

simplyjarod.com

AVEC

Apuntes de clase

Apuntes y exámenes ETSIT UPM



Si alguna vez estos
apuntes te sirvieron
de ayuda, piensa que
tus apuntes pueden
ayudar a muchas
otras personas.

Comparte tus apuntes
en simplyjarod.com

Pedro Zufiria → Dep. Mat. Despacho A-306 email: pedro.zufiria@upm.es

Tutorías: L y X → 10-11, 13-14, 15-16

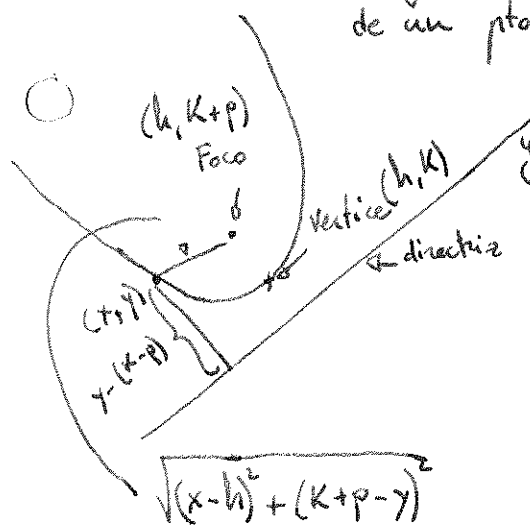
Muy recomendado leer Guía docente

Bibliografía: "Cálculo 2" - R. Larson y B.H. Edwards

Cónicas (intersección cono y plano)

Ecuación general → $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en el plano (coordenadas cartesianas)

• Parábola: definida por un pto y una recta. Lugar geométrico que equidista de un pto y una recta.



$$\sqrt{(x-h)^2 + (K+p-y)^2} = y - (K-p)$$

$$(x-h)^2 + (K+p-y)^2 = (y - (K-p))^2$$

$$(x-h)^2 + y^2 - 2y(K+p) + (K+p)^2 = y^2 - 2y(K-p) + (K-p)^2$$

$$(x-h)^2 = 4yp - 4Kp$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-K)$$

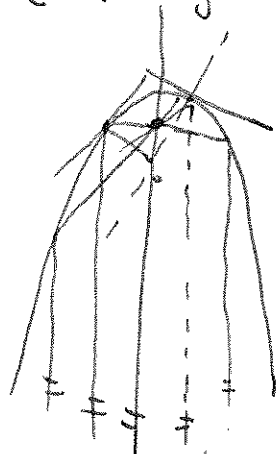
Ecuación general.

Distancia del foco al vértice

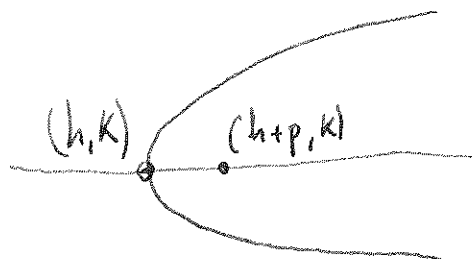
Ejemplo 1: $y = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2$; $2y = 1 - 2x - x^2$; $2y = 2 - 1 - 2x - x^2$;

$(x+1)^2 = -2y+2$; $(x+1)^2 = -2(y-1)$ Vértice $(h, K) = (-1, 1)$

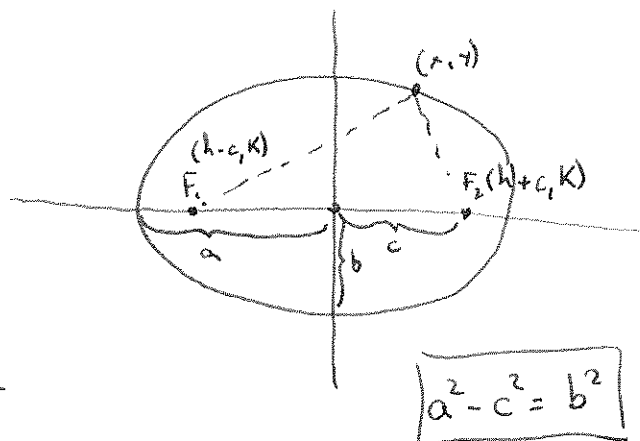
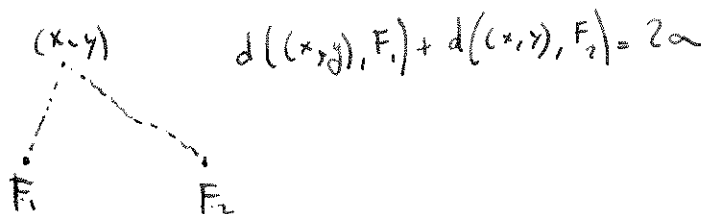
$p = -\frac{1}{2}$



rectas paralelas al eje de parábola "rebotan" y pasan todas por el foco



- Elipse: definida por dos puntos y una distancia. Lugar geométrico donde la suma de las distancias a los dos puntos dados es constante.



Ecuación cartesiana Elipse

$$\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} + \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} = 2a$$

$$(x-(h-c))^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + ((h+c)-x)^2 + (y-k)^2 - 4a\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2}$$

$$4a^2 - 4c(x-h) = 4a\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2}$$

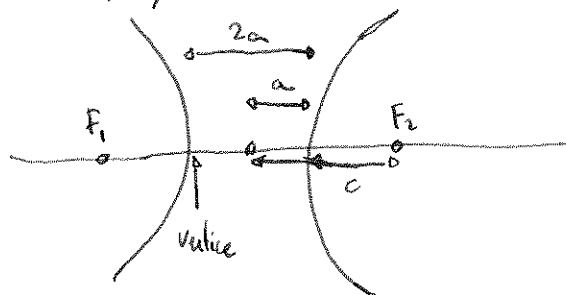
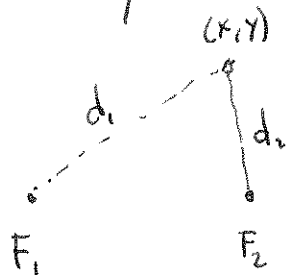
$$\Downarrow$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Excentricidad} \Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

Circunferencia = elipse con excentricidad 0.

- Hiperbola: definida por dos focos y una distancia. Lugar geométrico que cumple $\rightarrow d((x, y), F_1) - d((x, y), F_2) = 2a$



$$b^2 = c^2 - a^2$$

Ecuación de la hiperbola es: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Suponiendo que el centro es (h, k) y que los focos están alineados horizontalmente

Ejemplo 3: $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8; \quad 4x^2 - 8x + 4 + y^2 + 4y + 4 = 8 + 4 + 4;$$

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16; \quad \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

$$(h, k) = (1, -2)$$

$$a = 4 \quad (a \geq b)$$

$$b = 2$$

$$c = 2\sqrt{3}$$

Elipse Vertical

→ No podía ser hipérbola porque x^2 e y^2 tenían igual signo

→ No podía ser parábola porque hay un y^2

○ Ejercicio 8: hay una explosión y se escucha en dos micrófonos con un retardo entre uno y otro. ¿Dónde ha sido la explosión?

La solución es una rama de una hipérbola.

09/02/11

Hipérbolas

$$\left. \begin{aligned} y &= k + \frac{b}{a}(x-h) \\ y &= k - \frac{b}{a}(x-h) \end{aligned} \right\} \text{Asintotas de la hipérbola}$$

()

$y = f(x)$ es regular
($f \in C^1[a, b]$)
↓
 f derivable y f' es continua.

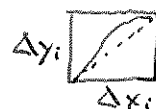
Longitud de arco de una función

$$L \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{\underbrace{(x_i - x_{i-1})^2}_{\Delta x_i} + \underbrace{(y_i - y_{i-1})^2}_{\Delta y_i}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

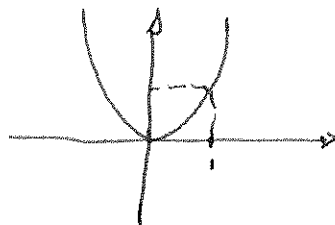
$$L \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$L = \lim_{\| \Delta \| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Teorema del valor medio dice que $\exists c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $\Delta y_i = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$

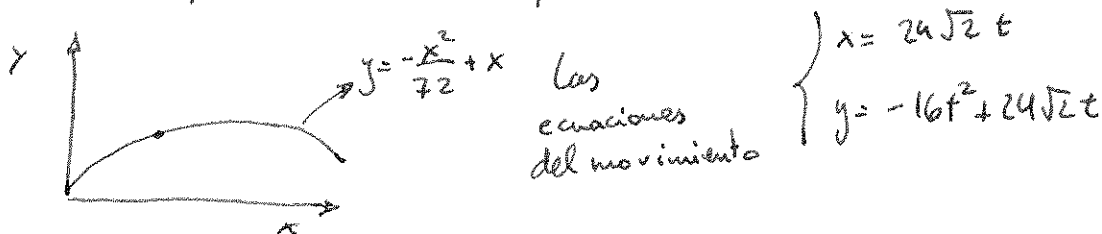


Ejemplo: Sea la parábola $y = x^2$
Calcular la longitud de 0 a 1



$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \left[x \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} + \frac{1}{4} \ln \left| x + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} \right| \right]_0^1 = \boxed{1.4789}$$

Curvas planas y ecuaciones paramétricas



Curva plana

Def. Sean f, g funciones continuas en $t \in I$
entonces $\left. \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ecuaciones paramétricas} \\ (t \text{ parámetro}) \end{array}$

Las ecuaciones dan lugar a una gráfica e conjunto de puntos (x, y)

Curva plana = ecuaciones paramétricas + gráfica

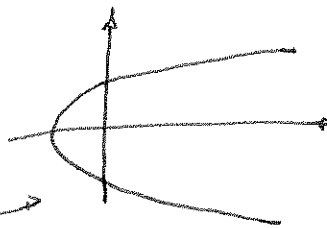
(orientación de la curva determinada por la dirección cuando $t \uparrow$)

Para hacer la relación entre x y y de la forma $y = F(x)$ hay que despejar t de la ecuación paramétrica.

Ejemplo: $\begin{cases} x = t^2 - 4 & -2 \leq t \leq 3 \\ y = \frac{t}{2}, \quad t = 2y \end{cases}$

$$x = (2y)^2 - 4 = 4y^2 - 4$$

No es aplicación.
No siempre vale.



Ejemplo:

$$\begin{cases} x = 4t^2 - 4 \\ y = t \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 3$$

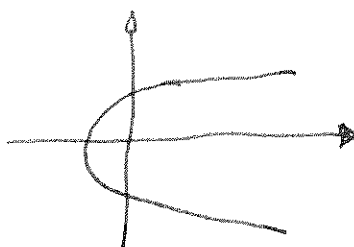
$$\Downarrow$$

$$x = 4y^2 - 4$$

Misma

gráfica que

antes pero se pierde información, como el tiempo t que tarda en "recorrerlo"



Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Sea la curva suave C con $f, g \in C^1(I)$ $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

entonces la pendiente de C en (x, y) viene dada por: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, $\frac{dx}{dt} \neq 0$

Demostración

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{f(t+\Delta t) - f(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}} =$$

$$= \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

()

Ejemplo: $x = 3 \cos \theta$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $y = 4 \sin \theta$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{x}{3}\right)^2 &= \cos^2 \theta \\ \left(\frac{y}{4}\right)^2 &= \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta; \quad \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1} \rightarrow \text{Elipse}$$

Derivada en un pto de la elipse $\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \end{cases}$

$$() \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{g'(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{4 \cos \theta}{-3 \sin \theta} = -\frac{4}{3} \cot \theta \Big|_{\theta = \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{3}$$

Longitud de un segmento de una curva cónica

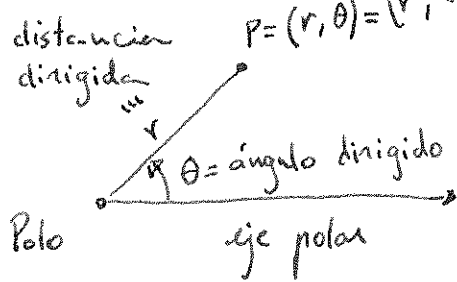
Para cuando tengo ecuaciones paramétricas:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

$$y = F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

Coordenadas polares

Es una alternativa de decir la posición de un punto, distinta a la cartesiana.



$$(r_0, \theta_0) \longrightarrow (x_0, y_0) \quad \begin{aligned} x_0 &= r_0 \cdot \cos \theta_0 \\ y_0 &= r_0 \cdot \sin \theta_0 \end{aligned}$$

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (r_0, \theta_0) \quad \begin{aligned} r_0 &= \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ \theta_0 &= \arctg \frac{y_0}{x_0} \end{aligned}$$

Gráficas polares

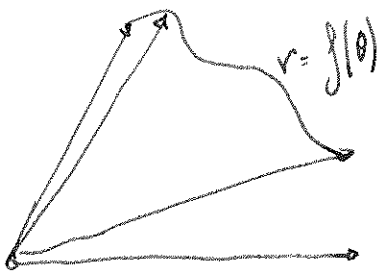
en general una gráfica viene dada por $r = F(\theta)$ ó $\theta = G(r)$ ó $H(r, \theta) = 0$

Ejemplo $\rightarrow r = 2$ pasarlo a cartesiano $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$; $x^2 + y^2 = 4$

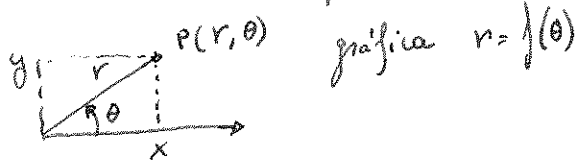
$$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \quad ; \quad y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} x \quad ; \quad y = \sqrt{3}x$$

$$\rightarrow r = \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad ; \quad r \cos \theta = 1 \quad ; \quad x = 1$$

Longitud curva/arco en polar

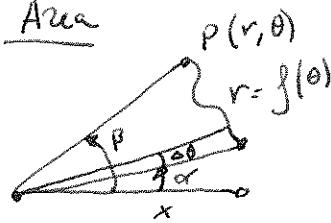


Coordenadas polares



gráfica $r = f(\theta)$

Area



Area aproximada de ese sector diferencial $\approx \frac{1}{2} \Delta \theta_i \cdot f(\theta_i) \cdot f(\theta_i)$

$$\text{Area total} \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_i f^2(\theta_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f^2(\theta_i) \cdot \Delta \theta_i$$

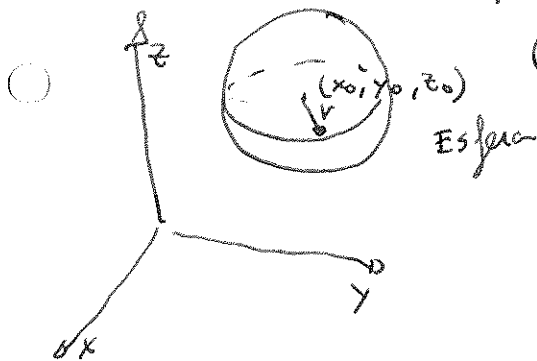
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f^2(\theta_i) \Delta \theta_i = \boxed{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta}$$

Longitud

$L \equiv$ longitud del arco generado por la gráfica $r = f(\theta)$ entre los valores $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta \rightarrow \text{Ejercicio: demostrar}$$

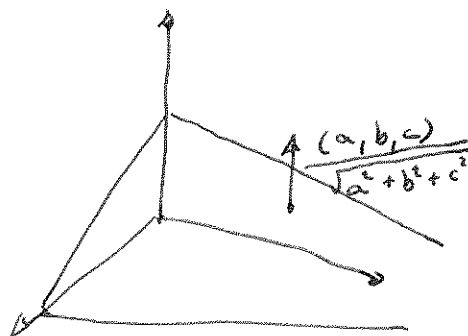
Superficies en el espacio



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Esfera

Plano
 $ax + by + cz + d = 0$



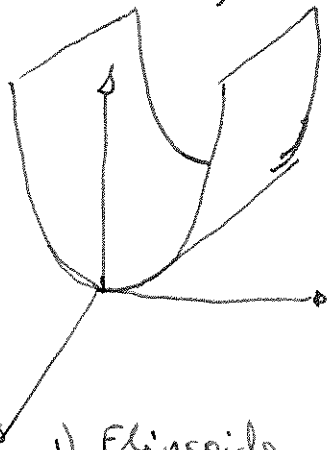
$$\frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cilindro

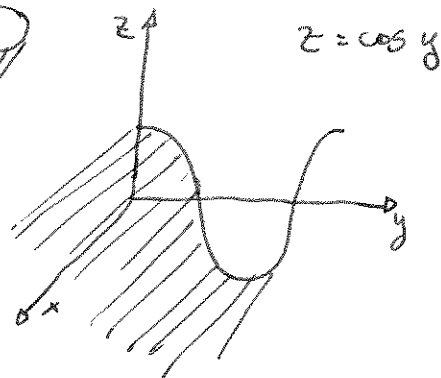
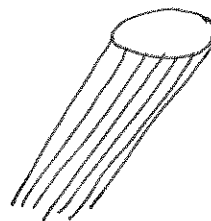
C : curva generatriz en un plano

Rectas paralelas que pasan por C trasladas al plano que contiene C

(cilindro recto)



cilindro no recto



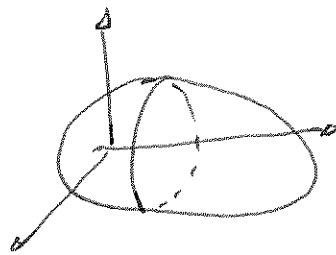
Superficies cuadráticas

Vienen dados por ecuaciones de 2º grado en tres variables:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

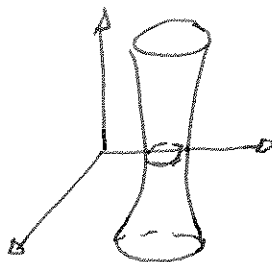
1) Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



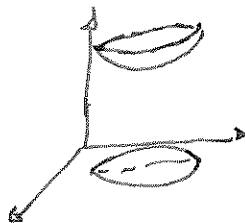
2) Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



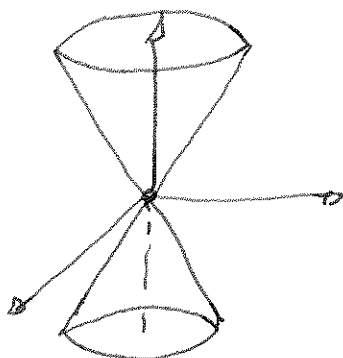
3) Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



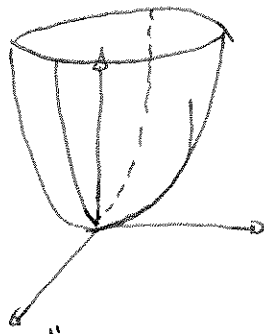
Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



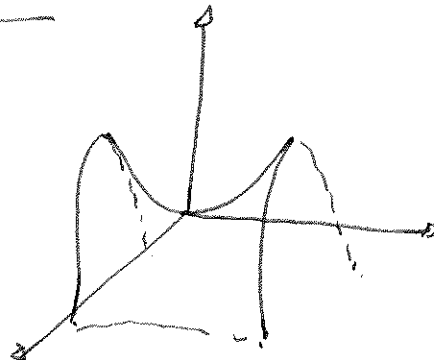
Paraboloides elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



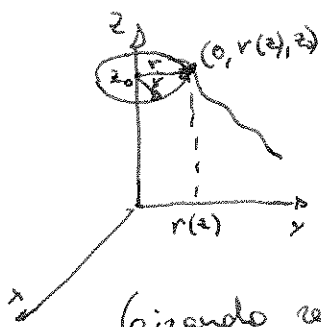
Paraboloides hiperbólico ("Silla de montar")

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$



Superficies de Revolución

Para un z_0 genero una circunferencia $\rightarrow x^2 + y^2 = r^2(z_0)$
 En general, para cualquier z , la superficie de revolución viene dada por la ecuación $\rightarrow x^2 + y^2 = r^2(z)$

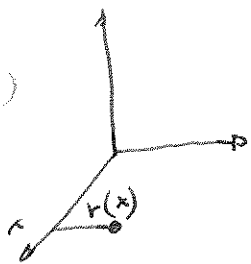


Girando respecto del eje x :

$$y^2 + z^2 = r^2(x)$$

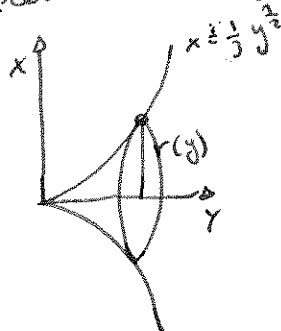
Girando respecto del eje y :

$$x^2 + z^2 = r^2(y)$$



Ejemplo: Sea la curva dada por $9x^2 = y^3$ al girar alrededor del eje y

$$x = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}$$



$$x^2 + z^2 = \frac{1}{9}y^3$$

Dado el elipsoide

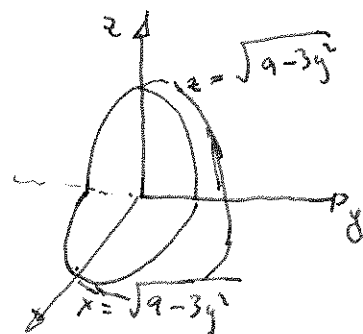
$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x^2 + z^2 = \underbrace{9 - 3y^2}_{r^2(y)}$$

obtener una directriz

y eje de revolución

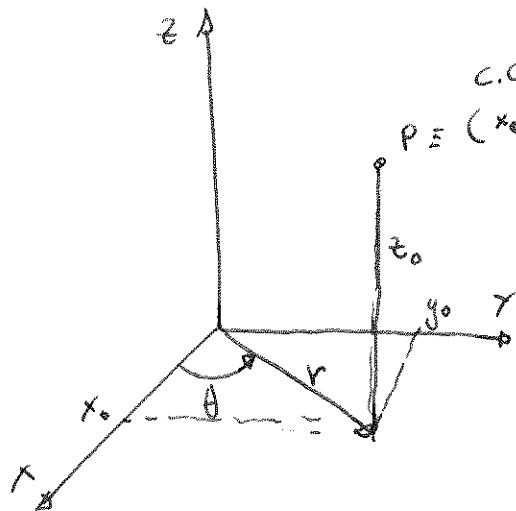
que la generan

$$r(y) = \sqrt{9 - 3y^2}$$



Coordenadas cilindricas

Es como la polar pero se incluye la z . cartesiana.

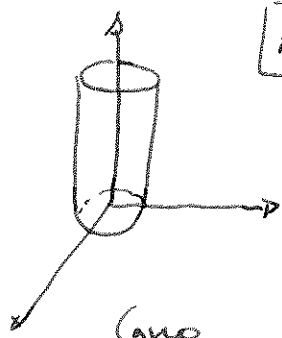


c. cartesianas c. cilindricas
 $P \equiv (x_0, y_0, z_0) \equiv (r_0, \theta_0, z_0)$

$$(x, y, z) \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

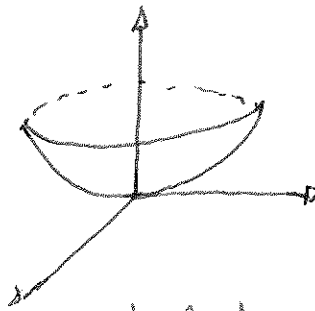
$$(r, \theta, z) \longrightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Cilindro



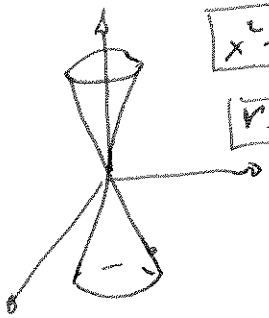
$x^2 + y^2 = 9$ c. cartesianas
 $r = 3$ c. cilindricas

Paraboloide



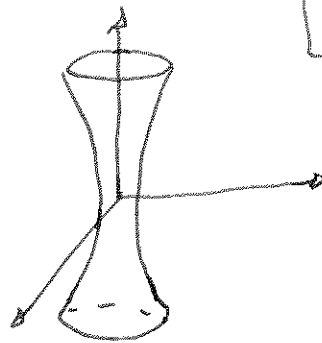
$x^2 + y^2 = 4z$ cartes.
 $r = 2\sqrt{z}$ cilindricas

Cono



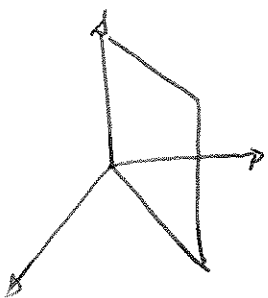
$x^2 + y^2 = z^2$ cartes.
 $r = z$ cilind.

Hiperboloide



$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ cartes.
 $r = z^2 + 1$ cilind.

Plano



$\theta = \frac{\pi}{4}$ cilind.

Coordenadas esféricas

Terna $\equiv$ (longitud, ángulo, ángulo)

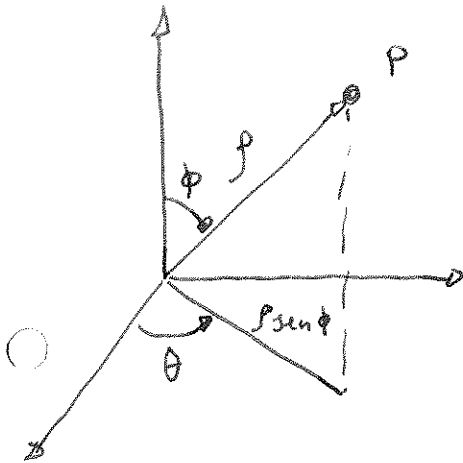
$$P \equiv (\rho, \theta, \phi)$$

Conversión de esféricas a cartesianas

$$(\rho, \theta, \phi) \rightarrow \begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Paso de rectangular a esféricas

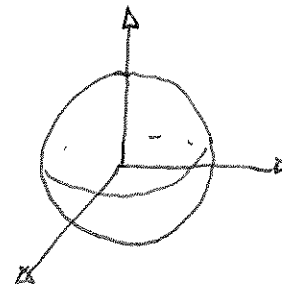
$$(x, y, z) \rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \\ \phi = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{cases}$$



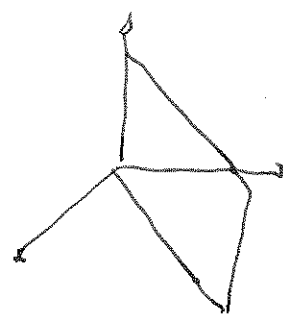
Hayon conversor de esféricas a cilíndricas

$$(\rho, \theta, \phi) \rightarrow \begin{cases} r = \rho \sin \phi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

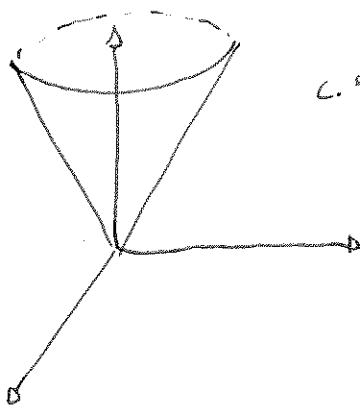
$$(r, \theta, z) \rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \theta \\ \phi = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \end{cases}$$



c. esféricas
 $\rho = cte$



c. esféricas
 $\theta = cte$



c. esféricas
 $\phi = cte$

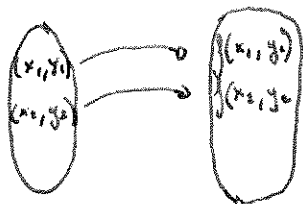
Funciones de varias variables

16/02/11

Ejemplos: $z = f(x, y) = x^2 + xy$

$w = f(x, y, z) = x + 2y - 3z$

Definición: Sea $D = \{ \text{pares ordenados de n.º reales} \}$. Si a cada par ordenado de (dos variables) (x, y) le hacemos corresponder un n.º real $f(x, y)$ se dice que f es función de (x, y) . $D \equiv$ dominio de f
 $\{ f(x, y) : (x, y) \in D \} \equiv$ rango de f



$f(x, y) = x^2 + y^2$, $D =$ todos los puntos del plano

$f(x, y) = \ln xy$, $D = \{ (x, y) / xy > 0 \}$

$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 9}{x}$, $D = \{ (x, y) / x^2 + y^2 \geq 9, x \neq 0 \}$

$f(x, y) = z$
 variable independiente $\uparrow$ variable dependiente

$g(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

$D = \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 < 9 \}$

$f(x, y), (x, y) \in D_2$

$g(x, y), (x, y) \in D_1$

$(f+g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$

$(x, y) \xrightarrow{f+g} f+g(x, y)$
 $f(x, y) + g(x, y)$

$\frac{f}{g}(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \forall (x, y) \in D_1 \cap D_2 - \{ (x, y) / g(x, y) = 0 \}$

Composición de funciones

$f(x, y) \xrightarrow{f} f(x, y) \xrightarrow{g} g(f(x, y))$ $(g \circ f)(x, y) = g(\underbrace{f(x, y)}_R)$

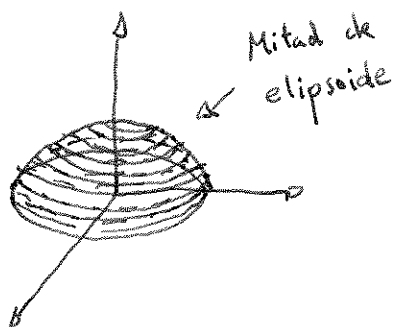
Graficas de dos variables

Es un conjunto de puntos de dos variables (x, y, z) para los que $z = f(x, y), (x, y) \in D$

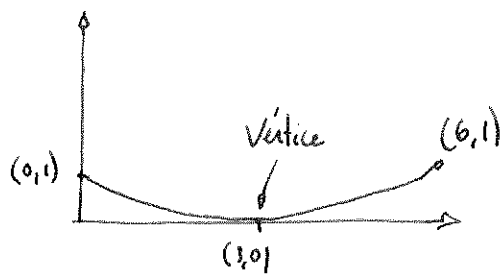
$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

