Cuaderno de ejercicios de AVEC

Rodrigo Blázquez y Ángela Castillo

2011

Agradecimientos

Este cuaderno de ejercicios, correspondiente a la asignatura de Análisis Vectorial (AVEC) del Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación (ETSIT, UPM), ha sido elaborado gracias a la financiación del Proyecto de Innovación Educativa "DISEÑO Y PROPUESTA DE UN PLAN DE ACCIÓN ORIENTADO A LA IMPLANTACIÓN DE TALLERES DE ENSEÑANZAS BÁSICAS PARA ALUMNOS DE PRIMER CURSO DEL GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS Y SERVICIOS DE TELECOMUNICACIÓN" (Curso 2011/12).

Agradecemos a los profesores de AVEC tanto por el material facilitado para elaborar este cuaderno, como por sus sugerencias y correcciones.

Así como también agradeceremos las futuras sugerencias y correcciones de los alumnos y monitores de taller que trabajen con este cuaderno.

Esperamos que a todos os sea de utilidad.

Atentamente,

Rodrigo y Ángela.

Primer Tema:
Preliminares (Geometría)

Contenidos:

1. Curvas planas en coordenadas cartesianas y polares. Cónicas y otras curvas planas notables.

2. Superficies en coordenadas cartesianas. Cuadráticas y otras superficies notables.

3. Curvas espaciales en coordenadas cartesianas. Métodos de parametrización de curvas en el plano y en el espacio.

Problemas:

1. (Primer Parcial Tarde 2011 - Problema 2)

   Sea C la curva definida por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} F: & x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad R>0 \\ G: & x+z=R \end{cases}$$

   Se pide:

   a) Hallar las proyecciones C_1, C_2 y C_3 de C sobre los planos coordenados $x=0$, $y=0$ y $z=0$, respectivamente, en coordenadas cartesianas.

   b) Apoyándose en el apartado anterior, parametrizar C.

   c) De la ecuación vectorial de C, $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(t)$, hallar las ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r_1}(t) \\ \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r_2}(t) \\ \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r_3}(t) \end{aligned}$$

   de C_1, C_2 y C_3, respectivamente.

   d) De éstas hallar sus ecuaciones en coordenadas cartesianas, comparando el resultado obtenido con el del apartado a). Razónese la respuesta.

   Solución:

   a) Sobre $x=0$, eliminando la x a partir de las ecuaciones de F y G se tiene:

$$(R-z)^2+y^2+z^2=R^2 \Rightarrow \boxed{y^2+2z^2-2Rz=0} \quad \text{ELIPSE}$$

   Sobre $y=0$:

$$\boxed{x+z=R,\ 0\le x\le R} \quad \text{SEGMENTO DE UNA RECTA}$$

   Sobre $z=0$:

$$x^2+y^2+(R-x)^2=R^2 \Rightarrow \boxed{2x^2+y^2-2Rx=0} \quad \text{ELIPSE}$$

b) La proyección de C sobre $z=0$, C_3 también se puede escribir como:

$$2x^2+y^2-2Rx=0 \Rightarrow 2\left(x^2-Rx+\frac{R^2}{2^2}\right)+y^2=\frac{R^2}{2}$$

$$\frac{\left(x-\frac{R}{2}\right)^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

que se trata de una elipse centrada en $\left(\frac{R}{2},0\right)$, de ejes las rectas $x=\frac{R}{2}$, $y=0$ y semiejes $a=\frac{R}{2}$, $b=\frac{R}{\sqrt{2}}$. La parametrización de C_3 es por tanto:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t \\ y &= \frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t \end{aligned}\right\} t\in[0,2\pi)$$

Considerando ahora que para C, $z=R-x$, obtenemos la parametrización de C:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t \\ y &= \frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t \\ z &= \frac{R}{2}-\frac{R}{2}\cos t \end{aligned}\right\} t\in[0,2\pi)$$

c)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_1}(t) &= \left(0,\frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t,\frac{R}{2}-\frac{R}{2}\cos t\right) && t\in[0,2\pi) \\
\overrightarrow{r_2}(t) &= \left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t,0,\frac{R}{2}-\frac{R}{2}\cos t\right) && t\in[0,2\pi) \\
\overrightarrow{r_3}(t) &= \left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t,\frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t,0\right) && t\in[0,2\pi)
\end{aligned}$$

d)

$$\overrightarrow{r_1}(t)\ \begin{cases} y=\frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t \\ z=\frac{R}{2}-\frac{R}{2}\cos t \end{cases} \Rightarrow \ \text{Eliminando } t\text{:}\ \boxed{y^2+2z^2-2Rz=0}$$

$$\overrightarrow{r_2}(t)\ \begin{cases} x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t \\ z=\frac{R}{2}-\frac{R}{2}\cos t \end{cases} \Rightarrow \ \text{Eliminando } t\text{:}\ \boxed{z+x=R}$$

$$\overrightarrow{r_3}(t)\ \begin{cases} x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t \\ y=\frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \ \text{Eliminando } t\text{:}\ \boxed{2x^2+y^2-2Rx=0}$$

que son la ecuaciones de C_1, C_2 y C_3, halladas en a).

2. (Primer Parcial 2012 - Problema 1)

Sea C la curva dada como intersección de las superficies:

$$\begin{cases} S_1 \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 3x - \sqrt{2}yz = 0\} \\ S_2 \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad y^2 - \sqrt{2}z = 0\} \end{cases}$$

a) Parametrizar la curva C.

b) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a C en el origen.

c) Calcular la longitud del arco de la curva C comprendido entre los puntos $A = (0,0,0)$ y $B = \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solución:

a)

$$S_2 \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}}y^2$$

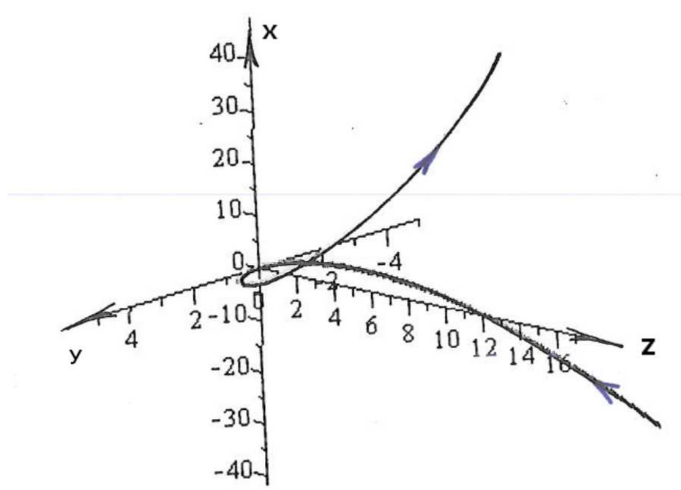
$$S_1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{3}yz = \frac{1}{3}y^3$$

Tomando y como parámetro, $y = t$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} x = \frac{1}{3}t^3 \\ y = t \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \end{array}\right\} \quad -\infty < t < \infty$$

o bien, en forma paramétrica vectorial:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3,\, t,\, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\right) \qquad t \in (-\infty, \infty)$$



$b)$ Recta r_T tangente a $C : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ en el punto $P_0(x_0, y_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{r}(t_0)$:

$$\overrightarrow{r_T}(u) = \overrightarrow{r}(t_0) + \overrightarrow{r}'(t_0)u \quad u \in (-\infty, \infty)$$

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3,\ t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\right)$$

$$\overrightarrow{r}'(t) = \left(t^2, 1, \sqrt{2}t\right)$$

En el origen $t_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{r}(t_0) = (0,0,0) \\ \overrightarrow{r}'(t_0) = (0,1,0) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{r_T}(u) = (0,0,0) + (0,1,0)u \quad -\infty < u < \infty$$

o bien: o bien:

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{array}\right\} t \in (-\infty, \infty) \qquad \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{eje } y$$

Por lo tanto, el plano normal a C en el origen seŕa:

$$\boxed{y = 0}$$

$c)$ La longitud del arco vendrá dada por:

$$L_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} |\overrightarrow{r}'(t)|\, dt$$

Dado que:

$$\overrightarrow{r}'(t) = \left(t^2, 1, \sqrt{2}\,t\right)$$

$$|\overrightarrow{r}'(t)|^2 = t^4 + 1 + 2t^2 = \left(t^2 + 1\right)^2$$

$$A(0,0,0) \;\Rightarrow\; t_A = 0$$

$$B\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \;\Rightarrow\; t_B = 1$$

El resultado es:

$$L_{AB} = \int_0^1 \left(t^2 + 1\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{L_{AB} = \frac{4}{3}}$$

■

Segundo Tema:
Cálculo diferencial

Contenidos:

1. El espacio $\mathbb{R}^n$. Generalidades de las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ (casos $n, = 1, 2, 3$).

