ISAL

Exámenes resueltos 2000-2010

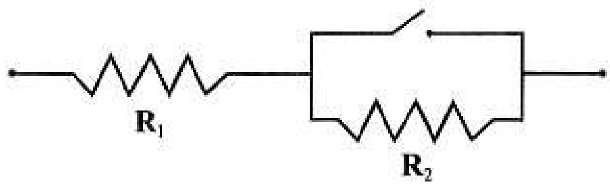
31/1/2000 **Introducción a las Señales Aleatorias** 1 hora y cuarto

Teoría **(sin libros ni apuntes)**

T1.- En el circuito de la figura se desconoce el estado del interruptor, de modo que la resistencia total entre extremos es:

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_1+\mathbf{X}\cdot\mathbf{R}_2$$

con $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ v.a.'s uniformes en (9,11) y $\mathbf{X}$ v.a. de Bernouilli, con $P(\mathbf{X}=1)=p$. Suponga $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{X}$ independientes.



Calcule:

a) La fdp de la v.a. $\mathbf{R}$. Represéntela de forma aproximada para $p=1/2$.

b) La media de $\mathbf{R}$.

(2 puntos)

T2.- Sean los procesos estocásticos discretos en el tiempo:

$$\mathbf{X}[n]=\mathbf{A}[n]\cos(\Omega_0 n+\mathbf{\Phi})$$
$$\mathbf{Y}[n]=\mathbf{A}[n]\operatorname{sen}(\Omega_0 n+\mathbf{\Phi})$$

siendo $\Omega_0>0$, $\mathbf{\Phi}$ una v.a. uniforme en $(-\pi,\pi)$ y $\mathbf{A}[n]$ un p.e. independiente de $\mathbf{\Phi}$ y estacionario en sentido amplio, con autocorrelación $R_A[m]$ y fdp de primer orden:

$$f_A(a)=a\,e^{-a^2/2} \quad (a>0)$$

Calcule:

a) Las autocorrelaciones de $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$.

b) Las fdp's de 1er orden de $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$. (Sugerencia: defina $\mathbf{X}\equiv\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}\equiv\mathbf{Y}[n]$ y calcule previamente la fdp conjunta de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$).

(2 puntos)

Examen:	31/1/00	Publicación de notas:	21/2/00
Revisión:	25/2/00	Publicación resultados revisión:	29/2/00

T1

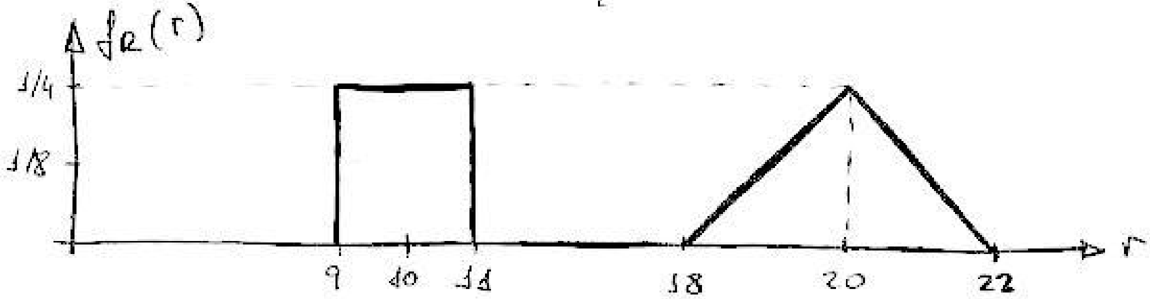
a) $f_R(r) = f_R(r/X=0)\underbrace{P(X=0)}_{1-p} + f_R(r/X=1)\underbrace{P(X=1)}_{p}$

$$f_R(r/X=0) = f_{R_1}(r) = \frac{1}{2}\ , \quad r \in (9,11)$$

$$f_R(r/X=1) = f_{R_1}(r) * f_{R_2}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{R_1}(r-x) f_{R_2}(x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} \int_9^{r-9} \frac{1}{2}\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4}(r-18)\ , & r \in (18,20) \\ \int_{r-11}^{11} \frac{1}{2}\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4}(22-r)\ , & r \in (20,22) \end{cases}$$

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-p)\ , & r \in (9,11) \\ \frac{p}{4}(r-18)\ , & r \in (18,20) \\ \frac{p}{4}(22-r)\ , & r \in (20,22) \end{cases}$$



b) $E(R) = E(R_1) + E(X)E(R_2) = \underline{10 + p10}$

(T2) a) $R_X[n+m, n] = E\{X[n+m]\,X[n]\} =$

$$= E\{A[n+m]\cos[\Omega_0(n+m)+\Phi]\,A[n]\cos(\Omega_0 n+\Phi)\} =$$

$$= E\{A[n+m]\,A[n]\}\,E\{\cos[\Omega_0(n+m)+\Phi]\cos(\Omega_0 n+\Phi)\} =$$

A[n], Φ indep.

$$= R_A[m]\,\frac{1}{2}\Big(E\{\cos[\Omega_0(2n+m)+2\Phi]\} + E\{\cos\Omega_0 m\}\Big) =$$

$$= R_A[m]\,\frac{1}{2}\left[\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos[\Omega_0(2n+m)+2\phi]\,\frac{1}{2\pi}\,d\phi}^{0} + \cos\Omega_0 m\right] =$$

$$= \frac{1}{2}R_A[m]\cos\Omega_0 m = R_X[m]$$

$R_Y[n+m, n] = E\{Y[n+m]\,Y[n]\} =$

$$= E\{A[n+m]\,\mathrm{sen}[\Omega_0(n+m)+\Phi]\,A[n]\,\mathrm{sen}(\Omega_0 n+\Phi)\} =$$

$$= E\{A[n+m]\,A[n]\}\,E\{\mathrm{sen}[\Omega_0(n+m)+\Phi]\,\mathrm{sen}(\Omega_0 n+\Phi)\}$$

A[n], Φ indep.

$$= R_A[m]\,\frac{1}{2}\Big(-\cancelto{0}{E\{\cos[\Omega_0(2n+m)+2\Phi]\}} + E\{\cos\Omega_0 m\}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}R_A[m]\cos\Omega_0 m = R_Y[m]$$

b) $\mathbb{X} \equiv \mathbb{X}[n]$, $Y \equiv Y[n]$, $A \equiv A[n]$, $\theta \equiv \Omega_0 n \Rightarrow$

$$\mathbb{X} = A\cos(\theta + \Phi), \quad Y = A\,\mathrm{sen}(\theta + \Phi)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos(\theta+\phi) \\ y = a\,\mathrm{sen}(\theta+\phi) \end{array}\right\} \underset{(\text{sol. única})}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} a = +\sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} - \theta \end{array}\right.$$

$$J(a,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta+\phi) & -a\,\mathrm{sen}(\theta+\phi) \\ \mathrm{sen}(\theta+\phi) & a\cos(\theta+\phi) \end{vmatrix} = a$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a < \infty \\ -\pi < \phi < \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{array}\right.$$

$$f_{\mathbb{X}Y}(x,y) = \frac{f_{A\Phi}(a,\phi)}{|J(a,\phi)|} \underset{A,\Phi \text{ indep.}}{\uparrow=} \frac{f_A(a)\, f_\Phi(\phi)}{|a|} \underset{a>0}{\uparrow=} \frac{\cancel{a}\, e^{-\frac{a^2}{2}}\, \frac{1}{2\pi}}{\cancel{a}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \left\{\begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{array}\right.$$

$$f_{\mathbb{X}}(x;n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$f_Y(y;n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}Y}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dy =$$

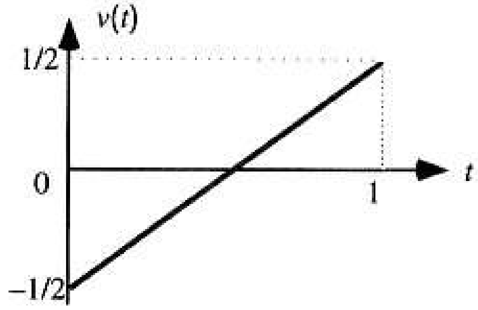
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (-\infty < y < \infty)$$

5

31/1/2000 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas

Problemas **(con libros y apuntes)**

P1.- Sea el experimento consistente en generar la señal en rampa de la figura y obtener una medida $\mathbf{S}=v(\mathbf{T})$ en un instante $\mathbf{T}$ aleatorio en el intervalo $(0,1)$.



Seguidamente, la medida $\mathbf{S}$ se compara con un umbral u ($-1/2<u<1/2$), obteniéndose la v.a. $\mathbf{X}$ definida como:

$$\mathbf{X}=\max(\mathbf{S},u)$$

a) Calcule $f_X(x)$, $F_X(x)$ y $E(\mathbf{X})$.

b) Suponga que ahora el umbral es una variable aleatoria $\mathbf{U}$ uniforme en $(-1/2,1/2)$, de modo que $\mathbf{X}=\max(\mathbf{S},\mathbf{U})$. ¿Son las v.a.'s $\mathbf{X}$ y $\mathbf{U}$ independientes? Calcule $E(\mathbf{X})$.

c) Por último, suponga que se fija el umbral $u=0$, de modo que $\mathbf{X}=\max(\mathbf{S},0)$ y se repite el experimento hasta que se verifica dos veces el suceso $\{\mathbf{X}=0\}$. Calcule el número medio de ensayos independientes necesarios.

(3 puntos)

P2.- Sea $p(t)$ una señal periódica de periodo T. Se forma el proceso estocástico $\mathbf{X}(t)=p(t+\mathbf{E})$, donde $\mathbf{E}$ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $(0,T)$.

a) Demuestre que $\mathbf{X}(t)$ es un proceso estocástico estacionario en sentido amplio. Calcule para ello η_X y $R_X(\tau)$.

b) Aplique el resultado del apartado anterior para $p(t)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0<t<T/2 \\ 0 & \text{si} \quad T/2<t<T\end{cases}$

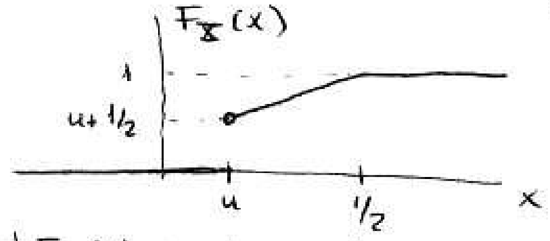
c) Se forma el proceso $\mathbf{Y}(t+t_0)=a\mathbf{X}(t)$, donde a es una constante. Determine a para que $\mathbf{Z}(t)=\mathbf{X}(t+t_0)-\mathbf{Y}(t+t_0)$ tenga valor cuadrático medio mínimo.

(3 puntos)

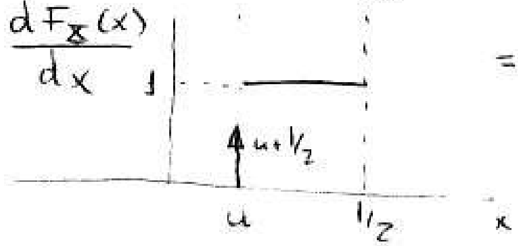
Examen:	31/1/00	Publicación de notas:	21/2/00
Revisión:	25/2/00	Publicación resultados revisión:	29/2/00

a) $X = \max(S, u)$

$F_X(x) = P(X \leq x) = P(S \leq x, u \leq x) = \begin{cases} \text{si } x < u & F_X(x) = 0 \\ \text{si } x \geq u & F_X(x) = P(S \leq x) = F_S(x) \end{cases}$

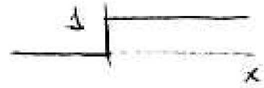


$f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$



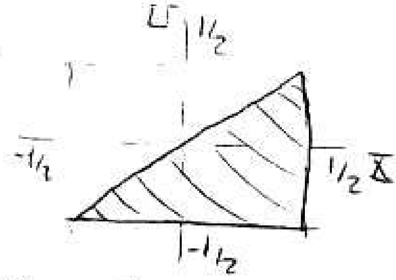
$= \left(u + \frac{1}{2}\right)\delta(x-u) + U\left(-x+\frac{1}{2}\right) - U(-x+u)$

$U(x)$ es el escalón unidad



$E[X] = \int_{R_x} x f_X(x)\,dx = u\left(\frac{1}{2}+u\right) + \int_u^{1/2} x \cdot 1\,dx = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}$

b) El R_{XU} (rango de la v.a bidimensional) es



$\Rightarrow X, U$ no son independientes.

Además $f_X(x|u) \neq f_X(x)$

$f_X(x|u)$ = la calculada en el apartado anterior

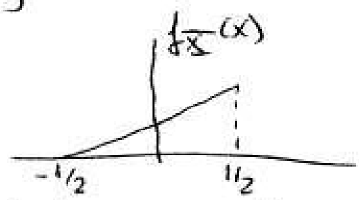
y

$F_X(x) = P(\max(S,U) \leq x) = P(S \leq x, U \leq x) = P(S \leq x) \cdot P(U \leq x) =$

indep. S, U

$= F_S(x) \cdot F_U(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1/2 \\ (x+1/2)^2 & x \in [-1/2, 1/2] \\ 1 & x \geq 1/2 \end{cases}$

$f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 2x+1 & x \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$



también se podría haber calculado a partir de $f_{XU}(x,u) = f_X(x|u) f_U(u)$

$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}+u\right)\delta(x-u) + U(-x+1/2) - U(-x+u) & x \in R_{XU} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$f_X(x) = \int_{R_u} f_{XU}(x,u)\,du = \int_{-1/2}^{x} f_{XU}(x,u)\,du = \frac{1}{2} + x + x + 1/2 = 1 + 2x \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$E[X] = \int_{R_x} x f_X(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} x(1+2x)\,dx = \frac{1}{6}$

también se podría hacer $E[X] = E[E[X|U]] = \int_{R_u} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2\right) du = \frac{1}{6}$

c) Para $u=0$ $P(\bar{X}=0)=\frac{1}{2}=p$

Definimos N el nº de veces que repetimos el experimento hasta obtener dos valores igual a cero. El rango N sería 2,3.

$$P(N=k)= \underbrace{\binom{k-1}{1} q^{k-2}\, p}_{\substack{\text{binomial} \\ \text{obtener } \bar{X}=0 \\ \text{1 vez en } k-1 \\ \text{intentos}}} \cdot \underbrace{p}_{\substack{\text{obtener} \\ \bar{X}=0 \\ \text{2ª vez.}}} = (k-1)q^{k-2}\, p^2$$

$$E[N]=\sum_{k=2}^{\infty} k\,P(N=k)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}p^2=p^2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q^{k-2}=$$

$$=p^2\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{k=2}^{\infty}q^k\right)=p^2\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{q^2}{1-q}\right)=p^2\frac{2}{(1-q)^3}=\frac{2}{p}$$

$$=\underline{\underline{4}}$$

También se podrían definir dos va's N_1 y N_2, la 1ª el nº de veces que se realiza el experimento hasta obtener $\bar{X}=0$ y la 2ª el nº de veces que se realiza el experimento hasta que se vuelve a dar $\bar{X}=0$

$N=N_1+N_2$ donde N_1 y N_2 son va's geométricas.

$$E[N]=E[N_1]+E[N_2]=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{2}{p}=\frac{2}{1/2}=\underline{\underline{4}}$$

P2.- Sea $p(t)$ una señal periódica de periodo T. Se forma el proceso estocástico $\mathbf{X}(t) = p(t+\mathbf{E})$ donde $\mathbf{E}$ es una variable aleatoria uniformemente distribuída en $(0,T)$.

a) Demuestre que $\mathbf{X}(t)$ es un proceso estocástico estacionario en sentido amplio. Calcule para ello η_X y $R_X(\tau)$.

b) Aplique el resultado del apartado anterior para $p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T/2 \\ 0, & T/2 < t < T \end{cases}$

c) Se forma el proceso $\mathbf{Y}(t+t_0) = a\mathbf{X}(t)$, donde a es una constante. Determine a para que $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}(t+t_0) - \mathbf{Y}(t+t_0)$ tenga valor cuadrático medio mínimo.

Solución

a) $\eta_X = E[\mathbf{X}(t)] = E[p(t+\mathbf{E})] = \int_{-\infty}^{\infty} p(t+e) f_E(e)de = \frac{1}{T}\int_0^T p(t+e)de = \frac{1}{T}\int_0^T p(e)de = cte$

donde hemos tenido en cuenta que, por ser $p(t)$ periódica, la integral en un periodo es constante, sin importar el origen de tiempos.

$$R_X(\tau) = E[\mathbf{X}(\tau)\mathbf{X}(t+\tau)] = E[p(t+\mathbf{E})p(t+\tau+\mathbf{E})] = \int_{-\infty}^{\infty} p(t+e)p(t+\tau+e) f_E(e)de =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T p(t+e)p(t+\tau+e)de = \frac{1}{T}\int_0^T p(e)p(\tau+e)de$$

donde hemos tenido en cuenta que, por ser $p(t)p(t+\tau)$ periódica, la integral en un periodo es constante, sin importar el origen de tiempos.

b) $\eta_X = \frac{1}{T}\int_0^T p(e)de = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} de = \frac{1}{T}\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T p(e)p(\tau+e)de = \begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^{T/2-\tau} de = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}-\tau\right), & \frac{T}{2} > \tau > 0 \\ \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T/2} de = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}+\tau\right), & -\frac{T}{2} < \tau < 0 \end{cases} =$$
$$= \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - |\tau|\right), \quad |\tau| < \frac{T}{2}$$

siendo $R_X(\tau)$ periodica de periodo T.

c)
$$E[\mathbf{Z}^2(t)] = E\left\{[\mathbf{X}(t+t_0) - \mathbf{Y}(t+t_0)]^2\right\} = E\left\{[\mathbf{X}(t+t_0) - a\mathbf{X}(t)]^2\right\} =$$
$$= E[\mathbf{X}^2(t+t_0) + a^2\mathbf{X}^2(t) - 2a\mathbf{X}(t+t_0)\mathbf{X}(t)] =$$
$$= E[\mathbf{X}^2(t+t_0)] + a^2E[\mathbf{X}^2(t)] - 2aE[\mathbf{X}(t+t_0)\mathbf{X}(t)] =$$
$$= R_X(0) + a^2R_X(0) - 2aR_X(t_0) =$$
$$= (1+a^2)R_X(0) - 2aR_X(t_0)$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\mathbf{X}(t)$ es estacionario en sentido amplio. Ahora derivamos para encontrar su valor mínimo:

$\frac{d}{da}E[\mathbf{Z}^2(t)] = 2aR_X(0) - 2R_X(t_0) = 0$, de donde $a = \frac{R_X(t_0)}{R_X(0)} = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - |t_0|\right)$, para $|t_0| < \frac{T}{2}$

5/9/2000 **Introducción a las Señales Aleatorias** 1 hora y cuarto

Teoría **(sin libros ni apuntes)**

T1.- Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dos v.a. cualesquiera, se definen las nuevas v.a.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$$
$$\mathbf{W} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$$

Demuestre:

a) $P(\mathbf{ZW}<0) = P(|\mathbf{X}|<|\mathbf{Y}|)$.

b) Si $E[\mathbf{X}^2]=E[\mathbf{Y}^2]$, $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{W}$ son ortogonales.

c) Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ tienen la misma media y varianza, $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{W}$ son incorreladas.

d) Demuestre además que, para una v.a. $\mathbf{X}$ arbitraria, la constante m que minimiza $E[|\mathbf{X}-m|]$ es la mediana, o sea que $F_X(m)=1/2$.

(2 puntos)

T2.- Sea $\mathbf{X}[n]$ un p.e. blanco y discreto con $P(\mathbf{X}[n]=0) = P(\mathbf{X}[n]=1)=1/2$. Se definen dos nuevos p.e.:

$$\mathbf{X}_1[n] = 2\mathbf{X}[n]-1$$
$$\mathbf{Y}[n] = \mathbf{X}_1[n]\,\mathbf{X}_1[n-1]$$

a) Calcule la media de $\mathbf{Y}[n]$.

b) Calcule la secuencia de autocorrelación de $\mathbf{Y}[n]$.

(2 puntos)

Examen:	5/9/00	Publicación de notas:	19/9/00
Revisión:	25/9/00	Publicación resultados revisión:	27/9/00

T1:

a) $P\{ZW<0\} = P\{(X+Y)(X-Y)<0\} = P\{X^2-Y^2<0\} = P\{X^2<Y^2\}$

$= P\{|X|<|Y|\}$

extrayendo $\sqrt{\cdot}$ que es monótona creciente

b) $E\{ZW\} = E\{X^2-Y^2\} = E[X^2]-E[Y^2] = 0$ ortogonales

c) $C_{ZW} = E[\cancel{X}W] - E[Z]E[W]$

$= E[X^2] - E[Y^2] - \{E[X]+E[Y]\}\{E[X]-E[Y]\} =$

$= E[X^2] - E^2[X] + E^2[Y] - E[Y^2] = \sigma_X^2 - \sigma_Y^2 = 0$

incorreladas

d) $\int_{-\infty}^{\infty} |x-m| f(x)dx = E[|X-m|]$

$E[|X-m|] = \int_{-\infty}^{m}(m-x)f(x)dx + \int_{m}^{\infty}(x-m)f(x)dx$

$= m\left[\int_{-\infty}^{m} f(x)dx - \int_{m}^{\infty} f(x)dx\right] + \int_{m}^{\infty} x f(x)dx - \int_{-\infty}^{m} x f(x)dx$

$= m\left[\int_{-\infty}^{m} f(x)dx - 1 + \int_{-\infty}^{m} f(x)dx\right] - \int_{-\infty}^{m} x f(x)dx + \int_{m}^{\infty} x f(x)dx + \int_{-\infty}^{m} x f(x)dx$

$- \int_{-\infty}^{m} x f(x)dx$

$= m[2F(m)-1] + \eta_x - 2\int_{-\infty}^{m} x f(x)dx$

$\frac{d}{dm}E[|X-m|] = m2f(m) + 2F(m) - 1 + 0 - 2mf(m) = 2F(m)-1 = 0$

$\Rightarrow F(m) = 1/2$

$E(X[n]) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$R_X[n_1, n_2] = E(X[n_1]\,X[n_2]) = \begin{cases} E(X^2[n_1]) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, & n_1 = n_2 \\ E(X[n_1])\,E(X[n_2]) = \frac{1}{4}, & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

$E(X_1[n]) = E(2X[n]-1) = 2E(X[n]) - 1 = 0$

$$R_{X_1}[n_1, n_2] = E(X_1[n_1]\,X_1[n_2]) = E\{(2X[n_1]-1)(2X[n_2]-1)\} =$$

$$= 4R_X[n_1, n_2] + 1 - 2E(X[n_1]) - 2E(X[n_2]) = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

---

a) $E(Y[n]) = E(X_1[n]\,X_1[n-1]) = R_{X_1}[n, n-1] = 0$

b) $R_Y[n_1, n_2] = E(Y[n_1]\,Y[n_2]) = E(X_1[n_1]\,X_1[n_1-1]\,X_1[n_2]\,X_1[n_2-1]) =$

$$= \begin{cases} E(X_1^2[n_1])\,E(X_1^2[n_1-1]) = 1, & n_1 = n_2 \\ E(X_1[n_1])\,E(X_1^2[n_1-1])\,E(X_1[n_1-2]) = 0, & n_1 = n_2 - 1 \text{ ó } n_2 = n_1 - 1 \\ E(X_1[n_1])\,E(X_1[n_1-1])\,E(X_1[n_2])\,E(X_1[n_2-1]) = 0, & n_1 < n_2 - 1 \text{ ó } n_2 < n_1 - 1 \end{cases}$$

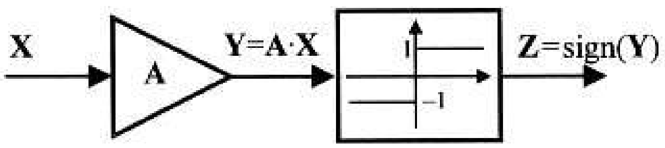
$$R_Y[n_1, n_2] = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

ISAL – S–00 4/8

5/9/2000 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas

Problemas **(con libros y apuntes)**

P1.- En el circuito de la figura, la tensión de entrada **X** y la atenuación **A** son desconocidas y se modelan como variables aleatorias independientes, siendo **X** uniforme en $(-1, 1)$ y **A** uniforme en $(0, 1)$.