$D = \{ (x, y) / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \}$

Rango de $f \equiv [0, 4]$



81 Pg 707



a) Ecuación parábola $\rightarrow (x-h)^2 = 4p(y-k)$

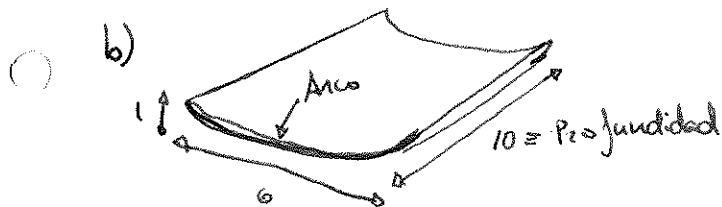
Coordenadas vértice $\rightarrow V = (h, k) = (3, 0)$

Sustituimos valores de h y k

$$(x-3)^2 = 4py$$

Tomando valores de x e y por un punto de la parábola $(0, 1)$

$$p = \frac{(x-3)^2}{4y} = \frac{(0-3)^2}{4} = \frac{9}{4} = p$$



La superficie del recolector será igual a la longitud del arco de la parábola multiplicado por la profundidad

Para hallar la longitud del arco utilizamos la siguiente ecuación:

$$L = \int_A^B \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad f(x) = \frac{(x-3)^2}{9} ; f'(x) = \frac{2x-6}{9} = \frac{x-3}{3}$$

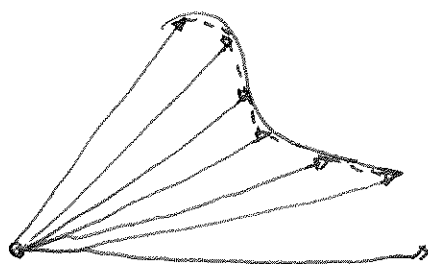
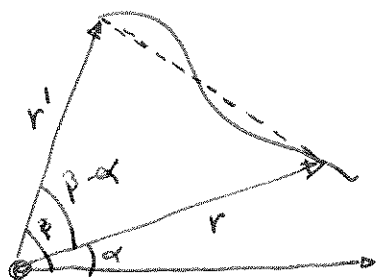
$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} dx = \int_0^6 \sqrt{\frac{x^2 - 6x + 18}{9}} dx = \left(\text{Integrando la expresión} \right)$$

$$= \left[\frac{x-3}{6} \sqrt{x^2 - 6x + 18} + \frac{3}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{1}{3}x - 1 \right) \right]_0^6 = 3\sqrt{2} - 3\ln(\sqrt{2} - 1) = 6,89 \text{ m}$$

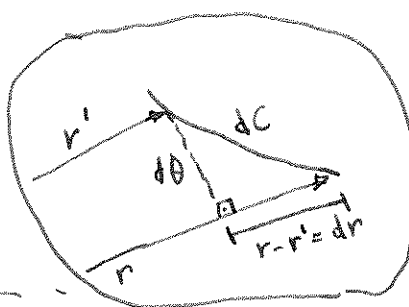
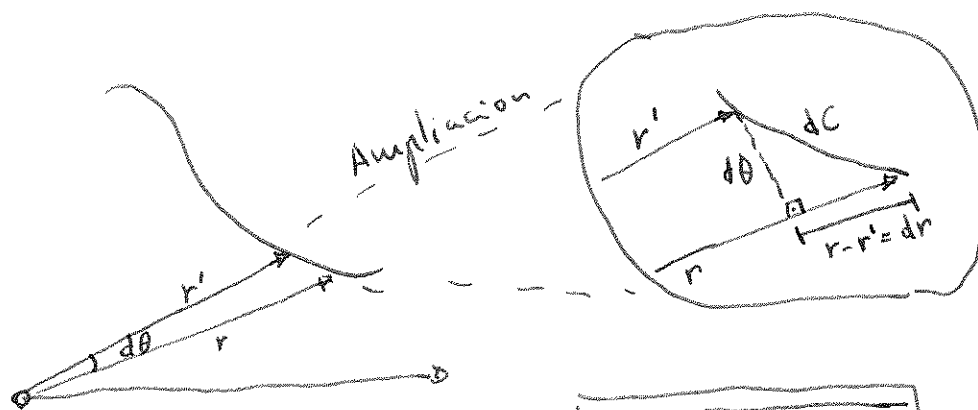
$$P = 10 \text{ m}$$

$$A = L \cdot P = 6,89 \cdot 10 = 68,9 \text{ m}^2$$

② Hacer la longitud de una curva en coordenadas polares



Para calcular la longitud de un arco podemos aproximarla a la distancia entre distintas particiones de la curva; cuantas más particiones hagamos sobre la curva con diferentes arcos, la aproximación se acercará más al valor real de la curva. Hagamos pues "infinitas" particiones de la curva cada una de ella separada un $d\theta$.



Tenemos pues la fórmula: $dC = \sqrt{(d\theta)^2 + (dr)^2}$ utilizando el T^{no} de Pita'goras

Entonces:

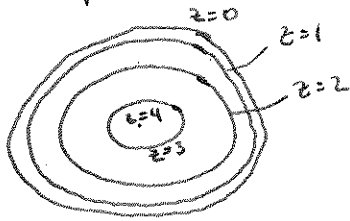
$$C = \int \sqrt{(d\theta)^2 + (dr)^2} = \int \frac{d\theta}{d\theta} \sqrt{(d\theta)^2 + (dr)^2} = \int \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}_{\text{la pendiente}} \cdot d\theta$$

$$C = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Curvas de Nivel

Son una alternativa de representar funciones de dos variables mediante un campo escalar en el que el escalar $z = f(x, y)$ se asigna al punto (x, y) . Caracterizado por curvas de nivel o líneas de contorno a lo largo de las cuales $f(x, y)$ es constante ($f(x, y) = cte$)

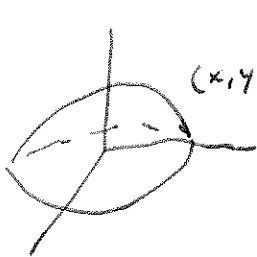
Elipsoide



Representación de función de 3 variables

↳ Superficies de Nivel

$$W = f(x, y, z)$$

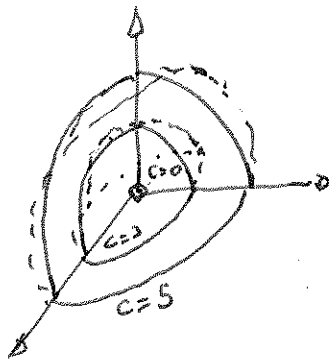


$$(x, y, z) \mid f(x, y, z) = cte$$

Ejemplo: $4x^2 + y^2 + z^2$

constituyo superficies
para valores de c

$$4x^2 + y^2 + z^2 = c$$



21/02/11

Límites y continuidad de funciones de varias variables

La distancia es una aplicación: $d: P \times P \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto d(x, y)$$

Propiedades

1) $d(x, y) \geq 0, \forall (x, y)$

2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x, y) = d(y, x)$

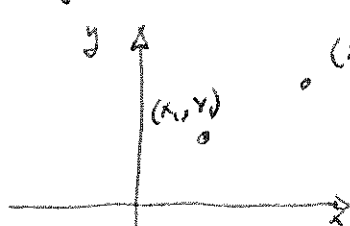
4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Funciones de 2 variables

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Necesito topología

La forma más sencilla y natural es definir una distancia



$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

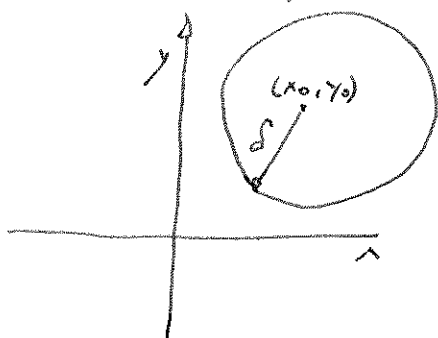
Def. disco de radio δ centrado en (x_0, y_0)

$$D_\delta((x_0, y_0), \delta) = D_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$
 disco abierto

$$\bar{D}_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta\}$$
 disco cerrado

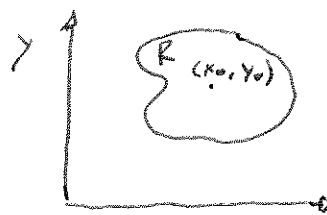
Entorno de (x_0, y_0)

Todo conjunto que contiene a $D_\delta((x_0, y_0))$ para algún $\delta > 0$ $\bigcup_{\delta > 0} D_\delta((x_0, y_0)) \supseteq D_\delta((x_0, y_0))$ para algún δ



Puntos interior, exterior, etc. conjuntos abiertos y cerrados

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$



(x_0, y_0) es punto interior de R si: $\exists$ un entorno de (x_0, y_0) , $U^{(x_0, y_0)}$ tal que $U^{(x_0, y_0)} \subseteq R$

(x_0, y_0) es un punto exterior de $\hat{R}$ si $\exists$ un entorno de (x_0, y_0) , $U^{(x_0, y_0)}$ tal que $U^{(x_0, y_0)} \subseteq \mathbb{R}^2 - R$ ($U^{(x_0, y_0)} \cap R = \emptyset$)

(x_0, y_0) es un punto frontera de R , si $\forall U^{(x_0, y_0)}$ $\left\{ \begin{array}{l} U^{(x_0, y_0)} \cap R \neq \emptyset \\ U^{(x_0, y_0)} \cap (\mathbb{R}^2 - R) \neq \emptyset \end{array} \right.$

(x_0, y_0) es un punto de acumulación de R si $\forall U^{(x_0, y_0)} \setminus \{(x_0, y_0)\} \cap R \neq \emptyset$ ((x_0, y_0) pto de acumulación puede pertenecer o no a R)

si (x_0, y_0) pertenece a R entonces es pto de acumulación o punto aislado

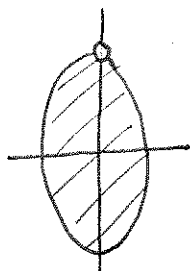
Definiciones

1) R es una región abierta si $\forall (x,y) \in R$, (x,y) es interior de R

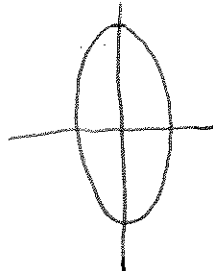
2) R es una región cerrada si $\forall (x,y)$ frontera de R , $(x,y) \in R$

R puede ser ni abierto ni cerrado o abierto y cerrado a la vez

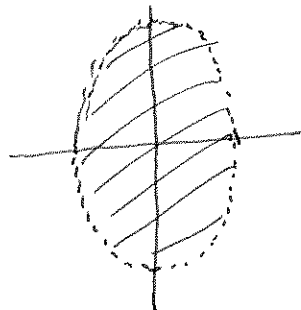
$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1 \right\}$$



Conjunto ni cerrado ni abierto



Conjunto cerrado y no abierto



Conjunto abierto
todos los pts de R son pts de acumulación



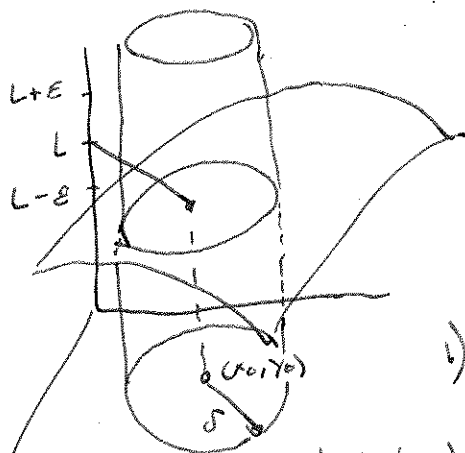
ni abierto ni cerrado

Conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \rightarrow$ es abierto y cerrado. Su frontera es $\emptyset$ y todo conjunto contiene a $\emptyset$.

Límite de una función de dos variables

Sea f una función de dos variables definido en algún $D_\delta((x_0, y_0))$ excepto probablemente en (x_0, y_0) ((x_0, y_0) es punto de acumulación del dominio de f)

Entonces: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L$, si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|f(x,y) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$



Si existe límite, no debe depender de cómo nos acercamos a (x_0, y_0) si el límite dependiera del camino entonces no existe límite tal y como lo hemos definido.

1) Ejemplo: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 5x^2y = 0$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{si } (x,y) \text{ cumple } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$$

$$\epsilon = |5x^2y - 0| = 5x^2|y| \leq 5(x^2 + y^2)|y| = 5(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} \leq 5\delta^3$$

Dado epsilon, elija $\delta \leq \left(\frac{\epsilon}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$D \equiv \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Límite y continuidad en funciones de varias variables

23/02/11

Límite relativo a un subconjunto $B \subseteq D$ (tal que (x_0, y_0) es pto de acumulación de B)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ \text{en} \\ B}} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f|_B(x,y) ; \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ \text{en} \\ D}} f(x,y) \rightarrow \text{Si existe en } D, \text{ entonces} \\ \text{también existe en } B \\ \text{siendo } B \subseteq D$$

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \quad B = \{(x,y) : x=0\} - \{(0,0)\} = D \cap \{(x,y) : x=0\}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_B(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^2} = \frac{1}{0} \quad \nexists$$

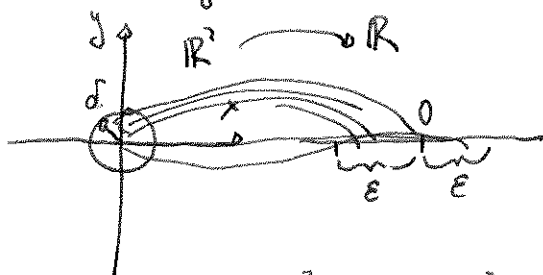
Como el límite en B no existe tampoco puede existir en D siendo $B \subseteq D$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} ; \quad D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_B(x,y) = \frac{5x^2 \cdot 0}{x^2} = \frac{0}{x} = 0 \quad B = \{(x,y) : y=0\} - \{(0,0)\}$$

Si existe algún límite
entonces que sea 0.

$$|f(x,y) - L| = \left| \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} \right| = 5 \underbrace{\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|y|}_{\leq \sqrt{x^2 + y^2}} \leq 5 \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\forall \epsilon, \exists \delta > 0 \quad \text{Dado } \epsilon > 0, \text{ elijo } \delta \leq \frac{\epsilon}{5}$$

$$\forall (x,y) \in D(\delta) \quad |f(x,y)| \leq 5 \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5\delta \leq \epsilon$$

$(x,y) \in D_{(0,0)}(\delta)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 ; \quad D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$B_1 = \{(x,y) : x=0\} \cap D \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{B_1}(x,y) = \left(\frac{-y^2}{y^2} \right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$B_2 = \{(x,y) : y=0\} \cap D \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{B_2}(x,y) = \left(\frac{x^2}{x^2} \right)^2 = 1^2 = 1$$

$$B_3 = \{(x,y) : x=y\} \cap D \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{B_3}(x,y) = 0$$

Como los límites son
distintos según los
caminos seguidos
podemos decir que
no existe límite.

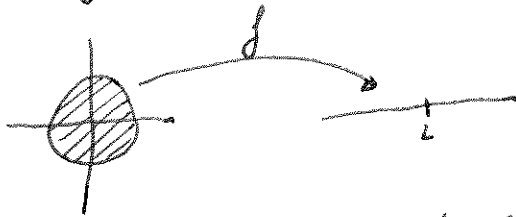
Límites de varias variables en coord. polares

• Muy útil para calcular límites centrados en $(0,0)$

Sea $A = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ Defino $g: A \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$

g cumple: 1) Es biyectiva sobre $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
 2) $g \in C(A)$

$$\forall r_0 > 0, g((r, \theta) : 0 < r < r_0, 0 < \theta \leq 2\pi) = D_{r_0}((0,0) - \{(0,0)\})$$



Sea $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$; entonces se cumple

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L \iff \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = L \text{ uniformemente en } \theta \in (0, 2\pi]$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot |y|}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}; D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta |\sin \theta|}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta |\sin \theta| = 0$$

Continuidad de una función de 2 variables

Def. Una función $f(x,y)$ es continua en un punto (x_0, y_0) de una región abierta R si:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Una función f es continua en R si lo es en todos sus puntos.

Tipos de discontinuidad

Evitable $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L$ pero $L \neq f(x_0, y_0)$

No evitable $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$

Teorema: Sea $K \in \mathbb{R}$, f, g , funciones continuas en (x_0, y_0) ;
entonces las siguientes funciones son también continuas en (x_0, y_0) :

1) $K \cdot f$ 2) $f \pm g$ 3) $f \cdot g$ 4) $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0, y_0) \neq 0$)

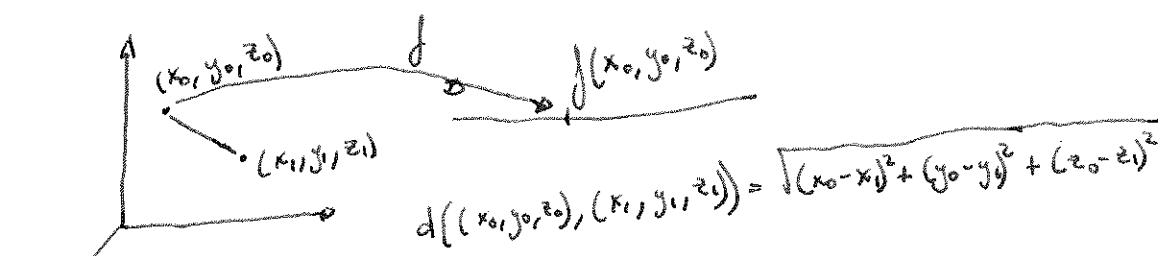
$$(K \cdot f)(x, y) = K \cdot f(x, y)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_f \text{ dominio donde está definida } f \\ D_g \text{ " " " " } g \end{array} \right\} \begin{array}{l} D_{K \cdot f} = D_f \\ D_{f \pm g} = D_f \cap D_g \\ D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g \\ D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{(x, y) : g(x, y) = 0\} \end{array}$$

Teorema: Si f es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $f(x_0, y_0)$ entonces
la función compuesta $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$ es continua en (x_0, y_0)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(f(x, y)) = g(f(x_0, y_0))$$

Continuidad de una función de 3 variables



Trabajamos con bolas (esferas):

$$B_\delta((x, y, z)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d((x_0, y_0, z_0), (x, y, z)) < \delta\}$$

Esfera abierta

Todas las definiciones vistas en $\mathbb{R}^2$ se extienden (abierto, cerrado, pto. de acumulación, etc)

Def. $f(x, y, z)$ es continua en un pto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}$ (su dominio abierto) si

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

f es continua en $\mathbb{R}$, si lo es en todos sus puntos

Continuidad de una función de 3 variables

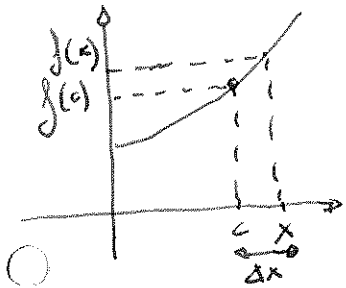
$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z} \quad , \quad D = \mathbb{R}^3 - P \quad ; \quad P \equiv \{(x, y, z) : \underbrace{x^2 + y^2 = z}_{\text{Paraboloide}}\}$$

Diferenciabilidad en funciones de varias variables

28/02/11

* Preliminares (recordatorio)

$y = f(x)$; f es diferenciable en c



$$\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad ; \quad \Delta x = x - c \quad ; \quad \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$$f'(c) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=c} \rightarrow \text{Leibnitz}$$

Aplicación lineal

$$L_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \rightarrow f'(c) \cdot h$$

$$(x - c) \rightarrow f'(c) \cdot (x - c)$$

Diferencial de f en c .

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{x - c} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{|f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)|}{|x - c|} = 0$$

$\Delta x \equiv$ incremento de variable indep. x

$\Delta y \equiv$ " " " dep y

$$\Delta x \equiv dx$$

$$\Delta y \approx dy = f'(c) \cdot dx = f'(c) \cdot \Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x) dx$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Función Función

Sean $z = f(x, y)$ Quiero extender el concepto de diferenciabilidad

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_0, y_0) \rightarrow f(x_0, y_0)$$

f es diferenciable en (x_0, y_0) si $\exists$ una aplicación lineal

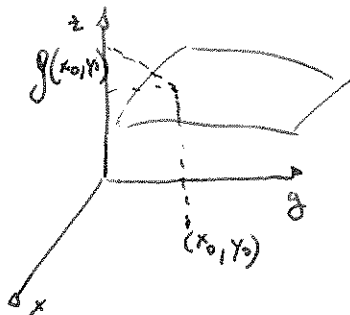
$$L_{(x_0, y_0)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(h_x, h_y) \rightarrow \alpha_x h_x + \alpha_y h_y$$

$$(x - x_0, y - y_0) \rightarrow \alpha_x (x - x_0) + \alpha_y (y - y_0)$$

que cumple:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{|f(x, y) - f(x_0, y_0) - L_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0)|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$$



Derivadas parciales

Sea $z = f(x, y)$

Def: Las primeras derivadas parciales de f con respecto a x y y son las funciones

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (\text{considerando } y = \text{cte.})$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (\text{considerando } x = \text{cte.})$$

siempre que estos límites existan

Ejemplo: $f(x, y) = 3x - x^2y + 2x^3y$; $f_x(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y$
 $f_y(x, y) = -2x^2y + 2x^3$

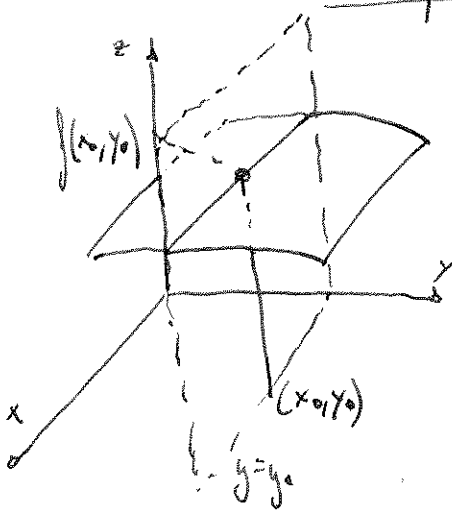
Notación: $z = f(x, y)$ $f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

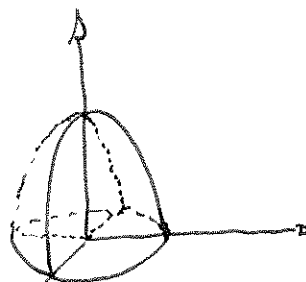
$$f_x(a, b) = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a, b)} \quad f_y(a, b) = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a, b)}$$

Interpretación geométrica

$\frac{\partial z}{\partial x}$



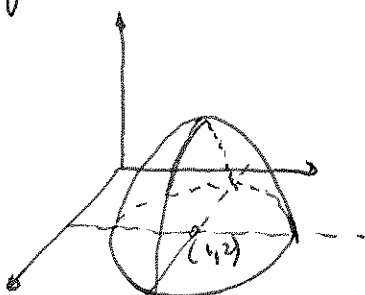
Ejemplo: $f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$
en el punto $P = (\frac{1}{2}, 1, 2)$



$$f_x(x, y) = -x \rightarrow f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f_y(x, y) = -2y \rightarrow f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2$$

$$f(x, y) = 1 - (x-1)^2 - (y-2)^2, \quad P = (1, 2, 1)$$



$$f_x(x, y) = -2(x-1) \rightarrow f_x(1, 2) = 0$$

$$f_y(x, y) = -2(y-2) \rightarrow f_y(1, 2) = 0$$

Derivadas parciales de función de tres variables

Sea $W = f(x, y, z)$ Se pueden definir las derivadas parciales (dejando fijo dos de las variables)

$$\frac{\partial W}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general: $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

puedo definir

$$\frac{\partial W}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, \dots, x_n); k = 1, 2, \dots, n$$

$$= \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = z \cdot \sin(xy^2 + 2z)$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = zy^2 \cos(xy^2 + 2z) \quad \frac{\partial W}{\partial y} = z2xy \cdot \cos(xy^2 + 2z)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 2z \cos(xy^2 + 2z) + \sin(xy^2 + 2z)$$

Derivadas parciales de orden superior

Es posible calcular segundas, terceras, etc. derivadas parciales (al igual que los ordinarios), siempre que existan.

Se denotan por el orden en que se hace la derivación. Por ejemplo, $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de 2º orden:

$$1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) \quad 2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}(x, y)$$

$\uparrow$
 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$

$$3) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Derivadas parciales} \\ \text{mixtas o cruzadas} \end{array}$$

$$4) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y)$$

Ejemplo: $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$; $f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2$

$f_{xy}(x, y) = 6y + 20xy$ No es siempre igual

$f_{xx}(x, y) = 10y^2$

$f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$

$f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy$

$f_{yy}(x, y) = 6x + 10x^2$

Teorema de igualdad de derivadas parciales mixtas

Sea $f(x, y)$ una función tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas en un disco abierto R .

Entonces $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) \quad \forall (x, y) \in R$

• Resultado aplicable a funciones de tres o más variables

• " " a derivadas de orden superior

Si las de tercer orden son continuas, entonces:

$W = f(x, y, z) \quad f_{xzy} = f_{zyx} = f_{yxz}, \text{ etc.} \quad f_{xyx} = f_{xxy} = f_{yxx}, \text{ etc.}$

Ejemplo: $f(x, y, z) = ye^x + x \cdot \ln z$

$f_x(x, y, z) = ye^x + \ln z \rightarrow f_{xz} = \frac{1}{z} \rightarrow f_{xzz} = -\frac{1}{z^2}$

$f_z(x, y, z) = \frac{x}{z} \rightarrow f_{zx} = \frac{1}{z} \rightarrow f_{zxx} = -\frac{1}{z^2}$

$f_{zz}(x, y, z) = -\frac{x}{z^2} \rightarrow f_{zzx} = -\frac{1}{z^2}$

Son iguales

Diferenciabilidad de funciones de varias variables

Sea: $z = f(x, y)$ $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

Me interesa estudiar el incremento de z al incrementar x e y .

$(\Delta y, f(x + \Delta x) - f(x) = \underbrace{f'(x) \cdot \Delta x}_{\text{aplicación lineal}} + \text{algo despreciable})$

Podemos aproximar tan bien que podemos obviar "lo despreciable"

$\Delta z = \underbrace{f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y}_{\text{diferencial}} + \text{despreciable}$

$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$ { Es una notación para hablar y trabajar con esa aplicación lineal que tan bien aproxima el incremento de mi función

Definición: Sea $z = f(x, y)$ f es diferenciable en (x_0, y_0) si Δz puede expresarse como:

$\Delta z = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$

f es diferenciable en una región abierta R , si es diferenciable en todos sus pts.

Ejemplo: $z = f(x, y) = x^2 + 3y$

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)^2 + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3y + 3\Delta y - x^2 - 3y = 2x\Delta x + 3\Delta y + \Delta x^2 + 0\Delta y = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$ donde $\begin{cases} \epsilon_1 = \Delta x \\ \epsilon_2 = 0 \end{cases}$

En una variable $\rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

diferenciabilidad implica continuidad

Teorema: (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $z = f(x, y)$ diferenciable en $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ es continua en (x_0, y_0)

Demo: f diferenciable en (x_0, y_0) ; $f(\underbrace{x_0 + \Delta x}_x, \underbrace{y_0 + \Delta y}_y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$

$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \epsilon_1(x - x_0) + \epsilon_2(y - y_0)}_{\text{tiende a 0 si } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)}$

$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} = 0$

derivada parcial en x
derivada parcial en y

~~Ejemplo:~~ f diferenciable $\Rightarrow \exists f_x, f_y$
 $\Rightarrow f$ es continua

Ejemplo: $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy=0 \\ 1 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$ ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

$$B_1 \{ (x,y); x=0 \} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{B_1} (x,y) = 0$$

$$B_2 \{ (x,y); x=y \} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{B_2} (x,y) = 1$$

$z = f(x,y)$ la consideramos en (x_0, y_0)

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + (\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y)$$

$$\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$$

$$(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$$

$$L(x_0, y_0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Aplicación lineal

Teorema: (condiciones suficientes para diferenciableidad)

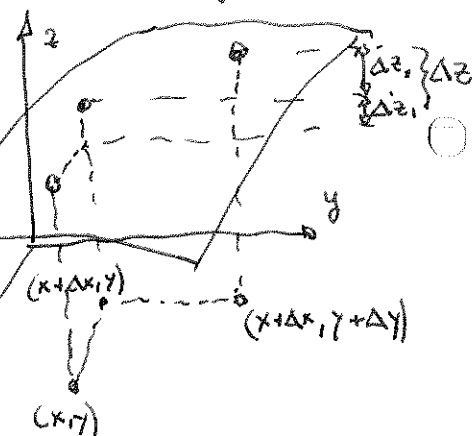
Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_x(x,y), f_y(x,y)$ son continuas en una region abierta R
 $R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Entonces f es diferenciable en R

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \underbrace{[f(x+\Delta x, y) - f(x,y)]}_{\Delta z_1} + \underbrace{[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)]}_{\Delta z_2}$$

$$\Delta z_2 = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) = f_y(x+\Delta x, y) \Delta y, \text{ (donde } y \leq y_1 \leq y+\Delta y)$$

$$\Delta z_1 = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = f_x(x_1, y) \Delta x, \text{ (donde } x \leq x_1 \leq x+\Delta x)$$



$$\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = \int_x(x, y) \Delta x + \int_y(x + \Delta x, y) \Delta y$$

Construimos ϵ_1 y ϵ_2

$$\epsilon_1 = \int_x(x, y) - \int_x(x, y) \quad \epsilon_2 = \int_y(x + \Delta x, y) - \int_y(x, y)$$

$$\Delta z = \int_x(x, y) \Delta x + \int_y(x, y) \Delta y + \underbrace{\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y}_{\text{Tiende a 0}}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_1 = \lim_{x \rightarrow x} \int_x(x, y) - \int_x(x, y) = 0$$

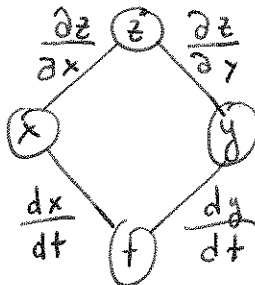
$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_2 = \lim_{y \rightarrow y} \int_y(x + \Delta x, y) - \int_y(x, y) = 0$$

De modo que por la condición de continuidad, es diferenciable

Regla de la cadena para funciones de varias variables

$$z = f(x, y)$$

x e y funciones de t



Teorema: Sea $z = f(x, y)$ donde f es diferenciable. Si $x = g(t)$ e $y = h(t)$ donde g y h son funciones derivables de t entonces $z(t) = f(x(t), y(t))$ es una función diferenciable de t

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

Demostración: Sabemos que g y h son derivables (diferenciables);

se cumple que $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$
 $t \rightarrow 0$

Además f es diferenciable:

con $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$

$$z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

Escogemos $\Delta t \neq 0$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dz}{dt} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}}_{f_x(x, y)} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}_{f_y(x, y)}$$

Ejemplo: $z = x^2 y - y^2$
 $x = \sin t$
 $y = e^t$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto (x(t), y(t)) \rightarrow f(x(t), y(t)) = z(t)$$

¿ $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=0}$? $z(t) = \sin^2 t \cdot e^t - e^{2t}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2x(t)y(t) + 2y(t)$$

Extensión a más variables

$$W = f(x_1, \dots, x_n) \text{ diferenciable} \Leftrightarrow \Delta W = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \int_{x_1} (x_1, \dots, x_n) \Delta x_1 + \dots + \int_{x_n} (x_1, \dots, x_n) \Delta x_n + \epsilon_1 \Delta x_1 + \dots + \epsilon_n \Delta x_n$$

$$\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \rightarrow 0$$

$$(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$$

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

$$W(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \text{ es derivable} \quad \frac{dW}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

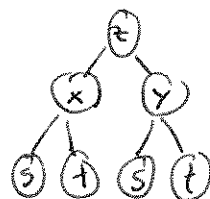
Das variables independientes

Teorema: Sea $z = f(x, y)$ f diferenciable. Si $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$

de manera que $\exists \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$, entonces existen $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Demo: aplico y teorema anterior pero t fijo y luego para s fijo.



