simplyjarod.com

MMAT

Apuntes de clase

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en simplyjarod.com

simplyjarod.com

MMAT
Salvador Jiménez
A-124
s.jimenez@upm.es
http://fernex.mat.upm.es

Tema 1: Series de Fourier

Serie de Fourier: Técnica de aproximación y de análisis

1. Desarrollos ortogonales

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

f es integrable Riemann en el intervalo $[a,b]$ si $\int_a^b f(x)\,dx$ es finita

el intervalo puede ser (a,b) ó $[a,\infty)$ ó $(-\infty, b]$ ...

$R_{[a,b]}$ = conjunto de funciones integrables Riemann en $[a,b]$

Producto escalar ≡ Producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\,dx$$

$f, g, w \in R_{[a,b]}$

$w(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$ = función "peso", usualmente $w(x) = 1$

simplyjarod.com

Norma asociada (o inducida)

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b w(x) f^2(x)\,dx}$$

- Dos funciones son ortogonales si $\langle f, g\rangle = 0$
- Una función es normal (está normalizada) si $\|f\| = 1$
- Un conjunto de funciones es ortogonal si todas sus funciones son ortogonales dos a dos, además, será ortonormal si todas las funciones son normales

$$S = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x), \dots\}$$

S es ortogonal si $\forall i,j = 0, 1, \dots,\ \langle \phi_i, \phi_j\rangle = \delta_{ij}$

si $\forall i\ \ \langle \phi_i, \phi_i\rangle = 1$, S es ortonormal

Caso complejo:

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longrightarrow z = f(x) = u + i v = u(x) + i v(x)$$

$$u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = u(x) \qquad\qquad x \longrightarrow y = v(x)$$

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ es integrable Riemann en $[a,b]$ si u y v son integrables Riemann en $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b w(x)\,\overline{f(x)}\,g(x)\,dx = \overline{\langle g, f\rangle}$$

siendo la "barra" la conjugación compleja

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b w(x)|f(x)|^2\,dx}\ ;\ w(x) \in \mathbb{R}^+$$

2. Series de Fourier

simplyjarod.com

$$S = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots\}$$

conjunto ortogonal no nulo en $[a, b]$

serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(x)$, $a_n \in \mathbb{C}$ generalmente

suponemos que converge puntualmente a $g(x)$ en $[a, b]$

$$\forall x \in [a,b] , \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(x)$$

suponemos además:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\int_a^b \phi_n(x)\,dx \right)$$

entonces, siendo ϕ_k una de las funciones de S :

$$< \phi_k , g > = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \phi_k , \phi_n > = a_k < \phi_k , \phi_k >$$

siendo $a_k = \dfrac{< \phi_k , g >}{< \phi_k , \phi_k >} = \dfrac{< \phi_k , g >}{\| \phi_k \|^2}$

a_k = coeficiente de la proyección ortogonal de g sobre ϕ_k

Serie de Fourier:

Sea $f \in R_{[a,b]}$, llamamos serie de Fourier de f en S a:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(x) , \quad a_n = \frac{< \phi_n , f >}{< \phi_n , \phi_n >} = \frac{< \phi_n , f >}{\| \phi_n \|^2}$$

siendo a_n los coeficientes de la serie de Fourier

simplyjarod.com

Serie de Fourier trigonométrica en [a,b]:

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \text{ ortogonal}$$

si se extiende a $\mathbb{R}$, la función es periódica de mismo periodo, $T = b-a$

La Serie de Fourier tigonométrica es la que se obtiene utilizando el conjunto ortogonal anterior.

Serie de Fourier trigonométrica compleja en [a,b]:

Se obtiene utilizando el conjunto:

$$\left\{ e^{i\frac{2n\pi}{b-a}x} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \text{ ortogonal}$$

se representa como: $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{b-a}x}$

Coeficientes:

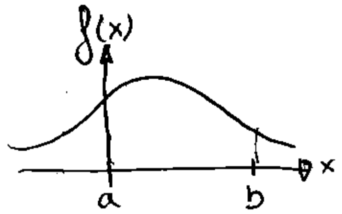
$$\left\{ \underset{\uparrow \atop a_0}{1}, \underset{\uparrow \atop a_n}{\cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)}, \underset{\uparrow \atop b_n}{\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)} \right\}$$

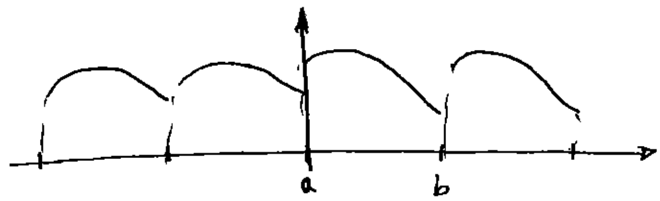
$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)$$

Extensiones:

simplyjarod.com

Una $f(x)$ a vista de la serie desarrollada se extiende periódicamente al intervalo $[a,b]$





Extensión por paridad

$$f_{par}(x): [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_{par}(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Extender de forma par la función anula los coeficientes en seno. Es como si usásemos el conjunto ortogonal:

$$S = \left\{ 1, \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \right\} = \left\{ 1, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}$$

siendo: $$\int_{-L}^{L} \frac{\langle \cos, f_{par} \rangle}{\| \cdot \|^2} dx = 2\int_{0}^{L} \frac{\langle \cos, f_{par} \rangle}{\| \cdot \|^2} dx$$

Extensión por imparidad

$$f_{impar}(x): [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_{impar}(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ -f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Extender de forma impar la función anula los coeficientes en coseno. Es como si usásemos:

$$S = \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \right\} = \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}$$

siendo: $$\int_{-L}^{L} \frac{\langle \operatorname{sen}, f_{impar} \rangle}{\| \cdot \|^2} dx = 2\int_{0}^{L} \frac{\langle \operatorname{sen}, f_{impar} \rangle}{\| \cdot \|^2} dx$$

3. Convergencia

simplyjarod.com

Espacio completo: un espacio que contiene a todas las combinaciones lineales de sus vectores y el límite de toda sucesión (o serie) es de Cauchy

Debemos considerar equivalentes aquellas funciones cuya norma (distancia) sea nula.

Si dos funciones coinciden salvo en un número finito de puntos, su serie de Fourier es la misma.

Un sistema es completo si no hay más funciones ortogonales a todos sus elementos.

Si el espacio y el sistema es completo, la serie de Fourier converge en media a la función:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x)$$

se cumple:

$$\lim_{N\to\infty} \| f - S_N \| = 0$$

y se cumple también la Identidad de Perceval:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \cdot \|\phi_n\|^2$$ (generalización del th. Pitágoras)

Sea f definida en $[a,b]$ y extendida por periodicidad a todo $\mathbb{R}$

→ si f continua en x y existen derivadas laterales en x DSF converge puntualmente al valor $f(x)$

→ si f no es continua en x pero presenta un salto finito con límites laterales $f(x^-)$ y $f(x^+)$ y existen:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x^-)}{h} \in \mathbb{R} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x^+)}{h} \in \mathbb{R}$$

entonces el DSF converge a $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$

simplyjarod.com

Tema 2: Variable compleja

Número complejo: $z = a + bi = (a, b)$

$a = \mathrm{Re}(z)$ $\quad i = \sqrt{-1}$
$b = \mathrm{Im}(z)$

un número imaginario puro tiene su parte real nula

Complejo conjugado:

Sea $z = a + bi$ su conjugado (z^* ó $\bar{z}$) será $z^* = a - bi$

Módulo de un complejo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z^*|$$

Propiedades de los complejos

$$(z^*)^* = \bar{\bar{z}} = z$$

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{-z} = -\bar{z}$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

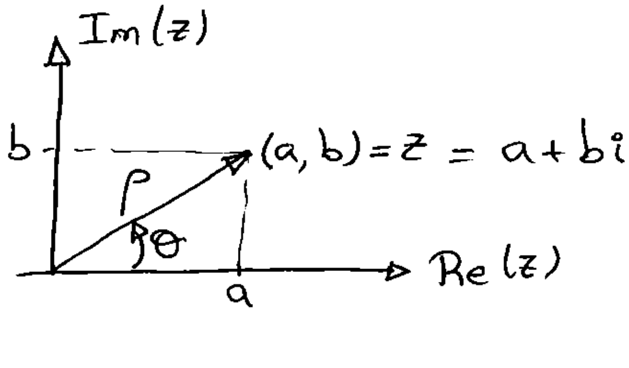
$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

Desigualdad triangular:

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

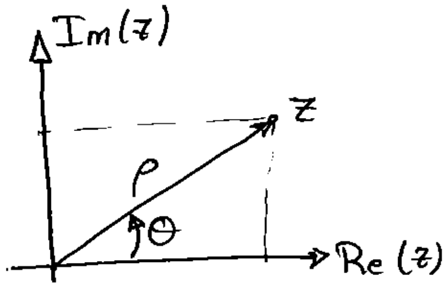
Representación en el plano:



$$|z| = \rho$$

$$z = \rho \cdot e^{i\theta}$$

simplyjarod.com



$$Z = |z| \cdot (\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))$$

$\rho = |z| =$ módulo
$\theta =$ argumento

Un complejo puede ser representado por un único módulo pero por múltiples (∞) argumentos, por ello, debemos especificar una determinación (un intervalo).

Fórmula de De Moivre.

$$[\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)$$

Fórmula de Euler:

$$Z = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Raíces n-ésimas:

Sean: $\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ w = \rho e^{i\phi} \end{cases}$ queremos que $z^n = w$

necesariamente: $r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \phi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

entonces: $\begin{cases} r = \rho^{1/n} \\ \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{k}{n} 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

simplyjarod.com

1. Funciones de variable compleja

Función compleja de variable compleja: conjunto de pares ordenados de números complejos

asignación de un número complejo a otro número complejo

<u>Dominio</u>: conjunto de valores z tales que $(z, f(z))$ pertenece a la función.

<u>Recorrido</u>: conjunto de valores w tales que existe al menos un valor de z que hace que (z, w) pertenezca a la función.

Se puede representar un número complejo como dos números reales, así:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \text{siendo } z \in \mathbb{C} \text{ y } x, y \in \mathbb{R}$$

Funciones elementales:

* <u>Potencia de exponente natural</u>:

$$f(z) = z^n, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\text{si } z = re^{i\theta} \Rightarrow z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\text{si } z = u + iv \Rightarrow z^n = (x^2+y^2)^{n/2}\cos(n\theta) + i\,(x^2+y^2)^{n/2}\,\text{sen}(n\theta)$$

siendo $\theta = \theta(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l} \theta \in (\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{n}) \\ \theta \in [\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{n}) \\ \theta \in (\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{n}) \end{array}\right\} f \text{ inyectiva}$$

$$\theta \in [\alpha, \alpha + \tfrac{2\pi}{n}] \;\} \text{ NO inyectiva}$$

* <u>Polinomios</u>: $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$

simplyjarod.com

* Función exponencial:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y))$$

$$u(x,y) = e^x \cos(y) \quad , \quad v(x,y) = e^x \mathrm{sen}(y)$$

$$w = e^z = e^{Re(z)} e^{i Im(z)}$$

$$|w| = e^x$$

$$\arg(w) = y + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

* Funciones trigonométricas

$$\left.\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \mathrm{sen}(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}\right\} \quad \tan(z) = \frac{\mathrm{sen}(z)}{\cos(z)} \qquad \cos^2(z) + \mathrm{sen}^2(z) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cosh(z) &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \\ \mathrm{senh}(z) &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \tanh(z) = \frac{\mathrm{senh}(z)}{\cosh(z)} \qquad \cosh^2(z) - \mathrm{senh}^2(z) = 1$$

* Función raíz n-ésima:

$$z^n = w \iff \begin{cases} |z| = |w|^{1/n} = \rho^{1/n} \\ \theta_k = \frac{\phi}{n} + \frac{k}{n} 2\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

* Función logaritmo: inversa de la exponencial

$$z = re^{i\theta} \; ; \; z = e^w \; ; \; w = u + iv$$

$$re^{i\theta} = e^{u+iv} \iff \begin{cases} r = e^u \\ \theta = v + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} u = \ln(r) \\ v = \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\ln(x) \in \mathbb{R}$ // $\log(z) = \mathrm{Log}(z) \in \mathbb{C}$ // $\mathrm{Log}(z) = \log(z)_0$

no base 10! es base e!!

$$\log(z)_k = \ln(|z|) + i(\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

simplyjarod.com

2. Límites y continuidad

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$

f definida en todos los puntos de un entorno perforado

entorno perforado = conjunto abierto que excluye al valor de estudio (z_0)

entorno perforado de $z_0 = \{(z_0-\delta,\ z_0+\delta) - z_0\}$

Entonces f tiene límite $w_0 \in \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (\forall z \in S,\ 0 < |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)-w_0| < \varepsilon)$$

se representa como $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$

generalización:

z es un punto de acumulación de $S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists w \in S \begin{cases} w \neq z \\ |z-w| < \varepsilon \end{cases}$

propiedades:

Si $z = x+iy$ // $z_0 = x_0+iy_0$ // $f = u+iv$ // $w_0 = u_0+iv_0$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}$$

→ Si existe límite, éste es único

→ si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha_0$ y $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = \beta_0$ ENTONCES:

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \left(\overline{f(z)}\right) = \overline{\alpha_0}$
- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha_0 \Longrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} (|f(z)|) = |\alpha_0|$
- $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$

simplyjarod.com

Continuidad:

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, f definida en z_0

f es continua en z_0 si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\forall z, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)$$

si z_0 es un punto de acumulación del Dominio de f, entonces f es continua en z_0 si y sólo si:

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$$

Sean $z = x + iy$ / $z_0 = x_0 + iy_0$ // $f = u + iv$

$$f(z) \text{ es continua en } z_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} u(x,y) \text{ es continua en } (x_0, y_0) \\ v(x,y) \text{ es continua en } (x_0, y_0) \end{cases}$$

3. Derivabilidad y holomorfía

f derivable en z_0 si y sólo si:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

f derivable en $z_0 \Rightarrow f$ continua en z_0

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$$

$$(f^{-1})' = 1/f'$$

$$(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$$

$$(e^z)' = e^z$$

$$\cos(z)' = -\operatorname{sen}(z)$$

$$\operatorname{sen}(z)' = \cos(z)$$

$$\cosh(z)' = \operatorname{senh}(z)$$

$$\operatorname{senh}(z)' = \cosh(z)$$

$$(z^{1/n})_k' = \frac{(z^{1/n})_k}{nz}$$

$$(z^w)_k' = w\frac{(z^w)_k}{z}$$

$$\log(z)_k' = \frac{1}{z}$$

simplyjarod.com

Condiciones/Ecuaciones de Cauchy-Riemann (C-R)

Sean $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z_0 = u_0 + i v_0$

$$f \text{ derivable en } z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{existen parciales de } u \text{ y } v \text{ en } (x_0,y_0) \\ \left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \text{condiciones C-R} \\ f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\,v_x(x_0,y_0) \\ f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - i\,u_y(x_0,y_0) \end{cases}$$

siendo $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

Holomorfía:

f es holomorfa en un conjunto abierto si existe la derivada de f en cada punto del conjunto

f es holomorfa en un punto si existe un entorno del punto en el cual f es holomorfa.

si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ decimos que f es **entera**

Función armónica y armónica conjugada

→ $g(x,y)$ es armónica en un entorno(x_0,y_0) si existen las derivadas segundas y se cumple $g_{xx} + g_{yy} = 0$ en todo ~~el~~ punto del entorno

→ sean u y v armónicas. v será armónica conjugada de u si se cumple C-R en todo punto del dominio

Singularidad

Un valor z_0 es un punto singular de $f \Leftrightarrow$ f no es holomorfa en z_0 y en todo entorno de z_0 existe al menos un punto en el que f sí lo es

El punto singular es aislado si existe un entorno de ese punto z_0 en el que no hay ningún otro punto sing.

