simplyjarod.com

FIS2

Carpeta
Montero

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en simplyjarod.com

FÍSICA 2
Planificación

DATOS DEL CURSO

Asignatura: Física 2
Curso: 1º (troncal, 4,5 créditos)
Escuela: ETSI Telecomunicación (UPM)

Profesor: Juan Martín Mompó
Teléfono: 607 81 42 87

FÍSICA 2
Teoría

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

Tema 1: Termodinámica

Tema 2: Movimiento Armónico Simple

Tema 3: Ondas. Acústica

Tema 4: Óptica Geométrica

~~**Tema 5: Ondas electromagnéticas**~~

1.1 Introducción a la termodinámica

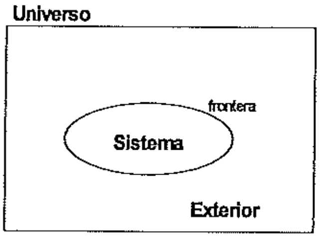
1.1.1 Concepto

La **termodinámica** es la ciencia que estudia los aspectos caloríficos de cualquier suceso en que se produzcan.. Permite con la ayuda de un cierto número de variables describir el estado de un sistema material y sus modificaciones.

1.1.2 Sistema termodinámico macroscópico

Denominamos **sistema termodinámico** (en adelante, sistema) a la porción de universo físico objeto del estudio termodinámico, al resto del universo se le denomina **medio exterior o entorno**. El conjunto de sistema objeto de estudio y su medio exterior se denomina **universo** termodinámico.

Los límites (fronteras) de un sistema pueden ser superficies con realidad física o ficticias



universo = sistema + medio exterior

Sistemas abiertos: son aquellos en los que hay flujo de masa a través de las fronteras que los limitan.

Sistemas cerrados: Son aquellos que no trasfieren materia con el exterior.

Sistemas aislados: Se dice que un sistema está aislado (frontera adiabática) cuando no existe intercambio de masa ni energía con el exterior.

1.1.3 Estado de un sistema

Las propiedades de un sistema se llaman intensivas cuando no dependen de la cantidad de materia del sistema y extensivas cuando dependen directamente de la cantidad de masa del sistema.

El estado de un sistema se caracteriza por los valores que toman un cierto número de magnitudes características (T, P, V,...) llamadas **variables de estado** que lo definen. La interacción de un sistema con el exterior se describe por funciones de estas variables (Q, W, E_i, S, H, G,...) llamadas funciones de estado. En un sistema en equilibrio las variables de estado no pueden tomar valores arbitrarios, sino que están relacionados por una ecuación de estado del tipo $f(P, V, T) = 0$.

1.1.4 Equilibrio. Transformaciones. Ciclos

Cuando el sistema permanece en el mismo estado a lo largo del tiempo se dice que está en **equilibrio**.

Para que el sistema esté en equilibrio, debe verificar:

- Equilibrio mecánico: con las leyes de la mecánica (ej.suma de fuerzas = 0)
- Equilibrio térmico: Todos los puntos del sistema con igual temperatura.
- Equilibrio químico: Todos los puntos con igual composición.

Cuando un sistema pasa de un estado de equilibrio, que llamaremos inicial, a otro estado, que llamaremos final, se dice que el sistema ha sufrido una **transformación.**

Aunque lo veremos más adelante, si no hay intercambio de calor se denomina transformación adiabática

En la transformación algunas variables de estado pueden permanecer constantes:

- Transformación **isocora:** Cuando el volumen permanece constante.
- Transformación **isobara:** Cuando la presión permanece constante.
- Transformación **isoterma:** Cuando la temperatura permanece constante.

Si el estado de equilibrio inicial coincide con el final, la transformación recibe el nombre de **ciclo termodinámico.**

Los procesos reversibles son infinitamente lentos en los que el sistema va atravesando infinitos estados intermedios de equilibrio.

1.1.5 Procesos reversibles e irreversibles

Se dice que un proceso es reversible cuando se realiza de modo que una vez finalizado puede verificarse en sentido contrario volviendo al estado inicial **tanto el sistema como el medio exterior**.

Se dice que un proceso es irreversible si no verifica la condición anterior.

Ejemplo

Derretir un "cubito" de hielo es un proceso ***irreversible:*** *el medio puede suministrar al cubito de hielo una cantidad de calor para convertirlo en líquido, pero para extraer esa misma cantidad de calor del líquido para congelarlo, es necesario un aporte de energía que debe suministrar el medio y aunque el sistema vuelva al mismo estado de "cubito" de hielo, el medio no vuelve al mismo estad ya que ha perdido energía.*

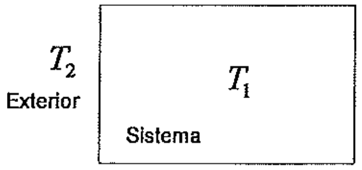
En general, todos los procesos reales son irreversibles.

1.2 Principio cero de la termodinámica. Foco termodinámico. Gas perfecto

Se dice que dos sistemas están en **equilibrio térmico**, cuando la separación entre ambos es mediante un conductor térmico, siendo la **temperatura** la propiedad común a ambos sistemas

Las paredes que sí permiten el paso de calor también se denominan **diatérmicas**(o conductor térmico)

Las paredes que no permiten el paso de calor también se denominan **adiabáticas** (o aislante térmico)y aíslan térmicamente a un sistema



En equilibrio:

$$T_1 = T_2$$

Existen dos unidades para medir la temperatura, los grados centígrados (ºC) y los grados Kelvin (K). Se cumple que: 1° C = 1 ºK

La relación entre ambas escalas es la siguiente:

Temperatura absoluta o Kelvin: $T = 273,16 + t$ (t en $^\circ C$)

Principio cero: *"Si dos sistemas están en equilibrio térmico con un tercero, entonces ambos están en equilibrio térmico entre sí".*

Foco termodinámico

Sistema que no varía su temperatura a pesar de que ceda o absorba calor. Generalmente se tratará de un sistema mucho mayor que el estudiado y la aproximación será valida. A veces se le denomina baño térmico.

Gas perfecto

Es un modelo creado para el estudio de los gases reales. Se efectúan las siguientes hipótesis:

I) Las moléculas del gas tienen dimensiones despreciables.
II) Las moléculas no interaccionan entre sí.
III) La presión se interpreta como el valor medio de la fuerza ejercida por choques de moléculas por unidad de superficie en los límites del sistema.

La ecuación de estado es:

$$\boxed{pV = nRT}$$

donde p es la presión del gas, V es el volumen que ocupa, n es el número de moles de gas, T es la temperatura del gas y R es la constante de de los gases perfectos:

$$R = 8,32\frac{J}{mol \cdot K} = 0,082\frac{atm \cdot l}{mol \cdot K} = 1,98\frac{cal}{mol \cdot K}$$

1.3 Trabajo en el cambio de volumen

El trabajo es una forma de intercambio de energía. Para obtener la relación entre el trabajo mecánico (ya estudiado en Física 1) y el trabajo en el cambio de volumen supongamos que tenemos un gas que se expande desplazando un émbolo desde la posición 1 hasta la posición 2. El trabajo realizado por el gas es:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dx \cdot \cos 90^\circ = F \cdot dx = p S\, dx = p\, dV$$

Recuerda:
La presión se define como fuerza entre superficie y se mide en pascales (N/m^2):

$$p = \frac{F}{S}$$

Por tanto en termodinámica utilizaremos la siguiente expresión para el trabajo realizado por un gas:

$$\boxed{\Delta W = W_{1,2} = \int_{V1}^{V2} p\, dV}$$

En un diagrama p-V representa el area bajo la curva de la transformación.

utilizaremos el siguiente convenio de signos:

Si $W > 0$ entonces representa el trabajo que realiza el sistema sobre el medio exterior.
Si $W < 0$ entonces representa el trabajo que realiza el medio exterior sobre el sistema.

1.4 Calor

Forma de energía que se transfiere del sistema a mayor temperatura al sistema de menor temperatura en virtud de su diferencia de temperaturas.

Las unidades para medir el calor más habituales son la Caloría y el Julio: $\boxed{1\ \text{Cal} = 4.18\ \text{J}}$

Convenio de signos:

- $Q > 0$ (positivo) Calor absorbido por el sistema
- $Q < 0$ (negativo) Calor cedido por el sistema

1.4.1 Calor específico

El calor específico es la cantidad de energía que hay que suministrar a un kilogramo de materia para que su temperatura aumente un grado :

$$c_e = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \quad (J/kg \cdot K)$$

1.4.2 Calor molar

El calor molar es la cantidad de energía que hay que suministrar a un mol de materia para que su temperatura aumente un grado :

$$c_m = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} \quad (J/mol \cdot K)$$

Existen muchos calores molares (tantos como tipos de transformaciones distintas existen) pero nosotros utilizaremos solamente dos de ellos :

El **calor molar a volumen constante** : $\boxed{c_v = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{V=cte}}$

El **calor molar a volumen constante** : $\boxed{c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{p=cte}}$

La relación entre los calores molares a volumen y presión constante viene de la **ley de Mayer:**

$$\boxed{c_p - c_v = R}$$

1.4.3 Calor latente de cambio de estado

Por ejemplo, en los problemas utilizaremos el calor latente de fusión para saber cuánto calor necesito para derretir "x" kilos de hielo

El calor latente es la cantidad de energía calorífica que absorbe o desprende, a una presión determinada, un kilogramo de masa para cambiar de estado

$$\boxed{c_L = \frac{Q}{m} \quad \Rightarrow \quad Q = m c_L}$$

1.5 Energía interna de un sistema termodinámico

Intuitivamente en termodinámica asociaremos energía interna con variación de temperatura

ATENCIÓN: Aunque en la expresión aparece el c_v, la expresión es válida para cualquier transformación, no solo para las isocoras!!! No confundirse

La suma de todas las energías que poseen las moléculas y átomos de un sistema constituye la energía interna del sistema, se representa por U y se mide en Julios. No es posible medir el valor absoluto de la energía interna pero es posible conocer sus variaciones. Para ello definimos la variación de energía interna de un **gas perfecto** como:

$$\boxed{dU = n c_v dT \Rightarrow si\ c_v = cte \Rightarrow \Delta U = n c_v \Delta T}$$

como se puede observar la variación de energía interna es directamente proporcional a la temperatura.

La energía interna es una **variable de estado.**

1.6 Primer principio de la Termodinámica

El primer principio de la termodinámica es una generalización del principio de conservación de la energía. Si el calor es una forma de energía, habrá que tenerlo en cuenta en la evaluación de la energía total del sistema. En otras palabras, debe existir una relación entre los tres tipos de energía que hemos descrito hasta ahora: trabajo, calor y energía interna. Esta relación es el **primer principio de la Termodinámica**, que podemos enunciar así:

Cualquiera que sea la transformación que experimente un sistema para pasar de un estado 1 a un estado 2, la cantidad de calor ΔQ_{1-2} *que el sistema recibe, se invierte parte en realizar un trabajo exterior* ΔW_{1-2}*, y el resto es absorbido por el sistema para aumentar su energía interna* ΔU_{1-2}.

IMPORTANTE: Para aplicar correctamente este principio se debe tener en cuenta los criterios de signos explicados anteriormente

Matemáticamente, el primer principio se expresa de la manera siguiente:

$$\boxed{dQ = dW + dU \Rightarrow \quad \Delta Q_{1-2} = \Delta W_{1-2} + \Delta U_{1-2}}$$

1.7 Entalpía

La entalpía de un sistema termodinámico es una nueva **función de estado**. Su expresión general es:

$$H = U + pV$$

Como se puede ver tiene dimensiones de energía

o bien:

$$dH = dU + d(pV) = dU + p\,dV + dp\,V = dU + dW + dp\,V = dQ + Vd$$

Para un **gas perfecto** y una transformación cualquiera se comprueba que:

$$\boxed{dH = n c_p dT \Rightarrow si\ c_p = cte \Rightarrow \Delta H = n c_p \Delta T}$$

1.8 Entropía

Definimos una nueva **variable de estado** que llamamos **entropía** y cuyas unidades son J/K. Esta nueva magnitud nos servirá para enunciar, más adelante, el segundo principio de la termodinámica. Al igual que sucede con la energía interna es imposible medir el valor absoluto de la entropía pero sí se puede medir su variación.

La **variación de entropía** viene dada por:

$$\boxed{dS = \frac{dQ}{T} \Rightarrow si\ T = cte \Rightarrow \Delta S = \frac{\Delta Q}{T}}$$

1.9 Transformaciones más habituales

A continuación exponemos las características de las transformaciones termodinámicas más importantes.

1.9.1 Transformación isobárica

En un diagrama P-V se representa como una recta horizontal

Decimos que una transformación es isobárica cuando se realiza a **presión constante**.

- Relación entre p, V y T

$$\left.\begin{array}{l} pV_1 = nRT_1 \Rightarrow p = \dfrac{nRT_1}{V_1} \\ pV_2 = nRT_2 \Rightarrow p = \dfrac{nRT_2}{V_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_2}{V_2} \Rightarrow \frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}$$

- Calor absorbido o desprendido en el proceso : $\Delta Q = nc_p \Delta T$

- Variación de energía interna : $\Delta U = nc_v \Delta T$

- Trabajo realizado :

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$$

también :

$$\Delta W = \Delta Q - \Delta U = nc_p\Delta T - nc_v\Delta T = n(c_p - c_v)\Delta T = nR\Delta T$$

- Variación de entropía:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT = nc_p \left[\ln T\right]_{T_1}^{T_2} = nc_p \ln\frac{T_2}{T_1}$$

1.9.2 Transformación isotérmica

Una transformación es isotérmica cuando se realiza a **temperatura constante.**

En un diagrama P-V se representa como una hipérbola equilátera

- Relación entre p, V y T

$$\left.\begin{aligned} p_1V_1 &= nRT \\ p_2V_2 &= nRT \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; p_1V_1 = p_2V_2 \;\Rightarrow\; pV = \text{cte}$$

- Variación de energía interna : $\Delta U = nc_v\,\Delta T \;=\; 0$ ya que $\Delta T = 0$

- Trabajo realizado :

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}dV = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}dV = nRT\left[\ln V\right]_{V_1}^{V_2} = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

- Calor absorbido o desprendido: $\Delta Q \;=\; \Delta W$

- Variación de entropía :

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ \;=\; \frac{1}{T}\left[Q\right]_1^2 \;=\; \frac{Q_{12}}{T}$$

1.9.3 Transformación isócora

Una transformación es isócora cuando se realiza a **volumen constante.**

En un diagrama P-V se representa como una recta vertical

- Relación entre p, V y T

$$\left.\begin{aligned} p_1V &= nRT_1 \;\Rightarrow\; \frac{p_1}{T_1} = \frac{nR}{V} \\ p_2V &= nRT_2 \;\Rightarrow\; \frac{p_2}{T_2} = \frac{nR}{V} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\; \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \;\Rightarrow\; \frac{p}{T} = \text{cte}$$

- Variación de energía interna : $\Delta U = nc_v\,\Delta T$

- Trabajo realizado : $\Delta W = 0$

- Calor absorbido o desprendido: $\Delta Q \;=\; \Delta U$

- Variación de entropía :

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{nc_v dT}{T} \;=\; nc_v\int_{T_1}^{T_2}\frac{1}{T}dT \;=\; nc_v\left[\ln T\right]_{T_1}^{T_2} \;=\; nc_v\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

1.9.4 Transformación adiabática

Una transformación es adiabática cuando se realiza **sin transferencia de calor** entre el sistema y el exterior.

- Relación entre p, V y T

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boxed{pV^{\gamma} = \text{cte}}}$$

→ Importante

  donde γ se denomina **coeficiente adiabático.** Su valor depende del gas :

  para gases monoatómicos : $\gamma = 5/3$
  para gases diatómicos : $\gamma = 7/5$
  para gases triatómicos : $\gamma = 4/3$

  Además el coeficiente adiabático está relacionado con los calores molares mediante la siguiente expresión :

$$\boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_v}}.$$

- Calor absorbido o desprendido: $\Delta Q = 0$

- Trabajo realizado :

$$\Delta W = \int_1^2 p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{k}{V^{\gamma}}\,dV = \int_{V_1}^{V_2} kV^{-\gamma}\,dV = k\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_1}^{V_2} = k\left(\frac{V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right) =$$

$$= k\left(\frac{V_2^{-\gamma}\,V_2 - V_1^{-\gamma}\,V_1}{-\gamma+1}\right) = k\left(\frac{(p_2/k)V_2 - (p_1/k)V_1}{-\gamma+1}\right) = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{-\gamma+1} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$$

- Variación de energía interna : $\Delta U = -\Delta W$

- Variación de entropía : $\Delta S = 0$

1.10 Segundo principio de la termodinámica

En el punto 1.8 definíamos variación de entropía como $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$. Para definir el segundo principio vamos un poco más allá y decimos:

$$\Delta S_{UNIVERSO} = \Delta S_{SISTEMA} + \Delta S_{MEDIO\,EXTERIOR}$$

El segundo principio de la termodinámica dice: $\boxed{\Delta S_{UNIVERSO} \geq 0}$

- Si $\Delta S_{UNIVERSO} = 0 \rightarrow$ La transformación es reversible
- Si $\Delta S_{UNIVERSO} > 0 \rightarrow$ La transformación es irreversible

Es imposible que $\Delta S_{UNIVERSO} < 0$ pero $\Delta S_{SISTEMA}$ ó $\Delta S_{MEDIO\,EXTERIOR}$ pueden tener cualquier signo (positivo si absorben calor y negativo si lo ceden)

1.11 Máquinas térmicas

Aquellas que funcionan realizando ciclos térmicos. Recuerda que un ciclo térmico era aquel conjunto de transformaciones que se le hacían a un sistema termodinámico y que lo dejaba en el mismo estado de equilibrio. **Es decir que el incremento de las variables de estado a lo largo del ciclo completo es nulo:**

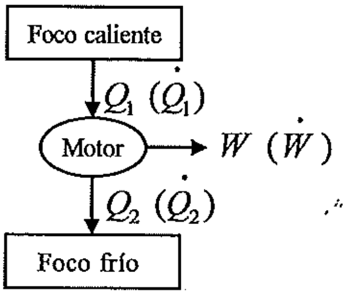
$$\boxed{\Delta T_{ciclo} = \Delta V_{ciclo} = \Delta p_{ciclo} = \Delta U_{ciclo} = \Delta H_{ciclo} = \Delta S_{ciclo} = 0}$$

Los ciclos termodinámicos más habituales son: ciclo Diesel, ciclo de Carnot y ciclo de Otto; se verán en problemas.

1.11.1 Motor termodinámico

La máquina de vapor de Watt fue el primer motor termodinámico

Se llama motor termodinámico a toda máquina que evoluciona cíclicamente produciendo trabajo a partir del calor absorbido. Importante: los ciclos de los motores térmicos se recorren siempre en <u>**sentido horario**</u>



Un motor termodinámico debe siempre funcionar intercambiando calor con dos focos térmicos. Su funcionamiento es el siguiente: absorbe la cantidad de calor Q_1 (lo que me cuesta) del foco caliente, cede la cantidad de calor Q_2 al foco frío y produce un trabajo W (lo que me da).

Una forma intuitiva de entender el rendimiento es la siguiente:

$$\eta = \frac{\text{lo que me da}}{\text{lo que me cuesta}}$$

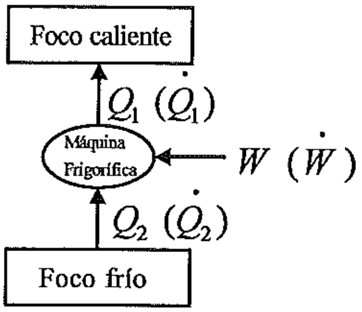
El **rendimiento** de un motor termodinámico es:

$$\eta = \frac{Q_{TOTAL}}{Q_{ABSORBIDO}} = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad (0 < \eta < 1)$$

La nevera o el aire acondicionado son ejemplos típicos de máquinas frigoríficas, enfrían el foco frío expulsando el calor al foco caliente

1.11.2 Máquina frigorífica

Se llama máquina frigorífica a toda máquina que evoluciona cíclicamente consumiendo trabajo y haciendo pasar calor del foco frío al foco caliente. Importante: los ciclos de las máquinas térmicas se recorren siempre en **sentido antihorario**



Un máquina frigorífica debe siempre funcionar intercambiando calor con dos focos térmicos.
La máquina frigorífica funciona consumiendo trabajo W (lo que me cuesta), extrayendo calor de un foco frío Q_2 (lo que me da)y cediendo la cantidad de calor Q_1 a un foco caliente.
Por tanto, la máquina frigorífica enfría un recinto Frío y calienta el exterior.

Ojo:
Para una máquina frigorífica se calcula su eficiencia, no su rendimiento

$$\varepsilon = \frac{\text{lo que me da}}{\text{lo que me cuesta}}$$

La **eficiencia** de una máquina frigorífica es:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

Los aires acondicionados más modernos incorporan bomba de calor que los permite funcionar como calefacción en invierno

1.11.2 Bomba de calor o termobomba

Una bomba de calor es, en esencia, una máquina frigorífica que toma como foco frío el exterior y como foco caliente un determinado recinto que se desea calentar. Importante: los ciclos de las bombas de calor se recorren siempre en **sentido antihorario**

La bomba de calor funciona de forma análoga a la máquina frigorífica, la principal diferencia radica en que, en este caso, se calienta un recinto caliente y se enfría el exterior.

La **eficiencia** de una bomba de calor es:

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{W} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2}$$

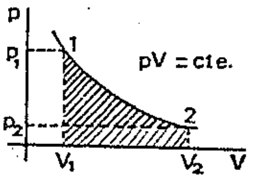
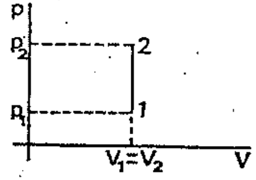
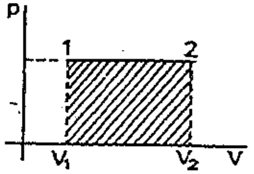
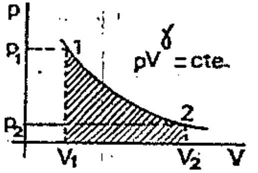
Aclaración sobre la nomenclatura

El punto encima de una magnitud significa lo mismo que en Física I: derivada con respecto al tiempo

Si W es el trabajo (Julios) entonces $\dot{W} = \frac{dW}{dt}$ es la potencia (J/s= Watios)

Si Q es el calor (Julios) entonces $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ es la potencia calorífica (J/s)

Da lo mismo calcular rendimientos o eficiencias utilizando energías (trabajo y calor) o potencias.

PROCESOS	RELACIONES	ENERGÍA INTERNA	TRABAJO	CALOR	ENTALPÍA	ENTROPÍA	GRÁFICAS
FÓRMULAS GENERALES	$pV = nRT$	$dU = nc_v dT$	$dW = pdV$	$dQ = dU + dW$	$H = U + pV$	$dS = \frac{dQ}{T}$	
ISOTERMO $T = cte$ $dT = 0$	$pV = cte$ $p_1V_1 = p_2V_2$	$dU = 0$ $U_{1,2} = 0$	$W_{1,2} = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$	$dQ = dW$ $Q_{1,2} = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$	$dH = 0$ $H_{1,2} = 0$	$S_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{T} = nR\ln\frac{V_2}{V_1}$	
ISÓCORO $V = cte$ $dV = 0$	$\frac{p}{T} = cte$ $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$	$U_{1,2} = nc_v(T_2 - T_1)$	$dW = 0$ $W_{1,2} = 0$	$dQ = dU = nc_v dT$ $Q_{1,2} = nc_v(T_2 - T_1)$	$dH = nc_p dT$ $H_{1,2} = nc_p(T_2 - T_1)$	$S_{1,2} = nc_v\ln\frac{T_2}{T_1}$	
ISOBÁRICA $p = cte$ $dp = 0$	$\frac{V}{T} = cte$ $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	$U_{1,2} = nc_v(T_2 - T_1)$	$W_{1,2} = p(V_2 - V_1)$	$dQ = dH = nc_p dT$ $Q_{1,2} = nc_p(T_2 - T_1)$	$dH = dQ$ $H_{1,2} = nc_p(T_2 - T_1)$	$S_{1,2} = nc_p\ln\frac{T_2}{T_1}$	
ADIABÁTICO $Q = cte$ $dQ = 0$	$pV^{\gamma} = cte$ $TV^{\gamma-1} = cte$ $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = cte$	$U_{1,2} = nc_v(T_2 - T_1)$	$dW = -dU = -nc_v dT$ $W_{1,2} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$	$dQ = 0$ $Q_{1,2} = 0$	$dH = nc_p dT$ $H_{1,2} = nc_p(T_2 - T_1)$	$dS = 0$ $S_{1,2} = 0$	

$c_V =$ calor molar a volumen constante
$c_P =$ calor molar a presión constante

$c_p - c_v = R$

$R = 8{,}3\,\frac{J}{mol \cdot K} = 0{,}082\frac{atm \cdot l}{mol \cdot K}$

coeficiente adiabático: $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

gases monoatómicos: $\gamma = \frac{5}{3} \quad c_v = \frac{3}{2}R \quad c_p = \frac{5}{2}R$

gases diatómicos: $\gamma = \frac{7}{5} \quad c_v = \frac{5}{2}R \quad c_p = \frac{7}{2}R$

Unidades del Sistema Internacional

Presión	$p\ (N/m^2 = Pascal)$
Volumen	$V\ (m^3)$
Temperatura	$T\ (K)$
Calor	$\Delta Q\ (J)$
Trabajo	$\Delta W\ (J)$
Energía interna	$U\ (J)$
Entropía	$S\ (J/K)$
Calor molar	$c_P, c_V\ (J/\mathrm{mol} \cdot K)$
Calor específico	$c_e\ (J/Kg \cdot K)$

Cambios de unidades más frecuentes

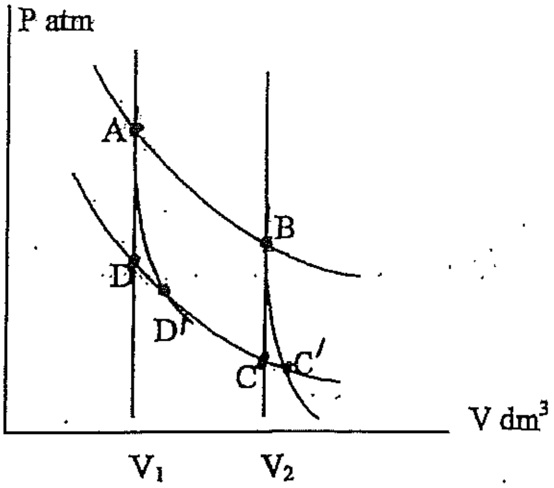
$1\ \mathrm{atm} = 1{,}014 \cdot 10^5\ N/m^2$
$1\ l = 10^{-3}\ m^3$
$1\ \mathrm{atm} \cdot l = 101{,}4\ J$
$1\ \mathrm{cal} = 4{,}18\ J$
$1\ \mathrm{CV} = 735{,}5\ W$

$1°\mathrm{C} = +273\ K$

JUNIO 2001

Ejercicio 1

Una máquina reversible realiza diez ciclos por segundo con 3 moles de un gas perfecto monoatómico (γ=5/3). Cuando la máquina trabaja como máquina térmica recorre un ciclo definido por dos isotermas 0° C y 100° C y dos procesos a volumen constante (isócoras) de $V_1 = 10$ y $V_2 = 20$ litros respectivamente, ciclo ABCDA. Cuando trabaja como máquina frigorífica recorre ciclos de Carnot con adiabáticas que nacen en la intersección de las isócoras con la isoterma de 100° C, ciclo AD'C'BA.



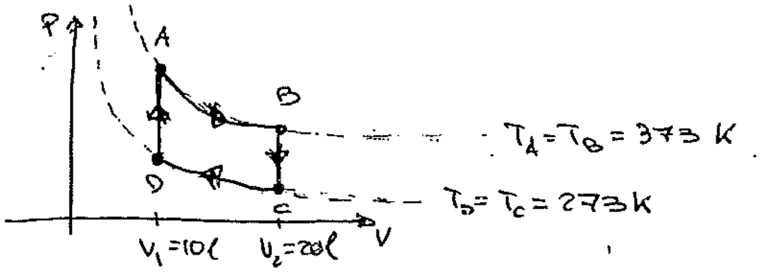
Determinar, para la máquina térmica:

a) El calor absorbido y el calor cedido, por ciclo, indicando en que zonas del ciclo absorbe o cede calor.
b) El trabajo producido y su rendimiento.
c) Suponiendo que el foco frío sea hielo fundente (a 0° C) la cantidad de hielo fundido en una horra y que trabajo producirá.
d) Si la máquina trabajase como frigorífica entre ambos focos y le aportamos el trabajo del apartado anterior ¿qué masa de hielo congelará?

Dato: calor especifico de fusión del agua 80 cal/g, R = 8.3 J/(K.mol)

$u=3, \ \gamma = \frac{5}{3}, \ C_p = \frac{5}{2}R, \ C_v = \frac{3}{2}R$

a) máquina térmica



A-B: ISOTERMA $\Rightarrow \boxed{\Delta Q_{AB}} = uRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 3 \cdot 8'3 \cdot 373 \ln\left(\frac{10}{20}\right) = \boxed{6437'7\ J}$

$\overset{\vee}{0}$ Absorbe

B-C: ISOCORA $\Rightarrow \boxed{\Delta Q_{BC}} = u C_v (T_C - T_B) = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8'3 \cdot (273 - 373) = \boxed{-3735\ J}$

$\overset{\wedge}{0}$ pierde

C-D: ISOTERMA $\Rightarrow \boxed{\Delta Q_{CD} = \cancel{383}\ 3 \cdot 8'3 \cdot 273 (273 - 373) = -4711'8\ J} < 0$, cede

D-A: ISOCORA $\Rightarrow \boxed{\Delta Q_{DA}} = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8'3 (373 - 273) = \boxed{3735\ J} > 0$, absorbe

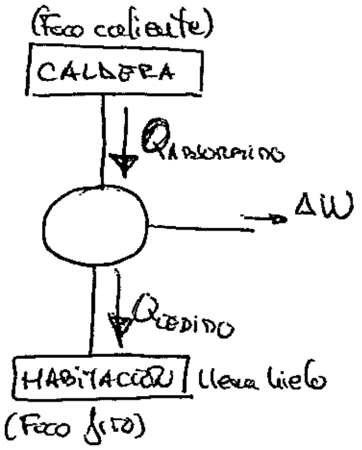
$$\boxed{\begin{aligned} Q_{ABSORBIDO} &= \Delta Q_{AB} + \Delta Q_{DA} = 10172'7 \text{ J} \\ Q_{CEDIDO} &= \Delta Q_{BC} + \Delta Q_{CD} = -8446'8 \text{ J} \\ \Delta Q_{TOTAL} &= Q_{ABSORBIDO} + Q_{CEDIDO} = 1725'9 \text{ J} \end{aligned}}$$

b) ¿ΔW? Primer principio:

$$\Delta Q = \Delta W + \cancel{\Delta U} \overset{\text{(U variable de estado)}}{} \Rightarrow \boxed{\Delta W = 1725'9 \text{ J}}$$

$$\eta = \frac{|\Delta W|}{Q_{ABSORBIDO}} = \frac{1725'9}{10172'7} = 0'1697 \Rightarrow \boxed{\eta = 16'97\%}$$

c) ¿masa de hielo fundida en $t = 1h$?



El calor que funde el hielo es el Q_{CEDIDO}:

$$Q_{CEDIDO}(t = 1h) = -8446'8 \frac{\text{J}}{\text{ciclo}} \cdot \frac{10 \text{ ciclos}}{1 \text{ seg}} \cdot \frac{3600 \text{ seg}}{1 \text{ h}} = -304.1$$

$$\boxed{Q_{hielo} = 304 \cdot 10^6 \text{ J/hora}}$$

Sabemos de teoría: $Q = m\, C_L \Rightarrow m = \frac{Q}{C_L} =$

Paso Q a cal/h: $304 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{h}} \frac{1 \text{ cal}}{4'18 \text{ J}} = 72'98 \cdot 10^6 \text{ cal/}$

$$= \frac{72'98 \cdot 10^6}{80} \Rightarrow m = 912.250 \text{ g/h} \Rightarrow \boxed{m = 912'25 \text{ Kg/h}}$$

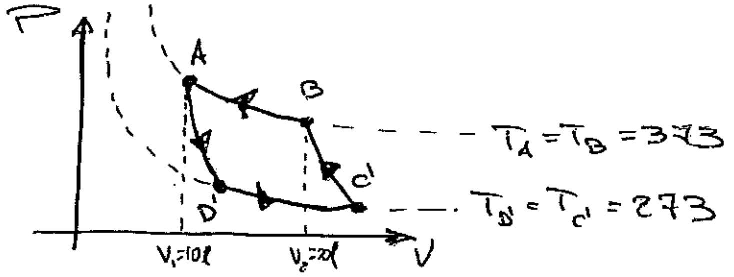
Jun01 - ej 1

¿Trabajo realizado en una hora?

$$\boxed{\Delta W(t=1h) = 1725'9\,\frac{J}{ciclo}\cdot\frac{10\,ciclo}{1\,seg}\,\frac{3600\,seg}{1\,h} = 6'21\cdot 10^{7}\ J/h}$$

d)

máquina frigorífica



B-A: ISOTERMA $\Rightarrow Q_{BA} = -Q_{AB} = -6437'7$ J

A-D': ADIABÁTICA $\Rightarrow \Delta Q_{AD'} = 0$

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_{D'} V_{D'}^{\gamma-1} \Rightarrow V_{D'} = \left(\frac{T_A}{T_{D'}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\cdot V_A = 15'97\,\ell$$

D'-C': ISOTERMA:

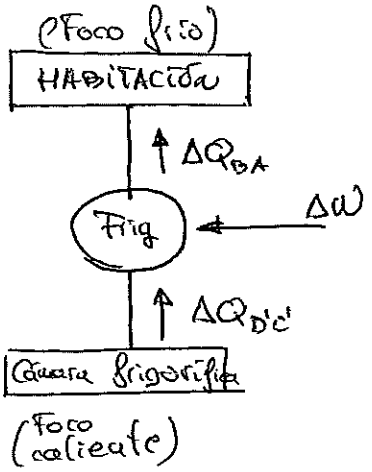
C'-B: ADIABÁTICA $\Rightarrow \Delta Q_{C'B} = 0$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_{C'} V_{C'}^{\gamma-1} \Rightarrow V_{C'} = 31'94\,\ell$$

Tenemos:

$\Delta Q_{BA} = -6437'7$ J, <0, cede

$\Delta Q_{D'C'} = nRT_{D'}\ln\left(\frac{V_{C'}}{V_{D'}}\right) = 4711$ J >0, absorbe



Calor que congela el hielo es $\Delta Q_{D'C'}$

En una hora:

$$Q_{hielo} = 4711 \frac{J}{ciclo} \cdot \frac{10\,ciclos}{1\,seg} \cdot \frac{3600\,seg}{1\,h} \underset{\uparrow}{=} 40'7 \cdot 10^6 \; cal/h.$$

Dividido entre 4'18 para que de cal

Por lo que:

$$Q_{hielo} = m \cdot c_L \Rightarrow m = \frac{Q_{hielo}}{c_L} = \frac{40'7 \cdot 10^6}{80} = 508\,800 \; g/hora$$

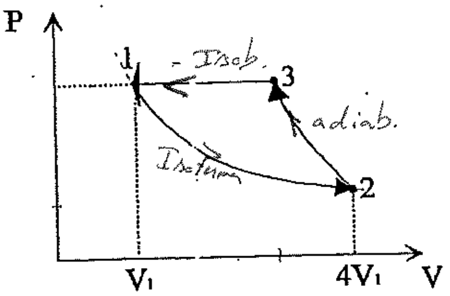
$$\boxed{m = 508'8 \; Kg/h}$$

SEPTIEMBRE 2002

Ejercicio 1

Un mol de un gas ideal monoatómico con un volumen inicial V_1 de 25 litros y una presión de 4 atmósferas, sigue el ciclo indicado en la figura(isobara, isoterma, adiabática). Hallar:

a) Volumen, temperatura y presión de cada punto del ciclo.
b) el flujo de calor y la variación de entropía en cada tramo del ciclo, indicando su signo
c) Razonar si es una máquina térmica o un refrigerador y calcular su rendimiento o su eficiencia.



	P	V	T
1	4atm	25l.	1219'52
2	1atm	100l.	1219'52
3	4atm	43'53	2123'3

$V_1 = 25\ l.$
$P_1 = 4\ atm.$

Gas ideal monoatómico $= \begin{cases} C_V = 3/2\ R \\ C_P = 5/2\ R \\ \gamma = 5/3 \end{cases}$

1) T_1 ? ; [illegible]

$$P_1 \cdot V_1 = nRT_1 \longrightarrow \boxed{T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{4 \cdot 25}{1 \cdot 0'082} = 1219'51\ K}$$

$R = 0'082\ \frac{atm \cdot l}{mol \cdot K}$

2) $T_2 = T_1 = 1219'51\ K$ (por estar en una isoterma)

$$P_2 = \frac{n \cdot R \cdot T_2}{V_2} = \frac{1 \cdot 0'082 \cdot 1219'51}{100} = 1\ atm.$$

Lógico $\boxed{T = cte = P \cdot V}$

3) V_3, T_3

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 \cdot V_3^\gamma \quad \left(\frac{P_2}{P_3} \cdot V_2^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(V_3^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \longrightarrow V_3 = V_2 \left(\frac{P_2}{P_3}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$\gamma = \frac{C_P}{C_V} =$ [illegible]

$$V_3 = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{[illegible]} = 43'53\ l.$$

$$¿T_3? \rightarrow P_3 \cdot V_3 = n \cdot R \cdot T_3 \longrightarrow T_3 = \frac{P_3 V_3}{R} = \frac{4 \cdot 43'53}{1 mol \cdot 0'082} = >$$

$$\boxed{T_3 = 2123'3\ K}$$

b) $\boxed{Q = w + \Delta U}$ $\boxed{ds = \frac{dQ}{T}}$

Tramo 1 ⟶ 2 Isoterma

$$\Delta Q = \Delta w + \underset{n C_v \Delta T}{\cancel{\Delta U}} \xrightarrow{} \overset{0}{T = cte} \qquad p = \frac{nRT}{V} \to Isot = cte$$

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{V} = \ln v \Big|_{v_1}^{v_2} = \ln v_2 - \ln v_1 = \ln \frac{v_2}{v_1}$$

Isoterma: $\Delta Q = \Delta w = \underset{1\to 2}{w} = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv = nRT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dV}{V} = nRT \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$

$$\Delta Q = 1 \cdot 0'082 \cdot 1219'51 \cdot \ln \frac{100}{25} = 138'6 \text{ atm} \cdot l = \Delta w$$

Tramo 1 ⟶ 2

$$\int_1^2 ds = \int_1^2 \frac{dQ}{\underset{\to cte.}{T}} \Rightarrow S_2 - S_1 = \Delta S = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{1}{T} \Delta Q = \frac{138'6}{1219'51}$$

$$\boxed{\Delta S = 0'114 \frac{\text{atm} \cdot l}{K}}$$

Tramo 2 ⟶ 3 (adiabática)

$Q_{2\to 3} = 0$ (pr ser adiabática)

Tramo 3 ⟶ 1 (Isobara)

$$\Delta Q = \Delta w + \Delta U = \overbrace{n C_p \cdot \Delta T}^{corta} = 1 mol \cdot \frac{3}{2} R (T_1 - T_3) =$$

forma larga
$$\to \Delta U = n C_v (T_1 - T_3) = ~~-185'35~~ ~~atm \cdot l~~$$
$$\to \Delta W = p_1 (v_1 - v_3) =$$

$$\Delta Q = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 0'082 (1219'51 - 2123'3) = -185'35 \text{ atm} \cdot l$$

$$\Delta S = \int_3^1 \frac{dQ}{T} = \int_3^1 \frac{n C_p\, dT}{T} = n C_p \int_3^1 \frac{dT}{T} = n C_p \ln T \Big|_{T_3}^{T_1} = n C_p \ln \frac{T_1}{T_3}$$

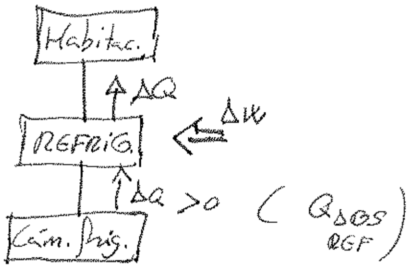
$$\boxed{\Delta S = -0'114 \frac{\text{atm} \cdot l}{K}}$$

¿Máq. térmica o refrigerador?

Máq. térmica → Si recorro el ciclo en sentido ~~contrario al~~ de las agujas del reloj

Refrigerador → Si recorro el ciclo en sentido contrario al de las agujas del reloj

En ~~nuestro~~ caso tenemos → sentido antihorario → refrigerador



$$\varepsilon = \frac{\text{lo que me da la máquina}}{\text{lo que me cuesta}} = \frac{\Delta Q}{|\Delta W|}$$

$$\text{Ciclo} \Rightarrow \Delta U_{\text{ciclo}} = 0 \Rightarrow \Delta W_{\text{ciclo}} = \Delta Q_{\text{ciclo}}$$

$$\Delta Q_{1-2} = 138'6 \text{ atm} \cdot l$$

$$\Delta Q_{2-3} = 0$$

$$\Delta Q_{3-1} = -185'35 \text{ atm} \cdot l$$

$$\frac{\Delta Q_{1-2}}{|\Delta W|} = \frac{\Delta Q_{1-2}}{|\Delta Q_{\text{ciclo}}|} = \frac{138'6}{|138'6+0-185'35|} =$$

$$= 2'967$$

para refrigeradores siempre mayor que 1

$$\boxed{\varepsilon = 296'7\%}$$

SEPTIEMBRE 2003

Ejercicio 1

Un mol de un gas ideal diatómico con un volumen inicial $V_1 = 25$ litros y una presión de 4 atmósferas sufre las siguientes transformaciones:
1° se expande a presión constante hasta duplicar el volumen inicial. 2° se enfría con un proceso adiabático hasta la temperatura inicial. 3° se comprime siguiendo la isoterma hasta el punto inicial cerrando el ciclo.

a) Dibujar el diagrama PV del proceso y calcular:
b) el Volumen, la Presión y la Temperatura en cada punto del ciclo
c) el flujo de calor y la variación de entropía en cada tramo del ciclo
d) el rendimiento de la máquina

	P	V	T
1	4atm	25 l.	1219'5
2	4atm	50 l	2439'02
3	0'35 atm	282'84	1219'5

1 mol

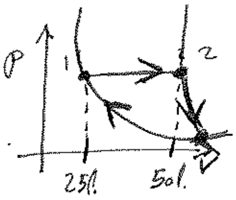
Gas diatómico $\left\{ \begin{array}{l} C_v = \frac{5}{2} R \\ C_p = \frac{7}{2} R \end{array} \right\} \rightarrow \gamma = \frac{7}{5}$

$V_1 = 25\ l.$

$p_1 = 4 atm.$

1°) $p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{4 \cdot 25}{1 \cdot 0'082} = \boxed{1219'5\ K}$

a)



~~Apartado 2.~~

b) $\boxed{T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{4 \cdot 50}{1 \cdot 0'082} = 2439'02\ K}$

c) $p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma}$

$p_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow p_2 = \frac{nRT_2}{V_2}$

$p_3 V_3 = nRT_3 \Rightarrow p_3 = \frac{nRT_3}{V_3}$

Solo para adiabáticas

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} pV^{\gamma} = cte \\ p = \frac{nRT}{V} \end{array} \right\} \frac{nRT}{V} V^{\gamma} = cte \quad \boxed{TV^{\gamma-1} = cte}}$$

$$\frac{nRT_2}{V_2} V_2^{\gamma} = \frac{nRT_3}{V_3} V_3^{\gamma}$$

$$\boxed{T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}}$$

$V_3^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3} V_2^{\gamma-1}$

$$\boxed{V_3 = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot V_2} = \left(\frac{2439'02}{1219'5}\right)^{\frac{1}{\frac{7}{5}-1}} \cdot 50 = \underline{282'84\ l.}$$

$$P_3 = \frac{nRT_3}{V_3} = \frac{1 \cdot 0'082 \cdot 1219'5}{282'84} = \boxed{0'35 \text{ atm.}}$$

c) Tramo 1-2

$$\boxed{\Delta Q_{1\to2}} = n C_p \cdot \Delta T = n C_p (T_2 - T_1) = 1 \cdot \frac{7}{2} \cdot 0'082 (2439'02 - 1219'5) =$$

$$= \boxed{350 \text{ atm} \cdot l}$$

Entropía

$$\int dS = \Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n C_p \, dT}{T} = n C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\boxed{\Delta S_{1-2}} = 1 \cdot \frac{7}{2} \cdot 0'082 \ln\left(\frac{2439'02}{1219'5}\right) = \boxed{0'2 \frac{\text{atm} \cdot l}{K}}$$

Tramo 2-3 → Adiabática

$$\left.\begin{array}{l} \Delta Q = 0 \\ \Delta S = 0 \end{array}\right\} \text{por ser adiabática}$$

Tramo 3-1 → Isotermas $\Delta U = 0$

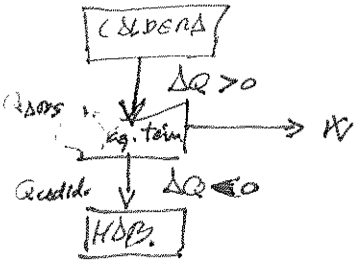
$$\boxed{\Delta Q} = \cancel{\Delta U}^{0} + \Delta W = \int p \, dV = \int_{V_3}^{V_1} \frac{nRT}{V} dV = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_3} = \boxed{-242'6 \text{ atm} \cdot l}$$

$$\boxed{\Delta S} = \int \frac{dQ}{\underset{\text{cte}}{\underbrace{T}}} = \frac{1}{T} \cdot \Delta Q = 1219'5 \cdot \Delta Q = \boxed{-0'2 \frac{\text{atm } l}{K}}$$

Notas:

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta U_{\text{ciclo}} = 0 \\ \Delta S_{\text{ciclo}} = 0 \end{array}}$$

Máq. térmica → sent. horario



$$\Delta Q_{1\to 2} = 350 \text{ atm}\cdot l$$

$$\Delta Q_{2\to 3} = 0$$

$$\Delta Q_{3\to 1} = -242'6 \text{ atm}\cdot l$$

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{lo que da}}{\text{lo que cuesta}} = \frac{|W|}{\Delta Q_{1\to 2}} \overset{W_{ciclo} = Q_{ciclo}}{=} \frac{|Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}|}{Q_{12}} =$$

$$= \frac{|350 + 0 - 242'6|}{350} = \boxed{0'30'69}$$

$$\boxed{\eta = 30'69\ \%}$$

SEPTIEMBRE 2001

Comprobar operaciones

Ejercicio 1

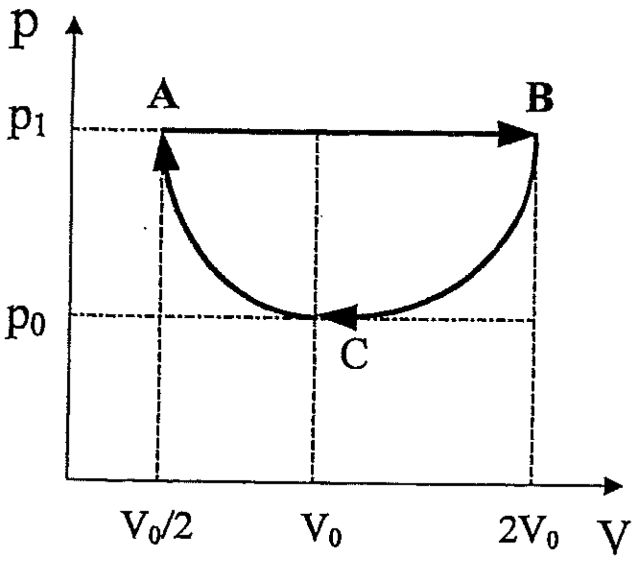
Un mol de gas ideal diatómico de coeficiente adiabático $\gamma = 1,4$, realiza el ciclo de la figura. La transformación $C \to A$ sigue la ley $pV^{\gamma} = k_1$ mientras que la $B \to C$ sigue la ley $pV^{-\gamma} = k_2$. Se pide:

a) La temperatura más alta y más baja del ciclo. Los calores intercambiados en cada etapa indicando si éste es absorbido o eliminado.

b) El trabajo producido por ciclo y su rendimiento.

c) Calcular ΔS en las etapas $B \to C$ y $C \to A$. ¿Contradice alguna de ellas el principio de aumento de entropía? Razónese.

Nota: Los resultados deben ir exclusivamente en función de p_0, V_0 y la constante de los gases R..



Punto C

$$p_C V_C = n \cdot R \cdot T_C \longrightarrow T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{p_0 V_0}{nR}$$

Punto A

$$\underset{\text{adiabática}}{C \to A} \Longrightarrow pV^{\gamma} = cte \Rightarrow p_C V_C^{\gamma} = p_A \cdot V_A^{\gamma}$$

$$p_C = p_A \frac{V_A^{\gamma}}{V_C^{\gamma}} \Rightarrow p_A = p_C \frac{V_C^{\gamma}}{V_A^{\gamma}} = p_0 \cdot \frac{V_0^{\gamma}}{\left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma}} = 2^{\gamma} \cdot p_0 = 2^{1'4} p_0 \Rightarrow \boxed{p_A = 2'369\, p_0}$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{2'369\, p_0 \frac{V_0}{2}}{1 \cdot R} = \boxed{1'3195 \frac{p_0 V_0}{R}}$$

punto B

$$p_B = p_A = 2'369\, p_0$$
$$V_B = 2V_0$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{2'369\, p_0 \cdot 2V_0}{nR}$$

$$\boxed{T_B = 5'278 \frac{p_0 V_0}{nR}}$$

$$T_A = 1'3195 \frac{p_0 V_0}{R}$$
$$T_C = \frac{p_0 V_0}{R}$$

$$T_B > T_A > T_C$$

$\boxed{A \to B}$ $p = cte$

$$\boxed{\Delta Q_{A\to B} \overset{=}{\uparrow}} \; n\, C_p (T_B - T_A) = 1 \cdot \frac{7}{2} \cancel{R} \left(5'278 \frac{p_0 V_0}{\cancel{R}} - 1'3195 \frac{p_0 V_0}{\cancel{R}} \right) =$$

$Q = n \overset{c_V}{c_p} \Delta T$

$$= \boxed{13'85\, p_0 \cdot V_0} > 0 \Rightarrow$$ calor absorbido por el sistema

$$\Delta Q_{B\to C} = \Delta V_{B\to C} + \Delta W_{B\to C}$$

$$\Delta V_{B\to C} = n \cdot C_V (T_C - T_B) = 1 \cdot \frac{5}{2} R \left(\frac{p_0 V_0}{R} - 5'278 \frac{p_0 V_0}{R} \right)$$

$$\boxed{\Delta V_{B\to C} = -10'695\, p_0 V_0}$$

$$\boxed{\Delta W_{B\to C}} = \int_{V_B}^{V_C} p\, dV \underset{pV^{\gamma} = K_2}{\overset{=}{\uparrow}} \int_{V_B}^{V_C} K_2 V^{\gamma} \cdot dV = K_2 \left(\frac{V^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right)_{V_B}^{V_C} = \frac{p_0 V^{-\gamma}}{\gamma+1} \left[V_C^{\gamma+1} - V_B^{\gamma+1} \right] =$$

$(p_C V_C^{-\gamma} = K_2) \leftarrow$ pasa por C

$$p_C V_C^{-\gamma} = K_2 \Rightarrow \boxed{K_2 = p_C V_0^{-\gamma}}$$

$$= \ldots\ldots = \boxed{-1'782\, p_0 V_0}$$

$$\Delta Q_{B\to C} = \Delta V_{B\to C} + \Delta W_{B\to C} = (-10'695 - 1'782)\, p_0 V_0 = -12'477\, p_0 V_0 < 0$$ cede calor.

$$\Delta Q_{C\to A} = 0$$ (ni absorbe ni cede)

b) Trabajo del ciclo

Ciclo $\to \Delta Q = \Delta W$

xq $\boxed{\Delta U_{ciclo} = 0}$

¡¡¡Con signo!!!

$$\Delta W_{ciclo} = \Delta Q_{ciclo} = \Delta Q_{A\to B} + \Delta Q_{B\to C} + \Delta Q_{C\to A} = 1'373\, p_0 V_0$$

FEBRERO 1996

Ejercicio 3

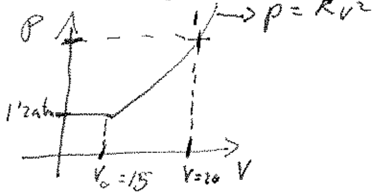
3.6 moles de un gas ideal diatómico se expanden siguiendo la ley $P = kV^2$ donde k es una constante. Conociendo los valores iniciales $V_0 = 15\,l$, $P_0 = 1.2$ atm, y el volumen final $V_1 = 20\,l$, calcular numéricamente, para el gas:

a) El trabajo realizado en la expansión
b) la variación de energía interna sufrida
c) el calor que se ha suministrado y
d) la variación de entropía

Datos: $R = 0.082\ \text{atm}\,l\,K^{-1}\,\text{mol}^{-1}$
$C_V = 5/2\,R$

Nota: *Se recomienda calcular las magnitudes energéticas en* atm l

$p = kV^2$
$V_0 = 15\,l.$
$p_0 = 1'2$ atm
$V_1 = 20\,l.$
$n = 3'6$ moles



$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\,dv = \int_{V_0}^{V_1} K v^2 dv = K\left[\frac{V^3}{3}\right]_{V_0}^{V_1}$$

$$\uparrow\ \boxed{p = kv^2}$$

En 0 $\to$ $p_0 = K V_0^2 \to K = \frac{p_0}{V_0^2}$

$$W = \frac{p_0}{V_0^2}\left[\frac{V_1^3}{3} - \frac{V_0^3}{3}\right] = \frac{p_0}{3V_0^2}\left[V_1^3 - V_0^3\right]$$

$V_1 = 20\,l.$
$V_0 = 15\,l.$
$p_0 = 1'2$ atm

$$\left.\right\} \to W = \frac{p_0}{3V_0^2}\left(V_1^3 - V_0^3\right) = \ldots = 8'22 \text{ atm}\cdot l$$

$$\Delta Q = n \overset{C_V}{C_p} \Delta T$$

$\uparrow$ V = cte, p = cte

2) $\Delta U = n C_V \Delta T$

$$\underset{0\to 1}{\Delta U} = n C_V (T_1 - T_0)$$

¿T_1? $T_0 = \frac{p_0 \cdot V_0}{nR} = 60'98\,K.$

$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 144'31\ K$

$\uparrow$ ¿p_1?

$p_1 = K v_1^2 = 3'333 \cdot 10^{-3} \cdot 20^2 = 2'13$ atm.

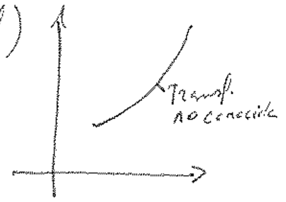
$\uparrow$ $3'333 \cdot 10^{-3} \frac{\text{atm}}{l^2}$

, $\Delta U = n C_V (T_1 - T_0) = 61'69$ atm$\cdot l$

c) $\Delta Q_{0\to1} = \Delta U_{0\to1} + \Delta W_{0\to1} = 8'22 + 61'69$

$\Delta Q_{0\to} = 69'71 \text{ atm}\cdot l > 0$

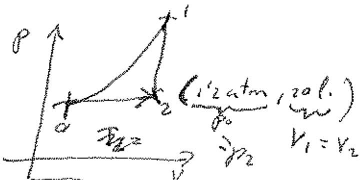
d)



$\Rightarrow \Delta S = \ldots$ No tengo fórmula

~~ΔS → no depende del camino. Solo depende del punto inicial y del punto final~~

utilizo un camino alternativo



$$\boxed{T_2 = \frac{p_2 V_1}{nR} = \frac{1'2\cdot 20}{nR} = 81'3\ K}$$

Camino alternativo $0 \to 2$; $2 \to 1$

Ciclo $\left.\begin{matrix} 0\to2 \\ 2\to1 \\ 1\to0 \end{matrix}\right\}$ $\Delta S_{ciclo} = 0 = \Delta S_{0\to2} + \Delta S_{2\to1} + \Delta S_{1\to0}$

$\Delta S_{1\to0} = -\Delta S_{0\to1}$

$\Delta S_{0\to1} = -\Delta S_{1\to0} = \Delta S_{0\to2} + \Delta S_{2\to1}$

$$\Delta S_{0\to1} = \Delta S_{0\to2} + \Delta S_{2\to1} \underset{\displaystyle\int \frac{dQ}{T}}{\uparrow}= \int_0^2 \frac{n C_p\, dT}{T} + \int_2^1 \frac{n\, C_v\, dT}{T}$$

$$\Delta S_{0\to1} = n C_p \ln\frac{T_2}{T_0} + n\, C_v \ln\frac{T_1}{T_2} = 0'722\ \frac{\text{atm}\cdot l}{K}$$

SEPTIEMBRE 2004

Ejercicio 1

Un pistón con **n** moles de un gas ideal monoatómico a **Ti °C**, situado al nivel del mar (**1atm** de presión), se pone en contacto térmico con un bloque de hielo de masa **m** a **0°C** . Si el émbolo se desplaza sin rozamiento y si el sistema pistón hielo están térmicamente aislados del exterior, determinar:

a) la masa de hielo que debe fundirse para que la temperatura del gas sea igual a la del hielo (el proceso se realiza a presión constante)
b) trabajo realizado por el émbolo,
c) variación de energía interna del gas y del hielo.

El resto de hielo se funde, pasando a agua a 0°C, aplicando una compresión muy rápida (proceso adiabático) y posteriormente dejando que el gas se enfríe a volumen constante

d) calcular el trabajo invertido en este proceso y el volumen final del gas
e) calcular la variación de entropía del hielo

Suponer que el volumen del hielo es mucho más pequeño que el del gas.

DATOS: **Ti=20°C,n=0.5, m=2g, c$_l$=80 cal/g, R=8.31 J/(Kmol).**

a) Proceso isobárico ($p = cte$)

El calor cedido por el gas en ~~ese~~ proceso a $p = cte$ lo absorbe el hielo y lo derrite, aunque en un primer momento no lo derrite del todo

Émbolo (GAS) =>

$$\boxed{\Delta Q = n C_p \Delta T} \Rightarrow \Delta T < 0$$

$$\boxed{T_f < T_i}$$

$$\Delta Q = n C_p (T_f - T_i) = n \frac{5}{2} R (273K - 293K)$$

$\Delta Q_{GAS} = -207'75$ Jul. → El gas "**cede**" calor

El hielo recibe el calor del gas => $\Delta Q_{\text{recibe hielo}} = +207'75$ Jul.

↑ absorbe

El calor que doy al hielo se utiliza para cambiar de fase Hielo → Agua

$$\Delta Q = C_L \cdot m \Rightarrow 207'75 \text{ Jul.} = 334'4 \frac{\text{Julios}}{g} \cdot m_{derretida}$$

$$C_L = 80 \frac{cal}{g} \cdot \frac{4'18 \text{ Jul.}}{1 \text{ cal}} = 334'4 \frac{\text{Julios}}{g}$$

$m_{derretida} = 0'623$ g. fundidos

$$\boxed{m_{\text{hielo restante}} = 2 - 0'623 = 1'37 \text{ gr.}}$$

b)

① Calculo V_1 y V_2

$$V_1 = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{P} = 12'013 \text{ l.}$$

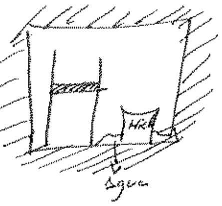
$$V_2 = \frac{n R T_2}{P} = 11'2 \text{ l.}$$

↑ $T_2 = T_0 = 273K$

$$W_{GAS} = \int_1^2 p \, dv = p (v_2 - v_1)$$

② 1^{er} ppio termodinámica

$\cancel{\Delta Q_{20}} = \Delta W_{20} + \Delta U$



$\Delta W = 0 = W_{GAS} + W_{Embol.} \longrightarrow \boxed{W_{Embolo} = -W_{GAS}}$

③ $W_{EMB} = -W_{GAS} = -p(V_2 - V_1) = 82'7$ Julios

c) $\Delta U_{GAS} = n C_v (T_2 - T_1) = 0'5 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8'31 (273 - 293) = -124'64$ J.

Voy a comprobar el 1^{er} ppio al gas.

$\Delta Q_{GAS} = \Delta W_{GAS} + \Delta U_{GAS}$

$-207'75 J. = (-82'7) + (-124'65)$

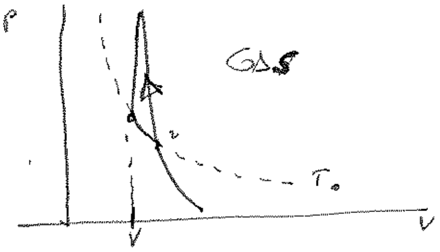
$\Delta U_{Hielo} \overset{\uparrow}{=} \Delta Q_{Hielo} = +207'75$ Julio

Hielo(sólido) => $\Delta vol = 0$

$\Delta Q_{Hielo} = \Delta U_{Hielo} + \cancel{\Delta W_{Hielo}} \to 0 = \int p\, \cancel{dV}^{0} = W$

$(\Delta vol = 0)$

d)



Con lo que me queda de hielo $m^* = 1'37$ gr.

