simplyjarod.com

MMAT

Carpeta Montero

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en simplyjarod.com

MMAT
Teoría

TEMA 1 : SERIES DE FOURIER

1.1 Espacios funcionales

En este tema vamos a trabajar con los siguientes conjuntos de funciones:

Fíjate que los elementos de todos estos conjuntos son funciones, no números

- $C([a,b];\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$.

- $CTA([a,b];\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que cumplen :

  - f es continua en $[a,b]$ salvo en un número finito de puntos $x_i\in(a,b)$ $i=1,\dots,n$
  - En los puntos de discontinuidad x_i (que son siempre de primera especie o de salto finito) el valor de f es:

$$f(x_i)=\frac{f(x_i^-)+f(x_i^+)}{2}$$

  A este tipo de funciones las llamaremos "funciones continuas a trozos con valores asignados en las discontinuidades".

- $CT([a,b];\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que cumplen :

  - f es continua en $[a,b]$ salvo en un número finito de puntos donde la discontinuidad es de primera especie o de salto finito.

  A este tipo de funciones las llamaremos "funciones continuas a trozos".

A este conjunto también se le denota: $L^2([a,b];\mathbb{R})$

- $\mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que cumplen :

  - f es continua en $[a,b]$ salvo en un número finito de puntos donde la discontinuidad es de primera especie o de salto finito.
  - f puede tener discontinuidades de segunda especie (salto infinito) en los extremos a y/o b.
  - f^2 es integrable en el sentido propio o impropio.

  A este tipo de funciones se las suele llamar "cuadrado integrables".

Importante:
Por ahora nos restringimos a espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales

1.2 Espacios euclídeos. Producto escalar. Norma. Sistemas ortogonales.

- Sea E un $\mathbb{R}$ – espacio vectorial. Un **producto escalar** en E es una aplicación de la forma:

$$<,>: E \times E \to \mathbb{R}$$
$$u, v \to <u, v>$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $<u+u', v> = <u, v> + <u', v> \quad \forall u, u', v \in E$
   $<u, v+v'> = <u, v> + <u, v'> \quad \forall u, v, v' \in E$
2. $<\alpha u, v> = \alpha <u, v> \quad \forall u, v \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
   $<u, \beta v> = \beta <u, v> \quad \forall u, v \in E \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$
3. $<u, v> = <v, u> \quad \forall u, v \in E$
4. $<u, u> \geq 0 \quad \forall u \in E$, además $<u, u> = 0 \Leftrightarrow u = 0$

- Llamamos **espacio euclídeo** y lo notamos como $(E, <,>)$ a todo espacio vectorial E sobre el que se ha definido un producto escalar.

- El espacio euclídeo más conocido es el de los números reales $\mathbb{R}^n$ donde está definido el producto escalar de la siguiente forma.

Este no es más que el producto escalar que se estudia en el bachillerato

Sean $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, su producto escalar es:

$$<(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)> = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

- Sin embargo, nosotros en este curso no vamos a utilizar el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ ni su producto escalar. Nosotros vamos a trabajar todo el tiempo con los conjuntos de funciones definidos en la pagina anterior. No debemos olvidar que los elementos de estos conjuntos son funciones.

- Todos los conjuntos de funciones expuestos en la página anterior:

$$(C[a,b], \mathbb{R}) \ , \ (CTA[a,b], \mathbb{R}) \ , \ (CT[a,b], \mathbb{R}) \ , \ \mathcal{R}([a,b]; \mathbb{R})$$

tienen estructura de espacio vectorial con dimensión infinita (se puede probar).

- **Sobre todos estos espacios vectoriales vamos a definir un producto escalar de la siguiente forma:**

$$\boxed{<f, g> = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx}$$

se puede probar que esta función es un producto escalar. Y por tanto tenemos que los cuatro conjuntos:

$$(C[a,b], \mathbb{R}) \ , \ (CTA[a,b], \mathbb{R}) \ , \ (CT[a,b], \mathbb{R}) \ , \ (R[a,b], \mathbb{R})$$

son espacios euclídeos con el producto escalar así definido.

- Dicho de forma simple, durante todo este tema calcularemos productos escalares haciendo integrales definidas. Esto se debe a que hemos definido el producto escalar que vamos a utilizar como una integral definida.

Norma euclídea

Sea $(E, <,>)$ un espacio euclídeo, una **norma** definida en E es una aplicación:

$$\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$$
$$u \to \|u\| = \sqrt{<u, u>}$$

Propiedades

1. $\forall u \in E, \quad u \neq 0 \Leftrightarrow \|u\| > 0$
2. $\forall u \in E, \quad u = 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0$
3. $\forall u \in E, \quad \forall \lambda \in \mathrm{K}, \ \|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$
4. $\forall u, v \in E \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
5. $\forall u, v \in E \quad |<u,v>| \leq \|u\| \cdot \|v\|$
6. $\forall u, v \in E \quad 2<u,v> = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$

En el contexto de este tema calcularemos la norma de la siguiente manera:

$$\boxed{\|f\| = \sqrt{<f,f>} = \sqrt{\int_a^b f(x) \cdot f(x)\, dx} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}}$$

Sistemas ortogonales y ortonormales

Sea un espacio euclídeo $(E, <,>)$.

- Se dice que dos vectores no nulos $u, v \in E$ son **ortogonales** si su producto escalar es nulo, es decir:

$$<u,v> = 0$$

- Se dice que el sistema $\{u_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema **ortogonal** si todos sus vectores son ortogonales entre sí, es decir:

$(<u_n, u_n> \neq 0$ si puede ser$)$

$$<u_n, u_m> = 0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \ / \ n \neq m$$

- Se dice que el sistema $\{u_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema **ortonormal** si además de ortogonal se cumple que:

$$\|u_n\| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.3 Series de Fourier

En este caso el sistema tiene infinitos elementos

Sea $(E, <,>)$ un espacio euclídeo (donde E es el conjunto de funciones C, CTA, CT ó $\mathcal{R}$).
Sea $\{ f_n,\ n \in \mathbb{N} \}$ un sistema ortogonal de elementos de E.

- A todo elemento $f \in E$ se le puede asociar una serie de la forma:

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<f, f_i>}{<f_i, f_i>} \cdot f_i = \frac{<f, f_1>}{<f_1, f_1>} \cdot f_1 + \frac{<f, f_2>}{<f_2, f_2>} \cdot f_2 + \frac{<f, f_3>}{<f_3, f_3>} \cdot f_3 + \ldots}$$

denominada **serie de Fourier** de f respecto al sistema $\{ f_n,\ n \in \mathbb{N} \}$.

A la mejor aproximación también se le denomina proyección ortogonal

En este caso el sistema tiene un número finito de elementos

- Si la serie de Fourier es "cortada" en el término n obtendremos una aproximación de ésta, es decir, $f \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{<f, f_i>}{<f_i, f_i>} \cdot f_i$ que denominaremos **mejor aproximación** de f mediante el sistema $\{ f_1, \ldots, f_n \}$.

Importante:
Estas expresiones, una vez calculadas, son números

- Al conjunto de escalares:

$$c_i = \left\{ \frac{<f, f_i>}{\underbrace{<f_i, f_i>}_{= \|f_i\|^2}},\ i \in \mathbb{N} \right\}$$

se les denomina **coeficientes de Fourier.**

- Si el sistema es ortonormal $\{ e_n,\ n \in \mathbb{N} \}$ la serie de Fourier queda:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{<f, e_i>}_{1 = \|..\|^2} e_i$$

Observaciones

- La serie de Fourier de una función $f(x)$ no es más que una representación de la función $f(x)$ por medio de una suma ponderada de las funciones que constituyen el sistema ortogonal.
- La ponderación de esta suma viene dada por los coeficientes de Fourier. Es decir, cada elemento de la serie tiene más o menos peso en función del coeficiente que se le asigne.
- Calcular una serie de Fourier consiste, por tanto, en obtener los coeficientes de Fourier.
- La "representación" de la función $f(x)$ mediante su serie de Fourier será tanto más precisa cuanto más términos tenga el desarrollo en serie.

Esto es sólo una explicación intuitiva nada rigurosa

- Se suele decir que la serie de Fourier "aproxima" a la función $f(x)$. Pero, ¿qué significa esto? Se puede entender de forma intuitiva diciendo que, según vamos añadiendo términos a la serie de Fourier su gráfica tiende a confundirse con la gráfica de la propia función. Es decir, ambas gráficas toman los mismos valores en todos los puntos del eje x.

Estas son las series que más nos interesan en este tema

1.4 Series trigonométricas de Fourier

Dentro de las series de Fourier en general existe un caso particular de especial importancia. Este caso se produce cuando tenemos una función $f(x)$ periódica de periodo T y elegimos como sistema para obtener la serie de Fourier al conjunto formado por:

Recuerda que este conjunto está formado por infinitos vectores

$$\left\{1,\ \text{sen}\tfrac{2\pi x}{T},\ \cos\tfrac{2\pi x}{T},\ \text{sen}\tfrac{4\pi x}{T},\ \cos\tfrac{4\pi x}{T},\ \text{sen}\tfrac{6\pi x}{T},\ \cos\tfrac{6\pi x}{T},\ \ldots\right\}$$

que habitualmente denotaremos de la siguiente forma:

$$\left\{1,\ \text{sen}\tfrac{2\pi n x}{T},\ \cos\tfrac{2\pi n x}{T},\ \ n\in\mathbb{N}\right\}$$

Ojo, el sistema trigonométrico no es ortonormal

este sistema se denomina **sistema trigonométrico** y se puede comprobar que es **ortogonal y completo** en $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$.

Las series de Fourier desarrolladas con este sistema se denominan **series trigonométricas de Fourier** y son las más importantes de este curso. En las series trigonométricas los coeficientes de Fourier quedan definidos de la siguiente forma:

La integral del denominador vale T

$$\frac{<f,\ 1>}{<1,\ 1>} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cdot 1\ dx}{\int_{-T/2}^{T/2} 1\cdot 1\ dx}$$

La integral del denominador vale $T/2$

$$\frac{<f,\text{sen}\frac{2\pi nx}{T}>}{<\text{sen}\frac{2\pi nx}{T},\text{sen}\frac{2\pi nx}{T}>} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\text{sen}\frac{2\pi nx}{T}dx}{\int_{-T/2}^{T/2}\text{sen}^2\frac{2\pi nx}{T}dx} \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

La integral del denominador vale $T/2$

$$\frac{<f,\cos\frac{2\pi nx}{T}>}{<\cos\frac{2\pi nx}{T},\cos\frac{2\pi nx}{T}>} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx}{\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2\frac{2\pi nx}{T}dx} \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Sin embargo, a pesar que la teoría sobre este tema es bastante extensa, la forma práctica de calcular una serie trigonométrica de Fourier es bastante mecánica.

De todas formas no se debe olvidar que la serie trigonométrica de Fourier no deja de ser un caso particular de la serie de Fourier general.

La forma práctica que utilizaremos en los ejercicios para calcular series trigonométricas de Fourier se explica en la siguiente hoja.

Cálculo práctico de la serie trigonométrica de Fourier

La serie trigonométrica de Fourier nos permite, básicamente, expresar cualquier función periódica como un sumatorio infinito (serie) de senos y cosenos.

Muchas veces en lugar de trabajar con *f(x)*, se trabaja con *f(t)*.

Sea una función $f(x)$ periódica de período T. Entonces su serie de Fourier viene dada por la siguiente expresión :

El término independiente siempre se pone dividido entre dos

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n \, sen\frac{2\pi nx}{T}\right)}$$

donde T es el período de la función y $\left\{1, \cos\frac{2\pi nx}{T}, \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}; n \in \mathbb{N}\right\}$ es un sistema ortogonal y completo en $[-T/2, T/2]$ ó $[0, T]$.
Por tanto, para obtener el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier lo único que hace falta calcular son los coeficientes a_n y b_n de los cosenos y de los senos, así como el término independiente a_0.

- Si $f(x)$ viene definida en el intervalo $[-T/2, T/2]$ los coeficientes se calculan con las siguientes de expresiones:

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\, dx \qquad n = 0,1,2,3, \ldots}$$

Fíjate que en el coeficiente del seno la n comienza en 1

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}\, dx \qquad n = 1,2,3, \ldots}$$

- Si $f(x)$ viene definida en el intervalo $[0, T]$ los coeficientes se calculan con las siguientes de expresiones:

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x).\, dx}$$

Fíjate que el único cambio con respecto al caso anterior está en los índices de integra-ción.

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\, dx \qquad n = 0,1,2,3,\ldots}$$

Fíjate que en el coeficiente del seno la n comienza en 1

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}\, dx \qquad n = 1, 2,3,\ldots}$$

Utilización de las simetrías

La utilización de simetrías es muy útil a la hora de calcular el desarrollo en serie de Fourier ya que, la mayor parte de la veces, ahorran mucha labor de cálculo. Las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ pueden tener dos tipos de simetrías:

Si se cumple $f(-x) = f(x)$ se dice que la función es par (simétrica respecto al eje Y)

Si se cumple $f(-x) = -f(x)$ se dice que la función es impar (simétrica respecto al origen)

De manera que una función puede ser par, impar o ninguna de las dos cosas.
Ejemplos de funciones pares son: $x^2, x^4, \cos x, \ldots$
Ejemplos de funciones impares son: $x, x^3, \operatorname{sen} x, \operatorname{tg} x \ldots$
Ejemplos de funciones que no tienen simetrías son: $e^x, \sqrt{x}, \ln x, \ldots$.

Una función no puede ser par e impar al mismo tiempo

- Propiedades de las funciones simétricas

  - La suma, resta, multiplicación y división de funciones pares es par.
  - La suma y la resta de funciones impares es impar.
  - La multiplicación y división de funciones impares es par.
  - La suma y la resta de una función par y otra impar es una función que no es ni par ni impar.
  - La multiplicación y la división de una función par y otra impar es una función impar.
  - Si f es una función par en $[-T,T]$ se cumple que:

$$\int_{-T}^{T} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{T} f(x)\ dx$$

  - Si f es una función impar en $[-T,T]$ se cumple que:

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 0$$

- **Funciones pares** $f(-x) = f(x)$

Si la función que vamos a desarrollar en serie trigonométrica de Fourier tiene simetría par entonces:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\,dx \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\boxed{b_n = 0} \text{ (par)}$$

con lo que la serie trigonométrica de Fourier queda desarrollada solamente en términos coseno más el término independiente:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nx}{T}}$$

- **Funciones impares** $f(-x) = -f(x)$

Si la función que vamos a desarrollar en serie trigonométrica de Fourier tiene simetría impar entonces:

$$\boxed{a_n = 0}$$

$a_0 = 0$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,\text{sen}\frac{2\pi nx}{T}\,dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

con lo que la serie trigonométrica de Fourier queda desarrollada solamente en términos seno sin término independiente:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\frac{2\pi nx}{T}}$$

- Funciones que no son pares ni impares

Este caso es el más general donde hay que calcularse todos los coeficientes.
En algunos ejercicios donde la función viene definida entre $[0, T]$ nos piden de forma explícita que obtengamos [redacted] En estos casos lo que tenemos que hacer es [redacted] para [redacted] en el intervalo $[-T, T]$ según queramos que el DSF contenga solamente senos o cosenos.

Si piden alguna suma
1º → x = algo
2º → utiliza Parseval

Ej Examen: Sept. 99

Cambio lineal de variable

Sabemos que el sistema trigonométrico $\left\{1, \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}, \cos\frac{2\pi nx}{T},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ es ortogonal en $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ pero resulta que si cambiamos el intervalo por otro distinto el sistema anterior deja de ser ortogonal.

Donde el intervalo $[a,b]$ ya no tiene por qué ser simétrico

El cambio lineal de variable nos permite obtener un nuevo sistema ortogonal en cualquier intervalo de la forma $[a,b]$ partiendo del sistema que ya conocemos $\left\{1, \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}, \cos\frac{2\pi nx}{T},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ que ortogonal en $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$.

El proceso es el siguiente:

1. Partimos del sistema $\left\{1, \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}, \cos\frac{2\pi nx}{T},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ que es ortogonal en $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$.

2. Hacemos el cambio $x=\alpha t+\beta$, donde falta determinar α y β.

3. Hacemos la siguiente identificación:

$$\begin{array}{ccc} \left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right] & \rightarrow & [a,b] \\ x & \rightarrow & t \end{array}$$

4. De donde obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{T}{2} = \alpha a+\beta \\ \frac{T}{2} = \alpha b+\beta \end{array}\right\}$$

5. De aquí calculamos las incógnitas α y β. El nuevo sistema será:

$$\left\{1, \operatorname{sen}\frac{2\pi n(\alpha t+\beta)}{T}, \cos\frac{2\pi n(\alpha t+\beta)}{T},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

que es un sistema ortogonal (y completo) en el intervalo $[a,b]$.

En la práctica los espacios utilizados en la casi totalidad de los ejercicios son:

- $L^2\left(\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right],\mathbb{R}\right)$
- $L^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$

y resulta que tras el cambio lineal de variable ambos tienen el mismo sistema trigonométrico, es decir, el sistema $\left\{1, \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}, \cos\frac{2\pi nx}{T},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ es ortogonal en $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ y también es ortogonal en $[0,T]$, lo cual es una casualidad bastante útil a efectos prácticos.

Todo lo dicho en esta página también es aplicable si la función viene definida en el intervalo $[0,T]$

1.5 Convergencia de la serie trigonométrica de Fourier

Sea una función $f:\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]\to\mathbb{R}$ y sea $F(x)$ su serie trigonométrica de Fourier (DSF).

Convergencia en norma (en media) de la serie de Fourier

En el examen hay que sustituir T por el valor correspondiente en cada ejercicio

Por ser el sistema trigonométrico $\left\{1, \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}, \cos\frac{2\pi nx}{T},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ ortogonal y completo en el espacio $L^2\left(\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right],\mathbb{R}\right)$, la serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge en el sentido de la norma (en media) a la función $f(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ (y a su extensión periódica en $\mathbb{R}$).

Lo mismo dicho de otra forma:

Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero no a la inversa

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge en el sentido de la norma del espacio $L^2\left(\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right],\mathbb{R}\right)$ a la función $f(x)$, pues dicha serie ha sido calculada respecto a un sistema ortogonal y completo en un espacio euclídeo completo. [redacted] al estar trabajando en un espacio completo dicha sucesión de Cauchy tendrá un límite en tal espacio. Y aseguramos que ese límite sea precisamente $f(x)$ imponiendo la completitud del sistema.

Convergencia puntual de la serie de Fourier

Teorema

Si se cumple que (hipótesis):

- $f\in CTA\left(\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right],\mathbb{R}\right)$
- $f\left(\frac{T}{2}\right) = f\left(-\frac{T}{2}\right) = \dfrac{f\left(-\frac{T}{2}^{+}\right)+f\left(\frac{T}{2}^{-}\right)}{2}$
- $f'\in CT\left(\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right],\mathbb{R}\right)$

Entonces (tesis):

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ en $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$.

Forma práctica de interpretar el teorema

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ es siempre una función CTA, así pues convergerá puntualmente a $f(x)$ en aquellos puntos en donde $f(x)$ sea continua. En los puntos donde $f(x)$ sea discontinua habrá que estudiar cada caso concreto (es decir, puede converger o no).

Convergencia uniforme de la serie de Fourier

Teorema

Si se cumple que :

- La serie de Fourier converge puntualmente a $f(x)$.
- $f\in C\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ con $[a,b]\subseteq\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$

Entonces (tesis):

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en $[a,b]$.

Forma práctica de interpretar el teorema

La serie trigonométrica de Fourier $F(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en cualquier intervalo cerrado donde exista convergencia puntual.

Observación

Siempre se cumple que:

Si $F(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ $\Rightarrow$ $F(x)$ converge puntualmente a $f(x)$

Pero el recíproco no es cierto, es decir, existen puntos donde hay convergencia puntual pero no hay convergencia uniforme.

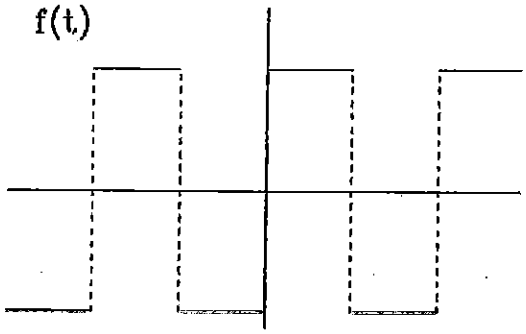
Fenómeno de Gibbs

En las cercanías de los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$, la serie de Fourier no converge uniformemente a $f(x)$.

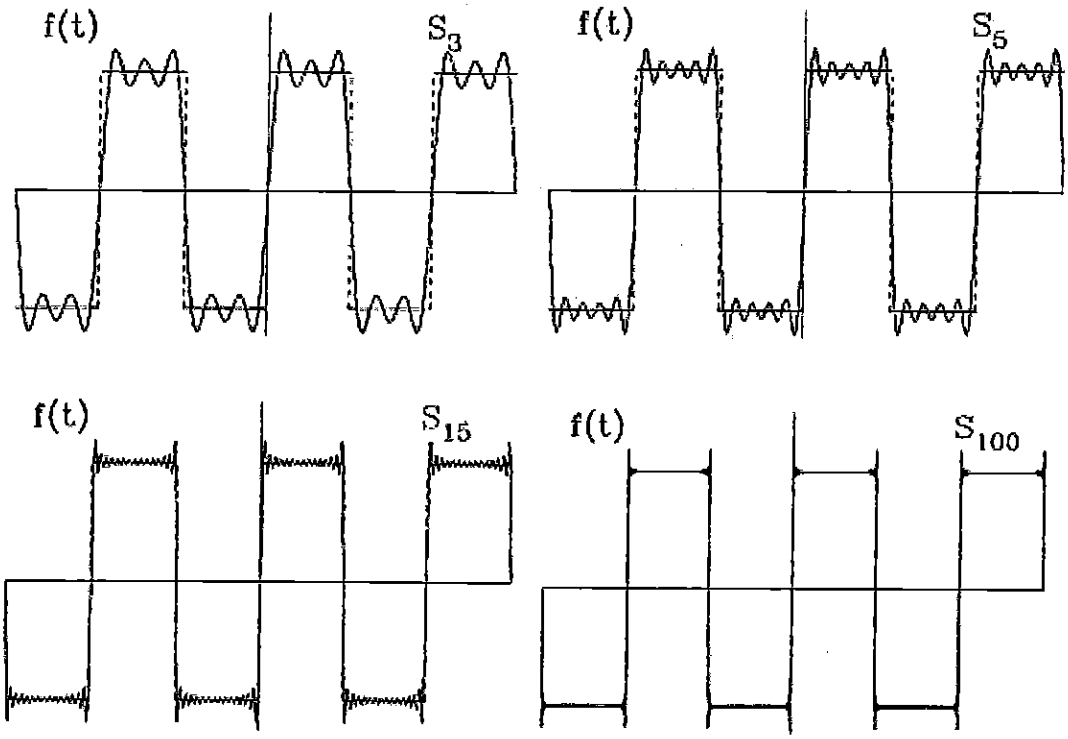
Esto se debe a que en esos puntos cercanos a una discontinuidad se produce un rizado conocido como "Fenómeno de Gibbs". Por mucho que aumentemos los términos de la serie de Fourier la amplitud de este rizado no tiende a cero. Por eso la convergencia no es uniforme en los puntos de discontinuidad. Veamos un ejemplo:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad \boxed{f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}}$$

Esta gráfica es la función original (extensión periódica)



Estas cuatro gráficas son desarrollos en serie de Fourier al cortar la serie para distintos valores de *k=3, 5, 15 y 100.*



Observa que por mucho que aumentemos los términos de la serie de Fourier la amplitud del rizado de Gibbs no tiende a cero.

Anexo al Tema 1

A continuación se tienen algunos ejemplos de funciones comunes y sus desarrollos en serie trigonométrica de Fourier correspondientes. Algunas aparecerán en los ejercicios de clase o de examen.

Función $f(t)$	Serie
$f(t) = t \qquad -\pi < t < \pi$	$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$
$f(t) = \lvert t \rvert \qquad -\pi < t < \pi$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$
$f(t) = \pi - t \qquad 0 < t < 2\pi$	$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$
$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ t & 0 < t < \pi \end{cases}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$
$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$	$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$
$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$
$f(t) = \lvert \sin t \rvert \qquad -\pi < t < \pi$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2-1}$
$f(t) = \lvert \cos t \rvert \qquad -\pi < t < \pi$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nt}{4n^2-1}$
$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ \sin t & 0 < t < \pi \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2-1} - \frac{1}{2}\sin t$

Anexo al Tema 1

Producto escalar con funciones de valor complejo

Trabajando con funciones de valor complejo, el producto escalar se define de la siguiente manera:

$\overline{g(t)} = g^*(t)$ representa el complejo conjugado.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Lo que en el caso habitual de funciones de valor real, se traduce en la definición a la que estamos más acostumbrados, ya que $\overline{g(t)} = g(t)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)dt$$

Serie de Fourier exponencial

Dado el sistema ortogonal y completo $\left\{e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right\}, k \in \mathbb{Z}$ en $L^2\left(\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right], \mathbb{C}\right)$, a la serie de Fourier de *f(t)* relativa al sistema anterior se le denomina serie de Fourier exponencial y se escribe:

Esta será la más utilizada en la asignatura SSIT de 2º curso y otras posteriores.

$$\boxed{F(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}}$$

donde $c_k = \dfrac{\left\langle f(t), e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\rangle}{\left\| e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\|^2} = \dfrac{\left\langle f(t), e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\rangle}{\left\langle e^{jk\frac{2\pi}{T}t}, e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\rangle} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Convergencia

Se estudia igual que en las series trigonométricas ya que este sistema también es ortogonal y completo.

Relación con la serie de Fourier trigonométrica

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \; k > 0$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k), \; k > 0$$

Si *f(t)* es una función real y par, se cumple: $c_k = c_{-k} = \dfrac{a_k}{2}$

Identidad de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 < e^{jk\frac{2\pi}{T}t}, e^{jk\frac{2\pi}{T}t} > = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \left\| e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\|^2$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{f(t)}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$$

$$\left\| e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\|^2 = < e^{jk\frac{2\pi}{T}t}, e^{jk\frac{2\pi}{T}t} > = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\overline{e^{jk\frac{2\pi}{T}t}}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 T \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2}$$

Anexo al Tema 1

Otras fórmulas de interés

Desigualdad de Bessel

- Si $\{f_n, n \in \mathrm{N}\}$ **es un sistema ortogonal:**

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{< f, f_i >}{< f_i, f_i >} \right|^2 < f_i, f_i >$$

- Si $\{e_n, n \in \mathrm{N}\}$ **es un sistema ortonormal:**

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |< f, e_i >|^2$$

Identidad de Parseval

- Si $\{f_n, n \in \mathrm{N}\}$ **es un sistema ortogonal y completo:**

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{< f, f_i >}{< f_i, f_i >} \right|^2 < f_i, f_i >$$

- Si $\{e_n, n \in \mathrm{N}\}$ **es un sistema ortonormal y completo:**

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |< f, e_i >|^2$$

Anexo al Tema 1

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Dada una base cualquiera $\{f_n : n \in \mathrm{N}\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ de un espacio vectorial existe un método para obtener una base ortogonal. Es decir, una base en la que todos sus elementos son ortogonales entre sí.
Este proceso se llama "Método de ortogonalización de Gram-Schimdt" y es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= f_1 \\
u_2(x) &= f_2 - \frac{<f_2,u_1>}{<u_1,u_1>} \cdot u_1 \\
u_3(x) &= f_3 - \frac{<f_3,u_1>}{<u_1,u_1>} \cdot u_1 - \frac{<f_3,u_2>}{<u_2,u_2>} \cdot u_2 \\
u_4(x) &= f_4 - \frac{<f_4,u_1>}{<u_1,u_1>} \cdot u_1 - \frac{<f_4,u_2>}{<u_2,u_2>} \cdot u_2 - \frac{<f_4,u_3>}{<u_3,u_3>} \cdot u_3 \\
\ldots & \quad \ldots\ldots \\
u_n(x) &= f_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{<f_n,u_i>}{<u_i,u_i>} \cdot u_i
\end{aligned}
$$

Una vez obtenida una base ortogonal $\{u_n : n \in \mathrm{N}\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ a partir de la base $\{f_n : n \in \mathrm{N}\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ de partida puede que necesitemos normalizarla. Para ello basta dividir cada elemento de la base ortonormal entre su módulo:

$$e_n(x) = \frac{u_n(x)}{\|u_n\|} = \frac{u_n(x)}{\sqrt{<u_n,u_n>}}$$

y así obtenemos una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathrm{N}\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

REPASO NÚMEROS COMPLEJOS

Definiciones

- Un **número complejo** z es un par ordenado (a, b) de números reales donde,
  $a = \mathrm{Re}(z)$ = parte real de z
  $b = \mathrm{Im}(z)$ = parte imaginaria de z
- La **unidad imaginaria** (designada por j) es el número complejo (0,1). Además tenemos que $j = \sqrt{-1}$.
- El **afijo** de un complejo z es el punto del plano cartesiano de coordenadas (a, b).

En ingeniería se utiliza "j" en vez de "i"

Formas de representar un número complejo

- Forma cartesiana: $z = (a, b)$
- Forma binómica: $z = a + jb$
- Forma polar: $z = \rho_\theta$
- Forma exponencial: $z = \rho e^{j\theta}$
- Forma módulo-argumental: $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

Fíjate que en realidad son sólo dos formas:
- Representación con a y b
-Representación con ρ y θ

Usaremos principalmente la forma binómica y la exponencial

Para pasar de una a otra forma hacemos:

Forma binómica a forma polar

$$z = a + jb \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan(b/a) \end{array} \right\} \Rightarrow z = \rho \cdot e^{j\theta}$$

Forma polar a forma binómica

$$z = \rho \cdot e^{j\theta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array} \right\} \Rightarrow z = a + jb$$

Operaciones con número complejos

Suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

Resta: $z_1 - z_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

Recuerda que $j \cdot j = j^2 = -1$

Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = (\rho_1 \cdot \rho_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

No es necesario aprender de memoria esta fórmula. La regla práctica consiste en multiplicar y dividir la fracción por el conjugado del denominador.

División: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \dfrac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Es útil recordar que:

$$\boxed{j^{-1} = \frac{1}{j} = -j}$$

$$\frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{-1}$$

Elemento inverso: $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + jb} = \dfrac{(a - jb)}{(a + jb)(a - jb)} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - j\dfrac{b}{a^2 + b^2}$

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho e^{j\theta}} = (\rho^{-1}) e^{-j\theta}$$

Complejo conjugado

Forma binómica: Sea $z = a + jb$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = z^* = a - jb$

Forma polar: Sea $z = \rho e^{j\theta}$, su **complejo conjugado** es $\bar{z} = z^* = \rho e^{-j\theta}$

Propiedades: i) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

iv) $\overline{\overline{z}} = z$

v) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ $\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2j}$

Modulo de un complejo

Sea $z = a + jb$, llamamos **módulo** de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propiedades: i) $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \Rightarrow z\overline{z} = |z|^2$

ii) $si \quad z \neq 0 \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|}$

iii) $|z| \geq 0, \quad |z| = 0$ sólo si $z = 0$

iv) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

v) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

vi) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

vii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

• $\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = j2$

$\hookrightarrow = \pm j2$

Potencias y raíces complejas

Sea el número complejo $z = \rho \cdot e^{j\theta}$,

- Potencia enésima:

  $z^n = \rho^n e^{jn\theta}$

  Fórmula de Moivre

- Raíces enésimas:

  Un número complejo tiene n raíces enésimas

$$\sqrt[n]{z} = re^{j\varphi} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad para \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Observación

Es conveniente manejar con soltura las potencias de la unidad imaginaria j:

$$j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1, j^5 = j$$

y en general: $j^{4n} = 1, j^{4n+1} = i, j^{4n+2} = -1, j^{4n+3} = -j$

1er parcial
hasta algo de complejos

TEMA 2: VARIABLE COMPLEJA

2.1 Funciones complejas de variable compleja

El objeto de estudio de este tema y de los siguientes van a ser las **funciones complejas de variable compleja**:

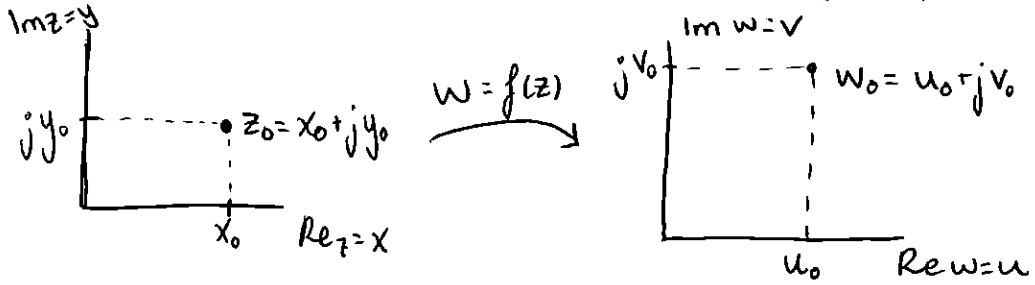
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z=x+jy & \to & f(z)=f(x+jy)=u(x,y)+v(x,y)j \end{array}$$

donde tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son funciones reales de dos variables reales. Es decir:

Este tipo de funciones se estudian en profundidad en los primeros temas de AVEC.

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & u(x,y) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} v: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & u(x,y) \end{array}$$

Si representamos los números complejos z como puntos de un plano Z) y los números complejos w como puntos de otro plano W), la función $w=f(z)$ puede interpretarse como una **transformación** de puntos (x,y) del plano Z), en puntos (u,v) del plano W)



2.2 Límites y continuidad

2.2.1 Límites

Las funciones complejas de variable compleja cumplen las mismas propiedades en cuanto a límite de la suma (suma de los límites), producto (producto de los límites) y cociente (cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero), que las funciones reales. Aparece sin embargo una nueva propiedad relacionada con el módulo:

No existe una propiedad equivalente para el argumento

$$\text{Si } \lim_{z\to z_0} f(z)=L \Rightarrow \lim_{z\to z_0}|f(z)|=|L|$$

Relación con límites reales

Sea una función compleja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=u(x,y)+v(x,y)j$:

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z)=l=a+jb\in\mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=a \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=b \end{cases}}$$

Ver apartado A.1

Los límites de las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se calculan con los procedimientos aprendidos en AVEC para funciones de dos variables (límites por polares, radiales,...).

2.2.2 Continuidad

Definición

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, decimos que f es **continua** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si y sólo si:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ /\ \forall z \in \mathbb{C}\ ..\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Teorema para estudiar la continuidad

Sea una función compleja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$:

Haciendo el límite directamente en variable compleja

$$\boxed{f \text{ es } \textbf{continua} \text{ en } z_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)}$$

Relacionándolo con funciones reales

• f es **continua** en $z_0 = x_0 + y_0 j \Leftrightarrow \underline{u(x,y)}$ y $\underline{v(x,y)}$ son continuas en (x_0, y_0)

Al igual que los límites, la continuidad de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se estudia con los procedimientos aprendidos en AVEC para funciones de dos variables.

2.3 Diferenciabilidad

2.3.1 Definición de derivada

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, su **derivada** en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ viene dada por:

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \overset{h}{\Delta z}) - f(z_0)}{\Delta z}}$$

supuesto que este límite exista.

* AVEC: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: derivable no es lo mismo que diferenciable

2.3.2 Teoremas para estudiar la diferenciabilidad

Condición necesaria y suficiente de diferenciablilidad en el campo complejo

Sea una función compleja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$:

existen derivadas parciales

* En las funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ decir que una función es derivable y es diferenciable es lo mismo

$$\boxed{f \text{ es } \textbf{diferenciable} \text{ en } z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x,y) \text{ y } v(x,y) \text{ son diferenciables} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}}$$

Para ver si u y v son diferenciables usaremos los teoremas del apartado A.2

Las condiciones

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Fíjate que si no se cumplen las condiciones de C-R puedes asegurar que la función no es derivable

se llaman condiciones de **Cauchy-Riemann**

$\Rightarrow$

Condición suficiente de diferenciabilidad en el campo complejo

Para que $f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$ sea derivable en un punto $z=x+jy$ es suficiente que existan y sean continuas las derivadas parciales de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ y que se cumplan en ese punto las condiciones de C-R.

Condición necesaria de Diferenciabilidad en el campo complejo

Esto es igual que en las funciones reales de una variable

Si $f(z)$ es diferenciable en $z = x_0 + y_0 j \Rightarrow f(z)$ es continua en $z = x_0 + y_0 j$

Condición necesaria de diferenciabilidad en el campo complejo {exclusiva para $\mathbb{C}$}

¡Cuidado! La condición enunciada es exclusiva del campo complejo y no tiene correspondencia en el campo real

Si $f(z)$ es diferenciable en $z = x_0 + y_0 j \Rightarrow u(x,y) \in C^\infty$ y $v(x,y) \in C^\infty$ en (x_0, y_0)

O lo que es lo mismo:

Si $u(x,y) \notin C^\infty$ ó $v(x,y) \notin C^\infty$ en $(x_0, y_0) \Rightarrow f(z)$ no es diferenciable en $z = x_0 + y_0 j$

La forma práctica de utilizar esta última condición es la siguiente:

Estudiaremos la [redacted] de $u(x,y)$ y de $v(x,y)$ [redacted] pues se trata de una condición que, como acabamos de enunciar, es <u>necesario</u> que se cumpla para que $f(z)$ sea diferenciable.

2.3.3 Cálculo práctico de la derivada

Fíjate que al ser f derivable, u y v cumplen las condics. de CR:

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

Si la función viene definida como $f(z) = u + v\,j$ se puede demostrar que su derivada es:

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = u_x + jv_x} \quad \text{o bien} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} = v_y - ju_y$$

$u_x(x,y) + j\,v_x(x,y)$

Y todas las combinaciones existentes usando las condiciones de C-R

2.3.4 Coordenadas polares

En algunas ocasiones nos pueden dar la función $f(z)$ en coordenadas polares de forma que $f(z) = u(\rho,\theta) + jv(\rho,\theta)$ donde $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

En este caso se puede demostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann quedan de la siguiente manera: $u_\rho = \frac{1}{\rho}\cdot v_\theta$ $\qquad \frac{1}{\rho}\cdot u_\theta = -v_\rho$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}$$

y la derivada de $f(z)$ en este caso queda expresada de la siguiente manera:

$$f(z) = e^{-j\theta}\left(\overset{u_\rho}{\frac{\partial u}{\partial \rho}} + j\overset{v_\rho}{\frac{\partial v}{\partial \rho}}\right) = e^{-j\theta}(u_\rho + jv_\rho)$$

O expresada en forma de las otras posibles combinaciones que existen usando las condiciones de C-R

Ambos términos son equivalentes

2.4 Funciones holomorfas o analíticas

Sea una función compleja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se dice que f es **holomorfa** o **analítica** en z_0 si existe un entorno de z_0 en el que f es diferenciable. (y en z_0)

Es importante resaltar que para que una determinada función sea holomorfa en z_0 no basta con que sea diferenciable en z_0. Tiene que serlo en todos los puntos de un entorno de z_0.

El conjunto de las funciones $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ que son holomorfas en A se llama

$$\mathcal{H}(A) = \{ f : A \to \mathbb{C} \ / \ f \text{ es holomorfa en } A \}$$

y tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Se dice que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ~~es entera~~ si es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$.

Veremos una clasificación más exhaustiva de los puntos singulares en apartados siguientes

Los puntos en los que una función es holomorfa se denominan puntos regulares, y aquellos en los que la función no es holomorfa se llaman puntos singulares.

Si $f(z)$ es entera y acotada $\Rightarrow f(z) = cte$ {Teorema de Lionville}

Propiedades de las funciones holomorfas

Estas propiedades son muy importantes

- La ~~suma, diferencia, producto, cociente~~ (con denominador no nulo) ~~y composición~~ de funciones holomorfas es también una función holomorfa.

* Si $f(z)$ es holomorfa $\Rightarrow$ se cumplen las ~~condiciones de C-R~~ para u y v $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$f = u(x,y) + j\, v(x,y)$

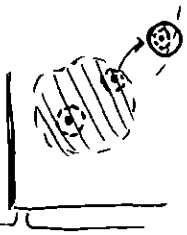
* Si $f(z)$ es holomorfa $\Rightarrow$ [redacted]

* Si $f(z)$ es holomorfa $\Rightarrow$ $f(z)$ ~~no depende de $\bar{z}$~~ (es decir $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$)

Ó: Si $\overline{f(z)}$ depende de $z \Rightarrow f(z)$ NO holomorfa

O lo que es lo mismo:

~~Si $f(z)$ depende de $\bar{z}$~~ (es decir $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0$) $\Rightarrow$ $f(z)$ ~~no es holomorfa~~



- f diferenciable en D abierto $\Leftrightarrow$ f holomorfa en D abierto

(Si D fuese CERRADO no se cumple)

$\forall z_0 \in D$, existen puntos rodeándolo en los que f es diferenciable

Regla de L'Hopital

Fíjate que no se puede aplicar al caso $\dfrac{\infty}{\infty}$ porque en ese caso las funciones no serían holomorfas en z_0

Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones holomorfas en un dominio D y si para $z_0 \in D$ $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$ y $f_2'(z_0) \neq 0$, se verifica:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ¿holomorfa? ¿armónica?

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ } ~~holomorfa?~~ armónica?

2.4.1 Funciones armónicas y Armónicas conjugadas

Definiciones

Un dominio es un conjunto abierto y conexo

- Sea $T(x,y)$ una función de dos variables reales definida en un dominio D y que admite primeras y segundas derivadas continuas en D. Se dice que $T(x,y)$ es una **función armónica** en D si se verifica la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_{xx} + T_{yy} = 0$$

¡OJO! Si $S(x,y)$ es una armónica conjugada de $T(x,y)$, no es cierto en general, que $T(x,y)$ sea armónica conjugada de $S(x,y)$. Ver el siguiente ejemplo:

$$T(x,y) = x^2 - y^2$$
$$S(x,y) = 2xy$$

$T_x = 2x \quad T_y = -2y$

$S_x = 2y \quad S_y = 2x$

$T_x = S_y$ y $T_y = -S_x$

S conjugada de T no al revés

- Sean $T(x,y)$ y $S(x,y)$ dos funciones armónicas en D. Si se verifica que:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial S}{\partial x} \qquad \forall (x,y) \in D$$

$T_x = S_y \qquad T_y = -S_x$

Entonces se dice que $S(x,y)$ (v) es **armónica conjugada** de $T(x,y)$ (u).

$u_x = v_y$
$u_y = -v_x$

Propiedades

- Si $T(x,y) = k \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in D$ entonces $T(x,y)$ es armónica en D.
- Si $T(x,y)$ es armónica en D entonces $k \cdot T(x,y)$ es armónica en D.
- Si $T_1(x,y)$ y $T_2(x,y)$ son armónicas en D entonces $T_1(x,y) + T_2(x,y)$ es armónica en D.
- Si $T_1(x,y)$ es armónica conjugada de $T_2(x,y)$ y, a su vez, $T_2(x,y)$ es armónica conjugada de $T_1(x,y)$ entonces tanto $T_1(x,y)$ como $T_2(x,y)$ son funciones constantes.

Consecuencias en variable compleja

Sea una función compleja $f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$. Se cumple que:

1. $f(z)$ holomorfa en D $\Rightarrow$ $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas
   $\Leftarrow$ $Re[f(z)]$; $Im[f(z)]$
2. $f(z)$ holomorfa en D $\Leftrightarrow$ $v(x,y)$ es armónica conjugada de $u(x,y)$
   $Im[f(z)]$ $\qquad$ $Re[f(z)]$
3. $f(z)$ holomorfa en D $\Leftrightarrow$ $-u(x,y)$ es armónica conjugada de $v(x,y)$

Esta será la que más utilicemos

ó de manera equivalente:

$v(x,y)$ es armónica conj. de $u(x,y)$ en D $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ es armónica conj. de $v(x,y)$ en D

4. $f(z)$ holomorfa $\Rightarrow u(x,y), v(x,y) \in C^\infty \Rightarrow \in C^2 \Rightarrow$ T.ª de Schwartz:

$$u_{xy} = u_{yx}$$
$$v_{xy} = v_{yx}$$

2.4.2 Construcción de la armónica conjugada. Obtención de una función holomorfa a partir de su parte real o de su parte imaginaria

En la práctica esta fórmula no se aplica. Veremos cómo se hace directamente en los ejercicios.

Para construir una armónica conjugada de $u(x,y)$ en D se utiliza el **Método de Euler**:

$$v(x,y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + K$$

No hace falta memorizar esta fórmula. Veremos cómo utilizarla directamente en los ejemplos.

La utilidad de poder construir la armónica conjugada $v(x,y)$ a partir de $u(x,y)$ es que, de esta forma, siempre se puede reconstruir una función holomorfa $f(z)$ partiendo de su parte real o imaginaria:

$$f(z) = u(x,y) + v(x,y)j \quad \text{(holomorfa)}$$

Esta formula sirve siempre que $f(z)$ sea holomorfa

además si queremos dejarla en función de z basta con hacer:

$$f(z) = u(z,0) + v(z,0)j$$

Fórmulas de Milne Thompson

Si utilizas estas fórmulas, las tienes que demostrar antes, porque no están en el temario.

Las fórmulas de Milne Thompson nos permiten reconstruir la función $f(z)$ conociendo sólo una de las partes, $u(x,y)$ ó $v(x,y)$, sin tener que calcular la otra.

- Suponemos conocido $\mathrm{Re}\left[f(z)\right] = u(x,y)$ y queremos reconstruir la función $f(z)$.
  Teniendo en cuenta que $f' = u_x - ju_y \rightarrow f'(z) = u_x(z,0) - ju_y(z,0)$, integrando:

$$f(z) = \int\left(u_x(z,0) - ju_y(z,0)\right)dz + C,\ C \in \mathbb{C}$$

- Suponemos conocido $\mathrm{Im}\left[f(z)\right] = v(x,y)$ y queremos reconstruir la función $f(z)$.
  Teniendo en cuenta que $f' = v_y + jv_x \rightarrow f'(z) = v_y(z,0) + jv_x(z,0)$, integrando:

$$f(z) = \int\left(v_y(z,0) + jv_x(z,0)\right)dz + C,\ C \in \mathbb{C}$$

NOTA (EULER):

$\int g(x,y)\cdot dx = G(x,y) + \varphi(y)$

$\int g(x,y)\cdot dy = H(x,y) + \varphi(x)$

función arbitraria que depende de la otra variable respecto a la cual no integro

2.5 Funciones elementales

Definiciones previas

Sea una función compleja $f(z)$. Si a cada valor de z le corresponde sólo un valor de $f(z)$ decimos que f es una **función univaluada o uniforme** (tal y como entendemos las funciones en cálculo de variable real).