4. Series

simplyjarod.com

Serie de potencias centrada en z_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \equiv z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad ; \quad a_n = cte \in \mathbb{C}$$

Ej: la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge para $|z|<1$ a la función $\frac{1}{1-z}$, es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \ , \ |z|<1$$

Teorema de Cauchy-Hadamard:

$\forall \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ existe un r (radio de convergencia) tal que:

si $|z-z_0|<r$, la serie converge absolutamente

si $|z-z_0|>r$, la serie diverge

si $|z-z_0|=r$, no se tiene información a priori

con $r \in \mathbb{R}^+$; $r = \frac{1}{\ell}$; $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

→ si existe, $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r$

→ si existe, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$

Operaciones:

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge a $A(z)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ converge a $B(z)$

→ $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\cdot(z-z_0)^n$ converge a $A(z)+B(z)$ y tiene radio $= \min\{r_A, r_B\}$

→ $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}\right)(z-z_0)^n$$

converge a $A(z)\cdot B(z)$ y tiene radio $= \min\{r_A, r_B\}$

simplyjarod.com

Derivación e Integración de series:

Sea una serie de potencias centrada en z_0, $r>0$

$\forall z$; $|z-z_0|<r$ la suma es una función holomorfa en z

Tanto las derivadas como las primitivas de la suma corresponden a las series de las funciones deriv./primit.

Teorema de Taylor:

Sea $f(z)$ holomorfa en $D=\{z\in\mathbb{C} ; |z-z_0|<r\}$, $r>0$

Entonces, la función es analítica en D, es decir, la serie de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

La serie de Taylor es única

converge puntualmente a $f(z)$ en D

converge uniformemente $\forall\ 0<\rho<r$ en $D_\rho=\{z\in\mathbb{C}; |z-z_0|\leq\rho\}$

Teorema de Laurent:

Sea $f(z)$ holomorfa en una corona centrada en z_0 de la forma:

$D=\{z\in\mathbb{C} ; r_1<|z-z_0|<r_2\}$

$$f(z)=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad \forall z\in D$$

"parte principal"

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n=0,1,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}f(z)(z-z_0)^{n-1}dz, \quad n=1,2,\ldots$$

siendo C^+ un contorno cerrado simple, recorrido positivo, contenido en D y que encierra z_0 en su interior

simplyjarod.com

→ si $r_1 = 0$ y f es holomorfa en z_0, entonces:
la serie de Laurent es la de Taylor y $b_n = 0$

→ si z_0 es una singularidad evitable de f: $b_n = 0$

→ z_0 es un polo de orden p de f, si y sólo si:
$b_p \neq 0$ y $b_n = 0, n > p$ (Es decir: la parte principal empieza en $n = p$)

simplyjarod.com

Tema 2

2.1 Funciones de variable compleja

1. Para las siguientes siguientes funciones de variable compleja, halle su dominio de definición y su recorrido, sus ceros, estudie su paridad y su periodicidad:
   a) e^z b) $\cos(z)$ c) $\operatorname{sen}(z)$ d) $\cosh(z)$ e) $\operatorname{senh}(z)$

2. Compare las imágenes dadas por una función elemental de variable compleja y por la correspondiente función real en el caso de que ambas se apliquen a un mismo valor real.

3. Pruebe que la fórmula cuadrática usual en $\mathbb{R}$ resuelve formalmente la ecuación
$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0,$$
cuando los coeficientes a, b y c, y la variable z, son complejos. Como aplicación, resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación
$$z^2 + 2z + 1 - i = 0.$$

4. Halle las cuatro raices de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ y úselas para factorizar $(z^4 + 4)$ como producto de dos polinomios en z con coeficientes reales.

5. Estudie para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $\sqrt{z}$ con la determinación $[0, 2\pi)$, es igual a $(z^{1/2})_1$ con la determinación $(-\pi, \pi]$.

6. Halle la expresión de las siguientes funciones como funciones inversas:
   a) $\arctan(z)$ b) $\arccos(z)$ c) $\operatorname{arc\,senh}(z)$

7. Compare las ramas de $z^{1/2}$ con las de z^w, para $w = 1/2$.

8. Calcule, para una rama cualquiera y en función de la determinación, los valores de:
$$a)\ (i)^{\log i} \qquad b)\ \frac{\log(3i)}{\log i} \qquad c)\ \log[(-1+i)^2] - 2\log(-1+i)$$

2.2 Límites y continuidad

9. Sea $f(z) = iz/2$ definida únicamente para $|z| < 1$. Demuestre que
$$\lim_{z\to 1} f(z) = \frac{i}{2}.$$

10. Calcule los siguiente límites:
$$a)\ \lim_{z\to 2i} 2x + iy^2 \qquad b)\ \lim_{z\to -1} \frac{iz+3}{z+1} \qquad c)\ \lim_{z\to\infty} \frac{2z+i}{z+1} \qquad d)\ \lim_{z\to 1-i} x + i(2x+y)$$
$$e)\ \lim_{z\to 0}\left[xy\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + i\left(xe^y + x^2 - y^2\right)\right] \qquad f)\ \lim_{z\to 1+i} z^2 - z + 10 \qquad g)\ \lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$$
$$h)\ \lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z} \qquad i)\ \lim_{z\to i} z^2 + 2z \qquad j)\ \lim_{z\to 1+i}\frac{z^2 - z + 1 - i}{z^2 - 2z + 2}$$

11. Estudie la continuidad en $\mathbb{C}$ de las siguientes funciones:
$$a)\ xy^2 + i(2x-y) \qquad b)\ e^{xy} + i\operatorname{sen}(x^2 - 2xy^3) \qquad c)\ f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$
$$d)\ \frac{z}{z^2+1} \qquad e)\ \frac{1}{\operatorname{sen} z} \qquad f)\ \tanh z$$

2.3 Derivabilidad y holomorfía

simplyjarod.com

12. Calcule la derivada de $f(z) = z^2$ utilizando la definición de derivada.

13. Demuestre que $f(z) = |z|^2$ sólo es derivable en $z = 0$.

14. Estudie la continuidad y la holomorfía de la siguiente función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

15. Estudie para qué valores son holomorfas las siguientes funciones, y de la expresión de la derivada cuando exista:

$$a)\ e^x \cos y + ie^y \operatorname{sen} y \qquad b)\ \frac{1}{z} \qquad c)\ e^{\alpha z},\ \alpha \in \mathbb{C} \qquad d)\ \bar{z}^3$$

$$e)\ \frac{2z+1}{z(z^2+1)} \qquad f)\ \frac{1+z^2}{(z+2)(z^2+2z+2)}$$

16. Deduzca las expresiones en forma polar de las condiciones de Cauchy-Riemann y de la derivada y aplíquelas al estudio de las funciones z^p siendo $p \in \mathbb{Z}$.

17. Halle las partes real e imaginaria (u y v) para las siguientes funciones y estudiar dónde son holomorfas:

$$a)\ z^2 \qquad b)\ z + \frac{1}{z} \qquad c)\ |z|^2 \qquad d)\ (\bar{z})^2 + 2iz$$

18. Estudie si es armónica la función $\operatorname{Re}(z^2 e^z)$.

19. Sean las funciones $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$. Compruebe que ambas son armónicas y que v es armónica conjugada de u, pero no al revés.

20. a) Estudie si es armónica la función: $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 6x^2 + 6y^2 + 12x + 6y$.
    b) Encuentre una función f entera tal que $\operatorname{Re}(f) = u$.
    c) Halle los valores z tales que $f'(z) = 0$.

21. Encuentre una función entera $f(z)$ tal que $\operatorname{Re}\Big(f'(z)\Big) = 3x^2 - 4y - 3y^2$, con $f(1+i) = 0$.

22. Dada la función $u(x,y) = 2xy + y$, se pide:
    a) Pruebe que es armónica en $\mathbb{R}^2$.
    b) Halle $f(z)$, holomorfa en $\mathbb{C}$, tal que $u = \operatorname{Re}(f)$ y $f(0) = 0$.
    c) Exprese f en función de z y calcule $f''(z)$.

23. Estudie en todos los casos si u es armónica. Cuando lo sea, construya una función v armónica conjugada y la correspondiente función de z entera:

$$a)\ u(x,y) = y^3 - 3x^2 y \qquad b)\ u(x,y) = y^3 - 6x^2 y^2$$

$$c)\ u(x,y) = 2x(1-y) \qquad d)\ u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$$

24. Estudie si las siguientes funciones son enteras:

$$a)\ 3x + y + i(3y - x) \qquad b)\ e^{iz} \qquad c)\ (z^2 - 2)e^{-z} \qquad d)\ xy + iy \qquad e)\ e^{\bar{z}}$$

simplyjarod.com

2.4 Series complejas

25. Estudie la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+(-1)^n i\right)$$

26. Calcule la suma de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3e^{in\theta}}{2^n}$$

27. Indique en qué regiones del plano complejo convergen las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}(1+i)(z-i)^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z^2+1)^n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z^4+1)^n}$$

28. Indique para qué valores z del plano complejo convergen las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}n!\,z^n \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}n!\,(z-1)^n \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n^2}$$

29. Calcule el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n}$, e indique dos puntos de la frontera donde la serie sea, respectivamente, convergente y divergente.

30. Obtenga razonadamente el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)=e^z$ en $z_0=0$.

31. Utilice el resultado anterior para expresar el desarrollo en serie de Laurent en $z_0=0$ de $f(z)=z^2e^{3z}$.

32. Obtenga los desarrollos en serie de Laurent en $z_0=0$ de las siguientes funciones:

$$a)\ \operatorname{sen} z \qquad b)\ \cos z \qquad c)\ \cosh z \qquad d)\ \operatorname{senh} z$$

33. Obtenga los desarrollos en serie de Laurent en $z_0=0$ de las siguientes funciones, e indique las regiones donde son válidos:

$$a)\ \frac{1}{1-z} \qquad b)\ \frac{1}{1+z} \qquad c)\ \frac{1}{z} \qquad d)\ \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$$

34. Calcule las series de Laurent en torno al origen de las funciones:

$$a)\ e^{1/z} \qquad b)\ \frac{1}{z-i} \qquad c)\ \frac{-1}{(z-2)(z-1)}$$

35. Pruebe que es entera la función dada por

$$f(z)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si: } z\neq 0\\ 1 & \text{si: } z=0\end{cases}$$

simplyjarod.com

36. Calcule el desarrollo de Laurent en $z_0 = 0$ para

$$a)\ \frac{e^z}{1+z} \qquad b)\ \frac{1}{z^2\,\mathrm{senh} z} \qquad c)\ \frac{2-\cosh(iz)}{z^3}$$

37. Obtenga, cuando sea posible, un desarrollo en serie de potencias de z para las siguientes funciones:

$$a)\ e^z \qquad b)\ \mathrm{Log}(1+z)_\pi \qquad c)\ \mathrm{Log}(1+z)_{2\pi} \qquad d)\ \left(\sqrt{z^2-i}\right)_{2\pi}$$

38. Obtenga el desarrollo en serie de potencias de $z-z_0$ para las siguientes funciones, e indique para qué puntos del plano complejo es válido:

$$a)\ \mathrm{Log}(\cos z)_\pi,\ z_0 = 0 \qquad b)\ \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)_{2\pi},\ z_0 = 0$$

$$c)\ \frac{z-1}{z^2},\ z_0 = 1 \qquad d)\ \frac{1}{(\sqrt{1-z^2})_{2\pi}},\ z_0 = 0$$

39. Desarrolle en serie de Laurent en torno a $z_0 = 0$ la función

$$f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

e identificar la singularidad que tiene en $z = 0$.

