ELMG

Carpeta Montero

Apuntes y exámenes ETSIT UPM







Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en simplyjarod.com

ELMG Teoría

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA ELMG

Tema 1: Introducción. (0,4 crd.)

Algebra vectorial. Sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales. Los campos y sus fuentes: operadores vectoriales, integración y derivación. Teoremas de Gauss y Stokes. función delta de Dirac.

Tema 2: Modelo macroscópico de la interacción electromagnética. (1 crd.)

Campo electromagnético. Densidad de carga y corriente, ecuación de continuidad. Ecuaciones de Maxwell. Caracterización de los materiales dieléctricos, magnéticos y conductores. Energía electromagnética. Condiciones en la frontera para los campos. Clasificación de los fenómenos electromagnéticos.

Tema 3: Campo eléctrostático. (1,8 crd.)

Ecuaciones. Campo eléctrico y potencial eléctrico. Ley de Gauss. Ecuación de Poisson. Integrales de superposición. Porpiedades y problemas de contorno del potencial electrostático. Desarrollo multipolar de distribuciones arbitrarias. Sistemas de conductores: inducción electrstática, coeficientes de capacidad, condensador. Energía del campo electrostático. Acciones mecánicas.

Tema 4: Corrientes estacionarias. (0,6 crd.)

Ecuaciones. Propiedades de las corrientes estacionarias: necesidad de generadores, fuerza electromotriz. Problemas de contorno. Resistencia. Disipación de energía.

Tema 5: Magnetostatica. (1,2 crd.)

Ecuaciones. Potencial vector magnético. Ecuación de Poisson vectorial. Integrales de superposición. Campo magnético a partir de la Ley de Ampère. Campo magnético en puntos lejanos, momento dipolar magnético. Energía del campo magnetostático. Corrientes filiformes. Coeficientes de introducción. Fuerza y par sobre corrientes.

Tema 6: Campos cuasiestacionarios (variación temporal lenta). (0,6 crd.).

Ecuaciones. Concepto de variación lenta. Ley de inducción de faraday. Justificación de la teoría de circuitos (lemas de Kirchoff).

Tema 7: Introducción a la variación temporal arbitraria. (0,4 crd.).

Potenciales retardados. Ecuaciones de segundo orden de los potenciales y de los campos. Variación sinusoidal.

1.1 Sistemas de coordenadas

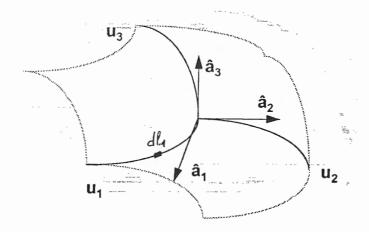
Un sistema de coordenadas utiliza la representación de cada punto como intersección de tres superficies mutuamente ortogonales:

$$u_1 = cte$$

$$u_2 = cte$$

$$u_3 = cte$$

Estas superficies se llaman superficies coordenadas del sistema.



Las líneas de intersección de las superficies coordenadas se llaman curvas coordenadas y en cada punto son ortogonales entre sí.

Los vectores unitarios tangentes a las curvas coordenadas, \hat{a}_1 , \hat{a}_2 y \hat{a}_3 son siempre ortogonales entre sí y forman la base para representar cualquier vector en el sistema de coordenadas:

$$\vec{B} = B_1 \hat{a}_1 + B_2 \hat{a}_2 + B_3 \hat{a}_3$$

En general los vectores unitarios cambian de dirección punto a punto en el espacio.

Es importante destacar que, en general, las coordenadas no representan distancias, es decir:

$$dl_1 \neq du_1$$
 $dl_2 \neq du_2$ $dl_3 \neq du_3$

por lo que para medir distancias a lo largo de curvas coordenadas es necesario utilizar unos factores de proporcionalidad llamados factores de escala:

$$dl_1 = h_1 du_1$$
 $dl_2 = h_2 du_2$ $dl_3 = h_3 du_3$

de forma que:

$$d\vec{l} = dl_1\hat{a}_1 + dl_2\hat{a}_2 + dl_3\hat{a}_3 = h_1du_1\hat{a}_1 + h_2du_2\hat{a}_2 + h_3du_3\hat{a}_3$$

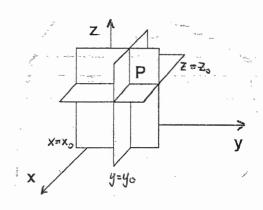
Los sistemas de coordenadas de utilización más frecuente son el Cartesiano, Cilíndrico y el Esférico que describimos con detalle en las siguientes páginas.

Atención: Esto va a ser muy importante en lo que sigue

1.2 Sistemas de coordenadas cartesianas

En este sistema las superficies coordenadas son:

- Planos x = cte
- Planos y = cte
- Planos z = cte



Definición de coordenadas

 $x \equiv$ distancia del punto P al plano YZ paralela al eje x.

 $y \equiv$ distancia del punto P al plano XZ paralela al eje y.

 $z \equiv$ distancia del punto P al plano XY paralela al eje z.

Rangos de variación de las coordenadas:

$$-\infty < \chi < \infty$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$-\infty < z < \infty$$

Definición de los vectores unitarios

 $\hat{x} = \text{vector unitario paralelo al eje } X \text{ y sentido al eje } X \text{ positivo.}$

 \hat{y} = vector unitario paralelo al eje Y y sentido al eje Y positivo.

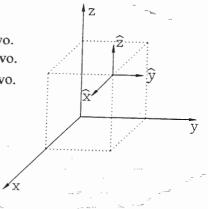
 $\hat{z} = \text{vector unitario paralelo al eje } Z \text{ y sentido al eje } Z \text{ positivo.}$

Siempre se cumple $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$

Esto quiere decir que siempre "apuntan" en la misma dirección y sentido

> $h_1 = 1$ $h_2 = 1$ $h_3 = 1$

Los tres vectores unitarios cartesianos son constantes.



Relaciones importantes

Vector posición $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

En este caso los fac-Diferencial de longitud: $d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$ tores de escala son:

$$dl = |d\vec{l}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\begin{cases} x = cte \implies d\vec{S}_x = dy \ dz \ (\pm \hat{x}) \end{cases}$$

 $\begin{cases} y = cte \implies d\vec{S}_y = dx dz (\pm \hat{y}) \end{cases}$ Diferenciales de superficie:

$$z = cte \implies d\vec{S}_z = dx dx (\pm \hat{z})$$

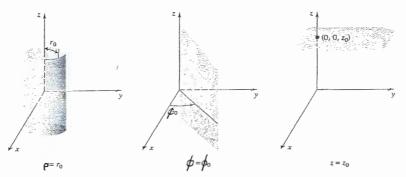
El diferencial de volumen es siempre un escalar

Diferencial de volumen: dV = dx dy dz

1.3 Sistema de coordenadas cilíndricas

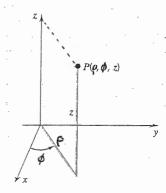
En este sistema las superficies coordenadas son:

- Planos z = cte
- Semiplanos que contienen al eje z y forman un ángulo ϕ con el semiplano XZ.
- Cilindros de eje z y radio ρ



Definición de las coordenadas

- $\rho =$ distancia del punto P al eje z paralela al plano XY.
- $\phi =$ ángulo que forma la semirrecta que une el origen con la proyección del punto P sobre el plano XY y el eje X positivo.
- $z \equiv$ igual que en cartesianas.



Rangos de variación de las coordenadas:

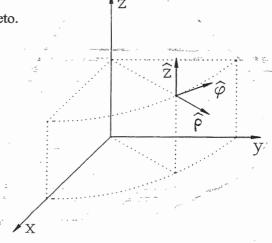
$$0 \le \rho < \infty$$
$$0 \le \phi < 2\pi$$
$$-\infty < z < \infty$$

Definición de los vectores unitarios

- $\hat{\rho}$ = vector perpendicular al cilindro centrado en el eje z que pasa por dicho punto P y saliente hacia fuera.
- $\hat{\phi}$ = vector tangente al cilindro y paralelo al plano XY que pasa por el punto P y tiene sentido antihorario.
- $\hat{z} \equiv \text{vector unitario en el sentido del eje } z \text{ positivo.} \quad \hat{z} = \hat{\rho} \times \hat{\phi}$

Esto quiere decir que en cada lugar "apuntan" en una dirección distinta Importante: los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ son variables.

Dependen de las coordenadas de cada punto concreto.



Ojo: El vector posición también depende de ϕ a través de $\hat{
ho}$

En este caso los factores de escala son:

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = \rho$$

$$h_3 = 1$$

Relaciones importantes

Vector posición $\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$

Diferencial de longitud: $d\vec{l} = d\rho \,\hat{\rho} + \rho d\phi \,\hat{\phi} + dz \,\hat{z}$ $dl = |d\vec{l}| = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2}$

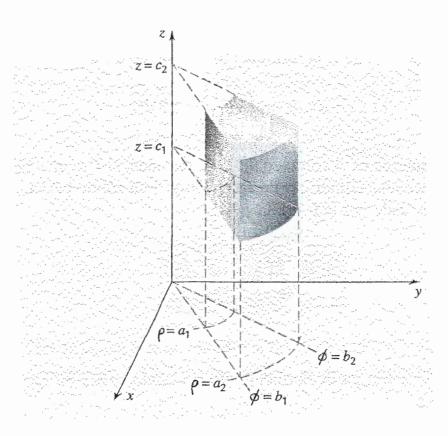
$$\int \rho = cte \implies d\vec{S}_{\rho} = \rho \, d\phi \, dz \, (\pm \hat{\rho})$$

 $\begin{cases} \phi = cte \implies d\vec{S}_{\phi} = d\rho dz \ (\pm \hat{\phi}) \\ \\ z = cte \implies d\vec{S}_{z} = \rho d\rho d\phi \ (\pm \hat{z}) \end{cases}$ Diferenciales de superficie:

$$z = cte \implies d\vec{S}_z = \rho d\rho d\phi (\pm \hat{z})$$

El diferencial de volumen es siempre un escalar

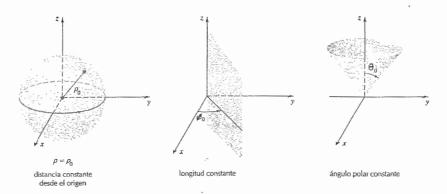
Diferencial de volumen: $dV = \rho d\rho d\phi dz$



1.4 Sistema de coordenadas esféricas

En este sistema las superficies coordenadas son:

- Semiplanos que contienen al eje z y forman un ángulo ϕ con el semiplano XZ.
- Esferas con centro el origen y radio r
- Conos de eje el z, vértice en el origen y ángulo θ con el semieje z positivo.



 ϕ es igual que en cilíndricas

Definición de las coordenadas

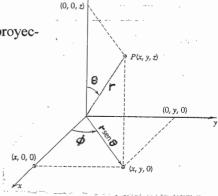
 $r \equiv$ distancia del punto P al origen.

 ϕ = ángulo que forma la semirrecta que une el origen con la proyección del punto P sobre el plano XY y el eje X positivo.

 θ = ángulo mínimo que forma \vec{r} con el eje z positivo.

Rangos de variación de las coordenadas:

$$0 \le r < \infty$$
$$0 \le \phi < 2\pi$$
$$0 \le \theta < \pi$$



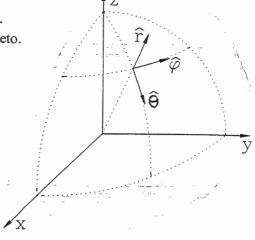
Definición de los vectores unitarios

- \hat{r} = vector perpendicular a la esfera centrada en el origen que pasa por el punto P y saliente hacia fuera.
- $\hat{\phi}$ = vector tangente al cilindro y paralelo al plano XY que pasa por el punto P y tiene sentido antihorario (igual que en cilíndricas).
- $\hat{\theta}$ = vector perpendicular a la superficie lateral del cono que pasa por el punto P y saliente hacia fuera.

Esto quiere decir que en cada lugar "apuntan" en una dirección distin-

Este vector es igual que el de cilíndricas

Importante: los vectores \hat{r} , $\hat{\phi}$ y $\hat{\theta}$ son variables. Dependen de las coordenadas de cada punto concreto.



Ojo: El vector posición también depende de ϕ y θ a través de \hat{r}

En este caso los factores de escala son:

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = r$$

$$h_3 = r \operatorname{sen} \theta$$

Relaciones importantes

Vector posición $\vec{r} = r\hat{r}$

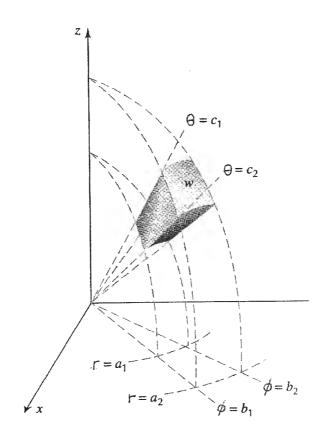
Diferencial de longitud:
$$d\vec{l} = dr \, \hat{r} + r d\theta \, \hat{\theta} + r \sec\theta d\phi \, \hat{\phi}$$

$$dl = |d\vec{l}| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sec^2\theta d\phi^2}$$

$$\begin{cases} r = cte \implies d\overrightarrow{S_r} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, (\pm \hat{r}) \end{cases}$$

Diferenciales de superficie:
$$\begin{cases} \theta = cte \implies d\overrightarrow{S_{\theta}} = r \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\phi \, (\pm \hat{\theta}) \\ \\ \phi = cte \implies d\overrightarrow{S_{\phi}} = r \, dr \, d\theta (\pm \hat{\phi}) \end{cases}$$

Diferencial de volumen: $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$



1.5 Relaciones entre las coordenadas en cartesianas, cilíndricas y esféricas

	Cartesiano	Cilíndrico	Esférico
Cartesiano		$x = \rho \cos \phi$ $y = \rho \sin \phi$ $z = z$	$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi$ $y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$ $z = r \cos \theta$
Cilíndrico	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ $z = z$		$\rho = r \operatorname{sen} \theta$ $\phi = \phi$ $z = r \cos \theta$
Esférico	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ $\phi = \phi$	

1.6 Expresiones de los vectores unitarios en los diversos sistemas

	Cartesiano	Cilíndrico	Esférico
Cartesiano		$\hat{x} = \cos\phi \hat{\rho} - \sin\phi \hat{\phi}$ $\hat{y} = \sin\phi \hat{\rho} + \cos\phi \hat{\phi}$ $\hat{z} = \hat{z}$	$\hat{x} = \operatorname{sen}\theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \operatorname{sen}\phi \hat{\phi}$ $\hat{y} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \hat{r} + \cos \theta \operatorname{sen}\phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$ $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \operatorname{sen}\theta \hat{\theta}$
Cilíndrico	$\hat{\rho} = \cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}$ $\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$ $\hat{z} = \hat{z}$		$\hat{\rho} = \operatorname{sen} \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$ $\hat{\phi} = \hat{\phi}$ $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \operatorname{sen} \theta \hat{\theta}$
Esférico	$\hat{r} = \operatorname{sen}\theta \cos\phi \hat{x} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$ $\hat{\theta} = \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \operatorname{sen}\phi \hat{y} - \operatorname{sen}\theta \hat{z}$ $\hat{\phi} = -\operatorname{sen}\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$	$\hat{r} = \operatorname{sen} \theta \hat{\rho} + \operatorname{cos} \theta \hat{z}$ $\hat{\theta} = \operatorname{cos} \theta \hat{\rho} - \operatorname{sen} \theta \hat{z}$ $\hat{\phi} = \hat{\phi}$	

1.7 Operadores vectoriales

1.7.1 Gradiente

El gradiente opera siempre sobre un campo escalar y devuelve un campo vectorial.

Cartesianas
$$\left| \operatorname{grad} V = \nabla V \right| = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Cilindricas
$$\operatorname{grad} V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Esféricas
$$\operatorname{grad} V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial V}{\partial z \phi} \hat{\phi}$$

1.7.2 Divergencia

La divergencia opera siempre sobre un campo vectorial y devuelve un campo escalar

Cartesianas
$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Cilíndricas
$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial A_{z}}{\partial z}$$

Esféricas
$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

1.7.3 Rotacional

Cartesianas
$$| \cot \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\text{Cilindricas} \quad \text{rot} \, \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\dot{\rho}}{\rho} & \hat{\phi} & \frac{\ddot{z}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_{\rho} & \rho A_{\phi} & A_{z} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{z}}{\partial \phi} - \frac{\partial A_{\phi}}{\partial z} \right) \hat{\rho} \, + \left(\frac{\partial A_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} \, + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_{\phi})}{\partial \rho} - \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$

Esféricas
$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{r}}{r^2 \operatorname{sen} \theta} & \frac{\theta}{r \operatorname{sen} \theta} & \frac{\phi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_{\theta} & r \operatorname{sen} \theta A_{\phi} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial (A_{\phi} \operatorname{sen} \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_{r}}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_{\phi})}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial A_{r}}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

1.7.4 Laplaciana

Definimos el operador Laplaciano como "la divergencia del gradiente de un campo escalar", es decir:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi$$

que en los distintos sistemas de coordenadas se calcula como sigue:

Cartesianas
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cilíndricas
$$\Delta V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Esféricas
$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Si nos piden aplicar la Laplaciana sobre un campo vectorial lo que haremos será aplicarla a cada una de sus componentes, es decir:

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \hat{x} + \Delta A_y \hat{y} + \Delta A_z \hat{z}$$

una vez hecho esto, aplicamos las fórmulas descritas más arriba para la Laplaciana de un campo escalar.

Además, una fórmula útil para la Laplaciana de un campo vectorial es:

$$\Delta \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$$

1.7.5 Operadores vectoriales en coordenadas genéricas

Estas expresiones genéricas no se utilizan en la práctica

$$\operatorname{grad} V = \nabla V = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \hat{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \hat{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} \hat{a}_3$$

$$\operatorname{div} V = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{a}_{1}}{h_{1}h_{2}} & \frac{\hat{a}_{2}}{h_{3}h_{1}} & \frac{\hat{a}_{3}}{h_{1}h_{2}} \\ \frac{\partial}{\partial u_{1}} & \frac{\partial}{\partial u_{2}} & \frac{\partial}{\partial u_{3}} \\ A_{1}h_{1} & A_{2}h_{2} & A_{3}h_{3} \end{vmatrix}$$

El gradiente, la divergencia y el rotacional en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas son casos particulares de éstos. Basta con sustituir los factores de escala correspondientes de cada sistema.

1.8 Campos solenoidales y campos rotacionales

En el punto anterior hemos visto cómo se calcula de forma práctica el gradiente, la divergencia y el rotacional. Pasamos ahora a ver su interpretación física.

Gradiente

- Marca la variación de un campo escalar en todas las direcciones del espacio.
- La máxima variación en valor absoluto de un campo escalar en un punto dado será siempre en la dirección del vector gradiente.
- La mínima variación en valor absoluto será siempre en la dirección perpendicular al vector gradiente.

Divergencia

Sea un campo vectorial \vec{B} .

- La divergencia de \bar{B} nos indica la presencia de fuentes escalares (también llamadas fuentes de tipo divergencia).
- Si $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ sabemos que:
 - \vec{B} es un campo de tipo solenoidal
 - Sus líneas de campo son cerradas.
 - No tiene fuentes escalares (de tipo divergencia).
- Si $\nabla \cdot \vec{B} > 0$ entonces hay una fuente del campo.
- Si $\nabla \cdot \vec{B} < 0$ entonces hay un sumidero.

Rotacional

Sea un campo vectorial \vec{E} .

- El rotacional de \vec{E} nos indica la presencia de fuentes vectoriales (también llamadas fuentes de tipo rotacional).
- Si $\nabla \times \vec{E} = 0$ sabemos que:
 - \vec{E} es un campo de tipo conservativo o irrotacional.
 - No tiene fuentes vectoriales (de tipo rotacional).

1.9 Definiciones y Teoremas

Línea de campo

Sea un campo vectorial \vec{A} . Una **línea de campo** es una línea imaginaria y orientada tal que el campo \vec{A} al que representa es tangente a ella en todos sus puntos.

Flujo a través de una superficie

 $d\vec{S}$ dependerá de las coordenadas que utilicemos

Sea \vec{A} un campo vectorial y $d\vec{S} = dS\hat{n}$ un diferencial de superficie donde \hat{n} es el vector normal a la superficie en cada punto. Definimos el **flujo** de \vec{A} de a través de S como:

$$\phi_A = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$
 , si la superficie S es abierta

$$\phi_A = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$
 , si la superficie S es cerrada

Matemáticamente se trata de una integral de línea

dl dependerá de las coordenadas que utilicemos

Circulación a lo largo de una curva

Sea \vec{A} un campo vectorial y $d\vec{l}$ un diferencial de longitud cuya dirección es tangente a la curva C en cada punto. Definimos la **circulación** (integral de línea) de \vec{A} a lo largo de C como:

$$C_A = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$
 , si la curva C es abierta

$$C_{\scriptscriptstyle A} = \oint_{\cal C} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$
 , si la curva ${\cal C}$ es cerrada

 $\overline{\text{OJO:}}$ En las preguntas cortas a veces piden una integral de línea que NO es una circulación. En concreto, dada una curva C cualquiera que empieza en A y acaba en B, suelen pedir:

$$\int_{A}^{B} dl = \text{Longitud de la curva } C.$$

$$\int_{A}^{B} d\vec{l} = \text{Vector que une } A \text{ con } B \text{ (con la punta en } B \text{)}.$$

Si la curva es cerrada entonces A y B son el mismo punto y en ese caso el vector sería nulo

Teorema de Gauss (de la divergencia)

Sea S la superficie cerrada que encierra al volumen V. Se cumple que: "la integral de superficie de \vec{A} sobre S es igual a la integral de volumen de la divergencia de \vec{A} en V". Es decir:

$$\iint_{S} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V} \nabla \cdot \vec{A} \ dV$$

donde $d\vec{S}$ siempre es saliente del volumen.

El teorema de Gauss convierte integrales de flujo en integrales de volumen y viceversa a través de la divergencia

Teorema de Stokes (del rotacional)

Sea S cualquier superficie abierta que se apoya en la curva C. Se cumple que: "La circulación de \vec{A} a lo largo de C es igual a la integral de se superficie del rotacional de S". Es decir:

$$\oint_{C} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

El teorema de Stokes convierte integrales de flujo en integrales de línea y viceversa a través del rotacional

TEMA 2: ECUACIONES GENERALES

Importante: La densidad de carga es una magnitud escalar

2.1 Densidad de carga

Densidad volumétrica de carga

$$\rho = \frac{dq}{dV} \text{ (C/m}^3) \quad \Rightarrow \quad Q_T = \iiint_V \rho \, dV \quad \text{(C)}$$

Densidad superficial de carga

$$\rho_S = \sigma = \frac{dq}{dS} \text{ (C/m}^2) \quad \Rightarrow \quad Q_T = \iint_S \rho_S \, dS \quad \text{(C)}$$

Densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$
 (C/m) \Rightarrow $Q_T = \int_C \lambda \, dl$ (C)

 $dl = |d\vec{l}|$

 $dS = |d\overline{S}|$

Carga puntual

$$Q_T = q$$
 (C)

Importante: La densidad de corriente es una magnitud vectorial

Fíjate que las unidades de la densidad volumétrica de corriente son amperios entre metro cuadrado (no metro cú-

2.2 Densidad de corriente

Densidad volumétrica de corriente

$$\vec{J}_V = \frac{dq}{dS dt} \hat{n} \quad (A/m^2) \qquad \Leftrightarrow \qquad I_T = \iint_S \vec{J}_V d\vec{S} = \iint_S J_V \hat{n} \cdot dS \hat{n} = \iint_S J_V dS \quad (A)$$

En particular, si la densidad de corriente es constante y la superficie conocida tenemos que:

$$I_T = \iint_S J_V dS = J_V \iint_S dS = J_V \cdot S$$
 (A) $\Leftrightarrow \vec{J}_V = \frac{I}{S} \hat{n}$ (A/m²)

El vector \hat{n} apunta en la dirección en que

circula la corriente

bico)

Densidad superficial de corriente

$$\vec{J}_S = \frac{dq}{dl \, dt} \, \hat{n} \quad \text{(A/m)} \qquad \Leftrightarrow \qquad I_T = \int_C \vec{J}_S \, d\vec{l} = \int_C J_S \hat{n} \cdot dl \, \hat{n} = \int_C J_S dl \quad \text{(A)}$$

En particular, si la densidad de corriente es constante y la curva conocida tenemos que:

$$I_T = \int_C J_S dl = J_S \int_C dl = J_S \cdot l \quad (A) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{J}_S = \frac{I}{l} \, \hat{n} \quad (A/m)$$

Además, para la densidad superficial, hay otro caso interesante y bastante habitual: se produce cuando tenemos una superficie con una densidad superficial de carga ρ_S que se mueve a una velocidad ν . Cuando suceda esto utilizaremos la siguiente expresión:

$$\vec{J}_{S} = \rho_{S} v \hat{n}$$

2.3 Ecuaciones de Maxwell

Ecuaciones en forma diferencial

Ecuaciones en forma integral

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\oint_C \vec{H} \, d\vec{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} \oiint_S \vec{D} \, d\vec{S} \quad \text{(Ley de Ampere)}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\oint_C \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{(Ley de Faraday)}$$

 \vec{D} es solenoidal en aquellas regiones donde no hay densidad de carga

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\iint_{S} \vec{D} \, d\vec{S} = Q_{T} \quad \text{(Ley de Gauss)}$$

$$\vec{B}$$
 es siempre solenoi- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\iint_S \vec{B} \, d\vec{S} = 0$$

2.4 Ecuaciones de continuidad

Condición de salto para la inducción magnética B

$$\left. \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \right|_{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B_{1N} = B_{2N}$$

Las componentes normales de \vec{B} son continuas a través de la superficie de separación de dos medios.

Condiciones de salto para la inducción eléctrica D

$$|\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)|_S = \rho_S \iff D_{2N}-D_{1N} = \rho_S$$

Las componentes normales de \vec{D} son continuas a través de la superficie de separación de dos medios a no ser que en dicha superficie exista una densidad superficial de carga, en cuyo caso dichas componentes son discontinuas en el valor de dicha densidad superficial.

Condiciones de salto de E

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_{S} = 0 \iff E_{2T} = E_{1T}$$

Las componentes tangenciales de \vec{E} son continuas a través de la superficie de separación de dos medios.

Condiciones de salto de H

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_{S} = 0 \iff H_{2T} = H_{1T}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_{S} = \vec{J}_{S}$$

Las componentes tangenciales de \vec{H} son continuas a través de la superficie de separación de dos medios salvo que exista una densidad superficial de corriente.

Ejercicio tipo del tema 2 2.5 Cálculo de las fuentes de un campo eléctrico o magnético

Importante: Un campo eléctrico puede ser creado por varias distribuciones de carga a la vez

Fuentes del campo eléctrico

Dado un campo eléctrico \vec{E} nos interesa saber qué distribuciones de carga crean ese campo eléctrico (fuentes del campo eléctrico). Las distribuciones de carga pueden ser volumétricas, superficiales, lineales o puntuales. Cada una de estas distribuciones se calcula de manera distinta:

Para detectar distribuciones volumétricas de carga ρ utilizamos la ley de Gauss en forma diferencial:

$$\rho = \nabla \cdot \vec{D}$$

Para detectar distribuciones superficiales de carga utilizamos la ecuación de continuidad de D:

$$\rho_S = \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{S}$$

Normalmente si hay una densidad lineal de carga suele estar en un eje.

Para detectar distribuciones lineales de carga tenemos que descubrir alguna curva o línea a lo largo de la cual el campo se hace infinito.

Normalmente si hay una carga puntual suele estar situada en el origen

Para detectar cargas puntuales tenemos que descubrir algún punto en el cual el campo se haga infinito. Para calcular el valor de esa carga puntual utilizaremos el teorema de Gauss rodeando el punto con una esfera gaussiana de radio R genérico, tras ello hacemos la esfera gaussiana tan pequeña como sea posible, para ello hacemos tender su radio a cero:

$$Q_T = \iint_S \vec{D} \, d\vec{S} \implies q(0) = \lim_{R \to 0} \iint_S \vec{D} \, d\vec{S}$$

Importante: Un campo magnético puede ser creado por varias distribuciones de corriente a la vez

Fuentes del campo magnético

Dado un campo magnético \vec{H} nos interesa saber qué distribuciones de corriente crean ese campo magnético (fuentes del campo magnético). Las distribuciones de corriente pueden ser volumétricas, superficiales o filiformes. Cada una de estas distribuciones se calcula de manera distinta:

Para detectar distribuciones volumétricas de corriente utilizamos la ley de Ampere en forma diferencial:

Jr = PxH - Devided and

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

Para detectar distribuciones superficiales de corriente utilizamos la ecuación de continuidad del campo magnético \vec{H} :

$$\vec{J}_S = \left. \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \right|_S$$

Para detectar distribuciones filiformes de corriente tenemos que descubrir alguna curva o línea a lo largo de la cual el campo se hace infinito. En ese caso procedemos análogamente al campo eléctrico para detectar cargas puntuales, es decir, rodeamos la línea con una curva de ampere de radio R genérico y después hacemos tender R a cero:

$$\oint_C \vec{H} \, d\vec{l} = I \quad \Rightarrow \quad I = \lim_{R \to 0} \oint_C \vec{H} \, d\vec{l}$$

2.6 Campo electromagnético

El campo electromagnético es un conjunto de cuatro campos:

 $\vec{E} \equiv \text{Intensidad de campo eléctrico o campo eléctrico.} (V/m)(N/C)$

 $\vec{D} \equiv \text{Inducción eléctrica o desplazamiento eléctrico.} (C/m^2)$

 $\vec{H} \equiv \text{Intensidad de campo magnético.} (A/m)$

 $\vec{B} \equiv \text{Inducción magnética o densidad de flujo magnético.}$ $(T) (Wb/m^2)$

 $ec{B}$ tambien se le llama campo magnético

2.7 Parametros que caracterizan a los medios

Los medios se caracterizan por tres parámetros:

• $\varepsilon = \text{Permitividad o constante dieléctrica del medio } (F/m) (C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2})$

Se cumple que: $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

donde $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} = 8,84 \cdot 10^{-12}$ Permitividad del vacío $\varepsilon_r \equiv$ Permitividad relativa del medio (adimensional) $\varepsilon_r \ge 1$

F= Faradio

H= Henrio

En realidad $\mu_r \approx 1$ excepto para un tipo de materiales llamados ferromagnéticos. Por ello tomaremos siempre $\mu_r = 1$ salvo que nos digan expresamente lo contrario

• $\mu \equiv \text{Permeabilidad}$ o constante magnética del medio $(H/m)(N/A^2)$

se cumple que: $\mu = \mu_r \mu_0$

donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,56 \cdot 10^{-7}$ Permeabilidad del vacío $\mu_r \equiv$ Permeabilidad relativa del medio (adimensional)

• $\sigma \equiv$ Conductividad del medio (\mathfrak{O}/m)

Tenemos tres tipo de medios en cuanto a su conductividad se refiere:

- $\sigma = 0$ Aislante o dieléctrico perfecto.
- $\sigma = \infty$ Conductor perfecto
- $0 < \sigma < \infty$ Resto de los materiales (conductores reales, semiconductores, etc...)

Si nos hablan de un conductor sin especificar nada más entenderemos que se refieren a un conductor perfecto, si no, nos tendrían que dar como dato su conductividad o

Los conductores perfectos ($\sigma = \infty$) tienen una serie de importantes propiedades:

- Si un conductor está cargado (carga neta no nula) toda la carga se sitúa en su superficie.
- El campo eléctrico \vec{E} en el interior de un conductor es siempre nulo.
- El potencial en un conductor es siempre constante e igual al valor que toma en su superficie.
- En la superficie del conductor el vector campo eléctrico es normal a la superficie.

2.8 Tipos de medios

Existen tres clasificaciones para los medios en los que existe campo electromagnético:

La isotropía, homogeneidad y linealidad son fenómenos independientes

Los tensores utilizan en

CEM₁

Isótropo o anisótropo

Isótropo: Las características del medio varían por igual en todas las direcciones del espacio. Esto implica que \vec{D} es paralelo a \vec{E} y \vec{H} es paralelo a \vec{B} siempre.

Anisótropos: Los campos \vec{D} , \vec{E} , \vec{H} y \vec{B} son solo paralelos a lo largo de ciertas direcciones. En estos medios $\varepsilon = \overline{\overline{\varepsilon}}$ y $\mu = \overline{\mu}$ son tensores (matrices) en vez de números.

• Homogéneo o no homogéneo

Homogéneo: Las características del medio no dependen de las coordenadas de los distintos puntos. Sus propiedades físicas son iguales en todos los puntos. En estos medios ε, μ y σ son constantes.

No homogéneo: Las características del medio sí dependen del punto. En este caso los párametros $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r}), \ \mu = \mu(\vec{r}), \ \sigma = \sigma(\vec{r})$ son dependientes de la posición, no son constantes.

Lineal o no lineal

Lineal: En los medios lineales se cumple que

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

es decir, la relación entre \vec{D} y \vec{E} es lineal y la relación entre \vec{B} y \vec{H} es lineal.

No lineal: Las relaciones constitutivas no tienen por qué ser lineales (ε puede incluso depender del campo \vec{E} , $\varepsilon = \varepsilon(\vec{E})$).

Además de lo anterior para medios no lineales se definen las siguientes magnitudes,

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E}$$
 (C/m²) Polarización eléctrica donde $\varepsilon_r - 1 = \chi_e$ recibe el nombre de susceptibilidad eléctrica (adimensional).

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \frac{\mu \vec{H}}{\mu_0} - \vec{H} = \left(\frac{\mu_r \mu_0}{\mu_0} - 1\right) \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H} \ (A/m)$$
 Magnetización

donde $\mu_r - 1 = \chi_m$ recibe el nombre de susceptibilidad magnética (adimensional).

2.9 Ecuación de continuidad y ley de conservación de la carga

La ley de conservación de la carga (o ecuación de continuidad) se puede expresar en forma integral o en forma diferencial:

$$\nabla \vec{J}_V + \frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad \qquad \oiint \vec{J}_V \, d\vec{S} \, + \, \frac{dQ}{dt} = 0$$

donde ρ (C/m³) es una densidad volumétrica de carga.

Relaciones constitutivas del medio

Especialmente útil para

el tema 4

2.10 Ley de Ohm generalizada

Especialmente útil para el tema 4

Tercera relación constitutiva del medio

Esta ecuación junto con las dos enunciadas en el punto 2.7 forman las tres ecuaciones constitutivas del medio:

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

2.11 Teorema de Poynting

Este teorema se estudia con mucho más detalle en CEM1

Consideremos un volumen V rodeado por una superficie S. Suponemos que en V hay un campo electromagnético y que el medio tiene una conductividad σ . Se define como teorema de Poynting a la siguiente expresión:

$$\iint_{S} \vec{P} \, d\vec{S} + \frac{d}{dt} (W_e + W_m) + P_d = 0$$

Donde:

Se ve en el tema 3

Se ve en el tema 5

 $W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV$ Energía electrostática en el volumen V

 $W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} \, dV$ Energía magnetostática en el volumen V

 $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ Vector de Poynting

 $\iint_{S} \vec{P} \, d\vec{S} = \iint_{S} \vec{E} \times \vec{H} \, d\vec{S}$ Flujo del vector de Poynting a través de la superficie S

 $P_d = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV$ Potencia disipada en el volumen V

El teorema de Poynting expresa la ley de conservación de la energía estableciendo que la disminución de energía electromagnética en una región se debe a disipación de potencia en forma de calor (efecto Joule) y al flujo hacia el exterior del vector de Poynting.

$$\underbrace{\iint_{S} \vec{P} \, d\vec{S}}_{\text{Potencia radiada}} + \underbrace{P_{d}}_{\text{Potencia disipada}} = \underbrace{-\frac{d}{dt} (W_{e} + W_{m})}_{\text{Disminución de energía}}$$

Dicho de otra forma, la energía electromagnética que genera un campo electromagnético se "utiliza" para dos cosas:

- potencia disipada dentro del volumen V (potencia que se "pierde").
- potencia radiada a través de la superficie S (potencia que se transmite).

TEMA 3: ELECTROSTÁTICA

3.1 Introducción

Partimos de las ecuaciones de Maxwell enunciadas en el tema anterior:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

Una situación electrostática se caracteriza por:

- No hay variación temporal: $\frac{d}{dt} = 0$
- No hay movimientos de cargas: $\vec{J} = 0$

Por tanto las ecuaciones de Maxwell para situación electrostática quedan de la siguiente manera:

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

delnostática

Según estas ecuaciones el campo magnético queda:

Por tanto estudiaremos el campo eléctrico en ausencia de campo magnético. Para el campo eléctrico tenemos que

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

Esto nos informa de que, en situación electrostática, la única fuente de campo eléctrico son las cargas.

En general, la otra fuente de campo eléctrico es la variación temporal de \vec{B} , pero en electrostática, como \vec{B} es nulo está fuente no existe.

3.2 Potencial eléctrico

3.2.1 Definición

Al ser el campo eléctrico conservativo o irrotacional, $\nabla \times \vec{E} = 0$, sabemos que existe una función potencial asociada que llamaremos **potencial eléctrico** Φ y que se relaciona con el campo de la siguiente forma:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi = -\int \vec{E} \, d\vec{l}$$

La integral indefinida devuelve una constante que debemos calcular fijando un origen de potenciales

Integral definida que ya no tiene término constante

Potencial de A a B

3.2.2 Observaciones

- El potencial eléctrico se mide en voltios.
- El potencial eléctrico es una magnitud escalar.
- Debemos ser nosotros los que fijemos en cada caso el origen de potenciales. El origen de potenciales se tiene que situar en un punto donde no haya carga. Normalmente se elige el infinito (siempre que no hay carga allí, por ejemplo un plano infinito de carga)
- Una vez fijado el origen de potenciales el potencial en un punto A queda definido como:

$$\Phi(A) = -\int_{origen}^{A} \vec{E} \, d\vec{l}$$

y el potencial entre dos puntos A y B queda definido como:

$$\Phi(A) - \Phi(B) = \Phi_{AB} = -\int_{B}^{A} \vec{E} \, d\vec{l}$$

• El potencial eléctrico es siempre <u>una función continua</u> en todo punto. Por tanto en cualquier punto x = a donde hay un cambio de medio se cumple que:

$$\Phi(x=a^-) = \Phi(x=a^+)$$

• En el caso frecuente de problemas con discontinuidades de medio y/o densidades superficiales de carga se ha visto que pueden presentarse discontinuidades de las componentes normales del campo. Si se pretende utilizar el potencial como herramienta intermedia para obtener el campo, cabe preguntarse acerca de sus posibles discontinuidades en las mencionadas superficies. A partir de las condiciones de salto del campo podemos deducir las del potencial:

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{S} &= \rho_S \qquad \Rightarrow \qquad \left(\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right) \Big|_{S} &= \rho_S \\ \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_{S} &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) \Big|_{S} &= \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) \Big|_{S} \end{aligned}$$

o sea, las derivadas tangenciales son continuas pero las normales pueden no serlo.

> El potencial eléctrico en un punto representa la energía potencial eléctrica por unidad de carga en ese punto:

$$V = \frac{E_p}{q} \quad \Rightarrow \quad E_p = qV$$

- Las cargas tienden siempre a tener menor energía potencial eléctrica. Por eso las cargas positivas tienden a los potenciales decrecientes y las cargas negativas tienden a los potenciales crecientes.
- Asimismo, El campo \vec{E} tiene el sentido de los potenciales decrecientes, esto es, las líneas de campo van de los potenciales mayores a los potenciales menores.

