simplyjarod.com

SALT

Apuntes de Crisser

Apuntes y exámenes ETSIT UPM

Si alguna vez estos apuntes te sirvieron de ayuda, piensa que tus apuntes pueden ayudar a muchas otras personas.

Comparte tus apuntes en simplyjarod.com

Señales Aleatorias

Tema 1: Conceptos de Probabilidad
Sucesos

1. Definiciones

Experimento aleatorio: aquel experimento o prueba que cumple:

- se puede repetir tantas veces como se quiera sin que por ello cambie el contexto
- su resultado es impredecible
- a medida que repetimos el experimento, los resultados reciben un cierto modelo de regularidad.

Espacio muestral Ω: conjunto de resultados posibles asociados a un experimento aleatorio

Ej: lanzamiento de un dado

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso: cualquier subconjunto de un espacio muestral.

Ej: Experimento = lanzamiento de un dado

Suceso A = obtención de número par = $\{2, 4, 6\}$

Suceso B = obtención de número impar = $\{1, 3, 5\}$

Suceso C = obtención del número 2 = $\{2\}$

Existen dos tipos de sucesos:

- → Suceso simple o elemental: aquel que no se puede descomponer en más sucesos
- → Suceso compuesto: es un suceso unión de sucesos simples

Operaciones con sucesos:

$\bar{A}$ = suceso que ocurre cuando NO ocurre A (suceso negado o complementario)

$A \cup B$ = ocurre cuando ocurre A o B o ambos (suceso unión)

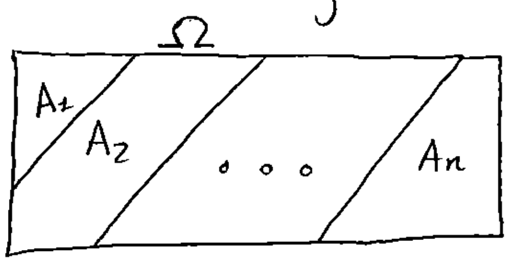
$A \cap B$ = ocurre cuando ocurre A y B a la vez (suceso intersección)

Se dice que A y B son complementarios o exhaustivos si y sólo si su unión es el espacio muestral es decir: $A \cup B = \Omega$ = suceso seguro

Se dice que A y B son incompatibles o disjuntos si y sólo si la intersección es el vacio es decir: $A \cap B = \emptyset$ = suceso imposible

Cuando dos sucesos son complementarios e incompatibles se dice que forman una partición.

En general: n sucesos $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ forman una partición si y sólo si la unión de todos ellos es el espacio muestral Ω $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega\right)$ y además son disjuntos dos a dos $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$



2. Probabilidad

$$P : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow P(\omega) = p$$

se cumple:

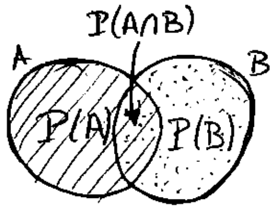
$0 \leq p \leq 1$

$P(\Omega) = 1$

si A y B son incompatibles $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



3. Espacio muestral finito

Un espacio muestral es finito si y sólo si consta de un número finito de elementos o un número infinito numerable.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

si $\bigcup_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega$ y $\bigcap_{j=1}^{n} \omega_j = \emptyset \Rightarrow \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$ forman una partición

$$P(\Omega) = 1 = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \omega_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n)}_{\text{condición de normalización}}$$

Dado un suceso compuesto $A \in \Omega \Rightarrow A = \{\omega_{A1}, \omega_{A2}, \dots, \omega_{Am}\}$

$$P(A) = P(\omega_{A1} \cup \omega_{A2} \cup \omega_{A3} \cup \dots \cup \omega_{Am}) =$$
$$= P(\omega_{A1}) + P(\omega_{A2}) + \dots + P(\omega_{Am})$$

Un espacio muestral finito equiprobable es aquel que:

$$P(\omega_i) = p \quad \forall i \in \mathbb{N} \; ; \; P(\Omega) = p + p + \dots + p = n \cdot p \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Teorema de Laplace:

en un espacio muestral finito equiprobable:

$$P(A) = \underbrace{p + p + \dots + p}_{m \text{ veces}} = m \cdot p = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

4. Técnicas de enumeración

→ Variaciones de n elementos tomados de m en m

Los conjuntos son distintos si son distintos los elementos que los forman o si están colocados en distinto orden.

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

Ej: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$V_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 120 \text{ conjuntos distintos}$$

→ Variaciones con Repetición de n elementos tomados de m en m

Igual que las Variaciones pero pudiendo repetir elementos

$$VR_{n,m} = n^m$$

Ej: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow VR_{6,3} = 6^3 = 216$ conjuntos distintos

→ Combinaciones de n elementos tomados de m en m

Los conjuntos son distintos si sus elementos son distintos (da igual el orden)

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{n-m}$$

Ej: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$ conjuntos distintos

→ Combinaciones con Repetición de n elementos tomados de m en m

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

Ej: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow CR_{6,3} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$

5. Probabilidad condicional

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad de A condicionado a B

$0 \le P(A/B) \le 1$

$P(\Omega/B) = 1$

Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$

$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$

$P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1/B) + P(A_2/B) - P(A_1 \cap A_2 / B)$

6. Independencia

Dos sucesos A y B son independientes si y sólo si:

$$\begin{cases} P(A/B) = P(A) \\ P(B/A) = P(B) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A/B) = P(A) \\ P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{array}\right\} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

A y B independientes $\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

7. Teorema de la multiplicación

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A/B)$$

$$P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B\cap A) = P(A)\cdot P(B/A)$$

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B)$$

En general:

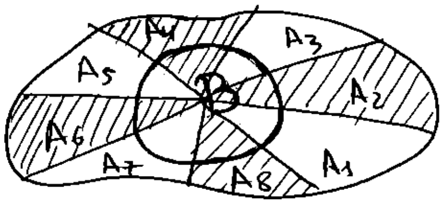
$$P(A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)\cdot \dots$$

$$\dots \cdot P(A_n/A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_{n-1})$$

8. Teorema de la Probabilidad Total

Sirve para calcular la probabilidad de un suceso B cuando disponemos de una partición del espacio muestral $(A_1, A_2, \dots, A_n)$

$$P(B) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) + \dots P(B/A_n)\cdot P(A_n)$$



9. Teorema de Bayes

Sirve para calcular la prob. de un suceso anterior condicionado a un suceso posterior

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j)\cdot P(A_j)}{P(B)\ \text{según el th. prob. total}}$$

suceso B

espacio A $(A_1, A_2, \dots, A_j)$

Ej:

a) Bolsa con un número muy grande de cuadros blancos y negros en la misma proporción. Calcular la probabilidad de que sacando 64 cuadros de uno en uno y colocándolos en el orden en que salen formemos un tablero de ajedrez.

b) Ahora disponemos de 32 cuadros blancos y 32 negros en la bolsa. Calcular lo mismo.

Incompatibles!!

$$P(\text{"tablero ajedrez"}) = P([B_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{63} \cap N_{64}] \cup [N_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{64}])$$

B_i = "El cuadro de la extracción i-ésima es blanco"

N_j = "El cuadro de la extracción j-ésima es negro"

$$P(\text{"tablero"}) = P(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{64}) + P(N_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{64})$$

a) nº muy grande de cuadros $\Rightarrow$ independencia

$$P(\text{"tablero"}) = P(B_1)P(N_2) \cdot \dots \cdot P(N_{64}) + P(N_1) \cdot \dots \cdot P(B_{64}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{64} = \frac{1}{2^{63}}$$

b) 32 blancos y 32 negros $\Rightarrow$ no son independientes

$$P(\text{"tablero"}) = P(B_1) \cdot P(N_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap N_2) \cdot \dots \cdot P(N_{64}/B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap B_{63})$$
$$+ P(N_1) \cdot P(B_2/N_1) \cdot P(N_3/N_1 \cap B_2) \cdot \dots \cdot P(B_{64}/N_1 \cap B_2 \cap \dots \cap N_{63})$$

$$= \frac{32}{64} \cdot \frac{32}{63} \cdot \frac{31}{62} \cdot \frac{31}{61} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} +$$

$$+ \frac{32}{64} \cdot \frac{32}{63} \cdot \frac{31}{62} \cdot \frac{31}{61} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{32!\,32!}{64!} + \frac{32!\,32!}{64!} = 2 \cdot \frac{(32!)^2}{64!}$$

Ej: Sistema formado por n subsistemas independientes. La fiabilidad del subsistema i-ésimo es $P(A_i)$

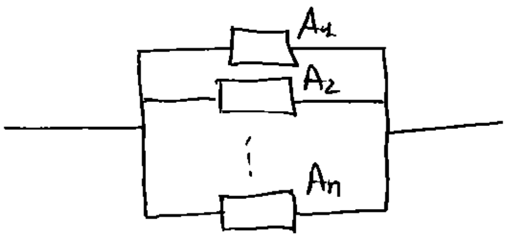
a) Calcular la fiabilidad del sistema en el caso de que todos los subsistemas se conecten en serie.

b) Idem pero con conexión en paralelo.

a)

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \overset{\text{indep}}{=\!=\!=} P(A_1)\,P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

b)



$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) \rightsquigarrow$$ nos gustaría separarlos como el apartado anterior

no son incompatibles

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) = \{\text{De Morgan}\} =$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = \{\text{son independientes}\} =$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) =$$

$$= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \dots (1 - P(A_n))$$

¿Puede ser la fiabilidad del sistema mayor que la de cada subsistema? Probar con: $n = 10$ $P(A_i) = 0'95$

a) serie: $P(A) = 0'95 \cdot \dots \cdot 0'95 = (0'95)^{10} = 0'598 < P(A_i)$

b) paralelo: $P(A) = 1 - (1 - 0'95) \dots (1 - 0'95) = 1 - (0'05)^{10} = 0'9999\dots > P(A_i)$

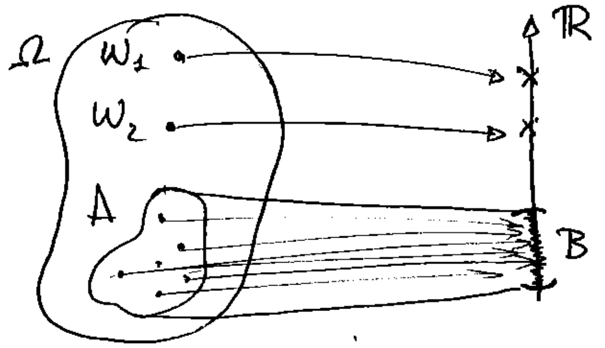
Si se conectan en paralelo: $P(A) > P(A_i)$

Tema 2: Variables aleatorias (unidimensionales)

1. Definiciones

Dado el espacio muestral Ω, se llama variable aleatoria (v.a.) a cualquier función entre Ω y $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow \mathbb{X}(\omega) \end{aligned}$$



Se llama Rango, Soporte o Recorrido de la v.a. a los distintos valores de $\mathbb{R}$

$$R_{\mathbb{X}} = \{ \mathbb{X}(\omega), \forall \omega \in \Omega \}$$

Se dice que A y B son sucesos equivalentes si y sólo si:

$$B = \{ \mathbb{X}(\omega), \forall \omega \in A \} \quad \text{o} \quad A = \{ \omega / \mathbb{X}(\omega) \in B \}$$

Dos sucesos son equivalentes $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$

Ej: Lanzamos una moneda al aire 3 veces:

$$\Omega = \{(x,x,x),(x,x,c),(x,c,x),(c,x,x),(x,c,c),(c,x,c),(c,c,x),(c,c,c)\}$$

8 sucesos equiprobables

v.a. $\mathbb{X}$ = "número de caras", $R_{\mathbb{X}} = \{0, 1, 2, 3\}$

$\mathbb{P}(\mathbb{X}=0) = \mathbb{P}((x,x,x)) = \frac{1}{8}$

$\mathbb{P}(\mathbb{X}=1) = \mathbb{P}((x,x,c), (x,c,x), (c,x,x)) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = P((c,c,x),(c,x,c),(x,c,c)) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = P((c,c,c)) = \frac{1}{8}$

Se dice que X es una v.a. discreta $\Leftrightarrow$ su recorrido es finito o infinito numerable

Caracterizar una v.a. discreta es: $\begin{cases} R_X \\ P(X=x) \ \forall x \in R_X \end{cases}$

Sea un experimento aleatorio que se repite n veces en idénticas condiciones y con independencia

Sea A un suceso asociado al experimento: $P(A) = p$

Se define la v.a. X como el número de veces que ocurre el suceso A en las n repeticiones

Se dice que esta v.a. sigue una distribución binomial de parámetros n y p: $X = B(n,p)$

$$X = B(n,p) \Rightarrow \begin{cases} R_X = \{0,1,2,\dots,k,\dots,n\} \\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

Función de Probabilidad

Ej: $X = B(10, 0'2)$

P (A = "marcarle un gol a Casillas de penalti")

$n = 10$ repeticiones independientes

$$P(X=7) = \binom{10}{7} 0'2^7 (1-0'2)^{10-7} = \frac{10!}{7!\,3!} 0'2^7 \cdot 0'8^3 = 0'00078$$

Probabilidad de marcar 7 de los 10 goles

2. Función densidad de probabilidad

para v.a. continuas

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$f_X(x) \cdot dx$ nos da la probabilidad que la v.a. X se encuentre entre x y $x+dx$

→ $f_X(x) \geq 0$ (vale 0 fuera del recorrido)

→ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$; condición de normalización

→ $P(A) = \int_A f_X(x)\,dx$

→ $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f_X(x)\,dx = 0$; $P\left(\text{de un valor concreto}\right) = 0$ $\left(\text{en v.a. continuas}\right)$

Una variable aleatoria es uniforme (o uniformemente distribuida) cuando cumple:

$$X = U[a,b] \longrightarrow f_X(x) = \begin{cases} K & \forall x \in R_X = [a,b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

para hallar k aplicamos la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_a^b k\,dx + \int_b^{+\infty} 0\,dx = \int_a^b k\,dx =$$

$$= k\int_a^b dx = k(b-a) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

luego: $X = U[a,b] \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \forall x \in R_X \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

3. Función de Distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$\rightarrow$ $0 \leq F_X(x) \leq 1$

$\rightarrow$ $F_X(-\infty) = 0 \quad , \quad F_X(+\infty) = 1$

$\rightarrow$ $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)$

$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P(X = b)$

$P(X = c) = F_X(c) - F_X(c^-)$

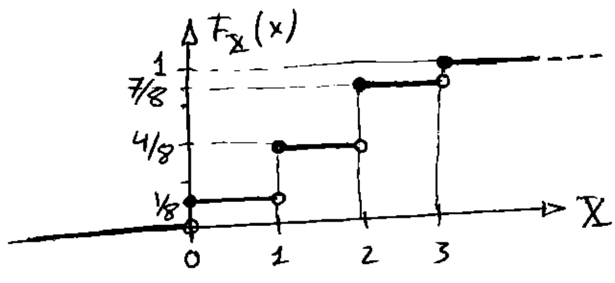
$\rightarrow$ $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

Ej: lanzar una moneda 3 veces

X = "nº de caras"

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{1}{8} \quad , \quad P(X=1) = P(X=2) = \frac{3}{8} \quad , \quad P(X=3) = \frac{1}{8}$



$x < 0 \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = 0$

$0 < x < 1 \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = P(X=0) = \frac{1}{8}$

$1 < x < 2 \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1)$

$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$2 < x < 3 \Rightarrow F_X(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

$x \geq 3 \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq 3) = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$P(X = 2'5) = F_X(2'5) - F_X(2'5^-) = \frac{7}{8} - \frac{7}{8} = 0$

no se puede sacar cara 2'5 veces

$P(X = 2) = F_X(2) - F_X(2^-) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1}{8}\delta(x) + \frac{3}{8}\delta(x-1) + \frac{3}{8}\delta(x-2) + \frac{1}{8}\delta(x-3)$$

Apuntes de la asignatura ESTADÍSTICA

Titulación: Ingeniería de Telecomunicaciones
Centro: Escuela Politécnica Superior
Departamento: Matemáticas
Autor: Angel Blasco

Tema 2

VARIABLES ALEATORIAS

En la mayoría de los experimentos aleatorios no existe una única variable que podamos medir sino una gran cantidad de ellas. Pensemos por ejemplo en el experimento de lanzar un dado. En este caso la única variable que suele despertar interés es el "número que sale", es decir, el número de puntos que podemos contar en la cara superior del dado una vez que éste se detiene. Sin embargo podríamos estar interesados en muchas otras variables tales como el ruido que hace el dado (medido, por ejemplo, en decibelios), el número de veces que rebota contra la mesa antes de detenerse o el tiempo que tarda en hacerlo. Todas estas variables son impredecibles a priori y por tanto aleatorias.

2.1. Distribuciones discretas y continuas

En general, una **variable aleatoria** se define como una función que asigna a cada posible resultado de un experimento un número real.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Podremos considerar entonces sucesos del tipo:

$$(X \in A) \equiv \{w \in \Omega : X(w) \in A\}$$

El que no podamos conocer a priori el valor que va a tomar una variable no significa que no podamos llegar a saber muchas cosas importantes sobre ella. La **distribución** de una variable aleatoria determina qué valores puede tomar y con qué probabilidad.

El conjunto de valores que puede tomar es lo que se conoce como su recorrido o **soporte**. Denotaremos el soporte de la variable X por S_X. $\equiv R_X$

En función de cómo sea el soporte se establece la siguiente clasificación:

- Distribuciones **discretas**: Son aquellas que tienen soporte finito o numerable (ej: número que sale en el dado).
- Distribuciones **continuas**: Tienen soporte no numerable y la probabilidad de un sólo punto es siempre cero (ej: tiempo que tarda en pararse el dado).
- Distribuciones mixtas: Tienen soporte no numerable pero también existen puntos que acumulan probabilidad (ej: tiempo de espera en una cola).

2.1.1. Distribuciones discretas

Existen dos funciones que caracterizan completamente la distribución de una variable aleatoria discreta; son la función de probabilidad y la función de distribución.

- **Función de probabilidad (o función de masa).**

  Esta función asigna a cada punto del soporte su probabilidad y toma el valor cero en cualquier punto que no pertenezca al soporte. Tenemos por tanto una función $p : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $p(x) = \boxed{P(X = x)}$.

