

simplyjarod.com

ELMG

Apuntes de Crisser

Apuntes y exámenes ETSIT UPM



Si alguna vez estos
apuntes te sirvieron
de ayuda, piensa que
tus apuntes pueden
ayudar a muchas
otras personas.

Comparte tus apuntes
en simplyjarod.com

ELMG

TEMARIO

TEMA 0: INTRODUCCIÓN

TEMA 1: ELECTROSTÁTICA.

TEMA 2: MAGNETOSTÁTICA.

TEMA 3: INDUCCIÓN.

TEMA 4: CUESTIONES.

EVALUACIÓN

5% ASISTENCIA A CLASE

5% EJERCICIOS DE CLASE

5% PARCIAL 1 (EXAMEN DÍA 27-30 DE SEPTIEMBRE) $\Rightarrow$ TEMA 0

5% PARCIAL 2 (EXAMEN DÍA 24-28 DE OCTUBRE) $\Rightarrow$ TEMA 1 (1ª parte)

5% PARCIAL 3 (EXAMEN DÍA 14-18 DE NOVIEMBRE) $\Rightarrow$ TEMA 1 (2ª parte) + RESISTENCIAS

5% PARCIAL 4 (EXAMEN DÍA 12-16 DE DICIEMBRE) $\Rightarrow$ TEMA 2 + TEMA 3

70% EX. FINAL (LUNES 16 DE ENERO)

RAÚL

679833504
912295675

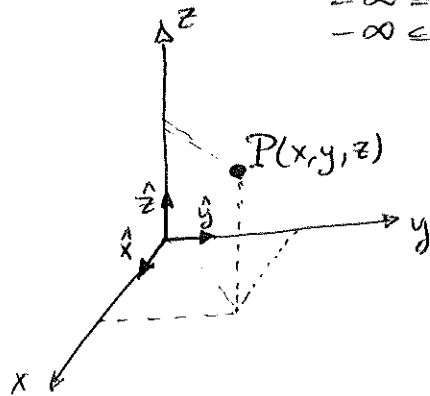
raulcrisser@yahoo.es

Tema 0: Introducción

1. Introducción matemática

a) Sistema de coordenadas

* Cartesianas



$$\begin{aligned} -\infty &\leq x \leq +\infty \\ -\infty &\leq y \leq +\infty \\ -\infty &\leq z \leq +\infty \end{aligned}$$

vectores unitarios:

$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ó $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$
son todos constantes

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

$$dl = |d\vec{l}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

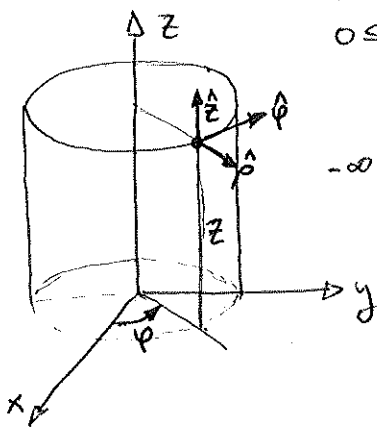
$$d\vec{S}_x = dS_x \cdot (\pm \hat{x}) = dy dz \cdot (\pm \hat{x})$$

$$d\vec{S}_y = dS_y \cdot (\pm \hat{y}) = dx dz \cdot (\pm \hat{y})$$

$$d\vec{S}_z = dS_z \cdot (\pm \hat{z}) = dx dy \cdot (\pm \hat{z})$$

$$dV = dx dy dz$$

* Cilíndricas



$0 \leq \rho \leq \infty \equiv$ distancia del punto al eje z

$0 \leq \varphi < 2\pi \equiv$ ángulo que forma la semirrecta que une el origen con la proyección del punto sobre el plano xy , con el eje x^+

$-\infty \leq z \leq \infty \equiv$ igual que en cartesianas

vectores unitarios:

$$(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}) \text{ ó } (\hat{u}_\rho, \hat{u}_\varphi, \hat{u}_z)$$

$\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ son vectores variables
hay que pasarlos a cartesianas para integrar/derivar

$$\hat{\rho} = \cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\varphi)\hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}$$

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$d\vec{l} = d\rho \cdot \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$$

$$dl = |d\vec{l}| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2}$$

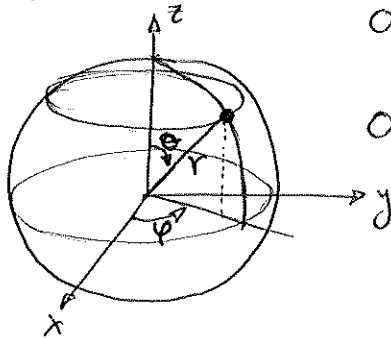
$$d\vec{S}_\rho = dS_\rho \cdot (\pm \hat{\rho}) = \rho d\varphi dz \cdot (\pm \hat{\rho})$$

$$d\vec{S}_\varphi = dS_\varphi \cdot (\pm \hat{\varphi}) = d\rho dz \cdot (\pm \hat{\varphi})$$

$$d\vec{S}_z = dS_z \cdot (\pm \hat{z}) = \rho d\rho d\varphi \cdot (\pm \hat{z})$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

* Esféricas



$0 \leq r \leq \infty$ = distancia del punto al origen

$0 \leq \Theta \leq \pi$ = ángulo mínimo del vector de posición con el eje z^+

$0 \leq \varphi < 2\pi$ = igual que en cilíndricas

vectores unitarios:

$$(\hat{r}, \hat{\Theta}, \hat{\varphi}) \text{ ó } (\hat{u}_r, \hat{u}_\Theta, \hat{u}_\varphi)$$

los tres son vectores variables

hay que pasarlos a cartesianas para {integrar, derivar}

$$\hat{r} = \sin\Theta \cos\varphi \hat{x} + \sin\Theta \sin\varphi \hat{y} + \cos\Theta \hat{z}$$

$$\hat{\Theta} = \cos\Theta \cos\varphi \hat{x} + \cos\Theta \sin\varphi \hat{y} - \sin\Theta \hat{z}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi \hat{x} + \cos\varphi \hat{y}$$

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$r = |\vec{r}| = r$$

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\Theta \hat{\Theta} + r \sin\Theta d\varphi \hat{\varphi}$$

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (r d\Theta)^2 + (r \sin\Theta d\varphi)^2}$$

$$d\vec{S}_r = dS_r \cdot (\pm \hat{r}) = r^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi \cdot (\pm \hat{r})$$

$$d\vec{S}_\Theta = dS_\Theta \cdot (\pm \hat{\Theta}) = r \sin\Theta dr d\varphi \cdot (\pm \hat{\Theta})$$

$$d\vec{S}_\varphi = dS_\varphi \cdot (\pm \hat{\varphi}) = r d\Theta dr \cdot (\pm \hat{\varphi})$$

$$dV = r^2 \sin\Theta dr d\Theta d\varphi$$

Nota: para multiplicar vectores de diferentes sistemas coordenados pasaremos los vectores a multiplicar a cartesianas previamente

Factores de escala:

	h_1	h_2	h_3
cartesiano	1	1	1
cilíndrico	1	ρ	1
esférico	1	r	$r \sin\Theta$

$$d\vec{l} = 1 \cdot dx \hat{x} + 1 \cdot dy \hat{y} + 1 \cdot dz \hat{z}$$

$$d\vec{l} = 1 \cdot d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + 1 \cdot dz \hat{z}$$

$$d\vec{l} = 1 \cdot dr \hat{r} + r d\Theta \hat{\Theta} + r \sin\Theta d\varphi \hat{\varphi}$$

RELACION ENTRE COORDENADAS

	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
Cartesianas		$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
Cilíndricas	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$		$\begin{cases} \rho = r \sin \theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
Esféricas	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) \\ \varphi = \varphi \end{cases}$	

RELACION ENTRE VECTORES UNITARIOS

	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
Cartesianas		$\begin{cases} \hat{x} = \hat{\rho} \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi \\ \hat{y} = \hat{\rho} \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{x} = \sin \theta \cos \varphi \hat{r} + \cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \sin \varphi \hat{\varphi} \\ \hat{y} = \sin \theta \sin \varphi \hat{r} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi} \\ \hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \end{cases}$
Cilíndricas	$\begin{cases} \hat{\rho} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \\ \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$		$\begin{cases} \hat{\rho} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \\ \hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \end{cases}$
Esféricas	$\begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \end{cases}$	

OPERADORES VECTORIALES

GRADIENTE

Cartesianas:
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{u}_z$$

Cilíndricas:
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{u}_z$$

Esféricas:
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi$$

DIVERGENCIA

Cartesianas:
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Cilíndricas:
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Esféricas:
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

ROTACIONAL

Cartesianas:
$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z$$

Cilíndricas:
$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{u}_z$$

Esféricas:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{u}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{u}_\varphi$$

LAPLACIANA ESCALAR

Cartesianas: $\nabla^2 V = \Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Cilíndricas: $\nabla^2 V = \Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Esféricas:

$$\nabla^2 V = \Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

LAPLACIANA VECTOR

$$\nabla^2 \vec{A} = \Delta \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

OTRAS RELACIONES

$$\nabla \times (\nabla V) = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

b) Operadores vectoriales matemáticos:

* Gradiente de un campo escalar

Sea ϕ un campo escalar:

$$\nabla\phi = \text{grad}(\phi) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} \hat{u}_3$$

El gradiente de una función en un punto da un vector cuya dirección es la dirección de máxima variación del campo escalar.

* Divergencia de un campo vectorial

Sea $\vec{A}$ un campo vectorial:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_1 h_3}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right]$$

$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{A}$ es un campo solenoidal $\Leftrightarrow$ sus líneas de campo son cerradas o No tienen principio ni fin

$$\text{div}(\vec{A}) = 0 \Leftrightarrow \text{No tiene fuentes ni sumideros} \Leftrightarrow \oint_S \vec{A} d\vec{S} = 0$$

Fuente: $\nabla \cdot \vec{A} > 0$

Sumidero: $\nabla \cdot \vec{A} < 0$

* Rotacional de un campo vectorial

Sea $\vec{A}$ un campo vectorial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot}(\vec{A}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \perp \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A} \text{ es } \begin{cases} \text{conservativo} \\ \text{irrotacional} \\ \text{estático} \end{cases} \Leftrightarrow \exists U \text{ tal que } \vec{A} = -\nabla U$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \vec{A} d\vec{l} = U(1) - U(2) \Leftrightarrow \oint_C \vec{A} d\vec{l} = 0$$

independiente del camino

* Laplaciana escalar

Sea ϕ un escalar:

En cartesianas:

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \text{div}(\text{grad}(\phi)) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

* Laplaciana vector:

Sea $\vec{A}$ un vector:

$$\Delta\vec{A} = \nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

* Otras relaciones:

$$\nabla \times \nabla\phi = \vec{0} \quad \forall \phi \text{ campo escalar}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad \forall \vec{A} \text{ campo vectorial}$$

C) Definiciones y teoremas

* Flujo de un vector a través de una superficie:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} \quad \text{si } S \text{ es cerrada} \quad \text{(con tapa)}$$

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad \text{si } S \text{ es abierta} \quad \text{(sin tapa)}$$

* Circulación de un vector a lo largo de una curva:

$$\oint_C \vec{A} d\vec{l} \quad \text{si } C \text{ es cerrada} \quad \text{(con tapa)}$$

$$\int_C \vec{A} d\vec{l} \quad \text{si } C \text{ es abierta} \quad \text{(sin tapa)}$$

* Teorema de Gauss o de la divergencia

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV$$

S es la superficie cerrada que encierra a V

El $d\vec{S}$ se toma saliente al volumen

* Teorema de Stokes o del rotacional

$$\oint_C \vec{A} d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

S es cualquier superficie que apoye en C

El $d\vec{S}$ se toma según la regla de la mano derecha

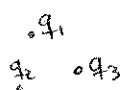
2. Introducción al electromagnetismo

a) Densidad o distribución de carga

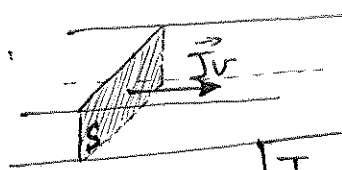
• Volumétricas:  $\rho_v = \frac{dq}{dV} (C/m^3) \Rightarrow Q_{TOT} = \iiint_V \rho_v \cdot dV$

• Superficiales:  $\rho_s = \sigma_s = \frac{dq}{dS} (C/m^2) \Rightarrow Q_{TOT} = \iint_S \rho_s \cdot dS$

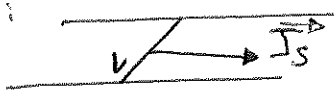
• Lineales:  $\lambda = \rho_L = \frac{dq}{dl} (C/m) \Rightarrow Q_{TOT} = \int_L \lambda \cdot dl$

• Puntuales:  $q_i (C) \Rightarrow Q_{TOT} = \sum_{i=1}^n q_i$

b) Densidad o distribución de corriente

• Volumétricas:  $\vec{J}_v = \frac{dq}{dS dt} \hat{u} (A/m^2)$
 $\vec{I}_{TOT} = \iint_S \vec{J}_v d\vec{S}$
 $\hat{u}$ vector unitario en el sentido de movimiento de la corriente

Si una $\rho_v (C/m^3)$ se mueve a velocidad $\vec{v}$, se genera una J_v dada por: $\vec{J}_v = \rho_v \vec{v} (A/m^2)$

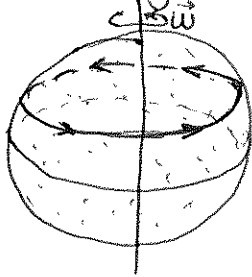
• Superficial:  $\vec{J}_s = \frac{dq}{dl \cdot dt} \hat{u} (A/m)$
 $\vec{I}_{TOT} = \int_L \vec{J}_s \hat{n} dl$
 $\hat{u}$ vector unitario en el sentido de movimiento de la corriente

Si una $\rho_s (C/m^2)$ se mueve a velocidad $\vec{v}$, se genera una J_s dada por: $\vec{J}_s = \rho_s \vec{v} (A/m)$

• Filiformes $\xrightarrow{\quad}$
 $\vec{I}_{TOT} = \vec{I} \text{ (A)}$

Si una $\lambda \text{ (C/m)}$ se mueve a velocidad $\vec{v}$,
 genera $\boxed{\vec{I} = \lambda \vec{v}} \text{ (A)}$

Caso esfera:



$$\vec{J}_s = J_{so} \hat{\phi} \text{ (A/m)}$$

$$\vec{J}_v = J_{vo} \hat{\phi} \text{ (A/m}^2\text{)}$$

c) Campo electromagnético:

Es el conjunto de 4 campos:

$\vec{E} \equiv$ Intensidad de campo eléctrico o campo eléctrico
 $(V/m) \text{ ó } (N/C)$

$\vec{D} \equiv \begin{cases} \text{Desplazamiento eléctrico} \\ \text{Densidad de flujo eléctrico } (C/m^2) \\ \text{Inducción eléctrica} \end{cases}$

$\vec{H} \equiv$ Intensidad de campo magnético (A/m).

$\vec{B} \equiv \begin{cases} \text{Campo magnético} \\ \text{Densidad de flujo magnético } (Wb/m^2) \text{ ó } (T) \\ \text{Inducción magnética} \end{cases}$

Si una carga q se mueve a velocidad $\vec{v}$ dentro de un campo electromagnético, se ve sometida a la Fuerza de Lorentz.

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_m = q \vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})} \text{ (N)}$$

d) Relaciones entre los campos y características de los medios

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

↳ $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \equiv$ permitividad o ch. dieléctrica del medio

↳ la del vacío = $\frac{10^{-9}}{36\pi}$ (F/m)

↳ la relativa del medio $\epsilon_r \geq 1$

Polarización eléctrica:

$$\vec{P} = \vec{D} - \vec{D}_0 = \vec{D} - \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \epsilon \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$\chi_e = \epsilon_r - 1 \equiv$ susceptibilidad eléctrica

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

↳ $\mu = \mu_r \mu_0 \equiv$ permeabilidad o ch. magnética del medio

↳ la del vacío = $4\pi \cdot 10^{-7}$ (H/m)

↳ la relativa del medio $\mu_r = 1$ si no dicen otra cosa

Polarización magnética o imanación:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \frac{\mu \vec{H}}{\mu_0} - \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H} \text{ (A/m)}$$

$\chi_m = \mu_r - 1 \equiv$ susceptibilidad magnética

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \text{ (A/m}^2\text{)} \equiv \text{Densidad de corriente de conducción}$$

Ley de Ohm generalizada

$\sigma \equiv$ conductividad del medio (S/m) ó (V/m) ó (mho/m) ó $(\Omega m)^{-1}$

$\sigma = \infty$ es un conductor perfecto

$\sigma = 0$ es un dieléctrico perfecto

c) Ecuaciones de Maxwell:

I) En forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (\text{ec. de Maxwell - Faraday - Lenz})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (\text{ec. de Maxwell - Ampere})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (\text{ec. de Maxwell - Gauss})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{ec. de Maxwell - Gauss del magnetismo})$$

siendo:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{A/m}^2) \equiv \text{Densidad volumétrica de corriente de conducción}$$

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{J}_D \quad (\text{A/m}^2) \equiv \text{Densidad volumétrica de corriente de desplazamiento}$$

$$\rho_v \quad (\text{C/m}^3) \equiv \text{Densidad volumétrica de carga}$$

$\vec{B}$ es siempre solenooidal (las líneas de $\vec{B}$ son cerradas)

II) En forma integral: (leyes de Maxwell)

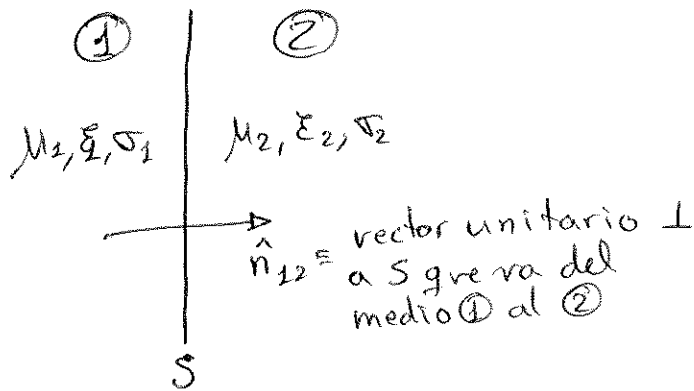
$$\oint_{emf} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (V) \quad \text{ley de Faraday - Lenz}$$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{enlazada por } C} \quad \text{ley de Ampere}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_{\text{encerrada por } S} \quad \text{ley de Gauss}$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{ley de Gauss del magnetismo}$$

f) Condiciones de contorno o frontera



$\hat{n}_{12} \equiv$ vector unitario $\perp$ a S que va del medio ① al ②

$$E_{2 \text{ tang}}|_S = E_{1 \text{ tang}}|_S$$

$$B_{2n}|_S = B_{1n}|_S$$

$$\hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)|_S = \vec{0}$$

$$\hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)|_S = \vec{J}_S$$

siendo:

$\vec{J}_S$ la densidad superficial de corriente en S (A/m)

$$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)|_S = \rho_s$$

siendo:

ρ_s la densidad superficial de carga en S (C/m²)

$$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)|_S = 0$$

La condición de contorno para el potencial eléctrico es:
 $\phi_1|_S = \phi_2|_S$ "El potencial sí es una función continua".

g) Ecuación de continuidad y ley de relajación de carga

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{d\rho_v}{dt} = 0} \quad (\text{ec. de continuidad})$$

La solución de esta ecuación diferencial para medios homogéneos se llama ley de relajación de carga.

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{d\rho_v}{dt} = \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{E}) + \frac{d\rho_v}{dt} = \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D} \right) + \frac{d\rho_v}{dt} =$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon} (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{d\rho_v}{dt} = \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v + \frac{d\rho_v}{dt} = 0$$

Su solución es: $\boxed{\rho_v(t) = \rho_v(t=0) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}} \quad (\text{C/m}^3)$
 (ley de relajación de carga)

se puede generalizar:

$$\rho_s(t) = \rho_s(t=0) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \quad (\text{C/m}^2)$$

$$\lambda(t) = \lambda(t=0) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \quad (\text{C/m})$$

Ej: Deducir las leyes de Ampere, Faraday y Gauss a partir de las ecuaciones de Maxwell.

$$\bullet \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \iiint_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \iiint_V 0 dV \xrightarrow{\text{Gauss diverg}} \oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\bullet \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \Leftrightarrow \iiint_V (\nabla \cdot \vec{D}) dV = \iiint_V \rho_v dV \xrightarrow{\text{Gauss diverg}} \oiint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_{\text{TOT } V} \xrightarrow{\text{S es la superficie que encierra a V}} \oiint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_{\text{encerrada por S}}$$

$$\bullet \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \Leftrightarrow \iint_S (\nabla \times \vec{H}) d\vec{S} = \iint_S (\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}) d\vec{S} \xrightarrow{\text{Stokes}} \oint_C \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{atraviesa S}} \\ \Leftrightarrow \oint_C \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{enlazada por C}} \quad \leftarrow C \text{ enlaza a S}$$

$$\bullet \nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \Leftrightarrow \iint_S (\nabla \times \vec{E}) d\vec{S} = \iint_S \left(-\frac{d\vec{B}}{dt}\right) d\vec{S} \xrightarrow{\text{Stokes}} \oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S} = \\ = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (V)$$



CENTRO DE ESTUDIOS UNIVERSITARIOS
ALCALA GALIANO N°1 3 08 07 26 28010 MADRID

TRIGONOMETRIA

RELACIONES DE EULER

FUNCIONES HIPERBOLICAS

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$	$\sec a = \frac{1}{\cos a} ; \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$	$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$	$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$
$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$	$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$	$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$	$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$	$\operatorname{ctg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b \mp 1}{\operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} b}$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$	$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$	$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$	$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}$	$\operatorname{CTh} x = \frac{1}{\operatorname{Th} x}$
$\operatorname{Sech} x = \frac{1}{\operatorname{Ch} x} ; \operatorname{Cosech} x = \frac{1}{\operatorname{Sh} x}$	$\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1$	$\operatorname{Sh} 2x = 2 \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} x$
$\operatorname{Ch} 2x = \operatorname{Ch}^2 x + \operatorname{Sh}^2 x$	$\sin(ix) = i \operatorname{Sh} x ; \cos(ix) = \operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh}(ix) = i \sin x ; \operatorname{Ch} ix = \cos x$
$\operatorname{Arg} \operatorname{Sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\operatorname{Arg} \operatorname{Ch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\operatorname{Arg} \operatorname{Th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$



Alcala Galiano, I

☎ 3 08 07 26

T-1

APENDICE DE TEORIA DE CALCULO INTEGRAL

INTEGRACION INMEDIATA.-

Consideraremos como integrales inmediatas las comprendidas en la siguiente tabla:

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{si } n \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = Lf(x) + C$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{La} + C \quad (a > 0)$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int f'(x) \cdot \text{sen } f(x) dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \text{sen } f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg } f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -\text{ctg } f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \begin{cases} \text{arc sen } f(x) + C \\ \text{ó} \\ -\text{arc cos } f(x) + C \end{cases}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \begin{cases} \text{arc tg } f(x) + C \\ \text{ó} \\ -\text{arc ctg } f(x) + C \end{cases}$$

$$\int f'(x) \cdot \text{Sh } f(x) dx = \text{Ch } f(x) + C$$

$$\int f'(x) \cdot \text{Ch } f(x) dx = \text{Sh } f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\text{Ch}^2 f(x)} dx = \text{Th } f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\text{Sh}^2 f(x)} dx = -\text{Cth } f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} dx = \text{Arg Sh } f(x) + C = L[f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 + 1}] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}} dx = \text{Arg Ch } f(x) + C = L[f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 - 1}] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2} dx = \text{Arg Th } f(x) + C = \frac{1}{2} L \frac{1+f(x)}{1-f(x)} + C$$

SELECCIÓN DE CUESTIONES PARA PARCIAL 1

BLOQUE 1: OPERADORES MATEMÁTICOS

1.-

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son campos vectoriales, ¿cuánto vale $\nabla \cdot \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B})$?

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \Rightarrow \nabla \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) = 0$$

por el teorema de Swartz
de igualdad de derivadas
cruzadas $\frac{\partial^2 C}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 C}{\partial u_2 \partial u_1}$

2.-

Justifique si el siguiente campo (expresado en coordenadas cartesianas) es o no conservativo:

$\vec{E} = ky\hat{x} + kx\hat{y}$, siendo k una constante

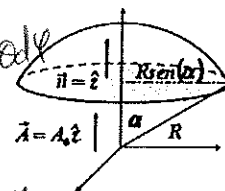
$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ky & kx & 0 \end{vmatrix} = (k - k) \hat{z} = \vec{0}$$

$\vec{E}$ si es conservativo o irrotacional

3.-

Obtenga el flujo del campo $\vec{A} = A_0 \hat{z}$ a través del casquete esférico de radio R y ángulo α

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{A} d\vec{S} &= \iint_S A_0 \hat{z} d\vec{S} = \iint_S A_0 \hat{z} dS \hat{r} = A_0 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &\cdot \hat{z} \cdot [\sin\theta \cos\varphi \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}] = \\ &= A_0 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi = A_0 R^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^\alpha = \end{aligned}$$

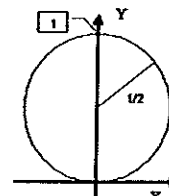


$$= A_0 R^2 \pi \sin^2 \alpha$$

4.-

Obtenga los valores de las siguientes integrales de línea sobre la curva $\rho = \sin\phi$ definida entre 0 y π .

$$\oint_C dl = \text{longitud de la curva} = 2\pi R = \pi$$



$$\oint_C d\vec{l} = \vec{0} \quad (\text{como la integral de todo } d\vec{l} \text{ sobre una curva cerrada})$$

5.-

Demuestre las siguientes igualdades.

$$a) \quad \nabla \times (\nabla f(\vec{r})) = 0 = \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

$$b) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}(\vec{r})) = 0 = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}} - \underbrace{\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}} + \underbrace{\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}} - \underbrace{\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}} + \underbrace{\frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x}} - \underbrace{\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}} = 0$$

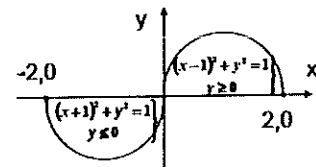
6.-

Obtenga los valores de las siguientes integrales de línea sobre la curva definida entre A(-2,0) y B(2,0).

$$\int_A^B dl = \text{longitud de la curva} = 2\pi R = 2\pi$$

$$\int_A^B d\vec{r} = \vec{L} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 2\hat{x} - (-2\hat{x}) = 4\hat{x}$$

independiente
del camino



7.-

Razone si las siguientes operaciones son o no correctas.

$\nabla \times \vec{A} = \vec{a}$

$\nabla \cdot \vec{A} = \vec{a}$

$\nabla \times \vec{a} = \vec{B}$

$\nabla \cdot \vec{A} = \vec{B}$

No, el operador rotacional tiene naturaleza vectorial

Sí, el operador divergencia se aplica a vectores y tiene naturaleza escalar

No, el operador rotacional se aplica a vectores

No, el operador divergencia tiene naturaleza escalar

8.-

Calcule la longitud recorrida sobre la curva $\rho = a \cdot \cos(\varphi)$, $z = z_0$, entre los puntos

$$\varphi = 0 \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{(\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2} = \left\{ \begin{array}{l} z = z_0 \Rightarrow dz = 0 \\ d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} d\varphi = -a \sin \varphi d\varphi \end{array} \right\} =$$

$$= \int_A^B \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2 + a^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} a \cdot d\varphi = a \frac{\pi}{4}$$

9.-

Calcule en coordenadas cartesianas el operador rotacional y el divergencia aplicado al vector unitario de coordenadas cilíndricas $\hat{\rho}$.

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \Rightarrow \rho\hat{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} \Rightarrow \hat{\rho} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{\rho} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\nabla \times \hat{\rho} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \hat{\rho} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (0) = \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

10.-

Calcule el vector $d\vec{l}$ sobre la curva dada por $\rho = a$, $-\pi < \varphi < \pi$, y $z = \frac{h}{\pi} \varphi$.

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z} = \left\{ \begin{array}{l} \rho = a \Rightarrow d\rho = 0 \\ z = \frac{h}{\pi} \varphi \Rightarrow dz = \frac{dz}{d\varphi} d\varphi = \frac{h}{\pi} d\varphi \end{array} \right\} = \\ &= \left(a\hat{\varphi} + \frac{h}{\pi} \hat{z} \right) d\varphi \end{aligned}$$

11.-

Calcule el $d\vec{l}$ sobre la curva del ejercicio anterior.

$$d\ell = \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2} d\varphi$$

12.-

Calcule el vector $\vec{L}$ sobre la curva plana dada por $z = z_0$, $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, entre $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int_A^B d\vec{l} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (\rho_B\hat{\rho}_B + z_B\hat{z}) - (\rho_A\hat{\rho}_A + z_A\hat{z}) = \left\{ \begin{array}{l} B(\rho_B, \frac{\pi}{4}, z_0) \\ A(\rho_A, 0, z_0) \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \text{ (variables)} \right\} = (a(1 + \cos \frac{\pi}{4})\hat{\rho}_B + z_0\hat{z}) - (a(1 + \cos 0)\hat{\rho}_A + z_0\hat{z}) = \\ &= (a + a\frac{\sqrt{2}}{2})(\cos \frac{\pi}{4} \hat{x} + \sin \frac{\pi}{4} \hat{y}) - 2a(\cos 0 \hat{x} + \sin 0 \hat{y}) = \\ &= a\left(\frac{\sqrt{2}-3}{2}\right)\hat{x} + a\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\hat{y} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \Theta &= \frac{1 + \cos(2\Theta)}{2} \\ |\cos \Theta| &= \sqrt{\frac{1 + \cos(2\Theta)}{2}} \end{aligned} \right\} *$$

13.-

¿Cuál es la longitud del arco correspondiente a la pregunta anterior?

$$\begin{aligned} \int_C dl &= \int_C \sqrt{(dp)^2 + (\rho d\psi)^2 + (dz)^2} = \begin{cases} z = z_0 \Rightarrow dz = 0 \\ \rho = a(1 + \cos \psi) \Rightarrow d\rho = \frac{d\rho}{d\psi} d\psi = -a \sin \psi d\psi \end{cases} \\ &= \int_{\psi=0}^{\psi=\pi/4} \sqrt{a^2 \sin^2 \psi + (a^2 + a^2 \cos^2 \psi + 2a^2 \cos \psi)} d\psi = a \int_{\psi=0}^{\psi=\pi/4} \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos \psi} d\psi = \{*\} \\ &= \sqrt{2} a \int_{\psi=0}^{\psi=\pi/4} \sqrt{2} \left| \cos \frac{\psi}{2} \right| d\psi = 2a \int_0^{\pi/4} \cos \frac{\psi}{2} d\psi = 4a \sin \frac{\psi}{2} \Big|_0^{\pi/4} = 4a \sin \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

14.-

Calcule la divergencia del vector $\vec{v} = a\hat{r}$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \left(\frac{\partial a r^2 \sin \Theta}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial \Theta} + \frac{\partial 0}{\partial \psi} \right) = \frac{a \cdot 2r}{r^2} = \frac{2a}{r}$$

15.-

Calcule el rotacional del vector $\vec{u} = a\hat{\theta}$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin \Theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ 0 & ar & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \left(r \sin \Theta \hat{\phi} \left(\frac{\partial ar}{\partial r} - \frac{\partial 0}{\partial \Theta} \right) \right) =$$

Derivada direccional de f en la dirección S en el punto P : $= \frac{a}{r} \hat{\phi}$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \nabla f \cdot \underline{S} \Big|_P$$

Derivada direccional de $f = x^2 + y^2/2 + z^2/3$ en el punto $(2, 1, 3)$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} = 2x\hat{x} + y\hat{y} + \frac{2}{3}z\hat{z}$$

$$\nabla f \Big|_{(2,1,3)} = 4\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z} : \text{Este vector indica el sentido}$$

de máximo aumento de f en este punto. El sentido opuesto es el de máxima disminución.

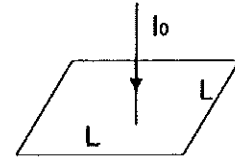
$$\vec{J}_S = \left\{ \begin{array}{l} \frac{I}{\text{long}} \hat{u} \\ \rho_s \cdot \vec{v} \\ \hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S \end{array} \right\} \quad (A/m) \quad I = \int_L \vec{J}_S \cdot \hat{n} \, dl \quad (A)$$

BLOQUE 2: DENSIDADES SUPERFICIALES DE CORRIENTE

16.-

Obtenga la densidad superficial de corriente presente a una distancia ρ del centro de la superficie cuadrada plana de lado L de la figura para el caso en el que $L \gg \rho$, si sobre su centro se aplica una corriente filiforme de I_0 Amperios ..

$$\vec{J}_S = \frac{I_0}{2\pi\rho} \hat{\rho}$$

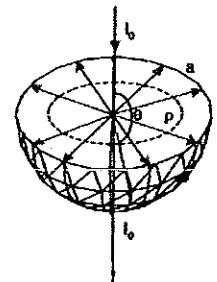


17.-

Obtenga el valor de las densidades superficiales de corriente que aparecen sobre las superficies plana y semiesférica radio a de la figura.

$$\vec{J}_S|_{\text{plana}} = \frac{I_0}{2\pi\rho} \hat{\rho} \quad (0 \leq \rho \leq a)$$

$$\vec{J}_S|_{\text{semiesférica}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram of a hemisphere of radius } a \text{ with current } I_0 \text{ flowing downwards through its center.} \\ \end{array} \right\} = \frac{I_0}{2\pi \text{radio}} \hat{\Theta} = \frac{I_0}{2\pi a \sin\Theta} \hat{\Theta} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \pi \right)$$



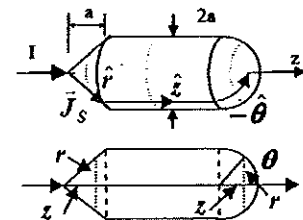
18.-

Calcule la densidad de corriente superficial en régimen estacionario que aparece sobre el conductor de la figura por el cual circula una corriente I .

Tramo 1: Cónico: $\vec{J}_s(z) = \frac{I}{2\pi r \sin(45^\circ)} (\hat{r}) \quad (A/m)$

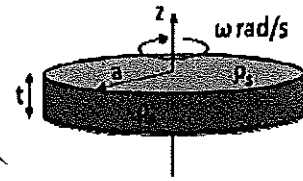
Tramo 2: Cilíndrico: $\vec{J}_s(z) = \frac{I}{2\pi a} (\hat{z}) \quad (A/m)$

Tramo 3: Semiesférico: $\vec{J}_s(z) = \frac{I}{2\pi a \sin\Theta} (-\hat{\Theta}) \quad (A/m) \quad \text{si } (0 \leq \Theta \leq \pi/2)$



19.-

Calcule la densidad de corriente y la corriente asociada en un disco metálico (en las tapas y en la superficie lateral) de radio a y grosor t que soporta una carga superficial ρ_s y que rota a una velocidad ω rad/s.



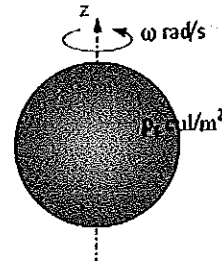
$$\vec{J}_s^{\text{tapas}} = \rho_s \vec{V} = \rho_s \cdot \omega \cdot \rho (-\hat{\phi}) \text{ (A/m)} \quad 0 \leq \rho \leq a$$

$$\vec{J}_s^{\text{lateral}} = \rho_s \vec{V} = \rho_s \cdot \omega \cdot a (-\hat{\phi}) \text{ (A/m)}$$

$$I_{\text{tot}} = 2 \int_L \vec{J}_s^{\text{tapas}} \cdot \hat{n} d\ell + \int_L \vec{J}_s^{\text{lateral}} \cdot \hat{n} d\ell = 2 \int_{\rho=0}^a \rho_s \omega \rho (-\hat{\phi}) (-\hat{\phi}) d\rho + \int_{z=0}^{z=t} \rho_s \omega a (-\hat{\phi}) (-\hat{\phi}) dz = 2 \rho_s \omega \frac{a^2}{2} + \rho_s \omega a t \text{ (A)}$$

20.-

Calcule la densidad de corriente superficial que aparece sobre la esfera metálica de radio a de la figura si tiene una densidad superficial de carga ρ_s cul/m² y gira sobre su eje a ω rad/s en situación cuasiestacionaria.

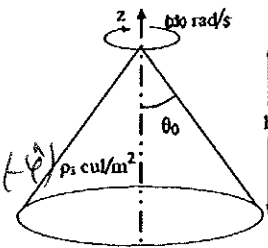


$$\vec{J}_s = \rho_s \cdot \vec{V} = \rho_s \cdot \omega \cdot \text{radio} \cdot \hat{\phi} = \rho_s \omega a \sin \theta \cdot \hat{\phi}$$

$$I = \int_L \vec{J}_s \cdot \hat{n} d\ell = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \rho_s \omega a \sin \theta \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \cdot a d\theta = \rho_s \cdot \omega \cdot a^2 \cdot 2 \text{ (A)}$$

21.-

Calcule la densidad de corriente y la corriente asociada a un cono de carga superficial ρ_s cul/m² con ángulo generatriz θ_0 y altura h , que rota a una velocidad angular ω_0 rad/s

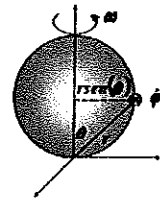


$$\vec{J}_s = \rho_s \vec{V} = \rho_s \cdot \omega \cdot \text{radio} (-\hat{\phi}) = \rho_s \omega r \sin(\theta_0) (-\hat{\phi}) \quad \left(0 \leq r \leq \frac{h}{\cos(\theta_0)}\right)$$

$$I = \int_L \vec{J}_s \cdot \hat{n} d\ell = \int_{r=0}^{\frac{h}{\cos \theta_0}} \rho_s \omega r \sin \theta_0 (-\hat{\phi}) (-\hat{\phi}) dr = \rho_s \omega \sin(\theta_0) \left(\frac{h}{\cos \theta_0}\right)^2$$

22.-

Calcule la densidad de corriente superficial que aparece sobre la superficie $r = 2a \cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ si tiene una densidad superficial de carga ρ_s cul/m² y gira entorno al eje $\theta = 0$ a ω rad/s



$$\vec{J}_S = \rho_s \vec{V} = \rho_s \cdot \omega \cdot \text{radio}(\hat{\varphi}) = \rho_s \omega r \sin\theta (\hat{\varphi}) =$$

$$= \rho_s \omega \cdot 2a \cos\theta \sin\theta (\hat{\varphi}) \quad (\text{A/m}) \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$I = \int_L \vec{J}_S \cdot \hat{n} d\ell = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \rho_s \omega 2a \cos\theta \sin\theta \hat{\varphi} \hat{\varphi} \cdot r d\theta =$$

$$= \int \rho_s \omega 2a \cos\theta \sin\theta \hat{\varphi} \hat{\varphi} 2a \cos\theta d\theta = \rho_s 4a^2 \omega \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\rho_s 4a^2 \omega}{3} \quad (\text{A})$$

23.-

Caracterice las fuentes de corriente superficial que aparecen en la siguiente distribución de intensidad de campo magnético en el vacío expresada en coordenadas cilíndricas siendo k es una constante.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{k}{\rho} \hat{\phi} & 0 \leq \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \rightarrow$$

$$\vec{J}_S(\rho=a) = \hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S = \hat{\rho} \times (\vec{H}(\rho=a^+) - \vec{H}(\rho=a^-)) = \hat{\rho} \times \left(\vec{0} - \frac{k}{a} \hat{\phi} \right) = \frac{-k}{a} \hat{z}$$

24.

Dada la distribución de campo magnético en el vacío $\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} G \frac{a}{\rho} \hat{\phi} & ; 0 \leq \rho < a \\ 0 & ; a < \rho \end{cases}$

¿Cuánto vale la densidad de corriente en la superficie $\rho = a$?

$$\vec{J}_S(\rho=a) = \hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S = \hat{\rho} \times (\vec{H}(\rho=a^+) - \vec{H}(\rho=a^-)) = \hat{\rho} \times \left(\vec{0} - G \frac{a}{a} \hat{\phi} \right) = -G \hat{z} \quad (\text{A/m})$$

$$I = \int_L \vec{J}_S \cdot \hat{n} d\ell = \int G (-\hat{z}) (-\hat{z}) a d\varphi = G 2\pi a \quad (\text{A})$$

25.- ¿Qué unidades deberá tener la constante G de la pregunta anterior?

A/m

condiciones de contorno

$$\left[\begin{array}{l} \rho_s = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_S ; \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \\ E_j: \rho_s(r=a) = \hat{r} (\vec{D}(r=a^+) - \vec{D}(r=a^-)) \\ E_j: \rho_s(x=3) = \hat{x} (\vec{D}(x=3^+) - \vec{D}(x=3^-)) \end{array} \right.$$

BLOQUE 3: DENSIDADES SUPERFICIALES DE CARGA

26.-

Dada la distribución de campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{K}{\rho} e^{\frac{\rho}{a}} \hat{\rho} & ; 0 \leq \rho < a \\ 0 & ; a < \rho \end{cases}$

¿Cuánto valdrá la densidad de carga sobre la superficie $\rho = a$?, la constante dieléctrica relativa vale $\epsilon_r = 1 \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0$.

$$\begin{aligned} \rho_s(\rho=a) &= \hat{\rho} (\vec{D}(\rho=a^+) - \vec{D}(\rho=a^-)) = \hat{\rho} (\epsilon_0 \vec{E}(\rho=a^+) - \epsilon_0 \vec{E}(\rho=a^-)) = \\ &= \hat{\rho} \epsilon_0 (0 - \frac{K}{a} e^{\frac{a}{a}} \hat{\rho}) = -\epsilon_0 \frac{K}{a} e \quad (C/m^2) \\ \rho_v = \nabla \cdot \vec{D} &= \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \epsilon_0 E)}{\partial \rho} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 K e^{\frac{\rho}{a}}}{a \rho} & \text{si } \rho < a \\ 0 & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (C/m^3) \end{aligned}$$

27.-

Para el potencial dado en una zona del espacio ocupada por el vacío y siendo A una constante, justifique el valor de la densidad superficial de carga de la discontinuidad en $r=a$.

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} Ar & r \leq a \\ \frac{Aa^2}{r} & r \geq a \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi = -\nabla \phi(r) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} = \begin{cases} -A \hat{r} & \text{si } r < a \\ \frac{Aa^2}{r^2} \hat{r} & \text{si } r > a \end{cases} \quad (V/m)$$

$$\begin{aligned} \rho_s(r=a) &= \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_S = \hat{r} (\vec{D}(r=a^+) - \vec{D}(r=a^-)) = \\ &= \hat{r} (\epsilon_0 A \hat{r} - \epsilon_0 (-A \hat{r})) = 2\epsilon_0 A \quad (C/m^2) \end{aligned}$$

condiciones de contorno

$$\left[\begin{array}{l} J_s = \hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S \\ E_j: J_s(r=b) = \hat{r} \times (H(r=b^+) - H(r=b^-)) \end{array} \right.$$

27.-

$$\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \epsilon_0 E) = \begin{cases} \frac{-2\epsilon_0 A}{r} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (C/m^3)$$

TEMA 1: ELECTROSTÁTICA

1.- INTRODUCCIÓN:

Para el estudio de la electrostática partimos de las ecuaciones de Maxwell, la ley de Ohm generalizada y la ecuación de continuidad.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_C + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{J}_C = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_C + \frac{d\rho_v}{dt} = 0$$

Una situación electrostática se caracteriza por:

* No hay variación temporal: $\frac{d}{dt} = 0$

* No hay movimiento de cargas: $\vec{J}_C = \vec{0}$

Así pues las ecuaciones anteriores se escriben de la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{0} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$0 + 0 = 0$$

COMENTARIOS:

- En electrostática $\vec{B} = \vec{H} = \vec{0}$.
- En electrostática el campo eléctrico es conservativo.
- En electrostática el campo eléctrico dentro de los conductores es cero.

2.- POTENCIAL ELÉCTRICO: (ϕ)

El potencial eléctrico es una función que se mide en voltios y que cumple que:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (\text{Campo eléctrico en una región})$$

$$\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{Potencial eléctrico en una región})$$

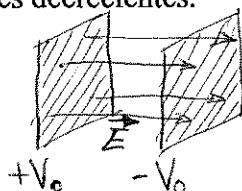
$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{Diferencial de potencial entre dos puntos})$$

COMENTARIOS:

- El trabajo necesario para llevar una carga q desde un punto A hasta otro punto B es INDEPENDIENTE DEL CAMINO y vale:

$$W_{AB} = q \cdot (V_A - V_B) \quad (\text{Julios})$$

- El potencial es una función continua incluso ante discontinuidades de medio.
- Como $\vec{E} = -\nabla\phi$, el campo eléctrico tiene el sentido de los potenciales decrecientes.



EJERCICIO:

- Calcular el campo eléctrico y el potencial en el interior de un conductor en situación electrostática.
- Si introducimos una carga Q en el conductor ¿Dónde se sitúa?
- ¿Cómo son las líneas de campo eléctrico en la superficie del conductor?

a) Sabemos que: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$
 En electrostática $\vec{J}_{int} = \vec{0} = \sigma \vec{E}_{int} \Rightarrow \vec{E}_{int} = 0 \quad (V/m)$
 $\phi_{int} = -\int \vec{E}_{int} d\vec{l} = cte \quad (V)$
 Los conductores en electrostática son equipotenciales

b) Aplicamos Gauss sobre una superficie totalmente contenida en el conductor:
 $Q_{enc} = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \{ \vec{D} = \vec{D}_{int} = 0 \} = 0 \quad (\text{Culombios})$
 La única posibilidad es que la carga esté en la superficie del conductor.

c) Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_S = \vec{0} \Leftrightarrow E_{2\text{tang}} \Big|_S = E_{1\text{tang}} \Big|_S$$

Si llamamos medio 1 al conductor ($\vec{E}_1 = \vec{0}$) $\Rightarrow \vec{E}_{2\text{tang}} \Big|_S = \vec{0}$

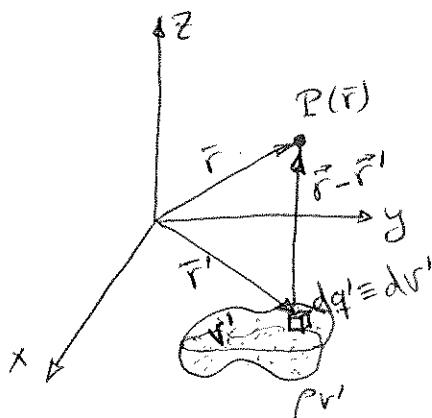
$$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_S = \rho_s \Leftrightarrow \epsilon_2 \cdot E_{2n} \Big|_S - \epsilon_1 E_{1n} \Big|_S = \rho_s$$

Si llamamos medio 1 al conductor ($\vec{E}_1 = \vec{0}$) $\Rightarrow E_{2n} \Big|_S = \frac{\rho_s}{\epsilon_2}$

Perpendicular a la superficie

3.- MÉTODOS PRÁCTICOS DE CÁLCULO DE $(\vec{E})$ Y DE (ϕ) :

3.1.- INTEGRALES DE SUPERPOSICIÓN (Aportaciones infinitesimales):



$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (V/m)$$

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{dq'}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (V)$$

Siendo:

$\vec{r} \equiv$ Vector de posición del punto donde nos piden calcular $(\vec{E})$ y/o (ϕ) .

$\vec{r}' \equiv$ Vector de posición de un dq genérico, dentro de la distribución de carga que genera el campo y/o el potencial pedido.

Para distribuciones volumétricas de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_{V'} \frac{\rho_{v'} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \cdot dV'}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (V/m)$$

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_{V'} \frac{\rho_{v'} \cdot dV'}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (V)$$

Para distribuciones superficiales de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iint_{S'} \frac{\rho_{s'} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \cdot dS'}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (V/m)$$

$$\phi(\vec{r}) = \iint_{S'} \frac{\rho_{s'} \cdot dS'}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (V)$$

Para distribuciones lineales de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{L'} \frac{\lambda' \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{l}'}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (V/m)$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_{L'} \frac{\lambda' \cdot d\vec{l}'}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (V)$$

Para cargas puntuales:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (V/m)$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (V)$$

COMENTARIO FINAL IMPORTANTE:

SE UTILIZA ESTE MÉTODO CUANDO TENEMOS DATOS DE CARGA Y NOS PIDEN EL CAMPO Y/O EL POTENCIAL EN UN PUNTO O EN UN EJE (HAY EXCEPCIONES)

3.2.- LEY DE GAUSS:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{encerrada por } S}$$

Aplicando Gauss se obtiene el vector $\vec{D}$ o $\vec{E}$, y después el potencial es:

$$\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

COMENTARIO FINAL IMPORTANTE:

SE UTILIZA ESTE MÉTODO CUANDO TENEMOS DATOS DE CARGA Y NOS PIDEN EL CAMPO Y/O EL POTENCIAL EN UNA REGIÓN O EN TODO EL ESPACIO (DEBE HABER SIMETRÍA).

3.3.- LEY DE POISSON PARA MEDIOS HOMOGÉNEOS:

Para llegar a la ley de Poisson en medios homogéneos partimos de la ecuación de Maxwell-Gauss como indicamos a continuación:

$$\begin{aligned}\rho_v &= \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon \cdot \vec{E}) = \{ \text{Como el medio es homogéneo} \} = \epsilon \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) = \\ &= \epsilon \cdot (\nabla \cdot (-\nabla \phi)) = -\epsilon \cdot \Delta \phi\end{aligned}$$

Despejando:

$$\Delta \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad \text{LEY DE POISSON PARA MEDIOS HOMOGÉNEOS}$$

Si no hay densidad volumétrica de carga en la región donde se aplica la ley anterior, se utiliza la ECUACIÓN DE LAPLACE:

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{ECUACIÓN DE LAPLACE}$$

Con estas ecuaciones obtenemos el potencial eléctrico, y después el campo eléctrico viene dado por:

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

COMENTARIO FINAL IMPORTANTE:

SE UTILIZA ESTE MÉTODO CUANDO TENEMOS DATOS DE POTENCIAL Y EL MEDIO ES HOMOGÉNEO.

SI EL MEDIO NO ES HOMOGÉNEO PARTIREMOS DE $\rho_v = \nabla \cdot \vec{D}$

3.4.- CONDICIONES DE REGULARIDAD:

Los campos y potenciales calculados por cualquiera de estos métodos deben verificar EN LA REGIÓN DONDE CORRESPONDA las siguientes condiciones de regularidad:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{E}| \cdot r^2 = cte$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi \cdot r = cte$$

Nota: $r \rightarrow \infty$ significa a una distancia ∞ de las cargas. Si hay cargas en el infinito no se tienen por qué cumplir estas condiciones.

4.- CONDENSADORES:

4.1.- DEFINICIONES PREVIAS:

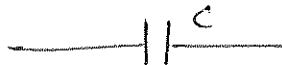
- *Conductor aislado* = Es aquel conductor que no está conectado a nada; por tanto conserva la carga que tuviera inicialmente.
- *Conductor descargado* = Es aquel conductor cuya carga total es cero.
- *Conductor conectado a tierra o a masa* = Es aquel conductor cuyo potencial es cero y tiene un camino para cargarse y/o descargarse.

4.2.- DEFINICIÓN DE CONDENSADOR:

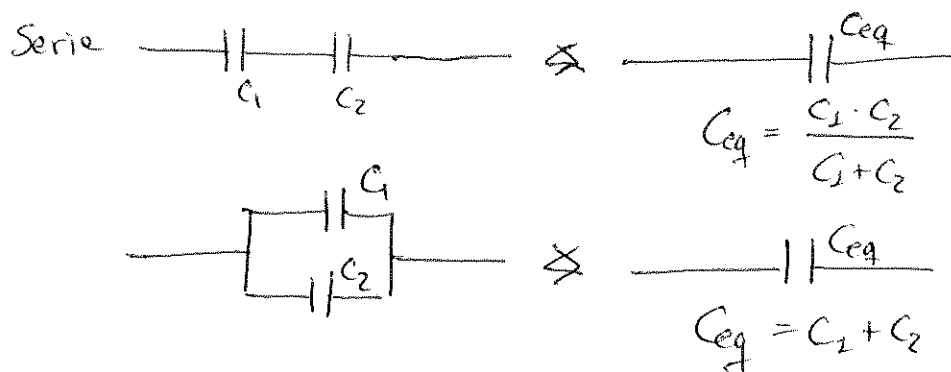
Si dos conductores están separados por un dieléctrico descargado, y entre ellos se aplica una diferencia de potencial (V_0), uno se cargará con $+Q$ culombios y el otro con $-Q$ culombios, formándose así un condensador, cuya capacidad es:

$$C = \frac{Q}{V_0} \quad (\text{Faradios})$$

NOTA: La capacidad de un condensador depende del dieléctrico con el que está formado y de la geometría del mismo, pero no de la carga ni de la diferencia de potencial aplicada entre sus armaduras.

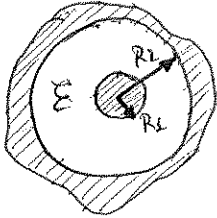
Símbolo: 

Asociaciones:



4.3.- CONDENSADORES HOMOGÉNEOS:

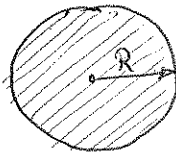
4.3.1.- CONDENSADOR ESFÉRICO HOMOGÉNEO:



$$C_{esferico} = 4\pi\epsilon \cdot \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 - R_1} \quad (F)$$

Nota: El condensador asociado a una esfera de radio R es:

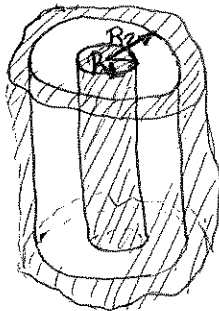
$$(R_2 \rightarrow \infty)$$



$$C_{esfera} = 4\pi\epsilon R \quad (F)$$

4.3.2.- CONDENSADOR CILÍNDRICO HOMOGÉNEO:

El condensador cilíndrico se debe calcular por unidad de longitud o despreciar el efecto de bordes (ver nota)



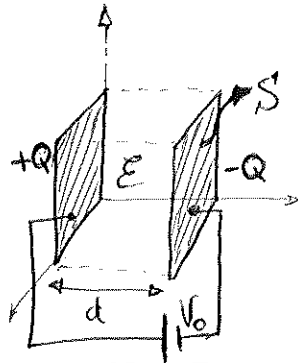
$$C_{cilindrico} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (F/m)$$

Nota: Despreciar efecto de bordes es considerar que todos los puntos del condensador se comportan como si este fuera infinito; por tanto, la capacidad asociada a un condensador cilíndrico homogéneo de altura total h es, despreciando el efecto de bordes:

$$C = \frac{2\pi\epsilon \cdot h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (F)$$

4.3.3.- CONDENSADOR PLANO HOMOGÉNEO:

El condensador plano homogéneo se calcula despreciando el efecto de bordes y su valor es:



$$C_{\text{plano}} = \epsilon \cdot \frac{S}{d} \text{ (F)}$$

Nota: Despreciando el efecto de bordes el campo eléctrico dentro de un condensador plano viene dado por:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{V_0}{d} \hat{y}} = \frac{Q}{C \cdot d} \hat{y} = \frac{Q}{\epsilon S} \hat{y} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \hat{y}$$

$C = \frac{Q}{V_0}$ $C = \epsilon \frac{S}{d}$ si la carga se distribuye uniformemente

4.4.- ENERGÍA ALMACENADA EN UN CONDENSADOR:

$$W_e = \underbrace{\frac{1}{2} C \cdot V_0^2}_{\text{a potencial constante}} = \underbrace{\frac{Q^2}{2 \cdot C}}_{\substack{\text{a carga constante} \\ \text{(aislado)}}} = \frac{1}{2} Q \cdot V_0 \quad (\text{Julios})$$

4.5.- FUERZA QUE ACTÚA SOBRE LAS PLACAS DE UN CONDENSADOR, CUANDO SU ENERGÍA VARÍA DE ALGUNA FORMA:

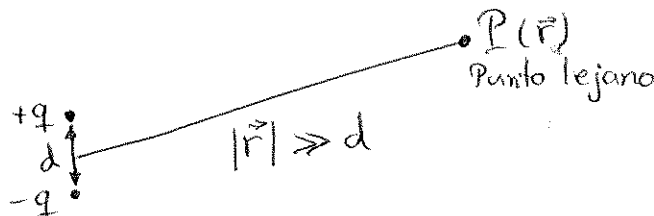
A potencial constante: $\vec{F} = +\nabla W_e = +\nabla \left(\frac{1}{2} C \cdot V_0^2 \right) \text{ (N)}$

A carga constante: $\vec{F} = -\nabla W_e = -\nabla \left(\frac{Q^2}{2 \cdot C} \right) \text{ (N)}$

5.- DIPOLO ELÉCTRICO:

Un dipolo eléctrico es un conjunto de dos distribuciones de carga en la que una de ellas tendrá una carga total $+Q$ y la otra una carga total $-Q$, de tal forma que la carga total es cero.

Por ejemplo:



Cuando el punto sea lejano se aplicarán las fórmulas del dipolo;

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left[\frac{3 \cdot [\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \vec{p} \right]$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Siendo:

$\vec{r} \equiv$ Vector de posición del punto donde nos piden calcular $(\vec{E})$ y/o (ϕ) .

$\vec{r}' \equiv$ Vector de posición del centro del dipolo. (OJO no confundir con el vector de posición que vimos en el punto 3.1)

$\vec{p} \equiv$ Momento dipolar eléctrico de la distribución de cargas.

Si el dipolo está centrado o muy próximo al origen de coordenadas $\vec{r}' = \vec{0}$, y las fórmulas anteriores se escriben:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon \cdot r^3} \left[\frac{3 \cdot (\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right] \quad (\text{V/m})$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon \cdot r^3} \quad (\text{V})$$

5.1.- CÁLCULO DEL MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO $\vec{p}$:

CARGA VOLUMÉTRICA: $\vec{p} = \iiint_{V'} \vec{r}' \cdot \rho_{V'} \cdot dV'$ (C · m)

CARGA SUPERFICIAL: $\vec{p} = \iint_{S'} \vec{r}' \cdot \rho_{S'} \cdot dS'$ (C · m)

CARGA LINEAL: $\vec{p} = \int_{L'} \vec{r}' \cdot \lambda' \cdot dl'$ (C · m)

CARGAS PUNTUALES: $\vec{p} = q \cdot d \cdot \hat{u}_{-+}$ (C · m)

Siendo:

$\vec{r}' \equiv$ Vector de posición de un dq genérico tomado tanto en la distribución de cargas positiva como en la negativa. (ver problemas)

5.2.- DIPOLO DENTRO DE UN CAMPO ELÉCTRICO:

Cuando una distribución dipolar está dentro de un campo eléctrico que ella **NO** ha producido, y que llamaremos $\vec{E}_{ext}$, tendremos las siguientes fórmulas:

$W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$ (Julios) = Energía de interacción entre el campo y el dipolo

$\vec{F}_e = -\nabla W_e = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext})$ (N) = Fuerza de interacción entre el campo y el dipolo

6.- ENERGÍA Y DENSIDAD DE ENERGÍA ELECTROSTÁTICA:

6.1.- FÓRMULA GENERAL:

La energía almacenada en un volumen donde existe un campo electrostático viene dada por:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \cdot \vec{E}^2 \, dV \quad (\text{J})$$

La densidad de energía asociada a ese mismo campo electrostático es:

$$U_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon \cdot \vec{E}^2 \quad (\text{J/m}^3)$$

Nota: Aunque las siguientes fórmulas apenas se utilizan, también se puede calcular la energía electrostática asociada o almacenada en un campo de las siguientes formas.

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_v \cdot \phi \cdot dV \quad (\text{J}) \quad \text{siendo } \phi \text{ el potencial eléctrico en V}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \rho_s \cdot \phi \cdot dS \quad (\text{J}) \quad \text{siendo } \phi \text{ el potencial eléctrico en S}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_L \lambda \cdot \phi \cdot dl \quad (\text{J}) \quad \text{siendo } \phi \text{ el potencial eléctrico en L}$$

Además la energía asociada a un sistema de cargas puntuales es:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \cdot \phi(q_i) \quad (\text{J})$$

siendo $\phi(q_i)$ el potencial que el resto de cargas crean en la carga q_i :

$$\phi(q_i) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon \cdot r_{ij}} \quad (\text{V})$$

6.2.- ENERGÍA DE INTERACCIÓN:

El campo eléctrico y el potencial cumplen el principio de superposición; esto quiere decir que si en una región del espacio hay 2 distribuciones de carga, el campo y el potencial total son la suma de los campos y los potenciales que crearían cada una de ellas por separado, pero esto no siempre ocurre así con la energía total del conjunto.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{TOT} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{TOT} &= \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \cdot (\vec{E}_{TOT})^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \cdot (\vec{E}_1)^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \cdot (\vec{E}_2)^2 dV + \iiint_V \epsilon \cdot \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV = \\ &= W_1 + W_2 + W_i\end{aligned}$$

Al término W_i se le denomina energía de interacción y puede ser positiva, negativa o nula. Si es nula se dice que los campos son ortogonales.

Además de la anterior, hay otras formas de calcular la energía de interacción:

Si una de las cargas es puntual y la otra volumétrica:

$$W_i = q_1 \cdot \phi_2(q_1) = \iiint_{V_2} \rho_{V2} \cdot \phi_1(\rho_{V2}) \cdot dV_2 \quad (J)$$

7.- TEOREMA DE LA MEDIA:

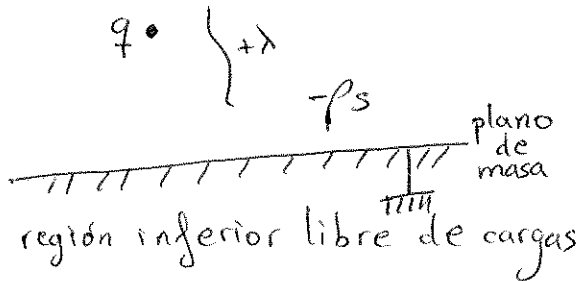
Ej 1:



Como el conductor exterior está a cero voltios y en la región exterior no hay cargas, por el teorema de la media: el potencial en la región exterior es nulo:

$$\boxed{\phi_{\text{ext}} = 0} \Rightarrow \vec{E}_{\text{ext}} = -\nabla\phi_{\text{ext}} = \vec{0}$$

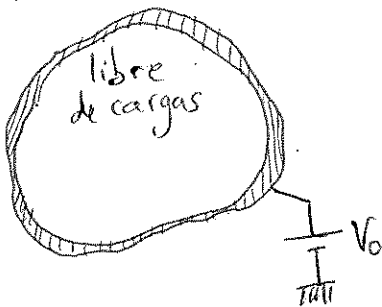
Ej 2:



Como la región inferior al plano de masa está libre de cargas, por el teorema de la media:

$$\boxed{\phi_{\text{inf}} = 0} \Rightarrow \vec{E}_{\text{inf}} = -\nabla\phi_{\text{inf}} = \vec{0}$$

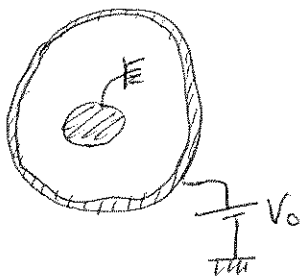
Ej 3:



Como la región interior está libre de cargas, por el teorema de la media:

$$\boxed{\phi_{\text{int}} = V_0} \Rightarrow \vec{E}_{\text{int}} = -\nabla\phi_{\text{int}} = \vec{0}$$

Comentario:



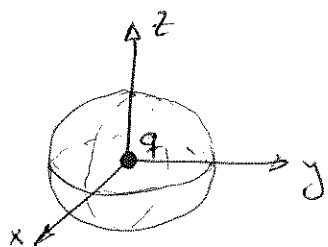
npí ≡ no puedo intuirlo

¿0?
¿E?