2. Funciones vectoriales de una variable escalar: interpretación geométrica (curvas).

3. Funciones de varias variables ($n = 2, 3$).

   a) Topología de $\mathbb{R}^2$. Límites y continuidad.

   b) Derivadas parciales. Derivadas direccionales. Gradiente.

   c) Regla de la cadena y aplicaciones.

   d) Diferenciabilidad. Interpretación geométrica.

   e) Aproximaciones de Taylor (de primer y segundo orden). Máximos y mínimos relativos, absolutos y condicionados ($n = 2$).

4. Campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Matriz jacobiana. Transformaciones (coordenadas polares, cilíndricas y esféricas).

Problemas:

1. (Primer Parcial 2011 - Problema 1)

   Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Estúdiese la continuidad de f en todo su dominio.

   b) Calcúlense (en los puntos del dominio donde existan) $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$.

   c) Calcúlense las derivadas direccionales $D_u f(0,0)$ para todo vector unitario $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

   d) Estúdiese la diferenciabilidad de f en todo su dominio.

   Solución:

   a) En el abierto $R = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f está definida como función racional, cociente de polinomiales, cuyo polinomio denominador no se anula en ningún punto de R, por lo que es continua en todo R. En el punto $(0,0)$ hay que analizar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

   Para ello, realizamos un cambio a polares ($x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta$), de manera que estudiamos la existencia del límite:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\; r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta = 0,$$

   uniformemente en θ

   lo que implica que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

   Por lo tanto, f es continua en todo su dominio de definición.

   b) En el abierto $R = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f, definida como función racional, tiene derivadas parciales, que vienen dadas por:

$$f_x(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

mientras que en $(0,0)$ tenemos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0=f_x(0,0),$$
$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0=f_y(0,0).$$

Por lo tanto, la función f tiene derivadas parciales en todo su dominio.

c) Las derivadas direccionales en $(0,0)$ son, en función de θ:

$$\begin{aligned}D_uf(0,0)=D_{(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)}&=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cos\theta,0+t\operatorname{sen}\theta)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\cos\theta\ t^2\operatorname{sen}^2\theta}{t^2\cos^2\theta+t^2\operatorname{sen}^2\theta}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\theta\ t^2\operatorname{sen}^2\theta}{t^2t}\\&=\lim_{t\to 0}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta=\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta.\end{aligned}$$

d) En el abierto $R=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, f, definida como función racional, tiene derivadas parciales continuas, por lo que es diferenciable. En $(0,0)$ se tiene que, para $\theta\notin\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\}$, se cumple $D_u=D_{(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)}=\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\neq 0=f_x(0,0)\cos\theta+f_y(0,0)\operatorname{sen}\theta$. Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

2. (Primer Parcial Tarde 2011 - Problema 3)
Dadas las funciones:

$$f(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$$

$$g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$. ¿Existe algún punto de discontinuidad de la función f? ¿Es evitable? ¿Cómo? Razone la respuesta.

b) Estudiar la continuidad de $g(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$. ¿Existe algún punto de discontinuidad de la función g? ¿Es evitable? ¿Cómo? Razone la respuesta.

Solución:

a) f es continua $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por ser el cociente de polinomios, que son funciones continuas $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $(0,0)$ es el único cero del polinomio denominador. El único punto de discontinuidad de f es el $(0,0)$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el siguiente límite haciendo un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \rho \underbrace{\cos\theta \operatorname{sen}\theta(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}_{acotado} = 0\end{aligned}$$

Por tanto el punto $(0,0)$ es un punto de discontinuidad <u>evitable</u>.

Para que f sea continua en $\mathbb{R}^2$ se puede redefinir de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) g es continua $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por ser el cociente de polinomios, que son funciones continuas $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $(0,0)$ es el único cero del polinomio denominador. El único punto de discontinuidad de f es el $(0,0)$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el siguiente límite haciendo un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \cos(2\theta) \;:\; \nexists \text{ ya que depende de } \theta\end{aligned}$$

Por lo tanto el punto $(0,0)$ es un punto de discontinuidad <u>no evitable</u>.

3. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y^3}{x^2+y^6}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \ \alpha \in \{1,2\}.$$

Para los dos diferentes posibles valores de $\alpha \in \{1,2\}$:

a) Estúdiese la continuidad de f en todo su dominio.

b) Calcúlense $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ en los puntos donde estén definidas.

c) Estúdiese la diferenciabilidad de f en todo su dominio.

Solución:

a) En el abierto $R = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f está definida como función racional, cociente de funciones polinomicas, cuyo polinomio denominador no se anula en ningún punto de R, por lo que es continua para ambos valores de α. En el punto $(0,0)$ hay que analizar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^3}{x^2+y^6}.$$

- Para $\alpha = 2$ se cumple

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y^3}{x^2+y^6}\right| \leq \left|\frac{x^2}{x^2+y^6}y^3\right| \leq \left|\frac{x^2}{x^2+y^6}\right| \left|y^3\right| \leq \left|y^3\right|.$$

Por lo tanto

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y^3| = 0$$

de donde se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

lo que demuestra que la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

- Para $\alpha = 1$, estudiamos el límite relativo en el conjunto

$$B = \{(x,y) \in R : \ x = y^3\}.$$

de manera que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(y^3,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3y^3}{y^6+y^6} = \frac{1}{2},$$

de donde se deduce que la función es continua en R y discontinua en $(0,0)$.

b) En el abierto $R = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f, definida como función racional, tiene derivadas parciales, que vienen dadas por:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^3 (x^2+y^6) - 2x x^\alpha y^3}{(x^2+y^6)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{3x^\alpha y^2 (x^2+y^6) - 6y^5 x^\alpha y^3}{(x^2+y^6)^2}, \end{aligned}$$

mientras que en $(0,0)$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0 = f_x(0,0), \\ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0 = f_y(0,0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f tiene derivadas parciales en todo su dominio, para ambos valores de α.

c) Para ambos valores de $\alpha \in \{1,2\}$, en el abierto $R = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f, definida como función racional, tiene derivadas parciales continuas, por lo que es diferenciable. Solamente queda por estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$.

Para $\alpha = 2$ se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0x - 0y}{\|(x,y)\|} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2 y^3}{(x^2+y^6)\sqrt{x^2+y^2}} \right|.$$

Para ello, realizamos un cambio a polares ($x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta$), de manera que estudiamos la existencia del límite

$$\lim_{r\to 0} \left| \frac{r^2\cos^2\theta\, r^3 \operatorname{sen}^3\theta}{r(r^2\cos^2\theta + r^6\operatorname{sen}^6\theta)} \right| = \lim_{r\to 0} \left| \frac{r^2\cos^2\theta \operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta + r^4\operatorname{sen}^6\theta} \right|.$$

No sabemos cómo seguir, pero si damos valores a θ el candidato a límite es el 0. Demostremos que efectivamente es 0 aplicando la definición:

$$\left| \frac{x^2 y^3}{(x^2+y^6)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \left| \frac{y y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le |y^2| \underset{(x,y)\to 0}{\to} 0,$$

lo que implica que f es diferenciable en $(0,0)$.

Para $\alpha = 1$, f no es diferenciable en $(0,0)$ ya que no es continua en dicho punto.

4. (Primer Parcial 2011 - Problema 2)

Sean

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 z + z^2 x$$

$$h(u,v) = (h_1(u,v), h_2(u,v), h_3(u,v)) = (u+v, u-v, uv)\,.$$

Calcúlese $\frac{\partial}{\partial u}(g \circ h)$ en $(1,1)$.

Solución:

En primer lugar, $h(1,1) = (2,0,1)$.

