FIS2

Apuntes de la asignatura (2010)

tomados de

M. C. Maicas

FÍSICA II

Marco C. Maicas Ramos; Despacho: A-033; Tutorías: L → 13-14 h
L → 15-18 h
X → 15-17 h

Tema 1. Termodinámica

1. Teoría cinética de los gases.

1.1. Temperatura.

Es una medida del grado de agitación de las moléculas.
Se dice que entre dos cuerpos hay **contacto térmico** cuando hay intercambio de energía sin movimiento. Podemos utilizar como ejemplo una barra de cobre y otra de hierro, que colocándo ambas en contacto, la barra de cobre se contrae ligeramente (se enfría), mientras que la de hierro se dilata (se calienta). Y dos cuerpos están en **equilibrio térmico** cuando ha existido contacto térmico y ya no hay más transferencia de energía, en el ejemplo anterior sería cuando las dos barras dejen de variar su longitud.
Si dos objetos están en equilibrio térmico con un tercero, entonces están en equilibrio térmico entre sí. Este es el principio cero de la termodinámica.

1.2. Escalas termométricas.

- Celsius: La escala de temperatura Celsius define la temperatura del punto del hielo como cero grados Celsius (0°C) y la temperatura del punto del vapor como 100°C. El espacio de la columna entre las marcas 0°C y 100°C se divide en 100 intervalos iguales (grados).

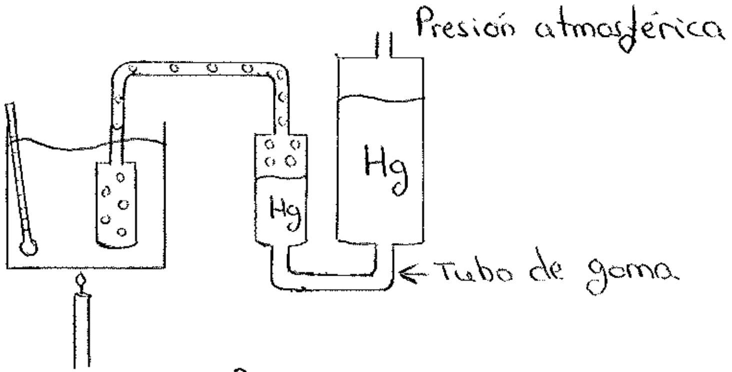
- Farenheit: En la escala de temperatura Farenheit se define como 32°F la temperatura del punto de hielo y como 212°F la del punto de ebullición del agua.

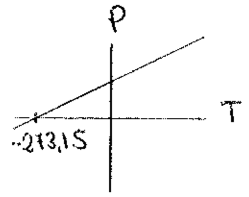
La relación general entre una temperatura Celsius t_C y una temperatura Fahrenheit t_F es:

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°) \; ; \; t_F = \frac{9}{5}t_C + 32.$$

- Kelvin: Es una temperatura que se obtiene de sumarle a los grados Celsius, 273,15.

$$T = t_C + 273{,}15$$





1.3. Gases ideales (leyes experimentales).

Si comprimimos un gas a temperatura constante, la presión crece. Del mismo modo si el gas se expansiona a temperatura constante, su presión decrece. Con una buena aproximación, el producto de la presión por el volumen de un gas de baja densidad es constante a temperatura constante. Este resultado fue descubierto experimentalmente por Robert Boyle y se conoce cono ley de Boyle:

$$P \cdot V = \text{constante (a temperatura constante)}$$

Existe una ley más general que reproduce la ley de Boyle como un caso especial. De acuerdo con la anterior ecuación, la temperatura absoluta de un gas de baja densidad es proporcional a su presión a volumen constante. Además la temperatura absoluta de un gas de baja densidad es proporcional a su volumen a presión constante. Estos dos resultados pueden convinarse mediante la expresión:

$$P \cdot V = C \cdot T$$

en donde C es una constante de proporcionalidad que podemos escribir como una constante K de valor $1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J/K multiplicada por el número N de moléculas del gas:

$$C = KN$$

Por lo tanto la relación anterior se convierte en:

$$P \cdot V = KNT$$

La constante K se denomina constante de Boltmann.
El número de moléculas N se puede definir como el número de moles del gas por el número de Avogadro:

$$N = n \cdot N_A$$

donde $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ moléc./mol.
y la anterior relación queda:

$$P \cdot V = nN_AKT = nRT$$

en donde $R = N_AK$ se denomina constante universal de los gases. Su valor que es el mismo para todos los gases, es:

$$R = N_AK = 8{,}314 \text{ J/mol}\cdot\text{K} = 0{,}08206 \text{ atm}\cdot\text{L/mol}\cdot\text{K}$$

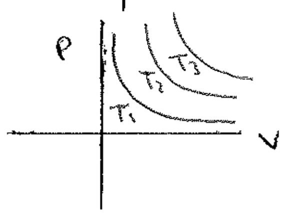
Las unidades con las que trabajaremos serán:

$P \to$ atm ; $V \to$ l ; 1 l = 1 dm^3 ; 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa ; 1 cal = 4,18 J ;

$1 \text{ atm} \ell = 101,3 \text{ J}$; $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/m^2$

La temperatura de 0°C (273 K) y la presión de 1atm suelen denominarse condiciones estandar. En condiciones estandar, 1 mol de un gas ideal ocupa un volumen de 22,4 ℓ.

La figura muestra los gráficos de P en función de V a varias temperaturas constantes T. Estas curvas se llaman isotermas. Las isotermas de un gas ideal son hipérbolas. Para una cantidad determinada de gas, vemos en la ecuación $P \cdot V = nRT$ que la magnitud PV/T es constante.



1.4. Teoría cinética de los gases.

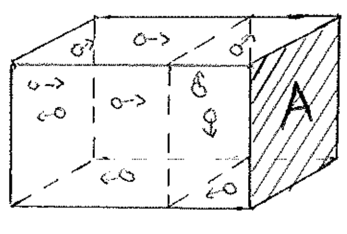
La descripción del comportamiento de un gas en función de las variables P, V y T puede relacionarse con los valores medios de magnitudes microscópicas, tales como la masa y la velocidad de las moléculas del gas. La teoría correspondiente se denomina teoría cinética de los gases.

Desde el punto de vista de la teoría cinética, un gas está constituido por un gran número de moléculas que realizan colisiones elásticas entre sí y con las paredes del recipiente. En ausencia de fuerzas externas, no existe ninguna posición preferida para una molécula en el interior del recipiente y los vectores velocidad tampoco poseen ninguna dirección preferida. Las moléculas están separadas en promedio, por distancias que son grandes en comparación con su diámetro y no ejercen ninguna fuerza entre sí, excepto durante el choque mutuo.

La presión que un gas ejerce sobre el recipiente que lo contiene se debe a las colisiones entre las moléculas del gas y las paredes del recipiente. La presión es una fuerza por unidad de área y, según la segunda ley de Newton, esta fuerza es la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de las moléculas que chocan contra la pared.

Supongamos que tenemos un recipiente de volumen V que contiene N moléculas de masa m y velocidad v. Para calcular la fuerza sobre la pared derecha perpendicular al eje x y de área A. El número de moléculas que chocan contra esta pared en el intervalo Δt es la totalidad de las que se están moviendo hacia la derecha y están a una distancia igual o inferior a $v_x \Delta t$. Este número es igual al número de moléculas que hay por unidad de volumen $\frac{N}{V}$ multiplicado por el volumen $v_x \Delta t A$ y luego por $\frac{1}{2}$ porque, en promedio, la mitad de las moléculas se estarán moviendo hacia la derecha. Por tanto el número de moléculas que chocan contra la pared en el intervalo Δt es:

$$\frac{1}{2}\frac{N}{V} v_x \cdot \Delta t \cdot A$$



La cantidad de movimiento de una molécula antes de chocar contra la pared es mv_x y después $-mv_x$. La variación de la cantidad de movimiento será $(-mv_x)-(mv_x)=-2mv_x$.
La cantidad de movimiento de todas las moléculas será:

$$\Delta p = 2mv_x \cdot \frac{1}{2}\frac{N}{V}v_x \Delta t \cdot A = \frac{N}{V} m v_x^2 A \Delta t$$

La fuerza será:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{N}{V} m v_x^2$$

o también:

$$P \cdot V = N m v_x^2$$

en función de la energía cinética:

$$\left.\begin{array}{l} P\cdot V = 2N\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right) \\ P\cdot V = NKT \end{array}\right\} \quad \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}KT$$

Así pues, la energía cinética media asociada con el movimiento a lo largo del eje x es $\frac{1}{2}KT$. Pero la dirección x no tiene ningún privilegio especial. En promedio:

$$v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$$

la energía cinética quedará:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}KT$$

2. Primer principio de la Termodinámica.

El calor es la energía que se transfiere de un objeto a otro debido a una diferencia de temperaturas.

2.1. Capacidades caloríficas.

La temperatura de un cuerpo generalmente aumenta cuando se le transfiere energía mediante calentamiento. La cantidad de calor Q necesaria para elevar la temperatura de un sistema es proporcional a la variación de temperatura y a la masa de la sustancia:

$$Q = C\,\Delta T = m\,c_e\,\Delta T$$

en donde C es la capacidad calorífica de la sustancia, que se define como la cantidad de energía transferida por calentamiento necesaria para aumentar un grado la temperatura de la sustancia. El calor específico ce es la capacidad calorífica por unidad de masa:

$$c_e = \frac{C}{m}$$

La unidad de la energía calorífica es la caloría, cuyo valor es:

$$1\,cal = 4{,}184\,J$$

La unidad de la capacidad calorífica será:

$$[C] = cal/{}^{\circ}C$$

La de el calor específico:

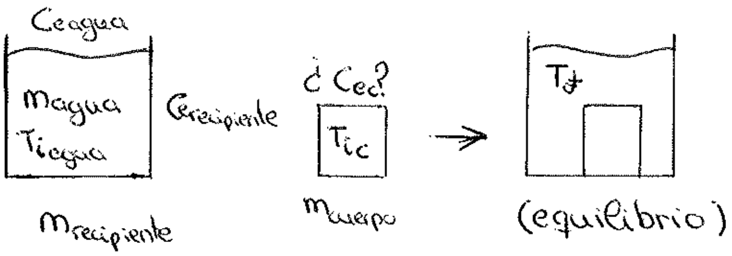
$$[c_e] = \frac{[Q]}{[m][\Delta T]} = \frac{cal}{gr\,{}^{\circ}C}$$

La capacidad calorífica por mol se denomina calor específico molar, c':

$$c' = \frac{C}{n}$$

$$Q = n\,c'\,\Delta T$$

Ejemplo: Cálculo del calor específico de un cuerpo. Podemos hacerlo sumergiéndolo en un líquido a una determinada temperatura y dejar que se igualen las temperaturas.



$$Q_{\text{cedido por el cuerpo}} = m_c \cdot Ce_c \,(Ti_c - T_f)$$

$$Q_{\text{absorvido por el agua + recipiente}} = m_a Ce_a (T_f - Ti_a) + m_r Ce_r (T_f - Ti_a)$$

$$Ce_c = \frac{m_a Ce_a + m_r Ce_r}{m_c} \; \frac{(T_f - Ti_a)}{(Ti_c - T_f)} \qquad Ce_a = 1$$

2.2. Calores latentes y cambio de fase.

Cuando se suministra calor al hielo a 0°C, la temperatura del hielo no se modifica. En su lugar, el hielo se funde. Este es un ejemplo de cambio de fase. Las formas más comunes de cambio de fase incluyen la solidificación (líquido a sólido), la fusión (sólido a líquido), la vaporización (líquido a vapor o gas), la condensación (gas o vapor a líquido), y la sublimación (sólido a gas).

El calor necesario para fundir una sustancia de masa m sin cambiar su temperatura es proporcional a la masa de la sustancia:

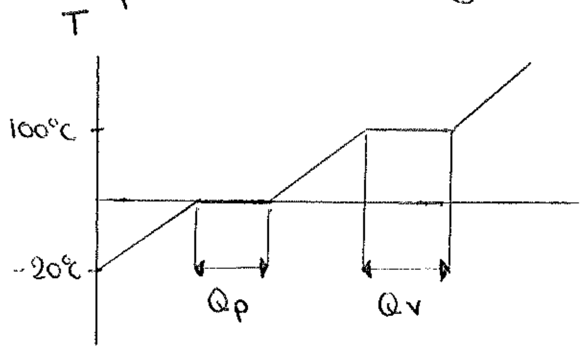
$$Q_p = m L_f$$

donde L_f se denomina calor latente de fusión de la sustancia. El calor latente del agua es $L_f = 79\ cal/gr$.

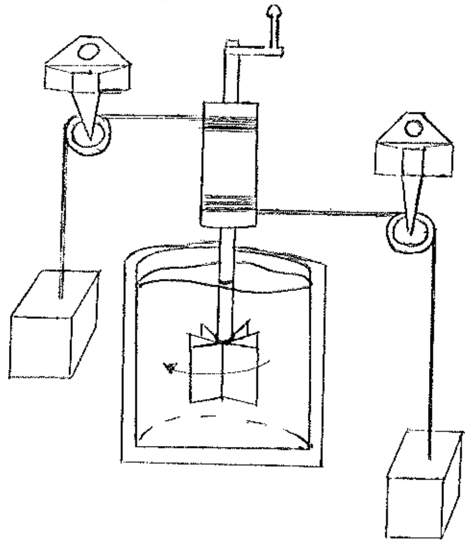
Cuando el cambio de fase corresponde al paso de líquido a gas, el calor requerido es

$$Q_v = m L_v$$

donde L_v es el calor latente de vaporización. El calor latente de vaporización del agua es $L_v = 540$ cal/gr.



2.3. El experimento de Joule y el primer principio de la termodinámica.



La temperatura de un sistema puede elevarse dándole calor, pero también puede conseguirse realizando trabajo sobre él. Joule mediante este mecanismo, obtuvo, que es necesario el trabajo de 4,184 J para elevar la temperatura de 1g de agua en 1°C. Este resultado según el cual 4,184 J de energía mecánica es equivalente a 1cal de energía térmica se conoce con el nombre de equivalente mecánico del calor.

La suma del calor añadido al sistema más el trabajo realizado sobre él es igual a la variación de la energía interna del sistema. Este es el primer principio de la termodinámica, que es simplemente un enunciado de la conservación de la energía.

Si suponemos que el sistema es un gas encerrado en un cilindro por medio de un émbolo. Si el émbolo comprime el

gas, tomamos el trabajo positivo y si es el gas el que se expande contra el embolo diremos que el trabajo es negativo. De la misma manera lo tomaremos para el calor Q, si se transfiere (calor positivo) o si se extrae (calor negativo).
El primer principio de la termodinámica se expresa:

$$\Delta U = Q + W$$

La variación de energía interna de un sistema es igual al calor transferido al sistema más el trabajo realizado sobre el sistema.
Es importante comprender que la energía interna U es una función del estado del sistema, de la misma forma que lo son P, V y T. También debemos destacar que el calor Q y el trabajo W no son funciones de estado del sistema. No hay funciones Q y W asociadas con un estado particular del sistema.

2.3.1. Energía interna.

La energía cinética de traslación Ec de las moléculas de un gas ideal está relacionada con la temperatura absoluta T por la ecuación:

$$E_c = \frac{3}{2} nRT$$

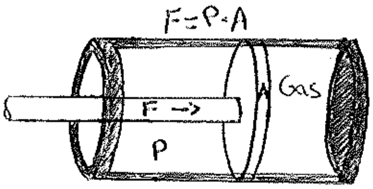
donde n es el número de moles del gas y R, la constante universal de los gases. Si se constituye que esta energía de traslación constituye toda la energía interna del gas, entonces $U = E_c$ y

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

En este caso la energía interna solo dependería de la temperatura.

2.1. Trabajo y diagramas P-V.

El módulo de la fuerza ejercida por el gas sobre un pistón es $P \cdot A$, donde A es el área del pistón y P es la presión del gas. Si el pistón se desplaza una distancia dx, el trabajo realizado por el gas sobre el pistón vale:



$$dw = F dx = PA dx = P dV$$

donde $dV = A \cdot dx$ es el incremento de volumen del gas. Este trabajo es el realizado por el gas. Del mismo modo el realizado sobre el gas será:

$$dw = -P dV$$

El trabajo efectuado sobre el gas durante una expansión o compresión desde un volumen V_i hasta un volumen V_f es:

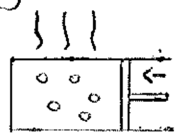
$$w = -\int_{V_i}^{V_f} P dV$$

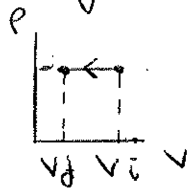
Para calcular este trabajo se necesita saber cómo varía la presión durante la expansión o compresión. Las distintas posibilidades pueden ilustrarse fácilmente utilizando un diagrama PV.

Los estados de un gas pueden representarse en un diagrama de P en función de V. Como especificando ambos P y V especificamos el estado del gas, cada punto sobre el diagrama PV indica un estado particular del gas. Ahora veremos distintos ejemplos de diagramas PV:

- Compresión isobara ($P=cte$):

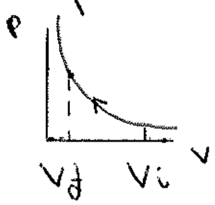
Para conseguir este proceso, a la vez que se comprime el gas se le aplica frío.

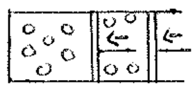




$$W=-\int_{V_i}^{V_f} P\,dV=-P_0\int_{V_i}^{V_f} dV=-P_0(V_f-V_i)=P_0(V_i-V_f)>0$$

- Compresión isoterma ($T=cte$):



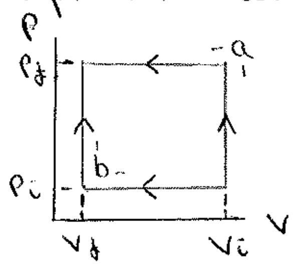


$$PV=nRT \Rightarrow P=\frac{nRT}{V} \leftarrow \text{Constante}$$

$$W=-\int_{V_i}^{V_f} P\,dV=-\int_{V_i}^{V_f}\frac{nRT}{V}dV=-nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V}=-nRT\ln\frac{V_f}{V_i}=$$

$$=nRT\ln\frac{V_i}{V_f}$$

- Compresión isocora ($V=cte$):



a. Calentamiento a volumen constante más un enfriamiento a P constante.

b. Enfriamiento a presión constante más un calentamiento a volumen constante.

$$W_a=\overset{V=cte}{\overset{\downarrow}{0}}+\left(-\int_{V_i}^{V_f}P\,dV\right)=-P_f\int_{V_i}^{V_f}dV=-P_f(V_f-V_i)=P_f(V_i-V_f)$$

$$W_b=-\int_{V_i}^{V_f}P\,dV+\overset{V=cte}{\overset{\downarrow}{0}}=-P_i(V_f-V_i)=P_i(V_i-V_f)$$

La ΔU es la misma en a y b.

2.5. Capacidades caloríficas de los gases (C_v y C_p).

La determinación de la capacidad calorífica de una sustancia proporciona información sobre su energía interna, que está relacionada con su estructura molecular. Por tanto, no es siempre la misma y depende del proceso realizado.

$\uparrow Q \Rightarrow \Delta T$ $\qquad$ $\uparrow Q \Rightarrow \Delta T^*$

$C = \dfrac{Q}{\Delta T}$ $\qquad$ $C^* = \dfrac{Q}{\Delta T^*}$

Cuando se añade calor a un gas a volumen constante (proceso isocoro), éste no realiza trabajo, de modo que el calor añadido es igual al incremento de energía interna del gas:

$$Q = C_v \Delta T$$

Como $W = 0$, tenemos según el primer principio de la termodinámica

$$\Delta U = Q + W = Q$$

Por lo tanto,

$$\Delta U = C_v \Delta T$$

Tomando el límite cuando ΔT tiende a 0, obtenemos

$$dU = C_v dT$$

y

$$C_v = \frac{dU}{dT}$$

Como U y T son ecuaciones de estado, las dos últimas ecuaciones son válidas para cualquier proceso.

Ahora calculamos la diferencia $C_p - C_v$ para un gas ideal. Si designamos a la capacidad calorífica a presión constante (proceso isobaro) como C_p, tenemos

$$Q = C_p \Delta T$$

Según el principio de la termodinámica

$$\Delta U = Q + W = Q - P\Delta V$$

Por consiguiente,

$$\Delta U = C_p \Delta T - P\Delta V \quad o \quad C_p \Delta T = \Delta U + P\Delta V$$

En el caso de cambios infinitesimales, esta expresión se reduce a

$$C_p dT = dU + PdV$$

La presión, el volumen y la temperatura de un gas ideal están relacionados por

$$PV = nRT$$

Diferenciando ambos miembros de la ley de los gases ideales se tiene

$$PdV + \cancel{VdP}^{P=cte} = PdV = nRdT$$

Para un proceso a presión constante $dP = 0$, de donde

$$PdV = nRdT$$

Entonces obtenemos:

$$C_p dT = C_v dT + nRdT = (C_v + nR)dT$$

Por lo tanto

$$C_p = C_v + nR \quad \text{(Relación de Mayer)}$$

La energía cinética de traslación total de n moles de un gas es $E_c = \frac{3}{2}nRT$, para todo el gas $E_c = N\frac{3}{2}kT$

Así pues, si la energía interna de un gas está constituida únicamente por energía cinética de traslación, se tiene

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

Las capacidades caloríficas son entonces

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} nR \text{ (Para un gas ideal monoatómico).}$$

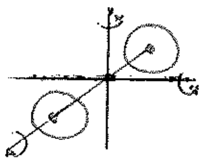
y

$$C_p = C_V + nR = \frac{5}{2} nR \text{ (Para un gas ideal monoatómico).}$$

La energía interna de un gas compuesto por moléculas diatómicas o aún más complicadas es evidentemente mayor que $\frac{3}{2} nRT$. La razón está en que estas moléculas pueden tener otros tipos de energía, como la de rotación o vibración, además de la energía cinética de traslación.

Energía cinética de rotación:

$$E_{CR} = \frac{1}{2} I \omega^2$$



La energía interna de n moles de un gas debería ser igual a $\frac{1}{2} nRT$ por cada grado de libertad de la molécula del gas. La capacidad calorífica a volumen constante de un gas sería $\frac{1}{2} nR$ multiplicado por el número de grados de libertad de la molécula. Las moléculas diatómicas tienen cinco grados de libertad, por tanto su capacidad calorífica a volumen constante será $\frac{5}{2} nR$. De estos cinco, tres son de traslación y dos de rotación. Por consiguiente la energía cinética de una molécula diatómica es

$$E_C = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2$$

La energía interna total de n moles de estos gases es, por lo tanto

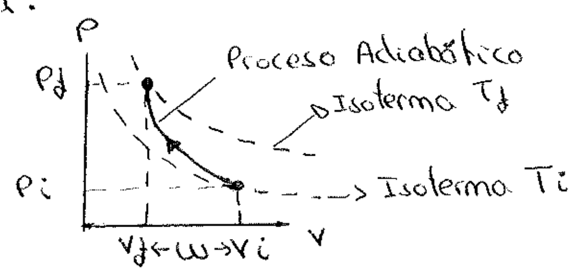
$$U = 5 \cdot \frac{1}{2} nRT = \frac{5}{2} nRT$$

y las capacidades caloríficas serán

$$C_v = \frac{5}{2} nR \qquad C_p = \frac{7}{2} nR$$

2.6. Procesos adiabáticos (Q=0).

Todo proceso en el que no existe flujo de calor ni entrante ni saliente del sistema se denomina proceso adiabático. Un proceso de este tipo puede darse cuando el sistema está muy bien aislado, o cuando el proceso ocurre muy rápidamente. Como ni entra ni sale calor del gas, el trabajo realizado sobre el mismo es igual a su aumento de energía interna, y la temperatura del gas aumenta.



Podemos hallar la ecuación correspondiente a la curva adiabática de un gas ideal utilizando la ecuación de estado $PV = nRT$ y el primer principio de la termodinámica $dU = dQ + dW$. Se tiene.

$$C_v dT = 0 + (-PdV)$$

en donde $dU = C_v dt$, $dQ = 0$ y $dW = -PdV$. Por lo tanto si se sustituye $P = \frac{nRT}{V}$, se obtiene

$$C_v\, dT = -nRT \frac{dV}{V}$$

y tras reordenar se expresa

$$\frac{dT}{T} + \frac{nR}{C_v} \frac{dV}{V} = 0$$

Si se integra tenemos:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} = \int_{V_0}^{V} -\frac{nR}{C_v} \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln \frac{T}{T_0} = -\frac{nR}{C_v} \ln \frac{V}{V_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{T}{T_0} = \frac{nR}{C_v} \ln \frac{V_0}{V}$$

Coeficiente adiabático:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + nR}{C_v} = 1 + \frac{nR}{C_v}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{nR}{C_v} = \gamma - 1 \\[2ex] \ln \dfrac{T}{T_0} = \dfrac{nR}{C_v} \ln \dfrac{V_0}{V} \end{array}\right\} \frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma - 1} \qquad \begin{array}{l} \gamma_{monoa.} = \dfrac{5}{3} \\[2ex] \gamma_{diató.} = \dfrac{7}{5} \end{array}$$

Por lo tanto

$$T V^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1} = \text{constante}$$

Si se elimina T de la ecuación por medio de $PV = nRT$, se tiene

$$\frac{PV}{Rn} V^{\gamma-1} = \frac{P_0 V_0}{nR} V_0^{\gamma-1} = \text{constante}$$

o sea

$$P V^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma} = \text{constante}$$

El trabajo en un proceso adiabático queda como

$$\Delta U = \cancel{Q}^{0} + W$$

$$W = C_V \Delta T = C_V (T - T_0) = C_V \left(\frac{PV}{Rn} - \frac{P_0 V_0}{nR} \right) =$$

$$= \frac{PV - P_0 V_0}{\frac{nR}{C_V}} = \frac{PV - P_0 V_0}{\gamma - 1}$$

3. Segundo principio de la Termodinámica.

3.1. Enunciado del segundo principio.

- Enunciado de Kelvin:

  Es imposible que un sistema pueda extraer energía en forma de calor de una sola fuente térmica y convertirla completamente en trabajo sin que se produzcan cambios netos en el sistema o en el medio que le rodea.

- Enunciado de Clausius:

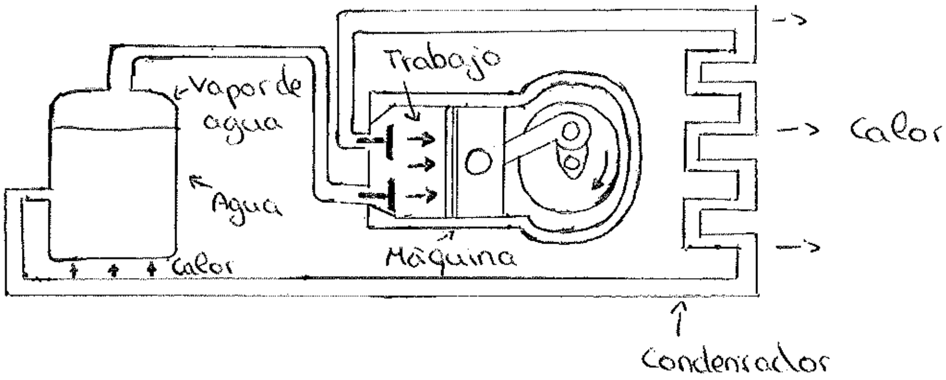
  Es imposible un proceso cuyo único resultado sea transferir energía en forma de calor de un objeto a otro más caliente.

Existe, pues, una falta de simetría en los papeles que desempeñan el calor y el trabajo que no resulta evidente a partir del primer principio. Esta falta de simetría está relacionada con el hecho de que algunos procesos son irreversibles.

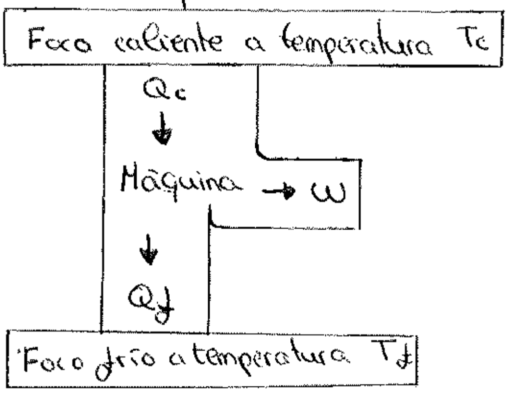
3.2. Máquinas térmicas.

Una máquina térmica es un dispositivo cíclico cuyo propósito es convertir la máxima cantidad posible de calor en trabajo.

Las primeras máquinas térmicas fueron máquinas de vapor.



El esquema de una máquina térmica es el siguiente:



El calor que entra Q_c, procede de un foco caliente a temperatura T_c; el calor que se escapa Q_f, se cede a un foco térmico a una temperatura inferior T_f.

El trabajo realizado por la máquina será

$$W = Q_c - Q_f$$

Se define el rendimiento ε como el cociente entre el trabajo realizado y el calor absorvido del foco caliente:

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c}$$

3.2. Refrigeradores.

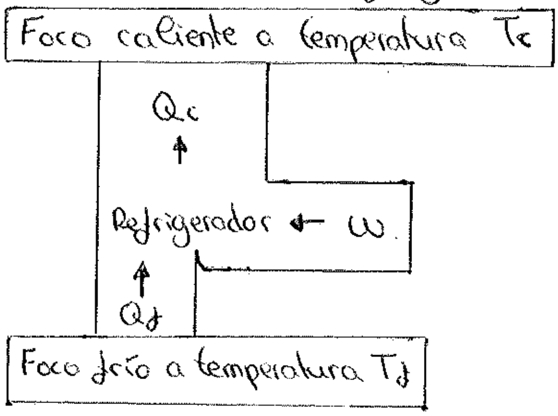
Es una máquina térmica que funciona en sentido inverso. El refrigerador extrae calor de su interior (foco frío) y lo cede al medio (foco caliente). El trabajo es positivo.

Una medida de la eficiencia de un refrigerador es la razón Q_f / W del calor extraído del foco de baja temperatura y el trabajo realizado sobre el refrigerador.

La razón Q_f / W recibe el nombre de coeficiente de eficiencia

$$\eta = \frac{Q_f}{W}$$

El esquema de una máquina refrigeradora es el siguiente:



3.3. Procesos reversibles e irreversibles.

- Reversible:

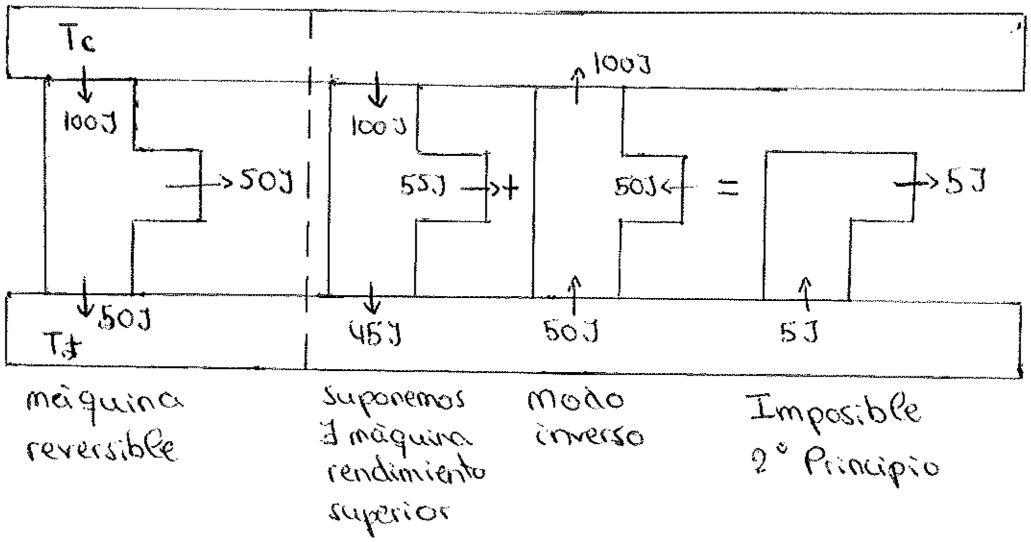
Proceso que sufre un sistema cuando se puede volver a un estado anterior o inicial sin alterar el medio.

Para que sea reversible, ha de cumplir unas condiciones:

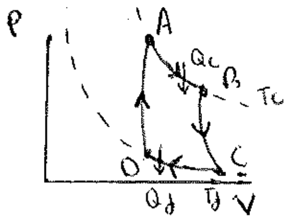
- Que no haya rozamiento.
- El proceso sea muy lento (cuasiestática)
- Si en el proceso hay transferencias de calor, estas han de darse a temperaturas muy próximas.

3.4. Máquina de Carnot.

Una máquina, según el segundo principio de la termodinámica, es imposible que una máquina tenga el rendimiento del 100 por ciento. Carnot dedujo que una máquina reversible es la máquina más eficiente que puede operar entre dos focos térmicos determinados. Este resultado se conoce como el teorema de Carnot: Ninguna máquina térmica que funcione entre dos focos térmicos dados puede tener un rendimiento mayor que una máquina reversible que opere entre estos dos focos.



3.4.1. Ciclo de Carnot

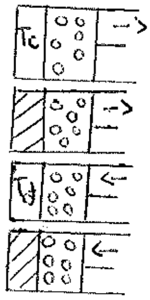


A -> B Isoterma

B -> C Adiabática

C -> D Isoterma

D -> A Adiabática



El rendimiento de la máquina de Carnot es el siguiente:

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c}$$

- A -> B

$$\Delta U = Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W = -\left(-\int_{V_A}^{V_B} P\,dV\right) =$$
$$= \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_c}{V}\,dV = nRT_c \ln\frac{V_B}{V_A} = Q_c$$

- B -> C

$$Q = 0$$

- C -> D

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = -W = -\left(-\int_{V_C}^{V_D} P\,dV\right) = \int_{V_C}^{V_D} \frac{nRT_f}{V}\,dV = nRT_f \ln\frac{V_D}{V_C} = Q_f$$

- D -> A

$$Q = 0$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{nRT_f \ln \frac{V_C}{V_D}}{nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

$$\left.\begin{array}{l} B \to C: \ T_c V_B^{\gamma-1} = T_f V_C^{\gamma-1} \\ D \to A \ \ T_f V_D^{\gamma-1} = T_c V_A^{\gamma-1} \end{array}\right\} \frac{T_c V_B^{\gamma-1}}{T_c V_A^{\gamma-1}} = \frac{T_f V_C^{\gamma-1}}{T_f V_D^{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{nRT_f \ln \frac{V_C}{V_D}}{nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

El rendimiento de una máquina trabajando entre 0 °C y 100 °C será:

$$\left.\begin{array}{l} T_f = 273 \\ T_c = 373 \end{array}\right\} \varepsilon = 26{,}8\ \%$$

3.5. Entropía.

Existe una función termodinámica de estado denominada entropía S que es una medida del desorden del sistema. Como P, T, V y U la entropía es una función de estado. La variación de entropía dS de un sistema cuando pasa de un estado a otro se define por la expresión:

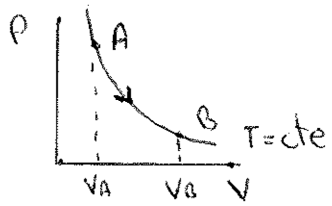
$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \quad /\ cal/K \ \text{ o } \ J/K$$

donde el numerador dQ_{rev} es la energía en forma de calor que debe transferirse al sistema en un proceso reversible para llevarlo del estado inicial al estado final. Si se extrae calor del sistema, dQ_{rev} es negativo y también lo es la variación de entropía del mismo.

Como la entropía es una función de estado, la variación de entropía de un sistema cuando pasa de un estado a otro depende únicamente de los estados inicial y final del mismo y no del proceso según el cual se produce el cambio.

3.5.1. Cambios de entropía en diversos procesos.

- ΔS en la expansión isoterma de un gas ideal: Cuando un gas ideal experimenta una expansión isoterma, $T_2 = T_1$ y su variación de entropía es



$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{P\,dV}{T} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V}\frac{dV}{T} = nR\ln\frac{V_B}{V_A}$$

La variación de entropía del gas es positiva porque $V_B > V_A$. En este proceso, una cantidad de energía Q se transfiere en forma de calor desde el foco térmico al gas. Esta cantidad de calor es igual al trabajo realizado por el gas:

$$Q = W = \int_{V_A}^{V_B} P\,dV = nRT\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_B}{V_A}$$

La variación de entropía del gas es $+Q/T$. Como la cantidad de calor que abandona el foco a la temperatura T es la misma, la variación de entropía del foco es $-Q/T$. La variación neta de entropía del gas más el foco es 0. Designaremos como "universo" al sistema que se estudia más el medio que le rodea. Este ejemplo ilustra un resultado general:

En un proceso reversible, la variación de entropía del universo es nula.