Derivación o diferenciación parcial implícita

Nos basaremos en la regla de la cadena

Asumimos que x e y están relacionados por $F(x, y) = 0$, (donde se supone que $y = f(x)$, función derivable en x)

Quiero calcular $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Regla de la cadena

$z(x)$ es la función nula en D

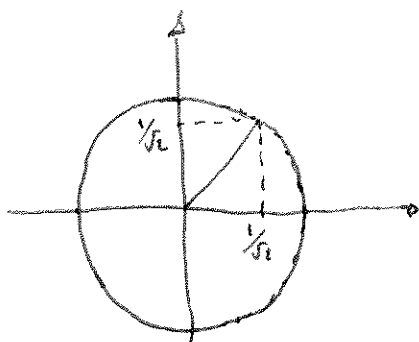
$$z = F(x, y) = \underbrace{F(x, f(x))}_{\text{función de } x} = 0 \quad \forall x \text{ en el dominio de } f$$

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

$$\frac{dz}{dx} = F_x(x, y) \cdot \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Ejemplo: $x^2 + y^2 - 1 = 0$



$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = - \frac{2x}{2y} = - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

Teorema: Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como función derivable de x , entonces

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x e y , entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}; \quad F_z(x, y, z) \neq 0$$

Ejemplo: $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$

Hay definido implícitamente una función $z = f(x, y)$ ¿ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$?

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5$$

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$

$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$

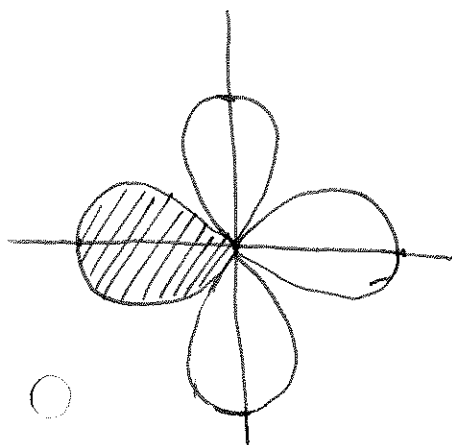
$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y} = \frac{2x^2y - 3z}{f(x, y)}$$

① Pg 747 n° 2

$$r = \cos 2\theta$$



$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

La figura representada es simétrica respecto al origen y el área sombreada es igual que las otras 3. Por simetría podemos decir que el área indicada va de $\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$. Así que el área será igual a:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} [\cos 2\theta]^2 d\theta$$

② Pg 748 n° 60

$$r = 8(1 + \cos \theta)$$

$$r'(\theta) = -8 \sin \theta$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$

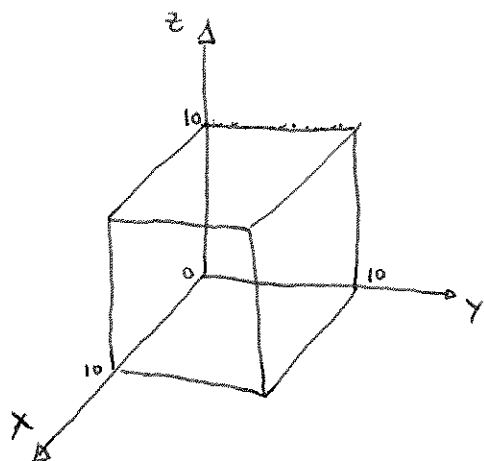
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(8 + 8 \cos \theta)^2 + (-8 \sin \theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{64 \cos^2 \theta + 128 \cos \theta + 64 + 64 \sin^2 \theta} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{128 \cos \theta + 64 + 64} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{128 \cos \theta + 128} d\theta = 8\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos \theta + 1} d\theta =$$

$$8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = \boxed{64\pi}$$

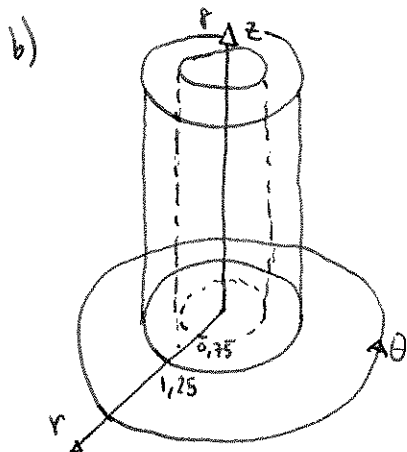
3) Pg 828 n° 115, 116 y 118

a) Cubo lado 10

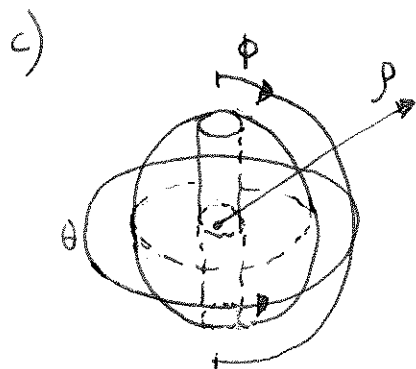


$$\left. \begin{array}{l} \text{Coordenadas} \\ \text{Cartesianas} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 \leq z \leq 10 \end{array}$$

En la ecuación no solo expresamos la corteza del cubo, sino también su interior



$$\left. \begin{array}{l} \text{Coordenadas} \\ \text{cilíndricas} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 8 \\ 0,75 \leq r \leq 1,25 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Coordenadas} \\ \text{esféricas} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2\text{sen}\phi} \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

④ Pg 881 n° 38

$$r(t) = \sqrt{t} i + 5t j + 2t^2 k ; \quad v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{t}} i + 5j + 4t k} \quad \text{velocidad}$$

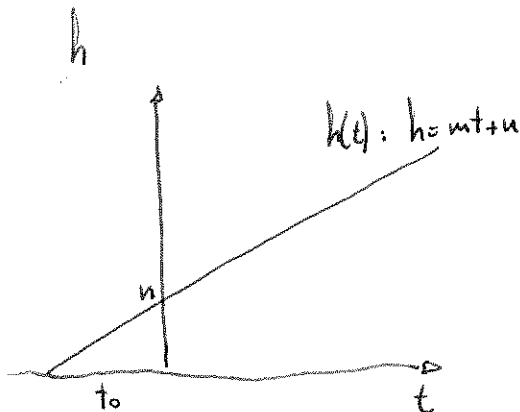
$$s(t) = \|v(t)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 + (5)^2 + (4t)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{1}{4t} + 25 + 16t^2}} \quad \text{celeridad}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \boxed{-\frac{1}{4t^{3/2}} i + 0j + 4k} \quad \text{aceleración}$$

⑤ Hora salida $\rightarrow 12:00$

$$r(t) \rightarrow r(1) - r(0) = 2e ; r(2) - r(0) = 3e$$

Nieve recogida por tiempo $\rightarrow h \cdot a \cdot v = cte$ (h = altura nieve, a = ancho quitanieves, v = velocidad quitanieves)



$$\boxed{m = \frac{n}{t_0}}$$

$$h \cdot a \cdot v = cte ; h = \frac{cte}{a \cdot v} = \boxed{\frac{K}{v} = h} \quad K = \frac{cte}{a}$$

$$\frac{K}{v} = mt + n ; \quad \boxed{v = \frac{K}{mt + n}}$$

$$v = \frac{dr}{dt} ; \frac{K}{mt + n} = \frac{dr}{dt} ; dr = \frac{K}{mt + n} dt ;$$

$$r(t) = \int_0^t \frac{K}{mt + n} dt = \frac{K}{m} [\ln(mt + n)]_0^t$$

$$\begin{cases} \frac{K}{m} [\ln(mt + n)]_0^1 = 2 ; \frac{K}{m} \ln(m + n) = 2 ; 3 \frac{K}{m} \ln(m + n) = 6 \\ \frac{K}{m} [\ln(mt + n)]_0^2 = 3 ; \frac{K}{m} \ln(2m + n) = 3 ; 2 \frac{K}{m} \ln(2m + n) = 6 \end{cases}$$

$$3 \frac{K}{m} \ln(m + n) = 2 \frac{K}{m} \ln(2m + n) ; t_0 = \frac{n}{m} ; \alpha = \frac{m}{n}$$

$$3 \ln(\alpha + 1) = 2 \ln(2\alpha + 1) ; (\alpha + 1)^3 = (2\alpha + 1)^2 ;$$

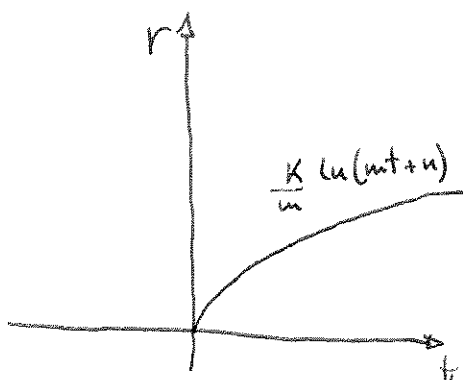
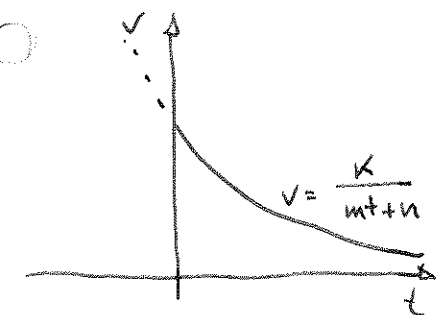
$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 ; \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha = 0 ; \alpha(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0$$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 0 \quad \text{soluciones reales} \rightarrow \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ; t_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = 0,618$$

$$0,618 \cdot 60 = 37,082 ; 12:00 - 0:37 = 11:23$$

11:23

Hora nevada





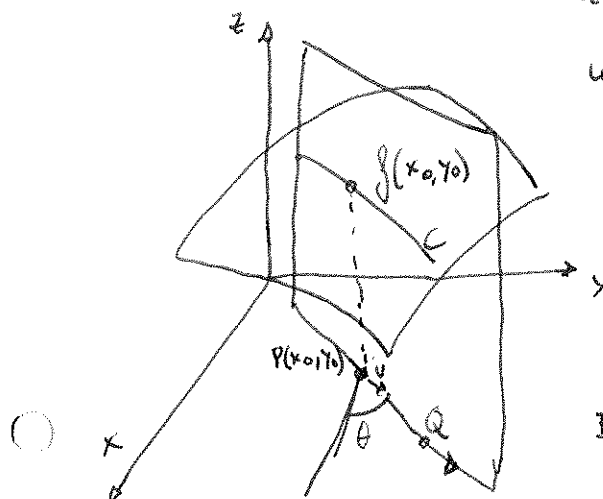
Derivadas direccionales y gradientes

Derivada direccional

Sea $z = f(x, y)$

Consideramos el punto (x_0, y_0) , vamos a definir la derivada direccional en dicho punto, dado por el vector unitario

$$u = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j} \quad \theta = \text{ángulo de } u \text{ con el eje } x \text{ positivo}$$



Plano vertical de corte es paralelo a u y pase por $(x_0, y_0, 0) = P$. Intersección del plano con la superficie de la curva C . Intersección del plano vertical con el plano xy ($z=0$) de la recta L .

$$\text{Ecuaciones de la recta } L: \begin{aligned} x &= x_0 + t \cos \theta \\ y &= y_0 + t \sin \theta \end{aligned}$$

En general, $\forall t$ $Q = (x, y)$ sera un punto en L y el punto $(x, y, f(x, y))$ sera un punto en C . Distancia de P a Q en el plano xy .

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{t^2 \cos^2 \theta + t^2 \sin^2 \theta} = |t|$$

La pendiente de la recta secante que pase por los puntos imagen P y Q será:

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Ahora estudiaremos el límite cuando $t \rightarrow 0$

Def. (Derivada direccional)

Sea $f(x, y)$ y sea $u = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ un vector unitario. Entonces la derivada direccional de f en la dirección de u es:

$$D_u f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) - f(x, y)}{t}; \text{ siempre que exista}$$

Teorema: Si f es una función diferenciable en (x, y) entonces, la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $u = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ viene dada por

- Que existan derivadas parciales no quiere decir que la función sea diferenciable.

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

Demo:

Sea (x_0, y_0) , y sean $x = x_0 + t \cos \theta$, $y = y_0 + t \sin \theta$

Definimos la función compuesta $g(t) = f(x(t), y(t))$

$$g'(t) = f_x(x, y) \cdot x'(t) + f_y(x, y) \cdot y'(t) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

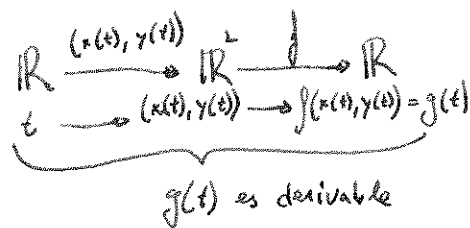
si $t=0$ entonces $x=x_0$, $y=y_0$

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0) \cos \theta + f_y(x_0, y_0) \sin \theta$$

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$f_x(x_0, y_0) \cos \theta + f_y(x_0, y_0) \sin \theta = D_v f(x_0, y_0)$$

$$f_x(x, y) = D_x f(x, y); \quad f_y(x, y) = D_y f(x, y)$$



Ejemplo: $f(x, y) = x^2 \sin y$; Hallar la derivada direccional en el punto $(1, \frac{\pi}{2})$ en la dirección dada por $v = 3i - 4j$ $\rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

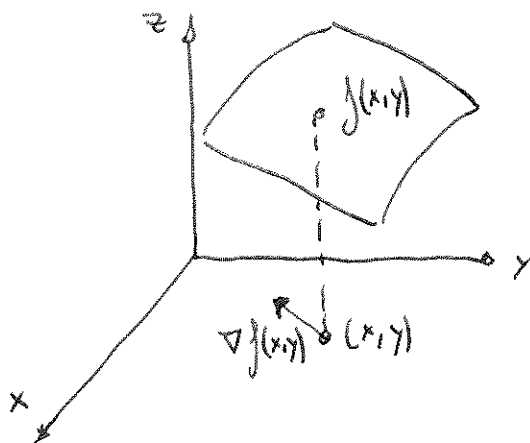
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \cos y$$

$$D_v f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \sin \theta; \quad D_v f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 \cdot \sin \pi \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot 1 \cdot \cos \pi \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

Gradiente de función de 2 variables

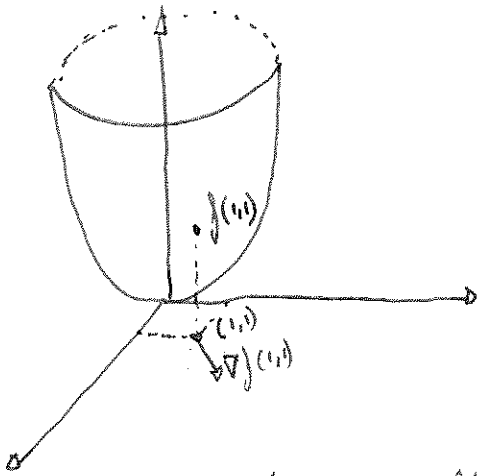
El gradiente de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

Def: Sea sea $z = f(x, y)$ tal que $\exists f_x(x, y), f_y(x, y)$. Entonces, el gradiente de f , denotado por $\nabla f(x, y)$ es el vector: $\text{grad}(f) = \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$



Ejemplo: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\text{grad } f(1,1) = \nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \right) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$



Teorema: (Forma alternativa de derivada direccional)

Sea $f(x, y)$ diferenciable, y $u = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ vector unitario

$$\boxed{D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u}$$

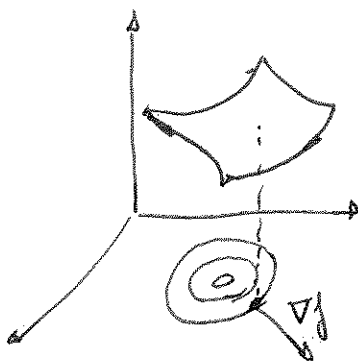
Teorema: (Propiedades del gradiente)

Sea $f(x, y)$ diferenciable:

- 1) Si $\nabla f(x, y) = 0 \Rightarrow D_u f(x, y) = 0, \forall u$
- 2) La dirección de máximo incremento de f está dado por $\nabla f(x, y)$
El máximo valor de $D_u f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$
- 3) La dirección de mínimo incremento de f está donde por $-\nabla f(x, y)$
El valor mínimo de $D_u f(x, y)$ es $-\|\nabla f(x, y)\|$

Teorema: (Gradiente es normal a las curvas de nivel)

Si $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal a la curva de nivel que pase por (x_0, y_0)



Funciones de 3 variables

Se pueden extender directamente las definiciones de $D_u f$ y ∇f

$$W = f(x, y, z)$$

Def: Sea $W = f(x, y, z)$ con derivadas parciales de f^{er} orden continuas.

La derivada direccional de f en la dirección de un vector unitario $u = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ está dado por $D_u f(x, y, z) = a f_x(x, y, z) + b f_y(x, y, z) + c f_z(x, y, z)$

El gradiente de f se define como:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}$$

Propiedades:

08 / 03 / 11

- 1) $D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot u$
- 2) Si $\nabla f(x, y, z) = 0 \Rightarrow D_u f(x, y, z) = 0 \quad \forall u$
- 3) La dirección de máximo incremento de f está dada por $\nabla f(x, y, z)$
El valor máx de $D_u f(x, y, z)$ es $\|\nabla f(x, y, z)\|$
- 4) La dirección de mínimo incremento está dado por $-\nabla f(x, y, z)$.
El valor mínimo de $D_u f(x, y, z)$ es $-\|\nabla f(x, y, z)\|$

Para funciones $z = f(x, y)$, las curvas de nivel son las curvas definidas implícitamente como $f(x, y) = K$

Teorema: Bajo hipótesis de regularidad, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pase por (x_0, y_0, z_0)

$$W = f(x, y, z) \quad S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = K\}$$

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - K \quad ; \quad F(x, y, z) = 0 \text{ superficie de nivel}$$

Planos tangentes y rectas normales a una superficie

Sea $S \equiv z = f(x, y)$

$F(x, y, z) = 0$; $F(x, y, z) = f(x, y) - z$

↑ Superficie de nivel de F

Sea $S \equiv F(x, y, z)$; y $(x_0, y_0, z_0) \in S$ ($F(x_0, y_0, z_0) = 0$)

Sea $C \equiv r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ curva contenida en S , pasa por P

$C \subset S \Rightarrow F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \forall t$

Si F es diferenciable

○ $F'(t) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \quad \forall t$

$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \right) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 0, \quad \forall t$

$P = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$

$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot r'(t_0) = 0$

gradiente de F
Vector tangente a C

Def (Plano tangente y recta normal)

○ Sea F diferenciable en $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ dada por $F(x, y, z) = 0$, tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

1) El plano que pase por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es el plano tangente a S en P .

2) La recta que pase por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es la recta normal a S en P .

Teorema (Ecuación de plano tangente)

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) entonces la ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es

$F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$

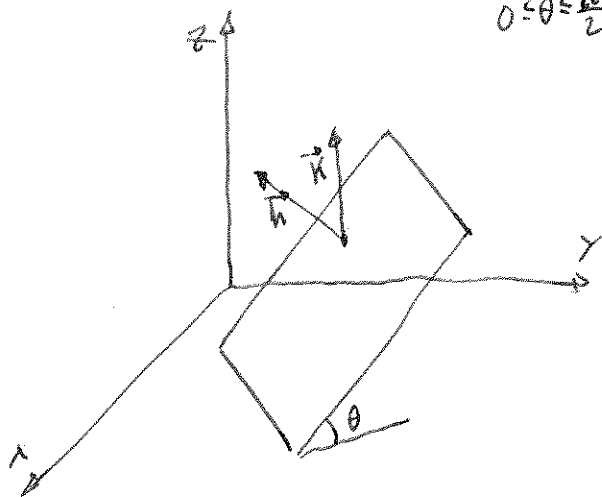
$(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \perp \nabla f(x_0, y_0, z_0)$

Medida de ángulo de inclinación de un plano

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Ángulo con el plano xy

$$\cos \theta = \frac{|\vec{h} \cdot \vec{k}|}{\|\vec{h}\| \cdot \|\vec{k}\|} = \frac{|\nabla F \cdot \vec{k}|}{\|\nabla F\|}$$



Ejemplo:

Sea la curva dada por intersección de dos superficies

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 2z^2 &= 20 \\ x^2 + y^2 + z &= 4 \end{aligned} \right\} \text{ Hallar la recta tangente a dicha curva en } P=(0,1,3)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 \equiv F_1(x,y,z) &= x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20 = 0 \Rightarrow \nabla F_1(0,1,3) = 4\vec{j} + 12\vec{k} \\ S_2 \equiv F_2(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z - 4 = 0 \Rightarrow \nabla F_2(0,1,3) = 2\vec{j} + \vec{k} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \nabla F_1(0,1,3) \times \nabla F_2(0,1,3) &= \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= -20\vec{i} \end{aligned}$$

(Faltan apuntes del 14/03/11)

16/03/11

Extremos de funciones

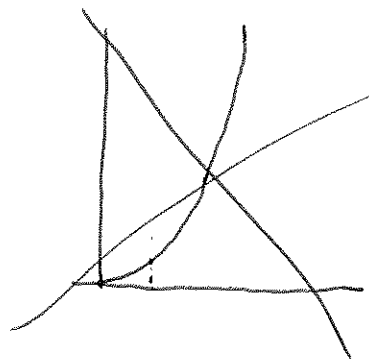
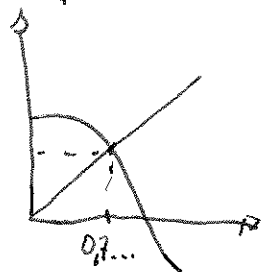
Para poder calcular máximos y mínimos de una función lo tenemos que hacer necesariamente en un conjunto cerrado y acotado.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x$, $x \in [0,1]$

$$\frac{x^2}{2} \rightarrow x=0 \rightarrow f(0)=0 \text{ min}, \quad x=1 \rightarrow f(1)=\frac{1}{2}$$

$$\sin x \rightarrow x=0 \rightarrow 0, \quad x=1 \rightarrow \sin 1$$

$$f'(x) = x - \cos x$$





ANÁLISIS VECTORIAL
GRUPOS DE MAÑANA

18 DE MARZO DE 2011

NORMAS DEL EXAMEN

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">Los móviles deberán estar apagados y guardados en un lugar no visible.El alumno dejará el DNI, pasaporte o carné de la UPM encima de la mesa.No se permite el uso de libros, apuntes o calculadoras. | <ul style="list-style-type: none">La duración de la prueba es de una hora y media.Todas las hojas que el alumno tenga encima de la mesa llevarán escrito necesariamente su nombre y apellidos.Cada ejercicio deberá entregarse por separado (cuando se empiece un ejercicio nuevo, utilice una hoja nueva). |
|--|---|

1.1. [4 PUNTOS] Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Estúdiese la continuidad de f en todo su dominio. *Si es cont.*
b) Calcúlense (en los puntos del dominio donde existan) $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. *en todo $\mathbb{R}^2$*
c) Calcúlense las derivadas direccionales $D_u f(0, 0)$ para todo vector unitario $u = (\cos \theta, \sin \theta)$. *0*
d) Estúdiese la diferenciabilidad de f en todo su dominio. *No es dif.*

1.2. [3 PUNTOS] Sean

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 z + z^2 x \quad ; \quad h(u, v) = (u + v, u - v, uv).$$

Calcúlese $\frac{\partial}{\partial u}(g \circ h)$ en $(1, 1)$.

9

1.3. [3 PUNTOS]

- a) Supongamos que la trayectoria de un móvil en el espacio viene dada, en coordenadas paramétricas, por la función $r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

$$v = (-\sin t, \cos t, 1)$$

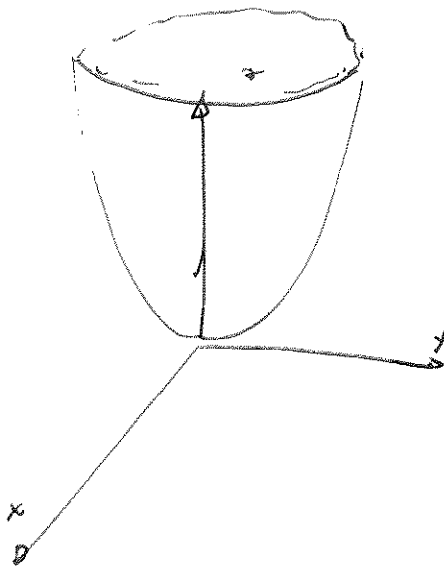
$$a = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

Calcúlense la velocidad $\frac{d}{dt}r(t) = r'(t)$ y la aceleración $\frac{d^2}{dt^2}r(t) = r''(t)$.