40. Halle las diferentes series de Laurent en potencias de z para la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z-2}.$$

41. Halle, cuando sea posible, el desarrollo en serie de Laurent en torno a $z_0 = 0$ de las siguientes funciones con las determinaciones $[0, 2\pi)$ y $[-\pi, \pi)$:

$$a)\ \mathrm{Log}\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \qquad b)\ \frac{1}{z^3}\mathrm{Log}\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \qquad c)\ \frac{1}{z}\,\mathrm{Log}\left(\frac{4-z}{2+z}\right) \qquad d)\ \frac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

$$e)\ \mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad f)\ \mathrm{Log}\left(1+z^2\right) \qquad g)\ \frac{1}{z^3}\mathrm{Log}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$

42. Sea la función

$$f(z) = \frac{z-1}{z^3+3z^2-z-3}$$

a) Desarrolle $f(z)$ en serie de Laurent válida para $1 < |z| < 3$
b) Desarrolle $f(z)$ en serie de Laurent válida para $0 < |1+z| < 2$

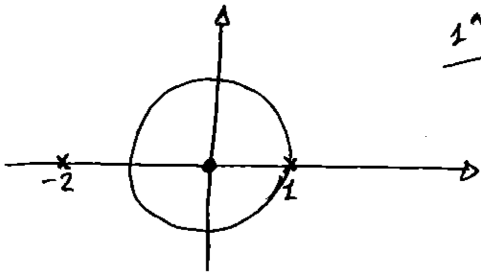
simplyjarod.com

Ej 40:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z-2}$$

holomorfa en todo z menos donde se anula el denom

$$z^2+z-2 = (z-1)(z+2)$$



1^a corona

$r_1 = 0, \quad r_2 = 1 \; : \quad 0 \leq |z| < 1$

$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+2} = \frac{a(z+2)+b(z-1)}{(z-1)(z+2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a-b=1 \\ a+b=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = -\frac{1}{3} \\ a = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$f(z) = \frac{1}{3(z-1)} - \frac{1}{3(z+2)}$$

$|z|<1 \qquad \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{-1}{1-z} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \;, \; |z|<1$

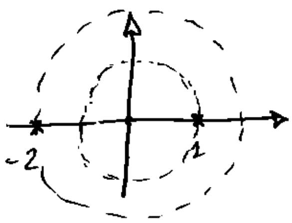
$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{z}{2}+1\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{-z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n \;; \; \left|\frac{-z}{2}\right| < 1$$

$$f(z) = \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n \;; \; |z|<1$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n$$

2^a corona

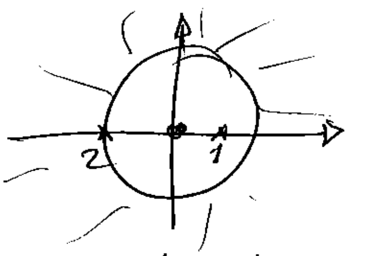
$r_1 = 1 \;, \; r_2 = 2 \; : \quad 1 < |z| < 2$



$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$$

3^a corona

$r_1 = 2 \qquad 2 < |z|$



$$\frac{1}{z+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,2^{n-1}}{z^n}$$

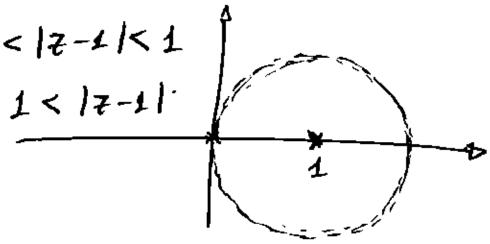
$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n 2^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}$$

Ej. 43

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2 z}$$

$0 < |z-1| < 1$

$1 < |z-1|$



$z_0 = 1$

singularidades en $z = 1$, $z = 0 \hookrightarrow$ polo simple (orden 1)

$\hookrightarrow$ polo doble (orden 2)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n , \quad |z-1| < 1$$

$$e^z = e^{1+(z-1)} = e^1 \cdot e^{z-1} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

$$f(z) = \frac{e}{(z-1)^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{producto} \\ \text{Cauchy} \\ \text{series} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (z-1)^n = \left\{ \begin{array}{l} a_k = \frac{1}{k!} \\ b_{n-k} = (-1)^{n-k} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right) (z-1)^n =$$

$$= e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right) (z-1)^{n-2}$$

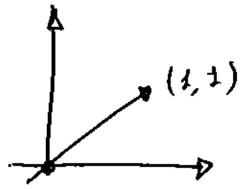
simplyjarod.com

Tema 3: Integración $\mathbb{C}$

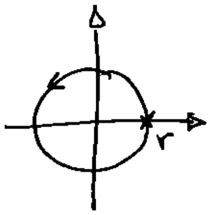
Contorno:
curva que admite la parametrización.

$$z(t) = x(t) + j\,y(t), \quad t \in [a, b]$$

Ej:



$z(t) = t + jt, \quad t \in [0,1]$



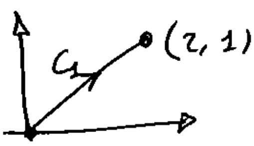
$z(t) = r e^{jt} = r(\cos(t) + j\,\mathrm{sen}(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$

Integral de contorno compleja

Sea la curva $C: z(t) = x(t) + j\,y(t), \ t \in [a,b]$
un contorno contenido en $D \in \mathbb{C}$
Sea $f: D \to \mathbb{C}, \ D \in \mathbb{C}; \ f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$
una función definida a trozos en la curva C

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)] \cdot z'(t)\,dt$$

Ej: $I = \int_{C_1} z^2\,dz$;



$C_1: z(t) = 2t + jt, \ t \in [0,1]$

$$I = \int_{C_1} z^2 dz = \int_0^1 (2t+jt)^2 (2+j)\,dt = \int_0^1 (2 + j11)\,t^2\,dt = \frac{2}{3} + j\,\frac{11}{3}$$

Propiedades:

$\to \int_C f(z) + g(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

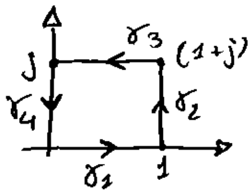
$\to \int_C k\,f(z)\,dz = k \int_C f(z)\,dz, \quad \forall k \in \mathbb{C}$

simplyjarod.com

$$\rightarrow \int_{C_1 \cup C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

$$\rightarrow \left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq \int_C |f(z)| \cdot |dz|$$

Ej: $I = \int_\gamma \pi e^{\pi \bar{z}}\,dz$,



$$\begin{cases} \gamma_1 \Rightarrow z(t) = t \ ; \ t \in [0,1] \\ \gamma_2 \Rightarrow z(t) = 1 + jt \ ; \ t \in [0,1] \\ \gamma_3 \Rightarrow z(t) = (1-t) + j \quad '' \\ \gamma_4 \Rightarrow z(t) = j(1-t) \quad '' \end{cases}$$

$$I = I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2} + I_{\gamma_3} + I_{\gamma_4}$$

$$I_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} \pi e^{\pi \bar{z}}\,dz = \int_0^1 \pi e^{\pi t}\,dt = e^{\pi} - 1$$

$$I_{\gamma_2} = \int_{\gamma_2} \pi e^{\pi \bar{z}}\,dz = \int_0^1 \pi e^{\pi} e^{-j\pi t} j\,dt = 2e^{\pi}$$

$$I_{\gamma_3} = \int_{\gamma_3} \pi e^{\pi \bar{z}}\,dz = -\int_0^1 \pi e^{\pi} e^{-t\pi} e^{-j\pi}\,dt = e^{\pi} - 1$$

$$I_{\gamma_4} = \int_{\gamma_4} \pi e^{\pi \bar{z}}\,dz = -\int_0^1 \pi e^{-\pi j} e^{+\pi j t} j\,dt = -2$$

$$I = (e^{\pi} - 1) + (2e^{\pi}) + (e^{\pi} - 1) - 2 = 4(e^{\pi} - 1)$$

Teorema de Cauchy (- Goursat) en dominios s.c.

Si D es un dominio simplemente conexo (sin agujeros) y $f(z)$ es una función holomorfa en D

Si C es un contorno simple cerrado contenido en D:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u\,dx - v\,dy + j\oint_C v\,dx + u\,dy = 0 + j0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = u + jv \\ dz = dx + j\,dy \end{array}\right\}$$

simplyjarod.com

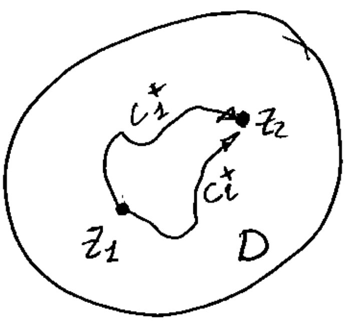
Teorema de Cauchy(-Goursat) en dominios m.c.

Si $f(z)$ es una función holomorfa en un dominio multiplemente conexo D y en su frontera $\Gamma = C_1 \cup \dots \cup C_n$ siendo C_i, $i = 1, 2, \dots, n$ contornos simples cerrados sin puntos comunes, contenidos en el contorno simple cerrado C, se verifica:

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,dz$$

Consecuencia del T. Cauchy en dominios s.c.

Si $f(z)$ es holomorfa en D (s.c.), z_1 y z_2 dos puntos de D y C_1^+ y C_2^+ dos contornos contenidos en D que unen puntos z_1 y z_2 en el sentido de z_1 a z_2:



$$\int_{C_1^+} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{C_2^-} f(z)\,dz}_{-\int_{C_2^+} f(z)\,dz} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{C_1^+} f(z)\,dz = \int_{C_2^+} f(z)\,dz$$

Teorema de la Primitiva

Si $f(z) = u + jv$ es holomorfa en D (s.c.) $z_0, z \in D$, siendo $z_0 = x_0 + jy_0$ un punto fijo y $z = x + jy$ un punto variable

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz \quad \text{holomorfa en D;} \quad g'(z) = f(z)$$

$$\rightarrow g(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u\,dx - v\,dy + j\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v\,dx + u\,dy =$$

$$= U(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} + j\,V(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} = \underbrace{\underbrace{U(x,y) + j\,V(x,y)}_{\text{holomorfa}} + cte}_{\text{holomorfa}}$$

$$\rightarrow g'(z) = U_x + j\,V_x = u + jv = f(z)$$

simplyjarod.com

En general, será función primitiva de $f(z)$ cualquier función de la forma:

$$\phi(z) = g(z) + cte = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz + cte$$

para $z = z_0$:

$$\phi(z_0) = \int_{z_0}^{z} \cancel{f(z)} + cte \Rightarrow cte = \phi(z_0)$$

Regla de Barrow: $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \phi(z) - \phi(z_0)$

Función logaritmo:

$$w = \ln(z) = \ln_{\mathbb{R}}(|z|) + j\arg(z) =$$

$$= \ln_{\mathbb{R}}|z| + j(\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha < \mathrm{Arg}(z) \leq \alpha + 2\pi,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Ramas de la función $w = \ln(z)$:

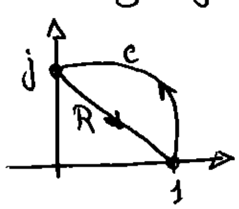
$k = 0$ y α = fijo

Rama principal: usualmente $\alpha = -\pi$

$$w = \ln(z) = \ln_{\mathbb{R}}(|z|) + j\,\mathrm{Arg}(z)\ ;\ -\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$$

Ej: $\int_1^j Ln(z)\,dz$, $Ln(z) = Ln_{\mathbb{R}}(|z|) + j\mathrm{Arg}(z)$, $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$

a lo largo de la recta que une 1 y j y por la circunferencia goniométrica.



$$\oint_{RUC} Ln(z)\,dz = \{\text{Cauchy}\} = 0$$

$$-\int_{\overrightarrow{j,1}} = \int_{\overset{\frown}{1,j}} \longrightarrow \int_{\overrightarrow{1,j}} = \int_{\overset{\frown}{1,j}} = \int_1^j Ln(z)\,dz = P\Big|_1^j$$

$$P = z\,Ln(z) - z\Big|_1^j = j\,Ln(j) - j - Ln(1) + 1 = -\frac{\pi}{2} - j + 1$$

P = función primitiva

simplyjarod.com

Fórmula de la integral de Cauchy

Si $f(z)$ es holomorfa en D (s.c.)
C es cualquier contorno simple cerrado contenido en D
y recorrido en sentido positivo.
Para todo z_0 interior a C:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

~~Ej~~: $I = \oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+j)}\, dz$

1) C: $|z| = 2$

$$I = \oint_C \frac{\frac{z}{9-z^2}}{z+j} = 2\pi j \left.\frac{z}{9-z^2}\right|_{z=-j} = \frac{\pi}{5}$$

$$f(z) = \frac{z}{9-z^2}, \quad z_0 = -j$$

2) C: $|z-3| = 1$

$$I = \oint_C \frac{\frac{z}{(z+3)(z+j)}}{z-3}\, dz = 2\pi j \left.\frac{z}{(z+3)(z+j)}\right|_{z=3} = \frac{\pi}{10}(1+3j)$$

$$f(z) = \frac{z}{(z+3)(z+j)}, \quad z_0 = 3$$

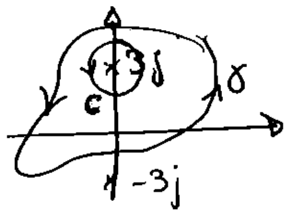
Derivadas de una función holomorfa:

Si $f(z)$ holomorfa en D (s.c.)
C es cualquier contorno simple cerrado contenido en D
y recorrido positivo
Para todo z_0 interior a C, $f(z)$ admite derivadas de todos los órdenes que son también holomorfas:

$$f^{(n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{N}$$

simplyjarod.com

~~Ej:~~ $\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+9}$; $\gamma =$ cualquier contorno simple cerrado tal que $3j$ esté en su interior y $-3j$ en su exterior



$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{A}{z+j3} + \frac{B}{z-j3}$$

$$A = -B = \frac{-1}{6j}$$

$$I = \oint_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = \frac{1}{6j}\oint_\gamma \frac{dz}{z-3j} - \cancel{\frac{1}{6j}\oint_\gamma \frac{dz}{z+3j}} = \{\text{Cauchy d.c.}\} =$$

0 (Cauchy s.c.)

$$= \frac{1}{6j}\oint_C \frac{dz}{z-3j} \quad , \quad C: |z-3j| = 1 \rightarrow z-3j = e^{jt}, \; t \in [0, 2\pi]$$

$$= \frac{1}{6j}\int_0^{2\pi} \frac{j e^{jt} dt}{e^{jt}} = \frac{\pi}{3}$$

~~Ej:~~ a) $I_1 = \int_\gamma e^{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{8}\right)} \operatorname{ch}\left(j\frac{z}{8}\right) dz$; $\gamma(t) = t\left(2 - \operatorname{sen}(4\pi t)\right) e^{jt}, \; t \in [0, 2\pi]$

$$f(z) = e^{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{8}\right)} \operatorname{ch}\left(j\frac{z}{8}\right) = e^{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{8}\right)} \cos\left(\frac{z}{8}\right)$$: función entera

primitiva $g(z) = 8e^{\operatorname{sen}(z/8)}$

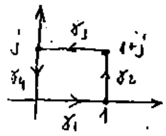
$$I_1 = \int_\gamma f(z)\, dz = g(\gamma(t))\Big|_0^{2\pi} = 8(e-1)$$

b) $$I_2 = \oint_C \frac{|z|^2}{z} dz = \oint_C \bar{z}\, dz = \{z(t) = \sqrt{2}\, e^{jt}\} =$$

$$= \int_0^{2} \sqrt{2}\, e^{-jt} \left(j\sqrt{2}\, e^{j2}\right) dt = -4\pi j$$

simplyjarad.com

¿ $I=\int_{\gamma}\pi e^{\pi\bar z}dz$, siendo γ el cuadrado de vértices los ptos $z_0=0 \wedge z_1=1 \wedge z_2=1+j \wedge z_3=j$?