- ΔS en la expansión libre de un gas ideal: Tenemos dos compartimentos unidos. Uno contiene el gas y en el otro se ha hecho el vacío. Tiene paredes rígidas y está aislado del exterior, de modo que el calor ni entra ni sale y tampoco puede realizarse trabajo. Si se abre la válvula el gas se precipita al otro compartimento alcanzando el equilibrio térmico. No se realiza trabajo ni se transfiere calor, por tanto, la energía interna final es igual a la inicial. Si el gas es ideal la temperatura T final es igual a la inicial. A primera vista podríamos pensar que no hay cambio de entropía del gas, ya que no hay transferencia de calor. Este razonamiento es falso porque este proceso no es reversible y, por lo tanto, no podemos utilizar $\int dQ/T$ para hallar la variación de entropía del gas. Sin embargo, los estados final e inicial son los mismos que en la expansión isoterma, y como la entropía solo depende del estado inicial y final del sistema, esta variación de entropía es igual a la anterior:

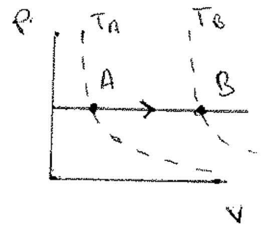
$$\Delta S_{gas} = nR \cdot \ln \frac{V_B}{V_A}$$

En este caso no hay cambio en el medio, por tanto la variación de entropía del universo es la misma:

$$\Delta S_{universo} = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

En un proceso irreversible, la entropía del universo aumenta. En cualquier proceso, la entropía del universo nunca disminuye.

- ΔS para procesos a presión constante: Cuando una sustancia se calienta desde la temperatura T_A a la temperatura T_B a presión constante, el calor absorvido dQ está relacionado con su cambio de temperatura dT por



$$dQ_p = C_p\, dT$$

Podemos aproximarnos a la conducción del calor reversible si disponemos de un gran número de focos térmicos con temperaturas comprendidas dentro de T_A a T_B y con valores muy próximos entre sí. Como la transferencia es aproximadamente isoterma, el proceso será aproximadamente reversible. Cuando el calor dQ se absorbe reversiblemente, la variación de entropía del sistema es

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_p \frac{dT}{T}$$

Integrando entre T_A y T_B obtenemos la variación total de entropía:

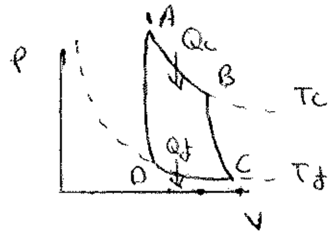
$$\Delta S = C_p \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_B}{T_A}$$

- ΔS en un ciclo de Carnot: Como un ciclo de Carnot es, por definición, reversible, la variación de entropía del universo después de un ciclo debe ser nula. El cambio de entropía del foco caliente es $\Delta S_c = -Q_c/T_c$, en donde Q_c es el calor que este cede. El cambio de entropía del foco frío es $\Delta S_f = Q_f/T_f$, donde Q_f es el calor que éste absorve. Estas cantidades de calor vienen relacionadas por la definición de temperatura termodinámica

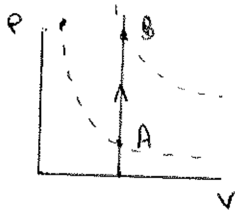
$$\frac{T_f}{T_c} = \frac{Q_f}{Q_c} \quad \text{ó} \quad \frac{Q_c}{T_c} = \frac{Q_f}{T_f}$$

El cambio de entropía del universo es, por lo tanto,

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_c + \Delta S_f = -\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$$



- ΔS para procesos a volumen constante: Al igual que para los procesos a presión constante, en estos deberemos tener infinitos focos térmicos, para ir tomando variaciones de temperatura muy pequeñas. Su calor absorvido dQ también está relacionado con su cambio de temperatura dT por



$$dQ_v = C_v dT$$

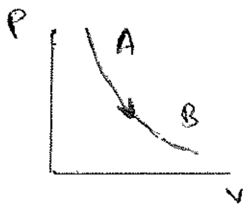
y la entropía será

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_v \frac{dT}{T}$$

integrando obtenemos

$$\Delta S = C_v \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = C_v \ln \frac{T_B}{T_A}$$

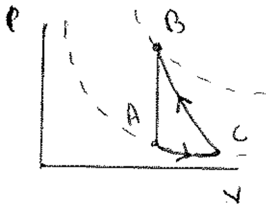
- ΔS para procesos adiabáticos: Puesto que en los procesos adiabáticos la transferencia de calor es nula, la variación de la entropía será cero.



$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = 0$$

A estos procesos también se les puede llamar procesos isentrópicos.

- ΔS para varios procesos: La entropía puede tener lugar para varios procesos conjuntos, como en la máquina de Carnot que tienen lugar el isotermo y el adiabático.



El proceso irá de A a C y de C a B. El primer tramo es una isoterma y el segundo una adiabática.

$$\Delta S_{A\to B} = \Delta S_{A\to C} + \cancel{\Delta S_{C\to B}}^{\to 0\ (\text{Adiabático})} = \Delta S_{A\to C}$$

$$\Delta S_{A\to C} = \int \frac{dQ}{T} = \int_A^C \frac{PdV}{T} = \int_{V_A}^{V_C} \frac{nR\cancel{T}}{V}\frac{dV}{\cancel{T}} = nR\ln\frac{V_C}{V_A}$$

$T_A V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} = T_B V_A^{\gamma-1}$ ← Puesto que de A→B el volumen es constante.

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \ln\frac{T_B}{T_A} = \gamma-1 \ln\frac{V_C}{V_A}$$

$$\ln\frac{V_C}{V_A} = \frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{T_B}{T_A}$$

$$\Delta S_{A\to B} = nR\cdot\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)\frac{1}{\gamma-1} = C_V\ln\frac{T_B}{T_A}$$

3.5.2. Entropía y energía utilizable.

Si suponemos dos cuerpos en contacto térmico, se está desperdiciando energía que en la máquina de Carnot podríamos haber aprovechado. Por tanto mediante el rendimiento de la máquina de Carnot obtendremos el valor del trabajo:

$$\varepsilon_{carnot} = \frac{W}{Q}$$

Si despejamos el trabajo y sustituimos el rendimiento ε por su valor obtenemos.

$$W = \varepsilon_{carnot} \cdot Q = \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) Q = \left(Q - \frac{T_f Q}{T_c}\right) =$$

$$= \left(Q - \frac{T_f Q}{T_c}\right) \frac{1}{T_f} \cdot T_f = \left(\frac{Q T_f}{T_f} - \frac{T_f^2 Q}{T_f T_c}\right) = \left(\frac{Q \cancel{T_f}}{T_f} - \frac{\cancel{T_f} Q}{T_c}\right) =$$

$$= T_f \left(\frac{Q}{T_f} - \frac{Q}{T_c}\right)$$

$$W = T_f \cdot \Delta S_{universo}$$

La entropía nos muestra la cantidad de energía quese degrada.

TERMODINÁMICA

- Principio cero:
  Si dos objetos están en equilibrio térmico con un tercero, entonces están en equilibrio térmico entre sí.

- Relación escalas térmicas:

  Celsius: $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32^\circ)$

  Farenheit: $t_F = \frac{9}{5} t_C + 32^\circ$

  Kelvin: $T = t_C + 237{,}15$

- Ley de los gases:

  $P \cdot V = nRT$; n = número moles gas

  $R = N_A k = 8{,}314\ J/_{mol \cdot K} = 0{,}08206\ atm \cdot l/_{mol \cdot K}$

- Capacidades caloríficas:

  $Q = C \Delta T = m c_e \Delta T$; $c_e = \frac{C}{m}$

  $Q = n c' \Delta T$; $c' = \frac{C}{n}$

- Calores latentes:

  Fusión: $Q_F = m L_f$

  Vaporización: $Q_v = m L_v$

- Primer principio:
  El calor es la energía que se transfiere de un objeto a otro debido a una diferencia de temperaturas.

- Energía interna:

  $E_c = \frac{3}{2} nRT$

  $U = \frac{3}{2} nRT$

- Primer principio:

$$\Delta U = Q + W$$

- W (trabajo):

$$W = -\int_{Vi}^{Vf} P\,dV$$

- Compresión isobara (P = cte): $\{\Delta U = Q + W$

$$W = -P_o(V_f - V_i) = P_o(V_i - V_f)$$

- Compresión isoterma (T = cte): $\{\Delta U = 0 \Rightarrow Q = -W$

$$W = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = nRT \ln \frac{V_i}{V_f}$$

- Compresión isocora (V = cte): $\{W = 0 \Rightarrow \Delta U = Q$

$$W = 0$$

- Capacidades caloríficas de los gases:
  - A volumen constante:

$$Q = C_V \Delta T \quad \begin{cases} C_V = \frac{3}{2} nR & \text{(gas monoatómico)} \\ C_V = \frac{5}{2} nR & \text{(gas diatómico)} \end{cases}$$

  - A presión constante:

$$Q = C_p \Delta T \quad \begin{cases} C_p = \frac{5}{2} nR & \text{(gas monoatómico)} \\ C_p = \frac{7}{2} nR & \text{(gas diatómico)} \end{cases}$$

$\Delta U = C_V \Delta T$ para cualquier proceso.

- Procesos adiabáticos:

$$Q = 0$$

$$W = \Delta U = C_V \Delta T$$

  - Coeficiente adiabático:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + nR}{C_V} = 1 + \frac{nR}{C_V}$$

$$\frac{T}{T_o} = \left(\frac{V_o}{V}\right)^{\gamma - 1} \quad ; \quad PV^{\gamma} = P_oV_o^{\gamma}$$

- Trabajo en un proceso adiabático:

$$W = \frac{PV - P_0V_0}{\gamma - 1}$$

- Segundo principio:
Es imposible un proceso cuyo único resultado sea transferir energía en forma de calor de un objeto a otro más caliente.

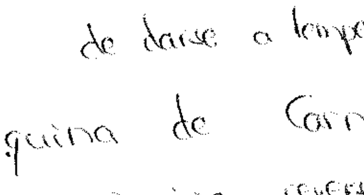
- Máquinas térmicas:
$$W = Q_c - Q_f$$
  - Rendimiento:
$$\varepsilon = \frac{W}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c}$$

- Refrigeradores: (trabajo positivo)
  - Eficiencia:
$$\eta = \frac{Q_f}{W}$$

- Proceso reversible:
  - Que no haya rozamiento:
  - El proceso sea muy lento
  - Si en el proceso hay transferencia de calor, estas han de darse a temperaturas muy próximas.

- Máquina de Carnot:
Una máquina reversible es la máquina más eficiente que puede operar entre dos focos térmicos.

- Ciclo de Carnot:



$$\varepsilon = \frac{W}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{nRT_f \ln\frac{V_C}{V_D}}{nRT_c \ln\frac{V_B}{V_A}}$$

$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$ ← Deducido de los procesos adiabáticos

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

- Entropía:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \quad [cal/K \text{ ó } J/K]$$

- Expansión isoterma:

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

- Expansión libre:

$$\Delta S_{gas} = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

- Presión constante:

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_B}{T_A}$$

- En un ciclo de Carnot:

$$\Delta S_{universo} = 0$$

- Volumen constante:

$$\Delta S = C_v \ln \frac{T_B}{T_A}$$

- Procesos adiabáticos:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = 0$$

FISICA II

TEMA 2. OSCILADOR ARMONICO

1. Cinemática, movimiento armónico simple (M.A.S).

Un oscilador se puede definir como un móvil que pasa periódicamente por el mismo sitio, como por ejemplo un péndulo o un muelle.

Por definición, decimos que una partícula que se mueve a lo largo del eje de las X tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento x respecto al origen del sistema de coordenadas está dado en función del tiempo por la relación

$$x = A\,sen(\omega t + \alpha)$$

donde x es la elongación, A la amplitud, ωt la pulsación, α la fase inicial y ωt + α la fase.

La función seno se repite cada vez que el ángulo aumenta en 2π. Por consiguiente, el desplazamiento de la partícula se repite después de un intervalo de tiempo de $2\pi/\omega$. Luego el movimiento armónico simple es periódico, y su período es $T = 2\pi/\omega$. La frecuencia de un movimiento armónico simple es igual al número de oscilaciones completas por unidad de tiempo, así $f = \frac{1}{T}$, entonces la frecuencia angular $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

La velocidad de la partícula se determina:

$$V = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) = \omega A\,sen(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

Similarmente, la aceleración está dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A sen(\omega t + \alpha) = \omega^2 A\, sen(\omega t + \alpha + \pi) = -\omega^2 x$$

2. Fuerza y energía en el movimiento armónico simple.

De la anterior ecuación podemos calcular la fuerza que debe actuar sobre una partícula de masa m a fin de que oscile con movimiento armónico simple. Aplicando la ecuación de movimiento $F = ma$, y sustituyendo el resultado de la anterior ecuación, la cual nos da la aceleración, tenemos:

$$F = -m\omega^2 x = -kx$$

donde hemos definido

$$k = m\omega^2 \quad o \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

Esto indica que en el M.A.S. la fuerza es proporcional al desplazamiento, y opuesta a él.

La energía cinética de la partícula es

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

O, ya que $\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$, usando $x = A sen(\omega t + \alpha)$ para el desplazamiento, podemos expresar también la energía cinética en función del desplazamiento por la relación

$$Ec = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 (1 - sen^2(\omega t + \alpha)) = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$$

Para obtener la energía potencial integramos el resultado anterior de la fuerza:

$$Ep = \int_0^x F dx = \int_0^x kx\, dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Sumando la energía cinética y potencial obtenemos la energía total del sistema, por tanto queda:

$$E_T = Ec + Ep = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

2.1. Dinámica del movimiento armónico simple.

Usando la ecuación de movimiento $F=ma$, considerando $F=-kx$, y, recordando que en un movimiento rectilíneo $a=\frac{d^2x}{dt^2}$, escribimos la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \quad \text{ó} \quad m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

Haciendo $\omega^2=\frac{k}{m}$, podemos escribir

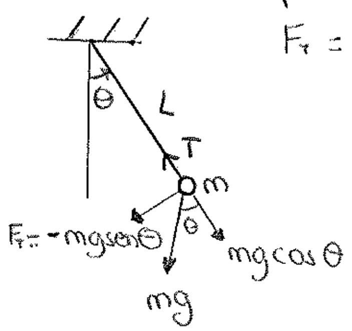
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \leftarrow \text{M.A.S.}$$

La solución a esta ecuación diferencial es

$$x=A\,\text{sen}(\omega t+\alpha)$$

3. Péndulos.

a) Péndulo simple:



$$F_t=-mg\,\text{sen}\theta=ma=mL\alpha=mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mg\,\text{sen}\theta=mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2}+g\,\text{sen}\theta=0$$

La ecuación del movimiento será:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g\,\text{sen}\theta}{L}=0$$

Para que sea un movimiento armónico simple ha de coincidir su ecuación del movimiento con la del M.A.S. En este caso no coincide y no es un M.A.S. Los péndulos estrictamente hablando no son M.A.S., para que lo sean escojemos ángulos pequeños:

Si $\theta \downarrow\downarrow \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \approx \theta$

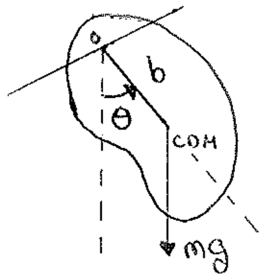
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow M.A.S.$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega^2 = \dfrac{g}{L} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \end{array}\right\} 4\pi^2\nu^2 = \frac{g}{L}$$

$$\nu^2 = \frac{g}{L4\pi^2} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

b) Péndulo compuesto:

$\Sigma M_o = I\alpha$



$$\left.\begin{array}{l} \Sigma M_o = -mgb\operatorname{sen}\theta \\ I\alpha = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{array}\right\} -mgb\operatorname{sen}\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I\alpha = \underbrace{(I_{cm} + mb^2)}_{I}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgb\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb\operatorname{sen}\theta}{I} = 0 \leftarrow \text{Ecuación del movimiento.}$$

No es un M.A.S, por tanto cojemos ángulos pequeños:

$\theta \downarrow\downarrow \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{mgb}{I}\theta \simeq 0 \qquad I = mk^2$$

k: radio de giro

$$\left.\begin{array}{l} \omega^2 = \dfrac{mgb}{I} \\ 4\pi\nu^2 = \dfrac{mgb}{I} \end{array}\right\} \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgb}{I}}$$

4. Superposición del movimiento armónico simple.

Consideramos ahora la superposición, o interferencia, de dos movimientos armónicos simples que producen un desplazamiento de la partícula a lo largo de la misma línea.

Discutamos primero el caso en que ambos tienen la misma frecuencia. El desplazamiento de la partícula producido por cada movimiento armónico simple está dado por:

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1)$$
$$x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

El desplazamiento resultante de la partícula está dado por

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2) = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

Ahora demostramos que x es un movimiento armónico simple:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

$$x_1 + x_2 = A_1(\operatorname{sen}\omega t \cos\alpha_1 + \cos\omega t \operatorname{sen}\alpha_1) + A_2(\operatorname{sen}\omega t \cos\alpha_2 + \cos\omega t \operatorname{sen}\alpha_2) =$$
$$= (A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2)\operatorname{sen}\omega t + (A_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + A_2 \operatorname{sen}\alpha_2)\cos\omega t =$$
$$= A \operatorname{sen}\omega t \cos\alpha + A \cos\omega t \operatorname{sen}\alpha = (A\cos\alpha)\operatorname{sen}\omega t + (A\operatorname{sen}\alpha)\cos\omega t$$

Para que $x = x_1 + x_2$, elevamos al cuadrado las siguientes ecuaciones y las sumamos:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & A\cos\alpha = A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 \\ (2) & A\operatorname{sen}\alpha = A_1\operatorname{sen}\alpha_1 + A_2\operatorname{sen}\alpha_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\underbrace{(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2)}_{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos(\alpha_2 - \alpha_1))}$$

Ahora dividimos la ecuación 2 entre la 1:

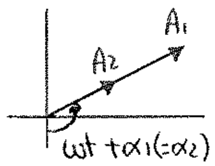
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1\operatorname{sen}\alpha_1 + A_2\operatorname{sen}\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$$

Si $x_1 + x_2$ es M.A.S, $x = x_1 + x_2$ es M.A.S:

$$x = A\operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

Consideremos algunos casos importantes especiales:

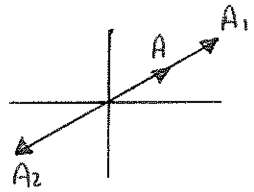
- Si $\alpha_2 = \alpha_1$, entonces decimos que los dos movimientos están en fase:



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 0} = \sqrt{(A_1+A_2)^2} = A_1 + A_2$$

(interferencia constructiva)

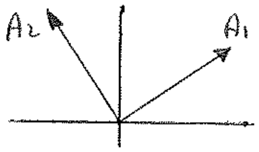
- Si $\alpha_1 = \alpha_2 + \pi$, entonces decimos que los dos movimientos están en oposición:



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\cos(-\pi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1-A_2)^2} =$$
$$= A_1 - A_2$$

(interferencia destructiva)

- Si $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{\pi}{2}$, entonces se dice que los dos movimientos armónicos simples están en cuadratura:



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Ahora discutiremos el caso en que ambos tienen distinta frecuencia y misma dirección:

Consideremos por simplicidad, el caso en el cual $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$; entonces los movimientos están descritos por las ecuaciones

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega_1 t$$
$$x_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega_2 t$$

El ángulo ahora entre los vectores será $\omega_2 t - \omega_1 t$ y no es constante. En consecuencia, el movimiento resultante $x = x_1 + x_2$ no es armónico simple. Sin embargo la amplitud del movimiento es

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 t - \omega_1 t)}$$

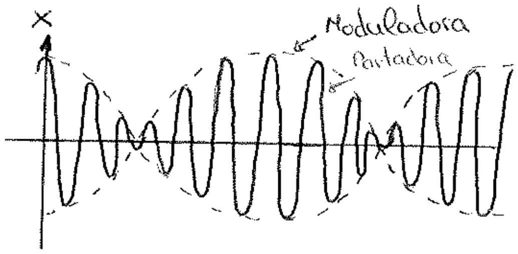
Ahora estudiaremos unos casos particulares:

- Cuando $A_1 = A_2$:

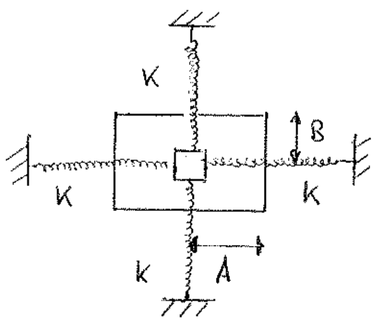
$$x = x_1 + x_2 = A(\operatorname{sen}\omega_1 t + \operatorname{sen}\omega_2 t) = 2A\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$

Obtenemos esto aplicando $\operatorname{sen}a + \operatorname{sen}b = 2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.



También estudiaremos cuando tienen distinta dirección:

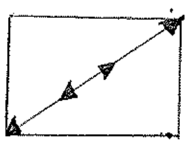


$$\left.\begin{array}{l} x = A\operatorname{sen}\omega t \\ y = B\operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \end{array}\right\}$$

- $\alpha = 0$:

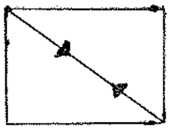
$$\left.\begin{array}{l} x = A\operatorname{sen}\omega t \\ y = B\operatorname{sen}\omega t \end{array}\right\} \frac{y}{x} = \frac{B}{A} \Rightarrow y = \frac{B}{A}x$$

Se moverá diagonalmente



- $\alpha = -\pi$:

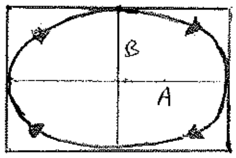
$$\left.\begin{array}{l} x = A\operatorname{sen}\omega t \\ y = B\operatorname{sen}(\omega t - \pi) = -B\operatorname{sen}(\omega t) \end{array}\right\} \frac{y}{x} = -\frac{B}{A} \Rightarrow y = -\frac{B}{A}x$$



Se mueve diagonalmente

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} x = A\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ y = B\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \quad \parallel \\ y = B\cos\omega t \end{array}\right\} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \mathrm{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$$



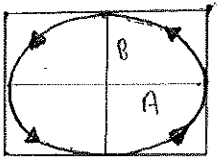
$x = A \Rightarrow \mathrm{sen}\,\omega t = 1$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -\omega B\,\mathrm{sen}\,\omega t \Rightarrow V_y = -\omega B < 0$$

- $\alpha = -\frac{\pi}{2}$:

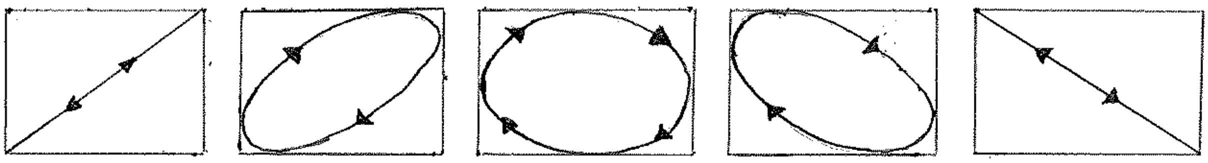
$$\left.\begin{array}{l} x = A\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ y = B\,\mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = B\cos\omega t \end{array}\right\} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \mathrm{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$$

$x = A \Rightarrow \mathrm{sen}\,\omega t = 1$



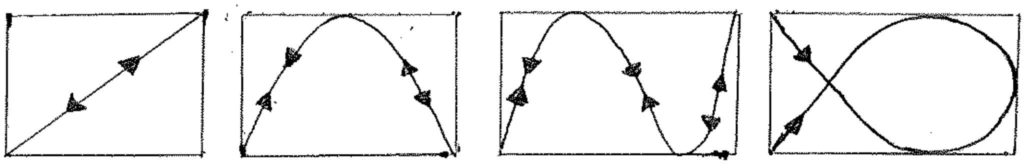
$V_y = \omega B\,\mathrm{sen}\,\omega t \Rightarrow V_y = \omega B > 0$

Dependiendo del ángulo, el movimiento será distinto:



$\alpha = 0$ $\quad$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ $\quad$ $\alpha = \pi$

Figuras en función de $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ $(\alpha = 0)$:



1:1 $\quad$ 1:2 $\quad$ 1:3 $\quad$ 2:3

$\omega_1 : \omega_2$

5. Oscilaciones amortiguadas.

Para explicar dinámicamente el amortiguamiento podemos suponer que, en adición a la fuerza elástica $F=-Kx$, actúa otra fuerza, opuesta a la velocidad. Escribiremos esta fuerza como $F' = -\lambda v$, donde λ es una constante y v es la velocidad. El signo negativo se debe al hecho que F' se opone a v. La fuerza resultante sobre el cuerpo es $F+F'$, y su ecuación de movimiento es

$$ma = -Kx - \lambda v,$$

o, recordando que $v = dx/dt$ y que $a = d^2x/dt^2$ tenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + Kx = 0$$

Esta ecuación se escribe usualmente en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \Leftarrow \text{Ecuación movimiento amortiguado.}$$

donde $2\gamma = \lambda/m$ y $\omega_0^2 = K/m$ es la frecuencia angular sin amortiguamiento.

Las soluciones dependen del valor de γ:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \leftarrow \text{Ecuación característica}$$

$$r = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

a) $\gamma > \omega_0 \rightarrow$ Movimiento sobreamortiguado

Solución: $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad r_2 < r_1 < 0$$
$$r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

c_1 y c_2 se determinan con condiciones iniciales.

Ejemplo:

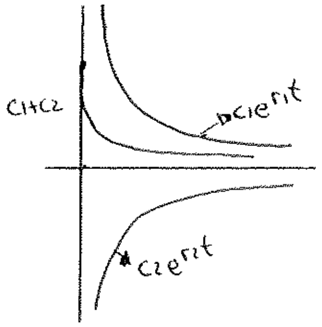
$$\left.\begin{array}{l} x(0) = A \\ V(0) = 0 \end{array}\right\} \text{Condiciones iniciales}$$

$$x(0) = c_1 + c_2 = A$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}$$

$$V(0) = c_1 \cdot r_1 + c_2 r_2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = A \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_2 r_1 - c_2 r_2 = A r_1 \Rightarrow c_2 = \dfrac{A r_1}{r_1 - r_2} \\ c_1 r_2 - c_1 r_1 = A r_2 \Rightarrow c_1 = \dfrac{A r_2}{r_2 - r_1} \end{array}$$



b) $\gamma = \omega_0 \Rightarrow$ Amortiguamiento crítico.

Solución: $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt} = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t}$

$r = -\gamma$

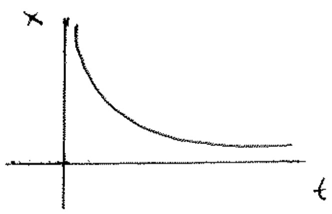
Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = X_0 \\ V(0) = V_0 \end{array}\right\} \text{Condiciones iniciales}$$

$$x_0 = c_1$$

$$V_0 = c_2 - \gamma c_1 = c_2 - \gamma x_0 = V_0 \Rightarrow c_2 = V_0 + \gamma x_0$$

$$\dot{x}(t) = v(t) = c_2 e^{-\gamma t} + (c_1 + c_2 t)(-\gamma e^{-\gamma t})$$



c) $\gamma < \omega_0 \to$ Movimiento subamortiguado.

Solución: $x(t) = Ae^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\omega t+\alpha)$

$v(t) = -\gamma A e^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\omega t+\alpha) + Ae^{-\gamma t}\omega\cos(\omega t+\alpha)$

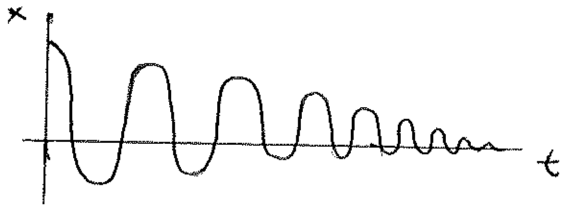
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Ejemplo:

$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \\ v(0)=v_0 \end{array}\right\}$ Condiciones iniciales.

$\left.\begin{array}{l} 0 = A\operatorname{sen}\alpha \\ v_0 = -\gamma A\operatorname{sen}\alpha + A\omega\cos\alpha \end{array}\right\}$

$$\text{Si } \alpha = \begin{cases} 0 \Rightarrow v_0 = A\omega \Rightarrow A = \dfrac{v_0}{\omega} \\ \pi \Rightarrow v_0 = -A\omega \Rightarrow A = -\dfrac{v_0}{\omega} \end{cases}$$



- Energía asociada a la oscilación amortiguada (subamortiguada):

M.A.S $\to$ $E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$

Amortiguada $\to$ $E = \frac{1}{2} m\omega^2 (Ae^{-\gamma t})^2$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t} = E_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

$\tau = \frac{1}{2\gamma}$ <- cte de tiempo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underset{\downarrow}{2\gamma} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$\frac{\lambda}{m} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2\gamma} = \frac{m}{\lambda}$

- Definición factor de calidad:

$$Q = \omega_0 \tau$$

Podemos establecer una relación con la energía:

$$E = E_0 e^{-t/\tau}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E_0}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{E}{\tau}$$

$$\left| \frac{dE}{dt} \right| = \frac{E}{\tau}$$

En un ciclo en el que de una oscilación a otra la variación de energía sea pequeña:

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{ciclo} \simeq \frac{T}{\tau} = \frac{\omega_0 T}{\omega_0 \tau} = \frac{\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0}}{Q} = \frac{2\pi}{Q}$$

$$Q = \frac{2\pi}{\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{ciclo}}$$

6. Oscilaciones forzadas.

Un oscilador forzado es un cuerpo oscilando al que se le aplica una fuerza externa.

Sea $F = F_0 \cos \omega_f t$ la fuerza oscilante aplicada, siendo su frecuencia angular ω_f. Suponiendo que la partícula está sometida a una fuerza elástica $-kx$ y a una fuerza de amortiguamiento $-\lambda v$, su ecuación de movimiento es

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \cos \omega_f t.$$

Realizando las sustituciones $v = dx/dt$, $a = d^2x/dt^2$, tenemos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega_f t$$

la cual, si suponemos $2\gamma = \lambda/m$ y $\omega_0^2 = k/m$, puede escribirse en la forma

$$* \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$ ← Ecuación del movimiento de una oscilación forzada.

Solución: $$x(t) = \underbrace{\underbrace{\overbrace{A\,\text{sen}(\omega_f t-\alpha)}^{\text{regimen estacionario}}}_{\text{des a calcular}}}_{\text{solución particular de } *} + \underbrace{\overbrace{X_{amortiguada}(t)}^{\text{transitorio inicial}}}_{\text{solución ec. oscila. amortiguados. (ec. homogenea)}}$$

Buscamos A y α en $x(t) = A\,\text{sen}(\omega_f t-\alpha)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \omega_f A\cos(\omega_f t-\alpha)\\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_f^2 A\,\text{sen}(\omega_f t-\alpha)\end{aligned}\right\} -\omega_f^2 A\,\text{sen}(\omega_f t-\alpha) + 2\gamma\omega_f A\cos(\omega_f t-\alpha) + \omega_0^2 A\,\text{sen}(\omega_f t-\alpha) = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t + 0\,\text{sen}\,\omega_f t$$

$$-\omega_f^2 A(\text{sen}\,\omega_f t\cos\alpha - \cos\omega_f t\,\text{sen}\,\alpha) + 2\gamma\omega_f A(\cos\omega_f t\cos\alpha + \text{sen}\,\omega_f t\,\text{sen}\,\alpha) +$$
$$+\omega_0^2 A(\text{sen}\,\omega_f t\cos\alpha - \cos\omega_f t\,\text{sen}\,\alpha) = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t + 0\,\text{sen}\,\omega_f t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}-\omega_f^2 A\cos\alpha + 2\gamma\omega_f A\,\text{sen}\,\alpha + \omega_0^2 A\cos\alpha &= 0\\ \omega_f^2 A\,\text{sen}\,\alpha + 2\gamma\omega_f A\cos\alpha - \omega_0^2 A\,\text{sen}\,\alpha &= \frac{F_0}{m}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&① \ -(\omega_f^2-\omega_0^2)A\cos\alpha + 2\gamma\omega_f A\,\text{sen}\,\alpha = 0\\ &② \ (\omega_f^2-\omega_0^2)A\,\text{sen}\,\alpha + 2\gamma\omega_f A\cos\alpha = \frac{F_0}{m}\end{aligned}\right\}$$

① $-(\omega_f^2-\omega_0^2)\cos\alpha = -2\gamma\omega_f\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha = \dfrac{\omega_f^2-\omega_0^2}{2\gamma\omega_f}$

② $A = \dfrac{F_0/m}{(\omega_f^2-\omega_0^2)\text{sen}\,\alpha + 2\gamma\omega_f\cos\alpha} = \dfrac{F_0/m}{[(\omega_f^2-\omega_0^2)tg\,\alpha + 2\gamma\omega_f]\cos\alpha} =$

$\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$; $tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$; $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+tg^2\alpha}$

$$= \frac{F_0/m}{\left[\frac{(\omega_f^2-\omega_0^2)}{2\gamma\omega_f} + \frac{(2\gamma\omega_f)^2}{2\gamma\omega_f}\right]\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\omega_f^2-\omega_0^2)}{(2\gamma\omega_f)^2}}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega_f)^2}} \Rightarrow tg\alpha = \frac{\omega_f^2-\omega_0^2}{2\gamma\omega_f}$$

Para encontrar la pulsación para la cual la amplitud es máxima derivamos la expresión anterior:

$$\min\left[(\omega_f^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega_f)^2\right]$$

$$\frac{d}{d\omega_f}\left[(\omega_f^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega_f)^2\right] = 2(\omega_f^2-\omega_0^2)2\omega_f+8\gamma^2\omega_f=0$$

$$\omega_f^2-\omega_0^2+2\gamma^2=0$$

$$\omega_f=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2} \leftarrow \text{Pulsación máxima}$$

¿ω_f? / E máxima

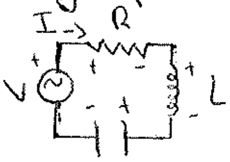
$$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2 \Rightarrow \text{máx}[\omega A]$$

$$\text{máx}[\omega_f A] = \frac{\omega_f\cdot F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2-\omega_0^2)+(2\gamma\omega_f)^2}} = \frac{F_0}{\frac{m}{\omega_f}\sqrt{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega_f)^2}} =$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{\left(m\omega_f-\frac{m\omega_0^2}{\omega_f}\right)^2+(2\gamma m)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(m\omega_f-\frac{K}{\omega_f}\right)^2+(2\gamma m)^2}}$$

$$\text{máx si } m\omega_f=\frac{K}{\omega_f} \Rightarrow \omega_f=\sqrt{\frac{K}{m}}=\omega_0$$

Ejemplo circuito RLC:



$$\frac{d^2x}{dt}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

$V=V_0\,\text{sen}\,\omega_f t$ ¿$I(t)$?

$$V=RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=V_0\,\text{sen}\,\omega_f t \rightarrow R\frac{dI}{dt}+L\frac{d^2I}{dt}+\frac{I}{C}=\omega_f V_0\cos\omega_f t$$

$$\frac{d^2I}{dt}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{\underbrace{LC}_{\omega_0^2}}=\underbrace{\frac{\omega_f V_0}{L}}_{F_0/m}\cos\omega_f t$$

$$I(t)=\frac{\frac{\omega_f V_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega_f^2-\frac{1}{LC}\right)^2+\left(\frac{R}{L}\omega_f\right)^2}}\,\text{sen}\left(\omega_f t-\text{arctg}\left(\frac{\omega_f^2-\frac{1}{LC}}{\frac{R}{L}\omega_f}\right)\right)=$$

$$=\ldots\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega_f\frac{1}{\omega_f C}\right)}}\,\text{sen}\left(\omega_f t-\text{arctg}\left(\frac{L\omega_f-\frac{1}{\omega_f C}}{R}\right)\right)$$

M. A. S.

- Ecuaciones:
  - $x = A\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$
  - $v = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$
  - $a = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$

- Fuerza y energía:
  - $F = ma = -m\omega^2 x = k\cdot x$

    $k = m\omega^2$ ◦ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
  - $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$

    $E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$
  - $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$
  - $E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

- Dinámica:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \leftarrow \text{M.A.S.}$$

- Péndulos:
  - Péndulo simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

  - Péndulo compuesto:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I} = 0$$

- Superposición:

Misma frecuencia

$$x_1 = A_1 \text{sen}(\omega t + \alpha_1)$$
$$x_2 = A_2 \text{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + A_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}$$

- Distinta frecuencia:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\omega_1 t - \omega_2 t)}$$

- Distinta dirección:

$$\left.\begin{array}{l} x = A \operatorname{sen} \omega t \\ y = B \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \end{array}\right\}$$

* $\alpha = 0$

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \Rightarrow y = \frac{B}{A} x$$

* $\alpha = -\pi$

$$\frac{y}{x} = -\frac{B}{A} \Rightarrow y = -\frac{B}{A} x$$

* $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

* $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

- Oscilaciones amortiguadas:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad 2\delta = \frac{K}{m}$$

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

$$r = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

- $\delta > \omega_0 \rightarrow$ Movimiento sobreamortiguado:

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

c_1 y c_2 a partir de condiciones iniciales

- $\gamma = \omega_0 \rightarrow$ Amortiguamiento crítico:

$$x(t) = (c_1 + c_2)e^{rt} = (c_1 + c_2)e^{-\gamma t}$$

$$r = -\gamma$$

c_1 y c_2 a partir de condiciones iniciales.