- b) Dada la superficie $z = x^2 + y^2$ calcúlese el plano tangente a dicha superficie en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 5)$.

$$3x + y - 7z - 30 = 0$$

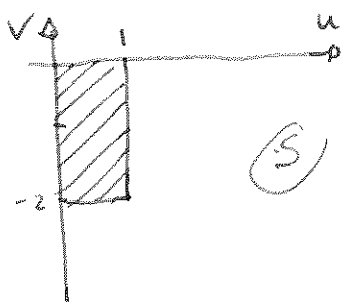
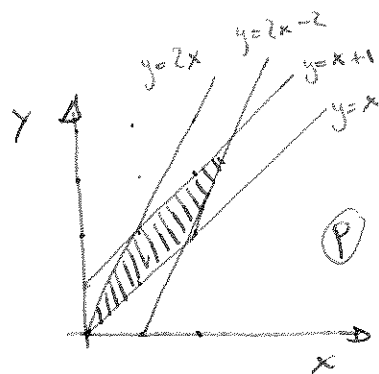
$$(2, 1, 1) t + (1, 2, 5)$$



AVEC

Juan Cabello
Sánchez

① Paralelogramo $\begin{cases} y=2x \\ y=2x-2 \\ y=x \\ y=x+1 \end{cases} \quad (x,y)=T(u,v)=(u-v, 2v-v); \quad \begin{cases} x=u-v \\ y=2v-v \end{cases}$



1) $y=2x \Rightarrow 2v-v = 2(u-v); 2v-2v+2v-v=0; \boxed{v=0}$
 2) $y=2x-2 \Rightarrow 2v-v = 2(u-v); \boxed{v=-2}$
 3) $y=x \Rightarrow 2v-v = u-v; \boxed{u=0}$
 4) $y=x+1 \Rightarrow 2v-v = u-v+1; \boxed{u=1}$

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial (u-v)}{\partial u} & \frac{\partial (u-v)}{\partial v} \\ \frac{\partial (2v-v)}{\partial u} & \frac{\partial (2v-v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-2) = \boxed{1}$$

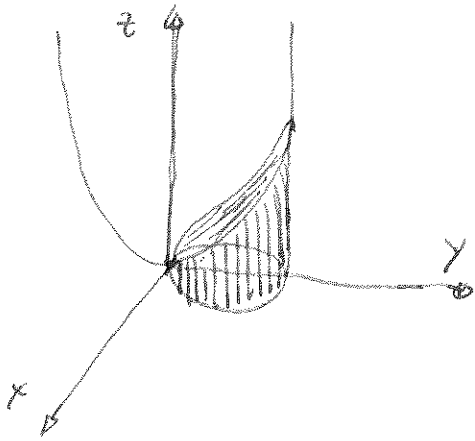
$$\iint_P xy \, dx \, dy = \iint_S (u-v)(2v-v) \cdot |H| \, du \, dv = \iint_S 2v^2 - 3uv + v^2 \, du \, dv =$$

$$\int_0^1 \int_{-2}^0 2v^2 - 3uv + v^2 \, dv \, du = \int_0^1 \left[2v^3 - \frac{3}{2}uv^2 + \frac{v^3}{3} \right]_{-2}^0 \, du = \int_0^1 \left(-4v^2 - 6v - \frac{8}{3} \right) \, dv =$$

$$\int_0^1 \left(4v^2 + 6v + \frac{8}{3} \right) \, dv = \left[\frac{4}{3}v^3 + 3v^2 + \frac{8}{3}v \right]_0^1 = \frac{4}{3} + 3 + \frac{8}{3} = \boxed{7}$$

② Parabolóide $\Rightarrow z = x^2 + y^2$

Cilindro $\Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$



$$(3) V = \{ (x, y, z) : z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leq z \}$$

Esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq z \rightarrow$ Centro $(0, 0, \frac{1}{2})$, radio $= \frac{1}{2}$

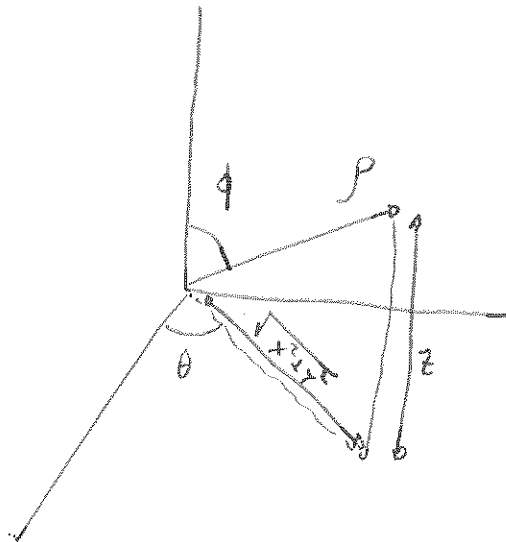
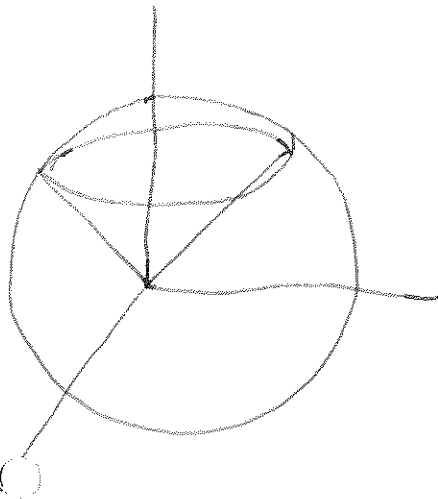
Cono $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$

Esfera $\rightarrow$ como $(x^2 + y^2 + z^2)$ son siempre ≥ 0 no podemos tomar valores negativos de z , porque sino no se cumple:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq z$$

$\rightarrow$ La z además estará definida solo en el intervalo $0 \leq z \leq 1$

puesto que para $(x, y) = (0, 0) \Rightarrow z^2 \leq z$; $z^2 - z \leq 0$; $z(z-1) \leq 0$
por tanto tendremos z solo en $0 \leq z \leq 1$



Cono $\rightarrow$ tenemos que se cumple $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$, el "borde" del cono son por tanto $\sqrt{x^2 + y^2} = z$

$$\phi = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \xrightarrow{\sqrt{x^2 + y^2} = z} \arctg \frac{z}{z} = \arctg 1 = \boxed{\frac{\pi}{4} = \phi}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \\ \phi = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = z \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 \sin^2 \phi = \rho \cos \phi \\ \rho^2 = \rho \cos \phi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho \sin^2 \phi = \cos \phi \\ \rho = \cos \phi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin^2 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^3}{3} \sin^2 \phi \right]_0^{\cos \phi} d\phi \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 \phi}{3} \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{4} \frac{\cos^4 \phi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} d\theta =$$

$$\left[\frac{\theta}{16} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{16} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

Se calculan ambos gradientes:

14/03/11

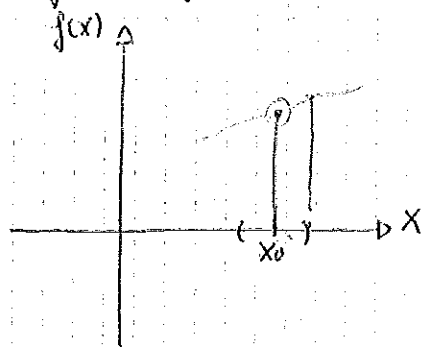
$$\left. \begin{aligned} \nabla F_1(0,1,3) &= 4\vec{j} + 12\vec{k} \\ \nabla F_2(0,1,3) &= 2\vec{j} + \vec{k} \end{aligned} \right\} \nabla F_1(0,1,3) \times \nabla F_2(0,1,3) = -20\vec{i}$$

siempre $\left\{ \begin{aligned} y &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned} \right.$ $\leftarrow$ condiciones de la curva tangente

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES:

Sea $f(x)$

Conozco $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + R$$

$$R = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n$$

ξ punto intermedio entre x y x_0

$f'(x_0) \rightarrow$ etc.

Máximo o mínimo: $f'(x_0) = 0$

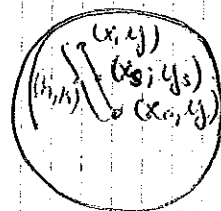
Mínimo: $f''(x_0) > 0$

Máximo: $f''(x_0) < 0$

Si $f''(x_0) = 0$ mirar los siguientes términos

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un entorno del punto (x_0, y_0) ; sin pérdida de generalidad elijo $A = D((x_0, y_0), \delta)$

disco abierto



$$(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$$

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f \in C^3(A)$

* Polinomio de Taylor:

Sea $f \in C^3(A)$. Definimos el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto (x_0, y_0) al polinomio:

$$\begin{aligned} T_2(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} h^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} k^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} 2 \cdot h \cdot k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} 2 \cdot k \cdot h \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} h + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} h \cdot k \end{aligned}$$

* Fórmula de Taylor:

Sea $f \in C^3(A)$. Para cualquier punto $(x, y) \in A$ (x_0+h, y_0+k) existe un valor $s \in (0, 1)$ que determina un punto $(x_s, y_s) = (x_0 + s \cdot h, y_0 + s \cdot k)$ en el segmento que une (x_0, y_0) y (x, y) , de

{ }

{ }

$$R_3(x_0+h, y_0+k) = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot h^3 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot h^2 k + \dots +$$

14/03/21

$$+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot h \cdot k^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot k^3;$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot h^2 k + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2 \partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot k^2 h$$

ample que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\|R_3(x_0+h, y_0+k)\|}{\|(h,k)\|^2};$$

$$R_3(x_0+h, y_0+k) = O(\|(h,k)\|^2)$$

Demos:

Defino $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto g(t) = (x_0+th, y_0+tK) \quad \text{--- es diferenciable.$$

$$g'(t) = (h, K), \quad \forall t \in (0,1)$$

$$g''(t) = (0,0), \quad \forall t \in (0,1)$$

Defino $h(t) = f(g(t))$ (composición de funciones)

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

h

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$$

$$[0,1] \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$$

$$0 \xrightarrow{\quad} h(0) = f(x_0, y_0)$$

$$1 \xrightarrow{\quad} h(1) = f(x, y) = f(x_0+h, y_0+K)$$

* Teorema del valor medio

$$h(1) = h(0) + h'(0) + \frac{1}{2!} h''(0) + \frac{1}{3!} h'''(s)$$

* Hay que volver a derivar con respecto a t .

$$f(x_0+h, y_0+K) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot h \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot K \right) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \dots$$

$$+ h(t) = f(g(t));$$

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} (x(t), y(t)) \cdot h' + \frac{\partial f}{\partial y} (x(t), y(t)) \cdot K$$

$$h''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot h'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot h' \cdot K + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot K \cdot h' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot K^2$$

* Notación compacta:

$H_f \equiv$ Matriz Hessiana de f

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x, y) \end{bmatrix}$$

(2)

{ }

{ }

es simétrica (siempre que $f \in C^3(A)$)

14/03/11

los autovalores
son reales

$$(h, K)^t \cdot Hf|_{(x_0, y_0)} (h, K)$$

$$[h, K] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \big|_{x_0, y_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \big|_{x_0, y_0} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \big|_{x_0, y_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \big|_{x_0, y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ K \end{bmatrix}$$

• Autovector: vector que al multiplicarse por una matriz da el mismo vector multiplicado por el autovalor

* En una matriz simétrica sus autovalores son ortogonales

Si (h, K) es autovector (asociado a λ_1) de $Hf|_{(x_0, y_0)}$

$$[h, K]^t \cdot Hf|_{(x_0, y_0)} \cdot [h, K] = (\lambda_1 \cdot \|(h, K)\|^2)$$

(autovector)

* Será positivo o negativo dependiendo del signo de los autovalores

Notación compacta:

$$\Rightarrow f(x_0 + h, y_0 + K) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\nabla f(x_0, y_0) (h, K)}_{1^\circ \text{ derivadas}} + \underbrace{\frac{1}{2} (h, K)^t Hf|_{(x_0, y_0)} (h, K)}_{2^\circ \text{ derivadas}} + o(\|(h, K)\|^2)$$

Residuo

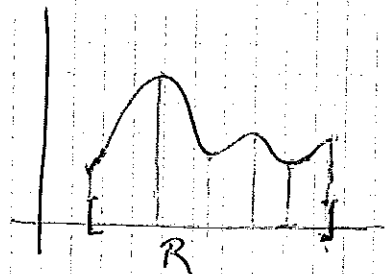
* Todo esto sirve para calcular min y max relativos

• EXTREMOS DE FUNCIONES:

* Recordando (1 variable)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

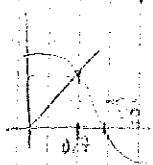
* Para que haya max y min:
función continua en un intervalo
cerrado y acotado
compacto



Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x$, $x \in [0, 1]$

Continua en un compacto:

$$f'(x) = \frac{2x}{2} - \cos x = x - \cos x, \quad x - \cos x = 0; \quad x = \cos x$$



* Funciones de dos variables:

Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ y $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$

Def: $f(x_0, y_0)$ es valor máximo de f (máximo absoluto) si:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in R$$

máx $f(x, y)$

(3)

8

8

Extremos en funciones de dos variables

Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ y $f: R \rightarrow \mathbb{R}$

Def: $f(x_0, y_0)$ es un valor máximo de f (máximo absoluto)

$$\text{si } f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in R$$

$$\max_{(x, y) \in R} f(x, y)$$

Si $f(x_0, y_0)$ es valor máximo $(x_0, y_0) =$ argumento máximo $f(x, y) \mid (x, y) \in R$

Def: $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo de f si $\exists U(x_0, y_0)$ tal que

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \in U(x_0, y_0)$$

Máx estricto: no hay mas puntos que sean iguales al máx. $f(x_0, y_0) > f(x, y) \forall x, y \in R$

Lo mismo con el mínimo.

Equivalente entre problemas

$$\max_{(x, y) \in R} f(x, y) = - \min_{(x, y) \in R} (-f(x, y))$$

$$\min_{(x, y) \in R} f(x, y) = - \max_{(x, y) \in R} (-f(x, y))$$

Teorema: Sea $f(x, y)$ continua y definida en una región R que es cerrada y acotada (compacta).

Entonces: 1) $\exists (x_0, y_0) \in R$ tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in R$

2) $\exists (x_1, y_1) \in R$ tal que $f(x_1, y_1) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in R$

$R = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ es un compacto

$$f: R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

(1,0) $f(1,0)$

Estudio de extremos

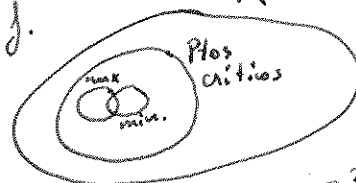
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad R \subset \mathbb{R}^2 \quad \frac{f(x,y) \leq f(x_0,y_0)}{?}$$

Definición (Puntos Críticos)

Sea $f(x,y)$ una función definida en R , abierto que contiene a (x_0, y_0) ; el punto (x_0, y_0) es un punto crítico de f si se cumple una de las siguientes condiciones:

- 1) $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
- 2) $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existe

Teorema: Si f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) en una región abierta R , entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f .



Ejemplo: Estudiar los extremos de $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$ definida en $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = 2x^2 + 8x + 8 + y^2 - 6y + 9 + 3 = 2(x+2)^2 + (y-3)^2 + 3$$

$$f_x(x,y) = 4x + 8 \quad f_y(x,y) = 2y - 6 \quad \text{¿} \exists (x_0, y_0) / f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \text{?}$$

$$(x_0, y_0) = (-2, 3)$$

$$2(x+2)^2 + (y-3)^2 + 3 \geq 3$$

↳ Alcanza mínimo en $(x_0, y_0) = (-2, 3)$

Ejemplo: $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$; $R = \mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y) = -\frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Como $f(x,y) \geq 0$ y es mínimo en $(x_0, y_0) = (0,0)$ será el punto $(0,0)$ un máximo en $f(x,y)$

Teorema: Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ para $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ abierto.
Matriz Hessiana

Para analizar la naturaleza de x_0, y_0 consideramos

$$d = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right]^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

- 1) Si $d > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f$ alcanza mínimo relativo en (x_0, y_0)
- 2) Si $d > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow f$ alcanza un máximo relativo en (x_0, y_0)
- 3) Si $d < 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de silla en (x_0, y_0)
- 4) Si $d = 0$, no sabemos nada

Polinomio característico (construido a partir de la matriz Hessiana):

$$l^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) l + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 = 0$$

Raíces son l_1 y l_2 , autovalores de la Hessiana

- 1) los dos autovalores positivos $\rightarrow$ Mín. Relativo
- 2) los dos autovalores son negativos $\rightarrow$ Máx. Relativo
- 3) los autovalores tienen distinto signo $\rightarrow$ Silla
- 4) Uno de los autovalores es igual a 0 $\rightarrow$ No se sabe

$$f(x, y) = -x^2 + 4xy - 2y^2 + 1 \quad \text{Hacer máx. y mín.}$$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -2x + 4y = 0 \\ f_y(x, y) = 4x - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2x + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3x^2 - 4x = 0 \\ x = 0; \frac{4}{3} \end{matrix}$$

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Construimos Matriz Hessiana

$$H_f = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (0,0) \\ \nearrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad d = 0 \cdot (-4) - 4 \cdot 4 = -16$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 16 = 0 \quad \nearrow \quad \begin{matrix} \text{Valores de } \lambda \text{ son de} \\ \text{distinto signo} \\ \text{Silla} \end{matrix}$$

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$d = (-8)(-4) - 4 \cdot 4 = 16 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 + 12\lambda + 16 = 0$$

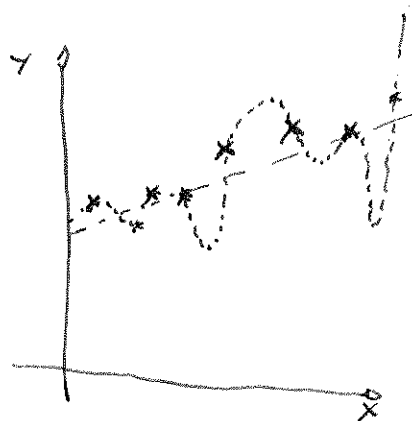
Los dos autovalores son negativos

Hay un máximo

Repaso Taylor

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \dots$$

Método de mínimos cuadrados

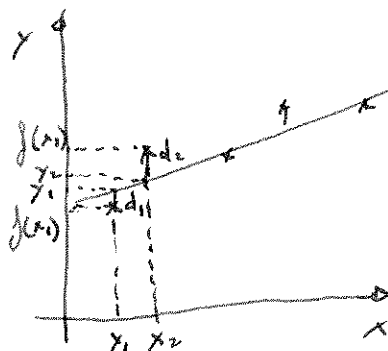


Dispongo de una ecuación de datos $(x_i, y_i), i=1, \dots, n$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = f(x)$$

Lo está solución es peligrosa, porque no sabes como actúa entre los puntos.

Una solución mejor sería construir una recta (que no tiene porque pasar por todos los puntos) y que refleje el comportamiento de ellas.



$$f(x) = ax + b$$

$$S = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = S(a, b)$$

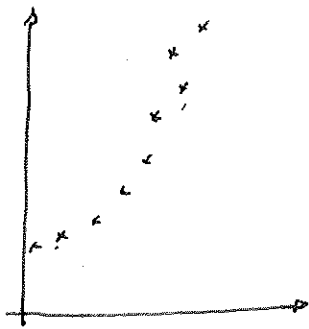
$$\frac{\partial S}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 2a \sum_{i=1}^n x_i + 2bn - 2 \sum_{i=1}^n y_i = 0$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Aplicaciones del cálculo de extremos de funciones



$ax+b=f(x)$ $\rightarrow S(a^*, b^*)$ demasiado grande

$$ax^2+bx+c=f(x)$$

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$$

(a^*, b^*, c^*) punto donde se alcanza extremo, debe cumplir que sea solución del sistema

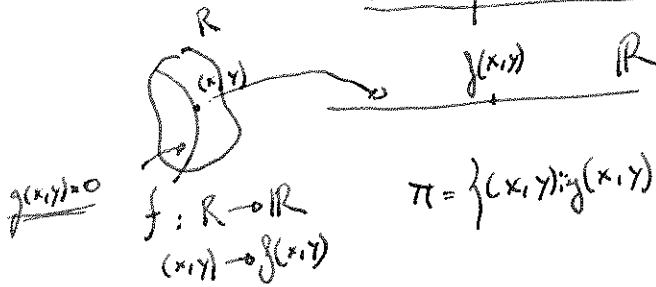
$$\frac{\partial S}{\partial a}(a,b,c) = 0$$

Hay que encontrar el polinomio de menor grado que nos de un error aceptable.

$$\frac{\partial S}{\partial b}(a,b,c) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c}(a,b,c) = 0$$

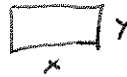
Multiplicadores de Lagrange



$$\pi = \{(x,y) : g(x,y)=0\}$$

$$\text{Busco máx } f(x,y) = \max_{(x,y) \in \pi} f(x,y)$$

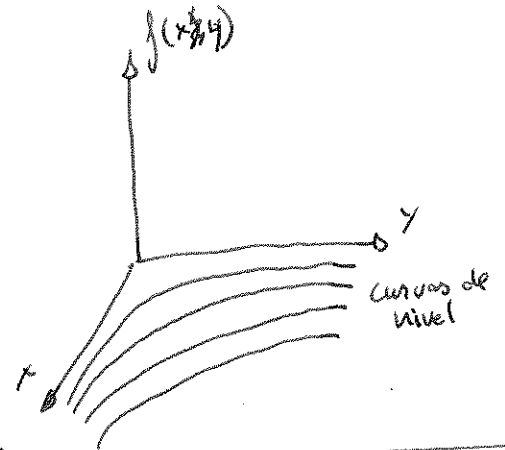
Área máx de un rectángulo



$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} xy$$

No tiene solución porque no es un conjunto compacto

$$R = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$



Área máx de un rectángulo con igual perímetro = 1

$$\max_{(x,y) \in R} f(x,y) = \max_{xy} xy$$

$$P = \{(x,y) \in R : 2x + 2y = 1\}$$

Función

$$x = \frac{1-2y}{2} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1-2t}{2} \\ y(t) = t \end{cases}$$

$$R \rightarrow R \rightarrow R$$

$$t \quad (x(t), y(t)) \quad f(x(t), y(t)) = \frac{1-2t}{2} \cdot t = \frac{t}{2} - t^2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{2t-4t^2}{2 \cdot 4} = -\frac{4t^2-2t+1}{4} \quad \text{La función tiene máx en } (x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\nabla f \perp \nabla g$$

Teorema (La Grange)

Sean f, g funciones de clase $C^1(\mathbb{R})$ tales que f alcanza extremo en un punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de restricción $g(x, y) = C$ ($g(x, y) = 0$)

Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$
↑ Multiplicador de La Grange

Demo: Representar $g(x, y) = C$ mediante $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ tal que $r'(t) \neq 0$

con $x'(t), y'(t) \in C(I)$, I intervalo abierto en $\mathbb{R}$.

Sea $h(t) = f(x(t), y(t))$, con (x_0, y_0) valor extremo; $h(t_0) = f(x(t_0), y(t_0))$ es extremo y $h'(t_0) = 0$.

Aplicando la regla de la cadena $h'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0) = 0$

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot r'(t_0) = 0$$

$$\Downarrow$$
$$\nabla f(x_0, y_0) \perp r'(t_0)$$

Recordando $r'(t_0) \perp \nabla g(x_0, y_0) \Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$

Método de los multiplicadores de la Grange

Sean $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, f tiene un extremo sujeto a la restricción $g(x, y) = C$. Para hallar dicho extremo, seguimos los siguientes pasos:

1) Resolver simultáneamente las ecuaciones

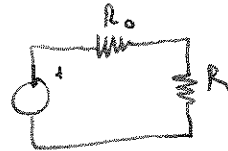
$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = C \end{array} \right\} \begin{array}{l} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \end{array} \quad g(x, y) = 0$$

2) Evaluar f en cada uno de los puntos solución de 1)

- El mayor valor de máximo
 - El menor valor de mínimo
- } de f sujeto a $g(x, y) = 0$

Con dos restricciones $\rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0)$
↓ ↓
Multiplicador de la Grange

Problemas de máx y min. $\longrightarrow$ Máx potencia



Construir un cilindro de volumen V_0 con menor área:

V_0 $f \equiv \text{área} \longrightarrow f(r, h) = 2\pi r h + 2\pi r^2$
 $g \equiv \text{volumen} \longrightarrow g(r, h) = \pi r^2 h$

min $f(r, h)$, sujeto a $g(r, h) = V_0$

$(x, y) \in \mathbb{R}$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \end{array} \right\}$

$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \longrightarrow$

$2\pi h_0 + 4\pi r_0 = \lambda 2\pi r_0 h_0$

$2\pi r_0 = \lambda \pi r_0^2$

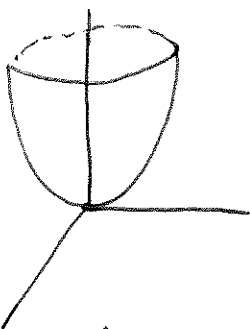
$\pi r_0^2 h_0 = V_0$

$\uparrow \uparrow$
 $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} ; h_0 = \sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}} ; \lambda = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$

Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$

$R = \overline{D}((0,0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Condiciones necesarias que debe satisfacer todo extremo en el interior de R



$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x = 0 \\ 4y = 0 \end{array} \left\} (0, 0) \longrightarrow f(0, 0) = 0$

$\pi = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\} \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$2x = \lambda 2x \Rightarrow x \neq 0 ; \lambda = 1$
 $x = 0 ; \lambda = ? \rightarrow y = \pm 1 \rightarrow \lambda = 2$

$4y = \lambda 2y \Rightarrow y \neq 0 ; \lambda = 2$
 $y = 0 ; \lambda = ? \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \lambda = 1$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\left. \begin{array}{l} f(0, 1) = 2 \\ f(0, -1) = 2 \\ f(1, 0) = 1 \\ f(-1, 0) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Máx y} \\ \text{Min} \\ \text{en la} \\ \text{frontera} \\ (\pi) \end{array}$

Los extremos relativos en π deben cumplir:

$\boxed{\begin{array}{l} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{array}}$

Solución $(x, y, \lambda) \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 2) \\ (0, -1, 2) \\ (1, 0, 1) \\ (-1, 0, 1) \end{array} \right.$

8

8

Integración múltiple

Integrales iteradas y área en el plano

en vez de de.

$$f(x,y) \rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{cases} \quad \left| \quad f_x(x,y) = 2xy \rightarrow f(x,y) = x^2y + g(y) \right.$$

¿Con una derivada parcial puedo hacer la primitiva?

$$\int_1^{2y} 2xy \, dx = \left[x^2y + g(y) \right]_1^{2y} = (2y)^2y + g(y) - [1^2y + g(y)] = 4y^3 - y$$

En general

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x,y) \, dx = \left[f(x,y) \right]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \leftarrow \text{Función de } y$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x,y) \, dy = \left[f(x,y) \right]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \leftarrow \text{Función de } x$$

$$\int_0^2 \left[\int_1^x (2x^2y^2 + 2y) \, dy \right] dx = \int_0^2 (3x^2 - 2x - 1) \, dx = 3$$

Integral iterada

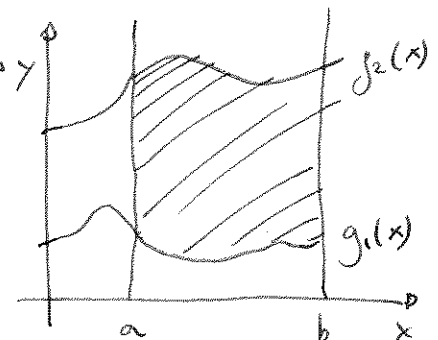
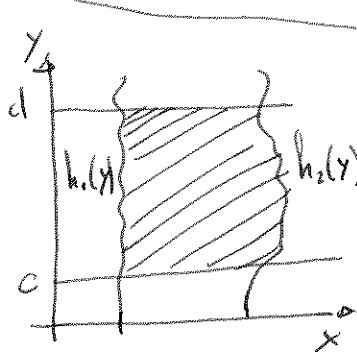
Integrales iteradas

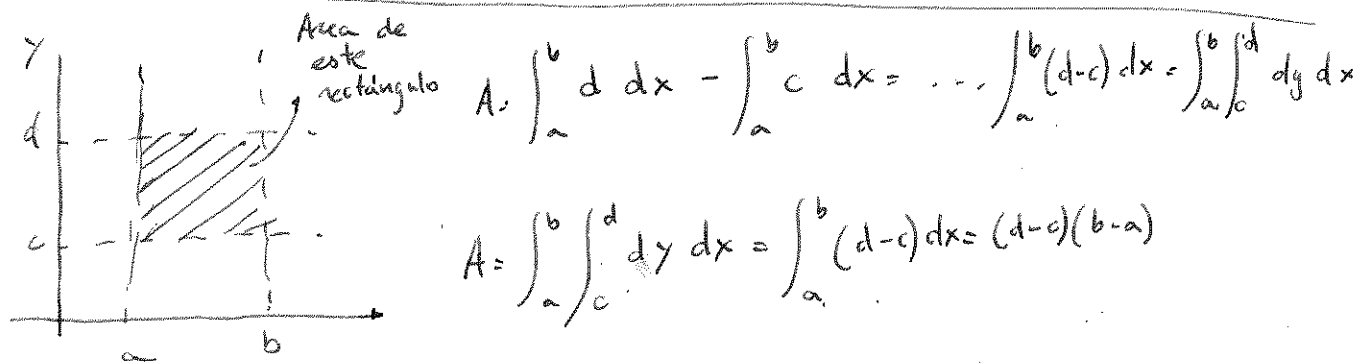
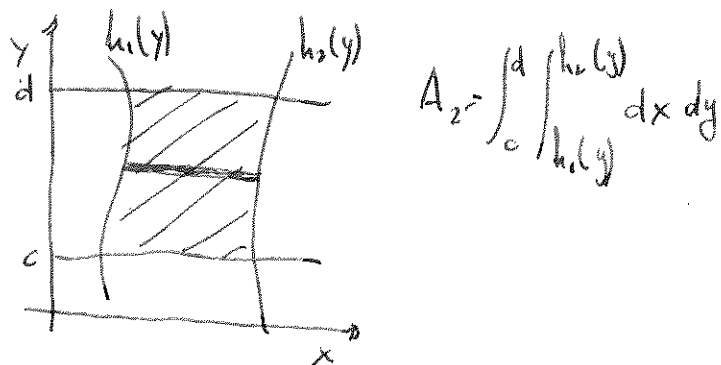
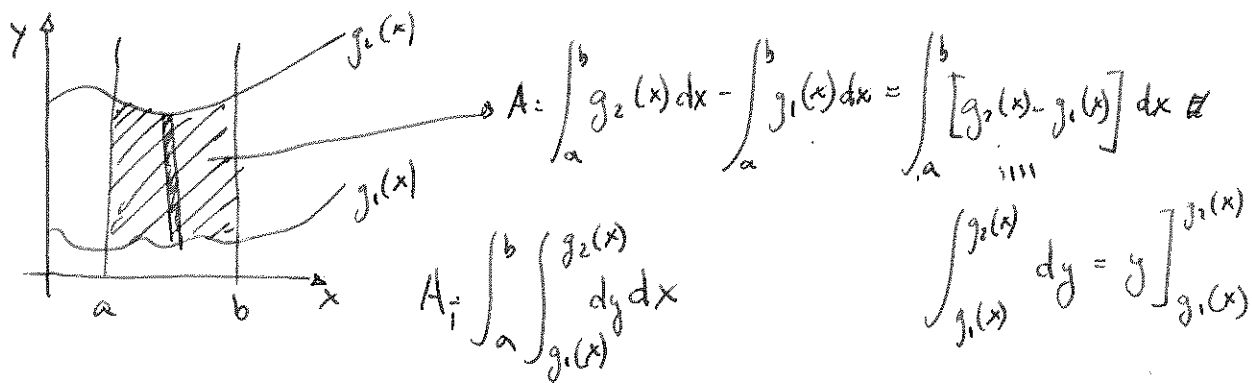
En dos variables muchas veces se recurre a los integrales iterados, que son un cálculo mucho más simple.

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \, dy \right] dx$$

$$\int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \, dx \right] dy$$

No es lo mismo

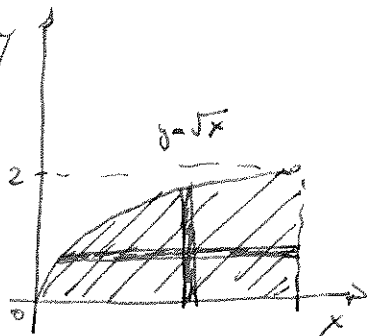




Ejercicio:

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx$$

$$\int_0^2 y^2 dy = \int_0^2 \int_{\frac{1}{4}y^2}^4 dx dy$$



Integrales dobles y Volumen

Definiremos integral doble de una función de dos variables en una región R del plano.