Más adelante estudiaremos en más profundidad las funciones multiformes

Si a cada valor de z le corresponde más de un valor de $f(z)$ decimos que f es una **función multivaluada o multiforme.**

Función exponencial

La función exponencial del análisis complejo se define para todo z como:

$$e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x(\cos y + j \operatorname{sen} y)$$

- Es uniforme
- Está definida $\forall z \in \mathbb{C}$
- Es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$ (función entera).
- El recorrido de la función exponencial e^z es todo el plano complejo excepto el origen. $(e^z \neq 0)$
- La función exponencial compleja se reduce a la función exponencial real para números con parte imaginaria nula.
- Para número imaginarios puros la exponencial compleja coincide con la fórmula de Euler:

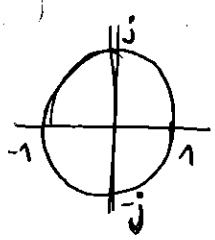
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

- La función exponencial es periódica de período imaginario puro $2\pi j$: $e^{z+2\pi j} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\quad e^{z+2\pi j} = e^z \cdot \underbrace{e^{2\pi j}}_{=1}$

$* \; e^{j\pi} = \boxed{-1 = e^{-j\pi} = e^{j(2K+1)\pi}, \; K \in \mathbb{Z}}$ $\quad * \; e^{j\frac{\pi}{2}} = j$

$* \; e^{j0} = e^{j2\pi} = \boxed{1 = e^{j2K\pi}, \; K \in \mathbb{Z}}$ $\quad * \; e^{j\frac{3\pi}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

$\boxed{* \; e^{j(2K+1)\frac{\pi}{2}} = (-1)^K j, \; K \in \mathbb{Z}}$



- La función exponencial es entera (holomorfa en todo el plano complejo) y verifica que:

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

- Además se verifican las siguientes propiedades:

$$e^{z1} \cdot e^{z2} = e^{z1+z2}$$

$$e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Polinomio de grado n

$$p_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Es uniforme
- Está definida y es holomorfa $\forall z$ (entera)

Función racional

Es el cociente de dos polinomios

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

- Es uniforme
- Está definida y es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$ que cumpla que $Q_m(z) \neq 0$

Funciones trigonométricas circulares

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \qquad tg\ z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$sen^2(z) + cos^2(z) = 1$

$[-1,1]$ ↑ acotado

$\lim_{x \to 0} \underset{0}{x} \cdot sen\frac{1}{x} = 0$

$\lim_{z \to 0} \underset{0}{z} \cdot sen\frac{1}{z} = \emptyset$!! NO

↓ NO ACOTADO

- Son funciones uniformes
- Definidas y holomorfas $\forall z \in \mathbb{C}$ excepto la $tg\ z$ que lo está para $\forall z \in \mathbb{C} \mid \cos z \neq 0$
- Las funciones sin z y cos z no están acotadas en módulo
- $\sin z = \sin(z + 2k\pi) \qquad \cos z = \cos(z + 2k\pi) \qquad tgz = tg(z + k\pi)$
- Tienen los mismos "ceros" que las funciones reales

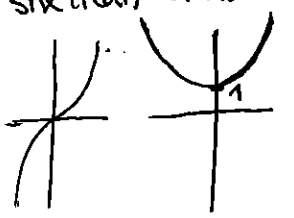
$sen\ z = 0 \iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos z = 0 \iff z = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Funciones trigonométricas hiperbólicas

$$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad th(z) = \frac{sh(z)}{ch(z)}$$

shx (real) chx (real)



- Son funciones uniformes
- Definidas y holomorfas $\forall z \in \mathbb{C}$ excepto la $th(z)$ que lo está para $\forall z \in \mathbb{C} \mid ch(z) \neq 0$
- $sh(z) = sh(z + j2k\pi) \qquad ch(z) = ch(z + j2k\pi) \qquad th(z) = th(z + jk\pi) \rightarrow$ Periódicos
- sh z y ch z tienen infinitos "ceros" (a diferencia del caso real)

sh(z): período 2π
ch(z): período 2π
th(z): período π

Se cumplen las siguientes relaciones, que se pueden comprobar fácilmente:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(jz) &= ch(z) \\ ch(jz) &= \cos z \\ sh(z) &= j \sin z \\ \sin(jz) &= jsh(z) \end{aligned}}$$

$ch^2 z - sh^2 z = 1$

2.6 Funciones multiformes (o multivaluadas)

Ya hemos visto anteriormente el concepto de función multiforme. Escrito de una manera más rigurosa:

$$w = f(z) \text{ es multiforme} \Leftrightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} \mid f(z_0) \text{ no es único}$$

Por ejemplo, entre otras, son funciones multiformes las siguientes:

$f(z) = \ln z$ La función f toma infinitos valores para cada valor de z

$g(z) = \sqrt[n]{z}$ La función g toma n valores para cada valor de z

...

2.6.1 Función logaritmo

La función logaritmo se define en los puntos no nulos como:

$$f(z) = \ln z = \ln \rho e^{j\theta} = \ln \rho e^{j(\theta+2k\pi)} = \ln \rho + \ln e^{j(\theta+2k\pi)} = \ln \rho + j(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Observa que la función logaritmo es una función **multiforme** ya que para una misma preimagen z existe más de una imagen (de hecho, existen infinitas puesto que k puede tomar infinitos valores enteros).

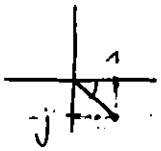
Muchas veces interesa obtener una función uniforme a partir de una función multiforme. A cada una de las funciones uniformes en que podemos "separar" la función multiforme se le denomina **rama.**

A la rama que se obtiene al dar el valor $k=0$ se la denomina **rama principal**. Así, la rama principal del logaritmo neperiano tiene la siguiente expresión:

$$\ln z = \ln \rho + j(\theta + 2k\pi)|_{k=0} = \ln \rho + j\theta$$

Pero no basta con fijar el valor de k, a un número entero concreto para conseguir quedarnos con una función uniforme. Lo podemos ver en el siguiente ejemplo:

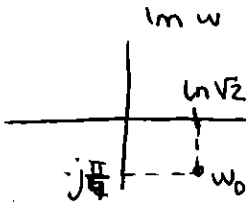
$1-j = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$



$w = f(z)$

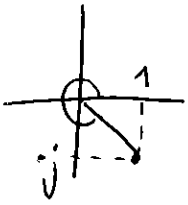
$w = \ln z = \ln \rho + j\theta$

$k=0$, rama ppal



$w_0 = \ln\sqrt{2} - j\frac{\pi}{4}$

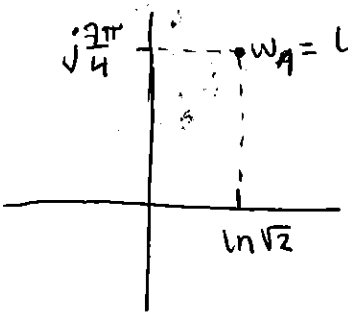
$1-j = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{7\pi}{4}}$



$w = f(z)$

$w = \ln z = \ln \rho + j\theta$

$k=0$; rama ppal



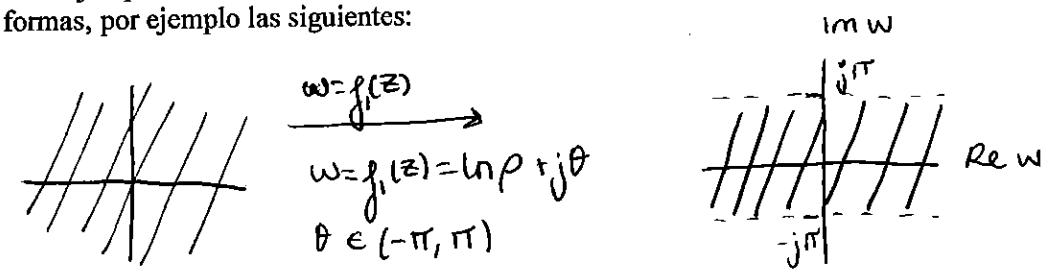
$w_1 = \ln\sqrt{2} + j\frac{7\pi}{4}$

¡Esto es muy importante!

Es decir, que para conseguir aislar una función uniforme a partir de una multiforme y obtener de esta forma una **rama** de la función, no basta con fijar el valor de *k*. También hay que fijar el **margen de variación** de $\theta = arg(z)$.

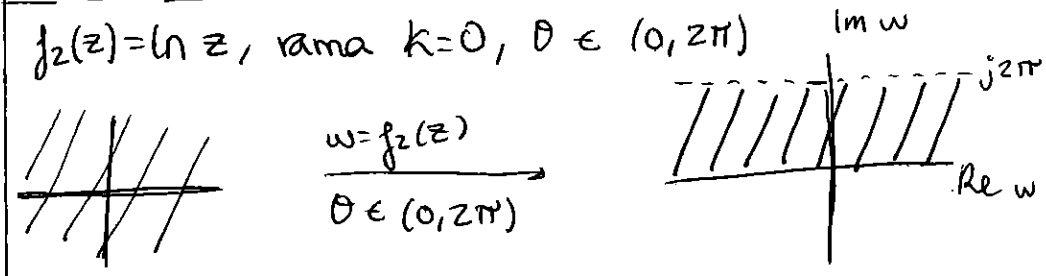
De esta forma podríamos definir varias ramas diferentes para un mismo valor de $k=0$. Así, en el ejemplo anterior, podemos fijar el margen de variación de $\theta = arg(z)$ de muchas formas, por ejemplo las siguientes:

Fíjate que son aplicaciones distintas, porque tienen distinto conjunto imagen

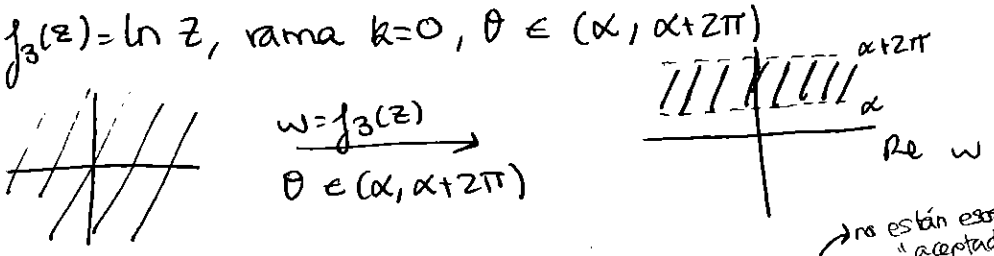


$f_1(z)=\ln z$, rama $k=0$, $\theta \in (-\pi,\pi)$

$f_2(z)=\ln z$, rama $k=0$, $\theta \in (0,2\pi)$



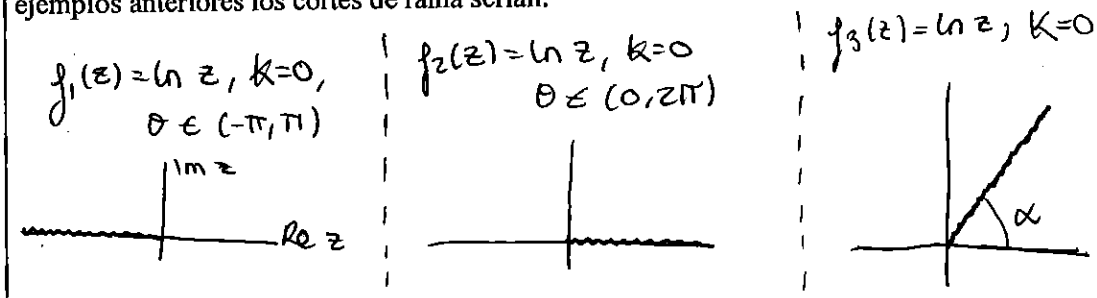
$f_3(z)=\ln z$, rama $k=0$, $\theta \in (\alpha, \alpha+2\pi)$



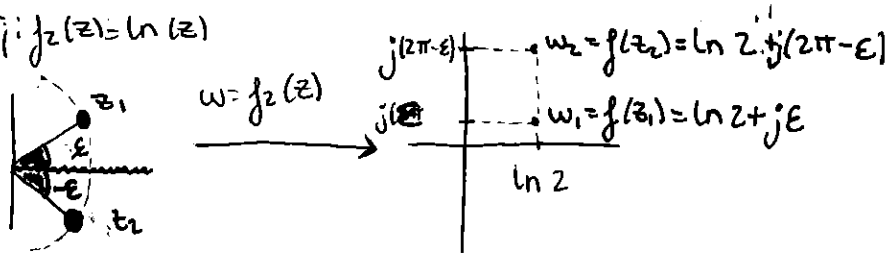
no están esos puntos "aceptados"

Al fijar el margen de variación de $\theta = arg(z)$ aparece lo que se llama **corte de rama**. En los ejemplos anteriores los cortes de rama serían:

Habitualmente los cortes de rama tienen forma de semirrectas o segmentos cuyos extremos son los puntos de ramificación



Ej: $f_2(z)=\ln(z)$



$z_0 = 2\cdot e^{j0}$

$z_1 = 2\cdot e^{j\varepsilon}$

$z_2 = 2\cdot e^{-j\varepsilon} = 2\cdot e^{j(2\pi-\varepsilon)}$

Al hacer $\varepsilon \to 0$, vemos q $f_2(z)=\ln z$ no es continua en los puntos del corte de rama $\Rightarrow$ $f(z)$ no es ~~continua~~ diferenciable en los puntos del corte de rama $\Rightarrow$ $f(z)$ no es HOLOMORFA en los puntos del corte

A los puntos extremos del corte de rama se les denominan **puntos de ramificación**.

Todos los puntos del corte de rama (incluidos los puntos de ramificación) son puntos singulares no aislados esenciales. Lo vemos con un ejemplo.

2.6.2 Función raíz enésima

La función raíz enésima se define de la siguiente forma:

$$f(z)=(z)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho e^{j\theta}}=\sqrt[n]{\rho e^{j(\theta+2k\pi)}}=\sqrt[n]{\rho}\sqrt[n]{e^{j(\theta+2k\pi)}}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{\frac{j(\theta+2k\pi)}{n}},n\in\mathbb{N},k=0,1,...,n-1$$

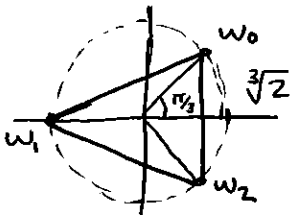
Se trata de una función multiforme que toma n valores para cada valor de z.

De nuevo, para quedarse con una sola rama, se fija el valor de k, y el margen de variación de *arg(z)*.

Ej: $f(z)=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{j\frac{\theta+2k\pi}{3}}$, $k=0,1,2$

P.ej: $z_0=-2=2\cdot e^{j\pi}\rightarrow\sqrt[3]{-2}=\begin{cases}w_0\\w_1\\w_2\end{cases}$

- $w_0=\sqrt[3]{2}\cdot e^{j\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}\cdot e^{j\pi/3}$
- $w_1=\sqrt[3]{2}\cdot e^{j\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}\cdot e^{j\pi}$
- $w_2=\sqrt[3]{2}\cdot e^{j\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}\cdot e^{j\frac{5\pi}{3}}$



↓ Los distintos valores de la raíz enésima de un complejo corresponden a los vértices de un polígono regular de n lados.

2.6.3. Función potencia

Si $f(z)=z^a$ /

- $a\in\mathbb{Z}$: z^a es UNIFORME
- $a\in\mathbb{Q}$: $(a=\frac{p}{q})$ $q,p\in\mathbb{Z}$: $z^a=z^{p/q}=\sqrt[q]{z^p}$ ⇒ q ramas
- $a\in\mathbb{I}$: z^a es MULTIFORME de ∞ ramas

Se define como:

$$f(z)=z^a\rightarrow\ln f(z)=\ln z^a\rightarrow\ln f(z)=a\ln z\rightarrow f(z)=e^{a\ln z},a\in\mathbb{C}$$

Se trata de una función multiforme que toma infinitos valores para cada valor de z.

De nuevo, para quedarse con una sola rama, se fija el valor de k, y el margen de variación de *arg(z)*.

Todos estos conceptos son muy similares a los ya estudiados en integración curvilínea en el campo real

2.7 Integración en el plano complejo

En este tema vamos a estudiar algunas técnicas de integración en el campo complejo. Más adelante, en el tema 4, aprenderemos un importante teorema (Teorema de los residuos) que nos permitirá calcular integrales de forma más rápida y eficaz.

2.7.1 Definiciones

- Se denomina **curva continua en C** a la imagen de toda aplicación continua de la forma:

$$\begin{aligned} \Gamma : [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\to \Gamma(t) = x(t) + y(t)j \end{aligned}$$

  A los puntos $\Gamma(a)$ y $\Gamma(b)$ se los denomina **extremos** de la curva.
  Al par de ecuaciones $x(t)$, $y(t)$ se le denomina **parametrización** de Γ.

- Se dice que Γ es una curva **cerrada** si $\Gamma(a) = \Gamma(b)$.

- Se dice que $z_0 \in \Gamma$ es un punto **múltiple** de la curva si existen dos valores del parámetro t con la misma imagen mediante Γ.

- Se dice que Γ es una curva **simple** si no tiene puntos múltiples.

- Se dice que Γ es una curva **suave** si tiene alguna parametrización que sea derivable.

- Se dice que Γ es una curva **suave a trozos** si se puede subdividir en un número finito de arcos suaves.

4 trozos

suave (1 trozo)

- Se dice que Γ es una curva **suave a trozos** si se puede subdividir en un número finito de arcos suaves.

- Un dominio D es **simplemente conexo** si toda curva cerrada simple dentro de él encierra puntos sólo de D. Un dominio que no es simplemente conexo se llamará **múltiplemente conexo**.

D simplemente conexo (sin agujeros)

D doblemente conexo (1 agujero)

D triplemente conexo (2 agujeros)

y así

Estas integrales se realizan de la misma forma que las curvilíneas de AVEC y es el método general.

Sin embargo, se suelen usar otros métodos (cuando es posible) para resolverlas de manera más sencilla:
- Teoremas de los apartados 2.7.3 y 2.7.4
- Cálculo de residuos (lo veremos más adelante)

2.7.2 Integración curvilínea en el campo complejo

Sea una curva suave a trozos de C:

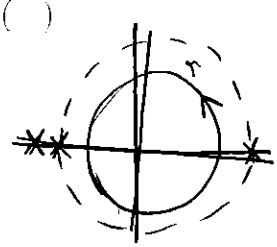
$$\begin{aligned} \Gamma: [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\to \Gamma(t) = x(t) + j \cdot y(t) \end{aligned}$$

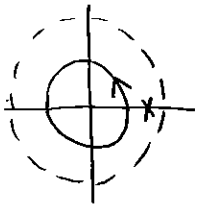
y sea una función compleja $f(z) = u(x,y) + v(x,y)j$ una función continua sobre Γ.

Se denomina integral de $f(z)$ a lo largo de Γ a la expresión:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,dt$$

Los siguientes teoremas permiten obtener sin cálculos integrales con una determinada forma.





2.7.3 Teoremas para dominios simplemente conexos

Teorema de Cauchy - Goursat

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y sea $\Gamma \subset D$ cualquier curva cerrada, suave a trozos. Se cumple que:

→ holomorfa dentro y sobre Γ

$$f(z) \text{ es holomorfa en } D \;\Rightarrow\; \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

↓ cerrada, suave (a trozos)

Fórmula integral de Cauchy (FIC)

Sea $f(z)$ una función holomorfa en el abierto simplemente conexo D y sea Γ una curva simple, cerrada y suave a trozos recorrida en sentido positivo $\Gamma \subset D$, entonces se verifica que,

→ holomorfa ...

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi j\, f(z_0)}$$

↓ cerrada...

Fórmula integral de Cauchy para contornos no simples

→ por C-G la int = 0

→ k veces rodea a z_0 (2)

La anterior fórmula admite la siguiente generalización:

Se deduce directamente de lo anterior. Sólo hay que descomponer la curva en n contornos simples cerrados y aplicar lo anteriolr.

Sea $f(z)$ una función holomorfa en el abierto simplemente conexo D y sea Γ una curva no simple (que interseca consigo misma n veces, rodeando k veces al punto z_0) y $\Gamma \subset D$, entonces se verifica que,

$$kf(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \quad\Rightarrow\quad \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi j k f(z_0)$$

↓ rodea <u>K veces</u>

Fórmula integral generalizada de Cauchy

Sea $f(z)$ una función holomorfa en el abierto simplemente conexo D y sea Γ una curva simple, cerrada y suave a trozos $\Gamma \subset D$, entonces se verifica que,

→ holomorfa dentro y sobre

$$f^{k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi j}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz \quad\Rightarrow\quad \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz = \frac{2\pi j}{k!} f^{k)}(z_0)$$

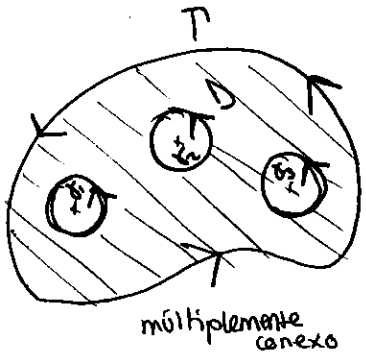
↓ cerrada...

2.7.4 Teoremas para dominios múltiplemente conexos

Teorema General de Cauchy-Goursat

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto múltiplemente conexo y sea Γ cualquier curva simple, cerrada y suave a trozos, recorrida en sentido positivo que junto con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ (curvas simples, cerradas y suaves a trozos, *recorridas en el mismo sentido que* Γ), forman la frontera de *D*. Se cumple que:

$f(z)$ es holomorfa en D $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$



$\Gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 = \mathrm{Fr}\, D$

$\displaystyle\oint_\Gamma - \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} + \oint_{\gamma_3}$

2.7.5 Otros teoremas

Acotación de la integral

Sea Γ una curva suave a trozos y *f(z)* continua en Γ tal que $|f(z)| \le M \quad \forall z \in \Gamma$.
Entonces se cumple

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \le ML$$

donde L es la longitud de Γ.

Recuerda que la longitud de una curva parametrizada por $\Gamma(t)$ entre a y b, viene dada por:
$L = \int_a^b |\Gamma'(t)|\, dt$

Teorema del valor medio de Gauss

El valor medio de una función holomorfa en cualquier punto z_0 de su dominio de holomorfía *D*, es el valor medio de sus valores sobre cualquier circunferencia *C* de centro z_0, contenida en *D* ella y su interior.

O dicho más matemáticamente:

Sea $f(z)$ holomorfa en el abierto simplemente conexo $D: |z - z_0| < \varepsilon$ que contiene a la circunferencia $c: |z - z_0| = \varphi \quad 0 < \varphi < \varepsilon$. Entonces el valor de $f(z)$ en el centro z_0 es igual a la media aritmética de $f(z)$ sobre c.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \varphi e^{j\theta})d\theta \qquad 0 < \varphi < \varepsilon$$

Teorema de Morera

Sea $f(z)$ una función continua en un abierto simplemente conexo D y tal que:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

siendo C *cualquier* curva cerrada y suave a trozos que pertenecen a D. Entonces $f(z)$ es holomorfa en D.

Teorema de la primitiva

Esto quiere decir que si la función es holomorfa en un dominio simplemente conexo, el valor de la integral no depende de la curva concreta, sino sólo de los puntos inicial y final..

Sea $f(z)$ holomorfa en el abierto simplemente conexo D y $\Gamma \subset D$ una curva que une los puntos z_0 y z_1. Entonces se cumple que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \boxed{F(z_1) - F(z_0)}$$

siendo $F(z)$ una primitiva de $f(z)$.

Γ: debe estar dentro de un dominio simplemente conexo (sin agujeros) en el que $f(z)$ sea holomorfa.
(Γ: puede ser abierta)

Principio de módulo máximo/mínimo.

Estos son los más útiles para los problemas

1) Si $f(z)$ es continua en R (cerrado acotado) y es holomorfa y no constante en $\overset{o}{R}$ entonces $|f(z)|$ alcanza su máximo en $\underbrace{\partial R}_{\text{frontera}}$, nunca en $\overset{o}{R}$. interior

2) Si $f(z)$ es continua en R (cerrado y acotado) tal que $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in R$ y es holomorfa y no constante en $\overset{o}{R}$ entonces $|f(z)|$ alcanza su mínimo en ∂R, nunca en $\overset{o}{R}$.

[No puedo buscar máximo en $f(z) \in \mathbb{C}$ (porque $\mathbb{C}$ no está ordenado)]

Este concepto es análogo al del análisis real

2.8 Series de potencias complejas. Series de Taylor. Series de Laurent

Una **serie de potencias** complejas es un tipo particular de serie de funciones. Tienen la siguiente forma:

Fíjate que sólo tiene potencias positivas o de orden 0

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , |z - z_0| < R}$$

Donde z_0 es el centro de la serie. Normalmente el centro suele ser el cero, $z_0 = 0 + 0j$ así que la serie nos suele aparecer de la siguiente manera:

$$\sum_{n}^{\infty} a_n z^n$$

2.8.1 Series de Taylor

Teorema de Taylor

Sea f una función holomorfa en $|z - z_0| < R$. Entonces existe una única serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ que cumple que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in |z - z_0| < R$

Donde los coeficientes de la serie vienen dados por:

$$a_n = \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}$$

Radio y Campo de convergencia de la serie de Taylor

Al conjunto $|z - z_0| < R$ se le denomina **campo de convergencia** de la serie. Dentro de dicho campo, el desarrollo en serie converge a *f(z)*. Fuera de dicho campo el desarrollo en serie no converge a *f(z)*.

Esto quiere decir que sólo podremos decir que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ si z está dentro del campo de convergencia.

R es el **radio de convergencia** de la serie de Taylor, y viene dado por la siguiente expresión:

Esta expresión apenas se usa en la práctica

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

En la práctica, el radio de convergencia de una serie de Taylor, se calcula como la distancia desde el centro de la serie z_0 al punto singular más cercano de la función

Esto es lo importante

Cálculo práctico del desarrollo en serie

Los procedimientos que podemos aplicar para obtener la serie de Taylor de una determinada función son los siguientes:

Primer procedimiento

Nos basamos en la propia definición de serie de Taylor para calcular el desarrollo en serie de la función $f(z)$. Sólo es necesario exigir que $f(z)$ sea holomorfa en un abierto conexo que contega al centro z_0. La fórmula es la siguiente:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z_0-z)^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots$$

$z - z_0$

$f(z)$ es analítica en un abierto conexo D si $\forall z \in D$, $\exists$ un entorno en el que $f(z)$ es la suma de una serie de potencias centrada en z_0

y es válida en el círculo $|z-z_0| < R$.

Segundo procedimiento

Utilizar series de Taylor de funciones elementales conocidos de antemano. Los desarrollos de Taylor que conviene conocer son los siguientes:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \qquad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty$$

Fíjate que son los términos pares de e^z

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots \qquad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$$

Fíjate que son los términos impares de e^z

$$\operatorname{senh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots \qquad \operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$$

Fíjate que son los términos pares de e^z alternando signo

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$$

Fíjate que son los términos impares de e^z alternando signo

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \qquad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$$

$$\mathrm{L}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \qquad \mathrm{L}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha\frac{z}{1!} + \alpha(\alpha-1)\frac{z^2}{2!} + \ldots \qquad (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad |z| < 1$$

Tercer procedimiento

Muchas veces basta con aplicar la serie geométrica para obtener la serie de Taylor de una determinada función $f(z)$:

$$\frac{1}{1-f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (f(z))^n \qquad \text{si } |f(z)| < 1$$

$$\frac{f(z)}{1-f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} (f(z))^n \qquad \text{si } |f(z)| < 1$$

Cuarto procedimiento

También se puede obtener una serie de Taylor mediante operaciones elementales de otras series conocidas:

- Multiplicación de series.
- Derivación de series.
- Integración de series.
- Composición de funciones dentro de una serie.

2.8.2 Series de Laurent

¡OJO! Esto no quiere decir que el punto z_0 en torno al cual calculamos el desarrollo en serie de Laurent, siempre tenga que ser un punto singular (es decir, un punto en el que la función no es analítica)

Si una funcion $f(z)$ no es analítica en un punto z_0, no podemos desarrollar en serie de Taylor en ese punto. No obstante, es posible hallar una representación en serie para $f(z)$ que contenga tanto potencias positivas como negativas de $z - z_0$. Esta serie es conocida como serie de Laurent.

Teorema de Laurent

Fíjate que ahora el desarrollo en serie tiene tanto potencias negativas como positivas.

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio anular $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Entonces, en todo punto de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2}$$

En la práctica, la expresión dada para calcular los coeficientes de la serie de Laurent se utiliza en escasas ocasiones ya que, en la mayoría de los casos en que tenemos que calcular una serie de Laurent, aplicaremos los procedimientos que hemos aprendido para calcular una serie de Taylor. De hecho, todo lo aprendido para calcular una serie de Taylor se puede utilizar para obtener una serie de Laurent.

donde los coeficientes vienen dados por la expresión:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

donde C representa cualquier curva *cerrada* simple en torno de z_0, *orientada positivamente* y contenida en el dominio.

Habitualmente también se puede escribir el desarrollo en serie de la siguiente manera:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2$$

A la primera de las series (la de exponentes n negativos) se la denomina ~~parte principal~~ y a la segunda (la de exponentes n positivos) ~~parte regular~~.

Observaciones

Cuando $f(z)$ es analítica en $|z-z_0| < R_2$ (o sea, analítica en todo el círculo incluido su centro z_0) resulta que los coeficientes a_n (los correspondientes a las potencias negativas) son todos nulos (ya que por ser el integrando una función analítica se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat) y la serie queda reducida a una serie de Taylor alrededor de z_0.

Radios y campo de convergencia de la serie de Laurent

Al conjunto $R_1 < |z-z_0| < R_2$ se le denomina **campo de convergencia** de la serie. Dentro de dicho campo, el desarrollo en serie converge a *f(z)*. Fuera de dicho campo el desarrollo en serie no converge a *f(z)*.

R_1 y R_2 son los **radios de convergencia** de la serie de Laurent, y vienen dados por las siguientes expresiones:

No te preocupes si no te acuerdas de hacer este tipo de límites. No es necesario.

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad R_2 = R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

Sin embargo, en la práctica estas expresiones apenas se utilizan. Veremos en los ejercicios, como calcular de manera práctica el campo de convergencia del desarrollo en serie de Laurent.

2.8.3 Aspectos de convergencia

Teorema de Weierstrass

Dada una serie de funciones $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)$ uniformemente convergente en todo conjunto cerrado y acotado (compacto) contenido en D, cuyos términos son funciones holomorfas en D, se cumple:

1) La suma de la serie es también una función holomorfa en D.

2) La serie que se obtiene derivando término a término k veces la misma, es uniformemente convergente en todo conjunto cerrado y acotado (compacto) en D, y represente en dicho dominio la derivada k-ésima de la función.

Esto se utiliza a veces en los ejercicios

Aplicación del teorema de Weierstrass a las series de potencias

Se puede demostrar que:

- Toda serie de potencias es uniformemente convergente en cualquier conjunto de puntos cerrado y acotado (compacto) contenido en su campo de convergencia.
- Los términos de las series de potencias son funciones analíticas

Por lo tanto, las series de potencias (tanto de Taylor como de Laurent) cumplen las hipótesis del teorema de Weierstrass. Esto nos sirve para:

1) Justificar que nuestros desarrollos en serie representan funciones holomorfas dentro del campo de convergencia

2) Poder calcular la derivada de un desarrollo en serie de potencias como la suma de las derivadas de sus infinitos términos de manera justificada

2.9 Puntos singulares. Residuos.

2.9.1 Clasificación de los puntos singulares

Una función f tiene una **singularidad aislada** en $z = z_0$ si f no es analítica en z_0 pero sí lo es en algún entorno perforado de z_0 (o sea, en un entorno de z_0 quitando z_0).

Las singularidades aisladas de una función se pueden clasificar en tres tipos: polos, singularidades esenciales y singularidades evitables. Para clasificar una singularidad basta con obtener el desarrollo de Laurent de f alrededor de la singularidad z_0 y observar la parte principal.

• Orden de un polo:

- $g(z) = (z-z_0)^m \cdot f(z)$ [$g(z)$ holom. en $z=z_0$]
- $\lim_{z \to z_0} g(z) \in \mathbb{C}-\{0\}$

$\Downarrow$

$z=z_0$ es un polo de orden m

Singularidades polares (polos) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

Decimos que una singularidad aislada $z = z_0$ de una función f es un **polo de orden** m si el desarrollo de Laurent de f alrededor de z_0 tiene una parte principal compuesta por términos de hasta orden m.

En un polo se cumple que $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Singularidades esenciales $\lim f(z) = \nexists$

Decimos que una singularidad aislada $z = z_0$ de una función f es una **singularidad esencial** si el desarrollo de Laurent de f alrededor de z_0 tiene una parte principal compuesta por infinitos términos.

En una singularidad esencial se cumple que <u>no existe</u> $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

Singularidades evitables $\exists \lim f(z) \in \mathbb{C}$

Decimos que una singularidad aislada $z = z_0$ de una función f es una **singularidad evitable** si el desarrollo de Laurent de f alrededor de z_0 no tiene una parte principal.

En una singularidad evitable se cumple que existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$ y es finito.

Observaciones (pasar)

- Recuerda que el desarrollo de Laurent hay que hacerlo alrededor de la singularidad que estemos estudiando para obtener el carácter de esa singularidad. Por ejemplo, si una función tiene tres singularidades distintas tendremos que hacer tres desarrollos de Laurent distintos, uno alrededor de cada singularidad, para clasificar cada una de ellas.
- Las singularidades evitable y polar, son siempre aisladas.
- La singularidad esencial puede ser aislada o no aislada.

Singularidades de una función en el punto del infinito $\mathbb{C}$ completo

El comportamiento de una función $f(z)$ en $z=\infty$ se define como el de $f\left(\frac{1}{w}\right)$ en $w=0$, es decir, $f(z)$ será holomorfa o tendrá una singularidad en $z=\infty$ cuando $f\left(\frac{1}{w}\right)$ sea holomorfa o tenga una singularidad (del mismo tipo) en $w=0$.

2.9.2 Residuos

Toda singularidad aislada z_0 de una función f tiene asociado un número al que llamamos **residuo** y que corresponde con el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent alrededor de z_0. Es decir, el residuo es el coeficiente del primer término de la parte principal $\dfrac{1}{z-z_0}$ de la serie de Laurent asociada a f alrededor de z_0 en primera corona de convergencia. Normalmente utilizaremos la siguiente notación para referirnos al residuo:

coef de $(z-z_0)^{-1}$ del DSL alrededor de z_0 en la corona de conv

$$\boxed{a_{-1} = \mathrm{Res}[f(z),\ z = z_0]}$$

2.9.3 Cálculo de residuos en puntos a distancia finita del origen

El método general para calcular el residuo de una singularidad z_0 es obtener el desarrollo de Laurent de f en primera corona de convergencia en ese punto y observar el coeficiente que acompaña al término $\dfrac{1}{z-z_0}$. Veamos otros procedimientos particulares para cada caso.

Singularidades evitables

En el caso de las singularidades evitables el residuo asociado siempre es cero. Por tanto, si tenemos la certeza de que estamos ante una singularidad evitable (porque lo dice el enunciado, porque hemos calculado el límite, ...) no hace falta calcular el desarrollo de Laurent ya que el residuo es nulo.

Singularidades esenciales

En el caso de las singularidades esenciales no hay otra manera de calcular el residuo que obteniendo el desarrollo de Laurent.

Polos de orden m

En el caso de los polos normalmente no hace falta calcular la serie de Laurent. A cambio se utilizan los siguientes resultados:

$z = z_0$ es un polo de orden m de f si y sólo si:

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) \quad \text{verifica} \quad \begin{cases} g(z_0) \neq 0 \\ g(z) \text{ es analitica en un entorno de } z_0 \end{cases}$$

y una vez que tenemos la certeza de que z_0 es un polo, para calcular el residuo asociado hacemos lo siguiente:

Si $z = z_0$ es un polo de orden uno: $\boxed{a_{-1} = \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)}$

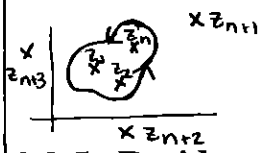
Si $z = z_0$ es un polo de orden m: $\boxed{a_{-1} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{(m-1)!} \cdot \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right)}$

Este es uno de los teoremas más importantes de la teoría de variable compleja

Recuerda que en el Teorema de los residuos los que sumamos son los residuos de las singularidades que quedan dentro de la curva

2.9.4 Teorema de los residuos

Si C es un contorno cerrado simple orientado positivamente, dentro y sobre el cual una función f es analítica a excepción de un número finito de puntos singulares z_k $(k=1,2,\ldots,n)$ interiores a C, entonces



$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z=z_k]}$$

demuestra con Cauchy-Goursat

2.9.5 Residuos en el infinito

NO

Hemos visto que para ver si hay singularidad en el infinito se estudia si la función $f\left(\frac{1}{w}\right)$ tiene una singularidad en $w=0$.

Observación muy importante:

- Los puntos "finitos" sólo pueden tener residuo asociado si son singulares (es decir, en ellos *f(z)* no es analítica)
- El punto $z=\infty$, sin embargo, aunque sea regular (es decir, que *f(z)* sea analítica en dicho punto), puede tener un residuo $\neq 0$ en el mismo

Cáculo del residuo en el infinito

1ª forma

¡Cuidado! Lleva un signo menos. Además se coge el término del desarrollo en última corona de convergencia alrdedor de z=0

Se puede demostrar que:

$$\mathrm{Res}[f(z),\ z=\infty] = -a_{-1}$$

del desarrollo en serie de Laurent de *f(z)* en *última corona de convergencia alrededor de z=0*

2ª forma

Es decir, el residuo de $f(z)$ en $z=\infty$ se reduce a calcular el residuo de la nueva función $\frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$ en $w=0$.

El valor del residuo asociado al punto del infinito se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\mathrm{Res}[f(z),\ z=\infty] = \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right),\ w=0\right]$$

3ª forma

Fíjate que esta tercera forma no sirve para calcular residuos de singularidades esenciales en $z=\infty$. Además, es la menos usada

$$\mathrm{Res}[f(z),\ z=\infty] = -\frac{1}{(k+1)!}\lim_{w\to 0}\frac{d^{(k+1)}[w^k f(\frac{1}{w})]}{dw^{k+1}},\quad k=0,1,2,\ldots$$

Donde k es el orden del polo que tiene *f(z)* en $z=\infty$ y se considera k=0 si $z=\infty$ es un punto regular o singularidad evitable de *f(z)*.

Observaciones

- *f(z)* tiene en $z=\infty$ la misma naturaleza que $f\left(\frac{1}{w}\right)$ en w=0 pero en general

$$\mathrm{Res}[f(z),\ z=\infty] \neq \mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{w}\right),\ w=0\right]$$

- La naturaleza de los puntos $z=\infty$ para *f(z)* y de *w=0* para la función $\frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$ no tiene porqué coincidir.

2.9.6 Teorema de los residuos generalizado ⟵ NO

Teniendo en cuenta este nuevo residuo se cumple la siguiente propiedad:

$$\boxed{\mathrm{Res}[f(z),\ z=\infty] + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}\mathrm{Res}[f(z),\ z=z_k]}_{\text{residuos de las sing. dentro de la curva}} + \underbrace{\sum_{k=m}^{n}\mathrm{Res}[f(z),\ z=z_k]}_{\text{residuos de las sing. fuera de la curva}} = 0}$$

donde z_k son las singularidades aisladas en puntos a distancia finita del origen.

De esta forma obtenemos un nuevo procedimiento de calcular integrales mediante el Teorema de los residuos. Este nuevo procedimiento consiste en sumar los residuos de las singularidades que quedan <u>fuera</u> de la curva cerrada C sobre la que estamos integrando (incluido, claro está, el residuo del punto del infinito que siempre queda fuera de C), es decir:

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = -2\pi j\left\{\sum_{k=m}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z=z_k] + \mathrm{Res}[f(z), z=\infty]\right\}}$$

2.9.7 Ceros de una función. Relación entre ceros y polos

Definición

Sea una función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Decimos que $z_0\in\mathbb{C}$ es un **cero de orden** m de f si $f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{m-1)}(z_0)=0$ pero $f^{m)}(z_0)\neq 0$.

Una caracterización de cero de $f(z)$ muy útil en la práctica es la siguiente:

El punto $z=z_0$ es un cero de orden m de $f(z)$ cuando:

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z) \quad \text{verifica} \quad \begin{cases} g(z_0)\neq 0 \\ g(z) \text{ es analitica en un entorno de } z_0 \end{cases}$$

Relación entre ceros y polos de una función

Ceros y polos de orden m están estrechamente vinculados. En efecto, Se puede probar que:

Si dos funciones $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en un punto z_0 y, $p(z_0)\neq 0$, el cociente $p(z)/q(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y sólo si $q(z)$ tiene un cero de orden m en ese punto.

2.10 Transformada de Laplace

2.10.1 Definiciones

Definición de transformada

En general una transformada integral de una función $f(t)$ es:

Fíjate que se trata de una integral paramétrica de parámetro s

$$F(s) = \int_a^b f(t)\cdot k(s,t)dt$$

Existen muchas transformadas integrales y todas ellas se diferencian en la elección del núclo de la transformación $k(s, t)$. Los ejemplos más notables de transformadas son las de Laplace, Fourier, Hilbert, etc…

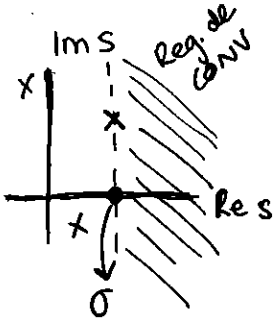
Definición de transformada de Laplace

En esta asignatura se usa la transformada de Laplace unilateral

Sea $f(t):[0,\infty)\to\mathbb{C}$ una función de variable real definida $\forall t\geq 0$

Fíjate que en este caso se trata de una integral paramétrica impropia de parámetro s

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}$$



Es decir, en nuestro caso se toma: $k(s,t) = e^{-st}$ siendo $s\in\mathbb{C}$.

$F(s)$ es una función de variable compleja $s\in\mathbb{C}$ que estará definida para aquellos valores de s para los que la integral converja.

Al tratarse de la transformada de Laplace unilateral, la región de convergencia de $F(s)$, siempre tendrá una forma semejante a $\boxed{Re[s]>\sigma}$. A esta región se la denomina **semiplano de convergencia**, y en él, la función $F(s)$ es holomorfa. A σ se la denomina **abscisa de convergencia**

$Re(s) > \sigma$

↓

abcisa de convergencia

2.10.2 Propiedades de la Transformada de Laplace

Sean dos funciones $f(t):[0,\infty)\to\mathbb{C}$ y $g(t):[0,\infty)\to\mathbb{C}$ tales que sus transformadas son:

$$F(s)=\mathcal{L}(f(t)),\ Re[s]>\alpha \quad \text{y} \quad G(s)=\mathcal{L}(g(t)),\ Re[s]>\beta$$

respectivamente.

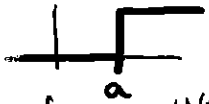
Linealidad

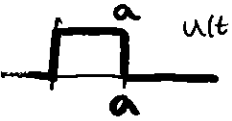
$$\mathcal{L}(af(t)+bg(t))=a\,\mathcal{L}(f(t))+b\,\mathcal{L}(g(t))$$

Cambio de escala

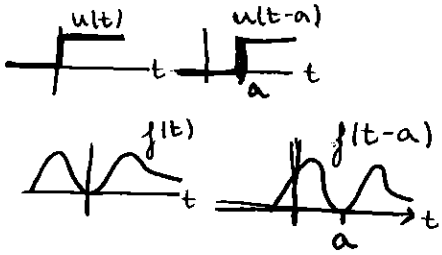
$$\mathcal{L}(f(at))=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \frac{\mathrm{Re}[s]}{a}>\alpha$$

u(t)-u(t-a)





Desplazamiento en el dominio de t



$$\mathcal{L}(f(t-a)\,u(t-a))=\boxed{e^{-as}F(s)}$$

Desplazamiento en el dominio de s

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right)=F(s-a),\ \mathrm{Re}[s]>\alpha+a$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a))=e^{at}f(t)$$

Diferenciación en el dominio del t

La derivada de f es con respecto a t

$$\mathcal{L}(f'(t))=sF(s)-f(0)$$

Generalizando lo anterior a la derivada n-ésima tenemos que:

$$\mathcal{L}(f^{n)}(t))=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)-\ldots-f^{n-1}(0)$$

Particularizaciones para n=2 y n=3

$$n=2\quad \mathcal{L}(f''(t))=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$n=3\quad \mathcal{L}(f'''(t))=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$$

Diferenciación en el dominio del s

La derivada de F es con respecto a s

$$\mathcal{L}(tf(t))=-F'(s)\quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}^{-1}(F'(s))=-tf(t)$$

Generalizando lo anterior a la derivada n-ésima tenemos que:

$$\mathcal{L}(t^nf(t))=(-1)^n\frac{d^{n)}F(s)}{ds^n}\qquad n\in\mathbb{N}$$

Integración en el dominio de t

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

Integración en el dominio de s

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(s)\,ds \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty F(s)\,ds\right) = \frac{f(t)}{t}$$

Transformada de la convolución

Se define la operación de **convolución** entre dos funciones f y g como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau$$

La transformada de la convolución es:

$$\boxed{\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(s)\cdot G(s)}$$

2.10.3 Transformada de Laplace de una función periódica

Sea $f(t)$ una función periódica de periodo T > 0. Entonces se cumple que $f(t)=f(t+T)$

Se puede demostrar:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

2.10.4 Transformada inversa de Laplace

Definición

Sea $f(t):[0,\infty)\to\mathbb{C}$ y sea su transformada $F(s)=\mathcal{L}(f(t))$, $\mathrm{Re}(s)>\sigma$.
Se define la **transformada inversa de Laplace** de la siguiente manera:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\frac{1}{2\pi j}\overbrace{\int_{a-j\infty}^{a+j\infty}}^{\text{V.P.}}e^{st}F(s)\,ds=\frac{1}{2\pi j}\lim_{w\to\infty}\int_{a-jw}^{a+jw}e^{st}F(s)\,ds$$

Cálculo efectivo de la transformada inversa

En este caso nos dan como dato una función en el dominio transformado $F(s)=\mathcal{L}(f(t))$ y nuestro objetivo es calcular $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$. Normalmente para conseguirlo no utilizaremos la definición dada más arriba. En su lugar tenemos dos métodos prácticos que son los siguientes:

Este método se basa en lo aprendido en el tema 4

a) Mediante residuos

Sea $F(s)=\mathcal{L}(f(t))$ analítica en $\mathrm{Re}(s)>\sigma$ con un número finito de puntos singulares $s_1, s_2, \ldots, s_n$ y además $\lim_{s\to\infty}F(s)=0$. Entonces se verifica que:

¡OJO! Fíjate que el sumatorio no está multiplicado por $2\pi j$

Además la función de la que se calculan los residuos no es F(s)

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=$$

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi j}\lim_{w\to\infty}\int_{a-jw}^{a+jw}e^{st}F(s)\,ds=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st};s=s_k\right]}$$

b) Mediante descomposición en fracciones simples

Lo más habitual es emplear los métodos b) y c) de manera combinada, como veremos en los ejercicios

Útil cuando F(s) es una función racional

c) Mediante propiedades y tabla de transformadas

Se trata de manipular algebraicamente la expresión $F(s)$ con el fin de atribuir las propiedades de la transformada de Laplace y poder aplicar algunas de las transformadas de la tabla.

