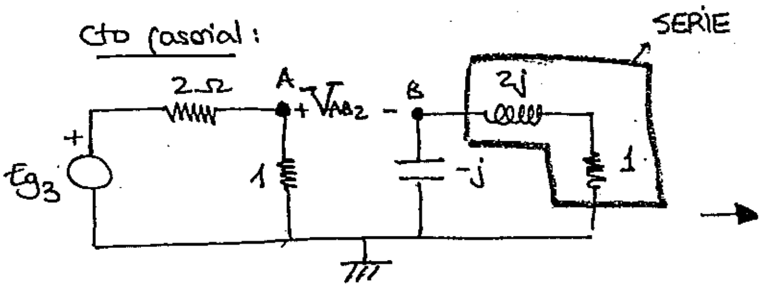
FASORES:

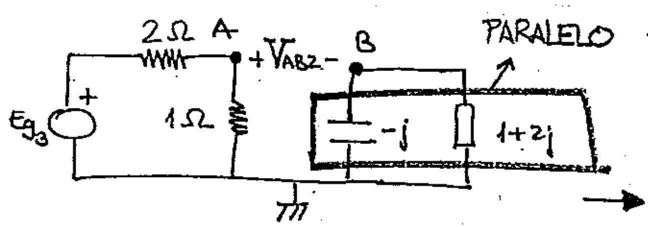
- $eg_3(t) = \cos 2t \rightarrow Eg_3 = e^{j0} = 1 \text{ (V)}$

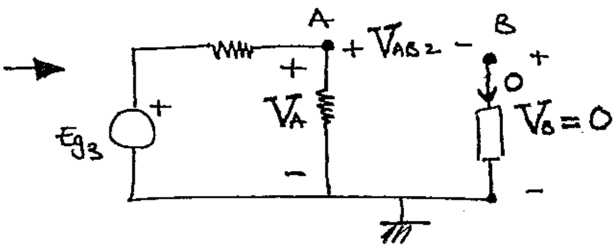
IMPEDANCIAS:

- $\frac{1}{2}F \rightarrow \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{j} = -j \quad (\Omega)$
- $1H \rightarrow j\omega L = j \cdot 2 \cdot 1 = 2j \quad (\Omega)$

Cto fasorial:







$V_{AB_2} = V_A - V_B$

$V_A = Eg_3 \cdot \frac{1}{2+1} = \frac{Eg_3}{3} = \frac{1}{3} \text{ (V)}$

$V_B = 0$

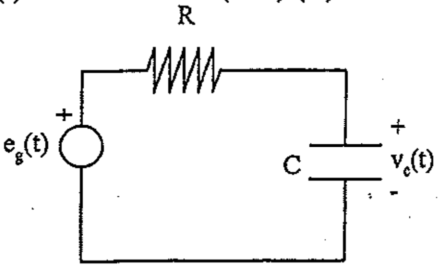
$V_{AB_2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}e^{j0} \quad (V) \rightarrow$

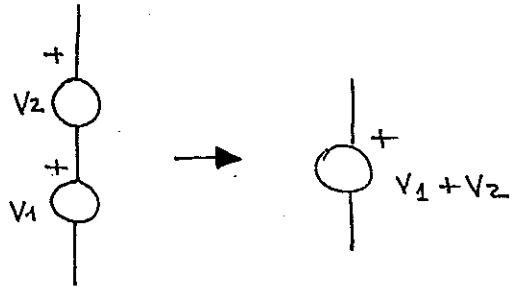
$\rightarrow V_{AB_2}(t) = \frac{1}{3}\cos(2t + 0) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\cos 2t \quad (V)}}$

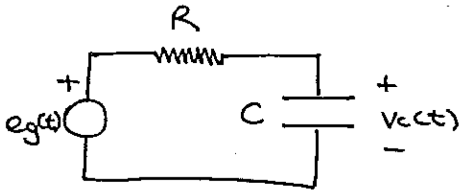
(3) SUPERPOSICIÓN: $\boxed{V_{AB}(t)} = V_{AB_1}(t) + V_{AB_2}(t) = \boxed{2'687 \cdot \cos(t + 1'45) + \frac{1}{3}\cos 2t \quad (V)}$

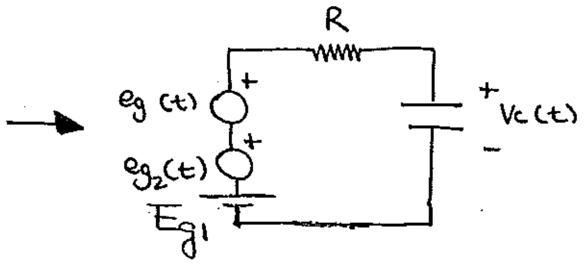
PROBLEMA III-9

En la red de la figura determinar $v_c(t)$ sabiendo que $R=10^3$ (Ω); $C=1(\mu F)$ y $e_g(t)=1+2sent+10cos(10^3t)$ (V).









$$eg(t) = \underbrace{1}_{E_{g1}} + \underbrace{2sen\,t}_{eg_2(t)} + \underbrace{10\cdot cos(10^3t)}_{eg_3(t)}$$

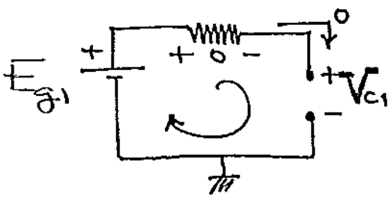
- $eg_3(t) = 10\cdot cos(10^3t) \longrightarrow \omega = 10^3$ rad/s
- $eg_2(t) = 2\cdot sen\,t \longrightarrow \omega = 1$ rad/s
- $E_{g1} = 1 \longrightarrow \omega = 0$ rad/s

} Hay generadores de distintos pulsaciones ⟶ ⟶ SUPERPOSICIÓN

PASOS:

1) Elimino generadores con $\omega \neq 0$ rad/s. Solo dejo los que tienen $\omega = 0$. Resuelvo y obtengo V_{c1}
2) Elimino generadores con $\omega \neq 1$ rad/s. Solo dejo los que tienen $\omega = 1$. Resuelvo y obtengo $V_{c2}(t)$
3) Elimino generadores con $\omega \neq 10^3$ rad/s. Solo dejo los que tienen $\omega = 10^3$ rad/s. Resuelvo y obtengo $V_{c3}(t)$.
4) SUPERPOSICIÓN : $V_c(t) = V_{c1} + V_{c2}(t) + V_{c3}(t)$ ~~OJO $V_c = V_1 + V_2 + V_3$~~ NO SUMA DE FASORES

(1) $\omega = 0$ ⟶ $\cancel{\omega \neq 0}$ ⟶ V_{c1}
(CONTINUA)



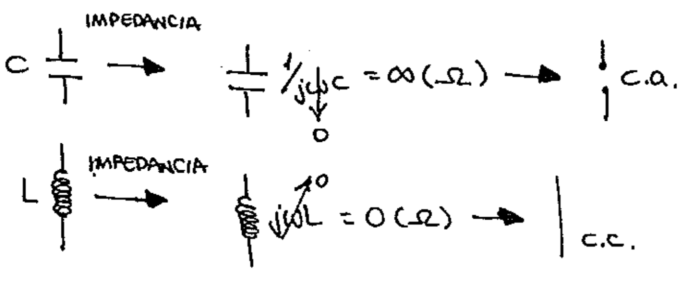
$V_{c1} = E_{g1} = 1$ V

o tb:

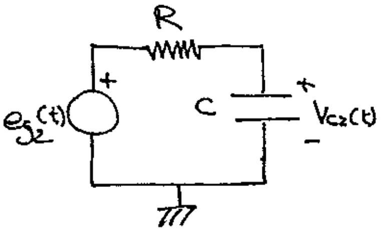
MALLA: $R\cdot 0 + V_{c1} = E_{g1}$

$$V_{c1} = E_{g1} = 1\ V$$

NOTA: en general, en cualquier cto de continua ($\omega = 0$):



(2) $\omega = 1 \rightarrow \cancel{\omega \neq 1} \rightarrow \mathbf{V}_{c2} \rightarrow V_{c2}(t)$

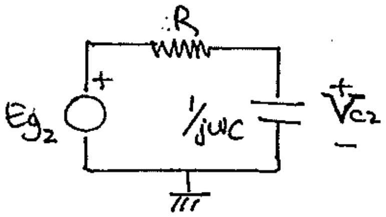


$\text{sen}\,\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$

FASOR: $e_{g_2}(t) = 2 \cdot \text{sen}\,t = 2 \cdot \cos(t - \frac{\pi}{2})\ (V) \rightarrow$

$\rightarrow \mathbf{E}_{g_2} = 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -2j\ (V)$

Cto fasorial:



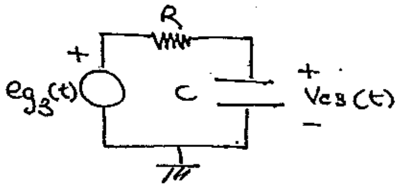
Divisor de tensión: $\mathbf{V}_{c2} = \mathbf{E}_{g_2} \dfrac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$

$= \mathbf{E}_{g_2} \dfrac{\frac{1}{\cancel{j\omega C}}}{\frac{Rj\omega C + 1}{\cancel{j\omega C}}} = \mathbf{E}_{g_2} \dfrac{1}{Rj\omega C + 1} =$

$= -2j \dfrac{1}{1 + j\,10^3 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{-2j}{1 + j\,10^{-3}} \approx -2j = 2(-j) = 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\ (V)$

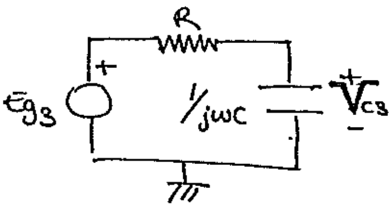
$V_{c2}(t) = 2 \cdot \cos(t - \frac{\pi}{2}) = \underline{\underline{2 \cdot \text{sen}\,t\ (V)}}$

(3) $\omega = 10^3$ rad/s $\rightarrow \cancel{\omega \neq 10^3}$ rad/s $\rightarrow \mathbf{V}_{c3} \rightarrow V_{c3}(t)$



FASOR: $e_{g_3}(t) = 10 \cdot \cos(10^3 t)\ (V) \rightarrow \mathbf{E}_{g_3} = 10 e^{0j} = 10\ (V)$

Cto fasorial:



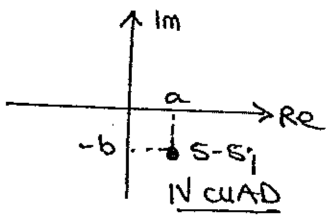
Divisor de tensión: $\mathbf{V}_{c3} = \dfrac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \mathbf{E}_{g_3}$

$= \ldots = \mathbf{E}_{g_3} \dfrac{1}{Rj\omega C + 1} =$

$= 10 \dfrac{1}{1 + j\,10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{10}{1+j} = \dfrac{10(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \dfrac{10-10j}{1-j^2} = \dfrac{10-10j}{2} = 5 - 5j \begin{cases} a = 5 \\ b = -5 \end{cases}$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = 5\sqrt{2}$

$\theta = \text{arctg}\,\dfrac{b}{a} = -\dfrac{\pi}{4}$ rad



$\mathbf{V}_{c3} = 5\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}\ (V) \rightarrow$

$\rightarrow V_{c3}(t) = \underline{\underline{5\sqrt{2} \cdot \cos\left(10^3 t - \frac{\pi}{4}\right)}}\ (V)$ Señal en el tiempo

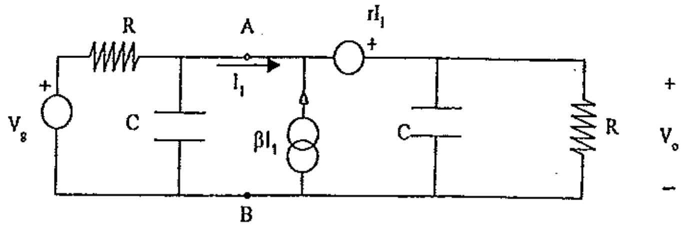
(4) SUPERPOSICIÓN: $V_c(t) = \mathbf{V}_{c1} + V_{c2}(t) + V_{c3}(t) = 1 + 2\,\text{sen}\,t + 5\sqrt{2}\cos(10^3 t - \frac{\pi}{4})$ (V)

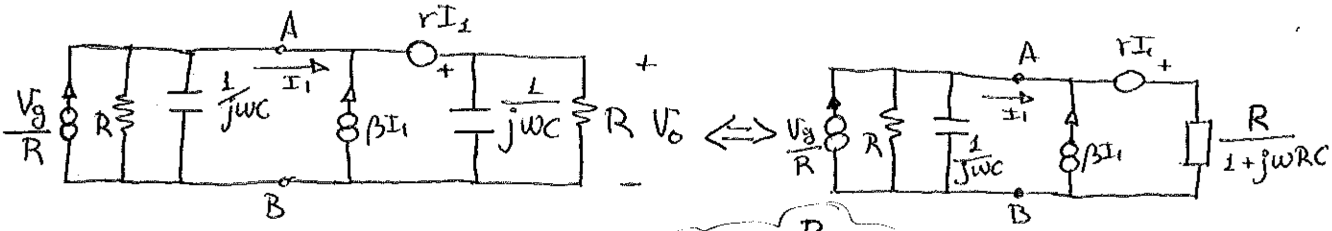
PROBLEMA III-21

Dado el circuito de la figura en fasores, se pide:

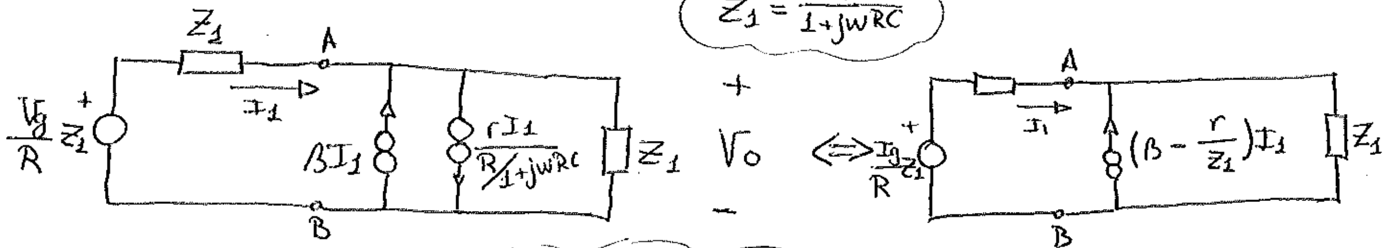
a) Reducir el circuito a una sola malla sin modificar los puntos de interconexión A y B.

b) Calcular I_1 y V_0.

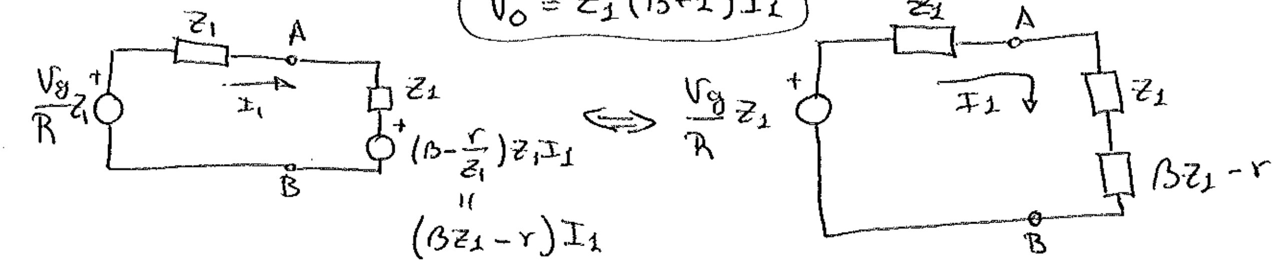


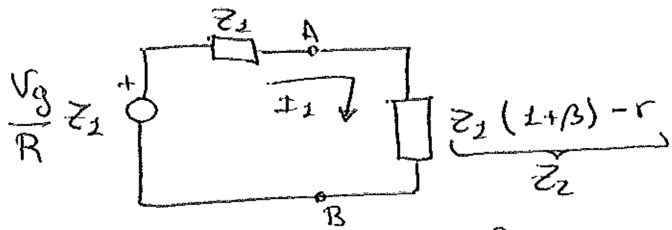


$$Z_1 = \frac{R}{1+j\omega RC}$$



$$V_0 = Z_1(\beta+1)I_1$$





malla: $Z_1 I_1 + Z_2 I_1 = \frac{V_g}{R} Z_1 \Rightarrow I_1 (Z_1 + Z_2) = \frac{V_g}{R} Z_1$

$$\boxed{I_1 = \frac{V_g \cdot Z_1}{R(Z_1+Z_2)} = \frac{V_g\, Z_1}{R(Z_1 + Z_1(1+\beta) - r)} = \dots = \frac{V_g}{(2+\beta)R - r - j\omega C r R}}$$

$$\boxed{V_0 = Z_1(\beta+1)I_1 = \frac{R(\beta+1)\,V_g}{(1+j\omega RC)[(2+\beta)R - r - j\omega r RC]}}$$

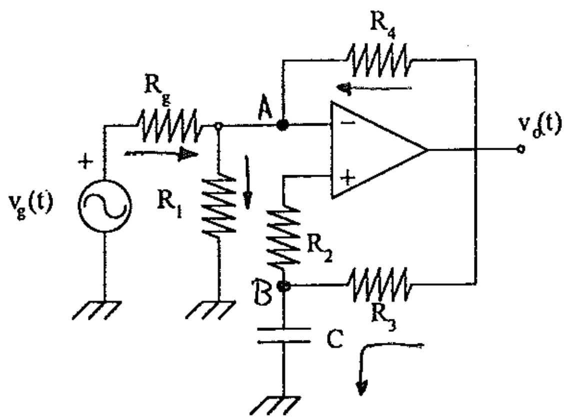
PROBLEMA III-23 (FEBRERO 1998)

En el circuito de la figura, trabajando en régimen permanente sinusoidal, y con el amplificador operacional ideal, se pide:

a) Sin realizar ninguna transformación circuital, escribir las ecuaciones resultantes del análisis por nudos.

b) Suponiendo que se cumple $R_1=R_2=R_3=R_4=R$, calcular la función de transferencia del circuito, expresada como V_0/V_g.

c) Con la condición del apartado anterior y para los valores $v_g(t)=2\ \mathrm{sen}(10^3 t)$ V; $R=1K\Omega$; $R_g=2K\Omega$; $C = 1\mu F$; $\omega= 10^3$ rd/s, calcular la tensión de salida en el dominio del tiempo, $v_0(t)$.



a) ecuaciones de nudos:

nudo A: $\dfrac{V_g - V_A}{R_g} + \dfrac{V_o - V_A}{R_4} = \dfrac{V_A - 0}{R_1}$

nudo B: $V_B = \dfrac{V_o \frac{1}{j\omega C}}{R_3 + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow V_B = \dfrac{V_o \cdot 1}{1 + j\omega R_3 C}$

amp. op.: $V_A = V_B$

sistema 3 ecuaciones 3 incógnitas

b) $\dfrac{V_o}{V_g}$?? con $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4$

$\dfrac{V_g - V_A}{R_g} + \dfrac{V_o - V_A}{R} = \dfrac{V_A}{R} \Rightarrow V_A\left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_g}\right) = \dfrac{V_g}{R_g} + \dfrac{V_o}{R}$

$V_B = V_o / 1 + j\omega RC$

$V_A = V_B$

$V_o = \dfrac{(1 + j\omega RC) R}{R_g + R - j\omega R R_g C} V_g$

c) sustituyendo datos:

$V_o = \dfrac{(1 + j 10^3 10^3 10^{-6})\, 10^3}{2\cdot 10^3 + 10^3 - j 10^3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} (-2j) = \dfrac{10 - 2j}{13}$ (V)

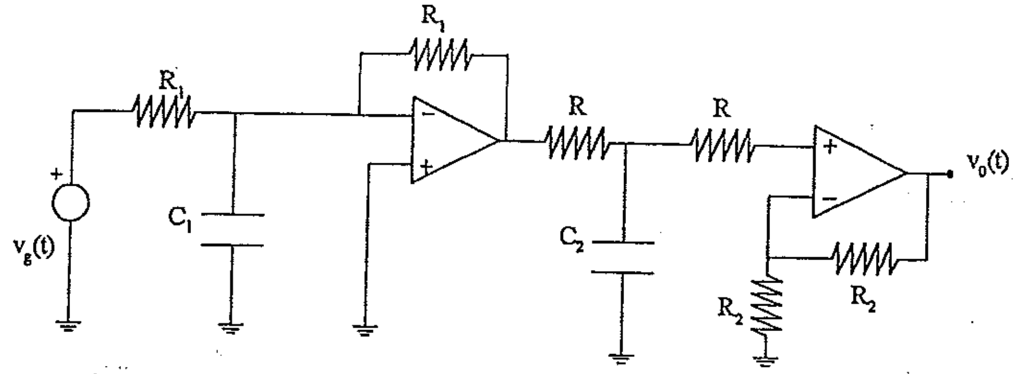
$\rho = 0'78$

$\theta = -0'197$ rad

$V_o(t) = 0'78 \cos(10^3 t - 0'197)$ (V)

PROBLEMA III-26 (JUNIO 1999)

En el circuito de la figura, sabiendo que $v_g(t) = 1 + \cos(\omega t)$ (V) y que los A.O. son ideales, calcule la tensión de salida $v_0(t)$.



$V_g(t) = 1 + \cos(\omega t)$ (V)

Hay 2 generadores:
- $V_{g_1} = 1 = 1 \cdot \cos(0t) \longrightarrow$ pulsación $= 0$ rad/s
- $V_{g_2} = \cos(\omega t) \longrightarrow$ pulsación $= \omega$ rad/s

} SUPERPOSICIÓN

PASOS:

① Pulsación = 0 rad/s $\longrightarrow$ ~~puls ≠ 0 rad/s~~ $\longrightarrow V_{01}$

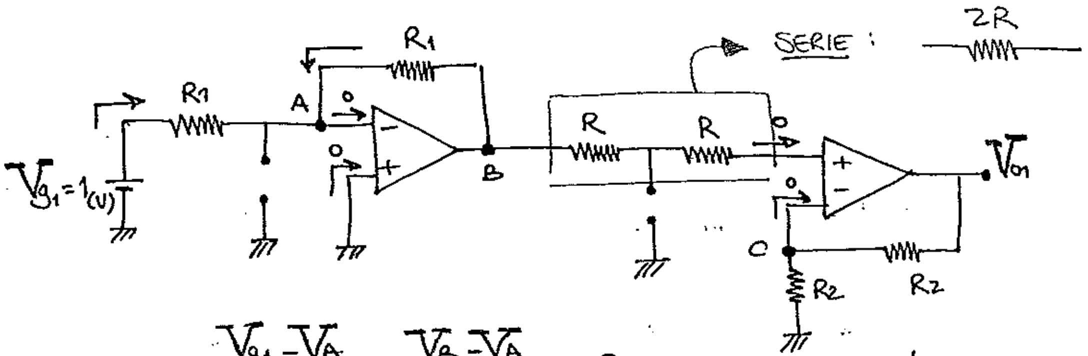
② Pulsación = ω rad/s $\longrightarrow$ ~~puls. ≠ ω rad/s~~ $\longrightarrow V_{02} \longrightarrow V_{02}(t)$

③ $V_0(t) = V_{01} + V_{02}(t)$

① * NOTA:

C $\xrightarrow[\omega=0]{\text{IMPEDANCIA}}$ $\frac{1}{j\omega C} = \infty\,(\Omega) \longrightarrow$ ca

L $\xrightarrow[\omega=0]{\text{IMPEDANCIA}}$ $j\omega L = 0\,(\Omega) \longrightarrow$ cc



- NUDO A: $\dfrac{V_{g_1} - V_A}{R_1} + \dfrac{V_B - V_A}{R_1} = 0 \quad (1)$
- NUDO B: no se plantea
- NUDO C: $V_C = V_{01} \dfrac{R_2}{R_2 + R_2} \longrightarrow V_C = \dfrac{V_{01}}{2} \quad (2)$
- CC1: $V_A = 0 \quad (3)$
- CC2: $V_C = V_B \quad (4)$

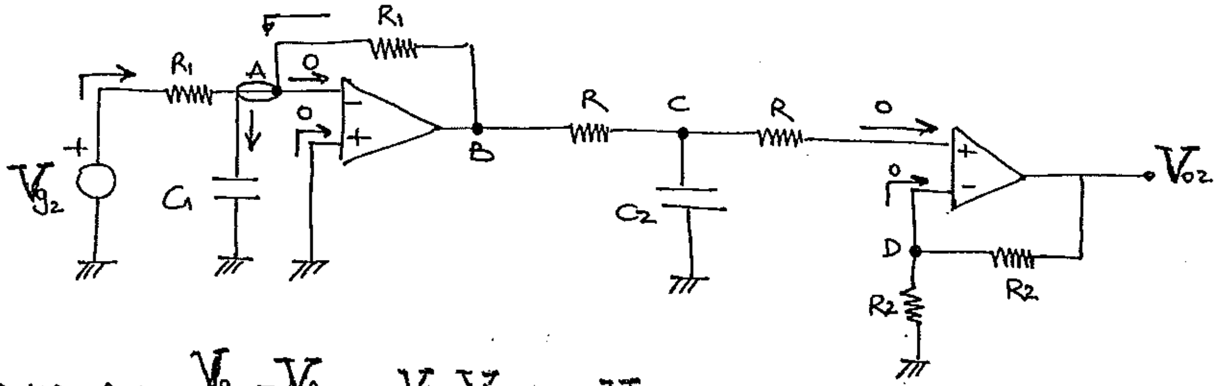
Sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas: V_A, V_B, V_C, V_{01}

(3) en (1): $\frac{V_{g1}}{R_1} + \frac{V_B}{R_1} = 0 \rightarrow V_{g1} + V_B = 0 \rightarrow V = -V_{g1}$

(4): $V_C = -V_{g1}$

(2): $\frac{V_{01}}{2} = -V_{g1} \rightarrow V_{01} = -2V_{g1} \rightarrow \boxed{V_{01} = -2(V)}$

2



- NUDO A: $\frac{V_{g2} - V_A}{R_1} + \frac{V_B - V_A}{R_1} = \frac{V_A - 0}{\frac{1}{j\omega C_1}}$ (1)
- NUDO B: no se plantea
- NUDO C: $V_C = V_B \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R + \frac{1}{j\omega C_2}} = V_B \frac{1}{1 + j\omega R C_2}$ (2)
- NUDO D: $V_D = V_{02} \frac{R_2}{R_2 + R_2} = \frac{V_{02}}{2}$ (3)
- CCV1: $V_A = 0$ (4)
- CCV2: $V_D = V_C$ (5)

Sust. (4) en (1) y obtenemos: $\frac{V_{g2}}{R_1} + \frac{V_B}{R_1} = 0 \rightarrow V_B = -V_{g2}$ la cual llamamos (1).