$\gamma_1: z(t)=t \, , \; t\in[0,1]$

$\gamma_2: z(t)=1+jt \, , \; t\in[0,1]$

$\gamma_3: z(t)=(1-t)+j \, , \; t\in[0,1]$

$\gamma_4: z(t)=j(1-t) \, , \; t\in[0,1]$

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4$$

$$I_1=\int_{\gamma_1}\pi e^{\pi\bar z}dz=\int_0^1\pi e^{\pi t}dt=e^{\pi}-1$$

$$I_2=\int_{\gamma_2}\pi e^{\pi\bar z}dz=\int_0^1\pi e^{\pi}e^{-j\pi t}j\,dt=2e^{\pi}$$

$$I_3=\int_{\gamma_3}\pi e^{\pi\bar z}dz=\int_0^1\pi e^{\pi(1-t)}e^{-j\pi}(-dt)=e^{\pi}-1$$

$$I_4=\int_{\gamma_4}\pi e^{\pi\bar z}dz=\int_0^1\pi e^{-j\pi(1-t)}(-j\,dt)=-2$$

$$I=4(e^{\pi}-1)$$

Calcular:

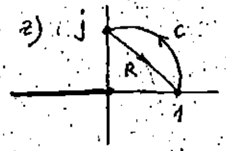
$\int_1^j \mathrm{Ln}\,z\,dz$, $\mathrm{Ln}\,z=\mathrm{Ln}|z|+j\,\mathrm{Arg}\,z$, $-\pi<\mathrm{Arg}\,z<\pi$

a lo largo del segmento que une los ptos 1 con j

Realizar el mismo cálculo a lo largo del arco de la circunferencia unidad que une 1 con j.

¿Porque son iguales ambos resultados?

2)



$$\oint_{Rug}\mathrm{Ln}\,z\,dz=0 \;;\qquad \underset{\text{T. de C.}}{\uparrow}$$

$$-\int_{\overrightarrow{j,1}}=\int_{\overset{\frown}{1,j}} \rightarrow \int_{\overrightarrow{1,j}}=\int_{\overset{\frown}{1,j}}$$

$$\int_{\overrightarrow{1,j}}=\int_{\overset{\frown}{1,j}}=\int_1^j \mathrm{Ln}\,z\,dz=\text{func. primitiva de la func. subintegral}\Big|_1^j$$

$$\text{func. primitiva de la func. subinteg.}=\int \underbrace{\mathrm{Ln}\,z}_{u}\,\underbrace{dz}_{dv}=z\,\mathrm{Ln}\,z-z$$

$$\int_{\overrightarrow{1,j}}=\int_{\overset{\frown}{1,j}}=z\,\mathrm{Ln}\,z-z\Big|_1^j=j\,\mathrm{Ln}\,j-j-\mathrm{Ln}\,1+1=$$

$$=j(\underbrace{\mathrm{Ln}\,1}_{0}+j\tfrac{\pi}{2})-j-(\underbrace{\mathrm{Ln}\,1}_{0}+j0)+1=-\frac{\pi}{2}-j+1$$

Ej: $$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi j}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$n=0,1,2,\ldots$

↑

(F. de la I. de C.)

ejem

¿ $\oint_c\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$?

$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

C: contorno simple cerrado que incluye a z_0 en su interior

$f(z)=1$

$n=0$: $\oint_c\frac{dz}{z-z_0}=2\pi j\,\underbrace{f(z_0)}_{1}=2\pi j$

$n=1,2,\ldots$: $\oint_c\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{2\pi j}{n!}\,f^{(n)}(z_0)=0$

$f^{(n)}(z_0)=0$ pq $f=1$

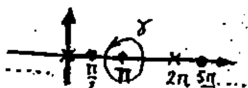
Ej ¿ $\oint_\gamma\frac{dz}{(z-\pi)^2(1-\cos z-\operatorname{sen} z)}$, $\gamma: |z-\pi|=1$?

$f(z)=\frac{1}{1-\cos z-\operatorname{sen} z}$ es holomorfa salvo en los ptos : $1=\cos z+\operatorname{sen} z$

$$1=\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}+\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$$

$$(1+j)e^{2jz}-2j\,e^{jz}+(-1+j)=0$$

$$e^{jz}=\begin{cases}1\\ j\end{cases}$$



⇒ Que los ptos singulares de $f(z)$ son:

$jz=\ln(1)=j\,2k\pi \longrightarrow z=2k\pi$

$jz=\ln(j)=j(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\longrightarrow z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

⇓

$f(z)$ es una func. holomorfa dentro y sobre γ

Apl. la fórmula de la derivada 1ª:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \,,\quad z_0=\pi \,,\quad f(z)=\frac{1}{1-\cos z-\operatorname{sen} z}$$

$$I=2\pi j\,\underbrace{f'(z=\pi)}_{-1/4}=-\frac{j\pi}{2}$$

simplyjarod.com

Ej: $I = \oint_c \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3}\,dz$

1) $C: |z| = 2$

$$I = \oint_c \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi j}{2!} f''(z_0) = \frac{2\pi j}{2!} 6 = 6\pi j$$

2) $C: |z| = 1/2$

$$I = \oint_c \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3}\,dz = \{\text{Cauchy}\} = 0$$

Ej: $\oint_\gamma \frac{\operatorname{sen}(e^z)}{z^2}\,dz$; γ: elipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ positivo

$f(z) = \operatorname{sen}(e^z)$: holomorfa dentro y sobre γ (entera)

γ: contorno simple cerrado que contiene a $z=0$

$$\oint_\gamma \frac{\operatorname{sen}(e^z)}{z^2}\,dz = \frac{2\pi j}{1!} f'(z)\Big]_{z=0} = 2\pi j \frac{d}{dz}\left(\operatorname{sen}(e^z)\right)\Big]_{z=0} = 2\pi j \cos(1)$$

Ej: $\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+9}$, γ: cualquier contorno simple cerrado que no pasa por $\pm 3j$ (positivo)

1) $\pm 3j$ exteriores a γ

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = \{\text{Cauchy s.c.}\} = 0$$

2) $+3j$ interior y $-3j$ exterior

$$I_2 = \oint_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = \oint \frac{\frac{1}{z+3j}}{z-3j}\,dz \underset{\uparrow}{=} 2\pi j \frac{1}{z+3j}\Big]_{z=3j} = \frac{\pi}{3}$$

integral de Cauchy

3) $-3j$ interior y $+3j$ exterior

$$I_3 = \oint_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = \oint \frac{\frac{1}{z-3j}}{z+3j}\,dz = 2\pi j \frac{1}{z-3j}\Big]_{z=-3j} = \frac{-\pi}{3}$$

4) $\pm 3j$ interiores a γ

$$\oint \frac{dz}{z^2+9} \underset{\uparrow}{=} \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+9} + \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+9} = I_2 + I_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$$

(Cauchy t.c.)

simplyjarod.com

Ej: $\oint_\gamma \frac{sen(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$, $\gamma: |z|^2 - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 = a$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$

$|z_0|^2 > -a$

$$|z|^2 - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 = a$$

$$z\bar{z} - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 = \bar{z}(z-z_0) - \bar{z}_0(z-z_0) - \bar{z}_0 z_0 =$$

$$= (\bar{z}-\bar{z}_0)(z-z_0) - \bar{z}_0 z_0 = |z-z_0|^2 - |z_0|^2 = a$$

$|z-z_0|^2 = a + |z_0|^2 > 0 \Rightarrow$ circunf. centro z_0 y $R = \sqrt{a+|z_0|^2}$

$f(z) = sen(z)$: holomorfa en $\mathbb{C} \equiv$ entera

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

$$\oint \frac{sen(z)}{(z-z_0)^3}\,dz = \frac{2\pi j}{2!}\underbrace{f''(z_0)}_{-sen(z_0)} = -j\pi\, sen(z_0)$$

Ej: Obtener la Serie de Laurent en un entorno perforado en $z_0 = \pi$ de la función $f(z) = \frac{1}{z(z-\pi)^5}$ y calcular: $I_1 = \oint_\gamma \frac{(z-\pi)^{12}}{z}\,dz$ y $I_2 = \oint_\gamma \frac{(z-\pi)^{-14}}{z}\,dz$

siendo $\gamma: |z-\pi| = 1$ recorrida positiva

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\pi + z - \pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-\pi}{\pi}} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-\pi}{\pi}\right)^n$$

$$\left|\frac{z-\pi}{\pi}\right| < 1 \Rightarrow |z-\pi| < \pi$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-\pi)^5}\cdot\frac{1}{z} = \sum_{n=-5}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-\pi)^n}{\pi^{n+6}}, \quad 0 < |z-\pi| < \pi$$

Laurent: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\pi)^n$, $a_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\pi)^{n+1}}\,dz$

$n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

$\gamma \subset$ corona de convergencia

simplyjarod.com

$$I_1 = \oint_\gamma \frac{(z-\pi)^{12}}{z}\,dz = \oint \frac{1}{z(z-\pi)^5}\,\frac{dz}{(z-\pi)^{-17}} = 2\pi j\, a_{-18} = 0$$

$n+1=-17 \Rightarrow n=-18$

$$I_2 = \oint_\gamma \frac{(z-\pi)^{-14}}{z}\,dz = \oint \frac{1}{z(z-\pi)^5}\,\frac{dz}{(z-\pi)^{9}} = 2\pi j\, a_{+8} = \frac{-2j}{\pi^{13}}$$

$n+1=9 \Rightarrow n=8$

Residuo en un punto singular aislado $z_0 \in \mathbb{C}$

$f(z) =$ función holomorfa $\forall z$; $0 < |z-z_0| < R$

Entonces: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

$$a_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma: \{ z\in\mathbb{C} ;\ |z-z_0| = \rho,\ 0<\rho<R \}$$

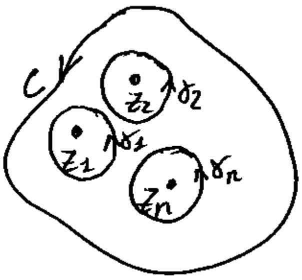
$$\text{Residuo}\{f(z), z=z_0\} \equiv \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma f(z)\,dz = a_{-1}$$

Entonces: $\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi j\,\text{Res}\{f(z), z=z_0\} = 2\pi j\, a_{-1}$

Teorema de los Residuos:

Si $f(z)$ es holomorfa dentro y sobre el contorno simple cerrado C, excepto en un número finito de puntos singulares aislados z_i $(i=1,2,3\dots,n)$ contenidos en C:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} \text{Res}\{f(z), z=z_i\}$$



Tma. Cauchy – Goursat : (dominio m.c.)

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \text{Res}\{f(z), z=z_i\}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} \text{Res}\{f(z), z=z_i\}$$

simplyjarod.com

Cálculo de residuos en polos

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo de orden $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$, de la función $f(z)$; entonces, existe un entorno perforado ($\equiv$ reducido) de z_0: $0 < |z - z_0| < R$ en el que $f(z)$ admite un desarrollo en S. Laurent:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \; ; \; a_{-k} \neq 0$$

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0 (z-z_0)^k + \dots$$

derivando $k-1$ veces:

$$\frac{d^{(k-1)}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]}{dz^{k-1}} = (k-1)!\, a_{-1} + k(k-1)\dots 2 a_0 (z-z_0) + \dots$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{(k-1)}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]}{dz^{k-1}} = (k-1)!\, a_{-1}$$

$$\text{Res}\{f(z), z = z_0\} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(k-1)}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]}{dz^{k-1}}$$

caso particular:

si z_0 es un polo simple $\Rightarrow k = 1 \Rightarrow$

$$\text{Res}\{f(z), z = z_0\} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Ej Residuos de $f(z)$ en $z = j$ y $z = 1$?