- $\gamma < \omega_0 \rightarrow$ Movimiento subamortiguado:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

- Energía:

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 (Ae^{-\gamma t})^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 e^{-2\gamma t} = E_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{1}{2\gamma} \leftarrow \text{cte de tiempo}$$

- Factor de calidad:

$$Q = \omega_0 \tau$$

$$Q = \frac{2\pi}{\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{ciclo}}$$

- Oscilaciones forzadas:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

- $A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}$

- $\omega_f \rightarrow A_{máx}$

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

- $\omega_f \rightarrow E_{máx}$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0$$

23.

$$x = 4\,\text{sen}(0{,}1t + 0{,}5)$$

a) $A = 4\,m$

$\omega = 0{,}1\ rad/s$

$\alpha = 0{,}5\ rad$

$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0{,}1}{2\pi}\ Hz$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{0{,}1}\ s$$

b) $v = 4 \cdot 0{,}1\cos(0{,}1t + 0{,}5) = 0{,}4\cos(0{,}1t + 0{,}5)$

$a = -0{,}04\,\text{sen}(0{,}1t + 0{,}5)$

c) $t = 0$:

$x(0) = 1{,}92\ m$ $\qquad v(0) = 0{,}35\ m/s$

$a(0) = -0{,}019\ m/s^2$

d) $x(5) = 3{,}37\,m$ $\qquad v(5) = 0{,}216\ m/s^2$

$a(5) = -0{,}034\ m/s^2$

24.

$m = 1\,kg$

$T = 16\,s \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}\ rad/s$

$t = 2\,s \rightarrow x = 0\,m$

$t = 4\,s — v = 4\,m/s$

a) $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \alpha) \longrightarrow 0 = A\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha) \rightarrow 4 = A\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

Para que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 0$, α deve ser :

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{4}{A\frac{\pi}{8}} \Rightarrow A = -14{,}41\ m$

b) $E_C = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2} 207{,}7 \cdot 0{,}15 = 15{,}5775 \text{ J}$

$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2} 0{,}15 \cdot 207{,}7 = 15{,}5775 \text{ J}$

$E_T = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} 0{,}15 \cdot 207{,}7 = 15{,}5775 \text{ J}$

25

$A = 10 \text{cm} = 0{,}1 \text{m}$

$T = 1 \text{s} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s}$

$m = 100 \text{g}$

a) $V_{max} = A\omega \cos(\omega t + \alpha) = A\omega = 0{,}1 \cdot 2\pi = 0{,}628 \text{ m/s}$

$a_{max} = -A\omega^2 \text{sen}(\omega t + \alpha) = -A\omega^2 = 0{,}1 \cdot (2\pi)^2 = -3{,}95 \text{ m/s}^2$

$F_{max} = -m \cdot a_{max} = -0{,}1 \cdot (-3{,}95) = 0{,}395 \text{ N}$

b) $t = 0{,}2 \text{s} \rightarrow x = 4 \text{ cm}$ y $v < 0$

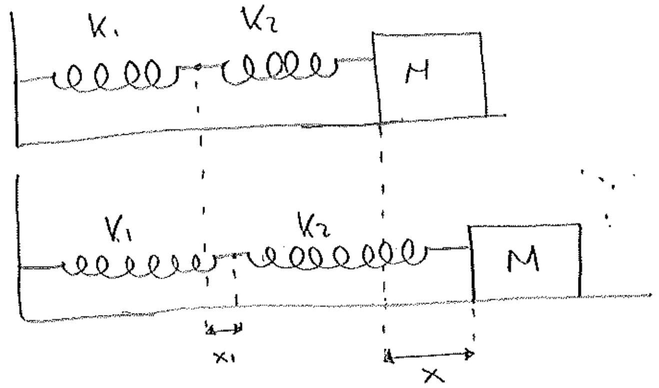
$x(t) = A \text{sen}(\omega t + \alpha)$

$0{,}04 = 0{,}1 \text{ sen}(2\pi \cdot 0{,}2 + \alpha)$

$\text{sen}(\frac{\pi}{25} + \alpha) = 0{,}4$

26.

a)



$F = -Kx = ma$

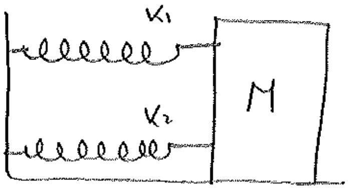
$-k_2(x - x_1) = m\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2}{m}(x - x_1) = 0$

$K_1 x_1 = k_2(x - x_1) \rightarrow x_1(K_1 + K_2) = K_2 x \rightarrow x_1 = \frac{K_2}{K_1 + K_2} x$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2}{m}\left(x - \frac{k_2 x}{k_1+k_2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2 x}{m}\left(1 - \frac{k_2}{k_1+k_2}\right) = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2 x}{m}\left(\frac{k_1+k_2-k_2}{k_1+k_2}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2 x}{m}\frac{k_1}{k_1+k_2} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

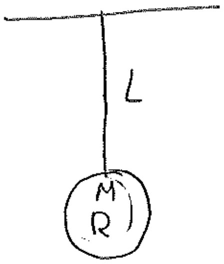
b) 

$F_1 = -k_1 x$

$F_2 = -k_2 x$

$$-k_1 x - k_2 x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(k_1+k_2)}{m}x = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

c) 

$$-mg(L+R)\operatorname{sen}\theta = \Sigma M$$

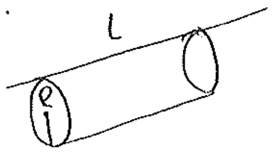
$$I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg(L+R)\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg(L+R)}{I}\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mg(L+R)}{I}}$$

27.



$d = \rho$

a) $M = \rho V = \rho \pi R^2 L$

$$\left.\begin{aligned} &\tau = -RMg\,\mathrm{sen}\,\theta = I\alpha \\ &I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2 \\ &I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\frac{3}{2}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \cancel{R}\cancel{M}g\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ &\frac{3R}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3R}\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

b) $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3R}\theta = 0$$

c) $$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

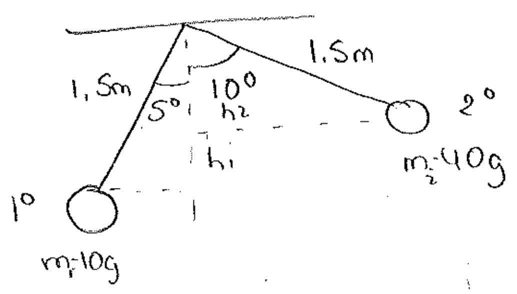
d) $\theta(0) = \frac{\pi}{18} \rightarrow \frac{\pi}{18} = A\,\mathrm{sen}(\alpha)$

$\dot{\theta}(0) = 0 \rightarrow 0 = A\omega\cos(\alpha) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$$A = \frac{\pi}{18}$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{2g}{3R}}\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

28.



$h_1 = 1{,}5 \cdot \cos 5 = 1{,}494\,m$

$h_2 = 1{,}5\cos 10 = 1{,}477\,m$

1°) $\Delta Em = 0 \to \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0\right) + (0 - mgh_1) = 0$

$\frac{1}{2}0{,}01 \cdot v_1^2 = 0{,}22 \to v_1 = \sqrt{43{,}75} = 6{,}61\,m/s$

2°) $\left(\frac{1}{2}m_2v_2^2 - 0\right) + (0 - m_2gh_2) = 0$

$\frac{1}{2}0{,}04\,v_2^2 = 0{,}855 \to v_2 = \sqrt{42{,}76} = 6{,}54\,m/s$

1°) $\cancel{V_1} = V_0 + at \to 6{,}61 = at$

$x = x_0 + V_0t + \frac{1}{2}at^2 \to 1{,}494 = \frac{1}{2}at \cdot t$

$1{,}494 = \frac{1}{2}6{,}61\,t \to t = 0{,}45\,s$

2°) $V_2 = V_0 + at \to 6{,}54 = at$

$1{,}477 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}54\,t \Rightarrow t = 0{,}45\,s$

30.

$m = 10g = 0{,}01\ kg$

$x_1 = 4 \operatorname{sen}(\omega t) = 0{,}04 \operatorname{sen}(\omega t)$

$x_2 = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = 0{,}04 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$

a) Para que sea un M.A.S la frecuencia ha de ser la misma, por tanto

$$\omega = \frac{\pi}{4}$$

b) $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = \sqrt{0{,}04^2 + 0{,}04^2 + 2\cdot 0{,}04^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 0{,}04\ m$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{1}{8} = 0{,}125\ Hz \rightarrow T = \frac{1}{f} = 8\ s$

$tg\alpha = \frac{0{,}04 \operatorname{sen} 2\pi/3}{0{,}04 - 0{,}02} = \sqrt{3}$

$x = 0{,}04 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)(m)$

$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3} rad$

c) ¿x en $E_c = E_p$?

$E_c = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m\omega^2}(A^2 - x^2) = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m\omega^2}x^2 = E_p$

$A^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2} \rightarrow x = A\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}04\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}02828\ m$

d) $\omega' = \frac{4\pi t}{9}$

No es un M.A.S. puesto que ahora los dos M.A.S no tienen la misma frecuencia, por tanto oscilará.

e) $x = A \operatorname{sen}\left(\frac{25\pi}{72}t + \frac{\pi}{3}\right)$

Cuando $A_1 = A_2$:

$x_1 = 0{,}04 \operatorname{sen}\frac{4\pi t}{9}$

$x_2 = 0{,}04 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$

$x_1 + x_2 = 0{,}04\left(\operatorname{sen}\frac{4\pi t}{9} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$= 0{,}08 \operatorname{sen}\left(\frac{25}{72}\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{72}t - \frac{\pi}{3}\right)$

$A = 0{,}08\cos\left(\frac{7\pi}{72}t - \frac{\pi}{3}\right),\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 20{,}57\ s$

31.

$F = -16mr$

a) $F = -16mr = ma$

$-16mr = m\frac{d^2r}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} + 16r = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$

$\rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$

b) Es un M.A.S de pulsación $\omega = \sqrt{16} = 4$ rad/s

c) $t=0 \rightarrow x_0 = 16cm \rightarrow 16 = A\,sen(\alpha)$

$\dot{x}_0 = 0 \rightarrow 0 = A4\cos(\alpha) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow A = 16$

$\rightarrow y_0 = 0 \rightarrow 0 = B\,sen(\delta) \rightarrow \delta = 0$

$\dot{y}_0 = 4 \rightarrow 4 = B4\cos(\delta) \rightarrow B = 1$

$x_0 = 16\,sen(4t + \pi/2)$

$y_0 = sen(4t)$

32.

$m = 10\,g = 0{,}01\,Kg$

$T = 2s$

$\theta(t) = \theta_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$

$\frac{\cancel{\theta_0} e^{-\delta \cdot 0}}{\cancel{\theta_0} e^{-\delta 10T}} = \frac{2}{1{,}3} \rightarrow e^{-\delta 10T} = \frac{1{,}3}{2} \rightarrow -\delta 10T = \ln\frac{1{,}3}{2}$

$\delta = 0{,}02$

$2\delta = \frac{c}{m} \rightarrow c = 2\delta m = 4{,}3 \cdot 10^{-4}\ Kg/s$

33

$m = 10g$

$\omega_0 = 1 rad/s$

$x_0 = 1cm$ ⟩ $t = 0$

$V_0 = 0$

a) $b_1 = 20 g/s \rightarrow 2\gamma = \frac{b_1}{m} \rightarrow \gamma = \frac{b_1}{2m} = \frac{20}{20} = 1 Hz = \omega_0$

Amortiguamiento critico.

$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt} = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t}$

$0{,}01 = c_1$

$V = c_2 e^{-\gamma t} - \gamma (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t} \rightarrow 0 = c_2 - \gamma c_1$

$c_2 = 0{,}01$

$x(t) = (0{,}01 + 0{,}01 t) e^{-t}$ m

b) $b_2 = 100 g/s \rightarrow 2\gamma = \frac{b_2}{m} \rightarrow \gamma = \frac{b_2}{2m} = \frac{100}{20} = 5 Hz > \omega_0 = 1 rad/s$

Movimiento sobreamortiguado

$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -5 + \sqrt{25 - 1} = -5 + \sqrt{24} = -0{,}10$

$r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -5 - \sqrt{25 - 1} = -5 - \sqrt{24} = -9{,}89$

$0{,}01 = c_1 + c_2 \rightarrow c_1 = 0{,}01 - c_2$

$V = c_1 e^{r_1 t} r_1 + c_2 e^{r_2 t} r_2 \rightarrow 0 = c_1 r_1 + c_2 r_2$

$r_1 0{,}01 - c_2 r_1 + c_2 r_2 = 0$

$c_2 (r_2 - r_1) = -r_1 0{,}01$

$c_2 = \frac{-r_1 0{,}01}{r_2 - r_1}$ $\quad c_1 = 0{,}01 + \frac{r_1 0{,}01}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 0{,}01}{r_2 - r_1}$

$x(t) = 0{,}01 e^{-0{,}10 t} - 0{,}0001 e^{-9{,}89 t}$

c) $b_3 = 10\, g/s \rightarrow 2\delta = \frac{b_3}{m} \rightarrow \delta = \frac{b_3}{2m} = \frac{10}{20} = 0{,}5\ Hz < \omega_0 = 1\, rad/s$

Movimiento subamortiguado.

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ rad/s$$

$$0{,}01 = A\cos(\alpha).$$

$$v = -Ae^{-\delta t}\omega\,\text{sen}(\omega t + \alpha) - A\delta e^{-\delta t}\cos(\omega t + \alpha).$$

$$0 = -\cancel{A}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}(\alpha) - \cancel{A}\frac{1}{2}\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha)\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,\alpha \rightarrow tg\alpha = -\frac{1/\cancel{2}}{\sqrt{3}/\cancel{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

$$A = 0{,}012$$

$$x(t) = 0{,}012e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right)(m)$$

34.

a) $I = I_0 + mR^2$

$\tau = -mgR\,\text{sen}\theta$

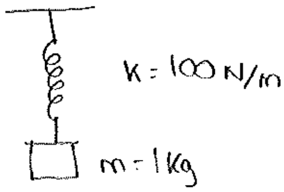
b) $I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgR\,\text{sen}\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR\,\text{sen}\theta}{(I_0 + mR^2)} = 0$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgR}{(I_0+mR^2)}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{(I_0+mR^2)}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0+mR^2}{mgR}}$$

c) $E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cancel{(I_0+mR)}\cdot\frac{mgR}{\cancel{(I_0+mR^2)}} = \frac{1}{2}mgR$

$E_p = \frac{1}{2}I\theta_0^2\omega_0^2\,\text{sen}^2\omega t = \frac{1}{2}mgR\theta_0^2\,\text{sen}^2\omega t$

35.



a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \text{ rad/s} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{5} s$

b) $30T$ $\quad x = x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{\cancel{x_0} e^{-\gamma 30T}}{\cancel{x_0} e^{-\gamma 0}} = \frac{1}{e} \rightarrow e^{-\gamma 30 T} = \frac{1}{e}$$

$$-\gamma 30T = \ln \frac{1}{e}$$

$$\gamma = \frac{1}{30T} = \frac{1}{6\pi}$$

$$2\gamma = \frac{b}{m} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2\gamma} = 3\pi$$

$$Q = \tau\omega_0 = 3\pi \cdot 10 = 30\pi$$

c) $b = 2\gamma m = 2 \cdot \frac{1}{6\pi} \cdot 1 = \frac{1}{3\pi}$

d) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{1}{6\pi}\right)^2} = 9{,}99$

$$100 \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}\right) = 0{,}001\%$$

JUNIO 1996

2)

a) $m = 10\,g = 0{,}01\,kg$ $\quad F = -cv$

$k = 36\,N/m$ $\quad c = 0{,}18\,kg/s$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36}{0{,}01}} = 60\ rad/s$$

$$\tau = \frac{1}{2\gamma} = \frac{1}{\frac{c}{m}} = \frac{m}{c} = \frac{0{,}01}{0{,}18} = 0{,}056\ s$$

$$Q = \omega_0 \cdot \tau = 60 \cdot 0{,}056 = 3{,}36$$

b) $f = 12\,Hz \rightarrow \omega_f = 2\pi f = 2\pi \cdot 12 = 24\pi\ rad$

$A = 4{,}4\,cm = 0{,}044$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}} \Rightarrow F_0 = A\sqrt{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} \cdot m$$

$$F_0 = 4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{(5685 - 3600)^2 + (18 \cdot 24\pi)^2}$$

$$F_0 = 4{,}4 \cdot 10^{-4} \sqrt{4347225 + 1841905}$$

$$F_0 = 1{,}09\ N$$

c) $F_0 = 1{,}09\,N$ $\quad A' = 10\,cm = 0{,}1\,m$

¿ω_f?

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}} \Rightarrow \sqrt{(\omega_f^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} = \frac{F_0}{m \cdot A}$$

$$(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2 = \frac{F_0^2}{m^2 A^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_f^4 + \omega_0^4 - 2\omega_f^2\omega_0^2 + 4\gamma^2\omega_f^2 = \frac{F_0^2}{m^2A^2} \Rightarrow \omega_f^2(\omega_f^2 - 2\omega_0^2 + 4\gamma^2) = \frac{F_0^2}{m^2A^2} - \omega_0^4$$

SEPTIEMBRE 1999

2) $m = 10g$

$x_1 = 4sen(\omega t)$ · $x_2 = 4 sen\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right)$

a) Puesto que ambos tienen la misma dirección, para que sea un M.A.S solo han de tener la misma frecuencia:

$$\omega = \frac{\pi}{4} \, rad/s$$

b) $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8s$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2\cdot4\cdot4\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} =$$

$$= 4 \, cm$$

$$tg\alpha = \frac{A_1 \cancel{sen\alpha_1}^{0} + A_2 sen\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} = \frac{2\sqrt{3}}{4-2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60° \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$x = 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

c) $$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2(1 - sen^2(\omega t + \alpha)) =$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$\Rightarrow E_c = E_p$ ·

$$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m\omega^2}A^2 = \cancel{m\omega^2}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2}$$

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

SEPTIEMBRE 2000

2) $m = 10g = 0{,}01\ kg$

$$\frac{x^2}{10^{-2}} + \frac{y^2}{2\cdot 10^{-2}} + \frac{xy}{10^{-2}} = \frac{1}{2}$$

a) Ese M.A.S está compuesto de otros dos de la forma

$$\left.\begin{array}{l} x = A_1 \operatorname{sen} \omega t \\ y = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{array}\right\} \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy\cos\varphi}{A_1 A_2} = \operatorname{sen}^2\varphi$$

solo tenemos que identificar los términos.

$$A_1 = \sqrt{10^{-2}} = 0{,}1$$

$$A_2 = \sqrt{2\cdot 10^{-2}} = 0{,}14$$

$$-\frac{2}{A_1 A_2}\cos\varphi = \frac{1}{10^{-2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{A_1 A_2}{-2\cdot 10^{-2}} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}14}{-2\cdot 10^{-2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \begin{cases} 135^\circ \\ -135^\circ \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} 135^\circ \\ -135^\circ \end{cases}$$

$$x = 0{,}1 \operatorname{sen} \omega t$$

$$y = 0{,}14 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

b) La fase debería ser igual a 0.

$$E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot \frac{\pi^2}{16} (16 - 8) = 0{,}02467 \text{ J}$$

Si $\omega = \frac{4\pi}{9} t$

d) No, puesto que no tiene la misma pulsación que el otro m.a.s.

e) $x = A \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} t + \delta\right)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 4\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9} t\right) \\ x_2 = 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right\} x = x_1 + x_2 = 4\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9} t\right) + 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 4\left(\text{sen}\left(\frac{4\pi t}{9}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4\left(2\,\text{sen}\,\frac{\frac{4\pi}{9} t + \frac{\pi}{4} t + \frac{2\pi}{3}}{2} \cos\frac{\frac{4\pi}{9} t - \frac{\pi}{4} t - \frac{2\pi}{3}}{2}\right) =$$

$$= 8\cos\left(\frac{7\pi}{36} t - \frac{\pi}{3}\right) \text{sen}\left(\frac{25\pi}{72} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A = 8\cos\left(\frac{7\pi}{36} t - \frac{\pi}{3}\right)$$

f) Si, puesto que no es esa pulsación la que sale, sino,

$$\omega = \frac{7\pi}{36}$$

JUNIO 2001

3) $x = A e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$x = A e^{-\gamma t} \operatorname{sen}((\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t + \alpha)$

a) $\frac{x_1}{x_2} = 0{,}9 \Rightarrow \frac{\cancel{A} e^{-\gamma t_1}}{\cancel{A} e^{-\gamma t_2}} = 0{,}9 \Rightarrow e^{-\gamma(t_1 - t_2)} = 0{,}9$

$e^{-\gamma 2{,}5} = 0{,}9$

$2{,}5\gamma = \ln \frac{1}{0{,}9} \Rightarrow \gamma = \frac{\ln \frac{1}{0{,}9}}{2{,}5} = 0{,}042\ s^{-1}$

b) $Q = \omega_0 \cdot \tau$

$\tau = \frac{1}{2\gamma} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}042} = 11{,}9$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \Rightarrow 2{,}5 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - 0{,}042^2}}$

$\sqrt{\omega_0^2 - 1{,}764 \cdot 10^{-3}} = \frac{4\pi}{5}$

$\omega_0^2 = 6{,}32 + 1{,}764 \cdot 10^{-3}$

$\omega_0 = \sqrt{6{,}32} = 2{,}51$

$Q = \omega_0 \cdot \tau = 2{,}51 \cdot 11{,}9 = 30$

c) $t = 3s \Rightarrow x(3) = 6\ cm$ y $v(3) = 0$

$x = A \cdot e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$

$v = -\gamma A e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + A e^{-\gamma t} \omega \cos(\omega t + \alpha)$

$$\begin{cases} 6 = A e^{-0{,}042\cdot 3} \operatorname{sen}(2{,}51\cdot 3 + \alpha) \\ 0 = -0{,}042\cdot A e^{-0{,}042\cdot 3} \operatorname{sen}(2{,}51\cdot 3 + \alpha) + A e^{-0{,}042\cdot 3}\cdot 2{,}51 \cos(2{,}51\cdot 3 + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \quad 6 = A e^{-0{,}126} \operatorname{sen}(7{,}53 + \alpha) \\ ② \quad 0 = -0{,}042\cdot A e^{-0{,}126} \operatorname{sen}(7{,}53 + \alpha) + A e^{-0{,}126}\cdot 2{,}51 \cos(7{,}53 + \alpha) \end{cases}$$

②

$$0 = A e^{-0{,}126}\left(-0{,}042 \operatorname{sen}(7{,}53+\alpha) + 2{,}51\cos(7{,}53+\alpha)\right)$$

Divido por el $\cos(7{,}53+\alpha)\cdot A e^{-0{,}126}$

$$0 = \left(-0{,}042\cdot tg(7{,}53+\alpha) + 2{,}51\right)$$

$$tg(7{,}57+\alpha) = \frac{2{,}51}{0{,}042} = 59{,}76$$

$$7{,}57 + \alpha = 59{,}76$$

$$\alpha = 52{,}19 \text{ rad}$$

① $$6 = A e^{-0{,}126} \operatorname{sen}(7{,}57 + 52{,}19)$$

$$6 = -A e^{-0{,}126}\cdot 0{,}07$$

$$A = -\frac{6}{0{,}07\cdot e^{-0{,}126}} =$$

JUNIO 2002

2)

$\omega = 0{,}9\omega_0$

a) $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = \omega_0^2 - 0{,}81\omega_0^2 = 0{,}19\omega_0^2$

$\gamma = 0{,}43\omega_0$

$A = A_0 e^{-\gamma t}$

$\frac{A}{A_0} = e^{-\gamma \frac{2\pi}{0{,}9\omega_0}} = e^{-0{,}43\omega_0 \frac{2\pi}{0{,}9\omega_0}} = 4{,}97 \cdot 10^{-2} \simeq 5\%$ de A_0

$\frac{E}{E_0} = e^{-2\gamma t} = e^{-2\gamma \frac{2\pi}{0{,}9\omega_0}} = e^{-2 \cdot 0{,}43 \frac{2\pi}{0{,}9}} = 2{,}47 \cdot 10^{-3} = 0{,}2\%$

b) $Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\cancel{\omega_0}}{2 \cdot 0{,}43\cancel{\omega_0}} = 1{,}16$ es malo porque es pequeño

SEPTIEMBRE 2003

3)

a) Debería ser $\alpha = \frac{\pi}{2}$, para que la trayectoria sea circular y su velocidad angular constante.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega A)^2 = \frac{1}{2} A^2 m (2\pi f)^2$$

b) $K = m\omega^2 = m \cdot (2\pi f^2)$

EJERCICIOS

M.A.S.

24.

$m = 1\,kg \qquad t = 2s \rightarrow x = 0\,m$

$T = 16s \qquad t = 4s \rightarrow v = 4\,m/s$

a) $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

$$\left.\begin{array}{l} x = A\,sen(\omega t + \alpha) \Rightarrow 0 = A\,sen(\frac{\pi}{8}\cdot 2 + \alpha) \\ v = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow 4 = \frac{\pi}{8} A \cos(\frac{\pi}{8}\cdot 4 + \alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = A\,sen(\frac{\pi}{4} + \alpha) \\ 4 = \frac{\pi}{8} A \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \end{array}\right\}$$

$sen(\frac{\pi}{4} + \alpha) = sen\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\,sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}sen\alpha$

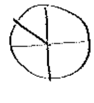
$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = sen\frac{\pi}{2}\,sen\alpha - \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha = sen\alpha$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + A\frac{\sqrt{2}}{2}sen\alpha \\ 4 = \frac{\pi}{8} A\,sen\alpha \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{32}{\pi\,sen\alpha}$$

$$0 = \frac{32}{\pi\,sen\alpha}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{32}{\pi\,\cancel{sen\alpha}}\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{sen\alpha}$$

$0 = \frac{7{,}20}{sen\alpha}\cos\alpha + 7{,}20 \Rightarrow 0 = 7{,}20\cos\alpha + 7{,}20\,sen\alpha \Rightarrow$

$:\cos\alpha \Rightarrow 0 = 7{,}20 + 7{,}20\,tg\alpha \Rightarrow tg\alpha = -1$



$\alpha = \frac{3\pi}{4}$

$$A = \frac{32}{\pi\,sen(\frac{3\pi}{4})} = 14{,}4$$

$$x = 14{,}4\,sen(\frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4})$$

b) $E_c = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = 15{,}988 - 0{,}077x^2$

máx cuando la derivada igualada a 0 sea < 0:

$0{,}154x = 0$

$x = 0$

$E_c = 15{,}988 \simeq 16\,J$

23.

$x = 4\,sen(0{,}1t + 0{,}5)$

a) • $A = 4\,m$

• $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = 0{,}1$ $\Big\}$ $T = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi\ s$

• $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20\pi} = 0{,}016\ Hz$

• $\alpha = 0{,}5\ rad$

b) $x = A\,sen(\omega t + \alpha)$

$v = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \alpha) = 0{,}1 \cdot 4\cos(0{,}1t + 0{,}5) = 0{,}4\cos(0{,}1t + 0{,}5)$

$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\,sen(\omega t + \alpha) = -0{,}1^2 \cdot 4\,sen(0{,}1t + 0{,}5) = -0{,}04\,sen(0{,}1t + 0{,}5)$

c) Condiciones iniciales $\begin{cases} x(0) \\ v(0) \end{cases}$

$x(0) = 1{,}92\,m$

$v(0) = 0{,}35\ m/s$

d) $t = 5\,s$

$x(5) = 3{,}37\,m$

$v(5) = 0{,}22\,m/s$

$a(5) = -0{,}034\ m/s^2$

$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

25.

$A = 10\,cm = 0{,}1\,m$

$T = 1\,s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ rad/s$

$m = 100\,g = 0{,}1\,kg$

a) $x = A\,sen(\omega t + \alpha)$

$v = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$ -> velocidad máxima cuando $\cos(\omega t + \alpha) = 1$

$v = 2\pi \cdot 0{,}1 \cos(2\pi t + \alpha)$

$v = 2\pi \cdot 0{,}1 \cdot 1$ ← Puesto que el cos ha de valer 1 para vmax

$v = 0{,}628\,m/s$

$a = -\omega^2 A\,sen(\omega t + \alpha) = -4\pi^2 0{,}1\,sen(\omega t + \alpha)$ ← sen = 1 para vmax

$a = -3{,}95\,m/s^2$

$F = -ma = -0{,}1 \cdot (-3{,}95) = 0{,}395\,N$

↑ signo (-) puesto que es la fuerza que se ejerce contra la masa

b) $t = 0{,}2\,s \rightarrow x = 4\,cm = 0{,}04\,m$, $v < 0$

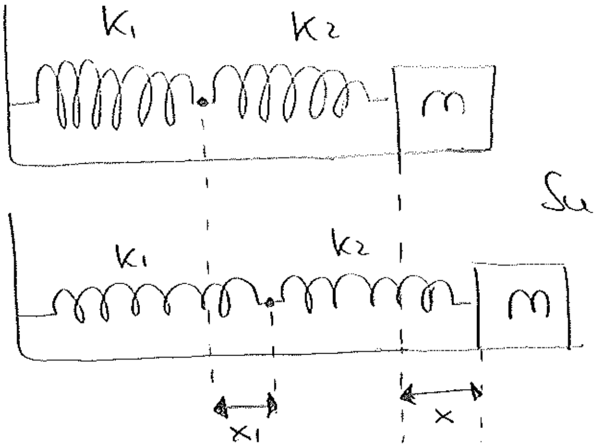
$0{,}04 = 0{,}1 \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right)$

$v = -2\pi 0{,}1\,sen\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right)$

¿¿¿¿ $x(m) = 0{,}10 \cos(2\pi t - 0{,}10)$????

26.

a)



Suponemos un movimiento

Mediante la ecuación del movimiento de un muelle:

$$F = -kx \quad y \quad F = ma \quad \left(a = \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

$$-k_2(x - x_1) = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2}{m}(x - x_1) = 0$$

$$k_1x_1 = k_2(x - x_1) \rightarrow (k_1 + k_2)x_1 = k_2 x \Rightarrow x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2}{m}(x - x_1) = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2}{m}\left(x - \frac{k_2}{k_1 + k_2}x\right) = 0$$

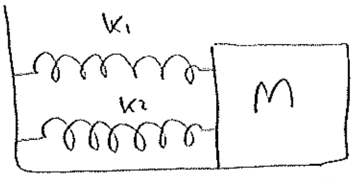
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k_1k_2}{m(k_1 + k_2)}}_{\rightarrow \omega^2}x = 0 \quad \leftarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$(2\pi f)^2 = \frac{k_1k_2}{m(k_1 + k_2)}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

b)



$$F = -kx$$

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

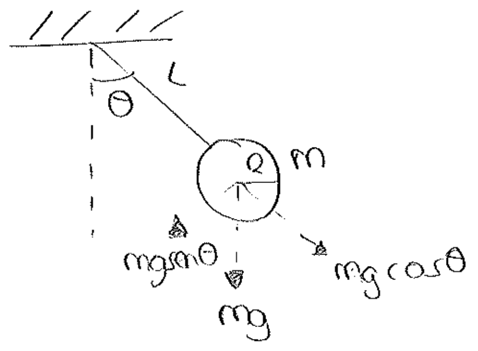
Sumamos los dos muelles, ya que la fuerza la ejercerán ambos:

$$-k_1x - k_2x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{(k_1 + k_2)}{m}}_{\rightarrow \omega^2}x = 0 \Rightarrow 4\pi f^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

c)

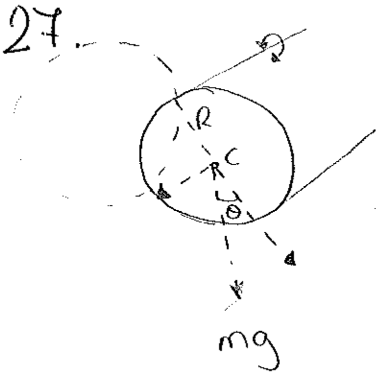


$$\left.\begin{array}{l} -mg(L+R)\,\text{sen}\,\theta = \Sigma M \\ I\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = I\alpha \end{array}\right\} \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg(L+R)\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg(L+R)\,\text{sen}\,\theta}{L} = 0$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\cdot(L+R)}{I}}$$

27.



a) $-mgR\,\text{sen}\,\theta = I_0\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$I_0\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgR\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR\,\text{sen}\,\theta}{I_0} = 0$$

Recordemos que para que sea M.A.S ha de ser similar a $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$. Entonces cogemos ángulos pequeños.

b) $\theta \downarrow\downarrow \Rightarrow \text{sen}\,\theta \simeq \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR}{I_0}\theta = 0 \rightarrow \theta = \theta_0\,\text{sen}(\omega_0 t + \alpha)$$

c) $\omega_0^2 = \dfrac{mgR}{I_0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgR}{I_0}}$

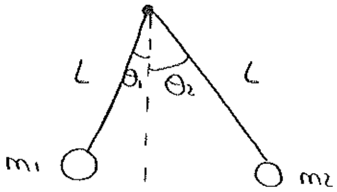
d) $\left.\begin{array}{l} \theta(0) = \dfrac{\pi}{18} \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{18} = \theta_0\,\text{sen}\,\alpha \\ 0 = \omega_0\theta_0\cos\alpha \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \theta_0 = \dfrac{\pi}{18}, \dfrac{-\pi}{18} \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta(t) = -\frac{\pi}{18}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{mgR}{I_0}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{18}\cos\left(\sqrt{\frac{mgR}{I_0}}\right)$$

e) $R = 20\,cm$

$$\sqrt{\frac{mgR}{I}}\,t = (2n-1)\frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0{,}27(2n+1)\,s$$

28.

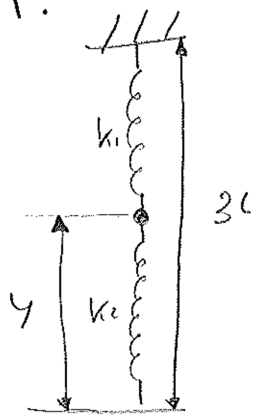


$m_1 = 0{,}01g$, $\theta_1 = 5°$

$m_2 = 0{,}04g$, $\theta_2 = 10°$

$l = 1{,}5m$

29.



a)

$$E_p = mgy + \frac{1}{2}k_1(3L - y - L)^2 + \frac{1}{2}k_2(y-L)^2 =$$

$$= mgy + \frac{1}{2}k_1(2L-y)^2 + \frac{1}{2}k_2(y-L)^2$$

$$F = -\frac{dE_p}{dy} = -(mg + k_1(2l-y)(-1) + k_2(y-l)) =$$

$$= -mg + k_1(2l-y) - k_2(y-L) =$$

$$= -mg + k_1 2l - k_1 y - k_2 y + k_2 L =$$

$$= -mg - y(k_1+k_2) + l(2k_1+k_2)$$

b) Equilibrio si $F=0$

$$-mg - y_0(k_1+k_2) + L(2k_1+k_2) = 0$$

$$y_0(k_1+k_2) = L(2k_1+k_2) - mg$$

$$y_0 = \frac{L(2k_1+k_2)-mg}{k_1+k_2}$$

c) $F = ma$

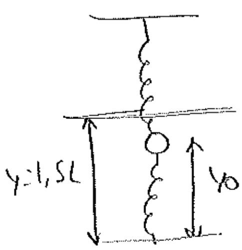
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - (k_1+k_2)y + (2k_1+k_2)l$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(k_1+k_2)}{m}y + \underbrace{g - \frac{(2k_1+k_2)L}{m}}_{= -\left(\frac{k_1+k_2}{m}y_0\right)} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k_1+k_2}{m}\underbrace{(y-y_0)}_{\varepsilon} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k_1+k_2}{m}\varepsilon = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

d) $y = 1{,}5L$



$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 = \frac{1}{2}k_1(y-y_0)^2 + \frac{1}{2}k(y-y_0)^2 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)(y-y_0)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2(y-y_0)^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

$$A = y - y_0 = 1{,}5L - y_0$$

30

$m = 10g$

$x_1 = 4 sen(\omega t)$

$x_2 = 4 sen\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right)$

$[x] = cm$

a) Para que sea un movimiento armónico simple con la misma dirección, ha de tener también la misma frecuencia y como la pulsación de x_2 es $\frac{\pi}{4}$, la pulsación de x_1 ha de ser también $\frac{\pi}{4}$.

$$\omega = \frac{\pi}{4} rad/s$$

b) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8s$

- $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A_2 = 4 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \sqrt{16 + 16 + 32\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = 4$$

- $tg\,\alpha = \dfrac{A_1 sen\alpha_1 + A_2 sen\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} = \dfrac{4 sen 0 + 4 sen\frac{2\pi}{3}}{4\cos 0 + 4\cos\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4-2} = \sqrt{3}$

$$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$x = 4 sen\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

c) $\left.\begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2}m\omega_0^2(A^2 - x^2) \\ E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \end{array}\right\rangle =$

$$\frac{1}{2}0{,}01\frac{\pi^2}{16}(16 - x^2) = \frac{1}{2}0{,}01\frac{\pi^2}{16}x^2$$

$$0{,}05 - 3{,}08\cdot10^{-3}x^2 = 3{,}08\cdot10^{-3}x^2$$

$3{,}08\cdot10^{-3}$

$$6{,}16\cdot10^{-3}x^2 = 0{,}05$$

$$x = \sqrt{\frac{0{,}05}{6{,}16\cdot10^{-3}}} = 2{,}85 cm$$

d) $\omega' = \frac{4\pi t}{9}$

No porque $\omega' \neq \omega$ y por tanto la amplitud depende del tiempo.

e) $x = A \operatorname{sen}\left(\frac{25\pi t}{72} + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 4 \operatorname{sen} \frac{4}{9}\pi t \\ x_2 = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right\} x = x_1 + x_2 = 4\left(\operatorname{sen}\frac{4}{9}\pi t + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

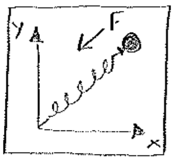
$$= 4\left(2 \operatorname{sen}\frac{\frac{4}{9}\pi t + \frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}}{2} \cos\frac{\frac{4}{9}\pi t - \frac{\pi}{4}t - \frac{2\pi}{3}}{2}\right) =$$

$$= 8\cos\left(\frac{7\pi t}{72} - \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{25\pi t}{72} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$A = 8\cos\left(\frac{7\pi t}{72} - \frac{\pi}{3}\right)$

$T = \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{72}} = 20{,}57\,s$

31.