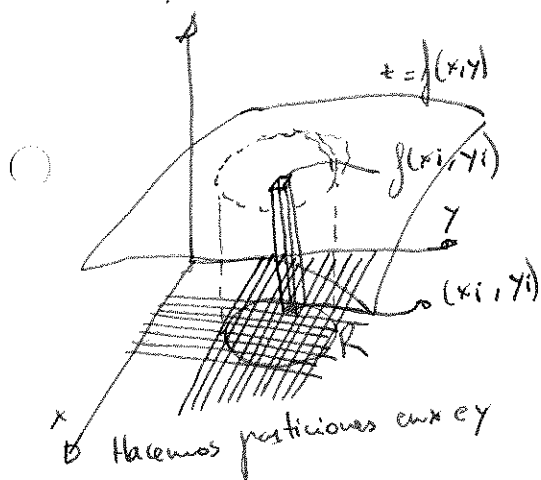
Def: Sea $f(x,y)$ continua tal que $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in R$
 objetivo: hallar el volumen comprendido entre la superficie $z = f(x,y)$ y el plano ~~xy~~ xy .

$A_i \cdot f(x_i, y_i) \equiv$ Volumen del prisma que he construido

$\uparrow$ $\uparrow$
 área de baldosa altura de la baldosa

Puedo construir una suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot A_i \rightarrow \text{Aproximación al volumen}$$



Hacemos particiones en x y y
 Definida una partición Δ , su norma $\|\Delta\| \equiv$ diagonal más larga de todos los n rectángulos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot A_i = \text{Volumen}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\left| \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot A_i - V \right| < \varepsilon$ para cualquier partición Δ tal que $\|\Delta\| < \delta$ y para cualquier elección de (x_i, y_i) en la "baldosa" i -ésima.

Def. Integral doble

Sea f definida en una región cerrada y acotada R del plano xy . Entonces, la integral doble de f en R está dada por:

$$\iint_R f(x,y) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot A_i$$

Siempre que el límite exista. Si el límite existe, f es integrable en R

Condiciones suficientes de existencia (pero no necesarias)

1) R = unión sin superposición ($\text{Área}(R_i \cap R_j) = 0$), finita de regiones R_i vertical u horizontalmente simples.

2) f continua en R

Propiedades de la integral doble

Teorema

Sean f y g continuas en una región compacta R del plano y sea c una constante:

$$1) \iint_R c f(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$$

$$2) \iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$$

$$3) \iint_R f(x, y) dA \geq 0 ; \text{ si } f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in R$$

$$4) \iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA ; \text{ si } f(x, y) \geq g(x, y)$$

$$5) \iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA \quad \text{donde } R = R_1 \cup R_2 \text{ y } \text{Área}(R_1 \cap R_2) = 0$$

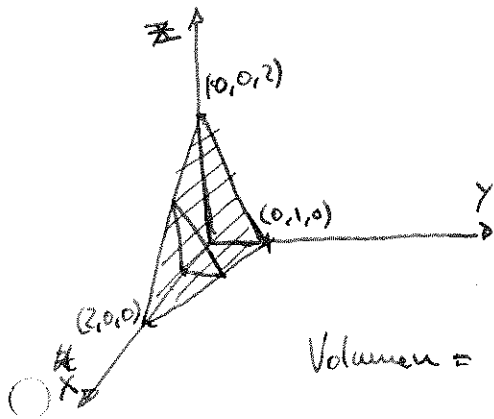
Evaluación de integrales dobles

Ejercicio: calcular el volumen de la región sólida acotada por la superficie dada por: $z = f(x, y) = 2 - x - 2y$ y los tres planos coordenados.

Intersección de S con plano $z=0$

$$2 - x - 2y = 0 \xrightarrow{y=0} x=2$$

$$\xrightarrow{x=0} y=1$$



Volumen = $\iint_R f(x, y) dA \rightarrow$ Convertir en integrales iteradas (en x e y)

$$\text{Volumen} = \int_0^2 A(x) dx = \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{4} dx = \frac{2}{3}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2-x}{2} \right) \cdot (2-x) = \frac{(2-x)^2}{4}$$

o tambien se puede calcular:

$$A(x) = \int_0^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2y) dy = \frac{(2-x)^2}{4}$$

$$\text{Volumen} = \iint_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2y) dy dx$$

Teorema de Fubini

○ Sea $f \in C^0(R)$, R región plana en xy .

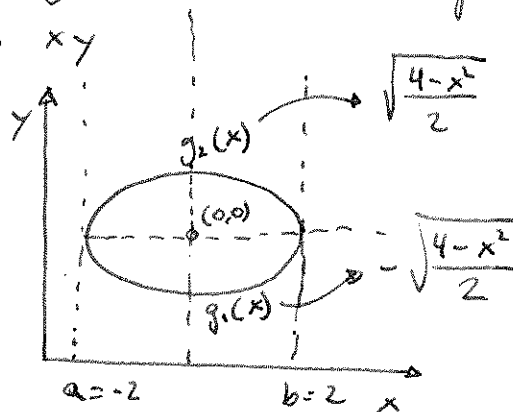
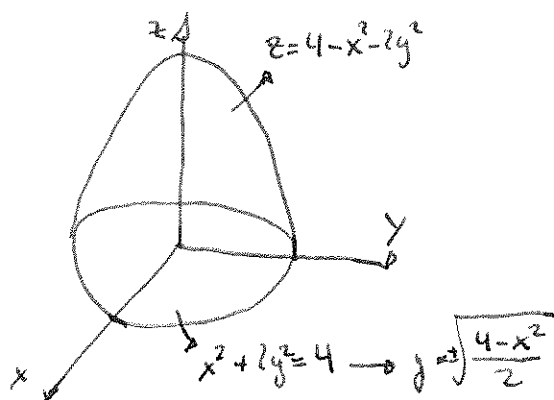
1) Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx$$

2) Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ donde $h_1(y)$, $h_2(y)$ son continuas en $[c, d]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

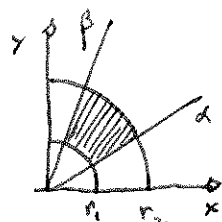
Ej: Hallar el volumen de la región sólida acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy



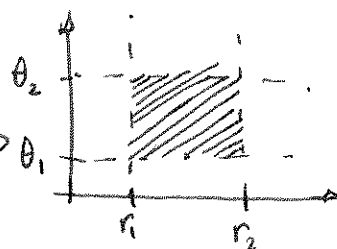
$$\text{Volumen} = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} (4-x^2 - \frac{2}{3}y^3) dy dx = \int_{-2}^2 \left[4y - \frac{2}{9}y^3 \right]_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} dx = \int_{-2}^2 \frac{4}{3\sqrt{2}} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

Cambio de variables coordenadas polares

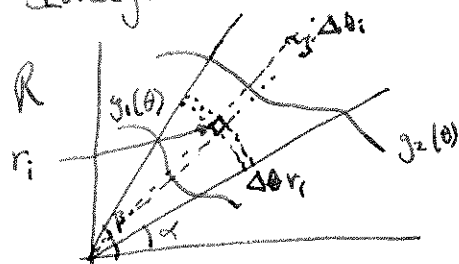
$$\iint_R f(x,y) dA$$



$$R = \{(r, \theta) : r_1 \leq r \leq r_2; \alpha \leq \theta \leq \beta\} \Rightarrow$$



Imaginemos un caso un poco más complicado



$$R = \{(r, \theta) : g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

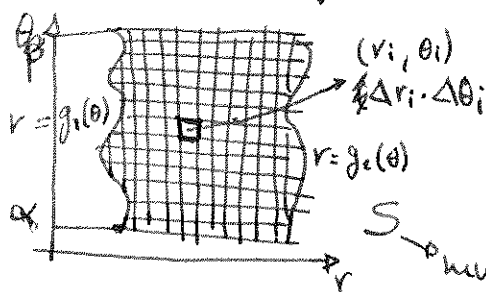
Defino una partición interna en sectores polares pequeños
Dicha partición es Δ y tiene norma $\|\Delta\|$

$$\Delta A_i = r_i \cdot \Delta \theta_i \cdot \Delta r_i$$

$$\Delta V_i = r_i \cdot \Delta \theta_i \cdot \Delta r_i \cdot f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i)$$

$$\iint_R f(x,y) dA \approx \sum_{i=1}^n f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i) r_i \cdot \Delta r_i \cdot \Delta \theta_i$$

$\Downarrow$ Paso al límite cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$



$$\iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cdot dA$$

en el mundo (r, θ)

$\Rightarrow$
Sigue en Pg
siguiente

$$\iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cdot dA \xrightarrow{\text{Fubini}} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

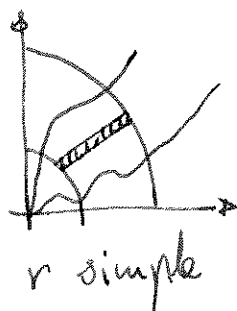
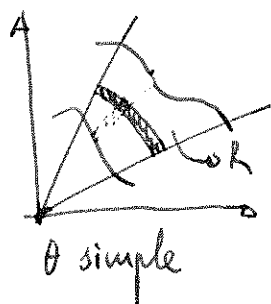
en el mundo
(r, \theta)

Teorema:

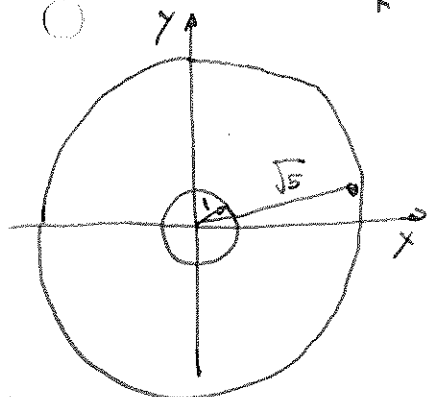
Sea R una región plana que consta de los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.

Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R , entonces

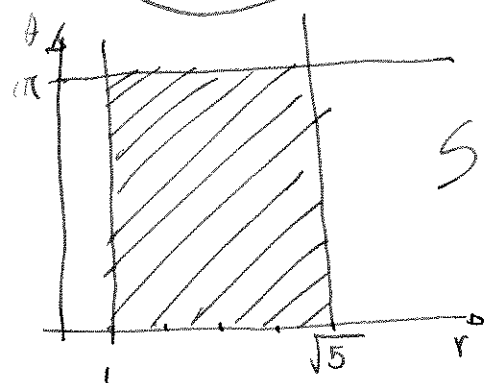
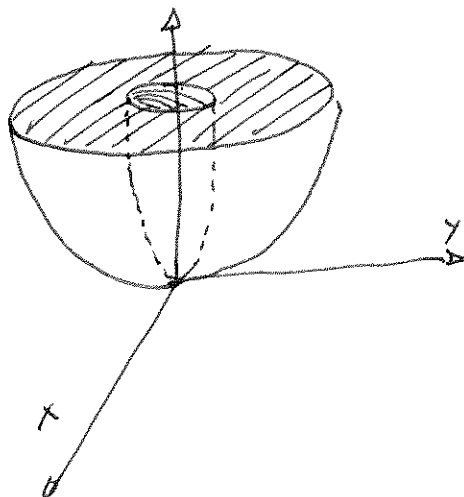
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$



Ejemplo: $\iint_R (x^2 + y^2) dA$ $R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\}$



$$\iint_S r^2 \cdot r \cdot dA = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} r^3 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^{\sqrt{5}} d\theta = \int_0^{2\pi} 6 d\theta = 12\pi$$

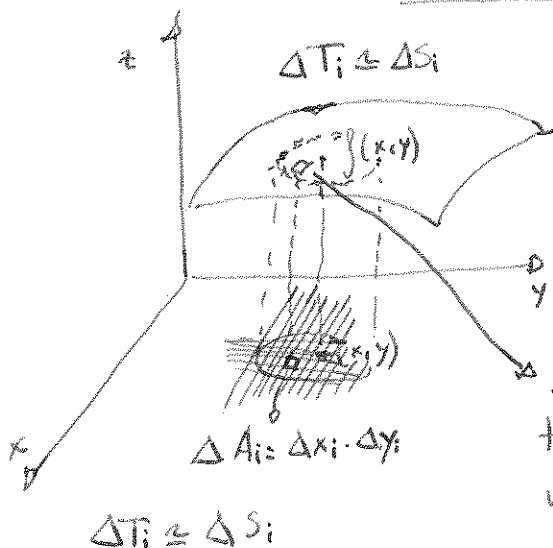


$$\iint_R (x^2 + y^2) dA \longrightarrow \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} ((r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} (r^3 \cos^2 \theta + r^3 \sin^2 \theta) dr d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \cos^2 \theta + \frac{r^4}{4} \sin^2 \theta \right]_1^{\sqrt{5}} d\theta =$$

Área de una Superficie

04/04/11



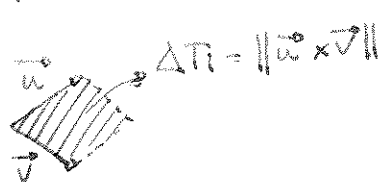
superficie dada por $z = f(x, y)$
 donde f está definida en una región R compacta
 de manera que $f \in C^1(R)$

↓
 si derivada parcial continuas,
 necesariamente diferenciable

Aproximamos el área de las imágenes con planos
 tangentes, cuanto más pequeños sean los particiones
 mayor será la aproximación

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta T_i$$

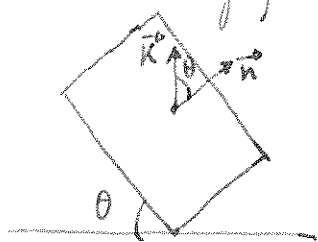
El área de ΔT_i cuyos lados son $\vec{u} = \Delta x_i \vec{i} + f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \vec{k}$
 $\vec{v} = \Delta y_i \vec{j} + f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \vec{k}$



$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x_i & 0 & f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \end{vmatrix} = (-f_x(x_i, y_i) \vec{i} - f_y(x_i, y_i) \vec{j} + \vec{k}) \Delta A_i$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \cdot \Delta A_i$$

Área de la superficie $\approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta T_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1}}_{\|\nabla F(x_i, y_i)\|} \cdot \Delta A_i$



$$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\Delta T_i = \frac{\Delta A_i}{\cos \theta}$$

$$\vec{n} = \nabla F = [f_x(x_i, y_i), f_y(x_i, y_i), -1]$$

$$z = f(x, y) \longrightarrow f(x, y) - z = 0$$

$$F(x, y, z) = 0$$

una de
 nivel de
 $f(x, y, z)$

Def (Área de una superficie)

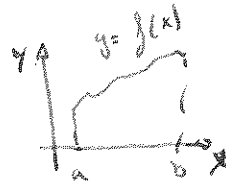
Sea $f \in C^2(R)$, R región compacta del plano xy entonces el área de la superficie S dada por $z = f(x, y)$ sobre R viene dada por

$$A = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \cdot dA$$

Similitud

Longitud de una curva

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$



○

$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

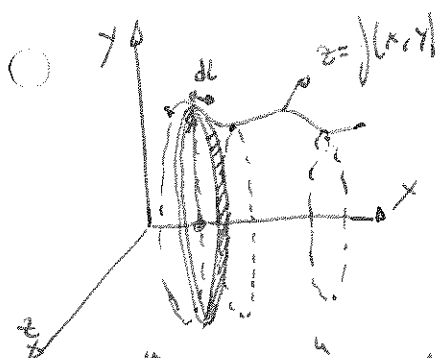
$$A = \iint_R \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right]^2 + \left[\frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right]^2} dA = \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dA =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}} r \cdot dr \cdot d\theta =$$

↑
Acordarse de estar "r"

$$= 5 \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{25 - r^2} \right]_0^3 d\theta = 5 \int_0^{2\pi} d\theta = 10\pi$$

Calcular área superficie de revolución



$$\Delta L_i = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + [f'(z)]^2} dz = \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta S_i = 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$S \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i) \cdot \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$\|\Delta\| \rightarrow 0$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

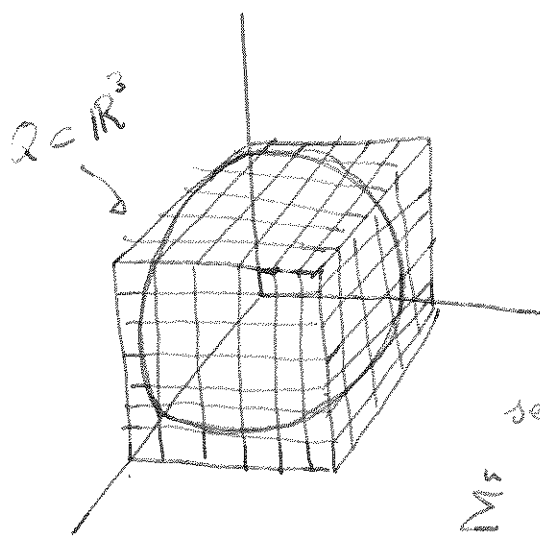
Integrales triples

Q acotada $f \in C^0(Q)$

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

$\|\Delta\|$ de la partición (diagonal mayor de entre todos los cubos). En cada cubito elegimos un punto (x_i, y_i, z_i) y construimos una serie de Riemann.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$



Definición integral triple

Sea $Q \subset \mathbb{R}^3$, región sólida acotada; sea $f \in C^0(Q)$; entonces la integral triple de f sobre Q es:

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad \text{cuando el límite exista}$$

Nota: $\iiint_Q dV = \text{Volumen de } Q$

$$1.- \iiint_Q c f(x, y, z) dV = c \cdot \iiint_Q f(x, y, z) dV$$

$$2.- \iiint_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dV = \iiint_Q f(x, y, z) dV \pm \iiint_Q g(x, y, z) dV$$

$$3.- \iiint_Q f(x, y, z) dV = \iiint_{Q_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{Q_2} f(x, y, z) dV$$

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$$

Integrales triples

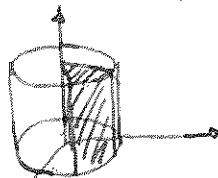
$\iiint_Q f(x,y,z) dV \rightarrow$ Posible sentido físico: calcular la masa de un cuerpo con densidad variable y volumen dado

Coordenadas cilíndricas

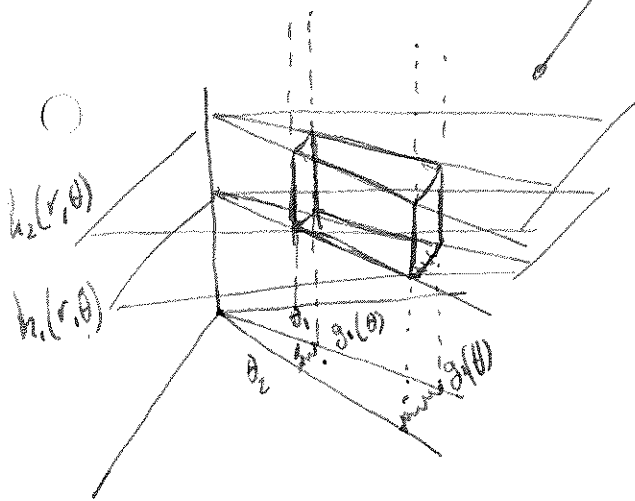
Región más comoda para Q cilíndrica $\rightarrow$ Sección cilíndrica

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$Q =$



$$= \{(r, \theta, z) : r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$



$$Q = \{(x, y, z) : (x, y) \text{ está en } R, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

$$R = \{(r, \theta) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$$

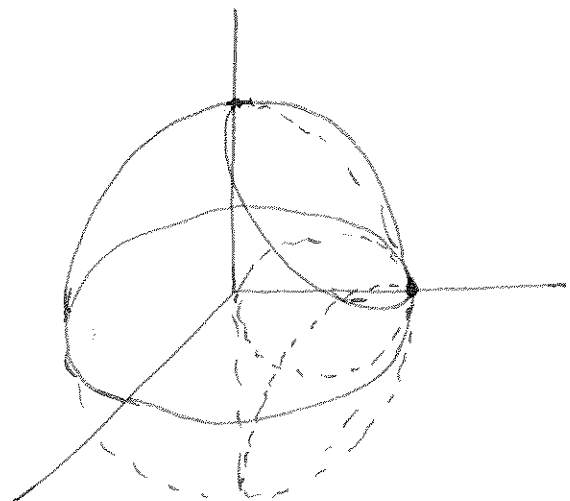
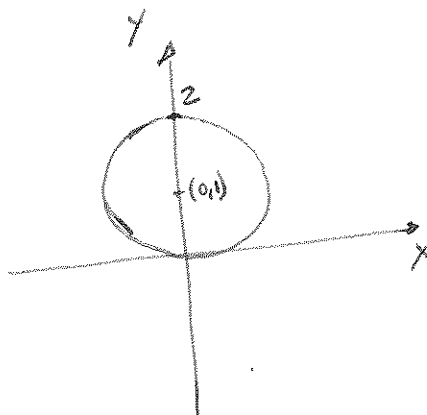
$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{h_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

Intersección esfera-cilindro $\rightarrow$ Esfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
 Cilindro $= \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2 \sin \theta; 0 \leq \theta \leq \pi\}$
 Frontera $= \{(r, \theta) : r = 2 \sin \theta; 0 \leq \theta \leq \pi\}$
 $\hookrightarrow y = r \sin \theta$
 círculo $= \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$



Cilindricos: esfera = $\{(r, \theta, z); r^2 + z^2 \leq 4\}$

Frontera = $\{(r, \theta, z); r^2 + z^2 = 4\}$

Rango de valores de z en la intersección (como función de r, θ):

$$-\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}$$

la proyección R de la intersección viene dada por:

$$R = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 2 \sin \theta; 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

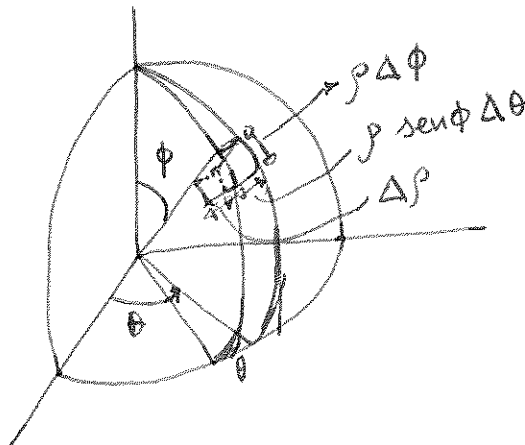
$$V = \iiint_{R, -\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1 \cdot dz \cdot dA = \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = 2 \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} 2r \sqrt{4-r^2} \, dr \, d\theta =$$

$$= 2 \int_0^\pi \left[-\frac{2}{3} (4-r^2)^{3/2} \right]_0^{2 \sin \theta} d\theta = \frac{4}{3} \int_0^\pi (8 - 8 \cos^3 \theta) d\theta = \frac{16}{9} (3\pi - 4)$$

Coordenadas esféricas

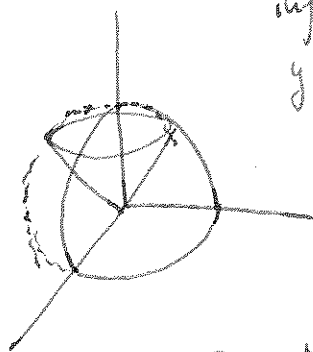
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

$$\Delta V = \rho^2 \sin \phi \, \Delta r \, \Delta \theta \, \Delta \phi$$



$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Volumen intersección cono-esfera: Hallar volumen de Q delimitado inferiormente por hoja superior de cono $= \{(x, y, z): x^2 + y^2 = z^2\}$ y superiormente por la esfera $= \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$



$$\Rightarrow \text{Esfera} = \{(p, \theta, \phi): p=3\}$$

$$\text{Cono} \cap \text{Esfera} = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = z^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

$$x = p \cos \phi = 3 \cos \phi = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\pi}{4}}; \quad 2z^2 = 9; \quad z = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^3 p^2 \sin \phi \, dp \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 9 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 9 \int_0^{2\pi} [-\cos \phi]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = 9\pi(2-\sqrt{2})$$

Cambio de variables

$$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow g(u) = x$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) \cdot g'(u) du$$

$$x = g(u)$$

$$a = g(c)$$

$$b = g(d)$$

Término Jacobiano: mide la relación entre Δu y Δx

Para integrales dobles

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \right| du dv$$

cambio de variable

$$T: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow R \subset \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \xrightarrow{T} (x, y) = T(u, v) = (g(u, v), h(u, v))$$

Def (Jacobiano)

Si $x = g(u, v)$, e $y = h(u, v)$ entonces el Jacobiano de x e y con respecto de u, v viene dado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

Ejemplo: Cambio de variable

$$\sqrt{\cos \theta}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

/ Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r;$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$$

Jacobiano

Teorema: cambios de variable int. dobles

Sea R una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano xy .

Sta 5 " " "

$$\text{See } T: S \rightarrow R$$

$$(u, v) \mapsto T(u, v) = (g(u, v), h(u, v)) = (x, y)$$

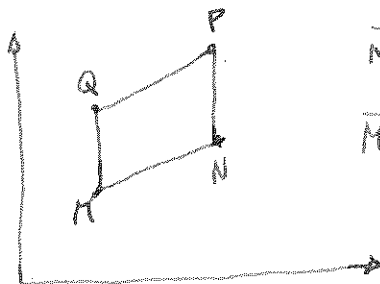
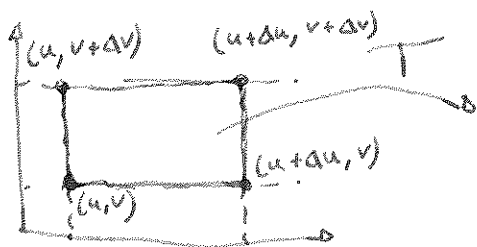
donde g y h son de clase C^1 .

T es biyectiva (en el interior de S)

Si f es continua y $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ en S

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy = \iint_S f(g(u,v), h(u,v)) \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \cdot du \cdot dv$$

Esbozo de demostración



$$\Delta A \approx |H_N \times H_Q|$$

$$\vec{MN} \approx \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u \cdot \vec{i} + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \cdot \vec{j}$$

$$\vec{MA} \approx \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \vec{j}$$

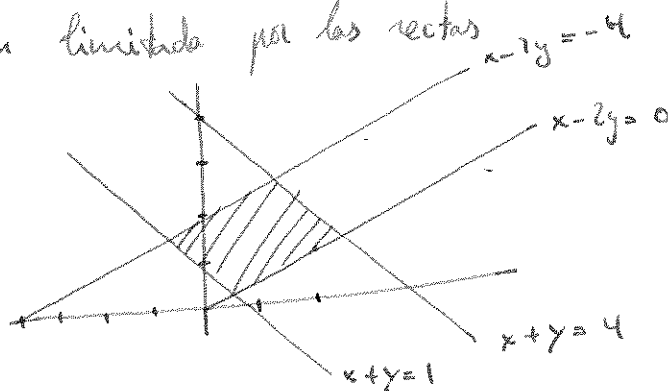
$$\vec{MN} \times \vec{MQ} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \Delta u \Delta v \cdot \vec{k}$$

Defino: $T: S \rightarrow \mathbb{R}$
 $(u, v, w) \mapsto T(u, v, w) = (x, y, z)$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Sea R región limitada por las rectas

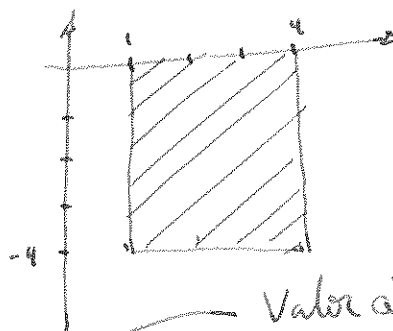
$$\begin{cases} x-2y=0 \\ x-2y=4 \\ x+y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$$



$$u = x+y$$

$$v = x-2y$$

$$T(u, v) = (x, y) = \left(\frac{1}{3}(2u+v), \frac{1}{3}(u-v) \right)$$



Valor absoluto Jacobiano

$$\iint_R xy \, dA = \iint_S g(u, v) \cdot h(u, v) \cdot \frac{1}{3} \, du \, dv$$

$\mathbb{R}$ muy fácil

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{3}$$

Teorema de Fubini

Sea $f \in C^0(Q)$, región sólida definida por:

$$Q = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

donde h_1, h_2, g_1, g_2 son funciones continuas. Entonces:

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

(después va el día 06/04/11)

11/04/11

○ Representación paramétrica de curvas

Función vectorial

→ Rango o recorrido de r . $C = r(I)$

$$r: I \subset \mathbb{R} \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3$$

$$\begin{matrix} \psi \\ t \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \psi \\ r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \end{matrix}$$

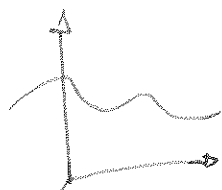
Domínio de la función $I \equiv \text{Dom}(x(t)) \cap D$

Def 5:

• Si r es continua e inyectiva, C es un arco simple

○ Ejemplo: $r[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \longrightarrow (t, f(t), 0)$

donde f es una aplicación real de variable real, continua y definida en $[a, b]$



• Si r es continua y localmente inyectiva, C es una curva

$$(\forall t_0 \in \overset{\text{p.e.}}{I}, \exists \delta > 0: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I \text{ y } r|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \text{ es inyectiva.})$$

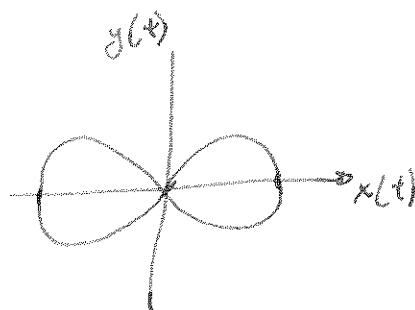
Además para t_0 extremo (inferior) de I , $\exists \delta > 0: r|_{[t_0, t_0 + \delta]}$ es inyectiva.)