3.3 Métodos prácticos para el cálculo de E y Φ

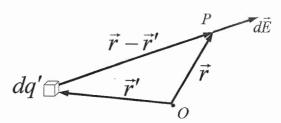
3.3.1 Integrales de superposición (aportaciones infinitesimales)

Aplicaremos este método habitualmente cuando nos pidan el campo eléctrico o el potencial en un punto concreto o en un eje.

 \vec{r} = vector de posición del punto donde quiero calcular el campo

 $\vec{r}' \equiv$ vector de posición de un diferencial de carga genérico dentro de V'

A partir de estos dos vectores definimos: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ $\hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$



"Un diferencial de carga crea un diferencial de

Recuerda:

Recuerda:

 $dS = |d\vec{S}|$

 $dl = |d\vec{l}|$

$$d\vec{E} = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{R}$$

$$d\Phi = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Puntuales

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{R} \qquad \Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

Lineales

$$dq' = \lambda \, dl'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{L'} \frac{\lambda \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon \, |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, dl'$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{l'} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon \, |\vec{r} - \vec{r}'|} dl'$$

Superficiales

$$dq' = \sigma dS'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iint_{S'} \frac{\sigma \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

$$\Phi(\vec{r}) = \iint_{S'} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon \, |\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

Volumétricas

$$dq' = \rho \, dV'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_{\vec{r}} \frac{\rho \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

www.monteroespinosa.es - Clases de ELMG - Tfnos 91 544 53 77, 619 142 355

$$\Phi(\vec{r}) = \iiint_{V'} \frac{\rho}{4\pi\varepsilon \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} dV'$$

Observaciones

- El método de las aportaciones infinitesimales sólo es válido para el caso de distribuciones de carga situadas en recintos finitos.
- El método de las aportaciones infinitesimales se basa en el principio de superposición.

El teorema de Gauss es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell

3.3.2 Teorema de Gauss

Sea una región del espacio donde existe una carga Q_T que, claro está, crea un campo eléctrico. Esta carga puede estar distribuida en el espacio de cualquier forma (distribución lineal, superficial, volumétrica o cargas puntuales). Ahora rodeamos esta carga con una superficie cerrada que llamaremos superficie gaussiana. El teorema de Gauss afirma que:

"el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga contenida en su interior (dividida entre la permitividad del medio)"

Analíticamente se enuncia de la siguiente forma:

$$\iint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{T}$$

En el caso que la permitividad del medio ε sea constante también se puede expresar:

$$\iint_{S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{T}}{\varepsilon}$$

Recuerda que el desplazamiento eléctrico se define como:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Esta última expresión será la que utilizaremos habitualmente.

Observaciones

- El "circulito" de la integral significa que la superficie tiene que ser cerrada.
- El integrando $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ es un producto escalar de dos vectores.
- La carga Q_T representa la carga encerrada dentro de la superficie gaussiana donde se quiere conocer el campo.
- La integral flujo (integral doble) nunca se calcula analíticamente. La estrategia correcta es elegir una superficie gaussiana en la que se cumplan dos condiciones:

Primera: que los vectores \vec{E} y $d\vec{S}$ sean paralelos.

Segunda: que el vector \vec{E} sea constante sobre la superficie gaussiana. Es decir, que el campo eléctrico valga lo mismo en todos los puntos de la superficie gaussiana.

Si ambas condiciones se cumplen entonces se puede razonar de la siguiente forma:

$$\iint_{S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S} E \, dS \cos 0^{\circ} = \iint_{S} E \, dS = E \iint_{S} dS = E S$$

- Este método es únicamente útil cuando el problema tiene una fuerte simetría (sobre todo cilíndrica o esférica). En esos casos es cuando podemos suponer constante el campo en todos los puntos de la superficie y sacarlo fuera de la integral.
- Normalmente aplicaremos Gauss cuando nos pidan el campo eléctrico en una región del espacio y el dato que nos den sea la carga.
- Aplicaremos Gauss cuando nos piden el campo eléctrico en una región del espacio y el dato que nos dan es la carga (no el potencial).

Este razonamiento nos permite evitar la integral de flujo y lo utilizaremos en el 99% de los ejercicios

3.3.3 Ley de Poisson

Para medios lineales y homogéneos:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Demostración:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho \Rightarrow \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \nabla \cdot (-\nabla \Phi) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow -\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Para medios lineales y no homogéneos:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) = -\rho \iff (\nabla \varepsilon) \cdot (\nabla \Phi) + \varepsilon \cdot \Delta \Phi = -\rho$$

Demostración:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho \Rightarrow \nabla \varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \nabla \varepsilon \cdot (-\nabla \Phi) + \varepsilon \nabla \cdot (-\nabla \Phi) = \rho \Rightarrow -(\nabla \varepsilon \cdot \nabla \Phi + \varepsilon \nabla \cdot \nabla \Phi) = \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \nabla \varepsilon \cdot \nabla \Phi + \varepsilon \Delta \Phi = -\rho$$

Observaciones

- Para el caso de medios lineales y homogéneos si además $\rho=0$ nos queda la denominada ecuación de Laplace: $\Delta\Phi=0$.
- Aplicaremos Poisson cuando nos piden el potencial en una región y tenemos datos de potencial (no de carga).

3.3.4 Condiciones de regularidad en el infinito

$$\lim_{r\to\infty}r\cdot\Phi(r)=cte$$

$$\lim_{r\to\infty} r^2 \cdot E(r) = cte$$

Es decir, el campo eléctrico, y también el potencial, de cualquier distribución en puntos muy alejados de la misma deben decrecer al menos como los de una carga puntual.

3.4 Dipolo. Momento dipolar. Potencial y Campo lejanos

3.4.1 Definiciones

Se denomina dipolo a una configuración de dos cargas o distribuciones de carga de igual valor absoluto y de signos opuestos separados una distancia d. En realidad, se llama dipolo a la situación anterior cuando se observan sus efectos a distancias mucho mayores que la separación entre las cargas, $|\vec{r}| >> d$.

Todo dipolo tiene asociado un momento dipolar. Este momento dipolar se calcula de distinta forma según sea la distribución de cargas:

Puntual:

 $\vec{p} = q\vec{d}$ donde \vec{d} es un vector cuyo módulo es la distancia entre las Cargas y su sentido es de la carga negativa a la positiva.

Lineal:

Importante:

negativa

Las integrales están extendidas a todo el dipolo, tanto a la zona

positiva como a la

$$\vec{p} = \int_{l'} \vec{r}' \lambda \, dl'$$

Superficial:

$$\vec{p} = \iint_{S'} \vec{r}' \, \rho_S \, dS'$$

Volumétrica:
$$\vec{p} = \iiint_{\mathcal{C}} \vec{r}' \rho \ dV'$$

Las unidades del momento dipolar son Culombios metro $(C \cdot m)$ en todos los casos.

3.4.2 Campo y potencial en puntos lejanos

Primer caso

Si la carga neta Q de la distribución es distinta de cero el campo y el potencial de la misma en puntos alejados se comporta como el de una carga puntual:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} \qquad \Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

Segundo caso

Sin embargo, si la carga neta es nula, Q = 0, la distribución puede tener un momento dipolar \vec{p} y el potencial lejano comportarse como el de un dipolo. En este caso, el campo y el potencial en puntos alejados de la distribución de cargas vienen dados por las expresiones:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3} \left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right]$$

$$\Phi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \varepsilon r^3}$$

donde:

 $\vec{r} \equiv \text{Vector de posición del punto lejano donde calculamos el campo o el potencial.}$ Normalmente se escribe $\vec{r} = r\hat{r}$ (en esféricas).

 $\vec{p} \equiv$ Momento dipolar eléctrico de la distribución dipolar.

Tercer caso

Si también el momento dipolar \vec{p} fuese cero podrían definirse y calcularse momentos dipolares de orden superior (multipolares). Normalmente esto no nos sucederá.

3.4.3 Desarrollo multipolar del potencial y campo lejano

Vamos a matizar aquí lo explicado en el punto anterior sobre el potencial y campo lejano. Realmente los tres casos que allí aparecen pertenecen a una misma expresión que de denomina desarrollo multipolar. Por ejemplo, para el potencial tenemos que su desarrollo multipolar es:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3} + \dots$$

donde se puede demostrar que cada término de este desarrollo es mucho mayor que los siguientes por lo que una buena aproximación para el potencial lejano vendrá dada por el primer término no nulo de la expresión anterior.

Es importante recalcar que toda distribución de carga puede tener momento dipolar, incluso sin ser un dipolo. De esta forma, si la carga neta Q de la distribución es distinta de cero el potencial de la misma en puntos alejados se comporta como el de una carga puntual. Sin embargo si Q=0, la distribución puede tener un momento bipolar \vec{p} y el potencial lejano comportarse como el de un dipolo. Si también el momento bipolar fuese cero podrían definirse y calcularse momentos dipolares de orden superior (multipolares). Idéntica explicación tiene el campo eléctrico en puntos lejanos.

3.4.4 Momento bipolar de una distribución discreta de cargas

Para obtener el momento bipolar de una distribución discreta de cargas utilizaremos la siguiente expresión:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}' q_i$$

donde \vec{r}' es la posición de cada carga puntual y q_i su valor (incluyendo el signo).

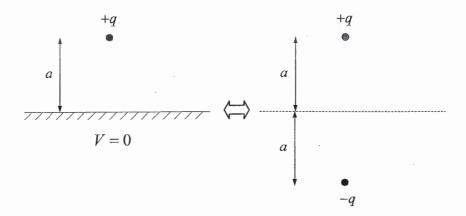
3.5 Método de las imágenes

Este método se utiliza para resolver ciertos problemas electrostáticos mediante otros problemas (problema imagen) que son equivalentes (tienen misma solución) pero que son más fáciles de resolver.

A continuación se enumeran los problemas de imágenes más usuales.

"Plano de masa" se refiere a un plano conductor conectado a tierra (potencial cero)

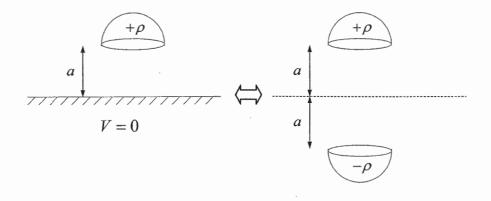
Carga puntual frente a un plano de masa



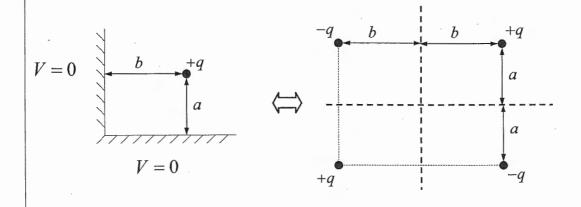
Hemos puesto como ejemplo una distribución volumétrica de carga con forma de semiesfera pero el mismo esquema es válido para distribuciones lineales y

superficiales

Distribución de carga frente a un plano de masa

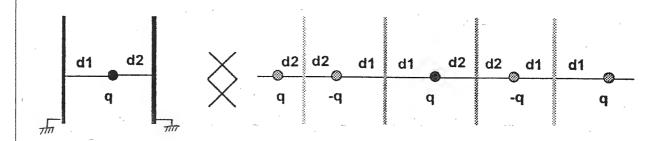


Carga puntual frente a dos planos de masa perpendiculares



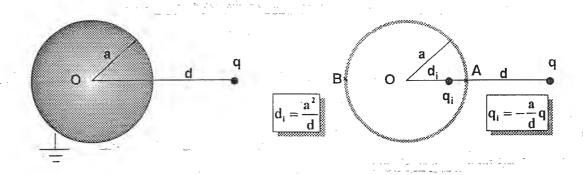
Carga puntual entre dos planos de masa

En este caso para conseguir que los dos planos tengan simultáneamente potencial cero es necesario situar un sistema indefinido de cargas imagen a ambos lados de los planos.



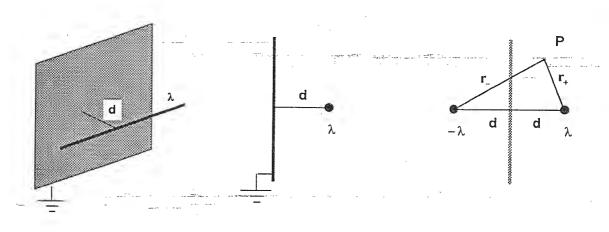
Carga puntual a una distancia d de una esfera de masa de radio a

En este caso se sustituye la esfera de masa por una carga puntual de valor $q_i = -\frac{a}{d}q$ y situada a una distancia $d_i = \frac{a^2}{d}$ del centro de la esfera.



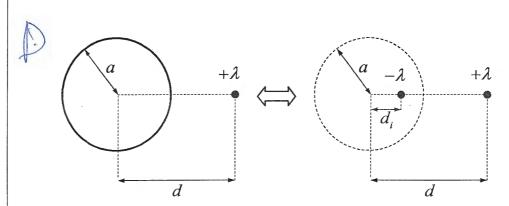
Línea de carga frente a un plano de masa

El plano de masa se sustituye por otra línea de carga paralela a la anterior con densidad lineal de carga $-\lambda$ situada a una distancia d al otro lado del plano.



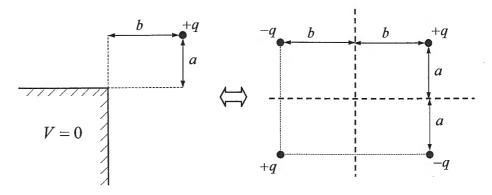
Línea de carga frente a un cilindro conductor

El cilindro conductor se sustituye por otra línea de carga paralela a la anterior con densidad lineal de carga $-\lambda$ situada a una distancia $d_i = \frac{a^2}{d}$ del eje del cilindro. En este caso el cilindro no tiene porqué estar a masa.



Observaciones del método de las imágenes

• Es importante señalar que no todo problema electrostático tiene problema imagen asociado. Para que un problema electrostático tenga problema imagen es necesario que no aparezcan cargas imagen delante del "espejo".



- La solución del problema imagen sólo es válida delante del "espejo". No hay que olvidar que lo que hemos puesto detrás del espejo (cargas imagen) en realidad no existe. Tras el plano de masa el potencial es siempre cero.
- El problema original y el problema imagen siempre tienen la misma carga (generalmente nula).
- El método de las imágenes reemplaza condiciones de contorno difíciles de resolver por cargas imágenes.

En general llamamos "espejo" a la superficie sustituida por las cargas imagen Totalmente teórico (por si lo preguntan en el test)

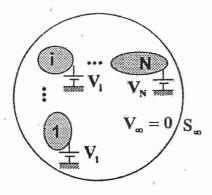
Pronto veremos que un condensador es un sistema de dos conductores

 S_{∞} es la superficie del infinito que está a cero voltios en ambos casos

3.6 Sistemas electrostáticos de conductores

Un sistema electrostático frecuente es el formado por un dieléctrico y un conjunto de conductores. El campo electrostático en los conductores es nulo y por tanto el potencial de los mismos es constante. Las cargas que puedan tener los conductores se han de distribuir como densidades superficiales sobre los mismos.

Cuando se tiene un sistema de N conductores la situación electrostática puede establecerse bien conectando los conductores a las baterías y estableciendo sus potenciales, en cuyo caso el problema será determinar las cargas que éstos toman, o bien depositando cargas q_i en los conductores, en cuyo caso el problema será determinar los potenciales V_i que toman.



 $\vdots S_{i} \cdots S_{N}$ $\vdots S_{i} \cdots S_{N}$ $\vdots S_{i} \cdots S_{N}$

Conductores a potencial cte.

Conductores a carga cte.

En ambas situaciones las cargas (o los potenciales) dependerán de la situación relativa entre los conductores. Si se mueve uno de ellos las cargas (potenciales) de todos cambian. Por tanto los conductores del sistema se influyen mutuamente.

Coeficientes de capacidad

La carga sobre un conductor cualquiera del sistema depende de la tensión de cada conductor y de unos coeficientes:

$$q_i = V_1 C_{i1} + V_2 C_{i2} ... + V_i C_{ii} + ... + V_N C_{iN} = \sum_{k=1}^{N} V_k C_{ik}$$

Donde los coeficientes C_{ik} con i=k se denominan de capacidad propia y los demás se denominan coeficientes de capacidad mutua. Estos coeficientes dependen únicamente de ε y de la geometría.

Si se conoce la carga del conductor i-ésimo el coeficiente C_{ik} se puede calcular como:

$$C_{ik} = \frac{q_i}{V_k} \bigg|_{V_j = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad j \neq k}$$

Es decir, como la relación entre la carga del conductor i-ésimo y el potencial del conductor k-ésimo, cuando todos los conductores excepto el k-ésimo están puestos a potencial cero.

Propiedades

- 1) $C_{ii} = C_{ii}$
- 2) $C_{ii} > 0$
- 3) $C_{ii} < 0$



3.7 Condensadores









3.7.1 Definición

Un **condensador** es un conjunto de dos placas o armaduras (conductoras) separadas por un dieléctrico (no conductor) donde las armaduras están en influencia total, es decir todas las líneas de campo *nacen* en una de ellas y *mueren* en la otra. La carga de un condensador se encuentra en las placas y es del mismo valor pero distinto signo en cada placa. En el dieléctrico de un condensador nunca hay carga.

La capacidad C de un condensador se define como:

$$C = \frac{Q}{V}$$
 (Faradios)

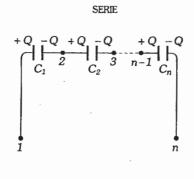
donde Q es la carga de una de las placas y V es la tensión entre las dos placas.

3.7.2 Asociación de condensadores

La asociación de condensadores es al revés que las resistencias

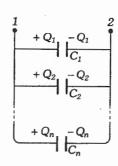
Esta fórmula se utiliza

muy frecuentemente



$$\frac{1}{C} + \frac{Q}{C} \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

PARALELO



$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

3.7.3 Condensador plano

La capacidad de un condensador C de placas planas con superficie S y distancia d entre ellas separadas por un dieléctrico de permitividad ε es:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

La tensión y el campo entre las placas es:

$$\Phi = \frac{V(d-x)}{d}$$

$$\vec{E} = \frac{V}{d}\hat{x}$$

Observación

Para el cálculo de S solo cuenta la superficie enfrentada entre ambas placas.

3.7.4 Condensador esférico

Esta fórmula está demostrada en el ejercicio 3 de clase La capacidad de un condensador esférico de radios R_1 y R_2 entre placas $(R_2 > R_1)$ es:

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Suponiendo cargada positivamente la placa interior con una carga conocida Q, el campo y la tensión en la región entre las placas son:

$$\vec{E} = \frac{VR_1R_2}{r^2(R_2 - R_1)}\hat{r} \qquad \Phi = \frac{V}{r}\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}R_1$$

Observaciones

-La carga Q es la misma en ambas armaduras pero la densidad de carga ρ_S es mayor en la armadura interior ya que la esfera interior tiene menor superficie:

$$Q(r = R_1) = -Q(r = R_2)$$

 $\rho_S(r = R_1) \neq -\rho_S(r = R_2)$

- -El campo siempre tiene el sentido de los potenciales decrecientes, es decir de la placa cargada positivamente a la placa cargada negativamente
- -Si en vez de darnos el potencial de cada placa nos dan la diferencia de potencial entre las placas entonces sólo se puede calcular una de las dos constantes que aparecen en la expresión del potencial.

3.7.5 Condensador cilíndrico

La capacidad por unidad de longitud de un condensador cilíndrico de radios R_1 y R_2 entre placas $(R_2 > R_1)$ es:

 $\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

Esta fórmula está demostrada en el ejercicio 4 de clase

Suponiendo cargada positivamente la armadura interior con una carga conocida Q, las expresiones del campo y la tensión en la región entre las placas son:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rL}\hat{\rho} \qquad \qquad \Phi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Las observaciones son las mismas que para el condensador esférico

Observaciones

-La carga Q es la misma en ambas armaduras pero la densidad de carga ρ_S es mayor en la armadura interior ya que el cilindro interior tiene menor superficie:

$$Q(r = R_1) = -Q(r = R_2)$$

 $\rho_s(r = R_1) \neq -\rho_s(r = R_2)$

- -El campo siempre tiene el sentido de los potenciales decrecientes, es decir de la placa cargada positivamente a la placa cargada negativamente
- -Si en vez de darnos el potencial de cada placa nos dan la diferencia de potencial entre las placas entonces sólo se puede calcular una de las dos constantes que aparecen en la expresión del potencial.

3.7.6 Métodos prácticos para calcular la capacidad de un condensador

Los ejercicios 3 y 4 del tema 3 son aplicaciones directas de estos métodos Para calcular la capacidad de un condensador pueden suceder dos cosas, que tengamos datos de carga o que tengamos datos de potencial.

Con datos de carga

En este caso nos dan como dato la carga Q de las placas del condensador y utilizamos la ley de Gauss para obtener la capacidad. El esquema es el siguiente:

Gauss
$$\xrightarrow{(1)} \vec{E} \xrightarrow{(2)} \Phi \xrightarrow{(3)} V \xrightarrow{(4)} C$$

Donde en cada paso hemos utilizado las siguientes expresiones:

(1): Gauss
$$\iint \vec{D} \, d\vec{S} = Q$$

(2): $\Phi = -\int \vec{E} \, d\vec{l}$
(3): $V = \Phi(R_2) - \Phi(R_1)$
(4): $C = \frac{Q}{V}$

En el paso (2) tenemos que suponer un origen de potenciales

Con datos de potencial

En este caso nos dan como dato la tensión de las placas del condensador y utilizamos la ley de Poisson para obtener la capacidad. El esquema es el siguiente:

Poisson
$$\xrightarrow{(1)} \Phi \xrightarrow{(2)} \vec{E} \xrightarrow{(3)} \rho_s \xrightarrow{(4)} Q \xrightarrow{(5)} C$$

Donde en cada paso hemos utilizado las siguientes expresiones:

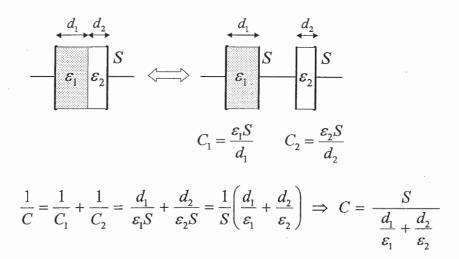
(1): Poisson
$$\begin{cases} \sin \varepsilon = \cot: \ \Delta \Phi = 0 \\ \sin \varepsilon \neq \cot: \ (\nabla \varepsilon) \cdot (\nabla \Phi) + \varepsilon \cdot \Delta \Phi \end{cases} = 0$$
(2): $\vec{E} = -\nabla \Phi$
(3): $\rho_s = \hat{n} \cdot (\vec{D} - \vec{D}) \Big|_S$
(4): $Q = \iint \rho_s dS$
(5): $C = \frac{Q}{V}$

En el paso (1), si en vez de darnos el potencial de cada placa nos dan la diferencia de potencial entre las placas entonces sólo se puede calcular una de las dos constantes que aparecen en la expresión del potencial. En este caso nos conformaremos con calcular el potencial relativo a la placa que está a menor tensión. Esto no influye, sin embargo, para el paso (2) ya que al derivar para obtener el campo se pierde la constante que no hemos podido calcular enel paso anterior.

tensión = potencial

3.7.7 Estudio de condensadores con distintas capas de dieléctrico

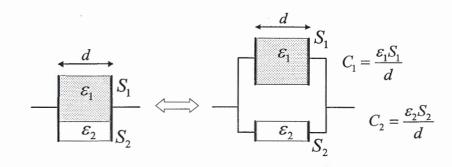
Laminas de dieléctrico en serie



En general si hay n láminas de dieléctrico :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \dots + \frac{d_n}{\varepsilon_n S} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\varepsilon_i} \implies C = \frac{S}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\varepsilon_i}}$$

Laminas de dieléctrico en paralelo

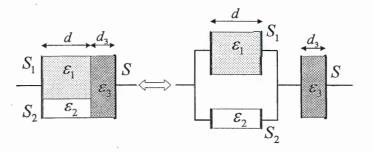


$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d} = \frac{1}{d} \left(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 \right) \implies C = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d}$$

En general si hay n láminas de dieléctrico :

$$C = C_1 + \dots + C_n = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \dots + \frac{\varepsilon_n S_n}{d} = \frac{1}{d} \left(\varepsilon_1 S_1 + \dots + \varepsilon_n S_n \right) \implies C = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i S_i}{d}$$

Laminas de dieléctrico en paralelo en serie y en paralelo



3.7.8 Energía almacenada por un condensador

$$W_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV$$
 (Julios)

3.7.9 Fuerza que se ejerce sobre las placas de un condensador cuando su energía varía de alguna forma

Procesos a potencial constante

En estos casos el condensador está conectado siempre a una diferencia de potencial (puede variar la carga por que tiene una vía de entrada y salida)

$$\vec{F} = +\nabla W_E$$
 (Newton)

En los procesos a potencial constante la fuerza siempre tiende a colocar las placas del condensador en su punto de máxima energía:

$$W_{\scriptscriptstyle E} = \frac{1}{2} C V_{\scriptscriptstyle cte}^2 \qquad \Rightarrow \qquad W_{\scriptscriptstyle E\, {
m max}} = \frac{1}{2} C_{\scriptscriptstyle {
m max}} V_{\scriptscriptstyle cte}^2$$

Procesos a carga constante

El condensador está cargado y aislado (puede variar el potencial entre placas pero no la carga por que no tiene ninguna vía de entrada y salida)

$$\vec{F} = -\nabla W_{\rm F}$$
 (Newton)

En los procesos a carga constante la fuerza siempre tiende a colocar las placas del condensador en su punto de mínima energía:

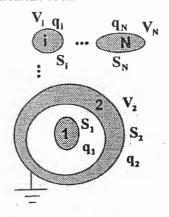
$$W_E = \frac{1}{2} \frac{Q_{cte}^2}{C}$$
 \Rightarrow $W_{E \min} = \frac{1}{2} \frac{Q_{cte}^2}{C_{\max}}$

Viene de la pág. T-28 Teórico (solo para el test)

3.7.10 Condensador como sistema de dos conductores en influencia total

Un sistema de conductores importante es el formado cuando dos conductores se encuentran en una situación de **influencia total** (las líneas de campo que salen de uno de los conductores las recibe el otro que, típicamente, le envuelve) como es el caso con los conductores 1 y 2 en la figura adjunta.

En estas situación ni q_1 influye en $q_3,...,q_N$ ni viceversa. Por tanto, el conductor 2 aisla o apantalla al conductor 1 del exterior.



Definición formal de condensador

Se dice que dos conductores forman un condensador cuando están en situación de influencia total. En general:

$$\begin{split} q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ q_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{split}$$

Si se conecta el conductor 2 a potencial cero, el potencial en la región exterior del mismo será cero y por tanto no habrá campo ni carga sobre la superficie exterior de dicho conductor. Aplicando el teorema de Gauss a una superficie en el interior del conductor 2, donde el campo es nulo, se deduce que $q_1 = -q_2$ donde la carga de 2 está distribuida en su superficie interior. Por tanto del sistema de ecuaciones anterior se obtiene que $C_{11} = -C_{12} = -C_{21}$. Así pues:

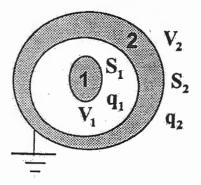
$$q_1 = C_{11}(V_1 - V_2)$$

$$q_2 = -C_{11}V_1 + C_{22}V_2$$

Se llama capacidad del condensador a:

$$C = C_{11} = \frac{q_1}{V_1 - V_2}$$

Es importante señalar que la única carga que hay en un condensador se encuentra en los conductores, nunca en el dieléctrico que los separa.



Conductores formando un condensador

3.7.10 Sistema de un conductor

En el caso de un sistema formado por un solo conductor: $q_1 = CV_1$

Si se tiene un conductor y se deposita una carga q sobre él, ésta se distribuye sobre su superficie. Al mismo tiempo éste adquirirá un cierto potencial V. Y a la inversa, si el conductor se pone a un determinado potencial V, conectándole a una batería, tomará una carga q, que se distribuirá uniformemente.

La carga que toma el conductor es proporcional al potencial aplicado, y la constante de proporcionalidad es la capacidad C del conductor, de manera que:

$$C = \frac{q}{V}$$

Por ejemplo, la capacidad de un conductor esférico de radio R con carga q es:

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon R$$

Aplicando la expresión de la página T-27 para la carga de cada conductor

 $C_{12} = C_{21}$ por las propiedades de los coeficientes

En este caso el sumatorio de la página T-27 Se queda en un solo término

Fíjate que en este caso no se le puede llamar condensador pero sí va a tener coeficiente de capacidad!!!

La capacidad de un conductor depende exclusivamente de su geometría y de $\,\epsilon\,$

3.8 Energía Electrostática

La energía electrostática de un determinado volumen viene dada por la siguiente expresión:

$$W_E \; = \; \frac{1}{2} \, \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV \; = \; \frac{1}{2} \, \iiint_V \varepsilon \, |\vec{E}|^2 \; dV$$

donde la integral se extiende a todo el volumen donde se quiere calcular la energía. Si en ese volumen el campo toma diferentes expresiones entonces tenemos que hacer distintas integrales cada una con la expresión del campo correspondiente en cada región dentro del volumen.

Otras expresiones menos utilizadas son:

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \Phi dV$$
 $W_E = \frac{1}{2} \iint_S \rho_S \Phi dS$ $W_E = \frac{1}{2} \int_L \lambda \Phi dl$

en esta ocasión las integrales se extienden <u>solamente</u> a las volúmenes, superficies o líneas donde hay carga en lugar de hacerlo a todo el volumen donde se quiere calcular la energía. Φ se refiere al potencial total de toda la distribución en esos puntos.

Estas expresiones no son más que la generalización de la fórmula para la energía eléctrica de la página T-14:

$$W_E = qV$$

Viene de la página T-27

Energía de un sistema de conductores

En el caso de un sistema formado <u>únicamente por conductores</u> la energía total del sistema se calcula:

$$\frac{1}{2}\sum_{i}V_{i}Q_{i}$$

donde V_i es la tensión a la que está cada uno de los conductores y Q_i es la carga que tiene cada uno de los conductores.

Solo para el test

Energía de interacción y de formación

Sean dos distribuciones de carga ρ_1 y ρ_2 cada una con su campo eléctrico \vec{E}_1 y \vec{E}_2 y cada uno con una energía $W_{\rm E1}$ y $W_{\rm E2}$. El campo eléctrico total creado por las dos distribuciones de carga es $\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ la energía total de la unión de ambas distribuciones es:

$$\begin{split} W_E &= \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E}_T \cdot \vec{D}_T \, dV \, = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{D}_1 + \vec{D}_2) \, dV \, = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_V \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_1 \, dV \, + \, \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E}_2 \cdot \vec{D}_2 \, dV}_{\text{Energia de formacion}} + \, \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_V \vec{E}_2 \cdot \vec{D}_1 \, dV \, + \, \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_2 \, dV}_{\text{Energia de interaccion}} \end{split}$$

Los dos primeros sumandos corresponden a las energías de formación de las distribuciones de carga ρ_1 y ρ_2 (trabajo necesario para agrupar elementos diferenciales de carga hasta formar las distribuciones de carga ρ_1 y ρ_2 , respectivamente). Los dos últimos dos sumandos corresponden a la energía de interacción entre ambas distribuciones (trabajo realizado para situar una distribución de carga ρ_1 dentro del campo producido por la distribución de carga ρ_2 o viceversa).

TEMA 4: CORRIENTES ESTACIONARIAS

Se denominan situaciones estacionarias aquellas en las que no existe variación con el tiempo. Dicho de otro modo, en las situaciones estacionarias las derivadas de todas las magnitudes con respecto al tiempo son nulas (d/dt = 0). En el caso del electromagnetismo esto supone que pueden existir corrientes $I \neq 0$ con la condición de que no varíen las distribuciones de carga.

4.1 Ecuaciones

Las ecuaciones fundamentales de este tema son las dos siguientes:

 Ecuación de continuidad de carga (particularmente para el caso en que no hay variaciones con el tiempo):

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt} = 0} \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

• Ley de Ohm generalizada:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Donde σ representa la conductividad eléctrica (o, mhos).

Además se sigue cumpliendo que $\nabla \times \vec{E} = 0$ y $\nabla \vec{D} = \rho$ por lo que todas las fórmulas de electrostática siguen siendo válidas ahora.

4.2 Condiciones de contorno entre dos conductores

La condición de contorno que aparece para la nueva magnitud es:

$$\left. \hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \right|_{S} = 0$$

O expresado con palabras, la componente de la densidad de corriente normal a la interfase entre dos medios es continua. A partir de la anterior condición obtenemos una nueva condición para la derivada del potencial con respecto a lo normal:

$$\left(\sigma_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \sigma_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\right)_{s} = 0$$

Además también siguen siendo válidas las condiciones ya conocidas de electrostática:

$$\Phi_2 - \Phi_1|_S = 0 \qquad \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)|_S = \rho_S \qquad \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)|_S = 0$$

Observación

Una implicación adicional es que en la interfase entre dos conductores a través de la cual circula una corriente existirá en general una densidad de carga superficial:

$$\rho_{S} = \hat{n} \cdot \vec{J} \left(\frac{\varepsilon_{2}}{\sigma_{2}} - \frac{\varepsilon_{1}}{\sigma_{1}} \right)_{S}$$

Observa que da igual evaluar la última expresión utilizando la densidad de corriente del medio 1 o la del medio 2 ya que la única componente que interviene es la normal, que es igual para ambas.

4.3 Conductores perfectos y conductores reales

Hasta ahora (en el tema 3) hemos estado trabajando siempre con conductores perfectos que son aquellos que tienen una conductividad infinita ($\sigma = \infty$). Como ya sabemos, en los conductores perfectos el potencial es constante y el campo eléctrico es nulo en su interior. Ahora, en este tema, vamos a definir el concepto de conductor real como aquellos conductores con conductividad finita ($\sigma < \infty$). En estos conductores reales el campo sólo es nulo cuando no circula corriente por ellos. Por tanto, si por un conductor real circula una

corriente habrá campo *E* en su interior y su potencial ya no será constante.

Un resistor se construye colocando dos electródos de un conductor perfecto (que vienen a ser lo que en un condensador son las placas) y entre ellos se coloca un conductor real (que viene a ser lo que en un condensador es el dieléctrico).

4.4 Dualidad

Existe una relación entre la capacidad y la resistencia de un sistema de conductores siempre que las condiciones de contorno del potencial sean idénticas.

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

potencial sean idénticas. $RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ Resuche el ulho hodes apartado de hodes apartado de hodes

4.5 Método práctico para calcular una resistencia

Para calcular una resistencia R pueden suceder dos cosas, que tengamos datos de corriente I o que tengamos datos de potencial (tensión) V.

Con datos de tensión V

En este caso nos dan como dato la tensión V_0 entre los electrodos de la resistor. El esquema a seguir es el siguiente:

$$V_0 \xrightarrow{\quad (1) \quad} \Phi \xrightarrow{\quad (2) \quad} \vec{E} \xrightarrow{\quad (3) \quad} \vec{J} \xrightarrow{\quad (4) \quad} I \xrightarrow{\quad (5) \quad} R$$

Donde en cada paso hemos utilizado las siguientes expresiones:

(1):
$$\nabla \vec{J} = 0$$

(2):
$$\vec{E} = -\nabla \Phi$$

$$(5): R = V_0 / R$$

$$(3): \ \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Con datos de intensidad I

En este caso nos dan como dato la corriente I_0 que atraviesa el resistor. El esquema es el siguiente:

$$I_0 \xrightarrow{\quad (1) \quad} \vec{J} \xrightarrow{\quad (2) \quad} \vec{E} \xrightarrow{\quad (3) \quad} \Phi \xrightarrow{\quad (4) \quad} V \xrightarrow{\quad (5) \quad} R$$

Donde en cada paso hemos utilizado las siguientes expresiones:

(1): $\vec{J} = \frac{I_0}{S} \hat{n}$

$$(4): V = \Phi(B) - \Phi(A)$$

(2):
$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$(5): R = V/I_0$$

$$(3): \quad \Phi = -\int \vec{E} \, d\vec{l}$$

Estos métodos son parecidos a los ya estudiados para condensadores

En el paso (4) las letras

A y B se refieren a los dos ejectrodos de la

resistencia

La magnetostática se centra en el estudio de los campos magnéticos creados por corrientes estacionarias. Partimos de las ecuaciones de Maxwell enunciadas en el tema 2:

$$\nabla \times \vec{H} \, = \, \vec{J} \, + \, \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

Una situación magnetostática se caracteriza por:

- No hay variación temporal: $\frac{d}{dt} = 0$
- Hay movimientos de cargas (corrientes): $\vec{J} \neq 0$

Por tanto las ecuaciones de Maxwell para situación magnetostática quedan de la siguiente manera:

$$\nabla \times \vec{H} \, = \, \vec{J}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

Según estas ecuaciones el campo magnético queda definido por:

$$\nabla \! \times \! \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

La primera ecuación es la Ley de Ampère. Liga los campos magnéticos con sus fuentes, las corrientes. En su forma integral permite resolver problemas con suficiente simetría. La segunda ecuación postula que las líneas de la densidad de flujo magnético son cerradas. Permite definir el potencial vector \vec{A} .

Además, tenemos la ecuación que relaciona los campos \vec{B} y \vec{H} que introduce el efecto de los medios:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Existe una diferencia clara con el sistema de ecuaciones de electrostática, se trata ahora de campos solenoidales en vez de campos irrotacionales.

Esta es la principal diferencia con una situación electrostática

Fíjate que las ecuaciones de electrostática (segunda y tercera) se quedan igual que en el tema 3 por lo que todo lo dicho allí para el campo eléctrico sigue siendo válido ahora

Recuerda que H es el campo magnético (A/m) y B es la inducción magnética o densidad de flujo magnético (T)

Recuerda que *B* es la inducción magnética o densidad de flujo magnético aunque frecuentemente lo llamaremos campo magnético

5.2 Campo magnético

El campo magnético debido a un elemento de corriente se define de la siguiente forma:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{d\vec{j}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

donde:

- -el vector $d\vec{j}'$ es un elemento diferencial de corriente.
- -El vector \vec{r} es el vector de posición del punto donde estamos calculando el campo.
- -El vector \vec{r}' es el vector de posición del elemento de corriente $d\vec{j}'$.
- -El vector $\vec{r} \vec{r}'$ es el vector de posición relativa del punto de cálculo del campo respecto del elemento de corriente.

El vector $d\vec{B}(\vec{r})$ tiene las siguientes características:

- Perpendicular a la dirección del elemento de corriente $d\vec{j}'$ y al vector $\vec{r} \vec{r}'$. Su sentido queda definido por la regla del tornillo o del sacacorchos.
- Proporcional al seno del ángulo formado por $d\vec{j}'$ y $\vec{r} \vec{r}'$. Esto implica que no se produce campo sobre la línea que define el elemento de corriente.
- Inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el elemento de corriente y el punto de cálculo del campo.

A partir de aquí según definamos el elemento de corriente $d\vec{j}'$ nos aparecen las siguientes fórmulas de gran importancia práctica.