Por otro lado, si denotamos las funciones componentes de h como (h_1, h_2, h_3) y aplicamos la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial u}(g \circ h)(1,1) = \frac{\partial g}{\partial x}(h(1,1))\frac{\partial h_1}{\partial u}(1,1) + \frac{\partial g}{\partial y}(h(1,1))\frac{\partial h_2}{\partial u}(1,1) + \frac{\partial g}{\partial z}(h(1,1))\frac{\partial h_3}{\partial u}(1,1)\,.$$

Ahora bien,

$$\nabla g(2,0,1) = (2x + z^2, 2yz, y^2 + 2zx)\Big|_{(2,0,1)} = (5,0,4)\,,$$

y por otro lado, $\frac{\partial h_1}{\partial u} = \frac{\partial h_2}{\partial u} = 1$ y $\frac{\partial h_3}{\partial u} = v$, luego

$$\frac{\partial}{\partial u}(g \circ h)(1,1) = 5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9\,.$$

5. (Primer Parcial 2011 - Problema 3)

   a) Supongamos que la trayectoria de un móvil en el espacio viene dada, en coordenadas paramétricas, por la función $r : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$:

   $$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t).$$

   Calcúlense la velocidad $\frac{d}{dt} r(t) = r'(t)$ y la aceleración $\frac{d^2}{dt^2} r(t) = r''(t)$.

   b) Dada la superficie $z = x^2 + y^2$ calcúlese el plano tangente a dicha superficie en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 5)$.

Solución:

a) Dada $r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, se cumple que

$$r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\,.$$

Asimismo, $r''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$.

b) Siguiendo la sugerencia, si definimos $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, la superficie del enunciado es la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$. El punto $(1, 2, 5)$ verifica $F(1, 2, 5) = 0$, luego está sobre la superficie. El vector gradiente de F en dicho punto,

$$\nabla F(1, 2, 5) = \big(2x, 2y, -1\big)\Big|_{(1,2,5)} = \big(2, 4, -1\big)\,,$$

es perpendicular a dicha superficie. Por tanto, el plano tangente a la superficie en dicho punto es:

$$2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{2x + 4y - z - 5 = 0}$$

6. (Segundo Parcial 2011 - Problema 1)

Dada la función $f(x,y) = \sin(x+y)$, se pide:

a) Desarrollar el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor del $(0,0)$.

b) Calcular los extremos absolutos de la función en

$$D = [0, \tfrac{\pi}{2}] \times [0, \tfrac{\pi}{2}] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}\,, \ 0 \le y \le \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

Solución:

a) El polinomio de Taylor de f en un entorno de $(0,0)$ tendrá la expresión:

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x-0, y-0) + \frac{1}{2!}[H\,f(0,0)](x-0,y-0) =$$

$$= \operatorname{sen}(0) + (\cos(0), \cos(0)) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(0) & -\operatorname{sen}(0) \\ -\operatorname{sen}(0) & -\operatorname{sen}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= x + y$$

Sabiendo que:

$$[H\,f(x_0,y_0)]\,(x-x_0, y-y_0) =$$

$$= (x-x_0, y-y_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular los puntos críticos de f en la región $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ estudiamos si existen puntos críticos en su interior y posteriormente comprobamos si tiene extremos en su frontera.

Buscamos los puntos críticos de f y vemos si se encuentran en el interior de la región:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \ \Leftrightarrow \ (\cos(x+y), \cos(x+y)) = (0,0) \ \Leftrightarrow \ \cos(x+y) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Restingidos a la región dada, los puntos (x_0, y_0) que verifican esta condición son únicamento los que verifican que $x_0 + y_0 = \frac{\pi}{2}$.

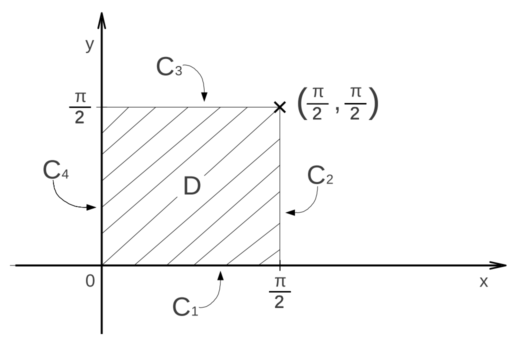
Para estos puntos el discriminante sería:

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0))^2 = \text{sen}^2(\frac{\pi}{2}) - \text{sen}^2(\frac{\pi}{2}) = 0$$

que no nos aporta información, por lo que comprobando las curvas de nivel $\text{sen}(x+y) = f(x,y)$ con $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ y $(x,y) \in D$, vemos que:

$$f(x_0, y_0) = \text{sen}(x_0, y_0) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1 \ \geq \ \text{sen}(x+y) = f(x,y)$$

Pasemos a ver si en la frontera D existen extremos:



La frontera viene dada por las curvas:

$$C_1 = \{(x, 0) | x \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

$$C_2 = \{(\frac{\pi}{2}, y) | y \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

$$C_3 = \{(x, \frac{\pi}{2}) | x \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

$$C_4 = \{(0, y) | y \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

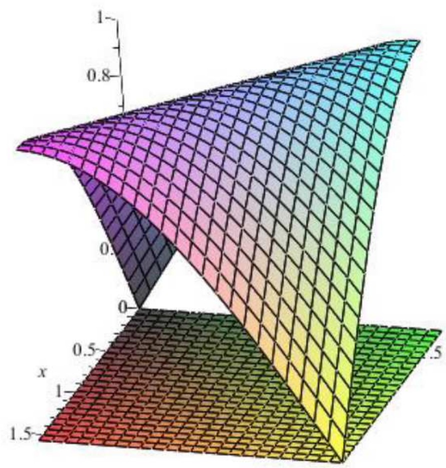
En C_1 se cumple que $\text{sen}(x+0) = f(x,0) = \text{sen}(x)$, luego f alcanza un mínimo en $(0,0)$ y un máximo en $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

En C_2 se cumple que $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + y) = f(\frac{\pi}{2}, y)$, luego f alcanza un mínimo en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y un máximo en $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

En C_3 se cumple que $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = f(x, \frac{\pi}{2})$, luego f alcanza un mínimo en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y un máximo en $(0, \frac{\pi}{2})$.

En C_4 se cumple que $\operatorname{sen}(0 + y) = f(0, y) = \operatorname{sen}(y)$, luego f alcanza un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $(0, \frac{\pi}{2})$.

Por tanto, para cada $(x_0, y_0) \in D$ tal que $x_0 + y_0 = \frac{\pi}{2}$ la función alcanza un máximo absoluto y alcanzará el mínimo absoluto en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y en $(0, 0)$.



7. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + y^2.$$

   a) Hallar y clasificar los puntos críticos de la función en todo $\mathbb{R}^2$.

   b) Justifíquese si f podrá alcanzar o no extremos absolutos en la región $R = \{(x,y) : \frac{15}{8}x^4 + y^2 \leq 16\}$. En caso afirmativo, calcúlense dichos extremos.

   c) Escribir el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1,1)$. ¿Qué tipo de superficie geométrica genera la gráfica de dicho polinomio?

Solución:

a) Debido a que f es analítica en $\mathbb{R}^2$ los puntos críticos deben cumplir el sistema de ecuaciones

$$f_x(x,y) = 5x^2(x^2-1) = 0$$
$$f_y(x,y) = 2y = 0,$$

cuya solución viene dada por los puntos (críticos) $(0,0)$, $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Para clasificarlos, calculamos la matriz Hessiana asociada a f en dichos puntos:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 10x(2x^2-1) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que, evaluada en ellos da

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; H_f(1,0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Este análisis permite concluir que f tiene un punto de silla en $(-1,0)$ y alcanza un mínimo local en $(1,0)$. El punto $(0,0)$ puede ser un mínimo o un punto de silla. Es fácil comprobar que si evaluamos la función en puntos de la forma $(x,0)$ se cumple que $f(x,0) = x^5 - \frac{5}{3}x^3$, polinomio impar, lo que implica que debe tomar valores positivos y negativos en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Por lo tanto, $(0,0)$ es un punto donde no se alcanza ni máximo ni mínimo relativo.

b) Debido a que f es continua, debe alcanzar extremos absolutos en el compacto (cerrado y acotado) R (nótese que $R \subset [-a,a] \times [-4,4]$, donde $a = \left(\frac{128}{15}\right)^{\frac{1}{4}}$).

El estudio se desglosa en analizar el interior y la frontera. El estudio de puntos críticos en el interior ya ha sido realizado (nótese que los puntos críticos obtenidos en el apartado anterior se hallan en el interior de R): debido a que no hay máximo relativo o local en dicho interior, el máximo absoluto debe alcanzarse en la frontera. Asimismo, buscaremos el valor mínimo de la función en la frontera para compararlo con $f(1,0) = 1 - \frac{5}{3}$, único mínimo relativo en el interior.

