www.simplyjarod.com

ISAL

Carpeta de Montero Espinosa (resuelta en 2004)

TEMA 1: TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

1.1 Definiciones

Experimento aleatorio

Se trata de una prueba que cumple las siguientes propiedades:
- Se puede repetir tantas veces como sea necesario sin que por ello cambie el contexto.
- El resultado es umpredecible.
- A medida que repetimos el experimento los resultados definen un cierto modelo de regularidad.

Espacio muestral

Conjunto de resultados posibles asociados a un experimento aleatorio. Normalmente lo denotaremos con la letra griega omega mayúscula Ω.

Suceso

Cualquier subconjunto del espacio muestral.

Tipos de sucesos

- Simple: Es un resultado posible que no puede descomponerse en más sucesos.
- Compuesto: Unión de sucesos simples.

Operaciones básicas entre sucesos

Sean los sucesos A y B:
- Negación $\overline{A}$: Aquel suceso que ocurre cuando no ocurre A.
- Unión $A \cup B$: Suceso que ocurre cuando ocurre A u ocurre B o ambos a la vez.
- Intersección $A \cap B$: Suceso que ocurre cuando ocurre A y también ocurre B.

Sucesos incompatibles y exhaustivos

Dados dos sucesos A y B se dice que son **incompatibles** cuando la ocurrencia de uno fuerza la no ocurrencia del otro. $P(A \cap B) = \emptyset$.

Estas dos definiciones pueden generalizarse para una colección de n sucesos.

Dados dos sucesos A y B se dice que son **exhaustivos** cuando su unión es el espacio muestral. $P(A \cup B) = 1$

Se dice que A y B forman una **partición** de Ω si y solo si son incompatibles y exhaustivos

1.4 Técnicas de enumeración

1.4.1 Variaciones sin repetición

En las variaciones el orden es importante

Variaciones sin repetición de n elementos tomados de m en m.
Son todas las maneras posibles de elegir m elementos de entre los n, de manera que los conjuntos elegidos son distintos si son distintos los elementos que los componen o bien si es distinto el orden de colocación de dichos elementos.

$$\boxed{V_{n,m} = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

1.4.2 Variaciones con repetición

Variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m.
Variaciones pudiendo repetir elementos.

$$\boxed{VR_{n,m} = n^m}$$

1.4.3 Combinaciones sin repetición

En las combinaciones el orden NO es importante

Combinaciones sin repetición de n elementos tomados de m en m.
Son todas las maneras posibles de elegir m elementos de entre los n de forma que los conjuntos elegidos son distintos entre sí si tienen distintos elementos.

Ésta es la definición de número combinatorio

$$\boxed{C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}}$$

1.4.4 Combinaciones con repetición

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m.
Combinaciones pudiendo repetir elementos.

$$\boxed{C_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

$n=3 \equiv \{a,b,c\}$; $m=2$

1.4.1. $\{ab, ac, bc, ba, ca, cb\}$ $V_{n,m} = \frac{n!}{n-m!} = \frac{3!}{1!} = 6$

1.4.2. $\{ab, ac, bc, ba, ca, cb, aa, bb, cc\}$ $VR_{n,m} = n^m = 3^2 = 9$

1.4.3. $\{ab, ac, bc\}$ $C_{n,m} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$

1.4.4. $\{ab, ac, bc, aa, bb, cc\}$ $CR_{n,m} = \binom{3+2-1}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6$

1.5 Probabilidad Condicional ver ej 1 Tema 1

Definimos la probabilidad de que ocurra un suceso A condicionado a que previamente haya sucedido un suceso B como:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Propiedades

- $0 \leq P(A/B) \leq 1$
- $P(\Omega/B) = 1$
- Si A_1 y A_2 son incompatibles: $P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1 / B) + P(A_2 / B)$
- $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$

1.6 Teorema de la Probabilidad Condicionada ej 1 T1.

Sea A y B dos sucesos del espacio muestral. Se cumple que:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)}$$

Generalizando para n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tenemos que:

TEOREMA DE LA MULTIPLICACIÓN

$$\boxed{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_n)}$$

1.7 Independencia de sucesos

Dos sucesos A y B son **independientes** si y sólo si:

$$\boxed{\begin{aligned} P(A) &= P(A/B) \\ P(B) &= P(B/A) \end{aligned}}$$

Si A y B son sucesos independientes entonces se cumple que:

$$\underline{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

1.8 Teorema de la Probabilidad Total

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades condicionadas $p(B/A_i)$. ~~El teorema de Bayes establece que las probabilidades $p(A_i/B)$ vienen dadas por la siguiente expresión~~:

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \; P(B/A_n)}$$

EJEMPLO

Tenemos una caja con 6 bolas blancas y 5 bolas negras. Extraemos dos bolas consecutivamente y sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra.

¡Este paso es fundamental! Nunca olvides definir los sucesos que aparecen en tu problema. Es importantísimo si quie-res entender el ejercicio perfectamente

Vamos a definir cada uno de los sucesos posibles:

$B_1 \equiv$ Sacar una bola blanca en la primera extracción

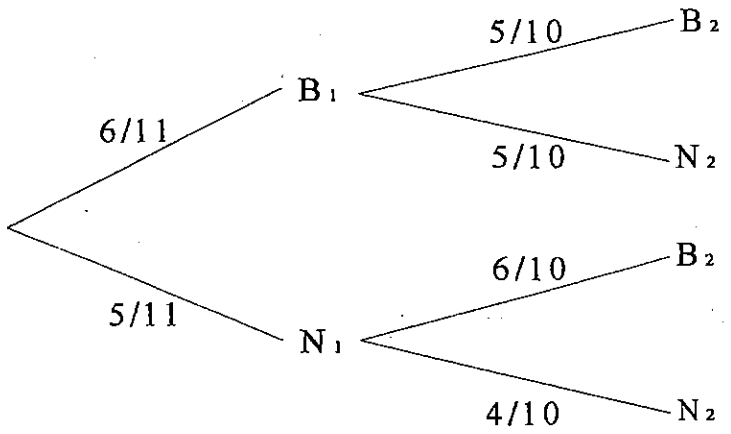
$N_1 \equiv$ Sacar una bola negra en la primera extracción

$B_2 \equiv$ Sacar una bola blanca en la segunda extracción

$N_2 \equiv$ Sacar una bola negra en la segunda extracción

Pues bien, asignados ya los nombres, nos disponemos a formar el árbol correspondiente, que es el paso fundamental de este tipo de problemas:

A la hora de hacer el árbol recuerda que la extracción es "sin reempla-zamiento". Esto significa que cuando sacamos la primera bola ya no la volvemos a meter en la caja. Por tanto cuando hacemos la segunda extracción hay sólo 10 bolas en la caja, una bola menos que al principio



Se trata ahora de aplicar el **Teorema de la probabilidad total**:

$$P(N_2) = P(B_1)\,P(N_2/B_1) + P(N_1)\,P(N_2/N_1)$$

Este paso siempre lo daremos apoyán-donos en el árbol previamente construido. En este caso hemos cogido to-dos los "caminos" que llevan a *N2*

$$P(N_2) = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}$$

y ahora sólo queda operar para hallar la probabilidad pedida:

$$P(N_2) = \frac{30}{110} + \frac{20}{110} = \frac{50}{110} = \frac{5}{11} = 0{,}454$$

¡Ojo! Por supuesto el resultado debe estar siempre entre 0 y 1

Solución: $P(N_2) = \frac{5}{11} = 0{,}4543$

1.9 Teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $p(B / A_i)$. El teorema de Bayes establece que las probabilidades $p(A_i / B)$ vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\boxed{P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \quad P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) \; + \; P(A_2) \cdot P(B / A_2) \; + \ldots + \; P(A_n) \quad P(B / A_n)}}$$

Observaciones

- Las probabilidades $p(A_i)$ se denominan probabilidades *a priori*.
- Las probabilidades $p(A_i / B)$ se denominan probabilidades *a posterior*".
- Los ejercicios en los que se utiliza Bayes suelen estar escritos en pasado con expresiones del tipo "si ha salido una bola blanca qué probabilidad hay de que ..." o "si se eligió el as de oros qué probabilidad hay de que..."
- Al igual que en el Teorema de la Probabilidad Total (estudiado en el punto anterior 1.8) antes de utilizar el Teorema de Bayes es imprescindible definir bien el significado de cada suceso así como dibujar el árbol de probabilidades. Para ver todo el procedimiento utilizaremos el ejemplo de la siguiente hoja.

EJEMPLO

Tenemos una caja con 4 bolas blancas y 7 bolas negras. Extraemos dos bolas consecutivamente y sin reemplazamiento. Si la segunda bola ha salido negra calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido blanca.

¡Este paso es fundamental! Nunca olvides definir los sucesos que aparecen en tu problema. Es importantísimo si quieres entender el ejercicio perfectamente

Vamos a definir cada uno de los sucesos posibles:

$B_1 \equiv$ Sacar una bola blanca en la primera extracción

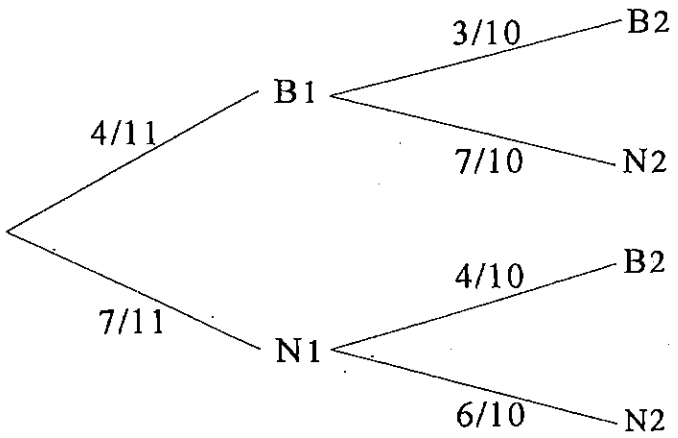
$N_1 \equiv$ Sacar una bola negra en la primera extracción

$B_2 \equiv$ Sacar una bola blanca en la segunda extracción

$N_2 \equiv$ Sacar una bola negra en la segunda extracción

Pues bien, asignados ya los nombres, nos disponemos a formar el árbol correspondiente, que es el paso fundamental de este tipo de problemas:

A la hora de hacer el árbol recuerda que la extracción es "sin reemplazamiento". Esto significa que cuando sacamos la primera bola ya no la volvemos a meter en la caja. Por tanto cuando hacemos la segunda extracción hay sólo10 bolas en la caja, una bola menos que al principio



Pista: Los ejercicios en los que se utiliza Bayes suelen estar escritos en pasado con expresiones como "ha salido" o "salió"

Se trata ahora de aplicar el **Teorema de Bayes**:

$$P(B_1/N_2) = \frac{P(B_1)\ P(N_2/B_1)}{P(B_1)\ P(N_2/B_1) + P(N_1)\ P(N_2/N_1)}$$

Este paso siempre lo daremos apoyándonos en el árbol previamente construido.

$$P(B_1/N_2) = \frac{\frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10}}$$

¡Ojo! Por supuesto el resultado debe estar siempre entre 0 y 1

y ahora sólo queda operar para hallar la probabilidad pedida:

$$P(B_1/N_2) = \frac{28/110}{28/110 + 42/110} = \frac{28/110}{70/110} = \frac{28}{70} = 0{,}4$$

Solución: $P(B_1/N_2) = \frac{28}{70} = 0{,}4$

Nota:

Queremos volver a resaltar la importancia que en este tipo de problemas tiene el árbol de probabilidades. Es importantísimo que practiques haciendo muchos. Y, ni que decir tiene que, para tener bien el árbol, siempre debes comenzar definiendo los sucesos que intervienen en el problema. Si consigues tener bien definido el árbol es muy difícil que te salga mal el problema.

TEMA 2: VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL .

2.1 Definiciones

Sea Ω un espacio muestral. Se denomina **variable aleatoria** a cualquier función del espacio muestral en los números reales:

La idea está en que a partir de ahora vamos a manejar números reales en lugar de sucesos

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{X}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad w \longrightarrow \mathbf{X}(w) \end{array}\right]$$

Llamamos **rango** o **recorrido** al conjunto de las imágenes del espacio muestral Ω en $\mathbb{R}$:

$$\left[R_X = \{\mathbf{X}(w) : \forall w \in \Omega\}\right]$$

Tipos de variables aleatorias

Se dice que una variable aleatoria $\mathbf{X}$ es **discreta** si su recorrido R_X es un conjunto finito o infinito numerable de números reales.

Se dice que una variable aleatoria $\mathbf{X}$ es **continua** si su recorrido R_X es infinito no numerable y su función de distribución es una función continua. ~~luego~~ $F(x)$ es cont $\forall x \in \mathbb{R}$

Se dice que una variable aleatoria $\mathbf{X}$ es **mixta** si su recorrido R_X es infinito no numerable y tiene puntos de discontinuidad no nula. ~~luego~~ $\exists\, x_i \in \mathbb{R} \mid F(x_i)$ no es cont.

en el x_0 donde $F(x)$ no sea cont. $F(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x)$ ~~luego~~ $F(x)$ sería cont. pero lo dado. $\lim_{x \to x_0^-} F(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} F(x)$.

2.2 Función de densidad de probabilidad (fdp)

La función de densidad de probabilidad (fdp) lo que hace es informar sobre la cantidad de probabilidad que hay en un intervalo determinado del eje de abcisas (eje x).

2.2.1 Variable aleatoria discreta

Una función $p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama función de densidad de probabilidad (fdp) de la variable aleatoria discreta $\mathbf{X}$ si cumple:

1.- $p_X(x) \geq 0$

2.- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(\mathbf{X} = k) = 1$

2.2.2 Variable aleatoria continua

Una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama función de densidad de probabilidad (fdp) de la variable aleatoria continua $\mathbf{X}$ si cumple:

1.- $f_X(x) \geq 0$

2.- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{R_X} f_X(x)\,dx = 1$

3.- f_X admite a lo más un número finito de discontinuidades sobre cada intervalo finito de $\mathbb{R}$, es decir, f_X es integrable Riemann.

Importante: Para v.a. continuas la probabilidad que hay en un punto concreto del eje x es siempre cero. Esto no es así para las v.a. discretas donde un punto puede tener probabilidad distinta de cero.

2.3 Función de distribución

La función de distribución de una cierta variable aleatoria se define como:

$$\boxed{F_X(x) = P(\mathbf{X} \leq x)}$$

Esta definición es válida tanto para v.a. continuas como discretas.

La función de distribución lo que hace es "acumular" la probabilidad que hay a la izquierda de un determinado punto del eje de abcisas (eje x). Es decir, nos informa de la cantidad de probabilidad que hay a la izquierda de cualquier punto del eje x.

Propiedades

1.- $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2.- $F_X(x)$ es no decreciente y continua por la derecha.

3.- $F_X(+\infty) = 1$

$F_X(-\infty) = 0$

$F_X(x)$ vale 1 a la derecha del R_X y vale 0 a la izquierda de R_X

4.- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ $\quad F(b) - F(a)$

$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)$ $\quad = F(b) - F(a^-)$

$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P(X = b)$ $\quad = F(b^-) - F(a)$

$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a) - P(X = b)$ $\quad = F(b^-) - F(a^-)$

$P(X = c) = F_X(c) - F_X(c^-)$

5.- La relación entre la función de distribución y la función de densidad de probabilidad (fdp) continua es la siguiente:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx}$$

En este caso la integral sólo tiene sentido para v. a. continuas. Para v.a. discretas se trata, como se puede observar, de un sumatorio

En el caso de v.a. discretas la relación es la siguiente:

$$\boxed{F_X(x) = \sum_{k=-\infty}^{x} p_X(\mathbf{X} = k)}$$

EJEMPLO

Este es un ejemplo de una variable aleatoria continua

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2/2 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Calcular los valores de k para los cuales $f(x)$ es una función de densidad y obtener su función de distribución. Calcular su media y su varianza.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx^2}{2} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$f(x)$ será función de densidad de probabilidad si verifica:

1.- $f(x) \geq 0$

2.- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Forzamos las dos condiciones:

1) $k \geq 0$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^{1} \frac{kx^2}{2}\,dx + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot dx = \frac{k}{6}\left[1 - (-1)\right] =$$

$$= \frac{k}{3} = 1 \rightarrow \boxed{k = 3}$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN: $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

TRES ZONAS:

* Si $x < -1 \rightarrow F(x) = 0$

* Si $x \in [-1,1]$:

$$\boxed{F(x)} = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^{x} \frac{3}{2}x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{2}\right|_{-1}^{x} = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(x^3+1)}$$

Supongamos que queremos calcular estas probabilidades:

- $P(x \in [0, 0'5]) = F(0'5) - F(0) = \frac{1}{16}$ (6'25 %)

$$P(0 < x < 0'5) = \int_0^{0'5} f(x)\,dx = \int_0^{0'5} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0'5} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = F(0'5) - F(0)$$

<u>NOTA</u>: $P(X = a) = 0$ (solo cuando es aleatoria continua)

<u>MEDIA</u> $\equiv$ ESPERANZA $\equiv$ VALOR PROMEDIO $\equiv$ VALOR ESPERADO $\equiv E[X]$

$$\boxed{E[X]} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = 0 + \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{3}{2} x^2\,dx + 0 = \boxed{0}$$

Caso continuo

(También se puede observar que la media es cero por la simetría que presenta $f_X(x)$ en $x=0$)

Media: $E[X] = 0$.

<u>VARIANZA</u>:

$$\boxed{V[X]} = [E[X^2] - [X]^2] = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{3}{2} x^2\,dx = \boxed{3/5}$$

EJEMPLO

Este es un ejemplo de una variable aleatoria discreta

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire una moneda tres veces. Definimos una variable aleatoria **X** como "el número de caras obtenidas". Calcular la función de densidad y la función de distribución. Calcular su media y su varianza.

Ω : conjunto de posibilidades que pueden darse (ESPACIO MUESTRAL).

$\Omega = \{ccc, cc+, c+c, c++, +cc, +c+, ++c, +++\}$

$c \to$ sale cara
$+ \to$ sale cruz $\to$ $(Card(\Omega) = 2^{\#\text{lanzamientos}} = 2^3)$

$X \to$ variable aleatoria que determina el nº de caras obtenidas tras lanzar la moneda tres veces.

Posibles valores para X: 0, 1, 2, 3 (nº opciones finita; variable discreta).

- $P(X=0) = \frac{1}{8} = P([+++])$
- $P(X=1) = \frac{3}{8} = P([c++] \cup [+c+] \cup [++c]) \overset{\text{th. prob. total}}{=} P([c++]) + P([+c+]) + P([++c])$ (disjuntos)
- $P(X=2) = \frac{3}{8}$
- $P(X=3) = \frac{1}{8}$

Nota:

$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)\, u(x-k)$

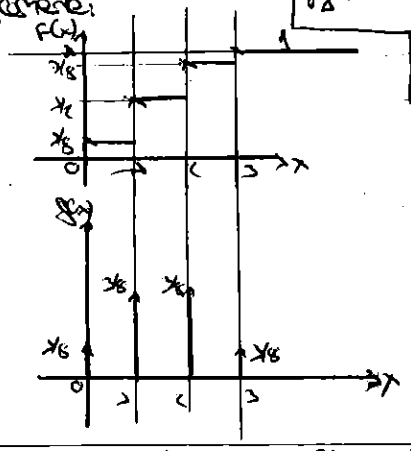
$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)\, \delta(x-k)$

FUNCIÓN DE DENSIDAD: $f_X(x)$

r	0	1	2	3
$P(X=r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{8}\delta(x) + \frac{3}{8}\delta(x-1) + \frac{3}{8}\delta(x-2) + \frac{1}{8}\delta(x-3)}$$

Gráficamente:



FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN: $F_X(x) = P(X \le x)$

* Si $x < 0 \to F(x) = 0$
* Si $0 \le x < 1 \to F(x) = 1/8$
* Si $1 \le x < 2 \to F(x) = 4/8$
* Si $2 \le x < 3 \to F(x) = 7/8$
* Si $x \ge 3 \to F(x) = 1$

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & x \in [0,1) \\ 1/2, & x \in [1,2) \\ 7/8, & x \in [2,3) \\ 1, & x \in (3,\infty) \end{cases}}$$

$$\boxed{F_X(x) = \frac{1}{8}u(x) + \frac{3}{8}u(x-1) + \frac{3}{8}u(x-2) + \frac{1}{8}u(x-3)}$$

EJEMPLO

Este es un ejemplo de una variable aleatoria mixta

Tenemos una máquina que nos devuelve aleatoriamente un número real entre 2 y 4 todos ellos con igual probabilidad. El problema es que la máquina tiene un defecto de fabricación de forma que una de cada cuatro veces nos devuelve el número 4.
Si definimos la variable aleatoria **X** como "número real que devuelve la máquina" se pide calcular la fdp y la función de distribución de dicha variable aleatoria.

fdp:

ponemos una cte porque nos dice que $\forall x \in [2,4)$, $P(x)$ es la misma

$$f(x) = \begin{cases} K, & 2 \le x < 4 \\ \frac{1}{4}, & x = 4 \end{cases} \longrightarrow \text{Se trata de hallar } K$$

$f(x)$ función de densidad de probabilidad $\rightarrow$ $\underbrace{\underbrace{\int_2^4 f_X(x)\,dx}_{\text{parte continua}} + \underbrace{P(X=4)}_{\text{parte discreta}} = 1}_{\text{condición que debe cumplir la fdp.}}$

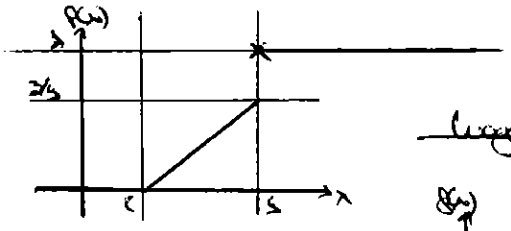
$$K \cdot 2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$\rightarrow \boxed{K = \frac{3}{8}}$$

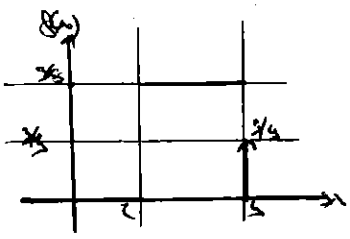
Gráficamente:

Por tanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}, & x \in [2,4) \\ \frac{1}{4}, & x = 4 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



luego



Función distribución: $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

* Si $x < 2 \rightarrow F(x) = 0$
* Si $2 \le x < 4 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_2^x \frac{3}{8}\,du = \frac{3}{8}(x-2)$
* Si $x \ge 4 \rightarrow F(x) = 1$

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{3}{8}(x-2), & x \in [2,4) \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}}$$

2.4 Transformaciones de variable aleatoria

2.4.1 Transformación de una v.a. continua en una v.a. continua

- Sea **X** una v.a. continua con rango R_X y fdp $f_X(x)$.
- Sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua estrictamente creciente o decreciente sobre R_X y tal que existe inversa φ^{-1} y admite derivada continua.
- Sea otra v.a. definida como $\mathbf{Y}=\varphi(\mathbf{X})$.

Entonces **Y** es una v.a. continua y su fdp viene definida por:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y))\cdot\left|(\varphi^{-1})'(y)\right| & si \quad y\in R_Y \\ 0 & si \quad y\notin R_Y \end{cases}$$

Por supuesto, la nueva v.a. **Y** tendrá un rango R_Y distinto al de **X** que habrá que calcular.

EJEMPLO

Sea **X** una v.a. continua con rango $R_X=(0,3)$ y fdp:

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & si \quad 0<x<3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Caracterizar la v.a. dada por $\mathbf{Y}=\mathbf{X}^2$.

$Y=\varphi(X) \to \varphi(x)=x^2$ (estrictamente creciente en $(0,3)$)

$\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1}(x)$.

Calculamos $\varphi^{-1}(x)$.

$\varphi: R_X(0,3) \longrightarrow R_Y$

$x \longrightarrow x^2$

$\varphi^{-1}: R_Y=(0,9) \longrightarrow R_X=(0,3)$

$y \longrightarrow \pm\sqrt{y}=x$

lo descartamos por $x\in(0,3)$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y))\cdot|(\varphi^{-1})'(y)| & , y\in R_Y \\ 0 & , y\notin R_Y \end{cases}$$

- $\varphi^{-1}(y)=\sqrt{y}$
- $f_X(\varphi^{-1}(y))=f_X(\sqrt{y})=\frac{y}{9}$
- $(\varphi^{-1}(y))'=\frac{\sqrt{y}}{2y}$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{18} & , \text{si } y\in R_Y=(0,9) \\ 0 & , \text{si } y\notin R_Y \end{cases}$$

Claro está que, al tratarse de una generalización del teorema anterior todos los problemas que se podían resolver con aquel teorema ahora también se pueden resolver con éste.

Ya no se exige que sea estrictamente creciente ni que tenga inversa

2.4.2 Generalización de la transformación de una v.a continua en una v.a. continua

Sucede con frecuencia que la función $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ no es estrictamente creciente ni decreciente. En ese caso el teorema de la página anterior se puede generalizar de la siguiente forma:

- Sea $\mathbf{X}$ una v.a. continua con rango R_X y fdp $f_X(x)$.
- Sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable $\forall x\in R_X$ tal que φ' es continua y $\varphi'\neq 0$ salvo en un número finito de puntos.
- Sea otra v.a. definida como $\mathbf{Y}=\varphi(\mathbf{X})$.
- Sea $\{x_1, x_2,\ldots,x_n\}$ el conjunto de las preimágenes de $y=\varphi(x)$.

Entonces $\mathbf{Y}$ es una v.a. continua y su fdp viene definida por:

$x_i = \varphi_i^{-1}(y)$

$\frac{1}{|\varphi'(\varphi_i^{-1}(y))|} = |\varphi^{-1}(y)|$

Lo hacemos con estos cambios

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{f_X(x_i)}{|\varphi'(x_i)|} & \text{si } y\in R_Y\\ 0 & \text{si } y\notin R_Y\end{cases}$$

Lo más habitual en los ejercicios es que cada imagen de la transformación φ tenga solo dos preimágenes $\{x_1, x_2\}$. En este caso la anterior fórmula queda como sigue:

Esta es la fórmula que utilizaremos habitualmente

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{f_X(x_1)}{|\varphi'(x_1)|}+\dfrac{f_X(x_2)}{|\varphi'(x_2)|} & \text{si } y\in R_Y\\ 0 & \text{si } y\notin R_Y\end{cases}$$

Al igual que antes, la nueva v.a. $\mathbf{Y}$ tendrá un rango R_Y distinto al de $\mathbf{X}$ que hay que calcular.

EJEMPLO

Sea $\mathbf{X}$ una v.a. uniforme en el intervalo $[-1, 1]$. Caracterizar la v.a. $\mathbf{Y}=\mathbf{X}^2$.

$$f_X = \begin{cases}1/2, & x\in[-1,1]\\ 0, & \text{resto}\end{cases}$$

$Y = X^2 \to \varphi(x) = x^2$ VEMOS QUE EN $[-1,1]$ $\varphi(x)$ NO ES ESTRICTAMENTE MONÓTONA, POR LO QUE TENEMOS DOS PREIMÁGENES:

$\varphi_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$,

$\varphi_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$,

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in R_X(-1,1)$

$\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1}(y)$ ↯

$\varphi(x)$ crece en $(0,1)$

$\varphi(x)$ decrece en $(-1,0)$

$\varphi(x) = x^2 \to x = \pm\sqrt{y} \to \begin{cases} x_1 = +\sqrt{y} = \varphi_1^{-1}(y)\\ x_2 = -\sqrt{y} = \varphi_2^{-1}(y)\end{cases}$

2.4.3 Transformación de una v.a continua en una v.a. discreta

- Sea **X** una v.a. continua con rango R_X y fdp $f_X(x)$.
- Sea otra v.a. definida como $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$.
- Sea $R_Y = \varphi(R_X)$ un conjunto discreto.

Entonces **Y** es una v.a. discreta y su fdp viene definida por:

$$p_Y(\mathbf{Y} = y_i) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\{x/\varphi(x)=y\}} f_X(x)dx & si \quad y \in R_Y \\ 0 & si \quad y \notin R_Y \end{cases}$$

Por supuesto, la nueva v.a. **Y** tendrá un rango R_Y distinto al de **X** que habrá que calcular.

EJEMPLO

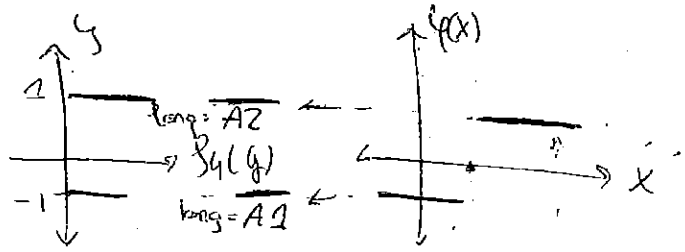
Sea **X** una v.a. continua con rango $R_X = (0, 3)$ y fdp:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Caracterizar la v.a. dada por $\mathbf{Y} = \begin{cases} -1 & si \quad \mathbf{X} < 1 \\ 0 & si \quad \mathbf{X} = 1 \\ 1 & si \quad \mathbf{X} > 1 \end{cases}$

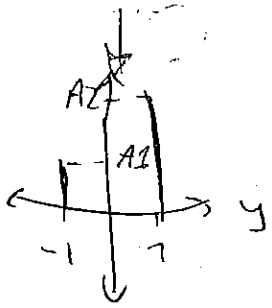
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

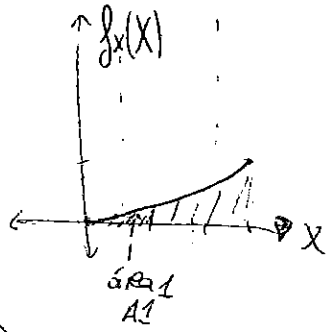
$$Y = \varphi(X) = \begin{cases} -1 & \text{si } X < 1 \\ 0 & \text{si } X = 1 \\ 1 & \text{si } X > 1 \end{cases}$$



$$A1 = \int_0^1 \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{1}{27}$$

$$A2 = \frac{26}{27}$$





$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{27} & \text{si } y = -1 \\ \frac{26}{27} & \text{si } y = 1 \end{cases}$$

Notar que no existe la transformación de v.a. discreta a v.a. continua

2.4.4 Transformación de una v.a discreta en una v.a. discreta

- Sea $\mathbf{X}$ una v.a. discreta con rango $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y fdp $p_X(\mathbf{X} = x_i)$, $\forall x_i \in R_X$.

- Sea otra v.a. definida como $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$.

Entonces $\mathbf{Y}$ es una v.a. discreta y su fdp viene definida por:

$$p_Y(\mathrm{Y} = y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in \{x \in \mathbf{R} \,/\, \varphi(x) = y\}} p_X(\mathrm{X} = x) & \text{si} \quad y \in R_Y \\ 0 & \text{si} \quad y \notin R_Y \end{cases}$$

Por supuesto, la nueva v.a. $\mathbf{Y}$ tendrá un rango R_Y distinto al de $\mathbf{X}$ que habrá que calcular.

EJEMPLO

Sea $\mathbf{X}$ la variable aleatoria que indica la suma en el lanzamiento de dos dados. Consideramos el juego siguiente: un jugador gana 5 unidades monetarias si la suma es 7 u 11, pierde 3 unidades si la suma es 3 ó 12 y no gana ni pierde en cualquier otro caso. Caracterizar la v.a. $\mathbf{Y}$ definida como "ganacia del jugador".

2.5 Parámetros de una variable aleatoria

2.5.1 Esperanza matemática (MEDIA)

La **esperanza matemática** de una variable aleatoria se define de la siguiente manera:

$$E(\mathbf{X}) = \sum_i x_i \, p_X(\mathbf{X} = x_i) \qquad \text{para v.a. discretas,}$$

$$E(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx \qquad \text{para v.a. continuas}$$

Propiedades

1.- $E(a\mathbf{X} \pm b) = E(a\mathbf{X}) \pm E(b) = a\,E(\mathbf{X}) \pm b$

2.- $E(\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) \pm E(\mathbf{Y})$

3.- Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes $\Rightarrow$ $E(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) \cdot E(\mathbf{Y})$

4.- Si $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$, la esperanza queda definida por:

$$E(g(\mathbf{X})) = \sum_i g(x_i) \, p_X(\mathbf{X} = x_i) \qquad \text{para v.a. discretas}$$

$$E(g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, f_X(x) \, dx \qquad \text{para v.a. continuas}$$

2.5.1 Varianza

La **varianza** de una variable aleatoria se define en función de la esperanza de la siguiente forma:

$$\left[V(\mathbf{X}) = E\left[\left(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}) \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^2 \, f_X(x) \, dx \right]$$

Sin embargo, nosotros normalmente no utilizaremos la anterior definición para calcular la varianza de una v.a. $\mathbf{X}$ sino que la calcularemos con la siguiente fórmula práctica:

$$\left[V(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}^2) - (E(\mathbf{X}))^2 \right]$$

Por supuesto, se puede demostrar que ambas expresiones de la varianza son equivalentes

La desviación típica se define a partir de la varianza como:

$$\left[\sigma_X = \sqrt{V(\mathbf{X})} \right]$$

Propiedades

1.- $V(a\mathbf{X} + b) = a^2 V(\mathbf{X})$

2.- Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes $\Rightarrow$ $V(\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}) = V(\mathbf{X}) + V(\mathbf{Y})$

2.6 Momentos

El concepto de esperanza se puede generalizar. Para ello vamos a definir el concepto de momento.

2.6.1 Momentos respecto al origen

Se llama **momento de orden k de la v.a. X respecto al origen**, a la esperanza matemática de $g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^k$, es decir:

Lado

$\alpha_k = m_k$

$$\left[\alpha_k = E(\mathbf{X}^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\, dx\right] \longrightarrow$$

Momento no centrado de orden k.

De esta forma, se podemos afirmar que la media es el momento respecto al origen de orden uno:

$$\left[\alpha_1 = E(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx\right] \longrightarrow$$

Media o esperanza matemática

2.6.2 Momentos respecto a la media

Lado

$\alpha_1 = E(X) = \eta$

Se llama momento respecto a la media de orden k, o momento central de orden k, de la v.a. X, a la esperanza matemática de $g(\mathbf{X}) = (\mathbf{X} - \alpha_1)^k$. Es decir:

$$\left[\mu_k = E\left[(\mathbf{X} - \alpha_1)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^k f_X(x)\, dx\right]$$

Un caso particular importante es el momento respecto a la media de orden dos que es la varianza:

Esta es la definición rigurosa de varianza

$$\left[\mu_2 = V(\mathbf{X}) = E\left[(\mathbf{X} - \alpha_1)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^2 f_X(x)\, dx\right]$$

Lado

$\mu_2 = Var(X) = \sigma_X^2$

2.7 Distribuciones importantes

Existen ciertas variables aleatorias de especial interés. Las características de cada una de estas variables aleatorias (fdp, función de distribución, momentos, etc...) son conocidas y todas ellas están recogidas en el apéndice "Distribuciones importantes". Aquí lo único que vamos a hacer es enumerar estas distribuciones.

2.7.1 Distribuciones discretas

- **Distribución binomial**
  La más conocida de las distribuciones discretas. Posee propiedad reproductiva.

- **Distribución de Poisson**
  Posee propiedad reproductiva.

- **Distribución geométrica**

- **Distribución binomial negativa**

2.7.2 Distribuciones continuas

- **Distribución normal**
  La más importante de todas las distribuciones. Posee propiedad reproductiva.

- **Distribución exponencial**

- **Distribución uniforme**
  La distribución continua más sencilla. Con esta distribución casi todos los cálculos se pueden hacer gráficamente.

2.8 Teorema central del límite

Existen muchas formas de enunciar este importante teorema. Aquí damos tres de ellas de más a menos restrictiva.

Primera versión

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ variables aleatorias independientes. Sea $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + ... + \mathbf{X}_n$. Si todas las $\mathbf{X}_i$ tienen la misma distribución entonces podemos aproximar $\mathbf{Z}$ por una v.a. normal $\mathbf{Z} \sim N(\mu_Z, \sigma_Z)$ donde $\mu_Z = \sum_{\forall i} E(\mathbf{X}_i)$ y $\sigma_Z^2 = \sum_{\forall i} V(\mathbf{X}_i)$.

Segunda versión

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ variables aleatorias independientes. Sea $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + ... + \mathbf{X}_n$. Si todas las $\mathbf{X}_i$ tienen la misma media y la misma varianza (aunque tengan distribucines distintas) entonces podemos aproximar $\mathbf{Z}$ por una v.a. normal $\mathbf{Z} \sim N(\mu_Z, \sigma_Z)$ donde $\mu_Z = \sum_{\forall i} E(\mathbf{X}_i)$ y $\sigma_Z^2 = \sum_{\forall i} V(\mathbf{X}_i)$.

Tercera versión

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ variables aleatorias independientes. Si $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + ... + \mathbf{X}_n$ entonces podemos aproximar $\mathbf{Z}$ por una v.a. normal $\mathbf{Z} \sim N(\mu_Z, \sigma_Z)$ donde $\mu_Z = \sum_{\forall i} E(\mathbf{X}_i)$ y $\sigma_Z^2 = \sum_{\forall i} V(\mathbf{X}_i)$.

TEMA 3: VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL .

En el tema precedente, hemos descrito un experimento aleatorio con la ayuda de una sola variable aleatoria. Sin embargo, en ciertas situaciones, es imposible o no deseable representar un experimento aleatorio por una sola variable aleatoria.

Por tanto, se trata ahora, en este tema, de ampliar lo ya visto en el tema anterior a experimentos aleatorios definidos mediante dos variables aleatorias.

3.1 Definiciones

Sea Ω un espacio muestral. Se denomina **variable aleatoria bidimensional** a cualquier función del espacio muestral en los números reales:

$$\left[\begin{array}{rcl} (\mathbf{X},\mathbf{Y}):\ \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ w & \longrightarrow & (\mathbf{X}(w),\ \mathbf{Y}(w)) \end{array}\right]$$

El **rango** o **recorrido** es el conjunto de las imágenes del espacio muestral Ω en $\mathbb{R}^2$:

$$\left[R_{XY} = \left\{ (\mathbf{X}(w), \mathbf{Y}(w)) : \forall w \in \Omega \right\}\right]$$

Tipos de variables aleatorias

Se dice que una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es **discreta** si su recorrido R_{XY} es un subconjunto finito o infinito numerable del plano $\mathbb{R}^2$.

Se dice que una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es **continua** si su recorrido R_{XY} es un subconjunto infinito no numerable del plano $\mathbb{R}^2$ y su función de distribución es una función continua.

En este tema, a diferencia de lo que sucedía en el anterior, no vamos a trabajar con variables aleatorias mixtas.

3.2 Función de densidad de probabilidad (fdp)

Ahora la fdp va a ser una superficie y la probabilidad va a venir representada como el volumen bajo esa superficie

Una función $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se llama función de densidad de probabilidad (fdp) de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) si cumple:

1.- $f_{XY}(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2.- f_{XY} es integrable Riemann en $\mathbb{R}^2$

3.- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx = 1$

3.3 Función de distribución

Dada la variable aleatoria bidimensional (X, Y) llamamos función de distribución conjunta a la expresión:

$$F_{XY}(x,y) = P_{XY}(\mathbf{X} \leq x,\ \mathbf{Y} \leq y)$$

La función de distribución de una v.a. bidimensional lo que hace es "acumular" la probabilidad que hay por debajo y a la izquierda de un determinado punto (x, y) del plano $\mathbb{R}^2$.

Propiedades

1.- $0 \leq F_{XY}(x,y) \leq 1$

2.- $F_{XY}(+\infty,+\infty) = 1$
$F_{XY}(-\infty,-\infty) = 0$

3.- $P(a \leq \mathbf{X} \leq b,\ \mathbf{Y} \leq d) = F(b,d) - F(a,d)$
$P(\mathbf{X} \leq b,\ c \leq \mathbf{Y} \leq d) = F(b,d) - F(b,c)$
$P(a \leq \mathbf{X} \leq b,\ c \leq \mathbf{Y} \leq d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$

4.- La relación entre la función de distribución y la función de densidad de probabilidad es la siguiente:

En este caso la integral sólo tiene sentido para v. a. continuas. Para v.a. discretas se trataría de un sumatorio

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x}$$

3.4 fdp marginales

Estos conceptos son exclusivos de v.a. bidimensionales. Por tanto, no existen para v.a. unidimensionales

Las funciones de densidad de probabilidad marginales de una determinada v.a. (X, Y) se definen como:

- v.a. continua: $\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy}$ $\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx}$

- v.a discreta: $\boxed{f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y)}$ $\boxed{f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x,y)}$

3.5 Distribuciones condicionales

La fdp de **X** condicionada por **Y** se obtiene mediante:

$$\boxed{f_X(x/\mathbf{Y}=y_0) = \frac{f_{XY}(x,y_0)}{f_Y(y_0)}}$$

y la función de distribución condicional se obtiene por integración de la fdp condicional:

$$\left[F(x/\mathbf{Y}=y_0) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u/\mathbf{Y}=y_0)\,du\right]$$

Análogamente, la fdp de **Y** condicionada por **X** se obtiene mediante:

$$\boxed{f_Y(y/\mathbf{X}=x_0) = \frac{f_{XY}(x_0,y)}{f_X(x_0)}}$$

y la función de distribución condicional se obtiene por integración de la fdp condicional:

$$\left[F(y/\mathbf{X}=x_0) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u/\mathbf{X}=x_0)\,du\right]$$

3.6 Independencia

Dos variables continuas son **independientes** si las funciones de densidad que caracterizan su distribución de probabilidad conjunta y sus fdp marginales satisfacen:

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \qquad \forall x,y}$$

Ambas definiciones son equivalentes

también se puede decir que son independientes si se cumple que:

$$\left|\begin{array}{l} f_X(x/y) = f_X(x) \\ f_Y(y/x) = f_Y(y) \end{array}\right.$$

3.7 Transformación de variable aleatoria

3.7.1 Transformación de una v.a continua en una v.a. continua

- Sea **(X, Y)** una v.a. bidimensional continua con rango R_{XY} y fdp $f_{XY}(x, y)$.
- Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función tal que $\varphi(z,t) = (z(x,y), t(x,y))$. Es decir, sea la transformación dada por las ecuaciones: $\begin{cases} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \end{cases}$

Si este determinante sale igual a cero no se puede aplicar este teorema

- Sea el determinante del jacobiano: $J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$

Entonces **(Z, T)** es una v.a. continua y su fdp viene definida por:

$$f_{ZT}(z,t) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x(z,t), y(z,t))}{|J(x(z,t), y(z,t))|} & \text{si } (z,t) \in R_{ZT} \\ 0 & \text{si } (z,t) \notin R_{ZT} \end{cases}$$

Al igual que sucedía en el tema anterior la nueva v.a. **(Z, T)** tendrá un rango R_{ZT} distinto al de **(X, Y)** que habrá que calcular.

EJEMPLO

Dada la variable aleatoria bidimensional **(X, Y)** con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{8xy}{81} & \text{si } 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

¿ $Z \in (0,6)$? $Y \in (0,3)$?

Hallar la distribución conjunta del vector aleatorio **(Z, T)** tal que $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, $\mathbf{T} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$

$Z = X + Y \longrightarrow X = Y - Z$ | $X = (X - T) - Z \longrightarrow$

$T = X - Y \longrightarrow Y = X - T$ | $Y = (Y - Z) - T \longrightarrow T = -Z$

$2X = Z + T \longrightarrow X = \dfrac{Z+T}{2}$

$2Y = Z - T \longrightarrow Y = \dfrac{Z-T}{2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1 = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

$\dfrac{\partial t}{\partial x} = 1 \; ; \; \dfrac{\partial t}{\partial y} = -1$

$f(z,t) = \dfrac{8}{4 \cdot 81}(z-T)(z+T) = \dfrac{2}{81}(z^2 - t^2)$

$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$

$f_{ZT}(z,t) = \dfrac{1}{81}(z^2 - t^2)$

$|J| = 2$

3.7.2 Transformación de v.a. bidimensional en v.a. unidimensional

En ocasiones nos definen una variable aleatoria unidimensional en función de una v.a. bidimensional:

$$\mathbf{Z} = f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

Para resolver este tipo de problemas se puede optar por tres métodos:

Primer método: Crear una v.a. "ficticia"

Como nos falta otra ecuación para poder aplicar el teorema de transformación de v.a. bidimensional en v.a. bidimensional visto en el punto 3.7.1 lo que hacemos es proceder de la siguiente forma:

Ejemplos de aplicación de este método puedes encontrarlos en:
Septiembre 00 - P1
Septiembre 99 - P1

- Definimos otra variable aleatoria ficticia y la igualamos a cualquiera de las dos ya definidas, de forma que la situación queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ \mathbf{W} &= \mathbf{X} \end{aligned}$$

- Ahora sí que tenemos un sistema de dos ecuaciones que relaciona una v.a bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ en otra v.a. bidimensional $(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$. Aplicamos, por tanto, sobre este sistema el teorema de transformación de v.a. bidimensional y obtenemos la fdp $f_{ZW}(z, w)$.

- Por último, calculamos la fdp marginal de $\mathbf{Z}$ obteniendo $f_Z(z)$ que era nuestro objetivo.

Segundo método: Calcular la función de distribución

Calculamos la función de distribución F.D. de la v.a. $\mathbf{Z}$:

$$F_Z(z) = P(\mathbf{Z} < z) = P(f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) < z) = \iint_A f_{XY}(x, y)\, dx\, dy$$

siendo $A \subset R_{XY}$ el subconjunto donde está definida la transformación $f(x, y)$.
Una vez obtenida la F.D. basta derivarla para calcular la fdp $f_X(x)$.

Tercer método: Teorema de Convolución

Fíjate que este teorema sólo es aplicable si la transformación viene definida como una suma

Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dos v.a. independientes. Definimos una nueva v.a. como $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. Entonces la fdp de $\mathbf{Z}$ viene definida por la siguiente expresión:

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\tau) f_Y(z-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\tau) f_X(z-\tau)\, d\tau$$

Ejemplos de aplicación de este teorema puedes encontrarlos en:
Febrero 00 - T1
Febrero 99 - T2

El teorema anterior se puede generalizar de la siguiente forma:

Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dos v.a. independientes. Definimos una nueva v.a. como $\mathbf{Z} = a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}$. Entonces la fdp de $\mathbf{Z}$ viene definida por la siguiente expresión:

$$f_Z(z) = \frac{1}{|ab|}\left[f_X\left(\frac{x}{a}\right) * f_Y\left(\frac{y}{b}\right) \right]$$

3.8 Parámetros de una variable aleatoria bidimensional

3.8.1 Esperanza matemática

La **esperanza matemática** de una variable aleatoria bidimensional es:

$$\boxed{E(\mathbf{XY}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy}$$

Se dice que dos v.a. **X** e **Y** son **ortogonales** si se cumple que $E(\mathbf{XY}) = 0$

Propiedades

1.- Si **X** e **Y** son independientes $\Rightarrow$ $E(\mathbf{XY}) = E(\mathbf{X})\cdot E(\mathbf{Y})$

2.- Si $\mathbf{Z} = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, la esperanza queda definida por:

$$\boxed{E(\mathbf{Z}) = E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy}$$

3.8.2 Covarianza. Coeficiente de correlación

- La **covarianza** de una variable aleatoria bidimensional (**X**, **Y**) se define como:

$$C_{XY} = E\big[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y}))\big] = \underbrace{E(\mathbf{XY})}_{\text{esperanza matemática}} - E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y})$$

- Se dice que dos v.a. **X** e **Y** están **incorreladas** si se cumple que:

$$C_{XY} = 0 \;\Leftrightarrow\; E(\mathbf{XY}) - E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y}) = 0 \;\Leftrightarrow\; E(\mathbf{XY}) = E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y})$$

Ojo: el recíproco no es cierto

- Si **X** e **Y** son independientes $\Rightarrow$ **X** e **Y** son incorreladas

- **El coeficiente de correlación** se define como:

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

donde σ_X y σ_Y son las desviaciones típicas de las v.a. **X** e **Y**.

Propiedades

1.- $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

2.- Si **X** e **Y** son independientes $\rho_{XY} = 0$

3.- $\rho_{XY} = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b$

Es decir, si el coeficiente de correlación entre dos variables es 1 o -1 podemos afirmar que ambas variables están relacionadas de forma lineal.

TEMA 4: PROCESOS ESTOCÁSTICOS

4.1 Definiciones

Sea un experimento aleatorio y Ω el espacio muestral asociado. Se denomina **proceso estocástico** (PE) a cualquier función de Ω sobre el conjunto $\{$funciones de $t\}$ que asocia a cada suceso una función de t:

$$PE: \Omega \rightarrow \{\text{funciones de } t\}$$
$$w \rightarrow \quad X(w,t)$$

Habitualmente denotaremos un proceso estocástico como $X(t)$ o bien $X[n]$ si es en tiempo discreto.

Dado un proceso estocástico, dependiendo si fijamos un suceso concreto, un instante concreto o ambos tenemos los siguientes casos:

$$\begin{cases} X(w,t) & \text{: Proceso estocástico} \\ X(w_0,t) & \text{: funcion de } t \text{ (Realización del proceso)} \\ X(w,t_1) & \text{: Variable aleatoria} \\ X(w_0,t_1) & \text{: punto, numero real (Valor concreto)} \end{cases}$$

De esta forma, si fijamos un instante de tiempo t_1 obtenemos una variable aleatoria unidimensional, es decir, una correspondencia entre sucesos y números reales.
Ahora bien, si fijamos dos instantes de tiempo t_1 y t_2 obtenemos una variable aleatoria bidimensional.

Estadísticos de primer orden son los resultantes de fijar un instante t y estudiar la variable aleatoria unidimensional resultante.

Estadísticos de segundo orden son los resultantes de fijar dos instantes t_1 y t_2 y estudiar la variable aleatoria bidimensional resultante.

4.2 Estadísticos de primer orden

[redacted]

1) Función de distribución

$$\boxed{F_X(x,t_1) = P\big(X(t_1) \le x\big)}$$

2) Función de densidad de probabilidad

$$f_X(x,t_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\big[x \le X(t_1) \le x + \Delta x\big]}{\Delta x} \qquad f_X(x,t) = \frac{\partial F_X(x,t)}{\partial x}$$

3) Esperanza

$$E\big(X(t_1)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x,t_1)\, dx$$

4) Varianza

$$V\big(X(t_1)\big) = E[X^2(t_1)] - E[X(t_1)]^2$$

4.3 Estadísticos de segundo orden

1) Función de distribución conjunta

$$\boxed{F_{X_1X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = P_{X_1X_2}(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2)}$$

2) Función de densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \frac{P_{X_1X_2}[x_1 \le X_1 \le x_1 + \Delta x_1, x_2 \le X_2 \le x_2 + \Delta x_2]}{\Delta x_1 \, \Delta x_2}$$

3) Autocorrelación

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$$

4) Autocovarianza

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - E(X(t_1))\,E(X(t_2))$$

Cuando hay más de un proceso involucrado:

5) Correlación cruzada

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)Y(t_2))$$

6) Covarianza cruzada

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - E(X(t_1))\,E(Y(t_2))$$

Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos estocásticos. Se dice que:

$X(t)$ e $Y(t)$ son **incorrelados** $\Leftrightarrow C_{XY}(t_1, t_2) = 0$

$X(t)$ e $Y(t)$ son **ortogonales** $\Leftrightarrow R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall\, t_1 \ne t_2$

$X(t)$ es **ruido blanco** $\Leftrightarrow X(t_1)$ y $X(t_2)$ son incorrelados $\forall\, t_1 \ne t_2$

$X(t)$ es **ruido blanco** $\Leftrightarrow C_X(t_1, t_2) = 0 \;\forall\, t_1 \ne t_2$

$X(t)$ es ruido blanco en sentido estricto $\Leftrightarrow X(t_1)$ y $X(t_2)$ son independientes $\forall t_1 \ne t_2$

4.4 Estacionariedad

- Se dice que un proceso es **estacionario** cuando todos sus estadísticos permanecen invariables ante un desplazamiento del origen de tiempos; es decir, cuando $X(t)$ y $X(t+\varepsilon)$ tienen los mismos estadísticos $\forall\ \varepsilon$.

- $X(t)$ es **estacionario hasta orden** n cuando todos los estadísticos hasta los de orden n permanecen invariantes ante un desplazamiento del origen de tiempos.

- Si $X(t)$ no es estacionario de orden uno, tampoco lo es de orden dos.

- Para ser estacionario de primer orden:

$$\boxed{f_X(x,t) = f_X(x, t+\varepsilon) \quad \forall\ \varepsilon}$$

La única forma de que se cumpla es que $f_X(x,t)$ no dependa de t.

- Para ser estacionario de segundo orden:

$$\boxed{f_{X_1X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_{X_1X_2}(x_1, x_2, t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon}$$

Esto implica que $f_{X_1X_2}$ sólo depende de τ siendo $\tau = (t_2+\varepsilon) - (t_1+\varepsilon)$ ó $\tau = t_2 - t_1$.

- Se dice que un proceso estocástico es **estacionario en sentido amplio** ó débilmente estacionario si su media es constante y su autocorrelación sólo depende de τ.

4.5 Densidad espectral de potencia

Definimos la **densidad espectral de potencia** de la siguiente forma:

$$\boxed{S_X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau = TF\left[R_X(\tau)\right]}$$

Sólo tiene sentido para procesos estacionarios en sentido amplio. ~~dondo~~ R_X depende sólo de τ, con $\tau = t_2 - t_1$

Propiedades de la Transformada de Fourier

1.- $a\mathbf{X}(t) + b\mathbf{Y}(t) \leftrightarrow a\mathbf{X}(\omega) + b\mathbf{Y}(\omega)$

2.- $\mathbf{X}(t - t_0) \leftrightarrow \mathbf{X}(\omega)\cdot e^{j\omega t_0}$

3.- $\mathbf{X}(-t) \leftrightarrow \mathbf{X}(\omega)$

4.- $\mathbf{X}(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \mathbf{X}(\omega - \omega_0)$

5.- $\mathbf{X}(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}\mathbf{X}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

6.- $\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega\mathbf{X}(\omega)$

7.- $t\mathbf{X}(t) \leftrightarrow j\frac{d\mathbf{X}(\omega)}{d\omega}$

Transformadas de Fourier más usuales

1.- $K \leftrightarrow 2\pi K\delta(\omega)$

2.- $\delta(t) \leftrightarrow 1$

3.- $K\delta(t) \leftrightarrow K$

4.- $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

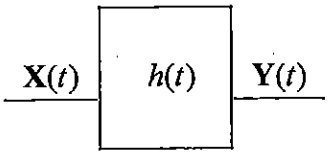
5.- $\cos(kt) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - k) + \delta(\omega + k)]$

6.- $\mathrm{sen}(kt) \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + k) - \delta(\omega - k)]$

4.6 Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Esto es de STLN: La salida de un sistema LTI se obtiene convolucionando la entrada con la respuesta al impulso.

Sea un sistema lineal e invariante (LTI), con entrada $\mathbf{X}(t)$ y salida $\mathbf{Y}(t)$:



$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot \mathbf{X}(t-\tau)d\tau$$

$\longrightarrow X(\omega) = X(\omega)\,H(\omega)$ donde $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$

$\eta_X = cte$

$R_X(\tau)$

$S_X(\omega) \to$

Si $\mathbf{X}(t)$ es estacionario en sentido amplio entonces $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{Y}(t)$ son procesos conjuntamente estacionarios en sentido amplio y existen relaciones simples entre los estadísticos media, autocorrelación y correlación cruzada de la entrada y salida:

Media

$$1)\quad E(\mathbf{Y}(t)) = \underbrace{E(\mathbf{X}(t))}_{\text{cte si es estacionario.}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt \quad \xleftrightarrow{TF} \quad E(\mathbf{Y}(t)) = \underbrace{E(\mathbf{X}(t))}_{\eta_X} H(0)$$

Correlación cruzada

$$2)\quad R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad S_{XY}(w) = S_X(w)H(w)$$

$R_{XX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau)$ $\qquad$ $S_{XX}(\omega) = S_X(\omega)\cdot H^*(\omega)$

Autocorrelación

$$3)\quad R_Y(\tau) = R_{XY} * h(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad S_Y(w) = S_{XY}(w)H(w) = S_X(w)|H(w)|^2$$

$$\boxed{S_Y(\omega) = S_X(\omega)\cdot |H(\omega)|^2}$$

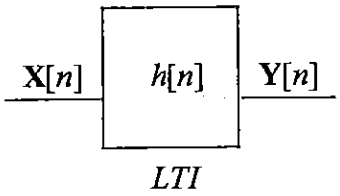
donde:

$H(w) = TF(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-jwt}dt$ es la respuesta en frecuencia del sistema LTI

$S_{XY}(w) = TF(R_{XY}(\tau))$ es el espectro cruzado de potencia

Sistemas discretos

En caso de sistemas discretos las diferencias de notación son las siguientes:



$$\mathbf{Y}[n] = \mathbf{X}[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\cdot \mathbf{X}[n-m]$$

$t \to n$

$t_1 \to n_1 \qquad t_2 \to n_2$

$\tau = t_2 - t_1 \;\to\; m = n_2 - n_1$

$h(t) \;\to\; h[n] \qquad\qquad H(w) \;\to\; H(\Omega) = H(e^{jw})$

Apéndice

Distribuciones importantes

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Tipo de v.a.: Discreta

Definición de la v.a. binomial:

Sean n ensayos repetidos e independientes donde sólo hay dos resultados posibles y las probabilidades, p y $1-p$, son las mismas en todos los ensayos. Entonces la variable aleatoria binomial se define como:

$$\boxed{\mathbf{X} = \text{"Número de éxitos en } n \text{ ensayos"}}$$

Se lee "Sea **X** una distribución binomial de parámetros n y p"

y se representa:

$$\boxed{\mathbf{X} \equiv B(n, p)}$$

Función de densidad: $\left[P(\mathbf{X} = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \ldots n \right]$ (1)

Función de distribución: $\left[P(\mathbf{X} \le x) = \sum_{i \le x} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \right]$ (2)

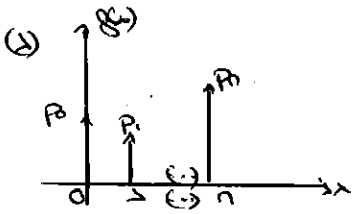
Todo

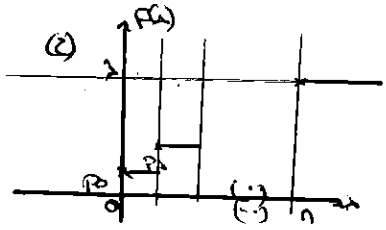
(1) $\to f(x) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,\delta(x-k)$

(2) $\to F(x) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,u(x-k)$

Momentos:

$$\begin{cases} E[\mathbf{X}] = np \\ E[\mathbf{X}^2] = np + n(n-1)p^2 \\ V[\mathbf{X}] = npq \end{cases}$$





Caso particular:

A la distribución binomial B(1, p), es decir con $n = 1$, se le denomina Distribución de Bernouilli.

Propiedad reproductiva:

La suma de variables aleatorias binomiales independientes con el mismo parámetro p es binomial con parámetro p. Sean $\mathbf{X}_1 \equiv B(n_1, p), \ldots, \mathbf{X}_m \equiv B(n_m, p)$ m distribuciones binomiales, entoncesse cumple que:

$$\mathbf{X}_1 + \ldots + \mathbf{X}_m \equiv B(n_1 + \ldots + n_m, p)$$

Aproximación por una Distribución Normal:

Siempre que se cumpla $np \ge 5$ la distribución binomial se puede aproximar por una distribución normal de la siguiente forma:

Este es un caso particular del teorema central del límite

$$\mathbf{X} \equiv B(n, p) \xrightarrow{np \ge 5} \mathbf{X} \equiv N(np, \sqrt{npq})$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Tipo de v.a.: Discreta

Definición de la v.a. de poisson:

La distribución de Poisson surge como aproximación de la distribución binomial cuando la probabilidad de que ocurra el suceso es muy pequeña (en concreto, la distribución de Poisson es buena si en la distribución binomial tenemos que $p < 0{,}1$ y $np < 5$).

Así pues, diremos que una v.a. **X** tiene una distribución de Poisson de parámetro λ si su función de densidad es:

Función de densidad: $\left[P(\mathbf{X} = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots n \right]$

Función de distribución: $\left[P(\mathbf{X} \leq x) = \sum_{r \leq x} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!} \right]$

Momentos:

$$\begin{cases} E[\mathbf{X}] = \lambda \\ E[\mathbf{X}^2] = \lambda + \lambda^2 \\ V[\mathbf{X}] = \lambda \end{cases}$$

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

Tipo de v.a.: Discreta

Definición de la v.a. geométrica:

Sea un experimento aleatorio determinado y sea A un suceso del espacio muestral correspondiente a dicho experimento aleatorio del que conocemos la probabilidad de que ocurra $P(A) = p$. Consideremos también una serie de pruebas independientes del citado experimento aleatorio, hasta que se obtiene el suceso A. La variable aleatoria geométrica se define como:

$\left[\mathbf{X} = \text{"Número de pruebas necesarias para que el suceso } A \text{ aparezca por primera vez"}\right]$ es decir

→ Número de verificaciones de A hasta obtener A

Función de densidad: $\left[p(X = x) = (1-p)^{x-1}\, p \qquad x = 0, 1, 2, \ldots n\right]$

Función de distribución: $\left[F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-(1-p)^x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}\right]$

Momentos:

$$E[\mathbf{X}] = \frac{1}{p}$$

$$E[\mathbf{X}^2] = \frac{2-p}{p^2}$$

$$V[\mathbf{X}] = \frac{1-p}{p^2}$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Tipo de variable aleatoria: Continua

Definición de la v.a. normal:

Una v.a se dice que tiene una distribución normal y se representa:

(x_0, y_0)

$$\boxed{\mathbf{X} \equiv N(0,1)}$$

x_0 = esperanza
y_0 = desviación típica = $\sqrt{V[X]}$

si su función de densidad es de la siguiente forma:

Función de densidad: $\left[f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < \infty \right]$ (1)

Función de distribución: $\left[F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = G(x) \right]$ (2)

bdo
$G(-x) = 1 - G(x)$

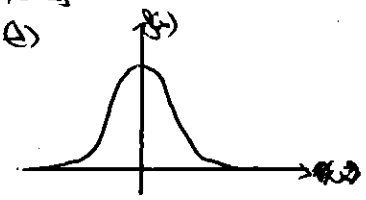
Momentos

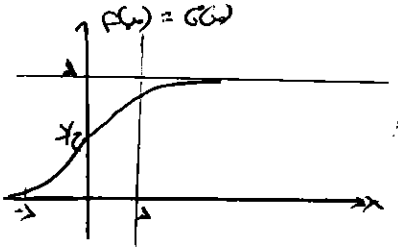
$[\mu = 0, \sigma = 1]$

$E[\mathbf{X}] = 0$

$V[\mathbf{X}] = 1$

(1)





DISTRIBUCIÓN NORMAL

Tipo de variable aleatoria: Continua

Definición de la v.a. normal:

Una v.a se dice que tiene una distribución normal de parámetros μ y σ y se representa:

El primer parámetro es la media y el segundo la desviación típica

$$\boxed{\mathbf{X} \equiv N(\mu, \sigma) \qquad (\mu \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0)}$$

si su función de densidad es de la siguiente forma:

Función de densidad: $\left[f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \right]$ (1)

Función de distribución: $\left[F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dt \right]$ (2)

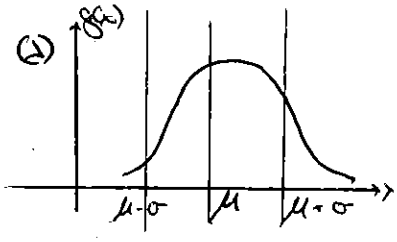
Momentos:

$E[\mathbf{X}] = \mu$

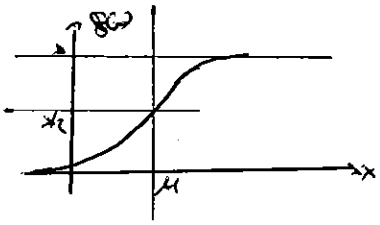
$E[\mathbf{X}^2] = \mu^2 + \sigma^2$

$V[\mathbf{X}] = \sigma^2$

(1)



(2) → VALORES EN TABLAS



Relación entre la $N(0,1)$ y la $N(\mu,\sigma)$:

Sean las v.a $\mathbf{X} \equiv N(0,1)$ e $\mathbf{Y} \equiv N(\mu,\sigma)$.

La siguiente transformación de variable aleatoria:

$$\boxed{\mathbf{Y} = \sigma\mathbf{X} + \mu \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = \frac{\mathbf{Y} - \mu}{\sigma}}$$

se llama **tipificación** y su importancia es muy grande pues permite transformar una v.a normal cualquiera en una v.a. normal estándar.

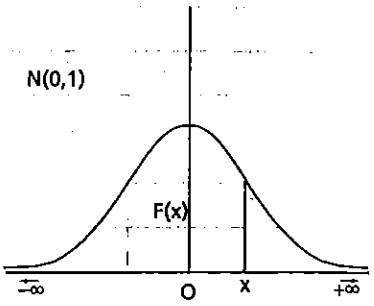
Propiedad reproductiva:

La suma de variables aleatorias normales independientes es otra v.a normal.
Sean $\mathbf{X}_1 \equiv N(\mu_1,\sigma_1),\ldots,\mathbf{X}_m \equiv N(\mu_m,\sigma_m)$ m distribuciones normales, entonces se cumple que:

$$a_1\mathbf{X}_1 + a_2\mathbf{X}_2 \ldots + a_n\mathbf{X}_m + b \equiv N(\mu,\sigma)$$

donde:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i + b \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$$



Distribución normal

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7643	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9710	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9981	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL → [illegible]

↳ Nota:

Tipo de variable aleatoria: Continua

$P(x < X \le x+h) = P(0 < X \le h)$ $\forall x, h > 0$ donde $X > x$

Definición de la v.a. exponencial:

Una v.a. se dice que tiene una distribución exponencial de parámetro λ, y se suele representar por:

$$\boxed{\mathbf{X} \equiv \exp(\lambda)}$$

Nota: $\lambda \equiv c$ en los apuntes.

si su función de densidad es de la siguiente forma:

Función de densidad: $\left[f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \right]$ A)

Nota: $(a > 0, b > a)$

$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) =$

$= \int_a^b g(x)\,dx = \cancel{\lambda} \cdot e^{-\lambda b} / \cancel{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} =$

$= e^{-\lambda a} \cdot e^{-\lambda b}$

Función de distribución: $\left[F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x > 0 \end{cases} \right]$ C)

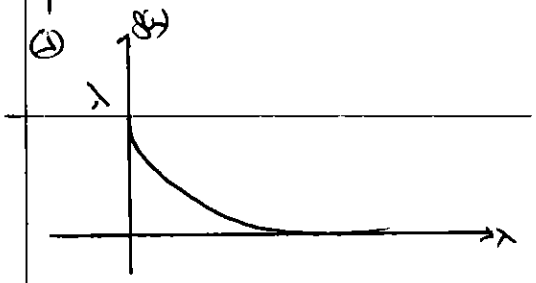
Momentos:

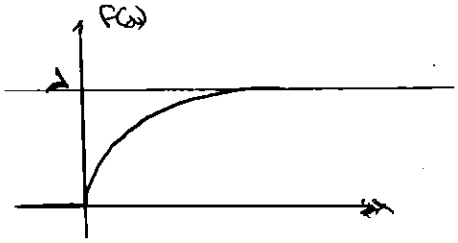
$$E[\mathbf{X}] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[\mathbf{X}^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V[\mathbf{X}] = \frac{1}{\lambda^2}$$

(A)





DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Tipo de variable aleatoria: Continua

Definición de la v.a. uniforme:

Una v.a. se dice que tiene una distribución uniforme de parámetro a y b, y se representa por:

$$\boxed{X \equiv U[a, b]}$$

si modeliza fenómenos en los que sabemos que la v.a no puede tomar valores superiores a b ni inferiores a a, siendo los sucesos en este intervalo equiprobables. Su función de densidad es de la siguiente forma:

Función de densidad:

$$\left[f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \right] \quad (b)$$

Función de distribución:

$$\left[F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases} \right] \quad (c)$$

Momentos:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Dado $(a = x_1, b = x_2)$ y $(x_1 \le a \le b \le x_2)$

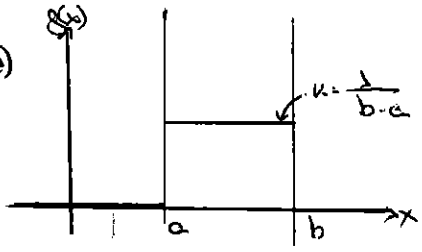
(a) → $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b k\,dx =$

$k = \frac{1}{x_2 - x_1}$

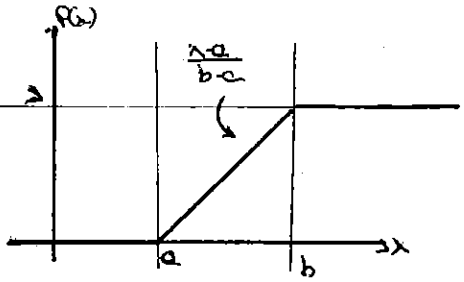
$= k\,x \Big|_a^b = \frac{b-a}{x_2 - x_1}$

(c) → $P(X = a) = F(a) - F(a) = 0$

(b)



(c)



VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAMENTE GAUSSIANAS

Se dice que dos variables aleatorias, X e Y, son conjuntamente Gaussianas si su función de densidad conjunta (que recibe el nombre de densidad gaussiana bivariante) tiene la siguiente forma:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(X-\bar{X})^2}{\sigma_X{}^2}-\frac{2\rho(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(Y-\bar{Y})^2}{\sigma_Y{}^2}\right]}$$

Conviene recordar la notación:

- $\bar{X}=E[X]$ (Media o Esperanza de X)
- $\bar{Y}=E[Y]$ (Media o Esperanza de Y)
- $\sigma_X{}^2=E\left[\left(X-\bar{X}\right)^2\right]=E\left[X^2\right]-\left[E[X]\right]^2$ (Varianza de X)
- $\sigma_Y{}^2=E\left[\left(Y-\bar{Y}\right)^2\right]=E\left[Y^2\right]-\left[E[Y]\right]^2$ (Varianza de Y)
- $\rho=\dfrac{E\left[\left(X-\bar{X}\right)\left(Y-\bar{Y}\right)\right]}{\sigma_X\sigma_Y}$ (Coeficiente de Correlación)

Propiedades:

- Si $\rho=0$ las variables aleatorias X e Y son incorreladas y tendríamos como densidad gaussiana bivariante a la siguiente función:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{(X-\bar{X})^2}{\sigma_X{}^2}+\frac{(Y-\bar{Y})^2}{\sigma_Y{}^2}\right]}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma_X}e^{\frac{-1}{2}\frac{(X-\bar{X})^2}{\sigma_X{}^2}}\frac{1}{\sigma_Y}e^{\frac{-1}{2}\frac{(Y-\bar{Y})^2}{\sigma_Y{}^2}}$$

Entonces podríamos escribirla como multiplicación de dos factores; uno dependiendo únicamente de x, y el otro dependiendo únicamente de y:

$$f_{XY}(x,y)=\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-\frac{(X-\bar{X})^2}{2\sigma_X{}^2}}\right]}_{f_X(x)}\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}e^{-\frac{(Y-\bar{Y})^2}{2\sigma_Y{}^2}}\right]}_{f_Y(y)}$$

Por tanto, podemos expresar $f_{XY}(x,y)$ como sigue:

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

Y esto quiere decir que las variables aleatorias X e Y son independientes.

Recuerda que la independencia implica siempre la incorrelación. La incorrelación implica la independencia sólo en el caso de tener variables conjuntamente gaussianas.

En definitiva, podemos afirmar que, **si dos variables aleatorias conjuntamente gaussianas son incorreladas, entonces también son independientes.**

Vemos pues que las variables marginales siguen una distribución Normal.

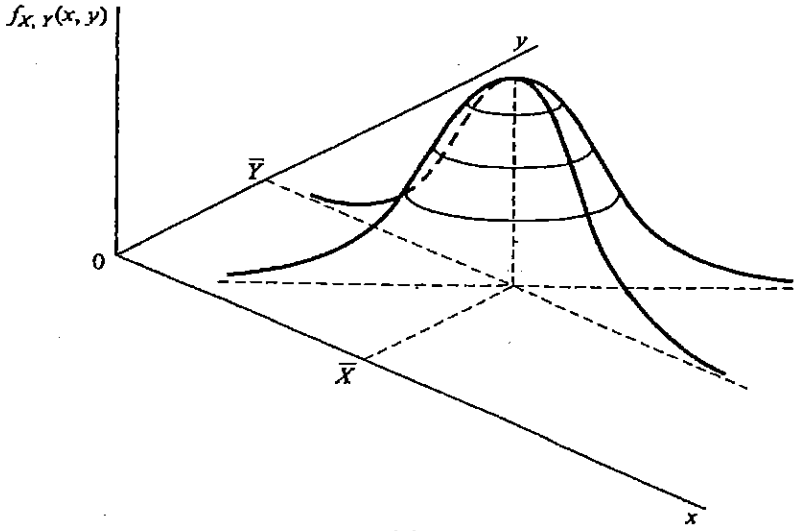
• Según hemos visto anteriormente, las **funciones de densidad marginales** correspondientes son:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{\frac{(x-\bar{X})^2}{2\sigma_X^2}} \quad ; \quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}e^{\frac{(y-\bar{Y})^2}{2\sigma_Y^2}}$$

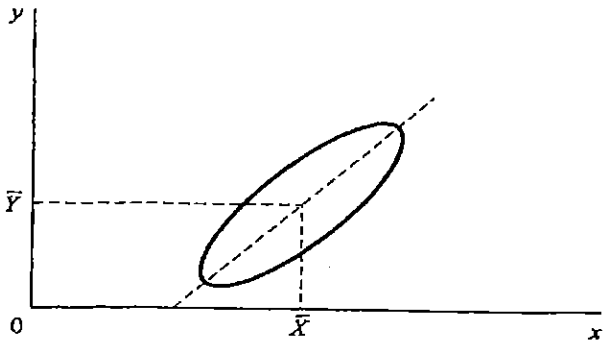
• El **máximo de la función** $f_{XY}(x,y)$ está localizado en el punto $\left(\bar{X},\bar{Y}\right)$ y su valor es

$$f\left(\bar{X},\bar{Y}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$$

• **Las transformaciones lineales de variables aleatorias conjuntamente gaussianas son también variables aleatorias conjuntamente gaussianas.**



(a)



(b)

ISAL
Ejercicios de clase

TEMA 1: SUCESOS

Ejercicio 1

Tenemos un receptor de radio del que sabemos que el 5% de las veces en que recibe una señal útil, esta se traduce como si fuera un ruido; es decir no la considera. Por otra parte, el 2% de las veces que se recibe ruido, lo traduce como si fuera una señal útil. Si las señales recibidas tienen un 80% de señales útiles:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el receptor realice una traducción correcta?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una señal que haya sido detectada como útil sea realmente útil?.

Bayes

① Definimos los sucesos:

Los sucesos son:

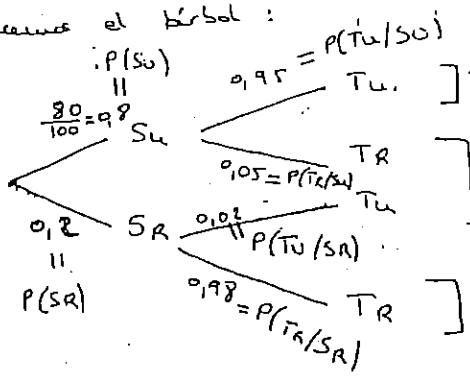
$S_U \equiv$ "La señal recibida es útil"

$S_R \equiv$ "La señal recibida es ruido"

$T_U \equiv$ "La señal es traducida como útil"

$T_R \equiv$ "La señal es traducida como ruido"

② Hacemos el árbol:



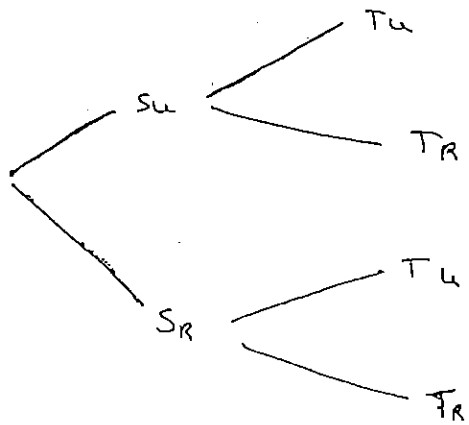
- $P(T_U/S_U) = 0{,}95$
- $P(T_R/S_U) = 0{,}05$
- $P(T_U/S_R) = 0{,}02$
- $P(T_R/S_R) = 0{,}98$
- $P(S_U) = 0{,}8$
- $P(S_R) = 0{,}2$

a) $P(\text{"Traducción Correcta"}) = P(S_U)\cdot P(T_U/S_U) + P(S_R)\,P(T_R/S_R) =$

$= 0{,}8\cdot 0{,}95 + 0{,}2\cdot 0{,}98 = 0{,}956$ //

En este apartado aplicamos el teorema de probabilidad total

b)



A TU llegan 2 caminos: uno que pasa por SU y otro por SR.

¿Qué probabilidad tiene el camino que llega a TU que pasa por SU?

Aplicamos Th de Bayes

- $$P(S_U / T_U) = \frac{P(S_U) \cdot P(T_U | S_U)}{\underbrace{P(S_U) \cdot P(T_U | S_U) + P(S_R)\, P(T_U | S_R)}_{P(T_U) \equiv \text{Probabilidad total de que la sea sea OK}}} =$$

$$= \frac{0{,}95 \cdot 0{,}8}{0{,}95 \cdot 0{,}8 + 0{,}02 \cdot 0{,}2} = 0{,}995$$

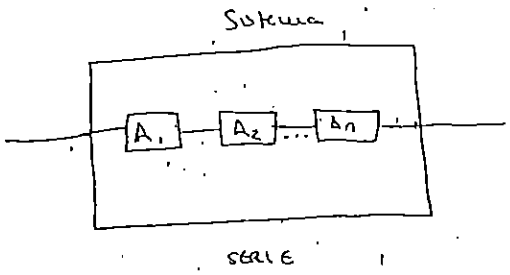
- En este caso, hemos aplicado el teorema de Bayes

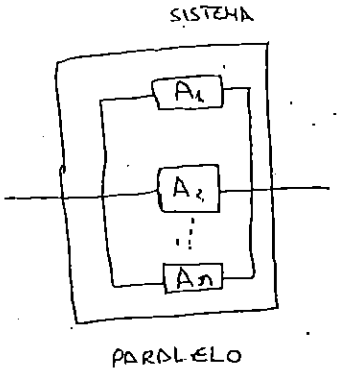
Ejercicio 2

Se denomina fiabilidad de un sistema A, a la probabilidad $P(A)$ de que el sistema funcione con éxito en un tiempo determinado. El sistema está formado por subsistemas que pueden conectarse en serie o en paralelo, suponiendo que la actuación de cada uno de ellos no influye en la de los demás. Para un sistema formado por n subsistemas, de tal manera que designemos por $P(A_i)$ la fiabilidad del sistema i, calcular la fiabilidad del sistema:

independientes

a) Cuando los subsistemas se conectan en serie (aplicación para $n = 10$ y $P(A_i) = 0{,}99$).
b) Cuando los subsistemas se conectan en paralelo (aplicación para $n = 2$ y $P(A_i) = 0{,}90$).
c) ¿Puede ser en algún caso la fiabilidad del sistema superior a la de cada una de las partes?.





El sistema funciona cuando funcionan todos los subsistemas

El sistema funciona cuando funciona al menos uno de los subsistemas.

$P(A)$ = fiabilidad del sistema A

ⓐ ¿$P(A)$ en serie? $P(A)$ = fiabilidad del sistema A

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \underset{\text{son indepen}}{=} P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\cdots P(A_n)$$

• DATOS: $n = 10$, $P(A_i) = c$

$$= 0{,}99 \cdot \dots \cdot 0{,}99 = (0{,}99)^{10} = 0{,}905$$

ⓑ ¿$P(A)$ en paralelo?

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \underset{\text{¡¡no son incompatibles!!}}{=} 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) =$$

Leyes de Morgan:
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) \underset{\text{son indepen}}{=} 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) =$$

$$= \boxed{1 - \left[(1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n)) \right]}$$

→ Fiabilidad del sistema A en paralelo

→ Particularizando para $n = 2$ $P(A_i) = 0{,}9$.

$$P(A) = 1 - \left[(1-0{,}9)\,(1-0{,}9) \right] = 0{,}99$$

(c) Sí, lo hemos demostrado en el ejemplo numérico del apartado b) donde $P(A_i) = 0{,}9 < P(A) = 0{,}99$

Nota. (b) ¿Lo podríamos haber hecho así?

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \underset{\substack{\text{Particularizando} \\ n=2}}{=} P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \underset{\text{x la independencia}}{=}$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}99$$

→ 17/10/03

Ejercicio 4

Se tiene en una bolsa un número muy grande de cuadros blancos y negros y en la misma proporción.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sacando a ciegas 64 cuadros y colocándolos en el orden en que salen se forme con ellos un tablero de ajedrez?.

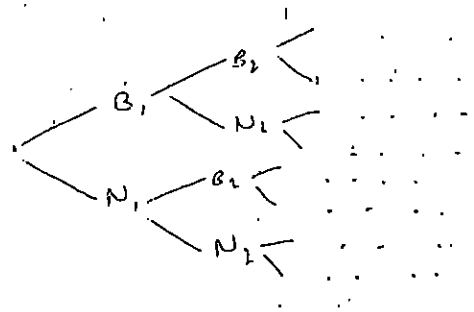
b) ¿Cuál es esa misma probabilidad cuando en la bolsa hay solo 64 cuadros 32 blancos y 32 negros.

Definimos los sucesos: (128 sucesos)

$B_j \equiv$ "Extraer un cuadro blanco en la j-ésima extracción" $\forall j \in \{1, 64\}$

$N_i \equiv$ "Extraer un cuadro negro en la i-ésima extracción" $\forall i \in \{1, 64\}$

→ "Esbozo" del árbol:



→ a) $P(\text{"Tablero"}) = P\Big[(B_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap N_4 \cdots \cap N_{64}) \cup$

$\cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap B_4 \cdots \cap B_{64})\Big] = P(B_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap N_4 \cdots \cap N_{64}) + P(N_1 \cap \cdots \cap B_1$

incompatibles $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Como el nº de cuadros es muy grande, si yo saco un cuadro negro, la bolsa sigue prácticamente igual a la hora de hacer la siguiente extracción, y las extracciones son independientes.

Como el nº de cuadros es muy grande, suponemos independencia en cada extracción. $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$= P(B1)\, P(N_2)\, P(B_3) \cdots P(N_{64}) + P(N_1) \cdots P(B_{64}) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdots \frac{1}{2}}_{64 \text{ veces}}$

$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{64 \text{ veces}} = \frac{1}{2^{64}} + \frac{1}{2^{64}} = \frac{2}{2^{64}} = \boxed{\frac{1}{2^{63}}}$

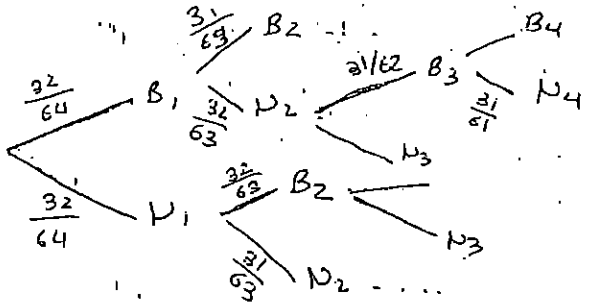
→ (b) Aquí no podemos suponer que los sucesos son independientes, porque la bolsa tiene sólo 64 cuadros (no reducida de cuadros).

$$P(\text{"tablero"}) = P\left[(B_1 \cap \cdots \cap N_{64}) \cup (N_1 \cap \cdots \cap B_{64})\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siguen siendo} \\ \text{incompatibles}}}{=}$$

$$= P(B_1 \cap \cdots \cap N_{64}) + P(N_1 \cap \cdots \cap B_{64}) \underset{\substack{\text{Ahora las extracciones} \\ \text{no son independientes!}}}{=} P(B_1) \cdot P(N_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap N_2)$$

$$\cdot P(N_4 / B_1 \cap N_2 \cap B_3) \cdots P(N_{64} / B_1 \cap \cdots \cap B_{63}) +$$

$$+ P(N_1)\, P(B_2/N_1)\, P(N_3/N_1 \cap B_2) \cdot P(B_4/N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cdots P(B_{64}/N_1$$



Mirando el árbol, observamos cuanto valen las probabilidades de cada u

$$P(\text{"tablero"}) = \underbrace{\frac{32}{64} \cdot \frac{32}{63} \cdot \frac{31}{62} \cdot \frac{31}{61} \cdot \frac{30}{60} \cdot \frac{30}{59} \cdot \frac{29}{58} \cdots\cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}_{\text{Rama}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{32}{64} \cdot \frac{32}{63} \cdot \frac{31}{62} \cdots\cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}_{\text{Rama}} = \frac{32!\, 32!}{64!} + \frac{32! \cdot 3}{64!}$$

$$= \frac{2 \cdot (32!)^2}{64!}$$

17/10/03

Ejercicio 5

Dos jugadores A y B juegan a cara y cruz, la cantidad de 1000 ptas. Ganará aquel que en primer lugar gane tres partidas (seguidas o no). El jugador A gana la primera partida y se interrumpe el juego. Dividir las 1000 pta. entre ellos proporcionalmente a la probabilidad de ganar cada uno si hubiese seguido el juego.