8.- Método de las imágenes (ver problemas)

9.- $\vec{E}$ y ϕ que debemos conocer

9.1 $\vec{E}$ y ϕ creados por una carga puntual en el origen



Gauss: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{encerrada}}$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \left\{ \begin{array}{l} \text{por simetría} \\ \vec{D} = D(r) \hat{r} \\ d\vec{S} = dS \hat{r} \end{array} \right\} = \oint_S D(r) \hat{r} \cdot dS \hat{r} =$$

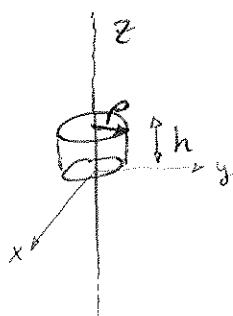
$$= D(r) \oint_S dS = \underline{D(r) \cdot 4\pi r^2}$$

$$\boxed{Q_{\text{encerrada}} = q}$$

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}} \quad (\text{V/m})$$

$$\boxed{\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon r} + \text{cte}} \quad (\text{V}) \quad \begin{array}{l} \text{Como no hay cargas} \\ \text{en el } \infty \\ \phi(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0 \end{array}$$

9.2 $\vec{E}$ y ϕ creados por un hilo indefinido de carga situado en OZ:



Gauss: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{encerrada}}$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{\text{lat}}} \vec{D} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}} + \oint_{S_{\text{top}}^{\text{sup}}} \vec{D} \cdot d\vec{S}_{\text{top}}^{\text{sup}} + \oint_{S_{\text{top}}^{\text{inf}}} \vec{D} \cdot d\vec{S}_{\text{top}}^{\text{inf}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{por simetría} \\ \vec{D} = D \cdot \rho \hat{\rho} \\ d\vec{S}_{\text{lat}} = dS_{\text{lat}} \hat{\rho} \\ d\vec{S}_{\text{ts}} = dS_{\text{lat}} \hat{z} \\ d\vec{S}_{\text{ti}} = dS_{\text{ti}} (-\hat{z}) \end{array} \right.$$

$$= \oint_{S_{\text{lat}}} D(\rho) \hat{\rho} \cdot dS_{\text{lat}} \hat{\rho} + 0 + 0 = D(\rho) \oint_{S_{\text{lat}}} dS_{\text{lat}} = \underline{D(\rho) 2\pi \rho h}$$

$$\boxed{Q_{\text{enc}} = \int_L \lambda dl = \lambda \cdot h}$$

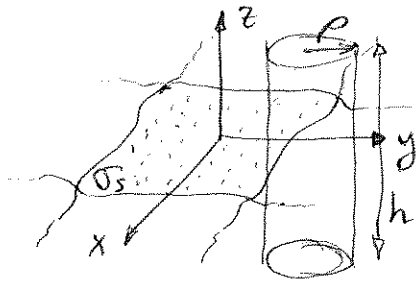
$$D(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\rho} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho} \hat{\rho}} \quad (\text{V/m})$$

$$\boxed{\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho} d\rho = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon} \ln(\rho) + \text{cte}}$$

Para determinar la cte nos deben dar un dato de potencial.

9.3 $\vec{E}$ y ϕ creado por un plano indefinido de carga situado en xy

simplyjared.com



Gauss: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_{enc}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_{lat}} \vec{D} d\vec{S}_{lat} + \int_{S_{ts}} \vec{D} d\vec{S}_{ts} + \int_{S_{ti}} \vec{D} d\vec{S}_{ti} = \begin{cases} D(\hat{z}) \text{ arriba} \\ D(-\hat{z}) \text{ abajo} \end{cases} \quad \text{por simetría}$$

$$= 0 + \int_{S_{ts}} D \cdot \hat{z} \cdot dS_{ts} \hat{z} + \int_{S_{ti}} D(-\hat{z}) \cdot dS(-\hat{z}) = \boxed{D \pi \rho^2 + D \pi \rho^2}$$

$$\boxed{Q_{enc} = \int_S \sigma_s dS = \sigma_s \pi \rho^2}$$

$$D = \frac{\sigma_s}{2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{2\epsilon} \hat{z} & \text{si } z > 0 \text{ (arriba)} \\ \frac{\sigma_s}{2\epsilon} (-\hat{z}) & \text{si } z < 0 \text{ (abajo)} \end{cases} \quad (V/m)$$

$$\phi = -\int \vec{E} d\vec{l} = -\int E dz = \begin{cases} -\frac{\sigma_s}{2\epsilon} z + cte_1 & \text{si } z \geq 0 \\ +\frac{\sigma_s}{2\epsilon} z + cte_2 & \text{si } z \leq 0 \end{cases} \quad (V)$$

como el potencial es una función continua,

$$\phi(0^+) = \phi(0^-) \Rightarrow \underline{cte_1 = cte_2}$$

Para determinar la constante nos deben dar un dato de potencial.

Nota:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_s}{2\epsilon} \frac{z}{|z|} \hat{z} = \frac{\sigma_s}{2\epsilon} \text{sgn}(z) \hat{z} \quad (V/m) \quad \forall z \neq 0$$

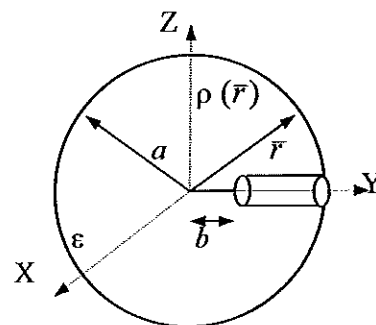
$$\phi = -\frac{\sigma_s}{2\epsilon} |z| + cte \quad (V) \quad \forall z$$

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

ELECTROSTÁTICA

I-1 Dada una esfera dieléctrica de radio a y constante dieléctrica ϵ , cargada con una densidad de carga volumétrica $\rho(\vec{r}) = k \left(3 - \frac{a^2}{2r^2} \right)$ para $r \leq a$, siendo K constante, y $\rho(\vec{r}) = 0$ para $a < r$, y situada en un medio de constante dieléctrica ϵ_0 . Se pide:

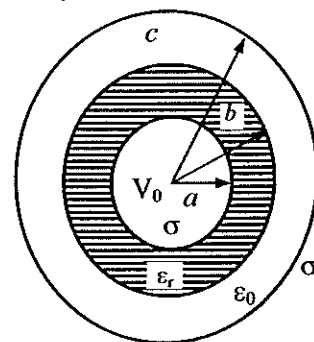
- Calcular el campo eléctrico en todo el espacio.
- Calcular el potencial en todo el espacio.
- Comprobar si el potencial verifica las condiciones de frontera y regularidad en el infinito.
- Si se realiza un orificio de dimensiones despreciables en la esfera, obtenga el trabajo necesario para llevar una carga puntual q desde el infinito a una distancia b del centro.
- En el caso $\epsilon = \epsilon_0$, obtenga para que valor de b el trabajo así realizado es máximo.



Febrero-96

I-2 La figura muestra un condensador cilíndrico indefinido de radios a y c . El conductor interior está recubierto de un dieléctrico de constante dieléctrica relativa ϵ_r , y radio exterior b . Si el conductor interior tiene un potencial V_0 y el exterior está puesto a tierra, calcule:

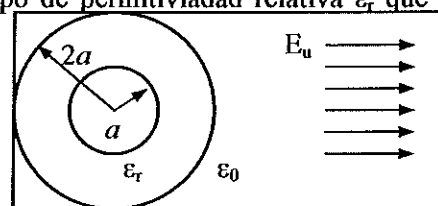
- El potencial, $\Phi(\vec{r})$, en el interior del condensador.
- Las densidades superficiales de carga sobre los conductores.
- La capacidad por unidad de longitud del condensador.
- Si se elimina el dieléctrico, ¿qué densidad superficial de carga habría que poner en $\rho = b$ para que se mantengan los valores del campo y del potencial?
- La energía por unidad de longitud en las situaciones inicial (con dieléctrico) y final (sin dieléctrico y con ρ_s en $\rho = b$).



Febrero-96

I-3 Se considera una región del espacio, de constante dieléctrica ϵ_0 , en la que existe un campo eléctrico uniforme E_u . En el se introduce una esfera conductora de radio a , centrada en el origen de coordenadas y rodeada de un dieléctrico homogéneo, lineal e isótropo de permitividad relativa ϵ_r que ocupa el volumen $a < r < 2a$.

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \left(\frac{a^3}{r^2} - r \right) \cos\theta & , a \leq r \leq 2a \\ \frac{52a^3 - 17r^3}{12r^2} \cos\theta & , 2a \leq r \end{cases}$$



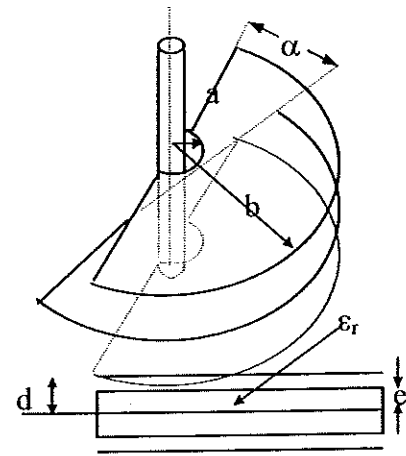
- Obtenga el valor del potencial en el interior de la esfera conductora y compruebe si se verifica la condición de continuidad del potencial.
- Calcule el campo eléctrico en las dos regiones $a < r < 2a$ y $2a < r$.
- Descomponer tanto el potencial como el campo eléctrico de la región exterior ($r > 2a$) en dos términos debidos: uno debido al campo uniforme E_u , inicialmente existente, y otro debido al conjunto conductor-dieléctrico.
- A partir del resultado anterior, determine si pueden corresponder los términos debidos al conjunto conductor-dieléctrico a un dipolo de momento $\vec{p} = p_0 \hat{z}$. En caso afirmativo, determine el valor de p_0 .

Junio-96

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

- I-4** La figura muestra un elemento de un condensador de sintonía. Las placas superior e inferior son dos coronas conductoras fijas semicirculares de radios a y b de espesor despreciable.

La placa conductora intermedia es semicircular de radio b , está unida a un eje, tiene espesor despreciable y está recubierta por ambas caras con material dieléctrico de espesor e y permitividad relativa ϵ_r . La separación entre la placa central y la externa es d .



- Calcular, en función del ángulo de giro α ($0 \leq \alpha < 180$), la capacidad del condensador así formado (desprecie los efectos del borde).
- Si se aplica una diferencia de potencial de V_0 voltios, determine la carga máxima que podrían adquirir las placas.
- Si, una vez cargado, se retira la batería determine la posición relativa en que quedarán las placas si se desprecian efectos de rozamiento.
- ¿Cuál sería esa posición si no se hubiese desconectado la batería? (realice los cálculos necesarios para justificar el resultado propuesto).

Junio-96

- I-5** En una situación electrostática el potencial en todo el espacio expresado en coordenadas esféricas es el de la expresión adjunta.

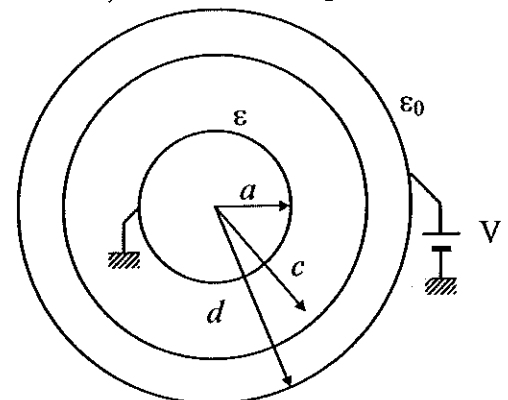
$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} K \frac{r}{a^2}; & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K}{r} & ; \quad a \leq r \end{cases}$$

Suponiendo que el medio es el vacío:

- Calcule el campo eléctrico.
- Caracterice las distribuciones de carga que lo originan: posición, tipo, densidad y carga total.
- ¿Cuáles de dichas cargas pueden corresponder a conductores?.

Septiembre-96 Septiembre-98

- I-6** Dado un sistema electrostático esférico de radio interior a y exteriores c y d , relleno de un dieléctrico uniforme de constante dieléctrica ϵ situado sobre el vacío, como el de la figura.



- Especifique las regiones donde se almacena energía electrostática y el valor total de la misma.
- Si se introduce una densidad superficial de carga de valor σ con forma esférica con radio b ($a < b < c$) obtenga el nuevo valor de la energía electrostática total almacenada.
- Si la introducción de la densidad superficial de carga se hubiese realizado con la batería de tensión V desconectada, ¿cuál sería en este caso la energía electrostática total almacenada?

Septiembre-96

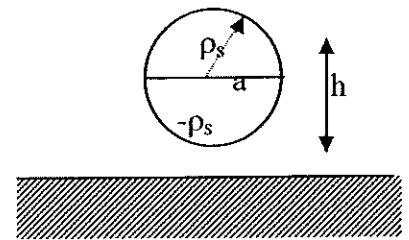
"CRISSER"

I-3

Telecomunicación de Grado

ELECTROMAGNETISMO

I-7 Un sistema está formado por una distribución superficial de carga sobre una esfera de radio a , uniforme y de valores ρ_s y $-\rho_s$ en cada semiesfera, y un plano de masa a una distancia h (ver figura).



- Represente el problema imagen.
- ¿Verificará el potencial electrostático la condición de regularidad?
- Calcule el momento dipolar del sistema.
- Calcule la densidad de carga que se induce en el plano de masa, en puntos alejados de la distribución esférica.

Febrero-97

I-8 Sea un condensador esférico de radio interior R_1 y exterior R_2 cuyas armaduras están respectivamente, a V_0 y 0 voltios. Entre las armaduras hay un dieléctrico no homogéneo. El potencial entre armaduras varía como $\phi(r) = A \ln(Br)$ siendo r la distancia al centro y A y B dos constantes a determinar. Calcular:

- El valor de $\phi(r)$.
- El campo $\vec{E}$ en el dieléctrico, y el valor de r para el cual E es máximo.
- La permitividad $\epsilon(r)$ si $\epsilon(R_2) = \epsilon_0$.
- Las densidades superficiales de carga, verificando que son de signos contrarios y diferentes en valor absoluto. ¿Por qué son diferentes?
- La carga en el conductor interior.
- La capacidad del condensador.
- La energía electrostática en todo el espacio.

Febrero-97

I-9 El potencial electrostático de una distribución viene dado en coordenadas esféricas por la expresión:

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} -k\left(r^2 - 3a^2 + \frac{2a^3}{b}\right) & " \quad 0 \leq r \leq a \\ 2ka^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) & " \quad a \leq r \leq b \\ 0 & " \quad b \leq r \end{cases}$$

Considerando que el medio es vacío, calcular:

- La intensidad del campo eléctrico en todo el espacio.
- Las densidades volumétricas y superficiales de carga que originan el potencial.
- La carga total de la distribución. (Comente el resultado).
- La energía electrostática del sistema.

Nota: En esféricas si no hay dependencia con ϕ ni con θ , $\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right)$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A_r)$$

Junio-97

- I-10** Dado un condensador cilíndrico de altura h y cuyas armaduras tienen radios a y b ($a < b$) y están a potenciales V_0 y 0 , respectivamente. Entre las armaduras hay un dieléctrico no homogéneo de modo que el potencial varía sólo en función de la distancia ρ al eje del cilindro como:

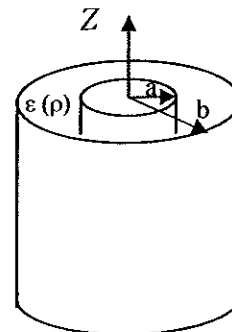
$$\Phi(\rho) = \frac{A}{\rho} + B, \quad A, B \text{ constantes.}$$

Obtenga:

- Los valores de las constantes A y B .
- El valor del campo eléctrico entre las armaduras.
- El valor de la permitividad no homogénea, $\epsilon(\rho)$, si $\epsilon(a) = \epsilon_0$.
- Las densidades superficiales de carga en cada armadura.
- La carga de la armadura conductora de radio a .
- La capacidad del condensador.
- La energía electrostática de todo el espacio.

Nota: en cilíndricas, si no existe dependencia ni con ϕ ni con z :

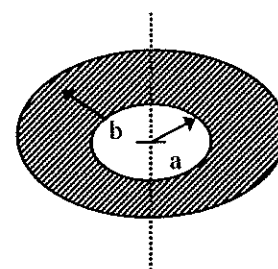
$$\nabla\Phi = \frac{d\Phi}{d\rho} \hat{\rho} \quad \Delta\Phi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right) \quad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A_\rho)$$



Junio-97

- I-11** La figura adjunta muestra una corona circular de radios a y b , $a < b$, centrada en el origen de coordenadas y contenida en el plano $z=0$. Esta corona tiene una carga superficial de densidad constante y valor ρ_{s0} . Se pide:

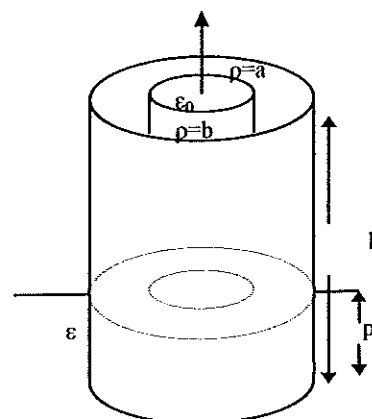
- Calcular el potencial eléctrico Φ , en todos los puntos del eje Z .
- Calcular el campo eléctrico, $\vec{E}$, en todos los puntos del eje Z .
- Calcular los valores de Φ y $\vec{E}$ para el caso $a=0$ y $b=\infty$. Comente la validez de los resultados.



Septiembre-97

- I-12** Se dispone de un condensador cilíndrico con armaduras de altura h y radios a y b ($a < b$). Se realizan con él dos experimentos sumergiéndose una profundidad p en un líquido de permitividad ϵ que penetra entre sus armaduras. El primero de ellos se realiza a potencial constante V_0 y el segundo a carga constante. El proceso de adquisición de la carga en el segundo experimento se realiza fuera del líquido. Calcule en ambos experimentos:

- La energía electrostática en función de la profundidad p sumergida dentro del líquido. ¿Dónde se alcanza el mínimo de la energía?
- Las fuerzas electrostáticas que sufre el condensador cuando se sumerge en dicho líquido. Se recomienda obtenerlas a partir de las energías detallando claramente su módulo, dirección y sentido.



Septiembre-97

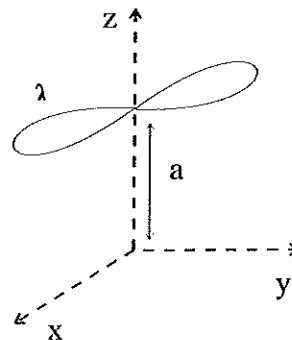
Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

I-13 Sea un contorno situado en el plano $z = a$ y definido por la ecuación en polares

$$\begin{cases} \rho^2 = a^2 \cos(2\varphi), \varphi \in [7\pi/4, \pi/4], [3\pi/4, 5\pi/4] \\ \rho = 0, \text{ resto de valores} \end{cases}$$

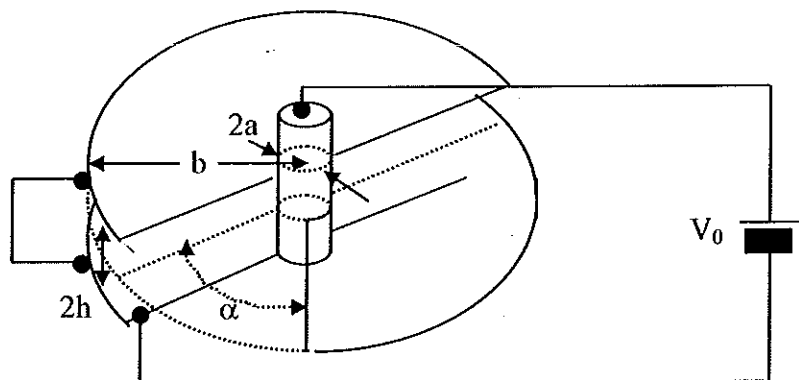
Sobre dicho contorno se distribuye una densidad lineal de carga dada por $\lambda = \lambda_0 |\cos \varphi| \sqrt{\cos(2\varphi)}$ cul/m.

- Calcule el potencial electrostático en el origen de coordenadas (0,0,0).
- Suponiendo que ahora el problema consiste en el mismo contorno situado sobre un plano de masa indefinido en $z = 0$, razone cuál es el problema imagen que es equivalente en $z \geq 0$.
- Calcule el potencial en puntos alejados del contorno en la configuración del apartado b) (expreselo en función de las coordenadas r y θ).



Febrero-98

I-14 Dado un condensador variable formado por una armadura fija (placas inferior y superior conectadas) y una placa de grosor despreciable que gira a una altura h entre las placas de la citada armadura fija. Las placas fijas y la rotatoria son idénticas y tienen forma de corona semicircular de radios a y b ($a < b$). El eje de rotación de la armadura móvil está aislado de la armadura fija y conectado a la rotatoria, permitiendo introducir parcialmente la placa rotatoria entre las placas de armadura fija en función del ángulo α , expresado en radianes. Los bornes de este condensador se sitúan en el eje de rotación y en la placa inferior de la armadura fija. Entre la armaduras se considera la existencia del vacío.



Calcule:

- El circuito equivalente y la capacidad asociada a este condensador variable en función del citado ángulo α .
- La energía electromagnética almacenada en este condensador cuando se conecta a una batería de potencial V_0 .
- El par que es necesario vencer para girar la placa rotatoria. Razone su signo.
- Este condensador se avería de modo que se corta la conexión entre las placas superior e inferior de la armadura fija. La avería se produce estando el condensador conectado a la anterior batería cuando la placa rotatoria está en un ángulo α_0 (en radianes). ¿Qué carga adquiere cada placa en función del ángulo α ? ¿Cuál es la energía almacenada en este caso?

NOTA:

- Considere despreciables todos los efectos de bordes.

Febrero-98

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

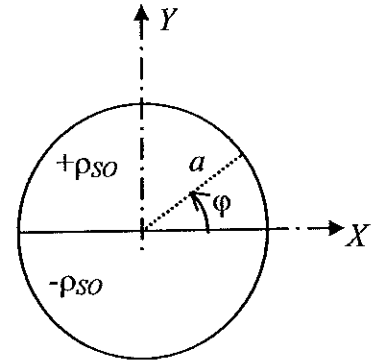
I-15 Dada la distribución superficial de cargas de la figura:

$$\rho_s = \begin{cases} \rho_{so} & \text{para } 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 < \phi < \pi, \quad z = 0 \\ -\rho_{so} & \text{para } 0 \leq \rho \leq a, \quad \pi < \phi < 2\pi, \quad z = 0 \end{cases}$$

obtener:

- El potencial electrostático en el eje z.
- Sin calcularlo, razone la (o las) componente(s) del campo electrostático en el eje z.
- El momento dipolar equivalente de la distribución.
- El campo en puntos muy alejados del eje z ($z \gg a$).

Nota: $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$



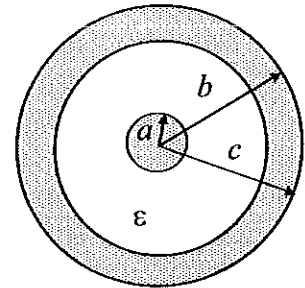
Febrero-99

I-16 Dada la estructura de la figura, compuesta por dos conductores con simetría esférica y un dieléctrico entre ambos conductores con permitividad dada por $\epsilon = \epsilon_0$, calcule:

- La distribución de carga en $r = a$ cuando entre ambos conductores se conecta una batería de V voltios.
- Con la batería conectada, calcule el trabajo que habrá que realizar para situar una distribución volumétrica de carga en la región del dieléctrico, de valor $\rho = \rho_0$.
- Si ahora se desconecta la batería, calcule el trabajo que habrá que realizar para dejar la región del dieléctrico descargada (sin densidad volumétrica de carga).

Nota: En esféricas, si no hay dependencia con ϕ ni con θ :

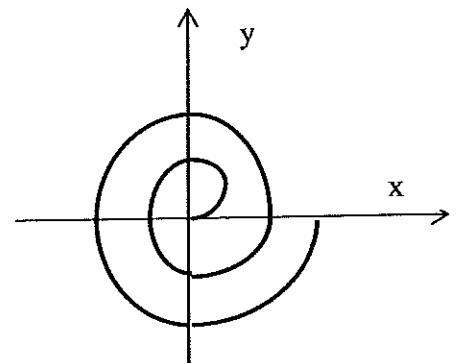
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A_r); \quad \Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)$$



Febrero-99

I-17 Una densidad lineal de carga dada por $\lambda = \lambda_0 \phi^2 \sqrt{1 + \phi^2}$ (cul/m), se distribuye sobre una espiral de Arquímedes (lugar geométrico definido por la ecuación en polares $\rho = a\phi$) en el dominio dado en la figura adjunta. Se pide:

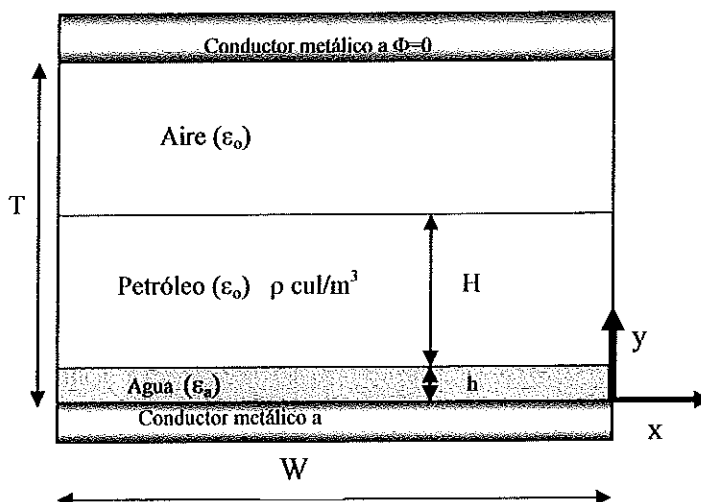
- El valor del potencial eléctrico en el origen de coordenadas.
- El valor del campo eléctrico en el origen de coordenadas.
- El valor del campo eléctrico en puntos alejados de la distribución.



Nota: $\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x + (2-x^2) \cos x$ $\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2-2) \sin x$

Septiembre-99

I-18 En el interior de una tubería de un oleoducto de sección rectangular y dimensiones $T \times W$ ($T \ll W$), cuya sección se muestra en la figura, se modela como 2 placas metálicas a potencial (Φ) cero, una capa de agua de altura h y constante eléctrica ϵ_a , la masa de petróleo de altura H y aire hasta el conductor metálico superior. El petróleo debido a su movimiento almacena una densidad volumétrica de carga ρ cul/m³. Calcule:



- Potencial electrostático en función de H .
- Campo eléctrico en función de H .
- Razone dónde el campo presenta su máximo módulo y podría saltar una chispa si superase el campo de ruptura. ($\epsilon_0 < \epsilon_p < \epsilon_a$)

Septiembre-99

I-19 El potencial electrostático de una distribución de carga viene dado por la siguiente expresión, en

coordenadas esféricas:

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \Phi_1 = -K(a^2 - b^2) & \text{para } 0 \leq r \leq a \\ \Phi_2 = -K(r^2 - b^2) & \text{para } a \leq r \leq b \\ \Phi_3 = 0 & \text{para } b \leq r \end{cases}$$

donde K es una constante que no hay que determinar. Considerando que el medio es el vacío, calcule:

- La intensidad del campo eléctrico en todo el espacio.
- Las densidades volumétricas y superficiales de carga que originan el potencial.
- La carga total de la distribución
- La energía electrostática del sistema.

NOTA: en esféricas, si no existe dependencia ni con θ ni con ϕ :

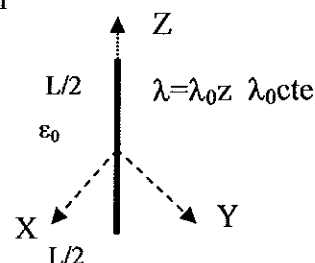
$$\nabla \Phi = \frac{d\Phi}{dr} \hat{r} \quad \Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) \quad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A_r)$$

Febrero-00

I-20 La figura muestra una distribución lineal de carga que crea un potencial electrostático en zonas muy alejadas a la misma ($r \gg L$) que expresado

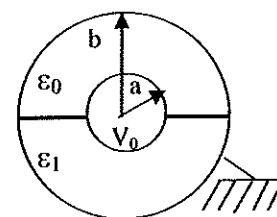
en coordenadas esféricas vale: $\Phi(\vec{r})|_{r \gg L} = \frac{k \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

- El valor de k en relación con los parámetros que definen la distribución de carga y su geometría.
- El potencial electrostático $\Phi(\vec{r})$ en cualquier punto del espacio.
- Relacione matemáticamente la expresión obtenida en el apartado b) con la empleada como dato en el apartado a).



Septiembre-00

I-21 Sea un condensador cilíndrico de radios a y b conectado a una batería de potencial V_0 estando el conductor exterior a potencial 0. La mitad inferior contiene un dieléctrico de permitividad ϵ_1 y la superior está vacía, ϵ_0 . Calcule:



- El potencial en el interior del condensador, la carga por unidad de longitud en los conductores y la capacidad por unidad de longitud del condensador.
- Posteriormente se desconecta la batería y se extrae el dieléctrico manteniendo el conductor exterior a potencial 0V. ¿Cuáles serán la carga por unidad de longitud, el potencial en el interior y la capacidad por unidad de longitud del condensador resultante?

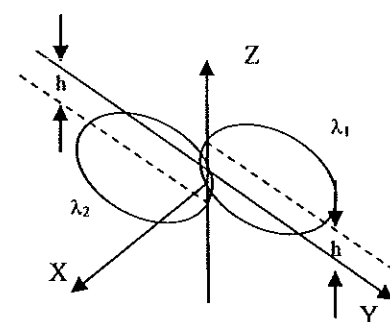
$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z} \quad \Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{d\Phi}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Septiembre-00

I-22 Dadas las líneas de carga, representadas en la figura, inmersas en el vacío y cuyas densidades lineales de carga valen:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \cos \phi \text{ cul/m sobre } \begin{cases} \rho = \sin \phi \\ z = h \end{cases} \quad (0 \leq \phi \leq \pi)$$

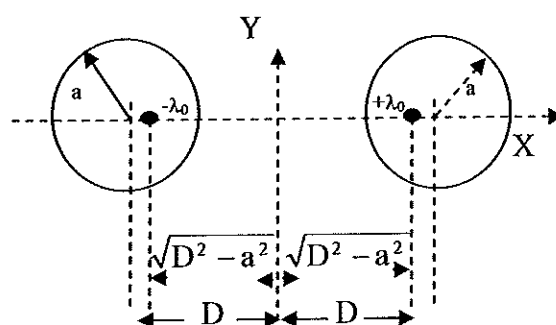
$$\lambda_2 = \lambda_0 \cos \phi \text{ cul/m sobre } \begin{cases} \rho = -\sin \phi \\ z = -h \end{cases} \quad (\pi \leq \phi \leq 2\pi)$$



- El potencial electrostático en cualquier punto del eje Z.
- El momento dipolar de la distribución de carga
- El potencial y el campo eléctrico en puntos alejados de la distribución
- Especifique el vector unitario $\hat{u}$ correspondiente a otro dipolo de momento dipolar $p_0 \hat{u}$ situado en puntos muy alejados del eje Z de modo que se maximice el módulo de la energía de interacción con el campo creado por la estructura de carga problema.

Febrero-01

I-23 La figura muestra la sección transversal de una línea bifilar formada por dos conductores cilíndricos indefinidos, paralelos, idénticos, de radio a , y separados una distancia $2D$. El problema electrostático asociado (imagen), se puede resolver utilizando dos líneas indefinidas de carga situadas en las posiciones $\vec{r} = \pm\sqrt{D^2 - a^2}\hat{x}$, según el sistema de coordenadas de la figura. Tomando como dato las densidades de carga imagen λ_0 , se pide:



- El potencial en cualquier punto del espacio.
- La carga por unidad de longitud de cada conductor.
- La capacidad por unidad de longitud de la línea.

Febrero-01

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

I-24 Dada una distribución volumétrica uniforme de carga de valor ρ C/m³ en la región $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta < \pi/2$, $0 \leq \phi < 2\pi$ y $-\rho$ C/m³ en la región $0 \leq r \leq a$, $\pi/2 < \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$:

- Calcule el potencial en la región $a < z$ del eje z .
- Justifique la validez o no del resultado obtenido para el resto de puntos del eje z .
- Calcule el momento dipolar de la distribución de cargas.
- Obtenga el potencial en puntos del eje z muy alejados de la distribución.
- Razone los valores que tendrá el potencial en el plano $z = 0$.

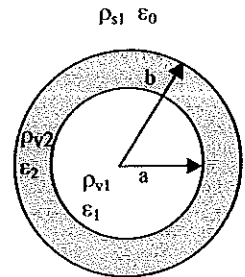
Noviembre-01

I-25 a) Obtenga la distribución de cargas presente en un medio de permitividad ϵ_0 que genera el siguiente campo electrostático:

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{K_1}{r^2} + K_2 r \right) \hat{r} \quad r < a$$

$$\text{con } K_3 = K_1 + K_2 a^3$$

$$\vec{E}(r) = \frac{K_3}{r^2} \hat{r} \quad r > a$$



- Dada la distribución esférica de cargas de la figura, con : $\rho_{v1} = \rho_1 r/a$ cul/m³, $\rho_{v2} = \rho_2$ cul/m³, $\rho_{s1} = \rho_s$ cul/m², calcule el campo electrostático que genera en todos los puntos del espacio
- Calcule la carga total de la distribución de cargas del apartado b).
- Calcule la relación que debe existir entre ρ_1 , ρ_2 y ρ_s para que la carga calculada en el apartado c) sea nula.

Febrero-02

I-26 a) Obtenga la distribución de cargas presente en un medio de permitividad ϵ que genera el siguiente campo electrostático:

$$\vec{E}(r) = 0 \quad r < a$$

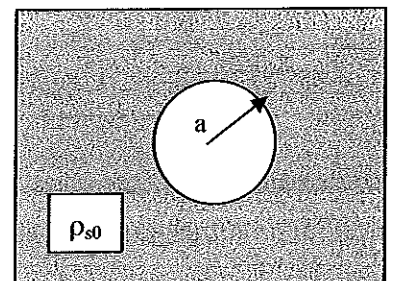
$$\vec{E}(r) = \frac{K_1}{r^2} \hat{r} \quad a < r < b$$

$$\vec{E}(r) = \frac{K_2}{r^3} \hat{r} \quad r > b$$

- Calcule la carga presente en $r \leq a$.
- ¿Cumple el campo anterior la condición de regularidad?

Noviembre-02

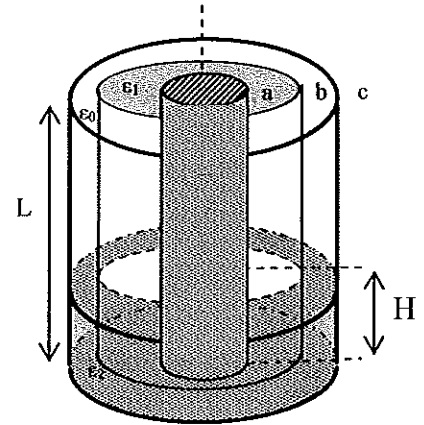
- Calcule el potencial creado en todo el espacio por una densidad ρ_{s0} C/m² distribuida sobre todo el plano $z = 0$.
- Calcule el potencial creado por un disco de radio a m en los puntos de su eje sabiendo que está situado en $z = 0$, centrado en el origen, y cargado con ρ_{s0} C/m².
- Combine los resultados anteriores para obtener el potencial en los puntos de eje de la distribución de la figura (ρ_{s0} C/m² para $r \geq a$ en el plano $z = 0$).



Noviembre-02

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

- I-28** a) Calcule la capacidad por unidad de longitud de un cable coaxial.
b) Basándose en el resultado anterior calcule la capacidad del sistema mostrado en la figura y represente su variación en función de H ($0 < H < L$).
c) Si la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador es V calcule la energía almacenada e indique el valor de H para el que es máxima.



Noviembre-02

- I-29** a) Obtenga razonadamente las fuentes que generan el siguiente campo electrostático, definido en un medio de constante dieléctrica ϵ (compruebe la presencia de todo tipo de fuentes).

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & ; 0 < \rho < a \\ \frac{K_1}{\rho} \hat{\rho} & ; a < \rho < b \\ 0 & ; b < \rho \end{cases}$$

- b) Calcule razonadamente la carga total
c) Obtenga razonadamente las fuentes que generan el siguiente campo magnetostático, definido en un medio de permeabilidad magnética μ (compruebe la presencia de todo tipo de fuentes).

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} K_2 \rho \hat{\phi} & ; 0 < \rho < a \\ \frac{K_3}{\rho} \hat{\phi} & ; a < \rho < b \\ 0 & ; b < \rho \end{cases} \quad K_3 = K_2 a^2$$

- d) Calcule razonadamente la corriente encerrada en $a < \rho < b$.

Febrero-03

- I-30** Dos placas metálicas planas paralelas de superficie S están situadas a alturas $h = 0$ y $h = d$ respectivamente. Despreciando el efecto de bordes:

- a) Obtenga la intensidad de campo eléctrico entre las placas si entre ellas hay aire y se aplica una diferencia de potencial de V voltios.
b) Entre las placas se sitúa una esfera de carga de dimensiones muy pequeñas, valor de la carga de Q culombios y masa de m kilos. Determine el valor de V para que la esfera se mantenga inmóvil levitando. Indique cual de las placas debe tener un potencial más alto.
c) Se retira la esfera y se sitúa una lámina dieléctrica descargada de permitividad ϵ_1 entre $h = 0$ y $h = d/2$. Calcule en función de V la densidad superficial de carga en las placas metálicas.
d) Determine el valor de la capacidad entre placas en la situación anterior.
e) Se retira la lámina y se introduce un material con permitividad dieléctrica variable en la forma

$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{d^2}{(d^2 - h^2)} \text{ entre } h = 0 \text{ y } h = d. \text{ Determine el nuevo valor de la capacidad.}$$

Febrero-03

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

I-31 Dado el siguiente campo electrostático en el vacío expresado en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{K_1 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{K_2}{\rho} \right) \hat{\rho} + \frac{K_1 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad \rho < a$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K_1 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\rho} + \frac{K_1 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad \rho > a$$

- Demostrar que se trata de un campo conservativo
- Obtener las fuentes que dan lugar a dicho campo (cargas puntuales, densidades lineales de carga, densidades superficiales de carga y densidades volumétricas de carga), indicando en cada caso sus unidades.
- Calcular la carga presente en el interior de un cilindro de radio $a/2$ y altura h situado simétricamente respecto al origen de coordenadas.
- ¿Será nula la carga encerrada en un cilindro de radio $2a$ y altura h , situado simétricamente respecto al origen de coordenadas? Razone su respuesta.

Septiembre-03

I-32 Dos superficies esféricas metálicas de espesor despreciable y radios a y b ($b > a$) se extienden desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 \leq \pi$). Despreciando el efecto de bordes.

- Obtenga la intensidad de campo eléctrico entre las placas si entre ellas hay aire y se aplica una diferencia de potencial de V voltios.
- En $z = c$ ($a < c < b$) se sitúa una carga puntual de q culombios y m kilos (que no altera la distribución preexistente de cargas). Determine el valor necesario de V para que la esfera se mantenga inmóvil levitando. Indique cual de las placas debe tener un potencial más alto.
- Se retira la carga puntual y entre $r = a$ y $r = c$ se sitúa una lámina dieléctrica descargada de permitividad ϵ_1 Faradios/m. Calcule, en función de V , la densidad superficial de carga en las superficies metálicas.
- Obtenga la capacidad entre las superficies metálicas en la situación anterior.

Septiembre-03

I-33 En un medio de permitividad ϵ_0 se sitúa, sobre el eje y de un sistema de coordenadas cartesianas, una distribución uniforme de carga de valor λ C/m, de longitud $2a$ y centrada en el origen del sistema de coordenadas. Se pide, **utilizando el sistema de coordenadas cartesiano anterior e indicando las unidades correspondientes**, que:

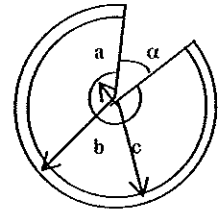
- Calcule el campo eléctrico debido a dicha distribución en todos los puntos del espacio.
- Razone geoméricamente, cuál es la dirección del campo eléctrico en puntos del eje x .
- Si se sitúa la línea de carga con su centro en $(x = D/2, y = 0, z = 0)$ y se coloca una línea igual a la anterior pero de valor $-\lambda$ C/m, con su centro en el punto $(x = -D/2, y = 0, z = 0)$, calcule el valor del campo eléctrico de la distribución en puntos del eje x .
- Calcule el momento dipolar de la distribución del apartado anterior.
- Calcule el potencial de distribución del apartado c) en puntos muy alejados de la misma. Expresé el resultado en coordenadas esféricas.

Nota: $\int \frac{a^2 dt'}{[a^2 + (t - t')^2]^{3/2}} = -\frac{(t - t')}{\sqrt{a^2 + (t - t')^2}}$

Enero-04

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

I-34 Se dispone de un condensador cilíndrico de longitud L , conductor interior de radio a , y conductor exterior de radio interior b y radio exterior c , del que se elimina un sector angular α , cuya sección transversal se muestra en la figura. La permitividad del medio situado entre ambos conductores varía como $\epsilon(\rho) = \epsilon_1 \rho$. Se pide, despreciando los efectos de bordes que:



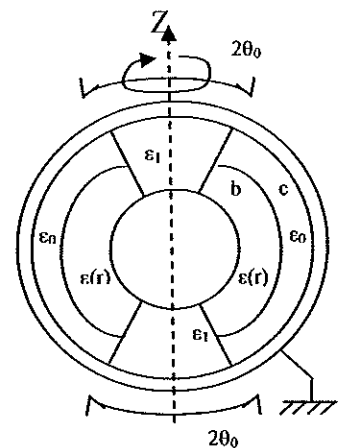
- Calcule el campo eléctrico y el potencial en todos los puntos del condensador. Considere que el conductor interior está a potencial V_1 y el exterior a potencial V_2 .
- Indique qué tipo de distribución de carga aparece en los sectores situados entre $0 \leq \rho \leq a$, $a < \rho < b$ y $b \leq \rho < c$, y calcule la carga en cada uno de ellos.
- Calcule la capacidad del condensador.
- Si se sustituyen los conductores eléctricos perfectos y el medio dieléctrico por un medio conductor de conductividad $\sigma(\rho) = \sigma_1 \rho$, calcule el valor de la resistencia correspondiente utilizando dualidad.

NOTA: $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$ $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Indique las unidades de todas las magnitudes que calcule.

Enero-04

I-35 Se dispone de un condensador esférico formado por un conductor esférico interior de radio a , y otro conductor exterior de radio interior c y radio exterior d . Sobre el conductor interior se sitúa una cáscara esférica de radio exterior b y permitividad del medio variable como $\epsilon(r) = k/r^2$ expresadas en coordenadas esféricas. Esta cáscara está soportada por dos estructuras troncocónicas truncadas como muestra la sección de la figura. El conductor exterior está puesto a masa mientras que el interior tiene un potencial de V voltios. Se pide, despreciando los efectos de bordes, que:



- Calcule el potencial en todos los puntos del espacio.
- Calcule el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
- Calcule la densidad de carga sobre todas las superficies conductoras.
- Calcule la capacidad del condensador.
- Calcule el valor de k como el mínimo posible para que sea un medio realizable.

NOTA:

$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\phi}$ $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$

$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$

Indique las unidades de todas las magnitudes que calcule.

Septiembre-04

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

I-36 En un medio de permitividad ϵ_0 se sitúa en el semiplano $z = 0$ y $z \geq 0$ de un sistema de coordenadas cartesianas una distribución lineal de carga de valor λ C/m, de forma semicircular y radio a , con el origen de la semicircunferencia centrado en el origen del sistema de coordenadas. Se pide que:

- Calcule el campo eléctrico debido a dicha distribución en puntos del eje z .
- Si se completa la semicircunferencia anterior para formar una distribución lineal de carga con forma circular e idéntico radio indique, basándose en razonamientos geométricos, cuál será el campo eléctrico debido a la nueva distribución en puntos del eje z . (No calcule de nuevo todo el campo).
- Se sitúa una carga puntual de valor Q Culombios sobre el eje z , en el punto $z = b$. Calcule la fuerza que ejerce sobre dicha carga Q la distribución del apartado b).
- Indique qué nueva distribución de carga añadiría a la del apartado b) (tipo y geometría) y en qué posición la situaría par que la fuerza ejercida por el campo eléctrico resultante sobre la carga Q del apartado c) fuese nula.
- Calcule, empleando el resultado del apartado b) el campo eléctrico que crearía, en puntos del eje z , una distribución superficial de carga de valor σ C/m², de forma circular y radio R , situada en el plano $z = 0$ con su centro en el origen del sistema de coordenadas.

Septiembre-04

I-37 Se dispone de un condensador de placas planas paralelas de radio a , situadas en $z = 0$ y $z = d$ respectivamente, de las que se elimina un sector angular α . El condensador está formado por 3 dieléctricos diferentes, como se muestra en la figura, situados del siguiente modo:

$$\epsilon_0: 0 \leq \rho \leq a \quad \alpha \leq \varphi \leq \pi \quad 0 \leq z \leq d$$

$$\epsilon_1: 0 \leq \rho \leq a \quad \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi \quad d/2 \leq z \leq d$$

$$\epsilon_2(z) = K_2/z \text{ en el resto.}$$

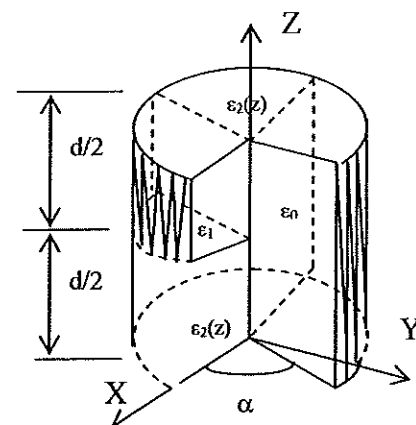
Se pide, despreciando los efectos de bordes, que:

- Calcule el potencial y el campo eléctrico en todos los puntos del condensador. Considere que el conductor inferior está a potencial V_0 y el superior a potencial 0 V.
- Calcule las distribuciones de carga que aparecen en cada uno de los conductores.
- Calcule la carga en cada uno de los conductores.
- Calcule la capacidad del condensador e indique el esquema circuital correspondiente.

NOTA: $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$ $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Indique las unidades de todas las magnitudes que calcule.



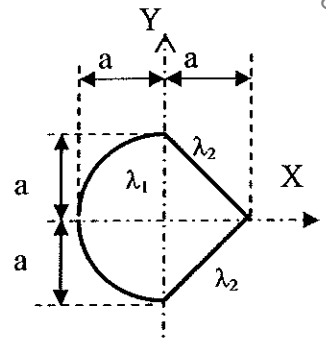
Febrero-05

I-38 La figura muestra una distribución lineal de carga contenida en el plano $z = 0$ y compuesta por un tramo semicircular, que tiene una densidad lineal de carga constante de valor λ_1 C/m, y dos tramos rectos con λ_2 C/m; el medio es el vacío. Se pide:

- La contribución del tramo semicircular al potencial en los puntos del eje Z.
- La contribución de los tramos rectos al potencial en los puntos del eje Z.
- La relación entre λ_1 y λ_2 que minimiza el potencial en los puntos del eje Z tales que $a \ll |z|$.
- El valor del potencial para la relación entre λ_1 y λ_2 obtenida en c) para los puntos $a \ll |z|$.

Nota: en todos los casos indique las unidades en el sistema internacional.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \text{Sh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$



Febrero-05

I-39 En una situación electrostática, el campo eléctrico en un medio de permitividad ϵ_0 toma el siguiente valor:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{8K_1}{a^3} r \hat{r} & r \leq a/2 \\ \left[\frac{4K_2}{a^2} + \frac{1}{r^2} (K_1 - K_2) \right] \hat{r} & a/2 < r \leq a \\ \frac{1}{r^2} [K_1 + 3K_2] \hat{r} & r > a \end{cases} \quad \text{V/m. Se pide:}$$

- Calcular la carga contenida en $r \leq a/2$ y en $r \leq a$.
- Calcular el valor de la carga total de la distribución y el potencial en $r \gg a$.
- Calcular el potencial en $a/2 \leq r \leq a$.
- Obtener todas las distribuciones de carga que generan el campo eléctrico del enunciado

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(r^2 \sin \theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial \phi} \right]$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

Nota: en todos los casos indique las unidades de los resultados en el sistema internacional.

Septiembre-05

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

- I-40** a) Obtenga el potencial creado por una distribución lineal indefinida de carga de densidad λ cul/m situada en el eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permitividad ϵ .
- b) Represente gráficamente la variación del potencial con la distancia ρ a la línea y comente los valores obtenidos para $\rho = 0$ y $\rho = \infty$.
- c) Basándose en el resultado obtenido y usando el método de las imágenes obtenga el potencial creado por la línea cuando se sitúa paralela frente a un plano conductor eléctrico perfecto a potencial 0 V. (el plano está en $x = 0$, la distancia de la línea al plano es d y ésta es paralela al eje z).
- d) Calcule la densidad superficial de la carga que se induce en el plano conductor y el valor de la carga por unidad de longitud según z .
- e) Obtenga la expresión analítica de las superficies equipotenciales que le permita identificarlas e indicar los valores de sus parámetros característicos.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)} = \tan^{-1}(x).$$

Septiembre-05

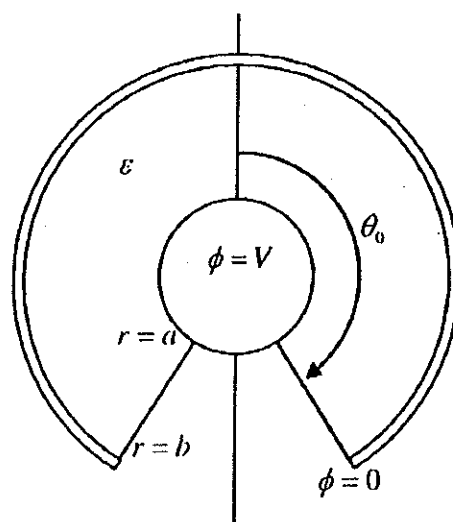
- I-41** Sea una distribución lineal de carga de λ cul/m uniformemente distribuida sobre una circunferencia de radio a , situada sobre el plano $z = h$ y centrada en el eje z .
- a) Calcule el potencial que crea en los puntos del eje z .
- b) Calcule la intensidad de campo eléctrico en los puntos del eje z .
- c) Represente de forma aproximada la variación con z de ϕ y E_z .
- d) Si se sitúa una esfera metálica de radio $R < a$ a potencial de 0V y centrada en el origen de coordenadas, indique como es el problema imagen (valores de las distribuciones de carga y geometría).
- e) Obtenga el nuevo valor del potencial en los puntos del eje z .
- f) En el caso en que $h = 0$ calcule el potencial en $z = R$.
- g) Obtenga, en primera aproximación, la expresión del campo en puntos $z \gg a$.

Febrero-06

I-42

Dos electrodos metálicos esféricos concéntricos de radios a y b están situados como indica la figura separados por un dieléctrico de permitividad ϵ Faradios/m. Si el conductor exterior, al que le falta un casquete, está a 0 V y el interior a V voltios:

- a) Calcule el potencial en la región intermedia entre electrodos suponiendo despreciable el efecto de bordes. (2p)
- b) Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (2 p)
- c) Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (2p)
- d) Calcule la capacidad entre electrodos. (1p)
- e) Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce?. ¿Cuánto vale la corriente total? (2p)
- f) ¿Cuánto vale la resistencia entre electrodos? Compruebe su solución obteniéndola por un método diferente al que haya utilizado. (1p)



Febrero-06

Telecomunicación de Grado

ELECTROMAGNETISMO

I-43

Sea una distribución lineal de carga de valor λ C/m uniformemente distribuida en el vacío sobre una línea recta de longitud $2L$, paralela al eje z y centrada en el punto $(a \cos \alpha, a \sin \alpha, 0)$. Se pide que:

- Obtenga geoméricamente la dirección del campo eléctrico en $z=0$.
- Calcule el campo eléctrico en puntos del eje z .
- Calcule el campo eléctrico en puntos del eje z debido a la distribución lineal cuando $\alpha=0^\circ$, si se sitúa un plano conductor infinito, a potencial cero en $x=b$ siendo $b>a$.
- Calcule, **empleando el resultado del apartado b)**, el campo eléctrico que crearía, en puntos del eje z , una distribución superficial de carga de valor σ C/m², distribuida uniformemente sobre un cilindro de radio a y altura $2L$, con su centro en el origen del sistema de coordenadas.
- Calcule el campo eléctrico generado por el cilindro en puntos muy alejados de la distribución

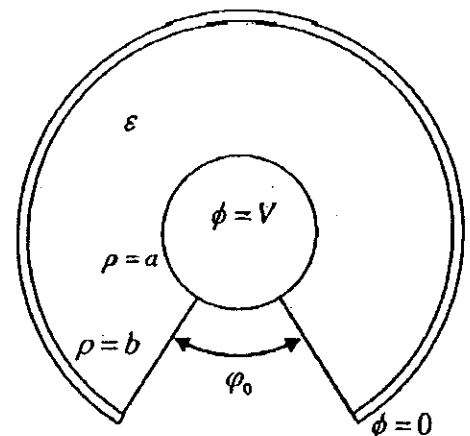
Nota: $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x/a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. Indique las unidades de las magnitudes calculadas.

Septiembre-06

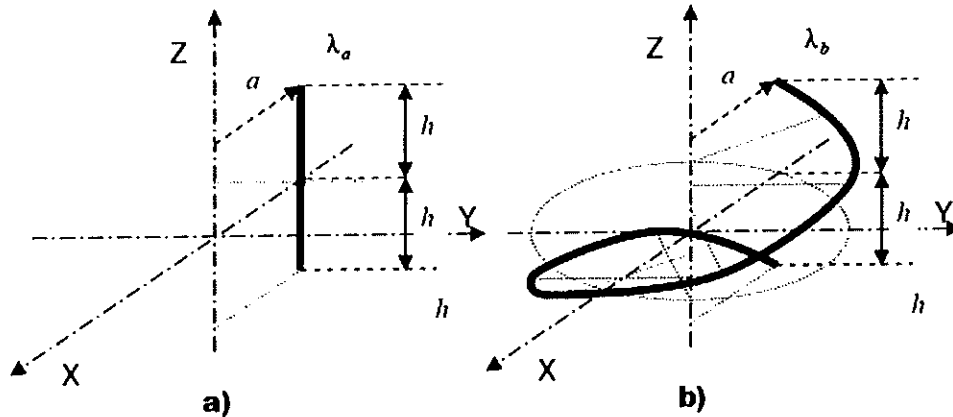
I-44

Dos electrodos metálicos cilíndricos coaxiales, de radios a y b y longitud L , están separados por un dieléctrico de permitividad ϵ Faradios/m como indica la sección transversal de la figura. Si el conductor exterior está a 0 V y el interior a V voltios:

- Calcule el potencial en la región entre electrodos suponiendo despreciable el efecto de bordes. (2p)
- Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (2 p)
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (1p)
- Calcule la capacidad entre electrodos y la energía electrostática. (2p)
- Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce?. ¿Cuánto vale la corriente total? (2p)
- ¿Cuánto vale la resistencia entre electrodos? Compruebe su solución obteniéndola por un método diferente al que haya utilizado. (1p)



Septiembre-06



La figura muestra dos distribuciones lineales de carga. La distribución a) tiene una densidad constante λ_a C/m sobre el segmento recto que une los puntos de coordenadas cartesianas $(-a, 0, -h)$ m y $(-a, 0, h)$ m. La distribución b) tiene una densidad constante λ_b C/m sobre el tramo de hélice que une los dos mismos puntos anteriores siguiendo las ecuaciones:

$$\rho = a \quad -\pi < \phi < \pi \quad z = \frac{h}{\pi} \phi$$

- Calcule el potencial eléctrico generado por la distribución a) sobre los puntos del eje z: $\Phi_a(z\hat{z})$
- Calcule el potencial eléctrico generado por la distribución b) sobre los puntos del eje z: $\Phi_b(z\hat{z})$
- Calcule la relación entre λ_a y λ_b para que el potencial creado por la combinación de las dos distribuciones sobre los puntos del eje z sea nulo: $\Phi_T(z\hat{z}) = \Phi_a(z\hat{z}) + \Phi_b(z\hat{z}) = 0$

Razone si en las condiciones de apartado anterior, $\Phi_T(z\hat{z}) = 0$, el campo eléctrico en los puntos del eje Z, $\vec{E}_T(z\hat{z})$ es también nulo.

Indique las unidades de todas las magnitudes calculadas.

Nota: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{Sh}^{-1} \frac{x}{a} + C = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + K$

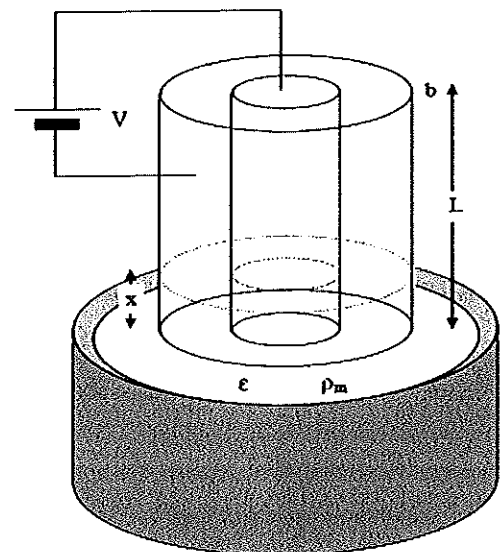
Febrero-07

I-46

Un condensador formado por dos cilindros coaxiales de radios a y b , longitud L y con aire entre las armaduras se coloca de forma que su borde inferior roza la superficie de un baño líquido dieléctrico de permitividad ϵ y densidad de masa ρ_m , de modo que, ese líquido pueda subir entre las placas del condensador.

Cuando este condensador este conectado a un generador que mantiene un voltaje V entre placas, calcule:

- la energía eléctrica almacenada por el condensador en función de la altura x del líquido entre las placas. (3p)
- la fuerza creada por el campo eléctrico que se aplica sobre el líquido en función de la altura del mismo. (3p)
- la altura máxima a la cual sube el líquido entre las placas. (2p)
- Finalmente, si el dieléctrico no fuera perfecto y presentase una conductividad σ , obtenga el valor de la corriente eléctrica que circula para la altura máxima que haya podido subir el líquido entre las placas. Considere solo el efecto de la conductividad para la resolución de este apartado. (2 p)



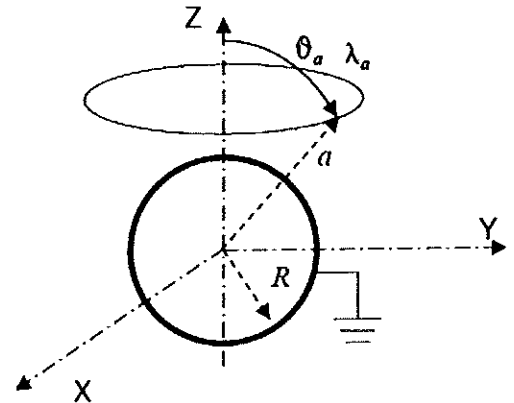
Febrero-07

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

I-47

El anillo de la figura tiene un radio $a \sin \theta_a$ y está cargado con una densidad lineal de carga λ_a C/m. Este anillo está frente a una esfera conductora de radio R a potencial cero. Se pide:

- La carga total del anillo (1p)
- El potencial que crearía el anillo a lo largo del eje Z si no estuviera la esfera conductora. (2p)
- La posición (1p), tamaño (1p), carga total (1p) y densidad de carga (1p) del anillo imagen que permite resolver el problema por el método de las imágenes.
- La expresión del potencial en el eje Z del problema original, anillo + esfera, en el eje Z. (1p)
- Particularice la expresión anterior para el punto $(x=0, y=0, z=R^2/a)$. (1p)
- La carga de la esfera. (1p)

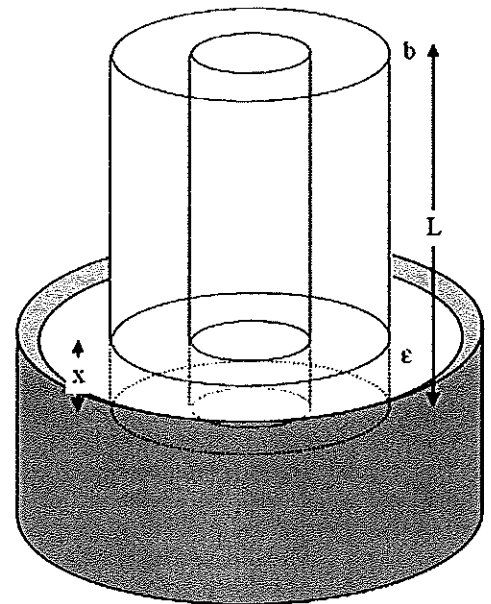


Septiembre-07

I-48

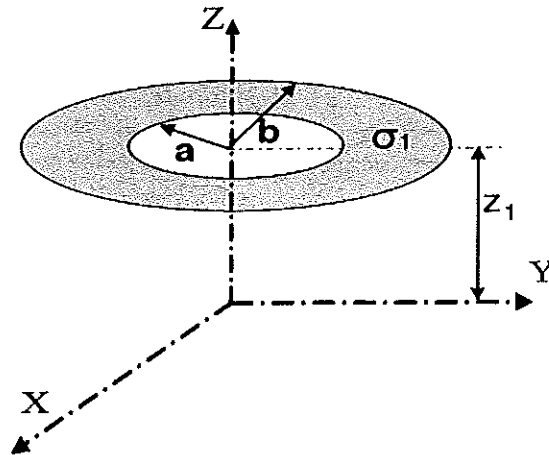
Sea un condensador formado por dos cilindros coaxiales de radios a y b , longitud L con aire entre las armaduras. Este condensador se carga con Q culombios y se aísla de modo que no pierda carga. Dicho condensador se introduce paulatinamente en un baño líquido dieléctrico de permitividad ϵ ($\epsilon=4\epsilon_0$), de modo que ese líquido entra entre las placas del condensador. Calcule:

- La energía eléctrica almacenada por el condensador en función de la altura x del líquido entre las placas. (3p)
- La fuerza, en función de la altura x del líquido entre las placas, que hay que aplicar para que los cilindros coaxiales entren en el líquido dieléctrico a velocidad constante. ¿Favorece esa fuerza el introducir los cilindros o se opone a la introducción? (2p)
- Para una altura x del líquido entre placas, ¿dónde aparece el máximo valor de campo eléctrico? Si se produjese una chispa cuando el valor de campo eléctrico vale E_0 V/m (en el aire) y $E_0/2$ V/m (en el dieléctrico), ¿a qué altura x se producirá la chispa y dónde (en el aire o en el líquido)? (3p)
- Si todo el espacio entre las placas se rellena con un material de conductividad σ , obtenga la relación entre el valor de las resistencias formadas al seleccionar los bornes de la resistencia en las caras laterales o en las tapas de los cilindros concéntricos. (2p)



Septiembre-07

- I-49** La corona circular de la figura, de radio interior a y radio exterior b ($0 < a < b$), situada en el vacío en el plano $z = z_1$, está cargada con una densidad superficial de carga σ_1 C/m².



- Calcule la intensidad de campo eléctrico en puntos del eje Z.
- Calcule la intensidad de campo eléctrico en puntos alejados de la distribución.
- Represente la intensidad de campo eléctrico en puntos del eje Z para b finito y para $b \rightarrow \infty$.
- Se sitúa una distribución de idéntica geometría y densidad superficial de carga σ_2 C/m² en $z = -z_1$. Calcule la intensidad de campo eléctrico del conjunto en puntos del eje Z.
¿Qué relación debe haber entre σ_1 y σ_2 para que el campo se anule en el origen del sistema de coordenadas?
- Si $\sigma_2 = -\sigma_1$, calcule la intensidad de campo eléctrico en puntos alejados de la distribución.

Febrero-08

I-50

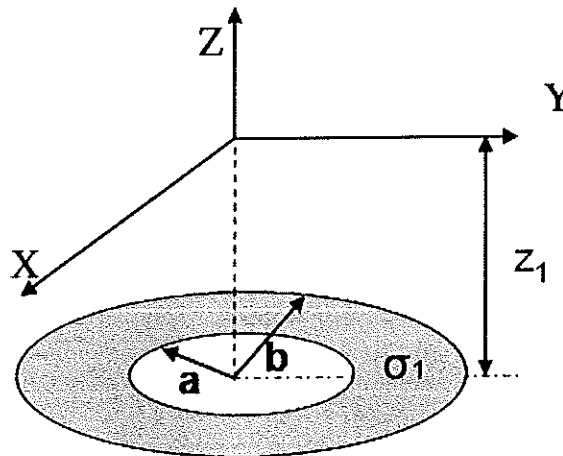
Un electrodo metálico ocupa el volumen $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2$. Está recubierto por un dieléctrico de permitividad ϵ Faradios/m y espesor d . En la superficie $r = R + d, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ se apoya un segundo electrodo de espesor e despreciable. Si se conecta una batería de forma que el electrodo exterior está a 0 V y el interior a V voltios:

- Suponiendo despreciable el efecto de bordes exprese la ecuación para calcular el potencial en la región intermedia entre electrodos y las condiciones de contorno a aplicar. (1 p)
- Obtenga el potencial en la región del apartado anterior. (1 p)
- Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (1 p)
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (1 p)
- Calcule la capacidad entre electrodos. (1p)
- Si el electrodo exterior se gira un ángulo $\alpha \leq \pi$ en torno al eje z calcule la capacidad. (1p)
- Si a partir de la posición anterior es libre de girar sobre el eje z razone cual será el valor final de α . ¿Cuál sería el valor final si se hubiese desconectado la batería antes de dejarle girar?. (2p)
- Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens entre los electrodos ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce en función del valor de α si los electrodos son conductores eléctricos perfectos?. ¿Cuánto vale la resistencia? (2p)

Febrero-08

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

I-51 La corona circular de la figura, de radio interior a y radio exterior b , situada en el plano $z = -z_1$, está cargada con una densidad superficial de carga σ_1 C/m².