Campo magnético creado por una corriente volumétrica

Tomando el elemento de corriente $d\vec{j}' = \vec{J}(\vec{r}') dV'$ nos queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Campo magnético creado por una corriente superficial

Tomando el elemento de corriente $d\vec{j}' = \vec{J}_S(\vec{r}')dS'$ nos queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S} \frac{\vec{J}_{S}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} dS'$$

Campo magnético creado por una corriente filiforme

Tomando como elemento de corriente $d\vec{j}' = Id\vec{l}'$ nos queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{C} \frac{d\vec{l'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^{3}}$$

Esta expresión recibe el nombre de ley de Biot y Savart

5.3 Distribuciones de corriente axiales infinitas

Las ecuaciones para el campo magnético de la página anterior son generales. Sin embargo, en el caso en que las corrientes son indefinidas las integrales que allí aparecen se convierten en impropias y los cálculos se complican bastante.

Por esa razón, a partir de las expresiones de la página anterior se deducen estas otras fórmulas que utilizaremos siempre que la corriente sea indefinida (corrientes axiales infinitas).

Campo magnético creado por una corriente volumétrica indefinida

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{2\pi} \iint_{S} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dS'$$

Campo magnético creado por una corriente superficial indefinida

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{L'} \frac{\vec{J}_S(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dl'$$

Campo magnético creado por una corriente filiforme

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

largo del eje \hat{z} positivo. En los ejercicios se sustituirá este vector por el que corresponda en cada caso

Se ha supuesto que la corriente circula a lo

Importante:

Importante:

Como se puede observar en las expresiones anteriores, en el caso de corrientes axiales infinitas nunca se integra la componente a lo largo de la cual circula la corriente.

5.4 Ley de Ampère

La ley de Ampère se enuncia de la siguiente forma:

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\oint_C \vec{H} \, d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{B} \, d\vec{l} = \mu \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu I$$

y dice que "La circulación del campo magnético \vec{B} a lo largo de una línea cerrada es igual al producto de la corriente encerrada por dicha línea multiplicada por la permeabilidad del medio".

La ley de Ampère permite resolver algunos problemas magnetostáticos de forma similar a como la ley de Gauss permite resolver determinadas situaciones electrostáticas. Para conseguirlo es necesario que la variación de la intensidad de campo magnético tenga una forma de variación sencilla y conocida a lo largo del contorno sobre el que se aplica la ley de Ampére. A partir de la Ley de Ampère se obtiene el campo el campo creado por muchas distribuciones de corriente.

Esta es la fórmula que conocemos desde el bachillerato salvo que aquí viene expresada en coordenadas cilíndricas

Cable indefinido

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

Cilindro hueco de radio a

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho \le a \\ \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\varphi} & a \le \rho \end{cases}$$

Cilindro macizo de radio a

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi} \frac{\rho}{a^2} \hat{\varphi} & \rho \leq a \\ \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\varphi} & a \leq \rho \end{cases}$$

Cable coaxial de radios a, b y c

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi} \frac{\rho}{a^2} \hat{\varphi} & 0 \le \rho \le a \\ \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\varphi} & a \le \rho \le b \\ \frac{\mu I}{2\pi} \frac{c^2 - \rho^2}{\rho(c^2 - b^2)} \hat{\varphi} & b \le \rho \le c \\ 0 & c \le \rho \end{cases}$$

5.5 Campo magnético en puntos lejanos

5.5.1 Momento magnético

Definimos el vector momento magnético de la siguiente forma:

Para corrientes volumétricas:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \ dV'$$

Para corrientes superficiales:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iint_{S'} \vec{r}' \times \vec{J}_S(\vec{r}') dS'$$

Para corrientes filiformes:

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{C'} \vec{r}' \times d\vec{l}'$$

Las unidades del momento mágnetico son $A \cdot m^2$ en todos los casos.

Cuando nos dan una espira que no es plana lo primero que intentamos es descomponerla en espiras planas para utilizar esta fórmula. El caso particular que más se utiliza es el del momento magnético de una espira plana de superficie S que se deduce a partir del momento magnético para corrientes filiformes:

$$\vec{m} = IS \hat{n}$$

5.5.2 Campo magnético en puntos lejanos

La expresión del campo magnético en puntos alejados de las fuentes es similar a la que se utiliza en el campo electrostático salvo que esta vez se utiliza el momento magnético en vez del momento dipolar:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right]$$

Concepto con poca utilidad práctica. Quizás alguna pregunta de test



La ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ implica que se puede hacer derivar el campo \vec{B} de otro campo vectorial a través de la expresión:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Este nuevo campo recibe el nombre de potencial vector magnético. Sus unidades son (Wb/m). Resulta difficil dar una interpretación física del potencial vector magnetostático.

Si el medio es homogéneo, lineal e isótropo, resulta inmediato ligar el potencial vector con la corriente:

$$\begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\mu \vec{H}) = \mu \nabla \times \vec{H} = \mu \vec{J} \\ \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}$$

En esta última expresión se escoge $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ por convenio. Por tanto, las líneas del potencial vector son cerradas. Con ello se obtiene que:

$$\Delta \vec{A} = -\,\mu \vec{J}$$

Esta elección de la divergencia del potencial vector recibe el nombre de condición o contraste de Coulomb.

La forma práctica de calcular el potencial vector es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S} \frac{\vec{J}_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Fijate que es una analogía de la ecuación de Poisson para electrostática:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Estas integrales son las mismas que las que se utilizan para B pero sin el producto vectorial del numerador

5.7 Energía Magnetostática

La energía magnética de un determinado volumen viene dada por la siguiente expresión:

$$W_{H} = \frac{1}{2} \iiint_{V} \vec{B} \cdot \vec{H} \, dV = \frac{1}{2} \iiint_{V} \mu \, |\vec{H}|^{2} \, dV = \frac{1}{2\mu} \iiint_{V} |\vec{B}|^{2} \, dV \qquad \text{(Julios)}$$

donde la integral se extiende a todo el volumen donde se quiere calcular la energía. Al igual que con el campo eléctrico, si en ese volumen el campo toma diferentes expresiones entonces tenemos que hacer distintas integrales cada una con la expresión del campo correspondiente en cada región dentro del volumen.

5.8 Coeficiente de inducción mutua

• Flujo del campo magnético debido a la corriente I_j a través de la superficie S_i

$$\Phi_{i,j} = \iint_{S_i} \vec{B}_j \cdot d\vec{S}$$

• Coeficiente de inducción mutua entre dos contornos filiformes:

$$L_{i,j} = \frac{\Phi_{i,j}}{I_j}$$
 (Henrios)

esto mismo dicho expresado con palabras significa:

$$L_{i,j} = \frac{\text{Flujo que atraviesa el contorno } C_i \text{ debido a la corriente } I_j}{\text{Corriente que circula por el contorno } C_j}$$

Sólo hay un ejemplo de está fórmula en: Feb'02-ej3 Ley de Newman para el cálculo del coeficiente de inducción mutua:

$$L_{i,j} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{Ci} \oint_{Cj} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

• También resulta posible calcular el coeficiente de inducción a partir de la energía:

$$\boxed{L_{i,j} = \frac{W_H}{I_i I_j}}$$

• Las tres expresiones recuadradas para el cálculo del coeficiente de inducción mutua son equivalentes y dependiendo del caso convendrá utilizar una u otra. Además siempre se cumple que $L_{i,j}$ coincide con $L_{j,i}$. Ambos coeficientes también se les nombra M:

$$L_{i,j} = L_{j,i} = M$$

Coeficiente de autoinducción

En el caso de una única distribución de corriente, su **coeficiente de autoinducción** viene dado por:

$$L_{i,i} = \frac{2W_H}{I_i^2} \quad \text{(Henrios)}$$

5.9 Fuerza asociada al campo magnético

• Fuerza debida a un campo magnético sobre una carga en movimiento:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

• Fuerza debida a un campo magnético sobre una distribución volumétrica de corriente:

$$\vec{F} = \iiint_{V} \vec{J}_{V} \times \vec{B} \ dV$$

Fuerza debida a un campo magnético sobre una distribución superficial de corriente

$$\vec{F} = \iint_{S} \vec{J}_{S} \times \vec{B} \ dS$$

• Fuerza debida a un campo magnético sobre una distribución filiforme de corriente

$$\vec{F} = I \int_{C} d\vec{l} \times \vec{B}$$

existe un caso particular muy frecuente que se produce cuando la distribución filiforme es un cable recto y además el campo magnético es constante a lo largo de todo el cable. En ese caso no es necesario integrar y la expresión anterior queda reducida a:

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

• Fuerza debida a un campo magnético uniforme \vec{B} sobre un dipolo \vec{m} :

$$\vec{F} = -\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})$$

donde la energía de interacción entre el campo \vec{B} y el dipolo \vec{m} es:

$$W_{\scriptscriptstyle H} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

• Momento o par asociado a una distribución de corriente finita en el seno de un campo \vec{B} :

$$\vec{\tau}_{\vec{R}} = -\vec{m} \times \vec{B}$$

Nota: El campo *B* es externo al campo creado por el propio dipolo

TEMA 6: VARIACIÓN TEMPORAL LENTA

Es una de las ecuaciones de Maxwell vistas en el tema 2

Ley de Faraday

La primera expresión de la Ley de Faraday es la siguiente:

$$\boxed{fem = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_C \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \, d\vec{S}$$

donde la fem o femi es la fuerza electromotriz inducida y se mide en voltios.

La segunda expresión de la Ley de Faraday es:

$$fem = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}$$

Ambas fórmulas vienen a decir lo mismo. En definitiva se han encontrado dos métodos de producir variación temporal del flujo y, por tanto, *fem* inducida. Estos métodos son, por una parte, la variación temporal de la inducción de campo magnético y por otro el movimiento del circuito donde se mide la fem inducida.

Ley de Lenz

Se trata de una ley cualitativa que interpreta el signo de la ley de Faraday y nos da información sobre el sentido de la corriente inducida. Se enuncia de la siguiente forma:

"El campo magnético inducido tiende a oponerse a la <u>variación</u> del flujo creado por el campo magnético inductor"

Una vez conocido el sentido del campo magnético inducido (que puede ser igual o de sentido contrario que el campo inductor) utilizamos la regla de la mano derecha para determinar en qué sentido debe circular la corriente inducida que genera dicho campo inducido.

Aunque exista campo magnético inductor, si no hay variación de flujo, no habrá campo magnético inducido.

ELMG Ejercicios de clase

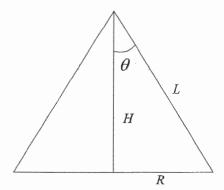
TEMA 3: ELECTROSTÁTICA

Ejercicio 1

Sea un cono de altura H y radio de la base R. Sobre la superficie cónica se localiza una distribución superficial de carga de valor ρ_{S1} , mientras que en la base del cono existe una distribución superficial de valor ρ_{S2} . Calcule el potencial en el vértice.

Aplicamos aportaciones infinitesimales para distribuciones superficiales de carga:

$$\Phi(\vec{r}) = \iint_{S'} \frac{\rho_{S1}}{4\pi\varepsilon \, |\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$



Para la superficie cónica aplicamos esféricas:

$$\begin{vmatrix} \vec{r} &= 0 \\ \vec{r}' &= r\hat{r} \end{vmatrix} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}' = -r\hat{r}| \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = r$$

 $dS' = r \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\phi$ (ojo con este diferencial de superficie que no es el que habitualmente utilizamos en esféricas)

$$L = R \operatorname{sen} \theta \implies L = \frac{R}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\begin{split} \Phi(\vec{r}) &= \int_{\psi=0}^{\phi'=2\pi} \int_{r'=0}^{r'=L} \frac{\rho_{S1}}{4\pi\varepsilon} \, r' \operatorname{sen}\theta \, dr' \, d\phi' = \frac{\rho_{S1} \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon} \int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} d\phi' \, \int_{r'=0}^{r'=L} dr' = \\ &= \frac{\rho_{S1} \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon} \left[\phi' \right]_{0}^{2\pi} \left[r' \right]_{0}^{L} = \frac{\rho_{S1} \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon} \, 2\pi L = \frac{\rho_{S1} \operatorname{sen}\theta}{2\varepsilon} \, L = \frac{\rho_{S1} \operatorname{sen}\theta}{2\varepsilon} \, \frac{R}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\rho_{S1}R}{2\varepsilon} \end{split}$$

• Para la base del cono aplicamos cilíndricas:

$$|\vec{r}| = 0$$

$$|\vec{r}'| = \rho \hat{\rho} - H\hat{z}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = -\rho \hat{\rho} + H\hat{z} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = (\rho + H)^{1/2}$$

$$d\vec{S}_z = \rho d\rho d\phi$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} \int_{\rho'=0}^{\rho'=R} \frac{\rho_{S2}}{4\pi\varepsilon(\rho'^2+H^2)^{1/2}} \rho' d\rho' d\phi' = \frac{\rho_{S2}}{4\pi\varepsilon} \int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} d\phi' \int_{\rho'=0}^{\rho'=R} \frac{\rho'}{(\rho'^2+H^2)^{1/2}} d\rho' = \frac{\rho'}{(\rho'^2+H^2$$

$$=\frac{\rho_{S2}}{4\pi\varepsilon}2\pi\int_{\rho'=0}^{\rho'=R}\rho'(\rho'^2+H^2)^{-1/2}d\rho'=\frac{\rho_{S2}}{4\varepsilon}\left[\frac{(\rho'^2+H^2)^{1/2}}{1/2}\right]_{\rho'=0}^{\rho'=R}=\frac{\rho_{S2}}{2\varepsilon}\left[(R^2+H^2)^{1/2}-H\right]$$

Por tanto el potencial en el vértice es:

$$\Phi_{vertice} = \frac{1}{2\varepsilon} \left(\rho_{S1} R + \rho_{S2} \left[(R^2 + H^2)^{1/2} - H \right] \right)$$

Ejercicio 3

Sea un condensador esférico de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) relleno con un dieléctrico de permitividad ε constante entre sus placas. Se pide calcular la capacidad del condensador en los dos casos siguientes:

- a) Conocemos la carga Q de ambas placas siendo la interior la placa positiva.
- b) Conocemos la tensión de ambas placas estando la interior a V_0 y la exterior a tierra.

Paso 3: Calculamos V

$$\phi(r=R_1) = \frac{Q}{4TER_1}$$

$$\phi(r=R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon R_2}$$

$$= V = \phi(r=R_1) - \phi(r=R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon R_2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$V = \frac{Q}{4TE} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

Pass':
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{R_2 - R_1}{4\pi E(R_1 R_2)}} = \frac{4\pi E RR2}{R_2 - R_1}$$

b) & DahoV

pasod:
$$\Delta \phi = \frac{1}{E} = 0$$
 so por ser dielectrico el material interior

$$\Delta \phi = 0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = A \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{A}{r^2} \Rightarrow \int d\theta = \int \frac{A}{r^2} dr$$

sabemos:
$$\phi(r=R_1) = V_0 = -\frac{A}{R_1} + B$$

$$\phi(r=R_2) = 0 = -\frac{A}{R_2} + B$$

$$V_0 = A\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$V_0 = A\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

A hora 'B':
$$-\frac{A}{R_2} + B = 0 \Rightarrow -\frac{R_1 R_2 V_0}{(R_1 - R_2) R_8} + B = 0$$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{-A}{r} + B = \frac{-VoR_1R_2}{(R_1 - R_2)}r + \frac{VoR_1}{R_1 - R_2} \\ \hline \phi(r) &= \frac{VoR_1R_2}{(R_2 - R_1)}r + \frac{VoR_1}{R_1 - R_2} \\ \hline \frac{B_{00} 2^{\circ}}{R_2 - R_1} &= \frac{-\frac{A}{r}}{\frac{A}{r}} \hat{r} = -\frac{-\frac{A}{r}}{\frac{A}{r}} \hat{r} = -\frac{A}{r} \hat{r} + \frac{A}{r} \hat{r} = -\frac{A}{r} \hat{r} + \frac{A}{r} \hat{r} = -\frac{A}{r} \hat{r} + \frac{A}{r} \hat{r} + \frac{A}{r} \hat{r} = -\frac{A}{r} \hat{r} + \frac{A}{r} \hat{r} + \frac{A}{r}$$

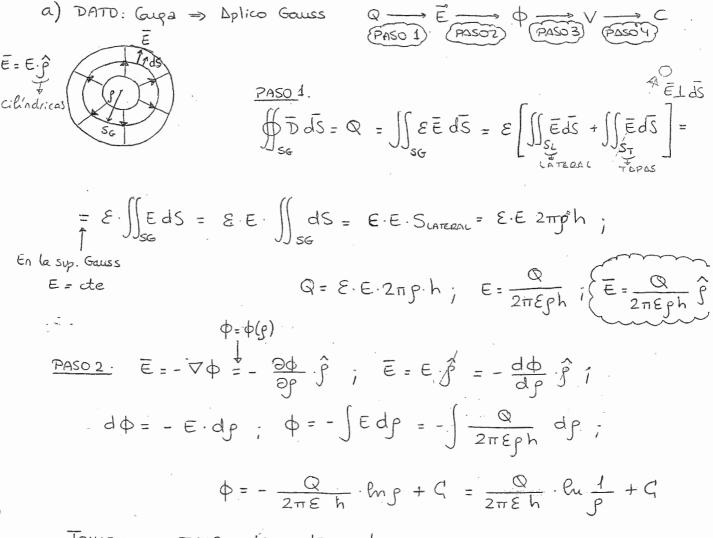
Q1 = - Q2 /

 $\frac{R_{000}S}{C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi E N_0 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi E R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Ejercicio 4

Sea un condensador cilíndrico de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) y altura h relleno con un dieléctrico de permitividad ϵ constante entre sus placas. Se pide calcular la capacidad del condensador en los dos casos siguientes:

- a) Conocemos la carga Q de ambas placas siendo la interior la placa positiva.
- b) Conocemos la tensión de ambas placas estando la interior a \hat{V}_0 y la exterior a tierra.



Tomamos origen de potenciales:

$$\phi = 0$$
 wand $\rho = 1$.
$$\phi(\rho = 1) = 0 = \frac{Q}{2\pi \epsilon h} \ln \left(\frac{1}{1}\right) + C; \quad C = 0 \Rightarrow \left(\phi(\rho) = \frac{Q}{2\pi \epsilon h} \cdot \ln \frac{1}{\rho}\right)$$

$$V = \Phi(R_1) - \Phi(R_2) = \frac{Q}{2\pi E h} \cdot \ln \frac{1}{R_1} - \frac{Q}{2\pi E h} \cdot \ln \frac{1}{R_2}$$

$$V = \frac{Q}{2\pi E h} \left(\ln \frac{1}{R_1} - \ln \frac{1}{R_2} \right) \cdot \left(V = \frac{Q}{2\pi E h} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

PASO 4.
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{2\pi Eh}{2\pi Eh} \ln \frac{R_z}{R_z}}$$
; $C = \frac{2\pi Eh}{\ln \frac{R_z}{R_z}}$

Medio homopéneo (E=cte).

PASO1.
$$\Delta \Phi = \frac{1}{4} = 0$$
 $\Rightarrow \frac{1}{4} \frac{d}{dp} \left[p \cdot \frac{d\Phi}{dp} \right] = 0$; $\frac{d}{dp} \left[p \cdot \frac{d\Phi}{dp} \right] = 0$; deléctrice)

$$g \cdot \frac{d\phi}{dp} = A ; \frac{d\phi}{dp} = \frac{A}{p} ; \int d\phi = \int \frac{A}{p} \cdot d\rho ; \phi = A \cdot enp + B$$

Calculauros las constantes A y B

$$\phi(g=R_1) = A - enR_1 + B = V_0$$

 $\phi(g=R_2) = A en R_2 + B = 0$

$$A = \frac{V_0}{e_1 \frac{\Omega_1}{\Omega_2}}$$

Calculo B sustitujendo

$$\frac{V_0}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_2 + B = 0 \int B = \frac{V_0 \cdot \ln R_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\Phi = \frac{V_0}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \cdot \ln \beta + \frac{V_0 \cdot \ln R_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} ; \quad \Phi = \frac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \ln \frac{R_2}{\beta}$$

$$\Phi(r) = \frac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \ln \frac{R_2}{S} \quad (V) \quad R_1 \leq S \leq R_2$$

$$R, \leq g \leq R_z$$

PASO 2.
$$\vec{E} = -\nabla \phi = -\frac{d\phi}{d\rho} \cdot \hat{\beta} = +\frac{V_0}{\ln \frac{Rz}{R_1}} \cdot \frac{+\frac{Rz}{PZ}}{\frac{Rz}{P}} = \frac{V_0}{\rho \cdot \ln \frac{Rz}{R_1}} \cdot \hat{\beta}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{V_0}{g \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \hat{g} \right) \quad \left(\frac{V_m}{m} \right)$$

PASO 3.
$$\beta_s = \hat{n} (\bar{D}_2 - \bar{D}_1)$$

$$\widehat{\beta} = \widehat{R}_{1}, \quad \widehat{\beta}_{s} = \widehat{\beta} \left(\widehat{E} \cdot \widehat{E} \left(r = R_{1}^{+} \right) - \widehat{E} \cdot \widehat{E} \left(r = R_{1}^{-} \right) \right) \widehat{\beta} = \widehat{E} \cdot \frac{V_{0}}{R_{1} \cdot e_{n}} \frac{R_{2}}{R_{2}}$$

$$\widehat{R}_{s} = \widehat{\beta} \left(\widehat{E} \cdot \widehat{E} \left(r = R_{1}^{+} \right) - \widehat{E} \cdot \widehat{E} \left(r = R_{1}^{-} \right) \right) \widehat{\beta} = \widehat{E} \cdot \frac{V_{0}}{R_{1} \cdot e_{n}} \frac{R_{2}}{R_{2}}$$

$$\widehat{R}_{s} = \widehat{\beta} \left(\widehat{E} \cdot \widehat{E} \left(r = R_{1}^{+} \right) - \widehat{E} \cdot \widehat{E} \left(r = R_{1}^{-} \right) \right) \widehat{\beta} = \widehat{E} \cdot \frac{V_{0}}{R_{1} \cdot e_{n}} \frac{R_{2}}{R_{2}}$$

$$\left(\begin{array}{c} S = \Omega_{2} \\ \end{array} \right) S_{S_{2}} = \hat{\beta} \left(\begin{array}{c} E' \cdot E(r = \Omega_{2}^{+}) - E \cdot E(r = \Omega_{2}^{-}) \end{array} \right) \hat{\beta} = \frac{-E V_{0}}{R_{2} \cdot \ln \frac{\Omega_{2}}{\Omega_{1}}}$$

$$\left(\begin{array}{c} S = \left(\begin{array}{c} E \cdot \frac{V_{0}}{R_{1} \cdot \ln \frac{\Omega_{2}}{\Omega_{1}}} \\ -\frac{E V_{0}}{R_{2} \cdot \ln \frac{\Omega_{2}}{\Omega_{1}}} \end{array} \right) S_{S_{2}} = \frac{-E V_{0}}{R_{2} \cdot \ln \frac{\Omega_{2}}{\Omega_{1}}}$$

$$\left(\begin{array}{c} S = \left(\begin{array}{c} E \cdot \frac{V_{0}}{R_{1} \cdot \ln \frac{\Omega_{2}}{\Omega_{1}}} \\ -\frac{E V_{0}}{R_{2} \cdot \ln \frac{\Omega_{2}}{\Omega_{2}} \end{array} \right) S_{S_{2}} = \frac{-E V_{0}}{R_{2} \cdot \ln \frac{\Omega_{2}}{\Omega_{1}}}$$

$$Q_1 = \iint_{S_1} g_{S_1} dS_1 = \frac{EV_0}{R_1 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot 2\pi \cdot R_1 \cdot h = \frac{EV_0 \cdot 2\pi h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = Q$$

$$Q_2 = \iint_{S_2} \beta_{S_2} \cdot dS_2 = \frac{-\epsilon V_0}{R_2 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot 2\pi R_2 \cdot h = \frac{-\epsilon V_0 \cdot 2\pi h}{\epsilon_0 \frac{R_2}{R_1}} = -Q$$

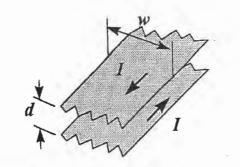
$$Q = \frac{\varepsilon V_0 \cdot 2\pi h}{\varepsilon_0 \frac{\varrho_z}{\varrho_1}}$$

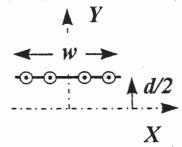
Paso 5.
$$C = \frac{2 \sqrt{2\pi h}}{\sqrt{2\pi k}}$$

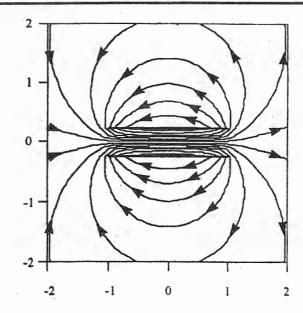
$$\frac{2 \sqrt{2\pi h}}{\sqrt{2\pi k}}$$



Calcular la densidad de flujo magnético creado por la línea biplaca de la figura en los puntos del eje Y. Aproximar el resultado obtenido en el caso en que w>>d.

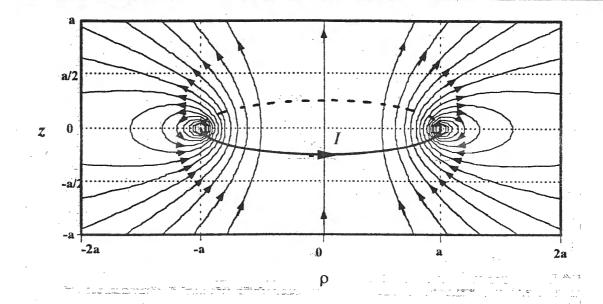






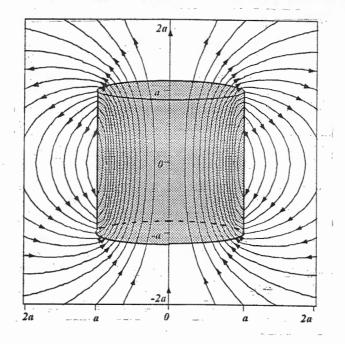
Ejercicio 3

Sea una espira circular de radio a recorrida por una corriente I en sentido antihorario, situada en el plano XY y con centro en el origen de coordenadas. Calcular la inducción magnética creada por la espira en los puntos del eje Z.



Ejercicio 4

Sea un solenoide de longitud L con N espiras de radio a por unidad de longitud y por el que circula una corriente I. El solenoide está centrado en el origen y su eje coincide con el eje Z. Calcular la inducción magnética creada por el solenoide en los puntos del eje Z.



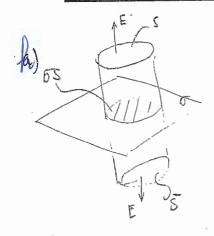
TEMA 9: ELECTROSTÁTICA



Ejercicio 1

Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio creado por las siguientes distribuciones de carga:

- a) Una superficie esférica de radio R, y densidad superficial de carga σ .
- b) Una esfera maciza de radio R y densidad volumétrica de carga ρ constante.
- c) Una esfera maciza de radio R y densidad volumétrica de carga $\rho = ar$.
- d) Un hilo indefinido de diámetro despreciable y densidad lineal de carga λ .
- e) Una superficie cilíndrica indefinida de radio R y densidad superficial de carga σ .
- f) Un cilindro macizo de radio R y densidad volumétrica de carga ρ constante.
- g) Un cilindro macizo de radio R y densidad volumétrica de carga $\rho = \rho_0 (a br)$
- h) Un plano indefinido de grosor despreciable y densidad superficial de carga σ .



$$2\iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}$$

$$2\iint \vec{E} d\vec{S} + \iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\vec{O} \vec{S}}{\varepsilon_o}$$

$$0: porgue el ordor dicampo eo perpendicular al di experfici$$

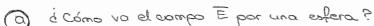


Ejercicio 4

Este es un ejercicio básico del teorema de Gauss con simetría esférica

Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio creado por las siguientes distribuciones de carga:

- a) Una superficie esférica de radio R y densidad superficial de carga σ.
- b) Una esfera maciza de radio R y densidad volumétrica de carga ρ constante.
- c) Una esfera maciza da radio R y densidad volumétrica de carga $\rho = ar$.



Una extera crea un campo radial of pasa por su centro y apunta hacía "cualquies" dirección (como los rayos del sol)







Explicación:
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{9int}{E_0}$$

En una extera siempre se cumple q. = 11 ds

1º caso: Tomamos una esfera cancéntrica (Esf.) como superficie de Gauss.
17/2 - Superficie cerrada
- Ell de en toda la sup.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{E_0}$$

$$\phi = \oint \vec{E} \, d\vec{S} = \oint \vec{E} \, d\vec{S} = \vec{E} \cdot \oint d\vec{S} = \vec{E} \cdot 4\pi \hat{c}^2$$

$$|\vec{E}|_{ex} coust \qquad Sup_{de}$$

$$e_{c} cualquier \qquad Gouss$$

er cuolquier pto. de la sup. 1>R

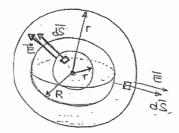
$$Q_T = 0$$
. Sup. $= 0.R = 0.4TR^2$ congada

(Esfera de)

Aplicamos Eauss:
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{6 \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0} = \frac{6}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{6R^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$E = \frac{\delta(R)^2 \bar{u}_r}{\delta o}$$
 - on coord extericons

$$\frac{2^{\circ} caso}{\phi} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\mathcal{R}|} ds =$$



Toso:

General siempre obtendremos
$$E$$
 de dentro hacia fuera $\phi = \oint E . d\vec{S} = \oint E . dS = E . VII r^2$

$$E = ate$$
en esfera

$$Q_T = \iiint P_1 dV = P_2 \iiint dV = P_2 \frac{y}{3} \pi r^3$$

Aplicamos Gauss

$$\frac{\text{Casol: r

$$\Rightarrow \text{E} = \frac{9r}{3\epsilon} \Rightarrow \text{E} = \frac{9r}{3\epsilon} \Rightarrow \text{T} = \frac{9r}{3\epsilon} \Rightarrow$$$$

esta superficie no encierra toda la corga existente en la sup. 1=R

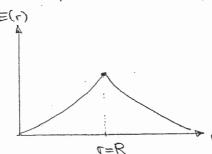
$$\Phi = \oint_{\mathcal{C}} ds = \oint_{\mathcal{C}} E \cdot ds = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$$

$$Q_{T} = \iiint \varphi \cdot dV = \varphi \cdot \frac{4}{3}\pi R^{3}$$

Aplicamos Gauss

$$E \cdot 4\pi r^{2} = \frac{e \cdot 4\pi R^{3}}{3\epsilon_{0}} \rightarrow E = \frac{e \cdot R^{3}}{3\epsilon_{0}} \cdot \frac{1}{r^{2}} \rightarrow E = \frac{e \cdot R^{3}}{3\epsilon_{0}} \cdot \frac{1}{r^{2}} \cdot \frac{1}{r^{2}}$$

$$E = \frac{9}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$$



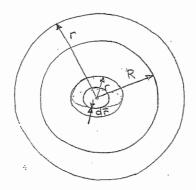
$$Q_T = \iiint_V R \cdot dV =$$



$$Q_{T} = \iiint_{V} \varphi dV = \int_{r=r}^{r=r} \varphi(r) \cdot 4\pi r^{2} dr$$

Resolución

Esfera maciza



carga interior total a la sup. de Ga

Distinguimos 2 casos: Aplicamos Gauss > & E.dS = QT

Casel r<R

$$\phi = \oint_{\Xi} dS = \oint_{G} E dS = E \oint_{G} dS = E \cdot u\pi r^{2}$$

flujo a través e la sup. de

E=de. a la largo de la esfera, por simetría

Gauss

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{5} = \frac{0}{5}$$

[Reducinos las integrales triples a simples]

$$Q = \iiint edV = \int e(A) \sqrt{\pi} dr^* = \int ar^* \sqrt{\pi} (r^*) dr^* = \sqrt{\pi} a \int_{r_1=0}^{r_2=r_3} r^* = \pi a r^*$$
Course
$$Gouss$$

dV=47/18/2+*
(copa de ceballa)

Aplicamos Gauss

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\alpha}{480} \cdot r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\alpha}{480} r^2 \cdot \overline{u}r}$$

campo radial (poner vector) reguir siempre estos 2 pasos

Mujo através de la sup. de

Simetría exférica E=de a la largo de la . Jup. goussiana

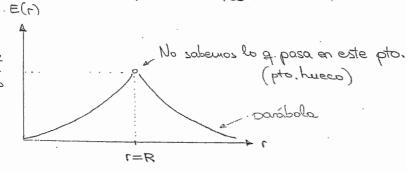
Gouss

$$Q_{T} = \iiint P \cdot dV = \int_{r=0}^{r=R} \varphi(r) \cdot q \pi r^{2} dr = \int_{r=0}^{r=R} q \cdot r \cdot q \pi r^{2} dr = q \pi a \left[\frac{r^{4}}{q} \right]_{r=0}^{r=R} = \pi a R^{4}$$

$$dV = q \pi r^{2} dr$$

$$E \cdot \sqrt{M}r^2 = \frac{M \cdot R^4}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \rightarrow E = \frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{4\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Solutiones:
$$E = \begin{cases} 1 < R & \frac{\alpha}{4E_0} \cdot \overline{\alpha}_r \\ 1 < R & \frac{\alpha}{4E_0} \cdot \overline{\alpha}_r \end{cases}$$



Ejercicio 5

Este es un ejercicio básico del teorema de Gauss con simetría cilíndrica

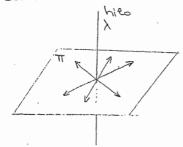
Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio creado por las siguientes distribuciones de carga:

- a) Un hilo indefinido de diámetro despreciable y densidad lineal de carga λ .
- b) Una superficie cilíndrica indefinida de radio R y densidad superficial de carga σ.
- c) Un cilindro macizo de radio R y densidad volumétrica de carga ρ constante.
- d) Un cilindro macizo de radio R y densidad volumétrica de carga $\rho = \rho_0(a-br)$.

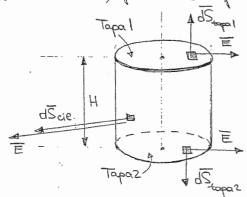
Hilo indefinido

d'Cômo va el compo E para el hilo indefinido? Es un campo radial q. corta al hillo, y que está contenido en planos perpendiculares al hilo

E=E. Up



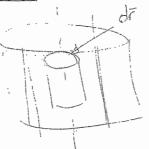
Necesitamos poner "tapas" a esa superf. ciendrica, para q. la sup Gaussiana sea cerrada y poder así aplicas el Th. de Gauss.



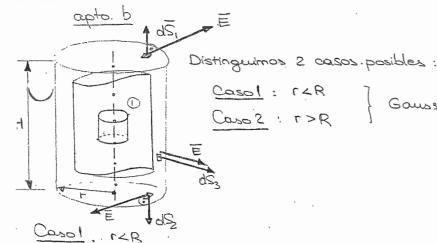
 $\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{cie} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{cie} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{S}$

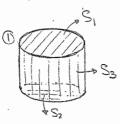
 $\phi = E$. 2TT + $\int_{-\infty}^{\infty} Sustituyendo$ Th. Gauss: $E \cdot 2\pi r \mathcal{H} = \frac{\lambda \mathcal{H}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}$

Solución: == 1 tp + Coordenadas Cilíndricas



11 = 2TT +1 dr





(E. ds = 0 = 0, + d2 + d3

97=0 (la sup. goussiana no enciena carga puesto q. el cilindro es hueco)

⇒ \$=\$\frac{1}{2}\text{E} = 0 \ \$\frac{1}{2}\text{E} = 0

Casoz 12R

 $E \cdot dS_3 = E \cdot \int dS_3 = E \cdot S_3 =$

Gauss $\phi \equiv d\bar{s} = \frac{Q_T}{C_0}$

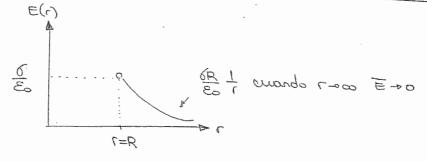
una simetra de tipo cierndrica E=de.

 $Q_T = \int G(dS)$ del cilindro cargodo

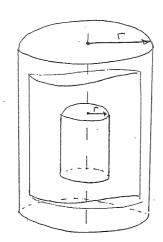
Aplicamos Gauss

E. ZMrH = 5. ZWRH Es

· Gráfica



Cieindro macizo de densidad const. P



E tere una

 $|\phi = E \cdot 2\pi rh|$

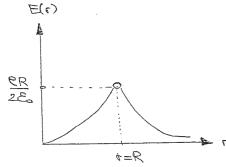
$$Q_{T} = \iiint \varphi \cdot dV = \varphi \cdot \iiint dV = \varphi \cdot V_{sup} = \varphi \cdot \pi r^{2}h$$
Gouss

QT = P. TT2h

$$\frac{Gows}{E \cdot 2\pi/K} = \frac{e \cdot \pi/2 \cdot K}{E} \Rightarrow E = \frac{e}{2E} \Rightarrow E = \frac{e}{2E} \cdot \sqrt{e}$$

$$Q_{T} = \iiint P \cdot dV = P \cdot \iiint dV = P \cdot \pi R^{2}h$$
marizo
$$P = dE$$

of Gauss: E.
$$2\pi rh = \frac{P \pi R^2 h}{E_b} \Rightarrow E = \frac{P R^2}{2E_b} \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow E = \frac{P R^2}{2E_b} \cdot \frac{1}{r} = \frac{P R^2}{2E_b} \cdot \frac{1}{r}$$

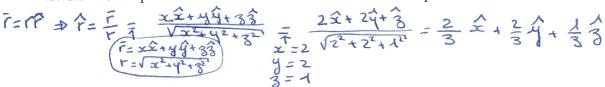


ELMG Preguntas de test

TEMA 1. SISTEMAS DE COORDENADAS

FEBRERO 1996

Escriba las componentes cartesianas del vector unitario \hat{r} en el punto de coordenadas cartesianas (2, 2, 1).



FEBRERO 1997
$$\hat{x}$$
 \hat{y} \hat{y} \hat{z} \hat{y} \hat{z} \hat{z} | $z = sen 0 \cos \phi \hat{y} - sen 0 \sin \phi \hat{x}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{y} + \cos \phi \hat{y}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{x} + sen 0 \sin \phi \hat{y} + \cos 0 \hat{z}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{x} + sen \cos \phi \hat{y} + \cos \phi \hat{y}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{x} + sen \cos \phi \hat{y} + \cos \phi \hat{y}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{x} + sen \cos \phi \hat{y} + \cos \phi \hat{y}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{x} + sen \cos \phi \hat{x} + sen \cos \phi \hat{y} + \cos \phi \hat{y}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{x} + sen \cos \phi \hat{y} + \cos \phi \hat{y}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{x} + sen \cos \phi \hat{y} + \cos \phi \hat{y}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{x} + sen \cos \phi \hat{y} + \cos \phi \hat{y} + \cos \phi \hat{y}$ | $z = sen 0 \cos \phi \hat{x} + sen$

JUNIO 1997

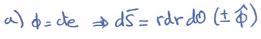
Escriba el vector de posición \vec{r} en función de los vectores unitarios de coordenadas cilíndricas, sabiendo que el vector de posición define el punto $P(\rho = 3, z = 4, \varphi = \pi)$.