2.10.1

Tabla de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$	
1	$\frac{1}{s}$	$Re\, s > 0$
e^{-zt}	$\frac{1}{s+z}$	$Re\, s > -Re\, z$
$t^n (n = 1, 2, ..)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$Re\, s > 0$
$t^n e^{-zt} (n = 1, 2, ..)$	$\frac{n!}{(s+z)^{n+1}}$	$Re\, s > -Re\, z$
$sen\, zt$	$\frac{z}{s^2+z^2}$	$Re\, s > \lvert Im\, z \rvert$
$cos\, zt$	$\frac{s}{s^2+z^2}$	$Re\, s > \lvert Im\, z \rvert$
$sh\, zt$	$\frac{z}{s^2-z^2}$	$Re\, s > \lvert Re\, z \rvert$
$ch\, zt$	$\frac{s}{s^2-z^2}$	$Re\, s > \lvert Re\, z \rvert$
$e^{-wt} sen\, zt$	$\frac{z}{(s+w)^2+z^2}$	$Re\,(s+w) > \lvert Im\, z \rvert$
$e^{-wt} cos\, zt$	$\frac{s+w}{(s+w)^2+z^2}$	$Re\,(s+w) > \lvert Im\, z \rvert$

Ref: W. R. Derrick, *Variable Compleja con Aplicaciones*, 1987.

TEMA 3: ECUACIONES DIFERENCIALES

EDO= Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

3.1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden.

- Una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** es una ecuación que relaciona una función incógnita $y(x)$ con su derivada y'.

  - Forma explícita o normal: $y' = f(x,y)$
  - Forma implícita: $F(x,y,y') = 0$
  - Forma diferencial: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

Recuerda:
Las soluciones de las EDOs son funciones, no números

- La solución de una EDO de primer orden es una familia de funciones $y(x)$ que cumplen la ecuación.

- Llamamos **problema de valor inicial** a:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A la ecuación que acompaña a la EDO la llamamos **condición inicial.**
En este tipo de problemas se trata de hallar una única función, dentro del conjunto de funciones que son solución de la EDO, que cumpla, además, la condición inicial.

$$\left.\begin{array}{l} (EDO)\ y'(x) = e^x \\ (CI)\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y(x) = \int y'(x)\cdot dx = \int e^x \cdot dx = e^x + C \\ y(0) = e^x + C = 1 \Rightarrow e^0 = 1,\ C = 0 \end{array} \Bigg\} \boxed{y(x) = e^x}$$

- No existe un sistema metódico para calcular las soluciones de una EDO. De hecho la mayoría de las EDOs no se pueden resolver. Por tanto, nuestro objetivo se limita a aprender a resolver ciertos tipos conocidos de EDOs para los que se conoce su método de resolución. Estos tipos son los que se presentan a continuación.

3.1.1 EDOs del tipo $y' = f(x)$

Son las EDOs de primer orden más sencillas que nos podemos encontrar.

Resolución:

$$y(x) = C + \int f(x)\,dx$$

Ver ejercicio 1 de clase

3.1.2 EDOs de variables separadas

Una ecuación diferencial de variables separadas es aquella que tiene la forma :

$$\boxed{y' = f(x)g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)}$$

también puede aparecer con el siguiente aspecto:

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$

Resolución: Se integra por un lado la variable x y por otro la variable y:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = 0$$

También hay que tener cuidado con las EDOs de variables separadas ya que suelen contener soluciones particulares que no quedan recogidas dentro de la solución que general que obtendremos. En este caso la forma de obtener las soluciones particulares es sistemática y se explicará en los ejemplos.

Más adelante veremos que cuando los coeficientes de una EDO lineal son constantes se resuelve de otra forma

Ver ejercicio 2 de clase

3.1.3 EDOs lineales de coeficientes variables

Una ecuación lineal (de primer orden) es aquella que tiene la forma :

$$\boxed{y' = f(x)y + g(x)}$$

→ término independiente

si $g(x) = 0 \Rightarrow$ EDO homogénea

Resolución:
La solución de esta EDO viene dada por la siguiente fórmula:

Ya verás en los ejercicios que no es necesario que memorices la fórmula

$$y(x) = \left[K + \int g(x)\, e^{-\int f(x)dx}\, dx \right] e^{\int f(x)\,dx}$$

De todas formas no es aconsejable aprenderse esta fórmula de memoria. Para llegar a ella existen dos procedimientos:

La mejor forma de entender estos métodos es mediante ejemplos. Nosotros solamente utilizaremos el primero.

1. Calcular la solución general de la EDO homogénea $y' - f(x)y = 0$ y una solución particular de la EDO completa mediante el método de **variación de los parámetros** (también llamado variación de las constantes).

2. Realizar el cambio de variable $y = uv$

Ver ejercicio 4 de clase

3.1.4 EDOs exactas !! de lo que más cae

Se dice que la ecuación diferencial :

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

es exacta si existe una función real $F(x,y)$ que llamamos primitiva, definida en D, tal que, en dicho dominio,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

la manera de ver si una EDO es exacta es mediante el siguiente teorema:

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \text{ es exacta } \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Resolución:

La resolución de una EDO exacta se hace a través de 5 (mini)pasos:

También se puede hacer integrando $Q(x,y)$ en vez de $P(x,y)$. En ese caso también cambiarían los siguientes pasos.

1.- Integramos $P(x,y)$ con respecto a x, suponiendo y constante :

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = R(x,y) + \varphi(y)$$

2.- Derivamos $F(x,y) = R(x,y) + \varphi(y)$ con respecto a y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} + \varphi'(y)$$

Normalmente en este paso se van términos que están repetidos en ambos lados de la igualdad

3.- Igualamos $\frac{\partial F}{\partial y}$ a $Q(x,y)$ y despejamos $\varphi'(y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial R}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

En el 4º paso no olvidar la constante que aparece al integrar

4.- Integramos $\varphi'(y)$ y obtenemos $\varphi(y)$.

En el 5º paso no olvidar igualar a cero la solución, ya que la solución se da en forma implícita en este caso.

5.- La integral general queda en forma implícita:

$$F(x,y) = R(x,y) + \varphi(y) = 0$$

Ver ejercicios 5 y 6 de clase

3.1.5 Ecuaciones diferenciales no exactas. Factores integrantes

Sea una ecuación diferencial del tipo:

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

que no es exacta ya que:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Un factor integrante para esta ecuación diferencial es una función real $\mu(x,y)$ que admite derivadas parciales continuas , de manera que

$$\overbrace{\mu(x,y)P(x,y)}^{A(x,y)}dx + \overbrace{\mu(x,y)Q(x,y)}^{B(x,y)}dy = 0$$

ya es una ecuación diferencial exacta y se resuelve como tal. Se verifica entonces que

$$\boxed{\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}} \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

desarrollando la derivada del producto en ambos lados de la igualdad queda:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad [1]$$

Una vez llegados a la expresión [1] el enunciado nos tiene que proporcionar algún dato adicional para poder saber la forma exacta que tiene el factor integrante. Los dos siguientes son los casos más habituales (¡pero no los únicos!):

a) Si nos dicen que <u>el factor integrante es función de x únicamente</u>, la expresión [1] queda:

$$\boxed{\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}$$

donde obtenemos la expresión de $\mu(x)$ integrando a ambos lados de la igualdad.

b) Si nos dicen que <u>el factor integrante es función de y únicamente</u>, la expresión [1] queda:

$$\boxed{\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy}$$

donde obtenemos la expresión de $\mu(y)$ integrando a ambos lados de la igualdad.

Ver ejercicio 10 de clase

La diferencia con la EDO lineal ya vista en el punto 3.1.3 es que aquí el coeficiente de la incógnita *y* es una constante (no varía con respecto a *x*)

3.1.6 EDOs lineales con coeficientes constantes

Una EDO lineal (de primer orden) con coeficientes constantes es aquella que tiene la forma :

$$\boxed{y' = ay + g(x)}$$

Resolución

La resolución se hace en dos partes.

Solución General de la Homogénea = SGH

1) Primero se calcula la solución de la EDO homogénea (sin término independiente): $y' = ay$

   La solución general de la EDO homogénea (que llamaremos SGH) es siempre y se obtiene resolviendo la ecuación característica:

$$\boxed{y_H(x) = Ke^{ax}}$$

Solución Particular de la EDO Completa = SPC

2) Segundo se calcula una solución particular de la EDO completa (con término independiente) mediante el método de **coeficientes indeterminados.** Este método consiste en suponer una solución particular de la EDO basándose en la forma del término independiente. Veamos algunos ejemplos ilustrativos:

Si $g(x) = 4e^{2x}$ probaremos con una solución particular de la forma $y_p(x) = ae^{2x}$

Si $g(x) = xe^{3x}$ probaremos con una solución particular de la forma $y_p(x) = (ax+b)e^{3x}$

Si $g(x) = x^2 - 5$ probaremos con una solución particular de la forma $y_p(x) = ax^2 + bx + c$

Si $g(x) = \cos 2x$ probaremos con una sol. part. de la forma $y_p(x) = a\cos 2x + b\text{sen}2x$

Si $g(x) = e^{-x}\text{sen}4x$ probaremos con una sol. part. de la forma $y_p(x) = e^{-x}(a\cos 4x + b\text{sen}4x)$

etc, ...

3) Por último para obtener la solución de la EDO completa se suman ambas:

$$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_p(x)}$$

Observaciones

- El método de los coeficientes indeterminados no siempre es aplicable. En general sólo se puede aplicar cuando el término independiente tiene la forma de "polinomio por exponencial" o "(seno + coseno) por exponencial".

- Volveremos a ver este método de forma completa y rigurosa cuando estudiemos las EDOs lineales con coeficientes constantes de orden *n*.

- En asignaturas aplicadas (IACR, INEL, etc...) lo común es utilizar la *t* como variable independiente representando el tiempo (en vez de la *x* que es la usual en matemáticas).

!! (RES)

Ver ejercicio 8 de clase

Fíjate que la caracterís-tica fundamental de las EDO autónomas es que la variable x no aparece explícita en la ecuación

3.1.7 Ecuaciones autónomas

Una ecuación autónoma es de la forma :

$$\boxed{y' = f(y)}$$

Resolución: No existe una forma metódica de resolverlas. Normalmente se reducen a EDOs de variables separadas.

Hay que tener cuidado ya que las EDOs autónomas suelen contener soluciones particulares que no están recogidas dentro de la solución general que obtendremos. Normalmente estas soluciones particulares las obtendremos por inspección visual (a ojo).

Ver ejercicio 7 de clase

3.1.8 Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial homogénea es de la forma :

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Resolución: Cambio de variable $y = ux$ y obtenemos una EDO de variables separadas.

Ver ejercicio 3 de clase

3.1.9 Ecuación de Bernouilli

Una ecuación de Bernouilli es de la forma :

$$\boxed{y' = f(x)y + g(x)y^n} \quad \text{donde } n \in \mathbb{R}$$

Resolución:
Dividimos entre y^n en ambos lados de la igualdad, después hacemos el cambio de variable $y^{-n+1} = u$ y queda reducida a una EDO lineal.

3.1.10 Teorema de existencia y unicidad

Sea el Problema de Valor Inicial (PVI) siguiente: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Existencia de solución del PVI

Si la función $f(x,y)$ es continua en (x_0, y_0)

Entonces:

El PVI tiene al menos una solución $y = y(x)$ definida en (x_0, y_0).

Unicidad de la solución del PVI

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe y es continua en (x_0, y_0)

Entonces:

Existe una única solución $y = y(x)$ del PVI.

Observación

El teorema de existencia y unicidad de solución de una EDO nos proporciona condiciones suficientes (pero no necesarias). Esto quiere decir que, si se cumple la hipótesis entonces seguro que se cumple la tesis; pero, si no se cumple la hipótesis nada podemos decir sobre la tesis, es decir, se puede cumplir o no cumplir.

3.1.11 Soluciones singulares

Sea una función $y = \varphi(x)$ que es solución de la EDO $y' = f(x,y)$.
Se dice que $y = \varphi(x)$ es una **solución singular** de la EDO si por cada punto de $y=\varphi(x)$ pasa otra solución de la EDO y ambas tienen la misma tangente en ese punto.

Observaciones

- Toda envolvente de una familia de curvas solución de una EDO es solución singular. Sin embargo, se puede tener una solución singular de la EDO sin necesidad de que ésta sea una envolvente de la familia de curvas solución de dicha EDO.
- Las EDOs lineales no tienen soluciones singulares.
- En los puntos de las soluciones singulares no se verifica el teorema de unicidad de solución.
- No confundir solución particular con solución singular. De hecho, no todas las soluciones particulares son soluciones singulares.

3.2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden superior.

Llamamos EDO de orden n a una relación entre una función incógnita $y(x)$, su variable independiente y sus derivadas hasta orden n:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n}, x) = 0$$

En este tema nos centraremos exclusivamente en resolver las EDOs lineales de la forma:

$$y^{(n} + p_1(x)y^{(n-1} + p_2(x)y^{(n-2} + \ldots + p_n(x)y = q(x)$$

3.2.1 Resolución general de las EDOs lineales de orden dos

Con coeficientes variables

Ahora vamos a resolver las EDOs lineales de orden dos que son las siguientes:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$$

Método de los doce pasos

Para resolver esta EDO seguimos los siguientes doce pasos:

1) Si nos dan la EDO de otra forma que no sea la anterior (por ejemplo, con un coeficiente distinto de 1 en y'') manipulamos la expresión hasta llegar a ponerla como está aquí.

2) Resolvemos la EDO homogénea:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

que siempre tiene como solución una función de la forma:

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones particulares linealmente independientes de la EDO homogénea.

3) Para encontrar estas dos soluciones particulares el enunciado nos tiene que dar algún dato adicional. Algunos de los más comunes son:

- Nos dan directamente una de las dos soluciones particulares $y_1(x)$
- Nos dan una relación de cociente de la forma: $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = f(x)$
- Si la suma de todos los coeficientes de la EDO suma cero entonces sabemos que una solución particular es siempre $y_1(x) = e^x$
- Si la suma de todos los coeficientes de la EDO con signos alternados es cero entonces sabemos que una solución particular es siempre $y_1(x) = e^{-x}$

4) Encontramos la otra solución particular $y_2(x)$ mediante la fórmula de Liouville:

$$W(x) = C e^{-\int p_1(x)dx}$$

donde $W(x)$ representa el Wronksiano que se define de la siguiente forma:

$$W(x) = W(y_1(x), y_1(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

5) Una vez que hemos simplificado convenientemente la fórmula de Liouville pueden suceder dos cosas:

- Nos queda una ecuación normal (algebráica) donde despejamos $y_2(x)$.
- Nos queda una EDO de primer orden del tipo $y' = f(x,y)$ que tenemos que resolver con las técnicas vistas en la parte previa del tema. Importante: La constantes que aparecen al resolver esta EDO las elijo yo libremente. No hay que calcularlas.

Normalmente esta EDO de primer orden suele ser una EDO lineal con coeficientes constantes

Literatura

6) Una vez encontradas las dos soluciones particulares $y_1(x)$ e $y_2(x)$ comprobamos que son linealmente independientes y que, por tanto, forman un sistema $\{y_1(x), y_2(x)\}$ fundamental de soluciones de la EDO homogénea. Para ello comprobamos que:

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0 \qquad \forall x$$

7) La solución de la EDO homogénea es, por tanto:

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

8) Ahora utilizamos el método de variación de los parámetros (o variación de las constantes) para obtener la solución general de la completa. Este método se basa en suponer que la solución general de la EDO completa tiene la forma:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

9) Tras sustituir en la EDO y operar obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$ que resolvemos por Cramer:

La demostración de este paso está en la siguiente hoja aunque a efectos prácticos este sistema hay que sabérselo de memoria

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = \boxed{0} \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = \boxed{q(x)} \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ q(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \qquad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & q(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$W(x) = \left\{ \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \right\}$$

10) Obtenemos mediante integración $C_1(x)$ y $C_2(x)$ y ahora sí que mantenemos las constantes que aparecen al integrar que llamaremos K_1 y K_2.

11) La solución de la EDO completa es, por tanto:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

que en realidad se trata de un conjunto de soluciones pues no hay que olvidar que queda en función de K_1 y K_2 que son constantes a determinar.

* Este último paso solo se realiza si tenemos un PVI (es decir, además de la EDO nos dan dos condiciones iniciales)

12) Por último, en el caso en que nos den dos condiciones iniciales (es decir, un PVI) podremos determinar el valor de K_1 y K_2 y obtendremos una única solución que resuelve el PVI.

Demostración de los pasos 8 y 9 del método de los doce pasos

Ahora vamos a demostrar la forma de obtener el sistema del paso 9 aplicando el método de variación de los parámetros. Para resolver una EDO mediante los doce pasos no es estrictamente necesario conocer esta demostración pero sí es muy recomendable para posibles preguntas teóricas.

Partimos la EDO homogénea

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

Donde debemos recordar que y_1 e y_2 son soluciones particulares de la EDO homogénea.

cuya solución general es

$$y_H(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

Aquí comienza el método de variación de los parámetros

La idea decisiva ahora es sustituir las constantes C_1 y C_2 por las funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$. Esto da:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

A continuación se intenta determinar $C_1(x)$ y $C_2(x)$ de manera que la expresión anterior sea una solución de la EDO completa en lugar de serlo de la EDO homogénea. Para ello derivamos la expresión anterior:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

¡¡Idea feliz !!

Este es un paso que hay que saberse ya que es muy difícil que se nos ocurra

Ahora, para tener dos ecuaciones, suponemos que (grado de libertad):

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \quad [1]$$

Con lo que la derivada primera derivada nos queda bastante más sencilla:

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

Derivamos otra vez para obtener y'':

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2'(x)y_2''(x)$$

Ahora se sustituyen y, y' e y'' en la EDO completa:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \Rightarrow$$

$$[C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2'(x)y_2''(x)] +$$
$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] + p_2(x)[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)] = 0$$

En este paso hemos reordenado lo del paso anterior

$$C_1(x)[y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x)] + C_2(x)[y_2''(x) + p_2(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x)] +$$
$$+ C_2'(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_1'(x) = q(x)$$

Cada una de las expresiones entre corchetes de la ecuación es cero porque tanto y_1 como y_2 son soluciones de la ecuación homogénea. Por consiguiente, la expresión anterior queda:

$$C_2'(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_1'(x) = q(x) \quad [2]$$

Finalmente las ecuaciones [1] y [2] son las ecuaciones que hemos utilizado en el paso 9.

3.2.2 Dependencia e independencia lineal de funciones. Wronskiano

Definiciones

Estas dos definiciones son iguales que las ya estudiadas en Álgebra para vectores

- Se dice que n funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ definidas en el intervalo en (a, b) son **linealmente dependientes** si:

$$\exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq (0,\dots,0) \ / \ \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

- Se dice que n funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ definidas en el intervalo en (a, b) son **linealmente independientes** si:

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \quad , \quad \forall x \in (a,b)$$

El Wronskiano, una vez calculado, sólo debe depender de x

- Si tenemos n funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ definidas en un intervalo (a,b) y con derivadas hasta el orden $n-1$, se define el **Wronskiano** de las funciones como:

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1} & y_2^{(n-1} & \cdots & y_n^{(n-1} \end{pmatrix}$$

Resultados para funciones cualesquiera

Las funciones no tienen que ser solución de una EDO

En este apartado vamos a considerar que las funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ <u>son funciones cualesquiera</u>. En este caso se cumplen los siguientes resultados:

- Si $y_1, \dots, y_n$ son linealmente dependientes en $(a,b) \Rightarrow W(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$.
- Si $\exists x_0 \in (a,b) \ / \ W(x_0) \neq 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.

A este determinante se le denomina: Determinante de Gram

- Las funciones $y_1, \dots, y_n$ son lin. depen. $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} <y_1,y_1> & \cdots & <y_1,y_n> \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ <y_n,y_1> & \cdots & <y_n,y_n> \end{pmatrix} = 0$

  siendo $<y_i,y_j> = \int_a^b y_i(x) y_j(x)\, dx$.

La idea importante es la que está subrayada. Es decir, en este caso las funciones son soluciones de una EDO mientras que en el anterior no lo eran.

Resultados para soluciones de una EDO lineal homogénea

En este apartado consideramos que las funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ <u>son soluciones particulares de una EDO</u> lineal homogénea de orden n de la forma:

$$y^{(n} + p_1(x) y^{(n-1} + p_2(x) y^{(n-2} + \dots + p_n(x) y = 0$$

En este caso particular se cumplen los siguientes resultados:

<u>En este contexto:</u>
Si el Wronskiano se anula en un punto es que se anula en todos!!
Fíjate que ahora se cumplen los recíprocos

- $\exists x_0 \in (a,b) \ / \ W(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$
- Las soluciones $y_1, \dots, y_n$ son linealmente dependientes $\Leftrightarrow W(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$
- Las soluciones $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow \exists x_0 \in (a,b) \ W(x_0) \neq 0$

3.2.3 EDOs lineales con coeficientes constantes de orden n

En este tema vamos a estudiar el tipo más simple de ecuación diferencial que existe. Se trata de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales con coeficientes constantes de orden n. Las EDO lineales con coeficientes constantes de orden uno ya fueron vistas anteriormente así que aquí se trata de generalizar lo visto allí para ordenes mayores que el primero.

Una EDO lineal de orden n con coeficientes constantes tiene la siguiente forma:

$$y^{(n} + \overset{cte}{\boxed{p_1}}y^{(n-1} + \overset{cte}{\boxed{p_2}}y^{(n-2} + \ldots + \boxed{p_{n-1}}y' + + p_n y = q(x)$$

$y(x) + [y']^2$
$y' \cdot y''$ } son no lineales

donde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son constantes reales o complejas y $q(x)$ es el término independiente.

Resolveremos este tipo de EDO calculando por separado la solución general de la EDO homogénea (que llamaremos SGH) y una solución particular de la EDO completa (SPG). Una vez obtenidas ambas, las sumaremos para obtener la solución general de la EDO completa:

$$y(x) = SGH + SPC \quad \Rightarrow \quad y(x) = \underbrace{y_H(x)}_{1} + \underbrace{y_p(x)}_{2}$$

Veamos a continuación como se calculan cada una de estas dos soluciones.

Recuerda que homogénea significa que quitamos el término independiente

Solución general de la EDO homogénea (SGH) 1

Sea la EDO homogénea:

$$y^{(n} + p_1 y^{(n-1} + p_2 y^{(n-2} + \ldots + p_{n-1}y' + + p_n y = 0$$

La solución general de esta EDO homogénea se calcula a partir de las raíces de la ecuación característica asociada:

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

donde hemos sustituido: $y = 1$, $y' = r$, $y'' = r^2$, ..., $y^{(n-1} = r^{n-1}$, $y^n = r^n$.

Dependiendo de que las distintas raíces (soluciones) de esta ecuación característica sean reales o complejas y de su orden de multiplicidad tenemos cuatro posibles casos:

- Raíz real $r = a$ simple, $y = A \cdot e^{rx}$

$$y = Ae^{\alpha x}$$

- Raíz real $r = a$ con multiplicidad n, $y = (A_2 x^2 + A_1 x + A_0)\, e^{rx}$

$$y = (A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0)\, e^{\alpha x}$$

- Dos raíces complejas conjugadas $r = \alpha \pm \beta j$ simples,

$$y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B sen\, \beta x]$$

- Dos raíces complejas conjugadas $r = \alpha \pm \beta j$ con orden de multiplicidad n,

$$y = e^{\alpha x}[(A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0)\cos\beta x + (B_{n-1}x^{n-1} + \ldots + B_1 x + B_0)\, sen\, \beta x]$$

A continuación, a modo de ejemplo, se muestran todas los posibles combinaciones para las EDOs de orden uno, dos, tres y cuatro según sean las raíces de su ecuación característica asociada:

Este es el caso de la EDO de orden uno vista en la parte anterior del tema

- $y' + a_1 y = 0$ EDO de orden uno (una única posible solución)

- $r_1 = a \quad y = Ae^{ax}$

- $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ EDO de orden dos (tres posibles soluciones)

- $r_1 = a \quad r_2 = b \qquad y = Ae^{ax} + Be^{bx}$
- $r_1 = a \ (doble) \qquad y = (Ax+B)e^{ax}$
- $r_{1,2} = \alpha \pm \beta j \qquad y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + Bsen\,\beta x]$

- $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$ EDO de orden tres (cuatro posibles soluciones)

- $r_1 = a \quad r_2 = b \quad r_3 = c \qquad y = Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx}$
- $r_1 = a \ (doble) \quad r_2 = b \qquad y = (Ax+B)e^{ax} + Ce^{cx}$
- $r_1 = a \ (triple) \qquad y = (Ax^2 + Bx + C)e^{ax}$
- $r_1 = a \quad r_{2,3} = \alpha \pm \beta j \qquad y = Ae^{ax} + e^{\alpha x}[B\cos\beta x + Csen\,\beta x]$

- $y^{iv} + a_1 y''' + a_2 y'' + a_3 y' + a_4 y = 0$ EDO de orden cuatro (nueve posibles soluciones)

- $r_1 = a \quad r_2 = b \quad r_3 = c \quad r_4 = d \qquad y = Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx} + De^{dx}$
- $r_1 = a \ (doble) \quad r_2 = c \quad r_3 = d \qquad y = (Ax+B)e^{ax} + Ce^{cx} + De^{dx}$
- $r_1 = a \ (triple) \quad r_2 = d \qquad y = (Ax^2 + Bx + C)e^{ax} + De^{dx}$
- $r_1 = a \ (cuadruple) \qquad y = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{ax}$
- $r_1 = a \ (doble) \quad r_2 = b \ (doble) \qquad y = (Ax+B)e^{ax} + (Cx+D)e^{bx}$
- $r_1 = a \quad r_2 = b \quad r_{3,4} = \alpha \pm \beta j \qquad y = Ae^{ax} + Be^{bx} + e^{\alpha x}[C\cos\beta x + Dsen\,\beta x]$
- $r_1 = a \ (doble) \quad r_{2,3} = \alpha \pm \beta j \qquad y = (Ax+B)e^{ax} + e^{\alpha x}[C\cos\beta x + Dsen\,\beta x]$
- $r_{1,2} = \alpha \pm \beta j \quad r_{3,4} = \gamma \pm \delta j$

$y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + Bsen\,\beta x] + e^{\gamma x}[C\cos\delta x + Dsen\,\delta x]$

- $r_{1,2,3,4} = \alpha \pm \beta j \ (dobles) \qquad y = e^{\alpha x}[(Ax+B)\cos\beta x + (Cx+D)sen\,\beta x]$

Por supuesto no hace falta aprenderse todas estas soluciones de memoria. Fíjate que siguen una regla muy sencilla de construcción. Basta con saberse los cuatro tipos básicos explicados en la página anterior y combinarlos correctamente.

Solución particular de la EDO completa (SPC) 2

Una solución particular de la EDO completa SPC se obtiene aplicando el **método de coeficientes indeterminados.** Ya esbozamos este método en la parte anterior del tema con EDOs de primer orden. Todo lo que allí se dijo sigue sirviendo pero ahora vamos a terminar de formalizar el procedimiento.

El método de los coeficientes indeterminados consiste en probar una solución particular que tenga la misma forma funcional que el término independiente $q(x)$ de la ecuación, salvo por los coeficientes que habrá que determinar.

- Primer caso: El término independiente $q(x)$ es un "polinomio por una exponencial"

Este es un caso particular del siguiente cuando m=0

- Si $q(x) = (A_0x^k + A_1x^{k-1} + ... + A_k)e^{\lambda x}$ la solución particular va a ser de la forma:

$$y_p(x) = \left(C_0x^k + C_1x^{k-1} + ... + C_k\right)e^{\lambda x}$$

Fíjate que los coeficientes no son los mismos que en $q(x)$

- Si $q(x) = (A_0x^k + A_1x^{k-1} + ... + A_k)e^{\lambda x}$ y además $\boxed{\lambda}$ es raíz de multiplicidad $\boxed{m}$ de la ecuación característica. Entonces la solución particular va a ser de la forma:

$$y_p(x) = \boxed{x^m}\left(C_0x^k + C_1x^{k-1} + ... + C_k\right)e^{\lambda x}$$

- Segundo caso: El término independiente $q(x)$ es un "(seno + coseno) por una exponencial"

Este es un caso particular del siguiente cuando m=0

- Si $q(x) = [(A_0x^k + ... + A_k)\cos\beta x + (B_0x^k + ... + B_k)\operatorname{sen}\beta x]e^{\alpha x}$ la solución particular va a ser de la forma:

$$y_p(x) = [(C_0x^k + ... + C_k)\cos\beta x + (D_0x^k + ... + D_k)\operatorname{sen}\beta x]e^{\alpha x}$$

Fíjate que los coeficientes no son los mismos que en $q(x)$

- Si $q(x) = [(A_0x^k + ... + A_k)\cos\beta x + (B_0x^k + ... + B_k)\operatorname{sen}\beta x]e^{\alpha x}$ y $\alpha + \beta i$ es raíz de multiplicidad m de la ecu. Característica, entonces la sol. particular va a ser de la forma:

$$y_p(x) = x^m[(C_0x^k + ... + C_k)\cos\beta x + (D_0x^k + ... + D_k)\operatorname{sen}\beta x]e^{\alpha x}$$

Observación

Queda solo una cuestión por resolver: ¿qué ocurre si el término independiente $q(x)$ no tiene una de las formas indicadas más arriba (polinomio por exponencial o seno + coseno por exponencial)?. En ese caso existen dos posibilidades:

- Primera: Intentar descomponer el término independiente en dos o más funciones que sean de esa forma y aplicar a cada función el método de coeficientes indeterminados.

En principio no debe suceder nunca pero...

- Segundo: Si lo anterior tampoco es posible habría que recurrir al método de variación de parámetros que es general para cualquier EDO lineal (tenga los coeficientes variables o constantes)

3.2.4. Teorema de existencia y unicidad

Sea un PVI formado por una EDO de orden n y n condiciones iniciales.

$$\begin{cases} y^{(n} + \boxed{p_1(x)} \cdot y^{(n-1} + \boxed{p_2(x)} y^{(n-2} + \ldots + \boxed{p_n(x)} y = \boxed{q(x)}, \quad x \in (a,b) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0 \quad \ldots \quad y^{(n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Si $\boxed{q(x)}$ y $\boxed{p_i(x)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ son continuas en (a,b)

$$\Downarrow$$

EL PVI tiene solución única en (a,b)

MMAT
Ejercicios de clase

SERIES DE FOURIER

Ejercicio 1

Demostrar que el sistema trigonométrico

$$\{1, \cos(nx), sen(nx); n \in \mathbb{N}\}$$

es ortogonal en $\mathfrak{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$.

Un sistema es ortogonal en $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ si el producto escalar de dos vectores cualesquiera del sistema, $f(x)$ y $g(x)$, es nulo; esto es, si se satisface $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = 0$, $\forall f,g$ (DEMOSTRACIÓN):

$$\langle 1, \cos(nx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{sen(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \Rightarrow \langle 1, \cos(nx)\rangle = 0$$

$$\langle 1, sen(nx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot sen(nx)\,dx = -\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \Rightarrow \langle 1, sen(nx)\rangle = 0$$

$$\langle sen(nx), \cos(nx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(nx)\,dx = \frac{sen^2(nx)}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \Rightarrow \langle sen(nx), \cos(nx)\rangle = 0$$

$$\underset{(n\neq m)}{\langle \cos(nx), \cos(mx)\rangle} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \cancel{\frac{\cos(nx)\,sen(mx)}{m}}^{\,0}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\,sen(mx)\,dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} u = \cos(nx) \Rightarrow du = -n\,sen(nx)\,dx \\ dv = \cos(mx)\,dx \Rightarrow v = \frac{sen(mx)}{m}\end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{l} u = sen(nx) \Rightarrow du = n\cos(nx)\,dx \\ dv = sen(mx)\,dx \Rightarrow v = \frac{-\cos(mx)}{m}\end{array}\right)$$

$$= \frac{n}{m}\left[\cancel{\frac{-sen(nx)\cos(mx)}{m}}^{\,0}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx\right] = \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m^2-n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0,\ m\neq n \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \Rightarrow \underset{(n\neq m)}{\langle \cos(nx), \cos(mx)\rangle = 0}$$

1ª INTEGRAL POR PARTES ANTERIOR

$$\underset{(n\neq m)}{\langle sen(nx), sen(mx)\rangle} = \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\,sen(mx)\,dx = \frac{m}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx \overset{(m\neq n)}{=} 0 \Rightarrow \underset{(n\neq m)}{\langle sen(nx), sen(mx)\rangle = 0}$$

$$\underset{(n\neq m)}{\langle sen(nx), \cos(mx)\rangle} = \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)\,dx = \cancel{\frac{sen(nx)\,sen(mx)}{m}}^{\,0}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)\cos(nx)\,dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} u = sen(nx) \Rightarrow du = n\cos(nx)\,dx \\ dv = \cos(mx)\,dx \Rightarrow v = \frac{sen(mx)}{m}\end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{l} u = \cos(nx) \Rightarrow du = -n\,sen(nx)\,dx \\ dv = sen(mx)\,dx \Rightarrow v = \frac{-\cos(mx)}{m}\end{array}\right)$$

$$= -\frac{n}{m}\left[\cancel{\frac{-\cos(nx)\cos(mx)}{m}}^{\,0}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)\,dx\right] = \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m^2-n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)\,dx = 0,\ m\neq n \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \Rightarrow \underset{(n\neq m)}{\langle sen(nx), \cos(mx)\rangle = 0}$$

Por todo ello, el sistema $\{1, \cos(nx), sen(nx); n\in\mathbb{N}\}$ es ortogonal en $\mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$

Ejercicio 4

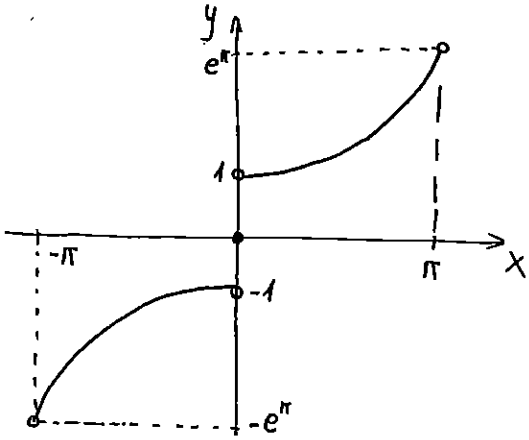
Desarrollar en el intervalo $[0, \pi]$ la función $f(x) = e^x$ en:

a) Serie de Fourier que comprenda solamente senos.

b) Serie de Fourier que comprenda solamente cosenos.

a)

Sea $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } 0<x<\pi \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -e^{-x} & \text{si } -\pi<x<0 \end{cases}$



$g(x)$ es una función impar que en $(0,\pi)$ coincide con $f(x)$, luego en $(0,\pi)$ sus desarrollos de Fourier son idénticos y el de $g(x)$ sólo tiene senos por ser $g(x)$ impar.

$a_n = 0 \quad , \; n = 0,1,2,3,\ldots$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)\,\text{sen}\,\frac{2\pi n}{T}x\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} g(x)\,\text{sen}\,\frac{2\pi n}{2\pi}x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\overbrace{g(x)}^{\text{impar}}\cdot\overbrace{\text{sen}\,nx}^{\text{impar}}}^{\text{par}}\,dx =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cdot\text{sen}\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^x\,\text{sen}\,nx\,dx \quad (*)$$

Calculamos a parte la integral:

$$\int e^x\,\text{sen}\,nx\,dx = \begin{bmatrix} u=\text{sen}\,nx \Rightarrow du = n\cos nx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{bmatrix} = e^x\,\text{sen}\,nx - n\int e^x\cos nx\,dx = \begin{bmatrix} u=\cos nx \Rightarrow du = -n\,\text{sen}\,nx\,dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{bmatrix}$$

$$= e^x\,\text{sen}\,nx - n\left(e^x\cos nx - \int e^x(-n\,\text{sen}\,nx)\,dx\right) = e^x\,\text{sen}\,nx - ne^x\cos nx - n^2\int e^x\,\text{sen}\,nx\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+n^2)\int e^x\,\text{sen}\,nx\,dx = e^x\,\text{sen}\,nx - ne^x\cos nx \Rightarrow \int e^x\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{e^x}{1+n^2}(\text{sen}\,nx - n\cos nx)$$

Ahora volviendo a (*):

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\text{sen}\,nx - n\cos nx)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^\pi}{1+n^2}(\overset{0}{\cancel{\text{sen}\,n\pi}} - n\overbrace{\cos n\pi}^{(-1)^n}) - \frac{e^0}{1+n^2}(\overset{0}{\cancel{\text{sen}\,0}} - n\overbrace{\cos 0}^{1})\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{\pi}}{1+n^2}\left(0-n(-1)^n\right)-\frac{1}{1+n^2}\left(0-n\cdot 1\right)\right) = \frac{2n}{\pi(1+n^2)}\left(1-(-1)^n\right)$$

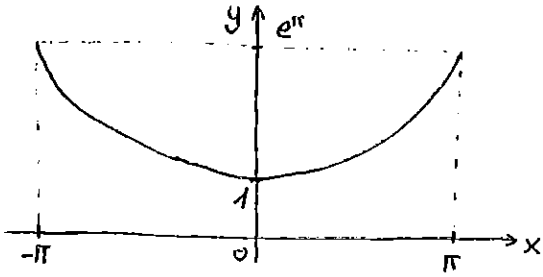
Por tanto, $b_n = \dfrac{2n\left[1-(-1)^n e^{\pi}\right]}{\pi(1+n^2)}$ y la serie de Fourier es:

$$G(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}x \Rightarrow \boxed{G(x) \simeq \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}\left[1-(-1)^n e^{\pi}\right]\cdot \operatorname{sen} nx}$$

que coincide con $g(x)$ en $(-\pi,\pi)$ y con $f(x)$ en $(0,\pi)$.

b)

Sea $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ e^{-x} & \text{si } -\pi \le x \le 0 \end{cases}$



$g(x)$ es una función par que en $(0,\pi)$ coincide con $f(x)$, luego en $(0,\pi)$ sus desarrollos de Fourier son idénticos conteniendo el de $g(x)$ sólo términos en coseno.

$b_n = 0 \qquad n = 1,2,3,\dots$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = 2\cdot\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} e^x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[e^x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(e^{\pi}-1\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cdot\cos\frac{2\pi n x}{T}\,dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{par}}\cdot\underbrace{\cos nx}_{\text{par}}}_{\text{par}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x\cos nx\,dx$$

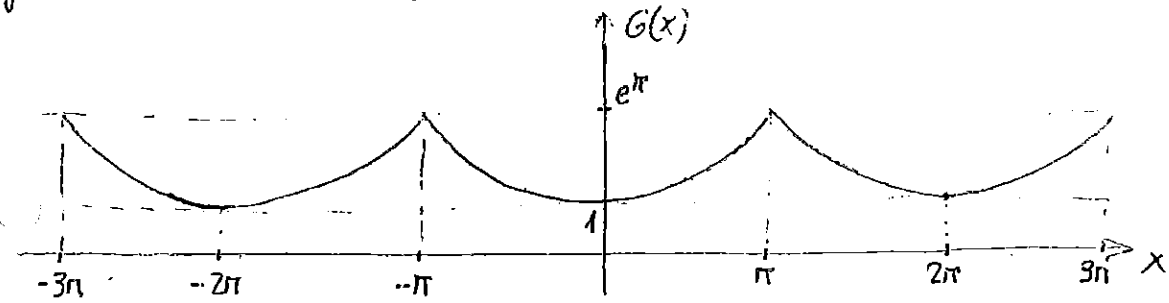
Calculando esta integral de forma similar al apartado a) nos queda:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{e^x}{n^2+1}\left(\cos nx + \cancel{n\operatorname{sen} nx}^{\,0}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2+1}\left(e^{\pi}\cos n\pi - 1\right) = \frac{2}{\pi(n^2+1)}\left[(-1)^n e^{\pi} - 1\right], \quad n = 1,2,\dots$$

Por tanto $a_n = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)e^{\pi}-1}{n^2+1}$ y la serie de Fourier es:

$$G(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x \Rightarrow \boxed{G(x) \simeq \frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1}\cos nx}$$

$G(x)$ coincide con la función $g(x)$ en $(-\pi,\pi)$ y con $f(x)$ en $(0,\pi)$. La representación gráfica de $G(x)$ es la siguiente:



2/3/2012

Ejercicio 7

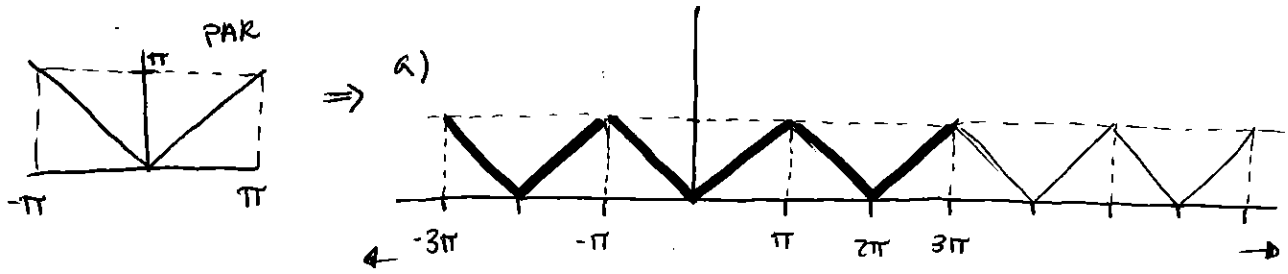
Dada la función $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=|x|$

a) Dibujar la extensión periódica con $T=2\pi$.

b) Obtener el DSF de $f(x)$ con exponenciales complejas.

c) Analizar su convergencia.

d) Calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$



b) $F(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}x}\underset{T=2\pi}{=}\sum_{-\infty}^{\infty}c_k\cdot e^{jkx}$

$$c_k=\frac{\langle f,e^{jkx}\rangle}{\langle e^{jkx},e^{jkx}\rangle}=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cdot dx\cdot\overline{e^{jkx}}}{\int_{-T/2}^{T/2}e^{jkx}\cdot\overline{e^{jkx}}}=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cdot e^{-jkx}}{\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}e^{jkx}\cdot e^{-jkx}}_{=1}}=$$

$\}=T \qquad \|e^{jkx}\|^2=T$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cdot e^{-jkx}dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cdot e^{-jkx}dx+\int_{0}^{\pi}(x)\cdot e^{-jkx}\cdot dx\right]=\left(\pi\left[\int_{0}^{\pi}(x)\cdot e^{-jkx}\cdot dx\right]=\right.$$

$$\left.=\pi\left(\left[\frac{-x\cdot e^{-jkx}}{jk}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\right)\right)$$ Ver? yo?

$$=\frac{1}{2\pi}\left[I_1+I_2\right]\quad:\ -\int x\cdot e^{-jkx}\cdot dx=-\frac{x}{jk}\cdot e^{-jkx}-\frac{1}{j^2k^2}\int -jk\, e^{-jkx}\cdot dx=$$

$$=-\frac{x}{jk}\cdot e^{-jkx}-\frac{1}{j^2k^2}\cdot e^{-jkx}=$$

$$I_1=-\int_{-\pi}^{0}x\cdot e^{-jkx}\cdot dx=-\left[e^{-jkx}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{x}{jk}\right)\right]_{-\pi}^{0}=-\left[\frac{1}{k^2}-\underset{(-1)^k}{e^{jk\pi}}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{\pi}{jk}\right)\right]=$$

$$=(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{\pi}{jk}\right)-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k^2}\left[(-1)^k-1\right]+\frac{\pi(-1)^k}{jk}$$

$$I_2=e^{-jk\pi}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{\pi}{jk}\right]-\frac{1}{k^2}=(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}-\frac{\pi}{jk}\right]-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k^2}\left[(-1)^k-1\right]-\frac{\pi(-1)^k}{jk}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left[I_1 + I_2\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right) + \cancel{\frac{\pi(-1)^k}{jk}} + \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)\right) - \cancel{\frac{\pi(-1)^k}{jk}}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}} \; c_k$$

* La expresión obtenida: NO para $k=0$ y se calcula aparte;

$$k=0 \rightarrow c_0 = c_k\big|_{k=0} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cdot \underset{1}{\underset{\parallel}{e^{-jkx}}}\cdot dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\pi} f(x)\cdot dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

complet $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\pi/2}{\underset{\parallel}{c_0}}\cdot \underset{1}{\underset{\parallel}{e^{j\cdot 0x}}} +$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ { Particulariza en $x=0$: $\underset{f(0)=0}{\underset{\parallel}{F(0)}} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot \cancel{e^{j0}}\,1$

1)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} \longrightarrow$ Ident. Parseval: $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2\cdot dx = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k|^2$

*) $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2\cdot dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\pi} x^2\cdot dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{\substack{-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty}|c_k|^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \left|\frac{\pi}{2}\right|^2 + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\right|^2}_{\substack{\hookrightarrow k=2n-1:\ \frac{-2}{\pi(2n-1)^2}\\ \hookrightarrow k=2n:\ 0}} = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{-2}{\pi(2n-1)^2}\right|^2 =$$

$\downarrow$ f real y par $\Rightarrow c_k = c_{-k}$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n-1)^4} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

Primitiva 1

Calcular $I = \int x\cos(ax)\,dx$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

No existe una regla fija para elegir u y dv. Sólo la experiencia nos enseña a elegir correctamente.