Y de este modo obtenemos un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas: V_B, V_C, V_D, V_{02}

$$\boxed{V_{02} = -2V_{g2} \frac{1}{1 + j\omega R C_2}}$$

$v_{g2}(t) = 1 \cdot \cos(\omega t + 0)\ (V) \rightarrow V_{g2} = 1 \cdot e^{j0} = 1(V)$

$$V_{02} = \frac{-2}{1 + j\omega R C_2}$$

- 1ª FORMA: $V_{o2} = \frac{-2(1-j\omega RC_2)}{(1+j\omega RC_2)(1-j\omega RC_2)} = \frac{-2}{1^2 - j^2\omega^2R^2C_2^2}(1-j\omega RC_2) = \underbrace{\boxed{\frac{2}{1+(\omega RC_2)^2}}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\boxed{(-1+j\omega RC_2)}}_{\in \mathbb{C} \quad \rho e^{j\theta}}$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\omega RC_2)^2} = \sqrt{1+(\omega RC_2)^2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{+\omega RC_2}{-1} = \operatorname{arctg}(-\omega RC_2)$$

$$V_{o2} = \frac{2}{1+(\omega RC_2)^2} \cdot \sqrt{1+(\omega RC_2)^2} \cdot e^{j\operatorname{arctg}(-\omega RC_2)}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+(\omega RC_2)^2}} \cdot e^{j\operatorname{arctg}(-\omega RC_2)}$$

$$V_{o2}(t) = \frac{2}{\sqrt{1+(\omega RC_2)^2}} \cdot \cos(\omega t + \operatorname{arctg}(-\omega RC_2)) \quad (V)$$

- 2ª FORMA: $V_{o2} = \frac{-2}{1+j\omega RC_2} = \frac{2}{-1-j\omega RC_2} \equiv \frac{\text{Num}}{\text{Den}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot e^{j\theta_1}}{\rho_2 \cdot e^{j\theta_2}}$$

- Num: $2 = 2 \cdot e^{j0}$
- Den: $-1 - j\omega RC_2$ $\begin{cases} \rho_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-\omega RC_2)^2} \\ \theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\omega RC_2}{-1}\right) = \operatorname{arctg}(\omega RC_2) \end{cases}$

$$V_{o2} = \frac{\text{NUM}}{\text{DEN}} = \frac{2 \cdot e^{j0}}{\sqrt{1+(\omega RC_2)^2} \cdot e^{j\operatorname{arctg}(\omega RC_2)}} = \frac{2}{\sqrt{1+(\omega RC_2)^2}} \cdot e^{j(0 - \operatorname{arctg}(\omega RC_2))} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+(\omega RC_2)^2}} \cdot e^{j\operatorname{arctg}(-\omega RC_2)}$$

$$V_{o2}(t) = \frac{2}{\sqrt{1+(\omega RC_2)^2}} \cdot \cos(\omega t + \operatorname{arctg}(-\omega RC_2)) \quad (V)$$

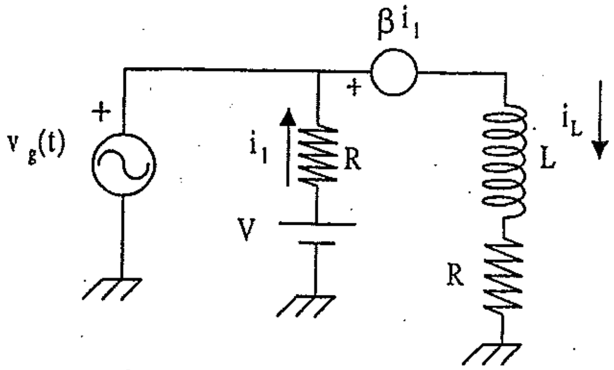
3
$$\boxed{V_o(t) = V_{o1} + V_{o2}(t) = -2 + \frac{2}{\sqrt{1+(\omega RC_2)^2}} \cdot \cos(\omega t + \operatorname{arctg}(-\omega RC_2)) \quad (V)}$$

PROBLEMA III-27

Considerando el circuito de la figura en régimen permanente, y siendo $v_g(t) = V_g \cos\omega t$, calcular:

a) La expresión de la corriente por la bobina $i_L(t)$ en función de los elementos del circuito: V_g, β, V, R, ω y L.

b) El valor de $i_L(t)$ para los siguientes valores numéricos: V_g=0,5(V); V=0,5(V); R=1(Ω); ω=1(rd/s); β=1 (Ω) y L=1 (H).



Apldo a)

- GENERADOR : $V_g(t) = V_g \cdot \cos(\omega t) \longrightarrow$ pulsación = ω rad/s
- GENERADOR : $V = V \cdot \cos(0t) \longrightarrow$ pulsación = 0 rad/s

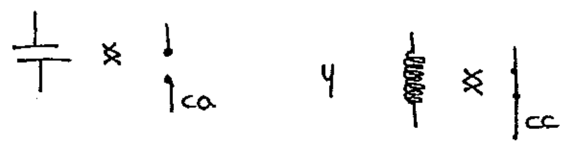
} SUPERPOSICIÓN

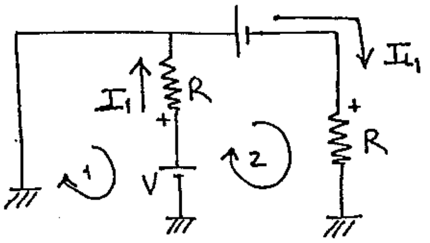
PASOS :

① Pulsación = 0 rad/s ⟶ ~~pulsación ≠ 0 rad/s~~ ⟶ I_{L1}

② Pulsación = ω rad/s ⟶ ~~pulsación ≠ ω rad/s~~ ⟶ I_{L2} ⟶ $i_{L2}(t)$

③ SUPERPOSICIÓN : $i_L = I_{L1} + i_{L2}(t)$

① 



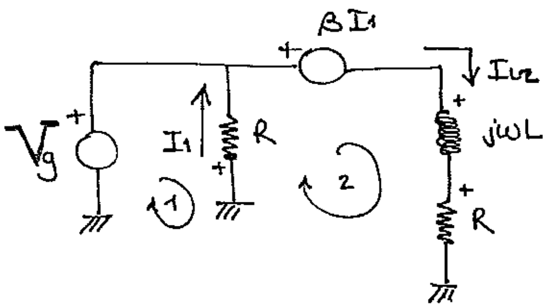
- MALLA 1 : $V = RI_1$ (1)
- MALLA 2 : $RI_1 + I_{L1}R + \beta I_1 = V$ (2)

Sust. (1) en (2)

$$V = RI_{L1} + \beta\frac{V}{R} + R\frac{V}{R} \longrightarrow I_{L1} = -\beta\frac{V}{R^2} \quad (A)$$

② Cto fasorial

FASORES: $V_g(t) = V_g \cdot \cos(\omega t) \longrightarrow \bar{V}_g = V_g \cdot e^{j0} = V_g$



- MALLA 1 : $0 = RI_1 + V_g$ (1)
- MALLA 2 : $RI_1 + \beta I_1 + I_{L2}\, j\omega L + I_{L2} R = 0$ (2)

De (1): $I_1 = -\frac{V_g}{R}$ y sust. en (2):

$$-R\frac{V_g}{R} - \beta\frac{V_g}{R} + j\omega L\, I_{L2} + R\, I_{L2} = 0 \rightarrow (j\omega L + R)\, I_{L2} = V_g\left(1+\frac{\beta}{R}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow I_{L2} = \frac{V_g(R+\beta)}{R(R+j\omega L)} \equiv \frac{Num}{Den} \equiv \frac{\rho_1 \cdot e^{-j\theta_1}}{\rho_2 \cdot e^{-j\theta_2}}$$

- $NUM \equiv V_g(R+\beta) = V_g\cdot(R+\beta)\cdot e^{j0}$
- $DEN \equiv R(R+j\omega L) = R^2 + jR\omega L \rightarrow \begin{cases} \rho_2 = \sqrt{R^4 + (R\omega L)^2} = R\sqrt{R^2+(\omega L)^2} \\ \theta_2 = \text{arctg}\,\frac{R\omega L}{R^2} = \text{arctg}\,\frac{\omega L}{R} \end{cases}$

$$Den \equiv R\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\cdot e^{j\,\text{arctg}\frac{\omega L}{R}}$$

$$I_{L2} = \frac{V_g(R+\beta)\cdot e^{j0}}{R\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\cdot e^{j\,\text{arctg}\frac{\omega L}{R}}} = \frac{V_g(R+\beta)}{R\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cdot e^{j\left(0-\text{arctg}\frac{\omega L}{R}\right)} =$$

$$= \frac{V_g(R+\beta)}{R\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cdot e^{j\,\text{arctg}\,-\frac{\omega L}{R}} \rightarrow i_{L2}(t) = \frac{V_g(R+\beta)}{R\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cdot\cos\left(\omega t + \text{arctg}\,-\frac{\omega L}{R}\right)$$

(3) SUPERPOSICIÓN:

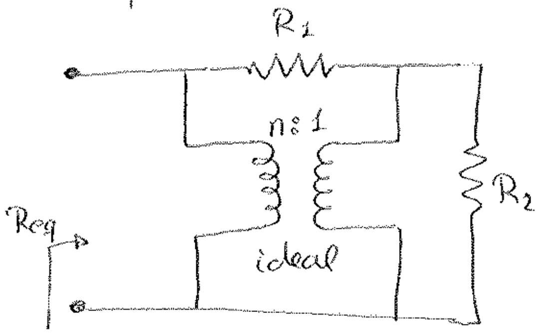
$$\boxed{i_L(t) = I_{L1} + i_{L2}(t) = -\beta\frac{V}{R^2} + \frac{V_g(R+\beta)}{R\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cdot\cos\left(\omega t + \text{arctg}\,-\frac{\omega L}{R}\right)}$$

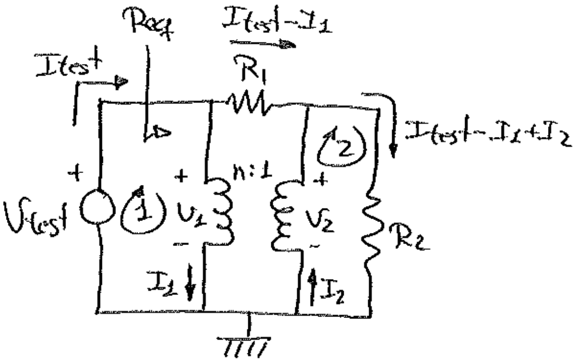
Aptdo b)

$$i_L(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \quad (A)$$

Problema IV - 1

Calcular la Req del dipolo de la figura:





$$\left.\begin{array}{l} \text{malla 1: } V_1 = V_{test} \\ \text{malla 2: } R_2\,(I_{test}-I_1+I_2) = V_2 \\ \text{transf. ideal: } V_1 = n V_2 \\ \qquad\qquad\quad I_1 n = I_2 \\ \text{extra: } I_{test}-I_1 = \dfrac{V_1 - V_2}{R_1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{5ecs} \\ \text{5incóg.} \end{array}$$

$$I_{test} - I_1 = \frac{V_{test} - \frac{V_{test}}{n}}{R_1} \Rightarrow I_{test} - I_1 = \frac{(n-1)\,V_{test}}{n\,R_1}$$

$$R_2\,(I_{test} - I_1 + I_2) = \frac{V_{test}}{n}$$

$$I_1\,(n-1)\,R_2 = \frac{V_{test}}{n} - R_2 I_{test} \Rightarrow I_1 = \frac{V_{test}}{n(n-1)R_2} - \frac{I_{test}}{n-1}$$

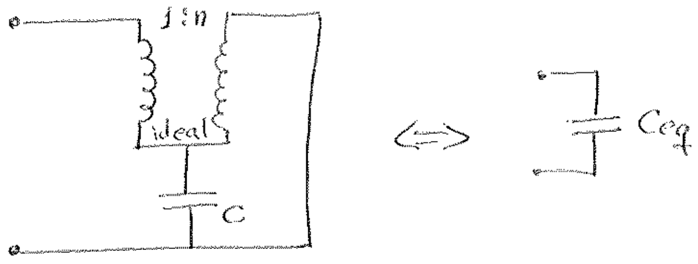
$$I_{test} = \frac{V_{test}}{n(n-1)R_2} + \frac{I_{test}}{n-1} = \frac{(n-1)\,V_{test}}{n R_1}$$

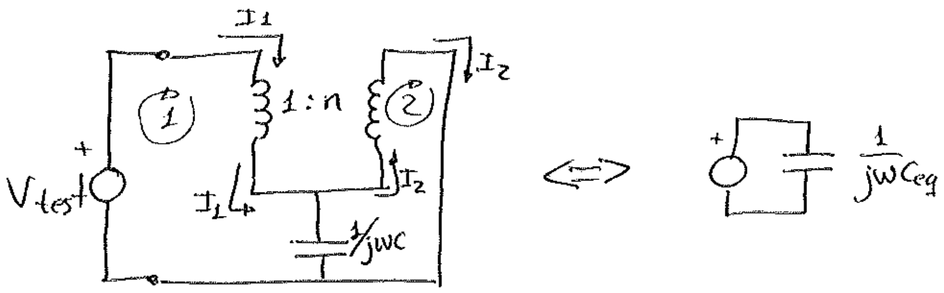
$$I_{test}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = V_{test}\left(\frac{n-1}{nR_1} + \frac{1}{n(n-1)R_2}\right) \Rightarrow I_{test}\,\frac{n-1+1}{n-1} = V_{test}\,\frac{(n-1)^2 R_2 + R_1}{n(n-1)R_1 R_2}$$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{V_{test}}{I_{test}} = \frac{n^2 R_1 R_2}{(n-1)^2 R_2 + R_1}}$$

Problema IV - 2

Calcular la capacidad equivalente del circuito:





$$\left.\begin{array}{ll}
\underline{\text{malla } 1:} & V_1 + (I_1 - I_2)\frac{1}{jwC} = V_{test} \\
\underline{\text{malla } 2:} & 0 = (I_1 - I_2)\frac{1}{jwC} + V_2 \\
\text{transf:} & V_2 = nV_1 \\
 & I_1 = nI_2 \\
\text{extra:} & I_1 = I_{test}
\end{array}\right\}$$

$$V_1 + \left(I_{test} - \frac{I_{test}}{n}\right)\frac{1}{jwC} = V_{test}$$

$$V_1 + I_{test}\frac{n-1}{njwC} = V_{test}$$

$$\left(I_{test} - \frac{I_{test}}{n}\right)\frac{1}{jwC} + nV_1 = 0 \Rightarrow I_{test}\frac{n-1}{njwC} = -nV_1$$

$$V_1 = \frac{1-n}{n^2}\frac{I_{test}}{jwC} \Rightarrow \frac{1-n}{n^2}\frac{I_{test}}{jwC} + I_{test}\frac{n-1}{jwC} = V_{test}$$

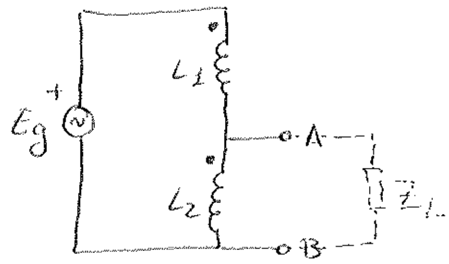
$$\frac{I_{test}}{jwCn}(n-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = V_{test}$$

$$\frac{I_{test}(n-1)^2}{n^2 jwC} = V_{test} \qquad Z_{eq} = \frac{V_{test}}{I_{test}} = \frac{(n-1)^2}{n^2 jwC}$$

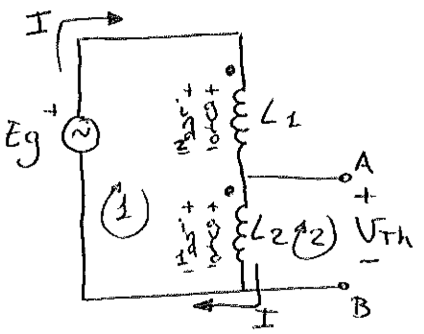
$$Z_{eq} = \frac{1}{jw\frac{n^2C}{(n-1)^2}} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{n^2C}{(n-1)^2}}$$

Problema IV - 4 (junio 1995)

Hallar el equivalente de thévenin desde las bornas AB del esquema de la figura, donde $L_1 = 16L_2$ y $K = 1$.



1) Cálculo de V_{Th}: tensión en circuito abierto



$$\left.\begin{array}{l} \text{malla 1: } I j\omega L_1 + I j\omega L_2 + 2I j\omega M_{12} = E_g \\ \text{malla 2: } V_{Th} = I j\omega L_2 + I j\omega M_{12} \\ L_1 = 16 L_2 \\ k = 1 \Rightarrow M_{12} = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{16L_2 \cdot L_2} = 4L_2 \end{array}\right\}$$

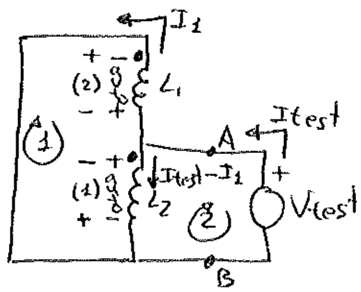
$$I(j\omega L_1 + j\omega L_2 + 2j\omega M_{12}) = E_g \Rightarrow I = \frac{E_g}{j\omega(L_1+L_2+2M_{12})}$$

$$= \frac{E_g}{j\omega(16L_2+L_2+2\cdot 4L_2)} = \frac{E_g}{j\omega 25L_2} = I \Rightarrow V_{Th} = I(j\omega L_2 + j\omega M_{12})$$

$$\boxed{V_{Th} = \frac{E_g}{j\omega 25L_2} j\omega(L_2+4L_2) = \frac{E_g}{5}}$$

2) Cálculo de Z_{Th}: método del gen. prueba

$\left\{\begin{array}{l} \text{desconectar los gen. indep.} \\ \text{poner gen. test} \end{array}\right.$



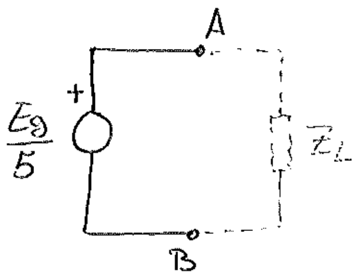
$$\left.\begin{array}{l} \text{malla 1: } (I_{test}-I_1)j\omega M_{12} + (I_{test}-I_1)j\omega L_2 = \\ \qquad = I_1 j\omega L_1 + I_1 j\omega M_{12} \\ \text{malla 2: } V_{test} + I_1 j\omega M_{12} = (I_{test}-I_1) j\omega L_2 \end{array}\right\}$$

sabiendo $k = 1$ y $L_1 = 16L_2$ ...

$$\left.\begin{array}{l} I_{test} j\omega 5L_2 - I_1 j\omega 25L_2 = 0 \\ V_{test} + I_1 j\omega 5L_2 = I_{test} j\omega L_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} I_1 = \dfrac{I_{test}}{5} \\ V_{test} = I_{test}(\cancelto{0}{j\omega L_2 - j\omega L_2}) \end{array}$$

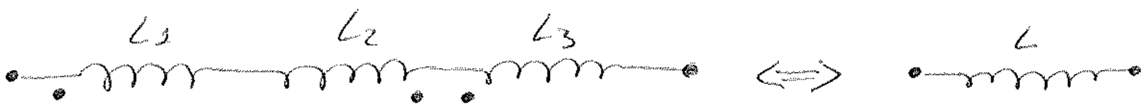
$$\boxed{Z_{Th} = \frac{V_{test}}{I_{test}} = 0}$$

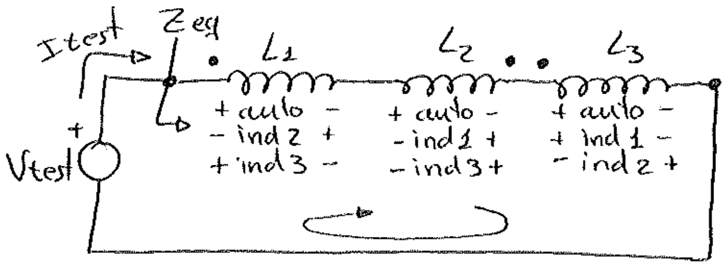
El circuito eq. thevenin es:



Problema IV - 10

Dadas las tres bobinas acopladas de figura dada, con factores de acoplamiento $k_{12} = k_{13} = k_{23} = 0'8$ calcular la inductancia equivalente.





$$\text{malla: } I_{test}\, jwL_1 + I_{test}\, jwM_{13} + I_{test}\, jwL_2 + I_{test}\, jwL_3 + I_{test}\, jwM_{13} =$$
$$= V_{test} + I_{test}\, jwM_{12} + I_{test}\, jwM_{12} + I_{test}\, jwM_{23} + I_{test}\, jwM_{23}$$

$M_{12} = M_{21}$ $\qquad$ $M_{23} = M_{32}$

$$M_{12} = M_{21} = k_{12}\sqrt{L_1 L_2} = 0'8\sqrt{L_1 L_2}$$
$$M_{13} = M_{31} = k_{13}\sqrt{L_1 L_3} = 0'8\sqrt{L_1 L_3}$$
$$M_{23} = M_{32} = k_{23}\sqrt{L_2 L_3} = 0'8\sqrt{L_2 L_3}$$

$$\text{malla: } I_{test} \cdot jw \cdot \left[L_1 + L_2 + L_3 + 2(M_{13} - M_{12} - M_{23})\right] = V_{test}$$

$$\frac{V_{test}}{I_{test}} = jw\left[L_1 + L_2 + L_3 + 2(0'8)\left(\sqrt{L_1 L_3} - \sqrt{L_1 L_2} - \sqrt{L_2 L_3}\right)\right] = Z_{eq}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + 2(0'8)\left(\sqrt{L_1 L_3} - \sqrt{L_1 L_2} - \sqrt{L_2 L_3}\right)}$$

PROBLEMA IV-12

En el circuito de la figura, hallar:

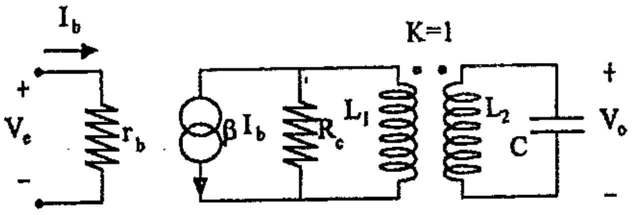
a) La función de transferencia definida como la relación $V_0 / V_e(jw)$, en régimen permanente sinusoidal.

b) Calcular las expresiones de la pulsación de resonancia y del factor de calidad a partir de la función de transferencia hallada en el apartado anterior.