$\vec{F} = -16m\vec{r}$

$F = -m\omega_0^2 x \Rightarrow \omega_0 = 4\,rad/s$

a) $F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = -16m(x\vec{i} + y\vec{j})$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = -16mx \\ F_y = -16my \end{array}\right\} \begin{array}{l} m\frac{d^2x}{dt} = -16mx \\ m\frac{d^2y}{dt} = -16my \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \end{cases}$$

c)

$$C.I. \Rightarrow t = 0 \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x_0 = 16\,cm \\ \dot{x}_0 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 16 = A\operatorname{sen}\alpha \\ 0 = \omega_0 A\cos\alpha \end{array}\right\} \to \alpha = \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = 16 \\ \frac{3\pi}{2} \Rightarrow A = -16 \end{array}\right\} x(t) = 16\operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{2}\right) = 16\cos 4t \\ \left.\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ \dot{y}_0 = 4\,cm/s \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 0 = B\operatorname{sen}\beta \\ 4 = \omega_0 B\cos\beta \end{array}\right\} \beta = \left\{\begin{array}{l} 0 \Rightarrow B = 1 \\ \pi \Rightarrow B = -1 \end{array}\right\} y(t) = \operatorname{sen} 4t \end{cases}$$

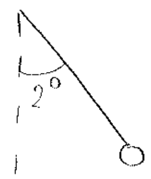
Ecuación de la trayectoria:

$$\left.\begin{array}{l} x = 16\cos 4t \\ y = \operatorname{sen} 4t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \frac{x}{16} = \cos 4t \\ y = \operatorname{sen} 4t \end{array}\right\} \frac{x^2}{16^2} + y^2 = 1$$

32. $m = 10g$

$T = 2s$

F →



33. $m = 10\,g$ $\quad$ $CI \begin{cases} x_0 = 1cm \\ v_0 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $c_1 = 20 g/s$

$\omega_0 = 1 rad/s$ $\quad$ $c_2 = 100 g/s$

$c_3 = 10 g/s$

La ecuación del movimiento para oscilaciones amortiguadas es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$2\gamma = \frac{c}{m} = \frac{\lambda}{m} \Rightarrow \gamma = \frac{c}{2m}$$

$c_1 = 20 g/s$:

$\gamma = \frac{20}{2 \cdot 10} = 1 = \omega_0 \Rightarrow$ Amortiguamiento crítico ($\gamma = \omega_0$)

$x(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\gamma t} \rightarrow v(t) = K_2 e^{-\gamma t} + (K_1 + K_2 t)(-\gamma e^{-\gamma t})$

$CI \begin{cases} x(0) = 1 \Rightarrow 1 = K_1 \\ v(0) = 0 \Rightarrow K_2 - K_1\gamma = 0 \end{cases} \begin{cases} K_1 = 1 \\ K_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x(t) = (1+t)e^{-t}$

$c_2 = 100 g/s$

$\gamma = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5 > \omega_0 \Rightarrow$ Sobreamortiguamiento ($\gamma > \omega_0$)

$x(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} \Rightarrow v(t) = k_1 e^{r_1 t} r_1 + k_2 e^{r_2 t} r_2$

$CI \begin{cases} x(0) = 1 \Rightarrow 1 = k_1 + k_2 \\ v(0) = 0 \Rightarrow 0 = k_1 r_1 + k_2 r_2 \end{cases} \begin{cases} r_1 = k_1 r_1 + k_2 r_1 \\ 0 = k_1 r_1 + k_2 r_2 \end{cases} \begin{cases} k_2 r_1 - k_2 r_2 = r_1 \\ k_2 = \frac{r_1}{r_1 - r_2} = \end{cases}$

$k_1 = \frac{-r_2}{r_1 - r_2}$

$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$

$r = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-4}}{2} = \begin{cases} -5 + 2\sqrt{6} = r_1 \\ -5 - 2\sqrt{6} = r_2 \end{cases}$

$K_2 = -0,01$

$K_1 = 1,01$

$x(t) = 1,01 e^{-0,101 t} - 0,010 e^{-9,89 t}$

$C3 = 10\ g/s$ –

$$\gamma = \frac{C}{2m} = \frac{10}{20} = 0{,}5 < \omega_0 \rightarrow \text{subamortiguamiento} \quad (\gamma < \omega_0)$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\,\text{sen}(\omega t + \alpha) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V(t) = -\gamma A e^{-\gamma t}\,\text{sen}(\omega t + \alpha) + Ae^{-\gamma t}\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

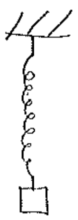
$$CI \begin{cases} x(0) = 1 \Rightarrow 1 = A\,\text{sen}\alpha \\ V(0) = 0 \Rightarrow 0 = -\gamma A\,\text{sen}\alpha + A\omega\cos\alpha \end{cases} : A\cos\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{A\cos\alpha} = \text{tg}\alpha \\ 0 = -\gamma\,\text{tg}\alpha + \omega \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow A = 1{,}1547 \\ \rightarrow \text{tg}\alpha\,\gamma = \omega \end{array}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}5} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$x(t) = 1{,}1547\, e^{-t/2}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

35.



$k = 100\ N/m$.

$m = 1\,kg$

a) $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\ rad/s$

b) $A = \frac{A_0}{e} \qquad Q = \omega_0\tau \qquad 30$ ciclos

$$x(t) = Ae^{-\gamma T}\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$A = Ae^{-\gamma T}$ pero después de 30 ciclos:

$$A = A_0 e^{-\gamma 30 T}$$

según la igualdad del enunciado

$$A = \frac{A_0}{e}$$

entonces

$$\frac{A_0}{e} = A_0 e^{-\gamma 30 T} \Rightarrow A_0 e^{-1} = A_0 e^{-\gamma 30 T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma 30 T = 1$$

$$\gamma 30 \frac{2\pi}{\omega} = 1$$

Pero en un movimiento subamortiguado:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

entonces

$$\frac{\gamma 30 \, 2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = 1 \Rightarrow \gamma 60\pi = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$(\gamma 60\pi)^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$(60\pi\gamma)^2 \simeq \omega_0^2$$

$$\gamma \simeq \frac{\omega_0}{60\pi} = \frac{10}{60\pi} = \frac{1}{6\pi}$$

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{10}{2 \cdot \frac{1}{6\pi}} = 30\pi$$

$$\tau = \frac{1}{2\gamma}$$

c)
$$\left.\begin{array}{l} 2\gamma = \frac{\lambda}{m} \\ c = \lambda \end{array}\right\} c = 2\gamma m = \frac{2}{6\pi} \cdot 1 = \frac{1}{3\pi}$$

d)
$$100\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right) = (1{,}4 \cdot 10^{-5}) 100 = 1{,}4 \cdot 10^{-3} \%$$

37.

$F = F_0 \cos \omega_f t$

$k = 100 N/m$

$m = 1 Kg$

$\omega_f = 9.5 rad/s$

$F_0 = 10 N$

$\gamma = \frac{1}{6\pi}$

a)
$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}} = \frac{10}{\sqrt{(9{,}5^2 - 10^2)^2 + (\frac{2}{6\pi} 9{,}5)^2}} = 1{,}02 cm$$

b)
$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{2}{6\pi}\right)^2} = 9{,}999 \; rad/s$$

c)
$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}} = \frac{10}{\sqrt{(9{,}99^2 - 10^2) + (\frac{2}{6\pi} 9{,}99)^2}} = 9{,}27 cm$$

38.

39.

$m = 10g$

$k = 36 N m^{-1}$

$F = cv$

$c = 0{,}18 kg s^{-1}$

a) $Q = \omega\tau$

$K = \omega^2 m$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{36}{0{,}01}} = 60 \, rad/s$

$\tau = \frac{1}{2\gamma} = \frac{m}{\lambda} = \frac{0{,}01}{0{,}18} = \frac{1}{18}$

$2\gamma = \frac{\lambda}{m} \Rightarrow \gamma = \frac{\lambda}{2m} = 9$

$Q = \omega\tau = 60 \cdot \frac{1}{18} = 3{,}33$

b) $f = 12 Hz \leftarrow F = F_0 \cos \omega_f t$

$A = 4{,}4 cm$

$m = 10 g$

$\left.\begin{array}{l} T = \frac{2\pi}{\omega_f} \\ T = \frac{1}{f} \end{array}\right\} \frac{2\pi}{\omega_f} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{\omega_f}{2\pi}$

$\omega_f = f 2\pi = 12 \cdot 2\pi = 24\pi \, rad/s$

$x = A \operatorname{sen}(\omega_f t - \alpha)$

$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}} \Rightarrow 0{,}044 = \frac{\frac{F_0}{0{,}01}}{2487{,}7}$

$F_0 = 0{,}044 \cdot 24{,}88$

$F_0 = 1{,}09 \, N$

c) $0{,}1 = \frac{109}{\sqrt{(f^2 4\pi^2 - 60^2)^2 + (2 \cdot 9 \cdot f 2\pi)^2}}$

$\omega_f = f 2\pi$

$\sqrt{(f^2 4\pi^2 - 60^2)^2 + (36\pi f)^2} = 1090$

$(f^2 4\pi^2 - 3600)^2 + 1296\pi^2 f^2 = 1188100$

$16\pi^4 f^4 + 1296000 - 28800\pi^2 f^2 + 1296\pi^2 f^2 = 1188100$

$16\pi^4 f^4 - 27504\pi^2 f^2 + 107900 = 0$

$4\pi^4 d^4 - 6876\pi^2 d^2 + 26975 = 0$

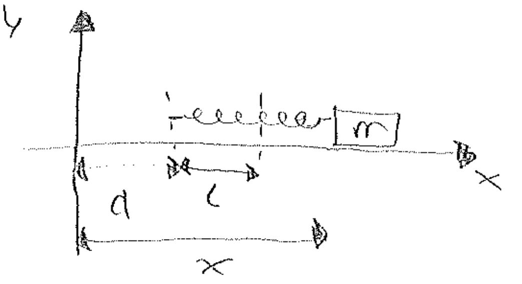
$d^2 = t$

$$t = \frac{67863{,}4 \pm \sqrt{4605441041 - 420411763{,}7}}{779{,}3} =$$

$$= \frac{67863{,}4 \pm 67552}{779{,}3} = \begin{cases} 173{,}8 \\ 0{,}4 \end{cases}$$

$$d = \sqrt{t} = \begin{cases} 13{,}18 \\ 0{,}63 \end{cases}$$

40.



d: asenut

a) $m a = \Sigma F$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-(l+d))$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k(x-(l+d)) = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x-(l+d)) = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k(x-l)}{m} = \frac{k}{m}d$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x-l) = \frac{k}{m}\,\text{asenut}$$

$z = x - l$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\,\text{asenut}$$

b) Oscilador forzado:

$$z(t) = A\,sen(\omega t - \alpha)$$

$$\dot{z}(t) = \omega A \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 A\,sen(\omega t - \alpha)$$

$$-\omega^2 A\,sen(\omega t - \alpha) + \frac{k}{m} A\,sen(\omega t - \alpha) = \frac{k}{m}\, a\,sen\,\omega t$$

sena cosb − cosa senb

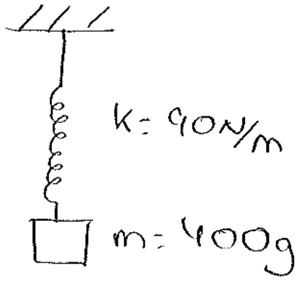
$$-\omega^2 A(sen\,\omega t\cos\alpha - \cos\omega t\,sen\alpha) + \frac{k}{m} A(sen\,\omega t\cos\alpha - \cos\omega t\,sen\alpha) = \frac{k}{m}\, a\,sen\,\omega t$$

$$\left(-\omega^2 A\cos\alpha + \frac{k}{m} A\cos\alpha\right) sen\,\omega t + \left(-\omega^2 A\,sen\alpha - \frac{k}{m} A\,sen\alpha\right)\cos\omega t = \frac{k}{m}\, a\,sen\,\omega t$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) A\cos\alpha = \frac{k}{m}\, a \\ \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) A\,sen\alpha = 0 \end{array}\right\} \quad A = \frac{\frac{k}{m}\, a}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \frac{ka}{K - m\omega^2}, \quad \alpha = 0, \pi. \quad z(t) = \frac{ka}{K - m\omega^2}\, sen\,\omega t$$

$$x = l + \frac{ka}{K - m\omega^2}\, sen\,\omega t$$

2)



a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{90}{0,4}} = 15 \ rad/s$

b) $3T \rightarrow A = 0,4 \cdot A$

$0,4A = A \cdot e^{-\gamma t} \Rightarrow 0,4 = e^{-\gamma \frac{6\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}}$

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

$\ln 0,4 = -\gamma \frac{6\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

$\ln(0,4)^2 = \frac{\gamma^2 36\pi^2}{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\omega_0^2 - \gamma^2 - \frac{\gamma^2 36\pi^2}{\ln(0,4)^2} = 0$

$-\gamma^2\left(\frac{36\pi^2}{\ln(0,4)^2} + 1\right) = -\omega_0^2$

$\gamma^2 = \frac{\omega_0^2}{\frac{36\pi^2}{\ln(0,4)^2} + 1} = 0,53$

$\gamma = \sqrt{0,53} = 0,73$

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{15^2 - 0,73^2} = 14,98 \ rad/s$

c) $F = F_0 \cdot \cos \Omega t$

$x = A \cos(\Omega t - \theta) = 2,5 \cos(\Omega t - 84°) \ cm$

$tg\,\theta = \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\Omega} \Rightarrow tg\,84 = \frac{\Omega^2 - 15^2}{2 \cdot 0,73 \cdot \Omega}$

$\Omega^2 - 13,89\,\Omega - 225 = 0$

$\Omega = \frac{13,89 \pm \sqrt{192,93 + 900}}{2} = \frac{13,89 \pm 33,06}{2} =$

$= \begin{cases} 23,48° \\ -9,585° = 350,48° \end{cases}$

JUNIO 2009 M.A.S.

2.

$$x_1 = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\ \text{cm} = A\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_2 = B\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\ \text{cm}$$

a) El desfase será

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-5\pi}{12}$$

b) Como hemos visto en clase de la superposición de dos M.A.S obtenemos la siguiente expresión:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$A = \sqrt{3 + 2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2{,}5\ \text{cm}$$

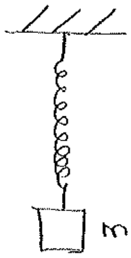
$$tg\,\alpha = \frac{A_1\text{sen}\,\alpha_1 + A_2\text{sen}\,\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} = \frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\frac{2\pi}{3} + \sqrt{2}\,\text{sen}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}} = 10 + 5\sqrt{3}$$

$$\alpha = 1{,}52\ \text{rad} \qquad x = 2.5\,\text{sen}(\omega t + 1{,}52)$$

c)

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} - 1{,}52 = 0{,}57\ \text{rad}.$$

2.



m: 200g

$f = 2Hz$
$\tau = 10s$
$A = 1mm$

a) $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \ rad/s$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 m = 16\pi^2 \cdot 0{,}2 = 31{,}6 \ \frac{N}{m}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\gamma = \frac{\lambda}{m} \\ \tau = \frac{1}{2\gamma} \end{array}\right\} \frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{m}{\tau} = \frac{0{,}2}{10} = 0{,}02 \ Kg/s$$

b) Para que sea máxima la amplitud vimos en clase la siguiente expresión:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{16\pi^2 - 0{,}01} = 12{,}57 \ rad/s$$

$$2\gamma = \frac{1}{\tau} = 0{,}1$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega'^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega')^2}} = \frac{F_0}{0{,}2\sqrt{8{,}32\cdot 10^{-3} + 1{,}58}} = \frac{F_0}{0{,}25}$$

Departamento de Física Aplicada a las Tecnologías de la Información

POLITÉCNICA

ETSIT UPM

FÍSICA GENERAL 2 (curso 2010-2011, 1er parcial)

25 de marzo de 2011

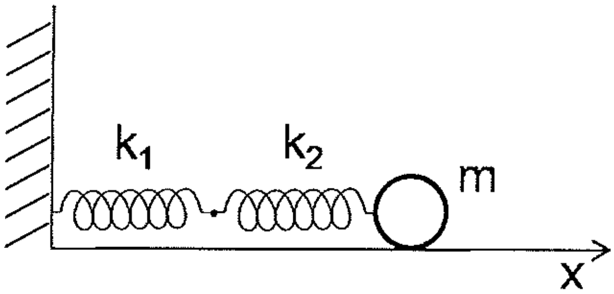
1. La figura representa dos resortes elásticos de constantes k_1=6 N/m y k_2=2 N/m unidos a una esfera de masa m=0.5Kg. Se pide:

   a. Deducir la constante equivalente del sistema

   b. Escribir la ecuación diferencial del movimiento de la masa m cuando oscila respecto a su posición de equilibrio y el valor de la pulsación ω_0

   Si la amplitud del movimiento es A=4m y la elongación inicial x_0=2m obtener la velocidad inicial v_0 y la fase inicial ψ_0.

   c. Determinar la energía total y la elongación cuando la energía potencial es igual a la energía cinética.



2. Un péndulo simple tiene un periodo natural de oscilación de 0.5 seg. y una amplitud de 0.1 rad. Después de 10 oscilaciones completas su amplitud se ha reducido a un 2% de la inicial. Se pide:

   a. Calcular la constante de amortiguamiento γ y el pseudoperiodo (periodo de la oscilación amortiguada).

   b. Suponiendo que el movimiento se inicia con la máxima amplitud, escribir su expresión analítica

   c. Calcular el factor Q.

   d. Si la masa del péndulo es de 1kg, calcular la potencia que habría que aplicar al oscilador para mantener constante la amplitud de las oscilaciones.

(CONTINÚA EN LA PÁGINA SIGUIENTE)

3. Dos osciladores armónicos se desplazan de acuerdo a las leyes de movimiento $x_1 = A\sin(t)$ y $x_2 = A\,cos(2t)$ con t medido en segundos. ¿cuánto tiempo mínimo ha de transcurrir desde el instante inicial (*t=0*) hasta que ambos se encuentren en fase?

4. Dos péndulos tienen longitud 1m. El primero de ellos tiene una masa puntual de 1kg y en su situación inicial forma un ángulo de 3° con la vertical. El segundo tiene una masa puntual de 1gr. y en su situación inicial forma un ángulo de 4.5° con la vertical. Si se sueltan a la vez, ¿cuál llega antes a la vertical?. Justificar la respuesta.
nota: no hay rozamiento.

5. Un cuerpo de masa 1kg se mueve suspendido de un muelle sin masa cuya constante elástica es de k=20 N/m. En la dirección del movimiento, se aplica una fuerza externa sinusoidal de frecuencia angular ω cuyo valor máximo es de 2 Newton. Suponiendo que no hay amortiguamiento:
   a. Indicar qué tipo de movimiento realizaría el cuerpo.
   b. ¿qué sucede si ω^2=20 (con [ω]=rad/s)?. Justificar cualitativamente respuesta

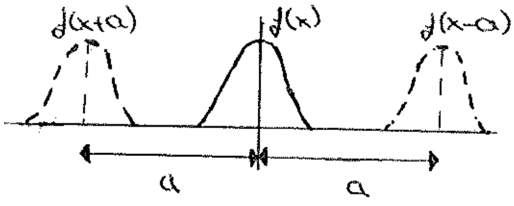
nota: Los problemas 1 y 2 valdrán, cada uno, 3.5 puntos. Las cuestiones 3, 4 y 5 valdrán 1 punto cada una.

FISICA II

TEMA 3. ONDAS EN MEDIOS MATERIALES

1. Descripción matemática.

Una onda es una propagación de una variación de magnitud física.



Consideramos la función $f(x)$. Si reemplazamos x por $x-a$ obtenemos la función $f(x-a)$. Evidentemente la curva no ha cambiado. Suponiendo que a es positiva, vemos que la curva ha sido desplazada hacia la derecha, analogamente tenemos que $f(x+a)$ corresponde a un desplazamiento hacia la izquierda.

Si $a = vt$, obtenemos una curva "viajera"; esto es $f(x-vt)$ representa una curva que se mueve hacia la derecha con velocidad v, llamada velocidad de fase. Del mismo modo $f(x+vt)$ representa una curva con movimiento hacia la izquierda.

Concluimos entonces que una expresión matemática de la forma

$$f(x \pm vt)$$

es adecuada para describir una situación física que "viaja" o "se propaga" sin deformación en la dirección del eje X.

2. Ecuación de ondas.

La ecuación que encontraremos muchas veces y que describe un movimiento ondulatorio que se propaga a una velocidad definida v y sin distorsión según las direcciones $+X$ ó $-X$ es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

llamada ecuación diferencial del movimiento ondulatorio.

La solución general de la anterior ecuación es

$$f_1(x-vt) + f_2(x+vt)$$

Para probar que esta ecuación es una solución de la anterior debemos aplicar la regla de derivación en cadena a $f(x \pm vt)$. En este caso hacemos $u = x \pm vt$, de modo que tenemos $f(u)$, y notando que hay dos variables x y t debemos usar derivadas parciales, $\partial u/\partial x = 1$, $\partial u/\partial t = \pm v$. Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{df}{du}$$

Tomando ahora las derivadas segundas, tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 f}{du^2}$$

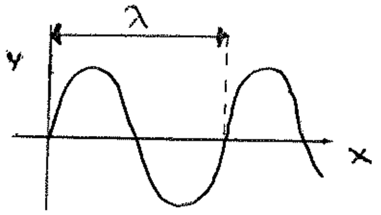
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{d^2 f}{du^2}(\pm v) = v^2 \frac{d^2 f}{du^2}$$

Combinando ambos resultados para eliminar $d^2 f/du^2$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot v^2$$

lo cual prueba que $f(x \pm vt)$ es una solución de la ecuación de onda.

- Onda armónica:



Un caso especialmente interesante es aquel en el cual $f(x \pm vt)$ es una función sinusoidal o armónica tal como

$$y = A \operatorname{sen} k(x - vt)$$

La cantidad k tiene un significado especial. Reemplazando el valor de x por $x + 2\pi/k$, obtenemos para $f(x \pm vt)$ el mismo valor, esto es,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) = A \operatorname{sen} k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) =$$
$$= A \operatorname{sen}[k(x - vt) + 2\pi] = f(x - vt)$$

Entonces

$$\lambda = 2\pi/k$$

es el "periodo espacial" de la curva; esto es, la curva se repite a sí misma cada longitud λ. La cantidad λ se llama longitud de onda. Entonces $k = 2\pi/\lambda$ representa el número de longitudes de onda en la distancia 2π y se denomina número de onda. Por consiguiente:

$$y = A \operatorname{sen} k(x - vt) = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

representa una onda sinusoidal o armónica de longitud de onda λ propagándose hacia la derecha según el eje x con velocidad v. La ecuación puede escribirse también en la forma

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

donde $\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$ da la frecuencia angular de la onda.

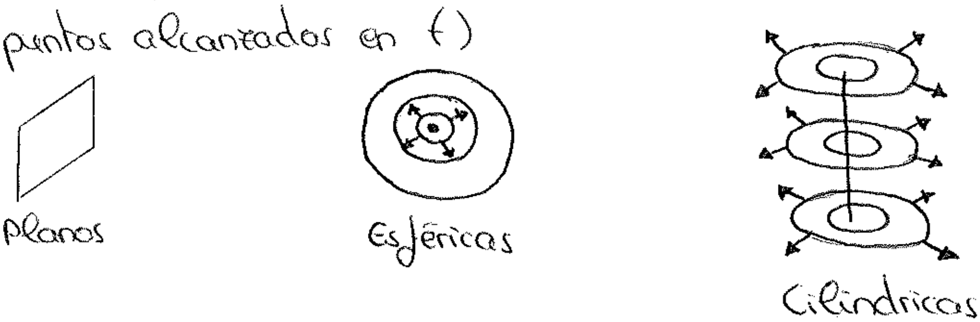
Teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi f$, podemos obtener también la siguiente relación

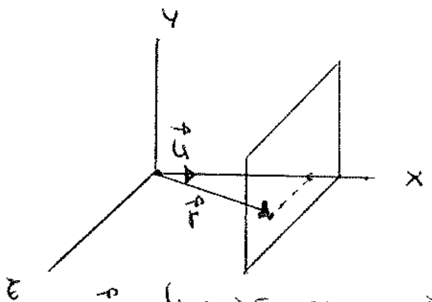
$$\lambda f = v$$

La ecuación de una onda armónica será

$$y = A\,sen(Kx - \omega t) = y(x,t)$$

- Dentro de las ondas podemos encontrar dos tipos:
  - Transversales 
  - Longitudinales 
- También podemos hacer una definición sobre el frente de onda. (puntos alcanzados en t)





$\vec{u}$: dirección propagación

$$f(x - vt) = f(\vec{u}\vec{r} - vt)$$

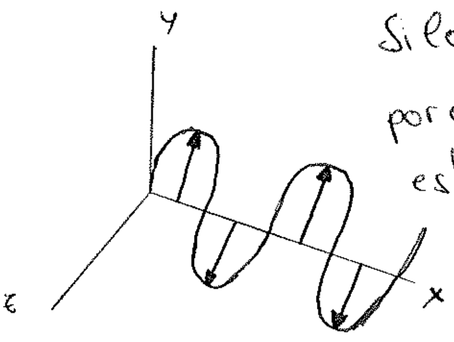
$$e = e_0\, sen\, k(\vec{u}\vec{r} - vt) \leftarrow \text{armónica}$$

$$e = e_0 sen(\vec{K}\vec{r} - \omega t)$$

$\vec{K}$: vector de onda

$$\vec{K} = k\vec{u}$$

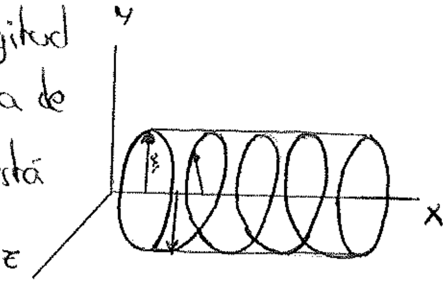
- Polarización:
  - Polarización lineal:



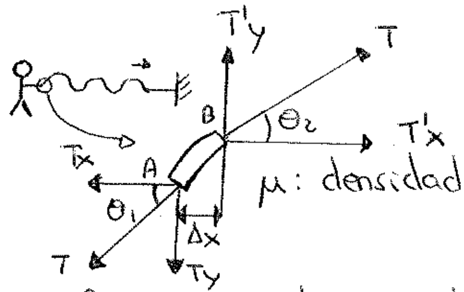
Si los desplazamientos son paralelos, por ejemplo, al eje Y, la cuerda estará siempre en el plano XY, y decimos que el movimiento ondulatorio está polarizado linealmente

* Polarización circular:

Si ξ tiene una longitud constante pero cambia de dirección, la onda está circularmente polarizada.



2.1. Cuerda.



μ: densidad lineal cuerda.

Como problema siguiente consideramos el caso de una cuerda sometida a una tensión T. En condiciones de equilibrio la cuerda está en línea recta. Desplacemos la cuerda perpendicularmente a su longitud, en una pequeña cantidad. Entonces una pequeña porción AB de la cuerda de longitud Δx. En cada extremo actua una fuerza tangencial T; en el extremo B esta fuerza es producida por la tensión de la cuerda a la derecha y en el extremo A por la tensión de la cuerda a la izquierda. Debido a la curvatura de la cuerda, estas dos fuerzas no son directamente opuestas. La componente vertical de cada fuerza es $T'_y = T\operatorname{sen}\theta_2 = -T\operatorname{sen}\theta_1$. La fuerza resultante sobre la porción AB de la cuerda es

$$F_y = T\operatorname{sen}\theta_2 - T\operatorname{sen}\theta_1$$

Si la curvatura de la cuerda no es muy grande, los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños y sus senos se pueden reemplazar por sus tangentes. De modo que la fuerza hacia arriba es

$$F_y = T(\tg\theta_2 - \tg\theta_1) = T\left(\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}\right)$$

Esta fuerza debe ser igual a la masa de la porción de cuerda AB multiplicada por su aceleración hacia arriba $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

$$\left.\begin{array}{l} F_y = T\left(\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}\right) \\ \\ ma_y = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{array}\right\} F_y = ma_y \Rightarrow T\left(\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}\right) = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}}{\Delta x}\right) = \frac{1}{\frac{T}{\mu}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{T}{\mu}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \leftarrow \text{Ec. de ondas}$$

Una vez obtenemos la ecuación de ondas podemos decir que una perturbación transversal en una cuerda se propaga en una cuerda con una velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

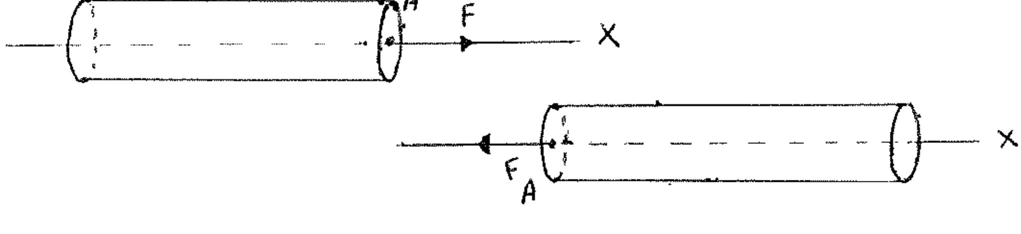
La fuerza resultante paralela al eje X es

$$F_x = T\cos\theta_2 - T\cos\theta_1 = T(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

Pero cuando el ángulo es muy pequeño, el coseno es, con mucha aproximación, igual a uno. Por consiguiente, hasta aproximaciones de primer orden, $\cos\theta_2 \approx \cos\theta_1$ y $F_x = 0$, de modo que la fuerza neta paralela al eje X es cero.

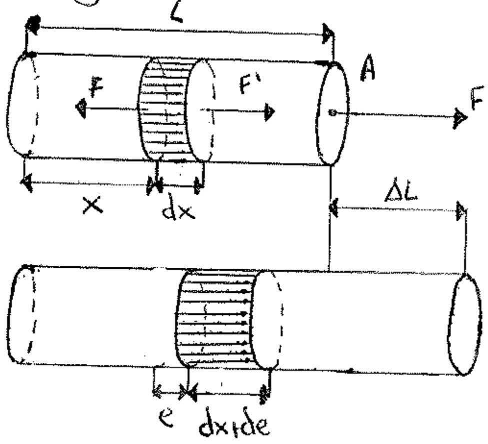
2.2. Barra.

Consideremos una barra de sección transversal uniforme A, sujeta a una fuerza según su eje indicada por F.



La fuerza F no es necesariamente la misma en todas las secciones y puede variar a lo largo del eje de la barra. Sobre cada sección transversal actúan dos fuerzas iguales y opuestas; una es la fuerza que ejerce la porción izquierda sobre la derecha y la otra es la que ejerce la derecha sobre la izquierda.
La presión o tensión sobre una sección de la barra se define como $P = \frac{F}{A}$ que se expresa en $N m^{-2}$.

Bajo la acción de tales fuerzas cada sección de la barra experimenta un desplazamiento 'e' paralelo al eje. Si este desplazamiento es el mismo en todos los puntos de la barra, no se produce deformación, sino un desplazamiento rígido de la barra según su eje. Nos interesa este segundo caso, por eso consideramos la siguiente barra:



Podemos definir la ley de Hooke como: $P = Y\frac{\Delta L}{L}$ donde Y es el módulo de elasticidad de Young. Igualando esta relación con la anterior vista, obtenemos $\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L}$, y de aquí podemos obtener la fuerza como $F = AY\frac{\Delta L}{L}$.
La deformación unitaria de la barra, es decir, la deformación por unidad de longitud a lo largo del eje de la barra será $\frac{\Delta L}{L}$, pero también se puede expresar como $\frac{de}{dx}$ y por tanto la fuerza sería igual a $F = AY\frac{de}{dx}$.

Cuando la barra no está en equilibrio, la fuerza no es la misma en todas sus secciones, por lo que una de ellas de espesor dx estará sometida a una fuerza resultante distinta de cero. Por ejemplo, en la anterior figura, la cara derecha de la sección de espesor dx está sometida a la fuerza F' hacia la derecha debida a la tensión de la parte izquierda, mientras la parte izquierda está sometida a la fuerza F. La fuerza neta sobre la sección es $F' - F = dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dx$ hacia la derecha. Si ρ es la densidad del material de la barra, la masa de la sección es de $dm = \rho A dx$ donde $A \cdot dx$ es el volumen de la sección. La aceleración de esta masa es $\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$. Por lo tanto, aplicando la relación dinámica $F = m \cdot a$, podemos escribir la ecuación de movimiento de la sección en la forma $\frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho A dx) \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$ o $\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$

En este problema tenemos dos campos: uno es el desplazamiento e y el otro es la fuerza F. Estos dos campos están relacionados por las ecuaciones.

(1) $F = YA \frac{\partial e}{\partial x}$ (2) $\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$

Tomando la derivada de la ecuación (1) respecto a x tenemos $\frac{\partial F}{\partial x} = YA \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$

Sustituyendo este resultado en la ecuacion (2) y cancelando A tenemos

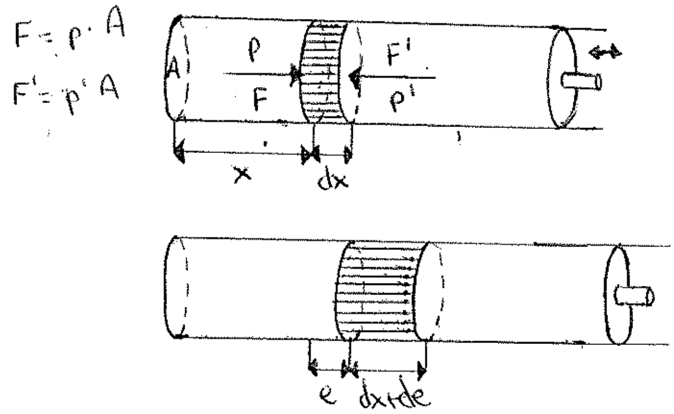
$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \leftarrow \text{Ecuación de ondas}$$

Por lo tanto podemos concluir que el campo de deformación 'e' se propaga a lo largo de la barra con una velocidad

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\varphi}}$$

2.3. Gas.

Hay una diferencia importante entre las ondas elásticas en un gas y las ondas elásticas en una barra. Los gases son muy comprensibles y cuando se establecen fluctuaciones de presión en un gas la densidad del mismo experimenta las mismas fluctuaciones que la presión.