El estudio de f en la frontera se realiza parametrizándola y evaluando f como función de una variable (parámetro). En nuestro caso, elegimos como parámetro la variable x de manera que la frontera se descompone en dos conjuntos:

$$F_1 = \{(x,y) : y = \sqrt{16 - \frac{15}{8}x^4}, -a \leq x \leq a\}$$

$$F_2 = \{(x,y) : y = -\sqrt{16 - \frac{15}{8}x^4}, -a \leq x \leq a\}$$

Debido a que f es par en y basta con analizar la función en uno de ellos:

$$f_{F_1}(x) = f_{F_2}(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + (16 - \frac{15}{8}x^4), \quad -a \leq x \leq a;$$

los puntos críticos interiores cumplen $5x^4 - \frac{15}{2}x^3 - 5x^2 = 0$ y son $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$ (nótese que la otra raíz $x_3 = 2 > a$). Evaluando al función en dichos puntos y en los extremos del intervalo de variación, se obtiene que $\max_R f_{F_1} = f_{F_1}(-\frac{1}{2}) = \frac{6167}{384}$, $\min_R f_{F_1} = f_{F_1}(a) = \left(\frac{128}{15}\right)^{\frac{5}{4}} - \frac{5}{3}\left(\frac{128}{15}\right)^{\frac{5}{4}} \approx -6,26$.

Por lo tanto, la función f definida en R alcanza un máximo absoluto en los puntos $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2033}}{8\sqrt{2}})$ y $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2033}}{8\sqrt{2}})$ de manera que $f(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2033}}{8\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2033}}{8\sqrt{2}}) = \frac{6167}{384}$. Asimismo, f alcanza mínimo absoluto en $(-a, 0)$ de manera que $f(-a,0) = -\left(\frac{128}{15}\right)^{\frac{5}{4}} + \frac{5}{3}\left(\frac{128}{15}\right)^{\frac{5}{4}} < 1 - \frac{5}{3} = f(1,0)$.

c) El polinomio de Taylor en $(1,1)$ viene dado por

$$\begin{aligned} T_{(1,1)}(h,k) &= f(1,1) + f_x(1,1) \cdot h + f_y(1,1) \cdot k + \frac{1}{2}f_{xx}(1,1)h^2 \\ &+ f_{xy}(1,1)hk + \frac{1}{2}f_{xx}(1,1)k^2 \\ &= \frac{1}{3} + 2k + 5h^2 + k^2 = 5h^2 + (k+2)^2 + \frac{1}{3} - 4. \end{aligned}$$

La superficie engendrada por la ecuación $z(h,k) = 5h^2 + (k+2)^2 + \frac{1}{3} - 4$ es un paraboloide elíptico: para valores $z = cte \geq \frac{1}{3} - 4$ las secciones son elipses; para valores $h = cte$ o $k = cte$ las secciones son parábolas.

8. (Segundo Parcial Tarde 2011 - Problema 1)

Sea la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ para $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, siendo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

a) Hallar y caracterizar los puntos de D donde f alcanza sus extremos y el valor de éstos.

b) Hallar y caracterizar los puntos de D donde f alcanza sus extremos y el valor de éstos, condicionados por la restricción

$$x + y - 1 = 0$$

c) Desarrollar el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor del $(0,0)$.

Solución:

a) Claramente, $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. Por tanto, como $f(x,y) = 0$, sólo se verifica en $(0,0) \in D$, alcanza el mínimo absoluto en $(0,0)$ y su valor es 0. Por otro lado, en $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\} \subset D$ se cumple que $f(x,y) = 1$ y, por tanto, en estos puntos la función alcanza su máximo absoluto, cuyo valor es 1. (Obsérvese que en los restantes puntos de D se cumple que $0 < (x,y) < 1$).

b) Imponemos ahora la condición adicional $y = 1 - x$. En consecuencia, tenemos que optimizar la función

$$g(x) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

cuyo dominio es $[0,1]$ pues sabemos que $x \leq 1$ y si $x < 0$, entonces $y = 1 - x > 1$, lo cual no puede ser por la definición de D.

Dicha función es una parábola cuyo vértice es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Por tanto, como el coeficiente de x^2 es positivo, el mínimo absoluto se alcanza en $x = \frac{1}{2}$ (que corresponde al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in D$) y su valor es $\frac{1}{2}$. El máximo absoluto se alcanza en los puntos $x = 0$ y $x = 1$ (que corresponden, respectivamente, a los puntos $(0,1), (1,0) \in D$) y su valor es, en ambos casos, 1.

c) Puesto que la función es un polinomio de segundo grado en las variables x e y, su polinomio de Taylor de orden 2 alrededor del punto $(0,0)$ es dicha función, es decir, $x^2 + y^2$.

9. *a*) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y$ en punto (x_0, y_0). Determinar sus puntos críticos en el plano $\mathbb{R}^2$.

b) Hallar el punto del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que se encuentra más cerca del punto $(3,2,0)$.

Solución:

a) Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \qquad f_{xx} = -\cos x \operatorname{sen} y \\ f_y(x,y) &= \cos x \cos y \qquad\quad\; f_{yy} = -\cos x \operatorname{sen} y \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = -\operatorname{sen} x \cos y \end{aligned}$$

se tiene que el polinomio de Taylor de orden 2 es:

$$\cos(x_0 + h)\operatorname{sen}(y_0 + k) = \cos x_0 \operatorname{sen} x_0 \; +$$

$$\{-\operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} y_0 h + \cos x_0 \operatorname{sen} y_0 k\} \; +$$

$$\tfrac{1}{2!}\,(h \;\; k) Hf(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

donde $Hf(x_0, y_0)$ es la matriz Hessiana de la función f en el punto (x_0, y_0):

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\cos x_0 \operatorname{sen} y_0 & -\operatorname{sen} x_0 \cos y_0 \\ -\operatorname{sen} x_0 \cos y_0 & -\cos x_0 \operatorname{sen} y_0 \end{pmatrix}$$

b) La distancia al cuadrado de un punto del cono de coordenadas (x,y,z) del punto $(3,2,0)$ es igual a:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2$$

Por lo tanto, el punto pedido es el mínimo absoluto de la función

$$d(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2$$

en $\mathbb{R}^2$. Puesto que $d_x(x,y) = 4x - 6$ y $d_y(x,y) = 4y - 4$ el único punto crítico es el $(\frac{3}{2}, 1)$. Este punto crítico es un mínimo ya que

$$Hd\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es claramente definida positiva. Se concluye que el punto del cono a menor distancia del punto $(3,2,0)$ es el $(\frac{3}{2}, 1, \frac{\sqrt{13}}{2})$ o alternativamente $(\frac{3}{2}, 1, -\frac{\sqrt{13}}{2})$.

10. (Primer Parcial 2012 - Problema 2)

Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$.

b) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en $(0,0)$. ¿Son continuas en $(0,0)$ las derivadas parciales de f? Razonar la respuesta.

c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$? Razonar la respuesta.

Solución:

a) Sabiendo que:

$$f \ : \ \text{continua en } (x_0,y_0) \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Calculamos el límite pasando a coordenadas polares (ρ,ϕ):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$$

Por tanto, f es continua en $(0,0)$.

b) Las derivadas parciales de f en $(0,0)$ valen:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

La derivada parcial de f respecto a x para todo punto distinto de $(0,0)$ vale:

$$f_x(x,y) = y\frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

El valor del límite de la derivada parcial anterior cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ no coincide con el valor de $f_x(0,0)$ ya que, pasando a coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \mathrm{sen}^3\,\phi \ \ : \ \ \nexists L$$

Por tanto, f_x existe, pero no es continua, en $(0,0)$. Análogamente para f_y.

c) f es diferenciable en (x_0, y_0) si y solo si:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{[f(x_0+h, y_0+k)] - (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

En $(x_0, y_0) = (0,0)$ tenemos:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{[f(h,k)-0] - 0\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} \quad : \text{ no existe}$$

Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

11. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

se pide:

a) Estudiar su continuidad.

b) Calcular $f_x(x,y)$ en todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución:

a) En todo punto de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ la función es continua por ser cociente de funciones continuas (el numerador es producto de funciones continuas y el denominador es suma de funciones continuas) y no se anula el denominador, pues el único punto donde se anula es el $(0,0)$, que no está incluido en la región de estudio.