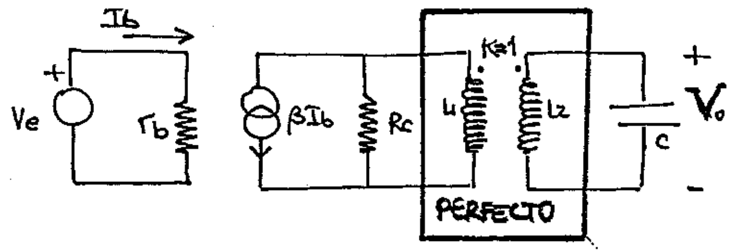
c) Calcular la potencia disipada en la resistencia R_C y la energía media almacenada en el condensador C, a la pulsación de resonancia.

DATOS: $V_e, r_b, \beta, R_C, L_1, L_2, C$.

Nota: Se recomienda sustituir el transformador por su circuito equivalente.

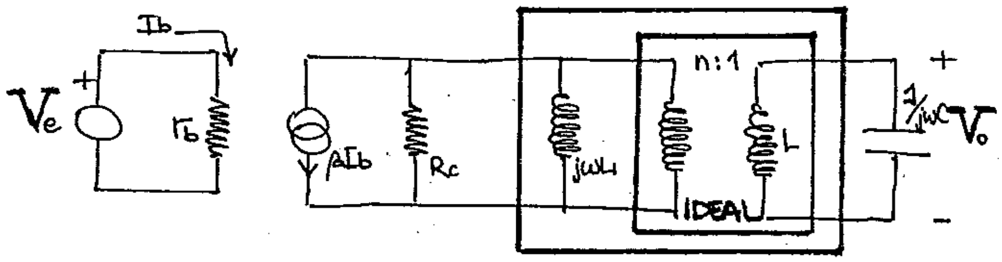


Aptdo a)

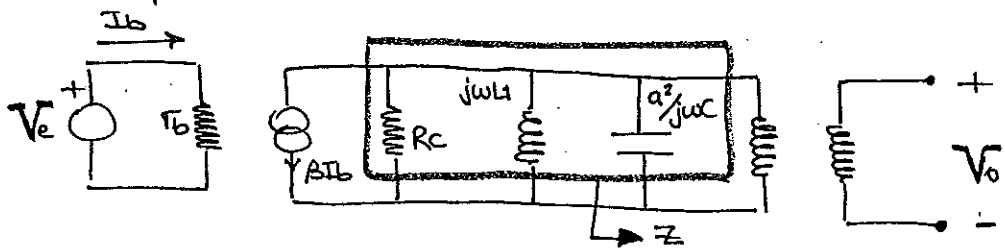


Caso particular del real con k=1

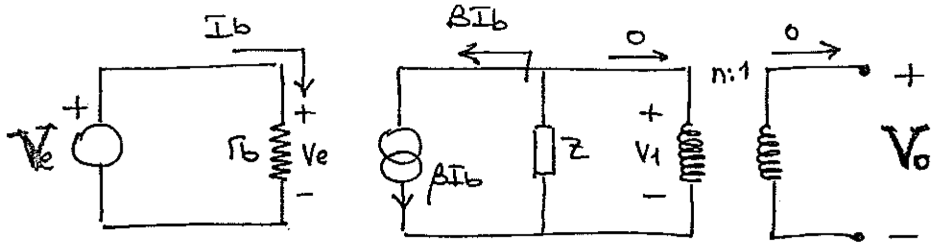
① Sustituir transformador perfecto por su equivalente:



② Reflejamos impedancia del secundario al primario



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{j\omega C}{a^2} \longrightarrow Z = \frac{j\omega L_1 n^2 R_C}{n^2 R_C - \omega^2 L_1 R_C C + j\omega L_1 n^2}$$



- Ec. transf: $\dfrac{V_1}{V_o} = n \rightarrow V_o = \dfrac{V_1}{n}$ (1)
- Ley de Ohm: $V_1 = -Z\beta I_b$ (2)
- Ley de Ohm: $V_e = I_b \cdot r_b \rightarrow I_b = \dfrac{V_e}{r_b}$ (3)

(3) en (2): $V_1 = -Z\beta\dfrac{V_e}{r_b}$

Sust. en (1): $V_o = \dfrac{-Z\beta\frac{V_e}{r_b}}{n} = \dfrac{1}{n}\left(-Z\beta\dfrac{V_e}{r_b}\right)$

$$\boxed{\frac{V_o}{V_e} = -\frac{\beta Z}{n r_b}}$$

Aptdo b)

¿ω_o, Q?

$$T(j\omega) = -\frac{\beta Z}{n r_b} \overset{Z=\dots}{=} -\frac{\beta}{n r_b}\cdot\frac{j\omega L_1 n^2 R_c}{n^2R_c - \omega^2 L_1 R_c C + j\omega L_1 n^2} = \frac{j\omega(-\beta L_1 n^2 R_c)}{n^3 r_b R_c - \omega^2 n r_b L_1 R_c C + j\omega n^3 r_b L_1}$$

Dividimos por $n r_b L_1 R_c C$:

$$T(j\omega) = \frac{j\omega\dfrac{-\beta \cancel{L_1} n^{\cancel{2}} \cancel{R_c}}{\cancel{n} r_b \cancel{L_1} \cancel{R_c} C}}{\dfrac{n^3 \cancel{r_b} \cancel{R_c}}{n \cancel{r_b} L_1 \cancel{R_c} C} - \omega^2 + j\omega\dfrac{n^3 \cancel{r_b} \cancel{L_1}}{n\cancel{r_b}\cancel{L_1} R_c C}} = \frac{j\omega\underbrace{\boxed{\dfrac{-\beta n}{r_b C}}}_{K}}{\underbrace{\boxed{\dfrac{n^2}{L_1 C}}}_{\omega_o^2} - \omega^2 + j\omega\underbrace{\boxed{\dfrac{n^2}{R_c C}}}_{B\,(\text{rad/s})}}$$

$$\omega_o = \frac{n}{\sqrt{L_1 C}} \underset{n=\sqrt{L_1/L_2}}{=} \frac{\sqrt{L_1/L_2}}{\sqrt{L_1\cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{L_2\cdot C}} \text{ rad/s}$$

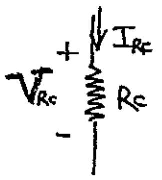
$$\frac{n^2}{R_c\cdot C} = \frac{\omega_o}{Q} \rightarrow Q = \frac{\omega_o R_c\cdot C}{n^2} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{L_2 C}}\cdot R_c C}{\dfrac{L_1}{L_2}} = \frac{L_2 C R_c}{\sqrt{L_2 C}\; L_1} \overset{\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}}{=} \frac{\sqrt{L_2 C}\cdot R}{L_1}$$

Aptdo c)

NOTA TEÓRICA: A la pulsación de resonancia $\omega = \omega_0 \longrightarrow T(j\omega) = \frac{j\cancel{\omega}K}{\cancel{\omega_0^2} - \cancel{\omega^2} + j\cancel{\omega}B} = \frac{K}{B} \in \mathbb{R}$

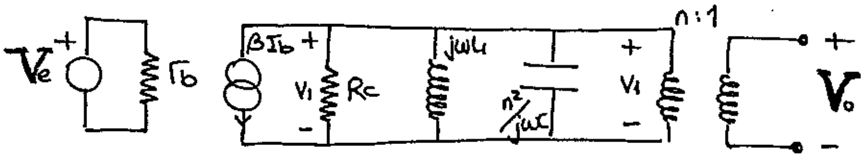
Esto es válido en cualquier circuito.

c.1) Potencia disipada = potencia activa = potencia media



$Pot_{med} = \frac{1}{2R_c} \cdot |V_{R_c}|^2 = \frac{1}{2} |I_{R_c}|^2 R_c$

Viendo el cto: $V_{R_c} = V_1$. Necesito calcular V_1.



Ecuación transf. ideal: $\frac{V_1}{V_0} = n \longrightarrow V_1 = nV_0$

Ecuación de transf.: $T(j\omega) = \frac{V_0}{V_e} \longrightarrow V_0 = T(j\omega)V_e \xrightarrow[\text{ENUNCIADO}]{\boxed{\omega = \omega_0}} V_0 = T(j\omega_0)V_e = \frac{K}{B} V_e$

$$V_1 = n\frac{K}{B}.V_e = n \frac{-\frac{\beta n}{r_b C}}{\frac{n^2}{R_c C}} V_e = -\frac{\beta R_c}{r_b} V_e$$

$P_{med} = \frac{1}{2R_c} |V_1|^2$

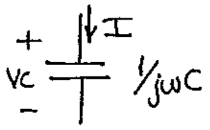
$V_1 = -\frac{\beta R_c}{r_b} V_e$

$|ab| = |a|\cdot|b|$

$$P_{med} = \frac{1}{2R_c} \left| \underbrace{\boxed{-\frac{\beta R_c}{r_b}}}_{\in \mathbb{R}} V_e \right|^2 = \frac{1}{2R_c} \cdot \left| \underbrace{\boxed{-\frac{\beta R_c}{r_b}}}_{\in \mathbb{R}} \right|^2 \cdot |V_e|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\cancel{R_c}} \cdot \frac{\beta^2 R_c^{\cancel{2}}}{r_b^2} \cdot |V_e|^2 = \frac{\beta^2 R_c}{2r_b^2} |V_e|^2 \quad (W)$$

c.2)



$U_{med} = W^c_{med} = \frac{1}{4} C |V_c|^2$

Mirando el cto del enunciado vemos que la $V_c = V_0$

Ecua. transf: $T(j\omega) = \frac{V_0}{V_e} \longrightarrow V_0 = T(j\omega) \cdot V_e \xrightarrow[\text{ENUNCIADO}]{\boxed{\omega = \omega_0}} V_0 = T(j\omega).V_e = \frac{K}{B} V_e = \ldots =$

$$= -\frac{\beta R_c}{n\, r_b} . V_e$$

$|ab| = |a||b|$

$n = \sqrt{L_1/L_2}$

$$U_{med} = \frac{1}{4} C |V_0|^2 = \frac{1}{4} C \left| \underbrace{\boxed{-\frac{\beta R_c}{n\, r_b}}}_{\in \mathbb{R}} \right|^2 . |V_e|^2 = \frac{1}{4} C \frac{\beta^2 R_c^2}{n^2 r_b^2} \cdot |V_e|^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{C \beta^2 R_c^2}{\frac{L_1}{L_2} r_b^2} |V_e|^2$$

$$U_{med} = \frac{1}{4} \frac{C \beta^2 R_c^2 L_2}{r_b^2 \cdot L_1} |V_e|^2 \quad (J)$$

Problema IV - 17 (Junio 1996)

En el circuito de la figura, se pide:

a) La impedancia equivalente desde AB hacia la derecha

b) El valor de n para que el circuito esté en resonancia.

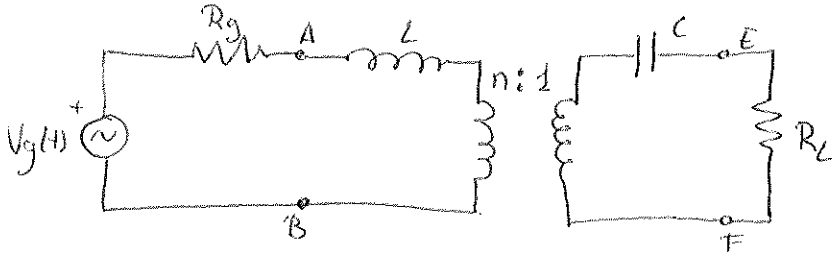
Con el valor de n obtenido, calcular:

c) El ancho de banda y el factor de calidad del circuito, en el que se incluye la resistencia interna del generador R_g como parte del circuito.

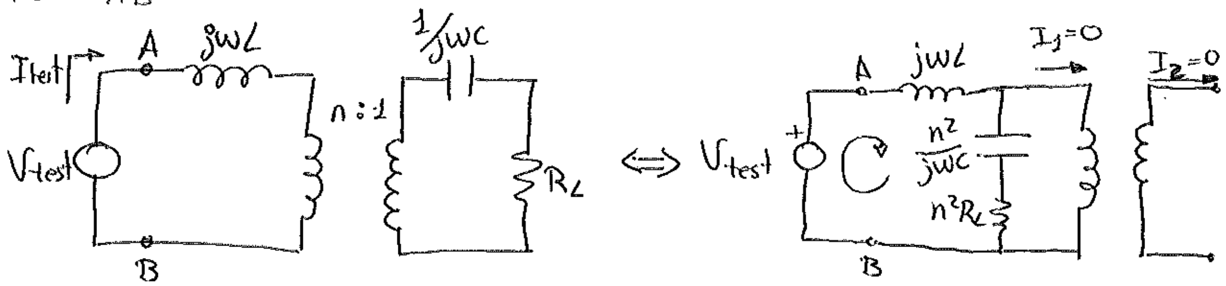
d) La potencia disipada por R_L.

e) Para conseguir máxima transferencia de potencia a R_L, se intercala un transformador ideal en EF. Calcule la relación de transformación de éste y la potencia disipada en R_L en estas condiciones. Comente el resultado.

$R_g = 1\ K\Omega \quad R_L = 10\ \Omega \quad C = 10\ nF \quad L = 100\ mH \quad V_g(t) = 10\cos(10^5 t)\ V$



a) Z_{AB}

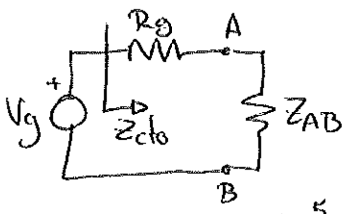


$\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow I_1 = \dfrac{I_2}{n} = \dfrac{0}{n} = 0$

malla: $I_{test}\left(jwL + n^2R + \dfrac{n^2}{jwC}\right) = V_{test}$

$$Z_{AB} = \frac{V_{test}}{I_{test}} = n^2R + j\left(wL - \frac{n^2}{wC}\right) = \boxed{10n^2 + j(10^4 - 10^3 n^2)\ \Omega = Z_{AB}}$$

b) n para que esté en resonancia



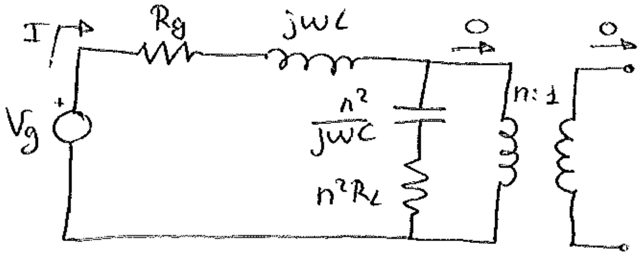
$Z_{cto} = Z_{AB} + R_g = 10^3 + 10n^2 + j(10^4 - 10^3 n^2)\ \Omega$

resonancia $\Leftrightarrow Z_{cto} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im[Z_{cto}] = 0$

$Im[Z_{cto}] = 0 \Rightarrow 10^4 - 10^3 n^2 = 0 \Rightarrow \boxed{n = \sqrt{10}}$

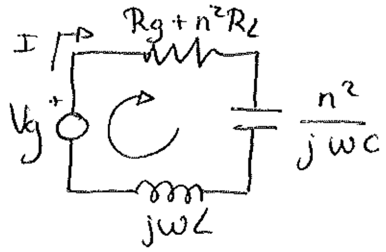
Con $w = 10^5\ rad/s$ y $n = \sqrt{10}$ el circuito estará en resonancia. Si cambiase la w de V_g el circuito dejaría de estarlo.

c) $n=\sqrt{10}$, B , Q



$\Longleftrightarrow$

RLC serie



$$T(j\omega) = \frac{Resp.}{Exc.} = \frac{I}{V_g} \qquad \text{malla: } I\left(R_g + n^2R_L + j\omega L + \frac{n^2}{j\omega C}\right) = V_g$$

$$T(j\omega) = \frac{I}{V_g} = \frac{1}{R_g + n^2R_L + j\omega L + \frac{n^2}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{n^2 - \omega^2 LC + j\omega(R_g + n^2R_L)C}$$

comparamos con $\dfrac{j\omega K}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega B} \Rightarrow T(j\omega) = \dfrac{\frac{j\omega}{L}}{\frac{n^2}{LC} - \omega^2 + j\omega\frac{(R_g+n^2R_L)}{L}}$

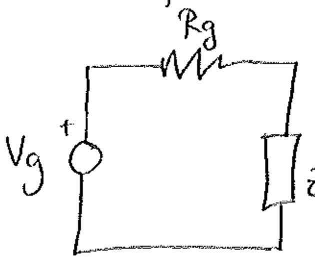
$$T(j\omega) = \frac{j\omega\frac{1}{L}}{\frac{n^2}{LC} - \omega^2 + j\omega\left(\frac{R_g+n^2R_L}{L}\right)} \Rightarrow \begin{cases} K = 1/L \\ \omega_0^2 = n^2/LC \\ B = \dfrac{R_g+n^2R_L}{L} \end{cases}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{n}{\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10^{-1}\cdot 10^{-8}}} = 10^5 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{B = \frac{R_g + n^2R_L}{L} = \frac{10^3 + 10\cdot 10}{10^{-1}} = 11\cdot 10^3 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{10^5}{11\cdot 10^3} = 9'09}$$

d) Pot. disipada por R_L en 2ario = Pot. disipada por n^2R_L en 1ario



en resonancia $Im(Z)=0$

$$Z_{AB} = n^2R_L + \cancel{j\left(\omega L - \frac{n^2}{\omega C}\right)}^{\,0}$$

$$\left.\begin{aligned} P_{disipada} &= \frac{1}{2n^2R_L}|V_L|^2 \\ V_L &= V_g\frac{n^2R_L}{R_g+n^2R_L} \end{aligned}\right\} \quad P_{dis} = \ldots = 4'13\cdot 10^{-3} (W)$$

PROBLEMA IV-21

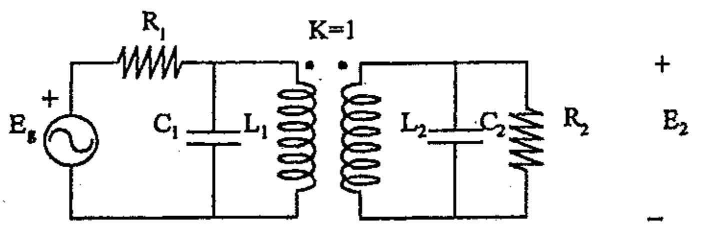
En el circuito de la figura, calcular:

a) La función de transferencia E_2 / E_g.

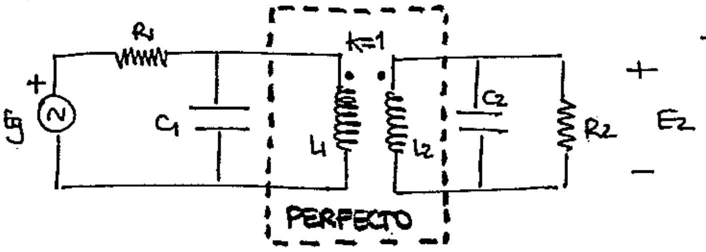
b) La potencia entregada a R_2. ¿A qué frecuencia es máxima dicha potencia?. ¿Cuánto vale el valor máximo de la potencia?.

c) Calcular el factor de calidad y el ancho de banda del circuito.

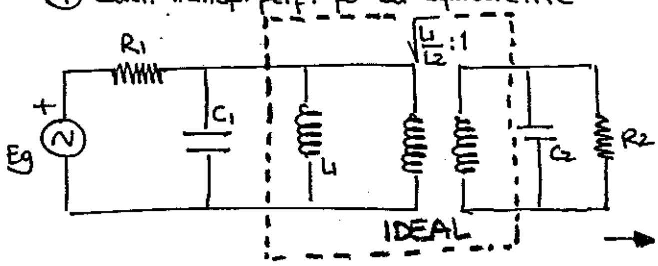
Se recomienda sustituir el transformador por su circuito equivalente.



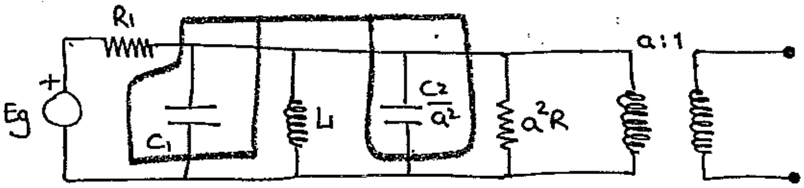
Aptdo a)



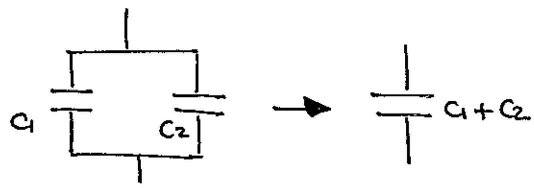
① Sust. transf. perf. por su equivalente



② Reflejamos impedancias del sec. al prim.