* Defino los sucesos:

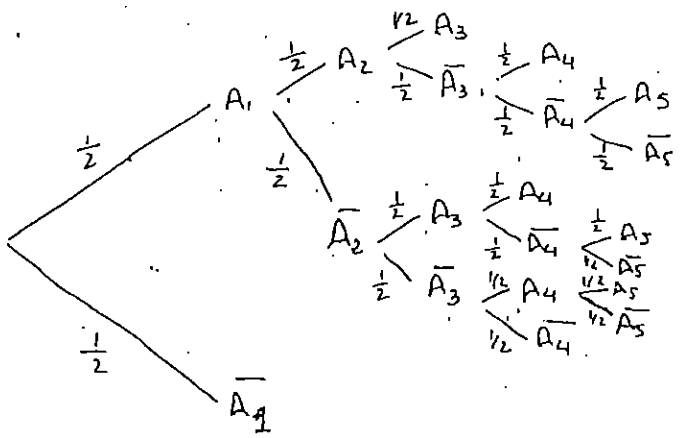
$A_i \equiv$ "El jugador A gana la partida i" $\forall i \in \{1, \dots, 5\}$

$\Updownarrow$

"Sale cara en la tirada i".

Como máximo hay 5 partidas en el juego.

* Hago el árbol:



· Todas las ramas tienen probabilidad de 1/2, ya que los sucesos son independientes.

NOTA: En los sucesos:

$B_i =$ "El jugador B gana la partida i" $\Rightarrow$ No se define xq es el complementario de A, y por eso lo omitimos

xq nos dicen que el jugador A gana la primera partida

$$P(\text{"gana jugador A"} / A_1) = P\left[(A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) \cup (A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5) \cup (\bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (\bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5)\right]$$

$$\underset{\text{incompatible}}{=} P(A_2 \cap A_3) + P(A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) + \dots + P(\bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5) \underset{\text{independi}}{=}$$

$$= P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot P(A_4) + \dots + P(\bar{A}_2) P(A_3) P(\bar{A}_4) \cdot P(A_5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$P(\text{"gana jugador A"} / A_1) = \frac{11}{16}$

$P(\text{"gana jugador B"} / A_1) = \frac{5}{16}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A \Rightarrow 1000 \cdot \frac{11}{16} = 687 \text{ ptos.} \\ B \Rightarrow 1000 \cdot \frac{5}{16} = 313 \text{ ptos} \end{array}\right]$$

TEMA 2: VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

Ejercicio 1

Sea la siguiente función:

$$f_X(x) = ke^{-|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se pide calcular:

a) El valor de k para el cual la anterior función es una función de densidad

b) La función de distribución de la v.a. X.

Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

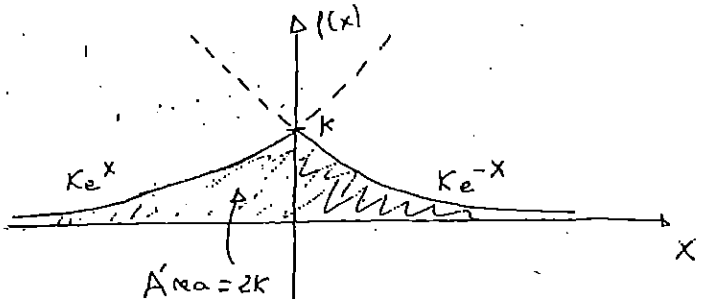
c) $\{X \geq 3\}$

d) $\{|X| \leq 2\}$

e) $\{|X| \leq 2 \text{ ó } X \geq 0\} \rightarrow P((-2 \leq X \leq 2) \cup X \geq 0) = P(-2 \leq X)$

f) $\{|X| \leq 2 \text{ y } X \leq -1\} \rightarrow P(-2 \leq X \leq 2 \cap X \leq -1) = P(-2 \leq X \leq -1)$

V.A. CONTINUA



$$f(x) = Ke^{-|x|} = \begin{cases} Ke^{x} & \text{si } x < 0 \\ Ke^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a)

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ✓ y para $K > 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} Ke^{x}dx + \int_{0}^{\infty} Ke^{-x}dx = \lim_{\mu \to -\infty} \int_{\mu}^{0} Ke^{x}dx + \lim_{\mu \to \infty} \int_{0}^{\mu} Ke^{-x}dx =$

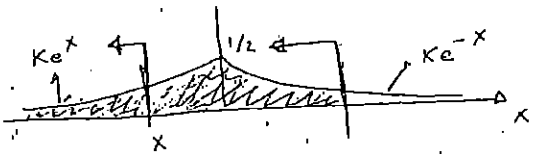
$= \lim_{\mu \to -\infty} \left[Ke^{x}\right]_{\mu}^{0} + \lim_{\mu \to \infty} \left[-Ke^{-x}\right]_{0}^{\mu} = \lim_{\mu \to -\infty} (K - \cancel{Ke^{\mu}}_{0}) +$

$+ \lim_{\mu \to \infty} \left[-Ke^{-\mu} - K(-1)\right] = (K - 0) + (0 + K) = 2K$

Como tiene que ser 1 $\Rightarrow 2K = 1 \Rightarrow \boxed{K = 1/2}$

3) $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

.... El valor de K para que se cumpla que $f(x)$ sea fdp es $K = \frac{1}{2}$



- $x<0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} Ke^{t}\,dt=\lim_{\mu\to-\infty}\int_{t=\mu}^{t=x} Ke^{t}\,dt=$$

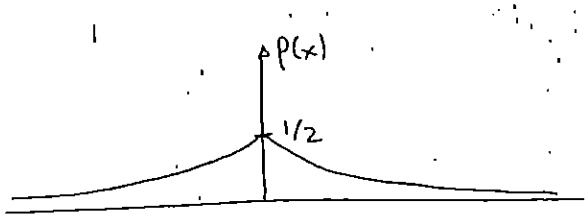
$$=\lim_{\mu\to-\infty}\left[Ke^{t}\right]_{\mu}^{x}=\lim_{\mu\to-\infty}\left[Ke^{x}-\underbrace{Ke^{\mu}}_{0}\right]=Ke^{x}=\frac{1}{2}e^{x}$$

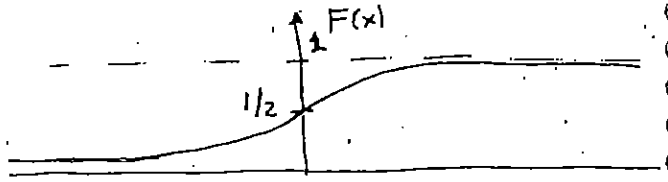
- $x>0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} Ke^{t}\,dt+\int_{0}^{x} Ke^{-t}\,dt=\left[Ke^{t}\right]_{-\infty}^{0}+\left[-Ke^{-t}\right]_{0}^{x}$$

$$=(K-0)+(-Ke^{-x}-(-K))=2K-Ke^{-x}\underset{K=\frac{1}{2}}{=}1-\frac{1}{2}e^{-x}$$

- $$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$$





- En el semieje negativo f(x) coincide con F(x), no es una casualidad de este ejercicio

Ejercicio 2

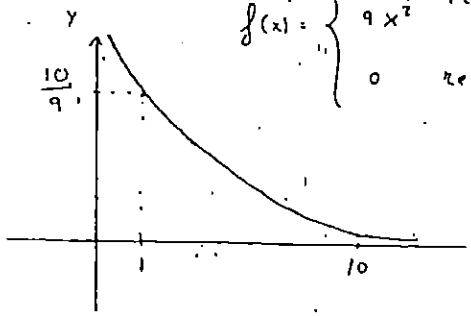
Un generador de tensión proporciona un voltaje aleatorio de X voltios cuya función de densidad es :

$$f(x) = \begin{cases} k/x^2 & 1 \le x \le 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución de X.
b) Hallar la probabilidad de que el voltaje sea menor de 5 voltios.
c) Hallar la probabilidad de que el voltaje esté entre 2 y 3 voltios.
d) Hallar un valor V tal que el 95% de las tensiones de salida no superen los V voltios.

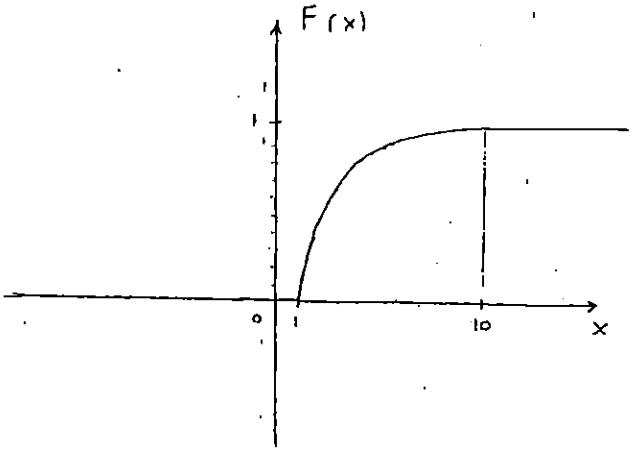
a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{10} \frac{K}{x^2}\,dx + \int_{10}^{\infty} 0\,dx =$

$\left(-\frac{K}{x}\right)\Big|_1^{10} = -\frac{K}{10} + K = \frac{9K}{10} = 1 \Rightarrow \underline{K = \frac{10}{9}}$



$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{9x^2} & 1 \le \\ 0 & \text{re} \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} \cdot \text{ Si } x < 1 \rightarrow F(x) = 0 \\ \cdot \text{ Si } 1 < x < 10 \Rightarrow F(x) = \int_1^x \frac{K}{x^2}\,dx = -\frac{K}{x} + K = -\frac{10}{9x} + \frac{10}{9} = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ \cdot \text{ Si } x > 10 \rightarrow F(x) = 1 \end{cases}$



b) $P(X \le 5) = F(5) = \underline{\frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{5}\right)}$

c) $P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) =$

$= \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \underline{\frac{5}{27}}$

d) $P(X \le V) = 0'95$

$\Rightarrow F(V) = 0'95 \Rightarrow \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{V}\right) = 0'95 \rightarrow \underline{V = 6'89}$

X Ejercicio 3

Un taller de reparación de automóviles puede admitir diariamente hasta 100 vehículos. De estudios realizados anteriormente se sabe que la función de densidad de la variable aleatoria "número de vehículos que llega cada día al taller para ser reparados" es de la forma:

$$f(x) = \frac{a}{1000}x \qquad 0 \le x \le 100$$

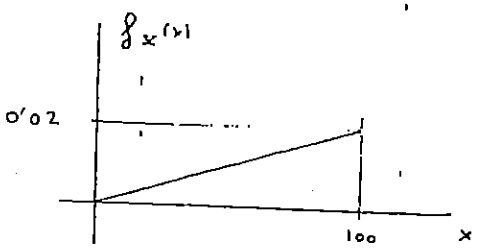
¿Cuál es la probabilidad de que el número de vehículos llegados a reparar un día determinado esté comprendido entre 25 y75?.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1000} x\, dx = 1 \; ; \quad \int_{0}^{100} \frac{a}{1000} \cdot x \cdot dx = 1 \; ; \quad \frac{a}{1000} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{100} = 1$$

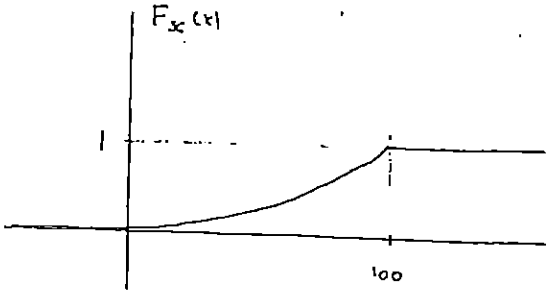
$$a = \frac{2000}{10000} = \frac{1}{5}$$

$$P(25 \le X \le 75) = \int_{25}^{75} \frac{x}{5000}\, dx = \frac{x^2}{10000}\Big|_{25}^{75} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{5000} & \text{si} \quad 0 \le x \le 100 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{10000} & \text{si} \quad 0 \le x \le 100 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 100 \end{cases}$$



Ejercicio 4

Sea la v.a. X con probabilidad uniformemente distribuida en el intervalo [0, 5]. Caracterizar la variable aleatoria Y que queda determinada por la siguiente transformación:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}X & si\ 0 < X < 3 \\ 2 & si\ 3 \le X < 5 \end{cases}$$

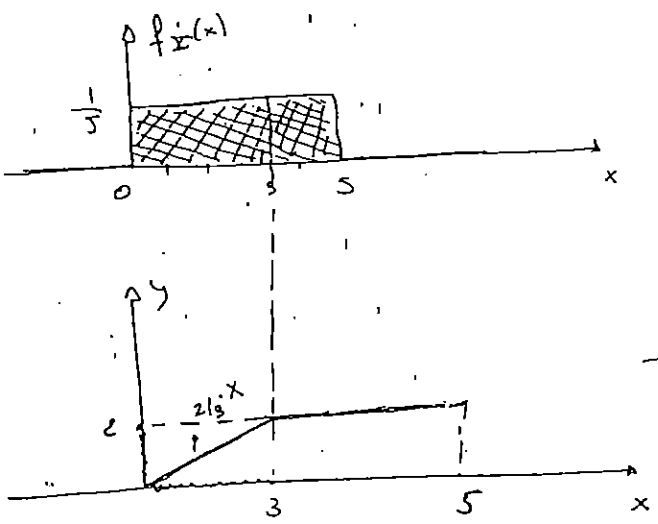
...n este ejercicio se ...tra el caso "atípico" ... que una v.a. conti... ...a se transforma en ...na v.a. mixta

$X \sim U[0,5]$ → notación xa definir una v.a. uniforme distribuida en [0,5

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & si\ 0 < X < 5 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$\frac{1}{b-a}$

Xq es uniforme



→ Transformación

→ Se transforma de Continua → Mixta.

→ $\varphi(x) = \frac{2}{3}X$: (trozo verde: donde $0 < X < 3$)

Usamos el Teorema y la fórmula de continua en continua.

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1})'(y)| & si\ y \in R_Y \\ 0 & resto. \end{cases}$$

- $\varphi(x) = \frac{2}{3}x$ es continua estrictamente creciente sobre R_X, y tal q existe inversa $\varphi^{-1}(y)$ cont. y derivable

$$\varphi(x) = \frac{2}{3}x \rightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow x = \frac{3}{2}y \rightarrow \boxed{\varphi^{-1}(y) = \frac{3}{2}y}$$

$$(\varphi^{-1})'(y) = \frac{3}{2} \Rightarrow |(\varphi^{-1})'(y)| = \frac{3}{2}$$

- Entonces:

$$f_Y(y) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{10} \quad si\ y \in R_Y$$

→ ¿R_Y? Toda la probabilidad almacenada en $0 < x < 3$, se transforma en $0 < Y < 2 \Rightarrow R_Y = (0,2)$

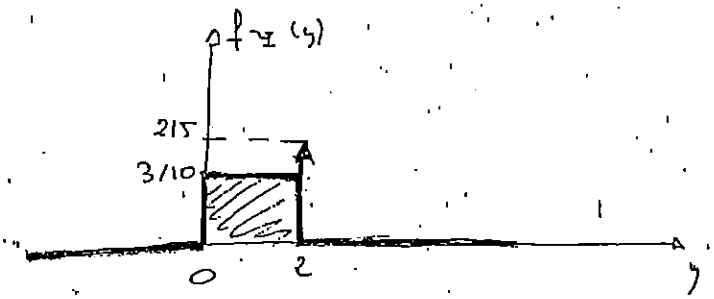
Por tanto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{10} & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Pero esta no es la f.d.p correcta, ya q no acumula toda la probabilidad.

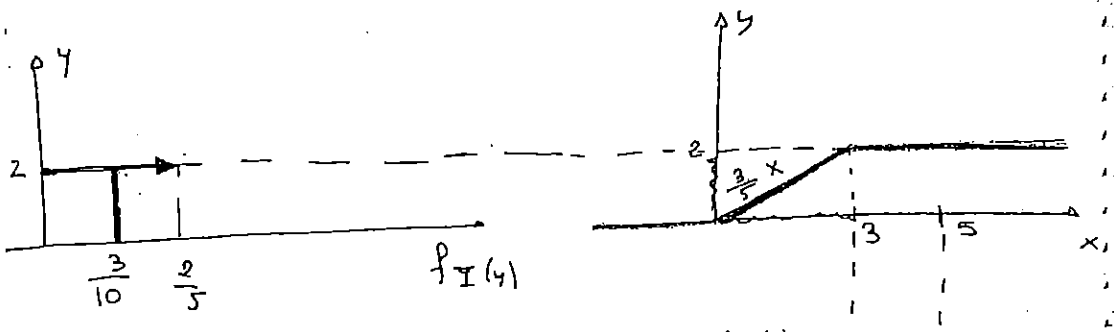
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \int_0^2 \frac{3}{10}\,dy = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \neq 1 \Rightarrow \text{falta probabilidad, q es la dada por } y = 2$$

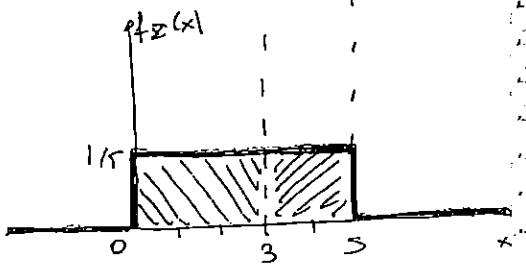
$$\rightarrow P(Y=2) = \int_3^5 \frac{1}{5}\,dy = \frac{2}{5} \;//$$ → Esta es una δ que hay en $y=2$.



$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{10} & \text{si } 0<y<2 \\ \frac{2}{5} & \text{si } y=2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

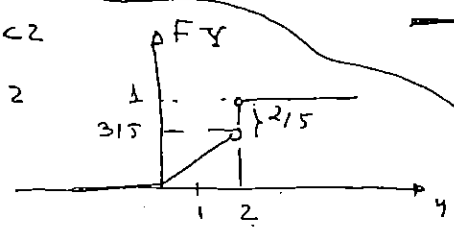
→ Representación gráfica:





→ Si queremos calcular $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0 \\ \frac{3}{10}y & \text{si } 0<y<2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$



X

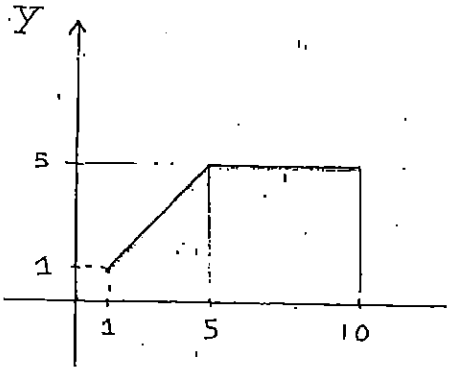
Ejercicio 5

Sea otra vez el generador de tensión del ejercicio2 cuya fdp es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{9x^2} & si\ 1 \le x \le 10 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Ahora se dispone de un dispositivo cuya tensión de salida es igual a la de entrada mientras ésta no supere 5 voltios y si la tensión de salida sobrepasa este valor entonces proporciona una salida de exactamente 5 voltios. Se aplica el voltaje X proporcionado por el generador a la entrada de este dispositivo, proporcionando una salida Y. Hallar la función de distribución de Y y representarla gráficamente.

$$Y = \varphi(X) = \begin{cases} X & si \quad 1 < X < 5 \\ 5 & si \quad X \geq 5 \end{cases}$$



$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |\varphi^{-1}(y)'| \\ 0 \quad si \quad y \notin R_Y \end{cases}$$

$R_Y = (1, 5)$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = x \\ \varphi^{-1}(y) = y \\ \varphi^{-1}(y)' = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{10}{9y^2} \cdot |1| & si\ y \in R_Y \\ 0 & si\ y \notin R_Y \end{cases}$$

¿y?

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{10}{9y^2} & si\ 1 < x < 5 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{10}{9y^2}\, dy < 1 \Rightarrow (\text{falta la } \delta)$$

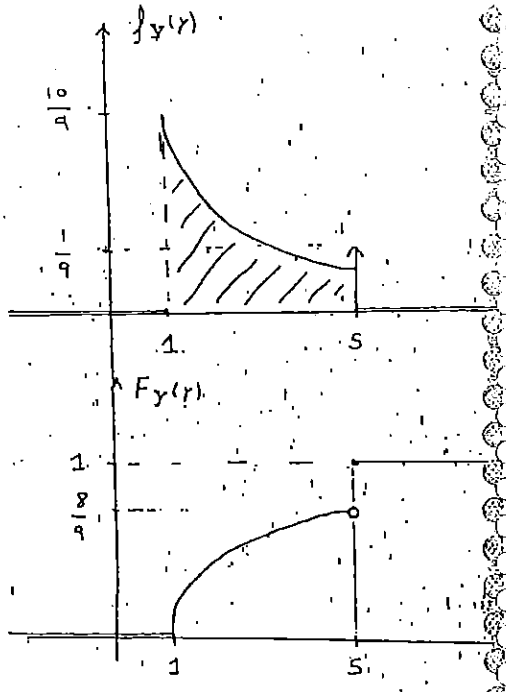
(Ver F(en ej

Ahora calculamos la probabilidad que se acumula en $Y = 5$.

$$P(Y = 5) = P(5 < X < 10) = F(10) - F(5) =$$

$$= \left(\frac{10}{9} - \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{10}{9} - \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \underline{\frac{1}{9}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{10}{9y^2} & \text{si } 1 \le y < 5 \\ \dfrac{1}{9} & \text{si } y = 5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Veamos como sería su $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = \int_1^y \frac{10}{9y^2}\,dy = \left[\frac{-10}{9y}\right]_1^y = -\frac{10}{9y} + \frac{10}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(y) = \frac{10}{9} - \frac{10}{9y}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{10}{9} - \dfrac{10}{9y} & \text{si } 1 \le x < 5 \\ 1 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$

27/11/03

Ejercicio 6

Ejercicios sobre la distribución normal

I. Calcular las siguientes probabilidades en una distribución normal estándar:
$P(Z \le 1,45)$, $P(Z \le -1,45)$, $P(1,25 < Z \le 2,57)$, $P(-2,57 < Z \le -1,25)$
$P(-0,53 < Z \le 2,46)$

II. Se ha aplicado un test de inteligencia a un grupo de alumnos y se ha observado que se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12. Se pide:
a) ¿Qué proporción de alumnos tendrá una puntuación en dicho test entre 20 y 35?.
b) ¿Qué puntuación mínima tienen los alumnos que se encuentran entre el 20 por ciento más inteligente del grupo?.

III. Calcular la probabilidad $P(|X-\mu| < \sigma)$ en una distribución normal $N(\mu,\sigma)$.

I) Normal Estandar.

$$P(Z \le 1,45) = F(1,45) = \int_{-\infty}^{1'45} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

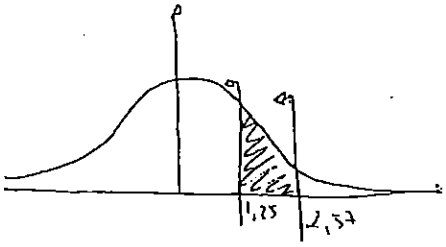
no tiene primitiva, por lo que usamos la tabla.

$F(1,45) = 0,9265$ (Mirando la tabla).

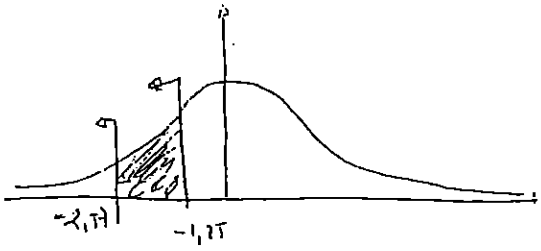
$$P(Z \le -1,45) = 1 - P(Z \le 1,45) = 1 - 0,9265 = \boxed{0,0735}$$

Por simetría de la normal

$$P(1,25 < Z \le 2,57) = F(2,57) - F(1,25) = 0,9949 - 0,8944 = 0,1005$$

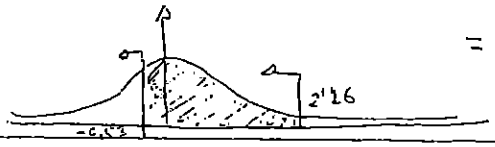


$P(-2,57 < Z \le -1,25)$ ⇒ Usamos propiedad de simetría.



$= 0'1005$ (x simetría)

$P(-0,53 < Z \le 2,46)$



$$P(-0,53 < Z \le 2,46) = P(Z \le 2,46) - P(Z \le$$
$$= P(Z \le 2,46) - [1 - P(Z \le 0,53)] =$$
$$= 0,9931 - [1 - 0,7019] = \boxed{0,695}$$

11) $\mu = 30 \quad \sigma = 12$

$Z \equiv N(30,12)$

a) $P(20 < Z < 35) = P(Z < 35) - P(Z < 20)$

Xo estos valores no los puedo calcular xq. no hay tabla.

Hacemos tipificación:

$Z = \sigma X + \mu$ donde $X \sim N(0,1)$

$$X = \frac{Z-\mu}{\sigma} = \frac{Z-30}{12}$$

$$Z = 12X + 30$$

$$\Rightarrow P(\sigma X + \mu < 20) = P(12X + 30 < 20) = P\left(X < \frac{20-30}{12}\right) = P(X$$

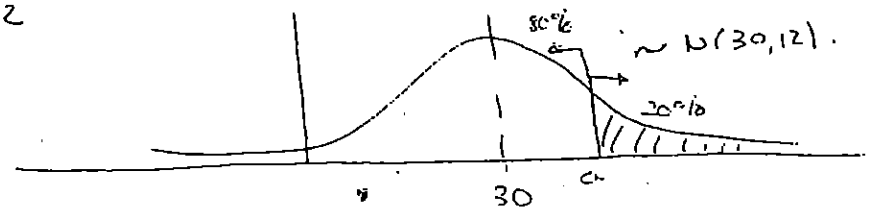
$$P(\sigma X + \mu < 35) = P(12X + 30 < 35) = P\left(X < \frac{35-30}{12}\right) = P(X$$

$$P(20 < Z < 35) = P\left(-\frac{10}{12} < X < \frac{5}{12}\right) = P\left(X < \frac{5}{12}\right) - \left[1 - P\left(X < \frac{1}{12}\right)\right]$$

$= 0$

(b)

$P(X \geq a) = 0{,}2$



$P(X \geq a) = 0{,}2 \Rightarrow P(\sigma Z + \mu \geq a) = 0{,}2 \Rightarrow P(12Z + 30 \geq a) = 0{,}2 \Rightarrow$

q. ya nos dan la prob. a la derecha en la tabla.

$$P\left(Z \geq \frac{a-30}{12}\right) = 0{,}2 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-30}{12}\right) = 0{,}8$$

Miramos la tabla y obtenemos que $\frac{a-30}{12} = 0{,}845 \Rightarrow$

$$a = 0{,}845 \cdot 12 + 30 \Rightarrow \boxed{a = 40{,}14}$$

$N(30,12) \Rightarrow$ 20% está por encima de 40,14

$N(0,1) \Rightarrow$ 20% está por encima de 0,845

Cont. Ejercicio 6). 27/11/03.

Alicia ☺

III) Probabilidad $P(|X-\mu|<\sigma)$ en $N(\mu,\sigma)$

$$P(|X-\mu|<\sigma) = P(-\sigma < X-\mu < \sigma) \Rightarrow$$

$$P(-\sigma+\mu < X < \sigma+\mu) \underset{\text{Tipifico}}{=} P(-\sigma+\mu < \sigma Z+\mu < \sigma+\mu) =$$

$X = \sigma Z + \mu$.

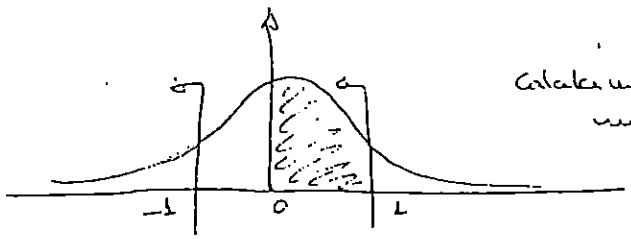
$$= P\left(\frac{-\sigma}{\sigma} < Z < \frac{\sigma+\mu-\mu}{\sigma}\right) = P(-1<Z<1) =$$

$$= P(Z<1) - P(Z<-1) = P(Z<1) - [1-P(Z<1)] =$$

$$= 0{,}8413 - (1-0{,}8413) = \boxed{0{,}6826} \Rightarrow \text{Nº aúreo.}$$

→ Otra forma de hacer lo último.

$$P(-1<Z<1) = 2[P(Z<1) - P(Z<0)] = 2[0{,}8413 - 0{,}5] = 0{,}6$$



Calculamos esta proba y la multiplicamos por 2.

1: Agosto: 2006

TEMA 3: VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL

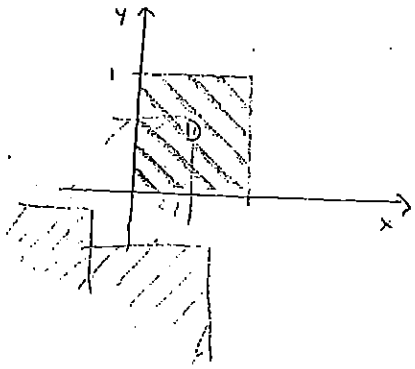
Ejercicio 1

Este es un ejemplo de una variable aleatoria bidimensional continua

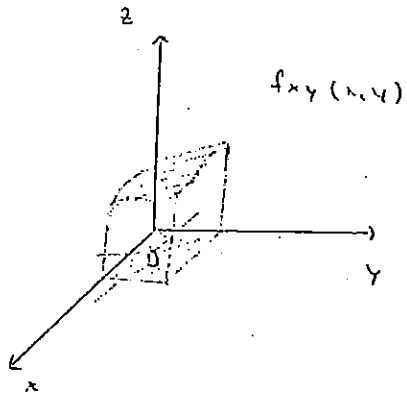
Sea la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$

donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<1,\ 0<y<1\}$. Demostrar que es una fdp y calcular su función de distribución asociada.



BOCETO



a) Veamos q. $f(x,y)$ es una f.d.p:

1º) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2º) integrable Riemann

3º) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 x+y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx =$

$= \int_0^1 x+\frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

b) ¿$F_{XY}(x,y)$?

si $x<0,\ y<0 \quad F(x,y)=0$

$x<0 \quad y\geq 0 \quad F(x,y)=0$

$x\geq 0 \quad y<0 \quad F(x,y)=0$

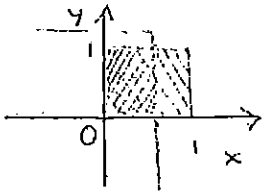
$\int_{u=0}^{u=x}\left(\int_{v=0}^{v=y} u+v\,dv\right)du$

$0\leq x\leq 1 \quad 0\leq y\leq 1 \quad F(x,y) = \int_0^x\int_0^y x+y\,dy\,dx = \int_0^x \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^y dx$

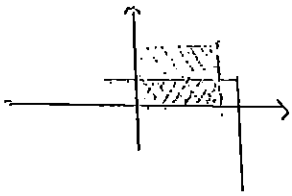
$= \left[y\frac{x^2}{2}+\frac{y^2 x}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}(yx^2+y^2x)$

$x>1 \quad y>1 \qquad F(x,y)=1$

$0<x<1 \quad y>1 \Rightarrow F(x,y)=\int_0^x \left(\int_0^1 x+y\,dy\right)dx = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2+x}{2}$



$x>1 \quad 0<y<1 \Rightarrow F(x,y)=\int_0^y\left(\int_0^1 x+y\,dx\right)dy = \int_0^y \left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_0^1 dy =$



$= \int_0^y \frac{1}{2}+y\,dy = \frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2} = \frac{y(y+1)}{2}$

$$\boxed{F(x,y)=\begin{cases} 0 & , \ x<0 \ \text{ó} \ y<0 \\ \frac{xy(x+y)}{2} & , \ 0<x<1 \quad 0<y<1 \\ \frac{x^2+x}{2} & , \ 0<x<1 \quad y>1 \\ \frac{y^2+y}{2} & , \ x>1 \quad 0<y<1 \\ 1 & , \ x>1 \ \wedge \ y>1 \end{cases}}$$

$F(+\infty,+\infty)=1 \qquad F(-\infty,-\infty)=0$

Ejercicio 2

Este es un ejemplo de una variable aleatoria bidimensional discreta

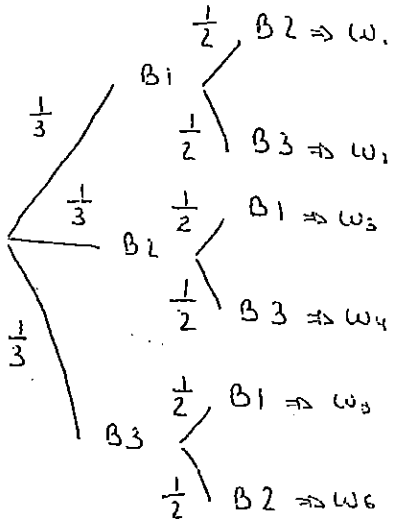
Una urna contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se eligen al azar dos bolas sin remplazamiento y se tiene en cuenta el orden, apuntándose el número de cada bola elegida. Se define la variable aleatoria bidimensional (X, Y) donde X es el número de la primera bola elegida, e Y es el máximo de los números de las dos bolas elegidas. Se pide:

a) Determinar el espacio muestral
b) Determinar el rango de la v.a.
c) Calcular la fdp de la v.a.
d) Calcular la función de distribución de la v.a.

a)

$$\boxed{\Omega = \{ \underset{\omega_1}{(B1, B2)}, \underset{\omega_2}{(B1, B3)}, \underset{\omega_3}{(B2, B1)}, \underset{\omega_4}{(B2, B3)}, \underset{\omega_5}{(B3, B1)}, \underset{\omega_6}{(B3, B2)} \}}$$

b)



$$P(\omega_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \forall \omega_i = 1, \dots, 6$$

Definimos la v.a. XY:

$(XY)(\omega_1) = (1,2)$

$(XY)(\omega_2) = (1,3)$

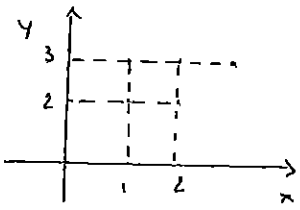
$(XY)(\omega_3) = (2,2)$ + otro

$(XY)(\omega_4) = (2,3)$

$(XY)(\omega_5) = (3,3)$

$(XY)(\omega_6) = (3,3)$

$$\boxed{\Omega_{XY} = \{ (1,2)\ (1,3)\ (2,2)\ (2,3)\ (3,3) \}}$$



6 sucesos xo el rango sólo tiene 5 elementos.

c) $P(X=1, Y=2) = P(\omega_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{P(X=1, Y=2) = \frac{1}{6}}$

$P(X=1, Y=3) = P(\omega_2) = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{P(X=1, Y=3) = \frac{1}{6}}$

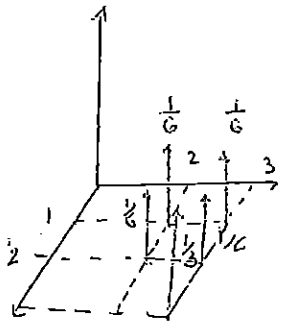
$P(X=2, Y=2) = P(\omega_3) = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{P(X=2, Y=2) = \frac{1}{6}}$

$P(X=2, Y=3) = P(\omega_4) = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{P(X=2, Y=3) = \frac{1}{6}}$

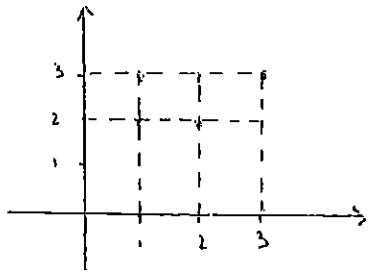
$P(X=3, Y=3) = P(\omega_5 \cup \omega_6) = P(\omega_5) + P(\omega_6) =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$\boxed{P(X=3, Y=3) = \frac{1}{3}}$



d)



* si $x<1$ $x<2 \Rightarrow F(x,y) = 0$

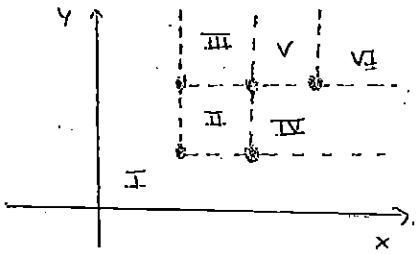
* si $1 \leq x < 2$, $2 \leq y < 3 \Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{6}$

* si $1 \leq x < 2$ $y \geq 3 \Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

* si $x \geq 2$ $2 \leq y < 3 \Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

* si $2 \leq x < 3$ $y \geq 3 \Rightarrow F(x,y) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

* si $x \geq 3$ $y \geq 3 \Rightarrow F(x,y) = 1$



$$\boxed{F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \text{ y } x<2 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 1 \leq x < 2,\ 2 \leq y \leq 3 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq x < 2 \quad y \geq 3 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq y < 3 \quad x \geq 2 \\ \frac{2}{3} & 2 \leq x < 3 \quad y \geq 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \quad y \geq 3 \end{cases}}$$

La suma de todas las σ tiene q. dar uno.

Ejercicio 3

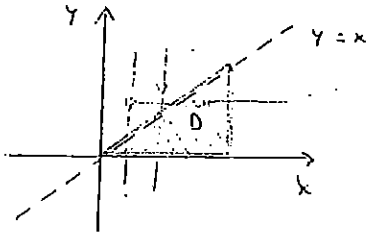
Calcular las fdp marginales de las siguientes v.a. definidas mediante su fdp:

a) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10x^2y & \text{si} \quad 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

b) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1/7 & \text{si} \quad (x,y) \in \{(1,3),(-1,3),(2,3),(1,0),(1,-2)\} \\ 2/7 & \text{si} \quad (x,y) = (-1,-2) \end{cases}$

a)

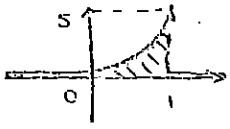
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10x^2y & \text{si} \quad 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$$



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{y=0}^{y=x} 10x^2y\,dy = \left[5x^2y^2\right]_0^x = 5x^4$$

$f_X(x) = 5x^4 \qquad R_X = (0,1) \qquad 0 < x < 1$

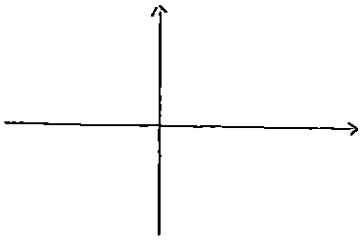
$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} 5x^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=y}^{x=1} 10x^2y\,dx = \left[\frac{10}{3}x^3y\right]_y^1 = \frac{10}{3}y - \frac{10}{3}y^4$$

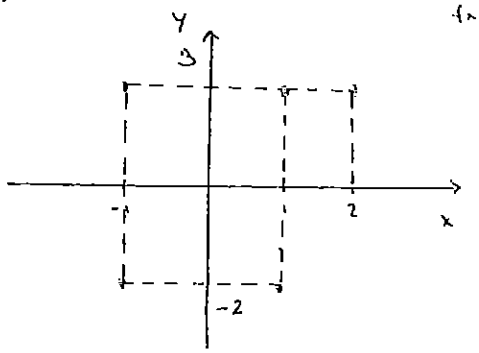
$$= \frac{10}{3}y(1-y^3) \qquad 0 < y < 1$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{10}{3}y(1-y^3) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}}$$



8 : Agosto : 2006

b)

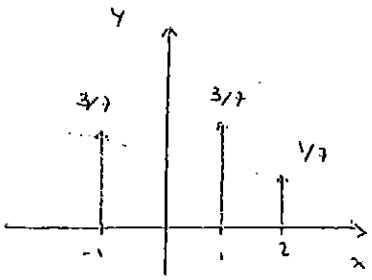


$f_X(x)$: Sumamos en cada vertical todas las δ q. nos encontremos.

$f_Y(y)$: Sumamos en cada horizontal todas las δ q. nos encontremos.

$$f_X(x) = \sum_{\forall y_i} P(X = x_i) = \begin{cases} P(X=2) = P(X=2, Y=3) = \frac{1}{7} \\ P(X=1) = P(X=1, Y=-2) + P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=3) \\ \quad = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \\ P(X=-1) = P(X=-1, 3) + P(X=-1, Y=-2) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

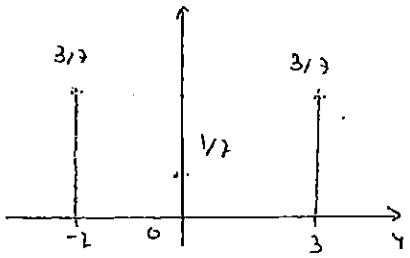
$$\boxed{f_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{si } x = 2 \\ \frac{3}{7} & \text{si } x = 1 \\ \frac{3}{7} & \text{si } x = -1 \end{cases}}$$



$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{7}\,\delta(x-2) + \frac{3}{7}\,\delta(x-1) + \frac{3}{7}\,\delta(x+1)}$$

$$f_Y(y) = \sum_{\forall x_i} P(Y = y_i) = \begin{cases} P(Y=3) = P(Y=3, X=-1) + P(Y=3, X=1) + P(Y=3, X=2) = \\ \quad = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \\ P(Y=0) = P(Y=0, X=1) = \frac{1}{7} \\ P(Y=-2) = P(Y=-2, X=-1) + P(Y=-2, X=1) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\boxed{f_Y(y) = P(Y=y) = \begin{cases} \frac{3}{7} & \text{si } y = 3 \\ \frac{1}{7} & \text{si } y = 0 \\ \frac{3}{7} & \text{si } y = -2 \end{cases}}$$



Ejercicio 4

La distribución conjunta de las variables aleatorias X e Y viene dada por la siguiente función de densidad:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se pide calcular:

a) $P(X+Y \le 1)$

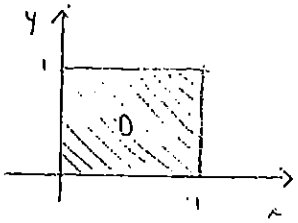
b) $P(1/3 \le X+Y \le 2/3)$

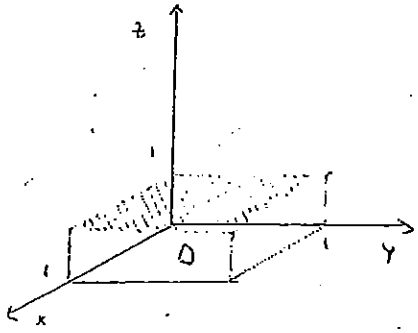
c) $P(X \ge 2Y)$

d) $P(Y \le x^2)$

e) $P(\frac{1}{3} < x+y < \frac{3}{2})$

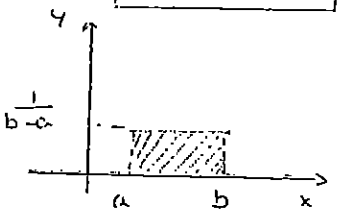
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$





NOTA: V.A. UNIFORMES:

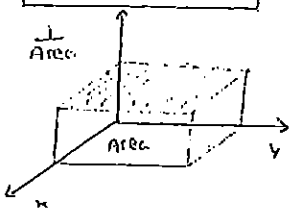
unidimensional



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$b-a$ = longitud intervalo

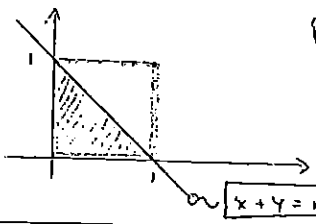
Bidimensional



$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Area}} & a < x < b \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$$

Para calcular la probabilidad q. nos piden tenemos q. calcular el rango y buscar en el rango lo q. nos piden.

a) $P(x+y \le 1)$



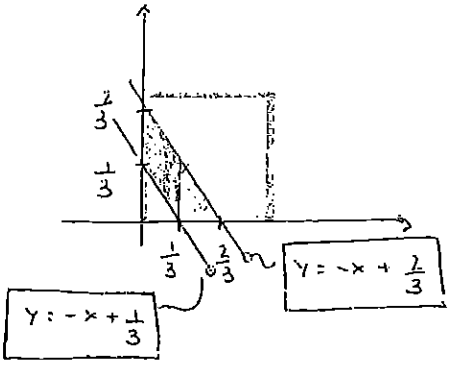
$$P(x+y \le 1) = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=1-x} f_{XY}(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^1\int_0^{1-x} 1\,dy\,dx$$

$\boxed{x+y=1} \Rightarrow \boxed{y=-x+1}$

$$\boxed{P(x+y \le 1) = \frac{1}{2}}$$

Obvio (mitad de la superficie)

b) $P(\frac{1}{3} \le x+y \le \frac{2}{3})$

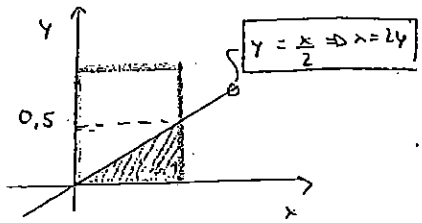


$$P(\tfrac{1}{3} \le x+y \le \tfrac{2}{3}) = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{3}} \int_{y=-x+\frac{1}{3}}^{y=-x+\frac{2}{3}} 1 \, dy \, dx + \int_{x=\frac{1}{3}}^{x=\frac{2}{3}} \int_{y=0}^{y=-x+\frac{2}{3}} 1 \, dy \, dx$$

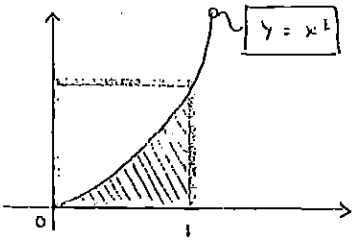
$$P(\tfrac{1}{3} \le x+y \le \tfrac{2}{3}) = \int_0^{\frac{1}{3}} (-x+\tfrac{2}{3} + x - \tfrac{1}{3}) \, dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} -x+\tfrac{2}{3} \, dx =$$

$$= \frac{1}{9} + \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{18} - \frac{2}{9} = \cdots = \frac{1}{6}$$

c) $P(x \ge 2y) = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} 1 \, dy \right) dx = \frac{1}{4}$

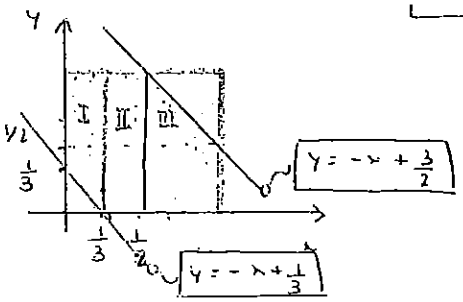


d) $P(y \le x^2)$



$$P(y \le x^2) = \int_0^1 \left(\int_{y=0}^{y=x^2} 1 \, dy \right) dx = \frac{1}{3}$$

e) $P(\frac{1}{3} < x+y < \frac{3}{2}) = \underbrace{\int_{x=0}^{x=\frac{1}{3}} \left(\int_{y=-x+\frac{1}{3}}^{1} 1 \, dy \right) dx}_{I} + \underbrace{\int_{x=\frac{1}{3}}^{x=\frac{1}{2}} \left(\int_{y=0}^{y=1} 1 \, dy \right) dx}_{II} +$



$$+ \underbrace{\int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=-x+\frac{3}{2}} 1 \, dy \right) dx}_{III} = \frac{59}{72}$$

Ejercicio5

Sea el vector aleatorio (X, Y) con función de distribución conjunta

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0 \\ xy(x + y - xy^2) & \text{si } 0 \le x \le 1 \,,\ 0 \le y \le 1 \\ y(1 + y - y^2) & \text{si } 1 \le x \,,\ 0 \le y \le 1 \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1 \,,\ 1 \le y \\ 1 & \text{si } 1 \le x \,,\ 1 \le y \end{cases}$$

Se pide:

a) Función de densidad condicional de Y dada $X = x_o$

b) Función de densidad condicional de X dada $Y = y_o$

c) Calcular $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ y $P\left(X > \frac{1}{2} \,/\, Y = \frac{1}{3}\right)$.

(pág. T.22)

$$F(x;y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \quad ; \quad f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

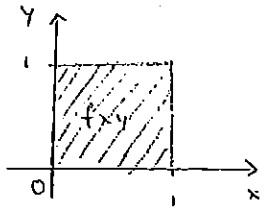
$$f_{XY} = \begin{cases} 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left[xy(x+y-xy^2)\right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2x + 2y - 6xy^2 & 0 \le x \le 1 \\ & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\left[x + y - xy^2\right]\right) = y(x + y - xy^2) + xy(1 - y^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 1(x + y - xy)^2 + y(0 + 1 - 2xy) + x(1 - y^2) - xy \cdot 2y$$

$$= x + y - xy^2 + y - 2xy^2 + x - 3xy^2 = 2x + 2y - 6xy^2$$

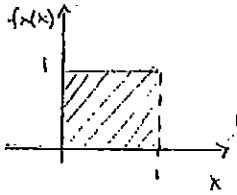
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2x + 2y - 6xy^2 & 0<x<1 \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$$



a) Calculo:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{y=0}^{y=1} (2x + 2y - 6xy^2)\,dy = \left[2xy + y^2 - 2xy^3\right]_0^1$$

$$f_X(x) = 2x + 1 - 2x = 1 \Rightarrow \boxed{f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}}$$



$$\boxed{f_Y(y/x=x_0) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x_0)}} = \frac{2x + 2y - 6xy^2}{1} = 2x_0 + 2y - 6x_0y^2 \quad \text{si } y \in (0,1)$$

Finalmente

$$\boxed{f_Y(y/x=x_0) = \begin{cases} 2x_0 + 2y - 6x_0y^2 & 0<y<1 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}}$$

b)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{x=0}^{x=1} 2x + 2y - 6xy^2\,dx = \left[x^2 + 2xy - 3x^2y^2\right]_0^1$$

$$f_Y(y) = 1 + 2y - 3y^2 \qquad \boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 1 + 2y - 3y^2 & \text{si } 0<y<1 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}}$$

15: Agosto: 2006

Continuación Ejercicio 5

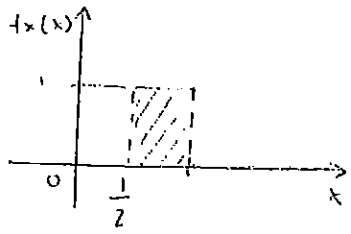
$$f_X(x/y=y_0) = \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{2x + 2y_0 - 6xy_0^2}{1 + 2y_0 - 3y_0^2} \quad \text{si } x \in (0,1)$$

$$\boxed{f_X(x/y=y_0) = \begin{cases} \dfrac{2x + 2y_0 - 6xy_0^2}{1 + 2y_0 - 3y_0^2} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

c) Calcular $P(x > \frac{1}{2})$ y $P(x > 1/2 \,/\, y = \frac{1}{3})$

c.1

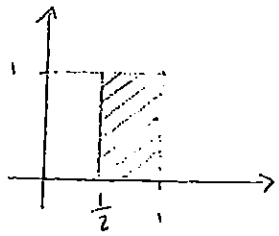
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$P(x > \tfrac{1}{2}) = \int_{x=\frac{1}{2}}^{x=\infty} 1\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx = \frac{1}{2} \qquad \boxed{P(x > \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}}$$

* Otra forma (sin utilizar la marginal)

$$P(x > \tfrac{1}{2}) = \int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} 2x + 2y - 6xy^2\,dy\,dx =$$



$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cancel{2x} + 1 - \cancel{2x}\,dx = \frac{1}{2}$$

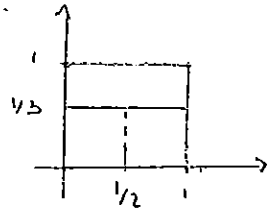
C.2

$$P\left(x > \frac{1}{2} / Y = \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f_X\left(x / Y = \frac{1}{3}\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x}{1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}} dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3}{4} \cdot \left(2x + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x\right) dx = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6x + 2 - 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left[2x^2 + 2x \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{4} \left(2 + 2 - \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{8}$$

$$\boxed{P\left(x > \frac{1}{2} / Y = \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{8}}$$



TEMA 4: PROCESOS ESTOCÁSTICOS

EJERCICIOS MUY IMPORTANTES DE AQUÍ EN ADELANTE.

Ejercicio 1

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.a.'s continuas e independientes, de media nula y varianza 1. Se define el proceso discreto en el tiempo:

$$X[n] = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad (n = 1,2,\ldots)$$

a) Calcule la media y la autocorrelación de $X[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?.

Se define el nuevo proceso:

$$Y[n]=X[n+N]-X[n]$$

siendo N un número natural fijo.

b) Calcule la media y la autocorrelación de $Y[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?.

c) Obtenga la distribución de 1º orden del proceso $Y[n]$, suponiendo $N>>1$.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ va indep. $\quad E(X_i) = \eta_{X_i} = 0.$

$V(X_i) = \sigma^2_{X_i} = 1.$

$$X[n] = \sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

a)

$$\boxed{E(X[n])} = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

$$\boxed{R_X[n_1,n_2]} = E(X[n_1]\,X[n_2]) = E\left[\left(\sum_{k_1=1}^{n_1} X_{k_1}\right)\cdot\left(\sum_{k_2=1}^{n_2} X_{k_2}\right)\right] =$$

los sumatorios no tienen el mismo número de elementos.

$$(X_1+X_2+X_3)\ldots\ (X_1+X_2+X_3)\ldots$$

$$= E\left[\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} X_{k_1}X_{k_2}\right] = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} E(X_{k_1}\cdot X_{k_2}) =$$

$$= X_1X_1 + X_1X_2 + X_1\cdot X_3 + \ldots + X_2\cdot X_1 + X_2\cdot X_2 + X_2\cdot X_3 + \ldots + X_3\cdot X_1 + X_3\cdot X_2 + \ldots$$

$k_1 \neq k_2 \quad E(X_{k_1}\cdot X_{k_2}) = E(X_1)\cdot E(X_{k_2}) = 0$

$$= \sum_{k=1}^{\min(n_1,n_2)} E(X_k)^2 = \boxed{\min(n_1,n_2)}$$

$\sigma^2_{X_k} = E(X_k^2) - \eta^2_{X_k} \Rightarrow$

$\Rightarrow E(X_k^2) = \sigma^2_{X_k} + \eta^2_{X_k} = 1 + 0 = 1.$

$X[n]$ no es estacionario en sentido amplio ya que $R_X[n_1,n_2]$ no depende de la diferencia de n_1 y n_2.

b). $Y[n] = X[n+N] - X[n] = \sum_{K=1}^{n+N} X_K - \sum_{K=1}^{n} X_K =$

$= \cancel{X_1} + \cancel{X_2} + \dots + \cancel{X_n} + X_{n+1} + \dots + X_{n+N} - \cancel{X_1} - \cancel{X_2} - \dots - \cancel{X_n} =$

$= \sum_{K=n+1}^{n+N} X_K.$

$$\boxed{E(Y[n]) = E\left(\sum_{K=n+1}^{n+N} X_K\right) = \sum_{K=n+1}^{n+N} E(X_K) = 0.}$$

$R_Y[n_1,n_2] = E(Y[n_1].Y[n_2]) = \underbrace{\sum_{K_1=n_1+1}^{n_1+N} . \sum_{K_2=n_2+1}^{n_2+N} E(X_{K_1}.X_{K_2})}$ $\Rightarrow$ Hay dos casos:

Ejemplo numérico:

$n_1 = 2$
$n_2 = 3$
$N = 2.$

$$\left.\begin{aligned} Y[n_1] &= \sum_{K_1=3}^{4} X_{K_1} \\ Y[n_2] &= \sum_{K_2=4}^{5} X_{K_2} \end{aligned}\right\} E(Y[n_1].Y[n_2]) = E\left(\sum_{K_1=3}^{4} X_{K_1} . \sum_{K_2=4}^{5} X_{K_2}\right) =$$

$= E((X_3+X_4).(X_4+X_5)) =$

$= \underbrace{E(X_3.X_4) + E(X_3.X_5) + E(X_4.X_4) + E(X_4.X_5)}. =$

$= \sum_{K_1=3}^{4} . \sum_{K_2=4}^{5} E(X_{K_1}.X_{K_2}).$

Muchos términos se van al ser la media del producto el producto de las medias $\Rightarrow$ solo quedan los valores cuadráticos medios $\Rightarrow \sum_{\max(n_1,n_2)+1}^{\min(n_1,n_2)+N}$

- $\boxed{n_1 \leq n_2 < n_1+N}$ $R_Y[n_1,n_2] = \sum_{K=n_2+1}^{n_1+N} E(X_K)^2 = \sum_{K=n_2+1}^{n_1+N} 1 = n_1+N-(n_2+1)+1 =$

$= n_1 - n_2 + N.$

$\sum_{K=3}^{5} 1 = 1+1+1. = 3.$
$\quad \| \quad \|$
$\quad 5-3+1. \quad \|$

- $\boxed{n_2 \leq n_1 < n_2+N}$ $R_Y[n_1,n_2] = \sum_{K=n_1+1}^{n_2+N} E(X_K^2) = \sum_{K=n_1+1}^{n_2+N} 1 = n_2+N-(n_1+1)+1 = n_2-n_1+N =$

$= -(n_1-n_2)+N$

$$R_Y[n_1,n_2] = \begin{cases} n_1 - n_2 + N & n_1 - n_2 \leq 0. \\ -(n_1-n_2)+N. & n_1 - n_2 > 0. \end{cases} \Rightarrow R_Y[n_1,n_2] = -|n_1-n_2| + N \quad \text{si } |n_1-n_2| < N$$

Finalmente:

$$R_Y[n_1,n_2] = \begin{cases} N - |n_1-n_2| & \text{si } |n_1-n_2| < N. \\ 0 & \text{si } |n_1-n_2| < N \end{cases} \Rightarrow$$

$\uparrow m = n_1 - n_2$

$$\boxed{R_Y[m] = \begin{cases} N-|m| & \text{si } |m|<N \\ 0 & \text{si } |m|>N. \end{cases}}$$

$Y[n]$ sí es estacionario en sentido amplio, ya que $E(Y) = cte = 0$ y $R_Y[m]$, $m = n_1 - n_2$; es decir; depende de la diferencia entre n_1 y n_2.

Ej. numérico:
para $|n_1 - n_2| > N$ $\quad n_1 = 5$
$n_2 = 2$
$N = 2$.

$$R_Y[n_1,n_2] = E(Y[n_1], Y[n_2]) = E\left(\sum_{k_1=6}^{7} X_{k_1} \cdot \sum_{k_2=3}^{4} X_{k_2}\right) =$$

$$= E\{(X_6+X_7)(X_3+X_4)\} = E(X_6 X_3) + E(X_6 X_4) + E(X_7 X_3) + E(X_7 X_4) = 0.$$

c).
$$Y[n] = \sum_{k=n+1}^{n+N} X_k \xrightarrow{N\to\infty} Y[n] \sim N(\mu,\sigma)$$ Theorema central del límite.

$\sigma = \sqrt{Var}$.

$$\mu = \sum_{k=n+1}^{n+N} E(X_k) = \sum_{k=n+1}^{n+N} 0 = 0$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=n+1}^{n+N} Var(X_k) = n+N-(n+1)+1 = N.$$

$= \sum_{k=n+1}^{n+N} 1$

$\Rightarrow Y \sim N(0, \sqrt{N})$.

Al ser las va's independientes $\Rightarrow$ va's incorreladas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la varianza de la suma es la suma de las varianzas

Prop: X e Y incorreladas $\Rightarrow Var(aX+bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$

Ejercicio 2

Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos conjuntamente estacionarios en sentido amplio, de medias nulas, autocorrelaciones $R_X(\tau)$ y $R_Y(\tau)$ y densidades espectrales de potencia $S_X(\omega)$ y $S_Y(\omega)$, respectivamente. Su correlación cruzada es $R_{XY}(\tau)$ y el espectro cruzado $S_{XY}(\omega)$. Se define el nuevo proceso $U(t)=X(t)\cos\omega_0 t+Y(t)\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$, siendo $\omega_0>0$. a) Determine las condiciones que deben verificar los estadísticos de $X(t)$ e $Y(t)$ definidos anteriormente para que $U(t)$ sea estacionario en sentido amplio. b) Para las condiciones del apartado anterior, calcule la densidad espectral de potencia de $U(t)$. Particularice las expresiones de la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $U(t)$ para el caso en que $X(t)$ e $Y(t)$ sean incorrelados.

$$U(t) = X(t).\cos(\omega_0 t) + Y(t).\mathrm{sen}(\omega_0 t).$$

a),

$$\boxed{R_U(t+\tau,t)} = E(U(t+\tau).U(t)) = E\{(X(t+\tau).\cos(\omega_0(t+\tau) + Y(t+\tau).\mathrm{sen}(\omega_0(t+\tau)).$$

$$(X(t).\cos\omega_0 t + Y(t).\mathrm{sen}(\omega_0 t))\} =$$

$$= \cos(\underbrace{\omega_0(t+\tau)}_{A}).E(X(t+\tau).X(t)).\cos(\underbrace{\omega_0 t}_{B}) + \cos(\underbrace{\omega_0(t+\tau)}_{A}).\mathrm{sen}(\underbrace{\omega_0 t}_{B}).E(X(t+\tau).Y(t$$

$$+ \mathrm{sen}(\omega_0(t+\tau)).\cos(\omega_0 t).E(Y(t+\tau).X(t)) + \mathrm{sen}(\omega_0(t+\tau)).\mathrm{sen}(\omega_0 t).E(Y(t+\tau).Y(t)) =$$

$$= R_X(\tau).\frac{1}{2}[\cos(\underbrace{\omega_0 t^*2+\tau)}_{A+B}. + \cos(\underbrace{\omega_0 \tau}_{A-B}.)] + R_{XY}(\tau).\frac{1}{2}[\mathrm{sen}(\underbrace{\omega_0(t^*2+\tau)}_{A+B}) - \mathrm{sen}(\underbrace{\omega_0\tau}_{A-B}.)] +$$

$$+ R_{YX}(\tau).\frac{1}{2}[\mathrm{sen}(\omega_0(t^*2+\tau) - \mathrm{sen}(\omega_0\tau)] + R_Y(\tau).\frac{1}{2}[\cos(\omega_0(t^*2+\tau)). + \cos(\omega_0\tau)] =$$

$$= \frac{1}{2}[R_X(\tau)+R_Y(\tau)]\cos(\omega_0\tau) + \frac{1}{2}.\underbrace{[R_X(\tau)-R_Y(\tau)]}_{=0}.\cos(\omega_0(t^*2+\tau)). +$$

* von 2 ses aunque casi no se ven.

$$+\underbrace{[R_{XY}(\tau). + R_{YX}(\tau)]}_{=0}.\frac{1}{2}.\mathrm{sen}(\omega_0(2t+\tau)) + [R_{XY}(\tau) - R_{YX}(\tau)]\frac{1}{2}.\mathrm{sen}(\omega_0\tau) =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R_X(\tau) = R_Y(\tau \\ R_{XY}(\tau) = -R_Y \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2}.[R_X(\tau)+R_Y(\tau)].\cos(\omega_0\tau) + \frac{1}{2}.[R_{XY}(\tau) - R_{YX}(\tau)]\mathrm{sen}(\omega_0\tau). =$$

$$\boxed{= R_X(\tau).\cos(\omega_0\tau) + R_{XY}(\tau).\mathrm{sen}(\omega_0\tau).}$$ sólo depende de τ

$$E(u(t)) = E(X(t)\cos(\omega_0 t) + Y(t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)) = \underset{0}{E(X(t))}\cos(\omega_0 t) + \underset{0}{E(Y(t))}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) =$$

$= 0.$ constante siempre.

Nota:

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau).$$

b).

$$\boxed{S(\omega)} = TF(R_u(\tau)) = TF(R_X(\tau)\cos(\omega_0\tau) + R_{XY}(\tau)\,\mathrm{sen}(\omega_0\tau)) =$$

$$= TF\left(R_X(\tau)\cdot\frac{e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau}}{2} + R_{XY}(\tau)\cdot\frac{e^{j\omega_0\tau}-e^{-j\omega_0\tau}}{2j}\right) =$$

$$= TF\left(\frac{1}{2}\cdot R_X(\tau)\cdot e^{j\omega_0\tau} + \frac{1}{2}\cdot R_X(\tau)\cdot e^{-j\omega_0\tau} + \frac{1}{2j}R_{XY}(\tau)\cdot e^{j\omega_0\tau} - \frac{1}{2j}\cdot R_{XY}(\tau)\cdot e^{-j\omega_0\tau}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\cdot S_X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\cdot S_X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2j}S_{XY}(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2j}S_{XY}(\omega+\omega_0)}$$

pag 30

prop. 4: $x(t)e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega-\omega_0)$.

Caso particular:

Finalmente particularizamos para cuando $X(t)$ e $Y(t)$ incorrelados $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C_{XY}(\tau) = 0.$

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \underset{0}{\underline{E(X(t))E(Y(t))}} = 0 \Rightarrow R_{XY}(\tau) = 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{R_u(\tau) = R_X(\tau)\cos(\omega_0\tau)}$$

$$\boxed{S_u(\omega)} = TF(R_u(\tau)) = \boxed{\frac{1}{2}\cdot S_X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\cdot S_X(\omega+\omega_0)}$$

Ejercicio 3

Sea $X(t)$ un p.e. estacionario de orden 2 con funciones de distribución de primer y segundo orden $F_X(x)$ y $F_X(x_1,x_2;\tau)$, respectivamente. Se forma el proceso:

$$Y(t)=\begin{cases} 1 & X(t)>a \\ -1 & X(t)\le a \end{cases}$$

siendo a una constante tal que $f_X(a)>0$.

a) ¿Es el proceso $Y(t)$ estacionario en sentido amplio?. ¿Es estacionario de orden 1?.

b) Para dicho p.e. $Y(t)$, calcule la autocovarianza y la varianza. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar esta última?.

$F_X(x)$ F.D. unidimensional.

$F_X(x_1,x_2;\tau)$ F.D. bidimensional

a) $\boxed{E(Y(t))} = \sum y \cdot P(Y(t)=y) = 1 \cdot P(Y(t)=1) + (-1) \cdot P(Y(t)=-1) =$

(rango) $R_Y(t)$. variable aleatoria discreta que depende del tiempo continuo.

$R_Y(t)=\{-1,1\}$.

$= 1 \cdot \underline{P(X(t)>a)} - 1 \cdot \underline{P(X(t)\le a)} = \underline{1-P(X(t)\le a)} - \underline{P(X(t)\le a)} =$

$= 1 - 2 \cdot P(X(t)\le a) = \boxed{1-2 \cdot F_X(a)}$ constante.

$R_Y(t_1,t_2) = E(Y(t_1) \cdot Y(t_2)) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} y_i y_j P(Y(t_1)=y_i, Y(t_2)=y_j) =$

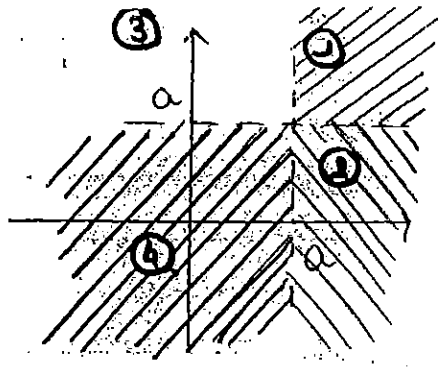
$1 \quad -1 \quad 1 \quad -1.$

$= 1 \cdot 1 \cdot P(Y(t_1)=1, Y(t_2)=1) + (1)(-1) P(Y(t_1)=1, Y(t_2)=-1) +$

$+(-1)(1) \cdot P(Y(t_1)=-1, Y(t_2)=1) + (-1)(-1) \cdot P(Y(t_1)=-1, Y(t_2)=-1)) =$

$= \underset{1}{P(X(t_1)>a, X(t_2)>a)} - \underset{2}{P(X(t_1)>a, X(t_2)\le a)} - \underset{3}{P(X(t_1)\le a, X(t_2)>a)}$

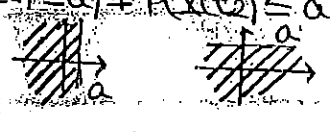
$+ \underset{4}{P(X(t_1)\le a, X(t_2)\le a)}. = \circledast$



① $P(X(t_1)>a, X(t_2)>a) =$

$= 1 - P(X(t_1)\le a \cup X(t_2)\le a) =$

$= 1 - \left(P(X(t_1)\le a) + P(X(t_2)\le a) - P(X(t_1)\le a, X(t_2)\le a)\right)$ ⊛

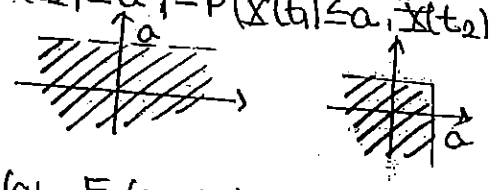


④. $P(X(t_1)\le a, X(t_2)\le a) = F_X(a,a,\tau)$.

⊛ $= 1 - (F_X(a) + F_X(a) - F_X(a,a,\tau)) = 1 - 2\cdot F_X(a) + F_X(a,a,\tau)$.

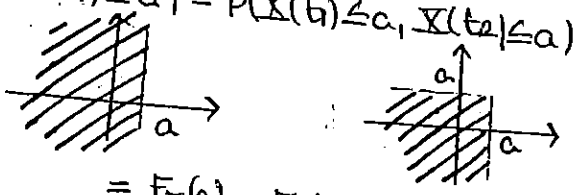
② $P(X(t_1) > a, X(t_2)\le a) =$ "y" $\equiv \cap$. $P(X(t_2)\le a) - P(X(t_1)\le a, X(t_2)\le a) =$

Gráficamente.



$= F_X(a) - F_X(a,a,\tau)$.

③ $P(X(t_1)\le a, X(t_2) > a) = P(X(t_1)\le a) - P(X(t_1)\le a, X(t_2)\le a) =$



$= F_X(a) - F_X(a,a,\tau)$

⊛ $= 1 - 2F_X(a) + F_X(a,a,\tau) - F_X(a) + F_X(a,a,\tau) - F_X(a) + F_X(a,a,\tau) + F_X(a,a,\tau) =$

$\boxed{= 1 - 4F_X(a) - 4F_X(a,a,\tau)}$ siempre que $t_1 \ne t_2 \Leftrightarrow \tau \ne 0$.

$\boxed{t_1 = t_2} \Rightarrow \tau = t_2 - t_1 = 0$:

$R_Y(t_1,t_1) = E(Y(t_1)\cdot Y(t_1)) = E(Y^2(t_1)) = 1^2\cdot P(Y(t_1)=1) + (-1)^2\cdot P(Y(t_1)=1) =$

$= P(Y(t_1)=1) + P(Y(t_1)=-1) = 1$

porque el $R_Y(=\{-1,1\}$.

Finalmente:

$$\boxed{R_Y(\tau) = R_Y(t_1,t_2) = \begin{cases} 1 - 4F_X(a) - 4F_X(a,a,\tau), & \tau \ne 0 \\ 0 & \tau = 0. \end{cases}}$$

$Y(t)$ es estacionario en sentido amplio.

Ejercicio 4

Sea $X[n]$ un ruido blanco estricto con fdp de 1er orden normal estándar. Sobre $X[n]$ se aplica una transformación lineal e invariante de respuesta al impulso $h[n] = a_0\delta[n] + a_1\delta[n-1]$, obteniéndose como resultado un proceso $Y[n]$. Calcular:

a) La autocorrelación y densidad espectral de potencia de $Y[n]$.
b) La fdp de 1er orden de $Y[n]$.

No la piden pero es necesaria para calcular después la autocorrelación de $Y[n]$

a)
Primero vamos a calcular la autocorrelación de $X[n]$:

$E(X[n]) = \mu_X = 0$ por ser una variable normal estándar $N(0,1)$.

$V(X[n]) = \sigma_X^2 = 1$ por ser una variable normal estándar $N(0,1)$

Ten en cuenta que por ser $X[n]$ ruido blanco estricto $X[n_1]$ y $X[n_2]$ son independientes y por ello podemos separar las esperanzas.

$$R_X[n_1,n_2] = E(X[n_1]\cdot X[n_2]) = \begin{cases} E(X^2[n_1]) = V(X[n_1]) + E(X[n_1])^2 = 1 + 0^2 = 1, & n_1 = n_2 \\ E(X[n_1])E(X[n_2]) = 0 \ , & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

Por tanto, juntando ambos resultados tenemos que:

Recuerda: $m = n_2 - n_1$

$$R_X[n_1,n_2] = \begin{cases} 1 \ , & n_1 = n_2 \\ 0 \ , & n_1 \neq n_2 \end{cases} \Rightarrow R_X[n_1,n_2] = \delta[n_2 - n_1] \Rightarrow R_X[m] = \delta[m]$$

Notación: en tiempo discreto la frecuencia se puede poner Ω o bien e^{jw}, como en SLTN

La densidad espectral de potencia de $X[n]$ es (no la piden): $S_X(\Omega) = TF(R_X[m]) = 1$

Ahora ya nos ponemos a calcular la autocorrelación de $Y[n]$:

Recuerda que la delta es el elemento neutro de la convolución, es decir:
$\delta[n] * x[n] = x[n]$

En este paso hemos utilizado que:
$\delta[-m] = \delta[m]$
$\delta[-m-1] = \delta[m+1]$

$$\begin{aligned} R_Y[m] &= R_X[m] * h[m] * h[-m] = \delta[m] * h[m] * h[-m] = h[m] * h[-m] = \\ &= (a_0\delta[m] + a_1\delta[m-1]) * (a_0\delta[-m] + a_1\delta[-m-1]) = \\ &= (a_0\delta[m] + a_1\delta[m-1]) * (a_0\delta[m] + a_1\delta[m+1]) = \\ &= a_0\delta[m]*a_0\delta[m] + a_0\delta[m]*a_1\delta[m+1] + a_1\delta[m-1]*a_0\delta[m] + a_1\delta[m-1]*a_1\delta[m+1] = \\ &= a_0^2\delta[m] + a_0a_1\delta[m+1] + a_0a_1\delta[m-1] + a_1^2\delta[m] = \\ &= (a_0^2 + a_1^2)\delta[m] + a_0a_1(\delta[m+1] + \delta[m-1]) \end{aligned}$$

Por tanto: $\boxed{R_Y[m] = (a_0^2 + a_1^2)\delta[m] + a_0a_1(\delta[m+1] + \delta[m-1])}$

Ahora, la densidad espectral de potencia de $Y[n]$ es:

$$S_Y(\Omega) = S_Y(e^{jw}) = TF(R_Y[m]) = a_0^2 + a_1^2 + a_0a_1(e^{-jw} + e^{jw})$$

Finalmente: $\boxed{S_Y(\Omega) = S_Y(e^{jw}) = a_0^2 + a_1^2 + 2a_0a_1\cos w}$

www.yoquieroaprobar.es · Clases de apoyo · Tfno 91 544 57 [illegible] · 619 142 355

Indicación: $\lambda_1 (\Omega) = \lambda_1 (\omega) + \frac{\omega_1^2}{\omega} = \lambda_1 (\omega) + \omega_1^2 \cos^2 \omega$

Ahora le sobra la operación de posición de $Y[n]$ es:

$$\lambda_1 (\Omega) = \lambda_1 (\omega) = \mathbb{V}\left(\mathbb{E}[n] \mid \omega = \omega_1 \text{ o } \omega = \omega_2\right)$$

Ahora la sobra la operación de posición de $Y[n]$ es:

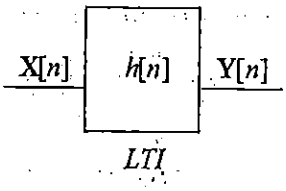
$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y[n]) &= \mathbb{V}\left(\mathbb{E}(Y[n] \mid \omega = \omega_1) + \omega_1 \cos(\omega_1 n + \tfrac{\pi}{2}) \cdot \mathbb{E}(Y[n] \mid \omega = \omega_2) + \omega_2 \cos(\omega_2 n + \tfrac{\pi}{2})\right) = \\
&= \mathbb{V}\left(\omega_1 \cos(\omega_1 n + \tfrac{\pi}{2}) + \omega_2 \cos(\omega_2 n + \tfrac{\pi}{2})\right) = \\
&= \mathbb{V}\left(\omega_1 \sin(\omega_1 n) + \omega_2 \sin(\omega_2 n)

Esto es de STLN:
La salida de un sistema LTI se obtiene convolucionando la entrada con la respuesta al impulso.

Recuerda de STLN:
$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$
$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$
Propiedad de la delta que se cumple tanto en tiempo continuo como discreto.

Mirar la propiedad reproductiva de la distribución normal

b)



$$Y[n] = X[n] * h[n]$$

$$Y[n] = X[n] * h[n] = X[n]*\left(a_0\delta[n] + a_1\delta[n-1]\right) = X[n]*a_0\delta[n]+X[n]*a_1\delta[n-1] =$$
$$= a_0X[n]+a_1X[n-1]$$

$X[n]$, $X[n-1]$ son variables aleatorias independientes $N(0,1)$. Podemos asegurar que son independientes por la definición de ruido blanco estricto.

Por tanto $Y[n]$ es una variable aleatoria $N(\mu_Y,\sigma_Y)$ por ser suma de variables aleatorias normales (Propiedad reproductiva de la distribución normal). Donde:

$$\mu_Y = E(Y[n]) = E\left(a_0X[n] + a_1X[n-1]\right) = a_0E\left(X[n]\right) + a_1E\left(X[n-1]\right) = a_0\cdot 0 + a_1\cdot 0 = 0$$

$$\sigma_Y^2 = V(Y[n]) = V\left(a_0X[n] + a_1X[n-1]\right) = a_0^2V\left(X[n]\right) + a_1^2V\left(X[n-1]\right) = a_0^2\cdot 1 + a_1^2\cdot 1 = a_0^2 + a_1^2$$

ISAL
Problemas de examen

Febrero 1997
Ejercicio P2

Sea **X** una v.a. con fdp:

$$f_X(x) = \frac{1}{1-x} \quad (0 < x < b)$$

siendo b una constante positiva. Se pide:
a) El valor de b y la media de **X**.
b) Se define la v.a.:

$$\mathbf{Y} = c\ln\left(\frac{a}{1-\mathbf{X}}\right)$$

siendo a y c constantes positivas. Caracterice probabilísticamente la v.a. **Y**.

a) • $f_X(x)$ función de densidad debe cumplir que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$:

$$\int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x)\Big|_0^b = -\ln(1-b) = 1 \rightarrow \boxed{b = 1-e^{-1}}$$

• Esperanza:

$$\boxed{E[X]} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^b \frac{x}{1-x}\,dx = \int_0^b \left[\frac{x-1}{1-x} + \frac{1}{1-x}\right] dx$$

$$= \int_0^b -1\,dx + \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = -b - \ln(1-x)\Big]_0^b = -b - \ln(1-b)$$

$$= -1 + e^{-1} - \underbrace{\ln(e^{-1})}_{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$$

b) $Y = c \cdot \ln\left(\frac{a}{1-X}\right) \longrightarrow \varphi(X) = c \cdot \ln\left(\frac{a}{1-X}\right)$

Para ver si es estrictamente creciente sacamos $\varphi'(X)$:

$$\varphi'(X) = c \cdot \frac{\frac{-a(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{a}{1-x}} = \frac{c}{1-x} \neq 0 \rightarrow$$ ESTRICTAMENTE CRECIENTE Y CONTINUA EN $\underbrace{(0, 1-e^{-1})}_{R_X}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1}(y))'| & , \text{ si } y \in R_Y \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

$\varphi'(x) \neq 0 \rightarrow \exists\, \varphi^{-1}(y)$

$y = c \cdot \ln\left(\frac{a}{1-x}\right) \rightarrow \quad = e^{y/c} = \frac{a}{1-x} \rightarrow x = 1 - \frac{a}{e^{y/c}}$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(y) = 1 - \frac{a}{e^{y/c}}$

- $(\varphi^{-1}(y))' = -a\left(\frac{-1}{c}\right)e^{-y/c} = \frac{a}{c}e^{-y/c}$
- $f_X(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{1-\varphi^{-1}(y)} = \frac{e^{y/c}}{a}$

$\Big\{ f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot y^{-1}(y) = 1/c$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 1/c & , y \in R_Y = (c\ln(a), c\ln(a)+c) \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

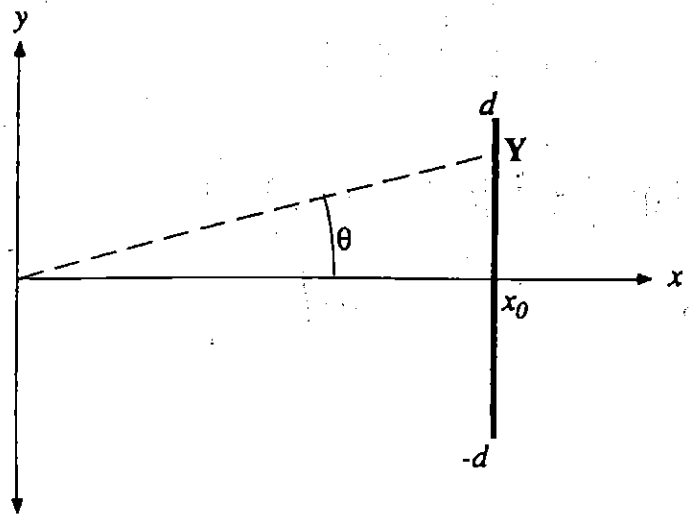
$\varphi(0) = c\ln(a)$

$\varphi(b) = \varphi(1-e^{-1}) = c\ln(a \cdot e) \rightarrow R_Y = (c\ln(a), \underbrace{c(\ln(a)+1)}_{c\ln(a)+c})$

0 en el resto

Febrero 1997
Ejercicio T2

Considere una fuente radioactiva situada en el origen de coordenadas que emite partículas con ángulos de salida θ aleatorios y uniformemente distribuidos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Se sitúa una pantalla perfectamente absorbente a distancia x_0 de la fuente según el diagrama adjunto:



a) Determine la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria **Y**: coordenada y de una partícula a su paso por $x = x_0$.

b) Calcule la semianchura de la pantalla d para que ésta elimine el 50% de las partículas f que sobrepasarían la recta $x = x_0$ en ausencia de apantallamiento.

Θ = variable aleatoria que determina el ángulo formado por la trayectoria de la partícula y el eje OX.

$\Theta \in (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow$ infinitos valores $\rightarrow$ v.a. continua

uniformemente distribuidos. $\rightarrow \Theta \sim U(-\pi/2, \pi/2)$

$$\rightarrow f_\Theta = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi/2-(-\pi/2)}, & \text{si } -\pi/2 < \Theta < \pi/2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Y = v.a. que determina la altura de la partícula al llegar a la pantalla, cuya ecuación es la recta $x = x_0$.

$Y \in (-\infty, \infty) \rightarrow$ v.a. continua

$Y = x_0 \operatorname{tg}(\Theta) \rightarrow \varphi(\Theta) = x_0 \operatorname{tg}(\Theta)$ $\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ cont y estrictamente creciente en } R_\Theta = (-\pi/2, \pi/2) \\ \Downarrow \\ \exists \varphi^{-1}(y) \end{array} \right.$

$$y = x_0 \operatorname{tg}(\theta) \rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_0}\right) \Rightarrow \varphi^{-1}(y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_0}\right)$$

$$\left[\varphi^{-1}(y)\right]' = \frac{\frac{1}{x_0}}{1-\left(\frac{y}{x_0}\right)^2} = \frac{x_0}{x_0^2+y^2}$$

También se puede ver esto mirando en $\varphi(y) = x_0 \operatorname{tg}(\theta)$ $-\pi/2$ y $\pi/2$, que da $(-\infty, \infty)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_\Theta(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1}(y))'| & \text{si } y \in R_Y \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- $f_\Theta(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{\pi}$
- $\varphi^{-1}(y) = \frac{x_0}{x_0^2+y^2}$

$$\rightarrow \boxed{f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x_0}{x_0^2+y^2}\right]} \; \forall y \in R_Y = \mathbb{R}$$

b) $P(-d < y < d) = 0'5$

$$P(-d<y<d) = \int_{-d}^{d} f_Y(y)\,dy = \int_{-d}^{d} \frac{1}{\pi}\left(\frac{x_0}{x_0^2+y^2}\right)dy = 2\int_0^d \frac{1}{\pi}\left(\frac{x_0}{x_0^2+y^2}\right)dy$$

PAR

$$= \frac{2x_0}{\pi}\int_0^d \frac{1/x_0^2}{1+\left(\frac{y}{x_0}\right)^2}\,dy = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_0}\right)\Big]_0^d = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{x_0}\right)$$

$$\rightarrow P(y \in (-d, d)) = \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{x_0}\right) \rightarrow$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{x_0}\right) = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{d}{x_0} = 1 \rightarrow \boxed{d = x_0}$$

Junio 97
Ejercicio T1

Sea **X** una v.a. aleatoria uniforme en el intervalo (-2, 2), a la cual se le aplica la transformación:

$$g(x) = \begin{cases} 1-|x| & (|x|<1) \\ 0 & (|x|\geq 1) \end{cases}$$

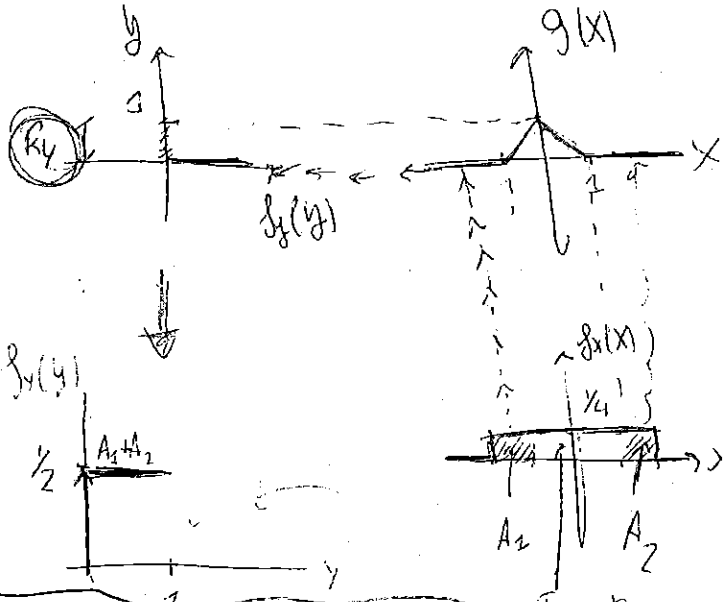
Se pide:
a) Calcule la f.d.p. de la v.a. **Y** = g(**X**)
b) Calcule la media y la varianza de **Y**

$$f_X(x) = \begin{cases} K = \frac{1}{4}, & -2 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

v.a. aleatoria

$$\int_{-2}^{2} K\,dx = 1 \rightarrow K = \frac{1}{4}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



La transforma g(x) no presenta gráfica horizontal en (-1,1), luego, aquí no se puede hacer gráficamente, la hacemos de forma analítica.