2→3. Compresión adiabática

3→4 Enfriamiento isócoro

Funde todo el hielo que queda

$\Delta Q_{Hielo} = C_L \cdot m^* = 334'4 \frac{J}{gr.} \cdot 1'37 gr. = +460'5$ Julios > 0 ($\propto$ ser $Q_{absorbido}$ por el hielo)

El gas cede ese calor al hielo

$\Delta Q_{GAS} = -|Q_{ABS\,HIELO}| = -460'5$ Julios

$$\boxed{\Delta W_{2\to4} = \Delta W_{2\to3} + \cancel{\Delta W_{3\to4}}_{0} \overset{\uparrow}{=} -\Delta U_{2\to3} = -n C_v (T_3 - T_2) = -460'5 J.}$$

$W_{adiab.} = -\Delta U_{adiabát.}$

$-460'5 J = \cancel{Q_{2\to3}} + Q_{3\to4}$

adiabática $Q_{2\to3} = 0$

$Q_{3\to4} = -460'5$ Julios $\overset{\uparrow}{=} n \cdot C_v (T_4 - T_3)$

3→4 Vol cte

$= n C_v (T_0 - T_3) \Rightarrow \boxed{T_3 = 346'8 K.}$

Volumen final $V_3 = V_4$

lo saco con la adiabática $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p \cdot V^{\gamma} = cte \\ p \cdot V = nRT \end{array}\right\} \Rightarrow T V^{\gamma-1} = cte$

$T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_3 \cdot V_3^{\gamma-1}$

$V_3 = V_4 = \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{1/\gamma-1} \cdot V_2 = \left(\frac{273}{346'8}\right)^{\frac{1}{5/3-1}} \cdot 11'2 =$

$=$

e) $\Delta S_{HIELO} = \int \frac{dQ}{T} \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{T} \int dQ = \frac{\Delta Q_{Hielo}}{T_{Hielo}} = \frac{460'5}{273} =$

Hielo→agua $T = cte$

$= 1'86 \; J/K$

JUNIO 2006

Ejercicio 1

Una máquina frigorífica funciona de modo cíclico utilizando **un mol** de gas ideal diatómico ocupando inicialmente un volumen de **5 litros** a **0°C** el cual sigue los siguientes procesos termodinámicos:

I. calentamiento a *V=cte* hasta alcanzar una temperatura de **10°C,**
II. compresión adiabática hasta alcanzar una temperatura de **23°C,**
III. enfriamiento a *P=cte* hasta alcanzar una temperatura de **0°C,**
IV. expansión a *T=cte* hasta el punto inicial

Se pide:

a) dibujar el diagrama PV y determinar P,V,T al final de cada proceso,
b) calor intercambiado en cada proceso indicando si es absorbido o cedido,
c) variación energía interna y entropía en cada proceso,
d) energía eléctrica necesaria para congelar con esta máquina **1 litro** de agua.

***datos**: calor latente de fusión del agua L_f=80 cal/g; 1 at.l =101,3 J; 1cal=4,18 J.*

$n = 1$ mol
$T_0 = 0$ °C
$V_0 = 5l.$

2) Apartado

$\Delta Q_{1\to2} = n\,C_v \cdot \Delta T = 2'03$ atm·l. (absorb.)

$\Delta Q_{2\to3} = 0$

$\Delta Q_{3\to4} = n\,C_p\,\Delta T = -6'601$ atm l (cedido)

$\Delta Q_{4\to1} = \Delta W_{4\to1} = nRT \ln \frac{V_1}{V_4} = 4'33$ atm·l (absorb.)

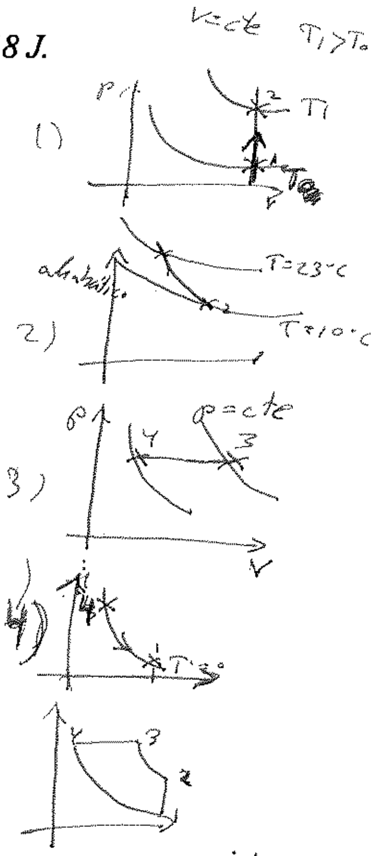
3) $\Delta U_{1\to2} = n C_v \Delta T = 2'05$ atm·l

$\Delta U_{2\to3} = n C_v \Delta T = 2'665$ atm·l

$\Delta U_{3\to4} = n C_v \Delta T = -4'75$ atm·l

$\Delta U_{4\to1} = n C_v \Delta T = 0$ atm l

1)



	V	P	T
1	5	4'48	273
2	5	4'64	283
3	4'46	5'43	296
4	4'12	5'43	273

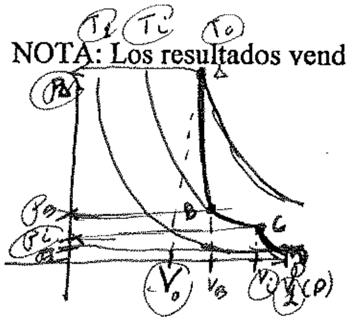
SEPTIEMBRE 2005

Ejercicio 1

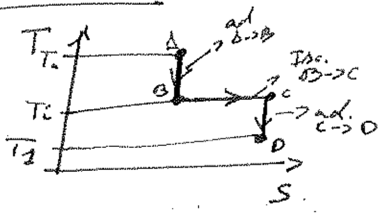
Tenemos n moles de un gas ideal monoatómico que están a la temperatura T_0 y ocupan un volumen V_0 se enfrían en un proceso de expansión que consta de tres etapas sucesivas: a) Adiabática de T_0 a T_i, b) Isotermas hasta V_i, y c) Adiabática desde T_i hasta T_1 ($T_0 > T_i > T_1$). Se pide:

a) Dibujar el proceso en un diagrama (P, V) y en diagrama (T, S). → Entropía
b) El volumen final del gas V_1
c) El trabajo total desarrollado por el gas
d) La variación total de energía interna
e) El calor total intercambiado con el exterior, indicando si ha sido suministrado al gas o eliminado por éste
f) La variación total de entropía del gas
g) Sugerir un proceso de enfriamiento alternativo del gas desde T_0 hasta T_1 que incluya solamente transformaciones isotérmicas y adiabáticas pero que realice el menor trabajo posible

NOTA: Los resultados vendrán dados exclusivamente en función de n, R, V_0, V_i y de las temperaturas T_0, T_i y T_1.



Apartado 1



$$A \to B \Rightarrow Q_{A\to B} = 0 \; ; \; ds = \frac{dQ}{T} \overset{0}{}$$

$$ds = \frac{dQ}{T} \Rightarrow T\,ds = dQ$$

$$\int dQ = \int T\,ds$$

$$\Delta Q = \int T\,ds$$

b) ¿V_1? Adiabática $C \to D$

$$Ad \to \underset{pV = n\cdot R\cdot T}{p\cdot V^{\gamma} = cte} \Rightarrow T\cdot V^{\gamma-1} = cte \longrightarrow T_i \cdot V_i^{5/3-1} = T_1 \cdot V_1^{5/3-1}$$

Despejamos

$$\boxed{\left(\frac{T_i}{T_1}\right)^{3/2} \cdot V_i = V_1}$$

Ya que estamos nos calculamos V_B

$$T_0 \cdot V_0^{5/3-1} = T_i \cdot V_B^{5/3-1}$$

$$V_B = \left(\frac{T_0}{T_i}\right)^{3/2} V_0$$

c)

$$\Delta W_{TOTAL} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D}$$

Operando todo lo de la derecha →

$$= n\cdot R\left(\frac{3}{2}(T_0 - T_1) + T_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{3/2}\right)\right)$$

$$W_{A\to B} \underset{\substack{A\to B\,(\text{Adiab.})\\ \Delta Q = 0\\ \Delta W = -\Delta U}}{=} -n\cdot C_v \cdot \Delta T = -n\cdot \frac{3}{2}R\cdot(T_i - T_0)$$

$$W_{B\to C} \underset{\substack{B\to C\,(\text{Isot.})\\ \Delta U = 0\\ \Delta W = \Delta Q}}{=} \int_{V_B}^{V_i} p\,dV \underset{p = \frac{nRT}{V}}{=} \int_{V_B}^{V_i} \frac{\overset{cte.}{nRT}}{V} dV =$$

$$= \boxed{nRT_i \ln\left(\frac{V_i}{V_B}\right)} = \frac{V_i}{V_0}\left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{3/2}$$

$$\int_{V_B}^{V_i} \frac{dV}{V} = \ln V_i - \ln V_B = \ln \frac{V_i}{V_B}$$

$$W_{C\to D} = -n\,C_v\,\Delta T = -n\,\frac{3}{2}R\,(T_1 - T_i)$$

d) $\Delta U_{TOTAL} = \Delta U_{A\to B} + \Delta U_{B\to C} + \Delta U_{C\to D} = \frac{3}{2} n R \cdot (T_i - T_0 + T_1 - T_i)$

$\Delta U_{A\to B} = n C_v \Delta T = n C_v (T_B - T_A) = \frac{3}{2} n R (T_i - T_0)$

$\Delta U_{B\to C} = n \cdot C_v \cdot \cancel{\Delta T}_{\to 0} = 0$

$\Delta U_{C\to D} = n \cdot C_v \cdot \Delta T = n \cdot C_v (T_D - T_C) = n \cdot \frac{3}{2} R (T_1 - T_i)$

$\Delta U_{TOTAL} = \frac{3}{2} n R (T_1 - T_0)$

e) Todos son trabajos hechos por el gas, por tanto positivos

$\Delta Q_{TOTAL} = \cancel{\Delta Q_{A\to B}}_{\to 0} + \Delta Q_{B\to C} + \cancel{\Delta Q_{C\to D}}_{\to 0} = n R \cdot T_i \cdot \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{3/2}\right)$

$\uparrow$

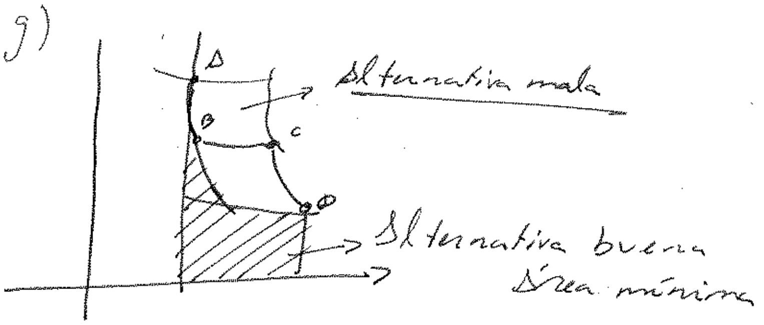
$= \Delta W_{B\to C} > 0 \Rightarrow \boxed{Q \text{ absorbido}}$

f) $\Delta S_{TOTAL} = \cancel{\Delta S_{A\to B}}^{\to 0} + \overset{Isot.}{\Delta S_{B\to C}} + \cancel{\Delta S_{C\to D}}^{\to 0} = n \cdot R \cdot \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{3/2}\right)$

$\Delta S = \int \frac{\cancel{dQ}^{\to 0}}{T} = 0$

$\Delta S_{ISOT.} = \frac{\Delta Q_{B\to C}}{T_i}$

g)



TEMA 2: MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

También se llama: Movimiento vibratorio armónico simple.

El movimiento armónico simple (a partir de ahora: MAS) es un movimiento periodico unidimensional consistente en un vaivén a ambos lados entorno a una posición de **equilibrio estable**.

2.1 Dinámica del MAS

La ecuación que rige el MAS es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Siempre se obtiene aplicando al sistema en una **posición genérica** una de estas ecuaciones:

- **Ecuación de la dinámica de traslación** (Fuerzas = masa x aceleración lineal): Cuando el MAS sea un vaivén en traslación, como una masa cogida con un muelle.
- **Ecuación de la dinámica de rotación** (Momentos = inercia x aceleración angular): Cuando el MAS sea un vaivén en rotación, como un péndulo.

El oscilador más típico es un muelle unido a una masa. Demostramos su ecuación:

Típica fuerza de un muelle

La fuerza causante del MAS es la fuerza elástica (también conocida como ley de Hooke):

$$\boxed{\vec{F} = -kx\,\vec{u}_x \text{ (N)}}$$

Siendo k la constante recuperadora (N/m)

Recuerda de física 1 que la aceleración según x era la derivada segunda con respecto al tiempo

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \Rightarrow -kx\,\vec{u}_x = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \text{ (Ecuación del MAS)}$$

En donde ω es la frecuencia angular o frecuencia natural del MAS $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

MUY IMPORTANTE: Para que la ecuación nos resulte la de un MAS, en el dibujo que hagamos, las velocidades y las aceleraciones, siempre se pintan en el sentido creciente del parámtro que elijamos para fijar la posición.

2.2 Cinemática del MAS

La elongación también se puede expresar en función de coseno:

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi^{\bullet})$

Lo único que cambia es la fase inicial

Si resolvemos la ecuación anterior, la solución nos da la posición en función del parámetro que hayamos elejido.

Posición (también conocida como longación)

$$\boxed{x(t) = A\ \text{sen}(\omega t + \varphi)}\ \text{(m)}$$

donde

$A \equiv$ es la amplitud (el valor máximo que puede tomar la elongación) (m).

$\omega \equiv$ es la pulsación o frecuencia angular, (rad/s).

$\varphi \equiv$ es la fase inicial. Su valor determina el estado de vibración para $t = 0$ (rad).

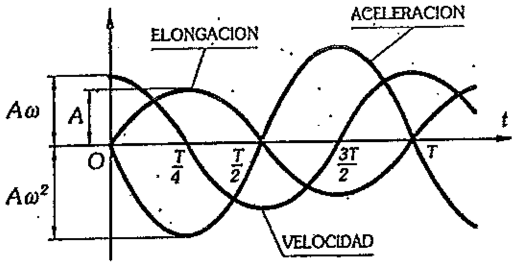
$T \equiv$ es el período, tiempo que tarda el movimiento en repetirse $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}\ \text{(s)}.}$

$f \equiv$ es la frecuencia, número de vibraciones completas realizadas por segundo $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\ \text{(Hz)}.}$

Velocidad

Si derivamos x: $\boxed{v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)}$ (m/s)

En función de x: $\boxed{v\ =\ \omega\sqrt{A^2 - x^2}}$



Gráficas de la elongación, velocidad y aceleración para un MAS de ecuación $x(t) = A$ sen ωt.

La velocidad máxima de un MAS se alcanza en el punto de equilibrio y vale:

$$\boxed{v_{\max} = \pm A\omega \quad \text{en} \quad x = 0}$$

La velocidad mínima de un MAS se alcanza en el punto de máxima elongación y vale:

$$\boxed{v_{\min} = 0 \qquad \text{en} \quad x = \pm A}$$

Aceleración

Si derivamos v: $\boxed{a\ =\ \frac{dv}{dt}\ =\ -A\omega^2\,\text{sen}(\omega t + \varphi)}$ (m/s^2)

En función de x: $\boxed{a\ =\ -\omega^2 x}$

La aceleración máxima de un MAS se alcanza en el punto de máxima elongación y vale:

$$\boxed{a_{\max} = \pm A\omega^2 \quad \text{en} \quad x = \pm A}$$

La aceleración mínima de un MAS se alcanza en el punto de equilibrio y vale:

$$\boxed{a_{\min} = 0 \qquad \text{en} \quad x = 0}$$

2.3 Energía cinética y potencial del MAS

Energía cinética

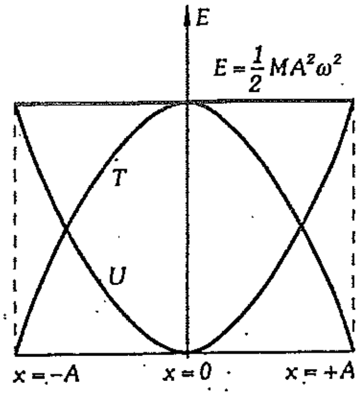
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)\ \text{(J)}}$$

La energía cinética máxima se alcanza cuando la elongación es nula:

$$\boxed{E_{c\max} = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad \text{en} \quad x = 0}$$

La energía cinética mínima se alcanza cuando la elongación es máxima:

$$\boxed{E_{c\min} = 0 \qquad \text{en} \quad x = \pm A}$$



Energía potencial elástica

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k\,x^2\ \text{(J)}}$$

La energía ~~cinética~~ potencial máxima se alcanza cuando la elongación es máxima:

$$\boxed{E_{p\max} = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad \text{en} \quad x = \pm A}$$

La energía ~~cinética~~ potencial mínima se alcanza cuando la elongación es nula:

$$\boxed{E_{p\min} = 0 \qquad \text{en} \quad x = 0}$$

Energía mecánica de un oscilador

$$\boxed{E_{mec} = E_c + E_p = \frac{1}{2}k\,A^2}$$

El primer movimiento lo consideramos sin corrección de fase por la arbitrariedad en la elección de fase

2.4 Composición de dos MAS

Misma frecuencia y direcciones perpendiculares

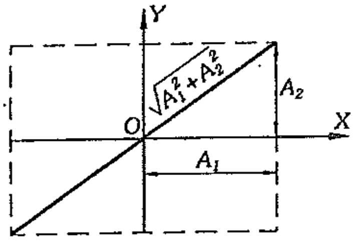
Sean dos MAS:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_1 \operatorname{sen} wt \\ y(t) &= A_2 \operatorname{sen}(wt+\varphi) \end{aligned}\right\}$$

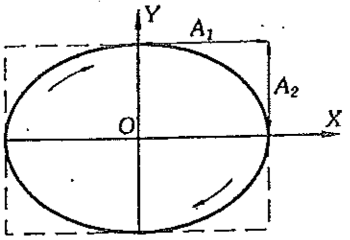
se puede demostrar que la trayectoria de un móvil sobre el que actúan los dos MAS anteriores viene dada por la siguiente ecuación implícita:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi$$

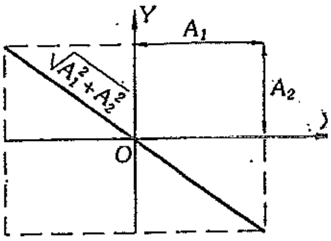
que es la ecuación de una elipse. A continuación se dibuja dicha elipse para algunos valores de φ de especial interés:



Trayectoria de la partícula sometida a dos MAS perpendiculares y de la misma frecuencia, cuando $\varphi = 0$ ó $2K\pi$.



Trayectoria de la partícula sometida a dos MAS perpendiculares y de la misma frecuencia, cuando $\varphi = \pi/2$.



Trayectoria de la partícula sometida a dos MAS perpendiculares y de la misma frecuencia, cuando $\varphi = \pi$ ó $(2K+1)\pi$

Observación importante: Hay que tener en cuenta que el MAS es un movimiento unidimensional. Así pues, en general, la composición de dos MAS perpendiculares no es un MAS ya que la la trayectoria resultante es bidimensional (se dibuja en un plano). Sólo en los casos particulares primero y tercero (cuando $\varphi = 2K\pi$ y $\varphi = (2K+1)\pi$, respectivamente) el movimiento resultante de componer los dos MAS perpendiculares es también un MAS.

Misma frecuencia y misma dirección

Sean dos MAS:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \operatorname{sen}(wt+\varphi_1) \\ x_2(t) &= A_2 \operatorname{sen}(wt+\varphi_2) \end{aligned}\right\}$$

se puede demostrar que la trayectoria de un móvil sobre el que actúan los dos MAS anteriores es otro MAS cuya elongación viene dada por:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\operatorname{sen}(wt+\varphi)$$

donde:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\operatorname{sen}\varphi_1 + A_2\operatorname{sen}\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

2.5 Oscilaciones amortiguadas

En las oscilaciones amortiguadas existe, además de la fuerza elástica causante del MAS, una fuerza amortiguadora que es la responsable de que las oscilaciones vayan disminuyendo de amplitud con el tiempo. Esta fuerza amortiguadora es siempre opuesta a la velocidad y proporcional a ella $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, donde λ se denomina constante de fricción.

Recuerda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Planteando la segunda ley de Newton a un oscilador compuesto por una masa m unida a un muelle k y a un amortiguador λ vamos a obtener la ecuación diferencial que rige el MAS amortiguado:

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = m\vec{a}} \Rightarrow ma\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x - \lambda v\vec{u}_x \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Donde:

$\gamma \equiv$ es la constante de amortiguamiento (s^{-1})

$\omega_0 \equiv$ es la pulsación propia, libre o natural (rad/s), es decir, la que tendría si no hubiese amortiguamiento: $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

Esta ecuación diferencial (EDO) tiene tres posibles soluciones, que enumeramos a continuación.

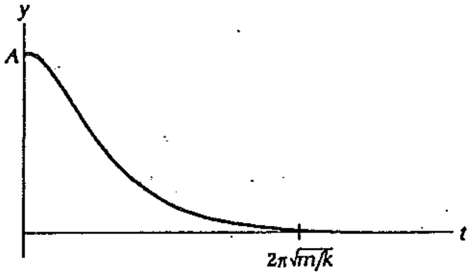
La forma de resolver esta EDO se estudia en FMT4 pero no se exige en Física 2

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

1º) Amoriguamiento crítico $\gamma = \omega_0$

En este caso la ecuación característica de la EDO tiene una solución real doble

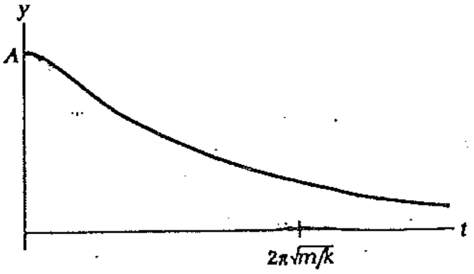
$x = (A + Bt)e^{-\gamma t}$ no oscila



2º) Amoriguamiento superior al crítico (supercrítico) $\gamma > \omega_0$

En este caso la ecuación característica de la EDO tiene dos soluciones reales simples

$x = Ae^{-z_1 t} + Be^{-z_1 t}$ no oscila



3º) Amoriguamiento inferior al crítico (subcrítico) $\gamma < \omega_0$

En este caso la ecuación característica de la EDO tiene dos soluciones complejas simples conjugadas entre sí

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\,\text{sen}(w_a t + \varphi)$$

Sólo en este tercer caso existen oscilaciones. Es solo este caso el que nos interesa y por tanto lo estudiamos a continuación con detalle el caso de amortiguamiento subcrítico, $\gamma < w_0$:

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\gamma t}\,\text{sen}(\omega_a t + \varphi)}$$

Donde:

$Ae^{-\gamma t}$ es la envolvente de $x(t)$

OJO:
A no representa la amplitud !!

A es el punto de corte de la envolvente con el eje Y.

$A_0 = A\,\text{sen}\varphi$ es el punto de corte de $x(t)$ con el eje Y. (se obtiene haciendo $x(t=0)$)

$\gamma \equiv \dfrac{\lambda}{2m}$ es la constante de amortiguamiento (s^{-1})

λ es la constante de fricción (kg s^{-1}) que aparece en la EDO del movimiento amortiguado.

$\tau = \dfrac{1}{\gamma}$ es el tiempo de relajación (s)

$\omega_a \equiv$ es la pulsación amortiguada o pseudopulsación (rad/s)

$\omega_0 \equiv$ es la pulsación propia, libre o natural (rad/s)

La relación entre ambas pulsaciones es:

Fijate que siempre:
$\omega_a < \omega_0$

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \Rightarrow w_a^2 = \frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}$$

$T_0 \equiv \dfrac{2\pi}{w_0}$ es el periodo propio, libre o natural (s)

Fijate que siempre:
$T_a > T_0$

$T_a = \dfrac{2\pi}{w_a}$ es el pseudoperiodo (s)

Definimos el factor de calidad como: $Q = \dfrac{\omega_0}{2\gamma} = \dfrac{\omega_0 \tau}{2}$ (adimensional)

Q nos da una medida de lo bueno o malo que es un oscilador (rango entre 0 e ∞):

En el caso de MAS ideal tenemos que $\gamma = 0$ y por tanto $Q = \infty$

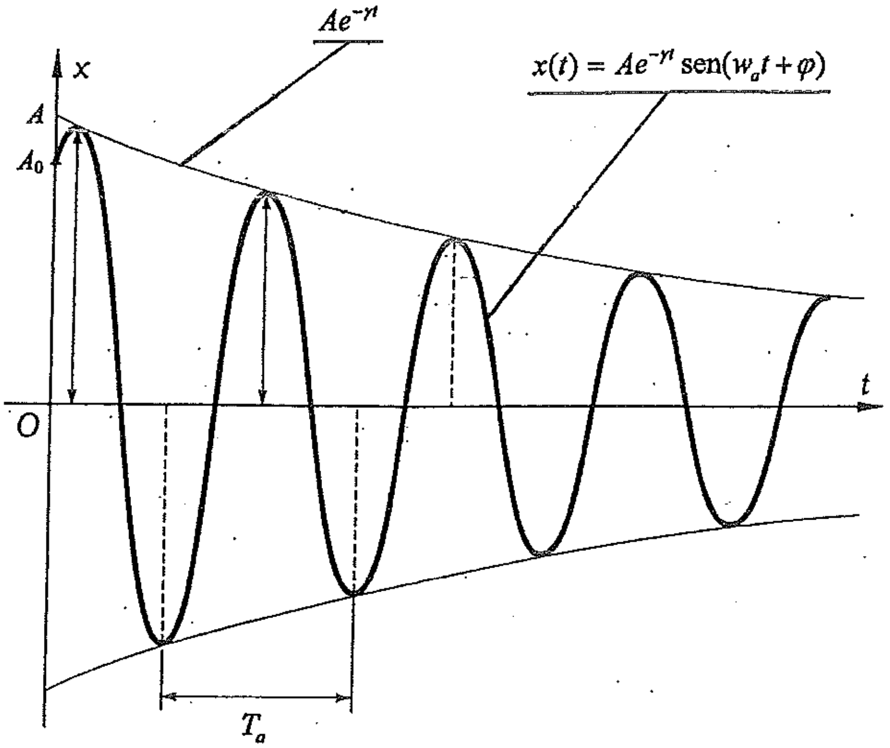
Si Q es pequeño decimos que es un mal oscilador (oscila poco porque está muy amortiguado).

Si Q es grande decimos que es un buen oscilador (oscila mucho porque está poco amortiguado)

Definimos el decremento logarítmico como: $\delta = \ln \dfrac{x(t_i)}{x(t_i + T_a)}$ (adimensional)

Otra expresión para obtener el decremento logarítmico en función de Q: $\delta = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

A continuación se representa gráficamente el caso de amortiguamiento subcrítico, $\gamma < w_0$:



En la gráfica se pueden apreciar algunas de las magnitudes definidas en la página anterior

Observaciones importantes

- Se dice que $x(t)$ es una función pseudoperiodica (¡ojo! no es periódica porque no se repite exactamente igual en cada periodo, solo se repite de forma "parecida" en cada periodo).

Denominar amplitud a cualquiera de las dos es ambiguo

- Es muy importante distinguir entre A y A_0: la A es el punto de corte de la envolvente $Ae^{-\gamma t}$ con el eje Y. Sin embargo A_0 es el punto de corte de $x(t)$ con el eje Y.

OJO:
A primera vista parece que la envolvente "toca" a $x(t)$ en los máximos de ésta última pero esto no es cierto.

- La envolvente $Ae^{-\gamma t}$ es tangente a $x(t)$ en los puntos de contacto entre ambas. Este punto de contacto entre ambas funciones no se encuentra en los máximos de $x(t)$.

2.6 Oscilaciones forzadas con amortiguamiento

La fuerza excitadora es equivalente a la persona que empuja a otra sentada en un columpio

Si sobre un MAS amortiguado se aplica una fuerza periódica de la forma $F = F_0 \text{sen}\, w_f t$ se consigue que la amplitud del movimiento no decrezca. Aplicando la segunda ley de Newton a este caso nos queda:

$$\boxed{\Sigma F = ma} \Rightarrow ma = -kx - \lambda v + F_0 \text{sen}\, \omega_f t \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \text{sen}\, \omega_f t \Rightarrow$$

Esta EDO es igual que la del MAS amortiguado salvo por el término independiente

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\text{sen}\, \omega_f t \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\text{sen}\, \omega_f t}$$

Resolviendo la anterior EDO queda

$$\boxed{x(t) = A_f\, \text{sen}(\omega_f t + \varphi)}$$

Fíjate que ahora la pulsación del movimiento es w_f

donde

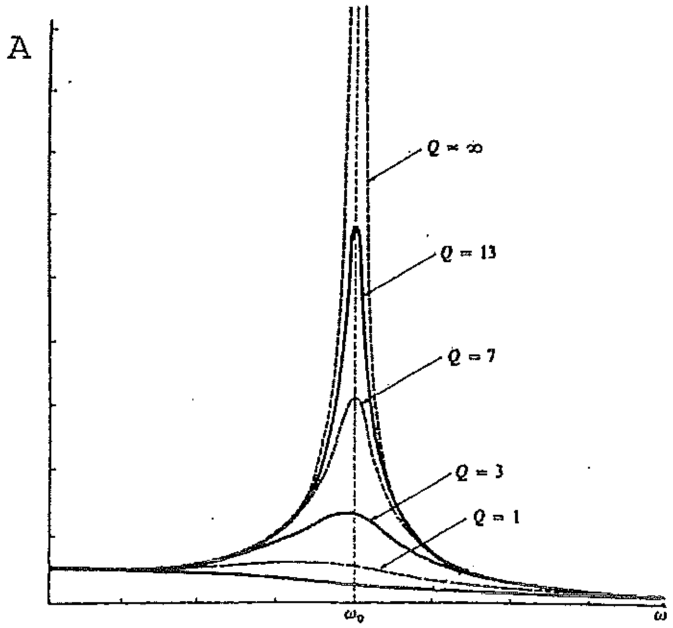
$$\boxed{A_f = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}} \qquad \boxed{\text{tg}\, \varphi = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_f^2 - \omega_0^2}}$$

Resonancia

Un sistema entra en **resonancia en la amplitud** cuando para un determinado valor de la frecuencia forzada ω_f, la amplitud A_f de las oscilaciones forzadas se hace máxima.

Se puede demostrar que ese valor es $\omega_f = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

A continuación se muestra una gráfica que relaciona w_f con A_f



Como se puede observar según aumenta el factor de calidad Q, el pico de resonancia se hace más pronunciado

Se denomina ancho de banda del pico de resonancia a

$B = 2\gamma$

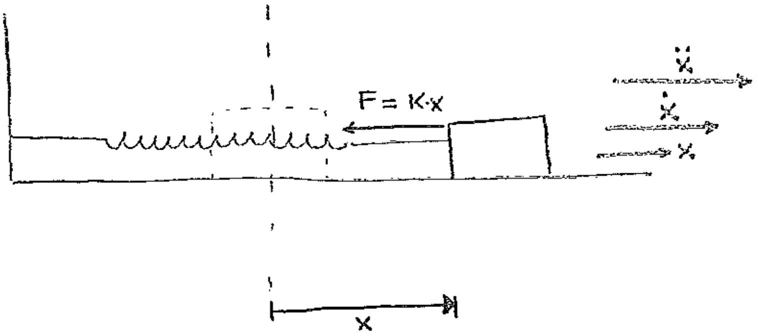
TEMA 2: MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Ejercicio 1

Un móvil describe un MAS cuya frecuencia angular es $w = 3{,}36$ rad /s. Sabiendo que en $t = 1{,}2$ s pasa por su posición de equilibrio con una velocidad de 0,862 m/s, obtener las expresiones completas del movimiento (elongación, velocidad y aceleración, todo ello en función del tiempo).

$\omega = 3'36$ rad/s

$\boxed{t = 1'2 \text{ seg} \rightarrow v = 0'862 \text{ m/s} \;\big]\; x = 0}$ Para las constantes de la ecuación diferencial



Aplicamos

$\sum \bar{F} = m \cdot \bar{a}$

$$\boxed{-K \cdot x = m \cdot \ddot{x}} \longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0} \longrightarrow$$

Ec. diferencial de segundo orden y homogénea (está igualada a 0)

Solución de la ec. diferencial

$$\boxed{x = A \operatorname{sen}(\omega T + \varphi)}$$

$$\rightarrow v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega T + \rho)$$

$$\rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega T + \rho)$$
$$= -\omega^2 x$$

$$x(t = 1'2) = 0 = \underbrace{A}_{cte} \operatorname{sen}(\underset{\substack{\downarrow \\ rad/s}}{3'36} \cdot 1'2 + \varphi) \Rightarrow \operatorname{sen}(3'36 \cdot 1'2 + \varphi) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 3'36 \cdot 1'2 + \varphi &= 0 \\ 3'36 \cdot 1'2 + \varphi &= \pi \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} -3'36 \cdot 1'2 &= \varphi_1 \quad (rad) \\ \varphi_2 &= \pi - 3'36 \cdot 1'2 \quad (rad) \end{aligned}\right.$$

$$v(t = 1'2) = 0'862 = A \cdot 3'36 \cos(3'36 \cdot 1'2 + \varphi)$$

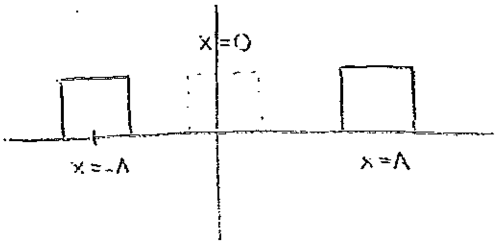
$$\longrightarrow \boxed{\varphi_1 = -\underset{rad}{3'36 \cdot 1'2}} \Rightarrow 0'862 = A_1 3'36 \cos(0) \; ; \; \boxed{A_1 = \frac{0'862}{3'36}} \approx \boxed{0'257 \text{ (m)}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\varphi_2 = \pi - \underset{rad}{3'36 \cdot 1'2}} \Rightarrow 0'862 = A_2 3'36 \cos(\cancel{3'36 \cdot 1'2} + \pi - \cancel{3'36 \cdot 1'2}) = 0$$

$$\boxed{A_2} = -\frac{0'862}{3'36} = \boxed{-0'257 \text{ (m)}}$$ resultado no válido.

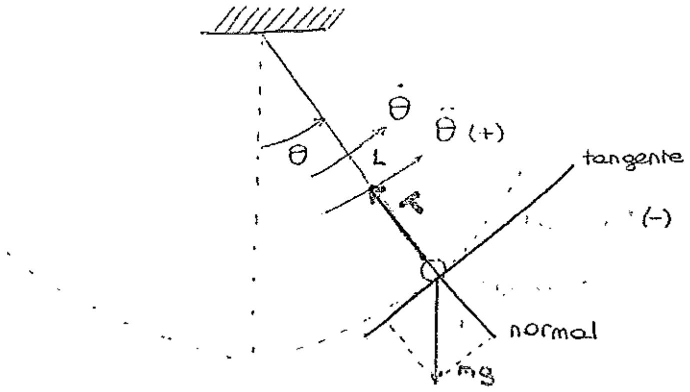
La amplitud es la distancia máxima en módulo a donde puede llegar la masa $(A > 0)$
Otra cosa muy diferente es que la posición x puede ser

$x = A$
$x = -A$



Ejercicio 4

Determinar la ecuación diferencial que rige el movimiento de un péndulo simple de longitud l y masa m cuando lo separamos de su posición de equilibrio un ángulo θ muy pequeño. Dato: g



$\sum_i \vec{F} = m\cdot\vec{a}$

$\hookrightarrow \sum_i F_N = m\cdot a_n$

Péndulo con oscilaciones pequeños.
$\rightarrow (\theta \sim 0) \rightarrow \operatorname{sen}(\theta) \sim \theta$

$\hookrightarrow \sum_i F_t = \underbrace{m\cdot\underbrace{a_t}_{\ddot\theta\cdot L}}_{m\ddot\theta L} \Rightarrow \sum_i F_t = -m\cdot g\cdot \boxed{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sim\theta}} = m\ddot\theta L$

$\rightarrow -g\theta = \ddot\theta L \Rightarrow \ddot\theta L + g\theta = 0$

$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{L}\theta = 0}$ si $\ddot x + \omega^2 x = 0$

$\downarrow \omega^2 = \frac{g}{l}$; $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $(\boxed{rad}/s)$ adimensional

$\boxed{\omega \neq \dot\theta}$

Ejercicio 2

Sean dos movimientos armónicos simples con igual frecuencia angular w y direcciones perpendiculares a lo largo del eje X y del eje Y. Ambos movimientos tienen su punto de equilibrio en el origen de coordenadas. Demostrar que la composición de ambos movimientos tiene como trayectoria, en su caso más general, una elipse.

Dos MAS perpendiculares:

$$x(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega t)$$
$$y(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Como nos dejan a nuestra elección el origen de tiempos le pongo φ únicamente a $y(t)$. PROPUESTO PARA CASA: hacerlo con φ_1 y φ_2

$x = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$
$y = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$

Desarrollo la posición y:

$$y = A_2 \left[\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\varphi) \right] \Rightarrow$$

$\operatorname{sen}(\omega t) = \frac{x}{A_1}$ (del MAS en eje x)

$$\Rightarrow y = A_2 \left[\frac{x}{A_1}\cos\varphi + \cos(\omega t)\operatorname{sen}\varphi \right] \Rightarrow$$

Busco relación entre $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$: $\operatorname{sen}^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$

$$\cos(\omega t) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\omega t)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{A_2}{A_1} x \cos\varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \cdot \operatorname{sen}\varphi \, A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{A_2}{A_1} x \cos\varphi \right)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot A_2 \right)^2 \Rightarrow$$

Pasa dividiendo

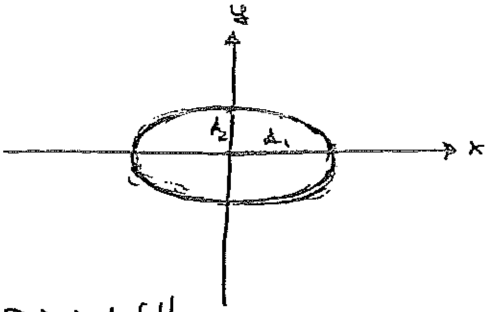
$$\Rightarrow y^2 + \frac{A_2^2}{A_1^2} x^2 \cos^2\varphi - 2y\frac{A_2}{A_1} x \cos\varphi = \left(1 - \frac{x^2}{A_1^2}\right) \operatorname{sen}^2\varphi \boxed{A_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2}\cos^2\varphi - 2xy\frac{1}{A_1 A_2}\cos\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi - \frac{x^2}{A_1^2}\operatorname{sen}^2\varphi \Rightarrow$$

$\boxed{\rightarrow}$ $\varphi = \pi/2$ ó $\varphi = (2K+1)\,\pi/2$ | Sustituyo en la ecuación:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2xy\,\frac{\cancelto{0}{\cos \pi/2}}{A_1 A_2} = \cancelto{1}{\sin^2(\pi/2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1} \rightarrow \text{Típica elipse}$$

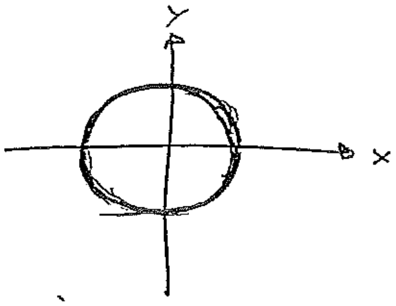


No es un MAS!!!!!!

Un MAS solo puede ser en línea RECTA!!!

Caso particular:

$\boxed{A_1 = A_2} \Rightarrow$ circunferencia



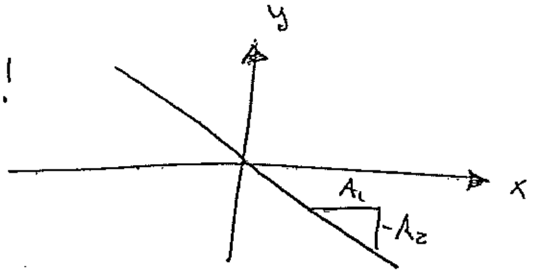
$\boxed{\rightarrow}$ $\varphi = \pi$ ó $\varphi = (2K+1)\pi$ | Sustituyo en la ecuación

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2xy\,\frac{1}{A_1 A_2}\cancelto{-1}{\cos(\pi)} = \cancelto{0}{\sin^2(\pi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + 2xy\,\frac{1}{A_1 A_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{A_2}{A_1}x}$$ Recta: MAS!!!



Ejercicio 3

Sean dos movimientos armónicos simples con igual frecuencia angular w y misma dirección a lo largo del eje X:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \operatorname{sen}(wt+\varphi_1) \\ x_2(t) &= A_2 \operatorname{sen}(wt+\varphi_2) \end{aligned}\right\}$$

La composición de ambos movimientos es también un movimiento armónico simple, se pide calcular la amplitud y la fase inicial del nuevo movimiento.

Si sumamos ambos movimientos:

$$\begin{aligned} x_1(t)+x_2(t) &= A_1 \operatorname{sen}(wt+\varphi_1) + A_2 \operatorname{sen}(wt+\varphi_2) = \\ &= A_1 \operatorname{sen} wt \cos\varphi_1 + A_1 \cos wt \operatorname{sen}\varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} wt \cos\varphi_2 + A_2 \cos wt \operatorname{sen}\varphi_2 = \\ &= (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) \operatorname{sen} wt + (A_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + A_2 \operatorname{sen}\varphi_2) \cos wt \end{aligned}$$

Por otro lado, suponiendo que el movimiento resultante es un MAS:

$$x_1(t)+x_2(t) = A\operatorname{sen}(wt+\varphi) = A\operatorname{sen} wt \cos\varphi + A\cos wt \operatorname{sen}\varphi$$

Ahora, identificando las dos expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 \quad [1] \\ A\operatorname{sen}\varphi &= A_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + A_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \quad [2] \end{aligned}$$

Para obtener la fase inicial φ dividimos [1] entre [2]:

$$\frac{A\operatorname{sen}\varphi}{A\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + A_2 \operatorname{sen}\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

Para obtener la amplitud A elevamos al cuadrado [1] y [2] :

$$\begin{aligned} A^2 \cos^2\varphi &= (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)^2 \quad [1] \\ A^2 \operatorname{sen}^2\varphi &= (A_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + A_2 \operatorname{sen}\varphi_2)^2 \quad [2] \end{aligned}$$

y sumando ambas expresiones nos queda:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\operatorname{sen}^2\varphi = (A_1 \cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + (A_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + A_2 \operatorname{sen}\varphi_2)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^2\cos^2\varphi + A^2\operatorname{sen}^2\varphi = A_1^2\cos^2\varphi_1 + A_2^2\cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ + A_1^2\operatorname{sen}^2\varphi_1 + A_2^2\operatorname{sen}^2\varphi_2 + 2A_1A_2\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^2(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) = A_1^2(\cos^2\varphi_1 + \operatorname{sen}^2\varphi_1) + A_2^2(\cos^2\varphi_2 + \operatorname{sen}^2\varphi_2) + \\ + 2A_1A_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

SEPTIEMBRE 2004

Ejercicio 2

Una partícula de masa m realiza un movimiento descrito por las ecuaciones:

$$x = A\cos(wt + \varphi_1)$$
$$y = B\,\mathrm{sen}(wt + \varphi_2)$$

Calcular:

a) La fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula.
b) La ecuación de la trayectoria, indicando qué tipo de curva es.
c) Justificar si la particula describe o no describe un MAS.

Datos: $A = 0,6\,m$; $B = 0,5\,m$; $w = 3\ rad/s$; $\varphi_1 = \pi/3$; $\varphi_2 = \pi/2$; $m = 20\ g$

En caso de no describir un MAS con los valores dados:

d) Determinar la relación que debe existir entre φ_1 y φ_2 para que la partícula describa un MAS.

a) $K = m\omega^2$; $K = 0'02 \cdot 3^2 = 0'18\ N/m$

$$\bar{F} = F_x \bar{u}_x + F_y \bar{u}_y$$

$$F_x \Leftrightarrow MAS_x \rightarrow \bar{F}_x = -K \cdot x\,\bar{u}_x$$
$$F_y \Leftrightarrow MAS_y \rightarrow \bar{F}_y = -K \cdot y\,\bar{u}_y$$

$$\bar{F}_x = -K \cdot A\cos(\omega T + \varphi_1)\,\bar{u}_x = -0'18 \cdot 0'6\,\cos(3t + \pi/3)\,\bar{u}_x$$
$$\bar{F}_y = -K \cdot B\,\mathrm{sen}(\omega T + \varphi_2)\,\bar{u}_y = -0'18 \cdot 0'5\,\mathrm{sen}(3t + \pi/2)\,\bar{u}_y$$

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y = -0'18\left[0'6\cos(3t + \pi/3)u_x + 0'5\,\mathrm{sen}(3t + \pi/2)\,\bar{u}_y\right]\ (N)$$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 0'6\cos(3t + \pi/3) \\ y = 0'5\,\mathrm{sen}(3t + \pi/2) \end{array}\right\} \rightarrow$ Eliminamos "t"

$$\frac{x}{0'6} = \cos(3t + \pi/3) \underset{\substack{\uparrow \\ \cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \pm \mathrm{sen}A \cdot \mathrm{sen}B}}{=} \cos.3t \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{sen}\,3t \cdot \mathrm{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos 3t - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sen}\,3t$$

Ahora:

$$\frac{y}{0'5} : \mathrm{sen}(3t + \pi/2) \overset{\substack{\text{relaciones trigonométricas} \\ \downarrow}}{=} \cos(3t) \rightarrow \frac{y}{0'5} = \cos.3t$$

¿ sen3t ? $\mathrm{sen}3t = \sqrt{1 - \cos^2 3t}$

$$\frac{y^2}{0'5^2} = \cos^2 3t \ ; \quad \text{Así} \quad \mathrm{sen}3t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{0'5^2}}$$

Ahora sustituyo ② y ③ en ①, queda:

$$\frac{x}{0'6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{0'5} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{y^2}{0'5^2}}$$

$$\left[\frac{x}{0'6} - \frac{y}{1}\right]^2 = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{y^2}{0'25}}\right]^2 \qquad \frac{x^2}{(0'6)^2} + \frac{y^2}{1} - \frac{2xy}{0'6} = \frac{3}{4}\left[1 - \frac{y^2}{0'25}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + 1'44y^2 - 1'2xy = 0'27}$$ Ec. general de una elipse

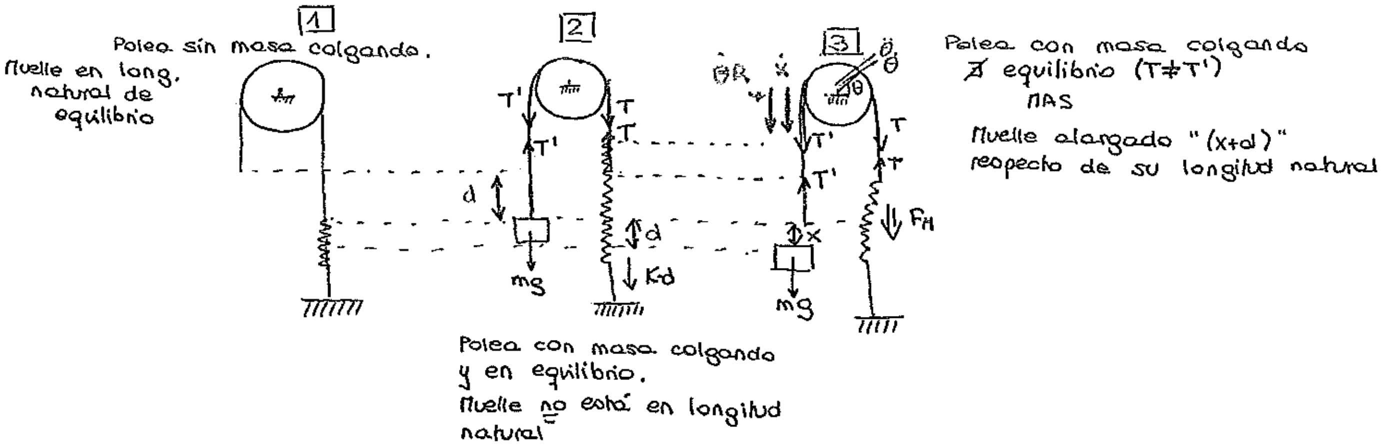
Ejercicio 5

Una masa m está suspendida de un hilo ideal, que pasa por una polea de radio R y masa M, unido a un resorte de masa despreciable y constante elástica k, cuyo otro extremo está fijo. Determinar:

a) La ecuación diferencial del movimiento de la masa m, alrededor de su posición de equilibrio.

b) La pulsación de oscilación.

c) Las tensiones T y T' del hilo a cada lado de la polea.



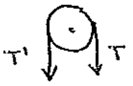
[illegible] : Poleas con masa y en movimiento

* con masa $\Rightarrow$ $m \neq 0$ $\Rightarrow$ $I_0 = \frac{1}{2} mR^2 \neq 0$ $\Rightarrow$ Polea = SR

* SR $\begin{cases} \sum \bar{F} = m \cdot \bar{a} \\ \sum \bar{M} = I \cdot \bar{\alpha} \end{cases}$

* Si ∃ movimiento de giro solo $\Rightarrow$ $\sum \bar{M}_0 = I_0 \bar{\alpha}$ $\Rightarrow$ los tensiones tienen que ser distintas para que exista movimiento.

Ejemplo.



OJO!! En equilibrio ∄ movimiento $\Rightarrow$ $T = T'$

Ecuaciones

$\boxed{2}$ · masa $\Rightarrow$ $m \cdot g - T' = 0$ (Eq) $\boxed{T' = mg}$

· Polea $\Rightarrow$ $\sum \bar{M}_0 = I_0 \bar{\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ eq(\alpha = 0)}}{=} 0$ $\Rightarrow$ $T'\cancel{R} - T\cancel{R} = 0$; $\boxed{T' = T}$

· muelle (m=0) $\sum \bar{F} = \underset{0}{\cancel{m}} \cdot \bar{a}$ $\Rightarrow$ $\sum \bar{F} = \bar{0}$

$T - K \cdot d = 0$; $\boxed{T = K \cdot d}$

Así en la situación $\boxed{2}$ se cumple $T = T'$ $\Rightarrow$ $mg = Kd$; $\boxed{d = \frac{mg}{K}}$

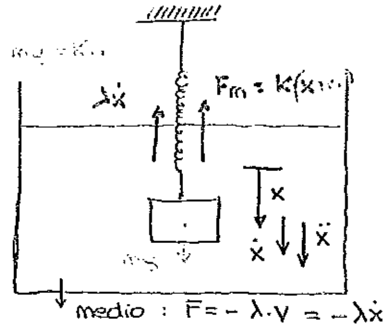
Calculo d porque lo necesito para analizar la situación $\boxed{3}$ que es donde se produce el MAS (del que me piden la ecuación diferencial)

Ejercicio 6

Un objeto de masa *m*, se cuelga de un muelle, cuya constante elástica es $K\ N/m$. Sabiendo que el medio se opone al movimiento con una fuerza opuesta a la velocidad y proporcional a ella. Determinar:

a) La ecuación diferencial del movimiento.
b) La pulsación de la oscilación libre sin amortiguar.
c) El valor del coeficiente de amortiguamiento, sabiendo que experimentalmente se ha determinado la pulsación de la oscilación amortiguada $w_a = \frac{\sqrt{3}}{2} w_0$.
d) El factor de calidad del sistema.
e) En qué factor se reducirá la amplitud después de 10 períodos.
f) El valor del decremento logarítmico.

a)



$$\sum \bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

$$\bar{F}_{medio} + \bar{F}_{muelle} = m\ddot{x} \quad \downarrow \oplus$$

$$-\lambda\dot{x} - Kx = m \cdot \ddot{x}$$

$$0 = m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + Kx$$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

Ecuación diferencial movimiento amortiguado

b) ω_0 ? $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

c) γ ? $\quad \omega_a = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 \quad \triangleright \quad \omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

sustituyendo

$$\frac{3}{4}\omega_0^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad ; \quad \gamma^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4}\omega_0^2$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{4}\omega_0^2$$

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \omega_0 = \sqrt{K/m}}}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{K}{4m}}$$

calculo λ (no lo piden)

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m} \longrightarrow \lambda = 2m\gamma = 2m\sqrt{\frac{K}{4m}} = \sqrt{K \cdot m}$$

d) $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}}{2\sqrt{\frac{K}{4m}}} = 1$ //

Q es pequeño por lo que se trata de un mal oscilador.

Ejercicio 9

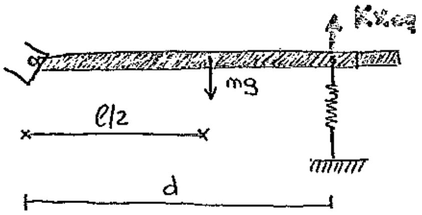
Una barra homogénea, de longitud *l* y masa *m*, está articulada por uno de sus extremos a un punto fijo *O*. En el punto *A* de la barra, distante *d* de *O*, va sujeto a un muelle, de masa despreciable, constante elástica *K* y eje vertical, fijo por su otro extremo al suelo. En la posición de equilibrio, la barra ocupa la posición horizontal. Determinar:

a) La ecuación diferencial del movimiento vibratorio que se produce al separar levemente la barra de su posición de equilibrio.

$\theta \sim 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{sen}(\theta) \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1 \end{array}$

b) La pulsación de la citada vibración.

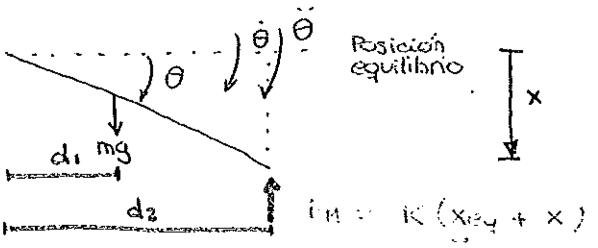
a)



Posición de equilibrio inicial.

$$\sum_i \vec{M}_O = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\cdot g\cdot \frac{\ell}{2} - Kx_{eq}d = 0 \qquad \boxed{x_{eq} = \frac{mg\ell}{2Kd}}$$

Oscilación



Ec. dinámica

$$\circlearrowright^{+} \quad \sum_i M_O = I\alpha = I_O\ddot{\theta}$$

* momento del peso $\Rightarrow \quad M_{peso} = m\cdot g\cdot d_1 = mg\,\ell/2\,\overset{1}{\overline{\cos\theta}} = mg\,\frac{\ell}{2}$

* momento del muelle $\Rightarrow \circlearrowleft^{+} \quad M_{\substack{Fuerza\\muelle}} = K(x_{eq}+x)\,d_2 = K(x_{eq}+x)d$

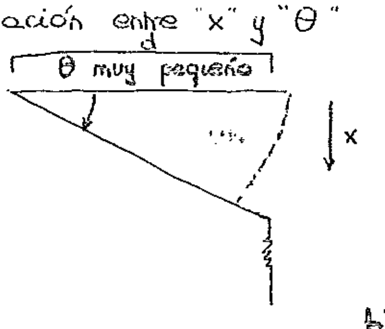
$$= Kxd + Kx_{eq}\cdot d$$

Juntamos todo.

$$\cancel{\frac{mg\ell}{2}} - Kxd - \cancel{\frac{Kmg\ell}{2Kd}}\,\cancel{d} = \underbrace{\frac{1}{3}mL^2}_{I_O}\ddot{\theta}$$

$$0 = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} + Kxd$$

Relación entre "x" y "θ"



En nuestro caso

$\theta d = x$

Así: $\quad 0 = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} + K\theta d d$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{m}\cdot\frac{3d^2}{\ell^2}\theta = 0$$

b) $\omega_0^2 = \frac{K}{m}\cdot\frac{3d^2}{\ell^2} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}\cdot\frac{3d^2}{\ell^2}}$

Ejercicio 11

La masa m de la figura puede moverse sin rozamiento sobre un eje horizontal y se halla unida mediante dos muelles iguales a sendos puntos A y B, separados la distancia $2L$. Los muelles tienen una longitud natural $L_0 < L$ y una constante elástica K. Se comunica al sistema la energía mecánica E_0 y se toma como origen de tiempos el instante en el cual la masa pasa por O, punto medio de AB y se está moviendo de A hacia B. Determinar:

a) La ecuación diferencial del movimiento.

b) La ecuación del movimiento $x = x(t)$.

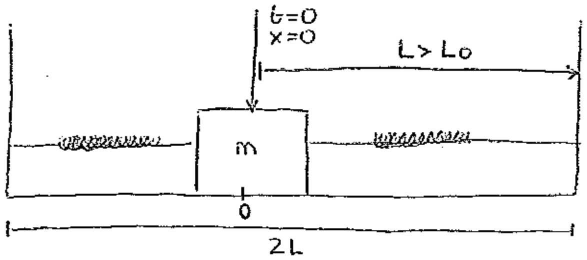
En un instante, que se tomará ahora como origen de tiempos, se hace funcionar el sistema dentro de un fluido viscoso, que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad y opuesta a ella, y se observa, que durante un período la amplitud se reduce en un 1 %. Determinar:

c) Tiempo de relajación de la amplitud.

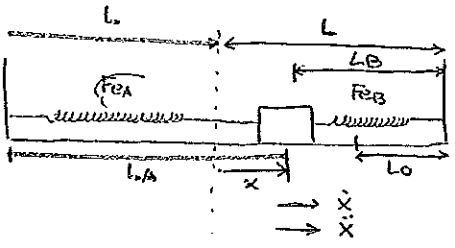
d) El factor de calidad del sistema.

e) Coeficiente de amortiguamiento.

a)



$E_T = E_0$



$$Fe_B = K\left[\underbrace{(\ell - x)}_{L_B} - L_0\right]$$

$$Fe_a = K\left[\underbrace{(L + x)}_{L_A} - L_0\right]$$

$$Ep_T = 2\left[\frac{1}{2}Kx^2\right]$$

$\sum F = m \cdot \ddot{x} \quad \longrightarrow \oplus$

$$\boxed{Fe_B - Fe_A = m \cdot \ddot{x}}$$

$\downarrow$

$$K\left(\cancel{(L - L_0)} - x\right) - K\left(\cancel{(L - L_0)} + x\right) = m \cdot \ddot{x}$$

$$-Kx - Kx = m \cdot \ddot{x}$$

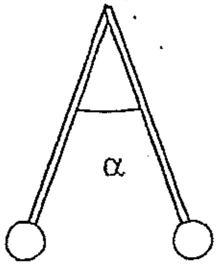
$$0 = m\ddot{x} + 2Kx \quad ; \quad \ddot{x} + \frac{2K}{m}x = 0$$

JUNIO 2000

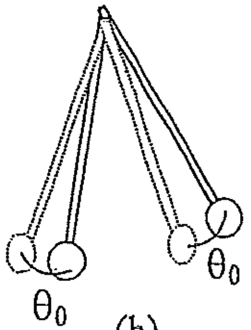
Ejercicio 2

Un sólido rígido esta formado por dos pequeñas esferas de masa, M, adheridas en los extremos de sendas barras de masa despreciable de longitud, L, que a su vez, se hallan rígidamente unidas por sus otros extremos formando un ángulo α. El sistema se encuentra suspendido por el punto de unión de ambas barras (fig. (a)) . Si el sistema se desplaza un ángulo, θ₀ (muy pequeño), de su posición de equilibrio (fig. b), determinar:

a) El momento de las fuerzas actuantes sobre las esferas respecto del punto de suspensión del sólido
b) la ecuación diferencial del movimiento
c) la frecuencia de oscilación del sistema.
d) energía cinética máxima del mismo.

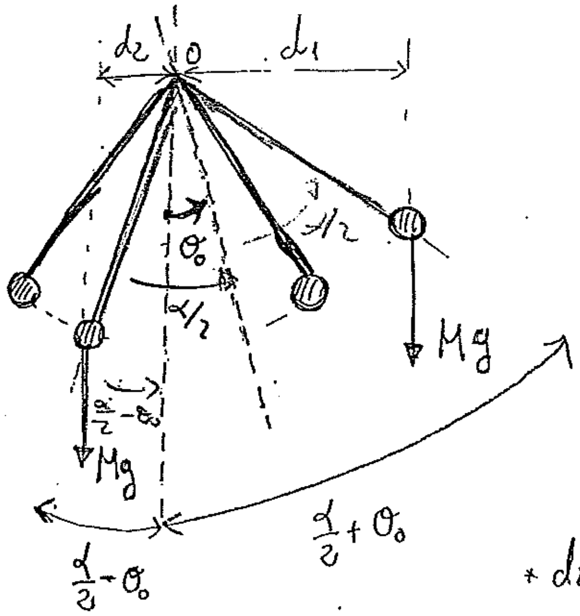


(a)



(b)

a)



$(+)\ M_{TOT_0} = -Mg\cdot d_1 + Mg\cdot d_2 = Mg(-d_1 + d_2)$

$* \ d_1 = L\,\text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \theta_0\right) =$

$= L\left(\text{Sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\text{Cos}\,\theta_0 + \text{Cos}\frac{\alpha}{2}\,\text{Sen}\,\theta_0\right)$

$* \ d_2 = L\cdot\text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2} - \theta_0\right) = L\cdot\left(\text{Sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\text{Cos}\,\theta_0 - \text{Cos}\frac{\alpha}{2}\cdot\text{Sen}\,\theta_0\right.$

$(+)\ M_{TOT_0} = MgL\left(-\cancel{\text{Sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\text{Cos}\,\theta_0} - \text{Cos}\frac{\alpha}{2}\,\text{Sen}\,\theta_0 + \cancel{\text{Sen}\frac{\alpha}{2}\,\text{Cos}\,\theta_0} - \text{Cos}\frac{\alpha}{2}\cdot\text{Sen}\,\theta_0\right)$

$$\boxed{M_{TOT_0} = -2MgL\,\text{Cos}\frac{\alpha}{2}\,\text{Sen}\,\theta_0}$$

b) Rotación entorno a O: $(+)\ M_0 = I_0\cdot\alpha$

θ_0 es el parámetro que indica la posición del péndulo en su movimiento de giro respecto a O.

$M_0 = -2MgL\,\text{Cos}\frac{\alpha}{2}\cdot\text{Sen}\,\theta_0$

$I_0 = 2\cdot M\cdot L^2$

$\alpha = \ddot{\theta}_0$

$-\cancel{2}\cancel{M}g\cancel{L}\,\text{Cos}\frac{\alpha}{2}\,\text{Sen}\,\theta_0 = \cancel{2}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\cdot\ddot{\theta}_0$

Es decir θ_0 no es cte.

$L\,\ddot{\theta}_0 + g\,\text{Cos}\frac{\alpha}{2}\,\text{Sen}\,\theta_0 = 0$

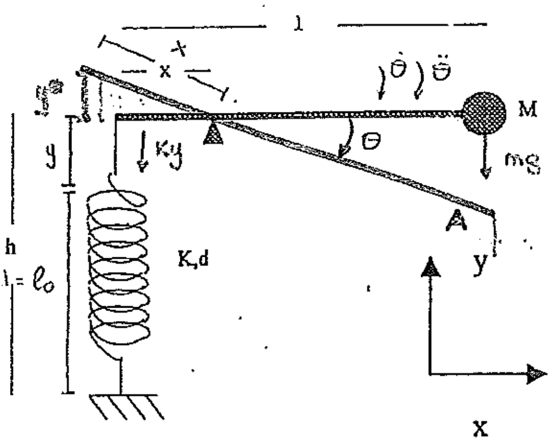
$\ddot{\theta}_0 + \frac{g}{L}\,\text{Cos}\,\alpha/_2\,\text{Sen}\,\theta_0 = 0$

$I_0 = mL^2$

Con dos masas en $I_{0_{TOT}} = 2ML2$

Ejercicio 2

Sea el sistema de la figura. Una barra de longitud l y masa despreciable con una masa M adherida rígidamente a uno de sus extremos (radio de la masa < < l) , puede girar en torno a un punto que dista x (x< l/2) de su otro extremo. A dicho extremo se encuentra sujeto un muelle (masa despreciable, longitud natural d, constante K) que tiene su otro extremo sujeto a un punto que puede ser fijado adecuadamente.