Tenemos además que $p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in S_X$, lo que implica, teniendo en cuenta las propiedades de la probabilidad estudiadadas en el capítulo 1, que

$$\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$$ Condición de Normalización.

- **Función de distribución.**

  Es una función $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida como $\boxed{F(t) = P(X \leq t)}$. En el caso de distribuciones discretas será:

$$\boxed{F(t) = \sum_{x \in S_X \, x \leq t} p(x)}$$ Para distribuciones discretas.

y tendrá un aspecto escalonado.

Toda función de distribución F debe verificar las siguientes propiedades:

a) $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$.
b) $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.
c) F es monótona no decreciente.
d) F es contínua por la derecha.

Observación:

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$ donde $F(a^-) \equiv \lim_{t\to a^-} F(t)$.
- $p(a) = F(a) - F(a^-)$.

Esta última expresión nos permite obtener la función de probabilidad a partir de la de distribución.

2.1.2. Distribuciones continuas

Al igual que ocurre en el caso discreto, la distribución de una variable continua queda completamente caracterizada por su función de distribución. Sin embargo ahora la función de probabilidad pierde su sentido pues recordemos que la probabilidad de que una variable continua tome un valor concreto es siempre cero. Lo que necesitamos es una función que nos permita determinar la probabilidad de cualquier intervalo.

- **Función de densidad.** Es una función no negativa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que toma valores positivos sólo en el soporte de la variable ($f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in S_X$), y que verifica:

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

Análogamente a lo que ocurría con la función de probabilidad, en este caso se tiene:

$$\int_{S_X} f(x)dx = 1$$ Condición de Normalización.

- **Función de distribución.**

La función de distribución se define igual que en el caso discreto ($F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ donde $\boxed{F(t) = P(X \le t)}$) pero ahora se obtendrá como:

$$\boxed{F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx}$$ Para distribuciones continuas.

y será siempre continua.

Observación: Podemos obtener la función de densidad a partir de la de distribución mediante la expresión:

$$\boxed{f(x) = F'(x)}$$

2.2. Principales distribuciones discretas

- Distribución de Bernoulli ($X \sim B(p)$). Permite modelizar cualquier variable aleatoria que sólo puede tomar dos valores (1-éxito o 0-fracaso). Depende de un solo parámetro p que determina la probabilidad de éxito.

  - Soporte: $S_X = 0, 1$.
  - Función de probabilidad: $p(1) = p$ y $p(0) = q$.

donde $q \equiv 1 - p$.

- Distribución binomial ($X \sim B(n, p)$). Representa el número de éxitos en n pruebas de Bernoulli de parámetro p independientes.

  - Soporte: $S_X = 0, 1, ..., n$.
  - Función de probabilidad: $p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$.

Observación: Según se dijo anteriormente, debe ocurrir $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$. Es fácil comprobar que esto es cierto ya que:

$$\sum_{x \in S_X} p(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1$$

Observación: Nótese que si tenemos $X_1, ..., X_n \sim B(p)$ independientes, entonces será:

$$Y = \sum_{i=0}^{n} X_i \sim B(n, p)$$

De aquí se deduce también que la distribución $B(p)$ es un caso particular de la $B(n, p)$ en que $n = 1$.

- Distribución **geométrica** ($X \sim G(p)$). Existen dos versiones que presentan ligeras variaciones. En ambos casos se parte de una sucesión de pruebas de Bernoulli de parámetro p independientes.

  - Versión 1: Representa el número de pruebas realizadas hasta obtener el primer éxito.
    - Soporte: $S_X = \{1, 2, ...\}$.
    - Función de probabilidad: $p(x) = pq^{x-1}$ donde $q \equiv 1 - p$.
  - Versión 2: Representa el número de fracasos antes de obtener el primer éxito.
    - Soporte: $S_X = \{0, 1, ...\}$.
    - Función de probabilidad: $p(x) = pq^{x}$ donde $q \equiv 1 - p$.

Observación: En ambos casos es fácil comprobar que $\sum_{x \in S_X} p(x) = 1$. Consideremos por ejemplo la versión 1:

$$\sum_{x \in S_X} p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1} = \frac{p}{q}\frac{q}{1-q} = 1$$

Observación: Se dice que una variable aleatoria X no tiene memoria si verifica para todo x y $h > 0$ que $P(X > x + h | X > x) = P(X > h)$.

La distribución geométrica es la única distribución discreta que no tiene memoria ya que:

$$P(X > x+h | X > x) = \frac{P(X > x + h)}{P(X > x)} = \frac{\sum_{k=x+h+1}^{\infty} pq^{k-1}}{\sum_{k=x+1}^{\infty} pq^{k-1}} = \frac{p\frac{q^{x+h}}{1-q}}{p\frac{q^x}{1-q}} = q^h = P(X > h)$$

Nc

- Distribución **hipergeométrica** ($X \sim H(N, N_A, n)$). Dado un conjunto de N elementos, de los cuales N_A son de tipo A y N_B son

de tipo B, elegimos n de ellos al azar y sin reemplazamiento. En esta situación el número de elementos extraídos de tipo A sigue una distribución $H(N, N_A, n)$:

  - Soporte: $S_X = \{x \in \mathbb{Z} : \text{máx}\{0, n-N+N_A\} \leq x \leq \text{mín}\{n, N_A\}\}$.
  - Función de probabilidad: $p(x) = \dfrac{\binom{N_A}{x}\binom{N_B}{n-x}}{\binom{N}{n}}$.

Nc

- Distribución **binomial negativa** ($X \sim BN(k, p)$). Dada una sucesión de pruebas de Bernoulli de parámetro p independientes, representa el número de pruebas necesarias hasta conseguir el k-ésimo éxito.

  - Soporte: $S_X = \{k, k + 1, ...\}$.
  - Función de probabilidad: $p(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$.

Observación: Esta distribución generaliza a la Geométrica; si $k = 1$ se convierte en una $G(p)$.

- Distribución de **Poisson** ($X \sim P(\lambda)$). Dado un suceso que se repite con una frecuencia media de λ veces por unidad de tiempo, representa el número de ocurrencias en una unidad de tiempo.

Observación: Esta definición no caracteriza completamente la distribución de Poisson. Entenderemos mejor esta importante distribución a medida que avancemos en el curso.

  - Soporte: $S_X = \{0, 1, ...\}$.
  - Función de probabilidad: $p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$.

Observación: Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la función exponencial, se tiene:

$$\sum_{x\in S_X} p(x) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

lo cuál confirma que esta distribución está bien definida.

Observación: La distribución de Poisson se obtiene como límite de la distribución binomial cuando $n \to \infty$.

Consideremos un intervalo temporal de longitud 1 y supongamos que lo hemos dividido en n subintervalos de longitud $1/n$. Sea p la probabilidad de que determinado suceso ocurra en un subintervalo de esta longitud. Entonces el número de repeticiones del suceso durante el intervalo $(0,1)$ tendrá una distribución $B(n,p)$.

Supongamos por último que la probabilidad p es proporcional a la longitud del subintervalo considerado y sea λ la correspondiente constante de proporcionalidad, es decir, $p = \lambda/n$, y hagamos $n \to \infty$.

Si ahora definimos $X \equiv$"número de ocurrencias en el intervalo $(0,1)$", tendremos que $S_X = \{0,1,...\}$ y, por otro lado:

$$p(x) = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-x)!x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-x)!}\frac{1}{(n-\lambda)^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{(n-\lambda)^x}$$

Efectivamente, dado que este último límite resulta ser 1, obtenemos de este modo la función de probabilidad asociada a la distribución de P(λ).

2.3. Principales distribuciones continuas

- Distribución uniforme ($X \sim U(a,b)$). Es una distribución con densidad de probabilidad uniforme a lo largo del intervalo (a,b) y cero fuera de él.

  - Soporte: $S_X = (a,b)$.
  - Función de densidad: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ en (a,b) (y $f(x) = 0$ en el resto).

  Observación: Se comprueba trivialmente que $\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = 1$.

- Distribución exponencial ($X \sim exp(\lambda)$). Se utiliza frecuentemente para representar tiempos de vida de diversos aparatos.

  - Soporte: $S_X = (0,+\infty)$.
  - Función de densidad: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ en $(0,+\infty)$.

  Observación: Se comprueba trivialmente que: $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = 1$.

  Observación: La exponencial es la única distribución continua que no tiene memoria, ya que:

  $$P(X > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda t}$$

  lo cuál implica que:

  $$P(X > t+h|X > h) = \frac{P(X > t+h)}{P(X > h)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda h}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

- Distribución normal (o gausiana) ($X \sim N(\mu,\sigma)$). Es, sin duda, la distribución de probabilidad de mayor aplicación en casi todas las áreas. Se utiliza para modelizar todo tipo de medidas, errores estadísticos, ruidos y perturbaciones, movimientos de partículas, etc.

- Soporte: $S_X = \mathbb{R}$.
- Función de densidad: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (Campana de Gauss).

Observación: No existe una expresión explícita para la primitiva de esta función por lo que sólo se puede ~~integrar mediante~~ técnicas numéricas. Existen tablas que permiten calcular probabilidades y puntos críticos sobre la distribución N(0,1) (normal estándar). Para hacer estos cálculos sobre cualquier otra normal tendremos que tipificar.

Tipificación: Se verifica la siguiente propiedad:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Teorema Central del Límite: Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media y varianza finitas. Entonces la distribución de la variable $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se hace normal cuando $n \to \infty$.

Podremos entender mejor este resultado, y expresarlo de forma más rigurosa, a medida que avancemos en el curso. Quedémonos de momento con la idea intuitiva de que "la suma de muchos pequeños efectos independientes unos de otros sigue una distribución aproximadamente normal".

No
- Distribución gamma ($X \sim Gamma(p, \lambda)$). Es un modelo muy versátil que incluye como casos particulares las distribuciones exponencial, Erlang y χ^2.
  - Soporte: $S_X = (0, +\infty)$.

- Función de densidad: $f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}$ en $(0, +\infty)$.

Nota: En la expresión anterior se ha utilizado la función Gamma, que se define como:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

Observación: Aplicando el cambio $y = \lambda x$ se comprueba fácilmente que $\int_{S_X} f(x)dx = 1$.

Notas: En cuanto a la función Gamma, conviene saber que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y que $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n \in \mathbb{N}$.

En cuanto a la distribución Gamma tenemos que:

- $Gamma(1, \lambda) \equiv exp(\lambda)$.
- $Gamma(n, \lambda) \equiv Erlang(n, \lambda)$ si $n \in \mathbb{N}$.

Por último decir que esta distribución es reproductiva respecto del parámetro p. Esto quiere decir que si tenemos una colección de variables aleatorias $X_1, ..., X_n$ independientes y con $X_i \sim Gamma(p_i, \lambda)$ para todo $i = 1, ..., n$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(\sum_{i=1}^{n} p_i, \lambda)$$

2.4. Momentos de una variable aleatoria

Los momentos de una variable aleatoria son valores numéricos que se calculan sobre su distribución y que nos dan una idea bastante precisa (aunque no exacta) de cómo es dicha distribución. Los más importantes son la media y la varianza.

La **media** (o esperanza) de una variable aleatoria es una medida de posición que proporciona un valor numérico en torno al cuál se sitúan las distintas realizaciones de la variable.

Se define como $E[X] = \sum_{x\in S} xp(x)$ en variables discretas y como $E[X] = \int_S xf(x)dx$ en variables continuas. A menudo la denotaremos con la letra griega μ.

Ejemplos:

- Dada una variable X con distribución $G(p)$, se tiene:

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} xpq^x = \frac{q}{p}$$

- En cambio, si $X \sim exp(\lambda)$, será:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

Observación: Teniendo en cuenta la definición anterior es fácil comprobar que:

- $E[C] = C$ si C es una constante.
- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- $E[CX] = CE[X]$.
- $E[XY] = E[X]E[Y]$ si X e Y son independientes.

(La última propiedad se podrá demostrar más fácilmente cuando estudiemos la independencia de variables aleatorias en el Tema 3)

Observación: En ocasiones nos referiremos a la media como el momento de orden 1 respecto del origen. De forma general, se define el **momento de orden k** como:

$$\alpha_k = E[X^k]$$

La **varianza** es una medida de dispersión que refleja la mayor o menor tendencia de la variable a tomar valores alejados de su media.

Se define como $V[X] = \sum_{x\in S}(x-\mu)^2 p(x)$ en variables discretas y como $V[X] = \int_S (x-\mu)^2 f(x)dx$ en variables continuas. A menudo la denotaremos con la letra griega σ^2.

La siguiente fórmula facilita notablemente el cálculo y es válida tanto para variables discretas como continuas:

$$\boxed{\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = E(X^2) - E^2(X)}$$

(la segunda igualdad se obtiene desarrollando el cuadrado y aplicando las propiedades de linealidad de la esperanza)

Observación: Se comprueba fácilmente que:

- $V[C] = 0$ si C es una constante.
- $V[CX] = C^2V[X]$.
- $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$ si X e Y son independientes.

(La última propiedad se podrá demostrar más fácilmente cuando lleguemos al Tema 3)

Observación: Otra medida de dispersión igual o más importante es la **desviación típica** (o desviación estándar), que se denota por σ y se define como la raíz cuadrada de la varianza.

Teorema de Tchebychev

Este teorema nos da una idea de la información que proporcionan la media y la varianza sobre la distribución de la que provienen.

Th: Dada una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2, se tiene para todo $a > 0$ que

$$\boxed{P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}}$$

No •

2.5. Funciones generatrices (SOLO ALCALÁ)

Las siguientes funciones son útiles, entre otras cosas, para obtener momentos de cualquier orden de una distribución dada:

- Función característica (Transformada de Fourier). Se define como:

$$\boxed{\phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}]}$$

siendo j la unidad imaginaria.

Verifica las siguientes propiedades:

- Caracteriza completamente la distribución de X. De hecho, se puede obtener la función de densidad a partir de ϕ_X utilizando la antitransformada:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(\omega) e^{-j\omega X} d\omega$$

- Siempre existe (la suma o integral asociada siempre converge).
- Si $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes, se verifica:

$$\phi_{X_1+\cdots+X_n}(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(\omega)$$

Resulta muy útil para calcular momentos de cualquier orden ya que se tiene:

$$\boxed{\frac{d\phi}{d\omega}|_{\omega=0} = E[e^{j\omega X}(jX)]|_{\omega=0} = jE[X]}$$

y, en general:

$$\boxed{\frac{d^k\phi}{d\omega^k}|_{\omega=0} = E[e^{j\omega X}(jX)^k]|_{\omega=0} = j^k E[X^k]}$$

con lo cual:

$$\boxed{\alpha_k = \frac{1}{j^k}\frac{d^k\phi}{d\omega^k}|_{\omega=0}}$$

Ejemplo: Consideremos la distribución $B(n,p)$, definida en la sección 2.2. Su función característica será:

$$\phi_X(\omega) = \sum_{x=0}^{n} e^{j\omega x}\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^{j\omega})^x q^{n-x} = (pe^{j\omega}+q)^n$$

Ahora podemos calcular:

$$E[X] = \alpha_1 = \frac{1}{j}\frac{d\phi}{d\omega}|_{\omega=0} = \frac{1}{j}n(pe^{j\omega}+q)^{n-1}pe^{j\omega}j|_{\omega=0} = np$$

En cuanto al momento de orden 2:

$$\alpha_2 = \frac{1}{j^2}\frac{d^2\phi}{d\omega^2}|_{\omega=0} = \frac{npj}{j^2}\{(n-1)(pe^{j\omega}+q)^{n-2}pe^{j\omega}je^{j\omega}+(pe^{j\omega}+q)^{n-1}e^{j\omega}j\}|_{\omega=0} =$$

$$= \frac{np}{j}\{(n-1)pj+j\} = n(n-1)p^2+np$$

con lo cuál tenemos que:

$$V[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

- Función generatriz de momentos (Transformada de Laplace). Se define sobre variables aleatorias continuas no negativas, como sigue:

$$\boxed{M_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx}$$

Si $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes, se verifica:

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(s)$$

Razonando como con la función característica se comprueba fácilmente que:

$$\boxed{\alpha_k = (-1)^k \frac{d^k M}{ds^k}|_{s=0}}$$

lo que la hace muy útil para calcular momentos de cualquier orden.

Ejemplo: Consideremos la distribución $Gamma(p, \lambda)$, definida en ??. Su función generatriz de momentos es:

$$M_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$$

Esto se puede poner como:

$$M_X(s) = \frac{\lambda^p}{(\lambda+s)^p} \int_0^\infty \frac{(\lambda+s)^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-(\lambda+s)x} dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^p$$

ya que lo que hay dentro de la integral es la función de densidad de una $Gamma(p, \lambda + s)$ y, por tanto, debe integrar 1.

Ahora podemos obtener su esperanza como:

$$E[X] = \alpha_1 = (-1)\frac{dM}{ds}|_{s=0} = -p\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{p-1} \frac{-\lambda}{(\lambda+s)^2}|_{s=0} = \frac{p}{\lambda}$$

En cuanto a la varianza se tiene:

$$\alpha_2 = \frac{d^2M}{ds^2}|_{s=0} = \frac{-p(p+1)}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^p \frac{-\lambda}{(\lambda+s)^2}|_{s=0} = \frac{p(p+1)}{\lambda^2}$$

$$V[X] = \frac{p(p+1)}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2} = \frac{p}{\lambda^2}$$

- Función generatriz de probabilidad (Transformada z). Se define sobre variables aleatorias discretas no negativas, como sigue:

$$\boxed{G_X(z) = E[z^X] = \sum_{x=0}^\infty z^x p(x)}$$

Si $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes, se verifica:

$$G_{X_1+\cdots+X_n}(z) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(z)$$

Se tiene que:

- $p(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^kG}{dz^k}|_{z=0}$
- $E[X] = G'(1)$
- $V[X] = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$

Ejemplo: Consideremos la distribución $P(\lambda)$, definida en ??. Su función generatriz de probabilidad será:

$$G_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda z}} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda z}(\lambda z)^x}{x!} = e^{\lambda(z-1)}$$

ya que lo que hay dentro del sumatorio es la función de probabilidad de una $P(\lambda z)$ y debe sumar 1.