Calcule:

a) La fdp de la v.a. **Y**.

b) La covarianza de **X** y **Z**.

c) Las FD's condicionadas $F_A(a\,|\,\mathbf{Z}=-1)$ y $F_A(a\,|\,\mathbf{Z}=+1)$.

(3 puntos)

P2.- Sea el proceso $\mathbf{X}(t)=\mathbf{A}\cos(\omega_0 t+\mathbf{\Theta})+\mathbf{N}(t)$, con $\omega_0>0$, **A** una v.a. uniforme en $(-1, 1)$, $\mathbf{\Theta}$ una v.a. uniforme en $(\pi, 2\pi)$ y $\mathbf{N}(t)$ un proceso estocástico de media nula y autocorrelación $R_N(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$. Suponga **A**, $\mathbf{\Theta}$ y $\mathbf{N}(t)$ independientes.

a) Calcule la media condicionada $E[\mathbf{X}(t)\,|\,\mathbf{A}=a]$, la media $\eta_X(t)$ y la autocorrelación $R_X(t_1,t_2)$. ¿Es $\mathbf{X}(t)$ estacionario en sentido amplio?

Se hace pasar ahora $\mathbf{X}(t)$ por un sistema lineal e invariante de respuesta en frecuencia $H(\omega)=1/(1+j\omega)$, obteniéndose a su salida un nuevo proceso $\mathbf{Y}(t)$. Calcule:

b) La densidad espectral de potencia de $\mathbf{Y}(t)$.

c) La media y autocorrelación de $\mathbf{Y}(t)$.

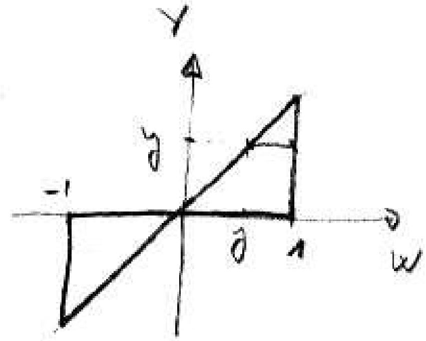
(3 puntos)

Examen:	5/9/00	Publicación de notas:	19/9/00
Revisión:	25/9/00	Publicación resultados revisión:	27/9/00

a) $\left.\begin{matrix} Y = A\cdot Z \\ W = Z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = w \\ a = \frac{y}{w} \end{matrix}\right.$ $\quad J(x,a) = \begin{vmatrix} a & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x$

$$f_{WY}(w,y) = \frac{f_{ZA}(x,a)}{|J(x,a)|} \underset{Z,A \text{ indep}}{=} \frac{f_Z(w)\cdot f_A\left(\frac{y}{w}\right)}{|w|} =$$

$$= \frac{1}{2|w|} \left\{\begin{matrix} -1 < w < 1 \\ 0 < \frac{y}{w} < 1 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 0 < y < w \\ \text{ó} \\ 0 < -y < -w \end{matrix}\right.$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{WY}(w,y)\, dw = \int_y^1 \frac{1}{2w}\, dw = \frac{1}{2}\ln w \Big|_y^1 = -\frac{1}{2}\ln y \quad (0<y<1$$

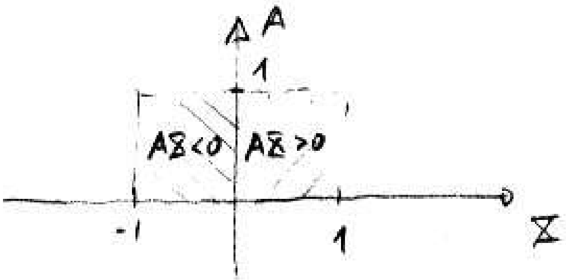
$$f_Y(y) = \int_{-1}^{y} -\frac{1}{2w}\, dw \underset{u=-w}{=} \int_{-y}^{1} \frac{1}{2u}\, du = -\frac{1}{2}\ln(-y) \quad (-1<y<0)$$

Por tanto $f_Y(y) = -\frac{1}{2}\ln|y| \quad (-1<y<1)$

b) $Z = \text{sign}(A \cdot X) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \cdot X > 0 \\ -1 & \text{si } A \cdot Y < 0 \end{cases}$

$$\text{Cov}(X, Z) = E(X \cdot Z) - \cancel{E(X)}^{0} \cdot E(Z)$$

$$E(X \cdot Z) = E\left[X \cdot \text{sign}(A \cdot X)\right] = \iint_{ax>0} x f_{AX}(a,x)\, da\, dx - \iint_{ax<0} x f_{AX}(a,x)\, da\, d$$



Dentro de Ω_{AX}:

$\{AX > 0\} = \{X > 0\}$

$\{AX < 0\} = \{X < 0\}$

$$E(X \cdot Z) = \int_0^1 \left[\int_0^1 x \, \frac{1}{2}\, dx\right] da - \int_0^1 \left[\int_{-1}^0 x \cdot \frac{1}{2}\, dx\right] da =$$

$$= \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^1 - \left.\frac{x^2}{4}\right|_{-1}^0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \;//$$

c) $F_A(a \mid Z=-1) = P(A \leq a \mid Z=-1) = \dfrac{P(A\leq a,\, Z=-1)}{P(Z=-1)} =$

$$= \frac{P(A\leq a,\, AX<0)}{P(AX<0)} = \frac{P(A\leq a,\, X<0)}{P(X<0)} \underset{\substack{\uparrow \\ X,A \\ \text{indep}}}{=} \frac{P(A\leq a)\cancel{P(X<0)}}{\cancel{P(X<0)}} =$$

$$= F_A(a) = a \qquad (0<a<1)$$

$F_A(a \mid Z=+1) = P(A\leq a \mid Z=+1) = \dfrac{P(A\leq a,\, Z=+1)}{P(Z=+1)} =$

$$= \frac{P(A\leq a,\, AX>0)}{P(AX>0)} = \frac{P(A\leq a,\, X>0)}{P(X>0)} = \frac{P(A\leq a)\cancel{P(X>0)}}{\cancel{P(X>0)}} =$$

$$= F_A(a) = a \qquad (0<a<1)$$

Obsérvese que $F_A(a \mid Z=z_k) = F_A(a) \quad \forall z_k \in \Omega_Z$, de modo que A y Z son independientes.

Solución P2 5/9/2000 ISAL

(3p)

a) $E[X(t) \mid A=a] = E[a \cdot \cos(\omega_0 t + \Theta) + N(t)] =$

$= a \cdot E[\cos(\omega_0 t + \Theta)] + E[N(t)] = a \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \Theta) \frac{1}{2\pi - \pi} d\Theta + 0$

$= a \frac{\text{sen}(\omega_0 t + 2\pi) - \text{sen}(\omega_0 t + \pi)}{\pi} = \boxed{\frac{2a}{\pi} \cdot \text{sen}(\omega_0 t)}$ (0.5 p)

$E[X(t)] = E[A \cdot \cos(\omega_0 t + \Theta) + N(t)] = \underset{A, \Theta \text{ indep}}{E[A] \cdot E[\cos(\omega_0 t + \Theta)] + E[N(t)]}$

$= 0 + 0$ (por ser $E[A] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} a \, da = 0$) $= \boxed{0}$ (0.5p)

$R_X(t+\tau, t) = E[X(t+\tau) X(t)] = E\{[A\cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta) + N(t+\tau)] \cdot$

$\cdot [A\cos(\omega_0 t + \Theta) + N(t)]\} = E[A^2 \cos(\omega_0 t + \Theta)\cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta)] +$

$+ E[A\cos(\omega_0 t + \Theta) N(t+\tau)] + E[A \cdot N(t) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta)] +$

$+ E[N(t+\tau) N(t)] = \frac{1}{2} E[A^2(\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta))] +$

$+ E[A\cos(\omega_0 t + \Theta)] E[N(t+\tau)] + E[N(t)] \, E[A\cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta)] + R_n$

$= \frac{E[A^2]}{2} [\cos(\omega_0 \tau) + 0] + 0 + 0 + R_n(\tau) = \frac{1}{6}\cos(\omega_0 \tau) + R_n(\tau) =$

$E[A^2] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} a^2 \, da = \frac{1}{3}$ (0.5 p) $\quad = \frac{1}{6}\cos(\omega_0 \tau) + \sigma^2 \delta(\tau)$

b) $X(t)$ sí es estacionario sentido amplio
$Y(t)$ " " " "

$S_Y(\omega) = S_X(\omega) |H(\omega)|^2 = \left[\frac{\pi}{6} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \sigma^2\right] \frac{1}{1+\omega^2}$

$S_X(\omega) = \mathcal{F}[R_X(\tau)]$

$\boxed{S_Y(\omega) = \frac{\pi}{6(1+\omega_0^2)} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\sigma^2}{1+\omega^2}}$ (0.5p)

c) $E[Y(t)] = E[X(t)] * h(t) \underset{X \text{ estacionario sentido amplio}}{=} E[X(t)] \cdot H(0) = \boxed{0}$ (0.5p)

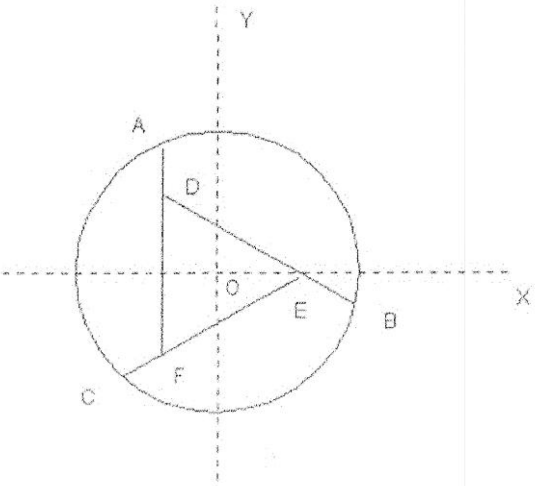
$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_Y(\omega)] = \boxed{\frac{1}{6(1+\omega_0^2)} \cos(\omega_0 \tau) + \frac{\sigma^2}{2} e^{-|\tau|}}$ (0.5p)

5/9/01 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas

Problemas

P1. Las coordenadas **X** e **Y** de un objetivo aparecen uniformemente distribuidas en una pantalla radar circular de radio *r*, centrada en el origen de coordenadas. Esta pantalla se divide en 4 zonas de igual superficie como se ilustra en la figura. Si se definen los sucesos A, B y C como:

A={el objetivo aparece en la zona delimitada por el contorno ABEFDA},
B={el objetivo aparece en la zona delimitada por el contorno BCFDEB},
C={el objetivo aparece en la zona delimitada por el contorno CADEFC}.



a) Determinar si los sucesos A y B son independientes. También decidir si los sucesos A,B y C son independientes.
b) Calcular el coeficiente de correlación de las v.a.´s **X** e **Y**. Decidir si son incorreladas y si son independientes.
c) Calcular la f.d.p condicionada. $f_{Y|X}(y|x)$ e identificar qué tipo de distribución es.

(3 puntos)

P2. Sea $\mathbf{X}[n]$ un p. e. discreto, estacionario estricto de segundo orden, con f.d.p.'s de primer orden y condicionada, respectivamente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/2\right) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$f(x_2/x_1;m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left[-\frac{(x_2-\rho x_1)^2}{2(1-\rho^2)}\right] \quad (-\infty < x_1, x_2 < \infty) \quad y \quad \begin{cases} \rho = a^{|m|} \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

a) Demostrar que su autocorrelación es $R_X[m]=a^{|m|}$
b) Obtener su densidad espectral de potencia.
c) Si realizamos la convolución $\mathbf{Y}[n]=\mathbf{X}[n]*h[n]$, determine la respuesta impulsiva causal $h[n]$ necesaria para que $\mathbf{Y}[n]$ sea un p. e. ruido blanco.

(3 puntos)

Examen:	05/9/01	Publicación de notas:	14/9/01
Revisión:	19/9/01	Resultados revisión:	20/9/01

Sep 01

P1 Solución

a) El suceso A, abarca 2 de las 4 zonas de igual área. Por tanto

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, análogamente $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

El suceso $A \cap B$ abarca el triángulo central, que es 1 de las 4 zonas de igual área. Por tanto $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Puesto que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ A y B son independientes

El suceso $A \cap B \cap C$ abarca el triángulo central. $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$

Puesto que $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \, P(B) \cdot P(C) \Rightarrow$ A, B y C no son indep.

b) $C_{XY} = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$

$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & \text{en el círculo} \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$ $\quad E[X \cdot Y] = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \frac{x \cdot y}{\pi r^2} dx dy = 0$

funciones impares en recinto simétrico

$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2} dy = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2} & |x| \leq r \\ 0 & |x| > r \end{cases}$

$E[X] = 0$ (función de densidad simétrica respecto al origen)

Por tanto las variables X, Y están incorreladas $\rho_{XY} = 0$

No son independientes, pues el recinto R_{XY} (rango) no es rectangular.

c) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & |x| < r, \; -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2} \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$

Es una función densidad continua Uniforme (tiene un valor para cada x, pero es independiente de y)

P2. Solución Sep 01

a) $$\mathrm{R}_{\mathbf{X}}(m)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;m)\,dx_1dx_2$$

pero como

$$f(x_1,x_2,m)=f(x_1)f(x_2/x_1;m)$$

$$\mathrm{R}_{\mathbf{X}}(m)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-x_1^2/2\right)dx_1\int_{-\infty}^{\infty}x_2\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left(\frac{-(x_2-\rho x_1)^2}{2(1-\rho^2)}\right)dx_2=$$

media de $N(\rho x_1,\sqrt{1-\rho^2})\equiv\rho x_1$

$$=\rho\int_{-\infty}^{\infty}x_1^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x_1^2}{2}}dx_1=\rho=a^{|m|}$$

Varianza de $N(0,1)=1$

$$\mathrm{R}_X(m)=a^{|m|}$$

b) $$S_{\mathbf{X}}(\Omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{\mathbf{X}}(\Omega)e^{-j\Omega m}=\sum_{m=-\infty}^{-1}a^{-m}e^{-j\Omega m}+\sum_{m=0}^{\infty}a^{m}e^{-j\Omega m}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(ae^{j\Omega})^m+\sum_{m=0}^{\infty}(ae^{-j\Omega})^m=\frac{ae^{j\Omega}}{1-ae^{j\Omega}}+\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}=\frac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2}$$

c) Como $\mathbf{Y}[n]$ es un p.e. ruido blanco, $S_Y(\Omega)=cte\ \forall\Omega$

$$S_Y(\Omega)=cte=S_X(\Omega)|H(\Omega)|^2\Rightarrow|H(\Omega)|^2=\frac{cte}{S_X(\Omega)}=\frac{cte}{1-a^2}(1-2a\cos\Omega+a^2)$$

como además

$$|H(\Omega)|^2=H(\Omega)H^*(\Omega)\ \text{ y }\ (1-2a\cos\Omega+a^2)=(1-ae^{j\Omega})(1-ae^{-j\Omega})$$

obtenemos por identificación la parte causal

$$H(\Omega)=\sqrt{\frac{cte}{1-a^2}}(1-ae^{-j\Omega})\Rightarrow h[n]=\sqrt{\frac{cte}{1-a^2}}\{\delta[n]-a\delta[n-1]\}$$

Examen: **7 septiembre 2002** Publicación notas: 16 sept. 2002 Revisión: 19 sept. 2002	
Introducción a las Señales Aleatorias	Duración: 2 horas

(sin libros ni apuntes)

P1.- Se definen las va's **V** y **W** como:

V= **X**+a**Y**

W=**X**-a**Y**

Donde a es un número real y **X** e **Y** son va´s Gaussianas.

1) Determinar a en función de momentos de **X** e **Y** para que **V** y **W** sean ortogonales.
2) Determinar a en función de momentos de **X** e **Y** para que **V** y **W** sean incorreladas. Decidir también si para ese valor de a son **V** y **W** independientes.

Ahora suponga que **X** e **Y** son va´s definidas según la fdp siguiente:

$f_{XY}(x,y)=bxy^2\exp(-2xy)u(x-2)u(y-1)$

3) Determinar el número real b para que sea una verdadera fdp.
4) Determinar si **X** e **Y** son va's independientes.
5) Para a=1, encontrar la fdp conjunta de **V** y **W** (no olvide determinar el rango de la va bidimensional). ¿Son **V** y **W** independientes?

P2.- Sea **X**[n] un ruido blanco estricto, con fdp de primer orden Gaussiana (de media nula y varianza σ^2):

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$$

Se forman los procesos:

Y[n] = **X**[n] – a**X**[n-1]

Z[n] = |**Y**[n]|

Siendo a una constante, se pide:

a) Demostrar que **Y**[n] es estacionario en sentido amplio.

b) Fdp de primer orden de **Y**[n].

c) Espectro de **Y**[n].

d) Media y varianza de **Z**[n].

e) Fdp de primer orden de **Z**[n] ¿es estacionario de primer orden?

Problema 1 Sept 2002 Solución 1 pto. cada apartado

1] V y W ortogonales $\Leftrightarrow$ $E[V \cdot W] = 0$

$$E[V \cdot W] = E[(X + aY)(X - aY)] = E[X^2 - a^2 Y^2] =$$

$$= E[X^2] - a^2 E[Y^2] = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{E[X^2]}{E[Y^2]}}$$

2] $E[(V - \bar{V})(W - \bar{W})] = 0 \Leftrightarrow$ V y W incorreladas

$$E[(V-\bar{V})(W-\bar{W})] = E[V \cdot W] - E[V]\, E[W] =$$

$$= E[X^2] - a^2 E[Y^2] - (E[X] + a E[Y])(E[X] - a E[Y]) =$$

$$= Var(X) - a^2 Var(Y) \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{Var(X)}{Var(Y)}}$$

2 v.a. gaussianas incorreladas $\Rightarrow$ independencia.
Luego sí son independientes

3] $$\iint f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1 = \int_2^\infty \int_1^\infty b x y^2 e^{-2xy}\,dx\,dy =$$

$$= b \int_1^\infty y^2 \left(\int_2^\infty x e^{-2xy} dx \right) dy = b e^{-4} \frac{3}{8} = 1$$

$$\Rightarrow b = \frac{8}{3} e^4$$

4] No son independientes porque no se puede poner

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

además

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_2^\infty b x y^2 e^{-2xy} dx = b y^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2}\right) e^{-4y} u(y-1)$$

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_1^\infty b x y^2 e^{-2xy} dy = b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right) e^{-2x} u(x-2)$$

5]

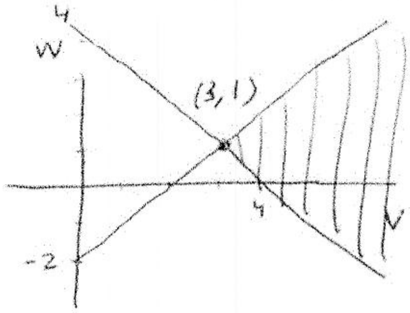
$$\overline{X} = \frac{\overline{V}+\overline{W}}{2} \qquad \overline{Y} = \frac{V-W}{2} \qquad |J| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |-2| = 2$$

1 única solución

$$f_{VW}(v,w) = \frac{b}{2}\left(\frac{v+w}{2}\right)\left(\frac{v-w}{2}\right)^2 e^{-2\left(\frac{v+w}{2}\right)\left(\frac{v-w}{2}\right)} u\left(\frac{v+w}{2}-2\right)u\left(\frac{v-w}{2}-1\right)$$

$u\left(\frac{v+w-4}{2}\right) > 0$ para $w > 4-v$

$u\left(\frac{v-w-2}{2}\right) > 0$ para $w < v-2$



No son independientes (el recinto no es rectangular)

a) $\eta_Y[n] = E(X[n] - aX[n-1]) = E(X[n]) - aE(X[n-1]) = 0$

$R_Y[n+m, n] = E(Y[n+m]\,Y[n]) =$

$= E\{(X[n+m] - aX[n+m-1])(X[n] - aX[n-1])\} =$

$$= \begin{cases} (1+a^2)\sigma^2, & m=0 \\ -a\sigma^2, & m=\pm 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$R_Y[m] = (1+a^2)\sigma^2\delta[m] - a\sigma^2(\delta[m+1] + \delta[m-1])$

b) $f_Y(y,n) \rightarrow N(0, \sigma\sqrt{1+a^2})$, suma de Gauss indep.

$f_Y(y,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+a^2)\sigma^2}}\, e^{-y^2/2(1+a^2)\sigma^2}$, $y \in (-\infty, \infty)$

c) $S_Y(\omega) = TF(R_Y[m]) = (1+a^2)\sigma^2 - 2a\sigma^2\cos\omega$

d) $E(Z[n]) = E\{g(Y[n])\} = \int g(y) f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{-y\, e^{-y^2/2(1+a^2)\sigma^2}\, dy}{\sqrt{2\pi(1+a^2)\sigma^2}} +$

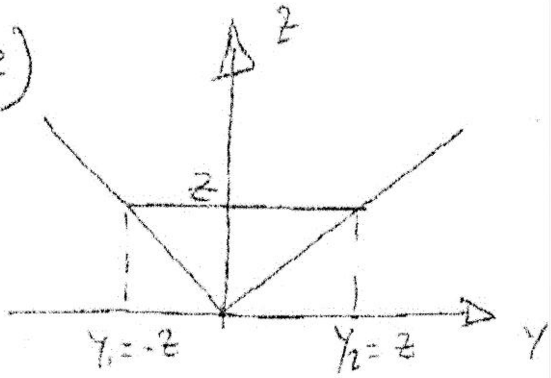
$+ \int_{0}^{\infty} \frac{y\, e^{-y^2/2(1+a^2)\sigma^2}\, dy}{\sqrt{2\pi(1+a^2)\sigma^2}} = \sigma\sqrt{\frac{2(1+a^2)}{\pi}}$

$Var(Z[n]) = E(Z^2[n]) - E^2(Z[n])$

$E(Z^2[n]) = \int g^2(y) f_Y(y)\,dy = E(Y^2[n]) = (1+a^2)\sigma^2$

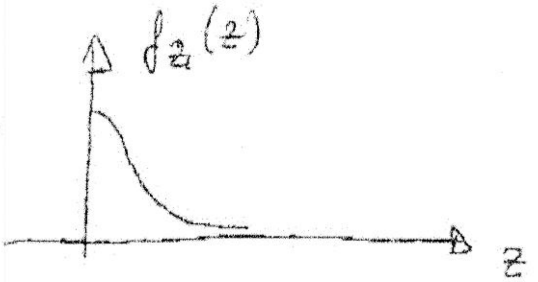
$Var(Z[n]) = (1+a^2)\sigma^2\,\frac{\pi-2}{\pi}$

e)



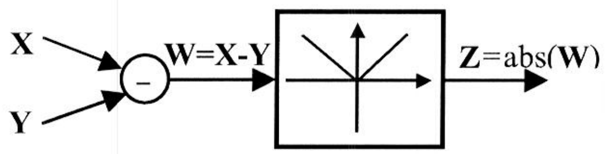
$$f_Z(z) = \frac{f_Y(y_1)}{|g'(y_1)|} + \frac{f_Y(y_2)}{|g'(y_2)|}$$

$$f_Z(z) = 2\, f_Y(z)\, u(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(1+a^2)\sigma^2}}\, e^{-z^2/2(1+a^2)\sigma^2}\, u(z)$$



21/1/2003 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

P1.- En el circuito de la figura, las tensiones de entrada **X** e **Y** son desconocidas y se modelan como variables aleatorias independientes.



a) Suponiendo **X** uniforme en (0, 1) e **Y** uniforme en (0, 0.5), calcular la f.d.p. de la v.a. **Z.**
b) Calcular el coeficiente de correlación entre **X** y **Z**.
c) Suponiendo ahora que **Y** es una v.a. de Bernouilli de parametro p, hallar el rango de la v.a bidimensional (**X**, **Z**).
d) Con **Y** como v.a. de Bernouilli, calcular la F.D. condicionada $F_Z(z\,|\,\mathbf{Y}=+1)$ y la f.d.p. condicionada $f_Z(z\,|\,\mathrm{x})$.
e) Si las v.a's **X** e **Y** son conjuntamente Gaussianas independientes, determinar si es posible que **W** y **X** sean independientes.