Determinar:

a) La longitud, h, que debemos darle al muelle para que en condiciones estáticas la barra se mantenga en posición horizontal.

b) Si una vez alcanzado el equilibrio desplazamos la barra un ángulo θ (muy pequeño) de dicha posición, escribir la ecuación dinámica del movimiento y determinar la frecuencia de su oscilación Si en el instante inicial la masa se encuentra en la posición de equilibrio y con una velocidad $-v_0 j$, hallar la función θ =θ (t) y determinar la máxima energía potencial del sistema (tomar como referencia de energía potencial θ = 0)

A) Barra estática y en horizontal
equilibrio ($\sum \bar{\Pi} = 0$) (ver dibujo)

$$\circlearrowright^{+} \quad \sum \bar{\Pi}^{o} = \bar{0}$$

$$Mg(\ell - x) - Ky(x) = 0 \quad ; \quad y = \frac{Mg(\ell - x)}{Kx} = \frac{Mg}{K}\left(\frac{\ell}{x} - 1\right)$$

la longitud "h" que me piden :

$$h = d + y = d + \frac{Mg}{K}\left(\frac{\ell}{x} - 1\right)$$

B) $\sum \bar{\Pi}^{o} = I \cdot \bar{\alpha}$

$$\circlearrowright^{+} \quad -\left[K(y + y^{*})\right] x \cos\theta + mg(\ell - x)\cos\theta = m \cdot (\ell - x)^{2} \cdot \ddot{\theta}$$

Así nos queda :

$$Mg(\ell - x) - K(y + y^{*}) \cdot x = M(\ell - x)^{2}\,\ddot{\theta}$$

$$y = \left(\text{del aptdo } 1\right) = \frac{Mg}{K}\left(\frac{\ell}{x} - 1\right) \quad ; \quad y^{*} = x \,\text{sen}\,\theta = x \cdot \theta$$

$$Mg(\ell - x) - K\left(\frac{Mg}{K}\left(\frac{\ell}{x} - 1\right) + x\theta\right)x = M(\ell - x)^{2}\,\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{Kx^{2}}{M(\ell - x)^{2}}\,\theta = 0$$ Ecuación diferencial del movimiento.

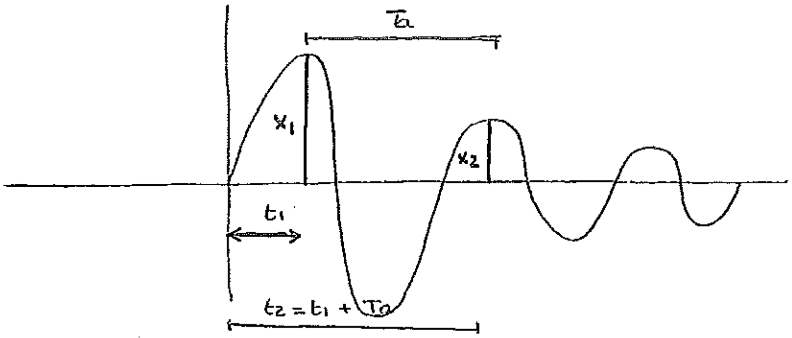
$$\omega = \sqrt{\frac{Kx^{2}}{M(\ell - x)^{2}}} = \frac{x}{(\ell - x)}\sqrt{\frac{K}{M}}$$

JUNIO 2001

Ejercicio 3

En un movimiento armónico amortiguado se consideran dos máximos consecutivos del mismo signo. Se sabe que el cociente entre ambos vale 0,9 y que el tiempo transcurrido entre ambos es de 2,5 s. Calcular:

a) La constante γ de amortiguamiento.
b) El Q del sistema.
c) La expresión analítica completa $x(t)$ del movimiento sabiendo que para $t = 3$ s, $x(3) = 6$ cm y $v(3) = 0$.



$\frac{x_2}{x_1} = 0'9$

$T_a = 2'5$ seg

a/ ¿γ? $\Rightarrow$ $x(t_1) = x_1 = Ae^{-\gamma t_1}$ sen $(\omega_a t_1 + \varphi)$

$x(t_2) = x_2 = Ae^{-\gamma t_2}$ sen $(\omega_a t_2 + \varphi) \underset{\overset{\uparrow}{t_2 = t_1 + T_a}}{=} Ae^{-\gamma(t_1+T_a)}$ sen $(\omega_a(t_1 + \overset{\frac{2\pi}{\omega_a}}{T_a}) +$

$\Downarrow$

sen$[(\omega_a t_1 + \varphi) + 2\pi] =$ sen$(\omega_a t_1 + \varphi)$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{Ae^{-\gamma(t_1+T_a)}}{Ae^{-\gamma(t_1)}} = e^{-\gamma T_a} = 0'9$$

$$-\gamma T_a \ln e = \ln 0'9$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{1}{T_a}\ln 0'9 = -\frac{1}{2'5}\cdot \ln 0'9 = 0'04214 \text{ seg}^{-1}}$$

b) $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ $\longrightarrow$ ω_0 ? $\Rightarrow$ $\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

$\omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + \gamma^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 + \gamma^2}$

$\omega_0 = 2'5136$ rad/s

$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = 29'82$

c) $t = 3$ seg
$x(t=3) = 6$ cm
$\dot{x}(t=3) = 0$

Ecuación general $x(t) = Ae^{-\gamma t}$ sen $(\omega_a t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\gamma A e^{-\gamma t}.$ sen $(\omega_a t + \varphi) + \omega_a \cos(\omega_a t + \varphi) A e^{-\gamma t}$

$x(t=3) = 6$ cm
$\hookrightarrow 6 = Ae^{-\gamma \cdot 3}$ sen $(\omega_a \cdot 3 + \varphi)$ [1]

$v(t=3) = 0 = -\gamma \cancel{A}\cancel{e^{-3\gamma}}$ sen $(\omega_a \cdot 3 + \varphi) + \cancel{A}\omega_a \cancel{e^{-3\gamma}} \cos(\omega_a 3 + \varphi)$ [2]

Recordemos $\gamma = 0'04214$ seg^{-1} $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 2'5133$ $\frac{rad}{s}$

De [2] $-\gamma$ sen $(3\omega_a + \varphi) + \omega_a \cos(3\omega_a + \varphi) = 0$

$tg\,(3\omega_a + \varphi) = \frac{\omega_a}{\gamma}$

$3\omega_a + \varphi = \text{arctg}\left(\frac{\omega_a}{\gamma}\right)$; $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{\omega_a}{\gamma}\right) - 3\omega_a$

$\varphi = -5'9843$ rad

JUNIO 2002

Ejercicio 2

Un oscilador amortiguado tiene una frecuencia *w* que es un 10% menor que su frecuencia natural. Calcular:

a) En que factor disminuye su amplitud y su energía en cada oscilación.
b) El factor de calidad del oscilador. ¿Se trata de un buen oscilador?. Razonar la respuesta.
c) Sabiendo que en el instante inicial, la amplitud de la oscilación es A_0, y la fase φ, escribir la expresión analítica del oscilador amortiguado.

Oscilador amortiguado $\omega = \omega_a$

$$\boxed{\omega_a = 0'9\,\omega_0}$$

A) como disminuye la amplitud y la energía.

$\frac{x_2}{x_1}$? $\frac{E_2}{E_1}$?

γ
T_a

■ $$\frac{x_2}{x_1} = \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x(t_1 + T_a) \\ x_1 = x(t_1) \end{array} \right\} = \frac{e^{-\gamma(T_1+T_a)}}{e^{-\gamma(t_1)}} = e^{-\overset{*}{\gamma}(\overset{**}{T_a})} = \frac{x_2}{x_1} \qquad [1]$$

↑ Demostración pg.19

T_a, γ ?

* $\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

Del enunciado ⇒ $\omega_a = 0'9\,\omega_0$

$$\Rightarrow (0'9\omega_0)^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \;; \quad \boxed{\gamma = \sqrt{1 - 0'9^2}\,\omega_0}$$

** $$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \boxed{\frac{2\pi}{0'9\omega_0} = T_a}$$

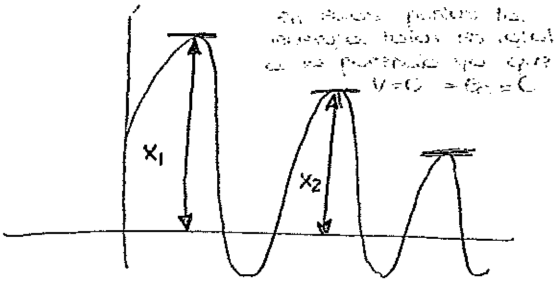
$$\frac{x_2}{x_1} = e^{-\sqrt{1-0'9^2}\,\cancel{\omega_0}\,\frac{2\pi}{0'9\cancel{\omega_0}}}$$

$$\boxed{\frac{x_2}{x_1} = 0'0497}$$

¿Qué ocurre con la energía ?

* En un oscilador simple : $E_{TOTAL} = cte$

* En un oscilador amortiguado : $E_{TOTAL} \neq cte$
Va disminuyendo la energía en cada oscilador.



En estos puntos la energía total es igual a la potencial ya que $v=0 \Rightarrow E_c=0$

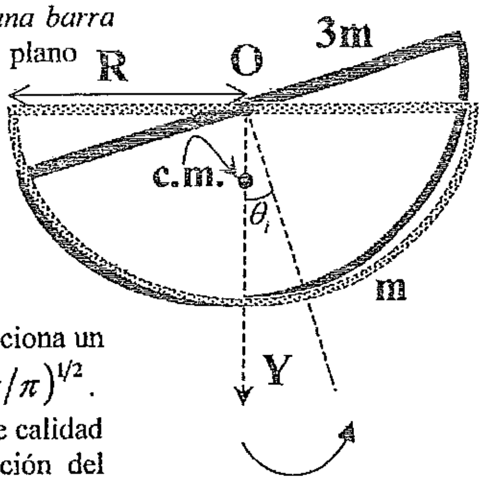
$$E_{TOTAL\ EN\ CADA\ OSCILACIÓN} = \frac{1}{2} K A^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} K A_1^2 = \frac{1}{2} K x_1^2 = \frac{1}{2} k \left[x(t_1)\right]^2 \qquad E_2 = \frac{1}{2} K A_2^2 = \frac{1}{2} K x_2^2 = \frac{1}{2} k \left[x(t_1 + T_a)\right]^2$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{x_2^2}{x_1^2} = (0'0497)^2 = 0'0024 \;; \quad \boxed{\frac{E_2}{E_1} = 0'0024}$$

JUNIO 2003

Ejercicio 2

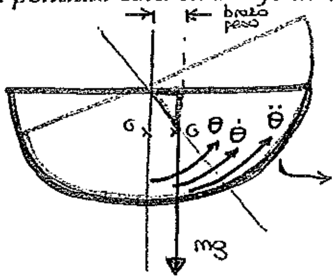


El péndulo de la figura consta de una *barra rígida semicircular* de masa **m** y radio **R** que está cerrada por su diámetro con *una barra recta y rígida* de longitud **2R** y masa **3m** , estando en un plano vertical. El péndulo puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular al papel que pasa por O. Si se gira desplazando su eje de simetría de la vertical un ángulo θ_i muy pequeño (**0.14** radianes) y se suelta a continuación, se pide:

1) La ecuación diferencial del movimiento y la frecuencia de las oscilaciones .

Como el péndulo está en un medio resistente, éste le proporciona un par amortiguador $\mathbf{M_{dis} = - C\dot{\theta}}$ *siendo* $\mathbf{C=mR^{3/2}(2g/\pi)^{1/2}}$. Obtener con las condiciones iniciales anteriores, 2) el factor de calidad (indicando si es o no un buen oscilador) y la pseudopulsación del movimiento amortiguado. 3) la solución analítica completa del movimiento. DATO: *el c.m. del péndulo está en su eje de simetría y dista* ***R/2π*** *de O.*

a)



movimiento de giro

— x —

Recordemos

MAS TRASLACIONES ⇒ $\sum \bar{F} = m\bar{a}$

MAS GIROS ⇒ $\sum \bar{M}_O = I^O \alpha$

$$\sum \bar{M}^O = I^O \bar{\alpha}$$

$$\sum \bar{M}^O = -\underset{TOTAL}{mg}\, |\overline{OG}|\, \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\substack{\text{enunciado} \\ \theta = \text{pequeño} \\ \operatorname{sen}\theta \sim \theta}} = -(4m)g\frac{R}{2\pi}\theta$$

Enunciado $\overline{OG} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow$ MAL !!

$\overline{OG} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow$ BIEN !!

$$I_{O\,TOTAL} = I_{O\,barra} + I_{O\,semicircunf} = \frac{1}{12}(3m)(2R)^2 + mR^2 = 2mR^2$$

$$\alpha = \ddot{\theta}$$

$$\sum \bar{M}^O = I^O\bar{\alpha} \Rightarrow -4mg\cdot\frac{R}{2\pi}\theta = 2mR^2\cdot\ddot{\theta}$$

$$2\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + 4\cancel{m}g\frac{\cancel{R}}{2\pi}\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R\pi}\theta = 0} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R\pi}}}$$

b) Parte II : amortiguador

$$M_{dis} = -C\cdot\dot{\theta} \quad ; \quad C = mR^{3/2}\left(\frac{2g}{\pi}\right)^{1/2}$$

$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$? $\gamma \rightarrow 2\gamma =$ coef $[\dot{\theta}]$ en la ecuación diferencial del movimiento amortiguado

$$-4mg\frac{R}{2\pi}\cdot\theta + \underbrace{(-c\dot{\theta})}_{M_{dis}} = 2mR^2\ddot{\theta}$$

$$-4mg\frac{R}{2\pi}\theta - mR^{3/2}\left(\frac{2g}{\pi}\right)^{1/2}\dot{\theta} = 2mR^2\ddot{\theta} \quad ; \quad \ddot{\theta} + \frac{C}{2mR^2}\dot{\theta} + \frac{g}{R\pi}\theta = 0$$

$$2\gamma = \frac{C}{2mR^2} \quad ; \quad 2\gamma = mR^{3/2}\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\cdot\frac{1}{2mR^2} \quad ; \quad \gamma = \sqrt{\frac{g}{8R\pi}}$$

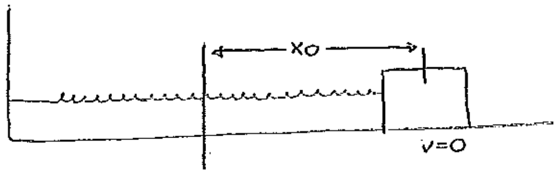
Ejercicio 7

Un cuerpo de masa $m = 1\,Kg$, unido al extremo de un muelle de constante elástica $K = 10^4\ N/m$, puede desplazarse a lo largo de una recta horizontal, que se tomará como eje *OX*, siendo *O* la posición del *c.d.m.* del cuerpo en el equilibrio. A partir de esta posición se separa el cuerpo una distancia $x_0 = 20\,mm$ y se suelta sin velocidad inicial. Determinar:

a) La energía comunicada al sistema.
b) La pulsación y la frecuencia de la oscilación si no hubiera rozamiento.
c) La pulsación de la oscilación amortiguada, habiéndose observado que durante $10\ s$ la elongación alcanza 158 veces su valor máximo.
d) El coeficiente de amortiguamiento.

Estando el cuerpo en reposo, se le aplica una fuerza, en dirección del eje *OX*, de valor $F = F_0 \operatorname{sen}(90t)$, determinar:
e) La expresión de la amplitud en régimen permanente.
f) El factor de calidad del sistema y el ancho de banda.

$K = 10^4\ N/m$

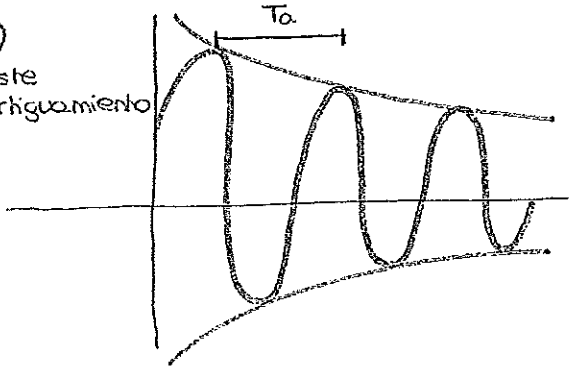


a) $\underbrace{E_T}_{N\cdot m} = E_p + E_c \underset{\substack{\uparrow \\ (A) \\ v=0\ \rightarrow\ E_c=0 \\ x=x_0}}{=} E_p = \frac{1}{2}Kx_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{10^4}_{N/m}\cdot\underbrace{0'02}_{m}^{2} \Rightarrow \boxed{E_T = 2\ \text{Julios}}$

b) $\boxed{\omega_0} = \left\{ \overset{\text{MAS.}}{\ddot{x} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_0^2} x = 0} \right\} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10^4}{1}} = \boxed{100\ \text{rad/s}}$

$\boxed{f} = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} = \boxed{15'92\ \text{Hz}}$

c)
Existe amortiguamiento



$10\ \text{seg} = 158 \cdot T_a$

$T_a = \frac{10}{158} = 0'063\ \text{seg.}$

$\boxed{\omega_a} = \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2\pi}{0'063} \simeq \boxed{99'27\ \text{rad/s}}$

d) ¿γ?
$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$; $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_a^2} = \sqrt{100^2 - 99'27^2}$; $\boxed{\gamma = 12'06\ \text{seg}^{-1}}$

TEMA 3: ONDAS

3.1 Definición

Una **onda** es una perturbación de alguna magnitud física que se propaga en el espacio y el tiempo.

Las ondas transportan energía a través del espacio, pero **no transportan materia;** si después de arrojar la piedra y perturbar el agua de la piscina para generar una onda colocamos sobre el agua una pequeña hoja podemos observar cómo ésta sube y baja, pero no se desplaza (ni se acerca ni se aleja del punto donde se ha generado la perturbación); también podemos observar la "ola" en un gran estadio de fútbol, los espectadores suben y bajan en sus asientos (no se desplazan); sin embargo, la onda avanza en las gradas.

La magnitud física perturbada que va a generar la onda puede ser de dos tipos:

- **Escalar:** presión, densidad, deformación elástica....
- **Vectorial:** campo magnético o eléctrico.

Las ondas llevan asociados dos movimientos, el de la propia onda a través del medio en el que se propaga y el movimiento de las partículas del medio. Podemos clasificar las ondas en tres tipos, según sea su dirección de propagación:

el sonido es un ejemplo de este tipo de ondas, las moléculas del medio a través del cual el sonido oscila se mueve hacia atrás y hacia delante a lo largo de la dirección de propagación de la onda

Ondas longitudinales: son aquellas ondas en las que la perturbación es paralela a la dirección de propagación, dicho de otro modo, la dirección de propagación de la onda es paralela a la dirección de vibración de las partículas del medio soporte de la onda (por ejemplo un muelle lo estiramos y lo soltamos sobre una mesa).

También existen las ondas oblicuas: se obtienen por composición de las dos anteriores (por ejemplo, las ondas sísmicas).

Ondas transversales: En éstas la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación. La dirección de propagación es perpendicular a la dirección de vibración de las partículas del medio donde la onda se desplaza (por ejemplo, una onda en una cuerda).

3.2 Ecuación de onda

La ecuación de una onda es una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP), de la forma:

Recuerda esta expresión !!

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda.

Este tipo de ecuaciones diferenciales se estudian en MMT2

La expresión anterior corresponde a una onda que se propaga en una dimensión y en la dirección del eje X; si se desplazara en dos dimensiones la ecuación adoptaría la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right]$$

Ecuación correspondiente a un desplazamiento en el plano XY.
Y en tres dimensiones sería del tipo:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right]$$

3.3 Ondas en una dimensión

La solución general de la ecuación de onda en una dimensión es de la forma:

$$\xi(x,t) = \xi_0 f(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Curiosidad:
Hay otras funciones que cumplen la EDP y que por tanto también son ondas,por ejemplo:

$$\xi = 5e^{(7x-3t)}$$

también es una onda pues satisface la ecuación de onda.

donde f puede ser cualquier función y ξ_0 es un valor constante.
Sin embargo, en este curso solo vamos a estudiar la solución periódica armónica que aparece cuando la función f es un seno (o un coseno):

$$\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \varphi)}$$

Esta onda se desplaza a lo largo del eje X (este eje es su dirección de propagación), por eso depende de una única variable de espacio, o sea, x, y del tiempo t.

Características de una onda

ATENCIÓN: El número de la onda es en realidad el módulo del vector *número de la onda* $\vec{k}$ el cual nos indica la dirección de propagación de la onda (Lo usaremos en ondas electromagnéticas)

- El término que acompaña al espacio (en ese caso x, por ser una onda que se desplaza en una dimensión) recibe el nombre de **número de la onda k,** y en el S.I. de unidades se mide en *rad/m* o simplemente en m^{-1}.
- Se define **longitud de onda** λ, a la distancia entre dos puntos consecutivos con igual perturbación (la distancia entre dos crestas, o dos valles) se mide en metros $\lambda = 2\pi / |\vec{k}|$.
- El término que acompaña al tiempo se denomina **pulsación o frecuencia angular,** ω se mide en rad/s y nos permite calcular otras dos características de la onda:

  - El **período** T, que se define como el tiempo necesario para que la energía de la ond recorra la distancia de una longitud de onda y se mide en segundos: $T = 2\pi / \omega$.

  - La **frecuencia** f, que es el número de oscilaciones por unidad de tiempo, es la inversa del periodo $f = 1/T = \omega / 2\pi$, se mide en s^{-1} pero a esa unidad se le llama Herzio.

  IMPORTANTE: Se comprueba que cuando una onda cambia de medio su pulsación ω no cambia (y por tanto, tampoco cambia su frecuencia f ni su período T).

- Al término que en la función matemática se encuentra entre paréntesis se le denomina **fase** de la onda $(kx \pm \omega t + \varphi)$, se mide en radianes. Según el valor que adopte la fase de la onda ésta se desplaza en un sentido u otro:

  a) Signo kx = signo ωt, la onda se propaga en **sentido negativo**, se mueve hacia la izquierda.
  b) Signo $kx \neq$ signo ωt, en este caso la onda se propaga en **sentido positivo**, se mueve hacia la derecha.

OJO: esta observación es muy importante

- El término φ es la fase inicial, es una constante que se obtiene con las condiciones iniciales de la onda(es decir, conociendo la perturbación de un punto concreto de la onda en un instante concreto)

Una onda nunca "*acelera*"

- La **velocidad de propagación** de la onda es la velocidadcon la que se propaga la energía

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f}$$

IMPORTANTE: La velocidad de propagación es siempre constante.

La velocidad de vibración no es constante a diferencia de la velocidad de propagación

- La **velocidad de vibración** es la velocidad que tiene cada particula que está oscilando en un instante dado. No se debe confundir con la velocidad de propagación de la onda.

$$\text{Velocidad de vibración} = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} \; m/s$$

Igualmente se define la **aceleración de vibración** como la aceleración que tiene cada particula que está oscilando en un instante dado.

$$\text{Aceleración de vibración} = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} \; m/s^2$$

- La amplitud ξ_0 o también conocida como A de una onda es el máximo desplazamiento de una partícula del medio desde la posición en la que ésta no tiene perturbación, se mide también en unidades de longitud, en metros si trabajamos en el S.I.

En definitiva:

Una onda armónica unidimensional que se propaga en el sentido positivo o negativo del eje x puede representarse de cualquiera de las formas siguientes:

$$\xi_1 = \xi_0 \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \varphi) \qquad \xi_3 = \xi_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi'')$$
$$\xi_2 = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t \pm kx + \varphi') \qquad \xi_4 = \xi_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi''')$$

La elección de una u otra forma de representación hará que, para una onda particular, se obtengan valores distintos de la fase inicial según sea la función armónica elegida, ya que:

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx + \pi) = \xi_0 \cos\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \xi_0 \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)$$

3.4 Superposición de ondas, interferencias

Generalmente tendremos la superposición de dos ondas unicamente

Cuando actúan en un mismo punto simultáneamente más de una onda se dice que esas ondas se superponen. La ecuación que representa la perturbación de la superposición es directamente la suma de las ecuaciones de las ondas:

$$\xi_T = \xi_1 + \xi_2$$

Interferencia: La perturbación se denomina interferencia si las dos ondas son coherentes, esto es, que tengan misma frecuencia y mantegan un desfase inicial (resta de fases iniciales) constante.

Interferencia constructiva: La intensidad de la interferencia es máxima
Interferencia destructiva: La intensidad de la interferencia es nula(no hay perturbación)

Si las dos ondas no son coherentes, no se produce fenómeno interferencia. Lo normal es que nos pidan calcular la **"frecuencia de los pulsos"** o los **"pulsos"** a secas. Si están actuando dos ondas no coherentes de frecuencias (distintas) f_1 y f_2:

$$\boxed{f_{Pulsos} = |f_1 - f_2|}$$

3.5 Ondas estacionarias

Consiste en la interferencia de dos ondas que cumplen unas características muy concretas: dos ondas armónicas planas unidireccionales, una que se desplaza hacia la izquierda y otra hacia la derecha.Tenemos dos casos típicos:

Recuerda la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{A \pm B}{2}\cos\frac{A \mp B}{2}$$

Caso A: si las ondas no tienen desfase entre ellas

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1 &= A\operatorname{sen}(\omega t - kx)\\ \xi_2 &= A\operatorname{sen}(\omega t + kx)\end{aligned}\right\}$$ Utilizando la relación trigonométrica sumamos las ecuaciones:

$$\boxed{\zeta_T = \left(2A\cos(kx)\right)\operatorname{sen}(\omega t)}$$

Más adelante veremos que la amplitud de una onda está relacionada con la intensidad que transmite. *Epígrafe 3.9*

Es un movimiento armónico simple de los puntos de la onda cuya amplitud $A_T = 2A\cos(kx)$ depende de la posición x. Buscamos los puntos con amplitud máxima y los puntos con amplitud mínima.

Interferencia destructiva

· Amplitud nula: se les llama **nodos**

$$A_T = 0 \leftrightarrow \cos(kx) = 0 \leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \leftrightarrow \boxed{x = \frac{2n+1}{4}\lambda} \quad n = 0,1,2\ldots$$

Interferencia constructiva

· Amplitud máxima: se les llama **vientres**

$$A_T = 2A \leftrightarrow \cos(kx) = \pm 1 \leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = n\cdot\pi \leftrightarrow \boxed{x = \frac{\lambda}{2}n}\ ,\ n = 0,1,2\ldots$$

Recuerda la identidad trigonométrica:

$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{A \pm B}{2}\cos\frac{A \mp B}{2}$

Caso B: si las ondas tienen un desfase de π radianes

$$\left.\begin{array}{l}\zeta_1 = A\operatorname{sen}(\omega t - kx + \pi)\\ \zeta_2 = A\operatorname{sen}(\omega t + kx)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\zeta_1 = -A\operatorname{sen}(\omega t - kx)\\ \zeta_2 = A\operatorname{sen}(\omega t + kx)\end{array}\right\} \text{ sumando nuevamente}$$

$$\boxed{\zeta_T = 2A\operatorname{sen}(kx)\cos(\omega t)}$$

Es un movimiento armónico simple de los puntos de la onda cuya amplitud $A_T = 2A\,sen(kx)$ depende de la posición x. Buscamos nuevamente los puntos con amplitud máxima y los puntos con amplitud mínima.

Es idéntico que el caso A pero cambiando la posición de los nodos por la de los vientres y viceversa.

· Amplitud nula: se les llama **nodos**

Interferencia destructiva

$$(A_T = 0) \leftrightarrow sen(kx) = 0 \leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = n\cdot\pi \rightarrow \boxed{x = \frac{\lambda}{2}n} \quad , \quad n = 0,1,2...$$

· Amplitud máxima: se les llama **vientres**

Interferencia constructiva

$$(A_T = 2A) \leftrightarrow sen(kx) = \pm 1 \leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{2n+1}{4}\lambda} \quad , \quad n = 0,1,2...$$

Puedes comprobar que:

Distancia entre nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$

Distancia entre vientres consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$

Distancia entre un nodo y un vientre consecutivos es $\frac{\lambda}{4}$

¿Cuándo utilizo la ecuación del caso A y cuándo la del caso B?

En función de lo que tengamos en $x = 0$.

Si me dicen que en $x = 0$ tengo un vientre (tubo sonoro abierto en x=0) utilizo el caso A.

Si me dicen que en $x = 0$ tengo un nodo (tubo sonoro cerrado en x=0 o cuerda fija en su extremo x=0 utilizo el caso B).

IMPORTANTE: si en x=0 tengo cualquier otro valor, usaremos cualquiera de las dos ecuaciones, pero añadiendo el desfase inicial que cumpla con las condiciones del enunciado

¿Cómo se dibuja una onda estacionaria?

Depende de la longitud de onda λ, esta la podemos conocer de dos formas:

Forma 1: nos dan λ directamente. Como sabemos que la distancia entre nodos y vientres consecutivos es $\lambda/4$ ya podríamos dibujarla y podríamos saber el número de nodos y vientres que hay.

No olvides que sea cual sea el armónico la distancia entre nodos consecutivos es sienpre $\lambda/2$, al igual que la distancia entre vientres consecutivos que también es $\lambda/2$. También la distancia entre un nodo y un vientre consecutivo es $\lambda/4$.

Forma 2: nos dan el armónico de vibración (que es el contador n de antes), por ejemplo si tenemos una cuerda fija (L) por dos extremos: al estar fija en los extremos, en estos debe haber un nodo.

$x = 0 \Rightarrow$ nodo elijo caso B: $\boxed{\zeta_T = 2A\text{sen}(kx)\cos(\omega t)}$

$x = L \Rightarrow$ nodo impongo $sen(kL) = 0 \rightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot L = n\cdot\pi \rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{2L}{n}}$

son las longitudes de onda de las ondas estacionarias que cumplen las condiciones de contorno de la cuerda.

A la mayor λ se le llama primer armónico o armónico fundamental (2 nodos y un vientre), a la siguiente λ se le llama segundo armónico (3 nodos y dos vientres).

3.6 Ondas en dos dimensiones

Este concepto no tiene sentido en ondas en una dimensión

Se propagan en el plano (dos direcciones del espacio), y podemos hablar de dos casos: ondas planas y ondas circulares.
Se define **frente de onda** como el lugar geométrico de los puntos con igual perturbación.

Ondas Planas

Sus frentes de onda son rectas paralelas entre sí, perpendiculares al vector unitario de propagación (es un vector de módulo unidad, perpendicular al frente de onda que nos define la dirección en la que la onda se mueve $\vec{u} = \vec{k} / |\vec{k}|$).
Su ecuación de onda es del tipo: $\xi = \xi_0 \,\mathrm{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \varphi)$, donde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ si la onda se propaga en el plano XY.

Para calcular las características de la onda se sigue cumpliendo lo expresado anteriormente para las ondas en una dimensión (lo que acompaña al tiempo es la pulsación angular, lo que acompaña al espacio es el vector número de ondas).

Ondas Circulares

Sus frentes de onda son circunferencias concéntricas alrededor del punto donde se genera la onda (la onda que se genera, por ejemplo, cuando una piedra es arrojada a un estaque es una onda circular).

La amplitud de este tipo de onda va disminuyendo según la onda va avanzando y alejándose del punto donde se ha generado.

Esto es debido, y ya lo hemos mencionado anteriormente, a que la onda transporta energía y esa energía tiene que repartirse a lo largo de un frente de onda que va aumentado de longitud según la onda se aleja de su origen. La intensidad de una onda circular se define como:

$$\text{Intensidad} = \frac{\text{Potencia}}{\text{Longitud del frente de onda}} = \frac{\text{Potencia}}{2\pi r}$$

La energía que desplaza la onda (en un medio sin pérdidas) es la misma, pero debe repartirse cada vez entre mayor número de puntos, pues el frente de onda va creciendo a medida que la onda avanza. Debido a esto, la amplitud con que se mueven los puntos del medio disminuye:

En el epígrafe 3.9 entenderemos el porqué de esta relación

$$A = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}}$$

Así que la amplitud de una onda circular disminuye con la distancia al centro según la ley anterior donde aquí ξ_0 representaa la amplitud inicial de la onda. Por tanto su ecuación matemática será del tipo:

$$\boxed{\xi = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}} \,\mathrm{sen}(kr - \omega t + \varphi)}$$

En este tipo de ondas no tiene sentido hablar de vector número de ondas, pues la onda se propaga en todas las direcciones del plano, y sólo puede aparecer un signo negativo antes de la pulsación angular, pues estas ondas se mueven siempre hacia fuera, alejándose del origen de la onda.

3.7 Ondas en tres dimensiones

Se propagan en el espacio (tres direcciones) y pueden ser planas o esféricas.

Ondas planas.

Sus frentes de onda son planos paralelos, perpendiculares a la dirección de propagación.
Su ecuación matemática es del mismo tipo que la ecuación de las ondas planas en dos dimensiones, aunque ahora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$$\boxed{\xi = \xi_0 \operatorname{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}$$

Ondas esféricas

el sonido es un ejemplo de onda esférica, se propaga en todas las direcciones del espacio, siempre hacia fuera alejándose de la fuente emisora

Los frentes de onda son esferas concéntricas alrededor del punto donde se genera la onda.
La intensidad de una onda esférica se define como:

$$\text{Intensidad} = \frac{\text{Potencia}}{\text{Superficie del frente de onda}} = \frac{\text{Potencia}}{4\pi r^2}$$

y al igual que ocurría con las ondas circulares, la intensidad de una onda esférica también disminuye con la distancia al origen de la onda.
Debido a esto, la amplitud con que se mueven los puntos del medio disminuye:

$$A = \frac{\xi_0}{r}$$

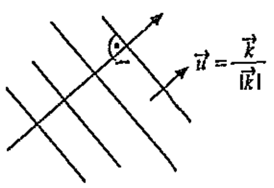
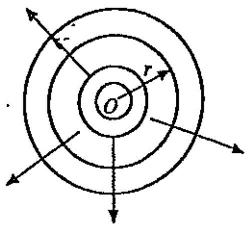
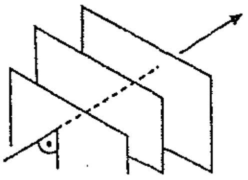
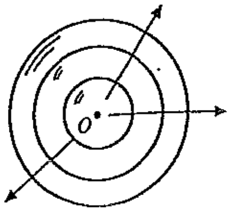
En el epígrafe 3.9 entenderemos el porqué de esta relación

entonces la ecuación matemática de una onda esférica será de la forma:

$$\boxed{\xi = \frac{\xi_0}{r} \operatorname{sen}(kr - \omega t + \varphi)}$$

3.8 Resumen

Recuerda que en nuestro caso nos ceñimos a la solución armónica de la ecuación de ondas por lo que la función f que aparece en la tabla será siempre un seno o un coseno

Dimensión	Función de onda	
1 Dimensión	$\xi = \xi_0 f(kx \pm \omega t)$	
2 Dimensiones	**Ondas planas** $\xi = \xi_0 f(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$  	**Ondas circulares** $\xi = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}} f(kr - \omega t)$ 
3 Dimensiones	**Ondas planas** $\xi = \xi_0 f(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$ 	**Ondas esféricas** $\xi = \frac{\xi_0}{r} f(kr - \omega t)$ 

3.9 Intensidad, energía y potencia de una onda

La intensidad de una onda en tres dimensiones es la energía transportada por segundo a través de una superficie de un metro cuadrado, en una dirección perpendicular a la de propagación.

Potencia = Energía por unidad de tiempo (Watio = J / s)

Intensidad = Potencia por unidad de superficie (W / m^2)

La potencia y la energía de una onda es siempre la misma (suponiendo medios sin pérdidas) pero la intensidad de la onda puede variar dependiendo del tipo de onda como ya hemos visto en epígrafes anteriores:

En este caso la intensidad se mide en W/m

Onda circular: $$\text{Intensidad} = \frac{\text{Potencia}}{\text{Longitud del frente de onda}} = \frac{\text{Potencia}}{2\pi r} \quad (\text{varía con } 1/r)$$

Onda esférica: $$\text{Intensidad} = \frac{\text{Potencia}}{\text{Superficie del frente de onda}} = \frac{\text{Potencia}}{4\pi r^2} \quad (\text{varía con } 1/r^2)$$

Onda plana: En este caso la intensidad permanece constante ya que el frente de onda siempre tiene la misma longitud o superficie.

Además se puede demostrar que la intensidad de una onda depende del cuadrado de la amplitud de la misma según la siguiente expresión:

No demostraremos esta fórmula en los apuntes. Se puede consultar la demostración en cualquier libro de Física

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 A^2 \omega^2 v$$

donde $\rho_0 \equiv$ densidad volumétrica del medio por el que se propaga la onda (kg/m^3).

Así pues, si igualamos las expresiones anteriores de intensidad nos queda:

Lo que hemos hecho es renombrar a todas las letras como ξ_0^2

Onda circular:

$$\text{Intensidad} = \frac{P}{2\pi r} = \frac{1}{2}\rho_0 A^2 \omega^2 v \Rightarrow A^2 = \frac{P}{\rho_0 \omega^2 v \pi r} = \frac{\xi_0^2}{r} \Rightarrow A = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}}$$

Onda esférica:

$$\text{Intensidad} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\rho_0 A^2 \omega^2 v \Rightarrow A^2 = \frac{P}{2\rho_0 \omega^2 v \pi r^2} = \frac{\xi_0^2}{r^2} \Rightarrow A = \frac{\xi_0}{r}$$

Onda plana:

$$\text{Intensidad} = cte = \frac{1}{2}\rho_0 A^2 \omega^2 v \Rightarrow A = \xi_0$$

Donde en todos los casos ξ_0 representa la amplitud inicial de la onda y r la distancia al foco.

Densidad volumétrica de energía de la onda:

$$e = \frac{I}{v} = \frac{1}{2}\rho_0 A^2 \omega^2 \quad (\text{J/m}^3)$$

3.10 Acústica

Estudiamos a fondo las ondas de sonido, pero solo los conceptos de intensidad de interferencia y frecuencias de sonido.

Intensidad de las ondas emitidas por una fuente puntual

$$\boxed{I = \frac{P}{4\pi r^2}} \quad (W/m^2)$$

donde:

$P \equiv$ potencia en el foco emisor (W).
$r \equiv$ distancia del foco emisor al punto (m).

Intensidad de la interferencia de dos ondas emitidas por dos focos puntuales en un punto dado

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\underbrace{\delta_0 + k\,|r_2 - r_1|}_{\delta})} \quad (W/m^2)$$

IMPORTANTE:
En ocasiones, en su camino al punto de interferencia, una onda puede haber sufrido una reflexión. La onda puede haber cambiado de fase, esto quiere decir que a δ_0 le sumaríamos π radianes.
Si el enunciado no dice nada de esto nosotros no haremos nada!!

Donde:

$I_1 \equiv$ Intensidad del primer foco en el punto.
$I_2 \equiv$ Intensidad del segundo foco en el punto.
$r_1 \equiv$ Distancia del primer foco emisor al punto.
$r_2 \equiv$ Distancia del segundo foco emisor al punto.
$\delta_0 \equiv$ Desfase entre ambos focos. (si no nos dicen nada lo suponemos cero).

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{\omega}{v}$ es el número de onda donde:

$v \equiv$ velocidad de propagación del sonido (m/s)
$\lambda \equiv$ longitud de onda (m)
$f \equiv$ longitud de onda (Hz)
$\omega \equiv$ frecuencia angular (Hz)

Nivel de intensidad sonora

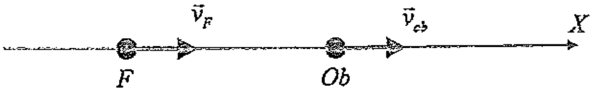
$$\boxed{NI = 10\log\frac{I_1}{I_0}} \quad (\text{dB})$$

donde $I_0 = 10^{-12}\,W/m^2$ es la intensidad umbral.Es la intensidad mínima de sonido que una persona normal puede percibir.

Efecto Doppler

La ecuación de doppler nos da la relación entre frecuencias emitidas y percibidas entre un foco y un observador cuando existe movimiento relativo entre ambos

Tomaremos el foco emisor siempre a la izquierda del observador. Los signos de las velocidades corresponden a foco y observador desplazándose hacia la derecha (como en la figura). Si uno de ellos se desplaza en sentido contrario bastará cambiar el signo de la velocidad.



Frecuencias altas: son los sonidos agudos (ej.Pitido de un silbato)

Frecuencias bajas: son los sonidos graves (ej.Bocina de un tren)

$$\boxed{f = f_0 \frac{v_s - v_{ob}}{v_s - v_F}}$$

Foco siempre a la izquierda

donde:

$f \equiv$ frecuencia percibida por el observador

$f_0 \equiv$ frecuencia emitida por el foco

$v_s \equiv$ velocidad del sonido

$v_{ob} \equiv$ velocidad del observador

$v_F \equiv$ velocidad de la foco emisor

$f > 600 \Rightarrow$ AGUDO

$f < 600 \Rightarrow$ GRAVE

Nota: si tenemos un viento de velocidad v_v, si este va a favor del sonido, se le suma a la velocidad del sonido, si va en contra se le restará

3.11 Ondas de desplazamiento, presión y densidad

Onda de desplazamiento

$$\Psi = \Psi(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \quad (\mathrm{m})$$

Es conveniente saber de memoria estas expresiones, pues las pueden pedir en cualquier apartado

Onda de presión

$$p = -v^2 \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\mathrm{N/m^2})$$

donde $\rho_0 \equiv$ densidad volumétrica (kg/m^3)

Onda de densidad

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\mathrm{kg/m^3})$$

Relación entre la intensidad y la amplitud de la onda

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 A^2 \omega^2 v$$

TEMA 3: ONDAS. ACÚSTICA

Ejercicio 1

Dos individuos viajan en dos trenes *A* y *B* que llevan respectivamente velocidades de 60 y 50 Km/h. Los silbatos de las locomotoras emiten el mismo sonido de 600 Hz.
Calcular:

a) Sonido percibido por el viajero del tren *A* que está en reposo y el silbato de su locomotora en silencio, cuando se acercara a él el tren *B*, funcionando su silbato.

b) Sonido percibido por el viajero del tren *B* que está en reposo y el silbato de su locomotora en silencio, cuando se acercara a él el tren *A*, funcionando su silbato.

c) Sonido percibido por el viajero del tren *A* en marcha hacia el *B*, que está en reposo. funciona el silbato de *B*.

d) Sonido percibido por el viajero del tren *B* en marcha hacia el *A*, que está en reposo. funciona el silbato de *A*.

e) Sonido percibido por el viajero de *A* cuando marchan los dos trenes en sentido contrario, acercándose entre sí. Funciona el silbato de *B*.

f) Sonido percibido por el viajero de *A* cuando marchan los dos trenes en sentido contrario, alejándose entre sí. Funciona el silbato de *B*.

g) Sonido percibido por el viajero de *A* cuando marchan los dos trenes en el mismo sentido, el *B* tras el *A*. Funciona el silbato de *B*.

h) Sonido percibido por el viajero de *B* cuando marchan los dos trenes en el mismo sentido, el *B* tras el *A*. Funciona el silbato de *A*.

Se supone que la velocidad de propagación del sonido es 340 m/s.

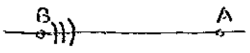
$f_0 = 600$ Hz

$f > 600$ sonido agudo
$f < 600$ sonido grave

$$f = f_0 \frac{V_S - V_{obs}}{V_S - V_F}$$

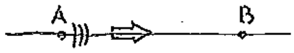
$$V_S = 340 \text{ m/s} * \frac{1\text{Km}}{1000} \cdot \frac{3600\text{s}}{1\text{h}} = 1224 \text{ Km/h}$$

a)



$$f = f_0 \frac{V_S - 0}{V_S - V_B} = f_0 \frac{V_S - 0}{V_S - 50} = 625'55 \text{ Hz}$$ [Sonido agudo]

b)

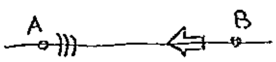


$$f = f_0 \frac{V_S - 0}{V_S - V_A} = f_0 \frac{V_S - 0}{V_S - 60} = 630'93 \text{ Hz}$$ [Sonido agudo]

c)

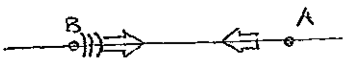
$$f = f_0 \frac{V_S - (-V_A)}{V_S - 0} = 629'41 \text{ Hz}$$ [sonido agudo]

d)



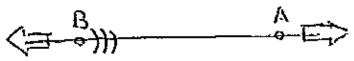
$$f = f_0 \frac{V_S - (-V_B)}{V_S - 0} = 624'51 \text{ Hz}$$ [sonido agudo]

e)



$$f = f_0 \frac{V_S - (V_A)}{V_S - V_B} = f_0 \frac{V_S + V_A}{V_S - V_B} = f_0 \frac{V_S - (-60)}{V_S - 50} = 656'21 \text{ H}$$ [sonido agudo]

f)



$$f = f_0 \frac{V_S - 60}{V_S - (-50)} = 548'49 \text{ Hz}$$ [sonido grave]

Ejercicio 2
(Clase 3)

Determinar la ecuación de una onda armónica que se propaga en el sentido negativo del eje OX con una velocidad de 900 m/s, siendo de 400 Hz su frecuencia y 0,02 m su amplitud. Además, sabemos que para $x = 0$ y $t = 0$, entonces $\psi = 0{,}02$ m.

$$\left\{\begin{array}{l} v = 900\ m/s \\ f = 400\ Hz \\ \xi_0 = 0'02\ m \\ \xi(x=0, t=0) = 0'02 m \end{array}\right.$$

Ec. general de onda armónica

$$\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}(Kx \overset{\text{pq va hacia la izq.}}{\textcircled{+}} \omega t + \varphi)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{400}\ (s) \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{400}} = 800\pi\ rad/s}$$

Como $v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v \cdot T = 900 \cdot \frac{1}{400} = \frac{9}{4}$ m

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{9/4} = \frac{8\pi}{9}\ rad/m \text{ ó } (m^{-1})$$

$$\xi(x,t) = 0'02 \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{9}x + 800\pi t + \varphi\right)$$

Impongo que $x=0, t=0 \Rightarrow \xi = 0'02$

$$\cancel{0'02} = \cancel{0'02} \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{9} \cdot 0 + 800\pi \cdot 0 + \varphi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \pi/2$$

$$\boxed{\xi = 0'02 \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{9}x + 800\pi t + \pi/2\right)}$$

Ejercicio 3
Tema3

Una onda tiene por ecuación: $\psi\,(x,t) = 5\,\text{sen}\,\pi\,(4x - 20t + 0{,}25)$.
Determinar la amplitud, la frecuencia, la longitud de onda, el número de ondas, la frecuencia angular, la fase inicial y la velocidad de propagación.

$$\psi = 5\,\text{sen}(4\pi x - 20\pi t + 0'25\pi)$$

$$\boxed{\psi_0 = 5\,m}$$

$$K = 4\pi\ (m^{-1}) \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0'5\,m}$$

$$\omega = 20\pi\ (rad/s) \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0'1\,s}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0'1} = 10\,s^{-1}}$$

$$V = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \boxed{V = 5\,m/s} \qquad \boxed{\varphi = 0'25\pi\ rad}$$

Ejercicio 4 (Tema 3)

Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje OX y tiene las siguientes características: amplitud, 3 cm; longitud de onda, 2 cm; velocidad de propagación, 2m/s; la elongación del punto $x = 0$ en el instante $t = 0$ es de 3 cm.

a) Determinar la ecuación de la onda.
b) Dibujar el perfil de la onda en $t = 0{,}01$s. Indicar un punto en el que sea máxima la velocidad de movimiento y otro en el que sea máxima la aceleración.

$\psi_0 = 0'03\ m$

$\lambda = 0'02\ m$

$v = 2\ m/s$

$\psi(x=0, t=0) = 0'03\ m$

a) $\psi = \psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi)$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0'02} = 100\pi \quad (rad/m)$$

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0'02}{2} = 0'01 \quad (s)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0'01} = 200\pi \quad (rad/s)$$

$$\psi = 0'03 \operatorname{sen}(100\pi x - 200\pi t + \varphi)$$

Suponemos: $\psi(x=0, t=0) = 0'03$

$$0'03 = 0'03 \operatorname{sen}(0 - 0 + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

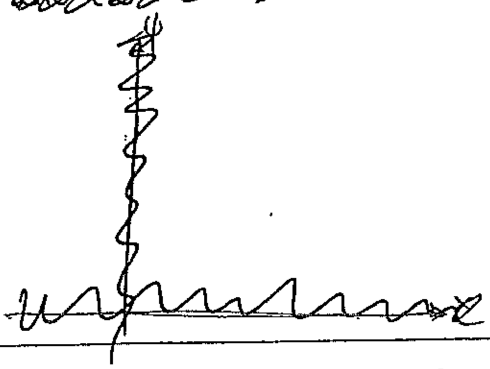
$$\boxed{\psi = 0'03 \operatorname{sen}\left(100\pi x - 200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

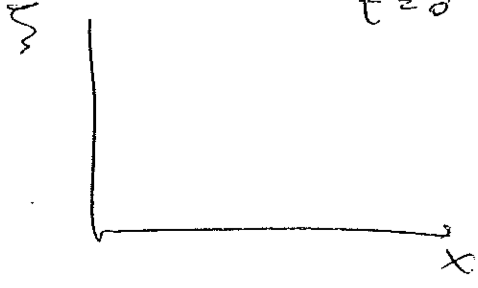
b) Dibujo onda en $t = 0'01$ s

$$\psi(x, t=0'01 s) = 0'03 \operatorname{sen}\left(100\pi x - 200\cdot\pi\cdot 0'01 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\psi(x, t=0'01) = 0'03 \operatorname{sen}\left(100\pi x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

~~t=0'01s~~





t = 0'01 s.

Ejercicio 5
(Tema 3)

Provocamos en una cuerda tensa una onda armónica transversal de 0,2 m de longitud de onda, y que se propaga de izquierda a derecha con una velocidad de 10 m/s. En el origen $\psi(0,0) = 0,5\times10^{-2}$ m y moviéndose hacia abajo. Si el módulo de la velocidad máxima de cualquier partícula de la cuerda es $3,14$ m/s, determinar la ecuación de la onda.

$\lambda = 0'2 \text{ m}$

$v = 10 \text{ m/s}$

$\psi(x=0,\ t=0) = 0'5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$\frac{d\psi}{dt}(x=0, t=0) < 0$

$V_{max_y} = 3'14 \text{ m/s}$

PRIMERO: $\boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0'2} = 10\pi}$ (m^{-1}) ó (rad/m)

$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0'2}{10} = 0'02 \text{ s}$

$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0'02} = 100\pi \text{ rad/s}}$

Para la amplitud: Sabemos que la velocidad máxima de vibración coincide con $A\cdot\omega$

$V_{max_y} = A\cdot\omega \Rightarrow 3'14 = A \cdot 100\pi \Rightarrow A = 0'01 \text{ m}$

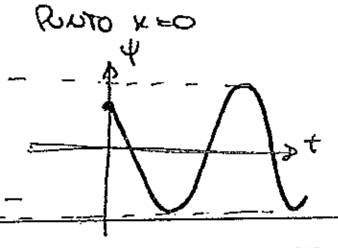
$\psi = 0'01 \text{ sen}(10\pi x - 100\pi t + \varphi)$

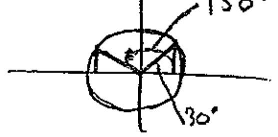
Sabiendo $\psi(x=0, t=0) = 0'5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$0'5 \cdot \cancel{10^{-2}} = \cancel{0'0}1 \text{ sen}(0 - 0 + \varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 30° \\ \varphi = 150° \end{cases}$

Como me dicen que se mueve hacia abajo ⇒ la ψ debe ir disminuyendo en un instante inmediato a $t=0$ ⇒ Vemos que esto ocurre si $\varphi = 150°$





Ejercicio 6 (Tema 3)

Demostrar que la función: $\psi\,(x,t) = \psi_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$ es una solución de la ecuación de ondas.

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(Kx - \omega t + \varphi)$$

Ec. de ondas: $\dfrac{d^2\psi}{dt^2} = v^2 \dfrac{d^2\psi}{dx^2}$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\psi}{dt} = \psi_0\, \omega \,\text{sen}\,(Kx - \omega t + \varphi) \\ \boxed{\dfrac{d^2\psi}{dt} = -\psi_0\, \omega^2 \cos(Kx - \omega t + \varphi)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\psi}{dx} = -\psi_0 K \,\text{sen}\,(Kx - \omega t + \varphi) \\ \boxed{\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = -\psi_0 K^2 \cos(Kx - \omega t + \varphi)} \end{array}\right.$$

Igualo estas dos:

$$-\psi_0\, \omega^2 \cos(Kx - \omega t + \varphi) = v^2 (-)\, \psi_0 K^2 \cos(Kx - \omega t + \varphi)$$

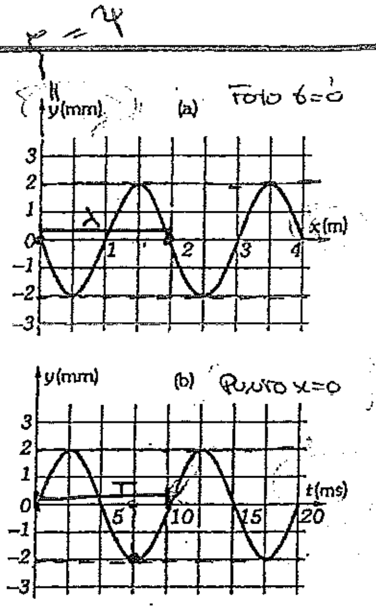
$$¿\omega^2 = v^2 K^2? \Rightarrow ¿\underline{\omega = vK}? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ¿\frac{2\pi}{T} = \frac{\cancel{\lambda}}{T}\,\frac{2\pi}{\cancel{\lambda}}? \Rightarrow \text{OK!!} \checkmark$$

Ejercicio 7
(Tema 3)

Por una cuerda tensa a lo largo del eje OX se propaga, en el sentido positivo de dicho eje, una onda transversal armónica. En la figura (a) se muestra el perfil de la onda en $t = 0$, y en la figura (b) se representa, en función del tiempo, el desplazamiento transversal del punto de la cuerda situado en $x = 0$. Se pide:

a) Determinar las siguientes magnitudes de la onda: amplitud, longitud de onda y velocidad de propagación.
b) Escribir la ecuación de onda.



a) $\boxed{A = 2\cdot10^{-3}\,m}$

$T = 10\,ms = 10\cdot10^{-3}\,s = 0'01\,s$

$\boxed{\lambda = 2\,m} \Rightarrow v = \dfrac{\lambda}{T}$

$\Rightarrow \boxed{v = \dfrac{2}{0'01} = 200\,m/s}$

b) $y = A\,\text{sen}\,(Kx - \omega t + \varphi)$

$K = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi \quad (m^{-1})$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0'01} = 200\pi \quad rad/s$

$y = 2\cdot10^{-3}\,\text{sen}\,(\pi x - 200\pi t + \varphi)$

En la gráfica veo: $y(x=0, t=7'5\cdot10^{-3}) = -2\cdot10^{-3}\,m$

$-\cancel{2\cdot10^{-3}} = \cancel{2\cdot10^{-3}}\,\text{sen}\,(0 - 200\pi\cdot7'5\cdot10^{-3} + \varphi) \Rightarrow$

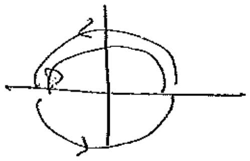
$\Rightarrow \text{sen}\,(-0'2\cdot7'5\cdot\pi + \varphi) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,(-\frac{3}{2}\pi + \varphi) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}\pi + \varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = 3\pi} \Rightarrow \varphi = \pi$

es lo mismo

$$\boxed{y = 2\cdot10^{-3}\,\text{sen}\,(\pi x - 200\pi t + \pi)}$$



Ejercicio 10
(Tema 3)

Dos ondas que se mueven en la misma dirección y cuyas ecuaciones son:

$$\psi_1 = 5 \operatorname{sen}(1\,000t - 100x), \quad \psi_2 = 5 \operatorname{sen}(1\,000t + 100x)$$

al interferir producen "ondas estacionarias" Determinar:

a) La ecuación de la onda resultante.
b) La amplitud en los vientres.
c) Distancia entre dos nodos consecutivos.

a) $\boxed{\Psi_T} = \Psi_1 + \Psi_2 = 5\operatorname{sen}(1000t - 100x) + 5\operatorname{sen}(1000t + 100x) =$

$= 5\left[\operatorname{sen}(1000t)\cos(100x) - \cancel{\cos(1000t)}\operatorname{sen}(100x) +\right.$

$\left. + \operatorname{sen}(1000t)\cos(100x) + \cancel{\cos(1000t)\operatorname{sen}(100x)}\right] =$

$= \boxed{2\cdot 5\cos(100\,x)\operatorname{sen}(1000t)}$

b) vientres amplitud máxima $\Rightarrow \cos(100x) = \pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A_{max}} = 2\cdot 5 = \boxed{10}$

c) nodos: $\cos(100x) = 0 \Rightarrow 100x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{(2n+1)}{2}\cdot\frac{\pi}{100}$

Dos nodos consecutivos: $\boxed{x_{n=2}} - x_{n=1} = \frac{2\cdot 2+1}{2}\cdot\frac{\pi}{100} - \frac{2\cdot 1+1}{2}\cdot\frac{\pi}{100} =$

$= \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{100} = \boxed{\frac{\pi}{100}}$

NOTA:
Ya sabemos que $x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi/k}{2} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{100}$

Ejercicio 11
(Tema 3)

Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación escrita $\psi = 20 \text{ sen } 50x \cos 400t$.
Calcular:
a) Las ecuaciones de las ondas armónicas cuya interferencia puede dar dicha onda.
b) Distancia entre dos nodos consecutivos.

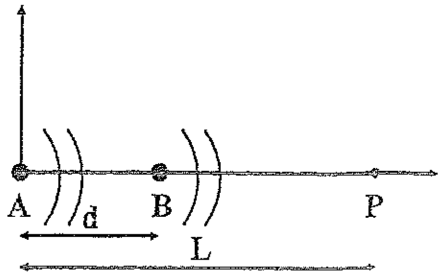
$[2 \,\text{sen}\, a \cos b = \text{sen}(a-b) + \text{sen}(b+a)]$

a)
$\psi_1 = 10 \,\text{sen}(50x - 400t)$
$\psi_2 = +10 \,\text{sen}(50x + 400t)$
} Tanteando.

b) Distancia nodos $\Rightarrow \boxed{d} = \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi/K}{2} = \frac{\pi}{K} = \boxed{\frac{\pi}{50}}$

JUNIO 2005

Ejercicio 3



Un altavoz **A** emite una onda esférica e isótropa de frecuencia **f = 425 Hz** y una potencia sonora de **1 mW**. Suponiendo que el nivel de intensidad del ruido ambiente es de **50 dB**. Calcular:

a) La distancia x a partir de la cual el nivel de intensidad de la onda sonora supera el ruido ambiente.

Se coloca ahora otro altavoz **B** de la misma potencia a una distancia d del primero tal y como se indica en la figura.

b) Calcular el nivel de intensidad sonora debida a ambos altavoces en el punto **P**.

DATOS: $d = 1\ m,\ L = 20\ m,\ V_S = 340\ m/s$.

$f = 425$ Hz

$P = 1\text{mW} = 10^{-3}$ W

$NI_{\text{ambiente}} = 50\text{dB}$

a) ¿ cuál es la intensidad del ruido ambiente ?

$$\underset{(\text{dB})}{NI} = 10 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{logaritmo} \\ \text{decimal}}}{\log} \frac{I_{\text{ambiente}}}{I_0}$$

$$5\cancel{0}\ \text{dB} = 1\cancel{0} \log \frac{I_{amb}}{I_0}$$

$$10^5 = \frac{I_{amb}}{I_0} \ ; \quad I_{amb} = 10^5 \cdot \underbrace{I_0}_{\substack{\text{intensidad} \\ \text{umbral}}} = 10^5 \cdot 10^{-12} = 10^{-7}\ W/m^2$$

Impongo que la intensidad del foco A sea igual a la intensidad del ambiente.

$$I_1 = I_{amb}$$

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r^2} \underset{r=x}{\Rightarrow} x = \sqrt{\frac{P}{4\pi} I_1} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{4\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ I_{amb}}}{I_1}} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{4\pi} \cdot 10^{-7}}$$

$$\boxed{x = 28'21\ \text{m}}$$

b) $$I_P = \underset{P}{I_A} + \underset{P}{I_B} + 2\sqrt{I_A \cdot I_B} \cdot \cos(\delta)$$

$$\downarrow \delta = \delta_0 + K|r_2 - r_1|$$

↳ desfase inicial { como no me dicen nada es igual a 0

$$* \quad K = \frac{2\pi}{\lambda} \underset{\substack{\uparrow \\ V = \frac{\lambda}{T} = \lambda f}}{=} \frac{2\pi f}{V} = \frac{2\pi \cdot 425}{340}$$

$$* \quad |r_2 - r_1| = d = 1\ \text{m}$$

$$* \quad I_A = \frac{P}{4\pi r_1^2} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 20^2}$$

$$* \quad I_B = \frac{P}{4\pi r_2^2} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 19^2}$$

Introduciendo los valores en la fórmula.

$$I_P = 4'2 \cdot 10^{-7}\ W/m^2$$

$$\boxed{NI} = 10 \log \frac{I_P}{I_0} = 10 \log \frac{4'2 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = \boxed{56'23\ \text{dB}}$$

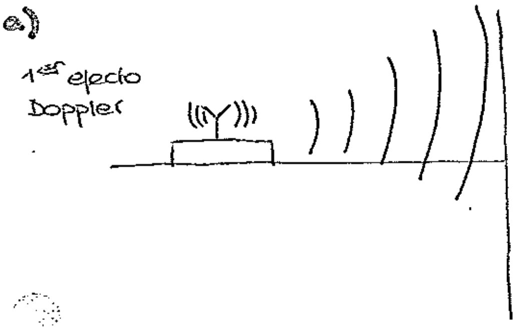
Ejercicio 3

Una lancha se aproxima perpendicularmente a un acantilado que puede asimilarse a un plano vertical. La sirena de la lancha emite un sonido con frecuencia $f = 480 Hz$, que después de reflejarse en el acantilado se percibe en la lancha con una frecuencia $f = 520\, Hz$

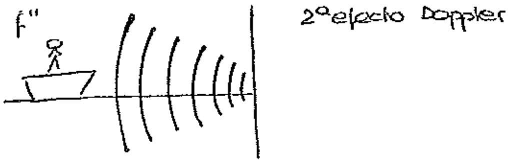
a) Determinar la velocidad de la lancha
b) Conocida la velocidad anterior, determinar en función del tiempo la variación del nivel de intensidad de la onda recibida en el acantilad, conforme se va acercando a la lancha.