Ahora podemos calcular la media:

$$E[X] = G'(1) = e^{\lambda(z-1)}\lambda|_{z=1} = \lambda$$

y la varianza:

$$G''(1) = e^{\lambda(z-1)}\lambda^2|_{z=1} = \lambda^2 \Rightarrow V[X] = \lambda$$

VARIABLES ALEATORIAS: TABLAS

- VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\mathrm{E}[X] = np \qquad \mathrm{VAR}[X] = np(1-p) \qquad G_X(z) = (q+pz)^n \qquad \text{donde } q = 1-p$$

- VARIABLE ALEATORIA GEOMÉTRICA $X \equiv$ " número de fallos hasta el primer éxito"

$$P[X = k] = p(1-p)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1-p}{p} \qquad \mathrm{VAR}[X] = \frac{1-p}{p^2} \qquad G_X(z) = \frac{p}{1-qz} \qquad \text{donde } q = 1-p$$

- VARIABLE ALEATORIA DE POISSON

$$P[X = k] = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \qquad k = 0, 1, \ldots \qquad \alpha > 0$$

$$\mathrm{E}[X] = \alpha \qquad \mathrm{VAR}[X] = \alpha \qquad G_X(z) = e^{\alpha(z-1)}$$

- VARIABLE ALEATORIA UNIFORME

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

$$\mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2} \qquad \mathrm{VAR}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad \Phi_X(\omega) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$$

- VARIABLE ALEATORIA EXPONENCIAL

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0, \quad \lambda > 0$$

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathrm{VAR}[X] = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \Phi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$$

- VARIABLE ALEATORIA NORMAL

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad x \in \mathbf{R}, \quad \sigma > 0$$

$$\mathrm{E}[X] = \mu \qquad \mathrm{VAR}[X] = \sigma^2 \qquad \Phi_X(\omega) = e^{j\mu\omega - \sigma^2\omega^2/2}$$

- VARIABLE ALEATORIA GAMMA

$$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \lambda > 0 \quad \text{donde } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x}\, dx \quad z > 0.$$

$$\mathrm{E}[X] = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \mathrm{VAR}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2} \qquad \Phi_X(\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega/\lambda)^\alpha}$$

Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$, se llama variable aleatoria m-Erlang, y $f_X(x) = \dfrac{\lambda(\lambda x)^{m-1} e^{-\lambda x}}{(m-1)!} \quad x > 0.$

APENDICE TEORIA

FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR N(0,1)

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9576	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Práctica 2

(Distribuciones de probabilidad unidimensionales)

1. Sea $p(x) = k(\beta^x - \alpha^x)$ para cada $x \in \mathbb{N}$ con $0 < \alpha < \beta < 1$.

   (a) Calcula k para que p sea una función de probabilidad bien definida.

   (b) Calcula $p(1)$ y $p(2)$.

2. Sacamos 4 cartas al azar de una baraja española. Calcula la probabilidad de que (a) las 4 sean oros, (b) 3 de ellas sean oros. Responde a ambas preguntas con y sin reemplazamiento.

3. Dado $a > 0$, considera la función $f(x) = \frac{a}{x^2}$ definida en el intervalo (a, ∞).

   (a) Calcula a para que f sea una función de densidad bien definida.

   (b) Para $a = 2$ calcula la función de distribución asociada y dibújala.

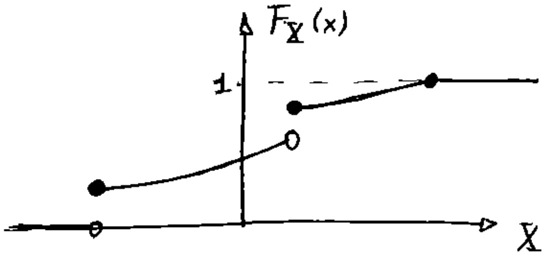
4. En un circuito de carreras, la temperatura del asfalto a la hora que se corre sigue una distribución $N(\mu = 40, \sigma = 4)$ si el día está despejado y $N(\mu = 28, \sigma = 3)$ si el día está nublado. En esta zona uno de cada tres días sale nublado.

   (a) Calcula la probabilidad de que durante la próxima carrera la temperatura del asfalto esté entre 30 y 35 grados.

   (b) Sea T la temperatura del asfalto y supongamos que el día está nublado. Calcula dos valores A y B tales que $P(T < A) = P(T > B) = 0.025$.

4. Variable Aleatoria mixta

X es una v.a. mixta si y sólo si su recorrido es infinito no numerable, pero tiene puntos de probabilidad no nula, es decir, su Función de Distribución es no continua.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

tiene deltas

Ej. Práctica 2 Ej1

$p(x) = k(\beta^x - \alpha^x) \quad x \in \mathbb{N}, \; 0<\alpha<\beta<1$

a) k? $p(x)$ sea una función de probabilidad

$\mathbb{P}(X=x) = k\cdot(\beta^x-\alpha^x)$

si $X = x \in \mathbb{N} \Rightarrow X$ es v.a. discreta

condición de normalización:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=i) = 1 \iff \sum_{i=0}^{\infty} k(\beta^i-\alpha^i) = k\left(\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i - \sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i\right) =$$

$$= k\left(\beta^0+\beta^1+\beta^2+\beta^3+\dots - [\alpha^0+\alpha^1+\alpha^2+\alpha^3+\dots]\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{series geométricas}\\ \text{de razones } \beta \text{ y } \alpha\end{array}\right\}$$

$$= k\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = k\,\frac{(1-\alpha)-(1-\beta)}{(1-\beta)(1-\alpha)} = k\,\frac{\beta-\alpha}{(1-\beta)(1-\alpha)} = 1 \iff$$

$$\iff k = \frac{(1-\beta)(1-\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow \mathbb{P}(X=x) = \frac{(1-\beta)(1-\alpha)}{\beta-\alpha}(\beta^x-\alpha^x)$$

b) $p(1)=\mathbb{P}(X=1)$? y $p(2)=\mathbb{P}(X=2)$?

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{(1-\beta)(1-\alpha)}{\cancel{(\beta-\alpha)}}\cancel{(\beta-\alpha)} = (1-\beta)(1-\alpha)$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{(1-\beta)(1-\alpha)}{\beta-\alpha}(\beta^2-\alpha^2) = \frac{(1-\beta)(1-\alpha)}{\cancel{(\beta-\alpha)}}(\beta+\alpha)\cancel{(\beta-\alpha)}$$

Ej. Practica 2 Ej 2

extracción de 4 cartas al azar de una baraja española (40 cartas)

a) P ("4 sean oros")

b) P ("3 sean oros")

Responder a ambas con y sin reemplazamiento.

1) con reemplazamiento:

a) P ("4/4 oros")

O_i = "carta de extracción i-ésima es de oros"

$$P(\text{"4 oros"}) = P(O_1 \cap O_2 \cap O_3 \cap O_4) = P(O_1)\cdot P(O_2)\cdot P(O_3)\cdot P(O_4)$$

con reemplazamiento ⇒ independientes

$$= \frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

b) P ("3/4 oros") =

$$= P\Big((O_1\cap O_2\cap O_3\cap \bar{O}_4)\cup(O_1\cap O_2\cap \bar{O}_3\cap O_4)\cup(O_1\cap \bar{O}_2\cap O_3\cap O_4)\cup$$

$$\cup(\bar{O}_1\cap O_2\cap O_3\cap O_4)\Big) \underset{\text{incompat.}}{=} P(O_1\cap O_2\cap O_3\cap \bar{O}_4)+P(O_1\cap O_2\cap \bar{O}_3\cap O_4)+$$

$$+P(O_1\cap \bar{O}_2\cap O_3\cap O_4)+P(\bar{O}_1\cap O_2\cap O_3\cap O_4) \underset{\text{independ.}}{=} P(O_1)\cdot P(O_2)\cdot P(O_3)\cdot P(\bar{O}_4)+$$

$$+\dots+P(\bar{O}_1)\cdot P(O_2)\cdot P(O_3)\cdot P(O_4) = \frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{30}{40}+\dots+$$

$$+\dots+\frac{30}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40} = \left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]\cdot 4 = \frac{3}{64}$$

2) sin reemplazamiento

a) $P(\text{"4/4 oros"}) = P(O_1\cap O_2\cap O_3\cap O_4)$ No independientes teorema de la multiplic

$$P(\text{"4 oros"}) = P(O_1)\cdot P(O_2/O_1)\cdot P(O_3/O_1\cap O_2)\cdot P(O_4/O_1\cap O_2\cap O_3) =$$

$$= \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{7}{37}$$

b) $P(\text{"3/4 oros"}) = P(O_1)\cdot P(O_2/O_1)\,P(O_3/O_1\cap O_2)\cdot P(\bar{O}_4/O_1\cap O_2\cap O_3)+\dots+$

$$+\dots+P(\bar{O}_1)\cdot P(O_2/\bar{O}_1)\,P(O_3/\bar{O}_1\cap O_2)\cdot P(O_4/\bar{O}_1\cap O_2\cap O_3) =$$

$$= \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{30}{37}+\dots+\dots+\dots = 4\left[\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{30}{37}\right]$$

Ej. Practica 2 Ej 2 · Another Way

1) con reemplazamiento $\Rightarrow$ independencia entre ensayos

$n = 4$ ensayos

$p(\text{sacar oros}) = \frac{1}{4} = P(A) = p$

V.a. binomial:

X = "nº de oros que saco al extraer 4 cartas con reemplaz."

$X = B(n=4, p=\frac{1}{4})$, $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

a) $P(\text{"4 oros"}) = P(X=4) = \binom{4}{4} 0'25^4 (1-0'25)^{4-4} = \frac{1}{256}$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

b) $P(\text{"3 oros"}) = P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot 0'25^3 (1-0'25)^{4-3} = \frac{3}{64}$

2) sin reemplazamiento $\Rightarrow$ dependencia entre ensayos

$\left.\begin{array}{l} 10 \times O \\ 30 \times \bar{O} \end{array}\right\}$ 4 extracciones $\Rightarrow$ $n = 4$ ensayos

V.a. hipergeométrica:

X = "nº de oros que saco al extraer 4 cartas sin reemplaz."

$X = H(\underset{\text{cartas}}{40}, \underset{O}{10}, \underset{n}{4})$

a) $P(\text{"4 oros"}) = P(X=4) = \dfrac{\binom{10}{4}\binom{30}{0}}{\binom{40}{4}} = \dfrac{\frac{10!}{4!\,6!}\,\frac{\cancel{30!}}{\cancel{0!\,30!}}}{\frac{40!}{4!\,36!}} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}$

$$P(X=k) = \frac{\binom{N_A}{k}\binom{N-N_A}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

b) $P(\text{"3 oros"}) = P(X=3) = \dfrac{\binom{10}{3}\binom{30}{1}}{\binom{40}{4}} = \dfrac{\frac{10!}{3!\,7!}\,\frac{30!}{1!\,29!}}{\frac{40!}{4!\,36!}} = 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 30}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}$

5. Función de variable aleatoria

$$\left.\begin{array}{ll} X & A \subset R_X \\ Y = H(X) & B = H(A) \end{array}\right\}$$ A y B son equivalentes si y sólo si $P(A) = P(B)$

1) X v.a. discreta $\longrightarrow$ Y v.a. discreta

$$\left.\begin{array}{l} X = \begin{cases} R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ P(X = x_i) \end{cases} \\ Y = H(X) \end{array}\right\} \text{ conocido}$$

* Buscamos caracterizar la v.a. Y

$\rightarrow R_y = H(R_X) = \{y_1, y_2, \dots y_m\}$

$\rightarrow P(Y = y_k) = P(x_i \,/\, y_k = H(x_i))$

Ej:

x_i	-2	-1	0	1
$P(X=x_i)$	1/4	1/4	1/4	1/4

$Y = X^2$

$$\left.\begin{array}{l} (-2)^2 = 4 \\ (-1)^2 = 1 \\ 0^2 = 0 \\ 1^2 = 1 \end{array}\right\} R_y = \{0, 1, 4\}$$

$P(Y=0) = P(X=0) = 1/4$

$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{1}{2}$

$P(Y=4) = P(X=-2) = 1/4$

2) X v.a. continua $\longrightarrow$ Y v.a. discreta

$$\left. X = \begin{cases} R_X \\ f_X(x) \end{cases}, \quad Y = H(x) \right\} \text{ conocido}$$

* Buscamos caracterizar la v.a. Y

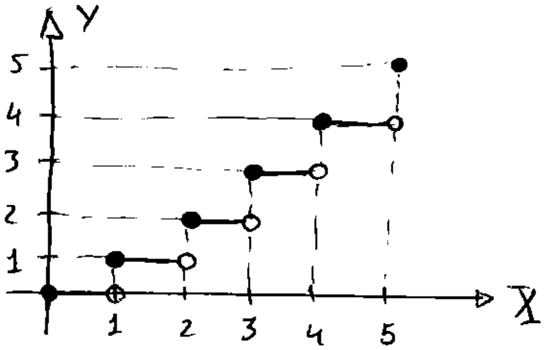
$\rightarrow R_y = H(R_X) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

$\rightarrow P(Y = y_k) = P(\underbrace{x_i \,/\, y_k = H(x_i)}_{A \subset R_X}) = \int_A f_X(x)\, dx$

Ej: $X = U[0,5] \longrightarrow R_X = [0,5]$

$Y = Ent[X]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5} & \forall x \in R_X \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$R_Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(Y=0) = P(0 \leq X < 1) = \int_0^1 f_X(x)\,dx = \frac{1}{5}$

$P(Y=1) = P(1 \leq X < 2) = \int_1^2 f_X\,dx = \frac{1}{5}$

$\vdots$

$P(Y=4) = \dots = \frac{1}{5}$

$P(Y=5) = P(X=5) = \int_5^5 f_X(x)\,dx = 0$

3) X v.a. continua $\longrightarrow$ Y v.a. continua

$$\left. X = \begin{cases} R_X \\ f_X(x) \end{cases}, \quad Y = H(X) \right\} \text{conocido}$$

* Buscamos caracterizar la v.a. Y

$\rightarrow R_Y = H(R_X)$

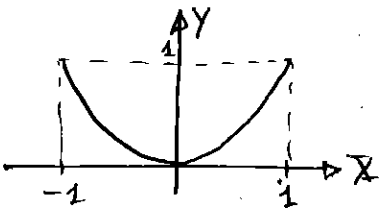
$\rightarrow$ a) Sean las raíces $x_1, x_2, \dots$ las raíces reales de $y = H(x)$ tenemos que: $f_Y(y) = \sum_{\forall x_i} \frac{f_X(x_i)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|\Big|_{x_i}}$

b) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\underbrace{H(X) \leq y}_{A \subset R_X}) = \int_A f_X(x)\,dx$

Ej: $X = U[-1,1] \longrightarrow R_X = [-1,1]$

$Y = X^2$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}, & \forall x \in R_X \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



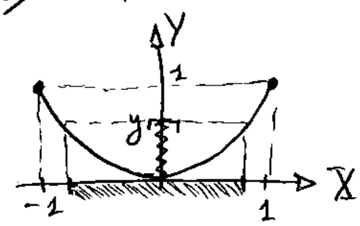
a) $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$ $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{y} \\ x_2 = +\sqrt{y} \end{cases}$

$f_X(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f_X(x_1) = 1/2 \\ f_X(x_2) = 1/2 \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \longrightarrow 2 \cdot |x|$ $\begin{cases} \xrightarrow{x=x_1} 2|-\sqrt{y}| = 2|\sqrt{y}| = 2\sqrt{y} \\ \xrightarrow{x=x_2} 2|\sqrt{y}| = 2\sqrt{y} \end{cases}$

$R_Y = [0,1]$ $\quad f_Y(y) = \frac{1/2}{2\sqrt{y}} + \frac{1/2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \forall y \in R_Y$

b) $F_Y(y) = P(Y \leq y)$



Sea $y \in (0,1) \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) =$

$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \forall y \in R_Y \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

4) X v.a. continua $\longrightarrow$ Y v.a. mixta

$X = \begin{cases} R_X \\ f_X(x) \end{cases}$, $Y = H(X)$ $\Big\}$ conocido

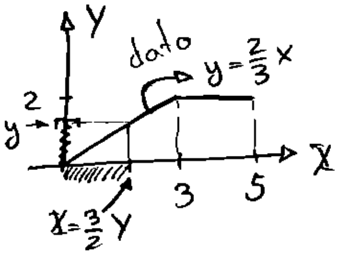
* Buscamos caracterizar la v.a. Y

$\rightarrow R_Y = H(R_X)$

$\rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\underbrace{H(X) \leq y}_{A}) = \int_A f_X(x)\,dx$

Ej: $X = U[0,5] \longrightarrow R_X = [0,5]$

$\hookrightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1/5 & x \in R_X \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

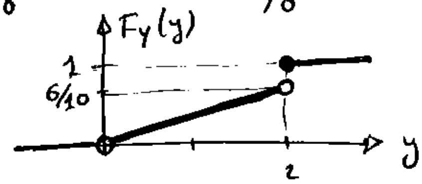


$R_Y = [0,2]$

$F_Y(y) = ??$ $\rightsquigarrow$ Sea un $y \in (0,2) \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) =$

$$= P(0 \leq X \leq \tfrac{3}{2} y) = \int_0^{3/2\,y} f_X(x)\,dx = \int_0^{\frac{3y}{2}} \frac{1}{5}\,dx = \frac{3}{10}\,y$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{3}{10} y & 0 \leq y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$



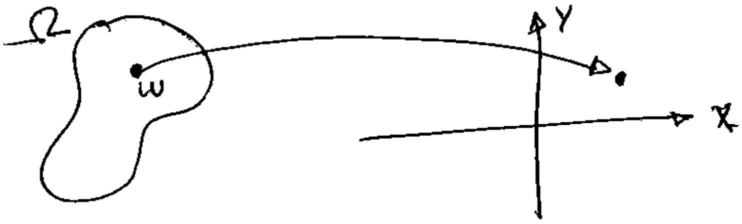
$$P(Y=2) = P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 f_X(x)\,dx = \int_3^5 \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}(5-3) = \frac{2}{5}$$

Tema 3: Variables Aleatorias (bidimensionales)

1. Definiciones

Sea Ω un espacio muestral, se llama v.a:

$$(X,Y): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$w \longrightarrow (X(w), Y(w))$$



$$R_{XY} = \{(X(w), Y(w)) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall w \in \Omega\}$$

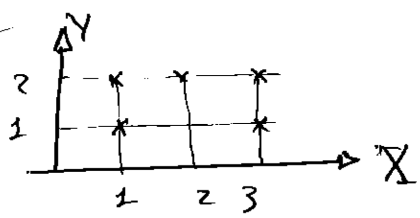
Recorrido conjunto de la v.a. bidimensional (X,Y)

2. V.A. discretas

su recorrido conjunto está formado por un conjunto finito o infinito numerable de puntos

se caracterizan: $P_i = P_{XY}(x_i, y_i) = P((X=x_i), (Y=y_i))$

Ej:



- $0 \leq P_{XY}(x_i, y_i) \leq 1$
- $\sum P_{XY}(x_i, y_i) = 1$
- $P(A) = \sum_{i \in A} P_{XY}(x_i, y_i)$

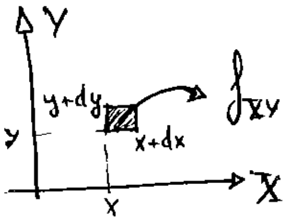
- La probabilidad conjunta da lugar a 2 probab. marginales
  - $P_X(x) = P(X=x) = \sum_{\forall y_i} P(X=x, Y=y_i)$
  - $P_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{\forall x_i} P(X=x_i, Y=y)$
- A partir del recorrido conjunto se pueden obtener los marginales pero no al revés.