· Resulta que g(x) crece para (-1,0) y decrece en (0;1):

$-1 < x < 0 \quad g(x) = 1+x \rightarrow g^{-1}(x) = y-1 = x_1$

$0 < x < 1 : g(x) = 1-x \rightarrow g^{-1}(x) = -y+1 = x_2$

* Como g(x) es constante en (-2,1) y (1,2) donde la X toma valores ⇒ ⇒ Y será una v.a. mixta, tendrá una delta en Y=0 de peso la probabilidad de que X esté entre (-2,-1) y (1,2) ⇒ $f_Y(y=0) = P(-2<X<-1) + P(1<X<2)$

esta parte no se puede hacer gráficamente, ya que arriba no hay un tramo horizontal

Ah: $f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f(x_2)}{|g'(x_2)|} \rightarrow f_Y(y) = \frac{\frac{1}{4}}{|1|} + \frac{\frac{1}{4}}{|-1|} = \frac{1}{2}, \quad y \in R_Y = [0,1]$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } y = 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

MEDIA DE Y: $E[y] = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2}\, dy + 0 \cdot P(y=0) = \boxed{\frac{1}{4}}$

PARTE CONTINUA

$E[R] = \int_{-\infty}^{\infty} r \cdot f_r(r)\, dr$

PARTE DISCRETA

$E[R] = \sum_{i=0}^{n} r_i P(r_i)$

VARIANZA DE Y:

$V[y] = E[y^2] - E[y]^2 = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{2}\, dy + 0 \cdot P(y=0) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{5}{48}}$

Febrero 1998
Ejercicio P1

Un sistema contiene n componentes diferentes. El tiempo de vida del componente i-ésimo es una v.a. exponencial X_i de media μ_i, es también independiente del resto de los componentes. El sistema falla en cuanto falla uno de los componentes.

a) Exprese la v.a. tiempo de vida del sistema Y en función de las X_i.
b) Determine la fdp de Y.
c) Si $n=4$ y $\mu_1=1000$, $\mu_2=2000$, $\mu_3=3000$, y $\mu_4=4000$ horas. Calcule la probabilidad de que el tiempo de vida del sistema sea mayor de 100 horas.

Funciones exponenciales de parámetro λ:

f.p.d $= f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Esperanza $= \frac{1}{\lambda}$

Varianza $= \frac{1}{\lambda^2}$

$X_i \sim \exp(\lambda)$ $\quad E[X_i] = \mu_i$

$\rightarrow \lambda = \frac{1}{\mu_i}$

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} e^{-\frac{1}{\mu_i}x} & , x \geq 0 \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases}$$

Y = "tiempo de funcionamiento del sistema"

$Y = \min\{X_i\}_{i=1}^{i=n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$

b) Sacamos la $f_Y(y)$ a partir de su $F_Y(y)$:

$\boxed{F_Y(y)}$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geq y) =$

$= 1 - P((X_1 \geq y) \cap \dots \cap (X_n \geq y)) = 1 - P(X_1 \geq y) \cdot \dots \cdot P(X_n \geq y)$

X_i independientes

$= 1 - [1 - P(X_1 \leq y)][\dots][1 - P(X_n \leq y)] = 1 - [1 - F_{X_1}(y)][\dots][1 - F_{X_n}(y)]$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{\mu_i}x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(y)] = 1 - e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{\mu_i} y}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i} \cdot e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{\mu_i} y}} \quad , \; y \geq 0$$

c) $\boxed{P(Y \geq 100)} = 1 - P(Y \leq 100) = 1 - F_Y(100)$

$$= 1 - \left[1 - e^{\sum_{i=1}^{4} \frac{-1}{\mu_i} 100}\right] = \ldots = \boxed{0'82}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{-100}{\mu_i} = -\frac{100}{1000} - \frac{100}{2000} - \frac{100}{3000} - \frac{100}{4000}$$

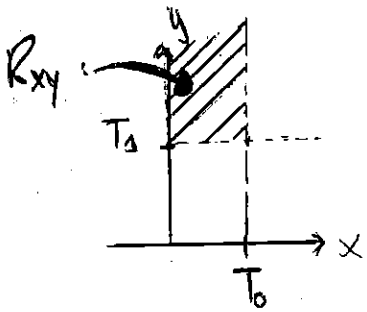
Febrero 99
Ejercicio P1

El tiempo de conducción que tarda una persona en llegar a su trabajo en coche es una variable aleatoria **Y**. La hora de salida de su casa también es una variable aleatoria **X**. Se sabe además, que hay un tiempo mínimo de conducción igual a T_1. Si la f.d.p. conjunta es $f_{XY}(x,y)=(1/T_0)\exp[-(y-T_1)]$ en $0<x<T_0$ e $y>T_1$, se pide:

a) La f.d.p.'s marginales de **X** e **Y**.
b) El tiempo medio de conducción y la hora media de llegada al trabajo supuesto que se ha salido a la hora $T_2\,(0<T_2<T_0)$.
c) La probabilidad $P\{\mathbf{Y}>\mathbf{X}+T_1\}$

X : v.a. que determina la hora de salida.
Y : v.a. que determina el tiempo de conducción.

$$f_{XY}=\begin{cases}\frac{1}{T_0}e^{-(y-T_1)} & ;\ 0<x<T_0,\ y>T_1\\ 0 & ;\ \text{resto}\end{cases}$$



a) $\boxed{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(y,x)\,dx=\boxed{e^{-(y-T_1)}}\quad y\in(T_1,\infty)$

Vemos que son independientes

$\boxed{f_X(x)}=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\,dy=\int_{T_1}^{\infty}\frac{1}{T_0}e^{-(y-T_1)}\,dy=\frac{e^{T_1}}{T_0}\cdot e^{-y}\Big|_{\infty}^{T_1}=\boxed{\frac{1}{T_0}}\quad x\in(0,T_0)$

b) • TIEMPO MEDIO DE CONDUCCION. $E[y]=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_Y(y)=\int_{T_1}^{\infty}y\cdot e^{-(y-T_1)}\,dy=\ldots=$

$=e^{T_1}\cdot\left[\underbrace{ye^{-y}\Big|_{\infty}^{T_1}}_{\downarrow}-\int_{T_1}^{\infty}-e^{-y}\,dy\right]$

$T_1e^{-T_1}-\lim_{n\to\infty}ne^{-n}=T_1e^{-T_1}-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ LHY

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}=0$

$\Rightarrow\ \boxed{E[y]=T_1+1}$

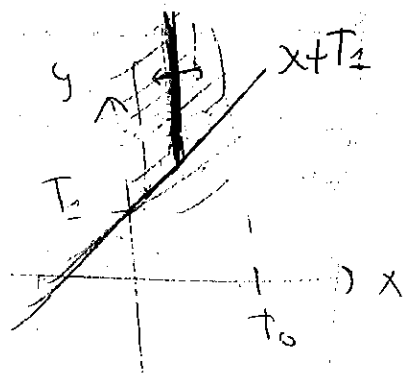
• HORA MEDIA DE LLEGADA AL TRABAJO : $Z = X + Y$

"hora en la que salimos" + "tiempo que tarda"

Me piden : salimos a la hora T_2

$$\boxed{E[Z/_{X=T_2}]} = E\left[\frac{X+Y}{X=T_2}\right] = E[T_2 + Y] = E[T_2] + E[Y]$$

$$= T_2 + E[Y] = \boxed{T_2 + T_1 + 1}$$



c) $\boxed{P(Y > X + T_1) =}$

$$* = \int_{x=0}^{x=T_0} \int_{y=x+1}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{T_0} \left[\int_{x+1}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{-(y-T_0)}\,dy \right] dx = \dots = \boxed{\frac{1-e^{-T_0}}{T_0}}$$

$$\cancel{\int_{x=0}^{x=T_0} \int_{y=x+1}^{y=\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{T_1} \int_{y=y-T_1}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}$$

cogiendo el diferencial perpendicular

ETSI Telecomunicación

Septiembre 03
Ejercicio P1

Sean **R** y Φ dos variables aleatorias independientes tales que Φ es uniforme en $(0,2\pi)$ y **R** tiene una fdp:

$$f_R(r)=\frac{2r}{A^2} \quad r\in(0,A)$$

Siendo $A>0$ una constante. Sobre ellas se realiza la siguiente transformación:

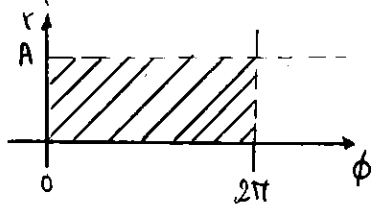
$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases}$$

Calcule:

a) La fdp conjunta de **X** e **Y**. Dibuja su rango.
b) Las fdp's marginales de **X** e **Y**. ¿Son independientes?
c) La covarianza de **X** e **Y** ¿Están incorreladas?
d) $P\left(\mathbf{X}^2+\mathbf{Y}^2>\frac{A^2}{4}\right)$
e) $P\left(\mathbf{Y}>\frac{A}{\sqrt{2}}\Big/\mathbf{X}=\frac{A}{\sqrt{2}}\right)$ $(=0)$

$$\phi\sim U(0,2\pi) \Rightarrow f_\phi(\phi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0<\phi<2\pi\\ 0, & \text{resto}\end{cases} \quad ; \quad f_R(r)=\begin{cases}\frac{2r}{A^2}, & 0<r<A\\ 0, & \text{resto}\end{cases}$$

$$\phi, R \text{ ind.} \Rightarrow f_{R\phi}(r,\phi)=\begin{cases}\frac{r}{\pi A^2}, & 0<\phi<2\pi,\ 0<r<A\\ 0, & \text{resto}\end{cases}$$



a) TRANSFORMACIÓN:

$$\begin{cases} x = r\cos(\phi) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\phi) \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y)=\frac{f_{\phi,R}(\phi(x,y),r(x,y))}{|J(r(x,y),\phi(x,y))|}$$

$$* \ |J(r(x,y),\phi(x,y))| = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos\phi & -r\,\mathrm{sen}\,\phi\\ \mathrm{sen}\,\phi & r\cos\phi\end{vmatrix} = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

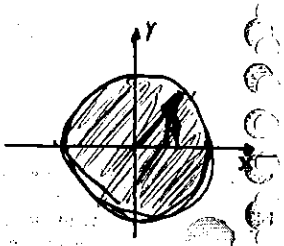
$\phi=\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

se cumple siempre

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\pi a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\pi a^2}, & 0<\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)<2\pi,\ 0<\sqrt{x^2+y^2}<A\\ 0, & \text{resto}\end{cases}$$

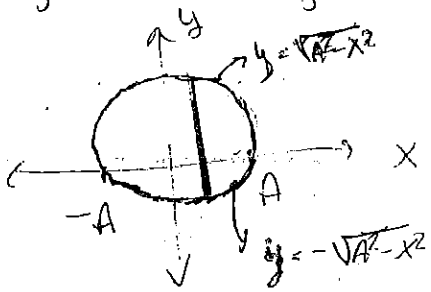
$$\boxed{f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi A^2} & ; \ x^2+y^2 < A^2 \\ 0 & ; \ \text{resto} \end{cases}}$$

DISTRIBUCIÓN BIDIMENSIONAL UNIFORME EN EL DISCO DE CENTRO EL ORIGEN Y RADIO A.



b) $$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{A^2-x^2}}^{\sqrt{A^2-x^2}} \frac{1}{\pi A^2}\,dy = \frac{1}{\pi A^2}\,2\sqrt{A^2-x^2}\ , \quad R_x = (-A, A)$$

Gráficamente se ve fácilmente que $R_x = (-A, A)$



Por simetría: $$f_y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{A^2-y^2}}{\pi A^2} & , -A < y < A \\ 0 & , \ \text{o} \end{cases}$$

$f_x(x) \cdot f_y(y) \neq f_{xy}(x,y) \Rightarrow$ NO IND.

c) COVARIANZA: $C(x,y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$* \ E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x)\,dx = \int_{-A}^{A} x \cdot \frac{2\sqrt{A^2-x^2}}{\pi A^2}\,dx = \frac{1}{\pi A^2} \left. \frac{(A^2-x^2)^{3/2}}{3/2} \right|_{A}^{-A} = 0$$

y función impar $\Rightarrow \int_{-c}^{c} (f \text{ impar}) = 0$

$$* \ E[Y] = E[X] = 0$$

$$* \ E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y\, f_{xy}(x,y) = \frac{1}{\pi A^2} \int_{x=-A}^{x=A} \int_{y=-\sqrt{A^2-x^2}}^{y=\sqrt{A^2-x^2}} x \cdot y \, dy\, dx = 0$$

$\Rightarrow C(x,y) = 0 \Rightarrow$ INCORRELADAS

d) $\boxed{P\left(x^2+y^2 > \frac{A^2}{4}\right)} = P\left(r^2 > \frac{A^2}{4}\right) = P\left(|\hat{r}| > |\hat{A/2}|\right)$

$= 1 - P\left(r < A/2\right) = 1 - \int_0^{A/2} \frac{2r}{A^2}\, dr = 1 - \frac{1}{A^2} \cdot r^2 \Big|_0^{A/2}$

$= 1 - \frac{1}{4} = \boxed{3/4}$

e) $P\left(Y > \frac{A}{\sqrt{2}} \,/\, X = \frac{A}{\sqrt{2}}\right)$

Si $X = \frac{A}{\sqrt{2}}$, debemos calcular la probabilidad de que Y sea mayor de $\frac{A}{\sqrt{2}}$.

Siempre debe cumplirse que: $x^2 + y^2 < A^2 \Rightarrow y < \sqrt{A^2 - x^2}$

Si $x = \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow y < \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{2}} \Rightarrow y < \sqrt{\frac{A^2}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y < \frac{A}{\sqrt{2}}}$

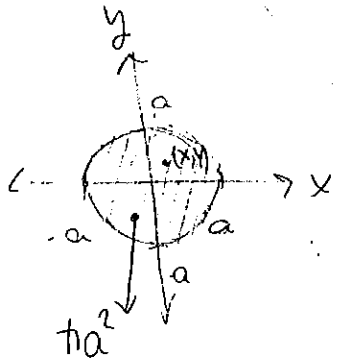
Luego si y debe ser menor que $\frac{A}{\sqrt{2}}$, la probabilidad de que sea mayor es cero.

Febrero 07
Ejercicio 1

Sea (X,Y) un punto escogido completamente al azar (distribución bidimensional uniforme) en el círculo $x^2+y^2<a^2$.

Calcule:

a) Las funciones de densidad de probabilidad marginales de X e Y.
b) La función de densidad de probabilidad condicionada $f_x(x/y)$. Determine si pertenece a algún tipo conocido.
c) La función de distribución de la variable aleatoria $R=$ "distancia del punto (X,Y) al origen de coordenadas".
d) Se realiza la transformación: $R=\left(X^2+Y^2\right)^{1/2}, \Theta=\text{arctg}\,(Y/X)$. Calcule la función de densidad de probabilidad conjunta de R y Θ (no olvide indicar el rango o recorrido de la variable aleatoria bidimensional).
e) Verifique si R y Θ son independientes.

a) 

$$\rightsquigarrow \boxed{f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi a^2}, & x^2+y^2<a^2\\ 0, & \text{resto}\end{cases}}$$

- $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\pi a^2}\,dy=\frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}\quad, x\in(-a,a)$

(0 en el resto)

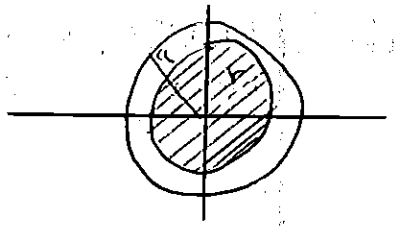
- $f_Y(y)=\frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}\quad, y\in(-a,a)$

b) $$\boxed{f_X(x/y=y_0)=\frac{f_{XY}(x,y_0)}{f_Y(y=y_0)}=\frac{\frac{1}{\cancel{\pi a^2}}}{\frac{2}{\cancel{\pi a^2}}\sqrt{a^2-y_0^2}}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-y_0^2}}}\quad x^2+y_0^2<a^2$$

SE TRATA DE UNA UNIFORME ya que todas las variables de la fórmula son constantes.

c) R: Distancia de (X,Y) al origen. (se podría hace con la v.a. ficticia)

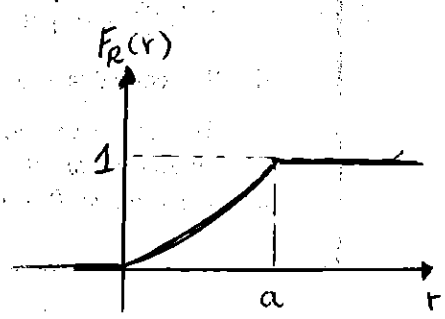
$R = \sqrt{x^2+y^2}$



¿F(R)?

$$\boxed{F_R(r) = P(R \le r) = \begin{cases} 0 & , r < 0 \\ 1 & , r > a \\ \dfrac{\#\text{ CASOS A FAVOR}}{\#\text{ CASOS POSIBLES}} & 0 < r < a \end{cases}}$$

$$= \boxed{\begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{\cancel{\pi} r^2}{\cancel{\pi} a^2} & 0 < r < a \\ 1 & r > a \end{cases}}$$



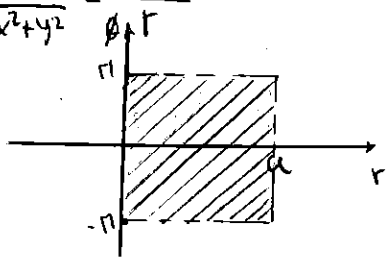
d) $R = \sqrt{X^2+Y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{a}\right)$; $f_{R\Theta}(r,\theta) = \dfrac{f_{XY}(x(r,\theta), y(r,\theta))}{|J(x(r,\theta), y(r,\theta))|}$

$$f_{XY}(x(r,\theta), y(r,\theta)) = \frac{1}{\pi a^2}$$

$$|J(x(r,\theta), y(r,\theta))| = \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y/x^2}{1+\frac{y^2}{x^2}} & \frac{1/x}{1+y^2/x^2} \end{vmatrix} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1/x}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\underbrace{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}_{=1}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{R\Theta}(r,\theta) = \frac{\frac{1}{\pi a^2}}{\frac{1}{r}} = \frac{r}{\pi a^2}} \quad \text{Si } (r,\theta) \in R_{R\Theta}$$



e) R y θ indep. $\Leftrightarrow$ $f_{R\Theta}(r,\theta) = f_R(r) \cdot f_\Theta(\theta)$

$$f_R(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{\pi a^2}\, d\theta = \frac{r}{\pi a^2}\left[\theta\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2r}{a^2}$$

$$f_\Theta(\theta) = \int_0^a \frac{r}{\pi a^2}\, dr = \frac{1}{\pi a^2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{\pi \cancel{a^2}} \cdot \frac{\cancel{a^2}}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

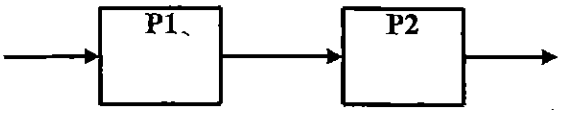
Efectivamente vemos que $f_{R\Theta} = f_R \cdot f_\Theta \Rightarrow$ si son independientes.

Septiembre 2005
Ejercicio 1

Un proceso informático pasa sucesivamente por dos procesadores P1 y P2 según se muestra en la figura. La v.a. **X** representa el tiempo que pasa el proceso en el primer procesador, y la v.a. **Y** representa el tiempo total que requiere el proceso en pasar por los dos procesadores. Se conoce la fdp conjunta:

$$f_{xy}(x,y)=\begin{cases} k e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Dibuje el rango de la v.a. bidimensional y calcule el valor de k. Determine si las v.a.'s **X** e **Y** son independientes.
b) Se define una nueva v.a.. **Z** como el tiempo que tarda el proceso en el segundo procesador. Exprese la v.a. **Z** en función de las v.a.'s **X** e **Y**. Calcular $f_{xz}(x,z)$ y la fdp de la nueva v.a. **Z**. Determine si las v.a.'s **X** y **Z** son independientes.
c) Calcule la varianza de **Z** y la covarianza entre **Z** e **Y**.
d) Calcule $f_Y(y|x)$ y dibújela para $x=5$.
e) Si el proceso atravesara *100* procesadores P1, P2...P100 y el tiempo en cada uno de ellos se modelara como una exponencial de media *10 seg*, calcule la probabilidad que el proceso termine antes de *15 min*. Suponiendo que las v.a.'s son independientes.

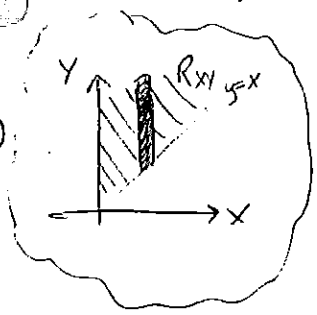


$X \rightarrow$ Variable aleatoria que determina el tiempo que el proceso pasa en P1.

$Y = X + Z$: tiempo total que el proceso invierte en pasar los dos procesadores.

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} ke^{-y} & 0<x<y \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a)



$$\iint_{R_{xy}} f_{xy}(x,y) = \int_0^\infty \int_x^\infty ke^{-y}\,dy\,dx = \int_0^\infty -k(0-e^{-x})\,dx = k\int_0^\infty e^{-x}\,dx = k$$

$$\Rightarrow \iint f_{xy}(x,y) = k \Rightarrow \boxed{k=1}$$

* También podemos ver que no son independientes ya que su rango no es rectangular y por tanto el valor que toma una condiciona a la otra.

Hallamos ahora las marginales:

- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dx = \int_0^y e^{-y}\,dx = ye^{-y}, \quad 0<y<\infty$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy = \int_x^\infty e^{-y}\,dy = e^{-x}, \quad 0<x<\infty$

$f_X(x)\cdot f_Y(y) \neq f_{xy}(x,y)$

$\Downarrow$

NO IND.

Tenemos:

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow \quad f_x(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0<x<\infty \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

b)

Z: V.a. que determina el tiempo que el proceso pasa en R.

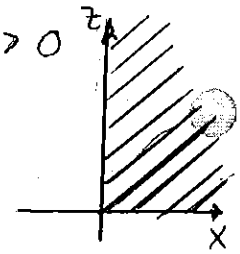
$$\boxed{Z = y - x}$$

*Se podría hacer con la transformación normal

$$f_{xZ}(x,z) = \begin{cases} e^{-(x+z)}, & 0<x<x+z \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$f_{xy}(x,y) = \varphi(y) = \varphi(x+z) = g(x,z)$

$$\Rightarrow \quad f_{xZ}(x,z) = \begin{cases} e^{-z-x}, & x>0 \wedge z>0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



MARGINALES:

$$f_x(x) = \int_0^\infty e^{-z-x}\,dz = e^{-x}, \quad x>0$$

$$f_z(z) = e^{-z}, \quad z>0$$

Vemos que sí que son ind.

$f_x(x) \cdot f_z(z) = f_{xZ}(x,z)$

$\Downarrow$

$\rightarrow$ INDEPENDIENTES

c) $$Var(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = \int_0^\infty z^2 \cdot e^{-z}\,dz - \left(\int_0^\infty z e^{-z}\,dz\right)^2 = \dots =$$

$$E[g(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) f_z(z)\,dz$$

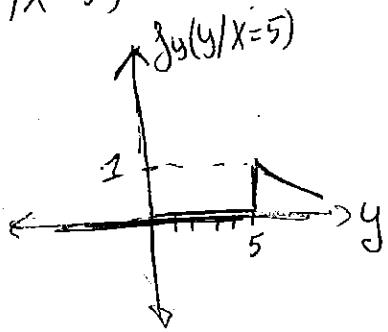
$$Cov(ZY) = E[Z(X+Z)] - E[Z]\cdot(E[Z]+E[X]) \underset{Z,X \text{ ind.}}{=} \dots =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Var(Z) = 1 \\ Cov(ZY) = 1 \end{cases}$$

d) $f_Y(y/x) = \dfrac{f_{XY}(y,x)}{f_X(x)} = \dfrac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{x-y}, \quad 0 < x < y$

$$f_Y(y/x) = \begin{cases} e^{x-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_Y(y/X=5) = \ldots = e^{-(y-5)}, \quad y > 5 \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 < x < y < \infty \\ 0 < 5 < y < \infty \\ 5 < y < \infty \end{array} \right\}$$



Cada proceso será una v.a. exponencial

$P_i = c_i e^{-c_i P_i} u(P_i) \Rightarrow E[P_i] = 10 \text{ sg}$

$10 = \frac{1}{c_i} \Rightarrow c_i = \frac{1}{10}$

$Var[P_i] = \frac{1}{c_i^2} = 10^2$

e) El proceso atraviesa 100 procesadores $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$.

$\mu_i = 10$ segundos $\forall i, \; 0 < i \leq 100$

El tiempo total será la suma de los tiempos en cada procesador (T_T)

Por el teorema del límite central: $T_T \rightsquigarrow N(\eta_T, \sigma_T)$

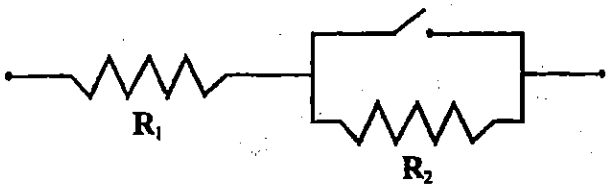
$$\left. \begin{array}{l} \eta_T = \sum_{i=1}^{100} E[P_i] = 100 \cdot 10 = 10^3 \text{ seg.} \\ \sigma_T^2 = \sum_{i=1}^{100} Var[P_i] = 100 \cdot 10^2 = 10^4 \end{array} \right\} T \rightsquigarrow N(10^3, 10^2)$$

$$\boxed{P\left(T \leq 15 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ seg}}{1 \text{ min}}\right)} = P(T \leq 900) = G\left(\frac{900 - 10^3}{10^2}\right) = G(-1) =$$

$$= 1 - G(1) = \boxed{0{,}1587}$$

√ Febrero 2000
Ejercicio T1

En el circuito de la figura se desconoce el estado del interruptor, de modo que la resistencia total entre extremos es: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{X}\mathbf{R}_2$ con $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ v.a.'s uniformes en (9,11) y $\mathbf{X}$ v.a. de Bernouilli, con $P(X=1) = p$. Suponga $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ y $\mathbf{X}$ independientes.



Calcule:
a) La fdp de la v.a. **R**. Represéntala de forma aproximada para $p = 1/2$.
b) La media de **R**.

R : v.a. aleatoria = resistencia total entre extremos.

$R_1, R_2 \sim unif(9,11)$; $X \sim Ber(p)$ (discreta)

$R = R_1 + XR_2 \rightarrow R = \begin{cases} R_1 + R_2, & X=1 \\ R_1, & X=0 \end{cases}$

$f_{R_1}(r) = \begin{cases} \frac{1}{11-9}, & 9<r<11 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

$f_{R_2}(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 9<r<11 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

R_1, R_2 unif(9,11)

$f_R(r) \rightarrow f_{R_1}(r)$

$f_R(r) \rightarrow f_R(r)$, $R = R_1 + R_2$

$R = R_1 + R_2$
$W = R_1$ $\Leftrightarrow$ $R_1 = W$, $R_2 = R - W$

$\boxed{|J|} = \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial R_1} & \frac{\partial R}{\partial R_2} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial R_1} & \frac{\partial \cdot}{\partial R_2} \end{vmatrix} = |-1| = \boxed{1}$

$\rightarrow f_{R_1R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1) \cdot f_{R_2}(r_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & r_1 \in [9,11], r_2 \in [9,11] \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

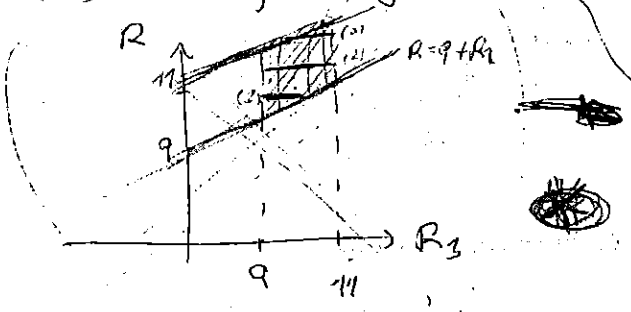
R_1 y R_2 independientes

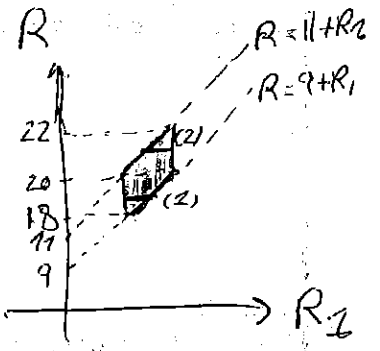
$f_{R_1R_2}(r_1(r,\cdot), r_2(r,\cdot)) = \begin{cases} \frac{1}{4} & r_2 \in [9,11] \\ 0 \end{cases}$

$f_{R,R_1} = \dfrac{f_{R_1R_2}(r_1(r,w), r_2(r,w))}{\cancel{|J|} \rightarrow 1} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 9<R_2<11 \wedge R_1+9<R<R_1+11 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

Tenemos: $f_{RR_1}(r,r_1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 9 < R_1 < 11,\ 9+R_1 < R < 11+R_1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

• Pintamos en rango de f_{RR_1}:





$\Rightarrow$ Calculamos $f_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{RR_1}\, dR_1$

$$f_R(r) = \begin{cases} \int_9^{R-9} \frac{1}{4}\, dr_1 = \frac{1}{4}(R-18), & 18 < R < 20 \quad (1) \\ \int_9^{11} \frac{1}{4}\, dr_1 = \frac{1}{2}, & 20 < R < 20 \end{cases}$$

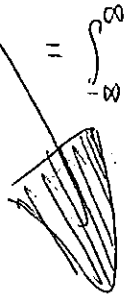
Puesto que nos da un resultado imposible, deducimos que el dibujo no lo podemos hacer "más o menos", sino que hay que hacer fielmente.

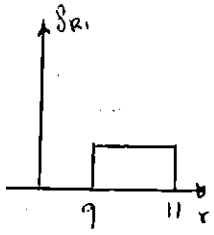
$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}(R-18) \quad (1) & 18 < R < 20 \\ \int_{R-11}^{11} \frac{1}{4}\, dr_1 = \frac{1}{4}(22-R) \quad (2) & 20 < R < 22 \\ 0, \text{ resto} \end{cases}$$

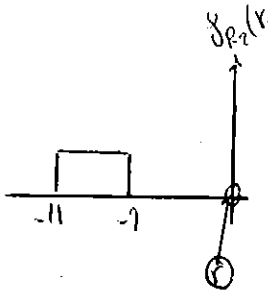
Es más facil resolverlo por convolución: $f_R(r \mid X=1) = f_{R_1}(r) * f_{R_2}(r) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R_1}(r-x) \cdot f_{R_2}(x)\, dx =$$

$$= \begin{cases} \int_9^{r-9} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{4}(r-18), & r \in (18, 20) \\ \int_{r-11}^{11} \frac{1}{2}\frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{4}(22-r), & r \in (20, 22) \end{cases}$$







Teníamos del principio:

$$R = R_1 + X R_2$$

$$\Downarrow$$

$$R = \begin{cases} R_1 + R_2, & X = 1 \\ R_1, & X = 0 \end{cases}$$

$$f_R(r) = P(X=0)\, f_R(r \mid R = R_1) + P(X=1)\, f(r \mid R = R_1 + R_2)$$

Por tanto:

$$f_R(r) = \frac{1}{2}\left[f_{R_1}(r) + f_R(r) \right]$$

- $f_{R_1}(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 9 < r < 11 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

- $f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}(R-18), & 18 < r < 20 \\ \frac{1}{4}(22-R), & 20 < r < 22 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

$$\longrightarrow f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 9 < r < 11 \\ \frac{1}{4}(R-18), & 18 < r < 20 \\ \frac{1}{4}(22-R), & 20 < r < 22 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

b) $$\boxed{E[R]} = E[R_1 + X R_2] = E[R_1] + E[X]E[R_2] \overset{E[R_1] = E[R_2]}{=}$$

$$= E[R_1]\left(1 + E[X]\right) = E[R_1]\left(1 + P(X=0)\cdot 0 + P(X=1)\cdot 1\right)$$

$$= \frac{3}{2} E[R_1] = \frac{3}{2}\int_9^{11} \frac{1}{2}\cdot r_1\, dr_1 = \frac{3}{2}\cdot 10 = \boxed{15}$$

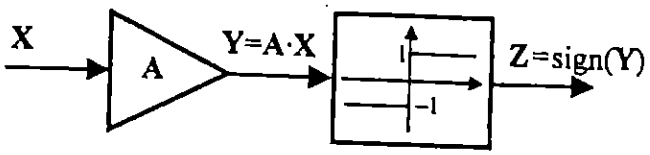
$$\boxed{E[R]} = E[R_1 + X R_2] = E[R_1] + E[X R_2] = \overbrace{E[R_1]}^{\frac{9+11}{2} = 10} + \overbrace{E[X]}^{=p} \cdot \overbrace{E[R_2]}^{\frac{9+11}{2} = 10} =$$

$$= \boxed{10(1+p)}$$

TEMA3

Septiembre 2000
Problema P1

En el circuito de la figura, la tensión de entrada X y la atenuación A son desconocidas y se modelan como variables aleatorias independientes, siendo X uniforme en (-1,1) y A uniforme en (0,1).



Calcule:

a) La fdp de la v.a. Y.

b) La covarianza de X y Z.

c) Las fdp's condicionadas $F_A(a \mid Z=-1)$ y $F_A(a \mid Z=+1)$.

$\left[\begin{array}{l} X: \text{v.a uniforme en } (-1,1). \\ A: \text{v.a. uniforme en } (0,1) \end{array}\right] \rightarrow$ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ independientes

$f_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in (0,1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$\Rightarrow f_X(x) \cdot f_A(a) = f_{XA}(x,a) = \cancel{\begin{cases} \frac{1}{2} & x,a \in (0,1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$

$f_{XA}(x,a) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1<x<1, 0<a<1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

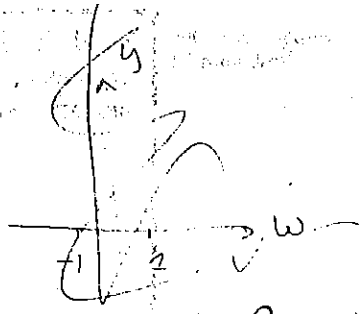
a) $y = AX \rightarrow$ v.a

Usamos el método de la v.a. ficticia: $w = x$ $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} y = AX \\ w = X \end{array} \Big| \begin{array}{l} X = w \\ A = \frac{y}{w} \end{array}}$

$f_{wy} = \begin{cases} \dfrac{f_{AX}(A(w,y), X(w,y))}{|J|} & w,y \in R_{wy} \\ 0 \end{cases}$

$\therefore \boxed{|J|} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial A} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial A} \end{vmatrix} = |-\cancel{x}| = \cancel{x} = \boxed{\cancel{\frac{y}{w}}} \; |w|$

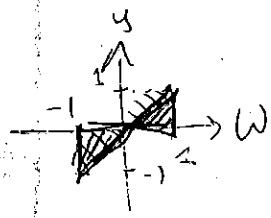
$* \; f_{AX}(a(y,w), x(y,w)) = \frac{1}{2}, \; y,w \in R_y w$



$* \; \boxed{R_y} \quad -1 < x < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < w < 1$

$\boxed{R_w} \quad 0 < a < 1 \quad \quad 0 < y < w$

"↳ y se mueve entre 0 y w"



$$\Rightarrow f_{yw}(y,w) = \begin{cases} \frac{1}{2|w|} & -1 < w < 1 \wedge 0 < y < |w| \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\cancel{f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{yw}(y,w)\,dw = \int_{-1}^{y} \frac{1}{2(-w)}\,dw + \int_{y}^{1} \frac{1}{2w}\,dw}$$

¿xvo?

$$\boxed{f_y(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{wy}(w;y) = \begin{cases} \int_{y}^{1} \frac{1}{2w}\,dw = \frac{-1}{2}\ln|y|, & 0 < y < 1 \\ \int_{-1}^{y} \frac{1}{2(-w)}\,dw = \frac{-1}{2}\ln|y|, & -1 < y < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{f_y(y) = \begin{cases} \frac{-1}{2}\ln|y| & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

b) $Z(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 & \Rightarrow AX > 0 \\ -1 & \Rightarrow AX < 0 \end{cases} \xrightarrow{A>0} Z(\overset{X}{y}) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$$Cov[XZ] = E[XZ] - E[X]\cancelto{0}{E[Z]} = E[XZ] = E[X \cdot \text{sign}(X)] = (E[|X|])$$

$\cdot \; E[X] = \frac{1+(-1)}{2} = 0$

$$= \iint x \cdot \text{sign}(x) = \iint x \cdot f_{XA}(x,a)\,dx\,da$$

$$= \iint_{x \geq 0} x \cdot f_{XA}\,dx\,da + \iint_{x<0} x(-1) f_{XA}\,dx\,da = \ldots = \frac{1}{2}$$

TEMA 3

Febrero 2006
Ejercicio P1

Sea $\mathbf{X}$ una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro p=0.5 y sean $\mathbf{Y_1}$ e $\mathbf{Y_2}$ dos variables aleatorias $N(\mu, \sigma)$ y $N(-\mu, \sigma)$ respectivamente (todas estas variables aleatorias son independientes entre sí). Se forma la nueva variable aleatoria $Z = XY_1 + (1-X)Y_2$.

a) Calcule la media y la varianza de $\mathbf{Z}$.
b) Calcule y dibuje la función de densidad de probabilidad de $\mathbf{Z}$.
c) Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria $\mathbf{Z}$ sea menor que $-\mu$ cuando $\mu = \sigma$.
d) Sobre la variable aleatoria $\mathbf{Z}$ se aplica un comparador de umbral μ, de tal manera que la variable aleatoria de salida es $V = u(Z-\mu)$ (u es la función escalón unidad). Caracterice la variable aleatoria V y particularice el resultado para $\mu = \sigma$.
e) Suponga ahora que se obtienen cinco variables aleatorias $(Z_1, \ldots, Z_5)$, cada una de ellas con la distribución descrita anteriormente e independientes entre sí. Obtenga la probabilidad de que al menos dos superen el umbral y particularice el resultado para $\mu = \sigma$.

- $X \sim Ber(p=0'5)$ → V.a. discreta

POSIBLES VALORES DE X: $0,1 \Rightarrow |\Omega| = 2 < \infty$

$P(X=0) = 0'5 \ (1-p)$
$P(X=1) = 0'5 \ (p)$ → $\boxed{E[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 P(X=1) = 0'5}$

- $Y_1 \sim N(\mu, \sigma)$ (continua) → $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\mu}{\sigma}\right]^2}$

μ: ESPERANZA, σ: DESVIACION TIPICA

- $Y_2 \sim N(-\mu, \sigma)$ → $f_{Y_2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y+\mu}{\sigma}\right]^2}$

$\Rightarrow Z = XY_1 + (1-X)Y_2$

a) $\boxed{E[Z]} = E[XY_1 + (1-X)Y_2] = E[XY_1] + E[(1-X)Y_2] = E[X][Y_1] + E[Y_2] - E[X]E[Y_2]$

$E[A+B] = E[A] + E[B]$

$E[A \cdot B] = E[A] \cdot E[B]$ si A, B indepen.

$= \frac{1}{2}\mu - \mu + \frac{1}{2}\mu = \boxed{0}$

$$\boxed{Var(Z)} = E[Z^2] - \cancel{E[Z]^2}^{\,0} = E[X^2Y_1^2 + (1-X)^2Y_2^2 + 2XY_1(1-X)Y_2]$$

$$= \underset{(1)}{E[X^2Y_1^2]} + \underset{(2)}{E[(1+X^2-2X)Y_2^2]} + \underset{(3)}{E[2XY_1(1-X)Y_2]} = *$$

(1) $E[X^2Y_1^2] = E[X^2]\,E[Y^2] = \frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)$

$0^2P(X=0) + 1^2P(X=1) = \frac{1}{2}$ $\quad (\mu^2+\sigma^2)$

(2) $\underset{(\mu^2+\sigma^2)}{E[Y_2^2]} + \underset{\frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)}{E[X^2Y_2^2]} - \underset{2E[X]E[Y_2^2]}{2E[XY_2^2]} = \frac{3}{2}(\mu^2+\sigma^2) - (\mu^2+\sigma^2) = \frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)$

$E[X] = E[X^2]$

(3) $2E[XY_1Y_2] - 2E[X^2Y_1Y_2] = 2\left(E[X]E[Y_1]E[Y_2] - E[X^2]E[Y_1]E[Y_2]\right) = 0$

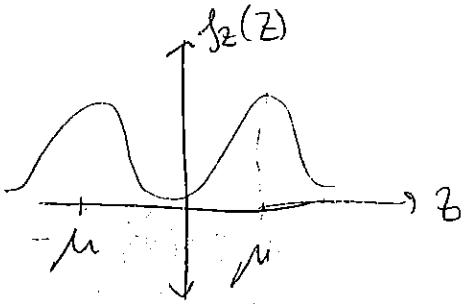
$* = \frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2) + \frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2) = \boxed{\mu^2+\sigma^2}$

b) $\boxed{f_Z(z)} = \overset{1/2}{P(X=0)} \cdot \overset{1/2}{f_Z(z \mid X=0)} + \overset{1/2}{P(X=1)} \cdot \overset{1/2}{f_Z(z \mid X=1)} = \boxed{\frac{1}{2}\left[f_{Y_1}(z) + f_{Y_2}(z)\right]}$

$f_{Y_1}(z) \qquad f_{Y_2}(z)$

sustituyendo

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left[e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{z-\mu}{\sigma}\right]^2} + e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{z+\mu}{\sigma}\right]^2}\right]} \quad \boxed{z \in \mathbb{R}}$$



c) $\boxed{P(Z<-\mu)} = \int_{-\infty}^{-\mu} f_Z(z)\,dz =$

$\left\{ \text{DATO: } G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \right\}$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{-\mu}\left(e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{z-\mu}{\sigma}\right]^2} + e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{z+\mu}{\sigma}\right]^2}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left[\frac{z-\mu}{\sigma}\right]^2}{2}}\frac{1}{\sigma}\,dz + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left[\frac{z+\mu}{\sigma}\right]^2}{2}}\,dz$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} t = \frac{z-\mu}{\sigma} \Rightarrow z = \sigma t + \mu \\ \partial z = \sigma\,dt \\ z = -\mu \to t = -\frac{2\mu}{\sigma} \\ z = -\infty \to t = -\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z+\mu}{\sigma} = t \to z = \sigma t - \mu \\ \partial z = \sigma\,dt \\ z = -\mu \to (t = 0) \\ z = -\infty \to t = -\infty \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[g\left(-\frac{2\mu}{\sigma}\right) + g(0)\right] = \frac{1}{2}\left[(1 - g(2)) + g(0)\right] = \frac{1}{2}\left[0'0228 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \boxed{\frac{0'5228}{2}}$$

d) $V = U(Z-\mu) = \begin{cases} 1, & Z \geq \mu \\ 0 & Z < \mu \end{cases} \Rightarrow$ V variable aleatoria DISCRETA Bernuille de $P(Z \geq \mu)$

e) $(Z_1, \dots, Z_5)$ v.a., cada una podrá superar el umbral definido o no superarlo. Al someter a los 5 al estudio (con carácter Bernouilli: "superan o no superan") al estudio descrito, en realidad se realiza un experimento binomial:

- Sea W el nº de variable de en $(Z_1, \dots Z_5)$ que superan el umbral μ: Posibles valores: 1, 2, 3, 4 y 5.

$\Rightarrow$ Nos piden $P(W \geq 2)$

NOTA $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$W \sim \text{Binomial}(n, P)$

n: cantidad de experimentos (5)

P: $P(z \geq \mu) = 0'26$ (apartado c)

$$\boxed{W \sim \text{Bin}(5, 0'26)}$$

$$P(W=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

TEORIA

$$P(W \geq 2) = P(W=2) + P(W=3) + P(W=4) + P(W=5)$$

$$\Updownarrow$$

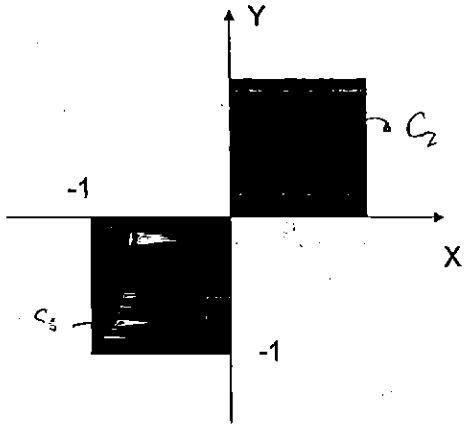
$$P(W \geq 2) = 1 - P(W \leq 2) = 1 - P(0) - P(1)$$

$$\boxed{P(W \geq 2) = 1 - \left[\binom{5}{0}(0'26)^0(0'74)^{5-0} + \binom{5}{1}(0'26)^1(0'74)^4\right] = \ldots = 0'39}$$

TEMA 5

Septiembre 2006
Ejercicio 1

Sea la v.a. bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ con distribución uniforme en el recinto de la figura:



Se pide:
a) Las fdp's marginales de las va's **X** e **Y**. ¿Son independientes?
b) La covarianza de **X** e **Y**. ¿Son incorreladas?
c) La media condicionada $E(\mathbf{X} / \mathbf{Y} = y)$.
d) Se define la v.a. $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. Obtenga la fdp conjunta de **X** y **Z** representando gráficamente el rango o recorrido de la v.a. bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$.
e) Sea la v.a. $\mathbf{W} = \mathbf{X} - a\mathbf{Y}$. Determine el valor de la constante a que hace que la varianza de **W** sea mínima.

Del dibujo vemos:

$$R_{xy} = \begin{cases} -1 < x < 0 \wedge -1 < y < 0 : C_1 \\ 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 : C_2 \end{cases}$$

DATO: X, Y v.a. bidimensional uniforme en R_{xy}.

$$f_{xy} = \begin{cases} K & R_{xy} \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \rightarrow \iint k\,dx\,dy = 1 \rightarrow K = \frac{1}{2 \times 1}$$

hay 2 área de un cuadrado cuadrados

$$\rightarrow \boxed{f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x, y \in R_{xy} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$

- $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}, & -1 \le x \le 0 \\ \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow f_x(x) = \frac{1}{2}, \ |x| < 1$, 0 en el resto

- $f_y(y) = \frac{1}{2}, \ |y| < 1$ (por simetría)

No son independientes, ya que $f_x(x) \cdot f_y(y) \neq f_{xy}(x,y)$.

b) $Cov(x,y) = E[xy] - E[x]E[y]$

$$\boxed{E[x]} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx = \boxed{0}$$

$$\boxed{E[y] = E[x] = 0}$$

$$\boxed{E[xy]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\int_{x=-1}^{x=0}\int_{y=-1}^{0} xy\,dx\,dy + \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} x \cdot y\,dx\,dy\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} x\,dx \cdot \int_{-1}^{0} y\,dy + \int_{0}^{1} x\,dx \cdot \int_{0}^{1} y \cdot dy\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$\boxed{\text{INDEPENDIENTES} \Rightarrow \text{INCORRELADAS}}$

Por tanto:

$$\boxed{Cov(x,y) = E[xy] - E[x]\overset{0}{E[y]} = \frac{1}{4}}$$

$Cov(x,y) \neq 0 \xrightarrow{NO}$ INCORRELADAS

c) $E(X/Y=y) \rightsquigarrow E[X/Y=y_0] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x|y_0)\,dx$

th. Bayes $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- Calculamos $f_x(x|y_0)$:

$$f_x(x|y_0) = \frac{f_{xy}(x,y_0)}{f_y(y_0)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \rightarrow f(x|y_0) = \begin{cases} 1, & -1<x<0 \wedge -1<y<0 \\ 1, & 0<x<1 \wedge 0<y<1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[x|y_0] = \begin{cases} \int_{-1}^{0} x \cdot 1\,dx = -\frac{1}{2}, & -1<y_0<0 \\ \int_{0}^{1} x \cdot 1\,dx = +\frac{1}{2}, & 0<y_0<1 \end{cases} \longrightarrow E[x|y_0] = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -1<y_0<0 \\ +\frac{1}{2} & 0<y_0<1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

d) $Z = X + Y$ Nos piden $f_{XZ}(x,z)$

Como solo hay una variable, metemos una v.a ficticia: $W = X$.

Calculamos $f_{WZ}(w,z)$:

- $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = |-1| = 1$
- $f_{XY}(X(w,z), Y(w,z)) = \frac{1}{2}$

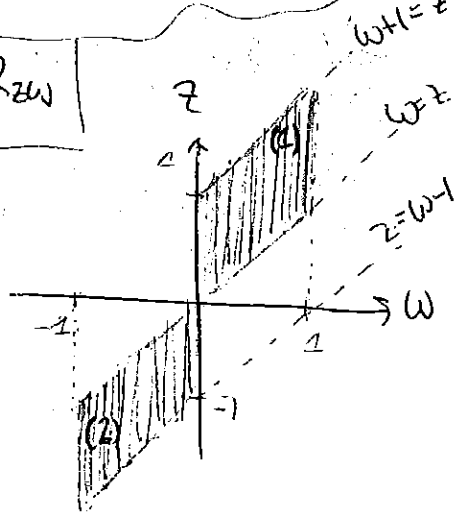
$f_{ZW}(z,w) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = 1/2$

Calculamos R_{ZW}:

$-1 \le x \le 0 \wedge -1 \le y \le 0 \rightarrow -1 \le w \le 0 \wedge -1+w \le z \le 0+w$

$0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1 \rightarrow 0 \le w \le 1 \wedge w \le z \le w+1$ (1)

R_{ZW}



$$f_{WZ}(w,z) = \begin{cases} 1/2, & \begin{cases} -1 \le w \le 0 \wedge w-1 \le z \le w \\ 0 \le w \le 1 \wedge w \le z \le w+1 \end{cases} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$\downarrow W = X$

$$\boxed{f_{XZ}(x,z) = \begin{cases} 1/2 & \begin{cases} -1 \le x < 0 \wedge x-1 < z < x \\ 0 \le x \le 1 \wedge x < z < x+1 \end{cases} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

e) $W = X - aY$

$$V[W] = E[W^2] - E[W]^2 = E[X^2] + a^2 E[Y^2] - 2aE[XY] - (E[X] - aE[Y])^2$$

- $E[X^2] = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{1}{2} = 2/6$
- $E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_Y(y) \, dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} y^2 \, dy = 2/6$
- $E[X] = E[Y] = 0$
- $E[XY] = \frac{1}{4}$

$$V[W] = \frac{2}{6} + a^2 \frac{2}{6} - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{4}$$

$\downarrow$ buscamos el mínimo

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 2a \cdot \frac{2}{6} - \cancel{2} \cdot \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \boxed{a = \frac{3}{4}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \frac{2}{3} > 0 \xrightarrow{\text{mínimo}}$$

PROBLEMA TIPO TEMA 3

Septiembre 2007
Ejercicio 1

Sea la va bidimensional (**X**, **Y**) con fdp conjunta:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{k}{x^2y^2};x>1,y>1$$

Se realizan las transformaciones **U** = **XY**, **V** = **X/Y**. Calcule:

a) El valor de k y las fdp's marginales de **X** e **Y**, ¿son independientes?
b) P[min(**X**,**Y**)≤2].
c) La fdp conjunta de (**U**, **V**) y dibuje su rango en el plano (u, v).
d) Las fdp's marginales de **U** y **V**, ¿son independientes?
e) La FD de la va **V**.

$f_{XY}(x,y)$ tiene que cumplir:

$f_{XY}(x,y)\geq 0$ (1)

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy=1$ (2)

$$f_{XY}(x,y)=\frac{k}{x^2y^2};\quad x>1,\ y>1$$

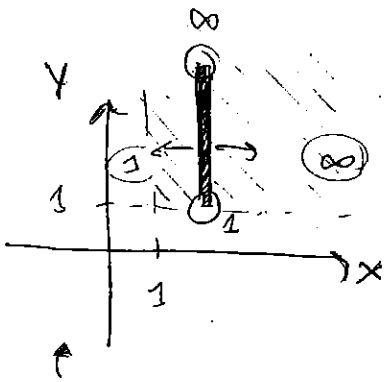
(1) $f_{XY}(x,y)\geq 0 \Rightarrow k>0$

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy=\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{k}{x^2y^2}\,dx\,dy=\cancel{k\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\int_1^{\infty}\frac{1}{y^2}\,dy}$$

$$=\int_1^{\infty}\left[\int_1^{\infty}\frac{k}{x^2y^2}\,dy\right]dx=\int_1^{\infty}\frac{-k}{x^2}\,\frac{1}{y}\Big|_1^{\infty}dx=\int_1^{\infty}\frac{+k}{x^2}\,dx=k\Rightarrow \boxed{k=1}$$

$$\Rightarrow f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x^2y^2} & x,y>1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

FUNCIÓN MARGINAL DE d.p. PARA LA VARIABLE X $\left\{ f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\right.$



análogo para Y.

- $f_X(x)=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2y^2}\,dy=\frac{1}{x^2}$, $x\in[1,\infty]$
- $f_Y(y)=\frac{1}{y^2}$, $y\in[1,\infty]$ (por simetría)

¿Son independientes?

Serán independientes si $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{XY}(y,x)$

$\Rightarrow$ INDEPENDIENTES

b) $P(\min(X,Y) \leq 2)$

FORMA 1:

$$\boxed{P(\min(X,Y) \leq 2)} = 1 - P(\min(X,Y) \geq 2) = 1 - P(X \geq 2 \cap Y \geq 2)$$

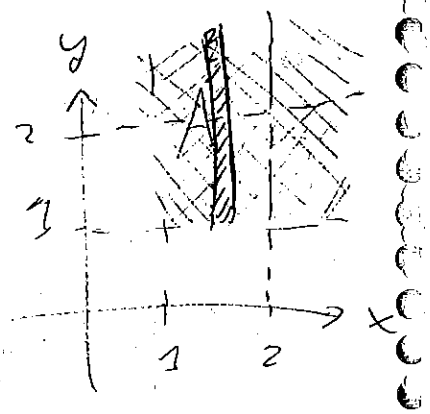
$$= 1 - P(X \geq 2) \cdot P(Y \geq 2) = 1 - \int_2^{\infty} f_X(x)\,dx \cdot \int_2^{\infty} f_Y(y)\,dy = \boxed{0'75}$$

X e Y independientes

FORMA 2:

$$P(\min(X,Y) \leq 2) = P(X \leq 2 \cup Y \leq 2) =$$

Se trata de integrar A.



$$= \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=\infty} \frac{1}{x^2 y^2}\,dx\,dy + \int_{x=2}^{x=\infty} \int_{y=1}^{y=2} \frac{1}{x^2 y^2}\,dx\,dy$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}}$$

c) TRANSFORMACIÓN:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sqrt{uv} : x(u,v) \\ y = \sqrt{\frac{u}{v}} : y(u,v) \end{cases}$$

$$\boxed{|J|} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = \left| -\frac{2x}{y} \right| = \left| -\frac{2\sqrt{uv}}{\sqrt{\frac{u}{v}}} \right|$$

$$= \boxed{2v}$$

$$f_{u,v}(u,v) = \frac{f_{xy}(x(u,v), y(u,v))}{|J|}$$

$$f_{xy}(x(u,v), y(u,v)) = \frac{1}{\left(\sqrt{uv} \cdot \sqrt{\frac{u}{v}}\right)^2} = \frac{1}{u^2}$$

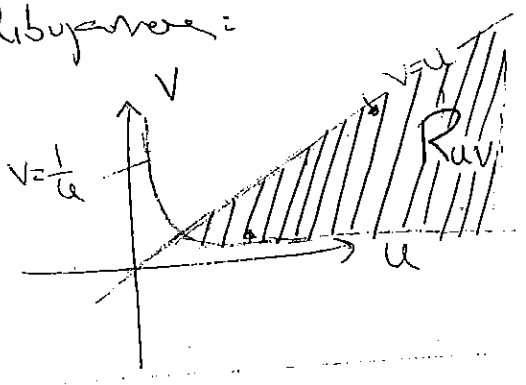
$$\rightarrow f_{u,v}(u,v) = \frac{1}{2u^2 v} \; * \; \frac{1}{u} < v < u$$

* Para calcular en Range de u, v:

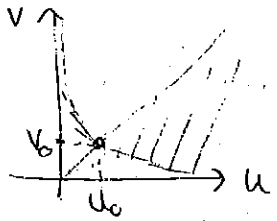
$x > 1 \rightarrow \sqrt{uv} > 1 \rightarrow v > \frac{1}{u}$ fo $\frac{1}{u} < v < u$

$y > 1 \rightarrow \sqrt{\frac{u}{v}} > 1 \rightarrow u > v$

Lo dibujamos:



d) $$f_{UV} = \begin{cases} \dfrac{1}{2u^2 v} & , \dfrac{1}{u} < v < u \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



- $$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)\,dv = \int_{\frac{1}{u}}^{u} \frac{1}{2u^2 v}\,dv = \frac{1}{2u^2}\left[\ln(u) - \ln\left(\frac{1}{u}\right)\right] = \frac{\ln(u^2)}{2u^2}$$

$u \in [u_0, \infty]$

v

1

- $$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)\,du = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{1}{v}}^{\infty} \frac{1}{2u^2 v}\,du & 0 < v < \cancel{v_0} \; 1 \\ \displaystyle\int_{v}^{\infty} \frac{1}{2u^2 v}\,du \; , & v > \cancel{v_0} \; 1 \end{cases}$$

$* \; \dfrac{1}{v_0} = v_0 \rightarrow v_0 = \pm 1 \rightarrow v_0 = 1$

$\boxed{v_0 = 1}$

$$\Rightarrow f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < v < 1 \\ \dfrac{1}{2v^2} & v > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{\ln(u)}{u^2} & 1 < u < \infty \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Puesto que $f_U(u) \cdot f_V(v) \neq f_{UV}(u,v)$

$\Downarrow$

$f_U(u)$ y $f_V(v)$ NO IND.

e) $$F(v) = \int_{-\infty}^{v} f_U(v)\,dv = \begin{cases} \displaystyle\int_{1}^{v} \frac{1}{2v^2}\,dv + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\,dv \; , & v > 1 \\ \displaystyle\int_{0}^{v} \frac{1}{2}\,dv \; , & 0 < v < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$F(v) = \begin{cases} -\frac{1}{2v} + 1 \; , & v > 1 \\ \frac{1}{2}v \; , & 0 < v < 1 \\ 0 & v < 0 \end{cases}$$

✓ Septiembre 2002
Teoría T2

Sean el proceso $X[n] = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_n$ para $n > 0$ y $X[n] = 0$ para $n \leq 0$. Donde X_i son v.a's idénticamente distribuidas independientes entre sí con dos posibles valores 1 y –1 que pueden ocurrir con idéntica probabilidad.

a) Encontrar la fdp de $X[1]$ y $X[4]$. ¿Es un proceso estacionario de primer orden?.

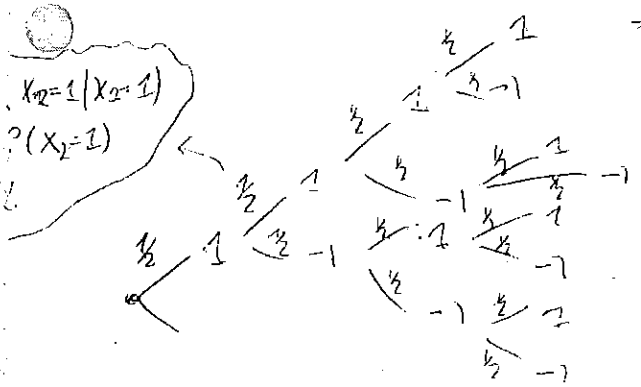
b) Calcular la autocorrelación de $X[n]$.

a) Posibles valores para X_i $\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$ $X_i \sim$ Bernoulli

* $P(X_i = 1) = 0'5$
* $P(X_i = -1) = 0'5$

• $X[1] = X_1 \Rightarrow fdp_{X[1]} = fdp_{X_1} = \begin{cases} P(X_1 = 1) = 1/2 \\ P(X_1 = -1) = 1/2 \end{cases}$

• $X[4] = X[1] + X[2] + X[3] + X[4]$



$\Rightarrow X_4 = 4$, $P(X[4] = 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/16$

$X_4 = 2$, $P(X[4] = 2) = 1/16$

Como hay 4 formas de sumar 2 $\Rightarrow P(X[4]) = 4 \cdot \frac{1}{16}$

$X[4] = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$; $P(X_4 = 0) = 1/16$

...

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE $X[4] = \begin{cases} P(X[4] = 4) = \frac{1}{16} \\ P(X[4] = -4) = \frac{1}{16} \\ P(X[4] = 2) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \\ P(X[4] = -2) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \\ P(X[4] = 0) = 6 \cdot \frac{1}{16} \end{cases}$

$X[n]$ no est. de primer orden en el tiempo porque su fdp depende de n

b) AUTOCORRELACIÓN DE $X[n]$:

$$R_X[n_1,n_2] = E[X[n_1]X[n_2]] = E[(X_1+X_2+\dots+X_{n_1})(X_1+\dots+X_{n_2})]$$

$$= E[X_1^2] + E[X_1](E[X_2]+\dots+E[X_{n_2}]) + E[X_2^2] + E[X_2](E[X_1]+E[X_3]+\dots+E[X_{n_2}])$$

$$= E[X_1^2 + X_1X_2 + \dots + X_1X_{n_2} + X_2X_1 + X_2^2 + \dots + X_2X_{n_2} + \dots + X_{n_1}X_1 + \dots + X_{n_1}^2 + \dots + X_{n_1}X_{n_2}$$

no se sabe y no la pensamos todavía

$$= E[X_1^2] + E[X_2^2] + \dots + E[X_1X_2] + \dots + E[X_1X_{n_2}] + E[X_2X_1] + \dots + E[X_2X_{n_2}] + \dots + E[X_{n_1}X_1] + E[X_{n_1}X_2] + \dots + E[X_{n_1}X_{n_2}]$$

$$(1) = E[X_1^2] + E[X_2^2] + \dots$$

$$(2) = 1 \cdot \min\{n_1,n_2\}$$

$E[X_i] = (1)P(X_i=1) + (-1)P(X_i=-1)$

$(1) = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1$

$E[X_i^2] = (1)^2 P(X_i=1) + (-1)^2$

$(2) = 1$

Por tanto:

$$R_X[n_1,n_2] = \min(n_1,n_2)$$

ETSI Telecomunicación

Septiembre 05
Ejercicio P2

Sea el proceso $\mathbf{Z}[n] = \mathbf{X}[n]\mathbf{Y}[n]$, siendo $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ dos procesos estocásticos discretos en el tiempo independientes y estacionarios en sentido amplio, de medias η_X y η_Y, y autocorrelación $R_X[m]$ y $R_Y[m]$, respectivamente. Calcule:

a) La media y la autocorrelación de $\mathbf{Z}[n]$. ¿Es $\mathbf{Z}[n]$ estacionario en sentido amplio?.
b) La correlación cruzada $R_{XZ}[n_1, n_2]$. ¿Son $\mathbf{X}[n]$ y $\mathbf{Z}[n]$ conjuntamente estacionarios (en sentido amplio)?.
c) La media condicionada $E\{\, \mathbf{Z}[n] \mid \mathbf{X}[n] = x \,\}$.
d) La densidad espectral de potencia de $\mathbf{Z}[n]$, suponiendo que $R_X[m] = a^{|m|}$ (siendo $|a| < 1$) y $R_Y[m] = \delta[m]$.
e) La distribución de primer orden de $\mathbf{Z}[n]$, suponiendo que para cada n, $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ son variables aleatorias discretas, con $P\{\, \mathbf{X}[n] = -1 \,\} = P\{\, \mathbf{Y}[n] = -1 \,\} = p$ y $P\{\, \mathbf{X}[n] = +1 \,\} = P\{\, \mathbf{Y}[n] = +1 \,\} = 1 - p$ (siendo $0 < p < 1$).

a) $\boxed{E[Z[n]] = E[X[n]\cdot Y[n]] \underset{\substack{X[n],\, Y[n] \\ \text{ind.}}}{=} E[X[n]]\cdot E[Y[n]] = \eta_X \eta_Y}$

$\boxed{R_Z[n_1, n_2] = E[Z[n_1]\cdot Z[n_2]] = E[X[n_1]Y[n_2]\cdot X[n_1]Y[n_2]]}$

$= E[X[n_1]X[n_2]\cdot Y[n_1]\cdot Y[n_2]] = E[X[n_1]X[n_2]]\cdot E[\ [n_1]Y[n_2]] = R_X[n_1,n_2]\cdot R_Y[n_1,$

$= \boxed{R_X[m]\cdot R_Y[m]}$

$X[n], Y[n]$ ind
$\Rightarrow X[n_1]X[n_2], Y[n_1]Y[n_2]$ ind

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} E[Z[n]] = cte \\ R_Z[n_1,n_2] = R_Z[m] \end{array}\right\} \longleftrightarrow Z[n] \text{ estacionario en sentido amplio}}$$

b) $\boxed{R_{XZ}[n_1,n_2] = E[X[n_1]Z[n_2]] = E[X[n_1]X[n_2]Y[n_2]] =}$

$E[X[n_1]X[n_2]]\cdot E[Y[n_2]] = \boxed{R_X[m]\cdot \eta_Y}$

- $E[X[n]] = cte$
  $R_X[n_1,n_2] := R_X[m]$ $\Big\}$ $\to X[n]$ est. en sentido amplio
- $Z[n] \to$ est. en sentido amplio
- $R_{XZ}[n_1,n_2] := \varphi(m)$

$\Longleftrightarrow$ CONJUNTAMENTE ESTACIONARIA EN SENTIDO AMPLIO

c) $\boxed{E[Z[n]/X[n]=x] = E[x \cdot y[n]] = x\,E[y[n]] = x\,\eta_y}$

d) DENSIDAD ESPECTRAL DE $Z[n]$: $TF\{R_Z[n_1,n_2]\}$

Propiedad de la delta:
$x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\cdot\delta(t)$

$R_Z[m] = R_X[m]\cdot R_Y[m] = a^{|m|}\delta[m] = a^0\delta[m] = \delta[m]$

$\Rightarrow TF\{\delta[m]\} = 1 \Rightarrow \boxed{S_Z(\Omega) = 1}$

e) DISTRIBUCIÓN DE PRIMER ORDEN = FUNCIÓN DE DENSIDAD

$X[n] = \begin{cases} P(X[n]=-1) = p \\ P(X[n]=1) = 1-p \end{cases}$ $\quad$ $y[n] = \begin{cases} P(y[n]=-1) = p \\ P(y[n]=1) = 1-p \end{cases}$

($X \sim$ Bernoulli) $\quad$ ($y \sim$ Bernoulli)

$Z[n] = X[n]\cdot y[n] \rightarrow$ (*) $\begin{cases} P(Z[n]=1) = P(X[n]=1)\cdot P(y[n]=1) + P(X[n]=-1)\cdot P(y[n]=-1) \\ P(Z[n]=-1) = P(X[n]=1)\cdot P(y[n]=-1) + P(X[n]=-1)\cdot P(y[n]=1) \end{cases}$

DISTRIBUCIÓN DE $Z[n]$:

$P(Z[n]=1) = (1-p)^2 + p^2$

$P(Z[n]=-1) = (1-p)p + (1-p)p$

(*) $P(Z[n]=1) = P(X=1 \cap y=1) \cup P(X=-1 \cap y=-1) = P(X=1)\cdot P(y=1) + P(X=1)\cdot P(y=-1)$

unión disjunta

$X[n], y[n]$ ind

✓ Septiembre 2002
Problema P2

Sea la familia de procesos estocásticos $X_n(t) = \cos[n(t+\Theta)]$ siendo Θ una v.a. uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$ y n un número mucho mayor que 0.

a) Encontrar la media y la autocorrelación de $X_n(t)$. ¿Son procesos estacionarios en sentido amplio?.

b) Calcular la correlación cruzada entre $X_n(t)$ y $X_m(t)$ con $n \neq m$. ¿Son procesos incorrelados?. ¿Son procesos ortogonales?.

c) Sea $Z(t) = X_n(t) + X_m(t)$ con $n \neq m$. ¿Son $Z(t)$ y $X_n(t)$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio?.

d) Calcular los espectros de potencia de $Z(t)$ y $X_n(t)$.

Θ : v.a. unif. en $(0,2\pi)$

$X_n = \cos(n(t+\Theta)) \rightarrow$ familia de procesos es

$\Theta \sim U(0,2\pi)$

$f_\Theta(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0<\Theta<2\pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

a) MEDIA DE $X_n \rightarrow E[X_n] = E[\cos(n(t+\Theta))] =$

"Teorema de la media"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(n(t+\Theta)) \cdot f_\Theta(\Theta)\, d\Theta = \int_0^{2\pi} \cos(n(t+\Theta)) \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\Theta$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(n(t+\Theta)) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

AUTOCORRELACIÓN DE X_n : $R_{X_n}[t_1,t_2] = E[X_n(t_1) \cdot X_n(t_2)]$

$$= E[\cos(n(t_1+\Theta)) \cdot \cos(n(t_2+\Theta))] = E[\tfrac{1}{2}\cos(n(t_1+t_2)+2n\Theta) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\cos(n(t_1-t_2))] = (E[(1)] + E[(2)])\tfrac{1}{2}$$

(1) $$E[\cos(n(t_1+t_2)+2n\Theta)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos[n(t_1+t_2)+2n\Theta]\, d\Theta = \frac{1}{4\pi n} \operatorname{sen}(n(t_1+t_2)+2n\Theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

(2) $$E[\cos(n(t_1-t_2))] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n(t_1-t_2))\, d\Theta = \cos(n(t_1-t_2))$$

* Normalmente : $t_2 - t_1 = \tau$

$\rightarrow R_{X_n} = \frac{1}{2}\cos(n(t_1 - t_2))$ * $\rightarrow \boxed{R_{X_n} = \frac{1}{2}\cos(n\tau)}$

Puesto que $E[X_n]$ y $R_{X_n}[t_1, t_2]$ no depende del tiempo $\Rightarrow$

ESTACIONARIOS EN SENTIDO AMPLIO (1)

$\cos(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$

b) CORRELACION CRUZADA DE X_n y X_m: $R_{X_n X_m}[t_1, t_2]$

$$= E[X_n(t_1)\cdot X_m(t_2)] = E[\cos(n(t_1+\theta))\cdot\cos(m(t_2+\theta))] =$$

$$= E\left[\frac{1}{2}\cos(nt_1 + mt_2 + \theta(n+m)) + \frac{1}{2}\cos(nt_1 - mt_2 + \theta(n-m))\right]$$

$$= \frac{1}{2}E[(1)] + \frac{1}{2}E[(2)] = 0$$

(1) $E[(1)] = \int_0^{2\pi} \cos(nt_1 + mt_2 + \theta(n+m))\frac{1}{2\pi}d\theta = \frac{1}{n+m}\operatorname{sen}(nt_1 + mt_2 + \theta(m+n))\frac{1}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} = 0$

(2) $E[(2)] = \int_0^{2\pi} \cos(nt_1 - mt_2 + \theta(n-m))\frac{1}{2\pi}d\theta = \ldots = 0$

* PROCESOS ORTOGONALES ✓ ($R_{X_n X_m} = 0$)

* PROCESOS INCORRELADOS ¿? Lo serán si $Cov_{X_n X_m} = 0$ ✓

La $Cov_{X_n X_m} = \underbrace{R_{X_n X_m}(t_1, t_2)}_{0} - \underbrace{E[X_n(t_1)]\cdot E[X_m(t_2)]}_{0} = 0$

$$\boxed{E[Z(t)] = E[X_n(t)] + E[X_m(t)] = 0}$$

$$\boxed{R_Z[t_1,t_2]} = E[Z(t_1)\cdot Z(t_2)] = E[X_n(t_1)X_n(t_2)] + E[X_n(t_1)X_m(t_2)]$$
$$+ E[X_n(t_2)X_m(t_1)] + E[X_m(t)X_m(t_2)]$$
$$= R_{X_n}[t_1,t_2] + R_{X_m}[t_1,t_2] + \underbrace{R_{X_nX_m}[t_1,t_2]}_{0} + \overbrace{R_{X_mX_n}[t_2,t_2]}^{0}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\cos(n\tau) + \frac{1}{2}\cdot\cos(m\tau)}$$

Puesto que $E[Z(t)]$ y $R_Z[t_1,t_2]$ solo depende de τ, podemos decir que $Z(t)$ es estacionaria en sentido amplio. (2)

CORRELACIÓN CRUZADA DE X_n, Z:

$$\boxed{R_{X_nZ}[t_1,t_2]} = E[X_n(t_1)\cdot Z(t_2)] = \ldots =$$
$$= E[X_n(t_1)\cdot X_n(t_2)] + E[X_n(t_1)\cdot X_m(t_2)] = R_{X_n}[t_1,t_2] + R_{X_nX_m}[t_1,t_2]$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\cos(n\tau)} \quad (3)$$

Por (1), (2) y (3) $\Rightarrow$ $X_n(t)$ y $Z(t)$ conj. est. en sent. amp.

(1) $X_n(t)$ est. en sent. amplio
(2) $Z_n(t)$ est. en sent. amplio
R_{X_nZ}: $\varphi(\tau)$, solo de τ (3)

d) ESPECTRO DE POTENCIA = DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

- $X_n(t)$: $S_{X_n}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{X_n}(\tau)\}$

$$= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\cos(n\tau)\right\} = \frac{1}{2}\cdot\pi\left(\delta(\omega-n)+\delta(\omega+n)\right)$$

$$\Rightarrow S_{X_n}(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-n)+\delta(\omega+n)\right]$$

- $Z(t)$: $S_Z(\omega) = \mathcal{F}\{R_Z(\tau)\} =$

$$\mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}\cos(n\tau)+\tfrac{1}{2}\cos(m\tau)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi\left(\delta(\omega-n)+\delta(\omega+n)\right)+\pi\left(\delta(\omega-m)+\delta(\omega+m)\right)\right]$$

$$\Rightarrow S_Z(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-n)+\delta(\omega+n)+\delta(\omega-m)+\delta(\omega+m)\right]$$

Junio 1997
Ejercicio P2

Sea el proceso discreto en el tiempo $\mathbf{X}[n]$, de media nula y estacionario en sentido amplio, con autocorrelación $\mathbf{R}_X[m] = a^{|m|}$ $(0 < |a| < 1)$. Se hace pasar $\mathbf{X}[n]$, por un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n] = \delta[n] - b\delta[n-1]$, obteniéndose como salida un proceso $\mathbf{Y}[n]$.

a) Calcule la autocorrelación de $\mathbf{Y}[n]$, $\mathbf{R}_Y[m]$.

b) Calcule el valor de b que minimiza la varianza de $\mathbf{Y}[n]$.

c) Para el valor de b del apartado anterior, calcule la densidad espectral de potencia de $\mathbf{Y}[n]$, $S_Y(\Omega)$

$$X[n] \begin{cases} E[X[n]] = 0 \\ R_X[m] = a^{|m|}, \quad (0 < |a| < 1) \end{cases}$$

a)

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] - b\,x[n-1]$$

$$R_y[m] = E[y[n_1]\cdot y[n_2]] = E[x[n_1]x[n_2]] - E[x[n_1]\,b\cdot x[n_2-1]]$$

$$- bE[x[n_1-1]x[n_2]] + b^2 E[x[n_1-1]\,x[n_2-1]]$$

$$= R_x[m] + b^2 R_x[m] - bR_x[m-1] - bR_x[m+1]$$

$$= a^{|m|}(1+b^2) - b(a^{|m-1|} + a^{|m+1|})$$

b) $$Var(y[n]) = E[y[n]^2] - E[y[n]]^2 = E[(x[n] - bx[n-1])^2] - (E[x[n]] - bE[x[n-1]])^2$$

$$= E[x[n]^2] + b^2 E[x[n-1]^2] - 2b\,E[x[n]\,x[n-1]] = R_x[0] - 2bR_x[-1] + b^2 R_x[0]$$

$$= 1 + b^2 - 2ab$$

* Se puede hacer: $E[y[n]^2] = E[y[n]\cdot y[n]] = R_y[m=0] = 1 + b^2 - 2ab$

$$Var(y[n]) = b^2 - 2ab + 1 \Rightarrow b \mid Var(y[n])\ min \Rightarrow \boxed{b = a}$$

c) Para $b=a$:

$$R_y[m] = (1+a^2)a^{|m|} - a(a^{|m+1|} + a^{|m-1|})$$

* $\boxed{m>1}$ $R_y[m] = (1+a^2)a^m - a(a^{m+1} + a^{m-1}) = 0$

* $\boxed{0 \leq m \leq 1}$ $R_y[m] = (1+a^2)a^m - a[a^{m+1} + a^{1-m}] = 0$

* idem para $-1 \leq m < 0 \wedge m < -1$

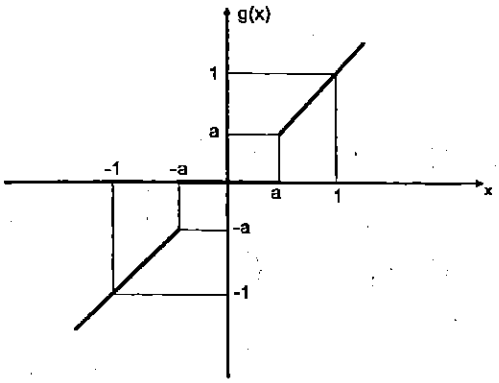
* $\boxed{m=0}$ $R_y[m] = 1-a^2$

Vemos que $R_y[m] = \begin{cases} 1-a^2, & m=0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow R_y[m] = (1-a^2)\delta[m]$

$$\Rightarrow \boxed{S_y(\Omega) = TF(R_y[m]) = TF((1-a^2)\delta[m]) = 1-a^2}$$

Febrero 07
Ejercicio 2

Sea $X[n]$ un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, con fdp de primer orden uniforme en $(-1,1)$. Sobre $X[n]$ se aplica la transformación:



(siendo $0 < a < 1$), obteniéndose un nuevo proceso estocástico $Y[n] = g(X[n])$.

Calcule:

√ a) La autocorrelación de $Y[n]$.

√ b) La correlación cruzada de $X[n]$ e $Y[n]$.

√ c) La fdp de primer orden de $Y[n]$.

d) La media condicional $E\{Y[n+m]/X[n]=x\}(\forall n,m)$.

e) Se hace pasar $X[n]$ por un sistema lineal e invariante, con respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$, obteniéndose un nuevo proceso estocástico $Z[n]=X[n]*h[n]$. Calcule la autocorrelación de $Z[n]$.

$X[n] \to$ ruido blanco estricto, discreto en t y est. en sentido amplio.

Si $n_1 \neq n_2 \Rightarrow X[n_1], X[n_2]$ ind.

$E[X[n]] = \text{cte}$, $C_{X[n]}(n_1-n_2)$

$$X[n] \sim U(-1,1) \Rightarrow f_{X_n}(x) = \begin{cases} 1/2, & -1<x<1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Por la gráfica podemos decir:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -a<x<a \\ x & x>a \vee x<-a \end{cases} \quad ; \quad y[n] = g(X[n])$$

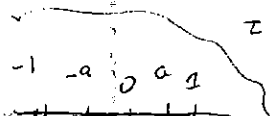
a) AUTOCORRELACIÓN DE $y[n]$: $R_y[n_1,n_2] = E[y[n_1]\cdot y[n_2]]$

$\boxed{* \; n_1 \neq n_2}$

Si $x[n_1], x[n_2]$ ind $\Rightarrow g(x[n_1]), g(x[n_2])$

$$R_y[n_1,n_2] = E[y[n_1]\cdot y[n_2]] = E[g(X[n_1])\cdot g(X[n_2])] =$$

$$= E[g(X[n_1])]\cdot E[g(X[n_2])]$$



$g(x)=x$; $g(x)=0$, $g(x)=x$

$f_X(x)=0$; $f_X(x)=\frac{1}{2}$; $f_X(x)=0$

$$E[g(X[n_1])] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_X(x)\,dx = \left(\int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0 + \int_{-1}^{-a} x\cdot\frac{1}{2} + \int_{-a}^{a} 0\cdot\frac{1}{2} + \int_{a}^{1} x\cdot\frac{1}{2} + \int_{1}^{\infty} x\cdot 0\right)dx = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_y[n_1,n_2] = 0}$$

$\boxed{* \; n_1 = n_2}$

$$R_y[n_1,n_2] = E[y[n_1]\cdot y[n_2]] = E[g^2(X[n_1])]$$

$$E[g^2(X[n_1])] = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x)\cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} x^2\cdot 0\,dx + \int_{-1}^{-a} x^2\cdot\frac{1}{2}\,dx + \int_{-a}^{a} 0^2\cdot\frac{1}{2}\,dx$$

$$+ \int_{a}^{1} x^2\cdot\frac{1}{2}\,dx + \int_{1}^{\infty} x^2\cdot 0\,dx = \ldots = \boxed{\frac{1-a^3}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_y[n_1,n_2] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}a^3}$$

$$\Rightarrow R_y[n_1,n_2] = \begin{cases} 0, & n_1 \neq n_2 \\ \frac{1-a^3}{3}, & n_1 = n_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ \frac{1-a^3}{3}, & m = 0 \end{cases}$$

$m = n_1 - n_2$

$$R_y[n_1,n_2] = \frac{1-a^3}{3}\,\delta[m]$$

b) CORRELACIÓN CRUZADA DE $X[n]$ E $Y[n]$: $R_{xy}[n_1,n_2] = E[X[n_1]\cdot Y[n_2]]$

- $n_1 \neq n_2$

$n_1 \neq n_2 \Rightarrow X[n_1], X[n_2]$ ind $\Rightarrow X[n_1], g(X[n_2])$ ind. (y transformación lineal)

$$\boxed{R_{xy}[n_1,n_2]} = E[X[n_1]\cdot Y[n_2]] = E[X[n_1]\cdot g(X[n_2])] =$$

$$= E[X[n_1]]\cdot \underbrace{E[g(X[n_2])]}_{0} = \boxed{0}$$

- $n_1 = n_2$

$$\boxed{R_{xy}[n_1,n_2]} = \ldots = E[X[n_1]\cdot g(X[n_1])] = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot g(x)\cdot f_X(x)\,dx$$

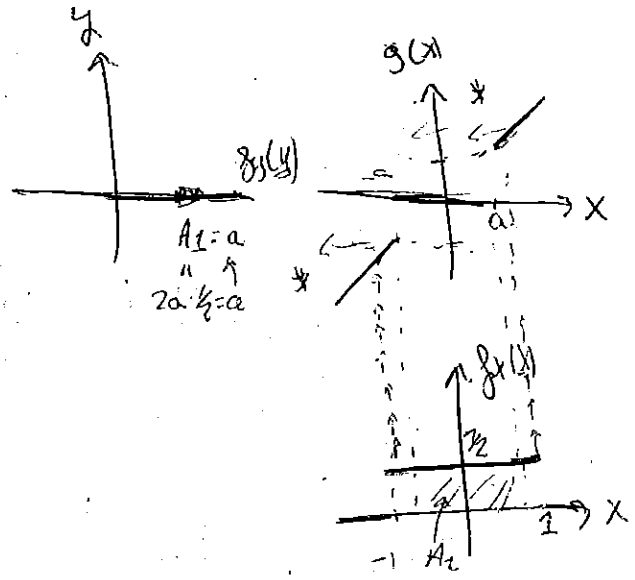
$$= \int_{-\infty}^{-1} x\cdot x\cdot 0\,dx + \int_{-1}^{-a} x\cdot x\cdot \tfrac{1}{2}\,dx + \int_{-a}^{a} x\cdot 0\cdot \tfrac{1}{2}\,dx \ldots + \int_{a}^{1} x\cdot x\cdot \tfrac{1}{2}\,dx + \int_{1}^{\infty} x\cdot x\cdot 0\,dx$$

$$= \ldots = \boxed{\frac{1-a^3}{3}}$$

$$\Rightarrow R_{xy}[n_1,n_2] = \ldots \underbrace{R_{xy}[m] = \frac{1-a^3}{3}\,\delta[m]}_{R_y[m]}$$

$$R_{xy}[m] = \begin{cases} \dfrac{1-a^3}{3} & , m=0 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

c)



* Puesto que no es un tramo horizontal lo hacemos analíticamente.