NOTA: Suponer que la lancha emite ondas esféricas y que la velocidad del sonido es $300\, m/s$

a)



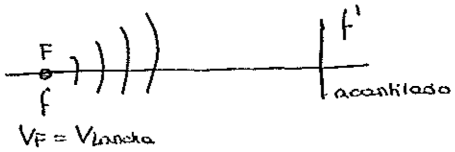
La lancha emite f y el acantilado percibe f'
El acantilado hace rebotar la onda con la misma frecuencia que le llega, es decir, con f'. De modo que la lancha percibe f''



Datos. $f = 480\,Hz$
$f'' = 520\ Hz$

Analizamos la sirena como emisor del sonido (Foco)

1er efecto Doppler

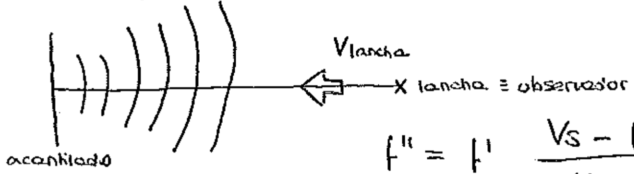


$$f' = f\,\frac{V_S - V_{obs}}{V_S - V_F} = f\,\frac{V_S - 0}{V_S - V_F}$$

$$f' = f\,\frac{V_S}{V_S - V_L} = f\,\frac{300}{300 - V_L} \quad [1]$$

$$f' = 480\,\frac{300}{300 - V_L}$$

2º efecto Doppler



$$f'' = f'\,\frac{V_S - (-V_L)}{V_S - 0} = f'\,\frac{V_S + V_L}{V_S} \Rightarrow$$

$$f'' = 520 = f'\,\frac{V_S + V_{LANCHA}}{V_S} \quad [2]$$

Meto ① en ②

$$520 = 480\,\frac{300}{300 - V_L} \cdot \frac{300 + V_L}{300} \qquad \boxed{V_L = 12\ m/s}$$

SEPTIEMBRE 1997

Ejercicio 3

Un ciclista que viaja a una velocidad inicial de **16.4 km/h** oye una ambulancia, y se para dejándola pasar. El ciclista comprueba que el cociente de las frecuencias antes de pasarle la ambulancia,(él se mueve) y después de pasarle la ambulancia(el ciclista está quieto) es de **6/5** y que el nivel de intensidad del sonido cuando la ambulancia está a una distancia de **3 metros** es de **90 dB**. A una distancia de **511 m** , la ambulancia llega a un hospital, por lo que desconecta la sirena. El ciclista, todavía parado, deja de oír la sirena **18.7 segundos** después de haberle pasado la ambulancia. Se pide:

a) La potencia con que emite la ambulacia, suponiendo que la onda de propagación es esférica.
b) La velocidad del sonido
c) La velocidad de la ambulancia
d) El nivel de intensidad detectado por el ciclista justo antes de apagar la sirena.

Dato: $I_0 = 10^{-12}\,W\,m^{-2}$

a) $\boxed{I} = \dfrac{\boxed{P}}{4\pi r^2}$

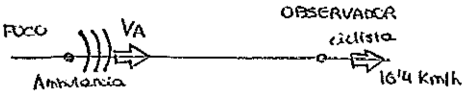
calculo $I \Rightarrow \quad NI = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$

$$9\cancel{0} = 1\cancel{0} \log \frac{I}{10^{-12}} \quad ; \quad 10^9 = \frac{I}{10^{-12}} \quad ; \quad I = 10^{-3}\ W/m^2$$

$$\boxed{P = 4\pi r^2 \cdot I = 4\pi \cdot 3^2 \cdot 10^{-3} = \boxed{0'115\ W}}$$

b) c)

Antes de pasarle
1er Doppler



$$f' = f\ \frac{V_S - 16{,}4}{V_S - V_A}$$

Después de pasarle
2º Doppler

$$f'' = f'\ \frac{V_S - 0}{V_S - (-V_A)} = f'\ \frac{V_S}{V_S + V_A}$$

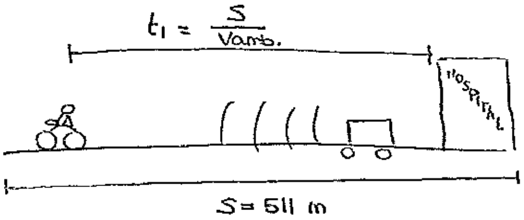
16'4 Km/h = 4'5 m/s

$$\boxed{\text{condición } 1} \quad \frac{f'}{f''} = \frac{6}{5} = \frac{f\ \dfrac{V_S - 16'4}{V_S - V_A}}{f\ \dfrac{V_S - 0}{V_S + V_A}} \longrightarrow \frac{(V_S + V_A)(V_S - 4'5)}{V_S\,(V_S - V_A)} = \frac{6}{5}$$

$\boxed{\text{SIGUIENTE CONDICIÓN}}$

La ambulancia adelanta al ciclista.
La ambulancia llega al hospital (apaga la sirena) $\longrightarrow t_1$
El sonido viaja "de vuelta" del hospital hasta el ciclista. $\longrightarrow t_2$

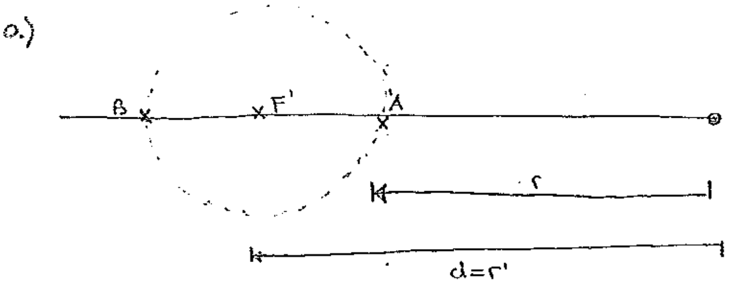
$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} t_1 + t_2 = 18'7 \text{ seg}$$



Ejercicio 3

Un foco emisor de sonido F gira en torno a otro foco emisor **F'** de la misma frecuencia, **f**, fase Φ, y potencia de emisión P. Se supone: que ambos focos emiten ondas perfectamente esféricas, que la velocidad de giro es muy pequeña frente a la velocidad del sonido v, por lo que no hay que tener en cuenta el efecto Doppler.
a) ¿Cuál tiene que ser la frecuencia de emisión para que un observador situado a una distancia d del foco fijo($d >> R$ siendo R el radio de giro de un foco alrededor del otro) escuche dos mínimos cuando los focos estén en la línea que une el foco fijo con el observador(posiciones A y B)?
b) Demostrar que, en una aproximación de primer orden, la intensidad del sonido percibido por el observador depende de d^{-4} y encontrar la expresión analítica completa.

a.)



Quedan alineados.

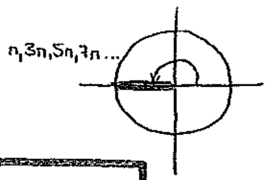
$$I_T = I + I' + 2\sqrt{I \cdot I'}\cos(\delta_0 + K|r-r'|)$$

* $|r-r'| = |r'-r| = R$

* $\delta_0 = \underset{\Phi}{\overset{\shortparallel}{\varphi'}} - \underset{\Phi}{\overset{\shortparallel}{\varphi}} = 0$

Mínimos de intensidad $\cos(\delta_0 + K|r-r'|) = -1$

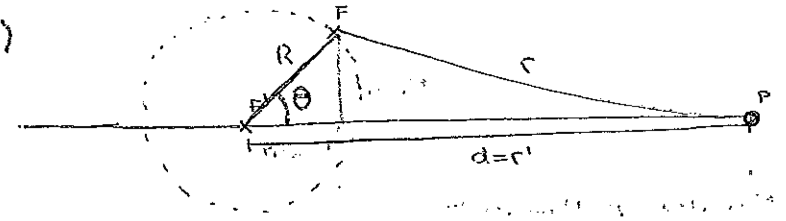
$$\rightarrow \cos\left(0 + \frac{2\pi f}{V}\underbrace{R}_{|r-r'|}\right) = -1$$



$$\frac{2\pi f}{V}R = (2n+1)\pi$$

$$f = \frac{V(2n+1)\pi}{2\pi R} \quad ; \quad \boxed{f = \frac{V(2n+1)}{2R}}$$

b)



$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

$$I' = \frac{P}{4\pi (r')^2}$$

$r' = d$ lo tengo

$$r^2 = R^2 sen^2\theta + (r' - R\cos\theta)^2 = R^2 sen^2\theta + (r')^2 + R^2\cos^2\theta - 2r'R\cos\theta$$

$$r^2 = R^2 + (r')^2 - 2r'R\cos\theta$$

$$r^2 = R^2 + d^2 - 2dR\cos\theta$$

$$I_T = \frac{P}{4\pi r^2} + \frac{P}{4\pi d^2} + 2\sqrt{\frac{P}{4\pi d^2} \cdot \frac{P}{4\pi r^2}}\cos(K|d-r|)$$

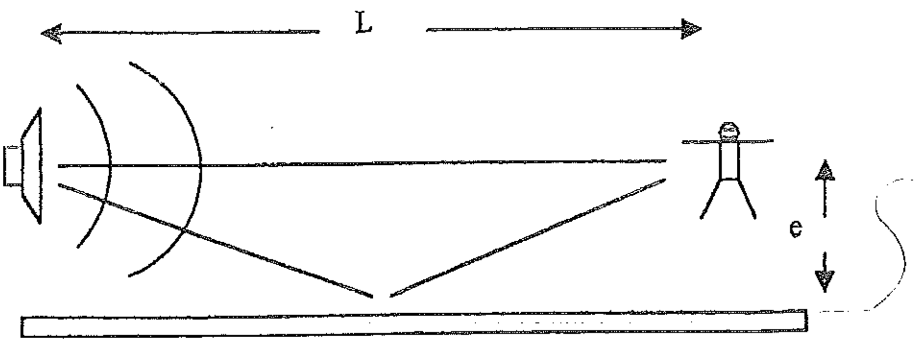
$$I_T = \frac{P}{4\pi(R^2+d^2-2dR\cos\theta)} + \frac{P}{4\pi d^2} + 2\sqrt{\frac{P}{4\pi d^2} \cdot \frac{P}{4\pi(R^2+d^2-2dR\cos\theta)}}\cos\left(K\left|d-\sqrt{R^2+d^2-2dR\cos\theta}\right|\right)$$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}$$

$$I_T = \frac{P}{4\pi(d-R)^2} + \frac{P}{4\pi d^2} + 2\sqrt{\frac{P^2}{(4\pi)^2 d^2 (d-R)^2}}\cos\left[K\left|d-\cancel{\sqrt{(d-R)^2}}\right|\right]$$

JUNIO 2004

Ejercicio 3



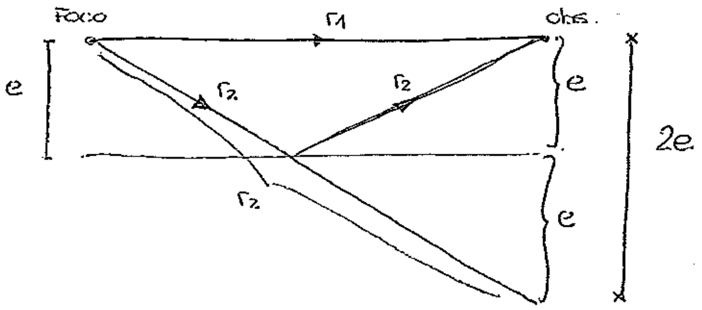
Un foco sonoro de potencia **W** situado a una altura e sobre el suelo emite ondas esféricas. Un observador situado a al misma altura del suelo y a una distancia L de la fuente sonora, percibe el sonido que llega directamente y el que llega tras reflejarse en el suelo. Determinar, suponiendo que L es mucho mayor que e y que no hay cambio de fase en la reflexión en el suelo:

a) a qué frecuencias debe emitir foco emisor para que el observador perciba máximos de sonido

b) a qué frecuencias debe emitir foco emisor para que el observador perciba mínimos de sonido,

c) si no hay atenuación en la reflexión en el suelo cuál será la intensidad del sonido percibida en este último caso.

d) Si x<<1, $(1+x)^n$ puede aproximarse por $1+nx$, utilizando esta expresión, demostrar que la intensidad percibida es $\frac{W}{4\pi}\left(\frac{2e^2}{L^3}\right)^2$. Demostrar que si x<<1, $(1+x)^n$ puede aproximarse por $1+nx$. DATOS: **L=100 m, e=5 m, v=340 m/s, así mismo, tomar W como dato .**



Interferencia $\Rightarrow I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$

$*\ r_1 = L = 100$ m

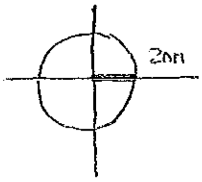
$*\ r_2 = \sqrt{L^2+(2e)^2} = \sqrt{100^2+10^2} = 100'499$ m

$$I_1 = \frac{W}{4\pi r_1^2} = \frac{W}{4\pi 100^2}$$

$$I_2 = \frac{W}{4\pi r_2^2} = \frac{W}{4\pi(100^2+10^2)}$$

$$\delta = \cancel{\delta_0}^{\,0} + K|r_1-r_2| = \frac{2\pi f}{V}(100'499-100) = \frac{2\pi f}{340}(0'499)$$

a.) máximos, $\cos\delta = 1 \Rightarrow \delta = 2\pi n$ $\qquad \delta = \frac{2\pi f}{340}0'499 = 2\pi n$



$$f = \frac{340}{0'499}n = 681'696\,n \quad (n\in\mathbb{N})$$

3. *Un observador* está situado en el **origen de coordenadas.** En **el punto (d,0)** se emplaza *un foco sonoro* que emite isótropamente. Queremos que al observador *no le llegue ningún sonido.* Para ello situamos en el **punto (d-a , a)** d>a *un segundo altavoz* que también emite isótropamente.

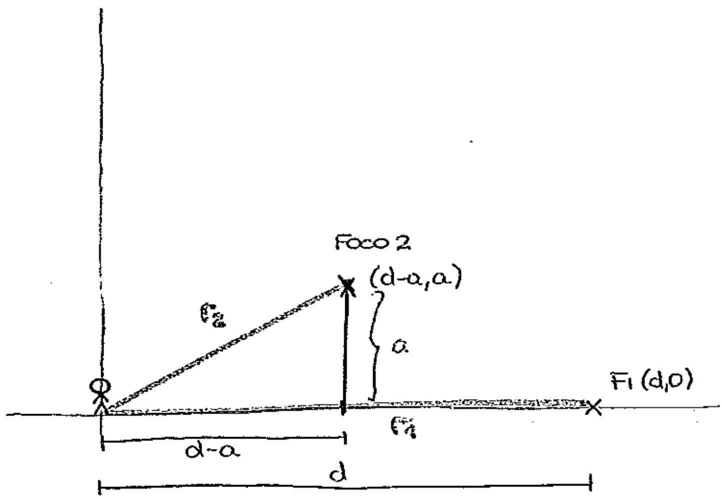
Determinar en función de **la potencia** y **frecuencia** de emisión **del primer altavoz** 1) la potencia, frecuencia y fase con que ha de emitir el segundo para conseguir el efecto deseado.

En las condiciones de frecuencia y fase anteriores 2) ¿Qué relación debería existir entre las intensidades de sonido producidas por cada uno de los altavoces para que el observador situado en el origen de coordenadas perciba un nivel de intensidad de 10 dB?

Dato: Tomar **v** *como la velocidad de propagación del sonido*

1) Teoría. Para que se produzca un fenómeno de interferencia, los dos focos deben emitir en la misma frecuencia, es decir, deben ser coherentes.

$$\boxed{f_1 = f_2}$$ del segundo foco



Para sacar la potencia del foco 2 necesito sacar su intensidad

$$I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2}\ \cos\delta$$

Para que no llegue sonido $\Rightarrow \boxed{I_T = 0} \xrightarrow[\text{mínimo}]{} \boxed{\cos\delta = -1}$

se tiene que cumplir también para que $I_T = 0$ que en ese punto donde se encuentra el observador exista un mínimo $\Rightarrow \cos\delta = -1$

como tenemos intensidad mínima, también se cumple que $\cos\delta = -1$

$$I_T = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$$

$$I_T = 0 \longrightarrow I_1 = I_2$$

$$I_1 = \frac{P_1}{4\pi r_1^2} = \frac{P_1}{4\pi d^2}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{4\pi r_2^2} = \frac{P_2}{4\pi\left((d-a)^2+a^2\right)}$$

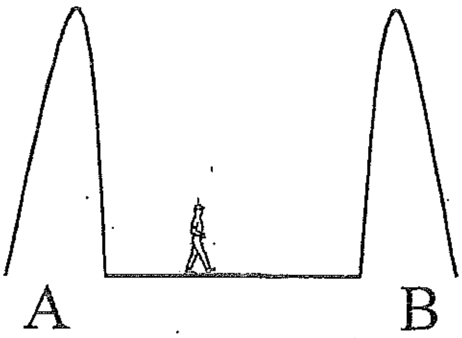
$$I_1 = I_2 \Rightarrow \frac{P_1}{4\pi d^2} = \frac{P_2}{4\pi\left[(d-a)^2+a^2\right]}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{(d-a)^2+a^2}{d^2}\,P_1}$$

JUNIO 1996

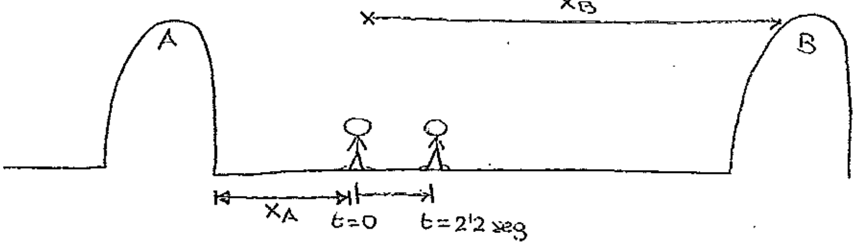
Ejercicio 2

Un alumno que se encuentra en un estrecho valle entre dos montañas A y B, se dirige hacia la B con una velocidad de **6 m/s** y lanza un grito de frecuencia **90 Hz**. Desde que lanza el grito hasta que recibe el primer eco (procedente de A) transcurren **2.20 s** y cuando recibe el segundo (procedente de B) han transcurrido **2.90 s**; a) ¿ A qué distancia está el alumno de cada montaña en el momento de gritar ?. El alumno observa que como consecuencia de la superposición de las dos ondas que le llegan se producen pulsaciones, b) ¿Cuál es la frecuencia del pulso ?. DATO: $\mathbf{v_{sonido}=330\ m/s}$.



a)

Eco de A.



En 2'20 segundos vuelven a coincidir el sonido y el alumno.

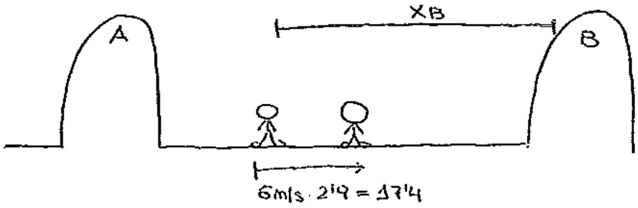
Espacio recorrido por alumno : $s = v \cdot t = 6 \cdot 2'2 = 13'2$ m

Espacio recorrido por el sonido : $x_A + x_A + s = 2x_A + 13'2$

Espacio recorrido por el sonido ($V_s = \frac{esp}{tiemp}$; esp son $= V_s \cdot t = 330 \cdot 2'2$

$$330 \cdot 2'2 = 2x_A + 13'2 \qquad \boxed{x_A = 356'4 \text{ m}}$$

Ahora lo mismo con B .



$V_s \cdot t = 330 \cdot 2'9$ Espacio recorrido por el sonido

$S_{sonido} = x_B + x_B - 17'4 = 2x_B - 17'4$

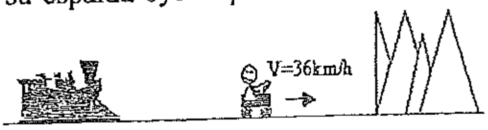
$$330 \cdot 2'9 = 2x_B - 17'4 \qquad \boxed{x_B = 487'2 \text{ m}}$$

SEPTIEMBRE 2003

Ejercicio 2

Un excursionista marcha en una vagoneta por una vía de tren a una velocidad de 36 km/h en dirección a una pared de montaña. A su espalda oye el pitido de un tren detectando una frecuencia de 5 kHz.

a) ¿Con qué frecuencia oirá el eco del pitido en la montaña?



Si suponemos que el tren emite ondas planas, y que el rebote de las mismas en la montaña también son ondas planas,

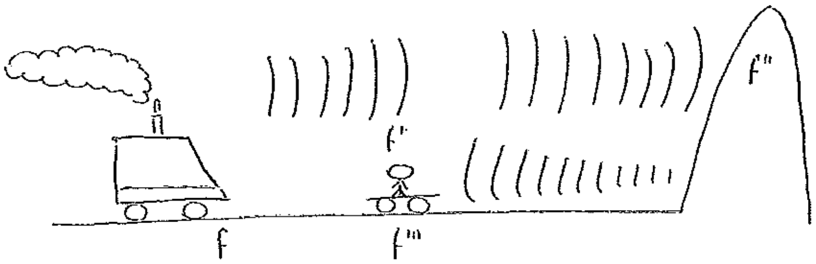
b) Escribir la ecuación de onda resultante percibida por el excursionista.

c) ¿Cada cuanto tiempo observará el excursionista un máximo de intensidad?

Dato: velocidad del sonido 320 m/s

$36\ Km/h = 36 \cdot \frac{1000}{1Km} \cdot \frac{1}{3600} = 10\ m/s$

$f' = 5\ KHz = 5000\ Hz$



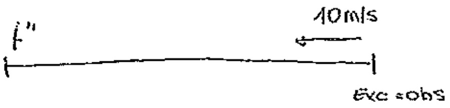
TREN-EXCURSIONISTA

$$f' = f\,\frac{V_S - V_{obs}}{V_S - V_F} \quad ; \quad \boxed{5000 = \textcircled{f}\,\frac{320-10}{320-\textcircled{V_F}}}$$

TREN- MONTAÑA

$$f'' = f\,\frac{V_S - \cancel{V_{obs}}^{\,0}}{V_S - V_F} = f\,\frac{320}{320-V_F} \qquad \boxed{f'' = f\,\frac{320}{320-V_F}}$$

MONTAÑA - EXCURSIONISTA



$$f''' = f''\,\frac{V_S - V_{obs}}{V_S - \underset{0}{\cancel{V_F}}} = f''\,\frac{V_S-(-10)}{V_S - 0}$$

ÓPTICA GEOMÉTRICA: PROPAGACIÓN DE LA LUZ

$c = 3 \times 10^8\ m/s$ velocidad de la luz en el vacío

$\lambda = \frac{v}{f}$ longitud de onda de la luz (en el vacío $\lambda_0 = \frac{c}{f}$)

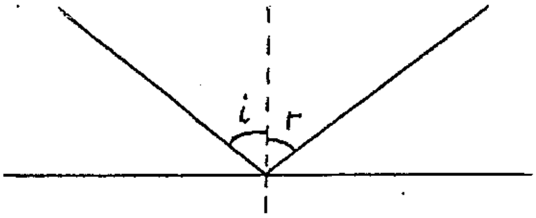
$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ índice de refracción absoluto (siempre n > 1)

$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$ índice de refracción relativo del medio 2 respecto al 1.

Leyes de Snell: Reflexión

1ª El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano

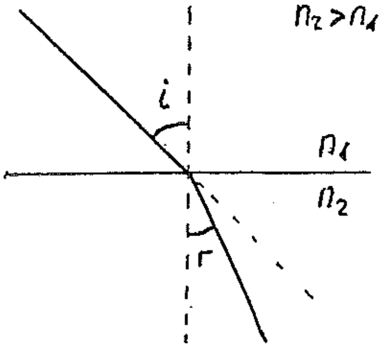
2ª $r = i$

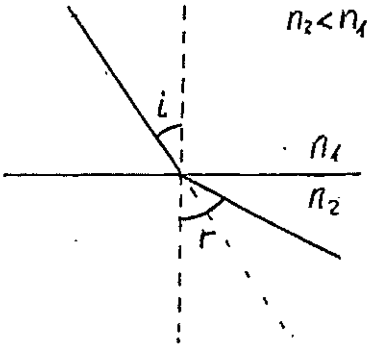


Leyes de Snell: Refracción

1ª El rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en el mismo plano

2ª $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$





· Si la luz pasa de un medio a otro más refringente ($n_2 > n_1$), el rayo refractado se acerca a la normal.
· Si la luz pasa de un medio a otro menos refringente ($n_1 > n_2$), el rayo refractado se aleja de la normal.

ángulo límite l (se produce cuando $r = 90^\circ$): $\text{sen } l = \frac{n_2}{n_1}$

TEMA 4 : OPTICA.

1. Propagación de la luz.

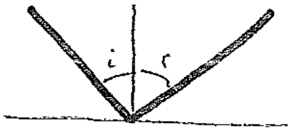
velocidad de la luz $c = 3\cdot10^8$ m/s

$\lambda = \frac{v}{f}$ longitud onda

índice de refracción $n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ (siempre mayor que 1)

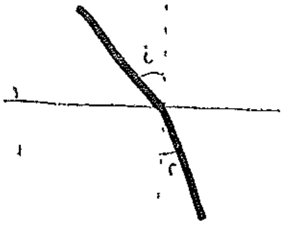
índice de refracción del medio 2 respecto al 1 $n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$

□ leyes de Snell : Reflexión



- El rayo incidente, la normal y el rayo refractado se encuentran en el mismo plano.
- $r = i$

□ leyes de Snell : refracción



- El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano
- $\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

  $n_1\, \text{sen}\, i = n_2\, \text{sen}\, r$

Si la luz pasa de un medio − refringente a otro + $(n_2 > n_1)$, el rayo se acerca a la norma

\+ refringente a otro − $(n_1 > n_2)$ el rayo se aleja de la norma

Angulo límite $(r = 90^\circ)$ $\boxed{\text{sen}\, \ell = \frac{n_2}{n_1}}$

$i_{lim} = \text{arcsen}\, \frac{n_2}{n_1}$

Para ángulos mayores se produce reflexión total.

2. ESPEJOS

- Ecuación fundamental : $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}$
- Distancias focales $f = f' = \frac{R}{2}$
- Aumento lateral $M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$

construcción imágenes

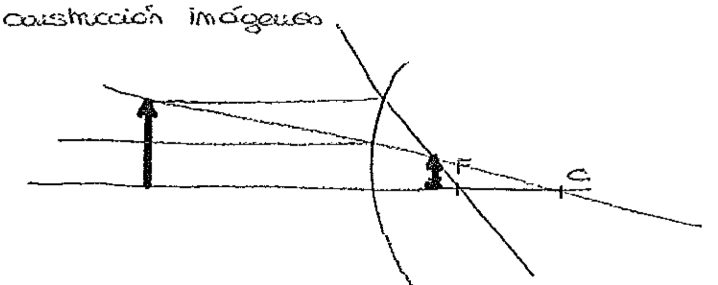


Imagen virtual, derecha, menor tamaño

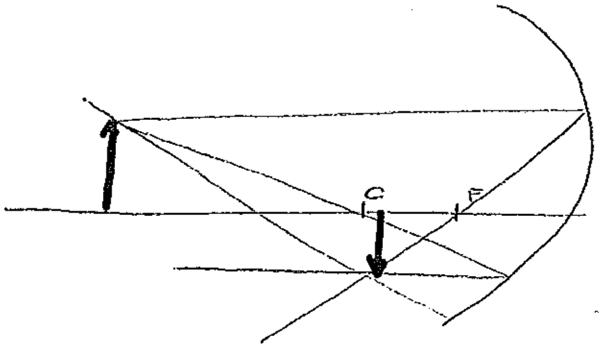


Imagen real, invertida y menor tamaño.

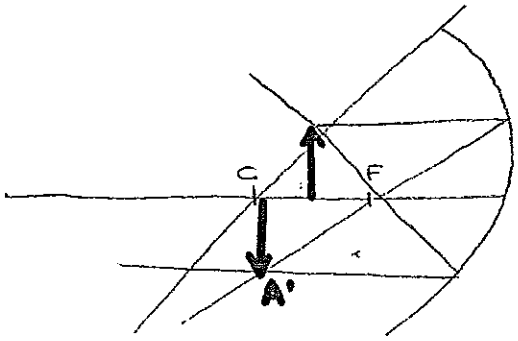


imagen real, invertida mayor tamaño

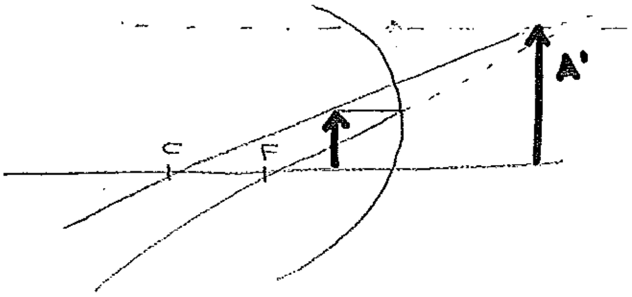


imagen virtual, derecha, mayor tamaño.

TEMA 4: ÓPTICA GEOMÉTRICA

4.1 Propagación de la luz

4.1.1 Introducción

El espectro visible (luz) son las ondas electromagnéticas comprendidas entre las frecuencias de $4\ 10^{14}$ Hz y $8\ 10^{14}$ Hz

La **Óptica** es la parte de la física que se encarga del estudio de la luz (también llamado espectro visible).

La **Óptica Geométrica** es la parte de de la física encargada del estudio de la luz por medio de los fenómenos de reflexión y refracción de las ondas y utilizando la geometría (trigonometría, semejanza de triángulos, etc…) para dicho estudio.

Para estudiar las ondas mediante la reflexión y la refracción vamos a representar las ondas de luz mediante **rayos**, que son líneas perpendiculares a los frentes de onda y que nos sirven para saber la dirección de propagación de la onda.

Si el medio de propagación es isótropo y homogéneo (lo va a ser siempre) los rayos son líneas rectas.

Aproximación paraxial

La óptica geométrica nos sirve para saber cómo se forman las imágenes a través de espejos y lentes pero utilizando siempre **rayos paraxiales.**

Los rayos paraxiales son aquellos rayos que forman un pequeño ángulo con el eje óptico.

El eje óptico es la línea recta que une el objeto con el centro de curvatura del elemento óptico (lente o espejo).

4.1.2 Índice de refracción

Cuando la luz atraviesa un sólido, un líquido o un gas su velocidad es distinta a cuando se desplaza en el vacío.
El **índice de refracción** n de un material es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el material considerado.

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\text{velocidad de la luz en el vacío}}{\text{velocidad de la luz en el material}}$$

Donde $c = 3\text{x}10^8\ m/s$ es la velocidad de la luz en el vacío.
El índice de refracción es adimensional y los valores que toma son mayores que la unidad (siempre $n > 1$), por lo que se deduce que la velocidad de la luz en cualquier medio es menor que en el vacío. Nota: el índice de refracción del aire es muy cercano a la unidad, por lo que para cualquier cálculo $n_{aire} = 1$.

También se puede definir el índice de refracción relativo entre dos medios como el cociente entre las velocidades de la luz en esos medios.

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \qquad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

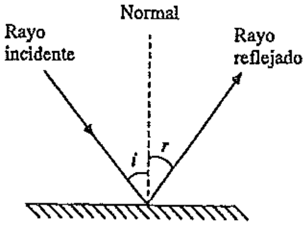
4.1.3 Reflexión

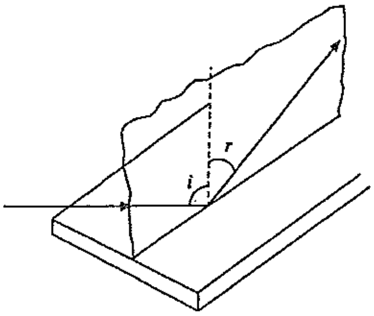
Existen algunos objetos que emiten luz como el Sol o una bombilla pero sin embargo la mayoría de los objetos de nuestro entorno reflejan la luz en lugar de emitirla (esta luz reflejada es la que permite verlos).
Se produce una **reflexión** cuando un rayo rebota en un cierto medio.

Ley de Snell de la reflexión

1ª El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano, son coplanarios.

2ª El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión: $i = r$.





Notas importantes:

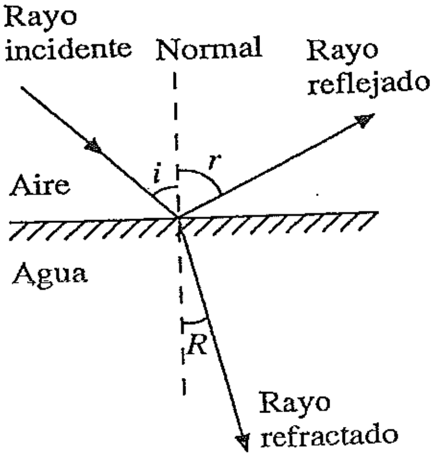
- Los ángulos siempre se miden entre el rayo y la normal

- Aunque en el dibujo la superficie es lisa la reflexión también se puede producir sobre una superficie curva, basta con dibujar la normal a la superficie en el punto de incidencia.

4.1.4 Refracción

Cuando un rayo de luz penetra en un medio con un ángulo de incidencia distinto al de incidencia normal ($i = 0^\circ$), el rayo desvía su dirección. El cambio en la dirección del desplazamiento cuando la luz pasa de un medio a otro recibe el nombre de **refracción.**

Cuando la luz incide sobre la superficie de separación de dos medios, como por ejemplo aire y agua, parte de la luz se refleja cumpliéndose las leyes de la reflexión enunciadas anteriormente y parte de la luz cambia de medio, cambiando además su dirección de propagación. Podemos decir entonces que el rayo que ha pasado al segundo medio se ha refractado.



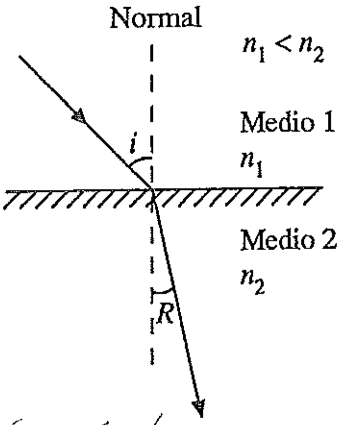
Ley de Snell de la refracción

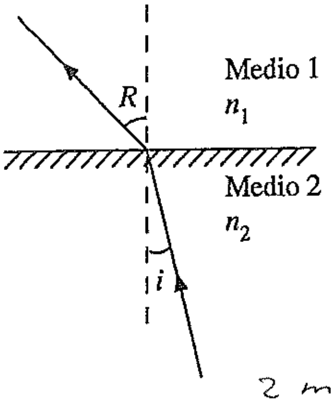
1ª El rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en el mismo plano, son coplanarios.

2ª El ángulo de incidencia y el refractado están relacionados por:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} R} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \boxed{n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} R}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios 1 y 2.





1 más rápido que 2

2 más lento que 1

Notas importantes:

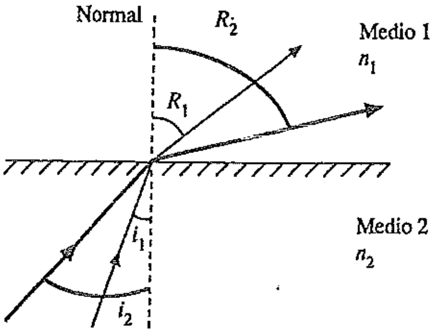
- Cuando un rayo pasa de un medio menos refringente a otro más refringente $(n_1 < n_2)$, el rayo refractado se acerca a la normal.
- Cuando un rayo pasa de un medio más refringente a otro menos refringente $(n_1 > n_2)$, el rayo refractado se aleja de la normal.
- Tanto el rayo incidente como el refractado se ajustan al principio de reversibilidad (sus sentidos pueden invertirse)
- El único caso en que el rayo no cambia de dirección es cuando incide perpendicularmente a la superficie ($i = 0°$), en ese caso el rayo no se desvía independientemente de que medio sea más refringente.

4.1.5 Ángulo límite

Es un fenómeno que sólo puede producirse cuando el rayo se mueve de un medio más refringente a un medio menos refringente, de forma que al refractarse se aleja de la normal.

El **ángulo límite** es el ángulo de incidencia que produce que el ángulo de refracción valga 90°, esto es, que el rayo refractado salga rasante, coincidiendo con la superficie de separación entre los dos medios.

Cuando el ángulo de incidencia es mayor que ángulo límite se produce lo que denominamos **reflexión total** (toda la luz incidente se refleja volviendo al medio del que proviene, cumpliendo por supuesto las leyes de la reflexión).



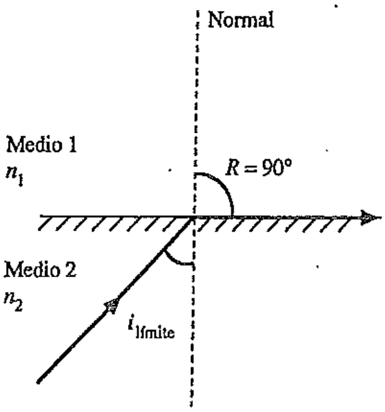
$n_1 < n_2 \Rightarrow$ el medio 2 es más refringente que el medio 1, al moverse la luz de 2 a 1 el rayo se aleja de la normal.

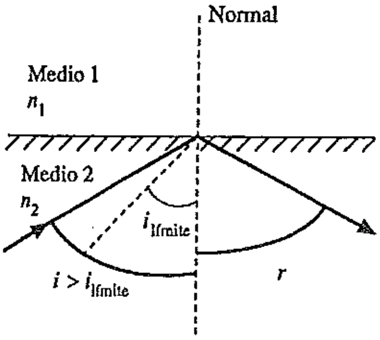
El ángulo límite es el ángulo de incidencia que produce que el de refracción sea 90°. Para calcularlo basta aplicar la ley de Snell:

$$n_2 \text{ sen } i_{\text{límite}} = n_1 \text{ sen } 90°$$

$$\text{sen } i_{\text{límite}} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\boxed{i_{\text{límite}} = \text{arc sen}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}$$





Para ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite se produce **reflexión total,** toda la luz se reflejaría volviendo al medio del que proviene.

No hay refracción.

ÓPTICA GEOMÉTRICA: ESPEJOS

Ecuación fundamental para espejos esféricos: $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}$

Distancias focales: $f = f' = \frac{R}{2}$ [el foco objeto y el foco imagen coinciden]

Aumento lateral: $M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$

NOTA: En el caso particular de un espejo plano se toma $R = \infty$ y se obtiene que: $s' = -s$, $y' = y$

Construcción gráfica de las imágenes:

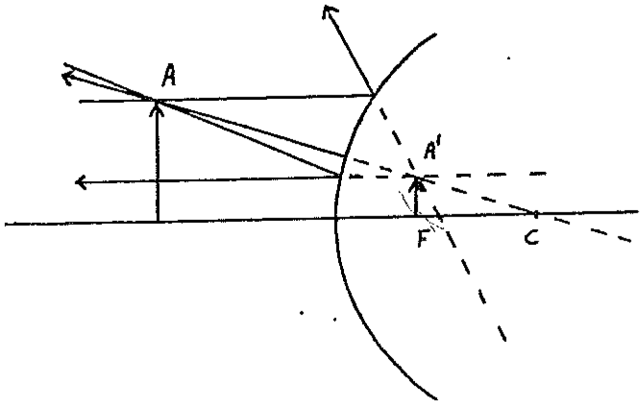


Imagen virtual derecha y de menor tamaño.

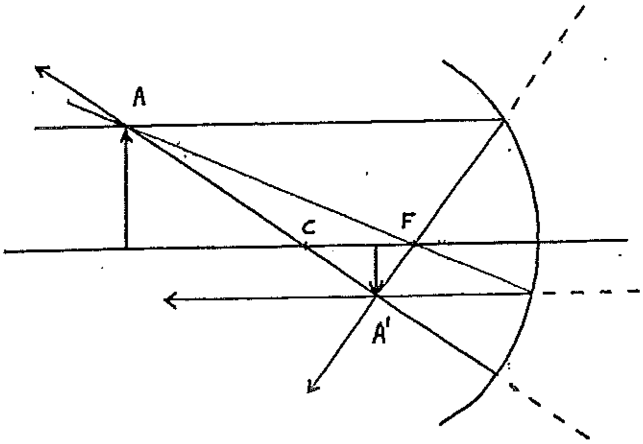


Imagen real, invertida y de menor tamaño.

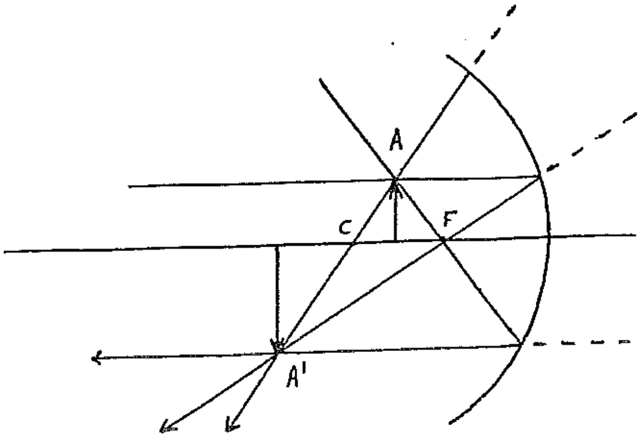


Imagen real, invertida y de mayor tamaño.

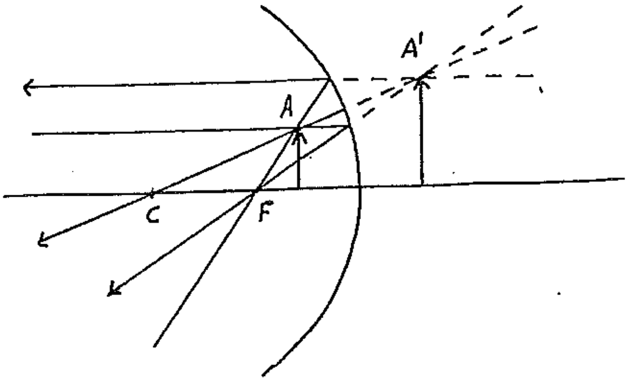


Imagen virtual, derecha y de mayor tamaño.

ÓPTICA GEOMÉTRICA: LENTES

Ecuación fundamental : $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$

Foco imagen: $\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

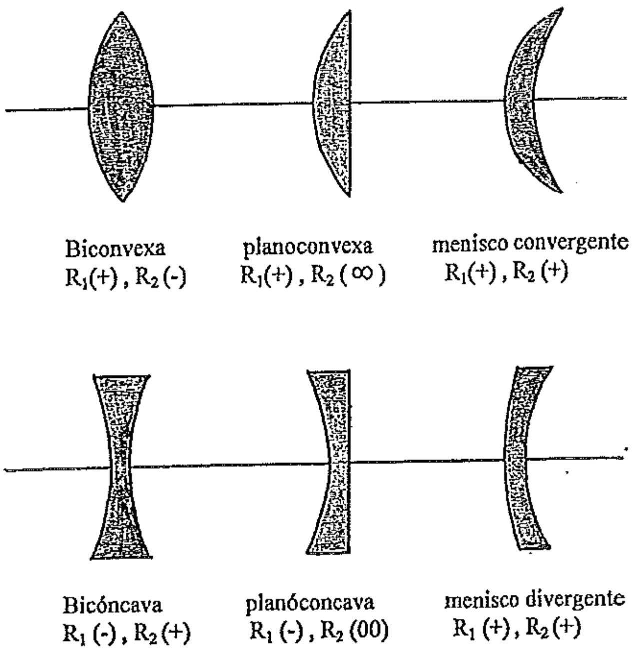
Foco objeto: $f = -f'$

Aumento lateral: $M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$

Potencia: $P = \frac{1}{f'}$ (dioptrías)

Potencia de dos lentes acopladas: $P = P_1 + P_2$

Tipos de lentes:



Construcción grafica de las imágenes:

al revés que espejos

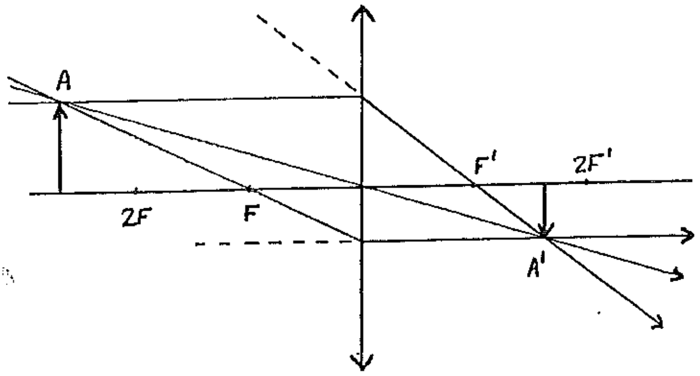


Imagen real, invertida y de menor tamaño.

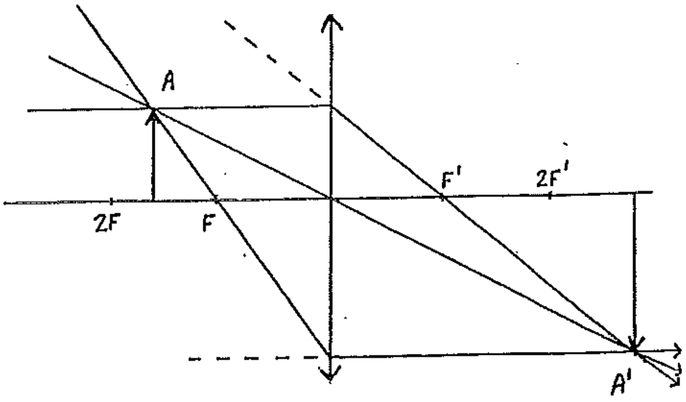


Imagen real, invertida y de mayor tamaño.

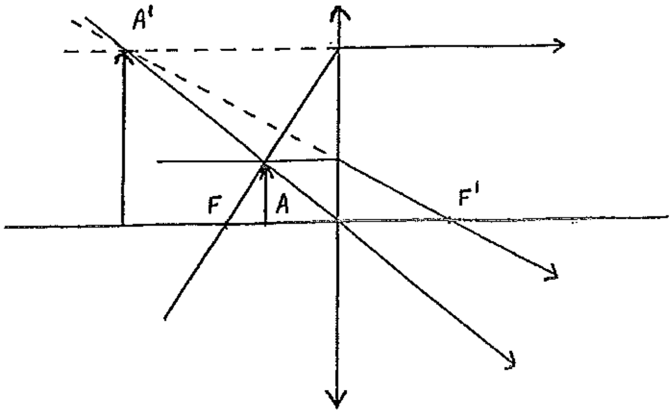


Imagen virtual, derecha y de mayor tamaño.

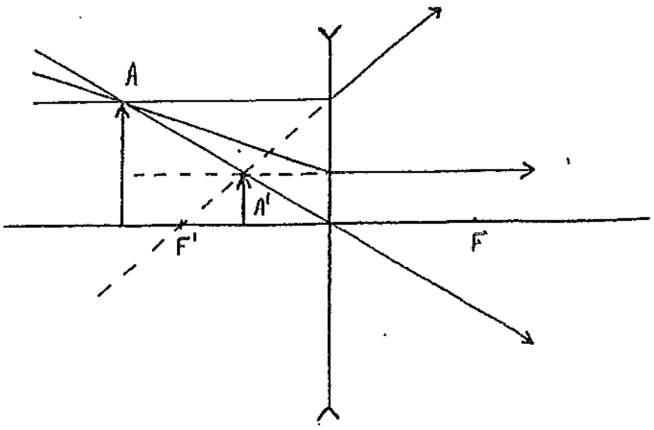
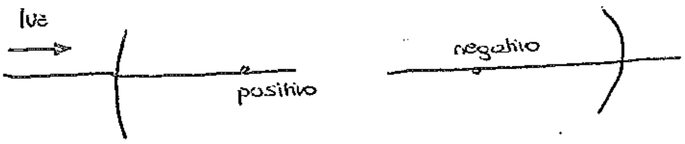


Imagen virtual, derecha y de menor tamaño.

4.2 Lentes delgadas



4.2.1 Tipos de lentes

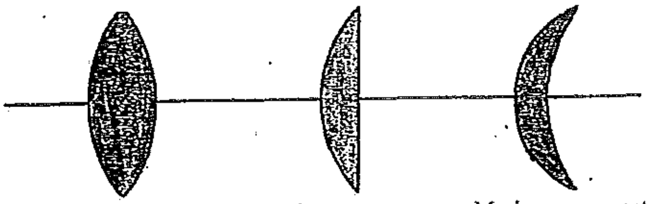
Las lentes se dividen en dos tipos dependiendo de su potencia: convergentes y divergentes

La potencia se mide en dioptrías

$$\text{Potencia} > 0 \ \Rightarrow \text{Lente convergente}$$
$$\text{Potencia} < 0 \ \Rightarrow \text{Lente divergente}$$

Los tipos de lentes convergentes son las siguientes:

El signo del radio viene dado por el punto donde hay que "pinchar" el compás para trazar la curva. Los signos están tomados suponiendo que la luz entra por la izquierda

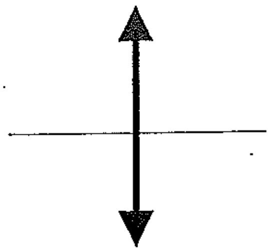


Biconvexa
R_1 (+), R_2 (–)

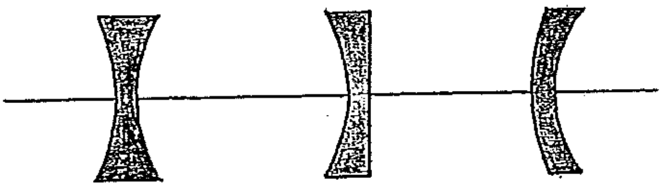
Planoconvexa
R_1 (+), R_2 (∞)

Menisco convergente
R_1 (+), R_2 (+)

Sea cual sea el tipo de lente convergente su representación esquemática para los diagramas de rayos es siempre la misma:



Los tipos de lentes divergentes son las siguientes:

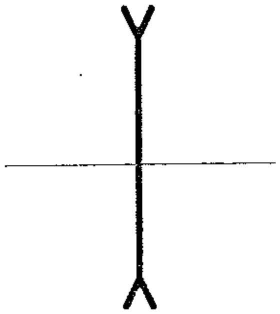


Bicóncava
R_1 (–), R_2 (+)

Planocóncava
R_1 (–), R_2 (∞)

Menisco divergente
R_1 (+), R_2 (+)

Sea cual sea el tipo de lente divergente su representación esquemática para los diagramas de rayos es siempre la misma:



4.2.2 Ecuaciones de las lentes delgadas

En todos los dibujos de estos apuntes tomamos negativas las distancias a la izquierda de O porque es por donde entra la luz.

Convenio de signos

Tomaremos el origen en la intersección entre la lente y el eje óptico. Tomando este punto O como referencia pondremos negativas todas aquellas distancias que estén en el lado por el que viene la luz y positivas aquellas que estén por el lado por el que sale la luz de la lente. Tomaremos positivas las distancias por encima del eje óptico y negativas las distancias por debajo.

Posición de los focos

Lo primero que hacemos siempre es obtener la posición del foco imagen f' y del foco objeto f, para ello, pueden suceder dos cosas.

- Si tenemos como dato la potencia de la lente obtendremos el foco imagen mediante:

$$f' = \frac{1}{P}$$

donde es importante resaltar que si la potencia de la lente está en **dioptrías** el foco imagen saldrá en **metros**.

- Si tenemos como dato los radios de la lente R_1, R_2 y los índices de refracción dentro de la lente n_t y del medio exterior n_i:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n_i - n_t}{n_t}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Normalmente el medio exterior será el aire ($n = 1$) así que la anterior expresión se simplifica:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Una vez obtenida la posición del foco imagen la del foco objeto es:

$$f = -f'$$

Observación importante:

En las lentes convergentes: $P > 0 \Rightarrow f' > 0$ y $f < 0$

En las lentes divergentes: $P < 0 \Rightarrow f' < 0$ y $f > 0$

Es decir los focos en las lentes convergentes y divergentes están intercambiados de posición.

Posición de la imagen

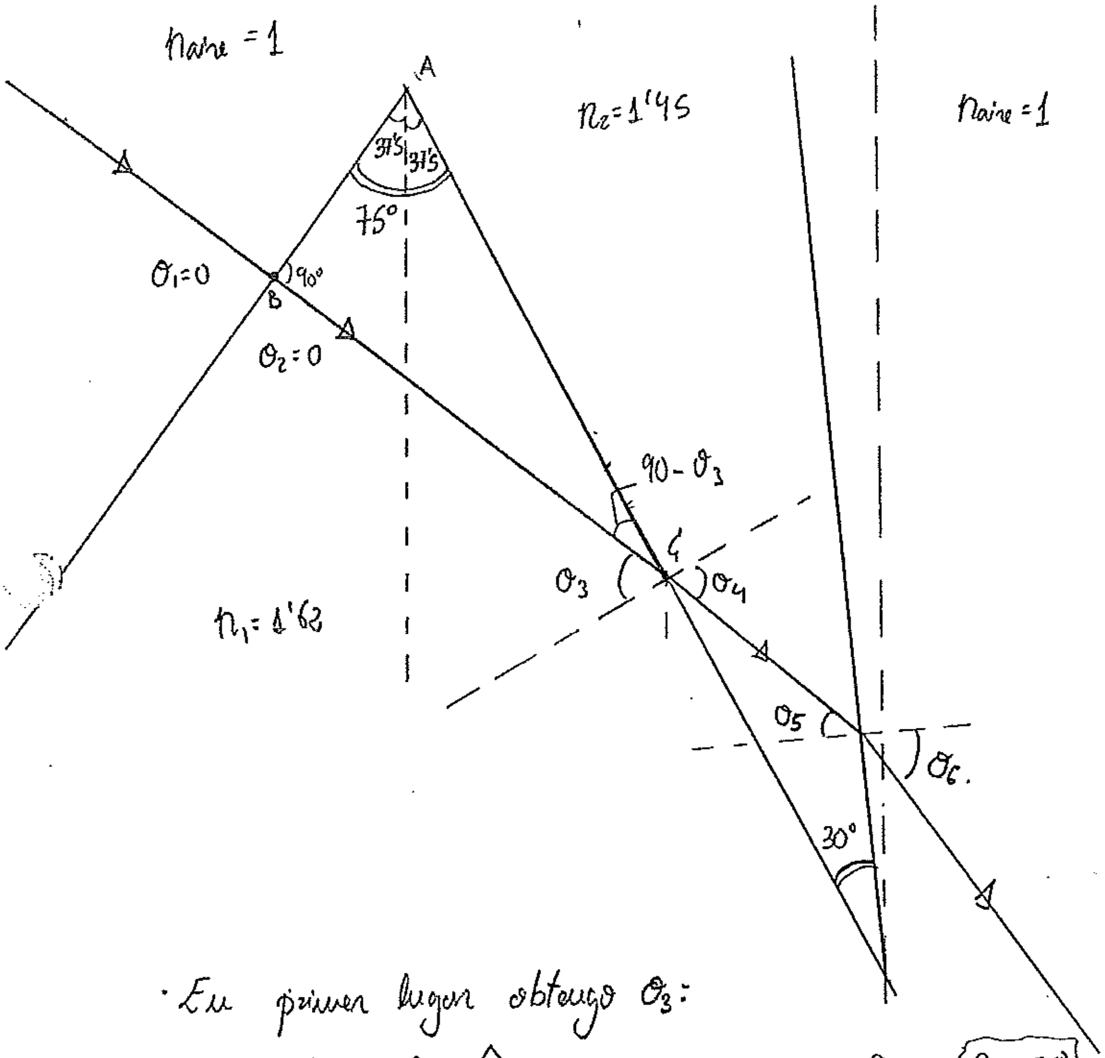
La posición de la imagen s' de un objeto viene dada por la Ecuación fundamental de las lentes:

$$\boxed{\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}}$$

donde s representa la posición del objeto y f' la posición del foco imagen.

Ejercicio 1. Tema 4. Continuación

b) $A_1 = 75°$; $n_1 = 1'62$; $A_2 = 30°$; $n_2 = 1'45$.



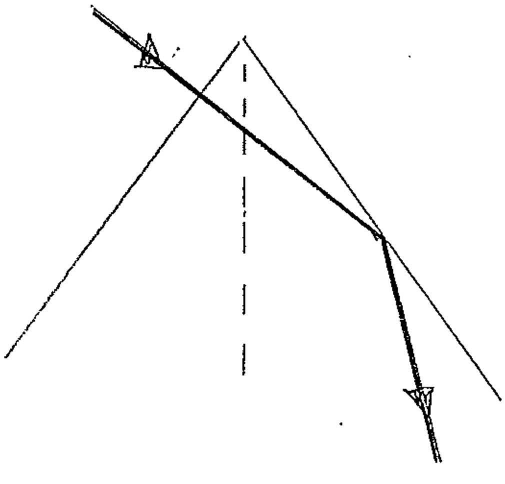
· En primer lugar obtengo θ_3:

Del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$: $180 = 90° + 75° + 90 - \theta_3 \Rightarrow \boxed{\theta_3 = 75°}$

· En segundo lugar: Snell prisma 1 - prisma 2.

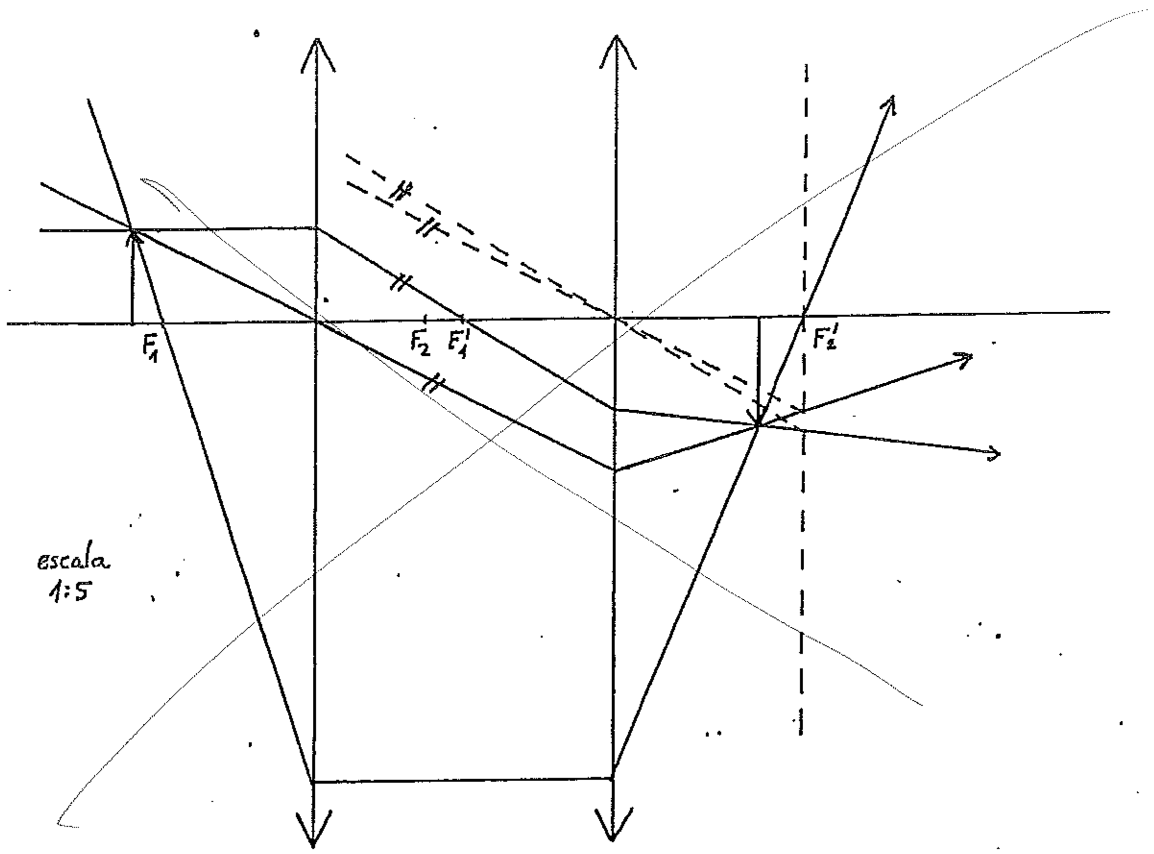
$$n_1 \cdot \operatorname{Sen} \theta_3 = n_2 \cdot \operatorname{Sen} \theta_4 \rightarrow \theta_4 = \operatorname{arcSen}\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \operatorname{Sen} \theta_3\right) = \operatorname{arcSen}\left(\frac{1'62}{1'45} \cdot \operatorname{Sen} 75\right) =$$

$= \operatorname{arcSen}(1'08) = \nexists \Rightarrow$ Luego no hay rayo refractado. Se ha producido reflexión total:



Ejercicio 2

Un objeto se coloca 12 cm a la izquierda de una lente convergente de distancia focal 10 cm. Una segunda lente convergente de distancia focal 12,5 cm se sitúa 20 cm a la derecha de la primera lente. Determine la posición, tamaño y orientación de la imagen formada por las dos lentes. Dibuje el diagrama de rayos.