(5 puntos)

P2.- Sea $x(t)$ una señal periódica determinista, de periodo T, formada por repetición del pulso:

$$p(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t_0 < t < T \end{cases}$$

siendo, $A>0$, una constante y $t_0<T/2$. Se forma el p.e. $\mathbf{Y}(t)=x(t+\mathbf{B})$ donde **B** es una v.a. con distribución uniforme en $(0,T)$.

a) Calcule y dibuje las F.D. y f.d.p. de 1º orden de $\mathbf{Y}(t)$.
b) Calcule la media y la varianza de $\mathbf{Y}(t)$.
c) Calcule la autocorrelación de $\mathbf{Y}(t)$.

Se define el nuevo p.e. $\mathbf{Z}(t)=\mathbf{Y}(t)+\mathbf{W}(t)$, donde $\mathbf{W}(t)$ es un p.e. con f.d.p. de 1º orden Gaussiana, de media y varianza unidad e independiente de $\mathbf{Y}(t)$.

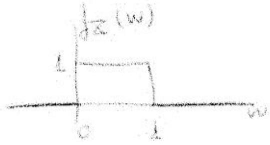
d) Calcule y dibuje la f.d.p. de 1º orden de ***Z**(t)*.
e) Calcule la correlación entre los p.e. ***Z**(t)* e ***Y**(t)*.

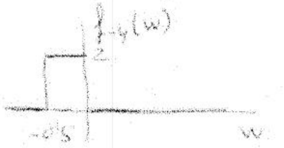
(5 puntos)

Examen:	21/1/03	Publicación de notas:	5/2/03
Revisión:	10/2/03	Publicación resultados revisión:	11/2/03

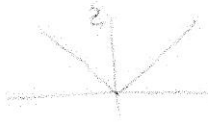
ISAL P1 21/1/2003

a) $W = X + (-Y)$ con X e Y indep $\Rightarrow f_W(w) = f_X(w) * f_{(-Y)}(w)$

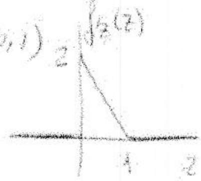




$Z = |W|$



$$f_Z(z) = \begin{cases} f_W(-z) + f_W(z) & z \in (0, 0'5) \\ f_W(z) & z \in (0'5, 1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} 2(1-z) & z \in (0,1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



b) $$\rho_{XZ} = \frac{E(XZ) - E(X)\cdot E(Z)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Z)}} = \frac{7/32 - 1/2 \cdot 1/3}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{18}}}$$

$$E(XZ) = E(X|X-Y|) = \iint_{R_{XY}} x|x-y|\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{0'5}\left(\int_y^1 x(x-y)2\,dx\right)dy + \int_0^{0'5}\left(\int_0^y x(y-x)2\,dx\right)$$

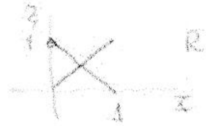
$$= \int_0^{0'5} 2\left(\frac{1}{3} - \frac{y^3}{3} - y\left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\right)dy + \int_0^{0'5} 2\left(y\left(\frac{y^2}{2} - 0\right) - \frac{y^3}{3}\right)dy =$$

$$= \int_0^{0'5}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}y^3 - y + y^3 + y^3 - \frac{2}{3}y^3\right)dy = \int_0^{0'5}\left(2y^3 - \frac{4}{3}y^3 - y + \frac{2}{3}\right)dy = \frac{2}{3}\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}y\Big]_0^{0'5} = \frac{7}{32}$$

$E(X) = 0'5$, $E(Z) = \int_0^1 z\,2(1-z)\,dz = z^2 - \frac{2}{3}z^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$

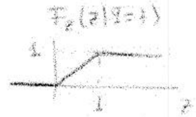
$Var(X) = \frac{1}{12}$ $E(Z^2) = \int_0^1 z^2 2(1-z)\,dz = \frac{2z^3}{3} - \frac{2z^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$ $Var(Z) = \frac{1}{18}$

c) si $Y = 0 \Rightarrow Z = |X| = X$ $X \in (0,1)$
si $Y = 1 \Rightarrow Z = |X - 1| = 1 - X$ $X \in (0,1)$



R_{XZ}

d) si $Y = 1$ $Z = 1 - X \Rightarrow f_Z(z) = \text{Unif}(0,1) \Rightarrow F_Z(z|Y=1) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z & 0 < z < 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$



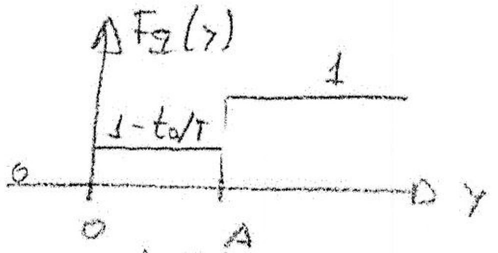
si $X = x$ $Z = \begin{cases} x & \text{si } Y = 0 \text{ con } P(Y=0) = 1-p \\ 1-x & \text{si } Y = 1 \text{ con } P(Y=1) = p \end{cases} \Rightarrow f_Z(z|x)$

e) Si X, Y son conjuntamente gaussianas entonces X y W serán también conjuntamente gaussianas por tanto serán independientes $\Leftrightarrow$ incorreladas $\Leftrightarrow$ $E(X \cdot W) - E(X)E(W) = 0$ $E(X(X-Y)) - E(X)E(X-Y) = E(X^2) - E^2(X) = Var(X) \neq 0$ luego no son independientes

a) $P[Y(t)=A] = P[x(t+B)=A] = P[B\in(0,t_0)] = \frac{1}{T}\int_0^{t_0} db = t_0/T$

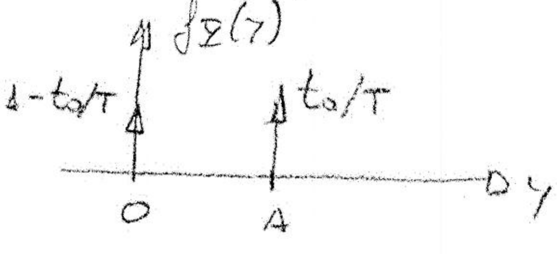
$P[Y(t)=0] = P[x(t+B)=0] = P[B\in(t_0,T)] = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} db = 1-t_0/T$

$F_Y(y) = \left(1-\frac{t_0}{T}\right) u(y) + \frac{t_0}{T} u(y-A)$



$f_Y(y) = \left(1-\frac{t_0}{T}\right)\delta(y) + \frac{t_0}{T}\delta(y-A)$

$Y(t)$: estacionario de orden 1.



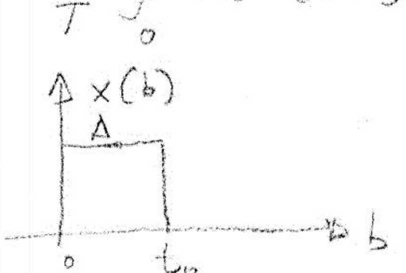
b) $E[Y(t)] = A\frac{t_0}{T}$

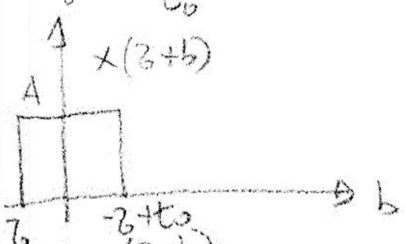
$Var[Y(t)] = E[Y^2(t)] - E^2[Y(t)] = A^2\frac{t_0}{T}\left(1-\frac{t_0}{T}\right)$

$E[Y^2(t)] = A^2\frac{t_0}{T}$

c) $R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = E[\underbrace{x(t+B)x(t+\tau+B)}_{g(B)}] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t+b)x(t+\tau+b)\,db$

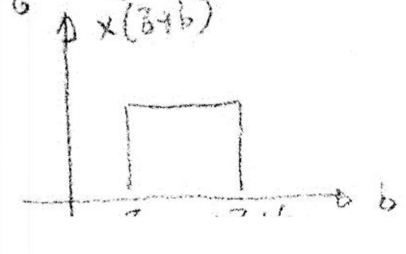
$= \frac{1}{T}\int_0^T x(b)x(\tau+b)\,db = \begin{cases} \frac{A^2}{T}\int_0^{t_0-\tau} db = \frac{A^2}{T}(t_0-\tau), & 0<\tau<t_0 \\ \frac{A^2}{T}\int_{-\tau}^{t_0} db = \frac{A^2}{T}(t_0+\tau), & -t_0<\tau<0 \end{cases}$





$R_Y(\tau) = \frac{A^2}{T}(t_0-|\tau|),\ 0<|\tau|<t_0$

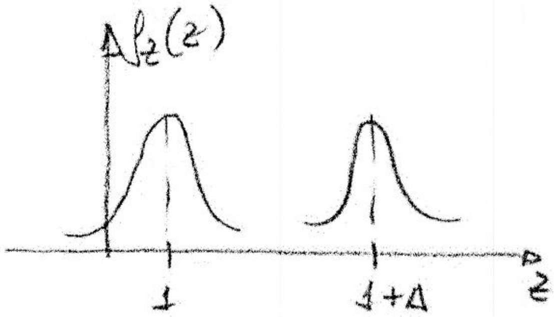
con periodo T



1) $f_Z(z) = f_Y(z) * f_\varpi(z) = \left[\left(1-\frac{t_0}{T}\right)\delta(z) + \frac{t_0}{T}\delta(z-A)\right] * f_\varpi(z) =$

$= \left(\frac{1-t_0}{T}\right) f_\varpi(z) + \frac{t_0}{T} f_\varpi(z-A) =$

$= \frac{1-t_0}{T} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-1)^2/2} + \frac{t_0}{T} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-1-A)^2/2}$



2) $R_{Z,Y}(\tau) = E[Z(t+\tau)Y(t)] = E\{[Y(t+\tau)+\varpi(t+\tau)]Y(t)\} =$

$= R_Y(\tau) + E[\overset{\to 1}{\cancel{\varpi(t+\tau)}}]E[Y(t)] = R_Y(\tau) + \frac{A t_0}{T}$

4/9/2003 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

P1.- Sean **R** y **Φ** dos va's independientes. **Φ** es uniforme en (0, 2π) y **R** tiene una fdp:

$$f_R(r) = \frac{2r}{A^2}, r \in (0, A)$$

Siendo $A>0$ una constante. Sobre ellas se realiza la transformación:

$$x = r\cos(\Phi)$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\Phi)$$

Calcule:

a) La fdp conjunta de **X** e **Y**. Dibuje su rango.
b) Las fdp's marginales de **X** e **Y**. ¿Son independientes?
c) La covarianza de **X** e **Y**. ¿Están incorreladas?
d) $P(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 > A^2/4)$
e) $P(\mathbf{Y} > \frac{A}{\sqrt{2}} / \mathbf{X} = \frac{A}{\sqrt{2}})$

(5 puntos)

P2.- Sea el proceso **X**(t)=**A**sen(t+**B**), donde **A** y **B** son va's discretas uniformes. La fdp de la va **A** tiene valores no nulos en {-1,1} y la fdp de la va **B** en {0,$\pi/2$,π).

a) Hallar la fdp de **X**(0) y **X**($\pi/4$) y decidir si el proceso es estrictamente estacionario.
b) Encontrar todas las posibles realizaciones del proceso **X**(t) y la probabilidad de ocurrencia en función de la distribución de probabilidad conjunta de **A** y **B**.
c) Calcular la media y la autocorrelación de **X**(t).
d) Si **A** y **B** fueran independientes, determinar si **X**(t) es estacionario en sentido amplio.
e) Se forma el proceso **Y**(t)=max(**X**(t),0). Dibujar todas las posibles realizaciones del proceso **Y**(t).

(5 puntos)

Examen:	4/9/03	Publicación de notas:	12/9/03
Revisión:	17/9/03	Publicación resultados revisión:	18/9/03

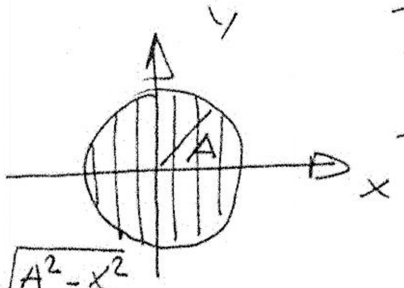
La nota de este examen pondera un 70% sobre la nota final, ponderando la nota de clase el 30% restante.

$$f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \phi \in (0, 2\pi) \qquad f_R(r) = \frac{2r}{A^2}, \quad r \in (0, A)$$

) $$f_{XY}(x,y) = \frac{f_R(r)\, f_\phi(\phi)}{|J(r,\phi)|} = \frac{2r}{A^2} \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{r} = \frac{1}{\pi A^2}$$

$$J(r,\phi) = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r$$

$$0 < x^2 + y^2 < A^2$$



) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi A^2} \int_{-\sqrt{A^2-x^2}}^{\sqrt{A^2-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{A^2-x^2}}{\pi A^2}, \quad x \in (-A, A)$$

$$f_Y(y) = \frac{2\sqrt{A^2-y^2}}{\pi A^2}, \quad y \in (-A, A) \quad (\text{ANALOGO A } f_X(x))$$

$f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$: NO SON INDEP

) $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-A}^{A} x \frac{2\sqrt{A^2-x^2}}{\pi A^2}\,dx = 0$$

$$E(Y) = 0$$

$$E(XY) = \iint xy f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi A^2} \int_{-A}^{A} x \left[\int_{-\sqrt{A^2-x^2}}^{\sqrt{A^2-x^2}} y\,dy \right] dx = 0$$

$C_{XY} = 0$: X, Y INCORR.

) $$P(X^2 + Y^2 > A^2/4) = P(R^2 > A^2/4) = P(R > A/2) =$$

$$= \int_{A/2}^{A} \frac{2r}{A^2}\,dr = \underline{3/4}$$

2) $f_Y(y/x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{A^2-x^2}}$, $0 < x^2+y^2 < A$

$f_Y\left(y/x = \dfrac{A}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2A}$, $y \in (-A/\sqrt{2}, A/\sqrt{2})$

$P\left(Y > \dfrac{A}{\sqrt{2}} \Big/ X = \dfrac{A}{\sqrt{2}}\right) = 0$

Problema 2 ISAL 4/9/2003

a) $X(0) = A \operatorname{sen} B$ es una v.a. cuyo rango es:

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } A=-1 \text{ y } B=0 \\ \text{si } A=1 \text{ y } B=0 \end{array}\right\} X(0)=0$$

si $A=-1$ y $B=\pi/2$ $\quad X(0)=-1$

si $A=1$ y $B=\pi/2$ $\quad X(0)=1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } A=-1 \text{ y } B=\pi \\ \text{si } A=1 \text{ y } B=\pi \end{array}\right\} X(0)=0$$

luego $X(0)$ tiene una fdp con valores no nulos en $\{-1, 0, 1\}$

$P(X(0)=-1) = p(A=-1, B=\frac{\pi}{2})$

$P(X(0)=0) = p(A=-1, B=0) + p(A=1, B=0) + p(A=-1, B=\pi) +$
$+ p(A=1, B=\pi) = p(B=0) + p(B=\pi)$

$p(X(0)=1) = p(A=1, B=\pi/2)$

$X(\frac{\pi}{4}) = A \operatorname{sen}(B+\frac{\pi}{4})$ es una v.a. cuyo rango es:

si $A=-1$ y $B=0$ $\quad X(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

si $A=1$ y $B=0$ $\quad X(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

si $A=-1$ y $B=\pi/2$ $\quad X(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

si $A=1$ y $B=\pi/2$ $\quad X(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

si $A=-1$ y $B=\pi$ $\quad X(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

si $A=1$ y $B=\pi$ $\quad X(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

luego $X(\pi/4)$ tiene una fdp con valores no nulos en $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

$P(X(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}) = P(A=-1, B=0) + P(A=-1, B=\pi/2) + p(A=1, B=\pi)$

$P(X(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}) = P(A=1, B=0) + P(A=1, B=\pi/2) + P(A=-1, B=\pi)$

el proceso no es estrictamente estacionario pues la fdp varía con t.

b) las posibles realizaciones de $X(t)$ son:

si $A=-1$ y $B=0$ $\quad X(t) = -\operatorname{sen} t$

si $A=1$ y $B=0$ $\quad X(t) = \operatorname{sen} t$

si $A=-1$ y $B=\pi/2$ $\quad X(t) = -\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2}) = -\cos t$

si $A=1$ y $B=\pi/2$ $\quad X(t) = \operatorname{sen}(t+\pi/2) = \cos t$

si $A=-1$ y $B=\pi$ $\quad X(t) = -\operatorname{sen}(t+\pi) = \operatorname{sen} t$

si $A=1$ y $B=\pi$ $\quad X(t) = \operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t$

es decir $\{\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t, \cos t, -\cos t\}$

la probabilidad de ocurrencia:

$P(X(t)=\text{sen}\,t) = P(A=1, B=0) + P(A=-1, B=\pi)$

$P(X(t)=-\text{sen}\,t) = P(A=-1, B=0) + P(A=1, B=\pi)$

$P(X(t)=\cos t) = P(A=1, B=\pi/2)$

$P(X(t)=-\cos t) = P(A=-1, B=\pi/2)$

c) $$E[X(t)] = \text{sen}\,t \cdot [P(A=1, B=0)+P(A=-1, B=\pi)] + \\ - \text{sen}\,t \cdot [P(A=-1, B=0) + P(A=1, B=\pi)] + \\ + \cos t \cdot [P(A=1, B=\tfrac{\pi}{2})] - \cos t \,[P(A=-1, B=\tfrac{\pi}{2})]$$

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} x_i(t_1)x_j(t_2)\,P(X(t_1)=x_i(t_1), X(t_2)=x_j(t_2))$$

$$= \sum_{i=1}^{6} x_i(t_1)x_i(t_2)\,P(X(t_1)=x_i(t_1)) =$$

$$= \text{sen}\,t_1\,\text{sen}\,t_2\,[P(A=1, B=0)+P(A=-1, B=\pi)+P(A=1, B=\pi) + \\ + P(A=-1, B=0)] + \\ + \cos t_1 \cos t_2\,[P(A=1, B=\tfrac{\pi}{2}) + P(A=-1, B=\tfrac{\pi}{2})]$$

d) si A y B son independientes las probabilidades conjuntas son el producto de las marginales:

$$E[X(t)] = \text{sen}\,t \cdot [P(A=1, B=0)+P(A=-1, B=\pi) - P(A=-1, B=0) - \\ - P(A=1, B=\pi)] + \\ + \cos t\,[P(A=1, B=\tfrac{\pi}{2}) - P(A=-1, B=\tfrac{\pi}{2})] =$$

$$= \text{sen}\,t\,[P(A=1)P(B=0) + P(A=-1)\cdot P(B=\pi) - P(A=-1)P(B=0) \\ - P(A=1)P(B=\pi)] + \cos t\,[P(A=1)P(B=\tfrac{\pi}{2}) - P(A=-1)P(B=\tfrac{\pi}{2})]$$

$$= 0$$

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \text{sen}\,t_1\,\text{sen}\,t_2\,[P(A=1)P(B=0)+P(A=-1)P(B=\pi) + \\ + P(A=1)P(B=\pi) + P(A=-1)P(B=0)] + \\ + \cos t_1 \cos t_2\,[P(A=1)P(B=\tfrac{\pi}{2}) + P(A=-1)P(B=\tfrac{\pi}{2})] =$$

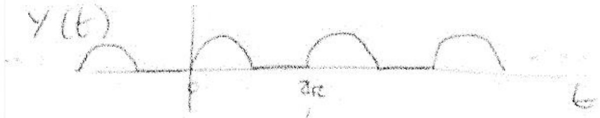
$$= \text{sen}\,t_1\,\text{sen}\,t_2\,[P(B=0)+P(B=\pi)] + \cos t_1 \cos t_2\,[P(B=\tfrac{\pi}{2})] =$$

$$= \tfrac{2}{3}\,\text{sen}\,t_1\,\text{sen}\,t_2 + \tfrac{1}{3}\cos t_1 \cos t_2$$

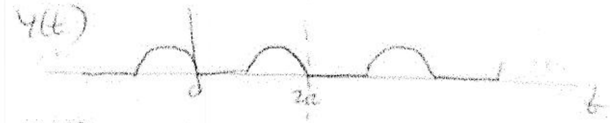
como la autocorrelación no depende de $\tau = t_1 - t_2$ el proceso no es estacionario en sentido amplio

e) $Y(t) = \max(X(t), 0)$

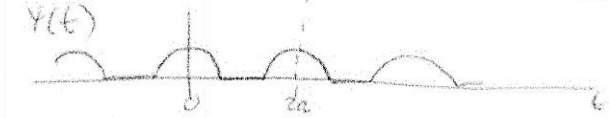
si $X(t) = \operatorname{sen} t$



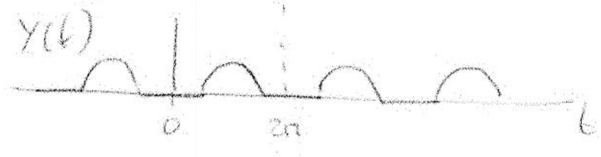
si $X(t) = -\operatorname{sen} t$



si $X(t) = \cos t$



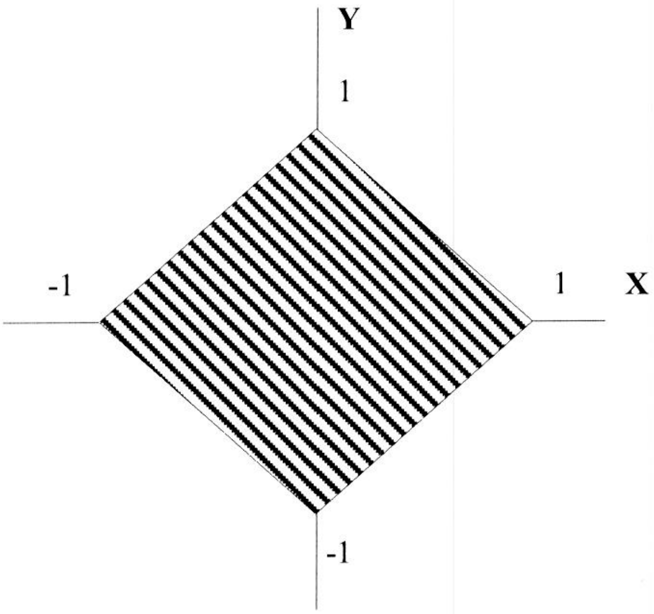
si $X(t) = -\cos t$



30/1/2004 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Sean las va's **X** e **Y** distribuidas uniformemente en el recinto rayado de la figura.

a) Determine y dibuje la fdp $f_X(x)$ y la condicionada $f_X(x|y)$, no olvide indicar sus rangos.



b) Determine el coeficiente de correlación entre **X** e **Y** . ¿Son las va's **X** e **Y** independientes?

c) Se define la va **V**= **X**+**Y**, determine su FD.

d) Se define otra va **W**= **X**-**Y**, determine la fdp conjunta $f_{VW}(v,w)$. ¿Son las va´s **V** y **W** independientes?

e) Si las va's **X** e **Y** fueran incorreladas y conjuntamente gaussianas, determinar qué se tiene que cumplir para que sean independientes las va´s **V** y **W**

(5 puntos)

2.- a) Sea $\mathbf{X}[n]$ un proceso estacionario de autocorrelación $R_X[m]$. Se hace pasar dicho proceso por un sistema lineal de respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$. Calcule la autocorrelación del proceso de salida $\mathbf{Y}[n]$.

b) Sea el proceso $\mathbf{X}[n]=\mathbf{A}[n]\cos(\Omega_0 n+\mathbf{\Phi})+\mathbf{W}[n]$ con Ω_0 una constante positiva, $\mathbf{A}[n]$ un proceso estacionario de media η_A y autocorrelación $R_A[m]$, $\mathbf{\Phi}$ una va uniforme en $(0,\pi)$ y $\mathbf{W}[n]$ un proceso de media nula y autocorrelación $R_W[m]=\sigma^2_W\delta[m]$. Suponga $\mathbf{A}[n]$, $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{W}[n]$ independientes. Calcule la media y la autocorrelación del proceso $\mathbf{X}[n]$. ¿Bajo que condiciones es dicho proceso estacionario en sentido amplio?

c) Para el proceso definido en el apartado b, calcule el espectro de $\mathbf{X}[n]$ y dibújelo suponiendo que el espectro de $\mathbf{A}[n]$, en el intervalo $(-\pi, \pi)$, es:

$$S_A(\Omega)=\begin{cases} A_0, |\Omega|\le \Omega_A \\ 0, |\Omega| > \Omega_A \end{cases}$$

donde A_0 y Ω_A son constantes positivas y se cumple $\Omega_A<\Omega_0<\pi-\Omega_A$.

d) Suponga ahora que el proceso $\mathbf{X}[n]$ definido en el apartado b se hace pasar por el sistema lineal definido en el apartado a. Calcule el valor cuadrático medio del proceso de salida $\mathbf{Y}[n]$.

e) Sobre el proceso definido en el apartado b, se aplica la transformación $z=g(x)=x^2$. Calcule la media del proceso transformado $\mathbf{Z}[n]$.