Sean p_0 y ρ_0 la presión y la densidad del gas en condiciones de equilibrio. En estas condiciones, p_0 y ρ_0 conservan el mismo valor en todo el volumen del gas, esto es, son independientes de x. Si la presión del gas se modifica, un volumen elemental tal como Adx se pone en movimiento debido a una fuerza neta no nula. Hasta aquí, todo parece idéntico al caso de la barra. Sin embargo, debido al cambio de volumen, la densidad cambia porque el gas es más comprensible. La masa del volumen elemental en equilibrio es $\rho_0 A dx$ y la masa del volumen perturbado es $\rho A(dx + de)$, donde ρ es la densidad del gas perturbado. El principio de la conservación de la masa requiere que dichas masas sean iguales, es decir

$$\rho A(dx + de) = \rho_0 A dx \quad ó \quad \rho\left(1 + \frac{\partial e}{dx}\right) = \rho_0$$

despejando ρ, obtenemos

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \partial e/\partial x}$$

Como en general $\partial e/dx$ es pequeño, podemos reemplazar $(1 + \partial e/dx)^{-1}$ por $1 - de/dx$, así resulta que

$$\rho = \rho_0(1 - \partial e/dx) \quad ó \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0(\partial e/dx)$$

La presión p está relacionada con la densidad ρ por la ecuación de estado, que se puede escribir $p = f(\rho)$. Aplicando el desarrollo de Taylor a esta función, se tiene

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 + \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2\left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_0 + \ldots$$

Para variaciones de densidad relativamente pequeñas, podemos conservar únicamente los dos primeros términos y escribir

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$$

La cantidad

$$K = \rho_0\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$$

recibe el nombre de módulo de compresibilidad de volumen. Se expresa en $N m^{-2}$, las mismas unidades que usamos para la presión. Entonces podemos escribir

$$p = p_0 + K\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)$$

Esta expresión corresponde a la ley de Hooke para los fluidos. Usando la ecuación $\rho - \rho_0 = -\rho_0\left(\frac{\partial e}{dx}\right)$ para eliminar

$\varphi - \varphi_0$, tenemos

$$p = p_0 - k\frac{de}{dx}$$

Esta expresión relaciona la presión en cualquier punto de la columna de gas con la deformación en el mismo punto.
Necesitamos ahora la ecuación de movimiento del volumen elemental; la masa del mismo es $\varphi_0 A dx$ y su aceleración es $\partial^2 e/\partial t^2$. El gas a la izquierda de nuestro elemento de volumen lo empuja hacia la derecha con una fuerza pA y el gas que está a la derecha lo empuja hacia la izquierda con una fuerza $p'A$.
Por lo tanto, la fuerza resultante en la dirección $+X$ es $(p-p')A = -A\,dp$, ya que $dp = p'-p$. Entonces la ecuación de movimiento es

$$-A\,dp = (\varphi_0 A dx)\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad \text{ó} \quad \frac{dp}{dx} = -\varphi_0\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$$

Podemos establecer las siguientes relaciones:

- Presión - Densidad:

$$p = p(\varphi) \simeq p(\varphi_0) + p'(\varphi_0)(\varphi-\varphi_0) + \dots$$

$$k = \varphi_0\, p'(\varphi_0)$$

$$p \approx \underset{\substack{\uparrow \\ p(\varphi_0)}}{p_0} + \frac{ke}{\varphi_0}(\varphi-\varphi_0)$$

- Densidad - Desplazamiento:

$$\left.\begin{aligned} dm &= \varphi_0 A dx \\ dm &= \varphi A(dx+de) \end{aligned}\right\} \varphi_0 A dx = \varphi A(dx+de)$$

$$\varphi = \frac{\varphi_0\, dx}{dx+de} = \frac{\varphi_0}{1+de/dx} \Rightarrow \varphi = \varphi_0\left(1 - de/dx\right)$$

Si $\frac{de}{dx} \downarrow\downarrow \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1+x} \simeq f(0) + f'(0)x = 1 + \left.\frac{-1}{(1+x)^2}\right|_{x=0} \cdot x = 1-x$

• Presión - Desplazamiento:

$$\left.\begin{aligned} p &\simeq p_0 + \frac{k}{\varphi_0}(\varphi - \varphi_0) \\ \varphi &\simeq \varphi_0\left(1 - \frac{\partial e}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow p \simeq p_0 + \frac{k}{\varphi_0}\left(-\varphi_0 \frac{\partial e}{\partial x}\right) \Rightarrow p \simeq p_0 - k\frac{\partial e}{\partial x} \\ &\rightarrow \varphi - \varphi_0 = -\varphi_0 \frac{\partial e}{\partial x} \end{aligned}$$

$$p \simeq p_0 - k\frac{\partial e}{\partial x}$$

Tambien en este problema tenemos dos campos, el desplazamiento e y el campo de presión p. Las expresiones $p = p_0 - k\frac{\partial e}{\partial x}$ $\quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\varphi_0 \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$ son las ecuaciones que relacionan ambos campos. Estas ecuaciones se convinan derivando la primera con respecto a x, recordando que p_0 es constante en todo el gas, se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -k\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$$

la cual, comparada con la otra ecuación nos indica que

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \frac{k}{\varphi_0}\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \leftarrow \text{Ec. ondas desplazamiento}$$

Concluimos que el desplazamiento producido por la perturbación de la presión de un gas se propaga con la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{k}{\varphi_0}} \leftarrow \text{Velocidad del sonido}$$

La presion también obedece a la ecuación de ondas del desplazamiento, lo cual podemos verificar combinando las ecuaciones

$$p = p_0 - k\frac{\partial e}{\partial x} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\varphi_0\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}.$$

Dicha ecuación es

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{k}{\varphi_0}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \leftarrow \text{Ec. ondas (presion)}$$

Esta es la razón por la cual a las ondas elásticas en un gas se les llama ondas de presión.
Análogamente también se puede verificar combinando las ecuaciones

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \left(\partial \xi / \partial x \right) \; ; \; \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

que la densidad del gas obedece a una ecuación de la misma forma, o sea

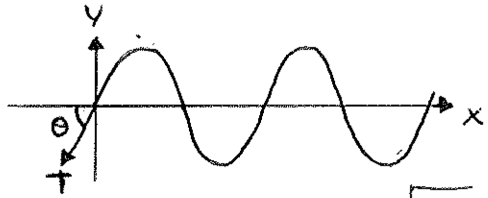
$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \leftarrow \text{Ec. ondas (densidad)}$$

Por consiguiente, al referirnos a un gas podemos hablar de una onda de desplazamiento, una onda de presión o una onda de densidad.
El movimiento ondulatorio en los gases es un proceso adiabático, término que se usa esencialmente en el sentido de que no hay intercambio de energía calórica entre los elementos de volumen del gas. En condiciones adiabáticas $p = C\rho^{\gamma}$, donde γ es una cantidad característica de cada gas. Para muchos gases diatómicos, su valor es aproximadamente 1,4. Entonces $dp/d\rho = \gamma C \rho^{\gamma-1}$, y $K = \rho_0 (dp/d\rho)_0 = \gamma C \rho_0^{\gamma} = \gamma p_0$. Entonces, quitando el subíndice 0 y sustituyendo en la ecuación $v = \sqrt{K/\rho_0}$, encontramos que la velocidad del sonido en un gas es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

3. Potencia y Energía.

- Cuerda:



Si $\theta \downarrow\downarrow \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \simeq \operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$ $\qquad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{F_y dy}{dt} = F_y V_y = -T \operatorname{sen}\theta \frac{\partial y}{dt} \simeq -T \frac{\partial y}{dx}\frac{dy}{\partial t} \;*$$

Si y es armónica $\rightarrow y = y_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$

$$* \; P = -T k y_0 \cos^2(kx - \omega t)(\omega) y_0 = \mu v^2 \underset{v}{\omega} \cos^2(kx - \omega t)\, y_0^2 =$$

$$= \mu v y_0^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t) \leftarrow \text{Potencia transmitida}$$

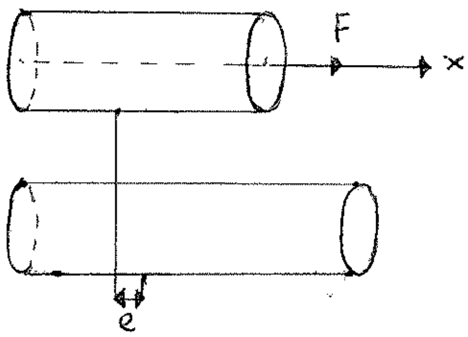
$$P_{media} = \bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt = \frac{1}{T}\mu v y_0^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2(kx - \omega t)\,dt = \frac{1}{2}\mu v y_0^2 \omega^2$$

Energía media transmitida:

$$\Delta E_m = P_m \Delta t = \frac{1}{2}\mu v y_0^2 \omega^2 \Delta t = \frac{1}{2}\mu y_0^2 \omega^2 \Delta x$$

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

- Barra:



Onda armónica $\quad e = e_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)$

$$P = F_x V_x = Y A \frac{de}{dx}\frac{de}{dt} = Y A k e_0 \cos^2(kx + \omega t)\, \omega e_0 = Y A k e_0^2 \cos^2(kx + \omega t)\omega =$$

$$= \rho_0 v^2 A \underset{v}{\omega^2} e_0^2 \cos^2(kx + \omega t) = \rho_0 v A \omega^2 e_0^2 \cos^2(kx + \omega t)$$

Potencia instantanea $\qquad$ Módulo de Young

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}} \Rightarrow Y = \rho_0 v^2$$

$$P_{media} = \bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt = \ldots = \frac{1}{2}\rho_0 v A \omega^2 e_0^2$$

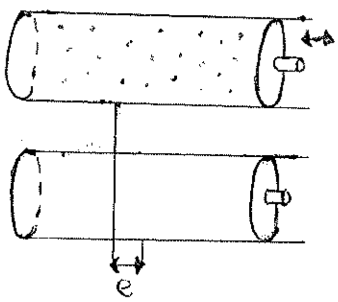
Energía transmitida:

$$\Delta E_m = \bar{P}\cdot\Delta t = \frac{1}{2}\rho_0 \underbrace{v\Delta t A}\omega^2 e_0^2 = \frac{1}{2}\rho_0 \Delta V \omega^2 e_0^2$$

$\Delta V \rightarrow$ Volumen abarcado por la onda

$$\frac{\Delta E_m}{\Delta V} = E_v = \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 e_0^2 \leftarrow$$ Energía media transmitida por unidad de volumen

- Gas:



$e = e_0 \operatorname{sen}(kx+\omega t)$

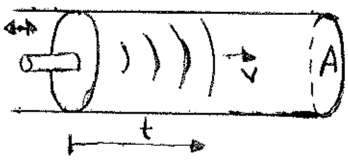
$P = F\cdot v = \ldots = \rho_0 v A \omega^2 e_0^2 \cos^2(kx+\omega t)$

↑ Potencia instantanea

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

$$\delta = -k\frac{de}{dx}$$

8.1. Intensidad de una onda.



El promedio de flujo de energía por unidad de área y de tiempo, expresado en $W\,m^{-2}$, es

$$I = \frac{1}{A}\overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)}\ (\text{media}) = \frac{\bar{P}}{A}$$

También podemos definir la intensidad instantanea como

$$I = \frac{P}{A}$$

Podemos establecer la siguiente relación entre intensidad y energía

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\Delta E_m}{\Delta t\cdot A} = \frac{\Delta E_m\cdot v}{v\cdot\Delta t\cdot A} = \frac{\Delta E_m}{\Delta V}v$$

$$I = v\,E_v$$

donde E_v es la energía por unidad de volumen

Ejemplo:

¿ $I_{sonora} \rightarrow I(p_A)$?

$e = e_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$

$p = p_0 - k_e \dfrac{de}{dx}$

Onda de presión

$dp = p - p_0 = -k_e \dfrac{de}{dx} = -\underbrace{k_e \cdot k e_0}_{p_A\text{ (amplitud presión)}} \cos(kx - \omega t)$ $\rightarrow e_0 = \dfrac{p_A}{k_e k}$

$I = \dfrac{P_m}{A}$; $I = v E_v = v \dfrac{1}{2} \rho_0 \omega^2 e_0^2$

$$I = v\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 e_0^2 = v\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \frac{p_A^2}{k_e^2 k^2} = v\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 \frac{p_A^2}{(\rho_0 v^2)^2\left(\frac{\omega}{v}\right)^2} = \frac{p_A^2}{2\rho_0 v}$$

- Nivel de intensidad:

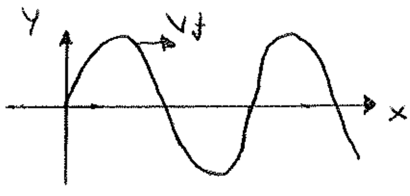
$$N.I = B = 10 \log \frac{I}{I_0} \ (dB)$$

donde I_0 es una intensidad de referencia que para el caso del sonido en el aire el nivel de referencia, tomado arbitrariamente, es $10^{-12}\,Wm^{-2}$.

$I = 10^{-12}\,Wm^{-2} \rightarrow B = 10 \log 1 = 0\,dB$ (umbral de audición)

$I = 1\,W\,m^{-2} \rightarrow B = 10 \log 10^{12} = 120\,dB$ (umbral de dolor)

4. Velocidad de grupo.



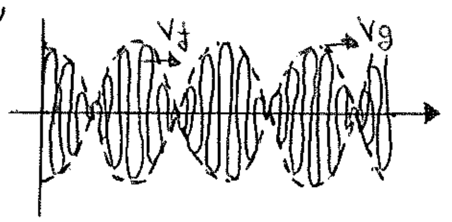
La velocidad $v_f = \omega/k$, expresada por la ecuación $\omega = v_f k$ para una onda armónica de frecuencia angular ω y longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, se llama velocidad de fase

Ahora pasamos a analizar la superposición de ondas con frecuencias parecidas:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= e_0 \operatorname{sen}(kx-\omega t) \\ e_2 &= e_0 \operatorname{sen}(k'x-\omega' t) \end{aligned}\right\} e = e_1+e_2 = e_0(\operatorname{sen}(kx-\omega t)+\operatorname{sen}(k'x-\omega' t))$$

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2}$$

$$e = 2e_0 \cos\frac{1}{2}\left[(k-k')x-(\omega-\omega')t\right] \operatorname{sen}\frac{1}{2}\left[(k+k')x-(\omega+\omega')t\right]$$



V_g: Velocidad de grupo.
V_f: Velocidad de fase.

$$V_g = \frac{\omega-\omega'}{k-k'} = \frac{d\omega}{dk} \underset{\omega=kv}{\uparrow} = v + k\frac{dv}{dk}$$

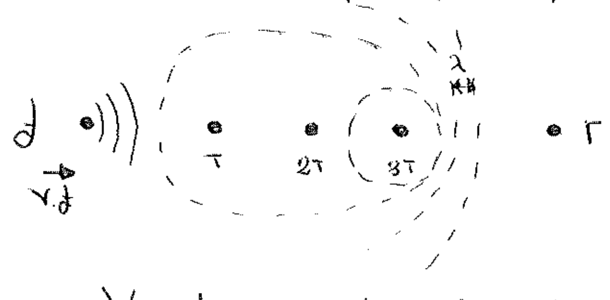
5. Efecto Doppler.

Cuando la fuente de ondas y el observador están en movimiento relativo con respecto al medio material en el cual la onda se propaga, la frecuencia de las ondas observadas es diferente de la frecuencia de las ondas emitidas por la fuente.

Estudiaremos varios casos del efecto Doppler:

- Se mueve el foco y el receptor permanece quieto:

$V_f \neq 0 \quad V_r = 0$



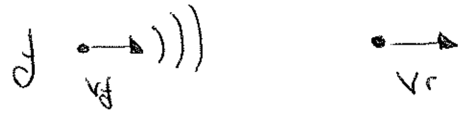
$$f_r = \frac{V}{\lambda_r} = \frac{V}{VT - V_f T} = \frac{V}{V-V_f}\underset{T=\frac{1}{f_f}}{f_f} \Rightarrow f_r = \frac{V}{V \pm V_f} f_f \quad \begin{cases} (-) \text{ se acerca} \\ (+) \text{ se aleja} \end{cases}$$

- El foco permanece quieto y el receptor se mueve:

$V_f = 0 \quad V_r > 0$

$$f_r = \frac{V \pm V_r}{\lambda_r} = \frac{V \pm V_r}{\frac{V}{f_f}} = \frac{V \pm V_r}{V} f_f \quad \begin{cases} (-) \text{ se alejan} \\ (+) \text{ se acercan} \end{cases}$$

- Tanto el foco como el receptor se mueven:



$$f_r = \frac{V \pm V_r}{\lambda_r} = \frac{V \pm V_r}{(V \pm V_f)T} = \frac{V \pm V_r}{V \pm V_f} f_f$$

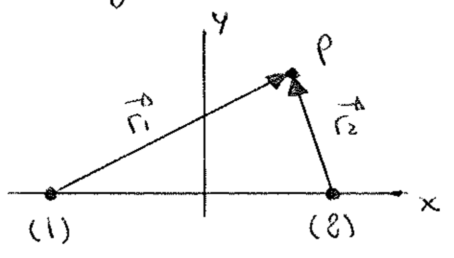
numerador: $\begin{cases} (+) \text{ se acercan} \\ (-) \text{ se alejan} \end{cases}$

denominador: $\begin{cases} (-) \text{ se acercan} \\ (+) \text{ se alejan} \end{cases}$

6. Interferencias entre focos.

Es la superposición de ondas de varios focos.

Suponemos dos focos síncronos y coherentes.

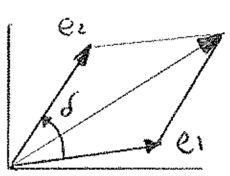


$$e_1 = e_{01} \, \text{sen}(\omega t - k r_1)$$

$$e_2 = e_{02} \, \text{sen}(\omega t - k r_2)$$

La superposición será la suma de las dos ondas:

$$e = e_1 + e_2 = e_{01} \, \text{sen}(\omega t - k r_1) + e_{02} \, \text{sen}(\omega t - k r_2)$$



$$e_0 = \sqrt{e_{01}^2 + e_{02}^2 + 2 e_{01} e_{02} \cos\delta}$$

$$\delta = (\omega t - k r_2) - (\omega t - k r_1) = k(r_1 - r_2) \text{ dif. fase}$$

$$\cos\delta = 1 \rightarrow k(r_1 - r_2) = 2n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2n\pi \Rightarrow$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

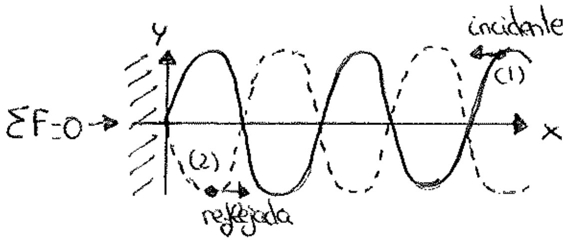
$\Rightarrow r_1 - r_2 = n\lambda$; $n = 0, 1, 2, \dots$ interferencia constructiva

$\cos\delta = -1 \rightarrow k(r_1 - r_2) = (2n+1)\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2n+1)\pi \Rightarrow$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\Rightarrow r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$; $n = 0, 1, 2, \dots$ interferencia destructiva

7. Ondas estacionarias.



$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y_{01}\,\mathrm{sen}(\omega t + kx) \\ y_2 = y_{02}\,\mathrm{sen}(\omega t - kx + \delta) \end{array}\right\}$$

Superposición $y = y_1 + y_2$:

$y(x=0) = 0 = y_{01}\,\mathrm{sen}\,\omega t + y_{02}\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) = y_{01}\,\mathrm{sen}\,\omega t + y_{02}\,\mathrm{sen}\,\omega t \cos\delta +$
$+ y_{02}\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\delta$

$$\left.\begin{array}{l} y_{01} + y_{02}\cos\delta = 0 \\ y_{02}\,\mathrm{sen}\,\delta = 0 \end{array}\right\} \delta = 0, \pi.$$

$\delta = 0 \rightarrow y_{01} + y_{02} = 0 \Rightarrow y_{02} = -y_{01}$

$\delta = \pi \rightarrow y_{01} - y_{02} = 0 \Rightarrow y_{02} = y_{01}$ $\quad \mathrm{sen}\,a - \mathrm{sen}\,b = 2\,\mathrm{sen}\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$

$y = y_1 + y_2 = y_{01}\,\mathrm{sen}(\omega t + kx) - y_{01}\,\mathrm{sen}(\omega t - kx) = y_{01}\,2\,\mathrm{sen}\,kx\cos\omega t$

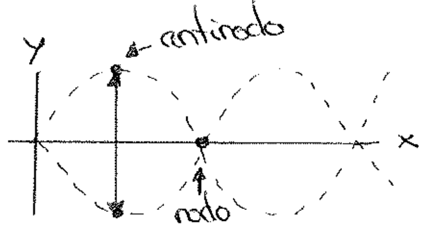
$y = 2y_{01}\,\mathrm{sen}\,kx\cos\omega t \leftarrow$ Onda estacionaria

Los nodos son aquellos puntos que hacen que el seno valga 0:

nodos $\rightarrow kx = n\pi$

Los antinodos son aquellos puntos que hacen que el seno valga 1 o -1:

antinodos $\rightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$



- Cuerda sujeta por los dos lados:

$y = 2y_{0i}\,\text{sen}\,kx\cos\omega t$

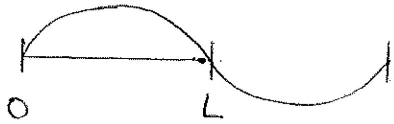
Cuando $x = L \to kx = n\pi$

$$kL = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}\ ;\ n=0,1,2,\dots$$

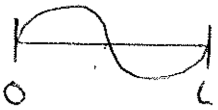
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2L}{n}} = \frac{n\,v}{2L}\ ;\ n=1,2,3,\dots$$

f posibles $\begin{cases} n=1 \to \text{modo fundamental} \\ n=2,3,\dots \to \text{modos armónicos} \end{cases}$

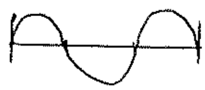
$n = 1 \to \lambda = 2L$



$n = 2 \to \lambda = L$



$n = 3 \to \lambda = \frac{2L}{3}$



Ondas estacionarias (expresión general):

$$y = f(x)\cos\omega t$$

f ha de cumplir alguna condición para que y sea onda

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ ;\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\omega t \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 f\cos\omega t \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\omega t \overset{*}{=} \frac{1}{v^2}(-\omega^2 f)\cos\omega t \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} f = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \rightarrow$$ Condición a cumplir para que y sea onda

$$\downarrow$$

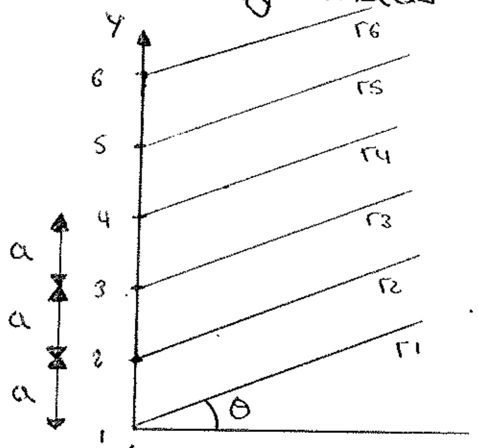
$$y = y_0 \operatorname{sen}(kx + \delta) = y_0(\operatorname{sen}kx \cos\delta + \cos kx \operatorname{sen}\delta) = A\operatorname{sen}kx + B\cos kx$$

$$A = y_0 \cos\delta$$

$$B = y_0 \operatorname{sen}\delta$$

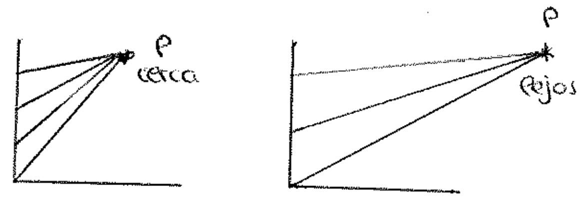
$$y = (A\operatorname{sen}kx + B\cos kx)\cos\omega t$$

8. Interferencias con N fuentes síncronas.



Fuentes síncronas y coherentes

* P (lejos) P muy alejado en comparación con a.



rayos paralelos

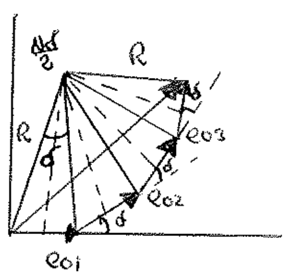
Buscamos $I = I(I_1)$

$$e_1 = e_{01}\operatorname{sen}(\omega t - kr_1)$$

$$e_2 = e_{02}\operatorname{sen}(\omega t - kr_2)$$

$$I = v E_v = v \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 e_0^2 \qquad I_1 = v\frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 e_{01}^2$$

Representación con fasores:



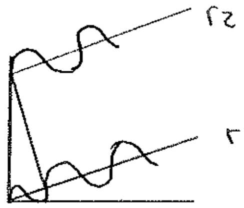
Entre e_2 y e_1 hay diferencia de fase

$$\delta = -kr_2 - (-kr_1) = k(r_1 - r_2) = ka\operatorname{sen}\theta = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta$$

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= 2Q \operatorname{sen}\frac{N\delta}{2} \\ e_{01} &= 2Q \operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \end{aligned}\right\} \frac{I}{I_1} = \frac{e_0^2}{e_{01}^2} = \left(\frac{2Q \operatorname{sen}\frac{N\delta}{2}}{2Q\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = I_1 \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{N}{2}\frac{2\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda}a\operatorname{sen}\theta}\right)^2 = I_1 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{N\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}}$$

Ahora estudiamos donde tienen lugar las intensidades máximas y mínimas:



Condición Imáx: $\delta = k(r_1 - r_2) = k a \operatorname{sen}\theta = n 2\pi \; ; n = 1, 2, \ldots$

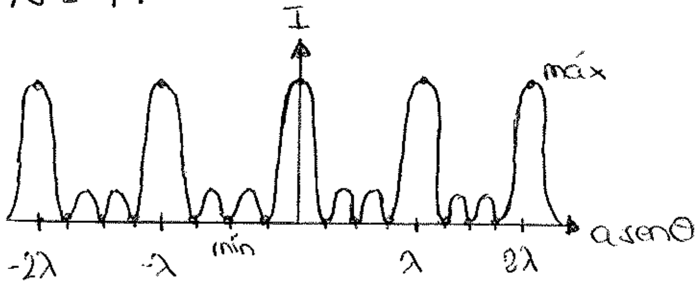
$\frac{2\pi}{\lambda} a\operatorname{sen}\theta = n2\pi \Rightarrow \boxed{a\operatorname{sen}\theta = n\lambda}$

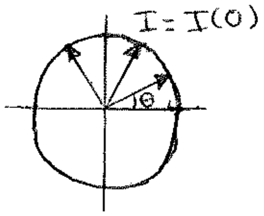
Condición Imín:

$N \frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = n'\pi \; ; \; n' = 1, 2, \ldots, N-1, N+1, \ldots, 2N-1, 2N+1, \ldots$

$$\boxed{a\operatorname{sen}\theta = \frac{n'\lambda}{N}}$$

Ejemplo $N = 4$:



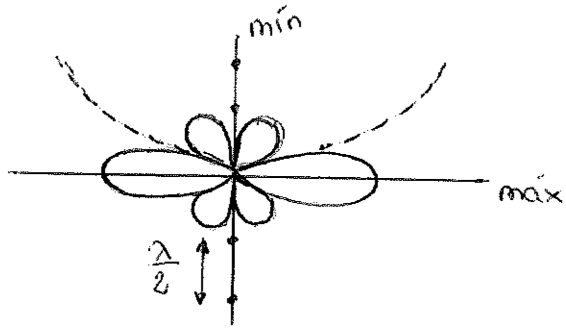


$\text{máx} \rightarrow \frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}\theta = n\lambda \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 2n$
$\quad n = 0$

$\text{mín} \rightarrow \frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{n'\lambda}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{n'}{2}$

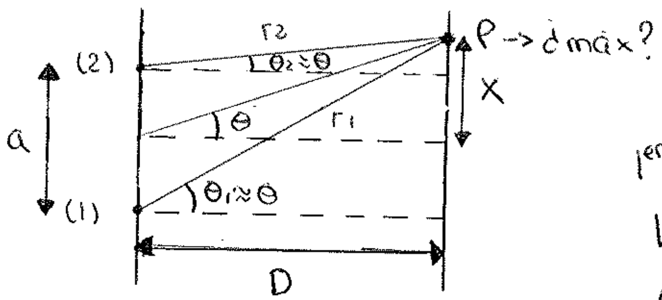
$n' = 1 \rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\begin{cases} \pi/6 \\ 5\pi/6 \end{cases}$

$n' = 2 \rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1 \left\{ \pi/2 \right.$



8.1. Experimento Young:

Dos focos emisores de ondas y el estudio de las interferencias que estas crean en una pantalla posterior.



$D >> a$

$$K(r_1 - r_2) = n 2\pi$$

1^{er} máx $\to 2\pi \ (n=1)$

$$K \cdot a \cdot \operatorname{sen}\theta = 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta = 2\pi$$

$$a \operatorname{sen}\theta = \lambda$$

$\theta \downarrow\downarrow \Rightarrow X << D$

$$\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{X}{D}$$

$$a = \frac{X}{D} = \lambda$$

ONDAS EN MEDIOS MATERIALES

- Ecuación de las ondas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

- $\omega = k \cdot v$
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\left.\begin{matrix}\omega = k\cdot v \\ k = \frac{2\pi}{\lambda}\end{matrix}\right\} \omega = \frac{2\pi}{\lambda} v \quad \left.\begin{matrix}\omega = \frac{2\pi}{\lambda}v \\ \omega = 2\pi f\end{matrix}\right\} \lambda f = v$$

- Cuerda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{T}{\mu}}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \leftarrow \text{Ec. ondas}$$

$\left.\begin{matrix}T: \text{Tensión} \\ \mu: \text{Densidad lineal cuerda}\end{matrix}\right\} v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$: velocidad de propagación.

- Barra:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{Y}{\rho_0}}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \leftarrow \text{Ec. ondas}$$

$\left.\begin{matrix}Y: \text{módulo de Young} \\ \rho_0: \text{densidad material barra}\end{matrix}\right\} v = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}}$: velocidad de propagación.

- Gas:
  - Relación presión - densidad:

  $$p = p_0 + \frac{k_e}{\rho_0}(\rho - \rho_0)$$

  - Relación densidad - desplazamiento:

  $$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\partial e}{\partial x}\right) \Rightarrow \rho - \rho_0 = -\rho_0\frac{\partial e}{\partial x}$$

  - Relación entre presión y desplazamiento:

  $$p = p_0 - k_e\frac{\partial e}{\partial x}$$

  - Ec. ondas desplazamiento:

  $$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{k_e}{\rho_0}}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \; ; \; v = \sqrt{\frac{k_e}{\rho_0}}$$: velocidad del sonido

- Ec. ondas densidad:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{K_e}{\rho_0}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

- Ec. ondas presión:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{K_e}{\rho_0}} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

- velocidad del sonido:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

- Potencia y energía:

- Cuerda: $y = y_0 \operatorname{sen}(Kx - \omega t)$
  - Potencia transmitida:

$$P = \mu v y_0^2 \omega^2 \cos^2(Kx - \omega t)$$

  - Potencia media:

$$P_{md} = \overline{P} = \frac{1}{2} \mu v y_0^2 \omega^2$$

  - Energía media:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \mu y_0^2 \omega^2 \Delta x$$

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

- Barra: $e = e_0 \operatorname{sen}(Kx + \omega t)$
  - Potencia instantanea:

$$P = \rho_0 v A \omega^2 e_0^2 \cos^2(Kx + \omega t)$$

  - Potencia media:

$$P_{md} = \overline{P} = \frac{1}{2} \rho_0 v A \omega^2 e_0^2$$

  - Energía transmitida:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \rho_0 \Delta V \omega^2 e_0^2$$, ΔV = Volumen abarcado por la onda.