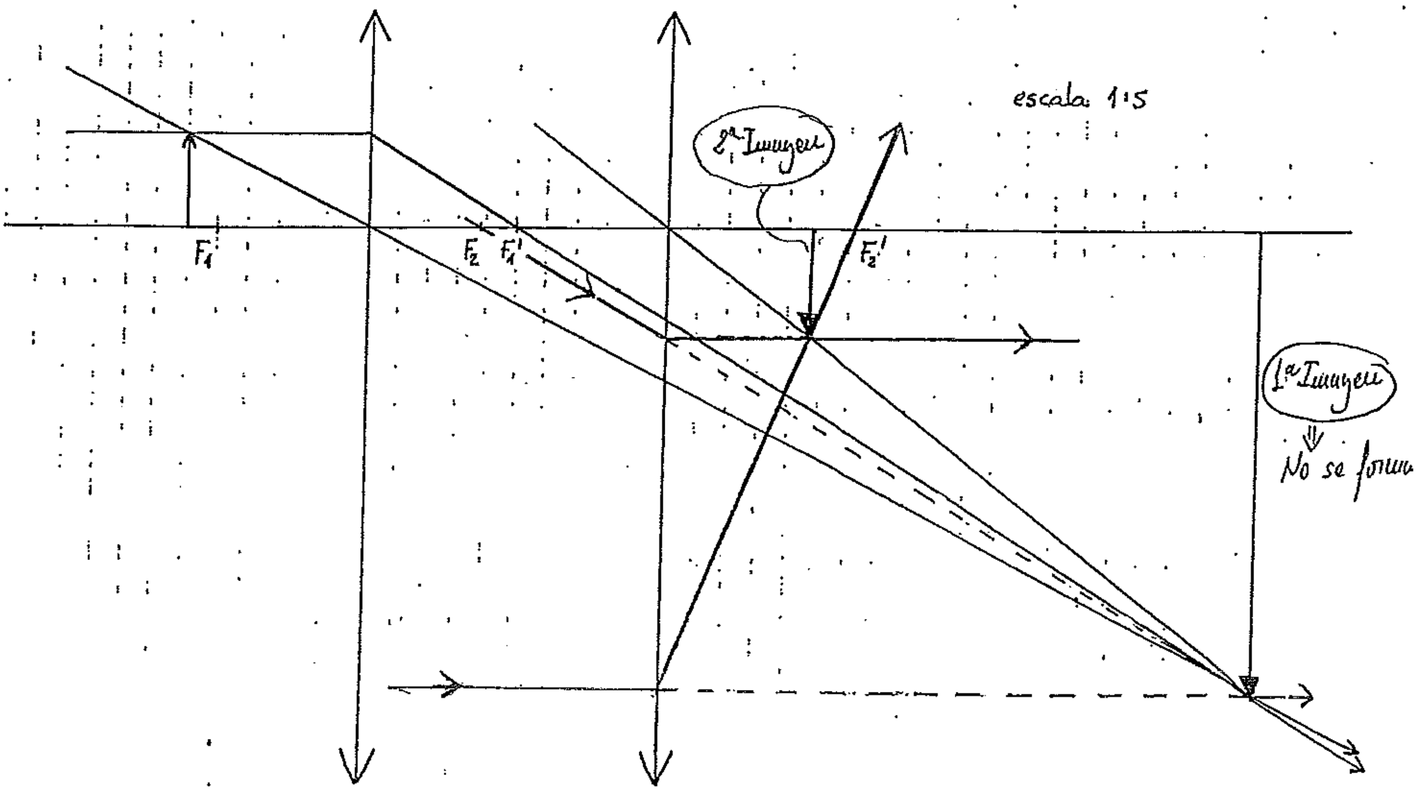


Imagen 1ª lente:

$$\frac{1}{S'_1} - \frac{1}{S_1} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\frac{1}{S'_1} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{S_1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{-12} \rightarrow \boxed{S'_1 = 60\,cm}$$

$$M_{L1} = \frac{S'_1}{S_1} = \frac{60}{-12} = -5$$

Imagen 2ª lente:

$$\frac{1}{S'_2} - \frac{1}{S_2} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\frac{1}{S'_2} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{\oplus 12'5} + \frac{1}{\ominus 40} \Rightarrow \boxed{S'_2 = +9'52\,cm}$$

positivo

ojo!!

$$M_{L2} = \frac{S'_2}{S_2} = \frac{-9'52}{-40} = 0'238$$

Imagen: real, invertida, y $M_{L1} \cdot M_{L2} = -1'19$ veces más grande

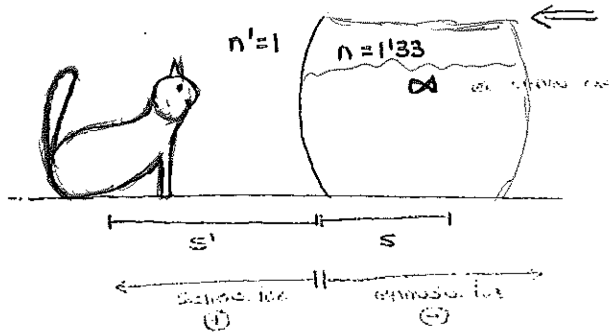
Ejercicio 3

Un gato y un pez dentro de la pecera se vigilan mutuamente. El radio de la pecera es $r = 25\,\text{cm}$. Tanto el gato como el pez están a 10 cm de la pared de la pecera. Calcular:

a) A qué distancia de la pared ve el gato al pez.
b) A qué distancia de la pared ve el pez al gato.
c) El tamaño aparente del pez.
d) El tamaño aparente del gato.

DATOS: $n = 1,33$. Tamaño real del pez $12\,\text{cm}$. Tamaño real del gato 35 cm.

a)



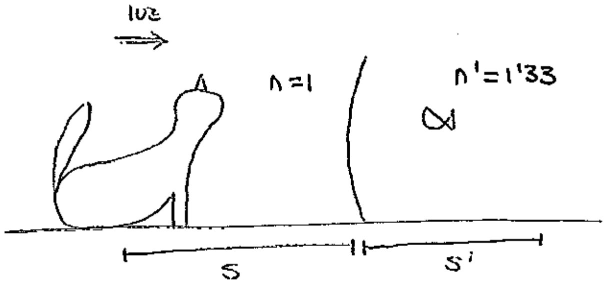
lo que ves es el pez por lo que la luz va en ese sentido

el centro de la esfera queda dentro radio negativo

Ecuación dioptrio esférico :

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R} \quad ; \quad \frac{1}{s'} - \frac{1'33}{-10} = \frac{1-1'33}{-25} \quad ; \quad \boxed{s' = -8'347\ \text{cm}}$$

b)



Ec. dioptrio esférico :

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R} \quad ; \quad \frac{1'33}{s'} - \frac{1}{-10} = \frac{1'33-1}{+25} \quad \boxed{s' = -15'32\ \text{cm}}$$

c) $$\frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} \rightarrow \boxed{y'} = 12 \cdot \frac{1'33\cdot(-8'347)}{1\cdot(-10)} = \boxed{13'32\ \text{cm}}$$

d) $$\frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} \quad ; \quad \boxed{y'} = 35 \cdot \frac{1\,(-15'32)}{1'33\,(-10)} = \boxed{40'32\ \text{cm}}$$

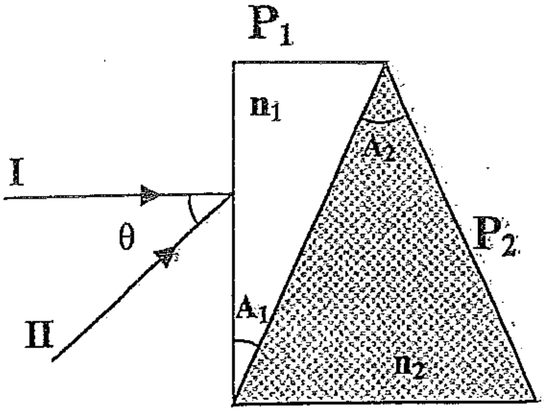
En los dos casos la imagen es virtual, derecha y de mayor tamaño

Problema 4

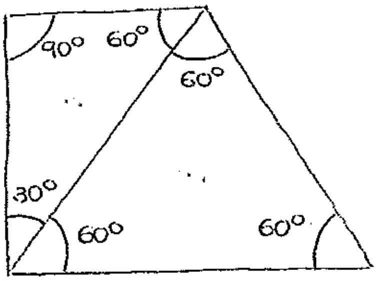
Un sistema óptico está formado por dos prismas P_1 y P_2 puestos en contacto (ver figura). Si se hace incidir un rayo (I) perpendicularmente a la cara de la izquierda de P_1, calcular:

1) El ángulo *e* con el que emerge por la cara de la derecha de P_2.
2) Dibujar la marcha de rayos.
3) Calcular con qué ángulo mínimo θ debe incidir un rayo(II) en la cara de la izquierda de P_1 para que no exista refracción a través de P_2.
4) Dibujar la marcha de rayos

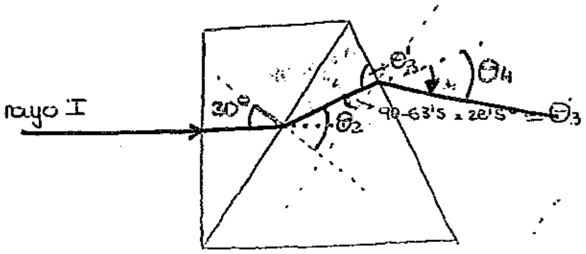
DATOS: $A_1 = 30°$, $n_1 = 1.61$, $A_2 = 60°$ y $n_2 = 1.46$



$n_1 > n_2$



1)



* como $n_1 > n_2$ el rayo se aleja (se aleja de la normal)

Aplicamos la ley de Snell.

$$n_1 \cdot \text{sen}30^\circ = n_2 \,\text{sen}\,\theta_2$$

$$1'61 \cdot 0'5 = 1'46 \,\text{sen}\theta_2$$

$$\boxed{\theta_2 = 33'46^\circ}$$

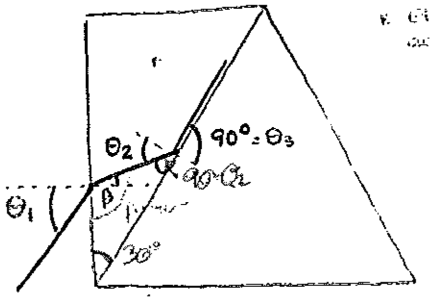
$$\boxed{\theta'_3} = 180-60-(90-\theta_2) = \boxed{63'46^\circ}$$

$$\boxed{\theta_3 = 26'5}$$

$$n_2 \,\text{sen}\, 26'55 = \overset{1}{\cancel{n}} \cdot \text{sen}.\theta_4$$

$$\boxed{\theta_4 = 40'72^\circ}$$

3) Angulo de reflexión total.



* El rayo se acerca (se acerca a la normal)

* Imponemos que $\theta_3 = 90^\circ$ para que no haya refracción

Snell entre P_1 y P_2

$$n_1 \text{sen}\theta_2 = n_2 \,\text{sen}\theta_3$$

$$1'61 \,\text{sen}\theta_2 = 1'46 \,\text{sen}90$$

$$\theta_2 = \text{arcsen}\,\frac{1'46}{1'61} = 65'07^\circ$$

* Quiero θ_1. Para esto aplico Snell entre aire y P_1

$$1\,\text{sen}\,\textcircled{\theta_1}? = n_1 \,\text{sen}\,\textcircled{\beta}? \rightarrow \text{Quiero } \beta$$

[illegible]

$-\beta = 30 - \theta_2$

$\beta = \theta_2 - 30^\circ$

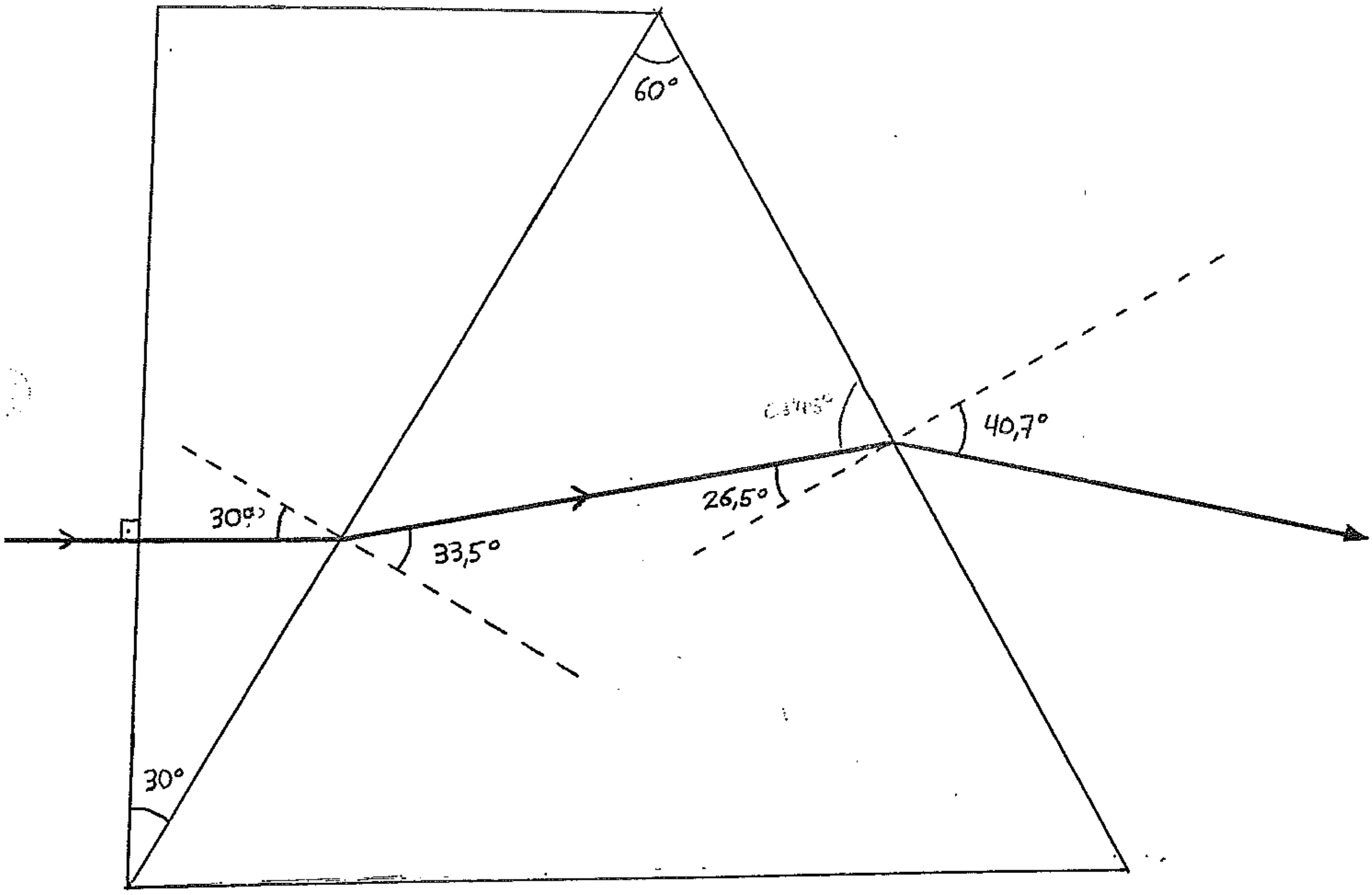
$-\beta = 30 - \theta_2$; $\beta = \theta_2 - 30 = 35'07^\circ$

con esto ; $1 \,\text{sen}\theta_1 = 1'61 \cdot \text{sen}35'07$; $\boxed{\theta_1 = 67'68^\circ}$

JUNIO 2004

Ejercicio 4

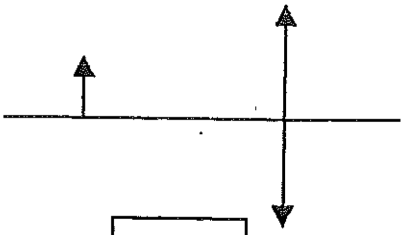
Apartado 2) Resolución gráfica



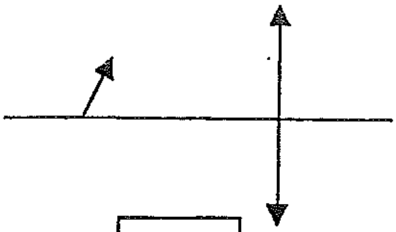
Ejercicio 5

Una barra de 4 cm de altura se encuentra situada perpendicularmente y sobre el eje óptico de una lente delgada convergente de 5 dioptrías, a 30 cm de la misma.

a) Dibujar la marcha de rayos.
b) Determinar a que distancia de la lente se forma la imagen, su tamaño y posición.
c) Si el objeto se inclina 30° hacia la lente ¿donde aparecerá la imagen, cual será su tamaño y que ángulo formara con el eje óptico ?
d) Dibujar la marcha de rayos.



a y b

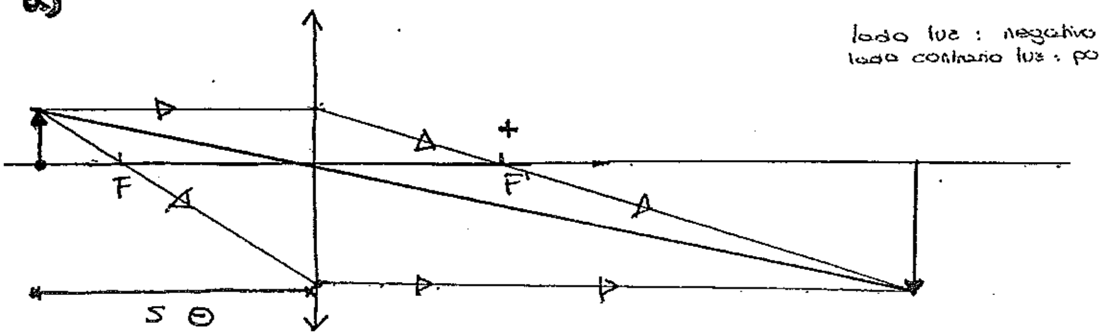


c y d

Datos: $y = 4\text{ cm}$, $S = -30\text{ cm}$,

$P = \frac{1}{f'} = 5 \Rightarrow f' = 0'2\text{ m} = 20\text{ cm}$

a)



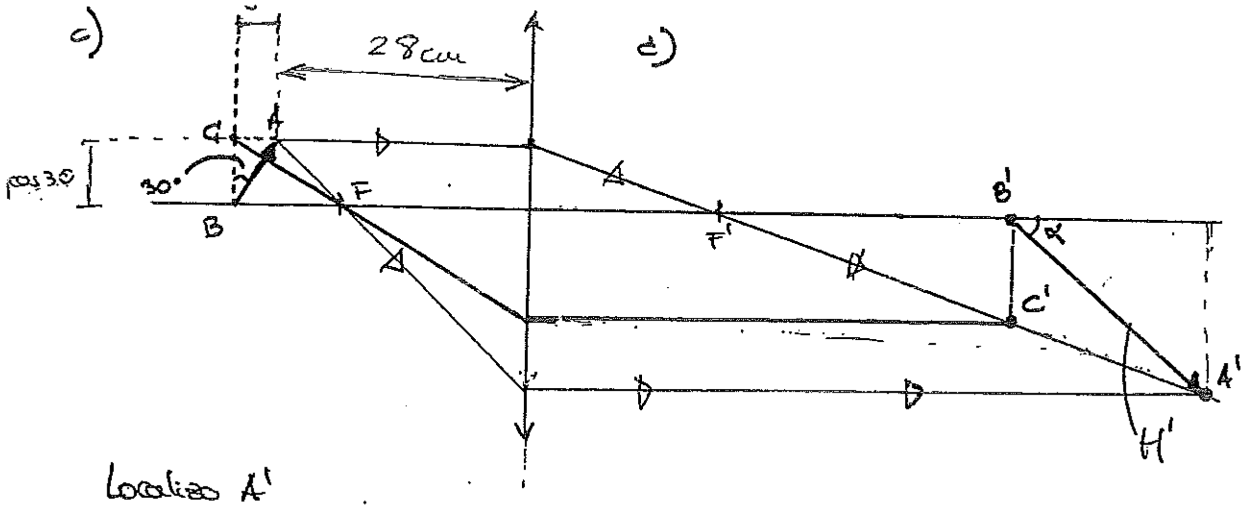
lado luz : negativo
lado contrario luz : positivo

b)

$$\text{Ec lentes: } \frac{1}{S'} - \frac{1}{S} = \frac{1}{f'} \rightarrow \boxed{S'} = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{S}} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{-30}} = \boxed{60\text{ cm}}$$

$$\text{Aumento lateral: } M_L = \frac{S'}{S} = \frac{y'}{y} \rightarrow \boxed{y'} = y\frac{S'}{S} = 4\,\frac{60}{-30} = \boxed{-8\text{ cm}}$$

Imagen: - real: pq se cortan directamente los rayos y no sus prolongaciones.
- invertida: pq sale ~~[illegible]~~ dada la vuelta.
- de mayor tamaño: mayor altura.



Localizo A'

$$S_A = -(30 - y \operatorname{sen} 30) = -(30 - 4 \cdot \tfrac{1}{2}) = -28 \text{ cm}$$

$$\text{Lente: } \frac{1}{S'_A} - \frac{1}{S_A} = \frac{1}{f'} \longrightarrow \boxed{S'_A = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{S_A}} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{-28}} = 70 \text{ cm}}$$

$$\frac{S'_A}{S_A} = \frac{y'_A}{y_A} \longrightarrow y'_A = \frac{S'_A}{S_A} y_A = \frac{70}{-28} 4 \cos 30 \Rightarrow \boxed{y'_A = -8'66 \text{ cm}}$$

Como tengo $S'_B = 60$ cm (igual que antes), obtengo H': pitágoras.

$$\boxed{H' = \sqrt{(y'_A)^2 + (S'_A - S'_B)^2} = 13'23 \text{ cm}} \longrightarrow \text{Altura imagen (inclinada)}$$

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg} \frac{|y'_A|}{|S'_A - S'_B|} = 40'89°}$$

SEPTIEMBRE 2002

Ejercicio 5

Sea un objeto de pequeña altura, h, situado en el eje de una lente convergente de 2 dioptrías

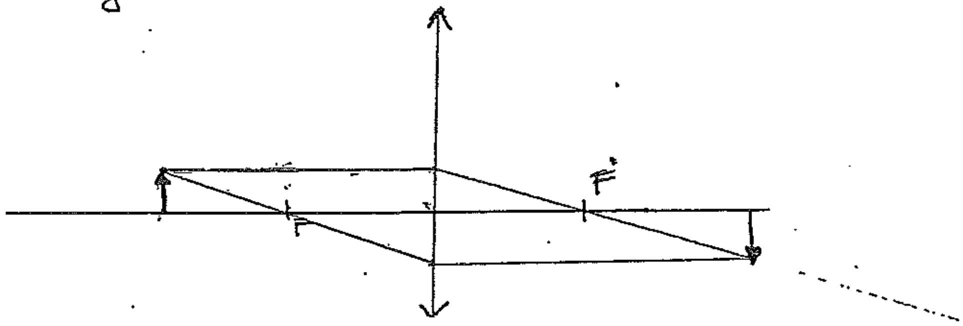
a) determinar el tamaño y distancia a la lente a la que se forma su imagen si el objeto se sitúa a 0.60 m de la misma, dibujar la marcha de rayos.

b) determinar el tamaño y distancia a la lente a la que se forma su imagen si el objeto se sitúa a 0.40 m de la misma, dibujar la marcha de rayos.

c) si el objeto se desplazara desde el foco hacia el infinito a la velocidad constante, v, calcular la velocidad con que se mueve el extremo de la imagen.

$$P = 2 = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = 0'5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

a)



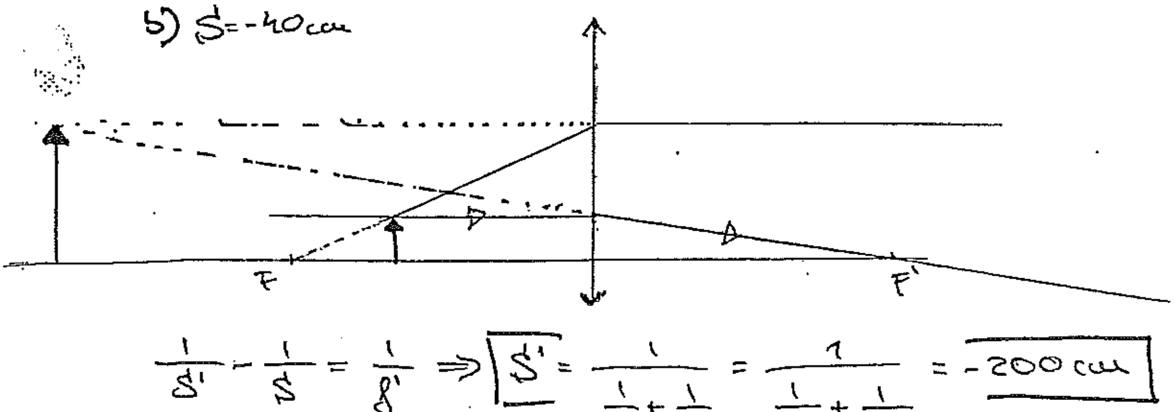
$s = -60$ cm

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{f'}+\frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{50}+\frac{1}{-60}} = 300 \text{ cm}}$$

$$\frac{s'}{s} = \frac{y'}{y} \rightarrow \boxed{y' = y\frac{s'}{s} = y\frac{300}{-60} = -5y}$$

Imagen real, invertida, de mayor tamaño.

b) $s = -40$ cm

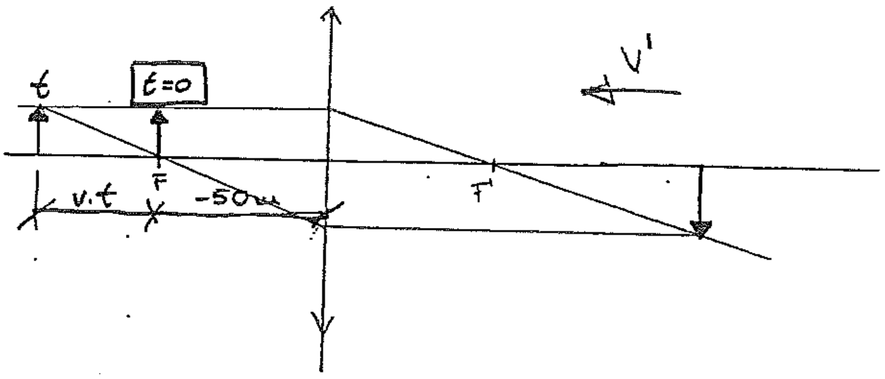


$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \boxed{s' = \frac{1}{\frac{1}{f'}+\frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{50}+\frac{1}{-40}} = -200 \text{ cm}}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \boxed{y' = y\frac{s'}{s} = 5y}$$

Imagen: virtual; derecha; aumentada.

c)



$S(t) = -(50+vt)$

$$\frac{1}{s'(t)} - \frac{1}{s(t)} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{s'(t)} - \frac{1}{-(50+vt)} = \frac{1}{50} \rightarrow s'(t) = \frac{50(50+vt)}{vt}$$ (Estando v en cm/s,

Luego $v'(t) = \frac{\delta s'(t)}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{2500}{vt} + 50\right) = 2500\,\frac{-1}{(vt)^2} + 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{v'(t) = \frac{-2500}{(vt)^2}}$$ (cm/s)

JUNIO 2002

Ejercicio 5

Se ha tallado una lente delgada como la de la figura, con radios $r_1 = 25$ cm y $r_2 = 50$ cm respectivamente, en un material de $\varepsilon_r = 4$

a) Calcular la potencia óptica de la lente e indicar si es convergente o divergente.

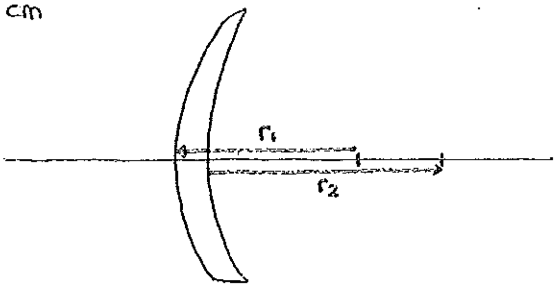
La lente se utiliza para unas gafas de sol por lo que se le da un tratamiento de semiespejado que refleja una parte de la luz incidente. Si a una distancia de 10 cm se coloca un objeto determinar:

b) la marcha de rayos reflejado en la superficie semiespejada de la lente y la de la transmitida.

c) características de ambas imágenes (posición, tamaño, virtual, real, derecha o invertida)

$r_1 = +25$ cm
$r_2 = +50$ cm

$\varepsilon_r = 4$; $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ FÓRMULA $\Longrightarrow$ $\boxed{n=2}$ lente



a)

¿ convergente o divergente ?

$P = \frac{1}{f'} > 0 \longrightarrow$ lente convergente $P = \frac{1}{f'} < 0 \longrightarrow$ lente divergente

según las fórmulas de la óptica geométrica (ANEXO) de las lentes sabemos que

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (2-1)\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{50}\right)$$

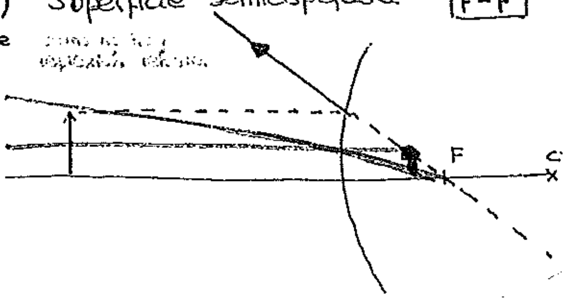
$$\frac{1}{f'} = 0'02 \quad ; \quad \boxed{f' = 50 \text{ cm}}$$

$$P = \frac{1}{f'(m)} = \frac{1}{0'5} = 2 \text{ dioptrias} > 0 \quad \boxed{\text{lente convergente}}$$

1 b) Superficie semiespejada $\boxed{f = f'}$ siempre se cumple en los espejos

p.B.- cuando se comporta como espejo.

como no hay explicación teórica



1 c) $F = \frac{R_1}{2} = \frac{25}{2} = 12'5$ cm   (El espejo es la primera lente de radio R_1)

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R_1}$$

Nos piden posición s'

$$\boxed{s'} = \frac{1}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{s}} = \boxed{5'55 \text{ cm}}$$

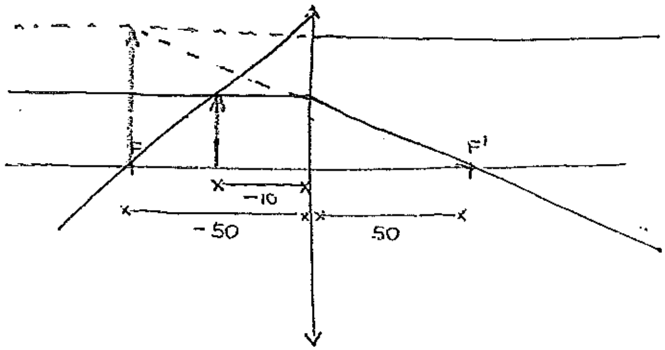
$\uparrow$ $R_1 = +25$cm
$S = -10$cm

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \qquad y' = -\frac{s'}{s} \cdot y$$

$$\boxed{y'} = \frac{-5'55}{-10}\,y = \boxed{0'555\,y}$$

imagen :
- derecha
- reducida
- virtual

(rayo refractado)



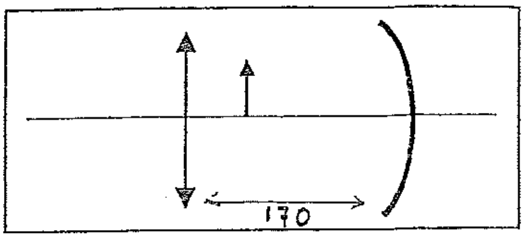
s = -10 cm
F = 50 cm

2c) $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$ $\rightarrow$ $\boxed{s'} = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{-10}} = \boxed{-12'5 \text{ cm}}$

$M_L = \frac{y'}{y} = + \frac{s'}{s}$; $y' = \frac{s'}{s} y$; $\boxed{y'} = y \cdot \frac{-12'5}{-10} = \boxed{1'25y}$ Imagen virtual, derecha, mayor tamaño

SEPTIEMBRE 1999

Ejercicio 5



Un sistema óptico, está formado por una lente de **P= 3** dioptrías y un espejo esférico de **r = 80 cm** situados a **170 cm** el uno del otro. Se coloca un objeto de **y = 2 cm** a **50 cm** de la lente (y **120 cm** del espejo)

a) Mediante el dibujo de la marcha de rayos determinar cuantas imágenes se forman

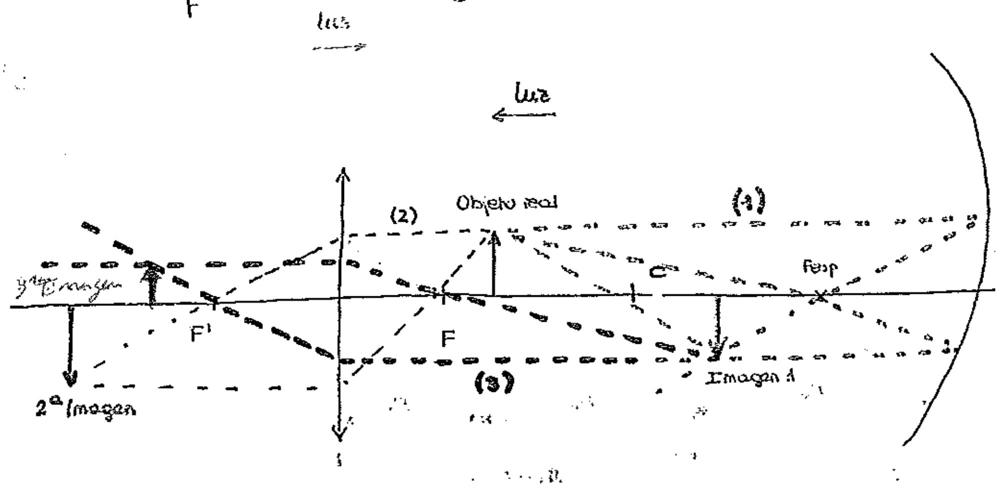
b) Calcular analíticamente la posición de las imágenes

c) Caracterizar las imágenes indicando:

  (1) su tamaño,
  (2) sinson derechas o invertidas,
  (3) si son reales o virtuales.

a) P= 3 dioptrías   Espejo esférico r=80 cm ⟶ Fespejo = $\frac{R}{2}$ = 40 cm
y=2 cm

$$\frac{1}{f'} = 3 \ ; \ f' = \frac{1}{3} = 0'33 \text{ m} = 33'3 \text{ cm}$$



b), c) Calculo la imagen 1 : reflexión en el espejo

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R} \longrightarrow$$

$$1/s' = \frac{2}{R} - \frac{1}{s} = \frac{2}{-80} - \frac{1}{-120} \Rightarrow \boxed{s' = -60 \text{ cm}}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{-60}{-120} \qquad \boxed{y' = -1 \text{ cm}}$$

Imagen real, invertida y de menor tamaño.

Calculo la imagen 2: refracción en la lente

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \ ; \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{33'3} + \frac{1}{-50} \ ; \ \boxed{s' = 100 \text{ cm}}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \ ; \quad \boxed{y' = \frac{100}{-50} \cdot 2 = -4 \text{ cm}}$$

Imagen real, invertida y de mayor tamaño

Calculo la imagen 3 : refracción imagen 1

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \qquad \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{33'3} + \frac{1}{-110} \Rightarrow \boxed{s' = 47'82 \text{ cm}}$$

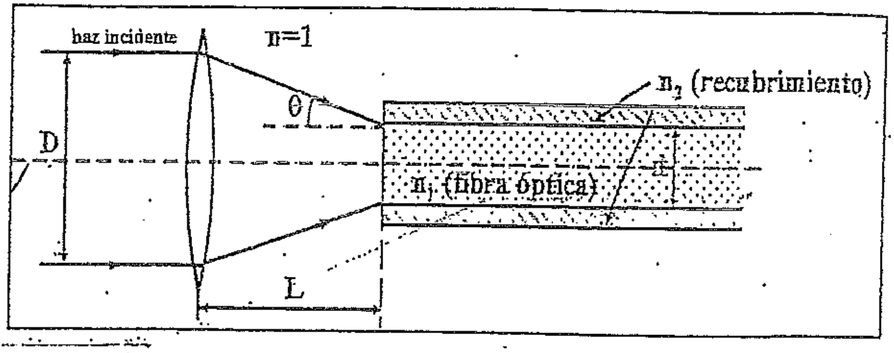
$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \ ; \ \boxed{y' = \frac{s'}{s} y = \frac{47'82}{-110} \cdot (-1) = 0'435 \text{ cm}}$$

respecto imagen

Imagen real, invertida y de menor tamaño.

SEPTIEMBRE 2005

5.- Una fibra óptica cilíndrica muy larga tiene un índice de refracción n_1=1.6 y está recubierta de un material transparente con índice de refracción n_2=1.515. Suponiendo que el extremo libre de la fibra óptica es una superficie plana perpendicular a su eje. Se pide:

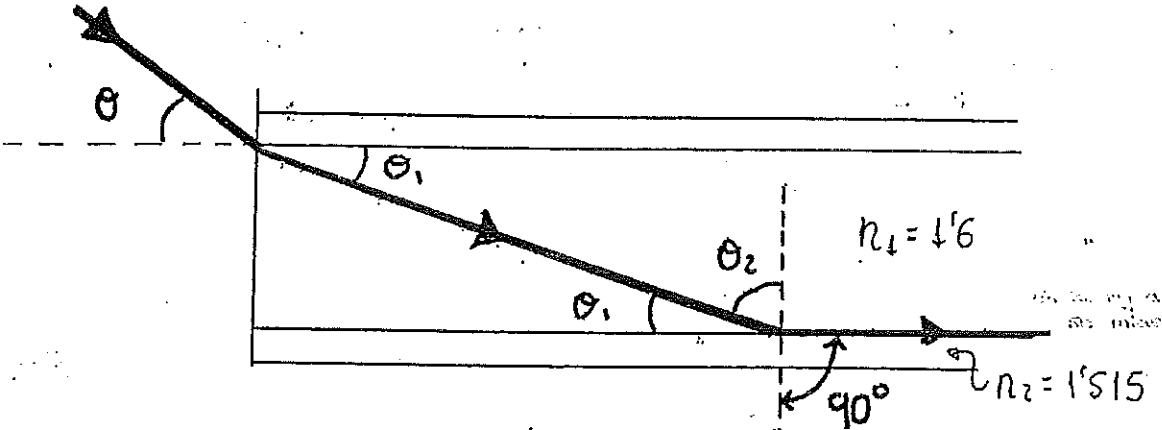


a) determinar **el ángulo máximo θ** con el que puede incidir un rayo sobre la fibra para que éste no se salga de su interior y se pueda transmitir por completo a lo largo de toda su longitud.

Se desea transmitir por completo a través de la fibra un haz de luz cilíndrico de diámetro **D=12cm**. mediante una lente convergente tal y como se indica en la figura. Suponiendo que la fibra óptica tiene un diámetro **d=3mm**,

b) determinar la potencia máxima de la lente que puede utilizarse y la distancia a la fibra a la que hay que colocarla.

a) Busco la reflexión total en el interior:



En la ley de Snell los ángulos siempre se miden con respecto a la normal

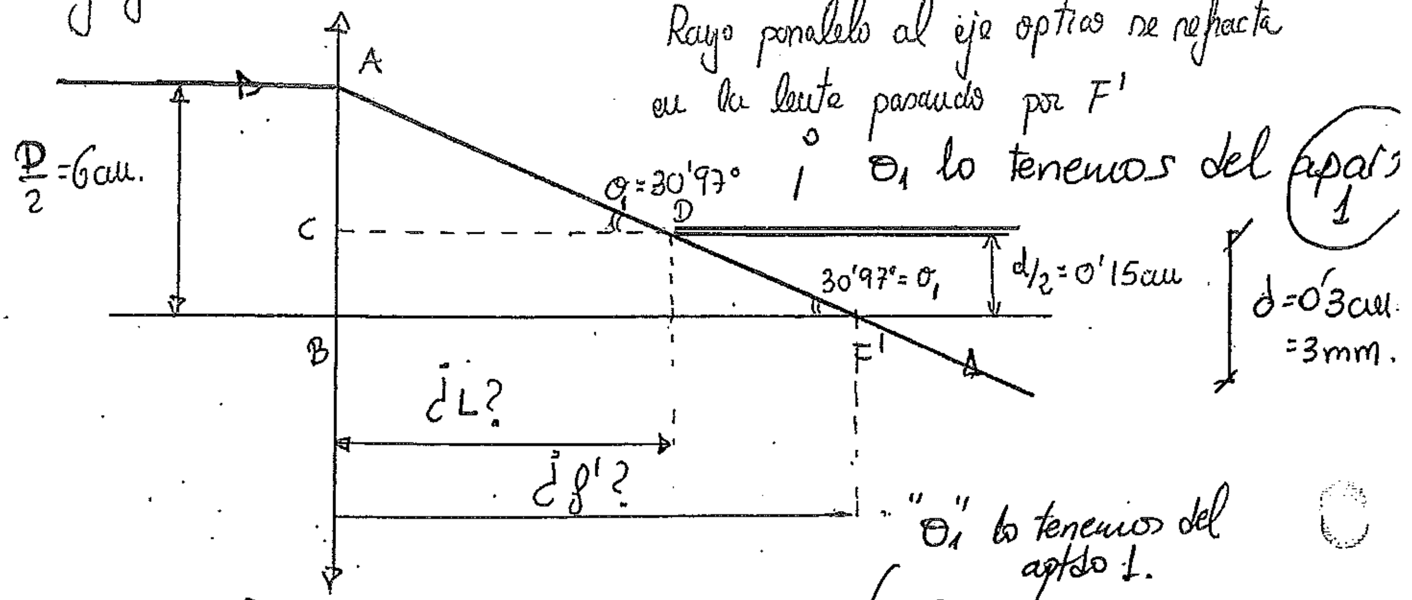
* Primero impongo la condición de reflexión total en el interior: $n_1 . \text{Sen}\,\theta_2 = n_2 . \text{Sen}\,90 \Rightarrow \theta_2 = \text{arcSen}\,\frac{n_2}{n_1} = 71'24°$

* El ángulo $\theta_1 = 90 - \theta_2 = 18'76°$

* Snell aire - fibra óptica: $1 . \text{Sen}\,\theta = n_1 \text{Sen}\,\theta_1 \Rightarrow \boxed{\theta} = \text{arcSen}\,(n_1 . \text{Sen}\,\theta_1) = 30'97°$

(Máximo ángulo con el que puede incidir el rayo para sufrir reflexión total en su interior).

b) Sabiendo el ángulo anterior, hacemos una resolución gráfica.



Rayo paralelo al eje optico se refracta en la lente pasando por F'

i θ_1 lo tenemos del apart 1

"θ_1" lo tenemos del aptdo 1.

Triángulo $\widehat{ABF'}$: $\operatorname{tg}\theta = \frac{D/2}{f'} \Rightarrow \boxed{f' = \frac{D/2}{\operatorname{tg}\theta_1} = \frac{6}{\operatorname{tg} 30'97} = 9'975 \text{ cm}}$

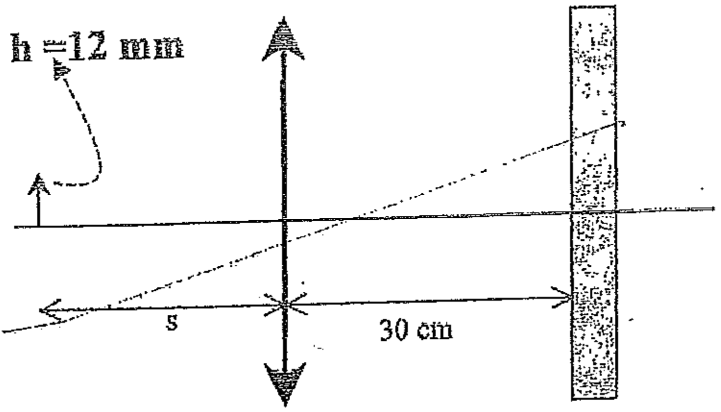
Potencia lente: $\boxed{P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{9'975 \cdot 10^{-2}}} = \boxed{10'002 \text{ dioptrios.}}$

Triángulo $\widehat{\Delta DC}$: $\operatorname{tg}\theta = \frac{D/2 - d/2}{L} \Rightarrow \boxed{L = \frac{D/2 - d/2}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{6 - 0'15}{\operatorname{tg}.30'97} = 9'748 \text{ cm}}$

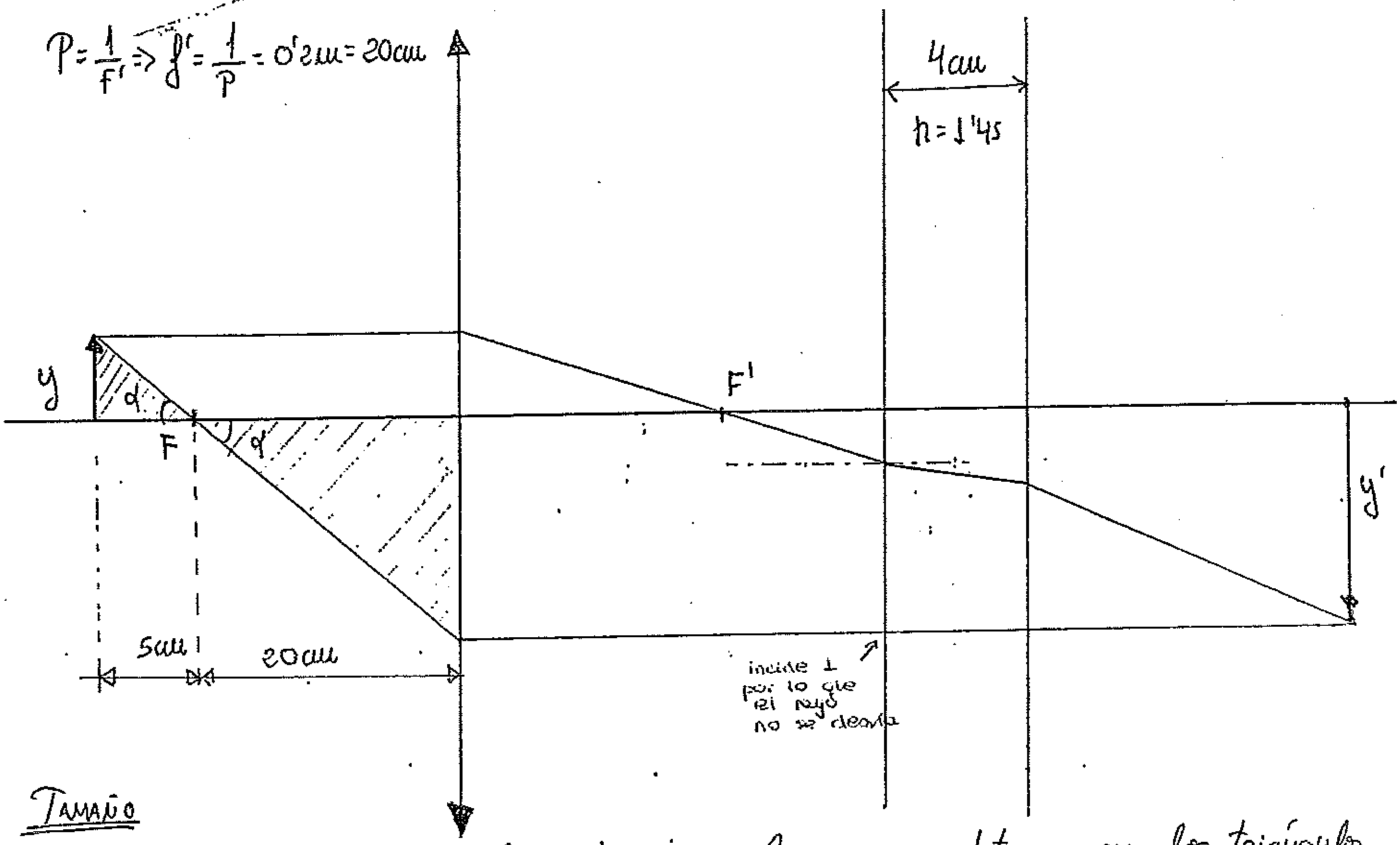
JUNIO 2003

Ejercicio 5

El sistema óptico centrado de la figura está formado por una *lente delgada* de **5 dioptrías** y un placa de vidrio de *caras paralelas* de **4 cm** de espesor y **n=1.45**, situada a **30 cm** por detrás de la lente. a) Calcular dónde se forma la imagen a través del sistema, y sus características (tamaño, posición, virtual o real) de un objeto de altura **12 mm** y posición **s=25 cm**. b) Dibujar el diagrama de rayos.



$P = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{1}{P} = 0'2m = 20cm$



Tamaño

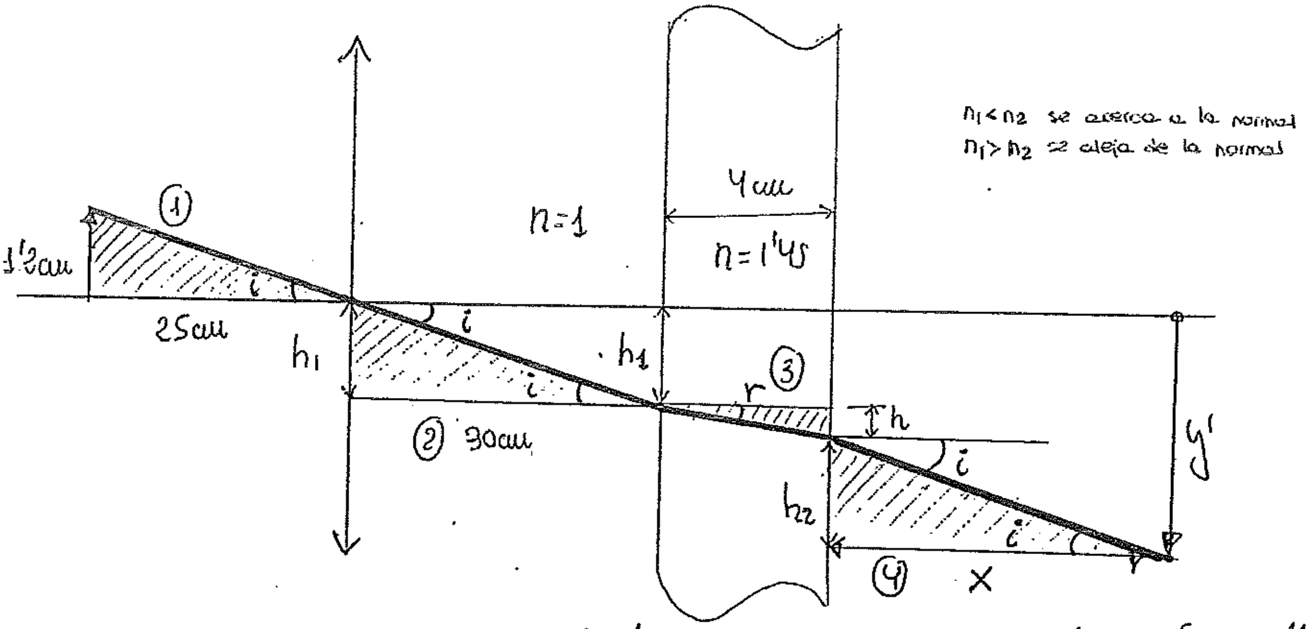
Nos damos cuenta que la altura y' la podemos obtener con los triángulos rayados:

$$tg\alpha_{izq} = tg\alpha_{dcha} \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{y'}{20} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{20}{5} y} = 4 \cdot y = 4 \cdot 12 = 48mm = \overline{4'8cm}$$

tamaño.

En realidad $y' = -4'8cm$; ya que la imagen es invertida.

Posición



Existen muchas maneras de resolverlo, pero esta es una de las más sencillas.

Nuestro objetivo es conseguir X → en el momento que tenga h_2 ya tengo X: $\left\{\boxed{X = h_2/tg\, i}\right.$ (Del triángulo ④).

* Semejanza ①-②: $tg\, i = tg\, i \Rightarrow \frac{1'2}{25} = \frac{h_1}{30} \Rightarrow \left\{\boxed{h_1 = 1'44 cm}\right.$

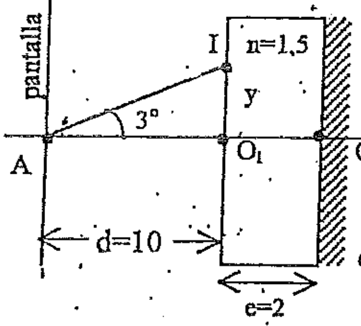
* Snell: $1 . Sen\, i = 1'45 . Sen\, r \to r = 1'89° \to tg\, r = \frac{h}{4} \Rightarrow \left\{\boxed{h = 4 . tg\, r = 0'13 cm}\right.$

Ya tenemos h_2: $y' = h_1 + h + h_2 \Rightarrow h_2 = y' - h_1 - h = 3'23 cm.$

Con lo que: $X = \frac{3'23}{tg\, i} = \frac{3'23}{1'2/25} = 67'49 cm.$

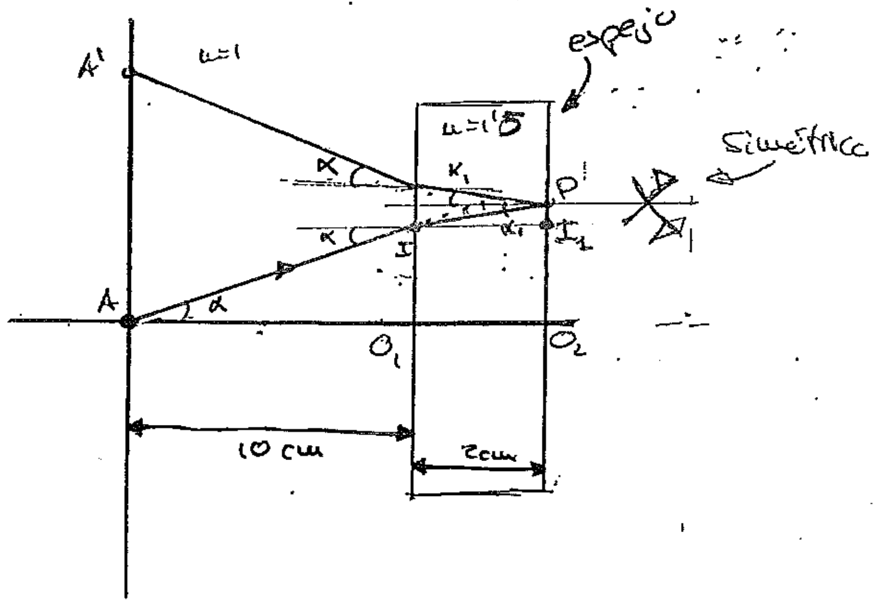
Luego: imagen real, invertida, de tamaño $y' = -4'8 cm$ formada a una distancia $S' = 30 + 4 + X = 101'46$ cm de la lente.

4. Una lámina de caras paralelas de espesor e = 2 cm. está formada por un material de índice de refracción n = 1'5 para la longitud de onda de trabajo. Una de las caras se comporta como un espejo perfecto. Desde un punto A, situado a la distancia d = 10 cm, como se indica en la figura, se envía un rayo de luz monocromática que forma un ángulo de 3° con la normal a la lámina.



a) La marcha del rayo hasta que es recogido por la pantalla.
b) La posición de A' de la imagen de A sobre la citada lámina. (pantalla)
c) Los puntos de incidencia (I) y emergencia (E), del rayo sobre la lámina.
YA NO ENTRA
d) La matriz de transformación de la citada lámina.
e) Aplique la citada matriz en la determinación del punto A'.

a)



b)

Si obtengo $|\overline{O_2P}|$ la distancia de $|\overline{AA'}|$ será $2\times|\overline{O_2P}|$ por simetría:

- $|\overline{O_1I}|$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\overline{O_1I}|}{10}$$

$$\boxed{|\overline{O_1I}| = 10\cdot\operatorname{tg}3^\circ = 0'52\text{ cm}}$$

- Snell aire-prisma

$$n_{aire}\operatorname{sen}\alpha = n_{prisma}\operatorname{sen}\alpha_1$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_{aire}}{n_{prisma}}\operatorname{sen}\alpha\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1'5}\operatorname{sen}3^\circ\right) = 2^\circ$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{|\overline{I_1P}|}{e} = \frac{|\overline{O_2P}| - |\overline{O_1I}|}{e}$$

$$|\overline{O_2P}| = e\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 + |\overline{O_1I}| = 2\,\mathrm{tg}\,2 + 0'52 = 0'59 \text{ cm}$$

Con lo que

$$\boxed{|\overline{AA'}| = 2 \cdot 0'59 = 1'18 \text{ cm}}$$

c) Punto de incidencia $I \Rightarrow |\overline{O_1I}| = 0'52$ cm

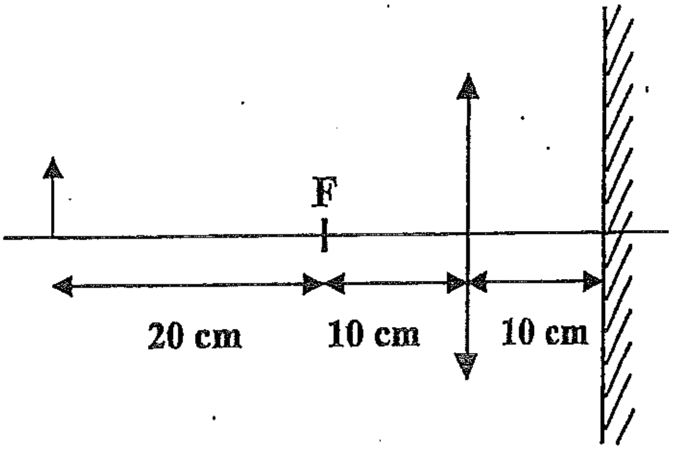
Punto de emergencia $E \Rightarrow \boxed{|\overline{O_1E}|} = |\overline{O_1I}| + 2|\overline{I_1P}| =$

$$= 0'52 + 2 \times \mathrm{tg}\,2 \times e = \boxed{0'66 \text{ cm}}$$

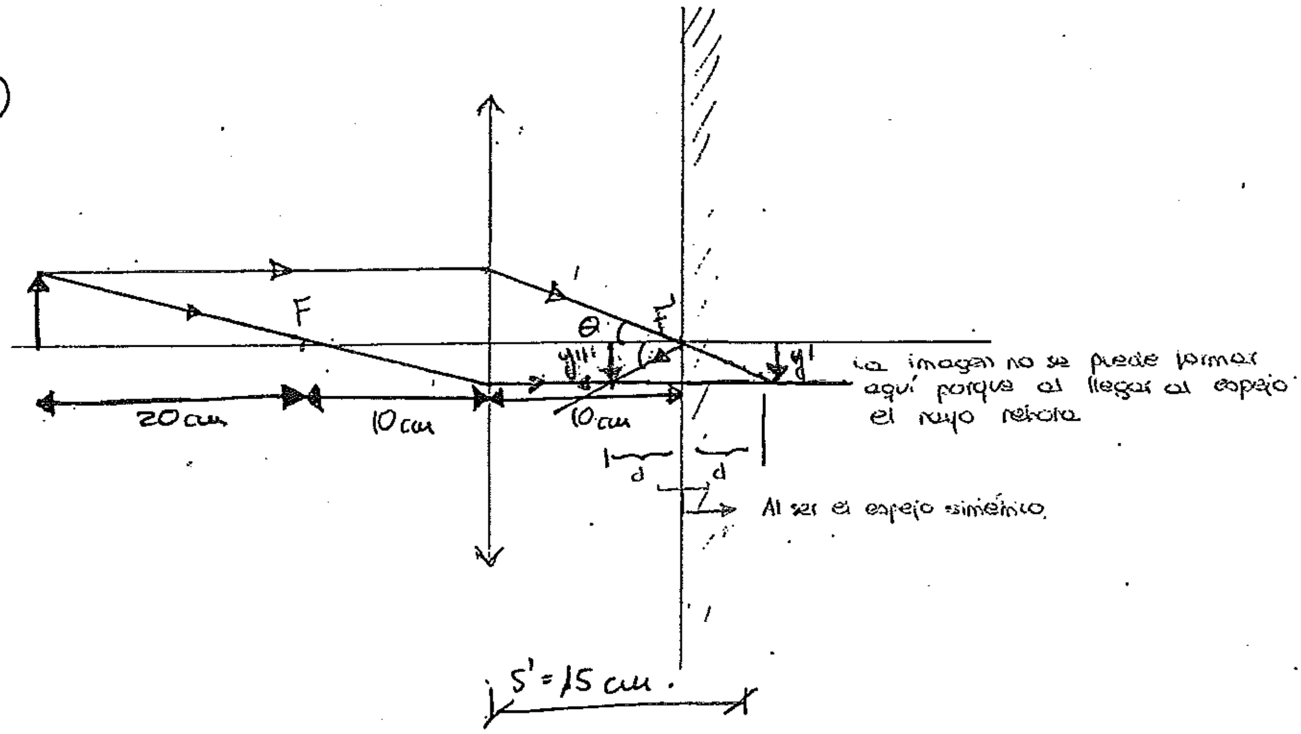
FEBRERO 1999

Ejercicio 5

5) Se coloca una lente convergente de distancia focal **f=10 cm** y a continuación un espejo plano según se observa en la figura. El objeto tiene una altura de **15 mm** y está a **30 cm** de la lente convergente. Se pide: a) Diagrama de rayos mostrando la imagen final (formada a través del la lente y de la posterior reflexión por el espejo). b) La imagen final ¿es real, virtual, derecha o invertida? c) obtener la altura de la imagen final y la distancia a la que está del espejo.

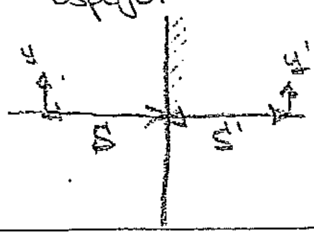


a)



b) Lente: $\frac{1}{S'} - \frac{1}{S} = \frac{1}{f'} \longrightarrow \frac{1}{S'} - \frac{1}{-30} = \frac{1}{10} \longrightarrow \boxed{S' = 15\text{ cm}}$

Espejo:



$S = -S'$

Tenemos S' de la lente ⟹ Podemos sacar s' del espejo.