(5 puntos)

Examen:	30/1/04	Publicación de notas: 16/2/04	
Revisión:	19/2/04	Publicación resultados revisión: 20/2/04	

a) 1p

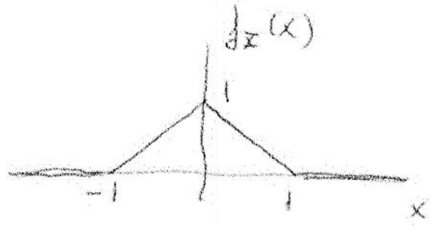
$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\text{Area}_{XY}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{en } R_{XY} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

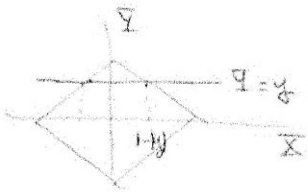
si $0<x<1$ $\quad f_X(x) = \int_{x-1}^{-x+1} \frac{1}{2}\,dy = -x+1$

si $-1<x<0$ $\quad f_X(x) = \int_{-x-1}^{x+1} \frac{1}{2}\,dy = x+1$

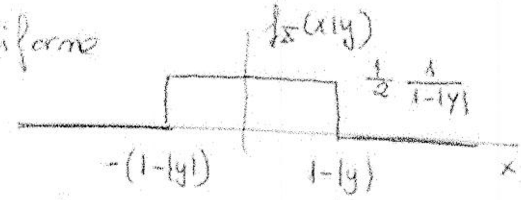
resto $|x|>1$ $\quad f_X(x) = 0$



$f_X(x|y)$ se puede obtener cortando por el plano $Y=y$ $f_{XY}(x,y)$



luego será una uniforme cuando $|y|<1$ y 0 si $|y|>1$



también se puede hallar $f_X(x|y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$

b) 1p

$$\rho_{XY} = \frac{E[X\cdot Y] - E[X]E[Y]}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

$E[X\cdot Y] = \iint_{R_{XY}} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 0$ por ser $f_{XY}(x,y)$ simétrica respecto a Y

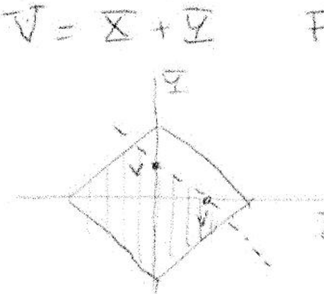
$E[X] = E[Y] = 0$ (funciones densidad pares)

$\Rightarrow \rho_{XY} = 0$ incorreladas

X e Y no son independientes ya que R_{XY} no es rectangular con los lados paralelos a los ejes X e Y

c) $V = X + Y$ $\quad F_V(v) = P(V \le v) = \{\text{Area rayada}\}$ = crece uniformemente co

1p



$= \dfrac{v+1}{2}$ si $v \in (-1,1)$

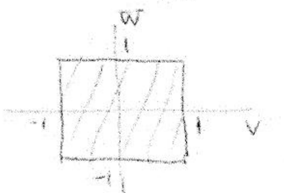
$= 1 \quad v > 1$

$= 0 \quad v < -1$

d) $V = X+Y$, $W = X-Y$ 1p

$$f_{VW}(v,w) = \sum_i \frac{f_{XY}(x,y)}{|J(x,y)|} = \frac{\frac{1}{2}}{\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right|} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{en } R_{VW} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

R_{VW} se obtiene a partir de R_{XY}



Es uniforme en un dominio rectangular $\Rightarrow$ V y W son independientes

e) Para que V y W sean independientes, al ser X e Y conj. gaussianas y V y W ser comb. lineal serán conjuntamente gaussian y por tanto independientes $\Leftrightarrow$ incorreladas, luego $E[V\cdot W] - E[V]E[$ 1p

$E[VW] = E[(X+Y)(X-Y)] = E[X^2] - E[Y^2]$ $\quad E[V]E[W] = E^2[X] - E^2[Y]$ luego $Var(X) = Var($

que es lógico al ser la transformación un giro de 45%

a) $R_Y[m] = R_X[m] * h[m] * h[-m]$

$h[m] * h[-m] = 2\delta[m] - \delta[m-1] - \delta[m+1]$

$\underline{R_Y[m] = 2R_X[m] - R_X[m-1] - R_X[m+1]}$

) $E(X[n]) = E(A[n])\,E[\cos(\Omega_0 n + \phi)] + E(W[n]) =$

$= \eta_A \int_0^{\pi} \cos(\Omega_0 n + \phi)\frac{1}{\pi}\,d\phi + 0 = \underline{-\frac{2\eta_A}{\pi}\,\text{sen}\,\Omega_0 n}$

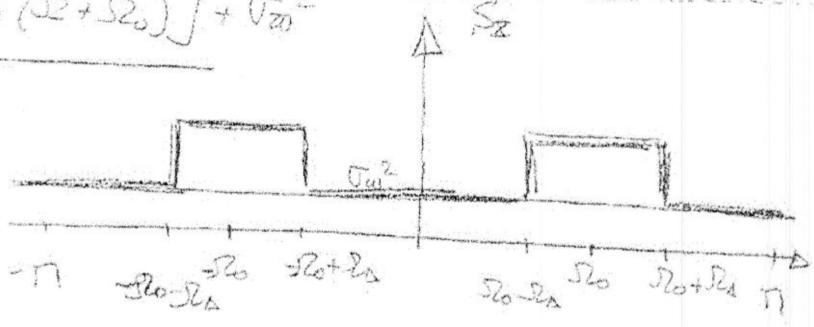
$R_X[m] = E(X[n]X[n+m]) =$

$= E\{A[n]\cos(\Omega_0 n + \phi) + W[n]\}\{A[n+m]\cos[\Omega_0(n+m)+\phi] + W[n+m]\} =$

$= R_A[m]\,E\{\cos(\Omega_0 n + \phi)\cos[\Omega_0(n+m)+\phi]\} + R_W[m] =$

$= \underline{\frac{R_A[m]}{2}\cos\Omega_0 m + \sigma_W^2\delta[m]}$

) $\underline{S_X(\Omega) = \frac{1}{4}\left[S_A(\Omega-\Omega_0) + S_A(\Omega+\Omega_0)\right] + \sigma_W^2}$



$E(Y^2[n]) = R_Y[0] = 2\left(R_X[0] - R_X[1]\right) = 2\left(\frac{R_A[0]}{2} + \sigma_W^2 - \frac{R_A[1]}{2}\cos\Omega_0\right)$

$\underline{E(Y^2[n]) = R_A[0] - R_A[1]\cos\Omega_0 + 2\sigma_W^2}$

) $Z[n] = A^2[n]\cos^2(\Omega_0 n + \phi) + W^2[n] + 2A[n]W[n]\cos(\Omega_0 n + \phi)$

$E(Z[n]) = E(A^2[n])\,E[\cos^2(\Omega_0 n + \phi)] + E(W^2[n]) + 2E(A[n])\,\cdot$

$\cdot\,\overbrace{E(W[n])}^{=0}\,E[\cos(\Omega_0 n + \phi)] = \underline{\frac{R_A[0]}{2} + \sigma_W^2}$

4/9/2004 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ representan los tiempos de operación de los componentes C_1 y C_2 respectivamente. Estas va's se consideran independientes, con fdp's $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y con FD's $F_1(t)$ y $F_2(t)$. Los 2 componentes se pueden conectar de los 3 modos representados en la figura para formar un sistema: conexión serie (el sistema falla cuando uno de los 2 componentes falla), conexión paralelo (el sistema falla cuando ambos componentes fallan) y conexión de apoyo (el segundo componente empieza a funcionar cuando falla el primero y, por tanto, el sistema falla cuando falla el segundo componente). Llamaremos **X**, **Y** y **Z** al tiempo de operación del sistema en las respectivas conexiones anteriormente citadas.

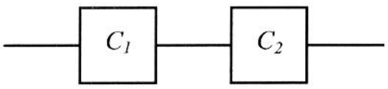
a) Exprese la va **X** en función de las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ y calcule su fdp.

b) Exprese la va **Y** en función de las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ y calcule $P(\mathbf{Y}>N)$, siendo N una constante positiva y suponiendo que las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son geométricas de parámetro $p=0.1$. Particularice el resultado para $N=2$.

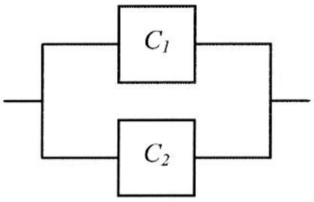
c) Exprese la va **Z** en función de las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ y calcule su fdp suponiendo que $\mathbf{T}_1$ es discreta con $P(\mathbf{T}_1=1)=p$ y $P(\mathbf{T}_1=0)=1-p$ y $\mathbf{T}_2$ exponencial de parámetro $c>0$.

d) Para las condiciones del apartado anterior, calcule la varianza de **Z** y la covarianza entre **Z** y $\mathbf{T}_2$.

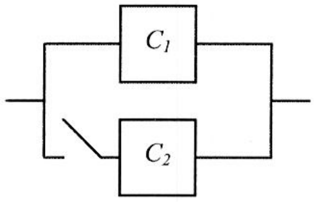
e) Si se utiliza una conexión de apoyo con *1000* componentes y los tiempos de operación se modelan según la distribución de Poisson con $a=10$, calcule $P(10000 \leq \mathbf{Z} \leq 10100)$.



Serie



Paralelo



Apoyo

(5 puntos)

P2.- Sea el proceso $\mathbf{X}[n]=\mathbf{X}_n$, donde $\mathbf{X}_n$ son va's idénticamente distribuidas e independientes entre sí, con fdp común $f_{\mathbf{X}}(x)$, FD común $F_{\mathbf{X}}(x)$, y con media μ y varianza σ^2.

a) Hallar la FD conjunta de orden m de $\mathbf{X}[n]$ $F_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,...,x_m\,;n_1,n_2,...,n_m)$.

b) Determinar si el proceso es estacionario de primer orden y si es estacionario de segundo orden.

c) Calcular la media, la autocorrelación y la autocovarianza de $\mathbf{X}[n]$.

d) Decidir si el proceso $\mathbf{X}[n]$ es estacionario en sentido amplio y en caso de que exista calcular su densidad espectral de potencia.

e) Se forma el proceso $\mathbf{Y}[n]= \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 +...+ \mathbf{X}_n$ $(n>0)$. Calcular la fdp de primer orden de $\mathbf{Y}[n]$ $f_{\mathbf{Y}}(y;n)$. Decidir si el proceso así formado es estacionario en sentido estricto.

(5 puntos)

$$GEOMETRICA: P(X=k)=p\,q^{k-1}; \quad k=1,2,3,...$$

$$POISSON: P(X=k)=e^{-a}\frac{a^k}{k!}; \ k=0,1,2,...; \ E(X)=a; \ Var(X)=a$$

$$EXPONENCIAL: f_X(x)=c\,e^{-cx}u(x); \quad E(X)=\frac{1}{c}; \quad Var(X)=\frac{1}{c^2}$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ **para** $0 \le x \le 3.89$ **en pasos de** 0.01

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Examen:	4/9/04	Publicación de notas:	20/9/04
Revisión:	22/9/04	Publicación resultados revisión:	23/9/04

La nota de este examen pondera un 70% sobre la nota final, ponderando la nota de clase el 30% restante.

PROBLEMA 1 Sep 04

a) $X = \min(T_1, T_2)$

$F_X(x) = P(X \le x) = P[\min(T_1,T_2) \le x] = P[(T_1 \le x) \cup (T_2 \le x)] =$

$= F_1(x) + F_2(x) - F_1(x)F_2(x)$

$f_X(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_1(x)F_2(x) - f_2(x)F_1(x)$

b) $Y = \max(T_1, T_2)$

$P(Y > N) = 1 - P(Y \le N) = 1 - P[\max(T_1,T_2) \le N] = 1 - P(T_1 \le N, T_2 \le N) =$

$= 1 - F_1(N)F_2(N) = 1 - \left(\sum_{k=1}^{N} pq^{k-1}\right)^2 = q^N(2-q^N)$

$N = 2 \rightarrow P(Y>2) = q^2(2-q^2) = 0.9639$

c) $Z_1 = T_1 + T_2$

$f_{Z_1}(z) = f_1(z) * f_2(z) = qce^{-cz}u(z) + pce^{-c(z-1)}u(z-1)$

d) $Var(Z_1) = Var(T_1) + Var(T_2) = pq + 1/c^2$

$Cov(Z_1, T_2) = E(Z_1T_2) - E(Z_1)E(T_2) = E[(T_1+T_2)T_2] - [E(T_1)+E(T_2)]E(T_2) =$

$= E(T_2^2) - E^2(T_2) = Var(T_2) = 1/c^2$

e) $Z_1 = T_1 + \dots + T_{1000}$, $E(Z_1) = E(T_1) + \dots + E(T_{1000}) = 10.000$

$Var(Z_1) = Var(T_1) + \dots + Var(T_{1000}) = 10.000$

$Z_1 \rightarrow N(10.000, 100)$

$P(10.000 \le Z_1 \le 10.100) = G\left(\frac{10.100-10.000}{100}\right) - G\left(\frac{10.000-10.000}{100}\right) = G(1) - G(0) =$

$= 0.3413$

P2 ISAL Sep 04 (cada aptdo puntua 1 punto)

a) $F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_m; n_1, n_2, \ldots, n_m) =$

$= P(\underline{X}(n_1) \le x_1, \underline{X}(n_2) \le x_2, \ldots, \underline{X}(n_m) \le x_m) =$

$= P(\underline{X}_{n_1} \le x_1, \underline{X}_{n_2} \le x_2, \ldots, \underline{X}_{n_m} \le x_m) = \{\underline{X}_n \text{ independientes}\}$

$= P(\underline{X}_{n_1} \le x_1) \cdot P(\underline{X}_{n_2} \le x_2) \cdots P(\underline{X}_{n_m} \le x_m) = F_{\underline{X}}(x_1) F_{\underline{X}}(x_2) \cdots F_{\underline{X}}(x_m)$

b) El proceso es estacionario de orden 1 ya que

$F_{\underline{X}}(x_1; n_1) = F_{\underline{X}}(x_1; n_1 + c) = F_{\underline{X}}(x_1)$

El proceso es estacionario de orden 2 ya que

$F_{\underline{X}}(x_1, x_2; n_1, n_2) = F_{\underline{X}}(x_1, x_2; n_1 + c, n_2 + c) = F_{\underline{X}}(x_1) \cdot F_{\underline{X}}(x_2)$

c) $E[\underline{X}[n]] = E[\underline{X}_n] = \mu \quad \forall n$

$$R_{\underline{X}}(n_1, n_2) = \begin{cases} \{n_1 \ne n_2\} & E[\underline{X}_{n_1} \cdot \underline{X}_{n_2}] = E[\underline{X}_{n_1}] \cdot E[\underline{X}_{n_2}] = \mu^2 \\ \{n_1 = n_2\} & E[\underline{X}_{n_1}^2] = Var[\underline{X}_{n_1}] + E^2[\underline{X}_{n_1}] = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

$$C_{\underline{X}}(n_1, n_2) = R_{\underline{X}}(n_1, n_2) - E[\underline{X}[n_1]] E[\underline{X}[n_2]] = \begin{cases} 0 & n_1 \ne n_2 \\ \sigma^2 & n_1 = n_2 \end{cases}$$

d) El proceso es estacionario en sentido amplio al ser estacionario de orden 2. Ademas su media es constante y la autocorrelación sólo depende de la diferencia de tiempos $m = n_1 - n_2$

$R_{\underline{X}}(m) = \sigma^2 + \mu^2 - \sigma^2 \delta[m]$

$$S_{\underline{X}}(\omega) = TF[R_{\underline{X}}(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\underline{X}}[m] e^{-j\omega m} =$$

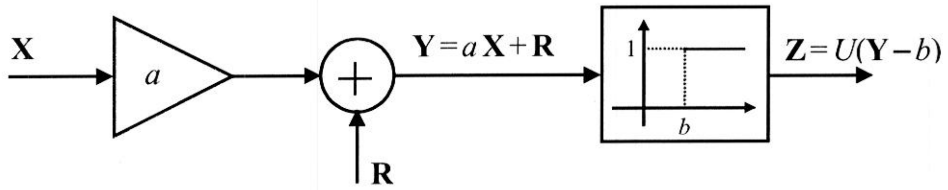
$$= \left(2\pi (\sigma^2 + \mu^2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi k) \right) - \sigma^2$$

e)
$$f_{\underline{Y}}(y; n) = \begin{cases} f_{\underline{X}}(x) & n = 1 \\ f_{\underline{X}}(x) * f_{\underline{X}}(x) & n = 2 \\ \underbrace{f_{\underline{X}}(x) * f_{\underline{X}}(x) * \cdots * f_{\underline{X}}(x)}_{n \text{ veces}} & n > 0 \end{cases}$$

No es estacionario en sentido estricto ya que la $f_{\underline{Y}}(y; n)$ depende de n, por lo que ni siquiera es estacionario de 1er orden.

31/1/2005 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Un determinado sistema de comunicaciones responde al modelo de la figura:



donde el transmisor envía un símbolo binario (bit) que se puede modelar mediante una v.a. de Bernouilli **X**, con $P(\mathbf{X}=1)=P(\mathbf{X}=0)$. Dicho símbolo **X**, al pasar por el canal de comunicaciones, sufre una atenuación constante a y una adición de ruido **R**, que supondremos una v.a. $N(0,1)$ independiente de **X**. Finalmente, el receptor compara la salida del canal **Y** con un umbral b, produciendo como resultado una v.a. **Z** que toma el valor 1 si **Y** supera el umbral ó 0 en caso contrario. Suponiendo $a=2$ y $b=1$, calcule:

a) Las fdps condicionadas $f_Y(y\,|\,\mathbf{X}=0), f_Y(y\,|\,\mathbf{X}=1)$ y la fdp de la v.a. **Y**, $f_Y(y)$.
b) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{Z}=1\,|\,\mathbf{X}=0)$ y $P(\mathbf{Z}=0\,|\,\mathbf{X}=1)$.
c) La covarianza de **X** y **Z**.
d) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{X}=1\,|\,\mathbf{Z}=1)$ y $P(\mathbf{X}=0\,|\,\mathbf{Z}=0)$.
e) Suponga ahora que el canal introduce una atenuación *aleatoria*, de forma que la señal de entrada al receptor es:

$$\mathbf{Y}=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{R}$$

siendo **A** una v.a. $N(2,1)$ independiente de **X** y **R**.
Calcule $P(\mathbf{Z}=1\,|\,\mathbf{X}=0)$ y $P(\mathbf{Z}=0\,|\,\mathbf{X}=1)$, suponiendo $b=1$.

(5 puntos)

2.- Sea **X**[n] un ruido blanco estricto, con fdp de primer orden exponencial, de parámetro c. A dicho proceso se le aplica la transformación:

$$y = g(x) = y_0(1-e^{-cx})$$

siendo $y_0>0$ una constante. Se obtiene el nuevo proceso **Y**[n]=g{**X**[n]}. Calcule:

a) La P(**Y**[n] > $3y_0/4$).
b) La media de **Y**[n].
c) La fdp de primer orden de **Y**[n]. ¿Es **Y**[n] estacionario de orden 1?
d) La autocovarianza de **Y**[n]. ¿Es **Y**[n] estacionario en sentido amplio?
e) Se define el proceso **S**[n]=**Y**[n] - λ**X**[n], donde λ es una constante. Determine el valor de ésta para que la correlación cruzada $R_{XS}[n_1,n_2]$ sea nula $\forall\ n_1 \neq n_2$.

(5 puntos)

Examen:	31/1/05	Publicación de notas:	14/2/05
Revisión:	17/2/05	Resultados revisión:	18/2/05

$$EXPONENCIAL: f_X(x) = c\,e^{-cx}u(x);\quad E(X) = \frac{1}{c};\quad Var(X) = \frac{1}{c^2}$$

$$GAUSSIANA: f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = N(\mu,\sigma);\quad E(X) = \mu;\quad Var(X) = \sigma^2$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ **para** $0 \le x \le 3.89$ **en pasos de** 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

PROBLEMA 1

a) $X=0 \Rightarrow Y=R \Rightarrow f_Y(y \mid X=0) = f_R(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (-\infty<y<\infty)$

$X=1 \Rightarrow Y = a+R = 2+R \Rightarrow N(2,1) \Rightarrow$

$$f_Y(y \mid X=1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-2)^2} \quad (-\infty<y<\infty)$$

$$f_Y(y) = f_Y(y \mid X=0)\, P(X=0) + f_Y(y \mid X=1)\, P(X=1) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2}y^2} + e^{-\frac{1}{2}(y-2)^2} \right] \quad (-\infty<y<\infty)$$

b) $P(Z=1 \mid X=0) = P(Y>b \mid X=0) = P(aX+R>b \mid X=0) =$

$= P(R>b \mid X=0) \underset{\uparrow \text{R, X indep.}}{=} P(R>b) = 1-G(b) = 1-G(1) = 0.1587$

$P(Z=0 \mid X=1) = P(Y<b \mid X=1) = P(aX+R<b \mid X=1) =$

$= P(a+R<b \mid X=1) = P(R<b-a) = G(b-a) = G(-1) =$

$= 1-G(1) = 0.1587$

c) $C_{XZ} = \mathrm{Cov}(X,Z) = E(XZ) - E(X)E(Z)$

$E(XZ) = 1\cdot 1\, P(X=1,Z=1) + 1\cdot 0\, P(X=1,Z=0) + 0\cdot 1\, P(X=0,Z=1) +$

$+ 0\cdot 0\, P(X=0,Z=0) = P(X=1,Z=1) = P(Z=1 \mid X=1)\,P(X=1) =$

$= [1 - P(Z=0 \mid X=1)] \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} G(1) = 0.4207$

$E(X) = \frac{1}{2}$

$E(Z) = P(Z=1) = P(Z=1 \mid X=0)\,P(X=0) + P(Z=1 \mid X=1)\,P(X=1) =$

$= [1-G(1)]\cdot\frac{1}{2} + G(1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$Cov(X,Z) = \frac{1}{2}\,G(1) - \frac{1}{4} = 0.1707$$

d) $$P(X=1\,|\,Z=1) \underset{\text{T. Bayes}}{=} \frac{P(Z=1\,|\,X=1)\,P(X=1)}{P(Z=1)} = \frac{G(1)\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 0.8413$$

$$P(X=0\,|\,Z=0) = \frac{P(Z=0\,|\,X=0)\,P(X=0)}{P(Z=0)} = \frac{[1-P(Z=1\,|\,X=0)]\cdot\frac{1}{2}}{1-P(Z=1)} =$$

$$= \frac{G(1)\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 0.8413$$

e) $$P(Z=1\,|\,X=0) = P(AX+R>b\,|\,X=0) = P(R>b\,|\,X=0) = 0.1587$$

Ver b)

$$P(Z=0\,|\,X=1) = P(AX+R<b\,|\,X=1) = P(A+R<b)$$

A, R, X indep

A, R V.A'S NORMALES E INDEP $\Rightarrow$ A+R ES $N(\eta,\sigma)$

$\eta = E(A)+E(R) = 2$, $\sigma^2 = Var(A)+Var(R) = 2$

$$P(Z=0\,|\,X=1) = G\left(\frac{b-\eta}{\sigma}\right) = G\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right) = G\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