Ejemplo: $x(t) = 2 \cos(t - \frac{\pi}{2})$

$y(t) = \sin(t - \frac{\pi}{2})$

$z(t) = 0$

$t \in [0, 2\pi]$



• Si r es de clase C^m y $r'(t) \neq 0, \forall t \in I$ entonces r es una representación paramétrica regular de clase C^m .

($r'(t) \neq 0, \exists$ vector tangente en t_0 y r es localmente inyectiva)

($\exists$ la definición de representación paramétrica regular a trozos)

$\exists t_0 < t_1 < \dots < t_n$ tales que en $(t_i, t_{i+1}), i=0, \dots, n-1$ la representación es regular

Representaciones paramétricas equivalentes

Sean $r: I \rightarrow C$

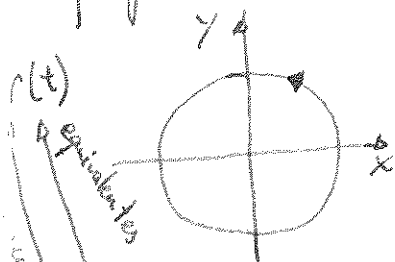
$p: J \rightarrow C$

r y p son equivalentes si $\exists h: J \rightarrow I$ continua y monótona

creciente tal que $r(h(u)) = p(u), \forall u \in J$

(si la función h es decreciente, r y p se denominan opuestas)

Ejemplo: $r(t) = (\cos t, \sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$



$h: [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$

$u \rightarrow t = 2u$

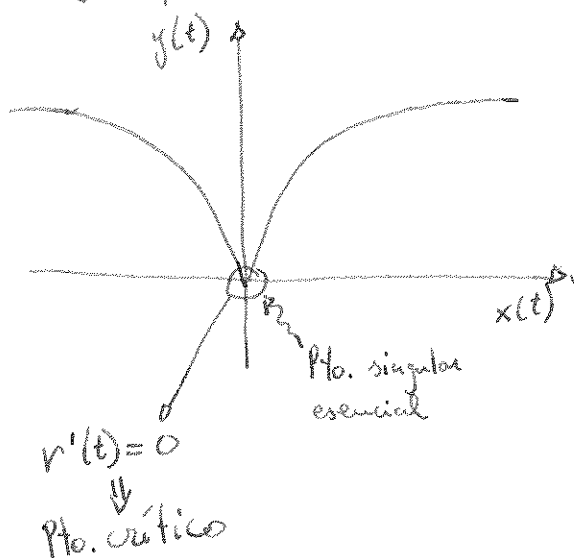
$p(u) = (\cos 2u, \sin 2u, 0), u \in [0, \pi]$

$j: [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$

$w \rightarrow t = -2w$

Distinto sentido

Ejemplo: $r(t) = (t^3, t^2, 0)$, $t \in \mathbb{R}$



○ Definición: h es un cambio admisible (de clase C^m) de parámetro, cuando $h \in C^m$ y $h'(u) \neq 0$, $\forall u \in J$

h es monótona

$h'(u) > 0 \forall u \in J$

Misma orientación
(representaciones equivalentes)

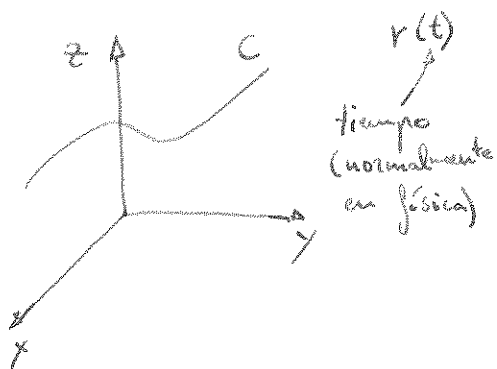
$h'(u) < 0, \forall u \in J$

Distinta orientación
(representación opuesta)

Def: (curva paramétrica orientada)

○ Una curva paramétrica (orientada) es una clase (de equivalencia) de representaciones paramétricas equivalentes si en esa clase, $\exists$ una representación de clase C^m y $r'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$, entonces la curva paramétrica orientada es regular de clase C^m .

Parametrización natural. Parámetro longitud de arco



Normalmente se utiliza el parámetro t como el tiempo, pero puede ser también de gran utilidad utilizar un parámetro según el espacio recorrido.

DEF (función longitud de arco)

Sea C una curva dada por la representación paramétrica $r: [a, b] \rightarrow C$. Para $t \in [a, b]$, la función longitud de arco está dada por:

$$s(t) = \int_a^t \|r'(u)\| du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du$$

donde t indica la longitud de arco recorrida

Si tengo otra parametrización, el valor resultante $s(t)$ debería ser el mismo. Por ejemplo: $p(u) = r(h(u))$ mediante el cambio h

$$p'(u) = r'(h(u)) \cdot h'(u)$$

$$s(t) = \int_{h'(a)}^{h'(t)} \|p'(u)\| du = \int_a^t \|r'(h(u))\| \cdot \underbrace{h'(u)}_{\frac{dt}{du}} du = \int_a^t \|r'(t)\| dt$$

Teorema (Parámetro longitud de arco)

Sea C una curva dada por $r(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$ donde s es el parámetro longitud de arco entonces $\|r'(s)\| = 1$

Si t es cualquier parámetro para la función vectorial $r(t)$ tal que $\|r'(t)\| = 1$, entonces t debe ser el parámetro longitud de arco.

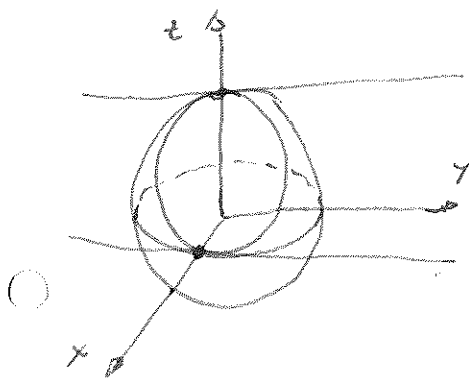
$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|r'(t)\|; \quad h'(t) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|r'(t)\|} \Rightarrow \|p'(s)\| = 1$$

Ejercicio:

Sea C la curva definida por la intersección de dos superficies:

$$F: x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{y} \quad G: x + z = R \quad ; \quad R > 0$$

a) Hallar las proyecciones C_1, C_2, C_3 de C sobre los planos coordenados $x=0, y=0, z=0$ en coordenadas cartesianas.



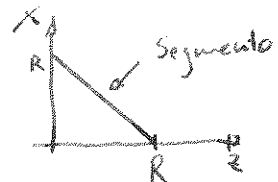
Despeja la x entre F y G :

$$(R-z)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$C_1: y^2 + 2z^2 - 2Rz = 0 \quad \leftarrow \text{Elipse}$$

Despeja y :

$$C_2: x + z = R \quad \begin{matrix} z \geq 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}$$



Despeja z :

$$x^2 + y^2 + (R-x)^2 = R^2$$

$$C_3: 2x^2 + y^2 - 2Rx = 0 \quad \leftarrow \text{Elipse}$$

b) Apoyándose en a) parametrice C

Elige $C_3 \rightarrow 2x^2 + y^2 - 2Rx = 0, \quad 2(x^2 - Rx + \frac{R^2}{2}) + y^2 = \frac{R^2}{2}$

$$\frac{(x - \frac{R}{2})^2}{(\frac{R}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{R}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

Parametrización:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t \\ y &= \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \end{aligned} \right\} t \in [0, 2\pi] \quad \text{Representación paramétrica de } C_3$$

Representación paramétrica de C :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t \\ y &= \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \\ z &= R - x \rightarrow z = \frac{R}{2} - \frac{R}{2} \cos t \end{aligned} \right\} t \in [0, 2\pi]$$

Representación paramétrica de C_1

$$y(t) = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t$$

$$z(t) = \frac{R}{2} - \frac{R}{2} \cos t$$

despejando t

$$y^2 + 2z^2 - 2Rz = 0$$

Representación paramétrica de C_2

$$x(t) = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t$$

$$z(t) = \frac{R}{2} - \frac{R}{2} \cos t$$

despejando t

$$x + z = R$$

13/04/11

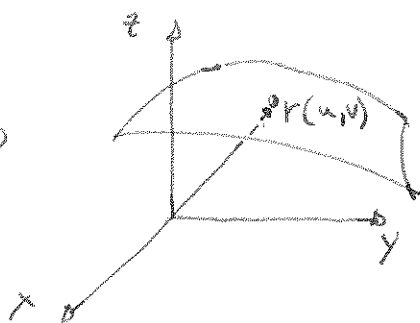
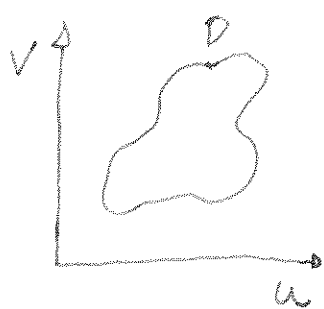
Superficies paramétricas

Def: (Superficie paramétrica)

Sean $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ funciones continuas en un dominio D del plano uv . Al conjunto de puntos (x,y,z) dados por:

$$r(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \quad \forall (u,v) \in D$$

Se le llama una superficie paramétrica (es decir, la superficie paramétrica es $r(D)$). Las ecuaciones $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ son las ecuaciones paramétricas de la superficie.



La superficie es simple si r es (globalmente) inyectiva.

- 1) $r(u,v) = 3 \cos u \vec{i} + 3 \sin u \vec{j} + v \vec{k}$; $D = [0, 2\pi] \times [0, 4] \Rightarrow$ Cilindro
- 2) $r(u,v) = \sin u \cos v \vec{i} + \sin u \sin v \vec{j} + \cos u \vec{k}$; $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \Rightarrow$ Esfera radio=1

Forma habitual de definir una superficie:

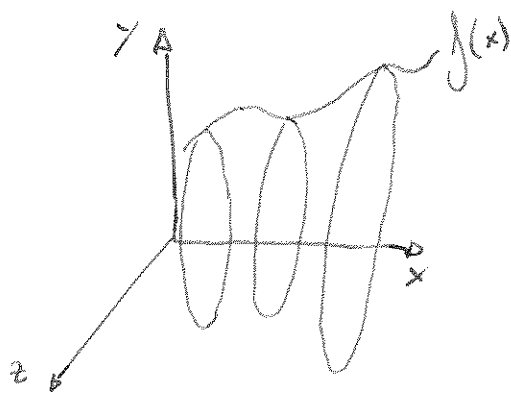
$$\{(x,y,z) : z = f(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Quiero definir una parametrización:

$$r: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longmapsto r(u,v) = u \vec{i} + v \vec{j} + f(u,v) \vec{k}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$



$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2$$

$$r: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow r(u, v) = u\vec{i} + f(u)\cos v\vec{j} + f(u)\sin v\vec{k}$$

Vectores normales y planos tangentes

Sea S una superficie paramétrica dada por:

$$r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

donde $x, y, z \in C^1(D)$, D abierto de $\mathbb{R}^2$

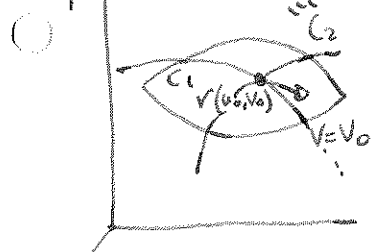
Definición:

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$$

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

Si fijamos $v = v_0$, y considero $r(u, v_0)$ es una función vectorial de un solo parámetro que define una curva C_1 sobre S .

$$\{(u, y, z) : (x, y, z) = r(u, v_0)\} \quad C_1 = \{(x, y, z) : (x, y, z) = r(u, v_0)\}$$



El vector tangente a C_1 en $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ está dado por:

$$r_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{k}$$

El vector tangente a C_2 (generado con $r(u_0, v)$) en el punto $r(u_0, v_0)$ viene dado por:

$$r_v(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{k}$$

Como $r(u, v)$ es diferenciable y dadas dos rectas tangentes en (u_0, v_0) de distinta dirección nos definirán un plano tangente a la superficie.

Si $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) \neq 0$. S es suave en $(u_0, v_0) \rightarrow$ Tiene plano tangente

En el punto de la superficie $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$

Def: (Vector normal a una superficie)

Sea S dada por $r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, $r \in C^1(D)$
 D abierto en plano uv .

Sea $(u_0, v_0) \in D$; un vector normal en el punto $(x_0, y_0, z_0) =$
 $= (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ está dado por:

$$N = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

La forma habitual de definir una superficie es $S = \{(x, y, z) : (x, y) \in R, z = f(x, y)\}$. Dado un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$

1) Defino $S = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ donde $F(x, y, z) = z - f(x, y)$

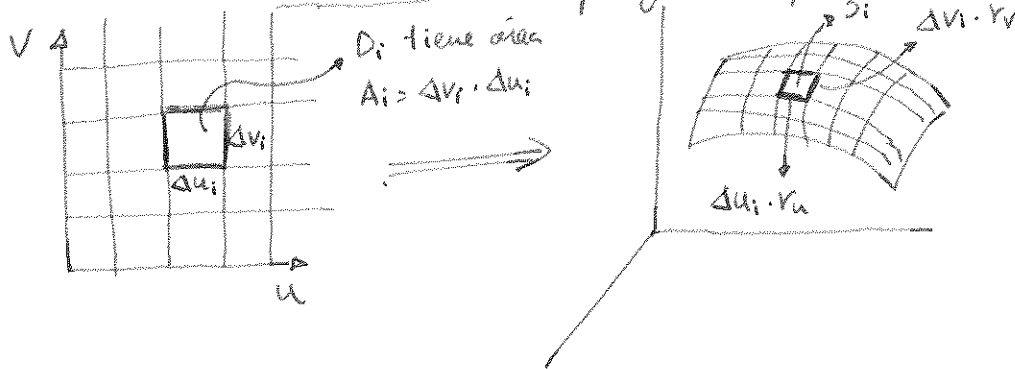
Un vector normal a S en (x_0, y_0, z_0) es $N = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}, \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}, \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \right) =$
 $= \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}, -\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}, 1 \right)$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}$

2) Parametrización de S : $r(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$, $(x, y) \in R = D$

$$N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$$

Área de Superficie paramétrica



$$\Delta S_i \approx \Delta T_i = \|\Delta u_i \cdot r_u \times \Delta v_i \cdot r_v\| = \Delta u_i \Delta v_i \|r_u \times r_v\|$$

Def: Sea S una superficie paramétrica suave dada por

- $r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ definida en un abierto D del plano uv . Si cada punto de S corresponde a un punto de D (simple) entonces el área de S viene dada por:

$$A_S = \iint_S dS = \iint_D \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| dA$$

$(x, y) \in R = D$

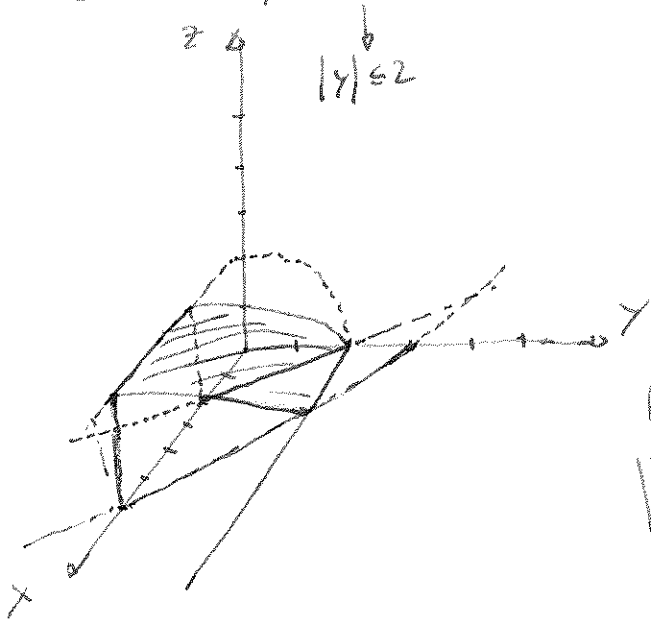
Para $S = \{(x, y, z) : (x, y) \in R, z = f(x, y)\}; r(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k};$

○
$$\left. \begin{aligned} r_x &= \vec{i} + f_x(x, y)\vec{k} \\ r_y &= \vec{j} + f_y(x, y)\vec{k} \end{aligned} \right\} r_u \times r_v = -f_x(x, y)\vec{i} - f_y(x, y)\vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$$

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}$$

$$A_S = \iint_R \|r_u \times r_v\| dA = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA$$

Ej: Sea K el conjunto contenido en el primer octante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) y limitado por los planos de ecuaciones $x+y=2$, $x+2y=6$, y el cilindro $y^2+z^2=4$. Calcúlese $\iiint_K z \, dx \, dy \, dz$



Como está en el 1.º octante $\Rightarrow 0 \leq y \leq 2$

$$2-y \leq 2-0 = 6-2 \cdot 2 \leq 6-2y$$

$$\boxed{2-y \leq x \leq 6-2y}$$

Rango de variación de z :

$$\boxed{0 \leq z \leq \sqrt{4-y^2}}$$

$$\iiint_K z \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\int_{2-y}^{6-2y} \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} z \cdot dz \right) dx \right) dy$$

$$\int_0^2 \left(\int_{2-y}^{6-2y} \frac{4-y^2}{2} dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{4-y^2}{2} (6-2y) - \frac{4-y^2}{2} (2-y) \right] dy =$$

Nombre: Juan Cabello
Sánchez

AVEC

① Pg 967 n° 18

$$\left. \begin{aligned} H &= f(x, y, z) = -x \ln x - y \ln y - z \ln z \\ x + y + z &= 1 \Rightarrow z = f(x, y) = 1 - x - y \end{aligned} \right\} H = f(x, y) = -x \ln x - y \ln y - (1 - x - y) \ln (1 - x - y)$$

a) Para calcular cuando la diversidad de Shannon es máxima variando los valores de x e y (pues z es dependiente de x e y), calcularemos las derivadas parciales igualándolas a cero.

$$\dot{f}_x = -\ln x - 1 - \left[(-1) \ln (1 - x - y) - \frac{(1 - x - y)}{(1 - x - y)} \right] = -\ln x + \ln (1 - x - y) =$$

$$= \ln \frac{1 - x - y}{x}; \quad \ln \frac{1 - x - y}{x} = 0; \quad \frac{1 - x - y}{x} = 1; \quad 1 - x - y = x;$$

$$2x = -y + 1; \quad \boxed{x = \frac{1 - y}{2}}$$

$$H_y = -\ln y - 1 - \left[(-1) \ln (1 - x - y) - \frac{(1 - x - y)}{(1 - x - y)} \right] = -\ln y + \ln (1 - x - y) =$$

$$= \ln \frac{1 - x - y}{y}; \quad \ln \frac{1 - x - y}{y} = 0; \quad \frac{1 - x - y}{y} = 1; \quad 2y = 1 - x$$

$$①; \quad \boxed{x = 1 - 2y}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1 - y}{2} \\ x &= 1 - 2y \end{aligned} \right\} \quad 1 - 2y = \frac{1 - y}{2}; \quad 2 - 4y = 1 - y; \quad 3y = 1; \quad \boxed{y = \frac{1}{3}}$$

$$x = 1 - 2y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{x + y + z = 1} \Rightarrow z = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{3}}$$

$$b) H = -\frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} = -\ln \frac{1}{3} = \ln \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} = \boxed{\ln 3}$$

② Pg 969 n°47

$$\boxed{n \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n [ax_i + b - y_i]^2$$

$$S_a = \sum_{i=1}^n 2x_i (ax_i + b - y_i) = 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\boxed{S_{aa} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2} \leftarrow 2^{\text{da}} \text{ derivada parcial en } a$$

$$S_b = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 2a \sum_{i=1}^n x_i + 2b \sum_{i=1}^n 1 - 2 \sum_{i=1}^n y_i$$

$$S_{bb} = 2 \sum_{i=1}^n 1 = \boxed{2n} \leftarrow 2^{\text{da}} \text{ derivada parcial en } b$$

?? (No se como proceder con el problema)

③ $f(x,y) = 4x^2 e^y - 2x^4 - e^{4y}$

$$T_2(0,0) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} h + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} K + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} \frac{h^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} \frac{K^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} h \cdot K =$$

$$= -1 + 0 + (-4)K + \frac{h^2}{2} \cdot 8 + \frac{K^2}{2} \cdot (-16) + \frac{hK}{2} \cdot 0 = \boxed{-8K^2 + 4h^2 - 4K - 1}$$

$$(3) f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$$

Desarrollo de Taylor:

$$T_2(0+h, 0+k) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} \cdot k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} \cdot h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} \cdot k^2 + \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} \cdot k \cdot h =$$

$$\boxed{-1 - 4k + 4h^2 - 8k^2}$$

$$T_2(1+h, 0+k) = \boxed{1 - 8h^2 - 6k^2 + 8hk}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xe^y - 8x^3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8e^y - 24x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xe^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2e^y - 4e^{4y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^2e^y - 16e^{4y}$$

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = (8xe^y - 8x^3) \vec{i} + (4x^2e^y - 4e^{4y}) \vec{j}$$

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = -128 < 0 \Rightarrow \text{Punto de silla en } (0,0)$$

$$Hf(1,0) = \begin{vmatrix} -16 & 8 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} = 192 - 64 = 128 > 0 \Rightarrow \text{Extremo relativo} \Rightarrow \text{Máximo}$$

como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xe^y - 8x^3 = 8x(e^y - x^2) = 0 \Rightarrow e^y = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

(1,0)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2e^y - 4e^{4y}; \quad 4e^ye^y - 4e^{4y} = 0, \quad 4e^{4y} - 4e^{4y} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \rightarrow (-1,0)$$

$$Hf(-1,0) = \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = 192 - 64 = 128 > 0 \Rightarrow \text{Extremo rel} \Rightarrow \text{Máximo}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$

② Pg 969 n° 47

$$\boxed{n \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^n [ax_i + b - y_i]^2$$

$$S_a(a,b) = \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i) ; \quad S_{aa}(a,b) = \sum_{i=1}^n 2x_i^2$$

$$S_b(a,b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) ; \quad S_{bb}(a,b) = \sum_{i=1}^n 2 = 2n$$

$$S_{ab}(a,b) = S_{ba}(a,b) = \sum_{i=1}^n 2x_i$$

Para comprobar que existe un mínimo utilizaremos la matriz Hessiana:

$$HS(a,b) = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n 2x_i^2 & \sum_{i=1}^n 2x_i \\ \sum_{i=1}^n 2x_i & 2n \end{vmatrix} = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n 2x_i \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

Como según el enunciado $\boxed{n \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$ o también

$$\boxed{n \sum_{i=1}^n x_i^2 > \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \text{ Si } n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}; \text{ el resultado siempre}$$

será positivo, por tanto habrá máximo o mínimo.

Como $S_{aa}(a,b) > 0$ el extremo se tratará de un mínimo.



ANÁLISIS VECTORIAL GRUPOS DE MAÑANA

29 DE ABRIL DE 2011

NORMAS DEL EXAMEN

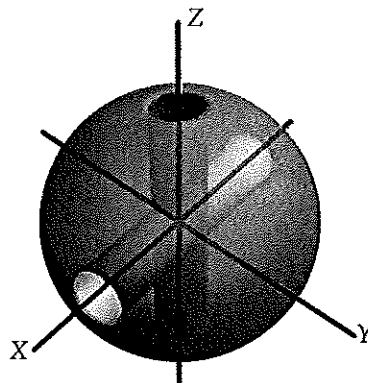
- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">▪ Los móviles deberán estar apagados y guardados en un lugar no visible.▪ El alumno dejará el DNI, pasaporte o carné de la UPM encima de la mesa.▪ No se permite el uso de libros, apuntes o calculadoras.▪ La duración de la prueba es de una hora y media. | <ul style="list-style-type: none">▪ Todas las hojas que el alumno tenga encima de la mesa llevarán escrito necesariamente su nombre y apellidos.▪ Cada ejercicio deberá entregarse por separado (cuando se empiece un ejercicio nuevo, utilice una hoja nueva).▪ Deberá entregarse al menos una hoja por cada ejercicio. Si no se ha hecho nada de dicho ejercicio, se entregará una hoja en blanco con el nombre y apellidos del alumno y el número de problema. |
|---|---|

1. [5 PUNTOS] Dada la función $f(x, y) = \sin(x + y)$, se pide:

- a) Desarrollar el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor del $(0, 0)$.
- b) Calcular los extremos absolutos de la función en

$$D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

2. [5 PUNTOS] En una esfera de radio 4 se han practicado dos agujeros circulares de radio 1 que pasan por el centro (ver figura). Calcular razonadamente el volumen del sólido resultante.



Q

()

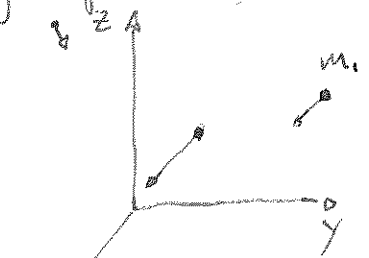
Campos vectoriales

Hemos visto:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$; Espacio en un tiempo t
 también $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; Temperatura en cada punto de la habitación
 Ahora: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 Un vector a cada punto del espacio (campo magnético)

Ejemplo de campo gravitacional

$F(x, y, z) = -G \frac{m_1 m_2}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{u}$



Campo eléctrico $\rightarrow F(x, y, z) = C \frac{q_1 q_2}{\|r\|^2} \vec{u}$

Para representar una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representaremos unos pocos datos.

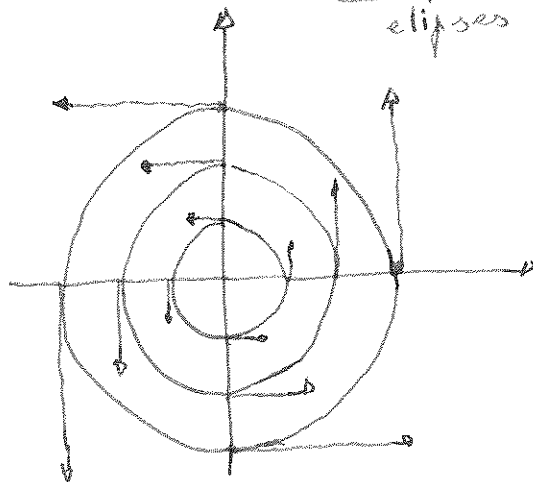
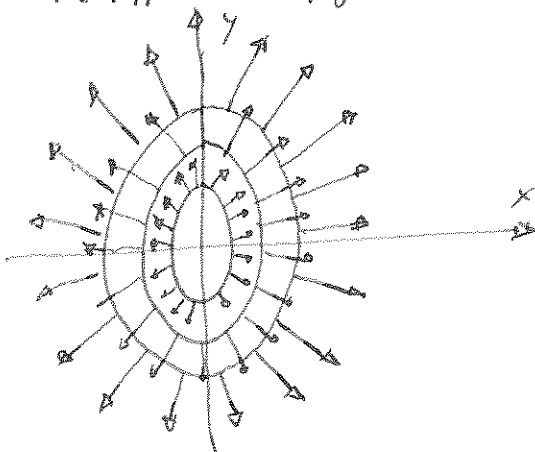
En general, podemos definir un campo cuadrático inverso:

$$F(x, y, z) = \frac{K}{\|r\|^2} \vec{u}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

Def: (Campo vectorial conservativo)

Un campo vectorial F es conservativo si $\exists f$ diferenciable tal que $F = \nabla f$
 A la función f se la denomina función potencial de F .

$F(x, y) = 2x\vec{i} + y\vec{j} \rightarrow \|F(x, y)\| = \sqrt{4x^2 + y^2} = c \Leftrightarrow \underbrace{4x^2 + y^2 = c^2}_{\text{elipses}}$



Campo conservativo

$$F = \nabla f(x, y) = \nabla \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$$

Campos vectoriales conservativos

3/05/11

$$F: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F \text{ es conservativo} \iff \exists f: \nabla f = F$$

Si nos proporcionan F , el cálculo de f es conceptualmente equivalente al cálculo de primitivas.

Ejemplo: $F(x,y) = 2xy \vec{i} + (x^2 - y) \vec{j}$

$$\left. \begin{aligned} \exists f: \nabla f = F &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \rightarrow f(x,y) = \int f_x(x,y) dx = x^2 y + g(y) \\ &\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 - y) \rightarrow f(x,y) = \int f_y(x,y) dy = x^2 y - \frac{y^2}{2} + h(x) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 y + g(y) = x^2 y - \frac{y^2}{2} + h(x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$g(y) = -\frac{y^2}{2} + K$$

$$h(x) = K$$

$$\boxed{f(x,y) = x^2 y - \frac{y^2}{2} + K}$$

Teorema: Sea $M(x,y), N(x,y) \in C^1(R)$, $R \equiv$ disco abierto en $\mathbb{R}^2$

Entonces el campo vectorial $F = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ es conservativo

si y solo si $\boxed{\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}}$

Demo: $\exists f: \nabla f = F = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$

$$f \in C^2(R) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

En nuestro ejemplo $\rightarrow 2x = 2x$

Operadores diferenciables

Se encargan de ver la variación de un campo vectorial en torno a un punto

* Rotacional de un campo vectorial

Mide la curvatura de las líneas de campo.