- Calcule el potencial en puntos del eje Z y obtenga su valor para el caso en que $a = 0$.
- Calcule el potencial en puntos del eje Z alejados de la distribución.
- Represente el potencial en puntos del eje Z para b finito. Razone el valor del potencial para $b \rightarrow \infty$.
- Se sitúa una distribución de idéntica geometría y densidad superficial de carga σ_2 C/m² en $z = z_1$. Calcule el potencial del conjunto en puntos del eje Z.
¿Qué relación debe haber entre σ_1 y σ_2 para que el potencial se anule en el origen del sistema de coordenadas?. En esta última situación calcule el potencial en el plano $z = 0$.
- Si $\sigma_2 = -\sigma_1$, calcule el potencial en cualquier punto alejado de la distribución.

Septiembre-08

I-52

Un electrodo metálico ocupa el volumen $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq z \leq L$, ($\alpha < 2\pi$). Está recubierto por un dieléctrico de permitividad ϵ Faradios/m y espesor d . En la superficie del dieléctrico $\rho = R + d, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq z \leq L$ se apoya un segundo electrodo de espesor e despreciable. Si se conecta una batería de forma que el electrodo exterior está a 0 V y el interior a V voltios:

- Suponiendo despreciable el efecto de bordes exprese la ecuación para calcular el potencial en la región intermedia entre electrodos y las condiciones de contorno a aplicar. (1 p)
- Obtenga el potencial en la región del apartado anterior. (1 p)
- Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (1 p)
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (1 p)
- Calcule la capacidad entre electrodos. (1p)
- Si el electrodo exterior se gira un ángulo $\beta \leq 2\pi - \alpha$ en torno al eje z calcule la capacidad. (1p)
- Si a partir de la posición anterior es libre de girar sobre el eje z razone cual será el valor final de β . ¿Cuál sería el valor final si se hubiese desconectado la batería antes de dejarle girar?. (2p)
- Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens entre los electrodos ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce en función del valor de β si los electrodos son conductores eléctricos perfectos?. ¿Cuánto vale la resistencia? (2p)

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \right], \quad \nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \hat{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \hat{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \hat{a}_3$$

Septiembre-08

Telecomunicación de Grado

ELECTROMAGNETISMO

I-53 En la región $0 \leq r \leq a$ existe un sistema de cargas que da lugar a un potencial:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{K}{\tan\left(\frac{\pi r}{2a}\right)} \quad \text{si } 0 < r \leq a$$

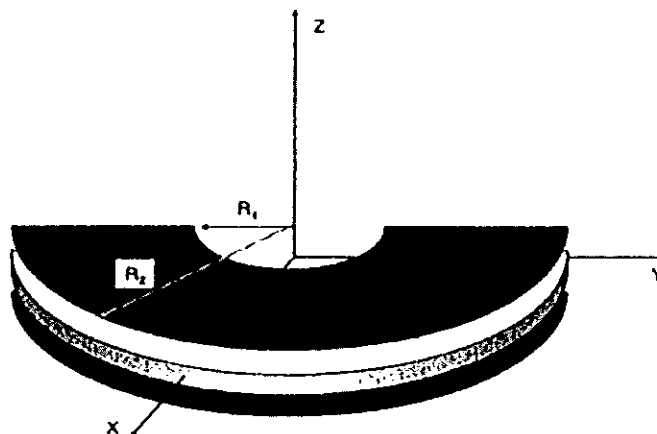
Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la expresión del potencial para $r \geq a$?
- ¿Cuál es la expresión del campo eléctrico en todo el espacio?
- ¿Cuánto vale la carga total de la distribución?
- ¿Existe carga superficial?, indique su posición y calcule su densidad.
- ¿Existe carga puntual?, indique su posición y calcule su valor.
- ¿Existe carga volumétrica?, indique su posición y calcule su densidad.

Febrero-2009

I-54 Un condensador de láminas está formado por dos láminas semicirculares paralelas que cubren situadas en $R_1 \leq \rho \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \pi, z = Z_1$ y $z = -Z_1$, como se indica en la figura. En la zona intermedia se sitúa un material dieléctrico de constante $\epsilon \gg \epsilon_0$ de la misma forma que los conductores y de altura $H < 2Z_1$ y centrado entre los conductores. Si se conecta una batería de forma que el electrodo superior está a 0 V y el inferior a V voltios.

- Suponiendo despreciable el efecto de bordes exprese la ecuación para calcular el potencial en cada una de las tres regiones ($-Z_1 < z < -H/2$, $-H/2 < z < H/2$, y $H/2 < z < Z_1$) y las condiciones de contorno a aplicar.
- Obtenga el potencial en las tres regiones del apartado anterior para $H = Z_1$ y dibuje una gráfica que represente el potencial en función de z .
- Calcule la intensidad de campo eléctrico en las tres regiones entre conductores.
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie de los conductores.
- Calcule la capacidad entre electrodos.
- Si el dieléctrico interior se gira un ángulo $\alpha \leq \pi$ en torno al eje Z calcule la capacidad resultante.
- ¿Cuál es el momento de la fuerza alrededor del eje Z que se ejerce sobre el dieléctrico si se mantiene constante la tensión entre placas? ¿Tiende a meter el dieléctrico o a sacarlo de entre las placas metálicas?



Febrero-2009

Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

I-55 En la región $\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \end{cases}$ existe un campo electromagnético de la forma:

$$\vec{E} = \hat{y} w \mu_0 \frac{a}{\pi} A \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(wt - \beta z)$$

$$\vec{H} = -A \left(\hat{x} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(wt - \beta z) - \hat{z} \beta \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(wt - \beta z) \right)$$

$$\text{Donde: } \beta = \sqrt{w^2 \mu_0 \epsilon_0 - (\pi/a)^2}$$

Teniendo en cuenta que el medio es el vacío y que no existen fuentes de campo, se pide:

- Verifique que estos campos verifican las cuatro ecuaciones de Maxwell.
- Las corrientes y cargas superficiales que deben existir en los límites de la región si el exterior es un conductor perfecto.

Septiembre-09

I-56 Un condensador cilíndrico formado por dos conductores de radios R_1 y R_3 y altura H está relleno con dos materiales dieléctricos que cubren el volumen de $R_1 < r < R_2$ con constante dieléctrica relativa ϵ_1 y el volumen $R_2 < r < R_3$ con constante dieléctrica relativa ϵ_2 .

- Suponiendo despreciable el efecto de bordes en los extremos del cilindro, determine el potencial en cada punto del interior cuando el cilindro interior está a potencial V y el exterior está puesto a masa.
- Calcule la intensidad del campo eléctrico en cada punto del interior del condensador.
- Obtenga la carga acumulada en cada uno de los conductores y determine la capacidad y la energía almacenada en el condensador.
- Si se desconecta el generador y se extrae el dieléctrico más interior ($\epsilon = \epsilon_1$), determine la tensión entre conductores en función de la altura h de extracción para $0 < h < H$.
- ¿Cuál es la fuerza eléctrica de extracción cuando $h = H/2$? ¿En qué sentido se produce?

Septiembre-09

I-57 Hay una distribución lineal de carga en el vacío sobre el eje Z de valor $\lambda(z) = \frac{\lambda_0 z}{L}$ C/m para $-L < z < L$ y cero en el resto. Se pide que:

- Indique de forma razonada cual es el valor del potencial y la dirección del campo eléctrico en el plano $z = 0$.
- Calcule el campo eléctrico en puntos del plano XY .
- Determine la carga total y el momento dipolar de la distribución obtenida y calcule el potencial y el campo eléctrico en puntos alejados del origen ($r \gg L$).
- Parte de la distribución de carga se sustituye por una esfera metálica de radio $L/2$ puesta a masa, quedando la misma línea de carga para $-L < z < -L/2$ y $L/2 < z < L$, y la esfera en medio. Determine la distribución de carga imagen para resolver el problema.

NOTA:

$$\int \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 + x^2}};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

Febrero-2010

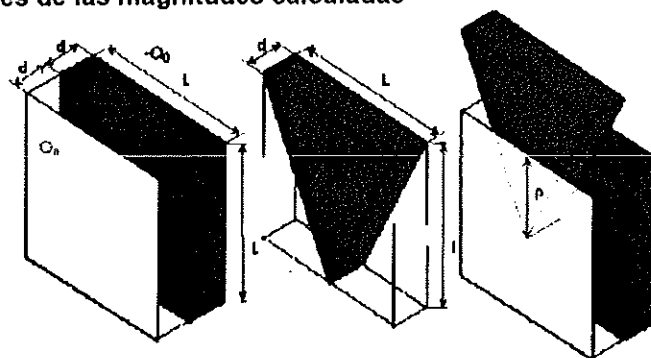
Telecomunicación de Grado
ELECTROMAGNETISMO

I-58

La figura muestra un condensador plano formado por dos armaduras cuadradas de lado L separadas una distancia $2d$. El interior está parcialmente relleno por una lámina de un dieléctrico de espesor d y permitividad $2\epsilon_1$ pegada a una de las armaduras, por lo que queda un espesor d de aire. En esta zona vacía se puede introducir una cuña de un dieléctrico de ϵ_1 con forma de triángulo isósceles de base L y altura L de la forma en que se muestra en la figura. Se pide:

- Cuando el condensador está cargado con Q_0 y no tiene la cuña, calcule el potencial y el campo eléctrico en su interior (sin cuña) aplicando la ecuación de Laplace, indicando las distintas regiones y condiciones de contorno (4p)
- A partir de los resultados anteriores calcule la capacidad del condensador (sin cuña) (1p)
- Calcule la capacidad del condensador cuando la cuña está introducida una profundidad p (2p)
- Si el condensador mantiene la carga Q_0 . Calcule la energía almacenada en función de p . (2p)
- Calcule la fuerza que se debe de aplicar a la cuña para mantenerla en su posición. Indique el sentido de esa fuerza, asumiendo que $\epsilon_0 < \epsilon_1$ (1p)

Indique las unidades de las magnitudes calculadas



Febrero-2010

I-59

Considere una distribución de carga cilíndrica indefinida y uniforme en la dirección del eje z . En un plano $z=cte$. la densidad de carga se puede escribir como:

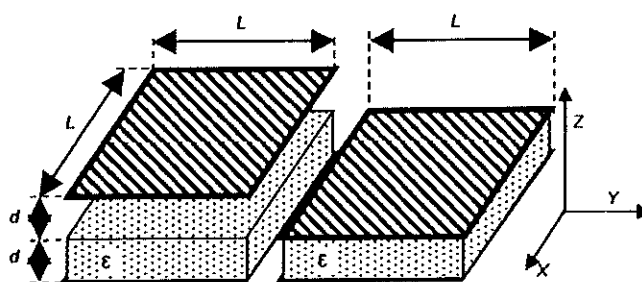
$$\rho_v = \begin{cases} (1 - r/a)\rho_{v0} \text{ C/m}^3 & \text{para } 0 < r < a \\ 0 & \text{para } r > a \end{cases}$$

- Calcule el campo eléctrico en puntos del plano que cumplen $r > a$ y en los puntos interiores al cilindro de radio " a " ($0 < r < a$). (3p).
- Asigne el valor cero de potencial a un punto que dista un valor $b > a$ del eje z y determine el potencial en cualquier otro punto. (3p)
- Dado que el campo exterior al cilindro de radio " a " es igual al de una línea de carga de densidad de carga uniforme, determine la densidad lineal equivalente de carga. (2p)
- Colocamos un cilindro conductor perfecto con el eje paralelo al eje Z y centrado en el punto $x=c$, $y=0$, de radio $R=c-b$, donde $c > b$. Determine la posición y densidad lineal de carga de una línea que sea imagen de la distribución de carga anterior, de forma que el potencial en el cilindro sea constante. (2p).

Indique las unidades de las magnitudes calculadas.

Septiembre-2010

La figura muestra dos condensadores compuestos por armaduras cuadradas de dimensiones $L \times L \text{ m}^2$. Las armaduras del condensador de la derecha están separadas por una lámina dieléctrica de permitividad $\epsilon_1 \text{ F/m}$ y espesor $d \text{ m}$. El condensador de la izquierda se diferencia del anterior en que su armadura superior está una altura $d \text{ m}$ sobre la lámina dieléctrica. Se pide que, despreciando el efecto de bordes:



1. Demuestre la expresión de la capacidad del condensador de la derecha (2p)
2. Demuestre la expresión de la capacidad del condensador de la izquierda (2p)
3. Inicialmente las armaduras inferiores se conectan a tierra y la armadura superior de la izquierda se conecta a un generador con potencial $V_0 \text{ V}$ y la de la derecha se mantiene aislada y descargada: ¿Cuál sería la carga de ambos condensadores? (1p)
4. A continuación se desconecta el generador y se desplaza la armadura superior del condensador de la izquierda hasta tocar el dieléctrico, manteniéndola aislada. ¿Cuáles son los nuevos valores diferencia de potencial y carga? (1)
5. Si en la situación anterior se conectan las armaduras superiores de los condensadores a través de una resistencia: ¿Cuáles son los nuevos valores diferencia de potencial y carga? (1p)
6. Indique la evolución de la energía electrostática durante los procesos descritos, indicando las fuentes o sumideros de la misma. (3p)

Indique las unidades de las magnitudes calculadas.

Septiembre-2010

I-61 En la región esférica $0 \leq r \leq R$ existe un sistema de cargas eléctricas que da lugar al siguiente potencial:

$$\phi(\vec{r}) = K_1 \ln\left(K_2 \frac{r}{R}\right) \quad \text{si} \quad 0 \leq r \leq R$$

Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

- a) Determine la expresión del campo eléctrico en $r < R$.
- b) ¿Cuál es el potencial para $r > R$?
- c) Determine la expresión del campo eléctrico para $r > R$.
- d) Determine la carga total en el sistema de cargas.
- e) Determine su densidad de carga volumétrica en función de r .
- f) ¿Existe carga superficial?, en su caso, indique su posición y calcule su densidad.
- g) ¿Existe carga puntual?, en su caso, indique su posición y calcule su valor.

Febrero-2011

Blogue 1: Identificación de cargas y Gauss

I. 26

$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < a \\ \frac{\epsilon k_1}{r^2} \hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \frac{\epsilon k_2}{r^3} \hat{r} & \text{si } r > b \end{cases} \quad (\text{C/m}^2)$$

Volumétricas: $\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla (D_r \cdot \hat{r}) =$
 $= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ 0 & \text{si } a < r < b \\ -\frac{\epsilon k_2}{r^4} & \text{si } r > b \end{cases}$

Superficiales: $\rho_s = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{12}$

$$\rho_s(r=a) = \hat{r} (\vec{D}(r=a^+) - \vec{D}(r=a^-)) \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon k_1}{a^2} \quad (\text{C/m}^2)$$

$$\rho_s(r=b) = \hat{r} (\vec{D}(r=b^+) - \vec{D}(r=b^-)) \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon k_2}{b^3} - \frac{\epsilon k_1}{b^2} = \frac{\epsilon}{b^2} \left(\frac{k_2}{b} - k_1 \right) \quad (\text{C/m}^2)$$

Lineales: no hay lineales ya que no hay ninguna línea donde $\vec{E} \rightarrow \infty$

Puntuales: no hay cargas puntuales ya que no hay ningún punto donde $\vec{E} \rightarrow \infty$

b) $Q(r \leq a)$

1ª forma: "me fio de mí"

$$\begin{aligned} Q_{\text{Tot}} &= \int_V \rho_v dV + \int_S \rho_s dS + \int_L \lambda d\ell + \sum_i q_i = \int_S \rho_s dS = \rho_s(r=a) \cdot \int_S dS = \\ &= \frac{\epsilon k_1}{a^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^2 \sin \theta d\theta d\phi = \epsilon k_1 \cdot 2\pi \cdot 2 \quad (\text{C}) \end{aligned}$$

2ª forma: "me fio más de Gauss"

Aplicamos Gauss sobre una superficie gaussiana de radio $r=a^+$

$$\begin{aligned} Q(r=a) &= \oint_S \vec{D}(r=a^+) \cdot d\vec{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\epsilon k_1}{a^2} \hat{r} \cdot a^2 \sin \theta d\theta d\phi \cdot \hat{r} = \\ &= \epsilon k_1 \cdot 2\pi \cdot 2 \quad (\text{C}) \end{aligned}$$

c) La condición de regularidad para $\vec{E}$ es: $\lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{E}| r^2 = 0$

El campo que debe cumplir la condición de regularidad es el que está en $r > b$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_2}{r^3} r^2 = 0 = 0 \Rightarrow \text{si cumple}$$

I.25

a) $\vec{E} = \vec{E}_0$

$$\vec{D} = \begin{cases} \epsilon_0 \left(\frac{k_1}{r^2} + k_2 r \right) \hat{r} & \text{si } r < a \\ \epsilon_0 \frac{k_3}{r^2} \hat{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$

$$k_3 = k_1 + k_2 a^3$$

Volumétricas: $\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla (D_r \cdot \hat{r})$
 $= \dots = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} = \begin{cases} 3\epsilon_0 k_2 & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$

Superficiales: $\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_s$

$$\begin{aligned} \rho_s(r=a) &= \hat{r} \cdot (\vec{D}(r=a^+) - \vec{D}(r=a^-)) = \\ &= \hat{r} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{k_3}{a^2} \hat{r} - \epsilon_0 \left(\frac{k_1}{a^2} + k_2 a \right) \hat{r} \right) = \\ &= \frac{\epsilon_0}{a^2} [k_3 - (k_1 + k_2 a^3)] = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Enunciado:} \\ k_3 = k_1 + k_2 a^3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Lineales:

No hay densidades lineales de carga ya que no hay líneas donde $\vec{E} \rightarrow \infty$

Puntuales:

Como $E(r=0) \rightarrow \infty$ puede existir una carga puntual en $r=0$

• 1ª forma:

Si existiera en $r=0$ una carga puntual crearía un campo:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Identificando este campo con la parte del campo dado que tiende a ∞ en $r=0$ obtenemos:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{k_1}{r^2} \hat{r} \Rightarrow q = 4\pi\epsilon_0 k_1 \quad (C)$$

I.19

$$a) \vec{E} = -\nabla\phi \stackrel{\phi=\phi(r)}{=} -\frac{\partial\phi}{\partial r} \cdot \hat{r} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < a \\ 2Kr \cdot \hat{r} & \text{si } a < r < b \\ \vec{0} & \text{si } r > b \end{cases} \quad (V/m)$$

b) • VOLUMÉTRICAS : $\rho_v = \nabla \cdot \vec{D}$

$$\boxed{\rho_v = \nabla \cdot \vec{D}} \stackrel{\epsilon=\epsilon_0}{=} \nabla \cdot (\epsilon_0 \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 (\nabla \cdot E_r \cdot \hat{r}) = \epsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot E_r) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r < a \\ \epsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot 2Kr) = 6K\epsilon_0 & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases} \quad (C/m^3)$$

• SUPERFICIALES: $\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)|_S$

$$\boxed{\rho_s(r=a)} = \hat{r} \cdot (\vec{D}(r=a^+) - \vec{D}(r=a^-)) = \hat{r} \cdot (\epsilon_0 \cdot 2Kr \cdot \hat{r} - \vec{0}) \stackrel{r=a^+}{=} \boxed{2K\epsilon_0 \cdot a} \quad (C/m^2)$$

$$\boxed{\rho_s(r=b)} = \hat{r} \cdot (\vec{D}(r=b^+) - \vec{D}(r=b^-)) = \hat{r} \cdot (\vec{0} - \epsilon_0 \cdot 2Kr \cdot \hat{r}) \stackrel{r=b^-}{=} \boxed{-2K\epsilon_0 \cdot b} \quad (C/m^2)$$

• LINEALES Y PUNTUALES:

No hay porque no hay ni líneas ni puntos donde $\vec{E}$ tienda a ∞ .

c) • 1ª forma: Como sólo hay carga hasta $r=b$, es decir, no hay carga en el infinito, aplicamos Gauss sobre una superficie esférica de radio r tal que $r \rightarrow \infty$:

$$\boxed{Q_{total}} = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Ver apartado a)}}{=} \left\{ \vec{D} = \vec{D}(r \rightarrow \infty) \stackrel{!}{=} \vec{0} \right\} = \boxed{0} \quad (C)$$

• 2ª forma: Por definición:

$$\boxed{Q_{tot}} = \iiint_V \rho_v dV + \iint_S \rho_s \cdot ds + \int_L \lambda \cdot dl + \sum_{i=1}^N q_i = \iiint_V 6K\epsilon_0 dV + \iint_S 2K\epsilon_0 a ds - \iint_S 2K\epsilon_0 b ds =$$

$$= 6K\epsilon_0 \cdot \frac{4}{3} \pi (b^3 - a^3) + 2K\epsilon_0 \cdot a \cdot 4\pi a^2 - 2K\epsilon_0 \cdot b \cdot 4\pi b^2 = \boxed{0} \quad (C)$$

simplyjared.com

$$d) \boxed{W_E} = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \cdot E^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=a}^b \epsilon_0 \cdot (2kr)^2 \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

Sólo hay campo
desde a hasta b.

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot 4k^2 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{b^5 - a^5}{5} \right) = \boxed{\frac{8}{5} \cdot \epsilon_0 \cdot k^2 \cdot \pi (b^5 - a^5)} \text{ (Julios)}$$

Resultado
de la integral
en φ

Resultado de
la integral
en θ

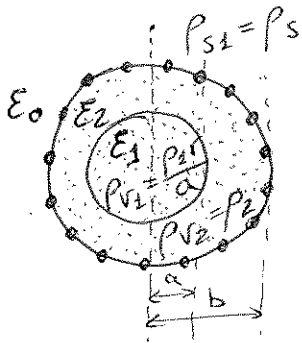
Resultado de la
integral en r

• 2ª forma:

Aplicamos Gauss sobre una superficie esférica de radio r y hacemos $\lim_{r \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned} q(r=0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \epsilon_0 \left(\frac{k_1}{r^2} + k_2 r \right) \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \epsilon_0 (k_1 + k_2 r^3) 2\pi \cdot 2 = 4\pi \epsilon_0 k_1 \quad (c) \end{aligned}$$

b)



Aplicamos Gauss sobre una superficie esférica de radio r :

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_{\text{encerrada}}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D(r) \cdot \hat{r} \cdot dS \cdot \hat{r} = D(r) \oint_S dS = D(r) 4\pi r^2$$

por simetría

si $r < a \Rightarrow Q_{\text{encerrada}} = \iiint_V \rho_{V1} dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a \frac{\rho_1 r}{a} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

$$Q_{\text{enc}} = \frac{\rho_1}{a} \frac{r^4}{4} 2\pi \cdot 2 = \frac{\rho_1 r^4 \pi}{a} = D(r) \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_1} = \frac{\rho_1 r^2}{4a\epsilon_1} \hat{r}$$

si $a < r < b \Rightarrow Q_{\text{enc}} = \iiint_V \rho_{V1} dV + \iiint_V \rho_{V2} dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a \frac{\rho_1 r}{a} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi + \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=a}^r \rho_2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \rho_1 a^3 \pi + \rho_2 \cdot 2\pi \cdot 2 \left(\frac{r^3 - a^3}{3} \right)$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_2} = \frac{\rho_1 a^3 \pi + 4\pi \rho_2 \left(\frac{r^3 - a^3}{3} \right)}{4\pi \epsilon_2 r^2} \hat{r} \quad (V/m)$$

si $r > b \Rightarrow Q_{\text{enc}} = \iiint_V \rho_{V1} dV + \iiint_V \rho_{V2} dV + \iint_S \rho_s dS = \rho_1 a^3 \pi + \rho_2 4\pi \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) + \rho_s 4\pi b^2 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_1 a^3 \pi + \rho_2 4\pi \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) + \rho_s 4\pi b^2}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (V/m)$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \rho_s b^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

c) $Q_{\text{tot}} = Q_{\text{enc}} (r > b)$

d) Una posible solución es: $\begin{cases} \rho_1 = \frac{4}{3}\rho_2 \\ \rho_2 = -\frac{3\rho_s}{b} \end{cases}$ otra: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_s = 0$

I.31 $\epsilon = \epsilon_0$

$$\vec{E} = \begin{cases} \left(\frac{k_1 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{k_2}{\rho} \right) \hat{\rho} + \frac{k_1 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} & \text{si } \rho < a \\ \frac{k_1 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\rho} + \frac{k_1 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

a) $\vec{E}$ es $\begin{cases} \text{irrotacional} \\ \text{conservativo} \\ \text{estático} \end{cases} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & \rho E_\phi & E_z \end{vmatrix} = \begin{cases} E_\phi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \end{cases} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & 0 & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \cdot \rho \cdot \hat{\phi} \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) = \vec{0} \Rightarrow \text{si es conservativo}$$

Se trata de demostrar que: $\frac{\partial E_\rho}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial \rho}$ en las dos regiones

b) Volumétricas: $\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (D_\rho \hat{\rho} + D_z \hat{z}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D_z}{\partial z} =$

$$= \begin{cases} 0 & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \quad (\text{C/m}^3)$$

Superficiales: $\rho_s = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} \Rightarrow \rho_s(\rho=a) = \hat{\rho} \cdot (\vec{D}(\rho=a^+) - \vec{D}(\rho=a^-))$

$$= -\epsilon_0 \frac{k_2}{a} \quad (\text{C/m}^2)$$

Lineales: puede existir una densidad lineal de carga ya que el campo tiende a infinito en $\rho=0$ (eje z)

Si existiera crearía un campo dado por: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$ (V/m)

Identificando este campo con la parte del campo dado que tiende a infinito en $\rho=0$ obtenemos:

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho} = \frac{k_2}{\rho} \hat{\rho} \Rightarrow \lambda = 2\pi\epsilon_0 k_2 \quad (\text{C/m})$$

Puntuales: Como $\vec{E} \Big|_{\substack{\rho=0 \\ z=0}} \rightarrow \infty$ puede existir una carga puntual en el origen ($\rho=0, z=0$).

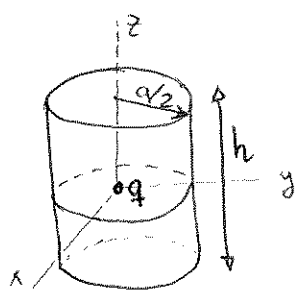
Si existiera crearía: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ cambiamos de sistema

$$\vec{E} = \frac{q \cdot r \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \begin{cases} \frac{q (\rho \hat{\rho} + z \hat{z})}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{q (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Identificamos (usando el mismo sistema) con la parte de $\vec{E}$ dado que tiende a ∞ en $\rho=0$ y $z=0$

$$\frac{q (\rho \hat{\rho} + z \hat{z})}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{k_1 \rho \hat{\rho} + k_1 z \hat{z}}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow q = 4\pi\epsilon_0 k_1 \quad (c)$$

c)



1ª forma: "me fío de mí"

$$Q_{tot\ enc} = \iiint_V \rho_v dV + \iint_S \rho_s dS + \int_L \lambda dl + \sum_{i=1}^N q_i =$$

$$= \lambda \cdot h + q = +2\pi\epsilon_0 k_2 h + 4\pi\epsilon_0 k_1 \quad (c)$$

2ª forma: Gauss en el cilindro (puraco mortal)

d) Cálculo sin que nadie se entere para saber la respuesta y basándome en ella fingiré razonar:

$$Q_{tot} = \iiint_V \rho_v dV + \iint_S \rho_s dS + \int_L \lambda dl + \sum_{i=1}^N q_i = -\epsilon_0 \frac{k_2}{a} 2\pi a h + 2\pi\epsilon_0 k_2 h + 4\pi\epsilon_0 k_1$$

$$Q_{tot} = 4\pi\epsilon_0 k_1 = \text{carga puntual}$$

Respuesta "razonada":

Observamos que el campo en $\rho > a$ es el correspondiente a la carga puntual, por tanto la carga encerrada por este cilindro será la de la carga puntual.

I.53

Hay carga en $0 \leq r \leq a$

$$\rho(0 < r \leq a) = \frac{k}{\lg\left(\frac{1+r}{2a}\right)}$$

a) $\phi(r \geq a)$?

1ª forma: como no hay datos de carga $\Rightarrow$ Poisson o Laplace

$\Delta\phi = \frac{-\rho r}{\epsilon}$; pero como en $r > a$ no hay ρr , aplicamos Laplace

$$\Delta\phi = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } \phi = \phi(r)}}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = A \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} \Rightarrow \phi = \frac{-A}{r} + B \text{ (V)} \quad (r \geq a)$$

siendo A y B constantes

Como la distribución de cargas es finita: $\phi(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow B = 0$

Como el ϕ es una función continua: $\phi(r=a^-) = \phi(r=a^+)$

$$\frac{-A}{a} = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \phi(r \geq a) = 0 \text{ (V)}$$

2ª forma: observar que se puede aplicar el teorema de la media

Observamos que $\phi(r=a) = 0$ y como no hay cargas en la región exterior, por el teorema de la media $\phi(r \geq a) = 0$

b)

$$\phi = \begin{cases} \frac{k}{\lg\left(\frac{1+r}{2a}\right)} & r \leq a \\ 0 & r \geq a \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} = \begin{cases} \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{\ln^2\left(\frac{1+r}{2a}\right)} \hat{r} & (r < a) \\ \vec{0} & (r > a) \end{cases} \text{ (V/m)}$$

c) Como sólo hay carga hasta $r=a$ podemos aplicar Gauss en una superficie esférica de radio $> a$

$$Q_{\text{tot}} = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \{ \vec{D} = \vec{D}(r > a) = \vec{0} \} = 0 \text{ (C)}$$

d) Sólo puede existir en $r=a$

$$\rho_s(r=a) = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_s = \hat{r} (\vec{D}(r=a^+) - \vec{D}(r=a^-)) = \frac{-\frac{1}{2}k\epsilon}{2a} \quad (C/m^2)$$

$$\begin{aligned} \rho_v &= \nabla \cdot \vec{D} = \nabla (D_r \hat{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = \\ &= \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}k\epsilon}{2ar} \cdot \frac{2 \sin(\frac{\pi r}{2a}) - \frac{\pi r}{2a} \cos(\frac{\pi r}{2a})}{\sin^3(\frac{\pi r}{2a})} & \text{si } r < a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases} \quad (C/m^3) \end{aligned}$$

e) Puede existir una carga puntual en $r=0$ ya que $E_{r=0} \rightarrow \infty$

Aplicamos Gauss sobre una superficie esférica de radio r cuando $r \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} q(r=0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \oint \vec{D} d\vec{S} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\frac{1}{2}k\epsilon}{2a} \cdot \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi r}{2a})} \hat{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r} \\ &= \frac{\frac{1}{2}k\epsilon}{2a} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{\sin(\frac{\pi r}{2a})^2} = \left\{ \frac{\sin\theta}{\theta} \approx 1 \right\} = \frac{4\frac{1}{2}k\epsilon}{\frac{\pi}{2a}} = 8\epsilon k a \quad (C) \end{aligned}$$

Control 20-oct-2010

$$\vec{D}(\vec{r}) = \hat{r} k \frac{a^2}{r^2} \arctg\left(\frac{a}{r-a}\right)$$

a) Volumétricas:

$$\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r)$$

b) Superficiales: ($r=a$)

$$\left. \begin{aligned} \arctg\left(\frac{a}{r-a}\right)_{r=a^+} &= \frac{\pi}{2} \\ \arctg\left(\frac{a}{r-a}\right)_{r=a^-} &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \rho_s(r=a) = \hat{r} (\vec{D}(r=a^+) - \vec{D}(r=a^-)) = \\ = \hat{r} \left(\hat{r} k \frac{\pi}{2} - \hat{r} k \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = k\pi \quad (C/m^2) \quad (r=a)$$

d) Puntuales:

$$\begin{aligned} q(r=0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \oint \vec{D} d\vec{S} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \hat{r} k \frac{a^2}{r^2} \arctg\left(\frac{a}{r-a}\right) \hat{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= k a^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\pi \quad (C) \end{aligned}$$

Apellidos:

Nombre:

Dado el campo electrostático $\vec{D}(\vec{r}) = \hat{r} K \frac{a^2}{r^2} \arctan\left(\frac{a}{r-a}\right)$ determine las cargas que lo generan:

- Posición y densidad de posibles cargas volumétricas
- Posición y densidad de posibles cargas superficiales
- Posición y densidad de posibles cargas lineales
- Posición y valor de posibles cargas puntuales.

Una representación del campo ayuda a localizar las distribuciones de carga:

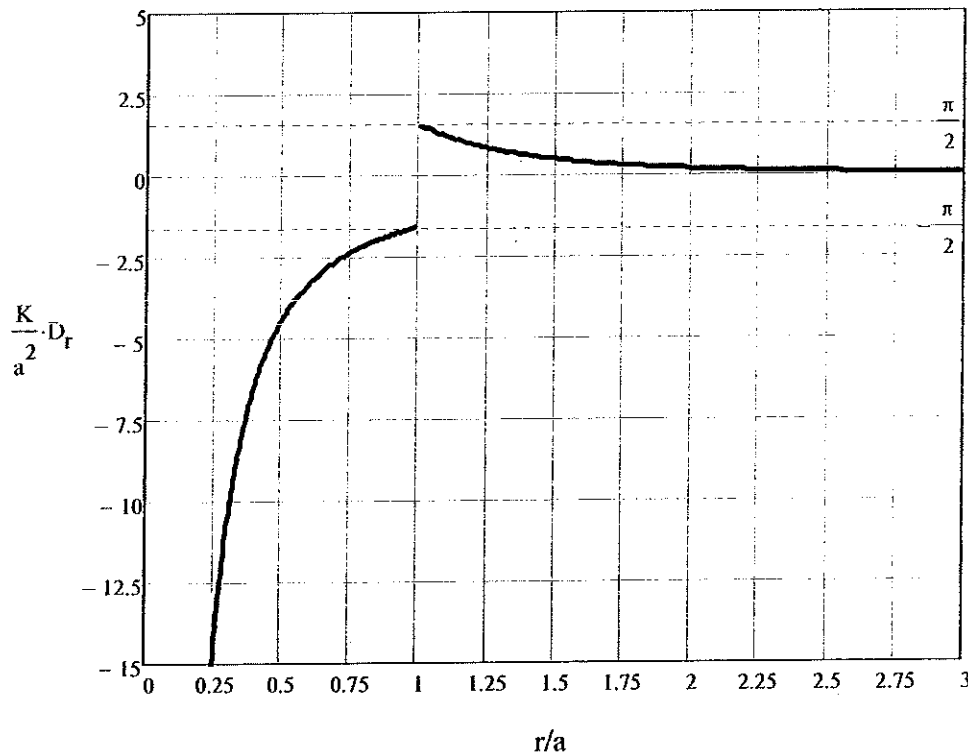


Figura 1: Representación de la componente radial del campo

- Cargas volumétricas:

Su posición se podrá extender a todos los puntos en que exista campo y su densidad se puede calcular con la ley de Gauss en forma diferencial

$$\begin{aligned} \rho_v &= \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 K \frac{a^2}{r^2} \arctan \frac{a}{r-a} \right) = \\ &= K \frac{a^2}{r^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{r-a} \right)^2} \frac{-a}{(r-a)^2} = -K \frac{a^3}{r^2 [(r-a)^2 + a^2]} \text{ C/m}^3 \end{aligned}$$

- Cargas superficiales;

Su posición se limitará a las superficies en que haya discontinuidades de la componente normal del campo D y se pueden calcular con la condición de frontera $\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)_{\text{S}} = \rho_s$

Es este caso la única superficie de discontinuidad es $r = a$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{n} &= \hat{r} \\ \vec{D}_1|_S &= \lim_{r \rightarrow a^-} \vec{D}_1 = -K \frac{\pi}{2} \hat{r} \\ \vec{D}_2|_S &= \lim_{r \rightarrow a^+} \vec{D}_2 = K \frac{\pi}{2} \hat{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_S|_{r=a} = K\pi \text{ C/m}^2$$

c) Cargas lineales:

Su posición se limitará a las líneas en que no esté definido el campo. No hay ninguna de estas líneas, luego no hay cargas lineales.

d) Cargas puntuales:

Su posición se limitará a los puntos aislados en que no esté definido el campo, lo que en este caso se reduce al origen de coordenadas. Su valor se puede calcular como el límite al que tiende la carga encerrada dentro de un volumen que se hace tender a cero manteniendo el punto dentro.

Tomando una superficie esférica de radio R:

$$\begin{aligned} q_0 &= \lim_{R \rightarrow 0} Q_{S_R} = \lim_{R \rightarrow 0} \oiint_{S_R} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \lim_{R \rightarrow 0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} K \frac{a^2}{R^2} \arctan\left(\frac{a}{R-a}\right) \hat{r} \cdot \hat{r} R^2 \sin\theta d\phi d\theta = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} 4\pi K a^2 \arctan\left(\frac{a}{R-a}\right) = -\pi^2 K a^2 \text{ C} \end{aligned}$$

Apellidos:

Nombre:

PROBLEMA 1. SOLUCIÓN

En la región esférica $0 \leq r \leq R$ existe un sistema de cargas eléctricas que da lugar al siguiente potencial:

$$\Phi(\vec{r}) = K_1 \ln\left(K_2 \frac{r}{R}\right) \quad 0 \leq r \leq R$$

Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Determine la expresión del campo eléctrico en $r < R$ (1p)

El campo en la región interior de la esfera viene dado por el gradiente del potencial:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi = -\hat{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\hat{r} \frac{K_1}{r} \quad r < R$$

b) ¿Cuál es el potencial para $r \geq R$? (2p)

En la zona libre de cargas el potencial debe cumplir la ecuación de Laplace:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$$

Que expresada en coordenadas esféricas y teniendo en cuenta que el problema tiene simetría esférica y por tanto el potencial sólo depende de r , se obtiene:

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial r} \right) \right) = 0$$

De donde se obtiene que: $\Phi(\vec{r}) = \frac{C_1}{r} + C_2$

Si tomamos como referencia el potencial nulo en el infinito, $C_2=0$ y teniendo en cuenta que el potencial es continuo en $r=R$ se obtiene:

$$\Phi(\vec{r})\Big|_{r=R} = \frac{C_1}{R} = K_1 \ln(K_2) \Rightarrow C_1 = K_1 R \ln(K_2)$$

c) Determine la expresión del campo eléctrico para $r > R$ (1p)

Para $r > R$ el campo eléctrico es el gradiente del potencial y viene dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\hat{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \hat{r} \frac{K_1 R \ln(K_2)}{r^2} \quad r > R$$

d) Determine la carga total en el sistema de cargas. (2p)

Si integramos el campo eléctrico en una esfera de radio superior a R , podemos aplicar gauss al flujo de D , obteniendo:

$$Q = \oint \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = 4\pi r^2 \epsilon_0 \frac{K_1 R \ln(K_2)}{r^2} = 4\pi \epsilon_0 K_1 R \ln(K_2)$$

e) Determine su densidad de carga volumétrica en función de r . (2p)

La densidad de carga se puede obtener por la divergencia del campo D :

$$\rho = \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2 E_r}{\partial r} \right) = -\epsilon_0 \frac{K_1}{r^2} \quad 0 \leq r \leq R$$

En el exterior de la esfera de radio R , la carga es nula.

f) ¿Existe carga superficial?, en su caso, indique su posición y calcule su densidad. (1p)

Para determinar la carga superficial debemos observar las discontinuidades del campo D , que en este caso sólo se pueden producir en la superficie $r=R$.

$$D_1 = D\Big|_{r=R^-} = -\hat{r} \epsilon_0 \frac{K_1}{R}$$

$$D_2 = D\Big|_{r=R^+} = \hat{r} \epsilon_0 \frac{K_1 R \ln(K_2)}{R^2}$$

La densidad superficial de carga viene dada por:

$$\rho_s = D_{2n} - D_{1n} = \epsilon_0 \frac{K_1}{R} (\ln(K_2) + 1) \quad \text{para } r = R$$

g) ¿Existe carga puntual?, en su caso, indique su posición y calcule su valor. (1p)

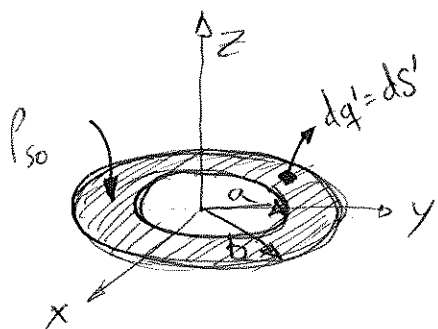
El único punto donde el potencial y el campo se hace infinito es el origen, donde podría haber una carga puntual. La carga puntual la podemos obtener a través del flujo del campo D en una esfera cuyo radio tiende a cero.

$$q = \oint \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} \Big|_{r \rightarrow 0} = 4\pi r^2 \epsilon_0 \frac{K_1}{r} \Big|_{r \rightarrow 0} = 4\pi \epsilon_0 r K_1 \Big|_{r \rightarrow 0} = 0$$

Luego la carga puntual en el origen es nula aunque la densidad de carga en el origen tiende a infinito.

Bloque 2: Integrales de superposición

II.11



a) $\Phi(0,0,z)$?

$$\begin{aligned}\Phi(0,0,z) &= \iint_{S'} \frac{\rho_{s'} ds'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} = \left\{ \begin{array}{l} \rho_{s'} = \rho_{so} \\ ds' = \rho' d\rho' d\psi' \\ \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}' = \rho'\hat{\rho}' \end{array} \right\} = \\ &= \int_{\psi'=0}^{2\pi} \int_{\rho'=a}^b \frac{\rho_{so} \cdot \rho' d\rho' d\psi'}{4\pi\epsilon \cdot \sqrt{z^2 + \rho'^2}} = \frac{\rho_{so}}{4\pi\epsilon} \cdot 2\pi \left[\sqrt{z^2 + \rho'^2} \right]_{\rho'=a}^b = \\ &= \frac{\rho_{so}}{2\epsilon} \left[\sqrt{z^2 + b^2} - \sqrt{z^2 + a^2} \right] \quad (V)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) \vec{E}(0,0,z) &= \iint_{S'} \frac{\rho_{s'} (\vec{r} - \vec{r}') ds'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_{\psi'=0}^{2\pi} \int_{\rho'=a}^b \frac{\rho_{so} (z\hat{z} - \rho'\hat{\rho}') \rho' d\rho' d\psi'}{4\pi\epsilon (z^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}' = \cos(\psi')\hat{x} + \sin(\psi')\hat{y} \\ \int_{\psi'=0}^{2\pi} \cos(\psi') d\psi' = 0 = \int_{\psi'=0}^{2\pi} \sin(\psi') d\psi' \end{array} \right\} = \frac{\rho_{so} z \hat{z} \cdot 2\pi \left(\frac{-1}{\sqrt{z^2 + \rho'^2}} \right)_{\rho'=a}^b}{4\pi\epsilon} = \\ &= \frac{\rho_{so}}{2\epsilon} z \hat{z} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \quad (V/m)\end{aligned}$$

Nota:

$$\vec{E}(0,0,z) = -\nabla\Phi(0,0,z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \hat{z} = \frac{\rho_{so}}{2\epsilon} z \hat{z} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \quad V/m$$

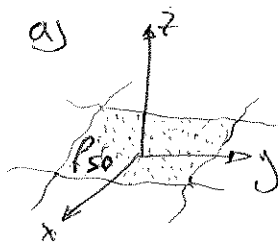
Hemos obtenido el campo total porque el campo en puntos del eje z con esta distribución sólo tiene componente en $\hat{z}$. Si la corona no fuera simétrica o no estuviera entera, deberíamos aplicar integrales de superposición.

c) $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \Phi(0,0,z) = \infty$ (No válido)

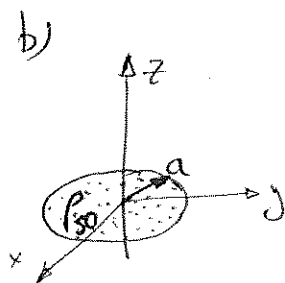
$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \vec{E}(0,0,z) = \frac{\rho_{so}}{2\epsilon} z \hat{z} \frac{1}{|z|} = \frac{\rho_{so}}{2\epsilon} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \hat{z} \quad (V/m)$$

si válido en el $\vec{E}$ que crea el plano indefinido

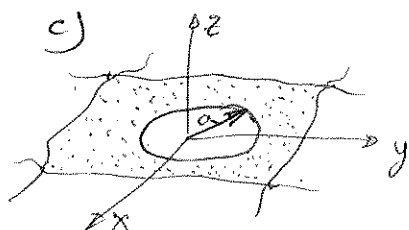
II.27



$$\phi = \frac{-\rho_{so}}{2\epsilon} |z| + \text{cte} \quad (V)$$

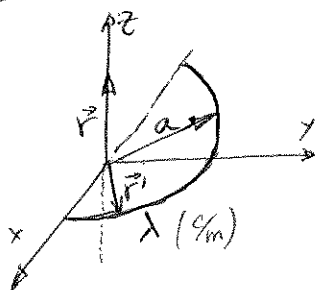


$$\phi(0,0,z) = \frac{\rho_{so}}{2\epsilon} (\sqrt{z^2 + a^2} - |z|) \quad (V)$$

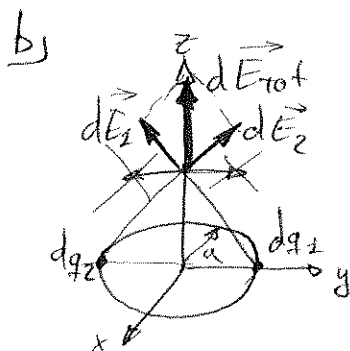


$$\phi_{\text{tot}}(0,0,z) = \phi_a - \phi_b = \frac{-\rho_{so}}{2\epsilon} \sqrt{z^2 + a^2} + \text{cte}$$

II.36

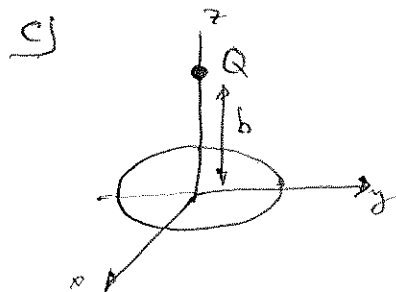


$$\begin{aligned} \vec{E}(0,0,z) &= \int_{L'} \frac{\lambda (\vec{r} - \vec{r}') d\ell'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda' = \lambda \\ \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}' = a\hat{\rho}' \\ d\ell' = a d\psi' \\ \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - a\hat{\rho}' \end{array} \right\} = \\ &= \int_{\psi'=0}^{\pi} \frac{\lambda (z\hat{z} - a\hat{\rho}') \cdot a \cdot d\psi'}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\lambda a}{4\epsilon_0 \pi (z^2 + a^2)^{3/2}} \int_{\psi'=0}^{\pi} (z\hat{z} - a\cos\psi'\hat{x} + \\ &- a\sin\psi'\hat{y}) d\psi' = \frac{\lambda a (z\hat{z} - 2a\hat{y})}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (V/m) \end{aligned}$$



se cancela la componente $\hat{y}$
y se duplica la componente $\hat{z}$

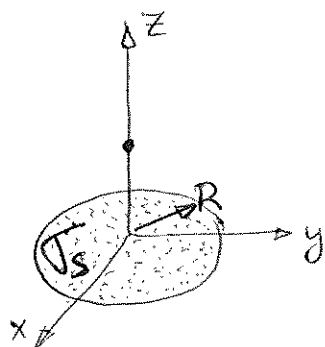
$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\lambda a z \hat{z}}{2\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (V/m)$$



$$\vec{F}(Q) = Q \vec{E}_Q = \frac{Q \cdot \lambda \cdot a \cdot b \cdot \hat{z}}{2\epsilon_0 (b^2 + a^2)^{3/2}} \quad (N)$$

d) Un anillo idéntico en $z=2b$ crea la misma fuerza en Q pero de sentido contrario.

e)



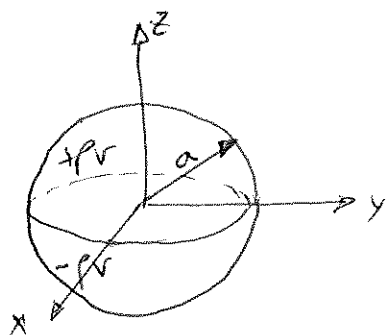
$$d\lambda = \sigma da = \sigma dp$$

$$\vec{E}_{\text{disco}} = \int_{\text{Disco}} d\vec{E}_{\text{anillos}} = \int \frac{d\lambda a z \hat{z}}{2\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} =$$

$$= \int_{p'=0}^R \frac{\sigma p z \hat{z} dp}{2\epsilon_0 (z^2 + p^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \hat{z} \quad \text{V/m}$$

Cálculo de $\vec{p}$:

Ej 1: Calcular el momento dipolar de:



$$\vec{p} = \iiint_{V'} \vec{r}' \rho_{v'} dV' = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^a (+\rho_v) r \hat{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi$$

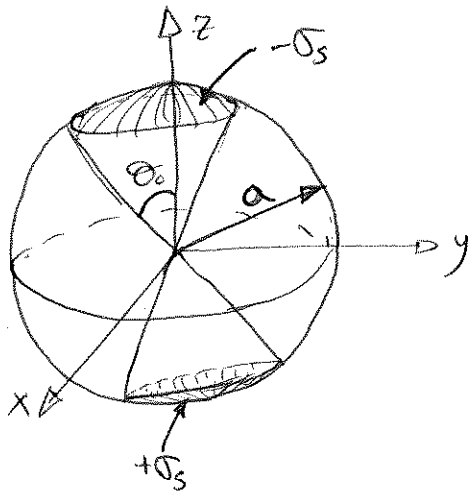
$$+ \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int_{r=0}^a (-\rho_v) r \hat{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\hat{r} = \sin\theta \cos\psi \hat{x} + \sin\theta \sin\psi \hat{y} + \cos\theta \hat{z} \\ &\text{sabemos por la posición de las cargas} \\ &\text{que } \vec{p} = p_0 \hat{z} \text{ ya que } \int_{\psi=0}^{2\pi} \cos\psi d\psi = 0 = \int_{\psi=0}^{2\pi} \sin\psi d\psi \end{aligned} \right\} =$$

$$= \rho_v 2\pi \hat{z} \frac{a^4}{4} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta - \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta \right) =$$

$$= \frac{\rho_v \pi a^4 \hat{z}}{2} \left(\frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{\rho_v \pi a^4}{2} \hat{z} \text{ (C.m)}$$

Ej 2:



$$\vec{P} = \iint_{S'} \vec{r}' \cdot \sigma_s' dS' = \iint_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi-\theta_0}^{\pi} (1+\sigma_s) a \hat{r} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi + \iint_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_0} (-\sigma_s) a \hat{r} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} \hat{r} &= \sin\theta \cos\theta \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + \cos\theta \hat{z} \\ \text{Sabemos que } \vec{P} &= P_z \hat{z} \text{ por la posición de las cargas} \end{aligned} \right\} =$$

$$= \hat{z} \sigma_s a^3 2\pi \left(\int_{\theta=\pi-\theta_0}^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta - \int_{\theta=0}^{\theta_0} \cos\theta \sin\theta d\theta \right) =$$

$$= \hat{z} \sigma_s a^3 2\pi \left(\frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_{\pi-\theta_0}^{\pi} - \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\theta_0} \right) =$$

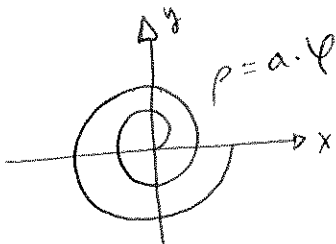
$$= \hat{z} \sigma_s a^3 2\pi \left(\frac{-\sin^2(\pi-\theta_0)}{2} - \frac{\sin^2(\theta_0)}{2} \right) = -\hat{z} \cdot \sigma_s a^3 2\pi \sin^2\theta_0$$

↑ iguales ↑

Blogue 3: del raras, $\vec{P}$ y $\vec{E}/\phi$ en puntos lejanos

I.17

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \varphi^2 \sqrt{1+\varphi^2} \text{ (cm)} \quad \text{a) } \phi(0,0,0) = \int_{L'} \frac{\lambda' dl'}{4\pi\epsilon |\vec{r}-\vec{r}'|}$$



$$\vec{r} = 0$$

$$\vec{r}' = \rho' \hat{\rho}' = a \varphi' \hat{\rho}'$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \rho' = a \varphi'$$

$$dl' = \sqrt{(d\rho')^2 + (\rho' d\varphi')^2 + (dz')^2}$$

$$z' = 0 \Rightarrow dz' = 0$$

$$\rho' = a \varphi' \Rightarrow d\rho' = \frac{\partial \rho'}{\partial \varphi'} d\varphi' = a d\varphi'$$

$$dl' = \sqrt{(a d\varphi')^2 + (a \varphi' d\varphi')^2} = a \sqrt{1+\varphi'^2} d\varphi'$$

$$\phi(0,0,0) = \int_{\varphi'=0}^{4\pi} \frac{\lambda_0 \cdot \varphi'^2 \cdot \sqrt{1+\varphi'^2} \cdot a \cdot \sqrt{1+\varphi'^2} \cdot d\varphi'}{4\pi\epsilon a \varphi'} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon} \int_{\varphi'=0}^{4\pi} \varphi' + \varphi'^3 d\varphi'$$

$$= \frac{2\lambda_0\pi}{\epsilon} (1+8\pi^2) \text{ (V)}$$

$$b) \vec{E}(0,0,0) = \int_{L'} \frac{\lambda' (\vec{r}-\vec{r}') \cdot d\ell'}{4\pi\epsilon |\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \int_{\varphi'=0}^{4\pi} \frac{\lambda_0 \varphi'^2 \sqrt{1+\varphi'^2} (-a\varphi' \hat{\rho}') a \sqrt{1+\varphi'^2} d\varphi'}{4\pi\epsilon (a\varphi')^3}$$

$$= \{ \hat{\rho}' = \cos \varphi' \hat{x} + \sin \varphi' \hat{y} \} = \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon a} \int_{\varphi'=0}^{4\pi} (1+\varphi'^2) (\cos \varphi' \hat{x} + \sin \varphi' \hat{y}) d\varphi'$$

$$= \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon a} \int_{\varphi'=0}^{4\pi} (\varphi'^2 \cos \varphi' \hat{x} + \varphi'^2 \sin \varphi' \hat{y}) d\varphi' = \frac{\lambda_0}{\epsilon a} (-2\hat{x} + 4\pi\hat{y}) \text{ (V/m)}$$

↑
Nota del enunciado

c) Campo en puntos lejanos:

$$\vec{E} \approx \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon r^3} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right] + \dots$$

$$\phi = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} + \dots$$

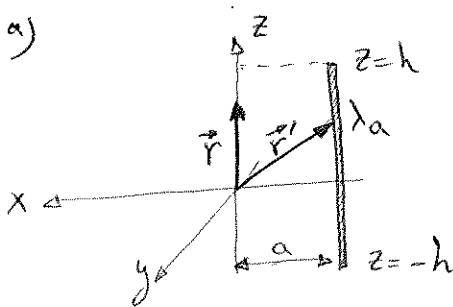
Observamos que Q_{tot} de la espiral es distinto de cero

$$\vec{E}_{\text{ptos lejanos}} \approx \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \text{ (V/m)} \quad Q_{tot} = \int_{L'} \lambda' d\ell' = \int_{\varphi'=0}^{4\pi} \lambda_0 \varphi'^2 \sqrt{1+\varphi'^2} a \sqrt{1+\varphi'^2} d\varphi'$$

$$Q_{tot} = \lambda_0 a \left(\frac{(4\pi)^3}{3} + \frac{(4\pi)^5}{5} \right)$$

I.45

a)



$$\phi(z\hat{z}) = \phi(0,0,z) = \int \frac{\lambda'_a d\ell'_a}{4\pi\epsilon |\vec{r}-\vec{r}'_a|}$$

$$\lambda'_a = \lambda_a$$

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{r}'_a = -a\hat{x} + z'\hat{z}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'_a| = |(z-z')\hat{z} + a\hat{x}| = \sqrt{(z'-z)^2 + a^2}$$

$$d\ell'_a = dz'$$

$$\phi(z\hat{z}) = \int_{z'=-h}^h \frac{\lambda_a dz'}{4\pi\epsilon \sqrt{(z-z')^2 + a^2}} = \frac{\lambda_a}{4\pi\epsilon} \left[\text{sh}^{-1} \left(\frac{h-z}{a} \right) + \text{sh}^{-1} \left(\frac{h+z}{a} \right) \right] \text{ (V)}$$

↑
enunciado

b)

$$\phi(z\hat{z}) = \phi(0,0,z) = \int \frac{\lambda'_b dl'_b}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'_b|}$$

$$\lambda'_b = \lambda_b$$

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{r}'_b = a\hat{\rho} + \frac{h}{\pi}\psi'\hat{z}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'_b| = |(z - \frac{h}{\pi}\psi')\hat{z} - a\hat{\rho}| = \sqrt{(z - \frac{h}{\pi}\psi')^2 + a^2}$$

$$dl'_b = \sqrt{(d\rho')^2 + (\rho'd\psi')^2 + (dz')^2} = \left\{ \begin{array}{l} \rho' = a \Rightarrow d\rho' = 0 \\ z' = \frac{h}{\pi}\psi' \Rightarrow dz' = \frac{\partial z'}{\partial \psi'} d\psi' = \frac{h}{\pi} d\psi' \end{array} \right\}$$

$$= \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2} d\psi'$$

$$\phi(z\hat{z}) = \int_{\psi'=-\pi}^{\pi} \frac{\lambda_b \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2} d\psi'}{4\pi\epsilon \sqrt{(z - \frac{h}{\pi}\psi')^2 + a^2}} = \frac{\lambda_b}{4\pi\epsilon} \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2} \cdot \frac{\pi}{h} \left[\text{sh}^{-1}\left(\frac{h-z}{a}\right) + \text{sh}^{-1}\left(\frac{h+z}{a}\right) \right] (V)$$

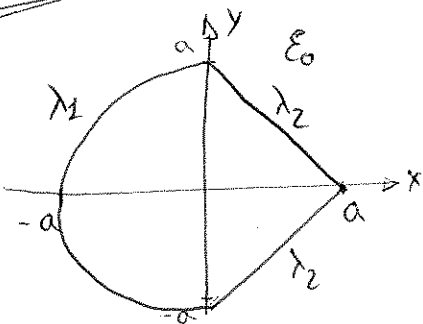
$$c) \phi_T(z\hat{z}) = \phi_a(z\hat{z}) + \phi_b(z\hat{z}) = 0 \Leftrightarrow 0 = \lambda_a + \lambda_b \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2} \cdot \frac{\pi}{h}$$

$$d) \text{ si } \phi_{\text{tot}}(z\hat{z}) = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{tot}}(z\hat{z}) = \vec{0}??$$

La condición de $\phi = 0$ en una región sí garantiza $\vec{E} = \vec{0}$ en esa región, ya que $\vec{E} = -\nabla\phi$. Pero en un eje o en un punto no es cierto.

Como la distribución no es simétrica no podemos asegurar que $\vec{E} = \vec{0}$ en el eje z .