No existen v.a. bidim. mixtas

3. V. A. continuas

su recorrido es un conjunto infinito no numerable de puntos de $\mathbb{R}^2$ y además su función de distribución conjunta es continua.

$$f_{XY}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P[x \le X \le x+\Delta x,\ y \le Y \le y+\Delta y]}{\Delta x\, \Delta y}$$



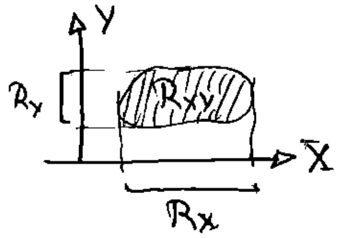
$f_{XY}(x,y)\, dxdy = P$ (v.a.(X,Y) tome valores en el rectángulo)

→ $f_{XY}(x,y) \geq 0$

→ $\iint_{R_{XY}} f_{XY}\, dxdy = 1$

→ $P(A) = \iint_A f_{XY}(x,y)\, dxdy$

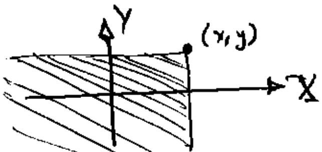
→ Podemos obtener las fdp marginales $f_X(x)$, $f_Y(y)$



$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x+\Delta x)}{\Delta x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dy$$

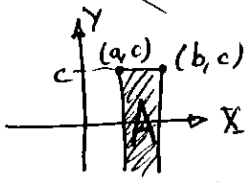
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx$$

Función de distribución conjunta: $F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$

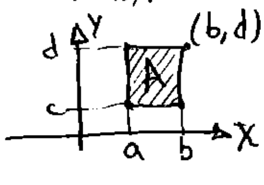


→ $0 \le F_{XY}(x,y) \le 1$

→ $F_{XY}(+\infty,+\infty) = 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$



$P(A) = F_{XY}(b,c) - F_{XY}(a,c)$



$P(A) = F_{XY}(b,d) - F_{XY}(a,d) - F_{XY}(b,c) + F(a,c)$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \, \partial y}$$

Funciones de distribución marginales:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F(x, +\infty)$$
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F(+\infty, y)$$

4. Distribuciones condicionales

V.A. Discreta

$$P_X(x/y) = P_X(x/Y=y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$
$$P_Y(y/x) = P_Y(y/X=x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)}$$

V.A. Continua

$$f_X(x/y) = f_X(x/Y=y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$
$$f_Y(y/x) = f_Y(y/X=x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

Teorema de la multiplicación (versión continua)

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x/y) \cdot f_Y(y) = f_Y(y/x) \cdot f_X(x)$$

Teorema de la probabilidad total (versión continua)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y/x) \cdot f_X(x) \, dx \qquad \text{(análogo para } x\text{)}$$

Teorema de Bayes (versión continua)

$$f_Y(y/x) = \frac{f_X(x/y) \cdot f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x/y) f_Y(y) \, dy}$$

5. Independencia

Dada una v.a. bidimensional (X, Y)

$$X \text{ e } Y \text{ independientes} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{discr.} \; P_X(x/y) = P_X(x) \;\; y \;\; P_Y(y/x) = P_Y(y) \\ \text{cont.} \; f_X(x/y) = f_X(x) \;\; y \;\; f_Y(y/x) = f_Y(y) \end{cases}$$

$$X \text{ e } Y \text{ independientes} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{discr.} \; P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y) \\ \text{cont.} \; f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \end{cases}$$

6. Función de variable aleatoria

Partimos de una v.a. bidimensional perfectamente caracterizada: (X, Y)
Obtendremos otra v.a. bidimensional la cual tenemos que caracterizar

Caso discreto:

v.a. bidim (X,Y) discreta $\longrightarrow$ v.a. bidim (Z,W) discreta

conocemos: $R_{XY} = \{(x_i, y_i)\}$, $P(x_i, y_i)$, $Z = Z(X,Y)$, $W = W(X,Y)$

buscamos caracterizar (Z, W) $\rightarrow$ $R_{ZW} = \text{Imagen}\{R_{XY}\} = \{(z_i, w_i)\}$

$\rightarrow$ $P_{ZW}(z_i, w_i) = P_{XY}\left((x_j, y_j) ;\; z_i = Z(x_j, y_j) \wedge w_i = W(x_j, y_j)\right)$

Caso continuo:

conocemos: R_{XY}, $f_{XY}(x,y)$, $Z = Z(X,Y)$, $W = W(X,Y)$

buscamos caracterizar (Z, W) $\rightarrow$ $R_{ZW} = \text{Imagen}\{R_{XY}\}$

$\downarrow$

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots$ las raíces reales de $\begin{cases} z = z(x,y) \\ w = w(x,y) \end{cases}$

$$f_{ZW} = \sum_{\forall (x_i, y_i)} \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{\left| \left| J\begin{pmatrix} z & w \\ x & y \end{pmatrix} \right| \right|_{(x_i, y_i)}} \quad ; \quad \left| J\begin{pmatrix} z\,w \\ x\,y \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \partial z/\partial x & \partial z/\partial y \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y \end{vmatrix}$$

⊛ caso particular del caso continuo:

sólo conocemos $Z = Z(X,Y)$ y no $W = W(X,Y)$

sólo podremos caracterizar Z:

$\rightarrow R_Z = \text{Imagen}\{R_{XY}\}$

1st way $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} Z = Z(X,Y) \\ \text{nos inventamos } W = X \end{array}\right\} f_{ZW}(z,w) \Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ZW}(z,w)\,dw$

2nd way $\rightarrow$ $Z = Z(X,Y)$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\underbrace{Z(X,Y) \leq z}_{A \subset R_{XY}}) = \iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$$

⊛⊛ caso sub particular

Dadas X e Y independientes, si nos definen $Z = X+Y$

Th. de la convolución

$$f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-\lambda)\cdot f_Y(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\lambda)\cdot f_Y(z-\lambda)\,d\lambda$$

Tema 4: Parámetros, Distribuciones importantes y Teoremas asintóticos

1. Esperanza matemática

$$E(X) = \overline{X} = \mu_X$$

$$E(X) = \begin{cases} \text{disc} & \sum_{\forall x_i} x_i \cdot P(X = x_i) \\ \text{cont} & \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx \end{cases}$$

Ej:

x_i	0	1
$P_X(x_i)$	$1/3$	$2/3$

$$E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Propiedades:

$E(aX + b) = a\,E(X) + b$; a, b = cte

$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

si X e Y independientes $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

si $Y = Y(X)$ entonces:

$$\hookrightarrow E(Y) = \begin{cases} \text{disc} & \sum_{\forall x_i} y(x_i)\, P(X = x_i) \\ \text{cont} & \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\, f_X(x)\, dx \end{cases}$$

si $Z = Z(X, Y)$ entonces:

$$\hookrightarrow E(Z) = \iint_{R_{XY}} z(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\,dy$$

2. Varianza

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Propiedades:

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

si X e Y independientes $\Rightarrow V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

Ej: X v.a. continua $f_X(x) = 3x^2$, $0 \leq x < 1$

a) $F_X(x)$?

b) $E(X^2)$?

c) Calcula el cuantil $0'8$ de X

d) $P(X < 0'8 / X > 0'2)$?

$f_X = 3x^2$, $R_X = [0, 1)$

a) sea $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = 0$

sea $x \in [0,1) \Rightarrow F_X(x) = \dots = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} 3x^2 dx = x^3$

sea $x \geq 1 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 3x^2\,dx + \int_{1}^{x} 0\,dx = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

b) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{0}^{1} x^2\, 3x^2\,dx = 3\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}$

c) cuantil $0'8$ $\equiv$ percentil 80%

$P(X \leq c) = 0'8 = F_X(c) = x^3\big|_{x=c} = c^3 \Rightarrow c = \sqrt[3]{0'8} = 0'928$

$P(X \leq c) = 0'8 = \int_{-\infty}^{c} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{c} 3x^2 dx = c^3 \Rightarrow c = \sqrt[3]{0'8} = 0'928$

d) $P(X<0'8 \mid X>0'2) = \dfrac{P((X<0'8)\cap(X>0'2))}{P(X>0'2)}$

$$P(0'2 < X < 0'8) = \int_{0'2}^{0'8} f_X(x)\,dx = \int_{0'2}^{0'8} 3x^2 dx = 0'8^3 - 0'2^3$$

$$P(X>0'2) = 1 - P(X \le 0'2) = 1 - F_X(0'2) = 1 - 0'2^3$$

$$P(X<0'8 / X>0'2) = \frac{0'8^3 - 0'2^3}{1-0'2^3} = 0'508$$

Ej: X e Y v.a.'s independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$

a) $E(X^2Y)$

b) $Var[X-4Y]$

c) $P(X>0'8,\ Y>0'5)$

d) $P(X^2<Y)$

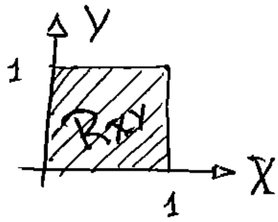
$X = U[0,1]$

$Y = U[0,1]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} = 1 & x\in(0,1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} = 1 & y\in(0,1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

me construyo la v.a. bidimensional (X,Y) ya que son indep.



$$f_{XY}(x,y) \underset{\text{por ser independ.}}{=} f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Área}} = 1, & (x,y)\in R_{XY} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

a) $$E(X^2\cdot Y) = \iint_{R_{XY}} x^2y\cdot f_{XY}(x,y)\,dxdy = \iint_{R_{XY}} x^2y\cdot 1\,dxdy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=1} x^2y\,dxdy = \int_{y=0}^{y=1} y\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 dy = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

También podríamos haber hecho: $E(X^2Y) \underset{\text{indep.}}{=} E(X^2)E(Y)$

b) $\underset{\overset{\uparrow}{\text{indep}}}{Var(X-4Y) =} V(X) + (-4)^2 V(Y)$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1\, dx - \left(\int_0^1 x \cdot 1\, dx\right)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

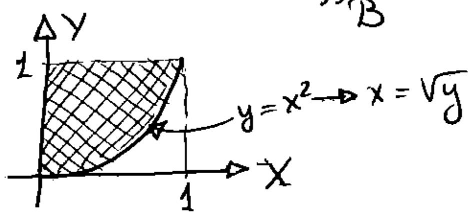
$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \dots\dots\dots\dots = \frac{1}{12}$$

$$Var(X-4Y) = \frac{1}{12} + 16\,\frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

c) $P(\underbrace{X > 0'8,\ Y > 0'5}_{A}) = \iint_A f_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$

$$= \int_{y=0'5}^{y=1} \int_{x=0'8}^{x=1} 1\, dx\, dy = x\Big|_{0'8}^{1} \cdot y\Big|_{0'5}^{1} = (1-0'8)(1-0'5) = 0'1$$

d) $P(X^2 < Y) = \iint_B f_{XY}\, dx\, dy = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} 1\, dx\, dy =$



$$= \int_0^1 x\Big|_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 y^{1/2}\, dy = \frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

3. Covarianza y coef. de correlación

Para v.a. bidimensional:

$$Cov(X,Y) = C_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

coeficiente de correlación:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propiedades:

1) $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
2) si X e Y independientes
3) $\rho^2 = 1 \iff Y = aX + b$

4. Momentos

Momento no centrado de orden "r" $\Rightarrow m_r = E(X^r)$

Momento centrado de orden "r" $\Rightarrow \mu_r = E\left[(X - E(X))^r\right]$

Para v.a.s bidimensionales: $m_{rs} = E(X^r \cdot Y^s)$

$$\mu_{rs} = E\left[(X-E(X))^r \cdot (Y-E(Y))^s\right]$$

5. Esperanza condicional

$$E(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x/y)\, dx$$

Ej: X: longitud de los tornillos
Y: diámetro de los tornillos

$E(X) = 3\,cm$, $E(X/_{y=2}) = 1'7\,cm$

Propiedades:

si X e Y independientes: $E(X/y) = E(X)$

si Y discreta: $E(X) = E(X/y_1)P(y_1) + \ldots + E(X/y_n)P(Y=y_n)$

6. Distribuciones importantes

→ Bernouilli:

$X = Be(p)$ $\quad P(X=1) = p$

$R_X = \{0, 1\}$ $\quad P(X=0) = 1-p = q$

$$E(X) = \sum_{\forall x_i} x_i P(X=x_i) = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p) = p\cdot q$$

→ Binomial:

$X = B(n,p)$ $\quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$R_X = \{0, 1, \dots k \dots, n\}$

$E(X) = n\cdot p$

$V(X) = n\cdot p\cdot(1-p) = n\cdot p\cdot q$

→ Poisson:

$X = \mathcal{P}(\lambda)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}^+$ $\quad P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

$R_X = \{0, 1, 2, \dots, k, \dots\}$

$E(X) = \lambda$

$V(X) = \lambda$

→ Uniforme:

$X = U(a,b) = U[a,b]$

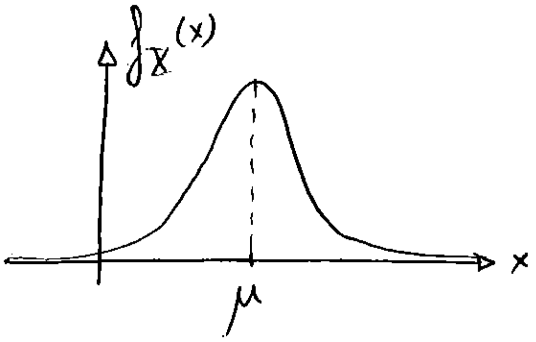
$R_X = (a,b)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7. Distribución normal (o Gaussiana)

$$X = N(\mu, \sigma) \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



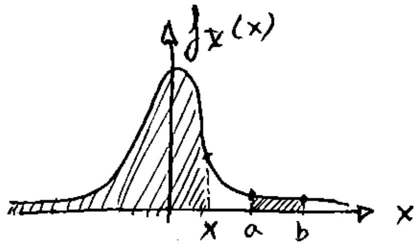
$\forall x \in (-\infty, +\infty)$

si $\sigma \downarrow$:

si $\sigma \uparrow$:

Caso particular: V.A. normal estándar $\equiv N(0,1)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty)$$



$$F_X(x) = P(x \leq X) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = G(x)$$

$$G(-a) = 1 - G(a)$$

mirar en las tablas

$$P(a \leq X \leq b) = G(b) - G(a)$$

! Existe una propiedad que nos permite reducir cualquier v.a. normal a la v.a. normal estándar

$$X = N(\mu_x, \sigma_x)$$

$\Downarrow$ tipificación

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_X} \Longrightarrow E(Z) = E\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} E(X - \mu_X) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_X}\left(E(X) - \mu_X\right) = \frac{\mu_X - \mu_X}{\sigma_X} = 0$$

$$Z = N(0,1)$$

$$V(Z) = V\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X^2} V(X - \mu_X) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_X^2} V(X) = \frac{1}{\sigma_X^2}\sigma_X^2 = 1$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{1} = 1$$

Ej: $X = N(5,2)$ $\qquad Z = N(0,1)$

$$P(4 \leq X \leq 5'4) = \{tipificando\} = P\left(\frac{4-5}{2} \leq \frac{X-5}{2} \leq \frac{5'4-5}{2}\right)$$

$$= P(-0'5 \leq Z \leq 0'2) = F_Z(0'2) - F_Z(-0'5) =$$

$$= F_Z(0'2) - [1 - F_Z(0'5)] = \{tabla\} = 0'5793 - (1 - 0'6915)$$

8. Propiedad reproductiva

Se verifica la propiedad reproductiva $\Leftrightarrow$ la suma de 2 o mas v.a.s de la misma naturaleza da lugar a una v.a. de misma naturaleza.

1) Binomiales: (en las siguientes condiciones):

$X_i = B(n_i, p)$ independientes

$$\sum_{\forall i} X_i = Y \Rightarrow Y = B(n, p) \; ; \; n = \sum_{\forall i} n_i$$

2) Poisson:

$X_i = \mathcal{P}(\lambda_i)$ independientes

$$Y = \sum_{\forall i} X_i \Rightarrow Y = \mathcal{P}(\lambda) \; ; \; \lambda = \sum_{\forall i} \lambda_i$$

3) Normales:

$X_i = N(\mu_i, \sigma_i)$ independientes

$$Y = \sum_{\forall i} X_i \Rightarrow Y = N(\mu, \sigma) \; ; \quad \mu = \sum_{\forall i} \mu_i \qquad \sigma^2 = \sum_{\forall i} \sigma_i^2$$

No hay más tipos de v.a. que cumplan esta propiedad

9. Teoremas asintóticos

→ T^{ma} de De Moivre - Laplace

Dada $X = B(n, p)$:

$$\text{si } \left.\begin{matrix} n \gg \\ p \ll \end{matrix}\right\} n \cdot p > 5 \Rightarrow X = N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q})$$

aproximación sólo válida para el cálculo de probabilidades de intervalos, nunca puntos.