  - Energía media transmitida por unidad de volumen:

$$\frac{\Delta E_m}{\Delta V} = E_v = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 e_0^2$$

- Gas: $e = e_0 \operatorname{sen}(Kx + \omega t)$
  - Potencia instantanea:

$$P = \rho_0 v A \omega^2 e_0^2 \cos^2(Kx + \omega t)$$

- Intensidad de una onda:
  - Intensidad instantanea:

$$I = \frac{P}{A}$$

  - Intensidad media:

$$\bar{I} = \frac{\bar{P}}{A} = v E_v$$

  - Nivel de intensidad:

$$N \cdot I = B = 10 \log \frac{I}{I_0} \ (dB) \quad ; \ I_0 = 10^{-12} \omega m^{-2}$$

- Velocidad de grupo:

$$V_g = \frac{\omega - \omega'}{K - K'} = \frac{d\omega}{dK} = V + K\frac{dV}{dK}$$

$\omega = KV$

- Efecto Doppler:
  - El foco se mueve y el receptor quieto:

$V_f \neq 0$ y $V_r = 0$

$$f_r = \frac{V}{\lambda_r} = \frac{V}{VT - V_f T} = \frac{V}{V - V_f} f_f \Rightarrow f_r = \frac{V}{V \pm V_f} f_f \begin{cases} - \text{ se acerca} \\ + \text{ se aleja} \end{cases}$$

  - El foco quieto y el receptor se mueve:

$V_f = 0$ y $V_r \neq 0$

$$f_r = \frac{V \pm V_r}{\lambda_r} = \frac{V \pm V_r}{\frac{V}{f_f}} = \frac{V \pm V_r}{V} f_f \begin{cases} - \text{ se aleja} \\ + \text{ se acerca} \end{cases}$$

  - Foco y receptor se mueven:

$$f_r = \frac{V \pm V_r}{\lambda_r} = \frac{V \pm V_r}{(V \pm V_f)T} = \frac{V \pm V_r}{V \pm V_f} f_f$$

V_r: $\begin{cases} - \text{ se aleja} \\ + \text{ se acerca} \end{cases}$

V_f: $\begin{cases} - \text{ se acerca} \\ + \text{ se aleja} \end{cases}$

- Interferencias entre focos:

La superposición será la suma de las dos ondas:

$e_1 = e_{01} \, sen(\omega t - kr_1)$

$e_2 = e_{02} \, sen(\omega t - kr_2)$

$e = e_1 + e_2 = e_{01} sen(\omega t - kr_1) + e_{02} sen(\omega t - kr_2)$

$$e_0 = \sqrt{e_{01}^2 + e_{02}^2 + 2 e_{01} e_{02} \cdot \cos\delta}$$

$\delta = (\omega t - kr_2) - (\omega t - kr_1) = k(r_1 - r_2) \leftarrow$ diferencia de fase.

$$k(r_1 - r_2) = 2n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2n\pi$$

interferencia constructiva $\rightarrow r_1 - r_2 = n\lambda \; ; n = 0, 1, 2$

$$k(r_1 - r_2) = (2n+1)\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2n+1)\pi$$

interferencia destructiva $\rightarrow r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \; ; n = 0, 1, 2$

- Ondas estacionarias:

Según $\delta = 0$ ó $\delta = \pi$:

$y_1 = y_{01} sen(\omega t + kx)$

$y_2 = y_{02} sen(\omega t - kx + \delta)$

$\delta = 0 \rightarrow y_{01} + y_{02} = 0 \Rightarrow y_{01} = -y_{02}$

$\delta = \pi \rightarrow y_{01} = y_{02}$

$y = y_1 + y_2$; Utilizamos $sen\,a - sen\,b = 2 sen\frac{a-b}{2} \cos\frac{a+b}{2}$

• Nodos:

$$kx = n\pi$$

• Antinodos:

$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

- Interferencias con N fuentes síncronas:

$$\delta = -kr_2 + kr_1 = k(r_1 - r_2) = ka\,sen\,\theta = \frac{2\pi}{\lambda} a\,sen\,\theta$$

Imáx: $\delta = k(r_1 - r_2) = ka\,sen\,\theta = n 2\pi \; ; n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{2\pi}{\lambda} a\,sen\,\theta = n 2\pi \Rightarrow a\,sen\,\theta = n\lambda$$

Imin:

$$\frac{N\pi\, a\,sen\,\theta}{\lambda} = n'\pi \; ; n' = 1, 2, \ldots \Rightarrow a\,sen\,\theta = \frac{n'\lambda}{N}$$

SEPTIEMBRE 1995

2)

a) $\eta_a = 1.5\cdot 10^{-6} \,\mathrm{sen}(Kx - \omega t - \frac{\pi}{6})$

b) $\eta_b = 1,5\cdot 10^{-6} \,\mathrm{sen}(Kx - \omega t)$

c) $\eta_c = 1.5\cdot 10^{-6} \,\mathrm{sen}(Kx - \omega t + \frac{\pi}{6})$

$P = 1 atm$ $\qquad \nu = 500 Hz$

$\gamma = 1,4$

$V = 330\ m\cdot s^{-1}$

1) $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K_e}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ $\quad ; \quad$ $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K_e}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

$V = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \Rightarrow \rho_0 = \frac{\gamma P_0}{V} = \frac{1,4\cdot 1}{330} = 4,24\cdot 10^{-3}$

$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\cdot 500 = 1000\pi\ rad/s$

$V = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{330}{500} = 0,66 m$

$\lambda = \frac{2\pi}{K} \Rightarrow K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,66} = 9,52$

$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{9,52}{4,24\cdot 10^{-3}}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 2245,3\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

2) $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ $\quad$ ¿$B = 10\log\frac{I}{I_0}$?

a) $I = vE_v = v\cdot\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 e_0^2 = 330\cdot\frac{1}{2}\cdot 4,24\cdot 10^{-3}\cdot(1000\pi)^2(1,5\cdot 10^{-6})^2 =$

$= 1,55\cdot 10^{-5}$

$B = 10\log\frac{1,55\cdot 10^{-5}}{10^{-12}} = 72 dB$

b) $I = 1,55 \cdot 10^{-5}$

$B = 72\ dB$

c) $B = 72\ dB$

3) $\eta_a + \eta_b + \eta_c = 1,5 \cdot 10^{-6}\left(\text{sen}(Kx - \omega t - \pi/6) + \text{sen}(Kx - \omega t) + \text{sen}(Kx - \omega t + \pi/6)\right) =$

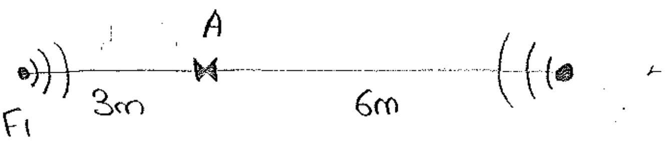
FEBRERO 1996

1) $P_1 = P_2 = 40\,W$ $\quad V = 330\, m/s$ $\quad$ Ondas esféricas

$f = 400\,Hz$ $\quad I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$

$d = 9\,m$ $\quad \rho_0 = 1{,}293 \cdot kg\, m^{-3}$

$\delta_0(F_2 - F_1) = -\frac{\pi}{6}$ $\quad \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 400 = 800\pi\ rad/s$



a) $$I_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_1}{4\pi r_1^2} = \frac{40}{4\pi \cdot 3^2} = 0{,}354\ W/m^2$$

$$I_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{P_2}{4\pi r_2^2} = \frac{40}{4\pi \cdot 6^2} = 0{,}088\ W/m^2$$

$$B_1 = 10 \log \frac{0{,}354}{10^{-12}} = 115{,}5\ dB$$

$$B_2 = 10 \log \frac{0{,}088}{10^{-12}} = 109{,}5\ dB$$

c) $I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2}\cos\delta$ $\qquad \delta = \delta_0 + K(r_2 - r_1)$

$$\omega = K \cdot V \Rightarrow K = \frac{\omega}{V} = \frac{800\pi}{330} = 2{,}424\pi\, m^{-1}$$

$$\delta = -\frac{\pi}{6} + 2{,}424\pi(6-3) = -\frac{\pi}{6} + 7{,}272\pi = \pi\left(-\frac{1}{6} + 7{,}272\right) =$$

$$= 7{,}105\pi\ rad$$

$$I_T = 0{,}354 + 0{,}088 + 2\sqrt{0{,}354 \cdot 0{,}088} \cdot \cos 7{,}105\pi =$$

$$= 0{,}108\ W/m^2$$

$$B = 10 \log \frac{0{,}108}{10^{-12}} = 110\ dB$$

JUNIO 1996

3)

$f_m = 55\,kHz$ $\qquad$ $I_{max} \to 6,2\,mm$

$\lambda = 6,2\,mm$

$V_m = 8\,m/s$

a) $\omega = 2\pi f = 110000\pi \text{ rad/s}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{6,2\cdot 10^{-3}} = 1013,4$$

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{110000\pi}{1013,4} = 341\,m/s$$

b) $f = 55\,kHz$

c) $f_r = \dfrac{V \pm V_r}{V \pm V_m} f_m$ $\qquad$ $\overset{m}{\bullet} \longrightarrow \qquad \overset{r}{\bullet} \longrightarrow$

$$f_r = \frac{V - V_r}{V - V_m} f_m \to \frac{f_r(V - V_m)}{f_m} = V - V_r$$

$$V_r = V - \frac{f_r(V - V_m)}{f_m} = 341 - \frac{55000(341-8)}{55000} =$$

$$= 8\,m/s$$

JUNIO 1999

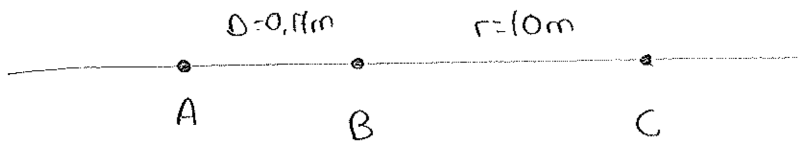
3) $P_A = P_B = 36\pi \; W$

$D = 17cm = 0{,}17m$

Ondas esféricas

$f = 1000 Hz$ $\qquad \delta = \pi$

$V_P = 340 m/s$



a) $I_A = \dfrac{P}{S} = \dfrac{P}{4\pi r^2} = \dfrac{36\pi}{4\pi \cdot 10{,}17^2} = 0{,}087 \; W/m^2$

$I_B = \dfrac{P}{S} = \dfrac{P}{4\pi r^2} = \dfrac{36\pi}{4\pi \cdot 10^2} = 0{,}09 \; W/m^2$

$I_T = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A \cdot I_B} \cos(\delta + K(r_B - r_A))$

$K(r_B - r_A) = \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A) = \dfrac{2\pi f}{V}(r_B - r_A) = \dfrac{2\pi \cdot 1000 (0{,}17)}{340} = \pi$

$I_T = 0{,}087 + 0{,}09 + 2\sqrt{0{,}087 \cdot 0{,}09} \cos(\pi + \pi)$

$I_T = 0{,}354 \; W/m^2$

b) $I_T = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos(K(r_B - r_A)) = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos \pi =$

$= I_A + I_B - 2\sqrt{I_A I_B} = (\sqrt{I_A} - \sqrt{I_B})^2 = \left(\sqrt{\dfrac{36\pi}{4\pi(r+D)^2}} - \sqrt{\dfrac{36\pi}{4\pi r^2}}\right)^2 =$

$= \left(3\sqrt{\dfrac{1}{(r+D)^2}} - 3\sqrt{\dfrac{1}{r^2}}\right)^2 = \left(3\left(\dfrac{1}{r+D} - \dfrac{1}{r}\right)\right)^2 =$

$= 9\left(\dfrac{r - r + D}{(r+D)r}\right)^2 = 9\left(\dfrac{D}{r^2 + Dr}\right)^2 = 9 \dfrac{D^2}{r^4 + D^2 r^2} \simeq \dfrac{9 D^2}{r^4}$

c) $I_b = 9 \cdot \dfrac{0{,}17^2}{10^4} = 2{,}601 \cdot 10^{-5} \; W/m^2$

$B = 10 \log \dfrac{0{,}354}{2{,}601 \cdot 10^{-5}} = 41{,}34 \; dB$

SEPTIEMBRE 1999

3) $\rho = 750\ kg/m^3$

$y = 0,1 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{x}{4} - \frac{t}{0,02} \right)$

b) $k = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4\ m$

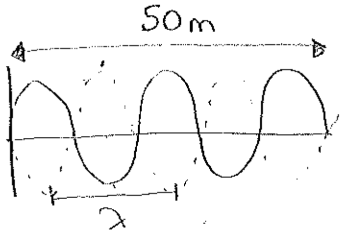
$\omega = \frac{2\pi}{0,02} = 100\pi\ rad/s$

$v = \lambda \cdot f = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} = 4 \cdot \frac{100\pi}{2\pi} = 200\ m/s$

a) $\frac{d^2y}{dt^2} = 200^2 \frac{d^2y}{dx^2} \to \frac{d^2y}{dt^2} = 4 \cdot 10^4 \frac{d^2y}{dx^2}$

c) $E_v = \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 \cdot e_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot (100\pi)^2 \cdot (0,1 \cdot 10^{-3})^2 =$

$= 0,37\ J/m^3$

d) 

Distancia entre un máximo y un mínimo:

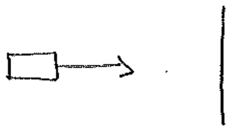
$D = \frac{\lambda}{2} = \frac{4}{2} = 2m$

e) $Kx = n\pi$

$n = \frac{Kx}{\pi} = \frac{\pi/2 \cdot 50}{\pi} = \frac{\cancel{\pi} \cdot 50}{2\cancel{\pi}} = \frac{50}{2} = 25$

JUNIO 2000

3)



$f_L = 480\,Hz$

$f_R = 520\,Hz$

a) $f_L = \frac{V_T}{\lambda} = \frac{V_s - V_s}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{V_s - V_s}{f_L}$

$f_R = \frac{V_s + V_c}{\lambda} = \frac{V_s + V}{V_s - V_s} f_L$

$520 = \frac{300 + V}{300 - V} \cdot 480 \rightarrow \frac{13}{12} = \frac{300 + V}{300 - V}$

$300 \cdot 13 - 13V = 12 \cdot 300 + 12V$

$25V = 300$

$V = 12\,m/s$

b) $I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{P}{4\pi (d - vt)^2}$

$B = 10 \log \frac{P}{4\pi (d - vt)^2 \cdot I_0}$

SEPTIEMBRE 2000

3) $f = 900\,Hz$

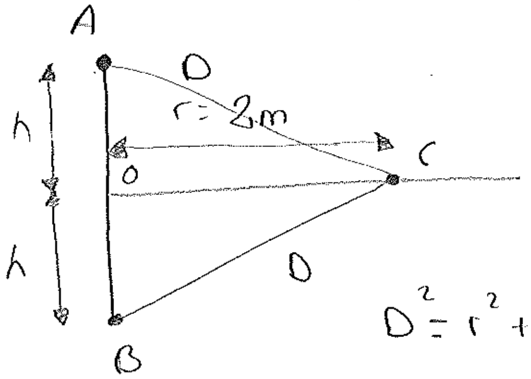
$P = 5\,W$

$V_s = 330\,m/s$

$h = 3\lambda$

$\delta = \frac{\pi}{3}$

a)



$D^2 = r^2 + h^2$

$$\lambda = \frac{V_s}{f} = \frac{330}{900} = 0{,}37\ m \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}37} = 17{,}14$$

$$h = 3\lambda = 3 \cdot 0{,}37 = 1{,}1\ m$$

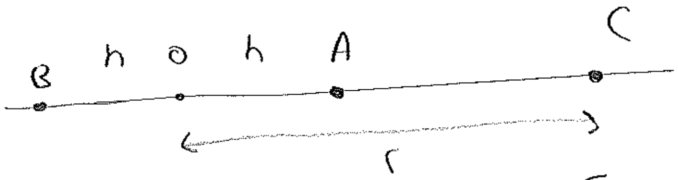
$$I_A = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi D^2} = \frac{P}{4\pi(r^2+h^2)} = \frac{5}{4\pi(2^2+1{,}1^2)} = 0{,}076\ W/m^2$$

$$I_B = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi(r^2+h^2)} = \frac{5}{4\pi(4+1{,}21)} = 0{,}076\ W/m^2$$

$$I_C = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A \cdot I_B}\cos(\delta + \cancel{k(r_B - r_A)}^{\,0}) =$$

$$= 0{,}076 + 0{,}076 + 2\sqrt{0{,}076^2}\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}228\ W/m^2$$

b)



$$I_A = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi(r-h)^2} = \frac{5}{4\pi(2-1{,}1)^2} = 0{,}49\ W/m^2$$

$$I_B = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi(r+h)^2} = \frac{5}{4\pi(2+1{,}1)^2} = 0{,}041\ W/m^2$$

$$I_C = 0{,}49 + 0{,}041 + 2\sqrt{0{,}49 \cdot 0{,}041} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + 17{,}14(3{,}1 - 0{,}9)\right) =$$

$$= 0{,}531 + 2\sqrt{0{,}02009}\cos\left(\frac{\pi}{3} + 37{,}71\right) = 0{,}67\ W/m^2$$

JUNIO 2005

3) $P = 1\cdot10^{-3} W$

$f: 425 Hz \longrightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{425} = 0{,}8 \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}8} = \frac{5\pi}{2}$

$B_r = 50 dB$

a) $I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi x^2} \Rightarrow I = \frac{1\cdot10^{-3}}{4\pi x^2} = \frac{7{,}95\cdot10^{-5}}{x^2}$

$B = 10\log\frac{I}{I_0}$

$10^5 = \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow I = 1\cdot10^{-7}$

$x^2 = \frac{7{,}95\cdot10^{-5}}{1\cdot10^{-7}} = 795$

$x = 28{,}19 m$

b) $I_A = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi L^2} = \frac{1\cdot10^{-3}}{4\pi\cdot20^2} = 1{,}98\cdot10^{-7} W/m^2$

$I_B = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi(L-d)^2} = \frac{1\cdot10^{-3}}{4\pi(20-1)^2} = 2{,}20\cdot10^{-7}$

$I_P = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A\cdot I_B}\cdot\cos(k(L-L+d))$

$I_P = 1{,}98\cdot10^{-7} + 2{,}20\cdot10^{-7} + 2\sqrt{1{,}98\cdot10^{-7}\cdot2{,}20\cdot10^{-7}}\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

$I_P = 4{,}18\cdot10^{-7} W/m^2$

$B_P = 10\log\frac{4{,}18\cdot10^{-7}}{10^{-12}} = 56{,}21 dB$

FÍSICA

EJERCICIOS

ONDAS

41.

$y = 2sen[2\pi(0.01x - 2t)] \Rightarrow y = A sen k(x - vt)$

$[x] = cm$ $\qquad y = A sen(Kx - \omega t) \leftarrow \omega = vk$

$[y] = cm$

$[t] = s$

a) $A = 2cm$

$\omega = 4\pi$ rad/s

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2\,Hz$

$T = \frac{1}{f} = 0{,}5\,s$

$V_f = \frac{\omega}{k} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2\,m/s$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1m$

b) Para la velocidad debemos derivar y, la velocidad máxima será cuando el cos de la expresión derivada valga 1.

$y = 2 sen(\frac{\pi}{50}x - 4\pi t)$

$\frac{dy}{dt} = V = 8\pi \cos(\frac{\pi}{50}x - 4\pi t) \leftarrow \cos\theta = 1$

$V = 8\pi\ cm/s$

$\frac{dy}{dx} = 2\frac{\pi}{50}\cos(\frac{\pi}{50}x - 4\pi t) \leftarrow$ la pendiente máxima será derivar y con respecto a x.

$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{25}$

42. $\xi = 0{,}05 sen(1980t - 6x)$

$[\xi] = cm \quad [t] = s \quad [x] = m$

a) $\omega = 1980 \Rightarrow \omega = 2\pi f$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1980}{2\pi} = 315{,}13\,Hz$

b) $\omega = v \cdot k \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{1980}{6} = 330\,m/s$

c) $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

e) Derivamos ξ:

$v = 0{,}05 \cdot 1980 \cos(1980t - 6x)$

Para que la velocidad sea máxima el cos ha de valer 1.

$V = 0{,}05 \cdot 1980 = 99$ cm/s

45.

$\xi = 0{,}5 \operatorname{sen}[2\pi(340t - x)]$

$[t] = s$

$[x] = m$

$[\xi] = mm$

a) $\omega = 680\pi \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{680\pi}{2\pi} = 340 Hz$

b) $k = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

c) $v = 340$ m/s

d) $v = 0{,}5 \cdot 2\pi \cdot 340 \cos[2\pi(340t - x)] = 1{,}07 \cos[2\pi(340t - x)]$ m/s

e) $\left.\begin{array}{l} dp = p - p_0 \\ p = p_0 - k_e \frac{d\xi}{dx} \end{array}\right\} \; dp = p - p_0 = \cancel{p_0} - k_e \frac{d\xi}{dx} - \cancel{p_0} = -k_e \frac{d\xi}{dx} =$

$= -k_e\, 0{,}5 \cdot (-2\pi) \cdot \cos[2\pi(340t - x)] =$

$= -1064 \cdot 0{,}5 \cdot (-2\pi) \cos[2\pi(340t - x)] =$

$k_e = \gamma p_0 = 1{,}4 \cdot 760 = 1064$

$= 1064\pi \cos[2\pi(340t - x)]$ mm $=$

$= 3{,}34 \cos[2\pi(340t - x)]$ m

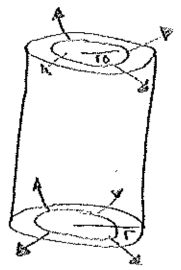
d) $\left.\begin{array}{l} d\rho = \rho - \rho_0 \\ \rho = \rho_0\left(1 - \frac{d\xi}{dx}\right) \end{array}\right\} \; d\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{d\xi}{dx} = -\frac{\gamma p_0}{V^2} \cdot 0{,}5 \cdot (-2\pi) \cos[2\pi(340t - x)] \cdot$

$= \frac{1{,}4 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot \pi\, 10^{-3} \cos[2\pi(340t - x)]}{340^2}$

$V = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \Rightarrow \rho_0 = \frac{\gamma p_0}{V^2}$

$= 3{,}85 \cdot 10^{-3} \cos[2\pi(340t - x)]$ kg/m^3

46.



$$I = \frac{P_m}{A}$$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P_m}{2\pi r h} \\ I_0 &= \frac{P_m}{2\pi r_0 h} \end{aligned}\right\} \frac{I}{I_0} = \frac{\frac{P_m}{2\pi r h}}{\frac{P_m}{2\pi r_0 h}} = \frac{r_0}{r} \Rightarrow I = \frac{r_0 I_0}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} I &= v E v = v \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 \\ I_0 &= v \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A_0^2 \end{aligned}\right\} \frac{I}{I_0} = \frac{\cancel{v}\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\rho_0}\cancel{\omega^2} A^2}{\cancel{v}\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\rho_0}\cancel{\omega^2} A_0^2} = \frac{A^2}{A_0^2}$$

$$A = A_0 \sqrt{\frac{I}{I_0}} = A_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}}$$

47.

$\frac{I_1}{I_2}$ 10

$\frac{A_1}{A_2}$ 3,16

$$\frac{B_1}{B_2} = 10 dB$$

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad \log_b a = x \Rightarrow x^b = a$$

$$B^{10} = \left(\frac{I}{I_0}\right)^{10}$$

$$B = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 B$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cancel{I_0} B_1}{\cancel{I_0} B_2} = \frac{B_1}{B_2} = 10 dB$$

$$I = v E v = v \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cancel{v}\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\rho_0}\cancel{\omega^2} A_1^2}{\cancel{v}\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\rho_0}\cancel{\omega^2} A_2^2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \Rightarrow \frac{A_1^2}{A_2^2} = 10$$

$$\frac{A_1^2}{A_2^2} = \sqrt{10} = 3,16$$

48.

$$B = 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log\frac{2\cdot 10^{-5}}{10^{-12}} = \underline{\underline{73\,dB}}$$

49.

$f = 1000\,Hz$

$P = 10\,W$

$V = 330\,m/s$

$I_o = 10^{-12}\,W/m^2$

$d = 200\,m$

¿I, B, Ev?

a) $I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10}{4\pi\, 200^2} = \underline{\underline{1,98\cdot 10^{-5}\,W/m^2}}$

$$B = 10\log\frac{I}{I_o} = 10\log\frac{1,98\cdot 10^{-5}}{10^{-12}} = \underline{\underline{73\,dB}}$$

$$I = v\cdot Ev \Rightarrow Ev = \frac{I}{V} = \frac{1,98\cdot 10^{-5}}{330\,m/s} = \underline{\underline{6\cdot 10^{-8}\,J/m^3}}$$

b) $I = 10^{-12}$ para que deje de percibirse.

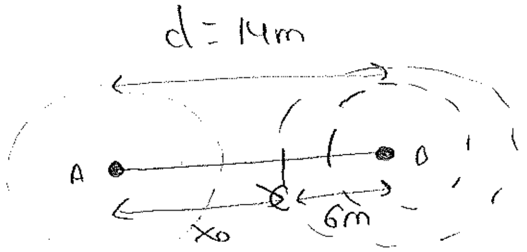
$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{P}{I\,4\pi} = \frac{10}{10^{-12}\cdot 4\pi} \Rightarrow r = 89\,Km$$

c) $50 = 10\log\frac{I}{I_o} \Rightarrow 5 = \log\frac{I}{I_o}$

$$5^{10} = \frac{I}{I_o} \Rightarrow I = 5^{10}\cdot 10^{-12} = 9,76\cdot 10^{-6}\,W/m^2$$

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{10}{4\pi\cdot 9,76\cdot 10^{-6}}} = 2,85\cdot 10^3\,m$$

51.



$P_A = 16\cdot 10^{-4}\,W$

$P_B = 28\cdot 10^{-4}\,W$

$f_{AB} = 170\,Hz$

A, B en oposición de fase.

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= e_{01}\,sen\,(\omega t - kx_o) \\ e_2 &= e_{02}\,sen\,(\omega t + k(x_o - d + \pi)) \end{aligned}\right\}\ \text{en C}$$

$$\delta = \cancel{\omega t} + k(x_o - d) + \pi - \cancel{\omega t} + kx_o = 2kx_o - kd + \pi =$$

$$= 2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}x_o - \frac{2\pi}{\lambda}d + \pi = 2\pi\cdot 8 - 14\pi + \pi \Rightarrow \delta = \pi$$

$$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{340}{170} = 2$$

b)
$$I_A = \frac{P}{A} = \frac{16\cdot 10^{-4}}{4\pi\cdot 8^2} = 1{,}99\cdot 10^{-6}\ W/m^2$$

$$I_B = \frac{P}{A} = \frac{28\cdot 10^{-4}}{4\pi\cdot 6^2} = 6{,}19\cdot 10^{-6}\ W/m^2$$

c)
$$e_0^2 = e_{0A}^2 + e_{0B}^2 + 2e_{0A}e_{0B}\cos\delta$$

$$I = v\,\varepsilon_v = v\,\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 e_0^2 = cte\, e_0^2 \Rightarrow e_0^2 = \frac{I}{cte}$$

$$\frac{I}{\cancel{cte}} = \frac{I_A}{\cancel{cte}} + \frac{I_B}{cte} + 2\sqrt{\frac{I_A}{cte}}\cdot\sqrt{\frac{I_B}{cte}}\cos\delta$$

$$I = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A}\sqrt{I_B}\cos\delta$$

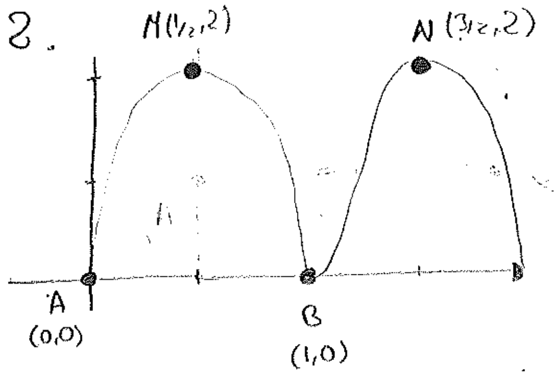
$\delta = \pi$ en C por tanto

$$I = I_A + I_B - 2\sqrt{I_A}\sqrt{I_B} = 1{,}99\cdot 10^{-6} + 6{,}19\cdot 10^{-6} - 2\sqrt{1{,}99\cdot 10^{-6}}\sqrt{6{,}19\cdot 10^{-6}} =$$

$$= 1{,}16\cdot 10^{-6}\ W/m^2$$

$$B = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{1{,}16\cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 60{,}6\ dB$$

52.



5.3.

$A_{1,2} = 2,5 cm$

$\lambda_{1,2} = 5 cm$

$v_{1,2} = 6,25 cm/s$

$t=0$ y $x=0$ elongación nula y velocidad positiva.

a)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5} = 0,4\pi$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{6,25}{5} = 1,25\,Hz$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1,25 = 2,5\pi \text{ rad/s}$$

$$y_1 = A\,sen(\omega t - kx) = 2,5 \cdot 10^{-2} sen(2,5\pi t - 40\pi x)$$

$$y_2 = 2,5 \cdot 10^{2} sen(2,5\pi t - 40\pi x)$$

b) $$y = y_1 + y_2 = 2,5 \cdot 10^{-2} sen(2,5\pi t + 40\pi x) - 2,5 \cdot 10^{-2} sen(2,5\pi t - 40\pi x) =$$

$$= 2,5 \cdot 10^{-2}\left(sen(2,5\pi t + 40\pi x) - sen(2,5\pi t - 40\pi x)\right) =$$

$$sen\,a - sen\,b = 2 sen\frac{a-b}{2} \cos\frac{a+b}{2}$$

$$y = 2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot sen\,40\pi x \cos 2,5\pi t$$

c) Antinodos:

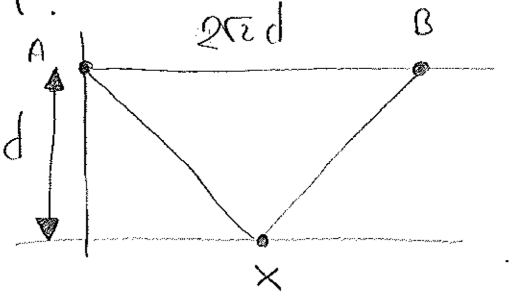
$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$40\pi x = n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{n + 1/2}{40}$$

Nodos:

$$kx = n\pi \rightarrow x = \frac{n}{40}$$

54.



$\bar{I}_F, \lambda, \phi$

$y_1 = y_{01} \operatorname{sen}(\omega t - k r_1)$

$y_2 = y_{02} \operatorname{sen}(\omega t - k r_2 + \phi)$

a) $I_R = I_F + I_F + 2\sqrt{I_F} \cdot \sqrt{I_F} \cos\delta = 2I_F + 2\sqrt{I_F^2}\cos\delta =$

$= 2I_F + 2I_F \cos\delta = 2I_F(1 + \cos\delta)$

$1 + \cos\delta = \cos^2\frac{\delta}{2} \cancel{- \operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}} + \cos^2\frac{\delta}{2} \cancel{+ \operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}} = 2\cos^2\frac{\delta}{2}$

$I_R = 2I_F \cdot 2\cos^2\frac{\delta}{2} = 4I_F\cos^2\frac{\delta}{2}$

$\delta = \cancel{\omega t} - k r_2 + \phi - \cancel{\omega t} + k r_1 = k(r_1 - r_2) + \phi =$

$= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{d^2 + x^2} - \sqrt{(2\sqrt{2}d - x)^2 + d^2}\right) + \phi$

b) $I_{max}(\delta = 0) = 4I_F$

c) $\delta(x=0) = \frac{2\pi}{\lambda}(d - 3d) + \phi = \frac{2\pi}{\lambda}(-2d) + \phi = 0$ ↳ Para I_{max}

$\phi = \frac{4\pi d}{\lambda}$

d) $B(x = 2\sqrt{2}d) = 10 \log \frac{4I_F\cos^2\frac{\delta}{2}}{I_0} = 10 \log \frac{4I_F\cos^2\frac{4\pi d}{\lambda}}{I_F} =$

$\delta(x = 2\sqrt{2}d) = \frac{2\pi}{\lambda}(3d - d) + \frac{4\pi d}{\lambda} = \frac{8\pi d}{\lambda}$

$= 10 \log 4\cos^2\frac{4\pi d}{\lambda}$

55.

$y_1 = y_{01} \operatorname{sen}(\omega t - kx)$ $\qquad \delta = \pi/2$

$y_2 = y_{02} \operatorname{sen}(\omega t - kx$ $\qquad y_{01} = 0{,}03\ m$

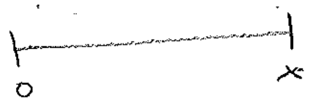
$y_{02} = 0{,}04\ m$

$$y = y_1 + y_2 = y_{01} \operatorname{sen}(\omega t - kr_1) + y_{02} \operatorname{sen}(\omega t - kr_2)$$

$$y_0 = \sqrt{y_{01}^2 + y_{02}^2 + 2 y_{01} y_{02} \cos \delta}$$

$$y_0 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \pi/2} = 5$$

56.



$kx = n\pi$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{v} f x = n\pi$$

$$f = \frac{n\pi v}{2\pi x} = \frac{nv}{2x}$$

Para $n = 1$

$$\left. \begin{array}{l} f = \dfrac{v}{2x} \\ v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \end{array} \right\} f = \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

a) $$\left. \begin{array}{l} f = \dfrac{1}{2x} \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \\ f' = \dfrac{1}{2x} \sqrt{\dfrac{2T}{\mu}} \end{array} \right\} \frac{f'}{f} = \sqrt{2}$$

b) $$\left. \begin{array}{l} f = \dfrac{1}{2x} \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \\ f' = \dfrac{1}{2x} \sqrt{\dfrac{T}{2\mu}} \end{array} \right\} \frac{f'}{f} = \frac{\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{T}{2\mu}}}{\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) $d = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $d' = \frac{1}{4x}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\Big\}$ $\frac{d'}{d} = \frac{1}{2}$

57.

$\rho = 750\ kg/m^3$

a) $y = 0{,}1 \,sen\, 2\pi\left(\frac{x}{4} - \frac{t}{0{,}02}\right)$ (mm)

$y = 0{,}1 \,sen\left(\frac{\pi x}{2} - 100\pi t\right)$

$K = \frac{\pi}{2}$, $\omega = 100\pi$ $\Big\}$ $v = \frac{\omega}{k} = \frac{100\pi}{\frac{\pi}{2}} = 200$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2\frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = 4\cdot 10^4\frac{d^2y}{dx^2}$$

b) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4m$

$\omega = 100\pi\ rad/s$

$v = 200\ m/s$

c) $E_V = \frac{1}{2}\rho\omega^2 e_0^2 = \frac{1}{2} 750\cdot(100\pi)^2\cdot(1\cdot 10^{-4})^2 = 0{,}37\ J/m^3$

d) La distancia de un máximo a un mínimo será

$\frac{1}{2}\lambda = d \Rightarrow d = \frac{1}{2}4 = 2$

e) La superposición resultará:

$y = y_1 + y_2 = y_{01}\,sen(\omega t + kx) - y_{01}(\omega t - kx) = 2y_{01}\, 2 sen kx \cos \omega t$

$y = 2y_{01}\, sen kx \cos\omega t \Rightarrow y = 2\cdot 0{,}1\, sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(100\pi t)$

$\cancel{kx = n\pi \Rightarrow} n = \frac{kx}{\pi} = \pi/2$

58.

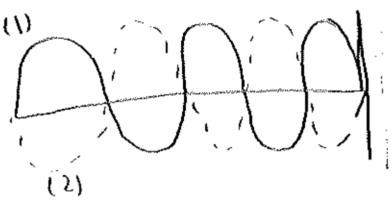
$f = 1980 H$

$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$

$v = 331\ m/s$

a) $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{331}{1980} = 0{,}17$

b)



(1) $y_1 = A\cos(\omega t - kx)$

(2) $y_2 = A\cos(\omega t + kx + \delta)$

$y = y_1 + y_2$

$y(x=0) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx + \delta) = 0$

$A\cos\omega t + A\cos(\omega t + \delta) = 0 \qquad \cos(a \pm b) = \cos A\cos B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$

$A\cos\omega t + A(\cos\omega t\cos\delta - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\delta) = 0$

$A\cos\omega t + A\cos\omega t\cos\delta - A\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\delta = 0$

$\left.\begin{array}{l} A + A\cos\delta = 0 \\ -A\operatorname{sen}\delta = 0 \end{array}\right\} \delta = 0, \pi$

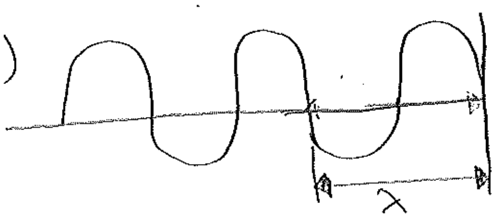
$\delta = 0$, $\quad A\cos(\omega t - kx) - A\cos(\omega t + kx) =$

$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t - kx) - A\cos(\omega t + kx) = A(2\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(kx)) =$

$= A(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) =$

$= \underline{2A\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(kx)}$

c)



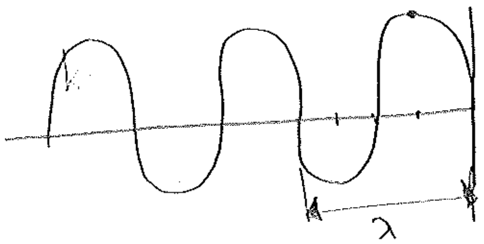
$x = n\frac{\lambda}{2}$

d) $kx = n\pi$

$$n = \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda\cancel{\pi}} = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{0{,}17} = 11{,}76 \quad //$$

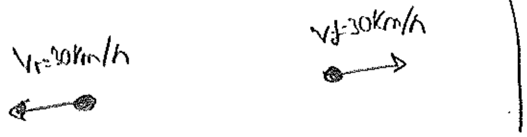
$\lambda = 0{,}17$

e)



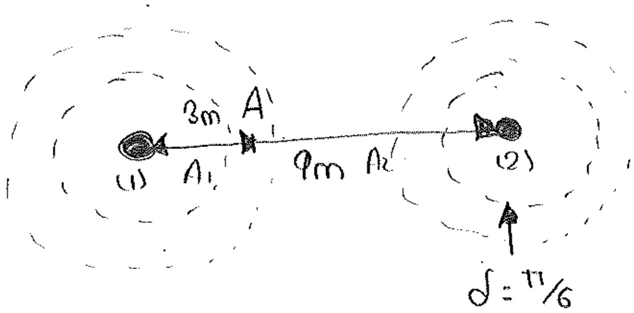
$$x = \frac{\lambda}{4}(2n+1)$$

d)



$$f_r = \frac{V \pm V_r}{V \pm V_f} f_f = \frac{V - V_r}{V + V_f} f_f = \frac{331 + 8{,}33}{331 + 8{,}33} \cdot 1980 = 1980$$

59.



1) $P_1 = 40W$
$f_1 = 40Hz$

2) $P_2 = 40W$
$f_2 = 40Hz$

$I_0 = 10^{-12}$
$V = 340 m/s$
$\rho_{aire} = 1{,}28\ kg/m^3$

3240 m

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

a)

1) $P = I_i A_i \Rightarrow I = \frac{P}{A} = \frac{40}{4\pi r^2} = \frac{40}{4\pi 3^2} = 0{,}354$

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0{,}354}{10^{-12}} = 115{,}4 dB$$

2) $I = \frac{P}{A_2} = \frac{40}{4\pi 6^2} = 0{,}088$

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0{,}088}{10^{-12}} = 109{,}4 dB$$

b) $\frac{d^2 e}{dt^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{d^2 e}{dx^2}$

$f = 40\,Hz \rightarrow \omega = 2\pi f = 80\pi$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 40}{340} = 0{,}739$

$I = v \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 e_0^2$

$e_{01}^2 = \frac{I_1}{v \rho_0 \omega^2 \cdot 0{,}5} = \frac{0{,}354}{340 \cdot 1{,}28 \cdot (80\pi)^2 \cdot 0{,}5} = 2{,}57 \cdot 10^{-8}$

$e_{01} = 1{,}6 \cdot 10^{-4} = 160\,\mu m$

$e_{02}^2 = \frac{I_2}{v \rho_0 \omega^2 \, 0{,}5} = \frac{0{,}088}{340 \cdot 1{,}28 \cdot (80\pi)^2 \cdot 0{,}5} = 6{,}4 \cdot 10^{-9}$

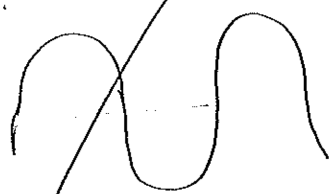
$e_{02} = 80\,\mu m$

60.