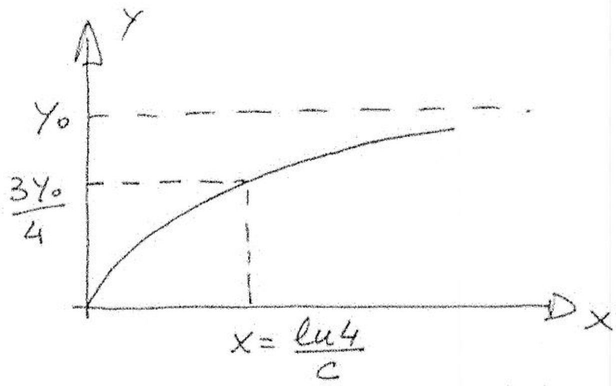
$$= 1 - G(0.71) = 0.2389$$

PROBLEMA 2

$f_X(x) = c\,e^{-cx} u(x)$

$F_X(x) = (1 - e^{-cx}) u(x)$

$Y = g(x) = Y_0 (1 - e^{-cx})$



a) $P(Y[n] > 3Y_0/4) = P\left(X[n] > \frac{\ln 4}{c}\right) = 1 - F_X\left(\frac{\ln 4}{c}\right) = e^{-\frac{c \ln 4}{c}} = \underline{1/4}$

b) $E(Y[n]) = E\{g(X[n])\} = \int g(x) f_X(x)\,dx = \int_0^\infty Y_0 (1 - e^{-cx})\, c\, e^{-cx}\,dx =$

$= Y_0 c \int_0^\infty (e^{-cx} - e^{-2cx})\,dx = \underline{Y_0/2}$

c) $Y = g(x) = Y_0(1 - e^{-cx}) \rightarrow x_1 = \frac{1}{c} \ln \frac{Y_0}{Y_0 - Y}$, $f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}$

$\left.\begin{array}{l} g'(x) = Y_0 c\, e^{-cx} \rightarrow g'(x_1) = c(Y_0 - Y) \\ f_X(x_1) = c\,\frac{(Y_0 - Y)}{Y_0} \end{array}\right\} \underbrace{f_Y(y) = \frac{1}{Y_0},\ y \in (0, Y_0)}$

$Y[n]$ sí es estacionario de orden 1.

d) $\underline{n_1 \neq n_2}$: $R_Y[n_1, n_2] = E(Y[n_1] Y[n_2]) = E(Y[n_1]) E(Y[n_2]) = Y_0^2/4$

$\underline{n_1 = n_2}$: $R_Y[n_1, n_2] = E(Y^2[n_1]) = \int_0^{Y_0} y^2 \frac{1}{Y_0}\,dy = Y_0^2/3$

$R_Y[m] = \begin{cases} Y_0^2/3, & m = 0 \\ Y_0^2/4, & m \neq 0 \end{cases}$ | $C_Y[m] = R_Y[m] - \eta_Y^2 = \begin{cases} Y_0^2/12, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$

$\underbrace{C_Y[m] = \frac{Y_0^2}{12} \delta[m]}$, $Y[n]$ sí es estacionario en sentido amp.

c) $R_{XS}[n_1, n_2] = E(X[n_1]\, S[n_2]) = E\{X[n_1](Y[n_2] - \lambda X[n_2])\} =$

$$= R_{XY}[n_1, n_2] - \lambda R_X[n_1, n_2] = 0 \rightarrow \lambda = \frac{R_{XY}[n_1, n_2]}{R_X[n_1, n_2]}$$

$$R_X[n_1, n_2] = E(X[n_1]\, X[n_2]) = E(X[n_1])E(X[n_2]) = 1/c^2$$

$$R_{XY}[n_1, n_2] = E(X[n_1]\, Y[n_2]) = E(X[n_1])E(Y[n_2]) = \frac{1}{c} \times \frac{y_0}{2}$$

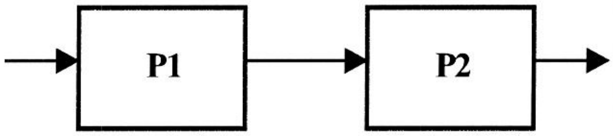
$\underline{\lambda = c\, y_0/2}$

1/9/2005 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Un proceso informático pasa sucesivamente por dos procesadores P1 y P2 según se muestra en la figura. La v.a. **X** representa el tiempo que pasa el proceso en el primer procesador, y la v.a. **Y** representa el tiempo total que requiere el proceso en pasar por los dos procesadores. Se conoce la fdp conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\,e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Dibuje el rango de la v.a. bidimensional y calcule el valor de k. Determine si las v.a.'s **X** e **Y** son independientes.
b) Se define una nueva v.a. **Z** como el tiempo que tarda el proceso en el segundo procesador. Exprese la v.a. **Z** en función de las v.a.'s **X** e **Y**. Calcular $f_{XZ}(x,z)$ y la fdp de la nueva v.a. **Z**. Determine si las v.a.'s **X** y **Z** son independientes.
c) Calcule la varianza de **Z** y la covarianza entre **Z** e **Y**.
d) Calcule $f_Y(y|x)$ y dibújela para x=5.
e) Si el proceso atravesara *100* procesadores P1, P2... P100 y el tiempo en cada uno de ellos se modelara como una va exponencial de media *10 seg*, calcule la probabilidad que el proceso termine antes de *15 min*. Suponiendo que las v.a.'s son independientes.



(5 puntos)

P2.- Sea el proceso **Z**[n]=**X**[n]**Y**[n], siendo **X**[n] e **Y**[n] dos procesos estocásticos discretos en el tiempo independientes y estacionarios en sentido amplio, de medias η_X y η_Y, y autocorrelaciones $R_X[m]$ y $R_Y[m]$, respectivamente. Calcule:

a) La media y la autocorrelación de **Z**[n]. ¿Es **Z**[n] estacionario en sentido amplio?
b) La correlación cruzada $R_{XZ}[n_1,n_2]$. ¿Son **X**[n] y **Z**[n] conjuntamente estacionarios (en sentido amplio)?
c) La media condicionada $E\{\mathbf{Z}[n]\,|\,\mathbf{X}[n]=x\}$.
d) La densidad espectral de potencia de **Z**[n], suponiendo que $R_X[m]=a^{|m|}$ (siendo $|a|<1$) y $R_Y[m]=\delta[m]$.
e) La distribución de primer orden de **Z**[n], suponiendo que para cada n, **X**[n] e **Y**[n] son v.a.'s discretas, con $P\{\mathbf{X}[n]=-1\}=P\{\mathbf{Y}[n]=-1\}=p$, $P\{\mathbf{X}[n]=+1\}=P\{\mathbf{Y}[n]=+1\}=1-p$ (siendo $0<p<1$).

(5 puntos)

$$EXPONENCIAL: f_X(x) = c\,e^{-cx}u(x); \quad E(X) = \frac{1}{c}; \quad Var(X) = \frac{1}{c^2}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \qquad n \in \mathrm{N}$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

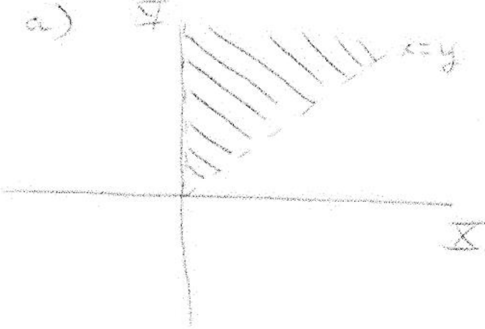
x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ **para** $0 \le x \le 3.89$ **en pasos de** 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Examen:	1/9/05	Publicación de notas:	20/9/05
Revisión:	22/9/05	Publicación resultados revisión:	23/9/05

Problema 1 Sept. 2005 Solución

a) 

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1 =$$

$$= k\int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{y} e^{-y}\,dx\,dy =$$

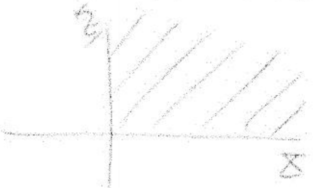
$$= k\int_{y=0}^{\infty} y\,e^{-y}\,dy = \boxed{K=1}$$

X, Y no son independientes ya que su rango no es rectangular y por tanto el valor que toma una condiciona el valor de la otra.

b) $Z = Y - X$

Para hallar $f_{XZ}(x,z)$ aplicamos la transformación $\begin{cases} Z = Y - X \\ W = X \end{cases}$

Para cada $(x_i, y_i) \in R_{XY}$ hay un único $(x_i, z_i) \in R_{XZ}$



$x>0$
$z>0$

$z_i = y_i - x_i$, $f_{XZ}(x,z) = \dfrac{f_{XY}(x, z+x)}{|-1|}$

$$\boxed{f_{XZ}(x,z) = e^{-x-z} \qquad \begin{matrix} x>0 \\ z>0 \end{matrix}}$$

$$J(x_i,y_i) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$f_X(x) = \int_x^{\infty} e^{-y}\,dy = e^{-x} \qquad x>0$$

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} e^{-x-z}\,dx = e^{-z} \qquad z>0$$

Como $f_{XZ}(x,z) = f_X(x)\cdot f_Z(z)$ X y Z son independientes

c) $\mathrm{Var}[Z] = 1$

↑ es la varianza de una v.a. exponencial de parámetro 1.

$\mathrm{Cov}[Z, Y] = E[Z\cdot Y] - E[Z]\cdot E[Y]$

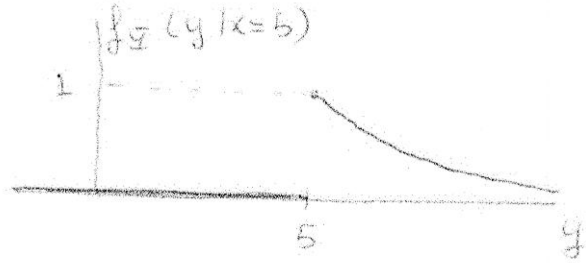
$E[Z\cdot Y] = E[(Z+X)\cdot Z] = E[Z^2] + E[X]\,E[Z]$

$E[Z]\cdot E[Y] = E[Z]\cdot E[Z+X] = E[Z]\,(E[Z]+E[X]) = E^2[Z] + E[Z]\,E[X]$

$\mathrm{Cov}[Z,Y] = E[Z^2] - E^2[Z] = \mathrm{Var}[Z] = 1$

d) $f_Y(y|x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{-y+x} & 0<x<y<\infty \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$

si $x=5$ $\quad f_Y(y|x=5) = e^{-y+5} \quad y>5$



e) si llamamos P_i al tiempo en cada procesador el tiempo total sería $P_T = \sum_{i=1}^{100} P_i$ donde

$P_i = c_i e^{-c_i p_i} u(p_i)$ $\quad E[P_i] = 10 \text{ sg} \Rightarrow c_i = \frac{1}{10}$

$\quad Var[P_i] = \frac{1}{c_i^2} = 10^2$

La distribución de P_T tenderá a una normal

$P_T \sim N(\eta_T, \sigma_T)$ $\quad \begin{cases} \eta_T = \sum_{i=1}^{100} E[P_i] = 100 \cdot 10 = 10^3 \text{ sg.} \\ \sigma_T^2 = \sum_{i=1}^{100} Var[P_i] = 100 \cdot 10^2 = 10^4 \end{cases}$

$\sim N(10^3, 10^2)$

$P\left(P_T < 15 \text{ min} \cdot 60 \frac{\text{seg}}{\text{min}}\right) = P(P_T < 900) = G\left(\frac{900-10^3}{10^2}\right) =$

$= G(-1) = 1 - G(1) = 1 - 0'8413 = \boxed{0'1587}$

PROBLEMA 2 Sept 2005 Solución

a) $\eta_Z[n] = E\{Z[n]\} = E\{X[n]\,Y[n]\} \underset{\text{INDEP}}{=} E\{X[n]\}\,E\{Y[n]\} = \eta_X\,\eta_Y$

$R_Z[n_1,n_2] = E\{Z[n_1]\,Z[n_2]\} = E\{X[n_1]\,Y[n_1]\,X[n_2]\,Y[n_2]\} =$

$\underset{\text{INDEP}}{=} E\{X[n_1]\,X[n_2]\}\,E\{Y[n_1]\,Y[n_2]\} = R_X[n_1-n_2]\,R_Y[n_1-n_2]$

$$\left.\begin{array}{l}\eta_Z[n] = \eta_X\,\eta_Y = \eta_Z \\ R_Z[n_1,n_2] = R_X[m]\,R_Y[m] = R_Z[m] \quad (m = n_1-n_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{estacionario en s.a.}$$

b) $R_{XZ}[n_1,n_2] = E\{X[n_1]\,Z[n_2]\} = E\{X[n_1]\,X[n_2]\,Y[n_2]\} =$

$= E\{X[n_1]\,X[n_2]\}\,E\{Y[n_2]\} \underset{m=n_1-n_2}{=} R_X[m]\,\eta_Y = R_{XZ}[m]$

$$\left.\begin{array}{l}X[n],\ Y[n] \text{ estac. en s.a.} \\ R_{XZ}[n_1,n_2] = R_{XZ}[n_1-n_2]\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Conjuntamente estac. en s.a.}$$

c) $E\{Z[n]\,|\,X[n]=x\} = E\{X[n]\,Y[n]\,|\,X[n]=x\} =$

$= x\,E\{Y[n]\,|\,X[n]=x\} \underset{\text{INDEP}}{=} x\,E\{Y[n]\} = x\,\eta_Y$

d) $R_Z[m] = R_X[m]\,R_Y[m] = R_X[m]\,\delta[m] = R_X[0]\,\delta[m] = \delta[m]$

$S_Z(\Omega) = \mathcal{F}\{R_Z[m]\} = 1 \qquad (-\pi \le \Omega < \pi)$

c)

$X[n]$	$Y[n]$	$Z[n]$
-1	-1	1
-1	+1	-1
1	-1	-1
1	1	1

$Z[n]$ es v.a discreta con

$\Omega_Z = \{-1, 1\}$

Si llamamos $q = 1-p$:

$$P\{Z[n]=-1\} = P\{X[n]=-1,\ Y[n]=+1\} + P\{X[n]=1, Y[n]=-1\} =$$

$$\overset{\text{INDEP}}{=} P\{X[n]=-1\}\,P\{Y[n]=+1\} + P\{X[n]=1\}\,P\{Y[n]=-1\} =$$

$$= qp + pq = 2pq$$

$$P\{Z[n]=+1\} = 1 - P\{Z[n]=-1\} = 1-2pq = p^2+q^2$$

10/2/2006 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Sea **X** una v.a. de Bernoulli de parámetro p=0.5 y sean **Y_1** e **Y_2** dos v.a.'s $N(\mu, \sigma)$ y $N(-\mu, \sigma)$ respectivamente (**X**, **Y_1** e **Y_2** son independientes entre sí). Se forma la nueva v.a. **Z=X Y_1 +(1-X) Y_2**.

a) Calcule la media y varianza de **Z**.
b) Calcule y dibuje la fdp de **Z**.
c) Calcule la P(**Z**<-μ) cuando μ=σ.
d) Sobre la v.a. **Z** se aplica un comparador de umbral μ, de tal manera que la v.a. de salida es **V**=u(**Z**-μ) (u(.) es la función escalón unidad). Caracterice la v.a. **V** y particularice el resultado para μ=σ.
e) Suponga ahora que se obtienen 5 v.a.'s (**Z_1**, ..., **Z_5**) cada una de ellas con la distribución descrita anteriormente e independientes entre sí. Obtenga la probabilidad de que al menos 2 superen el umbral μ y particularice el resultado para μ=σ.

(5 puntos)

2.- Sea el p.e. **X**(t)=**A**cos(wt+**B**) donde **A** y **B** son dos v.a.'s discretas con fdp conjunta:

$$f_{AB}(a,b)=\frac{1}{8}\left(\sum_{i=0}^{3}\delta(a-1)\delta(b-i\frac{\pi}{2})+\sum_{j=0}^{3}\delta(a-\sqrt{2})\delta(b-j\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\right)$$

o equivalentemente con distribución de probabilidades conjunta:

$$P_{AB}(A=a_i,B=b_j)=\frac{1}{8} \quad en\,el\,rango \quad \Omega_{AB}(a_i,b_j)=\left\{\begin{matrix}(1,0),\,(1,\pi/2),\,(1,\pi),\,(1,3\pi/2),\\ (\sqrt{2},\pi/4),\,(\sqrt{2},3\pi/4),\,(\sqrt{2},5\pi/4),\,(\sqrt{2},7\pi/4)\end{matrix}\right\}$$

siendo w una constante positiva,

a) Demuestre que las v.a.'s **A** y **B** no son independientes. Dibuje una posible realización del proceso estocástico y decida si es continuo o discreto, tanto en el espacio de estados como en el espacio de tiempos.
b) Determine la fdp de primer orden del proceso para t=0 y para t=π/(4w). Decida si el proceso es estacionario de primer orden.
c) Determine la media del proceso.
d) Determine la autocorrelación del proceso. Decida si el proceso es estacionario en sentido amplio.
e) Suponga que w ya no es constante sino que es ahora una v.a. **W** con distribución uniforme U(w_1,w_2) independiente de A y B. Obtenga la media del proceso.

(5 puntos)

Examen:	10/2/06	Publicación de notas:	24/2/06
Revisión:	28/2/06	Resultados revisión:	01/3/06

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$GAUSSIANA: f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=N(\mu,\sigma);\quad E(X)=\mu;\quad Var(X)=\sigma^2$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ **para** $0 \le x \le 3.89$ **en pasos de** 0.01

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

a) $E(Z_1)=E[X Y_1+(1-X)Y_2]=\underbrace{E(X)}_{p=0.5}\,\underbrace{E(Y_1)}_{\mu}+\underbrace{[1-E(X)]}_{1-p=0.5}\,\underbrace{E(Y_2)}_{-\mu}=\underline{0}$

$Var(Z_1)=E(Z_1^2)-\underbrace{E^2(Z_1)}_{\to 0}=E\{[X Y_1+(1-X)Y_2]^2\}=$

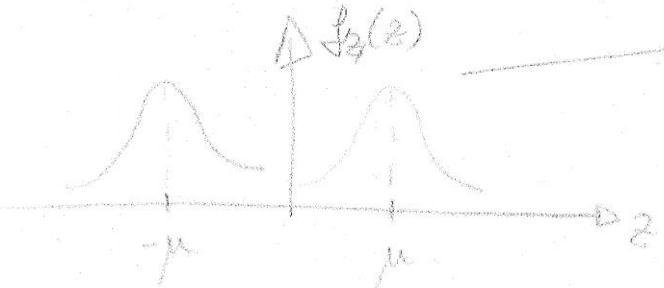
$=E[X^2Y_1^2+(1-X)^2Y_2^2+2X(1-X)Y_1Y_2]=$

$=\underbrace{E(X^2)}_{p=0.5}\,\underbrace{E(Y_1^2)}_{(\sigma^2+\mu^2)}+\underbrace{E(1+X^2-2X)}_{1+p-2p=0.5}\,\underbrace{E(Y_2^2)}_{(\sigma^2+\mu^2)}+2\underbrace{[\cancel{E(X)-E(X^2)}]}_{\to 0}E(Y_1)E(Y_2)$

$=\underline{\sigma^2+\mu^2}$

b) $f_{Z_1}(z)=P(X=1)f_{Z_1}(z/X=1)+P(X=0)f_{Z_1}(z/X=0)$

$\left.\begin{array}{l}(Z_1/X=1)\to N(\mu,\sigma)\\(Z_1/X=0)\to N(-\mu,\sigma)\end{array}\right\}\ f_{Z_1}(z)=\dfrac{0.5}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left(e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(z+\mu)^2}{2\sigma^2}}\right),\ z\in(-\infty,$



c) $P(Z_1\leq-\mu)=0.5\left[\Phi\left(\dfrac{-\mu+\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\dfrac{-\mu-\mu}{\sigma}\right)\right]=0.5\left[\Phi(0)+\Phi\left(-\dfrac{2\mu}{\sigma}\right)\right]$

$=0.5\left[\Phi(0)+1-\Phi\left(\dfrac{2\mu}{\sigma}\right)\right]=0.5\left[1+\underbrace{\Phi(0)}_{0.5}-\underbrace{\Phi(2)}_{0.9772}\right]=\underline{0.26}$

d) $V=u(Z_1-\mu)=\begin{cases}1, & Z_1\geq\mu\\0, & Z_1<\mu\end{cases}$ | V es una va de Bernoulli de parámetro $p=P(Z_1\geq\mu)$

Si $\mu=\sigma\Rightarrow p=P(Z_1\geq\mu)=P(Z_1\leq-\mu)=\underline{0.26}$

e) $\overline{W}$ = nº de vas. que superan el umbral $\rightarrow B(n, p)$

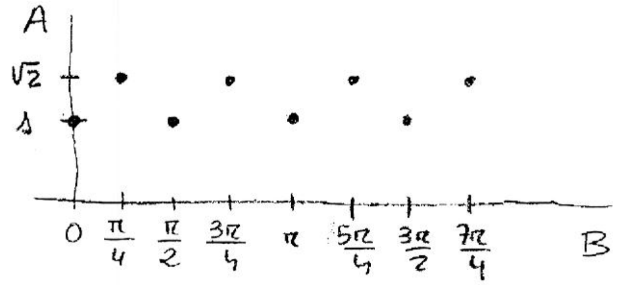
$$P(\overline{W} = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \qquad \begin{cases} n = 5 \\ p = 0.26 \end{cases}$$

$$P(\overline{W} \geq 2) = 1 - \left[P(\overline{W} = 0) + P(\overline{W} = 1)\right] =$$

$$= 1 - \left(q^5 + 5pq^4\right) = 1 - (0.22 + 0.39) \simeq \underline{0.39}$$

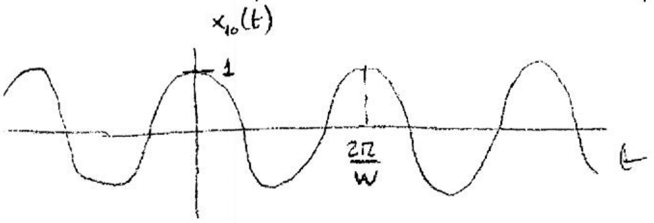
Solución P2 ISAL 10 Feb 2006

a)



En vista del rango de (A,B) Ω_{AB} vemos que A y B no son independientes pues el valor de una de ellas condiciona el valor de la otra.