→ T^{ma} del límite central

cuando tenemos una v.a. definida como la suma de muchas v.a.'s independientes

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ con n muy grande

$$Y = N(\mu_Y, \sigma_Y) \qquad \mu_Y = \sum_{\forall i} E(X_i)$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{\forall i} \sigma_{X_i}^2 = \sum_{\forall i} V(X_i)$$

Ej: $f(x) = x e^{-x}$ si $x > 0$ (0, resto)

a) $E(X)$?? $V(X)$??

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x \cdot x e^{-x}\, dx = \left\{ \begin{matrix} \text{por partes} \\ 2 \times \text{veces} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x^2, \; du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx, \; v = \int dv = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{matrix} \right\} = \cancel{x^2(-e^{-x})\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty 2x e^{-x} dx$$

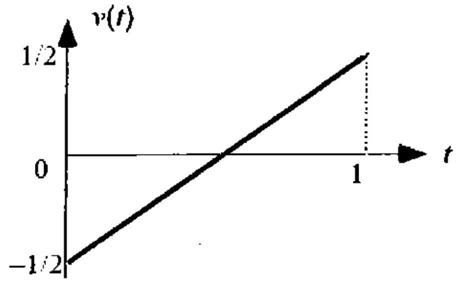
$$= 2\int_0^\infty x e^{-x} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, \; du = dx \\ dv = e^{-x} dx, \; v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} = 2\left[\cancel{-x e^{-x}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty e^{-x} dx \right] =$$

$$= 2\left[-e^{-x}\Big|_0^\infty \right] = 2\left(\cancel{\frac{-1}{e^\infty}}_{0} - \frac{-1}{e^0} \right) = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - 4 = 6 - 4 = 2$$

PROBLEMA 1

1. Sea el experimento consistente en generar la señal en rampa de la figura y obtener una medida $S=v(T)$ en un instante T aleatorio en el intervalo $(0,1)$.



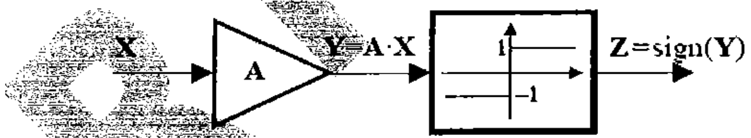
Seguidamente, la medida S se compara con un umbral u $(-1/2<u<1/2)$, obteniéndose la v.a. X definida como:

$$\mathbf{X}=\max(\mathbf{S},u)$$

a) Calcule $f_X(x)$, $F_X(x)$ y $E(\mathbf{X})$.
b) Suponga que ahora el umbral es una v.a. U uniforme en $(-1/2, 1/2)$ e independiente de T, de modo que $\mathbf{X}=\max(\mathbf{S},\mathbf{U})$. ¿Son las v.a.'s X y U independientes? Calcule $E(\mathbf{X})$.
c) Por último, suponga que se fija el umbral $u=0$, de modo que $\mathbf{X}=\max(\mathbf{S},0)$ y se repite el experimento hasta que se verifica dos veces el suceso $\{\mathbf{X}=0\}$. Calcule el número medio de ensayos independientes necesarios.

PROBLEMA 2

2. En el circuito de la figura, la tensión de entrada X y la atenuación A son desconocidas y se modelan como variables aleatorias independientes, siendo X uniforme en $(-1,1)$ y A uniforme en $(0,1)$.



Calcule:
a) La fdp de la v.a. Y.
b) La covarianza de X y Z.
c) Las FD's condicionadas $F_A(a\,|\,\mathbf{Z}=-1)$ y $F_A(a\,|\,\mathbf{Z}=+1)$.

PROBLEMA 3

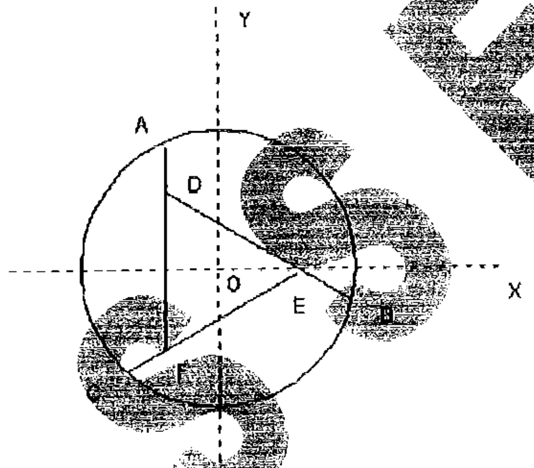
3. Sea un sistema de comunicaciones con un ancho de banda limitado a C unidades y un usuario que solicita X unidades del mismo. El sistema tiene ya ocupadas Y unidades (independiente de X) y el gestor de asignación de ancho de banda asigna $\mathbf{Z}=g(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ unidades. Si X es una v.a. uniforme en el intervalo $0<x<B$ $(B>C)$ e Y una v.a. uniforme en el intervalo $0<y<C$, se pide:
a) El ancho de banda del sistema, C, para que $P\{\mathbf{X}>C\}<1\%$.
b) El ancho de banda del sistema, C, para que $P\{\mathbf{X}+\mathbf{Y}>C\}<1\%$.
c) Si $g(x,y)=\begin{cases} x, & 0<x<C-y \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$, la relación entre C y B, para que las v.a.'s X y Z sean incorreladas

PROBLEMA 4

4. Las coordenadas **X** e **Y** de un objetivo aparecen uniformemente distribuidas en una pantalla radar circular de radio r, centrada en el origen de coordenadas. Esta pantalla se divide en 4 zonas de igual superficie como se ilustra en la figura. Si se definen los sucesos A, B y C como:

   A={el objetivo aparece en la zona delimitada por el contorno ABEFDA}.
   B={el objetivo aparece en la zona delimitada por el contorno BCFDEB}.
   C={ el objetivo aparece en la zona delimitada por el contorno CADEFC}.

   a) Determinar si los sucesos A y B son independientes. También decidir si los sucesos A. B y C son independientes.
   b) Calcular el coeficiente de correlación de las v.a.'s **X** e **Y**. Decidir si son incorreladas y si son independientes.
   c) Calcular la fdp condicionada $f_Y(y|x)$ e identificar qué tipo de distribución es.



PROBLEMA 5

5. Un centro de comunicaciones dispone de N nodos de encaminamiento. Sea $\mathbf{X}_i$ el número de comunicaciones que llegan al nodo i-ésimo durante un determinado periodo de tiempo. Supongamos que la va $\mathbf{X}_i$ sigue una distribución de Poisson de parámetro $a_i>0$, y supongamos también que las va $\mathbf{X}_i$ son independientes entre sí. En cada nodo, las comunicaciones pueden encaminarse (con probabilidad p) o perderse (con probabilidad $1-p$). Sea $\mathbf{Y}_i$ la va que nos indica el número de comunicaciones encaminadas (por el nodo i-ésimo en dicho periodo de tiempo).

   a) Para $N=2$, caracterice la va **Z** (número de comunicaciones que llegan al sistema durante un determinado periodo de tiempo). ¿Sigue la va **Z** una distribución de Poisson?
   b) Calcule la probabilidad de que el número de comunicaciones que llegan al sistema esté entre 980 y 1000 para $N=100$ y $a_i=10$.
   c) Caracterice la distribución condicional $(\mathbf{Y}_i|\mathbf{X}_i=r)$.

PROBLEMA 6

6. Se definen las va's **V** y **W** como:

$$\mathbf{V}=\mathbf{X}+a\mathbf{Y}$$
$$\mathbf{W}=\mathbf{X}-a\mathbf{Y}$$

donde a es un número real y **X** e **Y** son va´s Gaussianas.

a) Determinar a en función de momentos de **X** e **Y** para que **V** y **W** sean ortogonales.
b) Determinar a en función de momentos de **X** e **Y** para que **V** y **W** sean incorreladas. Decidir también si para ese valor de a son **V** y **W** independientes.

Ahora suponga que **X** e **Y** son va´s definidas según la fdp siguiente:

$$f_{xy}(x,y)=bxy^2\exp(-2xy)u(x-2)u(y-1)$$

c) Determinar el número real b para que sea una verdadera fdp.
d) Determinar si **X** e **Y** son va's independientes.
e) Para a=1, encontrar la fdp conjunta de **V** y **W** (no olvide determinar el rango de la va bidimensional). ¿Son **V** y **W** independientes?

PROBLEMA 7

7. En el circuito de la figura, las tensiones de entrada **X** e **Y** son desconocidas y se modelan como variables aleatorias independientes.

a) Suponiendo **X** uniforme en (0.1) e **Y** uniforme en (0, 0.5), calcular la f.d.p. de la v.a. **Z**.
b) Calcular el coeficiente de correlación entre **X** y **Z**.
c) Suponiendo ahora que **Y** es una v.a. de Bernouilli de parámetro p, hallar el rango de la v.a bidimensional (**X**, **Z**).
d) Con **Y** como v.a. de Bernouilli, calcular la F.D. condicionada $F_Z(z|\mathbf{Y}=+1)$ y la f.d.p. condicionada $f_Z(z|x)$.
e) Si las v.a's **X** e **Y** son conjuntamente Gaussianas independientes, determinar si es posible que **W** y **X** sean independientes.

PROBLEMA 8

8. Sean **R** y **Φ** dos va's independientes. **Φ** es uniforme en $(0, 2\pi)$ y **R** tiene una fdp:

$$f_R(r)=\frac{2r}{A^2},\ r\in(0,A)$$

Siendo A>0 una constante. Sobre ellas se realizan las transformaciones:

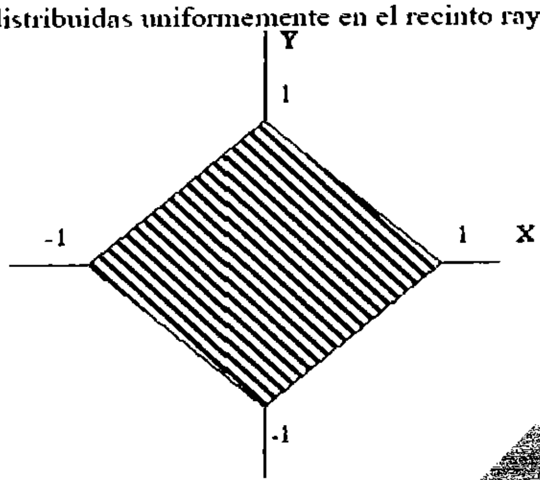
$$\mathbf{X}=\mathbf{R}\cos(\mathbf{\Phi})$$
$$\mathbf{Y}=\mathbf{R}\,\mathrm{sen}(\mathbf{\Phi})$$

Calcule:

a) La fdp conjunta de **X** e **Y**. Dibuje su rango.
b) Las fdp's marginales de **X** e **Y**. ¿Son independientes?
c) La covarianza de **X** e **Y**. ¿Están incorreladas?
d) $P(\mathbf{X}^2+\ \mathbf{Y}^2>A^2/4)$
e) $P\left(\mathbf{Y}>\frac{A}{\sqrt{2}}\middle|\mathbf{X}=\frac{A}{\sqrt{2}}\right)$

PROBLEMA 9

9. Sean las va's **X** e **Y** distribuidas uniformemente en el recinto rayado de la figura.

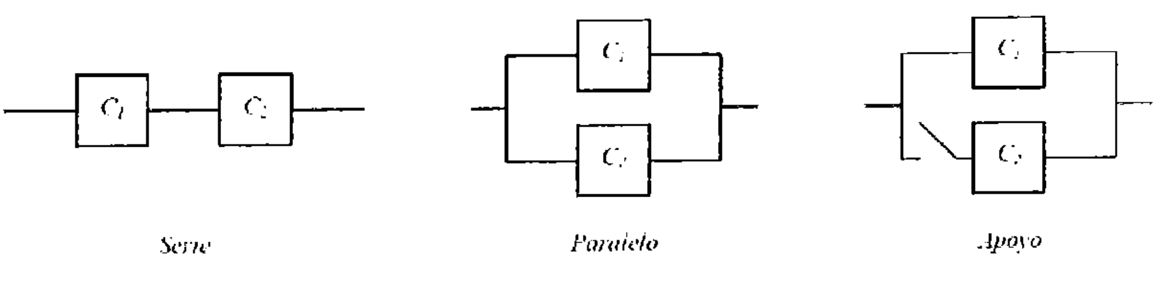


a) Determine y dibuje la fdp $f_x(x)$ y la condicionada $f_x(x|y)$, no olvide indicar sus rangos.
b) Determine el coeficiente de correlación entre **X** e **Y**. ¿Son las va's **X** e **Y** independientes?
c) Se define la va **V= X+Y**, determine su FD.
d) Se define otra va **W= X-Y**, determine la fdp conjunta $f_{vw}(v,w)$. ¿Son las va's **V** y **W** independientes?
e) Si las va's **X** e **Y** fueran incorreladas y conjuntamente gaussianas, determinar qué se tiene que cumplir para que sean independientes las va's **V** y **W**.

PROBLEMA 10

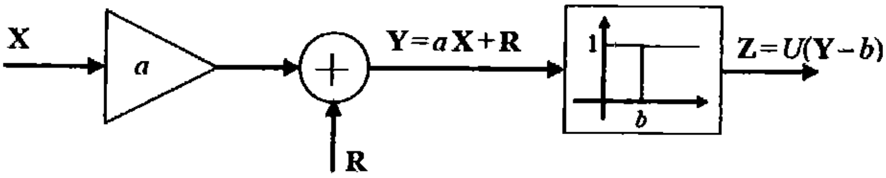
10. Las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ representan los tiempos de operación de los componentes C_1 y C_2 respectivamente. Estas va's se consideran independientes, con fdp's $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y con FD's $F_1(t)$ y $F_2(t)$. Los 2 componentes se pueden conectar de los 3 modos representados en la figura para formar un sistema: conexión serie (el sistema falla cuando uno de los 2 componentes falla), conexión paralelo (el sistema falla cuando ambos componentes fallan) y conexión de apoyo (el segundo componente empieza a funcionar cuando falla el primero y, por tanto, el sistema falla cuando falla el segundo componente). Llamaremos **X**, **Y** y **Z** al tiempo de operación del sistema en las respectivas conexiones anteriormente citadas.

a) Exprese la va **X** en función de las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ y calcule su fdp.
b) Exprese la va **Y** en función de las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ y calcule $P(\mathbf{Y}>N)$, siendo N una constante positiva y suponiendo que las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son geométricas de parámetro p=0.1. Particularice el resultado para N=2.
c) Exprese la va **Z** en función de las va's $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ y calcule su fdp suponiendo que $\mathbf{T}_1$ es discreta con $P(\mathbf{T}_1=1)=p$ y $P(\mathbf{T}_1=0)=1-p$ y $\mathbf{T}_2$ exponencial de parámetro $c>0$.
d) Para las condiciones del apartado anterior, calcule la varianza de **Z** y la covarianza entre **Z** y $\mathbf{T}_2$.
e) Si se utiliza una conexión de apoyo con 1000 componentes y los tiempos de operación se modelan según la distribución de Poisson con a=10, calcule $P(10000 \leq \mathbf{Z} \leq 10100)$.



PROBLEMA 11

11. Un determinado sistema de comunicaciones responde al modelo de la figura:



donde el transmisor envía un símbolo binario (bit) que se puede modelar mediante una v.a. de Bernouilli **X**, con $P(\mathbf{X}=1)=P(\mathbf{X}=0)$. Dicho símbolo **X**, al pasar por el canal de comunicaciones, sufre una atenuación constante a y una adición de ruido **R**, que supondremos una v.a. $N(0,1)$ independiente de **X**. Finalmente el receptor compara la salida del canal **Y** con un umbral b, produciendo como resultado una v.a. **Z** que toma el valor 1 si **Y** supera el umbral ó 0 en caso contrario. Suponiendo $a=2$ y $b=1$, calcule:

a) Las fdps condicionadas $f_Y(y|\mathbf{X}=0)$, $f_Y(y|\mathbf{X}=1)$ y la fdp de la v.a. **Y**, $f_Y(y)$.
b) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{Z}=1|\mathbf{X}=0)$ y $P(\mathbf{Z}=0|\mathbf{X}=1)$.
c) La covarianza de **X** y **Z**.
d) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{X}=1|\mathbf{Z}=1)$ y $P(\mathbf{X}=0|\mathbf{Z}=0)$.
e) Suponga ahora que el canal introduce una atenuación *aleatoria*, de forma que la señal de entrada al receptor es:

$$\mathbf{Y}=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{R}$$

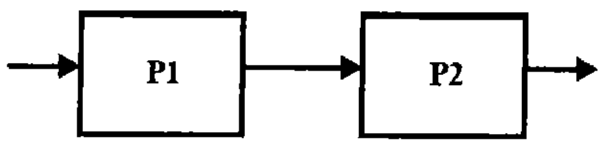
siendo **A** una v.a. $N(2,1)$ independiente de **X** y **R**.
Calcule $P(\mathbf{Z}=1|\mathbf{X}=0)$ y $P(\mathbf{Z}=0|\mathbf{X}=1)$ suponiendo $b=1$.

PROBLEMA 12

12. Un proceso informático pasa por dos procesadores P1 y P2 según se muestra en la figura. La va **X** representa el tiempo que pasa el proceso en el primer procesador, y la va **Y** representa el tiempo total que requiere el proceso en pasar por los dos procesadores. Se conoce la fdp conjunta:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} k\,e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & resto \end{cases}$$

a) Dibuje el rango de la va bidimensional y calcule el valor de k. Determine si las va's **X** e **Y** son independientes.
b) Se define una nueva va **Z** como el tiempo que tarda el proceso en el segundo procesador. Exprese la va **Z** en función de las va's **X** e **Y** y determine si las va's **X** y **Z** son independientes.
c) Calcule la varianza de **Z** y la covarianza entre **Z** e **Y**.
d) Calcule $f_Y(y|x)$ y dibújela para $x=5$.
e) Si el proceso atravesara 100 procesadores P1, P2... P100 y el tiempo en cada uno de ellos se modelara como una va exponencial de media 10 seg. calcule la probabilidad que el proceso termine antes de 15 *min*. Suponiendo que las va's son independientes.