$f = 55\,kHz$

$\lambda = 6{,}2\,mm$

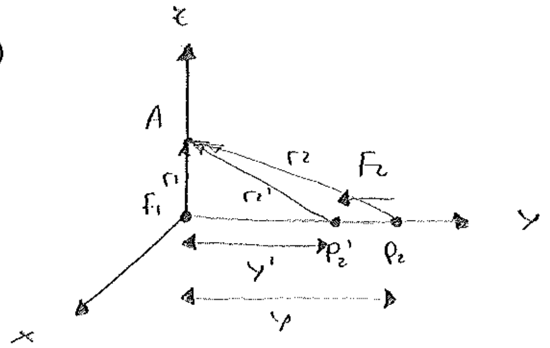
$V_m = 8\,m/s$



a) $v = \lambda f = 6{,}2 \cdot 55 = 341\,m/s$

b) $f_r = \frac{v}{v - v_f} f = \frac{341}{341-8}\,55000 = 56{,}3\,k\Omega$

3)



A(0, 0, 2.76m)

F_1, F_2 :

P, ϑ = 250Hz , δ

F_2 en $P_2(0, 4.95, 0)$m máximo (NI_A = 95,4dB)

F_2 en $P_2'(0, y', 0)$ mínimo (NI_A')

$P_2 \rightarrow I_{max} \Rightarrow K(r_2 - r_1) + \delta = n 2\pi$

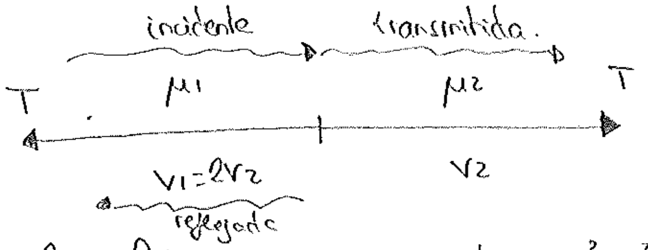
$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + \delta = n 2\pi$$

$P_2' \rightarrow I_{min} \Rightarrow K(r_2' - r_1) + \delta = (2n+1)\pi$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2' - r_1) + \delta = (2n+1)\pi$$

JUNIO 2009 ONDAS EN MEDIOS MATERIALES

3)



$$A_r = \frac{A_t}{2}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{P}}{S} = \frac{1}{2}\frac{\mu v A^2\omega^2}{S}$$

a)

$$\left.\begin{aligned} I_i &= \frac{1}{2}\frac{\mu_1 v A_{in}^2\omega^2}{S} \\ I_r &= \frac{1}{2}\frac{\mu_1 v A_r^2\omega^2}{S} \\ I_t &= \frac{1}{2}\frac{\mu_2 v A_t^2\omega^2}{S} \end{aligned}\right\} I_i = I_r + I_t$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\frac{\mu_1 v_1 A_{in}^2\cancel{\omega^2}}{\cancel{S}} = \cancel{\frac{1}{2}}\frac{\mu_1 v_1 A_r^2\cancel{\omega^2}}{\cancel{S}} + \cancel{\frac{1}{2}}\mu_2\frac{v_2 A_t^2\cancel{\omega^2}}{\cancel{S}}$$

$$\mu_1 v_1 A_{in}^2 = \mu_1 v_1 A_r^2 + \mu_2 v_2 A_t^2$$

$$\mu_1 v_1 A_{in}^2 = \mu_1 v_1 A_r^2 + \mu_2 \cancel{v_2} A_r^2 4$$

$$\mu_1 2\cancel{v_2} A_{in}^2 = \mu_1 2\cancel{v_2} A_r^2 + \mu_2 A_r^2 4$$

$$\mu_1 \cancel{2} A_{in}^2 = \mu_1 \cancel{2} A_r^2 + \mu_2 A_r^2 4$$

$$\mu_1 A_{in}^2 = \mu_1 A_r^2 + \mu_2 A_r^2 2$$

$$A_r^2(\mu_1 + \mu_2 2) = \mu_1 A_{in}^2$$

b)

$$A_r = \sqrt{\frac{\mu_1 A_{in}^2}{\mu_1 + \mu_2 2}} = \sqrt{\frac{A_{in}^2}{1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1}}}$$

$$A_t = 2\sqrt{\frac{\mu_1 A_{in}^2}{\mu_1 + \mu_2 2}} = 2\sqrt{\frac{A_{in}^2}{1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1}}}$$

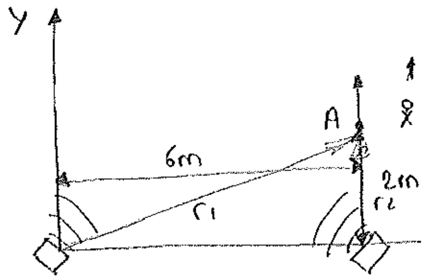
c)

$$\bar{P}_r = \frac{1}{2}\mu v A_r^2\omega^2 = \frac{1}{2}\mu v \frac{A_{in}^2}{1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1}}\omega^2$$

$$\bar{P}_t = \frac{1}{2}\mu v A_t^2\omega^2 = \frac{1}{2}\mu v \frac{4 A_{in}^2}{1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

SEPTIEMBRE 2009 ONDAS EN MEDIOS MATERIALES

3)



$P = 0{,}1 W$

$d = 6m$

$f = 170 Hz \longrightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 170 = 340\pi$ rad/s

$r_2 = 2m$

$r_1 = 2\sqrt{10}$ m

$k \cdot v = \omega$

$k = \frac{\omega}{v} = \frac{340\pi}{340} = \pi$

a) $x_1 = A_1 sen(\omega t - kr_1)$

$x_2 = A_2 sen(\omega t - kr_2)$

$\delta = \cancel{\omega t} - kr_1 - \cancel{\omega t} + kr_2 = -kr_1 + kr_2 = k(r_2 - r_1) = \pi(2 - 2\sqrt{10}) =$

$= -13{,}58$ rad

b) $k(r_1 - d) = (2n+1)\cancel{\pi}$

$\cancel{\pi}(2\sqrt{10} - d) = 3$

$d = 5{,}32$

c)

$B = 10 \log \frac{I_0}{I}$

$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cancel{\cos\delta}$ -1 (condición mínimos)

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

- Ecuación ondas para E:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \; ; \; c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

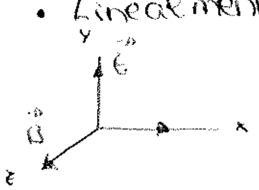
- Ecuación ondas para B:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \; ; \; c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- Relación entre E y B:

$$E = cB$$

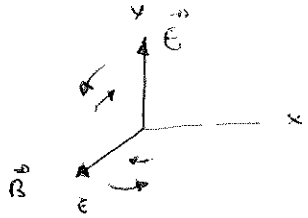
- Ondas armónicas:
  - Linealmente polarizadas:



$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\vec{j}$$
$$\vec{B} = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\vec{k}$$

La polarización la rige el campo $\vec{E}$.

  - Circularmente polarizadas:



$$\circlearrowleft - \begin{cases} E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_z = -E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \end{cases} \quad \begin{cases} B_z = B_0 \cos(\omega t - kx) \\ B_y = B_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \end{cases}$$

$$\circlearrowright - \begin{cases} E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \end{cases} \quad \begin{cases} B_z = B_0 \cos(\omega t - kx) \\ B_y = -B_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \end{cases}$$

- Magnitudes físicas importantes:
  - $I = \frac{P}{A} = c U_v \; ; \; U_v = \varepsilon_0 E^2$

$$I = \frac{EB}{\mu_0}$$

  - Vector de poynting:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

$$|\vec{S}| = \frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{\mu_0} = \frac{E \cdot B}{\mu_0} = I$$

- Linealmente polarizada:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 B_0 \sin^2(kx-\omega t)}{\mu_0}\,\vec{i}$$

$$\overline{|\vec{S}|} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu_0}$$

↑ vector promedio.

- Circulamente polarizadas:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0\cdot B_0\cdot 1}{\mu_0}\,\vec{i}$$

$$\overline{|\vec{S}|} = \frac{E_0\cdot B_0}{\mu_0}$$

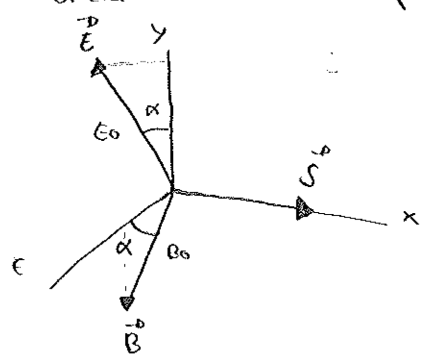
– Presión de radiación:

- $P_r = \frac{I}{c}$ (absorción).
- $P_r = \frac{2I}{c}$ (reflexión).

EJERCICIOS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

68.

onda linealmente polarizada



$\alpha = 60°$

$\bar{I} = I_o$, f.

a) ¿E, B?

$$E = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_o \cos\alpha \, \text{sen}(Kx - \omega t) \\ E_z = E_o \, \text{sen}\alpha \, \text{sen}(Kx - \omega t) \end{cases} \qquad B = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -B_o \, \text{sen}\alpha \, \text{sen}(Kx - \omega t) \\ B_z = B_o \cos\alpha \, \text{sen}(Kx - \omega t) \end{cases}$$

Si $\bar{I} = I_o = |\vec{S}| = \dfrac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{\mu_o} = \dfrac{E_o \text{sen}(Kx-\omega t) \cdot B_o \text{sen}(Kx-\omega t)}{\mu_o} = \dfrac{E_o B_o}{\mu_o} \dfrac{1}{2} \underset{E_o = B_o c}{=} \dfrac{E_o^2}{\mu_o c} \cdot \dfrac{1}{2}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & E_o \cos\alpha \, \text{sen}(Kx-\omega t) & E_o \text{sen}\alpha \, \text{sen}(Kx-\omega t) \\ 0 & -B_o \text{sen}\alpha \, \text{sen}(Kx-\omega t) & B_o \cos\alpha \, \text{sen}(Kx-\omega t) \end{vmatrix} =$$

$= E_o B_o \cos^2\alpha \, \text{sen}^2(Kx-\omega t) + E_o B_o \text{sen}^2\alpha \, \text{sen}^2(Kx-\omega t) = E_o B_o (\cos^2\alpha \, \text{sen}^2(Kx-\omega t) + \text{sen}^2\alpha \, \text{sen}^2(Kx-\omega t))$

$= E_o B_o \, \text{sen}^2(Kx-\omega t)(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) = E_o B_o \, \text{sen}^2(Kx-\omega t)$

$$I_o = \frac{E_o^2}{\mu_o c} \frac{1}{2} \Rightarrow E_o = \sqrt{I_o \mu_o c \, 2} = \sqrt{\frac{I_o \, 1 \, c \, 2}{c^2 \varepsilon_o}} = \sqrt{\frac{I_o 2}{c \varepsilon_o}}$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_o \varepsilon_o} \Rightarrow \mu_o = \frac{1}{c^2 \varepsilon_o}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{c}{f}} = \frac{2\pi f}{c} \qquad \omega = 2\pi f$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \sqrt{\dfrac{I_o 2}{c \varepsilon_o}} \cos\dfrac{\pi}{3} \, \text{sen} \, 2\pi f \left(\dfrac{x}{c} - t\right) \\ E_z = \sqrt{\dfrac{I_o 2}{c \varepsilon_o}} \, \text{sen}\dfrac{\pi}{3} \, \text{sen} \, 2\pi f \left(\dfrac{x}{c} - t\right) \end{cases}$$

$$I_o = \frac{c^2 B_o^2}{\mu_o c} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow B_o = \sqrt{\frac{I_o 2 \cdot \mu_o}{c}} = \sqrt{\frac{I_o 2}{c^3 \varepsilon_o}}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\sqrt{\dfrac{I_o 2}{c^3 \varepsilon_o}} \, \text{sen}\dfrac{\pi}{3} \, \text{sen} \, 2\pi f \left(\dfrac{x}{c} - t\right) \\ B_z = \sqrt{\dfrac{I_o 2}{c^3 \varepsilon_o}} \cos\dfrac{\pi}{3} \, \text{sen} \, 2\pi f \left(\dfrac{x}{c} - t\right) \end{cases}$$

b) $\dot{c}\vec{S}, U_v, |\overline{\vec{S}}|; \vec{U}_v$?

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 \operatorname{sen}(Kx - \omega t) \cdot B_0 \operatorname{sen}(Kx - \omega t)\vec{i}}{\mu_0} = \frac{E_0 \cdot B_0 \operatorname{sen}^2(Kx - \omega t)\vec{i}}{\mu_0}$$

$$= \frac{E_0 E_0}{c\mu_0} \operatorname{sen}^2(Kx - \omega t)\vec{i} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \operatorname{sen}^2(Kx - \omega t)\vec{i} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \operatorname{sen}^2 2\pi f\left(\frac{x}{c} - t\right)\vec{i} =$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{I_0 2}{c\varepsilon_0}} \qquad = \frac{I_0 2}{c^2 \mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{sen}^2 2\pi f\left(\frac{x}{c} - t\right)\vec{i} = \frac{I_0 \cdot 2}{\cancel{c^2} \frac{\cancel{\varepsilon_0}}{\cancel{\varepsilon_0 c^2}}} \operatorname{sen}^2 2\pi f\left(\frac{x}{c} - t\right)\vec{i} =$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$$

$$= 2 I_0 \operatorname{sen}^2 2\pi f\left(\frac{x}{c} - t\right)\vec{i}$$

$$U_v = \frac{I}{c} = \frac{|\vec{S}|}{c} = \frac{2 I_0 \operatorname{sen}^2 2\pi f\left(\frac{x}{c} - t\right)}{c}$$

$$|\overline{\vec{S}}| = 2 I_0 \frac{1}{2} = I_0$$

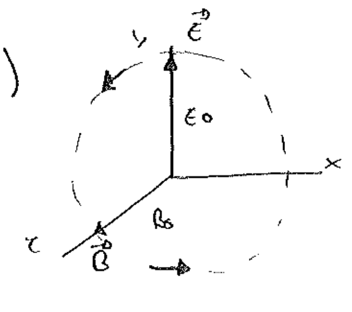
$$\vec{\overline{U}}_v = \frac{2 I_0}{c} \cdot \frac{1}{2} = \frac{I_0}{c}$$

69. Onda circularmente polarizada.

$f = 25\ MHz$

$E_0 = 5 \cdot 10^{-3} V/m$

a)



$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t - Kx) = E_0 \cos 2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - Kx) = E_0 \operatorname{sen} 2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -B_0 \operatorname{sen}(\omega t - Kx) = -\frac{E_0}{c} \operatorname{sen} 2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z = B_0 \cos(\omega t - Kx) = \frac{E_0}{c} \cos 2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

b) $P = I \cdot A \Rightarrow \overline{P} = \overline{I} \cdot A$

$$I = |\vec{S}| = \frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{\mu_0} = \frac{E_0 \cdot \frac{E_0}{c}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \Rightarrow \overline{I} = \frac{E_0^2}{c\mu_0}$$ por ser circularmente polarizada.

$$\overline{P} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cdot A = \frac{(5 \cdot 10^{-3})^2}{3 \cdot 10^8 \cdot 4\pi 10^{-7}} \cdot 2 = 1{,}33 \cdot 10^{-7}\ \omega$$

c) $\overline{F} = \overline{P_r} \cdot A = \frac{E_0^2}{c^2 \mu_0} \cdot A$ //

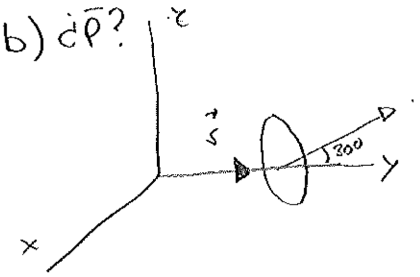
$\overline{P_r} = \frac{\overline{I}}{c}$

70. $\vec{S} = 3 \cdot 10^{-2} \cos^2 (\omega t - ky) \vec{u_y} \; W m^{-2}$

a) ¿$\overline{I}$?

$|\vec{S}| = I \Rightarrow \overline{|\vec{S}|} = \overline{I} = 3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}015 \; W/m^2$

b) ¿$\overline{P}$?



$P = I \cdot A$

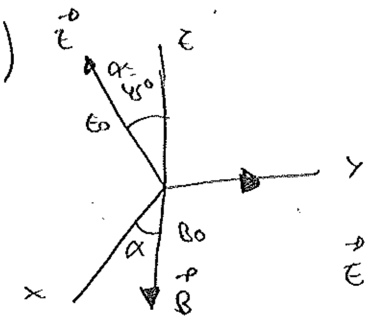
$\overline{P} = \overline{I} \cdot A = \overline{I} \cdot \pi r^2 \cdot \cos\alpha = 0{,}015 \cdot \pi \cdot 0{,}2^2 \cos 30 =$

$= 1{,}63 \cdot 10^{-3} \; W$

c) ¿U_v?

$U_v = \frac{I}{c} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cos^2 (\omega t - ky)}{3 \cdot 10^8} = 10^{-10} \cos^2 (\omega t - ky) \; J/m^3$

d)

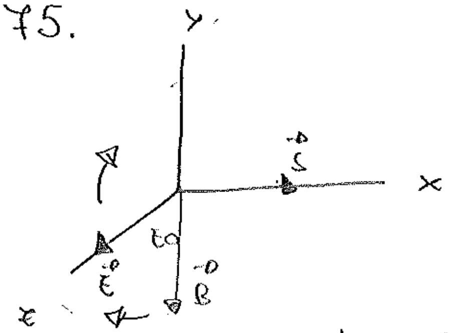


$t = 0 \begin{cases} E_x > 0 \\ E_z > 0 \end{cases}$

$\vec{E} = E_0 \cdot \text{sen}\alpha \cos (\omega t - ky) \vec{i} + E_0 \cos\alpha \cos (\omega t - ky) \vec{k}$

e) $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos\alpha \cdot \cos (\omega t - ky) \vec{i} - \frac{E_0}{c} \text{sen}\alpha \cos (\omega t - ky) \vec{k}$

75.



¿$\vec{E}, \vec{B}, \vec{S}$?

a) Linealmente polarizada:

$$\vec{E} = E_0 \cos(Kx - \omega t)(\vec{k}) = E_0 \cos 2\pi f\left(\frac{x}{c} - t\right)(\vec{k})$$

$$\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)(-\vec{j}) = \frac{E_0}{c} \cos 2\pi f\left(\frac{x}{c} - t\right)(-\vec{j})$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos 2\pi f\left(\frac{x}{c} - t\right)(\vec{i})$$

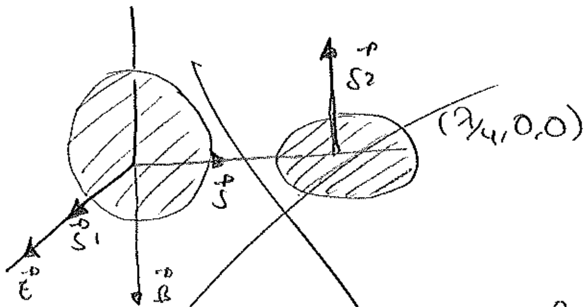
b) Circularmente polarizada:

$$\vec{E} = E_0 \cos(Kx - \omega t)\vec{k} + E_0 \operatorname{sen}(Kx - \omega t)\vec{j}$$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(Kx - \omega t)\vec{j} + E_0 \operatorname{sen}(Kx - \omega t)\vec{k}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0}\vec{i}$$

c)



$$\mathcal{E}_{1p} = \frac{-d}{dt} B_{1p} \cdot S_1 = \frac{-d}{dt} \cdot \cancel{B_{1x}} \cdot S_1 = 0$$

$$\mathcal{E}_{2p} = \frac{-d}{dt} \cdot B_{2p_y} S_2 =$$

4.

$f = 44 \, MHz$

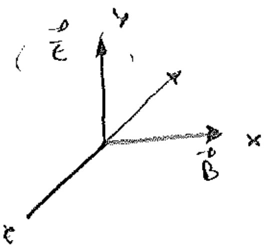
$\vec{S} = -10^{-4} \, \vec{k} \;\; W/m^2$

a) $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \Rightarrow c^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = \dfrac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} (3 \cdot 10^8)^2} = 8{,}84 \cdot 10^{-12}$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = 8{,}84 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}89 = 2{,}56 \cdot 10^{-11}$

$v^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon} \Rightarrow v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}56 \cdot 10^{-11}}} = 1{,}76 \cdot 10^8 \, m/s$

$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{1{,}76 \cdot 10^8}{44 \cdot 10^6} = 4 \, m$

b) 

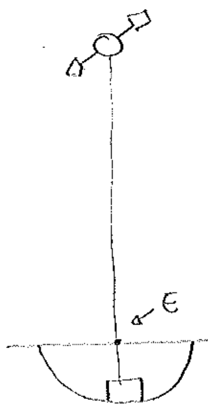
$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \\ E_z = 0 \end{cases}$

c) $\vec{B} = \begin{cases} B_x = B_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) = \dfrac{E_0}{c} \operatorname{sen}(\omega t - kx) \\ B_y = 0 \\ B_z = 0 \end{cases}$

d) $\varepsilon = -\dfrac{d \phi_m}{dt} = -\dfrac{d B \cdot S N}{dt} = -NS \dfrac{\partial B}{dt} = -56 \cdot 10^{-4} (4x + 4y + 4z) \cdot \dfrac{E_0}{c} \omega \cos(\omega t - kx) \vec{i}$

JUNIO 2009 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

4.



$E_0 = 10^{-3}$ V/m

$f = 15$ GHz

$n = 1{,}35$

Linealmente polarizada

a) $\vec{S} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0 sen(kx-\omega t)\cdot B_0 sen(kx-\omega t)}{\mu_0} = \dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} sen^2(kx-\omega t)$

$S_0 = \dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} = \dfrac{E_0 E_0}{c\mu_0} = \dfrac{E_0^2}{c\mu_0} = \dfrac{(10^{-3})^2}{3\cdot10^8\cdot 4\pi\cdot10^{-7}} = 2{,}65\cdot10^{-9}$ w/m²

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{\frac{c}{f}} = \dfrac{2\pi f}{c} = \dfrac{2\pi\cdot15\cdot10^9}{3\cdot10^8} = 100\pi$

$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot15\cdot10^9 = 9{,}42\cdot10^{10}$ rad/s

$\vec{S} = 2{,}65\cdot10^{-9}\cdot sen^2(100\pi x - 9{,}42\cdot10^{10} t)$

b) Atenuación 5dB

Al ser linealmente polarizada:

$I = \dfrac{1}{2}S_0 = \dfrac{1}{2}\cdot2{,}65\cdot10^{-9} = 1{,}325\cdot10^{-9}$ w/m²

$S = 10\log\dfrac{I_{antes}}{I_{después}} = 10\cdot\log\dfrac{\cancel{\frac{1}{2}}S_0}{\cancel{\frac{1}{2}}S_0'} = 10\log\dfrac{S_0}{S_0'}$

$5 = 10\log\dfrac{S_0}{S_0'} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \log\dfrac{S_0}{S_0'}$

$10^{1/2} = \dfrac{S_0}{S_0'} \Rightarrow S_0' = \dfrac{S_0}{\sqrt{10}} = 8{,}38\cdot10^{-10}$ w/m²

c) $5 = 10\log\dfrac{\cancel{\frac{1}{2}}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}}{\cancel{\frac{1}{2}}\frac{E_0'^2}{\mu_0\frac{c}{n}}} = 10\log\dfrac{E_0^2}{E_0'^2 n} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \log\dfrac{E_0^2}{E_0'^2 n}$

$10^{1/2} = \dfrac{E_0^2}{E_0'^2 n} \Rightarrow E_0' = \sqrt{\dfrac{E_0^2}{\sqrt{10}\,n}} = 4{,}83\cdot10^{-4}$ V/m

$B_0' = \dfrac{E_0'}{\frac{c}{n}} = \dfrac{4{,}83\cdot10^{-4}\cdot1{,}35}{3\cdot10^8} = 2{,}17\cdot10^{-12}$ T

SEPTIEMBRE 2009 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

4. $S_{espejos} = 0,25 \cdot 1000 = 250 m^2$

$I_N = 500\ W/m^2$

eficiencia: 80%

$S_{alibitro} = 0,75 m^2$

a) $P = I_N \cdot S_{espejos} = 500 \cdot 250 = 1,25 \cdot 10^5 W \cdot 0,08 = 1 \cdot 10^5 W$

$I_A = \frac{P}{S_{albitro}} = \frac{1 \cdot 10^5}{0,75} = 1,33 \cdot 10^5\ W/m^2$

FEBRERO 1996

2) $n = 1{,}4$

$f = 5{,}5 \cdot 10^{14}\ Hz$

$I = 3{,}6 \cdot 10^{-8}\ W/m^2$

a) ¿$\vec{k}$?

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}4} = 2{,}14 \cdot 10^8\ m/s$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(-\vec{u_y}) = \frac{2\pi \cdot f}{v}(-\vec{u_y}) = \frac{2\pi \cdot 5{,}5 \cdot 10^{14}}{2{,}14 \cdot 10^8}(-\vec{u_y}) = -1{,}61 \cdot 10^7\ \vec{u_y}\ m^{-1}$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

b) $$n = \frac{c}{v} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cancel{\mu_0}}}}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 n^2$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\mu c^2} \cdot n^2 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} \cdot 1{,}4^2 = 1{,}73 \cdot 10^{-11}\ N^{-1} m^{-2} C^{-2}$$

c) $\vec{E} = E_0\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$

$$\left.\begin{array}{l} I = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu} \\ E_0 = c B_0 \end{array}\right\} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\frac{E_0 \cdot E_0}{\mu c} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\frac{\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_0^2$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{E_0}{c}$$

$$E_0^2 = I \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$E_0 = \sqrt{I \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} = 4{,}4 \cdot 10^{-3}\ V/m$$

$$B_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{4{,}4 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}73 \cdot 10^{-11}}} = 9{,}44 \cdot 10^5\ T$$

JUNIO 2000

4) $\vec{E} = (3{,}4406\vec{u_x} + 2{,}4091\vec{u_y}) \cos[2\pi(3{,}8240x - 5{,}4613y - 10^9t)] \cdot 10^{-4}$

$E_0 = (3.4406\,\vec{u_x} + 2{,}4091\vec{u_y}) \cdot 10^{-4}$

a) ¿f?

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 10^9 \cdot 2\pi \\ \omega = 2\pi f \end{array}\right\} f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10^9 2\pi}{2\pi} = 10^9\ Hz$$

b) ¿$\vec{k}$?

$\vec{k} = 2\pi(3{,}840x - 5{,}4613y) = 24{,}13\vec{u_x} - 34{,}31\vec{u_y}\ m^{-1}$

c) ¿λ?

$|\vec{k}| = \sqrt{24{,}13^2 + 34{,}31^2} = 42\ m^{-1}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{42} = 0{,}15\ m$

d) el definido por $\vec{E}$ y $\vec{k}$:

$$\vec{E} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ 3.4406 & 2{,}4091 & 0 \\ 24{,}13 & -34{,}31 & 0 \end{vmatrix} = -176{,}2\,\vec{u_z}$$

Sentido negativo del eje z y en el plano XY.

e) $v = \frac{c}{n} \Rightarrow n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 10^8} = 2$ //

$v = \lambda \cdot f = 0{,}15 \cdot 10^9 = 1{,}5 \cdot 10^8\ m/s$

d) $n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{K_e} \Rightarrow K_e = n^2 = 4$ //

SEPTIEMBRE 2000

4) $\vec{E} = E_0 \cos\left[2\pi \cdot 3\cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right] (\vec{i} - \vec{j})$

$c = 3\cdot 10^8 \, m/s$

$E_0 = 0{,}1 \, \mu V/m$

a) $\left.\begin{array}{l} \omega = 2\pi\, 3\cdot 10^7 \\ \omega = 2\pi f \end{array}\right\} f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\cancel{2\pi} \cdot 3\cdot 10^7}{\cancel{2\pi}} = 3\cdot 10^7 \, Hz$

$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^7} = 10 \, m$

b) $B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{0{,}1\cdot 10^{-6}}{3\cdot 10^8} = 3{,}33\cdot 10^{-16} \, T$

$\vec{B} = B_0 \cos\left[2\pi\, 3\cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right] (\vec{i} + \vec{j})$

$\vec{B} = 3{,}33\cdot 10^{-16} \cos\left[2\pi \cdot 3\cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right] (\vec{i} + \vec{j}) \, T$

c) $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{6{,}66\cdot 10^{-23} \cos^2\left[2\pi 3\cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{k}}{4\pi\cdot 10^{-7}} = 5{,}3\cdot 10^{-17} \cos^2\left[2\pi \cdot 3\cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{k}$

$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}1\cdot 10^{-6} x & -0{,}1\cdot 10^{-6} x & 0 \\ 3{,}33\cdot 10^{-16} x & 3{,}33\cdot 10^{-16} x & \end{vmatrix} = 6{,}66\cdot 10^{-23} \cdot \cos^2\left[2\pi\, 3\cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{k}$

$I = \overline{|\vec{S}|} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \; 2{,}65\cdot 10^{-17} \, W/m^2$

JUNIO 2001

2)

$n = 1,45$; $f = 10^5$ Hz ; $E_0 = 0,5 \cdot 10^{-6}$ V/m $\mu_0 \cdot c = 120\pi$

$\vec{E}_1 = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{j}$

$\vec{E}_2 = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\vec{j}$

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0(\cos(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(kx - \omega t))\vec{j}$

$\left.\begin{array}{l} f = 10^5 \\ \omega = 2\pi f \end{array}\right\} \omega = 2\pi \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^5 \pi$

$\omega = k \cdot v \Rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{\frac{c}{n}} = \frac{2 \cdot 10^5 \pi \cdot 1,45}{3 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^{-3}\ m^{-1}$

$\vec{E} = E_0($

JUNIO 2002

4) $\vec{\mathcal{E}} = 1{,}5 \operatorname{sen}\left[2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}\left(t - \frac{z}{c}\right)\right](\hat{i}+\hat{j}) \cdot 10^{-3} \, V/m$

a) $I = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_0 B_0}{\mu_0}$ (incidente)

$I' = \frac{\mathcal{E}_0' B_0'}{\mu_0}$ (transmitida)

$I' = 0{,}6 \cdot I = 0{,}6 \cdot \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_0 B_0}{\mu_0}$

$$0{,}3 \frac{\mathcal{E}_0 B_0}{\cancel{\mu_0}} = \frac{\mathcal{E}_0' B_0'}{\cancel{\mu_0}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3\,\mathcal{E}_0 B_0 = \mathcal{E}_0' B_0' \\ B_0' = \frac{\mathcal{E}_0'}{c} \\ B_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{c} \end{array}\right\} \quad 0{,}3 \frac{\mathcal{E}_0^2}{\cancel{c}} = \frac{\mathcal{E}_0'^2}{\cancel{c}} \Rightarrow \mathcal{E}_0' = \sqrt{0{,}3} \cdot \mathcal{E}_0 = \sqrt{0{,}3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} = 8{,}22 \cdot 10^{-4} \, V/m$$

$$B_0' = \frac{8{,}22 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{8}} = 2{,}74 \cdot 10^{-12} \, T$$

$$B_0 = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{8}} = 5 \cdot 10^{-12} \, T$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x' = 8{,}22 \cdot 10^{-4} \cos\left(2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \; V/m \\ \mathcal{E}_y' = 8{,}22 \cdot 10^{-4} \operatorname{sen}\left(2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \; V/m \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x' = -2{,}74 \cdot 10^{-12} \operatorname{sen}\left(2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \; T \\ B_y' = 2{,}74 \cdot 10^{-12} \cos\left(2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \; T \end{cases}$$

b) $|\vec{S}| = \frac{\mathcal{E}_0' \cdot B_0'}{\mu_0} = \frac{8{,}22 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}74 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1{,}79 \cdot 10^{-9} \, W/m^2$

c) $U_V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{\mathcal{E}^2}{c^2 2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{\mathcal{E}^2}{\frac{1}{\cancel{\mu_0}\varepsilon_0} \cdot 2\cancel{\mu_0}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathcal{E}^2 = \varepsilon_0 \mathcal{E}^2 =$

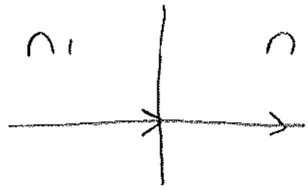
$$= \varepsilon_0 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-6} \operatorname{sen}^2\left[2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \frac{J}{m^3}$$

SEPTIEMBRE 2002

4)
$f = 3\cdot10^{14}\ Hz$

$E_0 = 5\cdot10^{-3}\ V$

$n_1 = 2\ ;\ n_2 = 1{,}5$



a) $v_1 = \dfrac{c}{n_1} = \dfrac{3\cdot10^8}{2} = 1{,}5\cdot10^8\ m/s\ ;\ v_2 = \dfrac{c}{n_2} = \dfrac{3\cdot10^8}{1{,}5} = 2\cdot10^8\ m/s$

$\lambda_1 = \dfrac{v_1}{f} = \dfrac{1{,}5\cdot10^8}{3\cdot10^{14}} = 5\cdot10^{-7}\ m \qquad \lambda_2 = \dfrac{v_2}{f} = \dfrac{2\cdot10^8}{3\cdot10^{14}} = 6{,}67\cdot10^{-7}\ m$

c), b) n_1:

$* \ \vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\vec{j} = 5\cdot10^{-3}\operatorname{sen}(1{,}26\cdot10^7 x - 6\pi\cdot10^{14} t)\,\vec{j}$

$k_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_1} = \dfrac{2\pi}{5\cdot10^{-7}} = 1{,}26\cdot10^7\ m^{-1}$

$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot3\cdot10^{14} = 6\pi\cdot10^{14}\ rad/s$

$B_0 = \dfrac{E_0}{v_1} = \dfrac{5\cdot10^{-3}}{1{,}5\cdot10^8} = 3{,}33\cdot10^{-11}\ T$

$* \ \vec{B} = 3{,}33\cdot10^{-11}\operatorname{sen}(1{,}26\cdot10^7 x - 6\pi\cdot10^{14} t)\,\vec{k}$

n_2:

$k_2 = \dfrac{2\pi}{6{,}67\cdot10^{-7}} = 9{,}42\cdot10^6\ m^{-1} \qquad B_0 = \dfrac{E_0}{v_2} = \dfrac{5\cdot10^{-3}}{2\cdot10^8} =$

$\vec{E} = 5\cdot10^{-3}\operatorname{sen}(9{,}42\cdot10^6 x - 6\pi\cdot10^{14} t)\,\vec{j}$

$\vec{B} = 2{,}5\cdot10^{-11}\operatorname{sen}(9{,}42\cdot10^6 x - 6\pi\cdot10^{14} t)\,\vec{k}$

n_1:

$\vec{S} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0 B_0 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)\,\vec{i}}{\mu_0} = 1{,}32\cdot10^{-7}\operatorname{sen}^2(1{,}26\cdot10^7 x - 6\pi\cdot10^{14} t)\,\vec{i}$

n_2:

$\vec{S} = 9{,}95\cdot10^{-8}\operatorname{sen}^2(9{,}42\cdot10^6 x - 6\pi\cdot10^{14} t)\,\vec{i}$

JUNIO 2003

4) $\varepsilon_r = 2{,}5$

$\vec{B}_1 = 6 \cdot 10^{-12} [\operatorname{sen}(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)\vec{u}_x + \cos(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)\vec{u}_z]\ T$

$f = 82 \cdot 10^6\ Hz$ $\qquad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $\qquad \mu = \mu_r \mu_0 \rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r$

a) $$n = \frac{c}{v} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \\ \mu_r = 1 \end{array}\right\} n = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$$

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}58} = 1{,}9 \cdot 10^8\ m/s$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 82 \cdot 10^6 = 164\pi \cdot 10^6$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{164\pi \cdot 10^6}{1{,}9 \cdot 10^8} = 2{,}71\ m^{-1}$$

$$\vec{k}_1 = k \cdot \vec{u}_1 = 2{,}71 \cdot \frac{\vec{u}_y + \vec{u}_z}{\sqrt{2}}\ m^{-1}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{u}_y - \vec{u}_z}{\sqrt{2}}$$

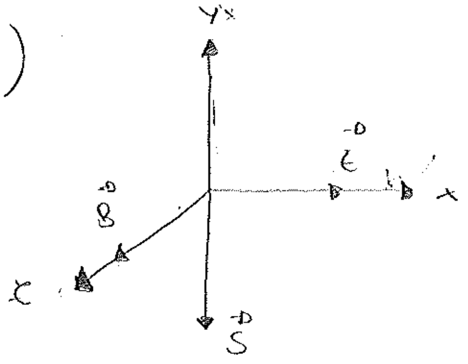
b) $$E_1 = v \cdot B_1 = 1{,}9 \cdot 10^8 \cdot 6 \cdot 10^{-12} = 1{,}14 \cdot 10^{-3}\ V/m$$

$$\vec{E}_1 = 1{,}14 \cdot 10^{-3} [\operatorname{sen}(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)\vec{u}_x + \cos(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)\vec{u}_2]\ V/m$$

$$\vec{S}_1 = \frac{\vec{E} \times B}{\mu_0} = \frac{E_1 B_1 \vec{i}}{\mu_0} = 5{,}44 \cdot 10^{-9} \frac{u_y + u_z}{\sqrt{2}}\ W/m^2$$

JUNIO 2005

4)



$f = 5{,}2\cdot10^{14}$ Hz
$I = 7\cdot10^{-2}$ W/m²
$n = 1{,}65$
$A = 4{,}4\cdot10^{-5}$ m²
$\frac{1}{\varepsilon_0} = 4\pi\cdot9\cdot10^{9}$
$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$

a, b, c) $\omega = 2\pi\cdot5{,}2\cdot10^{14} = 10{,}4\pi\cdot10^{14}$ rad/s

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3\cdot10^8}{1{,}65} = 1{,}81\cdot10^8 \text{ m/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{10{,}4\pi\cdot10^{14}}{1{,}81\cdot10^{8}} = 1{,}81\cdot10^{7} \text{ m}^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_0 = B_0\cdot v \\ I = \frac{1}{2}\frac{E_0\cdot B_0}{\mu_0} \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_0 = B_0\cdot1{,}81\cdot10^8 \rightarrow B_0 = \frac{E_0}{1{,}81\cdot10^8} \\ E_0 B_0 = 1{,}76\cdot10^{-7} \end{array}$$

$$\frac{E_0^2}{1{,}81\cdot10^8} = 1{,}76\cdot10^{-7} \Rightarrow E_0^2 = 31{,}84$$

$E_0 = 5{,}64$ V/m

$B_0 = 3{,}12\cdot10^{-8}$ T

$$\vec{E} = 5{,}64\,[\text{sen}(1{,}81\cdot10^{7}x - 10{,}4\pi\cdot10^{14}t)]\,\vec{i} \text{ V/m}$$

$$\vec{B} = 3{,}12\cdot10^{-8}\,[\text{sen}(1{,}81\cdot10^{7}x - 10{,}4\pi\cdot10^{14}t)]\,\vec{k} \text{ T}$$

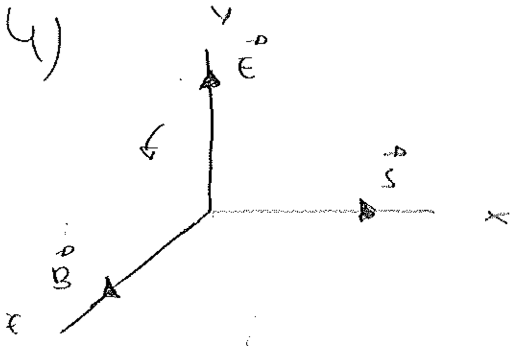
$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{-5{,}64\cdot3{,}12\cdot10^{-8}}{4\pi\cdot10^{-7}}\cdot\text{sen}^2(1{,}81\cdot10^{7}x - 10{,}4\pi\cdot10^{14}t)\,\vec{j} =$$

$$= -14\cdot10^{-2}\,\text{sen}^2(1{,}81\cdot10^{7}x - 10{,}4\pi\cdot10^{14}t)\,\vec{j}$$

d) $u_v = \frac{I}{v} = \frac{I}{\frac{c}{n}} = \frac{nI}{c} = \frac{1{,}65 \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{8}} = 3.85 \cdot 10^{-10}\ J/m^3$

SEPTIEMBRE 2005

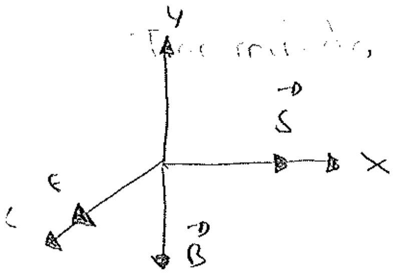
4)



Incidente:

$$\vec{E} = \begin{cases} E_y = E_0 \cos(Kx - \omega t) \\ E_z = E_0 \operatorname{sen}(Kx - \omega t) \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} B_z = \frac{E_0}{c} \cos(Kx - \omega t) \\ B_y = -\frac{E_0}{c} \operatorname{sen}(Kx - \omega t) \end{cases}$$



$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(Kx - \omega t)\, \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \operatorname{sen}(Kx - \omega t)\, \vec{u}_y$$

$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \\ B_0 = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\, E_0 \end{array}\right\} \quad I = \frac{E_0^2 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{I \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$$

$$B_0 = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 I \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$$

b) $I_i = I$ //

$I_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} I$

$I_t = I \operatorname{sen}^2(Kx - \omega t)$ //

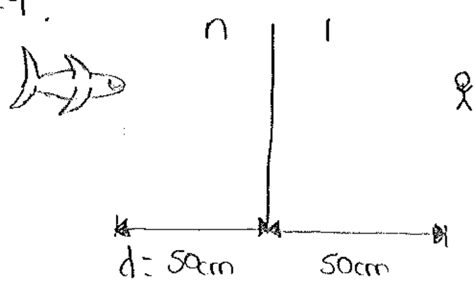
$P = I\, a = (I_i - I_t)\, a$ //

EJERCICIOS

ÓPTICA

GEOMÉTRICA

79.