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |y| \geq a \\ a \cdot y = 0 & \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

(*)

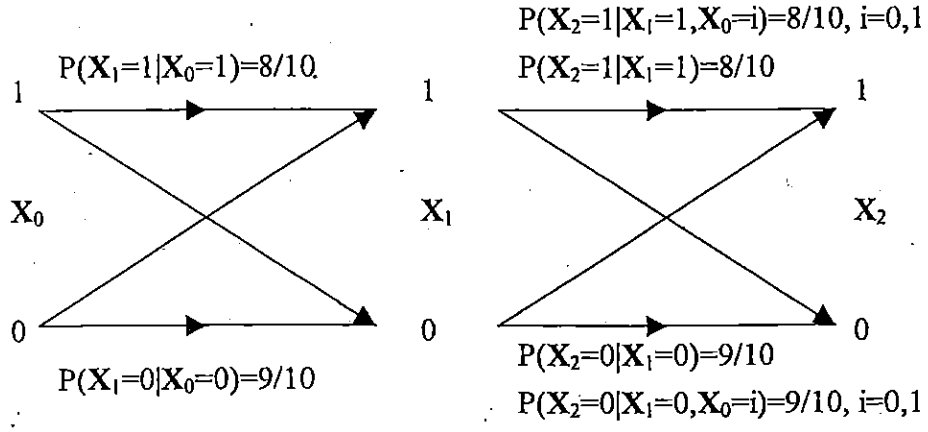
$$f_y(y) = \frac{f_x(x)}{|g'(x)|} = \frac{\frac{1}{2}}{|1|} = \frac{1}{2} \quad |y| > a$$

$(|x| \geq a \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow y = g(x) = x \Rightarrow |y| \geq a)$

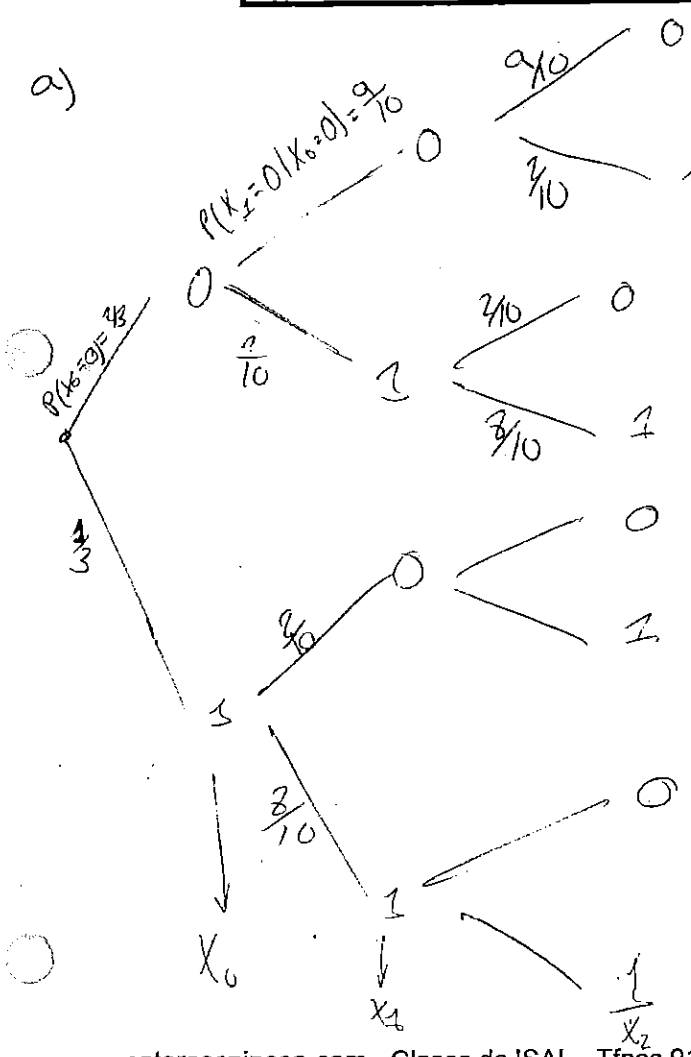
Septiembre 2007
Ejercicio 2

La figura muestra un canal de comunicaciones binario constituido por dos etapas idénticas. Cada etapa transmite un símbolo binario que puede tomar dos valores 0 ó 1 con las probabilidades de transmisión que se muestran en la figura. Se forma el proceso $X[n]=X_n$ para $n=0,1,2$. Suponiendo que X_0 es una va de Bernouilli con $P(X_0=1)=1/3$. Se pide:

a) Obtener todas las posibles realizaciones del proceso estocástico indicando la probabilidad de ocurrencia de cada una de ellas.
b) La media del proceso.
c) La autocorrelación del proceso.
d) La fdp de primer orden del proceso. ¿Es estacionario de primer orden?
e) Determinar si el proceso es un ruido blanco estricto.



a)



POSIBILIDADES

X_0	X_1	X_2	PROBABILIDAD (*)
0	0	0	$\rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{27}{50}$
0	0	1	$\rightarrow 3/50$
0	1	0	$\rightarrow 2/75$
0	1	1	$\rightarrow 4/75$
1	0	0	$\rightarrow 3/50$
1	0	1	$\rightarrow 1/150$
1	1	0	$\rightarrow 4/75$
1	1	1	$\rightarrow 16/75$

(*) $P(X_2=0, X_1=0, X_0=0)=P(X_2=0/X_1=0, X_0=0)\cdot P(X_1=0/X_0=0)\,P(X_0=0)$

b) $E[X[n]]$:

* $n=0$ $\quad X[n=0] = X_0$ $\quad \boxed{E[X_0] = 1P(X_0=1) + 0 \cdot P(X_0=0) = \frac{1}{3}}$

* $n=1$ $\quad X[n=1] = X_1$ $\quad \boxed{E[X_1] = 0 \cdot P(X_1=0) + 1 \cdot P(X_1=1) = P(X_1=1)}$

$$= P(X_0=0)P(X_1=1 \mid X_0=0) + P(X_1=1 \mid X_0=1)P(X_0=1)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

por ser disjuntas pasa a sumarse (disjuntas: no se pueden dar ambos a la vez).

* $n=2$ $\quad X[n=2] = X_2$ $\quad \boxed{E[X_2] = 0 \cdot P(X_2=0) + 1 \cdot P(X_2=1) = P(X_2=1) =}$

$$P(X_2=1 \mid X_0=0, X_1=0)P(X_1=0 \mid X_0=0)P(X_0=0)$$
$$+ P(X_2=1 \mid X_0=0, X_1=1)P(X_1=1 \mid X_0=0)P(X_0=0)$$
$$+ P(X_2=1 \mid X_0=1, X_1=0)P(X_1=0 \mid P(X_0=1)P(X_0=1)$$
$$+ P(X_2=1 \mid X_0=1, X_1=1)P(X_1=1 \mid X_0=1)P(X_0=1) =$$
$$= \frac{3}{50} + \frac{4}{75} + \frac{1}{150} + \frac{16}{75} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

esto está en la falla

$\Rightarrow$ $E[X[n]] = \frac{1}{3}$, $n = 1, 2, 0$

c) AUTOCORRELACIÓN: $R_X[n_1, n_2]$

$R_X[n_1,n_2] = E[X[n_1] \cdot X[n_2]] =$

$* \; n_1 = n_2 \rightarrow \boxed{E[X[n]^2]} = E[X_{n_1}^2] = 1^2 \cdot P(X_{n_1}=1) + 0^2 \cdot P(X_{n_1}=0) = E[X[n_1]] = \boxed{1/3}$

$* \; n_1 \neq n_2 \rightarrow E[X[n_1]X[n_2]] = 0 \cdot 0 \, P(X[n_1]=0 \cap X[n_2]=0) +$

$0 \cdot 1 \cdot P(X[n_1]=0 \cap X[n_2]=1) +$

$1 \cdot 0 \, P(X[n_1]=1 \cap X[n_2]=0) +$

$1 \cdot 1 \cdot P(X[n_1]=1 \cap X[n_2]=1) =$

$= P(X[n_1]=1 \cap X[n_2]=1)$

$\Rightarrow P(X[n_1]=1 \cap X[n_2]=1) =$

$$\sum \begin{cases} (1) \; P(X_0=1 \cap X_1=1) \overset{*}{=} P(X_1=1 / X_0=1) P(X_0=1) = 4/15 \\ (2) \; P(X_0=1 \cap X_2=1) = P(X=1/X_2=1) P(X_1=1) = 11/50 \\ (3) \; P(X_1=1 \cap X_2=1) = P(X_2=1 / X_1=1) P(X_1=1) = 20/75 \\ P(X_1=1 \cap X_0=1) = (1) = 4/15 \\ P(X_2=1 \cap X_0=1) = (2) = 11/50 \\ P(X_2=1 \cap X_1=1) = (3) = 20/75 \end{cases}$$

Todo esto se puede ver rápidamente en la tabla

$* \; P(X=a/Y=b) = \dfrac{P(X=a \cap Y=b)}{P(Y=b)}$

$\Rightarrow R_X[n_1,n_2] = \begin{cases} 1/3 , & n_1 = n_2 \end{cases}$

d) fdp del proceso: $X[n] = X_n$

$* \underline{n=0} \rightarrow X_0 \sim Ber \begin{cases} P(X_0=0) = 2/3 \\ P(X_0=1) = 1/3 \end{cases}$

$* \underline{n=1} \rightarrow X_1 \sim Ber \begin{cases} P(X_1=0) = 2/3 \\ P(X_0=1) = 1/3 \end{cases}$

$* \underline{n=2} \rightarrow X_2 \sim Ber \begin{cases} P(X_2=0) = 2/3 \\ P(X_2=1) = 1/3 \end{cases}$

Puesto que: $X[n_1] = X[n_2]$ $\forall n_1 \neq n_2$ } estacionario de primer orden

"la fpd no varía con el tiempo"

$$\Rightarrow \boxed{X[n] \sim \underset{(p=1/3)}{Ber} \begin{cases} P(X[n]=1) = 1/3 \\ P(X[n]=0) = 2/3 \end{cases} ; n=0,1,2}$$

e) Ruido blanco estricto: $X[n_1], X[n_2], n_1 \neq n_2$

Buscamos un contraejemplo:

$P(X_1=0/X_0=0) = 9/10$
$P(X_1=0/X_1=1) = 2/10$

(*) Si fuera independientes: $P(X_{n_1}=i/X_{n_2}=j) = P(X_{n_1}= /X_{n_2}=l) = P(X_{n_1}=i)$

Puesto que no se cumple

$\Downarrow$

NO IND

$\Downarrow$

$X[n] \neq$ ruido blanco estricto

(*) También se podría comprobar así:

$P(X_{n_1}=i \cap X_{n_2}=j) \underset{\text{ind}}{=} P(X_{n_1}=i) \cdot P(X_{n_2}=j)$

Septiembre 2006
Ejercicio 2

Sea **X** [n] un ruido blanco estricto, con fdp de primer orden ($u(x)$ es el escalón unidad):

$$f_x(x) = xe^{-x^2/2}u(x).$$

A dicho proceso se le aplican las transformaciones:

$$y = q(x) = \begin{cases} y_1, & x \le a \\ y_2, & x > a \end{cases}$$

$$z = g(x) = 1 - e^{-x^2/2}$$

siendo y_1, y_2 y a constantes positivas. Se obtienen los nuevos procesos **Y** [n] = q {**X** [n] } y **Z** [n] = g { **X** [n] }. Calcule:

a) El valor de a de manera que el proceso **Y** [n] tome el valor y_1 con probabilidad 0.4.

b) La fdp de primer orden de **Y** [n] , para el valor de a obtenido previamente. ¿Es **Y** [n] estacionario de orden 1?

c) La autocovarianza de **Y** [n], para el valor de a obtenido previamente. ¿Es **Y** [n] estacionario en sentido amplio?

d) La fdp de primer orden de **Z** [n]. ¿Es **Z** [n] estacionario de orden 1?

e) La media y varianza de **Z** [n].

$X[n]$: ruido blanco estricto. $f_x(x) = xe^{-x^2/2}u(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$X[n_1]$ y $X[n_2]$ ind. si $n_1 \neq n_2$

TRANSFORMACIONES:

$$\begin{cases} y = q(x) = \begin{cases} y_1, & x \le a \\ y_2, & x > a \end{cases} \Rightarrow y[n] = q\{X[n]\} \\ z = g(x) = 1 - e^{-x^2/2} \Rightarrow z[n] = g\{X[n]\} \end{cases}$$

a) $\boxed{a: P(y[n] = y_1) = 0'4}$

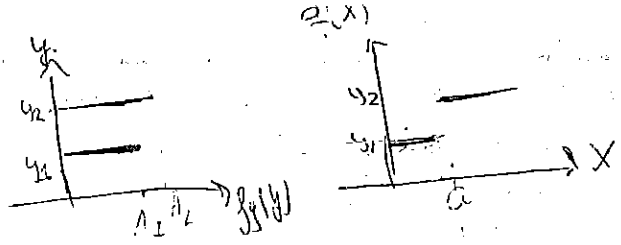
$$P(y[n] = y_1) = P(X[n] \le a) = F_{X[n]}(a) = \int_{-\infty}^{a} f_{x_n}\,dx = \int_0^a x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^a = 1 - e^{-\frac{a^2}{2}} = 0'4 = \frac{2}{5}$$

$$a = \pm\sqrt{-2\ln\left(\tfrac{3}{5}\right)} \longrightarrow \boxed{a = \sqrt{-2\ln\left(\tfrac{3}{5}\right)}}$$

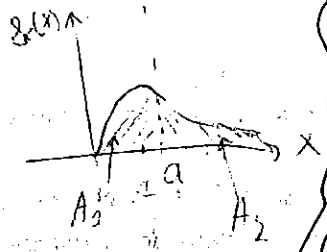
descarto el −, ya que $X \in [0, \infty)$ y X puede ser $\le a$

b)

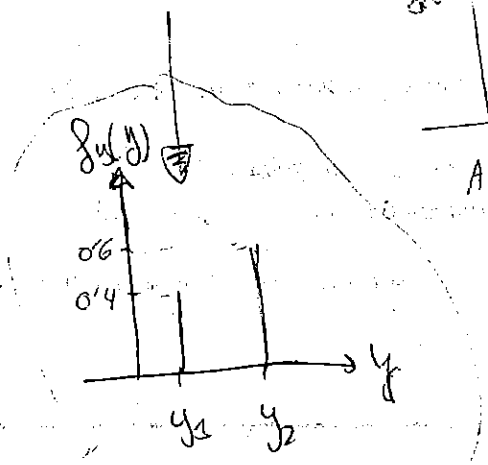


$A_1 = P(X[n] \leq a) = 0'4$

$A_2 = P(X[n] > a) = 0'6$



Al ser la transformación cte. ⇒ la $Y[n]$ estará formada por 2 deltas en y_1 e y_2 de peso la probabilidad en ese punto



$$f_{Y[n]}(y) = \begin{cases} 0'4, & y = y_1 \\ 0'6, & y = y_2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \longrightarrow \boxed{f_{Y[n]}(y) = 0'4\,\delta(y - y_1) + 0'6\,\delta(y - y_2)}$$

Es que es estacionario ya que $f_{Y[n]}(y)$ no depende de n

c) AUTOCOVARIANZA DE $Y[n]$. $C[n_1, n_2] = R_Y[n_1, n_2] - E[Y[n_1]]\,E[Y[n_2]]$

- $E[Y[n]] = \sum_{r=1} r\,P(Y[n]=r) = y_1 \cdot P(Y=y_1) + y_2 P(Y=y_2) = 0'4\,y_1 + 0'6\,y_2$

$$\hookrightarrow \begin{cases} E[Y[n_1]] = 0'4\,y_1 + 0'6\,y_2 \\ E[Y[n_2]] = 0'4\,y_1 + 0'6\,y_2 \end{cases}$$

• AUTOCORRELACIÓN DE Y : $R_y[n_1,n_2]$

$x[n_1], x[n_2]$ ind. $\Rightarrow q(x[n_1]), q(x[n_2])$ ind.

* $\boxed{n_1 \neq n_2}$

$$R_y[n_1,n_2] = E[y[n_1]\cdot y[n_2]] = E[q(X[n_1])\cdot q(X[n_2])] =$$

$$= E[q(X[n_1])]\cdot E[q(X[n_2])] = E[y[n_1]]\cdot E[y[n_2]]$$

$$= (0'4\, y_1 + 0'6\, y_2)^2$$

* $\boxed{n_1 = n_2}$

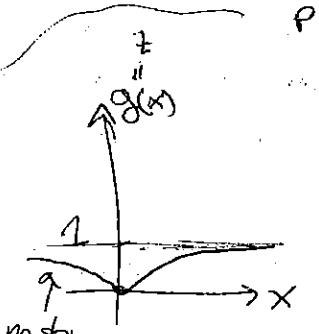
$$R_y[n_1,n_2] = E[y[n_1]^2] = \sum_{r=1}^{R} r^2 P(y[n]=r) = y_1^2\cdot P(y[n]=y_1) + y_2^2\cdot P(y[n]=y_2)$$

$$= 0'4\, y_1^2 + 0'6\, y_2^2$$

$$\boxed{C_y[n_1,n_2] = \begin{cases} 0 \ , & n_1 \neq n_2 \\ 0'4\, y_1^2 + 0'6\, y_2^2 - (0'4\, y_1 + 0'6\, y_2)^2 \ , & n_1 = n_2 \end{cases}}$$

Será est. en sent. amplio si : $\begin{cases} E[y[n]] = cte \\ R_y[n_1,n_2] : \varphi(n_1-n_2) \end{cases}$

d) $Z = g(X) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$



no tenemos en cuenta esta parte porque en nuestro problema $R_X = \mathbb{R}^+$

PINTAMOS $g(x) : 1 - e^{-x^2/2}$

- $x = 0 \to y = 0$
- $g(x) = g(-x)$ PAR
- $\lim_{x \to \infty} g(x) = 1$
- $\frac{\partial g(x)}{\partial x} = x e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\begin{cases} > 0, & x \geq 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$x = 0$ mínimo

Como no hay tramos horizontales, lo tenemos que hacer con la fórmula:

$$f_Z(z) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

$\uparrow$

$g(x)$ creciente $\forall x \in R_X$, solo hay x_1

- $x_1 = g^{-1}(x) = \ldots$
- $g'(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \to |g'(x_1)| = \ldots$

$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}$

* Había otra fórmula para cuando siempre eran monótonos (este caso):

$$f_{Z[n]}(z) = \frac{f_{X[n]}(X(z))}{|g'(X(z))|} = \left.\frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{x e^{-\frac{x^2}{2}}}\right|_{x : X(z)} = 1, \quad z \in R_Z$$

- Determinamos R_Z gráficamente: $R_Z = [0, 1]$

Por tanto: $\boxed{f_Z(z) = 1, \quad 0 < z < 1}$

EST. ~~EN SEC. ORDEN~~ DE 1º ORDEN YA QUE $f_Z(z)$ NO DEPENDE DE N.

e) $f_Z(z) = \begin{cases} 1, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

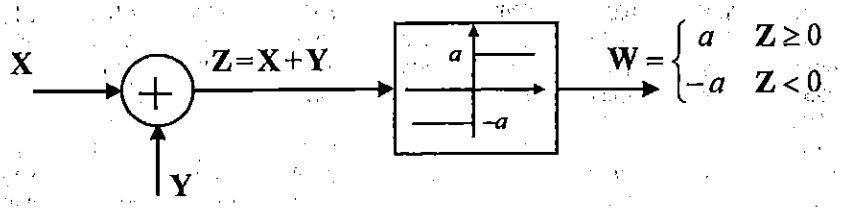
- Vemos que $Z \sim U(0,1)$

$$\boxed{E[Z] = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{Var[Z] = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}}$$

5/2/2008 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- En el esquema adjunto, **X** representa una v.a. discreta, con $P(\mathbf{X}=-1)=P(\mathbf{X}=+1)=1/2$, a la que se suma una v.a. **Y** con distribución $N(0,1)$ e independiente de **X**. A la v.a resultante, **Z**, se le aplica la transformación de la figura, dando como resultado una nueva v.a. **W** que toma los valores a ó $-a$, según sea el signo de **Z**.



Se pide:

a) La fdp de la v.a. **Z**. Represéntela gráficamente de forma aproximada.

b) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{W}=-a\,|\,\mathbf{X}=-1)$ y $P(\mathbf{W}=a\,|\,\mathbf{X}=1)$.

c) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{X}=-1\,|\,\mathbf{W}=-a)$ y $P(\mathbf{X}=1\,|\,\mathbf{W}=a)$.

d) La covarianza de **X** y **W**.

e) El valor de la constante a que minimiza $\varepsilon=E[(\mathbf{W}-\mathbf{X})^2]$.

(5 puntos)

2.- Sean **X** y **G** dos v.a.'s independientes y con distribución uniforme en (0,1). Se realizan las transformaciones $\mathbf{Y}=\mathbf{GX}$, $\mathbf{Z}=\mathbf{X}$.

a) Calcule la fdp conjunta de (**Y**, **Z**) y dibuje su rango en el plano (y,z).

Suponga, ahora, que $\mathbf{X}[n]$ es un ruido blanco estricto, discreto en el tiempo y estacionario en sentido amplio, con fdp de primer orden uniforme en (0,1). Se forma el proceso $\mathbf{Y}[n]=\mathbf{GX}[n]$, siendo **G** una va uniforme en (0,1) e independiente de $\mathbf{X}[n]$.

b) Calcule la fdp de primer orden del proceso $\mathbf{Y}[n]$.

c) Calcule la fdp condicionada $f_Y(y,n|\mathbf{G}=g)$ y la media condicionada $E(\mathbf{Y}[n]|\mathbf{G}=g)$.

d) Calcule la media y la autocorrelación de $\mathbf{Y}[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?

e) Se hace pasar $\mathbf{X}[n]$ por un sistema lineal e invariante, de respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]-a\delta[n-1]$, obteniéndose el proceso $\mathbf{W}[n]=\mathbf{X}[n]*\mathbf{h}[n]$. Calcule la autocorrelación de $\mathbf{W}[n]$.

(5 puntos)

Examen:	5/2/08	Publicación de notas:	27/2/08
Revisión:	3/3/08	Publicación resultados revisión:	4/3/08

$$X \text{ uniforme en } (x_1, x_2): \quad E[X] = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad Var[X] = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ para $0 \le x \le 3.89$ en pasos de 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Examen:	5/2/08	Publicación de notas:	27/2/08
Revisión:	3/3/08	Publicación resultados revisión:	4/3/08

FEB 08:

- X: v.a. discreta tal que $\Omega_X = \{1,-1\}$
  $Card(\Omega_X) = 2$

$$P(X=r) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } r=1 \\ 1/2 & \text{si } r=-1 \end{cases}$$

$X \sim Ber(p=1/2)$

(Bernoulli)

- Y: v.a. normal $N(0,1)$: (μ, σ)

$\boxed{E[Y]=0}$

$\boxed{V[Y]=\sigma^2=1}$

$N(\mu,\sigma) \Rightarrow f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}$

$\Downarrow$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$

- X e Y son independientes.
- $\boxed{Z = X+Y} \Rightarrow \boxed{W = \begin{cases} a, & z>0 \\ -a, & z<0 \end{cases}}$

a) ¿ $f_Z(z)$?

$X = \{1,-1\} \rightarrow X+Y = 1+Y \vee X+Y = -1+Y$

th. de la probabilidad total $\Rightarrow f_Z(z) = f_Z(z|X=1)P(X=1) + f_Z(z|X=-1)P(X=-1)$

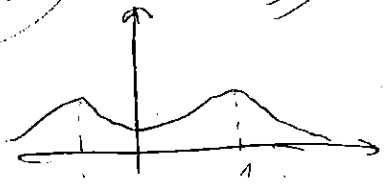
$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{f_Z(z|X=1)}_{(1)} + \underbrace{f_Z(z|X=-1)}_{(2)}\right]$

(1) $Z|X=1 = Z = 1+\underset{N(0,1)}{Y} \Rightarrow$ A $N(0,1)$ se le suma 1. El resultado es $N(0+1,1)$

(2) $Z|X=-1 = Z = -1+Y \Rightarrow$ A $N(0,1)$ se le suma -1: El resultado es $N(-1,1)$

DENSIDAD

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-1}{1}\right]^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{z-(-1)}{1}\right]^2}\right] \quad z \in (-\infty,\infty)$$



b) • $P(W=-a|X=-1) = P(Z<0|X=-1) = P(y+X<0|X=-1)$

$= P(y<1) = G(1) = \boxed{0'8413}$

• $P(W=a|X=1) = P(X+y|Z=1) = P(y\geq -1) = 1-P(y<-1)$

$= 1-[1-P(y<1)] = P(y<1) = G(1) = \boxed{0'8413}$

c) • $P(X=-1|W=-a) \underset{\text{BAYES}}{=} \dfrac{P((X=-1)\cap W=-a)}{P(W=-a)} = \dfrac{P(X=-1)\cdot P((W=-a)|X=-1)}{P(W=-a)} =$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0'8413}{P(W=-a)} = \boxed{0'8413}$

Prob. total

• $\boxed{P(W=-a)} = P(W=-a|X=1)P(X=1) + P(W=-a|X=-1)P(X=-1)$

$= \frac{1}{2}[0'8413 + P(y<-1)] = \frac{1}{2}[0'8413 + 1 - P(y<1)] =$

$= \boxed{\frac{1}{2}}$

• $P(X=1|W=a) = \dfrac{P((X=1)\cap W=a)}{P(W=a)} = \dfrac{P(W=a|X=1)P(X=1)}{1-P(W=-a)} = \ldots = \boxed{0'8413}$

d) $Cov(X,W) = E[XW] - E[X]E[W]$

• $E[X] = \sum_{i=1}^{n} r_i P(X=r_i) = 1\cdot P(1) + (-1)P(-1) = \boxed{0}$

* Arrastramos la condición porque la W depende de X, y no será la misma. E[W] que la E[W|X=1]

• $E[XW] = E[XW|X=-1]P[X=-1] + E[XW|X=1]P(X=1)$

$= E[-W|X=-1]\frac{1}{2} + \frac{1}{2}E[W|X=1] =$

$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{E[W|X=1]}_{(1)} - \underbrace{E[W|X=-1]}_{(2)}\Big]$

(1)

$$E[W|X=1] = \sum_{i=1}^{n} r_i P(X=r_i) = a\,P(W=a|X=1) + (-a)P(W=-a|X=1)$$

$$= \dots = a \cdot 0'8413 - a(1-0'8413) = \boxed{0'68260a}$$

(2) $E[W|X=-1] = \dots = \boxed{-0'68260a}$

$$\Rightarrow \boxed{Cov(X,W) = 0'68260a}$$

e) $E[(W-X)^2] = E[W^2] + E[X^2] - 2[WX]$

- $\boxed{E[W^2]} = a^2 \cdot \underset{1/2}{P(W=a)} + (-a)^2 \underset{1/2}{P(W=-a)} = \boxed{a^2}$
- $\boxed{E[X^2]} = (1)^2 P(X=1) + (-1)^2 P(X=-1) = \boxed{1}$

$$\rightarrow E[(W-X)^2] = a^2 - 2 \cdot 0'68260a + 1$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2a - 1'36652 = 0$$

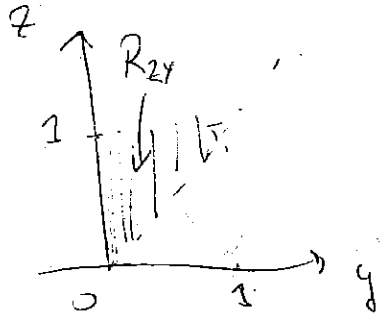
$$\rightarrow \boxed{a = 0'68260}$$

$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} > 0 \nearrow \text{mínimo}\right)$

$\boxed{2}$ a) $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$, ind.

$f_G(g) = \begin{cases} 1, & g \in (0,1) \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

$$\begin{cases} y = GX \\ z = X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = y/x \\ x = z \end{cases} \quad \therefore \quad f_{YZ}(y,z) = \begin{cases} \overbrace{1/z}^{R_{zy}}, & z \in (0,1), y \in (0,z) \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



b) $x[n]$ ruido blanco estricto: $x[n_1], x[n_2]$ ind $(n_1 \neq n_2)$

est. en sentido amplio $\begin{cases} R_x[x[n]] \sim \varphi(n) \\ E[x[n]] = cte \end{cases}$

$y[n] = GX[n]$

$f_{YZ}(y,z) = f_{YX}(y,x) \Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{YX}(x,y)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$

$$= \begin{cases} 0, & y \notin (0,1) \\ \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln|y| = \ln(1/y), & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow \boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \ln(1/y), & y \in (0,1) \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$

- $f_Y(y|G=g)$

  * $X \sim U(0,1) \Rightarrow gX \sim U(0,g) \Rightarrow Y \sim U(0,g) \Rightarrow \boxed{f_Y(y|G=g) = \begin{cases} 1/g, & y \in \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$

- $\boxed{E(y[n]/G=g) = E(g\cdot X[n]) = g\,E[X[n]] = \frac{g}{2}}$

$$E[X[n]] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx$$

d) MEDIA DE $y[n] \Rightarrow \boxed{E[y[n]] = E[G\cdot X[n]] = E[G]\cdot E[X[n]] = \frac{1}{4}}$

G, X ind.

AUTOCORRELACIÓN:

$R_y[n_1,n_2] =$:

- $n_1 \neq n_2$ | $\boxed{R_y[n_1,n_2]} = E[y[n_1]\cdot y[n_2]] =$ G y X ind

$= E[G\,X[n_1]\cdot G\,X[n_2]] = E[G^2]\,E[X[n_1]X[n_2]]$

X[n] ruido blanco $\Rightarrow = E[G^2]\cdot E[X[n_1]]\cdot E[X[n_2]] = \frac{1}{4}\cdot E[G^2] = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$

- $n_1 = n_2$ | $\boxed{R_y[n_1,n_2]} = E[G^2 X[n_1]^2] = E[G^2]\cdot E[X[n_1]^2] = \boxed{\frac{1}{9}}$

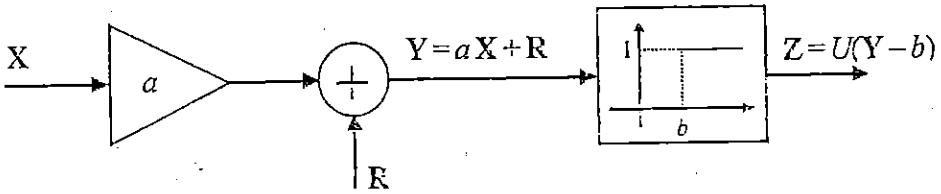
$$R_y[n_1,n_2] = \begin{cases} \frac{1}{12}, & n_1 \neq n_2 \\ \frac{1}{9}, & n_1 = n_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{12}, & m \neq 0 \\ \frac{1}{9}, & m = 0 \end{cases}$$

$(m = n_2 - n_1)$

Puesto que $\begin{cases} E[y[n]] = cte \\ R_y[n_1,n_2] \approx \varphi(m) \end{cases} \Rightarrow$ est. en sent. amplio

31/1/2005 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1. Un determinado sistema de comunicaciones responde al modelo de la figura:



donde el transmisor envía un símbolo binario (bit) que se puede modelar mediante una v.a. de Bernouilli X, con $P(X=1)=P(X=0)$. Dicho símbolo X, al pasar por el canal de comunicaciones, sufre una atenuación constante a y una adición de ruido R, que supondremos una v.a. $N(0,1)$ independiente de X. Finalmente, el receptor compara la salida del canal Y con un umbral b, produciendo como resultado una v.a. Z que toma el valor 1 si Y supera el umbral ó 0 en caso contrario. Suponiendo $a=2$ y $b=1$, calcule:

a) Las fdps condicionadas $f_Y(y|X=0)$, $f_Y(y|X=1)$ y la fdp de la v.a. Y, $f_Y(y)$.
b) Las probabilidades condicionadas $P(Z=1|X=0)$ y $P(Z=0|X=1)$.
c) La covarianza de X y Z.
d) Las probabilidades condicionadas $P(X=1|Z=1)$ y $P(X=0|Z=0)$.
e) Suponga ahora que el canal introduce una atenuación *aleatoria*, de forma que la señal de entrada al receptor es:

$$Y=AX+R$$

siendo A una v.a. $N(2,1)$ independiente de X y R.
Calcule $P(Z=1|X=0)$ y $P(Z=0|X=1)$, suponiendo $b=1$.

(5 puntos)

2. Sea X[n] un ruido blanco estricto, con fdp de primer orden exponencial, de parámetro c. A dicho proceso se le aplica la transformación:

$$y=g(x)=y_0(1-e^{-cx})$$

siendo $y_0>0$ una constante. Se obtiene el nuevo proceso Y[n]=g{X[n]}. Calcule:

a) La $P(Y[n] > 3y_0/4)$.
b) La media de Y[n].
c) La fdp de primer orden de Y[n]. ¿Es Y[n] estacionario de orden 1?
d) La autocovarianza de Y[n]. ¿Es Y[n] estacionario en sentido amplio?
e) Se define el proceso S[n]=Y[n] - λX[n], donde λ es una constante. Determine el valor de ésta para que la correlación cruzada $R_{XS}[n_1,n_2]$ sea nula $\forall\ n_1 \neq n_2$.

(5 puntos)

Examen:	31/1/05	Publicación de notas: 14/2/05
Revisión:	17/2/05	Resultados revisión: 18/2/05

2

* $x[n]$ ruido blanco estricto

* $X \sim \exp(c) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} ce^{-cx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f_X(x) = ce^{-cx}u(x)$ * $E[X[n]] = 1/c$

* Transformación: $y[n] = g(X[n])$, $g(x) = y_0(1-e^{-cx})$

a) $\boxed{P\left(y[n] > \frac{3y_0}{4}\right)} = P(X[n] > \alpha) =$

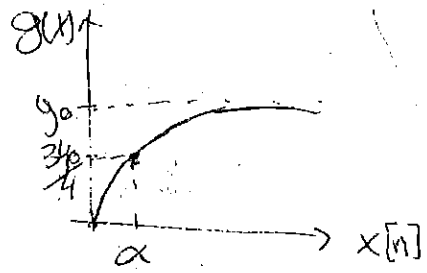
$= P\left(X[n] > \frac{\ln(4)}{c}\right) = 1 - P\left(X[n] \leq \frac{\ln(4)}{c}\right)$

$= 1 - \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)\,dx = 1 - \int_0^{\alpha} ce^{-cx}\,dx$

$= 1 + e^{-cx}\Big|_0^{\alpha} = e^{-c\cdot\alpha} = e^{-\ln(4)} = \boxed{1/4}$

Pintemos $g(x)$:

- $x < 0 \Rightarrow g(x) = 0$
- $\lim_{x\to\infty} g(x) = y_0$
- $g'(x) = cy_0e^{-cx} > 0$



$g(x) = y_0(1 - e^{-c\alpha}) = \frac{3y_0}{4}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\ln(4)}{c}}$ $\ln(1/4) =$

b) $E[y[n]] = E[g(X[n])] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X[n]) \cdot f_{X[n]}(x)\,dx$

$= \int_0^{\infty} y_0(1-e^{-cx}) \cdot ce^{-cx}\,dx = y_0\int_0^{\infty}(ce^{-cx} - ce^{-2cx})\,dx$

$= y_0\left[-e^{-cx}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}e^{-2cx}\Big|_0^{\infty}\right] = y_0\left(1 + \frac{1}{2}(0-1)\right)$

$\Rightarrow E(y[n]) = \frac{y_0}{2}$

c) ¿ $f_{y[n]}(y)$?

$$y = g(x) = y_0\left(1 - e^{-cx}\right)$$

Transformación en una variable:

$$f_{y[n]}(y) = \frac{f_x(x(y))}{|g'(x(y))|}$$

usamos esta fórmula ya que la transformación es siempre monótona.

• Calculamos $x(y)$:

$$y = y_0(1 - e^{-cx}) \Rightarrow \ldots x(y) = \frac{1}{c}\ln\left|\frac{y_0}{y_0 - y}\right|$$

• $g'(x) = y_0 c e^{-cx} \Rightarrow g'(x(y)) = c(y_0 - y)$

• $f_{x[n]}(x(y)) = \ldots = c\left|\frac{y_0 - y}{y_0}\right|$

$$\Rightarrow f_{y[n]}(y) = \frac{\cancel{c}\left|\frac{\cancel{y_0 - y}}{y_0}\right|}{\cancel{c}\,\cancel{|y_0 - y|}} = \frac{1}{|y_0|} = \frac{1}{y_0}, \quad R_y = (0, y_0)$$

* Rango de y:

$y = g(x)$, $x \in (0, \infty) \Rightarrow$

$R_y = (a, \ )$; $a = \min(g(x)) = g(0) = 0$;

$b = \max(g(x)) = g(\infty) = y_0$

d) $R_y[n_1, n_2] = E\left[y[n_1] \cdot y[n_2]\right]$

* $\underline{n_1 \neq n_2}$:

$$E\left[y[n_1] \cdot y[n_2]\right] = E\left[y[n_1]\right] \cdot E\left[y[n_2]\right] = \frac{y_0^2}{4}$$

($x[n]$ ruido blanco estricto y $y = g(x)$)

* $\underline{n_1 = n_2}$

$$E\left[y[n_1]^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (y^2) \cdot f_{y[n]}(y)\, dy = \int_0^{y_0} y^2 \cdot \frac{1}{y_0}\, dy = \frac{1}{3} y_0^2$$

Por tanto: $R_y[n_1,n_2] = R_y[m] = \begin{cases} y_0^2/4, & m \neq 0 \\ \frac{1}{3} y_0^2, & m = 0 \end{cases}$ $(m = n_2 - n_1)$

AUTOCOVARIANZA:

$$C_y[m] = R_y[m] - E[y[n]]$$

$$C_y[m] = E[y[n_1]y[n_2]] - E[y[n_1]]E[y[n_2]]$$

$$\Rightarrow C_y[m] = \begin{cases} \frac{y_0^2}{4} - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2, & m \neq 0 \\ \frac{y_0^2}{3} - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2, & m = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ \frac{y_0^2}{12}, & m = 0 \end{cases}$$

$$C_y[m] = \frac{y_0^2}{12}\delta[m]$$

Resto que $\begin{cases} E(y[n]) = cte \\ R_y[n_1,n_2] = R_y[m] \end{cases} \Rightarrow$ estacionario en sentido amplio

e) $S[n] = y[n] - \lambda x[n]$

$$R_{xs}[n_1,n_2] = E[x[n_1](y[n_2] - \lambda x[n_2])] = E[x[n_1]\cdot y[n_2]] - \lambda E[x[n_1]x[n_2]]$$

$$= R_{xy}[n_1,n_2] - \lambda R_x[n_1,n_2]$$

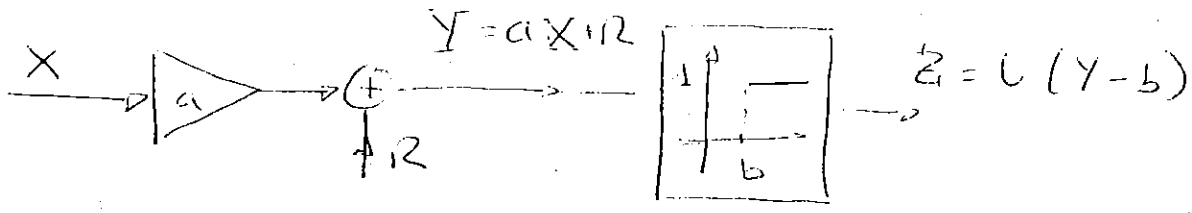
$$R_{xs}[n_1,n_2] = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{R_{xy}[n_1,n_2]}{R_x[n_1,n_2]}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{R_{xy}[n_1, n_2]}{R_x[n_1, n_2]} = \frac{c y_0}{2}}$$

$$* \; R_x[n_1, n_2] = E\left(x[n_1] x[n_2]\right) = E(x[n_1]) E(x[n_2]) = \frac{1}{c^2} \; *$$

$$* \; R_{xy}[n_1, n_2] = E\left[x[n_1] y[n_2]\right] = E[x[n_1]] \, E[y[n_1]] = \frac{y_0}{2c}$$

31/1/2005 (P1)



X v.a. Bernoulli $P(X=0) = P(X=1)$

R $N(0,1)$ indep. de X

(Gaussiana por definición del examen)

a) $f_Y(y/X=0) = f_R(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$ $(-\infty < y < \infty)$

$f_Y(y/X=1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-2)^2}$ $(-\infty < x < \infty)$

$\left.\begin{array}{l} Y = a + R \\ a = 2 \end{array}\right\} N(2,1)$

b) $P(Z=1/X=0) = P(Y>b/X=0) =$

$= P(aX + R > b / X=0) =$

$= P(R > b / X=0) \underset{R,\,X \text{ indep.}}{=} P(R>b) = 1 - G(b) =$

$\underset{b=1}{=} 1 - G(1) = 0.1587$

$P(Z=0/X=1) = P(Y<b/X=1) =$

$= P(a+R<b/X=1) \underset{R,\,X \text{ indep}}{=} P(a+R<b) =$

$= P(R<b-a) = G(b-a) = G(-1) = 1 - G(1) =$

$= 0.1587,$

(Notar que son las probabilidades de "equivocarse")

$\boxed{31/1/2005}$ (P1 cont.)

c) $Cov(X, Z)$ ....

d)

$$P(X=1/Z=1) \underset{\text{T. Bayes}}{=} \frac{P(Z=1/X=1)\,P(X=1)}{P(Z=1)} = \frac{G(1)\cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = G(1) = \underline{\underline{0.8413}}$$

(apt. c) $P(Z=1) = P(Z=1/X=0)\,P(X=0) + P(Z=1/X=1)\cdot P(X=1) =$

$$= [1 - G(1)]\cdot\frac{1}{2} + G(1)\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$P(X=0/Z=0) \underset{\text{T. Bayes}}{=} \frac{P(Z=0/X=0)\,P(X=0)}{P(Z=0)} =$$

$$= \frac{[1 - P(Z=1/X=0)]\,P(X=0)}{P(Z=0)} =$$

$$= \frac{G(1)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{0.8413}}$$

e) $P(Z=1/X=0) = P(A\cdot X + R > b/X=0) =$

$= P(R > b/X=0) = \underline{\underline{0.1587}}$ (igual apartado b.1)

$P(Z=0/X=1) = P(A\cdot X + R < b/X=1) =$

$\underset{A,R,X \text{ indep}}{=} P(A+R < b)$ $\quad$ A, R v.a's normales indep.

$\eta = E(A) + E(R) = 2$

$\sigma^2 = Var(A) + Var(R) = 2$

$$P(Z=0/X=1) = G\left(\frac{b-\eta}{\sigma}\right) = G\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right) = G\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 1 - G(0.71) = \underline{\underline{0.2389}}$$

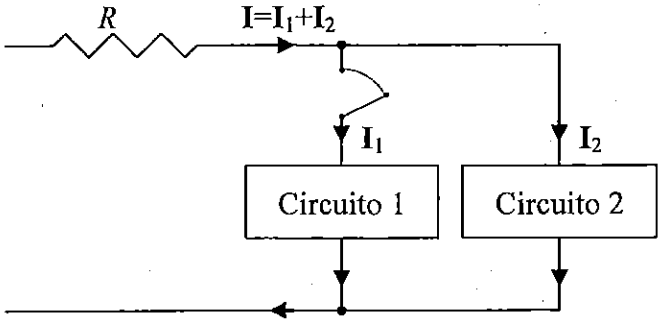
26/1/2009 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- En el esquema de la figura, una resistencia R de valor conocido es atravesada por una corriente **I**, modelada como una v.a. que es suma de dos componentes:

- $\mathbf{I}_1$ toma valor 0 si el interruptor está abierto o α (siendo $\alpha>0$) si está cerrado. El estado del interruptor (abierto/cerrado) es desconocido, pero se sabe que la probabilidad de que esté cerrado es p.
- $\mathbf{I}_2$ es una v.a. exponencial de parámetro c e independiente de $\mathbf{I}_1$.

Se definen las siguientes v.a.'s:

- Caída de tensión en la resistencia R: $\mathbf{V}=\mathbf{I}R$
- Potencia disipada en la resistencia R: $\mathbf{W}=\mathbf{I}^2R$



Se pide:

a) La fdp de la v.a. **V**, suponiendo que el interruptor está cerrado. Represéntela gráficamente de forma aproximada.

b) La fdp de la v.a. **V**. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\,dv=1$.

c) La covarianza de las v.a.'s **V** e **I**.

d) La media de la v.a. **W**.

e) La probabilidad de que **W** exceda un valor β (siendo $\beta\geq\alpha^2R$). Particularice para los siguientes valores: $\beta=1$, $R=100$, $\alpha=0.1$, $p=0.5$ y $c=1$.

(5 puntos)

2.- A partir de dos procesos estocásticos $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ discretos en el tiempo, se define:

$$\mathbf{Z}[n] = \mathbf{X}[n] + \mathbf{Y}[n]$$

a) Obtenga la expresión general de la autocorrelación del proceso $\mathbf{Z}[n]$: $R_Z[n_1, n_2]$ en función de las autocorrelaciones y correlaciones cruzadas de los procesos $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$.

b) Particularice la expresión de $R_Z[n_1, n_2]$ obtenida en el apartado anterior y obtenga la densidad espectral de potencia de $\mathbf{Z}[n]$, en función de las densidades espectrales de potencia y el espectro cruzado de $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$, para los dos casos siguientes:

1) $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio
2) $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ estacionarios en sentido amplio y ortogonales

c) Suponga que $\mathbf{X}[n] = \mathbf{A}$, siendo **A** una v.a. de media cero y varianza σ_A^2, e $\mathbf{Y}[n]$ es un ruido blanco estacionario en sentido amplio de media cero y varianza σ_Y^2 e independiente de **A**. Calcule la media y la autocorrelación del proceso $\mathbf{Z}[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?

d) A partir del resultado del apartado anterior obtenga la densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{Z}[n]$.

e) Considere ahora que $\mathbf{Z}[n] = n\mathbf{A} + \mathbf{B}$, siendo **A** y **B** v.a.'s independientes con fdp normal estándar. Calcule $P\{\mathbf{Z}[n] > k\}$ y particularice para $n=2$ y $k=5$.

(5 puntos)

Examen:	26/1/09	Publicación de notas:	16/2/09
Revisión:	20/2/09	Publicación resultados revisión:	23/2/09

EXPONENCIAL DE PARÁMETRO c: $f_X(x) = c\exp(-cx)U(x)$; $E(\mathbf{X}) = 1/c$; $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = 1/c^2$

GAUSSIANA ó $N(\eta,\sigma)$: $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right]$; $E(\mathbf{X}) = \eta$; $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = \sigma^2$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ para $0 \le x \le 3.89$ en pasos de 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

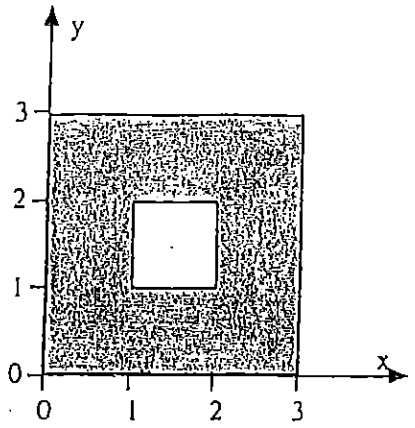
Examen:	26/1/09	Publicación de notas:	16/2/09
Revisión:	20/2/09	Publicación resultados revisión:	23/2/09

9DCHA, 3°C.

15: Agosto: 2006.

Junio 97
Ejercicio P1

Sean dos variables aleatorias X e Y, uniformemente distribuidas en el recinto de la figura:



Se pide:

a) Calcule la función de densidad de probabilidad conjunta, las marginales y la media y la varianza de X e Y.

b) Determine la independencia, incorrelación y/u ortogonalidad de X e Y.

a)

$$f_{XY} = \frac{1}{\text{Area } R_{XY}} = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8}$$

Unif. distribuidas

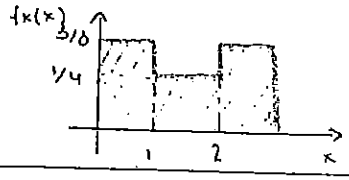
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } (x,y) \in R_{XY} \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin R_{XY} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \Rightarrow \begin{cases} \int_0^3 \frac{1}{8}\,dy = \frac{3}{8} & \text{si } x \in (0,1) \cup (2,3) \\ \int_0^1 \frac{1}{8}\,dy + \int_2^3 \frac{1}{8}\,dy = \frac{1}{4} & \text{si } x \in (1,2) \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} & \text{si } x \in (0,1) \cup (2,3) \\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in (1,2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Análogamente por simetría:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8} & \text{si } y \in (0,1) \cup (2,3) \\ \frac{1}{4} & \text{si } y \in (1,2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 \frac{3x}{8}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{4}x\,dx + \int_2^3 \frac{3}{8}x\,dx + \int_3^{\infty} x\cdot 0\,dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{16}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{16}\right]_2^3 = \frac{3}{16} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} + \frac{27}{16} - \frac{12}{16} =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{18}{16} = \frac{6+18}{16} = \frac{24}{16} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{3}{2}}$$ Por simetría

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 \frac{x^2\,3}{8}\,dx + \int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{4}\,dx + \int_2^3 \frac{x^2\cdot 3}{8}\,dx = \frac{37}{12}$$

$$\boxed{E(x^2) = E(Y^2) = \frac{37}{12}}$$

por simetría

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{37}{12} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{6} = V(Y)$$ $$\boxed{V(x) = V(Y) = \frac{5}{6}}$$

por simetría

b) Independencia $f_{XY} \neq f_X f_Y$

Además el rango Ω_{XY} no es un cuadrado (tiene agujero)

no son independientes.

Miras si son incorreladas.

15: Agosto: 2006

Septiembre 97
Ejercicio P1

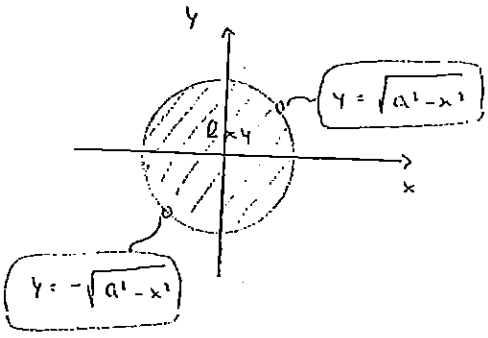
Sea (X, Y) un punto escogido completamente al azar en el círculo $x^2 + y^2 \le a^2$. Calcule:

a) Las fdps marginales de X e Y.

b) La F.D. de la v.a. Z= "distancia del punto (X, Y) al origen de coordenadas".

c) Considere un pozo cilíndrico de radio $a + b$ por el que se dejan caer verticalmente y de forma aleatoria pelotas esféricas de radio b. En el centro del pozo se encuentra un desagüe circular de radio $c > b$ $(c < a + b)$. Calcule la probabilidad de que una pelota pase limpiamente (sin tocar las paredes) por el desagüe.

$x^2+y^2 \le a^2$



(x,y) es una v.a. uniformemente distribuida en la región $x^2+y^2 \le a^2$

"un pto al azar"

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{Area } R_{xy}} & \text{si } x^2+y^2 \le a^2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow \boxed{f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi a^2} & \text{si } x^2+y^2 \le a^2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

x,y es uniforme

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\pi a^2}\,dy = \frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2}$$

a)

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2} & \text{si } -a<x<a \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

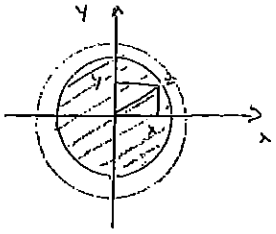
Por simetría:

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{a^2-y^2}}{\pi a^2} & -a<y<a \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

b) Z = " distancia del pto. $(x\ y)$ al origen de coordenadas "

$Z = \sqrt{x^2+y^2}$

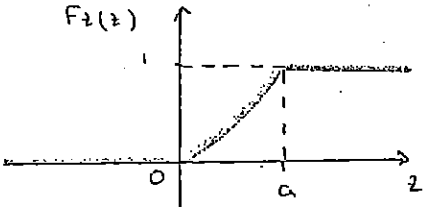
$$F.D. = F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(\sqrt{x^2+y^2} \le z\right) =$$



$$= P(x^2+y^2 \le z^2) = \frac{\text{Area } R_z}{\text{Area } R_a} = \frac{\pi z^2}{\pi a^2} = \frac{z^2}{a^2} \quad \text{si } z < a$$

!!! xq es uniforme

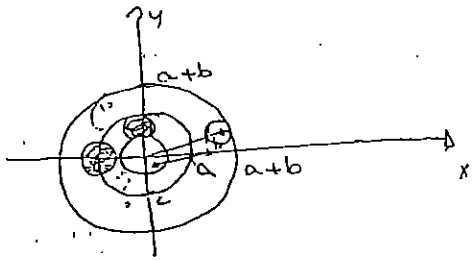
$$\boxed{F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \dfrac{\pi z^2}{\pi a^2} & \text{si } z < a \\ 1 & \text{si } z \ge a \end{cases}}$$



12/12/03

→ Cont Sep 97

(c)



≡ Pelotas.

c ≡ radio del desagüe.

Z ≡ "distancia del centro de la pelota al centro del desagüe"

a ojo

$\Rightarrow R_Z = [0, a]$

Z coincide con la v.a. Z, definida en b). donde el punto (X, Y) cualquiera ahora es el centro de la pelota.

c) es aplicación del b).

$$P(Z \leq z_{max}) \underset{z_{max} = c-b}{=} P(Z \leq c-b) = F_Z(c-b) = \frac{(c-b)^2}{(a\ \ )^2}$$

radio del círculo

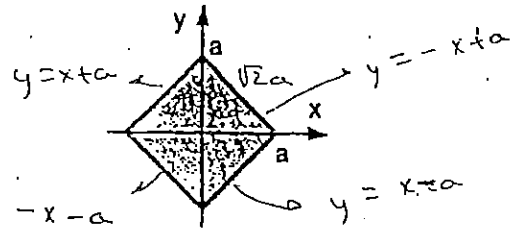
$$\boxed{F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \dfrac{z^2}{(a\ \ )^2} & 0 \leq z < a \\ 1 & z \geq a \end{cases}}$$

misma F_Z que en b)

27/11/03

Febrero 1998
Ejercicio T2

Sea $Z = X + Y$ con $f_{xy}(x,y) = k$ en el recinto de la figura.



Se pide:

a) ¿Son X e Y ortogonales?. ¿Son incorreladas?

Repasar b) Calcule la función de distribución $F_z(z)$.

$\rightarrow f_{XY}(x,y) = K$ (v.a. uniformemente distribuida).

(a) $f_{XY}(x,y) = \dfrac{1}{\text{Área } R_{XY}} = \dfrac{1}{(\sqrt{2}a)^2} = \dfrac{1}{2a^2}$

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a^2} & \text{si } (x,y) \in R_{XY} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

$$E(XY) = \iint_{R_{XY}} x \cdot y \, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=x-a}^{y=-x+a} xy \frac{1}{2a^2}\,dx\,dy + \int_{x=-a}^{x=0} \int_{y=-x-a}^{y=x+a} xy \frac{1}{2}$$

$= 0$

• Como $E(XY) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X, Y \text{ son ortogonales}}$

$\rightarrow C(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

• Calculamos f d.p marginales ya calcular $E(X)$ y $E(Y)$.

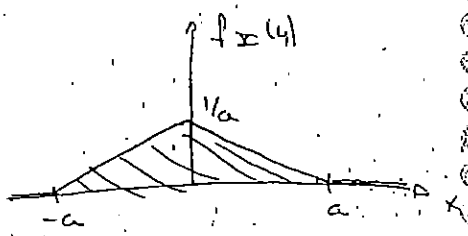
$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy =$

$\int_{y=x-a}^{-x+a} \frac{1}{2a^2}\,dy = \frac{1}{2a^2}\left[y\right]_{x-a}^{-x+a} = \frac{1}{2a^2}\left(-x+a-(x-a)\right)$

$= \frac{1}{2a^2}(-2x+2a) = \frac{1}{a^2}(a-x)$ si $0 < x < a$

• $\int_{y=-x-a}^{y=x+a} \frac{1}{2a^2}\,dy = \frac{1}{2a^2}\left[y\right]_{-x-a}^{x+a} = \frac{1}{a^2}(a+x)$ si $-a < x < 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a-x) & \text{si } 0<x<a \\ \frac{1}{a^2}(a+x) & \text{si } -a<x<0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = 0$$
↳ A ojo

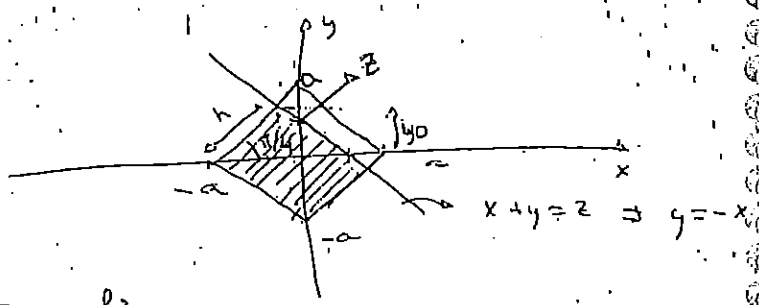
Por simetría: $E(Y) = E(X) = 0$

$\Rightarrow C(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X, Y \text{ son incorreladas}}$

(b) $F_Z(z)$ → calcula la función de distribución

$$P(Z \le z) = P(X + Y \le z)$$

$z = x + y$



$x + y = z \Rightarrow y = -x + z$

Como X, Y son uniformes $\frac{F_{XY}}{1} = \frac{R_Z}{R_{XY}}$

$$P(X + Y \le z) = \frac{R_Z}{R_{XY}} = \frac{\bigcirc}{2a^2}$$ ¿? Lo calculamos

Área $R_Z = \sqrt{2}a \cdot h$

$$y_0 = h \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \; ; \; h = \frac{y_0}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = \frac{y_0}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2y_0}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y - x = a \\ x + y = z \end{array}\right\} \Rightarrow y_0 = \frac{a+z}{2} \longrightarrow h = \frac{a+z}{\sqrt{2}}$$

Entonces. $R_Z = \cancel{\sqrt{2}}\, a \cdot \frac{a+z}{\cancel{\sqrt{2}}} = \boxed{(a+z)a}$

$$P(X + Y \le z) = \frac{a(z+a)}{2a^2} = \frac{(z+a)}{2a}$$

$$\boxed{F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < -a \\ \frac{z+a}{2a} & -a \le z < a \\ 1 & z \ge a \end{cases}}$$

→ Esto es válido ya que $F_Z(z) = \frac{z+a}{2a}$ si z está entre $-a$ y a, ya que la recta está dentro del cuadrado.

27/11/10

Febrero 1996
Ejercicio P1

Un anuncio luminoso está formado por 7500 bombillas blancas y 2500 rojas. Se sabe que a lo largo de un día, una bombilla blanca tiene una probabilidad de fundirse de 0'02, con independencia de su posición. Para las bombillas rojas, esta probabilidad es de 0'04. Se decide mantener un total de 200 bombillas de repuesto para reponer las bombillas fundidas al terminar el día. Determine la probabilidad de que el repuesto sea insuficiente en los dos siguientes supuestos:

a) La proporción de bombillas blancas y rojas de repuesto es la misma que en el panel.
b) La proporción de bombillas blancas y rojas de repuesto es la misma que cabría esperar en el conjunto de bombillas fundidas.

10 000 bombillas $\begin{cases} 7500 \text{ blancas} & 75\% \\ 2500 \text{ rojas} & 25\% \end{cases}$ 200 bombillas repuesto $\begin{cases} 150 \text{ blancas} \\ 50 \text{ rojas} \end{cases}$

→ N_b = "nº de bombillas blancas fundidas".

· observamos como se distribuye la v.a. Se cumplen las 3 propiedades de la binomial.

$N_b \sim B(\overset{n}{7500}, \overset{p}{0{,}02})$.

→ N_r = "nº de bombillas rojas fundidas".

Tb se distribuye como una binomial

$N_r \sim B(2500, 0{,}04)$

Pero como $np \geq 5$ ⇒ Hacemos con la normal.

$N_b \sim B(7500, 0'02) \xrightarrow[np \geq 5]{} N_b \sim N(\overset{np}{150}, \overset{\sqrt{npq}}{11'47})$

$N_r \sim B(2500, 0'04) \longrightarrow N_r \sim N(100, \sqrt{96})$

Lo aproximo x la normal.

· $P((N_b > 150) \cup (N_r > 50))$ ≡ P nb. de que el repuesto sea insuficiente.

$P(N_b > 150) + P(N_r > 50) - P((N_b > 150) \cap (N_r > 50)) \underset{\text{independientes}}{=}$

$= P(N_b > 150) + P(N_r > 50) - P(N_b > 150) \cdot P(N_r > 50) = 0{,}5 + 1 - 0{,}5 \cdot 1 = 1'5.$

→ Calculamos las probabilidades

· $P(N_b > 150) = 1 - P(N_b < 150) = 1 - P(\sqrt{147}\, Z + 150 < 150) =$

Tipificamos.

$N_b = \sqrt{147}\, Z + 150$

$= 1 - P\left(Z < \frac{150 - 150}{\sqrt{147}}\right) = 1 - P(Z < 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$\therefore P(N_r > 50) = 1 - P(N_r < 50) = 1 - P\left(\sqrt{90}\,Z + 100 < 50\right) = 1 - P\left(Z < \frac{\quad}{\sqrt{90}}\right.$

$N_r = \sqrt{90}\,Z + 100$

$= 1 - P(Z < -5{,}4) = 1 - 0 = 1$

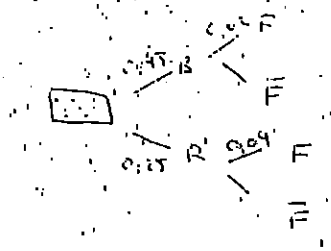
no hay probabilidad ⟹ a partir 3'5 y auto

→ Siempre me quedo sin repuesto.

(b) B ≡ bombilla blanca

R = " roja

F = se funde bombilla



$$P(B/F) = \frac{P(B)\cdot P(F/B)}{P(B)\cdot P(F/B) + P(R)\cdot P(F/R)} = \frac{0{,}02\cdot 0{,}75}{0{,}02\cdot 0{,}75 + 0{,}04\cdot 0{,}25} = 0{,}6$$

200 bombillas de repuesto $\begin{cases} 200\cdot 0'6 = 120 \text{ blancas} \\ 200\cdot 0{,}4 = 80 \text{ rojas} \end{cases}$

$P\left((N_b > 120) \cup (N_r > 80)\right) = P(N_b > 120) + P(N_r > 80) - P(N_b > 120)$

$= 0{,}9932 + 0{,}9793 - 0{,}9932\cdot 0{,}9793 = 0{,}9999$

X 12/12/03

Septiembre 00
Ejercicio T1

Sean X e Y dos v.a. cualesquiera, se definen las nuevas v.a.

$$Z = X + Y$$
$$W = X - Y$$

Demuestre:

a) $P(ZW < 0) = P(|X| < |Y|)$.

b) Si $E[X^2] = E[Y^2]$, Z y W son ortogonales.

c) Si X e Y tienen la misma media y varianza, Z y W son incorreladas.

X d) Demuestre además que, para una v.a. X arbitraria, la constante m que minimiza $E[|X - m|]$ es la mediana, o sea que $F_X(m) = 1/2$.

a) $P(ZW < 0) = P(|X| < |Y|)$

$P((X+Y)(X-Y) < 0) = P((X^2 - Y^2) < 0) \Rightarrow$

$P(X^2 < Y^2) = P(|X| < |Y|)$

Lo xq al quitar la cuadrada, la x puede ser positiva o neg

b) $E[X^2] = E[Y^2]$, Z, y W son ortogonales.

Ya q. sean ortogonales $E(ZW) = 0$

$E(ZW) = E((X+Y)\cdot(X-Y)) = E((X^2 - Y^2)) = E(X^2) - E(Y^2) \Rightarrow$ Hipótesis.

$E(ZW) = 0$ // si se cumple.

c) X e Y tienen la misma media y varianza $\Rightarrow$ Z, W. son incorreladas

$E(X) = E(Y)$ y $V(X) = V(Y) \Rightarrow$ Z, W son incorreladas

$Cov_{ZW} = 0$;

$Cov_{ZW} = E(ZW) - E(Z)E(W) \underset{(b)}{=} E(X^2) - E(Y^2) - E(Z)E(W) =$

$= E(X^2) - E(Y^2) - [(E(X) + E(Y)) \cdot (E(X) - E(Y))] =$

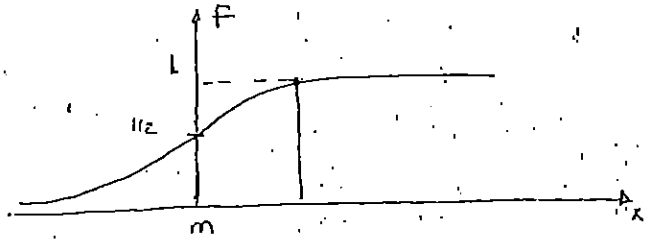
$= E(X^2) - E(Y^2) - E(X)^2 + \cancel{E(X)E(Y)} - \cancel{E(Y)E(X)} + E(Y)^2 =$

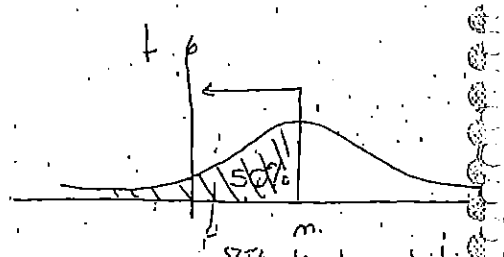
$= E(X^2) - E(Y^2) - E(X)^2 + E(Y)^2 = V(X) - V(Y) \underset{\text{dato}}{=} 0$

$V(X) = V(Y)$

Como se ve, son incorreladas.

(d) NOTA: Llamamos mediana al valor que hace $F_X(m) = \frac{1}{2}$. No tiene x qué coincidir con la med





50% de la probabi

$$E\left[|X - m|\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m| \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{m} (m-x)\, f_X(x)\,dx + \int_{m}^{\infty} (x-m)\, f_X(x)\,dx$$

$$|x-m| = \begin{cases} x - m & \text{si } x > m \\ m - x & \text{si } x < m \end{cases}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{m} m f_X(x)\,dx} - \underbrace{\int_{-\infty}^{m} x f_X(x)\,dx} + \underbrace{\int_{m}^{\infty} x f_X(x)\,dx} - \underbrace{\int_{m}^{\infty} m f_X(x)\,dx} =$$

$$= m\left[\int_{-\infty}^{m} f_X(x)\,dx - \int_{m}^{\infty} f_X(x)\,dx\right] + \left[\int_{m}^{\infty} x f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{m} x f(x)\,dx\right] =$$

$$= m\left[\int_{-\infty}^{m} f_X(x)\,dx - \left(1 - \int_{-\infty}^{m} f_X(x)\,dx\right)\right] + \underbrace{\int_{m}^{\infty} x f_X(x)\,dx} - \int_{-\infty}^{m} X f_X(x)\,dx$$

$$+ \underbrace{\int_{-\infty}^{m} x f_X(x) - \int_{-\infty}^{m} x f_X(x)}_{\text{sumo y resto}} = m\left[F_X(m) - 1 + F_X(m)\right] + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx}$$

¡No sustituir, xq es lo q queremos demostrar!

$$-2\int_{-\infty}^{m} x f_X(x)\,dx = m\left[2F_X(m) - 1\right] + E(X) - 2\int_{-\infty}^{m} x f_X(x)\,dx \rightarrow \text{Expresión q que m}$$

cte con respecto a m.

$$\downarrow E\left[|X - m|\right]$$

→ Para minimizar $0 = \frac{d}{dm} E\left[|X - m|\right] \Rightarrow m\left[\cancel{2 f_X(m)}\right] + 1 \cdot \left[2F_X(m) - 1\right] + 0$

Th fundamental del calculo: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \rightarrow F'(x) = f(x)$

$$-2m\cancel{f_X(m)} = 0 \Rightarrow 2F_X(m) - 1 = 0; \quad 2F_X(m) = 1; \quad \boxed{F_X(m) = \frac{1}{2}} \text{ c.q.d.}$$

$\Downarrow$ m es la m

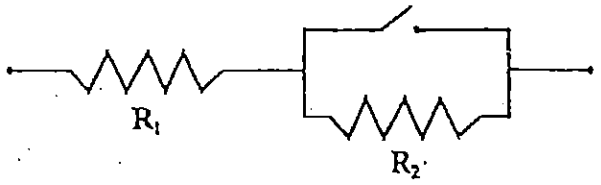
El valor de m que minimiza la expresión, es la mediana.

[illegible] 12/12/03

X

Febrero 2000
Ejercicio T1

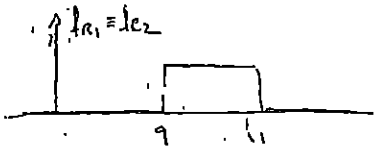
En el circuito de la figura se desconoce el estado del interruptor, de modo que la resistencia total entre extremos es: $R = R_1 + XR_2$ con R_1 y R_2 v.a.'s uniformes en (9,11) y X v.a. de Bernouilli, con $P(X=1) = p$. Suponga R_1, R_2 y X independientes.



Calcule:

a) La fdp de la v.a. R. Represéntala de forma aproximada para $p = 1/2$.

b) La media de R.

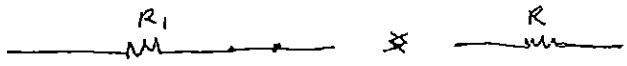


$X \sim B(1, p)$ bernouilli $P(X=1) = p$.

$P(X=1) \Rightarrow$ Interruptor abierto

$P(X=0) \Rightarrow$ " cerrado

1º) Interruptor cerrado:



$$f_R(r / X=0) \equiv \boxed{f_{R_1}(r) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 9 < r < 11 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

La resistencia total oscila entre 9 y 11 Ω.

2º) Interruptor abierto:

$R = R_1 + R_2$

$f_R(r / X=1) = ¿?$

Lo podemos resolver x 3 métodos, xq transformamos 2 variables antiguas entre una nueva

1er método:

Variable Ficticia: $R = R_1 + R_2$ (v.a. nuevas)

$W = R_1$ → variable ficticia. (v. antiguas)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial R_1} & \frac{\partial R}{\partial R_2} \\ \frac{\partial W}{\partial R_1} & \frac{\partial W}{\partial R_2} \end{vmatrix}$$

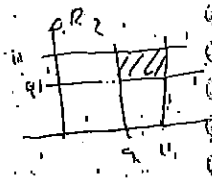
$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = |-1| = 1$$

· Resolvemos el sistema al revés: (Ponemos las antiguas en función de las nuevas).

$R_1 = W$
$R_2 = R - W$

Nos falta $f_{R_1R_2}(r_1, r_2)$ y como R_1 y R_2 son independientes

$$f_{R_1R_2}(r_1,r_2) = f_{R_1}(r_1)\cdot f_{R_2}(r_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{si } (r_1,r_2) \in R_{R_1R_2}$$



$$f_{R_1R_2}(r_1,r_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } (r_1,r_2) \in R_{R_1R_2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

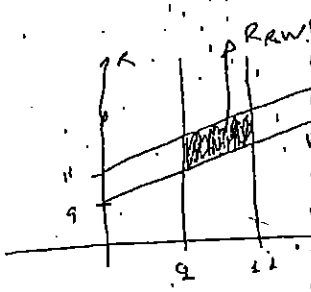
Entonces $f_{RW}(r,w) = \dfrac{f_{R_1R_2}(r,w)}{|J|} = \dfrac{1/4}{1} = 1/4$ si $(r,w) \in R_{RW}$

Calculamos R_{RW}

$9 < R_1 < 11 \Rightarrow 9 < W < 11$

$9 < R_2 < 11 \Rightarrow 9 < R - W < 11 \Rightarrow W + 9 < R < 11 + W$

$R_{RW} = \{ (r,w) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 9 < w < 11,\ w + 9 < r < w + 11 \}$



Ahora calculamos $f_R(r)$:

$$f_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{RW}(r,w)\,dw = \begin{cases} 18 < r < 20 & \displaystyle\int_{w=9}^{w=r-9} \frac{1}{4}\,dw = \frac{1}{4}(r-18) \\ 20 < r < 22 & \displaystyle\int_{w=r-11}^{w=11} \frac{1}{4}\,dw = \frac{1}{4}(-r+22) = \frac{1}{4}(22-r) \end{cases}$$

$$\boxed{f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}(r-18) & \text{si } 18 < r < 20 \\ \frac{1}{4}(22-r) & \text{si } 20 < r < 22 \end{cases}}$$

~~23/12/03~~ 12/12/03

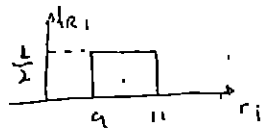
→ Cal Fb OO TL

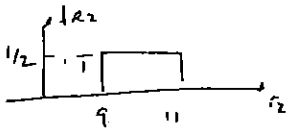
2º método

Th convolución:

$f_R(r / X=1)$

$R = R_1 + R_2 \Rightarrow f_R(r) = f_{R_1}(r_1) * f_{R_2}(r_2)$





- $r-9 < 9 \Rightarrow r < 18$ $\quad f_{R_1}(r_1) * f_{R_2}(r_2) = 0$

- $9 < r-9 < 11 \Rightarrow 18 < r < 20$

$$f_{R_1}(r_1) * f_{R_2}(r_2) = \int_9^{r-9} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\, d\tau = \frac{1}{4}(r-18)$$

- $9 < r-11 < 11 \Rightarrow 20 < r < 22$

$$f_{R_1}(r_1) * f_{R_2}(r_2) = \int_{r-11}^{11} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\, d\tau = \frac{1}{4}(22-r)$$

- $r-11 > 11 \Rightarrow r > 22$

$$f_{R_1}(r_1) * f_{R_2}(r_2) = 0$$

$f_R(r / X=1)$

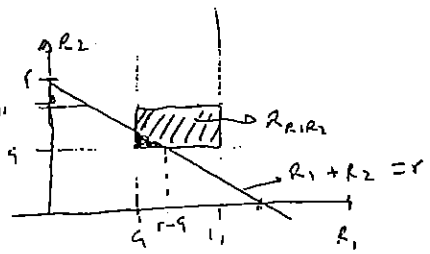
$$\boxed{f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}(r-18) & \text{si } 18 < r < 20 \\ \frac{1}{4}(22-r) & \text{si } 20 < r < 22 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

mismo resultado.

3º Método: Tener procedimiento xa calcular $f_R(r / X=1)$

Calculamos $F_R(r)$ condicionado $X=1$.

$$F_R(r) = P(R < r) = P(R_1 + R_2 < r)$$

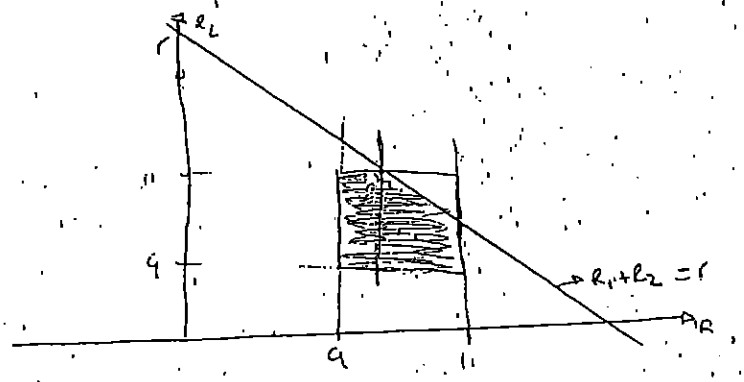


$$F_R(r) = P(R_1+R_2<r) = \int_{R_1=9}^{R_1=r-9}\int_{R_2=9}^{R_2=-R_1+r} \frac{1}{4}\, dR_2\, dR_1 = \frac{r^2-36r+324}{8}$$

si $18<r<20$

Que es cuando la recta no corta a la diagonal principal

→ Si la recta se sitúa por encima de la diagonal sume esto



$$F_R(r) = P(R<r) = P(R_1+R_2<r) = \int_{R_1=9}^{R_1=r-11}\int_{R_2=9}^{R_2=11} \frac{1}{4}\, dR_2\, dR_1 + \int_{R_1=r-11}^{R_1=11}\int_{R_2=9}^{R_2=r-R_1} \frac{1}{4}\, dR_2$$

$$= \frac{476-r^2+44r}{8} \quad \text{si } 20<r<22$$

$$F_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r<18 \\ \dfrac{r^2-36r+324}{8} & \text{si } 18<r<20 \\ \dfrac{476-r^2+44r}{8} & \text{si } 20<r<22 \\ 1 & \text{si } r>22 \end{cases} \qquad f_R(r) = \frac{dF_R(r)}{dr} = \begin{cases} \frac{1}{4}(r-18) & \text{si } 18 \\ \frac{1}{4}(22-r) & \text{si } 20 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Por lo 3 métodos llegamos al mismo resultado, que es calcular $f_R(r/X=1)$
- Ahora calculamos $f_R(r)$ total.

Resumiendo:

$$\left[f_R(r/X=0) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 9<r<11 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \right] \qquad \left[f_R(r/X=1) = \begin{cases} \frac{1}{4}(r-18) & \text{si } 18<r<20 \\ \frac{1}{4}(22-r) & \text{si } 20<r<22 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \right]$$

Aplicamos teorema de la prob. total:

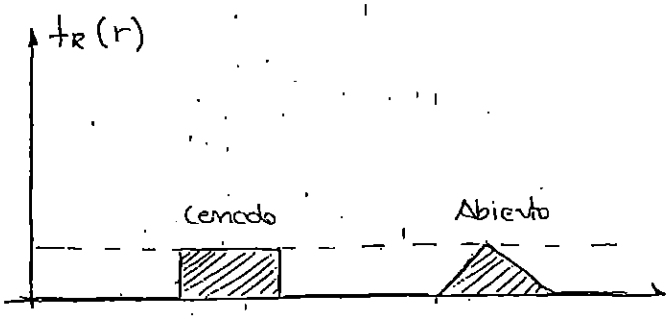
$$f_R(r) = P(X=0)\cdot f_R(r/X=0) + P(X=1)\, f_R(r/X=1) = (1-p)\cdot f_R(r/X=0) + p\, f_R(r/X=1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_R(r/X=0) + f_R(r/X=1) \right]$$

→ cont Fb 00 T1 12/12/03

$p = 1/2$

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 9 < r < 11 \\ \frac{1}{8}(r-18) & \text{si } 18 < r < 20 \\ \frac{1}{8}(22-r) & \text{si } 20 < r < 22 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



b) $E(R) = E(R_1 + X R_2) = E(R_1) + E(X R_2) \neq E(R_1) + E(X)E(R_2) = 10 + p \cdot 10 = 10(1+p)$

$R_1 \to U(9,11)$, $X \to B(1,p)$, $R_2 \to U(9,11)$

$E(X) = n \cdot p = 1 - p = p$

15: Agosto: 2006

Febrero 96
Ejercicio 3

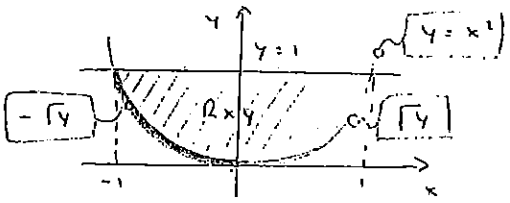
Dada la v.a. bidimensional (X, Y) con f.d.p.: $f_{XY}(x, y) = k\left(x^2 + y^2\right),\ x^2 < y < 1$.

a) ¿Las v.a 's X e Y son independientes ?

b) ¿Están incorreladas?

c) Calcule $P\left(Y \leq 0'5 / X = 0\right)$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y^2) & x^2 < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{1} k(x^2+y^2)\,dy = k\left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1} =$$

$$= k\left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) = \boxed{f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{3}(3x^2+1-3x^4-x^6) & -1<x<1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} k(x^2+y^2)\,dx = k\left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{k}{3}\left(y^{3/2} + 3y^{5/2} + y^{3/2} + 3y^{5/2}\right) = \frac{2k}{3}\left(y^{3/2} + 3y^{5/2}\right) \quad y \in (0,1)$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2k}{3}\left(y^{3/2} + 3y^{5/2}\right) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

a) X e Y no son independientes $f_X(x)\,f_Y(y) \neq f_{XY}(x,y)$

El recinto $R_{XY}(x,y)$ no es un rectángulo ni un cuadrado.

b) $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{k}{3} \underbrace{(x + 3x^3 - 3x^5 - x^7)}_{\text{IMPAR}}\, dx = 0$

No hace falta calcular $E(Y)$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot k(x^2+y^2)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} k \cdot (x^3 y + y^3 x)\, dy\, dx = \dots = 0.$$

Por tanto $C_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X \text{ e } Y \text{ son incorreladas}}$

c) $P(Y \le 0{,}5 / X = 0)$

$$f_Y(Y/X=x_0) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{K(x_0^2+y^2)}{\frac{K}{3}(1+3x_0^2-3x_0^4-x_0^6)} = \frac{3(x_0^2+y^2)}{1+3x_0^2-3x_0^4-x_0^6}$$

si $y \in (x_0^2, 1)$

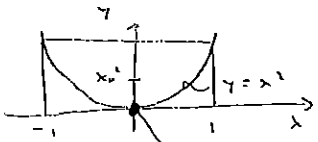
¡¡OJO!!

Particularizando $x_0 = 0$.

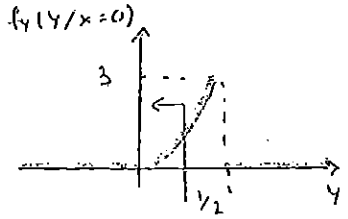
$f_Y(Y/x_0=0) = 3y^2$. si $y \in (0,1)$

x_0^2

0^2



$$\boxed{f_Y(Y/x=0) = \begin{cases} 3y^2 & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}}$$



es respecto a y y va de 0 a 0,5 $Y \le 0{,}5$.

$$P(Y \le 0{,}5 / X=0) = \int_{-\infty}^{1/2} f_Y(Y/x=0)\, dy = \int_0^{1/2} 3y^2\, dy = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{P(Y \le 0{,}5 / X = 0) = \frac{1}{8}}$$

14/12/03 (23/1/04)

Febrero 2000
Teoría T2

(T. discreto)

Sean los procesos estocásticos discretos en el tiempo:

$$X[n] = A[n]\cos(\Omega_0 n + \Phi)$$
$$Y[n] = A[n]\,\mathrm{sen}(\Omega_0 n + \Phi)$$

siendo $\Omega_0 > 0$, Φ una v.a. uniforme en $(-\pi,\pi)$ y $A[n]$ un p.e. independiente de Φ y estacionario en sentido amplio, con autocorrelación $R_A[m]$ y fdp de primer orden:

$$f_A(a) = ae^{-a^2/2} \quad (a > 0)$$

Calcule:

a) Las autocorrelaciones de $X[n]$ e $Y[n]$.

b) Las fdp's de 1er orden de $X[n]$ e $Y[n]$. (Sugerencia: defina $X \equiv X[n]$ e $Y \equiv Y[n]$ y calcule previamente la fdp conjunta de X e Y).