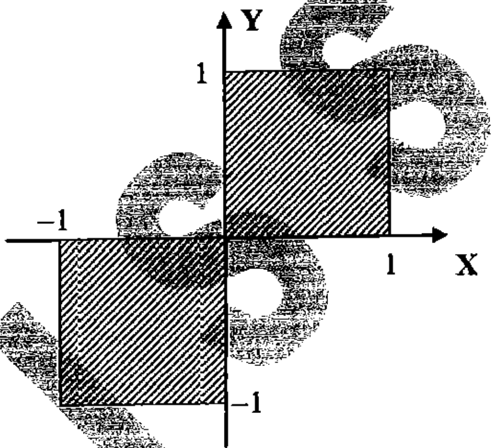
PROBLEMA 13

13. Sea **X** una v.a. de Bernoulli de parámetro p=0.5 y sean $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$ dos v.a.'s $N(\mu,\sigma)$ y $N(-\mu,\sigma)$ respectivamente (**X**, $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$ son independientes entre sí). Se forma la nueva v.a. $\mathbf{Z}=\mathbf{X}\,\mathbf{Y}_1+(1-\mathbf{X})\,\mathbf{Y}_2$.

a) Calcule la media y varianza de **Z**.
b) Calcule y dibuje la fdp de **Z**.
c) Calcule la $P(\mathbf{Z}<-\mu)$ cuando $\mu=\sigma$.
d) Sobre la v.a. **Z** se aplica un comparador de umbral μ, de tal manera que la v.a. de salida es $\mathbf{V}=u(\mathbf{Z}-\mu)$ ($u(.)$ es la función escalón unidad). Caracterice la v.a. **V** y particularice el resultado para $\mu=\sigma$.
e) Suponga ahora que se obtienen 5 v.a.'s ($\mathbf{Z}_1$, …, $\mathbf{Z}_5$) cada una de ellas con la distribución descrita anteriormente e independientes entre sí. Obtenga la probabilidad de que al menos 2 superen el umbral μ y particularice el resultado para $\mu=\sigma$.

PROBLEMA 14

14. Sea la v.a. bidimensional (**X**, **Y**) con distribución uniforme en el recinto de la figura:



Se pide:

a) Las fdp's marginales de las va's **X** e **Y**. ¿Son independientes?
b) La covarianza de **X** e **Y**. ¿Son incorreladas?
c) La media condicionada $E(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{Y}=y)$.
d) Se define la v.a. $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$. Obtenga la fdp conjunta de **X** y **Z**, representando gráficamente el rango o recorrido de la v.a. bidimensional (**X**, **Z**).
e) Sea la v.a. $\mathbf{W}=\mathbf{X}-a\,\mathbf{Y}$. Determine el valor de la constante a que hace que la varianza de **W** sea mínima.

PROBLEMA 15

15. Sea (**X**,**Y**) un punto escogido completamente al azar (distribución bidimensional uniforme) en el círculo $x^2+y^2<a^2$. Calcule:

a) Las fdps marginales de **X** e **Y**.
b) La fdp condicionada $f_X(x\,|\,y)$. Determine si pertenece a algún tipo conocido.
c) La FD de la v.a. **R** = "distancia del punto (**X**,**Y**) al origen de coordenadas".
d) Se realiza la transformación: $\mathbf{R}=(\mathbf{X}^2+\mathbf{Y}^2)^{1/2}$, $\mathbf{\Theta}=\mathrm{arctg}(\mathbf{Y}/\mathbf{X})$. Calcule la fdp conjunta de **R** y **Θ** (no olvide indicar el rango o recorrido de la v.a. bidimensional).
e) Verifique si **R** y **Θ** son independientes.

PROBLEMA 16

16. Sea la va bidimensional (**X**, **Y**) con fdp conjunta:

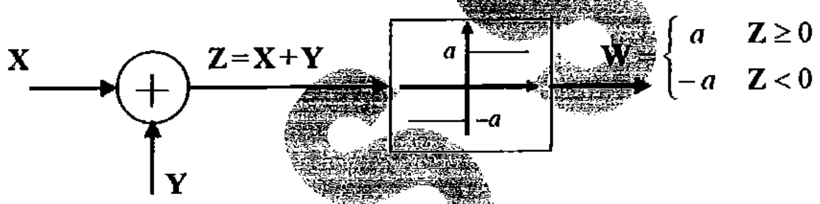
$$f_{XY}(x,y) = \frac{k}{x^2 y^2}; x > 1, y > 1$$

Se realizan las transformaciones $\mathbf{U} = \mathbf{XY}$, $\mathbf{V} = \mathbf{X/Y}$. Calcule:

a) El valor de k y las fdp's marginales de **X** e **Y**, ¿son independientes?
b) $P[\min(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \leq 2]$.
c) La fdp conjunta de (**U**, **V**) y dibuje su rango en el plano (u, v).
d) Las fdp's marginales de **U** y **V**, ¿son independientes?
e) La FD de la va **V**.

PROBLEMA 17

17. En el esquema adjunto, **X** representa una v.a. discreta, con $P(\mathbf{X}=-1)=P(\mathbf{X}=+1)=1/2$, a la que se suma una v.a. **Y** con distribución $N(0,1)$ e independiente de **X**. A la v.a resultante, **Z**, se le aplica la transformación de la figura, dando como resultado una nueva v.a. **W** que toma los valores a ó $-a$, según sea el signo de **Z**.



Se pide:

a) La fdp de la v.a. **Z**. Represéntela gráficamente de forma aproximada.
b) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{W}=-a\,|\,\mathbf{X}=-1)$ y $P(\mathbf{W}=a\,|\,\mathbf{X}=1)$.
c) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{X}=-1\,|\,\mathbf{W}=-a)$ y $P(\mathbf{X}=1\,|\,\mathbf{W}=a)$.
d) La covarianza de **X** y **W**.
e) El valor de la constante a que minimiza $\varepsilon=E[(\mathbf{W}-\mathbf{X})^2]$.

PROBLEMA 18

18. Sean dos v.a's **X**, **Y** Gaussianas, independientes, de media nula y varianza unidad. Se definen las v.a's **Z**=**X**/**Y** y **W**=**Y**. Se pide:

a) La fdp conjunta de **Z** y **W** (indique su rango).
b) La fdp y la FD de **Z**.

Se definen ahora dos v.a's **U**, **V** independientes, con fdp idéntica (Gaussiana truncada):

$$f_U(u) = \begin{cases} k f_X(u) & u \in (-2.2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_V(v) = \begin{cases} k f_X(v) & v \in (-2.2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

siendo k una constante y $f_X(x)$ la fdp de la v.a. **X**.

c) Determinar la fdp conjunta de la v.a. bidimensional (**U**,**V**).
d) Obtener la media de la v.a. **S**=**U**/**V**.
e) Calcular la fdp condicionada $f_S(s\,|\,\mathbf{V}=v)$.

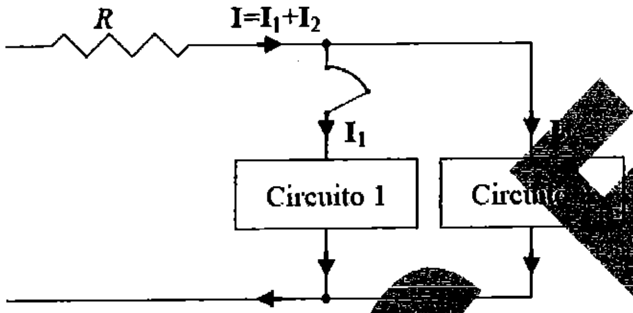
PROBLEMA 19

19. En el esquema de la figura, una resistencia R de valor conocido es atravesada por una corriente **I**, modelada como una v.a. que es suma de dos componentes:

- $\mathbf{I}_1$ toma valor 0 si el interruptor está abierto o α (siendo $\alpha>0$) si está cerrado. El estado del interruptor (abierto/cerrado) es desconocido, pero se sabe que la probabilidad de que esté cerrado es p.
- $\mathbf{I}_2$ es una v.a. exponencial de parámetro c e independiente de $\mathbf{I}_1$.

Se definen las siguientes v.a.'s:

- Caída de tensión en la resistencia R: $\mathbf{V}=\mathbf{I}R$
- Potencia disipada en la resistencia R: $\mathbf{W}=\mathbf{I}^2 R$



Se pide:

a) La fdp de la v.a. **V**, suponiendo que el interruptor está cerrado. Represéntela gráficamente de forma aproximada.

b) La fdp de la v.a. **V**. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\,dv=1$.

c) La covarianza de las v.a.'s **V** e **I**.

d) La media de la v.a. **W**.

e) La probabilidad de que **W** exceda un valor β (siendo $\beta\geq\alpha^2 R$). Particularice para los siguientes valores: $\beta=1$, $R=100$, $\alpha=0.1$, $p=0.5$ y $c=1$.

PROBLEMA 20

20. Sean **X** e **Y** dos v.a.'s uniformes en $(0,1)$ e independientes, a partir de las cuales se definen otras dos v.a.'s **V** y **W**, siendo: $\mathbf{V}=e^{\mathbf{X}}$, $\mathbf{W}=e^{\mathbf{Y}}$. Se pide:

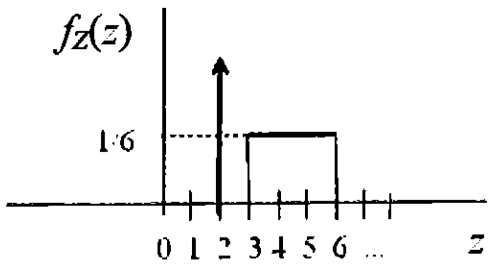
a) La fdp conjunta $f_{VW}(v,w)$ (no olvide el rango o recorrido).

b) Las fdps marginal $f_V(v)$ y condicionada $f_V(v|\mathbf{W}=w)$. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)dv=1$.

c) $E(\mathbf{VW})$, $E(\mathbf{V})$ y covarianza de **V** y **W**.

d) $P(\mathbf{W}>\mathbf{V}e^{3/4})$.

e) Encuentre una transformación $g(\cdot)$ de forma que la v.a. $\mathbf{Z}=g(\mathbf{X})$ tenga la fdp de la figura.



PROBLEMA 21

21. Sean **X** e **Y** dos v.a.'s uniformes en $(-1,3)$ e independientes. A partir de ellas se definen otras dos v.a.'s **U** y **V**, siendo: $\mathbf{U}=(\mathbf{X}+\mathbf{Y})/2$, $\mathbf{V}=(\mathbf{X}-\mathbf{Y})/2$.

a) Determine la fdp conjunta $f_{UV}(u,v)$ (dibuje el rango o recorrido).
b) Determine las fdps marginales $f_U(u)$ y $f_V(v)$.
c) Determine las FDs marginales $F_U(u)$ y $F_V(v)$.
d) ¿Son las v.a.'s **U** y **V** ortogonales? ¿Están incorreladas?
e) Demuestre que $P(\mathbf{U}\,\mathbf{V}<0)=P(|\mathbf{X}|<|\mathbf{Y}|)$ y calcule dicha probabilidad.

PROBLEMA 22

22. Sea la v.a. **X**, gaussiana truncada con fdp $f_X(x)=k\,e^{-x^2/2}$, $-a\le x\le a$, $a>0$. Se pide:

a) Obtener el valor de k.
b) Calcular la media de la v.a. $|\mathbf{X}|$.

Se tiene también la v.a. **Y** normal estándar independiente de **X** y se define la v.a. **Z=X/Y**.

c) Determinar la fdp de la v.a. bidimensional **(Z,Y)**. No olvide indicar su rango.
d) Determinar la fdp de la v.a. **Z**.
e) Calcular la $P(\mathbf{Z}<1)$ cuando la constante a tiende a infinito.

PROBLEMA 23

23. Sean **X** e **Y** v.a.'s uniformes en $(0,1)$ e independientes. Se forman las v.a.'s:

$$\mathbf{U}=\begin{cases}1, & \text{si } \mathbf{X}+\mathbf{Y}\le 1\\ 0, & \text{si } \mathbf{X}+\mathbf{Y}>1\end{cases}\qquad \mathbf{V}=\begin{cases}1, & \text{si } \mathbf{X}^2+\mathbf{Y}^2\le 1\\ 0, & \text{si } \mathbf{X}^2+\mathbf{Y}^2>1\end{cases}$$

Calcule:

a) Las medias y varianzas de **U** y **V**.
b) Las probabilidades condicionadas $P(\mathbf{U}=1\,|\,\mathbf{V}=1)$, $P(\mathbf{V}=1\,|\,\mathbf{U}=1)$.

Se definen ahora las v.a.'s $\mathbf{Z}=\sqrt{\mathbf{XY}}$, $\mathbf{W}=\sqrt{\mathbf{X}/\mathbf{Y}}$. Calcule:

c) La covarianza de **Z** y **W**.
d) Las fdps marginales de **Z** y **W**.
e) Las medias condicionadas $E(\mathbf{W}\,|\,\mathbf{X}=x)$, $E(\mathbf{W}\,|\,\mathbf{Z}=z)$.

PROBLEMA 24

24. Sea **U** una va continua, con fdp $f_U(u)$, media η_U y varianza σ_U^2.

a) Se define una nueva va $\mathbf{V}=2\,\mathbf{U}$. Determine su fdp, media y varianza.

Considere ahora la va $\mathbf{Z}=(1+\mathbf{Y})\mathbf{X}_1+(1-\mathbf{Y})\mathbf{X}_2$, donde:

Y es una va discreta con $P(\mathbf{Y}=-1)=P(\mathbf{Y}=1)=1/2$.

$\mathbf{X}_1$ es una va Rayleigh, con fdp $f_1(x)=x e^{-x^2/2}u(x)$, siendo $u(x)$ el escalón unidad.

$\mathbf{X}_2$ es una va $N(\mu,\sigma)$, con $\mu<0$.

Y, $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son independientes entre sí.

Calcule:

b) La fdp de **Z**. Dibújela de forma aproximada.
c) La covarianza de **Z** y $\mathbf{X}_2$.
d) La $P(\mathbf{Z}>2\mu)$.
e) La media condicionada $E(\mathbf{Z}\,|\,\mathbf{X}_2=x_2)$.

PROBLEMA 25 (18 Enero 2012 - Final)

1.- Sea **X** una v.a. uniforme en (0,1). Se define la v.a. **Y**=g(**X**), siendo:

$$g(x) = \begin{cases} x/a & \text{si } x \le a \\ a/x & \text{si } x > a \end{cases}$$

donde a es una constante que verifica la condición $0<a<1$. Calcule:

a) La fdp de la v.a. **Y**. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = 1$.

b) $E(\mathbf{Y}^2)$.

Se define ahora la v.a. **Z**=h(**X**), siendo:

$$h(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x \le a \\ 3/4 & \text{si } x > a \end{cases}$$

con a la misma constante de los apartados anteriores. Calcule:

c) $E(\mathbf{YZ})$.

d) El valor de la constante a que minimiza $E[(\mathbf{X}-\mathbf{Z})^2]$.

PROBLEMA 26 (18 Enero 2012 - Final)

2.- Sea **X** una v.a. de Bernouilli de parámetro p y sean $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$ dos v.a.'s $N(\mu, \sigma)$ y $N(-\mu, \sigma)$, respectivamente. **X**, $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$ son independientes. Se forma la v.a. $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{Y}_1 + (1-\mathbf{X})\mathbf{Y}_2$.

Calcule:

a) La media y varianza de **Z**.

b) La fdp de **Z**.

c) $P(\mathbf{Z}<-\mu)$.

d) La covarianza de **X** y **Z**.

Datos:

X es v.a. $N(\mu,\sigma) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, $F_X(x) = \mathrm{G}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $E(\mathbf{X}) = \mu$, $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = \sigma^2$

$$\mathrm{G}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

PROBLEMA 27 (11 Octubre 2011 – Primer Parcial)

Sea **X** una v.a. con fdp (exponencial):

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} U(x)$$

siendo $\lambda>0$ y $U(\cdot)$ la función escalón unidad. Calcule:

a) La función de probabilidad de la v.a. **Y**=g(**X**), siendo $g(\cdot)$ la función "parte entera": $g(x)=k$ ($k \in \mathbb{Z}$) si y sólo si $k \le x < k+1$. Compruebe que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\mathbf{Y}=k) = 1$.

b) La media de la v.a. **Y**.

c) La fdp de la v.a. $\mathbf{Z} = +\sqrt{|\mathbf{X}|}$ (no olvide su rango o recorrido).

d) $P\left(\mathbf{Z} > 1/\sqrt{\lambda}\right)$.

PROBLEMA 28 (28 Noviembre 2011 – Segundo Parcial)

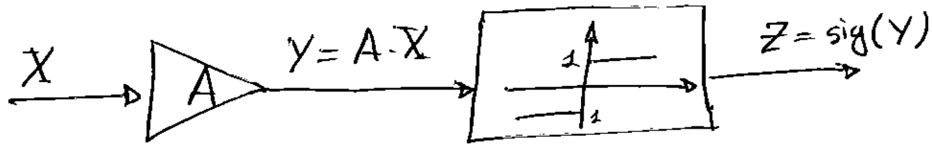
La función de probabilidad conjunta de una v.a. bidimensional **(X,Y)** viene dado por:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = k(x_i^2 + y_j) \quad x_i = 1,2,3 \;\; y_j = 1,2$$

Calcule:

a) El valor de k.
b) Las funciones de probabilidad marginales. ¿Son independientes las v.a's **X. Y**?
c) La función de probabilidad condicional de **Y** dada **X**:
$P(Y = y_j \mid X = x_i) \quad x_i = 1,2,3 \quad y_j = 1,2$
d) La media condicional de **Y** dado $x_i = 2$.
e) Caracterizar la v.a. **U**=max(**X. Y**).