Arc
Log
Potencial
Exp
Sen

en nuestro caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos(ax)\,dx}_{dv}$$

ahora tenemos que calcular du y v. Para ello derivamos u e integramos dv,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos(ax)\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)$$

de forma que sustituyendo en la fórmula obtenemos,

$$I = \int x\cos(ax)\,dx = x\frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax) - \int \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{sen}(ax) - (-\frac{1}{a^2}\cos(ax)) + C$$

Solución: $I = \frac{x}{a}\operatorname{sen}(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax) + C$

Primitiva 2

Calcular $I = \int x\operatorname{sen}(ax)\,dx$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

en este caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen}(ax)\,dx}_{dv}$$

ahora tenemos que calcular du y v. Para ello derivamos u e integramos dv,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(ax)\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \operatorname{sen}(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$

de forma que sustituimos en la fórmula obteniendo

$$I = \int x\operatorname{sen}(ax)\,dx = x(-\frac{1}{a}\cos(ax)) - \int(-\frac{1}{a}\cos(ax))\,dx = -\frac{x}{a}\cos(ax) + \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(ax) + C$$

Solución: $I = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax) + C$

Primitiva 3

Calcular $I = \int x^2 \cos(ax)\,dx$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

en este caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\cos(ax)\,dx}_{dv}$$

ahora tenemos que calcular du y v. Para ello derivamos u e integramos dv ,

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

$$dv = \cos(ax)\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)$$

y obtenemos

$$I = \int x^2 \cos(ax)\,dx = x^2 \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax) - \int \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)\,2x\,dx = \frac{x^2}{a}\operatorname{sen}(ax) - \frac{2}{a}\int x\operatorname{sen}(ax)\,dx$$

se trata ahora de resolver

$$I = \int x\operatorname{sen}(ax)\,dx$$

que calculamos integrando de nuevo por partes. Elegimos :

$$I = \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen}(ax)\,dx}_{dv}$$

de forma que,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(ax)\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \operatorname{sen}(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$

con lo que obtenemos

$$I = \int x\operatorname{sen}(ax)\,dx = x\left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right) - \int\left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)dx = -\frac{x}{a}\cos(ax) + \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(ax)$$

finalmente, sustituyendo el resultado de esta última integral tenemos el resultado

$$I = \frac{x^2}{a}\operatorname{sen}(ax) - \frac{2}{a}\left[-\frac{x}{a}\cos(ax) + \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(ax)\right] + C = \frac{x^2}{a}\operatorname{sen}(ax) - \frac{2}{a^3}\operatorname{sen}(ax) + \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + C$$

Solución: $I = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\operatorname{sen}(ax) + \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + C$

Calcular $I = \int x^2 \operatorname{sen}(ax)\,dx$

Esta integral se resuelve utilizando el método de integración por partes :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

en este caso elegimos,

$$I = \int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen}(ax)\,dx}_{dv}$$

ahora tenemos que calcular du y v. Para ello derivamos u e integramos dv ,

$$u = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad du = 2x\,dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(ax)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int dv = \int \operatorname{sen}(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$

y obtenemos

$$I = \int x^2 \operatorname{sen}(ax)\,dx = x^2\left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right) - \int\left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right) 2x\,dx \;=\; -\frac{x^2}{f'}\cos(ax) + \frac{2}{a}\int x\cos(ax)\,dx$$

se trata ahora de resolver

$$I = \int x\cos(ax)\,dx$$

que calculamos integrando de nuevo por partes. Elegimos :

$$I = \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos(ax)\,dx}_{dv}$$

de forma que ,

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = \cos(ax)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int dv = \int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)$$

con lo que obtenemos

$$I = \int x\cos(ax)\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{sen}(ax) - \int \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{sen}(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax)$$

finalmente, sustituyendo el resultado de esta última integral tenemos el resultado

$$I = -\frac{x^2}{a}\cos(ax) + \frac{2}{a}\left[\frac{x}{a}\operatorname{sen}(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax)\right] + C \;=\; -\frac{x^2}{a}\cos(ax) + \frac{2x}{a^2}\operatorname{sen}(ax) + \frac{2}{a^3}\cos(ax) + C$$

Solución: $I = \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)\cos(ax) + \frac{2x}{a^2}\operatorname{sen}(ax) + C$

NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $|z| = \left| \dfrac{(3+5i)(-2+i)}{(2+i)(10-6i)} \right|$ b) $w = \dfrac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}}$

a)
Primero simplificamos la expresión del numerador y del denominador:

$$z = \frac{(3+5i)(-2+i)}{(2+i)(10-6i)} = \frac{-6+3i-10i+5i^2}{20-12i+10i-6i^2} = \frac{-6-7i-5}{20-2i+6} = \frac{-11-7i}{26-2i}$$

Ahora dividimos ambos complejos. Como están en forma binómica para dividir multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$z = \frac{(-11-7i)\ \ (26+2i)}{(26-2i)\ \ (26+2i)} = \frac{-286\ \ -22i\ \ -182i\ \ -14i^2}{676+52i-52i-4i^2} = \frac{-286-204i+14}{676+4} =$$

$$= \frac{-272-204i}{680} = -\frac{272}{680} - \frac{204}{680}i = -0,4-0,3i$$

y ahora sólo falta calcular el módulo del complejo z:

$$|z| = \sqrt{(-0,4)^2+(-0,3)^2} = \sqrt{0,16+0,09} = \sqrt{0,25} = 0,5$$

Solución : $|z| = 0,5$

b)
La única forma de realizar los cálculos del enunciado es pasar los números complejos a forma polar:

$$w_1 = 1+i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \rho & = & \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta & = & \text{atan}(1/1) = \pi/4 \quad (45^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

$$w_2 = i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \rho & = & \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \theta & = & \text{atan}(1/0) = \pi/2 \quad (90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow w_2 = 1_{\pi/2}$$

De esta forma la expresión queda:

Utilizamos la fórmula de De Moivre:

$(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}} = \frac{\left(\sqrt{2}_{\pi/4}\right)^{100}}{1_0+(1_{\pi/2})^{100}} = \frac{\left(\sqrt{2}^{100}\right)_{100\cdot\pi/4}}{1_0+\left(1^{100}\right)_{100\cdot\pi/2}} = \frac{\left(2^{50}\right)_{25\pi}}{1_0+1_{50\pi}} =$$

$$= \frac{\left(2^{50}\right)_{\pi}}{1_0+1_0} = \frac{-2^{50}}{1+1} = -\frac{2^{50}}{2} = -2^{49}$$

Importante: hemos tenido en cuenta que

$25\pi = \pi$

$50\pi = 0$

Solución : $w = -2^{49}$

Ejercicio 2

Calcular las siguiente expresión: $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$

Lo primero que vamos a hacer es pasar los cuatro números complejos a forma polar:

$$z=\sqrt{3}-i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1}=2 \\ \theta = \operatorname{atan}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6 = 11\pi/6 \ \ (-30^\circ = 330^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow z = 2_{11\pi/6}$$

$$z=\sqrt{3}+i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1}=2 \\ \theta = \operatorname{atan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \ (30^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow z = 2_{\pi/6}$$

$$z=1+i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \operatorname{atan}(1/1) = \pi/4 \ \ (45^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

$$z=1-i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \operatorname{atan}(-1/1) = -\pi/4 = 7\pi/4 \ \ (-45^\circ = 315)\end{array}\right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}_{7\pi/4}$$

Ahora utilizamos la fórmula para dividir números complejos en forma polar que es:

Recuerda:
$\dfrac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\theta'}$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}} = \left(\frac{2}{2}\right)_{11\pi/6-\pi/6} = 1_{10\pi/6} = 1_{5\pi/3} = 1_{300^\circ}$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)_{\pi/4-7\pi/4} = 1_{-6\pi/4} = 1_{2\pi/4} = 1_{\pi/2} = 1_{90^\circ}$$

ahora utilizamos la fórmula de De Moivre para calcular las potencias:

Recuerda, la Fórmula de De Moivre es:
$(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 = \left(\frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}}\right)^4 = \left(1_{5\pi/3}\right)^4 = (1^4)_{4\cdot 5\pi/3} = 1_{20\pi/3} = 1_{2\pi/3} = 1_{120^\circ}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}}\right)^5 = \left(1_{\pi/2}\right)^5 = (1^5)_{5\cdot\pi/2} = 1_{5\pi/2} = 1_{\pi/2} = 1_{90^\circ}$$

de forma que sustituyendo todo nos queda:

Recuerda:
$\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} = (\rho\cdot\rho')_{\theta+\theta'}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{2_{11\pi/6}}{2_{\pi/6}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}_{\pi/4}}{\sqrt{2}_{7\pi/4}}\right)^5 = \left(1_{5\pi/3}\right)^4 \cdot \left(1_{\pi/2}\right)^5 = 1_{2\pi/3} \cdot 1_{\pi/2} =$$

$$= (1\cdot 1)_{\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}} = 1_{\frac{4\pi+3\pi}{6}} = 1_{\frac{7\pi}{6}} = 1_{210^\circ}$$

Por último, si queremos, podemos pasar el resultado a forma cartesiana:

$$z = 1_{210^\circ} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \rho\cos\theta = 1\cdot\cos 210^\circ = -\sqrt{3}/2 \\ b = \rho\operatorname{sen}\theta = 1\cdot\operatorname{sen} 210^\circ = -1/2\end{array}\right\} \Rightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

16/3/2012

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Ejercicio 1 Si f es una función entera, probar que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$$

teniendo en cuenta que se cumple que:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0 \quad (u \text{ ARMÓNICA})$$
$$v_{xx}(x,y)+v_{yy}(x,y)=0 \quad (v \text{ ARMÓNICA})$$

f entera $\Leftrightarrow$ holomorfa $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ C-R $\left.\begin{array}{l} u_x(x,y)=v_y(x,y) \\ u_y(x,y)=-v_x(x,y)\end{array}\right] \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

- $f(z)=u(x,y)+j\,v(x,y) \rightarrow |f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{|f(z)|^2=u^2(x,y)+v^2(x,y)}$

- $f'(z)=u_x(x,y)+j\,v_x(x,y) \rightarrow |f'(z)|=\sqrt{u_x^2(x,y)+v_x^2(x,y)} \Rightarrow$

(cálculo práctico de la der)

$\Rightarrow \boxed{|f'(z)|^2=u_x^2(x,y)+v_x^2(x,y)}$

Demostrar:

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[|f(z)|^2\right]}_{1}+\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[|f(z)|^2\right]}_{2}=4|f'(z)|^2$$

1) $\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2=\frac{\partial}{\partial x}\left[u^2(x,y)+v^2(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[u^2(x,y)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[v^2(x,y)\right]=$

$=\underbrace{2\cdot u(x,y)\cdot u_x(x,y)}+\underbrace{2\cdot v(x,y)\cdot v_x(x,y)}=\underbrace{2\cdot u\cdot u_x}+\underbrace{2\cdot v\cdot v_x}$

Entender !! $\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[2uu_x+2vv_x\right]=\underbrace{2\frac{\partial}{\partial x}(u\cdot u_x)}+$

$+\underbrace{2\frac{\partial}{\partial x}(v\cdot v_x)}=\underbrace{2\left[u_x\cdot u_x+u_{xx}\cdot u\right]}+\underbrace{2\left[v_x\cdot v_x+v_{xx}\cdot v\right]}=$

$=\boxed{2\left[u_x^2+v_x^2+u\cdot u_{xx}+v\cdot v_{xx}\right]}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2$

② Analógamente

$$\frac{\partial^2}{\partial y}|f(z)|^2 = 2\left[u_y^2 + v_y^2 + u\cdot u_{yy} + v\cdot v_{yy}\right]$$

Entonces: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[$

$$= 2\left[u_x^2 + v_x^2 + u\cdot u_{xx} + v\cdot v_{xx} + u_y^2 + v_y^2 + u\cdot u_{yy} + v\cdot v_{yy}\right] =$$

$$= 2\left[u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2 + \underbrace{u(u_{xx} + u_{yy})}_{0} + \underbrace{v(v_{xx} + v_{yy})}_{0}\right] = 2\left[u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2\right] =$$

(son armónicas)

CR: $u_y = -v_x$, $v_y = u_x$

$$= 2\left[u_x^2 + v_x^2 + (-v_x)^2 + u_x^2\right] = 2\left[2u_x^2 + 2v_x^2\right] = 4\underbrace{\left[u_x^2 + v_x^2\right]}_{|f'(z)|^2} = \underline{\underline{4|f(z)|^2}}$$

Ejercicio 2

Dada la función holomorfa $f = u + jv$ se pide probar que $f_1 = \frac{u^2 - v^2}{2} + juv$ es holomorfa.

$$f_1 = \frac{u^2 - v^2}{2} + juv = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \frac{u^2 - v^2}{2} \qquad \beta = uv$$

f es holomorfa $\Rightarrow$ CR $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

f_1 es holomorfa $\Leftrightarrow$ si β es la armónica conjugada de α:

$$\alpha_x = \beta_y$$
$$\alpha_y = -\beta_x$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{2 \cdot u \cdot u_x - 2 \cdot v \cdot v_x}{2} = u u_x - v \cdot v_x \\ \beta_y &= u_y \cdot v + u \cdot v_y = \{C.R\} = v(-v_x) + u \cdot u_x \end{aligned}\right\} \text{se cumple } \alpha_x = \beta_y$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_y &= \frac{2 \cdot u u_y - 2 v \cdot v_y}{2} = u \cdot u_y - v \cdot v_y \\ \beta_x &= u_x \cdot v + u \cdot v_x = \{C.R.\} = v \cdot v_y + u(-u_y) \end{aligned}\right\} \text{se cumple } \alpha_y = -\beta_y$$

β es la armónica conjugada de $\alpha \Leftrightarrow f_1$ es holomorfa

Ejercicio 8

Calcular $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{z}}$

a) Utilizando la rama definida por $k=0$ y $-\pi < \arg(z) < \pi$

b) Utilizando la rama definida por $k=0$ y $0 < \arg(z) < 2\pi$

$$\int_C f(z)dz \quad \text{donde } f(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}$$

¡OJO! $\sqrt{z}$ es una función multiforme:

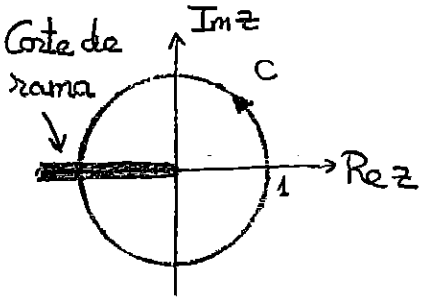
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{j\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,\dots,n-1$$

En nuestro caso $n=2$:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{j\frac{\theta+2k\pi}{2}} = \sqrt{|z|}\, e^{j\frac{\theta}{2}+k\pi}, \quad k=0,1.$$

a) Fijamos la rama $k=0$ y $-\pi<\theta<\pi$, así que:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{j\frac{\theta}{2}}, \quad \theta \in (-\pi,\pi)$$



No se puede hacer por residuos porque las singularidades que caen dentro de la curva no son aisladas.

Lo hacemos por definición de curvilínea:

¡OJO! No hay que "pisar" el corte de rama.

$$c:(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{C} \qquad c'(t)=je^{jt}$$
$$t \longrightarrow c(t)=1\cdot e^{jt}$$

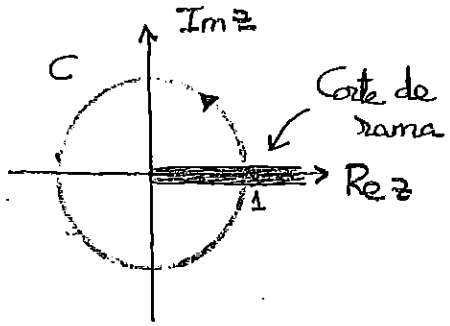
$$\int_C f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(c(t))c'(t)dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\sqrt{c(t)}}\, je^{jt}dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{je^{jt}}{\underbrace{\sqrt{1\cdot e^{jt}}}_{\in\mathbb{C}}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{je^{jt}}{\underbrace{\sqrt{1}}_{\in\mathbb{R}}\, e^{j\frac{t}{2}}}dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} je^{j\frac{t}{2}}dt = 2\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{j}{2}e^{j\frac{t}{2}}dt = 2\left[e^{j\frac{t}{2}}\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\left(\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j} - \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j}\right) =$$

$$2\left[j-(-j)\right] = 4j$$

b) Fijamos la rama $k=0$ y $0<\theta<2\pi$, así que:

$$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,e^{j\frac{\theta}{2}}, \quad \theta\in(0,2\pi)$$



Mismos comentarios que en el apartado anterior

$$c:(0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$t\longrightarrow c(t)=1\cdot e^{jt}$$

$$c'(t)=j\,e^{jt}$$

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{t_1}^{t_2} f(c(t))\,c'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{j\,e^{jt}}{\underbrace{\sqrt{1\cdot e^{jt}}}_{\in\mathbb{C}}}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1}}_{\in\mathbb{R}}\cdot e^{j\frac{t}{2}}}\,j\,e^{jt}\,dt=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\frac{j}{2}e^{j\frac{t}{2}}\,dt=2\left[e^{j\frac{t}{2}}\right]_0^{2\pi}=2\left[\underbrace{e^{j\pi}}_{-1}-\underbrace{e^{j0}}_{1}\right]=-4$$

Observa que puede cambiar el resultado de la integral al elegir ramas distintas de la función multiforme.

(CAYÓ EN EXAMEN)

Ejercicio
Repaso Tema 2

Dada la función $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$, se pide:

(a) Deducir una expresión que permita calcular el residuo de una función en un polo z_0, $z_0 \in \mathbb{C}$, de orden $m \geq 1$ sin necesidad de obtener la serie correspondiente.

(b) Obtener el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en un entorno del punto $z = 1$ y especificar el coeficiente a_{-1}, correspondiente al término $\frac{1}{z-1}$.

(c) Indicar el tipo de singularidad de la función $f(z)$ en los puntos $z = 0$ y $z = 1$ y calcular sus respectivos residuos aplicando el apartado a).

(d) Hallar el valor de la integral $I = \int_{|z-\frac{1}{2}|=R^+} f(z)dz$ para los valores $R = \frac{1}{1}$ y $R = 2$.

Entrega 3 de Ejercicios para Evaluación Continua

Métodos Matemáticos. Grupo 16.2

Fecha límite de entrega: **30 de Mayo de 2012.**

1. Dada la función $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$, se pide:
   (a) Deducir una expresión que permita calcular el residuo de una función en un polo z_0, $z_0 \in \mathbb{C}$, de orden $m \geq 1$ sin necesidad de obtener la serie correspondiente.
   (b) Obtener el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en un entorno del punto $z = 1$ y especificar el coeficiente a_{-1}, correspondiente al término $\frac{1}{z-1}$.
   (c) Indicar el tipo de singularidad de la función $f(z)$ en los puntos $z = 0$ y $z = 1$ y calcular sus respectivos residuos aplicando el apartado a).
   (d) Hallar el valor de la integral $I = \int_{|z-\frac{1}{2}|=R\uparrow} f(z)dz$ para los valores $R = \frac{1}{4}$ y $R = 2$.

Notas:

1. La entrega de ejercicios será de forma individual.
2. Cada alumno deberá indicar su nombre y apellidos en la primera hoja de la entrega.
3. Las hojas que se entreguen deberán estar grapadas.
4. La entrega se realizará en el despacho del profesor (A-313).

Demo Adicional: Teorema de Residuos

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz \Rightarrow \oint_{\Gamma} f(z) = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z=z_k]$$

$2\pi j \cdot \mathrm{Res}[f(z), z=z_1]$ $\quad$ $2\pi j\, \mathrm{Res}[f(z), z=z_2]$

EJERCICIO REPASO TEMA 2

a) Si $z=z_0$, $|z_0|<\infty$, es polo de orden $m\geq 1$ de $f(z) \Rightarrow$

$\exists \{z\in\mathbb{C} : 0<|z-z_0|<R\}$ en el que:

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\dots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n =$$

$$=\underbrace{\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}}_{\text{principal}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{parte ~~princip~~ regular}}, \text{ siendo } a_{-m}\neq 0$$

Así que:

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\dots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{m+n}$$

Si derivamos término a término $m-1$ veces:

$$\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}} = (m-1)!\,a_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)\cdots(n+2)\,a_n (z-z_0)^{n+1}$$

Tomando $\lim\limits_{z\to z_0}$:

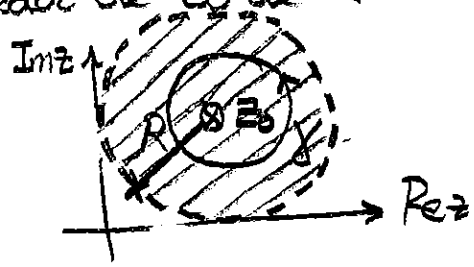
$$\boxed{\operatorname{Res}\left[f(z), \underbrace{z=z_0}_{\text{polo orden } m}\right] = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}}}$$

Caso particular de polo simple $(m=1)$

$$\boxed{\operatorname{Res}\left[f(z), \underbrace{z=z_0}_{\text{polo simple}}\right] = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]}$$

DEMOSTRACIÓN ADICIONAL: TEOREMA DE LOS RESIDUOS

Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Sabemos que podemos desarrollar $f(z)$ en serie alrededor de z_0 de la siguiente forma:



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

Tb sabemos por el T^ma Laurent que

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \; n \in \mathbb{Z}$$

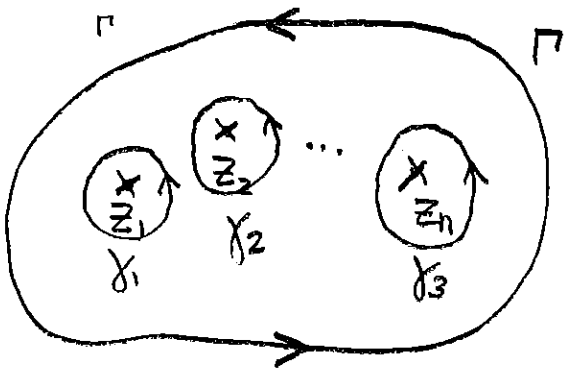
Sabemos que el residuo de $f(z)$ en z_0 es a_{-1}, así que:

$$\boxed{\operatorname{Res}\left[f(z), z=z_0\right] = a_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1+1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma f(z) dz}$$

Enunciado del t^ma de los residuos:

Si $f(z)$ es holomorfa sobre un contorno simple cerrado Γ y en la región encerrada por él, excepto en un conjunto de ptos. singulares aislados z_k, $k=1,\dots,n$, se cumple

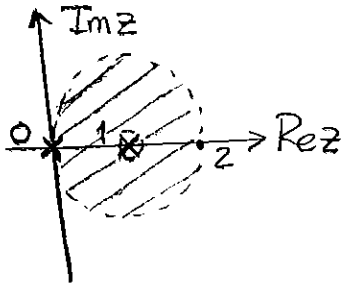
$$\oint_\Gamma f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z), z=z_k\right]$$



Se puede demostrar a partir del T^ma general de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos.

b) $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$

$0<|z-1|<1$



$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{(z-1)^2}}_{①}\cdot\underbrace{e^z}_{②}\,\underbrace{\frac{1}{z}}_{③}$$

① No hay q. hacer nada, pues ya está en forma de potencia de $(z-1)$

$e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$

② $e^z=e^{z-1+1}=e^{z-1}e^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^n$

③ $\frac{1}{z}=\frac{1}{\underbrace{z-1}_{\text{potencias de }\boxed{z-1}}+1}=\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{1-(-(z-1))}=\sum_{n=0}^{\infty}[-(z-1)]^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$

$|z-1|<1$ ✓

Calculemos el producto de series ②×③ aplicando el <u>producto de Cauchy de Series</u> (aunque también se puede hacer como hemos hecho otras veces)

$$\left.\begin{aligned} f_1(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\\ f_2(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n\end{aligned}\right\}\quad f_1(z)f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right](z-z_0)^n$$

En este caso: a_n

$$\left.\begin{aligned} e^z=f_1(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{\frac{e}{n!}}(z-1)^n\\ \frac{1}{z}=f_2(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\boxed{(-1)^n}}_{b_n}(z-1)^n\end{aligned}\right\}$$

$$e^z\cdot\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{e}{k!}(-1)^{n-k}\right](z-z_0)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{-k}}{k!}\right](z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}e(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right](z-z_0)^n$$

Así que $f(z)$:

$$\boxed{f(z) = ① \times ② \times ③} = \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} e(-1)^n \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right] (z-\underset{1}{z_0})^n =$$

$$\boxed{= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e(-1)^n \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right]}_{\text{Coef del DSL}} (z-\underset{1}{z_0})^{n-2} \quad , \quad 0<|z-1|<1}$$

~~(ADICIONAL)~~ $\boxed{\operatorname{Res}\left[f(z), z=1\right]} = a_{-1} = e(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \Bigg|_{n=1} =$

a_{-1} → coef. del $(z-1)^{-1}$ ⇓ $n=1$

$$= e(-1)^{①} \sum_{k=0}^{①} \frac{(-1)^k}{k!} = -e\left[\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!}\right] = -e\left[1-1\right] = \boxed{0}$$

c) $\boxed{z=0}$ $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z(z-1)^2} = \frac{e^0}{0(0-1)^2} = \frac{1}{\boxed{0}} = \infty \Rightarrow z=0$ polo simple

$\boxed{0}$ → cero simple del denominador

Definición

Más rigurosamente:

$$g(z) = (z-0)^1 f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} g(0) = \frac{e^0}{(-1)^2} = +1 \neq 0 \\ g(z) \text{ es holomorfa en } z=0 \end{cases}$$

así que $z=0$ es polo simple

$\boxed{z=1}$ $\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{z(z-1)^2} = \frac{e^1}{1\,\boxed{0^2}} = \infty \Rightarrow z=1$ polo doble

$\boxed{0^2}$ → cero doble del denom

Ej.

Más rigurosamente:

$$g(z) = (z-1)^2 f(z) = \frac{e^z}{z} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = \frac{e}{1} \neq 0 \\ g(z) \text{ es holomorfa en } z=1 \end{cases}$$

así que $z=1$ es polo doble.

$$\boxed{\mathrm{Res}\left[f(z), z=0\right]} = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^0}{1} = \boxed{1}$$

polo simple
$m=1$

$$\boxed{\mathrm{Res}\left[f(z), z=1\right]} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}}\Bigg|_{\substack{m=2\\ z_0=1}} =$$

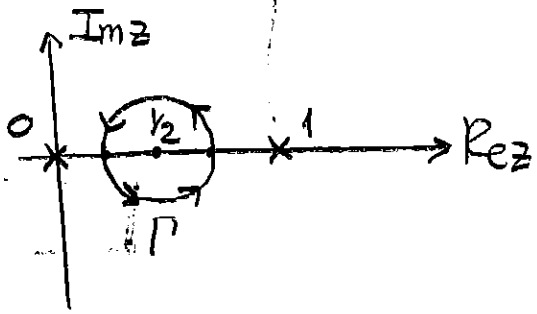
polo doble
$m=2$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-1)^2}\frac{e^z}{z\cancel{(z-1)^2}}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{e^z \cdot z - 1 e^z}{z^2} = \lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2} = \boxed{0}$$

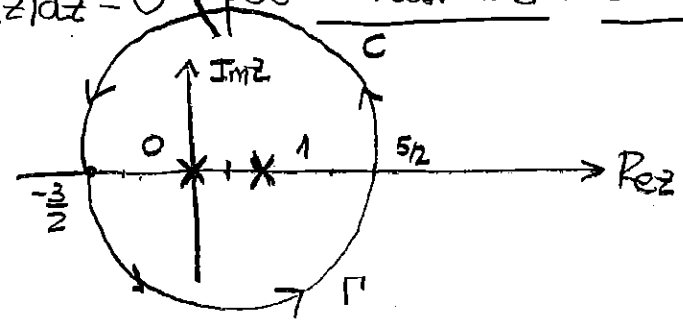
d) $I = \oint_\Gamma f(z)dz$, $\Gamma: |z-\frac{1}{2}| = R$

d.1) $R = \frac{1}{4}$



$I = \oint_C f(z)dz = 0$ (por $\underline{\text{t}^{\text{ma}}\text{ residuos}}$ o $\underline{\text{t}^{\text{ma}}\text{ Cauchy-Goursat}}$)

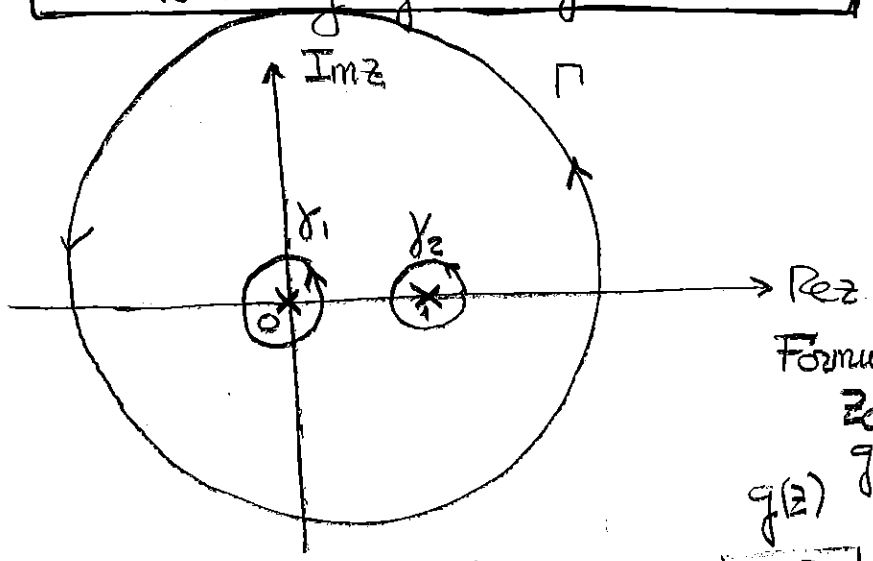
d.2) $R = 2$



$$\boxed{I = \oint_\Gamma f(z)dz = \left(\mathrm{Res}\left[f(z), z=0\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), z=1\right]\right)2\pi j = 2\pi j\,(1+0) = \underline{2\pi j}}$$

Este último caso tb se podría resolver utilizando el

$\boxed{\text{T}^{\text{ma}} \text{ de Cauchy-Goursat generalizado:}}$



$$\oint_{\Gamma} = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2}$$

Fórmula integral de Cauchy (FIC)

$z_0 = 0$

$g(z)$ holom. dentro y sobre γ_1

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\overbrace{\boxed{\frac{e^z}{(z-1)^2}}}^{g(z)}}{z-0}\,dz = 2\pi j\, g(0) = 2\pi j$$

$$\oint_{\gamma_2} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,dz = \oint_{\gamma_2} \frac{\overbrace{\boxed{\frac{e^z}{z}}}^{h(z)}}{(z-1)^{\overset{k+1}{2}}}\,dz = \frac{2\pi j}{1!}\, h'(1) = 0$$

$\boxed{\text{FIC generalizada}}$

$z_0 = 1$

$k+1 = 2 \rightarrow k = 1$

$$h'(z) = \frac{e^z(z-1)}{z^2}$$

Así que: $\boxed{\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi j + 0 = 2\pi j}$

CAYÓ EN EXAMEN

EJERCICIO

Dada la EDO $y''(t)+y(t)=\cos t$

hecho en clase a) Probar que el conjunto de soluciones de la EDO homogénea es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial e indicar su dimensión

b) Obtener un sistema fundamental de soluciones en dicho espacio (sistema fundamental de soluciones de la EDO lineal homogénea)

c) Resolver el PVI por 3 métodos diferentes:

$$\begin{cases} y''(t)+y(t)=\cos t \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

- Variación ctes
- Coeficientes indeterminados
- Laplace

---

a) Sea L el operador diferencial asociado a la EDO homogénea dada. Teniendo esto en cuenta, el conjunto de soluciones de la EDO homogénea $L[y]=0$ es

$$S=\{y\in\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}) : L[y]=0\}\subset\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$$

siendo $I=(a,b)$ el intervalo de trabajo

y dado que $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, para probar que $S\subset\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ es espacio vectorial, $S\neq\emptyset$, basta con probar que es cerrado, es decir:

"Si $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ e $y_1,y_2\in S$, entonces $\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2\in S$"

lo cual se verifica, ya que:

$$L[\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2]=\lambda_1 \overset{0}{L[y_1]}+\lambda_2 \overset{0}{L[y_2]}=0.$$ Además $\boxed{\dim(S)=2}$

b) EDO homog: $y''(t)+y(t)=0$

Ec. característica: $r^2+1=0 \rightarrow r^2=-1 \rightarrow r=0\pm j1$

Así que: $\boxed{y_H(t)} = e^{0t}\left[A\cos t + B\,\text{sen}\,t\right] = \boxed{\underbrace{A\cos t}_{y_1(t)} + \underbrace{B\,\text{sen}\,t}_{y_2(t)}}$

Escogiendo $A=1, B=0 \rightarrow y_1(t)=\cos t$ será solución particular

Escogiendo $A=0, B=1 \rightarrow y_2(t)=\text{sen}\,t$ " " "

Verificamos si y_1 e y_2 son linealm. indptes

$$W(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & \text{sen}\,t \\ -\text{sen}\,t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$y_1(t)$ e $y_2(t)$ son soluc. partic de la EDO homog, por lo q. constituyen un sistema fundamental de soluc. de la misma.

c)

$\boxed{c.1}$ <u>Método de los coeficientes indeterminados</u> $y(t)=y_H(t)+y_p(t)$

① De b) tenemos que $y_H(t)=A\cos t+B\,\text{sen}\,t$ ($r=0\pm j$ raíces simples)

② SPC. Ensayamos $y_p(t)=t\,e^{0t}\left[a\cos t+b\,\text{sen}\,t\right]=t\left[a\cos t+b\,\text{sen}\,t\right]$

$q(t)=\cos t$

$q(t)=e^{0t}\left[1\cos t+0\,\text{sen}\,t\right]$ pq $r=0\pm j1$ son raíces simples del polinomio característico

$y_p'(t)=a\cos t+b\,\text{sen}\,t+t\left[-a\,\text{sen}\,t+b\cos t\right]=a\cos t+b\,\text{sen}\,t-at\,\text{sen}\,t+bt\cos t$

$y_p''(t)=-a\,\text{sen}\,t+b\cos t-a\left[\text{sen}\,t+t\cos t\right]+b\left[\cos t-t\,\text{sen}\,t\right]=$

$=-a\,\text{sen}\,t+b\cos t-a\,\text{sen}\,t-at\cos t+b\cos t-bt\,\text{sen}\,t=-2a\,\text{sen}\,t+2b\cos t-at\cos t-bt\,\text{sen}\,t$

Sustituimos en la EDO completa:

$$y_p''(t) + y_p(t) = \cos t \rightarrow$$

$$\underbrace{-2a\,\text{sen}t + 2b\cos t - \cancel{at\cos t} - \cancel{bt\,\text{sen}t}}_{y_p''(t)} + \underbrace{\cancel{at\cos t} + \cancel{bt\,\text{sen}t}}_{y_p(t)} = \cos t$$

$$2b\cos t - 2a\,\text{sen}t = 1\cos t + 0\,\text{sen}t$$

$$\left.\begin{array}{l} 2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \\ -2a = 0 \rightarrow a = 0 \end{array}\right\} \boxed{y_p(t) = \frac{1}{2} t\,\text{sen}t}$$

③ SGC = SGH + SPC. $\boxed{y(t)} = y_H(t) + y_p(t) = A\cos t + B\,\text{sen}t + \frac{t}{2}\text{sen}t =$

$$\boxed{= A\cos t + \left[B + \frac{t}{2}\right]\text{sen}t}$$

④ Usamos las CIs para determinar A y B

$$y(0) = 1 \rightarrow A\overset{1}{\cancel{\cos 0}} + \left(B + \frac{0}{2}\right)\overset{0}{\cancel{\text{sen}0}} = 1 \rightarrow A = 1$$

Así que: $y(t) = \cos t + \left[B + \frac{t}{2}\right]\text{sen}t \rightarrow y'(t) = -\text{sen}t + \frac{1}{2}\text{sen}t + \left[B + \frac{t}{2}\right]\cos t =$

$$= -\frac{1}{2}\text{sen}t + \left[B + \frac{t}{2}\right]\cos t$$

$$y'(0) = 1 \rightarrow -\frac{1}{2}\overset{0}{\cancel{\text{sen}0}} + \left[B + \frac{0}{2}\right]\overset{1}{\cancel{\cos 0}} = 1 \rightarrow B = 1$$

Así que: $\boxed{y(t) = \cos t + \left[1 + \frac{t}{2}\right]\text{sen}t}$

12 pasos (puede que no caiga) (1ª parte de los apuntes)
{Dicen que solo va a caer coef. ctes}

$\boxed{C.2}$ Método de variación de las ctes

$$y_H(t) = A\cos t + B\,\text{sen}\,t \rightarrow y(t) = A(t)\overset{y_1(t)}{\boxed{\cos t}} + B(t)\overset{y_2(t)}{\boxed{\text{sen}\,t}}$$

y obligamos a que satisfaga la EDO completa: $y'' + y = \cos t$

Haciendo uso del grado de libertad del que disponemos, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} A'(t)y_1(t) + B'(t)y_2(t) = 0 \\ A'(t)y_1'(t) + B'(t)y_2'(t) = q(t) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} A'(t)\cos t + B'(t)\,\text{sen}\,t = 0 \\ -A'(t)\,\text{sen}\,t + B'(t)\cos t = \cos t \end{array}\right\}$$

$$A'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \text{sen}\,t \\ \cos t & \cos t \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{-\text{sen}\,t\cos t}{1} = -\text{sen}\,t\cos t = A'(t)$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \text{sen}\,t \\ -\text{sen}\,t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$B'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\text{sen}\,t & \cos t \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{\cos^2 t}{1} = \cos^2 t = B'(t)$$

Así que:

$$A(t) = \int -\text{sen}\,t\cos t\,dt = \boxed{-\frac{\text{sen}^2 t}{2} + K_1 = A(t)}$$

$$B(t) = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2\cdot 2}\int 2\cos 2t\,dt =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}\,2t + K_2 = B(t)}$$

Así que: $y(t) = \underbrace{\left[K_1 - \frac{\text{sen}^2 t}{2}\right]}_{A(t)}\cos t + \underbrace{\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}\,2t + K_2\right]}_{B(t)}\text{sen}\,t =$

$$\boxed{y(t)} = K_1\cos t - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\cos t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\overset{2\operatorname{sen}t\cos t}{\operatorname{sen}2t}\operatorname{sen} t + K_2\operatorname{sen} t =$$

$$= K_1\cos t + K_2\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t - \cancel{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\cos t} + \cancel{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\cos t} =$$

$$= \boxed{K_1\cos t + \left[K_2 + \frac{t}{2}\right]\operatorname{sen} t}$$

y usando las CIs se llega a:

$$y(t) = \cos t + \operatorname{sen} t + \frac{t}{2}\operatorname{sen} t$$

C.3. Usando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \cos t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\}$$

$$s^2Y(s) - s^1\overset{1}{y(0)} - s^0\overset{1}{y'(0)} + Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^2+1)Y(s) - s - 1 = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + s + 1$$

Nota: $\cos zt \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{s}{s^2+z^2}$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$\boxed{y(t)} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}}_{\cos t} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}}_{\operatorname{sen} t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\operatorname{sen} t]$$

$$= \cos t + \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{+2s}{(s^2+1)^2}\right\} =$$

$$= \boxed{\cos t + \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t}$$

Prop: $tf(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -F'(s)$

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} = -2\frac{s}{(s^2+1)^2}$$

Teorema 1: $y_1,\dots,y_n$, deriv. hasta $n-1$, lin. dep. en (a,b)
$\Rightarrow W(y_1,\dots,y_n)=0 \quad \forall x\in(a,b)$.

Dem. (para n=3):

y_1,y_2,y_3, deriv. hasta $n-1$, lin. dep. en (a,b)

$\Rightarrow \alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\alpha_3 y_3(x)\equiv 0$ con NO todos α_i nulos.
Sea, por ejemplo, $\alpha_1\neq 0$. Entonces

$$y_1(x)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2(x)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3(x)$$

$$y_1'(x)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2'(x)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3'(x)$$

$$y_1''(x)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2''(x)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3''(x)$$

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3\\ y_1' & y_2' & y_3'\\ y_1'' & y_2'' & y_3''\end{bmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3 & y_2 & y_3\\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2'-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3' & y_2' & y_3'\\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2''-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3'' & y_2'' & y_3''\end{vmatrix}=0$$

$\forall x\in(a,b)$, por ser la 1ª columna comb. lineal de las restantes.

Se demuestra análogamente si $\alpha_2\neq 0$ ó $\alpha_3\neq 0$.

Las 3 situaciones consideradas engloban todas las posibles, ya que al menos uno de los 3 coeficientes debe ser $\neq 0$, puesto que y_1, y_2 e y_3 son linealmente dependientes.

Teorema 3: $y_1,\dots,y_n$ lin. indep. en (a,b), sol. de $L[y]=0$ con $p_i(x)$ cont. en $[a,b] \Rightarrow W(y_1,\dots,y_n)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$.

Dem. (para n=3):

Supong. $W(x_0)=0$, con $x_0\in(a,b)$. Formamos el sistema

$$\begin{aligned}
\alpha_1 y_1(x_0)+\alpha_2 y_2(x_0)+\alpha_3 y_3(x_0)&=0\\
\alpha_1 y_1'(x_0)+\alpha_2 y_2'(x_0)+\alpha_3 y_3'(x_0)&=0\\
\alpha_1 y_1''(x_0)+\alpha_2 y_2''(x_0)+\alpha_3 y_3''(x_0)&=0
\end{aligned}$$

$\Delta = W(x_0)=0$ por hipotesis $\Rightarrow$ sist. tiene sol.$\neq$ trivial $\hat\alpha_1,\hat\alpha_2,\hat\alpha_3$ (al menos uno de ellos $\neq 0$).

La funcion $y=\hat a_1 y_1(x)+\hat\alpha_2 y_2(x)+\hat\alpha_3 y_3(x)$ es C.L. de 3 sol. lin. indep. de $L[y]=0 \Rightarrow$ es sol. de $L[y]=0$ y verif. cond. inic.

$$\begin{aligned}
y(x_0)&=\hat a_1 y_1(x_0)+\hat\alpha_2 y_2(x_0)+\hat\alpha_3 y_3(x_0)=0\\
y'(x_0)&=\hat a_1 y_1'(x_0)+\hat\alpha_2 y_2'(x_0)+\hat\alpha_3 y_3'(x_0)=0\\
y''(x_0)&=\hat a_1 y_1''(x_0)+\hat\alpha_2 y_2''(x_0)+\hat\alpha_3 y_3''(x_0)=0
\end{aligned}$$

Tambien $y(x)\equiv 0$ verif esas mismas cond. inic., luego teor. $\exists!$ $\Rightarrow \hat a_1 y_1(x)+\hat\alpha_2 y_2(x)+\hat\alpha_3 y_3(x)\equiv 0$. Como al menos un $\hat\alpha_i\neq 0$, y_1,y_2,y_3 son lin. dep. en (a,b), en contrad. con hipot. inicial. $\Rightarrow W(y_1,y_2,y_3)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$.

Teorema 5: La ecuac. $L[y]=0$, con $p_i(x)$ cont. en $[a,b]$, solo tiene n sol. partic. lin. indep.

Dem. (para n=2):

Sea $x_0 \in (a,b)$ y sean $y_1(x), y_2(x)$ las sol. unicas (resp.) de los PVIs

$$\begin{aligned} L[y]&=0 \\ y(x_0)&=1 \\ y'(x_0)&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L[y]&=0 \\ y(x_0)&=0 \\ y'(x_0)&=1 \end{aligned}$$

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$ luego y_1, y_2 son lin. indep. en (a,b)

Sea $y=u(x)$ una sol. cualquiera de $L[y]=0$ en (a,b) y sup. $u(x_0)=C_1$, $u'(x_0)=C_2$, con C_1, C_2 constantes.
$\Rightarrow y=u(x)$ es la sol. unica del PVI

$$\begin{aligned} L[y]&=0 \\ y(x_0)&=C_1 \\ y'(x_0)&=C_2 \end{aligned}$$

Sin embargo, si def. $v(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, esta tambien satisface el PVI anterior y, en virtud de la unicidad, $u(x)=v(x)$, es decir,

$$u(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

Luego cualquier sol de $L[y] = 0$ puede escribirse como C.L. de las sol. lin. indep. y_1, y_2, por lo que estas generan el espacio. $\{y_1, y_2\}$ es, pues, una base del espacio vect. de soluc. de $L[y] = 0$. Su dim. es, por lo tanto, 2.

INTEGRACIÓN COMPLEJA

Ejercicio 1

Calcular la siguiente integral:

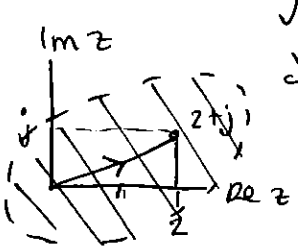
$$\int_\gamma z^2\,dz$$

siendo γ las siguientes curvas:

a) recta que une los puntos 0 y $2+j$
b) rectas que unen los puntos 0 y 2 y los puntos 2 y $2+j$.

a) $I = \int_\gamma z^2 \cdot dz = \int_0^{2+j} z^2 \cdot dz = \frac{z^3}{3}\Big|_0^{2+j} = \frac{(2+j)^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}(2+j)^2(2+j) =$

$\gamma \subset D$; z^2 holomorfa en D



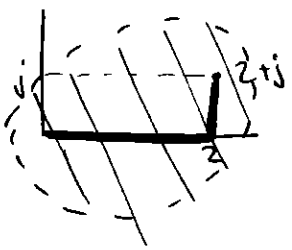
$= \frac{1}{3}(4 + \underbrace{j^2}_{-1} + 4j)(2+j) = \frac{1}{3}(6 + 3j + 8j + \underbrace{4j^2}_{-1}) = \frac{2}{3} + j\frac{11}{3}$

D simp conexo (sin agujeros)

Análogamente: Tma de la Primitiva

Comprobar con parametriz.

b)



$I = \int_\gamma z^2 \cdot dz = \int_0^{2+j} z^2 \cdot dz = \frac{2}{3} + j\frac{11}{3}$

Ejercicio 2

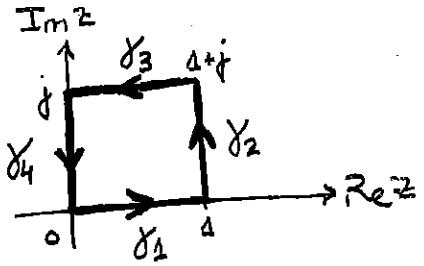
Calcular la siguiente integral:

$$\int_\gamma \pi e^{\pi \bar{z}}\, dz$$

siendo γ la frontera del cuadrado con vértices en los puntos

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + j, \quad z_3 = j$$

orientada positivamente.