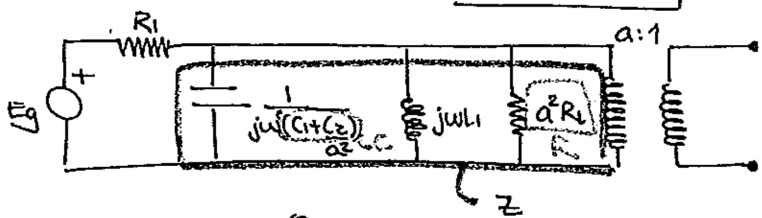
CONDENSADORES:



$$\frac{1}{j\omega C_2} \rightarrow \frac{a^2}{j\omega C_2}$$

$$\frac{1}{j\omega C_2} \rightarrow \frac{1}{j\omega \frac{C_2}{a^2}}$$

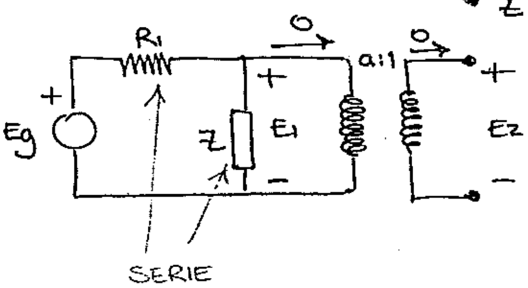
$$\boxed{\begin{array}{l} C = C_1 + \frac{C_2}{a^2} \\ R = a^2 R_1 \\ a = \sqrt{L_1/L_2} \end{array}}$$



$$Z = \frac{1}{j\omega C} \,//\, j\omega L_1 \,//\, R$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R}$$

$$Z = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R}} = \frac{j\omega R L_1}{R - \omega^2 L_1 R C + j\omega L_1}$$



$$E_1 = E_g \frac{Z}{R_1 + Z}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = a \rightarrow E_1 = aE_2$$

$$aE_2 = E_g \frac{Z}{R_1+Z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{E_2}{E_g} = \frac{1}{a}\frac{Z}{R_1+Z}}$$

Donde: $Z = \ldots$
$a = \ldots$

$$T(j\omega)=\frac{E_2}{E_g}=\frac{1}{a}\,\frac{\dfrac{j\omega R L_1}{R-\omega^2 R L_1 C+j\omega L_1}}{R_1+\dfrac{j\omega R L_1}{R-\omega^2 R L_1 C+j\omega L_1}}=\frac{j\omega\,\dfrac{R L_1}{a}}{R R_1-\omega^2 R R_1 L_1 C+j\omega L_1 R_1+j\omega R L_1}=$$

$$=\frac{j\omega\,\dfrac{R L_1}{a}}{R R_1-\boxed{\omega^2} R R_1 L_1 C+j\omega L_1(R+R_1)}$$

Dividimos entre $R R_1 L_1 C$:

$$R=a^2R_2 \qquad C=C_1+\frac{C_2}{a^2} \qquad a=\sqrt{L_1/L_2}$$

$$T(j\omega)=\frac{j\omega\,\dfrac{\cancel{R}\cancel{L_1}}{a\cancel{R}R_1\cancel{L_1}C}}{\dfrac{\cancel{RR_1}}{\cancel{RR_1}L_1C}-\omega^2+j\omega\dfrac{\cancel{L_1}(R+R_1)}{RR_1\cancel{L_1}C}}=\frac{j\omega\,\dfrac{1}{aR_1(C_1+C_2/a^2)}}{\dfrac{1}{L_1\left(C_1+\frac{C_2}{a^2}\right)}-\omega^2+j\omega\dfrac{a^2R_2+R_1}{a^2R_2R_1\left(C_1+\frac{C_2}{a^2}\right)}}=$$

$$=\frac{j\omega\,\dfrac{1}{\sqrt{L_1/L_2}\,R_1\left(C_1+\frac{C_2}{a^2}\right)}}{\dfrac{1}{L_1\left(C_1+\frac{C_2}{a^2}\right)}-\omega^2+j\omega\dfrac{\left(\frac{L_1}{L_2}R_2+R_1\right)}{\frac{L_1}{L_2}R_2R_1\left(C_1+\frac{C_2}{a^2}\right)}}$$

$$T(j\omega)=\frac{E_2}{E_g}=\frac{j\omega\,\underbrace{\boxed{\dfrac{\sqrt{L_1L_2}}{(C_1L_1+C_2L_2)R_1}}}_{K}}{\underbrace{\boxed{\dfrac{1}{L_1C_1+L_2C_2}}}_{\omega_0^2}-\omega^2+j\omega\underbrace{\boxed{\dfrac{L_1R_2+L_2R_1}{(L_1C_1+L_2C_2)R_1R_2}}}_{B\,(rad/s)}}$$

Aptdo c)

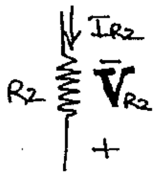
$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1+L_2C_2}}\quad (rad/s)$$

$$B=\frac{L_1R_2+L_2R_1}{R_1R_2(L_1C_1+L_2C_2)}\quad (rad/s)$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$$

$$Q=\frac{\omega_0}{B}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1+L_2C_2}}}{\dfrac{L_1R_2+L_2R_1}{R_1R_2(L_1C_1+L_2C_2)}}=\frac{R_1R_2(L_1C_1+L_2C_2)}{(L_1R_2+L_2R_1)\sqrt{L_1C_1+L_2C_2}}=\frac{R_1R_2\sqrt{L_1C_1+L_2C_2}}{L_1R_2+L_2R_1}$$

Aptdo b) Potencia entregada a R_2 = Pot. disipada por R_2 = Pot. media en R_2



$$Pot_{med}=\frac{1}{2R_2}|\bar{V}_{R_2}|^2=\frac{1}{2}|I_{R_2}|^2R_2$$

Mirando el cto. del enunciado: $\bar{V}_{R_2}=E_2$

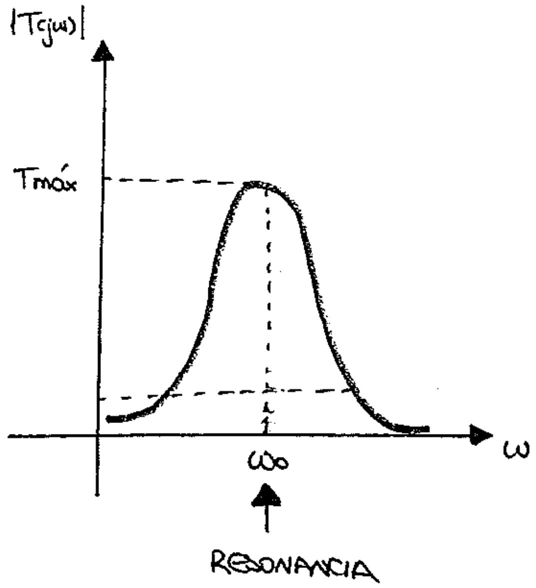
$$Pot_{med}=\frac{1}{2R_2}|E_2|^2$$

$$T(j\omega)=\frac{E_2}{E_g}\longrightarrow E_2=T(j\omega)\cdot E_g$$

$$|ab|=|a||b|$$

$$P_{media}=\frac{1}{2R_2}|T(j\omega)E_g|^2=$$

$$=\boxed{\frac{1}{2R_2}|T(j\omega)|^2\,|E_g|^2\ (W)}$$



La potencia será máxima cuando $|T(j\omega)|$ sea máximo, es decir, para $\omega = \omega_0$ (pulsación de resonancia) o en frecuencias a $f = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1 + L_2C_2}}$ (Hz)

El valor máximo de la potencia será:

$$P_{med_{máx}} = \frac{1}{2R_2} |T(j\omega)|^2_{max} |E_g|^2 =$$

$$= \frac{1}{2R_2} |T(j\omega_0)|^2 |E_g|^2$$

$$T(j\omega_0) = \frac{\cancel{j\omega_0} k}{\cancel{\omega_0^2} - \cancel{\omega_0^2} + \cancel{j\omega_0} B} = \frac{k}{B} = \frac{\dfrac{\sqrt{L_1L_2}}{R_1(L_1C_1 + L_2C_2)}}{\dfrac{L_1R_2 + L_2R_1}{R_1R_2(L_1C_1 + L_2C_2)}} = \frac{R_2\sqrt{L_1L_2}}{L_1R_2 + L_2R_1}$$

$$P_{med_{máx}} = \frac{1}{2R_2}\left|\frac{R_2\sqrt{L_1L_2}}{L_1R_2 + L_2R_1}\right|^2 |E_g|^2 = \frac{1}{2R_2}\left(\frac{R_2\sqrt{L_1L_2}}{L_1R_2 + L_2R_1}\right)^2 |E_g|^2 =$$

$$= \frac{L_1L_2R_2}{2(L_1R_2 + L_2R_1)^2} |E_g|^2 \quad (W)$$

Problema IV - 22

Dado el circuito de la figura, analizándolo en RPS:

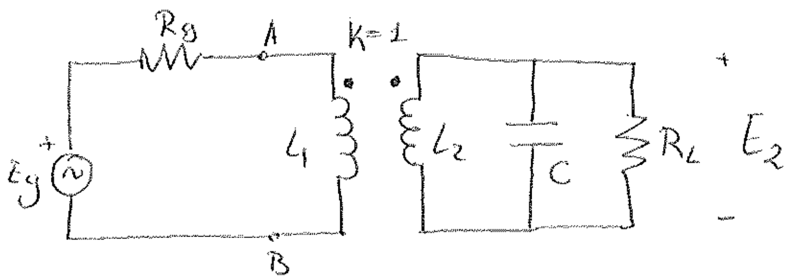
a) Sustituir el transformador por su circuito equivalente.

b) A partir del circuito equivalente, reflejar las impedancias del secundario al primario.

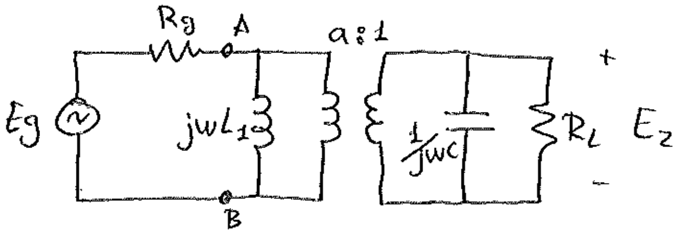
c) Calcular la impedancia de entrada vista desde AB

d) Calcular la tensión E_2

e) Si $C = 1\mu F$; $R_g = 100\,\Omega$; $R_L = 10k\Omega$; calcular L_1 y L_2 para que la pulsación de resonancia del circuito sea $\omega_0 = 10^7$ rad/s y para que el ancho de banda sea $B = 200\pi$ KHz

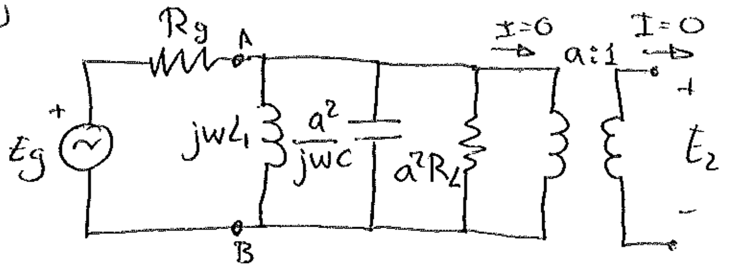


a)

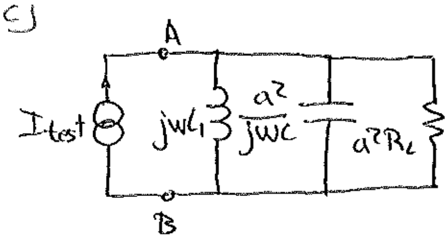


$a = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

b)



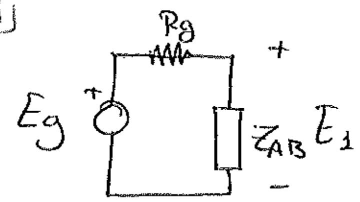
c)



$$Y_{AB} = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{j\omega C}{a^2} + \frac{1}{a^2 R_L}$$

$$\boxed{Z_{AB} = \frac{1}{Y_{AB}} = \dots = \frac{j\omega a^2 R_L L_1}{a^2 R_L - \omega^2 L C R_L + j\omega L_1}}$$

d)



Div. tensión:

$$E_1 = E_g \frac{Z_{AB}}{R_g + Z_{AB}}$$

$$E_1 = a E_2$$

$$\boxed{E_2 = \frac{1}{a} \frac{Z_{AB}}{R_g + Z_{AB}} E_g}$$

con $a = \sqrt{L_1/L_2}$

e)

$$T(j\omega) = \frac{E_2}{E_g} = \frac{Resp}{Excit.} = \frac{j\omega\, a/R_g C}{a^2/L_1 C - \omega^2 + j\omega \frac{R_g + a^2 R_L}{R_g R_L C}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{a^2}{L_1 C} = \frac{1}{L_2 C} \Rightarrow \boxed{L_2 = 10^{-8}\, H} \qquad \boxed{L_1 = 10^{-12}(4\pi^2 10^5 - 100)\, H}$$

IACR Problemas de examen

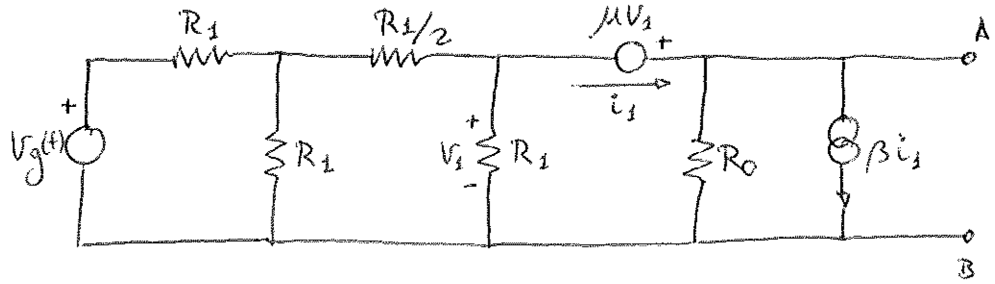
Junio 2003 - Problema 1

a) Realice transformaciones circuitales hasta llegar a una sola malla.

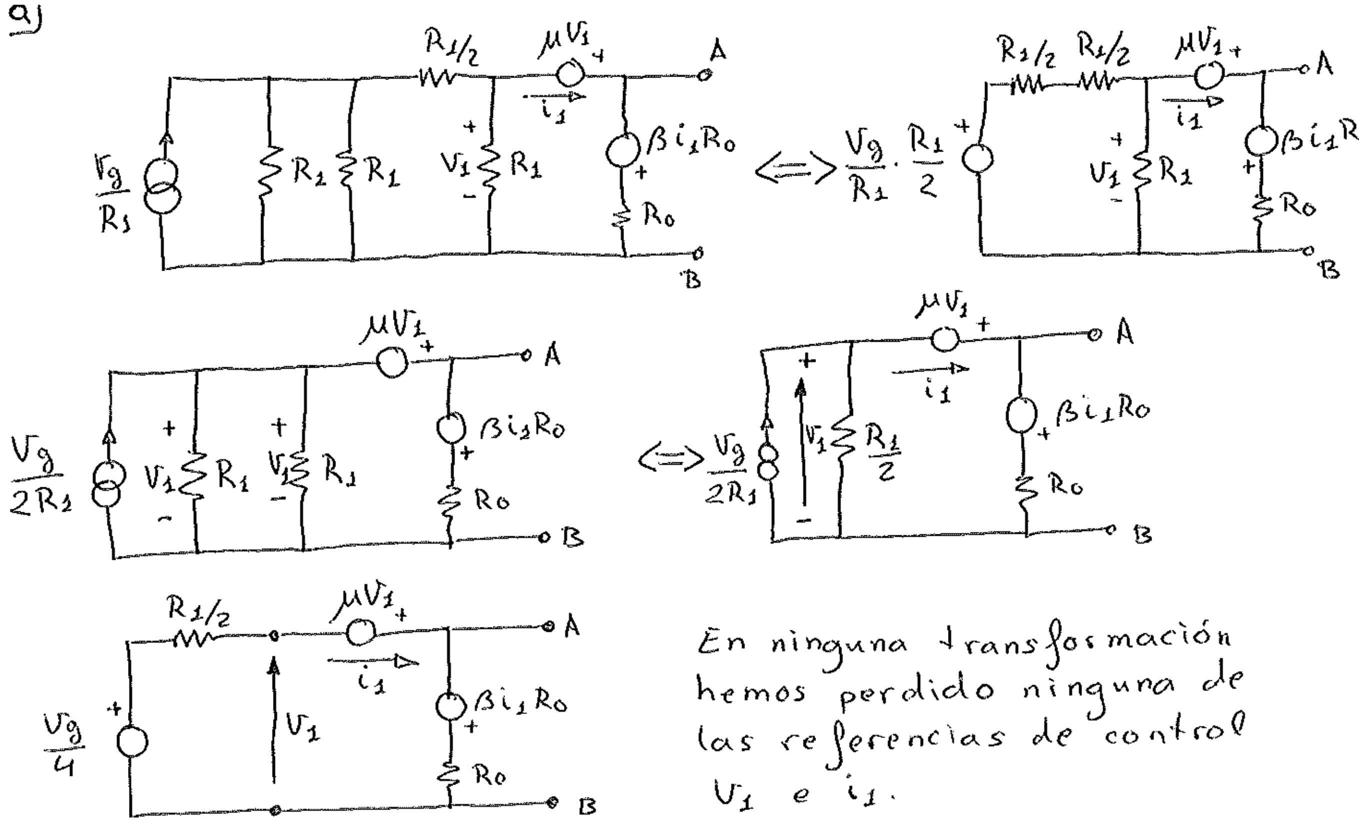
b) Calcule el equivalente de Thevenin en AB

c) Calcule $V_{Th}(t)$ y R_{Th} para los siguientes valores numéricos. Comente el resultado.

$V_g(t) = 10\cos(10^3 t)$; $R_1 = 1000\Omega$; $\mu = 1$; $R_0 = 20\Omega$; $\beta = 100$

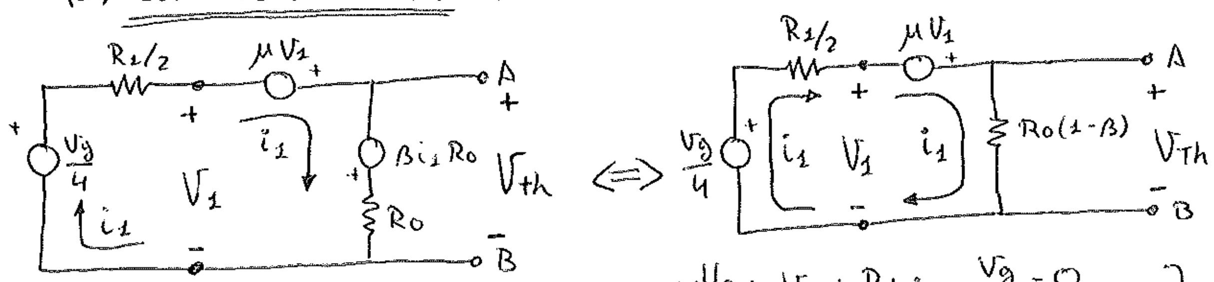


a)



En ninguna transformación hemos perdido ninguna de las referencias de control V_1 e i_1.

b) (I) Cálculo de V_{Th} (tensión en circuito abierto)



$$\left.\begin{aligned} &\text{malla}: V_1 + \frac{R_1}{2} i_1 - \frac{V_g}{4} = 0 \\ &\text{malla}: R_0(1-\beta)i_1 - \mu V_1 - V_1 = 0 \\ &\text{malla}: V_{Th} - R_0(1-\beta)\, i_1 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} 3 \text{ ec.} \\ 3 \text{ incóg.} \end{array}$$

Resolviendo el sistema ...

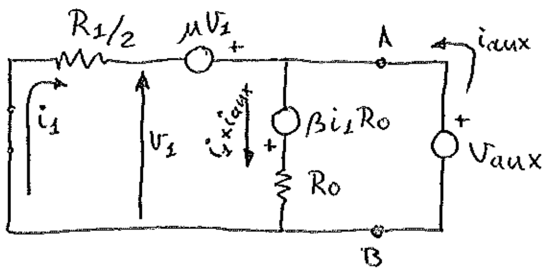
$$\boxed{V_{Th} = R_0 (1-\beta)\, i_1 = \frac{V_g R_0 (1-\beta)(1+\mu)}{2R_1 (1+\mu) + 4R_0(1-\beta)}}$$

(II) <u>Cálculo de R_{Th}</u>

Para calcularla tenemos tres opciones:

* Calcular i_N y hallar $R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_N}$
* Desconectar los generadores independientes y hallando la resistencia equivalente. Este método sólo es válido si no existen generadores dependientes. (No válido para nuestro circuito)
* Desconectar los generadores independientes y conectar un generador de prueba para hallar $R_{Th} = \frac{V_{aux}}{i_{aux}}$

Emplearemos la tercera opción:



malla: $V_1 + \frac{R_1}{2} i_1 = 0$

malla: $V_1 + \mu V_1 + \beta R_0 i_1 - R_0 (i_1 + i_{aux}) = 0$

malla: $V_{aux} + \beta R_0 i_1 - R_0 (i_1 + i_{aux}) = 0$

Resolviendo el sistema...

$$\boxed{R_{Th} = \frac{V_{aux}}{i_{aux}} = \frac{R_0 R_1 (1+\mu)}{2R_0(1-\beta) + (1+\mu) R_1}}$$

c) Conociendo por el enunciado:

$V_g(t) = 10 \cos (10^3 t)$ (V)

$R_1 = 10^3\ \Omega$

$\mu = 1$

$R_0 = 20\ \Omega$

$\beta = 100$

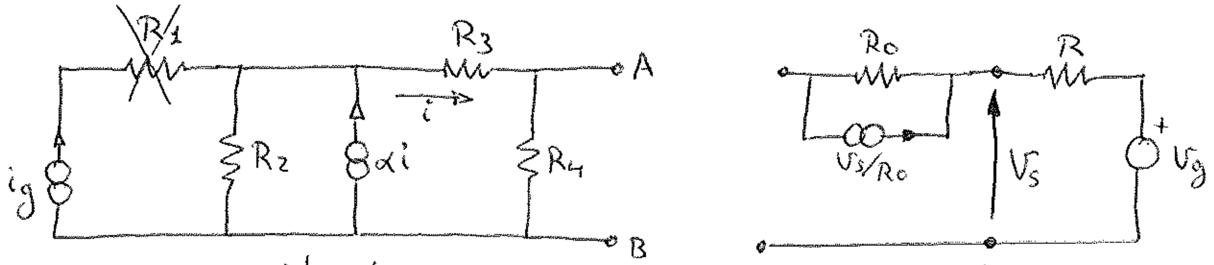
$$\boxed{\begin{array}{l} V_{Th} = 10'1 \cos (10^3 t)\ (V) \\ R_{Th} = -20'4\ \Omega \end{array}}$$

<u>Comentario:</u> la R_{Th} puede ser negativa, sobretodo si en el circuito original hay generadores dependientes.

Junio 2008 - Problema 1

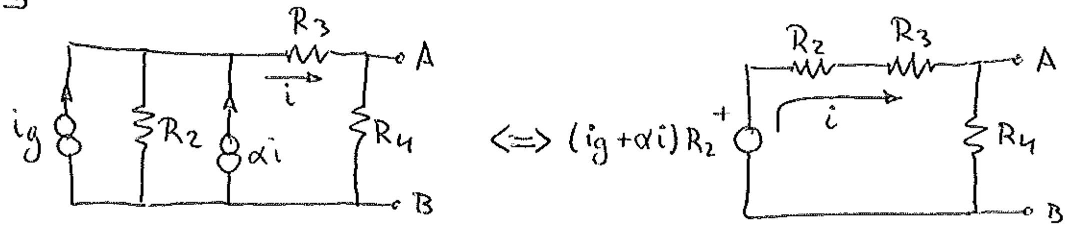
a) Calcule, para el circuito 1, los equivalentes de Thevenin y de Norton en los terminales AB

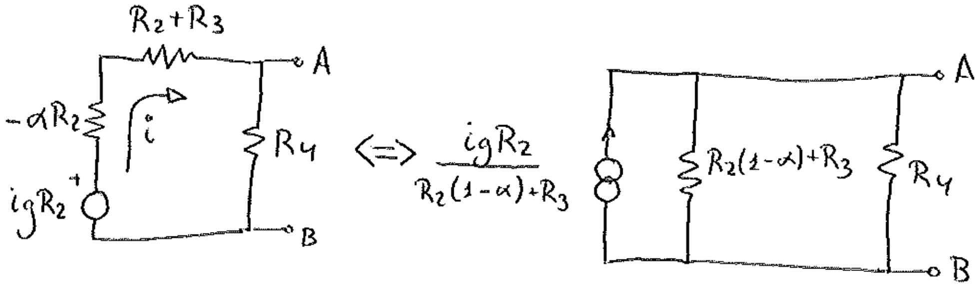
b) Si se conecta en AB el circuito 2, calcule V_s.

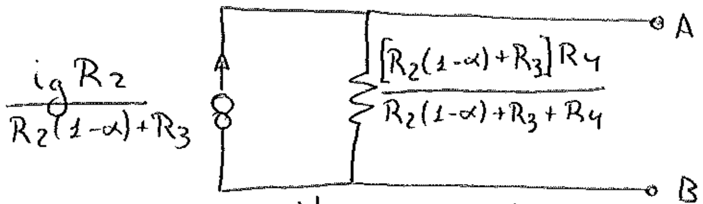


circuito 1 circuito 2

a)



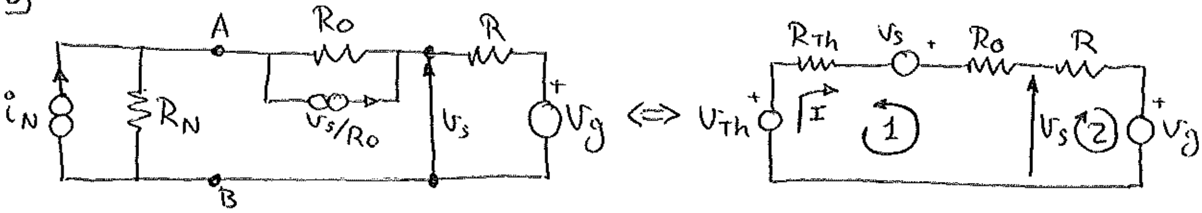




circuito Eq. de Norton

$$\boxed{\begin{aligned} i_N &= \frac{i_g R_2}{R_2(1-\alpha)+R_3} \\ R_N &= \frac{[R_2(1-\alpha)+R_3]R_4}{R_2(1-\alpha)+R_3+R_4} = R_{Th} \\ V_{Th} &= i_N \cdot R_{Th} = \frac{i_g R_2 R_4}{R_2(1-\alpha)+R_3+R_4} \end{aligned}}$$

b)



$$\left.\begin{aligned} &\text{malla 1: } (R_{Th}+R_o)I - \cancel{V_s} - V_{Th} + \cancel{V_s} = 0 \\ &\text{malla 2: } V_s - RI - V_g = 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} 2 \text{ ec.} \\ 2 \text{ incóg.} \end{array}$$

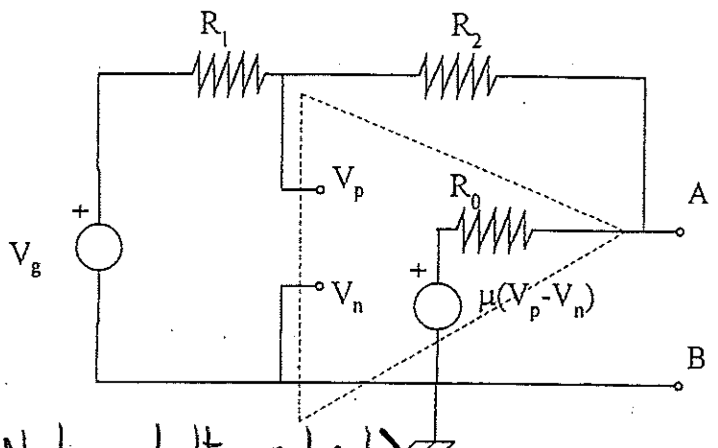
$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th}+R_o} \Rightarrow \boxed{V_s = \frac{R\,V_{Th}}{R_{Th}+R_o} + V_g}$$

PROBLEMA 1

El circuito de la figura incluye un Amplificador Operacional representado mediante un modelo no-ideal. Se pide:

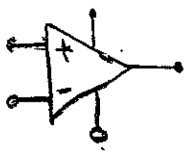
a) Calcular el circuito equivalente de Thevenin en terminales AB.