DEF (en el espacio):

Sea $F(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$

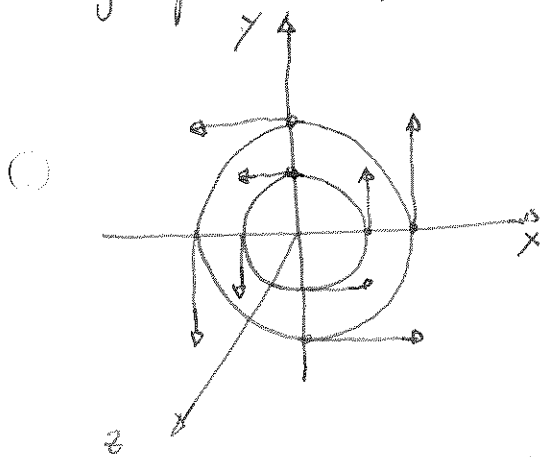
○ $\text{rot } F(x, y, z) = \nabla \times F(x, y, z) = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k} =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

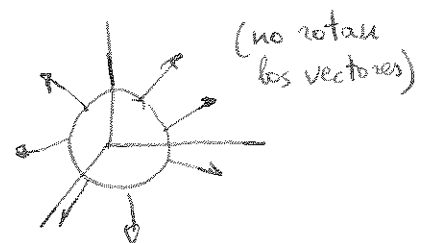
Ejemplo: Supongamos que $F(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ (No hay componente en z)
Si lo interpretamos como en $\mathbb{R}^3$ $P(x, y, z) = 0$

$$P(x, y, z) = 0$$

$$\nabla \times F = (1+1)\vec{k}$$



$$F(x, y) = 2xy\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j} \implies \text{rot } F = 0 \longrightarrow$$



Ejemplo en física: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Ley de Faraday)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Ampère})$$

↑
Corriente

Teorema: Sean $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ y $P(x, y, z) \in C^1(Q)$, $Q \subseteq \mathbb{R}^3$
 dominio simplemente conexo

El campo $F(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$

es conservativo $\Leftrightarrow \text{rot } F = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \right)$

Ejemplo: $F(x, y, z) = 2xy\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + 2yz\vec{k}$

$$f(x, y, z) = \int M dx = x^2 y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int N dy = (x^2 + z^2)y + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int P dz = yz^2 + k(x, y)$$

$$f(x, y, z) = x^2 y + yz^2 + k$$

DEF (divergencia)

En el plano sea $F(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$; $\text{div}(F(x, y)) = \nabla \cdot F(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$
 $\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot (M\vec{i} + N\vec{j})$

En el espacio $F(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$

$$\text{div}(F(x, y, z)) = \nabla \cdot F(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k})$$

Teorema: Sean $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, $P(x, y, z) \in C^2(Q)$

entonces $\text{div}(\text{rot } F) = 0$

Operador Laplaciano (forma básica)

Soit $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, entonces

Sea $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3)$, entonces

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi = \nabla(\nabla \phi) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \rightarrow \text{forma escalar}$$

Laplaciano de un campo vectorial

Sea $F = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$

entonces $\Delta F = \Delta M \vec{i} + \Delta N \vec{j} + \Delta P \vec{k}$

(

$$\Delta F = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F)$$

(Regla pneumotécnica: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$)

Ejemplo: Sea $F(x, y, z) = x^3 y^2 z \vec{i} + x^2 z \vec{j} + x^2 y \vec{k}$

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 3x^2y^2z$$

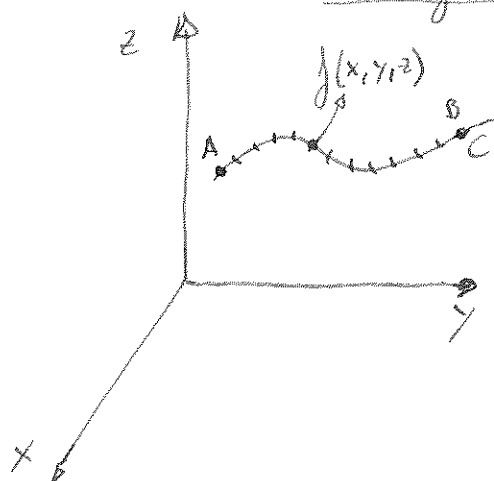
$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F}) = 6xy^2z\vec{i} + 6x^2yz\vec{j} + 3x^2y^2\vec{k}$$

()

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 \vec{i} + x^3 y^2 \vec{j} + 2xz \vec{k} - x^3 \vec{i} \\ -2xy \vec{j} - 2x^3 yz \vec{k} \\ (x^2 y^2 - 2xy) \vec{j} + (2xz - 2x^3 yz) \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial z^2} = 6xy^2 \vec{i} + x^3 \vec{j} + 2z \vec{j} + 2y \vec{k}$$

4/05/11

Integrales curvilíneas

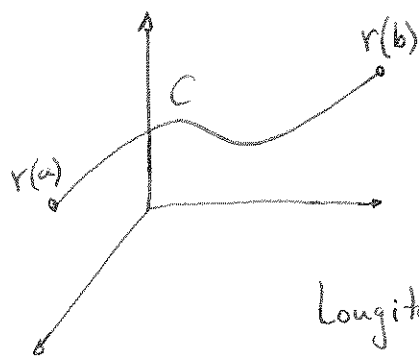
$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i$$

DEF (Integral curvilínea)

Sea f definida en una región que contiene a una curva suave C de longitud finita; entonces la integral de línea de f a lo largo de C está dado por:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i = \boxed{\int_C f(x, y, z) ds}$$

Si f es continua y C es suave a trozos, dicha integral de línea existirá.



Si tenemos una parametrización

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \\ a \leq t \leq b \end{cases}$$

Longitud de arco:
$$\int_a^b \underbrace{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}}_{\|\vec{r}'(t)\|} dt = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

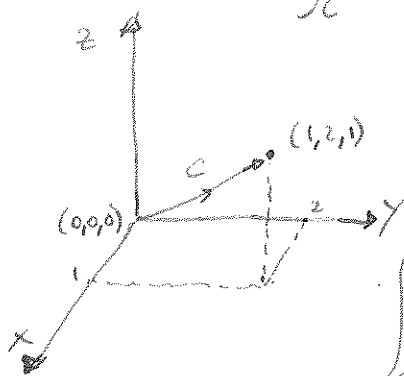
Teorema (Evaluación de integral curvilínea como una integral definida)

Sea f continua en una región que contiene a una curva suave C .

Si C está dada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ donde $a \leq t \leq b$, entonces:

$$\boxed{\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt}$$

Ejemplo: $\int_C (x^2 - y + 3z) ds$



Parametrizamos C.

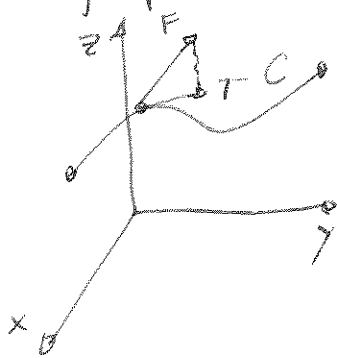
$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \begin{cases} x(t) = t; & 0 \leq t \leq 1 \\ y(t) = 2t; & \text{va de } (0,0,0) \\ z(t) = t; & \text{a } (1,2,1) \end{cases}$$

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds = \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t) \sqrt{1+4+1} dt =$$

$$= \sqrt{6} \int_0^1 (t^2 + t) dt = \boxed{\frac{5\sqrt{6}}{6}}$$

El resultado no depende de la parametrización. Otra parametr. $\begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = -2t \\ z(t) = -t \end{cases} -1 \leq t \leq 0$

Ejemplo en Física: Cálculo del trabajo



$$F(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$$

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b \underbrace{F(x(t), y(t), z(t))}_{\substack{\uparrow \\ F \cdot T(x, y, z) \\ \uparrow \\ \text{Unitario}}} \cdot \underbrace{\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Parámetro} \\ \uparrow \\ dr}} \|r'(t)\| dt = \int_C F \cdot dr$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_b^a F(x(t), y(t), z(t)) \cdot \underbrace{r'(t)}_{\substack{\uparrow \\ [x'(t), y'(t), z'(t)] \\ \uparrow \\ \text{Parametrización}}} dt = \int_C (M dx + N dy + P dz) \leftarrow \begin{matrix} \text{Integral curvilínea} \\ \text{en forma diferencial} \end{matrix}$$

Campos vectoriales conservativos

Ejemplo: $F(x, y) = \frac{1}{2}xy\vec{i} + \frac{1}{4}x^2\vec{j}$

$$\int_{C_1} F \cdot dr \quad C_1: r(t) = t\vec{i} + t\vec{j}, 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: r(t) = t\vec{i} + \sqrt{t}\vec{j}; 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_2} F \cdot dr \quad C_3: r(t) = \frac{1}{2}t\vec{i} + \frac{1}{8}t^3\vec{j}; 0 \leq t \leq 2$$

$$W = \int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr = \int_{C_3} F \cdot dr = \frac{1}{4}$$

La igualdad se cumple porque $F(x, y)$ es un campo conservativo.

$$\text{rot}(F) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2}xy \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4}x^2 \right) \right) \vec{k} = 0 \quad \text{Potencial} \rightarrow f(x, y) = \frac{x^2 y}{4} + K$$

Teorema (Fundamental de las integrales curvilíneas) (en el plano)

Sea C una curva suave a trozos contenida en una región abierta R y dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$; $a \leq t \leq b$

Si $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ es conservativo en R , M, N son continuos en R .

entonces:
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde f es la función potencial de $\mathbf{F}$ (es decir $\nabla f = \mathbf{F}$)

Demo: Consideramos que C es suave

Sabemos que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$ Apelo a la regla de la cadena

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \underset{\text{Parametrizo}}{=} \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \left[f_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f_y(x, y) \frac{dy}{dt} \right] dt \underset{\substack{\text{Teorema fundamental} \\ \text{del cálculo}}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} (f(x(t), y(t))) dt = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Teorema (Fundamental de las integrales curvilíneas en el espacio)

Sea C una curva suave a trozos contenida en una región abierta Q y dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$.

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, conservativo en Q , y M, N y P continuos en Q .

Entonces:
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))$$

Ejemplo: Calcular $\int_C F \cdot dr$

donde $F(x, y) = 2xy\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$

C = curva suave a trozos desde $(-1, 4)$ hasta $(1, 2)$

Estudiamos si $F(x, y)$ es un campo conservativo

$\text{rot}(F) = 0 \Rightarrow$ Es conservativo

Calculamos función potencial $\rightarrow f(x, y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + K$

$\int_C F \cdot dr = f(1, 2) - f(-1, 4) = K - (4 - 8 + K) = 4$

DEF: Una región R (en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$) es conexa si cualquier par de puntos de dicha región puede ser unido por una curva suave a trozos totalmente contenida en R .

Teorema (Campos conservativos e independencia de trayectoria)

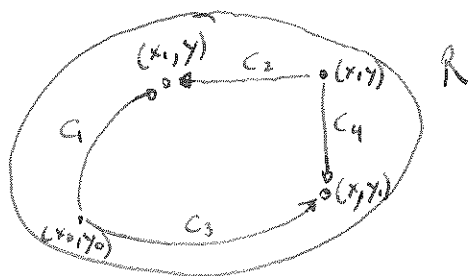
Si F es un campo continuo en una región abierta y conexa R entonces: $\int_C F \cdot dr$ es independiente de la trayectoria si y solo si F es conservativo

Demo en sentido $\Rightarrow$: Sea R la región plana conexa (asumimos $R \subset \mathbb{R}^2$)

Sea $F(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ y sea $(x_0, y_0) \in R$ punto fijo

Sea $(x, y) \in R$ cualquier punto de R

Elija $C \subset R$ curva suave a trozos que va desde (x_0, y_0) hasta (x, y)



sigue $\rightarrow$

Definimos $f(x, y) = \int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy$
 elegiremos $C_1, \cup C_2$
 " $C_3 \cup C_4$

Elige $C_1, \cup C_2$:

$$f(x, y) = \underbrace{\int_{C_1} M dx + N dy}_{\text{No depende de } x} + \underbrace{\int_{C_2} M dx + N dy}_0 = g(y) + \int_{C_2} M dx; \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)}$$

$$f(x, y) = h(x) + \int_{C_4} N dy; \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)} \rightarrow \nabla f(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j} = \vec{F}$$

Caso más sencillo:

Si $x_1 = x_0$ entonces

$$g(y) = \underbrace{\int_{C_1} M dx}_0 + N dy = \int_{C_1} N dy$$

De la misma manera, si $y_1 = y_0$:

$$h(x) = \int_{C_3} M dx$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x M(x, y) dx = \\ = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy \end{array} \right\}$$

Ejemplo: Sea $F(x, y, z) = \underbrace{e^x \cos y \vec{i}}_M - \underbrace{e^x \sin y \vec{j}}_N + \underbrace{2z \vec{k}}_P$

a) Demostrar que $\int_C F \cdot d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria

b) Calcular el trabajo de F a lo largo de una curva C que va desde $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$ hasta $(1, \pi, 3)$

$$c) \text{rot}(F) = \left(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_0 - \underbrace{\frac{\partial N}{\partial z}}_0 \right) \vec{i} - \left(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_0 - \underbrace{\frac{\partial M}{\partial z}}_0 \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$$

$$-e^x \sin y - (-e^x \sin y) = 0$$

Sigue 

b) Calculamos $f(x, y, z) : \nabla f = F$

Sabemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y \rightarrow f(x, y, z) = e^x \cos y + g(y, z) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(y, z) = h(x, z) = m(z) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y \rightarrow f(x, y, z) = e^x \cos y + h(x, z) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^x \cos y + m(z) = 2z + l(x, y) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2 \rightarrow f(x, y, z) = 2z + l(x, y) \quad \left\{ \begin{array}{l} m(z) = 2z + K \\ e^x \cos y = l(x, y) - K \end{array} \right.$$

c) $f(x, y, z) = e^x \cos y + 2z + K$

$$\int_C F \, dr = f(1, \pi, 3) - f(0, \frac{\pi}{2}, 1) = \left[e^x \cos y + 2z \right]_{(0, \frac{\pi}{2}, 1)}^{(1, \pi, 3)} = 4 - e$$

↻
Va desde $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$
hasta $(1, \pi, 3)$

Teorema:

Sea $F(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$; tal que $F \in C^1(R)$,

(1) R conexa. Sea $C \subset R$ suave a trozos.

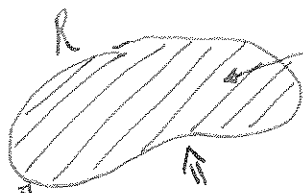
Las condiciones siguientes son equivalentes:

1) F es conservativo: $\exists f : F = \nabla f$

2) $\int_C F \cdot dr$ es independiente de la trayectoria

3) $\int_C F \cdot dr = 0$ para toda curva cerrada C en R .

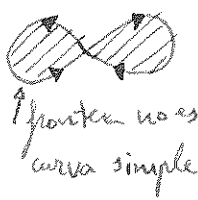
Teorema de Green



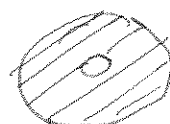
frontera
curva simple

Trabajaremos
con estas
regiones

Simply connected (sin agujeros)



frontera no es
curva simple



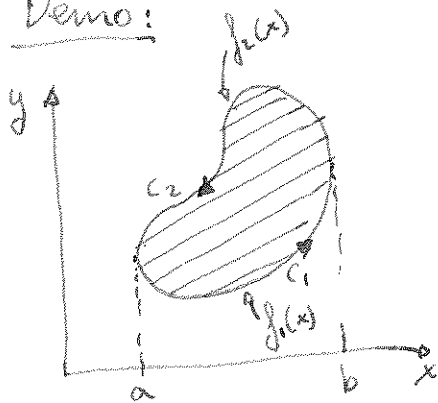
No es Simply
connected

Teorema de Green:

Sea R una región simplemente conexa cuya frontera es una curva C (simple) suave a trozos, orientada en sentido contrario a las agujas del reloj (al moverme en C , R queda a mi izquierda). Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a C entonces:

$$\int_C M(x,y) dx + N(x,y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

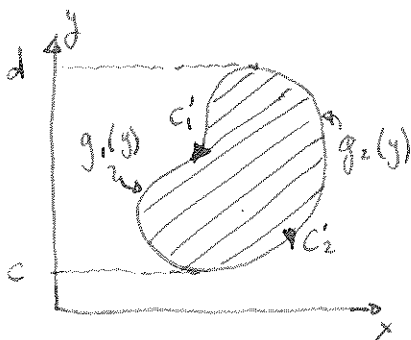
Demo:



$$\int_{C=C_1 \cup C_2} M(x,y) dx = \int_{C_1} M(x,y) dx + \int_{C_2} M(x,y) dx = \quad (*)$$

$$= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_b^a M(x, f_2(x)) dx = \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))] dx$$

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx = \int_a^b M(x,y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx = \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx \rightarrow \int_C M dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA$$



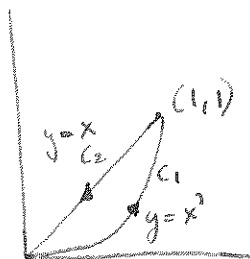
$$\int_C N dy = \int_{C_1} N dy + \int_{C_2} N dy$$

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA \rightarrow$$

$$\int_C N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$$

Ejemplo:

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$



$$\text{rot}(F) = -\frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial x^3 + 3xy^2}{\partial x} = -3y^2 + 3x^2 + 3y^2 = 3x^2$$

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_R 3x^2 dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^x 3x^2 dy dx =$$

$$\int_0^1 3x^2 y \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 (3x^3 - 3x^5) dx = \frac{1}{4}$$

()

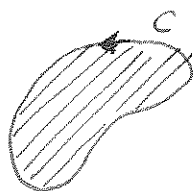
$$F \text{ conservativo} \iff \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Teorema de Green

$$\int_C F \cdot dr = \int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

$\int_C F \cdot dr = 0, \forall C \text{ cerrada}$
 $C \text{ cerrada}$

11/05/11



$$\int_C M(x,y) dx + N(x,y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \right) dA$$

()

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 \implies N(x,y) = x + g(y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \implies M(x,y) = h(x)$$

Una Posibilidad (T^{ma} Alberto)

$$\iint_R dA = \int_C x dy$$

Teorema:

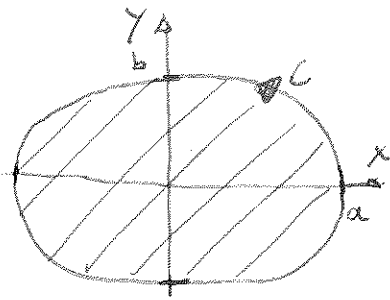
Sea R una región limitada y acotada por una curva simple C, cerrada y suave a trozos, orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj; entonces el área de R viene dado por:

$$\text{Area}_R = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

Hallar el área de la región limitada por la elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

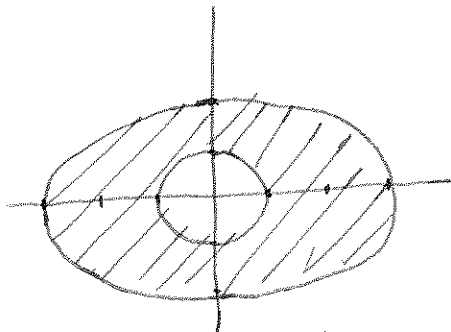
Sabemos que la solución es $A = \pi ab$



$$C = \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot a (-\sin t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \boxed{\pi ab} \end{aligned}$$



$$R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$$

$$\int_C 2xy dx + (x^2 + 2x) dy$$

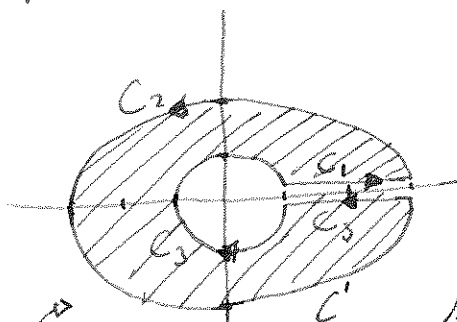
$$C = C_1 \cup C_2 = \text{Frontera de } R$$

Como tiene un agujero podemos considerar la siguiente figura con el hueco $\rightarrow$

$$\int_{C_1} 2xy dx + (x^2 + 2x) dy = - \int_{C_2} 2xy dx + (x^2 + 2x) dy$$

$$\int_{C'} 2xy dx + (x^2 + 2x) dy = \int_C 2xy dx + (x^2 + 2x) dy$$

$$C' = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$



Simplemente conexa

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_R ((2x+2) - 2x) dA = 2 \iint_R dA = 2 [6\pi - \pi] = 10\pi$$

Formas alternativas del teorema de Green

Sea $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + \underbrace{P(x, y, z)}_0\vec{k}$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial N}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

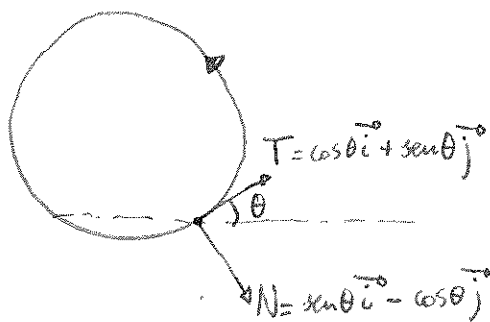
$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$; Con condiciones apropiadas de regularidad

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \cdot dA = \iint_R (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{k} \cdot dA$$

Segunda forma: Parametrizamos C con el parámetro longitud de arco

$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$; $\vec{r}'(s) = \vec{T} = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j}$

$\vec{N} = y'(s)\vec{i} - x'(s)\vec{j}$



Consider $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ y aplio el Teorema de Green:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{N} \cdot ds = \int_a^b (M\vec{i} + N\vec{j}) \cdot (y'(s)\vec{i} - x'(s)\vec{j}) \cdot ds = \int_a^b \left(M \frac{\partial y}{\partial s} - N \frac{\partial x}{\partial s}\right) ds = \int_C M dy - N dx \stackrel{\text{Teo Green}}{=} \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA = \iint_R \text{div } \vec{F} \cdot dA$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{N} \cdot ds = \iint_R \text{div } \vec{F} \cdot dA$$

Integrales de superficie

Superficie se puede definir por:

una aplicación $\rightarrow$ $z = g(x, y)$
 $y = g(x, z)$
 $x = g(y, z)$

Una parametrización:

$$r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

vector normal a la superficie $\rightarrow r_u(u, v) \times r_v(u, v)$

Área de la superficie $\rightarrow$

$$\iint_D \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| \, du \, dv$$

$$r(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + g(x, y)\vec{k}$$

Def (Integrales de Superficie):

$$\iint_R \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dx \, dy$$

Sea S una superficie dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy .

Supongamos que $g \in C^1(R)$

Considero $f(x, y, z)$ definido en S .

Defino la suma:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i; \Delta S_i = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \Delta A_i$$

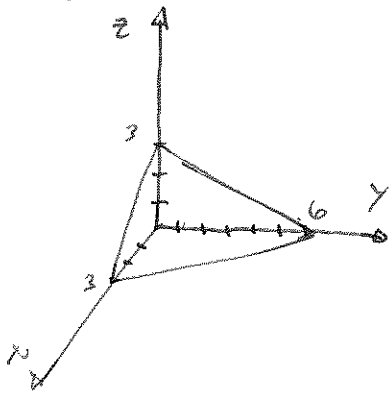
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \iint_S f(x, y, z) \, dS$$

Teorema: Sea S una superficie cuya ecuación es $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy . Si $g \in C^1(R)$ y f es continua en S .

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA}$$

" $dx \, dy$

Ejemplo: Calcular $\iint_S (y^2 + 2yz) dS$; $S = \{(x, y, z) : 2x + y + 2z = 6 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$

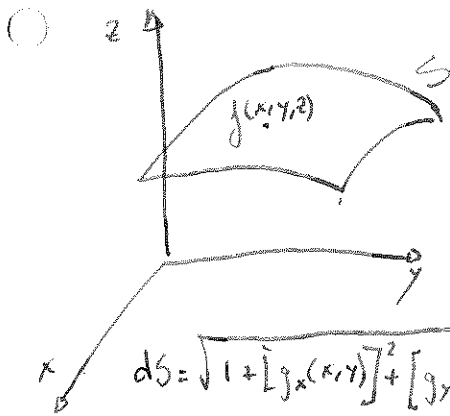


$$\iint_S (y^2 + 2yz) dS = \iint_R (y^2 + 2y \left(\frac{6-2x-y}{2} \right) \sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2} dx dy =$$

$$\iint_R (y^2 + 2y \left(\frac{6-2x-y}{2} \right) \cdot \frac{3}{2} dx dy = \int_0^3 \int_0^{6-2x} y(3-x) dy dx = \frac{243}{2}$$

Superficies paramétricas e integrales de superficie

16/05/11



$$\iint_S F(x, y, z) dS$$

$S = z = g(x, y)$

Superficie paramétrica

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

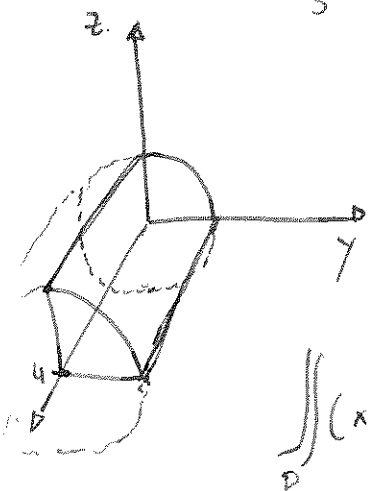
$$(u, v) \rightarrow x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} = \vec{r}(u, v)$$

Con esta definición (paramétrica) de la superficie S , se obtiene que:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \underbrace{\|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)\|}_{dS} du dv$$

(Recordar la forma de la integral de línea $\int_C f(x, y, z) dS = \int_C f(x, y, z) \underbrace{\|\vec{r}'(t)\|}_{dS} dt$)

Ejemplo: $\iint_S (x + z) dS$; $S = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 9 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$



$$S = z = g(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$$

$$\iint_D (x + \sqrt{9 - y^2}) \cdot \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \cdot dA$$

$D = [0, 4] \times [0, 3]$

$g_x(x, y) = 0$

$g_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}}$

$$\iint_D (x + \sqrt{9 - y^2}) \cdot \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}} \cdot dA = \int_0^3 \int_0^4 \frac{3(x + \sqrt{9 - y^2})}{\sqrt{9 - y^2}} dx dy = 36 + 12\pi$$

Ejemplo (mismo ejercicio pero realizado distinto):

Parametrizamos la superficie $\Rightarrow r(u,v) = u\vec{i} + 3\cos v\vec{j} + 3\sin v\vec{k} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 4 \\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

$$\iint_{D=[0,4] \times [0, \frac{\pi}{2}]} (u + 3\sin v) \underbrace{\|r_u \times r_v\|}_3 \cdot dA = \iint_D (u + 3\sin v) \cdot 3 \, dA = \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3u + 9\sin v) \, dv \, du = 36 + 12\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_u(u,v) = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ r_v(u,v) = 0\vec{i} - 3\sin v\vec{j} + 3\cos v\vec{k} \end{array} \right\} \begin{array}{l} r_u \times r_v = 0\vec{i} - 3\cos v\vec{j} - 3\sin v\vec{k} \\ \|r_u \times r_v\| = \sqrt{9\cos^2 v + 9\sin^2 v} = \boxed{3} \end{array}$$

Orientación de una superficie

S es orientable si $\forall$ punto que no pertenezca a su frontera ($\notin Fr(S)$) podemos definir un vector unitario N , de manera que $N(x,y,z)$ sea continua en S .

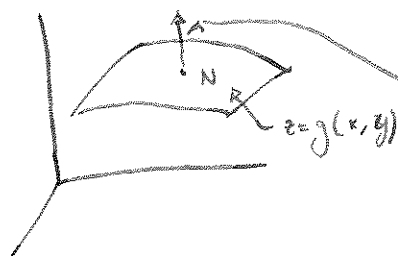
Si construimos tal función $N(x,y,z)$ diremos que S es una superficie orientada.
Si S es orientable, tiene dos caras, y elegimos uno de los dos vectores posibles.
(Habitualmente, si S es cerrada, se acostumbra a elegir N apuntando hacia fuera)

superficie $\rightarrow z = g(x,y) \rightarrow G(x,y,z) = z \cdot g(x,y) = 0$

∇G define un vector normal a S (donde S es una superficie de nivel de G)

$$\begin{aligned} \nabla G &= -g_x(x,y)\vec{i} - g_y(x,y)\vec{j} + 1\cdot\vec{k} \rightarrow \text{hacia arriba} \\ g_x(x,y)\vec{i} + g_y(x,y)\vec{j} - \vec{k} &\rightarrow \text{hacia abajo} \end{aligned}$$

Vector normal unitario $\Rightarrow N = \frac{\nabla G(x,y,z)}{\|\nabla G(x,y,z)\|}$



$$N = \frac{-g_x(x,y)\vec{i} - g_y(x,y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}}$$

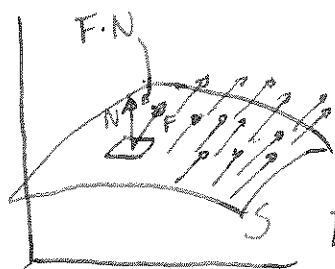
Si me dan S paramétricamente

$$r(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

Integrales de flujo

Cantidad de flujo que atraviesa esa superficie



$$\Delta \text{ cantidad de flujo} = F \cdot N \cdot dS$$

Flujo de F a través de $S \Rightarrow$ Integral de superficie

DEF (Integral de flujo)

Sea $F(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$ donde $M, N, P \in C^1(S)$, donde S es una superficie orientable mediante el vector unitario normal N . La integral de flujo de F a través de S está dado por

$$\iint_S F \cdot N \cdot dS$$

En este caso ($S \equiv z = g(x,y)$) se puede calcular

$$N \cdot dS = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \cdot dS = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \cdot \|\nabla G\| \cdot dA = \nabla G \cdot dA$$

$$\nabla G = -g_x(x,y)\vec{i} - g_y(x,y)\vec{j} + \vec{k}$$

Teorema (Evaluación integrales de flujo)

Sea S una superficie orientada dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy .

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\vec{i} - g_y(x, y)\vec{j} + \vec{k}] dA \rightarrow S \text{ orientada hacia arriba}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_R \mathbf{F} [g_x(x, y)\vec{i} + g_y(x, y)\vec{j} - \vec{k}] dA \rightarrow S \text{ orientada hacia abajo}$$

Si S está definida como:

$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$; donde $(u, v) \in D$ del plano uv .