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 (1+z^2)}$$

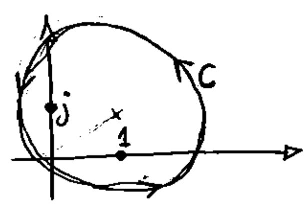
$z = j$ es un polo simple

$$\text{Res}\{f(z), z = j\} = \lim_{z \to j} (z-j) f(z) = \lim_{z \to j} \frac{1}{(z-1)^2 (z+j)} = \frac{1}{4}$$

$z = 1$ es un polo doble

$$\text{Res}\{f(z), z = 1\} = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2 f(z)\right\} = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{1+z^2}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi j \sum \text{Res} = 2\pi j \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \pi j \frac{3}{2} \; ;$$



simplyjarod.com

Ej: $\oint_C \frac{\text{sen } z}{z^4} dz \quad , \quad C: |z| = 1$

$$\frac{\text{sen}(z)}{z^4} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z - \dots$$

$z = 0 \Rightarrow$ polo de orden 3

$$\oint \frac{\text{sen}(z)}{z^4} dz = 2\pi j \cdot \text{Res}\left\{ \frac{\text{sen}(z)}{z^4}, z=0 \right\} = \frac{-\pi j}{3}$$

<u>otra forma:</u>

$$\oint \frac{\text{sen}(z)}{z^4} dz = \frac{2\pi j}{3!} \text{sen}^{(3}(z) \Big]_{z=0} = \frac{-\pi}{3} j$$

Ej: Dada:

$$\dots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \dots$$

a) Región de convergencia? Función suma $S(z)$? ptos sing.?

$$S_1(z) = \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1/z - 0}{1 - 1/z} = \frac{1}{z-1} \; ; |z| > 1$$

$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

$$S_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1/2 - 0}{1 - z/2} = \frac{1}{2-z} \; ; |z| < 2$$

$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2$

$$S(z) = S_1(z) + S_2(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)} \; ; \; 1 < |z| < 2$$

ptos singulares: $z = 1, \; z = 2$

$\lim_{z \to 1} (z-1) S(z) = 1 \longrightarrow z = 1$ polo simple

$\lim_{z \to 2} (z-2) S(z) = -1 \longrightarrow z = 2$ polo simple

b) $I = \oint \frac{S(z)}{z^6} dz \; , \; C: |z| = \frac{3}{2}$?

simplyjarod.com

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad ; \quad r < |z-z_0| < R$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma \frac{S(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad , \quad \gamma \subset \text{corona convergencia}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

en nuestro caso:

$$S(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)} \; , \; z_0 = 0 \; , \; r = 1 \; , \; R = 2 \quad \gamma : |z| = \frac{3}{2}$$

$$I = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{S(z)}{z^6} dz = 2\pi j\, a_5 \quad ; \quad a_5 = \frac{1}{2^6} \quad \Rightarrow I = j\frac{\pi}{2^5}$$

~~another way:~~

$$I = \oint_{|z|=3/2} \frac{S(z)}{z^6} dz = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{\underbrace{z^6 (z-1)(2-z)}_{f(z)}} = \{\text{Tma res}\} =$$

$$= 2\pi j \left[\text{Res}\{f(z), z=0\} + \text{Res}\{f(z), z=1\} \right]$$

$\rightarrow$ $\text{Res}\{f(z), z=0\}$; $f(z) = \frac{1}{z^6} \cdot S(z)$

$$f(z) = \frac{1}{z^6 (z-1)(2-z)} = \frac{1}{z^6} \left(\frac{-1}{1-z} + \frac{1/2}{1-z/2} \right) =$$

$$= \underset{|z|>0}{\frac{1}{z^6}} \Big[-\big(\underset{|z<1|}{1 + z + \dots + z^n + \dots}\big) + \big(\underset{|z|<2}{\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \dots}\big) \Big]$$

$$a_{-1} = -1 + \frac{1}{2^6} = \text{Res}\{f(z), z=0\}$$

$$\text{Res}\{f(z), z=1\} \underset{\text{polo simple}}{=} \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = 1$$

$$I = 2\pi j \left(1 - 1 + \frac{1}{2^6}\right) = j\frac{\pi}{2^5}$$

simplyjarod.com

Transformada unilateral de Laplace

Sea $f(t): [0,\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

para aquellos valores $s \in \mathbb{C}$ para los que la integral converja

Teorema: (condiciones suficientes para la existencia de T.L.)

Si $f(t)$ es continua a trozos en todo intervalo finito de la semirrecta $t \geq 0$ y de orden exponencial α

Entonces, $F(s)$ es una función holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} s > \alpha$ (semiplano de convergencia)

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{\text{V.P.}}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds \quad \left(\begin{array}{c}\text{integral}\\ \text{de la}\\ \text{inversión}\end{array}\right)$$

Integrales impropias de 1ª especie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,dx$$

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \int_0^R f(x)\,dx \right]$$

$$\exists \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \exists\, \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

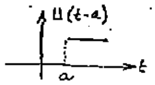
V.P. = Valor Principal

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

1

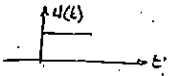
1.- $\mathcal{L}[u(t-a)]$, $u(t-a)$: func. escalón unidad

$$u(t-a)=\begin{cases}0 , & t<a\\ 1 , & t\geq a\end{cases} \qquad a\in\mathbb{R}, a>0$$



$$\mathcal{L}[u(t-a)](s)=\int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt=\int_a^\infty e^{-st}dt=\frac{e^{-as}}{s} \qquad \mathrm{Re}\, s>0$$

• Caso particular $a=0$



$$\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s} , \ \mathrm{Re}\, s>0$$

2.- $\mathcal{L}[Ke^{zt}]$, $K\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[Ke^{zt}]:=\int_0^\infty Ke^{zt}e^{-st}dt=K\int_0^\infty e^{-(s-z)t}dt=\frac{K}{s-z} \qquad \mathrm{Re}\, s>\mathrm{Re}\, z.$$

3.- $\mathcal{L}[t^a]$, $a\in\mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[t^a]:=\int_0^\infty t^a e^{-st}dt \ \begin{Bmatrix} st=x\\ dt=dx/s\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty x^a e^{-x}dx=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty x^{(a+1)-1}e^{-x}dx=$$

$$=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} , \ a+1>0 , \ \mathrm{Re}\, s>0$$

• Caso particular $a=n$: $n=0,1,2,\ldots$

$$\mathcal{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\Rightarrow \mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}) \qquad \mathrm{Re}\, s>0$$

4.- Transf. de Laplace de funcs periódicas

2

hip.- $f(t)$: periódica de periodo $T>0$ $\Rightarrow f(t)=f(t+T)$, $\forall t\geq 0$

$$\mathcal{L}[f(t)]:=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^T\cdots+\int_T^{2T}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^\infty \underbrace{\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt}_{I_n}$$

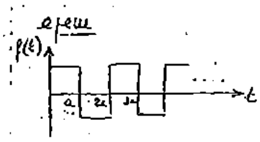
$$I_n \begin{Bmatrix} t=\tau+nT\\ dt=d\tau\end{Bmatrix} = e^{-snT}\int_0^T \underbrace{f(\tau+nT)}_{f(\tau)}e^{-s\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)]=\underbrace{\sum_{n=0}^\infty e^{-snT}}_{S.G.}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau , \quad |e^{-sT}|<1$$

$$e^{-\mathrm{Re}\, sT}<1\rightarrow \mathrm{Re}\, s>0$$

ejem



$$f(t)=\begin{cases}K , & na<t<(n+1)a\\ -K , & (n+1)a<t<(n+2)a\end{cases} \qquad a>0, \ n=0,2,4\ldots$$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2as}}\left(\int_0^a Ke^{-st}dt+\int_a^{2a}(-K)e^{-st}dt\right)=$$

$$=\frac{K}{1-e^{-2as}}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^a+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^{2a}\right)=$$

$$=\frac{K}{s}\,\frac{1-2e^{-as}+e^{-2as}}{1-e^{-2as}}=\frac{K}{s}\,\frac{(1-e^{-as})^2}{(1+e^{-as})(1-e^{-as})}=$$

$$=\frac{K}{s}\,\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}} , \quad |e^{-2as}|<1$$

PROPs DE LA TRANSF. DE LAPLACE

3

• Prop. de linealidad

$$\mathcal{L}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]=c_1\mathcal{L}[f_1(t)]+c_2\mathcal{L}[f_2(t)] \qquad \mathrm{Re}\, s>\max\{\alpha(f_1),\alpha(f_2)\}$$

ejem ¿$\mathcal{L}[\mathrm{sen}\, zt]$, $z\in\mathbb{C}$?

$$\mathcal{L}[\mathrm{sen}\, zt]=\frac{1}{2j}\{\mathcal{L}[e^{jzt}]-\mathcal{L}[e^{-jzt}]\}=$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-jz}-\frac{1}{s+jz}\right)=\frac{z}{s^2+z^2}$$

$$\mathrm{Re}\, s>\underbrace{\cancel{\mathrm{Re}}(jz)}_{-\mathrm{Im}(z)} \quad \mathrm{Re}\, s>\underbrace{\cancel{\mathrm{Re}}(-jz)}_{\mathrm{Im}(z)} \qquad \mathrm{Re}\, s>|\mathrm{Im}\, z|$$

Analogamente

$$\mathcal{L}[\cos zt]=\frac{s}{s^2+z^2} , \ \mathrm{Re}\, s>|\mathrm{Im}\, z|$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{sh}\, zt]=\frac{z}{s^2-z^2} , \ \mathrm{Re}\, s>|\mathrm{Re}\, z|$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{ch}\, zt]=\frac{s}{s^2-z^2} , \ \mathrm{Re}\, s>|\mathrm{Re}\, z|$$

• Prop. del cambio de escala

Si $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, $\mathrm{Re}\, s>\alpha \longrightarrow \mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

$a\in\mathbb{R}, a>0, \ \frac{\mathrm{Re}\, s}{a}>\alpha$

en efecto:

$$\mathcal{L}[f(at)]:=\int_0^\infty f(at)e^{-st}dt \ \{at=\tau\}=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}d\tau=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \ \frac{\mathrm{Re}\, s}{a}>\alpha$$

$\mathrm{Re}\left(\frac{s}{a}\right)>\alpha$

4

• Prop. de translación según s

Si $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, $\mathrm{Re}\, s>\alpha \longrightarrow \mathcal{L}[e^{zt}f(t)]=F(s-z)$

$z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s>\alpha+\mathrm{Re}\, z$

en efecto:

$$F(s-z):=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-z)t}dt=\int_0^\infty e^{-st}(e^{zt}f(t))dt=\mathcal{L}[e^{zt}f(t)]$$

$\mathrm{Re}(s-z)>\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\, s>\alpha+\mathrm{Re}\, z$

• Prop. de translación según t

Si $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, $\mathrm{Re}\, s>\alpha \longrightarrow \mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)]=e^{-as}F(s)$

$a\in\mathbb{R}, a>0$

$\mathrm{Re}\, s>\alpha$

en efecto:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow e^{-as}F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-s(t+a)}dt \ \{t+a=\tau\}=$$

$$=\int_a^\infty e^{-s\tau}f(\tau-a)d\tau=\int_0^a 0\cdot d\tau+$$

$$+\int_a^\infty e^{-s\tau}f(\tau-a)d\tau=\underbrace{\int_0^\infty u(\tau-a)f(\tau-a)e^{-s\tau}d\tau}_{\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)]}$$

$\mathrm{Re}(s)>\alpha$

ejem Adm. que $\mathcal{L}[\cos t]=\frac{s}{s^2+1}$, $\mathrm{Re}\, s>0$

$$\mathcal{L}[u(t-a)\cos(t-a)]=e^{-as}\frac{s}{s^2+1} , \ a>0 \qquad \mathrm{Re}\, s>0$$

simplyjarod.com

TRANSFORMADA de LAPLACE de la CONVOLUCIÓN

Si $f_1(t)=f_2(t)=0, \forall t<0$; $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$ y $\exists \mathcal{L}[f_i(t)]=F_i(s)$, $i=1,2$:

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s),\ Re\,s>\max\{\alpha(f_1),\alpha(f_2)\}$$

en efecto:

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\right)dt =$$

$$=\int_0^\infty \underset{e^{-s(t-\tau)}\cdot e^{-s\tau}}{e^{-st}}\left(\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\right)dt =$$

$$=\int_0^\infty e^{-s\tau}\left(\int_0^\infty e^{-s(t-\tau)} f_2(t-\tau)dt\right)f_1(\tau)d\tau =$$

$$\underset{t-\tau=u}{=}\int_0^\infty e^{-s\tau}\left(\int_{-\tau}^\infty e^{-su} f_2(u)du\right)f_1(\tau)d\tau =$$

$$=\int_0^\infty e^{-s\tau}\underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-su} f_2(u)du\right)}_{F_2(s),\ Re\,s>\alpha(f_2)}f_1(\tau)d\tau =$$

$$=\underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-s\tau}f_1(\tau)d\tau\right)}_{F_1(s),\ Re\,s>\alpha(f_1)}\left(F_2(s)\right) = F_1(s)\cdot F_2(s)$$

$Re\,s>\max\{\alpha(f_1),\alpha(f_2)\}$

Utilizando T. de L. resolver la ec. integral:

$$f(t)=t-\operatorname{sen}t-\int_0^t (t-x)f(x)dx$$

$$f(t)=t-\operatorname{sen}t-t*f(t)$$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[t]-\mathcal{L}[\operatorname{sen}t]-\mathcal{L}[t]\cdot\mathcal{L}[f(t)]$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2}F(s)$$

$$F(s)=\frac{1}{(s^2+1)^2}\longrightarrow\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

y como: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\operatorname{sen}x$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\int_0^t \operatorname{sen}x\,\underbrace{\operatorname{sen}(t-x)}_{\operatorname{sen}t\cos x-\cos t\operatorname{sen}x}dx =$$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}t-t\cos t)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LAS DERIVADAS

Si $f(t)$ y sus $n-1$ primeras derivadas son funcs. continuas en $[0,\infty)$ y $f^{(n)}(t)$ cumple las conds. sufs. del Teorema enunciado (es una func. continua a trozos en todo intervalo finito de la semirecta $t\geq 0$ y de orden exponencial α). Entonces:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$Re\,s>\max\{0,\alpha(f^{(n)})\}$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LAS INTEGRALES

Si $\underset{Re\,s>\alpha}{\mathcal{L}[f(t)]=F(s)}$: $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$