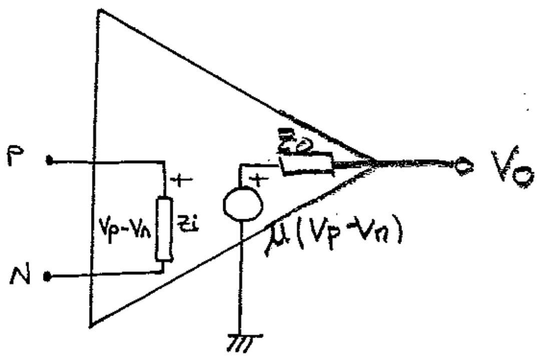
b) A partir del resultado anterior, calcular el equivalente de Thevenin cuando se emplea el modelo de A.O. ideal, es decir $R_0 \to 0$ y $\mu \to \infty$. Comente el resultado. ¿Qué función realiza el circuito si $R_2 > R_1$?.



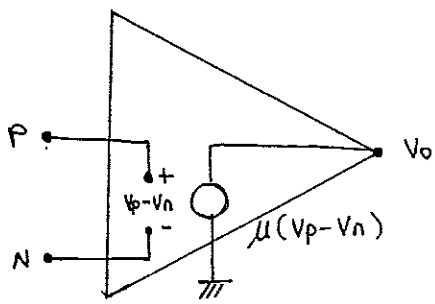
• NOTA TEÓRICA (No hace falta saberlo)

→ MODELO DEL AO REAL
- $\mu \in \mathbb{R}$ (GANANCIA)
- Z_i: Imp. ent.
- Z_o Imp. salida



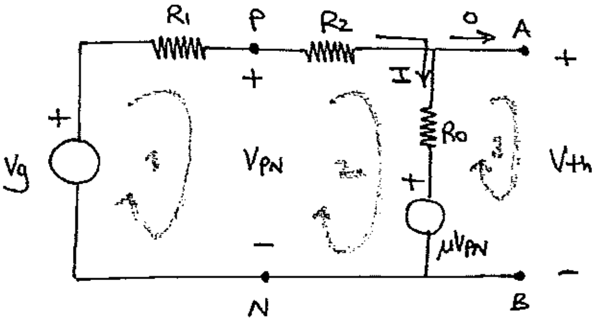


→ MODELO DEL AO IDEAL
- $\mu = \infty$ (GANANCIA)
- $Z_i = \infty$
- $Z_o = 0$



Aptdo a) Equivalente de Thevenin

① Cálculo de la V_{th}: tensión en cto abierto



• MALLA 1 : $IR_1 + V_{PN} = V_g \quad (1)$

• MALLA 2 : $IR_2 + IR_0 + \mu V_{PN} = V_{PN} \quad (2)$

• MALLA 3 : $V_{th} = \mu V_{PN} + IR_0 \quad (3)$

Sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas: V_{PN}, V_{th}, I

Despejo V_{PN} DE (1): $V_{PN} = V_g - IR_1$

Sust en (2): $IR_2 + IR_0 + \mu(V_g - IR_1) = V_g - IR_1 \longrightarrow$ Despejo I:

$$(R_0 + R_2 - \mu R_1 + R_1) I = V_g (1-\mu)$$

$$I = \frac{V_g(1-\mu)}{R_0 + R_2 + R_1(1-\mu)}$$

Sust V_{PN} en (3):

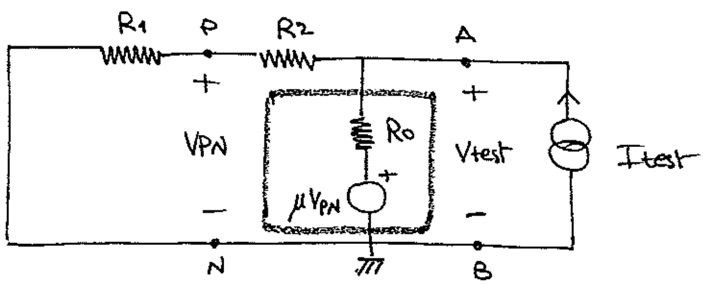
$$V_{th} = \mu(V_g - IR_1) + R_0 I \longrightarrow V_{th} = \mu V_g + I(R_0 - \mu R_1)$$

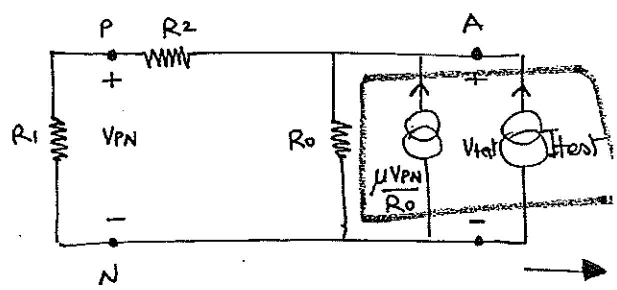
Ahora sust I:

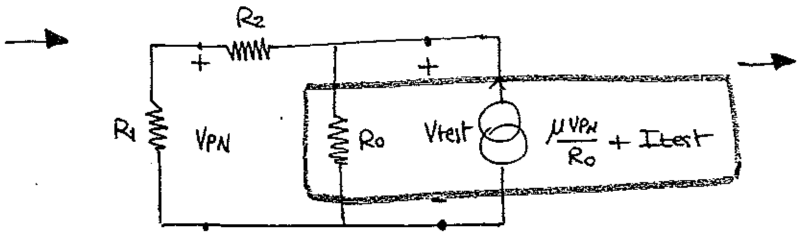
$$V_{th} = \mu V_g + \frac{V_g(1-\mu)}{R_0 + R_2 + R_1(1-\mu)} \cdot (R_0 - \mu R_1) = V_g \frac{\cancel{\mu R_0} + \mu R_2 + \cancel{\mu R_1} - \cancel{\mu^2 R_1} + R_0 - \cancel{\mu R_1} - \cancel{\mu R_0} + \cancel{\mu^2 R_1}}{R_0 + R_2 + R_1(1-\mu)}$$

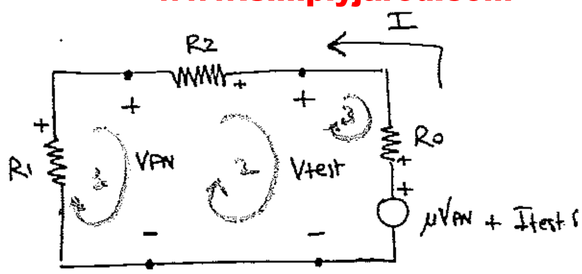
$$= \frac{R_0 + \mu R_2}{R_0 + R_2 + R_1(1-\mu)} V_g$$

② CÁLCULO DE R_{TH}: método del generador de prueba









- MALLA 1 : $V_{PN} = I\cdot R_1$ (1)
- MALLA 2 : $V_{test} = V_{PN} + R_2 I$ (2)
- MALLA 3 : $\mu V_{PN} + R_o \cdot I_{test} = I\cdot R_o + V_{test}$ (3)

Sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas: V_{PN}, V_{test}, I, I_{te}

(1) en (2): $V_{test} = IR_1 + R_2 I \longrightarrow V_{test} = I(R_1+R_2)$ ①

(1) en (3): $\mu I\cdot R_1 + R_o I_{test} = IR_o + V_{test} \longrightarrow I_{test} R_o = V_{test} + I(R_o - \mu R_1)$ ②

De ① despejo : $I = \dfrac{V_{test}}{R_1+R_2}$, sust. en ② :

$$I_{test}\cdot R_o = V_{test} + \frac{V_{test}}{R_1+R_2}(R_o - \mu R_1) \longrightarrow I_{test}\cdot R_o = \frac{V_{test}(R_1+R_2) + V_{test}(R_o - \mu R_1)}{R_1+R_2}$$

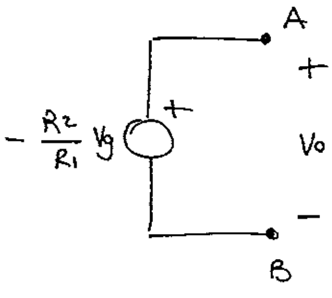
$$V_{test}\,\frac{R_1+R_2+R_o-\mu R_1}{R_1+R_2} = I_{test}\cdot R_o \longrightarrow R_{th} = \frac{V_{test}}{I_{test}} = \frac{R_o(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_o-\mu R_1}$$

Aptdo b)

- $$V_{th} = \frac{R_o + \mu R_2}{R_o+R_2+R_1(1-\mu)} V_g \xrightarrow{R_o \to 0} V_{th} = \frac{\mu R_2}{R_2 + R_1(1-\mu)} V_g \xrightarrow{\mu \to \infty} \ldots$$

$$V_{th} = \lim_{\mu\to\infty} \frac{\mu R_2 V_g}{-R_1\mu + R_1 + R_2} = -\frac{R_2}{R_1} V_g$$

- $$R_{th} = \frac{R_o(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_o-\mu R_1} \xrightarrow[\mu\to\infty]{R_o\to 0} R_{th} = 0\,\Omega$$



$$V_o = \underbrace{-\frac{R_2}{R_1}}_{\text{ganancia}} \cdot V_g$$

Ganancia < 0 ⟶ INVERSOR

$|\text{GANANCIA}| = \frac{R_2}{R_1} > 1$ ⟶ AMPLIFICADOR

$R_2 > R_1$

JUNIO 2008

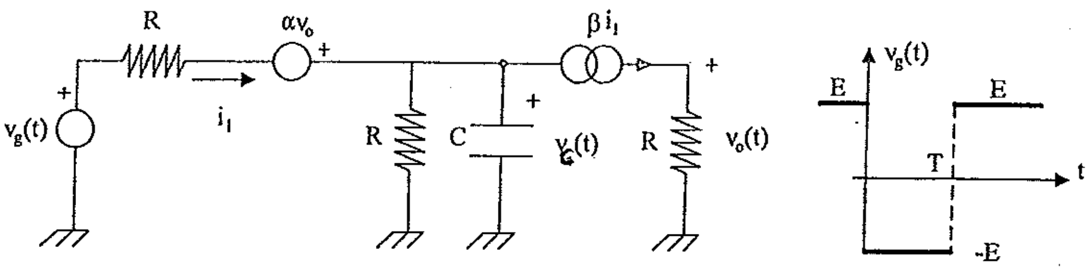
PROBLEMA 2 (2,5 ptos)

En el circuito de la figura, considerando $\alpha=1, \beta=2$,

a) Obtener la ecuación diferencial que gobierna el circuito, para la variable $v_c(t)$ en cualquier instante de tiempo.

b) Calcular los valores de tensión $v_c(0)$ y $v_c(\infty)$.

c) Calcular la expresión de la tensión $v_c(t)$ en cualquier instante de tiempo y dibujarla. Considerar que se cumple la relación $T = 10RC/\beta$.



JUN08.P2

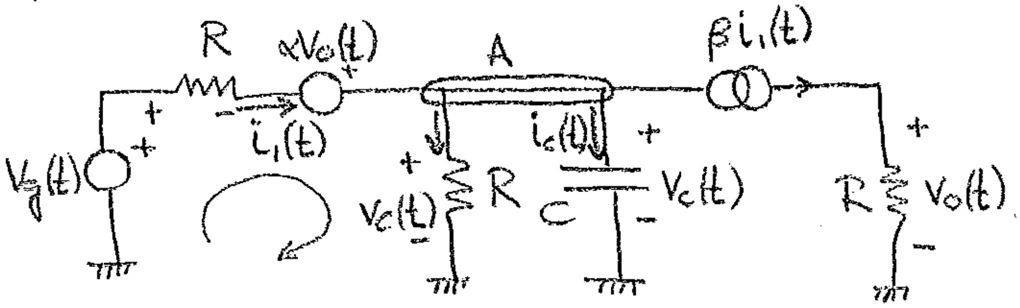
Tenemos 3 intervalos:

① $t<0 \rightarrow V_g(t)=E$

② $0<t<T \rightarrow V_g(t)=-E$

③ $t>T \longrightarrow V_g(t)=E$

a) La EDO será la misma $\forall t$ puesto que el cto no cambia.



Nudo A: $i_1(t)=\frac{V_c(t)}{R}+i_c(t)+\beta i_1(t)$ (1)

Cond: $i_c(t)=C\frac{dV_c(t)}{dt}$ (2)

Malla: $V_c(t)+Ri_1(t)=V_g(t)+\alpha V_o(t)$ (3)

Ley de Ohm: $V_o(t)=R\beta i_1(t)$ (4)

(4) en (3): $V_c(t)+Ri_1(t)=V_g(t)+\alpha R\beta i_1(t)$

$i_1(t)[R-\alpha R\beta]=-V_c(t)+V_g(t) \longrightarrow i_1(t)=\frac{V_g(t)-V_c(t)}{R[1-\alpha\beta]} \xrightarrow{\alpha=1,\beta=2}$

$i_1(t)=\frac{V_c(t)-V_g(t)}{R}$ (3')

(2) en (1): $\frac{V_c(t)}{R}+C\frac{dV_c(t)}{dt}+(\beta-1)i_1(t)=0$ (1')

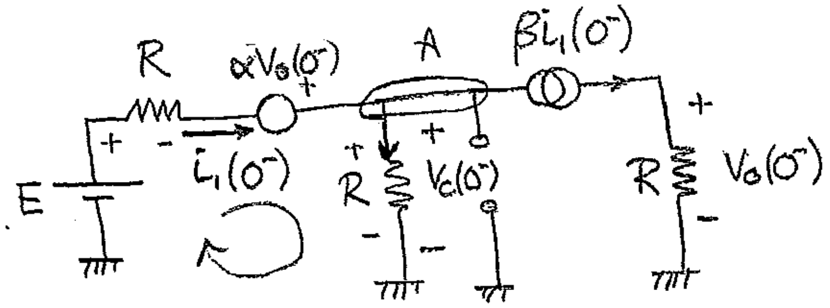
(3') en (1'): $\frac{V_c(t)}{R}+C\frac{dV_c(t)}{dt}+(\beta-1)\frac{V_c(t)-V_g(t)}{R}=0 \xrightarrow{\beta=2}$

$\frac{V_c(t)}{R}+C\frac{dV_c(t)}{dt}+\frac{V_c(t)}{R}-\frac{V_g(t)}{R} \longrightarrow C\frac{dV_c(t)}{dt}+\frac{2}{R}V_c(t)=\frac{V_g(t)}{R}$

Buscamos $\tau \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = \cdots$

Multip. x $\frac{R}{2}$: $\boxed{\frac{RC}{2}\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = \frac{V_g(t)}{2}}$

b) ① $t<0$. En partic $t=0^- \Rightarrow$ Rég. perm. de cont.



NUDO A: $i_1(0^-) = \frac{V_c(0^-)}{R} + \beta i_1(0^-)$ (1)

MALLA: $R i_1(0^-) + V_c(0^-) = E + \alpha V_o(0^-)$ (2)

OHM: $V_o(0^-) = \beta R i_1(0^-)$ (3)

(3) en (2): $R i_1(0^-) + V_c(0^-) = E + \alpha\beta R i_1(0^-) \xrightarrow{\alpha=1,\beta=2} i_1(0^-) = \frac{V_c(0^-) - E}{R}$ (2')

(2') en (1): $\frac{V_c(0^-)}{R} = (1-\beta) i_1(0^-) \rightarrow V_c(0^-) = (1-\beta) R i_1(0^-)$

$$V_c(0^-) = (1-\beta)\cancel{R}\frac{V_c(0^-)-E}{\cancel{R}} \rightarrow V_c(0^-)\left[1-(1-\beta)\right] = (\beta-1)E$$

$$\boxed{V_c(0^-) = \frac{\beta-1}{\beta}E = \frac{E}{2}}$$

② $0<t<T \rightarrow V_g(t) = -E$

$CI \equiv V_c(0^+) = V_c(0^-) = \frac{E}{2}$

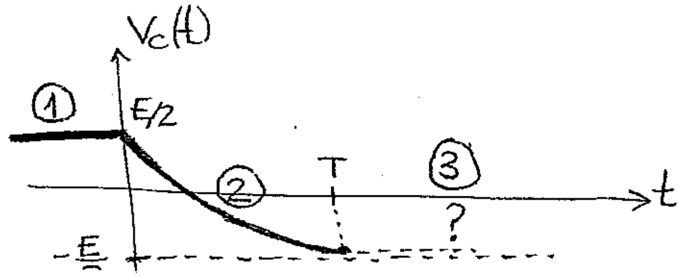
$V_c(t)$ tensión en C

El PVI es:

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{\frac{RC}{2}}_{\tau}\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = \overbrace{\frac{-E}{2}}^{CF} \\ V_c(0^+) = \underbrace{\frac{E}{2}}_{CI} \end{array}\right.$$

$V_c(t) = (CI - CF)e^{-\frac{t}{\tau}} + CF$, $0<t<T$

$$\boxed{V_c(t) = E e^{-\frac{2t}{RC}} - \frac{E}{2} = E\left(e^{-\frac{2t}{RC}} - \frac{1}{2}\right),\ 0<t<T}$$



③ $t > T \rightarrow V_g(t) = E$

Cambio $t' = t - T$

$T = \frac{10RC}{\beta} = \frac{10RC}{2} = 5RC$

$$CI = V_c(t'=0^+) = V_c(t=T^+) \overset{V_c(t)\ \text{func. cont}}{=} V_c(t=T^-) \overset{②}{=} E\left(e^{-\frac{2T}{RC}} - \frac{1}{2}\right) = E\left(e^{-\frac{2\cdot 5\cancel{RC}}{\cancel{RC}}} - \frac{1}{2}\right) =$$

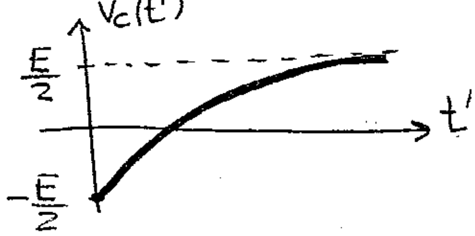
$$= E\left(e^{-10} - \frac{1}{2}\right) \simeq -\frac{E}{2}$$

El PVI es:

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{\frac{RC}{2}}_{\tau}\frac{dV_c(t')}{dt'} + V_c(t') = \underbrace{\frac{E}{2}}_{CF} \\ &V_c(t'=0^+) = \underbrace{-\frac{E}{2}}_{CI} \end{aligned}\right\}$$

$$V_c(t') = (CI - CF)e^{-\frac{t'}{\tau}} + CF,\ t' > 0$$

$$V_c(t') = -Ee^{-\frac{2t'}{RC}} + \frac{E}{2} = E\left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{2t'}{RC}}\right),\ t' > 0$$

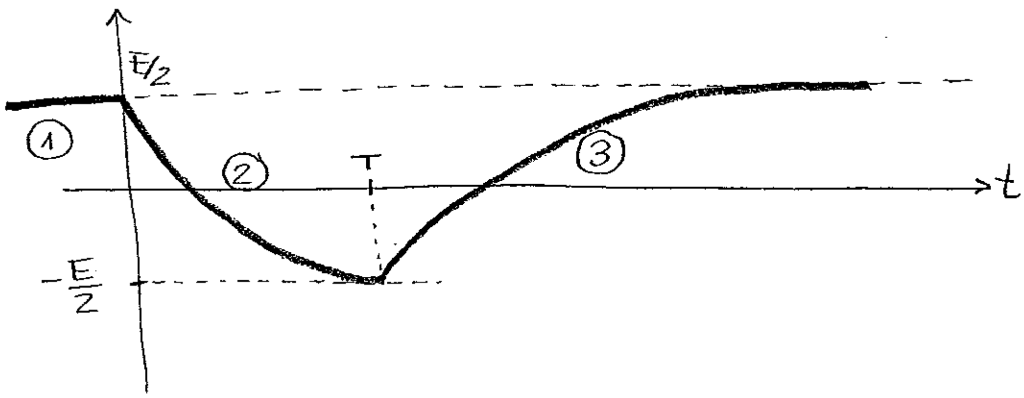


Desh. cambio: $t' = t - T$

$$V_c(t) = E\left[\frac{1}{2} - e^{-\frac{2(t-T)}{RC}}\right],\ t > T$$

En resumen:

$$V_c(t) = \begin{cases} \frac{E}{2}, & t < 0 \quad ① \\ E\left(e^{-\frac{2t}{RC}} - \frac{1}{2}\right), & 0 < t < T \quad ② \\ E\left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{2(t-T)}{RC}}\right), & t > T \quad ③ \end{cases}$$



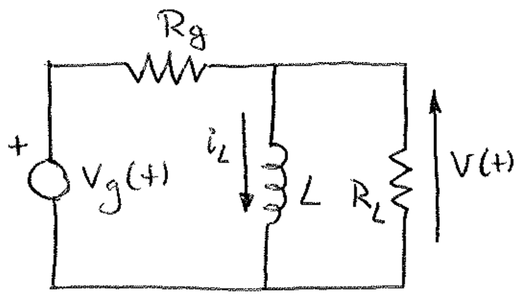
Junio 2002 - Problema 2

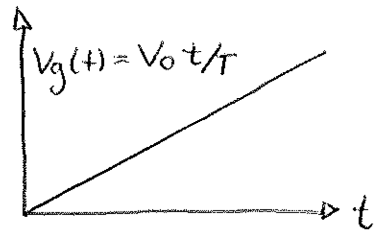
a) En el circuito de la figura determine la ecuación diferencial que gobierna la corriente en L.

b) Suponiendo que el generador tiene la variación con el tiempo indicada en la gráfica y que la corriente en la bobina es nula en t=0, calcule la corriente i_L y la tensión v.

c) Para un valor de t muy grande, en el instante en que v_g alcanza un cierto valor V_M la resistencia R_g se quema, quedando como un circuito abierto. Calcule la tensión v a partir de ese momento

Nota: Ensaye $at+b$ como solución particular de la completa.





a)

$$\left.\begin{array}{l} \text{nudo: } \dfrac{V_g(t) - V(t)}{R_g} = i_L(t) + \dfrac{V(t)}{R_L} \\ \text{bobina: } V(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{array}\right\} \frac{V_g(t)}{R_g} - \frac{L}{R_g}\frac{di_L(t)}{dt} = i_L(t) + \frac{L}{R_L}\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$L\left(\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_L}\right)\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{V_g}{R_g} \Rightarrow \boxed{LG\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{V_g}{R_g}\ ;\ G = G_g + G_L}$$

b) $i_L(t=0^+) = 0$

$V_g(t) = \dfrac{V_0}{T}t$

No podemos aplicar la fórmula porque es una función de t ≠cte

PVI:

$$\left.\begin{array}{l} LG\dfrac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \dfrac{V_0(t)}{R_g T}t \\ i_L(t=0^+) = 0 \end{array}\right\}$$

1) SGH

$$LG\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0 \Rightarrow LG\cdot s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-1}{LG}$$

$$i_{LH}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{st} = Ke^{-t/LG}\ ,\ t>0$$

2) SPC

$i_{Lp}(t) = at + b$ (nos lo dice el enunciado)

3) Calculamos a y b

$$LG \underbrace{\frac{di_{Lp}(t)}{dt}}_{a} + \underbrace{i_{Lp}(t)}_{at+b} = \frac{V_0(t)}{TR_g}t \Rightarrow LGa + at + b = \frac{V_0(t)\cdot t}{TR_g}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{V_0}{TR_g} \\ b &= \frac{-LGV_0}{TR_g} \end{aligned}\right\}$$

$$\text{SPC} \Rightarrow i_{Lp}(t) = at+b = \frac{V_0}{TR_g}(t - LG),\ t>0$$

4) $\text{SGP} = \text{SGH} + \text{SPC} \Rightarrow i_L(t) = i_{LH}(t) + i_{Lp}(t)$

$$i_L(t) = ke^{-t/LG} + \frac{V_0}{TR_g}(t - LG),\ t>0$$

5) Calculamos k

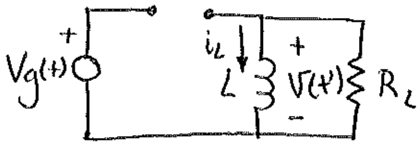
$$i_L(t=0^+) = 0 \Rightarrow i_L(0^+) = ke^0 + \frac{V_0}{TR_g}(0 - LG) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{V_0 LG}{TR_g}$$

Finalmente tenemos:

$$\boxed{i_L(t) = \frac{V_0 LG}{TR_g}e^{-t/LG} + \frac{V_0}{TR_g}(t - LG),\ t>0 \quad \text{con } G = \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_L}}$$

$$\boxed{V(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \frac{V_0 L}{TR_g}\left(1 - e^{-t/LG}\right),\ t>0}$$

c)



$$t' = t - T_M \ ;\ V_g(T_M) = V_M$$

$$\left.\begin{aligned} V(t') + R_L i_L(t') &= 0 \\ V(t') &= L\frac{di_L(t')}{dt'} \end{aligned}\right\} L\frac{di_L(t')}{dt'} + R_L i_L(t') = 0$$

$$i_L(t'=0^+) = i_L(t=T_M^+) = i_L(t=T_M^-) = \frac{V_0}{TR_g}\left(LG\left(e^{-\frac{T_M}{LG}} - 1\right) + T_M\right)$$

PVI:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{L}{R_L}\frac{di_L(t')}{dt'} + i_L(t') = 0 \\ &i_L(t'=0^+) = \frac{V_0}{TR_g}\left[LG\left(e^{-\frac{T_M}{LG}} - 1\right) + T_M\right] \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &i_L(t') = (CI - CF)\,e^{-\frac{t'}{\tau}} + CF,\ t'>0 \\ &i_L(t') = \frac{V_0}{TR_g}\left[LG\left(e^{-\frac{T_M}{LG}} - 1\right) + T_M\right]e^{-\frac{t'L}{RL}} \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable queda:

$$i_L(t) = \frac{V_0}{TR_g}\left[LG\left(e^{-\frac{T_M}{LG}} - 1\right) + T_M\right]e^{-\frac{R_L(t-T_M)}{L}} \ ;\ t > T_M$$

$$\boxed{V(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R_L V_0}{TR_g}\left[LG\left(e^{-\frac{T_M}{LG}} - 1\right) + T_M\right]e^{-\frac{R_L(t-T_M)}{L}} ;\ t>T_M}$$

Problema 2.