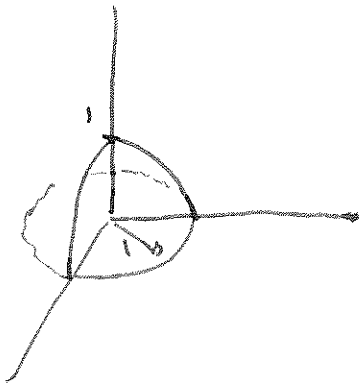
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \right) \cdot \cancel{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} dA = \boxed{\iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA}$$

(Recordar $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$)

Ejemplo: Hallar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \underbrace{\mathbf{N}}_{\vec{dS} \Rightarrow \text{vector normal a la superficie con modulo 1}} dS$ donde

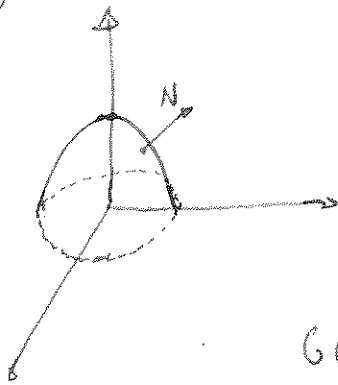
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$S \equiv z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$$



Ejercicio:

$$S \equiv z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$



Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

S como superficie de nivel de $G(x, y, z)$;

$$S = \{ (x, y, z) : G(x, y, z) = 0 \} \cap \{ (x, y, z) : z \geq 0 \}$$

$$G(x, y, z) = \begin{cases} z + x^2 + y^2 - 1 \rightarrow \nabla G(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 1\mathbf{k} & \text{(vector normal hacia arriba)} \\ -z - x^2 - y^2 + 1 \rightarrow \nabla G(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 1\mathbf{k} & \text{(vector normal hacia abajo)} \end{cases}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) \, dS = \iint_S \frac{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 1\mathbf{k})}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \, dS$$

Tenemos una parametrización natural de S

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (1 - x^2 - y^2)\mathbf{k} \quad ; \quad R = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) \, dS = \iint_R \frac{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 1\mathbf{k})}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA = \iint_R (1 + x^2 + y^2) \, dA$$

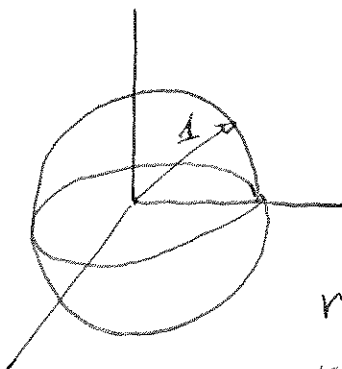
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \rho^2) \cdot \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Ejemplo:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

Representamos paramétricamente S

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k} \quad \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|} \cdot \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| \, dA = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) \, dA$$

$$\mathbf{r}_\phi = \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} - \sin \phi \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -\sin \phi \sin \theta \mathbf{i} + \sin \phi \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \cos \phi \mathbf{k} = \sin \phi \cdot \mathbf{r}(\phi, \theta)$$

$$dS = \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| \, dA$$

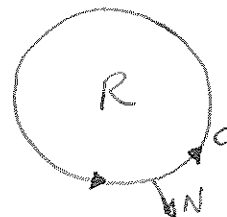
$$\begin{aligned}
& \boxed{0 \leq \phi \leq \pi} \\
& \boxed{0 \leq \theta \leq 2\pi}
\end{aligned}
\quad \iint_D F \cdot (r_\phi \times r_\theta) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2\sin^2\phi \cos\phi \cos\theta + \sin^3\phi \sin^2\theta) d\phi d\theta =$$

$$= 2 \int_0^\pi \sin^2\phi \cos\phi d\phi \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + \int_0^\pi \sin^3\phi d\phi \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

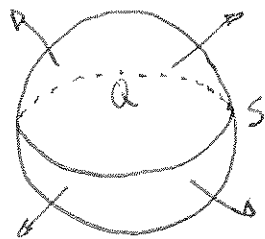
Teorema de la divergencia

Recordando:

$$\int_{\substack{C \\ \text{Frontera de } R}} F \cdot N \cdot ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA = \iint_R \operatorname{div} F \cdot dA$$



Por analogía:



Relacionaremos integral triple en Q (región sólida acotada) con integral sobre la superficie S, frontera de Q (cerrada)

$S \equiv$ superficie orientada por vectores unitarios normales dirigidos hacia el exterior.

Teorema de la divergencia (Gauss, Ostrogradsky):

Sea Q una región sólida limitada o acotada por una superficie cerrada S, orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de Q.

Si $F(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$ es un campo vectorial tal que $F \in C^1(Q)$, entonces

$$\boxed{\iint_S F \cdot N dS = \iiint_Q \operatorname{div} F dV}$$

Recordando: $\text{div } F = \frac{\partial M}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial N}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)$

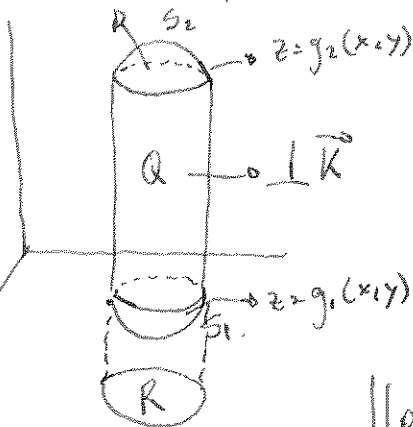
Demo: ^{T. Gauss}

Consideramos

$$\iint_S F \cdot N \cdot dS = \iint_S (M(x,y,z) \vec{i} \cdot \vec{N} + \underbrace{N(x,y,z) \vec{j} \cdot \vec{N}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Diferentes!}}} + P(x,y,z) \vec{k} \cdot \vec{N}) dS \stackrel{?}{=} \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV$$

$$\iint_S M \vec{i} \cdot \vec{N} dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} dV \dots \boxed{\iint_S P(x,y,z) \vec{k} \cdot \vec{N} dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV}$$

Lo demostraremos para Q sencillo



$$\iint_{S_1} P \vec{k} \cdot \vec{N} dS = \iint_R P(x,y,g_1(x,y)) \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \vec{j} - \vec{k} \right) dA =$$

$\uparrow$
Hacia abajo

$$= - \iint_R P(x,y,g_1(x,y)) dA$$

$$\iint_{S_2} P \vec{k} \cdot \vec{N} dS = \iint_R P(x,y,g_2(x,y)) dA$$

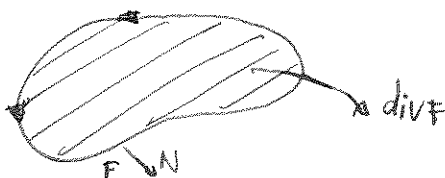
$\uparrow$
Hacia arriba

$$\iint_S P \cdot \vec{k} \cdot \vec{N} \cdot dS = \iint_R [P(x,y,g_2(x,y)) - P(x,y,g_1(x,y))] dA = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dA = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV$$

Teorema de la divergencia

23/05/11

$$\boxed{\iint_S F \cdot N \cdot dS = \iiint_Q \text{div } F \cdot dV}$$



Ejemplo:

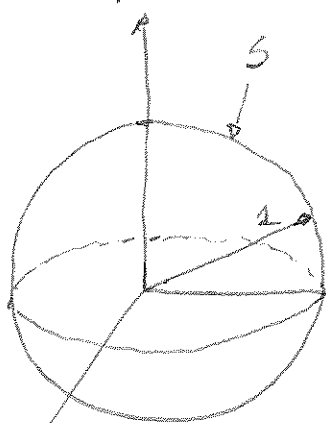
$$F(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$Q \equiv \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$S \equiv \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}; \quad S \equiv \{(x, y, z) : G(x, y, z) = 0\}$$



$$\iint_S F \cdot N \, dS = \iint_S \underbrace{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}_{x^2 + y^2 + z^2 = 1} dS = \iint_S dS = 4\pi$$

$$\nabla G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}; \quad \|\nabla G\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}$$

$$\left. \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \right|_{(x, y, z) \in S} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = \iiint_Q 3 \, dV = 3 \cdot \iiint_Q dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

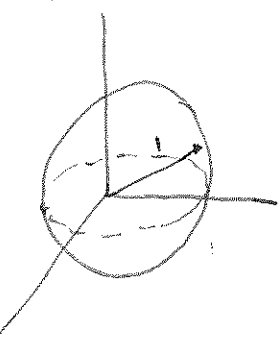
Ejemplo:

$$F(x, y, z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$$

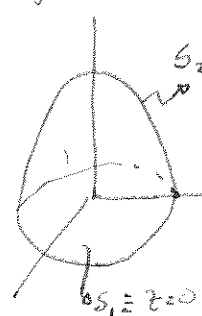
$$\iint_S F \cdot N \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = \iiint_Q 1 \, dV = \frac{4}{3}\pi$$

Complicado

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 1$$



Ejemplo: Sea $Q = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$; $F(x, y, z) = z\vec{i} + x\vec{j} + y^2\vec{k}$



$$\iint_S F \cdot N \, dS = \iint_{S_1} F \cdot N_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot N_2 \, dS = \iint_{S_1} F \cdot (-\vec{k}) \, dS + \iint_{S_2} F \cdot \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \, dS$$

$$= \iint_R -y^2 \, dA + \iint_R (4xz + 2xy + y^2) \, dA = \iint_R (4xz + 2xy) \, dA =$$

$R \equiv$ disco centrado en $(0, 0)$ y radio 2

$$= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4x(4-x^2-y^2) + 2xy) \, dx \, dy \quad \text{--- sigue p. siguiente}$$

continuación

AVEC

22/05/11

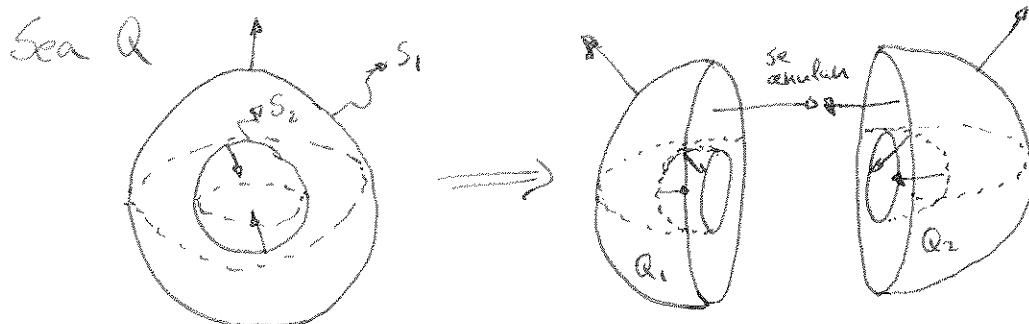
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (16x - 4x^2 - 4xy + 2xy) dx dy = \int_{-2}^2 \left[8x^2 - x^4 - 2x^2y + x^2y \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy = 0$$

Sin embargo si lo hacemos por el volumen:

$$\iiint_Q \operatorname{div} F \cdot dV = \iiint_Q 0 \cdot dV = 0; \operatorname{div} F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

○ Teorema de la divergencia en regiones más generales



$$\iint_{F_r(Q_1)} F \cdot N \cdot dS = \iiint_{Q_1} \operatorname{div} F \cdot dV, \quad \iint_{F_r(Q_2)} F \cdot N \cdot dS = \iiint_{Q_2} \operatorname{div} F \cdot dV$$

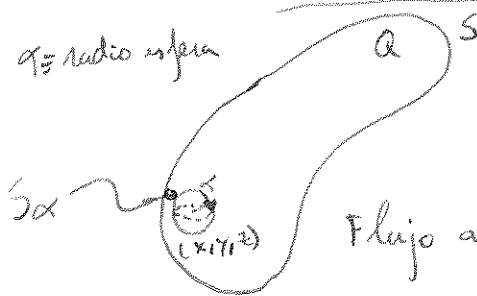
○ $\iint_{S_1 \cup S_2} F \cdot N \cdot dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \cdot dV$ Si considero:

Entonces: $\iint_{S_2} F \cdot N \cdot dS - \iint_{S_1} F \cdot N \cdot dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \cdot dV$

Si $\operatorname{div} F = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} F \cdot N \cdot dS = \iint_{S_2} F \cdot N \cdot dS$

Sentido del Teorema de la divergencia

$\alpha \equiv$ radio esfera



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \cdot dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot dV$$

Flujo a través de $S_\alpha \equiv \iiint_{Q_\alpha} \operatorname{div} \mathbf{F} dV \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \Delta V_\alpha$

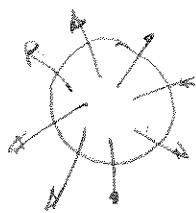
↑
Volumen de la pequeña esfera

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \approx \frac{\text{Flujo a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha}$$

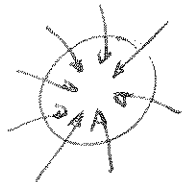
$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{Flujo a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha} = \frac{\text{Flujo por unidad de Volumen}}$$



$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ Incomprensible (todo el flujo que entra, sale)



$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) > 0$ fuente



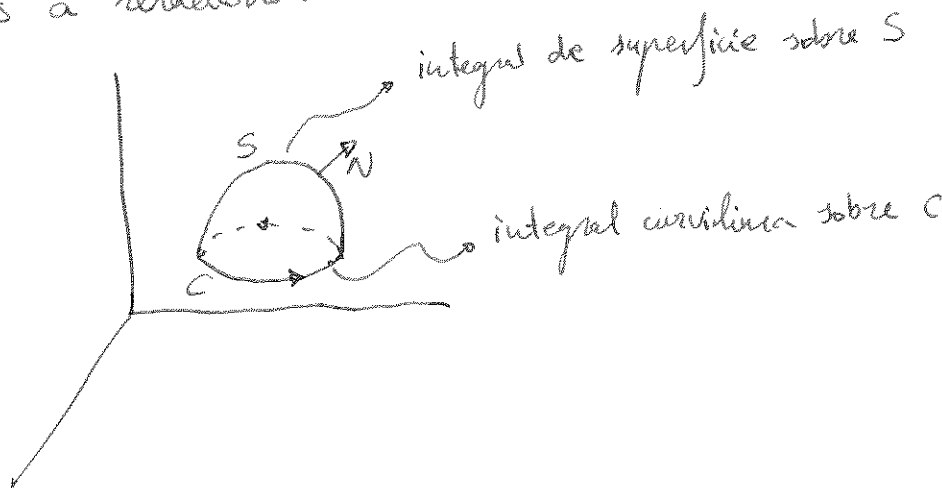
$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) < 0$ sumidero

Teorema de Stokes

Es otra generalización del teorema de Green

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{K} \cdot dA$$

Vamos a relacionar



Regla de la mano dcha.
define la vinculación
entre las orientaciones
respectivas
(sentido contrario a
las agujas del reloj)

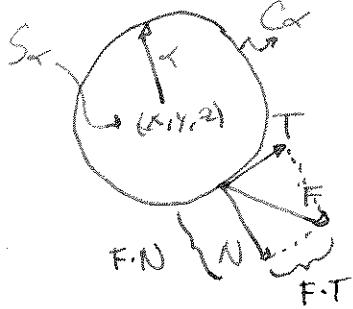
Sigue

Teorema de Stokes:

Sea S una superficie orientada con vector unitario $\vec{N}$, acotada por una curva cerrada simple, tiene a tramos C , con orientación positiva (regla de la mano derecha). Si F es un campo vectorial tal que $F \in C^1(A)$, A abierto que contiene a S y C , entonces:

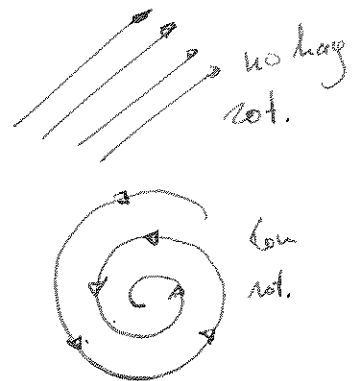
$$\oint_C F \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{rot } F) \cdot \vec{N} \cdot dS$$

$$\int M dx + N dy + P dz$$



Basados en este teorema, estudiamos el significado físico del rotacional.
Definimos un campo vectorial F y un disco S_α de radio α centrado en (x, y, z) con frontera C_α

$F.T \rightarrow$ componente tangencial de F
 $F.N \rightarrow$ componente normal de F



$$\oint_{C_\alpha} F \cdot d\vec{r}$$

$$\oint_{C_\alpha} F \cdot d\vec{r} \equiv \text{circulación de } F \text{ alrededor de } C_\alpha$$

$$\oint_{C_\alpha} F.T \cdot dS = \iint_{S_\alpha} (\text{rot } F) \cdot \vec{N} \cdot dS \approx \text{rot } F \cdot \vec{N} \iint_{S_\alpha} dS$$

$$\text{rot } F \cdot \vec{N} \approx \frac{\oint_{C_\alpha} F.T \cdot dS}{\pi \alpha^2} = \frac{\text{circulación de } F}{\text{área disco}}$$

$$\text{rot } F \cdot \vec{N} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \alpha^2} \cdot \oint_{C_\alpha} F.T \cdot dS \equiv \text{tasa de circulación por unidad de área}$$

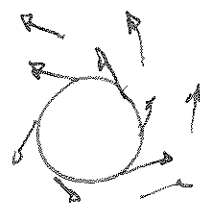
rotación de F respecto de N

Teorema de Stokes

25/05/11

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$



Vórtice

Los rotacionales están muy presentes en mecánica de fluidos y termodinámica

Descomposición de Helmholtz (No entra)

Todo campo $\mathbf{F}$ suficientemente suave y que decaiga suficientemente rápido (más rápido que $\frac{1}{r^2}$) se puede descomponer en:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{irrot}} + \mathbf{F}_s$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Irrotacional Solenoidal
 o
 conservativa

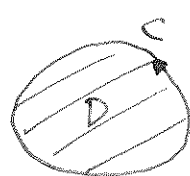
$$\mathbf{F}_{\text{irrot}} = -\nabla \Psi \quad ; \quad \Psi \text{ potencial escalar}$$

$$\mathbf{F}_s = \nabla \times \mathbf{A} \quad ; \quad \mathbf{A} \text{ potencial vectorial}$$

Teorema fundamental del cálculo: $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$

Teorema de integrales curvilíneas: $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(r(b)) - f(r(a))$

Teorema de Green: $\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \int_C M dx + N dy$



Se puede analizar solo la frontera

Teorema de Stokes: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$



Teorema de Gauss: $\iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

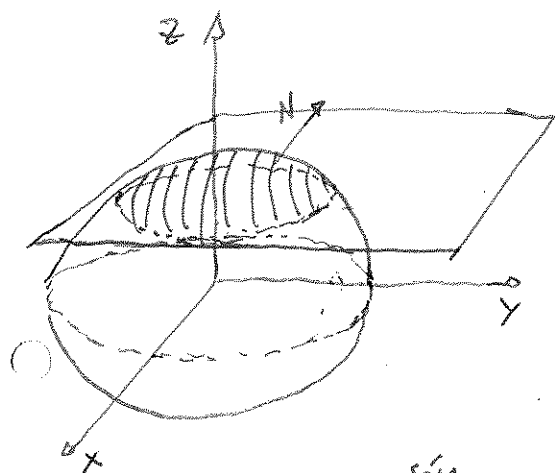


(Todos estos teoremas nos dicen que podemos analizar una región a partir de su frontera)

Ejercicio: Sean $F = -3y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^4\vec{k}$

Comprobar el Teorema de Stokes en:

$$S \equiv \{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$



Parametrización de C

Definimos la intersección del elipsoide y el plano:

$$C \equiv \{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 = \frac{1}{2} \wedge z = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

↓

Proyecta la curva sobre el plano xy ($z=0$)

$$C \equiv \{(x, y) : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$$

↓ Parametrizo

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos t ; t \in [0, 2\pi]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin t ;$$

$$C \equiv \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin t \\ z(t) = z(x(t), y(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$(x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$\oint_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(x(t), y(t), z(t)) \cdot r'(t) \cdot dt = \int_0^{2\pi} (-3(\frac{1}{2} \sin t)\vec{i} + 3(\frac{1}{2} \cos t)\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}) \cdot$$

$$(-\frac{1}{2} \sin t \vec{i} + \frac{1}{2} \cos t \vec{j} + 0 \vec{k}) \cdot dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} dt = \boxed{\frac{3}{2} \pi}$$

Parametrización de la superficie: $z = f(x, y)$; $x = u$; $y = v$; $z = f(u, v)$

$$S \equiv \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \sqrt{1 - 2(u^2 + v^2)} \end{cases} ; \boxed{\{(u, v) : u^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}\} \equiv D}$$

$$S \equiv \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \wedge z = \sqrt{1 - 2(x^2 + y^2)}\}$$

sigue

continua

$$\iint_S \text{rot}(F) \cdot N \cdot dS = \iint_D (6\vec{K}) \cdot (-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + 1\vec{K}) dA ; \nabla G = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & z^4 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y} z^4 - \frac{\partial}{\partial z} (3x) \right] \vec{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x} z^4 - \frac{\partial}{\partial z} (-3y) \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (3x) - \frac{\partial}{\partial y} (-3y) \right] \vec{k} =$$

$$= 6\vec{K} \rightarrow \boxed{\text{rot}(F) = 6\vec{K}}$$

$$\iint_D (6\vec{K}) \cdot (-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + 1\vec{K}) dA = \iint_D 6 dA = 6 \cdot \text{Area}(D) = \frac{6}{4} \pi = \frac{3}{2} \pi$$

Ejemplo: $F(x, y, z) = K \frac{q}{\|r^2\|} \cdot \frac{r}{\|r\|}$; $r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Calcular el flujo en una esfera de radio a .

$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ orientada hacia afuera

$\iint_S F \cdot N \cdot dS$, Parametizamos la esfera: $r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} =$
 $a \cos u \cos v \vec{i} + a \sin u \cos v \vec{j} + a \cos u \vec{k}$, $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= a \cos u \cos v \vec{i} + a \cos u \sin v \vec{j} - a \sin u \vec{k} \\ r_v(u, v) &= -a \sin u \cos v \vec{i} + a \sin u \cos v \vec{j} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} r_u \times r_v &= a^2 (\sin u \cos v \vec{i} + \sin u \cos v \vec{j} + \cos u \vec{k}) \end{aligned} \right\}$$

$$\iint_S F \cdot N \cdot dS = \iint_D K \frac{q}{a^3} (a \sin u \cos v \vec{i} + a \sin u \cos v \vec{j} + a \cos u \vec{k}) \cdot \underline{(r_u \times r_v)} \cdot dA =$$

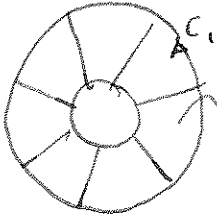
$$= \iint_D Kq \sin u dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Kq \sin u du dv = \boxed{4\pi Kq} \rightarrow \text{(i No depende de } a \text{ !)}$$

Recordando el teorema de Green

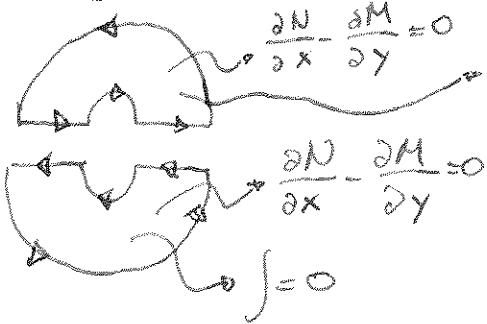


$$\int_C M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = 0$$

Si el campo es irrotacional



$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$



$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$\int = 0$$



$$\int_{C_1 \cup C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr = 0$$

$$\int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr = 0$$

en sentido positivo

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$$

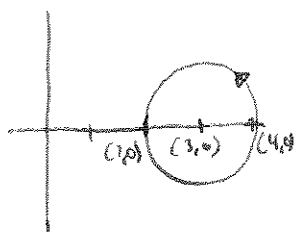
30/05/11

Ejercicio: Nos dan un campo vectorial $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = \begin{cases} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$F \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{0,0\})$$

$$F \notin C^0(\mathbb{R}^2)$$

Calcular $\int_{C_1} M(x,y) dx + N(x,y) dy$ donde C_1 = circunferencia radio=1 centrada en (3,0)



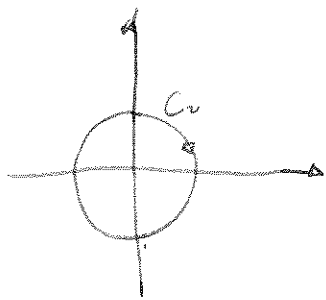
Vamos a comprobar si el campo F cumple más condiciones necesarias para que sea conservativo en la región que ya luego decidamos analizar.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\} \Rightarrow \text{Como la región no es simplemente conexa}$$

Si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ no tiene porque ser un campo conservativo.

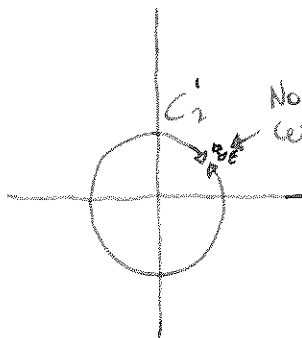
sigue

sigue



$$\int_{C_2} M dx + N dy = 2\pi$$

En C_2 no podemos aplicar el Teorema de Green



No es curva cerrada $\Rightarrow$ Podemos aplicar el T^{ma} Green

Si existe f (función potencial) esta debe de cumplir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \rightarrow f(x,y) = -\arctg\left(\frac{y}{x}\right) + g(y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \rightarrow f(x,y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + h(x) \quad (2)$$

Derivando (1) respecto de y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right) + g'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + g'(y)$$

Tiene que ser iguales

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$N(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Derivando (2) respecto de x
e igualando a $M(x,y)$

$$\boxed{g'(y) = 0}$$

$$\boxed{h'(x) = 0}$$

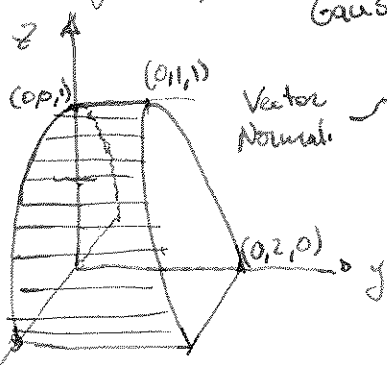
$$\arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f(x,y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + K$$

Evaluar $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ donde $\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} + (y^2 + e^{xz})\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$

Donde S es la superficie de la región Q acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z=0$, $y=0$ e $y+z=2$.

$$\text{Gauss} \rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_Q \text{div } \vec{F} \, dV$$



Vector Normal

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS$$

$$\text{Calculamos } \text{div } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xy)) = 3y$$

sigue

$$Q \equiv \left\{ (x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1-x^2, 0 \leq y \leq 2-z \right\}$$

$$\iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = \iiint_Q 3y \, dV = 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y \, dy \, dz \, dx = 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2} \, dz \, dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (2-z)^2 \, dz \, dx =$$

$$\frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1$$

Función vectorial

Notas

función escalar

- ()
- ΔF → Laplaciano ⇒ Devuelve vector
 - $\nabla \cdot F$ → divergencia ⇒ Devuelve escalar
 - $\nabla \times F$ → rotacional ⇒ Devuelve vector

- ∇f → Gradiente ⇒ Devuelve vector
- $F = \nabla f$ → Función potencial f



ANÁLISIS VECTORIAL TERCER PARCIAL

8 DE JUNIO DE 2011

NORMAS DEL EXAMEN

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">Los móviles deberán estar apagados y guardados en un lugar no visible.El alumno dejará el DNI, pasaporte o carné de la UPM encima de la mesa.Todas las hojas que el alumno tenga encima de la mesa llevarán escrito necesariamente su nombre y apellidos.No se permite el uso de libros, apuntes o calculadoras. | <ul style="list-style-type: none">La duración de la prueba es de dos horas.Cada ejercicio deberá entregarse por separado (cuando se empiece un ejercicio nuevo, utilice una hoja nueva).Deberá entregarse al menos una hoja por cada ejercicio. Si no se ha hecho nada de dicho ejercicio, se entregará una hoja en blanco con el nombre y apellidos del alumno y el número de problema. |
|---|--|

1. [2,5 PUNTOS] Sea C la curva intersección de las superficies $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ y $S_2 : z = ax + by$.
- a) Calcular el trabajo realizado por una fuerza $F = yi + (z - x)j - yk$ en el desplazamiento de una partícula a lo largo de C , es decir calcular $W_C = \int_C F \cdot dr$.
- b) Calcular el valor de a y b , para que el trabajo antes calculado sea nulo. ¿Quiere decir esto que el campo vectorial F es conservativo? Razone su respuesta.

2. [2,5 PUNTOS] Sea C una curva cerrada simple y suave contenida en el plano $\Pi : x + y + z = 1$. Mostrar que la integral

$$\int_C zdx - 2xdy + 3ydz$$

depende solamente del área de la región del plano Π que encierra C y no de la forma de C ni de su posición en dicho plano Π .

3. [2,5 PUNTOS] Dados el campo vectorial $F(x, y, z) = (x + \frac{yz}{2}, y + z - \frac{xy}{2}, 5a - y)$, con $a > 0$ y la superficie abierta $S_1 : z = x^2 + y^2, z \leq 5$, se pide:

- a) Halla la expresión de la proyección D sobre el plano $z = 0$ de la superficie S_1 .
- b) Representa gráficamente la superficie abierta S_1 y la región D sobre los mismos ejes.
- c) Calcula el flujo de F a través de la cara externa de la superficie dada $\iint_S F \cdot dS$ (es decir, S orientada de manera que su borde C se recorre negativamente).

4. [2,5 PUNTOS] Considérese el campo vectorial $F(x, y) = (\frac{-y}{4x^2 + 9y^2}, \frac{x}{4x^2 + 9y^2})$.

- a) Calcúlese la integral de F a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ orientada positivamente.
- b) Calcúlese razonadamente la integral de F a lo largo de la curva de la figura, que contiene a la elipse anterior.