SEPTIEMBRE 1997

Escriba el vector diferencial de superficie, en coordenadas esféricas, correspondiente a:

a) una superficie $\varphi = cte$

b) una superficie $\theta = cte$

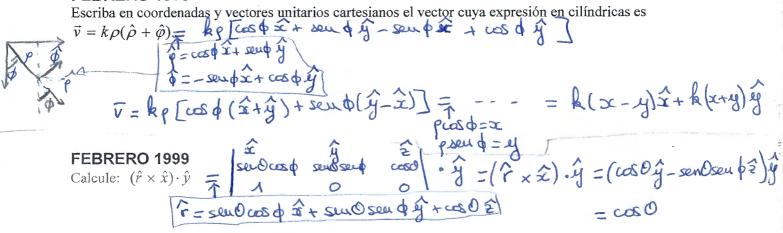


b) 0 = de = 0 ds = rsouldrdo (10)



FEBRERO 1998

Escriba en coordenadas y vectores unitarios cartesianos el vector cuya expresión en cilíndricas es



FEBRERO 1999

Calcule:
$$(\hat{r} \times \hat{x}) \cdot \hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \text{senOces} \phi & \text{senOsen} \phi \hat{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \text{cosO} \end{bmatrix} \cdot \hat{y} = \begin{bmatrix} \cos O \hat{y} - \sin O \sin \phi \hat{z} \end{bmatrix} = \cos O$$

$$\hat{r} = \sin O \cos \phi + \sin O \sin \phi + \cos O \hat{z}$$

$$= \cos O$$

SEPTIEMBRE 2000

Escriba la expresión del diferencial de volumen en coordenadas esféricas.

dV = r2sonOdrdodO

TEMA 1. OPERADORES VECTORIALES

FEBRERO 1997	VII A VII A VII A L.S.	7
Calcule: $\nabla[(\vec{a}-\vec{r})\cdot\vec{b}]$	2 x + 24 + 2 = - 0x x - by y - 02 = -	5
escalar sogradiente	= 2[] x+ 3[] y+ 0[] 2 = - bxx-by y-bz2 = - a=axx+ayy+az2 = de	
and the second s	F = xx + yxx + 22 = che F = xx + yxx + 22 = che	
15 E X	E=x5+40+35	
(a-r) = (ax-x) bx+1	1-4)by + (a2-2)bz	

JUNIO 1999

Desarrolle la expresión matricial $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{r})$ donde \vec{a} es un vector constante y \vec{r} el vector de posición

de un punto del espacio. Nota: $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$ de un punto del espacio. Nota: $\nabla \times (A \times B) = A(V \cdot B) - B(V \cdot A) + (B \cdot A) + (A \cdot A)$

Desarrolle la expresión vectorial $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{r})$ donde \vec{a} es un vector constante y \vec{r} el vector de posición. $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a}$

FEBRERO 2000

divergencia (hay puntito) Desarrolle la expresión vectorial $\nabla \cdot [\nabla \times (\vec{A} \nabla \cdot \vec{A})]$

D V. [VXF] = 0 ver hoja adjuit

FEBRERO 2001

Si \vec{A} y \vec{B} son campos vectoriales, ¿cuánto vale $\nabla \times \nabla \left(\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \right)$?

diversencia (hay pantito)

NOVIEMBRE 2001

Si A es un campo vectorial y φ es un campo escalar, describa con palabras y obtenga el valor de la expresión $\nabla \cdot (\vec{A} \times (\nabla \times \nabla \varphi))$.

FEBRERO 2002

Calcule el valor de $\Delta \vec{r}$ (laplaciana de \vec{r}) siendo \vec{r} el vector de posición de un punto P(x, y, z)

Demostrar que $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$, $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

rotacional del

direigencio del

Schwarz

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z} = F_1 \hat{x} + F_2 \hat{y} + F_3 \hat{z}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\hat{x}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^{2}\phi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^{2}\phi}{\partial y\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial^{2}\phi}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial^{2}\phi}{\partial$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \hat{A}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_{x} & A_{y} & A_{z} \end{vmatrix} = \nabla \cdot \left[\frac{2A_{z}}{2y} \hat{x} + \frac{\partial A_{x}}{\partial z} \hat{y} + \frac{\partial A_{y}}{\partial x} \hat{z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial A_{y}}{\partial z} \hat{x} \right] =$$

$$= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial A_{z}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y}}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_{x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y} \right) \hat{z} \right] =$$

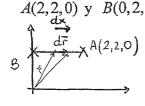
$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_{z}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_{x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{z}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_{y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{x}}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial^{2} A_{z}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^{2} A_{y}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^{2} A_{x}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^{2} A_{z}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^{2} A_{x}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^{2} A_{x}}{\partial y \partial z} = 0$$

TEMA 1. INTEGRALES DE LÍNEA

FEBRERO 1996

Dado el campo $\vec{E} = x\hat{x} + x^2y\hat{y} + xy^2\hat{z}$, calcule $\int_{-1}^{18} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ a lo largo de la recta que une los puntos



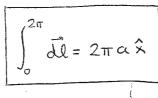
(1)
$$\vec{r} = x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y} + 2 \cdot \hat{z} = t \hat{x} + y = 2$$

$$A(2,2,0) \text{ y } B(0,2,0). \quad \text{ } \underbrace{\bigcap_{r=x\cdot\hat{x}+y\cdot\hat{y}+2\cdot\hat{z}}_{z=z} \pm \hat{x}+2\hat{y}+0\cdot\hat{z}}_{\text{d}\bar{x}}; \underbrace{\frac{d\bar{r}}{d\bar{r}}=\hat{x}}_{\text{d}\bar{x}=dt\cdot\hat{x}}; \underbrace{\frac{d\bar{$$

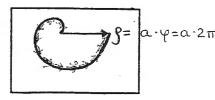
JUNIO 1996

$$\underbrace{\begin{array}{ccc}
2 & \overline{E} \cdot dl = x \cdot dx \\
\int_{A}^{B} \overline{E} dl & = \int_{2}^{0} x \cdot dx = \frac{x^{2}}{2} \Big|_{2}^{0} i & \int_{A}^{B} \overline{E} dl & = -2
\end{array}}_{A}$$

Calcule $\int_{0}^{2\pi} d\vec{l}$, donde $d\vec{l}$ es el diferencial de longitud en una curva plana definida por $\rho = a\phi$ (véase





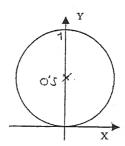


FEBRERO 2000

Obtenga los valores de las siguientes integrales de línea sobre la curva $\rho = \text{sen}\phi$ definida entre 0 y π .

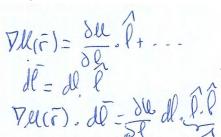
$$\oint_C dl = L_c = 2\pi \cdot 12$$

$$\oint_C d\vec{l} = \bigcirc$$



SEPTIEMBRE 2000

Si $U(\vec{r})$ es una función conocida, ¿cuánto vale $\int_{\vec{q}}^{b} \nabla U(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$ $\int_{0}^{b} \frac{\partial v}{\partial e} de = \int_{0}^{b} du(\vec{r}) = u(\vec{b}) - u(\vec{a})$



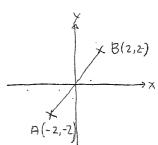
SEPTIEMBRE 2003

Obtenga los valores de las siguientes integrales de línea sobre la curva y = x definida entre A = (-2, -2)y B = (2,2).

$$\int_{A}^{B} dl = \left| \widehat{AB} \right| = \left| \left(4.4 \right) \right| = 4\sqrt{2}$$



$$\int_{A}^{8} d\vec{l} = \widehat{AB} = 4\widehat{x} + 4\widehat{y}$$



TEMA 2. DENSIDAD DE CORRIENTE

FEBRERO 1996

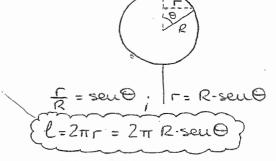
La figura muestra una superficie esférica de espesor despreciable superficie esférica de densidad

superficial $\vec{J}_S = \frac{K}{\operatorname{sen} \theta} \hat{\theta}$. ¿Cuánto vale la corriente que circula por los hilos en función de K?

$$J_{s} = \frac{I}{\ell}; I = J_{s} \cdot \ell;$$

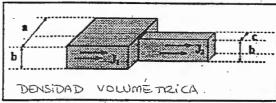
$$I = \frac{k}{\text{sen}\Theta} \cdot 2\pi R \cdot \text{sen}\Theta;$$

$$I = 2\pi k \cdot R \quad (A).$$



JUNIO 1996

En un sistema resistivo formado por dos tramos (ver figura) y sabiendo que por el primer tramo (en puntos suficientemente alejados de la transición de ambos tramos) fluye una densidad de corriente estacionaria J1, calcule la densidad de corriente J2 que fluye por el segundo tramo en puntos alejados de la transición.



-, Quiere decirque hay corriente en los extremos, no en le transición.

$$J_1 = \frac{T}{a \cdot b}; T = J_1 \cdot a \cdot b$$

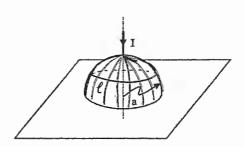
$$J_2 = \frac{T}{c \cdot b}; J_2 = \frac{J_1 \cdot a \cdot b}{c \cdot b} \longrightarrow J_2 = J_1 \cdot \frac{a}{c}$$

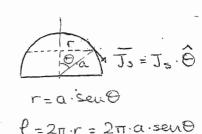
SEPTIEMBRE 1998

Obtenga la distribución de corriente estacionaria superficial sobre la concha semi-esférica con radio a de la figura. $\frac{\partial J_{z}}{\partial z}$?

$$J_s = \frac{T}{l}$$
; $J_s = \frac{T}{2\pi a \cdot \text{seu}\Theta}$

$$\vec{J}_{s} = \frac{\vec{I}}{2\pi \cdot a \cdot \text{sen} \theta} \cdot \hat{\theta}$$



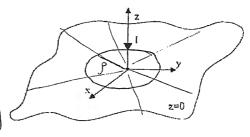


FEBRERO 2002

Calcule la densidad de corriente en régimen estacionario que aparece sobre el plano conductor indefinido z=0 cuando sobre el hilo situado en el eje z de la figura circula una corriente I

orriente
$$I$$

$$J_{s} = \frac{T}{\ell} = \frac{T}{2\pi \rho}; \quad J_{s} = \frac{T}{2\pi \rho} \hat{\rho} \quad (A/m)$$

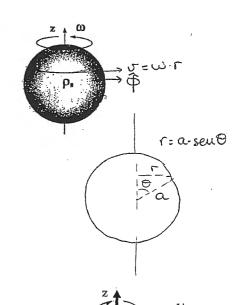


FEBRERO 2003

En situación de corriente estacionaria, obtenga la densidad de corriente superficial que circula por el conductor perfecto esférico de radio a de la figura, que soporta una densidad superficial de carga ρ_S y rota a velocidad w.

$$J_s = f_s \cdot v = f_s \cdot \omega \cdot a \cdot seu\theta;$$

$$J_s = f_s \cdot \omega \cdot a \cdot seu\theta \cdot \hat{\phi}$$



FEBRERO 2005

Calcule la densidad de corriente y la corriente asociada a un anillo de carga superficial ρ_S cul/m² con radio a y altura h, que rota a una velocidad angular w_0 rad/s.

$$J_s = \beta_s \cdot v = \beta_s \cdot \omega_0 \alpha;$$

$$J_s = \beta_s \cdot \omega_0 \cdot \alpha \cdot (-\hat{\varphi})$$

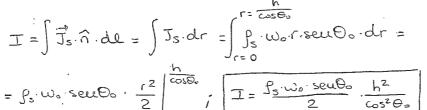
SEPTIEMBRE 2005

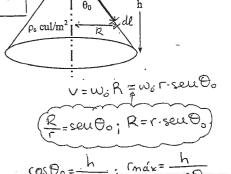
Calcule la densidad de corriente y la corriente asociada a un cono de carga superficial ρ_S cul/m² con ángulo generatriz θ_0 y altura h, que rota a una velocidad angular w_0 rad/s.

$$J_{s} = f_{s} \cdot v = f_{s} \cdot w_{o} \cdot r \cdot seu \Theta_{o}; \quad \overline{J_{s}} = f_{s} \cdot w_{o} \cdot r \cdot seu \Theta_{o} \quad (-\hat{\phi})$$

$$(v = w_{o} \cdot r \cdot seu \Theta_{o})$$

$$(r = \frac{h}{\cos \Theta_{o}})$$





TEMA 2. ECUACIONES GENERALES

SEPTIEMBRE 1996

Calcule la variación direccional del campo escalar $\phi = \frac{k}{x^2 + v^2 + z^2}$ según la dirección \hat{x} , en

The first definition por x = y = z.

The first punitos definition por x = y = z. $\nabla \varphi \hat{x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z}\right) \hat{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2x k}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{2x k}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{2x k}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ $= \frac{-2xk}{9x9} = \frac{-2k}{3x3}$

SEPTIEMBRE 1996

Cuál es la distribución volumétrica de carga que en un determinado recinto con permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0 r^4$, genera en dicho recinto un potencial como el de la pregunta anterior. $\varepsilon = \varepsilon_0 r^4$

 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{0} r^{2}, \text{ genera en dicho recinio un potential control of de la progunta anterior.}$ $\phi = \frac{1}{x^{2}+y^{2}+z^{2}} = \frac{1}{r^{2}} ; \quad \overline{\mathcal{E}} = -\nabla \phi = -\left(\frac{-2k}{r^{3}}\right) \hat{r} = \frac{2k}{r^{3}} \hat{r}$ $Saltemed que : \nabla \vec{D} = \vec{P}_{V}$ $\vec{D} = \mathcal{E} \vec{E} = \frac{2k\mathcal{E}_{0}}{r^{3}} \hat{r} = \frac{2k\mathcal{E}_{0} r^{4}}{r^{3}} \hat{r} = 2k\mathcal{E}_{0} r^{2} \hat{r} = 0$ $\vec{P}_{V} = \frac{1}{r^{2}} \frac{3(r^{2} \Delta r)}{3r^{2}} = \frac{6k\mathcal{E}_{0} r^{2}}{r^{3}} \hat{r} = \frac{6k\mathcal{E}$

¿Cómo son las líneas de campo de un campo vectorial de tipo solenoidal?. ¿Por qué?. V. A=0; Las líneas de campo son cerradas y no hay fuentes escalares.

FEBRERO 1999

Indique bajo que condiciones el modelo de Maxwell garantiza que $\nabla \times \vec{E} = 0$.

PXE = - 3B & Electrostatica

PXE = - 3B & Electrostatica

The Magnetostatica

The Greentes estacionarias

SEPTIEMBRE 1999

Considere una situación en que el campo eléctrico es nulo y el campo magnético viene dado por

 $\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \hat{x}H_0 & 0 < z \\ 0 & z < 0 \end{cases}$ Cuánto vale la densidad de corriente superficial en el plano z = 0?
Ecucación continuidad : $\vec{T}_S = \hat{x} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \hat{z} \times (\hat{t}_0 + \hat{x} - \vec{0}) = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \hat{y} & \hat{z} \end{pmatrix}$ = Hog



JUNIO 1999 - FEBRERO 2002

Dado el siguiente campo vectorial expresado en coordenadas y vectores unitarios esféricos y donde a, b y R son constantes. Razone si corresponde a un campo eléctrico en situación estática.



FEBRERO 2006

Si una esfera de radio a, conductividad σ , y permitividad ε está cargada en t=0 con una carga q_0 distribuida uniformemente, ¿cuál es el valor de su densidad de carga en t=0?.

FEBRERO 2006

¿Cuál es la evolución temporal de la densidad de carga anterior? Si no ha contestado al apartado anterior llame ρ_0 a la densidad en t=0. $\nabla \overline{\nabla v} + \frac{d\rho}{dt} = 0$ $\nabla \nabla \overline{v} = \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt} = 0$ $\nabla \nabla \overline{v} = \frac{d\rho}{dt} = 0$

¿Cuál sería la densidad de corriente asociada a la variación de carga anterior?. Asuma que sólo

tiene componente r. Si no ha contestado al apartado anterior suponga que $\rho(\vec{r},t) = \rho_0 \frac{t_0}{t} \frac{r}{a}$. $\vec{\nabla} = \vec{\nabla} \vec{v}(r) \vec{r}, \quad \vec{\nabla} \vec{\nabla} \vec{v} + \frac{de}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \vec{\nabla} \vec{v} = \frac{1}{t^2} \frac{d}{dr} (r^2 \vec{\nabla} \vec{v}(r))$ $\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \vec{\nabla} \vec{v}(r)) = -\frac{de}{dt} \Rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{3q_0}{4\pi a^3} e^{-\frac{r^2}{4t}} \right] = -\frac{r}{E} \cdot \frac{3q_0}{4\pi a^3} e^{-\frac{r^2}{4t}}$ $\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \vec{\nabla} \vec{v}(r) \right] = +\frac{r}{E} \cdot \frac{3q_0}{4\pi a^3} e^{-\frac{r^2}{4t}}$

SEPTIEMBRE 2006

Dada la distribución de campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{K}{\rho} e^{\rho/a} \hat{\rho} &; & 0 \le \rho < a \\ 0 &; & a < \rho \end{cases}$

¿Cuánto valdrá la densidad de carga sobre la superficie $\rho = a$?, la constante dieléctrica relativa

vale
$$\varepsilon_r = 1$$
. $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 = 1\varepsilon_0 = \varepsilon_0$

$$|s(\rho = \alpha) = \hat{n} \cdot (\bar{b}_2 - \bar{b}_1)|_{\rho = \alpha} = \hat{\rho} \cdot (\bar{b}(\rho = \alpha^{\dagger}) - \bar{b}(\rho = \alpha^{\dagger})) = \hat{\rho} \cdot (\bar{b}(\rho =$$

SEPTIEMBRE 2006

Dada la distribución de campo magnético en el vacío $\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} G \frac{a}{\rho} \hat{\phi} & ; \ 0 \le \rho < a \\ 0 & ; \ a < \rho \end{cases}$ $\vec{S} = \vec{m} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{p} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{h} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{$

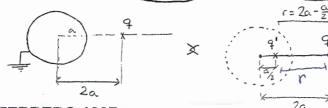
SEPTIEMBRE 2006

¿Qué unidades deberá tener la constante G de la pregunta anterior?

TEMA 3. METODO DE LAS IMAGENES

JUNIO 1996

Calcule la energía de interacción entre una carga y una esfera metálica de radio a, con centro en el origen de coordenadas y puesta de masa, y una carga puntual de valor q situada a una distancia 2a del centro de la esfera, sabiendo que el problema imagen del anterior sitúa una carga imagen de valor (q' = -q/2)a una distancia (r' = a/2)tel origen de coordenadas.



$$W_{\epsilon} = \frac{q \cdot q'}{4\pi \varepsilon \cdot r} = \frac{2q \cdot q'}{12\pi \varepsilon \alpha};$$

$$W_{\epsilon} = \frac{q \cdot q'}{6\pi \varepsilon \cdot \alpha} = \frac{-q \cdot \frac{q}{2}}{6\pi \varepsilon \alpha};$$

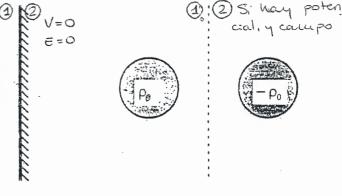
$$W_{\epsilon} = \frac{-q^{2}}{12\pi \varepsilon \alpha}$$

FEBRERO 1997

La figura de la izquierda representa una esfera de con una carga distribuida uniformente con una densidad ho_0 frente a un plano conductor indefinido puesto a tierra. La figura de la derecha representa el correspondiente problema imagen. ¿En cuál de las dos situaciones la energía eléctrica total será mayor?

$$W_{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \iiint \mathcal{E} \cdot |\bar{\epsilon}|^2 dV$$

El esquema de la derecha será el que terra más energia porque hay mas campo. En-la zona 1 el campo es el mismo en antos casos, y por tanto, tienen la misma energía. En la zona 2 el campo es rulo en la distribución original, y no rulo en el problema magen. Por tanto la energia será mayor en el problema



SEPTEIMBRE 1997

Calcule el momento dipolar del sistema de la figura formado por un diedro conductor indefinido y una carga puntual a una distancia d de ambos planos del diedro.

$$\vec{p} = \sum_{i} \vec{r}_{i} \cdot q_{i}$$

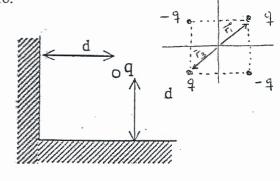
$$\vec{r}_{i} \cdot q + \vec{r}_{3} \cdot q = \vec{r}_{i} \cdot q - \vec{r}_{i} \cdot q = 0$$

$$\vec{r}_{3} = \vec{r}_{i}$$

$$\vec{r}_{3} = \vec{r}_{i} \cdot q + \vec{r}_{3} \cdot q + \vec{r}_{3} \cdot q = 0$$

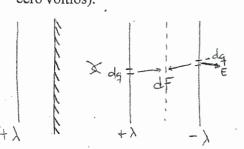
$$\vec{r}_{2} = \vec{r}_{i} \cdot q + \vec{r}_{3} \cdot q + \vec{r}_{3} \cdot q + \vec{r}_{4} \cdot q = 0$$

$$\vec{r}_{3} = \vec{r}_{i} \cdot q + \vec{r}_{3} \cdot q + \vec{r}_{3} \cdot q + \vec{r}_{4} \cdot q = 0$$



JUNIO 1999

Calcule la fuerza electrostática (por unidad de longitud) que experimenta un hilo indefinido con densidad de carga $+\lambda$, situado paralelo y a una distancia d de un plano de masa indefinido (a cero voltios).



F= q· E; dF = dq· E =
$$\lambda$$
· dl· E; $\frac{dF}{dl} = \lambda$ · E

$$\begin{array}{c}
Aphicondo Gauss: \\
Q = \iint \overline{D} \cdot d\overline{S} = E_0 \iint \overline{E} \cdot dS = E_0 \cdot E \cdot dS = E_0 \cdot E
\end{array}$$

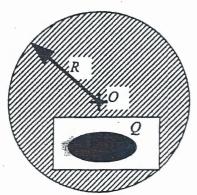
$$\begin{array}{c}
Aphicondo Gauss: \\
Q = \iint \overline{D} \cdot d\overline{S} = E_0 \cdot E \cdot 2\pi p \cdot \frac{dF}{dl} = \frac{\lambda^2}{2\pi E_0 p}
\end{array}$$

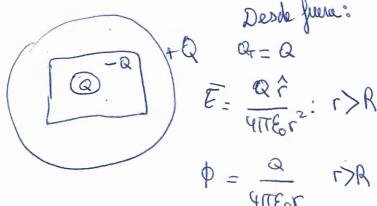
$$\begin{array}{c}
AF = Q \cdot \overline{E} : dF = dq \cdot \overline{E} = \lambda \cdot dl \cdot \overline{E} : dF = \lambda \cdot \overline{E}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
Aphicondo Gauss: \\
Q = \iint \overline{D} \cdot d\overline{S} = E_0 \cdot E \cdot 2\pi p \cdot \frac{dF}{dl} = \frac{\lambda^2}{2\pi E_0 p}
\end{array}$$

FEBRERO 1997

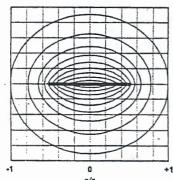
La figura muestra una esfera conductora descargada, de radio R y centrada en el origen de coordenadas, que tiene en su interior una cavidad de forma prismática que, a su vez, contiene un cuerpo con una carga Q. Calcule el potencial en el exterior de la estructura.





FEBRERO 1997

La figura representa las líneas equipotenciales debidas a un disco. ¿Puede tratarse de un disco conductor?.



Un unductor 1-campo interior nula Como hay varior linear equiphenciales tocando el disco no puede ser un conductor ya que su superficie esta a deferentes prenciales.

MISMO

SIGNO.

FEBRERO 1999

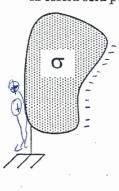
La figura muestra las líneas equipotenciales debidas a dos cargas puntuales de igual valor absoluto. Razone si dichas cargas tienen el signo igual o diferente.

Si las caigas fueran de signo contrario, el plano de simetría estado a potencial rulo y todas las superficies equipotenciales pasariam entre las dos caigas. La única equip que rodearió a las 2 caigos a la iere serio la de Over el so.

Si las cougas fueran del mismo, signo habitá equipotenciales que rodeen a las 2 carps a la vez

SEPTIEMBRE 1999

La figura muestra una carga positiva frente a un conductor puesto a tierra. Razone si la carga de la esfera será positiva, negativa o nula.



Al estar a herra, cuando se va acercando le conjunta positiva, las cargos positivas del not. del condecetra se van par el cable (Se repelen) = D La carga meta queda negativa

TEMA 3. MOMENTO DIPOLAR Y CAMPO LEJANO

JUNIO 1996

Obtenga una aproximación del campo eléctrico en puntos lejanos del sistema formado por una carga q situada a una distancia 2a del origen y otra carga q' = -q/2 situada a una distancia r' = a/2 del origen de coordenadas.

$$0 = q + q' = q - \frac{q}{2} = \frac{q}{2}$$

$$(9/2)$$

$$(7)$$

$$= \frac{(9/2)}{4\pi \epsilon c^2} \hat{r}$$

JUNIO 1999

Suponga una superficie esférica cargada con densidades superficiales $+\rho_s$ y $-\rho_s$ en los hemisferios norte y sur respectivamente. ¿Variará el campo eléctrico en puntos alejados como



En puntos elejados:
$$\overline{E} = \frac{Q_T}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{r} + \frac{1}{4\pi \varepsilon r^3} \left[\frac{3(\vec{p};\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right]$$

Por la simetrio de la geometrio 0,7=0, Así que el campo no variará como 1. Variará como el campo de un dipolo (73)

JUNIO 1999

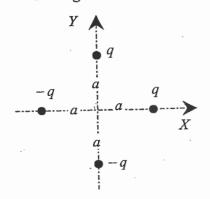
Calcule el momento dipolar del a anterior distribución.

$$P = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$
 $\vec{P}_1 = \int_{0.0}^{0.0} \int_{0.0}^{0.0} \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_3 \cdot \vec{P}_4 \cdot \vec{P}_4$

$$\vec{P_1} = \vec{P_5} \cdot \vec{r}^3 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{z} = \vec{P_5} \cdot \pi \, \alpha^3 \cdot \hat{z}$$

SEPTIEMBRE 2000

Calcule el momento dipolar de la distribución de cargas puntuales contenidas en el plano z = 0de la figura.



$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = q \cdot 2\alpha \hat{q} + q \cdot 2\alpha \hat{x}$$

$$\vec{p} = q \cdot 2\alpha (\hat{x} + \hat{q})$$

TEMA 3. CONDENSADORES

FEBRERO 1996

Suponga dos condensadores planos idénticos en dimensiones y con diferentes dieléctricos (ε_1 y ε_2). Indique la relación que deben mantener sus diferencias de potencial (V_1 y V_2) para que almacenen la misma energía.



JUNIO 1997

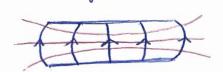
Si un condensador plano de capacidad C y dieléctrico ε_1 entre placas almacena una energía W_1 cuando se conecta a una batería de V voltios, ¿qué energía almacenará un condensador esférico con dieléctrico ε_2 entre placas, de la misma capacidad que el anterior C cuando se conecta a una batería de V voltios?. $W = \frac{1}{2} C V^2$ $W_2 = \frac{1}{2} C V^2$ $W_3 = \frac{1}{2} C V^2$

La energia depende de la capacidad del caedersador is de l diferencia la poternial, y como son ignoles los dos en los 2 condonsado almacenan misma energia.

FEBRERO 1999

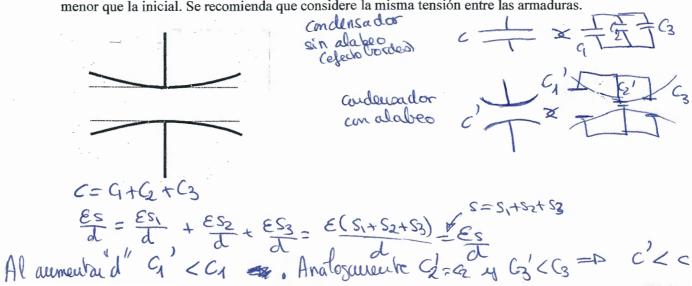
Dibuje al menos tres superficies equipotenciales simétricas y cinco líneas de campo simétricas de un condensador plano real (con efecto de bordes). Con ejecto de bordes

sin efecto de bordes:



SEPTIEMBRE 1999

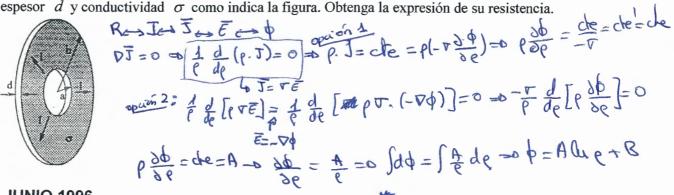
Con el tiempo las armaduras de un condensador plano se han alabeado de forma que la separación entre las mismas aumenta en sus bordes. Razone si la nueva capacidad será mayor o menor que la inicial. Se recomienda que considere la misma tensión entre las armaduras.



TEMA 4. CORRIENTES ESTACIONARIAS

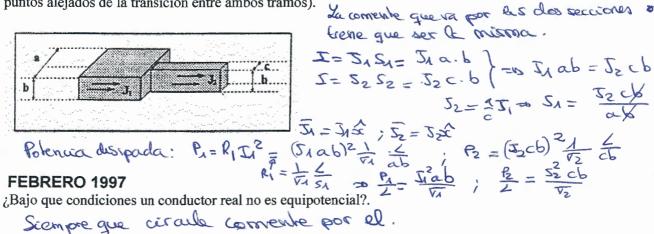
FEBRERO 1996

Entre el conductor interior y el exterior de un cable coaxial se sitúa una lámina resistiva de espesor d y conductividad σ como indica la figura. Obtenga la expresión de su resistencia.



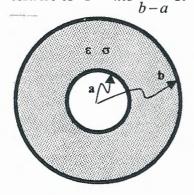
JUNIO 1996

Calcule la potencia por unidad de longitud disipada en cada tramo del sistema siguiente (en puntos alejados de la transición entre ambos tramos).



SEPTIEMBRE 2000

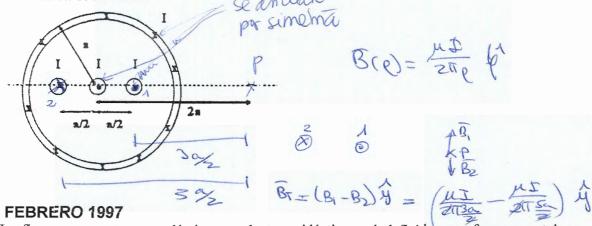
Obtenga el valor de la resistencia de la figura entre el borne esférico interior y el exterior. Utilice la dualidad capacidad-conductancia y recuerde que la capacidad de un condensador esférico es $C = 4\pi\varepsilon \frac{ab}{b-a}$ C.



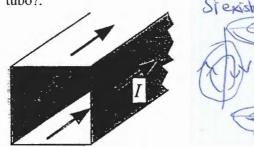
TEMA 5. MAGNETOSTÁTICA

JUNIO 1996

En un sistema de conductores con simetría (véase la sección representada en la figura) por los que circula corrientes estacionarias de I amperios con los sentidos indicados en la figura, determine el valor del vector campo magnético en un punto P exterior al sistema situado a una Seanahn distancia 2a de su centro.

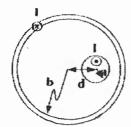


La figura representa cuatro láminas conductoras idénticas e indefinidas que forman un tubo hueco e indefinido de sección cuadrada. Si por este tubo circula en sentido longitudinal una corriente I que se distribuye de forma uniforme. ¿Existirá campo magnético en el interior del Stexiste campo magnetico en el unhancer del hubo tubo?.



FEBRERO 2002

Razone si es o no nulo el campo magnético en el exterior de un coaxial descentrado que transporta una corriente I.

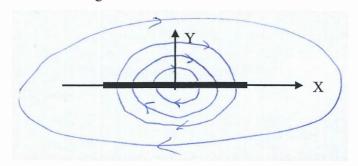


Por superposición del compo cuendo por corona exterior y del compo cuendo por el helo inhenior se comprueba que el compo en el exterior no se anna.

(P) Z

FEBRERO 2002

Represente sobre la figura las líneas de inducción de campo magnético de una tira metálica de espesor despreciable, anchura w y que transporta una corriente estacionaria I según -z. La sección de esta tira se ve en la figura.



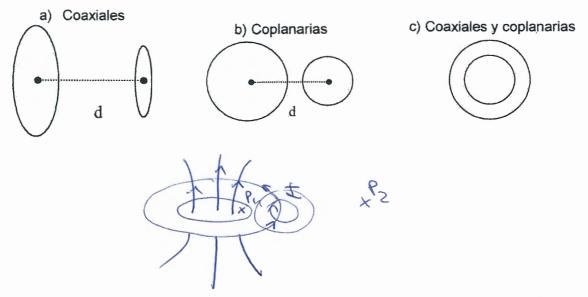
FEBRERO 2003

Los coaxiales de las figuras tienen el conductor exterior de sección cuadrada y el interior de sección circular. Razone si el campo magnético es nulo en el exterior del coaxial descentrado de la figura. ¿Es acaso nulo si centramos el conductor interior como se muestra en la figura b?.



Razone y ordene de mayor a menor el valor de las inductancias mutuas (valor absoluto) de las parejas de espiras circulares en las tres posiciones signientes. ilo es nulo:

parejas de espiras circulares en las tres posiciones siguientes.



En le 3000 esterior al arocuraular el volor del compo magnetico es mayor que en le 3 are exterior. Bp, > Bpz. la tombo el flujo en le setuciai b.

TEMA 5. FUERZA MAGNÉTICA

FEBRERO 1998

En una línea bifilar circula una corriente de valor $I=I_0$ sen wt en sentido contrario en cada hilo. Razone si los conductores se atraerán o se repelerán bajo condiciones de variación lenta.

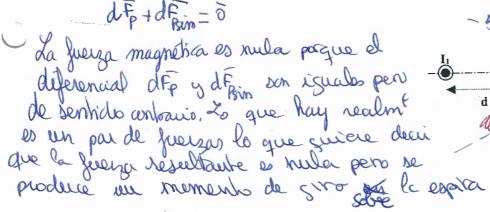


$$F_{12} = I_1 E_1 \times B_2 = I_1 L B_2(xx) N B_2 = \frac{\mu J_2}{2 \pi d}$$

$$F_{21} = \frac{1}{2} I_2 \times B_1 = \frac{1}{2} I_2 \times B_1 = \frac{1}{2} I_3 \times B_1 = \frac{1}{2} I_$$

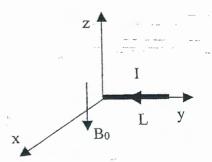
FEBRERO 2001 (en ambos vauiau al mumo houpes)

Justifique el valor que toma la fuerza magnética total que aparece entre el hilo indefinido (perpendicular al papel en la figura adjunta) y la espira circular representada.





Calcule la fuerza magnética que sufre la varilla de la figura sometida a un campo magnético uniforme $-B_0\hat{z}$. La varilla sin grosor y de longitud L transporta una corriente I.



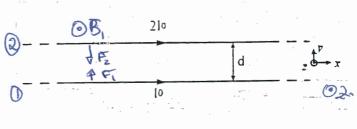
SEPTIEMBRE 1996

Calcular el campo de fuerza por unidad de longitud a la que está sometido el hilo indefinido por el que circula la corriente de $2I_0$ amp.

$$\overline{B}_{1} = \underbrace{2\pi J_{0}}_{2\pi J_{0}} \stackrel{?}{=}$$

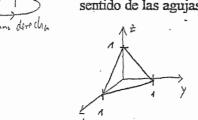
$$= \underbrace{2J_{0} L}_{2\pi J_{0}} \underbrace{\mu J_{0}}_{2\pi J_{0}} (-\mathring{g})$$

$$\overline{F_{0}br_{2}} = \underbrace{\mu J_{0}}_{\pi J_{0}} (-\mathring{g}) V_{m}$$



JUNIO 1996

Calcule el momento dipolar magnético de una espira triangular plana con vértices dados en coordenadas cartesianas por (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) por la que circula una corriente I (en sentido de las agujas del reloj vista la espira desde el origen.

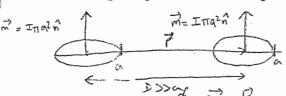


$$\vec{m}_{1} = I \frac{1}{2} \hat{\chi}$$

$$\vec{m}_{2} = I \frac{1}{2} \hat{\chi}$$

$$\vec{m}_{3} = I \frac{1}{2} \hat{\chi}$$

Calcule el coeficiente de inducción mutua entre dos espiras circulares de radio a, situadas en el mismo plano y con sus centros separados una distancia D>>a.



$$z_{1} = \frac{g_{21}}{I_{1}} = \frac{g_{21}}{I_{1}} = \frac{g_{21}}{I_{1}} = \frac{g_{22}}{I_{1}} = \frac{g$$

$$\overrightarrow{R} = I \pi a^{2} \hat{n} \qquad \overrightarrow{B} = \frac{M}{4\pi I^{3}} \left[\frac{3(\overrightarrow{m}^{2} \cdot \overrightarrow{r}) \overrightarrow{r}}{r^{2}} - \overrightarrow{m} \right] = \frac{M}{4\pi J^{3}} \left[\frac{3(I \pi a^{2} \hat{n} - D \hat{r}) D \hat{r}}{D^{2}} - I \pi a^{2} \right]$$

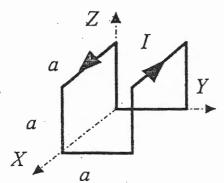
$$= -\frac{M I \pi a^{2} \hat{n}}{4 \pi J^{3}} = -\frac{M I a^{2}}{4 D^{3}} \hat{n} \qquad |\overrightarrow{r}| \approx D$$

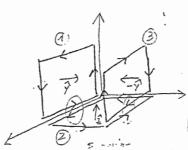
$$\Rightarrow \partial_{1} = \overrightarrow{B}_{21} \cdot \overrightarrow{B} \qquad (1 + M \neq a^{2} \cdot a) \qquad (2 + 2a) \qquad (3 + 2a) \qquad (3$$

$$= \frac{\int_{20}^{20} \vec{B}_{20}^{20} \cdot \vec{A}}{I_{1}} = \frac{1}{I_{1}} \left(-\frac{\mu \pm a^{2}}{4D^{3}} \vec{A} \right) \left(\pi a^{2} \vec{A} \right) = \frac{-\mu a^{4} \pi}{4D^{3}}$$

FEBRERO 1997

La figura muestra una espira construida con 8 varillas conductoras rectas e idénticas por la que circula una corriente de intensidad . Cada una de las varillas tiene longitud a y se desprecia su radio. ¿Cuál es el momento magnético de la espira?





$$\vec{m_1} = \text{Ia}^2 \vec{y}$$

$$\vec{m_2} = \text{Ia}^2 (-\vec{y})$$

$$\vec{m_3} = \text{Ia}^2 (-\vec{y})$$

$$\vec{m} = \vec{m_1} + \vec{m_1} + \vec{m_2} = \text{Ia}^2 (-\vec{y})$$

$$(A \cdot m^2)$$

mi momento dipotor magnetico

SEPTIEMBRE 1997

Justifique la variación con la distancia del campo magnético generado por distribuciones de corriente estacionaria en puntos lejanos de dichas distribuciones.

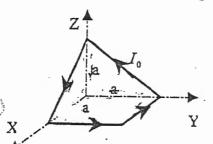
$$\overrightarrow{B}_{purts} = \frac{\mu}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{r})\overrightarrow{r}}{r^2} \overrightarrow{m} \right]$$

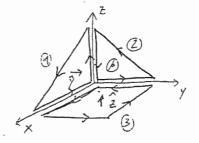
 ζ Cómo es la variación con la distancia al origen del campo B debido a una corriente estacionaria contenida en una región de dimensiones finitas?. ζ Por qué?.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{4\pi |\vec{r}|^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right]$$

JUNIO 1999

Calcule el momento magnético de la espira de la figura.