$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad \gamma_1'(t) = 1$

$t \longrightarrow \gamma_1(t) = t + j0$

$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad \gamma_2'(t) = j$

$t \longrightarrow \gamma_2(t) = 1 + tj$

$\gamma_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad \gamma_3'(t) = -1$

$t \longrightarrow \gamma_3(t) = (1-t) + j$

$\gamma_4 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad \gamma_4'(t) = -j$

$t \longrightarrow \gamma_4(t) = (1-t)j$

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^1 \pi e^{\pi \overline{\gamma_1(t)}}\,\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^1 \pi e^{\pi t}\,dt =$$

$$= \left[e^{\pi t}\right]_0^1 = e^{\pi} - 1$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^1 \pi e^{\pi \overline{\gamma_2(t)}}\,\gamma_2'(t)\,dt = \int_0^1 \pi e^{\pi(1-jt)}\,j\,dt =$$

$$= \int_0^1 \pi e^{\pi} e^{-j\pi t}\,j\,dt = -e^{\pi}\int_0^1 -\pi j e^{-j\pi t}\,dt = -e^{\pi}\left[e^{-j\pi t}\right]_0^1 =$$

$$= -e^{\pi}\left[\underbrace{e^{-j\pi}}_{-1} - 1\right] = -e^{-\pi}(-2) = 2e^{\pi}$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_3(t))\,\gamma_3'(t)\,dt = \int_0^1 \pi e^{\pi \overline{[(1-t)+j]}}\,(-1)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \pi e^{\pi} e^{-\pi t} e^{-j\pi}\,(-1)\,dt = e^{\pi(1-j)}\int_0^1 -\pi e^{-\pi t}\,dt = e^{\pi(1-j)}\left[e^{-\pi t}\right]_0^1 =$$

$$= e^{\pi}\underbrace{e^{-j\pi}}_{-1}\left(e^{-\pi} - 1\right) = -1 + e^{\pi}$$

$$I_4 = \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = \int_0^1 \pi e^{\pi \overline{\gamma_4(t)}}\,\gamma_4'(t)\,dt = \int_0^1 \pi e^{\pi \overline{(1-t)j}}\,(-j)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \pi e^{-j\pi} e^{j\pi t}(-j)\,dt = -\overset{-1}{\overset{\shortparallel}{e^{-j\pi}}} \int_0^1 j\pi e^{j\pi t}\,dt = \left[e^{j\pi t}\right]_0^1 = e^{j\pi} - 1 = -2$$

Así que:

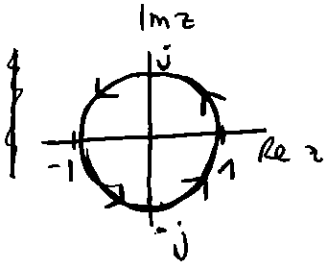
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = e^{\pi} - 1 + 2e^{\pi} + e^{\pi} - 1 - 2 = 4(e^{\pi} - 1)$$

Ejercicio 3

Calcular la siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z}\, dz$ b) $\displaystyle\int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1/z}}{z^2+z}\, dz$

a)



$$\int_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2+2z} = \int_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z(z+2)} =$$

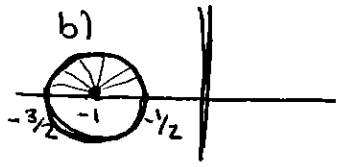
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{|z|} \frac{\frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z}}{z+2}\, dz \longrightarrow f(z) \text{ no holomorfa dentro y sobre la curva} \Rightarrow \underline{\text{NO FIC}} \\ \displaystyle\int_{|z|} \frac{\frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}}{z}\, dz \longrightarrow f(z) \text{ holomorfa dentro y sobre la curva} \Rightarrow \text{Puedo usar FIC} \end{cases}$$

$$I_1 = \int_{|z|=1} \frac{\frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}}{z-0}\, dz \overset{z_0=0}{=} 2\pi j \cdot f(0) = 2\pi j \, \frac{e \cdot \cos 0}{0+2} = \boxed{j\pi}$$

cerrada suave a trozos, sentido ⊕

F. Int de Cauchy

b)



$C: |z+1| = \frac{1}{2}$ * $\rightarrow |z-z_0| = R$

$$\int_C \frac{e^{1/z}}{z^2+z} \cdot dz = \int_C \frac{e^{1/z}}{z(z+1)}\, dz = \int_C \frac{\frac{e^{1/z}}{z}}{(z+1)}\, dz \underset{(FIC)}{\overset{z_0=-1}{=}} 2\pi j\, f(-1) = 2\pi j \cdot \frac{e^{\frac{1}{-1}}}{-1} = \frac{-2j\pi}{e}$$

$\rightarrow$ holomorfa

y suave a trozos...

Ejercicio 4

Calcular la siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2a} \frac{ze^{z}}{2\pi j(z-a)^3}\,dz$ b) $\displaystyle\int_{|z+1|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$

a) $\displaystyle\int_{C_a} \frac{z\cdot e^{z}}{2\pi j(z-a)^3}\,dz = \int_C \frac{z\cdot e^{z}}{2\pi j}\Big/(z-a)^{3}$ → holomorfa dentro y sobre C

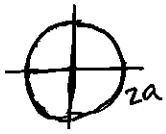
cerrada suave a trozos

$\xrightarrow[\text{FICG}]{} = \dfrac{2\pi j}{2!}\cdot f''(a)$

$k+1$

$K=2$

$C \equiv |z|=2a$



$f(z) = \dfrac{1}{2\pi j}\cdot z\cdot e^{z} \rightarrow f'(z) = \dfrac{1}{2\pi j}\left[e^{z}+z\cdot e^{z}\right] =$

$= \dfrac{1}{2\pi j}\, e^{z}(z+1) \rightarrow f''(z) = \dfrac{1}{2\pi j}\left[e^{z}(z+1)+e^{z}\right] = \dfrac{1}{2\pi j}\cdot e^{z}(z+2)$

$\Downarrow$

$\oint I = \dfrac{2\pi j}{2!}\, f''(a) = \dfrac{2\pi j}{2\cdot 1}\cdot\dfrac{1}{2\pi j}\cdot e^{a}(a+2) = \boxed{\dfrac{e^{a}(a+2)}{2}}$

b) $\displaystyle\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\cdot dz = \frac{2\pi j}{3!}\cdot f'''(-1) = \frac{2\pi j}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 8\cdot e^{2(-1)} = j\,\frac{8\pi}{3\cdot e^{2}}$

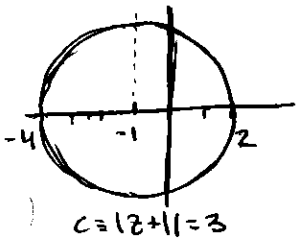
→ $f(z)$ holomorfa dentro y sobre C

$k+1$

$K=3$

FICG

$z_0=-1$



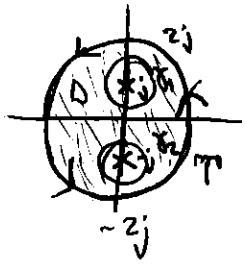
$C \equiv |z+1|=3$

$f(z) = e^{2z} \rightarrow f'(z) = 2\cdot e^{2z} \rightarrow f''(z) = 4e^{2z} \rightarrow f'''(z) = 8e^{2z}$

$$\boxed{\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\cdot dz = \frac{2\pi j}{k!}\, f^{k'}\cdot(z_0)}$$

EJERCICIO 5:

$$\boxed{\text{Calcular } \int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2}\cdot dz, \quad \Gamma: |z|=2}$$



Ptos singulares: $1+z^2=0 \Rightarrow z=\pm j$

$$I=\oint_{\Gamma}\frac{1}{1+z^2}\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Tma. General}\\ \text{de Cauchy-Goursat}}}{=} \oint_{\gamma_1}\frac{1}{z^2+1}dz+\oint_{\gamma_2}\frac{1}{z^2+1}\,dz = I_1+I_2$$

$$I_1=\oint_{\gamma_1}\frac{1}{(z-j)(z+j)}\,dz=\oint_{\gamma_1}\frac{\overbrace{\frac{1}{z+j}}^{g(z)\text{ holomorfa}}}{z-j}\underset{\substack{\text{FIC}\\ z_0=+j}}{=} 2\pi j\, g(j) = 2\pi j\frac{1}{j+j}=\boxed{\pi}$$

γ_1: cerrada, suave a trozos sentido ⊕

$$I_2=\int_{\gamma_2} = \oint_{\gamma_2}\frac{\overbrace{\frac{1}{z-j}}^{h(z)\text{ holom}}}{z+j}\,dz \underset{\substack{\text{FIC}\\ z_0=-j}}{=} 2\pi j\, h(-j) = 2\pi j\frac{1}{-j-j}=\boxed{-\pi}$$

$$\boxed{I=\pi-\pi=0}$$

Ejercicio 1

Calcular la serie de Taylor de las siguientes funciones:

a) $f(z) = e^z$ en $z=0$ b) $f(z) = \operatorname{sen} z$ en $z=0$

c) $f(z) = L(1+z)$ en $z=0$ d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ en $z=1$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{con} \quad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} f(z)=e^z \to f(0)=e^0=1 \\ f'(z)=e^z \to f'(0)=e^0=1 \\ f''(z)=e^z \to f''(0)=e^0=1 \\ \vdots \\ f^{(n)}(z)=e^z \to f^{(n)}(0)=e^0=1 \end{array}\right\} \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \underset{z_0=0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$f(z)=e^z$ es entera $\Rightarrow$ no tiene singularidades, así que el desarrollo en serie es válido para $|z|<\infty$

(Radio de convergencia $R=\infty$)

b)
$$\left.\begin{array}{l} f(z)=\operatorname{sen} z \to f(0)=\operatorname{sen} 0=0 \\ f'(z)=\cos z \to f'(0)=\cos 0=1 \\ f''(z)=-\operatorname{sen} z \to f''(0)=0 \\ f'''(z)=-\cos z \to f'''(0)=-1 \\ f^{IV}(z)=\operatorname{sen} z \to f^{IV}(0)=0 \\ \dots \end{array}\right\} \quad \text{En general} \left\{\begin{array}{l} f^{(2n)}(0)=0 \\ f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n \end{array}\right.$$

$$f(z)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}(z-0)+\frac{f''(0)}{2!}(z-0)^2+\dots=\frac{0}{1}+\frac{1}{1!}z+\frac{0}{2!}z^2+\frac{-1}{3!}z^3+$$

$$+\frac{0}{4!}z^4+\frac{1}{5!}z^5+\dots=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Mismos comentarios que en el apartado anterior

d) $z_0 = 1$

$$f(z) = \frac{1}{z} \longrightarrow f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \longrightarrow f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$f''(z) = \frac{2}{z^3} \longrightarrow f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 = 2!$$

$$f'''(z) = -\frac{6}{z^4} \longrightarrow f'''(1) = \frac{-6}{1} = -6 = -3!$$

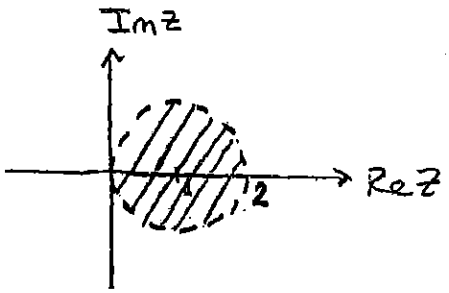
$$f^{IV}(z) = \frac{24}{z} \longrightarrow f^{IV}(1) = \frac{24}{1^4} = 24 = 4!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n}(1) = (-1)^n n!$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{f^{(n}(z_0)}{n!}}^{a_n} (z-1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{n!}}{\cancel{n!}} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$



$f(z) = \frac{1}{z}$ es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C} - \{0+0j\}$

En $z = 0 + j0 = 0$ hay una singularidad

El desarrollo en serie es válido en $|z-1| < R$

$$R = 1 = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

c) $f(z) = L(1+z) \longrightarrow f(0) = 0$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \longrightarrow f'(0) = 1 = 0!$$

$$f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2} \longrightarrow f''(0) = -1 = -(1!)$$

$$f'''(z) = \frac{2(1+z)}{(1+z^4)} = \frac{2}{(1+z)^3} \longrightarrow f'''(0) = 2 = 2!$$

$$f^{IV}(z) = \frac{-6(1+z)^2}{(1+z)^6} = \frac{-6}{(1+z)^4} \longrightarrow f^{IV}(0) = -6 = -(3!)$$

$$f^{V}(z) = \frac{24(1+z)^3}{(1+z)^8} = \frac{24}{(1+z)^5} \longrightarrow f^{V}(0) = 24 = 4!$$

$$\vdots$$

$$f^{n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! \quad , n \geq 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{f^{(n}(z_0)}{n!}}^{a_n} (z-z_0)^n \underset{f^{(0)}(0)=0}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} (z-0)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cancel{(n-1)(n-2)\cdots 1}}{n \cancel{(n-1)(n-2)\cdots 1}} z^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Hablaremos más adelante de su región de convergencia

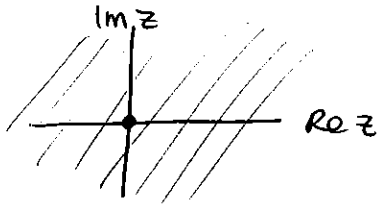
Ejercicio 2

Calcular la serie de Taylor de las siguientes funciones:

a) $f(z) = z^3 e^{2z^2}$ en $z=0$ b) $f(z) = \operatorname{sen}^2 z$ en $z=0$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ en $z=1$ d) $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z}$ en $z=0$

a) $f(z) = z^3 \cdot e^{2z^2}$ alrededor de $z=0$



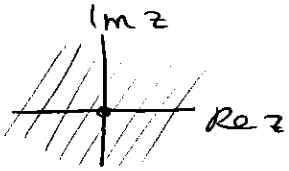
Región de convergencia: $|z|<\infty$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{2z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{2n}$$

$$\Rightarrow z^3 \cdot e^{2z^2} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{2n} \Rightarrow$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!} \cdot z^{2n+3}, \quad |z|<\infty$$

b) $f(z) = \operatorname{sen}^2(z)$ alrededor de $z=0$



Región de convergencia: $|z|<\infty$

* Opc. 1: $f(z) = \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]^2, \quad |z|<\infty}$$

se podría seguir multiplicando las series correctamente, pero no es el camino más sencillo en este caso...

* Opc 2: $f(z) = \operatorname{sen}^2 z = \dfrac{1-\cos 2z}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2z$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} \longrightarrow \cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

Así que: $f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} =$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1}}_{(-1)^n \cdot (-1)} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot z^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{2^{-1}}{0!} \cdot z^{2\cdot 0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot z^{2n}$$

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{n-1}}{(2n)!}\cdot z^{2n}, \quad |z|<\infty}$$

c) $f(z)=\frac{1}{z^2}$ alrededor de $z=1$

$|z-1|<1$

Dato: $\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, $|z-1|<1$ (ej 1)

*Opc 1) $\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z-1)^n\right]$

se podría seguir multiplicando las series correctamente pero hay otra forma + fácil:

*Opc 2: $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{z^2}\rightarrow f(z)=\frac{1}{z^2}=-\frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{dz}=$

$$=-\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z-1)^n\right]$$

duda al copiar q esté bien

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\left[(-1)^n(z-1)^{n-1}\right]=$$

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\,n\,(z-1)^{n-1}}$$

las series de potencias cumplen el Tma de Weierstrass (la derivada de la suma de la serie es la suma de los (términos) de la derivada en la región de convergencia).

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n(z-1)^{n-1}, \quad |z-1|<1}$$

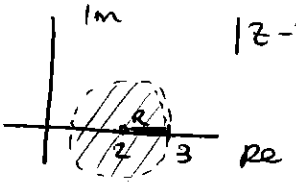
Ejercicio 3

Hallar el desarrollo de Taylor relativo al punto $z=2$ de la función

$$f(z)=\frac{2z-4}{(z-3)^2}$$

así como su radio de convergencia.

$$f(z)=\frac{2z-4}{(z-3)^2} \quad \text{alrededor de } 2$$



$|z-2|<1$

Radio de conv.

$$f(z)=\sum a_n \underbrace{(z-2)}_{w}{}^n = \left[\begin{array}{c}\text{cambio de}\\ \text{variable}\\ w=z-2\end{array}\right] = \sum a_n \cdot w^n$$

$$f_w \overset{z=w+2}{=} \frac{2(w+2)-4}{(w+2-3)^2} = \frac{2w}{(w-1)^2} = 2w\left(\frac{1}{w-1}\right)^2 = 2w\left(\frac{1}{1-w}\right)^2 = 2w\left(\frac{1}{1-w}\right)\left(\frac{1}{1-w}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w|<1$$

$$= 2w\sum_{n=0}^{\infty} w^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

$$= 2w\left[1+w+w^2+w^3+w^4+\dots\right]\left[1+w+w^2+w^3+w^4+\dots\right] =$$

$$= 2w\left[1+w+w^2+w^3+w^4+\dots+w+w^2+w^3+w^4+\dots+w^2+w^3+w^4+\dots\right]$$

$$= 2w\underbrace{\left[1+2w+3w^2+4w^3\dots\right]}_{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n}$$

$$= 2w\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)\cdot w^{n+1} = \left[\begin{array}{c}\text{Deshacer}\\ \text{cambio}\end{array}\right]$$

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(z-2)^{n+1}, \quad |z-2|<1}$$

$w=z-2$

RESIDUOS Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

Ejercicio 1

Hallar las singularidades de las siguientes aplicaciones y clasificarlas:

a) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$ b) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$

c) $f(z) = (z-3)\,\text{sen}\dfrac{1}{z+2}$ d) $f(z) = \dfrac{z-\text{sen}\,z}{z^3}$

d) $f(z) = \dfrac{z-\text{sen}\,z}{z^3}$ { función meromorfa ≡ coc. de funciones enteras → solo pueden tener puntos sing donde se anula el denominador

$\boxed{z=0}$ $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z-\text{sen}\,z}{z^3} \overset{LH}{=} \lim \dfrac{1-\cos z}{3z^2} \overset{LH}{=} \dfrac{\text{sen}\,z}{6z} \overset{LH}{=} \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\cos z}{6} =$

$= \boxed{\dfrac{1}{6}} \in \mathbb{C} \Rightarrow z=0$ es singularidad evitable de $f(z)$

c) $f(z) = (z-3)\cdot \text{sen}\dfrac{1}{z+2}$

$\boxed{z=-2}$ $\lim\limits_{z\to -2} (z-3)\cdot \text{sen}\dfrac{1}{z+2} = -5\cdot \text{sen}\dfrac{1}{0} \nexists \Rightarrow z=-2$ es punto ~~de~~ singular esencial

b) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \{$f. MEROMORFA$\}$

$\boxed{z=1}$ $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \dfrac{e^2}{0^{③}} = \boxed{\infty}$ * ojo: no tiene sentido poner $-\infty$ en complejos (infinitas direcciones)

$\Rightarrow z=1$ es un polo de orden 3 de $f(z)$

Para comprobar: $g(z) = f(z)(z-1)^3 = e^{2z}$ {holomorfa en $z=1$}

$\lim\limits_{z\to 1} g(z) = \lim\limits_{z\to 1} e^{2z} = e^2 \in \mathbb{C}-\{0\}$ $\Rightarrow z=1$ es un polo de orden 3

a) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$ {f. MEROMORFA}

$(z^2+4)^2 = 0 \to z^2+4=0 \to z^2=-4 \to z = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4} = \pm 2j$

$$(z^2+4)^2 = (z-2j)^2(z+2j)^2 \rightarrow f(z) = \frac{z}{(z-2j)^2(z+2j)^2}$$

$\boxed{z=2j}$ $\lim f(z) = \lim \frac{z}{(z-2j)^2(z+2j)^2} = \frac{2j}{0^2(4j)^2} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow z=2j$ es un polo de orden 2 de $f(z)$
(doble)

- Comprobar!

$$\left.\begin{array}{l} g(z) = f(z)(z-2j)^2 = \frac{z}{(z+2j)^2} \text{ es holomorf en } z=2j \\ \lim_{z\to 2j} g(z) = \lim_{z\to 2j} \frac{z}{(z+2j)^2} = \frac{2j}{(4j)^2} \in \mathbb{C}-\{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z=2j$ es de orden $\underline{2}$ de $f(z)$

- Analog para $z=-2j$!!

---

*EXTRA: Cálculo de residuos

d) $f(z) = \frac{z-\operatorname{sen} z}{z^3}$, $z=0$ es sing EVITABLE $\Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}[f(z), z=0] = 0}$

c) $f(z) = (z-3)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{z+2}$, $z=-2$ pto sing ESENCIAL.

Hay que hacer $\underline{\underline{\text{DSL}}}$ alrededor de $z=-2$ en 1ª corona de conv.
$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\right)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-(-2))^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{(z+2)}_{w}{}^n = \sum a_n \cdot w^n$$

$$f(z) = (z-3)\operatorname{sen}\frac{1}{z+2} \overset{z=w-2}{=} (w-2-3)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{(w-2+2)} = (w-5)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{w} = \left[\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right] =$$

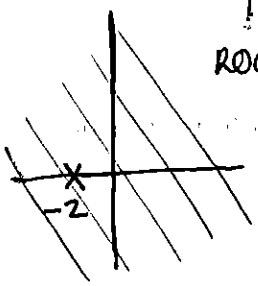
$$= (w-5)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{w}\right)^{2n+1} = (w-5)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot w^{-2n-1} = w\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{-2n-1} - 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot w^{-2n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{-2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} w^{-2n-1} = \dots$$

$\rightarrow$

$$\xrightarrow{w=z+2} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n}}_{\text{pot. exp. PAR}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n-1}}_{\text{pot. exp. IMPAR}} \quad , \quad 0<|z+2|<\infty$$

<u>NOTA:</u> la parte ppal de este DSL alrededor de $z=-2$ en 1ª corona de conv. tiene infinitos términos, lo cual es congruente con que $z=-2$ sea punto de <u>sing. esencial</u>



ROC: $0<|z-(-2)|<\infty$

$\text{Res}[f(z), z=-2] = a_{-1} \Rightarrow$ coef. de $(z+2)^{-1}$ en DSL alrededor de $z=-2$ en 1ª corona $\Rightarrow n=0$

$$\text{Res}[f(z), z=-2] = a_{-1} = \frac{5(-1)^{0+1}}{(2\cdot 0+1)!}\left[(z+2)^{-1}\right] = \frac{-5}{1} = \boxed{-5}$$

b) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z=1$ polo de orden 3

* Opc 1: DSL alrededor de $z=1$ en 1ª corona de conv

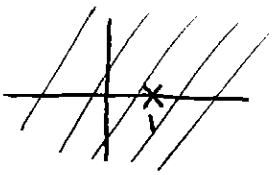
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \underbrace{(z-1)}_{w}^n \underset{z=w+1}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot w^n \qquad \boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \underset{z=w+1}{=} \frac{e^{2(w+1)}}{(w+1-1)^3} = \frac{e^{2w}\cdot e^2}{w^3} = \frac{e^2}{w^3}\cdot e^{2w} = \frac{e^2}{w^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2w)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cdot e^2}{n!}\cdot w^{n-3} \underset{w=z-1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\cdot e^2}{n!}(z-1)^{n-3} = \underbrace{\underbrace{\frac{2^0\cdot e^2}{0!}(z-1)^{-3}}_{n=0}}_{\text{parte ppal}} +$$

$$\underbrace{\underbrace{+\frac{2^1\cdot e^2}{1!}(z-1)^{-2}}_{n=1} + \underbrace{\frac{2^2\cdot e^2}{2!}(z-1)^{-1}}_{n=2}}_{\text{parte ppal del DSL con número finito de términos}} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n\cdot e^2}{n!}(z-1)^{n-3}}_{\text{Parte regular}}$$

$\Rightarrow z=1$ es polo de orden 3 (<u>pq es el exp. más negativo en -3</u>)



ROC: $0<|z-1|<\infty$

$(z-1)^{-1} \Rightarrow n=2 \Rightarrow \text{Res}[f(z), z=1] = \dfrac{2^2\cdot e^2}{2!}$

* <u>Opc. 2:</u> <u>FÓRMULA</u>

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z=z_0\right] = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m \cdot f(z)\right] \overset{\substack{m=3\\ z_0=1}}{=}$$

z_0 polo orden m

$$= \lim_{z\to 1} \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2}\left[(z-1)^3 \cdot \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}\right] = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2!} \cdot 4 \cdot e^{2z} = \boxed{2 \cdot e^2}$$

(Si m fuese muy alto $\Rightarrow$ mejor usar DSL que derivar muchas veces)

Ejercicio 2

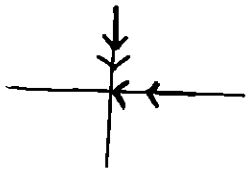
Hallar las singularidades de las siguientes aplicaciones y clasificarlas:

a) $f(z) = e^{1/z^2}$ b) $f(z) = z \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ c) $f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}}$

a) $f(z) = e^{1/z^2}$

$\boxed{z=0}$ $\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} e^{1/z^2} = e^{\frac{1}{0^2}} = \cancel{e^{\infty} = \infty}$ NO!!

En realidad este límite no existe:



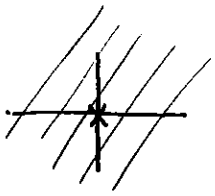
$\lim_{z \to 0^+} f(z) = \lim_{z \to 0^+} e^{\frac{1}{z^2}} = e^{\frac{1}{(0^+)^2}} = e^{\infty} = \underline{\underline{\infty}}$

$\lim_{z \to j0^+} f(z) = \lim_{z \to j0^+} e^{\frac{1}{z^2}} = \lim_{z \to j0^+} e^{\frac{1}{(j0^+)^2}} = e^{\frac{1}{-1 \cdot 0^2}} = e^{-\infty} = \underline{\underline{0}}$

$\Rightarrow \nexists \lim_{z \to 0} f(z) \Rightarrow z=0$ es un punto de <u>singularidad esencial</u> de $f(z)$

ASL alrededor de $z=0$ en 1ª corona de convergencia:

$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{-2n}, \quad 0 < |z| < \infty$



ROC: $0 < |z| < \infty$

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ {parte pral con infinitos términos, lo cual es congruente con que $z=0$ sea punto sing. esencial}

~~parte~~

$\boxed{\operatorname{Res}[f(z), z=0] = 0}$ pq no término con z^{-1} en el ASL

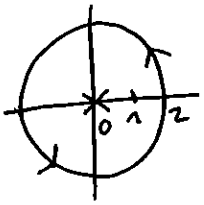
Ejercicio 3

Calcular la siguiente integral utilizando el teorema de los residuos:

$$\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz$$

$$I = \oint_C \underbrace{\frac{5z-2}{z(z-1)}}_{f(z)} \cdot dz = 2\pi j \left(Res\left[f(z), z=0\right] + Res\left[f(z), z=1\right] \right)$$

$C: |z| = 2$



$z=0$ y $z=1$ <u>son polos simples</u> de $f(z)$

- $Res\left[f(z), \overset{\text{polo simple}}{z=0}\right] = \lim_{z\to 0} (z-0) f(z) = \lim_{z\to 0} \cancel{z} \cdot \frac{5z-2}{\cancel{z}(z-1)} = 2$

- $Res\left[f(z), \overset{\text{polo simple}}{z=1}\right] = \lim_{z\to 1} \left[(z-1)\right] f(z) = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \frac{5z-2}{z\cancel{(z-1)}} = 3$

(si quito esto lo que calculo es el lim de $f(z)$ y veo que tipo de singularidad es)

$$\Rightarrow I = 2\pi j (2+3) = \boxed{10\pi j} \;!$$

MMAT
Problemas de examen

MMAT
Problemas de examen
1er parcial

Series de Fourier

Septiembre 96
Ejercicio 1

Sean las funciones:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^5}{|z|^4} & si \quad z\neq 0\\ 0 & si \quad z=0\end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z} & si \quad z\neq 0\\ 0 & si \quad z=0\end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ y $\lim\limits_{z\to 0} g(z)$

b) Estudiar la continuidad de f y g en $z=0$.

c) Estudiar la analiticidad de f y g en $z=0$.

d) Estudiar la analiticidad de f y g en $z=1$.

$f\begin{cases} a) \\ b)\end{cases}$ $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^5}{|z|^4} = \left[\begin{array}{l}\text{Forma exponencial}\\ \end{array}\begin{array}{l} z=r\cdot e^{j\theta} \\ |z|^4=r^4\end{array}\right] =$

$= \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{(r\cdot e^{j\theta})^5}{|r\cdot e^{j\theta}|^4} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^5\cdot e^{j5\theta}}{r^4} = \lim\limits_{r\to 0} \underset{\to 0}{r}\cdot \underbrace{e^{j5\theta}}_{\text{ACOTADO}} =$

$= \lim\limits_{r\to 0} r\cdot \underbrace{(\cos 5\theta + j \operatorname{sen} 5\theta)}_{\text{ACOTADO}} = 0 = f(0) \Rightarrow f$ continua en $z=0$

pq tiene módulo 1, distancia finita al origen

$g\begin{cases} a) \\ b)\end{cases}$ $\lim\limits_{r\to 0} g(z) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^4\cdot e^{j4\theta}}{r^4} = \lim\limits_{r\to 0} e^{j4\theta} = e^{j4\theta}\ \nexists \Rightarrow g$ no es continua en $z=0$

c) $g(z)$ no es continua en $z=0 \Rightarrow g(z)$ no es diferenciable en $z=0 \Rightarrow$ $g(z)$ no es holomorfa en $z=0$

---

f holomorfa en $z=0$? $\Rightarrow$ Vemos si diferenciable. Como está en función de $z \Rightarrow$ vemos si existe $f'(0)$.

$f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$; $f'(0) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z)-\cancel{f(0)}^{\,0}}{z-0} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} g(z)$

$\lim\limits_{z\to 0} g(z)\ \nexists$

$\nexists\ f'(0)$: $f(z)$ no es diferenciable en $z=0 \Rightarrow f$ no es holomorfa en $z=0$

d) En propiedades de complejos)

$$|z|^2 = z\cdot\bar{z} \longrightarrow |z|^4 = (z\cdot\bar{z})^2 = z^2\cdot(\bar{z})^2$$

+ojo a los módulos → llevan $\bar{z}$ conjugado escondido, intuimos NO HOLOMORFA

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{z^2\cdot(\bar{z})^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} = \underbrace{\dfrac{z^3}{(\bar{z})^2}}, \quad z \neq 0$$

- $f(z)$ depende de $\bar{z}$ $\forall z \neq 0 \Rightarrow f(z)$ NO ES HOLOMORFA $\forall z \neq 0$
- $f(z)$ no es holomorfa en $z=0$

$f(z)$ <u>NO</u> es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$

Analógamente, $g(z)$ no es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$

Junio '98
Ejercicio 1

hecho

Dada la función

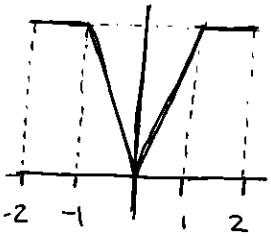
$$f(x)=\begin{cases} 3 & si -2\le x\le -1, \\ 3|x| & si -1<x<1, \\ 3 & si\ 1\le x\le 2 \end{cases}$$

1. Desarrollarla en serie trigonométrica de Fourier de período 4.
2. Analizar la convergencia de la serie de Fourier calculada.
3. Determinar la suma de la serie anteriormente obtenida, para $x=\pi$.

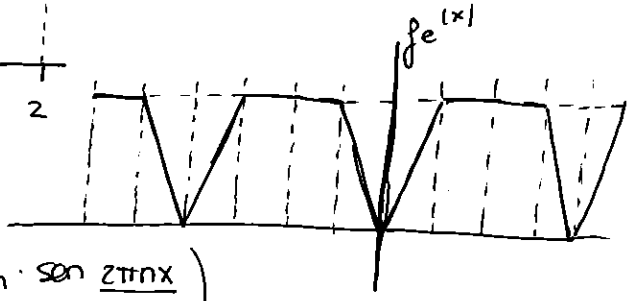
$$f(x)=\begin{cases} 3, & x\in[-2,-1] \\ 3|x| & x\in(-1,1) \\ 3 & x\in[1,2] \end{cases} \qquad |x|=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x, & x\ge 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} 3, & x\in[-2,-1] \\ -3x, & x\in(-1,0] \\ 3x, & x\in[0,1) \\ 3, & x\in[1,2] \end{cases}$$



$$\boxed{T=2-(-2)=4}$$



a) DSF: $F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{2\pi nx}{T}+b_n\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}\right)$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{\langle f,1\rangle}{\underbrace{\langle 1,1\rangle}_{=\|1\|^2}}=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\,dx}{\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}dx}_{=T}}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\underbrace{f(x)}_{\text{PAR}}\cdot dx=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[3+\frac{3}{2}\right]=\frac{9}{4}$$

$$a_n=\frac{\left\langle f,\cos\frac{2\pi nx}{T}\right\rangle}{\left\langle\cos\frac{2\pi nx}{T},\cos\frac{2\pi nx}{T}\right\rangle}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\underbrace{f(x)}_{\text{par}}\cdot\underbrace{\cos\frac{2\pi nx}{T}}_{\text{par}}\,dx=\frac{2}{\underset{T}{\underset{\shortparallel}{4}}}\cdot 2\int_0^{T/2}f(x)\cdot\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx=$$

$$\left\|\cos\frac{2\pi nx}{T}\right\|^2=\frac{T}{2}$$

$$=\int_0^1(3x)\left(\cos\frac{\pi nx}{2}\right)dx+\int_1^2 3\cdot\left(\cos\frac{\pi nx}{2}\right)dx=3\left[\underbrace{\int_0^1 x\cdot\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^2\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx}_{I_2}\right]=$$

$$* \; I_2 = \frac{2}{n\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \Big]_1^2 = \frac{2}{n\pi}\Big[\underbrace{\cancel{\operatorname{sen} n\pi}}_{0} - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\Big] = -\frac{2}{n\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

$$* \; I_1 = \int_0^1 x \cdot \cos \frac{\pi}{2} nx \cdot dx = x \cdot \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n}\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2}}{\pi n} =$$

$$= \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2}}{\pi n} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[-\cos \frac{\pi n x}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi n} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[-\cos \frac{\pi n}{2} + 1\right]$$

$$I_1 + I_2 = \frac{2}{\pi n} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos \frac{\pi n}{2} - 1\right] - \frac{2}{\pi n} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \frac{4}{n^2 \pi^2}\left[\cos \frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

$$a_n = 3 \cdot \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos \frac{n\pi}{2} - 1\right] = \frac{12}{n^2\pi^2}\left[\cos \frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

$$* \; \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \cos \frac{\pi}{2} = 0, & n = 1, 5, 9 \ldots \to a_{4K-3} \\ \cos \frac{3\pi}{2} = 0, & n = 3, 7, 11 \ldots \to a_{4K-1} \end{array}\right\} \to a_{2K-1} \\ \cos \pi = -1, \quad n = 2, 6, 10 \ldots \to a_{4K-2} \to a_{4K-2} \\ \cos \frac{4\pi}{2} = 1, \quad n = 4, 8, 12 \ldots \to a_{4K} \to a_{4K} \end{cases}$$

$$a_{2K-1} = \frac{-12}{(2K-1)^2 \pi^2} \qquad a_{4K-2} = \frac{-24}{(4K-2)^2 \pi^2} \qquad a_{4K} = 0$$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{T} + \underbrace{b_n}_{0} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{T}\Big) =$$

$$= \frac{9}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n-1} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)x\right] + a_{4n-2} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(4n-2)x\right]\right) =$$

$$\boxed{F(x) = \frac{9}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2n-1)^2} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)x\right] + \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \cos\left[\pi(2n-1)x\right]\right)}$$

~~8/1~~ 2/3/2012

JUN. 98. P1

b) Convergencia
- En norma (media euclídea)
- Puntual, ~~uniforme~~
- Uniforme

En norma: ~~En~~ el sistema trigonométrico $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{2}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ORTOGONAL Y COMPLETO en $L^2([-2,2],\mathbb{R})$ y esto asegura la convergencia ~~uniforme~~ en norma del DSF a $f(x)$ en $[-2,2]$ y a $f_e(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\|f(x) - \underbrace{S_n(x)}_{\text{suma parcial de Fourier}}\|^2 = \left\|f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\cos\frac{2\pi kx}{T} + b_k\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi kx}{T}\right)\right\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Puntual: el DSF converge puntualmte a $f(x)$ en $[-2,2]$ y a su extensión periódica $f_e(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Uniforme: el DSF converge uniformte a $f(x)\ \forall [a,b]\subseteq(-2,2)$ y a $f_e(x)\ \forall [a,b]\subseteq\mathbb{R}$

¿Por qué en intervalo $[a,b]$?

c) $F(x)\big|_{x=\pi} = F(\pi) = f_e(\pi)$ porque en $x=\pi$ hay conv. PUNTUAL (a $f(x)$)

f no def en π: f def en $[-2,2]$

extensión periódica

$f_e(\pi) = f(\pi - \underset{T}{\underset{\shortparallel}{4}})$

$f_e(\pi) = f(\pi-4) = 3(\pi-4) = 12-3\pi$

24/2/2012

JUN. 98 - P.1

a)

$$a_n = \frac{\left\langle f, \cos \frac{2\pi n x}{T} \right\rangle}{\left\langle \cos \frac{2\pi n x}{T}, \cos \frac{2\pi n x}{T} \right\rangle} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x)}_{par} \cdot \underbrace{\cos \frac{2\pi n x}{T}}_{par} \cdot dx = \frac{2}{4} \cdot 2 \int_0^{T/2} f(x) \cdot \cos \frac{\pi n x}{2} =$$

$$\left\| \cos \frac{2\pi n x}{T} \right\|^2 = \frac{T}{2}$$

$$= \int_0^1 (3x)\left(\cos \frac{\pi n x}{2}\right) dx + \int_1^2 3\left(\cos \frac{\pi n x}{2}\right) = 3\left[\underbrace{\int_0^1 x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} n x\right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} n x\right) dx}_{I_2}\right. =$$

$$I_2 = \frac{2}{n\pi} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n x\right)\Big]_1^2 = \frac{2}{n\pi}\left[\underbrace{\operatorname{sen} n\pi}_{0} - \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{-2}{n\pi} \cdot \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_1 = \int_0^1 x \cdot \cos \frac{\pi}{2} n x \cdot dx = x \cdot \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n x\right)}{\pi n}\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2}}{\pi n} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2}}{\pi n} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[-\cos \frac{\pi n x}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \pi n/2}{\pi n} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos(\pi n/2) \frac{1}{\pi n}\right] = \cancel{\frac{2 \cdot \operatorname{sen} \pi n/2}{\pi n} - \frac{2}{\pi^2 n^2}} = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2} + \dots$$

$$I_1 + I_2 = \frac{12}{n^2 \pi^2}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$$

$$* \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0, & n = 1, 5, 9 \dots \Rightarrow a_{4K-3} \\ \cos \pi = -1, & n = 2, 6, 10 \dots a_{4K-2} \\ \cos \frac{3\pi}{2} = 0 & n = 3, 7, 11 \dots a_{4K-1} \\ \cos \frac{4\pi}{2} = 1, & n = 4, 8, 12 \dots a_{4K} \end{cases}$$

$\rightarrow (2K-1) \quad (a_{(2K-1)})$

$\rightarrow 4K-2 \quad (a_{4K-2})$

$\rightarrow a_{4K} \quad (a_{4K})$

$$a_{2K-1} = \frac{-12}{(2K-1)^2 \cdot \pi^2} \qquad a_{4K-2} = \frac{-24}{(4K-2)^2 \pi^2} \qquad a_{4K} = 0$$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{T} + \underset{0}{b_n} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{T}\right) = \frac{9}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)x\right] +$$

$$+ a_{4n-2} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(4n-2)x\right] =$$

$$= \boxed{\frac{9}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum \frac{2}{(2n-1)^2} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)x\right] + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left[\pi(2n-1)x\right]}$$

Junio '99
Ejercicio 3

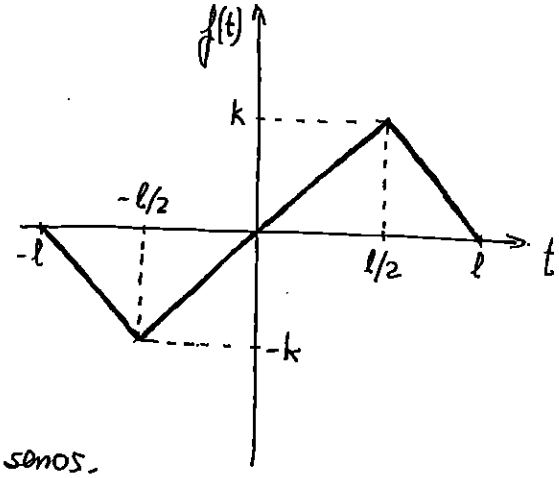
Dada la función:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2k}{l}t & 0<t\le\dfrac{1}{2}l\\[2mm] \dfrac{2k}{l}(l-t) & \dfrac{1}{2}l<t<l\end{cases}$$

con l y k constantes positivas, encontrar un desarrollo en Serie de Fourier que contenga únicamente términos en seno.

(3 puntos)

Sea $g(t)=\begin{cases}\dfrac{2k}{\ell}(-\ell-t) & -\ell<t<-\ell/2\\[2mm] \dfrac{2k}{\ell}t & -\ell/2<t<\ell/2\\[2mm] \dfrac{2k}{\ell}(\ell-t) & \ell/2<t<\ell\end{cases}$



$g(t)$ es una función impar que en $(-\ell,\ell)$ coincide con $f(t)$, luego en $(0,\ell)$ sus desarrollos de Fourier son idénticos y el de $g(t)$ sólo contiene senos.

$a_n=0 \qquad n=0,1,2,\dots$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}g(x)\,\text{sen}\,\frac{2\pi n}{T}x\,dx=\frac{2}{2\ell}\int_{-\frac{2\ell}{2}}^{\frac{2\ell}{2}}g(x)\,\text{sen}\,\frac{2\pi n}{2\ell}x\,dx=\frac{1}{\ell}\int_{\ell}^{\ell}\overbrace{\overbrace{g(x)}^{\text{impar}}\cdot\overbrace{\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}x}^{\text{impar}}}^{\text{par}}dx=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}g(x)\,\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}x\,dx=\frac{2}{\ell}\left[\int_0^{\ell/2}\frac{2k}{\ell}t\,dt+\int_{\ell/2}^{\ell}\frac{2k}{\ell}(\ell-t)\,\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}t\,dt\right]=$$

$$=\frac{4k}{\ell^2}\left(\int_0^{\ell/2}t\,\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}t\,dt+\int_{\ell/2}^{\ell}\ell\,\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}t\,dt-\int_{\ell/2}^{\ell}t\,\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}t\,dt\right)=\frac{4k}{\ell^2}\left(I_1+I_2-I_3\right)$$

Veamos cada una de estas integrales. I_1 e I_3 tienen la misma primitiva:

$$\int t\,\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}t\,dt=\left[\begin{array}{l}u=t\Rightarrow du=dt\\ dv=\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}t\,dt\Rightarrow v=\frac{-\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\ell}t\end{array}\right]=-t\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\ell}t-\int\frac{-\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\ell}t\,dt=$$

$$=-\frac{\ell}{\pi n}t\cos\frac{\pi n}{\ell}t+\frac{\ell^2}{\pi^2n^2}\,\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}t=\frac{\ell^2}{\pi^2n^2}\,\text{sen}\,\frac{\pi n}{\ell}t-\frac{\ell}{\pi n}t\cos\frac{\pi n}{\ell}t$$

La primitiva de I_2 es inmediata:

$$\int \ell \operatorname{sen}\frac{\pi n}{\ell}t\,dt = \frac{-\ell^2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\ell}t$$

Ahora sustituímos estos resultados en (*):

$$b_n = \frac{4k}{\ell^2}\left(\left[\frac{\ell^2}{\pi^2 n^2}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{\ell}t - \frac{\ell}{n\pi}t\cos\frac{\pi n}{\ell}t\right]_0^{\ell/2} + \left[\frac{-\ell^2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\ell}t\right]_{\ell/2}^{\ell} - \left[\frac{\ell^2}{\pi^2 n^2}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{\ell}t - \frac{\ell}{\pi n}t\cos\frac{\pi n}{\ell}t\right]_{\ell/2}^{\ell}\right) =$$

$$= \frac{4k}{\ell^2}\left(\frac{\ell^2}{\pi^2 n^2}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2} - \cancel{\frac{\ell^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}} - 0 + \cancel{\frac{-\ell^2}{\pi n}\cos\pi n} + \cancel{\frac{\ell^2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}} - \cancel{\frac{\ell^2}{\pi^2 n^2}\operatorname{sen}\pi n}^{\,0} + \cancel{\frac{\ell^2}{\pi n}\cos\pi n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\ell^2}{\pi^2 n^2}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2} - \cancel{\frac{\ell^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}}\right) = \frac{4k}{\cancel{\ell^2}}\left(\frac{2\cancel{\ell^2}}{\pi^2 n^2}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{8k}{\pi^2 n^2}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}$$

Dando valores a la n:

$$b_1 = \frac{8k}{\pi^2 1^2}\ ,\ b_2 = 0\ ,\ b_3 = \frac{8k}{\pi^2 3^2}(-1)\ ,\ b_4 = 0$$

$$b_5 = \frac{8k}{\pi^2 5^2}\ ,\ b_6 = 0\ ,\ b_7 = \frac{8k}{\pi^2 7^2}(-1)\ ,\ b_8 = 0$$

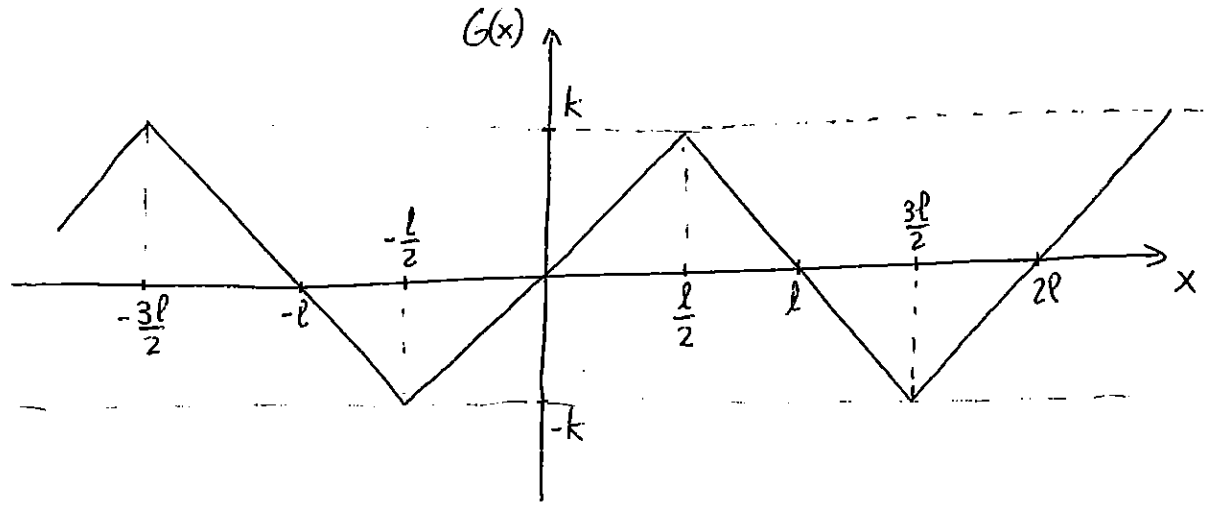
Generalizando:

$$\begin{cases} b_{2n} = 0 \\ b_{2n-1} = \dfrac{8k}{\pi^2(2n-1)^2}(-1)^{n-1} \end{cases}$$

Por tanto el desarrollo en serie de Fourier de $g(t)$ sólo tiene términos impares.

$$G(t) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}t \Rightarrow \boxed{G(x) = \frac{8k}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)n}{\ell}t}$$

El desarrollo de Fourier $G(t)$ obtenido coincide con $g(t)$ en $(-\ell,\ell)$ y con $f(t)$ en $(0,\ell)$.



Septiembre '99
Ejercicio 1

Dada la función:

$$f(t)=\begin{cases}1+\dfrac{2t}{T} & si \quad -\dfrac{T}{2}\le t<0\\ 0 & si \quad t=0\\ 1-\dfrac{2t}{T} & si \quad 0<t\le +\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

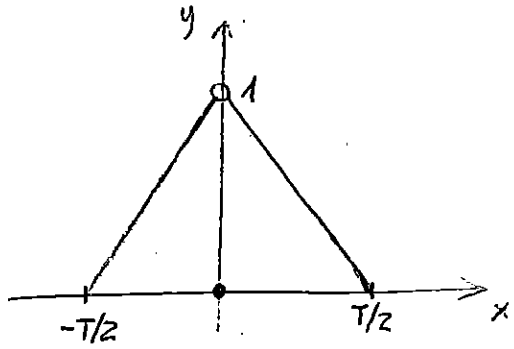
(a) Desarróllela en serie trigonométrica de Fourier. ~~(Muy difícil)~~.

(b) Calcule el valor al que converge la serie anterior, para $t=0$.