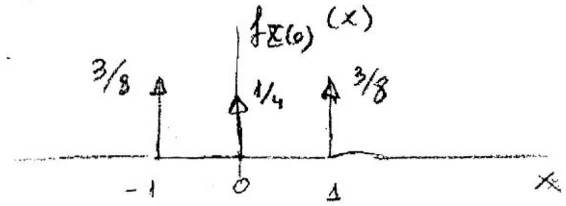
Una posible realización para $A=1$ y $B=0$ $x_{10}(t)= \cos wt$



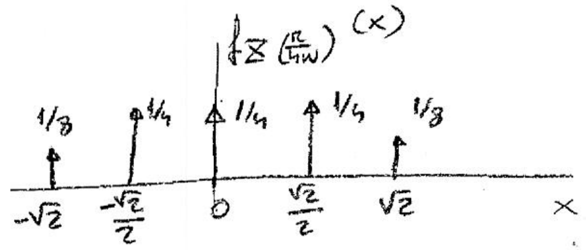
El proceso es continuo en el espacio de tiempos y discreto en el espacio de estados

b) $X(0) = A\cos B = \begin{cases} 0 & \text{en } (1,\frac{\pi}{2}), (1,\frac{3\pi}{2}) \quad (\text{probabilidad } \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}) \\ 1 & \text{en } (1,0), (\sqrt{2},\frac{\pi}{4}), (\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}) \quad (\text{prob. } \frac{3}{8}) \\ -1 & \text{en } (1,\pi), (\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}), (\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}) \quad (\text{prob. } \frac{3}{8}) \end{cases}$

$\Rightarrow$



$X\left(\frac{\pi}{4w}\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{4}+B\right) = \begin{cases} 0 & \text{en } (\sqrt{2},\frac{\pi}{4}), (\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}) \quad (\text{prob } \frac{1}{4}) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{en } (1,0), (1,\frac{3\pi}{2}) \quad (\text{prob } \frac{1}{4}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{en } (1,\frac{\pi}{2}), (1,\pi) \quad (\text{prob } \frac{1}{4}) \\ \sqrt{2} & \text{en } (\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}) \quad (\text{prob } \frac{1}{8}) \\ -\sqrt{2} & \text{en } (\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}) \quad (\text{prob } \frac{1}{8}) \end{cases}$



$f_X(x;t)$ depende de t, y por tanto <u>no</u> es un p. estacionario de 1^{er} orden.

c) $E[X(t)] = E[A\cos(wt+B)] = E[A(\cos wt\cos B - \operatorname{sen} wt \operatorname{sen} B)]$

$= \cos wt \; E[A\cos B] - \operatorname{sen} wt \; E[A \operatorname{sen} B]$

$E[A\cos B] = E[X(0)] = -1\cdot\frac{3}{8} + 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{8} = 0$

$E[A\operatorname{sen} B] = \frac{1}{8}\left(1\cdot\operatorname{sen} 0 + 1\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 1\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + 1\operatorname{sen}\pi + \right.$

Por tanto, $\left. + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = 0$

$E[X(t)] = 0$

d) $R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\left[A\cos(wt_1+B)\,A\cos(wt_2+B)\right] =$

$$= E\left[\frac{A^2}{2}\left(\cos w(t_1-t_2) + \cos(w(t_1+t_2)+2B)\right)\right] =$$

$$= \frac{\cos w(t_1-t_2)}{2} \cdot E[A^2] + E\left[\frac{A^2}{2}\left(\cos(w(t_1+t_2))\cos 2B - \operatorname{sen}(w(t_1+t_2))\operatorname{sen}2B\right)\right]$$

$$E[A^2] = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2 = \frac{3}{2}$$

$$E[A^2\cos 2B] = \frac{1}{8}\left(1\cdot\cos 0 + 1\cdot\cos\pi + 1\cos 2\pi + 1\cos 3\pi + 2\cos\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{3\pi}{2} + 2\cos\frac{5\pi}{2} + 2\cos\frac{7\pi}{2}\right) = 0$$

$$E[A^2\operatorname{sen}2B] = \frac{1}{8}\left(1\operatorname{sen}0 + 1\operatorname{sen}\pi + 1\operatorname{sen}2\pi + 1\operatorname{sen}3\pi + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}\right) = 0$$

Por tanto $R_X(t_1,t_2) = \frac{3}{4}\cos w(t_1-t_2) = \frac{3}{4}\cos w\tau$

El proceso sí es esa ya que su media es cte con el tiempo y la autocorrelación sólo depende de τ.

e) $E\{X(t)\} = E[A\cos(Wt+B)] = E[A\cos Wt\cos B - A\sin Wt\operatorname{sen}B] =$

$= E[\cos Wt]\,E[A\cos B] - E[\operatorname{sen}Wt]\,E[A\operatorname{sen}B]$

W indep. de A y B

$$E[\cos Wt] = \int_{w_1}^{w_2} \cos wt \cdot \frac{1}{w_2-w_1}\,dw = \frac{\operatorname{sen}w_2t - \operatorname{sen}w_1t}{t(w_2-w_1)}$$

$$E[\operatorname{sen}wt] = \int_{w_1}^{w_2} \operatorname{sen}wt \cdot \frac{1}{w_2-w_1}\,dw = \frac{\cos w_1t - \cos w_2t}{t(w_2-w_1)}$$

$E[A\cos B] = 0$

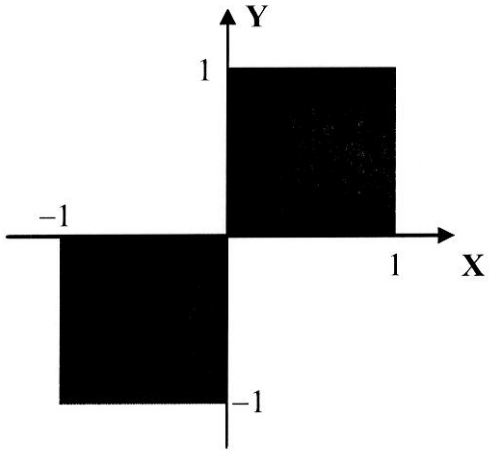
$E\{A\operatorname{sen}B\} = 0$

$E[X(t)] = 0$

Puntuación 1 p cada aptdo.

8/9/2006 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Sea la v.a. bidimensional $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ con distribución uniforme en el recinto de la figura:



Se pide:

a) Las fdp's marginales de las va's **X** e **Y**. ¿Son independientes?

b) La covarianza de **X** e **Y**. ¿Son incorreladas?

c) La media condicionada $E(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{Y}=y)$.

d) Se define la v.a. $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$. Obtenga la fdp conjunta de **X** y **Z**, representando gráficamente el rango o recorrido de la v.a. bidimensional $(\mathbf{X},\mathbf{Z})$.

e) Sea la v.a. $\mathbf{W}=\mathbf{X}-a\mathbf{Y}$. Determine el valor de la constante a que hace que la varianza de **W** sea mínima.

(5 puntos)

2.- Sea **X**[n] un ruido blanco estricto, con fdp de primer orden ($u(x)$ es el escalón unidad):

$$f_X(x)=xe^{-x^2/2}u(x)$$

A dicho proceso se le aplican las transformaciones:

$$y=q(x)=\begin{cases} y_1, x\le a \\ y_2, x>a \end{cases}$$

$$z=g(x)=1-e^{-x^2/2}$$

siendo y_1, y_2 y a constantes positivas. Se obtienen los nuevos procesos **Y**[n]=q{**X**[n]} y **Z**[n]=g{**X**[n]}. Calcule:

a) El valor de a de manera que el proceso **Y**[n] tome el valor y_1 con probabilidad 0.4.

b) La fdp de primer orden de **Y**[n], para el valor de a obtenido previamente. ¿Es **Y**[n] estacionario de orden 1?

c) La autocovarianza de **Y**[n], para el valor de a obtenido previamente. ¿Es **Y**[n] estacionario en sentido amplio?

d) La fdp de primer orden de **Z**[n]. ¿Es **Z**[n] estacionario de orden 1?

e) La media y varianza de **Z**[n].

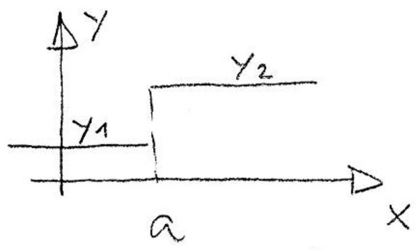
(5 puntos)

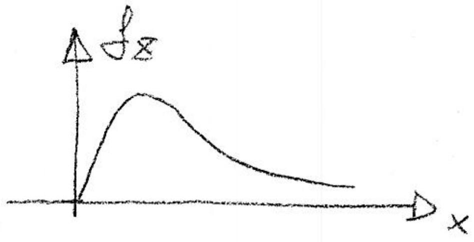
$$\mathit{UNIFORME}\text{ en }(a,b): E(X)=\frac{a+b}{2};\quad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Examen:	8/9/06	Publicación de notas:	22/9/06
Revisión:	28/9/06	Publicación resultados revisión:	29/9/06

$X[n]$ R.B.E. $\quad f_X(x) = x e^{-x^2/2} u(x)$

a) $Y = g(x) = \begin{cases} Y_1, & x \le a \\ Y_2, & x > a \end{cases}$





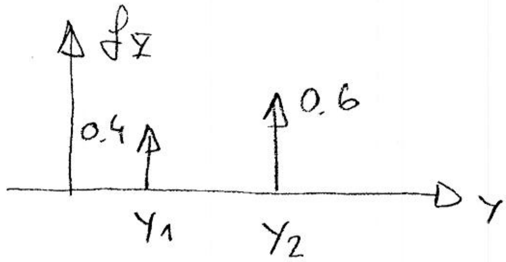
$$P(Y[n] = Y_1) = P(X[n] \le a) = \int_0^a x e^{-x^2/2} dx = 1 - e^{-a^2/2} = 0.4$$

$a = \sqrt{-2 \ln 0.6} \simeq 1$

b) $f_Y[y, n] = P(Y[n] = Y_1)\,\delta(y - Y_1) + P(Y[n] = Y_2)\,\delta(y - Y_2) =$

$= 0.4\,\delta(y - Y_1) + 0.6\,\delta(y - Y_2)$

$Y[n]$ est. de orden 1.



c) $C_Y[n_1, n_2] = R_Y[n_1, n_2] - \eta_Y[n_1]\,\eta_Y[n_2]$

$\eta_Y[n] = \sum_i Y_i\, P(Y[n] = Y_i) = 0.4\,Y_1 + 0.6\,Y_2$

$\underline{n_1 \neq n_2}$: $R_Y[n_1, n_2] = E(Y[n_1]\,Y[n_2]) = \eta_Y[n_1]\,\eta_Y[n_2] = (0.4Y_1 + 0.6Y_2)^2$

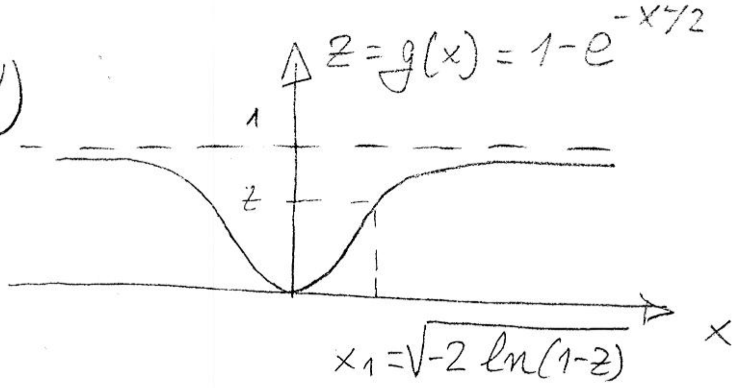
$\underline{n_1 = n_2}$: $R_Y[n_1, n_2] = E(Y^2[n_1]) = \sum_i Y_i^2 P(Y[n] = Y_i) = 0.4Y_1^2 + 0.6Y_2^2$

$\underline{n_1 \neq n_2}$: $C_Y[n_1, n_2] = 0$

$\underline{n_1 = n_2}$: $C_Y[n_1, n_2] = 0.4Y_1^2 + 0.6Y_2^2 - (0.4Y_1 + 0.6Y_2)^2 = 0.24(Y_1 - Y_2)^2$

$Y[n]$ est. en sentido amplio.

f)



$$f_{Z_1}[z,n] = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}$$

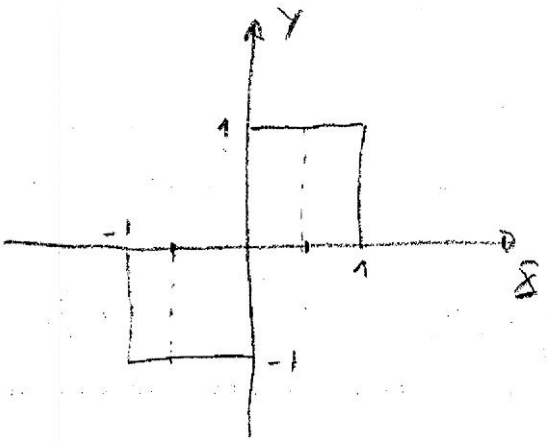
$$g'(x) = x\,e^{-x^2/2} \rightarrow \underbrace{f_Z(z) = 1,\ z \in (0,1)}$$

$Z_1[n]$ est. de orden 1.

e) $Z_1[n] \rightarrow \mathcal{U}(0,1)$

$$\begin{cases} E(Z_1[n]) = 1/2 \\ Var(Z_1[n]) = 1/12) \end{cases}$$

1º- a)



Area $(\Omega_{XY}) = 1+1 = 2$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x, y \le 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \le x, y \le 0 \\ 0 & \text{RESTO} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2} & 0 \le x \le 1 \\ \int_{-1}^0 \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2} & -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

Por tanto, X es v.a. uniforme en $(-1, 1)$

Por simetría, Y es también v.a. uniforme en $(-1, 1)$

$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad -1 \le x, y \le 1$

Por tanto, $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,

luego X e Y NO son independientes.

b) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$; $E(X) = E(Y) \overset{\text{uniformes en } (-1,1)}{=} 0$

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x y\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} x \cdot y \cdot \frac{1}{2}\, dx\, dy + \int_0^1\int_0^1 x \cdot y\, \frac{1}{2}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$Cov(X,Y) = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow$ NO incorreladas

c) $E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x|y)\, dx$

$$f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \quad \begin{cases} 0 \le x, y \le 1 \\ -1 \le x, y \le 0 \end{cases}$$

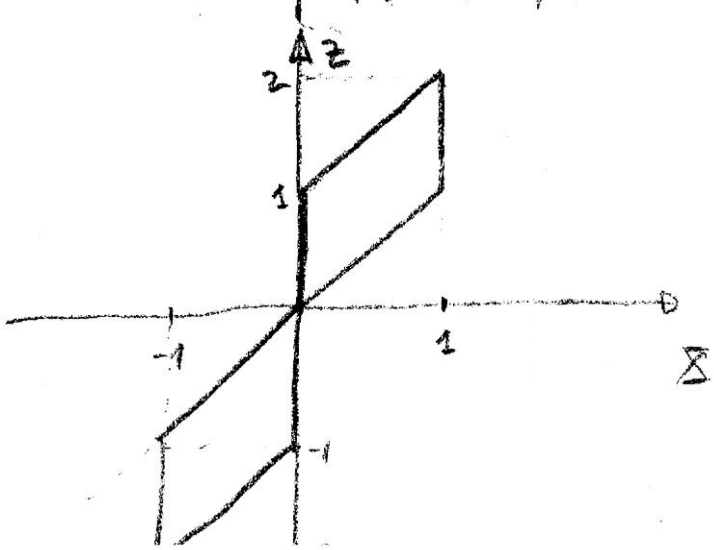
$$E(X|Y=y) = \begin{cases} \int_0^1 x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} & 0 < y < 1 \\ \int_{-1}^0 x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^0 = -\frac{1}{2} & -1 < y < 0 \end{cases}$$

d) $\left.\begin{matrix} Z = X + Y \\ W = X \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = w \\ y = z - w \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{f_{XY}(x,y)}{|J(x,y)|} = f_{XY}(w, z-w) = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} 0 \le w, z-w \le 1 \\ -1 \le w, z-w \le 0 \end{cases}$$

Como $W = X$, se tiene

$$f_{XZ}(x,z) = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \,;\ x \le z \le x+1 \\ -1 \le x \le 0 \,;\ x-1 \le z \le x \end{cases}$$



e) $Var(w) = E(w^2) - \eta_w^2$

$\eta_w = E(Z) - a\,E(Y) = 0$

$E(w^2) = E(Z^2) + a^2 E(Y^2) - 2a\,E(Z \cdot Y)$

$E(Z^2) = E(Y^2) = Var(Z) = Var(Y) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$

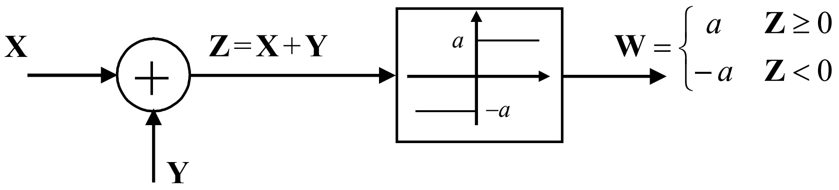
$E(Z \cdot Y) = Cov(Z, Y) = \frac{1}{4}$

Minima $\sigma_w^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_w^2}{da} = 0 \Rightarrow 2a\,E(Y^2) - 2E(Z \cdot Y) = 0 \Rightarrow$

$$a = \frac{E(Z \cdot Y)}{E(Y^2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

5/2/2008 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- En el esquema adjunto, **X** representa una v.a. discreta, con $P(\mathbf{X}=-1)=P(\mathbf{X}=+1)=1/2$, a la que se suma una v.a. **Y** con distribución $N(0,1)$ e independiente de **X**. A la v.a resultante, **Z**, se le aplica la transformación de la figura, dando como resultado una nueva v.a. **W** que toma los valores a ó $-a$, según sea el signo de **Z**.



Se pide:

a) La fdp de la v.a. **Z**. Represéntela gráficamente de forma aproximada.
b) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{W}=-a\,|\,\mathbf{X}=-1)$ y $P(\mathbf{W}=a\,|\,\mathbf{X}=1)$.
c) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{X}=-1\,|\,\mathbf{W}=-a)$ y $P(\mathbf{X}=1\,|\,\mathbf{W}=a)$.
d) La covarianza de **X** y **W**.
e) El valor de la constante a que minimiza $\varepsilon=E[(\mathbf{W}-\mathbf{X})^2]$.

(5 puntos)

2.- Sean **X** y **G** dos v.a.'s independientes y con distribución uniforme en (0,1). Se realizan las transformaciones **Y** = **GX**, **Z** = **X**.

a) Calcule la fdp conjunta de (**Y**, **Z**) y dibuje su rango en el plano (y,z).

Suponga, ahora, que $\mathbf{X}[n]$ es un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, con fdp de primer orden uniforme en (0,1). Se forma el proceso $\mathbf{Y}[n]=\mathbf{G}\mathbf{X}[n]$, siendo **G** una va uniforme en (0,1) e independiente de $\mathbf{X}[n]$.

b) Calcule la fdp de primer orden del proceso $\mathbf{Y}[n]$.
c) Calcule la fdp condicionada $f_Y(y,n|\mathbf{G}=g)$ y la media condicionada $E(\mathbf{Y}[n]|\mathbf{G}=g)$.
d) Calcule la media y la autocorrelación de $\mathbf{Y}[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?
e) Se hace pasar $\mathbf{X}[n]$ por un sistema lineal e invariante, de respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]-a\delta[n-1]$, obteniéndose el proceso $\mathbf{W}[n] = \mathbf{X}[n]*\mathrm{h}[n]$. Calcule la autocorrelación de $\mathbf{W}[n]$.

(5 puntos)

Examen: 5/2/08		Publicación de notas:	27/2/08
Revisión: 3/3/08		Publicación resultados revisión:	4/3/08

$$X \;\; uniforme \;\; \text{en}\,(x_1, x_2): \quad E[X] = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad Var[X] = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ **para** $0 \le x \le 3.89$ **en pasos de** 0.01

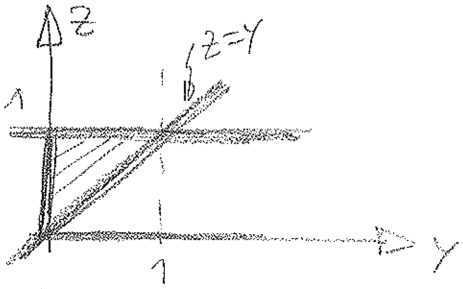
$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Examen:	5/2/08	Publicación de notas:	27/2/08
Revisión:	3/3/08	Publicación resultados revisión:	4/3/08

PROBLEMA 2, 5/2/2008

a) $\left.\begin{array}{l} Y = gX \\ Z = X \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x_1 = z \\ g_1 = y/z \end{array}\right\}$ $J(x,g) = \begin{vmatrix} g & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x$

$\left.\begin{array}{l} f_X(x) = 1,\ x \in (0,1) \\ f_G(g) = 1,\ g \in (0,1) \end{array}\right\}$ $f_{YZ}(y,z) = \dfrac{f_X(x_1) f_G(g_1)}{|J(x_1,g_1)|} = \dfrac{1}{z},\ \begin{array}{l} z \in (0,1) \\ y \in (0,z) \end{array}$



b) $f_{YX}(y,x) = \dfrac{1}{x},\ \begin{array}{l} x \in (0,1) \\ y \in (0,x) \end{array}$

$f_Y(y) = \displaystyle\int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\ln y,\ y \in (0,1)$

c) $(Y[n]/G=g) \rightarrow U(0,g)$

$f_Y(y,n/G=g) = \dfrac{1}{g},\ y \in (0,g)$

$E(Y[n]/G=g) = g\,E(X[n]) = g/2$

d) $E(Y[n]) = E(G \cdot X[n]) = E(G)\,E(X[n]) = (1/2)(1/2) = 1/4$

$n_1 \neq n_2$: $R_Y[n_1,n_2] = E(Y[n_1]\,Y[n_2]) = E(G^2)\,E(X[n_1])\,E(X[n_2]) =$

$= (1/3)(1/2)(1/2) = 1/12$

$n_1 = n_2$: $R_Y[n,n] = E(Y^2[n]) = E(G^2)\,E(X^2[n]) = (1/3)(1/3) = 1/9$

$R_Y[m] = \begin{cases} 1/9, & m = 0 \\ 1/12, & m \neq 0 \end{cases}$

SÍ ES ESTACIONARIO

c) $R_X[m] = \begin{cases} 1/3, & m=0 \\ 1/4, & m \neq 0 \end{cases}$

$$R_{ww}[m] = R_X[m] * h[m] * h[-m] =$$

$$= R_X[m] * (\delta[m] - a\delta[m-1]) * (\delta[-m] - a\delta[-m-1]) =$$

$$= R_X[m] * (\delta[m] - a\delta[m+1] - a\delta[m-1] + a^2\delta[m]) =$$

$$= (1+a^2) R_X[m] - a R_X[m+1] - a R_X[m-1] =$$

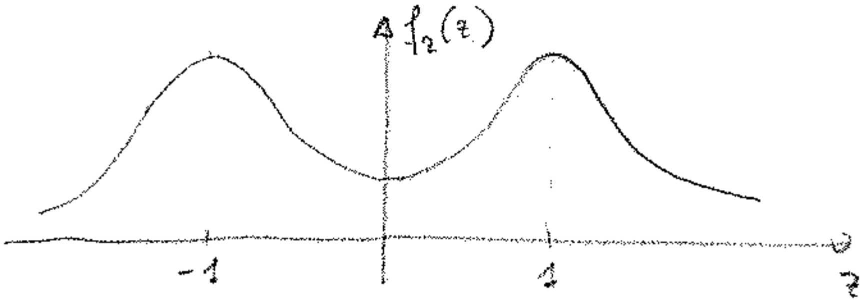
$$= \begin{cases} (1+a^2)\frac{1}{3} - \frac{a}{4} - \frac{a}{4} = \frac{1+a^2}{3} - \frac{a}{2}, & m=0 \\ (1+a^2)\frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{a}{4} = \frac{1+a^2}{4} - \frac{7a}{12}, & m = \pm 1 \\ (1+a^2)\frac{1}{4} - \frac{a}{4} - \frac{a}{4} = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2, & \text{RESTO} \end{cases}$$

1º.- a) $X=-1 \Rightarrow Z=-1+Y \Rightarrow f_Z(z|X=-1)$ es $N(-1,1)$

$X=+1 \Rightarrow Z=1+Y \Rightarrow f_Z(z|X=+1)$ es $N(1,1)$

$$f_Z(z)=f_Z(z|X=-1)\,P(X=-1)+f_Z(z|X=+1)\,P(X=+1)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z-1)^2} \quad (-\infty<z<\infty)$$



b) $P(W=-a\,|\,X=-1)=P(Z<0\,|\,X=-1)=P(-1+Y<0\,|\,X=-1)=$

$=P(Y<1\,|\,X=-1)\underset{X,Y\text{ indep}}{=}P(Y<1)=G(1)=0.8413$

$P(W=a\,|\,X=+1)=P(Z\geq 0\,|\,X=+1)=P(1+Y\geq 0\,|\,X=+1)=$

$=P(Y\geq -1\,|\,X=+1)\underset{X,Y\text{ indep}}{=}P(Y\geq -1)=1-P(Y<-1)=1-G(-1)=$

$=1-[1-G(1)]=G(1)=0.8413$

c) $P(X=-1/W=-a)\underset{\text{T. BAYES}}{=}\dfrac{P(W=-a\,|\,X=-1)\,P(X=-1)}{P(W=-a)}$

$P(W=-a)=P(W=-a\,|\,X=-1)\,P(X=-1)+P(W=-a\,|\,X=1)\,P(X=1)=$

$=\frac{1}{2}P(W=-a\,|\,X=-1)+\frac{1}{2}\left[1-P(W=a\,|\,X=1)\right]=$

$=\frac{1}{2}G(1)+\frac{1}{2}\left[1-G(1)\right]=\frac{1}{2}$

$$P(X=-1|W=-a)=\frac{G(1)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=G(1)=0.8413$$

$$P(X=1 \mid W=a) \underset{\text{T. BAYES}}{=} \frac{P(W=a \mid X=1)\, P(X=1)}{P(W=a)}$$

$$P(W=a) = 1 - P(W=-a) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1 \mid W=a) = \frac{G(1) \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = G(1) = 0.8413$$

d) $\operatorname{Cov}(X,W) = E(X \cdot W) - E(X)\, E(W)$

$$E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$E(X \cdot W) = E(X \cdot W \mid X=-1)\, P(X=-1) + E(X W \mid X=1)\, P(X=1) =$$

$$= -E(W \mid X=-1) \cdot \frac{1}{2} + E(W \mid X=1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$E(W \mid X=-1) = -a\, P(W=-a \mid X=-1) + a\, P(W=a \mid X=-1) =$$

$$= -a\, P(W=-a \mid X=-1) + a\left[1 - P(W=-a \mid X=-1)\right] =$$

$$= a\left[1 - 2P(W=-a \mid X=-1)\right] = a\left[1 - 2G(1)\right]$$

$$E(W \mid X=1) = -a\, P(W=-a \mid X=1) + a\, P(W=a \mid X=1) =$$

$$= -a\left[1 - P(W=a \mid X=1)\right] + a\, P(W=a \mid X=1) =$$

$$= a\left[2P(W=a \mid X=1) - 1\right] = a\left[2G(1) - 1\right]$$

$$E(X \cdot W) = -\frac{1}{2} a\left[1 - 2G(1)\right] + \frac{1}{2} a\left[2G(1) - 1\right] = a\left[2G(1) - 1\right]$$

$$\operatorname{Cov}(X,W) = a\left[2G(1) - 1\right] = 0.6826\, a$$

e) $\varepsilon = E(w^2) - 2E(w \cdot \mathbb{X}) - E(\mathbb{X}^2)$

$E(w^2) = (-a)^2 P(w=-a) + a^2 P(w=a) = a^2$

$E(\mathbb{X}^2) = (-1)^2 P(\mathbb{X}=-1) + 1^2 P(\mathbb{X}=1) = 1$

$E(w \cdot \mathbb{X}) = a\,[2\,G(1) - 1]$

$\varepsilon = a^2 - 2a\,[2\,G(1) - 1] + 1$

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = 2a - 2\,[2\,G(1) - 1] = 0 \Rightarrow a = 2\,G(1) - 1 = 0.6826$ //

6/9/2008 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Sean dos v.a´s **X**, **Y** Gaussianas, independientes, de media nula y varianza unidad. Se definen las v.a´s **Z**=**X**/**Y** y **W**=**Y**. Se pide:

a) La fdp conjunta de **Z** y **W** (indique su rango).

b) La fdp y la FD de **Z**.