En un dioptrio:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

a) Distancia niño ve al tiburón:

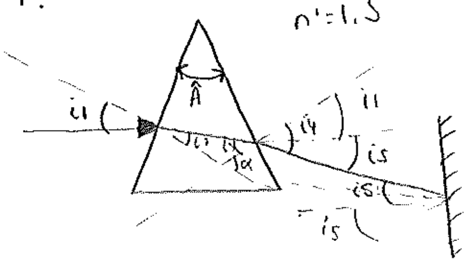
$$\frac{n}{d} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1-n}{\cancel{\infty}}\,{}^{0} \Rightarrow \frac{n}{d} = -\frac{1}{s_1'} \Rightarrow s_1' = -\frac{d}{n} = -\frac{50}{1{,}33} = -37{,}6\ \text{cm}$$

b) Distancia tiburón ve a niño:

$$\frac{1}{d} + \frac{n}{s_2'} = \frac{n-1}{\cancel{\infty}}\,{}^{0} \Rightarrow \frac{1}{d} = -\frac{n}{s_2'} \Rightarrow s_2' = -n \cdot d = -1{,}33 \cdot 50 = -66{,}5\text{cm}$$

81.

$\hat{A} = 8^\circ$
$n' = 1{,}5$



$$\left.\begin{array}{l} i_1 = \dfrac{\hat{A}}{2} = 4^\circ \\ \operatorname{sen} i_1 = n \operatorname{sen} i_2 \end{array}\right\} i_2 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{n} \operatorname{sen} 4^\circ\right) = 2{,}66^\circ$$

$$i_2 + i_3 + (180 - \alpha) = 180$$

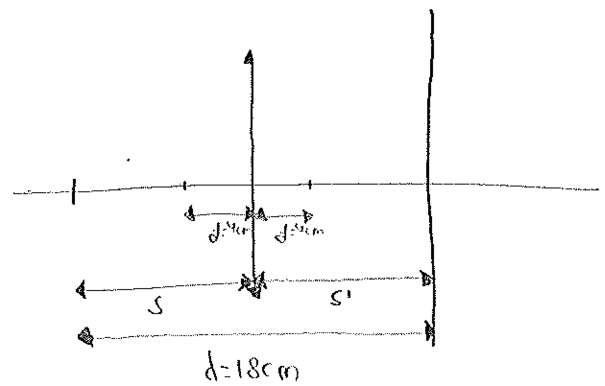
$$i_3 = 180 - 180 + \alpha - i_2 = 8 - 2{,}66 = 5{,}34^\circ$$

$$n \operatorname{sen} i_3 = \operatorname{sen} i_4 \Rightarrow i_4 = \operatorname{arcsen}(n \operatorname{sen} 5{,}34) = 8^\circ$$

$$i_5 = i_4 - i_1 = 8 - 4 = 4^\circ$$

$\delta = 2^\circ \leftarrow$ Es lo que tiene que girar el espejo.

85.



a) $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{1}{f}$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{d-s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{d-s+s}{sd-s^2} = \frac{1}{f}$$

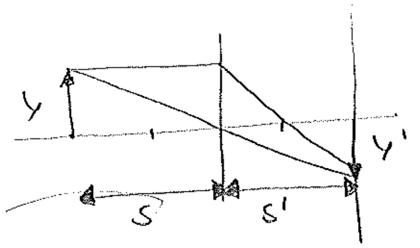
$$df = sd - s^2$$

$$s^2: \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4df}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 16 \cdot 18}}{2} =$$

$$= \begin{cases} 12 \rightarrow s = 12 \rightarrow s' = 6 \\ 6 \rightarrow s = 6 \rightarrow s' = 12 \end{cases}$$

b) $A = \frac{y'}{y}$

$$\frac{y}{s} = \frac{-y'}{s'} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{12}{6} = 2 \end{cases}$$

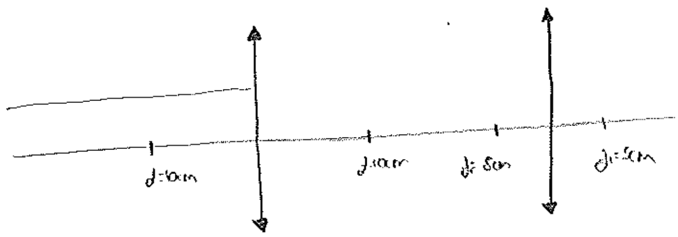


Es una imagen real e invertida.

c) $A_2 = 2 = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \Rightarrow s' = -2s$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{-2s} = \frac{1}{d} \Rightarrow s = \frac{d}{2} = 2cm$$

86.



JUNIO 2009 ÓPTICA GEOMÉTRICA

5º

$y = 5cm$

$r_1 = 100cm$

$s = 20cm$

$P_2 = 10$ dioptrías

II.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r_1} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{s}$$

$$s' = \frac{1}{\frac{2}{r_1} - \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{2}{-100} - \frac{1}{20}} = -14{,}3\ cm$$

$$P = \frac{1}{d} \Rightarrow 10 = \frac{1}{d}$$

$$d = 0{,}1m = 10cm$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s''} = \frac{1}{d}$$

$$\frac{1}{50+14{,}3} + \frac{1}{s''} = \frac{1}{10} \Rightarrow s'' = \frac{1}{\frac{1}{10} - \frac{1}{64{,}3}} = 11{,}84\ cm$$

III.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

$$y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{-14{,}3}{20} \cdot 5 = 3{,}6\ cm$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s''}{s}$$

$$y' = -\frac{s''}{s}y = -\frac{11{,}84}{64{,}3} \cdot (3{,}6) = -0{,}66\ cm$$

FEBRERO 2009 ÓPTICA GEOMÉTRICA

5.

1) A: Espejo esférico convexo

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s''} = \frac{n-1}{r}$$

$$\frac{1}{0{,}25} + \frac{1{,}35}{s''} = \frac{1{,}35-1}{0{,}2}$$

$$\frac{1{,}35}{s''} = -2{,}25 \Rightarrow s'' = \frac{1{,}35}{-2{,}25} = -0{,}6 \text{ m}$$

$$\frac{1{,}35}{0{,}6+0{,}12} + \frac{1}{s'} = \frac{1-1{,}35}{0{,}15}$$

$$s' = -0{,}23 \text{ m}$$

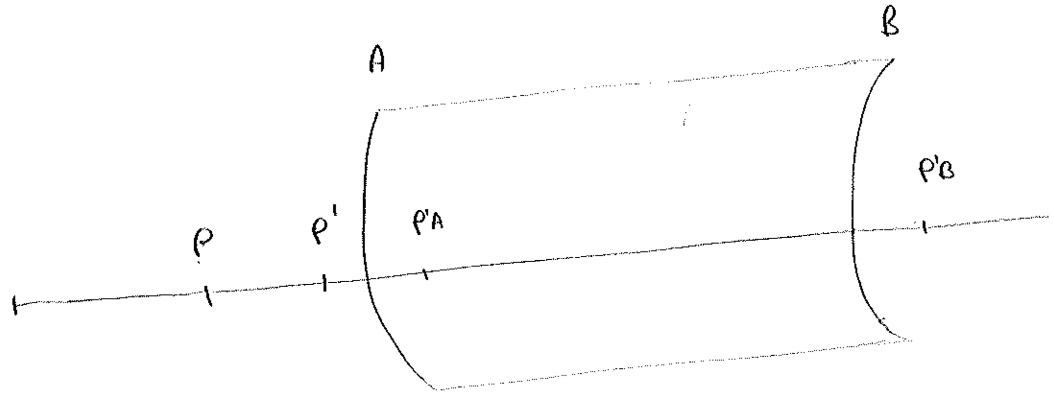
2) $$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'_A} = \frac{1}{\frac{r_A}{2}} \Rightarrow \frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{s'_A} = \frac{2}{-0{,}2}$$

$$s'_A = 0{,}07 \text{ m}$$

3) $$\frac{1}{s'_A+d} + \frac{1}{s'_B} = \frac{2}{r_B} \Rightarrow \frac{1}{0{,}19} + \frac{1}{s'_B} = \frac{2}{0{,}15}$$

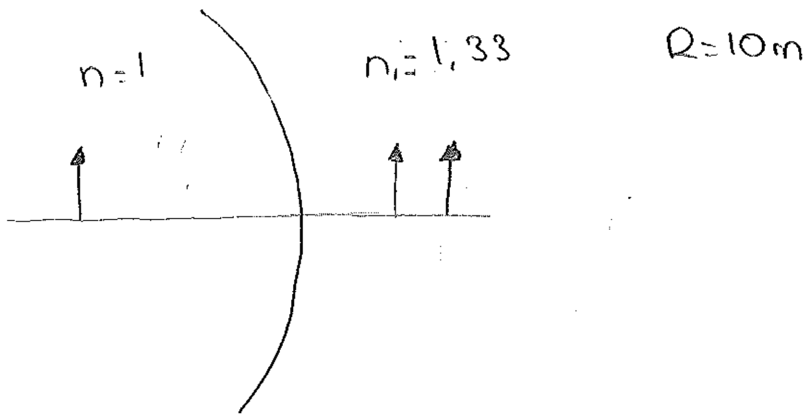
$$s'_B = -0{,}05 \text{ m}$$

4



SEPTIEMBRE 2006

5)



$$\frac{n_1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n - n_1}{R}$$

$$\frac{1{,}33}{-1} + \frac{1}{s'} = \frac{1-1{,}33}{-10} \Rightarrow \frac{1}{s'} = 1{,}363$$

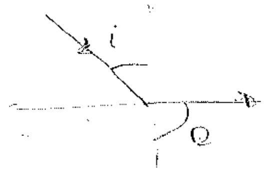
$$s' = 0{,}73 \text{ m}$$

$$m = -\frac{n s'}{n_1 s} = \frac{-0{,}73}{1{,}33 \cdot (-1)} = 0{,}55$$

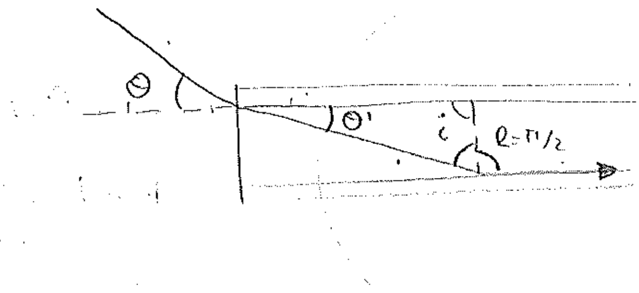
Vertical = 0,1 · 0,55 = 0,055 m

Horizontal = 0,3 · 0,55 = 0,165 m

SEPTIEMBRE 2005



5) a)



Reflexión total →

• $n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} \ell$

$\operatorname{sen} i = \frac{1,515}{1,6} = 0.946875 \Rightarrow i = 71,24°$

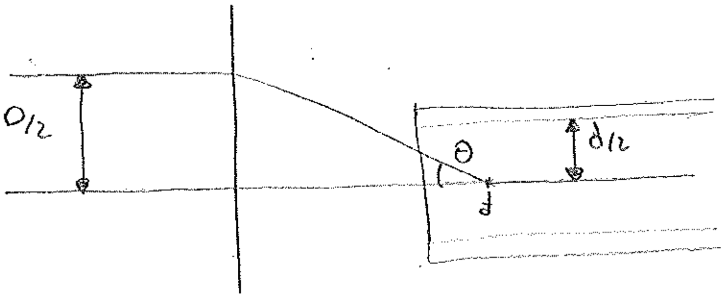
• $\theta' = 90 - 71,24 = 18,76°$

• $n \operatorname{sen} \theta = n_1 \operatorname{sen} \theta'$

$\operatorname{sen} \theta = n_1 \operatorname{sen} \theta' = 1,6 \cdot \operatorname{sen} 18,76 = 0,51$

$\theta = 30,97°$

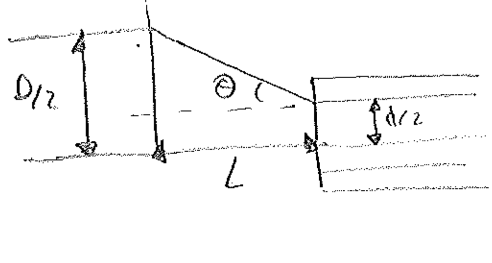
b)



$D = 0,12 \, m$
$d = 3 \cdot 10^{-3} \, m$

$tg\theta = \frac{D/2}{d} \Rightarrow d = \frac{D/2}{tg\theta} = \frac{0.06}{0.6} = 0,1 \, m$

$P = \frac{1}{d} = \frac{1}{0,1} = 10$ dioptrías.



$tg\theta = \frac{D/2 - d/2}{L} \Rightarrow L = \frac{D/2 - d/2}{tg\theta}$

$L = \frac{0,06 - 1,5 \cdot 10^{-3}}{0,6} = 0,0975$

SEPTIEMBRE 2003

5)

$R_1 = 25\,cm$

$R_2 = 50\,cm$

$\varepsilon_r = 4$

a) Es una lente convergente ya que según nos indican en la figura, f está a la izquierda de esta.

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \cancel{\varepsilon_0} \cancel{\mu_0}}{\cancel{\varepsilon_0} \cancel{\mu_0}}} = \sqrt{4} = 2$$

$$P = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (2-1)\left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{-0{,}5}\right) = 6 \text{ dioptrías}$$

$$f = \frac{1}{6} = 0{,}17\,m$$

b) $$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\cancel{\frac{1}{\infty}}^{\,0} + \frac{2}{s'} = \frac{1}{R} \Rightarrow s' = 2R$$

c) Igual que b)

JUNIO 2003

5) $P = 5 \Rightarrow f = \frac{1}{5} = 0{,}2\,m$

$s = 0{,}25$

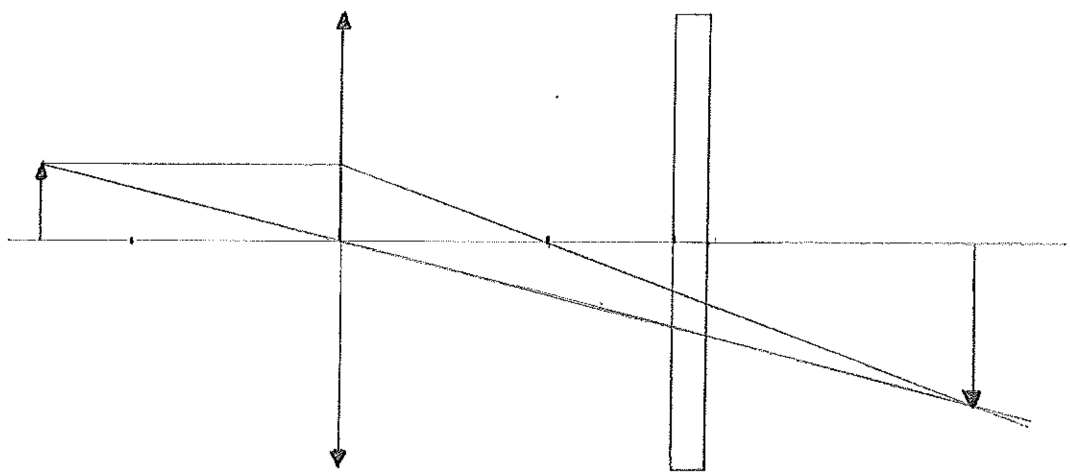
$y = 0{,}012\,m$

Por la lente:

$$\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}2} \Rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{0{,}25}} = 1\,m$$

$$y' = -y\frac{s'}{s} = -0{,}012 \cdot \frac{1}{0{,}25} = -0{,}048\,m$$

Real e invertido



c) $s = 0{,}5 + vt$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}5} - \frac{1}{0{,}5+vt}$$

$$s' = \frac{1}{\dfrac{\cancel{0{,}5}+vt-\cancel{0{,}5}}{0{,}5(0{,}5+vt)}} = \frac{0{,}25+0{,}5vt}{vt} = \frac{0{,}25}{vt}+0{,}5$$

$$v' = \frac{ds'}{dt} = \frac{-0{,}25\cancel{v}}{v^{\cancel{2}}t^2} = -\frac{0{,}25}{vt^2}$$

$$vt = s - 0{,}5$$

$$v' = -\frac{0{,}25}{(s-0{,}5)^2} \cdot v \ \text{m/s}$$

SEPTIEMBRE 2002

5)

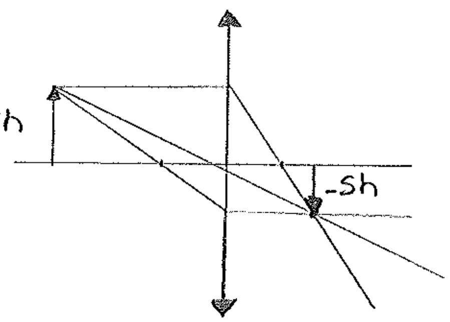
$P = 2 \Rightarrow f = \frac{1}{2} = 0{,}5\,m$

a) $s = 0.6\,m$

$$\frac{1}{0.6} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0.5} \Rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{0.5} - \frac{1}{0.6}} = 3\,m$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \Rightarrow y' = -y\frac{s'}{s} = -h \cdot \frac{3}{0.6} = -5h$$

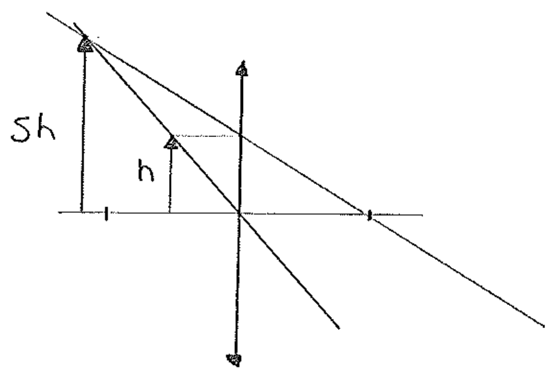
$$y' = -5h$$



b) $s = 0.4\,m$

$$\frac{1}{0.4} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0.5} \Rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{0.5} - \frac{1}{0.4}} = -2\,m$$

$$y' = -y\frac{s'}{s} = -h \cdot \frac{(-2)}{0.4} = 5h$$



JUNIO 2002

5)

$r_1 = 0{,}25\,m$

$r_2 = 0{,}5\,m$

$\varepsilon_r = 4 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 = 4 \cdot 8{,}8 \cdot 10^{-12} = 3{,}52 \cdot 10^{-11}$

a) $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

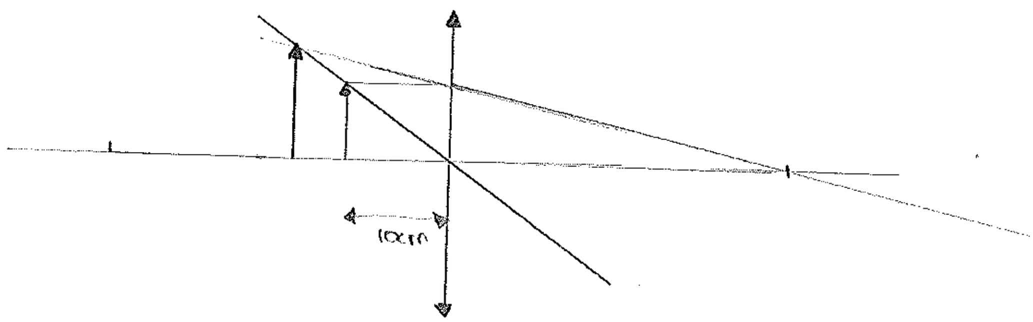
$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}52 \cdot 10^{-11} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 1{,}5 \cdot 10^{8}\,m/s$$

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 10^8} = 2$$

$$P = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$P = (2-1)\left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}5}\right) = 2 \rightarrow \text{Convergente}$$

b) $f = \frac{1}{2} = 0{,}5\,m$



c) Virtual y derecha

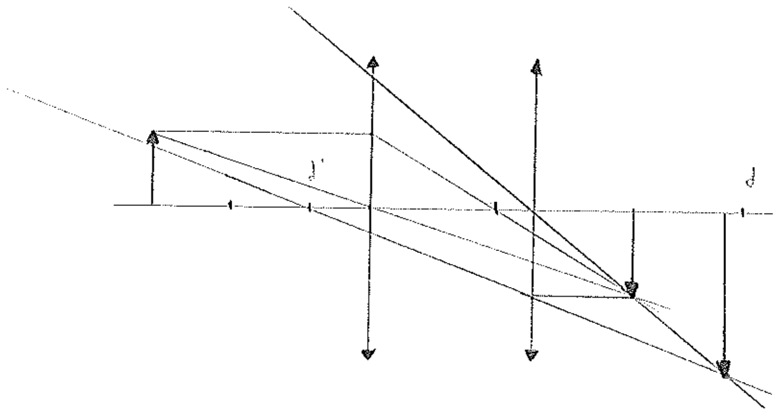
$$-\frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}5} \Rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{0{,}5} - \frac{1}{0{,}1}} = -0{,}125$$

Como espejo:

$$\frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{s'} = -\frac{1}{0{,}125} \Rightarrow s' = \frac{1}{-\frac{1}{0{,}125} - \frac{1}{0{,}1}} = -0{,}056\,m$$

c) Real e invertida.

d)



e) $P = P_1 + P_2 = 6,9 - 3,7 = 3,2 \to f = 0,3125\,m$

f) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{1}{f} \\ m = +2 = +\dfrac{s'}{s} \end{array}\right\} \to s' = 2s$

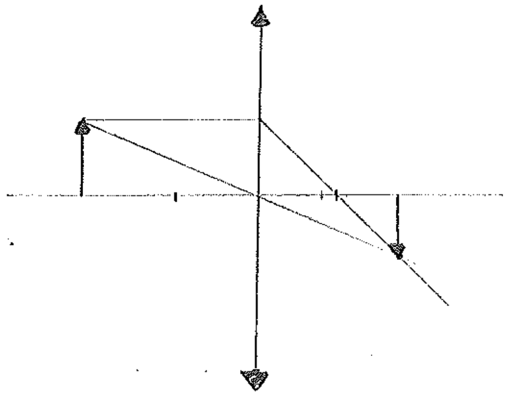
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{2s} = 3,2$$

$$\frac{3}{2s} = 3,2 \Rightarrow s = 0,46875\,m$$

$$s' = 0,9375\,m$$

h) Real e invertida

g)



JUNIO 2001

5) 1ª Lente:

 Convergente. $r_1 = 0{,}08$

$n_1 = 1{,}55$

2ª Lente:

 Divergente $r_2 = 0{,}12\ m$

$n_2 = 1{,}45$

a) Con la 1ª:

$s = 0{,}25\ m$; $\frac{1}{f} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1}\right)$

$\frac{1}{f} = (1{,}55 - 1)\left(\cancel{\frac{1}{\infty}}^{0} - \frac{1}{-0{,}08}\right) \Rightarrow f = 0{,}145\ m$

$$\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}145} \Rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{0{,}145} - \frac{1}{0{,}25}} = 0{,}345\ m$$

Con la 2ª:

Como entre los dos lentes hay una distancia de 0,18 m y la imagen de la primera es el objeto para la segunda y está a 0,345 m, estará en la parte virtual.

$\frac{1}{f} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{f} = (1{,}45 - 1)\left(\cancel{\frac{1}{\infty}}^{0} - \frac{1}{0{,}12}\right)$

$f = -0{,}27\ m$

$s = -0{,}165\ m$

$$\frac{1}{-0{,}165} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{-0{,}27} \Rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{-0{,}27} + \frac{1}{0{,}165}} = 0{,}42\ m$$

b) $$\left.\begin{aligned} m_1 &= -\frac{0{,}345}{0{,}25} = -1{,}38 \\ m_2 &= -\frac{0{,}42}{-0{,}165} = 2{,}54 \end{aligned}\right\} m_1 \cdot m_2 = -3{,}75$$

SEPTIEMBRE 2000

5)

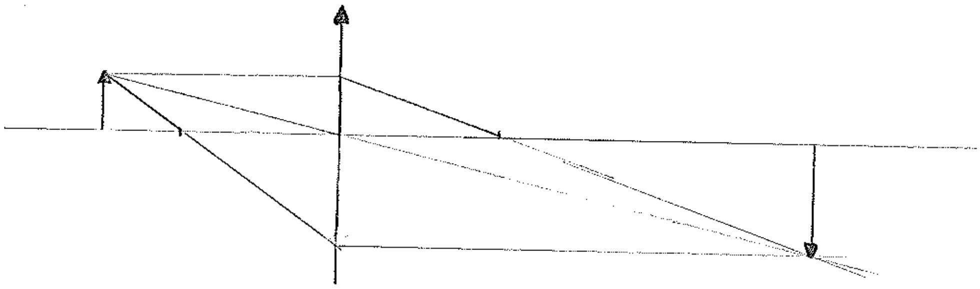
$y = 0{,}04\,m$

$P = 5$ dioptrías

$f = 0{,}2\,m$

$s = 0{,}3\,m$

a)



b) $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{0{,}3} \Rightarrow s' = 0{,}6\,m$ //

$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \Rightarrow y' = -y\frac{s'}{s} = -0{,}04 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}3} = -0{,}08\ m$

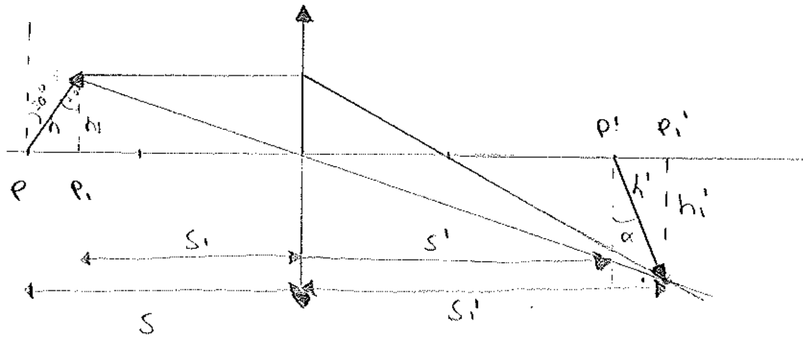
$s' = 0{,}6\,m$

$y' = 0{,}08\,m$

Real e invertida.

c) $h = 0{,}04$

$s = 0{,}3\,m$



$h_1 = h\cos 30 = 0{,}04 \cdot \cos 30 = 0{,}0346\,m$

$s_1 = s - \overline{PP_1} = s - h\,\mathrm{sen}\,30 = 0{,}3 - 0{,}04\,\mathrm{sen}\,30 = 0{,}28\,m$

$s_1' = \frac{1}{\frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{0{,}28}} = 0{,}7\,m$

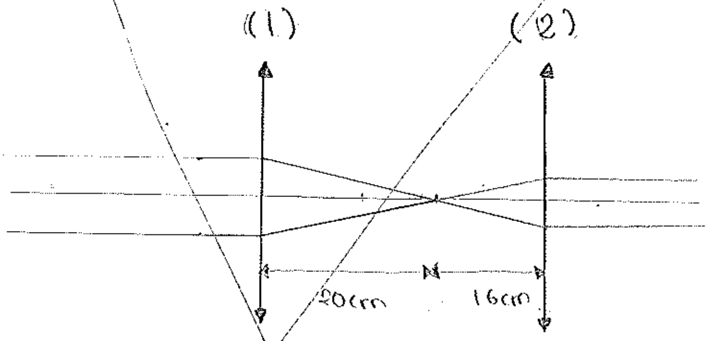
$h_1' = -h_1\frac{s_1'}{s_1} = -0{,}0346 \cdot \frac{0{,}7}{0{,}28} = -0{,}0865\,m$

$\alpha = 49{,}11°$ //

JUNIO 2000

5)

a)



$P_1 = 5$ dioptrías $\Rightarrow f_1 = \frac{1}{P_1} = \frac{1}{5} = 0{,}2m = 20cm$

$P_2 = 6{,}25$ dioptrías $\Rightarrow f_2 = \frac{1}{P_2} = \frac{1}{6{,}25} = 0{,}16m = 16cm$

b)

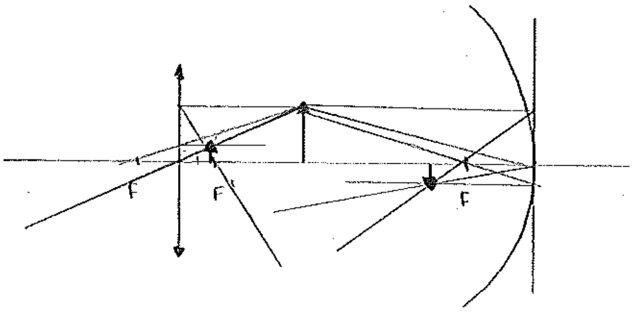
SEPTIEMBRE 1999

5) $P = 3$ dioptrias $\rightarrow P = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{3} = 0{,}33$

$r = 80cm = 0{,}8m \rightarrow f = \frac{r}{2} = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$

$y = 0{,}02\,m$

a)



b) Espejo:

$\frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}4} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{5}{3}$

$s' = 0{,}6\,m$ // $\rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} \Rightarrow y' = -0{,}01m$

Lente

$\frac{1}{-0{,}5} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{s'} = 3 + 2$

$s' = 0{,}2\,m$ // $\rightarrow y' = 0{,}008\,m$

c) Espejo:

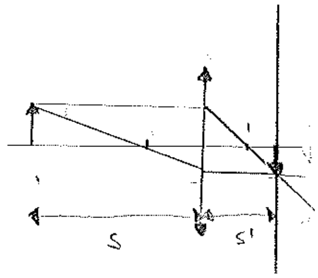
$y' = -0{,}01\,m$; Invertida ; Real

Lente:

$y' = 0{,}008m$; Derecha ; Real

JUNIO 1999

5) a)



$$\left.\begin{array}{l} s+s' = 0{,}18 \\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}04} \end{array}\right\} \begin{array}{l} s' = 0{,}18 - s \\ \to \frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 25 \end{array}$$

$$\frac{s'+s}{ss'} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{0{,}18}{ss'} = 25$$

$$ss' = 7{,}2\cdot 10^{-3}$$

$$s+s' = 0{,}18 \to s' = 0{,}18 - s$$

$$s(0{,}18-s) = 7{,}2\cdot 10^{-3}$$

$$0{,}18s - s^2 = 7{,}2\cdot 10^{-3} \to s^2 - 0{,}18s + 7{,}2\cdot 10^{-3} = 0$$

$$s = \frac{0{,}18 \pm \sqrt{0{,}18^2 - 0{,}0288}}{2} = \frac{0{,}18 \pm 0{,}06}{2} = \begin{cases} 0{,}12\ m \ // \to s' = 0{,}06 \\ 0{,}06\ m \ // \to s' = 0{,}12 \end{cases}$$

b) $m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \Rightarrow m_1 = -\frac{s'}{s} = \frac{-0{,}06}{0{,}12} = -0{,}5$ //

$$m_2 = -\frac{s'}{s} = -\frac{0{,}12}{0{,}06} = -2 \ //$$

c) $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}04}$

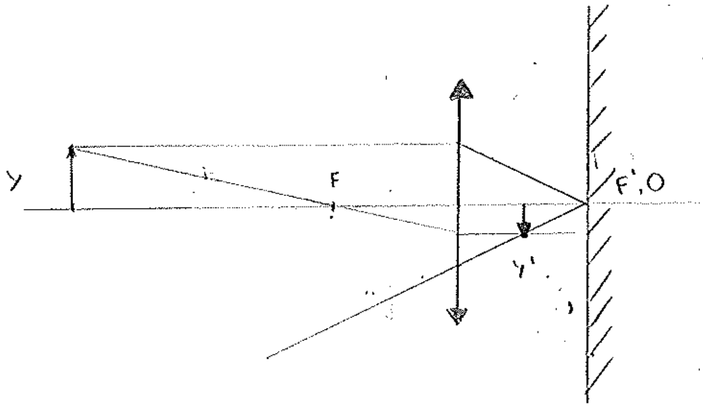
$m = -0{,}5 = -\frac{s'}{s}$ ← Pero como es virtual, s' será negativa:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}5 = -\frac{s'}{s} \\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s' = -2s \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{-2s} = 25 \to \frac{1}{2s} = 25 \Rightarrow s = 0{,}02\ m \end{array}$$

$$s' = 0{,}04\ m \ //$$

FEBRERO 1999

5) a)



$f = 0{,}1m$
$y = 0{,}015m$
$s = -0{,}3m$

b) La imagen es real, puesto que está situado en el lado de transmisión de la lente y en el lado de incidencia del espejo. Es invertida.

c) Refracción en la lente:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{0{,}3} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0{,}1} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{20}{3}$$

$$s' = 0{,}15m$$

$s' = 15cm$ es donde debería estar la imagen si no hubiera espejo

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \Rightarrow y' = -y\frac{s'}{s} = -0{,}015 \cdot \frac{0{,}15}{0{,}3} = -0{,}0075m = 7{,}5mm$$

$y' = 7{,}5mm$ //

$s' = 0{,}05m = 5cm$