(c) Sin realizar ningún tipo de cáculo, justifique si tendría el mismo desarrollo en Serie trigonométrica de Fourier, la función:

$$f(t)=\begin{cases}1+\dfrac{2t}{T} & si \quad -\dfrac{T}{2}\le t<0\\ 1 & si \quad t=0\\ 1-\dfrac{2t}{T} & si \quad 0<t\le +\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

a) $b_n = 0$ por ser $f(t)$ una función par.



$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \overset{\text{par}}{=} 2\cdot\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt =$$

$$=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(1-\frac{2t}{T}\right)dt=\frac{4}{T}\left[t-\frac{t^2}{T}\right]_0^{T/2}=$$

$$=\frac{4}{T}\left(\frac{T}{2}-\frac{T^2/4}{T}\right)=\frac{4}{2}-1=1$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi n}{T}t = 2\cdot\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot\cos\frac{2\pi n}{T}t\,dt=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(1-\frac{2t}{T}\right)\cos\frac{2\pi n}{T}t\,dt=$$

$$=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}\cos\frac{2\pi n}{T}t\,dt-\frac{8}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos\frac{2\pi n t}{T}\,dt=\frac{4}{T}\left[\frac{T}{2\pi n}\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^{T/2}-\frac{8}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos\frac{2\pi n t}{T}\,dt=$$

$$=4\left(\frac{1}{2\pi n}\cancel{\operatorname{sen}(\pi n)}^{\,0}-0\right)-\frac{8}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos\frac{2\pi n t}{T}\,dt=\left[\begin{array}{l}u=t \Rightarrow du=dt\\ dv=\cos\frac{2\pi n t}{T}dt \Rightarrow v=\frac{T}{2\pi n}\operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}\end{array}\right]=$$

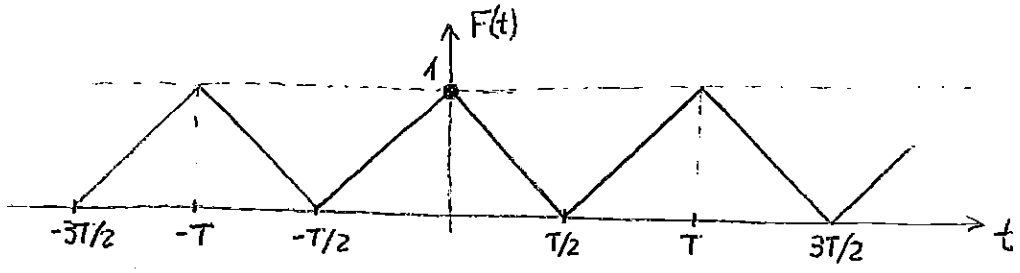
$$=-\frac{8}{T^2}\left\{\left[\frac{T}{2\pi n}t\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^{T/2}-\frac{T}{2\pi n}\int_0^{T/2}\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}t\,dt\right\}=$$

$$= -\frac{8}{T^2}\left\{\left(\frac{T}{2n\pi}\cdot\frac{T}{2}\,\cancel{\operatorname{sen} n\pi}^{\,0} - 0\right) + \left[\frac{T}{2n\pi}\cdot\frac{T}{2n\pi}\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^{T/2}\right\} =$$

$$= -\frac{8}{\cancel{T^2}}\left(\frac{\cancel{T^2}}{4n^2\pi^2}\cos\pi n - \frac{\cancel{T^2}}{4n^2\pi^2}\cos 0\right) = \frac{-2}{n^2\pi^2}\left(\cos\pi n - 1\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\pi\right)$$

- Si n es par $a_n = 0$
- Si n es impar $a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}$

Por tanto, $\boxed{F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{2\pi(2n-1)}{T}t}$



b) Como $f(t)$ no es continua en $t=0$ la serie de Fourier $F(t)$ converge en ese punto al valor:

$$F(0) = \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

aún cuando $f(0) = 0$.

c) Las funciones de los apartados a) y b) coinciden excepto en $t=0$, por lo que sus desarrollos en serie de Fourier van a coincidir también.
La diferencia entre ambos casos reside en que, en el primero, f y f' son continuas a trozos en $[-T/2, T/2]$ pero $f(0^+) = f(0^-) = 1 \neq f(0) = 0$, por lo que la serie de Fourier converge puntualmente al valor de la función excepto en $t=0$, donde converge a 1, mientras que en el segundo caso f es continua y f' es continua a trozos en $[-T/2, T/2]$ por lo que la serie de Fourier converge, tanto puntual como uniformemente, al valor de f en todo el intervalo.

Junio '01
Ejercicio 1

Sea a un número no entero y $f(x)=\cos(ax)$, $-\pi<x<\pi$.

(a) Encontrar la mejor aproximación de la función $f(x)$ en el subespacio generado por $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x\}$. $\equiv$ proyección ortogonal

(b) Determinar el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de $f(x)$.

(c) Determinar $\cot(a\pi)$.

a) MEJOR APROXIMACIÓN DE $f(x)=\cos(ax)$ SOBRE EL SUBESPACIO GENERADO POR $S=\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x\}$ EN EL INTERVALO $[-\pi,\pi]$.
- 3 elementos -

(1er PASO) Comprobar si $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x\}$ es ortogonal. En caso afirmativo aplicaremos directamente la fórmula de la proyección ortogonal o mejor aproximación. En caso negativo, ortogonalizaremos por Gram-Schmidt para poder aplicar después la fórmula.

$$* \langle \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(2x)\,dx = 0$$

$$* \langle \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(3x)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(3x)\,dx = 0$$

$$* \langle \operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}(3x)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2x)\cdot\operatorname{sen}(3x)\,dx = 0$$

Comprobado en el ej 1 de clase

Puesto que todas las parejas posibles tienen producto escalar nulo, el sistema es ortogonal y por ello podemos aplicar ya la fórmula de la mejor aproximación.

(2° PASO) FÓRMULA DE LA MEJOR APROXIMACIÓN

$$f(x)=\cos(ax) \approx \frac{\langle \overset{f(x)}{\cos(ax)}, \operatorname{sen}(x)\rangle}{\langle \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(x)\rangle}\operatorname{sen}(x) + \frac{\langle \cos(ax), \operatorname{sen}(2x)\rangle}{\langle \operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}(2x)\rangle}\operatorname{sen}(2x) +$$

$$+ \frac{\langle \cos(ax), \operatorname{sen}(3x)\rangle}{\langle \operatorname{sen}(3x), \operatorname{sen}(3x)\rangle}\operatorname{sen}(3x).$$

$$* \ \langle \cos(ax), \operatorname{sen}(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\text{IMPAR}} \underbrace{\cos(ax)}_{\times \text{ PAR} = \text{IMPAR}} dx = 0$$

$$* \ \langle \cos(ax), \operatorname{sen}(2x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\operatorname{sen}(2x)}_{\text{IMPAR}} \underbrace{\cos(ax)}_{\times \text{ PAR} = \text{IMPAR}} dx = 0$$

$$* \ \langle \cos(ax), \operatorname{sen}(3x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\operatorname{sen}(3x)}_{\text{IMPAR}} \underbrace{\cos(ax)}_{\times \text{ PAR} = \text{IMPAR}} dx = 0$$

Por tanto, $f(x) = \cos(ax) \approx 0 \cdot \operatorname{sen}(x) + 0 \cdot \operatorname{sen}(2x) + 0 \cdot \operatorname{sen}(3x) \Rightarrow \boxed{f(x) \approx 0}$

b) DESARROLLO EN SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER: DSF $\equiv F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \qquad T = 2\pi \text{ (PERIODO)}.$$

$$a_n = \frac{\langle f(x), \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \rangle}{\langle \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \rangle} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{PAR}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)}_{\text{PAR}}}^{\text{PAR}} dx = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{\langle f(x), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \rangle}{\langle \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \rangle} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{PAR}} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)}_{\text{IMPAR}}}^{\text{IMPAR}} dx = 0$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(ax) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n x}{2\pi}\right) dx = \frac{2}{\pi} \overbrace{\int_0^{\pi} \cos(ax) \cdot \cos(nx) dx}^{I}$$

$$I = \int_0^{\pi} \underbrace{\cos(ax) \cos(nx) dx}_{\substack{u = \cos(ax) \to du = -a \operatorname{sen}(ax) dx \\ dv = \cos(nx) dx \to v = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}}} = \cancel{\frac{\cos(ax) \operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi}}^{\,0} + \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \underbrace{\operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(nx) dx}_{\substack{u = \operatorname{sen}(ax) \to du = a \cos(ax) dx \\ dv = \operatorname{sen}(nx) dx \to v = -\frac{\cos(nx)}{n}}} =$$

$$= \frac{a}{n} \left[-\frac{\operatorname{sen}(ax) \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \cos(ax) \cos(nx) dx \right] =$$

$$= \frac{a}{n} \left[\frac{\operatorname{sen}(ax) \cos(nx)}{n} \Big|_{\pi}^{0} + \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \cos(ax) \cos(nx) dx \right] =$$

$$= \frac{a}{n} \left[-\frac{\operatorname{sen}(a\pi) \cos(n\pi)}{n} + \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \cos(ax) \cos(nx) dx \right] =$$

$$= \frac{-a\,\text{sen}(a\pi)(-1)^n}{n^2} + \frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)\,dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)\,dx = \frac{-a\,\text{sen}(a\pi)(-1)^n}{n^2} + \frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\,dx;$$

$$\int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\,dx - \frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\,dx = \frac{-a}{n^2}\,\text{sen}(a\pi)(-1)^n;$$

$$\left[1-\frac{a^2}{n^2}\right]\int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\,dx = \frac{n^2-a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{n^2-a^2}{\cancel{n^2}}\int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\,dx = \frac{-a}{\cancel{n^2}}\,\text{sen}(a\pi)(-1)^n;$$

$$I = \int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)\,dx = \frac{a(-1)^n\,\text{sen}(a\pi)}{a^2-n^2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot I = \frac{2}{\pi}\,\frac{a(-1)^n\,\text{sen}(a\pi)}{a^2-n^2} = \frac{2a(-1)^n\,\text{sen}(a\pi)}{\pi(a^2-n^2)}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$ Para calcular a_0, tomamos $n=0$: $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx;$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = 2\cdot\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = \frac{4}{2\pi a}\int_0^{\pi} a\cos(ax)\,dx =$$

a no es entero

$$= \frac{2}{a\pi}\,\text{sen}(ax)\Big|_0^{\pi} = \frac{2\,\text{sen}(a\pi)}{a\pi}$$

$$F(x) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\,\text{sen}(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(-1)^n\,\text{sen}(a\pi)}{\pi(a^2-n^2)}\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$F(x) = \frac{\text{sen}(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a\cdot\text{sen}(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cdot\cos(nx)$$

$$\boxed{F(x) = \text{sen}(a\pi)\left[\frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cdot\cos(nx)\right]}$$

c) Como el cos siempre es continuo, podemos decir que:

$$\cos(ax) = \operatorname{sen}(a\pi)\left[\frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(nx)\right];$$

$$\frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(nx) = \frac{\cos(ax)}{\operatorname{sen}(a\pi)}$$

Tomando $x=\pi \Rightarrow$ $\underbrace{\frac{\cos(a\pi)}{\operatorname{sen}(a\pi)}}_{\operatorname{cotg}(a\pi)} = \frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cancel{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}$

$$\operatorname{cotg}(a\pi) = \frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2-n^2}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}(a\pi) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2-n^2}\right]}$$

Septiembre '00
Ejercicio 3

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}-1 & 0<x<\pi\\ 1 & \pi<x<2\pi\end{cases}$$

(a) Obtenga un desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de la misma que sólo contenga términos en seno.

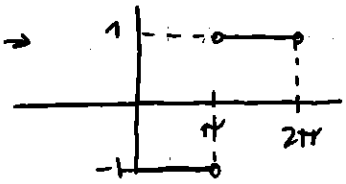
(b) Obtenga un desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de la misma que sólo contenga términos en coseno.

(c) A partir de los resultados anteriores obtenga el desarrollo de la función:

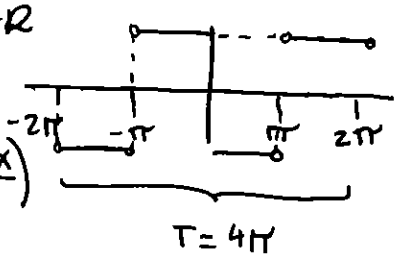
$$g(x)=\begin{cases}0 & -2\pi<x<0\\ -1 & 0<x<\pi\\ 1 & \pi<x<2\pi\end{cases}$$

En todos los casos, analice la convergencia de la serie de Fourier obtenida.

$f(x) \rightarrow$



a) Necesitamos una función $f_i(x)$ que valga lo mismo que $f(x)$ en el intervalo original pero que sea IMPAR



$$F_i(x)=\frac{\cancel{a_0}^{\,0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cancel{a_n}^{\,0}\cdot\cos\frac{2\pi nx}{T}+b_n\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

$$a_0 \rightarrow \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f_i(x)}_{IMP}=0$$

$$b_n=\frac{\left\langle f_i(x),\ \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}\right\rangle}{\left\langle \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T},\ \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}\right\rangle_{=\frac{T}{2}}}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\underbrace{f_i(x)}_{IMP}\cdot\underbrace{\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}}_{IMP}\,dx=\frac{2}{T}\cdot 2\int_0^{T/2} f_i(x)\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}\cdot dx=$$

$$T=4\pi \qquad =\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_i(x)\cdot\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cdot dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}(-1)\cdot\operatorname{sen}\frac{nx}{2}+\int_{\pi}^{2\pi}1\cdot\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx\right]=\frac{2\pi}{n}\left[\left[\cos\frac{nx}{2}\right]_0^{\pi}-\left[\cos\frac{nx}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2}-1-\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}+\cos\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{2}{n\pi}\left[2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]$$

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=1,5,9\ldots\\ -1, & n=2,6,10\ldots\\ 0, & n=3,7,11\ldots\\ 1, & n=4,8,12\ldots\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l}1)\ \cos(2k-1)\frac{\pi}{2}=0\\ 2)\ \cos(2k)\frac{\pi}{2}=\cos k\pi=(-1)^k\end{array}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b_{2k-1}=\frac{2}{(2k-1)\pi}\left[2\cdot 0-1-(-1)^{2k-1}\right]=0\ ;\quad b_{2k}=\frac{2}{2k\pi}\left[2(-1)^k-1-(-1)^{2k}\right]=\frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k-1\right]$$

$$\Rightarrow F_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \text{sen}\,\frac{nx}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \cdot \text{sen}\,\frac{(2k-1)x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} \cdot \text{sen}\,\frac{2kx}{2} =$$

$\hookrightarrow b_{2k-1} = 0$

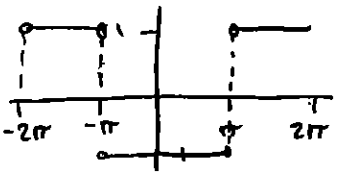
$\hookrightarrow b_{2k} = \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k - 1\right]$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k - 1\right] \cdot \text{sen}\,kx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)\pi} \cdot \text{sen}\,(2n-1)x = \boxed{-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cdot \text{sen}\,(2n-1)x}$$

$\hookrightarrow k = 2n : 0$

$\hookrightarrow k = 2n-1 : \frac{-4}{(2n-1)\pi}$

b) Ahora creamos $f_p(x)$ que es la versión par de $f(x)$:



$$F_p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{2\pi n x}{T} + b_n \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle f_p(x), 1\rangle}{\underbrace{\langle 1,1\rangle}_{=\|1\|^2 = T}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_p(x)\cdot dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f_p(x)\cdot dx = \frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\int_0^{\pi}(-1)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1\cdot dx}_{=0}\right] = 0$$

$$a_n = \frac{\left\langle f_p(x), \cos\frac{2n\pi x}{T}\right\rangle}{\left\|\cos\frac{2\pi n x}{T}\right\|^2 = \frac{T}{2}} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f_p(x)\cdot\cos\frac{2\pi n x}{T}}_{\text{PAR}} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f_p(x)\cdot\cos\frac{2\pi n x}{T} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}(-1)\cdot\cos\frac{2\pi n x}{T}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{nx}{2}\cdot dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}\frac{n}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}\,dx + \frac{2}{n}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{n}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}\cdot dx\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\cancel{\text{sen}\,n\pi}^{\,0} - \text{sen}\,\frac{n\pi}{2} - \left(\text{sen}\,\frac{n\pi}{2} - \cancel{\text{sen}\,0}^{\,0}\right)\right] = \frac{-4}{n\pi}\cdot\left\{\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right\} = \begin{cases} 1 & n = 1,5,9\ldots \\ 0 & n = 2,6,10\ldots \\ -1 & n = 3,7,11\ldots \\ 0 & n = 4,8,12\ldots \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{sen}\,\frac{2k\pi}{2} = \text{sen}\,k\pi = 0 \\ \text{sen}\,\frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k+1} \end{array}\right\} \quad a_{2k} = \frac{-4}{2k\pi}\cdot 0 = 0$$

$$a_{(2k-1)} = \frac{-4}{(2k-1)\pi}\cdot(-1)^{k+1} = \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi}$$

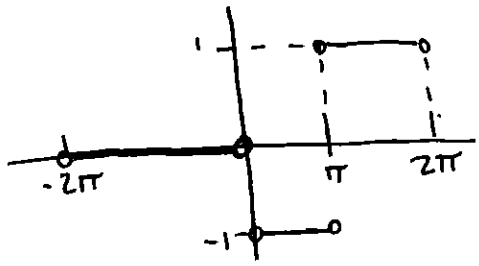
$$-4(-1)^{k+1} = 4(-1)^{k+1}\cdot(-1) = 4(-1)^{k+2} = 4(-1)^k$$

$$F_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\frac{nx}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2k-1}\cdot\cos\frac{(2k-1)x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi}\cdot\cos\frac{(2k-1)x}{2} = \boxed{\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\cos\frac{(2k-1)x}{2}}$$

2/3/2012

SEPT. 00. P3

c) $g(x) \begin{cases} -1 & x \in (0,\pi) \\ 1 & x \in (\pi, 2\pi) \\ 0 & x \in (-2\pi, 0) \end{cases}$



$$g(x) = \frac{f_p(x) + f_i(x)}{2} \rightarrow G(x) = \frac{1}{2}\left[F_p(x) + F_i(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \cos\frac{(2n-1)x}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \operatorname{sen}\left[(2n-1)x\right] = \frac{2}{\pi} \cdots\right.$$

$$\boxed{= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \cos\frac{(2n-1)x}{2} - \frac{1}{(2n-1)} \cdot \operatorname{sen}\left[(2n-1)x\right]\right) = G(x)}$$

Febrero'04
Ejercicio 1

a) A partir del sistema trigonométrico ortogonal y completo $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ del espacio $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, deducir el correspondiente sistema trigonométrico, ortogonal y completo en $L^2([0,4\pi],\mathbb{R})$.

b) Obtener el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de periodo 4π de la función

$$f(x)=\begin{cases} 2\pi & 0<x\le 2\pi \\ x & 2\pi<x\le 4\pi \end{cases}$$

c) Discutir la convergencia de la serie de Fourier hallada.

d) Hallar la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi}$.

muy difícil → resuelto otra vez

a) Un cambio lineal de variable conserva la ortogonalidad y la completitud.

1.- El sistema trigonométrico $\{1, \cos(\frac{2\pi nx}{T}), \operatorname{sen}(\frac{2\pi nx}{T}); n\in\mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([-T/2,T/2],\mathbb{R})$ y en $L^2([0,T],\mathbb{R})$. Si hacemos $T=2\pi$ tendremos el caso del enunciado y así comprobamos que $\{1, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx); n\in\mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Esta comprobación podremos hacerla también con la solución final, pero es imprescindible llegar a ella especificando el cambio de variable y mostrando todo el desarrollo siguiente:

2.- CAMBIO LINEAL DE VARIABLE: $x=\alpha t+\beta$

3.- IDENTIFICACIÓN:

Conocemos un sistema trigonométrico ortogonal y completo en $[-\pi,\pi]$, y nos piden hallar el sistema correspondiente en $[0,4\pi]$, luego la identificación de intervalos será la que sigue:

$$\begin{matrix}[-\pi,\pi] \longrightarrow [0,4\pi] \\ x \longrightarrow t\end{matrix} \quad x=\alpha t+\beta \Rightarrow \begin{matrix}-\pi=\alpha(0)+\beta \\ \pi=\alpha(4\pi)+\beta\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha=\frac{1}{2} \\ \beta=-\pi\end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}t-\pi$$

4.- Sustituyendo $x=\frac{1}{2}t-\pi$ en $\{1, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx); n\in\mathbb{N}\}$ llegamos a:

$\{1, \cos[n(\frac{1}{2}t-\pi)], \operatorname{sen}[n(\frac{1}{2}t-\pi)]; n\in\mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([0,4\pi],\mathbb{R})$.

Se ha de simplificar todo lo posible esta expresión (un tanto compleja). Para ello, acudimos a las fórmulas trigonométricas.

$$\left[\begin{array}{l}\cos(a\pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\\ \operatorname{sen}(a\pm b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\operatorname{sen}(b)\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \cos\left[n\left(\tfrac{1}{2}t-\pi\right)\right] = \cos\left[\frac{nt}{2}-n\pi\right] = \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\overbrace{\cancel{\cos(n\pi)}}^{(-1)^n=\pm1} + \operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\overbrace{\cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}}^{0} = \pm\cos\left(\frac{nt}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left[n\left(\tfrac{1}{2}t-\pi\right)\right] = \operatorname{sen}\left[\frac{nt}{2}-n\pi\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\overbrace{\cancel{\cos(n\pi)}}^{(-1)^n=\pm1} - \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\overbrace{\cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}}^{0} = \pm\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)$$

Entonces el sistema hallado nos queda $\left\{1, \pm\cos\left(\frac{nt}{2}\right), \pm\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right); n\in\mathbb{N}\right\}$.

Puesto que los signos no afectan a la ortogonalidad ni a la completitud, podemos eliminarlos. Así pues, el sistema obtenido es el siguiente:

$\left\{1, \cos\left(\frac{nt}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right); n\in\mathbb{N}\right\}$: ortogonal y completo en $L^2([0,4\pi],\mathbb{R})$.

Ahora sí podemos comprobar que este resultado es correcto.

Como $\left\{1, \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{T}\right); n\in\mathbb{N}\right\}$ es ortogonal y completo en $L^2([-T/2,T/2],\mathbb{R})$ y en $L^2([0,T],\mathbb{R})$, haciendo $T=4\pi$ llegamos al sistema $\left\{1, \cos\left(\frac{nx}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right); n\in\mathbb{N}\right\}$ ortogonal y completo en $L^2([0,4\pi],\mathbb{R})$.

b) DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER : $f(x) = \begin{cases} 2\pi, & 0\le x<2\pi \\ x, & 2\pi\le x<4\pi \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right] \\ f \text{ definida en } [0,T] \Rightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx,\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx \end{array}\right.$$

Como f está definida en $[0,4\pi] = [0,T] \Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} f(x)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx,\quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx.$$

Además, $f(x)$ no es simétrica respecto OY ni respecto el origen (no es ni par ni impar) luego no podemos afirmar que $a_n=0$ ó $b_n=0$, hemos de hallar ambas integrales.

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} f(x)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(x)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx + \int_{2\pi}^{4\pi} f(x)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} 2\pi\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx + \int_{2\pi}^{4\pi} x\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[I_1 + I_2\right]$$

$$* \; I_1 = \int_0^{2\pi} 2\pi\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx = 2\pi\,\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\frac{n}{2}\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx = \frac{4\pi}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{4\pi}{n}\left[\cancelto{0}{\mathrm{sen}(n\pi)} - \cancelto{0}{\mathrm{sen}(0)}\right] = 0 \Rightarrow I_1 = 0$$

$$* \; I_2 = \int_{2\pi}^{4\pi} x\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx = \frac{2x}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\Big|_{2\pi}^{4\pi} - \frac{2}{n}\int_{2\pi}^{4\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx \Rightarrow v = \frac{2}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\end{array}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left[4\pi\cancelto{0}{\mathrm{sen}(2\pi n)} - 2\pi\cancelto{0}{\mathrm{sen}(n\pi)}\right] - \frac{2}{n}\,\frac{2}{n}\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{n}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx =$$

$$= -\frac{4}{n^2}\left[-\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\right]\Big|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{4}{n^2}\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\Big|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{4}{n^2}\left[\cancelto{1}{\cos(2\pi n)} - \cancelto{(-1)^n}{\cos(\pi n)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{4}{n^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi}\left[I_1 + I_2\right] = \frac{1}{2\pi}\left[0 + \frac{4}{n^2}\left(1 - (-1)^n\right)\right] \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[1 - (-1)^n\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ impar}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx + \int_{2\pi}^{4\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} 2\pi\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx + \int_{2\pi}^{4\pi} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[I_3 + I_4\right]$$

$$* \; I_3 = \int_0^{2\pi} 2\pi \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) dx = 2\pi \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} \frac{n}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{4\pi}{n}\left[-\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\right]\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{4\pi}{n} \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\Big|_{2\pi}^{0} = \frac{4\pi}{n}\left[\cancelto{1}{\cos(0)} - \cancelto{(-1)^n}{\cos(\pi n)}\right] \Rightarrow I_3 = \frac{4\pi}{n}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$* \; I_4 = \int_{2\pi}^{4\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{-2x}{n} \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\Big|_{2\pi}^{4\pi} + \frac{2}{n} \int_{2\pi}^{4\pi} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) dx \Rightarrow v = \frac{-2}{n} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \end{array} \right)$$

$$= -\frac{2}{n}\left[4\pi \cancelto{1}{\cos(2\pi n)} - 2\pi \cancelto{(-1)^n}{\cos(\pi n)}\right] + \frac{2}{n}\frac{2}{n} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{n}{2} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{-4\pi}{n}\left[2-(-1)^n\right] + \frac{4}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\Big|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{4\pi}{n}\left[(-1)^n - 2\right] + \frac{4}{n^2}\left[\cancelto{0}{\operatorname{sen}(2\pi n)} - \cancelto{0}{\operatorname{sen}(\pi n)}\right]$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{4\pi}{n}\left[(-1)^n - 2\right]$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{2\pi}\left[I_3 + I_4\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{4\pi}{n}\left[1-(-1)^n + (-1)^n - 2\right] \Rightarrow b_n = \frac{-2}{n}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \int_{2\pi}^{4\pi} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} 2\pi\,dx + \int_{2\pi}^{4\pi} x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi x\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{2\pi}^{4\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi(2\pi - 0) + \frac{1}{2}\left((4\pi)^2 - (2\pi)^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[4\pi^2 + \frac{1}{2}\left(12\pi^2\right)\right] \Rightarrow a_0 = 5\pi$$

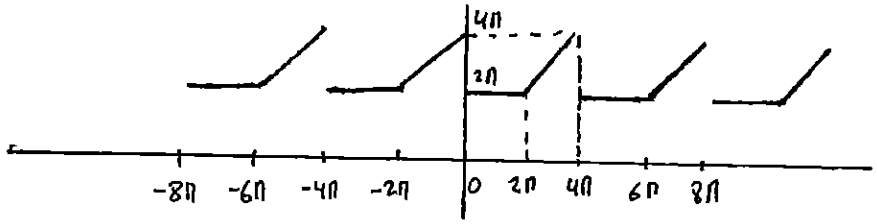
Por tanto, el Desarrollo en serie de Fourier queda:

$$f(x) = \frac{5\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left[\frac{(2k-1)x}{2}\right] - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{kx}{2}\right)$$

c) CONVERGENCIA DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER: $\begin{cases} \text{EN NORMA} \\ \text{PUNTUAL} \\ \text{UNIFORME} \end{cases}$

* EN NORMA:

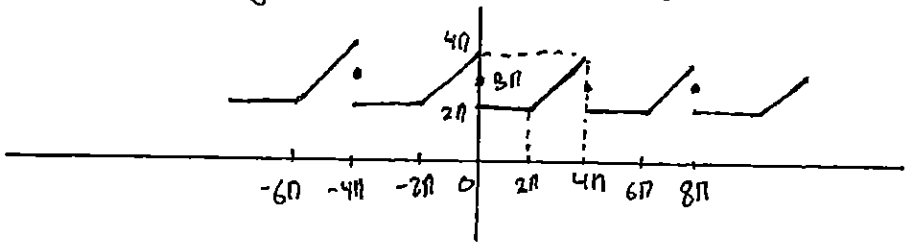
El sistema trigonométrico $\{1, \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right); n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([-T/2, T/2], \mathbb{R})$ y en $L^2([0,T], \mathbb{R})$. y esto implica que el desarrollo en Serie de Fourier converja en norma a $f(x)$ en esos intervalos. En nuestro caso, $T = 4\pi$, y por tanto $\{1, \cos\left(\frac{nx}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right); n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal y completo en $L^2([0, 4\pi], \mathbb{R})$, según vimos en el apartado a. Esto supone que el Desarrollo en Serie de Fourier hallado en el apartado b converge en norma a $f(x)$ en $[0, 4\pi]$, y además converge en norma a $f_e(x)$ en todo $\mathbb{R}$, siendo $f_e(x)$ la extensión periódica de $f(x)$ de periodo $T = 4\pi$



EXTENSIÓN PERIÓDICA DE $f(x)$ DE PERIODO $T = 4\pi$

* PUNTUAL

El Desarrollo en Serie de Fourier converge puntualmente a $f_e(x)$ en todos aquellos puntos donde $f_e(x)$ es continua. Si $f_e(x)$ es discontinua en $x = \alpha$, entonces el desarrollo toma el valor medio del salto, que es $\frac{1}{2}[f_e(\alpha^+) + f_e(\alpha^-)]$. En nuestro caso, $f_e(x)$ es discontinua en $\{4k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$, y en estos puntos el desarrollo de Fourier toma el valor $\frac{1}{2}[2\pi + 4\pi] = 3\pi$. En $\mathbb{R} - \{4k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $f_e(x)$ es continua y el desarrollo converge a $f_e(x)$.



CONVERGENCIA DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

* UNIFORME

(-) Desarrollo en Serie de Fourier converge uniformemente a $f(x)$ en cualquier intervalo cerrado donde $f(x)$ sea continua.

Como $f(x)$ es continua en $[0,4\pi] \Rightarrow$ El Desarrollo en Serie de Fourier converge a $f(x)$ uniformemente $\forall [a,b] \subset [0,4\pi]$.

d) Nos piden hallar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

(-) hacemos $x=0$ en el desarrollo vemos que aparece el sumatorio buscado. Luego tomaremos $x=0$ para llegar a dos conclusiones e igualarlas:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{El Desarrollo en Serie de Fourier queda } \frac{5\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \\ \text{El Desarrollo en Serie de Fourier converge puntualmente a } 3\pi \text{ (ver gráfica)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Igualando: } 3\pi = \frac{5\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

(-) Podemos comprobar que este resultado es correcto; en efecto, es conocido el valor de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Multiplicando en ambos lados por $\frac{4}{\pi}$ llegamos a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2}$.

Junio '04
Ejercicio 1

muy difícil

a) Considérese el espacio vectorial $l^2(R)=\left\{(a_1,...,a_n,...),\ a_n \in R \,/\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\right\}$ con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar.

Definimos el producto escalar $<(a_1,....a_n,...),(b_1,...b_n,...)> = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ y consideramos el sistema ortonormal $S=\left\{\vec{\phi}_n : n \in N\right\}$ siendo $\vec{\phi}_n = (0,0,...,\overset{n)}{1},0,...)$.

a-1) Demuestre que la serie de Fourier de un vector $\vec{a} \in l^2\ (R)$ con respecto a dicho sistema es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{\phi}_n$.

a-2) Demuestre, de dos formas diferentes, que el sistema S es completo:

- Probando que el único vector ortogonal a S es el vector nulo y
- Probando que, para todo vector, se verifica la identidad de Parseval.

a-3) Demuestre que si:

$$\vec{f},\vec{g} \in l^2\ (R)\ y\ \left(\forall n \in N\ <\vec{f},\vec{\phi}_n> = <\vec{g},\vec{\phi}_n>\right) \Rightarrow \vec{f} = \vec{g}.$$

b) Halle el desarrollo en serie de Fourier, de periodo 2π, de función:

$$f(x)=\begin{cases} 2 \text{ sen } 4x & -\pi \le x \le 0 \\ 2(1+\text{ sen } 4x) & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

a-1)

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2,...,a_n,...)$ un vector genérico de $l^2(R)$. Hacemos el producto escalar tal y como viene definido en el enunciado de $\vec{a}$ con cada uno de los vectores del sistema S:

$$<\vec{a},\vec{\phi}_1> = <(a_1, a_2,...,a_n,...),(1, 0,...,0,...)> = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 + ... = a_1$$

$$<\vec{a},\vec{\phi}_2> = <(a_1, a_2,...,a_n,...),(0, 1,...,0,...)> = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + ... + a_n \cdot 0 + ... = a_2$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$<\vec{a},\vec{\phi}_n> = <(a_1, a_2,...,a_n,...),(0, 0,...,\overset{n)}{1},...)> = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 1 + ... = a_n$$

$$\dots \qquad \dots$$

Por tanto llegamos a la importante conclusión de que $<\vec{a},\vec{\phi}_n> = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora aplicando la definición de la serie de Fourier para un sistema ortonormal tenemos que:

$$\vec{a} = \sum_{n=1}^{\infty} <\vec{a},\vec{\phi}_n> \vec{\phi}_n = <\vec{a},\vec{\phi}_1> \vec{\phi}_1 + <\vec{a},\vec{\phi}_2> \vec{\phi}_2 + ... + <\vec{a},\vec{\phi}_n> \vec{\phi}_n + ... =$$

$$= a_1 \vec{\phi}_1 + a_2 \vec{\phi}_2 + ... + a_n \vec{\phi}_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{\phi}_n$$

a-2-1)
Probamos que el único vector ortogonal a S es el vector nulo.
El vector nulo es ortogonal a todos los vectores por tanto es ortogonal a los vectores de S:

$$<\vec{0},\vec{\phi}_1> = <\vec{0},\vec{\phi}_2> = ... = <\vec{0},\vec{\phi}_n> = ... = 0$$

Para comprobar que es el *único* vector ortogonal a S supongamos que existe otro vector $\vec{a}$ ortogonal a S, por tanto:

$$<\vec{a},\vec{\phi}_1> = <\vec{a},\vec{\phi}_2> = ... = <\vec{a},\vec{\phi}_n> = ... = 0$$

Ahora bien, por el apartado a-1) hemos concluido que $<\vec{a},\vec{\phi}_n> = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que uniendo ambas cosas resulta que:

$$<\vec{a},\vec{\phi}_1> = a_1 = 0$$
$$<\vec{a},\vec{\phi}_2> = a_2 = 0$$
$$...$$
$$<\vec{a},\vec{\phi}_n> = a_n = 0$$
$$...$$

Así nos queda que $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...) = (0, 0, ..., 0, ...)$ que es el vector nulo.

a-2-2)
Probamos que S verifica la identidad de Parseval:

La identidad de Parseval dice lo siguiente: $\|\vec{a}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |<\vec{a},\vec{\phi}_n>|^2$

Por un lado:

$$\|\vec{a}\|^2 = <\vec{a},\vec{a}> = <(a_1, a_2, ..., a_n, ...),(a_1, a_2, ..., a_n, ...)> = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Por otro lado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |<\vec{a},\vec{\phi}_n>|^2 = [\text{apartado } a-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} |\underbrace{a_n}_{\in \mathbb{R}}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

que son dos expresiones iguales por tanto se verifica la identidad de Parseval.

a-3)

$$<\vec{f},\vec{\phi}_n> = <\vec{g},\vec{\phi}_n> \Rightarrow <\vec{f},\vec{\phi}_n> - <\vec{g},\vec{\phi}_n> = 0 \Rightarrow <\vec{f}-\vec{g},\vec{\phi}_n> = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\text{apartado } a-2-1)] \Rightarrow \vec{f}-\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f} = \vec{g}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(2\operatorname{sen}4x)\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(2+2\operatorname{sen}4x)\operatorname{sen} nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\operatorname{sen}4x\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{0}^{\pi}2\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{0}^{\pi}2\operatorname{sen}4x\operatorname{sen} nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}2\operatorname{sen}4x\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{0}^{\pi}2\operatorname{sen} nx\,dx\right) =$$

Aplicamos que:
$2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \cos(A+B)-\cos(A-B)$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\left[\cos(4-n)x-\cos(4+n)x\right]dx + \int_{0}^{\pi}2\operatorname{sen} nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(4-n)x\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(4+n)x\,dx + \int_{0}^{\pi}2\operatorname{sen} nx\,dx\right) =$$

Atención:
Fíjate que en el caso de $n = 4$ esta expresión no tiene sentido por que estamos dividiendo entre cero.

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{4-n}\operatorname{sen}(4-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{4+n}\operatorname{sen}(4+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{2}{n}\cos nx\right]_{0}^{\pi}\right) =$$

Recuerda que:
$\cos n\pi = (-1)^n$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 - 0 - \frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{2-2\cos n\pi}{n} = \frac{2-2(-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} 0\,, & n \text{ par } (n \neq 4) \\ \dfrac{4}{\pi n}\,, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Ahora queda el caso particular $n = 4$ (no contenido en la solución anterior)que se resuelve a parte:

$$b_4 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\operatorname{sen}4x\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}4x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(2\operatorname{sen}4x)\operatorname{sen}4x\,dx + \int_{0}^{\pi}(2+2\operatorname{sen}4x)\operatorname{sen}4x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\operatorname{sen}^2 4x\,dx + \int_{0}^{\pi}2\operatorname{sen}4x\,dx + \int_{0}^{\pi}2\operatorname{sen}^2 4x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}2\operatorname{sen}^2 4x\,dx + \int_{0}^{\pi}2\operatorname{sen}4x\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cancel{2}\,\frac{1-\cos 8x}{\cancel{2}}dx + \int_{0}^{\pi}2\operatorname{sen}4x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}8x\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{2}{4}\cos nx\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi - (-\pi) - \frac{2}{4}\cos 4\pi + \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2$$

Aplicamos que:
$\operatorname{sen}^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$

Por tanto los coeficientes b_n quedan:

$$b_n = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ par} \quad n \neq 4 \\ 2\,, & \quad n = 4 \\ \frac{4}{n\pi} & , \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

Por último aplicamos la expresión del desarrollo en serie trigonométrica de Fourier:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

y sustituyendo los coeficientes calculados nos queda:

$$F(x) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen} nx \Rightarrow \boxed{F(x) = 1 + 2\operatorname{sen}4x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x}$$

Este apartado es independiente del anterior

b)

Ahora nos piden calcular el desarrollo en serie de Fourier, de periodo 2π, de función:

$$f(x)=\begin{cases} 2\ \text{sen}\ 4x & -\pi\le x\le 0 \\ 2(1+\text{sen}\ 4x) & 0<x\le\pi \end{cases}$$

Para calcular el desarrollo en serie de Fourier vamos a utilizar el sistema trigonométrico:

$$\left\{ 1,\ \ \text{sen}\frac{2\pi nx}{T}\ ,\ \cos\frac{2\pi nx}{T}\ ,\ \ n\in\mathbb{N} \right\}$$

que es ortogonal y completo en $[-T/2,T/2]$.

En nuestro caso como $T=2\pi$ nos queda el siguiente sistema ortogonal y completo entre $[-\pi,\pi]$:

$$\{1,\ \text{sen}\,nx,\ \ \cos nx,\ \ n\in\mathbb{N}\}$$

Ahora pasamos a calcular los coeficientes:

- Cálculo del coeficiente a_0

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\,dx=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\,\text{sen}\,4x\,dx\ +\ \int_{0}^{\pi}(2+2\,\text{sen}\,4x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\,\text{sen}\,4x\,dx\ +\ \int_{0}^{\pi}2\ dx+\int_{0}^{\pi}2\,\text{sen}\,4x)\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{2\,\text{sen}\,4x}_{impar}\,dx}\ +\ \int_{0}^{\pi}2\ dx\right)=$$

La integral tachada vale cero porque el integrando es una función par y el intervalo es simétrico

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos 4x}{2}\right]_0^{\pi}+[2x]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(0+2\pi)=\frac{1}{\pi}2\pi=2$$

- Cálculo de los coeficientes a_n

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx\ =\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(2\,\text{sen}\,4x)\cos nx\,dx+\ \int_{0}^{\pi}(2+2\,\text{sen}\,4x)\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\,\text{sen}\,4x\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}2\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}2\,\text{sen}\,4x\cos nx\,dx\right)=$$

Unimos la primera y la tercera integral porque tienen igual integrando

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\,\text{sen}\,4x\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}2\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}2\,\text{sen}\,4x\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{2\,\text{sen}\,4x}_{impar}\underbrace{\cos nx}_{par}}_{impar}dx}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2\cos nx\,dx=\ 0+\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n}\text{sen}\,nx\right]_0^{\pi}=0+0=0$$

Recuerda que: $\text{sen}\,n\pi=0$

- Cálculo de los coeficientes b_n

En este caso hay que tener un poco más de cuidado por que la integral se resuelve de distinta forma para $n\neq 4$ y para $n=4$ donde aparece un caso particular:

9/3/2012

Junio 2005
Ejercicio 1

Sea la función

$$f(x) = xu(sen(x)),\ x \in [0, 2\pi],\ u(t) = \begin{cases} 1\ , & t>0 \\ 0\ , & t=0 \\ -1\ , & t<0 \end{cases}$$

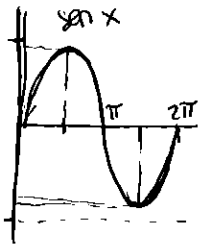
a) Represente gráficamente $f(x)$.

b) Obtenga su desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de periodo 2π.

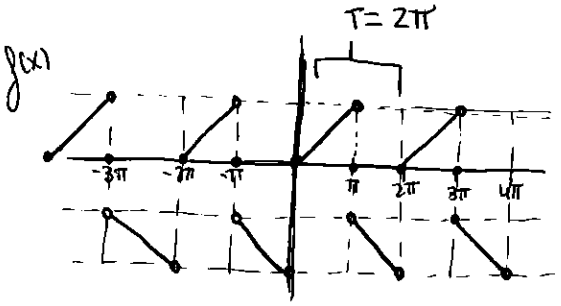
c) Analice la convergencia de la serie obtenida.

d) A partir de los resultados anteriores, calcule el valor de la suma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

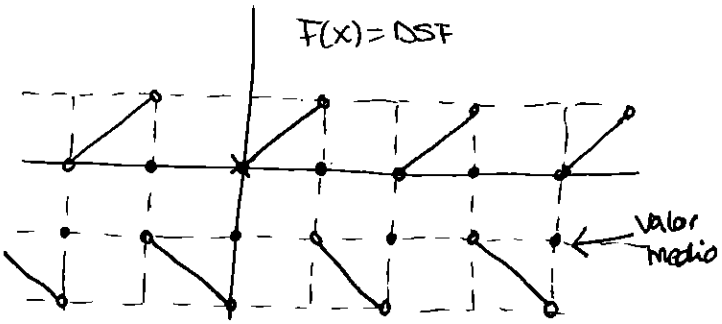
a) $u(sen\ x) = \begin{cases} 1, & sen\ x > 0 \Rightarrow x \in (0, \pi) \\ 0, & sen\ x = 0 \Rightarrow x \in 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ -1 & sen\ x < 0 \Rightarrow x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$



$f(x) = x \cdot u(sen\ x) \begin{cases} x, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ -x, & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$



$\Rightarrow$



b) (A parte)

c) CONVERGENCIA!

- Norma: $\|f(x) - S_n(x)\|^2 = \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos \frac{2\pi k x}{T} + b_k\ sen \frac{2\pi k x}{T} \right) \right\|^2 \to 0$ $(n \to \infty)$

- Puntual: el DSF converge a $f(x)$ cuando es continua y al valor medio.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

$F(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k-1)^2} \cdot \cos\left[(2k-1)x\right] + \frac{4}{(2k-1)} \cdot sen\left[(2k-1)k\right] \right)$

Particularizamos $(x=0)$

$F(0) = -\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \longrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

b) DESARROLLO EN SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER.

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

f definida en $[0,T] = [0,2\pi] \Rightarrow T = 2\pi$ (PERIODO).

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx}_{I_1} - \overbrace{\int_{\pi}^{2\pi} x\cos(nx)\,dx}^{I_2}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[I_1 - I_2\right]$$

$$I_1 = \int x\cos(nx)\,dx = \frac{x\cdot\operatorname{sen}(nx)}{n} - \int \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\,dx = \frac{x\cdot\operatorname{sen}(nx)}{n} - \frac{1}{n^2}\int n\cdot\operatorname{sen}(nx)\,dx =$$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos(nx)dx \Rightarrow v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$

$$= \frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \cancel{\frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n}}\Bigg]_0^{\pi} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\Bigg]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n}\Bigg]_{\pi}^{2\pi} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\Bigg]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{n^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right] - \frac{1}{n^2}\left[1 - (-1)^n\right]\right] = \frac{1}{\pi n^2}\left[2(-1)^n - 2\right] \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Si a veces es cero, la partimos: $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \rightarrow a_{2k} = 0 \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & n \text{ impar} \rightarrow a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \end{cases}$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[\overbrace{\int_0^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)\,dx}^{I_3} - \overbrace{\int_{\pi}^{2\pi} x\operatorname{sen}(nx)\,dx}^{I_4}\right]$$

$$\int x\cdot\operatorname{sen}(nx)\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} + \int \frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\int n\cos(nx)\,dx =$$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = \operatorname{sen}(nx)dx \rightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$= \frac{-x\cos(nx)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$$

$$I_3 = \left.\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \left.\cancel{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}}^{\,0}\right]_0^{\pi} = \left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_{\pi}^{0} = \frac{-\pi(-1)^n}{n}$$

$$I_4 = \left.\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} + \left.\cancel{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}}^{\,0}\right]_{\pi}^{2\pi} = \left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_{2\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left[\pi(-1)^n - 2\pi\cdot 1\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi(-1)^n}{n} - \frac{\pi(-1)^n - 2\pi}{n}\right] = \frac{-1}{\pi n}\cdot\pi\left[(-1)^n + (-1)^n - 2\right] =$$

$$\Rightarrow b_n = -\frac{1}{n}\left[2(-1)^n - 2\right] \Rightarrow b_n = \frac{2}{n}\left[1-(-1)^n\right]$$

pero a veces $b_n = 0 \Rightarrow$ $b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \longrightarrow b_{2k} = 0 \\ \frac{4}{n}, & n \text{ impar} \longrightarrow b_{2k-1} = \frac{4}{2k-1} \end{cases}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\cos(nx)\,dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\cdot\cos(0)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\cdot\cos(0)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{2}\right] = -\pi$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(-\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos\left[(2k-1)x\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k-1}\operatorname{sen}\left[(2k-1)x\right]$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left[(2k-1)x\right]}{(2k-1)^2} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left[(2k-1)x\right]}{2k-1}}$$

c) CONVERGENCIA

* EN NORMA

El sistema trigonométrico $\{1, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortogonal y completo en $L^2\left[[0,2\pi], \mathbb{R}\right]$ y esto implica que el DSF converja en norma (en media euclídea) a $f(x)$ en $[0,2\pi]$.