I.38



$$a) \phi_1(0,0,z) = \phi_1(z\hat{z}) = \int_{L'_1} \frac{\lambda'_1 dl'_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'_1|}$$

$$\lambda'_1 = \lambda_1$$

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{r}'_1 = a\hat{\rho}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'_1| = |z\hat{z} - a\hat{\rho}| = \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$dl'_1 = \sqrt{(d\rho')^2 + (\rho'd\psi')^2 + (dz')^2} = a d\psi'$$

$$\phi_1(0,0,z) = \int_{\psi' = \pi/2}^{3\pi/2} \frac{\lambda_1 a d\psi'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\lambda_1 a \pi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$b) \phi_2(0,0,z) = \int_{L_2} \frac{\lambda'_2 d\ell'_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'_2|} = 2 \cdot \int_{\text{lado superior}} \frac{\lambda'_2 d\ell'_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'_2|}$$

simetría
se puede hacer por ser ϕ
no se puede hacer con $\vec{E}$

$$\lambda'_2 = \lambda_2$$

$$\vec{r} = z \hat{z}$$

$$\vec{r}'_2 = x' \hat{x} + y' \hat{y}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'_2| = |z \hat{z} - x' \hat{x} - y' \hat{y}| = \sqrt{z^2 + x'^2 + y'^2}$$

$$d\ell' = \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2} = \begin{cases} z' = 0 \Rightarrow dz' = 0 \\ y' = a - x' \Rightarrow \\ \Rightarrow dy' = \frac{dy'}{dx'} dx' = -dx' \end{cases}$$

$$d\ell' = \sqrt{2} dx'$$

$$\phi_2(0,0,z) = 2 \int_{x'=0}^a \frac{\lambda_2 \sqrt{2} dx'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + x'^2 + y'^2}} \Big|_{y'=a-x'} = \frac{2\lambda_2 \sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \int_{x'=0}^a \frac{dx'}{\sqrt{z^2 + x'^2 + (a-x')^2}} =$$

$$= \frac{3 \text{ folios}}{\bullet \bullet \bullet} = \frac{\lambda_2}{\pi\epsilon_0} \text{sh}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2} a}{2 \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}} \right) (V)$$

la integral del
enunciado es errónea

$$c) \phi_{\text{tot}} \Big|_{|z| \gg a} \approx \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

Para que este potencial sea mínimo debe responder al segundo término. Por tanto $Q_{\text{tot}} = 0$ o la distribución debe ser dipolar ($\frac{1}{r^2} \ll \frac{1}{r}$)

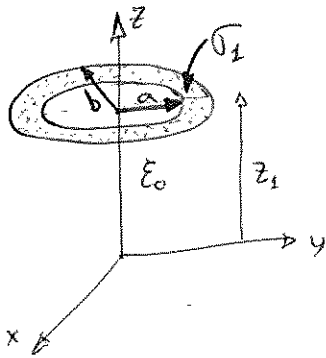
$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \int \lambda_1 d\ell_1 = \lambda_1 \frac{2\pi a}{2} = \lambda_1 \pi a, \\ Q_2 &= \int \lambda_2 d\ell_2 = \lambda_2 2 \sqrt{a^2 + a^2} = \lambda_2 2\sqrt{2} a \end{aligned} \right\} Q_1 = -Q_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$d) \phi_{\text{tot}} \Big|_{z \gg a} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \left\{ \begin{aligned} \vec{r} &= z \hat{z} \\ \vec{p} &= p_0 (\pm \hat{x}) \end{aligned} \right\} = \frac{z \hat{z} \cdot p_0 (\pm \hat{x})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 0$$

por la posición de las cargas

Blogre 4 : UFF!! Problemas muy completos

I.49



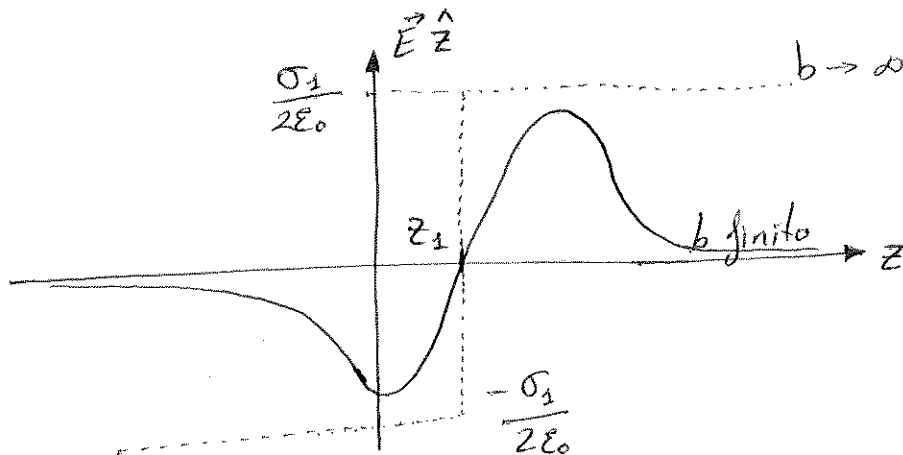
$$a) \vec{E}(0,0,z) = \vec{E}(z\hat{z}) = \int \frac{\rho_{s'}(\vec{r}-\vec{r}') dS'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\begin{aligned} \rho_{s'} &= \sigma_1 \\ \vec{r} &= z\hat{z} \\ \vec{r}' &= \rho'\hat{\rho}' + z_1\hat{z} \\ \vec{r}-\vec{r}' &= (z-z_1)\hat{z} - \rho'\hat{\rho}' \\ |\vec{r}-\vec{r}'|^3 &= ((z-z_1)^2 + \rho'^2)^{3/2} \\ dS' &= \rho' d\rho' d\psi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z\hat{z}) &= \int_{\psi'=0}^{2\pi} \int_{\rho'=a}^b \frac{\sigma_1 [(z-z_1)\hat{z} - \rho'\hat{\rho}'] \rho' d\rho' d\psi'}{4\pi\epsilon_0 ((z-z_1)^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}' = \cos\psi'\hat{x} + \sin\psi'\hat{y} \\ \text{se anulan las integrales} \end{array} \right\} \\ &= \frac{\sigma_1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi (z-z_1)\hat{z} \cdot \int_{\rho'=a}^b \frac{\rho' d\rho'}{((z-z_1)^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} (z-z_1) \left[\frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + b^2}} \right] \hat{z} \end{aligned}$$

$$b) \vec{E} \Big|_{r \gg b} \approx \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\int_S \sigma_1 dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\sigma_1 (\pi b^2 - \pi a^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (V/m)$$

c) Representación de $\vec{E}$ para b finito e infinito



$$\begin{aligned} d) \vec{E}(0,0,z) &= \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \left[\frac{z-z_1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + a^2}} - \frac{z-z_1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + b^2}} \right] \hat{z} + \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 = \sigma_1 \\ \text{para que} \\ \vec{E}_{tot}(0,0,z) = \vec{0} \end{array} \right. \\ &+ \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \left[\frac{z+z_1}{\sqrt{(z+z_1)^2 + a^2}} - \frac{z+z_1}{\sqrt{(z+z_1)^2 + b^2}} \right] \hat{z} \quad (V/m) \end{aligned}$$

e) $\sigma_2 = -\sigma_1$, $\vec{E}$ puntos lejanos??

$$\vec{E}|_{r \gg b} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r}}{r^2} - \vec{p} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = r \hat{r} \\ \vec{p} = p_0 \hat{z} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3(p_0 \hat{z} \cdot \hat{r}) \hat{r}}{r^2} - p_0 \hat{z} \right] \quad (V/m)$$

$$= \left\{ \hat{r} = \sin\theta \cos\varphi \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + \cos\theta \hat{z} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[3p_0 \cos\theta \hat{r} - p_0 \hat{z} \right] \quad (V/m)$$

$$\vec{p} = \iint_S \vec{r}' \rho_{s'} ds' = \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\rho'=a}^b \sigma_1 (z_1 \hat{z} + \cancel{\rho' \hat{\rho}}) \cdot \rho' d\rho' d\varphi' + \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\rho'=a}^b (-\sigma_1) (-z_1 \hat{z} + \cancel{\rho' \hat{\rho}}) \rho' d\rho' d\varphi' =$$

$$= 2\sigma_1 z_1 \hat{z} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot 2\pi \quad (C \cdot m)$$



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE
MADRID

--	--	--	--

DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES
GRUPO DE RADIAIÓN

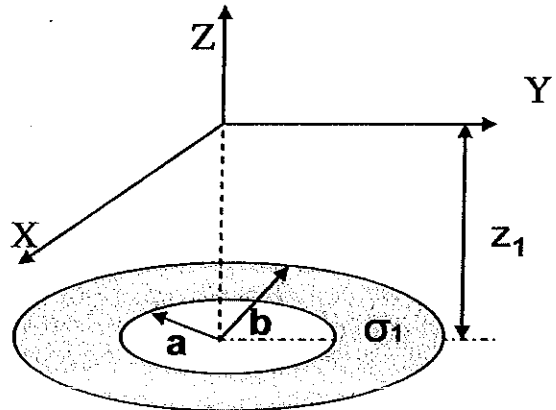
Apellidos y Nombre:	
---------------------	--

Todos los problemas puntúan igual (1/4 de la nota total)

PROBLEMA 1

La corona circular de la figura, de radio interior a y radio exterior b , situada en un plano $z=z_1$ está cargada con una densidad superficial de carga σ_1 C/m²:

- Calcule el potencial en puntos del eje Z (2p) y obtenga su valor para el caso en el que $a=0$ (1p)
- Calcule el potencial en puntos del eje z alejados de la distribución (1p)
- Represente el potencial en puntos del eje Z para b finito. Razone el valor del potencial para $b \rightarrow \infty$. (1p)
- Se sitúa una distribución de idéntica geometría y densidad superficial de carga σ_2 C/m² en $z=z_1$. Calcule el potencial del conjunto en puntos del eje z . (1p) ¿Qué relación debe haber entre σ_1 y σ_2 para que el potencial se anule en el origen del sistema de coordenadas? (0.5p). En esta última situación, calcule el potencial en el plano $z=0$ (0.5p).
- Si $\sigma_2 = -\sigma_1$, calcule el potencial en cualquier punto alejado de la distribución (3p)



- Calcule el potencial en puntos del eje Z (2p) y obtenga su valor para el caso en el que $a=0$ (1p)

Para una distribución superficial de carga, situada en el vacío: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_1 dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - (\rho'\hat{\rho}' + z_1\hat{z})$$

$$\vec{r}' = \rho'\hat{\rho}' + z_1\hat{z} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(z + z_1)^2 + \rho'^2}$$

$$dS = \rho' d\rho' d\phi'$$

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho'=a}^b \int_{\phi'=0}^{2\pi} \sigma_1 \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{((z + z_1)^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \sigma_1 \int_a^b \frac{\rho' d\rho'}{((z + z_1)^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z + z_1)^2 + \rho'^2} \right]_a^b$$

$$\phi(z) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z + z_1)^2 + b^2} - \sqrt{(z + z_1)^2 + a^2} \right] V$$

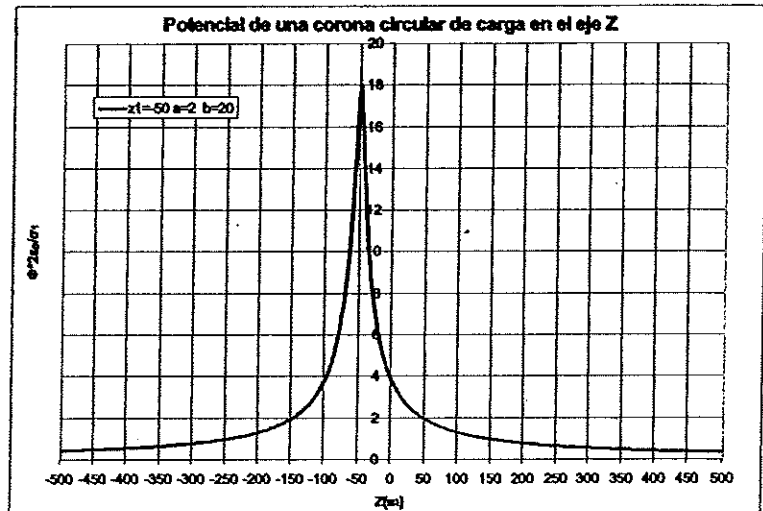
$$\text{Si } a=0: \phi(z) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z + z_1)^2 + b^2} - |z + z_1| \right] V$$

- Calcule el potencial en puntos del eje z alejados de la distribución (1p)

$$\phi(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |z|} V, \text{ siendo } Q = \sigma_1 \pi (b^2 - a^2) \text{ Culombios}$$

- Represente el potencial en puntos del eje Z para b finito. Razone el valor del potencial para $b \rightarrow \infty$. (1p)

Para $b \rightarrow \infty$, el valor del potencial en cualquier punto del eje Z se hace infinito. Esto se debe a que la integral de superposición toma el infinito como origen de potenciales, por lo que no debe haber cargas en el infinito. Al hacer crecer la distribución hasta el infinito, no se cumple la condición de regularidad y por eso se obtiene un potencial infinito. El cálculo correcto del potencial se haría partiendo del campo eléctrico creado por un plano indefinido de carga, situado en $z = -z_1$ (tomando como origen de potenciales un punto genérico z_0), y restando al potencial obtenido el debido a un disco de radio a situado también en $z = -z_1$.



- d) Se sitúa una distribución de idéntica geometría y densidad superficial de carga σ_2 C/m² en $z = z_1$. Calcule el potencial del conjunto en puntos del eje z. (1p) ¿Qué relación debe haber entre σ_1 y σ_2 para que el potencial se anule en el origen del sistema de coordenadas? (0.5p). En esta última situación, calcule el potencial en el plano $z=0$ (0.5p).

El potencial se calcula aplicando el principio de superposición. Así, el potencial debido a σ_2 es formalmente igual al debido a σ_1 sustituyendo σ_1 por σ_2 y $-z_1$ por $+z_1$.

$$\phi(z) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z+z_1)^2 + b^2} - \sqrt{(z+z_1)^2 + a^2} \right] + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(z-z_1)^2 + b^2} - \sqrt{(z-z_1)^2 + a^2} \right] V$$

Para que el potencial se anule en el origen del sistema de coordenadas, $\sigma_1 = -\sigma_2$. Ya que la corona situada en $z = -z_1$ genera un potencial positivo en $z=0$, la situada en $z = +z_1$ debe generar un potencial negativo en dicho punto. Para ello, las densidades superficiales de carga deben ser iguales en módulo y de signos contrarios.

Para calcular el potencial en el plano $z=0$ basta ver las distribuciones de carga como el problema imagen de una distribución superficial de carga enfrentada a un plano conductor indefinido a potencial 0V. Al ser el plano $z=0$ el plano de simetría de ambas distribuciones, su potencial será 0V.

- e) Si $\sigma_2 = -\sigma_1$, calcule el potencial en cualquier punto alejado de la distribución (3p)

Dado que la carga neta de la distribución es nula, en puntos alejados de la distribución, el potencial variará como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ siendo } \vec{p} = \iint_{S'} \vec{r}' \sigma dS$$

$$\vec{p} = \int_{\rho'=a}^b \int_{\varphi'=0}^{2\pi} (-z_1 \hat{z} + \rho' \hat{\rho}') \sigma_1 \rho' d\rho' d\varphi' + \int_{\rho'=a}^b \int_{\varphi'=0}^{2\pi} (z_1 \hat{z} + \rho' \hat{\rho}') (-\sigma_1) \rho' d\rho' d\varphi' = -2\pi z_1 \sigma_1 2 \left[\frac{\rho'^2}{2} \right]_a^b \hat{z} = -2\pi z_1 \sigma_1 (b^2 - a^2) \hat{z} \text{ C} \cdot \text{m}$$

Así:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{-|\vec{p}| \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-2\pi z_1 \sigma_1 (b^2 - a^2) \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ V/m con } \vec{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$



Apellidos:	Nombre:
------------	---------

PROBLEMA 1 (Ej. 33)

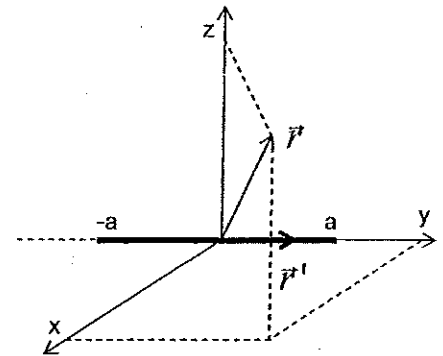
En un medio de permitividad ϵ_0 se sitúa, sobre el eje y de un sistema de coordenadas cartesianas, una distribución uniforme de carga de valor λ C/m, de longitud $2a$ y centrada en el origen del sistema de coordenadas. Se pide, utilizando el sistema de coordenadas cartesiano anterior e indicando las unidades correspondientes, que:

- Calcule el campo eléctrico debido a dicha distribución en todos los puntos del espacio (3p).
- Razone, geoméricamente, cuál es la dirección del campo eléctrico en puntos del eje x . (1p)
- Si se sitúa la línea de carga con su centro en $(x=D/2, y=0, z=0)$ y se coloca una línea igual a la anterior, pero de valor $-\lambda$ C/m, con su centro en el punto $(x=-D/2, y=0, z=0)$, calcule el valor del campo eléctrico de la distribución en puntos del eje x . (2p)
- Calcule el momento dipolar de la distribución del apartado anterior (2p).
- Calcule el potencial de la distribución del apartado c) en puntos muy alejados de la misma. Expresé el resultado en coordenadas esféricas. (2p)

Nota:
$$\int \frac{a^2 dt'}{[a^2 + (t-t')^2]^{3/2}} = -\frac{(t-t')}{\sqrt{a^2 + (t-t')^2}}$$

SOLUCIÓN

- a) Dado que el medio es uniforme, se puede emplear la integral de aportaciones infinitesimales (pág 3-7 de los apuntes, ecuación 3-16)



$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl' & \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ \vec{r}' &= y'\hat{y} & \vec{r} - \vec{r}' &= x\hat{x} + (y - y')\hat{y} + z\hat{z} & |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + z^2} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dy' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dy' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{x\hat{x} + (y - y')\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}} dy' \\ \int_{-a}^a \frac{x\hat{x}}{(x^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}} dy' &= -\frac{x}{x^2 + z^2} \left[\frac{(y - y')}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + z^2}} \right]_{y'=-a}^{y'=a} & \hat{x} &= -\frac{x}{x^2 + z^2} \left[\frac{(y - a)}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + z^2}} - \frac{(y + a)}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + z^2}} \right] \hat{x} \\ \int_{-a}^a \frac{(y - y')\hat{y}}{(x^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}} dy' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + z^2}} \Big|_{y'=-a}^{y'=a} & \hat{y} &= \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + z^2}} \right] \hat{y} \\ \int_{-a}^a \frac{z\hat{z}}{(x^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}} dy' &= -\frac{z}{x^2 + z^2} \left[\frac{(y - y')}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + z^2}} \right]_{y'=-a}^{y'=a} & \hat{z} &= -\frac{z}{x^2 + z^2} \left[\frac{(y - a)}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + z^2}} - \frac{(y + a)}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + z^2}} \right] \hat{z} \end{aligned}$$

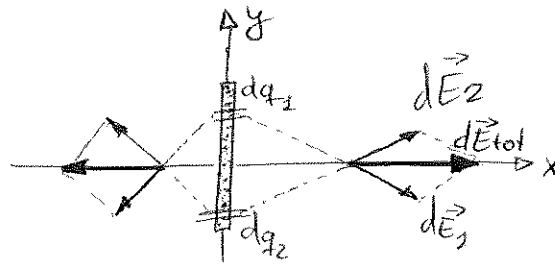
Con lo que el valor del campo será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{aligned} & \left[-\frac{x}{x^2 + z^2} \left(\frac{(y - a)}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + z^2}} - \frac{(y + a)}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + z^2}} \right) \right] \hat{x} + \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + z^2}} \right] \hat{y} \\ & - \frac{z}{x^2 + z^2} \left[\frac{(y - a)}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2 + z^2}} - \frac{(y + a)}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2 + z^2}} \right] \hat{z} \end{aligned} \right\} \quad V/m$$

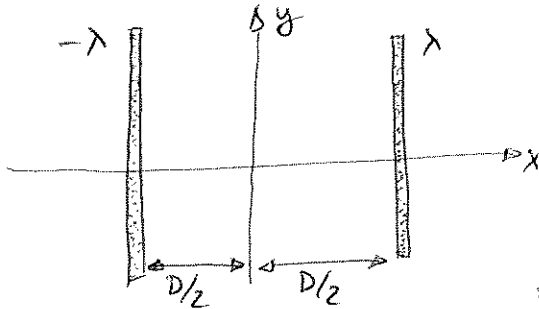
$$\int \frac{dt'}{[k^2 + (t'-t)^2]^{3/2}} = \frac{(t-t')}{k^2 \sqrt{k^2 + (t'-t)^2}}$$

$$\int \frac{(t'-t) dt'}{[k^2 + (t'-t)^2]^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{k^2 + (t'-t)^2}}$$

b) $\vec{E}(x, 0, 0) = \frac{\lambda \cdot 2a}{4\pi\epsilon_0 x \sqrt{x^2 + a^2}} \hat{x}$ En $\hat{x}$ si $x > 0$
En $-\hat{x}$ si $x < 0$



c)



Si la línea $+\lambda$ estuviera en 0:

$$\vec{E}(x, 0, 0) = \frac{\lambda \cdot 2a}{4\pi\epsilon_0 x \sqrt{x^2 + a^2}} \hat{x}$$

$$\vec{E}_{\text{tot}}(x, 0, 0) = \vec{E}_{+\lambda}(x, 0, 0) + \vec{E}_{-\lambda}(x, 0, 0) =$$

$$= \frac{+\lambda \cdot 2a}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x - \frac{D}{2}) \sqrt{(x - \frac{D}{2})^2 + a^2}} - \frac{1}{(x + \frac{D}{2}) \sqrt{(x + \frac{D}{2})^2 + a^2}} \right] \hat{x}$$

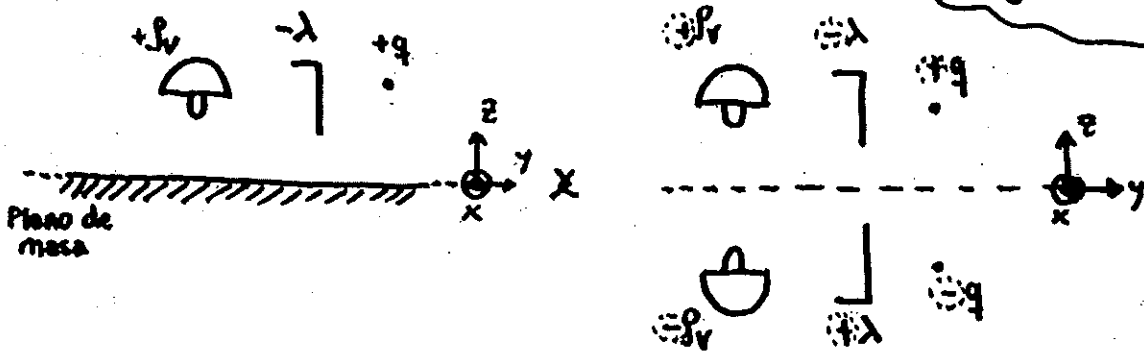
d) $\vec{P} = \int_{L'} \lambda' \vec{r}' dl' = \int_{y'=-a}^a (4\lambda) \left(\frac{D}{2} \hat{x} + y' \hat{y} \right) dy' + \int_{y'=-a}^a (-\lambda) \left(-\frac{D}{2} \hat{x} + y' \hat{y} \right) dy' =$
 $= 2 \int_{y'=-a}^a \lambda \frac{D}{2} \hat{x} dy' = 2\lambda \frac{D}{2} \hat{x} \cdot 2a = 2\lambda D a \hat{x} \text{ (c.m.)}$

e) $\phi_{r \gg a} \approx \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = P_0 \hat{x} \\ \vec{r} = r \hat{r} = r \sin\theta \cos\varphi \hat{x} + \dots \hat{y} + \dots \hat{z} \end{array} \right\} = \frac{P_0 \sin\theta \cos\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} (V)$

8.- MÉTODO DE LAS IMÁGENES:

Este método sirve para resolver ciertos problemas, difíciles de resolver, mediante otros problemas equivalentes, que llamaremos problema imagen; la solución de este problema imagen sólo es válida en la REGIÓN BAJO ESTUDIO.

* EJEMPLO (1):

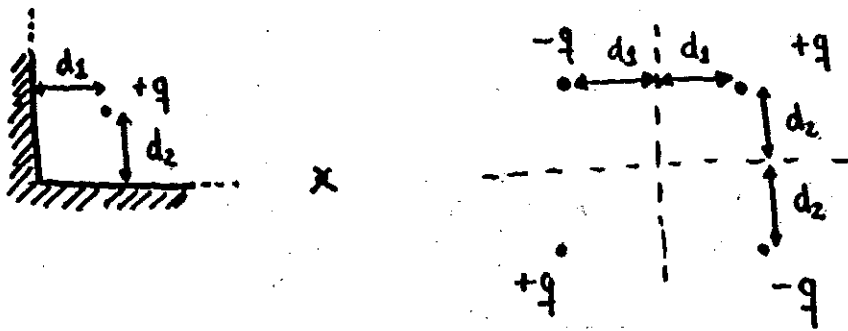


PROBLEMA ORIGINAL

PROBLEMA IMAGEN

La solución del problema imagen sólo es válida en $z \geq 0$.

* EJEMPLO (2):



La solución del problema imagen sólo es válida en el primer cuadrante.

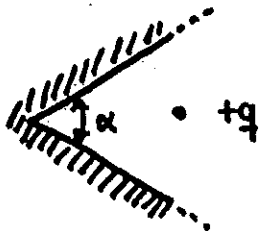
* EJEMPLO (3):



Este problema NO admite problema imagen porque tendríamos que añadir cargas imagen en la REGIÓN BAJO ESTUDIO.

* EJEMPLO (4): la regla general sería:

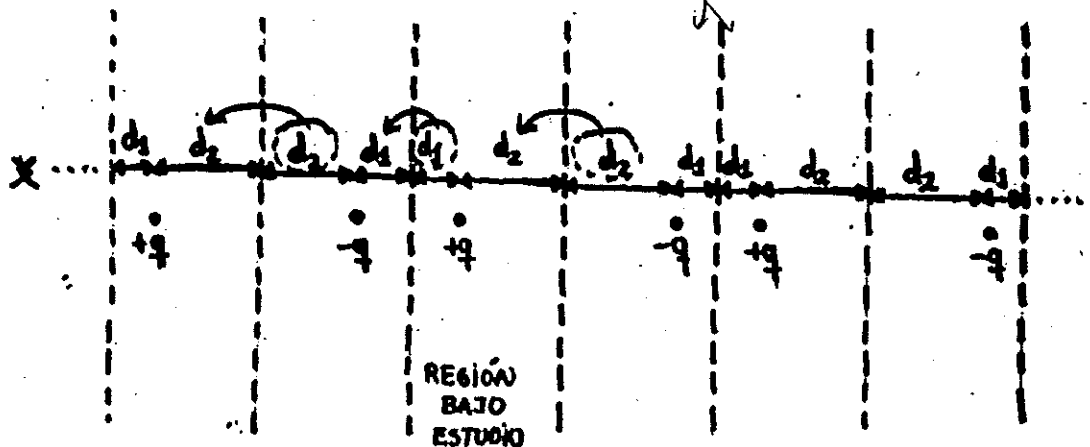
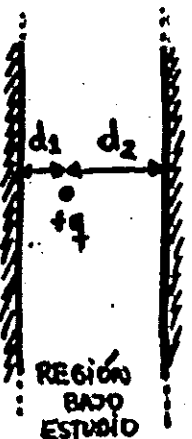
Ejemplo: $\alpha = \frac{72^\circ}{1} = 72^\circ \Rightarrow 72 \cdot 5 = 360$ IMPAR
 $\begin{matrix} +q & -q & +q \\ -q & +q & -q \end{matrix}$ MISMO SIGNO $\Rightarrow$ NAL!!!



- Si $\alpha \cdot \text{PAR} = 360^\circ \Rightarrow$ Sí método de las imágenes. (Ejemplo: $\alpha = 180^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, \dots$)
- En caso contrario $\Rightarrow$ No admite problema imagen.

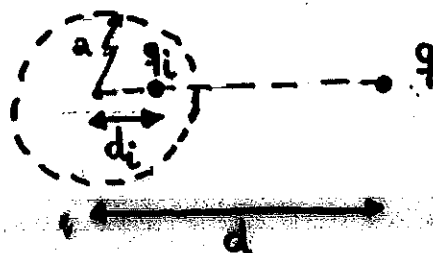
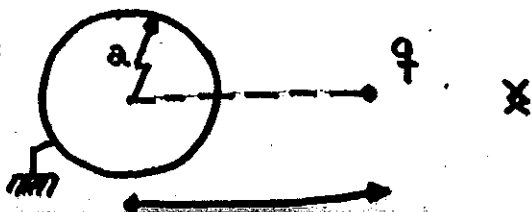
* EJEMPLO (5): Carga puntual frente a dos planos paralelos

No todos los espejos son iguales $\Rightarrow$



la solución del problema imagen sólo es válida en la región bajo estudio.

* EJEMPLO (6): Carga puntual frente a una esfera a masa:



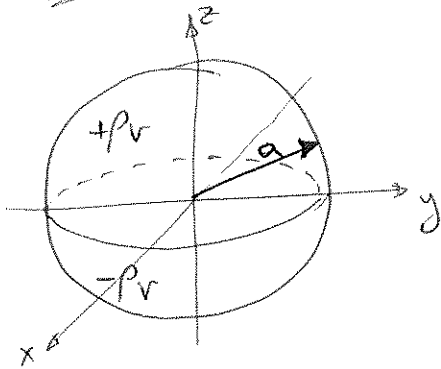
$q_i = -\frac{a}{d} q$
$d_i = \frac{a^2}{d}$

!! distancia al centro !!

la solución del problema imagen sólo es válida en la región exterior a la esfera.

ATA: A veces en problemas dan el radio y la distancia al borde de la esfera luego ¡¡¡

Ej I.24:



c) $\vec{p} = \frac{a^4 \rho_v \pi}{2} \hat{z}$ (c.m)

d) $\phi_{|z \gg a} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} = \left| \vec{r} = z\hat{z} \right| = \frac{a^4 \rho_v \pi z}{8\pi\epsilon |z|^3} (V)$

e) $\phi(x, y, 0) = 0 (V)$ (todo punto del plano xy tiene a la misma distancia las mismas cargas positivas que negativas)

a) $\phi(0, 0, z > a) = \iiint_{V'} \frac{\rho_v' dV'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} = \iiint_{V_+} \frac{+\rho_v dV_+}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'_+|} + \iiint_{V_-} \frac{-\rho_v dV_-}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'_-|}$

siendo: $dV_+ = dV_- = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

$\vec{r} = z\hat{z}$
 $\vec{r}'_+ = \vec{r}'_- = r\hat{r}$
 $|\vec{r} - \vec{r}'| = |z\hat{z} - r\hat{r}| = |z\hat{z} - r\sin\theta\cos\varphi\hat{x} - r\sin\theta\sin\varphi\hat{y} - r\cos\theta\hat{z}| = \sqrt{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + (z - r\cos\theta)^2}$
 $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta}$

$\phi(0, 0, z > a) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^a \frac{+\rho_v r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta}} - \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int_{r=0}^a \frac{\rho_v r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta}}$
 $= \frac{\rho_v}{4\pi\epsilon} 2\pi \left[\int_{r=0}^a \frac{r^2}{zr} \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta} \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} dr - \int_{r=0}^a \frac{r^2}{zr} \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta} \Big|_{\theta=\pi/2}^{\pi} dr \right] =$

$= \frac{\rho_v}{2\epsilon z} \int_{r=0}^a [r(\sqrt{z^2 + r^2} - \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr}) - r(\sqrt{z^2 + r^2 + 2zr} - \sqrt{z^2 + r^2})] dr =$

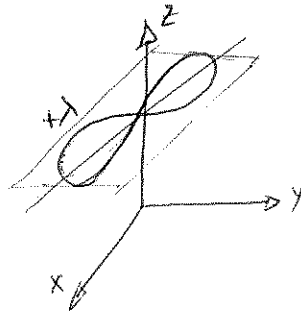
$= \frac{\rho_v}{2\epsilon z} \int_{r=0}^a [2r\sqrt{z^2 + r^2} - r|z-r| - r|z+r|] dr = \begin{cases} z > a \text{ y } 0 \leq r \leq a \\ |z-r| = z-r \\ |z+r| = z+r \end{cases}$

$= \frac{\rho_v}{2\epsilon z} \int_{r=0}^a (2r\sqrt{z^2 + r^2} - r \cdot 2z) dr = \frac{\rho_v}{2\epsilon z} \left[\frac{(z^2 + r^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_{r=0}^a - zr^2 \Big|_{r=0}^a \right] =$

$= \frac{\rho_v}{2\epsilon z} \left[\frac{2}{3} [(z^2 + a^2)^{3/2} - |z|^3 - za^2] \right] (V)$

b) No es válida para el resto de puntos ya que $|z-r|$ y $|z+r|$ cambia de expresión matemática

I.13



$$z = a$$

$$\rho = a \sqrt{\cos(2\varphi)}$$

$$\varphi \in \left[\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

$$\lambda = \lambda_0 |\cos \varphi| \sqrt{\cos 2\varphi} \text{ (c/m)}$$

$$a) \phi(0,0,0) = \int_{L'} \frac{\lambda' dl'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

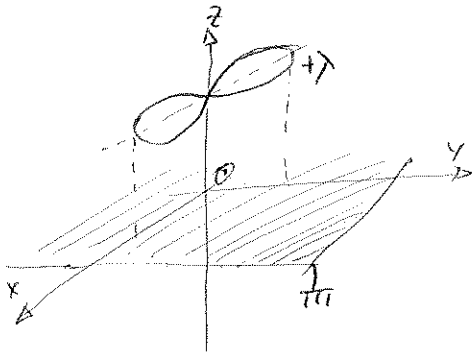
siendo:

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda_0 |\cos \varphi'| \sqrt{\cos 2\varphi'} \\ \vec{r} = \vec{0} \\ \vec{r}' = \rho' \hat{\rho} + a \hat{z} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r}'| = \sqrt{a^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \cos(2\varphi')} = a \sqrt{1 + \cos(2\varphi')} \\ dl' = \sqrt{(d\rho')^2 + (\rho' d\varphi')^2 + (dz')^2} = \quad \begin{matrix} z' = a \Rightarrow dz' = 0 \\ \rho' = a \sqrt{\cos(2\varphi')} \Rightarrow d\rho' = \frac{d\rho'}{d\varphi'} d\varphi' \\ d\rho' = \frac{-a \sin(2\varphi')}{\sqrt{\cos(2\varphi')}} d\varphi' \end{matrix} \\ dl' = \sqrt{\frac{a^2 \sin^2(2\varphi')}{\cos(2\varphi')} + a^2 \cos(2\varphi')} d\varphi' \\ dl' = \frac{a}{\sqrt{\cos(2\varphi')}} d\varphi' \end{cases}$$

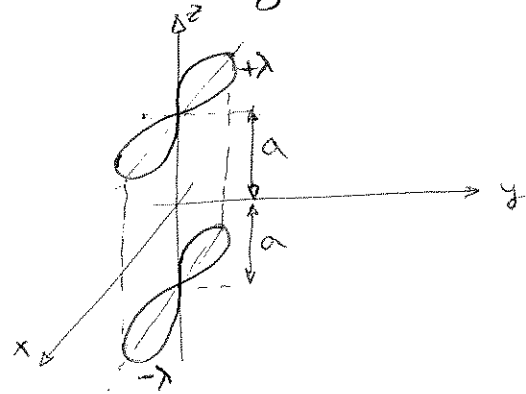
$$\phi(0,0,0) = \int \frac{\lambda_0 |\cos \varphi'| \sqrt{\cos(2\varphi')} \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos(2\varphi')}} d\varphi'}{4\pi\epsilon a \sqrt{1 + \cos(2\varphi')}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon} \int \frac{|\cos \varphi'|}{\sqrt{1 + \cos(2\varphi')}} d\varphi'$$

$$= \left\{ \begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ |\cos \theta| &= \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} \end{aligned} \right\} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon \sqrt{2}} \left[\int_{\varphi=\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi' + \int_{\varphi=\frac{7\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} d\varphi' \right] = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon \sqrt{2}} (V)$$

b)



Problema imagen



- c) En la región inferior al plano de masa el potencial es nulo por el teorema de la media ya que no hay cargas en esta región.

En la región superior aplicamos:

$$\phi_{r \gg a} \approx \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} = \frac{p_0 \hat{z} r \hat{r}}{4\pi\epsilon r^3} = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} \quad (V)$$

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\vec{p} = \int \lambda' \vec{r}' dl' = \int (+\lambda) (\rho' \hat{\rho}' + a \hat{z}) \frac{a}{\sqrt{\cos(2\varphi')}} d\varphi' + \int (-\lambda) (\rho' \hat{\rho}' - a \hat{z}) \frac{a}{\sqrt{\cos(2\varphi')}} d\varphi'$$

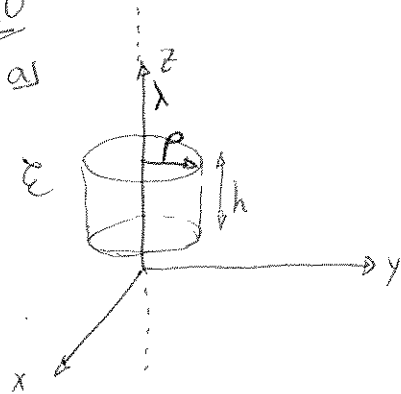
$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{por la posición} \\ \text{de las cargas} \end{array} \right\} = 2 \cdot \int \lambda_0 |\cos \varphi'| \sqrt{\cos 2\varphi'} \frac{a^2 \hat{z}}{\sqrt{\cos 2\varphi'}} d\varphi' =$$

$$= 2\lambda_0 a^2 \hat{z} \int |\cos \varphi'| d\varphi' = 2\lambda_0 a^2 \hat{z} \left[\int_{\varphi' = \frac{7\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \cos \varphi' d\varphi' + \int_{\varphi' = \frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} -\cos \varphi' d\varphi' \right] =$$

$$= 4\sqrt{2} \lambda_0 a^2 \hat{z} \quad (\text{c.m.}) \Rightarrow p_0 = 4\sqrt{2} \lambda_0 a^2$$

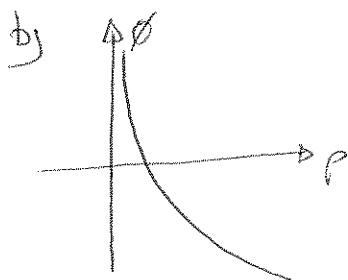
Bloque 4: UFF

I.40



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \hat{\rho}$$

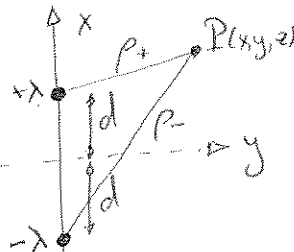
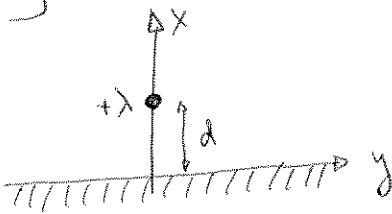
$$\phi = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon} \ln(\rho) + cte \quad (V)$$



En $\rho=0$ el potencial tiende a ∞ porque estamos calculando el potencial en la fuente, como ocurre con el potencial creado por una carga puntual ($\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r} + cte$) en $r=0$

Observamos que $\phi(\rho \rightarrow \infty) \neq 0$ ya que la distribución de cargas no es finita, es decir, hay cargas en el infinito.

c)



$\phi(x \leq 0) = 0$ por el teorema de la media, ya que no hay cargas en la región inferior.

$$\phi(x \geq 0) = \phi_{+\lambda} + \phi_{-\lambda} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon} \ln(\rho_+) + \frac{-(-\lambda)}{2\pi\epsilon} \ln(\rho_-) + cte =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{\rho_-}{\rho_+}\right) + cte = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{\sqrt{(x+d)^2+y^2}}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}\right) + cte =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln\left(\frac{(x+d)^2+y^2}{(x-d)^2+y^2}\right) + cte \quad (V)$$

Como $\phi(x=0) = 0 \Rightarrow cte = 0 \quad (V)$

d)

$$\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_s$$

$$\rho_s(x=0) = \hat{x} \cdot (\vec{D}(x=0^+) - \vec{D}(x=0^-)) = \hat{x} \cdot (\epsilon \cdot \vec{E}(x=0^+) - \vec{D}(x=0^-)) = \hat{x} \cdot (-\epsilon \nabla \phi) \Big|_{x=0^+} =$$

$$= -\epsilon \hat{x} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z} \right) \Big|_{x=0^+} = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0^+} = \frac{-\lambda d}{\pi(d^2+y^2)} \quad (C/m)$$

$$\frac{Q}{\ell} = \frac{\iint_S \rho_s ds}{\ell} = \frac{1}{\ell} \int_{z=0}^{\ell} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{-\lambda d}{\sqrt{d^2+y^2}} dy dz = \frac{1}{\ell} \ell \frac{-\lambda d}{\sqrt{d^2}} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{d}\right)^2} dy$$

$$= \frac{-\lambda}{\sqrt{d}} \arctg\left(\frac{y}{d}\right) \cdot d \Big|_{y=-\infty}^{+\infty} = \frac{-\lambda}{\sqrt{d}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = -\lambda \quad (C/m)$$

e) Una superficie equipotencial es aquella en la que $\phi = \text{cte}$

$$\frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = k \quad \dots \text{operando} \dots \quad \left(x - \frac{k+1}{k-1} d \right)^2 + y^2 = \frac{4kd^2}{(k-1)^2}$$

circunferencia

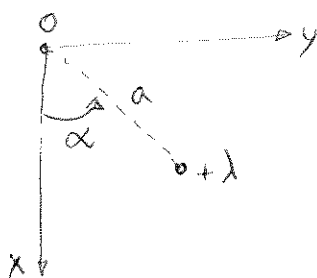
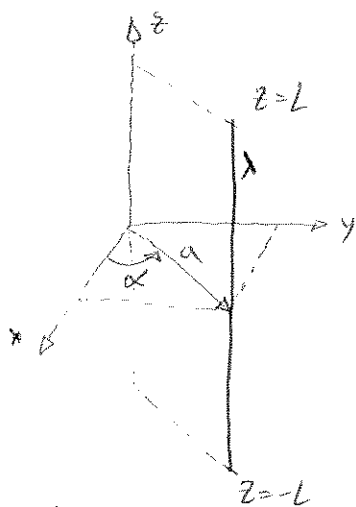
se trata de cilindros con ejes paralelos al eje z , de radio y y centro

$$\text{centro: } \begin{cases} x_0 = \frac{k+1}{k-1} d \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{radio } R = \frac{2\sqrt{k}d}{k-1}$$

I.43

a) El esquema es:



Lo único que podemos asegurar es que el $\vec{E}$ en el plano xy no tiene componente en $\hat{z}$.

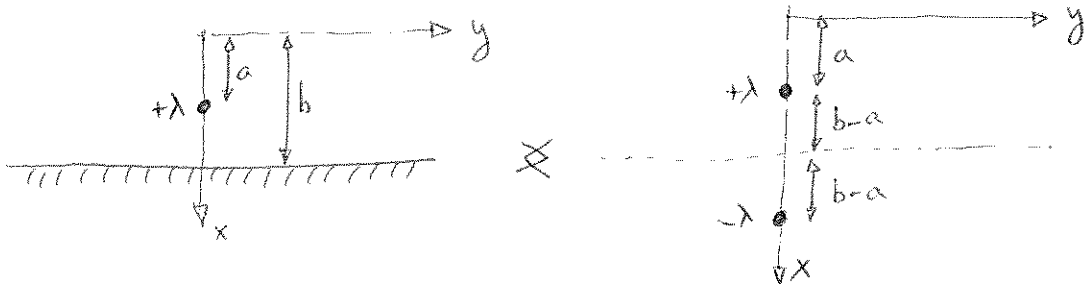
$$b) \vec{E}(0,0,z) = \int_{L'} \frac{\lambda'(\vec{r}-\vec{r}') d\ell'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \begin{cases} \lambda' = \lambda \\ \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}' = a\hat{\rho}' + z'\hat{z} \\ d\ell' = \sqrt{(a d\phi')^2 + (dz')^2} = dz' \\ \vec{r}-\vec{r}' = (z-z')\hat{z} - a\hat{\rho}' \\ |\vec{r}-\vec{r}'|^3 = [(z-z')^2 + a^2]^{3/2} \end{cases}$$

$$\hat{\rho}' = \cos\phi'\hat{x} + \sin\phi'\hat{y} = \cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\hat{y}$$

$$= \int_{z=-L}^L \frac{\lambda [(z-z')\hat{z} - a\hat{\rho}'] \cdot d\vec{z}'}{4\pi\epsilon_0 [(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=-L}^L \frac{(z-z')\hat{z} - a(\cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\hat{y})}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} dz' =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\frac{\cos\alpha}{a}(z-L)\hat{x} + \frac{\sin\alpha}{a}(z-L)\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{a^2 + (z-L)^2}} - \frac{\frac{\cos\alpha}{a}(z+L)\hat{x} + \frac{\sin\alpha}{a}(z+L)\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{a^2 + (z+L)^2}} \right] V/m$$

c)



$$\vec{E}_{\text{TOT}}(0,0,z) = \vec{E}_{+\lambda} + \vec{E}_{-\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\frac{z-L}{a} \hat{x} + \hat{z}}{\sqrt{a^2 + (z-L)^2}} - \frac{\frac{z+L}{a} \hat{x} + \hat{z}}{\sqrt{a^2 + (z+L)^2}} \right] +$$

$$+ \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\frac{z-L}{2b-a} \hat{x} + \hat{z}}{\sqrt{(2b-a)^2 + (z-L)^2}} - \frac{\frac{z+L}{2b-a} \hat{x} + \hat{z}}{\sqrt{(2b-a)^2 + (z+L)^2}} \right] \quad (\text{V/m})$$

d)

$$\vec{E}_{\text{cilindro}}(0,0,z) = \int d\vec{E}_{\text{linea}} = \left\{ \begin{array}{l} d\lambda = \sigma d\ell \\ \text{Además, en puntos del eje } z, \\ \vec{E} \text{ sólo tiene componente en } \hat{z} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{d\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + (z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z+L)^2}} \right] \hat{z} = \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{\sigma a d\varphi'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + (z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z+L)^2}} \right] \hat{z} =$$

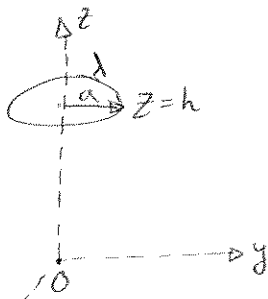
$$= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + (z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z+L)^2}} \right] \hat{z} \quad (\text{V/m})$$

e)

$$\vec{E}_{r>a} \approx \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\iint \sigma ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\sigma 2\pi a 2L}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (\text{V/m})$$

I.41

a)



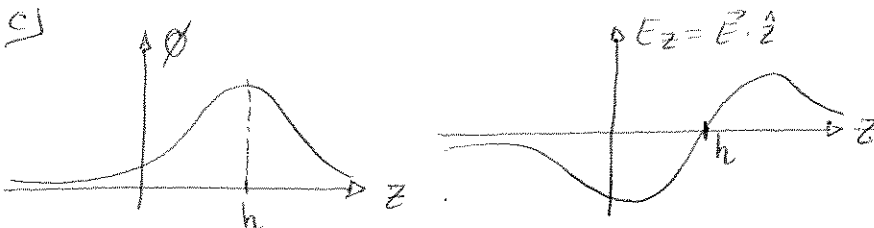
$$\phi(0,0,z) = \int_{\ell'} \frac{\lambda' d\ell'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda' = \lambda \\ \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}' = a\hat{\rho} + h\hat{z} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(z-h)^2 + a^2} \\ d\ell' = a d\varphi' \end{array} \right\} =$$

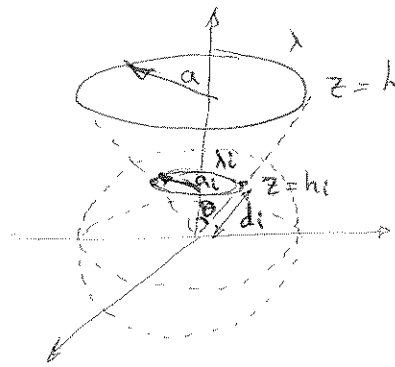
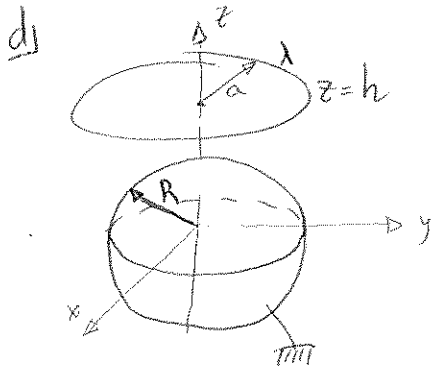
$$= \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{\lambda a d\varphi'}{4\pi\epsilon \sqrt{(z-h)^2 + a^2}} = \frac{\lambda a}{2\epsilon \sqrt{(z-h)^2 + a^2}} \quad (\text{V})$$

b) $\vec{E}(0,0,z) = -\nabla\phi(0,0,z) = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{z} = \frac{\lambda a (z-h) \hat{z}}{2\epsilon [(z-h)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (\text{V/m})$

Dada la simetría, $\vec{E} = E_z \hat{z}$, luego puedo hacer

c)





El cálculo de λ_i , a_i y h_i lo haremos al final del problema.

e) $\phi(0,0,z)??$

$\phi(|z| \leq R) = 0$ ya que es una esfera a masa.

$$\phi(|z| \geq R) = \frac{\lambda a}{2\epsilon \sqrt{(z-h)^2 + a^2}} + \frac{\lambda_i a_i}{2\epsilon \sqrt{(z-h_i)^2 + a_i^2}} \quad (V)$$

f) $\phi(z=R) = 0$ ya que el potencial es una función continua y la esfera de radio R tiene potencial nulo por estar presto a masa.

g) $\vec{E}(z \gg a) \approx \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon z^2} \hat{z} = \frac{\lambda z + a + \lambda_i z + a_i}{4\pi\epsilon z^2} \cdot \hat{z} \quad (V/m)$

Cálculo de a_i , h_i , λ_i :

$$d_i = \frac{R^2}{d} = \frac{R^2}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{a}{d} = \frac{a_i}{d_i} \Rightarrow a_i = \frac{a d_i}{d} = \frac{a \cdot R^2}{\sqrt{h^2 + a^2} \cdot \sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{a \cdot R^2}{h^2 + a^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{a}{h} = \frac{a_i}{h_i} \Rightarrow h_i = \frac{a_i h}{a} = \frac{h R^2}{h^2 + a^2}$$

Tomando un dq en el anillo:

$$dq_i = -dq \cdot \frac{R}{d} = -dq \frac{R}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

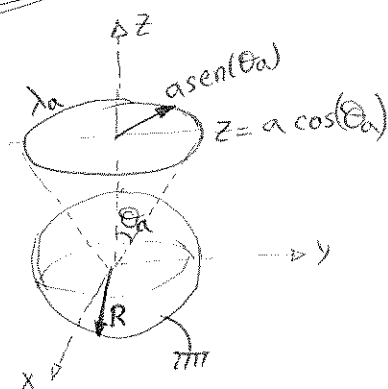
$$\lambda_i d\ell_i = -\lambda d\ell \frac{R}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

Integrando y siendo λ y $\lambda_i = \text{cte}$

$$\lambda \cdot 2\pi a_i = -\lambda \cdot 2\pi a \frac{R}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

$$\lambda_i = -\lambda \frac{a}{a_i} \frac{R}{\sqrt{h^2 + a^2}} = -\lambda \frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{R} \quad (C/m)$$

I.47



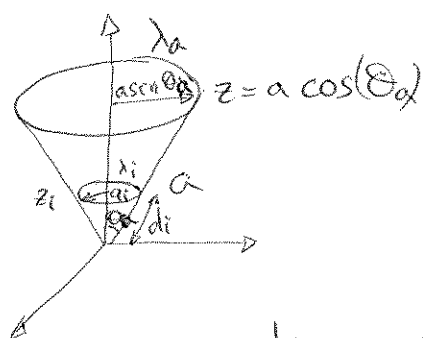
a) $Q_{\text{Tot anillo}} = \int \lambda_a dl = \lambda_a 2\pi a \sin(\theta_a) \quad (C)$

b) $\phi_{\text{Anillo}}(0,0,z) = \int \frac{\lambda' dl'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} =$

$$= \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\lambda_a a \sin \theta_a d\phi'}{4\pi\epsilon |z\hat{z} - a \sin \theta_a \hat{\rho}' - a \cos \theta_a \hat{z}|} =$$

$$= \frac{\lambda_a a \sin \theta_a \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon \cdot \sqrt{(z - a \cos \theta_a)^2 + (a \sin \theta_a)^2}}$$

c) Problema imagen:



$$d_i = \frac{R^2}{a} \Rightarrow \sin \theta_a = \frac{a_i}{d_i} \Rightarrow a_i = d_i \sin \theta_a$$

$$a_i = \frac{R^2}{a} \sin(\theta_a)$$

$$\cos \theta_a = \frac{z_i}{d_i} \Rightarrow z_i = d_i \cos \theta_a$$

$$z_i = \frac{R^2}{a} \cos(\theta_a)$$

$$dq_i = -dq \frac{R}{a} \Rightarrow \int \lambda_i dl_i = \int -\lambda dl \frac{R}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_i \cdot 2\pi a_i = -\lambda \cdot 2\pi a \sin \theta_a \frac{R}{a} \Rightarrow \lambda_i = -\lambda \frac{R \sin \theta_a}{a_i}$$

$$\lambda_i = -\lambda \frac{a}{R} \quad (C/m)$$

$$Q_i = \int \lambda_i dl_i = \lambda_i 2\pi a_i = -\lambda \frac{a}{R} 2\pi \frac{R^2 \sin \theta_a}{a} = -\lambda 2\pi R \sin(\theta_a)$$

d) $\phi(|z| \leq R) = 0$ Ya que la esfera tiene potencial nulo

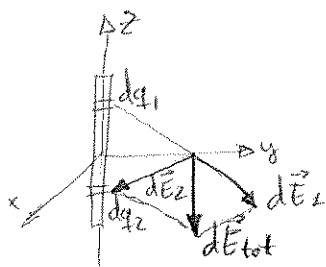
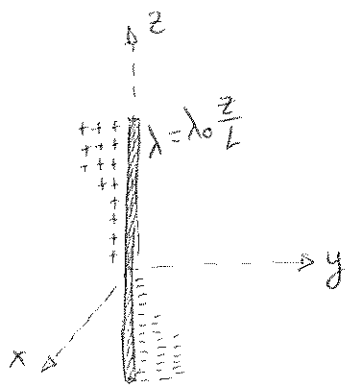
$$\phi(|z| \geq R) = \phi_{\text{apartado}} + \frac{\lambda_i 2\pi a_i}{4\pi\epsilon \sqrt{(z - z_i)^2 + a_i^2}} \quad (V)$$

e) $z = \frac{R^2}{a} = R \cdot \frac{R}{a} < R \Rightarrow \phi = 0$ ya que es un punto interior a la esfera

f) Aplicando Gauss sobre la esfera se obtiene: $Q_{\text{esfera}} = Q_i$

I.57

a) $\phi(x, y, 0) = 0 \text{ V}$ ya que todos los puntos del plano $z=0$ tienen a la misma distancia las mismas carga $\oplus$ y $\ominus$



Observamos que $\vec{E} = E_z(-\hat{z})$ y además sólo depende de la distancia del punto a la distribución. $\vec{E} = E_z(\rho)(-\hat{z})$

$$b) \vec{E}(x, y, 0) = \int_{L'} \frac{\lambda' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl' = \int_{z'=-L}^L \frac{\lambda_0 \frac{z'}{L} (x\hat{x} + y\hat{y} - z'\hat{z}) dz'}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} = \left\{ \right.$$

$$\text{siendo: } \left\{ \begin{array}{l} \lambda' = \lambda_0 \frac{z'}{L} \\ \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = \rho\hat{\rho} \\ \vec{r}' = z'\hat{z} \\ dl' = \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2} = dz' \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{como el campo sólo} \\ \text{tiene componente en } -\hat{z} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 L} (-\hat{z}) \cdot \int_{z'=-L}^L \frac{z'^2}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} dz' = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 L} (-\hat{z}) \left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + L^2} + L}{\sqrt{x^2 + y^2 + L^2} - L}\right) - \frac{2L}{\sqrt{x^2 + y^2 + L^2}} \right] \right.$$

En cilíndricas sería: $\rho^2 = x^2 + y^2$

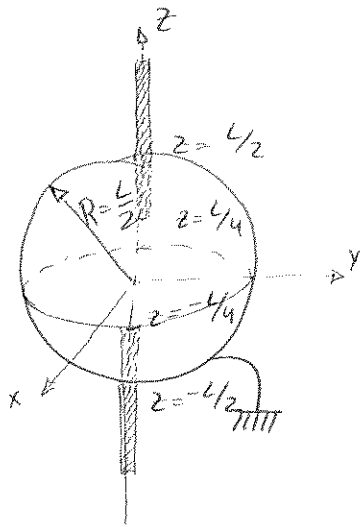
$$c) Q_{\text{tot}} = \int_{L'} \lambda' dl' = \int_{z'=-L}^L \lambda_0 \frac{z'}{L} dz' = \frac{\lambda_0}{L} \cdot \frac{z'^2}{2} \Big|_{-L}^L = 0$$

$$\vec{p} = \int_{L'} \lambda' \vec{r}' dl' = \int_{z'=0}^L \lambda_0 \frac{z'}{L} z' \hat{z} dz' + \int_{z'=-L}^0 \lambda_0 \frac{z'}{L} z' \hat{z} dz' = \frac{\lambda_0}{L} \hat{z} \int_{-L}^L z'^2 dz' = \frac{\lambda_0}{L} \hat{z} \cdot \left(\frac{L^3}{3} - \frac{(-L)^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \lambda_0 L^2 \hat{z} \text{ (C}\cdot\text{m)}$$

$$\phi(r \gg L) \approx \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \left\{ \vec{r} = r\hat{r} \right\} = \frac{\frac{2}{3} \lambda_0 L^2 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ (V)}$$

$$\vec{E}(r \gg L) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right] = \frac{\lambda_0 L^2}{6\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos\theta \hat{r} - \hat{z}) \text{ (V/m)}$$

d)



El dg situado en $z=L$ tiene su imagen en $z=L/2$

$$d_{iL} = \frac{(L/2)^2}{L} = \frac{L}{4}$$

El dg situado en $z=L/2$ tiene su origen en:

$$d_{iL/2} = \frac{(L/2)^2}{L/2} = \frac{L}{2}$$

Para obtener λ_i tomamos un dg genérico en z ($\frac{L}{2} < z < L$)

$$d_{gi} = -dg \frac{L/2}{z}$$

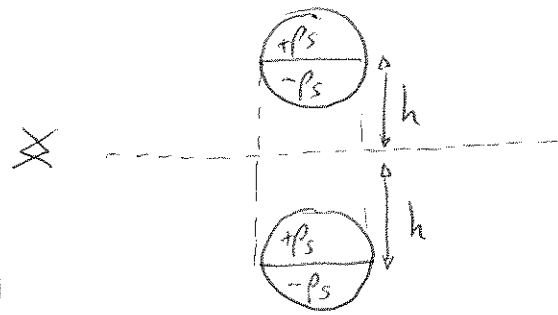
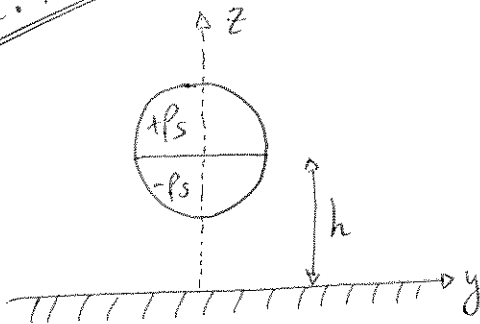
$$\lambda_i d\lambda_i = -\lambda d\lambda \frac{L/2}{z}$$

$$\lambda_i dz_i = -\lambda dz \frac{L/2}{z}$$

$$\text{Como } z_i = \frac{(L/2)^2}{z} \Rightarrow dz_i = \frac{\partial z_i}{\partial z} dz = -\frac{(L/2)^2}{z^2} dz \quad (\text{se toma positivo})$$

$$\lambda_i \frac{(L/2)^2}{z^2} dz = -\lambda dz \frac{L/2}{z} \Rightarrow \lambda_i = -\lambda \frac{z}{L} = -\lambda \frac{z}{L} \frac{L}{L} = -\frac{\lambda z^2}{L^2}$$

I.7



Este problema es equivalente al dado en $z \geq 0$

b) La condición de regularidad en $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi \cdot r = \text{cte}$

En la región inferior ($z \leq 0$) como no hay cargas, por el th. media $\phi(z \leq 0) = 0$ que cumple automáticamente la condición de regularidad $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi \cdot r = 0$ (sí, cumple)

Como se trata de una distribución dipolar, el $\phi(z \geq 0)$ pero con $r \gg a$ tiene la siguiente forma:

$$\phi(z \gg 0) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^2} \quad \text{por tanto, si verifica:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \propto \equiv \text{proporcional} \end{array} \right\} \lim_{r \rightarrow \infty} \phi \cdot r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{cte}}{r^2} r = 0 \quad (\text{sí, cumple})$$

c) $\vec{P}_{tot} = \vec{P}_{sup} + \vec{P}_{inf} = 2 \cdot \vec{P}_{sup}$

$$\begin{aligned} \vec{P}_{sup} &= \iint_{S'} \vec{r}' \rho_{s'} ds' = \int_{\psi'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi/2} (h\hat{z} + a\hat{r}') (\rho_s) a^2 \sin \theta' d\theta' d\psi' + \\ &+ \int_{\psi'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=\pi/2}^{\pi} (h\hat{z} + a\hat{r}') (-\rho_s) a^2 \sin \theta' d\theta' d\psi' = \left\{ \begin{aligned} \hat{r} &= \sin \theta' \cos \psi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \psi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z} \\ \vec{P}_{sup} &= \rho_s \hat{z} \end{aligned} \right\} \\ &= 2\pi \rho_s a^3 \left[\int_{\theta'=0}^{\pi/2} \cos \theta' \sin \theta' d\theta' - \int_{\theta'=\pi/2}^{\pi} \cos \theta' \sin \theta' d\theta' \right] \hat{z} = 2\pi \rho_s a^3 \hat{z} \text{ (C.m)} \end{aligned}$$

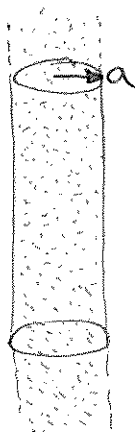
$\vec{P}_{tot} = 4\pi \rho_s a^3 \hat{z} \text{ (C.m)}$

d) $\rho_s = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{s}$

$\rho_s(z=0) = \hat{z} (\vec{D}(z=0^+) - \vec{D}(z=0^-)) = \hat{z} \epsilon \vec{E}(z=0^+) \approx \hat{z} \epsilon \frac{1}{4\pi \epsilon r^3} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} + \right.$

$\left. - \vec{p} \right] = \left\{ \frac{\vec{p} = 4\pi \rho_s a^3 \hat{z}}{\vec{r} = \rho \hat{r}} \right\} \approx \hat{z} \frac{-\vec{p}}{4\pi r^3} = -\rho_s \frac{a^3}{r^3} \text{ (C/m}^2\text{)}$

I.59



a) $\vec{E}$ en todo el espacio:

Aplicamos Gauss sobre un cilindro de radio ρ y altura h

$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_{enc}$

$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \iint_{S_{lat}} D(\rho) \cdot \hat{\rho} \cdot dS_{lat} \cdot \hat{\rho} + \iint_{S_{top}} D(\rho) \cdot \hat{\rho} \cdot dS_{top} \cdot \hat{z} + \iint_{S_{inf}} D(\rho) \hat{\rho} \cdot dS_{inf} \cdot (-\hat{z})$

$= D(\rho) \cdot 2\pi \rho h$ Integral válida en las 2 regiones

$\hookrightarrow \rho_v = \rho_{v0} \quad * \text{ si } \rho < a: Q_{enc} = \iiint_V \rho_v dV = \int_{z=0}^{z=h} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho} \rho_{v0} \left(1 - \frac{\rho}{a}\right) \cdot \rho d\rho d\psi dz =$

$\vec{E}(\rho < a) = \frac{\vec{D}(\rho < a)}{\epsilon} = \frac{h \cdot 2\pi \rho_{v0} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3a}\right)}{2\pi \epsilon h \rho} = \frac{\rho_{v0}}{\epsilon} \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{3a}\right) \hat{\rho} \text{ (V/m)}$

* Si $\rho > a$ $Q_{enc} = \int \int \int_{\rho=0}^a Idem = h \cdot 2\pi \rho_{vo} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} \right) = \frac{h \cdot 2\pi \rho_{vo} a}{6}$

$$\vec{E}(\rho > a) = \frac{\rho_{vo} a^2}{6\epsilon \rho} \hat{\rho} \text{ (V/m)}$$

b) ϕ en todo el espacio:

$$\phi = - \int \vec{E} d\vec{l} = - \int E d\rho = \begin{cases} -\frac{\rho_{vo}}{\epsilon} \left(\frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^3}{9a} \right) + cte_1 & \rho \leq a \\ -\frac{\rho_{vo} a^2}{6\epsilon} \ln(\rho) + cte_2 & \rho \geq a \end{cases} \quad (V)$$

$\hookrightarrow d\vec{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$

Como $\phi(\rho=b>a) = 0 \Rightarrow cte_2 = \frac{\rho_{vo} a^2}{6\epsilon} \ln(b) \quad (V)$

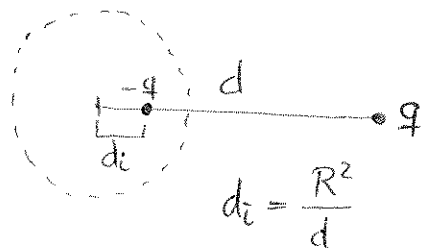
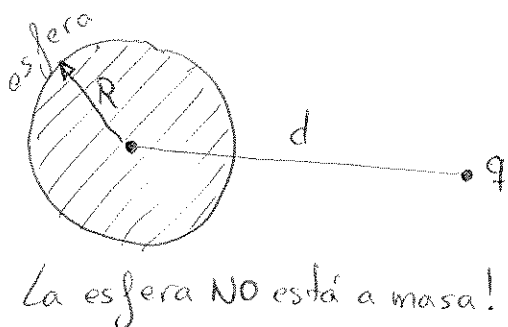
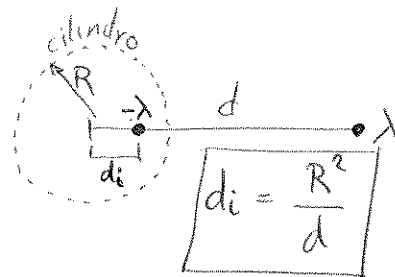
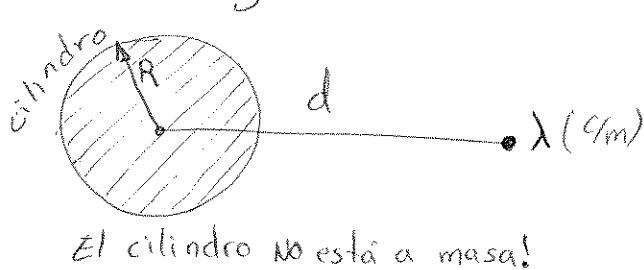
Como ϕ es una función continua: $\phi(\rho=a^+) = \phi(\rho=a^-)$

$$cte_1 = \dots$$

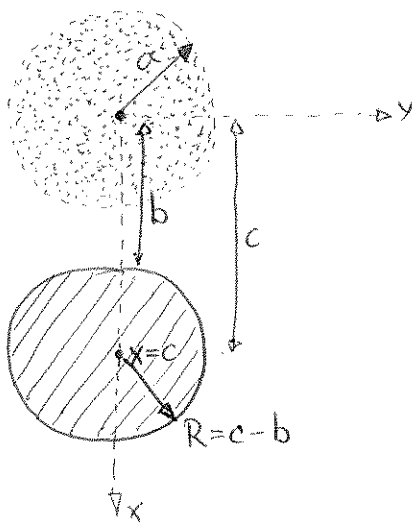
c) $\vec{E}(\rho > a) = \frac{\rho_{vo} a^2}{6\epsilon \rho} \hat{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon \rho} \hat{\rho} \Rightarrow \lambda = 2\pi\epsilon \frac{\rho_{vo} a^2}{6} = \frac{\pi \rho_{vo} a^2}{3} \text{ (C/m)}$

$\hookrightarrow$ El campo creado por una densidad lineal de carga λ situada en el eje z

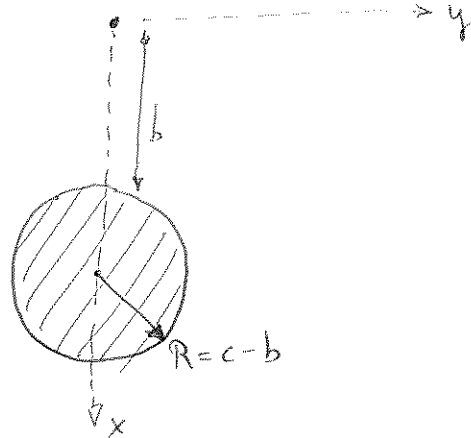
d) Problema imagen:



$$\phi_{esfera} = \frac{q}{4\pi\epsilon(d-R)} + \frac{-q}{4\pi\epsilon(R-di)}$$



$$\lambda = \frac{4\pi\rho_0 a^2}{3} \text{ (C/m)}$$



El problema imagen es:

$$\lambda = \frac{4\pi\rho_0 a^2}{3}$$



Tendremos una densidad de carga $-\lambda$ a una distancia d_i de la coordenada $x = c$