En $(0,0)$ también es continua pues se cumple la definición de continuidad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \underset{en\ polares}{=} \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall\theta\in[0,2\pi)}} r^2 \cos\theta \sin\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 = f(0,0)$$

b) Calculamos ahora $f_x(x,y)$ (utilizamos la definición para calcular $f_x(0,0)$):

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

12. (Examen Extraordinario Julio 2011 - Problema 1)

a) Estudiar la *continuidad* y *diferenciabilidad* en $\mathbb{R}^2$ de la *función*

$$f(x,y) = 2[1-(x^2+y^2)]e^{-(x^2+y^2)}$$

siendo $\vec{r} = (x,y)$ y $r = ||\vec{r}||$

b) Expresar el campo $\vec{F}$ en la forma

$$\vec{F} = [P(x,y), Q(x,y)]$$

y demostrar que es un *campo potencial o de gradiente*.

c) Calcular la *función potencial* $U(x,y)$ de $\vec{F}$ tal que $U(0,0)=0$. Expresarla en función de r: $U(r)$.

Sugerencia: En la primera integral para el cálculo de $U(x,y)$ hágase el cambio: $t = x^2+y^2$

d) Identificar y dibujar las líneas de campo de $\vec{F}$ y sus líneas equipotenciales ¿Qué propiedad geométrica relaciona estas dos familias de curvas entre sí?

Bien a partir de $U(x,y)$, bien a partir de $U(r)$:

e) Calcular todos los puntos críticos (o estacionarios) de la función potencial calculada U.

f) Hallar los puntos donde U alcanza sus extremos relativos y absolutos, y los valores de dichos extremos.

Solución:

a) Como $f(x,y) = h(x,y)\,g(x,y)$, siendo $h(x,y) = 2(1-(x^2+y^2))$ y $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y tanto h como g son funciones con-ti-nuas y diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$, también lo es su producto.

Otro razonamiento: Como las derivadas parciales de la función f son continuas en una región abierta $\mathbb{R}^2$, la función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

b)

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = f(x,y)\,x \\ Q(x,y) = f(x,y)\,y \end{array}\right\} \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

$\vec{F}(x,y)$ es un campo potencial en $\mathbb{R}^2$ si:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -4xy\left\{2-(x^2+y^2\right\}e^{-(x^2+y^2)}$$

c) $\exists\, U(x,y)\,:\,\nabla U = \vec{F}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \;\Rightarrow\; U = \int (1-t)e^{-t}dt$$

$$U(x,y) = (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)} + Y(y)$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y} = 2ye^{(x^2+y^2)} - 2y(x^2+y^2)2e^{(x^2+y^2)} + Y'(y)$$

$$\Rightarrow\; Y'(y) = 0 \;\Rightarrow\; Y'(y) = cte \;\Rightarrow\; U(r) = r^2e^{-r^2}$$

d) Las líneas de campo de $\vec{F}$ son rectas que pasa por el origen.

Las líneas equipotenciales son:

$$\begin{aligned} U(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} &= cte \\ x^2+y^2 &= cte \end{aligned}$$

Familia de curvas ortogonales a las líneas de campo de $\vec{F}$.

e) Puntos críticos de U:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= x\,f(x,y) \;=\; 2x(1-(x^2+y^2))e^{(x^2+y^2)} \;=\; 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= y\,f(x,y) \;=\; 2y(1-(x^2+y^2))e^{(x^2+y^2)} \;=\; 0 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $\begin{cases} (0,0) \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

Identicamente se obtiene:

$$U(r) = r^2e^{-r^2}\;,\; U'(r) = 2r(1-r^2)e^{-r^2}\;,$$

Los puntos críticos son $\begin{cases} r \;=\; 0 \\ r \;=\; 1 \end{cases}$

f) *Estudio del punto crítico* $(0,0)$*:*

Si calculamos el Hessiano de U, que es el determinante de la matriz Hessiana, se obtiene $|H(0,0)| > 0$ y $U_{xx}(0,0) = 2 > 0$ luego el punto $(0,0)$ es mínimo relativo. Equivalentemente, como los autovalores de la $H(0,0)$ son estrictamente positivos, asumiendo que las segundas derivadas parciales son continuas, el punto $(0,0)$ es un mínimo relativo. También es mínimo absoluto por ser la función $U(x,y) \geq 0$ y $U(0,0) = 0$.

Estudio de los puntos críticos: $x^2 + y^2 = 1$*:*

$$\begin{aligned} U''(r) &= 2(1 - 5r^2 + 2r^4)e^{-r^2} \\ U''(1) &= -\frac{4}{e} < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Máximo relativo} \\ U(1) &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Los puntos $x^2 + y^2 = 1$ ó $r = 1$ son máximos relativos y absolutos por ser U una función continua, acotada y tender a cero cuando $r \longrightarrow \infty$.

■

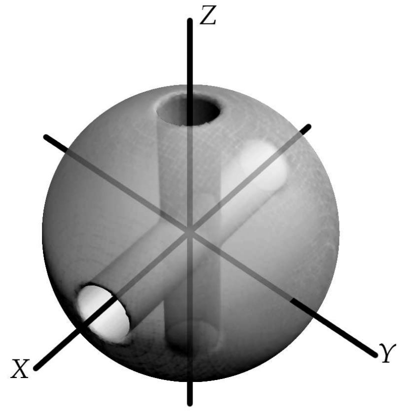
Tercer Tema: Integración de campos escalares y vectoriales

Contenidos:

1. Integrales dobles y triples. Propiedades.
2. Cálculo de integrales múltiples: cambio de variables.
3. Curvas en forma vectorial: vector tangente, curvas regulares.
4. Integrales curvilíneas o de línea: propiedades. Circulación. Función potencial. Teorema de Riemann o de Green en el plano.
5. Superficies en forma vectorial: vector normal, superficies regulares.
6. Integrales de superficie: propiedades. Flujo.

Problemas:

1. (Problema 2 - Segundo parcial 2011)
En una esfera de radio 4 se han practicado dos agujeros circulares de radio 1 que pasan por el centro (ver figura). Calcular razonadamente el volumen y el área de la superficie exterior del sólido resultante.



Solución:

El volumen pedido, V es igual a:

$$V = V_e - 2V_a + V_i$$

donde V_e es el volumen de la esfera, V_a es el volumen de uno de los agujeros y V_i es el volumen de la intersección de los dos cilindros. Calcularemos cada uno de estos volúmenes por separado. El volumen de la esfera es sencillo de calcular:

$$V_e = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{4} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho d\varphi d\theta = \frac{4^4 \pi}{3}$$

El volumen de uno de los agujeros es igual a:

$$V_a = 2 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dA$$

donde D es el círculo en el plano xy de centro el origen y radio 1. Utilizando coordenadas polares tenemos:

$$V_a = 2 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dA = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \sqrt{16 - r^2} \; r \, dr \, d\theta = 4\pi \left(\frac{64}{3} - 5\sqrt{15} \right)$$

El volumen de la intersección es igual a:

$$V_i = 2\iint_D \sqrt{1-x^2}\, dA$$

donde como antes D es el círculo en el plano xy. Por lo tanto:

$$V_i = 2\iint_D \sqrt{1-x^2}\, dA = 2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\, dy\, dx = \frac{16}{3}$$

Por lo tanto el volumen pedido es (sin simplificar):

$$\boxed{V = \frac{4^4\pi}{3} - 8\pi\left(\frac{64}{3} - 5\sqrt{15}\right) + \frac{16}{3}}$$

El área exterior del cuerpo es igual al área de la esfera de radio 4 menos el área de los cuatro agujeros practicados. Así, vamos a calcular el área de uno de estos agujeros. La superficie de uno de uno de estos agujeros es la gráfica de la función $f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$ en el dominio D, teniendo en cuenta que:

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$$

obtenemos:

$$S_a = \iint_D \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\, dA = \iint_D \frac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\, dA$$

Utilizando coordenadas polares tenemos:

$$S_a = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{16-r^2}}\, dr\, d\theta = 32\pi - 8\pi\sqrt{15}$$

El área de la superficie esférica de radio 4 es:

$$S_e = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{16-r^2}}\, dr d\theta = 64\pi$$

El área pedida es por tanto:

$$S = 64\pi - 4\left(32\pi - 8\pi\sqrt{15}\right) = 32\pi\left(\sqrt{15} - 2\right)$$

$$\boxed{S = 32\pi\left(\sqrt{15} - 2\right)}$$

2. Calcula el volumen de la región sólida acotada por las superficies S_1 y S_2 dadas por las ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = 2 - x$ respectivamente. Se pide:

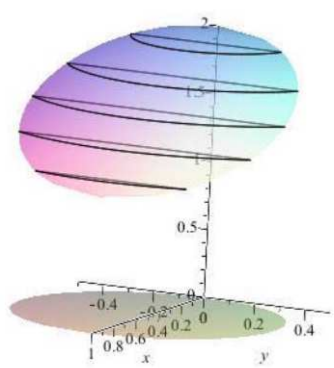
   a) Dibujar la región.