$\boxed{S' = 15 - 10 = 5\text{ cm}}$ (Distancia del objeto del extremo)

$S'' = -5$ cm. (Ver detrás)

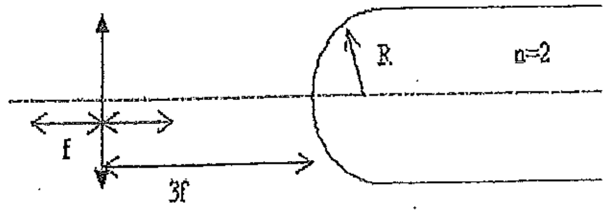
$\boxed{\text{Así que la imagen final se forma a } s' \text{ del espejo} \Rightarrow -5\text{cm}}$

c) De la lente:

$$\frac{s'}{s} = \frac{y'}{y} \longrightarrow \boxed{y'} = \frac{s'}{s}\, y = 15\,\frac{15}{-30} = \boxed{-7'5 \text{ mm}}$$

SEPTIEMBRE 2003

5) Se ha tallado una lente delgada como la de la figura, con radios R_1=25 cm y R_2=50 cm en un material de ε_r=4.



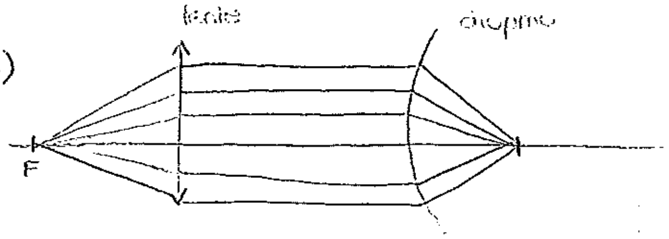
a) Calcular la potencia óptica de la lente

Se hace uso de esta lente para focalizar haces luminosos sobre un medio dieléctrico de índice de refracción n=2, como se indica en la figura. Si se coloca un foco de luz en el foco de la lente, calcular:

b) la posición de la imagen dentro del medio dieléctrico.

c) si se aleja el dieléctrico a una distancia de 6 f de la lente (manteniendo en el foco de la lente la fuente de luz) en cuanto se desplaza la posición de la imagen.

a)



$$\boxed{P=\frac{1}{f'}}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ n=\sqrt{\varepsilon_r}=2}}{=}1\left(\frac{1}{0'25}-\frac{1}{0'5}\right)=\boxed{2\text{ dioptrías}}$$

b) $$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}\xrightarrow{\substack{s=-\infty\\ R,\,n'=2,\,n=1}}\frac{2}{s'}-\frac{1}{-\infty}=\frac{2-1}{R}\;;\;\boxed{s'=2R}$$

c) Igual que antes $\boxed{s'=2R}$ porque aunque desplace la lente respecto del dioptrio los rayos siempre serán ∥ de modo que s seguirá siendo $-\infty$.

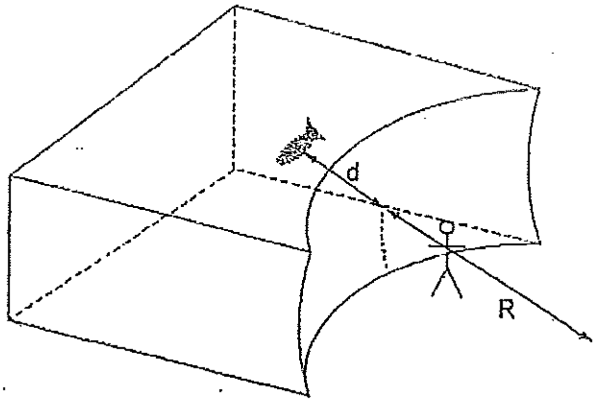
SEPTIEMBRE 2006

5) Un acuario tiene una mampara de cristal cuya superficie frontal es esférica (ver figura) y tiene un radio de curvatura de R=10m. Los peces que contiene el acuario tienen un tamaño de 30cm de longitud por 10cm de altura. Determinar, desde el punto de vista de un observador exterior:

a) posición aparente de un pez que se encuentra a ~~d=1m~~ de la mampara, $d = 10 cm$

b) diagrama del camino que siguen los rayos que forman la imagen del pez,

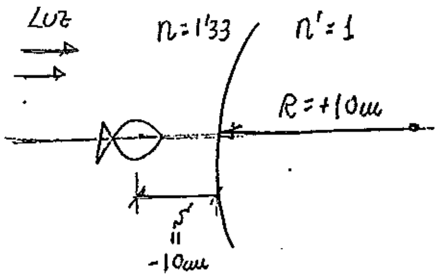
c) tamaño aparente del pez en horizontal y en vertical,



Considerar que el índice de refracción del vidrio de la mampara es igual al del agua, n=1.33.

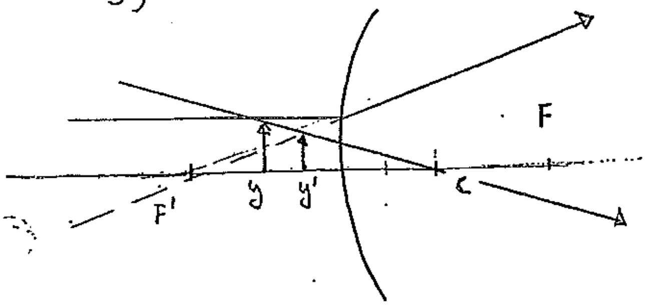
Dioptrio esférico: $\boxed{\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R}}$

a)



$$\frac{1}{s'} - \frac{1'33}{-10} = \frac{1-1'33}{10.10^3} \Rightarrow \boxed{s' = -7'5cm}$$

b)



Sólo indicamos dónde están los focos:

$$f = -R\frac{n}{n'-n} \quad \vdots \quad f' = R\frac{n'}{n'-n}$$

$$f = +40m \quad \vdots \quad f' = -30m$$

$$\underbrace{\overset{\Downarrow}{\text{a la dcha.}} \qquad \overset{\Downarrow}{\text{a la izq}}}$$

¡Fíjate que no son simétricos!

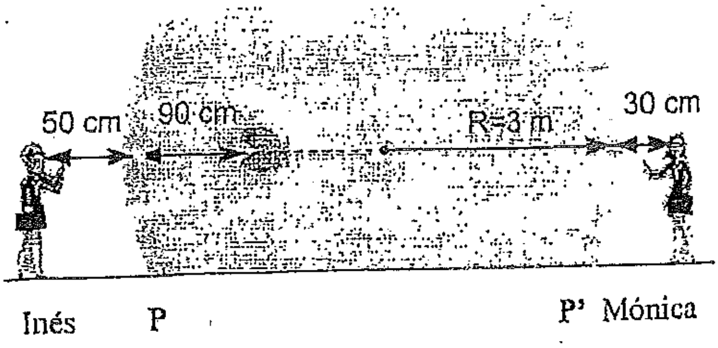
c)

Aumento lateral: $M_L = \frac{n s'}{n' s} = \frac{1'33 . (-) 7'5}{1 . (-) 10} = 0'9975.$

$y' = M_L \cdot y \Rightarrow$
- en horizontal $\boxed{y'_H} = M_L \cdot y_H = 0'9975 . 30 = \underline{29'925 \text{ cm}}$ de largo
- en vertical $\boxed{y'_V} = M_L \, y_V = 0'9975 . 10 = \underline{9'975 \text{ cm}}$ de alto

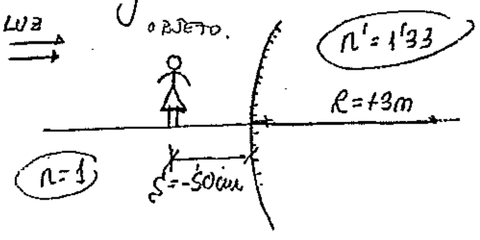
JUNIO 2008

5- Un estanque esférico ($R = 3$ m) con paredes de vidrio está lleno de agua ($n = 1.33$) y contiene peces tropicales. Inés y Mónica, dos niñas de la misma estatura, observan los peces. Las niñas se sitúan en dos extremos opuestos del estanque con la vista en la dirección de un diámetro de la esfera. Inés se coloca a 50 cm de la esfera y Mónica a 30 cm. En un determinado instante una piraña se encuentra en la línea que une las visuales de Inés y de Mónica y a 90 cm de la pared esférica más próxima a Inés. Calculad: a) a qué distancia de la pared **P** ve la piraña la imagen de Inés, justificando si es real o virtual y dibujad la marcha de rayos; b) a qué distancia de la pared **P'** ve Mónica la imagen de Inés, justificando si es real o virtual y dibujad la marcha de rayos. NOTA: despreciad el espesor de vidrio de las paredes.



Dioptrio esférico: $\boxed{\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R}}$

a) Imagen de Inés:



$$\frac{1'33}{s'} - \frac{1}{-50} = \frac{1'33-1}{3.10^2} \Rightarrow \boxed{s'=-70'37 \text{ cm}}$$

(a la izquierda de la pared P)

Distancias focales: $f' = R\frac{n'}{n'-n} = 12'1 m$ (a la dcha).

$f = -R\frac{n}{n'-n} = -9'1 m$ (a la izq)

Marcha de los rayos

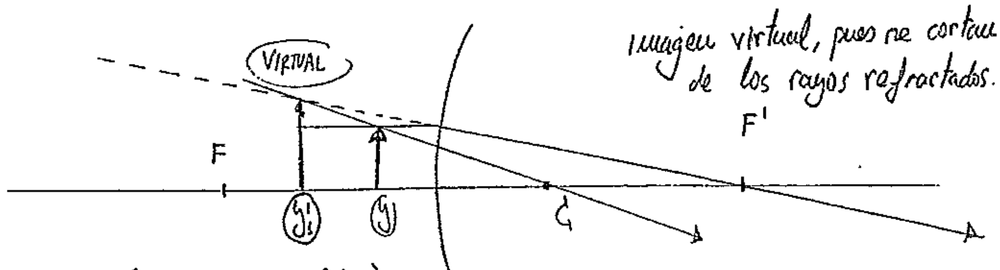
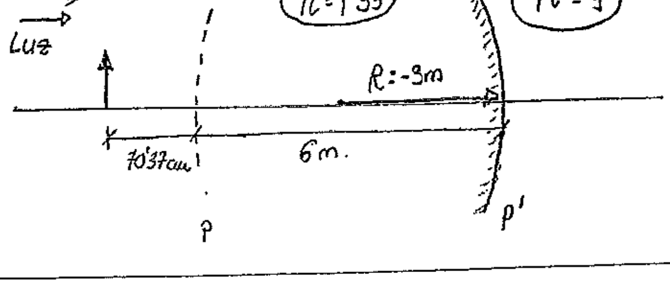


imagen virtual, pues se cortan las prolongaciones de los rayos refractados.

b) Imagen de Inés (vista por mónica)

obtenemos la imagen de la imagen anterior:



$$\frac{1}{s'} - \frac{1'33}{(-)(6.10^2+70'37)} = \frac{1-1'33}{-3.10^2}$$

$s' = -1131'25$ cm $\Rightarrow \boxed{s' = -11'3 \text{ m}}$

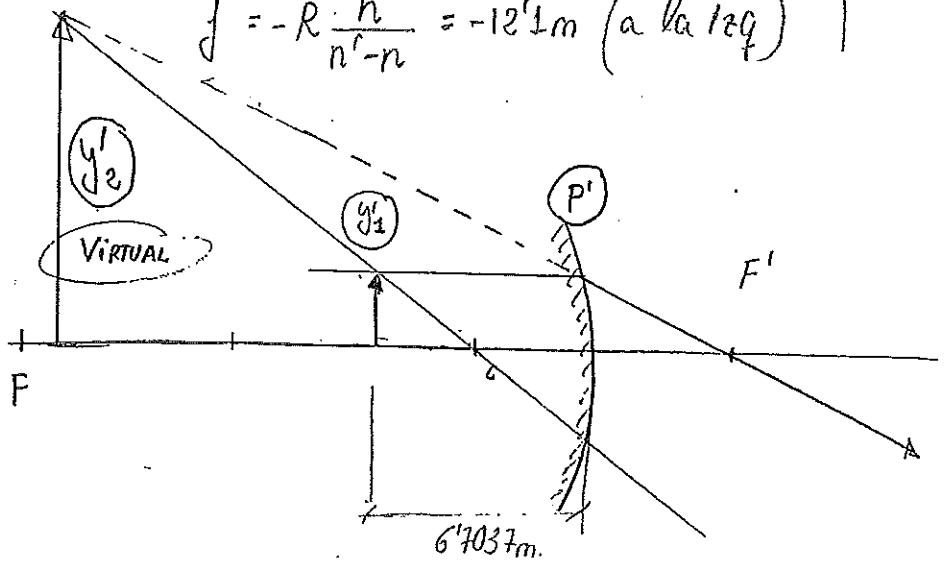
(a la izq de P)

Marcha rayos: Obtenemos distancias focales de P'.

$$f' = R\frac{n'}{n'-n} = 9'1m \text{ (a la dcha.)}$$

$$f = -R\frac{n}{n'-n} = -12'1m \text{ (a la izq)}$$

Fijate que no son simétricos!!



TEMA 5 : ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

5.1 Definiciones previas

- Permitividad del vacío: $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \quad (F/m)$

- Permeabilidad del vacío: $\mu_0 = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12{,}56 \cdot 10^{-7} \quad (A/m)$

- Permitividad de un medio: $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (F/m)$ $\varepsilon_r \geq 1$
  donde ε_r (adim.) es la permitividad relativa del medio respecto al vacío.

- Permeabilidad de un medio: $\mu = \mu_r \mu_0 \quad (H/m)$
  donde μ_r es la permeabilidad relativa del medio respecto al vacío (usualmente $\mu_r = 1$).

- Velocidad de la luz en el vacío: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \ (m/s)$

- Velocidad de la luz en otro medio distinto al vacío $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\, \mu}} \ (m/s)$

- Impedancia intrínseca del vacío: $\eta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \quad (\Omega)$

- Impedancia intrínseca de otro medio: $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \ (\Omega)$

- Indice de refracción entre dos medios: $n = \dfrac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$
  Usualmente $\mu_r = 1$ por lo que queda $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

5.2 Campo electromagnético

El campo electromagnético es un conjunto de cuatro campos:

$\vec{E} \equiv$ Intensidad de campo eléctrico o campo eléctrico. $(V/m)(N/C)$

$\vec{D} \equiv$ Desplazamiento eléctrico. (C/m^2)

$\vec{H} \equiv$ Intensidad de campo magnético. (A/m)

$\vec{B} \equiv$ Inducción magnética o densidad de flujo magnético. (T) (Wb/m^2)

Relaciones constituivas

Los cuatro campos anteriores están relacionados de la siguiente forma:

Estamos suponiendo medios lineales, homogéneos e isótropos

- Relación entre la inducción magnética y el campo magnético: $\vec{B} = \mu\vec{H}$
- Relación entre el desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

5.3 Ecuaciones de Maxwell

Ecuaciones en forma diferencial

$$\nabla\times\vec{H} = \overset{\text{densidad de corriente}}{\vec{J}} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla\vec{D} = \rho \quad \text{densidad volumétrica de carga}$$

$$\nabla\vec{B} = 0$$

Ecuaciones en forma integral

$$\oint_C \vec{H}\,d\vec{l} = I + \frac{\partial}{\partial t}\oiint_S \vec{D}\,d\vec{S} \quad \text{(Ley de Ampere)}$$

$$\oint_C \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad \text{(Ley de Faraday)}$$

$$\oiint_S \vec{D}\,d\vec{S} = Q_T \quad \text{(Ley de Gauss)}$$

$$\oiint_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0$$

Las ondas electromagnéticas surgen al resolver las ecuaciones de Maxwell. Una onda electromágnetica esta formada por una onda $\vec{E}$ y otra onda $\vec{H}$ perpendiculares entre sí.

También se denominan ondas plano polarizadas

5.4 Ondas electromagnéticas linealmente polarizadas

En el caso de las ondas linealmente polarizadas los campo $\vec{E}$ y $\vec{H}$ tiene dirección constante (su módulo varía pero no su dirección). La ecuación de las ondas del campo electrico y magnético son:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt) \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt) \end{cases}$$

donde se cumple que: $\underset{\text{porque son } \perp}{\vec{E} \cdot \vec{H} = 0}$

- $\vec{k}$ = vector de onda (que tiene la misma dirección y sentido que el vector de Poynting)
  nos dice en que dirección se propaga la energía de la onda.
  El módulo del vector de onda $|\vec{k}|$ es el número de onda.
- $\vec{r} = (x, y, z)$ vector posición
- Relación entre las amplitudes del campo eléctrico y el campo magnético en el vacío:

$$|\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0| \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_0}|\vec{E}_0| = \sqrt{\mu_0}|\vec{H}_0|$$

- Relación entre las amplitudes del campo eléctrico y el campo magnético en otro medio:

$$|\vec{E}_0| = v|\vec{B}_0| \Rightarrow \sqrt{\varepsilon}|\vec{E}_0| = \sqrt{\mu}|\vec{H}_0|$$

Vector de Poynting

El vector de Poynting marca la dirección de propagación de la energía de la onda:

El vector de Poynting tiene la misma dirección y sentido que el vector de onda

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (W/m^2)}$$

Se cumple que los vectores $\vec{E}, \vec{H}$ y $\vec{S}$ son perpendiculares entre sí dos a dos.

Se denomina plano de polarización al plano que contiene a los vectores $\vec{E}$, $\vec{S}$ y $\vec{k}$.

Intensidad de la onda electromagnética

También se le denomina flujo de energía por m^2

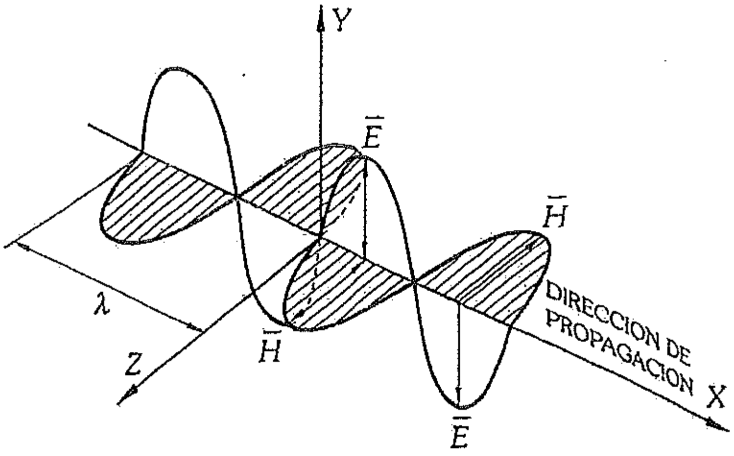
La intensidad de una onda electromagnética se define como el valor medio del módulo del vector de Poynting:

$$I = \langle|\vec{S}|\rangle \quad (W/m^2)$$

En la práctica para una onda plano polarizada se cumple que:

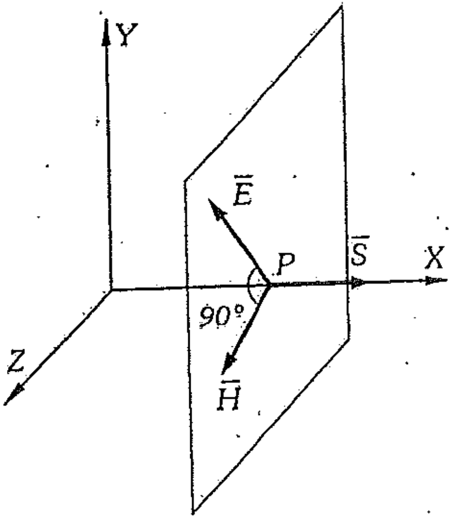
$$I = \frac{1}{2}|\vec{E}_0||\vec{H}_0| \quad (W/m^2)$$

Representación gráfica de una onda electromagnética linealmente polarizada



Onda electromagnética plana propagándose en un medio homogéneo e isótropo, en la dirección del eje OX, en un instante determinado.

Representación esquemática de una onda electromagnética linealmente polarizada



En un determinado instante:

$$E_x = 0 \qquad H_x = 0$$

$$\vec{E}\cdot\vec{H} = 0 \qquad \vec{S} = \vec{E} \text{ x } \vec{H}$$

$$\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

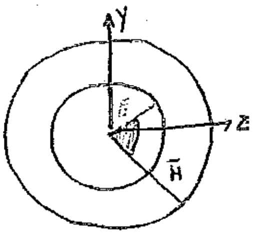
$$\frac{E}{B} = c$$

El campo eléctrico y el magnético son perpendiculares, el vector de Poynting es a su vez perpendicular a ambos.

5.5 Ondas electromagnéticas circularmente polarizadas

En el caso de las ondas circularmente polarizadas los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ tienen modulo constante (su dirección varía pero no su módulo). El campo eléctrico y magnético vienen dados por la siguiente expresión:

Esto no es más que la parametrización de una circunferencia



$$\begin{cases} \vec{E} = E_0\vec{u}_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt) + E_0\vec{u}_2 \text{sen}(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt) \\ \vec{H} = -H_0\vec{u}_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt) + H_0\vec{u}_1 \text{sen}(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt) \end{cases}$$

donde $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son vectores unitarios genéricos y se debe cumplir que $\vec{E}\cdot\vec{H} = 0$.

Por lo demás, tanto la defición del vector $\vec{k}$ y $\vec{r}$ como la relación entre las amplitudes de los campos, sigue siendo igual que la ya definida en la página T5-3 para ondas linealmente polarizadas.

Para ilustrar mejor las fórmulas anteriores vamos a basarnos en un ejemplo concreto: supongamos que la onda electromagnética circularmente polarizada se propaga en la dirección del eje x positivo. En este caso una posible expresión para los campos eléctrico y magnético (no la única) es:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0\vec{u}_z \cos(kx - wt) + E_0\vec{u}_y \text{sen}(kx - wt) \\ \vec{H} = -H_0\vec{u}_y \cos(kx - wt) + H_0\vec{u}_z \text{sen}(kx - wt) \end{cases}$$

de forma que se cumple: $\vec{E}\cdot\vec{H} = 0$.

Vector de Poynting

El vector de Poynting marca la dirección de propagación de la energía de la onda:

Esta definición es exactamente igual que para ondas linealmente polarizadas

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (W/m^2)$$

Se cumple que los vectores $\vec{E}, \vec{H}$ y $\vec{S}$ son perpendiculares entre sí dos a dos.

Intensidad de la onda electromágnética circularmente polarizada

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle \quad \Rightarrow \quad I = |\vec{E}_0||\vec{H}_0| \quad (W/m^2)$$

5.6 Energía de las ondas electromagnéticas

Densidad de energía eléctrica

$$W_E = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon|\vec{E}|^2 \quad (J/m^3)$$

Densidad de energía magnética

$$W_E = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}\mu|\vec{H}|^2 \quad (J/m^3)$$

Relación entre las densidades de energía eléctrica y magnética

$$\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

Densidad de energía de la onda electromagnética

$$W = W_E + W_M = 2W_E = 2W_M = \vec{D}\cdot\vec{E} = \vec{B}\cdot\vec{H} \quad (J/m^3)$$

Relación entre la intensidad de la onda y la densidad de energía media

densidad de energía media de la onda: $W = \frac{I}{v} \quad (J/m^3)$

donde v es la velocidad de propagación de la onda

$S = 2\cdot I$

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Ecuaciones de Maxwell

$\text{div } \bar{E} = \boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ → En el vacío: $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$

$\text{div } \bar{B} = \boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0}$

$\text{rot } \bar{E} = \boxed{\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$ En el vacío: $\bar{\nabla}\cdot\bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{dt}$

$\text{rot } \bar{B} = \boxed{\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu\left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{dt}\right)}$

↳ $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$ → $\bar{\nabla}\cdot\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{dt}$

*NOTA: Teorema de Stokes

$$\int(\bar{\nabla}\times\bar{E})d\bar{S} = \oint \bar{E}\,d\bar{\ell} = \int -\frac{d\bar{B}}{dt}d\bar{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

*NOTA 2:

$\bar{J} \equiv$ Densidad de corriente (A/m²)

$\bar{D} \equiv$ Vector desplazamiento $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$

Fórmulas derivadas de Maxwell/Stokes

$\boxed{\oint \bar{E}\,d\bar{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon}}$ (Gauss) $\boxed{\oint \bar{E}\,d\bar{\ell} = -\frac{\partial \phi}{dt}}$

$\boxed{\oint \bar{B}\,d\bar{\ell} = \mu \cdot I_{enillado}}$

Energías

$\boxed{e_1 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$ (campo eléctrico)

$\boxed{e_2 = \frac{1}{2\mu} B^2}$ (campo magnético)

$\boxed{e_1 = e_2}$

Sumando: $\boxed{e = E^2\varepsilon}$

Valor medio $\equiv \boxed{\bar{e} = \frac{1}{T}\int_0^T e\,dt = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2}$

Intensidad media $\equiv \boxed{\bar{I} = \bar{e}\cdot v = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2}$

Vector de Poynting $\equiv \boxed{\bar{S} = \bar{E}\times\bar{H} = \bar{E}\times\frac{\bar{B}}{\mu}}$

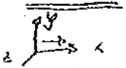
↳ Sentido y dirección de propagación de la o.e.m

↳ $\boxed{|\bar{S}| = \frac{EB}{\mu} = \varepsilon E^2 v} \overset{PI}{=} \varepsilon E_0^2 v \cos^2(\omega t - kx)$

↳ Valor máximo $= 2\bar{I}$

↳ Valor medio $= \bar{I}$

Propagación de ondas electromagnéticas en vacío



- Cumple las ecuaciones de Maxwell.

$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 \Rightarrow$ El campo no depende de la variable en la dirección en que se propaga.

- Manteniendo la propagación en x, $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$; De donde obtenemos:

ECUACIÓN ONDA $\boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}}$

$c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$

$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon}}$

① $\bar{E}$ y $\bar{B}$ son ⊥ a la direcc. de propagación

② $\bar{E}$ y $\bar{B}$ cumplen la ecuación de onda

③ $\bar{E}$ y $\bar{B}$ son ⊥

Aplicación a onda armónica

$\boxed{\bar{E} = E_0\cos(kx - \omega t)\bar{u}_z}$

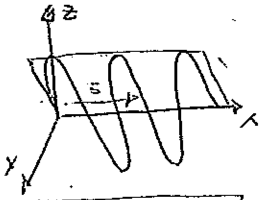
$|\bar{B}| = \frac{|E|}{v}$

$\boxed{\bar{B} = -\frac{E_0}{c}\cos(kx - \omega t)\bar{u}_y}$

Polarización de O.E.M

$\bar{E}_1 = E_1\cos(kx - \omega t)\bar{j}$ y $\bar{E}_2 = E_2\cos(kx - \omega t + \alpha)\bar{k}$

$\boxed{\alpha = 0}$ $\boxed{\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \text{sen}(kx - \omega t)(E_1\bar{j} + E_2\bar{k})}$



Cuando la dirección es cte se dice que está LINEALMENTE POLARIZADA

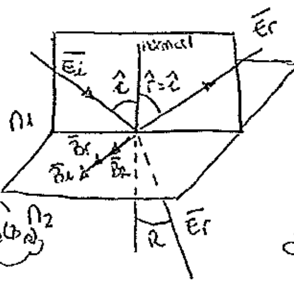
$\boxed{\alpha = 90^\circ \text{ y } E_1 = E_2}$

$\boxed{\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = E_1[\text{sen}(kx - \omega t)\vec{j} + \cos(kx - \omega t)\bar{k}]}$

$|\bar{E}| = E_1$, la dirección gira a lo largo del tiempo. ($\bar{j}$, $\bar{k}$ o int). La onda está CIRCULARMENTE POLARIZADA. En el resto de los casos está ELÍPTICAMENTE POLARIZADA con todo variable.

Reflexión y refracción de o.em. l.p.

CASO I

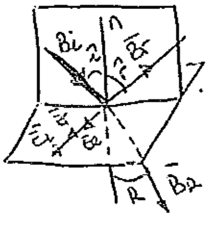


- Se cumple
  - $\bar{B}_i = \bar{B}_r + \bar{B}_R$
  - $E_i\cos i = E_R\cos R + E_r\cos r$
  - $(E_i - E_r)\cos i = E_R\cos R$
  - $E_i\,\text{sen}\,i = E_R\,\text{sen}\,R \pm E_r\,\text{sen}\,r$

de $n_1\,\text{sen}\,i = n_2\,\text{sen}\,R$

$\boxed{n_1(E_i + E_r) = n_2 E_R}$

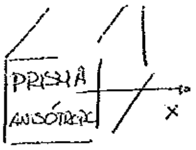
CASO II



- $E_i = E_r + E_R$
- $n_1(B_i + B_r) = n_2(B_R)$

Lámina cuarto de onda

- Dispositivo que a partir de una onda linealmente polarizada nos devuelve una circularmente polarizada. Consiste en un prisma anisótropo, de modo que al entrar el campo una componente no cambia de velocidad y otra sí



n_o: dirección y

n_e: dirección z

Dado $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)(\vec{j} + \vec{k})$

donde $k' = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n_e}{c} \neq k$

$$\begin{cases} E_y = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)_j \\ E_z = E_0 \operatorname{sen}(k'x - \omega t) \end{cases}$$

- Se produce un desfase a la salida (α)

$$\boxed{\alpha = (k' - k)\, d = \frac{\omega d}{c}(n_e - n_o) = \frac{2\pi d}{\lambda}(n_e - n_o)}$$

si $\boxed{\alpha = \pi/2}$ entonces se haya circularmente polarizada. $\left(\frac{2\pi d}{\lambda}(n_e - n_o) = \pi/2\right)$

$$\boxed{(n_e - n_o)\, d = \frac{\lambda}{4}}$$

si $\boxed{\alpha = \pi} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$ LÁMINA MITAD ONDA

Presión radiación

$$P_\gamma = \frac{I}{c}$$

TEMA 5 . Ondas electromagnéticas

5.1. Definiciones previas.

- permitividad del vacío $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8'85 \cdot 10^{-12}$ F/m
- permeabilidad del vacío $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ A/m
- velocidad luz en el vacío $\Rightarrow 3 \cdot 10^8$ m/s $= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$
- velocidad luz en un medio $\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$
- permitividad de un medio $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$
- permeabilidad de un medio $\mu = \mu_r \mu_0$
- Índice de refracción entre dos medios $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$
  $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

5.2. Campo electromagnético

$\bar{E}$: intensidad de campo eléctrico (N/C)
$\bar{D}$: desplazamiento eléctrico (C/m²)
$\bar{H}$: intensidad de campo magnético (A/m)
$\bar{B}$: inducción magnética (T)

Relaciones :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{B} = \mu \bar{H} \\ \bar{D} = \varepsilon \bar{E} \end{array}}$$

5.3. Ondas linealmente polarizadas.

Los campos $\bar{E}$ y $\bar{H}$ tienen dirección constante (su módulo sí varía) donde se cumple $\bar{E} \bar{H} = 0$ (son perpendiculares)

$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{E}_0 \cos(\bar{k}\bar{r} - wt) \\ \bar{H} = \bar{H}_0 \cos(\bar{k}\bar{r} - wt) \end{cases}$$

→ $\bar{k}$: vector de onda (tiene la misma dirección y sentido que el vector de Poynting y sentido de propagación de la energía de la onda)

→ $\bar{r} = (x, y, z)$

- relación campo eléctrico y magnético en el vacío $|\bar{E}_0| = c|\bar{B}_0|$ $\sqrt{\varepsilon_0}|\bar{E}_0| = \sqrt{\mu_0}|\bar{H}_0|$
  en otro medio $|\bar{E}_0| = V|\bar{B}_0|$ $\sqrt{\varepsilon}|\bar{E}_0| = \sqrt{\mu}|\bar{H}_0|$

vector de Poynting
El vector de Poynting marca la dirección de propagación de la energía de la onda. $\boxed{\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \ \ (W/m^2)}$ donde $\bar{E}, \bar{H}, \bar{S}$ son ⊥ dos a dos

Intensidad de la onda electromagnética
$I = \langle \bar{S} \rangle$ (W/m²) $\boxed{I = \frac{1}{2} |\bar{E}_0| |\bar{H}_0| \ \ (W/m^2)}$

5.4. Ondas electromagnéticas circularmente polarizadas.

Los campos $\bar{E}$ y $\bar{H}$ tienen módulo constante (su dirección varía)

$$\bar{E} = E_0 \bar{u}_1 \cos(\bar{k}\bar{r} - wt) + E_0 \bar{u}_2 \operatorname{sen}(\bar{k}\bar{r} - wt) \Rightarrow E \cdot H = 0$$
$$\bar{H} = H_0 \bar{u}_1 \cos(\bar{k}\bar{r} - wt) + E_0 \bar{u}_2 \operatorname{sen}(\bar{k}\bar{r} - wt)$$

vector de Poynting $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$ (W/m²) E,H,S perpendiculares dos a dos.

Intensidad onda electromagnética circularmente polarizada
$$\boxed{I = \langle \bar{S} \rangle = |\bar{E}_0| |\bar{H}_0| \ \ (W/m^2)}$$

5.5. Energía ondas electromagnéticas.

- Densidad energía eléctrica $W_E = \frac{1}{2} \bar{D}\bar{E} = \frac{1}{2} \varepsilon |E|^2$ (J/m³)
- Densidad energía magnética $W_E = \frac{1}{2} \bar{B}\bar{H} = \frac{1}{2} \mu |H|^2$ (J/m³)

$$\frac{1}{2} \bar{D}\bar{E} = \frac{1}{2} \bar{B}\bar{H}$$

- Densidad energía onda electromagnética $W = W_E + W_H = \bar{D}\bar{E} = \bar{B}\bar{H}$
- Relación intensidad - densidad de energía $W = \frac{I}{V}$

$$\boxed{S = 2I}$$

Ondas electromagnéticas

Relaciones previas de interés

relativa respecto al vacío

permitividad del vacío: $\varepsilon_0 = 8'85 \cdot 10^{-12}$ F/m ; de un medio $\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

permeabilidad del vacío: $\mu_0 = 12'56 \cdot 10^{-7}$ A/m ; de un medio $\Rightarrow \mu = \mu_r \mu_0$

velocidad de la luz (en el vacío) $\Rightarrow c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ m/s ; en otro medio: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$

Campo electromagnético

El campo electromagnético es un conjunto de cuatro campos:

$\vec{E}$: campo eléctrico V/m

$\vec{D}$: desplazamiento eléctrico C/m^2

$\vec{H}$: intensidad del campo magnético A/m

$\vec{B}$: Inducción magnética T ó Wb/m^2

Relaciones constitutivas

$\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\qquad$ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

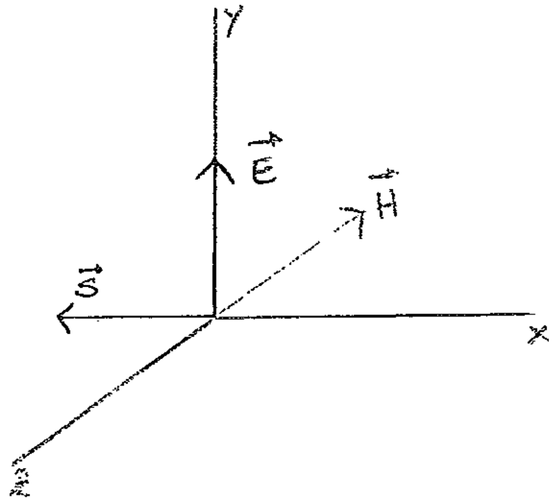
Ondas electromagnéticas linealmente polarizadas

$\vec{E}$ y $\vec{H}$ tienen dirección constante $\begin{cases} \vec{E} = \vec{E_0} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - wt) \\ \vec{H} = \vec{H_0} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - wt) \end{cases}$

$\vec{K}$: vector de onda

$|\vec{K}|$: número de onda

Relación entre amplitudes $\begin{cases} \text{en el vacío: } |\vec{E_0}| = c|\vec{B_0}| \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_0}\,|\vec{E_0}| = \sqrt{\mu_0}\,|\vec{H_0}| \\ \text{en otro medio: } |\vec{E_0}| = v|\vec{B_0}| \Rightarrow \sqrt{\varepsilon}\,|\vec{E_0}| = \sqrt{\mu}\,|\vec{H_0}| \end{cases}$



Vector de POYNTING ($\vec{S}$)

- Marca la dirección de propagación de la onda
- Misma dirección y sentido que $\vec{K}$
- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- PLANO DE POLARIZACIÓN $\subset (\vec{S}, \vec{E}, \vec{K})$

INTENSIDAD de la onda electromagnético

- Valor medio del módulo del vector de Poynting ($\vec{S}$)

$$I = \langle|\vec{S}|\rangle \Rightarrow \underbrace{I = \frac{1}{2}|\vec{E_0}||\vec{H_0}|}_{\text{sólo para ondas planopolarizadas}} \quad \text{W/m}^2$$

Ondas electromagnéticas circularmente polarizadas

Ahora los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ tienen módulo constante, pero varía su dirección.

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E_0}\cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - wt) + \vec{E_0}\,\text{sen}(\vec{K}\vec{r} - wt) \\ \vec{H} = \vec{H_0}\cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - wt) + \vec{H_0}\,\text{sen}(\vec{K}\cdot\vec{r} - wt) \end{cases}$$

y además, se debe cumplir que $\vec{E}\cdot\vec{H} = 0$.

Tanto $\vec{K}$, como $\vec{r}$, como $\vec{S}$ (vector de Poynting) como las relaciones entre amplitudes son iguales que para ondas linealmente polarizadas.

Tan sólo cambia la intensidad, aunque su definición es la misma:

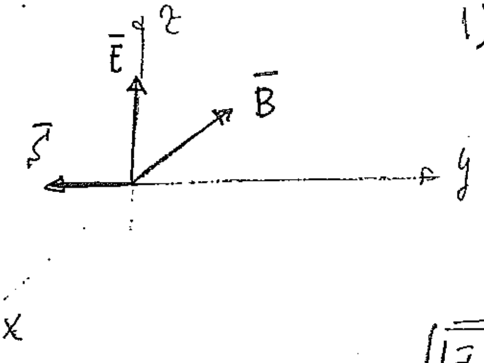
$$I = \langle|\vec{S}|\rangle \longrightarrow I = |\vec{E_0}|\,|\vec{H_0}| \quad W/m^2$$

$$\circ\ \boxed{\bar{S} = 2I}$$

4.- Una onda e.m. linealmente polarizada, de intensidad I se propaga a lo largo de la dirección negativa del eje y, por el interior de un dieléctrico de índice de refracción n. Se sabe que el plano de polarización es el yz. Obtener las expresiones de:

1) El vector de Poynting $\vec{S}$, 2) el vector campo eléctrico $\vec{E}$ y 3) el vector campo magnético $\vec{B}$. Calcular también: 4) la densidad de energía transportada por la onda

DATOS: $f = 5.2 \times 10^{14}$ Hz, $I = 7\ \mu\text{W.cm}^{-2}$, $n = 1.65$, $A = 0.44\ \text{cm}^2$, $(\varepsilon_0)^{-1} = 4\pi.9.10^9$ (S. I.) y $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ (S. I.)



1)

$$\bar{S} = S'(-\bar{u}_y).\cos^2(\bar{k}.\bar{r} - \omega t).$$

$$\cdot\ S' = \underline{\underline{2}}.I = 14.10^{-6}\ W/cm^2 = 14.10^{-2}\ W/m^2$$

$$\cdot\ \bar{k} = -\frac{2\pi f}{V}\bar{u}_y = -1'797.10^7 m^{-1}$$

$$\cdot\ \omega = 2\pi f = 10'4.17.10^{14}$$

$$\boxed{\bar{S} = -14.10^{-2}.\bar{u}_y \cos^2(-1'797.y - 10'4.10^{14}\pi t)} // (W/m^2)$$

2).

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 = \mu_0$$

$$I = 1/2\ E_0 H_0 = 1/2\ E_0 \left(\frac{E_0}{V\mu}\right) \Rightarrow E_0 = 5656\ V/m$$

$$\boxed{\bar{E} = 5'656.\bar{u}_z \cos(-1'797y - 10'4.10^{14}\pi t)} // (V/m)$$

3)

$$E_0 = V B_0 \Rightarrow B_0 = E_0/V = \frac{E_0}{c/n} = 3'11.10^{-8}(T)$$

$$\boxed{\bar{B} = -3'11.10^8.\bar{u}_x \cos(-1'797y - 10'4.10^{14}\pi t)} // (V/m)$$

4).

$$\boxed{\bar{W} = I/V = \frac{I}{c/n} = 3'85.10^{-10}\ J/m^3} //$$

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \longrightarrow V = \frac{1}{n\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

TEMA 5: ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Ejercicio 1

La función de onda del campo magnético asociado a una onda electromagnética plana es:

$$\vec{B} = 4\cdot 10^{-6}\cos\left(2\pi\cdot 10^{9}t - 25\pi z + \frac{\pi}{3}\right)\vec{u}_x - 3\cdot 10^{-6}\cos\left(2\pi\cdot 10^{9}t - 25\pi z - \frac{2\pi}{3}\right)\vec{u}_y\, T$$

1) Obtener de forma razonada el estado de polarización de la onda y su dirección de propagación.
2) Calcular el índice de refracción del medio en el que se propaga.
3) Calcular la amplitud del campo magnético $\vec{B}$.
4) Obtener la función de onda del campo eléctrico asociado a la onda.
5) Obtener el vector de Poynting y la intensidad de la onda.

1) → En una onda circularmente polarizada

- * si $\bar{u}_x$ va con coseno → $\bar{u}_y$ tiene que ir con seno
- * si $\bar{u}_x$ va con seno → $\bar{u}_y$ va con coseno
- * En ondas circularmente polarizadas → dentro de seno/coseno va el mismo "ángulo"
- * los coeficientes de seno y de coseno deben ser idénticos (en este caso no lo son)

NO ES CIRCULARMENTE POLARIZADA

Veo entonces si es plana polarizada.

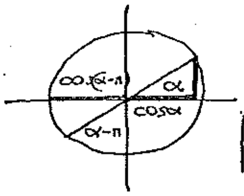
* si lo fuera su forma sería $\bar{B} = \bar{B}_0\cos(k\bar{r} - \omega t + \varphi_0)$

Vamos a intentar poner nuestro $\bar{B}$ del enunciado como en la forma genérica.

$$\bar{B} = 4\cdot 10^{-6}\cos(\alpha)\bar{u}_x - 3\cdot 10^{-6}\cos(\alpha - \pi)\bar{u}_y$$

$$\alpha = 2\pi\cdot 10^{9}t - 25\pi z + \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha - \pi = 2\pi\cdot 10^{9}t - 25\pi z + \frac{\pi}{3} - \pi = 2\pi\cdot 10^{9}t - 25\pi z - \frac{2\pi}{3}$$



$$\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$$

$$\bar{B} = 4\cdot 10^{-6}\cos\alpha\,\bar{u}_x + 3\cdot 10^{-6}\cos\alpha\,\bar{u}_y = (4\cdot 10^{-6}\bar{u}_x + 3\cdot 10^{-6}u_y)\cos\alpha$$

$$\boxed{\bar{B} = (4\bar{u}_x + 3\bar{u}_y)\cdot 10^{-6}\cos\left(2\pi\cdot 10^{-9}t - 25\pi z + \frac{\pi}{3}\right)}$$

— La dirección del vector es constante pero su módulo es que varía

Onda electromagnética plana linealmente paralizada

→ Se propaga según $\bar{S}$

$\bar{S}$ paralelo a $\bar{K}$

Para verlo bien lo pongo como en teoría $\bar{B} = \bar{B}_0\cos(Kr - \omega t + \varphi)$

$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{K}$

$\bar{K} = (x, y, z)$

Nosotros tenemos

$$\bar{B} = (4\bar{u}_x + 3\bar{u}_y)10^{-6}\cos\left(2\pi\cdot 10^{-9}t - 25\pi z + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= (4\bar{u}_x + 3\bar{u}_y)10^{-6}\cos -\left(-2\pi\cdot 10^{9}t + 25\pi z - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

$$\bar{B} = (4\bar{u}_x + 3\bar{u}_y)10^{-6}\cos\left(-2\pi\cdot 10^{9}t + 25\pi z - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\bar{B} = (4\bar{u}_x + 3\bar{u}_y)10^{-6}\cos(25\pi z - 2\pi\cdot 10^{9}t - \pi/3)$$

$\bar{K} = (0, 0, 25\pi) = 25\pi\,\bar{u}_z$

Sentido de propagación $\bar{u}_z$

↳ $\bar{K}\cdot\bar{r} = 25\pi z$

$(K_1, K_2, K_3)(x, y, z) = K_1x + K_2y + K_3z = 25\pi z$

2) $n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\lambda \cdot f}$

¿λ, f? $\quad K = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\quad \lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{25\pi} = \frac{2}{25}$ m

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi \cdot 10^9}{2\pi} = 10^9$$

$$\boxed{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{\frac{2}{25} \cdot 10^9} = \boxed{\frac{15}{4}}$$

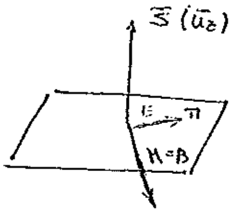
3) Amplitud campo magnético

$$\boxed{|B_0|} = \sqrt{3^2+4^2} \cdot 10^{-6} = \boxed{5 \cdot 10^{-6}\ T}$$

4) $\bar{E} \perp \bar{H}$, $\bar{E} \perp \bar{S}$ $\Big\}$

$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$

$S // \bar{K} = 25\pi \bar{u}_z$



$S \perp \pi$

$E \in \pi$ $\Big\}$ $\bar{E} \perp \bar{H}$

$H \in \pi$

$\bar{H} = \bar{B} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 4\bar{u}_x + 3\bar{u}_y \\ 3\bar{u}_x - 4\bar{u}_y \end{matrix}}$

$\bar{B} = 4\bar{u}_x + 3\bar{u}_y$

y además $\bar{E} \perp \bar{S} \rightarrow \bar{E} \perp \bar{u}_z$ $\Big\}$ $u_{nit}\bar{E} = (3\bar{u}_x - 4\bar{u}_y)\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$$\boxed{\bar{u}_E = \frac{1}{5}(3\bar{u}_x - 4\bar{u}_y)}$$

Hemos sacado la dirección. Ahora para sacar $\bar{E}$, necesitamos $\bar{E}_0$

$$\bar{E}_0 = |E_0|\,(3\bar{u}_x - 4\bar{u}_y) \cdot \frac{1}{5}$$

De la teoría : $\quad |\bar{E}_0| = v\,|B_0| = \frac{2}{25} \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6}$

$$|\bar{E}_0| = \frac{10}{25} \cdot 10^3 \ \ (V/m)$$

Si sustituimos queda :

$$\bar{E} = \frac{2}{25} \cdot 10^3\,(3\bar{u}_x - 4\bar{u}_y)\cos\left(25\pi z - 2\pi \cdot 10^9 t - \frac{\pi}{3}\right)\ (V/m)$$

5) $\bar{S} = E \times \bar{H}$

$\bar{S} = |\bar{S}|\,\bar{u}_z$

$$|\bar{S}| = |\bar{E} \times \bar{H}| = |\bar{E}|\,|\bar{H}| \operatorname{sen} 90 = \underbrace{|E_0|\cos(\ldots)}_{|E|} \cdot \underbrace{|H_0|}_{B_0/\mu_0}\cos(\ldots)$$

$$\boxed{\bar{S} = \frac{5000}{\pi}\cos^2(25\pi z - 2\pi \cdot 10^9 t - \pi/3)\ (\bar{u}_z)}$$

$$\boxed{I} = \langle|S|\rangle = \frac{1}{2}|E_0|\,|H_0| = \boxed{\frac{2500}{\pi}}$$

Ejercicio 2

El vector de Poynting asociado a una onda electromagnética linealmente polarizado está dado por la expresión $\vec{S} = \frac{36}{\pi}\cos^2\left(25\pi\cdot 10^8 t - 10\pi y\right)\vec{u}_y \ Wm^{-2}$, donde t se expresa en s e y en m:

1) Obtener de forma razonada la intensidad de la onda y su velocidad de propagación.
2) Calcular las amplitudes de los campos eléctrico y magnético asociados a la onda.
3) Obtener la función de onda del campo eléctrico, sabiendo que el campo magnético forma un ángulo de 60° con el eje Z.
4) Si la onda incide, con un ángulo de 60°, sobre una lámina de permitividad relativa 2,25, ¿se producirá reflexión total? Justificar la respuesta.

$$\bar{S} = \frac{36}{\pi}\cdot \cos^2\left(25\pi\cdot 10^8 t - 10\pi y\right)\bar{u}_Y \quad (W/m^2)$$

a) I de forma razonada

$I = <|\bar{S}|> -$

$$\bar{S} = \frac{36}{\pi}\cdot \cos^2(-10\pi y + 25\pi\cdot 10^8 t)\,\bar{u}_Y = \frac{36}{\pi}\cdot \cos^2((-)\cdot(10\pi y - 25\pi\cdot 10^8 t))\,\bar{u}_Y =$$

$$= \frac{36}{\pi}\cdot \cos^2(10\pi y - 25\pi\cdot 10^8 t)\,\bar{u}_Y$$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

$$I = <|\bar{S}|> = \frac{1}{T}\int_0^T |\bar{S}|\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{36}{\pi}\cdot\cos^2(10\pi y - 25\pi 10^8 t)\cdot dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{36}{\pi}\int_0^T \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(20\pi y - 50\pi 10$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{36}{\pi}\left[\left.\frac{t}{2}\right]_0^T + \frac{1}{2}\cdot \operatorname{Sen}(20\pi y - 50\pi\cdot 10^8 t)\left.\frac{1}{50\pi\cdot 10^8}\right]_0^T\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{36}{\pi}\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{2\cdot 50\pi\cdot 10^8}\cdot\left(\operatorname{Sen}(20\pi y - 50\pi\cdot 10^8\,T) - \operatorname{Sen}(20\pi y)\right)\right) =$$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{25\pi\cdot 10^8} = \frac{2}{25\cdot 10}$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{36}{\pi}\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{\pi\cdot 10^{10}}\underbrace{\left[\operatorname{Sen}(20\pi y - \underbrace{50\pi\cdot \cancel{10^8}\frac{2}{25\cdot \cancel{10^8}}}_{4\pi} - \operatorname{Sen}(20\pi y)\right]}_{0}\right. =$$

$$= \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\frac{36}{\pi}\cdot\frac{\cancel{T}}{2} = \frac{18}{\pi}\ (W/m^2)$$

$\boxed{I = \frac{18}{\pi}\ (W/m^2)} \Rightarrow$ linealmente polarizada: $I = \frac{1}{2}|\bar{E}_0||\bar{H}_0|$

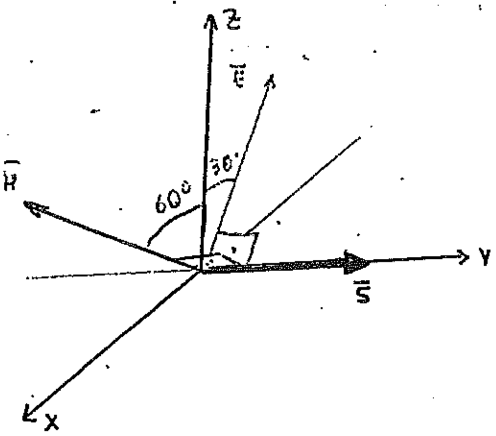
$$\boxed{V = \lambda\cdot f = \frac{2\pi}{|\bar{K}|}\cdot\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{|\bar{K}|} = \frac{25\cancel{\pi}\cdot 10^8}{10\cancel{\pi}} = \boxed{2{,}5\cdot 10^8\ m/s}}$$

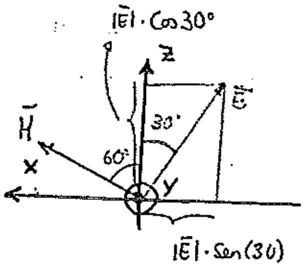
b) Amplitudes: $|\bar{E}_0| \cdot |\bar{H}_0|$

$$I = \frac{1}{2}|\bar{E}_0||\bar{H}_0| = \frac{1}{2}|\bar{E}_0|\frac{|\bar{E}_0|}{v\cdot\mu_0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|\bar{E}_0|^2}{v\mu_0} \Rightarrow \boxed{|\bar{E}_0| = \sqrt{2v\mu_0 I}} = \boxed{60\ V/m}$$

$$\boxed{|\bar{H}_0| = \frac{|\bar{E}_0|}{v\mu_0}} = \boxed{0{,}191\ A/m}$$

c) $\bar{E}$ sabiendo $\bar{H}$ forma 60° con z





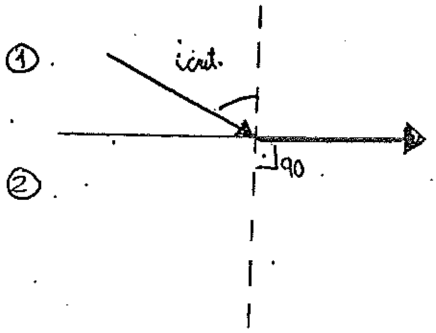
$$\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot \cos(10\pi y - 25\pi\cdot 10^8 t)$$

$$\bar{E}_0 = E_0\left(-\text{Sen}(30°)\,\bar{u}_x + \cos 30\,\bar{u}_z\right) =$$

$$= 60\left(-1/2\,\bar{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{u}_z\right) = 30(-\bar{u}_x + \sqrt{3}$$

$$\boxed{\bar{E} = 30(-\bar{u}_x + \sqrt{3}\,\bar{u}_z)\cdot\cos(10\pi y - 25\pi\cdot 10^8 t)\ (V/m)}$$

d)



$$n_1 = \frac{c}{v_1} = \frac{3\cdot 10^8}{2{,}5\cdot 10^8} = 1{,}2$$

$$n_2 = 2{,}25$$

$$n_1\,\text{Sen}(i_{crit}) = n_2\cdot\text{Sen}(90)$$

$$i_{crit.} = \text{arc Sen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \underline{\underline{ERROR}}$$

Imposible reflexión total por ser $n_2 > n_1$

SEPTIEMBRE 2002

$\frac{5 \text{ milivoltios}}{\text{metros}} = 5\cdot10^{-3}\,V = E_0$

$\uparrow$

Un haz de ondas electromagnéticas planas de $3\cdot 10^{14}$ Hz, 5m V de amplitud de campo eléctrico, linealmente polarizadas en el eje de las Y y que se propaga en la dirección del eje de las X, incide perpendicularmente sobre la interfase de dos medios dieléctricos de $n_1 = 2$ y $n_2 = 1.5$, respectivamente.

a) Calcular el valor de λ en cada uno de los medios.
b) Escribir las expresiones de los vectores *E*, *B* y *S* de la onda incidente.
c) Sabiendo que en la incidencia se refleja un 25 % de la señal, determinar la expresión del campo eléctrico transmitido al otro medio.
d) Variando el ángulo de incidencia, ¿existe la posibilidad de que se refleje toda la señal incidente?. Justificar la respuesta y en caso afirmativo calcular el ángulo crítico.

$f = 3\cdot10^{14}$ Hz $\quad n_1 = 2$

$|E_0| = 5\cdot10^{-3}$ V $\quad n_2 = 1'5$

a) ¿ λ_1, λ_2 ?

$$V = \lambda\cdot f \quad ; \quad \lambda = \frac{V}{f} = \frac{c/n}{f}$$

$$\lambda_1 = \frac{c/n_1}{f} = \frac{3\cdot10^8}{2\cdot3\cdot10^{14}} \quad ; \qquad \boxed{\lambda_1 = 0'5\cdot10^{-6}\ m}$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{n_2 f} = \frac{3\cdot10^8}{1'5\cdot3\cdot10^{14}} \quad ; \qquad \boxed{\lambda_2 = 0'667\cdot10^{-6}\ m}$$

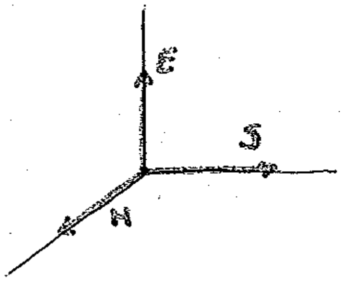
Medio 1

b) • $\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot \cos(K\bar{r} - \omega t)$

$\rightarrow \bar{K} = |\bar{K}|\bar{u}_x$

$$|\bar{K}| = \frac{2\pi}{\lambda_1} = 4\pi\cdot10^{+6}\ m^{-1}$$

$$\bar{K} = 4\pi\cdot10^6\,\bar{u}_x$$



$\rightarrow \omega = 2\pi f = 6\pi\cdot10^{14}$ rad/s

$\rightarrow \bar{K}\cdot\bar{r} = (4\pi\cdot10^6, 0, 0)(x,y,z) = 4\pi\cdot10^6 x$

$\rightarrow \bar{E}_0 = |E_0|\bar{u}_y = \underset{\bar{u}_y}{5\cdot10^{-3}}$ (dato)

$\Rightarrow \bar{E} = \bar{E}_0 \cos(kr - \omega t) \quad ; \quad \boxed{\bar{E} = 5\cdot10^{-3}\cos(4\pi10^6x - 6\pi10^{14}t)\,\bar{u}_y}\ \left(\frac{V}{m}\right)$

• $\bar{H} = \bar{H}_0 \cos(4\pi\cdot10^6x - 6\pi\cdot10^{14}t)$

$$\rightarrow |\bar{E}_0| = V|\bar{B}_0| = V\mu|\bar{H}_0| \underset{\substack{\uparrow \\ \mu_r = 1 \\ \mu = \mu_0}}{=} \frac{c}{n_1}\mu|\bar{H}_0| = \frac{c}{n_1}\mu_0|\bar{H}_0|$$

$$\bar{H}_0 = \frac{|\bar{E}_0|\cdot n_1}{c\mu_0} = \frac{2\cdot5\cdot10^{-3}}{3\cdot10^8\cdot4\pi\cdot10^{-7}} = 2'65\cdot10^{-5}$$

$$\Rightarrow \bar{H} = 2'65\cdot10^{-5}\cos(4\pi\cdot10^6x - 6\pi\cdot10^{14}t)\,\bar{u}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{B}} = \mu_0\bar{H} = \boxed{3'33\cdot10^{-11}\,\bar{u}_z\cos(4\pi\cdot10^6x - 6\pi\cdot10^{14}t)\ (Wb/m^2)}$$

$\Rightarrow \bar{E}\times\bar{H} = \bar{S} \qquad$ Dirección de $\bar{S}$: $\bar{u}_x$

$$\bar{S} = |\bar{E}\times\bar{H}|\,\bar{u}_x = \underbrace{|\bar{E}_0|\cos(kr-\omega t)}_{|E|}\cdot\underbrace{|\bar{H}_0|\cos(kr-\omega t)}_{|H|} = \underbrace{|\bar{E}_0||\bar{H}_0|}_{S_0}\cos^2(k\bar{r}-\omega t)$$

$$\uparrow$$

$$|\bar{E}\times\bar{H}| = |E||H|\ \underbrace{\text{sen}\,90^\circ}_{1}$$

$$\boxed{\bar{S} = \underbrace{|\bar{E}_0||\bar{H}_0|}_{1'32\cdot10^{-7}}\cos^2(4\pi\cdot10^6x - 6\pi\cdot10^{14}t)\,(\bar{u}_x) \quad (W/m^2)}$$

c) SENAL : vector de Poynting !!! Intensidad : valor medio del módulo del vector de Poynting.

se refleja el 25 % → se transmite 75 %

$$|\bar{S}_2| = 0'75 \cdot |\bar{S}| = 0'75 \cdot 1'32 \cdot 10^{-7} \cdot \cos^2(\ldots)$$

$$\bar{S}_2 = 0'995 \overset{10^{-7}}{\cos^2}(K_2 \bar{r} - \omega t)\, \bar{u}_x$$

No existe desviación porque incide perpendicularmente

$$K_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 3\pi \cdot 10^6 \ (m^{-1})$$

$$\Rightarrow \bar{S}_2 = 0'995 \cdot 10^{-7} \cos^2(3\pi \cdot 10^6 x - 6\pi \cdot 10^{14} t)\ u_x$$

Obtengo el campo $\bar{E}_2$: tampoco cambia su dirección.

$\rightarrow |\bar{E}_{02}|$

$$|\bar{S}_2| = |E_{02}|\,|H_{02}| \cdot \cos^2(\ldots)$$

$$\boxed{|\bar{E}_{02}| = V_2\, |\bar{B}_{02}| = \boxed{V_2\, \mu_0\, |H_{02}|}}$$

$$|\bar{S}_2| = \frac{|E_{02}|^2}{V_2\, \mu_0} \cos^2(\ldots) = 0'995 \cdot 10^{-7} \cos^2(\ldots)$$

$$\Rightarrow |\bar{E}_{02}| = \sqrt{0'995 \cdot 10^{-7} \frac{c}{n_2} 4\pi \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{-3}\ V/m$$

$$\boxed{\bar{E}_2 = 5 \cdot 10^{-3}\, \bar{u}_y \cos(3\pi \cdot 10^6 x - 6\pi \cdot 10^{14} t) \quad (V/m)}$$

d) Cálculo del ángulo por Snell.

$$\boxed{\hat{\iota} = 48'59°}$$

JUNIO 2007

4. Una onda electromagnética plana, *polarizada linealmente*, se propaga en la dirección $z>0$ y su campo eléctrico es de la forma $E= E_y\, u_y$. El medio de propagación es un dieléctrico de constantes $\varepsilon=16\,\varepsilon_0$ y $\mu=\mu_0$. Si la frecuencia de la onda es $f = 2.\ 10^8$ Hz y se observa que a $t=0$ y $z= 0$, hay *un máximo* de 5 mV / m, obtened:

   1) la expresión completa de los vectores de campo eléctrico y magnético,
   2) expresión completa del vector de Poynting y la intensidad de la onda.

DATO: $\mu_0 = 4\pi x10^{-7}$ (S.I.).

$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 16 \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r} = 4$

1) * Expresión general del vector $\bar{E} = \bar{E}_0 \cos(\bar{k}.\bar{r} - \omega t)$.