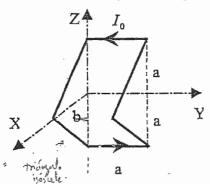


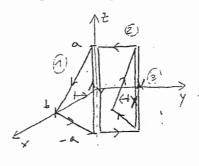


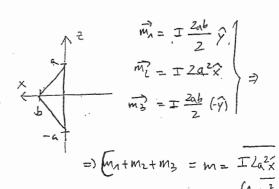
$$\vec{m}_{\lambda} = \vec{T} \frac{\alpha^{2}}{2} \hat{\vec{x}}$$

SEPTIEMBRE 1999

Calcule el momento magnético de la espira de la figura.

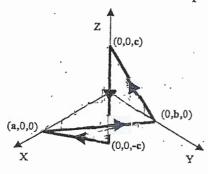


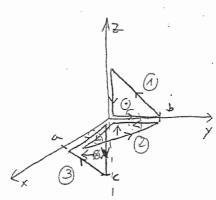




SEPTIEMBRE 2000

Calcule el momento magnético de la espira no plana de la figura cuando es recorrida por una corriente de valor I amperios.





$$\overrightarrow{m_1} = \overline{\underline{L}} \frac{bc}{2} \widehat{\chi}$$

$$\overrightarrow{m_2} = \overline{\underline{L}} \frac{bc}{2} \widehat{\chi}$$

$$\overrightarrow{m_3} = \overline{\underline{L}} \frac{bc}{2} \widehat{\chi}$$

FEBRERO 2000

Calcule el momento magnético \vec{m} de un solenoide de longitud L, de n espiras/m, siendo las espiras circulares y de radio a. El eje del solenoide coincide con el eje z.

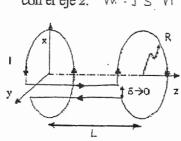


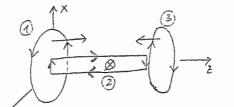
$$\vec{m} = \int_{0}^{L} d\vec{m} = \int_{0}^{L} \pi a^{2} In dz = \pi a^{2} In L$$

Espiras ar une

FEBRERO 2003

Calcule el momento magnético \vec{m} del circuito con las dimensiones de la figura. Su eje coincide con el eje z. $\forall v \in \mathcal{I} \subseteq \hat{v}$





$$\vec{m_1} = I\pi R^2 \vec{2}$$

$$\vec{m_2} = ILS(-\hat{\gamma})$$

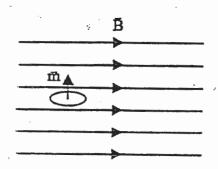
$$\vec{m_3} = I\pi R^2 (-\hat{2})$$

$$\vec{m} = \vec{m} + \vec{m} + \vec{m} = -IL \delta \hat{y}.$$

$$\vec{m} = \ell / (-ILS\hat{y}) = 0$$

SEPTIEMBRE 1998 - FEBRERO 2003

¿Qué fuerza sufre el dipolo magnético de la figura sometido a un campo uniforme \vec{B} ?



$$\vec{F}_{m} = - \left. \left. \left. \left. \left. \left(\vec{m} \cdot \vec{B}' \right) \right| \right. \right| \vec{B}' = \text{uniforms}$$
 $\vec{m} \cdot \vec{B}' \text{ uniforms}$

TEMA 6. VARIACIÓN TEMPORAL LENTA

FEBRERO 1996

Una espira de radio r está situada en el plano z = 0 con su centro en el origen de coordenadas y por ella circula una corriente estacionaria en sentido antihorario. Otra espira igual, centrada sobre el eje Y con normal según \hat{y} se desplaza a velocidad constante. Razone si se induce sobre ella fuerza electromotriz e indique gráficamente su polaridad.



Todas las lineas de campo que abrainesa la superficie de le esporta l'entrar y salen por didna superficire. En lo cual el flujo neto es izual a cero. I le sem es rula.

JUNIO 1997

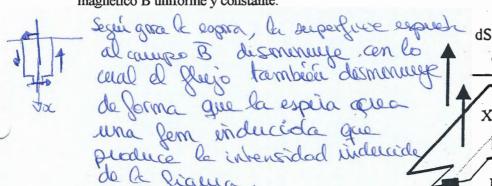
Sea una espira circular de radio a situada en el plano XZ y con su centro en el origen de coordenadas por la que circula una corriente I. Otra espira circular de radio a se mueve en un plano paralelo al XY con el centro a lo largo del eje Z, estando su coordenada z definida por

 $z = z_0 + \frac{z_0}{2} \operatorname{sen}(wt)$. ¿Cuál será la fuerza electromotriz que se induce en la espira en movimiento? Preto = de = 0 = fem = 0.



SEPTIEMBRE 1998

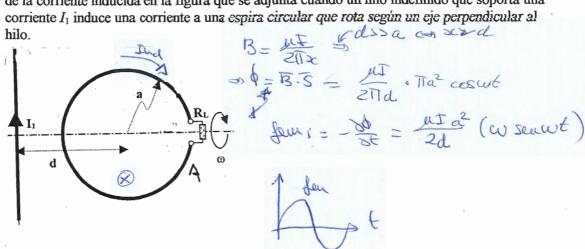
Razone y represente en la figura el sentido de la corriente inducida sobre una espira cuadrada de lado a que gira entorno al eje X, en el intervalo angular $0 \le \theta < \pi/2$, cuando se aplica campo magnético B uniforme y constante.



X $B = B_0 2$

SEPTIEMBRE 2000

Justifique el valor del la fem inducida y represente tanto el sentido positivo de la misma como el de la corriente inducida en la figura que se adjunta cuando un hilo indefinido que soporta una



SEPTIEMBRE 1997

 δ Se inducirá fuerza electromotriz en una varilla vertical de longitud L colocada en un automóvil en movimiento (velocidad constante v) suponiendo que las líneas de campo magnético terrestre

 B_T son paralelas al terreno?

lelas al terreno?

fora cable includes

from = -dd; fem = \int (\tilde{\tau} \tilde{\tau}) dl_ (\tilde{\tau} \tilde{\tau}) \tilde{\tau} = VB send \cdot 2 (t)

Si se inducina fem salvo en el caso en el sue le velocidad

\tilde{\tau} sea paralela a Bt

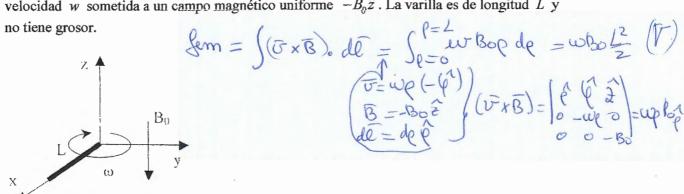
FEBRERO 1998

¿Cuáles son las unidades de la fuerza electromotriz?

Volling

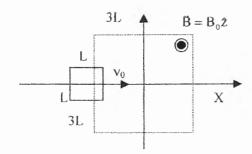
FEBRERO 2002

Calcule la fuerza electromotriz inducida que aparece en la varilla de la figura cuando rota con velocidad w sometida a un campo magnético uniforme $-B_0\hat{z}$. La varilla es de longitud L y



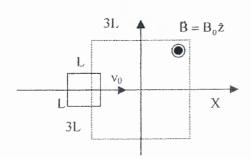
FEBRERO 2000 - SEPTIEMBRE 2005

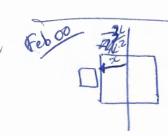
Represente en la figura la fem inducida sobre una espira cuadrada L x L que atraviesa una zona, también cuadrada, $3L \times 3L$ donde existe un campo magnético uniforme $B_0\hat{z}$. La espira se mueve a velocidad constante $\vec{v} = v_0 \hat{x}$. Se define el sentido positivo como el que corresponde a una corriente que circulara en el sentido opuesto a las agujas del reloj. (Realice la representación en función de la posición x_0 de la arista que primero se introduce en la zona del campo).

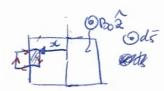


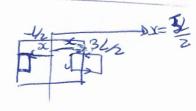
SEPTIEMBRE 2005

Represente la fuerza mecánica que hay que aplicar según el eje X a la espira del problema anterior, suponiendo que su resistencia vale R, para que mantenga la velocidad uniforme $v_0\hat{z}$. Desprecie el efecto de la autoinducción.



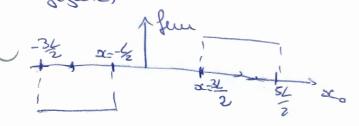


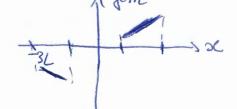




Segle entra la espera aumente el flujo del compo seu tentido salvente

tel papel (hava nosobos) por eso la fem crea una comiente que se apone a la vanación de glejo (como es la delayada es la





ELMG Problemas de examen

Febrero 2003 Ejercicio 1 a) Obtenga razonadamente las fuentes que generan el siguiente campo electrostático, definido en un medio de constante dieléctrica ε (compruebe la presencia de todo tipo de fuentes).

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & 0 < \rho < a \\ \frac{K_1}{\rho} \hat{\rho} & a < \rho < b \\ 0 & b < \rho \end{cases}$$

- b) Calcule razonadamente la carga total
- c) Obtenga razonadamente las fuentes que generan el siguiente campo magnetostático, definido en un medio de permeabilidad magnética μ (compruebe la presencia de todo tipo de fuentes).

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} K_{2}\rho\hat{\phi} & 0 < \rho < a \\ \frac{K_{3}}{\rho}\hat{\phi} & a < \rho < b \end{cases} \quad K_{3} = K_{2} a^{2}$$

$$0 \quad b < \rho$$

d) Calcule razonadamente la corriente encerrada en $a < \rho < b$.

Cauga puntualis. X caugas puntudos no hay mingu pt su dónde el caserpo se haga vignito uneales, mo hay minguna linea dende Caugas lineales: X caugas lineales, mo hay minguna linea dende Caugas lineales: X caugas engriros. Baardo g = 0 = 0 = 0Densidades superficiales de cauga.

Densidades superficiales de cauga. f = 0

En a (9(b
$$\nabla \cdot \vec{D} = \vec{p} \cdot \vec{b} \cdot \vec{p} \cdot \vec{b} \cdot \vec$$

d) 6 H. D= I

.

*

-

Febrero 2000 Ejercicio 1

El potencial electrostático de una distribución de carga viene dado por la siguiente expresión, en coordenadas esféricas:

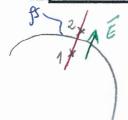
$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \Phi_1 = -K(a^2 - b^2) & \text{para } 0 \le r \le a \\ \Phi_2 = -K(r^2 - b^2) & \text{para } a \le r \le b \\ \Phi_3 = 0 & \text{para } b \le r \end{cases}$$

donde K es una constante que no hay que determinar. Considerando que el medio es el vacío, calcule:

- a) La intensidad del campo eléctrico en todo el espacio.
- b) Las densidades volumétricas y superficiales de carga que originan el potencial.
 - c) La carga total de la distribución.
 - d) La energía electrostática del sistema.

NOTA: en esféricas, si no existe dependencia ni con θ ni con φ :

$$\nabla \Phi = \frac{d\Phi \hat{r}}{dr} \qquad \Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) \qquad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 A_r \right)$$



$$g_s = \hat{m} \cdot (\bar{b}_2 - \bar{b}_4)$$

$$g_s = \hat{m} (\mathcal{E}_{\bar{e}} - \mathcal{E}_{\bar{e}})$$

a)
$$\vec{E} = -\nabla \phi = -\frac{d\phi}{dr} \hat{r} = \begin{cases} -\frac{d}{dr} \left[k(a^2 b^2) \cdot \hat{b} \right] \cdot \hat{c} < r < a \\ -\frac{d}{dr} \left[k(r^2 - b^2) \right] \cdot \hat{a} < r < b \\ -\frac{d}{dr} \left[o \right] \end{cases}$$

$$E = \int \frac{2 h r \hat{r}}{\xi_{F}}, \quad a < r < b$$

$$0, \quad restro$$

$$0 \quad restro$$

2) Densidades & superficiales de carga $f_s = \widehat{m} \cdot (\overline{D_2} - \overline{D_1})$, $\overline{D} = E \overline{E}$ $\Gamma = \alpha I$ $S_{\alpha} = \hat{M} \cdot \left[\vec{D}_2 - \vec{D}_1 \right]_{r=\alpha}$ $\vec{D}_{2} = \mathcal{E}_{0}\vec{E}_{2} = \mathcal{E}_{0}\vec{E}(r=a^{\dagger}) = \mathcal{E}_{0}\vec{E}(r=a^{\dagger}) \cdot \hat{r}$ $\vec{D}_{1} = \mathcal{E}_{0}\vec{E}_{1} = \mathcal{E}_{0}\vec{E}(r=a^{\dagger}) = \mathcal{E}_{0}\vec{E}(r=a^{\dagger}) \cdot \hat{r}$ $f_{sa} = \hat{C} \cdot \mathcal{E}_{o} \left[\mathcal{E}_{o} \left(r = \alpha^{\dagger} \right) - \mathcal{E}_{o} \left(r \neq \alpha \right) \right] \hat{C} = \mathcal{E}_{o} \left[2 k r \right]_{r=\alpha}$ = 2 le Eo a C/m2 $\frac{|r-b|}{|r-b|} = \hat{n} \cdot \left[\vec{D}_2 - \vec{D}_1 \right]_{r-b} = \hat{r} \mathcal{E}_0 \left[\mathcal{E}(g-b^{\dagger}) - \mathcal{E}(r-b^{\dagger}) \right] \hat{r}.$ = - Eo 2 Reb C/m2 c) Carga total de la distribución : Supongo que ni hay cargas puntuales ni lineales. Q = Qvol + Qsup Que = $Q \sup_{c=0} + Q \sup_{c=0} \int_{0=1}^{2\pi} \int_{0=1}^{2\pi} Q \sup_{a=0} \int_{0=0}^{2\pi} \int_{0$ $=2k\varepsilon_0a^3\int_0^{\infty}\sin\theta\,d\theta$ Que = 8 km & 03 (C) QSUPB = PSITED = -2RED - 4Tb= -8hTED 6 (C) Podicames hacelo mediante unal de sup paro como ficio de

Prof =
$$\iint_{C} dvd = \int_{C} v \iint_{C} dvd = 6 k \mathcal{E}_{0} \left[\frac{4}{3} \pi b^{3} - \frac{4}{3} \pi a^{3} \right]$$

Exercise f_{V} = f_{V} =

Junio 1997 Ejercicio 1 El potencial electrostático de una distribución viene dado en coordenadas esféricas por la expresión:

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} -k\left(r^2 - 3a^2 + \frac{2a^3}{b}\right) & ; \quad para \quad 0 \le r \le a \\ 0 & ; \quad para \quad b \le r \\ 2ka^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) & ; \quad para \quad a \le r \le b \end{cases}$$

Considerando que el medio es vacío, calcular:

- a) La intensidad del campo eléctrico en todo el espacio.
- b) Las densidades volumétricas y superficiales de carga que originan el potencial.
- c) La carga total de la distribución (Comente el resultado).
- d) La energía electrostática del sistema.

Nota: En esféricas si no hay dependencia con
$$\varphi$$
 ni con θ :
$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \quad , \qquad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) \ .$$

a)
$$\vec{E} = -\nabla \Phi = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi}\hat{\Phi} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \Theta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi}\hat{\Phi}\right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \hat{r}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \hat{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[-k(r^2 - 3a^2 + \frac{2a^3}{b}) \right] \cdot \hat{r} = 2kr \cdot \hat{r} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \hat{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[0 \right] \cdot \hat{r} = 0 \quad ; \quad \text{para } b < r \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \hat{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[2ka^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \right] \cdot \hat{r} = \frac{2ka^3}{r^2} \cdot \hat{r} \quad ; \quad \text{para } a < r < b \\ \vec{E}(r) = \begin{bmatrix} 2kr \cdot \hat{r} & 0 < r < a \\ 0 & b < r \\ \frac{2ka^3}{r^2} \cdot \hat{r} & a < r < b \end{bmatrix}$$

b) 1. Distribución volumétrica de cauga:
$$p = \nabla \cdot \vec{D}$$
 $p = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (E_0 \cdot \vec{E}) = E_0 \cdot \nabla \cdot \vec{E} = E_0 \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot (r^2 \cdot E_r) \right] =$

$$\left[E_0 \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(2kr^3 \right) \right] = 6k \cdot E_0 \quad \text{Olrka} \right]$$
 $\left[E_0 \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(0 \right) \right] = 0 \quad \text{ber} \right]$
 $\left[E_0 \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(2ka^3 \cdot r^2 \right) \right] = 0 \quad \text{olrka} \right]$
 $\left[E_0 \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(2ka^3 \cdot r^2 \right) \right] = 0 \quad \text{olrka} \right]$

2. Densidad superficial de carpa:
$$\hat{n}=\hat{r}$$

$$\vec{E}_{z}=\vec{r}$$

$$\vec{F}=\vec{a}$$

$$\vec{F}_{z}=\hat{n}\cdot(\vec{D}_{z}-\vec{D}_{1})\Big|_{\substack{S\\r=a}} = \hat{r}\left(\mathcal{E}_{o}\cdot\vec{E}_{z}-\mathcal{E}_{o}\vec{E}_{1}\right)_{r=a} = \frac{1}{2}$$

$$=\mathcal{E}_{o}\cdot\hat{r}\cdot\left(\frac{2ka^{3}}{a^{2}}\hat{r}-2ka\hat{r}\right)=0$$

$$E_{z} = E(r=a^{+})$$

$$\int_{r=a^{+}}^{D_{z}} D_{z}(r=b^{-})$$

$$\int_{r=a^{+}}^{D_{z}} D_{z}(r=b^{-})$$

 $\overline{E}_i = \overline{E}(r = \overline{a})$

$$\int_{S} = \hat{n} \left(\overline{D}_{2} - \overline{D}_{1} \right) \Big|_{S} = \hat{r} \cdot \left(\mathcal{E}_{0} \cdot \overline{E}_{2} - \mathcal{E}_{0} \cdot \overline{E}_{1} \right)_{r=b} = \int_{E_{2}}^{E_{1}} \frac{\overline{E}_{1} \cdot \overline{E}_{2}}{E_{2} \cdot \overline{E}_{1}} \left(r \cdot \overline{E}_{1} \right)$$

$$= \hat{r} \cdot \mathcal{E}_{0} \left(0 \cdot \hat{r} - \frac{2k\alpha^{3}}{b^{2}} \hat{r} \right) = \frac{2k\mathcal{E}_{0}\alpha^{3}}{b^{2}} \left(\frac{C}{m^{2}} \right)$$

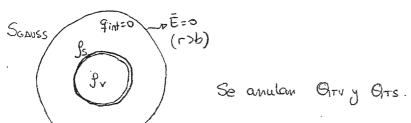
$$\int_{S} = \int_{C}^{C} \frac{C}{m^{2}} \left(\frac{C}{m^{2}} \right) \frac{C}{m^{2}} \left(\frac{C}{m^{2}} \right)$$

Cauca total =
$$\iiint_V \int_{V}^{V} dV = \int_{F=0}^{F=0} \int_{\Phi=0}^{\Phi=\pi} \int_{P=0}^{\Phi=2\pi} \int_{F=0}^{\Phi=2\pi} \int_{$$

$$= 6kE_0 \cdot \int_0^a r^2 dr \cdot \int_0^{\pi} seu\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 8\pi k \cdot E_0 \cdot a^3 \quad (C)$$

[aforma: superficial = Qs =
$$\iint_S f_S \cdot dS = \int_S \iint_S dS = \int_S \cdot 4\pi b^2 = -8\pi k \cdot \epsilon_0 \cdot a^3$$
 (C)

$$2^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{5} +$$



d) Energía electrostática del sistems.

$$W_{\epsilon} = \frac{1}{2} \iiint_{V} \overline{\epsilon} \cdot \overline{D} \cdot dV = \frac{1}{2} \iiint_{V} \overline{\epsilon} \cdot \varepsilon_{o} \cdot \overline{\epsilon} \cdot dV = \frac{1}{2} \varepsilon_{o} \cdot \iiint_{E} \overline{\epsilon}^{2} dV$$

WET = WE , + WE2

$$V_{E_1} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 \cdot \iiint_{V} (2kr)^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 \int_{r=0}^{r=a} \int_{0=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 4k^2r^2 \cdot r^2 \operatorname{seu}\theta dr d\theta dd$$

$$= 2k^2 \mathcal{E}_0 \cdot \int_{0}^{a} r^4 dr \cdot \int_{0}^{\pi} \operatorname{seu}\theta d\theta \int_{0}^{2\pi} d\phi = \frac{8}{5} \pi \cdot \mathcal{E}_0 \cdot k^2 a^5 \quad (J)$$

$$(a < r < b) W_{E2} = \frac{1}{7} \cdot \mathcal{E}_0 \cdot \iiint_V \left(\frac{2ka^3}{r^2}\right)^2 dV = \dots = 8\pi \cdot \mathcal{E}_0 k^2 a^6 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad (4).$$

WET =
$$8\pi \mathcal{E}_o \cdot K^2 \cdot a^5 \left(\frac{\mathcal{E}}{5} - \frac{a}{b} \right)$$
 (f).

Junio 1999 Ejercicio 1

Dados los siguientes campos eléctricos y magnéticos en situación estacionaria sobre un medio vacío, expresados en coordenadas esféricas.

$$\vec{E} = \begin{cases} \left(k_1 r + \frac{k_2}{r^2}\right) \hat{r} & r < a \\ \frac{k_2}{r^2} \hat{r} & r > a \end{cases} \qquad \vec{H} = \begin{cases} k_3 r \hat{\theta} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Calcule:

- a) La distribución de carga que lo crea.
- b) La distribución de corriente que crea el campo magnético.
- c) La carga total.
- d) La corriente total que circula por la zona de radio $r \le a$.
- e) La energía eléctrica y la energía magnética almacenada en la zona el espacio de radio r ≤ a.

Distribución de cargas voluménicas:

$$y = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) = \mathcal{E} \cdot \nabla \vec{E} = \mathcal{E} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{1}{3}(r^2 E_r) = \frac{\mathcal{E}}{E_r}(3h_r)^2$$
, rea

 $y = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) = \mathcal{E} \cdot \nabla \vec{E} = \mathcal{E} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{1}{3}(r^2 E_r) = \frac{\mathcal{E}}{E_r}(3h_r)^2$, rea

 $y = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) = \mathcal{E} \cdot \vec{D} = \mathcal{E} \cdot \vec{$

autenia me expuesto.

à Existen distribenciones purhuales de carga? "Tiene pinta que sía ¿ Como lo comprobamos. Fis 1 # E-ds= 9 contse Eo Para calcular d'valor de 5(0)

Para calcular d'valor de 5(0)

Rin # \(\xi \) ds = \(\frac{q(0)}{60} \)

Rin # \(\xi \) D. ds = \(\frac{q(0)}{60} \)

Rin # \(\xi \) D. ds = \(\frac{q(0)}{60} \) Distribución de cargas punheales: $En r=0 \Rightarrow E\to \infty \Rightarrow Doubre$ rendre en la carga punheales: $En r=0 \Rightarrow E\to \infty \Rightarrow Doubre$ QPUNTUAL Riso D. ds = lin HEO. E. FOS. F. = lin & Er ds E.ds = E.ds ion Eo Er Spar = lin Eo Er 4TTR²

Spar 4TTR²

Spar 4TTR²

Spar 4TTR² = lin $\mathcal{E}_{0}(h_{1}R + \frac{k_{2}}{R^{2}})UTR^{2}$ = lin $(UTR^{3}\mathcal{E}_{0}h_{1}R^{3} + k_{2}UT\mathcal{E}_{0}) = UT\mathcal{E}_{0}h_{2} = g(0)$ = lin $(UTR^{3}\mathcal{E}_{0}h_{1}R^{3} + k_{2}UT\mathcal{E}_{0}) = UT\mathcal{E}_{0}h_{2} = g(0)$ en Sk C) QT = Qvol + Qsup + QLINEAL + QPONTUAL Quol = III for dvol = for III vol dvol = for 3 Tra3 Quol = 8/h, E = 4 Tra3 = 4/h, E = Tra3 (C) Qsip = Is Is ds = - Eolaa. 417a2 = -417 & la 3 (c) 960)=411Eolaz QT = Qvol+ Qrup + g(0) = 4T1E0 kg (C)

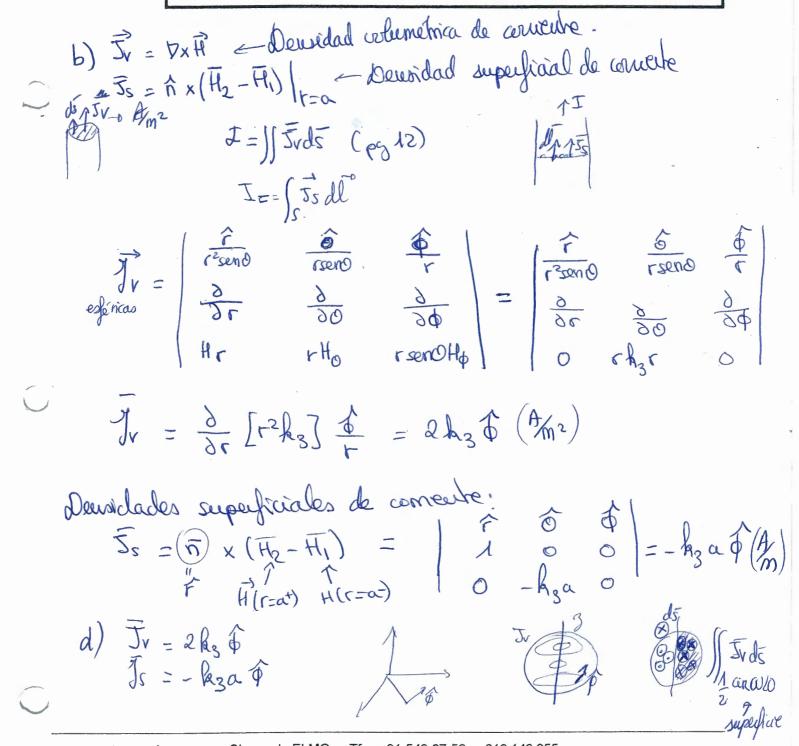
Junio 1999 Ejercicio 1 Dados los siguientes campos eléctricos y magnéticos en situación estacionaria sobre un medio vacío, expresados en coordenadas esféricas.

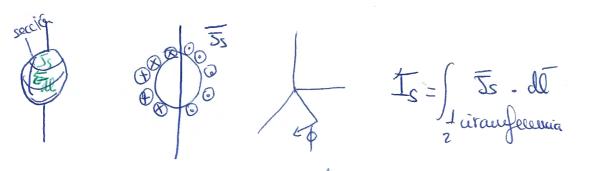
(Conhrusa)

$$\overrightarrow{E} = \begin{cases} \left(k_1 r + \frac{k_2}{r^2}\right) \hat{r} & r < a \\ \frac{k_2}{r^2} \hat{r} & r > a \end{cases} \qquad \overrightarrow{H} = \begin{cases} k_3 r \hat{\theta} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Calcule:

- a) La distribución de carga que lo crea.
- b) La distribución de corriente que crea el campo magnético.
- c) La carga total.
- d) La corriente total que circula por la zona de radio $r \le a$.
- e) La energía eléctrica y la energía magnética almacenada en la zona el espacio de radio $r \le a$.





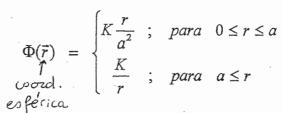
$$\frac{J_{V}}{J_{V}} = \iint \frac{1}{\sqrt{2} k_{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2} k_{3}} \right) ds = 2 k_{3} \iint_{\frac{1}{2}} \frac{ds}{ds} = 2 k_{3} \cdot \frac{\pi a^{2}}{Z}$$

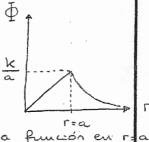
$$\frac{J_{V}}{J_{V}} = 2 k_{3} \cdot \frac{\pi$$

$$I_V = k_3 \pi a^2 = J_V$$
 (seuhdo@)

$$I_{S} = \int_{1/2}^{1/2} I_{S} \cdot dS = \int_{1/2}^{1/$$

En una situación electrostática el potencial en todo el espacio, expresado en coordenadas esféricas, viene dada por:



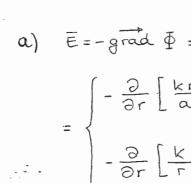


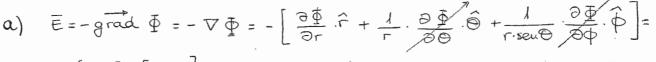
es derivable.

siendo el medio el vacío y K una constante, se pide:

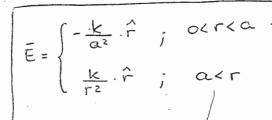
- a) Calcule el campo eléctrico de la distribución.
- b) Caracterice el tipo de distribución de carga que lo origina (volumétrica, superficial, lineal o puntual). Obtenga su densidad y carga total osuma de la puntual + lineal + superfical + volumetrica.
 c) Determine cuál de dichas cargas puede corresponder a distribuciones sobre conductores.

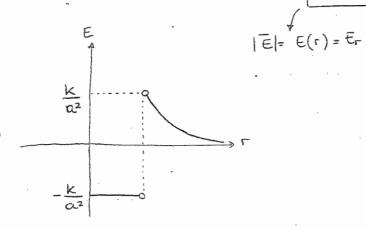
Nota: En esféricas, si no hay dependencia con φ ni con θ : $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A)$. $\vec{E} = \vec{E}(r)$.





$$= \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{kr}{a^2} \right] \hat{r} = -\frac{k}{a^2} \cdot \hat{r} \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{k}{r} \right] \hat{r} = \frac{k}{r^2} \cdot \hat{r} \end{cases}$$





010 no ponemos xa la función es continua, pero no dei

b) Siempre comprobacciones las distribuciones volumétricas. $\bar{D}_r = \mathcal{E} \cdot \bar{E}_r$ 1. Distribuciones volumétricas: $\bar{J}_v = \nabla \bar{D} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \bar{D}_r) = 0$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \mathcal{E}_0 \cdot \left(-\frac{k}{\alpha^2} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \left[-\frac{2\mathcal{E}_0 k}{\alpha^2} r \right] =$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_r \right) = \begin{cases} -\frac{2\mathcal{E}_0 k}{\alpha^2} r \\ \frac{\partial}{\partial r} \cdot r \end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^k \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\kappa}{r^2} \right) \right) = 0 \; ; \quad \alpha < r$$

$$\begin{cases} \int_{V}^{2} = \begin{cases} -\frac{2\varepsilon_{0}k}{\alpha^{2}r}, & o < r < \alpha \\ 0, & o < r < \alpha \end{cases}$$

, Condición de salto

2. Distribución superficial de carps:
$$f_s = \hat{n}(\bar{D}_2 - \bar{D}_1)$$

Nos vamos a r=a, que es el unico punto donde se produce un salto en el campo $\overline{\mathsf{E}}$.

$$r=\alpha^{+} \leftarrow (r>\alpha)$$

$$(r<\alpha)$$

$$(r<\alpha)$$

$$r=\alpha^{-}$$

$$\beta = \hat{n} (\overline{D}_2 - \overline{D}_1) = \hat{n} (\varepsilon_0 \overline{\varepsilon}_2 - \varepsilon_0 \cdot \overline{\varepsilon}_1) = \hat{n} (\varepsilon_0 \cdot \overline{\varepsilon} (r = \alpha^{\dagger}) - \varepsilon_0 \cdot \overline{\varepsilon} (r = \alpha^{\dagger})$$

$$\hat{n} = \hat{r} \left[\mathcal{E}_{0} \cdot \frac{k}{a^{2}} \cdot \hat{r} - \mathcal{E}_{0} \cdot \left(-\frac{k}{a^{2}} \right) \hat{r} \right] = \hat{r} \cdot \hat{r} = 1$$

$$= \varepsilon_0 \cdot \frac{k}{\alpha^2} + \varepsilon_0 \cdot \frac{k}{\alpha^2} = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{k}{\alpha^2}$$

$$\int_{S} = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{k}{\alpha^2}$$

$$\int_{S} = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{k}{\alpha^2}$$

$$\int_{S} = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{k}{\alpha^2}$$

3. Distribución lineal de caupa:

Para que exista una distribución lineal, debemos tener una singulacidad a lo largo de una línea, es decir, una línea donde el campo trende a so. En nuestro problema no existe ninguna línea donde el campo - so, de modo que NO HAY DISTRIBUCIONES LINEALES DE CARGA.

4. Distribución printual de carga.

Sólo podián existir en el origen de coordenadas, de forms que el ceurpo en ese punto, tiende à ∞. De todas formas, auque en nuestro problema el campo en ningún punto tiende a ∞, confirmaremos aplicando Gauss, que NO HAY DISTAIBUCIONES LINEALES DE CARGA.

$$\iint_{S} \overline{\xi} \, d\overline{S} = \frac{Q}{\xi_{o}}$$

$$S(e) \rightarrow R = cte^{\alpha} \quad ds = e^{2} sen 0 d0 d\phi \hat{r}$$

$$g(0) = \lim_{R \to 0} \int_{S(e)} \overline{ds} = \lim_{R \to 0} \int_{S(e)} (-\frac{k}{a^2} \varepsilon_0 \cdot \hat{r}) \cdot (R^2 sen 0 d0 d\phi \cdot \hat{r}).$$

$$= \lim_{R \to 0} (-\frac{kR^2}{a^2} \varepsilon_0) \cdot \int_{\Phi^{*}0}^{\Phi + 2\pi} d\phi \cdot \int_{\theta^{*}0}^{\theta + 2\pi} sen \theta d\theta = \frac{1}{2\pi}$$

$$= \lim_{R \to 0} (-\frac{kR^2}{a^2} \varepsilon_0) \cdot \int_{\Phi^{*}0}^{\Phi + 2\pi} d\phi \cdot \int_{\theta^{*}0}^{\pi + 2\pi} sen \theta d\theta = \frac{1}{2\pi}$$

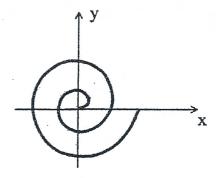
$$= \lim_{R \to 0} (-\frac{kR^2}{a^2} \varepsilon_0) \cdot \int_{\Phi^{*}0}^{\Phi + 2\pi} d\phi \cdot \int_{\theta^{*}0}^{\pi + 2\pi} d\phi \cdot$$

Nuedro caso;

(Meto) estera huco Conductora

Septiembre 1999 Ejercicio 1

Una densidad lineal de carga por $\lambda = \lambda_0 \varphi^2 \sqrt{1 + \varphi^2}$ (cul/m), se distribuye sobre una espiral de Arquímedes (lugar geométrico definido por la ecuación en polares $\rho = a\varphi$) en el dominio dado en la figura adjunta.



Se pide:

- a) El valor del potencial eléctrico en el origen de coordenadas.
- b) El valor del campo eléctrico en el origen de coordenadas.
- c) El valor del campo eléctrico en puntos alejados de la distribución.

Nota: $\int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x$ $\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$

p= a 4 ?) Potencial ou el origen: $\phi(0,0,0) = \phi(\tilde{r}=0)$ (2) i Formula ? T-20 φ(F=0) = 10 4 T E a 4)

F=0 4 T E a 4)

(F=0) = 15-51=6' F= PP+22 alindicas == (plano 2=0) $\frac{F - F' = -\rho \hat{p}}{dl'} = \frac{1}{de'} \hat{p} + \rho' d\rho' \hat{\phi} + \frac{1}{de'} \hat{z}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \right] = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \right] \left[\frac{$$

Como la carga meta es 7 de gero el valor del campo en 1 pt lejano es equivalente al campo que creava una carga puntual de valor la carga neta de Muestra distribución: y colocada donde se en cuentra la distribución

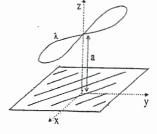
$$Q_{NETA} = Q_{T} = \int_{2}^{1} \lambda dl' = \int_{6}^{1} \int_{2}^{1} \int_{1}^{1} \int_{1}^{1} dq' = \int_{6}^{1} \int_{1}^{1} \int$$

Febrero 1998 Ejercicio 1

Sea un contorno situado en el plano z = a y definido por la ecuación en polares:

$$\begin{cases} \rho^2 = a^2 \cos(2\varphi) \ , \ \varphi \in [7\pi/4, \pi/4], [3\pi/4, 5\pi/4] \\ \rho = 0 \ , \text{ resto de valores de } \varphi \end{cases}$$

Sobre dicho contorno se distribuye una densidad lineal de carga dada por $\lambda = \lambda_0 |\cos \varphi| \sqrt{\cos(2\varphi)}$



- a) Calcule el potencial electrostático en el origen de coordenadas (0,0,0).
- b) Suponiendo que ahora el problema consiste en el mismo contorno situado sobre un plano de masa indefinido en z = 0, razone cuál es el problema imagen que es equivalente en $z \ge 0$.
- c) Calcule el potencial en puntos alejados del contorno en la configuración del apartado b) (expréselo en función de las coordenadas $r y \theta$)

2'- a = de = 0 d2'= 0

apartado a) $\phi(0,0,0) = \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda dl'}{4\pi \mathcal{E} 1\vec{r} - \vec{r}' 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Sistribución $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{(dp')^{2} + (pdy')^{2} + (dx')^{2}}$ Sincal $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{(dp')^{2} + (pdy')^{2} + (dx')^{2}}$

p= 2 cos (26)

d[p'2] = d [a2 cos(26)] $2 e' de' = -2 a^2 sen(2 \phi') d\phi'$

 $d\rho' = -\frac{\alpha^2 \operatorname{see}(2\varphi')}{\rho'}d\varphi'$

d=(dy)) (a2 ser2(24)) + a2cos2(24)
cos 24)

dl = ady 31

|EF1| も | F=0 | 下-1 = pp+33 | カ 下-デ = -pp- aを $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho'^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \omega s} (2\phi') + a^2 = a \sqrt{1 + \cos 2\phi}$ $\rho'^2 = a^2 \omega s (2\phi')$ $\frac{1+\cos 2\theta'}{2} = \cos^2(\theta') \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = a \sqrt{2} \cos^2(\theta')$ = a cos 4/12 De calculo En hodo esto not vamos a $\phi(0,0,0)$ $\phi(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d_0 |\cos \theta| \cdot \sqrt{\cos(2\theta')} \propto d\phi'$ $\sqrt{2} \propto |\cos \theta| \sqrt{\cos(2\theta')}$ \$ (0,0,0) = \frac{1}{4118} \frac{1}{\siz} \Bigg|_0 d\varphi + \int_{31\infty} d\varphi + \int_{21\infty} d\varphi'\] Leise C) que qui la densidad de autoa abajo

(auga imagen en p= f'Adl' + fr'. (-A)dl'
plano z = -a
y valer de la densidad de autoa abajo

(auga - A".