Además, el DSF convergerá en norma a $f(x)$ en $\mathbb{R}$, siendo $f_e(x)$ la extensión periódica de $f(x)$ de periodo 2π.

Septiembre 2006
Ejercicio 1

hecho

a) Sea f una función periódica de periodo 2π cuya serie trigonométrica de Fourier es $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nt)+b_n sen(nt)\right]$. Enuncie la identidad de Parseval.

b) ¿Existe una función $f\in L^2\left([-\pi,\pi],\mathbb{R}\right)$ cuyos coeficientes de Fourier sean $a_n=b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n\in\mathbb{N}$, $a_0=0$?

c) Halle la serie de Fourier de la función $g(t)=\frac{1}{12}\left(\pi^2 t-t^3\right)$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$.

d) Analice la convergencia de la serie obtenida.

e) A partir del resultado del apartado c, compruebe que $\frac{\pi^3}{32}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

24/2/2012

Ejercicio: Sept 2006. P-1

c) $g(t) = \frac{1}{12}\left[\pi^2 t - t^3\right]$, $t \in [-\pi, \pi] \Rightarrow T = \pi - (-\pi) = 2\pi$

• Desarrollo en Serie de Fourier: $G(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{a} a_n \cdot \cos$

$$G(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{a}\left(a_n \cdot \cos\frac{2\pi n t}{T} + b_n \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle g, 1\rangle}{\underbrace{\langle 1, 1\rangle}_{\|1\|^2}} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\cdot dt}{\int_{-T/2}^{T/2} 1\cdot 1\, dt = T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\cdot dt = \boxed{0}$$

g solo tiene t^a (a impares), por lo que parece ser IMPAR!! y no hay factor de sumando

comprobar: $g(t) = -g(-t)$ // $-g(t) = g(-t)$

$$\frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3) = \frac{1}{12}\left(\pi^2(-t) - (-t)^3\right) = \frac{1}{12}\left(-\pi^2 t - \underbrace{(-t^3)}_{(-1)^3 t^3 = -1}\right) = -\frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3)$$

$$a_n = \frac{\langle g, \cos\frac{2\pi n t}{T}\rangle}{\underbrace{\langle \cos\frac{2\pi n t}{T}, \cos\frac{2\pi n t}{T}\rangle}_{\|\cos\frac{2\pi n t}{T}\|^2 = T/2}} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{g(t)}_{\text{IMPAR}} \cdot \underbrace{\cos\frac{2\pi n t}{T}}_{\text{PAR}} \cdot dt = 0$$

IMP · PAR = IMPAR

IMP · IMP = PAR

$$b_n = \frac{\langle g, \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}\rangle}{\underbrace{\langle \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}, \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}\rangle}_{\|\operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}\|^2 = T/2}} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{g(t)}_{\text{IMP}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}}_{\text{IMP}} \cdot dt = \frac{2}{T}\cdot 2\int_0^{T/2} g(t)\cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}\cdot dt =$$

$$= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3)\cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{2\pi}\, dt = \frac{1}{6\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} \pi^2 t \operatorname{sen} nt \cdot dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\pi} t^3 \cdot \operatorname{sen} nt \cdot dt}_{I_2} = \frac{1}{6\pi}\left[\pi^2 I_1 - I_2\right]$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} nt\, dt}_{dv} = -\frac{t\cdot\cos nt}{n}\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} n\cdot\cos nt\cdot dt = -\frac{\pi\cdot\cos n\pi - 0}{n} + \frac{\operatorname{sen} nt}{n^2}\Big]_0^{\pi} =$$

$u = t \rightarrow du = dt$

$dv = \operatorname{sen}(nt)\cdot dt$

$v = -\frac{\cos nt}{n}$

$$= -\frac{\pi \overbrace{\cos n\pi}^{(-1)^n}}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\underbrace{\cancel{\operatorname{sen} n\pi}}_{0} - \underbrace{\cancel{\operatorname{sen} 0}}_{0}\right) = \frac{\pi(-1)(-1)^n}{n} = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} t^3 \cdot \operatorname{sen} nt \cdot dt = \left.\frac{-t^3 \cdot \cos nt}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{3}{n}\underbrace{\int_0^{\pi} t^2 \cdot \cos nt \, dt}_{I_3} = \frac{-\pi^3 \cdot \overbrace{\cos n\pi}^{(-1)^n}}{n} + \frac{3}{n} I_3$$

$u = t^3 \quad du = 3t^2 dt$

$dv = \operatorname{sen} nt \quad v = -\frac{\cos nt}{n}$

$$I_3 = \int_0^{\pi} t^2 \cdot \cos nt \cdot dt = \left.t^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t \cdot \frac{\operatorname{sen} nt}{n} \cdot dt =$$

$$= \frac{\pi^2 \cdot \overbrace{\operatorname{sen} n\pi}^{0}}{n} - \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{y} \quad \frac{(-1)^{n+1}(-1) \cdot 2\pi}{n^2} = \frac{(-1)^n \overbrace{(-1)^2}^{1} \cdot 2\pi}{n^2}$$

$$I_2 = \frac{-\pi^3(-1)^n}{n} + \frac{3}{n}\frac{(-2\pi)(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{-\pi^3(-1)^n}{n} + \frac{3}{n^3} 2\pi(-1)^n = \frac{-\pi^3(-1)^n}{n} + \frac{6\pi(-1)^n}{n^3}$$

Así que $b_n = \frac{1}{6\pi}\left[\pi^2 I_1 - I_2\right] = \frac{1}{6\pi}\left[\pi^2 \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} - \cancel{\frac{(-1)^{n+1}\pi^3}{n}} + \frac{6\pi(-1)^n}{n^3}\right] =$

$$= \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}} = b_n$$

$$\text{DSF} = G(t) = \frac{\overset{0}{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overset{0}{a_n} \cdot \cos\frac{2\pi n t}{T} + b_n \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}\right) \overset{T=2\pi}{=} \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \cdot \operatorname{sen} nt}$$

d) <u>CONVERGENCIA</u>
- En norma (media euclídea)
- Puntual
- Uniforme

- <u>En norma</u>: El sistema trigonométrico $\{1, \cos nt, \operatorname{sen} nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ es <u>ortogonal y completo</u> en $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ y por ello podemos asegurar la conv. en norma del DSF $G(t)$ a $g(t)$ en $t \in [-\pi,\pi]$, y a $g_e(t)$ = extensión periódica de $g(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

- <u>Puntual</u>: la función $g(t)$ es continua en $[-\pi,\pi] \Rightarrow$ el DSF converge puntualmente a $g(t)$ en $[-\pi,\pi]$

- <u>Uniforme</u>: El DSF conv. uniformemente a $g(t)$ $\forall [a,b] \subseteq (-\pi,\pi)$

Sept. 2006, P1

24 / 2 / 2012

e) Comprueba que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

DSF = $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \cdot \operatorname{sen} nt$

Particularizamos el DSF en $t = \frac{\pi}{2}$

$$G(\pi/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = g(\pi/2) = \frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3)\Big|_{t=\pi/2} =$$

pq $G(t)$ conv. puntualmente ~~en~~ a $g(t)$ en $t = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{12}\left(\pi^2 \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{8}\right) = \frac{3\pi^3}{12 \cdot 8} = \boxed{\frac{\pi^3}{32}}$$, así que:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{32}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{1^3} \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{=1} - \frac{1}{2^3} \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{=0} + \frac{1}{3^3} \underbrace{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}_{=-1} - \frac{1}{4^3} \underbrace{\operatorname{sen} 2\pi}_{=0} + \frac{1}{5^3} \underbrace{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}}_{=1} =$$

$$= \frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} \cdots = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

SEPT. 06. P1

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortogonal y completo:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{\langle f, f_n\rangle}{\langle f_n, f_n\rangle}\right|^2}_{\text{coef del DSF}} * \underbrace{\langle f_n, f_n\rangle}_{\|f_n\|^2}$$ (Identidad de Parseval)

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortogonal:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\langle f, f_n\rangle}{\langle f_n, f_n\rangle}\right|^2 \underbrace{\langle f_n, f_n\rangle}_{\|f_n\|^2}$$ (Desigualdad de Bessel)

Utilizando el ~~siguiente~~ sistema trigon: $\left\{1, \cos\frac{2\pi n t}{T}, \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

que es ORTOGONAL Y COMPLETO (en $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$)

$$\|g\|^2 = \left|\frac{a_0}{2}\right|^2 \langle 1,1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 \left\langle \cos\frac{2\pi n t}{T}, \cos\frac{2\pi n t}{T}\right\rangle + \right.$$

$$\left. + |b_n|^2 \left\langle \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}, \operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T}\right\rangle\right)$$

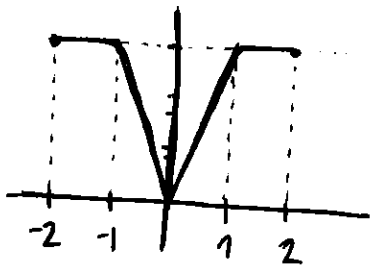
* En este caso sería: $\frac{a_0}{2}=0$, $a_n=0$, $b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$, $T=2\pi$ (no lo piden)

$$\|g(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 \cdot \underbrace{\langle \operatorname{sen} nt, \operatorname{sen} nt\rangle}_{\|\operatorname{sen} nt\|^2 = \frac{T}{2} = \pi} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right|^2 = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

JUNIO 98. P1

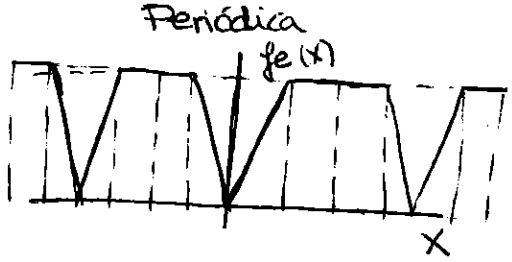
$$f(x) = \begin{cases} 3, & x\in[-2,-1] \\ 3|x|, & x\in(-1,1) \\ 3, & x\in[1,2] \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x, & x\ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x\in[-2,-1] \\ -3x, & x\in(-1,0] \\ 3x, & x\in[0,1) \\ 3, & x\in[1,2] \end{cases}$$



$$\boxed{T = 2-(-2) = 4}$$

Periódica



a) DSF: $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{T}\right)$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle f,1\rangle}{\underbrace{\langle 1,1\rangle}_{\|1\|^2}} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx}{\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} dx}_{T}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x)}_{\text{PAR}}\,dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[3+\frac{3}{2}\right] = \frac{9}{4}$$

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{4x}{T} & -\dfrac{T}{2} \le x \le 0 \\[2ex] 1-\dfrac{4x}{T} & 0 < x \le \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(a) ¿Es par? ¿Es impar? ¿Es alternada?

(b) Dibujar su gráfica

(c) Hallar su desarrollo en serie de Fourier de período T: $S_F(x)$ y dibujar su gráfica

(d) Definir la función $f_T(x)$, extensión periódica de $f(x)$ de período T, y dibujar su gráfica. Escribir su desarrollo en serie de Fourier

(e) Enunciar el teorema de Dirichlet

(f) Estudiar la convergencia ordinaria o puntual de $S_F(x)$ en $-\frac{T}{2} \le x \le \frac{T}{2}$

(g) Hallar $S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

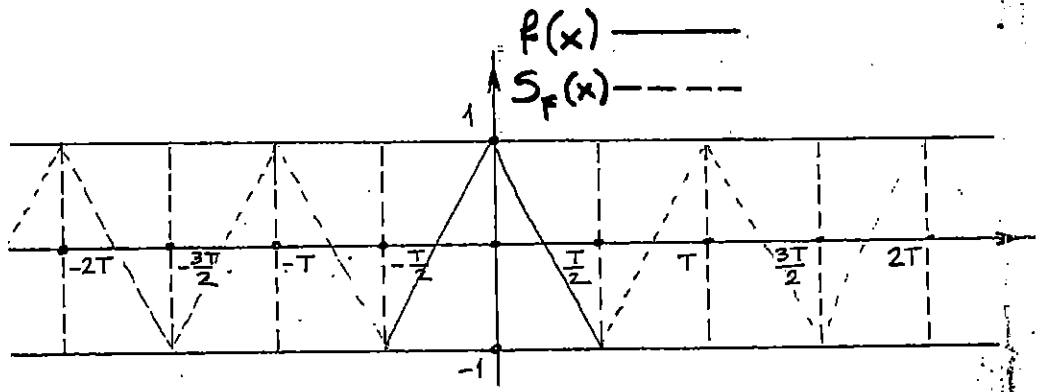
(h) Enunciar el criterio de Weierstrass y aplíquese en el estudio de la convergencia uniforme de $S_F(x)$ en $-\frac{T}{2} \le x \le \frac{T}{2}$

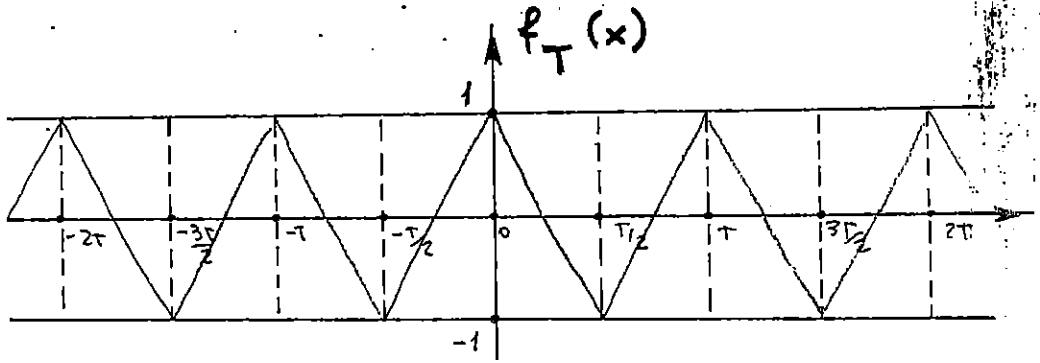
(i) Enunciar el teorema de Parseval y particularizarlo para $f(x)$ y su desarrollo en serie de Fourier $S_F(x)$

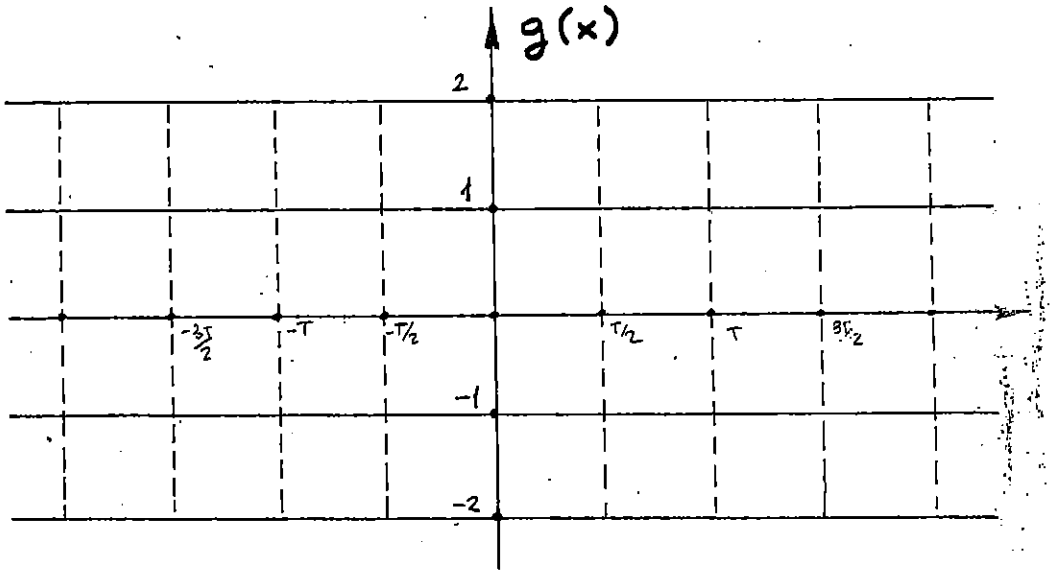
(j) Hallar $S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$

(k) Definir una función $g(x)$ en $-T \le x \le T$ tal que coincida con f(x) en $-\frac{T}{2} \le x \le \frac{T}{2}$ y tal que su desarrollo en serie de Fourier tenga sólo armónicos pares. Dibújese su gráfica

(l) Hallar el desarrollo en serie de Fourier, de período $2T$, de $g(x)$.







MMAT
Problemas de examen
2º parcial

Septiembre 96
Ejercicio 2

a) Hallar los desarrollos en serie de potencias de la función

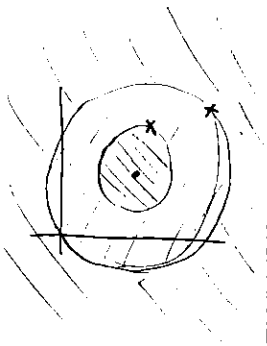
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

en las diferentes coronas de convergencia centradas en el punto $z = 0$.

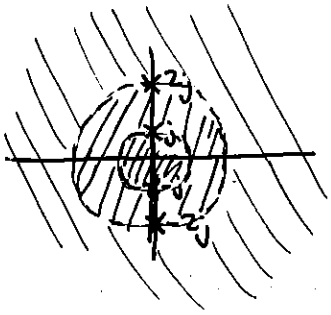
b) Encontrar el valor de la integral

$$I = \int_C \frac{z^5}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz$$

siendo $C: |z| = 10$, recorrida en sentido positivo.



a) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Ptos sing } (z^2+1)(z^2+4)=0 \\ \quad z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z=\pm\sqrt{-1}=\pm j \\ \quad z^2+4=0 \Rightarrow z^2=-4 \Rightarrow z=\pm\sqrt{-4}=\pm 2j \end{array} \right.$



- 1^a corona de conv (ROC1): $|z|<1$ ($\cancel{|z|<j}$) (j no es distancia)
- 2^a corona de conv (ROC 2): $1<|z|<2$
- 3^a corona de conv (ROC3): $|z|>2$

*NOTA: $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)^2(x^2+c)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{(x-b)^2} + \dfrac{Dx+E}{x^2+c}$

$$\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{(Mz+N)(z^2+4)+(Pz+Q)(z^2+1)}{(z^2+1)(z^2+4)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M=0 \\ N=\frac{1}{3} \\ P=0 \\ Q=-\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$f(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{(z^2+4)} = \frac{1}{3}\left[\boxed{\frac{1}{z^2+1}} - \boxed{\frac{1}{z^2+4}}\right]$$

- Obtengo los 2 posibles desarrollos en series de $\dfrac{1}{z^2+1}$

- $\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{1-(-z^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot z^{2n}$, $\boxed{|z|<1}$

$\left[|-z^2|<1 \Rightarrow |z|<1\right]$

$\left|-\dfrac{1}{z^2}\right|<1 \Rightarrow |z|>1$

- $\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{\frac{(z^2+1)z^2}{z^2}} = \dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \dfrac{1}{z^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot z^{-2n-2}$, $\boxed{|z|>1}$

Chuleta:

$$\frac{1}{z^2+1} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{2n}, & |z|<1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{-2n-2}, & |z|>1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ sacar 1 término constante

$\longrightarrow$ 1 término no constante

en este tipo hay 2 Σ siempre

- Posibles desarrollos: $\frac{1}{z^2+4}$

$$-\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{\frac{(z^2+4)4}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{z^2}{4}+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{-z^2}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \cdot z^{2n}, \boxed{|z|<2}$$

$$\boxed{\left|\frac{-z^2}{4}\right|<1 \rightarrow |z|<2}$$

$$-\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{\frac{(z^2+4)z^2}{z^2}} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{z^2}} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{4}{z^2}\right)} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 4^n \cdot z^{-2n-2}, \boxed{|z|>2}$$

$$\boxed{\left|\frac{-4}{z^2}\right|<1 \rightarrow |z|>2}$$

* ROC 1: $|z|<1$: $f(z) = \frac{1}{3}\left[\underset{\substack{|z|<1 \\ \cancel{|z|>1}}}{\frac{1}{z^2+1}} - \underset{\substack{|z|<2 \\ \cancel{|z|>2}}}{\frac{1}{z^2+4}}\right] = \frac{1}{3}\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{2n}}_{|z|<1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{4^{n+1}}}_{|z|<2}\right] =$

$|z|<1 \cap |z|<2 = \{|z|<1\}$

$$\boxed{= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{2n} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)} \quad \{|z|<1\}$$

* ROC 2: $1<|z|<2$: $f(z) = \frac{1}{3}\left[\underset{\substack{\cancel{|z|<1} \\ |z|>1}}{\frac{1}{z^2+1}} - \underset{\substack{|z|<2 \\ \cancel{|z|>2}}}{\frac{1}{z^2+4}}\right] = \boxed{\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{-2n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \cdot z^{2n}\right]}, \quad 1<|z|<2$

$\{|z|>1\} \cap \{|z|<2\} = \{1<|z|<2\}$

* ROC 3: $|z|>2$: $f(z) = \frac{1}{3}\left[\underset{\substack{\cancel{|z|<1} \\ |z|>1}}{\frac{1}{z^2+1}} - \underset{\substack{\cancel{|z|<2} \\ |z|>2}}{\frac{1}{z^2+4}}\right] = \frac{1}{3}\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{-2n-2}}_{|z|>1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 4^n \cdot z^{-2n-2}}_{|z|>2}\right] =$

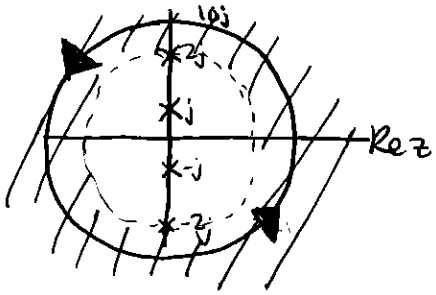
$|z|>1 \cap |z|>2 = \{|z|>2\}$

$$\boxed{= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{-2n-2} (1-4^n)} \quad \{|z|>2\}$$

b) $I = \int_C \frac{z^5}{(z^2+1)(z^2+4)} \cdot dz$, $C: |z| = 10$

T^{ma} Laurent: $a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

C: Curva cerrada que rodee a z_0 (centro de la serie), recorrida en sentido positivo y que esté contenida en la ROC corresp.



$C: |z| = 10$

$\hookrightarrow$ ROC 3: $|z| > 2$

Sabemos que: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}(-1)^n [1-4^n] \cdot z^{-2n-2}$, $|z| > 2$

$$I = \oint_C \frac{z^5}{(z^2+1)(z^2+4)} \cdot dz = \oint_C z^5 \cdot f(z) \cdot dz = 2\pi j \boxed{\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-0)^{\overset{-5}{n+1}}}} = a_{-6}$$

$n+1 = -5 \rightarrow n = -6$

$= 2\pi j [a_{-6}] = 2\pi j \cdot \frac{1}{3}(-1)^2 [1-4^2] = \boxed{-10\pi j} = I$

$\downarrow$

coef. de z^{-6} en el DSL de $f(z)$ en la ROC 3. En este caso se obtiene para $\boxed{n=2}$ ($z^{-2n-2} = -6 \Rightarrow n = 2$)

Febrero 97
Ejercicio 2

Dada la serie de Laurent

$$\ldots\ldots+\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots$$

Hallar:

a) La región de convergencia de la serie y los puntos singulares y su naturaleza de la función $S(z)$ (suma de series) definida por dicha serie en su región de convergencia.

b) $\int_C \frac{S(z)}{z^6}\,dz$ siendo $C:|z|=\frac{3}{2}$, recorrida en sentido antihorario.

$$\underbrace{\ldots+\ldots+\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{z}}_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^{n+1}}}_{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}}$$

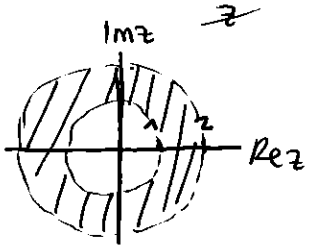
$\left|\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>1$

$\left|\frac{z}{2}\right|<1 \Rightarrow |z|<2$

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\cancel{z}}}{\frac{z-1}{\cancel{z}}}+\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\frac{2-z}{\cancel{2}}}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2-z}=\frac{2-z+z-1}{(z-1)(2-z)}=\boxed{\frac{1}{(z-1)(2-z)}}$$

ptos sing $\begin{cases} z=1 \\ z=2 \end{cases}$



$\{1<|z|<2\}=\{|z|>1\}\cap\{|z|<2\}$

b) No hecho

Junio 97
Ejercicio 3

Resolver, mediante transformadas de Laplace, la siguiente ecuación

$$y'(t) + 3y(t) + 2\int_0^t y(x)\,dx = f(t)$$

siendo $y(0) = 1$, $f(t) = 2u(t-1) - 2u(t-2)$, y

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \infty \\ 0 & 0 > t \end{cases}$$

$$y'(t) + 3y(t) + 2\int_0^t y(x)\cdot dx = 2u(t-1) - 2u(t-2) \quad // \quad y(0)=1$$

$$\underbrace{\mathcal{L}[y'(t)]}_{s\cdot Y(s) - \underset{=1}{y(0)}} + 3\cdot\underbrace{\mathcal{L}[y(t)]}_{Y(s)} + 2\underbrace{\mathcal{L}\left[\int_0^t y(x)dx\right]}_{\frac{Y(s)}{s}} = 2\cdot\underbrace{\mathcal{L}[u(t-1)]}_{\frac{1}{s}\cdot e^{-s}} - 2\cdot\underbrace{\mathcal{L}[u(t-2)]}_{\frac{1}{s}\cdot e^{-2s}}$$

$$s\cdot Y(s) - 1 + 3Y(s) + 2\frac{Y(s)}{s} = 2\cdot\frac{1}{s}\cdot e^{-s} - 2\cdot\frac{1}{s}\cdot e^{-2s}$$

$$Y(s)\left(s+3+\frac{2}{s}\right) = 1 + \frac{2}{s}\cdot e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-2s}$$

$$Y(s) = \frac{1+\frac{2}{s}\cdot e^{-s} - \frac{2}{s}\cdot e^{-2s}}{s+3+\frac{2}{s}} = \frac{1+\frac{2}{s}\cdot e^{-s} - \frac{2}{s}\cdot e^{-2s}}{\frac{s^2+3s+2}{s}} = \frac{s+2\cdot e^{-s} - 2\cdot e^{-2s}}{s^2+3s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{\frac{s+2e^{-s}-2e^{-2s}}{s^2+3s+2}}_{H(s)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{\frac{s}{s^2+3s+2}}_{H(s)}\right] + 2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{e^{-1s}\cdot\frac{1}{s^2+3s+2}}_{G(s)}\right] - 2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2+3s+2}}_{G(s)}\right]$$

$$y(t) = h(t) + 2g(\cancel{t})(t-1)u(t-1) - 2g(t-2)u(t-2)$$

$$\boxed{\text{*PROP* } f(t-a)u(t-a) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-as}\cdot F(s)}$$

$$\begin{cases} H(s) = \dfrac{s}{s^2+3s+2} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+2} \overset{\substack{A=-1 \\ B=2}}{=} -\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} \\ \downarrow \\ h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right] + 2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}\right] = -e^{t} + 2\cdot e^{-2t} = \boxed{2e^{-2t} - e^{t},\ t>0} \end{cases}$$

$$e^{-zt} \longleftrightarrow \frac{1}{s+z}$$

$$\begin{cases} G(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+2} \overset{\uparrow}{=} \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \\ \downarrow \\ g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}\right] = \boxed{e^{-t} - e^{-2t},\ t>0} \end{cases}$$

Finalmente:

$$y(t) = h(t) + 2g(t-1)u(t-1) - 2g(t-2)u(t-2) =$$

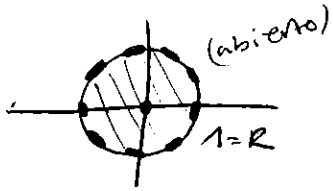
$$\boxed{y(t) = \left[2e^{-2t} - e^{-t}\right]u(t) + 2\left[e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right]u(t-1) - 2\left[e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)}$$

Septiembre 98
Ejercicio 2

Desarrollar en serie, alrededor de $z=0$, la función $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$.

$f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ alrededor de $z=0$

$|z|<1$



$$f(z)=z\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)^2=$$

$$=z\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,\quad |z|<1$$

$$=z\cdot\sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$=z\left[z^0+z+z^2+z^3+z^4\ldots\right]\left[1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots\right]=$$

$$=z\left[1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots+z+z^2+z^3+z^4+\ldots+z^2+z^3+z^4+\ldots+z^3+z^4+\ldots\right]$$

$$=z\left[1+2z+3z^2+4z^3+5z^4+\ldots\right]$$

$$=z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n+1},\quad |z|<1=f(z)}$$

Febrero 1998
Ejercicio 3

Resolver, utilizando transformadas de Laplace, la siguiente ecuación diferencial

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

siendo $x(0) = x'(0) = 0$.

$$\underbrace{\mathcal{L}[x''(t)]}_{s^2X - s^1\cancel{x(0)} - s^0\cancel{x'(0)}} - \underbrace{\mathcal{L}[x(t)]}_{X(s)} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{1+e^t}\right]$$

$$s^2X(s) - X(s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{1+e^t}\right]$$

$$[s^2-1]X(s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{1+e^t}\right] \rightarrow X(s) = \overbrace{\frac{1}{s^2-1}}^{F(s)} \overbrace{\mathcal{L}\left[\frac{1}{1+e^t}\right]}^{G(s)}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \operatorname{sh} t$$

* PROPIEDAD: $(f*g)(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)\cdot G(s)$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)\cdot G(s)] = (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(\tau)\cdot f(t-\tau)\cdot d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau}\cdot \underbrace{\operatorname{sh}(t-\tau)}_{\operatorname{sh}\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}}\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau}\cdot\frac{e^{t-\tau}-e^{-(t-\tau)}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{e^t\cdot e^{-\tau} - e^{-t}\cdot e^{\tau}}{1+e^\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}\left[e^t\underbrace{\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau}\cdot d\tau}_{I_1} - e^{-t}\cdot\underbrace{\int_0^t \frac{e^{\tau}}{1+e^\tau}\,d\tau}_{I_2}\right]$$

$$I_2 = \int_0^t \frac{e^\tau}{1+e^\tau}\,d\tau = \ln(1+e^\tau)\Big|_0^t = \ln(1+e^t) - \ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{1+e^t}{2}\right)}$$

$$I_1 = \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau}\,d\tau = \left[\begin{array}{l} u = e^\tau \rightarrow \tau = \ln u \rightarrow d\tau = \frac{1}{u}\,du \\ \tau = 0 \rightarrow u = e^0 = 1 \\ \tau = t \rightarrow u = e^t \end{array}\right] = \int_1^{e^t} \frac{u^{-1}}{1+u}\cdot\frac{1}{u}\cdot du =$$

$$= \int_1^{e^t} \frac{1}{(u+1)u^2}\,du = \int_1^{e^t}\left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1}\right)du = \begin{array}{l} A = \cancel{1}-1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{array} = -\int_1^{e^t}\frac{1}{u}\cdot du + \int_1^{e^t} u^{-2}\cdot du + \int_1^{e^t}\frac{1}{u+1}\cdot du = -\ln u\Big]_1^{e^t} +$$

$$+ \frac{u^{-1}}{-1}\Big]_1^{e^t} + \ln(u+1)\Big]_1^{e^t} = \ln\left(\frac{1+e^t}{2}\right) + 1 - t - e^{-t} \Rightarrow$$

Finalmente:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{t}\cdot I_1 - e^{-t}\cdot I_2\right] = sh(t)\cdot \ln\left(\frac{t\,e^{t}}{2}\right) + \frac{e^{t}}{2} - \frac{t\cdot e^{t}}{2} - \frac{1}{2}, \quad t>0$$

Septiembre 98
Ejercicio 5

Haciendo uso de la transformada de Laplace, calcular $I = \int_0^\infty \frac{e^{-t}\,\text{sen}\,t}{t}\,dt$

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-t}\cdot \text{sen}\,t}{t}\cdot dt = \int_0^\infty \underbrace{\frac{\text{sen}\,t}{t}}_{f(t)}\cdot \underset{s=1}{e^{-st}}\cdot dt$$

Sabemos que:

$$\text{sen}\,zt \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{s^2+z^2}$$

$$\frac{g(t)}{t} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \int_s^\infty G(s)\cdot ds$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,t\} = \frac{1}{s^2+1^2} = \frac{1}{1+s^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen}\,t}{t}\right\} = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds = \text{arctg}(s)\Big|_s^\infty = \text{arctg}(\infty) - \text{arctg}(s) = \cancel{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cancel{\text{arctg}}\ \pi/2 - \text{arctg}(s)$$

Finalmente: $I = \mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen}\,t}{t}\right\}\Big|_{s=1} = \frac{\pi}{2} - \underset{\pi/4}{\text{arctg}\,1} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

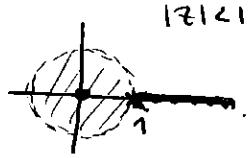
Febrero 99
Ejercicio 2

a) Desarrollar en serie de Taylor, entorno al punto $z_0 = 0$ la función $f(z) = \dfrac{\ln(1-z)}{1-z}$ eligiendo como rama del neperiano la que toma el valor cero para $z_0 = 0$. (Rama principal del logaritmo).

b) En base al resultado anterior, calcular:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

a) $f(z) = \dfrac{\ln(1-z)}{1-z}$, alrededor de $z_0=0$



$\circ\ \ln(1+z) = \cancel{\ln}\,\cancel{(1}-(-z)) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n}$

$\circ\ \ln(1-z) = \ln(1+(-z)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(-z)^n}{n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} \cdot z^n = \sum_{n=1}^{\infty} -\dfrac{z^n}{n}$

$f(z) = \underbrace{\ln(1-z)}_{-\sum \frac{z^n}{n}} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{1-z}}_{\sum_{n=0}^{\infty} z^n} = -\left[\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right] =$

$= -\left[z + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} + \ldots\right]\left[1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\right] =$

$= -\left[z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{2} + \dfrac{z^4}{2} + \ldots + \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^4}{3} + \ldots\right] =$

$= -\left[z + (1+1/2)z^2 + (1+1/2+1/3)z^3 + (1+1/2+1/3+1/4)z^4 + \ldots\right] =$

$= -\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) z^n\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] z^n =$

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\sum_{k=1}^{n} 1/k\right] z^n, \quad |z|<1$

b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ ( )

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad R=1$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}} = 1$$ ( )

( )

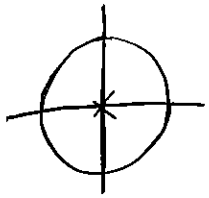
( )

Febrero 99
Ejercicio 3

Hallar el valor de la integral :

$$\int_C \frac{e^{1/z}}{2z+1}\,dz$$

Siendo $C:\{\ z\in\mathbb{C}:|z|=1\ \}$ orientado en sentido positivo.



$e^{1/z} \to z=0$

Junio 99
Ejercicio 3

Si se verifica que: $\mathcal{L}\left[t \cdot \varphi(t)\right] = \dfrac{1}{s\left(s^2+1\right)}$

Calcular la transformada de Laplace de la función: $f(t) = e^{-t}\varphi(2t)$

$$\mathcal{L}\{t \cdot \varphi(t)\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

PROPIEDAD:

1) $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$ $\quad f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$

2) $\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a)$ $\quad e^{at} \cdot f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a)$

3) $\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s)$ $\quad t f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -F'(s)$

3) $\hookrightarrow -\Psi'(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)} \rightarrow \Psi'(s) = -\dfrac{1}{s(s^2+1)} \Rightarrow \Psi(s) = -\displaystyle\int \frac{1}{s(s^2+1)}\, ds$

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = A(s^2+1) + B(s) = \frac{A \cdot s^2 + Bs^2 + Cs + A}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

si $s=0 \Rightarrow$ $\boxed{A=1}$ $\boxed{B=-1}$

$0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 1$

$A+B=0 \quad C=0$

$$\Psi(s) = -\int \frac{1}{s}\, ds + \int \frac{s}{s^2+1} = -\ln s + \frac{1}{2} \cdot \ln(s^2+1) = \ln \frac{(s^2+1)^{1/2}}{s} =$$

$$= \boxed{\ln \sqrt{\frac{1+s^2}{s^2}}} = \Psi(s) = \mathcal{L}[\varphi(t)]$$

1) $\mathcal{L}\{\varphi(2t)\} = \frac{1}{2} \cdot \Psi\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{\dfrac{1+\frac{s^2}{4}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{\dfrac{\frac{4+s^2}{4}}{s^2/4}} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{\frac{s^2+4}{s^2}}}$

$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2/4$

2) $\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a) \rightarrow$

$$\mathcal{L}[e^{-t} \cdot \varphi(2t)] = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{\frac{(s+1)^2+4}{(s+1)^2}} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{(s+1)^2}}}$$

Septiembre 99
Ejercicio 3

Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^3 e^{-s}}{s^4+4}\right]$

$\boxed{\text{SEPT 99 EJ 3}}$ Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^3 e^{-s}}{s^4+4}\right]$

Usaremos $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \longleftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)e^{-as}\right] = f(t-a)u(t-a)$

En nuestro caso $F(s) = \dfrac{s^3}{s^4+4}$ y $a=1$.

Así que obtendremos $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ y la solución pedida será

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{\frac{s^3}{s^4+4}}_{F(s)} e^{-s}\right] = f(t-1)\,u(t-1)$$

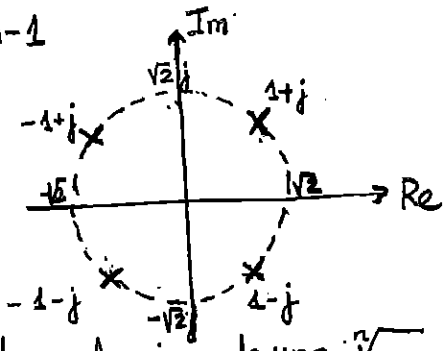
Para calcular $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ usaremos "residuos". Para ello hay que comprobar que $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s^3}{s^4+4} = 0$ así que:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},\ s=s_i\right]$$ donde s_i son los puntos singulares de $F(s)$ (pues fíjate que e^{st} es un función <u>entera</u> y no introduce singularidades)

$F(s)$ tiene puntos singulares donde su denominador se anula, es decir, donde $s^4+4=0 \to s^4=-4 \to s=\sqrt[4]{-4}$

Recordemos que $\sqrt[n]{\rho e^{j\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{j\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\dots,n-1$

$$-4 = 4e^{j\pi} \Longrightarrow \sqrt[4]{-4} = \begin{cases} \sqrt[4]{4}\, e^{j\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{j\pi/4} \\ \sqrt[4]{4}\, e^{j\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{j3\pi/4} \\ \sqrt[4]{4}\, e^{j\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{j5\pi/4} \\ \sqrt[4]{4}\, e^{j\frac{\pi+2\cdot 3\cdot\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{j7\pi/4} \end{cases}$$



Las soluciones de una $\sqrt[n]{\ }$ forman un polígono regular de n lados!!

Tb. se puede ver a ojo

$$s_1 = \sqrt{2}\left(\cos\pi/4 + j\,\text{sen}\,\pi/4\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+j$$

$$s_2 = \sqrt{2}\left(\cos 3\pi/4 + j\,\text{sen}\,3\pi/4\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1+j$$

$$s_3 = \sqrt{2}\left(\cos 5\pi/4 + j\,\text{sen}\,5\pi/4\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1-j$$

$$s_4 = \sqrt{2}\left(\cos 7\pi/4 + j\,\text{sen}\,7\pi/4\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1-j$$

$s^4+4 = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)$

s_i polos de orden 1

$$F(s) = \frac{s^3}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$$

Calculamos los residuos:

$$R=\left[F(s)e^{st}, s=s_1\right]=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)F(s)e^{st}=\lim_{s\to s_1}\cancel{(s-s_1)}\frac{s^3e^{st}}{\cancel{(s-s_1)}(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}=$$

$$=\lim_{s\to 1+j}\frac{s^3e^{st}}{[s-(-1+j)][s-(-1-j)][s-(1-j)]}=\frac{(1+j)^3\,e^{(1+j)t}}{[1+\cancel{j}+1-\cancel{j}][1+j+1+j][\cancel{1}+j-\cancel{1}+j]}=$$

$$=\frac{(1+j)^3\,e^{(1+j)t}}{2(2+2j)(2j)}=\frac{(1+j)^3}{8j(1+j)}e^{(1+j)t}=\frac{(1+j)^2}{8j}e^{(1+j)t}=$$

$$=\frac{\cancel{1}+\cancel{j^2}+2j}{8j}e^{(1+j)t}=\frac{e^{(1+j)t}}{4}$$

Análogamente

$$\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st}, s=s_2\right]=\frac{e^{(-1+j)t}}{4}\ ,\ \mathrm{Res}\left[F(s)e^{st}, s=s_3\right]=\frac{e^{(-1-j)t}}{4}$$

$$\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st}, s=s_4\right]=\frac{e^{(1-j)t}}{4}$$

Así que: $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\sum_{i=1}^{4}\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st}, s=s_i\right]=\dfrac{e^{(1+j)t}+e^{(-1+j)t}+e^{(-1-j)t}+}{4}$

$$\frac{e^{(1-j)t}}{4}=\frac{e^te^{jt}+e^{-t}e^{jt}+e^{-t}e^{-jt}+e^te^{-jt}}{4}=\frac{e^t(e^{jt}+e^{-jt})}{4}+\frac{e^{-t}(e^{jt}+e^{-jt})}{4}=$$

$$=e^t\frac{2\cos t}{4}+e^{-t}\frac{2\cos t}{4}=\cos t\,\frac{(e^t+e^{-t})}{2}=\cos t\,\mathrm{ch}\,t$$

Así que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)e^{-s}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^3e^{-s}}{s^4+4}\right]=f(t-1)u(t-1)=\cos(t-1)\,\mathrm{ch}(t-1)\,u(t-1)=$$

$$=\begin{cases}\cos(t-1)\,\mathrm{ch}(t-1), & t>1\\ 0, & t<1\end{cases}$$

Febrero 01
Ejercicio 3

Calcular, utilizando la Transformada de Laplace, el valor de $f(t)$ que satisface la ecuación diferencial $f'(t)+4f(t)=-4e^{-4t}$ siendo $f(0)=4$.

$$(EDO) \rightarrow f'(t)+4\cdot f(t)=-4\cdot e^{-4t}, \quad f(0)=4 \ (4) \Big\} \text{ Problema valor inicial } \cong PVI$$

$$\mathcal{L}[f'(t)+4\cdot f(t)]=\mathcal{L}[-4\cdot e^{-4t}] \xrightarrow{\text{Linealidad}} \underbrace{\mathcal{L}[f'(t)]}_{S\cdot F(S)-f(0)}+4\cdot\underbrace{\mathcal{L}[f(t)]}_{F(S)}=-4\cdot\underbrace{\mathcal{L}[e^{-4t}]}_{\frac{1}{S+4}}$$

$$\downarrow$$

$$S\cdot F(S)-4+4\cdot F(S)=\frac{1}{S+4} \longrightarrow F(S)[S+4]=4-\frac{4}{S+4}$$

$$\boxed{F(S)=\frac{4}{S+4}-\frac{4}{(S+4)^2}}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(S)]=4\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S+4}\right]-4\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S+4)^2}\right]=4\cdot e^{-4t}-4\cdot t\cdot e^{-4t}=$$

$$e^{-zt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{S+z} \qquad t^n\cdot e^{-zt} \longleftrightarrow \frac{n!}{(S+z)^{n+1}} \ (n=1)$$

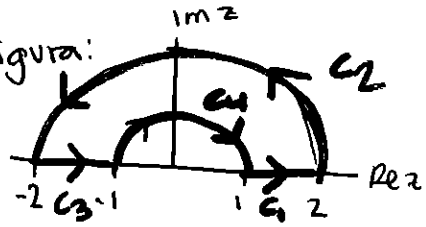
$$\boxed{f(t)=4\cdot e^{-t}(1-t), \quad t>0}$$

Septiembre 2001
Ejercicio 2

a) Calcular $I_1 = \oint_C \frac{z}{\bar{z}}\, dz$ siendo C el contorno de la figura

b) Calcular $I_2 \oint \frac{chz}{z^{n+1}}\, dz$ e $I_3 \oint \frac{shz}{z^{n+1}}\, dz$ siendo n un número entero y positivo y C el contorno definido por $|z| = 1$.

a) Figura:



$$I_1 = \oint_C \frac{z}{\bar{z}} \cdot dz$$

$$I_1 = \oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14}$$

Parametrizamos:

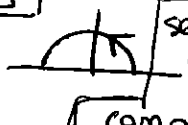
$C_1(t) = t + j0, \quad t \in [1,2]$

$C_2(t) = 2 \cdot e^{jt}, \quad t \in [0,\pi]$

$C_3(t) = t + j0, \quad t \in [-2,-1]$

$C_4(t) = 1 \cdot e^{jt}, \quad t \in [\cancel{\pi, 0}]$ no es creciente

$$I_{11} = \int_{C_1} f(z) \cdot dz = \int_1^2 f(C_1(t)) \cdot C_1'(t) \cdot dt = \boxed{t \in [0,\pi]} *$$



sentido contrario
⇓
compensamos cambiando el signo a I_4

$$= \int_1^2 \frac{C_1(t)}{C_1(t)} \cdot C_1'(t)\, dt = \int_1^2 \frac{t}{t} \cdot 1 \cdot dt = \int_1^2 dt = 2-1 = 1$$

$$I_{12} = \int_{C_2} f(z) \cdot dz = \int_0^\pi f(C_2(t)) \cdot C_2'(t) \cdot dt = \int_0^\pi \frac{C_2(t)}{C_2(t)} \cdot C_2' \cdot dt = \int_0^\pi \frac{2 \cdot e^{jt}}{2 \cdot e^{jt}} \cdot j2e^{jt} \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \int 3j\, e^{3jt} = \frac{2}{3} \left[e^{3jt} \right]_0^\pi = \frac{2}{3} \left[\overset{-1}{} - \overset{1}{} \right] = -\frac{4}{3}$$

$I_3 = \ldots = 1$

$I_4 = \ldots = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow I_1 = \frac{4}{3} = 1 - \frac{4}{3} + 1 + \frac{2}{3}$

b) $f(z) = \operatorname{ch} z$; $f'(z) = +\operatorname{sh} z$! $f''(z) = \operatorname{ch} z$; $f'''(z) = \operatorname{sh} z$ | $f^{n}(z) \begin{cases} \operatorname{ch} z, & n \text{ par} \\ \operatorname{sh} z, & n \text{ impar} \end{cases}$ $(0)\operatorname{ch} 0 = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

b) $I_2 = \oint_C \frac{\operatorname{ch} z}{z^{n+1}} \cdot dz = \oint_C \frac{\operatorname{ch} z}{(z-0)^{n+1}} \cdot dz = \frac{2\pi j}{n!} \cdot f^{n'}(0) = \begin{cases} 2\pi j, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

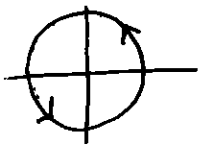
$n+1 \to k+1$

FICG

$k = n$

$z_0 = 0$

$C \equiv |z| = 1$



$I_3 = \oint_C \frac{\operatorname{sh} z}{z^{n+1}} dz = \oint \frac{\operatorname{sh} z}{(z-0)^{n+1}} \cdot dz = \frac{2\pi j}{n!} \cdot f^{n}(0) = \begin{cases} \frac{2\pi j}{n!}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$

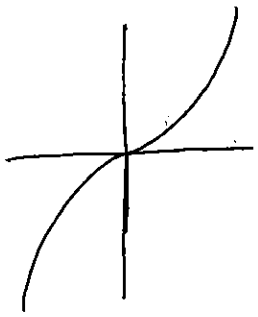
$n+1 \to k+1$

FICG

$k = n$

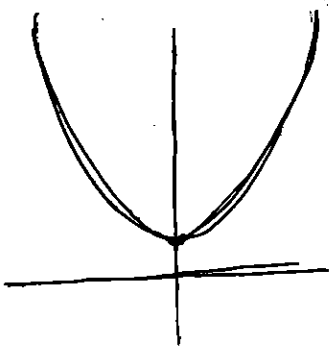
$z_0 = 0$

$f^{n'}(z) = \begin{cases} \operatorname{sh}(z), & n \text{ par} \\ \operatorname{ch}(z), & n \text{ impar} \end{cases}$



sh(x)

real



ch(x)

real

Septiembre 01
Ejercicio 3

Sabiendo que, si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, se verifica que ~~$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = t\,f(t)$~~.