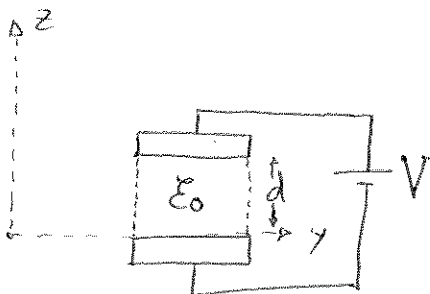
$$d_i = \frac{R^2}{b} = \frac{(c-b)^2}{b}$$

La $-\lambda$ está en $x = c - d_i = c - \frac{(c-b)^2}{b}$

Bloque 5: Condensadores

$$\text{Dato } V_0 \rightarrow \phi \rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{D} \rightarrow \rho_s \rightarrow Q \rightarrow C = \frac{Q}{V_0}$$

I.30



Partimos de:

$$\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \nabla \cdot (-\epsilon \nabla \phi) = \{ \epsilon = \epsilon_0 \} = -\epsilon_0 (\Delta \phi) \Rightarrow \Delta \phi = \frac{-\rho_v}{\epsilon}$$

Como $\rho_v = 0$ entre placas: $\Delta \phi = 0$
ε. Laplace

$$C = \epsilon \cdot \frac{S}{d}$$

$$0 = \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Despreciando efecto de bordes: $\phi = \phi(z)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \phi = A \cdot z + B \quad (V) \quad 0 \leq z \leq d$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z} = -A \cdot \hat{z} \quad (V/m) \quad 0 < z < d$$

$$\phi(z=d) - \phi(z=0) = V \Rightarrow (A \cdot d + B) - (A \cdot 0 + B) = V \Rightarrow A = \frac{V}{d} \Rightarrow \vec{E} = \frac{V}{d} (-\hat{z}) \quad (V/m)$$

$$b) \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}_E + \vec{P}_{\text{eso}} = \vec{0}$$

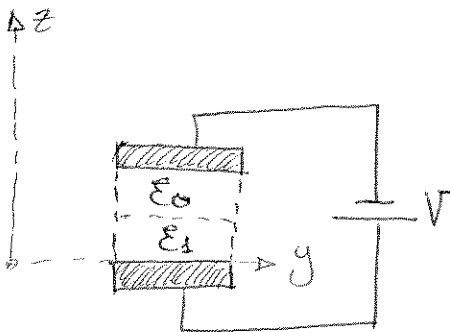
$$\vec{0} = Q \cdot \vec{E} + mg(-\hat{z})$$

$$\vec{0} = Q \cdot \frac{V}{d}(-\hat{z}) + mg(-\hat{z})$$

$$Q \frac{V}{d} \hat{z} = mg(-\hat{z}) \Rightarrow V = \frac{-mgd}{Q} \quad (V)$$

si $Q > 0$, $V < 0$, es decir: la polaridad debería ser:  V
si $Q < 0$, $V > 0$, viceversa.

c)



condensador no homogéneo (2 regiones):

reg 1: Región homogénea libre de cargas

$$\Delta \phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = A_1 z + B_1 \quad (V) \quad (0 \leq z \leq \frac{d}{2})$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla \phi_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \hat{z} = -A_1 \hat{z} \quad (V/m) \quad (0 \leq z < \frac{d}{2})$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 = -\epsilon_1 A_1 \hat{z} \quad (C/m^2) \quad (0 \leq z < \frac{d}{2})$$

reg 0: Región homogénea libre de cargas.

$$\phi_0 = A_0 z + B_0 \quad (V) \quad (\frac{d}{2} \leq z \leq d)$$

$$\vec{E}_0 = -A_0 \hat{z} \quad (V/m) \quad (\frac{d}{2} \leq z < d)$$

$$\vec{D}_0 = -\epsilon_0 A_0 \hat{z} \quad (C/m^2) \quad (\frac{d}{2} \leq z < d)$$

Sabemos que:

$$\rightarrow \phi_1(z=0) - \phi_0(z=d) = V \Rightarrow B_1 - (A_0 d + B_0) = V \quad (Ec.1)$$

$$\rightarrow \text{Como el } \phi \text{ es una función continua: } \phi_0(z=\frac{d}{2}) = \phi_1(z=\frac{d}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0 \frac{d}{2} + B_0 = A_1 \frac{d}{2} + B_1 \quad (Ec.2)$$

$$\rightarrow \epsilon \frac{d\phi}{dn} \Big|_s = \text{continua} \Rightarrow \epsilon_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \Big|_{z=\frac{d}{2}} = \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=\frac{d}{2}} \Rightarrow \epsilon_0 A_0 = \epsilon_1 A_1 \quad (Ec.3)$$

Sumando Ec.1 + Ec.2:

$$A_0 \frac{d}{2} = A_1 \frac{d}{2} + A_0 d + V \quad (Ec.1 + Ec.2)$$

$$\begin{cases} Ec.3: \epsilon_0 A_0 = \epsilon_1 A_1 \\ Ec.1+2: A_0 \frac{d}{2} = A_1 \frac{d}{2} + A_0 d + V \end{cases} \text{ sistema ecs. 2cc. y 2incóg.}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{D}_0 &= \frac{2V\epsilon_0\epsilon_1}{d(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \hat{z} \quad (\frac{d}{2} \leq z < d) \\ \vec{D}_1 &= \frac{2V\epsilon_0\epsilon_1}{d(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \hat{z} \quad (0 \leq z < \frac{d}{2}) \end{aligned} \right\} \rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_s$$

$$\rho_s(z=0) = \hat{z} \cdot (\vec{D}(z=0) - \vec{D}(z=0^-)) = \frac{2V\epsilon_0\epsilon_1}{d(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \quad (C/m)$$

$$\rho_s(z=d) = \hat{z} \cdot (\vec{D}(z=d^+) - \vec{D}(z=d)) = \frac{-2V\epsilon_0\epsilon_1}{d(\epsilon_0 + \epsilon_1)}$$

d) $C = \frac{Q}{V} \quad (F)$

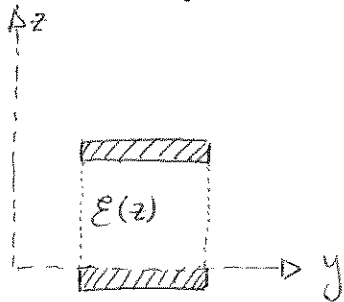
$$Q = Q(z=0) = \iint_S \rho_s(z=0) dS = \rho_s(z=0) \iint_S dS = \rho_s(z=0) \cdot S \quad (C)$$

$$C = \frac{\rho_s(z=0) \cdot S}{V} = \frac{2S\epsilon_0\epsilon_1}{d(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \quad (F)$$

El condensador total es equivalente a dos condensadores planos homogéneos en serie.

$$C = C_0 \text{ serie } C_1 = \frac{C_0 C_1}{C_1 + C_0} = \left\{ \begin{array}{l} C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d/2} \\ C_1 = \epsilon_1 \frac{S}{d/2} \end{array} \right\} = \frac{2S\epsilon_0\epsilon_1}{d(\epsilon_0 + \epsilon_1)} \quad (F)$$

e) $\epsilon(z) = \epsilon_0 \frac{d^2}{d^2 - z^2}$



Como el dieléctrico no es homogéneo:

$$\rho_v = \nabla \cdot \vec{D}$$

Como el dieléctrico está libre de cargas:

$$\rho_v = 0$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon(z) \cdot \vec{E}) = \nabla \cdot (\epsilon(z) \cdot \nabla \phi) =$$

= {Despreciando efecto de bordes: $\phi = \phi(z)$ } =

$$= \nabla \cdot \left(-\epsilon_0 \frac{d^2}{d^2 - z^2} \cdot \frac{d\phi}{dz} \hat{z} \right) =$$

$$\left\{ \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right\}$$

$$= \nabla \cdot \left(-\epsilon_0 \frac{d^2}{d^2 - z^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\epsilon_0 \frac{d^2}{d^2 - z^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0$$

Integrando: $-\epsilon_0 \frac{d^2}{d^2 - z^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} = A \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{-A(d^2 - z^2)}{\epsilon_0 \cdot d^2}$

Integrando again: $\phi = \frac{-A(d^2 z - z^3/3)}{\epsilon_0 d^2} + B \quad (V) \quad (0 \leq z \leq d)$

$$\phi = \frac{-A(d^2z - z^3/3)}{\epsilon_0 d^2} + B \quad (V) \quad (0 \leq z \leq d)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{z} = \frac{A(d^2 - z^2)}{\epsilon_0 d^2} \hat{z} \quad (V/m) \quad (0 < z < d)$$

$$\vec{D} = \epsilon(z) \cdot \vec{E} = A \cdot \hat{z} \quad (C/m^2) \quad (0 < z < d)$$

$$\uparrow \epsilon(z) = \frac{\epsilon_0 d^2}{d^2 - z^2}$$

Sabemos que:

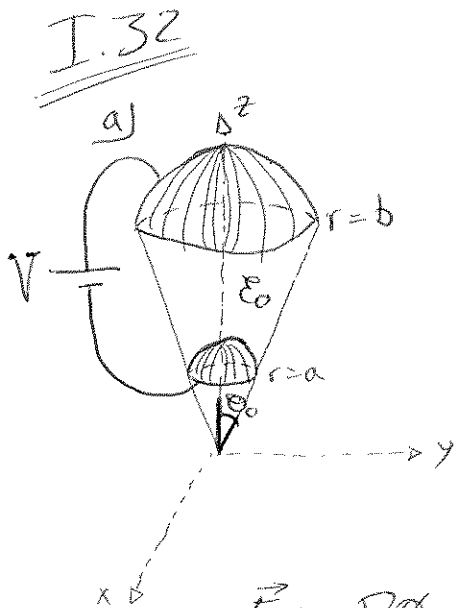
$$\phi(z=0) - \phi(z=d) = V \Rightarrow A = \frac{3V\epsilon_0}{2d}$$

$$\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_s$$

$$\rho_s(z=0) = \hat{z} \cdot (\vec{D}(z=0) - \vec{D}(z=0)) = A = \frac{3V\epsilon_0}{2d} \quad (C/m^2)$$

$$Q(z=0) = \iint_S \rho_s(z=0) dS = A \cdot S = \frac{3V\epsilon_0 S}{2d} \quad (C)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{3\epsilon_0 S}{2d} \quad (F)$$



Como se trata de una región homogénea libre de cargas ($\rho_v=0$) partimos de la ecuación de Laplace:

Despreciando efecto de bordes: $\phi(r, \theta, \varphi) = \phi(r)$

$$\Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Integrando: } r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} = A \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2}$$

$$\text{Integrando again: } \phi = \frac{-A}{r} + B \quad (V) \quad (a \leq r \leq b)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} = \frac{A}{r^2} \hat{r} \quad (V/m) \quad (a < r < b)$$

Sabemos que:

$$\phi(r=b) - \phi(r=a) = V \Rightarrow \frac{-A}{b} - \left(\frac{-A}{a} \right) = V \Rightarrow A \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{Vba}{b-a}$$

$$\vec{E} = \frac{Vba}{(b-a)r^2} (-\hat{r}) \quad (V/m) \quad (a < r < b)$$

b) Para que la carga esté en equilibrio debe ser: $\vec{\Sigma F} = 0$

$$\vec{0} = mg(-\hat{z}) + q \vec{E} = mg(-\hat{z}) + q \frac{Vba}{(b-a)c^2} \Rightarrow V = \frac{-mg(b-a)c^2}{qba} (V)$$

Si $q > 0$ la batería (o fem) hay que ponerla al revés
y si $q < 0$ hay que dejarla como está.

c)

Como se trata de dos regiones
homogéneas libres de cargas:

región 1: $\phi_1 = \frac{-A_1}{r} + B_1 \quad (a \leq r \leq c) \quad (V)$

$$\vec{E}_1 = \frac{-A_1}{r^2} \hat{r} \quad (a < r < c) \quad (V/m)$$

$$\vec{D}_1 = \frac{-\epsilon_1 A_1}{r^2} \hat{r} \quad (a < r < c) \quad (C/m^2)$$

región 0: $\phi_0 = \frac{-A_0}{r} + B_0 \quad (c \leq r \leq b) \quad (V)$

$$\vec{E}_0 = \frac{-A_0}{r^2} \hat{r} \quad (c < r < b) \quad (V/m)$$

$$\vec{D}_0 = \frac{-\epsilon_0 A_0}{r^2} \hat{r} \quad (c < r < b) \quad (C/m^2)$$

Sabemos que:

$$\rightarrow \phi_0(r=b) - \phi_1(r=a) = V \Rightarrow \frac{-A_0}{b} + B_0 + \frac{A_1}{a} - B_1 = V \quad (ec.1)$$

$$\rightarrow \phi_1(r=c) = \phi_0(r=c) \Rightarrow \frac{-A_0}{c} + B_0 = \frac{-A_1}{c} + B_1 \quad (ec.2)$$

$$\rightarrow \epsilon_1 \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=c} = \epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right|_{r=c} \Rightarrow \epsilon_1 \frac{A_1}{c^2} = \epsilon_0 \frac{A_0}{c^2} \Rightarrow \epsilon_1 A_1 = \epsilon_0 A_0 \quad (ec.3)$$

$$(ec.1-2): \frac{A_0}{c} - \frac{A_0}{b} + \frac{A_1}{a} = V + \frac{A_1}{c}$$

$$A_0 = \frac{\epsilon_1 V}{\epsilon_1 \frac{b-c}{bc} + \epsilon_0 \frac{c-a}{ca}}$$

$$A_1 = \frac{\epsilon_0 V}{\epsilon_1 \frac{b-c}{bc} + \epsilon_0 \frac{c-a}{ca}}$$

$$\rho_s = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{s}$$

$$\rho_s(r=b) = \hat{r} (\vec{D}_0(r=b^+) - \vec{D}_0(r=b^-)) = \frac{\epsilon_0 A_0}{b^2} \quad (C/m^2)$$

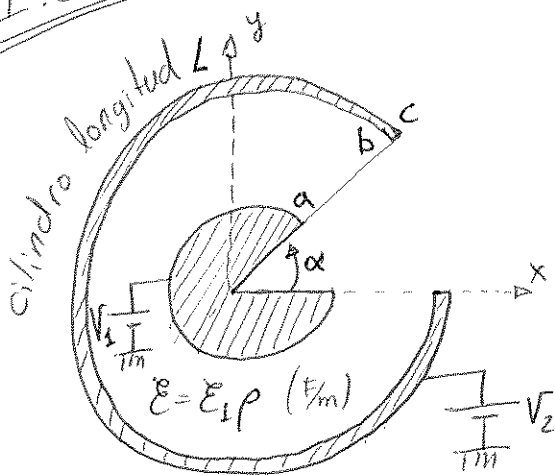
$$\rho_s(r=a) = \hat{r} (\vec{D}_1(r=a^+) - \vec{D}_1(r=a^-)) = -\frac{\epsilon_1 A_1}{a^2} \quad (C/m^2)$$

$$d) Q(r=b) = \iint_S \rho_s(r=b) dS = \rho_s(r=b) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_0} b^2 \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{\epsilon_0 A_0}{b^2} b^2 2\pi (1 - \cos \theta_0) \quad (C)$$

$$C = \frac{Q(r=b)}{V} = \frac{2\pi \epsilon_0 A_0 (1 - \cos \theta_0)}{V} \quad (F)$$

I.34



a) región $\rho < a$:

Como es un conductor en situación electrostática:

$$\vec{E}(\rho < a) = \vec{0} \quad (V/m)$$

$$\phi(\rho < a) = V_1 \quad (V)$$

región $b < \rho < c$:

Análogamente:

$$\vec{E}(b < \rho < c) = \vec{0} \quad (V/m)$$

$$\phi(b < \rho < c) = V_2 \quad (V)$$

Región $a < \rho < b$:

Como es una región NO homogénea partimos de: $\rho_r = \nabla \cdot \vec{D}$

Como es un condensador la región $a < \rho < b$ está libre de cargas: $\rho_r = 0$

$$0 = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla(\vec{E} \cdot \vec{r}) = \nabla(-\epsilon_1 r \phi) = \nabla(-\epsilon_1 \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \hat{r}) =$$

despreciando efecto de bordes

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (-\rho \epsilon_1 \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho}) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial \rho} (-\epsilon_1 \rho^2 \frac{\partial \phi}{\partial \rho})$$

$$\text{Integrando: } -\epsilon_1 \rho^2 \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = A \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{-A}{\epsilon_1 \rho^2}$$

$$\text{Integrando again: } \phi = \frac{A}{\epsilon_1 \rho} + B \quad (V) \quad (a \leq \rho \leq b)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\rho} = \frac{A}{\epsilon_1\rho^2}\hat{\rho} \text{ (V/m)} \quad (a < \rho < b)$$

Sabemos que:

$$\left. \begin{aligned} \phi(\rho=a) &= V_1 = \frac{A}{\epsilon_1 a} + B \text{ (ec.1)} \\ \phi(\rho=b) &= V_2 = \frac{A}{\epsilon_1 b} + B \text{ (ec.2)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= \frac{(V_1 - V_2) \epsilon_1 b a}{b - a} \\ B &= V_1 - \frac{A}{\epsilon_1 a} \end{aligned}$$

b) En $\rho < a$ no hay carga ya que es un conductor en electrostática ($\vec{E}(\rho < a) = \vec{0}$)

En $b < \rho < c$ idem

En $a < \rho < b$ no hay carga volumétrica (según solución oficial: es la premisa de partida)

Sólo hay carga superficial en $\rho = a$ y $\rho = b$

$$\rho_s = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{s}$$

$$\rho_s(\rho=a) = \hat{\rho} (\vec{D}(\rho=a^+) - \vec{D}(\rho=a^-)) = \frac{A}{a} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$\rho_s(\rho=b) = \hat{\rho} (\vec{D}(\rho=b^+) - \vec{D}(\rho=b^-)) = \frac{-A}{b}$$

$$\hookrightarrow Q(\rho=a) = \iint_S \rho_s(\rho=a) dS = \rho_s(\rho=a) \iint_S dS = \rho_s(\rho=a) \int_{z=z_0}^{z_0+L} \int_{\varphi=\alpha}^{2\pi} a d\varphi dz =$$

$$= \frac{A}{a} a (2\pi - \alpha) \cdot L \text{ (C)}$$

$$C = \frac{Q(\rho=a)}{V_1 - V_2} = \frac{Q(\rho=b)}{V_2 - V_1} = \frac{(2\pi - \alpha) \cdot L \cdot \epsilon_1 \cdot \frac{b \cdot a}{b - a}}{b - a} \text{ (F)}$$

d) Nota teórica:

$$\boxed{R \cdot C = \frac{\epsilon}{\sigma}} \quad \begin{array}{l} \text{Dualidad} \\ \text{capacidad-resistencia} \end{array}$$

sólo válido si ϵ y σ varían de la misma forma (o son ambos constantes)

$$\sigma(\rho) = \sigma_1 \rho \text{ (S/m)}$$

$$R = \frac{\epsilon}{\sigma C} = \frac{\epsilon_1 \cancel{\rho}}{\sigma_1 \cancel{\rho} (2\pi - \alpha) L \cancel{\epsilon_1} \frac{ba}{b-a}} = \frac{b-a}{\sigma_1 (2\pi - \alpha) L ba} \text{ (}\Omega\text{)}$$



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE
MADRID

ASIGNATURA: Electricidad y Magnetismo
Convocatoria: de Febrero de 2007
Fecha: 6 de febrero de 2007

simplyjared.com

--	--	--	--

DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES
GRUPO DE RADIAIÓN

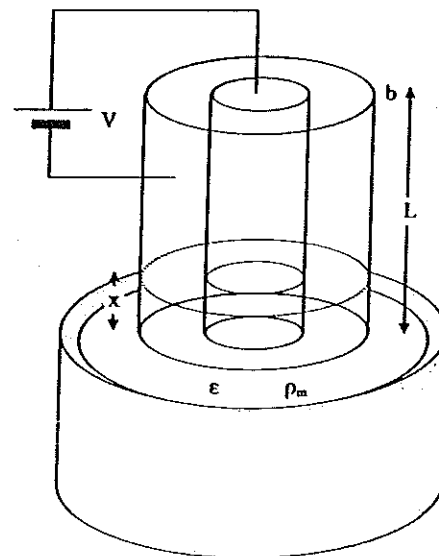
Apellidos y Nombre:	
---------------------	--

PROBLEMA 2

Un condensador formado por dos cilindros coaxiales de radios a y b , longitud L y con aire entre las armaduras se coloca de forma que su borde inferior roza la superficie de un baño líquido dieléctrico de permitividad ϵ y densidad de masa ρ_m , de modo que, ese líquido pueda subir entre las placas del condensador.

Cuando este condensador este conectado a un generador que mantiene un voltaje V entre placas, calcule:

- la energía eléctrica almacenada por el condensador en función de la altura x del líquido entre las placas. (3p)
- la fuerza creada por el campo eléctrico que se aplica sobre el líquido en función de la altura del mismo. (3p)
- la altura máxima a la cual sube el líquido entre las placas. (2p)
- Finalmente, si el dieléctrico no fuera perfecto y presentase una conductividad σ , obtenga el valor de la corriente eléctrica que circula para la altura máxima que haya podido subir el líquido entre las placas. Considere solo el efecto de la conductividad para la resolución de este apartado. (2 p)



Solución:

- a) Energía eléctrica almacenada

La capacidad vale: $C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L-x}{\ln(b/a)} + 2\pi\epsilon \frac{x}{\ln(b/a)}$ Faradios

y la energía vale: $W_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\pi}{2\ln(b/a)} \left(\epsilon_0 L + \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) x \right) V^2$ Julios

- b) La fuerza creada por el campo eléctrico

$$\vec{F}_e = \nabla W_e = \frac{\partial W_e}{\partial x} \hat{x} = \frac{\pi V^2}{\ln(b/a)} \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \hat{x} \text{ Newtons hacia las } x \text{ positivas}$$

- c) Altura que toma el líquido

Se calculara como aquella para la cual la fuerza creada por el campo eléctrico sea capaz de levantar la masa del líquido

La masa del líquido crea una fuerza que vale: $\vec{F} = mg = \rho_m \pi (b^2 - a^2) x g (-\hat{x})$

$$\text{Por lo que: } \vec{F} = \vec{F}_e \Rightarrow \frac{\pi V^2}{\ln(b/a)} \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) = \rho_m \pi (b^2 - a^2) x g \Rightarrow x = \frac{\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) V^2}{\rho_m \ln(b/a) (b^2 - a^2) g} \text{ metros}$$

- d) Calcule la corriente eléctrica

Considerando solo el efecto de la conductividad para este apartado la resistencia que presenta el líquido corresponde a la de una resistencia cilíndrica. Aplicando dualidad y conocida la capacidad la resistencia vale:

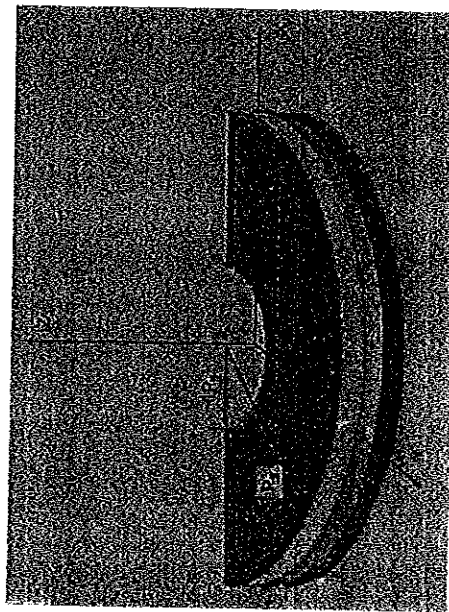
$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} x \Rightarrow R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma x} \text{ Ohmios}$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{\ln(b/a)} 2\pi\sigma x \Rightarrow I = \frac{2\pi\sigma V}{\ln(b/a)} \frac{\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) V^2}{\rho_m \ln(b/a) (b^2 - a^2) g} \text{ Amperios}$$

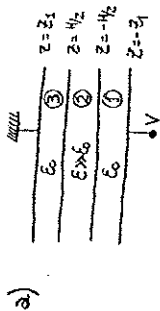
PROBLEMA 2 FEBRERO 2009

Un condensador de láminas está formado por dos láminas semicirculares paralelas que cubren situadas en $R_1 \leq \rho \leq R_2$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $z = Z_1$, y $z = -Z_1$, como se indica en la figura. En la zona intermedia se sitúa un material dieléctrico con $\epsilon \gg \epsilon_0$ de la misma forma que los conductores y de altura $H < 2Z_1$ y centrado entre los conductores. Si se conecta una batería de forma que el electrodo superior está a 0 V y el inferior a V voltios.

- Suponiendo despreciable el efecto de bordes exprese la ecuación para calcular el potencial en cada una de las tres regiones ($-Z_1 < z < -H/2$, $-H/2 < z < H/2$, $H/2 < z < H$) y las condiciones de contorno a aplicar. (2p.)
- Obtenga el potencial en las tres regiones del apartado anterior para $H=Z_1$, y represente una gráfica que represente el potencial en función de z . (1p.)
- Calcule la intensidad de campo eléctrico en las tres regiones entre conductores. (1p.)
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie de ambos conductores. (1p.)
- Calcule la capacidad entre electrodos. (1p.)
- Si el dieléctrico interior se gira un ángulo $\alpha \leq \pi$, en torno al eje z , calcule la capacidad resultante. (2p.)
- ¿Cuál es el momento de la fuerza alrededor del eje z que se ejerce sobre el dieléctrico si se mantiene constante la tensión entre placas? ¿Tiene a meter el dieléctrico o a sacarlo de entre las placas metálicas? (2p.)



Solución PROBLEMA 2 FEB 2009



Como las tres regiones son homogéneas y libres de cargas, podemos aplicar la ec. de Laplace: $\Delta \phi = 0$.
Despreciando efecto de bordes: $\phi = \phi(z) \Rightarrow 0 = \Delta \phi = \frac{d^2 \phi}{dz^2} \Rightarrow \phi = A z + B$
Así pues: $\phi_1 = A_1 z + B_1$ (V)
 $\phi_2 = A_2 z + B_2$ (V)
 $\phi_3 = A_3 z + B_3$ (V)

Las tres condiciones que necesitamos para el cálculo de las constantes son:

$$\phi_1(z = -Z_1) = V; \phi_3(z = +Z_1) = 0; \phi_1(z = -H/2) = \phi_2(z = -H/2); \phi_2(z = H/2) = \phi_3(z = H/2);$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=-H/2} = \epsilon \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-H/2}; \quad \epsilon \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=H/2} = \epsilon_0 \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \Big|_{z=H/2}$$

Nota: Las dos últimas vienen de que no hay carga superficial entre ① y ② ni entre ② y ③.

b) Operando obtenemos el siguiente valor para las constantes:

$$A_1 = A_3 = \frac{-\epsilon V}{H(\epsilon + \epsilon_0)}; A_2 = \frac{-\epsilon_0 V}{H(\epsilon + \epsilon_0)}; B_1 = \frac{\epsilon V}{H(\epsilon + \epsilon_0)}; B_3 = \frac{\epsilon_0 V}{H(\epsilon + \epsilon_0)}; B_2 = \frac{V}{2}$$

Teniendo en cuenta que $\epsilon \gg \epsilon_0$ los valores del potencial en $z = -H/2$ y en $z = H/2$ son:

$$\phi_1(z = -H/2) = \phi_2(z = -H/2) \approx \frac{V}{2} \text{ voltios}$$

$$\phi_2(z = +H/2) = \phi_3(z = +H/2) \approx \frac{V}{2} \text{ voltios}$$

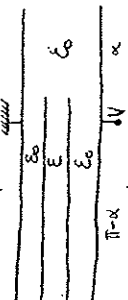
Se trata la gráfica del potencial en:

$$\vec{E}_1 = -\nabla \phi_1 = -A_1 \hat{z} = \frac{\epsilon V \hat{z}}{H(\epsilon + \epsilon_0)} \approx \frac{V \hat{z}}{H} \approx \frac{\epsilon V \hat{z}}{H \epsilon} \approx \frac{\epsilon V \hat{z}}{\epsilon H} \quad (V/m)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \hat{z}; \quad \vec{D}_1(z = -Z_1) = \epsilon_0 (\vec{E}_1(z = -Z_1) - \vec{E}_2(z = -Z_1)) = \epsilon_0 (\vec{E}_1(z = -Z_1) - \vec{E}_2(z = -Z_1)) \approx -\epsilon_0 \frac{V}{H} \hat{z} \quad (C/m^2)$$

$$\vec{C} = \frac{Q(z = -Z_1)}{V - 0} = \frac{\int \vec{D}_1(z = -Z_1) \cdot d\vec{s}}{V} = \frac{\epsilon_0 \cdot \frac{V}{H} \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2)}{V} = \frac{\epsilon_0 \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2)}{H} \quad (F)$$

f) Altera el esquema en:



Como la capacidad de un condensador plano es $C = \epsilon \cdot \frac{S}{d}$ (F) y los dos condensadores del esquema están en paralelo:

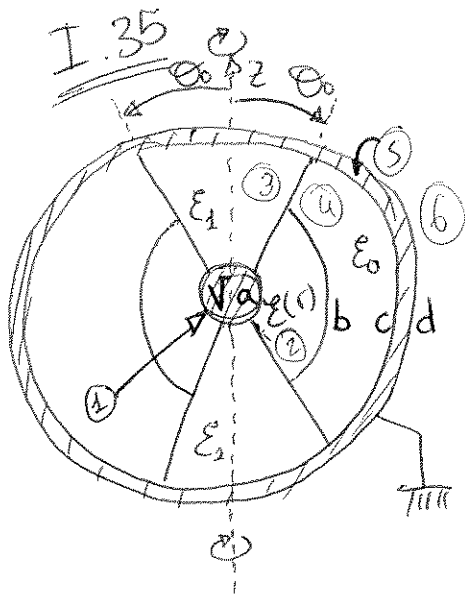
$$C_{TOT} = C_{\pi-\alpha} + C_{\alpha} \approx \frac{\epsilon_0 \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2)}{H} + \epsilon_0 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} (R_2^2 - R_1^2)}{2Z_1} \quad (F)$$

g) La energía del condensador en función de α es: $W(\alpha) = \frac{1}{2} C \cdot V^2$ (J) (Energía a potencial constante)

La fuerza o momento ejercido sobre el dieléctrico cuando el potencial es constante viene dada por:

$$\vec{F} = + \nabla W \Rightarrow |\vec{F}| = |\nabla W| = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{2} C V^2 \right] = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial \alpha}$$

Este signo $\oplus$ indica que la fuerza tiende a situar al condensador en su posición de máxima energía, que se da con $\alpha = 0$, es decir, que tiende a introducir el dieléctrico entre las placas.



$$\epsilon(r) = \frac{k}{r^2}$$

a y b)

$$\begin{array}{l} \text{reg 1 y 5:} \\ \vec{E}_1 = 0 = \vec{E}_5 \\ \phi_1 = V \\ \phi_5 = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \vec{E}_1 = 0 = \vec{E}_5 \\ \phi_1 = V \\ \phi_5 = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{son regiones} \\ \text{conductoras} \\ \text{en electrostática} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{reg 6:} \\ \text{como } \phi_6(r=d) = 0 \text{ y la región está} \\ \text{libre de cargas, por el TA media } \phi_6 = 0 (V) \\ \text{entonces: } \vec{E}_6 = -\nabla \phi_6 = \vec{0} (V/m) \end{array}$$

reg 2:

ser trata de una región no homogénea libre de cargas

$$\begin{aligned} \rho_{v2} = 0 = \nabla \cdot \vec{D}_2 &= \nabla \cdot (\epsilon_2 \cdot \vec{E}_2) = \nabla \cdot (-\epsilon_2 \nabla \phi_2) = \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_2 = k/r^2 \\ \text{Despreciando ef.} \\ \text{de bordes:} \\ \phi_2 = \phi_2(r) \end{array} \right\} = \\ &= \nabla \cdot \left(-\frac{k}{r^2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \cdot \hat{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{k}{r^2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-k \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_2}{\partial r} = -\frac{A_2}{k} \Rightarrow \phi_2 = -\frac{A_2}{k} r + B_2 \quad (V)$$

$$\phi_2 = -\frac{A_2}{k} r + B_2 \quad (V) \quad ; \quad E_2 = -\frac{\partial \phi_2}{\partial r} \hat{r} = \frac{A_2}{k} \hat{r} \quad (V/m)$$

$a \leq r \leq b$ $a < r < b$

reg 3: homogénea y libre de cargas

$$0 = \Delta \phi_3 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Despreciando ef.} \\ \text{de bordes} \\ \phi_3 = \phi_3(r) \end{array} \right\} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi_3}{\partial r} = \frac{A_3}{r^2} \Rightarrow \phi_3 = -\frac{A_3}{r} + B_3$$

$$\vec{E}_3 = -\nabla \phi_3 = -\frac{\partial \phi_3}{\partial r} \hat{r} = \frac{A_3}{r^2} \hat{r}$$

reg 4: idem reg 3

$$\phi_3 = -\frac{A_3}{r} + B_3 \quad (V) \quad (a \leq r \leq c) \quad ; \quad \vec{E}_3 = \frac{A_3}{r^2} \hat{r} \quad (V/m) \quad (a < r < c)$$

$$\phi_4 = -\frac{A_4}{r} + B_4 \quad (V) \quad (b \leq r \leq c) \quad ; \quad \vec{E}_4 = -\frac{A_4}{r^2} \hat{r} \quad (V/m) \quad (b < r < c)$$

Sabemos que:

$$\left. \begin{aligned} \phi_3(r=a) &= V \\ \phi_3(r=c) &= 0 \end{aligned} \right\} A_3 \text{ y } B_3$$

$$\phi_2(r=a) = V$$

$$\phi_4(r=c) = 0$$

$$\phi_2(r=b^-) = \phi_4(r=b^+)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=b^-} &= \epsilon_0 \frac{\partial \phi_4}{\partial r} \Big|_{r=b^+} \Rightarrow \frac{k}{b^2} \cdot \frac{-A_2}{k} = \epsilon_0 \frac{A_4}{b^2} \Rightarrow -A_2 = \epsilon_0 A_4 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} A_4 \\ A_2 \\ B_2 \\ B_4 \end{matrix}$$

$$c) \rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_s$$

$$\rho_s(r=d) = \hat{r} \cdot (\vec{D}(r=d^+) - \vec{D}(r=d^-)) = 0 \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$\rho_s(r=a) = \hat{r} \cdot (\vec{D}(r=a^+) - \vec{D}(r=a^-)) = \begin{cases} \text{si } 0 \leq \theta \leq \theta_0 : \hat{r} \cdot \vec{D}_3(r=a^+) = \frac{-\epsilon_2 A_3}{a^2} \\ \text{si } \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0 : \hat{r} \cdot \vec{D}_2(r=a^+) = \frac{A_2}{a^2} \\ \text{si } \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi : \hat{r} \cdot \vec{D}_3(r=a^+) = \frac{-\epsilon_2 A_3}{a^2} \end{cases}$$

$$\rho_s(r=c) = \hat{r} \cdot (\vec{D}(r=c^+) - \vec{D}(r=c^-)) = \begin{cases} \text{si } 0 \leq \theta \leq \theta_0 : -\hat{r} \cdot \vec{D}_3(r=c^-) = \frac{+\epsilon_2 A_3}{c^2} \\ \text{si } \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0 : -\hat{r} \cdot \vec{D}_4(r=c^-) = \frac{\epsilon_0 A_4}{c^2} \\ \text{si } \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi : -\hat{r} \cdot \vec{D}_3(r=c^-) = \frac{+\epsilon_2 A_3}{c^2} \end{cases}$$

$$d) C = \frac{Q(r=a)}{V} \text{ (F)}$$

$$Q(r=a) = \iint_s \rho_s(r=a) \cdot dS = 2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{-\epsilon_2 A_3}{a^2} \cdot a^2 \sin \theta d\theta d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\theta_0}^{\pi - \theta_0} \frac{A_2}{a^2} \cdot a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= -2\epsilon_2 A_3 2\pi (1 - \cos \theta_0) + A_2 2\pi (\cos \theta_0 - \cos(\pi - \theta_0)) \quad (C)$$

$$e) \epsilon_2 = \frac{k}{r^2} \geq \epsilon_0 \rightarrow \begin{cases} k \geq \epsilon_0 a^2 \\ k \geq \epsilon_0 b^2 \end{cases} \rightarrow k_{\min} = \epsilon_0 b^2$$

(a ≤ r ≤ b)

a) Despreciando efecto de bordes hay 4 regiones ¡¡OJO!!.

Región ①:

$$\rho_{v0} = 0 = \nabla \cdot \vec{D}_0 = \nabla \cdot (\epsilon_0 (-\nabla \phi_0)) \Rightarrow \text{Como } \epsilon_0 = \text{cte} \Rightarrow \Delta \phi_0 = 0.$$

$$\text{Despreciando efecto de bordes } \phi_0 = \phi_0(z) \Rightarrow \Delta \phi_0(z) = 0 = \frac{\partial^2 \phi_0(z)}{\partial z^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi_0(z) = A_0 \cdot z + B_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_0 = -\nabla \phi_0 = -A_0 \cdot \hat{z}}$$

Región ④:

$$\text{Análogamente: } \boxed{\phi_4(z) = A_1 \cdot z + B_1} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = -A_1 \cdot \hat{z}}$$

Región ②: $\pi \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2}$ $0 \leq z \leq d$ $\phi_2 = \phi_2(z)$

$$\rho_{v2} = 0 = \nabla \cdot \vec{D}_2 = \nabla \cdot \left(\frac{\kappa_2}{z} \cdot (-\nabla \phi_2) \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\kappa_2}{z} \cdot \left(-\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \hat{z} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa_2}{z} \cdot \left(-\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) \right) = 0$$

$$\frac{\kappa_2}{z} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = A_2' \Rightarrow \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = A_2'' \cdot z \Rightarrow \boxed{\phi_2(z) = A_2 \cdot z^2 + B_2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = -A_2 \cdot 2 \cdot z \cdot \hat{z}}$$

Región ③: $\frac{3\pi}{2} \leq \psi \leq 2\pi$ $0 \leq z \leq \frac{d}{2}$

$$\text{Análogamente: } \boxed{\phi_3(z) = A_3 \cdot z^2 + B_3} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_3 = -A_3 \cdot 2 \cdot z \cdot \hat{z}}$$

Necesitamos 8 condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_0(z=0) = V_0 = B_0 \\ \phi_0(z=d) = 0 = A_0 d + V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\phi_0(z) = V_0 \left(1 - \frac{z}{d} \right)} \quad (v) \quad \boxed{\vec{E}_0 = \frac{V_0}{d} \hat{z}} \quad (v_m)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi_2(z=0) = V_0 = B_2 \\ \phi_2(z=d) = 0 = A_2 d^2 + V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\phi_2(z) = V_0 \left(1 - \frac{z^2}{d^2} \right)} \quad (v) \quad \boxed{\vec{E}_2 = \frac{2V_0}{d^2} z \cdot \hat{z}} \quad (v_m)$$

$$\phi_1(z=d) = 0 = A_1 \cdot d + B_1 = 0$$

$$\phi_1(z=d/2^+) = \phi_3(z=d/2^-) \Rightarrow A_1 \cdot \frac{d}{2} + B_1 = A_3 \cdot \frac{d^2}{4} + B_3$$

$$\phi_3(z=0) = V_0 = B_3 = V_0$$

~~$$\phi_1(z=d/2) = 0 = \epsilon_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=d/2} - \frac{k_2}{(d/2)} \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \Big|_{z=d/2} \Rightarrow \epsilon_1 \cdot A_1 = \frac{k_2}{(d/2)} \cdot A_3 \cdot 2 \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow$$~~

$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=d/2} = \epsilon_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \Big|_{z=d/2} = \epsilon_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \Big|_{z=d/2} \Rightarrow 2k_2 A_3 = \epsilon_1 A_1$$

Operando obtenemos A_1, B_1, A_3 y B_3 y por tanto:

$$\phi_1(z) = \frac{2k_2 \cdot V_0}{\left(k_2 + \frac{d \cdot \epsilon_1}{4}\right)} \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (V)$$

$$\vec{E}_1(z) = \frac{2k_2 \cdot V_0}{d \left(\frac{d \cdot \epsilon_1}{4} + k_2\right)} \hat{z} \quad (V/m)$$

$$\phi_3(z) = V_0 \left(1 - \frac{z^2}{d \left(\frac{d}{4} + \frac{k_2}{\epsilon_1}\right)}\right) \quad (V)$$

$$\vec{E}_3(z) = \frac{V_0 \cdot 2 \cdot z}{d \left(\frac{d}{4} + \frac{k_2}{\epsilon_1}\right)} \hat{z} \quad (V/m)$$

$$b) \quad P_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_s$$

$$P_s(z=0) = \hat{z} \cdot (\vec{D}(z=0^+) - \vec{D}) = \begin{cases} \epsilon_0 \cdot \frac{V_0}{d} & \text{si } \alpha \leq \psi \leq \pi; 0 \leq \rho \leq a \\ \frac{k_2}{z} \cdot \frac{2V_0}{d^2} \cdot z \Big|_{z=0} = \frac{2V_0 \cdot k_2}{d^2} & \text{si } \pi \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2}; 0 \leq \rho \leq a \quad (C/m^2) \\ \frac{k_2}{z} \cdot \frac{2V_0 \cdot z}{d \left(\frac{d}{4} + \frac{k_2}{\epsilon_1}\right)} \Big|_{z=0} = \frac{2V_0 \cdot k_2}{d \left(\frac{d}{4} + \frac{k_2}{\epsilon_1}\right)} & \text{si } \frac{3\pi}{2} \leq \psi \leq 2\pi; 0 \leq \rho \leq a \end{cases}$$

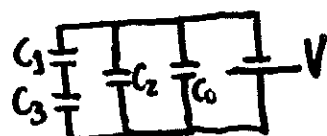
$$P_s(z=d) = -\hat{z} \cdot (\vec{D}(z=d^-) - \vec{D}) = \begin{cases} -\epsilon_0 \frac{V_0}{d} & \text{si } \alpha \leq \psi \leq \pi; 0 \leq \rho \leq a \\ -\frac{2V_0 k_2}{d^2} & \text{si } \pi \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2}; 0 \leq \rho \leq a \quad (C/m^2) \\ -\epsilon_1 \cdot \frac{2k_2 V_0}{d \left(\frac{d \cdot \epsilon_1}{4} + k_2\right)} & \text{si } \frac{3\pi}{2} \leq \psi \leq 2\pi; 0 \leq \rho \leq a \end{cases}$$

$$c) \quad Q(z=0) = -Q(z=d) = \epsilon_0 \cdot \frac{V_0}{d} \cdot \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) \cdot a^2 + \frac{2V_0 \cdot k_2}{d^2} \cdot \frac{\pi}{4} a^2 + \frac{2V_0 \cdot k_2}{d \left(\frac{d}{4} + \frac{k_2}{\epsilon_1}\right)} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot a^2 =$$

$$= \frac{a^2 \cdot V_0}{4d} \left[2\epsilon_0 (\pi - \alpha) + \frac{2k_2 \cdot \pi}{d} + \frac{2k_2 \cdot \pi}{\left(\frac{d}{4} + \frac{k_2}{\epsilon_1}\right)} \right] \quad (C) \quad (F)$$

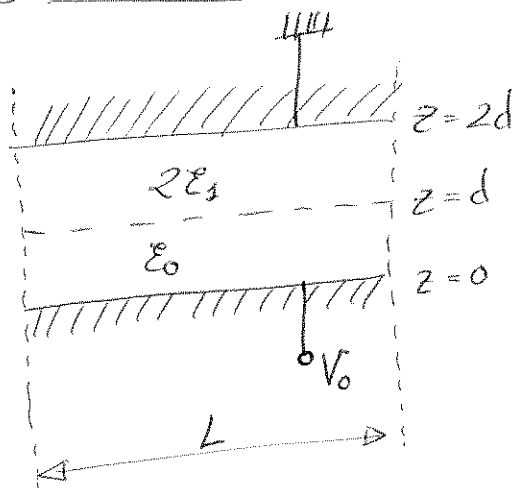
$$d) \quad C = \frac{Q(z=0)}{V_0} \quad (F)$$

El esquema circuital de los condensadores es:



I.58

a) Dato Q_0 :



Aplicamos la ddp mostrada en la figura:

reg 0: homogénea y libre de cargas

$$0 = \Delta \phi_0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Rightarrow \phi_0(z) = A_0 z + B_0 \text{ (V)}$$

Despr. ef. bordes ($\phi_0 = \phi_0(z)$)

$$(0 \leq z \leq d)$$

$$\vec{E}_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z} = -A_0 \hat{z} \text{ (V)} \quad (0 < z < d)$$

reg 1: análogamente:

$$\phi_1 = A_1 z + B_1 \text{ (V)} \quad (d \leq z \leq 2d)$$

$$\vec{E}_1 = -A_1 \hat{z} \text{ (V/m)} \quad (d < z < 2d)$$

sabemos que:

$$\phi_0(z=0) = V_0$$

$$\phi_1(z=2d) = 0$$

$$\phi_0(z=d) = \phi_1(z=d)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \Big|_{z=d} = 2\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=d}$$

Operando:

$$\vec{E}_0 = \frac{2\epsilon_1 V_0}{d(\epsilon_0 + 2\epsilon_1)} \hat{z} \text{ (V/m)} \quad (0 < z < d)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\epsilon_0 V_0}{d(\epsilon_0 + 2\epsilon_1)} \hat{z} \text{ (V/m)} \quad (d < z < 2d)$$

cálculo de V_0 :

$$\rho_s(z=0) = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{z=0} = \hat{z} (\vec{D}_0(z=0) - \vec{D}(z=0)) = \frac{\epsilon_0 2\epsilon_1 V_0}{d(\epsilon_0 + 2\epsilon_1)}$$

$$Q(z=0) = \iint_S \rho_s(z=0) dS = \frac{\epsilon_0 2\epsilon_1 V_0}{d(\epsilon_0 + 2\epsilon_1)} L^2 = Q_0 \Rightarrow V_0 = \frac{Q_0 d(\epsilon_0 + 2\epsilon_1)}{\epsilon_0 2\epsilon_1 L^2}$$

y ahora que tenemos V_0 recalculamos y rehacemos.

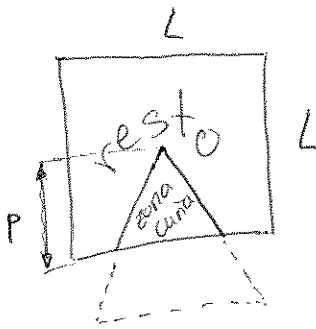
$$b) C = \frac{Q(z=0)}{V_0} = \frac{2\epsilon_1 \epsilon_0 L^2}{d(\epsilon_0 + 2\epsilon_1)} \text{ (F)}$$

$$C = C_{2\epsilon_1} \text{ serie } C_{\epsilon_0} = \frac{C_{2\epsilon_1} C_{\epsilon_0}}{C_{2\epsilon_1} + C_{\epsilon_0}}$$

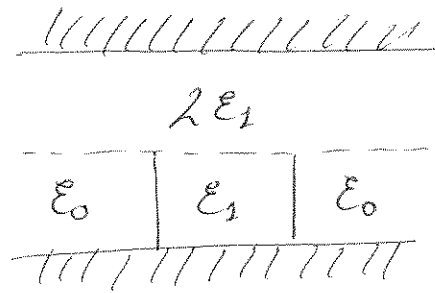
$$C_{2\epsilon_1} = 2\epsilon_1 \cdot \frac{L^2}{d} \text{ (F)}$$

$$C_{\epsilon_0} = \epsilon_0 \cdot \frac{L^2}{d} \text{ (F)}$$

c) visto desde arriba:



visto de frente:



$$C_{TOT} = C_{zona\ cuña} // C_{resto}$$

$$C_{resto} = \frac{2\epsilon_1\epsilon_0}{(\epsilon_0 + 2\epsilon_1)d} \cdot \left(L^2 - \frac{P^2}{2}\right) \quad (F)$$

$$C_{cuña} = 2\epsilon_1 \frac{(P/2)}{d} \text{ serie } \epsilon_1 \frac{(P/2)}{d} = \frac{\epsilon_1 P^2}{3d} \quad (F)$$

$$C_{TOT} = \frac{2\epsilon_1\epsilon_0}{d(2\epsilon_1 + \epsilon_0)} \left(L^2 - \frac{P^2}{2}\right) + \frac{\epsilon_1 P^2}{3d} \quad (F)$$

d) $W_E = \frac{Q_0^2}{2C_{TOT}} \quad (J) \quad (\text{Energía a carga constante})$

e) $\epsilon_1 > \epsilon_0$

$$\vec{F}_E = -\nabla W_E = \frac{\partial W_E}{\partial P} = \dots \quad (N)$$

La F_E a carga constante sitúa al condensador en su posición de mínima energía a carga constante que se alcanza cuando $C_{TOT} = C_{TOT\ max}$.

Esta fuerza tiende a introducir la cuña: ($\epsilon_1 > \epsilon_0$)

La fuerza que se debe aplicar es la opuesta.



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE
MADRID

--	--	--	--

DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES
GRUPO DE RADIAción

Apellidos y Nombre:	
---------------------	--

PROBLEMA 2

Un electrodo metálico ocupa el volumen $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq z \leq L, (\alpha < 2\pi)$. Está recubierto por un dieléctrico de permitividad ϵ Faradios/m y espesor d . En la superficie del dieléctrico $\rho = R + d, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq z \leq L$ se apoya un segundo electrodo de espesor e despreciable. Si se conecta una batería de forma que el electrodo exterior está a 0 V y el interior a V voltios:

- Suponiendo despreciable el efecto de bordes exprese la ecuación para calcular el potencial en la región intermedia entre electrodos y las condiciones de contorno a aplicar. (1 p)
- Obtenga el potencial en la región del apartado anterior. (1 p)
- Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (1 p)
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (1 p)
- Calcule la capacidad entre electrodos. (1p)
- Si el electrodo exterior se gira un ángulo $\beta \leq 2\pi - \alpha$ en torno al eje z calcule la capacidad. (1p)
- Si a partir de la posición anterior es libre de girar sobre el eje z razone cual será el valor final de β . ¿Cuál sería el valor final si se hubiese desconectado la batería antes de dejarle girar?. (2p)
- Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens entre los electrodos ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce en función del valor de β si los electrodos son conductores eléctricos perfectos?. ¿Cuánto vale la resistencia? (2p)

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \right] \quad \nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \hat{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \hat{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \hat{a}_3$$

Solución

a) El potencial en la región entre electrodos responde a la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$ Las condiciones

de contorno son:

$$\begin{cases} \phi = V & \text{en } \rho = R; \phi = 0 & \text{en } \rho = R + d \\ 0 = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\varphi=0, \alpha} & \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0 \\ 0 = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{z=0, L} & \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{Por tanto } \boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 0}$$

b) Integrando: $\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = A$ e integrando de nuevo: $\phi = A \ln \rho + B$. Aplicando ahora las condiciones de contorno en ρ :

$$\begin{cases} \phi = 0 & \text{en } r = R + d \\ \phi = V & \text{en } r = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A \ln(R + d) + B \\ V = A \ln(R) + B \end{cases} \quad \text{Resolviendo el sistema se obtienen}$$

$$A = \frac{V}{\ln\left(\frac{R}{R+d}\right)} \text{ y } B = -A \ln(R + d). \text{ Finalmente el potencial es } \phi(\rho) = \frac{V}{\ln\left(\frac{R}{R+d}\right)} \ln\left(\frac{\rho}{R+d}\right)$$

c) La intensidad de campo eléctrico será: $\vec{E}(r) = -\nabla\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \hat{\rho} = -\frac{V}{\ln\left(\frac{R}{R+d}\right)} \frac{\hat{\rho}}{\rho} = -\frac{V}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$

d) La densidad superficial de carga se obtiene de la condición de salto de la Inducción Eléctrica:

$$\rho_s = \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)_{\rho=R+d} = \hat{\rho} \cdot \left(0 - \epsilon \vec{E}(\rho) \right)_{\rho=R+d} = -\epsilon \frac{V}{(R+d) \ln\left(\frac{R+d}{R}\right)}$$

e) La carga será $Q = \iint_S \rho_s dS = \rho_s \int_{\varphi=0}^{\alpha} \int_{z=0}^L (R+d) dz d\varphi = \frac{-\epsilon V}{(R+d) \ln\left(\frac{R+d}{R}\right)} (R+d) \alpha L = \frac{-\epsilon \alpha L V}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)}$ y la

capacidad será $C = \frac{Q}{\phi(R+d) - \phi(R)} = \frac{-\epsilon \alpha L V}{-V \ln\left(\frac{R+d}{R}\right)} = \frac{\epsilon \alpha L}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)}$

f) Lo único que cambia es la superficie de las armaduras del condensador que será la de las superficies enfrentadas de los electrodos. La carga en el electrodo externo será

$Q(\beta) = \iint_{S_c} \rho_s dS = \rho_s \int_{\varphi=\beta}^{\alpha} \int_{z=0}^L (R+d) dz d\varphi = \frac{-(\alpha - \beta) \epsilon L V}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)}$ y la capacidad será

$C(\beta) = \frac{Q(\beta)}{\phi(R+d) - \phi(R)} = \frac{-(\alpha - \beta) \epsilon L V}{(-V) \ln\left(\frac{R+d}{R}\right)} = \frac{(\alpha - \beta) \epsilon L}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)}$

g) A potencial constante el equilibrio se alcanza a máxima energía:

$W(\beta)_{\max} = \frac{1}{2} C(\beta) V^2 \Big|_{\max} = \frac{1}{2} \frac{(\alpha - \beta) \epsilon L}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)} V^2 \Big|_{\max} \Rightarrow \beta = 0$

A carga constante el equilibrio se alcanza cuando la energía es mínima:

$W(\beta)_{\min} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(\beta)} \Big|_{\min} = \frac{1}{2} \frac{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right) Q^2}{(\alpha - \beta) \epsilon L} \Big|_{\min} \Rightarrow \beta = 0$

h) La densidad volumétrica de corriente será $\vec{J}(\rho) = \sigma \vec{E}(\rho) = \sigma \frac{V}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$.

La corriente total será su flujo a través de uno de los electrodos. Tomando el exterior será

$I = \iint_{S_c} \vec{J}(r) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_c} \sigma \vec{E}(\rho) \cdot \hat{\rho} dS = \sigma \frac{V}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)} \frac{\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}}{(R+d)} (R+d) (\alpha - \beta) L = \sigma \frac{V}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)} (\alpha - \beta) L$

La resistencia será $R = \frac{V}{I} = \frac{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)}{\sigma (\alpha - \beta) L}$

Se cumple la dualidad resistencia-capacidad: $RC = \frac{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)}{\sigma (\alpha - \beta) L} \frac{(\alpha - \beta) \epsilon L}{\ln\left(\frac{R+d}{R}\right)} = \frac{\epsilon}{\sigma}$



--	--	--	--

PROBLEMA 2

Un electrodo metálico ocupa el volumen $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2$. Está recubierto por un dieléctrico de permitividad ϵ Faradios/m y espesor d . En la superficie $r = R + d, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ se apoya un segundo electrodo de espesor e despreciable. Si se conecta una batería de forma que el electrodo exterior está a 0 V y el interior a V voltios:

- Suponiendo despreciable el efecto de bordes exprese la ecuación para calcular el potencial en la región intermedia entre electrodos y las condiciones de contorno a aplicar. (1 p)
- Obtenga el potencial en la región del apartado anterior. (1 p)
- Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (1 p)
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (1 p)
- Calcule la capacidad entre electrodos. (1p)
- Si el electrodo exterior se gira un ángulo $\alpha \leq \pi$ en torno al eje z calcule la capacidad. (1p)
- Si a partir de la posición anterior es libre de girar sobre el eje z razone cual será el valor final de α . ¿Cuál sería el valor final si se hubiese desconectado la batería antes de dejarle girar?. (2p)
- Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens entre los electrodos ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce en función del valor de α si los electrodos son conductores eléctricos perfectos?. ¿Cuánto vale la resistencia? (2p)

Solución

a) El potencial responde a la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$ en la región entre electrodos Las condiciones $\phi = V$ en $r = R; \phi = 0$ en $r = R + d$

de contorno son: $0 = \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{\varphi=0,\pi} \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0$ Por tanto $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) = 0$

$$0 = \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{\theta=0,\pi/2} \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0$$

b) Integrando $r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} = A$ y de nuevo $\phi = -\frac{A}{r} + B$. Aplicando ahora cc:

$$\left. \begin{array}{l} \phi = 0 \text{ en } r = R + d \\ \phi = V \text{ en } r = R \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = -\frac{A}{R+d} + B \\ V = -\frac{A}{R} + B \end{array} \right\} \dots \text{Resolviendo el sistema se obtienen } A = -\frac{VR(R+d)}{d} \text{ y}$$

$$B = -\frac{VR}{d}. \text{ Finalmente el potencial es } \phi(r) = \frac{VR(R+d-r)}{r d}$$

c) La intensidad de campo eléctrico será: $\vec{E}(r) = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} = \frac{VR(R+d)}{d} \frac{1}{r^2} \hat{r}$

d) La densidad superficial de carga se obtiene de la condición de salto de la Inducción Eléctrica:

$$\rho_s = n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{r=R+d} = -\hat{r} \cdot \epsilon \vec{E}(r) \Big|_{r=R+d} = -\epsilon \frac{VR}{(R+d)d}$$

e) La carga será $Q = \iint_S \rho_s dS = \rho_s \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (R+d)^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{\pi\epsilon VR(R+d)}{d} \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)$ y la capacidad

$$\text{será } C = \frac{Q}{\phi(R+d) - \phi(R)} = \frac{\pi\epsilon R(R+d)}{d}$$

f) Lo único que cambia es la superficie de las armaduras del condensador que será la de las superficies enfrentadas de los electrodos. La carga en el electrodo externo será

$$Q(\alpha) = \iint_S \rho_s dS = \rho_s \int_{\varphi=\alpha}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (R+d)^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{(\pi-\alpha)\epsilon VR(R+d)}{d} \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) \text{ y la capacidad será}$$

$$C(\alpha) = \frac{Q(\alpha)}{\phi(R+d) - \phi(R)} = \frac{(\pi-\alpha)\epsilon R(R+d)}{d}$$

g) A potencial constante el equilibrio se alcanza a máxima energía:

$$W(\alpha) \Big|_{\max} = \frac{1}{2} C(\alpha) V^2 \Big|_{\max} = \frac{1}{2} \frac{(\pi-\alpha)\epsilon R(R+d)}{d} V^2 \Big|_{\max} \Rightarrow \alpha = 0$$

A carga constante el equilibrio se alcanza cuando la energía es mínima:

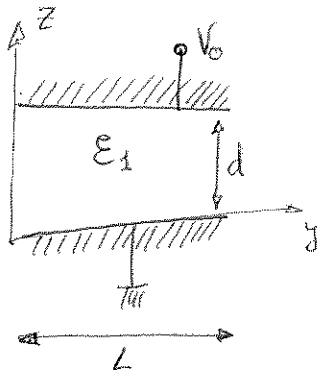
$$W(\alpha) \Big|_{\min} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(\alpha)} \Big|_{\min} = \frac{1}{2} \frac{dQ^2}{(\pi-\alpha)\epsilon R(R+d)} \Big|_{\min} \Rightarrow \alpha = 0$$

h) La densidad volumétrica de corriente será $\vec{J}(r) = \sigma \vec{E}(r) = \sigma \frac{VR(R+d)}{d} \frac{1}{r^2} \hat{r}$. La corriente total será su flujo a través de uno de los electrodos. Tomando el exterior será

$$\text{La resistencia será } R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{(\pi-\alpha)R(R+d)}$$

I.60

1.



Como se trata de una región homogénea libre de cargas:

$$0 = \Delta\phi = \left\{ \begin{array}{l} \text{Despreciando ef. bordes} \\ \phi = \phi(z) \end{array} \right\} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\text{Integrando: } \phi(z) = A \cdot z + B \quad (V) \quad (0 \leq z \leq d)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{z} = -A \hat{z} \quad (V/m) \quad (0 < z < d)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\epsilon_1 A \hat{z} \quad (C/m^2) \quad (0 < z < d)$$

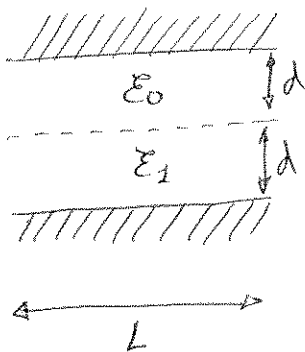
$$\text{Sabemos que: } \phi(z=d) - \phi(z=0) = V_0 = A \cdot d \Rightarrow A = V_0/d$$

$$\rho_s = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_s$$

$$\rho_s(z=d) = \hat{z} (\vec{D}(z=d^+) - \vec{D}(z=d^-)) = \epsilon_1 \cdot A = \frac{\epsilon_1 V_0}{d} \quad (C/m^2)$$

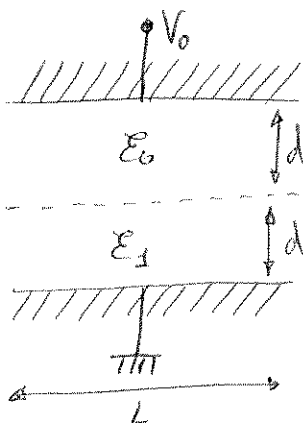
$$Q(z=d) = \iint_S \rho_s(z=d) dS = \frac{\epsilon_1 V_0 L^2}{d} \Rightarrow C_D = \frac{Q(z=d)}{V_0 - 0} = \epsilon_1 \frac{L^2}{d} \quad (F)$$

2.