$\Omega_0 > 0$ $\quad \underset{\text{v.a.}}{\phi} \sim U(-\pi,\pi)$; $A[n]$ pe $\begin{cases} R_A[m] \\ f_A(a) = ae^{-a^2/2} \quad (a>0) \end{cases}$

a) Las autocorrelaciones de $X[n]$, $Y[n]$

Φ es la v.a. que define los sucesos. Nos tienen que definir siempre una v.a., en los pro

Lo normal es que un proceso estocástico tenga n y una v.a. Pero en este caso hay otro p.e. A[

$$R_X[n+m,n] = E[X[n+m]\cdot X[n]] = E[A[n+m]\cos(\Omega_0(n+m)+\Phi)\cdot A[n]\,\mathrm{sen}(\Omega_0$$

$$\underset{A \text{ y } \phi \text{ independientes}}{=} E[A[n+m]\cdot A[n]]\cdot E[\cos(\Omega_0(n+m)+\phi)\cdot\cos(\Omega_0 n+\phi)] =$$

$E(XY) = E(X)E(Y)$ si X,Y son independientes.

$$\underset{\text{definición}}{=} R_A[m]\cdot E\Big[\tfrac{1}{2}\Big(\cos(\underbrace{\cancel{\Omega_0 n} + \Omega_0 m + \cancel{\phi} - \cancel{\Omega_0 n} - \cancel{\phi}}_{A-B}) + \cos(\underbrace{\Omega_0 n + \Omega_0 m + \phi + \phi}_{A+B})\Big)\Big] = R_A[m]\,\tfrac{1}{2}\,E[\cos(\Omega_0 m) +$$

$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$

$R_A[m] = E[A[n+m]\cdot A[n]]$

$$+ \cos((2n+m)\Omega_0 + 2\phi)] \underset{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}{=} R_A[m]\,\tfrac{1}{2}\{E[\cos(\Omega_0 m)] + E[\cos((2n+m)\Omega_0$$

$$\underset{(*)}{=} R_A[m]\cdot\tfrac{1}{2}\{\cos(\Omega_0 m) + 0\} = \frac{R_A[m]}{2}\cos(\Omega_0 m)$$

Vamos a calcular las esperanzas.

$$E[\underbrace{\cos((2n+m)\Omega_0 + 2\phi)}_{g(\phi)}] = \int_{-\pi}^{\pi}\cos((2n+m)\Omega_0 + 2\phi)\cdot\frac{1}{2\pi}\,d\phi$$

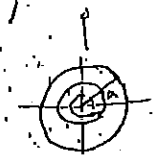
$\phi \sim U(-\pi,\pi) \Rightarrow f_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad -\pi < \phi < \pi$

$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos\left((2n+m)\Omega_0 + 2\phi\right) d\phi = \frac{1}{4\pi}\left[\operatorname{sen}\left((2n+m)\Omega_0 + 2\phi\right)\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\operatorname{sen}\left(\underbrace{(2n+m)\Omega_0}_{\alpha} + 2\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\underbrace{(2n+m)\Omega_0}_{\alpha} - 2\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) - \operatorname{sen}(\alpha - 2\pi)\right) = \frac{1}{4\pi}(0) = 0$$



es el mismo ángulo

• $E[\cos(\Omega_0 m)] = \cos(\Omega_0 m)$ porque no depende de la v.a. ϕ

→ Sustituimos en la expresión anterior (*)

• $R_X[n+m, n] = \frac{R_A[m]}{2} \cos(\Omega_0 m)$.

→ Ahora calculamos la Y

$$R_Y[n+m, n] = E[Y[n+m] \cdot Y[n]] = E\left[A[n+m] \cdot \operatorname{sen}(\Omega_0(n+m) + \phi) \cdot A[n] \operatorname{sen}(\Omega_0 n + \phi)\right] = E\left[A[n+m] \cdot A[n]\right] \cdot E\left[\operatorname{sen}\underbrace{(\Omega_0(n+m)+\phi)}_{A} \cdot \operatorname{sen}\underbrace{(\Omega_0 n}_{B}\right.$$

$$= \ldots = R_A[m] \frac{1}{2} E\left[\cos(\Omega_0 m) - \cos((2n+m)\Omega_0 + 2\phi)\right] =$$ Haciendo lo m

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\cos(A-B) - \cos(A+B).$$

$$\ldots = \boxed{\frac{R_A[m]}{2} \cdot \cos(\Omega_0 m)}$$ Sale mismo resultado

b) T23/01/04

fdp's de $X[n]$ e $Y[n]$

$X[n] \equiv X$ → omitimos las $[n]$ ya que no estaban, no siguen estando implícitamente

$Y[n] \equiv Y$

$A[n] \equiv A$

$\Omega_0 n \equiv \theta$

$$\left.\begin{array}{l} X = A\cos(\theta + \phi) \\ Y = A\operatorname{sen}(\theta + \phi) \end{array}\right\}$$

Es como si fuera una transformación donde X, Y son las v.a. nuevas y A, ϕ las v.a. antiguas

23/01/04 Cont Fb 2000 T2

$$x^2+y^2 = A^2\left[\cos^2(\theta+\phi) + \operatorname{sen}^2(\theta+\phi)\right] \rightarrow A = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \theta$$

→ Eso transformación, al revés:

$$A = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \theta$$

· Aplicamos fórmula de transformaciones:

$$J(a,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta+\phi) & -a\operatorname{sen}(\theta+\phi) \\ \operatorname{sen}(\theta+\phi) & a\cos(\theta+\phi) \end{vmatrix} =$$

$$= a\cos^2(\theta+\phi) + a\operatorname{sen}^2(\theta+\phi) = \underline{\underline{a}} > 0.$$

· $$f_{XY}(x,y) = \frac{f_{A\phi}(a,\phi)}{|J(a,\phi)|} =$$

· ¿$f_{A\phi}(a,\phi)$? Como son independientes:

$$f_{A\phi} = f_A(a)\cdot f_\phi(\phi) \overset{\text{Zato}}{=} a\,e^{-\frac{a^2}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{a}{2\pi}e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$\phi \sim U[-\pi,\pi] \Rightarrow f_\phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi<\phi<\pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_A(a) = a\,e^{-\frac{a^2}{2}}$$

Sustituyendo.

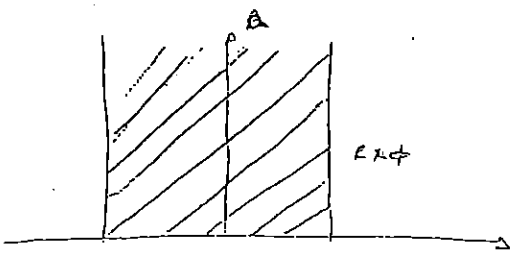
$$f_{XY}(x,y) = \frac{\frac{a}{2\pi}e^{-\frac{a^2}{2}}}{a} = \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{2\pi} \underset{a=\sqrt{x^2+y^2}}{=} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi} \quad \text{si } (x,y)\in R_{XY}.$$

¿R_{XY}?

Luego antiguo. $R_{A\phi}$ ⇒

$0<a<\infty$

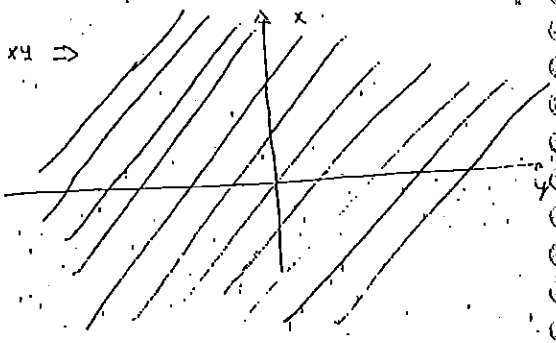
$-\pi<\phi<\pi$ ⇒



$\rightarrow \quad x = \underset{(0,\infty)}{a} \cos(\underset{(-1,1)}{\theta} + \phi) \Rightarrow x \in (-\infty, \infty)$

$y = a \operatorname{sen}(\theta + \phi) \Rightarrow y \in (-\infty, \infty)$

$R_{xy} \Rightarrow$



- $R_{xy} \equiv$ Todo el plano

- Por tanto, $f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \forall (x,y)$

- Calculamos las fdp's marginales:

$$f_X(x,n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}\,dy = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy =$$

Depende de n, xq el p.e depende de n.

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}_{N(0,1)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{2\pi} \cdot \underset{F(\infty)}{1} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{2\pi}$$

Es L, xq estamos integrando de $-\infty, \infty$.

Nota: $Y \sim N(0,1)$

fdp: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}}\,du \Rightarrow$

$$\rightarrow f_Y(x,n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}\,dy = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-y^2}{2}} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \dots$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-y^2/2} \sqrt{2\pi}$$

$\rightarrow$ Solución:

$$\left[\begin{array}{ll} f_X(x,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} & -\infty < x < \infty \\ f_Y(y,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} & -\infty < y < \infty \end{array}\right]$$

19/12/03

Junio 1997
Ejercicio 1

Sea el proceso discreto en el tiempo $X[n]$, de media nula y estacionario en sentido amplio, con autocorrelación $R_X[m] = a^{|m|}$ $(0 < |a| < 1)$. Se hace pasar por $X[n]$, por un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n] = \delta[n] - b\delta[n-1]$, obteniéndose como salida un proceso $Y[n]$.

a) Calcule la autocorrelación de $Y[n]$, $R_Y[m]$.

b) Calcule el valor de b que minimiza la varianza de $Y[n]$.

c) Para el valor de b del apartado anterior, calcule la densidad espectral de potencia de $Y[n]$, $S_Y(\Omega)$

$E(X[n]) = 0 \ \forall n$

(a) $Y[n] = h[n] * X[n] = (\delta[n] - b\delta[n-1]) * X[n] =$

$= \delta[n] * X[n] - b\delta[n-1] * X[n] = X[n] - b X[n-1]$

distribu. *

$\delta[n-n_0] * x[n] = x[n-n_0]$

$Y[n] = X[n] - b X[n-1]$

$R_Y[n+m, n] = R_Y[n, n+m] = R_Y[m] = E\{Y[n] Y[n+m]\} =$

$= E\{(X[n] - b X[n-1]) \cdot (X[n+m] - b X[n+m-1])\} =$

$= E\{X[n] X[n+m] - b X[n] \cdot X[n+m-1] - b X[n-1] X[n+m] + b^2 X[n-1] X[n$

$= E\{X[n] X[n+m]\} - b E\{X[n] \cdot X[n+m-1]\} - b E\{X[n-1] X[n+m]\} + b^2 E\{X[n-1] X[$

$R_X[m] - b R_X[m-1] - b R_X[m+1] + b^2 R_X[m] =$

$= a^{|m|} - b a^{|m-1|} - b a^{|m+1|} + b^2 a^{|m|} = (1+b^2) a^{|m|} - b(a^{|m-1|} + a^{|m+1|}$

(b) $V(Y[n]) = E(Y^2[n]) - E(Y[n])^2 =$ (*) Sustituimos después

Se calcula igual

$E(X[n]) = 0 \ \forall n$

$E[Y] = E(X[n] - b X[n-1]) = E(X[n]) - b E(X[n-1]) = 0 - b \cdot 0 =$

$E[Y^2[n]] = E[(X[n] - b X[n-1])^2] = E[X^2[n] + b^2 X^2[n-1] - 2b X[n] X[$

$= R_X[0] + b^2 R_X[0] - 2b R_X[-1] = a^{|0|} + b^2 a^{|0|} - 2b a^{|-1|} = \boxed{1 + b^2 - 2ab}$

Haciendo cuentas

Podíamos ir por otro camino:

$E(Y^2[n]) = E[Y[n] \cdot Y[n]] = E[Y[n] \cdot Y[n+\overset{m}{0}]] = R_Y[\underset{m}{0}] = (1+b^2) a^{|0|} - b(a^{|-1|} + a^{|}$

$= 1 + b^2 - ba - ba = \boxed{1 + b^2 - 2ba}$

Llegamos al mismo resultado.

Ahora calculamos la varianza

(+) $V(y[n]) = 1 + b^2 - 2ab - 0^2 = \boxed{1 + b^2 - 2ab}$

→ Minimizamos:

$$\frac{\partial V(y[n])}{\partial b} = 0 + 2b - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{b = a}$$

Comprobamos: $\frac{\partial^2 V(y[n])}{\partial b^2} = 2 > 0 \Rightarrow$ Mínimo (como no decían)

→ (c) Para $b = a \Rightarrow$

$$R_y[m] = (1+a^2)a^{|m|} - a\left(a^{|m+1|} + a^{|m-1|}\right) \overset{TF}{\longleftrightarrow} S_y(\Omega) =$$

Pero esta transformada es complicada y no tiene TF directa.

Intentamos simplificar los cálculos:

por ser $m \in \mathbb{Z}$

• $m > 0$: $R_y[m] = (1+a^2)a^m - a\left(a^{m+1} + a^{m-1}\right) = (1+a^2)a^m - a^{m+1}$

$- a^m = \cancel{a^m} + \cancel{a^{m+2}} - \cancel{a^{m+2}} - \cancel{a^m} = 0$

• $m < 0$: $R_y[m] = (1+a^2)a^{-m} - a\left(a^{-(m+1)} + a^{-(m-1)}\right) =$

$= a^{-m} + a^{2-m} - a^{-m} - a^{-m+2} = 0$

• $m = 0$: $R_y[m] = (1+a^2)a^0 - a\left(a^{+1} + a^{+1}\right) = \cancel{1} + a^2 - a^2 - a^2$

$= 1 - a^2$

Entonces: $S_y(\Omega) = \overset{TF}{\overset{\text{¿?}}{}}\left\{(1-a^2)\delta[\omega]\right\} = 1 - a^2$

$\delta \overset{TF}{\longleftrightarrow} 1$

19/12/03

Septiembre 2000
Problema P2

(t. continuo)

Sea el proceso $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t)$, con $\omega_0 > 0$, A una v.a. uniforme en (-1,1), θ una v.a. uniforme en $(\pi, 2\pi)$ y $N(t)$ un proceso estocástico de media nula y autocorrelación $R_N(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$. Suponga A, $N(t)$ y θ independientes.

a) Calcule la media condicionada $E[X(t) \mid A = a]$, la media $\eta_X(t)$ y la autocorrelación $R_X(t_1, t_2)$. ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido amplio?

Se hace pasar ahora $X(t)$ por un sistema lineal e invariante de respuesta en frecuencia $H(\omega) = 1/(1 + j\omega)$, obteniéndose a su salida un nuevo proceso $Y(t)$. Calcule:

b) La densidad espectral de potencia $Y(t)$.

c) La media y autocorrelación de $Y(t)$.

$X(t) = X(\omega, t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t)$ $\quad \omega_0 > 0$ $\quad$ ruido. $\forall t$

$A \sim U(-1,1)$ $\quad f_A(a) = \frac{1}{2}$ $\quad -1 < a < 1$ $\quad N(t)$ pe $\begin{cases} E[N(t)] = 0 \\ R_N(\tau) = \sigma^2\delta(\tau) \end{cases}$

$\theta \sim U[\pi, 2\pi]$. $f_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi}$ $\quad \pi < \theta < 2\pi$

A, θ $N(t)$ independiente.

no usamos definición de esperanza condicionado. Aplicamos propiedad condici y quitamos la a

a) $E[X(t)/A=a] = E[A\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t)/A=a] =$

$= E[a\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t)/A=a] \underset{p}{=} E[a\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t)]$ → la condi es igual la sin co

θ y $N(t)$ son indep. de A

$E[X+Y] = E(X) + E(Y)$

Entonces:

$E[X(t)/A=a] = E[a\cos(\omega_0 t + \theta)] + E[N(t)] = a\,E[\overbrace{\cos(\omega_0 t + \theta)}^{g(\theta)}]$ p v.a.

$E(\theta) = \frac{3\pi}{2}$ no usa pl lei $E(\theta)$

$= a\int_\pi^{2\pi} g(\theta)\cdot f_\theta(\theta)\,d\theta = a\int_\pi^{2\pi}\cos(\omega_0 t + \theta)\frac{1}{\pi}\,d\theta =$

$= \frac{a}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\cos(\omega_0 t + \theta)\,d\theta = \frac{a}{\pi}\Big[\operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta)\Big]_{\pi=\theta}^{2\pi} = \frac{a}{\pi}\big(\operatorname{sen}(\omega_0 t + 2\pi) -$

$- \operatorname{sen}(\omega_0 t + \pi)\big) \underset{p}{=} \frac{a}{\pi}\big(\operatorname{sen}(\omega_0 t) - \operatorname{sen}(\omega_0 t + \pi)\big) \underset{p}{=} \frac{a}{\pi}\big(\operatorname{sen}(\omega_0 t) + \operatorname{sen}$

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi)$ $\quad \operatorname{sen}(\alpha + \pi) = -\operatorname{sen}\alpha$

$= \boxed{\frac{2a}{\pi}\operatorname{sen}(\omega_0 t)}$

$$E[X(t)] = \eta_X(t) = E[A\cos(\omega_0 t+\theta) + N(t)] = E[A\cos(\omega_0 t+\theta)] + \underbrace{E[N(t)]}_{0\ (\text{DATO})} =$$

$$\underset{\text{indep de } \theta,\ \text{son independientes}}{=} E[A]\cdot E[\cos(\omega_0 t+\theta)] = 0$$

• Autocorrelación:

Nota:	
disc.	cont.
n	t
m	τ

$$R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau) = E[X(t+\tau)\cdot X(t)] =$$

$$= E\{[A\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta) + N(t+\tau)]\cdot[A\cos(\omega_0 t+\theta) + N(t)]\}$$

$$= E\{A^2\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cdot\cos(\omega_0 t+\theta) + A\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cdot N(t) +$$

$$+ N(t+\tau)A\cos(\omega_0 t+\theta) + N(t+\tau)\cdot N(t)\} =$$ θ, A y N(t) son independientes

$$= E[A^2]\cdot E[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cdot\cos(\omega_0 t+\theta)] + E[A]\cdot E[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)]$$

$$+ \underbrace{E[N(t+\tau)]}_{0}E[A]\cdot E[\cos(\omega_0 t+\theta)] + E[N(t+\tau)\cdot N(t)] =$$

↳ no se pueden separar, ya no sabemos si son independientes

$$= E[A^2]\cdot E[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cdot\cos(\omega_0 t+\theta)] + R_N(\tau) =$$

$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos$

$$= E[A^2]\cdot\frac{1}{2}E\Big[\Big(\cos(\underbrace{\cancel{\omega_0 t} + \omega_0\tau + \cancel{\theta} - \cancel{\omega_0 t} - \cancel{\theta}}_{A-B}) + \cos(\underbrace{\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta + \omega_0 t + \theta}_{A+B})\Big)\Big] + R_N(\tau)$$

• Calculamos las esperanzas:

$$\cdot\ E(A) = \int_{-\infty}^{\infty} a\, f_A(a)\,da = 0$$

$$\cdot\ E(A^2) = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f_A(a)\,da = \int_{-1}^{1} a^2\cdot\frac{1}{2}\,da = \int_0^1 a^2\,da = \left[\frac{a^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ //$$

→ sustituimos hasta ahora:

$$\frac{1}{6}E[\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t + 2\theta + \omega_0\tau)] + \sigma^2 f(\tau) =$$

$$= \frac{1}{6}(\cos\omega_0\tau + 0) + \sigma^2 f(\tau) = \boxed{\frac{1}{6}\cos(\omega_0\tau) + \sigma^2 f(\tau)}$$

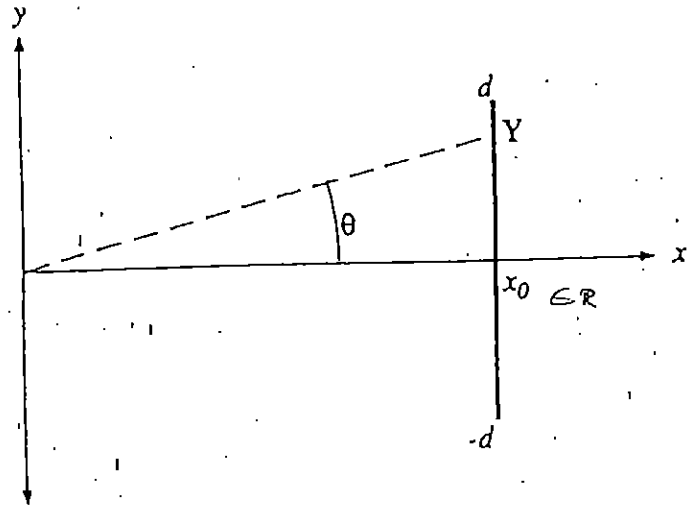
NOTA: $E[\cos(2\omega_0 t + 2\theta + \omega_0\tau)] = 0$. (como hemos hecho en Fb 00 (T2))

9/1/04

Febrero 1997
Ejercicio T2

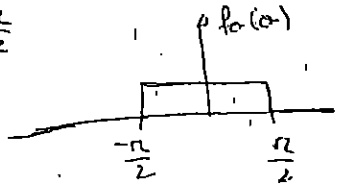
Tema 2

Considere una fuente radioactiva situada en el origen de coordenadas que emite partículas con ángulos de salida θ aleatorios y uniformemente distribuidos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Se sitúa una pantalla perfectamente absorbente a distancia x_0 de la fuente según el diagrama adjunto:



a) Determine la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria Y: coordenada y de una partícula a su paso por $x = x_0$.
b) Calcule la semianchura de la pantalla d para que ésta elimine el 50% de las partículas f. que sobrepasarían la recta $x = x_0$ en ausencia de apantallamiento.

$\theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$



a) $Y \equiv$ "coordenada y de una partícula a su paso por $x = x_0$".

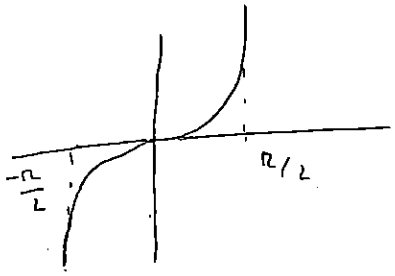
Tenemos que obtener la transformación de la v.a.

Lo primero que hacemos es calcular la relación entre Y y θ. ¿$Y = \varphi(\theta)$?

$tg\,\theta = \frac{Y}{x_0} \Rightarrow Y = x_0\, tg\,\theta$ $\quad \varphi(\theta) \equiv$ Función de transformación $= x_0\, tg$.

Usamos el Teorema de transformación v.a continua en v.a continua

Se cumple $\varphi(\theta)$ es cont en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, estrictamente creciente, existe $\varphi^{-1}(y)$ y es derivable



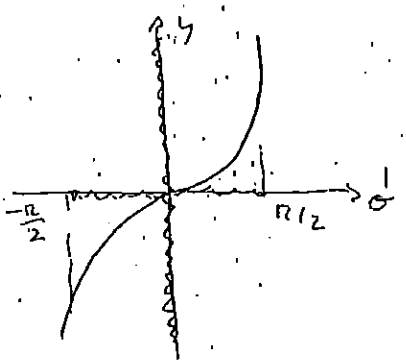
$\varphi(\theta) = x_0 \operatorname{tg}\theta \Rightarrow y = x_0 \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \frac{y}{x_0} = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow$

$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x_0} \Rightarrow \varphi^{-1}(y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_0}\right)$

$$\left(\varphi^{-1}(y)\right)' = \frac{1/x_0}{1+\left(\frac{y}{x_0}\right)^2} = \frac{1/x_0}{1+\frac{y^2}{x_0^2}} = \frac{x_0}{x_0^2+y^2}$$

$\rightarrow f_Y(y) = f_\theta\left(\varphi^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(\varphi^{-1}(y)\right)'\right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x_0}{x_0^2+y^2}$ si $Y \in R_Y$

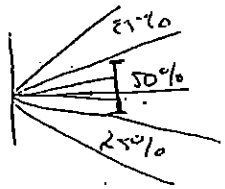
$\rightarrow$ ¿R_Y? calculamos R_Y



$R_Y = (-\infty, \infty)$

$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x_0}{x_0^2+y^2} \quad \text{si } \in R_Y = (-\infty,\infty) \ \forall y \in \mathbb{R}}$ $\rightarrow$ siempre ya $R_Y \equiv \mathbb{R}$

(b) ¿d?



Lo piden $\Leftrightarrow P(-d < Y < d) = 0{,}5$ (El 50% de partículas se dan con la pantalla).

- $P(-d < Y < d) = 0{,}5 \rightarrow$ sustituyo $Y = x_0 \operatorname{tg}\theta$

$P(-d < x_0 \operatorname{tg}\theta < d) = P\left(\frac{-d}{x_0} < \operatorname{tg}\theta < \frac{d}{x_0}\right) = P\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-d}{x_0}\right) < \theta < \operatorname{arctg}\right.$

$\underset{\uparrow}{=} P\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{x_0}\right) < \theta < \operatorname{arctg}\frac{d}{x_0}\right) = P\left(\theta < \operatorname{arctg}\frac{d}{x_0}\right) - P\left(\theta < -\operatorname{arctg}\frac{d}{x_0}\right)$

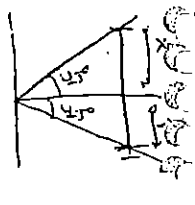
$\operatorname{arctg}\left(\frac{-d}{x_0}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{x_0}\right)$

$\underset{\uparrow}{=} \frac{\operatorname{arctg}\frac{d}{x_0} + \operatorname{arctg}\frac{d}{x_0}}{\pi} = \frac{2 \operatorname{arctg}\frac{d}{x_0}}{\pi} \underset{\uparrow}{=} 0{,}5$; $\operatorname{arctg}\frac{d}{x_0} = \frac{\pi \cdot 0{,}5}{2}$

gráficamente

dato

$\operatorname{tg}\frac{\pi \cdot 0{,}5}{2} = \frac{d}{x_0}$; $x_0 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = d$; $\boxed{x_0 = d}$



9/1/04

Septiembre 2002
Problema P2

Sea la familia de procesos estocásticos $X_n(t) = \cos[n(t+\Theta)]$ siendo Θ una v.a. uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$ y n un número mucho mayor que 0.

a) Encontrar la media y la autocorrelación de $X_n(t)$. ¿Son procesos estacionarios en sentido amplio?.

b) Calcular la correlación cruzada entre $X_n(t)$ y $X_m(t)$ con $n \neq m$. ¿Son procesos incorrelados?. ¿Son procesos ortogonales?.

c) Sea $Z(t) = X_n(t) + X_m(t)$ con $n \neq m$. ¿Son $Z(t)$ y $X_n(t)$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio?.

d) Calcular los espectros de potencia de $Z(t)$ y $X_n(t)$.

Tema 4

indica familia de procesos estocásticos.

$$X_n(\omega, t) = X_n(t) = \cos[n(t+\theta)]$$

El proceso es continuo.

$\rightarrow \theta \sim U(0, 2\pi) \quad n \gg 0$

familia de P.E $\equiv \begin{cases} X_1(t) = \cos(t+\theta) \\ X_2(t) = \cos[2(t+\theta)] \\ \vdots \end{cases}$

(a) Media y autocorrelación de $X_n(t)$.

La Media:

$$E(X_n(t)) = E\{\underbrace{\cos[n(t+\theta)]}_{g(\theta)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos[n(t+\theta)] \cdot f_\Theta(\theta)\, d\theta =$$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos[n(t+\theta)] \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[n(t+\theta)]\, d\theta = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} n \cos[n(t+\theta)]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \Big[\operatorname{sen}[n(t+\theta)] \Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi n} \left(\operatorname{sen}[n(t+2\pi)] - \operatorname{sen}[nt] \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \left(\operatorname{sen}[nt + \underbrace{2\pi n}_{\text{nº vueltas}}] - \operatorname{sen}[nt] \right) = \frac{1}{2\pi n}(0) = 0$$

$$\rightarrow E(X_n(t)) = 0$$

$\rightarrow$ Autocorrelación:

$$R_{X_n}(t_1, t_2) \equiv R_{X_n}(t, t+\tau) = R_{X_n}(\tau) = E\{X_n(t_1) X_n(t_2)\} =$$

$$= E\{\cos[\underbrace{n(t_1+\theta)}_{A}] \cdot \cos[\overbrace{n(t_2+\theta)}^{B}]\} = E\{\tfrac{1}{2}\cos[\overbrace{nt_1 + n\theta}^{A} - \overbrace{nt_2 - n\theta}^{B}] +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos[\underbrace{nt_1 + n\theta}_{A} + \underbrace{nt_2 + n\theta}_{B}]\} = \dots = \frac{1}{2} E\{\overbrace{\cos[nt_1 - nt_2]}^{\text{no depende de } \theta}\} + \frac{1}{2} E\{\cos[nt_1 + nt_2 + 2n\theta]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos[nt_1 - nt_2] + \frac{1}{2} E\{\cos[nt_1 + nt_2 + 2n\theta]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos[nt_1 - nt_2] + \frac{1}{2}$$

Resolvemos la integral:

$$E\{\cos[nt_1+nt_2+2n\theta]\} = \int_0^{2\pi} \cos[nt_1+nt_2+2n\theta]\cdot\frac{1}{2\pi}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi\cdot 2n}\cdot\int_0^{2\pi} 2n\cos[nt_1+nt_2+2n\theta]\,d\theta = \frac{1}{4\pi n}\left[\operatorname{sen}[nt_1+nt_2+2n\theta]\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi n}\left(\operatorname{sen}[\underbrace{nt_1+nt_2}_{\alpha}+4\pi n] - \operatorname{sen}[\underbrace{nt_1+nt_2}_{\alpha}]\right) = 0 \qquad n\in\mathbb{N}$$

$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha+4\pi n)$

→ Sustituyendo:

$$\frac{1}{2}\cos[nt_1-nt_2] + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}\cos[n(t_1-t_2)] = \frac{1}{2}\cos(n\tau) \qquad t_1-t_2=\tau$$

$$\boxed{R_{X_n}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(n\tau)}$$

→ ¿Son procesos estacionarios, en sentido del amplio?

Sí, ya que su media es constante y su autocorrelación sólo depende de τ, y no de t.

$E(X_n(t)) = cte$ $\qquad R_{X_n}(t_1,t_2)$ depende sólo de τ.

(b)

- Correlación cruzada entre $X_n(t)$ y $X_m(t)$ con $n\neq m$.

De esta familia, tenemos ahora dos procesos estocásticos diferentes de la familia, nos piden la correlación cruzada de ellos.

$$R_{X_nX_m}(t_1;t_2) \equiv R_{X_nX_m}(t,t+\tau) = E\{X_n(t_1)\cdot X_m(t_2)\} =$$

$$= E\{\cos\overbrace{[n(t_1+\theta)]}^{A}\cdot\cos\overbrace{[m(t_2+\theta)]}^{B}\} = E\left\{\frac{1}{2}\cos\overbrace{[nt_1+n\theta}^{A}-\overbrace{mt_2-m\theta]}^{B} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos[\overbrace{nt_1+n\theta}^{A}+\overbrace{mt_2+m\theta}^{B}]\right\} = \frac{1}{2}E\{\cos[nt_1-mt_2+n\theta-m\theta]\} +$$

$$+\frac{1}{2}E\{\cos[nt_1+mt_2+n\theta+m\theta]\}$$ → Tenemos q resolver las integrales.

- $E\{\cos[nt_1+mt_2+n\theta+m\theta]\} = E\{\cos[n(t_1+\theta)+m(t_2+\theta)]\} =$

$$= \int_0^{2\pi}\cos[n(t_1+\theta)+m(t_2+\theta)]\cdot\frac{1}{2\pi}\,d\theta = \frac{1}{2\pi(n+m)}\int_0^{2\pi}(n+m)\cos[nt_1+mt_2+\theta(n+m)]$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+m)}\left[\operatorname{sen}[nt_1+mt_2+\theta(n+m)]\right]_0^{2\pi} =$$

Cont Sep 02 Problema P2 (9/1/04)

$n, m \in \mathbb{N}$

$$\rightarrow = \frac{1}{2\pi(n+m)} \left(\operatorname{sen}\left[\underbrace{nt_1 + mt_2}_{\alpha} + \underbrace{2\pi(n+m)}_{\text{nº entero de vueltas}}\right] - \operatorname{sen}\left[\underbrace{nt_1 + mt_2}_{\alpha}\right] \right) =$$

$$= 0$$

• Entonces, $R_{X_n X_m}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ //.

Resumiendo: $\boxed{R_{X_n X_m}(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{1}{2}\cos(n\tau) & \text{si } m = n \end{cases}}$

→ ¿Son ortogonales? X_n, X_m son ~~incorrelados~~ ortogonales xq $R_{X_n X_m} = 0$

¿Son incorrelados? $C_{X_n X_m} = R_{X_n X_m}(t_1, t_2) - \underbrace{E(X_n(t))}_{E(X_n(t)) = 0 \ \forall n} \cdot E(X_m(t)) = 0 - 0 \cdot 0 = 0$

Por tanto, también son incorrelados.

→ (c) Sea $Z(t) = X_n(t) + X_m(t)$ con $n \neq m$ ¿Son $Z(t)$ y $X_n(t)$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio? Ya sabemos hallamos lo mismo que ya conjuntamente estacionarios.

• $E(Z(t)) = E(X_n(t) + X_m(t)) = E(X_n(t)) + E(X_m(t)) = 0 + 0 = 0$ ✓

• Correlación cruzada $R_{X_n Z}(t_1, t_2) = E\{X_n(t_1) \cdot Z(t_2)\} =$

$$= E\{X_n(t_1) \cdot (X_n(t_2) + X_m(t_2))\} = E\{X_n(t_1) \cdot X_n(t_2) + X_n(t_1) X_m(t_2)\}$$

$$= E\{X_n(t_1) X_n(t_2)\} + E\{X_n(t_1) \cdot X_m(t_2)\} = \underbrace{R_{X_n}(t_1, t_2)}_{\text{apto a)}} + \underbrace{R_{X_n X_m}(t_1, t_2)}_{\text{apto b)}}$$

$$= \frac{1}{2}\cos[n(t_1 - t_2)] + 0 = \frac{1}{2}\cos(n\tau) \ ✓$$

Como se observa, las medias de cada uno de ellos son ctes, y su correlación cruzada, $R_{X_n Z}$ no depende de t, sino que sólo depende de τ.

$X_n(t)$, $Z(t)$

⇒ Sí son conjuntamente estacionarios en sentido amplio.

NOTA

X_n esta. sent. amplio $\begin{cases} E(X_n) = cte \\ R_{X_n} = \text{dep. sólo } \tau \end{cases}$

Z, X_n son conj. est. sent. amplio $\begin{cases} E(Z) = cte \\ E(X_n) = cte \\ R_{X_n Z} = \text{dep. } \tau \text{ (sólo)} \end{cases}$

→ (d) Calcular los espectros de potencia de $z(t)$ y $X_n(t)$.

- $S_{X_n}(\omega) = TF\{\underbrace{R_{X_n}(\tau)}_{\text{apto a}}\} = TF\{\frac{1}{2}\cos(n\tau)\} \underset{\text{Tabla 30}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\cos(n\tau)\, e^{-j\omega\tau}$

$$\boxed{= \frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega - n) + \delta(\omega + n)\right)}$$

- $S_z(\omega) = TF\{R_z(\tau)\}$

$R_z(t) = E\{z(t_1)\cdot z(t_2)\} = E\{(X_n(t_1) + X_m(t_1))\cdot(X_n(t_2) + X_m(t_2))\} =$

$= E\{X_n(t_1)\cdot X_n(t_2)\} + E\{X_n(t_1)\cdot X_m(t_2)\} + E\{X_m(t_1)\, X_n(t_2)\} +$

$+ E\{X_m(t_1)\cdot X_m(t_2)\} = R_{X_n}(t_1,t_2) + \underbrace{\cancel{2R_{X_n X_m}(t_1,t_2)}}_{0} + R_{X_m}(t_1,t_2)$

$= \frac{1}{2}\left(\cos[nt_1 - nt_2] + \cos[mt_1 - mt_2]\right) = \frac{1}{2}\left[\cos(n\tau) + \cos(m\tau)\right]$.

$$\boxed{S_z(\omega) = TF\{R_z(\tau)\} = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega - n) + \delta(\omega + n) + \delta(\omega - m) + \delta(\omega + m)\right.}$$

9/1/04

Febrero 1999
Ejercicio T1

Ejercicio Tema 3

Sean X e Y dos v.a.'s independientes tal que $f_X(x) = 1/2[\delta(x-1/2)+\delta(x-3/2)]$ y $f_Y(y) = 1$ para $|y|<1/2$. Se forma la suma Z = X+Y y se pide:

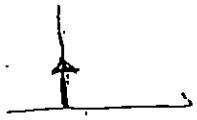
a) Calcule y dibuje $f_Z(z)$.

b). Calcule el coeficiente de correlación entre Z e Y.

Fri Kiii

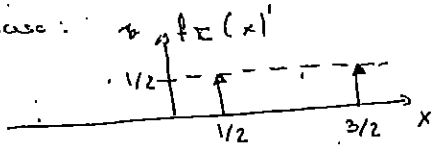
$$f_X(x) = \frac{1}{2}\left[\delta(x-1/2) + \delta(x-3/2)\right]$$

δ ≡ no es una función, sino una distribución.



$$\int_{-1}^{1} \delta(x)\,dx = 1 \qquad \delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

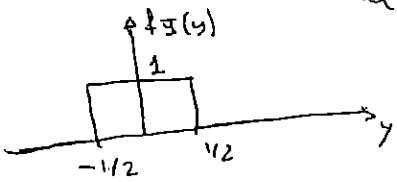
En nuestro caso:



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

Kaka Pa' la Putica

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| < 1/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



(a)

Transformación bidimensional: $Z = X + Y$ (pag 25) ⇒ lo hacemos con Th conv

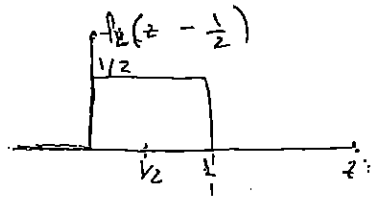
$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y) = \frac{1}{2}\left[\delta(x-\tfrac{1}{2}) + \delta(x-\tfrac{3}{2})\right] * f_Y(y) =$$

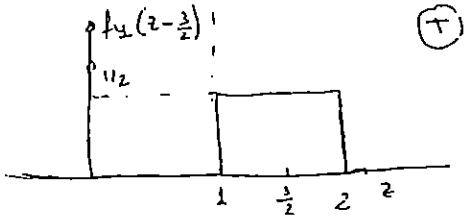
distribución de *

$$= \frac{1}{2}\left[\delta(x-\tfrac{1}{2}) * f_Y(y) + \delta(x-\tfrac{3}{2}) * f_Y(y)\right] = \frac{1}{2}\left[f_Y(z-\tfrac{1}{2}) + f_Y(z-\tfrac{3}{2})\right]$$

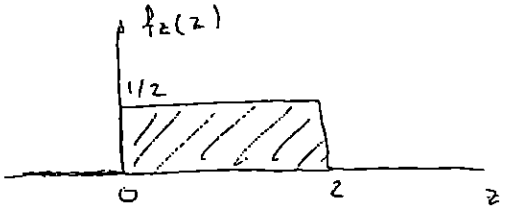
$$f(x) * \delta(x-x_0) = f(x-x_0)$$

⇒





(+) →



$$\boxed{f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < z < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

) Calcule el coeficiente de correlación entre Z e Y.

$$\rho_{ZY} = \frac{C_{ZY}}{\sigma_Z \sigma_Y}$$

$E(Z) = 1$ por ser uniforme entre 0 y 2

$E(Y) = 0$, por ser uniforme entre $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$E(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 1$

→ Calculo ahora, $\sigma_Z, \sigma_Y, C_{ZY}$.

$$E(Z^2) = \int_{R_Z} z^2 \cdot f_Z(z)dz = \int_0^2 z^2 \cdot \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} \left. \frac{z^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \left[\sigma_Z = \sqrt{V(Z)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$E(Y^2) = \int_{R_Y} y^2 f_Y(y)dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^2 \cdot 1 \, dy = \left. \frac{y^3}{3} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{12}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{12} - 0^2 = 1/12 \Rightarrow \left[\sigma_Y = \sqrt{V(Z)} = \frac{1}{\sqrt{12}} \right]$$

$$E(ZY) = E((X+Y)Y) = E(XY + Y^2) = E(XY) + E(Y^2) \overset{\text{independientes } E(XY)}{=} 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y) = 0 \cdot 1 = 0$$

Indepen.

$$C_{ZY} = E(ZY) - E(Z)E(Y) = \frac{1}{12} - 1 \cdot 0 = \frac{1}{12}$$

$$\rho_{ZY} = \frac{C_{ZY}}{\sigma_Z \sigma_Y} = \frac{1/12}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}} = \frac{1/12}{\frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}} = \frac{2 \cdot 3}{12} = \frac{1}{2}$$

16/01/04

Septiembre 1999
Ejercicio P2

Sea $X[n] = A\cos^2(\Omega_0 n + \Phi)$ un p.e. discreto en el tiempo, siendo Ω_0 una constante y A y Φ v.a.'s independientes. A tiene por media y varianza η_A y σ_A^2 respectivamente y Φ es una v.a. uniforme en $(0,\pi)$.

a) Determine la media y autocorrelación del proceso $X[n]$.
b) Determine la densidad espectral de potencia de $X[n]$.
c) Se define el nuevo proceso $Y[n] = X[n] - X[n-1]$. Calcule la autocorrelación de $Y[n]$.

p. e discreto

$X[n] = A\cos^2(\Omega_0 n + \Phi) \quad \Omega_0 \in \mathbb{R}$ $\quad A$ v.a. $\Rightarrow \eta_A, \sigma_A^2$ } independ.
$\Phi \sim U(0,\pi)$

a) $X[n] = A\cos^2(\Omega_0 n + \Phi) = \frac{A}{2}\left[1 + \cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\right]$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

A, Φ

$E(X[n]) = E\left(\frac{A}{2}\left[1+\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\right]\right) = E\left(\frac{A}{2}\right) + E\left(\frac{A}{2}\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\right)$

$= \frac{1}{2}E(A) + \frac{1}{2}E(A)\,E\left[\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\right] = \frac{1}{2}\eta_A + \frac{1}{2}\eta_A\,E\left[\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\right]$

$\Rightarrow E\left[\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\cdot f_\Phi(\Phi)\,d\Phi = \int_0^{\pi}\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\frac{1}{\pi}\,d$

$= \frac{1}{\pi 2}\left[\operatorname{sen}(2\Omega_0 n + 2\Phi)\right]_0^{\pi} = 0$

$R_X[n, n+m] = R_X[m] = E\left[X[n]\,X[n+m]\right] = E\left\{\left[\frac{A}{2}\left(1+\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\right)\right]\right.$

$\boxed{n_1 - n_2 = m \;\Big|\; \begin{matrix} n_1 = n \\ n_2 = n+m \end{matrix}}$

$\left.\cdot\left[\frac{A}{2}\left(1+\cos(2\Omega_0(n+m) + 2\Phi)\right)\right]\right\} = \frac{E(A^2)}{4}E\left\{1 + \underbrace{\cancel{\cos(2\Omega_0(n+m)}}_{0} + 2\Phi\right.$

$\left. + \underbrace{\cancel{\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)}}_{0} + \cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\cdot\cos(2\Omega_0(n+m) + 2\Phi)\right\} =$

$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A-$

$= \frac{E(A^2)}{4}\left\{1 + E\left(\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi)\cdot\cos(2\Omega_0(n+m) + 2\Phi)\right)\right\} =$

$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left(1 + E\left(\frac{1}{2}\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi - 2\Omega_0 n - 2\Omega_0 m - 2\Phi)\right.\right.$ $\quad \sigma_A^2 + \eta_A^2 = E(A^2)$

$\left. + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_0 n + 2\Phi + 2\Omega_0 n + 2\Omega_0 m + 2\Phi)\right) =$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left(1 + \frac{1}{2}E\left(\cos(-2\Omega_0 m)\right) + \frac{1}{2}E\left[\cos(4\Omega_0 n + \underbrace{2\Omega_0 m}_{0} + 4\Phi)\right]\right)$$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left(1 + \frac{1}{2}E\left[\cos(\underbrace{-}_{\text{par}}2\Omega_0 m)\right]\right) = \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left[1 + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_0 m)\right]$$

(b) Densidad espectral de potencia de $X[n]$

$$S_X(\underset{\omega}{\Omega}) = TF\{R_X[m]\} = TF\left\{\frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_0 m)\right)\right\} =$$

$$\frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\, TF\{1 + \cos(2\Omega_0 m)\} = \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left[TF\{1\} + \frac{1}{2}TF\{\cos(2\Omega_0 m)\}\right] =$$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left[\delta(\Omega)2\pi + \frac{1}{2}\pi\left(\delta(\Omega - 2\Omega_0) + \delta(\Omega + 2\Omega_0)\right)\right]$$

$$1 \xleftrightarrow{TF} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow[TF]{} 1$$

$$\boxed{S_X(\Omega) = \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left(2\pi\delta(\Omega) + \frac{\pi}{2}\delta(\Omega - 2\Omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\Omega + 2\Omega_0)\right)}$$

(c) $Y[n] = X[n] - X[n-1]$. Autocorrelación de $Y[n]$

$$R_Y[n, n+m] = R_Y[m] = E\{Y[n]Y[n+m]\} = E\{(X[n] - X[n-1])\cdot$$

$$\cdot(X[n+m] - X[n+m-1])\} = \overbrace{E\{X[n]\cdot X[n+m]\}}^{R_X[n,n+m]} - \overbrace{E\{X[n]X[n+m-1]\}}^{R_X[m-1]}$$

$$- E\{X[n-1]\cdot X[n+m]\} + E\{X[n-1]X[n+m-1]\} = R_X[m] -$$

$$- R_X[m-1] - R_X[m+1] + R_X[m] = 2R_X[m] - R_X[m+1] - R_X[m-1]$$

Sustituimos: $$R_X[n, n+m] = \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left[2\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_0 m)\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_0(m+1))\right) - \left[\cancel{1} + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_0(m-1))\right]\right] =$$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left[\cos(2\Omega_0 m) - \frac{1}{2}\left[\cos\underbrace{(2\Omega_0(m+1))}_{A} + \cos\underbrace{(2\Omega_0(m-1))}_{B}\right]\right]$$

$$\Rightarrow R_Y[n, n+m] = \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left[\cos(2\Omega_0 m)\right]\left[1 - (\cos 2\Omega_0)\right] = \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\cos(2\Omega_0 m)\left[1\right.$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

16/01/04.

Febrero 2000
Problema P2

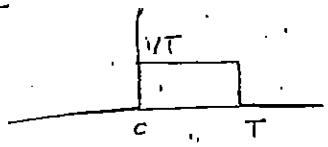
Sea $p(t)$ una señal periódica de periodo T. Se forma el proceso estocástico $X(t) = p(t+E)$, donde E es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $(0, T)$.

a) Demuestre que $X(t)$ es un proceso estocástico estacionario en sentido amplio. Calcule para ello η_X y $R_X(\tau)$.

b) Aplique el resultado del apartado anterior para $p(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < t < T/2 \\ 0 & si\ T/2 < t < T \end{cases}$

c) Se forma el proceso $Y(t+t_0) = aX(t)$, donde a es una constante. Determine a para que $Z(t) = X(t+t_0) - Y(t+t_0)$ tenga valor cuadrático medio mínimo.

$\rightarrow$ $E \sim U(0,T)$ $\quad f_E(e) = \begin{cases} 1/T & si\ 0 < e < T \\ 0 & resto \end{cases}$



Ej: $X(t) = \cos(t+E)$ $\quad p(t) = \cos t$

a) $R_X = E\{X(t)\} = E\{\underbrace{p(t+E)}_{g(x)}\} = \int_{e=-\infty}^{e=\infty} p(t+e)\, f_E(e)\, de = \int_{e=0}^{e=T} p(t+e) \cdot \frac{1}{T}\, de$

$= \frac{1}{T}\int_{e=0}^{e=T} p(t+e)\, de \overset{!!!!}{=} \frac{1}{T}\int_{e=0}^{e=T} p(e)\, de \Big] \equiv cte.$

Ej $p(t)$ es periódica. Yo desplazo la función una distancia "t".

$\boxed{\text{Nota}}$

* La función está en función de e; t funciona como parámetro y e integramos con respecto a "e". Como estamos integrando en un periodo, nos da igual el desplazamiento (en este caso t); Por tanto la función no depende de t.

$\int_0^T \cos x\, dx = \int_0^T \cos(x+a)\, dx = \int_0^T \cos(x-a)\, dx = 0$ → desplazamos la func

→ Tb podemos mover el intervalo de integración

$\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = \int_{0+a}^{2\pi+a} \cos x\, dx = \int_{0-a}^{2\pi-a} \cos x\, dx = 0$

• Una función periodica integrada en un periodo es invariante a las traslaciones, tanto de la función como del intervalo de integración.

• Como R_X no depende de t ⇒ Sí es estacionario en sentido amplio (sí si se cumple que $R_X(\tau)$ depende sólo de τ)..

• $R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau) = E\{X(t)\, X(t+\tau)\} = E\{p(t+E)\cdot p(t+\tau+E)\}$

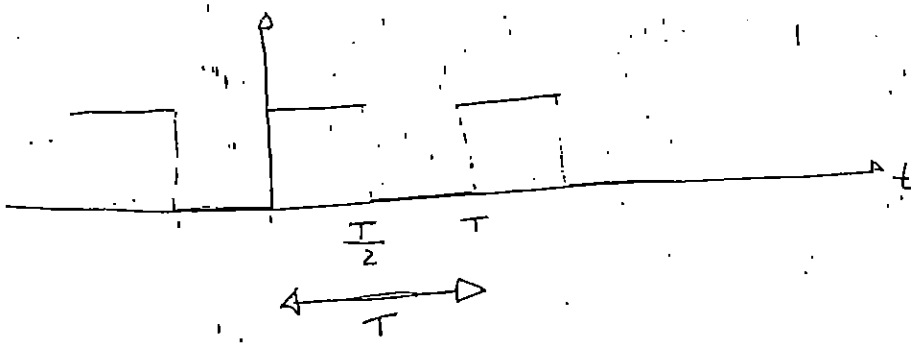
$$= \int_{E=-\infty}^{\infty} p(t+e)\, p(t+\tau+e)\cdot f_E(e)\,de = \int_0^T p(t+e)\cdot p(t+\tau+e)\,\frac{1}{T}\,de =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\underbrace{p(t+e)}_{\text{periódica de periodo } T}\cdot \underbrace{p(t+\tau+e)}_{\text{periódica de periodo } T}}_{\text{Periódica de periodo } T}\,de = \frac{1}{T}\int_0^T p(e)\, p(\tau+e)\,de$$

= sólo depende de τ, no depende de t.

• Como se cumplen las 2 condiciones $\Rightarrow$ sí es estacionario en sentido amplio.

(b) Si $p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{si } T/2 < t < T \end{cases}$ aplique el resultado del apto anterior.

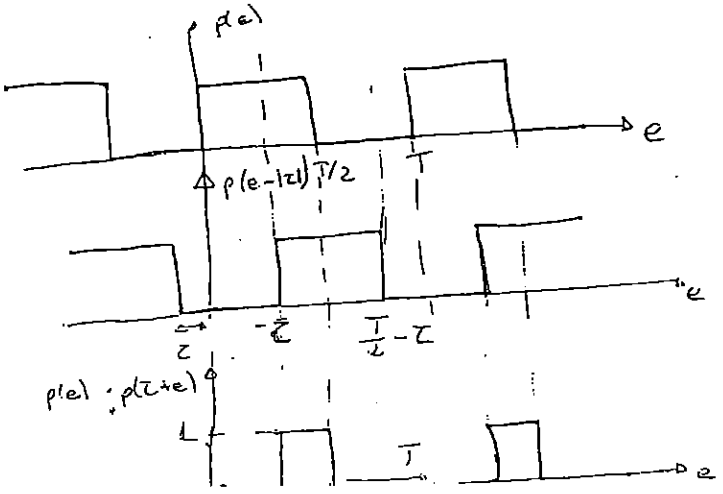


$$E(X(t)) = \frac{1}{T}\int_0^T p(e)\,de = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} 1\,de + \int_{T/2}^{T} 0\,de\right) = \frac{1}{T}\left([e]_0^{T/2} + 0\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - 0 + 0\right) = \frac{1}{T}\,\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \quad ✓$$

1er caso: $-\frac{T}{2} < \tau < 0$

• $R_X(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T p(e)\cdot p(\tau+e)\,de = \frac{1}{T}\left(\cancel{\int_0^{-\tau} 0\,de}_{=0} + \int_{-\tau}^{T/2} 1\,de + \cancel{\int_{T/2}^{T} 0\,de}_{0}\right) =$



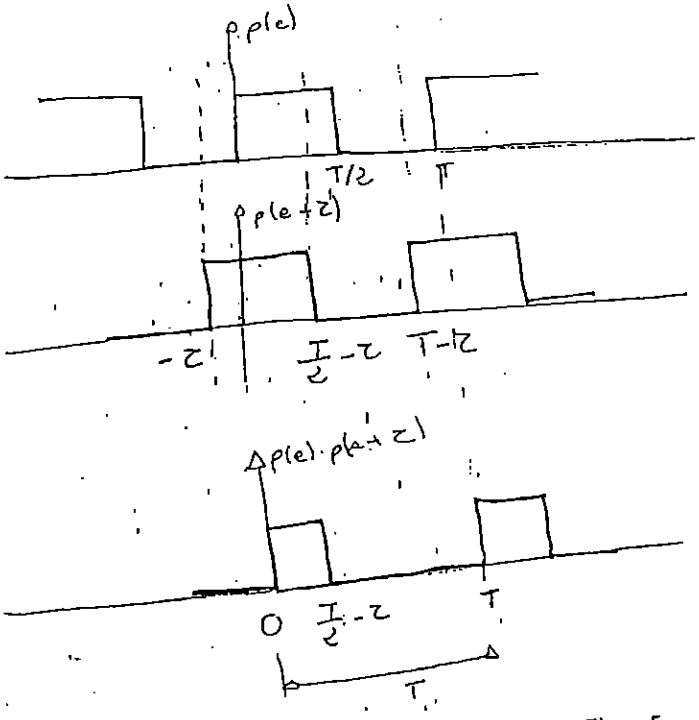
$$= \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T/2} de = \frac{1}{T}[e]_{-\tau}^{T/2} = \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2} + \right.$$

Feb 2000

P2

→ 2° caso: $0 < \tau < T/2$

No tienes ni idea



$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T p(a)\,p(\tau+a)\,da = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2-\tau} 1\cdot da + \cancel{\int_{\frac{T}{2}-\tau}^{T} 0\,da}\right) = \frac{1}{T}\,[a]_0^{\frac{T}{2}-\tau} =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}-\tau\right)$$

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}+\tau\right) & \text{si } -\frac{T}{2} < \tau < 0 \\ \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}-\tau\right) & \text{si } 0 < \tau < \frac{T}{2} \end{cases} \Rightarrow R_X(\tau) = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - |\tau|\right)$$

Como tenemos $E(X(t)) = cte$, $R_X(\tau)$ depende sólo de τ $\Big\}$ → $X(t)$ es estacionario en sentido amplio.

→ c) $Y(t+t_0) = a\,X(t)$

$Z(t+t_0) = X(t+t_0) - Y(t+t_0)$ → da xq que $Z(t+t_0)$ tenga valor cuadrático medio

$\boxed{E(Z(t)^2) \equiv \text{valor cuadrático medio.}}$

$$E\{[X(t+t_0) - Y(t+t_0)]^2\} = E\{[X(t+t_0)]^2 + [Y(t+t_0)]^2 - 2X(t+t_0)Y(t+t_0)\}$$

$$= E\{[X(t+t_0)]^2 + a^2(X(t))^2 - 2X(t+t_0)\cdot a X(t)\} =$$

$$= E\{[X(t+t_0)]^2\} + a^2 E\{(X(t))^2\} - 2a E\{X(t+t_0)X(t)\} =$$

$$R_X(\tau) = E\{X(t)\,X(t+\tau)\}$$

$$= E\{X(t+t_0)X(t+t_0+0)\} + a^2 E\{X(t)\,X(t+0)\} - 2a R_X(t_0) =$$

$$= R_X(0) + a^2 R_X(0) - 2a R_X(t_0) = (1+a^2) R_X(0) - 2a R_X(t_0)$$

¿valor mínimo?

Derivamos:

$$\frac{d\,E((Z(t))^2)}{da} = 2a R_X(0) - 2R_X(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a R_X(0) = 2R_X(t_0) \;; \quad a R_X(0) = R_X(t_0) \Rightarrow$$

$$a = \frac{R_X(t_0)}{R_X(0)} = \frac{\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - |t_0|\right)}{\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}\right)} = \frac{2}{T}\left(\frac{T}{2} - |t_0|\right)$$

16/01/04

Septiembre 2002
Teoría T2

Sean el proceso $X(n) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_n$ para $n > 0$ y $X(n) = 0$ para $n \leq 0$. Donde X_i son v.a's idénticamente distribuidas independientes entre sí con dos posibles valores 1 y -1 que pueden ocurrir con idéntica probabilidad.

a) Encontrar la fdp de $X(1)$ y $X(4)$. ¿Es un proceso estacionario de primer orden?.

b) Calcular la autocorrelación de $X(n)$.

- $X_i(n) \sim B(\underset{n}{1}, \underset{p}{\tfrac{1}{2}})$ v.a de Bernoulli. $P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$

$P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

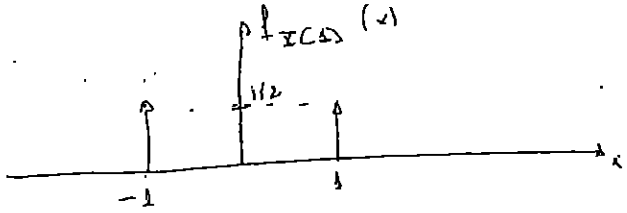
Según vayamos acordando v.a's, así vale $X(n)$.

El p.e va sumando variables aleatorias de Bernoulli.

ⓐ Fijamos el tiempo en $n=1$. $\Rightarrow$ $X(n) \overset{n=1}{=} X(1) \equiv$ v. aleatoria.

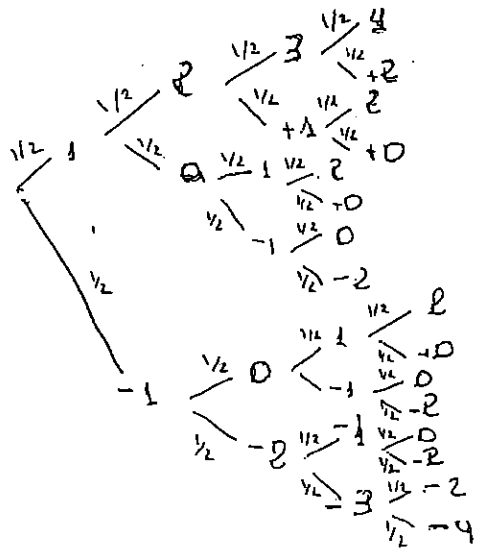
$X[1] \sim B(1, \frac{1}{2})$

$$\left.\begin{array}{l} P(X[1] = 1) = \frac{1}{2} \\ P(X[1] = -1) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f_{X[1]}(x) = \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x+1)$$



- fdp. $X(4)$ es en $X(4)$ ya se suman 4 v.a., ya que según el tiempo aumenta $X(n)$ es distinto.

$X[4] = X[1] + X[2] + X[3] + X[4]$



$R_{X[4]} = \{0, 2, -2, 4, -4\}$

$P(X[4]=4) = P(X_1=1)\cdot P(X_2=1)\cdot P(X_3=1)\cdot P(X_4=1) = P(X_1=1)\cdot P(X_1+X_2=2)\cdot$

$\cdot P(X_1+X_2+X_3=3)\cdot P(X_1+X_2+X_3+X_4=4) = \frac{1}{16}$

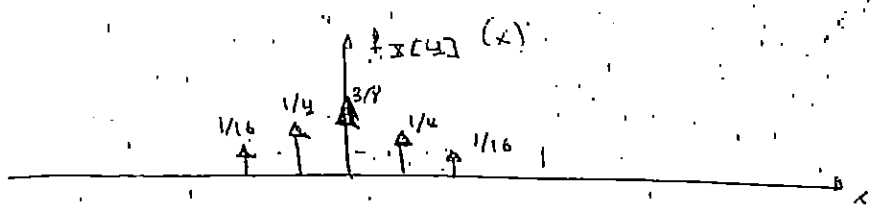
$P(X[4]=2) = 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$P(X[4]=-2) = 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$P(X[4]=0) = 6\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{8}$

$P(X[4]=-4) = 1/16 = P(X[4]=4)$

$f_{X[4]}(x) = \frac{1}{16}\delta(x-4) + \frac{1}{4}\delta(x-2) + \frac{3}{8}\delta(x) + \frac{1}{4}\delta(x+2) + \frac{1}{16}\delta(x+4)$



Como la fdp varía con el tiempo → El proceso no es estacionario de primer orden

Ya que para estacionario de primer orden, su fdp tiene que ser cte con el tiempo.

→ Nota: Un pa es estacionario de primer orden cuando su fdp $f_X(x,t)$ no depende

) Calcular la autocorrelación de $X[n]$

$R_X[n_1,n_2] = E\{X[n_1]\cdot X[n_2]\} = E\{(X_1+X_2+\dots+X_{n_1})\cdot(X_1+X_2+\dots+X_{n_2})\} =$

Ej: $n_1=2$, $n_2=3$ → $E\{(X_1+X_2)(X_1+X_2+X_3)\} = E\{X_1^2+X_1X_2+X_1X_3+X_2X_1+X_2^2+X_2X_3$

Entonces: $E\{X_1^2+X_1X_2+X_1X_3+\dots+X_1X_{n_2}+X_2X_1+X_2^2+\dots+X_2X_{n_2}+\dots$

$+X_{n_1}X_{n_2}+X^2_{\min(n_1,n_2)} = E(X_1^2)+\cancel{E(X_1)E(X_2)}+\dots+\cancel{E(X_1)E(X_{n_2})}+\cancel{E(X_2)E(X}$

$+E(X_2^2)+\dots+\cancel{E(X_{n_1})E(X_{n_2})}+E(X^2_{\min(n_1,n_2)}) =$ Las cruzadas son 0

$E(X_1)=E(X_2)=\dots=E(X_{n_1}) = 1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\frac{1}{2}=0$

$= E(X_1^2)+E(X_2^2)+\dots+E(X^2_{\min(n_1,n_2)}) = \sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2)} E(X_i^2) =$

$= 1^2\cdot\frac{1}{2}+(-1)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

$R_X[n_1,n_2] = 1+1+\dots+1 = \min(n_1,n_2)$

Cont. sep 2002 . 16/01/04

Teoría T2

$\rightarrow E(X_1^2) = E(X_2^2) = \ldots = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ //

Sustituyendo:

$$R_X[n_1, n_2] = \underbrace{1 + 1 + \ldots 1}_{\min(n_1, n_2)} = \min(n_1, n_2)$$

23/01/04

Febrero 2001
Problema P2

Dadas las v.a.'s X_1 y X_2 independientes entre sí y ambas con distribución $N(0,1)$, se forma el proceso $Y[n]=1+nX_1+n^2X_2$. Se pide:

a) La media y la autocorrelación de $Y[n]$, ¿es dicho proceso estacionario en sentido amplio?

b) La f.d.p. de primer orden de $Y[n]$, ¿es estacionario de primer orden?

c) Se forma el proceso $Z[n]=Y[n]-2\,Y[n-1]+Y[n-2]$. Obtenga $P\{Z[n]\geq 0.1\}$

p.e tiempo discreto.

$\rightarrow X_1 \sim N(\overset{\mu}{0},\overset{\sigma}{1})$ $\Rightarrow$ p.e $\Rightarrow Y[n]=1+nX_1+n^2X_2$

$\rightarrow X_2 \sim N(0,1)$

a) La media y autocorrelación de $Y[n]$ ¿es e.s.a?

• $E\{Y[n]\}=E\{1+nX_1+n^2X_2\}=E\{1\}+n\cancel{E\{X_1\}}^{0}+n^2\cancel{E\{X_2\}}^{0}=1+0+0=1=cte.$

• $R_Y[n,n+m]=R_Y[m]=E\{Y[n]\,Y[n+m]\}=E\{(1+nX_1+n^2X_2)(1+(n+m)X_1+$

↳ Lo podíamos hacer con $R_X[n_1,n_2]$ y nos ahorrábamos términos.

$+(n+m)^2X_2)\}=E\{(1+nX_1+n^2X_2)(1+nX_1+mX_1+n^2X_2+m^2X_2+2nmX_2)\}=$

$nX_1+nX_1+n^2X_2+m^2X_2+2nmX_2+nX_1+n^2X_1^2+nmX_1^2+n^3X_1X_2+nm^2X_1X_2+2n^2mX_1X_2+$

$X_2+n^3X_1X_2+n^2mX_1X_2+n^4X_2^2+n^2m^2X_2^2+2n^3mX_2^2\}=E\{1\}+(2n+m)\cancel{E\{X_1\}}^{0}+$

$(2n^2+m^2+2nm)\cancel{E\{X_2\}}^{0}+(n^2+nm)E\{X_1^2\}+(n^4+n^2m^2+2n^3m)E\{X_2^2\}+$

$+(n^3+nm^2+2n^2m+n^2m)\cancel{E\{X_1\}E\{X_2\}}^{0}$ $\underset{X_1,X_2\ \text{indep}}{=}$ $(n^2+nm)E\{X_1^2\}+(n^4+n^2m^2+2n^3m)$

$E\{X_1\}=E\{X_2\}=0$

Nota: $\sigma^2=E(X_i^2)-\mu^2 \Rightarrow E(X_i^2)=\sigma^2+\mu^2 \underset{\text{mirando } N(0,1)}{=} 1^2+0^2=1$ $\quad i=1,2.$

Sustituyendo:

$n^2+nm+n^4+n^2m^2+2n^3m+1=n^4+2n^3m+(m^2+1)n^2+mn+1] \Rightarrow$ depende de "n"

$\Rightarrow$ p.e no estacionario en sentido amplio

23/01/04

Septiembre 1999
Ejercicio T2

Sea el p.e. $Y(t) = a + Xt$, con $a > 0$, $t > 0$ y X una v.a. exponencial de media la unidad. Se pide:

a) Dibuje algunas realizaciones representativas del proceso $Y(t)$ y calcule su media y varianza.

b) Calcule la f.d.p. de primer orden del proceso $Y(t)$.

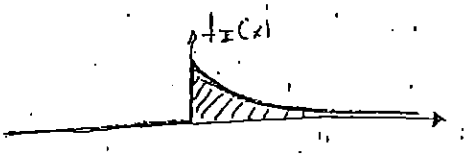
→ $Y(t) = a + X.t$ $\quad a>0,\ t>0$ $\quad$ X v.a exponencial de media unidad.

Distribución exponencial:

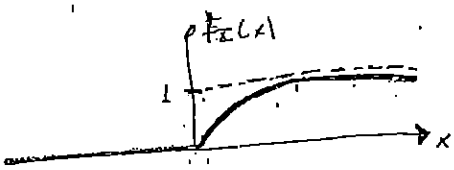
$X \sim exp(\lambda)$

$X = exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x>0 \end{cases}$$



• $E(x) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad E(x^2) = \frac{2}{\lambda^2}$ $\qquad V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

(a) Dibuje algunas realizaciones representativas del proceso $Y(t)$ y calcule su media y varianza

$X(w,t) = p.e.$

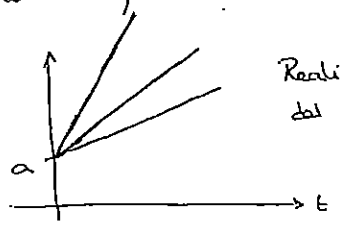
$X(w,t_0) = v.a.$

$X(w_0,t) = f(t) \Rightarrow$

$X(w_0,t_0) \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} w=2 & y(t) = a + 2t \\ y(t) = a + wt & \\ w=1 & y(t) = a + t \end{cases}$$

⇒ 3 realizaciones.



Realizaciones del proceso

• $E\{Y(t)\} = E\{a + Xt\} = E\{a\} + E\{Xt\} = a + t\underbrace{E(X)}_{1 \text{ es dato}} = a + t$

• $V\{Y(t)\} = Var\{a + Xt\} = Var\{a\} + Var\{Xt\} = 0 + t^2\, Var\{X\} = t^2 \cdot \frac{1}{1^2} = t$

cte se sacan al cuadrado

b) f.d.p. de 1er orden del proceso.

$Y(t) = a + xt,$

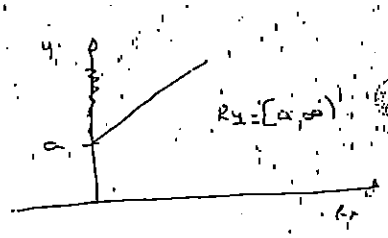
$\varphi(x) = a + xt \rightarrow y = a + xt \Rightarrow x_1 = \frac{y-a}{t}$

$\varphi'(t) = t$

Aplicando la fórmula:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|\varphi'(x_1)|} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{t} = \frac{e^{-\frac{y-a}{t}}}{t} \quad \text{si } y \in R_Y$$

$$\boxed{f_Y(y;t) = \begin{cases} \frac{1}{t} e^{-\frac{y-a}{t}} & \text{si } y \in [a, \infty) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$



No es estacionario en sentido amplio, ya que si la $f_Y(y,t)$ depende de t.

Y la vida amurallada y la muerte es el despertador, y la una tan callada que se pone rojo de rubor y el hombre solo palabras se hace viejo cuanto sale de sol. Y la vida que se escapa... ¿cuál bala está tu corazón?

(*) → otra forma de hacerlo (T-14):

Transformación v.a. cont. → v.a. cont (caso particular).

$\varphi(x) = a + xt$ estrictamente creciente

$\varphi(x) = a + xt = y \qquad x = \frac{y-a}{t} \Rightarrow \varphi^{-1}(y) = \frac{y-a}{t}$

$$(\varphi^{-1}(y))' = \frac{1}{t}$$

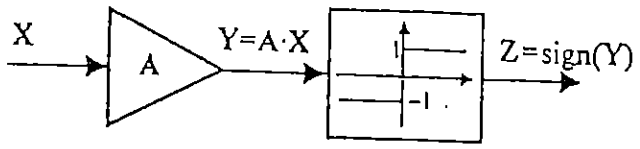
$$f_Y(y,t) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1})'(y)| = e^{-\frac{y-a}{t}} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t} e^{-\frac{(+y-a)}{t}}$$

Como se observa, nos sale el mismo resultado que por la otra forma.

23/1/04

Septiembre 2000
Problema P1

En el circuito de la figura, la tensión de entrada X y la atenuación A son desconocidas y se modelan como variables aleatorias independientes, siendo X uniforme en (-1,1) y A uniforme en (0,1).



Calcule:

a) La fdp de la v.a. Y.
b) La covarianza de X y Z.
c) Las ~~fdps~~ condicionadas $F_A(a \mid Z=-1)$ y $F_A(a \mid Z=+1)$.
Fds.

$\begin{cases} X \sim U(-1,1) \\ A \sim U(0,1) \end{cases}$

(a) $\left.\begin{array}{l} Y = AX \\ W = X \end{array}\right\}$ variable ficticia.

(1) $\left.\begin{array}{l} y = ax \\ w = x \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{y}{x} \Rightarrow a = \frac{y}{w}$

$x = w$

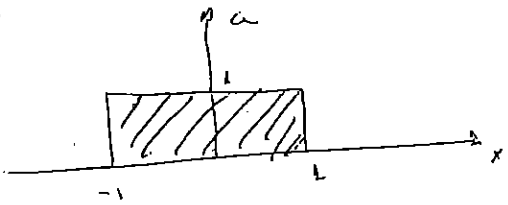
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$f_A(a) = \begin{cases} 0 & a \in (0,1) \\ 1 & \text{resto} \end{cases}$

(2) $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x$

(3) $f_{AX}(a,x) = f_A(a) \cdot f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < a < 1 \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

A, X independientes



- Sustituimos en la fórmula.

$$f_{YW}(y,w) = \frac{f_{AX}(a(y,w), x(y,w))}{|J|} = \frac{1/2}{|x|} = \frac{1}{2|x|} = \frac{1}{2|w|}$$

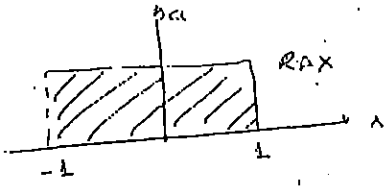
↳ no quitamos | | xq x tomo valores negativos.

$$\left[f_{YW}(y,w) = \begin{cases} \frac{1}{2|w|} & \text{si } (y,w) \in R_{YW} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \right]$$

→ Cálculo del rango R_{YW}

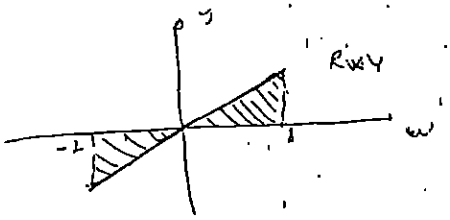
$X \sim U(-1,1) \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow -1 < w < 1$

$$\begin{cases} y = ax \\ w = x \end{cases} \Rightarrow a = \frac{y}{x} = \frac{y}{w}$$

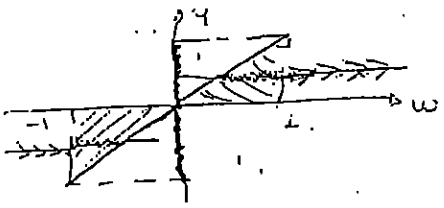


$A \sim U(0,1) \Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow \boxed{0 < \frac{y}{w} < 1 \Rightarrow}$ ¡¡OJO!! ¡¡importante!!

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < y < w & \text{si } 0 < w < 1 \text{ (w positivo)} \\ w < y < 0 & \text{si } -1 < w < 0 \text{ (w negativo)} \end{cases}$$



Hemos calculado la fdp conjunta. Ahora nos toca la fdp marginal de Y.



Tenemos que integrar dos partes, ya que no es igual el rango de R_{YW}, si w positivo, que si w negativo.

→ si $0 < y < 1$:

$$f_Y(y) = \int_{w=y}^{w=1} \frac{1}{2w}\, dw = \frac{1}{2} \ln|w| \Big]_y^1 = \frac{1}{2}\left[\ln(1) - \ln|y|\right] = -\frac{1}{2}\ln|y|$$

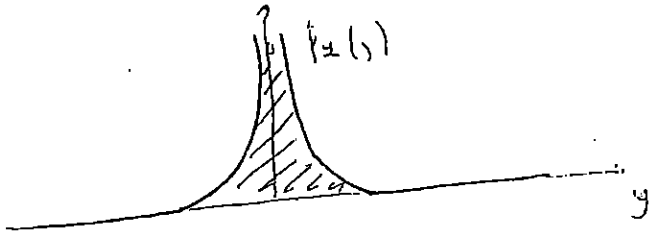
→ si $-1 < y < 0$:

$$f_Y(y) = \int_{-1}^{y} \frac{1}{2(-w)}\, dw = -\frac{1}{2}\ln|w| \Big]_{-1}^{y} = -\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{2}\ln(1) = -\frac{1}{2}\ln|y|.$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln|y| & \text{si } 0 < y < 1 \\ -\frac{1}{2}\ln|y| & \text{si } -1 < y < 0 \end{cases}}$$

$R_Y = (-1,1)$.

$$f_Y(y) = \left\{ -\frac{1}{2}\ln|y| \quad \forall y \in R_Y(-1,1). \right\}$$



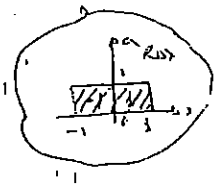
→ Sep 2000 (P2) 27/1/04

→ (b) Covarianza de X y Z

¿C_{XZ}? $C_{XZ} = E(XZ) - E(X)E(Z) = \iint_{R_{XZ}} xz\, f_{XZ}(x,z)\,dx\,dz$ ⇒ No tiene sentido para resolverlo.

$X \sim U(-1,1)$ (a, b) $\Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$

$Z = \text{sign}(Y) = \text{sign}(AX) = \text{sign}(X)$ (la A siempre es > 0) $= \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



$Z = \text{sign}(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases} \Rightarrow Z = \begin{cases} 1 & \text{si } ax > \\ -1 & \text{si } ax < \end{cases}$

$\Rightarrow Z = \begin{cases} 1 & \text{si } x \\ -1 & \text{si } x \end{cases}$ $a \in (0,1)$

→ $C_{XZ} = E(XZ) - \underbrace{E(X)}_{=0}\underbrace{E(Z)}_{=0} = E(X\,\text{sign}(Y)) = E(X\,\text{sign}(X)) =$

$= \iint_{R_1} x \cdot 1 \cdot f_{AX}(a,x)\,dx\,da + \iint_{R_{-1}} x(-1) \cdot f_{AX}(a,x)\,dx\,da \Rightarrow$

El sig Y sólo depende del signo de X pero la A función $Z = \text{sign}(Y)$ también tiene a la ya que Z es función de 2 variables A, X, aunque el signo sólo depende de X. porque A sólo toma valores positivos

$C_{XZ} = \iint_{R_1} x\, f_{AX}(a,x)\,dx\,da + \iint_{R(-1)} -x\, f_{AX}(a,x)\,dx\,da = \int_{x=0}^{x=1}\int_{a=0}^{a=1} \frac{x}{2}\,da\,dx - \int_{x=-1}^{0}\int_{a=0}^{a=1} \frac{x}{2}\,da$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 [a]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 [a]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

(Hm) Aquí hemos aplicado: $E(g(X,Y)) = \iint g(x,y) \cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

En este caso: $E(XZ) = E(X\,\text{sign}(Y)) = E(\underbrace{X\,\text{sign}(AX)}_{g(X,A)}) = \iint_{R_{AX}} X \cdot \text{sign}(AX) \cdot f_{AX}(a,x)\,d$

$= \iint_{R(1)} X \cdot 1 \cdot f_{AX}(a,x)\,dx\,da + \iint_{R(-1)} X(-1)\, f_{AX}(a,x)\,dx\,da$

Esto último lo hemos hecho para aclarar que no hay que hacer una sólo integ. sino que son dos, ya que la transformación depende de 2 variables, A, X, el valor de dicha transformación sólo depende de X (de su signo).

Solución: $\boxed{C_{XZ} = 1/2}$

→ (c) $F_A(a / Z=-1)$ $F_A(a / Z=+1)$. (fdp's condicionadas)

$$F_A(a / Z=-1) = P(A \le a / Z=-1) = \frac{P(A \le a \cap Z=-1)}{P(Z=-1)} \underset{\text{def } Z}{=} \frac{P(A \le a \cap aX \le 0)}{P(aX \le 0)}$$

$F(x) = P(X \le x)$

definición de prob. condicionada

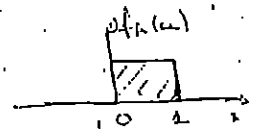
$$= \frac{P(A \le a \cap X \le 0)}{P(X \le 0)} = \frac{P(A \le a) \cdot \cancel{P(X \le 0)}}{\cancel{P(X \le 0)}} = P(A \le a) = \boxed{F_A(a)}$$

q la a es siempre positiva

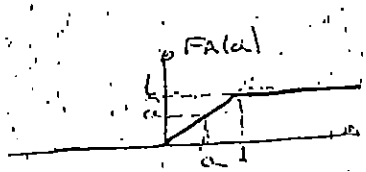
A, X independientes

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

→ $A \cup (0,1)$



→



$F_A(a) = a$

→ Solución: $F_A(a / Z=-1) = \boxed{F_A(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a<0 \\ a & \text{si } 0<a<1 \\ 1 & \text{si } a>1 \end{cases}}$

$$F_A(a / Z=1) = P(A \le a / Z=1) = \frac{P(A \le a \cap Z=1)}{P(Z=1)} = \frac{P(A \le a \cap aX \ge 0)}{P(aX \ge 0)}$$

$$= \frac{P(A \le a \cap X \ge 0)}{P(X \ge 0)} = \frac{P(A \le a) \cdot P(X \ge 0)}{P(X \ge 0)} = P_A(\le a) = F_A(a) = a$$

En este segundo caso, se hace el mismo procedimiento que en $F_A(a / Z=-1)$, ya que A es independiente de X, y por ello llegamos al mismo resultado.

→ $F_A(a / Z=-1) = F_A(a / Z=+1) = F_A(a)$.

¿fdp? $\frac{d F_A(a)}{da} \Rightarrow f_A(a / Z=-1) = f_A(a / Z=1) = f_A(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

→ Concluimos por tanto que A y Z son independientes, ya que las dos valen con el mismo valor. $F_A(a / Z=\pm 1) = F_A(a) \Rightarrow$ Z y A son no independientes

27/1/04

X(t) p e cont < v.a discreta

X(n) p.e discreto < v.a continua / v.a discreta

ETSI Telecomunicación

Septiembre 03
Ejercicio P2

Sea el proceso $X(t) = A\,\text{sen}(t+B)$ donde A y B son variables discretas uniformes. La fdp de la variable A tiene valores no nulos en $\{1, -1\}$ y la fdp de la variable aleatoria B en $\{0, \pi/2, \pi\}$.

a) Hallar la fdp de X(0) y $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y decidir si el proceso es estrictamente estacionario.

b) Encontrar todas las posibles realizaciones del proceso X(t) y la probabilidad de ocurrencia en función de la distribución de probabilidad conjunta de A y B.

c) Calcular la media y la autocorrelación de $X(t)$.

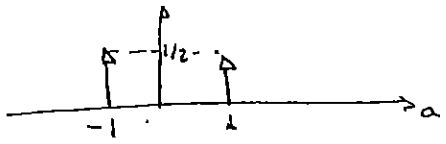
d) Si A y B fueran independientes, determinar si $X(t)$ es estacionario, en sentido amplio.

e) Se forma el proceso $Y(t) = \max(X(t),\ 0)$. Dibujar todas las posibles realizaciones del proceso $Y(t)$.

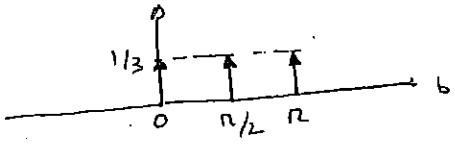
Discreto.

→ $X(t) = A\,\text{sen}(t+B)$ A, B discretas uniformes. y X(t) p e continuo. Aunque el p e es continuo las v.a son d

$$P(A=a) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } a=1 \\ 0 & \text{si } a=0 \text{ resto} \\ 1/2 & \text{si } a=-1 \end{cases}$$



$$P(B=b) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } b=0 \\ 1/3 & \text{si } b=\pi/2 \\ 1/3 & \text{si } b=\pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



(a) fdp de X(0) y X(π/4) y decidir si es p. estrictamente estacionario.

X(0) = A sen B es una v.a.

si A=-1 B = π/2 → X(0) = -1·sen π/2 = -1

si A = 1 B = π/2 → X(0) = 1 sen π/2 = 1

si A = -1 B = 0 → X(0) = -1 sen 0 = 0

si A = 1 B = 0 → X(0) = 1 sen 0 = 0

si A = -1 B = π → X(0) = 0

si A = 1 B = π → X(0) = 0

La v.a X(0) tiene un rango $R_{X(0)} = \{-1, 0, 1\}$

$P(X(0)=1) = P\left(A=1,\ B=\frac{\pi}{2}\right) = P(A=1)\cdot P(B=\pi/2 \,/\, A=1)$ → No la podemos resolver ya que no sabemos si A y B son independientes.

$P(X(0)=-1) = P\left(A=-1,\ B=\frac{\pi}{2}\right) = P(A=-1)\cdot P(B=\pi/2 \,/\, A=-1)$

• $P(X(0)=0) = P(A=1, B=0) + P(A=-1, B=0) + P(A=-1, B=\pi) + P(A=1, B=\pi)$

Lo tenemos que dejar indicado ya que no sabemos si son independientes A y B.

→ $X(\pi/4)$: "

$X(\pi/4) \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow X(\frac{\pi}{4}) = A\,\text{sen}(\frac{\pi}{4}+B)$

• si $A=-1$, $B=0 \rightarrow X(\frac{\pi}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
• si $A=1$, $B=0 \rightarrow X(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
• si $A=-1$, $B=\pi/2 \rightarrow X(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$
$A=1$, $B=\pi/2 \rightarrow X(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$A=-1$, $B=\pi \rightarrow X(\pi/4) = +\sqrt{2}/2$
$A=1$, $B=\pi \rightarrow X(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$

La v.a $X(\frac{\pi}{4})$ tiene rango $R_X(\frac{\pi}{4}) = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\}$

• $P(X(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}/2) = P(A=-1, B=0) + P(A=-1, B=\pi/2) + P(A=1, B=\pi)$

• $P(X(\pi/4) = \sqrt{2}/2) = P(A=+1, B=0) + P(A=1, B=\pi/2) + P(A=-1, B=\pi)$

→ estrictamente estacionario ⇒ es estacionario ⇒ cuando todos sus estadísticos, parámetros no dependen de "t" ni de "n", es decir, que su fdp, FD, ..., son constantes, no dependen de "t" ni de "n".

• En este caso no, es estrictamente estacionario xq la fdp no es constante, ya que fdp de $X(t)$ varía con respecto a t.

→ (b) ¿$f(t)$? ¿Realizaciones del proceso?

Tenemos tantas realizaciones como funciones nos salgan, según fijemos A y B.

• Si $A=-1$, $B=0 \Rightarrow f(t) = -\text{sen}\,t$
• Si $A=+1$, $B=0 \Rightarrow f(t) = \text{sen}\,t$
• Si $A=-1$, $B=\pi/2 \Rightarrow f(t) = -\text{sen}\,t\,(t+\frac{\pi}{2}) = -\cos t$
• Si $A=1$, $B=\pi/2 \Rightarrow f(t) = \text{sen}\,(t+\frac{\pi}{2}) = +\cos t$
• Si $A=-1$, $B=\pi \Rightarrow f(t) = -\text{sen}(t+\pi) = -\text{sen}\,t$
• Si $A=1$, $B=\pi \Rightarrow f(t) = \text{sen}\,(t+\pi) = \text{sen}\,t$

$P(X(t) = \text{sen}\,t) = P(A=1, B=0) + P(A=1, B=\pi)$
$P(X(t) = -\text{sen}\,t) = P(A=-1, B=0) + P(A=-1, B=\pi)$
$P(X(t) = \cos t) = P(A=1, B=\pi/2)$
$P(X(t) = -\cos t) = P(A=-1, B=\pi/2)$

Sep 03 (P2) 27/11/04.