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right]$.

$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -t \cdot f(t)$

Entonces hago esto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\} \to ?$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F'(s)}{-t}\right\}$$

$$F(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right) = \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \ln(s^2+1) - \ln(s^2)$$

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\left[\ln(s^2+1) - \ln(s^2)\right] = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2} = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = 2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 2\cdot\cos t - 2 = 2\cdot(\cos t - 1)\,u(t)$$

$$\cos zt \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{s}{s^2+z^2} \qquad 1 \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\cdot\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -\frac{1}{t}\cdot 2(\cos t - 1)\cdot u(t) = \boxed{\frac{2(1-\cos t)}{t}\,u(t)}$$

$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \cdot \operatorname{sen} B$

$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\cdot \operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$

$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$

Examen de MMT1
Febrero 2002

Ejercicio 3
3 puntos

a) Sabiendo que $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx,\ \ p > 0$ calcular $\mathcal{L}\ [t^a],\ a > -1$.

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, sabiendo que la función de error se define de la forma:

$$\operatorname{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du,$$

y utilizando la identidad $\dfrac{1}{\sqrt{s}-1} = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{\sqrt{s}}\left(1 + \dfrac{1}{s-1}\right)$, calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{s}-1}\right]$.

Nota: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

a)

En el primer paso aplicamos la definición de Transformada de Laplace y después hacemos un cambio de variable

$$\mathcal{L}\,[t^a] = \int_{t=0}^{t=\infty} t^a \cdot e^{-st} \cdot dt = \begin{bmatrix} st = x \rightarrow t = \dfrac{x}{s} \\ dt = \dfrac{dx}{s} \end{bmatrix} = \int_{x=0}^{x=\infty} \left(\frac{x}{s}\right)^a \cdot e^{-x} \cdot \frac{dx}{s} =$$

$$= \frac{1}{s^{a+1}} \cdot \int_0^\infty x^{(a+1)-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = \frac{1}{s^{a+1}} \cdot \Gamma(a+1) \text{ con } (a+1) > 0$$

Solución: $\mathcal{L}[t^a] = \dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\ ,\ \ a > -1$

b)

$$\frac{1}{\sqrt{s}-1} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{s-1}$$

Tomando transformadas de Laplace a ambos lados de la igualdad y aplicando la linealidad de la transformada

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{s-1}\right] \qquad [1]$$

Calculamos la transformada de Laplace de cada uno de los tres términos de la expresión [1].

<u>Primer término:</u>

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-1}\right] = e^t$, es una transformada inmediata de la tabla.

<u>Segundo término:</u>

Evidentemente hay que tener correctamente resuelto el apartado a) para poder hacer esta transformada inversa

Utilizaremos el resultado obtenido en el a):

$$\mathcal{L}[t^a] = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\ ,\ \ a > -1$$

En nuestro caso hacemos $a = -\dfrac{1}{2}$ y obtenemos:

$$\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[t^{-1/2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

Por tanto, si ahora aplicamos transformadas inversas a ambos lados de la igualdad, nos queda:

$$\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right] \quad \Rightarrow \quad t^{-1/2} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right]$$

Y, por último aplicando la propiedad de linealidad de la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right] = t^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\pi}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

<u>Tercer término:</u>

Para calcular la tercera transformada inversa utilizaremos la propiedad de convolución:

$$\mathcal{L}((f(t)*g(t)) = F(s)\cdot G(s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)\cdot G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]*\ \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

Donde recordamos que la convolución entre dos funciones se define como:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-x)\cdot g(x)\,dx$$

Las dos transformadas inversas que necesitamos son por "casualidad" las que ya tenemos calculadas

Dicho esto, hacemos lo siguiente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{s-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^{t} =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cdot e^{t-x}\cdot dx = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{-x}\cdot dx \quad (*)$$

Ahora sería un error intentar calcular la integral. Lo que vamos a hacer es identificarla con la función de error erf(t) dada en el enunciado mediante un cambio de variable:

$$\left.\begin{array}{l} x = u^2 \\ dx = 2u\cdot du \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Si } x=0 \rightarrow u=\sqrt{x}=0 \\ \text{Si } x=t \rightarrow u=\sqrt{x}=\sqrt{t} \end{array}\right.$$

$$(*) = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{u=0}^{u=\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{u^2}}\cdot e^{-u^2}\cdot 2u\,du = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{u=0}^{u=\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du = e^t\cdot\operatorname{erf}(\sqrt{t})$$

Por último, solo queda sustituir las tres transformadas inversas que hemos calculado en la expresión [1] para obtener la solución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{s-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + e^t + e^t\cdot\operatorname{erf}\sqrt{t}$$

Solución: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + e^t + e^t\cdot\operatorname{erf}\sqrt{t}$

Febrero 03
Ejercicio 2

Sea $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)}$.

a) Obtenga el desarrollo de Laurent de f centrado en $z_0=0$ y convergente en $\{z\in\mathbb{C}\ \ |\,|z|>1\}$

b) Calcule las integrales:

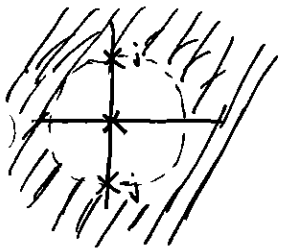
$$I_1=\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma z^2 f(z) \qquad\qquad I_2=\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma z^3 f(z)$$

siendo $\gamma(t)=2e^{jt},\ t\in[0,2\pi]$

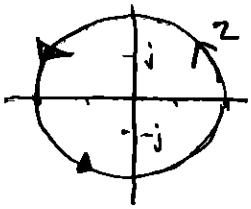
a) $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{\frac{1+z^2}{z^2}\cdot z^2}=\dfrac{1}{z^3}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\dfrac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)^n=$

$\left|-\dfrac{1}{z^2}\right|<1\rightarrow|z|>1$

$$\boxed{=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{-2n-3},\quad |z|>1}$$



b) $\gamma(t)=2e^{jt},\ t\in[0,2\pi]$:



Tma Laurent:

$$a_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\cdot dz$$

γ → cerrada, que rodee a z_0, sentido positivo y que esté contenida en la ROC correspondiente

$$I_1=\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma z^2\cdot f(z)\cdot dz=\underbrace{\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma\frac{f(z)}{(z-0)^{-2}}\cdot dz}_{a_{-3}}=a_{-3}=\boxed{(-1)^0=1}$$

$n+1=-2$
$n=-3$

coef. de z^{-3} en DSL de $f(z)$ en $|z|>1$. En este caso se obtiene para $n=0$

$$I_2=\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma z^3\cdot f(z)\cdot dz=\underbrace{\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma\frac{f(z)}{(z-0)^{-3}}\cdot dz}_{a_{-4}}=a_{-4}=\cancel{(-1)^0=1}=\boxed{0}$$

$n+1=-3$
$\boxed{n=-4}$

coef. de z^{-4} en el DSL de $f(z)$ en $|z|>1$. → Como no hay z^{-4} en dicho DSL ⇒ $a_{-4}=0$

Febrero 04
Ejercicio 1

a) Estudiar la continuidad y la holomorfía en el punto $z=j$ de la función

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(z-j)^5}{|z-j|^4} & z\neq j\\ 0 & z=j\end{cases}$$

b) Sea $v=v(\varphi(x,y))\neq cte$, siendo $\varphi(x,y)=x^2-ay^2$.

b-1) Determinar los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los que la función $v(x,y)$ es la parte imaginaria de una función holomorfa.

b-2) Para $a=-1$, hallar la función holomorfa correspondiente, $g(z)$, que además verifique $g(1)=0$ y $g'(2j)=\dfrac{1}{2}$

a) • Continuidad en $z=j$

Ni sustituir, ni LH, ni forma exponencial... sustituyo por nueva variable para que tienda a 0.

$$\lim_{z\to j} f(z)=\lim_{z\to j}\frac{(z-j)^5}{|z-j|^4}=\left[\begin{array}{l}\text{cambio de variable}\\ w=z-j\end{array}\right]$$

si $z\to j \Rightarrow w\to 0$

$$\lim_{w\to 0}\frac{w^5}{|w|^4}=$$ Ahora sí forma exponencial: $w=r\cdot e^{j\theta}$ (polares en AVEC)

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cdot e^{j\theta})^5}{|r\cdot e^{j\theta}|^4_{=r}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^5\cdot e^{j5\theta}}{r^4}=\lim \overset{0}{r}\cdot e^{j5\theta}=\underline{\underline{0=f(j)}}$$

$|e^{j5\theta}|=1\Rightarrow$ acotado, está a distancia finita del origen

$\Rightarrow f$ continua en $z=j$

• Holomorfía en $z=j$ (vemos si es diferenciable)

$$f'(j)=\lim_{z\to j}\frac{f(z)-f(j)}{z-j}=\lim_{z\to j}\frac{(z-j)^4}{|z-j|^4}=\left\{\begin{array}{l}\text{cambio de}\\ \text{variable}\\ w=z-j\end{array}\right\}=\lim_{w\to 0}\frac{w^4}{|w|^4}=$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cdot e^{j\theta})^4}{|r\cdot e^{j\theta}|^4}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cdot e^{j4\theta}}{r^4}=e^{j4\theta}\ \nexists\lim\ (\text{depende de }\theta)$$

$\nexists f'(j)$: f no es diferenciable en $z=j\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ NO es holomorfa en } z=j}$

Febrero 04
Ejercicio 2

a) Calcule las singularidades de

$$f(z)=\frac{1}{\left(e^{z}+1\right)\left(z^{2}+\pi^{2}\right)}$$

ignorando el punto del infinito. Clasifiquelas en singularidades evitables, polos y singularidades esenciales. Indique el orden de los polos.

b) Siendo $f(z)$ la función definida en el apartado anterior, calcule

$$\int_{\gamma^{+}} f(z)\,dz$$

donde $\gamma^{+}(t)=j3\pi+\pi e^{jt},\ t\in[-\pi,\pi]$

(NO RESUELTO, SOLO SOLUCIÓN)

a) $z=\pm j\pi$ (polos dobles)

$z=(2k+1)j\pi$, $k\neq 0$, $k\neq -1$ (polos simples)

b) $I=\frac{j}{4\pi}$, $Res(z=3\pi j)=\frac{1}{8\pi^{2}}$

Febrero 2005
Ejercicio 3

Encontrar la transformada inversa de Laplace de la función

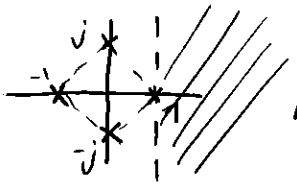
$$X(s) = \frac{1}{s^4 - 1}$$

mediante el Teorema de los Residuos. Determine la abcisa de convergencia $\sigma(x)$ de $x(t)$

• Ptos singulares: $s^4 - 1 = 0 \Rightarrow s^4 = 1 \Rightarrow s = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{|1|} \cdot e^{j\frac{0+2K\pi}{4}}$, $K \neq 0,1,2,3$

$$\Rightarrow s = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ j \\ -j \end{cases} \qquad X(s) = \frac{1}{s^4-1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s-j)(s+j)}$$

$s = -1, 1, -j, j$: polos simples :



$Re(s) > 1$

$$*(s^4-1) = \underbrace{(s^2+1)}\underbrace{(s^2-1)} = \underbrace{(s+j)}\underbrace{(s-j)}\underbrace{(s+1)}\underbrace{(s-1)}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \cdot VP \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} X(s) e^{st} dt = Res[X(s) \cdot e^{st}, s=1] + Res[X(s) \cdot e^{st}, s=-1] +$$

$$+ Res[X(s) \cdot e^{st}, s=j] + Res[X(s) \cdot e^{st}, s=-j]$$

1) $Res[X(s) \cdot e^{st}, \underbrace{s=1}_{\text{p. simple}}] = \lim_{s \to 1} (s-1) X(s) \cdot e^{st} = \lim_{s \to 1} \frac{\cancel{(s-1)} \cdot e^{st}}{(s^2+1)\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{e^{st}}{2 \cdot 2} = \boxed{\frac{e^t}{4}}$

no afecta a los polos (es entera)

2) $Res[X(s) \cdot e^{st}, s=j] = \lim_{s \to j} (s-j) X(s) \cdot e^{st} = \lim_{s \to j} \cancel{(s-j)} \frac{e^{st}}{(s^2-1)\cancel{(s-j)}(s+j)} = \frac{e^{jt}}{-2 \cdot 2j} = \boxed{\frac{-e^{jt}}{4j}}$

3) $Res[X(s) \cdot e^{st}, s=-1] = \lim_{s \to -1} (s+1) X(s) \cdot e^{st} = \lim_{s \to -1} \frac{e^{st}}{(s^2+1)(s-1)} = \boxed{\frac{-e^{-t}}{4}}$

4) $Res[X(s) \cdot e^{st}, s=-j] = \lim_{s \to -j} (s+j) X(s) \cdot e^{st} = \boxed{\frac{e^{-jt}}{4j}}$

$$x(t) = \frac{e^{t}}{4} - \frac{e^{jt}}{4j} - \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{-jt}}{4j} = \frac{e^{t} - e^{-t}}{4} - \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{4j} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}}_{sh(t)}\Big] - \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}}_{sen(t)}\Big] = \boxed{\frac{1}{2}\left[sh(t) - sen(t)\right], \; t > 0}$$

Febrero 06
Ejercicio 2

a) Calcular, sin emplear residuos, la integral:

$$I_1 = \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} e^z}{z^2}\, dz,$$

siendo $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt[3]{2}\}$ recorrida en sentido positivo.

b) Hallar el valor de la integral:

$$I_2 = \int_C \frac{|z|^2}{z}\, dz,$$

siendo $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{2}\}$ recorrida en sentido negativo.

c) Siendo $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdot + a_1 z + a_0,\ n > 2, a_n \neq 0, a_0 \neq 0$, calcular la integral:

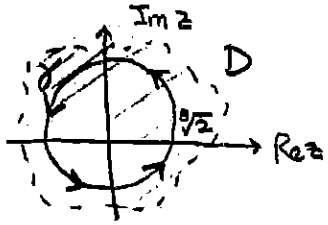
$$I_3 = \int_\Gamma \frac{dz}{P(z)},$$

siendo $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ siendo R tal que $|z_i| < R,\ \forall z_i, P(z_i) = 0$.

a) 1 pto. b) 1 pto. c) 1,5 ptos.

a) Fórmula integral de Cauchy generalizada:

$f(z)$ holomorfa en D abto. simp. conexo, Γ simple, cerrada, suave a trozos y recorrida en sent. posit., $\Gamma \subset D \Rightarrow \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz = \frac{2\pi j}{k!} f^{(k)}(z_0)$



$f(z) = \operatorname{sen} e^z$ es compos. de $\operatorname{sen} z$ y e^z, ambas func. enteras $\Rightarrow f(z)$ es entera $\Rightarrow f(z)$ es holom. en D

$$\int_\gamma \frac{\overbrace{\operatorname{sen} e^z}^{f(z)}}{z^2}\, dz = \frac{2\pi j}{1!} f'(0) = 2\pi j\, \overset{1}{e^0} \cos(e^0) = 2\pi j \cos 1$$

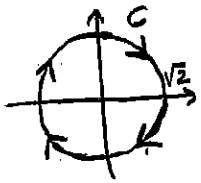
$k+1 = 2 \Rightarrow k = 1$

$z_0 = 0$

$f'(z) = e^z \cos(e^z)$

b) $I_2 = \displaystyle\int_C \overbrace{\frac{|z|^2}{z}}^{f(z)} dz$ $\quad f(z) = \dfrac{|z|^2}{z} = \dfrac{z \cdot \bar{z}}{z} = \bar{z} \Rightarrow$ No es holomorfa !! (pq. depende de $\bar{z}$)

Lo hacemos por definición de curvilínea



$C : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

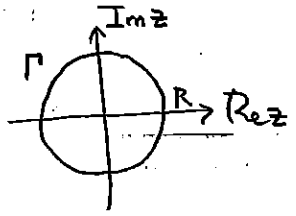
$t \longrightarrow c(t) = \sqrt{2} e^{-jt}$

$c'(t) = -j\sqrt{2} e^{-jt}$

$$I_2 = \int_C f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(c(t))\cdot c'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \overline{c(t)}\cdot c'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \overline{\sqrt{2}e^{-jt}}\cdot(-j)\sqrt{2}e^{-jt}\,dt =$$

$$= -2j\int_0^{2\pi} \cancel{e^{jt}}\cdot\cancel{e^{-jt}}\,dt = -2j(2\pi) = \underline{\underline{-4\pi j}}$$

c) $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $n>2$, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$



$|z_i| < R$
$P(z_i) = 0$

$I_3 = \int_\Gamma \frac{dz}{P(z)}$, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ y como $P(z_i)=0 \Rightarrow z_i$ son singularidades de $f(z)$

Además $|z_i| < R \ \forall z_i \Rightarrow$ todas caen "dentro" de Γ

$$I_3 = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z=z_i\right] = -2\pi j\, \mathrm{Res}\left[f(z), z=\infty\right] \quad \text{con } f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z=\infty\right] = \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{\omega^2} f\left(\frac{1}{\omega}\right), \omega=0\right] = \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{\omega^2}\frac{1}{P\left(\frac{1}{\omega}\right)}, \omega=0\right]$$

$f(z) = \frac{1}{P(z)}$

Veamos como es $-\frac{1}{\omega^2}\frac{1}{P\left(\frac{1}{\omega}\right)} = -\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{1}{a_n\left(\frac{1}{\omega}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{1}{\omega}\right) + a_0} =$

$$= -\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{a_n + a_{n-1}\omega + \dots + a_1\omega^{n-1} + a_0\omega^n}{\omega^n}} = -\frac{\omega^{n-2}}{a_n + a_{n-1}\omega + \dots + a_1\omega^{n-1} + a_0\omega^n}$$

Sve en $\omega=0$ vale $-\dfrac{0^{n-2}}{a_n + \cancel{a_{n-1}0} + \dots + \cancel{a_1 0^{n-1}} + \cancel{a_0 0^n}} = \dfrac{0}{\underset{\neq 0}{a_n}} = 0$

luego $\omega=0$ no es punto sing. de $-\frac{1}{\omega^2}\frac{1}{P\left(\frac{1}{\omega}\right)} \Rightarrow \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{\omega^2}\frac{1}{P\left(\frac{1}{\omega}\right)}, \omega=0\right] = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}\left[f(z), z=\infty\right] = 0 \Rightarrow I_3 = -2\pi j\, \mathrm{Res}\left[f(z), z=\infty\right] = 0$$

Febrero 06
Ejercicio 3

Utilizando la Transformada de Laplace, resolver el problema de valor inicial:

$$ty''(t) + (1-2t)y'(t) - 2y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

3 ptos

$$\underbrace{\mathcal{L}[ty''(t)]}_{2)} + \underbrace{\mathcal{L}[1-2t\,y'(t)]}_{3)} - 2\underbrace{\mathcal{L}[y(t)]}_{=Y(s)} = \mathcal{L}[0] = 0$$

2) $\mathcal{L}[ty''(t)] = -\frac{d}{ds}\underbrace{\left[\mathcal{L}[y''(t)]\right]}_{s^2Y(s) - s'\underset{1}{y(0)} - s^0\underset{2}{y'(0)}} = -\frac{d}{ds}\left[s^2 \cdot Y(s) - s - 2\right] =$

$t \cdot f(t) \leftrightarrow -F'(s)$

$= -\left[2s \cdot Y(s) + s^2 Y'(s) - 1\right] = 1 - 2sY(s) - s^2 Y'(s)$

3) $\mathcal{L}[(1-2t)y'(t)] = \underbrace{\mathcal{L}[y'(t)]}_{sY(s) - \underset{1}{y(0)}} - 2\mathcal{L}[ty'(t)] = sY(s) - 1 - 2\left[-\frac{d}{ds}\left(\underbrace{\mathcal{L}[y'(t)]}_{sY(s)-1}\right)\right] =$

$= sY(s) - 1 + 2(Y(s) + sY'(s)) = (s+2)Y(s) + 2sY'(s) - 1$

$\Downarrow$

$$\underbrace{1 - s^2Y'(s) - 2sY(s)}_{2)} + \underbrace{(2+s)Y(s) + 2sY'(s) - 1}_{3)} \underbrace{-2Y(s)}_{4)} = 0$$

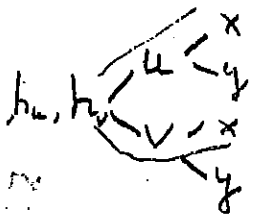
NO HACER $\rightarrow \ldots \rightarrow y(t) = \boxed{e^{2t},\ t>0}$

FEB.07. EJ1

DATO: $u(x,y)$, $v(x,y)$ armónicas

1) ¿ $u(x,y)\cdot v(x,y)$ armónica?

$h(x,y) = u(x,y)\,v(x,y)$ ¿ $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$? $h_{xx} + h_{yy} = 0$



$$h_x = h_u \cdot u_x + h_v \cdot v_x$$

$$h_{xx} = (h_u \cdot u_x + h_v \cdot v_x)_x = (h_u \cdot u_x)_x + (h_v \cdot v_x)_x =$$

$$= (h_u)_x \cdot u_x + u_{xx} h_u + (h_v)_x \cdot v_x + v_{xx} \cdot h_v =$$

$$= (h_{uu} \cdot u_x + h_{uv} \cdot v_x) u_x + u_{xx} h_u + (h_{vu} \cdot u_x + h_{vv} \cdot v_x) v_x + v_{xx} h_v =$$

$$= (0 \cdot u_x + 1 \cdot v_x) u_x + u_{xx} v + (1 \cdot u_x + 0 \cdot v_x) v_x + v_{xx} u =$$

$$= u_x v_x + u_{xx} v + u_x v_x + v_{xx} u = \boxed{2 u_x v_x + u_{xx} v + v_{xx} u} \; h_{xx}$$

Análogamente: $\boxed{h_{yy} = 2 u_y v_y + u_{yy} v + v_{yy} u}$ (ojo: NO DICEN HOLOMORF ⇒ NO podemos usar CR)

Así que:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = h_{xx} + h_{yy} = 2 u_x v_x + u_{xx} v + v_{xx} u + 2 u_y v_y + u_{yy} v + v_{yy} u =$$

$$= v \underbrace{(u_{xx} + u_{yy})}_{0} + u \underbrace{(v_{xx} + v_{yy})}_{0} + 2(u_x v_x + u_y \cdot v_y) = 2(u_x v_x + u_y \cdot v_y)$$

Lo cual será $\neq 0$ simplemente exigiendo que $\boxed{u_x v_x \neq -u_y v_y}$

Por ejemp:

$\left.\begin{array}{l} u(x,y) = x \\ v(x,y) = x \end{array}\right\}$ armónicas

Sin embargo $h(x,y) = u(x,y)\,v(x,y) = x^2$ no es armónica puesto que:

$$h_{xx} + h_{yy} = 2 \neq 0$$

$\boxed{u(x,y)\cdot v(x,y) \text{ no es en general función armónica}}$ *

:) DATOS: $u(x,y)$, $v(x,y)$ armónicas ¿ $h(x,y) = u(v(x,y),0)$ armónica?

$h \to u \to v \nearrow x$, $\searrow y$

$u_v \to v \nearrow x$, $\searrow y$

$$h_x = \cancel{h_u}^{\,1} \cdot u_v \cdot v_x = u_v \cdot v_x$$

$$h_{xx} = (u_v \cdot v_x)_x = (u_v)_x \cdot v_x + v_{xx} \cdot u_v = u_{vv} \cdot v_x \cdot v_x + v_{xx} \cdot u_v =$$

$$= u_{vv} \cdot v_x^2 + v_{xx} \cdot u_v$$

Análogamente: $h_{yy} = u_{vv} \cdot v_y^2 + v_{yy} \cdot u_v$

Así que: $$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = h_{xx} + h_{yy} = u_{vv} \cdot v_x^2 + v_{xx} u_v + u_{vv} v_y^2 + v_{yy} \cdot u_v =$$

$$= u_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + u_v \underbrace{(v_{xx} + v_{yy})}_{0} = u_{vv} \cdot (v_x^2 + v_y^2)$$

Lo cual no es cero en general $\Rightarrow$ $\boxed{u(v(x,y),0) \text{ no es armónica}}$

Febrero 2007
Ejercicio 2

a) Calcúlense las integrales:

$$I_1 = \int_{C^+} (z+\bar{z})\,dz \qquad I_2 = \int_{C^+} (z-\bar{z})\,dz$$

donde C^+ es la curva recorrida en sentido positivo constituida por

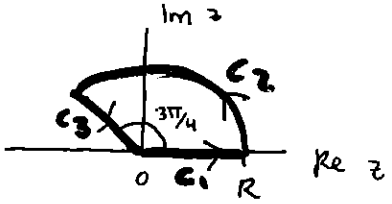
C_1: segmento $[0,R]$ del eje real (R cierto valor real positivo)

C_2: arco de circunferencia de centro 0 y radio R que une los puntos R y $R(-1+j)/\sqrt{2}$, pasando por el semiplano superior.

C_3: segmento de recta que une los puntos $R(-1+j)/\sqrt{2}$ y 0.

b) Enuncie la fórmula integral de Cauchy y, sin utilizar la utilizar la teoría de residuos, demuéstrela.

$$I_1 = \int_{C^+} (z+\bar{z})\,dz \qquad I_2 = \int_{C^+} (z-\bar{z})\,dz$$



$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{R}{\sqrt{2}} + j\frac{R}{\sqrt{2}} \begin{cases} r = \sqrt{\left(\frac{-R}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{R^2} = \underline{\underline{R}} \\ \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{-\frac{R}{\sqrt{2}}} = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \end{array}\right\} C_3$$

$$I_1 + I_2 = \int_{C^+} \overset{\text{NO HOLOMORFA}}{(z+\bar{z})}\,dz + \int_{C^+} \overset{\text{NO HOLOMORFA}}{(z-\bar{z})}\cdot dz =$$

$$= \int_{C^+} (z+\bar{z}+z-\bar{z})\,dz = \oint_{C^+} \overset{\text{holomorfa sobre } C^+}{2z}\cdot dz = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Tma} \\ \text{Cauchy-Goursat} \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -I_1$$

$$\boxed{I_1}: \oint_{C^+} (z+\bar{z})\,dz = \underbrace{\oint_{C^+} z\cdot dz}_{\substack{\text{cerrada} \\ \text{suave a} \\ \text{trozos}}} + \underbrace{\oint_{C^+} \bar{z}\cdot dz}_{\substack{\text{holomorfa} \\ \text{sobre } C^+ \\ \text{y dentro}}} = \oint_{C^+} \bar{z}\cdot dz = \int_{C_1} \bar{z}\cdot dz + \int_{C_2} \bar{z}\,dz + \int_{C_3} \bar{z}\,dz = I_A + I_B + I_C$$

* Parametrizar: $C_1(t) = t + j0$, $t \in [0,R]$

$C_2(t) = R\cdot e^{jt}$, $t \in [0, \frac{3\pi}{4}]$

$C_3(t) = t\cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$, $t \in \cancel{[R,0]}$ $t \in [0,R]$ → cambiar signo de la integral

$$\bullet\ I_A = \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^R f(C_1(t))\cdot C_1'(t)\,dt = \int_0^R \overline{C_1(t)}\cdot C_1'(t)\cdot dt = \int_0^R t\cdot 1\cdot dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^R = \boxed{\frac{R^2}{2}}$$

$$\bullet\ I_B = \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^{3\pi/4} f(C_2(t))\cdot C_2'(t)\cdot dt = \int_0^{3\pi/4} \overline{C_2(t)}\cdot C_2'\cdot dt = \int_0^{3\pi/4} R\cdot e^{-jt}\cdot jRe^{jt}\cdot dt = jR^2\int_0^{3\pi/4} dt = \boxed{j\frac{3\pi R^2}{4}}$$

$$\bullet\ I_C = -\int_0^R \overline{C_3(t)}\cdot C_3'(t)\cdot dt = \int_R^0 t\cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}\cdot dt = \frac{t^2}{2} = \boxed{-\frac{R^2}{2}}$$

$$I_1 = \frac{R^2}{2} + \ldots + \ldots = \boxed{j\frac{3\pi R^2}{4}}$$

$$\boxed{I_2 = -j\frac{3\pi R^2}{4}}$$

Febrero 2007
Ejercicio 3

Sean las funciones:

1) $f_1(z)=z\,\text{sen}\dfrac{1}{z^2}$ 2) $f_2(z)=\dfrac{e^z}{\cosh z}$ 3) $f_3(z)=\dfrac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\cos(\pi z)}$ 4) $f_4(z)=z^3 e^{-\frac{1}{z}}$

a) Clasifique sus singularidades en $\hat{\mathbb{C}}$ (siendo $\hat{\mathbb{C}}$ el plano complejo ampliado). (incluye infinito)
b) Calcule el valor de las siguientes integrales complejas:

$$I_1=\int_C f_1(z)\,dz \qquad I_2=\int_C f_3(z)\,dz$$

Siendo $f_1(z)$ y $f_3(z)$, las funciones dadas en el apartado a) y C la circunferencia de centro 0 y radio $r=\frac{3}{4}\pi$. [Sentido horario]

a) 1) $f_1(z)=z\cdot\text{sen}\,\frac{1}{z^2}$

$\boxed{z=0}$ $\lim\limits_{z\to 0} f_1(z)=\lim\limits_{z\to 0} z\cdot\text{sen}\,\frac{1}{z^2}=0\cdot\text{sen}\,\frac{1}{0}=\nexists \Rightarrow$ SING. ESENCIAL $z=0$

$\downarrow$ sen complejo NO ACOTADO

$\boxed{z=\infty}$ $f_1\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{w}\cdot\text{sen}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{w}\right)^2}=\frac{1}{w}\cdot\text{sen}\,w^2=\frac{\text{sen}\,w^2}{w}$

$(w=0)\Rightarrow \lim\limits_{w\to 0} f_1\left(\frac{1}{w}\right)=\lim\limits_{w\to 0}\frac{\text{sen}\,w^2}{w}\overset{LH}{=}\lim\limits_{w\to 0}\frac{2w\cdot\cos w^2}{1}=0\in\mathbb{C}$

$w=0$ es punto singular evitable de $f_1\left(\frac{1}{w}\right)$

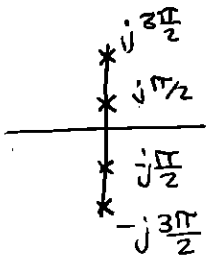
$z=\infty$ es " " " de $f_1(z)$

2.) $f_2(z)=\dfrac{e^z}{\cosh z}$ {MEROMORFA} $\Rightarrow \cosh z=0$ ¿?

$\text{ch}\,z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}=0\Rightarrow e^z+e^{-z}=0\Rightarrow e^z=-e^{-z}\Rightarrow$

$\dfrac{e^z}{e^{-z}}=-1\Rightarrow e^{2z}=-1\Rightarrow e^{2z}=e^{j(2K+1)\pi}$, $K\in\mathbb{Z}$

$2z=j(2K+1)\pi\Rightarrow\boxed{z=j(2K+1)\frac{\pi}{2}}$



$\lim\limits_{z\to j(2K+1)\pi/2} f_2(z)=\lim\limits_{z\to j(2K+1)\pi/2}\dfrac{e^z}{\text{ch}\,z}=\dfrac{\overset{\neq 0}{e^{j(2K+1)\pi/2}}}{\underset{=0}{\text{ch}\left[j(2K+1)\pi/2\right]}}=\infty$

$z=j(2K+1)\frac{\pi}{2}$ son polos simples (orden 1) de $f_2(z)$

$z = \infty$: $f_2(z)\left(\frac{1}{w}\right) = \dfrac{e^{\frac{1}{w}}}{ch\frac{1}{w}}$

( )

$w=0 \rightarrow \lim\limits_{w\to 0} f_2\left(\frac{1}{w}\right) = \lim\limits_{w\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{w}}}{ch\frac{1}{w}} = \dfrac{e^{\frac{1}{0}} \rightarrow \nexists}{ch\frac{1}{0} \rightarrow \nexists} = \nexists$

$w=0$ es pto. sing. ESENCIAL de $f_2\left(\frac{1}{w}\right)$

$\Updownarrow$

$z=\infty$ es pto sing. Esencial de $f_2\left(\frac{1}{w}\right)$

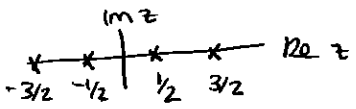
3) $f_3(z) = \dfrac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\cos \pi z}$ {HEROMORFA}

$\boxed{\cos \pi z = 0} \rightarrow \pi z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \rightarrow z = \frac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ( )

$$\lim_{\substack{z\to\frac{2k+1}{2} \\ k\neq 0}} f_3(z) = \lim_{\substack{z\to\frac{2k+1}{2} \\ k\neq 0}} \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}{\cos \pi z} = \frac{\left(\frac{2k+1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 = k^2 \neq 0}{\cos\left[\pi\,\frac{2k-1}{2}\right] = 0} = \infty$$

$k\neq 0$

- $\boxed{z = \frac{2k-1}{2}}$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ son polos simples de $f_3(z)$



Analizamos $k=0$: $z = \frac{1}{2}$

( )

$$\lim_{z\to 1/2} \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\cos \pi z} \underset{(8)}{=} LH = \frac{2\left(z-\frac{1}{2}\right)}{-\pi \cdot \operatorname{sen} \pi z} = \frac{2\cdot 0}{-\pi \cdot \underbrace{\operatorname{sen} \pi/2}_{=1}} = 0$$

- $\boxed{z = \frac{1}{2}}$ es un punto sing evitable de $f_3(z)$

$\boxed{z=\infty}$ $f_3\left(\frac{1}{w}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{2}\right)^2}{\cos\frac{\pi}{w}} =$ completar

( )

FEB.07 P3 24/3/2012

a.4) $f_4(z) = z^3 \cdot e^{-\frac{1}{z}}$

• $\boxed{z=0}$ $\lim_{z\to 0} f_4(z) = \lim_{z\to 0} z^3 e^{-\frac{1}{z}} = 0^3 \cdot e^{-\frac{1}{0}} = \nexists$

$z=0$ es pto. singular esencial de $f_4(z)$

• $\boxed{z=\infty}$ $f_4(\frac{1}{w}) = (\frac{1}{w})^3 \cdot e^{-\frac{1}{\frac{1}{w}}} = \frac{e^{-w}}{w^3} = ?$

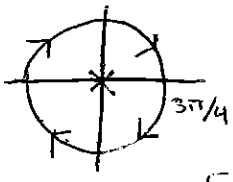
$\lim_{w\to 0} \frac{e^{-w}}{w^3} = \frac{e^0}{0^3} = \frac{1}{0^3} = \infty$ ($w=0$ es polo orden 3)

$\Updownarrow$

$z=\infty$ es un polo de orden 3 de $f_4(z)$

Feb. 2007 ej 3 b)

b.1) $I_1 = \int_C f_1(z)\cdot dz$, $f_1(z) = z\cdot \text{sen}\,\frac{1}{z^2}$, $z=0$ pto sing esencial

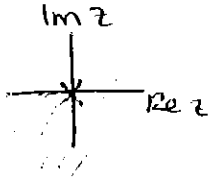


$$I_1 = \oint_C f_1(z)dz = \overset{\text{sent. neg}}{(-)}2\pi j\cdot \text{Res}\left[f_1(z), z=0\right]$$

{ $z=0$ es sing esencial, por lo que solo puede calcular el Residuo por DSL alrededor de $z=0$ en 1ª corona de conv y quedarnos con a_{-1} }

$$f_1(z) = z\cdot \text{sen}\,\frac{1}{z^2} = z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,z^{-4n-1}, \quad 0<|z|<\infty$$

$$\text{sen}\,z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot z^{2n+1}$$



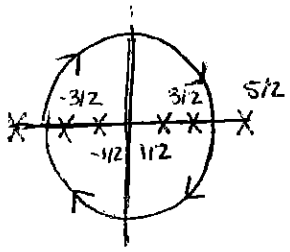
$$\text{Res}\left[f_1(z), z=0\right] = a_{-1} = \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0+1)!} = \boxed{1}$$

$n=0$

$$I_1 = -2\pi j\cdot 1 = \boxed{-2\pi j}$$

b.3) $f_3(z) = \dfrac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\cos \pi z}$; $z = 1/2$ pto sing evitable

$z = \dfrac{2K+1}{2}$, $K\in\mathbb{Z}-\{0\}$ polos simples



$$I = \oint_C f_3(z)dz = \overset{\text{sent. neg.}}{(-)}2\pi j\left(\text{Res}\left[z=-\tfrac{3}{2}\right] + \text{Res}\left[z=-\tfrac{1}{2}\right] + \text{Res}\left[z=\tfrac{3}{2}\right] + \underbrace{\text{Res}\left[z=\tfrac{1}{2}\right]}_{=0\ \text{(pto sing evitable)}}\right.$$

$$\cdot\,\text{Res}\left[f_3(z), z=-\tfrac{3}{2}\right] = \lim_{z\to -3/2}\left(z+\tfrac{3}{2}\right)\cdot f(z) = \lim_{z\to -3/2}\left(z+\tfrac{3}{2}\right)\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\cos \pi z} =$$

$$= 4\cdot\lim_{z\to -3/2}\frac{z+\frac{3}{2}}{\cos \pi z}\ (0/0) = [L'H] = 4\lim_{z\to -3/2}\frac{1}{-\pi\cdot\text{sen}(\pi z)} = 4\,\frac{1}{-\pi\,(\underbrace{\text{sen}\,-3\pi/2}_{=1})} = \boxed{-\frac{4}{\pi}}$$

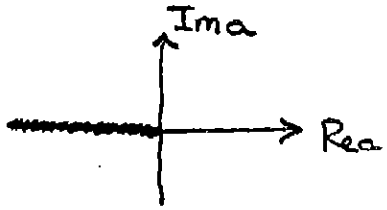
Análogamente: $\text{Res}\ z=-1/2 = \text{Res}\ z=3/2 = \boxed{\frac{1}{\pi}}$

$$I = -2\pi j\left(-\frac{2}{\pi}\right) = \boxed{4j}$$

JUN07. EJ1

a) $f(z) = \ln\left(\overset{a}{\frac{z+1}{z-1}}\right)$, $\ln a = \ln|a| + j\theta \Rightarrow k=0$

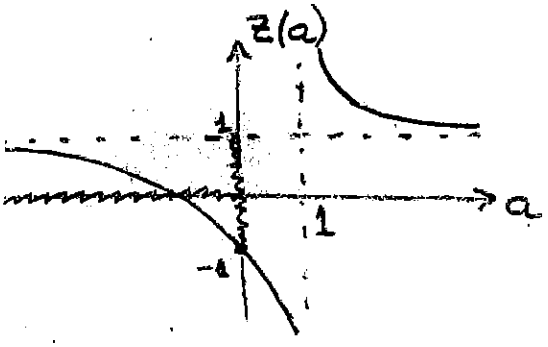
$\theta \in (-\pi, \pi)$



La función no será holomorfa en $z=1$ pq. se anula el denominador. Tampoco será holomorfa donde la variable del ln pertenezca al corte de rama, es decir, donde $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$

Así que: $a = \frac{z+1}{z-1}$, $(z-1)a = z+1$, $z(a-1) = 1+a$, $z = \frac{1+a}{a-1} =$

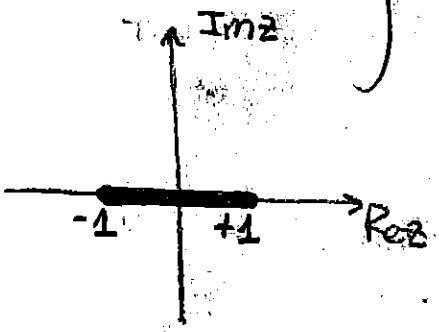
$$= \frac{1+a-2+2}{a-1} = \frac{a-1}{a-1} + \frac{2}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} \rightarrow z(a) = 1 + \frac{2}{a-1}$$



Cuando $a \in \mathbb{R}^- \cup \{0\} \Rightarrow z \in [-1, 1)$

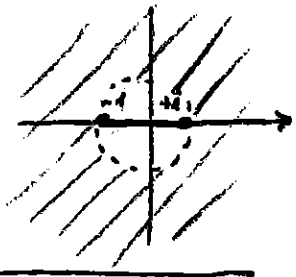
- Así que cuando $z \in [-1,1) \Rightarrow \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $f(z)$ no es holomorfa
- Tampoco lo es en $z=1$

$\boxed{f(z) \text{ no es holomorfa en } \{z = x \in \mathbb{C} \mid x \in [-1,1]\}}$



b) $f'(z)$ $\exists$ y es holomorfa, donde $f(z)$ lo sea (Recordar: $f(z)$ holomorfa $\Rightarrow f'(z)$ holom $\Rightarrow f''(z)$ holom $\Rightarrow \ldots$)

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)'}{\frac{z+1}{z-1}} = \frac{\frac{1(z-1)-1(z+1)}{(z-1)^2}}{\frac{z+1}{z-1}} = \frac{-2}{z^2-1}$$



La podremos desarrollar en serie en $1<|z|$

$$\boxed{f(z) = \frac{-2}{z^2-1} = \frac{-2}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = -\frac{2}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+2}}, \quad |z|>1}$$

$\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1 \rightarrow |z| > 1$

c) Por ser $f'(z)$ holomorfa en $|z|>1$, podemos integrar su serie término a término en el anillo para obtener f.

$$f(z) = \int f'(z)dz + C = \int\left(-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n+2}}\right)dz + C = -2\sum_{n=0}^{\infty}\int z^{-2n-2}dz + C =$$

$$= -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-2n-1}}{-2n-1} + C = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\frac{1}{z^{2n+1}} + C, \quad |z|>1$$

d) $$\left.\begin{array}{l} \boxed{\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \ln(1) = \ln|1| + j\cdot 0 = 0} \\ \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\frac{1}{z^{2n+1}} + C = C \end{array}\right\} C = 0$$

Así que: $$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}}}$$

Junio 2007
Problema 3

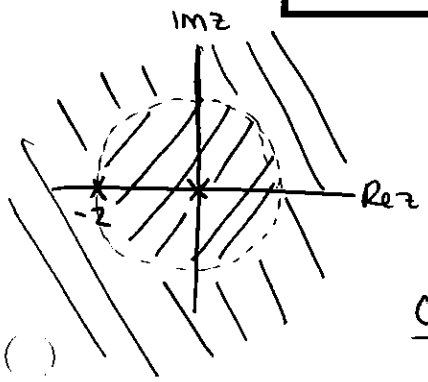
Dada la función compleja de variable compleja

$$f(z)=\frac{1}{z(z+2)^3}$$

Hallar su desarrollo en serie en las siguientes regiones de convergencia:

a. $A_1=\{z\in\mathbb{C},\ 0<|z|<2\}$

b. $A_2=\{z\in\mathbb{C},\ |z|>2\}$



ROC 1: $0<|z|<2$

ROC 2: $|z|>2$

Opción 1: $f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{z+2}$ (No es la mejor opción)

Opción 2: $g(z)=\frac{1}{z+2}\rightarrow g'(z)=-\frac{1}{(z+2)^2}$

$\rightarrow g''(z)=\frac{-2(z+2)(-1)}{(z+2)^4}=\frac{2}{(z+2)^3}\rightarrow f(z)=\frac{g''(z)}{2z}$

a) $g(z)=\frac{1}{z+2}=\frac{1}{\frac{2\cdot z+2}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot z^n,\ |z|<2}$

$\left|-\frac{z}{2}\right|<1\rightarrow|z|<2$

* Derivada del sumatorio = Sumatorio de la derivada

$g'(z)=\frac{d}{dz}[g(z)]=\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot z^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\left[\boxed{\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}\cdot z^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{d}{dz}[z^n]=$

$=\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot n\cdot z^{n-1}=\boxed{\sum_{\boxed{n=1}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot n\cdot z^{n-1}},\ |z|<2$

[n=0 → el término es =0]

$g''(z)=\frac{d}{dz}[g'(z)]=\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot n\cdot z^{n-1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot n(n-1)z^{n-2}=\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot n\cdot(n-1)\cdot z^{n-2},\ |z|<2}$

$f(z)=\frac{g''(z)}{2z}=\frac{1}{2z}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot n(n-1)z^{n-2}=\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\cdot n(n-1)\cdot z^{n-3},}\ 0<|z|<2$

z en el den. (z^{-3})

b) $g(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{\frac{z+2\,z}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n \cdot z^{-n-1}, \quad |z| > 2$

$\left|-\frac{2}{z}\right| < 1 \rightarrow |z| > 2$

( )

$g'(z) = \frac{d}{dz}\left[g(z)\right] = \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n \cdot z^{-n-1}\right] = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n (-n-1) \cdot z^{-n-2}, \quad |z| > 2}$

$g''(z) = \frac{d}{dz}\left[g'(z)\right] = \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n \cdot (-n-1) \cdot z^{-n-2}\right] =$

¿? $\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n (-n-1)(-n-2) \cdot z^{-n-3}} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n (n+1)(n+2) \cdot z^{-n-3}, \quad |z| > 2}$

¿?

$f(z) = \frac{g''(z)}{2z} = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n (n+1)(n+2)\, z^{-n-3} =$

$\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{n-1} (n+1)(n+2)\, z^{-n-4}, \quad |z| < 2}$

( )

( )

( )

Junio 2007
Problema 4

a) Demostrar que si $F(s)$ es una función analítica en $\mathbb{C}-\{s_1,....,s_n\}$ siendo si $\in \mathbb{C}, i=1,...,n$ con $|F(s)|\leq\frac{M}{s^b}, |s|\geq R$, con $M,R,b>0$, Entonces

$$f(t)=L^{-1}(F(s))=\sum_{i=1}^{n}\text{Res}\left[\text{F}(\text{s})e^{st}, s=si\right], \quad \forall t\geq 0$$

b) Encontrar la expresión de la Transformada de Laplace de una función $f(t)$ periódica de periodo $T>0$.