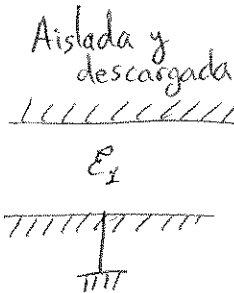


$$C_I = C_{\epsilon_0} \text{ serie } C_{\epsilon_1} = \frac{C_{\epsilon_0} \cdot C_{\epsilon_1}}{C_{\epsilon_0} + C_{\epsilon_1}} = \left\{ \begin{array}{l} C_{\epsilon_0} = \epsilon_0 \frac{L^2}{d} \\ C_{\epsilon_1} = \epsilon_1 \frac{L^2}{d} \end{array} \right\} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 L^2}{(\epsilon_0 + \epsilon_1) d} \quad (F)$$

3.



$$C_I = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 L^2}{(\epsilon_1 + \epsilon_0) d}$$

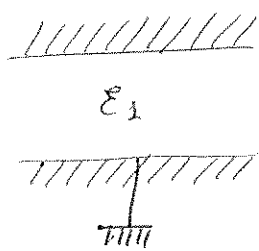


$$C_D = \epsilon_1 \frac{L^2}{d} \quad (F)$$

$$Q_D = 0 \quad (\text{está descargado})$$

$$Q_I = V_0 \cdot C_I = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 L^2 V_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_0) d} \quad (C)$$

4. Al desconectar V_0 se mantiene la carga del condensador de la izquierda.

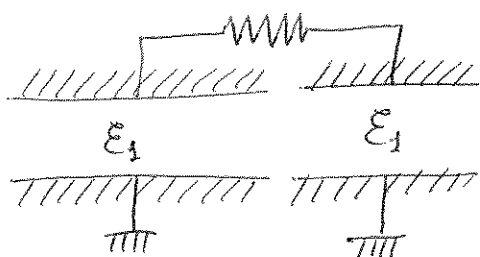


$$C_I' = C_D = \epsilon_1 \frac{L^2}{d} \text{ (F)}$$

$$Q_I' = Q_I = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 L^2 V_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_0) \cdot d} \text{ (C)}$$

$$V_I' = \frac{Q_I'}{C_I'} = \frac{\epsilon_0 \cdot V_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} \text{ (V)}$$

5.



$$C_I'' = C_D'' = \epsilon_1 \frac{L^2}{d} \text{ (F)}$$

Cuando se alcance el equilibrio:

$$V_I'' = V_D'' \Rightarrow \frac{Q_I''}{C_I''} = \frac{Q_D''}{C_D''} \Rightarrow Q_I'' = Q_D''$$

$$Q_I' + Q_D' = Q_I'' + Q_D'' \Rightarrow \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 L^2 V_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_0) \cdot d} + 0 = Q_I'' + Q_D''$$

$$Q_I'' = Q_D'' = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 L^2 V_0}{2(\epsilon_1 + \epsilon_0) d} ; V_I'' = V_D'' = \frac{\epsilon_0 V_0}{2(\epsilon_1 + \epsilon_0)} \text{ (V)}$$

6.

$$W_{E3} = \frac{Q_I^2}{2C_I} + \frac{Q_D^2}{2C_D} = \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_0 \cdot L^2 \cdot V_0^2}{2d(\epsilon_1 + \epsilon_0)} \text{ (J)} \quad \text{Esta energía la ha aportado el generador}$$

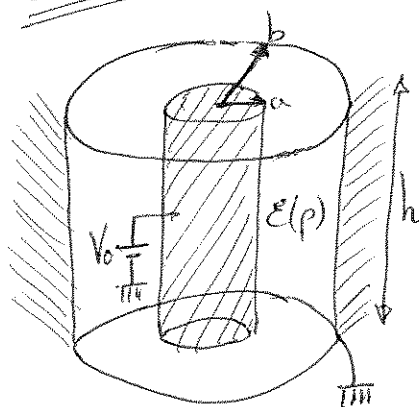
$$W_{E4} = \frac{Q_I'^2}{2C_I'} + \frac{Q_D'^2}{2C_D'} = \frac{\epsilon_0^2 \epsilon_1 L^2 V_0^2}{2d(\epsilon_1 + \epsilon_0)^2} = W_{E3} \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} < W_{E3} \text{ (J)}$$

Hemos perdido energía en forma de trabajo mecánico

$$W_{E5} = \frac{Q_I''^2}{2C_I''} + \frac{Q_D''^2}{2C_D''} = \frac{W_{E4}}{2} \text{ (J)}$$

Hemos perdido energía en forma de calor (disipada en la resistencia)

I.10



a) $\phi??$

$$\phi(r=a) = V_0 = \frac{A}{a} + B$$

$$\phi(r=b) = 0 = \frac{A}{b} + B$$

$$A = \frac{V_0 b a}{b-a} \quad (V \cdot m)$$

$$B = \frac{-A}{b} = \frac{-V_0 a}{b-a} \quad (V)$$

b) $\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho} \hat{\rho} = \frac{A}{\rho^2} \hat{\rho} = \frac{V_0 b a}{(b-a)\rho^2} \hat{\rho} \quad (V/m) \quad (a < \rho < b)$

c) $\epsilon(r)$ si $\epsilon(r=a) = \epsilon_0??$

Como se trata de una región libre de cargas pero no homogénea, partimos de:

$$\rho_v = 0 = \nabla \cdot \vec{D}$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla(\epsilon \cdot \vec{E}) = \nabla(\epsilon(r) \cdot \frac{V_0 b a}{(b-a)\rho^2} \hat{\rho}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{V_0 b a}{(b-a)\rho^2} \epsilon(r) \right)$$

$$\frac{V_0 b a}{(b-a)\rho} \epsilon(r) = A' \Rightarrow \epsilon(r) = \frac{A' (b-a)\rho}{V_0 b a}$$

Como $\epsilon(r=a) = \epsilon_0 \Rightarrow A' = \frac{\epsilon_0 V_0 b}{b-a} \Rightarrow \epsilon(r) = \epsilon_0 \cdot \frac{\rho}{a} \quad (F/m)$

d) $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{\epsilon_0 V_0 b}{(b-a)\rho} \hat{\rho} \quad (C/m^2)$

$$\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)|_s$$

$$\rho_s(r=a) = \hat{\rho} (\vec{D}(r=a^+) - \vec{D}(r=a^-)) = \frac{\epsilon_0 V_0 b}{(b-a)a} \quad (C/m^2)$$

$$\rho_s(r=b) = \hat{\rho} (\vec{D}(r=b^+) - \vec{D}(r=b^-)) = \frac{-\epsilon_0 V_0}{b-a}$$

e) $Q(r=a) = \iint_S \rho_s(r=a) dS = \rho_s(r=a) 2\pi a h = \frac{2\pi \epsilon_0 V_0 b h}{b-a} \quad (C)$

f) $C = \frac{Q(r=a)}{V_0} = \frac{2\pi \epsilon_0 b h}{b-a} \quad (F)$

g) $\vec{E}(r < a) = \vec{0} \quad (V/m)$ (conductor en electrost.)

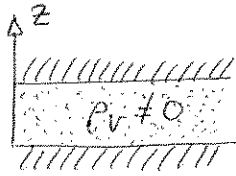
Th media: (sin carga en $\rho > b$) $\Rightarrow \phi(r > b) = 0 \Rightarrow \vec{E}(r > b) = \vec{0}$ } sólo hay $\vec{E}$ para $a < \rho < b$

$$W_{E_{tot}} = W_E(a < \rho < b) = W_{E_{cond}} = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad (J)$$

Comentario final : de condensadores : Cómo se calcula ϕ en regiones homogéneas con $\rho_v \neq 0$

Se aplica Poisson para medios homogéneos:

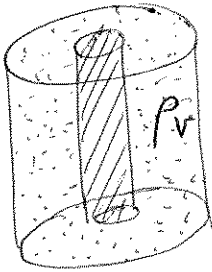
$$\Delta \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$



$$\Delta \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \Rightarrow \text{Despr. en los bordes } \phi = \phi(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \phi}{dz^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} z + A \Rightarrow$$

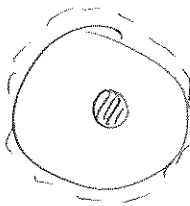
$$\Rightarrow \phi = -\frac{\rho_v z^2}{2\epsilon} + Az + B \quad (V)$$



$$\Delta \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \Rightarrow \text{Despr. en los bordes } \phi = \phi(\rho) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \Rightarrow \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = -\frac{\rho_v \rho^2}{2\epsilon} + A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = -\frac{\rho_v \rho}{2\epsilon} + \frac{A}{\rho} \Rightarrow \phi = -\frac{\rho_v \rho^2}{4\epsilon} + A \ln(\rho) + B \quad (V)$$



$$\Delta \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \Rightarrow \phi = \phi(r) \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right) = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\rho_v r^3}{3\epsilon} + A \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\rho_v r}{3\epsilon} + \frac{A}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{\rho_v r^2}{6\epsilon} - \frac{A}{r} + B \quad (V)$$

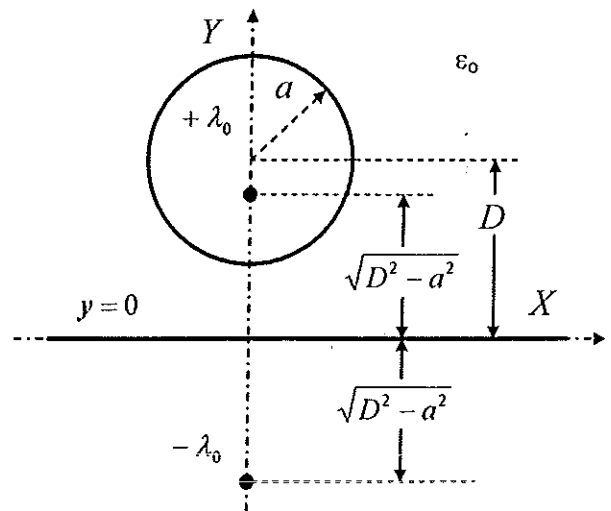


Apellidos:

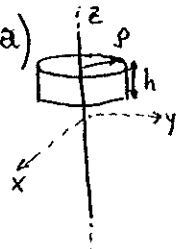
PROBLEMA 2

La figura muestra la sección transversal de una línea de transmisión formada por un conductor cilíndrico indefinido de radio a , cuyo centro está a una altura D del plano conductor indefinido $y=0$ puesto a tierra que es el otro conductor de la línea. El problema electrostático asociado, se puede resolver aplicando el método de imágenes utilizando dos líneas indefinidas de carga imagen situadas en las posiciones $\vec{r} = \pm\sqrt{D^2 - a^2} \hat{y}$, según el sistema de coordenadas de la figura. Tomando como dato las densidades de carga imagen $\pm\lambda_0$, se pide:

- El potencial creado por una línea indefinida de carga de densidad λ_0 . (2p)
- El potencial creado considerando las densidades de carga $\pm\lambda_0$ de la figura. (2p)
- El potencial en cualquier punto del espacio considerando sólo los conductores. (3p)
- La carga por unidad de longitud del conductor cilíndrico. (2p)
- La capacidad por unidad de longitud de la línea. (1p)



PROBLEMA 2 JUNIO 2006

a) 

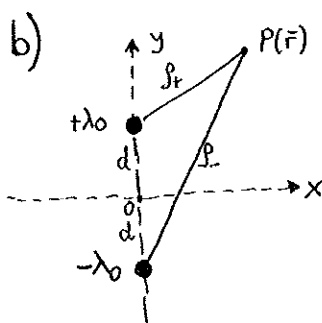
Aplicamos Gauss sobre un cilindro de radio ρ y altura h : $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S D(\rho) \hat{\rho} \cdot d\vec{S}_{lat} \hat{\rho} + 0 + 0 = D(\rho) \cdot 2\pi\rho \cdot h$$

$$Q_{enc} = \lambda \cdot h$$

$$\Rightarrow D(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\rho} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho} \hat{\rho}} \text{ (V/m)}$$

$$\boxed{\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho} d\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\rho + cte} \text{ (V)}$$



$$\phi(\vec{r}) = \phi_{+\lambda_0} + \phi_{-\lambda_0} = \frac{-\lambda_0}{2\pi\epsilon} \ln r_+ + \frac{-(-\lambda_0)}{2\pi\epsilon} \ln r_- + cte =$$

$$= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) + cte = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+(y+d)^2}}{\sqrt{x^2+(y-d)^2}}\right) + cte \text{ (V)}$$

Como $\phi(y=0)=0 \Rightarrow cte=0$, así pues el potencial creado en cualquier punto por las densidades $\pm\lambda_0$ es:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon} \ln\left(\frac{x^2+(y+d)^2}{x^2+(y-d)^2}\right)} \text{ (V) siendo: } d = \sqrt{D^2 - a^2}$$

- c) • Región $y \leq 0$: Como la región bajo el conductor plano es una región libre de cargas, por el teorema de la media $\phi(y \leq 0) = 0$.
- Región interior del cilindro: Como el potencial de un conductor es constante, es suficiente con calcular el potencial en un punto del cilindro con la expresión del apartado b), por ejemplo:
- $$\phi_{cilindro} = \phi(x=0, y=D-a) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon} \ln\left[\left(\frac{D-a+\sqrt{D^2-a^2}}{D-a-\sqrt{D^2-a^2}}\right)^2\right] \text{ (volts)}$$
- Región $y \geq 0$ exterior al cilindro: La expresión del potencial en esta región es la del apartado b).

d) Aplicamos Gauss sobre una superficie que envuélve en su interior al conductor cilíndrico y consideramos tanto el problema original como el problema imagen. Como el campo en esa región es la misma del problema original que del problema imagen, la carga en ambos casos es también la misma, y como observamos en el problema imagen la carga por unidad de longitud en este problema es $+\lambda_0$ (C/m), así pues:

$$(Q/l)_{cilindro} = +\lambda_0 \text{ (C/m)}$$

$$e) \boxed{\left(\frac{Q}{l}\right) = \frac{(Q/l)}{V_0} = \frac{+\lambda_0}{\phi_{cilindro} - \phi_{plano}} = \left\{ \phi_{plano} = 0 \right\} = \frac{8\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{D-a+\sqrt{D^2-a^2}}{D-a-\sqrt{D^2-a^2}}\right)}} \text{ (F/m)}$$

TEMA 2 : MAGNETOSTÁTICA. (CORRIENTES ESTACIONARIAS.)

1.- INTRODUCCIÓN.

Partimos de las ecuaciones de Maxwell, la ley de Ohm generalizada y la ecuación de continuidad:

$$\begin{array}{l|l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho & \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \end{array}$$

En una situación magnetostática se cumple que:

- No hay variación temporal ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- SI hay movimiento de cargas ($\vec{J} \neq \vec{0}$)

Por tanto las ecuaciones anteriores en este tema son:

$$\begin{array}{l|l} \nabla \times \vec{E} = \vec{0} & \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} & \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho & \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \end{array}$$

COMENTARIOS:

- Si por un conductor circula corriente ($\vec{J} \neq \vec{0}$) el campo eléctrico dentro de él NO es cero, excepto si el conductor es perfecto. (Los electrodos de las resistencias se consideran conductores perfectos.)
- Las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico son las mismas que en electrostática ($\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ y $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$), por tanto todas las ecuaciones del tema anterior son válidas.

2.- POTENCIAL VECTOR MAGNÉTICO ($\vec{A}$)

El potencial vector magnético o potencial vector es un campo vectorial que en este tema cumple que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ 0 = \nabla \cdot \vec{A} \end{array}}$$

→ Condición de calibración de Coulomb o gauge de Coulomb.

COMENTARIO: "Ecuación de onda o de Helmholtz"

Partimos de:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \vec{J} \xrightarrow{\text{Si } \mu = \text{cte}} \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{J} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J} \xrightarrow{\nabla \cdot \vec{A} = 0} \boxed{\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}} \quad \text{Ec. de onda o de Helmholtz.}$$

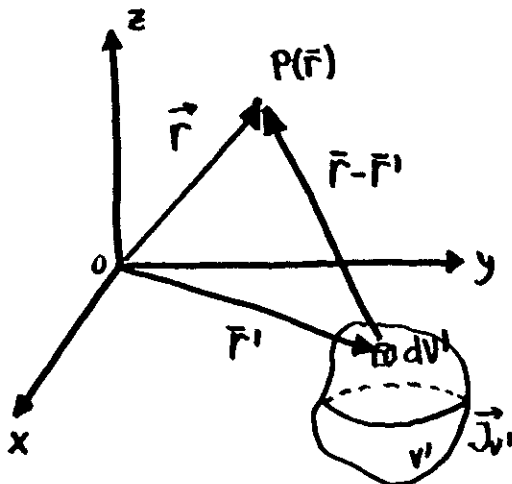
Las unidades de $\vec{A}$
son (Wb/m) ó $(\text{H} \cdot \text{A})/\text{m}$

Es equivalente a Poisson:
 $\vec{A} \rightarrow \phi$; $\mu \rightarrow \frac{1}{\epsilon}$; $\vec{J} \rightarrow \rho$

3.- MÉTODOS PRÁCTICOS PARA EL CÁLCULO DE $\vec{B}$.

3.1.- LEY DE BIOT-SAVART:

Tendremos el siguiente esquema:



$\vec{r} \equiv$ Vector de posición del punto donde calculamos $\vec{B}$.

$\vec{r}' \equiv$ Vector de posición de una fuente diferencial de campo. (dV' , ds' ó dl')

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}_v(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \rightarrow \text{para corrientes volumétricas } \vec{J}_v$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' \rightarrow \text{para corrientes superficiales } \vec{J}_s$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{L'} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rightarrow \text{para corrientes filiformes } I.$$

En este caso $d\vec{l}'$ tiene el mismo sentido que la corriente I .

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rightarrow \text{LEY DE BIOT-SAVART para un elemento diferencial de corriente.}$$

COMENTARIOS:

- Lógicamente Biot-Savart es equivalente al método de aportaciones infinitesimales de electrostática, y se aplica en general cuando nos piden $\vec{B}$ y/o $\vec{H}$ en un punto o en un eje (Hay excepciones.)

- El campo $\vec{B}$ viene de un producto vectorial $\Rightarrow$ REGLA DE LA MANO DERECHA.

3.2.- LEY DE AMPERE: (Para la magnetostática o corrientes estacionarias.)

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{ENLAZADA POR C}} \quad \text{o} \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \cdot I_{\text{ENLAZADA POR C}}$$

COMENTARIOS:

- Lógicamente Ampere es equivalente a Gauss en el tema de electrostática, y se aplica cuando nos piden $\vec{B}$ y/o $\vec{H}$ en una región y además hay cierta SÍMETRÍA.

4.- MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO ($\vec{m}$) [Campo magnético en puntos lejanos]

- Toda distribución de corriente tiene momento dipolar magnético ($\vec{m}$).
- Se considera punto lejano, si la distancia entre éste y el centro de la distribución es mucho mayor que las dimensiones de la propia distribución de corriente.

$$\vec{B}(\vec{r}) \Big|_{\text{Pto lejano}} = \frac{\mu}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}'|^3} \left[\frac{3[\vec{m} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')] (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \vec{m} \right] ; (T)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \Big|_{\text{Pto lejano}} = \frac{\mu}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{m} \times (\vec{r}-\vec{r}')) ; (Wb/m)$$

Recordo: $\vec{r}$ $\equiv$ Vector de posición del punto lejano.

$\vec{r}' \equiv$ " " " del centro de la distribución de corriente.

$\vec{m} \equiv$ Momento dipolar magnético de la distribución de corriente ($A \cdot m^2$)

COMENTARIOS:

- Si la distribución de corriente está situada en el origen de coordenadas, tenemos que $\vec{r}' = \vec{0}$ y las ecuaciones anteriores se escriben:

$$\vec{B}(\vec{r}) \Big|_{\text{Pto lejano}} = \frac{\mu}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right] ; (T)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \Big|_{\text{Pto lejano}} = \frac{\mu}{4\pi r^3} (\vec{m} \times \vec{r}) ; (Wb/m)$$

- Observamos que en puntos lejanos $\vec{B}$ es proporcional a $\frac{1}{r^3}$ y $\vec{A}$ a $\frac{1}{r^2}$:

CONDICIÓN DE REGULARIDAD PARA $\vec{B}$ y $\vec{A}$: $\lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{B}| \cdot r^3 = \text{cte} \quad \Bigg| \quad \lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{A}| \cdot r^2 = \text{cte}$

4.2.- Fuerza y energía de interacción entre un dipolo y un campo $\vec{B}$.

La energía de origen magnético que tiene una distribución de corriente, por estar en el seno de un campo $\vec{B}$ es:

$$\boxed{W_H = - \vec{m} \cdot \vec{B}} ; \text{ (Julios) "Energía de interacción"}$$

La fuerza que actúa sobre dicha distribución es:

$$\boxed{\vec{F} = \nabla W_H} ; \text{ (Newtons) "Fuerza de interacción"}$$

NOTA: El campo $\vec{B}$ de estas fórmulas NO es el que crea el dipolo magnético, sino un campo externo a él.

5.- ENERGÍA MAGNETOSTÁTICA O MAGNÉTICA:

$$\boxed{W_H = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, dV = \frac{1}{2} \iiint_V \mu H^2 \, dV} , \text{ (Julios)}$$

COMENTARIO: Las siguientes fórmulas apenas se utilizan.

$$W_H = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \vec{A} \cdot \vec{J}_v' \, dV'$$

$$W_H = \frac{1}{2} \iint_{S'} \vec{A} \cdot \vec{J}_s' \, ds'$$

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{L'} \vec{A} \cdot I \cdot d\vec{l}'$$

↳ Este diferencial
determina el sentido
de I .

6.- FUERZAS Y PARES:

La fuerza que actúa sobre una distribución de corriente situada en el seno de un campo $\vec{B}$ (externo a ella) es:

$$\vec{F} = \iiint_V (\vec{J}_V \times \vec{B}) dV ; (N) \rightarrow \text{para distribuciones volumétricas.}$$

$$\vec{F} = \iint_S (\vec{J}_S \times \vec{B}) dS ; (N) \rightarrow \text{" " " " superficies.}$$

$$\boxed{\vec{F} = I \cdot \int_L d\vec{\ell} \times \vec{B}} ; (N) \rightarrow \text{para corrientes filiformes.}$$

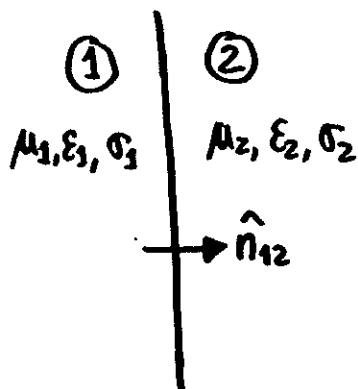
Aquí el $d\vec{\ell}$ lleva el sentido de la corriente I .

NOTA: El momento o TORQUE asociado a una distribución de corriente en el seno de un campo $\vec{B}$ es:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} ; (N \cdot m)$$

7.- CONDICIONES DE CONTORNO:

Tenemos el siguiente esquema:



En este tema aparece una nueva condición de contorno para la densidad de corriente $\vec{J}$ (A/m²) que aparece en los conductores:

$$\boxed{\hat{n}_{12} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \Big|_S = 0} \quad \text{ó} \quad \boxed{J_{2n} \Big|_S = J_{1n} \Big|_S}$$

COMENTARIO IMPORTANTE: Las otras 4 condiciones de contorno siguen siendo válidas, y como $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D}$ podemos escribir: $\rightarrow$



$$* \hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_S = \vec{0} \Rightarrow E_{2\text{tang}} \Big|_S = E_{1\text{tang}} \Big|_S \Rightarrow \boxed{\frac{J_{2\text{tang}}}{\sigma_2} \Big|_S = \frac{J_{1\text{tang}}}{\sigma_1} \Big|_S}$$

$\text{Si } \sigma_1 = \infty \text{ o } \sigma_2 = \infty$

$$* \oint_S \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_S \Rightarrow \oint_S D_{2n} \Big|_S - D_{1n} \Big|_S \Rightarrow \oint_S \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_{2n} \Big|_S - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} J_{1n} \Big|_S \right) \Rightarrow$$

$$\downarrow J_{1n} = J_{2n} = J_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_S \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) J_n \Big|_S}$$

8.- VECTOR DE POYNTING:

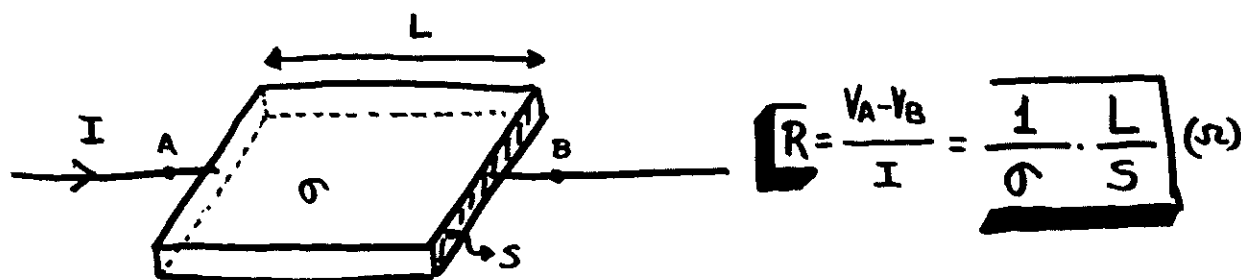
$$\boxed{\vec{\Phi} = \vec{E} \times \vec{H}} \quad (W/m^2)$$

Marca la densidad de potencia (W/m^2) asociada al campo electromagnético.

[El flujo del vector de Poynting nos da la potencia: $\iint_S \vec{\Phi} \cdot d\vec{S}; (W)$]

9.- RESISTENCIA: $(R = \frac{V}{I})$; (Ω)

9.1.- RESISTENCIA ASOCIADA A UN CONDUCTOR RECTANGULAR:



NOTA: * ASOCIACIÓN SERIE:

$$\begin{array}{c} \text{---} R_1 \text{---} \text{---} R_2 \text{---} \dots \text{---} R_n \text{---} \end{array} \quad \times \quad \text{---} R_{\text{TOT serie}} \text{---} = \sum_{i=1}^n R_i$$

* ASOCIACIÓN PARALELO:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ \text{---} \\ R_2 \\ \text{---} \\ R_n \end{array} \quad \times \quad \text{---} R_{\text{TOT II}} \text{---} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_i} \right)}$$

9.2.- POTENCIA Y DENSIDAD DE POTENCIA DISIPADA EN UNA RESISTENCIA:

$$P_{\text{dis}} = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV = \iiint_V \sigma \cdot E^2 \, dV = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R} ; \text{ (W) POTENCIA DISIPADA}$$

$$W_{\text{dis}} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot E^2 ; \text{ (W/m}^3\text{) DENSIDAD DE POTENCIA DISIPADA.}$$

9.3.- DUALIDAD CAPACIDAD - RESISTENCIA. (También llamada dualidad capacidad - conductancia.)

$$\boxed{R \cdot C = \frac{\epsilon}{\sigma}} \text{ (segundos)}$$

NOTA IMPORTANTE: Para aplicar dualidad ϵ y σ deben ser constantes o variar de la misma forma.

10.- CÁLCULO DE LOS CAMPOS MAGNÉTICOS MÁS "IMPORTANTES".

10.1.- HILO INDEFINIDO.

10.2.- CABLE COAXIAL. (VER COMENTARIOS)

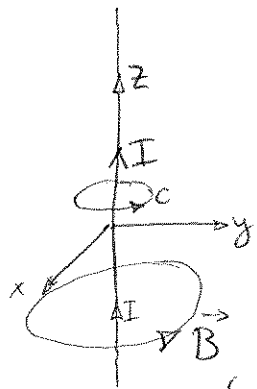
10.3.- ESPIRA CIRCULAR.

10.4.- SOLENOIDE INDEFINIDO. (VER NOTA)

10.5.- HOJA INDEFINIDA.

10.6.- TOROIDE.

10.1 Hilo indefinido.



Aplicamos Ampere: $\oint_c \vec{B} d\vec{l} = \mu I_{enlazada}$

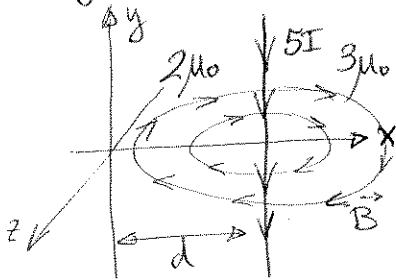
$$* \oint_c \vec{B} d\vec{l} = \left\{ \begin{array}{l} \text{por simetría} \\ \text{y regla mano der.} \end{array} \right. = \oint_c B(\rho) \hat{\varphi} d\vec{l} = \oint_c B(\rho) \hat{\varphi} dl \hat{\varphi} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} B(\rho) = \text{cte} \\ \text{en curva } c \end{array} \right\} = B(\rho) \oint_c dl = B(\rho) \cdot 2\pi\rho$$

$$* \mu \cdot I_{enlazada} = \mu \cdot I$$

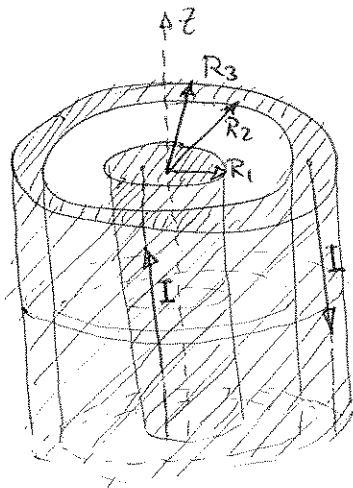
$$B(\rho) = \frac{\mu I}{2\pi\rho} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi\rho} \hat{\varphi} \text{ (T)}}$$

Ej: $\vec{B}(0,7,0)$??



$$\vec{B}(0,7,0) = \frac{2\mu_0 5I}{2\pi d} (-\hat{z}) \text{ (T)}$$

10.2 Cable coaxial



Aplicamos Ampere: $\oint_c \vec{B} d\vec{l} = \mu I_{enlazada}$

$$* \oint_c \vec{B} d\vec{l} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = B(\rho) \hat{\varphi} \\ d\vec{l} = dl \hat{\varphi} \end{array} \right\} = \oint_c B(\rho) \hat{\varphi} dl \hat{\varphi} = B(\rho) 2\pi\rho$$

$$* \text{Si } \rho < R_1: \mu \cdot I_{enl} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \pi R_1^2 \\ x \rightarrow \pi \rho^2 \end{array} \right\} = \mu I \frac{\pi \rho^2}{\pi R_1^2} = \mu I \frac{\rho^2}{R_1^2}$$

$$\boxed{B(\rho < R_1) = \frac{\mu I \rho}{2\pi R_1^2} \hat{\varphi} \text{ (T)}}$$

* si $R_1 < \rho < R_2$:

$$\mu \cdot I_{enl} = \mu \cdot I \Rightarrow \vec{B}(R_1 < \rho < R_2) = \frac{\mu I}{2\pi\rho} \hat{\varphi}$$

* si $R_2 < \rho < R_3$:

$$\mu \cdot I_{enl} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \pi R_3^2 - \pi R_2^2 \\ x \rightarrow \pi \rho^2 - \pi R_2^2 \end{array} \right\} = \mu \left(I - I \frac{\pi \rho^2 - \pi R_2^2}{\pi R_3^2 - \pi R_2^2} \right) = \mu I \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$\boxed{\vec{B}(R_2 < \rho < R_3) = \frac{\mu I (R_3^2 - \rho^2)}{2\pi \rho (R_3^2 - R_2^2)} \hat{\phi}} \quad (T)$$

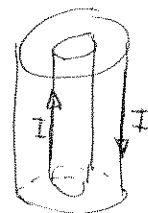
* si $\rho > R_3$:

$$\mu \cdot I_{enl} = \mu (I - I) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}(\rho > R_3) = \vec{0}}$$

$$\mu \cdot I_{enl} = \begin{cases} \mu I \frac{\rho^2}{R_1^2} & \text{si } \rho < R_1 \\ \mu I & \text{si } R_1 < \rho < R_2 \\ \mu \left(I - I \frac{\rho^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) & \text{si } R_2 < \rho < R_3 \\ 0 & \text{si } \rho > R_3 \end{cases}$$

$$\vec{B}_{\text{coaxial macizo}} = \begin{cases} \frac{\mu I \rho}{2\pi R_1^2} \hat{\phi} & \text{si } \rho < R_1 \\ \frac{\mu I}{2\pi \rho} \hat{\phi} & \text{si } R_1 < \rho < R_2 \\ \frac{\mu I (R_3^2 - \rho^2)}{2\pi \rho (R_3^2 - R_2^2)} \hat{\phi} & \text{si } R_2 < \rho < R_3 \\ \vec{0} & \text{si } \rho > R_3 \end{cases}$$

$$\vec{B}_{\text{coaxial hueco}} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \rho < R_1 \\ \frac{\mu I}{2\pi \rho} \hat{\phi} & \text{si } R_1 < \rho < R_2 \\ \vec{0} & \text{si } \rho > R_2 \end{cases}$$



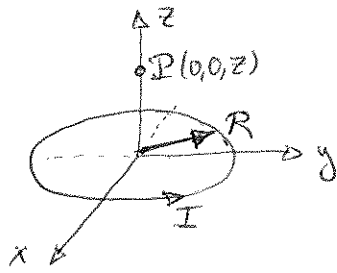
→ Los conductores perfectos ($\sigma \rightarrow \infty$) sólo llevan corriente por su superficie, y $\vec{B} = 0$ en su interior

$$B_{\text{coaxial macizo con } \sigma \rightarrow \infty} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \rho < R_1 \\ \frac{\mu I}{2\pi \rho} \hat{\phi} & \text{si } R_1 < \rho < R_2 \\ \vec{0} & \text{si } R_2 < \rho < R_3 \\ \vec{0} & \text{si } \rho > R_3 \end{cases}$$

10.3 Espira circular

Es el único de los 6 campos que se hace por Biot-Savart

Aplicamos Biot-Savart:

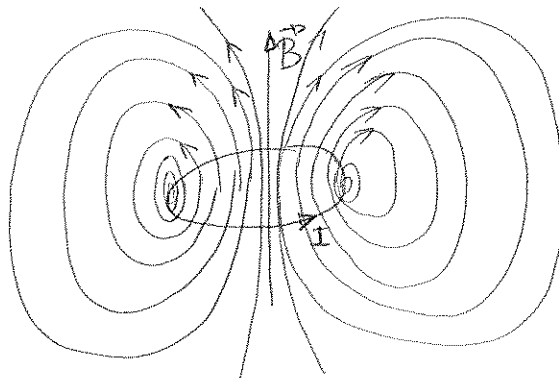


$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{L'} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = z \hat{z} \\ \vec{r}' = R \hat{\rho}' \\ d\vec{l}' = R d\psi' \hat{\phi}' \\ \vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - R \hat{\rho}' \\ |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (z^2 + R^2)^{3/2} \end{array} \right\} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\psi'=0}^{\psi'=2\pi} \frac{R z \hat{\phi}' d\psi' + R^2 \hat{z} d\psi'}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

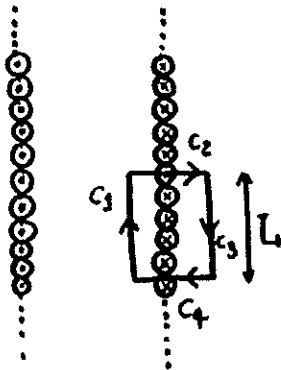
$$= \left\{ \hat{\rho}' = \cos \psi' \hat{x} + \sin \psi' \hat{y} \right\} = \frac{\mu I}{z} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (T)$$

El resto de líneas de $\vec{B}$ de la espira son:



10.4.- SOLENOIDE INDEFINIDO

DEFINICIÓN: Un solenoide es un arrollamiento de corrientes filiformes sobre superficie de revolución.



DATOS: El solenoide tiene \$N\$ espiras por unidad de longitud, todas ellas recorridas por una corriente \$I\$.

SOLUCIÓN:

Aplicamos Ampere sobre la curva de la figura: $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enclaz}$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{C_3} \vec{H} \cdot d\vec{l}_3 + \int_{C_4} \vec{H} \cdot d\vec{l}_4 = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Como el solenoide es indefinido:} \\ \vec{H} = \begin{cases} H \cdot \hat{z} & \text{en el interior} \\ \vec{0} & \text{en el exterior} \end{cases} \end{array} \right\} = \int_{C_1} H \cdot \hat{z} \cdot d\vec{l}_1 \cdot \hat{z} + 0 + 0 + 0 = \boxed{H \cdot L} \end{aligned}$$

$$I_{enclaz} = \boxed{N \cdot L \cdot I}$$

Por tanto: $H = N \cdot I \Rightarrow \boxed{\vec{H}_{solenoides}} = \begin{cases} NI \cdot \hat{z} & \text{en el interior.} \\ \vec{0} & \text{en el exterior.} \end{cases} \quad (A/m)$

COMENTARIOS:

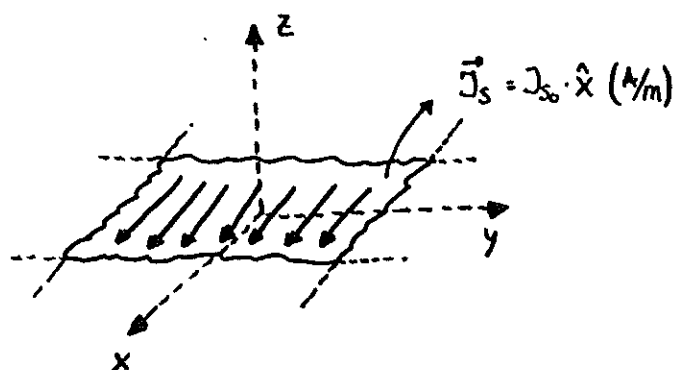
$$\vec{B}_{solenoides} = \begin{cases} \mu NI \hat{z} & \text{int} \\ \vec{0} & \text{ext} \end{cases} \quad (T)$$

Si el solenoide no es indefinido:

→ nos dan la longitud total y el número de espiras:

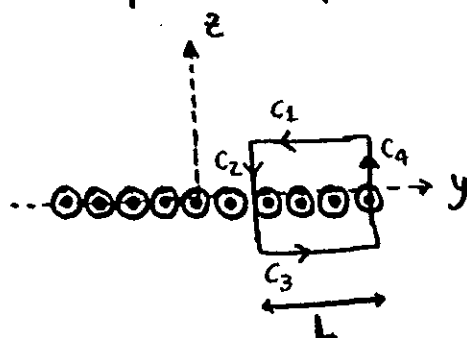
$$\vec{B}_{int} = \mu \frac{N_{TOT}}{L_{TOT}} I \hat{u}_{eje}$$

10.5.- HOJA INDEFINIDA.



SOLUCIÓN:

Aplicamos Ampere sobre la curva de la figura:



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc} z$$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{C_3} \vec{H} \cdot d\vec{l}_3 + \int_{C_4} \vec{H} \cdot d\vec{l}_4 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como la hoja es indefinida} \\ \text{y por la regla de la} \\ \text{mano derecha:} \\ \vec{H} = \begin{cases} H(-\hat{y}) & \text{si } z > 0 \\ H(\hat{y}) & \text{si } z < 0 \end{cases} \end{array} \right\} = \\ &= \int_{C_1} H(-\hat{y}) \cdot d\vec{l}_1(-\hat{y}) + 0 + \int_{C_3} H(\hat{y}) \cdot d\vec{l}_3(\hat{y}) + 0 = H \cdot L + H \cdot L = \boxed{2H \cdot L} \end{aligned}$$

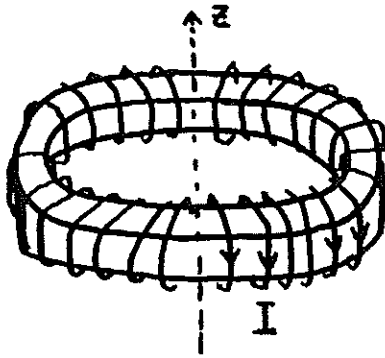
$$\cdot I_{enc} z = \boxed{J_{s0} \cdot L}$$

$$\text{Por tanto: } H = \frac{J_{s0}}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{H}_{\text{HOJA INDEFINIDA}}} = \begin{cases} \frac{J_{s0}}{2} (-\hat{y}) & \text{si } z > 0 \\ \frac{J_{s0}}{2} \hat{y} & \text{si } z < 0 \end{cases} \text{ A/m}$$

COMENTARIOS:

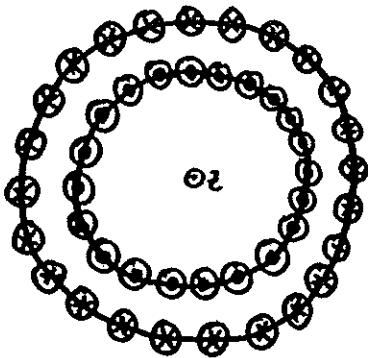
$$\vec{B}_{\text{Hoja indef}} = \begin{cases} \frac{\mu J_{s0}}{2} (-\hat{y}) & \text{si } z > 0 \\ \frac{\mu J_{s0}}{2} (\hat{y}) & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

10.6.- TOROIDE:



DATOS: El toroide tiene N espiras, todas ellas recorridas por una corriente I .
El radio interior es a y el exterior b .

SOLUCIÓN:



Aplicamos Ampere sobre una curva de radio ρ centrada en el eje z , recorrida en sentido antihorario:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc} z$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Por simetría y por la regla} \\ \text{de la mano derecha.} \\ \vec{H} = H(\rho) \cdot \hat{\varphi} \\ d\vec{l} = dl \cdot \hat{\varphi} \end{array} \right\} = \oint_C H(\rho) \cdot \hat{\varphi} \cdot dl \cdot \hat{\varphi} = \left\{ \begin{array}{l} H(\rho) \text{ es cte} \\ \text{en la curva} \\ c \end{array} \right\} =$$

$$= H(\rho) \cdot \oint_C dl = \underline{H(\rho) \cdot 2\pi\rho}$$

$$I_{enc} z = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < a \\ NI & \text{si } a < \rho < b \\ NI - NI = 0 & \text{si } \rho > b \end{cases}$$

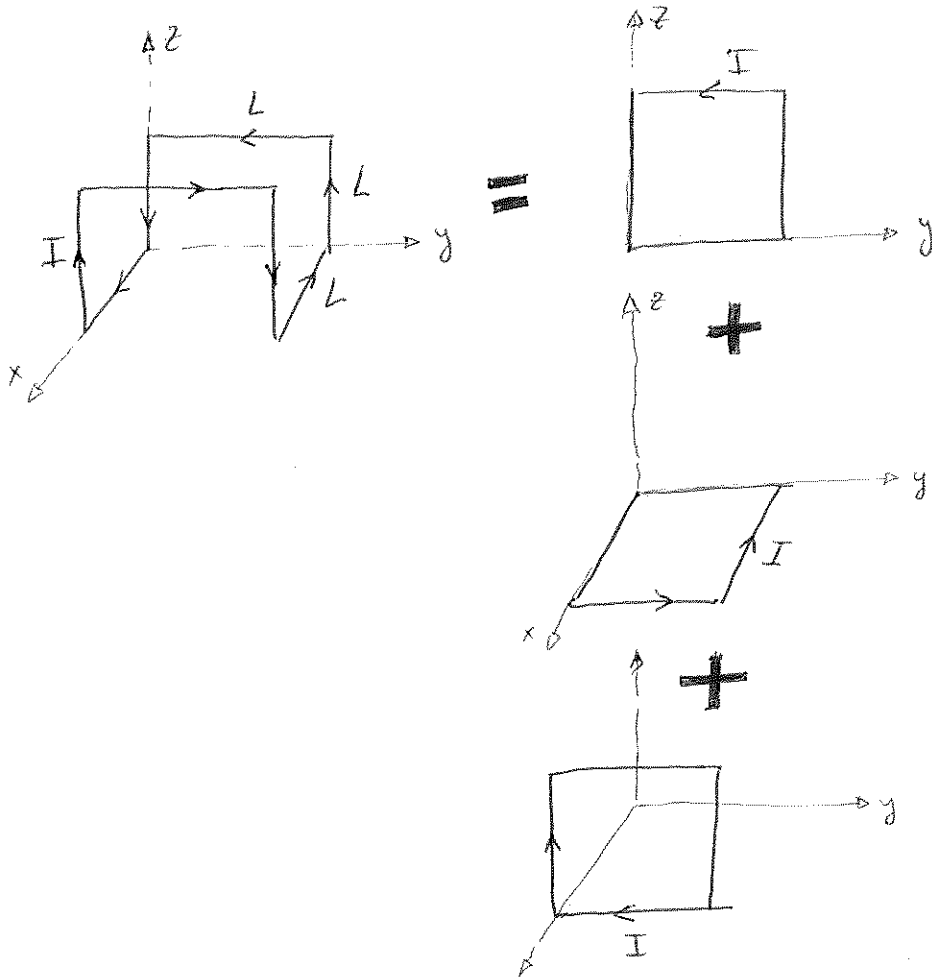
Por tanto: $H(\rho) = \frac{I_{enc} z}{2\pi\rho} \Rightarrow \boxed{\vec{H}_{\text{TOROIDE}}} = \begin{cases} \frac{NI}{2\pi\rho} \cdot \hat{\varphi} & \text{si } a < \rho < b \\ \vec{0} & \text{en el resto} \end{cases} \quad (\text{A/m})$

$$\vec{B}_{\text{toroide}} = \begin{cases} \frac{\mu NI}{2\pi\rho} \hat{\varphi} & \text{si } a < \rho < b \quad (\text{T}) \\ \vec{0} & \text{resto} \end{cases}$$

COMENTARIOS:

Momento dipolar magnético ($\vec{m}$)

$$\vec{m} = I \cdot \text{Area} \cdot \hat{n}$$



$$\vec{m}_{\text{tot}} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3 = I L^2 [\hat{x} + \hat{z} - \hat{x}] = I L^2 \hat{z} \text{ (A}\cdot\text{m}^2\text{)}$$



ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

EXAMEN Final- 3 de Febrero de 2003

I.29

Apellidos:

Nombre:

PROBLEMA 1

- a) Obtenga razonadamente las fuentes que generan el siguiente campo electrostático, definido en un medio de constante dieléctrica ϵ (compruebe la presencia de todo tipo de fuentes) (4p).

$$E(r) = \begin{cases} 0 & ; 0 < \rho < a \\ \frac{K_1}{\rho} & ; a < \rho < b \\ 0 & ; b < \rho \end{cases}$$

- b) Calcule razonadamente la carga total (1p).

- c) Obtenga razonadamente las fuentes que generan el siguiente campo magnetostático, definido en un medio de permeabilidad magnética μ (compruebe la presencia de todo tipo de fuentes) (3p).

$$H(r) = \begin{cases} K_2 \rho \hat{\phi} & ; 0 < \rho < a \\ \frac{K_3}{\rho} \hat{\phi} & ; a < \rho < b \\ 0 & ; b < \rho \end{cases} \quad K_3 = K_2 a^2$$

- d) Calcule razonadamente la corriente encerrada en $a < \rho < b$ (2p).

SOLUCIÓN:

$$a) \quad \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \rho < a \\ \frac{\epsilon K_1}{\rho} \hat{\rho} & \text{si } a < \rho < b \quad (C/m^2) \\ \vec{0} & \text{si } \rho > b \end{cases}$$

VOLUMÉTRICAS: $\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\rho \hat{\rho}) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot \rho) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) = 0 \quad C/m^3 \quad \forall \rho$

SUPERFICIALES: $\rho_s = \hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)|_s$

$$\rho_s(\rho=a) = \hat{\rho} \cdot (\vec{D}(\rho=a^+) - \vec{D}(\rho=a^-)) = \frac{\epsilon K_1}{a} \quad C/m^2$$

$$\rho_s(\rho=b) = \hat{\rho} \cdot (\vec{D}(\rho=b^+) - \vec{D}(\rho=b^-)) = -\frac{\epsilon K_1}{b} \quad C/m^2$$

LÍNEALES Y PUNTALES NO HAY PORQUE NO HAY LÍNEAS NI PUNTOS DONDE $\vec{E}$ TIENDA A INFINITO.

$$b) \quad Q_{TOT} = \iint_s \rho_s(\rho=a) ds + \iint_s \rho_s(\rho=b) ds = \left(\frac{\epsilon K_1}{a}\right) 2\pi a \cdot \ell + \left(-\frac{\epsilon K_1}{b}\right) 2\pi b \cdot \ell = 0 \quad (C)$$

NOTA: También llegamos a esta solución si calculamos la carga total por Gauss; para ello aplicamos Gauss sobre un cilindro de radio $\rho \gg \rho > b$ y altura ℓ :

$$Q_{TOT} = Q_{encerrada} = \iint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint_{s_{lat}} \vec{D} \cdot d\vec{s}_{lat} \hat{\rho} + \iint_{s_{ts}} \vec{D} \cdot d\vec{s}_{ts} \hat{z} + \iint_{s_{ti}} \vec{D} \cdot d\vec{s}_{ti} (-\hat{z}) = 0 \quad (C)$$

Ya que $\vec{D}$ en la superficie lateral es $\vec{0}$ por estar la superficie lateral en $\rho > b$, y $\vec{D}$ es $\perp$ a los $d\vec{s}$ de las tapas.

g)
$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} k_2 \rho \hat{\varphi} & \rho < a \\ \frac{k_3}{\rho} \hat{\varphi} & a < \rho < b \\ \vec{0} & \rho > b \end{cases} \text{ (A/m)}$$

$k_3 = k_2 a^2$

Volumétricas: Sabemos que:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

como en magnetostática No hay variación temporal: $\frac{d\vec{D}}{dt} = 0$

$$\vec{J}_v = \nabla \times \vec{H} = \nabla \times (H_\varphi(\rho) \hat{\varphi}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) \hat{z}$$

$$\vec{J}_v = \begin{cases} 2k_2 \hat{z}, & \rho < a \\ \vec{0} & \rho > a \end{cases} \text{ (A/m}^2\text{)}$$

Superficiales: $\vec{J}_s = \hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)|_s$

$$\vec{J}_s(\rho = a) = \hat{\rho} \times (H(\rho = a^+) - H(\rho = a^-)) = \hat{\rho} \times \left(\frac{k_3}{a} \hat{\varphi} - k_2 a \hat{\varphi} \right) = \vec{0}$$

$$\vec{J}_s(\rho = b) = \hat{\rho} \times (H(\rho = b^+) - H(\rho = b^-)) = \hat{\rho} \times \left(\vec{0} - \frac{k_3}{b} \hat{\varphi} \right) = -\frac{k_3}{b} \hat{z} = -\frac{k_2 a^2}{b} \hat{z} \text{ (A/m)}$$

Lineales: no existen ya que no hay líneas donde $\vec{H} \rightarrow \infty$

Notar: si $\vec{H}$ fuese: $\begin{cases} \frac{k_3}{\rho} \hat{\varphi} & \rho < a \\ \vec{0} & \rho > a \end{cases}$ puede existir una I en $\rho = 0$

1ª forma

si existiera una I en $\rho = 0$ crearía el siguiente campo:

$$\vec{H}_{\text{hilo}} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\varphi} \text{ (A/m)} \text{ identificando este campo con}$$

el que tiende a ∞ en $\rho = 0$ obtenemos:

$$\frac{k_3}{\rho} \hat{\varphi} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\varphi} \Rightarrow I = 2\pi k_3 \text{ (A)}$$

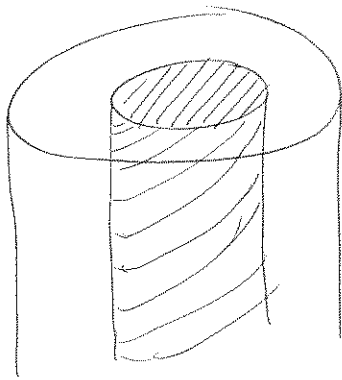
2ª forma

aplicamos Ampere sobre una curva de radio ρ y $\lim_{\rho \rightarrow 0}$

$$I_{\text{enlazada}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_c \vec{H} d\vec{\ell} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{k_3}{\rho} \hat{\varphi} \rho d\varphi \hat{\varphi} = 2\pi k_3 \text{ (A)}$$

$\varphi = 0$

d) Debemos calcular la corriente enlazada por una curva de radio $a < \rho < b$



$$\vec{B}_{\text{coaxial semi macizo}} = \begin{cases} \frac{\mu I \rho}{2\pi R_1^2} \hat{\varphi}, & \rho < R_1 \approx k_2 \rho \hat{\varphi} \\ \frac{\mu I}{2\pi \rho} \hat{\varphi}, & R_1 < \rho < R_2 \approx \frac{k_3}{\rho} \\ \vec{0}, & \rho > R_2 \end{cases}$$

$$I_{\text{enlazada}} (a < \rho < b) = \oint_C \vec{H}(a < \rho < b) d\vec{\ell} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{k_3}{\rho} \hat{\varphi} \rho d\varphi \hat{\varphi} = 2\pi k_3 \text{ (A)}$$

Observamos que la corriente enlazada entre a y b es la debida a la $\vec{J}_V = 2k_2 \hat{z}$ en la región $\rho < a$

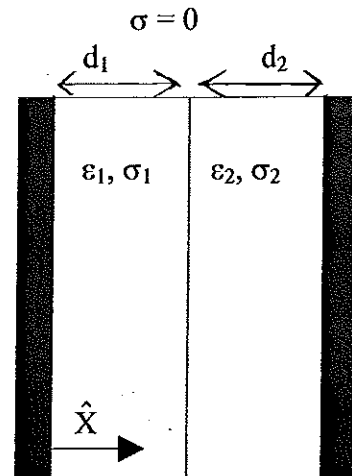
$$I = \iint_S \vec{J}_S d\vec{S} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a 2k_2 \hat{z} \cdot \hat{z} \cdot \rho d\rho d\varphi = 2k_2 \frac{a^2}{2} 2\pi = 2\pi k_2 a^2 \text{ (A)}$$

CAMPOS ESTACIONARIOS

II-1 La figura representa una resistencia constituida por un sistema con electrodos de placas planas paralelas de superficie S y conductividad mucho mayor que la de los materiales de la resistencia ($\sigma_e \gg \sigma_1, \sigma_2$).

Suponiendo que el medio 2 es homogéneo y que la conductividad del medio 1 varia como: $\sigma_1 = \sigma_0(1+x)^2$, calcule :

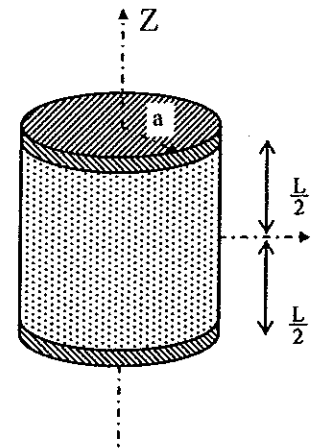
- El valor de la corriente estacionaria que circula entre los electrodos al conectarlos a una batería de V voltios.
- El valor de la resistencia.
- El valor de todas las densidades de carga que se generan en dicho sistema al conectar la batería.



Septiembre-98

II-2 La figura muestra una resistencia formada por un cilindro conductor real situado entre dos discos del mismo radio que hacen la función de electrodos. La conductividad del conductor central es $\sigma = \sigma_0 e^{-(\rho/a)^2}$ mho/m en el sistema de coordenadas de la figura. Los discos pueden considerarse como conductores perfectos. El electrodo superior se conecta a $V_0/2$ voltios y el otro a $-V_0/2$. Suponiendo que en el conductor real la corriente circula paralela a su eje y el potencial depende sólo de la coordenada z , se pide:

- La expresión del potencial en el conductor real.
- La expresión del campo eléctrico en el conductor real.
- La expresión de la densidad de corriente en el conductor real.
- La corriente que circula por la resistencia.
- La resistencia del conjunto.
- La densidad de potencia disipada por unidad de volumen en el conductor real.



Febrero-00

II-3 Dos placas metálicas (de conductor perfecto) de espesor despreciable se extienden en las superficies $r = a, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ y $r = c, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ (siendo $a < c$) con potenciales de V_0 y 0 voltios respectivamente. Despreciando efectos de bordes:

- Calcule el potencial entre placas.
- Obtenga las densidades superficiales de carga en ambos conductores.
- Calcule la capacidad.
- Si se introduce un material con (ϵ_1, σ_1) en la región $a < r < b, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ y otro con (ϵ_2, σ_2) en la región $b \leq r < c, 0 \leq \theta < \theta_0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ (siendo $a < b < c$), obtenga el nuevo valor de la capacidad si $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.
- Calcule la resistencia cuando $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq 0$.

(Continúa)

II-3 Continuación:

Notas: en esféricas: $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\phi}$,

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

Diciembre-01

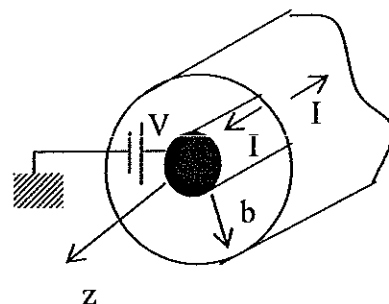
II-4 Un cable coaxial tiene un conductor interior cilíndrico de radio a y uno exterior de radio b y espesor despreciable como ese indica en la figura. Entre ambos hay un dieléctrico de permitividad ϵ y permeabilidad μ_0 , el conductor exterior está a masa, el interior a potencial V voltios y circula una corriente de I amperios en sentidos contrarios en cada conductor y distribuida uniformemente en cada uno de ellos.

a) Si los conductores son eléctricos perfectos calcule $\vec{E}$ y $\vec{H}$ en la región entre conductores $a < \rho < b$.

b) Calcule el vector de Poynting y su flujo a través del plano $z = 0$ en la región $a < \rho < b$.

c) Calcule la densidad superficial de carga en el conductor interior.

d) Obtenga la capacidad por unidad de longitud del cable.



e) Si la región $h < z < h+L$, $a < \rho < b$, $0 < \varphi < \alpha$ se rellena con un material de conductividad σ calcule el valor de su resistencia.

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\phi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

Febrero-02

II-5 Un material de conductividad σ y permitividad ϵ_0 ocupa el volumen delimitado por $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ y $0 \leq \theta < \theta_0$ cuya sección transversal se muestra en la figura. Los casquetes esféricos correspondientes a $r = a$ y $r = b$ se metalizan con un material conductor eléctrico perfecto y se conectan a una batería con fem de V voltios como se indica en la figura.

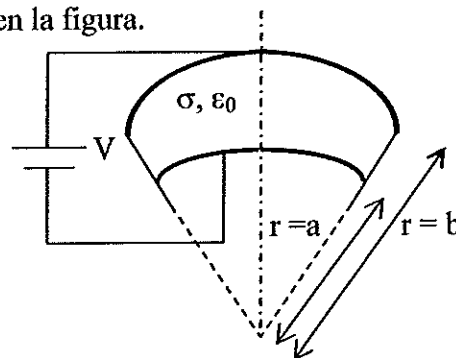
a) Calcule la densidad de corriente que se genera.

b) Basándose en el resultado anterior calcule la corriente total que circula y el valor de la resistencia.

c) Determine si se producen acumulaciones de carga y los valores de sus densidades.

d) Calcule la potencia disipada

e) Indique donde es mayor la densidad de potencia disipada y cual es su valor



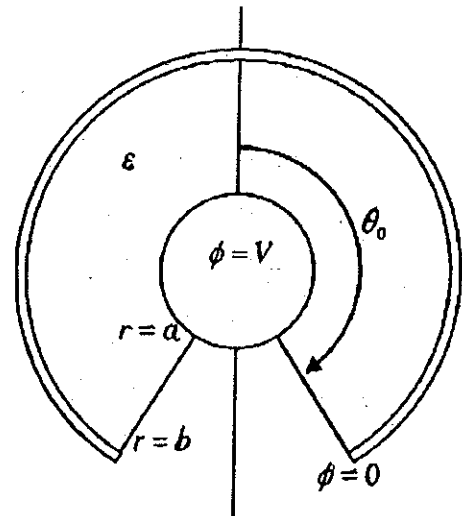
$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{\phi} \quad \Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

Febrero-03

Telecomunicación De Grado
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

II-6

Dos electrodos metálicos esféricos concéntricos de radios a y b están situados como indica la figura separados por un dieléctrico de permitividad ϵ Faradios/m. Si el conductor exterior, al que le falta un casquete, está a 0 V y el interior a V voltios:

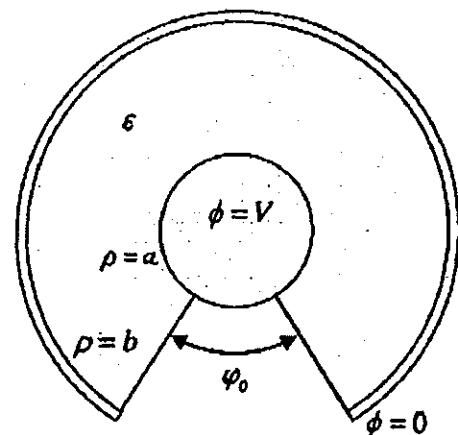


- Calcule el potencial en la región intermedia entre electrodos suponiendo despreciable el efecto de bordes. (2p)
- Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (2 p)
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (2p)
- Calcule la capacidad entre electrodos. (1p)
- Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce?. ¿Cuánto vale la corriente total? (2p)
- ¿Cuánto vale la resistencia entre electrodos? Compruebe su solución obteniéndola por un método diferente al que haya utilizado. (1p)

Febrero-06

II-7

Dos electrodos metálicos cilíndricos coaxiales, de radios a y b y longitud L , están separados por un dieléctrico de permitividad ϵ Faradios/m como indica la sección transversal de la figura. Si el conductor exterior está a 0 V y el interior a V voltios:



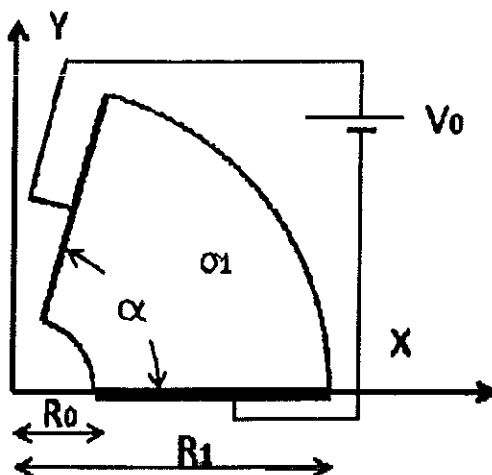
- Calcule el potencial en la región entre electrodos suponiendo despreciable el efecto de bordes. (2p)
- Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (2 p)
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (1p)
- Calcule la capacidad entre electrodos y la energía electrostática. (2p)
- Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce?. ¿Cuánto vale la corriente total? (2p)
- ¿Cuánto vale la resistencia entre electrodos? Compruebe su solución obteniéndola por un método diferente al que haya utilizado. (1p)

Septiembre-06

Telecomunicación De Grado
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

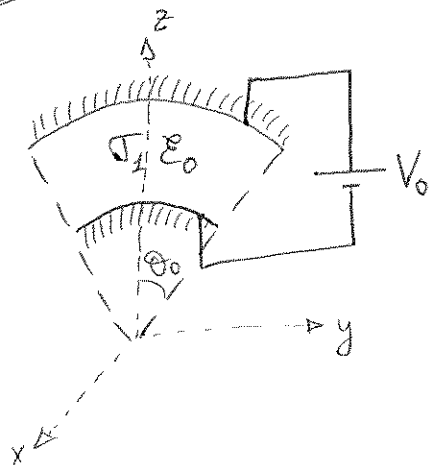
II-8 La figura representa la sección transversal (corte por plano $Z=\text{cte}$) de una resistencia de lado L en Z , con $\sigma_1 = \sigma_0 [1 + (\varphi/\alpha)]$, inmersa en un medio de constante dieléctrica ϵ_0 . Las superficies de la resistencia situadas en los semiplanos $\varphi = 0$ y $\varphi = \alpha$ se recubren de conductor eléctrico perfecto y se conectan a masa y a un generador a V_0 respectivamente. Se pide:

- Plantear las ecuaciones que resuelven el potencial en la región de material σ_1 .
- Plantear las condiciones de contorno en todas las fronteras del problema.
- Calcular el potencial, el campo eléctrico y la densidad volumétrica de corriente en todos los puntos de la estructura.
- Calcular las densidades superficiales de carga en las superficies del problema.
- Calcular la corriente que fluye por la estructura.
- Calcular la resistencia de la estructura.
- Calcular la densidad volumétrica de carga en la región de material σ_1 .



Febrero-2011

II-5



$$V_0 \rightarrow \phi \rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{J} \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow \frac{V_0}{I}$$

a) Sabemos por la ec. continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{d\rho_v}{dt} = 0 \quad (\text{como } \frac{d\rho_v}{dt} = 0) \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 = \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{E}) = \nabla \cdot (-\sigma \nabla \phi) =$$

$$= -\sigma \nabla \cdot (\nabla \phi) = -\sigma \Delta \phi$$

$$0 = \Delta \phi = \left\{ \begin{array}{l} \text{despreciando} \\ \text{ef. bordes} \end{array} \right\} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

$$\phi = \phi(r)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{-\sigma A}{r^2} \hat{r} \quad \left(\frac{A}{m^2} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} \Rightarrow \phi = \frac{-A}{r} + B \quad a < r < b \quad (V) \\ \vec{E} = -\nabla \phi = \frac{-\partial \phi}{\partial r} \hat{r} = \frac{-A}{r^2} \hat{r} \quad a < r < b \quad (V/m) \end{array} \right.$$

Sabemos que: $\phi(r=b) - \phi(r=a) = V_0 = \frac{A}{a} - \frac{A}{b} \Rightarrow A = \frac{V_0 b a}{b-a}$

$$\vec{J} = \frac{\sigma V_0 b a}{(b-a) r^2} (-\hat{r}) \quad \left(\frac{A}{m} \right) \quad a < r < b$$

b) $I = \iint_S \vec{J}_r d\vec{S} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{\sigma V_0 b a}{(b-a) r^2} (-\hat{r}) (\hat{r}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi =$

$$= \frac{\sigma V_0 b a}{(b-a)} \cdot 2\pi (1 - \cos \theta_0) \quad (A)$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{(b-a)}{\sigma b a 2\pi (1 - \cos \theta_0)} \quad (\Omega)$$

c) $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \frac{-\epsilon_0 A}{r^2} \hat{r} \quad (C/m^2) \quad a < r < b$

Volumétricas: $\rho_v = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon_0}{r^2} \vec{J} \right) = \frac{\epsilon_0}{r^2} \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (C/m^3)$

Superficiales: $\rho_s = \hat{n}_{12} \times (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_S \Rightarrow$

$$\rho_s(r=a) = \hat{r} (D(r=a^+) - D(r=a^-)) = \frac{-\epsilon_0 A}{a^2} \quad (C/m^2)$$

$$\rho_s(r=b) = \hat{r} (D(r=b^+) - D(r=b^-)) = \frac{+\epsilon_0 A}{b^2}$$

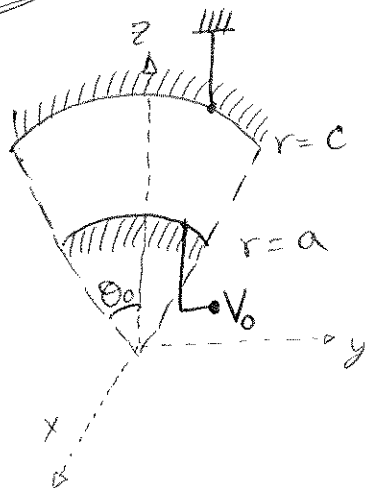
No existen lineales ni puntuales

$$d) P_{dis} = V_0 \cdot I = RI^2 = \frac{V_0^2}{R} \quad (W)$$

$$e) W_{dis} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \sigma \frac{A^2}{r^4} \quad (W/m^3) \quad a < r < b$$

$$W_{dis}^{max} = W_{dis}(r=a) = \frac{\sigma A^2}{a^4} \quad (W/m^3)$$

II.3



a) Como se trata de una región homogénea y libre de cargas (ya que es un condensador) partimos de:

$$0 = \Delta \phi = \dots \quad \phi = \frac{-A}{r} + B \quad (V) \quad a \leq r \leq c$$

sabemos que:

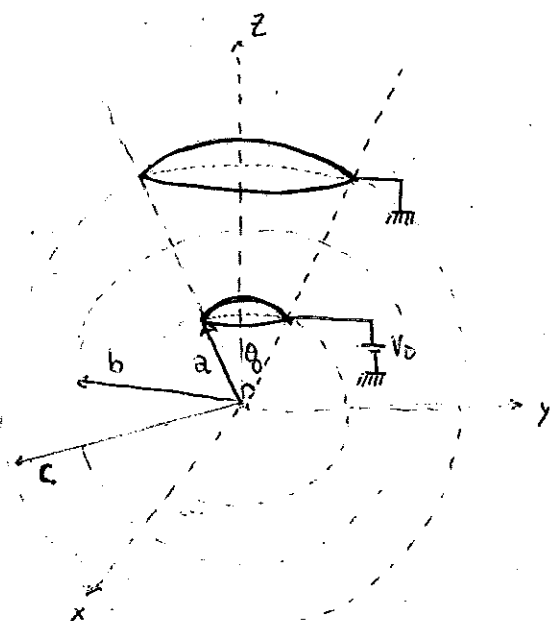
$$\left. \begin{array}{l} \phi(r=a) = V_0 \\ \phi(r=c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi = \frac{V_0 a (c-r)}{(c-a)r} \quad a \leq r \leq c$$

PROBLEMA

II.3

1/2
simplyjared.com

T.E.S.E.:



① ¿ ϕ ?