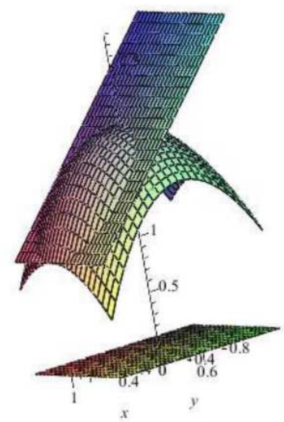
   b) Definirla formalmente.

   c) Calcular su volumen.

   Solución:

   a) El dibujo de la región es el siguiente:





   b) Calculamos la frontera C_1 de la región D en el plano xy, proyección de todos los puntos de la región sólida acotada eliminando la variable z a partir de las dos ecuaciones:

$$2 - x^2 - y^2 = 2 - x \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Entonces, restingiéndose al plano xy:

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

Y la región D que delimita en este plano sería:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

Ahora, para cada $(x, y) \in D$ la variable z variará entre el plano $z = 2 - x$ y el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$, ya que $2 - x^2 - y^2 \geq 2 - x$, pues:

$$x^2 + y^2 \leq x \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$$

Formalmente la región volumétrica será:

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x,y) \in D,\ z \in [2-x, 2-x^2-y^2]\right\}$$

c) Para calcular su volumen vamos a usar coordenadas cilíndricas, simplificando así el cálculo de la integral:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + r\cos(t) \\ y &= r\operatorname{sen}(t) \\ z &= z \end{aligned}$$

siendo

$$r \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ t \in [0, 2\pi],\ z \in \left[2 - \frac{1}{2} - r\cos(t), 2 - \left(\frac{1}{2} + r\cos(t)\right)^2 - (r\operatorname{sen}(t))^2\right]$$

Por lo tanto la región W quedará expresada, por la transformación de las coordenadas cartesianas a cilíndricas en $W*$ siendo

$$W* = \left\{(r,t,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ t \in [0,2\pi], z \in \left[\frac{3}{2} - r\cos(t), \frac{7}{4} - r^2 - r\cos(t)\right]\right\}$$

con lo cual:

$$V = \iiint_W dxdydz = \iiint_{W*} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,t,z)}\right| drdtdz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{3}{2}-r\cos(t)}^{\frac{7}{4}-r^2-r\cos(t)} rdzdrdt$$

$$\boxed{V = \frac{1}{32}\pi}$$

3. (Segundo Parcial Tarde 2011 - Problema 2)

   Calcular el volumen de la figura limitada inferiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, superiormente por $z = 8$ y lateralmente por $z = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$.

   Solución:

   El cono $z = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ corta al hemisferio superior de la esfera en la circunferencia centrada en $(0, 0, 4)$ y radio 3, dentro del plano horizontal $z = 4$, pues $9z^2 = 16(x^2 + y^2)$, lo que al sustituirlo en la ecuación de la esfera queda

$$9x^2 + 9y^2 + 16x^2 + 16y^2 = 25(x^2 + y^2) = 25 \cdot 9$$

   es decir, $x^2 + y^2 = 3^2$, de donde obtenemos también que $z = 4$.

   Por otro lado, la sección del cono con el plano $z = 8$ es una circunferencia sobre diho plano, con centro en $(0, 0, 8)$ y radio 6.

   El volumen del cono con vértice en el origen que delimita el plano $z = 8$ es $\frac{8 \cdot 6^2 \cdot \pi}{3} = 96\pi$. Ahora restamos el volumen de la sección de la esfera que queda dentro de dicho cono. Para calcular dicho volumen, utilizamos coordenadas esféricas:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^5 \int_0^{\operatorname{arc}\cos\frac{4}{5}} r^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, dr \, d\theta = \frac{50\pi}{3}$$

   Así, el volumen pedido es:

$$\boxed{V = 96\pi - \frac{50\pi}{3} = \frac{238\pi}{3}}$$

■

Cuarto Tema: Teoremas Integrales del Análisis Vectorial

Contenidos:

1. Operacionales diferenciales (gradiente, rotacional, divergencia y laplaciano): definiciones, propiedades, expresiones en coordenadas cilíndricas y esféricas.
2. Teorema de Stokes y teorema de Gauss (o de la divergencia). Particularización a campos planos.
3. Caracterización de los campos conservativos, solenoidales y armónicos.

Problemas:

1. Sea el campo vectorial $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$:

$$\vec{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2),$$

y sean la superficies en $\mathbb{R}^3$:

$$S_1=\{(x,y,z):x^2+y^2=4z\ \wedge\ 0\leq z\leq 1\},$$
$$S_2=\{(x,y,z):x^2+y^2=(z-3)^2\ \wedge\ 1\leq z\leq 3\}.$$

a) Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S_1 (con vector normal orientado hacia arriba).

b) Aplicando el teorema de Gauss, calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S_2 (con vector normal orientado hacia arriba).

c) Explicar si existe algún campo $\vec{G}$ tal que $\nabla\times\vec{G}=\vec{F}$.

Solución:

a) La superficie S_1 es un paraboloide de revolución de eje z. Dicho paraboloide definido mediante $z=g(x,y)=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ puede ser parametrizado de manera natural

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,\frac{1}{4}(x^2+y^2)),\ (x,y)\in D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 4\},$$

donde D es la proyección de S_1 sobre el plano xy ($z=0$).

Calculamos

$$\vec{r}_x(x,y)=(1,0,\frac{1}{2}x),\ \vec{r}_y(x,y)=(0,1,\frac{1}{2}y),$$

de manera que $\vec{r}_x(x,y)\times\vec{r}_y(x,y)=(-\frac{x}{2},-\frac{y}{2},1)$. Por tanto

$$\begin{aligned}\int_{S_1}\int\vec{F}\cdot\vec{N}dS&=\int_D\int\vec{F}(x,y)\cdot(\vec{r}_x(x,y)\times\vec{r}_y(x,y))dA\\&=\int_D\int(x^2,y^2,\frac{1}{16}(x^2+y^2)^2)\cdot(-\frac{x}{2},-\frac{y}{2},1)dA\\&=\frac{1}{16}\int_D\int(-8(x^3+y^3)+(x^2+y^2)^2)dxdy\end{aligned}$$

Si efectuamos un cambio a coordenadas polares

$$\begin{aligned}\int_{S_1}\int\vec{F}\cdot\vec{N}dS&=\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\int_0^2(-8\rho^3(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta)+\rho^4)\rho d\rho d\theta\\&=\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\int_0^2(-8\rho^3(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta)+\rho^4)\rho d\rho d\theta\\&=\frac{1}{16}2\pi\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

b) Para calcular $\int_{S_2}\int \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ aplicamos el teorema de la divergencia, que dice

$$\int_{S_1}\int \vec{F}\cdot(-\vec{N})dS + \int_{S_2}\int \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \int\int\int_V \nabla\cdot\vec{F}dV$$

donde $-\vec{N}$ corresponde a la dirección hacia abajo (hacia afuera del volumen). Por lo tanto

$$\int_{S_2}\int \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \int\int\int_V \nabla\cdot\vec{F}dV + \int_{S_1}\int \vec{F}\cdot\vec{N}dS$$

Calculamos $\nabla\cdot\vec{F} = 2(x+y+z)$, por lo que

$$\int\int\int_V \nabla\cdot\vec{F}dV = 2\int\int\int_V (x+y+z)dV = 2\int\int\int_V (x+y+z)dxdydz$$

$$= 2\int_D\int dxdy\int_{z_{S_1}}^{z_{S_2}}(x+y+z)dz$$

$$= 2\int_D\int dxdy\left[((x+y)z+\frac{1}{2}z^2)\right]_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{3-\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2\int_D\int[(x+y)(3-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{4}(x^2+y^2))+\frac{1}{2}((3-\sqrt{x^2+y^2})^2-\frac{1}{16}(x^2+y^2)^2)]dxdy$$

y realizando un cambio a polares

$$\int\int\int_V \nabla\cdot\vec{F}dV =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)(3-\rho-\frac{1}{4}\rho^2)+\frac{1}{2}\rho[(3-\rho)^2-\frac{1}{16}\rho^4]d\rho d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^2(9\rho-6\rho^2+\rho^3-\frac{\rho^5}{16}d\rho = 2\pi\left[9\frac{\rho^2}{2}-6\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{16\cdot 6}\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi$$

Por lo tanto

$$\int_{S_2}\int \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \frac{32}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi = 12\pi.$$

c) Si existiera $\vec{G}(x,y,z)$ tal que $\nabla\times\vec{G}=\vec{F}$ entonces necesariamente $\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{G})=0$. En nuestro ejemplo, $\nabla\cdot\vec{F}\neq 0$ por lo que no puede existir $\vec{G}$.