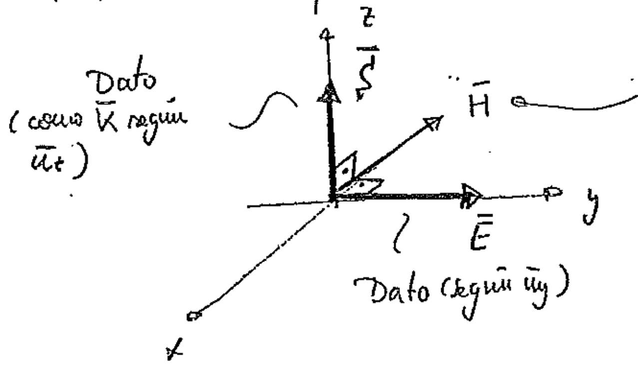
- Se propaga en $z>0 \Rightarrow \bar{k} = k\, \bar{u}_z = \frac{2\pi f}{v} . \bar{u}_z = \frac{2\pi f}{c/n}\, \bar{u}_z = \frac{2\pi . 2 . 10^8}{3.10^8/4} . \bar{u}_z = \frac{16}{3}\pi\, \bar{u}_z = \bar{k}$
- $\bar{k}.\bar{r} = (0, 0, 16/3\pi)(x, y, z) = \frac{16\pi}{3} z$.
- $\omega = 2\pi f = 4\pi . 10^8\ (s^{-1})$.
- Nos dicen que el vector $\bar{E}$ va según $\bar{u}_y$, luego : $\bar{E}_0 = E_0\, \bar{u}_y$

Con todo esto: $\bar{E} = E_0 \bar{u}_y \cos(\frac{16\pi}{3} z - 4\pi 10^8 t)$. Suponemos $\bar{E}(z=0, t=0) = 5.10^{-3}\, \bar{u}_y\ V/m$

$5.10^{-3} \bar{u}_y = E_0\, \bar{u}_y \cos(0-0) \Rightarrow 5.10^{-3} = E_0$

Con lo que: $\boxed{\bar{E} = 5.10^{-3}\, \bar{u}_y \cos(\frac{16\pi}{3} z - 4\pi . 10^8 t)}$ (V/m)

* Hacemos un esquema para ver como va $\bar{H}$: como siempre sabiendo que $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$



Deducimos muy fácil que va según $-\bar{u}_x$

Luego : $H_0 \Rightarrow E_0 = v B_0 = \frac{c}{n} \mu H_0 \Rightarrow H_0 = \frac{n . E_0}{c \mu} = \frac{4 . 5.10^{-3}}{3.10^8 . 4\pi . 10^{-7}} = 5'305.10^{-5}$ (A/m)

$\boxed{\bar{H} = -5'305.10^{-5}\, \bar{u}_x \cos(16\pi/3\, z - 4\pi . 10^8 t)}$ (A/m)

2) Vector $\bar{S}$: $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$ pero como sabemos que va según $\bar{u}_z$ me "ahorro" el producto vectorial.

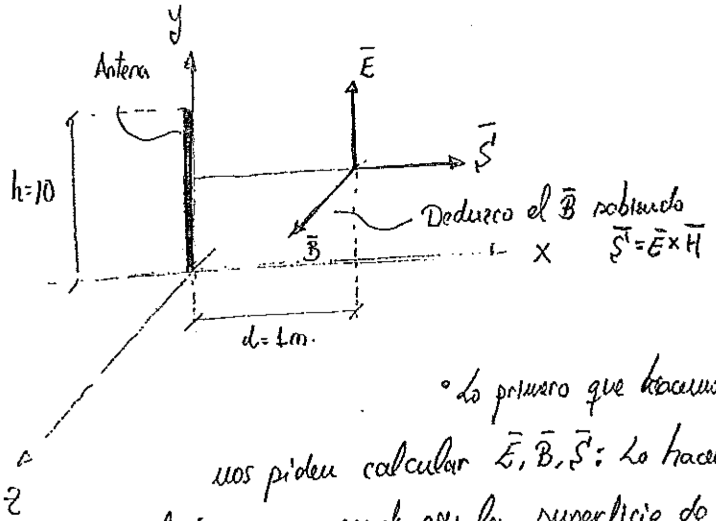
$\boxed{\bar{S} = |\bar{E} \times \bar{H}| . \bar{u}_z = E_0 . H_0 . \cos^2(\dots)\, \bar{u}_z = 2'653.10^{-7} \cos^2(16\pi/3\, z - 4\pi . 10^8 t)\, \bar{u}_z}$ (W/m²)

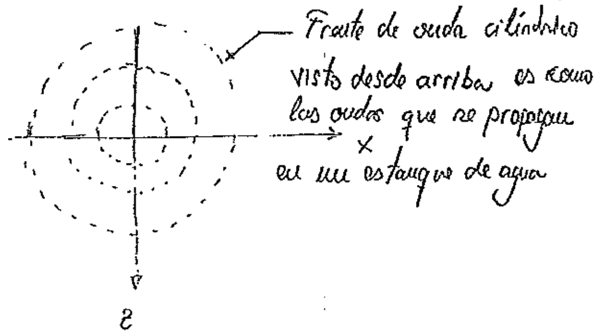
Intensidad : $\boxed{I = \langle |\bar{S}| \rangle = 1/2\, E_0 H_0 = 1'33 . 10^{-7}}$ (W/m²)

4.- Una antena de comunicaciones de altura h=10m es capaz de emitir una señal de potencia P=1kW y longitud de onda λ=3m con un frente de onda cilíndrico. Suponiendo que la onda está linealmente polarizada con el vector **E** paralelo al eje de la antena (que coincide con OY), determinar a una distancia d=1m de la antena, tomada sobre el eje OX:

a) los valores de **E**, **B** y **S**

b) la orientación que debe tener una antena receptora de 100 espiras y 1cm^2 de sección para que la f.e.m. inducida en ella sea máxima y calcular dicha f.e.m.





• Lo primero que hacemos es obtener la intensidad en el punto donde nos piden calcular $\bar{E}, \bar{B}, \bar{S}$: Lo hacemos a partir de la Potencia, y sabiendo que el área corresponde con la superficie de un cilindro de altura h=10m y radio d=1m.

$$\boxed{I = \frac{P}{\text{Area}} = \frac{P}{\underbrace{2\pi d_1 h}_{\text{Área cilindro}}} = \frac{10^3 (W)}{2\pi .1.10} = \frac{50}{\pi}} \; (W/m^2)$$

¡OJO! Lo piden todo en $X = d = 1\,m$

• obtengo $\bar{K} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \bar{u}_x = \frac{2\pi}{3} \bar{u}_x \Rightarrow \boxed{\bar{K} \cdot \bar{r} = 2\pi/3 \, X}$

• $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda/V} = \frac{2\pi \cdot V}{\lambda}$ (Supongo por falta de datos que $V = c = 3.10^8$) $\boxed{\omega = \frac{2\pi.3.10^8}{3} = 2\pi.10^8}$ (s^{-1})

· Luego ya está: $\boxed{\bar{S} = \underset{\underset{2I}{\parallel}}{S_0} \cdot \cos^2(2\pi/3 \, X - 2\pi.10^8 t) \, \bar{u}_x = \frac{100}{\pi} \cdot \cos^2(2\pi/3 \cdot 1 - 2\pi.10^8 t) \bar{u}_x} \; (W/m^2)$

(en $X = 1m$)

• Obtengo módulos de E_0 y B_0 como siempre:

$$I = 1/2 \, E_0 H_0 = 1/2 \, E_0 \frac{E_0}{c\mu_0} \Rightarrow \boxed{E_0 = \sqrt{2Ic\mu}} = \sqrt{2 \cdot \frac{50}{\pi} \cdot 3 \cdot 10^8 \, 4\pi.10^{-7}} = \boxed{109'5} \; (V/m)$$

$$E_0 = c \, B_0 \Rightarrow \boxed{B_0 = E_0/c = 3'65.10^{-7}} \; (T)$$

$$\boxed{\bar{E} = 109'5 \, . \, \bar{u}_y \cos(2\pi/3 \cdot 1 - 2\pi.10^8 t)} \; (V/m)$$

$$\boxed{\bar{B} = 3'65.10^{-7} \cdot \bar{u}_z \cos(2\pi/3 \cdot 1 - 2\pi.10^8 t)} \; (T)$$

⇒ todo en X=1m !!!

b) Recuerda: Flujo magnético $\bar{\Phi} = \bar{B} \cdot \overset{\text{vector superficie}}{\bar{A}} = B \cdot A \cdot \cos\alpha$ el máximo flujo se da para $\alpha = 0 \Rightarrow$ {vector <u>area</u> paralelo a vector $\bar{B} \Rightarrow$ según $\bar{u}_z$}

Luego: $\boxed{\Phi = \bar{B} \cdot \bar{A} = B \cdot A = B_0 \cdot \text{Cos}(\ldots) \cdot \underset{\underset{1cm^2 = 10^{-4} m^2}{\shortparallel}}{A} = 3'65 \cdot 10^{-11} \cdot \text{Cos}\left(\frac{2\pi}{3} 1 - 2\pi \cdot 10^{8} t\right)}$ en $X = 1m$

Faraday: $\mathcal{E} = -n \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = -100 \cdot 3'65 \cdot 10^{-11} \cdot (-) \text{Sen}\left(2\pi/_3 1 - 2\pi \cdot 10^{8} t\right) \cdot (-) 2\pi \cdot 10^{8}$

$$\boxed{\mathcal{E} = -2'2934 \cdot \text{Sen}\left(2\pi/_3 - 2\pi \cdot 10^{8} t\right)} \text{ (Voltios)}$$

Ejercicio 11

La masa m de la figura puede moverse sin rozamiento sobre un eje horizontal y se halla unida mediante dos muelles iguales a sendos puntos A y B, separados la distancia $2L$. Los muelles tienen una longitud natural $L_0 < L$ y una constante elástica K. Se comunica al sistema la energía mecánica E_0 y se toma como origen de tiempos el instante en el cual la masa pasa por O, punto medio de AB y se está moviendo de A hacia B. Determinar:

a) La ecuación diferencial del movimiento.

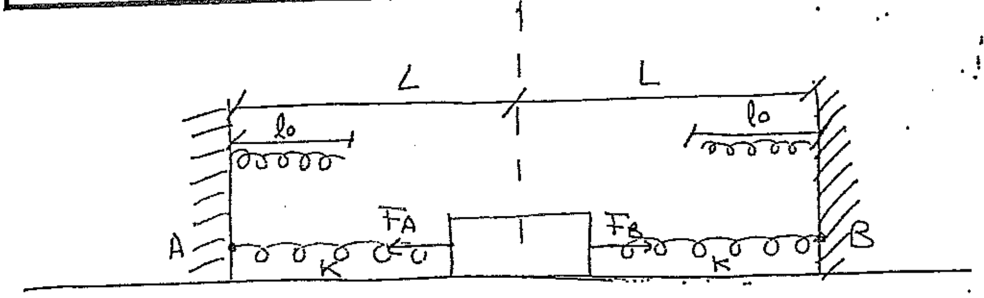
b) La ecuación del movimiento $x=x(t)$.

En un instante, que se tomará ahora como origen de tiempos, se hace funcionar el sistema dentro de un fluido viscoso, que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad y opuesta a ella, y se observa, que durante un período la amplitud se reduce en un 1 %. Determinar: ↳ ≡amortiguador

c) Tiempo de relajación de la amplitud.

d) El factor de calidad del sistema.

e) Coeficiente de amortiguamiento.



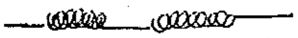
- le doy E_0 → determinante para hallar φ
- $x(t=0)=0$ (va hacia la derecha)

a) ¿EDO del movimiento?

lo primero fuerzas en el equilibrio:

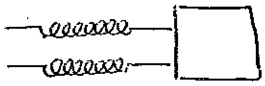
$$F_x = 0 \Longrightarrow \boxed{F_A = F_B}$$

- $F_A = kX_{eq} = k(L-l_0)$
- $F_B = kX_{eq} = k(L-l_0)$



$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

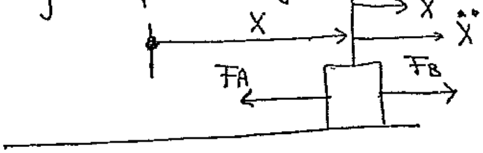
muelles en serie



$K = K_1 + K_2$

muelles en paralelo

Dibujo en posición genérica:



$$\begin{cases} F_A = k(X+X_{eq}) \\ F_B = k(X_{eq}-X) \end{cases}$$

2ª ley de Newton: $F_x = m \cdot a_x$

$$F_B - F_A = m \cdot \ddot{X}$$

$$k(\cancel{X_{eq}}-X) - k(X+\cancel{X_{eq}}) = m\ddot{x}$$

$$-2kx = m\ddot{x} \Longrightarrow \boxed{\boxed{\ddot{x} \oplus \frac{2k}{m}x = 0}} \text{ M.A.S.}$$

b) ¿ $x(t)$?

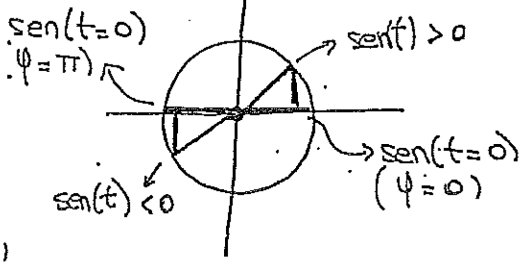
· $X(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$

$$\boxed{x(t) = A\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + \varphi\right)}$$

Imponemos las condiciones iniciales: $x(t=0)=0$.

$$0 = A\,\text{sen}(0+\varphi) \Longrightarrow \text{sen}\,\varphi = 0 \to \begin{cases} \varphi = 0 \\ \text{ó} \\ \varphi = \pi \end{cases} \Longrightarrow \text{En este caso } \varphi = 0. \Longrightarrow$$

↑ Tenemos que saber cuál de los 2 es !!



· Si me dicen que va hacia la derecha, sen > 0 ⇒ $\varphi = 0$

· Si me dicen lo contrario: $\varphi = \pi$

$$\Longrightarrow x(t) = A\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right).$$

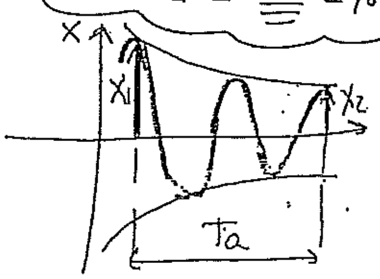
RECUERDA: $E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2$ y como la energía es de $\Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = E_0$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2}{k}E_0}}$$

Con lo que:

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2}{k}E_0}\;\text{sen}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)}$$

c) Se reduce en 1% → Dato: $\frac{X_2}{X_1} = 0'99.$



$X_1 = X(t_1) = A\cdot e^{-\delta t}\text{sen}(\omega_a t_1 + \varphi)$

$X_2 = x(t_2) = X(t_1 + T_a) = A\cdot e^{-\delta(t_1+T_a)}\text{sen}(\omega_a(t_1+T_a)+\varphi)$

$X_1/X_2 = e^{-\delta t_1 + \delta t_1 + \delta T_a} = \boxed{e^{\delta T_a} = 0'99}$ (1)

Conozco la $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \longrightarrow \gamma^2 = \omega_0^2 - \omega_a^2 \Rightarrow \boxed{\gamma^2 = \frac{2k}{m} - \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2}$ (2)

Resolvemos ambas ecuaciones:

Con (2) y (1) resolvemos

$$(\ldots)\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{2m}(4\pi^2\cdot 10^4+1)}} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{k}{2m}(4\pi^2\cdot 10^4+1)}}$$

d) $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2\cdot 10^4+1} = 314'16}$

e) $\boxed{\lambda = 2m\gamma = \frac{2m}{\sqrt{\frac{k}{2m}(4\pi^2\cdot 10^4+1)}}}$

JUNIO 1998

Ejercicio 3

Un foco emisor de sonido F gira en torno a otro foco emisor F' de la misma frecuencia, f, fase Φ, y potencia de emisión P. Se supone: que ambos focos emiten ondas perfectamente esféricas, que la velocidad de giro es muy pequeña frente a la velocidad del sonido v, por lo que no hay que tener en cuenta el efecto Doppler.

a) ¿Cuál tiene que ser la frecuencia de emisión para que un observador situado a una distancia d del foco fijo($d >> R$ siendo R el radio de giro de un foco alrededor del otro) escuche dos mínimos cuando los focos estén en la línea que une el foco fijo con el observador(posiciones A y B)?

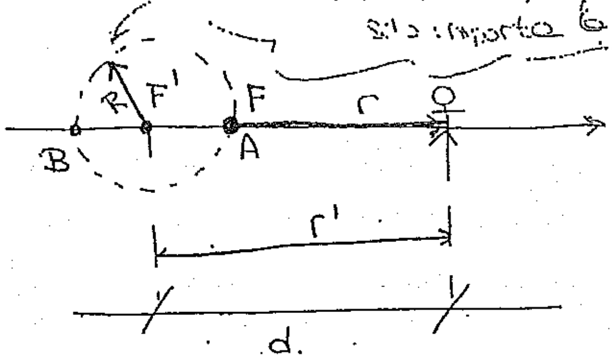
b) Demostrar que, en una aproximación de primer orden, la intensidad del sonido percibido por el observador ~~depende de d^{-4}~~ y encontrar la expresión analítica completa.

es proporcional a d^{-4}

Mismos focos con igual : P, f y $\delta_1 = \delta_2 = \phi$

a)

Cuando 2 focos están alineados con el pto de interferencia, da = cuál está [illegible] y cuál detrás. Sólo importa la distancia entre ellos.



¿f? para tener un mínimo de intensidad

$$I_T = I + I' + 2\sqrt{I \cdot I'}\cos(\delta)$$

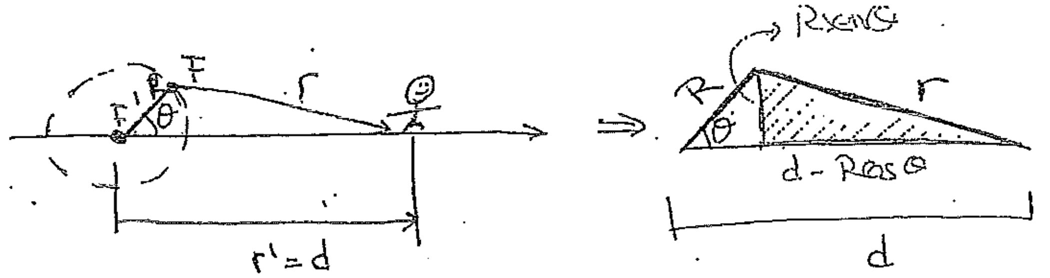
Mínimo de intensidad cuando $\cos\delta = -1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\delta = (2n+1)\pi \\ n = 0,1,2\ldots\end{array}}$

$$\delta = \underbrace{\delta_0}_{=0} + k\underbrace{(r'-r)}_{R} = \Phi - \Phi + \frac{2\pi f}{v}R = \frac{2\pi f}{v}R$$

Igualando : $\frac{\cancel{2\pi} f}{v}R = (2n+1)\cancel{\pi}$

$$\boxed{f = \frac{(2n+1)v}{2R}} \quad n = 0,1,2\ldots$$

b) Demostrar : $I_T \simeq de \cdot d^{-4}$.



Aplicando pitágoras: $r = \sqrt{R^2 sen^2\theta + (d - R\cos\theta)^2} =$

$$= \sqrt{\underbrace{R^2 sen^2\theta + d^2 - 2dR\cos\theta + R^2\cos^2\theta}_{R^2}} = \boxed{\sqrt{R^2 + d^2 - 2dR\cos\theta} = r}$$

$$I_T = I + I' + 2\sqrt{II'}\cos(\delta) = \frac{P}{4\pi r^2} + \frac{P}{4\pi r'^2} + 2\sqrt{\frac{P}{4\pi r^2}\cdot\frac{P}{4\pi r'^2}}\,\underbrace{\cos((2n+1}_{-1}$$

tengo que utilizar la frecuencia anterior

$$I_T = \frac{P}{4\pi(R^2 + d^2 - 2dR\cos\theta)} + \frac{P}{4\pi d^2} - 2\sqrt{\frac{P}{4\pi(R^2+d^2-2dR\cos\theta)}\,\frac{P}{4\pi d^2}}$$

Todavía no hacemos la aproximación

Aproximación de 1er orden ⇒ Del desarrollo en serie me quedo con el primer término!

$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots$

$\boxed{\cos\theta \simeq 1}$

$$I_T \simeq \frac{P}{\underbrace{4\pi(R^2+d^2-2dR)}_{(d-R)^2}} + \frac{P}{4\pi d^2} - 2\sqrt{\frac{P}{\underbrace{4\pi(R^2+d^2-2dR)}_{(d-R)^2}}\cdot\frac{P}{4\pi d^2}} =$$

Escribir $(R-d)^2$ es lo mismo, pero si lo ponemos no va a salir! No se nos ir

$$= \frac{P}{4\pi(d-R)^2} + \frac{P}{4\pi d^2} - 2\sqrt{\frac{P}{4\pi(d-R)^2}\cdot\frac{P}{4\pi d^2}} = \left(\sqrt{\frac{P}{4\pi d^2}} - \sqrt{\frac{P}{4\pi(d-R)^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{P}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{d^2}} - \frac{1}{\sqrt{(d-R)^2}}\right)^2 = \frac{P}{4\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d-R}\right)^2 = \frac{P}{4\pi}\left[\frac{d-R-d}{d(d-R)}\right]^2$$

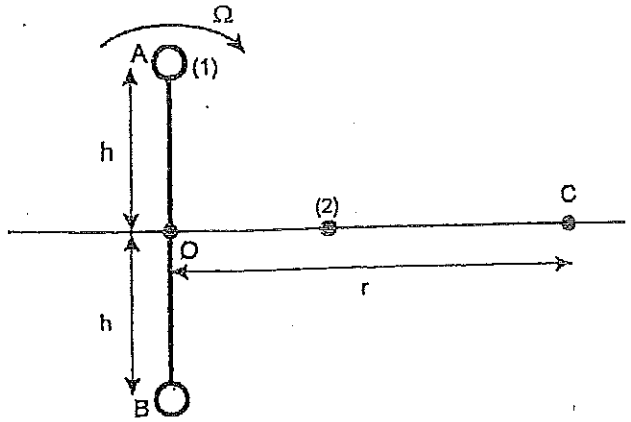
$$I_T \simeq \frac{P}{4\pi}\,\frac{R^2}{d^2(d-R)^2}$$

Nueva aproximación: $\Rightarrow d - R \simeq d$

$$\boxed{I_T = \frac{P}{4\pi}\cdot\frac{R^2}{d^2 \cdot d^2} = \frac{PR^2}{4\pi d^4}}$$

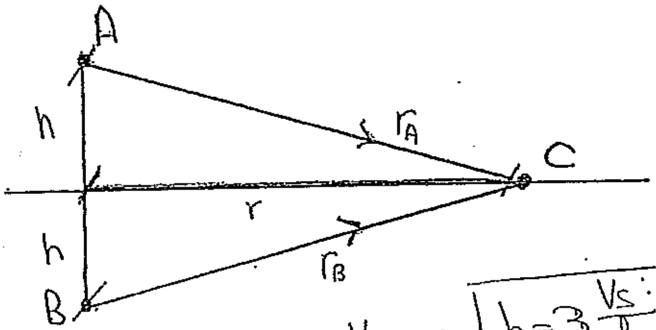
SEPTIEMBRE 2000

3. Dos focos sonoros A y B emiten con la misma frecuencia ($f = 900\ Hz$) y potencia ($P = 5\ w$) pero con una diferencia de fase de $\pi/3$. Los focos se encuentran en los extremos de un vástago de longitud $2h$ que puede girar alrededor de su centro O. Calcular la intensidad producida en un punto C distante $r = 2\ m$ de O en los casos siguientes : 1) cuando A está en la posición 1 (AB perpendicular a OC), 2) cuando A está en la posición 2 (AB en la dirección OC). A continuación se hace girar el sistema en el plano de la figura con una velocidad angular Ω en torno a O. Se pide 3) calcular Ω en el instante en que el foco A pasa por la posición 1 sabiendo que en puntos distantes (C muy alejado) se observan pulsaciones con una frecuencia de $75\ Hz$ (datos: $h = 3\lambda$, $v_S = 330\ m.s^{-1}$)



$f_A = f_B = f = 900$ Hz ; $P = 5W$; $\delta = \pi/3$; $h = 3\lambda$.

1)



Como $V_S = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{V_S}{f} \Rightarrow \boxed{h = 3\frac{V_S}{f} = 1'1\,m}$ $\boxed{\lambda = 0'36\,m}$

$I_T = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B}\cos\delta$

Como la distancia es igual y P es igual $\Rightarrow I_A = I_B = I = \frac{P}{4\pi(h^2+r^2)}$

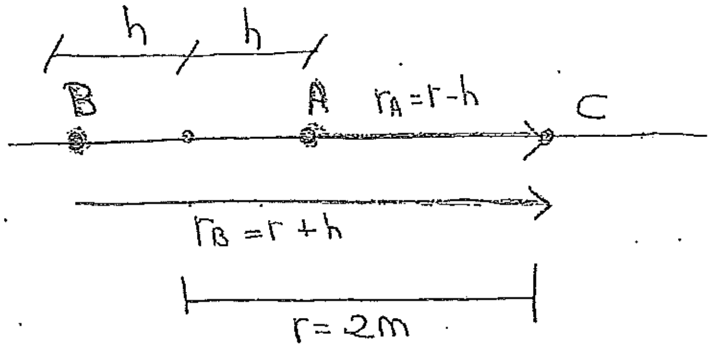
$I_T = 2I(1+\cos\delta)$

$\delta = \delta_0 + k\underbrace{(r_B - r_A)}_{= 0\ (\text{xq es la misma distancia})} = \delta_0 = \pi/3$

$(\delta_0 = \delta_B - \delta_A = \pi/3)$

$I_T = 2I\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{P}{4\pi(h^2+r^2)}(1+\cos(\pi/3)) = \boxed{0'229\ W/m^2 = I_T}$

2)



Ahora los intensidades no son iguales. las obtengo:

$$I_A = \frac{P}{4\pi r_A^2} = \frac{P}{4\pi(r-h)^2}$$

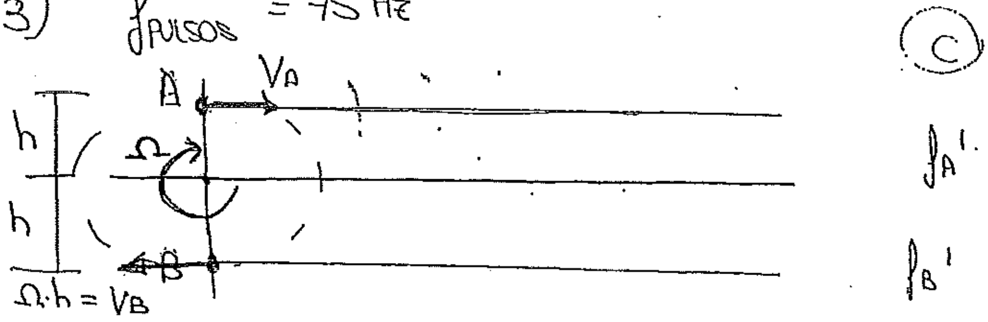
$$I_B = \frac{P}{4\pi r_B^2} = \frac{P}{4\pi(r+h)^2}$$

$$I_T = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B}\cos\delta$$

$$\delta = \delta_0 + k(\underbrace{r_B - r_A}_{\text{lo seguimos manteniendo en el mismo orden}}) = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi f}{v_s}(r+h-(r-h))$$

Luego... $\boxed{I_T = 0'651\ W/m^2}$

3) $f_{PULSOS} = 75\ Hz$



Doppler de A: $f_A' = f\frac{V_s - V_{obs}}{V_s - V_A} = 900\frac{330-0}{330-\Omega \underset{\uparrow\, 1'1m}{h}}$

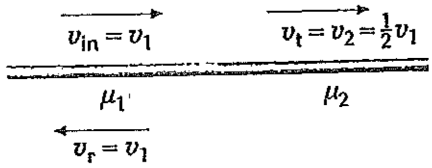
Doppler de B: $f_B' = f\frac{V_s - V_{obs}}{V_s \underset{\text{ojo!!}}{\oplus} V_B} = 900\frac{330-0}{330+\Omega \underset{1'1m}{h}}$

$$f_{PULSOS} = |f_A' - f_B'|$$

$$75 = 900\frac{330}{330-1'1\Omega} - 900\cdot\frac{330}{330+1'1\Omega}$$

Resolviendo: $\boxed{\Omega = 13'72\ rad/s}$

3º) Dos alambres muy largos, de densidades de masa lineal distintas (μ_1 y μ_2) y de la misma sección S se sueldan uno a continuación del otro y después se estiran bajo una tensión T. La velocidad de una onda en el primer alambre es el doble que en el segundo. Cuando una onda armónica de pulsación ω que se transmite por el primer cable llega a la unión de los dos, la onda reflejada tiene la mitad de amplitud que la onda transmitida. Si la amplitud de la onda incidente es A_{in}, (a) ¿cuál es la intensidad de la onda incidente?, (b)¿cuáles son las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida? (c) ¿Qué fracción de la potencia incidente se refleja en la unión y qué fracción se transmite?

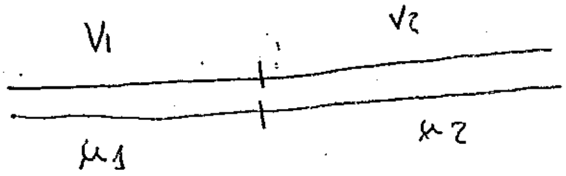


JUNIO 2009

μ_1

μ_2

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \qquad V_1 = 2V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \Rightarrow \boxed{\mu_2 = 4\mu_1} \\ V_2 = \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \end{array}\right.$$



; ≡ Sección

V $A_{ref} = \frac{1}{2} A_{trans}$

in

Datos

$\mu_1, \mu_2, S, T, w, A_{in}$.

$$a)\ I_{in} = \frac{1}{2}\rho \cdot V_1 w^2 \cdot A_{in}^2 = \left\{\begin{array}{l} V_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \\ \rho_1 = \\ \mu\,(kg/m) = \frac{M}{Volumen} = \frac{M}{S \cdot L} = \frac{\mu_1}{S} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\mu_1}{S}\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}\cdot w^2 \cdot A_{in}^2 = \boxed{\frac{\sqrt{\mu_1 T}}{2S}\,w^2 \cdot A_{in}^2}\ W/m^2$$

$$b)\ A_{in} = A_{ref} + A_{trans}$$

$$A_{ref} = \frac{1}{2}A_{trans} \Rightarrow \boxed{A_{ref} = \cancel{2}1/3\,A_{in}}$$

$$\boxed{A_{trans}\ 2/3\,A_{in}}$$

c) $I_{ref} = \frac{1}{2} \rho_1 v_1 w^2 A_{ref} = \boxed{\frac{1}{9} I_{in}}$

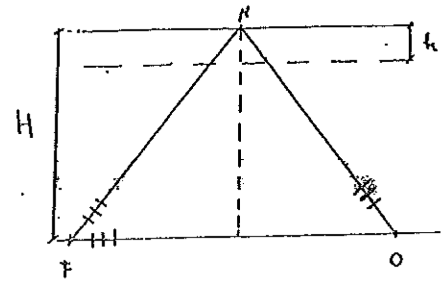
$I_{trans} = \frac{1}{2} \rho_2 . v_2 . w^2 . A_{trans}^2 =$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2 = \boxed{v_1/2} \\ \mu_2 = \boxed{4\mu_1} \\ \rho = \frac{4\mu_1}{S} = \boxed{4\rho_1} \\ \rho = \frac{\mu_1}{S} \end{array} \right\}$$

$= \boxed{\frac{1}{2} 4 \rho_1 \cdot \frac{v_1}{4} w^2 \frac{4}{9} A_{in}} = \boxed{\frac{8}{9} I_{in}}$ ∘∘∘ $I_{in} = I_{ref} + I_{trans}$

3.- Un foco F emisor de ondas planas está situado a una distancia d = 8 m. de un observador O, como indica la figura. Las ondas que llegan a O directamente desde F están en fase con las que llegan después de reflejarse en un plano horizontal que está situado a una altura H = 3 m. sobre el plano horizontal. Si el plano reflectante se desplaza hacia abajo y paralelamente a sí mismo una distancia h, entonces, el observador O no percibe ninguna señal.

1) Determinar cuál debe ser el valor mínimo de h para que eso ocurra, siendo la longitud de onda $\lambda = 0.5$ m.
2) Si la velocidad de propagación de las ondas es de 330 m/ s, y el observador se acerca a F con una velocidad de 30 Km/h, ¿cuál es la frecuencia aparente que recibe?



SEPT 2008

1) $\lambda = 0{,}5$ m ¿h min?

como son ondas planas $I_{RD} = I_{RR} = I$

$$I_{tot} = I_{RD} + I_{RR} + 2\sqrt{I_{RD} \cdot I_{RR}} \cdot \cos\delta = 2I(1+\cos\delta)$$

Cuando rebotan en H = 3m están en fase, por tanto:

$$\delta = K \cdot (r_{rr} - r_{rD}) + \delta_{relativo} = \left\{ \begin{array}{l} \delta_{relativo} = 0 \\ K = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi \\ r_{rr} = 2\sqrt{4^2+3^2} \\ r_{rD} = 8m \end{array} \right\} = 4\pi(10-8) + 0 = 8\pi$$

(efectivamente están en fase)

Como $\delta = 8\pi$ cuando la pared está en H = 3m, el primer mínimo que nos encontramos al bajar esa pared es $\delta = 7\pi$ ($I_{tot} = 0$)

$$\delta = 7\pi = K \cdot (r'_{rr} - r_{rD}) + \delta_{relativo} = 4\pi\left(2\sqrt{4^2+(3-h)^2} - 8\right) + 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{7\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}} + 8}{2} = \sqrt{16+9+h^2-6h} \Rightarrow h^2 - 6h + 1{,}24 = 0 \Rightarrow \boxed{h = 0{,}2143\,m}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 21{,}43\,cm}$$

Comentario:

Si en lugar de bajar la pared, la subimos, el 1^{er} mínimo se obtendría haciendo

$$\boxed{\delta = 9\pi}$$

2) $V_s = 330\ m/s$

$\lambda = 0{,}5$

$$f_r = f_T \cdot \left(\frac{V_s + V_o}{V_s} \right) = \frac{\cancel{V_s}}{\lambda} \left(\frac{V_s + V_o}{\cancel{V_s}} \right) = \frac{V_s + V_o}{\lambda} = 2 \cdot (V_s + V_o) =$$

$$= 2 \cdot \left(330 + \frac{30\ Km/h}{3{,}6} \right) = \boxed{676{,}66\ Hz}$$

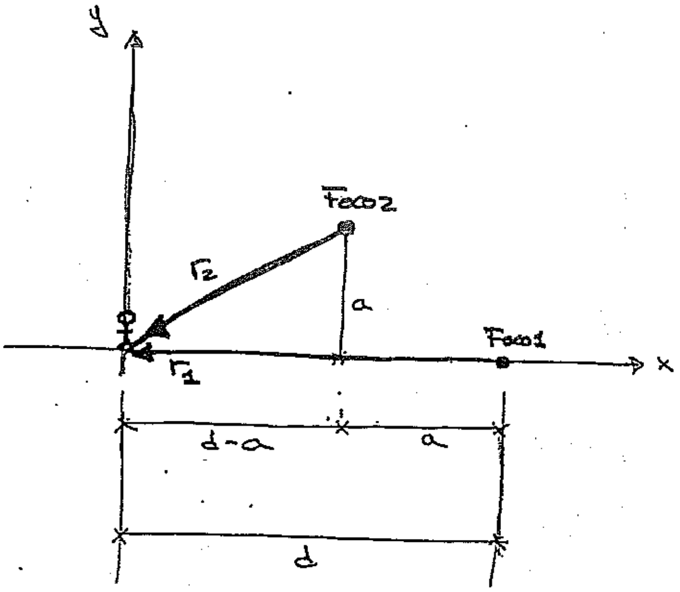
JUNIO 2006

3. *Un observador* está situado en el **origen de coordenadas**. En el **punto** (d,0) se emplaza *un foco sonoro* que emite isótropamente. Queremos que al observador *no le llegue ningún sonido*. Para ello situamos en **el punto** (d-a , a) d>a *un segundo altavoz* que también emite isótropamente.

Determinar en función de **la potencia** y **frecuencia** de emisión **del primer altavoz** 1) la potencia, frecuencia y fase con que ha de emitir el segundo para conseguir el efecto deseado.

En las condiciones de frecuencia y fase anteriores 2) ¿Qué relación debería existir entre las intensidades de sonido producidas por cada uno de los altavoces para que el observador situado en el origen de coordenadas perciba un nivel de intensidad de 10 dB?

Dato: Tomar v *como la velocidad de propagación del sonido*



Foco 1: f_1, P_1

Foco 2: f_2, P_2

Para que se pueda producir una interferencia, los focos deben ser coherentes, es decir, que tengan la misma frecuencia.

$$\boxed{f_2 = f_1}$$

interferencia: $I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2}\cos\delta$

Para que no llegue sonido, $\Rightarrow \boxed{I_T = 0}$, pero como también es la misma intensidad $\Rightarrow \boxed{\cos\delta = -1}$

$$I_T = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{I_1} = \sqrt{I_2} \Rightarrow \boxed{I_1 = I_2}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{P_1}{4\pi r_1^2} = \frac{P_1}{4\pi d^2} \\ I_2 &= \frac{P_2}{4\pi r_2} = \frac{P_2}{4\pi[(d-a)^2+a^2)]} \end{aligned}\right\} \text{Igualando}$$

$$\frac{P_1}{\cancel{4\pi} d^2} = \frac{P_2}{\cancel{4\pi}\,[(d-a)^2+a^2)]} \Rightarrow \boxed{P_2 = \frac{(d-a)^2+a^2}{d^2} P_1}$$

- El desfase inicial

$$\cos\delta = -1 \Rightarrow \boxed{\delta = (2n+1)\pi}\ [1]$$

$$\boxed{\delta = K|r_2 - r_1| + \delta_0 = \frac{2\pi f_1}{v}\left|\sqrt{(d-a)^2+a^2} - d^2\right| + \delta_0}\ [2]$$

Igualando [1] = [2]:

$$(2n+1)\pi = \frac{2\pi f_1}{v}\left|\sqrt{(d-a)^2+a^2} - d^2\right| + \delta_0$$

$$\delta_0 = (2n+1)\pi - \frac{2\pi f_1}{v}\left|\sqrt{(d-a)^2+a^2} - d^2\right|$$

Sabemos que $\delta_0 = \varphi_2 - \cancel{\varphi_1} \rightarrow 0$ pq no me dicen nada en el enunciado.

$$\boxed{\varphi_2 = (2n+1)\pi - \frac{2\pi f_1}{v}\left|\sqrt{(d-a)^2+a^2} - d^2\right|}$$

2) Relación entre I_1 e I_2 para $I_T \Rightarrow NI = 10\,dB$

$$NI = 10 \log \frac{I_T}{10^{-12}} = 10 \log \frac{(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}{10^{-12}} = 10 \Rightarrow$$

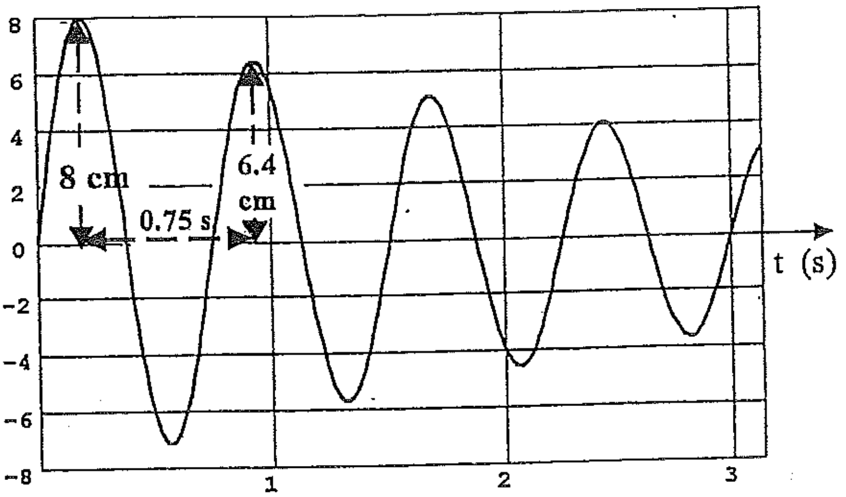
$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}{10^{-12}} = 10 \Rightarrow (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 = 10^{-11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2} = 10^{-5'5}} \quad \sqrt{W/m^2}$$

JUNIO 1999

Se hace oscilar una masa m=30 gr sujeta en el extremo de un resorte y sumergida en el seno de un medio viscoso. En la figura se muestra la ley descrita por la masa. Los dos primeros máximos presentan valores de 8 cm y 6.4 cm respectivamente, y entre ambos ha transcurrido un tiempo de 0.75 seg. Calcúlese:

1. La pulsación propia del oscilador ω_0 y la constante de amortiguamiento γ.
2. La constante recuperadora del resorte k y la constante de la fuerza de fricción c.
3. El factor de calidad Q del sistema.
4. La velocidad inicial de la masa sabiendo que para $t = 0$, pasa por la posición de equilibrio.



① $m = 30\,gr \qquad T_a = 0,75$

$$\frac{x_2(t+T_a)}{x_1(t)} = \frac{6,4}{8} = 0,8 = e^{-\gamma T_a} \Rightarrow -\gamma T_a = \ln 0,8$$

$$\gamma = 0,29$$

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 + 0,29^2$$

$$\boxed{\omega_0 = 8,38\ rad\,s^{-1}}$$

② $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 \cdot m \Rightarrow \boxed{k = 2,1\ kg\,s^{-2}}$

$\frac{c}{m} = 2\gamma \Rightarrow c = m \cdot 2\gamma \Rightarrow \boxed{c = 17,85\ g\,s^{-1}}$

③ $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \Rightarrow \boxed{Q = 14,089}$

④ $\dot{x} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t\right) - \frac{1}{\tau}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t\right)\right]$

$$\dot{x}(0) = A\left[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right]$$

$$8 = A \cdot e^{-\frac{0,75/4}{3.3611}} \Rightarrow A = 8 \cdot e^{\frac{0,75/4}{3.3611}} \Rightarrow A = 8,4590$$

$$\dot{x}(0) = 8,4590 \cdot \sqrt{70,184} \Rightarrow \dot{x}(0) = 8,4590 \cdot \frac{2\pi}{0,75} = \boxed{70,866\ cm\,s^{-1}}$$

SEPTIEMBRE 2004

Ejercicio 3

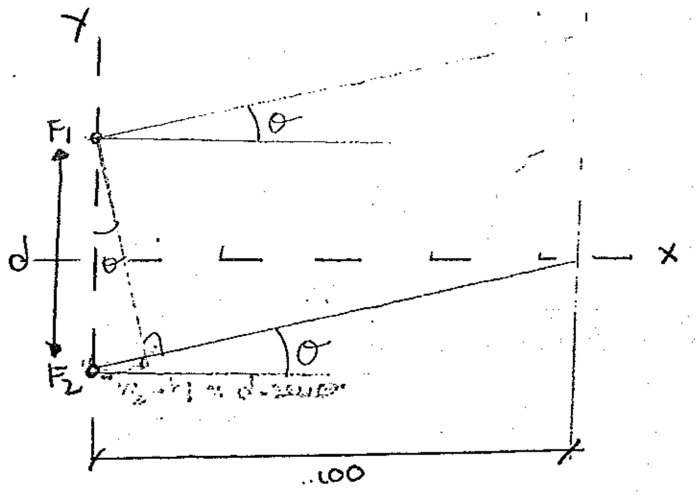
Dos altavoces emiten en fase y con una frecuencia de **2440 Hz,** estando colocados en las posiciones **(0, 1)** y **(0,-1)** en metros. Un oyente está en la posición **(100, 0)** en metros y se va moviendo muy lentamente paralelo al eje Y. Si el nivel de intensidad sonoro de cada foco por separado y lejos de la fuente vale **57 Db**, obténgase:

1) La expresión de la intensidad que percibe el oyente debida a los dos focos para una dirección que forma un ángulo θ con el eje X.
2) La posición del oyente para que escuche el 3er máximo y el 2º mínimo. Valor de las intensidades respectivas.
3) ¿Cuántos máximos en total, podrá escuchar si sigue andando en la misma dirección y porqué?

DATO: V_{sonido} = **340 m/s.**

$f = 2440\ Hz \qquad N_{F1} = N_{F2} = 57 dB$

$I_1 = I_2 = 5 \cdot 10^{-7}\ (W/m^2)$



① $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta = I \cdot 2(1 + \cos\delta) =$

$\Rightarrow I \cdot 2 \cdot 2\cos^2\frac{\delta}{2} = 4 \cdot I \cdot \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\ (W/m^2$ $\qquad \overset{\uparrow}{\cos^2\alpha} = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\Rightarrow I = 2I\left[1 + \cos(Kd\,sen\theta)\right] = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d\,sen\theta\right)\right] =$

$= \boxed{10^{-6}\left[1 + \cos(90{,}182\ sen\theta)\right]}$

② $I_{max} \Rightarrow \cos = 1 \Rightarrow \boxed{I = 10^{-6} \cdot 2}$

$I_{min} \Rightarrow \cos = -1 \Rightarrow \boxed{I = 0}$

<u>MÁXIMOS</u>: $\cos(90{,}182 \cdot sen\theta) = 1$

$90{,}182 \cdot sen\theta = 2n\pi \Rightarrow sen\theta = \frac{n\pi}{45{,}091}$

1er máx $\Rightarrow n=0 \Rightarrow \theta = \pm 0°$

2º máx $\Rightarrow n=1 \Rightarrow \theta = \pm 4°$

3er máx $\Rightarrow n=2 \Rightarrow \theta = \pm 8°$

<u>MÍNIMO</u>: $\cos(90{,}182 \cdot \operatorname{sen}\theta) = -1$

$$90{,}182 \cdot \operatorname{sen}\theta = (2n-1)\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{(2n-1)\pi}{90{,}182} .$$

1er mín $\Rightarrow n=0 \Rightarrow \theta = \pm 2°$

2º mín $\Rightarrow n=1 \Rightarrow \theta = 6°$

$$Y_{máx} = 100 \cdot \underbrace{tg(\pm 8°)}_{\theta \simeq tg\theta} = \boxed{\pm 14{,}07 m}$$

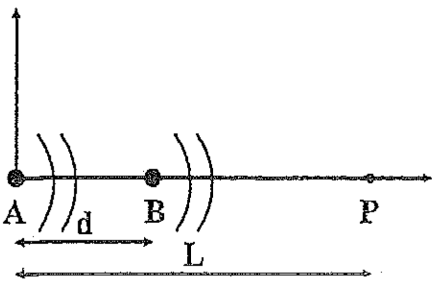
$$Y_{mín} = 100 \, tg(\pm 6°) = \boxed{\pm 10{,}51 m}$$

③ valor máx $\operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow 1 = \frac{n\pi}{45{,}091} \Rightarrow n = 14{,}35$

Hay 14 máximos hacia arriba, 14 hacia abajo y uno en $\theta = 0° \Rightarrow \boxed{29 \text{ máx}}$

JUNIO 2005

Ejercicio 3



Un altavoz **A** emite una onda esférica e isótropa de frecuencia f = **425 Hz** y una potencia sonora de **1 mW**. Suponiendo que el nivel de intensidad del ruido ambiente es de **50 dB**. Calcular:

a) La distancia x a partir de la cual el nivel de intensidad de la onda sonora supera el ruido ambiente.

Se coloca ahora otro altavoz **B** de la misma potencia a una distancia d del primero tal y como se indica en la figura.

b) Calcular el nivel de intensidad sonora debida a ambos altavoces en el punto **P**.

DATOS: $d = 1\ m,\ L = 20\ m,\ V_S = 340\ m/s.$

$f = 425 Hz$ $\quad \cdot N_I = 50 dB$

$P = 1 mW = 10^{-3} W$

a) $\underset{(dB)}{N_I} = 10 \log \frac{I}{I_0}$ $\qquad 50 dB = \cancel{10\log} \frac{I_{amb}}{I_0}$

$10^5 = \frac{I_{amb}}{I_0} \Rightarrow I_{amb} = 10^5 \cdot 10^{-12}$

Supongo que la intensidad del foco Ⓐ sea igual a la intensidad del ambiente

$\boxed{I_{amb} = 10^{-7}}\ W/m^2$

$I_1 = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{P}{4\pi I_1}} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{4\pi 10^{-7}}} \Rightarrow \boxed{x = 28,21 m}$

b) $I_P = I_{A(P)} + I_{B(P)} + 2\sqrt{I_A I_B}\ \cos(\delta$

$\delta = \delta_0 + k|r_2 - r_1|$

δ_0 = desfase inicial ⇒ como no dicen nada ⇒ $\boxed{\delta_0 = 0}$

$\cdot\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \underset{\downarrow}{=} \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 425}{340}$

$v = \cancel{2\pi}\frac{\lambda}{T} = \lambda f$

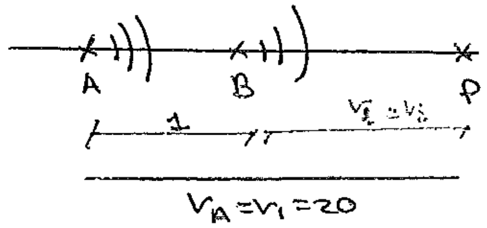
$\cdot\ |r_2 - r_1| = d = 1 m$

$I_A = \frac{P}{4\pi r_1^2} = \frac{10^{-3}}{4\pi (20)^2}$

$I_B = \frac{P}{4\pi r_2^2} = \frac{10^{-3}}{4\pi (19)^2}$

Introduciendo los valores en la fórmula:

$\boxed{I_P = 4,2 \cdot 10^{-7}\ W/m^2}$



$N_I = 10 \log \frac{I_P}{I_0}$ $\qquad \boxed{N_I = 56,23 dB}$

SEPTIEMBRE 1999

Ejercicio 3

Una onda transversal se propaga en forma de ondas planas en una región del espacio de densidad volumétrica de masa $\rho = 750\, kg/m^3$, de manera que el desplazamiento de las mismas respecto a la posición de equilibrio viene dado por: $y = 0{,}1 \operatorname{sen} 2\pi\left[(x/4) - (t/0{,}02)\right]$ (*mm*), donde x está expresado en metros y t en segundos, se pide:

a) Escribir la ecuación diferencial de ondas de la cual es solución esta expresión.
b) Calcular los valores de longitud de onda, frecuencia angular y velocidad de propagación de la onda.
c) Calcular la densidad de energía cinética por unidad de volumen en la posición $t = 0{,}8\ seg.$ y $x = 4\ m$.

Si a una distancia de 50 m del foco la onda incide en una superficie y rebota sin cambio de fase.

d) Calcular la distancia entre un máximo y un mínimo consecutivos.
e) Calcular el número de nodos que aparecerán como consecuencia de la superposición de la onda y su eco.

$$y = 0'1 \text{ sen } 2\pi\left[\left(\frac{x}{4}\right) - \left(\frac{t}{0'02}\right)\right]$$

a) $$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = v^2 \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$$ . . .

b) $A = 0'1\ mm = 0'1 \cdot 10^{-3}\ m$

$\omega = 100\pi\ rad/s$; $\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 50\ Hz}$; $\boxed{T = \frac{1}{f} = 0'02\ s}$

$K = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{K} = 4\ m}$

$\boxed{v = \frac{\lambda}{T} = 200\ m/s.}$

c) ρ_{E_c} en $t = 0'8\ s$ y $x = 4\ m$

$$\rho_{E_c} = \frac{E_c}{Vol} = \frac{\frac{1}{2}\, m\, v_y^2}{Vol} = \frac{1}{2}\rho\, v_y^2 \qquad \frac{m}{Vol} = \rho = 750\ Kg/m^3$$ . . .

Obtengo $v_y \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = \ldots$

$v_y(x=4,\ t=0'8) = \ldots = -10\pi\ mm/s \Rightarrow v_y(x=4, t=0'8) = -10^{-2}\pi \cdot m/s$

$$\boxed{\rho_{E_c} = \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot (-10^{-2}\pi)^2 = 0'37\ J/m^3}$$

c) Cuando una onda sufre una reflexión, en ocasiones la fase cambia en π radianes.

d) Si ocurre esto:

$$y_1 = 0'1 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 100\pi t\right)$$

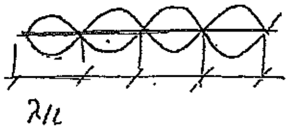
$$y_2 = 0'1 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x + 100\pi t\right)$$

$$y_T = y_1 + y_2 = \text{- - -} = 2 \cdot 0'1 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos(100\pi t)$$

Como ya sabemos: $\boxed{d_{\text{vientre - nodo}} = \frac{\lambda}{4} = \frac{4}{4} = 1\text{m}}$

e) $d_{\text{nodos}} = \frac{\lambda}{2} = 2\text{cm}$

$\boxed{\text{N}^{\text{o}}\text{ nodos} = \frac{L}{2} + 1 = \frac{50}{2} + 1 = 26 \text{ nodos}}$



nº vientres + 1 = nº nodos

nº vientres $= \frac{L}{\lambda/2}$

SEPTIEMBRE 1997

Ejercicio 3

Un ciclista que viaja a una velocidad inicial de **16.4 km/h** oye una ambulancia, y se para dejándola pasar. El ciclista comprueba que el cociente de las frecuencias antes de pasarle la ambulancia,(él se mueve) y después de pasarle la ambulancia(el ciclista está quieto) es de **6/5** y que el nivel de intensidad del sonido cuando la ambulancia está a una distancia de **3 metros** es de **90 dB**. A una distancia de **511 m** , la ambulancia llega a un hospital, por lo que desconecta la sirena. El ciclista, todavía parado, deja de oír la sirena **18.7** segundos después de haberle pasado la ambulancia. Se pide:

a) La potencia con que emite la ambulacia, suponiendo que la onda de propagación es esférica.
b) La velocidad del sonido
c) La velocidad de la ambulancia
d) El nivel de intensidad detectado por el ciclista justo antes de apagar la sirena.

Dato: $I_0 = 10^{-12}\,W\,m^{-2}$

a) $\underset{?}{I} = \frac{\overset{P?}{\boxed{P}}?}{4\pi r^2}$; Primero calculo I ;

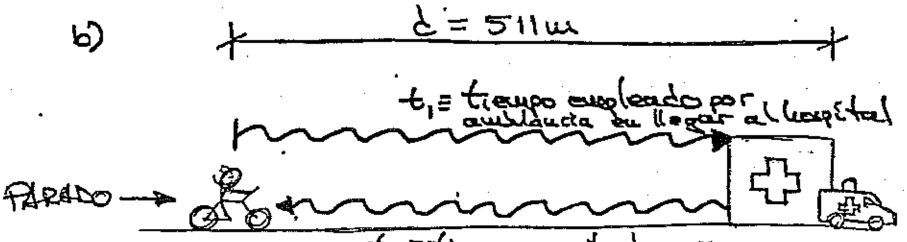
I? Sabemos que cuando r = 3m ⟹ NI = 90 dB

$$NI = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} = 90 \Rightarrow \boxed{I = 10^{-3}\ W/m^2}$$

Ahora calculo P.

$$P = I \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow P = 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot 3^2 \Rightarrow \boxed{P = 0'113\,W}$$

b)

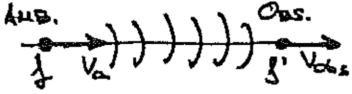


t_2 ≡ tiempo que tarda en llegar el último sonido de la sirena

$$\boxed{t_1 + t_2 = 18'7\,s} \quad [1]$$

→ Efectos Doppler:

1º Antes de que le pase la AMBULANCIA



$V_{obs} = 16'4\ Km/h = 4'5\ m/s$

$$f' = f\,\frac{V_s - V_{obs}}{V_s - V_a} = f\,\frac{V_s - 4'5}{V_s - V_a} \quad [2]$$

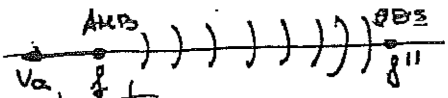
REFERENCIA

$$f' = f\,\frac{V_s - V_{obs}}{V_s - V_f}$$

f' ⇒ frecuencia percibida por el observador.

f_o ⇒ frecuencia emitida x el foco.

2° Despues de que pasa la ambulancia



frecu foco

$$\boxed{f''} = f\,\frac{V_s - 0}{V_s + V_a} \quad [3]$$

nueva frecuencia recibida por observador

ahora uso el dato:

$$\boxed{\text{Dato: } \frac{f'}{f''} = \frac{6}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{f}\,\frac{V_s - 4'5}{V_s - V_a}}{\cancel{f}\,\frac{V_s}{V_s + V_a}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \boxed{\frac{(V_s + V_a)(V_s - 4'5)}{V_s (V_s - V_a)} = \frac{6}{5}} \quad [4]$$

También tengo:

AMBULANCIA: tarda t_1 en recorrer 511 m

$$\boxed{511 = V_a \cdot t_1} \quad [5]$$

ÚLTIMA ONDA DE SONIDO: tarda t_2 en recorrer los 511 m

$$\boxed{511 = V_s \cdot t_2} \quad [6]$$

Tengo el sistema con 4 ecuaciones y cuatro incógnitas

$$\left.\begin{array}{l}[1]\ldots\\ [4]\ldots\\ [5]\ldots\\ [6]\ldots\end{array}\right\} \text{Resuelvo}\ldots \qquad \boxed{V_s = 305'14 \text{ m/s}}$$

$$c) \ \boxed{V_a = 30'01 \text{ m/s}}$$

d) Justo antes de apagar; le llega una frecuencia f'' (no afecta a la intensidad) y está a una distancia d = 511 m (que sí afecta a la intensidad)

tdo

⇒ P = cte

$$I = \frac{\textcircled{P}}{4\pi d^2} = \frac{0'113}{4\pi (511)^2} = 3'45 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

$$NI = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} = 10 \log \frac{3'45 \cdot 10^{-8}}{10^{-12}} = \boxed{45'37 \text{ dB}}$$

JUNIO 1999

Ejercicio 3

Dos fuentes sonoras A y B de $36\pi\ W$ de potencia cada una, separadas una distancia $D = 17\ cm$, emiten ondas esféricas de frecuencia $f = 1000\ Hz$ siendo su velocidad de propagación 340 m/s.

a) si el desfase entre las señales emitidas por ambas fuentes es π, determinar la intensidad del sonido percibida por un observador situado en el punto C de la línea que une ambas fuentes y a una distancia $r = 10\ m$ de la más cercana.

b) Demostrar que si las dos fuentes emiten en fase la intensidad percibida por el observador es: $I \cong (9/r^4)D^2$.

c) Determinar la diferencia de nivel sonoro en C para las dos situaciones anteriores.

a) $I_C = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B}\cos(\pi + kD)$ $kD = \frac{2\pi}{\lambda} D = 2\pi \frac{f}{v}\cdot D = \pi$

$I_C = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B}\cos 2\pi =$

$= \frac{36\pi}{4\pi}\left[\frac{1}{(r+D)^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r(r+D)}\right] =$

$= 9\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r+D}\right]^2 = 9(0,1+0,09833)^2 = \boxed{0,3540\ W/m^2}$

b) $I_C = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B}\cos\pi =$

$= I_A + I_B - 2\sqrt{I_A I_B} = (\sqrt{I_A} - \sqrt{I_B})^2 = 9\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+D}\right]^2 =$

$= 9\left[\frac{D}{r(r+D)}\right]^2 \simeq \boxed{9\,\frac{D^2}{r^4}\ Wm^{-2}}$

c) $I_{C1} = 0,3540$

$I_{C2} = 9\cdot\frac{D^2}{r^4} = 0,2601\cdot 10^{-4}$

$N_I = 10\log\frac{0,3540}{0,2601\cdot 10^{-4}} = \boxed{41,35\ dB}$

OTRA FORMA

$N_I = 10\log\frac{0,3540}{10^{-12}} - 10\log\frac{0,2601\cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = \boxed{41,35\ dB}$

SEPTIEMBRE 2003

Ejercicio 3

Un cuerpo puntual de masa m, se mueve en torno al origen de coordenadas bajo la acción de dos M.A.S., uno en la dirección del eje *x* y el otro en la del *y*, la amplitud de los M.A.S. es A_0 y su frecuencia *f*. Determinar:

a) cuál tendría que ser el desfase entre los M.A.S. para que la partícula se mueva con energía cinética constante, justificar la respuesta. ¿Cuánto valdría dicha energía?.

b) la constante de recuperación de ambos M.A.S. ¿Cuánto valdría la energía potencial?

c) si después de un tiempo 20/*f* la energía cinética se reduce a un 25%, ¿cuánto vale el factor de calidad de ambos M.A.S.?

a) Tiene que darse un movimiento circular:

$$E_c = \frac{1}{2} m (\omega A)^2 = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot (2\pi f)^2$$

$$\boxed{\delta = \begin{array}{l} \nearrow \frac{\pi}{2} \\ \searrow \frac{2\pi}{3} \end{array}}$$

b) $k = \omega^2 \cdot m \Rightarrow \boxed{k = (2\pi f)^2 m}$

c) $A_0 \cdot e^{-t_0/\tau} = \sqrt{0,25}\, A_0 = A_0 \cdot e^{-\left(\frac{20}{f}\right)\cdot\frac{1}{\tau}} \Rightarrow \ln\sqrt{0,25} = -\left(\frac{20}{f}\right)\cdot\frac{1}{\tau}$

$$\tau = \frac{20}{f(-\ln\sqrt{0,25})} = 28,854/f$$

$$Q = \frac{1}{2}\omega_0 \tau = \frac{1}{2} 2\pi f \tau \Rightarrow \boxed{Q = 90,647}$$

SEPTIEMBRE 1999

Ejercicio 2

Una partícula de **10** gr de masa se encuentra sometida a la acción de dos **m.a.s.** en la misma dirección:

$$X_1 = 4 \text{ sen } (\omega t) \qquad X_2 = 4 \text{ sen } [(\pi t/4)+(2\pi/3)]$$

x expresado en **cm** y t en seg.

a) ¿Cuánto tiene que valer ω para que el movimiento resultante sea un m.a.s.?

En estas condiciones:

b) Calcular el periodo, la amplitud y la expresión de la elongación del movimiento resultante.
c) Determinar la posición en que la Energía Cinética y la Energía Potencial tienen el mismo valor, y calcular dicho valor.

Si $\omega = (4/9)\pi t$

d) ¿el nuevo movimiento resultante es un m.a.s.? Justificar la respuesta.
e) Sabiendo que el movimiento resultante responde a la expresión $X = A$ sen$[(\pi t/4) + \delta]$, calcular el valor de A.
f) ¿Concuerda el resultado de A, con lo expresado en el punto d?

a) Para que el resultado de la combinación de ambas expresiones sea un MAS ω tiene que ser la misma

$\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \frac{\pi}{4}}$ rad/s

b) $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/4} = \boxed{8 \text{ seg}}$

$x = x_1 + x_2 = A \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \varphi\right)$

① $x_1 + x_2$:

$4 \text{sen}(\pi/4 t) + 4 \text{sen}[(\pi/4 t + 2\pi/3] =$

$= 4 \text{sen}(\pi/4 t) + 4\left[\text{sen}\frac{\pi}{4}t \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}t \, \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right] =$

$= 4 \text{sen}(\pi/4 \cdot t) + 4\left[-\frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right] =$

$= 4 \text{sen}(\pi/4 \cdot t) - 2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right) + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) =$

$= 2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

② $A \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \varphi\right)$:

$A\left[\text{sen}\frac{\pi}{4}t \cos\varphi + \cos\frac{\pi}{4}t \, \text{sen}\varphi\right] = A \text{sen}\frac{\pi}{4}t \cos\varphi + A\cos\frac{\pi}{4}t \, \text{sen}\varphi.$

- Identificando coeficientes

$2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right) = A \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2}{A}$

$2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\text{sen}\varphi \Rightarrow \text{sen}\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{A}$

$\text{tg}\varphi = \sqrt{3}$

$\varphi = \text{arctg}\sqrt{3}$

$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}$ rad.