Problema 2

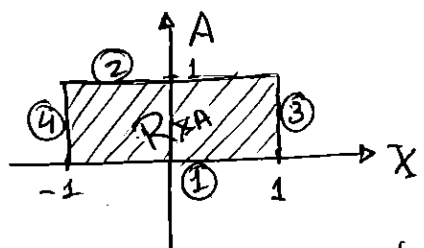


$$X = U[-1,1] \Rightarrow R_X = [-1,1] \,,\; f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in R_X \\ 0 & \text{si resto} \end{cases}$$

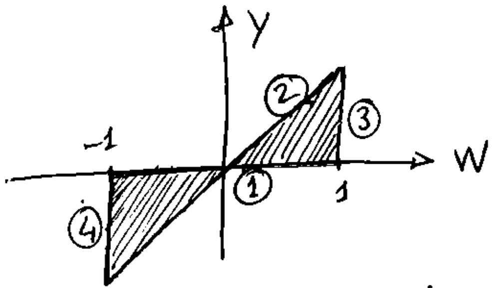
$$A = U[0,1] \Rightarrow R_A = [0,1] \,,\; f_A(a) = \begin{cases} 1/1 & \text{si } a \in R_A \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) fdp de $Y \equiv f_Y(y)$??

$$(X, A) \xrightarrow[W=X]{} \begin{cases} Y = AX \\ W = X \end{cases} (W, Y)$$



$Y = AX$
$W = X$
$\Longrightarrow$



① $\begin{cases} -1 \le X \le 1 \\ A = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -1 \le W \le 1 \\ Y = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} -1 \le X \le 1 \\ A = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -1 \le W \le 1 \\ Y = 1 \cdot W \end{cases}$

③ $\begin{cases} X = 1 \\ 0 \le A \le 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} W = 1 \\ Y = A \cdot 1 \Leftrightarrow 0 \le Y \le 1 \end{cases}$

④ $\begin{cases} X = -1 \\ 0 \le A \le 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} W = -1 \\ Y = A(-1) \Leftrightarrow -1 \le Y \le 0 \end{cases}$

para elegir la región interior o exterior, probamos a transformar un punto y ver si cae en la región externa o interna.

$$f_{WY}(w,y) = \sum_{\forall (x_i, a_i)} \frac{f_{XA}(x_i, a_i)}{\left\| J\begin{pmatrix} w & y \\ x & a \end{pmatrix} \right\|_{(x_i, a_i)}}$$

$$\left| J\begin{pmatrix} w & y \\ x & a \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial a} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & x \end{vmatrix} = x - a \cdot 0 = x \xrightarrow{\|\cdot\|} |x| \rightarrow |w|$$

Raices $\begin{cases} y = ax \\ w = x \Rightarrow x_i = w \end{cases} \Longrightarrow y = aw \Rightarrow a_i = y/w$

$\text{Raiz}(x_i, a_i) = (w, y/w)$

$$f_{XA}(x,a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep.}}}{=} f_X(x) \cdot f_A(a) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{XA}(x_i,a_i) = \frac{1}{2}$$

$$f_{WY}(w,y) = \sum_{\forall (x_i,a_i)} \frac{f_{XA}(x_i,a_i)}{\left\| J\begin{pmatrix} w & y \\ x & a \end{pmatrix} \right\|_{(x_i,a_i)}} = \frac{1/2}{|w|} = \frac{1}{2|w|}$$

$$f_{WY}(w,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\cdot|w|} & \text{si } (w,y) \in R_{WY} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{R_{W/Y}} f_{WY}(w,y)\, dw = \begin{cases} \text{si } -1 \leq y \leq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{w=-1}^{w=y} \frac{1}{2|w|}\, dw \\ \text{si } 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{w=y}^{w=1} \frac{1}{2|w|}\, dw \end{cases}$$

$$\to \int_{w=-1}^{w=y} \frac{1}{2|w|}\, dw = \int_{w=-1}^{w=y} \frac{dw}{-2w} = \frac{-1}{2} \ln(w) \Big|_{-1}^{y} = \frac{-1}{2}\left(\ln(|y|) - \ln(|-1|)\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\ln(|y|) - \underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{0}\right) = \frac{-1}{2}\ln(|y|)$$

$$\to \int_{w=y}^{w=1} \frac{1}{2|w|}\, dw = \int_{y}^{1} \frac{1}{2w}\, dw = \frac{1}{2} \ln(w) \Big|_{y}^{1} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cancel{\ln(|1|)}}_{0} - \ln(|y|)\right)$$

$$= \frac{-1}{2} \ln(|y|)$$

$$f_Y(y) = \frac{-1}{2} \ln(|y|), \quad -1 \leq y \leq 1$$

---

b) covarianza de X y Z $\equiv$ $Cov(X,Z)$?

$$Cov(X,Z) = E(X \cdot Z) - E(X)E(Z)$$

$$E(X) = \int_{R_X} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}\, dx = 0$$

$$E(X \cdot Z) = E(X \cdot sig(Y)) = E(X \cdot sig(A \cdot X)) = E(X \cdot sig(X))$$

$$= \iint \underbrace{x \cdot sig(x)}_{\begin{cases} -x \cdot (-1) \\ x \cdot (1) \end{cases}} \cdot f_{XA}\, dx\, da = \iint_{R_{XA}} x \cdot f_{XA}\, dx\, da$$

$$= \iint_{R_{XA}} x \cdot \frac{1}{2} 1 \, dx\,da = 2\int_{x=0}^{x=1}\int_{a=0}^{a=1} x\,\frac{1}{2}\,da\,dx = 2\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$Cov(X,Z) = \frac{1}{2} - 0 \cdot E(Z) = \frac{1}{2}$$

c) Las FD's condicionadas $\begin{cases} F_A(a \mid Z=-1) \\ F_A(a \mid Z=+1) \end{cases}$

$$F_A(a \mid Z=-1) = P(A \le a / Z=-1) = \frac{P((A\le a)\cap(Z=-1))}{P(Z=-1)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} Z=-1 \Leftrightarrow sig(Y)=-1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow sig(XA)=-1 \Leftrightarrow sig(X)=-1 \\ \Leftrightarrow -1\le X \le 0 \end{array} \right\} = \frac{P((A\le a)\cap(-1\le X<0))}{P(-1\le X<0)} =$$

$$= \frac{P(A\le a)\cdot \cancel{P(-1\le X<0)}}{\cancel{P(-1\le X<0)}} = P(A\le a) = \int_{a=0}^{a=a} f_A(a)\,da =$$

$$= \int_0^a 1\,da = a\Big|_0^a = a$$

$$F_A(a / Z=-1) = \begin{cases} 1 & si \quad a \ge 1 \\ a & si \quad 0\le a<1 \\ 0 & si \quad a<0 \end{cases}$$

Análogamente:

$$F_A(a / Z=1) = \begin{cases} 1 & si \quad a \ge 1 \\ a & si \quad 0\le a<1 \\ 0 & si \quad a<0 \end{cases}$$

Problema 3

$X \equiv$ número de unidades de ancho de banda que solicitan
$Y \equiv$ número de unidades ocupadas antes de la petición

X e Y independientes

$Z = g(X, Y) \equiv$ unidades asignadas por el gestor

$X = \mathcal{U}(0, B)$, $B > C$

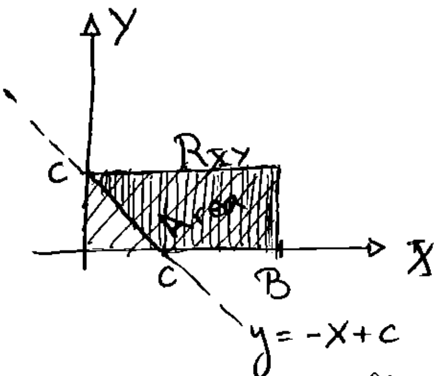
$Y = \mathcal{U}(0, C)$

a) C?? $P(X > C) < 1\% = 0'01$

$$P(X > C) = \int_C^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_C^B \frac{1}{B}\,dx = \frac{1}{B}(B - C) = \frac{B - C}{B} = 1 - \frac{C}{B}$$

$$= 1 - \frac{C}{B} < 0'01 \Leftrightarrow 1 - 0'01 < \frac{C}{B} \Leftrightarrow C > 0'99 \cdot B$$

b) C?? $P(X + Y > C) < 1\%$



$$X + Y > C \Leftrightarrow Y > -X + C$$

$$f_{XY}(x, y) \underset{\text{indep}}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{C} = \frac{1}{BC}$$

$$P(X + Y > C) = \iint_{\text{Área}} f_{XY}(x, y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=C} \int_{x=-y+c}^{x=B} \frac{1}{BC}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=c} \frac{1}{Bc}(B + y - c)\,dy = \int_0^c \frac{1}{c}\,dy + \int_0^c \frac{y}{Bc}\,dy - \int_0^c \frac{1}{B}\,dy =$$

$$= \frac{1}{c}(c - 0) + \frac{1}{2Bc}(c^2 - 0) - \frac{1}{B}(c - 0) = 1 + \frac{c}{2B} - \frac{c}{B} = 1 + \frac{C}{B}\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= 1 - \frac{c}{2B} < 0'01 \Leftrightarrow C > 1'98 \cdot B$$

como $C < B$ (enunciado) $\Rightarrow$ imposible

c) $g(x,y) = \begin{cases} x \, , & 0 < x < C-y \\ 0 \, , & \text{resto} \end{cases}$

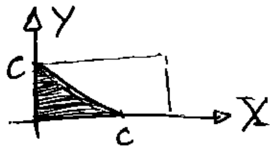
C, B ?? tal que X y Z sean incorreladas

incorreladas $\Leftrightarrow Cov(X,Z) = 0$

$Cov(X,Z) = E(X \cdot Z) - E(X)E(Z)$

$E(X) = \{ X = U(0,B) \} = \frac{B}{2}$

$E(Z) = E(g(X,Y)) =$



$= \iint g(x,y) \, f_{XY} \, dx dy =$

$$= \int_{y=0}^{y=C} \int_{x=0}^{x=-y+C} x \, \frac{1}{BC} \, dx \, dy = \frac{1}{BC} \int_{y=0}^{y=C} \frac{1}{2} (-y+C)^2 \, dy =$$

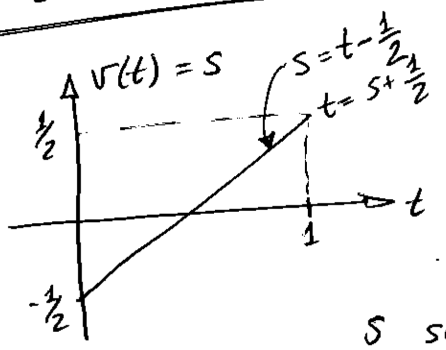
$$= \frac{1}{2BC} \int_0^C y^2 - 2yC + C^2 \, dy = \frac{1}{2BC} \left[\frac{C^3}{3} - \cancel{C^3} + \cancel{C^3} \right] = \frac{C^2}{6B}$$

$$E(XZ) = E(X \cdot g(X,Y)) = \iint x \, g(x,y) \, f_{XY}(x,y) \, dx dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=C} \int_{x=0}^{x=-y+C} x \cdot x \cdot \frac{1}{BC} \, dx \, dy = \frac{C^3}{12B}$$

$$Cov(X,Z) = \frac{C^3}{12B} - \frac{C^2}{6\cancel{B}} \cdot \frac{\cancel{B}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{C^3}{\cancel{12B}} = \frac{C^2}{\cancel{12}} \Leftrightarrow C = B$$

Problema 1



$S = V(T)$; $T = \mathcal{U}(0,1)$

$R_T = (0,1)$

$f_T(t) = \begin{cases} 1/1 = 1 & t \in R_T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

S se compara con un umbral u
$(-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2})$

$X = \max\{S, u\}$

a) $f_X(x)$?? $F_X(x)$?? $E(X)$??

$X = \max\{S, u\}$

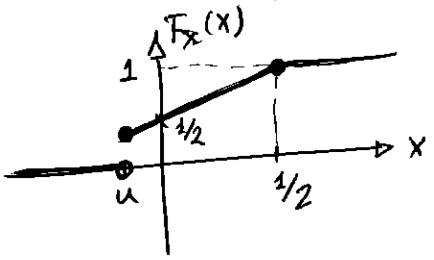
$\left.\begin{array}{l} R_S = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow R_X = (u, \frac{1}{2})$

sea $x \in R_X \Rightarrow F_X(x) = P(X \le x) = P((S \le x) \cap (u \le x)) =$

$= \begin{cases} \text{si } x < u : & F_X(x) = 0 \quad \text{ya que } P(\emptyset) = 0 \\ \text{si } x \ge u : & F_X(x) = P(S \le x) = P(-\frac{1}{2} \le S \le x) = \end{cases}$

$= P(0 \le T \le x + \frac{1}{2}) = \frac{x + 1/2 - 0}{1 - 0} = x + 1/2$

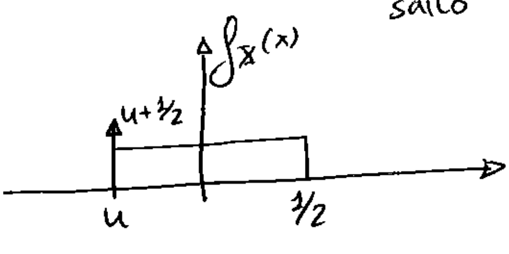
$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < u \\ x + \frac{1}{2} & , x \ge u \end{cases}$; $R_X = (u, 1/2)$



$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < u \\ x + \frac{1}{2} & u \le x < 1/2 \\ 1 & x \ge 1/2 \end{cases}$

$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \underbrace{(u + \frac{1}{2})\,\delta(x-u)}_{\text{salto}} + \underbrace{1\,(\mathcal{U}(x-u) - \mathcal{U}(x-\frac{1}{2}))}_{\text{deriv. de } x+\frac{1}{2}}$

función escalón



$f_X(x) = \begin{cases} (u + \frac{1}{2})\,\delta(x-u) & x = u \\ 1 & u < x \le 1/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$$E(X) = \int_{R_X} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x = u \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{x=u}^{x=1/2} x\left(\left(u+\tfrac{1}{2}\right)\delta(x-u) + 1\cdot\left(U(x-u) - U\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right)\right) dx =$$

$$= u\left(u+\tfrac{1}{2}\right) + \int_u^{1/2} x \cdot 1 \cdot dx = u\left(u+\tfrac{1}{2}\right) + \left.\frac{x^2}{2}\right|_u^{1/2} =$$

$$= u\left(u+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} - \frac{u^2}{2} = u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{8} - \frac{u^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}$$

b) Ahora el umbral u es V.A. $U = U[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$

$$R_u = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

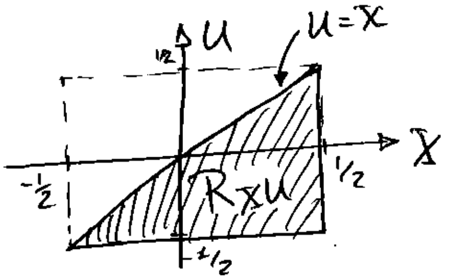
$$f_u(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in R_u \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

U y T independientes

$X = \max\{S, U\}$

son X y U indep?? $E(X)$?

Construimos una V.A. bidimensional (X, U)



$R_S = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$ no uniforme

$R_u = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$ uniforme

$R_X = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$

X y U no son independientes, ya que el recorrido bidimensional NO es rectangular, es decir,

$$\left.\begin{array}{l} R_X = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \\ R_{X/u} = (u, \tfrac{1}{2}) \end{array}\right\} R_X \neq R_{X/u} \Rightarrow \text{No indep.}$$

$$E(x) = \int_{R_X} x \cdot f_X(x)\, dx \Rightarrow f_X(x)\, dx\,??$$

$$f_X(x) = \int_{R_{u/x} = (-1/2,\, x)} f_{XU}(x,u)\, du$$

$$f_{XU}(x,u) = f_X(x/u)\, f_U(u) = \begin{cases} (u+\frac{1}{2})\,\delta(x-u) + U(x-u) - U(x-\frac{1}{2}) \\ 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{u=-1/2}^{u=x} f_{XU}(x,u)\, du = \int_{-1/2}^{x} \underbrace{(u+1/2)\,\delta(x-u)}_{\text{si } u=x \Rightarrow \delta(x-u)=1} + U(x-u) - U(x-\tfrac{1}{2})\,du$$

$$= x + \frac{1}{2} + \int_{-1/2}^{x} 1 \cdot du = x + \frac{1}{2} + x - (-1/2) = 2x+1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \in R_X = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{R_X} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} x\,(2x+1)\, dx = \left(2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{6}$$

c) $u=0$, $X = \max\{S, 0\}$, $R_X = (0, S)$

repetimos el experimento hasta obtener 2 veces $X=0$

número medio de ensayos independientes

$$P(X=0) = P(S \leq 0) = P(-\tfrac{1}{2} \leq S \leq 0) = \frac{0-(-1/2)}{1/2-(-1/2)} = \frac{1}{2}$$

definimos $N \equiv$ "número de veces que repetimos el experimento hasta obtener 2 veces $X=0$"

$$R_N = \{2, 3, 4, 5 \ldots k \ldots\}$$

$$E(N) = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot P(N=i)$$

$$P(N=k) = \binom{k-1}{1} p^1 (1-p)^{k-1-1} \cdot p = (k-1)(1-p)^{k-2} \cdot p^2$$

$$E(N) = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1)(1-p)^{k-2} p^2 = p^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, q^{k-2} = p^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^2}{d^2 q} q^k$$

$$= p^2 \frac{d^2}{dq} \sum_{k=2}^{\infty} q^k = p^2 \frac{d^2}{dq}\left(\frac{q^2}{1-q}\right) = p^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2p^2}{p^3} = \frac{2}{p}$$

P24

U = v.a. continua , $f_U(u)$, η_u , σ_u^2

a) $V = 2U$

fdp? $E(V)$? σ_V^2?

$$E(V) = E(2U) = 2\cdot E(U) = 2\eta_u$$

$$Var(V) = E(V^2) - E^2(V) = E(V^2) - 4\eta_u^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(V^2) = \int_{R_V} v f_V(v)\,dv$$ [muy feo no?]

$$Var(V) = E((2U)^2) - 4\eta_u^2 = 4\cdot E(U^2) - 4\eta_u^2$$

$$= 4\left[E(U^2) - E^2(U)\right] = 4\sigma_u^2$$

$$f_V(v) = \sum_{\forall u_i} \frac{f_U(u_i)}{\left|\frac{dv}{du}\right|_{u_i}} , \quad V = 2U \Rightarrow u_i = \frac{V}{2} \text{ (1 única raiz)}$$

$$\frac{dv}{du} = 2 \xrightarrow{|\cdot|} 2 \xrightarrow{u_i} 2$$

$$f_V(v) = \frac{f_U(\frac{V}{2})}{2} = \frac{1}{2} f_U(\tfrac{V}{2})$$

b) $Z = (1+Y)X_1 + (1-Y)X_2$

Y = v.a. discreta con $P(Y=-1) = P(Y=1) = 1/2$

X_1 = v.a. Rayleigh con fdp $f_1(x) = x e^{-x^2/2} u(x)$

X_2 = v.a. $N(\mu, \sigma)$ con $\mu < 0$

todas independientes.