2. (Tercer parcial 2011 - Problema 1)

Sea C la curva intersección de las superficies:

$$\begin{cases} S_1: \; x^2 + y^2 = 1 \\ S_2: \; z = ax + by \end{cases}$$

a) Calcular el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ en el desplazamiento de una partícula a lo largo de C, es decir calcular $W_C = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

b) Calcular el valor de a y b, para que el trabajo antes calculado sea nulo. ¿Quiere decir esto que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo? Razone su respuesta.

Solución:

a) La curva C se puede parametrizar como:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + (a\cos t + b\sin t)\mathbf{k}$$

Calculamos la integral de línea pedida:

$$W_C = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (a - 1)dt = 2(a - 1)\pi.$$

b) W_C se anula si y sólo si $a = 1$; b puede tomar cualquier valor real pues no afecta al valor de la integral.

Por tanto la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}$ se anulará para cualquier curva que sea intersección de un plano de la forma $z = x + by$, $b \in \mathbb{R}$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Observamos que dichas curvas son cerradas, pero podemos construir otras curvas cerradas para las que la integral de línea no se anula, como por ejemplo la elipse intersección de $z = 2x$ y $x^2 + y^2 = 1$, en este caso la integral de línea vale 2π ($\neq 0$). Concluimos entonces que el campo vectorial $\mathbf{F}$ no es conservativo, pues si fuera conservativo la integral de línea sobre cualquier curva cerrada debe ser 0.

3. (Tercer Parcial 2011 - Problema 2)

Sea C una curva cerrada simple y suave contenida en el plano $\Pi : x + y + z = 1$. Mostrar que la integral

$$\int_C zdx - 2xdy + 3ydz$$

depende solamente del área de la región del plano Π que encierra C y no de la forma de C ni de su posición en dicho plano Π.

Solución:

Sea S la superficie contenida en el plano $x + y + z = 1$ y limtada por la curva C. Supongamos que la orientación de C es positiva respecto de la orientación del plano. Por el teorema de Stokes se tiene:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{N}) dS$$

siendo, en nuestro caso $\vec{F}(x, y, z) = (z, -2x, 3y)$. El rotacional del campo vectorial F está dado por:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Puesto que $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ es el vector normal unitario "exterior" del plano $x + y + z = 1$ tenemos que:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{N}) dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}(3 + 1 - 2) dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S dS = \frac{2}{\sqrt{3}} A(S)$$

donde $A(S)$ es el área de la superficie S. Equivalentemente,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{\sqrt{3}} A(S)$$

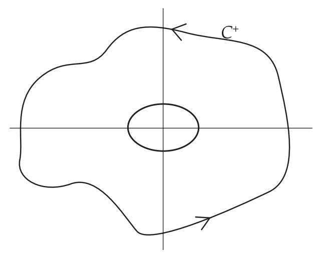
Lo que demuestra que la circulación del campo $\vec{F}$ sobre C depende solamente del área de la región del plano que encierra C y no de la forma de C ni de su posición.

4. (Tercer Parcial 2011 - Problema 4)

Considérese el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{4x^2+9y^2}, \frac{x}{4x^2+9y^2}\right)$.

a) Calcúlese la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ orientada positivamente.

b) Calcúlese **razonadamente** la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva de la figura, que contiene a la elipse anterior.



Solución:

a) El campo está definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que es una región abierta y no es simplemente conexa.

Parametrizamos la elipse como $\gamma(t) = (3\cos t, 2\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Su velocidad es $\gamma'(t) = (-3\sin t, 2\cos t)$. Entonces,

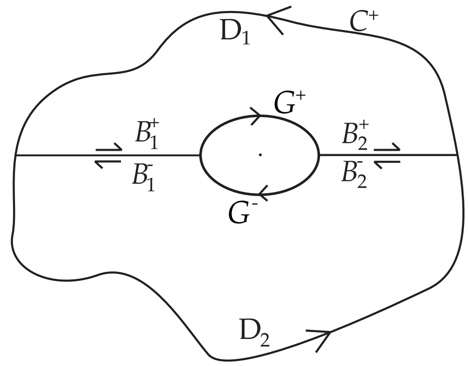
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{6\sin^2 t + 6\cos^2 t}{4 \cdot 9\cos^2 t + 9 \cdot 4 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} dt = \frac{\pi}{3}\,.$$

b) Orientamos la elipse negativamente y definimos los caminos $B_1^+, B_1^-, B_2^+, B_2^-$. Definimos las curvas cerradas suaves a trozos:

$$A_1 = B_1^+ + G^+ + B_2^+ + D_1 \quad ; \quad A_2 = B_2^- + G^- + B_1^- + D_2\,,$$

ambas orientadas positivamente. Obsérvese que ambas curvas encierran sendas regiones simplemente conexas, que a su vez están contenidas en sendas regiones abiertas que no incluyen al $(0,0)$ y por tanto son tales que las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$ tienen derivadas parciales continuas en tales regiones. Por tanto podemos aplicar el Teorema de Green en cada una de dichas regiones. Como en ambas regiones se verifica

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{9y^2 - 4x^2}{(4x^2+9y^2)^2}\,.$$



tenemos que

$$\int_{A_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0\,.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{A_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \Big(\int_{B_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{G^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{B_2^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{D_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Big) \\
&\quad + \Big(\int_{B_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{G^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{B_1^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Big) \\
&= \int_{G^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{D_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{G^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{\gamma^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\gamma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que si cambiamos el sentido en el que recorremos la curva, la integral de línea cambia de signo. Por tanto, tenemos que

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{3}\,.$$

5. (Examen Extraordinario Julio 2011 - Problema 2)
Dado el *campo vectorial* en $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F_k} = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)] = r^k \vec{u_r} \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

con $r = ||\vec{r}||$ y $\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ siendo $\vec{r}$ el vector posición: $\vec{r} = (x, y, z)$ y $r \neq 0$

a) Hallar la expresión de $div\,\vec{F}$ en función de k y de r.

b) Demostrar que $rot\,\vec{F} = \vec{0} \qquad \forall k \quad$ y $\quad r \neq 0$.

Sea la *esfera* E_1 de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad\qquad R > 0$$

el campo vectorial

$$\vec{F_{-2}} \equiv \vec{f} = \frac{\vec{u_r}}{r^2} \qquad\qquad r \neq 0$$

c) Hallar el valor F_1 del *flujo* a través de la esfera E_1 ¿Se puede aplicar el teorema de Gauss? Razone la respuesta.

Sea la *esfera* E_2 de ecuación

$$x^2 + y^2 + (z - 2R)^2 = R^2 \qquad\qquad R > 0$$

y el *semicono* S_c de vértice el origen de coordenadas y $z \geq 0$, circunscrito a la esfera E_2. Estas dos superficies determinan una circunferencia C, conjunto de los puntos de contacto (tangencia) entre ambas, de plano horizontal $z = z_0$ y radio R_0.

d) Dibujar, sobre los mismos ejes: E_2, S_c y C.

e) Hallar z_0 y R_0

<u>Sugerencia</u>: Trabajar en el semiplano $x = 0 \quad (z \geq 0)$ con las secciones de E_2, S_c y C.

f) Parametrizar C.

g) Desmostrar que la *circulación* de $\vec{f}$ a lo largo de C es nula.

h) Hallar el valor F_2 del flujo de $\vec{f}$ a través de la esfera E_2.