Medio lineal homogéneo y libre de cargas $\Rightarrow$

$$\Delta\phi = 0$$

Despreciando efecto de bordes: $\phi = \phi(r)$

Operando:

$$\phi = \frac{-A}{r} + B \quad \left. \begin{array}{l} \phi(r=a) = V_0 \\ \phi(r=c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\phi(a < r < c) = \frac{V_0 \cdot a \cdot (c-r)}{(c-a) \cdot r}} \quad \text{Valtios}$$

$$\textcircled{2} \quad \boxed{\rho_s(r=a) = D_{2n}|_{r=a^+} - 0 = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = +\epsilon_0 \frac{V_0 \cdot c \cdot a}{(c-a) a^2} = \frac{\epsilon_0 \cdot V_0 \cdot c}{(c-a) \cdot a} \text{ (C/m}^2\text{)}}$$

$$\boxed{\rho_s(r=c) = 0 - D_{1n}|_{r=c^-} = 0 - \left(-\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=c} \right) = -\epsilon_0 \frac{V_0 \cdot c \cdot a}{(c-a) \cdot c^2} = -\frac{\epsilon_0 \cdot V_0 \cdot a}{(c-a) \cdot c} \text{ (C/m}^2\text{)}}$$

$$\textcircled{3} \quad C = \left| \frac{Q}{V_0} \right|, (F), \quad Q = Q(r=a) = \iint_S \rho_s(r=a) \cdot dS = \rightarrow \iint_S \rho_s(r=a) \cdot r^2 d\Omega = \frac{\epsilon_0 \cdot V_0 \cdot c}{(c-a) \cdot a} \iint_S dS =$$

$$= \frac{\epsilon_0 \cdot V_0 \cdot c}{(c-a) \cdot a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} a^2 \sin\theta d\theta d\phi =$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi(c \cdot a) \cdot \epsilon_0}{(c-a)} (1 - \cos\theta_0)} \text{ (F)} \quad = \frac{2\pi a^2 \cdot \epsilon_0 \cdot V_0 \cdot c}{(c-a) \cdot a} (1 - \cos\theta_0) \Rightarrow$$

Como comprobación se podría hacer $\theta_0 = \pi \Rightarrow$ Condensador esférico
y $\theta_0 = \pi/2 \Rightarrow$ la mitad de un condensador esférico.

④ Ahora el mismo esquema con E_1 desde a hasta b y E_2 desde b hasta c. Se pide C_T .

Suponiendo que $\sigma_{r=b}$ no hay cargas superficiales ($\rho_s(r=b)=0$) el condensador del sistema será:

$$C_T = C_1 \text{ en serie } C_2 = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \text{ , (F)}$$

entonces:

$$C_1 = \frac{2\pi \cdot b \cdot a \cdot \epsilon_1 (1 - \cos \theta_0)}{(b-a)} \text{ , (F)}$$

$$C_2 = \frac{2\pi \cdot c \cdot b \cdot \epsilon_2 (1 - \cos \theta_0)}{(c-b)} \text{ , (F)}$$

y operando:

$$C_T = \frac{2\pi \cdot b^2 \cdot c \cdot \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 (1 - \cos \theta_0)}{(c-b)a \epsilon_1 + (b-a)b \cdot \epsilon_2} \text{ , (F)}$$

⑤

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \Rightarrow R_1 = \frac{\epsilon_1}{C_1 \cdot \sigma_1} = \frac{(b-a)}{2\pi \sigma_1 \cdot b \cdot a (1 - \cos \theta_0)} \text{ , } \Omega$$

$$R_2 = \frac{\epsilon_2}{C_2 \cdot \sigma_2} = \frac{c-b}{2\pi \sigma_2 \cdot c \cdot b \cdot (1 - \cos \theta_0)} \text{ , } \Omega$$

$$R_T = R_{\text{total}} = R_1 \text{ en serie } R_2$$

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2 = \frac{1}{2\pi b (1 - \cos \theta_0)} \left(\frac{b-a}{\sigma_1 \cdot a} + \frac{c-b}{\sigma_2 \cdot c} \right) \text{ , (}\Omega\text{)}$$



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE
MADRID

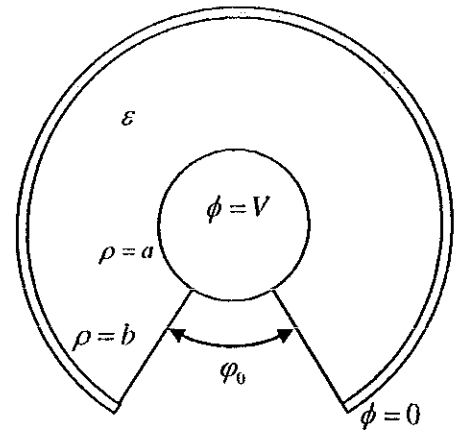
--	--	--	--

DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES
GRUPO DE RADIACIÓN

Apellidos y Nombre:	II.7
---------------------	------

PROBLEMA 2

Dos electrodos metálicos cilíndricos coaxiales, de radios a y b y longitud L , están separados por un dieléctrico de permitividad ϵ Faradios/m como indica la sección transversal de la figura. Si el conductor exterior está a 0 V y el interior a V voltios:



- Calcule el potencial en la región entre electrodos suponiendo despreciable el efecto de bordes. (2p)
- Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (2 p)
- Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (1p)
- Calcule la capacidad entre electrodos y la energía electrostática. (2p)
- Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce?. ¿Cuánto vale la corriente total? (2p)
- ¿Cuánto vale la resistencia entre electrodos? Compruebe su solución obteniéndola por un método diferente al que haya utilizado. (1p)

Solución

a) Si no hay efecto de bordes $\partial\phi/\partial\varphi = 0$, $\partial\phi/\partial z = 0$ y el potencial responde a la ecuación de Laplace

$\Delta\phi = 0$ en la región entre electrodos. Por tanto $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 0$. Integrando $\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = A$ y de nuevo

$\phi = A \ln \rho + B$. Aplicando ahora cc: $\left. \begin{array}{l} \phi = 0 \text{ en } \rho = b \\ \phi = V \text{ en } \rho = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = A \ln b + B \\ V = A \ln a + B \end{array} \right\}$. Resolviendo el sistema se

obtienen $A = \frac{V}{\ln a/b}$ y $B = -\frac{V \ln b}{\ln a/b}$. Finalmente el potencial es $\phi(r) = \frac{V}{\ln a/b} (\ln \rho - \ln b) = \frac{V}{\ln b/a} \ln b/\rho$

b) La intensidad de campo eléctrico será: $\vec{E}(r) = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho} \hat{\rho} = \frac{V}{\ln b/a} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$

c) La densidad superficial de carga se obtiene de la condición de salto de la Inducción Eléctrica:

$$\rho_s = \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)_{\rho=b} = -\hat{\rho} \cdot \epsilon \vec{E}(\rho)_{\rho=b} = -\epsilon \frac{V/b}{\ln b/a}$$

d) La carga será $Q = \iint_S \rho_s dS = \rho_s \int_{\varphi=0}^{2\pi-\varphi_0} \int_{z=0}^L b dz d\varphi = -\frac{\epsilon V}{\ln b/a} (2\pi - \varphi_0) L$ y la capacidad será

$$C = \frac{Q}{\phi(b) - \phi(a)} = \frac{\epsilon(2\pi - \varphi_0)L}{\ln b/a}. \text{ La energía electrostática es: } W_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon(2\pi - \varphi_0)L}{\ln b/a} V^2$$

e) La densidad volumétrica de corriente será $\vec{J}(r) = \sigma \vec{E}(r) = \sigma \frac{V}{\ln b/a} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$. La corriente total será su flujo a

través de uno de los electrodos. Tomando el exterior será

$$I = \iint_{S_e} \vec{J}(r) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_e} \sigma \vec{E}(r) \cdot \hat{\rho} dS = \sigma \frac{V}{\ln b/a} \frac{(2\pi - \varphi_0)bL}{b} = \sigma \frac{V(2\pi - \varphi_0)L}{\ln b/a}$$

f) La resistencia será $R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ln b/a}{(2\pi - \varphi_0)L}$

También podría haberse obtenido aplicando la dualidad entre resistencia y capacidad: $RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$

Por lo que $R = C = \frac{\epsilon}{\sigma C} = \frac{\epsilon}{\sigma \frac{\epsilon(2\pi - \varphi_0)L}{\ln b/a}} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ln b/a}{(2\pi - \varphi_0)L}$

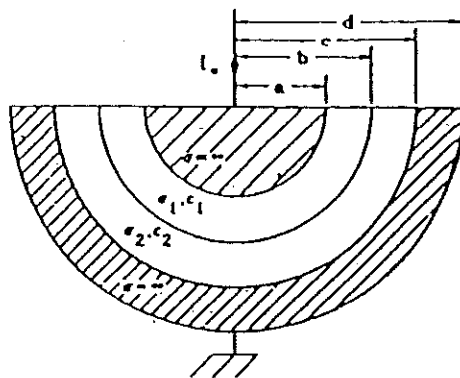
Jun 92

simplyjared.com

La figura muestra un sistema de conductores semiesféricos por el que circula una corriente I_0 .

El conductor interior, $0 \leq r < a$, y el exterior, $c < r < d$, son conductores perfectos ($\sigma = \infty$) y están conectados a través de dos conductores reales cuyas características son:

- El primero (medio 1),
 $a < r < b$: $\sigma = \sigma_1$, $\epsilon = \epsilon_1$.
- El segundo (medio 2),
 $b < r < c$: $\sigma = \sigma_2$, $\epsilon = \epsilon_2$.



Calcule:

- a) La densidad de corriente volumétrica en los conductores reales.
- b) El campo eléctrico en todos los conductores.
- c) El potencial eléctrico en todos los conductores.
- d) La densidad de carga en la interfase entre los dos conductores reales.
- e) La resistencia de cada uno de los conductores y la total del sistema.

Junio-92

a) $\vec{J}$?

1ª forma: resuelto como cuestión (suponiendo que se reparte uniforme.)

$$\vec{J}_{v1} = \frac{I_0}{4\pi r^2/2} \hat{r} \quad (\text{A/m}^2) \quad \text{si } a < r < b$$

$$\vec{J}_{v2} = \frac{I_0}{4\pi r^2/2} \hat{r} \quad (\text{A/m}^2) \quad \text{si } b < r < c$$

2ª forma: resuelto como problema

conductor σ_1 : $I_0 = \iint_S \vec{J}_{v1} \cdot d\vec{S} = \iint_S J_{v1} \hat{r} \cdot d\vec{S} = J_{v1} \int \hat{r} \cdot d\vec{S} =$
 $(a < r < b)$

$$= J_{v1} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} \hat{r} \cdot \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi = J_{v1} r^2 2\pi \cdot 1 \Rightarrow J_{v1} = \frac{I_0}{2\pi r^2}$$

$$\vec{J}_{v1} = \frac{I_0}{2\pi r^2} \hat{r} \quad (\text{A/m}^2)$$

conductor σ_2 : $I_0 = \iint_S \vec{J}_{v2} \cdot d\vec{S} = \iint_S J_{v2} \hat{r} \cdot d\vec{S} = J_{v2} \int \hat{r} \cdot d\vec{S} =$
 $(b < r < c)$

$$= J_{v2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} \hat{r} \cdot \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi = J_{v2} r^2 2\pi \cdot 1 \Rightarrow J_{v2} = \frac{I_0}{2\pi r^2}$$

$$\vec{J}_{v2} = \frac{I_0}{2\pi r^2} \hat{r} \quad (\text{A/m}^2)$$

b)

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ \frac{I_0}{2\pi\sigma_1 r^2} & a < r < b \\ \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 r^2} & b < r < c \\ \vec{0} & r > c \end{cases} \quad (V/m)$$

c)

$$\phi = -\int \vec{E} d\vec{l} = -\int E dr = \begin{cases} cte_4 & r \leq a \\ \frac{I_0}{2\pi\sigma_1 r} + cte_3 & a \leq r \leq b \\ \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 r} + cte_2 & b \leq r \leq c \\ cte_1 & c \leq r \leq d \end{cases} \quad (V)$$

Sabemos que:

$$\phi(r=d) = 0 \Rightarrow cte_1 = 0$$

$$\phi(r=c) = 0 \Rightarrow cte_2 = \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 c}$$

$$\phi \text{ es función continua} \Rightarrow \phi(r=b^+) = \phi(r=b^-) \Rightarrow cte_3 = \frac{I_0}{2\pi} \left(\frac{-1}{\sigma_1 b} + \frac{1}{\sigma_2 b} - \frac{1}{\sigma_2 c} \right)$$

$$\phi(r=a^+) = \phi(r=a^-) \Rightarrow cte_4 = cte_3 + \frac{I_0}{2\pi\sigma_1 a}$$

d)

$$P_s = \hat{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_s$$

$$P_s(r=b) = \hat{r} (\vec{D}(r=b^+) - \vec{D}(r=b^-)) = \frac{I_0 \epsilon_2}{2\pi\sigma_2 b^2} - \frac{I_0 \epsilon_1}{2\pi\sigma_1 b^2} = \frac{I_0}{2\pi b^2} \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) (C/m)$$

e)

$$R_{TOT} = R_1 + R_2 \quad (\Omega)$$

$$R_1 = \frac{\phi(r=a) - \phi(r=b)}{I_0} = \frac{b-a}{2\pi\sigma_1 b a} \quad (\Omega)$$

$$R_2 = \frac{\phi(r=b) - \phi(r=c)}{I_0} = \frac{c-b}{2\pi\sigma_2 c b} \quad (\Omega)$$

TEMA 3 : CAMPOS CON VARIACIÓN TEMPORAL.

1.- INTRODUCCIÓN.

Partimos de las ecuaciones de Maxwell, la ley de Ohm generalizada y la ecuación de continuidad:

$$\begin{array}{l|l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho & \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \end{array}$$

COMENTARIO:

- Aunque en este tema hay variación temporal vamos a suponer variaciones temporales lentas, para que se puedan aplicar las leyes de Kirchhoff sin tener en cuenta el retardo de propagación; matemáticamente esta variación temporal lenta se produce si:

$$\lambda \gg \text{Dimensiones del circuito.}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot f} \text{ [m]}$$

- Este comentario anterior quiere decir que todos los campos del tema anterior son válidos, sin más que cambiar I por $I(t)$:

Ejemplo:

$$\text{Antes } I \longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

$$\text{Ahora } I(t) \longrightarrow \vec{B}(t) = \frac{\mu \cdot I(t)}{2\pi r} \hat{\phi}$$

2.- Potencial vector magnético y potencial eléctrico.

* POTENCIAL VECTOR MAGNÉTICO ($\vec{A}$)

Es un vector que en este tema cumple que:

$$\boxed{\nabla \times \vec{A} = \vec{B}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}} \rightarrow \text{Condición de calibración de Coulomb o gauge de Coulomb. (Para medios homogéneos)}$$

* POTENCIAL ELÉCTRICO (ϕ)

Es una función escalar que cumple que:

$$\boxed{-\nabla \phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

%
Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-\nabla \phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

3.- LEY DE RELAJACIÓN DE CARGA:

La ley de relajación de carga es la solución de la ecuación de continuidad para medios homogéneos.

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \text{Si } \epsilon \text{ y } \sigma \text{ son constantes} \\ \text{(Medio homogéneo)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\sigma}{\epsilon} (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \text{Como } \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0} \text{ Ec. de continuidad para medios homogéneos.}$$

LA SOLUCIÓN DE ESTA ECUACIÓN DIFERENCIAL ES: $\rightarrow$

$\rightarrow$ $\boxed{J(t) = J(t=0) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}} \quad (\text{C/m}) \quad \text{LEY DE RELAJACIÓN DE CARGA.}$

NOTA: Se puede generalizar para densidades superficiales y lineales de carga:

$$J_s(t) = J_s(t=0) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \quad (\text{C/m}^2)$$

$$\lambda(t) = \lambda(t=0) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \quad (\text{C/m})$$

4.- LEY DE FARADAY-LENZ:

* 1ª versión:

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \phi_B}{\partial t}}$$

siendo: $\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} ; (\text{wb})$

• S es la superficie abierta que se apoya en la curva cerrada C, y el $d\vec{s}$ se toma siguiendo el sentido de recorrido de C (Regla de la mano derecha sobre este sentido de recorrido.)

* 2ª versión:

$$\boxed{f_{em} = - \frac{\partial \phi_B}{\partial t}} \quad (\text{VOLTIOS})$$

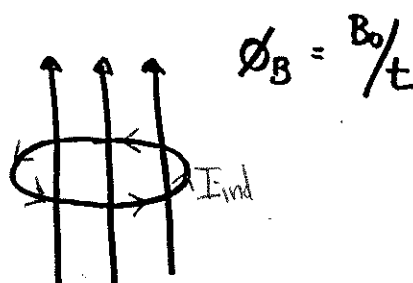
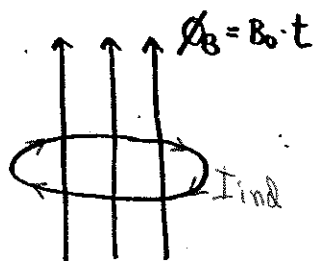
siendo: • $f_{em} \equiv$ Fuerza electromotriz inducida en la espira. (VOLTIOS)

• $\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} ; (\text{wb}) \equiv$ Flujo magnético a través de la superficie de la espira.

Esta 2ª versión de la ley de Faraday-Lenz nos dice que "si existe un flujo magnético, variable con el tiempo, a través de la superficie de una espira, entonces se inducirá en ella una fuerza electromotriz y por tanto una corriente en ella, que llamaremos corriente inducida, cuyo módulo es $I = \frac{f_{em}}{\text{Resistencia de la ESPIRA}}$, y cuyo sentido viene dado por la ley de LENZ".

La ley de Lenz dice que: "la corriente inducida en nuestra espira, tendrá un sentido tal que el campo magnético creado por ella se debe oponer a las VARIACIONES DE FLUJO que la ha inducido."

EJEMPLO:



* 3ª versión: ("Ley de Faraday para circuitos abiertos o varillas")

Si tenemos una varilla de longitud L , que se mueve con velocidad $\vec{v}$ dentro de un campo magnético $\vec{B}$, se inducirá en ella una fem dada por:

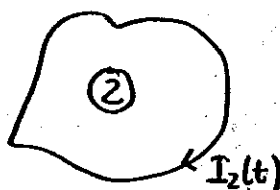
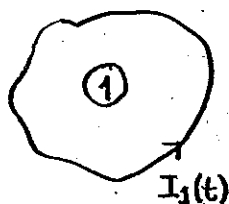
$$fem = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

NOTA: En esta 3ª versión NO hay corriente inducida lógicamente, a no ser que la varilla cierre un circuito.

5.- COEFICIENTES DE INDUCCIÓN. [Se denominan L y/o M y se miden en Henrys (H).]

5.1.- COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA:

Tendremos dos circuitos o espiras:



Sabemos que:

$$I_1(t) \rightarrow \vec{B}_1(t) \rightarrow \phi_2(t) \rightarrow \text{fem}_2 \rightarrow I_{\text{inducida}_2}$$

cumpléndose que:
$$L_{12} = \frac{\phi_2(t)}{I_1(t)} ; (H)$$

Por otro lado sabemos que:

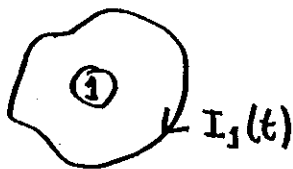
$$I_2(t) \rightarrow \vec{B}_2(t) \rightarrow \phi_1(t) \rightarrow \text{fem}_1 \rightarrow I_{\text{inducida}_1}$$

cumpléndose que:
$$L_{21} = \frac{\phi_1(t)}{I_2(t)} ; (H)$$

Se puede comprobar que:
$$L_{12} = L_{21} = M ; (H)$$
 COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA ENTRE ① y ②.

5.2.- COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN:

Tendremos un circuito o una espira:



Sabemos que: $I_1(t) \rightarrow \vec{B}_1(t) \rightarrow \phi_1(t) \rightarrow \text{fem}_1 \rightarrow I_{\text{inducida}_1}$

cumpléndose que:
$$L_{11} = \frac{\phi_1(t)}{I_1(t)} ; (H)$$
 COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN

COMENTARIOS FINALES:

* Cuando tenemos el esquema anterior de dos circuitos o espiras, la energía magnética total del sistema es:

$$W_H = \frac{1}{2} L_{11} \cdot I_1^2(t) + \frac{1}{2} L_{22} \cdot I_2^2(t) + \underbrace{M \cdot I_1(t) \cdot I_2(t)}_{\text{Energía mutua o de interacción}} , (\text{Julios})$$

* Lógicamente cuando sólo tenemos un circuito o espira:

$$W_H = \frac{1}{2} L_{11} \cdot I_1^2(t) (\text{Julios}) ; \text{¡¡¡OJO!!} \text{ sigue siendo válido: } W_H = \frac{1}{2} \iiint_V \mu H^2 dV$$

VER PROBLEMA III.16

$$L_{\text{TOT}} = L_{\text{int}} + L_{\text{ext}}$$

Cuestión: Determinar si existe corriente de desplazamiento en una región donde la densidad de corriente de conducción es: $\vec{J} = \frac{3r^2}{\sqrt{r^3+2}} \hat{r} \text{ (A/m}^2\text{)}$

Sabemos por la ecuación de Maxwell-Ampère:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{J}_{\text{cond.}} + \vec{J}_{\text{despl.}}$$

Tomando la divergencia a ambos lados:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0 \quad \forall \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_{\text{conducción}} = \nabla \cdot \left(\frac{3r^2}{\sqrt{r^3+2}} \hat{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(\frac{3r^2}{\sqrt{r^3+2}} \right) \neq 0$$

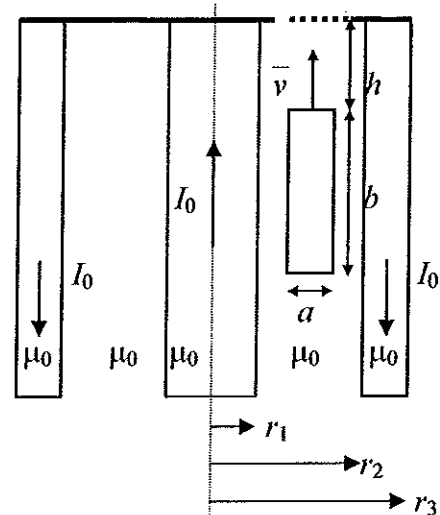
$$\nabla \cdot \vec{J}_{\text{despl.}} = - \nabla \cdot \vec{J}_{\text{cond.}} \Rightarrow \vec{J}_{\text{despl.}} \neq \vec{0}$$

CAMPOS VARIABLES

III-1 El extremo de un cable coaxial se cierra con una lámina conductora perfecta.

Suponiendo que se mantiene la distribución de corriente de la figura sobre el cable coaxial:

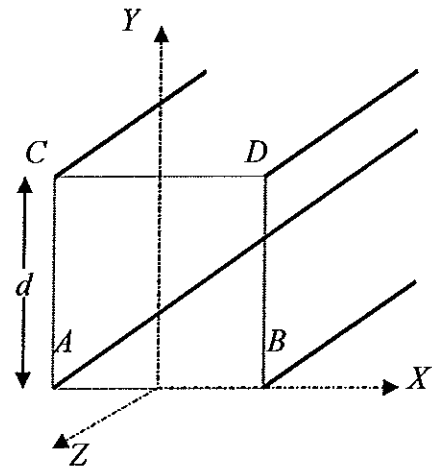
- Obtenga la distribución de corriente sobre la lámina conductora.
- Compruebe que el campo magnético en la zona entre conductores del coaxial, es el mismo que el correspondiente a la situación del coaxial indefinido.
- A través de una pequeña ranura en el coaxial se introduce totalmente en la zona entre conductores del coaxial una espira rectangular (de dimensiones axb). Obtenga el coeficiente de acoplamiento mutuo entre esta espira y el cable coaxial.
- Obtenga la fuerza electromotriz inducida sobre la espira cuando se extrae del coaxial a velocidad constante $\bar{v}$.
- ¿Qué fuerza hay que realizar para mantener la extracción de la espira a velocidad constante?



Febrero-96

III-2 La figura muestra un cable formado por cuatro conductores cilíndricos e indefinidos dispuestos paralelamente según los vértices de un cuadrado de lado d . Se pide calcular, despreciando el radio de los conductores:

- El coeficiente de inducción mutua por unidad de longitud entre las dos líneas de transmisión formadas la primera por los conductores A y B y la segunda por los conductores C y D .
- Igual que el apartado anterior, sólo que considerando que la primera línea está formada por los conductores A y D y la segunda por los conductores B y C .
- La f.e.m. inducida por unidad de longitud en la segunda de las líneas de situación del apartado a), si por la primera circula una corriente de intensidad $I = I_k \sin w_k t$.



Junio-96

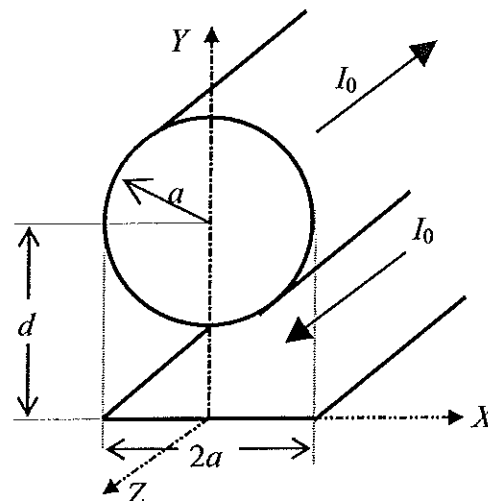
Telecomunicación De Grado
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

III-3 La figura muestra una línea indefinida y con simetría de translación constituida por:

- una tira de ancho $2a$ contenida en el plano $y = 0$ y centrada en el eje Z
- una superficie cilíndrica de radio a , cuyo eje es la recta $\{x = 0, y = d\}$, con la condición $d > a$.

Suponiendo que por esta línea circula una corriente I_0 en el sentido indicado en la figura, se pide:

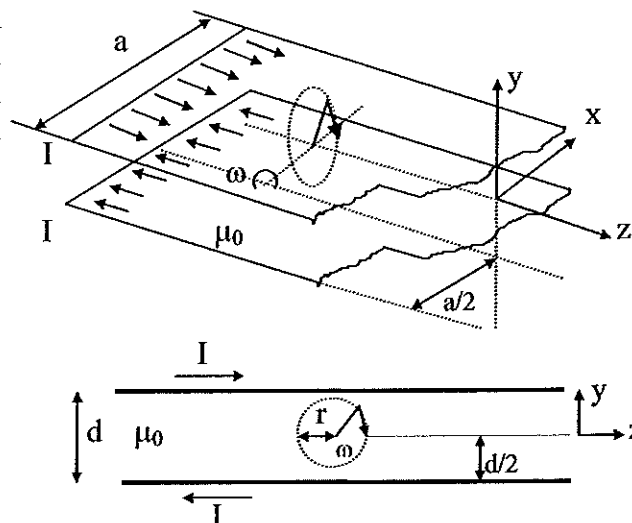
- Las densidades superficiales de corriente en ambos conductores.
- La densidad de flujo de campo magnético, $\vec{B}$, en los puntos del plano $x = 0$.
- Una aproximación razonable del coeficiente de autoinducción por unidad longitud cuando se verifica que $d \gg a$.
- Comente las aproximaciones realizadas indicando cuáles se ven afectadas por la relación entre d y a y cuales no.



Septiembre-96

III-4 En el interior de una línea biplaca de longitud indefinida, anchura a y separación entre placas d , por la que circula una corriente I en forma de densidad superficial uniforme (en dirección del eje z), se sitúa una varilla de longitud r ($r < a/2$) que gira con velocidad ω alrededor de un eje paralelo al eje x , equidistante de ambas placas y tal que la circunferencia descrita está en el plano $x = 0$.

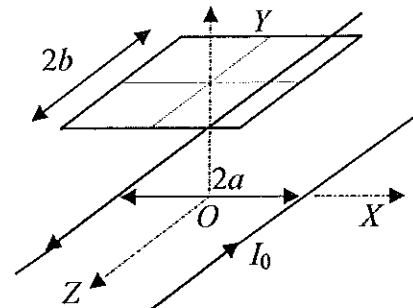
- Obtenga las densidades superficiales de corriente del problema.
- Calcule el campo magnético en el plano $x=0$. (Considere en este apartado que no existe la varilla).
- Obtenga la f.e.m. inducida (valor y polaridad en bornes de la varilla). Considere en este caso $r \ll a/2$.
- Razone cuál debería ser la dirección del eje de giro para que la varilla no sufriese fuerza electromotriz alguna.



Febrero-97

III-5 La figura muestra una línea bifilar indefinida por la que circula una corriente estacionaria I_0 y formada por dos hilos conductores de radio despreciable, separados una distancia $2a$, contenidos en el plano $y = 0$, dispuestos de forma paralela y simétrica respecto del eje OZ . Se pide:

- El campo magnético B en todos los puntos del espacio.
- El coeficiente de inducción mutua con una espira cuadrada como la mostrada en la figura, de lado $2b$ contenida en un plano $y = y_0$, centrada en el eje OY y con sus lados paralelos a los ejes OX y OZ .
- Si la espira cuadrada se mueve de forma que $y_0 = vt$. Calcule la f.e.m.i. sobre la espira.

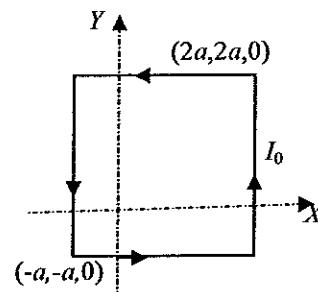


Junio-97

III-6 La figura muestra una espira cuadrada de lado $3a$ contenida en el plano $z = 0$ y descentrada con respecto al eje z

Si por esta espira circula una corriente en el sentido mostrado, se pide:

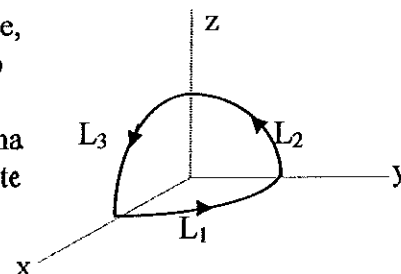
- Todas las componentes del campo magnético $\vec{B}$ en todos puntos de eje z .
- El flujo del campo magnético $\vec{B}$ a través de una espira plana de dimensiones mucho menores que a de superficie S contenida en un plano $z = cte$ y centrada en el eje z .
- ¿Cómo debería de orientarse la espira anterior para que al desplazarse a lo largo del eje z no aparezca una f.e.m. inducida sobre ella?



Septiembre-97

III-7 Sea una espira formada por tres cuadrantes de circunferencia de radio a situados en los planos xy , xz , e yz respectivamente, según se indica en la figura. Calcular el momento magnético de la espira y el campo creado en $(0,0,D)$, siendo $D \gg a$. Centrada en este punto y sobre el plano $z = D$ se coloca una espira circular pequeña de radio $b \ll a$. Calcular el coeficiente de inducción mutua entre ambas espiras.

Supuesto que $I_1 = I_0 \sin \omega t$, calcule la f.e.m. inducida en la espira circular.

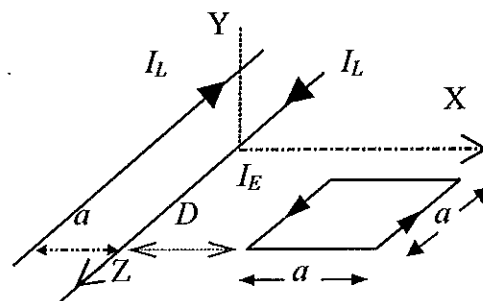


Febrero-98

III-8 La figura muestra una línea bifilar indefinida, contenida en el plano $y = 0$ y por la que circula una corriente I_L , y una espira filiforme cuadrada coplanaria por la línea. Calcule:

- El campo magnético, $\vec{B}$, creado por la línea bifilar en los puntos del plano que la contiene ($y = 0$).
- El coeficiente de inducción mutua entre la espira y la línea.
- La fuerza de origen magnético sobre la espira cuando por ella circula una corriente I_E .
- La f.e.m. inducida en la espira (indique su sentido) si la corriente sobre la línea varía según:

$$I_L = \begin{cases} 0 & ; \quad t \leq 0 \\ I_0 \frac{t}{T} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ I_0 & ; \quad T \leq t \end{cases}$$



Septiembre-98

Telecomunicación De Grado
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

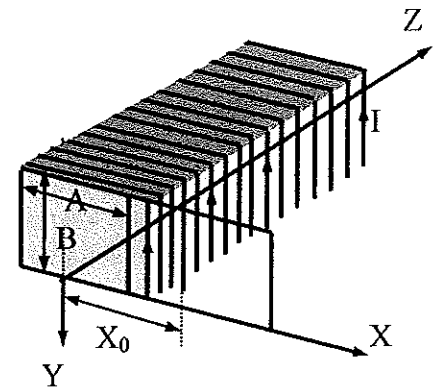
III-9 Una espira de dimensiones $A \times B$ se mueve siguiendo una ley sinusoidal de periodo T ($\Omega = 2\pi/T$),

$$x_0(t) = -\frac{A}{2} \cos(\Omega t) + \frac{A}{2}$$

en frente de un solenoide muy alargado, también de sección $A \times B$, cuyo núcleo tiene una permitividad μ , está arrollado con n hilos/m y está recorrido por una corriente I . La base de la espira y la del solenoide están en el mismo plano.

Obtenga los valores que las siguientes funciones tienen al variar el tiempo t , recalando el sentido (o signo) con la variación de éste:

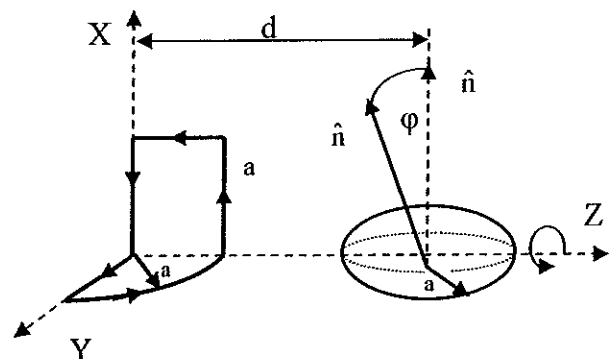
1. La fuerza electromotriz, f.e.m.,
 2. La corriente I (si la resistencia de la espira es R)
 3. La fuerza, $\vec{F}$, que hay que aplicar a la espira para que mantenga su ley de movimiento.
- NOTA: Desprecie la autoinductancia de la espira.



Febrero-99

III-10 Dados los circuitos filiformes indicados en la figura y sabiendo que la espira circular puede girar alrededor del eje Z ,

- a) calcular en función de φ el coeficiente de inducción mutua en el supuesto de que $d \gg a$.
- b) ¿Para qué valores de φ el coeficiente de inducción mutua alcanza valores máximos y mínimos.

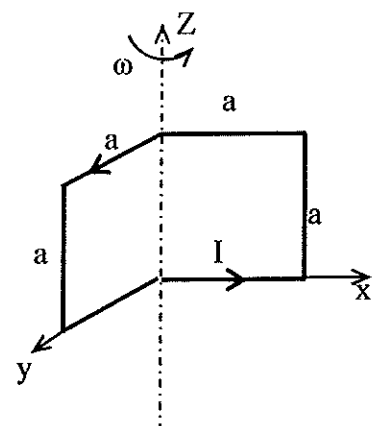


- c) Si la espira circular soporta una corriente $I = I_0 \cos \omega_1 t$ y el parámetro φ varía según $\varphi = \omega_2 t$, ¿Cuál es el valor de f.e.m. inducida en la otra espira?

Septiembre-99

III-11 Una espira con las dimensiones de la figura, por la que circula una corriente estacionaria de I amp. gira según el eje Z a una velocidad angular constante ω . Suponiendo que en el instante $t = 0$ la espira se encuentra en la posición indicada en la figura, calcule:

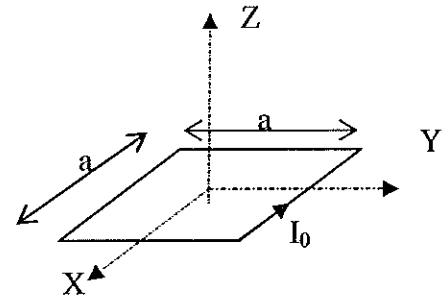
- a) El momento dipolar magnético de la espira para cualquier valor de t .
- b) El campo magnético (sólo componente z) generado en un punto P de coordenadas $(R, \theta, \varphi = 0)$ con $R \gg a$.
- c) El coeficiente de inducción mutua entre la espira mencionada y otra espira circular fija de radio a , contenida en un plano horizontal y con su centro en el punto P .
- d) La fem inducida en la espira circular.



Febrero-00

III-12 La figura muestra una espira cuadrada de lado a , centrada en el origen de coordenadas, con sus lados paralelos a los ejes, y recorrida por una corriente constante I_0 . Se pide:

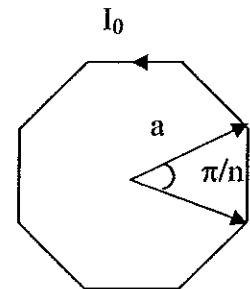
- Calcule el valor de la densidad de flujo magnético, $\vec{B}$, en los puntos eje Z .
- Dibuje el campo obtenido en el apartado anterior. Considere ahora una espira muy pequeña en comparación con la anterior, de superficie S , centrada en el eje Z y contenida en un plano horizontal $z = z_0$ y que se desplaza de forma que $z_0 = vt$. Se pide:
 - ¿Cuál será la fuerza electromotriz inducida en esta espira pequeña cuando atraviese el plano $z = 0$?



Septiembre-00

III-13 Una espiral poligonal regular de $2n$ lados e inscrita en una circunferencia de radio a , está recorrida por una corriente estacionaria I_0 (véase figura adjunta). La espira se supone en el plano XY y centrada en el origen de coordenadas.

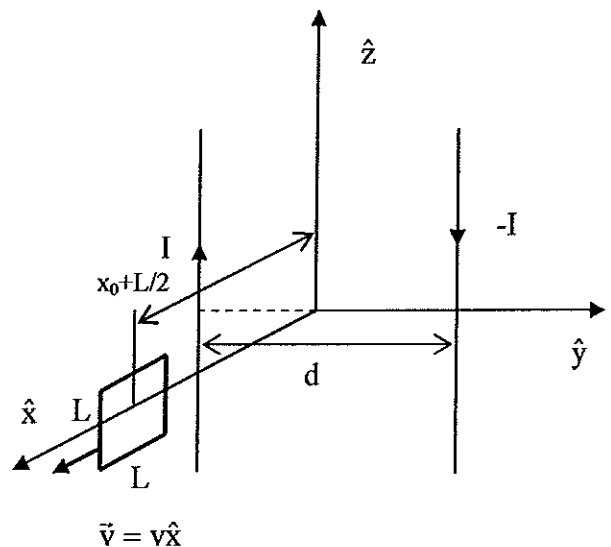
- Calcule el vector inducción de campo magnético en cualquier punto del eje Z .
- Compare el valor del campo magnético calculado cuando n tiende al infinito con el que generaría una espira circular de radio a y recorrida por la misma corriente I_0 .
- Calcule el vector inducción de campo magnético en cualquier punto del espacio (r, θ, ϕ) cuando se verifica que $r \gg a$. (expresé el resultado en coordenadas y vectores unitarios del sistema esférico).
- Una espira circular de radio $R \ll a$ y normal a z se desplaza a velocidad constante v entre $z = -h$ y $z = h$ a lo largo del eje z . Calcule la f.e.m.i. en $z = 0$.



Febrero-01

III-14 Una espira cuadrada de lado L , situada en el plano $y = 0$, centrada en el punto $x = x_0 + L/2$, $z = 0$, se encuentra en presencia de una línea bifilar, situada en el plano $x = 0$, constituida por dos conductores cilíndricos indefinidos de grosor despreciable separados una distancia d .

- Calcule la inducción magnética debida a la línea bifilar en el plano $y = 0$
- Calcule el flujo magnético sobre la espira
- Calcule la inducción mutua entre la línea bifilar y la espira.
- Calcule la fuerza electromotriz inducida sobre la espira y su polaridad si la corriente que circula por la línea bifilar varía como $I = I_0 \cos \omega_0 t$.
- Si además de la variación temporal anterior en la corriente que circula por la línea bifilar la espira se desplaza a velocidad constante, v según el eje x positivo (partiendo de su posición inicial), calcule la fuerza electromotriz inducida sobre la espira y su polaridad.



Enero-02

"CRISSER"

III-6

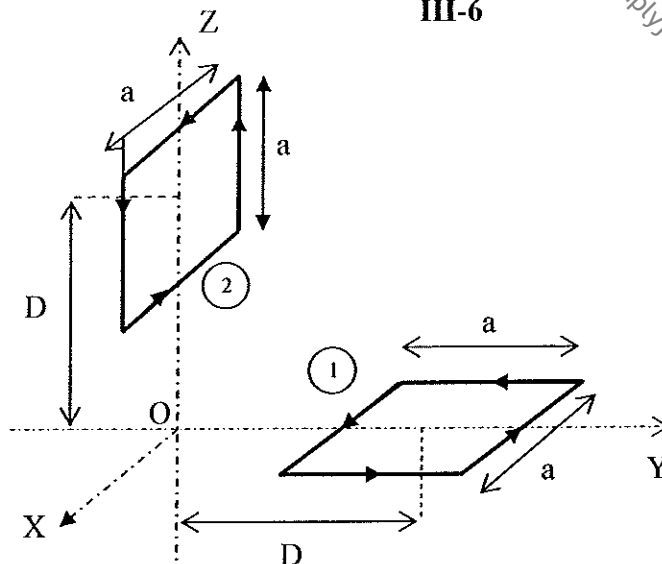
Telecomunicación De Grado

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

III-15 La figura define los sentidos de circulación de dos espiras cuadradas de lado a . La espira 1 está contenida en el plano $z = 0$ y centrada en el punto $\vec{r}_1 = D\hat{y}$. La espira 2 está contenida en el plano $y = 0$ y centrada en el punto $\vec{r}_2 = D\hat{z}$. Asumiendo que $a \ll D$ y que por la espira 1 circula una corriente de intensidad I_1 , calcule:

- El flujo magnético a través de la espira 2.
- La fuerza electromotriz inducida en la espira 2 si $D = vt$, con lo que ambas espiras se mueven.
- Si la espira 2 fuera conductora, ¿En qué sentido circularía la corriente inducida?
- Obtenga la expresión exacta del coeficiente de inducción mutua entre ambas espiras válida para cualquier valor de D .

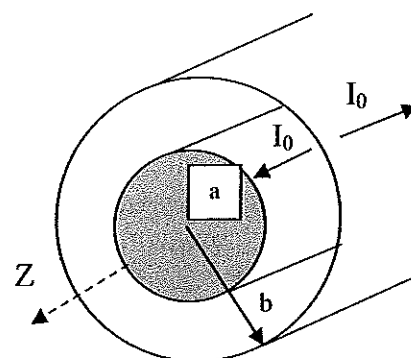
$$\int_{y=-a/2}^{a/2} \int_{x=-a/2}^{a/2} \frac{dx dy}{\sqrt{(x-y)^2 + k^2}} = f(a, k) = 2 \left[k \left| -\sqrt{a^2 + k^2} \right| \right] + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + k^2}}{-a + \sqrt{a^2 + k^2}}$$



III-16 La figura muestra un cable coaxial construido con un conductor central macizo de radio a y un conductor exterior de espesor despreciable de radio b .

Si por el conductor interior circula una corriente I_0 en el sentido del eje Z , que vuelve por el exterior en sentido contrario, se pide:

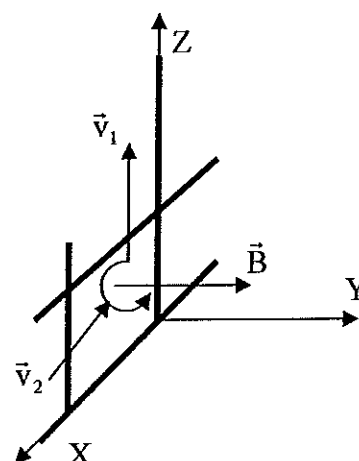
- Las densidades de corriente, suponiendo que ésta se distribuya uniformemente en los conductores.
- El campo magnético en todas las regiones.
- La energía magnética por unidad de longitud.
- El coeficiente de inducción por unidad de longitud.
- Cómo afectaría a los resultados anteriores la inversión del sentido de las corrientes.



Febrero-02

III-17 La figura representa una espira situada en el seno de un campo $\vec{B} = B_0 \hat{y}$, con B_0 constante. La espira está formada por dos hilos conductores indefinidos, situados sobre los ejes X y Z , cerrada por dos varillas indefinidas, paralelas a los ejes X (varilla 1) y Z (varilla 2), que se mueven a velocidades constantes v_1 y v_2 respectivamente. En $t = 0$ la varilla 1 está localizada en $z = 0$ y la varilla 2 en $x = x_1 > 0$. Calcule, en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ y el instante en que la varilla 2 se sitúa sobre el eje Z :

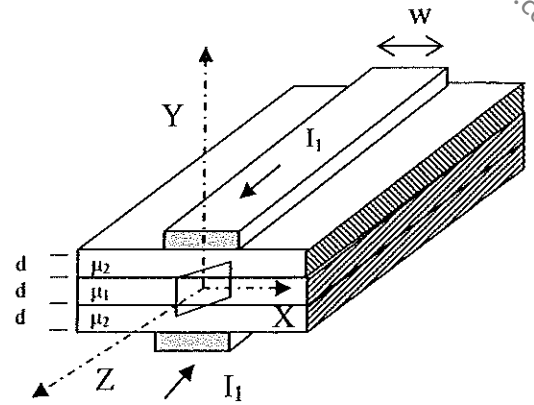
- La fuerza electromotriz, inducida (femi) utilizando la expresión de la circulación, a lo largo del contorno, de la fuerza que se ejerce sobre una carga unitaria.
- La femi utilizando la expresión del flujo de $\vec{B}$
- El instante de tiempo, en que se anula la femi, suponiendo $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$.
- La fuerza que ejerce el campo $\vec{B}$ sobre ambas varillas, siendo $i(t)$ la corriente inducida en la espira.



Febrero-02

Enero-03

III-18 La figura muestra una línea biplaca de longitud infinita cuyo núcleo es una lámina de permeabilidad μ_1 y espesor d . Este núcleo está recubierto por sus dos lados por sendas láminas de permeabilidad μ_2 y espesor d , sobre las que están grabadas las dos tiras conductoras de ancho w y espesor despreciable. Suponiendo que por la línea circula una corriente de intensidad I_1 que se distribuye uniformemente en la sección de los conductores y despreciando los efectos de borde,

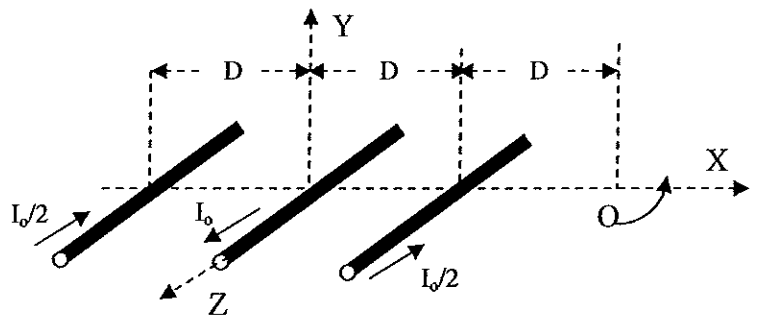


se pide que calcule, indicando las correspondientes unidades en el sistema internacional:

- Las densidades de corriente en los conductores, indicando su tipo.
- El campo magnético en el plano de simetría vertical: $\vec{B}(z\hat{z})$ y $\vec{H}(z\hat{z})$.
- El coeficiente de inducción con la espira cuadrada de lado a , $d \leq a < 3d$, centrada en el origen y contenida en el plano de simetría $x = 0$.
- La f.e.m.i. en la espira si $I_1 = I_0 \exp(-t/\tau)$. Indique el sentido real de la corriente.

Febrero-03

III-19 La figura muestra una línea de transmisión de longitud infinita formada por tres conductores cilíndricos indefinidos de radio a situados en el vacío con sus ejes paralelos, en el mismo plano ($y = 0$) y una separación D ; siendo $a \ll D$. Una corriente I_0 circula por el conductor central en el sentido $\hat{z}$, y retorna distribuyéndose uniformemente por los conductores exteriores. Se pide que:



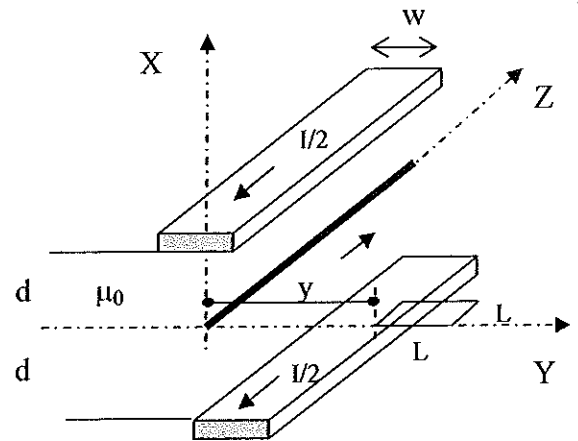
- Calcule el campo $\vec{B}$ en el plano $y = 0$ fuera de los conductores.
- Represente el resultado anterior.
- Calcule el flujo del campo magnético entre el conductor central y el situado en $x = D$.
- Calcule el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud de la línea.
- La f.e.m. inducida en esta línea de transmisión debida a una espira circular de radio a , contenida en el mismo plano $y = 0$ y con su centro en $x_c = 2D$ y por la que circula una corriente $I = I_e \cos(\omega t)$ en el sentido indicado en la figura (tome como sentido positivo para la f.e.m. el definido para I_0).

Septiembre-03

Telecomunicación De Grado
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

III-20 Una línea de transmisión está formada por tres elementos conductores como muestra la figura: dos tiras metálicas planas paralelas de espesor despreciable $2d$ y un hilo cilíndrico central de radio muy pequeño. Si la distribución de corriente en las tiras es uniforme (se desprecia el efecto de bordes).

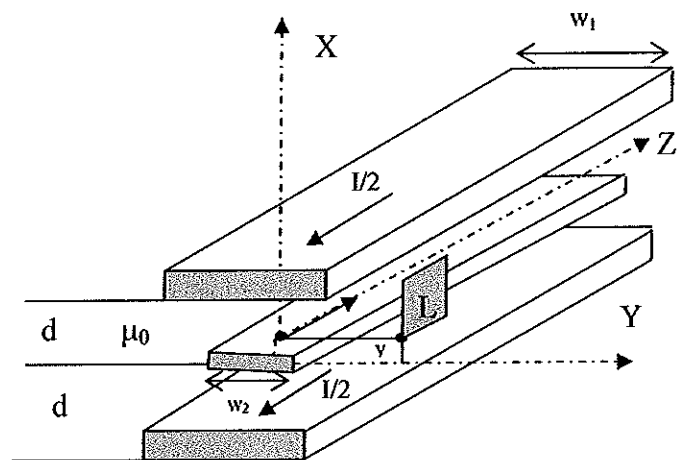
- Calcule la inducción magnética en los puntos del eje X .
- Determine la relación w/d para que la inducción se anule en $X = d^+$.
- Represente la inducción en función de x .
- Determine, para $y > 0$, la inducción mutua entre la línea y la espira plana cuadrada de la figura.
- Calcule la f.e.m.i. si la espira se desplaza a velocidad constante $\vec{v} = v_0 \vec{y}$ partiendo desde $y = 0$ en $t = 0$. Razone en que sentido circularía la corriente por el tramo de la espira más próximo al hilo central de la línea.



Febrero-04

III-21 Una línea de transmisión triplaca está formada por tres elementos conductores como muestra la figura: tres tiras metálicas planas paralelas de espesor despreciable y anchos $w_1 \geq w_2$. Si la distribución de corriente en las tiras es uniforme (se desprecia el efecto de bordes):

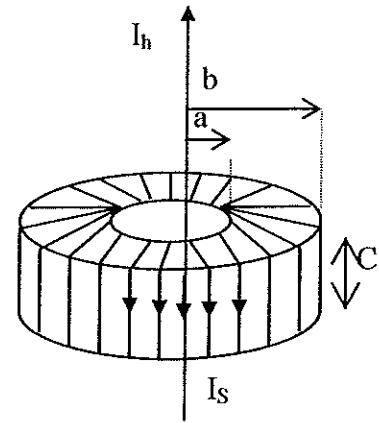
- Calcule la inducción magnética en los puntos del eje X .
- Represente la inducción en función de x .
- Determine la relación w_1/w_2 para que la inducción se anule en $X = d^+$.
- Determine, para $y > 0$, la inducción mutua entre la línea y la espira plana cuadrada de la figura, situada entre $x \geq 0$ y $x \leq d-L$ siendo $L \ll d$.
- Calcule la f.e.m.i. si la espira se desplaza a velocidad constante $\vec{v} = v_0 \vec{z}$ partiendo desde $z = 0$ en $t = 0$. Razone en que sentido circularía la corriente por el tramo horizontal de la espira más próximo a la tira central de la línea.



Septiembre-04

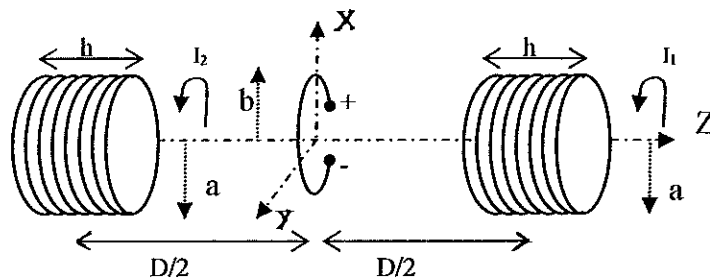
III-22 Sea un solenoide toroidal de sección transversal rectangular como el mostrado en la figura. El núcleo está formado por un material con una permeabilidad $\mu \gg \mu_0$, el número total de espiras es N y la corriente que circula por ellas es I_s .

- Calcule razonadamente la intensidad de campo magnético en todos los puntos del espacio. Verifique que se cumplen las condiciones de discontinuidad o salto.
- Calcule la energía electromagnética almacenada en todo el espacio.
- Obtenga el coeficiente de autoinducción del solenoide.
- Obtenga razonadamente el momento magnético del solenoide.
- Si el eje del solenoide hay una corriente filiforme I_h calcule el coeficiente de inducción mutua entre el hilo y el solenoide.



Febrero-05

III-23 La figura muestra un montaje de dos solenoides idénticos de N espiras, alineados con el objetivo de determinar la posición a lo largo del eje de una espira pequeña de radio b . Esta determinación se va a realizar comparando las fuerzas electromotrices inducidas sobre la espira pequeña cuando por los solenoides se hace circular una misma corriente en el mismo sentido y en sentidos contrarios. Para dimensionar adecuadamente el sistema es necesario:



- Conocer el campo magnético que genera un solenoide sobre su eje. Deduzca la expresión para el solenoide de la derecha.
- Conocer el campo magnético que generan los dos solenoides en el origen cuando las corrientes son iguales y los recorren en el mismo sentido $I_2 = I_1$, calcúlelo.
- Conocer el campo magnético que generan los dos solenoides en el origen cuando las corrientes son iguales y los recorren en sentido contrarios, $I_2 = -I_1$, calcúlelo.
- Conocer la fuerza electromotriz que se induce en la espira pequeña en ambas situaciones cuando $I_1 = I_0 \cos \omega_0 t$. Calcúlelas de forma que el signo positivo del resultado debe corresponder con el indicado en la figura.

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Septiembre-05

Telecomunicación De Grado
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

III-24 Sea la distribución superficial de corriente $\vec{J}_s = \frac{J_{s0} a}{\rho} \hat{\phi}$ A/m, expresada en componentes

cilíndricas, distribuida en una corona circular de radios interior y exterior a y b y contenida en el plano $z = 0$. Calcule:

- La inducción de campo magnético $\vec{B}$ en un punto cualquiera del eje Z.
- El momento magnético $\vec{m}$ de la distribución.
- El coeficiente de inducción mutua con una espira circular de radio c, contenida en un plano $z = \text{cte}$, con su centro en el punto (0,0,D) muy alejado de la corona circular ($D \gg b$ y $D \gg c$).
- Si $J_{s0} = J_{sm} \cos \omega t$, obtenga la f.e.m. inducida en la espira de radio c.

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Febrero-06

III-25 Dadas las densidades superficiales de corriente:

$$\vec{J}_s = \begin{cases} J_1 \rho \cdot \hat{\phi} & z = h & a \leq \rho \leq b & 0 \leq \phi < 2\pi \\ J_2 \rho \cdot \hat{\phi} & z = -h & a \leq \rho \leq b & 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases} \quad A/m$$

Calcule:

- El vector de campo de inducción magnética $\vec{B}$ en todos los puntos del eje Z.
- El vector de campo de inducción magnética $\vec{B}$ en todos los puntos del eje X alejados que cumplan que $x \gg b$ y $x \gg h$. ¿Qué relación debe existir entre J_1 y J_2 para que el campo magnético en los puntos del eje X sea nulo?
- Si una espira circular de radio $R \ll b$ y normal $\hat{z}$ se mueve a velocidad constante $v \hat{z}$ a lo largo del eje Z desde $z = -\infty$ hasta $z = \infty$ calcule la f.e.m. inducida en la espira. ¿Qué relación debe existir entre J_1 y J_2 para que la f.e.m. inducida sea nula en el $z=0$?

NOTA:
$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \text{Constante}$$

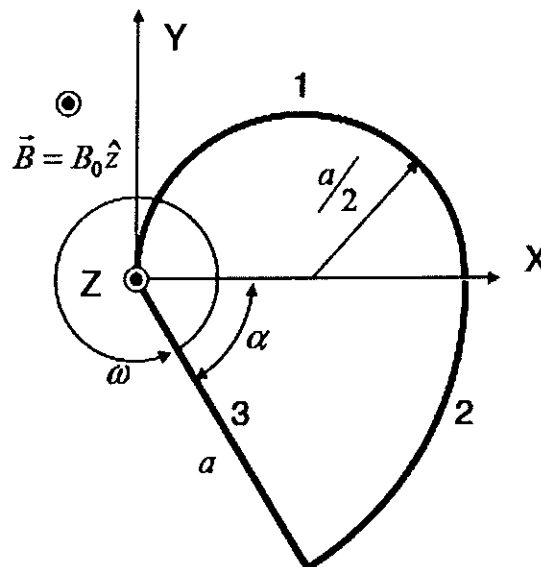
Septiembre-06

Telecomunicación De Grado
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

III-26

Sea la espira plana situada en el plano $z=0$ formada por los 3 tramos mostrados en la figura. Si la espira gira con una velocidad angular ω entorno al eje z y en el seno de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ calcule:

- La fuerza electromotriz que se induce en el tramo 1 indicando su polaridad. (2p)
- La fuerza electromotriz que se induce en el tramo 2 indicando su polaridad. (1p)
- La fuerza electromotriz que se induce en el tramo 3 indicando su polaridad. (1p)
- La fuerza electromotriz inducida sobre la espira. (1p)
- Compruebe el resultado obtenido usando un método de cálculo diferente al empleado en d. (1p)
- Si por la espira circulase una corriente I_0 en sentido contrario a las agujas del reloj ¿Qué campo $\vec{B}$ crea en puntos muy alejados del eje Z ? (2p)
- Si en dicha zona colocamos una espira plana circular de radio a ¿en que dirección debe orientarse su normal para que el flujo de $\vec{B}$ sea máximo? (1p)
- ¿Cuanto valdrá entonces el coeficiente de inducción mutua entre ambas espiras?

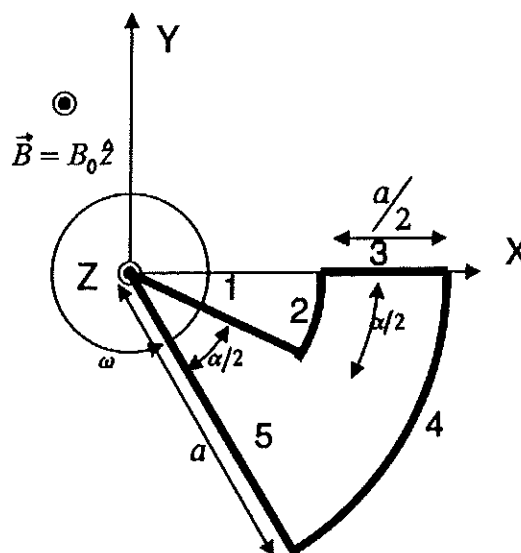


Febrero-07

III-27

Sea la espira plana situada en el plano $z=0$ formada por los 5 tramos mostrados en la figura. Si la espira gira con una velocidad angular constante ω entorno al eje z y en el seno de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ calcule:

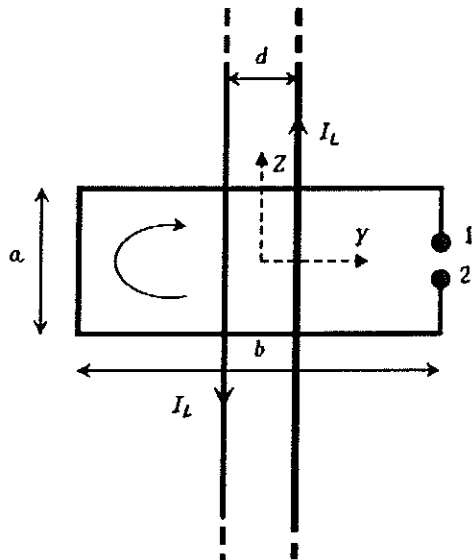
- La fuerza electromotriz que se induce en los tramos rectos 1, 3 y 5 indicando su polaridad. (3p)
- La fuerza electromotriz que se induce en los tramos curvos 2 y 4 indicando su polaridad. (1p)
- La fuerza electromotriz inducida sobre toda la espira. (1p)
- Compruebe el resultado obtenido usando un método de cálculo diferente al empleado en c. (1p)
- Si por la espira circulase una corriente I_0 en sentido contrario a las agujas del reloj ¿Qué campo $\vec{B}$ crea en puntos muy alejados del eje Z ? (2p)
- Si en dicha zona colocamos una espira plana circular de radio a ¿en que dirección debe orientarse su normal para que el flujo de $\vec{B}$ sea máximo? (1p)
- ¿Cuanto valdrá entonces el coeficiente de inducción mutua entre ambas espiras? (1p)



Septiembre-07

Telecomunicación De Grado
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

III-28



La figura muestra una espira rectangular centrada sobre una línea bifilar indefinida, situadas ambas en el plano $x = 0$

Se pide.:

- Calcule el campo magnético en los puntos del eje Y debido a una corriente I_L que circule por la línea en el sentido indicado en la figura. (4p)
- Calcule el flujo del campo magnético anterior a través de la espira de acuerdo al sentido de circulación señalado. (2p)
- Calcule el coeficiente de inducción mutua. (1p)
- Calcule la *f.e.m.i* sobre la espira si $I_L = I_0 \sin \omega t$ (1p)
- Si la espira estuviera abierta según se indica en la figura, señale cual sería el borne positivo en el instante $t = 0$ (1p)
- ¿Cómo influye en el resultado del apartado e) la elección del sentido de circulación tomado en el apartado b)? (1p)

Indique las unidades de los resultados.