→ (c) Media y autocorrelación de $X(t)$.

• $E[X(t)] = \sum_i x_i(t) \cdot P(X_i(t) = x_i) = \operatorname{sen} t \left(P(A=1, B=0) + P(A=1, B=\pi) \right)$

esperanza de una variable discreta

$+ (-\operatorname{sen} t) \left(P(A=-1, B=0) + P(A=1, B=\pi) \right) + \cos t \; P(A=1, B=\pi/2) + (-\cos t) P(A=-1, B$

• $R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X(t_2)) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} x_i(t_1) \cdot x_j(t_2) \cdot P(X(t_1) = x_i, X(t_2) = x_j)$

$= \operatorname{sen} t_1 \cdot \operatorname{sen} t_2 \left[P(A=1, B=0) + P(A=1, B=\pi) + P(A=-1, B=0) + P(A=-1, B=\pi) \right] +$

$+ \cos t_1 \cdot \cos t_2 \left[P(A=1, B=\pi/2) + P(A=-1, B=\pi/2) \right]$

→ (d) Si A y B fueran independientes.

• $E(X(t)) =$ Sustituyendo los valores en el apartado anterior, llegamos a:

$E(X(t)) = \operatorname{sen} t \left[P(A=1) \cdot P(B=0) + P(A=1) \cdot P(B=\pi) - \right] = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) - \operatorname{sen} t \left(\frac{1}{6} + \right.$

$\left. + \cos t \frac{1}{6} - \cos t \frac{1}{6} = 0 \right]$

→ $R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X(t_2)) = \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 \left[P(A=1) \cdot P(B=0) + P(A=1) P(B=\pi) + \right.$

$\left. + P(A=-1) \cdot P(B=0) + P(A=-1) \cdot P(B=\pi) \right] + \cos t_1 \cos t_2 \left[P(A=1) \cdot P(B=\frac{\pi}{2}) + P(A=-1) \cdot \right.$

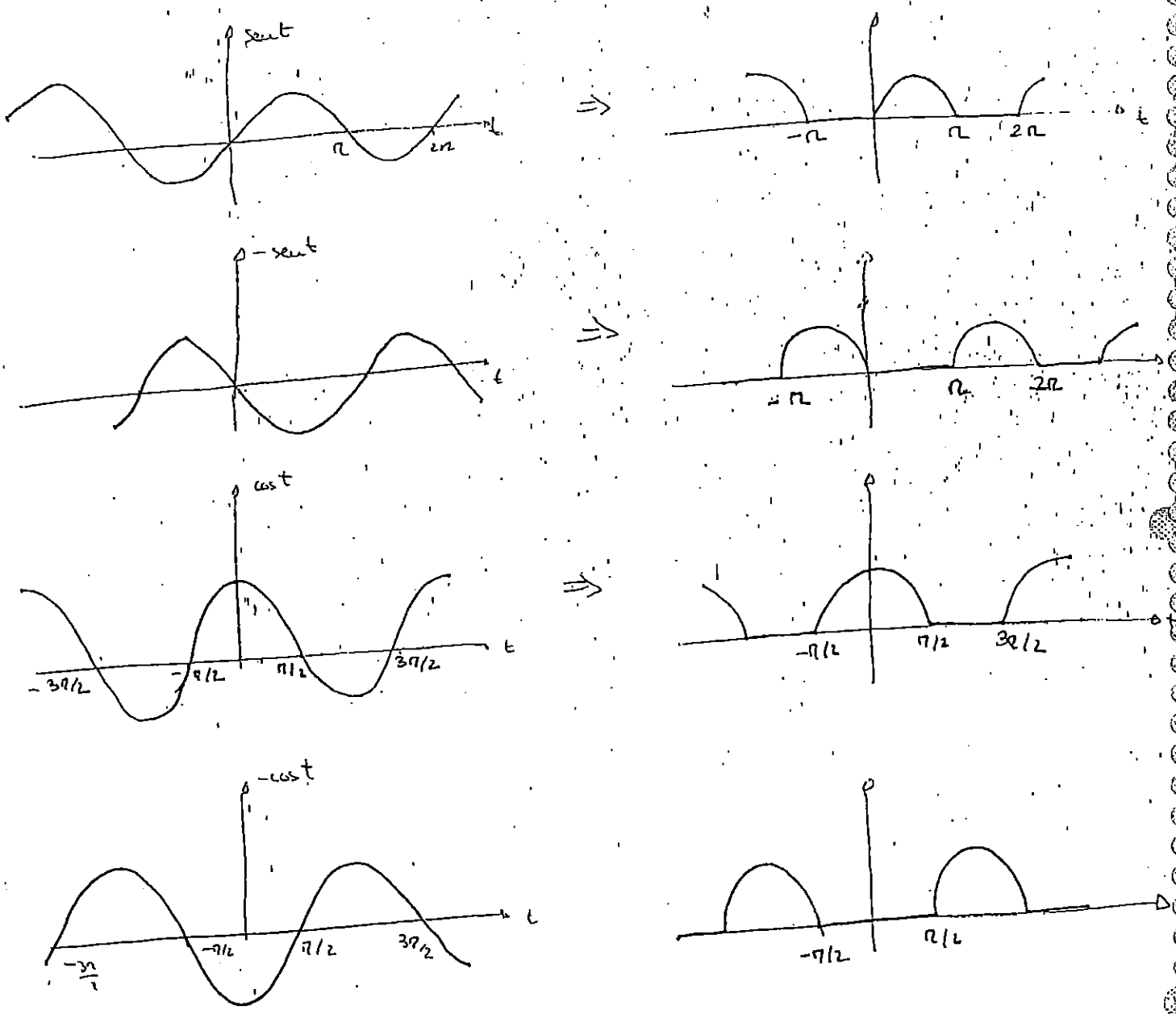
$= \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 \left[1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 \right] + \cos t_1 \cdot \cos t_2 \left[1/6 + 1/6 \right] = \frac{2}{3} \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 + \frac{1}{3} \cos$

En este apartado sólo sustituimos valores, ya que ya podemos suponer que son independient

• La $R_X(t_1, t_2)$ no queda en función de $\tau = t_2 - t_1$, sino que queda en función de los instantes t_1 y t_2 elegidos. Por tanto, NO es estacionario en sentido amplio.

→ (e) $Y(t) = \max(X(t), 0)$.

→ Realizaciones de $X(t)$:



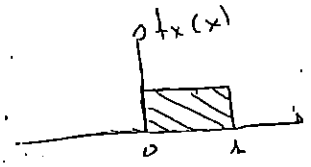
27/01/04

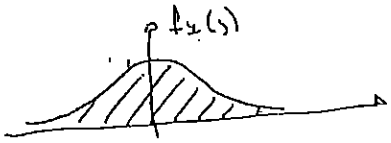
Septiembre 99
Ejercicio T1

Sean X e Y v.a.'s independientes, donde X es uniforme en (0,1) y la fdp de Y es $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$ $(-\infty<y<\infty)$. Se forma la v.a. $Z=X\cdot U(Y)$, siendo $U(\cdot)$ la función escalón unidad.

a) Calcule y represente la función de distribución de Z.
b) Calcule la covarianza de Z y Y.

$X \sim U(0,1)$ $\quad fdp = f_Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\, y^2}$ $\quad (Y \sim N(0,1)$





$Z = X\, U(Y)$ $\quad U(\cdot)$ escalón unidad de Y.

a)

Transformación: $Z = X \cdot U(Y)$.

$$Z = X \cdot U(Y) = \begin{cases} X & \text{si } Y \geq 0 \\ 0 & \text{si } Y < 0 \end{cases}$$

· Lo hacemos por el 2º procedimiento de la pag T-25

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) \underset{\text{Prob Total}}{=} P(Z \leq z / Y<0)\cdot P(Y<0) + P(Z \leq z / Y>0)\cdot P(Y>0)$$

$z>0$

$\cdot\ P(Z \leq z / Y<0) = P(0 \leq z) = 1$

$z<0$:

$P(Z \leq z / Y<0) = P(0 \leq z) = 0$

· $z>0$: $P(Z \leq z / Y>0) = P(X \leq z)$

· $z<0$ · $P(Z \leq z / Y>0) = P(X \leq z) = 0$ (xq z no es negativa nunca).

$$F_Z(z) = P(Z \leq z / Y<0)\cdot \underbrace{P(Y<0)}_{1/2} + P(Z \leq z / Y>0)\cdot \underbrace{P(Y>0)}_{1/2} \Rightarrow$$

$\boxed{\text{Si } z>0}$

$$F_Z(z) = 1\cdot\frac{1}{2} + P(X \leq z)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[1 + P(X \leq z)\right]$$

$\boxed{\text{Si } z<0}$

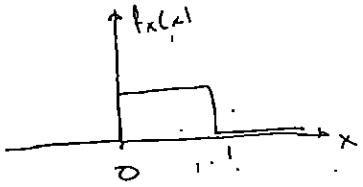
$$F_Z(z) = 0\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

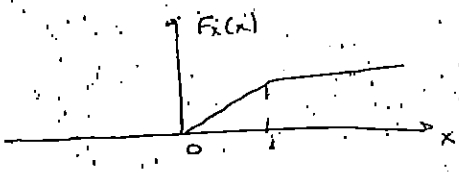
Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z<0 \\ 1/2\left(1+P(X\le z)\right) & \text{si } z>0 \end{cases}$$

¿$P(X \le z)$?

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0<x<1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

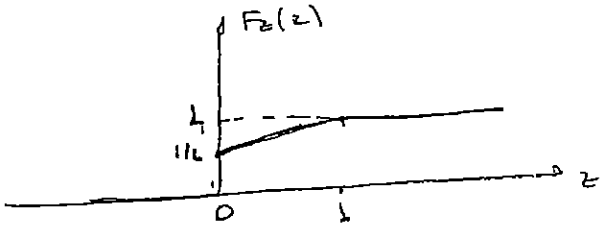




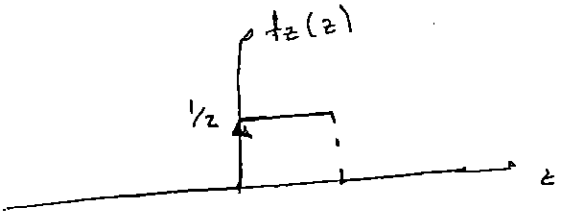
$P(X \le z) = F_X(z)$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z<0 \\ 1/2\left(1+F_X(z)\right) & \text{si } z>0. \end{cases} \Rightarrow \text{viendo } F_X(x)$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z<0 \\ \frac{1}{2}(1+z) & \text{si } 0<z<1 \\ \frac{1}{2}(1+1) & \text{si } z>1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z<0 \\ \frac{1}{2}(1+z) & \text{si } 0<z<1 \\ 1 & z>1 \end{cases}}$$



$$f_Z(z) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0<z<1 \\ 0 & \text{resto} \\ \frac{1}{2}\delta(z) & z=0 \end{cases}$$



$$f_Z(z) = \frac{1}{2}\delta(z) + \frac{1}{2}\left(u(z)-u(z-1)\right)$$

NOTA: En este transformación no podemos usar convolución, ni variable ficticia. Tenemos que aplicar este método $\Rightarrow$ Eso es así porque tenemos una transformación con un escalón. (y no sabemos hacer Jacobiano, ni ~~método~~ convolución, xq no es suma).

Sep 1999 (T1) 27/1/04

(b) $C_{YZ} = E(YZ) - E(Y)\cancel{E(Z)} = E(YZ) = E(Y \cdot X\, U(Y)) \underset{X,Y \text{ indep}}{=}$

0 xq $Y \sim N(0,1)$

$= E(X) \cdot E(Y\, U(Y)) \Rightarrow$

$$E(Y \cdot U(Y)) = \int_0^{\infty} + y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^{\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\, y^2}\, dy =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} -y\, e^{-1/2\, y^2}\, dy = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-1/2\, y^2} \right]_0^{\infty} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} [0 - 1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} /$$

$$C_{YZ} = E(X) \cdot E(Y\, U(Y)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} /$$

27-1-04

Febrero 1999
Ejercicio P2

La tensión de salida $X[n]$ de un determinado circuito puede modelarse de la forma:

$$X[n] = S[n] + N[n]$$

donde $S[n]$ es la señal de entrada al circuito y $N[n]$ un ruido blanco estricto, independiente de $S[n]$ y con distribución de primer orden uniforme en $(-d/2, d/2)$, siendo d una constante positiva. Suponga, además, que la entrada $S[n]$ es un proceso de autocovarianza $C_S[m]$ y distribución de primer orden exponencial de parámetro $c > 0$ constante.

a) Calcule y dibuje la fdp de primer orden de $X[n]$. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;n)\,dx = 1$. ¿Es $X[n]$ estacionario de primer orden?.

b) Calcule la autocovarianza de $X[n]$. ¿Es $X[n]$ estacionario en sentido amplio?

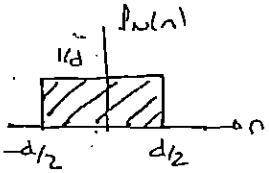
c) Se forma el proceso $Y[n] = aX[n-1]$, siendo a una constante. Determine ésta de forma que la varianza de $S[n] - Y[n]$ sea mínima.

(a) ¿ $f_X(x)$?

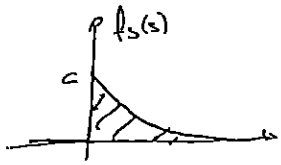
Por el teorema de convolución:

$$f_X(x) = f_S(s) * f_N(n) = f_N(n) * f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(z) \cdot f_S(x-z)\,dz$$

Nota: $N[n] \sim U(-d/2, d/2)$ ruido blanco $\Rightarrow R_N[m] = \sigma^2 \delta[m]$



$$f_N(n) = \begin{cases} 1/d & \text{si } -\frac{d}{2} < n < d/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

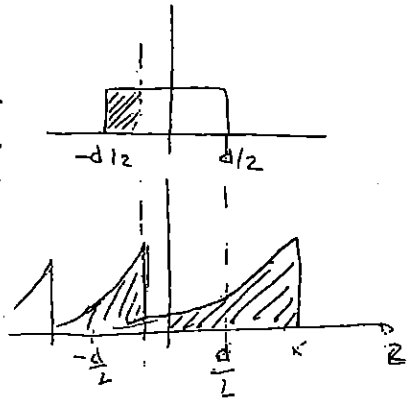


$S[n] \sim \exp(c)$

$$f_S(s) = \begin{cases} ce^{-cs} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s \le 0 \end{cases}$$

$E\{S[n]\} = 1/c \qquad V\{S[n]\} = 1/c^2$

→ Cuantificación del problema:



(1) $x < -\frac{d}{2}$: $f_X(x) = 0$

(2) $-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$: $f_X(x) = \int_{-\frac{d}{2}}^{x} 1/d \; ce^{-c(x-z)}\,dz = \frac{1}{d}\left[e^{-c(x-z)}\right]_{-\frac{d}{2}}^{x} =$

$= \frac{1}{d}\left(1 - e^{-c(x+d/2)}\right)$

(3) si $x > \frac{d}{2}$:

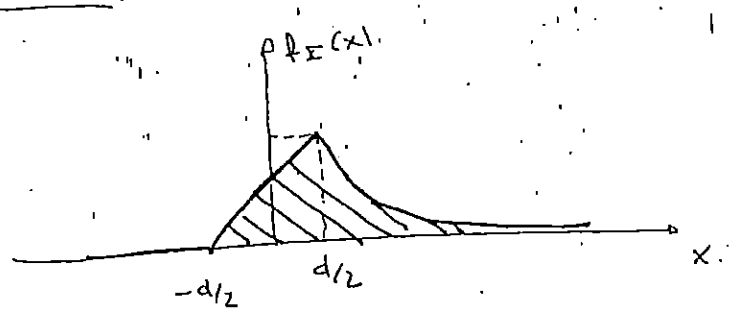
$$f_X(x) = \int_{-d/2}^{d/2} 1/d\, c\, e^{-c(x-z)}\, dz = \frac{1}{d}\left[e^{-c(x+z)}\right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{1}{d}\left[e^{-c(x-\frac{d}{2})} - e^{-c(x+\frac{d}{2})}\right]$$

$$= \frac{2e^{-cx}}{d} \cdot \frac{e^{\frac{cd}{2}} - e^{-\frac{cd}{2}}}{2} = \frac{2e^{-cx}}{d}\, sh\left(\frac{cd}{2}\right)$$

$$\boxed{f_X(x,n) = \begin{cases} 1/d - \dfrac{e^{-c(x+\frac{d}{2})}}{d} & \text{si } -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ \dfrac{2e^{-cx}}{d}\, sh\left(\dfrac{cd}{2}\right) & \text{si } x > d/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

$X[n]$ es estacionario de primer orden porque su fdp no depende de "n".

→ Representación:



Comprobación: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,n)\,dx = \int_{-\infty}^{-d/2} 0\, dx + \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{d}\left[1 - e^{-c(x+d/2)}\right] dx +$

$$+ \int_{d/2}^{\infty} \frac{2}{d}\, sh\, \frac{cd}{2}\, e^{-cx}\, dx = \dots = 1$$

→ (b) calcule la autocorrelación de $X[n]$.

$$C = E(XY) - E(X)E(Y).$$

$$C_X[n, n+m] = R_X[n, n+m] + E\{X[n]\}E\{X[n+m]\}$$

$$E\{X[n]\} = E\{S[n] + N[n]\} = \underset{\exp(c)}{E\{S[n]\}} + \underset{U(-\frac{d}{2},\frac{d}{2})}{E\{N[n]\}} = \frac{1}{c} + 0 = \frac{1}{c} = E\{S[n]\}$$

$$E\{X[n+m]\} = E\{S[n+m] + N[n+m]\} = E\{S[n+m]\} + E\{N[n+m]\} = \frac{1}{c} + 0 = 1/c = E\{S[n]\}$$

$$R_X[n, n+m] = R_X[m] = E\{X[n] \cdot X[n+m]\} = E\{(S[n] + N[n]) \cdot (S[n+m] + N[n+m])\}$$

$$= E\{S[n]S[n+m]\} + E\{N[n] \cdot N[n+m]\} + E\{S[n] \cdot N[n+m]\} + E\{N[n] \cdot S[n+m]\}$$

Febrero 1999 27-1-04

(P2)

$S[n]$ y $N[n]$ independientes:

$$= R_S[m] + \underbrace{E\{S[n]\}}_{0} \cdot E\{N[n+m]\} + E\{N[n]\} \cdot \underbrace{E\{S[n+m]\}}_{0} + R_N[m] =$$

x_1 es $U(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ $\quad$ x_2 $U(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$

$$= R_S[m] + R_N[m]$$

Cuentas: $C_X[n, n+m] = R_S[m] + R_N[m] - E\{S[n]\} \cdot E\{S[n+m]\} =$

$$= \underbrace{C_S[m]}_{\text{dato}} + R_N[m] = C_S[m] + \sigma_N^2 \delta[m]$$

$C_S[m]$ = dato

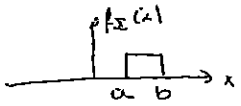
Esto lo tenemos que saber, pero que en el ruido blanco siempre es así.

$$\sigma_N^2 = V(N[n]) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{2}\right)^2}{12} = \frac{d^2}{12}$$

$$\rightarrow C_X[n, n+m] = C_S[m] + \frac{d^2}{12} \delta[m]$$

Nota: Varianza de una v.a. uniforme:

$$\sigma_N^2 = V(N[m]) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



→ Comprobación: $V[X] = E(X^2) - E(X)^2 =$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f_X(x)\, dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2}$$

$$V[X] = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}\right)^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} =$$

$$= \frac{4(b^3 - a^3) - 3(b-a)(b+a)^2}{12(b-a)} = \frac{4b^3 - 4a^3 - (3a^2 + 3b^2 + 6ab)(b-a)}{12(b-a)}$$

$$= \frac{b^3 - a^3 + 3a^2 b - 3ab^2}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12} \quad //$$

→ Sí es estacionario en sentido amplio porque sólo depende de m.

(c) $Y[n] = a\,X[n-1]$ a sol. Determine a para que la varianza de $S[n]-Y[n]$ sea mínima.

- $V(S[n]-Y[n]) = E\{(S[n]-Y[n])^2\} - E\{(S[n]-Y[n])\}^2$

- $E\{(S[n]-Y[n])\} = E\{S[n] - a\,X[n-1]\} = E\{S[n] - a\,S[n-1] - a\,N[n-1]\}$

$= E\{S[n]\} - a\,E\{S[n-1]\} - a\,E\{N[n-1]\} = \frac{1}{c} - a\frac{1}{c} - 0 = \frac{1}{c}(1$

- $E\{(S[n]-Y[n])^2\} = E\{(S[n])^2 + (Y[n])^2 - 2\,S[n]\cdot Y[n]\} =$

$= E\{(S[n])^2\} + E\{a^2(X[n-1])^2\} - 2\,E\{S[n]\,a\,X[n-1]\} =$

$= E\{(S[n])^2\} + a^2\,E\{(S[n-1]+N[n-1])^2\} - 2a\,E\{S[n]\cdot(S[n-1]+N[$

$= E\{(S[n])^2\} + a^2\,E\{(S[n-1])^2\} + a^2\,E\{(N[n-1])^2\} + 2a^2\,E\{S[n-1]\cdot N[n-1]\} -$

$- 2a\,E\{S[n]\cdot S[n-1]\} - 2a\,E\{S[n]\,N[n-1]\} =$

$\Rightarrow E(S[n]^2) = E\{S[n]\cdot S[n]\} = E\{S[n]\cdot S[n+0]\} = R_S[0]$

Entonces

$= R_S[0] + a^2 R_S[0] + a^2 R_N[0] + 2a^2\,E\{S[n-1]\}\cdot \underbrace{E\{N[n-1]\}}_{0} - 2a\,R_S[+1]$ Podríamos poner

$- 2a\,E\{S[n]\}\cdot \underbrace{E\{N[n-1]\}}_{0} = (1+a^2)R_S[0] + a^2 R_N[0] - 2a\,R_S[1]$

→ Retomamos:

$V(S[n]-Y[n]) = E\{(S[n]-Y[n])^2\} - E\{S[n]-Y[n]\}^2 =$

$= (1+a^2)R_S[0] + a^2 R_N[0] - 2a\,R_S[1] - \left[\frac{1}{c}(1-a)\right]^2 =$ valor mínimo

$= (1+a)^2 R_S[0] + a^2 R_N[0] - 2a\,R_S[1] - \left(E\{S[n]\} - a\,E\{S[n-1]\}\right)^2 =$

$= (1+a^2)\cdot R_S[0] + a^2 R_N[0] - 2a\,R_S[1] - E\{S[n]\}^2 - a^2 E\{S[n-1]\}^2 + 2a\,E\{S$

$E\{S[n]\} = E\{S[n-1]\}$

$= (1+a^2)\,R_S[0] + a^2 R_N[0] - 2a\,R_S[1] - (1+a^2)\,E\{S[n]\}^2 + 2a\,E\{S[n]\}\,E\{S[n-$

$= (1+a^2)\,C_S[0] + a^2 R_N[0] - 2a\,C_S[1] =$

$= (1+a^2)\,C_S[0] + a^2\frac{d^2}{12}\delta[0] - 2a\,C_S[1] = (1+a^2)\,C_S[0] + \frac{a^2 d^2}{12} - 2a\,C_S[1]$

→ Datos: $C_S[m] = R_S[m] - E(S[n])\cdot E(S[n+m])$.

③

Feb. 1999

P2

minimizamos $\frac{\partial V}{\partial a} = 2a\, C_s[0] + \frac{2ad^2}{12} - 2\, C_s[1]$

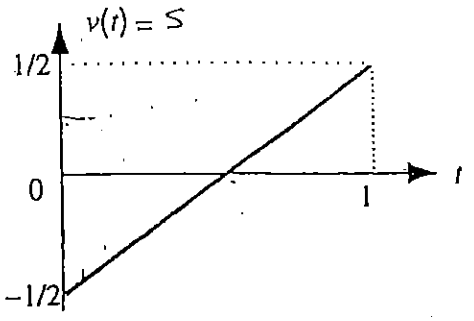
$= 2a\, C_s[0] + \frac{ad^2}{6} - 2\, C_s[1] = 0 \Rightarrow$

$$a = \frac{2\, C_s[1]}{2\, C_s[0] + \frac{d^2}{6}} = \frac{C_s[1]}{C_s[0] + \frac{d^2}{12}} \quad //$$

24/10/03

X Febrero 2000
Problema P1
TEMA 2

Sea el experimento consistente en generar la señal en rampa de la figura y obtener una medida $S = v(T)$, en un instante T aleatorio en el intervalo (0,1).



Seguidamente, la medida S se compara con un umbral $u(-1/2 < u < 1/2)$, obteniéndose la v.a. X definida como: $X = max(S,u)$.

a) Calcule $f_X(x)$, $F_X(x)$ y $E(X)$.
b) Suponga que ahora el umbral es una variable aleatoria U uniforme en (-1/2,1/2), de modo que $X = max(S,U)$. ¿Son las v.a.'s X y U independientes? Calcule $E(X)$.
c) Por último, suponga que se fija el umbral $u = 0$, de modo que $X = max(S,0)$ y se repite el experimento hasta que se verifica dos veces el suceso $\{X = 0\}$. Calcule el número medio de ensayos independientes necesarios.

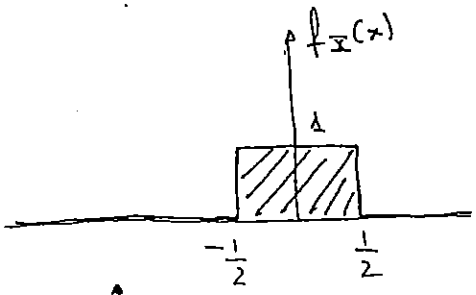
→ Primero lo hacemos sin umbral, xa comparar.

a1) sin umbral

La probabilidad se distribuye uniformemente entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ (se observa leyendo el enunciado). Por tanto, la f.d.p. es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} & \text{si } -\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow$$

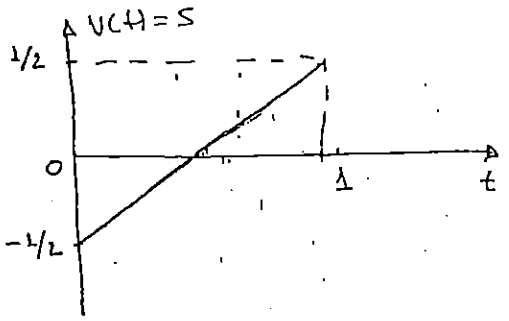
$$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$



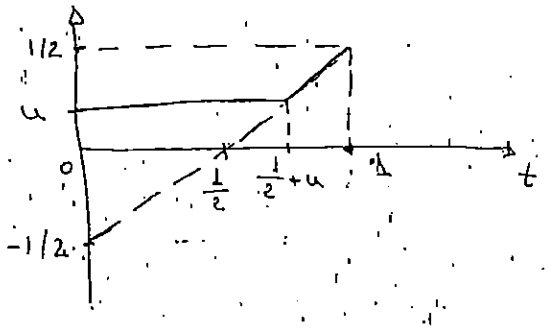
Esta es una v.a. ca

a2) con Umbral

CON UMBRAL



equivalente con umbral



- En este caso, el umbral va a tener más probabilidad q los demás puntos en ese punto (u) la probabilidad va ser grande...

- Para los puntos situados entre $\frac{1}{2} + u < t < 1$ la probabilidad se sigue distribuyendo uniformemente (igual q antes sin umbral).

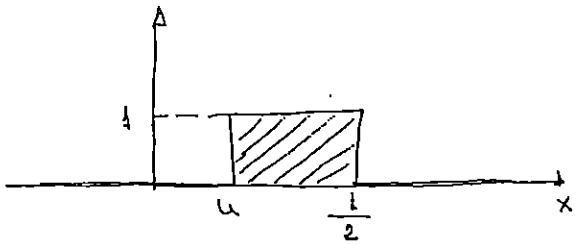
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2} + u\right)}{\frac{1}{2} - u} & \text{si } u < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } u < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$\Downarrow$

xo esto no es la f.d.p. xq le falta un punto, y además

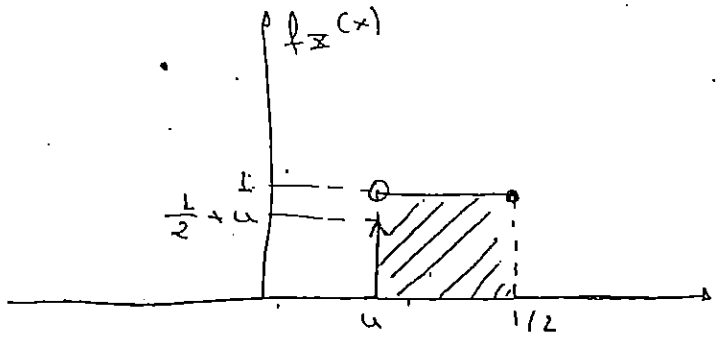
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_u^{1/2} dt = \frac{1}{2} - u \neq 1$$



- A la f.d.p le falta añadirle el punto $x = u$ con probabilidad no nula

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 + u & \text{si } x = u \\ 1 & \text{si } u < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

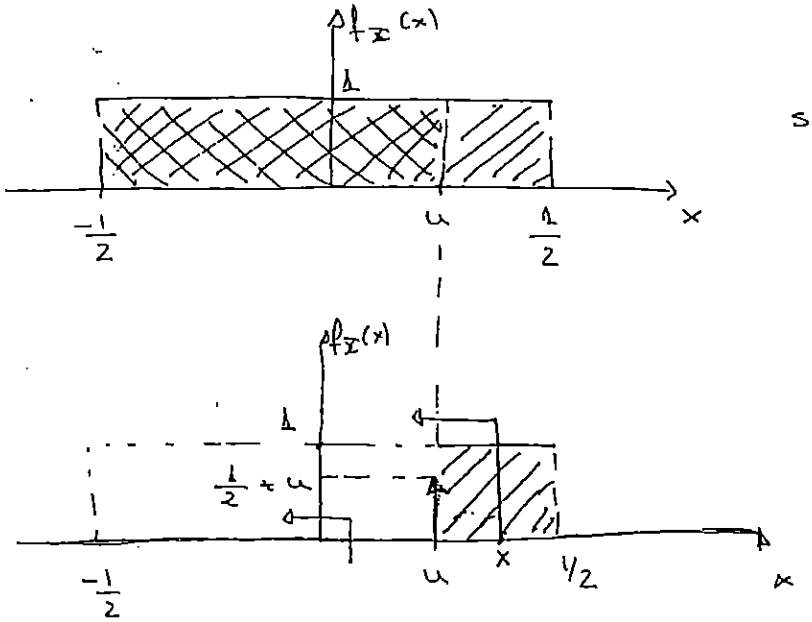
Entonces el gráfico queda:



En este caso, sí es la f.d.p., como comprobaremos ahora:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{u}^{1/2} 1\,dt + P(X=u) = \frac{1}{2} - u + \frac{1}{2} + u = 1 \text{ //.}$$

→ Vamos a comparar los dos casos (con ó sin umbral).



→ Calculamos la $F_X(x)$:

· Si $x < u$ $\quad F(x) = \boxed{0}$

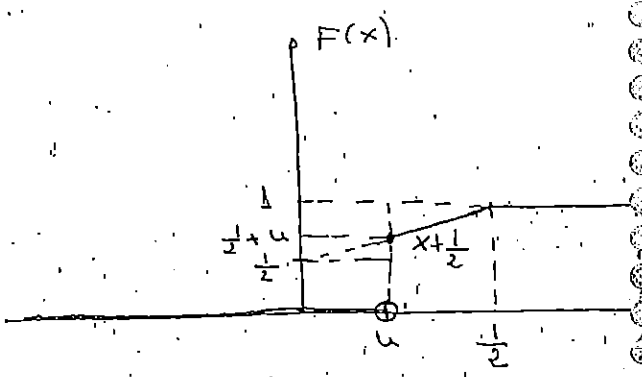
· Si $u \leq x < \frac{1}{2}$ $\quad F(x) = \int_{t=u}^{t=x} 1 \cdot dt + P(X=u) = \left[t\right]_u^x + \frac{1}{2} + u =$

$$= x - u + \frac{1}{2} + u = \boxed{x + \frac{1}{2}}$$

· Si $x > 1$ $\quad F(x) = 1$ //

Entonces:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < u \\ x + \frac{1}{2} & \text{si} \quad u \underset{f_1}{\leq} x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \end{cases}}$$



- $$\boxed{E(X)} = \underbrace{\int_u^{1/2} x \cdot f_X(x)\,dx}_{\text{Continua}} + \underbrace{u \cdot p_X(X = u)}_{\text{Discreta}} = \int_u^{1/2} x \cdot 1\,dx + u\left(u + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_u^{1/2} + u\left(u + \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{u^2}{2} + u^2 + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}$$

X 31/10/03

Febrero 1997
Ejercicio P2

Sea X una v.a. con fdp:

$$f_X(x) = \frac{1}{1-x} \quad (0 < x < b)$$

siendo b una constante positiva. Se pide:
a) El valor de b y la media de X.
b) Se define la v.a.:

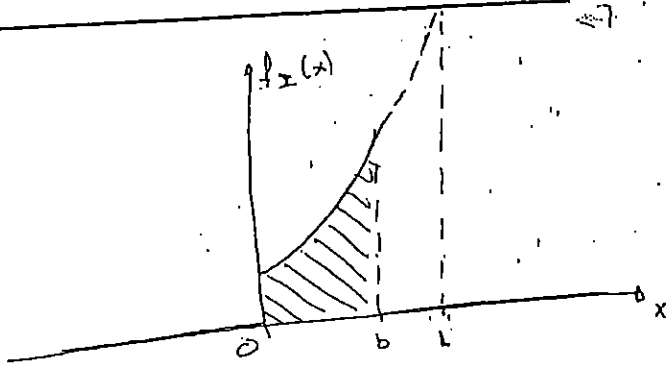
$$Y = c\ln\left(\frac{a}{1-X}\right)$$

siendo a y c constantes positivas. Caracterice probabilísticamente la v.a. Y.

Gordillo, Pablo, Guapo, Provisional

X v.a. continua...

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & 0 < x < b \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$0 < b < 1$.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

$$\int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = 1 \rightarrow \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = -\int_0^b \frac{-1}{1-x}\,dx \rightarrow -\left[\ln(1-x)\right]_0^b =$$

$$= -\left(\ln(1-b) - \underbrace{\ln(1-0)}_{0}\right) = -\ln(1-b) = 1.$$

Entonces: $\ln(1-b) = -1$; $e^{\ln(1-b)} = e^{-1} \rightarrow 1-b = e^{-1}$; $\boxed{b = 1-e^{-1}}$

→ Media de X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{1-e^{-1}} x \cdot \frac{1}{1-x}\,dx = \int_0^{1-e^{-1}} \frac{x+1-1}{1-x}\,dx =$$

$$= \int_0^{1-e^{-1}} \left(\frac{x-1}{1-x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = \int_0^{1-e^{-1}} \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)dx = \left[-x\right]_0^{1-e^{-1}} + \left[-\ln(1-x)\right]$$

$= -1 + e^{-1} - \ln(1 - 1 + e^{-1}) = e^{-1} - 1 - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1} - 1 - (\ln 1 - \ln e) =$

$= e^{-1} - 1 + 1 = e^{-1}$ //

→ 7/11/03

b) $Y = c \ln\left(\frac{a}{1-X}\right) \qquad a, c > 0$

X v.a. continua → Y v.a. continua.

$\varphi(x) = c \ln\left(\frac{a}{1-x}\right)$ es estrictamente creciente, continua, derivable, tiene inversa φ^{-1} continua y derivable.

→ Calculamos la inversa:

$y = c \cdot \ln\left(\frac{a}{1-x}\right) \Rightarrow \frac{y}{c} = \ln\left(\frac{a}{1-x}\right) \Rightarrow e^{y/c} = \frac{a}{1-x}$; $e^{y/c}(1-x) = a$;

$e^{\ln b} = b$

$e^{y/c} - x e^{y/c} = a$; $\frac{e^{y/c} - a}{e^{y/c}} = x$; $x = 1 - \frac{a}{e^{y/c}}$

$$\boxed{\varphi^{-1}(y) = 1 - a e^{-y/c}}$$

$[\varphi^{-1}(y)]' = 0 - a\left(-\frac{1}{c}\right) e^{-y/c} \Rightarrow [\varphi^{-1}(y)]' = \frac{a}{c} \cdot e^{-y/c}$

→ Lo sustituimos en la fórmula

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left|(\varphi^{-1})'(y)\right| = \frac{1}{1 - (1 - a e^{-y/c})} \cdot \left|\frac{a}{c} \cdot e^{-y/c}\right|$$

$f_X(x) = \frac{1}{1-x}$

Los términos son siempre positivos
· $a, c > 0 \Rightarrow$ DATO
· $e^{-y/c} > 0 \Rightarrow$ sig

$$= \frac{1}{\cancel{a} e^{-y/c}} \cdot \frac{\cancel{a}}{c} e^{-y/c} = \frac{1}{c} \quad \text{si } y \in R_Y$$

$f_Y(y) = 0$ si $y \notin R_Y$; Entonces: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{c} & \text{si } y \in R_Y \\ 0 & \text{si } y \notin R_Y \end{cases}$

· ¿Cuál es el rango de y R_Y? Para calcularlo le damos los valores extremos del R_X así hallar R_Y, con esos dos valores extremos. Se puede hacer x transformación a

$R_X = \left(0, 1 - \frac{1}{e}\right)$

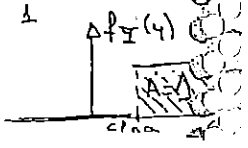
· Si $x = 0$; $y = c \ln\left(\frac{a}{1-0}\right) = c \ln a$

· Si $x = 1 - e^{-1}$; $y = c \ln\left(\frac{a}{1 - (1 - e^{-1})}\right) = c \ln\left(\frac{a}{e^{-1}}\right) =$

$= c \ln(a \cdot e) = c(\ln a + \underbrace{\ln e}_{1}) = c(\ln a$

Por tanto:

$R_Y = (c \ln a, c \ln a + c)$; $\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{c} & \text{si } c \ln a < y < c \ln a + c \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$



X 31/10/03

Junio 97
Ejercicio T1

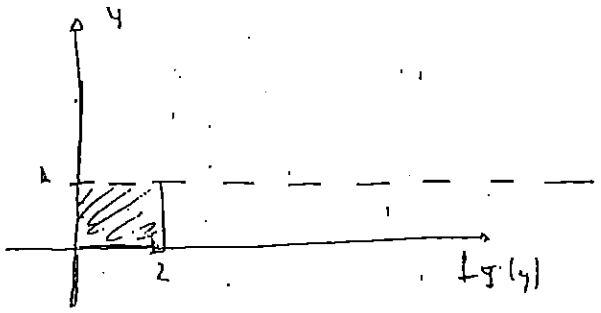
Sea X una v.a. aleatoria uniforme en el intervalo (-2, 2), a la cual se le aplica la transformación:

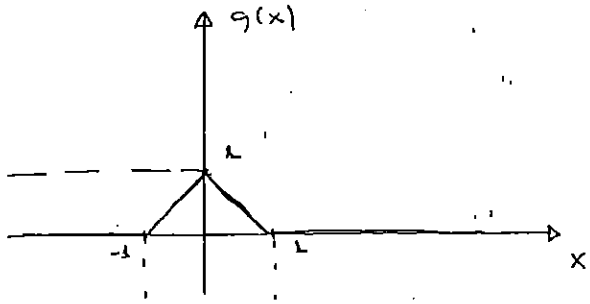
$$g(x) = \begin{cases} 1-|x| & (|x|<1) \\ 0 & (|x|\geq 1) \end{cases}$$

Se pide:
a) Calcule la f.d.p. de la v.a. Y = g(X)
b) Calcule la media y la varianza de Y

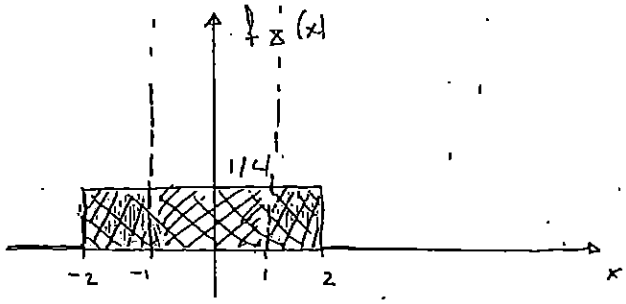
$X \sim U(-2,2)$

(a)





$$\rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } -2<x<2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$$\rightarrow g(x) = \begin{cases} 1-|x| & (|x|<1) \\ 0 & (|x|\geq 1) \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 1-(-x) & -1<x<0 \\ 1-x & 0<x<1 \\ 0 & |x|\geq 1 \end{cases}$$

Quitamos valores absolutos

si $x<0$ $|x| = -x$

$$\cdot\ g(x) = \begin{cases} 1+x & -1<x<0 \\ 1-x & 0<x<1 \\ 0 & |x|\geq 1 \end{cases}$$ (La dibujamos arriba)

→ En este caso ocurre como en los casos de transformar una v.a continua, una mixta.

Por ello hay como dos zonas: una verde (entre $-\infty < x < -1$, y $1<x<\infty$, es decir, cuando $|x|\geq 1$), y otra azul (cuando $|x|<1$).

→ Calculamos ... $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x_1)}{|\varphi'(x_1)|} + \dfrac{f_X(x_2)}{|\varphi'(x_2)|} & \text{si } y \in R_Y \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \varphi'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

- Calculamos las preimágenes, xa sustituir en la fórmula de $f_Y(y)$:

$y = 1 + x \Rightarrow x_1 = y - 1$

$y = 1 - x \Rightarrow x_2 = 1 - y$

Nota: En este caso no era necesario calcular las preimágenes, xq $f_X(x)$ y $\varphi'(x)$ constantes.

- Ahora sustituimos:

$$f_Y(y) = \frac{1/4}{1} + \frac{1/4}{+1} = \frac{1}{2}$$

valor absoluto

Entonces: $f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } y \in R_Y \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

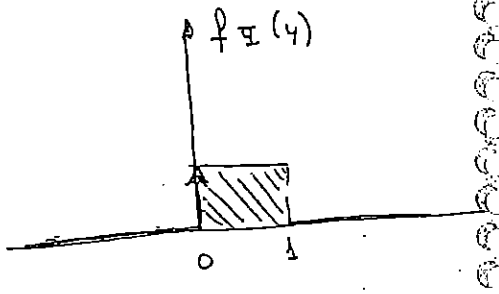
→ Ahora calculamos la $f_Y(y)$ xa los x, tales que $|x| \geq 1$:

→ $P(Y = 0) = \int_{-2}^{-1} f_X(x)dx + \int_{1}^{2} f_X(x)dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (valor de la δ).

$Y = 0$ → Es el punto discreto, donde hay una δ.

- Por tanto, la f d.p de Y queda:

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$



$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = 1$ (como debe ser f d.p).

$\Downarrow$

$\int \frac{1}{2} dy + P(Y = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Cont. Problema Junio 97 (Ejercicio 1a)

(b) Calcule la media y la varianza de Y.

Y es una v.a. mixta, x ello no podemos usar sólo la fórmula de continua

→ Media:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy \quad \rightarrow \text{v.a. continua.}$$

pto donde está la δ (delta)

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot f_Y(y)\,dy + \underbrace{0 \cdot P(Y=0)}_{\downarrow \text{x ser mixta}} = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2}\,dy + 0 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{y^2}{2}\Big]_0^1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} //$$

→ Varianza:

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 f_Y(y)\,dy + 0^2 \cdot P(Y=0) = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{2}\,dy + 0^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} //$$

$$V(Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{5}{48} //$$

Varianza: $V(Y) = \frac{5}{48} //$

7/11/03

Septiembre 1998
Ejercicio T1

Sea X una v.a. uniforme en el intervalo (0, 1) sobre la cual se realiza la transformación $Y = g(X)$. Se pide:

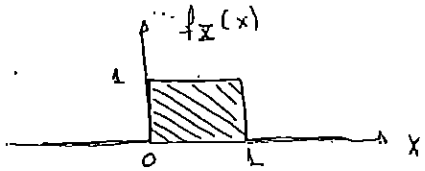
a) La función $g(X)$ para que la F.D. de Y sea $F_Y(y) = -y(y-2)$ en $0<y<1$

b) Calcule E(Y) y E(XY).

• En este problema nos piden la transformación, $g(X)$.

$X \sim U(0,1)$

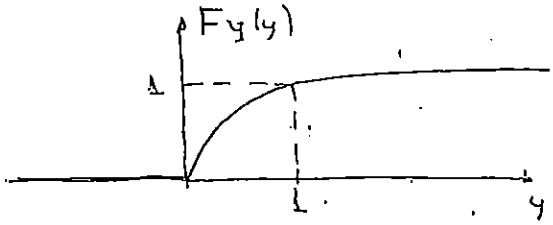
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



→ (a) $F_Y(y) = -y(y-2)$ en $0<y<1$

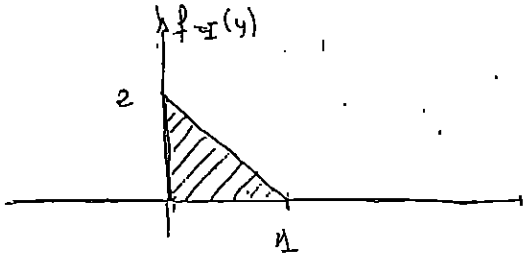
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0 \\ -y^2+2y & \text{si } 0<y<1 \\ 1 & \text{si } y>1 \end{cases}$$

Porque es una función de distribución



• Relación entre F_D y fdp.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



En nuestro caso:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = -2y+2$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} -2y+2 & \text{si } 0<y<1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

→ ¿$Y = g(X)$? Supuesto $g(x)$ estrictamente creciente.

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1})'(y)| \quad \text{si } y \in R_Y$$

$f_X(g^{-1}(y)) = 1$ (ver $f_X(x)$ arriba).

• Sustituyo:

$$\underbrace{-2y+2}_{f_Y(y)} = 1 \cdot |(g^{-1})'(y)| \Rightarrow -2y+2 = |(g^{-1})'(y)| \underset{0<y<1}{\Rightarrow} -2y+2 = (g^{-1})'$$

$$\Rightarrow \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = -2y+2 \Rightarrow dg^{-1}(y) = (-2y+2)\,dy;$$

$$\int dg^{-1}(y) = \int (-2y+2)\,dy \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{-2y^2}{2} + 2y + C \Rightarrow \boxed{g^{-1}(y) = -y^2 + 2y + C}$$

· Ahora calculamos $g(x)$, suponiendo $C=0$, ya q es una $g^{-1}(y)$ cualquiera, y la cte puede ser cq. número. Nosotros cogemos una $g^{-1}(y)$ concreta ($C=0$).

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = -y^2 + 2y; \quad x = -y^2 + 2y; \quad y^2 - 2y = -x; \quad y^2 - 2y + x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Resolvemos xa coger y en función de x:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4-4x}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-x}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-x}$$

Calculamos la derivada xa ver con qué signo es creciente o decre

Entonces:

$$y = 1 \pm \sqrt{1-x} = g(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0 \Rightarrow g(x) \text{ decreciente. (si cogemos el signo +)}$$

De aquí nos quedamos con la estrictamente creciente (como suponíamos al principio);

Entonces: $\boxed{g(x) = 1 - \sqrt{1-x}}$ Creciente $\qquad g(x) = 1 + \sqrt{1-x} \Rightarrow$ decreciente

(b) ¿$E(Y)$ y $E(X \cdot Y)$?

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y(-2y+2)\,dy = \int_0^1 (-2y^2 + 2y)\,dy = \left[-2\frac{y^3}{3} + \frac{2y^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

· Otra forma de calcularla es:

$$E(g(X)) \equiv E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1-x}\right) \cdot 1\,dx = [x]_0^1$$

$$- \left[-\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = (1-0) - \left(0 + \frac{1}{\frac{3}{2}}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{Sale el resultado}$$

$E(XY)$ → Más adelante la hacemos la bestia loca

7/11/03

Septiembre 1996
Ejercicio P1

Un lote de N componentes contiene N_1 componentes defectuosos y N_2 componentes correctos ($N = N_1 + N_2$). Se seleccionan al azar y sin reemplazamiento n componentes del lote ($n<<N_1$ y $n<<N_2$). Obtenga:

a) Una expresión exacta para la probabilidad de que no se obtenga más de un componente defectuoso.

b) Una expresión aproximada para dicha probabilidad basada en la distribución binomial. Particularice los resultados para $N_1 = 30$, $N_2 = 70$ y $n = 5$.

1.- N < N_1 comp. defectuosos ; N_2 comp. correctos.

$N = N_1 + N_2$; $\underbrace{n<<N_1 \ , \ n<<N_2}$

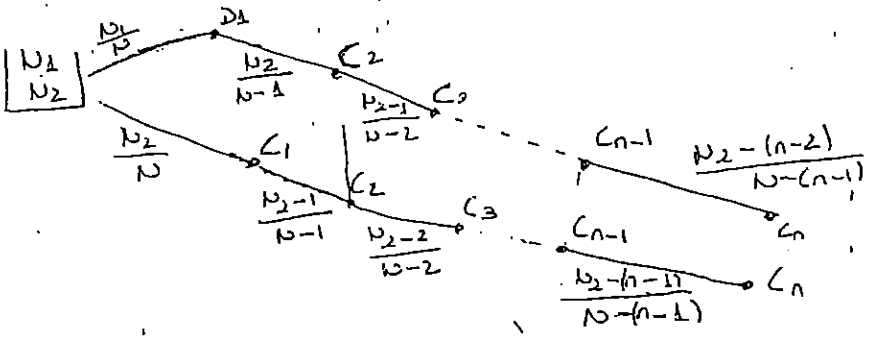
Suponemos q al sacar 1 componente, no se, nota casi

a) Al decirnos "exacta", no podemos suponer que, como $n<<N_1$ y $n<<N_2$, al sacar 1 componente, no modifica nada. Es decir, q tendremos en cuenta todos los componentes sacados.

$X \equiv$ "n^{o} componentes defectuosos seleccionados"

¿ $P(X \leq 1)$?

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$



$$P(X=0) = \frac{N_2}{N} \cdot \frac{N_2-1}{N-1} \cdot \frac{N_2-2}{N-2} \cdot \ldots \cdot \frac{N_2-(n-1)}{N-(n-1)} =$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{N_2-i}{N-i}$$

$P(X=1)$ → Todos los caminos q sacan 1 bola defectuosa, y todas las de correctas.

$$P(X=1) = \left(\frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_2}{N-1} \cdot \frac{N_2-1}{N-2} \cdot \ldots \cdot \frac{N_2-(n-2)}{N-(n-1)}\right) n =$$

xq hay n cas distintos xa una defect

$$= n \frac{N_1}{N} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{N_2-i}{N-i-1}$$

$$\boxed{P(X \le 1) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{N_2 - i}{N - i} + n \cdot \frac{N_1}{N} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{N_2 - i}{N - i - 1}}$$

(b) 21/11/03

Lo hacemos x una distribución binomial, ya q se cumplen las 3 condiciones de la binomial, x q las bolas son siempre las mismas en cada extracción.

Ahora, las probabilidades son distintas. Es como si fuera con reemplazamiento

Ej. de Binomial. $\left\{ \begin{array}{l} \text{exp. } n \text{ veces} \checkmark \\ 2 \text{ opciones} \checkmark \\ \text{prob. ctes} \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow$ Binomial. $B(n, p)$

Pero en este caso: $\left\{ \begin{array}{l} \text{exp } n \text{ veces} \checkmark \\ 2 \text{ opciones} \checkmark \\ \text{prob constantes } X \end{array} \right.$

$n = n$; $p = \frac{N_1}{N}$; $q = 1 - p = \frac{N_2}{N}$

$x = 1$

$$P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1}$

$$P(X \le 1) = \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \underbrace{\binom{n}{0} p^0 q^{n-0}}_{P(X=0)} + \underbrace{\binom{n}{1} p^1 q^{n-1}}_{P(X=1)}$$

$$= q^n + n p \cdot q^{n-1} = \left(\frac{N_2}{N}\right)^n + n \left(\frac{N_1}{N}\right) \cdot \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n-1} = \frac{N_2^n + n N_1 N_2^{n-1}}{N^n}$$

Expresión Aproxim.

· Particularizamos con los datos numéricos, x a observar el error de aproximación

$N_1 = 30$; $N_2 = 70$ $n = 5$

→ Aproximada: $P(X \le 1) = \frac{70^5 + 30 \cdot 5 \cdot 70^4}{100^5} = \boxed{0{,}528}$

→ Exacta: $\frac{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67 \cdot 66}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} + 5 \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67}{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = \boxed{0{,}526}$

· Como se observa no hay diferencia

(R) 7/11/03

Junio 96
Ejercicio P2

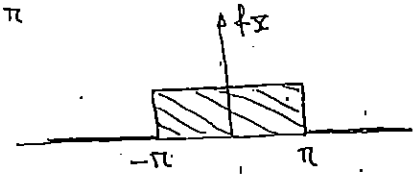
Sea X una v.a. uniforme en $[-\pi,\pi]$, se define la v.a. $Y = \text{sen}(X + \varphi)$, con $\varphi = cte$.
Dicha v.a. sufre un proceso de saturación, dando la v.a. $Z = \text{arctg}(aY)$ siendo $a > 1$.

a) Determine $f_Z(z)$

b) Justifique qué tipo de v.a. es Z para $a \to \infty$ y determine la varianza de Z. (Sugerencia: esboce la función $u = \text{arctg}(v)$)

c) Obtenga $f_Z(z)$ para $a \to \infty$.

X v.a. uniforme: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$



→ Hay dos transformaciones:

① $Y = \text{sen}(X + \varphi)$ $\varphi \in \mathbb{R}$

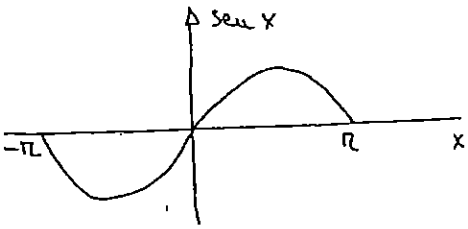
② $Z = \text{arctg}(aY)$ $a > 1$

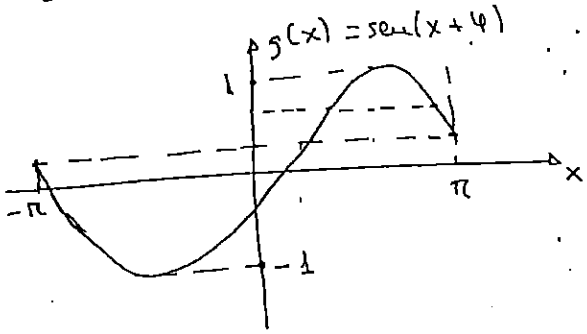
→ a) ¿$f_Z(z)$?

① Primero calculamos la primera transformación.

$g(x) = \text{sen}(x + \varphi)$ transformación no estrictamente creciente entre $-\pi$,

⇒ Tenemos q aplicar el teorema general.





Como se observa no es estrictamente creciente ⇒ T. h. general

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dfrac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} & \text{si } y \in R_Y \\ 0 & \text{si } y \notin R_Y \end{cases}$$

$|g'(x_1(y))|$

· Calculamos los parámetros necesarios:

$g(x) = \text{sen}(x + \varphi) \Rightarrow g'(x) = \cos(x + \varphi) \Rightarrow g'(x) = \sqrt{\cos^2(x+\varphi)} \Rightarrow$

Aplicamos: $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$; $\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2}$

$\Rightarrow g'(x) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(x+\varphi)} \Rightarrow g'(y) = \sqrt{1 - y^2}$

$y = \text{sen}(x + \varphi)$ · Con este cambio, no calcular las primitivas

· $f_X(x_1) = \frac{1}{2\pi}$ $\quad f_X(x_2) = \frac{1}{2\pi}$ $\Rightarrow$ Hice enunciado.

NOTA: En este ejercicio no se necesita calcular las preimágenes, x_1, x_2 xq se necesitan 2 preimágenes.

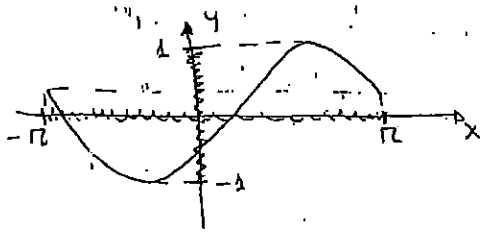
"Sustituimos":

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2\pi}}{|\sqrt{1-y^2}|} + \dfrac{\frac{1}{2\pi}}{|\sqrt{1-y^2}|} & \text{si } y \in R_Y \\ 0 & \text{si } y \notin R_Y \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{si } y \in R_Y \\ 0 & \text{si } y \notin R_Y \end{cases}$$

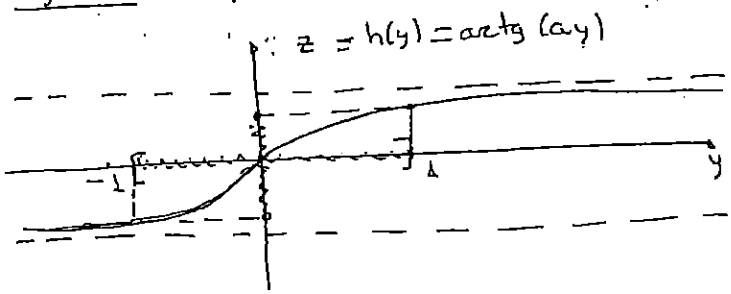
· ¿Rango de y, R_Y?

$R_X = (-\pi, \pi) \Rightarrow R_Y = (-1, 1)$.



② Aplicamos, ahora la segunda transformación

$z = \operatorname{arctg}(a \cdot Y)$



$h(y)$ es estrictamente creciente en $[-1, 1]$, continua, derivable, y tiene inversa

$h^{-1}(z)$ continua y derivable: Aplicamos teorema corto:

$$f_Z(z) = f_Y(h^{-1}(z)) \cdot |(h^{-1})'(z)|$$

→ Calculamos $h^{-1}(z)$; $(h^{-1})'(z)$ ... :

· $h(y) = \operatorname{arctg}(ay) \Rightarrow z = \operatorname{arctg}(ay) \Rightarrow \operatorname{tg} z = ay \Rightarrow y = \frac{1}{a} \operatorname{tg} z \Rightarrow \boxed{h^{-1}(z) = \frac{}{}}$

· $(h^{-1})'(z) = \frac{1}{a}(1 + \operatorname{tg}^2 z)$

→ Continuación: Junio 96 → Ejercicio P2

Sustituimos en la fórmula:

$$f_Z(z) = f_Y\left(h^{-1}(z)\right) \cdot \left|\left(h^{-1}\right)'(z)\right| = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\,tg\,z\right)^2}} \cdot \left|\frac{1}{a}\cdot(1+tg^2 z)\right|$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1+tg^2 z}{a\pi\sqrt{1-\left(\frac{tg\,z}{a}\right)^2}} & \text{si } z \in R_Z \\ 0 & \text{si } z \notin R_Z \end{cases}$$

¿Rango de z, R_Z?

· si $y = 1$, $z = arctg(a)$

· si $y = -1$; $z = arctg(-a) = -arctg(a)$

Resultado final:

$$\boxed{f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1+tg^2 z}{a\pi\sqrt{1-\frac{tg^2 z}{a^2}}} & \text{si } -arctg(a) < z < arctg(a) \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}}$$

· Otra forma de hacer la transformación $Y \to Z$ es usando el teorema gelo (pag.-

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{f_Y(y_1)}{|h'(y_1)|} & \text{si } z \in R_Z \\ 0 & \text{si } z \notin R_Z \end{cases}$$

→ sólo hay una preimagen de $h(y)$

donde y_1 es la única preimagen de $h(y)$

$$h(y) = arctg(ay) \Rightarrow z = arctg(ay) \Rightarrow tg\,z = ay \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{1}{a}\,tg\,z}$$

calculamos la preimag

$$h'(y) = \frac{a}{1+(ay)^2} = \frac{a}{1+a^2y^2} \Rightarrow h'(y_1) = \frac{a}{1+a^2\left(\frac{1}{a}\cdot tg\,z\right)^2} = \frac{a}{1+}$$

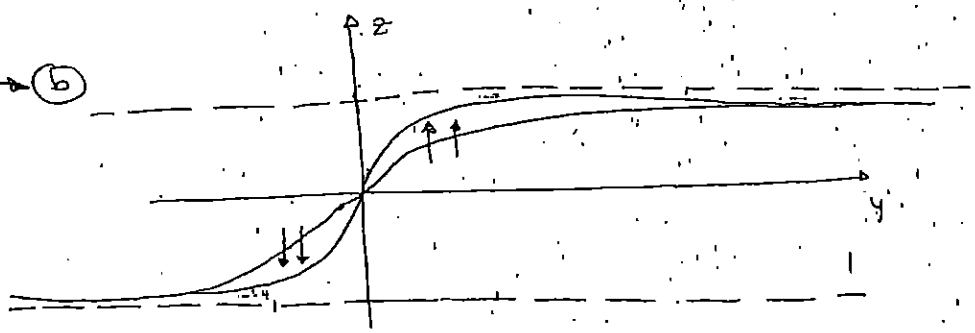
$$\Rightarrow f_Y(y_1) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{1}{a^2}tg^2 z}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{1}{a^2}tg^2 z}}$$

→ Sustituyendo en la expresión:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{1}{a^2}\,tg^2 z}}}{\left|\dfrac{a}{1+tg^2 z}\right|} & \text{si } z \in R_Z \\ 0 & \text{si } z \notin R_Z \end{cases}$$

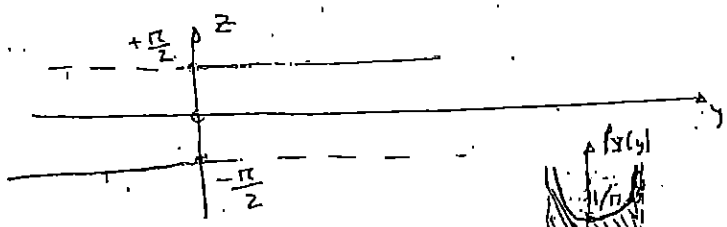
- Cuando tenemos una función estrictamente creciente, se pueden usar cualquiera de los dos teoremas.

→ (b)



A medida que la a aumenta ($\to \infty$), más vertical se hace la función entre los extremos del dominio de z.

$\Rightarrow$ $a \to \infty$



$tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$

$arctg(\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$

$arctg(0) = 0$

Como se desea Z es una v.a discreta, xq la probabilidad se concentra en unos puntos determinados.

Cuando $a \to \infty$, la transformación es continua → discreto

- $$P\left(Z = -\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-1}^{0} \underbrace{\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}}_{\text{Función por}} dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{1}{\pi}\left[\text{arcsen}\,y\right]_{-1}^{0}$$

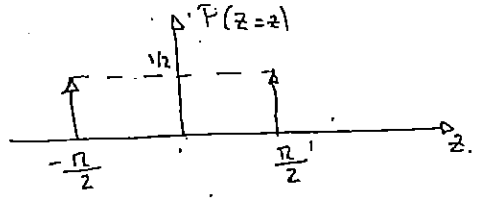
$$= \frac{1}{\pi}\left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

- $$P\left(Z = \frac{\pi}{2}\right) = \int_{0}^{1} \frac{1}{\pi\sqrt{y-y^2}}\,dy = \frac{1}{2}$$

- $P(Z = 0) = 0$

Continuación. Pto. Junio 96 — P_2

$$\boxed{P_Z(Z=z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } z = \pm\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}} \Leftrightarrow \boxed{P_Z(Z=z) = \frac{1}{2}\delta\left(z-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta(z}$$



Calculamos la varianza de Z:

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

$$E(Z) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$E(Z^2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 0^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

21/11/03 X

ETSI Telecomunicación

Septiembre 03
Ejercicio P1

Sean R y Φ dos variables aleatorias independientes tales que Φ es uniforme en $(0,2\pi)$ y R tiene una fdp:

$$f_R(r)=\frac{2r}{A^2} \quad r\in(0,A)$$

Siendo $A>0$ una constante. Sobre ellas se realiza la siguiente transformación:

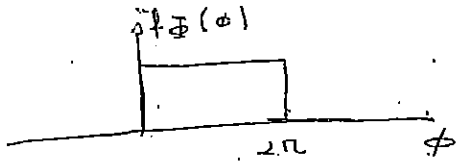
$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases}$$

Calcule:

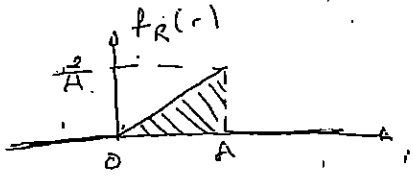
a) La fdp conjunta de X e Y. Dibuja su rango.
b) Las fdp's marginales de X e Y. ¿Son independientes?
c) La covarianza de X e Y ¿Están incorreladas?
d) $P\left(X^2+Y^2>\frac{A^2}{4}\right)$
e) $P\left(Y>\frac{A}{\sqrt{2}}\Big/X=\frac{A}{\sqrt{2}}\right)$

Notar $\Phi = \phi$.

$\phi \sim U(0,2\pi)$. $\quad f_\phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } 0<\phi<2\pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$



R, $\quad f_R(r) = \begin{cases} \frac{2r}{A^2} & r\in(0,A), \quad 0<r<A \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$



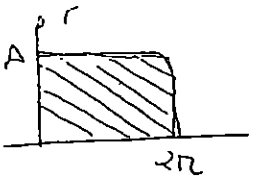
Son dos v.a. independientes.

Hallamos fdp conjunta $f_{\phi R}(\phi,r)$:

Como Φ y R son independientes sabemos que $f_{\phi R}(\phi,r) = f_R(r)\cdot f_\Phi(\phi)$

$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2r}{A^2} = \frac{r}{\pi A^2}$ si $0<r<A$, $0<\phi<2\pi$

Por tanto, $f_{\phi R}(\phi,r) = \begin{cases} \frac{r}{\pi A^2} & \text{si } 0<r<A,\ 0<\phi<2\pi \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$



(a) $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,\text{sen}\,\phi \end{cases}$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{f_{R\Phi}(r(x,y), \phi(x,y))}{|J|} \quad \text{si} \quad (x,y) \in R_{XY}$$

$\hookrightarrow J(r(x,y), \phi(x,y)) \rightarrow$ Tb se sustituye una función de las nuevas variables.

Calculamos las componentes:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\,\text{sen}\,\phi \\ \text{sen}\,\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\,\text{sen}^2\phi =$$

$$= r(\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi) = r(1) = r > 0$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\frac{r}{\pi A^2}}{r} = \frac{1}{\pi A^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \in R_{XY}$$

$\rightarrow$ Deberíamos sustituir r en función de x y de x_0 se ve con la r del denominador y hace falta resolver el sistema al dividir ya q no hace falta calcular r y ϕ en función de "x" y de "y".

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi A^2} & \text{si} \quad (x,y) \in R_{XY} \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin R_{XY} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Calculamos R_{XY}:

$0 < r < A \Rightarrow$

$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,\text{sen}\,\phi \end{cases}$

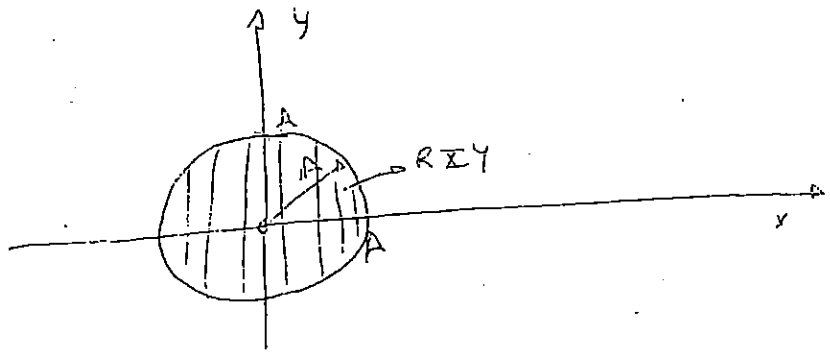
$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\phi + r^2\,\text{sen}^2\phi \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Entonces:

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < A \Rightarrow \boxed{0 < x^2 + y^2 < A^2}$$

$\rightarrow$ círculo de radio A.

$$R_{XY} = \{ (x,y) \in R^2 \ / \ x^2 + y^2 < A^2 \}$$



El rango era un rectángulo y ahora es un círculo radio A.

Sep 03 / Ejercicio P1.

Continuación

(b) fdp marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{A^2-x^2}}^{\sqrt{A^2-x^2}} \frac{1}{\pi A^2}\,dy = \frac{1}{\pi A^2}\int_{-\sqrt{A^2-x^2}}^{\sqrt{A^2-x^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi A^2}\left[y\right]_{-\sqrt{A^2-x^2}}^{\sqrt{A^2-x^2}} = \frac{1}{\pi A^2}\left(\sqrt{A^2-x^2} - \left(-\sqrt{A^2-x^2}\right)\right) = \frac{2\sqrt{A^2-x^2}}{\pi A^2}$$

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{A^2-x^2}}{\pi A^2} & \text{si } -A < x < A \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

$x = A\cos\theta$ $\quad (-1,1)$ $\quad x \in (-A,$

$y = A\sin\theta$

→ calculamos ahora la fdp de la Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{A^2-y^2}}^{\sqrt{A^2-y^2}} \frac{1}{\pi A^2}\,dx = \underbrace{\cdots}_{\text{Igual q la anterior}} = \frac{2\sqrt{A^2-y^2}}{\pi A^2}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{A^2-y^2}}{\pi A^2} & \text{si } -A < y < A \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

$x = 2\pi$, $\quad y = \pi$

$\int_{x=y}^{y=x^2}$

¿Son independientes?

Son independientes si $f_X(x)\cdot f_Y(y) = f_{XY}(x,y)$

Nota Si el rango es rectangulo ó cuadrado, sí son independientes, no si el rango es circular, rombo, ovoidal,... no son independientes.

En este caso $f_X \cdot f_Y = \dfrac{4\,(A^2-x^2)}{\pi^2 A^4} \neq f_{XY}(x,y) \Rightarrow$ No son independ

(c) ¿C_{XY}?

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-A}^{A} x\cdot\frac{2\sqrt{A^2-x^2}}{\pi A^2}\,dx = 0$$

integrando impar $f(-x) = -f(x)$
intervalo simétrico

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int_{-A}^{A} y\cdot\frac{2\sqrt{A^2-y^2}}{\pi A^2}\,dy = 0$$

$$E(XY) = \iint_{R_{XY}} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=-A}^{x=A} \int_{y=-\sqrt{A^2-x^2}}^{y=\sqrt{A^2-x^2}} xy \cdot \frac{1}{\pi A^2}\,dx\,dy =$$

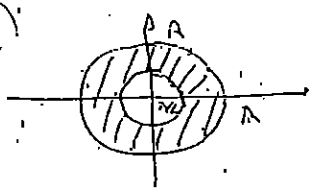
$$= \frac{1}{\pi A^2} \int_{-A}^{A} \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=-\sqrt{A^2-x^2}}^{y=+\sqrt{A^2-x^2}} dx = \frac{1}{2\pi A^2} \int_{-A}^{A} x \left((\sqrt{A^2-x^2})^2 - (-\sqrt{A^2-x^2})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi A^2} \int_{-A}^{A} x \left[A^2 - x^2 + A^2 + x^2 \right] dx = \frac{1}{2\pi A^2} \int_{-A}^{A} x\,[0]\,dx = 0$$

$$C_{XY} = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 0 \cdot 0 = 0]$$

$\boxed{X, Y \text{ son incorrelados}}$

(d) $P\left[X^2 + Y^2 > \frac{A^2}{4} \right] = \left(\frac{A}{2}\right)^2$



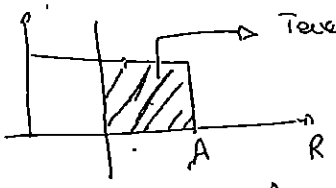
$X^2 + Y^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow$ Circunferencia de radio $\frac{A}{2}$

No piden calcular la probabilidad de esa corona circular.

Pasamos a polares: $R^2 = X^2 + Y^2 \Rightarrow P\left(R^2 > \frac{A^2}{4}\right) = P\left(R > \frac{A}{2}\right)$

El problema se reduce a calcular $P\left(R > \frac{A}{2}\right)$. Para ello volvemos al rango antiguo $R_{R\Phi}$.



Tenemos q calcular el rango de este segmento

$$P\left(R > \frac{A}{2}\right) = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{r=\frac{A}{2}}^{A} \underbrace{\frac{r}{\pi A^2}}_{f_{R\Phi}(r,\phi)} dr\,d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi \int_{r=\frac{A}{2}}^{A} \frac{r}{\pi A^2}\,dr =$$

$$= \frac{1}{\pi A^2} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi \int_{A/2}^{A} r\,dr = \frac{1}{\pi A^2} \left[\phi \Big]_0^{2\pi} \cdot \frac{r^2}{2} \Big]_{\frac{A}{2}}^{A} \right] = \frac{1}{\cancel{\pi} A^2} \cdot 2\cancel{\pi} \cdot \left(\frac{A^2}{2} - \right.$$

$$= \frac{1}{\cancel{A^2}} \cdot 2 \cdot \frac{3\cancel{A^2}}{\cancel{8}} = \frac{3}{4}]$$

Tambien lo podríamos haber hecho hallando la probabilidad en la corona usando X e Y, lo sería más complicado.

$\rightarrow$ Nota: Si nos piden la prob. de algo en lo que está implicada una sólo variable ($P\left(R > \frac{A}{2}\right)$), lo tenemos q hacer con la fdp total; y sólo podremos hacerlo con ... las variables (Φ y R) en este caso) son independientes

Sep 03 P1

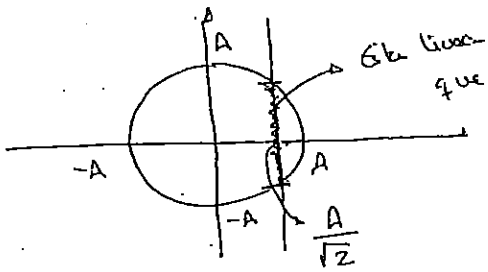
Continuación.

(e) $P\left[Y > \frac{A}{\sqrt{2}} \;/\; X = \frac{A}{\sqrt{2}}\right]$ fdp de Y condicionada a X.

$$f_X(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi A^2}}{\frac{2\sqrt{A^2 - x_0^2}}{\pi A^2}} = \frac{1}{2\sqrt{A^2 - x_0^2}} =$$

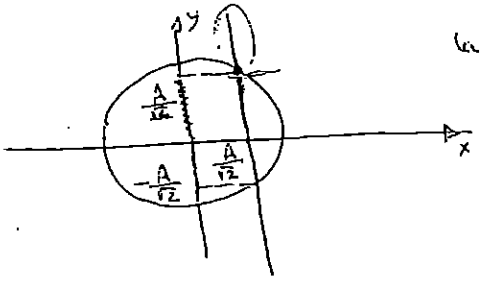
$$= \frac{1}{2\sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{A^2 - \frac{A^2}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{A^2}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}} A} = \frac{\sqrt{2}}{2A}$$



Esta línea es la que tiene ahora probabilidad total, ya que estamos suponiendo $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$

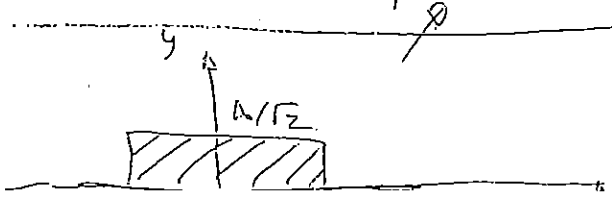
→ Y si ahora, nos preguntan por la $P\left(Y > \frac{A}{\sqrt{2}} \;/\; X = \frac{A}{\sqrt{2}}\right)$, calculamos el "tacito de del rango" gráficamente.



la zona en la que tenemos que calcular la probabilidad, es la zona donde $y > \frac{A}{\sqrt{2}}$, lo que se observa que es 0.

→ El rango de Y tb se condiciona en este caso a valer $-\frac{A}{\sqrt{2}} < y < \frac{A}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{f_Y\left(y \mid x = \frac{A}{\sqrt{2}}\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2A} & \text{si } -\frac{A}{\sqrt{2}} < y < \frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$



NOTA: Siempre y nos pidan, probabilidad condicionada o marginal tenemos que calcular el rango

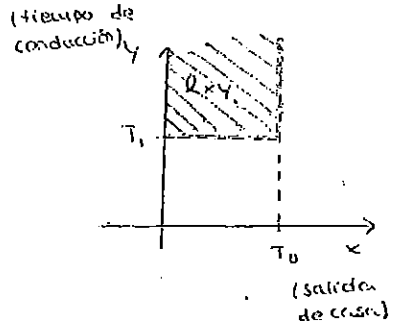
Febrero 99
Ejercicio P1

El tiempo de conducción que tarda una persona en llegar a su trabajo en coche es una variable aleatoria Y. La hora de salida de su casa también es una variable aleatoria X. Se sabe además, que hay un tiempo mínimo de conducción igual a T_1. Si la f.d.p. conjunta es $f_{XY}(x,y)=(1/T_0)\exp[-(y-T_1)]$ en $0<x<T_0$ e $y>T_1$, se pide:

a) La f.d.p.'s marginales de X e Y.
b) El tiempo medio de conducción y la hora media de llegada al trabajo supuesto que se ha salido a la hora $T_2\,(0<T_2<T_0)$.
c) La probabilidad $P\{Y>X+T_1\}$

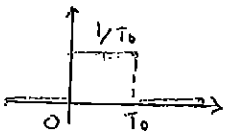
a)

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{T_0}e^{-(y-T_1)} & 0<x<T_0 \quad y>T_1\\ 0 & \text{resto.}\end{cases}$$



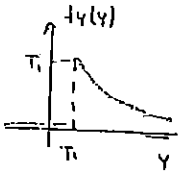
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\int_{y=T_1}^{\infty}\frac{1}{T_0}e^{-(y-T_1)}\,dy=\left[\frac{-1}{T_0}e^{-(y-T_1)}\right]_{T_1}^{\infty}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{T_0} \Rightarrow \boxed{f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{T_0} & \text{si } 0<x<T_0\\ 0 & \text{si resto.}\end{cases}}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx=\int_{x=0}^{x=T_0}\frac{1}{T_0}e^{-(y-T_1)}\,dx=\frac{x}{T_0}e^{-(y-T_1)}\Big]_0^{T_0}$$

$$f_Y(y)=e^{-(y-T_1)} \qquad \boxed{f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-T_1)} & \text{si } y>T_1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}}$$



b) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{T_1}^{\infty} y\, e^{-y+T_1}\, dy = \left[\begin{array}{l} u = y \Rightarrow du = dy \\ v = e^{-y+T_1} \Rightarrow dv = -e^{-y+T_1} \end{array}\right] =$

$= T_1 + 1$

$$\boxed{E(Y) = T_1 + 1}$$

$Z = X + Y$ $\quad$ Z: " Hora de llegada al trabajo ".

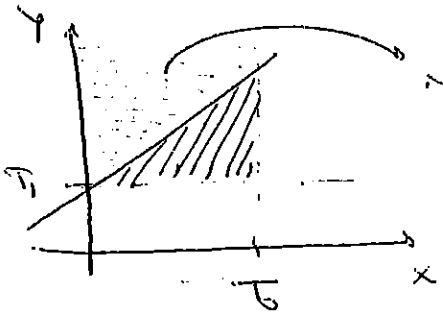
$E(Z/X = T_2) = E(X + Y / X = T_2) = E(T_2 + Y / X = T_2) = E(T_2 + Y) =$

$= E(T_2) + E(Y) = T_2 + E(Y) = T_2 + T_1 + 1$

X e Y son independientes
xq $f_X(x) f_Y(y) = f_{XY}(x\, y)$
ad+ su rango es un cuadrado.

$$\boxed{E(Z/X = T_2) = T_2 + T_1 + 1}$$

$P\{Y > X + T_2\}$ $\quad$ $Y = X + T_1$ → recta que pasa por T_1 con pendiente 1.



Nos piden la probabilidad aquí.

$$P(Y > X + T_1) = \int_{x=0}^{x=T_0} \left(\int_{y=x+T_1}^{\infty} \frac{1}{T_0} \cdot e^{-(y-T_1)}\, dy \right) dx$$

$$= -\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[e^{-(y-T_1)} \right]_{y=x+T_1}^{\infty} dx = -\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} -e^{-(x+\cancel{T_1}-\cancel{T_1})}\, dx$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-x}\, dx = -\frac{1}{T_0} \left[e^{-x} \right]_0^{T_0} = \frac{-1}{T_0} \left[e^{-T_0} - 1 \right]$$

$$= \frac{1 - e^{-T_0}}{T_0}$$

21/11/03

Febrero 2001
Problema P1

Sea un sistema de comunicaciones con un ancho de banda limitado a C unidades y un usuario que solicita X unidades del mismo. El sistema tiene ocupadas Y unidades (independientes de X) y el gestor de asignación de ancho de banda asigna $Z = g(X,Y)$ unidades. Si X es una v.a. uniforme en el intervalo $0 < x < B$ $(B > C)$ e Y una v.a. uniforme en el intervalo $0 < y < C$, se pide:

a) El ancho de banda del sistema, C, para que $P\{X > C\} < 1\%$.

b) El ancho de banda del sistema, C, para que $P\{X + Y > C\} < 1\%$.

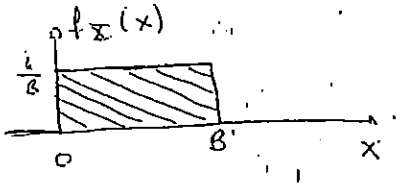
c) Si $g(x,y) = \begin{cases} x \ ; & 0 < x < C - y \\ 0 \ ; & resto \end{cases}$, la relación entre C y B, para que las v.a.'s X y Z sean incorreladas.

$X \equiv$ "Nº de unidades de ancho de banda solicitado por un usuario"

$Y \equiv$ "Nº de unidades de ancho de banda ocupado"

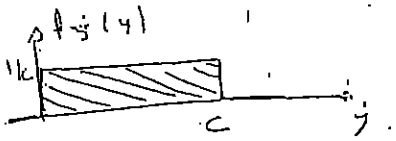
$X \sim U(0,B)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/B & \text{si } 0 < x < B \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$Y \sim U(0,C)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/C & \text{si } 0 < y < C \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

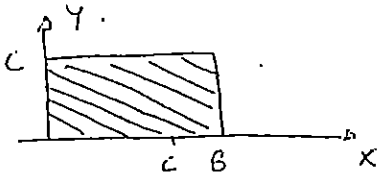


Tenemos q calcular la fdp conjunta $f_{XY}(x,y)$.

X e Y son independientes.!!! $\Rightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{C} \quad \text{si } 0 < x < B, \ 0 < y < C$$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{BC} & \text{si } 0 < x < B, \ 0 < y < C \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$$



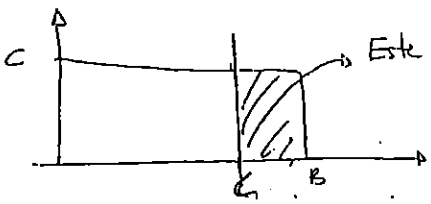
Va. bidimensional de distribución uniforme, ya q es un valor cte, q no depende de "x" ni de "y"

(a) $P(X > C) < 0{,}01$ ¿C?

Calculamos $P(X>C)$

$$P(X>C) = \int_{x=C}^{x=B}\left(\int_{y=0}^{y=C} \frac{1}{BC}\,dy\right)dx = \int_C^B \left[\frac{1}{BC}\,y\right]_0^C dx =$$

$$\int_C^B \left(\frac{C}{BC} - 0\right)dx = \int_C^B \frac{1}{B}\,dx = \left[\frac{1}{B}\cdot x\right]_C^B = \frac{B}{B} - \frac{C}{B} = 1 - \frac{C}{B}$$



Este es el valor que tenemos q calcular.

Podríamos haberlo hecho así: $P(X>C) = \underbrace{(B-C)}_{\text{ancho}}\cdot\underbrace{C}_{\text{largo}}\cdot\underbrace{\frac{1}{BC}}_{\text{Altura}} = 1 - \frac{C}{B}$

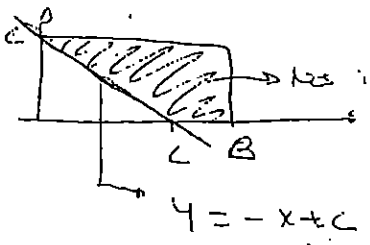
$P(X>C) < 0{,}01 \Rightarrow 1 - \frac{C}{B} < 0{,}01 \Rightarrow 1 - 0{,}01 < \frac{C}{B}$;

$0{,}99 < \frac{C}{B}$; $0{,}99\cdot B < C \Rightarrow \boxed{C > 0{,}99B}$

(b) Sea $P(X+Y>C) < 0{,}01$ ¿C?