Famba = p'p+2'2 = p'p'+2'
72' = a

72' = -a d ' ≠ a ~ de' $\overline{P} = \int (p'p' + a^{\frac{2}{3}}) \log p' \cdot \sqrt{\cos 2p'} \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2p'}} dp' - a^{\frac{2}{3}}) \log p' \cdot \sqrt{\cos 2p'} \cdot \sqrt{\cos 2p'}$

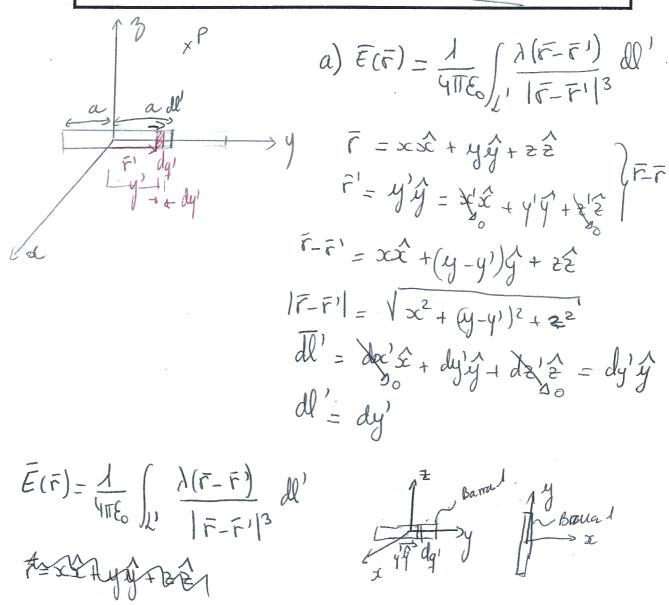
$$\vec{P} = \int_{\text{lago}} ado |\cos \theta| |a d\theta|^2 + \int_{\text{lago}} ado |\cos \theta| |a d\theta|^2 \\
= \partial_a^2 \partial_o \int_{\text{lago}} |\cos \theta| |d\theta|^2 \\
= \partial_a^2 \partial_o \int_{\text{lago}} |\cos \theta|^2 \\
= \partial_a^2 \partial_o \int_{\text{lago$$

Febrero 2004 Ejercicio 1

En un medio de permitividad ε_0 se sitúa, sobre el eje y de un sistema de coordenadas cartesianas, una distribución uniforme de carga de valor λ C/m, de longitud 2a y centrada en el origen del sistema de coordenadas. Se pide, utilizando el sistema de coordenadas cartesiano anterior e indicando las unidades correspondientes, que:

- a) Calcule el campo eléctrico debido a dicha distribución en todos los puntos del espacio.
- b) Razone, geométricamente, cuál es la dirección del campo eléctrico en puntos del eje x.
- c) Si se sitúa la línea de carga con su centro en (x=D/2, y=0, z=0) y se coloca una línea igual a la anterior, pero de valor -λ C/m, con su centro en el punto (x=-D/2, y=0,z=0), calcule el valor del campo eléctrico de la distribución en puntos del eje x.
- d) Calcule el momento dipolar de la distribución del apartado anterior.
- e) Calcule el potencial de la distribución del apartado c) en puntos muy alejados de la misma. Exprese el resultado en coordenadas esféricas.

Nota:
$$\int \frac{a^2 dt'}{\left[a^2 + (t - t')^2\right]^{3/2}} = -\frac{(t - t')}{\sqrt{a^2 + (t - t')^2}} / \int aprendence dx$$



$$\begin{split} & \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_{0}} \int_{y'=-a}^{y'=a} \frac{\lambda(x\hat{x}+(y-y')\hat{y}+z\hat{z})}{(x^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}} dy^{3} \\ & = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_{0}} \underbrace{\frac{x\hat{x}}{x^{2}+z^{2}}}_{x^{2}+z^{2}} \underbrace{\frac{\lambda(x^{2}+z^{2})}{y'=-a}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}} \underbrace{\frac{\lambda(x^{2}+z^{2})}{y'=-a}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}} \underbrace{\frac{\lambda(x^{2}+z^{2})}{y'=-a}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}} \underbrace{\frac{\lambda(x^{2}+z^{2})}{y'=-a}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}} \underbrace{\frac{\lambda(x^{2}+z^{2})}{y'=-a}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}} \underbrace{\frac{\lambda(x^{2}+z^{2})}{y'=-a}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}} \underbrace{\frac{\lambda(x^{2}+z^{2})}{y'=-a}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}} \underbrace{\frac{\lambda(x^{2}+z^{2})}{x'=-a}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}} \underbrace{\frac{\lambda(x^{2}+z^{2})}{x'=-a}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}}_{(x')^{2}+(y-y')^{2}+z^{2})^{3/2}}$$

(*) Le resuelven con la integral dato.

$$\frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \left[\frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} \right] = \frac{1}{\sqrt{11}} \left[\frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} \right] = \frac{1}{\sqrt{11}} \left[\frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} \right] = \frac{1}{\sqrt{11}} \left[\frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{11}$$

para mosohes: f(y) = (52+22)+(y-y')2
f(y) = 2(y-y').(-1)

$$f'(y) = 2(y-y').(-1)$$

$$= 3 \quad J_1 = -\frac{1}{2} \int_{y'=-\infty}^{y'=-\infty} \frac{(-2)(y-y')}{(x^2+z^2)+(y-y')^2} dy' = \frac{1}{2} \int_{y'=-\infty}^{\infty} \frac{[x^2+z^2+(y-y')^2]^{-1/2}}{(-1/2)^{-1/2}} dy' = -\infty$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{(1/m)}} = \frac{\lambda}{4\pi k_0} \left[\frac{x \cancel{x} + 2 \cancel{x}}{x^2 + 2^2} \left[\frac{-(y - \alpha)}{\sqrt{x^2 + 2^2 + (y - \alpha)^2}} + \frac{y + \alpha}{\sqrt{x^2 + 2^2 + (y + \alpha)^2}} \right] + \sqrt{y} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2^2 + (y - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2^2 + (y + \alpha)^2}} \right]$$

d) Hay momento dipolar cuando tenemos 2 cargos iguales enfectadas

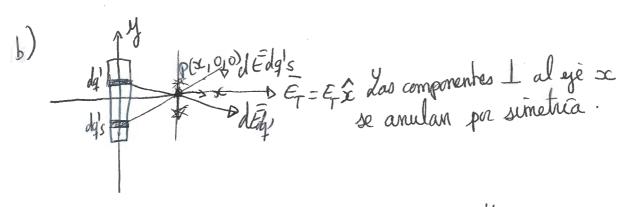
$$P = \int_{1'} \lambda F' dl' = \int_{1'_{2}} \lambda F_{2} dl_{2} + \int_{1'_{3}} (-\lambda) F_{3}' dl_{3}'$$

Barra3 / Barra7
$$\vec{\xi}_2 = \frac{1}{2} \hat{x} + y \hat{y}$$

$$\vec{\zeta}_3 = -\frac{1}{2} \hat{x} + y \hat{y}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \hat{x} + y \hat{y}$$

$$\tilde{P} = \int_{y'=-a}^{y'=+a} \int_{y'=-a}^{y'=+a} (-1)(-\frac{1}{2}\hat{x} + y'\hat{y}) dy' + \int_{y'=-a}^{y'=+a} (-1)(-\frac{1}{2}\hat{x} + y'\hat{y}) dy'$$



c)

Para savar el campo de la barra 2 y de la barra 3 utilizare el campo creado por le barra 1 en un punho (x,0,0).

Entones; calculauss:

EBARRA $(x,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[+ \frac{x}{x^2+0^2} \left[\frac{2a}{\sqrt{x^2+a^2}} \right] \right]$ Such keyendo

Valanes y guedandanos

solo cen la componente \hat{x} por sime ma

 $\frac{\mathcal{E}_{\text{RAPPA}}\left(x_{co_{1}0}\right) = \frac{2\alpha\lambda}{4\pi\mathcal{E}_{c} \times \sqrt{x_{1}^{2}a^{2}}} \hat{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{m}\right)$

Entonces ahora a partir de Es acamos.

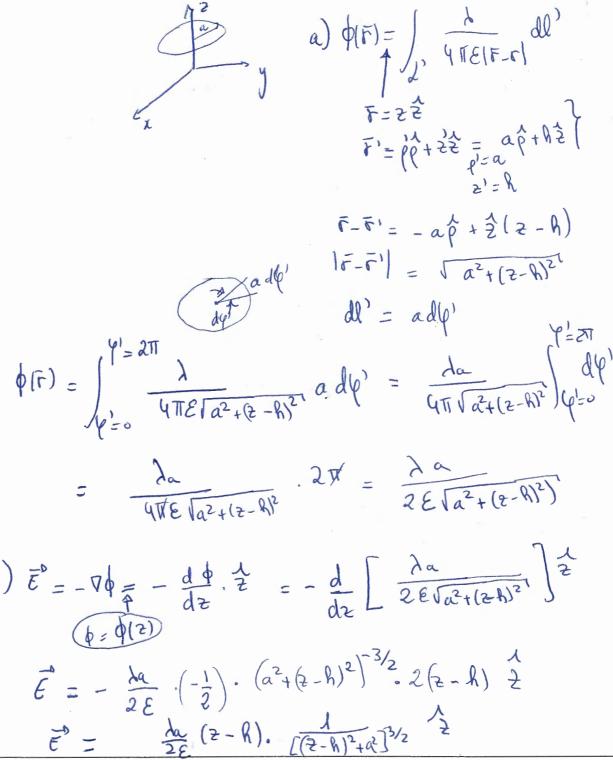
 $\overline{\epsilon}_{\text{BARRLA}} = \overline{\epsilon}_{2}(x,0,0) = \overline{\epsilon}_{1}(x-\frac{1}{2},0,0) = \frac{2a\lambda}{4\pi\epsilon (x-\frac{1}{2})\sqrt{(x-\frac{1}{2})^{2}+\alpha^{2}}}$

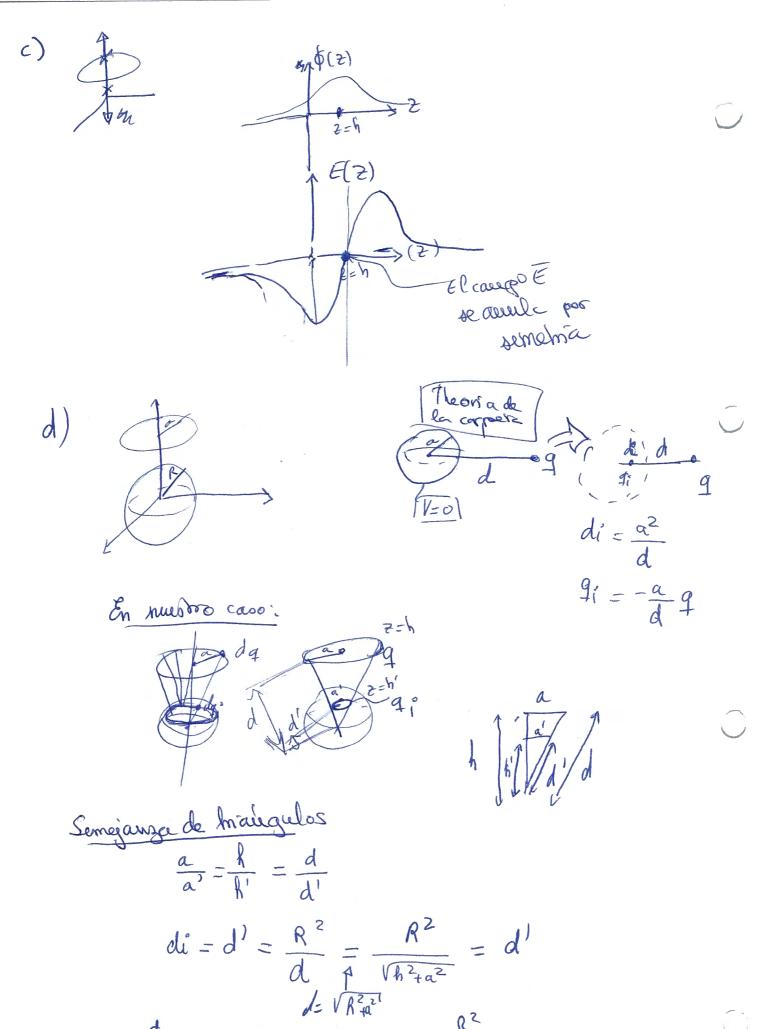
EGARRA = \(\int (\frac{1}{2}, 0,0) = \int (\frac{1}{2}, 0,0) = \frac{2a(-1)\delta}{2} 4116 (x+bg) V(x+05)2 az

G=5+6=

Febrero 2006 Ejercicio 1 Sea una distribución lineal de carga de λ cul/m uniformemente distribuida sobre una circunferencia de radio a, situada sobre el plano z = h y centrada en el eje Z.

- a) Calcule el potencial que se crea en los puntos del eje Z.
- b) Calcule la intensidad de campo eléctrico con los puntos del eje Z.
- c) Represente de forma aproximada la variación con z de ϕ y E_z .
- d) Si se sitúa una esfera metálica de radio R < a a potencial de 0 V y centrada en el origen de coordenadas, indique cómo es el problema imagen (valores de las distribuciones de carga y geometría).
- e) Obtenga el nuevo valor del potencial en los puntos del eje Z.
- f) En el caso en que h=0 calcule el potencial en z=R.
- g) Obtenga, en primera aproximación, la expresión del campo en puntos z >> a.





 $\frac{a}{a'} = \frac{d}{dl} - p \quad a' = \frac{ad'}{d} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}}$ $a' = \frac{aR^2}{\sqrt{h^2 + a^2}}$

$$1) k=0; z=R = 0 = 0$$
 $(z(n))$

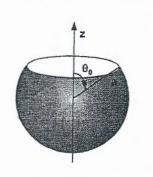
$$h' = \frac{hd'}{d} = \frac{h \cdot R^2}{a^2 + h^2}$$

$$\lambda dq' = \lambda dl' = \lambda' a'dq' = \lambda' \frac{aR^2}{a^2 + h^2} dq' + \frac{\lambda'}{a^2 + h^2} dq' + \frac{\lambda'}{a'} dq' = \frac{\lambda'}{a'} dq' + \frac{\lambda'}$$

$$dq' = \frac{\lambda'}{\alpha^2 + h^2} \frac{\alpha R^2}{\lambda a^2 + h^2} \frac{dp'}{\lambda a^2 + h^2} \frac{1}{\alpha a^2 + h^2}$$

Septiembre 2002 Ejercicio 1

Una distribución superficial de carga tiene forma de superficie esférica a la que le falta un casquete, tal como se indica en la figura. Calcular el potencial en los puntos del eje z. Particularizar para $\theta_0 = 0$ y comentar el resultado obtenido.



Distribución superficial de carga: φ(F) =) (r (F) = II ds'

Pasamos r'a cartesianas, para poder sacar [r-r'].

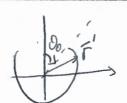
F= sem O'costo' sc + sem O'semp' g+ costo' 2)

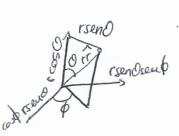
= 22-a(sen0cos \$\x + sen0\sen\$\x + \cos0\x\)

|F-r1/2- (2-acosó)2+ (-aseno)cosó)2+ (-aseno)sen 6/2

$$\int_{0}^{\infty} d\phi' \int_{0}^{\infty} d\phi' d\phi'$$

$$= 2 \frac{\Pi_{es} a^{2}}{4 \Pi E} \int_{0'=0}^{0'=2 \Pi} (\text{Sen} 0') \left(\frac{2^{2} + a^{2} - 2a = \cos 0'}{\int_{0}^{1/2} d0'} \right)^{1/2}$$





Comentamos el resultado: Aplicamos gauss y vemos que sale:

$$\int \overline{D} \cdot d\overline{s} = Q_{7}$$

$$\int \overline{C} \cdot d\overline{s} = Q_{7}$$

$$\int \overline{D} \cdot d\overline{s} = Q_$$

$$E = \frac{ls a^2}{\epsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{ls a^2}{\epsilon_0 r^2}$$

$$\oint_{r} \frac{f_s a^2}{\varepsilon_0 r} (v)$$

Febrero 1999 Ejercicio 1

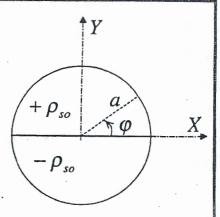
Dada la distribución superficial de cargas de la figura:

$$\rho_s = \begin{cases} \rho_{so} \text{ ; para } 0 \le \rho \le a, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad z = 0 \\ -\rho_{so} \text{ ; para } 0 \le \rho \le a, \quad \pi < \varphi < 2\pi, \quad z = 0 \end{cases}$$

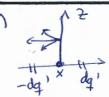
obtener:

- a) El potencial electrostático en el eje z.
- b) Sin calcularlo, razone la (o las) componente(s) del campo electrostático en el eje z.
- c) El momento dipolar equivalente de la distribución.
- d) El campo en puntos muy alejados del eje z(z >> a).

d) El campo en puntos muy
Nota:
$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$$







das componentes seguiu el eje z se accelere

dada le simelia del pb.

 $\phi \stackrel{\text{red}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{S_1} \frac{1}{15-511} ds^1 \Rightarrow \phi(\xi \hat{\xi})$

a) $\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S^{-1}}^{S^{-1}} \frac{1}{|r-r|} \frac{1}{|r-r|}$

p= cos f'x+ seufy'y'
se annla ya que p= py

P = Pso () apie sen () ý d(de) -) = = 4 lo 3 (Em)

Febrero 1997 Ejercicio 2 Sea un condensador esférico de radio interior R_1 y exterior R_2 cuyas armaduras están respectivamente, a V_0 y 0 voltios. Entre las armaduras hay un dieléctrico no homogéneo. El potencial entre armaduras varía como $\phi(r) = ALn(B r)$ siendo r la distancia al centro y A y B dos constantes a determinar. Calcular:

- a) El valor de $\phi(r)$.
- b) El campo \vec{E} en el dieléctrico, y el valor de r para el cual E es máximo.
- c) La permitividad $\varepsilon(r)$ si $\varepsilon(R_2) = \varepsilon_0$.
- d) Las densidades superficiales de carga, verificando que son de signos contrarios y diferentes en valor absoluto. ¿Por qué son diferentes?
- e) La carga en el conductor interior.
- f) La capacidad del condensador.
- g) La energía electrostática en todo el espacio.

a)
$$\phi(r) = A \ln(Br)$$

$$\phi(r-R_1) = V_0 = A \ln(BR_1) \quad U$$

$$\phi(r-R_2) = 0 = A \ln(BR_2)^{(2)} \quad \ln(BR_2) = 0 \Rightarrow 6R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_2) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_2) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - 6 = \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_2} \quad \ln(R_1) = 0 \Rightarrow R_2 = 1 - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1$$

Entronces, para nuestro problema:

$$7. (EE) = VE (E + EV) E$$

$$7. (EE) = VE (E + EV)$$

$$7. (EE) = VE (E + EV)$$

$$7. (EE) = VE (E + EV)$$

$$8. (EE) = VE (EE)$$

$$8. (EE) = VE ($$

O

$$\mathcal{E}_{R} = \mathcal{R}_{2} \cdot \left\{ \mathcal{E}_{S} = \mathcal{M}_{S} \cdot \left(\overline{D_{Z}} - \overline{D_{A}} \right) \right\}_{\Gamma = R_{Z}} = \mathcal{M}_{S} \left(\mathcal{E}_{Z} + \overline{\mathcal{E}_{S}} \right) \Big|_{\Gamma = R_{Z}}$$

$$\int_{S} - \hat{\mathcal{E}}_{S} \cdot \left\{ \mathcal{E}_{S} \left(-\frac{V_{O}}{R_{Z} \ln R_{I}} \right) \right\} = \frac{\mathcal{E}_{S} \cdot V_{O}}{R_{Z} \ln R_{I}} = \ell_{S} \left(\Gamma = R_{Z} \right)$$

Comentario D: Q1=Q2

$$\int_{C} |S_1| = \int_{S_2} |S_2|$$
 che che

Además los segnos son contravos væg la carga ele una placa hine que un igual en valu absoluto, pero destriba en vigro.

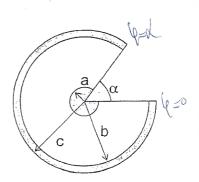
e)
$$R_1 = \int_{P_{S1}} dS_1 = \int_{S_1} .S_1 = - = - \frac{\varepsilon_0 R_2 V_0}{cte} .GT$$
 $Q_2 = \int_{P_{S2}} dS_2 = \int_{S_2} S_2 = \frac{q_1 T \varepsilon_0 V_0 R_2}{cte} \frac{q_1 T \varepsilon_0 V_0 R_2}{cte}$

9) Energia electrostatica:

Febrero 2004 Ejercicio 2

Se dispone de un condensador cilíndrico de longitud L, conductor interior de radio a, y conductor exterior de radio interior b y radio exterior c, del que se elimina un sector angular α , cuya sección transversal se muestra en la figura. La permitividad del medio situado entre ambos conductores varía como $\varepsilon(\rho)=\varepsilon_1\rho$. Se pide, despreciando los efectos de bordes, que:

- a) Calcule el campo eléctrico y el potencial en todos los puntos del condensador. Considere que el conductor interior está a potencial V_1 y el exterior a potencial V_2 .
- b) Indique qué tipo de distribución de carga aparece en los sectores situados entre $0 \le \rho \le a$, $a \le \rho \le b$ y $b \le \rho \le c$, y calcule la carga en cada uno de ellos.
- c) Calcule la capacidad del condensador.
- d) Si se sustituyen los conductores por conductores eléctricos perfectos y el medio dieléctrico por un medio conductor de conductividad $\sigma(\rho) = \sigma_1 \rho$, calcule el valor de la resistencia correspondiente utilizando dualidad.

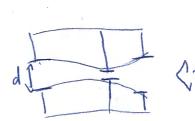


Indique las unidades de todas las magnitudes que calcule.

NOTA:
$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial A_{z}}{\partial z}$$

Sp. en los pos despressaremos el ejecto de bordes



IC = ES

a) Dato: Potencial \rightarrow Poisson \rightarrow ϕ \rightarrow E \rightarrow ϕ \rightarrow C \rightarrow C

$$\phi = \frac{A}{E_{1}\rho} + b \Rightarrow \phi = \frac{A}{E_{1}\rho} + b$$

$$\phi \left(\rho_{=}a\right) = V_{1} = \frac{A}{E_{1}} + b \Rightarrow (A) = (A) - (A) - (A)$$

$$\phi \left(\rho_{=}a\right) = V_{2} = \frac{A}{E_{1}} + b \Rightarrow (A) = (A) - (A) - (A)$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = V_{1} - V_{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{E_{1}}$$

OS PSA - sinterior de un conductor =0 Qint = 0

acres de la Destabución superficial.

1=a - Destabución superficial.

acres de la Destabución o pr=0

p=b - Destribución sup-de carge.

b int - conductor -> Qint = 0

Is
$$|_{P=a} = \hat{m} \cdot (bz - b_1) = \hat{p} \cdot (\varepsilon_1 a \bar{\varepsilon}(p_{zat}) - 0)$$

$$= \hat{p} \cdot (\varepsilon_1 a (v_1 - v_2) ab \frac{1}{a^2} \hat{p})$$

$$= \frac{\varepsilon_1 b (v_1 - v_2)}{b - a} \quad C/m^2$$

$$= \frac{\varepsilon_1 b (v_1 - v_2)}{b - a} \quad C/m^2$$

$$= -\frac{\varepsilon_1 a (v_1 - v_2)}{b - a} \quad C/m^2$$

boladar la carga ar cada superficre:

$$Q_a = \iint_{b-a} k ds_a = p_{sa} \iint_{c_0} ds_a = p_{sa} \iint_{c_0} a dp_{clo}$$

$$Q_a = \frac{\varepsilon_1(v_1 - v_2)}{b - a} k (RT - x) L$$

$$Q_b = \iint_{sb} p_{sb} ds_b = -Q_a$$

c) $C = Q_1 = -\frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$

d) Texta de dualidad: $R - C$

conductor real

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}{c_0} = \frac{\varepsilon_1}{c_0} (RT - x) L$$

$$C = \frac{\varepsilon_1}$$

conductor perfects =0 T = 00

conductor real =0 T = Seneto

En este coso: RC = E1 Presenciado

To presenciado

A le terrenos

de aprobados

auteriores

 $\frac{\text{EnlonGos}}{R = \frac{\mathcal{E}_1}{\nabla_1 \cdot C} = \frac{b-a}{\nabla_1 ab(2tt-d)L}}$

ASIGNATURA: Electricidad y Magnetismo Convocatoria: de Febrero de 2007

Fecha: 6 de febrero de 2007



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

1 1		
1 1		
1 1		
1 1		
1 1		
L		

DEPARTAMENTO DE SEÑALES,	SISTEMAS Y	RADIOCOMUNICA	CIONE

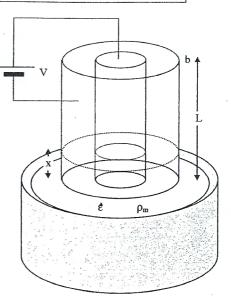
Apellidos Nombre:

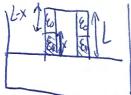
PROBLEMA 2

Un condensador formado por dos cilindros coaxiales de radios a y b, longitud L y con aire entre las armaduras se coloca de forma que su borde inferior roza la superficie de un baño líquido dieléctrico de permitividad ε y densidad de masa ρ_m , de modo que, ese líquido pueda subir entre las placas del condensador.

Cuando este condensador este conectado a un generador que mantiene un voltaje V entre placas, calcule:

- a) la energía eléctrica almacenada por el condensador en función de la altura x del líquido entre las placas. (3p)
- b) la fuerza creada por el campo eléctrico que se aplica sobre el líquido en función de la altura del mismo. (3p)
- c) la altura máxima a la cual sube el líquido entre las placas. (2p)
- d) Finalmente, si el dieléctrico no fuera perfecto y presentase una conductividad σ, obtenga el valor de la corriente eléctrica que circula para la altura máxima que haya podido subir el líquido entre las placas. Considere solo el efecto de la conductividad para la resolución de este apartado. (2 p)





Ceg = (1 x (2

Domostramos la capacidad de un condensador celendricos ...

$$c = \frac{2\pi \mathcal{E} \mathcal{L}}{\ln(\frac{b}{a})}$$
 b) a

a)
$$W_{\epsilon} = \frac{1}{2} cv^{2}$$
, Daho potencial:
 $C_{eq} = C_{1} + C_{2} = \frac{2iT\epsilon_{0}(L-x)}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{2iT\epsilon_{x}}{\ln \frac{b}{a}}$

$$2\pi \epsilon_0(L-x)$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\mathcal{E}_{0}\left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{0}}-1\right)$$

Fueza en sentido ascendente.

Fe = mg b

$$m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \max_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$
 $m = \lim_{x \to \infty} x \min_{x \to \infty} \pi(b^2 - a^2)$

$$d RC = \frac{\varepsilon}{T} \qquad R = \frac{\varepsilon}{CT}$$

$$R = \frac{\varepsilon \ln \frac{b}{a}}{T 2T \varepsilon x} \qquad D R = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2T T x T} \qquad (52)$$

$$T = \frac{V}{R} = \frac{2T T V^3 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\ln(\frac{b}{a})^2 \rho m(\frac{b}{a} - a^2) g}$$

$$J = \int \overline{\xi}_{2} d\xi_{2} = \int \int \overline{\xi}_{3} d\xi_{1} = \overline{\xi}_{4} \cdot \overline{\xi}_{2} = \overline{\xi}_{2} \cdot \overline{\xi}_{3} = \overline{\xi}_{3} = \overline{\xi}_{3} \cdot \overline{\xi}_{3} = \overline{\xi}_{3$$

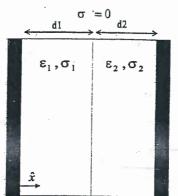
$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} - \hat{h} \cdot \left(\int_{\Omega} - \hat{D}_{1} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1}} = \hat{\mathcal{X}} \left[\underbrace{\mathcal{E}}_{2} \underbrace{\mathcal{E}}_{2} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) - \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right]_{\mathcal{X} = d_{1}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\frac{1}{1}}_{2} d_{2} \right| \left(\underbrace{\mathcal{E}}_{2} \underbrace{\frac{1}{1}}_{2} - \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right) - \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \right]_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1} + d_{2}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} + \underbrace{\mathcal{E}}_{1} \left(\alpha = d_{1}^{2} \right) \right|_{\mathcal{X} = d_{1}} \\ & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{1 + d_{1}} +$$

Septiembre 1998 Ejercicio 2

La figura representa una resistencia constituida por un sistema con electrodos de placas planas paralelas de superficie S y conductividad mucho mayor que la de los materiales de la resistencia $(\sigma_e >> \sigma_1, \sigma_2)$. Suponiendo que el medio 2 es homogéneo y que la conductivi-

dad del medio 1 varía como: $\sigma_1 = \sigma_0 (1+x)^2$, calcule:

- a) El valor de la corriente estacionaria que circula entre los electrodos al conectarlos a una batería de V voltios.
- b) El valor de la resistencia.
- c) El valor de todas las densidades de carga que se generan en dicho sistema al conectar la batería.



a) Passadar: V-> \$ -> E-> 5-> I-> R medio 2 V.J2=0, D. V.E2 =0; 7/ V2. (-P/2) = 0=0 1/ 1/2 (-3/2) 5c =0 $\frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{2} \cdot \left(- \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad - 0 \quad \sqrt{2} \left(- \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) = A_2 \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\frac{A_2}{A_2}$ $\Phi_2 = \frac{-A_2}{V_0} x + B_2$ medio 1 $D.\overline{S}_1 = 0$, $\nabla [\overline{V}_1 \overline{E}_1] = 0$; $D[\overline{V}_1 (-\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}) \hat{x}] = 0$ $30 \ \sqrt{1} \ \frac{d\theta_1}{dx} = A_1 \ 30 \ d\theta_1 = \frac{A_1}{\sqrt{1}} \ dx = \frac{A_1}{\sqrt{10}} \ dx = d\theta_1$ $90i \Rightarrow \theta_1 = \int \frac{A_1}{V(1+x)^2} dx = \frac{-A_1}{V(1+x)} + B_1$

 $\Phi_1 = \frac{-A_1}{\sqrt{h}(1+x)} + B_2$ there nos calculamos los coeficientes A_1, B_1, A_2, B_2 Condición 1: $O_1(x=0) - P_2(x=d_1+d_2) = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{V_2} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{V_2} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{V_2} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{V_2} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{V_2} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{V_2} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{V_2} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{V_2} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{V_2} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{T} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{T} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{T} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{T} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{T} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + B_1 + \frac{A_2}{T} (d_1+d_2) - B_2 = V + \int \frac{A_1}{T} + \frac{A_2}{T} (d_1+d_2) - \frac{A_2}{T} + \frac{A_2}{T} + \frac{A_2}{T} + \frac{A_2}{T} + \frac{A_2}{T} +$ Condición 2: El potencial sigue siendo constrante en la superficie entre los 2 materiales: $\phi(x=d_1^-) = \phi(x=d_1^+) \neq 0$ $\phi(x=d_1^-) = \phi_2(x=d_1^+)$ -Azidi + Bz = -A1 (1+d1) +B1 2 Eundition 3 $(\overline{\tau_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial m} - \overline{\tau_4} \frac{\partial \phi_1}{\partial m})_{\delta=0}$ n here g. ser Δ a la superficie de separai, = o alor m = 3 $\sqrt[4]{2} \left(-\frac{A_2}{V_2} \right) - \sqrt[4]{6} \left(1+x \right)^2 \cdot \left(\frac{A_3}{V_0 \left(1+x \right)^2} \right) \Big|_{x=d_3} = 0$ $(1)(2)(3) \text{ resolvement y most sale: } A_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(1)(2)(3) \text{ resolvement y most sale: } A_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\frac{dy}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} dz$ $\frac{dy}{\sqrt{2}} + \frac{$ P1 = 1 + 50 dr 1+50 + B1 02 = - V3c d1 + B2 $\overline{E_{k}} = -\nabla \phi$ $\overline{dx} \stackrel{?}{=} -\frac{d\phi_{1}}{dx} \stackrel{?}{=} \circ, \quad \overline{E_{1}} = \frac{V}{\frac{d_{1}}{d_{1}} + \frac{\nabla}{\partial x}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{A + x^{2}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{A +$ $\overline{E}_{2} = -\frac{dh_{2}}{dx} \hat{\alpha} ; \quad \overline{E}_{2} = \frac{V}{\overline{V}_{2}} \cdot \frac{di}{di} + de$ $\overline{S} = V \in \overline{S} = \begin{cases} \overline{J}_{1} = \overline{V}_{1} \overline{E}_{1} = \overline{V}_{2} \overline{V}_{2} \\ \overline{J}_{1} = \overline{V}_{2} \overline{E}_{2} = \overline{V}_{2} \overline{E}_{2} \end{cases} \xrightarrow{\overline{V}_{2}} \frac{di}{di} + de$ $\overline{J}_{2} = \overline{V}_{2} \overline{E}_{2} = \overline{V}_{2} = \overline{V}_{2} \overline{E}_{2} = \overline{V}_{2} =$



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ASIGNATURA: Electricidad y Magnetismo
Convocatoria: de Febrero de 2008
Fecha: 29 de enero de 2008

ſ		ĺ	
		,	
			l

DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES

X PROBLEMA 2

Un electrodo metálico ocupa el volumen $0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le \pi/2$. Está recubierto por un dieléctrico de permitividad ε Faradios/m y espesor d. En la superficie $r = R + d, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le \pi/2$ se apoya un segundo electrodo de espesor e despreciable. Si se conecta una batería de forma que el electrodo exterior está a 0 V y el interior a V voltios:

 a) Suponiendo despreciable el efecto de bordes exprese la ecuación para calcular el potencial en la región intermedia entre electrodos y las condiciones de contorno a aplicar. (1 p)

b) Obtenga el potencial en la región del apartado anterior. (1 p)

c) Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (1 p)

d) Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (1 p)

e) Calcule la capacidad entre electrodos. (1p)

f) Si el electrodo exterior se gira un ángulo $\alpha \le \pi$ en torno al eje z calcule la capacidad. (1p)

- g) Si a partir de la posición anterior es libre de girar sobre el eje z razone cual será el valor final de α . ¿Cuál sería el valor final si se hubiese desconectado la batería antes de dejarle girar?. (2p)
- h) Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens entre los electrodos ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce en función del valor de α si los electrodos son conductores eléctricos perfectos?. ¿Cuánto vale la resistencia? (2p)

a) El potencial responde à le ecuación de laplace: AD=0

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \Big|_{\substack{\varphi = 0 \\ \varphi = \Pi}} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \Big|_{\substack{\varphi = 0 \\ \varphi = \overline{Y}_2}} = 0$$

b)
$$r^2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} = A; \quad \Phi = \frac{A}{\Gamma} + B$$

Aplicando condiciones:

$$\phi(R=r) = V; \quad -\frac{A}{R} + B = V$$

$$\phi(r=R+d) = 0; \quad -\frac{A}{R+d} + B = 0 \quad \Rightarrow B = \frac{A}{R+d}$$

$$\Rightarrow -\frac{A}{R} + \frac{A}{R+d} = V; \quad A\left(\frac{1}{R+d} - \frac{1}{R}\right) = V; \quad A\left(\frac{R-R-d}{R(R+d)}\right) = V;$$

$$A = -\frac{VR(R+d)}{d} \quad \text{Asi} \quad \text{que}: \quad \Phi = \frac{VR(R+d)}{r\cdot d} - \frac{VR}{d} \quad (V)$$

c)
$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\nabla R(R+d)}{d \cdot r^2}$$

d)
$$\rho_s = \hat{n} \left(\bar{D}_z - \bar{D}_i \right) \Big|_s$$
 en $r = R + d$

$$\rho_s = \hat{r} \left(E \cdot \bar{E}_z - E \cdot \bar{E}_i \right) \Big|_{r = R + d} = \hat{r} \cdot E \left(-\frac{v_R}{d_{r^2}} \left(R + d \right) \cdot \hat{r} \right); \quad \rho_s = \frac{-E v_R}{d(R + d)}$$

e)
$$C = \frac{Q}{V}$$
, calculo $Q: Q = \iint_{S} \rho_{S} dS$.

$$Q = \begin{cases} \phi = iT \\ \phi = 0 \end{cases} \rho_{S} = \frac{Q}{V} = \frac$$

$$C = \frac{Q}{V}$$
; $C = \frac{E \pi \cdot R(12+d)}{d}$

$$f) Q(\alpha) = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} f_s(R+d)^2 \cdot sen \theta d\theta d\phi = \frac{\epsilon \cdot vR(R+d)}{d} (\pi-\alpha)$$

$$C = \frac{\mathcal{E}\mathcal{R}(\mathcal{Q}+d)}{d} (\pi - \alpha)$$

g) A potencial constante el equilibrio se alcauza a la máxima energía. $W(\alpha)_{max} = \frac{1}{2} C(\alpha) \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{(\pi - \alpha) ER(R + d)}{d} V^2 \implies (\alpha = 0)$

A carga ete. el equilibrio se alcaura a la minima energia.

$$W(\alpha)_{min} = \frac{1}{Z} \frac{Q^2}{C(\alpha)} = \frac{1}{Z} \frac{d \cdot Q^2}{(\pi - \alpha) \cdot \mathcal{E} \mathcal{Q}(\mathcal{Q} + d)} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

h)
$$\overline{J}(r) = \overline{\sigma} \cdot \overline{E} = \overline{\sigma} \cdot \frac{VR \cdot (R+d)}{d} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$\overline{J}(r) = \overline{V} \cdot \frac{VR(R+d)}{d} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$R = \frac{V}{I}; \qquad R = \frac{1}{V} \cdot \frac{d}{(\pi - \alpha) R(\Omega + d)}$$

Junio 1992 Ejercicio 2

La figura muestra un sistema de conductores semiesféricos por el que circula una corriente I_0 . El conductor interior $0 \le r < a$, y el exterior c < r < d son conductores perfectos $(\sigma = \infty)$ y están conectados a través de dos conductores reales cuyas características y dimensiones son: para el primer medio (medio 1), $0 < r < \phi$ $\sigma = \sigma_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, para el segundo (medio 2),

$$b < r < c$$
 $\sigma = \sigma_2$, $\varepsilon = \varepsilon_2$. Calcúlese:

- a) La densidad de corriente volumétrica en los conductores reales.
- b) El campo eléctrico en todos los conductores.
- c) El potencial eléctrico en todos los conductores.
- d) La densidad de carga en la interfase entre los conductores reales
- e) La resistencia de cada uno de los conductores reales y la total del sistema.