Febrero-08

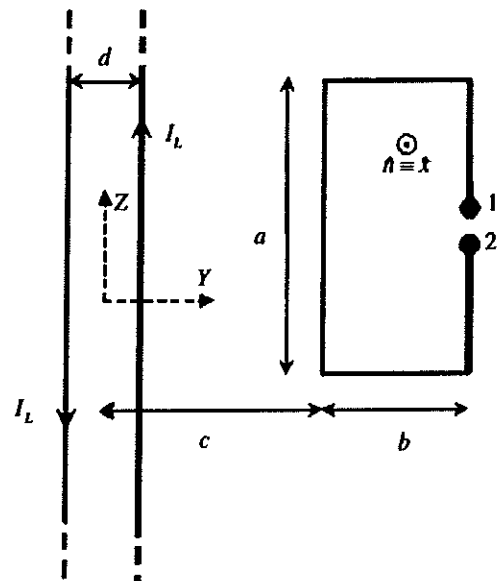
III-29

La figura muestra una espira rectangular coplanaria con una línea bifilar indefinida. La línea está centrada alrededor del eje Z y ambas están en el plano $x = 0$. Las dimensiones están expresadas en metros y se asume que $d/2 \leq c$

Se pide:

- Calcule el campo magnético en los puntos del eje Y debido a una corriente I_L que circule por la línea en el sentido indicado en la figura. (4p)
- Calcule el flujo del campo magnético anterior a través de la espira de acuerdo tomando como normal el vector $\hat{x}$. (2p)
- Calcule el coeficiente de inducción mutua. (1p)
- Calcule la *f.e.m.i* sobre la espira si $I_L = I_0 \sin \omega t$ (1p)
- Si la espira estuviera abierta según se indica en la figura, señale cual sería el borne positivo en el instante $t = 0$ (1p)
- ¿Cómo influiría en los resultados del apartado b) a e) si se hubiera tomado en b) como normal $-\hat{x}$? (1p)

Indique las unidades de los resultados.

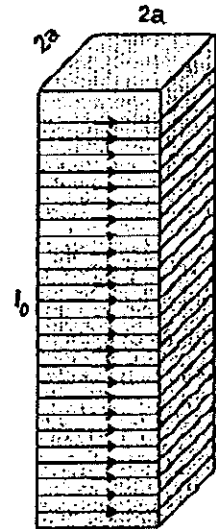


Septiembre-08

III-30

Sea una espira plana cuadrada de lado $2a$ situada en el plano $z=0$ y centrada respecto al eje z por la que circula una corriente I_0 en sentido antihorario.

- Obtenga razonadamente cual es la dirección de la intensidad de campo magnético en los puntos del eje z . (1p)
- Calcular la intensidad del campo magnético en los puntos del eje z . (2p)
- Calcular la intensidad del campo magnético en puntos muy alejados del eje x . (2p)
- Calcular el coeficiente de inducción mutua con otra espira cuadrada de las mismas dimensiones, centrada en el eje x en puntos muy alejados del origen de coordenadas. (2p)
- Si se apilan espiras sobre un núcleo de ferrita ($\mu \gg \mu_0$) formando un solenoide indefinido como indica la figura, con n espiras por unidad de longitud, obtenga razonadamente la intensidad del campo magnético en el interior y en el exterior del solenoide. (2p)
- Obtenga el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud del solenoide. (1p)



$$\int \frac{dt}{(t^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{t}{b^2 (t^2 + b^2)^{1/2}}$$

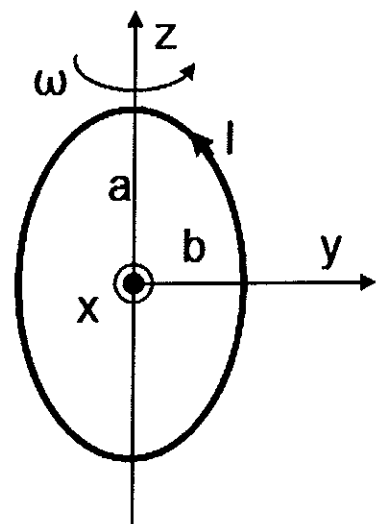
Febrero-09

III-31

Una espira elíptica, con semiejes a y b según la figura, por la que circula una corriente estacionaria de I amperios gira en torno al eje z a una velocidad angular constante de ω rpm. Suponiendo que en el instante $t=0$ la espira se encuentra en la posición indicada en la figura (en el plano $x=0$), calcule:

- El momento dipolar magnético de la espira en $t=0$. (2p)
- El momento dipolar magnético de la espira para cualquier valor de t . (2p)
- El campo magnético generado en un punto P de coordenadas $(R, \theta, \varphi=0)$ con $R \gg a$. (2p)
- El coeficiente de inducción mutua entre la espira mencionada y otra espira circular fija de radio $c \ll R$, contenida en un plano horizontal y con su centro en el punto P . (2p)
- ¿Para que valores de θ el coeficiente de inducción mutua es cero? (1p)
- La fem inducida en la espira circular. (1p)

Nota: Indique las unidades de TODAS las magnitudes que obtenga



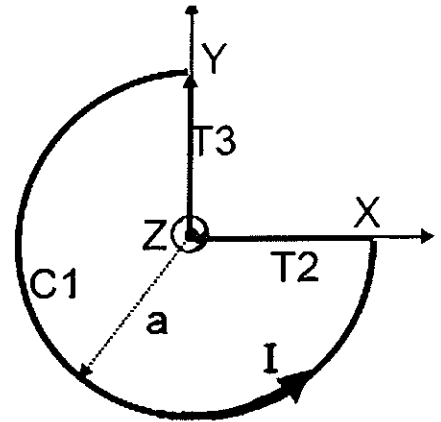
Septiembre-09

Telecomunicación De Grado
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

III-32

La espira de la figura, de radio a , está situada en el plano $z=0$ y recorrida por una corriente I .

- Calcule la inducción magnética en puntos del eje Z .
- Se sitúa una espira circular de radio $b \ll a$ con su centro en el punto $(0,0,a)$ y su normal según $\hat{x}$. Calcule el coeficiente de inducción mutua entre ambas espiras.
- Se hace girar la espira de radio b , respecto al eje Z , con una velocidad angular ω . Calcule la femi en la espira de radio b .
- Si la espira de radio b estuviese abierta, indique mediante un dibujo cuál sería el borne positivo en $t=0$.
- Se sitúa ahora una espira de radio $c \ll a$ con su centro en el punto $(0,0,D)$, con $D \gg a$ y su normal según $\hat{z}$. Calcule el coeficiente de inducción mutua entre las espiras de radios a y c .

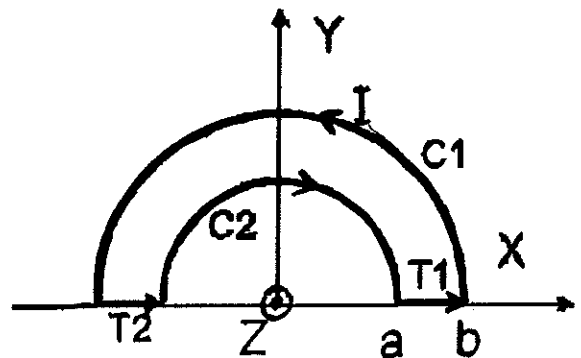


Febrero-2010

III-33

La espira de la figura, de radios a y b , está situada en el plano $z=0$ y recorrida por una corriente I .

- Calcule la inducción magnética en puntos del eje Z .
- Se sitúa una espira circular de radio $c \ll a$ con su centro en el origen. En $t=0$ la normal de la espira está orientada según $\hat{x}$. Se hace girar la espira de radio $c \ll a$, respecto al eje Y , con una velocidad angular ω . Calcule la femi en la espira de radio $c \ll a$.
- Explique razonadamente y muestre mediante un dibujo cuál es el sentido de la corriente inducida en la espira de radio c en $t=0$.



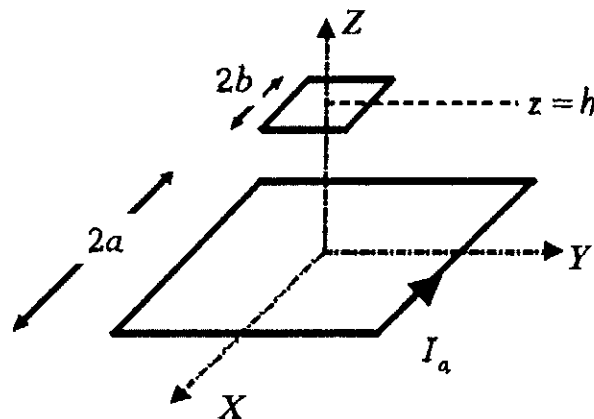
- Se sitúa ahora una espira de radio $c \ll a$ con su centro en el punto $(0,0,D)$, con $D \gg b$ y su normal según $\hat{z}$. Calcule el coeficiente de inducción mutua entre las dos espiras.

Septiembre-2010

III-34

La figura muestra dos espiras cuadradas situadas en sendos planos de z constante y con sus lados orientados según los ejes X e Y .

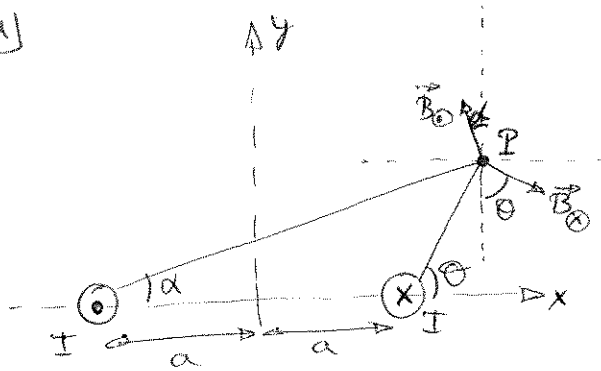
- Si por la espira de lado $2a$, centrada en el origen, circula una corriente I_a , ¿Qué campo magnético crea en el eje Z ?
- ¿Cuál será el valor aproximado de ese coeficiente de inducción mutua si $b \ll a$?
- Si $I_a = I_0 \cos(\omega t)$, ¿Cuál será la f.e.m.i. en la espira pequeña de la figura?
- Razone si la expresión del coeficiente de inducción que ha obtenido en b) es válida si $a \ll b$, y en caso que no lo sea manipúlela para obtener una válida.



Febrero-2011

III.5

a)



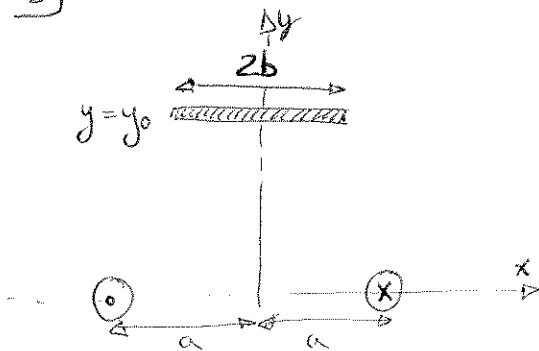
Sabemos que el $\vec{B}$ que crea un hilo indefinido en el eje z es:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{\phi} (T)$$

$$\vec{B}_{TOT} = \vec{B}_{\otimes} + \vec{B}_{\odot}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{TOT} &= |\vec{B}_{\otimes}| (\sin\theta \hat{x} - \cos\theta \hat{y}) + |\vec{B}_{\odot}| (-\sin\alpha \hat{x} + \cos\alpha \hat{y}) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} |\vec{B}_{\otimes}| = \frac{\mu I}{2\pi \sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \\ \cos\theta = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \end{array} \quad \begin{array}{l} |\vec{B}_{\odot}| = \frac{\mu I}{2\pi \sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \\ \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \\ \cos\alpha = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{\mu I}{2\pi} \left(\frac{y \hat{x} - (x-a) \hat{y}}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{(x+a) \hat{y} - y \hat{x}}{(x+a)^2 + y^2} \right) (T) \end{aligned}$$

b)



$$M = \mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21} = \frac{\Phi_{BE}}{I_{linea}}$$

$$\Phi_{BE} = \iint_{S_E} \vec{B} \cdot d\vec{S}_E = \int_{z=-b}^b \int_{y=-b}^b \frac{\mu I}{2\pi} \left(\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \right) \hat{y} dx dz \hat{y}$$

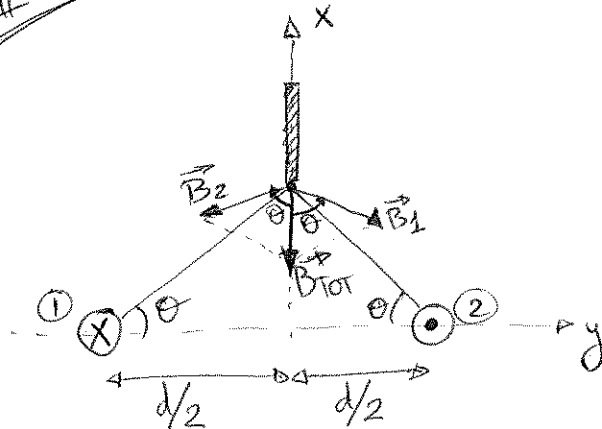
$$\Phi_{BE} = \frac{\mu I 2b}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln((x+a)^2 + y_0^2) - \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + y_0^2) \right] \Big|_{x=-b}^b =$$

$$= \frac{\mu I b}{\pi} \ln \left(\frac{(b+a)^2 + y_0^2}{(b-a)^2 + y_0^2} \right) (Wb) \Rightarrow M = \frac{\Phi_B}{I} (H)$$

$$c) \oint \vec{e} \cdot \vec{m}_i = - \left. \frac{\partial \phi_B}{\partial t} \right|_{y_0 = vt} = \frac{\mu I v}{H} \cdot \frac{8 y_0 a b^2}{((b+a)^2 + y_0^2)((b-a)^2 + y_0^2)}$$

$$\rightarrow \frac{d\phi_B}{dy_0} \cdot \frac{dy_0}{dt} = v \cdot \frac{d\phi_B}{dy_0}$$

III.14



$$\vec{B}_{\text{Tot}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2 \cdot |\vec{B}_1| \cos \theta (-\hat{x})$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{Tot}} &= 2 \frac{\mu I}{2\pi \sqrt{x^2 + (d/2)^2}} \cdot \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} (-\hat{x}) = \\ &= \frac{\mu I d}{2\pi (x^2 + (d/2)^2)} (-\hat{x}) \quad (T) \end{aligned}$$

$$b) \phi_{BE} = \iint_{SE} \vec{B} d\vec{S}_E = 0 \quad (Wb) \quad \text{ya que son paralelos}$$

$$c) M = \frac{\phi_{BE}}{I_{\text{linea}}} = 0 \quad (H)$$

$$d) \oint \vec{e} \cdot \vec{m}_i = - \left. \frac{\partial \phi_{BE}}{\partial t} \right|_{I = I_0 \cos(\omega t)} = 0 \quad (V)$$

$$e) \oint \vec{e} \cdot \vec{m}_i = - \left. \frac{\partial \phi_{BE}}{\partial t} \right|_{I = I_0 \cos(\omega t)} = 0 \quad (V) \quad \begin{array}{l} \text{En todo momento} \\ \vec{B} \text{ es perpendicular} \\ \text{a la superficie de} \\ \text{la espira} \end{array}$$



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE
MADRID

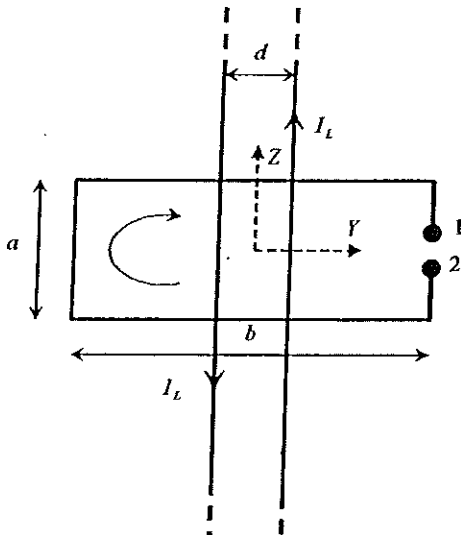
III. 28

DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES
GRUPO DE RADIAIÓN

Apellidos:

Todos los problemas puntúan igual (1/4 de la nota total)

PROBLEMA 3



La figura muestra una espira rectangular centrada sobre una línea bifilar indefinida, situadas ambas en el plano $x = 0$

Se pide.:

- Calcule el campo magnético en los puntos del eje Y debido a una corriente I_L que circule por la línea en el sentido indicado en la figura. (4p)
- Calcule el flujo del campo magnético anterior a través de la espira de acuerdo al sentido de circulación señalado. (2p)
- Calcule el coeficiente de inducción mutua. (1p)
- Calcule la f.e.m.i sobre la espira si $I_L = I_0 \sin \omega t$ (1p)
- Si la espira estuviera abierta según se indica en la figura, señale cual sería el borne positivo en el instante $t = 0$ (1p)
- ¿Cómo influye en el resultado del apartado e) la elección del sentido de circulación tomado en el apartado b)? (1p)

Indique las unidades de los resultados.

Solución:

- a) Se parte de que el campo generado por una línea de corriente de intensidad I sobre el eje Z es:

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi \rho}$$

$$\text{Como } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \Rightarrow \rho = -y & \phi = \hat{x} \\ 0 < y \Rightarrow \rho = y & \phi = -\hat{x} \end{cases} \Rightarrow B(y\hat{y} + z\hat{z}) = -\frac{\mu I}{2\pi y} \hat{x}$$

$$\text{Y si la línea pasa por } r = y_0\hat{y} \quad B(y\hat{y} + z\hat{z}) = -\frac{\mu I}{2\pi y - y_0} \hat{x}$$

$$\text{Para la línea de la derecha resulta: } B_{d/2}(y\hat{y} + z\hat{z}) = -\frac{\mu I_L}{2\pi y - d/2} \hat{x}$$

$$\text{Y para la línea de la izquierda: } B_{d/2}(y\hat{y} + z\hat{z}) = \frac{\mu I_L}{2\pi y + d/2} \hat{x}$$

$$\text{La superposición de ambas: } B_{L\text{linea}}(y\hat{y} + z\hat{z}) = \frac{\mu I_L}{2\pi} \left(\frac{1}{y + d/2} - \frac{1}{y - d/2} \right) \hat{x} \left(\text{wb/m}^2 \right)$$

b) Directamente:

$$\begin{aligned} \Phi_{B_{\text{espira}}, L\text{linea}} &= \iint_{S_{\text{espira}}} B_{L\text{linea}} \cdot d\vec{S}_{\text{espira}} = \int_{y=-d/2}^{d/2} \int_{z=-b/2}^{b/2} \frac{\mu I_L}{2\pi} \left(\frac{1}{y + d/2} - \frac{1}{y - d/2} \right) \hat{x} (-\hat{x}) dy dz = \\ &= \frac{\mu I_L a}{2\pi} \left(\int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{y + d/2} dy - \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{y - d/2} dy \right) = -\frac{\mu I_L a}{\pi} \ln \frac{b + d}{b - d} \left(\text{wb} \right) \end{aligned}$$

c) Coeficiente de autoinducción:

$$L_{\text{Espira, Línea}} = \frac{\Phi_{B_{\text{Espira, Línea}}}}{I_L} = -\frac{\mu a}{\pi} \ln \frac{b+d}{b-d} \text{ H}$$

$$d) f.em.i._{\text{Espira, Línea}} = -\frac{d\Phi_{B_{\text{Espira, Línea}}}}{dt} = -L_{\text{Espira, Línea}} \frac{dI_L}{dt} = \frac{\mu I_0 \omega a}{\pi} \ln \frac{b+d}{b-d} \cos \omega t \text{ V}$$

e) En el instante $t = 0$:

$$f.em.i._{\text{Espira, Línea}} \Big|_{t=0} = \frac{\mu I_0 \omega a}{\pi} \ln \frac{b+d}{b-d} \text{ V} \geq 0 \text{ V}$$

Con lo que las cargas positivas serían arrastradas en sentido definido como positivo en la figura: hacia el borne 1, que será el borne positivo.

f) La elección del sentido positivo en el apartado b) afecta al signo de los resultados numéricos de los apartados siguientes, pero los fenómenos físicos no se ven afectados, por lo que el borne positivo del apartado e) es siempre el ~~signo~~ mismo con independencia de dicha elección.

!No afecta!

Nota:

$$\int_{-b/2}^{b/2} \frac{dy}{y+d/2} \stackrel{t=y+d/2}{=} \int_{-b/2+d/2}^{b/2+d/2} \frac{dt}{t} = \underbrace{\int_{-b/2+d/2}^0 \frac{dt}{t} + \int_0^{b/2+d/2} \frac{dt}{t}}_0 = \int_{b/2-d/2}^{b/2+d/2} \frac{dt}{t} = \ln \frac{b+d}{b-d} > 0$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \frac{dy}{y-d/2} \stackrel{t=-(y-d/2)}{=} \int_{b/2+d/2}^{-b/2+d/2} \frac{dt}{t} = - \int_{-b/2+d/2}^{b/2+d/2} \frac{dt}{t} = - \underbrace{\int_{-b/2+d/2}^0 \frac{dt}{t} + \int_0^{b/2+d/2} \frac{dt}{t}}_0 = - \int_{b/2-d/2}^{b/2+d/2} \frac{dt}{t} = -\ln \frac{b+d}{b-d} < 0$$



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE
MADRID

III.29

DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES
GRUPO DE RADIAIÓN

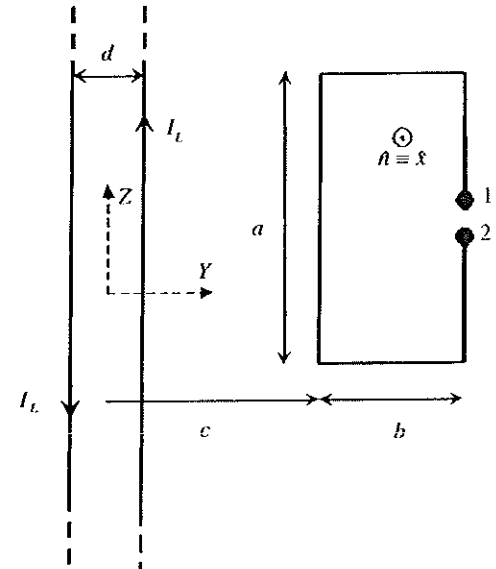
Apellidos	y	
Nombre:		

PROBLEMA 3

La figura muestra una espira rectangular coplanaria con una línea bifilar indefinida. La línea está centrada alrededor del eje Z y ambas están en el plano $x=0$. Las dimensiones están expresadas en metros y se asume que $d/2 \leq c$

Se pide:

- Calcule el campo magnético en los puntos del eje Y debido a una corriente I_L que circule por la línea en el sentido indicado en la figura. (4p)
- Calcule el flujo del campo magnético anterior a través de la espira de acuerdo tomando como normal el vector $\hat{x}$. (2p)
- Calcule el coeficiente de inducción mutua. (1p)
- Calcule la f.e.m.i sobre la espira si $I_L = I_0 \sin \omega t$ (1p)
- Si la espira estuviera abierta según se indica en la figura, señale cual sería el borne positivo en el instante $t=0$ (1p)
- ¿Cómo influiría en los resultados del apartado b) a e) si se hubiera tomado en b) como normal $-\hat{x}$? (1p)



Indique las unidades de los resultados.

Solución:

- a) Se parte de que el campo generado por una línea de corriente de intensidad I sobre el eje Z es:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu I}{2\pi \rho} \hat{\phi}$$

$$\text{Como } x=0 \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \Rightarrow \rho = -y & \hat{\phi} = \hat{x} \\ 0 < y \Rightarrow \rho = y & \hat{\phi} = -\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \vec{B}(y\hat{y} + z\hat{z}) = -\frac{\mu I}{2\pi y} \hat{x}$$

$$\text{Y si la línea pasa por } \vec{r} = y_0\hat{y} \quad \vec{B}(y\hat{y} + z\hat{z}) = -\frac{\mu I}{2\pi y - y_0} \hat{x}$$

$$\text{Para la línea de la derecha resulta: } \vec{B}_{d/2}(y\hat{y} + z\hat{z}) = -\frac{\mu I_L}{2\pi y - d/2} \hat{x}$$

$$\text{Y para la línea de la izquierda: } \vec{B}_{d/2}(y\hat{y} + z\hat{z}) = \frac{\mu I_L}{2\pi y + d/2} \hat{x}$$

$$\text{La superposición de ambas: } \vec{B}_{\text{línea}}(y\hat{y} + z\hat{z}) = \frac{\mu I_L}{2\pi} \left(\frac{1}{y + d/2} - \frac{1}{y - d/2} \right) \hat{x} \text{ T}$$

- b) Directamente:

$$\Phi_{B_{Espiras, Linea}} = \iint_{S_{Espiras}} \vec{B}_{Linea} \cdot d\vec{S}_{Espiras} = \int_{z=z_0}^{z_0+a} \int_{y=c}^{c+b} \frac{\mu I_L}{2\pi} \left(\frac{1}{y+d/2} - \frac{1}{y-d/2} \right) (\hat{x} \cdot \hat{x}) dy dz =$$

$$= \frac{\mu I_L a}{2\pi} \left(\int_c^{c+b} \frac{1}{y+d/2} dy - \int_c^{c+b} \frac{1}{y-d/2} dy \right) = \frac{\mu I_L a}{\pi} \ln \frac{c+b+d/2}{c+d/2} \frac{c-d/2}{c+b-d/2} \text{ wb}$$

c) Coeficiente de autoinducción:

$$L_{Espiras, Linea} = \frac{\Phi_{B_{Espiras, Linea}}}{I_L} = \frac{\mu a}{\pi} \ln \left(\frac{c+b+d/2}{c+d/2} \frac{c-d/2}{c+b-d/2} \right) H$$

$$d) f.em.i._{Espiras, Linea} = - \frac{d\Phi_{B_{Espiras, Linea}}}{dt} = -L_{Espiras, Linea} \frac{dI_L}{dt} = -I_0 \frac{\mu a}{\pi} \ln \left(\frac{c+b+d/2}{c+d/2} \frac{c-d/2}{c+b-d/2} \right) \cos \omega t \text{ V}$$

e) En el instante $t = 0$:

$$f.em.i._{Espiras, Linea} \Big|_{t=0} = -I_0 \frac{\mu a}{\pi} \ln \left(\frac{c+b+d/2}{c+d/2} \frac{c-d/2}{c+b-d/2} \right) \geq 0 \text{ V}$$

Con lo que las cargas positivas serían arrastradas en sentido definido como positivo en la figura: hacia el borne 2, que será el borne positivo.

f) La elección del sentido positivo en el apartado b) afecta al signo de los resultados numéricos de los apartados siguientes, pero los fenómenos físicos no se ven afectados, por los resultados de los apartados b) a d) no cambian, pero que el borne positivo del apartado e) es siempre el positivo con independencia de dicha elección.

b), c), d) cambia el signo

e) ¡No afecta!

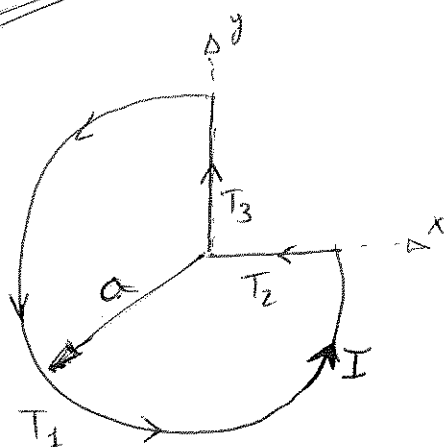
Nota:

$$\int_c^{c+b} \frac{dy}{y+d/2} \stackrel{t=y+d/2}{=} \int_{c+d/2}^{c+b+d/2} \frac{dt}{t} = \ln \frac{c+b+d/2}{c+d/2} > 0$$

$$\int_c^{c+b} \frac{dy}{y-d/2} \stackrel{t=y-d/2}{=} \int_{c-d/2}^{c+b-d/2} \frac{dt}{t} = \ln \frac{c+b-d/2}{c-d/2} > 0$$

Enero 2010
III.32

simplyjared.com



$$\vec{B}_{TOT}(0,0,z) = \vec{B}_{C1}(0,0,z) + \vec{B}_{T2}(0,0,z) + \vec{B}_{T3}(0,0,z)$$

C1:

$$\vec{B}_{C1}(0,0,z) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{L_1} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}_1')}{|\vec{r} - \vec{r}_1'|^3} = \begin{cases} \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}_1' = a\hat{\rho}' \\ d\vec{l}' = a d\psi' \hat{\phi}' \\ |\vec{r} - \vec{r}_1'|^3 = (z^2 + a^2)^{3/2} \end{cases}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\psi' = \pi/2}^{2\pi} \frac{a z d\psi' \hat{\phi}' + a^2 d\psi' \hat{z}}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \left\{ \hat{\rho}' = \cos\psi' \hat{x} + \sin\psi' \hat{y} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} \left[-z(\hat{x} + \hat{y}) + \frac{3\pi}{2} a \hat{z} \right] \quad (T)$$

T2:

$$\vec{B}_{T2}(0,0,z) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{L_2} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}_2')}{|\vec{r} - \vec{r}_2'|^3} = \begin{cases} \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}_2' = x'\hat{x} \\ d\vec{l}' = dx'(\hat{x}) \\ \vec{r} - \vec{r}_2' = z\hat{z} - x'\hat{x} \\ |\vec{r} - \vec{r}_2'|^3 = (z^2 + x'^2)^{3/2} \end{cases} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x'=0}^a \frac{z dx' \hat{y}}{(z^2 + x'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a \hat{y}}{4\pi z \sqrt{z^2 + a^2}} \quad (T)$$

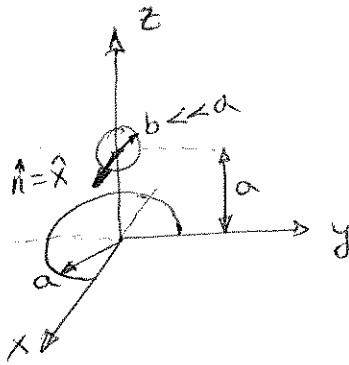
$$\int \frac{1}{(k^2 + t'^2)^{3/2}} dt' = \frac{t'}{k^2 \sqrt{k^2 + t'^2}}$$

T3:

$$\vec{B}_{T3}(0,0,z) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{L_3} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}_3')}{|\vec{r} - \vec{r}_3'|^3} = \begin{cases} \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}_3' = y'\hat{y} \\ d\vec{l}' = dy'(\hat{y}) \\ \vec{r} - \vec{r}_3' = z\hat{z} - y'\hat{y} \\ |\vec{r} - \vec{r}_3'|^3 = (z^2 + y'^2)^{3/2} \end{cases} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{y'=0}^a \frac{z dy' \hat{x}}{(z^2 + y'^2)^{3/2}} = \dots = \frac{\mu_0 I a \hat{x}}{4\pi z \sqrt{z^2 + a^2}} \quad (T)$$

b)



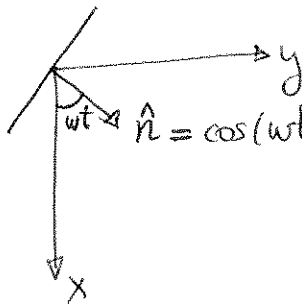
$$M = \frac{\Phi_{BE2}}{I_1} = \frac{\Phi_{BE1}}{I_2} \quad (H)$$

$$\Phi_{BE2} = \int_{SE2} \vec{B} d\vec{S}_{E2} \approx \vec{B}_{(centro)} \cdot \vec{S}_{E2} = \vec{B}_{(0,0,a)} \cdot \vec{S}_{E2}$$

$$= B_{tot}(0,0,a) \cdot b^2 \hat{x}$$

$$\Phi_{BE2} = \frac{\mu_0 I_1 b^2}{8\sqrt{2} a} \quad (Wb) \Rightarrow M = \frac{\Phi_{BE2}}{I_1} \quad (H)$$

c)

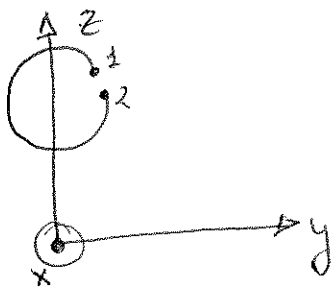


$$\hat{n} = \cos(\omega t) \hat{x} + \sin(\omega t) \hat{y} \Rightarrow \Phi_{BE2} = \int_{SE2} \vec{B} d\vec{S}_{E2} \approx \vec{B}_{tot}(0,0,a) \cdot b^2 \hat{n}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \left[\frac{1}{2a\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y}) + \frac{3H}{4\sqrt{2}a} \hat{z} \right] \cdot b^2 \hat{n}$$

$$\mathcal{E}_{em2} = - \frac{d\Phi_{BE2}}{dt} = \frac{\mu I_1 \omega b^2}{8\sqrt{2} a} (\sin(\omega t) - \cos(\omega t)) \quad (V)$$

d)

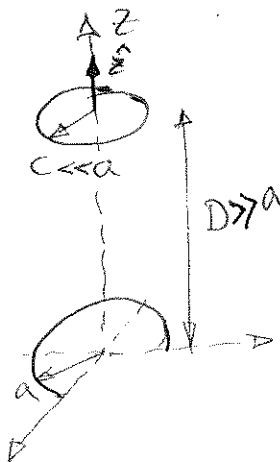


Como en $t=0$ tomamos $\hat{x}$ el vector normal, estábamos recorriendo la espira en sentido antihorario

$$\mathcal{E}_{em2} \Big|_{t=0} = \frac{-\mu I_1 \omega b^2}{8\sqrt{2} a} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow I_{ind2} = \frac{\mathcal{E}_{em2}}{R} < 0 \Rightarrow$ Como ha salido negativa la I_{ind} es horaria.

e)



$$\vec{B}(0,0,D) = \frac{\mu}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right] = \begin{cases} \vec{r} = D \cdot \hat{z} \\ \vec{m} = I \cdot \text{Area} \cdot \hat{n} \\ \vec{m} = I_1 \cdot \frac{3}{4} \pi a^2 \hat{z} \end{cases}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 \frac{3}{4} \pi a^2 \hat{z}}{2\pi D^3} \quad (T)$$

$$\Phi_{BE \text{ radio } c} = \int_{SE} \vec{B} d\vec{S}_E \approx \vec{B}(0,0,D) \cdot \vec{S} = \vec{B}(0,0,D) \cdot \pi c^2 \hat{z} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 3a^2 \pi c^2}{8D^3} \quad (Wb)$$

$$M = \frac{\Phi_{BE}}{I_1} \quad (H)$$

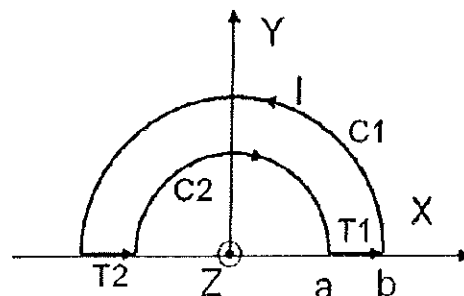


SOLUCIÓN PROBLEMA 3

La espira de la figura, de radios a y b , está situada en el plano $z=0$ y recorrida por una corriente I .

1. Calcule la inducción magnética en puntos del eje z . (4p)

$$B(r) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l} \times (r - r')}{|r - r'|^3} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{T1} \frac{Id\vec{l} \times (r - r')}{|r - r'|^3} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{C1} \frac{Id\vec{l} \times (r - r')}{|r - r'|^3} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{T2} \frac{Id\vec{l} \times (r - r')}{|r - r'|^3} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{C2} \frac{Id\vec{l} \times (r - r')}{|r - r'|^3}$$



T1

$$d\vec{l}' = dx' \hat{x}$$

$$r - r' = z\hat{z} - x'\hat{x}$$

$$r = z\hat{z}$$

$$r' = x'\hat{x}$$

$$|r - r'| = \sqrt{z^2 + x'^2} \quad d\vec{l}' \times (r - r') = dx' \hat{x} \times (z\hat{z} - x'\hat{x}) = -dx' (z\hat{y})$$

$$\vec{B}_{T1}(z\hat{z}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{x'=a}^b \frac{-z\hat{y} dx'}{(z^2 + x'^2)^{3/2}} = -\frac{\mu I}{4\pi} \frac{1}{z} \frac{x' \hat{y}}{\sqrt{z^2 + x'^2}} \Big|_{x'=a}^{x'=b} = -\frac{\mu I}{4\pi} \frac{1}{z} \left[\frac{b}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \hat{y} \quad [Wb/m^2]$$

T2

La contribución de T2 es idéntica a la de T1

C1

$$d\vec{l}' = b d\varphi' \hat{\phi}'$$

$$r = z\hat{z}$$

$$r' = b\hat{\rho}'$$

$$r - r' = z\hat{z} - b\hat{\rho}' \quad \hat{\rho}' = \cos\varphi' \hat{x} + \sin\varphi' \hat{y}$$

$$d\vec{l}' \times (r - r') = b d\varphi' \hat{\phi}' \times (z\hat{z} - b\hat{\rho}') = b d\varphi' (z\hat{\rho}' + b\hat{z})$$

$$\vec{B}_{C1}(z\hat{z}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{\pi} \frac{b d\varphi' (z\hat{\rho}' + b\hat{z})}{(z^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu I}{4\pi} \left\{ \frac{b}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \left[z\hat{x} \sin\varphi' \Big|_0^{\pi} - z\hat{y} \cos\varphi' \Big|_0^{\pi} + b\hat{z} \varphi' \Big|_0^{\pi} \right] \right\}$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \left[\frac{2zb}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \hat{y} + \frac{\pi b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \hat{z} \right] [Wb/m^2]$$

C2

La contribución de C2 se calcula como la de C1. La única diferencia es que $d\vec{l}' = -a d\varphi' \hat{\phi}'$ $r' = a\hat{\rho}'$, por lo que formalmente el resultado es el mismo, cambiando b por a y añadiendo un signo menos.

$$\vec{B}_{C2}(z\hat{z}) = -\frac{\mu I}{4\pi} \left[\frac{2za}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{y} + \frac{\pi a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \right] [Wb/m^2]$$

$$B(z\hat{z}) = \frac{\mu I}{4\pi} \left\{ \left[-\frac{2}{z} \left(\frac{b}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) + \frac{2zb}{(z^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{2za}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right] \hat{y} + \left[\pi \left(\frac{b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right) \right] \hat{z} \right\} [Wb/m^2]$$

2. Se sitúa una espira circular de radio $c \ll a$ con su centro en el origen. En $t=0$ la normal de la espira está orientada según $\hat{x}$. Se hace girar la espira de radio $c \ll a$, respecto al eje y , con una velocidad angular ω . Calcule la femi en la espira de radio $c \ll a$. (2p)

Dado que $c \ll a$, se puede aproximar el campo creado por la espira de radios a y b (espira 1) en la espira de radio c por el valor en su centro ($z=0$). Así:

$$femi = -\frac{d\Phi_{1c}}{dt} =$$

$$\Phi_{1c} = \int_{S_c} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_c \cong [\vec{B}_1(z=0) \cdot \vec{S}_c] \quad S_c = S_c \hat{n} = \pi c^2 (\cos \alpha \hat{x} - \sin \alpha \hat{z})$$

$$\Phi_{1c} \cong B_{1z}(z=0)(-\pi c^2 \sin \alpha) = \frac{\mu I}{4\pi} \pi \left[\frac{b^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right]_{z=0} (-\pi c^2 \sin \alpha) = \frac{\mu I}{4} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] (-\pi c^2 \sin \alpha) =$$

$$\Phi_{1c} \cong \frac{\mu I}{4} \left(-\frac{b-a}{ab} \right) (-\pi c^2 \sin \alpha) = \frac{\mu I}{4} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \pi c^2 \sin \alpha$$

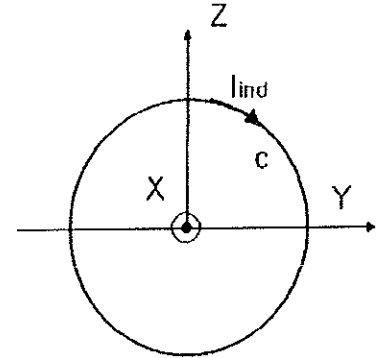
$$femi \cong -\frac{d\Phi_{1c}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu I}{4} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \pi c^2 \sin \alpha \right\} = -\frac{\mu I}{4} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \pi c^2 \omega \cos \alpha \quad [V]$$

$$femi \cong -\frac{\mu I}{4} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \pi c^2 \omega \cos \alpha \quad [V]$$

3. Explique razonadamente y muestre mediante un dibujo cuál es el sentido de la corriente inducida en la espira de radio c en $t=0$. (1p)

En $t=0$ $\hat{n} = \hat{x}$ y la femi es negativa, por lo que el signo positivo de la corriente inducida es el considerado en la figura.

4. Se sitúa ahora la espira de radio $c \ll a$ con su centro en el punto $(0,0,D)$, con $D \gg b$ y su normal según $\hat{z}$. Calcule el coeficiente de inducción mutua entre las dos espiras. (3p)



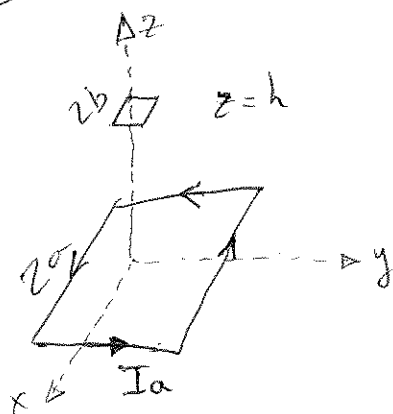
Dado que $c \ll a$, se puede aproximar el campo creado por la espira de radios a y b en la espira de radio c por el valor en su centro ($z=D$). Así:

$$m_1 = IS_1 \hat{n} = IS_1 \hat{z} \quad [Am^2] \quad S_1 = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \rho d\rho d\varphi = \frac{\pi}{2} (b^2 - a^2) \quad [m^2]$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{m}_1 \right] \Rightarrow$$

$$B(D\hat{z}) = \frac{\mu}{4\pi D^3} \left[\frac{3(IS_1 \hat{z} \cdot D\hat{z})D\hat{z}}{D^2} - IS_1 \hat{z} \right] = \frac{\mu}{4\pi D^3} 2IS_1 \hat{z} = \frac{\mu}{2\pi D^3} IS_1 \hat{z} \quad [T]$$

III.34



a) ver III.13 y III.12

$$\vec{B}(z\hat{z}) = \frac{2\mu_0 I_a \cdot a^2}{\pi(h^2+a^2)\sqrt{h^2+2a^2}} \hat{z} \quad (T)$$

Biot-Savart de un lado y multiplicar por 4 su componente $\hat{z}$

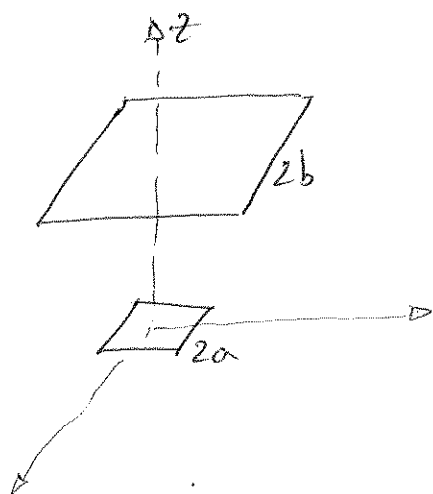
$$b) M = \frac{\phi_{BEb})}{I_a} = \frac{\phi_{BEa})}{I_b} \quad (H)$$

$$\phi_{BEb}) = \iint_{SE_b} \vec{B} \cdot d\vec{S}_E \stackrel{b \ll a}{\approx} \vec{B}(0,0,z=h) \cdot \vec{S}_{E_b}) = \frac{2\mu_0 I_a a^2 4b^2}{\pi(h^2+a^2)\sqrt{h^2+2a^2}} (Wb)$$

$$M = \frac{\phi_{BEz})}{I_a} \quad (H)$$

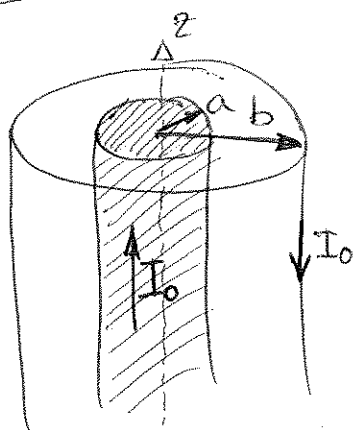
$$c) \int emi_{b) = - \frac{d\phi_{BEb})}{dt} \bigg|_{I_a = I_0 \cos(\omega t)} = +\omega \sin(\omega t) I_0 \frac{2\mu_0 a^2 4b^2}{\pi(h^2+a^2)\sqrt{h^2+2a^2}} \quad (V)$$

d)



No es válida la expresión anterior porque no podemos hacer la aproximación del flujo, pero basta con cambiar a por b y h por -h

$$M = \frac{\phi_{Ba})}{I_b} = \frac{8\mu_0 b^2 a^2}{\pi(h^2+b^2)\sqrt{h^2+2b^2}} \quad (H)$$



a) 1ª forma: como cuestión

$$\vec{J}_{v\text{cond}_{\text{int}}} = \frac{I_0}{\pi a^2} (\hat{z}) \quad (\text{A/m}^2)$$

$$\vec{J}_{s\text{cond}_{\text{ext}}} = \frac{I_0}{2\pi b} (-\hat{z}) \quad (\text{A/m})$$

2ª forma: como problema.

$$\text{cond. int: } I_0 = \iint_S \vec{J}_{v\text{int}} d\vec{S} = \iint_S \vec{J}_{v\text{int}} \cdot \hat{z} \cdot \hat{z} dS = J_{v\text{int}} \iint_S dS =$$

$$= J_{v\text{int}} \cdot \pi a^2 \Rightarrow J_{v\text{int}} = \frac{I_0}{\pi a^2} \Rightarrow \vec{J}_{v\text{int}} = \frac{I_0}{\pi a^2} \hat{z} \quad (\text{A/m}^2)$$

$$\text{cond. ext: } I_0 = \int_L \vec{J}_{s\text{ext}} \hat{n} d\ell = \int_L \vec{J}_{s\text{ext}} (-\hat{z})(-\hat{z}) d\ell = J_{s\text{ext}} \int_L d\ell =$$

$$= J_{s\text{ext}} \cdot 2\pi b \Rightarrow J_{s\text{ext}} = \frac{I_0}{2\pi b} \Rightarrow \vec{J}_{s\text{ext}} = \frac{I_0}{2\pi b} (-\hat{z}) \quad (\text{A/m})$$

b)

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu I_0 \rho}{2\pi a^2} \hat{\varphi} & \rho > a \\ \frac{\mu I_0}{2\pi \rho} \hat{\varphi} & a < \rho < b \quad (\text{T}) \\ \vec{0} & \rho > b \end{cases}$$

c)

$$(W_m/\ell) = \frac{1}{\ell} \iiint_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dV$$

$$\text{si } \rho < a: \frac{W_m}{\ell} = \frac{1}{\ell} \int_{z=0}^{\ell} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\mu I_0 \rho}{2\pi a^2} \right)^2 \rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \frac{\mu I_0^2}{2(2\pi a^2)^2} 2\pi \frac{a^4}{4} = \frac{\mu I_0^2}{16\pi} \quad (\text{J/m})$$

si $a < \rho < b$:
$$\frac{W_m}{\ell} = \frac{1}{\ell} \int_{z=0}^{\ell} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=a}^b \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\mu I_0}{2\pi \rho} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz =$$

$$= \frac{\mu I_0^2}{2(2\pi)^2} 2\pi \ln(b/a) = \frac{\mu I_0^2}{4\pi} \ln(b/a) \text{ (J/m)}$$

si $\rho > b$:
$$\frac{W_m}{\ell} = 0$$

$$W_{\text{Tot}}/\ell = \frac{\mu I_0^2}{4\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] \text{ (J/m)}$$

d)
$$L/\ell = \frac{2 W_m/\ell}{I_0^2} = \frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] \text{ (H/m)}$$

e)

a) $\hat{z}$ por $-\hat{z}$ y viceversa

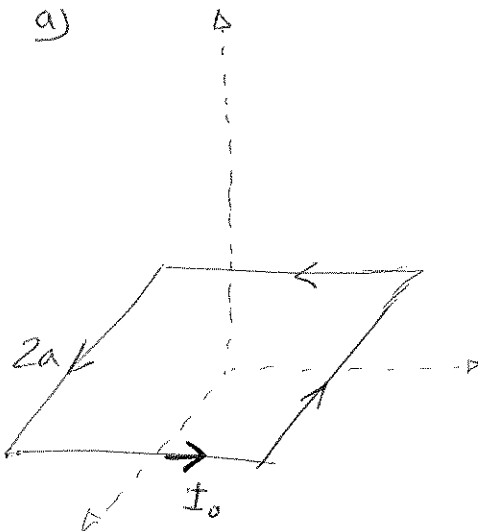
b) $\hat{\phi}$ por $-\hat{\phi}$

c) No cambia

d) No cambia

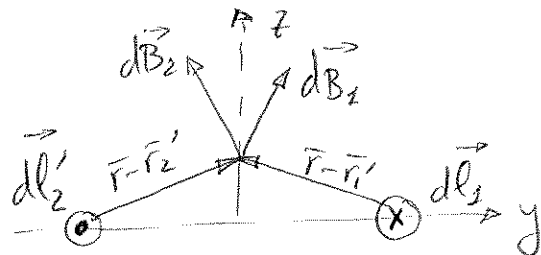
III.30

a)



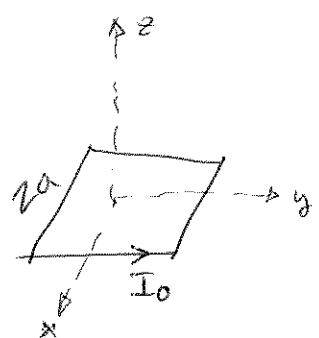
$$d\vec{B} = \frac{\mu I_0}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

El sentido de los $\vec{B}$ lo da $d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')$



$$b) \vec{H}_{\text{tot}}(0,0,z) = \frac{I_0}{4\pi} \int_{L'} \frac{d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{I_0 2a^2}{\pi(z^2 + a^2)\sqrt{z^2 + 2a^2}} \quad (\text{simplyjerk/atom})$$

c)



$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right] = \begin{cases} \vec{r} = x\hat{x} \\ r = |\vec{r}| \\ \vec{m} = I \cdot \text{Area} \cdot \hat{n} \\ \vec{m} = I_0(2a)^2 \hat{z} \end{cases}$$

$$\vec{H} = \frac{-\vec{m}}{4\pi r^3} = \frac{-I_0 4a^2 \hat{z}}{4\pi |\vec{r}|^3} \quad (\text{A/m})$$

d)

$$M = \frac{\Phi_{B2}}{I_1} \quad (\text{H})$$

espira en puntos lejanos

$$\Phi_{B2} = \iint_{S_2} \vec{B} d\vec{S}_2 \approx \vec{B}(\text{centro}) \cdot \vec{S}_2 = \frac{-\mu I_0 4a^2 \hat{z}}{4\pi |\vec{r}|^3} (2a)^2 \hat{z} =$$

$$= \frac{-\mu I_0 4a^4}{\pi |\vec{r}|^3} \quad (\text{Wb})$$

$$M = \frac{\Phi_{B2}}{I_1} = \frac{-\mu 4a^4}{\pi |\vec{r}|^3} \quad (\text{H}) \quad \text{puede ser } >0, <0, =0$$

e)

$$\vec{H}_{\text{solenoid}} = \begin{cases} n I_0 \hat{z} & \text{interior} \\ 0 & \text{exterior} \end{cases} \quad (\text{A/m})$$

f)

$$L/\ell = \frac{2(W_m/\ell)}{I_0^2} \quad (\text{H/m})$$

$$W_m/\ell = \frac{1}{\ell} \iiint_V \frac{1}{2} \mu H^2 dV = \frac{1}{2\ell} \int_{z=0}^{\ell} \int_{y=-a}^a \int_{x=-a}^a \mu (n I_0)^2 dx dy dz =$$

$$= \frac{1}{2} \mu (n I_0)^2 2a 2a \ell = \mu n^2 I_0^2 a^2 \ell \quad (\text{J/m})$$

$$L/\ell = \frac{2 W_m/\ell}{I_0^2} = 4 \mu n^2 a^2 \quad (\text{H/m})$$

a) CÁLCULO DE $\vec{H}_{\text{toroide}}$:

Ver punto 10.6 de teoría del tema 2.

$$\vec{H}_{\text{toroide}} = \begin{cases} \frac{N \cdot I_s}{2\pi \rho} \cdot \hat{\varphi} & (\text{A/m}) \text{ en el interior.} \\ \vec{0} & (\text{A/m}) \text{ en el exterior.} \end{cases}$$

COMPROBACIÓN DE LAS CONDICIONES DE SALTO:

Las superficies donde el campo $\vec{H}$ o $\vec{B}$ presenta discontinuidades en en $\rho=a$, $\rho=b$, $z=z_0$ y $z=z_0+c$.

Comprobamos en primer lugar $\hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)|_S = \vec{J}_s$ (No comprobar)

- En $\rho=a$; $\hat{\rho} \times (\vec{H}(\rho=a^+) - \vec{H}(\rho=a^-)) = \hat{\rho} \times \left(\frac{N \cdot I_s}{2\pi a} \hat{\varphi} - \vec{0} \right) = \frac{N \cdot I_s}{2\pi a} \hat{z}$, (A/m),
que efectivamente coincide con la densidad superficial de corriente en $\rho=a$,
que tiene dirección $\hat{z}$ y módulo $\frac{N \cdot I_s}{2\pi a}$. ($\vec{J}_s(\rho=a) = \frac{N \cdot I_s}{2\pi a} \hat{z}$).
- En $\rho=b$; $\hat{\rho} \times (\vec{H}(\rho=b^+) - \vec{H}(\rho=b^-)) = \hat{\rho} \times \left(\vec{0} - \frac{N I_s}{2\pi b} \hat{\varphi} \right) = \frac{N I_s}{2\pi b} (-\hat{z})$, (A/m),
que efectivamente coincide con la densidad superficial de corriente en $\rho=b$,
que tiene dirección $(-\hat{z})$ y módulo $\frac{N I_s}{2\pi b}$. ($\vec{J}_s(\rho=b) = \frac{N I_s}{2\pi b} (-\hat{z})$).
- En $z=z_0$; $\hat{z} \times (\vec{H}(z=z_0^+) - \vec{H}(z=z_0^-)) = \hat{z} \times \left(\frac{N I_s}{2\pi \rho} \hat{\varphi} - \vec{0} \right) = \frac{N I_s}{2\pi \rho} (-\hat{\rho})$, (A/m)
que como en los casos anteriores coincide en módulo y sentido con $\vec{J}_s(z=z_0)$.
- En $z=z_0+c$; $\hat{z} \times (\vec{H}(z=z_0+c^+) - \vec{H}(z=z_0+c^-)) = \hat{z} \times \left(\vec{0} - \frac{N I_s}{2\pi \rho} \hat{\varphi} \right) = \frac{N I_s}{2\pi \rho} \hat{\rho}$, (A/m)
que análogamente coincide con $\vec{J}_s(z=z_0+c)$.

Comprobemos en segundo lugar $\hat{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)|_s = 0$

- En $\rho = a$; $\hat{\rho} \cdot (\vec{B}(\rho=a^+) - \vec{B}(\rho=a^-)) = \hat{\rho} \cdot \left(\frac{\mu N I_s}{2\pi a} \hat{\phi} - \vec{0} \right) = 0$ ya que $\hat{\rho} \cdot \hat{\phi} = 0$.
- En $\rho = b$; $\hat{\rho} \cdot (\vec{B}(\rho=b^+) - \vec{B}(\rho=b^-)) = \hat{\rho} \cdot \left(\vec{0} - \frac{\mu N I_s}{2\pi b} \hat{\phi} \right) = 0$ " " "
- En $z = z_0$; $\hat{z} \cdot (\vec{B}(z=z_0^+) - \vec{B}(z=z_0^-)) = \hat{z} \cdot \left(\frac{\mu N I_s}{2\pi \rho} \hat{\phi} - \vec{0} \right) = 0$ ya que $\hat{z} \cdot \hat{\phi} = 0$
- En $z = z_0 + c$; $\hat{z} \cdot (\vec{B}(z=z_0+c^+) - \vec{B}(z=z_0+c^-)) = \hat{z} \cdot \left(\vec{0} - \frac{\mu N I_s}{2\pi \rho} \hat{\phi} \right) = 0$ " " "

b) Solo hay energía en el interior del solenoide:

$$\boxed{W_M = \frac{1}{2} \iiint_V \mu \cdot H^2 dV = \frac{\mu}{2} \int_{z=z_0}^{z_0+c} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\rho=a}^b \left(\frac{N \cdot I_s}{2\pi \rho} \right)^2 \rho d\rho d\psi dz =}$$

$$= \frac{\mu}{2} \cdot \frac{N^2 \cdot I_s^2}{2\pi} \cdot c \cdot \ln(b/a) \quad (J) \quad \boxed{}$$

$$c) W_M = \frac{1}{2} L \cdot I_s^2 \Rightarrow \boxed{L = \frac{2 \cdot W_M}{I_s^2} = \frac{\mu N^2 \cdot c \cdot \ln(b/a)}{2\pi}} \quad (H) \quad \boxed{}$$

d) El momento magnético total del solenoide toroidal es cero, ya que, por simetría, cada espira del mismo tiene una espira igual que ella pero con el momento magnético en sentido opuesto, de forma que su suma es cero.

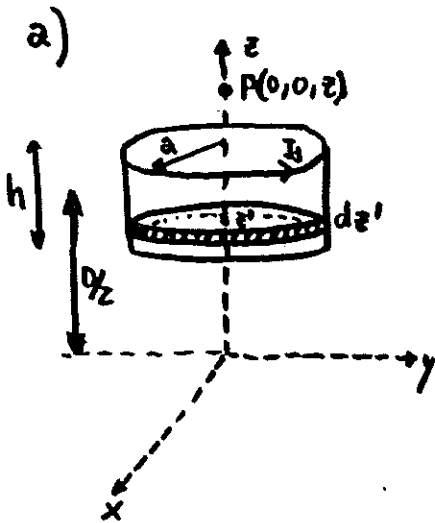
$$\boxed{\vec{m}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \vec{m}_i = \{ \text{por simetría} \} = \vec{0}} \quad (A \cdot m^2) \quad \boxed{}$$

$$e) \boxed{M = \frac{\mathcal{O}_{\text{toroidal}}}{I_h} = \frac{1}{I_h} \iint_{S_{\text{tot}}} \vec{B}_h \cdot d\vec{S}_{\text{tot}}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como el campo que crea el hilo es} \\ \vec{B}_h = \frac{\mu \cdot I_h}{2\pi \rho} \cdot \hat{\phi} \text{ (T) observamos que} \\ \text{todas las espiras del solenoide tienen} \\ \text{el mismo flujo} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{I_h} \cdot N \cdot \iint_{S_{\text{espira}}} \vec{B}_h \cdot d\vec{S}_{\text{espira}} = \frac{N}{I_h} \int_{z=z_0}^{z_0+c} \int_{\rho=a}^b \frac{\mu I_h}{2\pi \rho} \cdot \hat{\phi} \cdot d\rho dz \hat{\phi} = \frac{\mu \cdot N \cdot c \cdot \ln(b/a)}{2\pi} \quad (H) \quad \boxed{}$$

III. 23

Solución:



El campo que crea una espira circular de radio a situada en $z=0$ y recorrida por una corriente I antihoraria es:

$$\vec{B}_{\text{espira}}(0,0,z) = \frac{\mu I}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \hat{z} ; T$$

Si tomamos un dz' en el solenoide de la derecha tendremos un número de espiras dado por:

$$\begin{array}{lcl} \text{N espiras} & \xrightarrow{\text{h metros}} & \\ x & \xrightarrow{\text{dz' metros}} & \end{array} \quad x = \frac{N}{h} \cdot dz' \text{ espiras}$$

Este dz' crea el siguiente campo:

$$d\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu I_1}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \cdot \hat{z} \cdot \frac{N}{h} dz'$$

Integrando el campo anterior obtendremos el campo total creado por el solenoide de la derecha, recorrido por una corriente I_1 antihoraria:

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{B}_1(0,0,z)} &= \int_{\text{solenoid}} d\vec{B}(0,0,z) = \int_{z'=\frac{D-h}{2}}^{\frac{D+h}{2}} \frac{\mu I_1}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \cdot \hat{z} \cdot \frac{N}{h} \cdot dz' = \\ &= \frac{\mu I_1 \cdot a^2 \cdot \hat{z} \cdot N}{2h} \cdot \left[-\frac{z-z'}{(a^2 + (z-z')^2)^{1/2} \cdot a^2} \right]_{\frac{D-h}{2}}^{\frac{D+h}{2}} = \\ &= \frac{\mu I_1 \cdot \hat{z} \cdot N}{2h} \left[\frac{z - \left(\frac{D-h}{2}\right)}{\sqrt{a^2 + \left(z - \left(\frac{D-h}{2}\right)\right)^2}} - \frac{z - \left(\frac{D+h}{2}\right)}{\sqrt{a^2 + \left(z - \left(\frac{D+h}{2}\right)\right)^2}} \right] \quad (T) \end{aligned}$$

- b) Si la corriente del segundo solenoide tiene el mismo sentido que I_1 , el campo del segundo solenoide en cualquier punto del eje z , lo obtenemos cambiando en la integral anterior los límites de integración: $\int_{z' = -(\frac{D+h}{2})}^{-(\frac{D-h}{2})}$

Por tanto:

$$\vec{B}_2(0,0,z) = \frac{\mu \cdot I_2 \cdot \hat{z} \cdot N}{2h} \left[\frac{z + (\frac{D+h}{2})}{\sqrt{a^2 + (z + (\frac{D+h}{2}))^2}} - \frac{z + (\frac{D-h}{2})}{\sqrt{a^2 + (z + (\frac{D-h}{2}))^2}} \right]; (T)$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{B}_{TOTAL}(0,0,0) = \vec{B}_1(0,0,0) + \vec{B}_2(0,0,0) = \frac{\mu \cdot I_1 \cdot \hat{z} \cdot N}{2h} \left[\frac{(\frac{D+h}{2})}{\sqrt{a^2 + (\frac{D+h}{2})^2}} - \frac{(\frac{D-h}{2})}{\sqrt{a^2 + (\frac{D-h}{2})^2}} \right] \cdot 2} \quad (T) \quad \swarrow I_1 = I_2$$

c) $\boxed{\vec{B}_{TOTAL}(0,0,0) = \left\{ \text{Si } I_1 = -I_2 \right\} = \vec{0}} (T)$

d) $\text{fem} = - \frac{\partial \phi_{BE}}{\partial t}$; (VOLTIOS) Ley de Faraday.

Suponemos que la espira de radio b es pequeña, y que por tanto podemos aproximar el campo en todas las partes de su superficie con el campo en el origen, por tanto:

SITUACIÓN DEL APARATO c): $\phi_{BE} \approx \iint_E \vec{B}_{TOTAL}(0,0,0) \cdot d\vec{S}_E = 0; (Wb) \Rightarrow \boxed{\text{fem} = 0} \text{ voltios.}$

" " " b): $\boxed{\phi_{BE} \approx \iint_E \vec{B}_{TOTAL}(0,0,0) \cdot d\vec{S}_E = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como } d\vec{S}_E = dS_E \cdot \hat{z} \\ \text{y } \vec{B}_{TOTAL}(0,0,0) \text{ en la } \end{array} \right\}} =$

$$= \pi b^2 \cdot \frac{\mu \cdot I_0 \cos(\omega t) \cdot N}{2h} \left[\frac{D+h}{\sqrt{a^2 + (\frac{D+h}{2})^2}} - \frac{D-h}{\sqrt{a^2 + (\frac{D-h}{2})^2}} \right] Wb$$

$$\boxed{\text{fem} = - \frac{\partial \phi_{BE}}{\partial t} = + \frac{\pi b^2 \mu \cdot I_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot N}{2h} \left[\frac{D+h}{\sqrt{a^2 + (\frac{D+h}{2})^2}} - \frac{D-h}{\sqrt{a^2 + (\frac{D-h}{2})^2}} \right]} \quad (VOLTIOS)$$