Se definen ahora dos v.a´s **U**, **V** independientes, con fdp idéntica (Gaussiana truncada):

$$f_U(u) = \begin{cases} k\, f_X(u) & u \in (-2,2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_V(v) = \begin{cases} k\, f_X(v) & v \in (-2,2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

siendo k una constante y $f_X(x)$ la fdp de la v.a. **X**.

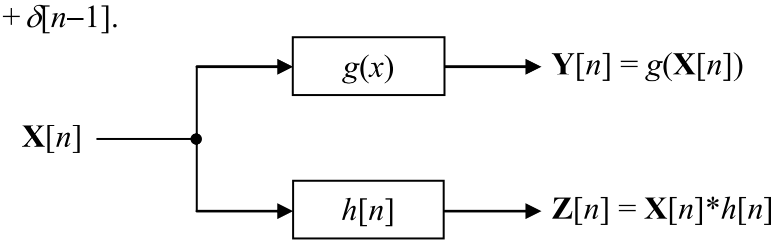
c) Determinar la fdp conjunta de la v.a. bidimensional (**U**,**V**).

d) Obtener la media de la v.a. **S**=**U**/**V**.

e) Calcular la fdp condicionada $f_S(s\,|\,\mathbf{V}=v)$.

(**5 puntos**)

2.- En el esquema de la figura, **X**[n] es un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, con fdp de primer orden $N(0,1)$; se tiene, además: $g(x)=|x|$ y $h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$.



Calcule:

a) La autocorrelación de **Y**[n].

b) La correlación cruzada de **X**[n] e **Y**[n].

c) La fdp de primer orden de **Y**[n].

d) La fdp de primer orden de **Z**[n].

e) La densidad espectral de potencia de **Z**[n]. Represéntela gráficamente de forma aproximada.

(**5 puntos**)

Examen:	6/9/08	Publicación de notas:	22/9/08
Revisión:	24/9/08	Publicación resultados revisión:	26/9/08

GAUSSIANA ó $N(\eta,\sigma): f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right]; \quad E(X) = \eta; \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ **para** $0 \le x \le 3.89$ **en pasos de** 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

İSAL, 6/9/2008, P1

a) $\left.\begin{array}{l} z = x/y \\ w = y \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x_1 = zw \\ y_1 = w \end{array}\right\}$ $f_{ZW}(z,w) = \dfrac{f_X(x_1) f_Y(y_1)}{\| J(x_1,y_1) \|}$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y} \rightarrow f_{ZW}(z,w) = \frac{|w|}{2\pi} e^{-\frac{w^2(1+z^2)}{2}}, \quad \begin{array}{l} z \in (-\infty,\infty) \\ w \in (-\infty,\infty) \end{array}$$

b) $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|w|}{2\pi} e^{-\frac{w^2(1+z^2)}{2}} dw = \frac{1}{\pi(1+z^2)}, \quad z \in (-\infty,\infty)$$

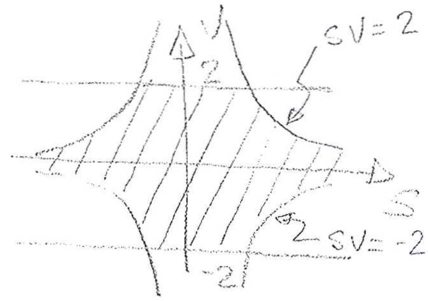
$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{d\varsigma}{\pi(1+\varsigma^2)} = \frac{\operatorname{arctg}(\varsigma)}{\pi}\Big|_{-\infty}^{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} z, \quad z \in (-\infty,\infty)$$

c) $$1 = \int_{-2}^{2} k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = k[G(2) - G(-2)] = 0.9544k \rightarrow k = 1.0478$$

$$f_{UV}(u,v) = f_U(u) f_V(v) = \frac{k^2}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} = 0{,}1747\, e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}, \quad \begin{array}{l} u \in (-2,2) \\ v \in (-2,2) \end{array}$$

d) $$E(S) = E(U/V) = \overbrace{\int_{-2}^{2} u f_U(u) du}^{\rightarrow 0} \int_{-2}^{2} \frac{1}{v} f_V(v) dv = 0$$

e) $$f_V(v) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}, \quad v \in (-2,2)$$



$$f_{SV}(s,v) = \frac{k^2 |v|}{2\pi} e^{-\frac{v^2(1+s^2)}{2}}, \quad \begin{array}{l} v \in (-2,2) \\ sv \in (-2,2) \end{array}$$

$$f_S(s / V = v) = \frac{f_{SV}(s,v)}{f_V(v)} = \frac{k|v|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2 s^2}{2}}, \quad \begin{array}{l} v \in (-2,2) \\ sv \in (-2,2) \end{array}$$

2.- a) $R_Y[n_1,n_2] = E\{Y[n_1]Y[n_2]\} = E\{g(X[n_1])\cdot g(X[n_2])\}$

$n_1 \neq n_2$:

$$R_Y[n_1,n_2] \underset{\substack{\uparrow \\ X[n_1],\, X[n_2] \text{ indep}}}{=} E\{g(X[n_1])\}\, E\{g(X[n_2])\}$$

$X[n]$ es $N(0,1)$

$$E\{g(X[n])\} = E\{|X[n]|\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x;n)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x|\, e^{-\frac{x^2}{2}}}_{PAR} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \forall n$$

$n_1 = n_2$:

$$R_Y[n_1,n_1] = E\{g^2(X[n_1])\} = E\{|X[n_1]|^2\} = E\{X^2[n_1]\} =$$

$$= Var\{X[n_1]\} + \eta_X^2[n_1] = 1 + 0 = 1$$

Por tanto ($n_1 - n_2 = m$):

$$R_Y[m] = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\delta[m] + \frac{2}{\pi}$$

b) $R_{XY}[n_1,n_2] = E\{X[n_1]Y[n_2]\} = E\{X[n_1]\, g(X[n_2])\}$

$n_1 \neq n_2$:

$$R_{XY}[n_1,n_2] \overset{\text{INDEP.}}{=} \cancelto{0}{E\{X[n_1]\}}\, E\{g(X[n_2])\} = 0$$

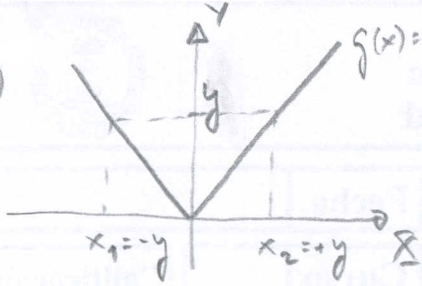
$n_1 = n_2$:

$$R_{XY}[n_1,n_1] = E\{X[n_1]\,|X[n_1]|\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x\,|x|\, e^{-\frac{x^2}{2}}}_{iMPAR} dx = 0$$

Por tanto ($n_1 - n_2 = m$)

$$R_{XY}[m] = 0 \quad \forall m$$

c)



$$g'(x)=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

$y>0$:

$$f_Y(y)=\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}+\frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (y>0)$$

$$y<0 \Rightarrow f_Y(y)=0$$

d) $Z[n]=X[n]*(\delta[n]+\delta[n-1])=X[n]+X[n-1]$

$Z[n]$ es suma de 2 v.a.'s $N(0,1)$ independientes $\Rightarrow$

$Z[n]$ es $N(\eta_Z,\sigma_Z)$, con

$\eta_Z=E\{X[n]\}+E\{X[n-1]\}=0$

$\sigma_Z^2=Var\{X[n]\}+Var\{X[n-1]\}=2$

Por tanto:

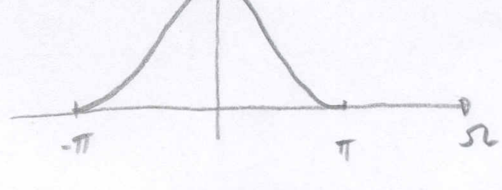
$$f_Z(z;n)=f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}} \quad (-\infty<z<\infty)$$

e) $S_Z(e^{j\Omega})=S_X(e^{j\Omega})\,|H(e^{j\Omega})|^2$

$S_X(e^{j\Omega})=1$ (ruido blanco de potencia media 1)

$H(e^{j\Omega})=\mathcal{F}\{h[n]\}=1+e^{-j\Omega}$

$S_Z(e^{j\Omega})=H(e^{j\Omega})\,H^*(e^{j\Omega})=(1+e^{-j\Omega})(1+e^{j\Omega})=2(1+\cos\Omega)$



ISAL - FEB09 - 1/5

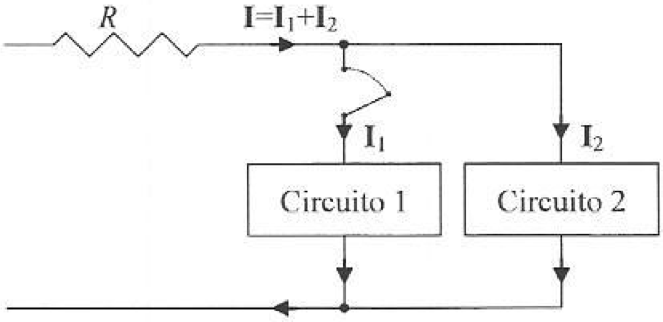
26/1/2009 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- En el esquema de la figura, una resistencia R de valor conocido es atravesada por una corriente $\mathbf{I}$, modelada como una v.a. que es suma de dos componentes:

- $\mathbf{I}_1$ toma valor 0 si el interruptor está abierto o α (siendo $\alpha>0$) si está cerrado. El estado del interruptor (abierto/cerrado) es desconocido, pero se sabe que la probabilidad de que esté cerrado es p.
- $\mathbf{I}_2$ es una v.a. exponencial de parámetro c e independiente de $\mathbf{I}_1$.

Se definen las siguientes v.a.'s:

- Caída de tensión en la resistencia R: $\mathbf{V}=\mathbf{I}\,R$
- Potencia disipada en la resistencia R: $\mathbf{W}=\mathbf{I}^2 R$



Se pide:

a) La fdp de la v.a. $\mathbf{V}$, suponiendo que el interruptor está cerrado. Represéntela gráficamente de forma aproximada.

b) La fdp de la v.a. $\mathbf{V}$. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\,dv=1$.

c) La covarianza de las v.a.'s $\mathbf{V}$ e $\mathbf{I}$.

d) La media de la v.a. $\mathbf{W}$.

e) La probabilidad de que $\mathbf{W}$ exceda un valor β (siendo $\beta\geq\alpha^2 R$). Particularice para los siguientes valores: $\beta=1$, $R=100$, $\alpha=0.1$, $p=0.5$ y $c=1$.

(5 puntos)

2.- A partir de dos procesos estocásticos $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ discretos en el tiempo, se define:

$$\mathbf{Z}[n]=\mathbf{X}[n]+\mathbf{Y}[n]$$

a) Obtenga la expresión general de la autocorrelación del proceso $\mathbf{Z}[n]$: $R_Z[n_1,n_2]$ en función de las autocorrelaciones y correlaciones cruzadas de los procesos $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$.

b) Particularice la expresión de $R_Z[n_1,n_2]$ obtenida en el apartado anterior y obtenga la densidad espectral de potencia de $\mathbf{Z}[n]$, en función de las densidades espectrales de potencia y el espectro cruzado de $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$, para los dos casos siguientes:
   1) $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio
   2) $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ estacionarios en sentido amplio y ortogonales

c) Suponga que $\mathbf{X}[n]=\mathbf{A}$, siendo $\mathbf{A}$ una v.a. de media cero y varianza σ_A^2, e $\mathbf{Y}[n]$ es un ruido blanco estacionario en sentido amplio de media cero y varianza σ_Y^2 e independiente de $\mathbf{A}$. Calcule la media y la autocorrelación del proceso $\mathbf{Z}[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?

d) A partir del resultado del apartado anterior obtenga la densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{Z}[n]$.

e) Considere ahora que $\mathbf{Z}[n]=n\mathbf{A}+\mathbf{B}$, siendo $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ v.a.'s independientes con fdp normal estándar. Calcule $P\{\mathbf{Z}[n]>k\}$ y particularice para $n=2$ y $k=5$.

(5 puntos)

Examen:	26/1/09	Publicación de notas:	16/2/09
Revisión:	20/2/09	Publicación resultados revisión:	23/2/09

EXPONENCIAL DE PARÁMETRO c : $f_X(x) = c\exp(-cx)U(x)$; $E(\mathbf{X}) = 1/c$; $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = 1/c^2$

GAUSSIANA ó $N(\eta,\sigma)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right]$; $E(\mathbf{X}) = \eta$; $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = \sigma^2$ ISAL - FEB09 - 2/5

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

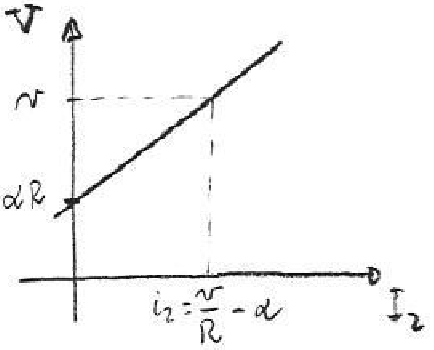
x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ para $0 \le x \le 3.89$ en pasos de 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Examen:	26/1/09	Publicación de notas:	16/2/09
Revisión:	20/2/09	Publicación resultados revisión:	23/2/09

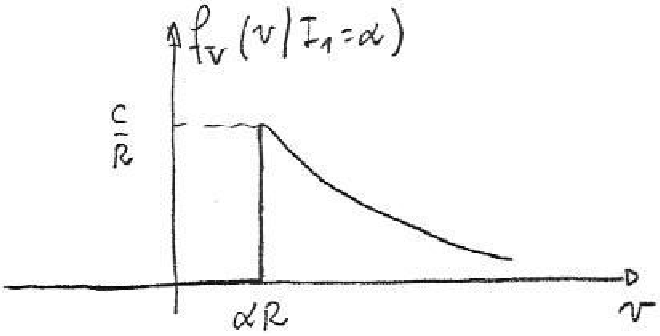
P1 a) Interruptor cerrado $\Rightarrow I_1 = \alpha \Rightarrow V = (\alpha + I_2)R = g(I_2)$



$$f_{I_2}(i_2) = \begin{cases} c\,e^{-c i_2} & i_2 \geq 0 \\ 0 & i_2 < 0 \end{cases}$$

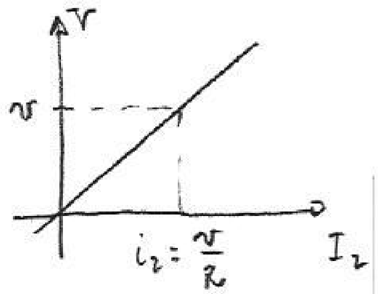
$$g(i_2) = (\alpha + i_2)R \quad ; \quad g'(i_2) = R$$

$$f_V(v \mid I_1 = \alpha) = \left.\frac{f_{I_2}(i_2)}{|g'(i_2)|}\right|_{i_2 = g^{-1}(v)} = \begin{cases} \frac{c}{R}\, e^{-c\left(\frac{v}{R} - \alpha\right)} & v \geq \alpha R \\ 0 & v < \alpha R \end{cases}$$



b) $f_V(v) = f_V(v \mid I_1 = \alpha)\overbrace{P(I_1 = \alpha)}^{=p} + f_V(v \mid I_1 = 0)\overbrace{P(I_1 = 0)}^{=1-p \equiv q}$

$I_1 = 0 \Rightarrow V = I_2 \cdot R = h(I_2)$



$$h(i_2) = i_2 R \quad ; \quad h'(i_2) = R$$

$$f_V(v \mid I_1 = 0) = \left.\frac{f_{I_2}(i_2)}{|h'(i_2)|}\right|_{i_2 = h^{-1}(v)} = \begin{cases} \frac{c}{R}\, e^{-c\frac{v}{R}} & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases}$$

$$f_V(v) = p\,\frac{c}{R}\, e^{-c\left(\frac{v}{R} - \alpha\right)}\, U(v - \alpha R) + q\,\frac{c}{R}\, e^{-c\frac{v}{R}}\, U(v)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\,dv = \frac{pc}{R}\int_{\alpha R}^{\infty} e^{-c\left(\frac{v}{R} - \alpha\right)} dv + \frac{qc}{R}\int_0^{\infty} e^{-c\frac{v}{R}} dv \overset{u = \frac{v}{R} - \alpha}{=}$$

$$= \frac{pc}{\cancel{R}}\int_0^{\infty} e^{-cu}\,\cancel{R}\,du + \frac{qc}{R}\int_0^{\infty} e^{-c\frac{v}{R}} dv = -p\,e^{-cu}\Big|_0^{\infty} - q\,e^{-c\frac{v}{R}}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= p + q = 1$$

c) $Cov(V,I) = E(V\cdot I) - E(V)\cdot E(I)$

$$E(V\cdot I) = E(I^2R) = R\,E\left[(I_1+I_2)^2\right] = R\,E\left(I_1^2+I_2^2+2I_1I_2\right) \overset{I_1, I_2 \text{ indep}}{=}$$

$$= R\left[E(I_1^2) + E(I_2^2) + 2E(I_1)E(I_2)\right]$$

$$E(V)\cdot E(I) = R\left[E(I)\right]^2 = R\left[E(I_1+I_2)\right]^2 = R\left\{\left[E(I_1)\right]^2 + \left[E(I_2)\right]^2 + 2E(I_1)E(I_2)\right\}$$

$$E(I_1) = \alpha P(I_1=\alpha) + 0\cdot P(I_1=0) = \alpha p$$

$$E(I_1^2) = \alpha^2 P(I_1=\alpha) + 0^2\cdot P(I_1=0) = \alpha^2 p$$

$$E(I_2) = \frac{1}{c} \quad ; \quad E(I_2^2) = Var(I_2) + \left[E(I_2)\right]^2 = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{2}{c^2}$$

$$Cov(V,I) = R\left\{E(I_1^2) - \left[E(I_1)\right]^2 + E(I_2^2) - \left[E(I_2)\right]^2\right\} =$$

$$= R\left(\alpha^2 p - \alpha^2 p^2 + \frac{1}{c^2}\right) = R\left(\alpha^2 p q + \frac{1}{c^2}\right) \;//$$

d) $$E(W) = E(I^2R) = R\left[E(I_1^2) + E(I_2^2) + 2E(I_1)E(I_2)\right] =$$

$$= R\left(\alpha^2 p + \frac{2}{c^2} + 2\alpha p\frac{1}{c}\right) //$$

e) $$P(W>\beta) = P(W>\beta \mid I_1=\alpha)\,P(I_1=\alpha) + P(W>\beta \mid I_1=0)\,P(I_1=0) =$$

$$= p\,P\left[(\alpha+I_2)^2R > \beta \mid I_1=\alpha\right] + q\,P\left(I_2^2R > \beta \mid I_1=0\right) \overset{I_1, I_2 \text{ indep.}}{=}$$

$$= p\,P\left(I_2 > \sqrt{\frac{\beta}{R}} - \alpha\right) + q\,P\left(I_2 > \sqrt{\frac{\beta}{R}}\right) \overset{\beta \geq \alpha^2 R}{=}$$

$$= p\exp\left[-c\left(\sqrt{\frac{\beta}{R}} - \alpha\right)\right] + q\exp\left(-c\sqrt{\frac{\beta}{R}}\right) //$$

Para los valores dados: $P(W>1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{10}} = 0.95$ //

P2 a) $Z[n] = X[n] + Y[n]$

$$R_Z[n_1,n_2] = E[(X[n_1]+Y[n_1])(X[n_2]+Y[n_2])] =$$

$$= R_X[n_1,n_2] + R_{XY}[n_1,n_2] + R_{YX}[n_1,n_2] + R_Y[n_1,n_2]$$

b) 1) $X[n]$ e $Y[n]$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio

$$R_Z[m] = R_X[m] + R_{XY}[m] + R_{YX}[m] + R_Y[m]$$

Densidad Espectral de Potencia $\quad S_Z(\Omega) = S_X(\Omega) + S_{XY}(\Omega) + S_{YX}(\Omega) + S_Y(\Omega)$

2) $X[n]$ e $Y[n]$ estacionarios en sentido amplio $\Rightarrow R_X[m]; R_Y[m]$

$X[n]$ e $Y[n]$ ortogonales $R_{XY}[n_1,n_2] = R_{YX}[n_1,n_2] = 0 \quad \forall n_1,n_2$

$$R_Z[m] = R_X[m] + R_Y[m] \qquad S_Z(\Omega) = S_X(\Omega) + S_Y(\Omega)$$

c) $E\{Z[n]\} = E[A] + E\{Y[n]\} = \underline{\underline{0}}$

$$R_Z[n_1,n_2] = E\{(A+Y[n_1])(A+Y[n_2])\} =$$

$$= E[A^2] + \underbrace{E[A]\overset{0}{\cancel{E[Y[n_2]]}} + \overset{0}{\cancel{E[Y[n_1]]}}E[A]}_{Y[n] \text{ indep. de } A \text{ y media cero}} + E[Y[n_1]Y[n_2]] =$$

$$= E[A^2] + R_Y[n_1,n_2] \underset{(\eta_A = 0)}{=} \sigma_A^2 + R_Y[n_1,n_2]$$

$Y[n]$ Ruido blanco estacionario en sentido amplio y media cero

$$R_Y[m] = \sigma_Y^2 \delta[m]$$

luego: $R_Z[m] = \sigma_A^2 + \sigma_Y^2 \delta[m]$ $\quad$ $Z[n]$; media cte y $R_Z[m]$ Estacionario en S. amplio

d) $S_Z(\Omega) = T.F.\{R_Z[m]\} = 2\pi\sigma_A^2\delta(\Omega) + \sigma_Y^2 \quad -\pi < \Omega < \pi$ (periódica de periodo 2π)

e) $P\{Z[n] > K\} = P\{nA + B > K\}$ $\quad$ (A, B v.a.'s gauss. indep.)