$Re\,s>\max\{0,\alpha(f)\}$

Resolver utilizando T. de L. el PVI:

$$x''(t)-x(t)=\frac{1}{1+e^t}\quad ;\ x(0)=x'(0)=0$$

$$\mathcal{L}[x''(t)]-\mathcal{L}[x(t)]=\mathcal{L}\left[\frac{1}{1+e^t}\right]$$

$$s^2F(s)-s\underbrace{x(0)}_{0}-\underbrace{x'(0)}_{0}-F(s)=\mathcal{L}\left[\frac{1}{1+e^t}\right]$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2-1}\cdot\mathcal{L}\left[\frac{1}{1+e^t}\right]=\mathcal{L}[\operatorname{sh}t]\cdot\mathcal{L}\left[\frac{1}{1+e^t}\right]$$

$$\Rightarrow x(t)=\operatorname{sh}t*\frac{1}{1+e^t}=\int_0^t\frac{1}{1+e^\tau}\operatorname{sh}(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{e^t}{2}\underbrace{\int_0^t\frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau}d\tau}_{I}-\frac{e^{-t}}{2}\underbrace{\int_0^t\frac{e^\tau}{1+e^\tau}d\tau}_{L_n\frac{1+e^t}{2}}$$

$$I\left\{\begin{matrix}e^\tau=u\\ d\tau=\frac{du}{u}\end{matrix}\right\}=\int_1^{e^t}\frac{du}{u^2(1+u)}=\int_1^{e^t}\left(\frac{-1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$=-e^{-t}-t+1+L\,\frac{1+e^t}{2}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}(e^t-te^t-1)+\operatorname{sh}t\cdot L_n\frac{1+e^t}{2}$$

simplyjarod.com

simplyjarod.com

Ej: $f(t) = t + \int_0^t (t-r) f(r)\, dr$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t] + \underbrace{\mathcal{L}[t * f(t)]}_{\mathcal{L}[t]\cdot\mathcal{L}[f(t)]}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} F(s) \Longrightarrow F(s)\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2-1} \Longrightarrow f(t) = sh(t)$$

Ej: Usando la T. L. resolver el PVI:

$$y''(t) + y(t) = 0 \,,\quad y(0) = A \,,\quad y'(0) = B$$

$$\mathcal{L}[y''(t)] + \mathcal{L}[y(t)] = 0$$

$$s^2 F(s) - s y(0) - y'(0) + F(s) = 0$$

$$F(s) = \frac{As+B}{s^2+1} = \frac{As}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = A\cos(t) + B\,\mathrm{sen}(t)$$

Ej: $\mathcal{L}[\mathrm{sen}^2(zt)]$, $z \in \mathbb{C}$

$$f(t) = \mathrm{sen}^2(zt) \,,\quad f'(t) = 2z\,\mathrm{sen}(zt)\cos(zt) = z\,\mathrm{sen}(2zt)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - \cancel{f(0)}^{\,0}$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \mathcal{L}[z\,\mathrm{sen}(2zt)] = z\mathcal{L}[\mathrm{sen}(2zt)] = z\frac{2z}{s^2+4z^2} = \frac{2z^2}{s^2+4z^2}$$

sustituyendo:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}\,\frac{2z^2}{s^2+4z^2} = \frac{2z^2}{s(s^2+4z^2)} \,,\quad Re(s) > |Im(2z)|$$

simplyjarod.com

Transformada de Laplace de las integrales

si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(r)\,dr\right] = \frac{F(s)}{s}, \quad Re(s) > \max\{0, \alpha(f)\}$$

~~Ej~~ $f(t) = 2t + e^t - \int_0^t f(u)\,du$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s-1} - \mathcal{L}\left[\cancel{\int_0^t f(u)\,du}\right]$$

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[f(t)]\cdot\left(\frac{s+1}{s}\right) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s(s+1)} + \frac{s}{s^2-1}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1}\right]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)\right] + ch(t) = 2(1 - e^{-t}) + ch(t)$$

Derivadas de la T. L. de una función

si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$F^{(n}(s) = \mathcal{L}\left[(-1)^n t^n f(t)\right], \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n}(s), \quad n \in \mathbb{N}$$

simplyjarod.com

Integral de la T. L. de una función

si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ y $\int_s^\infty F(s)ds < \infty$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

Ej: $\mathcal{L}\left[\frac{sen(t)}{t}\right]$

$$\mathcal{L}(sen(t)) = \frac{1}{s^2+1}, \quad Re(s)>0$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{sen(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1} = arctg(s)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - arctg(s)$$

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-t}sen(t)}{t}dt = \mathcal{L}\left[\frac{sen(t)}{t}\Big|_{s=1}\right] = \ldots ?? \text{ puta}$$

Fórmula de la inversión:

Si $F(s)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ excepto un número finito de puntos singulares aislados $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ tal que $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ y $\alpha = \max\{Re(s_i)\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} V.P. \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds = \sum_{i=1}^{n} Res\{F(s)\, e^{st}, s = s_i\}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \quad Re(s) > \alpha = \max\{Re(s_i)\}$$

TEOREMA

Si $F(s)$ es una func. holomorfa en todo el plano complejo, excepto en un nº finito de ptos singulares aislados $\{s_1, s_2, \dots s_n\}$ tal que $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ y $\alpha = \max\{Re\, s_i\}$, $i = 1, 2, \dots n$, entonces:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} V.P. \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{i=1}^{n} Res\{F(s)e^{st}, s = s_i\} \quad \forall t \geq 0, \gamma > \alpha$$

y esta func. verifica que:

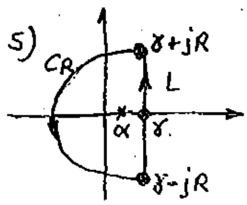
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \quad Re\, s > \alpha := \max_{i=1,2,\dots n}\{Re\, s_i\}$$

en efecto:

Sea C_R una semicircunferencia de centro γ y radio R:

$$C_R: \ s = \gamma + Re^{j\theta}, \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

y consideremos el contorno simple cerrado de la fig.- : $L \cup C_R$



"escogemos R suficientemente grande de forma que todos los ptos $s_1, s_2, \dots s_n$ queden dentro de $L \cup C_R$"

$$\oint_{L\cup C_R} F(s) e^{st} ds = \int_{\gamma - jR}^{\gamma + jR} F(s) e^{st} ds + \int_{C_R} F(s) e^{st} ds = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} Res\{F(s) e^{st}, s = s_i\}$$

tomando límites cuando $R \to \infty$:

$$V.P. \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s) e^{st} ds + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(s) e^{st} ds = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} Res\{F(s) e^{st}, s = s_i\}$$

ahora bien:

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(s) e^{st} ds = 0$$

$$\Rightarrow V.P. \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s) e^{st} ds = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} Res\{F(s) e^{st}, s = s_i\}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} V.P. \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{i=1}^{n} Res\{F(s) e^{st}, s = s_i\}$$

c.q.d.

Ej ¿$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2(s^2+3s-10)}$?

indicando la abscisa de convergencia

$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ y $F(s) = 3$ ptos sing. $< \infty$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{3} Res\{F(s) e^{st}, s = s_i\}$$

Ptos sings de $F(s)$: $s = -1$ (polo doble)
$s = 2$, $s = -5$ (polos simples)

$$Res\{F(s)e^{st}, s = -1\} = \frac{1}{1!} \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 F(s) e^{st}\right] = \frac{1}{12} e^{-t}\left(t - \frac{11}{12}\right)$$

$$Res\{F(s)e^{st}, s = -5\} = \lim_{s\to -5} \cancel{(s+5)} \frac{s e^{st}}{(s+1)^2\cancel{(s+5)}(s-2)} = \frac{5 e^{-5t}}{112}$$

Analogamente: $Res\{F(s)e^{st}, s = 2\} = \dfrac{2e^{2t}}{63}$

Sustituyendo: $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{12}\left(t - \dfrac{11}{12}\right) + \dfrac{5e^{-5t}}{112} + \dfrac{2e^{2t}}{63}$

$F(s)$ es holomorfa $\forall s / Re\, s > 2 \Rightarrow$ la abscisa de convergencia es $\alpha = 2$

Ej Resolver $\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 2y(t) \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$

$\mathcal{L}[x(t)] := X(s) \qquad \mathcal{L}[y(t)] := Y(s)$

Tomando transfs.-

$$\begin{cases} s X(s) - \underbrace{x(0)}_{1} = -Y(s) \\ s Y(s) - \underbrace{y(0)}_{1} = 2X(s) + 2Y(s) \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{s-3}{\underbrace{s^2-2s+2}_{(s-1)^2+1}} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} - 2\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^t \cos t - 2e^t \operatorname{sen} t$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2-2s+2} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{3}{(s-1)^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^t \cos t + 3e^t \operatorname{sen} t$$

simplyjarod.com

Utilizando T. de L., resolver el PVI:

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = t^3 e^{2t}$$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=-1,\quad y''(0)=-2$$

$$\mathcal{L}[y'''] - 6\mathcal{L}[y''] + 12\mathcal{L}[y'] - 8\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t^3e^{2t}]$$

$$s^3F(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - 6\left(s^2F(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 12\left(sF(s)-y(0)\right) - 8F(s) = \mathcal{L}[t^3e^{2t}]$$

$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4} \longrightarrow \mathcal{L}[t^3e^{2t}] \underset{\uparrow}{=} \frac{3!}{(s-2)^4}$$

prop. de trasl. según s

Sustituyendo:

$$F(s)\underbrace{(s^3-6s^2+12s-8)}_{(s-2)^3} - s^2+7s-16 = \frac{6}{(s-2)^4}$$

$$F(s) = \frac{6}{(s-2)^7} + \frac{s^2-7s+16}{(s-2)^3}$$

$$\frac{s^2-7s+16}{(s-2)^3} = \frac{A}{(s-2)^3} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s-2)}$$

$$A=6,\quad B=-3,\quad C=1$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{6}{(s-2)^7} + \frac{6}{(s-2)^3} - \frac{3}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-2}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!},\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{6}{6!}t^6e^{2t} + \frac{6}{2!}t^2e^{2t} - 3te^{2t} + e^{2t} =$$

$$= e^{2t}\left(\frac{t^6}{120} + 3t^2 - 3t + 1\right)$$

¿Calcular $I = \oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+j)}\,dz$, $C: |z-3|=1$?

1º) Apl. el T. de los Residuos

2º) Apl. la F. de la Integral de Cauchy

1º) $$I = -\oint_C \overbrace{\frac{z}{(z^2-9)(z+j)}}^{f(z)}dz = -2\pi j\ \text{Res}\{f(z), z=3\}$$

$$\text{Res}\{f(z), z=3\} = \lim_{z\to 3} \cancel{(z-3)}\frac{z}{\cancel{(z-3)}(z+3)(z+j)} = \frac{1}{2(3+j)}$$

$$I = -2\pi j\frac{1}{2(3+j)} = -\frac{\pi j}{3+j} = -\frac{\pi}{10}(1+3j)$$

2º) $$I = -\oint_C \frac{z}{(z^2-9)(z+j)}dz = \oint_C \frac{\frac{z}{(z+3)(z+j)}}{z-3}dz =$$

$$= -2\pi j\left.\frac{z}{(z+3)(z+j)}\right|_{z=3} = -\frac{\pi}{10}(1+3j)$$

Resolver:

$$Q'' + 4Q = V(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & 0\le t<\pi,\ t\ge 2\pi \end{cases}$$

$$Q(0)=1,\quad Q'(0)=0$$

$$V(t) = u(t-\pi) - u(t-2\pi)$$

tomando Ts. de L.:

$$(s^2+4)F(s) - sQ(0) - Q'(0) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}$$

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right] = \frac{1}{4}(1-\cos 2t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}\right] = \frac{1}{4}u(t-\pi)\left[1-\cos 2(t-\pi)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}\right] = \frac{1}{4}u(t-2\pi)\left[1-\cos 2(t-2\pi)\right]$$

Sustituyendo:

$$Q(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos 2t + \frac{1}{4}u(t-\pi)\left[1-\overset{\cos 2t}{\cancel{\cos 2(t-\pi)}}\right] -$$

$$-\frac{1}{4}u(t-2\pi)\left[1-\cancel{\cos 2(t-2\pi)}\right]$$

simplyjarod.com

simplyjarod.com

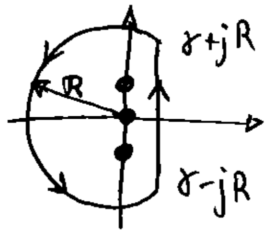
Ej: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right]$??