a)
$$\vec{J}_{v} = \frac{\vec{J}_{o}}{S_{op}} = \frac{\vec{J}_{o}}{4\pi r^{2}} = \frac{\vec{J}_{o}}{2\pi r^{2}}; \quad \vec{J}_{v} = \frac{\vec{J}_{o} \cdot \hat{r}}{2\pi r^{2}} (A/m^{2})$$

b)
$$\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rightarrow \begin{cases} \vec{O} & \vec{O} = \vec{O} \\ \vec{O} & \vec{O} = \vec{O} \end{cases}$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rightarrow \begin{cases} \vec{O} & \vec{O} = \vec{O} \\ \vec{O} & \vec{O} = \vec{O} \end{cases}$$

$$\vec{J} = \vec{O} \cdot \vec{E} \rightarrow \begin{cases} \vec{O} & \vec{O} = \vec{O} = \vec{O} \end{cases}$$

$$\vec{D} = \vec{O} \cdot \vec{O} = \vec{O} =$$

$$E = \begin{cases} \overline{O}, & \text{olta,cltd} \\ \overline{I_0}, & \hat{\Gamma}, & \text{olta,cltd} \\ \overline{Z\pi O_1 r^2}, & \text{olta,cltd} \\ \overline{Z\pi O_2 r^2}, & \text{olta,cltd} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad (\text{conductor perfecto, potencial cte}), \\ \phi(r) = 0, & \text{cered} \quad$$

$$\hat{n} = \hat{r}$$

$$\beta_{s} = \widehat{n} \left(\overline{D}_{z} - \overline{D}_{1} \right) = \widehat{r} \left(\varepsilon_{z} \cdot \overline{\varepsilon}_{z} - \varepsilon_{1} \cdot \overline{\varepsilon}_{1} \right) =$$

$$= \varepsilon_{z} \cdot \overline{\varepsilon} \left(r = b^{+} \right) - \varepsilon_{1} \cdot \overline{\varepsilon} \left(r = b^{-} \right);$$

$$\beta_{s} = \varepsilon_{z} \cdot \frac{\overline{T}_{o}}{2\pi \overline{\sigma}_{z} \cdot b^{z}} - \varepsilon_{1} \cdot \frac{\overline{T}_{o}}{2\pi \overline{\sigma}_{1} \cdot b^{z}};$$

$$\beta_{s} = \varepsilon_{z} \cdot \frac{\overline{T}_{o}}{2\pi \overline{\sigma}_{z} \cdot b^{z}} - \varepsilon_{1} \cdot \frac{\overline{T}_{o}}{2\pi \overline{\sigma}_{1} \cdot b^{z}};$$

$$\beta_{s} = \varepsilon_{z} \cdot \frac{\overline{T}_{o}}{2\pi \overline{\sigma}_{z} \cdot b^{z}} - \varepsilon_{1} \cdot \frac{\overline{T}_{o}}{2\pi \overline{\sigma}_{1} \cdot b^{z}};$$

e)
$$\mathbb{Z}_{2}$$
 \mathbb{Z}_{2} \mathbb{Z}_{3} \mathbb{Z}_{4} \mathbb{Z}_{4} \mathbb{Z}_{5} \mathbb{Z}_{5} \mathbb{Z}_{5} \mathbb{Z}_{7} $\mathbb{Z}_{$

$$R_{T} = \frac{V_{0}}{I_{0}}$$

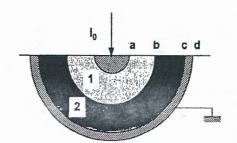
$$V_{0} = \phi(r=0) - \phi(r=d) = \phi(r=a) - \phi(r=a)$$

$$R_{T} = \frac{1}{2\pi\sigma_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2\pi\sigma_{2}} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \quad (52)$$

Junio 1992 La figura muestra un sistema de conductores semiesféricos por el que circula una corriente $I_{\rm 0}$ El conductor interior $0 \le r < a$, y el exterior c < r < d son conductores perfectos ($\sigma = \infty$) y están conectados a través de dos conductores reales cuyas características y dimensiones son: para el primer medio (medio 1), $\theta < r < \sigma$ $\sigma = \sigma_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, para el segundo (medio 2),

$$b < r < c$$
 $\sigma = \sigma_2$, $\varepsilon = \varepsilon_2$. Calcúlese:

- a) La densidad de corriente volumétrica en los conductores reales.
- b) El campo eléctrico en todos los conductores.
- c) El potencial eléctrico en todos los conductores.
- d) La densidad de carga en la interfase entre los conductores reales
- e) La resistencia de cada uno de los conductores reales y la total del sistema.



$$\overline{J} = \frac{J_0}{\text{SUP}_{\text{Section}}} \stackrel{?}{=} \frac{J_6}{4\Pi r^2}$$

b)
$$\overline{J} = V \overline{E} \Rightarrow \overline{E} = \overline{J}$$

c) Colculamos el potencial: $\phi_A - \phi_B = -\int_R^{\pi} \bar{\epsilon} \cdot d\bar{l}$

$$\phi_A - \phi_B = -\int_B^A \bar{\epsilon} \cdot d\bar{l}$$

Enhances: OCTCd

The on pirs = 0

CCTCd

CCTCd

$$= 6 \text{ first} = 0$$

$$= -\int_{C=C}^{A} \frac{J_{0}}{2\pi \sqrt{2}} \int_{C}^{A} \frac{J_{0}}{2\pi \sqrt{2}} dr = + \frac{J_{0}}{2\pi \sqrt{2}} \int_{C}^{A} \frac{J_{0}}{2\pi \sqrt{2}$$



$$\phi_A - \phi_B = -\int_B^A \overline{\epsilon} \cdot dI = \phi_B - \int_B^A \overline{\epsilon} \cdot dI$$

Continuous

perfects

$$\begin{cases}
S = M \cdot (S - DI) = F(S - S - S - S)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
S = S \cdot S \cdot (S - DI) = F(S - S - S - S - S)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
S = S \cdot S \cdot (S - DI) = F(S - S - S - S - S - S)
\end{cases}$$

$$P_{S} = \mathcal{E}_{A}\mathcal{E}_{A}(r=b^{\dagger}) - \mathcal{E}_{1}\mathcal{E}_{1}(r=b^{\dagger}) = \mathcal{E}_{A}\frac{J_{0}}{2\pi\sqrt{2}} - \mathcal{E}_{1}\frac{J_{0}}{2\pi\sqrt{2}} = \mathcal{E}_{2}\frac{J_{0}}{2\pi\sqrt{2}}$$

$$P_{S} = \frac{J_{0}}{2\pi\sqrt{2}} \left[\frac{\mathcal{E}_{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\mathcal{E}_{1}}{\sqrt{2}} \right]$$

$$R_T = \frac{V_0}{J_0}$$
; $V_0 = \phi(r=\alpha) - \phi(r=\alpha) = \phi(r=\alpha)$

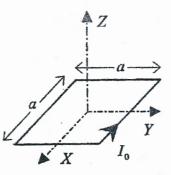
$$R_{T} = \frac{1}{2\pi r_{1}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2\pi r_{2}} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

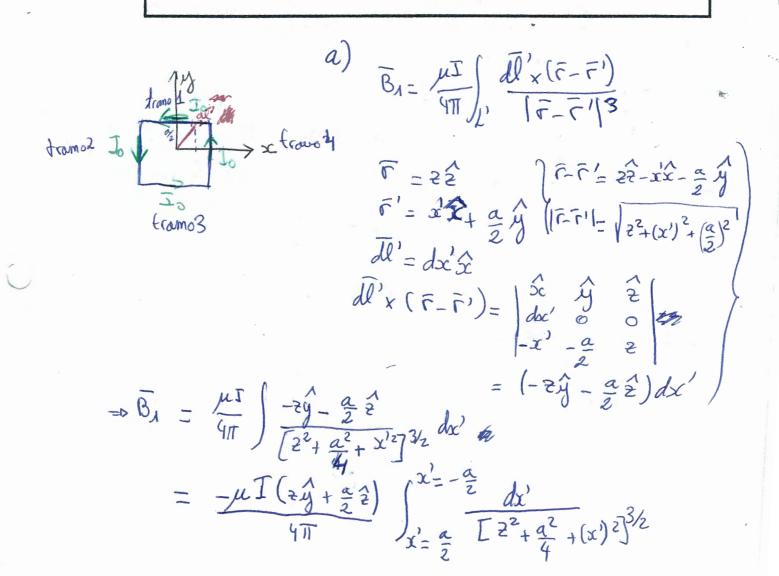
$$R_{1}$$

Septiembre 2000 Ejercicio 3

La figura muestra una espira cuadrada de lado a, centrada en el origen de coordenadas, con sus lados paralelos a los ejes, contenida en el plano z = 0 y recorrida por una corriente constante I_0 . Se pide:

- a) Calcule el valor de la densidad de flujo magnético B en los puntos del eje Z.
- b) Dibuje el campo obtenido en el apartado anterior.
 Considere ahora una espira muy pequeña en camparación con la anterior, de superfice S, centrada en el eje Z y contenida en un plano horizontal z = z₀ y que se desplaza de forma z₀ = vt. Se pide:
- c) ¿Cuál será la fuerza electromotriz inducida en esta espira pequeña cuando atraviese el plano z = 0?





NOTA:
$$\int \frac{1}{(x^2+\alpha)^3/2} d\alpha = \frac{x}{x\sqrt{x^2+\alpha}}$$

$$\overline{B}_{A} = -\mu J \left(z \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{2} \frac{2}{2}\right) \int \frac{x^2+\alpha^2}{(z^2+\alpha^2)} \sqrt{x^2+z^2+\alpha^2} \int \frac{x^2+\alpha^2}{2} \int \frac{$$

intensidad To brende a audause

espira de dimensi despreciable

Especho del madrado, podemos suprior que

$$B = de$$

$$b = \iint \overline{B} \cdot d\overline{s} = \iint B ds = B \cdot S$$

$$d\overline{s} = B \cdot (2) \stackrel{?}{=} 3$$

$$d\overline{s} = ds \cdot \stackrel{?}{=} 3$$

$$B / d\overline{s} = B \cdot d\overline{s}$$

$$B / d\overline{s} = B \cdot d\overline{s}$$

$$fem = -\frac{\partial \phi}{\partial E} = -\frac{\partial}{\partial E} \left[BS\right] = -S \frac{\partial B}{\partial E} = -S \frac{\partial B}{\partial E} \frac{SE}{\partial E}$$

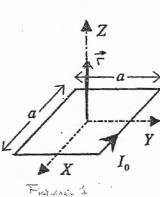
$$SECRE SECRE SE$$

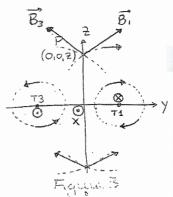
 $\lim_{\delta \to 0} \left[- sv \cdot \left(\frac{\delta \xi}{\delta B} \right) \right]^{\xi = 0}$

mbre 2000 Ejercicio 3

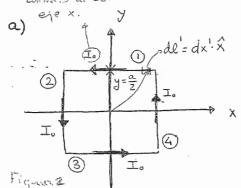
La figura muestra una espira cuadrada de lado a, centrada en el origen de coordenadas, con sus lados paralelos a los ejes, contenida en el plano z = 0 y recorrida por una corriente constante I_0 . Se pide:

- a) Calcule el valor de la densidad de flujo magnético B en los puntos del eje Z.
- b) Dibuje el campo obtenido en el apartado anterior. Considere ahora una espira muy pequeña en camparación con la anterior, de superfice S, centrada en el eje Z y contenida en un plano horizontal $z = z_0$ y que se desplaza de forma $z_0 = vt$. Se pide:
- c) ¿Cuál será la fuerza electromotriz inducida en esta espira pequeña cuando atraviese el plano





va eu scutido contracio al del



$$\int_{a}^{de'=dx'\cdot\hat{x}} \vec{B}_{1} = \int_{4\pi'}^{\mu \cdot \vec{I}} \int_{L'} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}}$$

$$\vec{r} = 2 \cdot \hat{z}$$

$$\vec{r} = \vec{r}' = x \cdot \hat{x} + \frac{\alpha}{2} \hat{y}$$

$$\vec{r} = x \cdot \hat{x} + \frac{\alpha}{2} \hat{y}$$

$$\vec{r} = x \cdot \hat{x} + \frac{\alpha}{2} \hat{y}$$

en el sentido
$$(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx' & 0 & 0 \\ -x' & -\frac{a}{2} & 2 \end{vmatrix} = (-z \cdot \hat{y} - \frac{a}{2} \hat{z}) \cdot dx'$$
en el sentido $(\vec{r} - \vec{a})$
a corriente $(\vec{r} - \vec{a})$ et e

integramos en el sentido de la corriente $(-2 \cdot \hat{y} - \frac{\alpha}{2} \hat{z}) dx'$ $B_1 = \int_{4\pi}^{\pi} \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{2 \cdot \hat{y} - \frac{\alpha}{2} \hat{z}}{4\pi} + x'^2 \right)^{3/2} = \int_{4\pi}^{\pi} (2 \cdot \hat{y} + \frac{\alpha}{2} \hat{z}) \int_{x=\frac{\alpha}{2}}^{x=-\frac{\alpha}{2}} dx'$ $x = \frac{\alpha}{2}$ $x = \frac{\alpha}{2}$

NOTA:
$$\int \frac{1}{(x^2 + \alpha)^{3/2}} dx = \frac{x}{\alpha \cdot \sqrt{x^2 + \alpha}}$$

$$\vec{B}_{1} = \frac{-\mu \cdot \vec{I}_{0} \left(2 \cdot \hat{j} + \frac{\alpha}{2} \hat{z} \right)}{4\pi} \left[\frac{x'}{\left(z^{2} + \frac{\alpha^{2}}{4} \right) \cdot \sqrt{x'^{2} + z^{2} + \frac{\alpha^{2}}{4}}} \right]_{x' = \frac{\alpha}{2}}^{x' = -\frac{\alpha}{2}}.$$

$$= -\frac{\mu \cdot T_0}{4\pi} \left[2 \cdot \hat{y} + \frac{\alpha}{2} \hat{z} \right] \cdot \left[\frac{-\alpha_2}{\left(\frac{\alpha^2 + \alpha^2}{4} \right) \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2 + 2^2}{2}}} - \frac{\alpha_2}{\left(\frac{\alpha^2 + \alpha^2}{4} \right) \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2 + 2^2}{2}}} \right];$$

$$\vec{B}_{1} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot \left(2\hat{y} + \frac{\alpha}{2}\hat{z}\right) \cdot \frac{\alpha}{\left(2^{2} + \frac{\alpha^{2}}{4}\right) \cdot \sqrt{2^{2} + \frac{\alpha^{2}}{2}}} \tag{T}$$

Ahora, si venuos la figura 3, venuos que, por simetiá, dado que el tramo 3 es igual que el tramo 1, pero de sentido contrario, $\vec{B_3}$ nos sale:

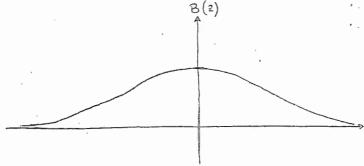
$$\vec{B}_{3} = \frac{\mu I_{o}}{4\pi} \left(-2 \cdot \hat{y} + \frac{\alpha}{2} \hat{z} \right) \cdot \frac{\alpha}{\left(z^{2} + \frac{\alpha^{2}}{4} \right) \cdot \sqrt{\frac{\alpha^{2}}{2} + z^{2}}}$$
 (T).

$$\overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_3 = \frac{\cancel{N \cdot I_0}}{4\pi} \cdot \alpha \cdot \widehat{2} \cdot \frac{\alpha}{\left(2^2 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + 2^2}} \tag{T}$$

En el tramo 2 y en el tramo 4, en lo que se refrere a la componente $^{\circ}2^{\circ}$, va a suceder exactamente lo mismo que en $\overrightarrow{B_1}$ y $\overrightarrow{B_3}$, así que:

$$\overline{B_T} = \frac{2\mu \cdot I \circ \alpha^2}{4\pi \left(z^2 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + z^2}} \tag{T}$$

b)
$$\overrightarrow{B_T} = \frac{2\mu \cdot \text{Io} \cdot \alpha^2 \cdot \hat{2}}{4\pi \left(z^2 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{3} + z^2}}$$
 (T) Conforme aumenta z, aumenta el denominador y disminuye el campo.

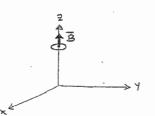


$$B(2) = B(-2) - Simetría par$$

ver Figura 3

más cercano (del eje 2) a los hilos, y ese es el origen de coordenadas.

$$\mathbb{B}(0) = \frac{2\sqrt{2}\mu \cdot \mathbb{J}_0}{\mathbb{T}_0}$$



Como la espira tiene dimensiones despreciables respecto del mas deado, podemos suporres que B=cte.

$$\Phi = \iint \vec{B} \, d\vec{S} = \iint \vec{B} \, dS = \vec{B} \iint dS = \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

$$B = B(z) \cdot \hat{z}$$

$$d\vec{S} = dS \cdot \hat{z}$$

$$\vec{B} = dS \cdot \hat{z}$$

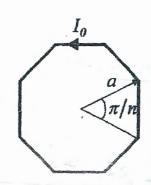
$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

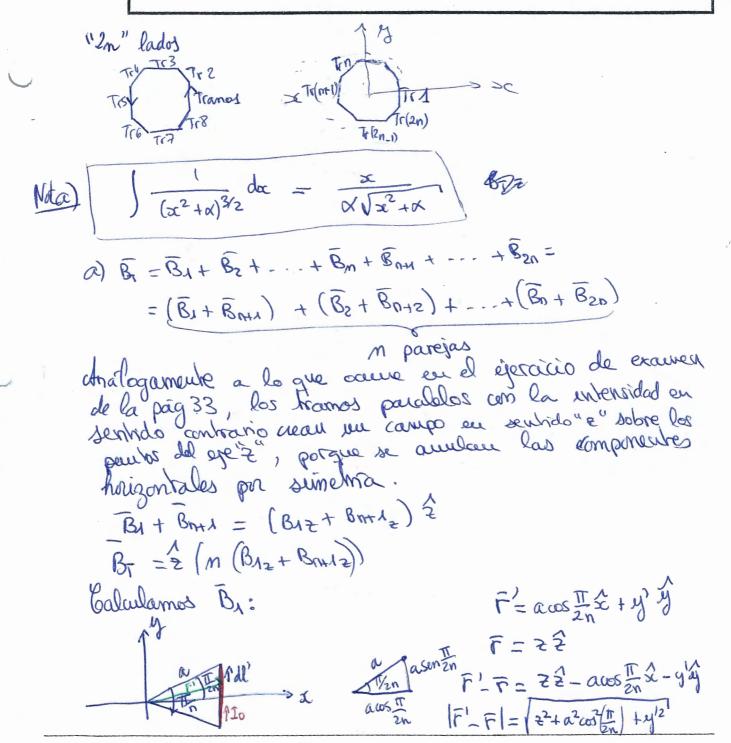
$$fen = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{d(B.S)}{dt} = -S \cdot \frac{dB}{dz} = -S \cdot \frac{dB}{dz} = -S \cdot v \cdot \frac{dB}{dz}$$

la espira NO Cambia de forma(S=cte)

Febrero 2001 Ejercicio 3 Una espira poligonal regular de 2n lados e inscrita en una circunferencia de radio a, está recorrida por una corriente estacionaria I0 (véase figura adjunta). La espira se supone en el plano XY y centrada en el origen de coordenadas.

- a) Calcule el vector inducción del campo magnético en cualquier punto del eje Z.
- b) Compare el valor del campo magnético calculado cuando n tiende a infinito con el que generaría una espira circular de radio a y recorrida por la misma corriente IO.
- c) Calcule el vector inducción de campo magnético en cualquier punto del espacio (r, θ, ϕ) cuando se verifica que r >> a. Exprese el resultado en coordenadas y vectores unitarios del sistema esférico).
- d) Una espira circular de radio $R \le a$ y normal a z se desplaza a velocidad constante v entre z = -h a lo largo del eje Z. Calcule la f.e.m.i en z = 0.



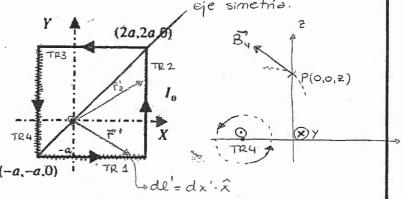


$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1$$

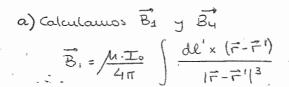
Septiembre 1997 Ejercicio 3

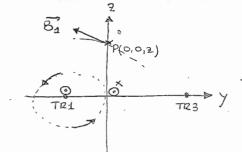
La figura muestra una espira cuadrada de lado 3a contenida en el plano z=0 y descentrada respecto al eje z. Si por esta espira circula una corriente en el sentido mostrado, se pide:

- a) Todas las componentes del campo magnético \bar{B} en todos los puntos del eje z.
- b) El flujo del campo magnético B a través de una espira plana de dimensiones mucho menores que a de superficie S contenida en un plano z = cte y centrada en el eje z.
- c) ¿Cómo debería de orientarse la espira anterior para que al desplazarse a lo largo del eje z no aparezca una f.e.m inducida sobre ella?



NOTA:
$$\int \frac{1}{(x^2 + \alpha)^{3/2}} dx = \frac{x}{\alpha \sqrt{x^2 + \alpha}}$$





$$\vec{r} = 2 \cdot \hat{2}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = 2 \cdot \hat{2}' - x \cdot \hat{x} + \alpha \cdot \hat{y}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y} = x \cdot \hat{x} - \alpha \cdot \hat{y}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{2^2 + x^{12} + \alpha^2}$$

$$\mathbb{Z}$$
 $dl' = dx' \cdot \hat{x}$

$$\frac{\partial dl' = dx' \cdot \hat{x}}{\partial l' \times (\vec{r} - \vec{r}')} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx' & 0 & 0 \\ -x' & \alpha & 2 \end{vmatrix} = (\alpha \cdot \hat{z} - 2 \cdot \hat{y}) dx'$$

$$\vec{B}_{1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{z} - 2\hat{y})}{(2^{2} + x^{12} + \alpha^{2})^{3/2}} dx = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{x'}{(2^{2} + \alpha^{2})\sqrt{x'^{2} + 2^{2} + \alpha^{2}}} \right]_{-\infty}^{\infty} dx$$

$$\cdot (\alpha \cdot \hat{z} - 2 \cdot \hat{y}) = \int \frac{M J_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{\alpha^2 + 2^2} \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{5\alpha^2 + 2^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha^2 + 2^2}} \right) (\alpha \hat{z} - 2 \hat{y}) (T)$$

$$\vec{B}_{1} = \frac{\mu \cdot \vec{J}_{0}}{4\pi} \cdot \frac{1}{\alpha^{2} + 2^{2}} \cdot \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{5\alpha^{2} + 2^{2}}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha^{2} + 2^{2}}} \right) (\alpha^{\frac{2}{2}} - 2 \cdot \hat{y}) \quad (T)$$

Para el travio 4. el eje y es como para el tromo I el eje X.

$$\vec{B}_{4}^{2} = \frac{\mu \cdot T_{0}}{4\pi} \cdot \frac{1}{\alpha^{2} + 2^{2}} \cdot \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{5\alpha^{2} + 2^{2}}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha^{2} + 2^{2}}} \right) \left(\alpha \hat{z} - z \cdot \hat{x} \right) \quad (T)$$

Calculauros
$$\vec{B_2}$$
 y $\vec{B_3}$:

$$\vec{B}_{2} = \frac{1}{4\pi} \int_{L'} \frac{d\ell' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}}$$

$$\vec{r} = 2 \cdot \hat{2}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = 2 \cdot \hat{2} - 2a\hat{x} - y' \cdot \hat{y}$$

$$\vec{r}' = x\hat{x} + y' \cdot \hat{y} = 2a\hat{x} + y' \cdot \hat{y}$$

$$|\vec{r}' - \vec{r}'| = \sqrt{2^2 + 4a^2 + y'^2}$$

$$\vec{B}_{2}^{2} = \frac{\mu \cdot I_{0}}{4\pi} \cdot \begin{cases} y=2a \\ (2a\hat{2}+2\cdot\hat{x})dy' \\ (2^{2}+4a^{2}+y'^{2})^{3/2} \end{cases} = \frac{\mu \cdot I_{0}}{4\pi} \cdot \begin{cases} \frac{y'}{(2^{2}+4a^{2})} \cdot \sqrt{2^{2}+4a^{2}+y'^{2}} \end{bmatrix} y'=2a \\ (2a\hat{2}+2\cdot\hat{x});$$

$$\vec{B}_{2} = \frac{\mu \cdot T_{0}}{4\pi} \cdot \frac{1}{z^{2} + 4\alpha^{2}} \cdot \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{8\alpha^{2} + z^{2}}} + \frac{\alpha}{\sqrt{5\alpha^{2} + 2^{2}}} \right) \left(2\alpha\hat{z} + 2\hat{x} \right) \tag{T}$$

Aliora vernos cómo que da $\vec{B_3}$:

$$\vec{B_3} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{2^2 + 4\alpha^2} \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{8\alpha^2 + 2^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{5\alpha^2 + 2^2}} \right) \left(2\alpha \cdot \hat{2} + 2 \cdot \hat{7} \right) (T).$$

Finalmente:

$$\vec{B_7} = \vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3} + \vec{B_4}$$

$$\vec{B_{T}} = \frac{\mu \cdot J_{o}}{4\pi} \cdot \frac{1}{\alpha^{2} + 2^{2}} \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{5\alpha^{2} + 2^{2}}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha^{2} + 2^{2}}} \right) \left(2\alpha\hat{2} - 2\cdot\hat{y} - 2\cdot\hat{x} \right) + A = \Lambda(2)$$

$$+ \frac{\mu \cdot J_{o}}{4\pi} \cdot \frac{1}{4\alpha^{2} + 2^{2}} \cdot \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{8\alpha^{2} + 2^{2}}} + \frac{\alpha}{\sqrt{5\alpha^{2} + 2^{2}}} \right) \left(4\alpha\hat{2} + 2\cdot\hat{x} + 2\cdot\hat{y} \right)$$

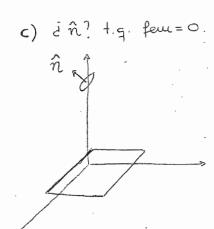
$$\vec{B} = \vec{B}(2)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(2)$$

b)
$$\phi = \text{BEdS}$$
 B=cte
 $\phi = \text{B}.d\bar{S} = B.\hat{n} \text{dS} = B.\hat{n}.\text{B}$

En este caso
$$\hat{n} = \hat{z}$$
, luego:

$$\phi = \frac{MI_0.5}{4\pi} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 2^2} \left[\frac{2\alpha}{\sqrt{5\alpha^2 + 2^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha^2 + 2^2}} \right] + \frac{\mu I_0.5}{4\pi} \cdot \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 2^2} \left[\frac{2\alpha}{\sqrt{8\alpha^2 + 2^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{5\alpha^2 + 2^2}} \right]$$



$$\vec{B_7} = 2\alpha \cdot A \cdot \hat{2} - A \cdot 2 \cdot \hat{9} - A \cdot 2 \cdot \hat{x} + 4\alpha \cdot B \cdot \hat{2} + 2 \cdot B \cdot \hat{x} + z \cdot B \cdot \hat{9}$$
;
Valuos à agripai
en componentes. $\vec{B_7} = (2B - Az) \hat{x} + (2B - Az) \hat{9} + (2\alpha A + 4\alpha B) \hat{2}$

Queremos: B.dS = 0.

dds? ds=ds. n , sieudo n vector unitario:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2}} (\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}).$$

$$dS = \frac{dS}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c^2}} (a', b', c').$$

$$\vec{B} \cdot \vec{dS} = \frac{dS}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \left[a' (2B - A \cdot z) + b' (2B - A \cdot z) + c' (2aA + 4aB) \right]$$

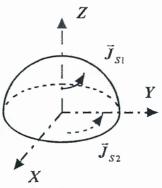
$$\begin{cases} a' = -b' \\ c' = 0 \end{cases}$$

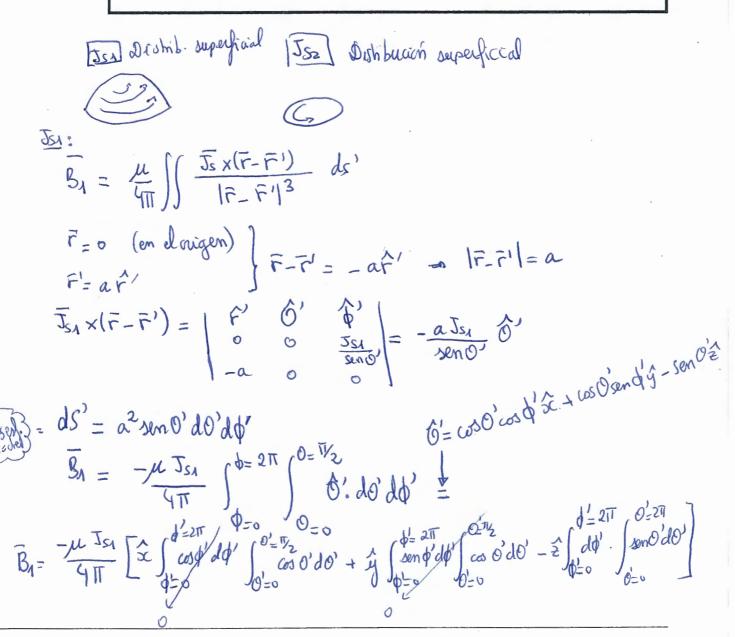
$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$$

Junio 1980 Ejercicio 3 La figura muestra dos distribuciones superficiales de corriente cuyas ecuaciones son:

$$\vec{J}_{S1}(\vec{r}) = \frac{J_{S1}}{\sin \theta} \hat{\phi} \quad ; \quad r = \alpha \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice since } \\ \vec{J}_{S2}(\vec{r}) = \frac{J_{S2}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S2}(\vec{r}) = \frac{J_{S2}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S2}(\vec{r}) = \frac{J_{S2}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S2}(\vec{r}) = \frac{J_{S2}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S2}(\vec{r}) = \frac{J_{S2}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S2}(\vec{r}) = \frac{J_{S2}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S2}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S3}(\vec{r}) = \frac{J_{S3}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S4}(\vec{r}) = \frac{J_{S4}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad \text{superfice } \\ \vec{J}_{S4}(\vec{r}) = \frac{J_{S4}r}{\alpha} \hat{\phi} \quad ; \quad 0 \leq r \leq \alpha \qquad \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \phi \leq$$

¿Qué relación debe existir entre los parámetros J_{S1} y J_{S2} para que el campo en el origen de coordenadas sea nulo?





$$\frac{1}{8} = \frac{\mu J_{51} \hat{z}}{4\pi} \cdot 2\pi \left[-\cos^{0} \right]_{0}^{1/2} = \frac{\mu J_{51}}{2}$$
Ahra: J_{52} : $G_{2} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S_{1}} \frac{J_{52} \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^{3}} ds^{1}$

Therefore the emost be integral on alindricas:

$$\frac{\bar{r} = \bar{0}}{\bar{r}'' = \bar{p}'} \hat{\rho}_{1}^{1/2} + \frac{\bar{r}'' = \bar{p}'}{\bar{p}'} \Rightarrow |\bar{r} - \bar{r}'| = \bar{p}^{1/2} \Rightarrow |\bar{r} - \bar{r}'|^{3} = \bar{p}^{1/3}$$

$$\frac{\bar{J}_{52} \times (\bar{r} - \bar{r}')}{a} = |\hat{\rho}_{1}^{1/2} + \hat{\rho}_{2}^{1/2} + |\hat{r}|^{3/2} \Rightarrow |\hat{r} - \bar{r}'|^{3/2} \Rightarrow |\hat$$

Febrero 2006 Ejercicio 3

Sea la distribución superficial de corriente $\vec{J}_s = \frac{J_{s0}a}{\hat{\rho}}\hat{\phi}$ (A/m), expresada en componentes

cilíndricas, distribuida en una corona circular de radios interior y exterior a y b y contenida en el plano z = 0. Calcule:

- a) La inducción de campo magnético \bar{B} en un punto cualquiera del eje Z.
- b) El momento magnético \vec{m} de la distribución.
- c) El coeficiente de inducción mutua con una espira circular de radio c, contenida en un plano z = cte con su centro en el punto (0,0,D) muy alejado de la corona circular $(D\gg b \text{ y } D\gg c)$.
- a) Si $J_{s0}=J_{sm}\cos\omega t$, obtenga la f.e.m. inducida en la espira de radio c.

1p(0,0,2) a) la simetria, las componentes houzontales de B se audou eu en los puntos del eje z solo hene componente z. $B(\vec{r}) = \iint_{S^{2}} \frac{J}{4\pi} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}') \times J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2}} dS' = \lim_{r \to \infty} \int_{S^{2}} \frac{J_{S}(\vec{r}')$ $B(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{Q^{\perp}} d\vec{p}' \int_{Q^{\perp}=0}^{Q^{\perp}=b} \frac{z}{Q^{\perp}} (\cos \varphi' \hat{x} + \sin \varphi' \hat{y}) + \hat{z} \int_{Q^{\perp}=0}^{Q^{\perp}=b} \varphi' d\varphi' + \hat{z}^{2})^{3/2}$ $= \frac{\mu}{4\pi} \int_{Q^{\perp}=0}^{Q^{\perp}=a} \frac{z}{Q^{\perp}(Q^{\perp}^{2}+z^{2})^{3/2}} e' d\varphi' + \hat{y} \int_{\sin \varphi'}^{\varphi'=b} d\varphi' \int_{Q^{\perp}=a}^{Q^{\perp}=b} \frac{z}{Q^{\perp}(Q^{\perp}^{2}+z^{2})^{3/2}} e' d\varphi' + \hat{y} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=b} \frac{z}{Q^{\perp}(Q^{\perp}^{2}+z^{2})^{3/2}} e' d\varphi' + \hat{z}^{\perp} \int_{Q^{\perp}=a}^{Q^{\perp}=a} \frac{z}{Q^{\perp}(Q^{\perp}^{2}+z^{2})^{3/2}} e' d\varphi' + \hat{y} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=b} \frac{z}{Q^{\perp}(Q^{\perp}^{2}+z^{2})^{3/2}} e' d\varphi' + \hat{z}^{\perp} \int_{Q^{\perp}=a}^{Q^{\perp}=a} \frac{z}{Q^{\perp}(Q^{\perp}^{2}+z^{2})^{3/2}} e' d\varphi' + \hat{z}^{\perp} \int_{Q^{\perp}=$ = 1 = 2 p'(z2+p'2) 3/2 = 1 [22+p'2] 1/2 p'=b

$$\frac{3}{5(r')} = \frac{1}{7} e^{r'} e^{r'}$$

$$\frac{1}{5(r')} = \frac{1}{7} e^{r'} e^{r'}$$

$$\frac{1}{5(r')} = \frac{1}{7} e^{r'} e^{r'}$$

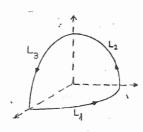
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} e^{r'}$$

$$\frac{1}{7} =$$

Febrero 1998 Ejercício 3 Sea una espira formada por tres cuadrantes de circunferencia de radio a situados en los planos XY, XZ e YZ respectivamente según se indica en la figura. Calcular el momento magnético de la espira y el campo creado en (0,0,D) siendo D>>a.

Centrada en este punto y sobre el plano z = D se coloca una espira circular pequeña de radio b << a. Calcular el coeficiente de inducción mutua entre ambas espiras.

Supuesto que $I_1 = I_0$ sen wt, calcule la fem inducida en la espira circular.



Para espiras planas: m = I.S f

Descomponemos nuestra espira en sema de espiras planos:

$$\overline{m} = \overline{m_1} + \overline{m_2} + \overline{m_3}$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{\pi R^2}{4}$$
; $m_1 = I_1 \frac{\pi a^2}{4} \stackrel{?}{=} 1$, $m_2 = I_1 \frac{\pi a^2}{4} \stackrel{?}{=} 1$, $m_3 = I_1 \frac{\pi a^2}{4} \stackrel{?}{=} 1$, $m_4 = \frac{\pi a^2}{4} I_4 (549 + 2) A.m^2$

b) B(0,0, D). Campo en peuto lejaus

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Gamma}(0,9D) & \widehat{\Gamma}=0 \\ \widehat{D} & \widehat{D} \end{array}$$

=> m = Ta2 Ing (x+y+2)

Sushihuyendo.

$$B = \frac{1}{1603} \left[22 - 2 - 9 \right]$$
 (T)

El campo que usa la espira de la la compo que usa la espira de la compo que usa la espira de radio b' radio a (As) se serpone que us muy pequeño es che en mádulo, directión y sentido, por estan situado en un punho lejano y por ser baca.

En lo cual:

El campo que usa la espira de serpone que la espira de serpone que ser de la contra situado en un punho lejano y por ser baca.

En lo cual:

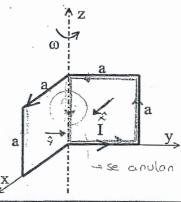
El campo que usa la espira de serpone que la espira de serpone que la espira de ser de la cualió b'
$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac$$

-TµwIo (coswt) a²b² (V)

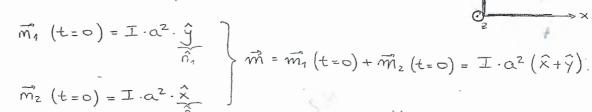
Febrero 2000 Ejercicio 3

Una espira, con las dimensiones de la figura, por la que circula una corriente estacionaria de I amp. gira según el eje Z a una velocidad angular constante ω . Suponiendo que en el instante t=0 la espira se encuentra en la posición indicada en la figura, calcule:

- a) El momento dipolar magnético de la espira para cualquier valor de t.
- b) El campo magnético (sólo componente z) generado en un punto P de coordenadas $(R, \theta, \varphi=0)$ con R>>a.
- c) El coeficiente de inducción mutua entre la espira mencionada y otra espira circular fija de radio a, contenida en un plano horizontal y con su centro en el punto P.
- d) La fem inducida en la espira circular.