$X+Y>C \Rightarrow X+Y=C$; $Y = -X+C$

$P(X+Y>C)$:



$$P(X+Y>C) = \int_{y=0}^{y=C}\left(\int_{x=-y+C}^{x=B} \frac{1}{BC}\,dx\right)dy = \frac{1}{BC}\int_{y=0}^{y=C} x\Big]_{-y+C}^{B} dy$$

$$= \frac{1}{BC}\int_0^C (B+y-C)\,dy = \frac{1}{BC}\left[By + \frac{y^2}{2} - Cy\right]_0^C = \frac{1}{BC}\left[BC + \frac{}{}\right.$$

$$= 1 + \frac{C}{2B} - \frac{C}{B} = \boxed{1 - \frac{C}{2B}}$$

Entonces: $P(X+Y>C) < 0{,}01 \Rightarrow 1 - \frac{C}{2B} < 0{,}01 \Rightarrow$

$0{,}99 < \frac{C}{2B} \Rightarrow 1{,}98\,B < C \Rightarrow \boxed{C > 1{,}98B}$

$B > C$ Será ocurrido. Por ello, es imposible que $C > 1{,}98B$

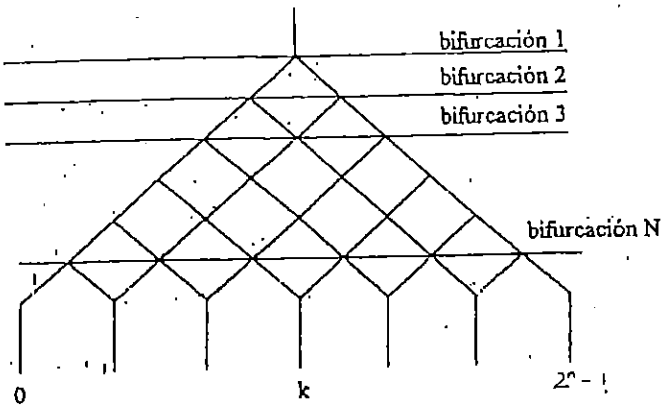
Cont. Fb 2001 P1

Imposible ya que $B > C$. Por ello, nunca se cumple que $P(X+Y>c) < 0{,}01$ para ningún valor de c.

21/11/03

Febrero 1998
Ejercicio T1

Por el laberinto vertical de la figura se deja caer una bola. Suponiendo que la rejilla tiene N etapas de bifurcación y que en cada bifurcación la probabilidad de ir a izquierda o derecha es la misma.



a) Determine la probabilidad de que la bola salga por el canal k-ésimo.
b) Este dispositivo se emplea para generar números aleatorios de distribución aproximadamente gaussiana. Justifique por qué y qué condiciones debe cumplir para ello. Determine además la media y varianza de los números obtenidos.

$I \equiv$ Ir a la izquierda $\quad P(I) = 1/2$

$D \equiv$ Ir a la derecha $\quad P(D) = 1/2$

NOTA: Observar que, si yo quiero caer por el canal 2, vaya por donde vaya tengo que caer 2 veces por la derecha y las demás x la izda. Así ocurre con demás canales.

$X \equiv$ "Salir por el canal K-ésimo (empezando por la izda)" $\equiv$ "Ir K veces hacia la derecha".

Entonces, en este ejercicio el éxito es ir hacia la derecha.

$P(I) = \frac{1}{2} = q \qquad P(D) = \frac{1}{2} = p.$

¿Cómo se distribuye X? $\quad X \sim B\left(\underset{\substack{\parallel \\ \text{Nº veces} \\ \text{del exp.}}}{N}, \underset{\substack{\parallel \\ p}}{\frac{1}{2}}\right)$

$$P(X = K) = \binom{N}{K}\left(\frac{1}{2}\right)^K\left(\frac{1}{2}\right)^{N-K} = \binom{N}{K}\left(\frac{1}{2}\right)^{K+N-K} = \binom{N}{K}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$n = N$
$p = \frac{1}{2} \qquad x = K$
$q = \frac{1}{2}$

$$= \boxed{\binom{N}{K}\frac{1}{2^N}}$$

21/11/03

Septiembre 1999
Ejercicio P1

Un circuito formado por una resistencia y un condesador tiene una "constante de tiempo" $T = RC$, donde R y C son v.a.'s uniformes en (9,11) e independientes. Calcule:

a) La f.d.p. de la v.a. T (no olvide su rango o recorrido).
b) La media condicionada $E(T \mid R = r)$.
c) El circuito anterior se emplea en un oscilador cuya frecuencia de oscilación es $F = 1/(RC)$. Calcule el valor medio de dicha frecuencia.

Usamos T-25 (Teoría).

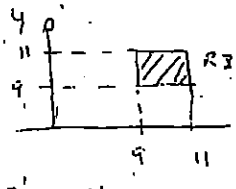
$$Z = f(X, Y)$$

1. v.a. nueva 2. v.a. antiguas.

1) 1ª forma: $T = RC$

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 9 < r < 11 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad f_C(c) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 9 < c < 11 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

R, C, independ.



$$f_{RC}(r,c) = f_R(r) \cdot f_C(c) = \frac{1}{4} \quad \text{si} \quad 9 < r < 11, \quad 9 < c < 11$$

$$f_{RC}(r,c) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } 9 < r < 11,\ 9 < c < 11 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

(a) ¿$f_T(t)$?

Nos inventamos una variable nueva y la igualamos a una de las dos antiguas.

$$\begin{cases} T = RC \\ W = R \end{cases} \rightarrow \quad (1) \quad |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial c} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & r \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = |-r| = r$$

inventada

(2) Resolvemos el sistema "al revés". Dejo las variables antiguas en función de nuevas.

$$\begin{cases} R = W \\ C = \frac{T}{W} \end{cases}$$

(3) Ponemos la fórmula de la nueva f.d.p

$$f_{TW}(t, w) = \frac{f_{RC}(r(t,w), c(t,w))}{|J(r(t,w), c(t,w))|} = \frac{1/4}{w} = \frac{1}{4w}$$

sólo por quedar bien es decir, las variables

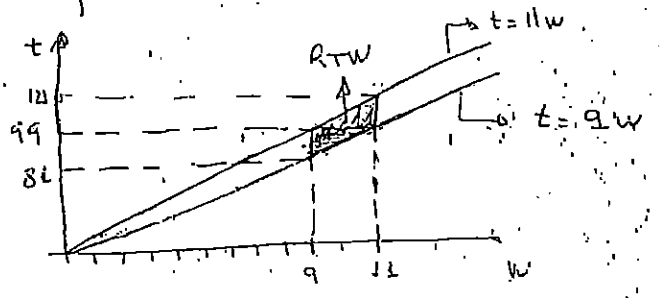
$$f_{TW} = \begin{cases} \frac{1}{4w} & \text{si } (t,w) \in R_{TW} \\ 0 & \text{si } (t,w) \notin R_{TW} \end{cases}$$

→ ¿R_{TW}? Calculamos R_{TW}.

$9 < r < 11 \Rightarrow 9 < w < 11$

$9 < c < 11 \Rightarrow 9 < \frac{t}{w} < 11 \Rightarrow 9w < t < 11w$

$R_{TW} = \{ (t,w) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 < w < 11,\ 9w < t < 11w \}$



- Calculamos la fdp de T, $f_T(t)$

$f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{TW}(t,w)\, dw$ ⇒ Hay 2 zonas

- Si $81 < t < 99$: $f_T(t) = \int_{w=9}^{w=\frac{t}{9}} \frac{1}{4w}\, dw = \left[\frac{1}{4} \ln w\right]_9^{t/9} = \frac{1}{4} \ln \frac{t}{9} - \frac{1}{4} \ln 9 =$

$= \frac{1}{4} \ln t - \left(\frac{1}{4} \ln 9 + \frac{1}{4} \ln 9\right) = \frac{1}{4} \ln t - \frac{1}{4} \ln 81 = \frac{1}{4} \ln \frac{t}{81}$

- si $99 < t < 121$: $f_T(t) = \int_{w=\frac{t}{11}}^{w=11} \frac{1}{4w}\, dw = \left[\frac{1}{4} \ln w\right]_{\frac{t}{11}}^{11} = \frac{1}{4} \ln 11 - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} \ln \frac{121}{t}$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} \ln \frac{t}{81} & \text{si } 81 < t < 99 \\ \frac{1}{4} \ln \frac{121}{t} & \text{si } 99 < t < 121 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

La función es distinta en cada intervalo ⇒ No SCPD

Cont. Ejercicio P1, Sep 99. (21/11/03)

(b) $E(T/R=r)$.

$$E(T|R=r) \underset{T=RC}{=} E(RC/R=r) = E(rC/R=r) \underset{E(aX)=aE(X)}{=} rE(C/R=r)$$

$$\underset{R,C \text{ independientes}}{=} rE(C) \quad ; \quad E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} c f_C(c)\,dc = \int_9^{11} c \cdot \frac{1}{2}\,dc = \frac{1}{2}\left[\frac{c^2}{2}\right]_9^{11} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{121}{2} - \frac{81}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{2} = 10$$

$\boxed{E(T/R=r) = 10r}$. Hemos calculado la esperanza condicionada, sin usar definición sino, usando propiedades.

(c) $$E(F) = E\left(\frac{1}{RC}\right) \underset{R,C \text{ independ.}}{=} E\left(\frac{1}{R}\right) \cdot E\left(\frac{1}{C}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{R}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} f_R(r)\,dr = \int_9^{11} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2}\,dr = \frac{1}{2} \ln r\Big]_9^{11} = \frac{1}{2}\left[\ln 11 - \ln 9\right] =$$

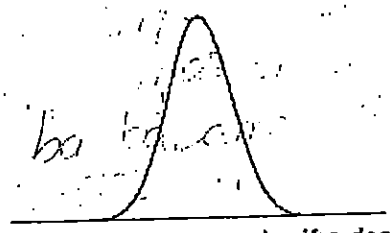
$$= \frac{1}{2} \ln \frac{11}{9}$$

$$E\left(\frac{1}{C}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c} f_C(c)\,dc = \int_9^{11} \frac{1}{c} \frac{1}{2}\,dc = \frac{1}{2} \ln \frac{11}{9}.$$

$$E(F) = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{11}{9}\right)^2 \simeq 0{,}01$$

Me acabo de acordar del sueño del otro día
El del tío bueno de telsa que increíble..

$$P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)\,dt$$



Segunda cifra decimal del valor de z

z	0.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.4878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Problemas de Introducción a las Señales Aleatorias. Curso 2008-2009

*1.- Un ingeniero químico es el responsable de un determinado proceso en una refinería de petróleo. Experiencias previas indican que un 10 % de las interrupciones del proceso son debidas solamente a fallos del equipo, un 5 % debidas a combinaciones de fallo del equipo y error del operador y un 40 % en las que se involucra el error del operador. Bajo la hipótesis de que el proceso se interrumpa, calcúlese la probabilidad de que sea debido a:

a) fallo del equipo o error del operador.

b) sólo error del operador

c) causa distinta a fallo del equipo o error del operador

d) error del operador supuesto que el equipo falló previamente

e) error del operador supuesto que el equipo no falló previamente

f) fallo del equipo supuesto que el operador cometió un error

g) ¿son los sucesos "error del operador" y "fallo del equipo" independientes?

2.- Un centro de cálculo dispone de tres impresoras A, B y C, con diferentes velocidades de impresión. Un listado puede enviarse a una de las tres con probabilidades 0.6, 0.3 y 0.1, respectivamente. Ocasionalmente, cualquiera de las impresoras se puede atascar y destruir el listado con probabilidades 0.01, 0.05 y 0.04, respectivamente. Se pide:

a) Probabilidad de que un listado se destruya.

b) Supuesto que un listado se ha destruído, determinar la impresora que, con mayor probabilidad, ha sido la causante de su destrucción.

3.- Se dispone de 2 generadores A y B de números aleatorios de 36 bits. Los números que genera A son todos equiprobables, y lo mismo ocurre con los generados en B. Si se generan sendos números aleatorios en A y B, la probabilidad de que uno cualquiera de los dos sea igual a un número prefijado m es 2^{-35}. Se pide:

a) ¿Son los generadores A y B independientes entre sí?.

b) Se obtienen 10^{11} números aleatorios independientes con el generador A; calcule la probabilidad de que al menos uno sea igual a m.

c) Si se generan 10^{14} números independientes en A, calcule la probabilidad de que más de 1500 de ellos sean iguales a m.

*4.- Un móvil se desplaza en el plano; en cada instante hay una probabilidad p de ir de un punto (x,y) a $(x,y+1)$ y una probabilidad $q=1-p$ de ir de (x,y) a $(x+1,y)$. Se pide:

a) La probabilidad de ir con desplazamientos independientes desde el punto (0,0) hasta el punto (a,b).

b) La probabilidad de alcanzar el segmento MN definido por $M=(a,b)$, $N=(a,b+1)$ desde el punto (0,0).

Problemas de Introducción a las Señales Aleatorias. Curso 2008-2009

*5.- Un ordenador tiene una memoria de N posiciones. Durante el montaje de la misma se instalaron por error algunos circuitos defectuosos, de forma que se sabe que m posiciones no pueden ser leídas, y el ordenador se bloqueará cuando lo intente. El acceso a las posiciones de memoria puede ser de dos tipos: 1) aleatorio (en cada acceso las N posiciones tienen la misma probabilidad de ser leídas), 2) secuencial (el ordenador lee las posiciones sucesivamente a partir de la primera). a) Caracterice probabilísticamente la v.a. $\mathbf{X}_1$: "No. de accesos a memoria hasta que el ordenador se bloquee cuando los accesos son todos de tipo aleatorio". b) Caracterice probabilísticamente la v.a. $\mathbf{X}_2$: "No. de accesos a memoria hasta que el ordenador se bloquee cuando los accesos son todos de tipo secuencial". c) Si m=1, calcule el número medio de accesos hasta que el ordenador se bloquee para cada tipo de acceso; d) Si m=1, calcule la probabilidad de que el número de accesos sea menor o igual que N para cada tipo de acceso y su límite cuando $N\rightarrow\infty$.

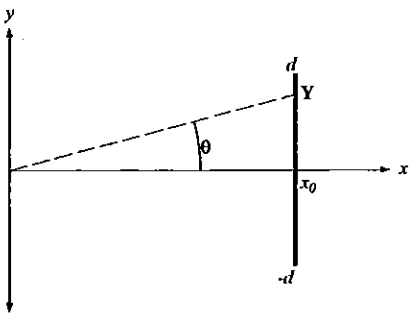
6.- Un sistema de control de accesos de clientes a un determinado recinto compara la palabra de paso pronunciada por un locutor con una referencia interna y obtiene una medida del "parecido" entre ambas que se modela como una va. **X** con distribución $N(3,1)$ si el locutor es "cliente" y $N(0,2)$ si el locutor es "impostor". El acceso se permite o deniega según dos posibles criterios: 1) El locutor pronuncia la palabra de paso *obligatoriamente n* veces y si el "parecido" supera, al menos, m veces un umbral λ_1 se permite el acceso; caso contrario, se deniega. 2) El locutor pronuncia la palabra de paso y el "parecido" se compara con dos umbrales, λ_0 y λ_1 ($\lambda_0<\lambda_1$); si es menor que λ_0 se deniega el acceso, si es mayor que λ_1 se permite y, *sólo en caso contrario*, se solicita una nueva identificación, repitiéndose el proceso anterior hasta un máximo de L veces: en la L-ésima repetición (caso de alcanzarse), si el "parecido" es inferior a λ_1 se rechaza el acceso y si lo supera se acepta. (Suponga, para ambos criterios, independencia de los ensayos). a) Calcule, para el criterio 1, la probabilidad de aceptar a un cliente y de rechazar a un impostor para n=3, m=2 y λ_1=2.b) Calcule, para el criterio 2, el umbral λ_0 de modo que un impostor se rechace *exactamente* en el L-ésimo ensayo con probabilidad 10^{-3}, si L=4 y λ_1=2. c) Para el criterio 2, con L=4, λ_1=2 y el umbral λ_0 del apartado anterior, determine la probabilidad de aceptar a un cliente *exactamente* en la repetición k-ésima, en función de k (no olvide determinar el rango).

7.- Se define la v.a. **Y** como el número de veces que se debe lanzar una jabalina hasta conseguir sobrepasar una marca de b metros (lanzamientos independientes). Si se llama p a la probabilidad de que un lanzamiento sea superior a b, se pide: a) $P(\mathbf{Y}=k)$ y demuestre que $\Sigma\, P(\mathbf{Y}=k)=1$; b) El número medio de lanzamientos necesarios para superar la marca de b metros; c) Si la distancia alcanzada en un único lanzamiento, **X**, está distribuida según una v.a. Rayleigh, con fdp $f(x)=(x/\alpha^2)\exp(-x^2/2\alpha^2)\,U(x)$, con α=25 m, calcule el número medio de ensayos necesarios para batir el récord del mundo situado a 88 m.

*8.- Una red de cajeros automáticos está constituida por un ordenador central, al que están conectados una serie de terminales. Cuando un usuario, previa la introducción de su tarjeta, desea realizar una operación, el cajero intenta conectarse a través de una línea con el ordenador central, el cuál tarda un tiempo en responderle, **T**, que depende de factores impredecibles. Si el cajero está situado en la misma población que el ordenador, **T** es aproximadamente una v.a. $N(\eta,\sigma)$; si están en distinta población, **T** tiene una fdp $f(t)=(\alpha/2)\exp(-\alpha|t-\mu|)$. El modo de funcionamiento es tal que, si al cabo de t_0 segundos el ordenador no ha dado respuesta alguna, se interrumpe la operación iniciada. a) Si se sabe que la media y varianza de **T** no dependen de la ubicación del cajero, determine los parámetros μ y α en función de los η y σ. b) Si t_0 se diseñó de forma que la probabilidad de que una operación se interrumpa dentro de la población sea 0.01, calcule dicha probabilidad para un cajero situado fuera. c) Si la red está formada por 2000 cajeros dentro de la población y 1000 fuera, y se opera con 100 cajeros escogidos al azar, determine la probabilidad de que al menos uno no pueda realizar la operación requerida.

Problemas de Introducción a las Señales Aleatorias. Curso 2008-2009

9.- Considere una fuente radioactiva situada en el origen de coordenadas que emite partículas con ángulos de salida θ aleatorios y uniformemente distribuidos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Se sitúa una pantalla perfectamente absorbente a distancia x_0 de la fuente según el diagrama adjunto.



a) Determine la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria **Y**: coordenada y de una partícula a su paso por $x = x_0$.

b) Calcule la semianchura de la pantalla d para que ésta elimine el 50% de las partículas que sobrepasarían la recta $x = x_0$ en ausencia de apantallamiento.

***10.**- La tensión de entrada a un determinado instrumento de medida es una v.a. **E** $N(v/2, v/\sqrt{2})$. El valor medido por dicho instrumento, **X**, coincide con el valor de la tensión de entrada si éste se encuentra en el margen $(0,v)$; si dicho valor está por debajo de 0 voltios, el instrumento siempre registra 0, y si está por encima de v, la medida es siempre igual a v. Obtenga la fdp, la FD y la media de **X**.

***11.**- Un dispositivo tiene una capacidad c que depende de la tensión aplicada v según la ley:

$$c = g(v) = \begin{cases} c_0 & v \le v_0 \\ c_0\sqrt{\dfrac{v_0}{v}} & v > v_0 \end{cases}$$

siendo c_0 y v_0 constantes positivas. Suponiendo que la tensión es una v.a. **V** uniforme en $(0, 2v_0)$, determine: a) La fdp de **C**=g(**V**). Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_C(c)dc = 1$. b) E(**C**) y E(**CV**). c) Si el dispositivo se incluye en un circuito resonante cuya pulsación de resonancia es $\mathbf{W} = 1/\sqrt{\ell_0 \mathbf{C}}$, siendo ℓ_0 una constante positiva, calcule la pulsación media.

12.- Se dispone de un circuito cuantificador de 4 niveles (2 bits), cuya característica de transferencia es la mostrada en la figura 1. Suponga que la entrada a dicho circuito es modelada por una v.a. **X** con fdp tal como muestra la figura 2. a) Determine la función de distribución de la v.a. **Y**=q(**X**). b) Calcule los valores de los niveles de cuantificación b_1 y b_2 que hacen que la varianza de la v.a. **Y**–**X** (error de cuantificación) sea mínima.

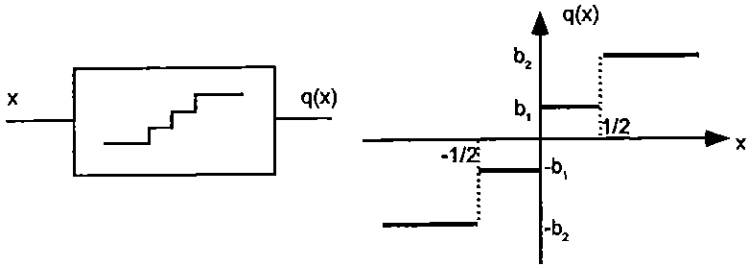


Figura 1

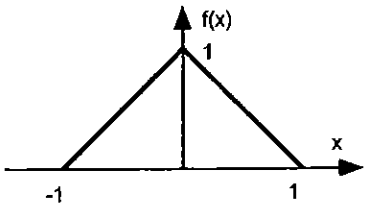


Figura 2

***13.-** Se escoge un punto de forma aleatoria en el intervalo $(0,T)$ y un segundo punto, también aleatoriamente, pero siempre *a la derecha* del anterior, y se definen las va's **X**: "posición del primer punto" e **Y**: "distancia del segundo punto al primero".

a) Demuestre que la fdp conjunta de las va's **X** e **Y** es:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{T(T-x)}\begin{cases}0<x<T\\0<y<T-x\end{cases}$$

b) ¿Son **X** e **Y** incorreladas?

c) Calcule $P(\mathbf{Y}<\mathbf{X})$.

***14.-** Sean **X** e **Y** dos v.a.'s de Bernouilli independientes, con $P(\mathbf{X}=1)=P(\mathbf{Y}=1)=p$, $P(\mathbf{X}=0)=P(\mathbf{Y}=0)=1-p=q$. Se forma la v.a. $\mathbf{Z}=\mathbf{X}\oplus\mathbf{Y}$, donde el símbolo $\oplus$ denota la operación "o exclusivo". Se pide: a) Demuestre que las v.a.'s **X** y **Z** no son, en general, independientes. b) La covarianza de las v.a.'s **X** y **Z**. c) Los valores de p que hacen que **X** y **Z** estén incorreladas; para dichos valores de p, ¿son **X** y **Z** independientes?

***15.-** Un circuito formado por una resistencia y un condensador tiene una "constante de tiempo" $\mathbf{T}=\mathbf{RC}$, donde **R** y **C** son v.a.'s uniformes en $(9,11)$ e independientes. Calcule: a) La f.d.p. de la v.a. **T** (no olvide su rango o recorrido). b) La media condicionada $E(\mathbf{T}|\mathbf{R}=r)$. c) El circuito anterior se emplea en un oscilador cuya frecuencia de oscilación es $\mathbf{F}=1/(\mathbf{RC})$. Calcule el valor medio de dicha frecuencia.

16.- Un sistema de comunicaciones envía mensajes que se pueden modelar mediante una v.a. **X** que adopta valores 1 y –1 con igual probabilidad. A fin de aumentar la fiabilidad de la transmisión, el valor adoptado por **X** se transmite tres veces consecutivas. En el extremo receptor se reciben, pues, tres v.a.'s: $\mathbf{Y}_1=\mathbf{X}+\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Y}_2=\mathbf{X}+\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Y}_3=\mathbf{X}+\mathbf{Z}_3$, donde $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$ son v.a.'s $N(0,1)$ e independientes. A fin de decidir el valor de **X** se preparan dos tests: 1) Se forma la v.a. $\mathbf{A}=\text{signo}(\mathbf{Y}_1)+\text{signo}(\mathbf{Y}_2)+\text{signo}(\mathbf{Y}_3)$. Si $\mathbf{A}>0$, entonces se dice que $\mathbf{X}=1$; si $\mathbf{A}\leq 0$, entonces se dice que $\mathbf{X}=-1$. 2) Se forma la v.a. $\mathbf{B}=\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2+\mathbf{Y}_3$. Si $\mathbf{B}>0$, entonces se dice que $\mathbf{X}=1$; si $\mathbf{B}\leq 0$, entonces se dice que $\mathbf{X}=-1$. Se pide: a) Suponiendo $\mathbf{X}=1$, calcule la probabilidad de equivocarse en la decisión usando la v.a. **A**. b) Suponiendo $\mathbf{X}=1$, calcule la probabilidad de equivocarse en la decisión usando la v.a. **B**. c) Determine la probabilidad global de equivocarse en la decisión para cada uno de los tests.

17.- Un detector de radioactividad consta de un contador de partículas (que supondremos independientes) y un cronómetro. Al conectarse, la llegada de una partícula pone a cero ambos medidores y, a partir de entonces, los dos empiezan a contar. El tiempo que transcurre entre las llegadas de dos partículas consecutivas al detector es una v.a. exponencial de parámetro $c=0.5$ seg^{-1} en condiciones normales (no escape radioactivo). El detector puede funcionar de dos modos diferentes: a) Suponga que la señal de alarma de radioactividad se produce cuando el tiempo que tardan en contarse 100 partículas es menor que T segundos. Determine el valor de T para tener una probabilidad de dar falsa alarma en condiciones normales de, aproximadamente, 0.1. b) El otro modo de funcionamiento activa la alarma cuando se registra más de una partícula en el primer intervalo de 1 segundo. Calcule ahora la probabilidad de falsa alarma. c) Para los modos diseñados en los apartados a) y b), calcule las probabilidades de detectar correctamente un escape radioactivo que aumente el valor de c hasta $c=0.6$ seg^{-1}.

Problemas de Introducción a las Señales Aleatorias. Curso 2008-2009

***18.-** Sea $\mathbf{X}(t)$ un p.e. estacionario de orden 2 con funciones de distribución de primer y segundo orden $F_X(x)$ y $F_X(x_1,x_2;\tau)$, respectivamente. Se forma el proceso:

$$\mathbf{Y}(t)=\begin{cases} 1 & \mathbf{X}(t)>a \\ -1 & \mathbf{X}(t)\le a \end{cases}$$

siendo a una constante tal que $f_X(a)>0$.

a) ¿Es el proceso $\mathbf{Y}(t)$ estacionario en sentido amplio?. ¿Es estacionario de orden 1?.

b) Para dicho p.e. $\mathbf{Y}(t)$, calcule la autocovarianza y la varianza. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar esta última?.

19.- Sea $\mathbf{X}[n]$ un ruido blanco estricto con f.d.p. de 1er orden Normal estándar. Se define el nuevo proceso $\mathbf{Y}[n]=U(\mathbf{X}[n]-\mathbf{A})$, donde $U(\bullet)$ es la función escalón unidad y $\mathbf{A}$ es una v.a. de Bernouilli, independiente de $\mathbf{X}[n]$ y con $P(\mathbf{A}=1)=p$. Calcule:

a) La media y varianza de $\mathbf{Y}[n]$.

b) La autocorrelación y autocovarianza de $\mathbf{Y}[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?

c) La correlación cruzada $R_{XY}[n_1,n_2]$ $\forall n_1 n_2$. ¿Son $\mathbf{X}[n]$ e $\mathbf{Y}[n]$ conjuntamente estacionarios en sentido amplio?

***20.-** Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2,\ldots, \mathbf{X}_n,\ldots$ v.a.'s continuas e independientes, de media nula y varianza 1. Se define el proceso discreto en el tiempo:

$$\mathbf{X}[n]=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}_k \quad (n=1,2,\ldots)$$

a) Calcule la media y la autocorrelación de $\mathbf{X}[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?.

Se define el nuevo proceso:

$$\mathbf{Y}[n]=\mathbf{X}[n+N]-\mathbf{X}[n]$$

siendo N un número natural fijo.

b) Calcule la media y la autocorrelación de $\mathbf{Y}[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?.

c) Obtenga la distribución de 1er orden del proceso $\mathbf{Y}[n]$, suponiendo $N>>1$.

21.- La tensión de salida $\mathbf{X}[n]$ de un determinado circuito puede modelarse de la forma:

$$\mathbf{X}[n]=\mathbf{S}[n]+\mathbf{N}[n]$$

donde $\mathbf{S}[n]$ es la señal de entrada al circuito y $\mathbf{N}[n]$ un ruido blanco estricto, independiente de $\mathbf{S}[n]$ y con distribución de primer orden uniforme en $(-d/2, d/2)$, siendo d una constante positiva. Suponga, además, que la entrada $\mathbf{S}[n]$ es un proceso de autocovarianza $C_S[m]$ y distribución de primer orden exponencial de parámetro $c>0$ constante.

a) Calcule y dibuje la fdp de primer orden de $\mathbf{X}[n]$. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;n)dx=1$. ¿Es $\mathbf{X}[n]$ estacionario de primer orden?

b) Calcule la autocovarianza de $\mathbf{X}[n]$. ¿Es $\mathbf{X}[n]$ estacionario en sentido amplio?

c) Se forma el proceso $\mathbf{Y}[n]=a\,\mathbf{X}[n-1]$, siendo a una constante. Determine ésta de forma que la varianza de $\mathbf{S}[n]-\mathbf{Y}[n]$ sea mínima.

***22.-** Sean $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{Y}(t)$ dos procesos conjuntamente estacionarios en sentido amplio, de medias nulas, autocorrelaciones $R_X(\tau)$ y $R_Y(\tau)$ y densidades espectrales de potencia $S_X(\omega)$ y $S_Y(\omega)$, respectivamente. Su correlación cruzada es $R_{XY}(\tau)$ y el espectro cruzado $S_{XY}(\omega)$. Se define el nuevo proceso $\mathbf{U}(t)=\mathbf{X}(t)\cos\omega_0 t+\mathbf{Y}(t)\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$, siendo $\omega_0>0$. a) Determine las condiciones que deben verificar los estadísticos de $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{Y}(t)$ definidos anteriormente para que $\mathbf{U}(t)$ sea estacionario en sentido amplio. b) Para las condiciones del apartado anterior, calcule la densidad espectral de potencia de $\mathbf{U}(t)$. Particularice las expresiones de la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $\mathbf{U}(t)$ para el caso en que $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{Y}(t)$ sean incorrelados.

***23.-** Sea $\mathbf{X}[n]$ un ruido blanco estricto con fdp de 1er orden normal estándar. Sobre $\mathbf{X}[n]$ se aplica una transformación lineal e invariante de respuesta al impulso $h[n]=a_0\delta[n]+a_1\delta[n-1]$, obteniéndose como resultado un proceso $\mathbf{Y}[n]$. Calcular: a) La autocorrelación y densidad espectral de potencia de $\mathbf{Y}[n]$. b) La fdp de 1er orden de $\mathbf{Y}[n]$.

24.- Sea el proceso discreto en el tiempo $\mathbf{X}[n]$, de media nula y estacionario en sentido amplio, con autocorrelación $R_X[m]=a^{|m|}$ $(0<|a|<1)$. Se hace pasar $\mathbf{X}[n]$ por un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]-b\,\delta[n-1]$, obteniéndose como salida un proceso $\mathbf{Y}[n]$. a) Calcule la autocorrelación de $\mathbf{Y}[n]$, $R_Y[m]$. b) Calcule el valor de b que minimiza la varianza de $\mathbf{Y}[n]$. c) Para el valor de b del apartado anterior, calcule la densidad espectral de potencia de $\mathbf{Y}[n]$, $S_Y(\Omega)$.

25.- Sea $\mathbf{X}[n]=\mathbf{A}\cos^2(\Omega_0 n+\Phi)$ un p.e. discreto en el tiempo, siendo Ω_0 una constante y $\mathbf{A}$ y Φ v.a.'s independientes. $\mathbf{A}$ tiene por media y varianza η_A y σ_A^2 respectivamente y Φ es una v.a. uniforme en $(0,\pi)$. a) Determine la media y autocorrelación del proceso $\mathbf{X}[n]$. b) Determine la densidad espectral de potencia de $\mathbf{X}[n]$. c) Se define el nuevo proceso $\mathbf{Y}[n]=\mathbf{X}[n]-\mathbf{X}[n-1]$. Calcule la autocorrelación de $\mathbf{Y}[n]$.

P2.

Enviar listado impresora

$P(A) = 0'6$

$P(B) = 0'3$

$P(C) = 0'1$

Destruir listado

$P(D|A) = 0'01$

$P(D|B) = 0'05$

$P(D|C) = 0'04$

a) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C).P(C) = 0'025$

T. Prob. Total

b) $P(A|D) = \dfrac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = 0'24$

T. Bayes

$P(B|D) = \dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = 0'60 \leftarrow$ La impresora B

$P(C|D) = \dfrac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = 0'15$

P3. Generador de números equiprobables

$A = 36$ bits $\quad 2^{36}$ números

$B = 36$ bits

un número predado

$P(A^m \cup B^m) = 2^{-35}$

$P(A^m)$ prob A genere un número m $= \dfrac{1}{2^{36}}$

$P(B^m)$ " B " " " " $= \dfrac{1}{2^{36}}$

a) independientes?

$P(A^m \cap B^m) = P(A)P(B)$

$P(A^m \cup B^m) = P(A) + P(B) - P(A^m \cap B^m) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A^m \cap B^m) = 0$

$P(A^m)P(B^m) = \dfrac{1}{(2^{36})^2}$

$\Rightarrow$ No son independientes (de hecho, son incompatibles)

b) A genera 10^{11} números

prob {" al menos 1 de los 10^{11} = m"}

Ensayo de Bernoulli

$p = \dfrac{1}{2^{36}} \qquad q = 1 - \dfrac{1}{2^{36}}$

$N = 10^{11}$

1 − {"prob de que no aparezca nunca"}

$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \binom{N}{0} p^0 . q^{10^{11}} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^{36}}\right)^{10^{11}} = 0'766$

P5 (1) a) Suceso $A_i = \{$"Lectura correcta en i-ésimo acceso"$\}$

X_1 v.a. discreta $k-1$ accesos correctos y k acceso erróneo

$P\{X_1 = k\}$ $1 \le k < \infty$ (rango)

$$P\{X_1 = k\} = P\{A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{k-1} \cap \bar{A}_k\} \overset{A_i \text{ indep}}{=} \prod_{i=1}^{k-1} P(A_i)\, P(\bar{A}_k) =$$

$$= q^{k-1} \cdot p = \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{k-1} \frac{m}{N} \qquad k = 1, 2, 3 \dots$$

$$P(A_i) = q = \frac{N-m}{N} = 1 - \frac{m}{N}$$

$$P(\bar{A}_i) = p = 1 - q = \frac{m}{N}$$

b) X_2 v.a discreta : ahora A_i no son independientes!

$$P\{X_2 = k\} \overset{\text{T. multipl.}}{=} P(A_1)\, P(A_2/A_1) \dots \underbrace{P(A_{k-1}/A_{k-2}, \dots A_1)}\, P(\bar{A}_k / \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i)$$

$$= \frac{N-m}{N} \cdot \frac{N-m-1}{N-1} \cdots \frac{N-m-(k-2)}{N-(k-2)} \cdot \underbrace{\left[1 - \frac{N-m-k+1}{N-k+1}\right]}_{= \frac{m}{N-k+1}} =$$

$$= \frac{m}{N-k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{N-m-i+1}{N-i+1} \qquad k = 1, 2, \dots N-m+1$$

(a partir de $N-m+1$ ya tendríamos que bloquear)

c) $m = 1$

$$E(X_1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^k) =$$

$$= p \frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = p \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{1}{p} \overset{m=1}{=} N$$

$$E(X_2) = \sum_{k=1}^{N-m+1} k\, P(X_2 = k) \underset{m=1}{=} \sum_{k=1}^{N} k\, P(X_2 = k)$$

$$P(X_2 = k) \underset{m=1}{=} \frac{\cancel{N-1}}{N} \cdot \frac{\cancel{N-2}}{\cancel{N-1}} \cdots \frac{\cancel{N-k+1}}{\cancel{N-k+2}} \cdot \frac{1}{\cancel{N-k+1}} = \frac{1}{N}$$

$$E(X_2) = \sum_{k=1}^{N} k \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N} \frac{N+1}{2} \cdot N = \frac{N+1}{2}$$

P5 (11) $m = 1$

d) $P(X_1 \leq N) = \sum_{k=1}^{N} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{N} q^{k-1} =$

$$= p \frac{q^{N-1} \cdot q - 1}{q - 1} = 1 - q^N = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

$$\lim_{N \to \infty} P(X_1 \leq N) = \lim_{N \to \infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N = 1 - \underline{\underline{e^{-1}}}$$

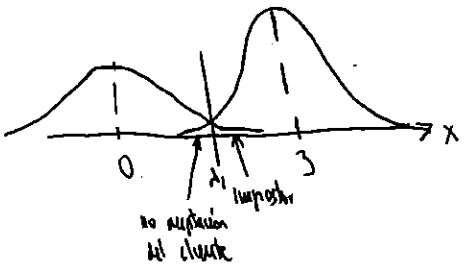
$$P(X_2 \leq N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} = 1 \quad \underline{\forall N}$$

(P6.)

X voz entrada $\longrightarrow$ referencia
"comparada con"

$N(3,1)$ / G.: cliente

$N(0,2)$ / Impostor



① Repetir n veces

$X > \lambda_1$ al menos m veces $\Rightarrow$ Acceso (si no, se rechaza)

$n=3;\ m=2;\ \lambda_1=2$

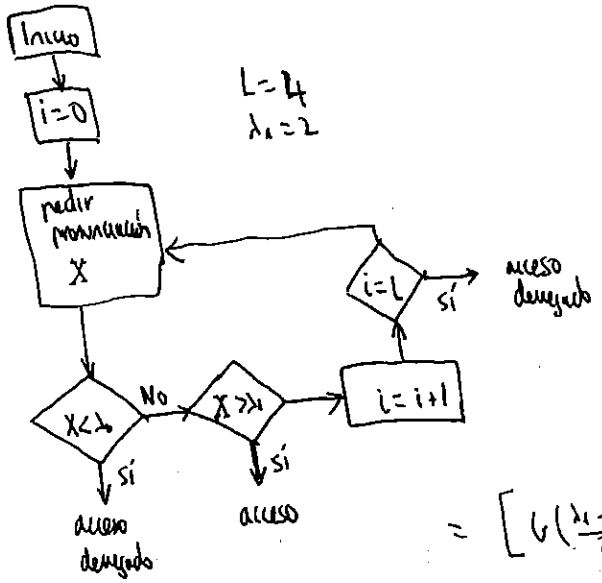
$$\text{Prob.}\{X>\lambda_1 / G\} \underset{N(3,1)}{=} 1 - G\left(\frac{2-3}{1}\right) = 1 - \underbrace{G(-1)}_{1-G(1)} = G(1) = 0'8413 = p_1 \ ; \quad 1-p_1 \simeq 0'16$$

$$\text{Prob.}\{X<\lambda_1 / I\} \underset{N(0,2)}{=} G\left(\frac{2-0}{2}\right) = G(1) = 0'8413 = p_2 \ ; \quad 1-p_2 \simeq 0'16$$

$$\boxed{\text{Prob}\{\text{"cliente aceptado"}\}} = \binom{n}{m} p_1^m (1-p_1)^{n-m} + \binom{n}{n} p_1^n = \binom{3}{2} p_1^2 (1-p_1) + \binom{3}{3} p_1^3 \simeq \boxed{0'93}$$

$$\boxed{\text{Prob}\{\text{"impostor rechazado"}\}} = \binom{3}{2} p_2^2 (1-p_2) + \binom{3}{3} p_2^3 \simeq \boxed{0'93}$$

②



$L=4$
$\lambda_1=2$

λ_0 | Impostor rechazado exactamente en L-ésimo intento

$\text{Prob}=\{\text{"impostor rechazado L-ésimo intento"}\} = 10^{-3} =$

$= \text{Prob}\{\text{"no aceptar ni rechazar 3 veces"} \cap$
$\cap$ "no aceptar al 4º intento"$\} =$

$= [P(\lambda_0 \le X \le \lambda_1 / I)]^3 \, [P(X \le \lambda_1 / I)] =$

$= \left[G\left(\frac{\lambda_1-0}{2}\right) - G\left(\frac{\lambda_0-0}{2}\right)\right]^3 G\left(\frac{\lambda_1-0}{2}\right) = \left[G(1) - G\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)\right]^3 G(1) = 1$

$G\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) = 0'7854 \Rightarrow \frac{\lambda_0}{2} = 0'63 \Rightarrow \boxed{\lambda_0 \simeq 1'26}$

③

$L = 4$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1'26$

$P_k = P\{$"aceptar al cliente en la k-ésima repetición$\} = [P(\lambda_0 \leq X \leq \lambda_1 / C)]^{k-1} \cdot P(X > \lambda_1 / C) =$

Rango $1 \leq k \leq 4 = L$

$= \left[G\left(\frac{\lambda_1 - 3}{1}\right) - G\left(\frac{\lambda_0 - 3}{1}\right)\right]^{k-1} \left[1 - G\left(\frac{\lambda_1 - 3}{1}\right)\right] =$

$= [G(-1) - G(-1'74)]^{k-1} [1 - G(-1)] =$

$= [(1 - G(1)) - (1 - G(1'74))]^{k-1} \; G(1) \simeq (0'1478)^{k-1} \cdot 0'84 \qquad 1 \leq k \leq 4$

(P3.)

Generadores de números A, B $\frac{1}{2^{36}}$

b)

10^{11} números con generador

Prob {"al menos uno sea igual a un"} = $P(C)$

$n = \frac{1}{2^{36}}$
$p = 10^{11}$

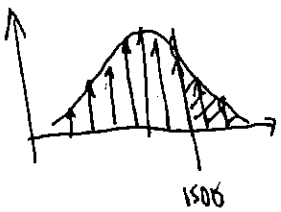
$\boxed{P(C)} = 1 - P(C') = 1 - \binom{10^{11}}{0} p^0 q^{10^{11}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{36}}\right)^{10^{11}} = \qquad 1 - e^{-np} \simeq \boxed{0'766}$

c)

10^{14} generados con A

Prob {"más de 1500 sean iguales a un"}

$n = 10^{14}$
$p = \frac{1}{2^{36}}$



Binomial $\longrightarrow$ Gaussiana

$B(10^{14}, 1/2^{36}) \longrightarrow N(np, \sqrt{npq}) \simeq N(1455, \sqrt{1455})$

$\boxed{P(X > 1500)} = 1 - P(X < 1500) = 1 - G\left(\frac{1500 - 1455}{\sqrt{1455}}\right) = 1 - \underbrace{G(1'18)}_{0'8810} = \boxed{0'119}$

(P7.)

Y v.a. $\equiv$ {Nº veces lanzar jabalina para sobrepasar 6 metros}

$p \equiv$ Prob. {"1 lanzamiento sea mayor que 6 metros"}

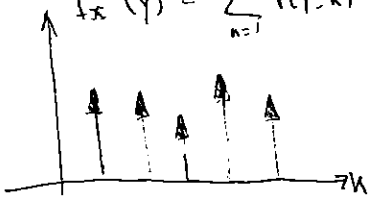
lanzamientos independientes

a) $P(Y=k)$ y demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} P(Y=k) = 1$

$$P(Y=k) = q^{k-1}\, p$$

$q = 1-p =$ Prob {"no conseguirlo"}

$$f_X(y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y=k)\, \delta(y-k)$$



DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

$k = 1, \dots, \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p q^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k} = p \frac{1}{1-q} = p \frac{1}{p} = 1 \quad \text{QED}$$

b) $$\boxed{E(Y)} = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy \underset{\text{v.a. discreta}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} =$$

$$\frac{d}{dq}\left[\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right] = \frac{d}{dq}\left[\frac{q}{1-q}\right] = \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^k) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \boxed{\frac{1}{p}}$$

c)

X dist. lanz. v.a. Rayleigh: $f_{dp}(x) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \cdot u(x)$ con $\alpha = 25$ $\Rightarrow$ Calcule el nº medio de ensayos para batir el récor del mundo (88m.)

$$p = \text{Prob}\{\text{"}X > 88\text{m"}\} = \int_{88}^{\infty} \frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\, dx = -e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \Big]_{88}^{\infty} = e^{-\frac{(88)^2}{2(25)^2}}$$

$$E(Y) = \frac{1}{p} = e^{\frac{(88)^2}{2(25)^2}} \approx 491 \text{ lanzamientos}$$

P8 (1) a) $\underline{E(T) \text{ Fuera población}}$ $\qquad E(T) = \mu$ Dentro Población

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|t-\mu|} dt = \int_{-\infty}^{\mu} t \frac{\alpha}{2} e^{\alpha(t-\mu)} dt + \int_{\mu}^{\infty} t \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha(t-\mu)} dt$$

Cambio variable $t-\mu = x$

$$= \int_{-\infty}^{0} (x+\mu) \frac{\alpha}{2} e^{\alpha x} dx + \int_{0}^{\infty} (x+\mu) \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x} dx =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha|x|} dx} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} dx}_{1} = \mu$$

(por ej. recordar exponencial $f_X(x) = c e^{-cx} u(x)$, $\int_0^{\infty} c e^{-cx} dx = 1$)

De la igualdad de "medias"

$$\boxed{\mu = \eta}$$

Fuera Población

$$Var(T) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|t-\mu|} dt \overset{t-\mu=x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} dx$$

$$= 2 \cdot \frac{\alpha}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x}}_{\frac{2}{\alpha^3}} = \frac{2}{\alpha^2}$$

(Recordar exponencial, ó $\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax}\left[\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right]$

De la igualdad de $Var(T)$ Fuera Dentro $\frac{2}{\alpha^2} = \sigma^2$

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}$$

b) Dentro de la población $N(\eta, \sigma)$

$P(T > t_0) = 0.01 \Rightarrow P(T \leq t_0) = 0.99$

Prob. interrumpa operación $\qquad$ Prob. no interrumpa

$$1 - G\left(\frac{t_0-\eta}{\sigma}\right) = 0.01 \Rightarrow G\left(\frac{t_0-\eta}{\sigma}\right) = 0.99 \Rightarrow \frac{t_0-\eta}{\sigma} \simeq 2.33$$

$$\boxed{t_0 \simeq \eta + 2.33\sigma}$$

(P8) (11) Fuera de la población

$$P(T > t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|t-\mu|} dt =$$

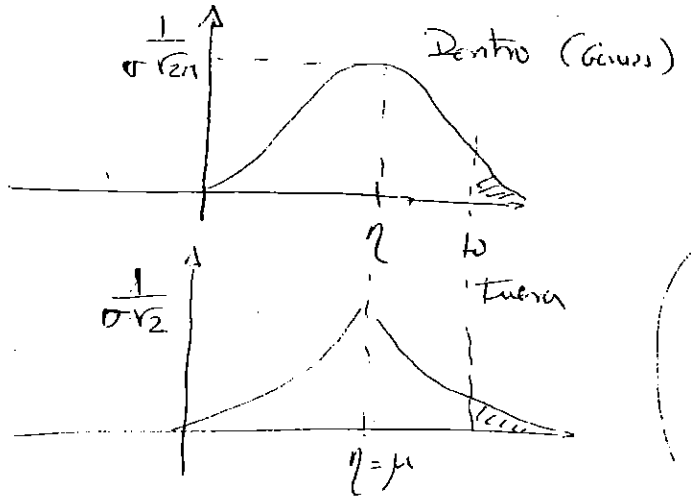
Prob. interrupción

$$= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha(t-\mu)} dt =$$

Como $t_0 = \eta + 2.33\sigma$
$\eta = \mu$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\alpha(t-\mu)} \Big|_{t_0}^{\infty} =$$

para $t > t_0$ $t-\mu$ positivo



$$= \frac{1}{2} e^{-\alpha(t_0-\mu)} =$$

$t_0 = 2.33\cdot\sigma + \eta$

$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$

$t_0 - \eta = t_0 - \mu = 2.33\sigma =$

$= 2.33 \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$

$$= \frac{1}{2} e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}\cdot 2.33}{\alpha}} = 0.0185$$

c) I: Interrupción D: Dentro F: Fuera D: 2000 F: 1000

T. Prob Total

$$P(\text{Interrupción}) = P(I/D)\cdot P(D) + P(I/F)P(F) =$$

$$= 0.01 \times \frac{2}{3} + 0.0185 \frac{1}{3} = 0.0128 = p$$

X: nº interrupciones en 100 cajeros → Binomial $B(n=100, p=0.0128)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 1, 2 \dots n$$

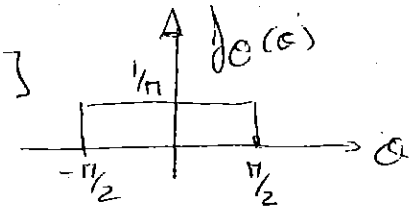
Prob{"al menos una interrupción"} = 1 − P{"ninguna interrupción"} =

$$= 1 - P(X=0) = 1 - (1-0.0128)^{100} = 0.73$$

Aprox: $n \gg 1$ $n = 100$, $p = 0.0128 \ll 1$ $n\cdot p = 1.28 = a < 5 \Rightarrow$ Poisson

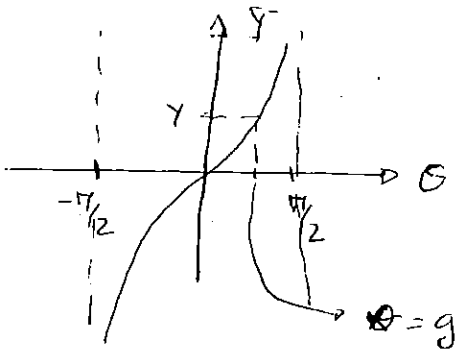
(Otra forma) $1 - P(X=0) \overset{\text{Poisson}}{\approx} 1 - e^{-a} = 0.7232$

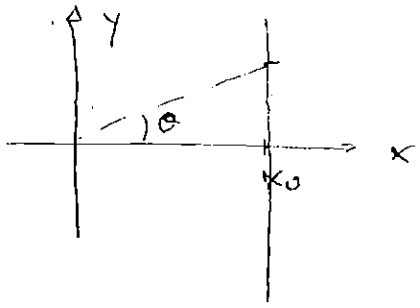
(P9) $f_\Theta(\theta) \; U[-\pi/2, \pi/2]$



a)

$$Y = x_0 \, tg\,\theta = g(\theta)$$





$$\theta = g^{-1}(y) = arctg\left(\frac{y}{x_0}\right) \qquad g'(\theta) = x_0(1 + tg^2\theta$$

$$f_Y(y) = \sum_k \frac{f_\Theta(\theta_k)}{|g'(\theta_k)|} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{|g'(\theta_k)|}\Bigg|_{\theta_k = arctg\left(\frac{y}{x_0}\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{|x_0(1 + tg^2\theta_k)|}\Bigg|_{\theta_k = arctg\left(\frac{y}{x_0}\right)} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x_0\left(1 + \frac{y^2}{x_0^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{x_0}{x_0^2 + y^2}$$

Rango de Y

$R_Y = (-\infty, \infty)$

b) $$P\{-d < Y \le d\} = 0.5 = \frac{1}{\pi} \int_{-d}^{d} \frac{x_0}{x_0^2 + y^2} \, dy =$$

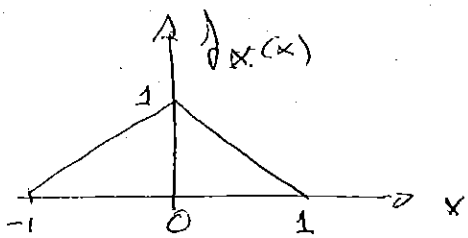
Cambio variable $z = y/x_0$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-d/x_0}^{d/x_0} \frac{1}{1 + z^2} \, dz = \frac{2}{\pi} arctg \frac{d}{x_0} = 0.5$$

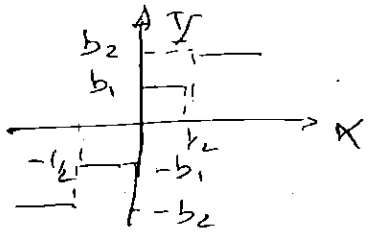
$$tg\left(0.5 \frac{\pi}{2}\right) = \frac{d}{x_0} \Rightarrow \boxed{d = x_0}$$

P12 (1)

a) $f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \le x < 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$



$Y = g(X) \rightarrow Y$ v.a. discreta $R_{mgaY} = \{-b_2, -b_1, b_1, b_2\}$



$P(Y=-b_2) = P(X \le -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} (1+x)\,dx = x + \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{-1/2}$

$= 1/8 = P(Y=-b_2)$

$P(Y=-b_1) = P(-1/2 < X \le 0) = \int_{-1/2}^{0} (1+x)\,dx = \frac{3}{8}$

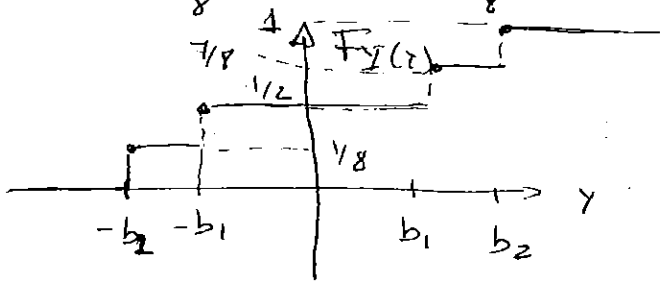
$P(Y=b_1) = P(Y=-b_1) = \frac{3}{8}$

$P(Y=b_2) = P(Y=-b_2) = 1/8$

$f_Y(y) = \frac{1}{8}\delta(y+b_2) + \frac{3}{8}\delta(y+b_1) + \frac{3}{8}\delta(y-b_1) + \frac{1}{8}\delta(y-b_2)$

$F_Y(y) = \frac{1}{8}u(y+b_2) + \frac{3}{8}u(y+b_1) + \frac{3}{8}u(y-b_1) + \frac{1}{8}u(y-b_2)$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -b_2 \\ 1/8 & -b_2 \le y < -b_1 \\ 4/8 = \frac{1}{2} & -b_1 \le y < b_1 \\ 7/8 & b_1 \le y < b_2 \\ 1 & y \ge b_2 \end{cases}$



b) $Var(Y-X) = E[(Y-X)^2] - E^2(Y-X)$

$E(Y-X) = E(Y) - E(X) = 0 - 0 = 0$ $f_X(x)$, $f_Y(y)$ son funciones pares

$E[(Y-X)^2] = E(Y^2) + E(X^2) - 2E(X \cdot Y)$

$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \sum_{y_i \in R_Y} y_i^2 P(Y=y_i) = \frac{1}{8}(-b_2)^2 + \frac{3}{8}(-b_1)^2 +$

$+ \frac{3}{8}(b_1)^2 + \frac{1}{8}(b_2)^2 = \frac{3}{4}b_1^2 + \frac{1}{4}b_2^2$

P12 (ii)

$$E(X \cdot Y) = E(X\, q(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, q(x) f_X(x)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{-1/2} x(-b_2)(1+x)\,dx + \int_{-1/2}^{0} x(-b_1)(1+x)\,dx + \int_{0}^{1/2} x(b_1)(1-x)\,dx +$$

$$+ \int_{1/2}^{1} x \cdot b_2 (1-x)\,dx =$$

$$= (-b_2)\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{-1/2} + (-b_1)\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1/2}^{0} + b_1\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1/2} +$$

$$+ b_2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{12} b_2 + \frac{1}{12} b_1 + \frac{1}{12} b_1 + \frac{1}{12} b_2 = \frac{1}{6}(b_1 + b_2)$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

Error de Cuantificación $= Var(Y - X) = \frac{3}{4} b_1^2 + \frac{1}{4} b_2^2 - \frac{1}{3} b_1 - \frac{1}{3} b_2 + \frac{1}{6}$

b_1, b_2 que minimizan Err cuant (b_1, b_2)

$$\frac{\partial \text{Error}}{\partial b_1} = 0 \qquad \frac{3}{4} 2b_1 - \frac{1}{3} = 0 \qquad b_1 = \frac{2}{9}$$

$$\frac{\partial \text{Error}}{\partial b_2} = 0 \qquad \frac{1}{4} 2b_2 - \frac{1}{3} = 0 \qquad b_2 = \frac{2}{3}$$

ISAL - 12 DICIEMBRE 2002 - FILA B

1) Un circuito no lineal tiene la siguiente función de transferencia:

$$y = g(x) = 1 - e^{-ax^2}$$

siendo $a>0$ una constante. Suponga que la entrada a dicho circuito es modelada por una va X con fdp $f_X(x)$.

a) Dibuje la función de transferencia y calcule la fdp de la va $Y=g(X)$.

b) Particularice el resultado anterior para la siguiente fdp ($u(x)$ es el escalón unidad):

$$f_X(x) = 2axe^{-ax^2}u(x)$$

c) Para esta fdp, calcule la media y varianza de la va Y.

d) Calcule la probabilidad de aprobar este examen (tener una nota mayor o igual a 5), suponiendo que los ocho apartados que lo componen tienen la misma puntuación (1,25 puntos), suponga que esa puntuación de 1,25 puntos se obtiene si la solución es correcta (lo que ocurre con probabilidad 0,5) y que se obtienen 0 puntos en caso contrario.

ISAL - CURSO 05/06 - GRUPO 21 - FILA B

1. Sea X una va con FD $F_X(x)$ y la función $y=g(x)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} x+0.5; -0.5 \le x < 0 \\ 0; x < -0.5 \\ 1; x \ge 0 \end{cases} \qquad y = g(x) = \begin{cases} e^{-|x|}; |x| \ge 0.25 \\ 2; |x| < 0.25 \end{cases}$$

a) Compruebe que $F_X(x)$ cumple las propiedades de una FD y calcule la fdp de X.

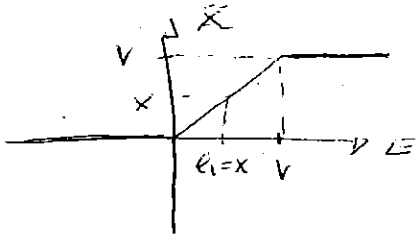
b) Calcule el rango de la va Y y $P(Y=2)$.

c) Obtenga y dibuje la fdp de la va Y. Calcule su media y su varianza.

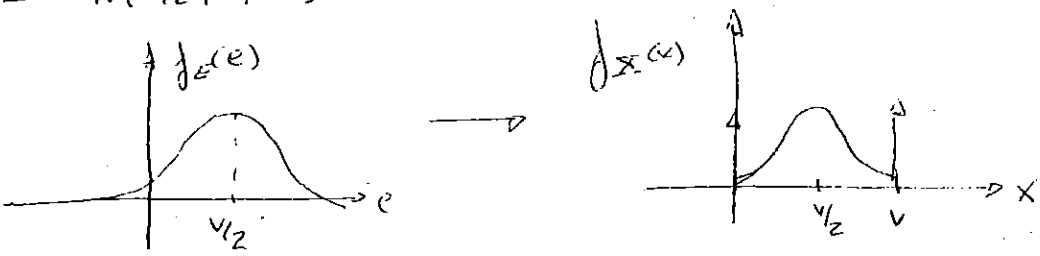
d) Compruebe que la fdp de la va Y tiene área unidad.

P10

(1) $X = g(e) = \begin{cases} 0 & e \le 0 \\ e & 0 < e < v \\ v & e \ge v \end{cases}$



$E \quad N(v/2, v/\sqrt{2})$



$$P(X=0) = P(E \le 0) = G\left(\frac{0 - v/2}{v/\sqrt{2}}\right) = 1 - G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0.24$$

$$P(X=v) = P(E > v) = 1 - G\left(\frac{v - v/2}{v/\sqrt{2}}\right) = 1 - G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0.24$$

Para $0 < x < v$ (T. Fundamental)

$$f_X(x) = \frac{f_E(e_1)}{\underbrace{|g'(e_1)|}_{=1}}\Bigg|_{e_1 = x} = \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{e_1 - v/2}{v/\sqrt{2}}\right)^2\right]\Bigg|_{e_1 = x} =$$

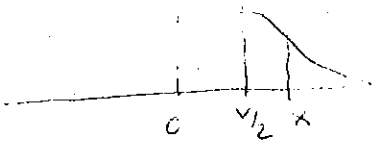
$$= \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x - v/2}{v}\right)^2\right] \quad 0 < x < v$$

f.d.p.

$$\boxed{f_X(x) = 0.24\left[\delta(x) + \delta(x - v)\right] + \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x - v/2}{v}\right)^2\right] \quad 0 \le x \le v}$$

F.D. $\longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x - v/2}{v}\right)^2\right] dv =$

$$= \int_0^x \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x - v/2}{v}\right)^2\right] dv = G\left(\frac{x - v/2}{v/\sqrt{2}}\right) - G\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



F.D.

$$\boxed{F_X(x) = 0.24\left[U(x) + U(x - v)\right] + G\left(\frac{x - v/2}{v/\sqrt{2}}\right) - 1 + G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

P10 (2)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(e)\, f_e(e)\, de =$$

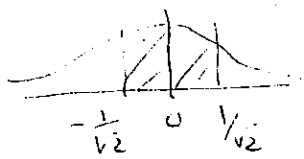
$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot f_e(e)\, de + \int_{0}^{v} e\, f_e(e)\, de + \int_{v}^{\infty} v\, f_e(e)\, de =$$

$$= \underbrace{\int_{0}^{v} e \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{e - v/2}{v}\right)^2\right] de}_{I_1} + \underbrace{v \int_{v}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{e - v/2}{v}\right)^2\right] de}_{I_2}$$

$$I_1 \overset{t = \frac{e - \frac{v}{2}}{v\sqrt{2}}}{=} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(t \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{v}{2}\right) \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) \frac{v}{\sqrt{2}}\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \underbrace{\cancel{t \frac{v}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) \frac{v}{\sqrt{2}}}}_{\text{fnam impar } \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1/\sqrt{2}} = 0} dt + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{v}{2} \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) \frac{v}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{v}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{v}{2} \left[G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - G\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$



$$= \frac{v}{2} \left[2G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 \right]$$

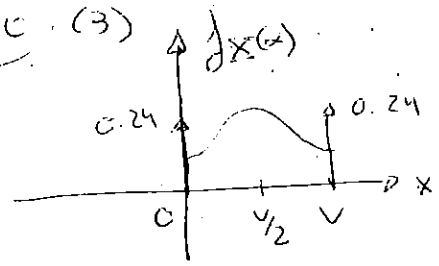
$$I_2 = v \int_{v}^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{e - v/2}{v}\right)^2\right] de =$$

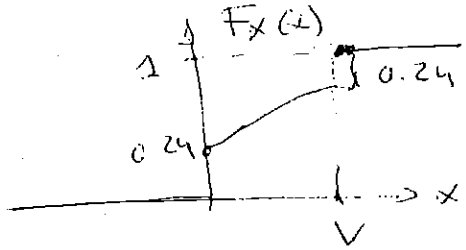
$$\overset{t = \frac{e - v/2}{v\sqrt{2}}}{=} v \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{v}{\sqrt{2}} \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt = v \left[1 - G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$E(X) = I_1 + I_2 = \frac{v}{2} \left[2G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 \right] + v \left[1 - G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] =$$

$$= \frac{v}{2}$$

P.1c (3)





Otra forma de ~~calcular~~ obtener $E(X)$: usar la $f_X(x)$ obtenida

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[0.24 \, \delta(x) + 0.24 \, \delta(x - V) \right] dx + \underbrace{\int_0^V x \frac{1}{V\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x - V/2}{V} \right)^2 \right]}_{I_1 \text{ calculada antes}}$$

$$= 0 + 0.24 \cdot V + I_1 =$$

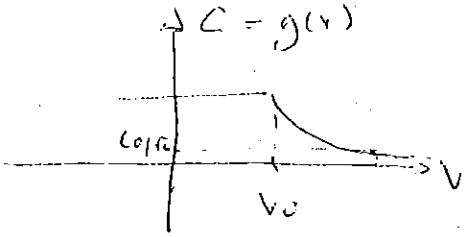
$$= \underbrace{0.24}_{\text{obtenida en el 1er apartado}} \cdot V + V \left[G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \right] = \frac{V}{2}$$

$$1 - G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

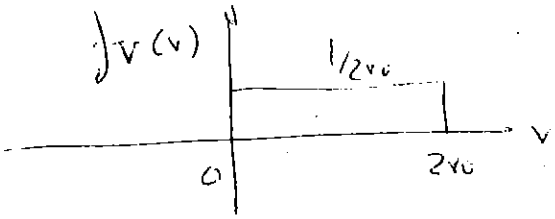
P1.1 (1)

$$C = g(V) = \begin{cases} C_0 & V \le V_0 \\ C_0 \sqrt{\frac{V_0}{V}} & V > V_0 \end{cases}$$

$C_0, V_0 > 0$



a)



$$f_C(c) = P(C = c_0)\,\delta(c - c_0) + \frac{f_V(v)}{|g'(v_k)|}\Bigg|_{v_k = g^{-1}(c)} = \frac{c_0^2}{c} V_0 \qquad g'(v) = -\frac{1}{2} c_0 \sqrt{V_0}\, v^{-3/2}$$

para $V > V_0$

$$P(C = c_0) = \int_0^{V_0} \frac{1}{2V_0}\, dv = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f_V(v)}{|g'(v)|} = \frac{1}{2V_0} \frac{1}{\left|-\frac{1}{2} c_0 \sqrt{V_0}\, v^{-3/2}\right|} = \frac{1}{c_0 V_0^{3/2}} v^{3/2}$$

$$\frac{f_V(v_k)}{|g'(v_k)|}\Bigg|_{v_k = \frac{c_0}{c} V_0} = \frac{1}{c_0 \cancel{V_0^{3/2}}} \frac{c_0^3}{c^3} \cancel{V_0^{3/2}} = \frac{c_0^2}{c^3}$$

$$\boxed{f_C(c) = \frac{1}{2}\delta(c - c_0) + \frac{c_0^2}{c^3} \quad \left(\frac{c_0}{\sqrt{2}} < c \le c_0\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_C(c)\, dc = \frac{1}{2} + c_0^2 \int_{\frac{c_0}{\sqrt{2}}}^{c_0} \frac{1}{c^3}\, dc =$$

$$= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}\frac{c_0^2}{c^2}\right]_{c_0/\sqrt{2}}^{c_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \underline{\underline{1}}$$

b) $E(V) = V_0$ $\quad$ V: v.a. uniforme $U(0, 2V_0)$

$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) f_V(v)\, dv = \int_0^{V_0} c_0 \frac{1}{2V_0}\, dv + \int_{V_0}^{2V_0} c_0 \frac{\sqrt{V_0}}{\sqrt{v}} \frac{1}{2V_0}\, dv$$

P11 (c)

$$E(C) = \frac{1}{2}C_0 + \frac{1}{2}C_0 \frac{1}{\sqrt{V_0}} \cdot 2V^{1/2}\Big|_{V_0}^{2V_0} = \frac{1}{2}C_0 + \frac{C_0}{\sqrt{V_0}}\left[2\sqrt{V_0} - \sqrt{V_0}\right] =$$

$$= C_0\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Otra forma:

$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} c\, f_C(c)\, dc = \frac{C_0}{2} + \int_{\frac{C_0}{\sqrt{2}}}^{C_0} c\, \frac{C_0^2}{c^3}\, dc =$$

$$= \frac{C_0}{2} + \left[-C_0^2 c^{-1}\right]_{C_0/\sqrt{2}}^{C_0} = \frac{C_0}{2} - C_0 + C_0\sqrt{2} = C_0\left[\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$E(C \cdot V) = \int_{-\infty}^{\infty} v\, g(v)\, f_V(v)\, dv = \int_0^{V_0} v \cdot C_0 \frac{1}{2V_0}\, dv + \int_{V_0}^{2V_0} v\, C_0 \frac{\sqrt{V_0}}{\sqrt{v}} \frac{1}{2V_0}$$

$$= \frac{C_0}{2V_0}\frac{v^2}{2}\Big]_0^{V_0} + \frac{1}{2\sqrt{V_0}} C_0 \frac{v^{3/2}}{3/2}\Big]_{V_0}^{2V_0} =$$

$$= \frac{C_0 V_0}{4} + \frac{C_0}{3\sqrt{V_0}}\left[(2V_0)^{3/2} - V_0^{3/2}\right] = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\left(2^{3/2} - 1\right)\right] C_0 V_0$$

c) $W = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$ $\quad L_0 > 0$

$$C = g(v) = \begin{cases} C_0 & v \le 0 \\ C_0\sqrt{\frac{V_0}{v}} & v > V_0 \end{cases}$$

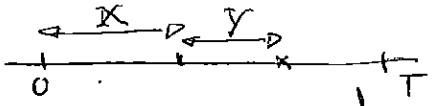
$$W = h(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} & v \le V_0 \\ \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}\sqrt{\frac{V_0}{v}}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}\left(\frac{v}{V_0}\right)^{1/4} & v > V_0 \end{cases}$$

$$E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)\, f_V(v)\, dv = \int_0^{V_0} \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \frac{1}{2V_0}\, dv +$$

$$+ \int_{V_0}^{2V_0} \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}\left(\frac{v}{V_0}\right)^{1/4} \frac{1}{2V_0}\, dv = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} + \frac{1}{2}\frac{1}{V_0^{5/4}\sqrt{L_0 C_0}} \frac{v^{5/4}}{5/4}\Big]_{V_0}^{2V_0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\left(2^{5/4} - 1\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \frac{1 + 8\sqrt[4]{2}}{10} \approx \frac{1.05}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

P13

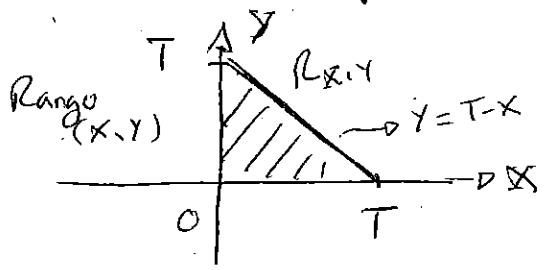


a) X v.a. uniforme $(0,T) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{T}$; $0 < x < T$

Y/X v.a. uniforme <u>condicionada</u> $f_Y(y/x) = \left| \frac{1}{T-x} \right.$ $0 < y < T-x$

$$f_{XY}(x,y) \overset{\text{Teorema Multipl.}}{=} f_Y(y/x)\, f(x) = \frac{1}{T(T-x)} \text{ en } \begin{cases} 0 < x < T \\ 0 < y < T-x \end{cases}$$

c.q.d.



b) $C_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(X) = \frac{T}{2}$ (X uniforme $(0,T)$)

$$E(Y) = \iint y\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^T \int_0^{T-x} y \frac{1}{T(T-x)}\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{2T} \int_0^T \frac{(T-x)^{\cancel{2}}}{\cancel{T-x}}\, dx = \frac{1}{2T}\left[Tx - \frac{x^2}{2}\right]_0^T = \frac{T}{4}$$

otra forma: $E(Y/X) = \frac{T-X}{2}$ (v.a. uniforme)

$$E(Y) = \int_0^T E(Y/X)\, f_X(x)\, dx = \int_0^T \frac{T-x}{2} \frac{1}{T}\, dx = \frac{T}{4}$$

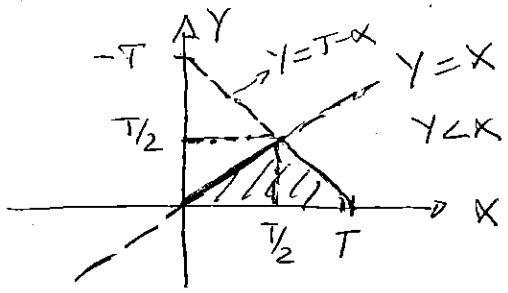
$$E(XY) = \int_0^T \int_0^{T-x} xy\, f_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_0^T \int_0^{T-x} \frac{xy}{T(T-x)}\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{x\,(T-x)^{\cancel{2}}}{\cancel{T-x}}\, dx = \frac{1}{T}\left[\frac{Tx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^T = \frac{T^2}{12}$$

$$C_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{T^2}{12} - \frac{T}{2}\frac{T}{4} \neq 0 \Rightarrow$$ X, Y <u>CORRELADAS</u>

c)

P 13 cont.. $P\{Y<X\}$



$$P\{Y<X\} = \int_{0\,(Y)}^{T/2} \left[\int_{Y\,(X)}^{T-Y} \frac{1}{T(T-X)}\, dx \right] dY =$$

$$= \int_0^{T/2} \left[-\frac{1}{T} \ln(T-X) \right]_Y^{T-Y} dY =$$

$$= \frac{1}{T} \left[\underbrace{\int_0^{T/2} \ln(T-Y)\, dY}_{\text{cambio variable } T-Y=u} - \int_0^{T/2} \ln(Y)\, dY \right] =$$

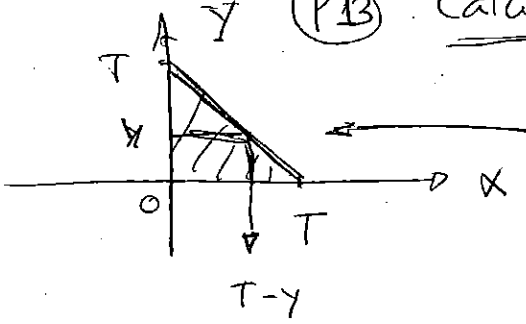
$$= \frac{1}{T} \left[\int_{T/2}^{T} \ln(u)\, du - \int_0^{T/2} \ln(Y)\, dY \right] =$$

$$\boxed{\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1)}$$

$$= \frac{1}{T} \left[u(\ln u - 1) \Big|_{T/2}^{T} - Y(\ln Y - 1) \Big|_0^{T/2} \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \left[T(\ln T - 1) - T/2 (\ln T/2 - 1) - T/2 (\ln(T/2) - 1) \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \left[T(\ln T - 1) - T(\ln T/2 - 1) \right] = \underline{\underline{\ln 2}}$$



(P13) Cálculo de $f_Y(y)$

La v.a. es Y; y para un valor de "y" la v.a. X varía entre

$0 \longrightarrow (T-y)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_0^{T-y} f_{XY}(x,y)\,dx =$$

$$= \int_0^{T-y} \frac{1}{T(T-x)}\,dx = \frac{1}{T}\left[\ln(T) - \ln(y)\right] \qquad 0 < y < T$$

Ver que: $\int_0^T f_Y(y) = 1 = \int_0^T \frac{1}{T}\left[\ln(T) - \ln(y)\right] dy =$

$$= \frac{1}{T} T \ln T - \frac{1}{T}\, y\left(\ln(y) - 1\right)\Big|_0^T =$$

$$= \ln T - \frac{1}{T}\, T(\ln T - 1) = \underline{\underline{1}}$$

$$E(Y) = \int_0^T y\, f_Y(y)\,dy = \int_0^T \frac{y}{T}\left[\ln(T) - \ln(y)\right] dy =$$

$$= \underbrace{\frac{y^2}{2T}\ln(T)\Big|_0^T}_{T/2\,\ln(T)} - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T y\ln(y)\,dy}_{I} = \frac{T}{2}\ln T - \left(\frac{T}{2}\ln T - \frac{T}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{T}{4}}}$$

$$I = \frac{1}{T}\left[\frac{y^2}{2}\left(\ln(y) - \tfrac{1}{2}\right)\right]_0^T = \frac{1}{T}\left[\frac{T^2}{2}\left(\ln T - \tfrac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{T}{2}\ln(T) - \frac{T}{4}$$

(P14) ... X, Y v.a's Bernouilli independientes

$P(X=1) = P(Y=1) = p \qquad P(X=0) = P(Y=0) = 1-p \quad q$

$Z = X \oplus Y \qquad \oplus$ or exclusive

$\{Z=0\} = \{X=0, Y=0\} \cup \{X=1, Y=1\}$

$\{Z=1\} = \{X=0, Y=1\} \cup \{X=1, Y=0\}$

a) Z, X independientes ?