1st way Fórmula de la Integral de la Inversión

Ptos singulares de $F(s)$:

$s_1 = 0$ (polo triple)

$s_{2,3} = \pm j$ (polos simples)



Utilizando el contorno de la figura con $\gamma > 0$, resulta:

$\alpha = \max\{Re(s_i)\}_{i=1}^{3} = 0$

$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{3} Res\{F(s)e^{st}, s=s_i\}$$

$$Res\{F(s)e^{st}, s=0\} = \frac{1}{2!}\lim_{s\to 0}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left(s^3\frac{e^{st}}{s^3(s^2+1)}\right)\right\} = \frac{t^2}{2} - 1$$

$$Res\{F(s)e^{st}, s=j\} = \lim_{s\to j}\left\{(s-j)\frac{e^{st}}{s^3(s^2+1)}\right\} = \frac{e^{jt}}{2}$$

$$Res\{F(s)e^{st}, s=-j\} = \qquad = \frac{e^{-jt}}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{3} Res = \frac{t^2-2}{2} + \cos(t)$$

2nd way $F(s) = \frac{1}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{1}{2}t^2 \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = sen(t)\end{array}\right\} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\frac{1}{s^2+1}\right] = \int_0^t \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{u}\cdot\underbrace{sen(t-x)\,dx}_{dv} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cos(t-x)\Big|_0^t - \int_0^t \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\cos(t-x)\,dx}_{dv} = \frac{t^2}{2} + x\,sen(t-x)\Big|_0^t +$$

$$-\int_0^t sen(t-x)\,dx = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$$

simplyjarod.com

3rd way

$$F(s) = \frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{as^2+bs+c}{s^3} + \frac{ds+e}{s^2+1}$$

$$a=-1,\ b=0,\ c=1,\ d=1,\ e=0$$

$$F(s) = \frac{-s^2+1}{s^3} + \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos(t)$$

Ej: $\mathcal{L}[\,\mathrm{sen}^3(t)\,]$??

$$\mathrm{sen}(t) = \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j} \Rightarrow \mathrm{sen}^3(t) = \frac{-1}{8j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)^3 =$$

$$= \frac{-1}{8j}\left(e^{3j} - 3e^{2jt}e^{-jt} + 3e^{jt}e^{-2jt} - e^{-3jt}\right) =$$

$$= \frac{-1}{8j}\left(e^{3jt} - 3e^{jt} + 3e^{-jt} - e^{-3jt}\right) = \frac{-1}{4}\left(\mathrm{sen}(3t) - 3\,\mathrm{sen}(t)\right)$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{sen}^3(t)] = \frac{-1}{4}\left(\frac{3}{s^2+9} - 3\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{6}{(s^2+9)(s^2+1)}$$

Ej: $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4$, $y(0) = y'(0) = 0$

EDO lineal de 2º orden y coef. ctes no homogénea

$$\mathcal{L}[y''(t)] + 4\mathcal{L}[y'(t)] + 4\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[4] \qquad \left\{ \mathcal{L}[y(t)] = Y[s] \right.$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4\left(sY(s) - y(0)\right) + 4Y(s) = \frac{4}{s}$$

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{4}{s}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

$$A=1,\ B=-1,\ C=-2$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+2)^2}\right]$$

$$y(t) = 1 - e^{-2t} - 2t\,e^{-2t} = 1 - e^{-2t}(1+2t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s+2} \rightarrow F'(s) = \frac{-1}{(s+2)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -t \cdot f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+2)^2}\right] = -t\,e^{-2t}$$

Integral de Fourier

$$f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t} \; ; \; \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jk\omega t}\, dt$$

$$f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-jk\omega \tau}\, d\tau\right) \cdot e^{jk\omega t}$$

$T \to \infty$

$$f(t) \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right) d\omega$$

Teorema de convergencia de la Int. Fourier

Si $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas a trozos en todo intervalo finito de $\mathbb{R}$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right) d\omega = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

simplyjarod.com

simplyjarod.com

Transformadas de Fourier

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$F^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Ej: Transformar $f(t) = e^{-|t|}$

$$f(t) = \begin{cases} e^{t} & t < 0 \\ e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-j\omega t}\, dt$$

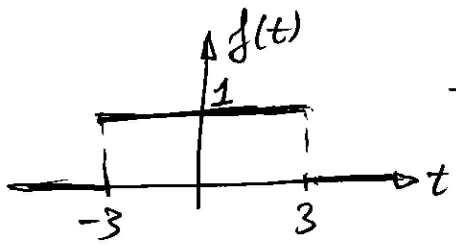
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-j\omega)}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+j\omega)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

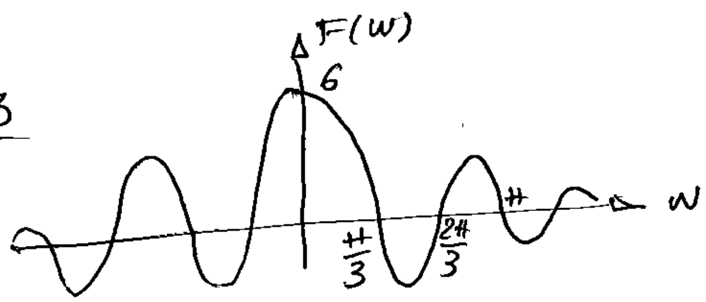
Ej: $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$, Representar para $a = 3$

$$F(\omega) = \int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-a}^{a} = \frac{2}{\omega}\,\frac{e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}}{2j} =$$

$$= \frac{2}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega \cdot a), \quad \omega \neq 0 \quad , \quad F(\omega) = 2a, \quad \omega = 0$$



$a = 3$



simplyjarod.com

Ej: Series:

desarrollo es serie de potencias que caracteriza $z=1$ para: $f(z) = \dfrac{e^{z}\cos(z)}{(z-1)^2}$

$$f(z) = \frac{e^{z}}{(z-1)^2}\left(\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}\right) = \frac{1}{2(z-1)^2}\left(e^{z(1+j)} + e^{z(1-j)}\right)$$

$$e^{z(1+j)} = e^{1+j}\cdot e^{(1+j)(z-1)} = e^{1+j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+j)^n}{n!}(z-1)^n$$

$$e^{z(1-j)} = e^{1-j}\, e^{(1-j)(z-1)} = e^{1-j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-j)^n}{n!}(z-1)^n$$

$|z-1| < \infty$

$$f(z) = \frac{e}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{j}(1+j)^n}{n!} + \frac{e^{-j}(1-j)^n}{n!}\right)(z-1)^{n-2}$$

$0 < |z-1| < \infty$

b) $$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = -2\pi j\,\mathrm{Res}(f(z), z=1) = -2\pi j\, e(\cos 1 - \operatorname{sen} 1)$$

simplyjarod.com

Tema 4: Ecuaciones Diferenciales

* **Ecuación Diferencial:** ecuación funcional en la que interviene una función y sus derivadas respecto a una o más variables independientes

* **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):** ecuación diferencial en la que existe una única variable independiente.

* **orden de una ED:** orden de la mayor derivada

* **solución de una ED:** función que cumple la ecuación no tiene por qué ser sólo una.

* **ED lineal:** ED de 1^er grado en la función y en sus derivadas. Los coeficientes dependen a lo sumo de la/s var. indep.

EDO de 1^er orden:

$y' = f(x,y)$: forma normal o explícita

$F(x,y,y') = 0$: forma implícita

Al integrar una EDO de 1^er orden se obtiene una expresión definida en términos de la función, la variable independiente y una cte. arbitraria.

→ si la EDO es lineal, esta expresión identifica el conjunto de todas las soluciones, y recibe el nombre de solución general

simplyjarod.com

Teorema de existencia y unicidad de solución al PVI

$$PVI = \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

→ si $f(x,y)$ es continua en un entorno de (x_0, y_0) existe solución.

→ si además, $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en un entorno de (x_0, y_0) la solución es única

Tipos de EDOs de 1er orden

* separables:

$$y' = g(x)\,h(y) \longrightarrow \frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$$

* exactas:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \ , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \ , \quad U(x,y) = cte$$

* homogéneas:

no varían al sustituir $\begin{cases} x \text{ por } \lambda x \\ y \text{ por } \lambda y \end{cases}$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{cambio var.} \\ u = y/x \end{array} \right\} \Rightarrow \text{separables}$$

ALGUNOS TIPOS de EDO de 1er orden

- Ecuaciones separables. Son ecuaciones que pueden venir escritas en la forma:

1º) $y' = g(x)h(y) \xrightarrow[h(y)\neq 0]{} \frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + K$$

ejem

$$y' = \frac{y-1}{x+3} \xrightarrow[y\neq 1]{} \frac{y'}{y-1} = \frac{1}{x+3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x+3} + K$$

$$L_n|y-1| - L_n|x+3| = K \longrightarrow L_n\left|\frac{y-1}{x+3}\right| = K$$

$$\frac{y-1}{x+3} = \pm e^K := C \in \mathbb{R} \,/\, C \neq 0$$

¿$y=1$ es solución? : Sí

$$\Rightarrow \frac{y-1}{x+3} = c,\ c\in\mathbb{R} \longrightarrow y = 1 + C(x+3),\ C\in\mathbb{R}$$

2º) $P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = K$$

ejem

$$3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (2-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$$

$$\operatorname{tg} y\,(2-e^x) \neq 0 \longrightarrow \frac{3e^x}{2-e^x}dx + \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy = 0$$

$$\Rightarrow 3\int \frac{e^x}{2-e^x}dx + \int \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy = K$$

$$-3L_n|2-e^x| + L_n|\operatorname{tg} y| = K$$

$$L_n \frac{|\operatorname{tg} y|}{|2-e^x|^3} = K \longrightarrow \frac{\operatorname{tg} y}{(2-e^x)^3} = \pm e^K := C \,/\, \begin{matrix} C\in\mathbb{R} \\ C\neq 0\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} y = C(2-e^x)^3,\ C\in\mathbb{R}/C\neq 0$$

$$\operatorname{tg} y\,(2-e^x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = 0 \rightarrow y = K\pi,\ K\in\mathbb{Z} \\ 2-e^x = 0 \rightarrow x = L_n 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Si $y=y(x)$ soluciones: $\operatorname{tg} y = C(2-e^x)^3$, $C\neq 0 \in\mathbb{R}$, $y = K\pi$, $K\in\mathbb{Z}$

Si $x=x(y)$ soluciones: $\operatorname{tg} y = C(2-e^x)^3$, $C\neq 0\in\mathbb{R}$, $x = L_n 2$

- Ecs. diferenciales exactas. Son ecs que pueden escribirse en la forma: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ verificándose que $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funcs con derivadas parciales de 1er orden continuas en un conj abierto $D\subset\mathbb{R}^2$ s.c. y cumplen: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
Sobre estas hips, decimos que la ED es diferencial exacta en D de una función $u(x,y)$ (:= función potencial) tal que: $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ($\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = Q$) y su solución es: $u(x,y) = cte$

ejem:

$$(2xy+3y)dx + (x^2+3x)dy = 0 \text{ : ED exacta}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2xy+3y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x^2+3x\end{aligned}\right\} \longrightarrow u(x,y) = \int(2xy+3y)dx = x^2y + 3xy + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2+3x = x^2+3x+\varphi'(y) \longrightarrow \varphi'(y) = 0$$

$$\varphi(y) = cte.$$

Sustituyendo:

$$u(x,y) = K \longrightarrow x^2y + 3xy + cte = K$$

$$x^2y + 3xy = C,\ C\in\mathbb{R}$$

- Ecuaciones homogéneas. Son ecuaciones que no se alteran al sustituir en su expresión x por λx e y por λy $\Rightarrow$ pueden escribirse en la forma: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Realizando en estas ecuaciones el cambio de variables $u = \frac{y}{x}$ se convierten en ecuaciones separables

ejem $(x^2+y^2)dx - xy\,dy = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}$$

$$u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux \rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Sustituyendo:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{u} \longrightarrow \cancel{u} + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + \cancel{u}$$

$u\,du = \frac{dx}{x}$, integrando

$\frac{u^2}{2} = L_n|x| + C$, deshaciendo el c. de v_s

$$\frac{y^2}{2x^2} = L_n|x| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

simplyjarod.com

simplyjarod.com

EDOs lineales:

$$y' + P(x)\,y = q(x)$$

si $q(x) = 0 \Rightarrow$ EDO lineal de 1er orden homogénea

si $q(x) \neq 0 \Rightarrow$ EDO lineal de 1er orden no homogénea

uno de los métodos de resolución:

método de variación de las constantes:

conocida la solución y_H (solución general) de la ecuación homogénea, se reemplaza la constante indeterminada que figura en la misma, por una función de la var. indep. x a determinar de forma que la expresión que resulte sea solución y (solución general) de la ecuación completa.

$$y = y_H + y_{PC}$$; y_{PC} = solución particular de la ec. completa

Existencia y unicidad de solución del PVI

$$\begin{cases} y' + P(x)\,y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

si $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en el intervalo $I:(a,b)$ que contiene a x_0, entonces existe una única función que $\forall x \in I$ satisface el PVIL de 1er orden

simplyjarod.com

Generalización a PVILs de orden n

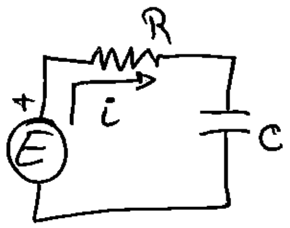
$$\begin{cases} y^{(n} + p_1(x)\, y^{(n-1} + \dots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots \end{cases}$$

si $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots n$ y $g(x)$ son continuas en $I: a < x < b$ contiene al punto x_0, entonces existe una única función que $\forall x \in I$ satisface al PVIL de orden n considerado

Ej: Un circuito RC tiene una fem de $200 \cos(2t)$ Voltios, una resistencia de $50\,\Omega$ y una $C = 10^{-2}$ F

En $t = 0 \Rightarrow Q = 0$

Hallar la ec. de la corriente:



$$\frac{dq}{dt} = i \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R}$$

$$\frac{dq}{dt} + 2q = 4\cos(2t) \Rightarrow \text{EDOL } 1^{er} \text{ orden}$$

$$q = e^{-\int 2dt} \Big[K + \underbrace{\int 4 \underbrace{\cos(2t)}_{u} \underbrace{e^{\int 2dt}\, dt}_{dv}}_{pp\,2v} \Big] = K e^{-2t} + \cos(2t) + sen(2$$

$$t = 0 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow K = -1 \Rightarrow q = \cos(2t) - sen(2t) - e^{-2t}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -2\, sen(2t) + 2\cos(2t) + 2e^{-2t}$$

- Ecs lineales: Son ecs de la forma:

$$y' + P(x)\,y = q(x)$$

Si $q(x) = 0$: EDL de 1er orden homogénea

Si $q(x) \neq 0$: EDL de 1er orden no homogénea

Para resolver esta ec. puede utilizarse, entre otros procedimientos, el método de variación de las constantes consistente en:

Conocida la solución y_H (solución general) de la ec. homogénea, se reemplaza la cte indeterminada que figura en la misma, por una función de la variable independiente x a determinar de forma que la expresión que resulte sea la solución y (solución general) de la ec. completa

Solución general de la ecuación homogénea y_H

$$y' + P(x)\,y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

integrando : $\ln|y| = -\int P(x)\,dx + K$

$$y = \pm e^{-\int P(x)\,dx + K} = \pm e^{K} e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow y_H = C e^{-\int P(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Propiedades de la EDOL: $y' + P(x)y = q(x)$:

1º) $\exists$ una solución general, la cual contiene una cte arbitraria, que incluye todas las soluciones de la ecuación. Puede seleccionarse una solución particular (que satisface una condición inicial dada) dando un valor apropiado a la cte

2º) Existe una expresión que define explícitamente la solución general de la ecuación dada por:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(K + \int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right)$$

3º) Los posibles ptos singulares de la solución pueden identificarse (sin integrar la ec.) analizando "simplemente" los ptos de discontinuidad de $P(x)$ y $q(x)$. Verificándose que si estas funciones son continuas $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces la solución tb existe y es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

Ninguno de estos enunciados se cumple, en general, para EDO no Ls

Solución general de la ecuación completa y

$$y_H = C e^{-\int P(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y = C(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$y' = C'(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} - P(x)\,C(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

Sustituyendo en la ecuación completa:

$$C'(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} - P(x)\,C(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} + P(x)\,C(x)\, e^{-\int P(x)\,dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow C'(x) = q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}, \text{ integrando}$$

$$C(x) = \int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

por lo tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx + K\right)$$

Además:

$$y = y_H + y_{PC}, \quad y_{PC} = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right)$$

y_{PC}: solución particular de la ecuación completa

Ej: Encontrar un intervalo en el cual el PVIL:

$$\begin{cases} x y' + 2y = 4x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

tiene solución única

$$x y' + 2y = 4x^2 \longrightarrow y' + \frac{2}{x} y = 4x$$

Teniendo en cuenta que:

$$y' + P(x)y = q(x) \longrightarrow y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(K + \int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right)$$

para la EDOL dada, la solución general es:

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(K + \int 4x\, e^{\int \frac{2}{x}dx}\,dx\right) =$$

$$= e^{-2\ln|x|}\left(K + \int 4x\, e^{2\ln|x|}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(K + \int 4x^3\,dx\right) = \frac{K}{x^2} + x^2$$

Apl. el T. de $\exists$ y ! de solución al PVIL dado, resulta que:

$$P(x) = \frac{2}{x} \wedge q(x) = 4x \Rightarrow \begin{cases} P(x) \text{ es cont. para } x<0 \text{ o } x>0 \\ q(x) \in C(\mathbb{R}) \end{cases}$$

El intervalo $x>0$ contiene al pto $x_0 = 1$

$\Rightarrow$ El PVIL considerado tiene solución única en el intervalo $0 < x < \infty$ dada por: $y = \frac{1}{x^2} + x^2$

simplyjarod.com

simplyjarod.com

Ej: Resolver:

$$PVI = \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y' = y^2 \xrightarrow[y\neq 0]{} \frac{1}{y^2}\,dy = dx \xrightarrow{\int = \int} -\frac{1}{y} = x + C$$

$$y = \frac{-1}{x+C}, \quad y(0) = 2 \Rightarrow C = -1$$

solución al PVI: $y = \dfrac{1}{1-x}$

la cual existe y es única en $-\infty < x < 1$, intervalo al que pertenece $x_0 = 0$

EDOs de orden n

$\phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$: forma implícita

$y^{(n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$: forma explícita

sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 1er orden equivalente:

$$y = y_1 \qquad y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3 \ \cdots \quad y_{n-1}' = y_n$$

$$y_n' = f(x, y_1, y_2 \cdots y_n)$$

si EDOL: $y^{(n} + P_1(x)\, y^{(n-1} + \dots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = q(x)$

$$y_n' = -P_1(x)\, y_n - P_2(x)\, y_{n-1} - \dots - P_{n-1}(x)\, y_2 - P_n(x)\, y_1 + q(x)$$

simplyjarod.com

EDOL de orden n

son EDOs de 1^{er} grado en la función y sus deriv.

$$y^{(n} + P_1(x)\, y^{(n-1} + \dots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = q(x)$$

si $q(x) = 0 \Rightarrow$ EDO homogénea

si $q(x) \neq 0 \Rightarrow$ EDO completa

resolución:

→ $y = y_H + y_{PC}$

→ método de variación de las constantes

Se dice que n soluciones particulares $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ de la ec. homogénea: $y^{(n} + p_1 y^{(n-1} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ son linealmente independientes en el intervalo de existencia de soluciones de esta ec. $\Leftrightarrow$ $W \neq 0$ en este intervalo

Wronskiano = W

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & & & \\ y_1^{(n-1} & y_2^{(n-1} & \cdots & y_n^{(n-1} \end{vmatrix}$$

sobre estas hipótesis se dice que $\{y_i(x)\}_{i=1}^{n}$ constituye un sistema fundamental de soluciones de la EDLH considerada.

simplyjarod.com

Solución general de la EDOLH:

Si $\{y_i(x)\}_{i=1}^{n}$ es un sistema fundamental de soluciones de la EDLH considerada:

$$y_H = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n , \quad c_i = \text{ctes}$$

Solución general de la EDOLC: método variación de las ctes

$$y_H = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \longrightarrow y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i$$

$n-1$ grados de libertad en la determinación de las funciones $c_i(x)$, adicionales a exigir que la expresión $\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$ sea solución general de la ec. general completa.

Estos grados de libertad se utilizan para simplificar los cálculos en el sentido siguiente:

$$y' = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i' \quad / \quad \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i = 0$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i'' \quad / \quad \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i' = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y^{(n-1} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1} \quad / \quad \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-2} = 0$$

$$y^{(n} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n} + \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1}$$

sustituyendo en la ec. completa:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1} = q(x)$$

las ecuaciones anteriores constituyen un sistema lineal no homogéneo (n ecuaciones con n incógnitas $c_i'(x)$), cuyo determinante de coeficientes de incógnitas es $W \neq 0$ (sistema compatible y determinado)

$$c_i'(x) = g_i(x) \longrightarrow c_i(x) = \int g_i(x)\,dx + k_i \,, \quad 1 \leq i \leq n$$

Sustituyendo:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\int g_i(x)\,dx + k_i \right) y_i(x)$$

El conjunto de soluciones de la EDOLH de orden n:

$$L[y] = y^{(n} + P_1(x)\,y^{(n-1} + \dots + P_{n-1}(x)\,y' + P_n(x)\,y = 0$$

es $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Una solución de la EDOLH considerada es una función de clase n que satisface la ecuación; por lo tanto, el conjunto de soluciones de la misma es:

$$S = \{ y \in C^n(I,\mathbb{R}) : y[n] = 0 \} \subset C^n(I,\mathbb{R})$$

y debido a que $C^n(I,\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, para probar que $S \subset C^n(I,\mathbb{R})$, $S \neq \emptyset$ es espacio vectorial basta con probar que es cerrado:

si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in S \Rightarrow \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S$

lo cual se cumple por verificar:

$$L[\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)] = \lambda_1 L[y_1(x)] + \lambda_2 L[y_2(x)] = 0$$

Además, la dimensión del espacio vectorial de soluciones de la EDOLH de orden n considerada es igual a n.

simplyjarod.com

simplyjarod.com

EDOLs de orden n y coefs ctes

Ecuaciones homogéneas

$L[y] = y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

admite soluciones particulares de la forma $y = e^{rx}$ siendo r una raíz de la ec. algebraica siguiente:

$$P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

llamada ec. característica

Casos que se pueden presentar

- $P(r)=0$ tiene n raíces reales simples $r_1, r_2, \ldots, r_n$

$\Rightarrow \{y_i(x) = e^{r_i x}\}_{i=1}^{n}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ec. considerada $L[y]=0$

$$\Rightarrow y_H = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x} = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

- $P(r)=0$ tiene raíces reales múltiples

$P(r) = (r-r_1)^{k_1} (r-r_2)^{k_2} \cdots (r-r_m)^{k_m}$, $k_1+k_2+\cdots+k_m = n$

$\Rightarrow \{e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \ldots, x^{k_1-1} e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_m x}, x e^{r_m x}, \ldots, x^{k_m-1} e^{r_m x}\}$

es un sistema fundamental de soluciones de la ec. considerada $L[y]=0$

$$\Rightarrow y_H = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(x) e^{r_i x} = \gamma_1(x) e^{r_1 x} + \gamma_2(x) e^{r_2 x} + \cdots + \gamma_m(x) e^{r_m x}$$

siendo $\gamma_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots m$ polinomios de grado $k_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots m$ con coefs reales arbitrarios

- $P(r)=0$ tiene raíces complejas conjugadas

1er caso: $P(r)=0$ tiene raíces complejas conjugadas simples $r_1 = \alpha + j\beta$ y $r_2 = \alpha - j\beta$

Su contribución a y_H será:

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{(\alpha+j\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)x} =$$
$$= e^{\alpha x}[(c_1+c_2)\cos\beta x + j(c_1-c_2)\,\mathrm{sen}\,\beta x] =$$
$$= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x)$$, siendo A y B coefs arbitrarios

2º caso: $P(r)=0$ tiene raíces complejas conjugadas de orden k: $r_1 = \alpha + j\beta$ y $r_2 = \alpha - j\beta$

Su contribución a y_H será:

$$e^{\alpha x}[(A_1 + A_2 x + \cdots + A_k x^{k-1})\cos\beta x + (B_1 + B_2 x + \cdots + B_k x^{k-1})\,\mathrm{sen}\,\beta x]$$

siendo A_i y B_i, $i = 1, 2, \ldots k$ coefs arbitrarios

Ecuaciones no homogéneas

$L[y] = y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x)$

Solución particular de la ecuación $L[y] = q(x)$ considerada a ensayar según forma de $q(x)$

1º) Si $q(x) = Q_m(x) e^{rx}$ siendo $Q_m(x)$ un polinomio dado de grado m y r una cte dada

- Si r no es raíz de la ec. característica $P(r)=0$, ensayar $y_{pc} = \gamma_m(x) e^{rx}$
- Si r es raíz de orden k de la ec. característica $P(r)=0$, ensayar $y_{pc} = x^k \gamma_m(x) e^{rx}$

En ambos casos $\gamma_m(x)$ es un polinomio de grado m con coefs indeterminados, los cuales se determinan imponiendo que $L[y_{pc}] = Q_m(x) e^{rx}$

2º) Si $q(x) = a\cos\beta x + b\,\mathrm{sen}\,\beta x$ siendo a, b y β ctes dadas

- Si $j\beta$ no es raíz de la ec. característica $P(r)=0$ ensayar $y_{pc} = c\cos\beta x + d\,\mathrm{sen}\,\beta x$
- Si $j\beta$ es raíz de orden k de la ec. característica $P(r)=0$ ensayar $y_{pc} = x^k(c\cos\beta x + d\,\mathrm{sen}\,\beta x)$

En ambos casos c y d son ctes indeterminadas, las cuales se determinan imponiendo que $L[y_{pc}] = a\cos\beta x + b\,\mathrm{sen}\,\beta x$

Resolver las EDOLHs:

1º) $y'' - 5y' + 6y = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 3$

$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

2º) $y'' - 4y' + 4y = 0$

$r^2 - 4r + 4 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 2$

$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$

3º) $y'' - 2y' + 2y = 0$

$r^2 - 2r + 2 = 0 \rightarrow r_1 = 1 + j,\ r_2 = 1 - j$

$\Rightarrow y = c_1 e^{(1+j)x} + c_2 e^{(1-j)x} = e^{x}(K_1 \cos x + K_1\,\mathrm{sen}\,x)$

4º) $y^{IV} + 6y''' + 5y'' - 24y' - 36y = 0$

$r^4 + 6r^3 + 5r^2 - 24r - 36 = 0 \rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -2,\ r_3 = r_4 = -3$

$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + (c_3 + c_4 x) e^{-3x}$

simplyjarod.com

Ej: Resolver:

$$y'' + 3y' + 2y = 2x^2$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \rightarrow r_1 = -1, \; r_2 = -2$$

$$y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y_{PC} \longrightarrow y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x \; ; \; y'' = 2a_2$$

sustituyendo en la ec. dif. completa e identificando coefs: $2a_2 x^2 + (6a_2 + 2a_1)x + (2a_2 + 3a_1 + 2a_0) = 2x^2$

$$a_2 = 1, \; a_1 = -3, \; a_0 = 7/2$$

$$y_{PC} = \frac{7}{2} - 3x + x^2$$

$$y = y_H + y_{PC} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{7}{2} - 3x + x^2$$

Ej: $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-2x}$

$$y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y_{PC} \longrightarrow y = kx e^{-2x}$$

$$y' = ke^{-2x} - 2kx e^{-2x}$$

$$y'' = -4k e^{-2x} + 4kx e^{-2x}$$

sustituyendo en la ec. dif. completa: $k = -3$

$$y_{PC} = -3x e^{-2x}$$

$$y = y_H + y_{PC} = c_1 e^{-x} + (c_2 - 3x) e^{-2x}$$

simplyjarod.com

Ej: integrar:

$$y'' + y = \operatorname{cosec}(x)$$

$$r^2 + 1 = 0 \longrightarrow r_1 = j \ , \ r_2 = -j$$

$$y_H = C_1 \cdot \cos(x) + C_2\, \operatorname{sen}(x)$$

Aplicando el método de variación de constantes.

$$y = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$y' = -C_1(x)\operatorname{sen}(x) + C_2(x)\cos(x), \quad c'(x)\cos(x) + C_2'(x)\operatorname{sen}(x) = 0$$

$$y'' = -C_1(x)\cos(x) - C_1'(x)\operatorname{sen}(x) - C_2(x)\operatorname{sen}(x) + C_2'(x)\cos(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\operatorname{sen}(x) = 0 \\ -C_1'(x)\operatorname{sen}(x) + C_2'(x)\cos(x) = \operatorname{cosec}(x) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C_1' = -1 \\ C_2' = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \end{array}$$

$$C_1(x) = -x + K_1, \quad C_2(x) = \ln|\operatorname{sen}(x)| + K_2$$

sustituyendo:

$$y = (-x + K_1)\cos(x) + (\ln|\operatorname{sen}(x)| + K_2)\operatorname{sen}(x)$$