Solución:

$\vec{F_k} = r^k \vec{u_k} = r^k \frac{\vec{r}}{r} = r^{k-1}\vec{r}$
$\vec{F_k} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}}(x,y,z) \equiv (P,Q,R)$

$P = x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}}$
$Q = y(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}}$
$R = z(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}}$

a) $div\vec{F_k} = P_x + Q_y + R_z$
$P_x = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}} + x\frac{k-1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}-1}2x$

$P_x = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}}[1+(k-1)x^2(x^2+y^2+z^2)^{-1}]$
$Q_y = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}}[1+(k-1)y^2(x^2+y^2+z^2)^{-1}]$
$R_z = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}}[1+(k-1)z^2(x^2+y^2+z^2)^{-1}]$
(Simetría de permutación circular)

$$div\vec{F_k} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}}[3+(k-1)(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-1}]$$

$$div\vec{F_k} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}}(2+k)$$
$$\boxed{div\vec{F_k} = (2+k)r^{k-1}}$$

b) $rot\vec{F_k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} R_y - Q_z = A \\ P_z - R_x = B \\ Q_x - P_y = C \end{array} \right\} = (A,B,C)$

$\left. \begin{array}{l} R_y = z\frac{k-1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}-1}2y \\ Q_z = y\frac{k-1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k-1}{2}-1}2z \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad A = R_x - Q_z = 0$

Por simetría de permutación circular:

$$A = B = C = 0$$

Luego:

$$\boxed{rot\vec{F_k} = \vec{0}}$$

Otro método:

$$\vec{F_k} = (xr^{k-1}, yr^{k-1}, zr^{k-1}) \equiv (P, Q, R)$$

Las derivadas de P, Q y R respecto de las variables x, y ó z, se calculan teniendo en cuenta que r es función de x, y, z:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

y análogamente:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$
$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Por tanto, calculando, a partir de las expresiones anteriores, las derivadas parciales de P, Q y R, y teniendo en cuenta que:

$$rot\vec{F_k} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

Se obtiene:

$$\boxed{rot\vec{F_k} = \vec{0}}$$

$c)$

$$\vec{f} = \vec{F_{-2}} \quad \Rightarrow \quad div\vec{f} = 0 \quad \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

Como la esfera (sólido), $0 \leq r \leq R$, contiene el punto $(0, 0, 0) \Leftrightarrow r = 0$, que es un punto singular de $\vec{f}$ no se puede aplicar el teorema de Gauss.

Entonces:

$$F_1 = \oiint_{E_{1\,ext}} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

Para $E_{1\,ext}$:

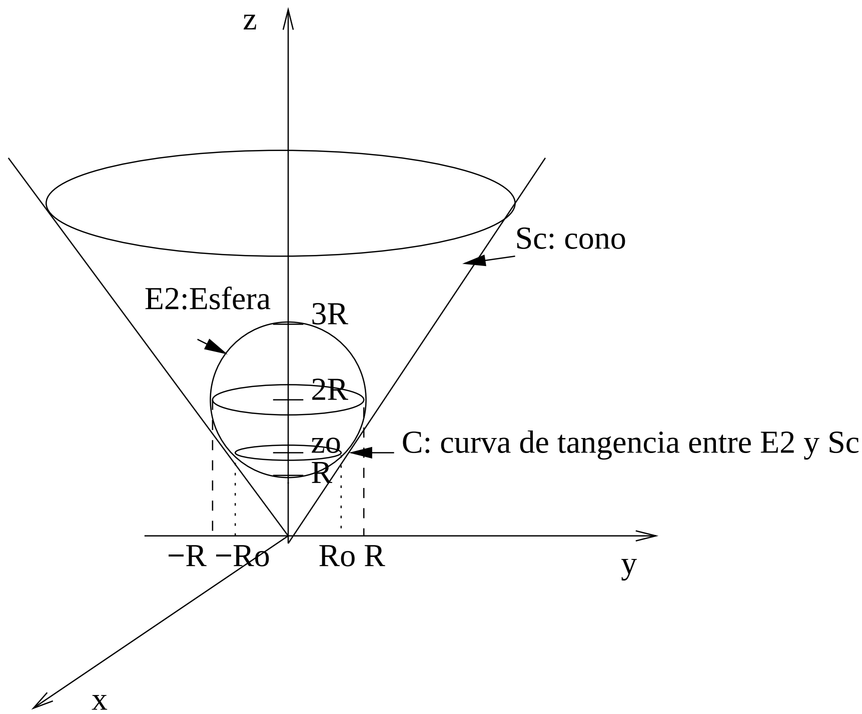
$$d\vec{S} = d\,S\,\vec{n_{ext}} = d\,S\,\hat{r} \qquad \hat{r} \equiv \vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{f} = \frac{\hat{r}}{R^2}$$

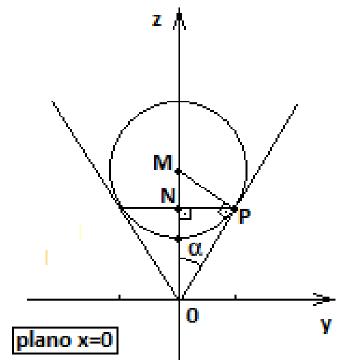
$$\vec{f}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{R^2}(\hat{r}\cdot\hat{r})d\,S = \frac{d\,S}{R^2}$$

$$\boxed{F_1 = \frac{1}{R^2}\oiint_{E_1} dS = \frac{1}{R^2}\cdot \acute{A}rea_{E_1} = \frac{1}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi}$$

d) El dibujo que se pide en el enunciado es:



e) Semiplano $x = 0$ $(z \geq 0)$ con las secciones de E_2, S_C y C:



$P'(x_0, y_0, z_0)$: punto de contacto de E_2 y S

$M(0, 0, 2R)$: centro de E_2

$N(0, 0, z_0)$: centro de C

$\overline{PN} = y_0 = R_0$: radio de C

$\widehat{OPM}$: ángulo rectángulo $\quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$$

$\cos\alpha = \frac{\overline{OP}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad OP = R\sqrt{3}$

$\widehat{OPN}$: ángulo rectángulo

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PN}}{\overline{OP}} = \frac{R_0}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{R_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}R}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} = \frac{z_0}{R\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \quad \boxed{z_0 = \frac{3}{2}R}$$

OBSERVACIÓN: La ecuación de S_C es $z^2 = 3(x^2 + y^2)$

f) C está en el plano $z = z_0 = \frac{3}{2}R$ y, sobre éste, su ecuación es:

$$x^2 + y^2 = R_0^2 = \frac{3}{4}R^2$$

De aquí, una parametrización de C es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos t \\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{2}R\sin t \\ z & = & \frac{3}{2}R \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi)$$

o en forma vectorial:

$$\vec{r_c}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin t, \frac{3}{2}R\right) \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{r_c}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin t, \frac{3}{2}R\right) \quad t \in [0, 2\pi)$$

g) Primer método:

Resolviendo la integral curvilínea que define la circulación:

$$\text{Circ} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

Como no se indica el sentido de recorrido de C tomamos la orientación dada por la parametrización hallada en f).

$$\text{Circ} = \int_0^{2\pi} \left\{\vec{f}\,[\vec{r_c}(t)] \cdot \vec{r_c}\,'(t)\right\} dt$$

$$\vec{f} = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}\,[\vec{r_C}(t)] = \frac{\vec{r_c}}{r_c^3}$$

$$\vec{r_c}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin t, \frac{3}{2}R\right) \quad t \in [0, 2\pi)$$

$${r_c}^2 = \frac{3}{4}R^2\cos^2 t + \frac{3}{4}R^2\sin^2 t + \frac{9}{4}R^2 = 3R^2 \quad \Rightarrow \quad r_c = R\sqrt{3}$$

$$\vec{r_c}\,'(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}R\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos t, 0)$$

$$\boxed{Circ = \frac{1}{3\sqrt{3}\,R^3}\int_0^{2\pi} \vec{r_c}(t) \cdot \vec{r_c}\,'(t)\,]dt = 0}$$

Segundo método: Aplicando el teorema de Stokes e un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ que contenga a C y no al origen; por ejemplo la esfera E_2 como sólido. Como $\vec{f}$ es irrotacional en D, simplemente conexo, y C es una curva cerrada:

$$Circ = \iint_S rot\vec{f} \cdot d\vec{S} = 0$$

siendo S un casquete de superficie regular contenido en D que se apoyeen C; por ejemplo la parte de E_2 por encima del plano $z = z_0$, la parte de E_2 por debajo de $z = z_0$ o el círculo definido por C.

$h)$

$$F_2 = \oiint_{E_{2\ ext}} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

Como existe un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$,que contiene a E_2, simplemente conexo y que no contiene al origen (punto singular de $\vec{f}$) se puede aplicar el Teorema de Gauss. Entonces:

$$F_2 = \iiint_V div \vec{f}\, dV$$

siendo V la esfera (sólido) encerrada por E_2. Y como $\vec{f}$ es adivergente (solenoidal) en D:

$$div\,\vec{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_2 = 0}$$

$\blacksquare$