$nA+B$ gaussiana $N(\eta,\sigma)$ $\begin{cases} \eta = E[nA+B] = nE[A] + E[B] = 0 \\ \sigma^2 = n^2\sigma_A^2 + \sigma_B^2 = n^2+1 \end{cases}$

$$P\{nA+B>K\} = 1 - G\left(\frac{K-\eta}{\sigma}\right) = 1 - G\left(\frac{K}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

Para $\begin{matrix} n=2 \\ K=5 \end{matrix}$ $\quad P\{nA+B>K\} = P\{2A+B>5\} = 1 - G(\sqrt{5}) \simeq \underline{\underline{0.0125}}$

1/09/2009 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Sean **X** e **Y** dos v.a.'s uniformes en $(0,1)$ e independientes, a partir de las cuales se definen otras dos v.a.'s **V** y **W**, siendo: $\mathbf{V}=e^{\mathbf{X}}$, $\mathbf{W}=e^{\mathbf{Y}}$. Se pide:

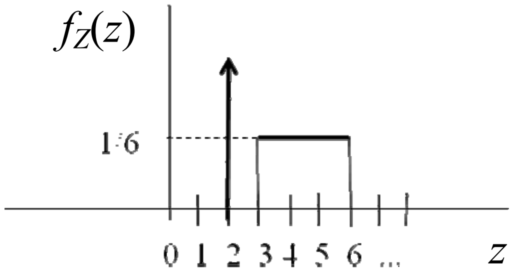
a) La fdp conjunta $f_{VW}(v,w)$ (no olvide el rango o recorrido).

b) Las fdps marginal $f_V(v)$ y condicionada $f_V(v\,|\,\mathbf{W}=w)$. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)dv = 1$.

c) $E(\mathbf{V}\mathbf{W})$, $E(\mathbf{V})$ y covarianza de **V** y **W**.

d) $P(\mathbf{W} \geq \mathbf{V}\, e^{3/4})$.

e) Encuentre una transformación $g(\cdot)$ de forma que la v.a. $\mathbf{Z}=g(\mathbf{X})$ tenga la fdp de la figura:



(**5 puntos**)

2.- Sean $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ dos p.e.'s discretos en el tiempo e independientes. $\mathbf{X}[n]$ es un p.e. binario, con probabilidades $P(\mathbf{X}[n]=1)=p$ y $P(\mathbf{X}[n]=0)=1-p=q$. $\mathbf{Y}[n]$ es un ruido blanco estricto, con f.d.p. de primer orden $N(0,\sigma)$. Se define, además, el p.e. suma: $\mathbf{Z}[n]=\mathbf{X}[n]+\mathbf{Y}[n]$. Calcule:

a) La media y varianza de $\mathbf{Z}[n]$.

b) La f.d.p. de primer orden de $\mathbf{Z}[n]$.

c) La covarianza cruzada de los procesos $\mathbf{Z}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$.

Sea ahora el nuevo p.e. $\mathbf{V}[n]=g\{\mathbf{Z}[n]\}$, donde:

$$g(z)=\begin{cases} z-1 & z\leq 2 \\ 1 & z>2 \end{cases}$$

Para $p=0.75$ y $\sigma=2$, obtenga:

d) La f.d.p. de primer orden de $\mathbf{V}[n]$ (no olvide el rango o recorrido).

e) La probabilidad $P(0\leq \mathbf{V}[n]\leq 1)$.

(**5 puntos**)

DATOS DE INTERÉS AL DORSO →

UNIFORME en (x_1, x_2): $E(\mathbf{X}) = (x_1 + x_2)/2$; $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = (x_2 - x_1)^2/12$

GAUSSIANA ó $N(\eta,\sigma)$: $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right]$; $E(\mathbf{X}) = \eta$; $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = \sigma^2$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ para $0 \le x \le 3.89$ en pasos de 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Examen:	1/9/09	Publicación de notas:	22/9/09
Revisión:	28/9/09	Publicación resultados revisión:	29/9/09

1/9/09

P1

a) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ & 0<y<1 \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$ $\qquad V = e^X \quad W = e^Y$

X e Y v.a's independientes $\rightarrow$ V, W independientes

$$f_V(v) = \left.\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right|_{x=\ln v} = \left.\frac{1}{|e^x|}\right|_{x=\ln v} = \frac{1}{v} \qquad 1<v<e$$

$$f_W(w) = \frac{1}{w} \qquad 1<w<e$$

luego $f_{VW}(v,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{vw} & 1<v<e \\ & 1<w<e \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$

b) $f_V(v) = \frac{1}{v} \quad 1<v<e$

$$f_V(v/w) \underset{\substack{\uparrow \\ V,W \text{ indp.}}}{=} f_V(v) \quad \Big\} \begin{matrix} 1<v<e \\ 1<w<e \end{matrix}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\,dv = \int_1^e \frac{1}{v}\,dv = \ln(v)\Big|_1^e = 1$$

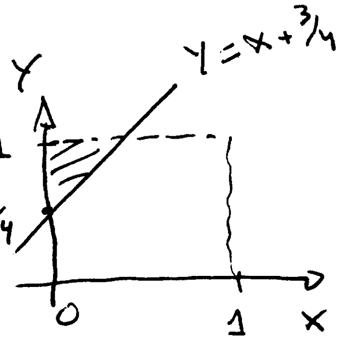
c) $E[V] = \int_1^e v\,\frac{1}{v}\,dv = (e-1) \qquad E[W] = (e-1)$

$$E[VW] \underset{\substack{\uparrow \\ V,W \text{ indep.}}}{=} E[V]\,E[W] = (e-1)^2$$

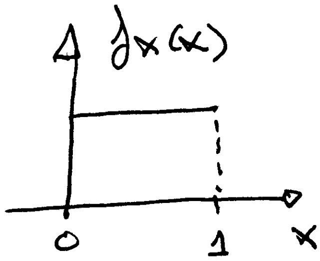
$$C[VW] = E[VW] - E[V]E[W] = 0$$

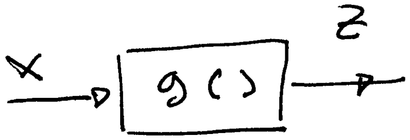
d) $P\{W \geq V e^{3/4}\} = P\{\ln(w) \geq \ln(v) + 3/4\} =$

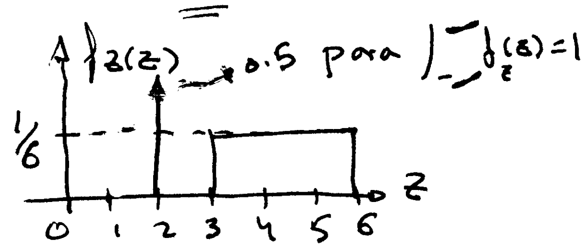
$$= P\{Y \geq X + 3/4\} = \int_{\substack{3/4 \\ (Y)}}^{1} \int_0^{Y-3/4} dx\,dy = \frac{1}{32}$$



e)







Una posible $g()$ sería

$$Z = g(x) = \begin{cases} 2 & 0<x<0.5 \\ 6 \cdot x & 0.5<x<1 \end{cases}$$

PROBLEMA 2 $\qquad$ 1/9/09 (HOJA 1/2)

a) $E(Z[n]) = E(X[n]) + E(Y[n]) = p + 0 = p$

$Var(Z[n]) = Var(X[n]) + Var(Y[n]) = \underline{pq + \sigma^2}$

b) $(Z[n]/X[n]=k) \rightarrow N(k,\sigma)$

$$f_Z(z,n) = f_Z(z,n/X[n]=1)\,P(X[n]=1) + f_Z(z,n/X[n]=0)\,P(X[n]=0)$$

$$f_Z(z,n) = \underbrace{\frac{p}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}}}_{pN(1,\sigma)} + \underbrace{\frac{q}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}}_{qN(0,\sigma)}, \quad z\in(-\infty,\infty)$$

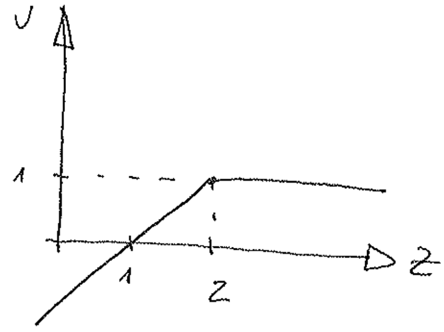
c) $C_{ZY}[n_1,n_2] = E(Z[n_1]Y[n_2]) - E(Z[n_1])\cancel{E(Y[n_2])}^{0} =$

$= E\{(X[n_1]+Y[n_1])Y[n_2]\} = E(X[n_1])\cancel{E(Y[n_2])}^{0} + E(Y[n_1]Y[n_2]) =$

$= R_Y[n_1,n_2] = \begin{cases}\sigma^2, & n_1 = n_2\\ 0, & n_1 \neq n_2\end{cases}$ $\Big|$ $C_{ZY}[n_1,n_2] = C_{ZY}[m] = \sigma^2\delta[m]$, $m = n_1 - n_2$

d) $\underline{v\in(-\infty,1)}$: $f_V(v,n) = \dfrac{f_Z(z_1,n)}{|g'(z_1)|}$

$\left.\begin{array}{l} g'(z_1) = 1\\ z_1 = v+1\end{array}\right\}$



$$f_V(v,n) = \frac{p}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-v^2/2\sigma^2} + \frac{q}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(v+1)^2}{2\sigma^2}}$$

$\underline{v=1}$: $P(V[n]=1) = P(Z[n]>2) = 1 - F_Z(2,n) =$

$= 1 - \left[p\, G\left(\frac{2-1}{\sigma}\right) + q\, G\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right] = 1 - \left[0.75\, G(0.5) + 0.25\, G(1)\right] = 0.27$

$$f_V(v,n) = \frac{p}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-v^2/2\sigma^2} + \frac{q}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(v+1)^2}{2\sigma^2}} + 0.27\,\delta(v-1), \quad v\in(-\infty,1]$$

PROBLEMA 2 1/9/09 (HOJA 2/2)

e) $P(0 \leq V[n] \leq 1) = F_V(1,n) - F_V(0,n) =$

$= 1 - \left[p\, G\left(\frac{0}{\sigma}\right) + q\, G\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right] = 1 - \left[0.75\, G(0) + 0.25\, G(0.5)\right] =$

$= \underline{0.45}$

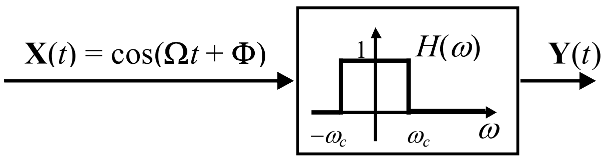
29/1/2010 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Sean **X** e **Y** dos v.a.'s uniformes en $(-1,3)$ e independientes. A partir de ellas se definen otras dos v.a.'s **U** y **V**, siendo: $\mathbf{U}=(\mathbf{X}+\mathbf{Y})/2$, $\mathbf{V}=(\mathbf{X}-\mathbf{Y})/2$.

a) Determine la fdp conjunta $f_{UV}(u,v)$ (dibuje el rango o recorrido).
b) Determine las fdps marginales $f_U(u)$ y $f_V(v)$.
c) Determine las FDs marginales $F_U(u)$ y $F_V(v)$.
d) ¿Son las v.a.'s **U** y **V** ortogonales? ¿Están incorreladas?
e) Demuestre que $P(\mathbf{U}\,\mathbf{V}<0) = P(|\mathbf{X}|<|\mathbf{Y}|)$ y calcule dicha probabilidad.

(**5 puntos**)

2.- En el esquema adjunto, $\mathbf{X}(t) = \cos(\mathbf{\Omega} t + \mathbf{\Phi})$ representa una señal aleatoria, donde $\mathbf{\Omega}$ es una v.a. con distribución uniforme en (ω_1,ω_2) (siendo $0<\omega_1<\omega_2$) e independiente de $\mathbf{\Phi}$; ésta, a su vez, es una v.a. discreta que puede tomar los valores 0, $\pi/2$, π, y $3\pi/2$ con igual probabilidad . El proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$ pasa por un filtro paso bajo ideal de ancho de banda $\omega_c < \omega_1$, dando como resultado un nuevo proceso $\mathbf{Y}(t)$.



Se pide:

a) La media condicionada $E[\mathbf{X}(t) \mid \mathbf{\Omega} = \omega]$.
b) La media del proceso $\mathbf{X}(t)$.
c) La autocorrelación del proceso $\mathbf{X}(t)$ comprobando que es estacionario en sentido amplio
d) La densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{X}(t)$.
e) La autocorrelación del proceso a la salida del filtro $\mathbf{Y}(t)$.

(**5 puntos**)

X *v.a. uniforme* en (x_1,x_2): $\quad E[X]=\dfrac{x_1+x_2}{2}; \qquad Var[X]=\dfrac{(x_2-x_1)^2}{12}$

$$x(t)=\frac{\sin(a\,t)}{\pi\,t} \quad \leftrightarrow \quad X(\omega)=\Im(x(t))=\begin{cases}1 & |\omega|<a\\ 0 & |\omega|\geq a\end{cases} \qquad (a>0)\ \Im \textit{ es la transformada de Fourier}$$

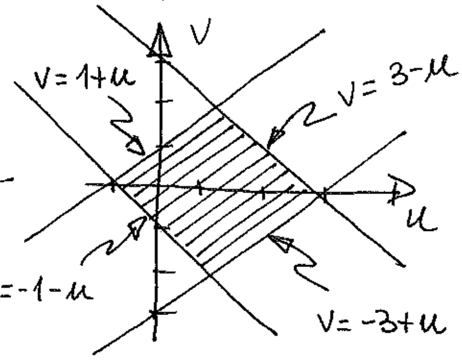
Examen:	29/1/10	Publicación de notas:	19/2/10
Revisión:	25/2/10	Publicación resultados revisión:	26/2/10

P1. ISAL. 29/1/2010 (1/2)

a) $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 1/16, \quad x \in (-1,3), \; y \in (-1,3)$

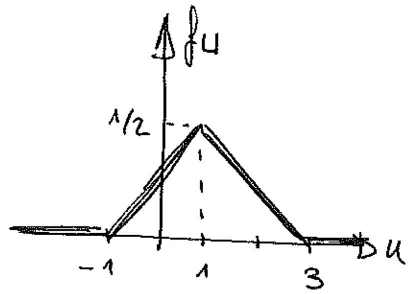
$$\left.\begin{aligned} u &= (x+y)/2 \\ v &= (x-y)/2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= u+v \\ y_1 &= u-v \end{aligned}\right\} \quad J(x,y) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{f_{XY}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|} = \frac{1}{8}, \; \Omega_{UV}$$

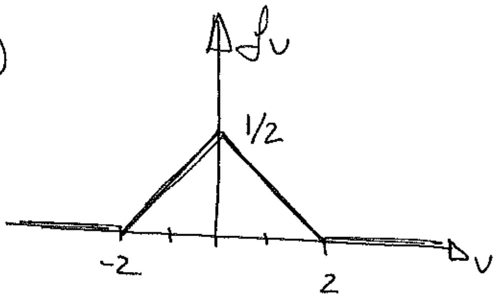


$-1 < x \to v > -1-u$
$x < 3 \to v < 3-u$
$-1 < y \to v < 1+u$
$y < 3 \to v > -3+u$

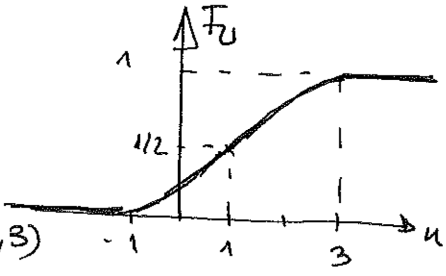
b) $$f_U(u) = \int f_{UV}(u,v)\,dv = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1-u}^{1+u} \frac{1}{8}\,dv = \frac{1+u}{4}, & u \in (-1,1) \\ \displaystyle\int_{-3+u}^{3-u} \frac{1}{8}\,dv = \frac{3-u}{4}, & u \in (-1,1) \end{cases}$$



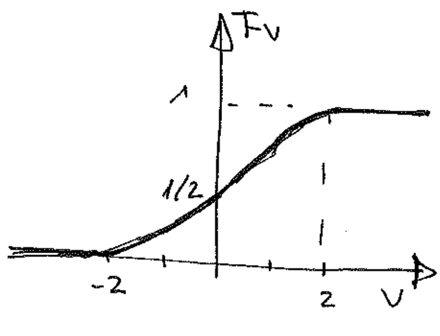
$$f_V(v) = \int f_{UV}(u,v)\,du = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1-v}^{3+v} \frac{1}{8}\,du = \frac{2+v}{4}, & v \in (-2,0) \\ \displaystyle\int_{-1+v}^{3-v} \frac{1}{8}\,du = \frac{2-v}{4}, & v \in (0,2) \end{cases}$$



c) $$F_U(u) = \int_{-\infty}^{u} f_U(\xi)\,d\xi = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{u} \frac{1+\xi}{4}\,d\xi = \frac{(1+u)^2}{8}, & u \in (-1,1) \\ \displaystyle\frac{1}{2} + \int_{1}^{u} \frac{3-\xi}{4}\,d\xi = \frac{6u-u^2-1}{8}, & u \in (1,3) \end{cases}$$



$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{v} f_V(\xi)\,d\xi = \begin{cases} \displaystyle\int_{-2}^{v} \frac{2+\xi}{4}\,d\xi = \frac{4+4v+v^2}{8}, & v \in (-2,0) \\ \displaystyle\frac{1}{2} + \int_{0}^{v} \frac{2-\xi}{4}\,d\xi = \frac{4+4v-v^2}{8}, & v \in (0,2) \end{cases}$$



P1. ISAL. 29/1/2010 (2/2)

d) $E(U) = E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{E(X)+E(Y)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

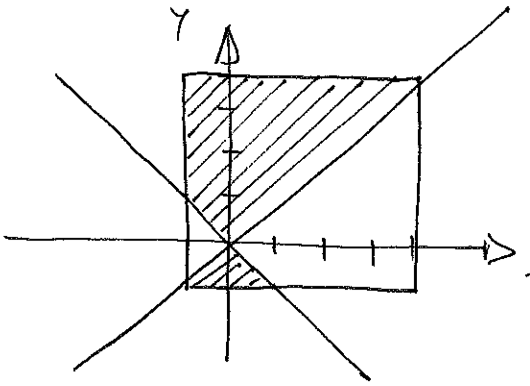
$E(V) = E\left(\frac{X-Y}{2}\right) = \frac{E(X)-E(Y)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$

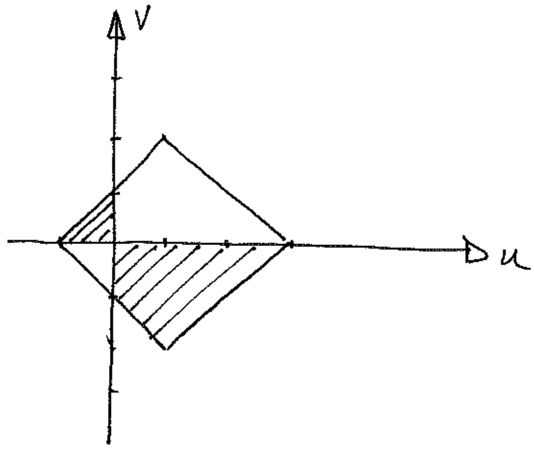
$E(UV) = E\left[\left(\frac{X+Y}{2}\right)\left(\frac{X-Y}{2}\right)\right] = \frac{E(X^2)-E(Y^2)}{4} = 0$

$C_{UV} = E(UV) - E(U)E(V) = 0$

U, V son ortogonales y están incorreladas.

e) $P(UV<0) = P\left(\frac{X+Y}{2} \cdot \frac{X-Y}{2} < 0\right) = P(X^2 < Y^2) = P(|X| < |Y|) = \frac{1}{2}$





P2. ISAL Febrero 2010. Solución. (1 punto cada apartado)

a) $E[X(t) \mid \Omega=\omega] = E[\cos(\Omega t + \Phi) \mid \Omega = \omega] =$

$= E[\cos(\omega t + \Phi)] = \sum_{\substack{\Phi=\phi_i \\ i=1..4}} \cos(\omega t + \phi_i) P(\Phi = \phi_i) =$

$\phi_1 = 0,\ \phi_2 = \frac{\pi}{2},\ \phi_3 = \pi,\ \phi_4 = \frac{3\pi}{2}$

$= \cos(\omega t)\cdot\frac{1}{4} + \operatorname{sen}(\omega t)\cdot\frac{1}{4} + (-\cos(\omega t))\cdot\frac{1}{4} + (-\operatorname{sen}(\omega t))\cdot\frac{1}{4} =$

$= 0$ (1 punto)

b) $E[X(t)] = E[\cos(\Omega t + \Phi)] = E[\cos\Omega t \cdot \cos\Phi - \sin\Omega t \cdot \sin\Phi] =$

$\underset{\Omega \text{ y } \Phi \text{ indep.}}{=} E[\cos\Omega t]\cdot \underbrace{E[\cos\Phi]}_{0} - E[\sin\Omega t]\cdot\underbrace{E[\operatorname{sen}\Phi]}_{0} = 0$

(1 punto)

c) $R_X(t+\tau, t) = E[X(t+\tau)\, X(t)] =$

$= E[\cos(\Omega t + \Omega\tau + \Phi)\cdot\cos(\Omega t + \Phi)] = \frac{1}{2} E[\cos\Omega\tau + \cos(2\Omega t + \Omega\tau + 2\Phi)] =$

$= \frac{1}{2}\left[E[\cos\Omega\tau] + E[\cos(2\Omega t + \Omega\tau)\cos 2\Phi - \sin(2\Omega t + \Omega\tau)\operatorname{sen} 2\Phi]\right] =$

$= \frac{1}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\omega\tau \cdot \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)}\, d\omega + \frac{1}{2}\left[E[\cos(2\Omega t + \Omega\tau)]\cdot E[\cos 2\Phi] - E[\sin(2\Omega t + \Omega\tau)]\cdot E[\sin 2\Phi]\right]$

como

$E[\cos 2\Phi] = \cos(2\cdot 0)\cdot\frac{1}{4} + \cos(2\cdot\frac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{4} + \cos(2\cdot\pi)\cdot\frac{1}{4} + \cos(\frac{3\pi}{2}\cdot 2)\cdot\frac{1}{4} = 0$

$E[\sin 2\Phi] = \sin(2\cdot 0)\cdot\frac{1}{4} + \sin(2\cdot\frac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{4} + \operatorname{sen}(2\cdot\pi)\cdot\frac{1}{4} + \sin(\frac{3\pi}{2}\cdot 2)\cdot\frac{1}{4} = 0$

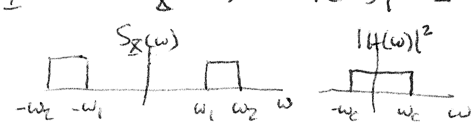
entonces

$R_X(t+\tau, t) = \frac{1}{2(\omega_2-\omega_1)}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos\omega\tau\, d\omega = \frac{1}{2(\omega_2-\omega_1)\tau}\sin\omega\tau\Big]_{\omega_1}^{\omega_2} =$

$= \frac{1}{2\tau(\omega_2-\omega_1)}(\sin(\omega_2\tau) - \operatorname{sen}(\omega_1\tau)) = R_X(\tau)$ e.s.a.

d) $S_X(\omega) = \mathcal{F}[R_X(\tau)] = \frac{\pi}{2(\omega_2-\omega_1)}\mathcal{F}\left[\frac{\sin\omega_2\tau}{\pi\tau} - \frac{\operatorname{sen}\omega_1\tau}{\pi\tau}\right] = \begin{cases} \frac{\pi}{2(\omega_2-\omega_1)} & |\omega| \in (\omega_1, \omega_2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

e) $S_Y(\omega) = S_X(\omega)\cdot|H(\omega)|^2 = 0$ ya que $\omega_c < \omega_1$



$\Rightarrow R_Y(\tau) = 0 \quad \forall\tau$