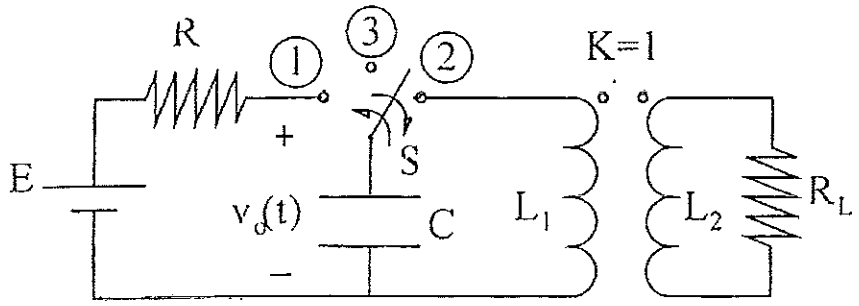
En el circuito de la figura el interruptor S se encuentra inicialmente en la posición 3 y el condensador C, completamente descargado. El transformador se perfecto ($K=1$), siendo equivalente, en bornas de primario, a la autoinducción L_1 en paralelo con un transformador ideal de relación de transformación $n=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$. En $t=0$, S conmuta a la posición 1, y en el instante $t=T$, S conmuta a la posición 2.

a) Calcular la tensión $v_o(t)$, en bornas del condensador, en todo instante de tiempo.

b) Escribir la ecuación diferencial que gobierna el circuito, en la variable $v_o(t)$, para $t>T$.

c) Calcular los valores de la tensión $v_o(t)$ y de su derivada $v_o'(t)$, en el instante T^+.

d) Con el interruptor S en la posición 2, escribir la expresión de la tensión $v_o(t)$ para $t>T$, indicando el tipo de amortiguamiento y el procedimiento a seguir para calcular las constantes involucradas. Datos para este apartado: $R=1\Omega$, $R_L=1\Omega$, $C=1mF$, $E=10V$, $L_1=1mH$, $L_2=0{,}25mH$, $T=0{,}1s$.



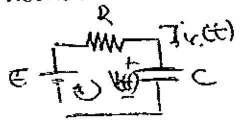
27 - 5 - 2010

③ $t<0$ No se analiza porque conocemos $V_o(0)=0\,(V)$ (DATO)

① $0<t<T$

② $t>T$

Analizamos ①: $0<t<T$



MALLA: $Ri_c(t)+V_o(t)=e$

CONDENSADOR: $i_c(t)=C\frac{V_o(t)}{dt}$

$RC\frac{dV_o(t)}{dt}+V_o(t)=E$ FÓRMULA

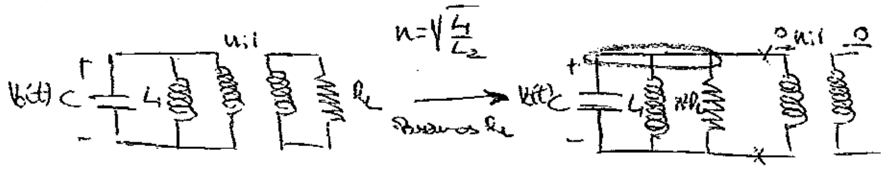
Así que el PVI es:

$$\tau\ RC\frac{dV_o(t)}{dt}+V_o(t)=E \quad CF$$
$$V_o(0^+)=0 \quad CI$$

$V_o(t)=(CI-CF)e^{-\frac{t}{\tau}}+CF,\ 0<t<T$

$V_o(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}}),\ 0<t<T$

Analizamos ② $t>T$



NUDO: $0=i_c(t')+i_L(t')+\frac{V_o(t')}{n^2R_L}$ (I)

CONDENSADOR: $i_c(t')=C\frac{V_o(t')}{dt'}$ (II)

BOBINA: $V_o(t')=L_1\frac{di_L(t')}{dt'}\rightarrow i_L(t')=\frac{1}{L_1}\int V_o(t')dt'$ (III)

(III) y (II) en (I)

$$0=C\frac{dV_o(t')}{dt'}+\frac{1}{L_1}\int V_o(t')dt'+\frac{V_o(t')}{n^2R_L}\xrightarrow{\text{derivando}}C\frac{d^2V_o(t')}{dt'^2}+\frac{1}{L_1}V_o(t')+\frac{1}{n^2R_L}\frac{dV_o(t')}{dt'}=0 \quad \text{Div por } C$$

$$\frac{d^2V_o(t')}{dt'^2}+\underbrace{\frac{1}{n^2R_LC}}_{2\omega_o\xi}\frac{dV_o(t')}{dt'}+\underbrace{\frac{1}{L_1C}}_{\omega_o^2}V_o(t')=0$$

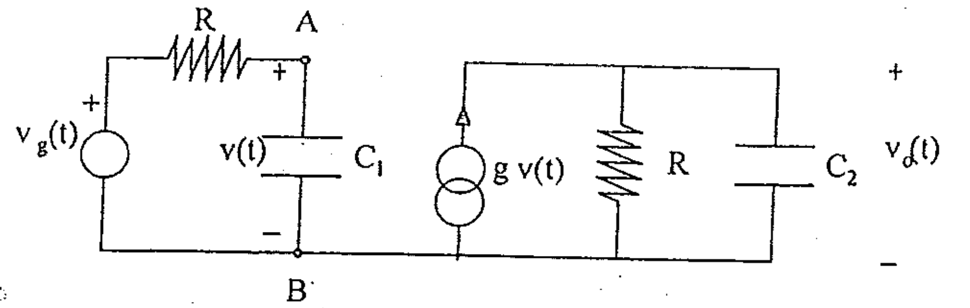
EDO 2º ORDEN

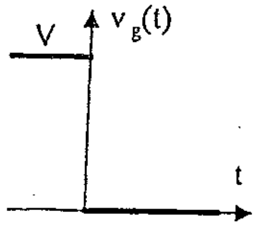
Homogénea

PROBLEMA 2 (2,5 puntos).

1) Obtener la ecuación diferencial que gobierna el circuito de la figura, en la variable v_0 (t), siendo el generador de tensión v_g (t) constante e igual a V, para t≤0, y cero para t>0 (ver figura).

2) En el circuito del apartado anterior calcular los valores de la tensión v_0 (t) y su derivada dv_0 (t)/dt en el instante t=0⁺, es decir, $v_0(0^+)$ y $v'_0(0^+)$. Indicar si puede producirse oscilación para algún valor de los parámetros del circuito R, g, C_1, C_2, obteniendo **la constante de amortiguamiento** y **la pulsación propia.**



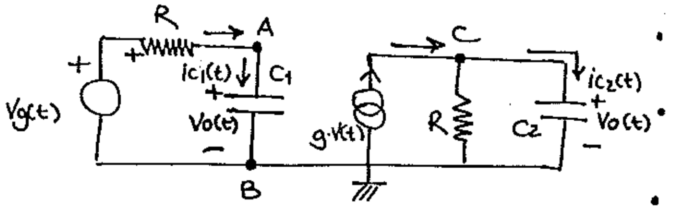


Tenemos 2 intervalos temporales:

① $t<0 \longrightarrow V_g(t) = V$

② $t>0 \longrightarrow V_g(t) = 0$

Aptdo 1)



¿EDO con $V_0(t)$ como incógnita?

- NUDO A : $\dfrac{V_g(t) - V(t)}{R} = i_{C_1}(t)$
- CONDENSADOR : $i_{C_1}(t) = C\dfrac{dV(t)}{dt}$

$$\frac{V_g(t)-V(t)}{R} = C\frac{dV}{dt} \quad (1)$$

- NUDO C : $gV(t) = \dfrac{V_0(t)}{R} + i_{C_2}(t)$
- CONDENSADOR 2 : $i_{C_2}(t) = C\dfrac{dV_0(t)}{dt}$

$$gV(t) = \frac{V_0(t)}{R} + C\frac{dV_0(t)}{dt} \quad (2)$$

Sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas: $V(t)$, $\boxed{V_0(t)}$

Despejo $V(t)$ en (2):

$$V(t) = \frac{V_0(t)}{gR} + \frac{C_2}{g}\frac{dV_0(t)}{dt}$$

Sust. en (1): Necesito $\dfrac{dV(t)}{dt} =$

$$= \frac{1}{gR}\frac{dV_0(t)}{dt} + \frac{C_2}{g}\frac{d^2V_0(t)}{dt^2}$$

Al final queda:
$$\frac{C_1C_2}{g}\frac{d^2V_0(t)}{dt^2} + \left(\frac{C_1+C_2}{gR}\right)\frac{dV_0(t)}{dt} + \frac{1}{gR^2}V_0(t) = \frac{V_g(t)}{R}$$

Buscamos:
$$\frac{d^2V_0(t)}{dt^2} + 2\omega_0\zeta\frac{dV_0(t)}{dt} + \omega_0^2 V_0(t) = f(t)$$

Multip. por $\dfrac{g}{C_1C_2}$:
$$\boxed{\frac{d^2V_0(t)}{dt^2} + \frac{C_1+C_2}{C_1C_2R}\frac{dV_0(t)}{dt} + \frac{1}{C_1C_2R^2}V_0(t) = \frac{V_g(t)\cdot g}{C_1C_2R}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2}\,R} \quad (rad/s)$$

$$\boxed{\sqrt{x}/x = 1/\sqrt{x}}$$

$$2\omega_0\xi = \frac{C_1+C_2}{C_1C_2R} \longrightarrow \xi = \frac{C_1+C_2}{C_1C_2R\,2\omega_0} = \frac{(C_1+C_2)R\sqrt{C_1C_2}}{C_1C_2\cdot R\,2} = \frac{C_1+C_2}{2\sqrt{C_1C_2}}$$ COEF. DE AMORTIGUAMIENTO.

¿Puede el cto oscilar para algún valor de C_1 y C_2? $\longleftrightarrow$ ¿$\xi<1$ para algún valor de C_1 y C_2?

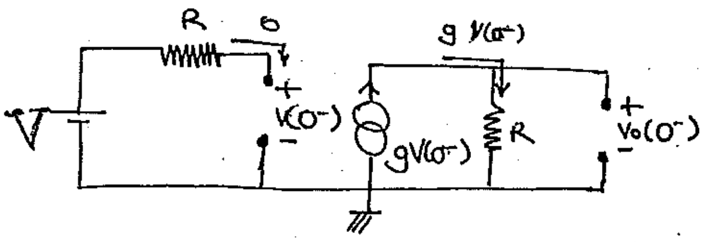
$$¿\frac{C_1+C_2}{2\sqrt{C_1C_2}} < 1\,? \longrightarrow C_1+C_2 < 2\sqrt{C_1C_2}\;;\quad (C_1+C_2)^2 < (2\sqrt{C_1C_2})^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_1^2 + C_2^2 - 2C_1C_2 < 0 \longrightarrow (C_1-C_2)^2 < 0$$

Esto no puede ser! Hemos demostrado por "reducción al absurdo" que ξ no puede ser menor que 1 $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ el cto. nunca va a oscilar.

Necesito las CIs: $V_o(0^+)$, $\frac{dV_o}{dt}(0^+)$

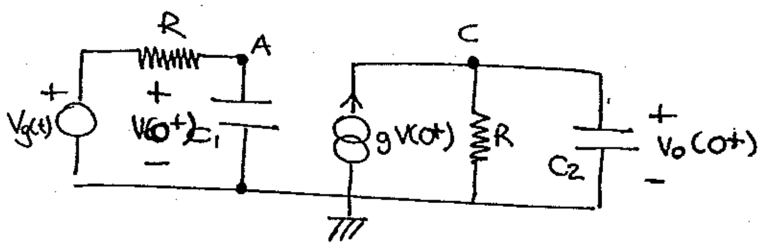
Analizar $t=0^-$ e①



$$V(0^-) = V$$

$$V_o(0^-) = g\cdot V(0^-)R = gVR$$

Analizo $t=0^+$ e②



$\boxed{V(t) \text{ función continua por ser tensión en condensador}}$

$$V(0^+) = V(0^-) = V$$

$$V_o(0^+) = V_o(0^-) = gVR$$

$\boxed{V_o(t) \text{ función continua por ser tensión en condensador}}$

Para sacar $\frac{dV_o}{dt}(0^+)$ particularizamos la ecuación del nudo C en $t=0^+$.

NUDO C:
$$g\cdot V(t) = \frac{V_o(t)}{R} + C_2\frac{dV_o(t)}{dt} \xrightarrow{t=0^+} g\cdot V(0^+) = \frac{V_o(0^+)}{R} + C_2\boxed{\frac{dV_o(0^+)}{dt}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow gV = \frac{gVR}{R} + C_2\frac{dV_o}{dt}(0^+) \longrightarrow \frac{dV_o}{dt}(0^+) = 0$$

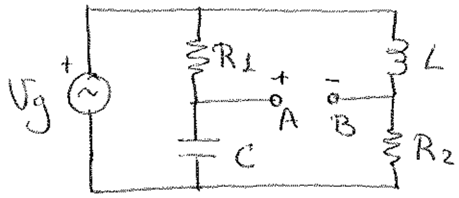
El PVI para $t>0$ ($V_g(t)=0$) será:

$$\frac{d^2V_o(t)}{} + \frac{C_1+C_2}{}\frac{dV_o(t)}{} + \frac{1}{}V_o(t) = \frac{\overset{0}{\cancel{V_g(t)}}\cdot g}{}$$ (Al resolverlo obtendrías $V_o(t)$, $t>0$

Junio 2006 - Problema 3

En el circuito de la figura y considerando régimen sinusoidal permanente:

a) Obtener el circuito equivalente de Thevenin en A B.
b) Obtener el circuito equivalente de Norton en A B.



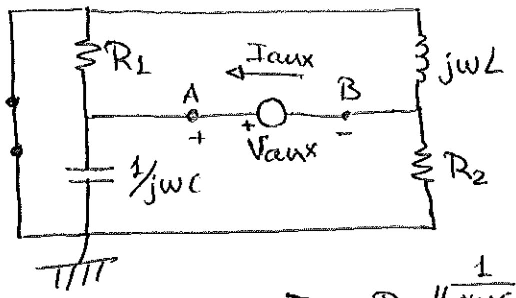
a) V_{Th} : tensión en abierto

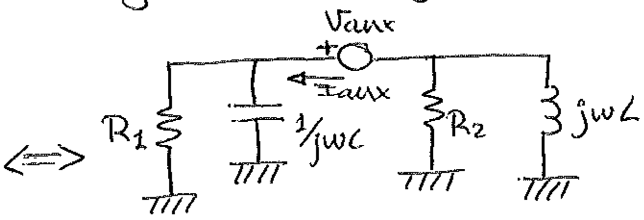
$$V_{Th} = V_A - V_B = V_g\left[\frac{1}{1+j\omega C R_1} - \frac{R_2}{R_2+j\omega L}\right] = V_g\,\frac{R_2 + j\omega L - R_2 - j\omega R_1 R_2 C}{(1+j\omega R_1 C)(R_2+j\omega L)}$$

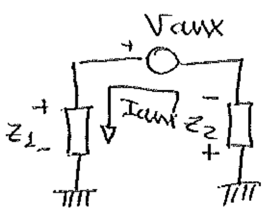
$$\boxed{V_{Th} = \frac{j\omega(L - R_1R_2C)}{(1+j\omega R_1C)(R_2+j\omega L)}V_g}$$

$$V_A = V_g\,\frac{1/j\omega C}{R_1 + 1/j\omega C} = \frac{1}{1+j\omega R_1 C}V_g \qquad V_B = V_g\,\frac{R_2}{R_2+j\omega L}$$

Z_{Th} : quitamos gen. indep. y colocamos gen. aux







$$Z_1 = R_1 \,//\, \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_1}{1+j\omega R_1 C}$$

$$Z_2 = R_2 \,//\, j\omega L = \frac{R_2\, j\omega L}{R_2 + j\omega L}$$

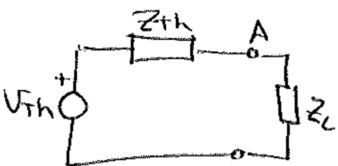
$$V_{aux} = (Z_1 + Z_2)\,I_{aux}$$

$$Z_{Th} = \frac{V_{aux}}{I_{aux}} = Z_1 + Z_2$$

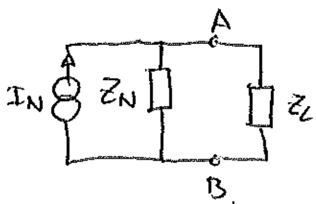
$$\boxed{Z_{Th} = \frac{R_1R_2 - \omega^2 R_1R_2LC + j\omega L(R_1+R_2)}{(1+j\omega R_1C)(R_2+j\omega L)}}$$

b)

teníamos: buscamos: $\boxed{Z_N = Z_{Th}}$



eq. thevenin



eq. Norton

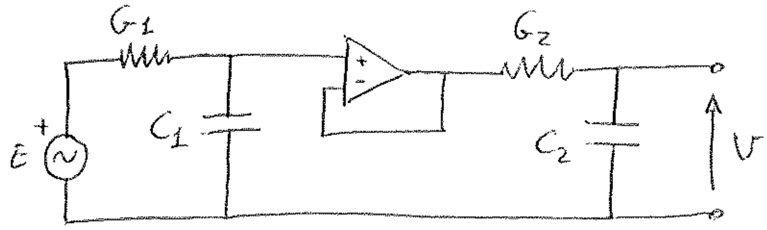
$$I_N = \frac{V_{Th}}{Z_{Th}}$$

$$\boxed{I_N = \frac{j\omega(L - R_1R_2C)}{R_1R_2 - \omega^2R_1R_2LC + j\omega L(R_1+R_2)}V_g}$$

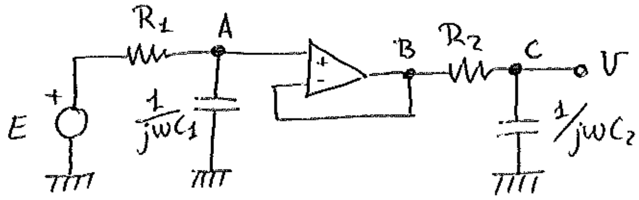
Junio 2003 - Problema 3

Considerando que el circuito de la figura se encuentra en régimen sinusoidal permanente:

a) Escribir las ecuaciones del análisis por nudos.
b) obtener el módulo de la función de transf. V/E
c) obtener la fase de la función de trans. V/E



a) $R_1 = 1/G_1$, $R_2 = 1/G_2$



$$\left.\begin{array}{ll} \text{nudo A:} & V_A = E\dfrac{1/jwC_1}{R_1 + 1/jwC_1} = E\dfrac{1}{1+jwR_1C_1} = E\dfrac{G_1}{G_1+jwC_1} \\ \text{nudo C:} & V = V_B\dfrac{1/jwC_2}{R_2+1/jwC_2} = V_B\dfrac{1}{1+jwR_2C_2} = V_B\dfrac{G_2}{G_2+jwC_2} \\ \text{amp.op:} & V_A = V_B \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3\ \text{ec} \\ 3\ \text{incóg} \end{array}$$

b,c)

$$V = E\frac{G_1}{G_1+jwC_1}\cdot\frac{G_2}{G_2+jwC_2} \Rightarrow \frac{V}{E} = \frac{G_1G_2}{(G_1+jwC_1)(G_2+jwC_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\frac{V}{E} = \frac{G_1G_2}{(G_1+jwC_1)(G_2+jwC_2)} = \frac{G_1G_2e^{j0}}{G_1G_2-w^2C_1C_2+jw(G_1C_2+G_2C_1)} = \frac{G_1G_2e^{j0}}{\rho_2e^{j\theta_2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho_2 = \sqrt{[G_1G_2-\omega^2C_1C_2]^2+\omega^2(G_1C_2+G_2C_1)^2} \\ \theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega(G_1C_2+G_2C_1)}{G_1G_2-\omega^2C_1C_2}\right) \end{array}\right\} \sqrt{\cdots}\, e^{j\operatorname{arctg}(\dots)}$$

$$\frac{V}{E} = \frac{G_1G_2e^{j0}}{\sqrt{\cdots}\,e^{j\operatorname{arctg}(\dots)}} = \underbrace{\frac{G_1G_2}{\sqrt{[G_1G_2-\omega^2C_1C_2]^2+\omega^2(G_1C_2+G_2C_1)^2}}}_{\text{módulo } \left|\frac{V}{E}\right|}\, e^{\underbrace{-j\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega(G_1C_2+G_2C_1)}{G_1G_2-\omega^2C_1C_2}\right)}_{\text{fase}}}$$

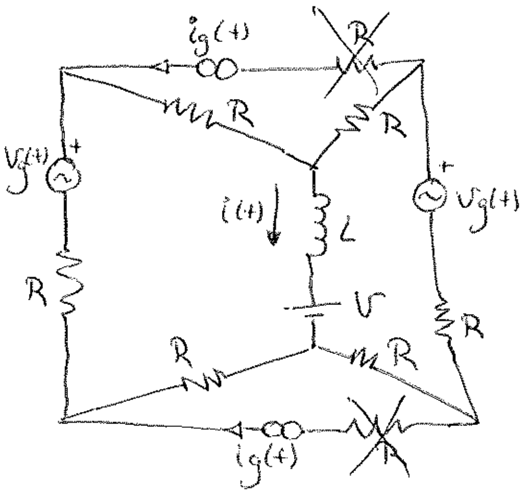
Febrero 2007 - Problema 3

El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente, siendo $v_g(t)$ e $i_g(t)$ generadores sinusoidales de la misma frecuencia, cuyas expresiones son:

$v_g(t) = |V_g| \cos(\omega t + \theta)$; $|V_g| = V = 3V$; $\theta = \pi/4$; $\omega = 10^6$ rad/s

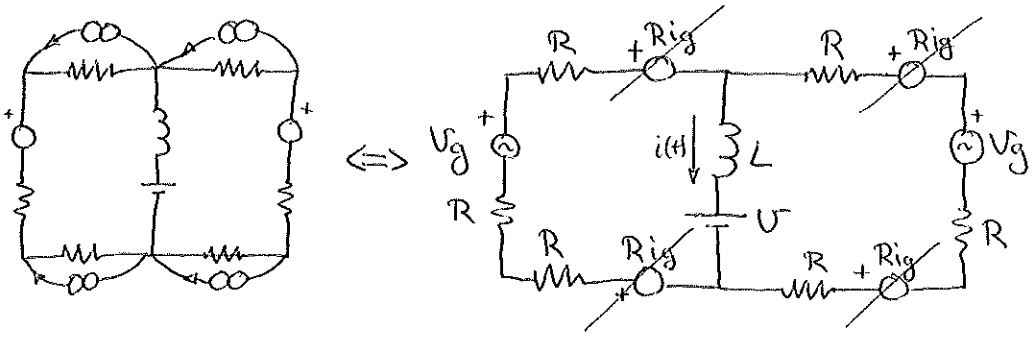
$i_g(t) = |I_g| \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$; $R = 1k\Omega$; $L = 3/2$ mH

Calcular la corriente por la bobina ($i(t)$)

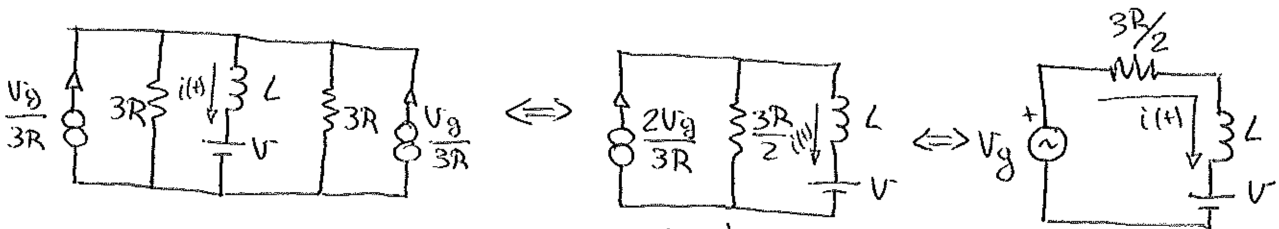


Nota: Se recomienda aplicar movilidad de generadores.