$P(X=0, Z=0) = P(X=0, Y=0) \overset{X,Y \text{ indep.}}{=} P(X=0)P(Y=0) = q \cdot q = q^2$

$P(X=0, Z=1) = P(X=0, Y=1) = q \cdot p$

$P(X=1, Z=0) = P(X=1, Y=1) = p^2$

$P(X=1, Z=1) = P(X=1, Y=0) = p \cdot q$

$P(Z=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1) = q^2 + p^2$

$P(Z=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) = 2q \cdot p$

Para que Z, X sean indep. $P(X=x_i, Z=z_i) = P(X=x_i) \cdot P(Z=z_i)$ $\forall x_i \in R_X$ $\forall z_i \in R_Z$

No se verifica "en general", por ejemplo (con 1 ejemplo basta!)

$$P(X=0, Z=0) = q^2 \neq P(X=0)P(Z=0) = q(q^2+p^2)$$

b) $C_{XZ} = E(XZ) - E(X)E(Z)$

$X \cdot Z$: puede tomar valores $0, 1$ es v.a. Bernouilli

$P(X \cdot Z = 1) = P(X=1, Z=1) = p \cdot q$

$P(X \cdot Z = 0) = 1 - p \cdot q$

$E(XZ) = 1 \cdot P(X \cdot Z = 1) = p \cdot q$

X es v.a. Bernouilli

$$E(X) = 1 \cdot P(X=1) + 0 \cdot P(X=0) = p$$

Z es v.a. Bernouilli

$$E(Z) = 1\, P(Z=1) + 0 \cdot P(Z=0) = 2pq$$

$C_{XY} = pq - 2p^2q = pq(1-2p) = \underline{p(1-p)(1-2p)}$

P14 cont...

c) X, Y incorreladas $\iff C_{XZ} = 0$

valores de p?

$$p(1-p)(1-2p) = 0 \quad \begin{cases} p=0 \ (q=1) \\ p=1 \ (q=0) \\ p=1/2 \ (q=1/2) \end{cases}$$

	$p=0$	$p=1$	$p=1/2$
$P(X=0, Z=0)$	1	0	1/4
$P(X=0, Z=1)$	0	0	1/4
$P(X=1, Z=0)$	0	1	1/4
$P(X=1, Z=1)$	0	0	1/4

	$p=0$	$p=1$	$p=1/2$
$P(X=0)\,P(Z=0)$	1	0	1/4
$P(X=0)\,P(Z=1)$	0	0	1/4
$P(X=1)\,P(Z=0)$	0	1	1/4
$P(X=1)\,P(Z=1)$	0	0	1/4

Para <u>todos</u> los casos particulares ($p=0$, $p=1$, $p=1/2$)

X y Z son <u>v.a's independientes</u>

(P15) $T = R \cdot C$ $\quad R, C$ v.a's $U(9, 11)$ independientes

a) $f_R(r) = \frac{1}{2} \quad 9 < r < 11$
$f_C(c) = \frac{1}{2} \quad 9 < c < 11$
$\Rightarrow f_{RC}(r,c) = \frac{1}{4} \begin{cases} 9 < r < 11 \\ 9 < c < 11 \end{cases}$

Método v.a. auxiliar

$T = R \cdot C$
$W = R$ (v. auxiliar)
$\rightarrow r = w$, $c = \frac{t}{w}$

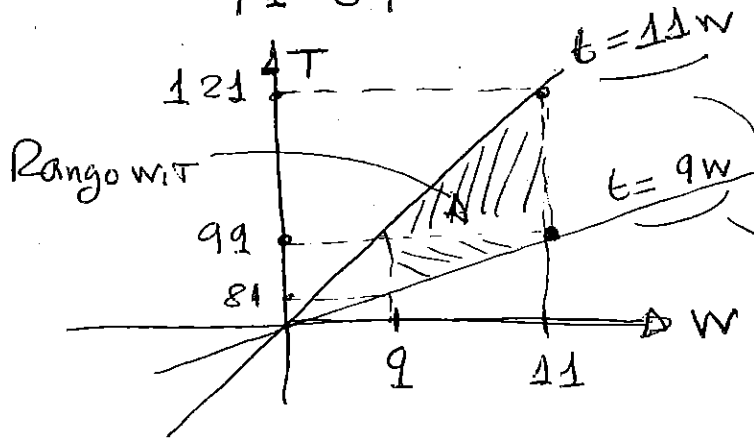
$$f_{TW}(t,w) = \frac{f_{RC}(r,c)}{|J(r,c)|}\Bigg|_{\substack{r=w \\ c=t/w}}$$

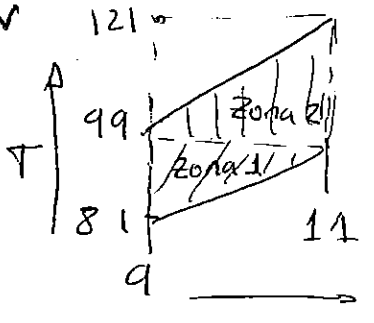
$$J(r,c) = \begin{vmatrix} c & r \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r \qquad f_{TW}(t,w) = \frac{1}{4|-r|}\Bigg|_{r=w} =$$

$$= \frac{1}{4w} \begin{cases} 9 < w < 11 \\ 9 < \frac{t}{w} < 11 \end{cases}$$

Rango W,T

$9w < t < 11w$





Zona 1 + Zona 2

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{TW}(t,w)\, dw =$$

$$= \begin{cases} \text{Zona 1} \\ 81 < t < 99 \quad f_T(t) = \int_9^{t/9} \frac{1}{4w}\, dw = \frac{1}{4} \ln w \Big|_9^{t/9} = \\ \qquad = \frac{1}{4}\left[\ln t/9 - \ln 9\right] = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{t}{81}\right) \\ \text{Zona 2} \\ 99 < t < 121 \quad f_T(t) = \int_{t/11}^{11} \frac{1}{4w}\, dw = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{121}{t}\right) \end{cases}$$

---

b) $E[T/R=r] = E[R \cdot C/R=r] = E[r \cdot C/R=r] =$
$= r\, E[C/R=r] \underset{R,C \text{ indep.}}{=} r\, E[C] = \underline{\underline{10 \cdot r}}$

c) $F = 1/RC \qquad E[F] = E[1/RC] = E[1/R]\, E[1/C]$

$E[1/R] = \int_9^{11} \frac{1}{r} \frac{1}{2}\, dr = \frac{1}{2} \ln r \Big|_9^{11} = \frac{1}{2} \ln(11/9) = E[1/C]$

$E[F] = (\frac{1}{2} \ln 11/9)^2 \approx \boxed{0.01}$

P16 (1) X v.a. discreta $P(X=1)=P(X=-1)$

Z_1, Z_2, Z_3 $N(0,1)$ independientes

$Y_1 = X + Z_1$; $Y_2 = X + Z_2$; $Y_3 = X + Z_3$

Decisión

Test 1) $A = \text{signo}(Y_1) + \text{signo}(Y_2) + \text{signo}(Y_3)$ | $A > 0 \to X = 1$; $A \leq 0 \to X = -1$

3 decisiones

Test 2 $B = Y_1 + Y_2 + Y_3$ $\longrightarrow$ $B > 0 \to X = 1$

(suma + decisión) $B \leq 0 \to X = -1$

a) Test 1 Prob{"equivocarse usando A" / $X=1$} =

$= P\{\text{signo}(Y_i) = -1 ;\ 2 \text{ ó } 3 \text{ veces en } 3 \text{ ensayos}\}$

$P\{\text{signo}(Y_i) = -1 / X = 1\} = P\{Y_i \leq 0 / X = 1\} =$

$= P\{X + Z_i < 0 / X = 1\} = P\{1 + Z_i < 0\} = P\{Z_i < -1\} =$

$\overset{N(0,1)}{=} G(-1) = 1 - G(1) = 0.1587 = p$

$P\{\text{signo}(Y_i) = -1 ;\ 2 \text{ ó } 3 \text{ veces en } 3 \text{ ensayos}\} = \sum_{k=2}^{3} \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k} =$

$= 3p^2(1-p) + p^3 = 0.0676$

b) Test 2 Prob{"equivocarse usando B" / $X=1$} =

$= P\{B \leq 0 / X = 1\} = P(3X + Z_1 + Z_2 + Z_3 < 0 / X = 1) =$

$= P(3 + Z_1 + Z_2 + Z_3 < 0) \underset{A}{=} G\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = 1 - G(\sqrt{3}) = 0{,}0427$

$Z_1 + Z_2 + Z_3 + 3$ } $\Rightarrow$

Suma gaussianas

$\Rightarrow$ Gaussiana $N(3, \sqrt{3})$

P16 (2)

Test 1: usando A

$$P\{\text{equivocarse}\} = P(A \le 0 / X=1)\, P(X=1) + P(A > 0 / X=-1)\, P(X=-1) =$$

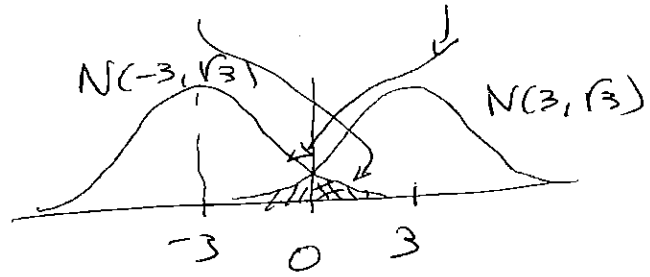
$$= 0.0676 \tfrac{1}{2} + \underbrace{0.0676}\, \tfrac{1}{2} = \underline{\underline{0.0676}}$$

Porque $P(A \le 0 / X=1) = P(A > 0 / X=-1)$ razonando igual que en el apartado a)

Test 2: usando B

$$P\{\text{equivocarse}\} = P(B \le 0 / X=1)\, P(X=1) + P(B < 0 / X=-1)\, P(X=-1)$$

$$P(B<0 / X=-1) = P(B \le 0 / X=1)$$



$$P(-3 + z_1 + z_2 + z_3 > 0) \underset{\substack{N(-3,\sqrt{3}) \\ \text{v.a}(-3, z_1+z_2+z_3)}}{=} 1 - G\left(\frac{0+3}{\sqrt{3}}\right) = 1 - G(\sqrt{3}) = 0.0427$$

$$P\{\text{equivocarse usando B}\} = \tfrac{1}{2}\, 0.0427 + \tfrac{1}{2}\, 0.0427 = \underline{0.0427}$$

(Nota: Prob eq. B (0.0427) < Prob eq. A (0.0676))

Combina decisiones "parciales" ponderaciones y decisión al final

P17 (1)

T_i : tiempo entre partícula $i-1$ y partícula i

EN CONDICIONES "normales"

$$f_{T_i}(t_i) = \alpha\, e^{-\alpha t_i}\, u(t_i)$$

$$F_{T_i}(t_i) = (1 - e^{-\alpha t_i})\, u(t_i)$$

$\alpha = 0.5$ si no hay escape

$$E[T_i] = \frac{1}{\alpha} = 2 \quad ; \quad Var(T_i) = \sigma_i^2 = \frac{1}{\alpha^2} = 4$$

---

a) Y : tiempo en contar 100 partículas : partículas independ.

$$Y = T_1 + T_2 + \dots T_{100} = \sum_{i=1}^{100} T_i$$

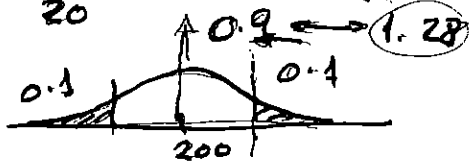
$$E(Y) = 100\,\frac{1}{\alpha} = 200 \quad ; \quad Var(Y) = 100\,\frac{1}{\alpha^2} = 400$$

Y : por el Teorema del Límite Central puede aproximarse como una gaussiana $N(200, \sqrt{400})$

$$P(\text{"Falsa alarma"}) = P(Y < T) = G\left(\frac{T-200}{20}\right) = 0.1$$

En condiciones normales, 100 partículas en $< T$

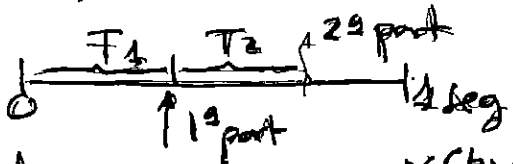
$$\frac{T-200}{20} = -1.28 \Rightarrow T = 174 \text{ seg.}$$



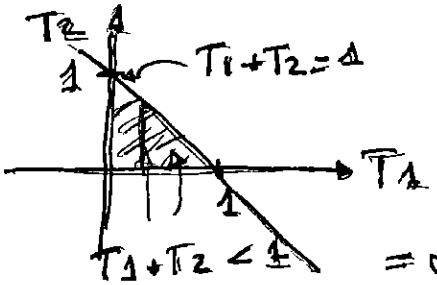
b) $P(\text{"Falsa alarma criterio 2"}) = P(\text{"más de 1 partícula en 1 seg"}) =$

$$= P(T_1 + T_2 < 1)$$

Con la distribución de no escape



$$f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) \overset{\text{INDEP}}{=} f_{T_1}(t_1)\cdot f_{T_2}(t_2) = \alpha^2 e^{-\alpha(t_1+t_2)} \quad (x_1, x_2 > 0)$$



$$P(\text{"Falsa Alarma"}) = \int_{0\,(t_1)}^{1}\int_{0\,(t_2)}^{1-t_1} \alpha^2 e^{-\alpha(t_1+t_2)}\, dt_2\, dt_1$$

$$= \alpha^2 \int_0^1 e^{-\alpha t_1} \left[\int_0^{1-t_1} e^{-\alpha t_2}\, dt_2\right] dt_1 =$$

$$= \alpha^2 \int_0^1 e^{-\alpha t_1} \left[-\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha(1-t_1)} - 1\right)\right] dt_1$$

(P18) a) $Y(t)$ estacionario sentido amplio?
estacionario de orden 1?

$$E[Y(t)] = \sum_k y_k(t)\, P[Y(t) = y_k(t)] =$$

$$= 1 \cdot P[Y(t)=1] + (-1)\, P[Y(t)=-1] =$$

$$= P[X(t) > a] - P[X(t) \le a] =$$

$$= [1 - F_X(a)] - F_X(a) = 1 - 2\, \underline{\underline{F_X(a)}},$$

(cte) (1)

$F_X()$ no dep. de t, $X(t)$ p.e. estac. orden 2

$$R_Y(t_1,t_2) = \sum_{j,k} y_j(t)\, y_k(t)\, P[Y(t_1) = y_j(t),\ Y(t_2) = y_k(t)]$$

$$\shortparallel$$

$$E[Y(t_1), Y(t_2)] = 1 \cdot 1 \cdot P[Y(t_1)=1, Y(t_2)=1] + (-1)(-1)\, P[Y(t_1)=-1,$$

$$Y(t_2)=-1] + (1)(-1)\, P[Y(t_1)=1, Y(t_2)=-1] + (-1)\cdot 1 \cdot P[Y(t_1)=-1, Y(t_2)=1]$$

$$= \{P[X(t_1) > a, X(t_2) > a] + P[X(t_1) \le a, X(t_2) \le a]\} -$$

$$- \{P[X(t_1) > a, X(t_2) \le a] + P[X(t_1) \le a, X(t_2) > a]\} =$$

$$= \{(1 - F_X(a,\infty,\tau) - F_X(\infty,a,\tau) + F_X(a,a,\tau)) + F_X(a,a,\tau)\}$$

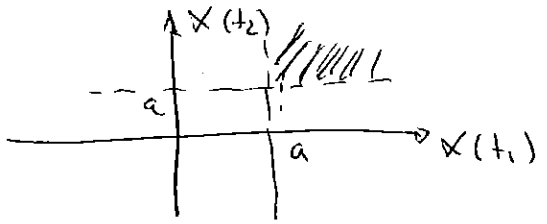
$$- \{(F_X(-\infty,a,\tau) - F_X(a,a,\tau)) + (F_X(a,\infty,\tau) - F_X(a,a,\tau))\} =$$

$$= 1 - 4\, \underline{\underline{[F_X(a,a,\tau) - F_X(a)]}}$$ (2) Depende de $\underline{\underline{\tau}}$

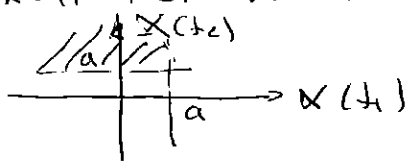
luego (1), (2) $\Rightarrow$ ESTACIONARIO EN SENTIDO AMPLIO

$$P\{X(t_1) \le a, X(t_2) \le a\} = F_X(a,a,\tau)$$

$$P\{X(t_1) > a, X(t_2) > a\} = 1 - F_X(a,\infty,\tau) - F_X(\infty,a,\tau) + F(a,a,\tau)$$



$$P\{X(t_1) \le a, X(t_2) > a\} =$$
$$= F_X(a,\infty,\tau) - F_X(a,a,\tau)$$



P18 cont..

$$f_Y(y) = P[Y(t)=1]\,\delta(y-1) + P[Y(t)=-1]\,\delta(y+1) =$$

$$= [1-F_X(a)]\,\delta(y-1) + F_X(a)\,\delta(y+1)$$

$\Rightarrow$ ESTACIONARIO DE ORDEN 1

b) $$C_Y(\tau) = R_Y(\tau) - \eta_Y^2 =$$

$$= 1 + 4\,[F_X(a,a,\tau) - F_X(a)] - [1 - 2 \cdot F_X(a)]^2 =$$

$$= 4\,[F_X(a,a,\tau) - F_X^2(a)]$$

$$\sigma_Y^2 = C_Y(0) = 4\,F_X(a)\,[1 - F_X(a)]$$ Depende de $F_X(a)$

$$\frac{\partial \sigma_Y^2}{\partial F_X(a)} = 0 \Rightarrow F_X(a) = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma_{Y\,max}^2 = 1}$$

P19 a) $E\{Y[n]\} = E[U(X[n]-A)] = 1 \cdot P\{X[n] > A\} =$

$= P\{X[n] > A / A=0\} P(A=0) + P\{X[n] > A / A=1\} P(A=1) =$

$= [1-G(0)](1-p) + [1-G(1)] \cdot p \Rightarrow \boxed{\eta_Y = 0.5 - 0.34p}$

$Var\{Y[n]\} = E[Y^2[n]] - E^2[Y[n]]$

$E[Y^2[n]] = E[U^2(X[n]-A)] = 1^2 P\{X[n] > A\} = \eta_Y$

$\sigma_Y^2 = \eta_Y - \eta_Y^2 = \eta_Y(1-\eta_Y) = \underline{0.25 - 0.12p^2}$

b) $n_1 \neq n_2$

$R_Y[n_1, n_2] = E\{Y[n_1]Y[n_2]\} = E(U\{X[n_1]-A\} \cdot U\{X[n_2]-A\}) =$

$= 1 \cdot 1 \cdot P\{X[n_1] > A, X[n_2] > A\} =$

$= P\{X[n_1] > 0, X[n_2] > 0\} P(A=0) + P\{X[n_1] > 1, X[n_2] > 1\} \cdot$

$\cdot P(A=1) = [1-G(0)]^2(1-p) + [1-G(1)]^2 p =$

$= \underline{0.25 - 0.22p}$

$\underline{n_1 = n_2}$ $\quad R_Y[n_1, n_1] = E[Y^2[n_1]] = \eta_Y$

$$\boxed{R_Y[n_1, n_2] = \begin{cases} 0.5 - 0.34p, & n_1 = n_2 \\ 0.25 - 0.22p, & n_1 \neq n_2 \end{cases}}$$

$$\boxed{C_Y[n_1, n_2] = R_Y[n_1, n_2] - \eta_Y^2 = \begin{cases} 0.25 - 0.12p^2, & n_1 = n_2 \\ 0.12p(1-p), & n_1 \neq n_2 \end{cases}}$$

Sí, es <u>estacionario en sentido amplio</u>

P19 .. cont.

c) $\underline{n_1 \neq n_2}$ $R_{XY}[n_1,n_2] = E[X[n_1]\,Y[n_2]] =$

$$= E[X[n_1]\cdot U\{X[n_2]-A\}] \underset{\substack{\text{Ruido}\\ \text{blanco}\\ \text{estricto}}}{=} \underbrace{\cancel{E[X[n_1]]}}_{N(0,1)}^{\,0}\, E[U\{X[n_2]-A\}] =$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$\underline{n_1 = n_2}$ $R_{XY}[n_1,n_1] = E[X[n_1]\,Y[n_1]] =$

$$= E[X[n_1]\cdot U\{X[n_1]-A\}] =$$

$$= (1-p)\,E[X[n_1]\,U\{X[n_1]\}] + p\,E[X[n_1]\,U\{X[n_1]-1\}] =$$

$$= (1-p)\int_0^\infty x\, f_X(x)\,dx + p\int_1^\infty x\, f_X(x)\,dx \underset{f_X(x)}{=} \underline{\text{gauss } N(0,1)}$$

$$= (1-p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + p\,\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-0.4p)$$

$$R_{XY}[n_1,n_2] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-0.4p), & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

Luego $X[n]$, $Y[n]$: SON CONJUNTAMENTE ESTACIONARIOS EN SENTIDO AMPLIO.

(P20) $X_1, X_2, \dots X_n \dots$ v.a.'s continuas e independientes

$E[X_i] = 0 \quad Var[X_i] = 1 \quad \forall i$

$X[n] = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad (n = 1, 2, \dots)$ Proceso discreto en el tiempo

a) $\eta_X[n] = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$

$$R_X[n_1, n_2] = E\left[\left(\sum_{k_1=1}^{n_1} X_{k_1}\right)\left(\sum_{k_2=1}^{n} X_{k_2}\right)\right] = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} E[X_{k_1} X_{k_2}]$$

Como:

$$E[X_{k_1}, X_{k_2}] = \begin{cases} E[X_{k_1}^2] & \text{si } k_1 = k_2 \\ E[X_{k_1}]E[X_{k_2}] = 0 & \text{si } k_1 \neq k_2 \text{ (indep.)} \end{cases}$$

Entonces:

$$R_X[n_1, n_2] = \sum_{k=1}^{\min(n_1, n_2)} E[X_k^2] = \underline{\min(n_1, n_2)}$$

La media es cte, pero $R_X[n_1, n_2]$ no depende de $n_1 - n_2 \Rightarrow$ NO ESTACION.

b) $Y[n] = X[n+N] - X[n] = \sum_{k=1}^{n+N} X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=n+1}^{n+N} X_k$

$$\eta_Y[n] = E\left(\sum_{k=n+1}^{n+N} X_k\right) = \sum_{k=n+1}^{n+N} E[X_k] = 0$$

$$R_Y[n_1, n_2] = E\left[\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{n_1+N} X_{k_1}\right)\left(\sum_{k_2=n_2+1}^{n_2+N} X_{k_2}\right)\right] = \sum_{k_1=n_1+1}^{n_1+N}\sum_{k_2=n_2+1}^{n_2+N} E(X_{k_1} X_{k_2})$$

Casos: $n_2 \leq n_1 < n_2 + N \Rightarrow R_Y[n_1, n_2] = \sum_{k=n_1+1}^{n_2+N} E(X_k^2) = N - (n_1 - n_2)$

$n_1 \leq n_2 < n_1 + N \Rightarrow R_Y[n_1, n_2] = \sum_{k=n_2+1}^{n_1+N} E(X_k^2) = N - (n_2 - n_1)$

$n_1 + N \leq n_2$ ó $n_2 + N \leq n_1 \Rightarrow R_Y[n_1, n_2] = 0$

Luego $R_Y[n_1, n_2] \underset{m = n_1 - n_2}{=} R_Y[m] = \begin{cases} N - |m| & |m| \leq N \\ 0 & |m| > N \end{cases}$

Media es cte y autocorrelación función de $n_1 - n_2 \Rightarrow$ Y[n] ES ESTACIONARIO EN SENTIDO AMPLIO

P20 - cont...

c) $Y[n]$ es una suma de N v.a.'s continuas e independientes

$N >> 1 \Rightarrow Y \sim N(\eta_Y[n], \sigma_Y[n])$

(Teorema del Límite Central)

Siendo

$$\eta_Y[n] = 0$$

$$\sigma_Y[n] = \sqrt{Var(Y[n])} =$$

$$= \sqrt{R_Y[0] - \eta_Y^2[0]} = \sqrt{N}$$

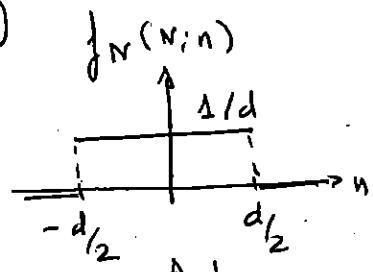
P(21) a) $X[n] = S[n] + N[n]$ $\quad S[n], N[n]$ indep.

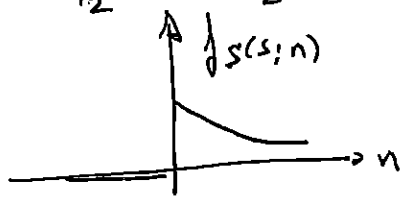
$N[n]$ ruido blanco estricto, distrib. uniforme $(-d/2, d/2)$

d cte > 0

$S[n] \to C_S[m]$; $f_S(s;n) = c\, e^{-cs}\, u(s)$

a)



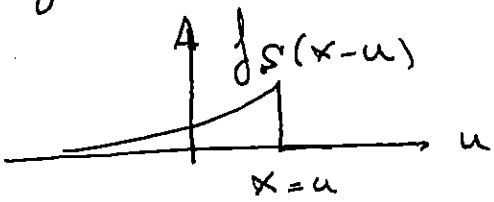


$S[n], N[n]$ independientes

$X[n]$ suma de independientes

$$f_X(x;n) = f_S(s;n) * f_N(n;n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(u)\, f_S(x-u)\, du$$

Regiones de la convolución:



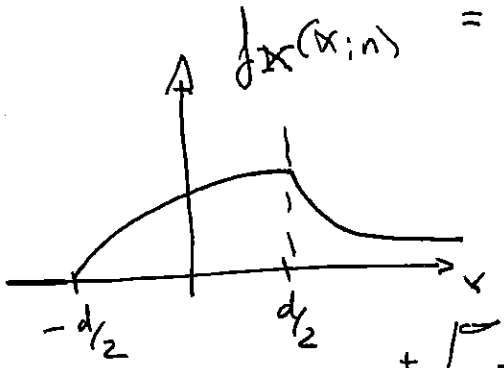
$\underline{x \in (-\infty, -d/2)}$ $\quad f_X(x;n) = \underline{\underline{0}}$

$\underline{x \in (-d/2, d/2)}$ $\quad f_X(x;n) = \int_{-d/2}^{x} \frac{1}{d}\, c\, e^{-(x-u)c}\, du =$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{d}\left[1 - e^{-c(x+d/2)}\right]}}$$

$\underline{x \in (d/2, \infty)}$ $\quad f_X(x;n) = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{d}\, c\, e^{-c(x-u)}\, du =$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{d}\, e^{-cx} \cdot 2 \cdot sh\left(\frac{cd}{2}\right)}}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;n)\, dx = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{d}\left[1 - e^{-c(x+d/2)}\right] dx +$$

$$+ \int_{d/2}^{\infty} \frac{1}{d}\, e^{-cx}\, 2 \cdot sh\left(\frac{cd}{2}\right) dx =$$

P21 (2) ... cont..

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;n)\,dx = \left(1 + \frac{1}{cd}e^{-cd} - \frac{1}{cd}\right) + \left(\frac{1}{cd} - \frac{1}{cd}e^{-cd}\right) = \underline{\underline{1}}$$

$X[n]$ es estacionario de primer orden [$f_X(x;n)$ no dep. de n]

b) $C_X[n+m,m] = R_X[n+m,m] - \eta_X[n+m]\,\eta_X[m]$

$$\eta_X[m] = \eta_S[m] + \cancel{\eta_N[m]}^{\,0} = \eta_S$$

$$R_X[n+m,m] = E\left(X[n+m]\,X[m]\right) = E\left(\{S[n+m] + N(n+m)\}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\{S[m] + N[m]\}\right) = R_S[m] + R_N[m]$$

$$C_X[n+m,m] = R_S[m] + R_N[m] - \eta_S^2 \Rightarrow$$

$$C_X[m] = C_S[m] + R_N[m] = C_S[m] + \sigma_N^2\,\delta[m] =$$

$$= \underline{\underline{C_S[m] + \frac{d^2}{12}\,\delta[m]}}$$

$X[n]$ es estacionario en sentido amplio.

c) $Y[n] = a\,X[n-1]$

$$\varepsilon = Var\left(S[n] - \underbrace{a\,X[n-1]}_{Y[n]}\right) = E\left\{\left(S(n) - a\,X[n-1]\right)^2\right\} - E^2\left\{\left(S(n) - a\,X[n-1]\right)\right\}$$

$$E\left\{\left(S(n) - a\,X[n-1]\right)\right\} = E\{S[n]\} - a\,E\{X[n-1]\} =$$

$X[n-1] = S[n-1] + N[n-1]$

$$= E\{S[n]\} - a\,E\{S[n-1]\} = \frac{1}{c}(1-a)$$

$$E\left\{\left(S[n] - a\,X[n-1]\right)^2\right\} = E\left(S^2[n]\right) + a^2 E\left(S^2[n-1]\right) + a^2 E\left(N^2[n-1]\right) -$$
$$- 2a\,E\left(S[n]\,S[n-1]\right) - 2a\,E\left(\cancel{S[n]\,N[n-1]}^{\,0}\right) - 2a^2 E\left(\cancel{S[n-1]\,N[n-1]}^{\,0}\right)$$

$$= R_S[0] + a^2 R_S[0] + a^2 R_N[0] - 2a\,R_S[1]$$

P21 ... cont ...
(3)

$$\mathcal{E} = C_s[0](1+a^2) - C_s[1]\cdot 2a + a^2 R_N[0]$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = 0 = 2a\, C_s[0] - 2C_s[1] + 2a\, R_N[0]$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{C_s[1]}{C_s[0] + R_N[0]} = \boxed{\frac{C_s[1]}{\frac{1}{C^2} + \frac{d^2}{12}}}$$

(P22) a) $E[U(t)] = \cancel{E[X(t)]}^{0} \cos w_0 t + \cancel{E[Y(t)]}^{0} \operatorname{sen} w_0 t = \underline{\underline{0}}$

$$R_u(\tau) = E[U(t+\tau)\, U(t)] =$$

$$= E[\{X(t+\tau)\cos w_0(t+\tau) + Y(t+\tau)\operatorname{sen} w_0(t+\tau)\}\{X(t)\cos w_0 t + Y(t)\operatorname{sen} w_0 t\}]$$

$$= R_X(\tau)\cos w_0(t+\tau)\cos w_0 t + R_Y(\tau)\operatorname{sen} w_0(t+\tau)\operatorname{sen} w_0 t +$$

$$+ R_{XY}(\tau)\cos w_0(t+\tau)\operatorname{sen} w_0 t + R_{YX}(\tau)\operatorname{sen} w_0(t+\tau)\cos w_0 t =$$

$$= \frac{1}{2}\{[R_X(\tau) + R_Y(\tau)]\cos w_0\tau + [R_X(\tau) - R_Y(\tau)]\cos w_0(2t+\tau) +$$

$$+ [R_{YX}(\tau) - R_{XY}(\tau)]\operatorname{sen} w_0\tau + [R_{YX}(\tau) + R_{XY}(\tau)]\operatorname{sen} w_0(2t+\tau)\}$$

Si se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} R_X(\tau) = R_Y(\tau) \\ R_{YX}(\tau) = -R_{XY}(\tau) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{entonces}} R_U(\tau) = R_X(\tau)\cos w_0\tau + R_{YX}(\tau)\operatorname{sen} w_0\tau$$

... y entonces $U(t)$ estacionario en sentido amplio.

---

b) $S_U(w) = T.F.[R_U(\tau)] = \frac{1}{2}\left[S_X(w-w_0) + S_X(w+w_0)\right] + \frac{1}{2j}\left[S_{YX}(w-w_0) - S_{YX}(w+w_0)\right]$

$$\left.\begin{array}{l} \cos w_0\tau = \dfrac{e^{jw_0\tau} + e^{-jw_0\tau}}{2} \\ \operatorname{sen} w_0\tau = \dfrac{e^{jw_0\tau} - e^{-jw_0\tau}}{2j} \end{array}\right|$$

Si $X(t)$, $Y(t)$ incorrelados $\Rightarrow$ $\left|\begin{array}{l} R_U(\tau) = R_X(\tau)\cos w_0\tau \\ S_U(w) = \frac{1}{2}\left[S_X(w-w_0) + S_X(w+w_0)\right] \end{array}\right.$

c) Se forma el proceso $V(t) = U(t+\tau) - U(t)$ $(\tau > 0)$ obtenga el estimador <u>lineal</u> óptimo de $U(t)$ en función de $V(t)$ para un instante $\underline{t}$ fijo.

$$\hat{U} = g(v) = a \cdot V + b \quad \text{con } b = E[U(t)] - aE[V(t)] = \underline{\underline{0}}$$

$$a = \frac{E[V(t)\,U(t)]}{E[V^2(t)]} = \frac{E[(U(t+\tau) - U(t))\,U(t)]}{E\{[U(t+\tau) - U(t)]^2\}} =$$

$$= \frac{R_U(\tau) - R_U(0)}{2[R_U(0) - R_U(\tau)]} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{U}(t) = -\frac{V(t)}{2}}}$$

P23 a) $X[n]$ ruido blanco estricto $f_X(x;n) = N(0,1)$

$$R_X[m] = \delta[m] \quad \left(R_X[n_1,n_1] = E[X^2[n_1]] = 1 \right)$$
$$R_X[n_1,n_2] = 0 \quad n_1 \neq n_2$$

$$R_Y[m] = R_X[m] * h[m] * h[-m] =$$

$$= \delta[m] * h[m] * h[-m] =$$

$$= \{a_0 \delta[m] + a_1 \delta[m-1]\} * \{a_0 \underbrace{\delta[-m]}_{\delta[m]} + a_1 \underbrace{\delta[-m-1]}_{\delta[m+1]}\}$$

$$= (a_0^2 + a_1^2)\delta[m] + a_0 a_1 \{\delta[m-1] + \delta[m+1]\}$$

$$S_Y(\Omega) = \mathcal{F}\{R_Y[m]\} = a_0^2 + a_1^2 + a_0 a_1 (e^{-j\Omega} + e^{j\Omega})$$

$$= a_0^2 + a_1^2 + 2 a_0 a_1 \cos \Omega$$

b) $Y[n] = X[n] * h[n] = a_0 X[n] + a_1 X[n-1]$

$X[n]$, $X[n-1]$ son independientes $N(0,1)$ $\Rightarrow$ $Y[n]$ es $N(\eta_Y[n], \sigma_Y[n])$

$$\eta_Y[n] = a_0 E[X[n]] + a_1 E[X[n-1]] = 0$$

$$\sigma_Y^2[n] = a_0^2 \, Var\{X[n]\} + a_1^2 \, Var\{X[n-1]\} = a_0^2 + a_1^2$$

$$f_Y(y;n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a_0^2+a_1^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a_0^2+a_1^2}\right) \quad (-\infty < y < \infty)$$

(24) a) $R_Y[m] = R_X[m] * h[m] * h[-m]$

$R_X[m] = a^{|m|} \quad (0<|a|<1)$

$h[m] = \delta[m] - b\,\delta[m-1]$

$$h[m] * h[-m] = (\delta[m] - b\,\delta[m-1]) * (\underbrace{\delta[-m]}_{\delta[m]} - b\,\underbrace{\delta[-m-1]}_{\delta[m+1]}) =$$

$$= (1+b^2)\,\delta[m] - b\,[\delta[m-1] + \delta[m+1]]$$

$$R_Y[m] = (1+b^2)\,a^{|m|} - b\,(a^{|m+1|} + a^{|m-1|})$$

$m=0 \quad R_Y[0] = 1 + b^2 - 2ab$

$m \geq 1 \quad R_Y[m] = a^m\,(1 + b^2 - ba - b/a)$

$m \leq -1 \quad R_Y[m] = a^{-m}\,(1 + b^2 - ba - b/a)$

Luego:
$$R_Y[m] = \begin{cases} 1 + b^2 - 2ab & (m=0) \\ a^{|m|}\,(1 + b^2 - ba - b/a) & (m \neq 0) \end{cases}$$

b) $\eta_X = 0 \Rightarrow \eta_Y = 0 \qquad Var\{Y[n]\} = E[Y^2[n]] = R_Y[0] =$
$= 1 + b^2 - 2ab$

$$\frac{\partial\, Var[Y[n]]}{\partial b} = 2b - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{b = a}$$

c) Si $b = a \Rightarrow R_Y[m] = \begin{cases} 1 - a^2 & (m=0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$

$$R_Y[m] = (1 - a^2)\,\delta[m] \Rightarrow \boxed{S_Y(\Omega) = 1 - a^2}$$

P25 $X[n] = A\cos^2(\Omega_0 n + \Phi)$ Ω_0 : cte A, Φ v.a's indep.

η_A, σ_A^2 $\rightarrow U[0, M]$ uniforme

a) $X[n] = \frac{A}{2}\left(1 + \cos(2\Omega_0 n + 2\phi)\right)$

$$E[X[n]] = E\left[\tfrac{A}{2}\left(1 + \cos(2\Omega_0 n + 2\phi)\right)\right] =$$

$$= E\left[\tfrac{A}{2}\right] + E\left[\tfrac{A}{2}\right] \cdot \underbrace{E\left[\cos(2\Omega_0 n + 2\phi)\right]}_{0}$$

A, ϕ indep.

$2\phi \rightarrow 0 - 2\pi$

luego $E[\cos(\ldots 2\phi)] = 0$

$$= \frac{1}{2} E[A] = \frac{\eta_A}{2}$$

$$R_X[m] = E[X[n]\, X[n+m]] =$$

$$= E\left\{\frac{A^2}{4}\left[1 + \cos(2\Omega_0 n + 2\phi)\right]\left[1 + \cos(2\Omega_0(n+m) + 2\phi)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4} E[A^2] + \frac{1}{4} E[A^2] \cdot E\left[\cos(2\Omega_0 n + 2\phi)\cos(2\Omega_0(n+m) + 2\phi)\right] +$$

$$+ E\{\text{productos cruzados}\} = 0 =$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{(\sigma_A^2 + \eta_A^2)}_{E[A^2]}\left[1 + E\left\{\frac{\cos(4\phi + 4\Omega_0 n + 2\Omega_0 m) + \cos(2\Omega_0 m)}{2}\right\}\right]$$

$\left(\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\ldots)\right)$

$E[\cos(4\phi + \ldots)] = 0$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left[1 + \frac{\cos(2\Omega_0 m)}{2}\right] = R_X[m]$$

b) $$S_X(\Omega) = T.F.[R_X[m]] = T.F.\left[\frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4} + \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{8}\cos(2\Omega_0 m)\right] =$$

$$= 2\pi\,\delta(\Omega)\,\frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4} + \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{8}\left[\frac{2\pi\,\delta(\Omega - 2\Omega_0) + 2\pi\,\delta(\Omega + 2\Omega_0)}{2}\right]$$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\left[2\pi\,\delta(\Omega) + \frac{\pi}{2}\left(\delta(\Omega - 2\Omega_0) + \delta(\Omega + 2\Omega_0)\right)\right]$$

P25 cont...

c) $Y[n] = X[n] - X[n-1]$

$$R_Y[m] = E[Y[n]\,Y[n+m]] =$$

$$= E\{[X[n] - X[n-1]]\,[X[n+m] - X[n+m-1]]\} =$$

$$= 2R_X[m] - R_X[m+1] - R_X[m-1]$$

También $R_Y[m] = R_X[m] * h[m] * h[-m]$

$$h[m] = \delta[m] - \delta[m-1]$$

$$h[m] * h[-m] = \{\delta[m] - \delta[m-1]\} * \{\underbrace{\delta[-m]}_{\delta[m]} - \underbrace{\delta[-m-1]}_{\delta[m+1]}\} =$$

$$= 2\delta[m] - \delta[m-1] - \delta[m+1]$$

$$R_Y[m] = 2R_X[m] - R_X[m-1] - R_X[m+1]$$

$$R_Y[m] = \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\Big[2 + \cos(2\Omega_0 m) - 1 - \frac{1}{2}\cos 2\Omega_0(m-1) -$$

$$- 1 - \frac{1}{2}\cos 2\Omega_0(m+1)\Big] =$$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\Big[\cos(2\Omega_0 m) - \frac{1}{2}\{\cos 2\Omega_0(m-1) + \cos 2\Omega_0(m+1)\}$$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\Big[\cos(2\Omega_0 m) - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \cos(2\Omega_0 m)\cdot\cos(2\Omega_0)\Big]$$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \eta_A^2}{4}\cos(2\Omega_0 m)\,(1 - \cos(2\Omega_0))$$

PARCIALES

ISAL - 12 DICIEMBRE 2002 - FILA B

1) Un circuito no lineal tiene la siguiente función de transferencia:

$$y = g(x) = 1 - e^{-ax^2}$$

siendo $a>0$ una constante. Suponga que la entrada a dicho circuito es modelada por una va X con fdp $f_X(x)$.

a) Dibuje la función de transferencia y calcule la fdp de la va $Y=g(X)$.

b) Particularice el resultado anterior para la siguiente fdp ($u(x)$ es el escalón unidad):

$$f_X(x) = 2axe^{-ax^2}u(x)$$

c) Para esta fdp, calcule la media y varianza de la va Y.

d) Calcule la probabilidad de aprobar este examen (tener una nota mayor o igual a 5), suponiendo que los ocho apartados que lo componen tienen la misma puntuación (1,25 puntos), suponga que esa puntuación de 1,25 puntos se obtiene si la solución es correcta (lo que ocurre con probabilidad 0,5) y que se obtienen 0 puntos en caso contrario.

ISAL - CURSO 05/06 - GRUPO 21 - FILA B

1. Sea X una va con FD $F_X(x)$ y la función $y=g(x)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} x+0.5; -0.5 \le x < 0 \\ 0; x < -0.5 \\ 1; x \ge 0 \end{cases} \qquad y = g(x) = \begin{cases} e^{-|x|}; |x| \ge 0.25 \\ 2; |x| < 0.25 \end{cases}$$

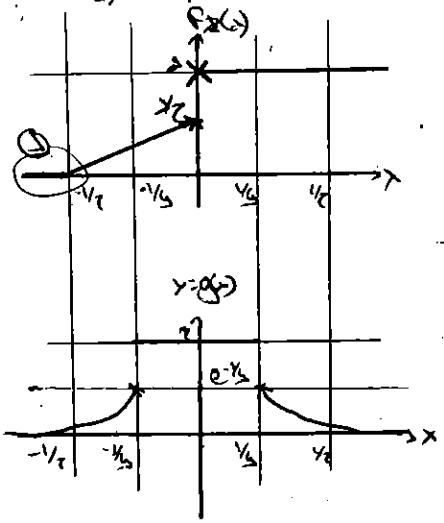
a) Compruebe que $F_X(x)$ cumple las propiedades de una FD y calcule la fdp de X.

b) Calcule el rango de la va Y y $P(Y=2)$.

c) Obtenga y dibuje la fdp de la va Y. Calcule su media y su varianza.

d) Compruebe que la fdp de la va Y tiene área unidad.

b)



Luego →

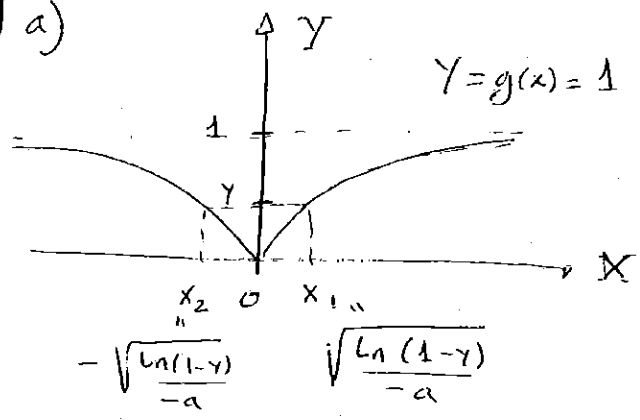
$\Omega_Y = \{(0, e^{-1/5})\} \cup \{2\}$ → Y va. Mixta

$\{e^{-1/2}, e^{-1/5}\} \cup \{2\}$ → X ⊖

$P(Y=2) = P(-1/5 < X < 1/5) = F(\frac{1}{5}) - F(-1/5) = 1 - 1/5 = \frac{3}{5}$

Parcial (1) | 12 Diciembre 2002 (Filn B)

a)



$$Y = g(x) = 1 - e^{-ax^2}$$

Rango Y $\quad 0 \le Y \le 1$

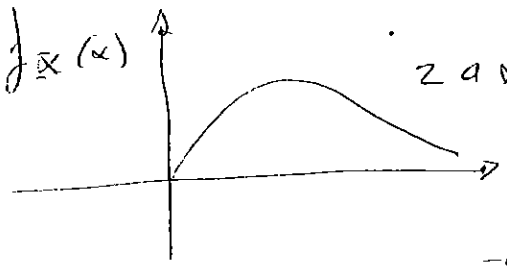
$$g'(x) = 2ax\,e^{-ax^2}$$

$$f_Y(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|}\Bigg|_{x_k = g^{-1}(Y)} =$$

$$= \frac{f_X(x_1)}{|2a\,x_1\,e^{-ax_1^2}|}\Bigg|_{x_1 = \sqrt{\frac{\ln(1-Y)}{-a}}} + \frac{f_X(x_2)}{|2a\,x_2\,e^{-ax_2^2}|}\Bigg|_{x_2 = -\sqrt{\frac{\ln(1-Y)}{-a}}}$$

$$\underset{a>0}{=} \frac{f_X(x_1)}{2a\,|x_1|\,e^{-ax_1^2}}\Bigg|_{x_1 = \sqrt{\frac{\ln(1-Y)}{-a}}} + \frac{f_X(x_2)}{2a\,|x_2|\,e^{-ax_2^2}}\Bigg|_{x_2 = -\sqrt{\frac{\ln(1-Y)}{-a}}} \qquad 0 \le Y \le 1$$

b)

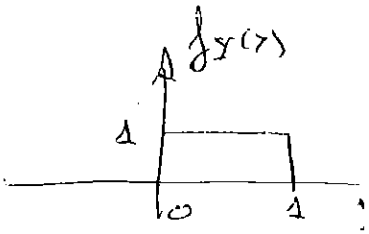


$$2ax\,e^{-ax^2}\,U(x)$$

$$f_Y(Y) = \frac{2a\,x_1\,e^{-ax_1^2}}{2a\,|x_1|\,e^{-ax_1^2}}\Bigg|_{x_1 = \sqrt{\frac{\ln(1-Y)}{-a}}} + \underline{0}$$

$x_2 < 0$ | $f_X(x_2) = 0$

$$= 1 \qquad 0 \le Y \le 1 \quad \Rightarrow \text{Uniforme}$$



Parcial(II) 12 Dic. 02

c) $E(Y) = \frac{1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$$\frac{(x_2 - x_1)^2}{12} = Var(Y) = \frac{1}{12} = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot 1 \, dy = \frac{1}{3}$$

d) Bernoulli $n = 8$, $p = 0.5$ $\quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

a acertar k preguntas

$$P(\text{Aprobar}) = \sum_{k=4}^{8} P(X = k) \quad \ldots$$

ó

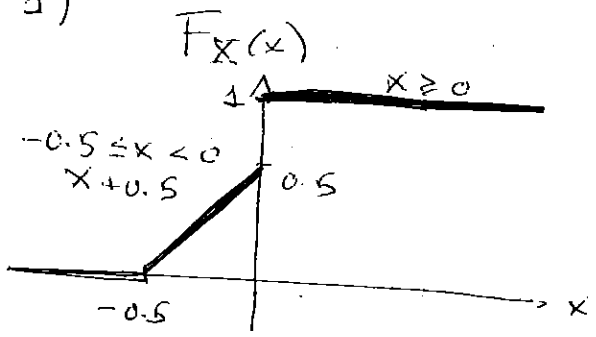
$$P(\text{Aprobar}) = 1 - P(\text{Suspender}) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(X = k)$$

$\approx \underline{0.63}$

=

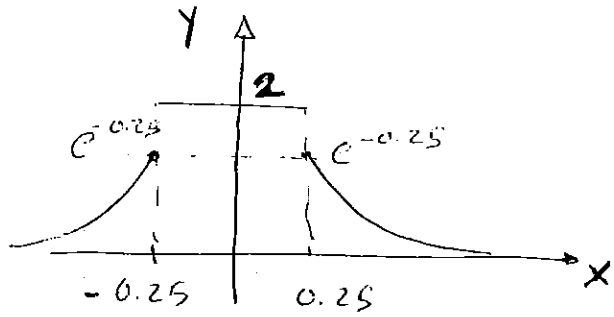
Parcial **05/06** Fila B (1)

1)



$0 ; x < -0.5$

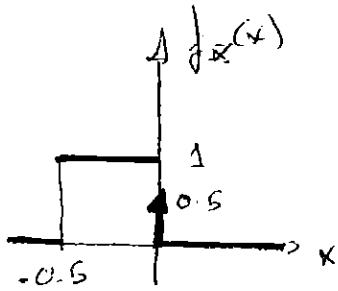
$$Y = g(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & |x| \geq 0.25 \\ 2 & |x| < 0.25 \end{cases}$$



a) - $F_X(-\infty) = 0$

$F_X(+\infty) = 1$

- no decreciente
- continua por la derecha



$$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < -0.5 \\ 1 & -0.5 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}\delta(x) & \end{cases}$$

b) $R_Y = \left\{ \frac{e^{-0.5}}{\text{Rango de } Y} \leq Y \leq e^{-0.25} \right.$?

Y que pero $Y \leq e^{-0.5} \rightarrow x \leq -0.5$ luego $F_X(x) = 0 \longrightarrow F_Y(x) = 0$.

$Y = 2$

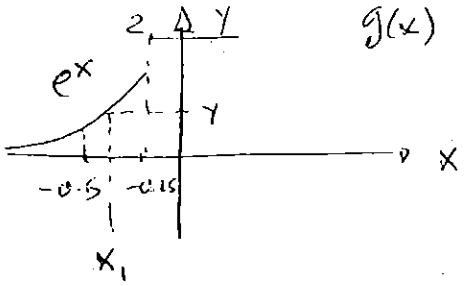
$$P(Y=2) = P(|x| < 0.25) = \int_{-0.25}^{0} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-0.25}^{0} dx + \int_{-0.25}^{0} \tfrac{1}{2}\delta(x)\,dx = 0.25 + 0.5 =$$

$$= \underline{\underline{0,75}}$$

Parcial 05/06 Fila B (11)

c)



$g(x)$

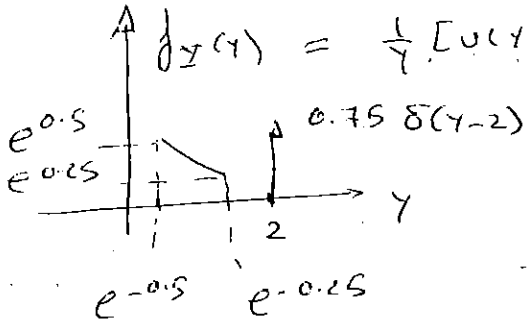
$x_1 = \ln y$

$f_Y(y)$ $\quad e^{-0.5} \le Y \le e^{0.25}$

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}\right|_{x_1=\ln y} = \frac{1}{y}$$

$$g'(x) = e^x$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{y}\left[u(y-e^{-0.5}) - u(y-e^{-0.25})\right] + 0.75\,\delta(y-2)$$



$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_{e^{-0.5}}^{e^{-0.25}} y \frac{1}{y}\,dy + 2\cdot 0.75 =$$

$$= e^{-0.25} - e^{-0.5} + 2\cdot 0.75 \cong \underline{1.68}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 3.24 - (1.68)^2 = \underline{0.41}$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_{e^{-0.5}}^{e^{-0.25}} y\,dy + 4\cdot 0.75 =$$

$$= \left.\frac{y^2}{2}\right|_{e^{-0.5}}^{e^{-0.25}} + 3 \cong \underline{3.24}$$

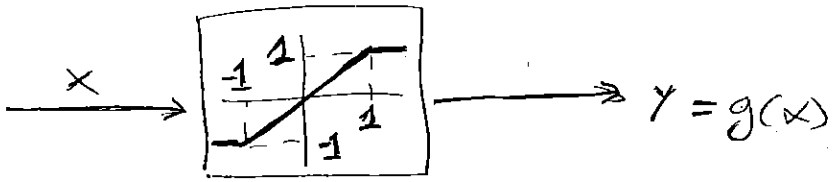
d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \int_{e^{-0.5}}^{e^{-0.25}} \frac{1}{y}\,dy + 0.75 = \left.\ln(y)\right]_{e^{-0.5}}^{e^{-0.25}} + 0.75$$

$$= 0.25 + 0.75 = 1$$

4. Parcial: La v.a. X representa el ruido de un sistema de comunicaciones y tiene distribución uniforme en $[-a, a]$ $a \geq 1$.

El ruido atraviesa un dispositivo con respuesta como lo que muestra la figura



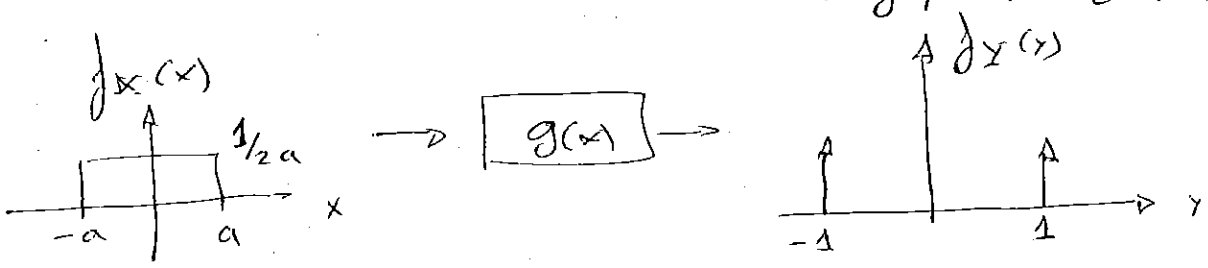
a) Calcule la f.d.p. de $Y = g(X)$ en función de a.

b) Calcule la Prob. de $|Y| = 1$ en función de a

c) Calcule el cociente entre las varianzas de X e Y. Particularice para $a = 1$ y $a = 2$ e interprete los resultados ¿Reduce el dispositivo la potencia del ruido?

Rango Y: $Y \in [-1, 1]$

a)



Rango Y $[-1, 1]$: Y v.a. mixta: discreta en $-1, +1$ | $P\{-a < X < -1\} \cdot \delta(Y+1)$ $\frac{a-1}{2a} \cdot \delta(Y+1)$ | $\frac{a-1}{2a}\delta(Y-1)$ // $P(Y=1) = P(1 < X \leq a) = F_X(a) - F_X(1)$

continua entre $-1, 1$

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}\right|_{\substack{x_i = g^{-1}(y) \\ x = y}} = \frac{1}{2a} \qquad -1 < y < 1$$

En $-1 < x < 1$ $g'(x) = 1$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{a-1}{2a}\left(\delta(y+1) + \delta(y-1)\right) + \frac{1}{2a} \qquad y \in [-1, 1]}$$

Ejemplo Parcial

b)

$$P(|Y|=1) = P(Y=-1 \cup Y=1) \overset{\text{Mcompatibles}}{=}$$

$$= P(Y=-1) + P(Y=1) = \boxed{\frac{a-1}{a}}$$

$$= P(1 < X \leq a) + P(-a < X \leq -1) =$$

c) $E(X)=0$ $\quad Var(X) = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{a^2}{3}$ uniforme

$E(Y)=0$: simétrica

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = E(Y^2)$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \left[\frac{a-1}{2a}\delta(y+1) + \frac{a-1}{2a}\delta(y-1) \right] dy + \int_{-1}^{1} y^2 \frac{1}{2a}\, dy$$

$$= \frac{2a-2}{2a} + \frac{1}{2a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{3a} = \frac{3a-2}{3a}$$

$$Var(Y) = \frac{3a-2}{3a}$$

$$\frac{Var(X)}{Var(Y)} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{a^3}{3a-2}$$

$\boxed{a=1}$ $\quad \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1$ (no efect)

$\boxed{a=2}$ $\quad \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{8}{4} = 2$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2}\sigma_x^2$$

reduce ruido

Ejemplo 2: Considerando que $\mathbf{X} \sim U(-\pi, \pi)$ y que $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) = a\sin(\mathbf{X}+\theta)$, con $a, \theta \in \mathcal{R}$, obtenga mediante el Teorema fundamental la expresión de $f_{\mathbf{Y}}(y)$.

Solución: En este caso, la función de transformación $y = g(x) = a\sin(x+\theta)$ es una sinusoide con fase inicial θ. El número de puntos de corte entre una recta horizontal de ordenada y y esta función sería infinito si la expresión se analizase $\forall x$. Sin embargo, como sólo nos interesa el intervalo donde la VA $\mathbf{X}$ toma valores, y este intervalo es de anchura 2π, el número de puntos de corte queda reducido a 2 (salvo en algún punto aislado, por ejemplo, en los puntos de mínimo y máximo de esta curva). Por otra parte, los valores máximo y mínimo de la transformación son $\pm a$, de forma que sabemos de antemano que la función de densidad fuera del intervalo $(-a, a)$ es nula. Centrándonos en el interior del intervalo, podemos escribir

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \left.\frac{f_{\mathbf{X}}(x)}{|g'(x)|}\right|_{x=x_1} + \left.\frac{f_{\mathbf{X}}(x)}{|g'(x)|}\right|_{x=x_2}$$

La derivada de la función de transformación es $g'(x) = a\cos(x+\theta)$. Por ello, la expresión anterior se particulariza

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \frac{\frac{1}{2\pi}}{|a\cos(x_1+\theta)|} + \frac{\frac{1}{2\pi}}{|a\cos(x_2+\theta)|}$$

Para escribir la expresión en función de y tenemos que hacer uso de la función inversa. En este caso

$$\begin{aligned} y &= a\sin(x+\theta) \\ \frac{y}{a} &= \sin(x+\theta) \\ x &= \arcsin\left(\frac{y}{a}\right) - \theta \qquad (2.83) \end{aligned}$$

de forma que

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \left.\frac{\frac{1}{2\pi}}{|a\cos(\arcsin(\frac{y}{a}))|}\right|_{x=x_1} + \left.\frac{\frac{1}{2\pi}}{|a\cos(\arcsin(\frac{y}{a}))|}\right|_{x=x_2}$$

Repárese, no obstante, que lo que realmente necesitamos saber es cómo escribir $a\cos(x+\theta)$ en función de y, para cada una de las dos soluciones x_1 y x_2. Por el camino que hemos empleado hasta ahora las cosas no son obvias y no parece obvio tampoco cómo obtener de forma explícita las dos soluciones que hemos anticipado que existen. Debe haber otros caminos, los cuales, en general, suelen encontrarse haciendo uso combinado de la función $g(x)$ y de su derivada. En efecto,

$$\begin{aligned} y = g(x) &= a\sin(x+\theta) \\ g'(x) &= a\cos(x+\theta) = \pm a\sqrt{1-\sin^2(x+\theta)} \\ &= \pm\sqrt{a^2-(a\sin(x+\theta))^2} \\ g'(x) &= \pm\sqrt{a^2-y^2} \qquad (2.84) \end{aligned}$$

por lo que,

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \frac{\frac{1}{2\pi}}{|-\sqrt{a^2-y^2}|} + \frac{\frac{1}{2\pi}}{|\sqrt{a^2-y^2}|} = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}$$

de modo que, finalmente,

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}} & |y| \leq a \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Problema

Sea Z una v.a. de Cauchy

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi(z^2+1)} \qquad -\infty < z < \infty$$

Encontrar la transformación

$U = g(Z)$ que hace que la v.a.

U sea uniforme con rango $[0, 1]$

Solución:

$$U = g(Z) = F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\pi(\lambda^2+1)}\, d\lambda =$$

$F_Z(z)$ transforma cualquier v.a. Z en una uniforme

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\lambda) \Big|_{-\infty}^{z} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}(z) - \left(-\pi/2\right)\right]$$

$$\boxed{g(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(z)} \quad -\infty < z < \infty$$

Generar Z a partir de U

$$z = g^{-1}(u)$$

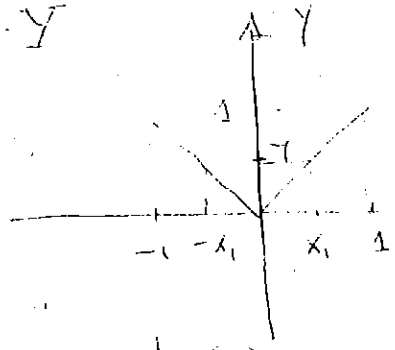
$$z = \operatorname{tg}\left[(u - 1/2)\cdot\pi\right]$$

Control 23.1 Dic 04

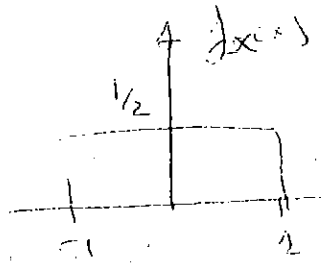
1. X v.a. uniforme $(-1, 1)$

$Y = |X|$

a) f.d.p. Y



$\times$

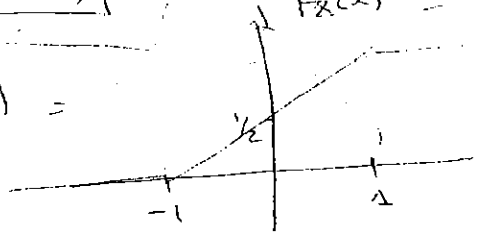


$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 & y \in (0, 1) \\ 0 & \text{RESTO} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{Y \text{ uniforme } (0, 1)}$

NOTAR que $F_X(x) =$



$F_X(x) = \frac{x+1}{2}$

Y no es $g(x)$

$\boxed{8/9/2006}$ P2. ~~[illegible]~~

$$f_X(x) = x\, e^{-x^2/2}\, u(x)$$

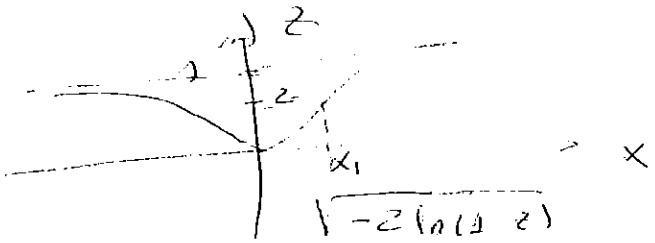
Transformación

$$z = g(x) = 1 - e^{-x^2/2}$$

Calcular $f_Z(z)$

$$g'(x) =$$

$$= x\, e^{-x^2/2}$$



$$f_Z(z) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} =$$

$$= \frac{x_1\, e^{-x_1^2/2}}{|x_1\, e^{-x_1^2/2}|} = 1 \qquad z \in (0, 1)$$

Notar que $g(x)$ es $F_X(x)$

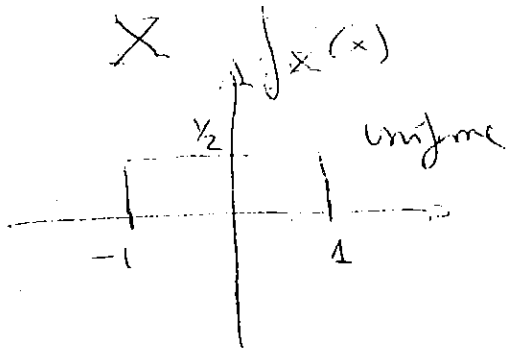
$$\boxed{\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda^2/2}\, d\lambda = \\ &= -e^{-\lambda^2/2}\Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}}$$

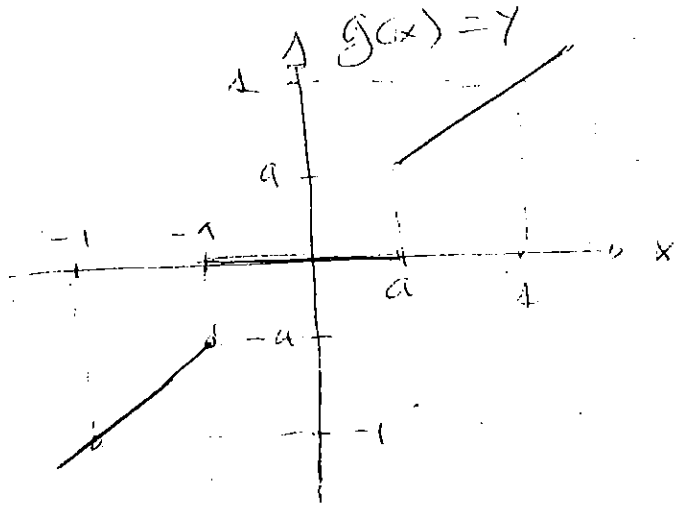
Febrero $\boxed{10/2/2007}$

P2 - "Procesos Aleatorios" Apartado c) X^2

Estacionario $X(n) \to X$; $Y(n) \to Y$

X





Y es una v.a. mixta

$$P(Y=0) = P(-a < X < a) = \int_{-a}^{a} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\,dx = a$$

$a < |Y| < 1$ entre $(-1,-a)$ y $(a,1)$

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}\right|_{x_1 = g^{-1}(y)} = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & (-1 < y < -a \text{ ó } a < y < 1) \\ a\,\delta(y) & (y=0) \\ 0 & \text{RESTO} \end{cases}$$

ISAL Curso 2008-2009	3-DICIEMBRE-2008

- FILA A -

1.- Sea (X,Y) una va bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(X=x_i, Y=y_j)=\begin{cases} k(x_i-y_j)^2 & x_i=-1,0,1\ ;\ y_j=-1,0,1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Calcule el valor de la constante k.
b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y.
c) ¿Son X e Y independientes?
d) Calcule la covarianza de X e Y.

2.- Considere una v.a. X con fdp:

$$f_X(x)=\begin{cases} k(b-|x|) & \text{para } |x|<b \\ 0 & resto \end{cases}$$

y la v.a. Y que se obtiene al transformar la v.a. X mediante la función:

$$y=g(x)=\begin{cases} 0 & |x|<a \\ |x| & \text{resto} \end{cases}$$

siendo $a<b$ constantes.

a) Dibuje la fdp $f_X(x)$ y calcule el valor de k en función de b.
b) Dibuje la función de transformación $y=g(x)$ y obtenga la fdp de la va $Y=g(X)$, en función de a y b (No olvide indicar su Rango).
c) Compruebe que: $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy=1$
d) Para $b=1$ y $a=1/2$, calcule E(Y) y C_Y
e) (OPCIONAL)
Suponga ahora que $a=1/2$, que X es una v.a. N(1/2,2), y considere un experimento consistente en realizar 100 ensayos independientes en los que se genera un valor de la v.a. X N(1/2,2) y se observa si el valor de $y=g(x)$ es o no igual a cero. Calcule el número medio o esperado de ensayos en el que el valor observado de y no será cero ($y\neq 0$).

ISAL Curso 2008-2009	3-DICIEMBRE-2008

V.a. binomial $B(n,p)$ *media:* $\eta = np$

V.a. geométrica $(P\{X=k\} = p^{k-1}q$; q = prob. de que se produzca el suceso esperado) *media:* $\eta = \frac{1}{q}$

$$\int \frac{x}{1+x}dx = x - \ln(1+x)$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

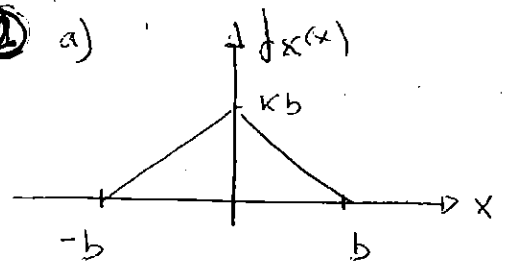
x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ **para** $0 \le x \le 3.89$ **en pasos de** 0.01

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ISAL 3 DIC. 2002 FIAA

① a)



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

Area del $\Delta = \frac{1}{2}(2b)\cdot Kb = 1$

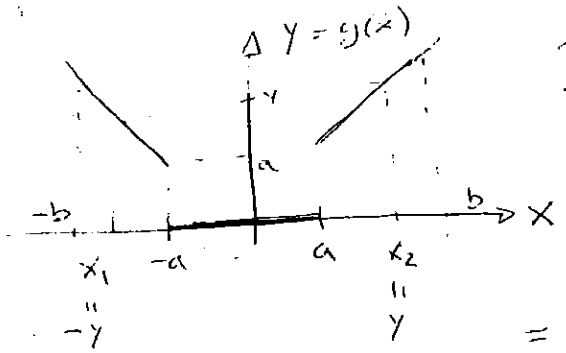
$$\boxed{K = \frac{1}{b^2}}$$

ó integrando ..

$$\int_{-b}^{0} K(b+x)\,dx + \int_{0}^{b} K(b-x)\,dx =$$

$$= K\left[bx + \frac{x^2}{2}\Big|_{-b}^{0} + bx - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{b} \right] = K\left[b^2 - \frac{b^2}{2} + b^2 - \frac{b^2}{2} \right] = Kb^2$$

b)



$$P\{Y=0\} = \int_{-a}^{a} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-a}^{0} K(b+x)\,dx + \int_{0}^{a} K(b-x)\,dx$$

$$= K\left[bx + \frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{0} + bx - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{a} \right] =$$

$$= K\left[2ab - \frac{a^2}{2}\cdot 2 \right] = \frac{1}{b^2}\left[2ab - a^2 \right]$$

Para $a < Y < b$

$$f_Y(Y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}\Bigg|_{x_1=-Y} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}\Bigg|_{x_2=Y}$$

$$\boxed{|g'(x)| = 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{b^2}(b-|Y|)}{1} + \frac{\frac{1}{b^2}(b-|Y|)}{1} = \frac{2}{b^2}(b-|Y|) = \frac{2}{b^2}(b-Y)$$

$$f_Y(Y) = \begin{cases} \frac{2}{b^2}(b-|Y|) & a < Y < b \\ \frac{1}{b^2}\left[2ab - a^2\right] & Y = 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

ISAL 3 DIC 2008 FILA A

(1) cont.

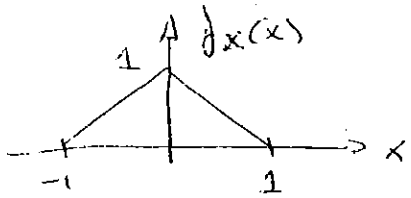
c) $$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \frac{1}{b^2}\left[2ab - a^2\right] + \underbrace{\int_a^b \frac{2}{b^2}(b-y)\,dy}_{I}$$

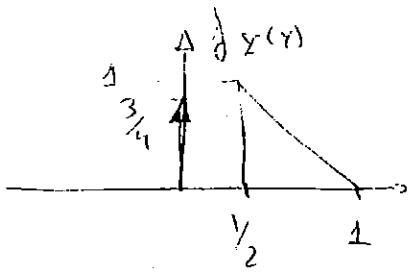
$$I = \frac{2}{b^2}\left[by - \frac{y^2}{2}\right]_a^b = \frac{2}{b^2}\left[\frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{b^2}\left[2ab - a^2\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \frac{1}{b^2}\left[2ab - a^2\right] + 1 - \frac{1}{b^2}\left[2ab - a^2\right] = \underline{\underline{1}}$$

d) $b = 1$; $a = 1/2$





$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & 1/2 < y < 1 \\ 3/4 & y = 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

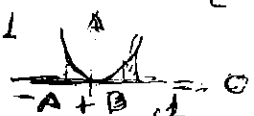
$$\boxed{E(Y)} = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int 0 \cdot \frac{3}{4}\,\overset{0}{\cancel{0}}(y-0) + \int_{1/2}^{1} y\, 2(1-y)\,dy =$$

$$= y^2 - \frac{2}{3}y^3 \Big|_{1/2}^{1} = 1 - \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{2^3}\right) = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$C_{XY} = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = E(XY) - \underset{=E(X)}{\cancel{0}}\cdot\frac{1}{6} \qquad C(X) = 1$$

¿xve considera este tramo?

$$E(XY) = \int_{-1}^{-1/2} x(-x)\left[1+x\right]dx + \int_{1/2}^{1} x\cdot x\left[1-x\right]dx =$$



$$= \underbrace{-\int_{-1}^{-1/2} x^2\,dx}_{A} + \underbrace{\int_{1/2}^{1} x^2\,dx}_{B} + \int_{-1}^{1} \overset{0}{(-x^3)}\,dx = 0 \qquad \boxed{C_{XY} = 0}$$

1SAL 3 DIC 2008 Fila A

(1) cont. ——— Usando X v.a. INICIAL ———

e) $n = 100$ Cada ensayo Bernoulli

Ensayos independientes $p = \text{Prob}\{Y \neq 0\} =$

Binomial $= 1 - P(Y=0) = 1 - \underbrace{\frac{3}{4}}_{\delta(x)} =$

Z = Nº de ensayos en los que se observa $Y \neq 0$ $\left| \text{Prob}\{Y \neq 0\} = p \right\}$ $= \frac{1}{4} = 0.25$

$$B(n,p) = B(100, 0.25)$$

$$E(Z) = n \cdot p = 100 \cdot 0.25 = \underline{25}$$

Nº medio de ensayos $\{Y \neq 0\}$

——— Usando X v.a. $N(1/2, 2)$ ———

En este caso

$$P(Y=0) = G\left(\frac{1/2 - 1/2}{2}\right) - G\left(\frac{-1/2 - 1/2}{2}\right) =$$

$$= G(0) - [1 - G(+0.5)] =$$

$$= 0.5 - 1 + 0.6915 = 0.1915$$

$$P(Y \neq 0) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0.1915 = 0.8085$$

Z_1 : Nº ensayos $P\{Y \neq 0\} = p$ $B(n,p) = B(100, 0.8085)$

$$E(Z) = n \cdot p = 100 \cdot 0.8085 = 80,85 = \underline{81}$$

Nº medio ensayos $\{Y \neq 0\}$

APELLIDOS, NOMBRE:	FILA A

2. Sea (X,Y) una va bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(X=x_i, Y=y_j)=\begin{cases} k(x_i-y_j)^2 & x_i=-1,0,1\ ;\ y_j=-1,0,1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Calcule el valor de la constante k.
b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y.
c) ¿Son X e Y independientes?
d) Calcule la covarianza de X e Y.

a) $\sum_{x_i}\sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = k\left[0+1+4+1+0+1+4+1+0\right] =$

$= 12 \cdot k = 1 \Rightarrow \boxed{k = 1/12}$

b) $P(X=x_i) = \sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{12}\left[(x_i+1)^2 + x_i^2 + (x_i-1)^2\right] =$

$= \frac{1}{12}\left[3x_i^2+2\right] = \frac{x_i^2}{4} + \frac{1}{6} \qquad x_i = -1, 0, 1$

$P(Y=y_j) = \frac{y_j^2}{4} + \frac{1}{6}$ (simetría)

$y_j = -1, 0, 1$

c) $P(X=x_i)\cdot P(Y=y_i) = \left(\frac{x_i^2}{4}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{y_j^2}{4}+\frac{1}{6}\right) \neq \frac{1}{12}(x_i-y_i)^2$

luego NO son INDEPENDIENTES X e Y

d) $C_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(X) = 1\,P(X=1) + 0\cdot P(X=0) + (-1)\cdot P(X=-1) \overset{\text{simetría}}{=} 0$

$E(Y)\cdot E(X) = 0$

$E(X\cdot Y) = (-1)(-1)P(X=-1, Y=-1) + (-1)\cdot 0\cdot P^{\cdot 0} +$

$+ (-1)\,1\,P(X=-1, Y=1) + 0\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 +$

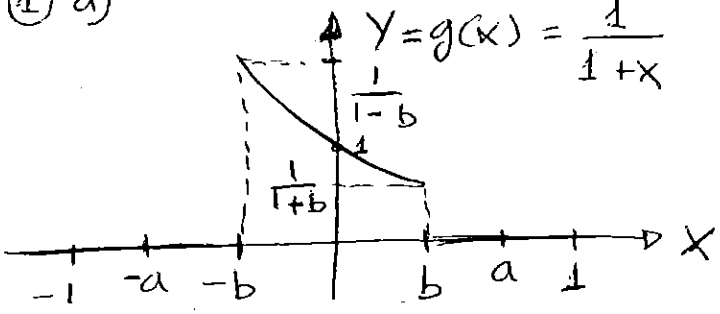
$+ 1\,(-1)\,P(X=1, Y=-1) + 1\cdot 0^{\cdot 0} + 1\cdot 1\,P(X=1, Y=1) =$

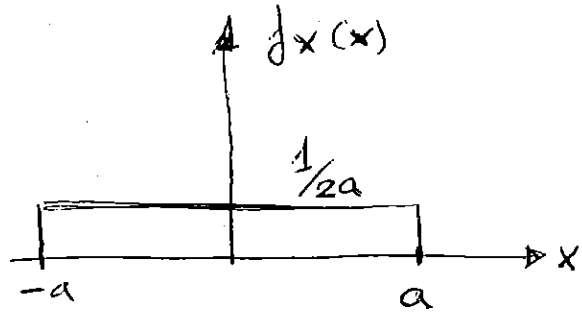
$= 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1\,\frac{4}{12} + 1\,(-1)\,\frac{4}{12} = -\frac{2}{3}$

$\boxed{C_{XY} = -2/3}$

ISAL 3-DIC-2008 FILA B

① a)





$$R_Y = \{0\} \cup \left(\frac{1}{1-b}, \frac{1}{1+b}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} -a < x < -b \\ b < x < a \end{array}\right\} \Rightarrow Y = 0 \quad P\{Y=0\} = \frac{2(a-b)}{2a} = \frac{a-b}{a}$$

Para $\frac{1}{1+b} < Y < \frac{1}{1-b}$ T. Fundamental

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}\right|_{x_1 = g^{-1}(y)} \quad \left\{\begin{array}{l} g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2} \\ y = \frac{1}{1+x} \Rightarrow y + y \cdot x = 1 \\ x = g^{-1}(y) = \frac{1-y}{y} \end{array}\right.$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2a} \left.\frac{1}{(1+x_1)^{-2}}\right|_{x_1 = g^{-1}(y)}$$

$$= \frac{1}{2a} \frac{1}{\left(1 + \frac{1-y}{y}\right)^{-2}} = \frac{y^{-2}}{2a}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^{-2}}{2a} & \frac{1}{1+b} < y < \frac{1}{1-b} \\ \frac{a-b}{a} & \text{para } y = 0 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \frac{a-b}{a} + \int_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1-b}} \frac{1}{2a} y^{-2}\,dy =$$

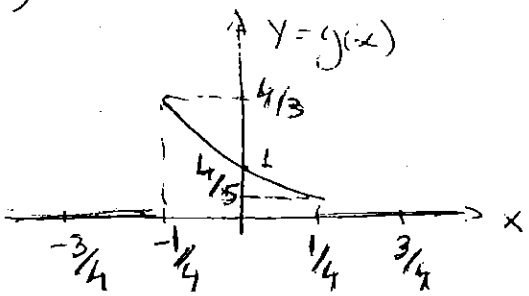
$$= \frac{a-b}{a} + \left[-\frac{y^{-1}}{2a}\right]_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1-b}} = \frac{a-b}{a} + \frac{1}{2a}\left[(1+b) - (1-b)\right] =$$

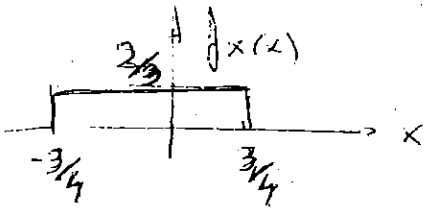
$$= 1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{2a} \cdot 2b = \underline{1}$$

ISAL 3 - DIC 2008 Fila B

① cont.. $b = \frac{1}{4}$; $a = \frac{3}{4}$

c)





$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = \int_{-1/4}^{1/4} \frac{1}{1+x}\, \frac{2}{3}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \ln(1+x) \Big|_{-1/4}^{1/4} = \frac{2}{3}\left[\ln(5/4) - \ln(3/4)\right] = \underline{0.34}$$

$$C_{XY} = E(XY) - \cancel{E(X)}\, E(Y) \qquad E(X) = 0$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, f_X(x)\, dx = \int_{-1/4}^{1/4} \frac{x}{1+x}\, \frac{2}{3}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[x - \ln(1+x)\right]_{-1/4}^{1/4} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{4} - \ln(5/4) + \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right] \simeq$$

$$\simeq \underline{-0.0072}$$

usando la v.a. INICIAL

d) Observar si $Y = 0$ ó $Y \neq 0$ es un ensayo de Bernoulli

$$p = P\{Y = 0\} = \frac{a-b}{a} = \frac{3/4 - 1/4}{3/4} = 2/3 \; ; \; q = P\{Y \neq 0\} = 1 - 2/3 = \frac{1}{3}$$

Z va geométrica : no. de ensayos k hasta que $Y \neq 0$; $k = 1, 2, 3 \ldots$

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p^{k-1}\, q = q \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-2/3} = \underline{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^k = \frac{p}{1-p} \; ; \; \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} p^k = \sum_{k=1}^{\infty} k p^{k-1} = \frac{1-p+p}{(1-p)^2} = \frac{1}{(1-p)^2}$$

3 DICIEMBRE 2008 FIUAB

(2)

a) $\sum_{x_i}\sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = K\left[\frac{1}{0+1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{0+1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{1}+\frac{3}{2}\right] =$

$= K\left[6+\frac{6}{2}\right] = 9\cdot K = 1 \quad \boxed{K=\frac{1}{9}}$

b) $P(X=x_i) = \sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{x_i+1}+\frac{2}{x_i+1}+\frac{3}{x_i+1}\right] =$

$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{x_i+1} \qquad \underline{\underline{x_i = 0, 1}}$

$P(Y=y_j) = \sum_{x_i} P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{9}\left[y_i + \frac{y_i}{2}\right] =$

$= \frac{1}{6}y_i \qquad \underline{\underline{y_i = 1, 2, 3}}$

c) $P(X=x_i)\,P(Y=y_j) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{x_i+1}\,\frac{1}{6}y_i = \frac{1}{9}\,\frac{y_i}{x_i+1} =$

$= P(X=x_i, Y=y_j)$ Luego X, Y <u>SON INDEP.</u>

d) $E(XY) \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ e } Y \text{ indep}}}{=} E(X)\,E(Y) = \frac{7}{9}$

$E(X) = 0\cdot P(X=0) + 1\,P(X=1) = \frac{1}{3}$

$E(Y) = 1\cdot P(Y=1) + 2P(Y=2) + 3P(Y=3) =$

$= \frac{1}{6} + 2\,\frac{1}{6}\cdot 2 + 3\cdot\frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

Tbn. podía calcularse

$E(XY) = \cancel{0\cdot 1}^{\,0} + \cancel{0\cdot 2}^{\,0} + \cancel{0\cdot 3}^{\,0} + 1\cdot 1\,P(X=1, Y=1) + 1\cdot 2\,P(1,2) +$

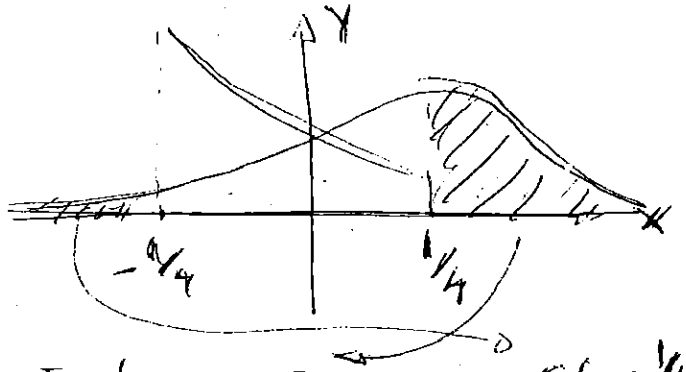
$1\cdot 3\,P(1,3) = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{2}{2} + 3\cdot\frac{3}{2}\right] = \frac{7}{9}$

$C_{XY} = E(XY) - E(X)\,E(Y) \underset{\substack{\uparrow \\ X, Y \text{ indep.}}}{=} 0$ //

ISAL 3-DIC-2008 FilaB

② cont ....

d) Usando X v.a. $N(1/4, 1)$ $\quad b = 1/4$



$$P\{Y=0\} = 0.5 + G\left(\frac{-1/4 - 1/4}{1}\right) =$$

$$= 1.5 - G(0.5) = p$$

$$P\{Y \neq 0\} = G(0.5) - 0.5 \simeq 0.1915 = q = 1-p$$

Z n.º ensayos hasta $Y \neq 0$ $\begin{cases} P\{Y \neq 0\} = q \\ P\{Y = 0\} = 1-q = p \end{cases}$

$$P\{Z = k\} = p^{k-1} \cdot q$$

$E(Z)$ = nº medio ensayos hasta $P\{Y \neq 0\}$ $= \frac{1}{q} \simeq 5$

Nov. 2007 Fila A

② Sea (X,Y) v.a. bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades

$$P(X=x_i, Y=y_j) = \begin{cases} K(x_i+2y_j) & x_i=1,2 \; ; \; y_j=1,2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Calcule el valor de la constante K

b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y

c) ¿Son X e Y independientes?

d) Calcule la covarianza de X, Y

---

a) $$\sum_{x_i}\sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = K\left[(1+2)+(1+4)+(2+2)+(2+4)\right] =$$

$$= K\cdot 18 = 1 \Rightarrow \boxed{K = 1/18}$$

b) $$P(X=x_i) = \sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{18}(x_i+2) + \frac{1}{18}(x_i+4) =$$

$$= \frac{1}{18}(2x_i+6) = \frac{1}{9}(x_i+3) \qquad x_i = 1,2$$

$$P(Y=y_j) = \sum_{x_i} P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{18}(1+2y_j) + \frac{1}{18}(2+2y_j) =$$

$$= \frac{1}{18}(3+4y_j) \qquad y_i = 1,2$$

X, Y

$$P(X=x_i, Y=y_j) \neq P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j) \Rightarrow \text{NO son INDEP.}$$

c) $$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i P(X=x_i) = 1\,P(X=1) + 2P(X=2) = \frac{14}{9}$$

$$E(Y) = \sum_{y_j} x_j P(Y=y_j) = \frac{29}{18}$$

$$E(X\cdot Y) = \sum_{x_i}\sum_{y_j} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j) = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{18}(1+2) +$$

$$1\cdot 2\cdot \frac{1}{18}(1+4) + 2\cdot 1\cdot \frac{1}{18}(2+2) + 2\cdot 2\cdot \frac{1}{18}(2+4) = \frac{45}{18}$$

$$C_{XY} = \frac{45}{18} - \frac{14}{9}\cdot\frac{29}{18} = -\frac{1}{162}$$

Nov 2007 Fila B

(2) Sea (X,Y) v.a. bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades

$$P(X=x_i, Y=y_j) = \begin{cases} K(x_i^2 \cdot y_j) & x_i = 1,2 \ ; \ y_j = 1,2,3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Calcule el valor de la constante K

b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y

c) ¿Son X e Y independientes?

d) Calcule la covarianza de X, Y

---

a) $\sum_{x_i} \sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = K[1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2 + 4\cdot 3]$

$= K\cdot 30 = 1 \Rightarrow \boxed{K = 1/30}$

b) $P(X=x_i) = \sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{30} x_i^2 \cdot 6 = \frac{1}{5} x_i^2 \ //$ $\quad x_i = 1,2$

$P(Y=y_j) = \sum_{x_i} P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{30} y_j \cdot 5 = \frac{1}{6} y_j \ //$ $\quad y_j = 1,2,3$

c) $P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{30} x_i^2 y_j = P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$

$\Rightarrow X$ e Y son INDEPENDIENTES!

d) $C_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

COMPROBACIÓN $E(XY) = E(X)E(Y)$

$E(X) = \sum_{x_i} x_i P(X=x_i) = 1\cdot \frac{1}{5}\cdot 1^2 + 2\cdot \frac{1}{5}\cdot 4 = \frac{9}{5}$

$E(Y) = \sum_{y_j} y_j P(Y=y_j) = 1\cdot \frac{1}{6}\cdot 1 + 2\cdot \frac{1}{6}\cdot 2 + 3\cdot \frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

$E(XY) = \sum_{x_i y_j} P(X=x_i, Y=y_j)\, x_i y_j = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{30} 1^2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot \frac{1}{30} 1^2\cdot 2 +$

$+ 1\cdot 3\cdot \frac{1}{30} 1^2\, 3 + 2\cdot 1\cdot \frac{1}{30} 2^2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot \frac{1}{30} 2^2\cdot 2 + 2\cdot 3\, \frac{1}{30} 2^2\cdot 3 =$

$= \frac{126}{30} = \frac{21}{5}$

$C_{XY} = \frac{21}{5} - \frac{9}{5}\cdot \frac{7}{3} = 0$

Curso 04/05 - Grupo 21 - Fila B

(2) Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(X=x_i, Y=y_j) = \begin{cases} K(x_i-y_j)^2 & x_i=1,2 \ ; \ y_j=1,2,3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Dibuje el rango de la v.a. y calcule el valor de la cte. K.

b) Calcule la distribución condicional de Y dado X. ¿Son X, Y indep.

c) Calcule $P(3X<2Y)$ y la covarianza C_{XY}.

---

a) $R_{XY} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

$$\sum_{x_i}\sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = 1 =$$

$$= K\left[(1-1)^2+(1-2)^2+(1-3)^2+(2-1)^2+(2-2)^2+(2-3)^2\right]$$

$$= K\cdot 7 = 1 \Rightarrow \boxed{K = 1/7}$$

b) $$P(Y=y_j / X=x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=x_i)}{P(X=x_i)}$$

$$P(X=x_i) = \sum_{y_j} P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{7}(x_i-1)^2 + \frac{1}{7}(x_i-2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{7}(x_i-3)^2 = \frac{1}{7}(3x_i^2+14-12x_i) \quad x_i=1,2$$

$$P(Y=y_i / X=x_i) = \frac{\cancel{\frac{1}{7}}(x_i-y_i)^2}{\cancel{\frac{1}{7}}(3x_i^2+14-12x_i)}$$

Marginal de Y

$$P(Y=y_j) = \sum_{x_i} P(X=x_i, Y=y_j) = \frac{1}{7}(1-y_i)^2 + \frac{1}{7}(2-y_i^2) =$$

$$= \frac{1}{7}(2y_i^2+5-6y_i)$$

Como:

$$P(Y=y_j) \neq P(Y=y_j / X=x_i) \Leftrightarrow X, Y \text{ NO SON INDEPENDIENTES}$$

(2) Cont.- Curso 04/05 G.21 .- Fila B

c) $P(3X < 2Y) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) +$

$P(X=2, Y=2) =$

Estos valores no cumplen la desigualdad, los pts. que la cumplen son: (1,2), (1,3), (2,

$$= \frac{1}{7}(1-1)^2 + \frac{1}{7}(2-1)^2 + \frac{1}{4}(2-2)^2 = \frac{1}{7}$$

$$C_{XY} = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$$

$$E(X) = 1 \cdot P(X=1) + 2\,P(X=2) =$$

$$= \frac{1}{7}(3 + (4-12) + \frac{2}{7}(3 \cdot 4 + 14 - 24) = \frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \frac{9}{7}$$

$$E(Y) = \frac{1}{7}(2 + 5 - 6) + \frac{2}{7}(2 \cdot 4 + 5 - 12) + \frac{3}{7}(2 \cdot 4 + 5 - 18) =$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{15}{7} = \frac{18}{7}$$

$$E(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{7}(1-1)^2 + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{7}(1-2)^2 +$$

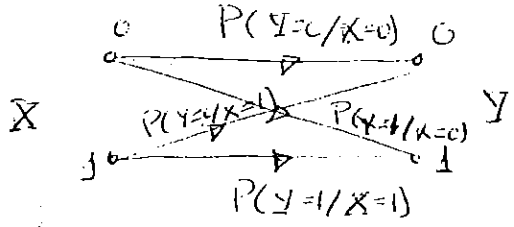
$$+ 1 \cdot 3\,\frac{1}{7}(1-3)^2 + 2 \cdot 1\,\frac{1}{7}(2-1)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{7}(2-2)^2 +$$

$$+ 2 \cdot 3\,\frac{1}{7}(2-3)^2 =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{12}{7} + \frac{2}{7} + \frac{6}{7} = \frac{22}{7}$$

$$C_{XY} = \frac{22}{7} - \frac{9}{7} \cdot \frac{18}{7} = -\frac{8}{49}$$

* Considera el canal de comunicaciones siguiente:



Dada la X va entrada

$P(X=0)=0.5$ y se conoce $P(Y=1/X=0)=0.1$

$P(Y=0/X=1)=0.2$

a) Calcular la f.d.p conjunta (X,Y)

b) Calcular las distribuciones marginales de X e Y

c) ¿Son X e Y independientes?

d) Calcule la covarianza de X e Y

---

a) $P(X=1)=0.5$ $\quad P(Y=0/X=0)=0.9$ $\quad P(Y=1/X=1)=0.8$

$P(X=0)=0.5$

$P_{XY}(0,0)=P(X=0,Y=0)=P(Y=0/X=0)\,P(X=0)=0.9\cdot 0.5=0.45$

$P_{XY}(0,1)=P(X=0,Y=1)=P(Y=1/X=0)\,P(X=0)=0.05$

$P_{XY}(1,0)=P(X=1,Y=0)=P(Y=0/X=1)\,P(X=1)=0.1$

$P_{XY}(1,1)=P(X=1,Y=1)=P(Y=1/X=1)\,P(X=1)=0.4$

b) Marginal X
$$\begin{cases} P(X=0)=\sum_{y_j} P(X=0,Y=j)=P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=0)=0.5 \\ P(X=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=0)=0.5 \end{cases}$$

Marginal Y
$$\begin{cases} P(Y=0)=P(Y=0,X=1)+P(Y=0,X=0)=0.55 \\ P(Y=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=1)=0.45 \end{cases}$$

c) $P(X=0,Y=0)=0.45\neq P(X=0)\,P(Y=0)=0.5\cdot 0.55=0.275$

d) $Cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)=0.4-0.5\cdot 0.45=0.175$

$E(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)=0.5$ $\quad E(Y)=0\cdot\ +1\cdot 0.45=0.4$

$E(XY)=0\cdot 1\cdot P(X=0,Y=1)+1\cdot 0\cdot P(X=1,Y=0)+0\cdot 0\cdot P(X=0,Y=0)+$
$+1\cdot 1\cdot P(X=1,Y=1)=0.4$