$A = \frac{2}{\cos\varphi} \Rightarrow \boxed{A = 4\text{ cm}}$

c) $E_M = E_c + E_p \Rightarrow E_c = E_M - E_p = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$

$E_c = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2$

- $E_c = E_p$

$\frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow A^2 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{2}}$

$\boxed{x = \pm 2{,}83\text{ cm}}$

d) Si las ω son distintas, es imposible que sea un M.A.S

e) $x = A\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \delta\right) = x_1 + x_2$

- $x_1 + x_2 = 4\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9}t\right) + 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 4\,\text{sen}\left(\underbrace{\frac{4\pi}{9}t}_{}\right) + 4\left[\text{sen}\,\frac{\pi}{4}t\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}t\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right] =$

pongo en función de $\frac{\pi}{4}$

$= 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{7\pi}{36}t\right) + 4\left[\text{sen}\,\frac{\pi}{4}t\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{4}t\right] =$

$= 4\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}t\cos\frac{7\pi}{36}t + 4\cos\frac{\pi}{4}t\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{36}t\ \cancel{+}\ 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}t + 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t =$

$= \text{sen}\,\frac{\pi}{4}t\left[4\cos\frac{7\pi}{36}t - 2\right] + \cos\frac{\pi}{4}t\left[4\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{36}t + 2\sqrt{3}\right]$

- $A\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \delta\right)$ $\Rightarrow$ Identificando coeficientes:

$A\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}t\cos\delta + A\,\text{sen}\,\delta\cos\frac{\pi}{4}t$

$\Rightarrow A\,\cancel{\text{sen}\,\frac{\pi}{4}}\cos\delta = \cancel{\text{sen}\,\frac{\pi}{4}t}\left[4\cos\frac{7\pi}{36}t - 2\right]$

$A\,\cancel{\cos\frac{\pi}{4}t}\,\text{sen}\,\delta = \cancel{\cos\frac{\pi}{4}t}\left[4\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{36}t + 2\sqrt{3}\right]$

Elevando al cuadrado y sumando.

$A^2(\cos^2\delta + \text{sen}^2\delta) = \left[4\cos\left(\frac{7\pi}{36}t\right) - 2\right]^2 + \left[4\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{36}t\right) + 2\sqrt{3}\right]^2$

$\boxed{A = \sqrt{16\left[2 - \cos\left(\frac{7\pi}{36}t\right) + \sqrt{3}\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{36}t\right)\right]}}$

f) No, porque $A = \text{cte}$.

Examen de Física II

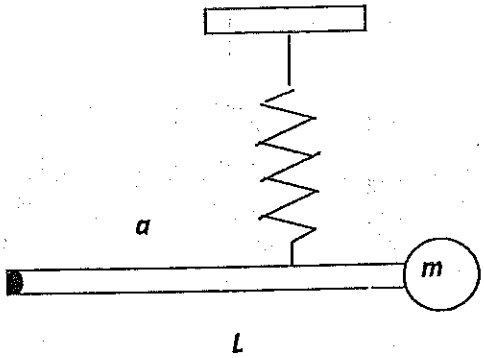
Madrid 12 de junio 2010

1º) Cinco moles de gas ideal se encuentran inicialmente a una temperatura de 27ºC y ocupan un volumen V_1. Este gas sufre una compresión isoterma hasta reducir su volumen a la mitad. Posteriormente se expansiona a presión constante hasta que su volumen se hace $(2/3)V_1$ y finalmente vuelve al estado inicial, siguiendo una relación lineal entre la presión y el volumen.

a) Representad el diagrama P-V del ciclo.
b) Calculad los valores de presión y temperatura en todos los puntos del ciclo.
c) Calculad el trabajo en cada etapa del ciclo y el trabajo total.

NOTA: los resultados vendrán dados en función de V_1 y de R.

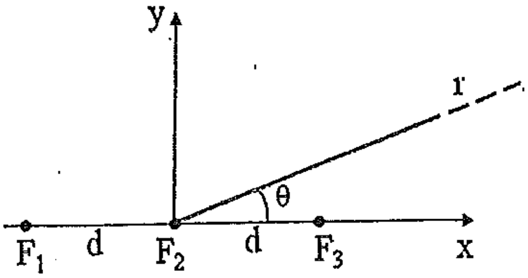
2º) Sea el sistema de la figura. Una barra sin masa, de longitud *L*, con una masa *m* en uno de sus extremos y que puede girar libremente alrededor del otro, está suspendida horizontalmente mediante un muelle, de constante *k*, longitud natural ℓ_0 y masa despreciable, fijado verticalmente a una distancia , *a*, del centro de giro.



1. Determinar la longitud del muelle para que la barra quede suspendida horizontalmente
2. Si la barra se gira un ángulo θ_0 , muy pequeño, y después se deja oscilar libremente¿ cuál sería la fuerza ejercida por el muelle sobre la barra?
3. Determinar la ecuación dinámica del movimiento, expresar θ en función del tiempo
4. Si después de 10 oscilaciones la amplitud inicial se redujese a la mitad, determinar la constante de amortiguamiento del péndulo

coherente, la dif. de fase es coherente en el tiempo.

3º) A lo largo del eje x existen tres focos coherentes emisores de ondas esféricas con la misma potencia. El primero F_2 se encuentra en $x = 0$ y lo hace con $\varphi = 0$, el segundo F_1 se encuentra en $x = -d$ y emite con una fase $\varphi = \pi/6$ y el tercero F_3 se encuentra en $x = +d$ y emite con una fase $\varphi = -\pi/6$. a) Obtened una expresión general para la intensidad obtenida en un punto genérico *P* de coordenadas *(r, θ)* para un *r >> d,* sabiendo que la intensidad recibida en *P* procedente de uno solo de los focos vale I_1 y b) aplicad la fórmula anterior para un punto alejado situado en el eje *y*

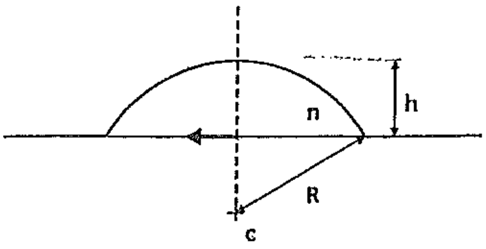


4º) Un foco situado en el origen de coordenadas emite ondas electromagnéticas esféricas linealmente polarizadas y sinusoidales, cuyo vector campo eléctrico ***E*** varia en el plano OXZ, siendo ***E*** = 0 para z= 0 y t = 0. La potencia de emisión es de 5 kW y la frecuencia de 10 MHz. La onda se propaga en el sentido negativo del eje OZ, en un medio no magnético de índice de refracción ***n*** = 1.5. Determinar a una distancia de 10 km del foco:

1) Las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos en función del tiempo.
2) El vector ***S*** de Poynting.

DATO $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ (S.I.)

5º) Una lupa constituida por un casquete esférico de radio ***R = 10 cm*** y altura ***h = 5 cm*** se encuentra apoyada sobre un papel en el que hay dibujada una flecha tal y como se indica en la figura. El material del que está fabricada la lupa tiene un índice de refracción de ***n = 1.4*** . Se pide:



a. Dibujar el diagrama de rayos que forman la imagen para un observador que mira el dibujo a través de ella.
b. Calcular la posición de dicha imagen
c. Calcular la potencia y el aumento de la lupa

Duración del Examen 3h **PUNTUACIÓN**: 2 puntos cada pregunta

PUBLICACIÓN DE NOTAS : jueves 1 de julio

SOLICITUD DE REVISIÓN: hasta las 14 h. del 3 de julio en la Secretaría del Dpto. de Física (A-219)

REVISIÓN: se realizará entre el 5 y el 7 de julio; el lugar, día y hora aparecerán en la lista de notas.

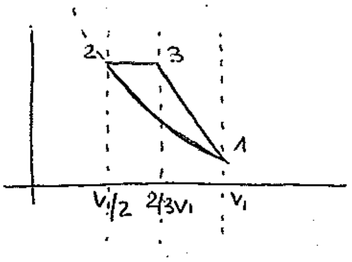
Escuela Técnica Superior
de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad Politécnica de Madrid

Asignatura	Fis2	**Fecha**	15/09/ 2010
Apellidos	Martínez Aranda	**Curso**	1º
Nombre	Beatriz	**Grupo**	15

Calificación

1.

a)



b) Punto 1 : $PV = nRT$; $P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{5 \cdot R \cdot 300}{V_1} = 1500\frac{R}{V_1}$

Punto 2 : isoterma T_2

$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{5 \cdot R \cdot 300}{V_1/2} = 3000\frac{R}{V_1}$

Punto 3 : $p_3 = p_2 \Rightarrow T_3 = \frac{P_3V_3}{nR} = \frac{\frac{3000R}{\cancel{V_1}} \cdot \frac{2\cancel{V_1}}{3}}{5\cancel{R}}$

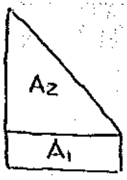
$T_3 = \frac{6000}{15} = 400K$

	P	V	T
1	$\frac{1500R}{V_1}$	V_1	300
2	$\frac{3000R}{V_1}$	$\frac{V_1}{2}$	300
3	$\frac{3000R}{V_1}$	$\frac{2V_1}{3}$	400

c) $W_{12} = \int_1^2 pdV = \int_1^2 \frac{nRT}{V}dV = nRT\int_1^2 \frac{dV}{V} = nR \cdot 300 \ln\frac{V_1/2}{V_1} = -1039'72R$

$W_{23} = p_2(V_3 - V_2) = \frac{3000R}{V_1}\left(\frac{2}{3}V_1 - \frac{V_1}{2}\right) = \frac{3000R}{V_1}V_1\left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6}\right) = 500R$

$W_{31} \Rightarrow$



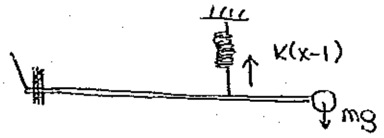
$A_2 = \frac{1}{2}\frac{1500R}{\cancel{V_1}} \cdot \frac{\cancel{V_1}}{3} = 250R$

$A_1 = \frac{1500R}{V_1} \cdot \frac{V_1}{3} = 500R$

$W_{3 \to 1} = 750R$

$W_{TOTAL} = -1039'72R + 500R + 750R = 210'28R$

2. 1)



Equilibrio $\Rightarrow \Sigma \bar{M}_o = 0$

$\circlearrowright^+ \ \Sigma \bar{M}_o = I_o \cdot \bar{\alpha}$; $\alpha = \ddot{\theta}$

$-k(x-1)a + mg\ell = m\ell^2 \overset{0}{\cancel{\ddot{\theta}}} = 0$

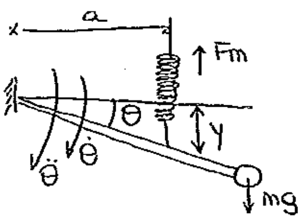
$mg\ell = k(x-\ell)a$ $\qquad \frac{mg\ell}{ka} = x - \ell$

$\boxed{x = \ell + \frac{mg\ell}{ka}}$ longitud del muelle

$x = \ell_0 + x_{eq}$

estiramiento del muelle

2)



$\Sigma \bar{M}_o = I_o \cdot \bar{\alpha}$ $\qquad$ Fuerzas $\quad F_m = k(x_{eq} + y)$

$P = mg$

Momentos $\circlearrowleft^-$

$a \cdot F_m = a \cdot k\left(\overset{x_{eq}}{\frac{mg\ell}{ak}} + a\,\text{sen}\,\theta\right)$

$\circlearrowright^+ \ \ell \cdot p = mg\ell$

$\Sigma M_o = I_o \cdot \bar{\alpha}$ $\qquad \cancel{mg\ell} - ak\left(\cancel{\frac{mg\ell}{ak}} + a\,\text{sen}\,\theta\right) = \underbrace{m\ell^2}_{I_o}\ddot{\theta}$ $\qquad -a^2k\,\text{sen}\,\theta = m\ell^2\ddot{\theta}$

$-\frac{ka^2}{ml^2}\theta = \ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \frac{ka^2}{ml^2}\theta = 0 \longrightarrow \omega^2 = \frac{ka^2}{ml^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{ka^2}{ml^2}}$

3) $\theta = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$

$\dot{\theta} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot{\theta} = -A\omega^2\text{sen}(\omega t + \varphi)$

En $t = 0$ $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\theta = A\,\text{sen}(\omega 0 + \varphi) = \theta_0$ $\quad \boxed{A\,\text{sen}\,\varphi = \theta_0}$

$\dot{\theta} = A\omega\cos(\omega 0 + \varphi) = 0$

$\begin{matrix} A \neq 0 \\ \omega \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \varphi = \pi/2 \\ A = \theta_0 \end{matrix}}$

$\theta = \theta_0\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{ka^2}{ml^2}}t + \frac{\pi}{2}\right) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{ka^2}{ml^2}}t\right)$

4) Tras 10 oscilaciones $\frac{x_2}{x_1} = 0'5 = \ldots = e^{-10\gamma T_a}$ $\qquad 10\gamma T_a = 0'693$

$\gamma^2 = \omega_0^2 - \omega_a^2 \ (2)$

$\gamma T_a = 0'0693 \Rightarrow T_a = \frac{0'0693}{\gamma}$

Sustituimos en (2) $\quad \gamma^2 = \frac{ka^2}{ml^2} - \frac{4\pi^2\gamma^2}{(0'0693)^2}$ $\qquad \gamma^2\left(1 + \frac{4\pi^2}{0'0693^2}\right) = \frac{ka^2}{ml^2}$

$\gamma = \sqrt{1'216 \cdot 10^{-4}}\sqrt{\frac{ka^2}{ml^2}}$

$= 1'1 \cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{ka^2}{ml^2}}$

3. $\xi_1 = \xi_0 \cos\left[k(r+d\cos\theta) + \frac{\pi}{6} - \omega t \right]$

$\xi_2 = \xi_0 \cos\left[kr - \omega t \right]$

$\xi_3 = \xi_0 \cos\left[k(r \square d\cos\theta) - \frac{\pi}{6} - \omega t \right]$

- $\xi_1 = \xi_0 \left[\cos\left[k(r+d\cos\theta - \omega t\right] \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cancel{\operatorname{sen}\left[k(r+d\cos\theta) - \omega t\right] \cdot \operatorname{sen} \pi/6} \right.$
- $\xi_2 = \xi_0 \cos\left[kr - \omega t\right]$
- $\xi_3 = \xi_0 \cos\left[k(r-d\cos\theta)-\omega t\right] \cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\left[k(r-d\cos\theta)-\omega t\right] \operatorname{sen} \pi/6$

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0 \cos\left[k(r+d\cos\theta)-\omega t\right]}_{1} + \underbrace{\xi_0 \cos\left[kr-\omega t\right]}_{2} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0 \cos\left[k(r-d\cos\theta)-\omega\right.}_{3}$$

1. $1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0 \left[\cos(kr-\omega t)\cdot\cos(d\cdot\cos\theta) - \cancel{\operatorname{sen}(kr-\omega t)\operatorname{sen}(d\cos\theta)} \right]$

$2 = \xi_0 \cos\left[kr - \omega t\right]$

$3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0 \left[\cos(kr-\omega t)\cos(d\cos\theta) + \cancel{\operatorname{sen}(kr-\omega t)\operatorname{sen}(d\cos\theta)} \right]$

$$\xi_T = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0\cos(kr-\omega t)\cos(d\cos\theta) + \xi_0\cos(kr-\omega t)$$

$$\xi_T = \xi_0\cos(kr-\omega t)\left[\sqrt{3}\cos(d\cos\theta)+1\right]$$

$$I_T = \alpha\xi_T^2 = I_1\left[1+\sqrt{3}\cos(d\cos\theta)\right]^2$$

4. Primero $\vec E = \vec E_0 \cos(\boxed{\vec k \vec r} - \omega t) \underset{\substack{\uparrow \\ z=0 \\ t=0}}{=} \vec E_0 \overset{\text{según enunciado}}{\neq} 0 \Rightarrow \vec E = \vec E_0 \operatorname{sen}(\vec k \vec r - \omega t)$

sólo depende de z

porque $\vec k$ va en sentido $(-\vec u_z)$ $(\;)\vec u_z \cdot (x,y,z)$

Entonces $\vec k = k(-\vec u_z) = \frac{2\pi f}{v}(-\vec u_z) = \frac{2\pi f}{c/n}(-\vec u_z) = \frac{2\pi\cdot 10^7}{3\cdot 10^8/1'5}(-\vec u_z) = 0'31416(-\vec u_z) = \frac{\pi}{10}(-\vec u_z)$

$\vec k \cdot \vec r = (0,0,\frac{-\pi}{10})(x,y,z) = -\frac{\pi}{10}z = \vec k \vec r$

$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 10^7 \ (s^{-1})$

$\swarrow S = 2I$ $P = 5000\,W$ $I = \frac{P}{S}$ $I = \frac{5000}{4\pi(10^4)^2} = 3'98\cdot 10^{-6} \ (W/m^2)$

$\vec S = 7'9577\cdot 10^{6} \operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{10}z - 2\pi 10^7 t\right) \ (-\vec u_z)$ $S = 2\cdot I$; $S = 7'9577\cdot 10^{-6}$

Además : $I = \frac{1}{2}|\vec E_0||\vec H_0| = \frac{1}{2}|\vec E_0|\frac{|\vec E_0|}{v\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{|\vec E_0|^2}{v\mu_0}$ $|\vec E_0| = \sqrt{2v\mu_0 I} = \sqrt{2\cdot 10^{-3}} = 4'4727\cdot 10^{-2}$

$\rightarrow \vec S = 0'7958\cdot 10^{-5}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{10}z + 2\pi\cdot 10^7 t\right)(-\vec u_z)$ $|\vec H_0| = \frac{|\vec E_0|}{v\mu_0} = 1'779658\cdot 10^{-4}$

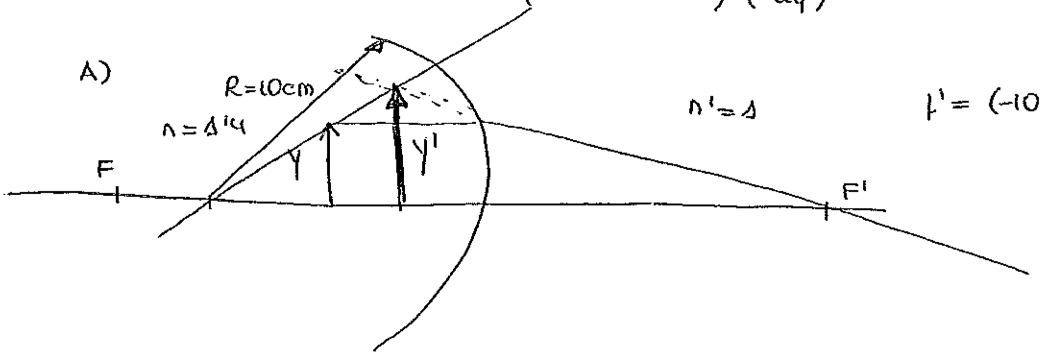
$\vec E = 4'472\cdot 10^{-2} \operatorname{sen}(\quad)(\vec u_x)$ $|\vec B_0| = 2'236384\cdot 10^{-10}$

$\vec B = 2'236384\cdot 10^{-10} \operatorname{sen}(\quad)(-\vec u_y)$

$\vec H = 1'779658\cdot 10^{-4} \operatorname{sen}(\quad)(-\vec u_y)$

5.

A)



$f' = (-10)\frac{1}{1-1'4} = \frac{10}{0'4} = 25$

B) $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R}$; $\frac{1}{s'} - \frac{1'4}{-5} = \frac{1-1'4}{-10} \Rightarrow s' = -4'16$ cm

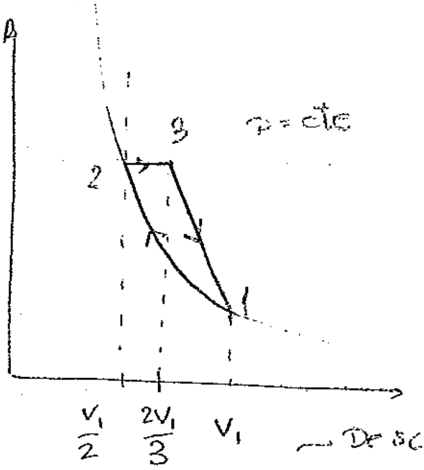
C) $P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0'25\,m} = 4$ dioptrías

$m_L = \frac{n s'}{n' s} = \frac{1'4\cdot(-4'16)}{1\cdot(-5)} = 1'1648$

$n = 5$

$a = 27$°C

1



→ Desconocida

	P	V	T
1	$\frac{1500R}{V_1}$	V_1	300.
2	$\frac{3000R}{V_1}$	$\frac{V_1}{2}$	300.
3	$\frac{3000R}{V_1}$	$\frac{2}{3}V_1$	400.

1) Gráfico

2º) P, T

Punto 1 : $PV = nRT \Longrightarrow P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{5 \cdot R \cdot 300}{V_1} = 1500\frac{R}{V_1}$

Punto 2 : Isoterma T_2

$$P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{5 \cdot R \cdot 300}{\frac{V_1}{2}} \Longrightarrow P_2 = 3000\frac{R}{V_1}$$

Punto 3 :

$$P_3 = P_2 \Longrightarrow T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} = \frac{\frac{3000\cancel{R}}{\cancel{V_1}} \cdot \frac{2\cancel{V_1}}{3}}{5 \cdot \cancel{R}} = \frac{6000}{15}$$

$$\boxed{T_3 = 400 \text{ K}}$$

3º) W_i , W_T

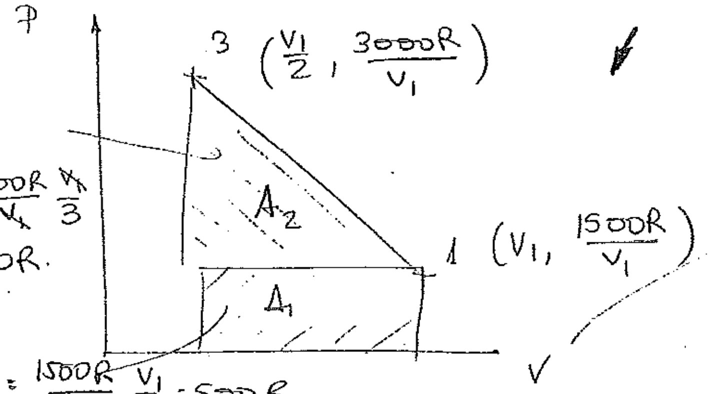
$$W_{12} = \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 \frac{nRT}{V}\,dV = nRT\int_1^2 \frac{dV}{V} = nR \cdot 300 \ln\frac{V_1/2}{V_1}$$

$$\boxed{W_{12} = -1039'72 \cdot R.}$$

$$W_{23} = P_2\,(V_3 - V_2) = \frac{3000R}{V_1}\left(\frac{2}{3}V_1 - \frac{V_1}{2}\right) = \frac{3000R}{\cancel{V_1}}\cancel{V_1}\left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6}\right)$$

$$\boxed{W_{23} = 500R}$$

$W_{31} = \int p\,dV. = \{$necesito ley de presiones en función de v$\} =$



$A_2 = \frac{1500R}{\cancel{V_1}}\frac{\cancel{V_1}}{3} = 250R.$

$A_1 = \frac{1500R}{V_1}\frac{V_1}{3} = 500R.$

~~$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$~~

~~$\frac{\left(V - \frac{V_1}{2}\right)}{\left(V_1 - \frac{V_1}{2}\right)} = \frac{P - \frac{3000R}{V_1}}{\frac{1500R}{V_1} - \frac{3000R}{V_1}}$~~

~~$+\frac{1500R}{V_1}\left(\frac{V_1}{2} - V\right) = \frac{V_1}{2}\left(P - \frac{3000R}{V_1}\right)$~~

~~$\frac{1500R}{2} - \frac{1500R}{V_1}V = \frac{V_1}{2}P - \frac{3000R}{2}.$~~

~~$\frac{4500}{2}R - \frac{1500R}{V_1}V = \frac{V_1}{2}P$~~

~~$\boxed{P = 4500\frac{R}{V_1} - \frac{3000R}{V_1^2}V}$~~

Así:

~~$W = \int_3^1 pdV = \int_{\frac{V_1}{2}}^{V_1}\left(\frac{4500R}{V_1} - \frac{3000R}{V_1^2}V\right)dV =$~~

~~$= \frac{4500}{\cancel{V_1}}R\left[\cancel{V_1} - \frac{\cancel{V_1}}{2}\right] - \frac{3000R}{\cancel{V_1^2}}\frac{\left[\cancel{V_1^2} - \left(\frac{\cancel{V_1}}{2}\right)^2\right]}{2} =$~~

~~$= \frac{4500R}{2} - \frac{9000R}{8} = \frac{9000R}{8} = 1125R$~~

Así:

$W_T = -1039'72R + 500R + \overset{750.}{\cancel{1125}}R. = ~~585'279~~R.$

$= 210'28R.$

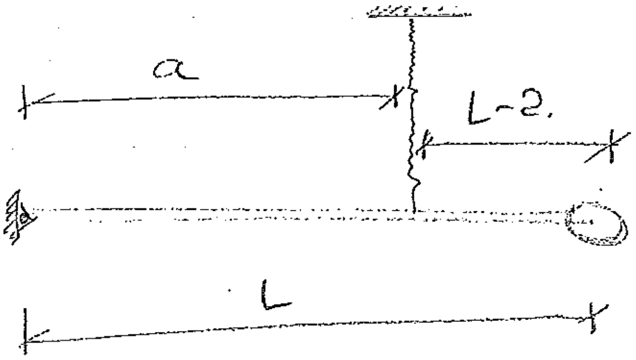
Ejercicio 2.

Barra sin masa

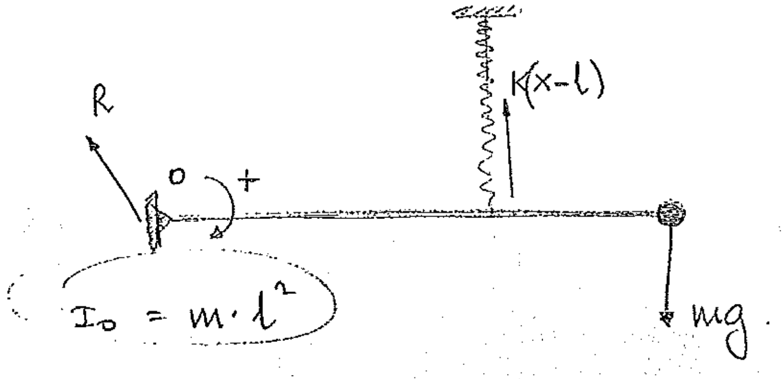
Longitud L.

Masa m.

Muelle $\left\{\begin{matrix} K \\ l_o \end{matrix}\right.$



Apartado 1.



$I_o = m \cdot l^2$

Equilibrio.

$$\boxed{\Sigma \bar{M}_o = \bar{O}}$$

$$+\circlearrowleft \ \Sigma \bar{M}_o = I_o \bar{\alpha} \quad ; \boxed{\alpha = \ddot{\theta}}$$

$$- K(x-l) \cdot a + mgl = ml^2 \cdot \cancel{\ddot{\theta}}^{\,0} = 0.$$ ("R" no dá momento

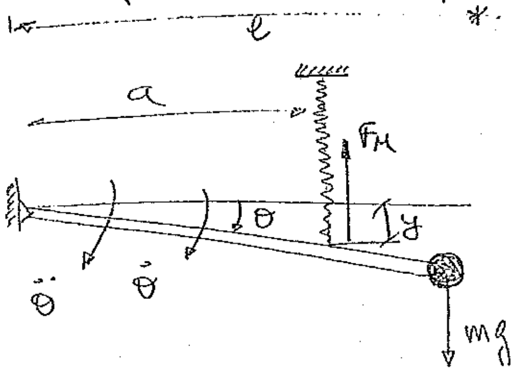
$$mgl = K(\underbrace{x-l}_{x_{eq}})a. \Longrightarrow \frac{mgl}{Ka} = x - l.$$

$$\boxed{x = l + \frac{mgl}{Ka}}$$ longitud del muelle $= x = l_o + x_{eq}$

Estiramiento del muelle en el equilibrio $= \dfrac{mgl}{Ka} = x_{eq}$

Apartado 2

Desplazamos respecto de la posició- de equilibrio.



$\Sigma \bar{M}_o = I_o \bar{\alpha}$

Fuerzas:

$F_M = K(x_{eq} + y)$

$P = mg$

$$-)\ \overline{a \cdot F_M} = aK\left(\underbrace{\frac{mgl}{Ka}}_{x_{eq}} + a\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$+)\ l \cdot P = mgl.$$

Así: $\sum \overline{M_0} = I_0\,\overline{\alpha}$

$$\cancel{mgl} - aK\left(\frac{\cancel{mgl}}{\cancel{Ka}} + a\,\text{sen}\,\theta\right) = \underbrace{ml^2}_{I_0} \cdot \ddot{\theta}$$

$$a^2K\,\text{sen}\,\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\theta \simeq 0 \longrightarrow \text{sen}\,\theta \sim \theta \Rightarrow -a^2K \cdot \theta = ml^2\ddot{\theta}$$

$$-\frac{Ka^2}{ml^2}\theta = \ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{Ka^2}{ml^2}\theta = 0} \longrightarrow \omega^2 = \frac{Ka^2}{ml^2} \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2}}}$$

Apartado 3:

$$\theta = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta} = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

En $t = 0$ condiciones iniciales $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\theta = A\,\text{sen}\,(\omega \cdot 0 + \varphi) = \theta_0$$

$$\boxed{A\,\text{sen}\,\varphi = \theta_0}$$

$$\dot{\theta} = A\omega\cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = 0.$$

$$\left.\begin{matrix} A \neq 0 \\ \omega \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \boxed{\cos\varphi = 0}$$

$$\boxed{\varphi = \pi/2}$$

Ejercicio 2 (Junio 2010)

Así:

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2}}\, t + \pi/2\right) = \theta_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2}}\, t\right)$$

Apartado 4. ¿ γ ?

Tras 10 oscilaciones:

$$\frac{x_2}{x_1} = 0'5$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \dots = e^{-10\gamma T_a} = 0'5 \implies 10\gamma T_a = 0'693 \quad (1)$$

$$\gamma^2 = \omega_0^2 - \omega_a^2 \quad (2)$$

$$\boxed{\gamma T_a = 0'0693} \implies T_a = \frac{0'0693}{\gamma}$$

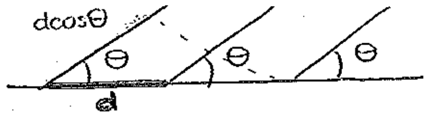
sustituimos en (2):

$$\gamma^2 = \frac{Ka^2}{ml^2} - \frac{4\pi^2 \cdot \gamma^2}{(0'0693)^2}$$

$$\gamma^2\left(1 + \frac{4\pi^2}{(0'0693)^2}\right) = \frac{Ka^2}{ml^2}$$

$$\gamma = \sqrt{1'216 \cdot 10^{-4}}\,\sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2}} = \boxed{1'1 \cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2}} = \gamma}$$

Ejercicio 3.



$$\xi_1 = \xi_0 \cos\left[K(r + d\cos\theta) + \frac{\pi}{6} - \omega t\right]$$

$$\xi_2 = \xi_0 \cos\left[Kr - \omega t\right]$$

$$\xi_3 = \xi_0 \cos\left[K(r - d\cos\theta) - \frac{\pi}{6} - \omega t\right]$$

→ las sumamos

→ Antes desarrollo

$$\xi_1 = \xi_0 \left[\cos\left[K(r+d\cos\theta)-\omega t\right]\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \text{sen}\cancel{\left[K(r+d\cos\theta)-\omega t\right]}\text{sen}\right.$$

$$\xi_2 = \xi_0 \cos\left[Kr - \omega t\right)$$

$$\xi_3 = \xi_0 \left[\cos\left[K(r-d\cos\theta)-\omega t\right]\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \text{sen}\left[K(r+d\cos\theta)-\omega t\right]\text{sen}\frac{\pi}{6}\right.$$

Sumo: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 =$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0\cos\left[K(r+d\cos\theta)-\omega t\right]}_{A} + \underbrace{\xi_0\cos\left[Kr-\omega t\right]}_{B} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0\cos\left[K(r-d\cos\theta)\right.}_{C}$$

luego a esarrollar

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0\left[\cos(Kr-\omega t)\cdot\cos(d\cdot\cos\theta) - \cancel{\text{sen}(Kr-\omega t)\cdot\text{sen}(d\cos\theta)}\right]$$

$$B = \xi_0\cos\left[Kr-\omega t\right)$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0\left[\cos(Kr-\omega t)\cdot\cos(d\cos\theta) + \cancel{\text{sen}(Kr-\omega t)\cdot\text{sen}(d\cos\theta)}\right]$$

Así: Si sumamos:

$$\xi_T = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_0\cos(Kr-\omega t)\cdot\cos(d\cos\theta) + \xi_0\cos(Kr-\omega$$

$$\boxed{\xi_T = \xi_0\cos(Kr-\omega t)\left[\sqrt{3}\cos(d\cos\theta)+1\right].}$$

$$\Phi_T = \alpha \, \xi_T^2 = I_1 \left[1 + \sqrt{3} \cos(\delta \cos \theta) \right]^2$$

$$\frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\rho_0 A^2 \underset{\Uparrow}{\omega^2} V = I$$

$${}^{2}_{0} = \frac{\boxed{\dfrac{P}{4\pi r^2}}}{\left(\frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 V\right)} = \frac{I}{\underbrace{\left(\frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 V\right)}_{\text{cte } K}}$$

Así:

$$\boxed{I = \frac{K}{r^2}\xi_0^2}$$

Para un punto P r sí es constante

$$I = \underset{\text{cte}}{\underset{\shortparallel}{\boxed{\alpha}}}\,\xi_0^2 = \boxed{I_1}\left[1 + 2\cos\left(Kd\cos\theta + \pi/6\right)\right]^2$$

Ejercicio 4

"E" varía en el plano OXZ

$E = 0 \begin{cases} z = 0 \\ t = 0. \end{cases}$

Potencia 5KW

Frecuencia 10MHz $= 10 \cdot 10^6$ Hz. $= 1 \cdot 10^7$ Hz

sentido de propagación de la onda $(-\bar{u}_z) \Rightarrow \bar{K} = |\bar{K}| \cdot (-\bar{u}_z)$

$n = 1'5$

A una distancia de 10 Km del foco:

1) Expresiones de los campos eléctricos y magnéticos en función de "t"

2) Vector de Poynting.

Solución:

sólo depende de "z"

Según el enunciado

Primero: $\vec{E} = \bar{E}_0 \cos(\bar{K}\bar{r} - \omega t) \underset{\substack{\uparrow \\ z=0 \\ t=0}}{=} \bar{E}_0 \neq 0$

porque $\bar{K}$ va en sentido $(-\bar{u}_z)$ ⋯ $(\ )\bar{u}_z \cdot (x,y,z)$

Así: $\bar{E} = E_0 \operatorname{sen}(\bar{K} \cdot \bar{r} - \omega t)$

Entonces:

$$\bar{K} = K(-\bar{u}_z) = \frac{2\pi f}{v}(-\bar{u}_z) = \frac{2\pi f}{c/n}(-\bar{u}_z) = \frac{2\pi \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8 / 1'5} (-\bar{u}_z)$$

$$\bar{K} = 0'31416(-\bar{u}_z) = \frac{\pi}{10}(-\bar{u}_z)$$

$$\bar{K} \cdot \bar{r} = \left(0, 0, \frac{-\pi}{10}\right)(x, y, z) = \boxed{-\frac{\pi}{10} z = \bar{K}\bar{r}}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 10^7 \ (s^{-1})$$

$S = \overset{\downarrow}{2}I$; $P = 5000$ W ; $I = \frac{P}{S}$

$$I = \frac{5000}{4\pi\cdot(10^4)^2} = 3'98\cdot 10^{-6}\left(\frac{W}{m^2}\right)$$

$$S = 2I = 7'9577\cdot 10^{-6}$$

ojo!!!

$$\vec{S} = 7'9577\ 10^{-6}\ \text{sen}^2\left(-\frac{\pi}{10}z - 2\pi\cdot 10^7 t\right)\ ([illegible]\,\bar{u}_z)$$

igual que $\bar{k}$

Además:

$$I = \frac{1}{2}|\bar{E}_0||\bar{H}_0| = \frac{1}{2}|\bar{E}_0|\frac{|\bar{E}_0|}{v\cdot\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_0|^2}{v\mu_0}$$

$$|\bar{E}_0| = \sqrt{2v\mu_0 I} = \sqrt{2\cdot 10^{-3}} = 4'4727\cdot 10^{-2}$$

$$|\bar{H}_0| = \frac{|\bar{E}_0|}{v\mu_0} = 1'779658\cdot 10^{-4}$$

$$|\bar{B}_0| = 2'236384\cdot 10^{-10}$$

Así:

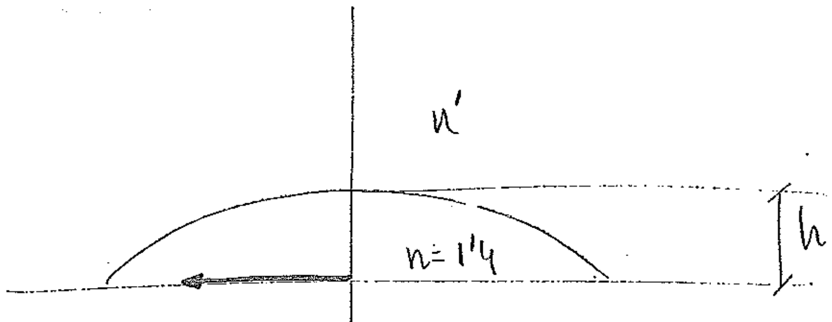
$$\bar{S} = 6'7958\cdot 10^{-5}\ \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{10}z + 2\pi\cdot 10^7 t\right)(-\bar{u}_z)$$

$$\bar{E} = 4'472\cdot 10^{-2}\ \text{sen}\left(\quad '' \quad\right)(\bar{u}_x)$$

$$\bar{B} = 2'236384\cdot 10^{-10}\ \text{sen}\left(\quad '' \quad\right)(-\bar{u}_y)$$

$$\bar{H} = 1'779658\cdot 10^{-4}\ \text{sen}\left(\quad '' \quad\right)(-\bar{u}_y)$$

Ejercicio 5 (Junio 2010)



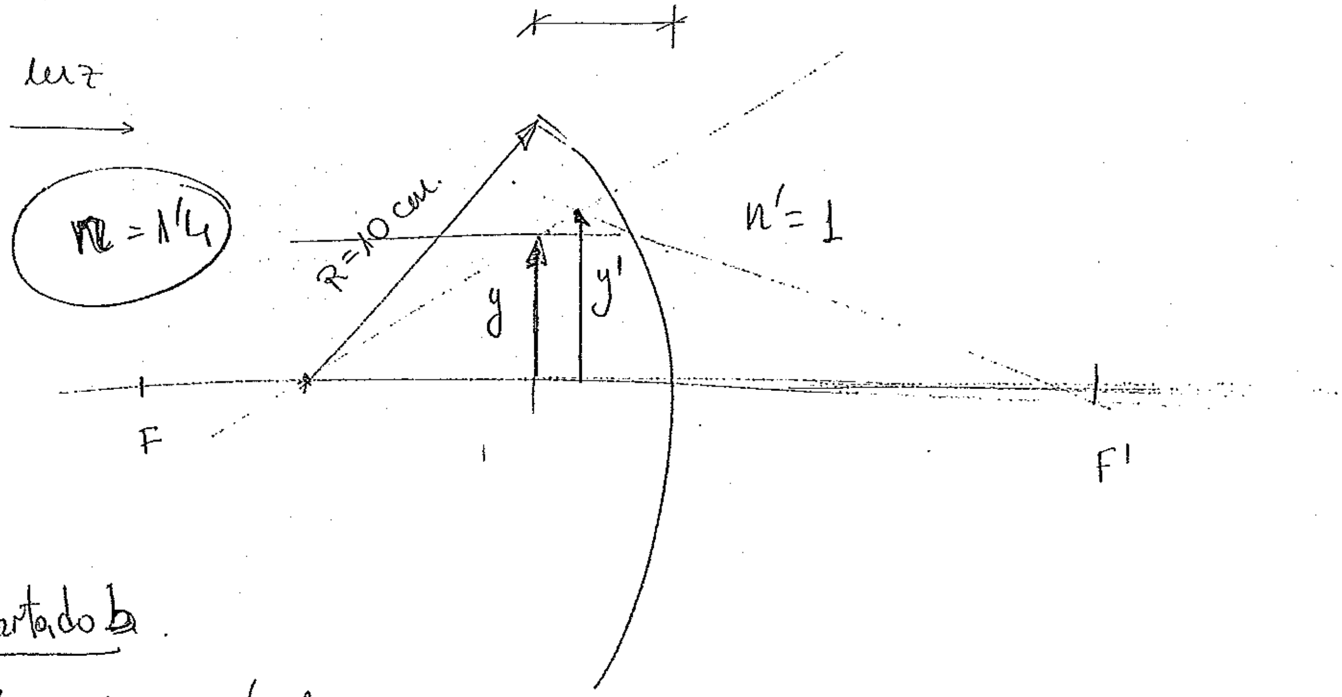
$$f' = (-10)\frac{1}{1-1'4} = \frac{10}{0'4} = 25$$

$$f' = R\frac{n'}{n'-n}$$

$$f = -R\frac{n}{n'-n}$$

Como si fuese un dioptrio.

Apartado a.



Apartado b.

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R}$$

$$\frac{1}{s'} - \frac{1'4}{-5} = \frac{1-1'4}{-10} \longrightarrow s' = -4'16 \text{ cm.}$$

Apartado c

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0'25 \, (m)} = 4 \text{ diop.}$$

Apartado c.

$$M_L = \frac{ns'}{n's} = \frac{1'4\cdot(-4'16)}{1\cdot(-5)} = 1'1648$$

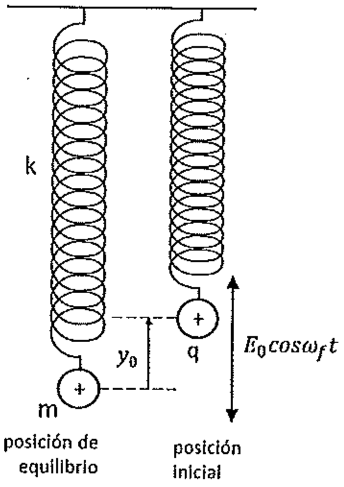
Departamento de Física Aplicada a las
Tecnologías de la Información

FÍSICA GENERAL 2 (curso 2010-2011, examen extraordinario)

6 de julio de 2011

1. Un péndulo simple tiene un periodo de **2 segundos** y una amplitud de oscilación de **12°**. Después de **10** oscilaciones completas, su amplitud se ha reducido a un **20%**.
   a) Calcular la constante de amortiguamiento γ
   b) Calcular el factor de calidad **Q** del oscilador
   c) Si la masa del péndulo es de **1Kg**, calcular la potencia que habría que aplicar al oscilador para mantener constante la amplitud de las oscilaciones.
   nota: g=9.8m/s^2

2. Una esfera de masa **m** se encuentra en equilibrio suspendida de un muelle de constante elástica **k**. En un momento dado se suministra a la esfera una carga **q** y se aplica un campo eléctrico externo en dirección vertical $\boldsymbol{E_y = E_0\, cos\omega_f t}$. En esta situación se comprime el muelle una longitud $\boldsymbol{y_0}$ y en el instante **t=0** se libera la esfera con velocidad inicial nula. Se pide:
   a) Escribir la ecuación del movimiento de la esfera,
   b) Determinar la solución correspondiente al régimen transitorio (solución de la ecuación homogénea),
   c) Determinar la solución correspondiente al régimen permanente



3. Dos focos sonoros A y B distan entre sí **30m**. Ambos emiten ondas sonoras de frecuencia **50Hz**. El foco A emite con una potencia de **40w** y el foco B emite adelantado $\frac{\pi}{3}$ respecto a A y con una potencia doble.
   a) Hallar la intensidad y el nivel de intensidad sonora en un punto C, situado entre A y B en la recta que los une y a **10m** de A, debidos a cada uno de los focos por separado y cuando funcionan los dos focos simultáneamente.
   b) Si el punto C se mueve hacia B con una velocidad de **33.3 m/s**, hallar la diferencia entre las frecuencias que C recibe de cada uno de los focos.
   nota: velocidad del sonido en el aire v_s*=333m/s,* I_0*=10*$^{-12}$ *w/m*^{2}

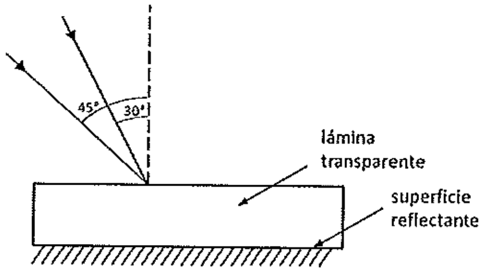
(CONTINÚA EN LA PÁGINA SIGUIENTE)

4. Un alumno se mueve a lo largo de un pasillo llevando un diapasón que vibra a **512Hz**. El sonido se refleja en la pared del pasillo enfrente del alumno de manera que éste escucha la onda reflejada con un tono de **516Hz**. Se pide:
   a) Calcular la velocidad v_a con la que se mueve el alumno
   Suponiendo que la amplitud de la onda reflejada es igual a la amplitud de la onda incidente y considerando plano el frente de onda en las proximidades de la pared:
   b) Calcular, para otro alumno en reposo situado en las proximidades de la pared, la expresión de la onda matemática (onda de desplazamiento) resultante de la superposición de las ondas incidente y reflejada.

nota: velocidad del sonido en el aire v_s=340 m/s

5. Se dispone de una lámina transparente de características desconocidas. Para estudiarla se utilizan dos láseres que se hacen incidir en un mismo punto de la lámina con ángulos de incidencia diferentes, de **30°** y **45°**. Después de reflejarse internamente en la lámina, al volver al medio incidente, los rayos salen a una distancia del punto de incidencia de **7,67mm** y **11,67mm** respectivamente. Con esta información se pide:
   a) Dibujar un diagrama que muestre el camino seguido por los rayos de luz desde su entrada en la lámina hasta su salida, de nuevo, al medio incidente
   b) Calcular el valor del índice de refracción de la lámina así como su espesor

nota: índice de refracción del medio incidente n=1

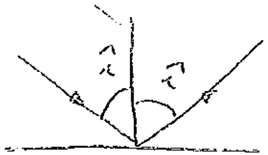


nota: Los problemas valdrán, cada uno, 2 puntos

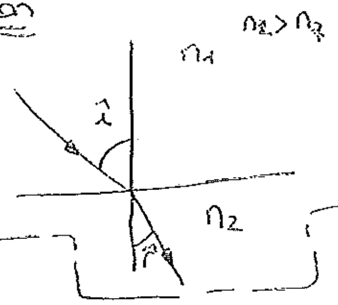
***notas provisionales:** 13 de julio*
***solicitud de revisión:** hasta las 14 horas del 15 de julio*

ÓPTICA

Reflexión y refracción



REFLEXIÓN

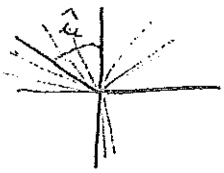


LEY DE SNELL

$$n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} r$$

$i_L > i$ ≡ rayo refracta
$i_L < i$ ≡ rayo refleja

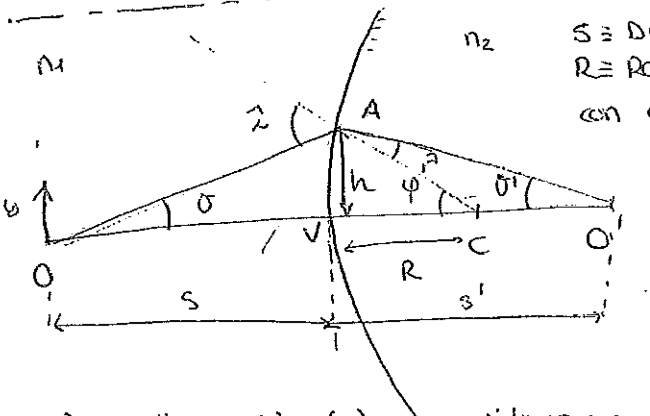
Reflexión total



$\hat{i}_L$ ≡ ángulo límite $(n_1 \operatorname{sen} i_L = n_2 \operatorname{sen} 90)$

Dioptrio esférico

Dioptrio: Superficie de separación de dos medios de $\neq n$



S ≡ Distancia objeto; s' ≡ Distancia imagen
R ≡ Radio ; C ≡ Centro; σ ≡ Ángulo rayo objeto con eje.

SNELL A: $n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} r$
↳ Para ángulos peques: $n_1 i = n_2 r$

$\underset{\triangle}{AOC} \Rightarrow |\pi - i| + |\sigma| + |\varphi| = \pi \Rightarrow$
$|i| = |\sigma| + |\varphi| \Rightarrow i = \varphi - \sigma \Rightarrow$
$i = -\operatorname{tg}\sigma + \operatorname{tg}\varphi \simeq -\frac{h}{s} + \frac{h}{R}$ (2)

$\underset{\triangle}{AO'C} \Rightarrow |r| + |\sigma'| + |\pi - \varphi| = \pi \Rightarrow$
$|r| = |\varphi| - |\sigma'| \Rightarrow r = \varphi - \sigma' \Rightarrow$
$\simeq \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\sigma' \simeq \frac{h}{R} - \frac{h}{s'}$ (1)

Desarrollando (1) y (2) y sustituyendo:

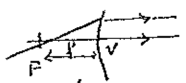
$$n_1\left(\frac{h}{R} - \frac{h}{s}\right) = n_2\left(\frac{h}{R} - \frac{h}{s'}\right)$$

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \boxed{\frac{n_2 - n_1}{R}}$$

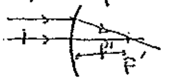
FOCOS

Los focos son los homólogos de o en el ∞

Ⓐ Foco objeto →



Ⓑ Foco imagen →



si $s' = \infty \Rightarrow s = \boxed{f = -\frac{n_1 R}{n_2 - n_1}}$

si $s = \infty \Rightarrow s' = \boxed{f' = -\frac{n_2 R}{n_2 - n_1}}$

$$\boxed{\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1}$$

Formación de imágenes

AUMENTO LATERAL → $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 s'}{n_2 s}$

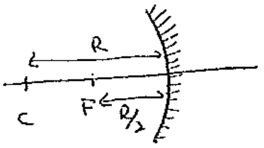
AUMENTO ANGULAR → $\alpha = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s'}{s}$

Fórmula de Newton: $xx' = f \cdot f'$
Dist. f y s

Espejos esféricos

$$f = f' = \frac{R}{2} > 0$$

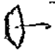
Un espejo es un dioptrio en el que el rayo no cambia de medio sino solo de sentido. La formación de imágenes es igual.



$$\boxed{\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}}$$

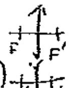
Como $\frac{n_1}{n_2} = -1 \Rightarrow$ El aumento es $\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$

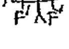
Lentes delgadas

 → $\varepsilon_r = n^2$

$f = -f'$

POTENCIA* $\Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ (Dioptrías)

Ⓐ CONVERGENTES: (Potencia positiva) 

Ⓑ DIVERGENTES: (Potencia negativa) 

 Biconvexa;  Planoconvexa ;  Menisco convergente

 Bicóncava;  Planocóncava ;  Menisco divergente.

β'

$$\boxed{\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}}$$

$* P = \frac{1}{f'} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}$

$P' = P_1 + P_2$

Formado por + de 1 lente

$$\boxed{\beta = \beta_1 \beta_2}$$

SEPTIEMBRE 2000

Ejercicio 2

$\overset{\omega \text{ iguales}}{\uparrow}$

Como resultado de la acción de dos m.a.s. perpendiculares sobre una partícula de 10 g de masa, se obtiene un movimiento de trayectoria

$$\frac{x^2}{10^{-2}}+\frac{y^2}{2\,10^{-2}}+\frac{xy}{10^{-2}}=\frac{1}{2} \quad \text{(x e y en metros)}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy\cos(\varphi)}{A_1A_2}=\sin^2\varphi$$

a) Determinar cada uno de los m.a.s. indicando su amplitud, fase y dirección.
b) ¿Cómo habría que modificar el m.a.s. que actúa en la dirección del eje Y para que la partícula se moviese en una línea recta de pendiente positiva?
c) Sabiendo que si la partícula estuviese únicamente sometida al m.a.s. que actúa en la dirección del eje X tendría una energía de 0.3 Julios, cual es la frecuencia de cada uno de los m.a.s..

$$\frac{x^2}{10^{-2}}+\frac{y^2}{2\cdot10^{-2}}+\frac{xy}{10^{-2}}=\frac{1}{2}$$

$x = A\,\text{sen}(\omega t)$
$y = B\,\text{sen}(\omega t+\varphi)$

Ec. general de una elipse

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\varphi=\text{sen}^2\varphi$$

$A^2 = 10^{-2} \rightarrow A = 10^{-1}$
$B^2 = 2\cdot10^{-2} \longrightarrow B=\sqrt{2}\cdot10^{-1}$

$$-\frac{2\cos\varphi}{AB} \underset{\underset{\frac{1}{10^{-2}}=10^2}{\uparrow}}{=} 10^2 \rightarrow \cos\varphi = \cancel{10^2}\,\frac{1}{2}\cdot\cancel{10^{-1}}\sqrt{2}\cdot\cancel{10^{-1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}^2\varphi=\frac{1}{2} \quad ; \quad \text{sen}\,\varphi=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,\varphi=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}$$

2 soluciones
$\varphi=\frac{3\pi}{4}$
$\varphi=\frac{5\pi}{4}$

Cogemos $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ y escribimos las ecuaciones diferenciales del movimiento.

$\varphi=\frac{3\pi}{4}$ desfase de 1 respecto a 2
$\varphi=\frac{5\pi}{4}$ desfase de 2 respecto de 1

Trayectoria recta pendiente positiva

condición p. T-15 + ej. 8 $\longrightarrow \boxed{\varphi=0}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}=0 \rightarrow \left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right)^2=0$$

$$\frac{x}{A}-\frac{y}{B}=0$$

$$\boxed{y=\frac{B}{A}x}$$

$$E = 0'3 \text{ Julios} = E_T \overset{\overset{x=0 \rightarrow E_{pot}=0}{\downarrow}}{=} E_{cin}+E_{pot} = E_{cin\,máx}$$

$x(t) = 0'1\,\text{sen}(\omega t)$

$$E_{cin\,max} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}m[v(t=0)]^2 \overset{\overset{*}{\downarrow}}{=} \frac{1}{2}m(0'1\omega)^2 = \frac{1}{2}m\cdot10^{-2}\omega^2 = 0'3 = E_{cin\,max} = E_T$$

$$\boxed{\begin{array}{l}x=0\\ \downarrow\\ t=0\end{array}\ \boxed{x(t)=0'1\,\text{sen}(\omega t) \rightarrow x=0\ ,\ \text{sen}(\omega t)=0 \Rightarrow t=0}}$$

$$\omega^2=\frac{0'3\cdot2}{10^{-2}m}$$

$$\boxed{\omega = 77'46 \text{ rad/s}}$$

¿ $v(t=0)$? $v(t)=\dot{x}(t) = 0'1\,\omega\cos(\omega t)$

$$v(t=0) = 0'1\,\omega\cos0^\circ = 0'1\,\omega \longrightarrow \boxed{v(t=0)=0'1\,\omega}\ ^{*}$$

JUNIO 2004

Ejercicio 2

Un péndulo simple tiene un periodo de oscilación de 0'5 segundos y una amplitud de oscilación de 0'1 radianes Después de 10 oscilaciones, su amplitud se ha reducido a un 2% de la inicial.

a) Calcular la constante de amortiguamiento γ, y el pseudoperiodo

b) Suponiendo que el movimiento se inicia con la máxima amplitud y velocidad inicial cero, escribir su ç expresión analítica

c) Calcular el factor Q indicando si se trata de un buen o un mal oscilador

$T_0 = 0'5$ seg

$A = 0'1$ rad

(amplitud movimiento)

¿ γ, Ta ?

Vamos a operar como en JUNIO 2002 (p.20 Problemas exámen)

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x(t_2)}{x(t_1)} = \underbrace{0'02}_{\text{Amplitud se reduce a un 2\%}} = \frac{x(t_1+10T_a)}{x(t_1)} = \left[e^{-\overset{*}{\underset{?}{\boxed{\gamma}}}10\overset{**}{\underset{?}{\boxed{T_a}}}} = 0'02\right] \quad [1]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0'5} = 4\pi \text{ rad/s}$$

—o—

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

—o—

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_a^2} = \boxed{\sqrt{(4\pi)^2 - \omega_a^2} = \gamma}^{\,*}$$

$$\boxed{T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}}^{\,**}$$

Ahora sustituimos * y ** en [1]

$$e^{-\sqrt{(4\pi)^2-\omega_a^2}\cdot 10\frac{2\pi}{\omega_a}} = 0'02 \xrightarrow{\text{tomamos ln}} -\sqrt{(4\pi)^2-\omega_a^2}\cdot 10\frac{2\pi}{\omega_a} = \ln.0'02$$

$$\left[\sqrt{(4\pi)^2-\omega_a^2}\right]^2 = \left[-\ln 0'02 \cdot \frac{\omega_a}{2\pi\cdot 10}\right]^2 \qquad \omega_a = \sqrt{\frac{16\pi^2}{1+\frac{1}{4\pi^2}(\ln 0'02)^2}}$$

$$\boxed{T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 0'50097 \text{ (s)}}$$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{(4\pi)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2} = 0'78089 \text{ s}^{-1}}$$

$\boxed{x=\theta}$ (Vamos a hacerlo con x aunque deberíamos hacerlo con θ)

$x(t=0) = 0'1$ rad

$v(t=0) = 0$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\omega_a t + \varphi)$$

$$v(t) = A(-\gamma)e^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\omega_a t+\varphi) + Ae^{-\gamma t}\omega_a\cos(\omega_a t+\varphi)$$

$$v(t=0) = 0 = A(-\gamma)e^{0}\operatorname{sen}\varphi + Ae^{0}\omega_a\cos\varphi$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega_a}{\gamma} \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega_a}{\gamma} \quad ; \quad \varphi = 1'5086 \text{ rad}$$

$$x(t=0) = 0'1 \qquad 0'1 = Ae^{0}\operatorname{sen}\varphi \rightarrow 0'1 = A\operatorname{sen}(1'5086) \rightarrow A = 0'1002 \text{ rad}$$

$$\boxed{x = 0'1002\, e^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\omega_a t + 1'5086)}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \qquad \boxed{Q = \frac{4\pi}{2\cdot 0'78089} = 8'05} \text{ mal oscilador}$$

Ejercicio 8

Una partícula de masa m está sometida a una oscilación libre amortiguada, siendo el coeficiente de amortiguamiento igual a la mitad del correspondiente al amortiguamiento crítico y el valor de la pulsación libre no amortiguada $\omega_0 = 2 rad/s$. Determinar:

a) El tiempo de relajación de la amplitud y la pulsación de la oscilación.
b) Las constantes, amplitud, A, y fase inicial, φ, del movimiento, sabiendo que en el instante inicial son $x_0 = 1m$ y $v_0 = \sqrt{3} - 1\, m/s$.
c) El valor del decremento logarítmico y el factor de calidad del sistema.

Si actúa sobre la partícula una fuerza exterior $F = F_0 \operatorname{sen} \Omega t$, determinar:
d) El valor de Ω para el cual la amplitud de la oscilación es máxima.
e) El valor de la amplitud máxima.

$\gamma = \frac{\gamma_{CRITICO}}{2}$ $\quad w_0 = 2$ rad/s

a) T, wa

$T = \frac{1}{\gamma}$ $\quad \gamma_{CRITICO} = w_0 = 2$ rad/s

$\frac{\gamma_{CRIT}}{2} = \gamma = \frac{w_0}{2} = \frac{2}{2} = 1$ rad/s $\quad \boxed{T} = \frac{1}{\gamma} = \boxed{1\,s}$

$w_a^2 = w_0^2 - \gamma^2 \Rightarrow \boxed{w_a} = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} = \boxed{\sqrt{3}\ rad/s}$

b)
$x_0 = 1$ m
$v_0 = (\sqrt{3} - 1)$ m/s

$x(t) = Ae^{-\gamma t} sen(w_a t + \varphi)$
$v(t) = A(-\gamma)e^{-\gamma t} sen(w_a t + \varphi) + Ae^{-\gamma t} w_a \cos(w_a t + \varphi)$

$x(t=0) = 1 \text{ m} = Ae^0 sen(0+\varphi) \Rightarrow A sen\, \varphi = 1$ [1]
$v(t=0) = -A\gamma sen\, \varphi + A w_a \cos \varphi = \sqrt{3} - 1$ [2]

SOLUCIÓN.
$\boxed{\begin{array}{l}\varphi = \pi/4 \\ A = \sqrt{2}\end{array}}$

c) $\delta = \ln \frac{x(t_i)}{x(t_i + T_a)} = \ln \frac{e^{-\gamma t_i}}{e^{-\gamma(t_i + T_a)}} = \ln\left(e^{-\cancel{\gamma t_i} + \cancel{\gamma t_i} + \gamma T_a}\right) = \gamma T_a$

$\boxed{\delta} = \gamma T_a = \gamma \cdot \frac{2\pi}{\cancel{w_a}_{\sqrt{3}}} = 1 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

$\boxed{Q} = \frac{w_0}{2\gamma} = \frac{2}{2 \cdot 1} = \boxed{1}$ (mal oscilador)

d) $F = F_0 sen(\Omega t)$

$\boxed{\Omega_{RESON}} = w_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \boxed{\sqrt{2}\ rad/s}$

e) $\boxed{A_f} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - w_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} = \boxed{\frac{F_0}{m\sqrt{12}}}$