Podemos suprimir las resistencias en serie con los generadores de corriente.



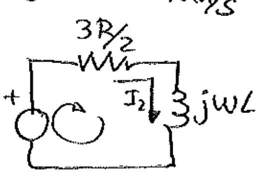
Cuatro gen. se anulan por ofrecer la misma tensión pero con sentido contrario.



Por haber generadores de distintas pulsaciones $\Rightarrow$ superposición

① $\omega = 0$ malla: $V = -\frac{3R}{2} I \Rightarrow \boxed{I = \frac{-2V}{3R} = \frac{-6}{3 \cdot 10^3} = -2 \cdot 10^{-3} A = -2mA}$

② $\omega = 10^6$ rad/s malla: $\frac{3R}{2} I_2 + j\omega L = V_g \Rightarrow I_2 = \frac{2V_g}{3R + j2\omega L}$



$v_g(t) = |V_g| \cos(\omega t + \theta) = 3\cos(10^6 \cdot t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow V_g = 3e^{j\pi/4}$

$$I_2 = \frac{6e^{j\pi/4}}{3 10^3 + j2 \cdot 10^6 \cdot \frac{3}{2} \cdot 10^{-3}} = \frac{2 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/4}}{\sqrt{2}\ e^{j\pi/4}} = \sqrt{2}\ 10^{-3} e^{j0}\ (A)$$

$i_2(t) = \sqrt{2}\ 10^{-3} \cos(10^6 t)\ (A) = \sqrt{2} \cos(10^6 t)\ (mA)$

$$\boxed{i(t) = -2 + \sqrt{2}\cos(10^6 t)\ (mA)}$$

SEPTIEMBRE 2007

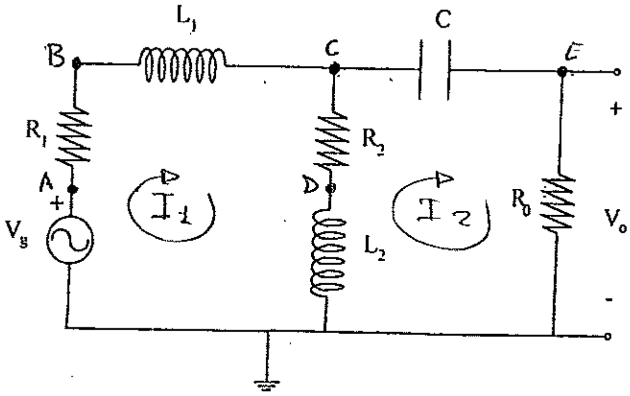
PROBLEMA 3 (2,5 ptos)

En el circuito fasorial de la figura, se pide:

a) Escribir el sistema de ecuaciones que resulta de aplicar el método de análisis por nudos. Justifique el número de ecuaciones necesarias.

b) Escribir el sistema de ecuaciones que resulta de aplicar el método de análisis por mallas. Justifique el número de ecuaciones necesarias.

c) A partir del sistema de ecuaciones más sencillo, obtener una expresión para el fasor de tensión V_0.



a) $N = 6$ nudos $\Rightarrow N - 1 = 5$ ecuaciones de nudo independientes

$$\left.\begin{array}{ll}
\underline{\text{Nudo A}}: & V_A = V_g \\
\underline{\text{Nudo B}}: & V_B\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{jwL_1}\right) - V_A\frac{1}{R_1} - V_C\frac{1}{jwL_1} = 0 \\
\underline{\text{Nudo C}}: & V_C\left(\frac{1}{jwL_1}+\frac{1}{R_2}+jwC\right) - V_B\frac{1}{jwL_1} - V_D\frac{1}{R_2} - V_E\, jwC = 0 \\
\underline{\text{Nudo D}}: & V_D\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{jwL_2}\right) - V_C\frac{1}{R_2} - 0\cdot\frac{1}{jwL_2} = 0 \\
\underline{\text{Nudo E}}: & V_0\left(\frac{1}{R_0}+jwC\right) - V_C\, jwC - 0\cdot\frac{1}{R_0} = 0
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{sistema}\\ \text{5 ec.}\\ \text{5 incóg.}\end{array}$$

b) $B - N + 1 = 7 - 6 + 1 = 2$ ecuaciones de malla independientes

$$\left.\begin{array}{ll}
\underline{\text{malla 1}}: & I_1(R_1+jwL_1+R_2+jwL_2) - I_2(R_2+jwL_2) = V_g \\
\underline{\text{malla 2}}: & I_2\left(jwL_2+R_2+\frac{1}{jwC}+R_0\right) - I_1(jwL_2+R_2) = 0
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{sistema}\\ \text{2 ec.}\\ \text{2 incóg.}\end{array}$$

c) de malla 2 obtenemos:

$$I_1 = \frac{jwL_2+R_2+\frac{1}{jwC}+R_0}{jwL_2+R_2}\, I_2$$ que sustituyendo en malla 1 queda:

$$\frac{R_2+jwL_2+1/jwC+R_0}{R_2+jwL_2}\, I_2(R_1+jwL_1+R_2+jwL_2) - I_2(R_2+jwL_2) = V_g$$

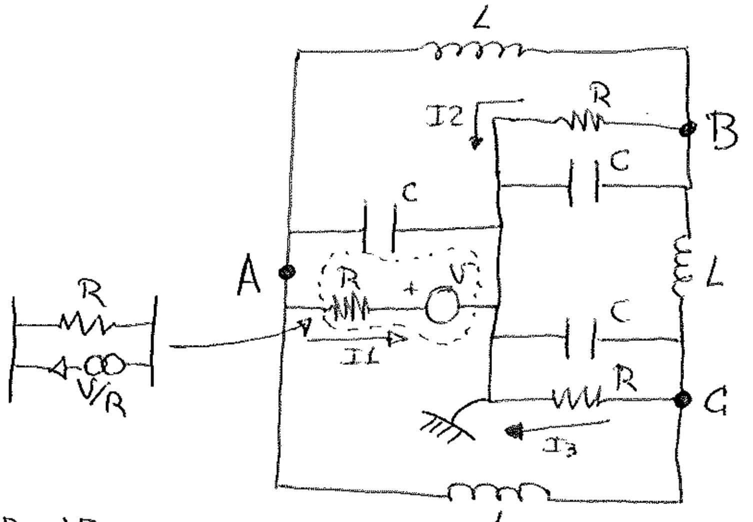
$$I_2\left[\frac{R_2+jwL_2+1/jwC+R_0}{R_2+jwL_2}(R_1+jwL_1) + \cancel{(R_2+jwL_2)} + \left(\frac{1}{jwC}+R_0\right) - \cancel{(R_2+jwL_2)}\right] = V_g$$

$$I_2\,\frac{\left(R_2+jwL_2+\frac{1}{jwC}+R_0\right)(R_1+jwL_1) + \left(R_0+\frac{1}{jwC}\right)(R_2+jwL_2)}{R_2+jwL_2} = V_g$$

$$I_2 = \frac{V_g\cdot(R_2+jwL_2)}{\left(R_2+jwL_2+\frac{1}{jwC}+R_0\right)(R_1+jwL_1)+\left(R_0+\frac{1}{jwC}\right)(R_2+jwL_2)} \quad ; \quad \boxed{V_0 = R_0 I_2}$$

Junio 2007 - Problema 3

En el circuito de la figura el generador es sinusoidal de frecuencia f_0 y fasor V. Sabiendo que se cumple la relación $\omega_0 = \sqrt{2/LC}$ (rad/s) calcule las relaciones I2/I1 e I3/I1, siendo I1, I2, I3 los fasores de cada una de las corrientes que aparecen en el esquema. ¿Pueden ser iguales los tres fasores?



$$I_1 = \frac{V_A - V}{R} \; ; \; I_2 = \frac{V_B - 0}{R} \; ; \; I_3 = \frac{V_C - 0}{R}$$

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{V_B/R}{\frac{V_A - V}{R}} = \frac{V_B}{V_A - V}} \; ; \; \boxed{\frac{I_3}{I_1} = \frac{V_C/R}{\frac{V_A - V}{R}} = \frac{V_C}{V_A - V}}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Nudo A: } V_A\left(\tfrac{1}{R} + j\omega_0 C + \tfrac{2}{j\omega_0 L}\right) - V_B \tfrac{1}{j\omega_0 L} - V_C \tfrac{1}{j\omega_0 L} = \tfrac{V}{R} \\
&\text{Nudo B: } V_B\left(\tfrac{1}{R} + j\omega_0 C + \tfrac{2}{j\omega_0 L}\right) - V_A\, j\omega_0 L - V_C \tfrac{1}{j\omega_0 L} = 0 \\
&\text{Nudo C: } V_C \underbrace{\left(\tfrac{1}{R} + j\omega_0 C + \tfrac{2}{j\omega_0 L}\right)} - V_B \tfrac{1}{j\omega_0 L} - V_A \tfrac{1}{j\omega_0 L} = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{R} + j\omega_0 C + \frac{2}{j\omega_0 L} = \frac{1}{R} + j\sqrt{\frac{2}{LC}}\,C - 2j\sqrt{\frac{LC}{2}}\,\frac{1}{L} = \frac{1}{R} + \cancel{j\sqrt{\frac{2C}{L}}} - \cancel{j\sqrt{\frac{2C}{L}}} = \frac{1}{R}$$

Ponemos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R} & \frac{j}{\omega_0 L} & \frac{j}{\omega_0 L} \\ \frac{j}{\omega_0 L} & \frac{1}{R} & \frac{j}{\omega_0 L} \\ \frac{j}{\omega_0 L} & \frac{j}{\omega_0 L} & \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V/R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_A = \frac{\begin{vmatrix} \frac{V}{R} & j/\omega_0 L & j/\omega_0 L \\ 0 & 1/R & j/\omega_0 L \\ 0 & j/\omega_0 L & 1/R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/R & j/\omega_0 L & j/\omega_0 L \\ j/\omega_0 L & 1/R & j/\omega_0 L \\ j/\omega_0 L & j/\omega_0 L & 1/R \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

y del mismo modo con V_B y V_C

continúa

JUNIO 2007. Solución parte final del Problema 3.

Calculamos los determinantes:

$$\Delta_1 = \frac{V}{R^3} - \frac{V}{R}\frac{j^2}{\omega_0^2 L^2} = \frac{V}{R}\left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega_0^2 L^2}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_2 = \dfrac{V}{R}\dfrac{j^2}{\omega_0^2 L^2} - \dfrac{V}{R^2}\dfrac{j}{\omega_0 L} = \dfrac{V}{R}\left[-\dfrac{1}{\omega_0^2 L^2} - \dfrac{j}{R\omega_0 L}\right] \\ \Delta_3 = \dfrac{V}{R}\dfrac{j^2}{\omega_0^2 L^2} - \dfrac{V}{R^2}\dfrac{j}{\omega_0 L} = \dfrac{V}{R}\left[-\dfrac{1}{\omega_0^2 L^2} - \dfrac{j}{R\omega_0 L}\right] \end{array}\right\} \boxed{\Delta_2 = \Delta_3}$$

$$\Delta = \frac{1}{R^3} + \frac{\overbrace{j^3}^{j^2 j = -j}}{(\omega_0 L)^3} + \frac{\overbrace{j^3}^{j^2 j = -j}}{(\omega_0 L)^3} - \frac{1}{R}\frac{j^2}{(\omega_0 L)^2} - \frac{1}{R}\frac{j^2}{(\omega_0 L)^2} - \frac{1}{R}\frac{j^2}{(\omega_0 L)^2} =$$

$$= \frac{1}{R^3} - 2j\frac{1}{(\omega_0 L)^3} + \frac{3}{R(\omega_0 L)^2} = \frac{1}{R^3} + \frac{3}{R(\omega_0 L)^2} - 2j\frac{1}{(\omega_0 L)^3} =$$

$$= \frac{1}{R}\left[\frac{1}{R^2} + \frac{3}{(\omega_0 L)^2}\right] - j\frac{2}{(\omega_0 L)^3}$$

Y aplicando las expresiones deducidas anteriormente:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_3}{I_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1 - V\Delta} = \frac{\dfrac{V}{R}\left[-\dfrac{1}{\omega_0^2 L^2} - \dfrac{j}{R\omega_0 L}\right]}{\dfrac{V}{R}\left[\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{(\omega_0 L)^2}\right] - V\left[\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{3}{(\omega_0 L)^2}\right) - j\dfrac{2}{(\omega_0 L)^3}\right]} =$$

$$\frac{\dfrac{V}{R}\left[-\dfrac{1}{(\omega_0 L)^2} - \dfrac{j}{R\omega_0 L}\right]}{\cancel{\dfrac{V}{R^3}} + \dfrac{V}{R}\dfrac{1}{(\omega_0 L)^2} - \cancel{\dfrac{V}{R^3}} - \dfrac{3V}{R(\omega_0 L)^2} + j\dfrac{2V}{(\omega_0 L)^3}} = \frac{\dfrac{\cancel{V}}{R}\left[-\dfrac{1}{(\omega_0 L)^2} - \dfrac{j}{R(\omega_0 L)}\right]}{\cancel{V}\left[-\dfrac{2}{R(\omega_0 L)^2} + j\dfrac{2}{(\omega_0 L)^3}\right]} =$$

$$= \frac{1}{R}\frac{-\dfrac{1}{(\omega_0 L)^2} - \dfrac{j}{R\omega_0 L}}{-\dfrac{2}{R(\omega_0 L)^2} + j\dfrac{2}{(\omega_0 L)^3}} = \frac{1}{R}\frac{\dfrac{-R - j\omega_0 L}{R\cancel{(\omega_0 L)^2}}}{\dfrac{-2\omega_0 L + j2R}{R(\omega_0 L)^{\cancel{3}}}} = \frac{\omega_0 L}{R}\frac{-R - j\omega_0 L}{2(jR - \omega_0 L)} =$$

$$= \frac{\omega_0 L}{R}\frac{j}{j}\cdot\frac{-R - j\omega_0 L}{(jR - \omega_0 L)} = \frac{j\omega_0 L}{R}\frac{-R - j\omega_0 L}{\underbrace{j^2}_{-1} R - j\omega_0 L} = \frac{j\omega_0 L}{R}\frac{\cancel{-R - j\omega_0 L}}{\cancel{-R - j\omega_0 L}} = \frac{j\omega_0 L}{R}$$

Finalmente, como $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{I_3}{I_1} \Rightarrow \boxed{I_2 = I_3}$ Además me preguntan si I_1, I_2 e I_3 podrían ser iguales. Para ello debería cumplirse: $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{I_3}{I_1} = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{j\omega_0 L}{R}$ lo cual es **imposible**. Así que en conclusión $I_2 = I_3$ pero I_1 necesariamente tiene que ser distinto a las dos corrientes anteriores.

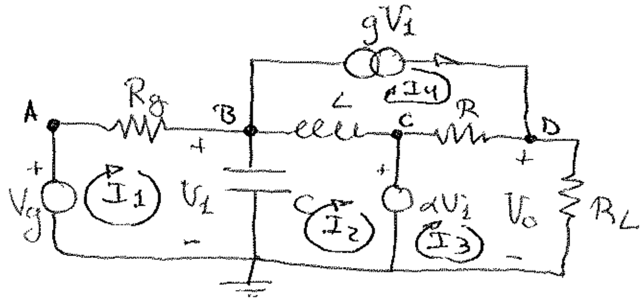
Junio 2004 - Problema 3

En el circuito fasorial de la figura, sin realizar ninguna transformación circuital, se pide:

a) Escribir el sistema de ecuaciones que resulta de aplicar el método de análisis por nudos. Justifique el número de ecuaciones necesarias.

b) Escribir el sistema de ecuaciones que resulta de aplicar el análisis por mallas. Justifique el número de ecuaciones necesarias.

c) A partir del sistema más sencillo, y sabiendo que $\alpha = 1$, obtener una expresión para el fasor de tensión V_o.



a) $N = 5 \Rightarrow N - 1 = 4$ ecuaciones independientes de nudos

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Nudo A: } V_A = V_g \\
\text{Nudo B: } V_1\left(\frac{1}{R_g} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right) - V_A\frac{1}{R_g} - V_C\frac{1}{j\omega L} = -gV_1 \\
\text{Nudo C: } V_C = \alpha V_1 \\
\text{Nudo D: } V_o\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_L}\right) - V_C\frac{1}{R} = gV_1
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{sistema} \\ 4 \text{ ec.} \\ 4 \text{ incóg.}\end{array}$$

b) $B - N + 1 = 4$ ecuaciones independientes de malla

$$\left.\begin{array}{l}
\text{malla 1: } I_1\left(R_g + \frac{1}{j\omega C}\right) - I_2\frac{1}{j\omega C} = V_g \\
\text{malla 2: } I_2\left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L\right) - I_1\frac{1}{j\omega C} - I_4 j\omega L = -\alpha V_1 \\
\text{malla 3: } I_3\left(R + R_L\right) - I_4 R = \alpha V_1 \\
\text{malla 4: } I_4 = gV_1 \\
\text{ec. extra: } V_1 = \frac{1}{j\omega C}(I_1 - I_2)
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{sistema} \\ 5 \text{ ec.} \\ 5 \text{ incóg.}\end{array}$$

c) es más sencillo el sistema de mallas

hallaremos I_3 y finalmente $V_o = R_L I_3$

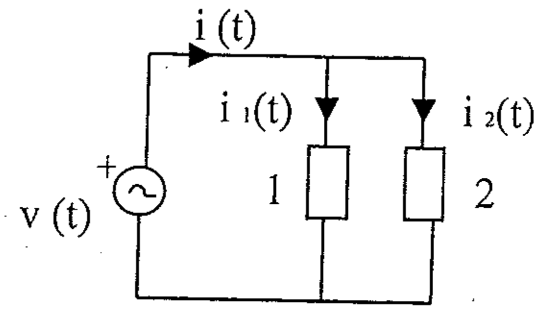
PROBLEMA 3

En el circuito de la figura y considerando régimen sinusoidal permanente

a) Determinar los elementos circuitales simples (R, L ó C) 1 y 2 indicando su tipo y valor numérico.
b) Obtener las expresiones temporales de $i_1(t)$ e $i_2(t)$.
c) Calcular la potencia media entregada por el generador.

$$v(t) = 10\sin(10t + \frac{\pi}{4})$$

$$i(t) = 200\cos(10t + \frac{\pi}{6})$$



JUNIO 2005. P3 (Solución)

a) Lo primero calculamos los favores asociados a las señales en el tiempo *v(t)* e *i(t)*:

$$v(t) = 10\text{sen}\left(10t+\frac{\pi}{4}\right) = 10\cos\left(10t+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos\left(10t-\frac{\pi}{4}\right)(V) \Rightarrow V = 10e^{-j\frac{\pi}{4}}(V) \quad \text{(fasor)}$$

$$i(t) = 200\cos\left(10t+\frac{\pi}{6}\right)(A) \Rightarrow I = 200e^{j\frac{\pi}{6}}(A) \quad \text{(fasor)}$$

Además podemos observar que la pulsación de las señales es $\omega = 10\ (rad/s)$

Por otra parte, es conveniente recordar el concepto de impedancia, que no es otra cosa que la inversa de la impedancia. Es decir, que dada la impedancia $Z(\Omega)$, podemos trabajar si nos interesa con su admitancia:

$$Y(\Omega^{-1}) = \frac{1}{Z(\Omega)}$$

En este ejercicio, lo más sencillo precisamente, es trabajar con admitancias (en vez de impedancias) ya que para hacer el paralelo Y de dos admitancias (a las que llamaremos Y_1 e Y_2), no hace falta más que sumarlas. Esto es fácil de ver ya que para el paralelo de dos impedancias $Z(\Omega) = Z_1(\Omega)//Z_2(\Omega)$, se cumple que:

$$\frac{1}{Z(\Omega)} = \frac{1}{Z_1(\Omega)} + \frac{1}{Z_2(\Omega)} \Rightarrow Y(\Omega^{-1}) = Y_1(\Omega^{-1}) + Y_2(\Omega^{-1})$$

En nuestro caso, la admitancia resultante del paralelo de los dos elementos de la figura valdrá:

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{200e^{j\frac{\pi}{6}}(A)}{10e^{-j\frac{\pi}{4}}(V)} = \frac{200}{10}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\frac{\pi}{4}}(\Omega^{-1}) = 20e^{j\frac{\pi}{6}+j\frac{\pi}{4}}(\Omega^{-1}) = 20e^{j\frac{5\pi}{12}}(\Omega^{-1}) =$$
$$= 20\left[\cos\left(\tfrac{5\pi}{12}\right) + j\,\text{sen}\left(\tfrac{5\pi}{12}\right)\right](\Omega^{-1}) = 5{,}176 + j19{,}318\ (\Omega^{-1})$$