Primero calcularmos m para el instante t=0:



Ahora pasamos a un instante t:

$$\hat{n}_1(t) = -\operatorname{sen}(\omega t) \hat{x} + \cos(\omega t) \hat{y}$$

$$\hat{n}_2(t) = \cos(\omega t) \hat{x} + \operatorname{sen}(\omega t) \hat{y}$$

$$m = m_1(t) + m_2(t)$$

$$\vec{m} = \vec{J} \cdot \vec{\alpha}^2 \cdot \hat{n}_1(t) + \vec{J} \cdot \vec{\alpha}^2 \cdot \hat{n}_2(t);$$

$$\vec{m} = \vec{J} \cdot \vec{\alpha}^2 \left[(\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) \hat{x} + (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \hat{y} \right] \left(\frac{A_{M2}}{m^2} \right)$$

$$\overline{B} = \frac{\mu}{4\pi R^3} \left[\frac{3(\overline{m} \cdot \overline{F}) \cdot \overline{F}}{R^2} - \overline{m} \right]$$

$$B_{2} = \frac{3\mu Ia^{2}}{4\pi R^{3}} (\cos \omega t - \sin \omega t) \sin \theta \cos \theta \hat{z}.$$
 (T)

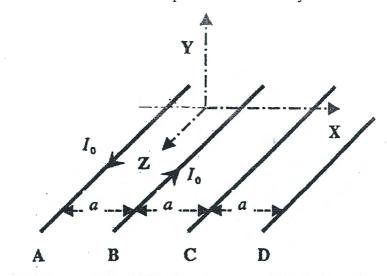
c)
$$\phi = \oint B dS = B \cdot S = \frac{3\mu Ta^2}{4\pi R^3} \cdot (\cos \omega t - \sin \omega t) \cos \theta \sin \theta \cdot \pi a^2$$

$$L = \frac{\Phi}{T}; \quad L = \frac{3\mu a^4}{4R^3} \cdot (\cos \omega t - \sin \omega t) \cos \theta \sin \theta \quad (H)$$

d) fem: =
$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$
; feu: = $\frac{3\mu I a^{3} \cdot \omega}{4R^{3}}$ sen $\Theta \cos \Theta$ (seuw $t + \omega \omega t$) (v)

Junio 1999 Ejercicio 3 Considere el cable plano de cuatro conductores de longitud L mostrado en la figura con el que se establecen dos circuitos o líneas de transmisión, uno de ellos con los conductores A y B y el otro con los conductores C y D. Calcule:

- a) El campo creado por la línea A y B en los puntos del plano y = 0 cuando por ella circula una corriente I_0 , vea la figura.
- b) El coeficiente de inducción mutua entre ambos circuitos.
- c) Calcule la tensión que aparecerá en la carga del segundo circuito cuando el primero está alimentado por un generador de V_0 voltios, pulsación w_0 y resistencia serie R_0 en un extremo y está cargado con una resistencia R₀ en el otro y el segundo circuito está cargado con sendas R_1 en sus extremos.
- d) ¿Cuáles de las resistencias citadas en el apartado anterior influyen en el resultado?.



linear de transmisión: "hilos enfinitos a efectos de calculo" a) Como consideramos la longitud del cable mucho mayor que el espesor del mismo, es como se hunteramos corrientes axiales infinitas. mx(F-F1)

Emperamos:

El campo en cualquier punho? del plano y=0 sólo de pendo de le componente x, que es le componente que representa la distancia del punto? a los lilos A y/o B. El campo en el punto? sólo raria en función de x mo de z. En coo el rechos de posición va a ser (F) xx. Por tambo el campo en P1 y P2 va a ser el mismo porque tienen la misma oc

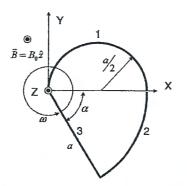
F= _ a & $|\vec{r}_{-\vec{r}'}| = x + \frac{a}{2} \Rightarrow \Re_{x}(\vec{r}_{-\vec{r}'}) = \frac{1}{2} \times (\vec{r}_{-\vec{r}'})$ $= |\vec{x}| \Rightarrow (\vec{r}_{-\vec{r}'}) = \frac{1}{2} \times (\vec{r}_{-\vec{r}'})$ $= |\vec{x}| \Rightarrow (\vec{r}_{-\vec{r}'}) = \frac{1}{2} \times (\vec{r}_{-\vec{r}'})$ 1-1=(x1a) &

Findings:
$$\vec{B}_{1} = \frac{\mu T}{2\pi} \left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{2} \right) \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{\mu T}{2\pi} \left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{2} \right) \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{\mu T}{2\pi} \left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\mu T}{2\pi} \left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{2\pi} \right) \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} \left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{2\pi} \right) \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} \left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{2\pi} \right) \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} \left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{2\pi} \right) \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} \left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{2\pi} \right) \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2\pi} \right) \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} \left(\frac{$$

d) de Ro

Febrero 2007 Problema 3 Sea la espira plana situada en el plano z=0 formada por los 3 tramos mostradas en la figura. Si la espira gira con una velocidad angular ω entorno al eje z y en el seno magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ calcule:

- a) La fuerza electromotriz que se induce en el tramo 1 indicando su polaridad.
- b) La fuerza electromotriz que se induce en el tramo 2 indicando su polaridad.
- c) La fuerza electromotriz que se induce en el tramo 3 indicando su polaridad.
- d) La fuerza electromotriz inducida sobre la espira.
- e) Compruebe el resultado obtenido usando un método de cálculo diferente al empleado en d.
- f) Si por la espira circularse una corriente I_0 en sentido contrario a las agujas de reloj ¿Qué campo \vec{B} crea en puntos muy alejados del eje Z?
- g) Si en dicha zona colocamos una espira plana circular de radio a ¿en que dirección debe orientarse su normal para que el flujo de \vec{B} sea máximo?
- h) ¿Cuánto valdrá entonces el coeficiente de inducción mutua entre ambas espiras?



Para carrier curadas. $\mathcal{E} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt$

La mayor polacidad la tiene "C". Apartador. Jem = Jem = (fem - fem) + (fem - fem) + (fem - fem) + (fem - fem c) = 1 bowa2 Enhones $\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\omega \mathcal{B}a^2 = 0$ Voltrød.

Totalog.

Totalog to femerate = 1 Bwa2 - 1 w Ba? = 0 Voltros. Apartalo 5: \$ = \(\overline{6} \overline{6 Campo lejos: Bloger = 4773 [3(m. r) r - m] $m = I.S = -20 \left[\frac{\pi a^2}{2} + \frac{1}{2} a \times a \right] = 1.0$ $m.r = I_0 a^2 \ge \left[\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right]$

Bligos =
$$\mu J_0 a^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)_{\frac{2\pi}{8}}$$
 (T)

La orientación que hace máximo d'op" es en la que B. de sale máximo.

By ds espira

1) Exponemes B/ds)

h) Exponemes B/ds)

mutua entre accubas express

$$\angle i\hat{j} = \frac{\phi_i\hat{j}}{\Sigma_i} = \cdots$$

ASIGNATURA: Electricidad y Magnetismo Convocatoria: de febrero de 2008 Fecha: 29 de enero de 2008



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

	DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES
	GRUPO DE RADIACIÓN
Apellidos:	
Todos los problemas puntúan igual (1/4 de	la nota total)

Todos los problemas puntúan igual (1/4 de la nota tot

PROBLEMA 1

La corona circular de la figura, de radio interior **a** y radio exterior **b** (0<a
b), situada en el vacío en un plano z=z₁, está cargada con una densidad superficial de carga σ_1 C/m²:

a) Calcule la intensidad de campo eléctrico en puntos del eje Z. (3p)

b) Calcule la intensidad de campo eléctrico en y puntos alejados de la distribución. (1p)

c) Represente la intensidad de campo eléctrico en puntos del eje Z para b finito y para $b \to \infty$. (1p)

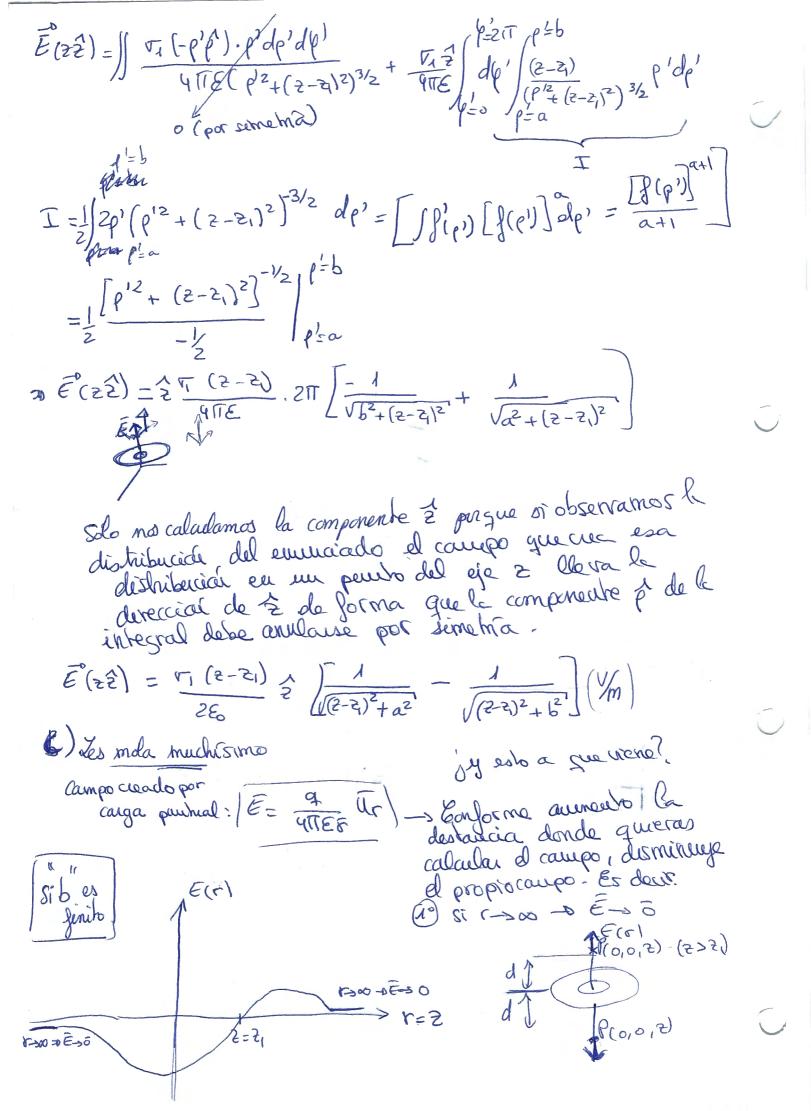
d) Se sitúa una distribución de idéntica geometría y densidad superficial de carga $\sigma_2 C/m^2$ en $z=z_1$. Calcule la intensidad de campo eléctrico del conjunto en puntos del eje Z. (1p) ¿Qué relación debe haber entre σ_1 y σ_2 para que el campo se anule en el origen del sistema de coordenadas? (1 p)

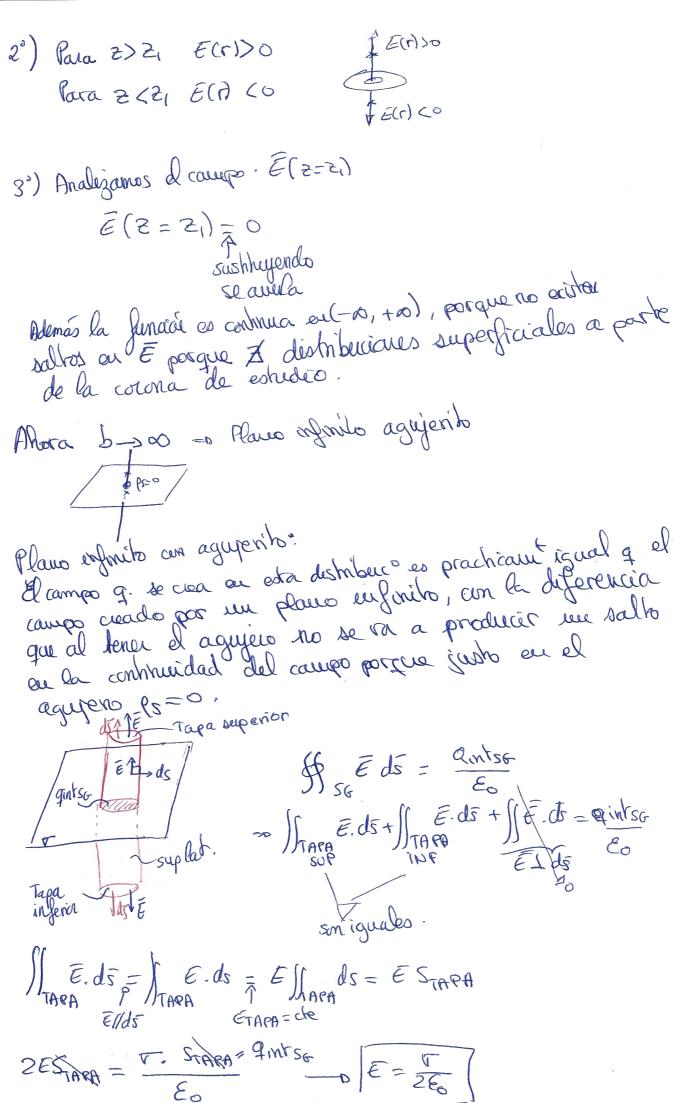
e) Si $\sigma_2=-\sigma_1$, calcule la intensidad de campo eléctrico en puntos alejados de la distribución.(3p)

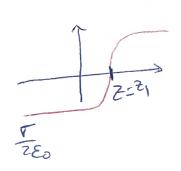
 $\frac{E(z)}{\bar{r}-z^2} = \frac{\rho_s(\bar{r}-\bar{r}')}{\sqrt{||\bar{r}||} ||\bar{r}||} ds$ $\frac{e(z)}{\bar{r}-z^2} = \frac{\rho_s(\bar{r}-\bar{r}')}{\sqrt{||\bar{r}||} ||} ds$

 $dS' = \iint \frac{\nabla_1 (-\rho') \hat{\rho}_{+} (z-z_1) \hat{z}}{4 \pi \mathcal{E} (\rho'^2 + (z-z_1)^2)^{3/2}} \hat{\rho}'^2 \hat{z}$ $F' = \hat{\rho}' \hat{\rho}_{+} + \hat{z}' \hat{z} = \hat{\rho}' \hat{\rho}_{+} + \hat{z}_1 \hat{z}$ $ds' = \hat{\rho}' d\rho' d\rho'$ $F - \vec{r}' = -\hat{\rho}' \hat{\rho}_{+} + (z-z_1) \hat{z}$ $|F - \vec{r}'| = |\hat{\rho}'^2 + (z-z_1)^2|$

E(22) = Stop e de'de' + 17 2 4 18 10 = 0







$$f_s = o = \hat{n} \cdot (\bar{0}_s - \bar{0}_i) = o = \bar{0}_s = \bar{0}_i$$

Ahora nos avadan

Teníamos

$$E_{V_1} = V_1(2-2i) \cdot 2 \cdot 1$$

2E

Ahora nos avadan

Ahora nos avadan

$$\rho^{\frac{2}{2} - \frac{1}{P}} \int_{V_{2}}^{2+2i} \frac{E_{V_{2}}}{E_{V_{2}}} = \frac{V_{2}(2+2i)^{\frac{2}{4}}}{2E_{0}} \int_{V_{2}}^{1} \frac{1}{(2+2i)^{2}+\delta^{2}} \frac{1}{(2+2i)^{2}+\delta^{2}}$$

Entronos
$$\vec{E}_{\uparrow} = \vec{F}_{\uparrow} + \vec{E}_{2} - \sqrt{\frac{1}{V(2-2)}} \frac{1}{\sqrt{(2-2)^{2}+3^{2}}} + \sqrt{\frac{1}{(2+2)^{2}+3^{2}}} + \sqrt{\frac{1}{(2+2)^{2$$

Relación TI/TZ para que E(2=0)=0

$$\frac{|\vec{z}-\vec{d}|}{|\vec{z}-\vec{d}|} = 0 = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) \times \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{14}}} - \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{14}}} = 0 \quad \sqrt{\frac{2}{12\sqrt{14}}} = 0$$

C) Si
$$\nabla_2 = -\nabla_1$$
 \Rightarrow $\nabla_1 = \nabla_2 + \nabla_2 = \nabla_3 + \nabla_4 = 0$ \Rightarrow $\nabla_1 = \nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_3 = \nabla_3 + \nabla_4 + \nabla_5 + \nabla_5 = \nabla_5 + \nabla_5 + \nabla_5 + \nabla_5 = \nabla_5 + \nabla_5$

Febrero 2010 Ejercicio 3 La espera de la figura, de radio a, está situada en el plano z = 0Y recorrida por una corriente l.

1. Calcule la inducción magnética en puntos del eje z.(3p)

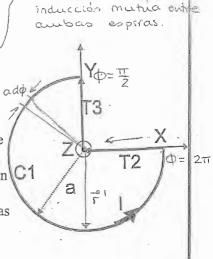
2. Se sitúa una espira circular de radio $b \ll a$ con su centro en el punto (0,0,a)y su normal según x.

3. Se hace girar la espira de radio b, respecto al eje z, con Una velocidad angular ω . Calcule la femi en la espira De radio b. (2p).

4. Si la espira de radio *b* estuviese abierta, indique mediante Un dibujo cuál seria borne positivo en t = 0. (1p)

 Se sitúa ahora una espira de radio c << a con su centro en C1 El punto (0,0,D), con D >> a y su normal según Z. Calcule el coeficiente de inducción mutua entre las espiras De radios a y c. (2p)

DATO:
$$\int \frac{1}{(\alpha + x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{\alpha \sqrt{x^2 + \alpha}}$$



$$\vec{r} = 2 \cdot \hat{2}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = 2 \cdot \hat{2} - \alpha \cdot \hat{\beta}'$$

$$\vec{r}' = \alpha \cdot \hat{\beta}'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{2^2 + \alpha^2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (\alpha^2 + 2^2)^{3/2}$$

$$\vec{F}' = \alpha \cdot \hat{\rho}' \qquad |\vec{F} - \vec{F}'| = \sqrt{2^2 + \alpha^2} ; |\vec{F} - \vec{F}'|^3 = (\alpha^2 + 2^2)$$

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}' \times (\vec{F} - \vec{F}') = |\vec{\Phi}' \times \vec{\Phi}' \times \vec{\Phi}'$$

$$\overrightarrow{Bc_1} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\phi'=\frac{\pi}{2}}^{\phi'=2\pi} \frac{de}{1-\alpha \cdot d\phi'} \left(\frac{2\beta'+\alpha^2}{2\beta'+\alpha^2}\right) \frac{1}{(2^2+\alpha^2)^{3/2}}$$

$$(2^2+\alpha^2)^{3/2}$$

$$(2^2+\alpha^2)^{3/2}$$

$$(2^2+\alpha^2)^{3/2}$$

$$(2^2+\alpha^2)^{3/2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left[\frac{\alpha}{(2^2 + \alpha^2)^{3/2}} \cdot \left(2 \cdot \hat{x} \cdot \sec \phi' \right)_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} - 2 \cdot \hat{y} \cdot \cos \phi' \right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \right) + \alpha \cdot \hat{z} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} d\phi'$$

$$\overrightarrow{Bc_1} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \underline{Ta} \left[-\frac{2}{(2^2 + \alpha^2)^{3/2}} \cdot (\hat{x} + \hat{y}) + \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 2^2)^{3/2}} \cdot \hat{2} \right] \tag{T}$$

$$\vec{r} = 2 \cdot \hat{2}$$

$$\vec{r}' = x' \cdot \hat{x}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = 2 \cdot \hat{2} - x' \cdot \hat{x}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{2^2 + x'^2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (2^2 + x'^2)^{3/2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial x' \cdot \hat{x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}$$

$$B_{T2} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \int_{x=a}^{x=0} \frac{-I \cdot 2 \hat{y} dx'}{(z^2 + x'^2)^{3/2}} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot x' \hat{y}}{\sqrt{z^2 + x'^2}} \Big|_{x=a}^{x'=0}$$

$$B_{T2} = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{a}{2\sqrt{z^2 + a^2}} \cdot \hat{y} \qquad (T)$$

→ Campo en el TRAMO 3:
$$B_{T3} = \frac{M \cdot I}{4\pi} \cdot \int \frac{dl \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r} = 2 \cdot \hat{2}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = 2 \cdot \hat{2} - y' \cdot \hat{y}$$

$$\vec{r}' = y' \cdot \hat{y}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{2^2 + y'^2} ; |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left(2^2 + y'^2\right)^{3/2}$$

$$\overrightarrow{B_{T3}} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \int_{y=0}^{y=a} \frac{\overrightarrow{I_2} \cdot dy^1 \cdot \hat{x}}{(2^2 + y^{12})^{3/2}} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \overrightarrow{I} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{y^1 \cdot \hat{x}}{\sqrt{2^2 + y^{12}}} \Big]_{y=0}^{y=a}$$

$$B_{T3} = \frac{M}{4\pi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2^2 + \alpha^2}} \cdot \hat{x}$$
 (T)

$$\vec{B_T} = \int_{4\pi}^{M} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\alpha} \left[\left[\frac{1}{2\sqrt{2^2 + \alpha^2}} - \frac{2}{\left(2^2 + \alpha^2\right)^{3/2}} \right] (\hat{x} + \hat{y}) + \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{\left(2^2 + \alpha^2\right)^{3/2}} \cdot \hat{2} \right] (T)$$

2.
$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{\Phi_{ij}}{L_{ij}}$$

$$\phi = 8.5$$

$$\Rightarrow B(2=a) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left[\frac{1}{2a\sqrt{2}} \left(\hat{x} + \hat{y} \right) + \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}a} \hat{z} \right] (T)$$

$$\vec{S} = \pi \cdot b^2 \hat{X}$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

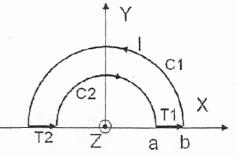
EXAMEN Ordinario - 2 de septiembre de 2010

SOLUCIÓN PROBLEMA 3

La espira de la figura, de radios a y b, está situada en el plano z=0 y recorrida por una corriente I.

Calcule la inducción magnética en puntos del eje z. (4p)

$$\bar{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{c} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{r_{1}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{1}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}} + \frac{\mu}{4\pi} \int_{c_{2}} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{$$



$$\begin{split} d\vec{l}' &= dx' \hat{x} & \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - x' \hat{x} \\ \vec{r} &= z\hat{z} \\ \vec{r}' &= x' \hat{x} & |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + {x'}^2} \quad d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dx' \hat{x} \times (z\hat{z} - x' \hat{x}') = -dx' (z\hat{y}) \end{split}$$

$$\vec{B}_{T1}(z\hat{z}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{x'=a}^{b} \frac{-z\hat{y}dx'}{\left(z^2 + {x'}^2\right)^{3/2}} = -\frac{\mu I}{4\pi} \frac{1}{z} \frac{x'\hat{y}}{\sqrt{z^2 + {x'}^2}} \bigg|_{x'=a}^{x'=b} = -\frac{\mu I}{4\pi} \frac{1}{z} \left[\frac{b}{\sqrt{\left(z^2 + b^2\right)}} - \frac{a}{\sqrt{\left(z^2 + a^2\right)}} \right] \hat{y} \quad \left[Wb/m^2 \right]$$

La contribución de T2 es idéntica a la de T1

 $\overline{C1}$

$$d\vec{l}' = bd\varphi'\varphi' \qquad \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - b\hat{\rho}$$

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{r}' = b\hat{\rho}' \qquad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + b^2} \qquad \hat{\rho}' = \cos\varphi'\hat{x} + \sin\varphi'\hat{y}$$

$$d\vec{l} \vee (\vec{r} - \vec{r}') = bd\varphi'\varphi \vee (z\hat{z} - b\hat{\varphi}') - bd\varphi'(z\hat{z}' + b\hat{z}')$$



 $d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = bd\varphi' \varphi \times (z\hat{z} - b\hat{\rho}') = bd\varphi' (z\hat{\rho}' + b\hat{z})$

$$\bar{B}_{C1}(z\hat{z}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{\pi} \frac{b d\varphi'(z\hat{\rho}' + b\hat{z})}{\left(z^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu I}{4\pi} \left\{ \frac{b}{\left(z^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left[z\hat{x} \ sen\varphi \Big|_{0}^{\pi} - z\hat{y} \cos\varphi \Big|_{0}^{\pi} + b\hat{z}\varphi \Big|_{0}^{\pi} \right] \right\}$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \left[\frac{2zb}{\left(z^2 + b^2\right)^{3/2}} \hat{y} + \frac{\pi b^2}{\left(z^2 + b^2\right)^{3/2}} \hat{z} \right] \left[Wb/m^2 \right]$$

La contribución de C2 se calcula como la de C1. La única diferencia es que $d\vec{l}' = -ad\varphi' \varphi' \quad \vec{r}' = a\hat{\rho}'$, por lo que formalmente el resultado es el mismo, cambiando b por a y añadiendo un signo menos.

$$\vec{B}_{C2}(z\hat{z}) = -\frac{\mu I}{4\pi} \left[\frac{2za}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} + \frac{\pi a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \right] [Wb/m^2]$$

$$\vec{B}(z\hat{z}) = \frac{\mu I}{4\pi} \begin{cases} -\frac{2}{z} \left(\frac{b}{\sqrt{(z^2 + b^2)}} - \frac{a}{\sqrt{(z^2 + a^2)}} \right) + \frac{2zb}{(z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2za}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{y} + \\ \pi \left[\frac{b^2}{(z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{z} \end{cases}$$

2. Se sitúa una espira circular de radio c<<a con su centro en el origen. En t=0 la normal de la espira está orientada según \hat{x} . Se hace girar la espira de radio c<<a, respecto al eje y, con una velocidad angular ω. Calcule la femi en la espira de radio c<<a. (2p) Dado que c<<a, se puede aproximar el campo creado por la espira de radios a y b (espira 1) en la espira de radio c por el valor en su centro (z=0). Así:

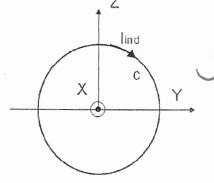
$$femi = -\frac{d\Phi_{1c}}{dt} = \sum_{S_c} \Delta \left[B_1(z = 0) \cdot S_c \right] \qquad S_c = S_c h = \pi c^2 (\cos \omega x - sen \omega t) \qquad \Delta \left[B_1(z = 0) \cdot S_c \right] \qquad S_c = S_c h = \pi c^2 (\cos \omega x - sen \omega t) \qquad \Delta \left[B_1(z = 0) \cdot B_1(z = 0) \cdot$$

Explique razonadamente y muestre mediante un dibujo cuál es el sentido de la corriente inducida en la espira de radio c en t=0. (1p)

En t=0 $\hat{n} = \hat{x}$ y la femi es negativa, por lo que el signo positivo de la corriente inducida es el considerado en la figura.

4. Se sitúa ahora la espira de radio c<<a con su centro en el punto (0,0,D), con D>>b y su normal según 2 .Calcule el coeficiente de inducción mutua entre las dos espiras. (3p)

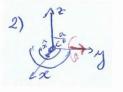
Dado que c<<a, se puede aproximar el campo creado por la espira de radios a y b en la espira de radio c por el valor en su centro (z=D). Así:



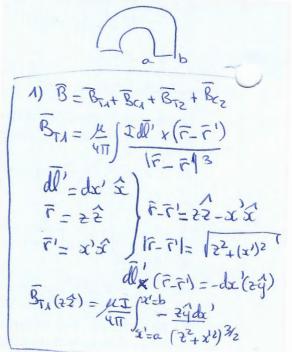
$$\vec{m}_{1} = IS_{1}\hat{n} = IS_{1}\hat{z} \quad \left[Am^{2}\right] \qquad S_{1} = \int_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{2\pi} \int_{\rho = 0}^{a} \rho d\rho d\varphi = \frac{\pi}{2} \left(b^{2} - a^{2}\right) \quad \left[m^{2}\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^{3}} \left[\frac{3(\vec{m}_{1} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^{2}} - \vec{m}_{1}\right] \Rightarrow$$

$$\vec{B}(D\hat{z}) = \frac{\mu}{4\pi D^3} \left[\frac{3(IS_1\hat{z} \cdot D\hat{z})D\hat{z}}{D^2} - IS_1\hat{z} \right] = \frac{\mu}{4\pi D^3} 2IS_1\hat{z} = \frac{\mu}{2\pi D^3} IS_1\hat{z} \left[T \right]$$









UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ASIGNATURA: Electricidad y Mag	gnetismo
Convenatoria: Contiambre de 200	0 :

Convocatoria: Septiembre de 2008 Fecha: 1 de Septiembre de 2008

_

DEPARTAMENTO DE SEÑALES.	CICTEMAC V	DADIOCOM INICACIONE
DEFAITING DE SEMENTO,	SISTEMPS I	NADIOCOMONICACIONE

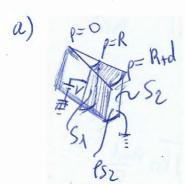
	GRUPO DE RADIAÇION
Apellidos y	' .
Nombre:	

PROBLEMA 2

Un electrodo metálico ocupa el volumen $0 \le \rho \le R, 0 \le \varphi \le \alpha, 0 \le z \le L, (\alpha < 2\pi)$. Está recubierto por un dieléctrico de permitividad ε Faradios/m y espesor d. En la superficie del dieléctrico $\rho = R + d, 0 \le \varphi \le \alpha, 0 \le z \le L$ se apoya un segundo electrodo de espesor e despreciable. Si se conecta una batería de forma que el electrodo exterior está a 0 V y el interior a V voltios:

- a) Suponiendo despreciable el efecto de bordes exprese la ecuación para calcular el potencial en la región intermedia entre electrodos y las condiciones de contorno a aplicar. (1 p)
- b) Obtenga el potencial en la región del apartado anterior. (1 p)
- c) Calcule la intensidad del campo eléctrico en la región entre conductores. (1 p)
- d) Obtenga la densidad superficial de carga en la superficie interior del electrodo exterior. (1 p)
- e) Calcule la capacidad entre electrodos. (1p)
- f) Si el electrodo exterior se gira un ángulo $\beta \le 2\pi \alpha$ en torno al eje z calcule la capacidad. (1p)
- g) Si a partir de la posición anterior es libre de girar sobre el eje z razone cual será el valor final de β . ¿Cuál sería el valor final si se hubiese desconectado la batería antes de dejarle girar?. (2p)
- h) Si se sustituye el dieléctrico por un material con pérdidas cuya conductividad es σ Siemens entre los electrodos ¿Cuánto vale la densidad de corriente que se produce en función del valor de β si los electrodos son conductores eléctricos perfectos?. ¿Cuánto vale la resistencia? (2p)

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\right]\;,\;\;\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\hat{a}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\hat{a}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\hat{a}_3$$



Dato potential: $\mathcal{E} = de = 0 \quad \Delta \phi = 0$ $\Delta \phi = 0 \quad (laplace)$ Condiciones de $| \phi (e = R) = V$ $\phi(e = R + d) = 0$ $| \partial \phi |_{e=0, \lambda} = 0$ $| \partial \phi |_{e=0, \lambda}$

(= Alne +B

$$\phi(e^{\pm R}) = V = A \ln R + B$$

$$\phi(e^{\pm R}) = V = A \ln R - A \ln (R + d) + B$$

$$\phi(e^{\pm R}) = V = A \ln R - A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = V = A \ln R - A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = V = A \ln R - A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = V = A \ln R - A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

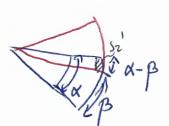
$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

$$\phi(e^{\pm R}) = A \ln (R + d) = A \ln R$$

C= EXLX = EX L = C





desde 4=p a 4=d o desde 4-Oa4=d-B

$$Q(\beta) = \int_{S_2}^{S_2} |S_2| dS_2 = |S_2| \int_{Z_{-0}}^{Z_{-0}} |A+d| d\beta dz$$

$$=\frac{-(\alpha-\beta) \, \mathcal{E} L V}{\ln \frac{R+d}{R}}$$

$$C(\beta) = \frac{(x-\beta) EL}{\ln \frac{R+d}{R}}$$

9) Beg? Bateria conectada: El equilibrio mando la bateriz este conectada se alcanza a matrima energía - o V= de

$$W = \frac{1}{2} CV_{-}^{2} = \frac{1}{2} (d-2) EL V^{2}$$

$$W = \frac{1}{2} CV_{-}^{2} = \frac{1}{2} (d-2) EL V^{2}$$

$$W = \frac{1}{2} CV_{-}^{2} = \frac{1}{2} (d-2) EL V^{2}$$

$$W = \frac{1}{2} CV_{-}^{2} = \frac{1}{2} (d-2) EL V^{2}$$

Meg? Barenz desconectada: El exambino cuando la barenz eta desconectada se al cauza

a minima evergra -- o a-che

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{g_1(R_1d)}{(A-B)EL} Q^2 \Rightarrow \boxed{3=0} \rightarrow W_{min}$$

h) Densidad volumétrica de correct

Ede les apartades autenires salvemos que 200;

$$\overline{J} = \frac{V}{\rho \ln(R+d)} \stackrel{?}{\rho}$$

$$\overline{J} = \iint \overline{J} \stackrel{?}{\rho} \log \overline{S} = V - \frac{V}{\rho \ln(R+d)} \stackrel{?}{\rho} \frac{\rho(\alpha - \beta) \angle \rho}{S}$$

$$R = \frac{V}{J} - 0 \quad R = \frac{V}{S} = \frac{\rho \ln(R+d)}{\rho \ln(R+d)} \stackrel{?}{\rho}$$

$$\frac{\nabla V(\alpha - \beta) \angle}{\rho \ln(R+d)}$$

$$\frac{\nabla V(\alpha - \beta) \angle}{\rho \ln(R+d)}$$



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ASIGNATURA: Electricidad y Magnetismo
Convocatoria: de Septiembre de 2009
Fecha: 5 de sentiembre de 2009

1		1
1		
1		
i		

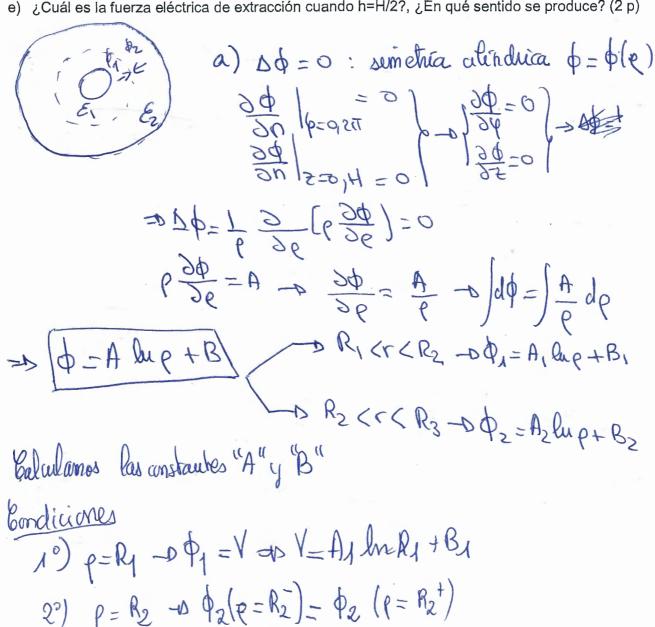
DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES GRUPO DE RADIACIÓN

Nombre:	Apellidos:		

PROBLEMA 2

Un condensador cilíndrico formado por dos conductores de radios R1 y R3 y altura H está relleno de dos materiales dieléctricos que cubren el volumen de R1<r<R2 con constante dieléctrica relativa ε1 y el volumen R2<r<R3 con constante ε2.

- a) Suponiendo despreciable el efecto de bordes en los extremos del cilindro, determine el potencial en cada punto del interior cuando el cilindro interior está a potencial V y el exterior está puesto a
- b) Calcule la intensidad del campo eléctrico en cada punto del interior del condensador. (2 p)
- c) Obtenga la carga acumulada en cada uno de los conductores y determine la capacidad y la energía almacenada en el condensador. (2p)
- d) Si se desconecta el generador y se extrae el dieléctrico más interior (ε=ε1), determine la tensión entre conductores en función de la altura h de extracción para 0<h<H. (2p)
- e) ¿Cuál es la fuerza eléctrica de extracción cuando h=H/2?, ¿En qué sentido se produce? (2 p)



Sea H = {\frac{1}{\xi_2}} ln \frac{\xi_3}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_1} ln \frac{\xi_2}{\xi_1}

Sewhihugendor
$$A_4$$
, B_3 en A_2 $P = P$

$$A_2$$
, B_2 en A_2

$$A_3$$

$$A_4$$

$$A_5$$

$$A_5$$

$$A_5$$

$$A_5$$

$$A_6$$

$$A_7$$

$$A_8$$

Aparticle 6

$$E = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2$$

bomo el condemador houde a quedarse con energia minima la fuerza electrica se monlez cur para que h sea ignal a coro por lo tombo la Fe llevara souhido descendente. Le openetre à le extraccione del delevitro

.

. .

.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ASIGNATURA: Electricidad y Magnetismo
Convocatoria: de Septiembre de 2009
Ecobo: E do contiambro do 2000

	İ	

			191	
DEPARTAMEN'	TO DE SEÑALES, S	ISTEMAS Y RADIO	COMUNICACIONE	S

	GRUPO DE RADIACIÓN	
Apellidos:		

PROBLEMA 3

Nombre:

Una espira elíptica, con semiejes a y b según la figura, por la que circula una corriente estacionaria de l amperios gira en torno al eje z a una velocidad angular constante de ω rpm. Suponiendo que en el instante t=0 la espira se encuentra en la posición indicada en la figura (en el plano x=0), calcule:

a) El momento dipolar magnético de la espira en t=0. (2p)

b) El momento dipolar magnético de la espira para cualquier valor de t. (2p)

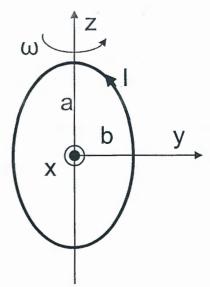
c) El campo magnético generado en un punto P de coordenadas $(R, \theta, \varphi=0)$ con R>>a. (2p)

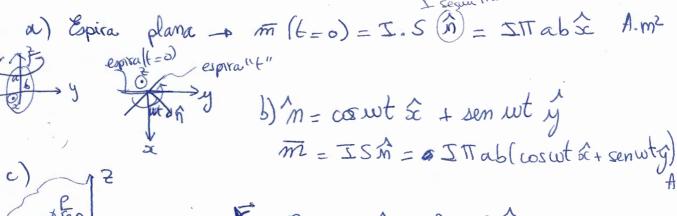
d) El coeficiente de inducción mutua entre la espira mencionada y otra espira circular fija de radio **c** << R, contenida en un plano horizontal y con su centro en el punto P. (2p)

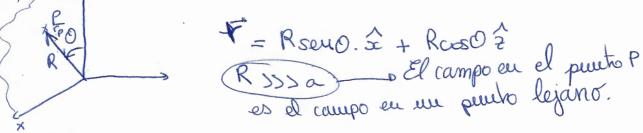
e) ¿Para que valores de θ el coeficiente de inducción mutua es cero? (1p)

f) La fem inducida en la espira circular. (1p)

Nota: Indique las unidades de TODAS las magnitudes que obtenga







$$B(\vec{r}_{p}) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}_{p}) \cdot \vec{r}_{p}}{R^{3}} \right]$$

$$\vec{m} \cdot \vec{r}_{p} = \pm \pi ab(\cos \omega t \cdot \hat{x} + \sin \omega t \cdot \hat{y}) \cdot (R \sin \hat{x} + R\cos \theta \hat{z})$$

$$\vec{m} \cdot \vec{r}_{p} = \pm \pi ab(\cos \omega t) R \sec \theta,$$

$$(\vec{m} \cdot \vec{r}_{p}) \cdot \vec{r}_{p} = \frac{1}{R^{3}} \left((3 \sec \theta - 1) \cos \omega t \cdot \hat{x} - \sec \omega t \cdot \hat{y} + 3 \sec \theta \cos \theta \cos \omega t \cdot \hat{z} \right)$$

$$\vec{R} \cdot \vec{r}_{p} = \frac{1}{R^{3}} \left((3 \sec \theta - 1) \cos \omega t \cdot \hat{x} - \sec \omega t \cdot \hat{y} + 3 \sec \theta \cos \theta \cos \omega t \cdot \hat{z} \right)$$

$$\vec{R} \cdot \vec{r}_{p} = \frac{1}{R^{3}} \left((3 \sec \theta - 1) \cos \omega t \cdot \hat{x} - \sec \omega t \cdot \hat{y} + 3 \sec \theta \cos \theta \cos \omega t \cdot \hat{z} \right)$$

$$\vec{R} \cdot \vec{r}_{p} = \frac{1}{R^{3}} \left((3 \sec \theta - 1) \cos \omega t \cdot \hat{x} - \sec \omega t \cdot \hat{y} + 3 \sec \theta \cos \theta \cos \omega t \cdot \hat{z} \right)$$

B se puede suponer de su bala la superficie espira de radio c de la espira porque estas en su pento P lejano. B es de on la espira de radio "c" = 0 Pespira JB. d5 = = B SdF = B. Sespirade radio C. $\phi = \overline{B}.d\overline{s} = \overline{B}.\overline{S} = \overline{B}.\overline{S} = Bz \cdot \underline{S} = Bz \cdot \overline{S} = Bz \cdot \overline{R}z = \frac{3\mu I\pi abc^2}{4R^3}$ en Cos OcosutLig = Pig = 34 Trab c2 son O cost Cos wt (H)

de Ti = 4183 coef. de inducco mulua " = espita de tadioc i = dipse e) Lij=0 f) feme en la espira circular:

for $e^2 = \frac{d\phi}{dt} = \frac{3\mu \pm t \pi abc^2 \omega}{4R^3}$ son θ cos θ son θ (Volhice)