Como la admitancia nos ha salido la suma de dos cosas, cada uno de los dos sumandos se puede identificar fácilmente con la admitancia de una resistencia y con la admitancia de un condensador, así que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{R} = 5{,}176\ (\Omega^{-1}) \\ j\omega C = j19{,}318\ (\Omega^{-1}) \\ \omega = 10\ (rad/s) \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad R = 0{,}1932\ (\Omega)\ ,\quad C = \frac{19{,}318}{10} = 1{,}9318\ (F)$$

b) Simplemente aplicando la ley de Ohm:

$$I_1 = \frac{V}{R} = \frac{10e^{-j\frac{\pi}{4}}}{0{,}1932} = \frac{10e^{-j\frac{\pi}{4}}}{0{,}1932} = \frac{10e^{-j\frac{\pi}{4}}}{0{,}1932} = 51{,}76e^{-j\frac{\pi}{4}}\,(A) \Rightarrow i_1(t) = 51{,}76\cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\,(A)$$

$$I_2 = \frac{V}{\frac{1}{j\omega C}} = Vj\omega C = 10e^{-j\frac{\pi}{4}}j\cdot 10\cdot 1{,}932 = 193{,}2e^{-j\frac{\pi}{4}}j = 193{,}2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}} = 193{,}2e^{j\frac{\pi}{4}}\,(A)$$

$$\Rightarrow i_2(t) = 193{,}2\cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)\,(A)$$

c) La potencia media entregada por el generador es la potencia activa en terminales del generador ideal, y se calcula como:

$$P_m = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[VI^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[10e^{-j(\pi/4)}200e^{-j(\pi/6)}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2000e^{-j(5\pi/12)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2000e^{-j(5\pi/12)}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2000\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + j2000\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{2}2000\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) =$$

$$= 1000\cdot 0{,}2588 = 258{,}82\ W$$

__Nota:__ A lo largo de todo el problema se ha utilizado cuando ha sido necesaria la conocida fórmula de Euler:

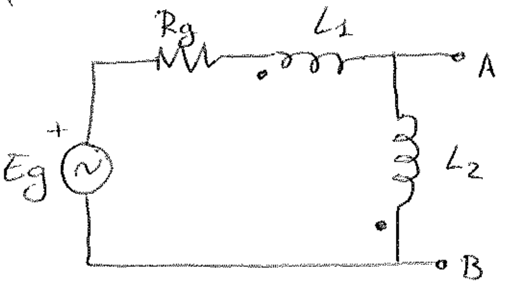
$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

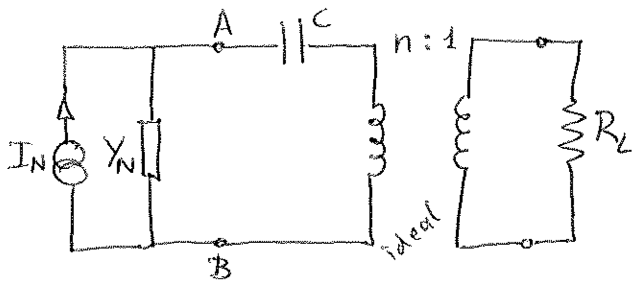
Junio 2002 - Problema 4

a) En el circuito de la figura izquierda, y suponiendo que se encuentra en RPS, demostrar que la impedancia equivalente vista hacia la izquierda de AB es la combinación en paralelo de R_g y L_2. Considerar para ello que se cumple $L_1 = 4L_2$, $k=1$ (acoplamiento perfecto)

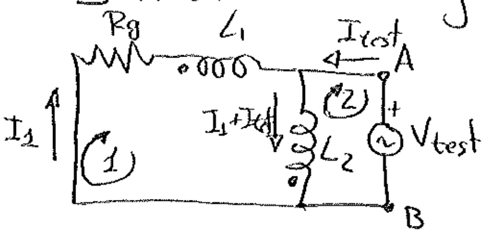
b) El circuito frente de la figura de la izquierda, considerando su equivalente Norton con I_N dato y Y_N la admitancia del apartado a), se conecta una resistencia de carga R_L a través de un circuito formado por un condensador y un transformador ideal (figura derecha). Calcular las expresiones de la pulsación del generador ω y de la relación de transformación n, para que se produzca adaptación conjugada de impedancias. (Se recomienda imponer esta condición en los terminales AB)

c) Con el circuito adaptado, calcular la expresión de la potencia media disipada en la resistencia R_L.





a) Método del generador aux: → Desconecto gen. indep. → Coloco gen. aux.



malla 1: $I_1R_g + I_1 j\omega L_1 + (I_1+I_{test}) j\omega L_2 = (I_1+I_{test}) j\omega M_{12} + I_1 j\omega M_{12}$

malla 2: $V_{test} + (I_1) j\omega M_{12} = (I_1+I_{test}) j\omega L_2$

$$M_{12} = M_{21} = k\sqrt{L_1L_2} = k\sqrt{4L_2^2} = 2kL_2 = 2L_2$$

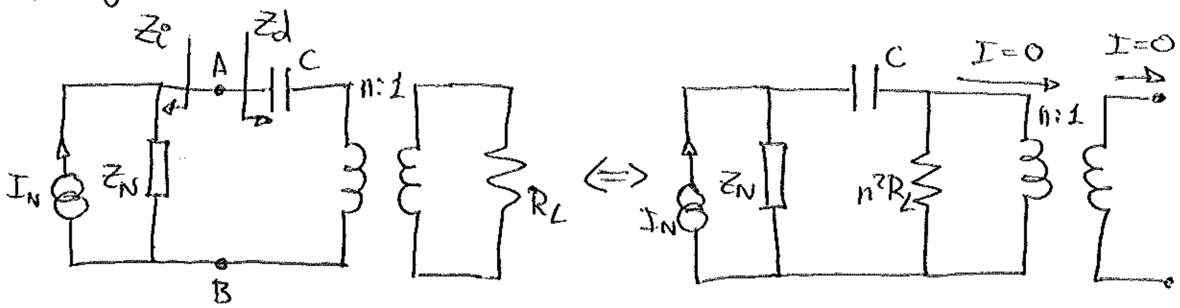
$$\left.\begin{array}{l} I_1R_g + I_1 j\omega L_2 = I_{test} j\omega L_2 \\ V_{test} + I_1 j\omega L_2 = I_{test} j\omega L_2 \end{array}\right\} \longrightarrow I_1 = \frac{I_{test}\, j\omega L_2}{R_g + j\omega L_2}$$

$$V_{test} = I_{test}\, j\omega L_2 + \frac{I_{test}\,\omega^2 L_2^2}{R_g + j\omega L_2} \Rightarrow \frac{V_{test}}{I_{test}} = j\omega L_2 + \frac{\omega^2 L_2^2}{R_g + j\omega L_2} = Z_{eq_{AB}} =$$

$$= Z_{eq_{AB}} = \frac{j\omega L_2 R_g + \cancel{j^2\omega^2 L_2^2} + \cancel{\omega^2 L_2^2}}{R_g + j\omega L_2} = \frac{j\omega L_2 R_g}{R_g + j\omega L_2} = R_g \,//\, j\omega L_2$$

b)

Para conseguir la máxima transferencia de potencia a la carga, introducimos la red de adaptación de impedancias y obligamos a que se cumpla la condición de adaptación conjugada de impedancias. (El enunciado aconseja que se imponga dicha condición en los terminales AB).



$$Z_i = Z_N = Zeq_{AB} = R_g // j\omega L_2 = \frac{R_g j\omega L_2}{R_g + j\omega L_2} = \cdots = \frac{\omega^2 L_2^2 R_g}{R_g^2+\omega^2 L_2^2} + j\frac{\omega L_2 R_g^2}{R_g^2+\omega^2 L_2^2}$$

$$Zd = Z_i^* = n^2 R_L + \frac{1}{j\omega C} = n^2 R_L - j\frac{1}{\omega C}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega^2 L_2^2 R_g}{R_g^2+\omega^2 L_2^2} &= n^2 R_L \quad \text{(partes reales)} \\ -\frac{\omega L_2 R_g^2}{R_g^2+\omega^2 L_2^2} &= -\frac{1}{\omega C} \quad \text{(partes imaginarias)} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\omega = \frac{R_g}{\sqrt{L_2 C R_g^2 - L_2^2}}} \quad \boxed{n = \sqrt{\frac{L_2}{R_g R_L C}}}$$

Z_N^*

c) P_{med} disipada por R_L en 2ario = P_{med} disipada por $n^2 R_L$ en 1ario

$$P_{med_{R_L}} = \frac{1}{2}\text{Re}[V^* I] = \frac{1}{2}\text{Re}[I^* Z_L^* I] = \frac{1}{2}\text{Re}[Z_L^*]\cdot|I|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\text{Re}[Z_L]\cdot|I|^2 = \frac{1}{2}R_L|I|^2 = \frac{1}{2}R_L\left|\frac{V}{R_L}\right|^2 = \frac{1}{2R_L}|V^2|$$

$$P_{\substack{\text{disipada} \\ \text{máxima}}} \text{ por } R_L = \frac{1}{2}R_g\left|\frac{I_N}{2}\right|^2 = \frac{1}{8}R_g|I_N|^2$$ es la máx. potencia med. que puede entregar

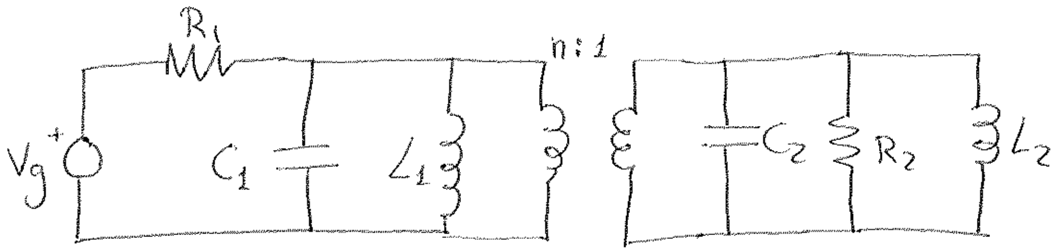
$$\boxed{P_{\text{disipada por } R_L} = \frac{1}{2}R_L|I_{R_L}|^2}$$

Junio 2008 - Problema 4

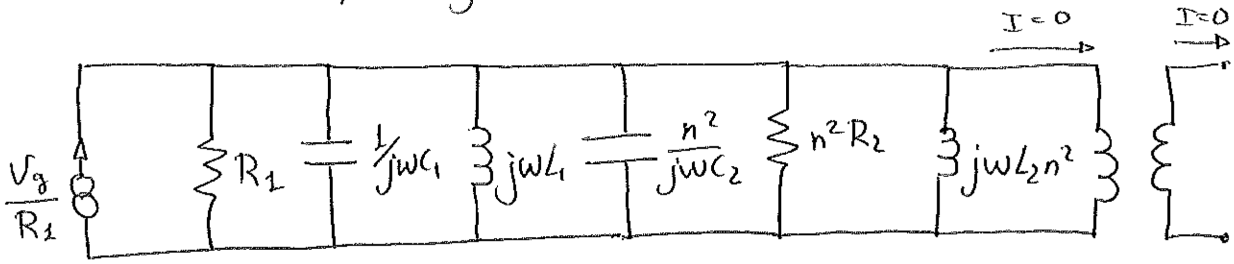
(este no es el enunciado original)

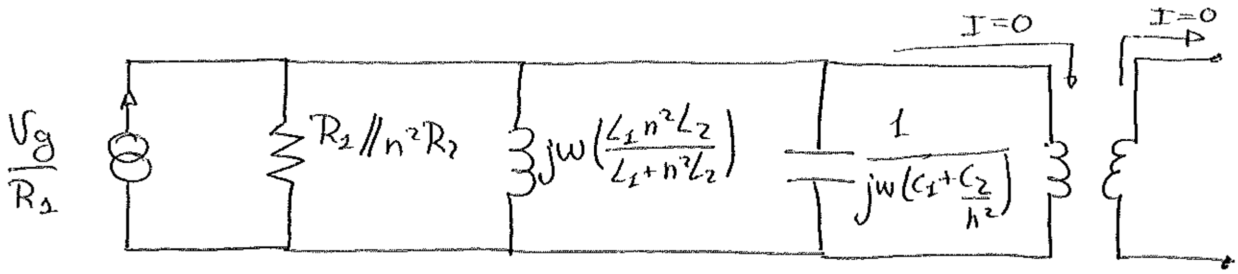
Sabiendo: $V_g = 10\,V$, $L_1 = L_2 = 10^{-4}\,H$

$C_1 = C_2 = 10^{-6}\,F$, $R_1 = 100\,\Omega$



a) Calcule ω_0, B y Q





Por ser un circuito RLC paralelo $\Rightarrow T(j\omega) = Z(j\omega)$

$$T(j\omega) = Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \,//\, j\omega L \,//\, R$$

$$\frac{1}{Z} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} = j\omega\left(C_1 + \frac{C_2}{n^2}\right) + \frac{1}{j\omega\left(\frac{L_1 n^2 L_2}{L_1 + n^2 L_2}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{n^2 R_2}}}$$

$$Z = T(j\omega) = \frac{j\omega \frac{1}{C_1 + C_2/n^2}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 n^2 L_2}{L_1 + n^2 L_2}\cdot\left(C_1 + \frac{C_2}{n^2}\right)}} - \omega^2 + j\omega \frac{1}{\frac{R_1 n^2 R_2}{R_1 + n^2 R_2}\left(C_1 + \frac{C_2}{n^2}\right)}} \rightsquigarrow \frac{j\omega K}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega B}$$

Identificando:

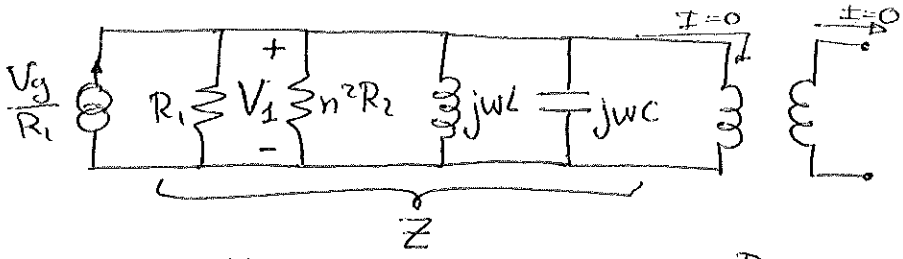
$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 n^2 L_2}{L_1 + n^2 L_2}\left(C_1 + \frac{C_2}{n^2}\right)}}}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{\frac{R_1 n^2 R_2}{R_1 + n^2 R_2}\left(C_1 + \frac{C_2}{n^2}\right)}}$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{R_1 n^2 R_2}{R_1 + n^2 R_2}\sqrt{\frac{C_1 + C_2/n^2}{\frac{L_1 n^2 L_2}{L_1 + n^2 L_2}}}}$$

b) Calcule R_2 para que $P_{med_{R_2}} = 0'1 \cdot P_{disip}$

$P_{med_{R_2}}$ en el secundario $= P_{med_{n^2R_2}}$ en el primario



$$\left.\begin{array}{l} V_1 = Z\,\dfrac{V_g}{R_1} \\ Z = T(j\omega_0) = \dfrac{k}{B} = \dfrac{1/C}{1/RC} = R \end{array}\right\} \begin{array}{l} V_1 = \dfrac{R}{R_1} V_g \\ P_{med} = \dfrac{1}{2R_2} \cdot |V_1|^2 = \dfrac{1}{2R_2}\left|\dfrac{R}{R_1} V_g\right|^2 = \end{array}$$

$$= \begin{array}{l}\text{desarrollando} \\ \text{y sustituyendo}\end{array} = \frac{100\,R_2^2}{(100+R_2)^2\,2R_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{med} = \dfrac{100\,R_2^2}{(100+R_2)^2\,2R_2} \\ P_{dis} = \dfrac{1}{8R_1}|V_g|^2 = 0'125\,(W) \end{array}\right\} \dfrac{100\,R_2}{2(100+R_2^2)} = 0'125$$

$$\boxed{R_2 = \frac{95 \pm \sqrt{95^2 - 4 \cdot 0'025 \cdot 250}}{2 \cdot 0'025} = \begin{cases} 3'8\,k\Omega \\ 2{,}63\,\Omega \end{cases}}$$

c) Si $R_2 = 0'4\,M\Omega$, calcule Energía en condensador.

E_{med} de C_2 en 2^{ario} $= E_{med}$ de $\dfrac{C_2}{n^2}$ en 1^{ario}

$$E_{med}^{C_2} = \frac{1}{4}\left(\frac{C_2}{n^2}\right)|V_1|^2$$

$$V_1 = \frac{R}{R_1} V_g = \frac{R_1 \,//\, n^2R_2}{R_1} V_g \overset{R_1 << n^2R_2}{\approx} \frac{R_1}{R_1} V_g = V_g$$

$$E_{C2} = \frac{1}{4}\frac{C_2}{n^2}|V_g|^2 = \frac{1}{4}\frac{10^{-6}}{1^2}|10|^2 = 2'5 \cdot 10^{-5}\,J$$

por ser $C_1 = C_2$ y $n = 1 \Rightarrow E_{C2} = E_{C1}$

Por estar en resonacia $\Rightarrow E_C = E_L$

$$\left.\begin{array}{l} E_{L1} = \dfrac{1}{4} L_1 |I_1|^2 \\ E_{L2} = \dfrac{1}{4}(n^2 L_2)|I_2|^2 \end{array}\right\} \text{como } \left.\begin{array}{l} L_1 = L_2 \\ n = 1 \end{array}\right\} I_1 = I_2 \Rightarrow E_{L1} = E_{L2}$$

$$\boxed{E_{C1} = E_{C2} = E_{L1} = E_{L2} = 2'5 \cdot 10^{-5}\,J}$$

Septiembre 2006 - Problema 3

En el circuito de la figura, que está en régimen sinusoidal permanente, se han determinado los valores de:

$V_a(t) = 10\cos(1000\,t + \pi/3)$

$V_b(t) = 5\cos(1000\,t - \pi/6)$

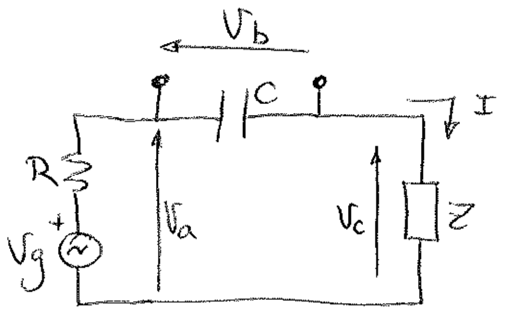
y el módulo de la impedancia del condensador, que es $10\,\Omega$

a) Valor de la impedancia Z. ¿Qué tipo de impedancia es y cuánto valen sus componentes?

b) La potencia media disipada en Z

c) La energía electromagnética almacenada en Z.

d) ¿El circuito está en resonancia? Razone la respuesta y en caso afirmativo calcule el Q.



$V_a = 10\,e^{j\pi/3}$

$V_b = 5\,e^{-j\pi/6}$

$\left|\frac{1}{j\omega C}\right| = 10 = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 10^{-4}\,F$

a)

$$\left.\begin{aligned} \text{malla: } V_a &= V_b + V_c \\ I &= \frac{V_b}{1/j\omega C} = j\omega C V_b \end{aligned}\right\} \quad Z = \frac{V_c}{I} = \frac{V_a - V_b}{j\omega C V_b} = \frac{V_a}{j\omega C V_b} - \frac{1}{j\omega C} = \frac{10\,e^{j\pi/3}}{j10^3\cdot 10^{-4}\cdot 5e^{-j\pi/6}} - \frac{1}{j10^3 10^{-4}}$$

$$= \frac{20\,e^{j\pi/3}e^{j\pi/6}}{j} - \frac{10}{j} = \frac{20\,e^{j\pi/2}}{j} + j10 = 20 + j10$$

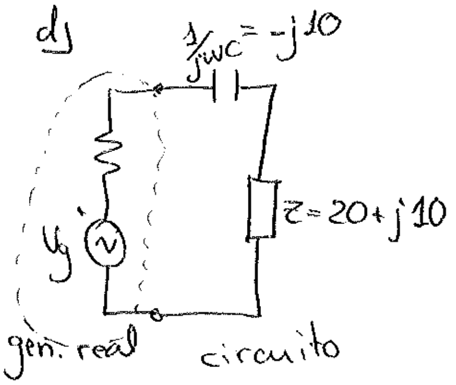
$Z = R + jX = 20 + j10\ (\Omega) \Rightarrow$ —[Z]— $\Leftrightarrow$ $R = 20\,\Omega$, $L = 10^{-2}\,H$

$\hookrightarrow j\omega L = 10 \Rightarrow L = 10^{-2}\,H$

b) $\boxed{P_{med}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[Z]\,|I|^2 = \frac{1}{2}\,20\cdot|j\omega C V_b|^2 = 10|j\omega C|^2|V_b|^2 = 10\omega^2C^2\underbrace{|5\,e^{-j\pi/6}|^2}_{5^2} = \boxed{2'5\,W}$

c) $\boxed{T_{med} = E_{L\,med}} = \frac{1}{4}L|I|^2 = \frac{1}{4}10^{-2}|j\omega C V_b|^2 = \frac{1}{4}10^{-2}\omega^2C^2|V_b|^2 = \boxed{6{,}25\cdot 10^{-4}\,J}$

d)



$Z_{circuito} = -10j + 20 + j10 = 20\,\Omega \in \mathbb{R}$

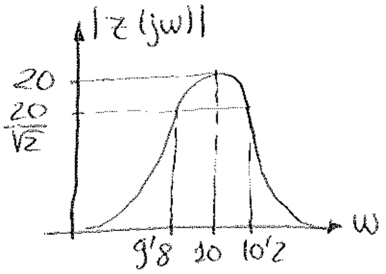
El circuito está en resonancia para $\omega = 10^3$ rad/s

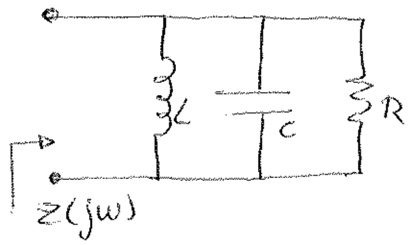
Febrero 2007 - Problema 4

La figura representa la curva de resonancia del $|Z(jw)|$ (Ω en función rad/s) de un circuito resonante RLC paralelo.

a) obtener el valor de R, L, C

b) Si se desea diseñar otro circuito resonante paralelo con el mismo factor de calidad Q pero centrado en la frecuencia de resonancia de 10 kHz y con el valor máximo de $|Z(jw)|$ igual a 2 MHz, obtener los nuevos valores de R, L y C.





a) Pulsación de resonancia $w_0 = 10$ rad/s

Ancho de banda $B = 0'4$ rad/s

Factor de calidad Q : $B = \frac{w_0}{Q} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{w_0}{B} = \frac{10}{0'4} = 25}$

Función de transferencia $T(jw)$:

por ser un RLC paralelo: $T(jw) = Z(jw) = R \,//\, jwL \,//\, \frac{1}{jwC}$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{jwL} + jwC = \frac{1}{Z} = \frac{jwL + R + j^2w^2RLC}{jwLR}$$

$$T(jw) = Z = \frac{jwLR}{R - w^2RLC + jwL}$$ identificaremos con $T(jw) = \frac{jwK}{w_0^2 - w^2 + jwB}$

$$T(jw) = \frac{jw\,\frac{1}{C}}{\frac{1}{LC} - w^2 + jw\frac{1}{RC}} \Rightarrow \begin{cases} K = 1/C \\ w_0 = \sqrt{1/LC} \\ B = 1/RC \end{cases}$$

$$w_0 = 10 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$B = 0'4 = \frac{1}{RC}$$

$$T(jw_0) = \frac{jw_0 K}{w_0^2 - w_0^2 + jw_0 B} = \frac{K}{B} = \frac{1/C}{1/RC} = R$$

$|T(jw_0)| = |R| = 20\,\Omega$

$$\boxed{\begin{aligned} C &= 125\text{ mF} \\ L &= 0'08\text{ H} \\ R &= 20\,\Omega \end{aligned}}$$

b) $f_0 = 10\text{ kHz} \Rightarrow w_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot 10^4$ rad/s

$Q = 25 \Rightarrow B = \frac{w_0}{Q} = \frac{2\pi \cdot 10^4}{25} = 500\pi$ rad/s

$T(jw) = R = 2 \cdot 10^6\ \Omega$

$w_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \frac{1}{LC} = (2\pi \cdot 10^4)^2$

$B = \frac{1}{RC} \Rightarrow \frac{1}{RC} = 500\pi$

Sustituyendo y despejando:

$$\boxed{\begin{aligned} R &= 2 \cdot 10^6\,\Omega \\ L &= 1'27\text{ H} \\ C &= 199\text{ pF} = 0'199\text{ nF} \end{aligned}}$$