$fdp_Z(z)$?? dibújela!!

$$f_Z(z) = f_Z(z/Y=-1)\cdot \underbrace{P(Y=-1)}_{1/2} + f_Z(z/Y=1)\cdot \underbrace{P(Y=1)}_{1/2}$$

$$f_Z(z/y=-1) \Rightarrow Z = 2X_2 \Rightarrow \{X_2 = \text{v.a. Normal}\} \Rightarrow Z = \text{v.a. Normal}$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu_z)^2}{2\sigma_z^2}}$$

$$\mu_z = E(Z) = E(2X_2) = 2\,E(X_2) = 2\mu$$

$$\sigma_z^2 = Var(2X_2) = 2^2 \cdot Var(X_2) = 4\sigma^2 \Rightarrow \sigma_z = 2\sigma$$

$$Z = N(2\mu, 2\sigma)$$

$$f_Z(z/y=-1) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-2\mu)^2}{2(2\sigma)^2}}$$

$$f_Z(z/y=1) \Rightarrow Z = 2X_1 \Rightarrow \{X_1 = \text{Rayleigh}\} \overset{??}{\Rightarrow} Z = \text{Rayleigh}$$

ni lo sé ni lo quiero saber

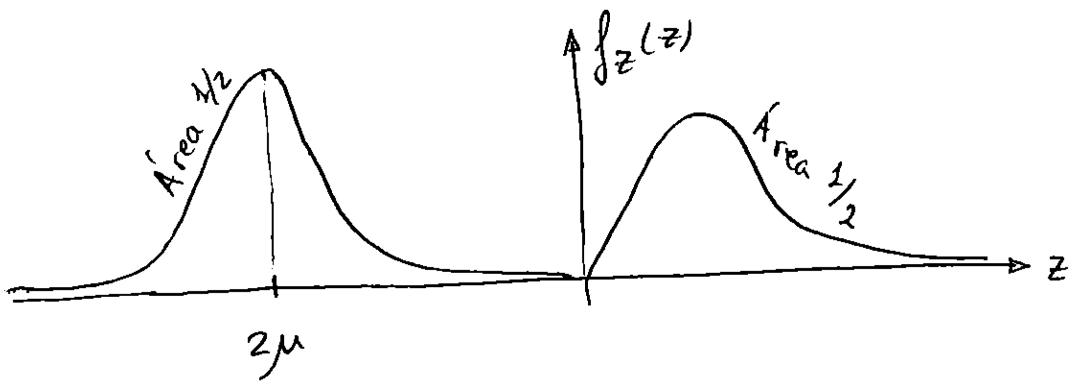
$$f_{X_1}(x) = x\, e^{-x^2/2} \cdot u(x)$$

$$f_Z(z) = \sum_{\forall x_i} \frac{f_{X_1}(x_i)}{\left|\frac{dz}{dx_1}\right|_{x_i}} = \frac{f_{X_1}(\frac{z}{2})}{2} = \frac{1}{2} f_{X_1}(z/2) = \frac{z}{4} e^{-\frac{(z/2)^2}{2}}$$

$$z \in [0, \infty)$$

$$Z = 2X_1 \Rightarrow x_1 = \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{dz}{dx_1} = 2$$

$$f_Z(z) = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-2\mu)^2}{2(2\sigma)^2}}}_{\mu<0} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{4} e^{-(z^2/8)}}_{z\geq 0}, \quad z \in [0, \infty)$$



c) Covariaza de Z y X_2 ??

$$Cov(Z, X_2) = E(Z \cdot X_2) - E(Z)\underbrace{E(X_2)}_{\mu}$$

$$E(Z) = E((1+Y)X_1 + (1-Y)X_2) = E((1+Y)X_1) + E((1-Y)X_2) =$$

$$= \{\text{son independientes}\} = E(1+Y) \cdot E(X_1) + E(1-Y) \cdot E(X_2) =$$

$$= (1 + E(Y))E(X_1) + (1 - E(Y))E(X_2)$$

$$E(Y) = \sum y_i \cdot P(Y = y_i) = -1 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} = 0$$

$$E(Z) = (1+0)E(X_1) + (1-0)E(X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

$$E(Z \cdot X_2) = E\left((1+Y)X_1X_2 + (1-Y)X_2^2\right) =$$

$$= E((1+Y)X_1X_2) + E((1-Y)X_2^2) = \{\text{indep.}\} =$$

$$= E(1+Y)E(X_1)E(X_2) + E(1-Y)E(X_2^2) =$$

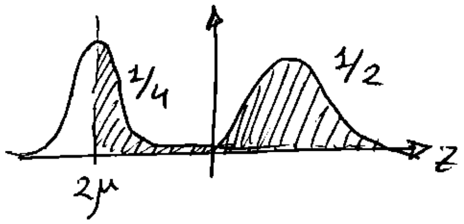
$$= (1 + \underbrace{E(Y)}_{0})E(X_1)E(X_2) + (1 - \underbrace{E(Y)}_{0})E(X_2^2) =$$

$$= E(X_1)E(X_2) + E(X_2^2)$$

$$Cov(Z, X_2) = \cancel{E(X_1)E(X_2)} + E(X_2^2) - \cancel{E(X_2)E(X_1)} - E^2(X_2)]$$

$$= E(X_2^2) - E^2(X_2) = Var(X_2) = \sigma^2$$

d) $P(Z > 2\mu)$



$$P(Z > 2\mu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

e) $E(Z / X_2 = x_2) = E\left((1+Y)X_1 + (1-Y)X_2 / X_2 = x_2\right) = \{\text{indep.}\} =$

$$= E((1+Y)X_1 + (1-Y)x_2) = E((1+Y)X_1) + E((1-Y)x_2) = \{\text{indep}\} =$$

$$= E(1+Y)E(X_1) + E(1-Y)E(x_2) = 1 \cdot E(X_1) + 1 \cdot x_2 = E(X_1) + x_2$$

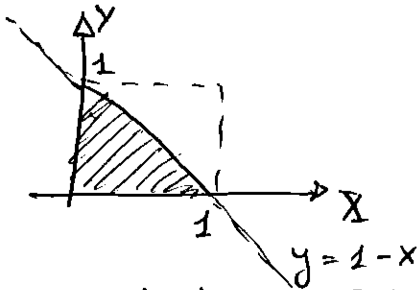
$$E(X_1) = \int_0^{\infty} x \cdot x \cdot e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow E(Z/X_2 = x_2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + x_2$$

P23 X, Y v.a.'s $U(0,1)$ independientes

$$U = \begin{cases} 1 & \text{si } X+Y \leq 1 \\ 0 & \text{si } X+Y > 1 \end{cases} \qquad V = \begin{cases} 1 & \text{si } X^2+Y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } X^2+Y^2 > 1 \end{cases}$$

a) medias y varianzas de U y V??

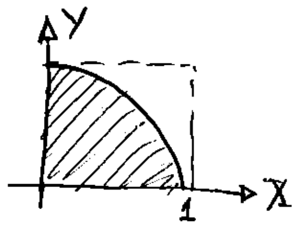
$$E(U) = 0 \cdot P(U=0) + 1 \cdot P(U=1) = P(U=1) = P(X+Y \leq 1)$$



$$= \frac{\text{Área}}{\text{Área total}} = \frac{1/2}{1} = 1/2$$

por ser X, Y uniformes

$$E(V) = 0 \cdot P(V=0) + 1 \cdot P(V=1) = P(V=1) =$$



$$= P(X^2+Y^2 \leq 1) = \frac{\text{Área}}{\text{Área tot.}} = \frac{\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$Var(U) = E(U^2) - E^2(U)$$

$$E(U^2) = 0^2 \cdot P(U=0) + 1^2 \cdot P(U=1) = \frac{1}{2}$$

$$Var(U) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$Var(V) = E(V^2) - E^2(V)$$

$$E(V^2) = 0^2 \cdot P(V=0) + 1^2 \cdot P(V=1) = \frac{\pi}{4}$$

$$Var(V) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

b) $$P(U=1/V=1) = \frac{P((U=1) \cap (V=1))}{P(V=1)} = \frac{P(X+Y \leq 1 \cap X^2+Y^2 \leq 1)}{P(X^2+Y^2 \leq 1)}$$

$$= \frac{P(X+Y \leq 1)}{P(X^2+Y^2 \leq 1)} = \frac{1/2}{\pi/4} = \frac{2}{\pi}$$

$$P(V=1/U=1) = \frac{P((V=1)\cap(U=1))}{P(U=1)} = \frac{P(X^2+Y^2\leq 1 \cap X+Y\leq 1)}{P(X+Y\leq 1)} =$$

$$= \frac{P(X+Y\leq 1)}{P(X+Y\leq 1)} = 1$$

c) Covarianza de Z y W siendo. $Z = \sqrt{X\cdot Y}$, $W = \sqrt{X/Y}$

$$Cov(Z,W) = E(Z\cdot W) - E(Z)E(W)$$

$$E(Z\cdot W) = E\left(\sqrt{XY}\cdot\sqrt{X/Y}\right) = E(X) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(Z) = E\left(\sqrt{XY}\right) = \{\text{indep}\} = E(\sqrt{X})\cdot E(\sqrt{Y})$$

$$E(\sqrt{X}) = \int_0^1 \sqrt{x}\, f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^{1/2}\cdot 1\cdot dx = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(\sqrt{Y}) = \int_0^1 \sqrt{y}\, f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^{1/2}\cdot 1\cdot dx = \left.\frac{y^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(Z) = E(\sqrt{X})\cdot E(\sqrt{Y}) = \frac{4}{9}$$

$$E(W) = E\left(\sqrt{\frac{X}{Y}}\right) = \{\text{indep}\} = E(\sqrt{X})\cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\, f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^{-1/2}\cdot 1\cdot dy = \left.\frac{y^{1/2}}{1/2}\right|_0^1 = 2$$

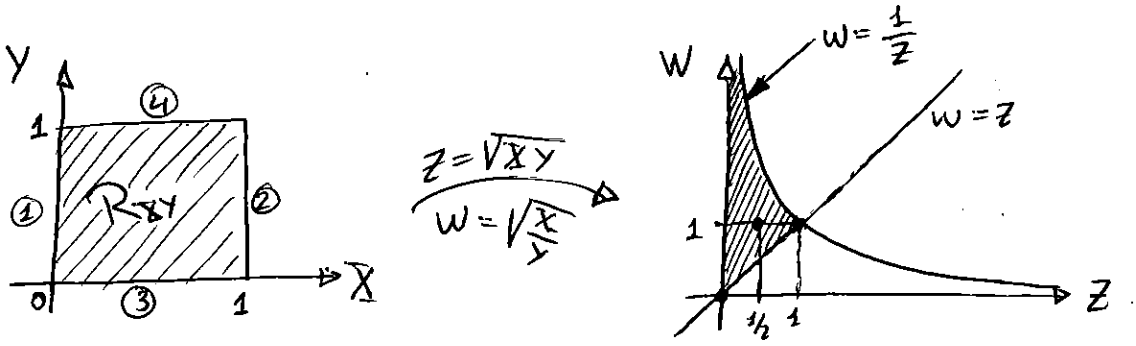
$$E(W) = \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3}$$

$$Cov(Z,W) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{2} - \frac{16}{27} = \frac{-5}{54}$$

d) $f_Z(z)$, $f_W(w)$??

$$f_Z(z) = \int_{w=}^{w=} f_{ZW}(z,w)\,dw$$

$$f_W(w) = \int_{z=}^{z=} f_{ZW}(z,w)\,dz$$



$$① \begin{cases} X=0 \\ 0\le Y\le 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z=0 \\ w=0 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} X=1 \\ 0\le Y\le 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{y} \Rightarrow y=z^2 \\ w=\sqrt{1/y} \Rightarrow w=\sqrt{\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z} \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} 0\le X\le 1 \\ Y=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z=0 \\ W=\sqrt{\frac{X}{0}}=\infty \end{cases}$$

$$④ \begin{cases} 0\le X\le 1 \\ Y=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{X} \\ w=\sqrt{X/1} \end{cases} \Rightarrow w=z$$

$$(X,Y)=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \longrightarrow (z,w)=\left(\tfrac{1}{2},1\right)$$

$$f_{ZW}(z,w)=\sum_{\forall(x_i,y_i)} \frac{f_{XY}(x_i,y_i)}{\left|\left|J\begin{pmatrix} z & w \\ x & y\end{pmatrix}\right|\right|_{(x_i,y_i)}} \overset{\text{indep}}{=} f_X(x_i)\,f_Y(y_i)\,\frac{1}{\left|\left|J\begin{pmatrix} z & w \\ x & y\end{pmatrix}\right|\right|_{(x_i,y_i)}}=$$

$$= f_X(x_i)\,f_Y(y_i)\left|\left|J\begin{pmatrix} x & y \\ z & w\end{pmatrix}\right|\right|_{(x_i,y_i)}$$

$$z=\sqrt{XY} \Rightarrow z^2=XY \Rightarrow z^2=w^2\cdot y^2 \Rightarrow y=z/w$$
$$w=\sqrt{X/Y} \Rightarrow w^2=X/Y \Rightarrow x=w^2\frac{z}{w} \Rightarrow x=w\cdot z$$

$$\left|J\begin{pmatrix} x & y \\ z & w\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} w & z \\ \frac{1}{w} & \frac{-z}{w^2}\end{vmatrix}=\frac{-zw}{w^2}-\frac{z}{w}=-\frac{2z}{w}$$

$$f_{ZW}(z,w) = 1 \cdot 1 \cdot \left| -\frac{2z}{w} \right| = 2\,\frac{z}{w}$$

$$f_W(w) = \int_{z=}^{z=} 2\,\frac{z}{w}\, dz = \begin{cases} \text{si } 0 < w < 1 \Rightarrow \int_{z=0}^{z=w} 2\,\frac{z}{w}\, dz = w \\ \text{si } 1 < w < \infty \Rightarrow \int_{z=0}^{z=1/w} 2\,\frac{z}{w}\, dz = \frac{1}{w^3} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_{w=z}^{w=1/z} 2\,\frac{z}{w}\, dw = 2z \cdot \ln(w)\Big|_z^{1/z} = 2z\left(\ln \frac{1/z}{z}\right) = 2z \cdot \ln\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

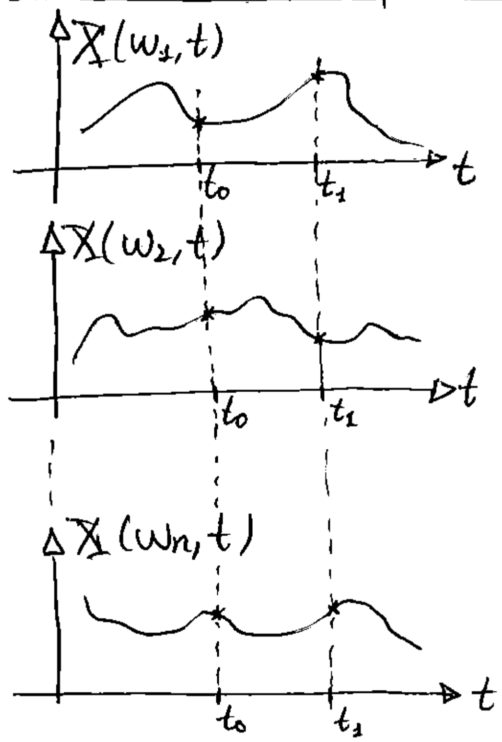
$$= -4\,z \cdot \ln(z),\ \forall z \in (0,1)$$

Tema 5: Procesos estocásticos

1. Definiciones

$$\Omega \longrightarrow \{\text{funciones de } t\}$$
$$\omega \longrightarrow X(\omega, t)$$

Realizaciones del proceso:



Fijado un instante de tiempo "t_0" el proceso se convierte en una v.a. unidimensional:

$$X(\omega,t_1) = X(t_1)$$

en este caso hemos obtenido una correspondencia entre un suceso y un número real

Fijados dos instantes, obtenemos una v.a. bidim.

$$(X(t_1), X(t_2))$$

* Se denominan estadísticos de 1er orden a los que resultan de estudiar la v.a. unidimensional que se obtiene al fijar un instante de tiempo.
* Se denominan estadísticos de 2º orden a los que resultan de estudiar la v.a. bidimensional que se obtiene al fijar dos instantes de tiempo

2. Estadísticos de 1^er^ orden

Fijado un instante de tiempo "t" $\Rightarrow X(t)$

$$E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, f_X(x,t)\, dx$$

$$f_X(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x \leq X(t) \leq x + \Delta x) / \Delta x$$

$$F_X(x,t) = P(X(t) \leq x)$$

$$Var(X(t)) = E(X^2(t)) - E^2(X(t))$$

3. Estadísticos de 2^do^ orden

$$(X(t_1), X(t_2)) \equiv (X_1, X_2)$$

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \frac{P[(x_1 \leq X(t_1) \leq x_1 + \Delta x_1) \cap (x_2 \leq X(t_2) \leq x_2 + \Delta x_2)]}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}$$

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1 \cap X(t_2) \leq x_2)$$

- Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X(t_2))$
- Autocovarianza: $C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - E(X(t_1))E(X(t_2))$
- Correlación cruzada: $R_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot Y(t_2))$
- Covarianza cruzada: $C_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)Y(t_2)) - E(X(t_1))E(Y(t_2))$

Se dice que un proceso $X(t)$ es RUIDO BLANCO si y sólo si $C_X(t_1, t_2) \neq 0, \forall t_1 \neq t_2$

Se dice que un proceso $X(t)$ es RUIDO BLANCO ESTRICTO si y sólo si $X(t_1)$ y $X(t_2)$ independientes $\forall t_1 \neq t_2$

Se dice que dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son ORTOGONALES si y sólo si $R_{XY}(t_1, t_2) = 0, \forall t_1 \neq t_2$

Se dice que dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son INCORRELADOS si y sólo si $C_{XY}(t_1, t_2) = 0, \forall t_1 \neq t_2$

4. Estacionariedad

Se dice que un proceso es estacionario cuando todos sus estadísticos (de cualquier orden) permanecen invariables ante un desplazamiento del origen de tiempos.

Se dice que un proceso es estacionario de orden n cuando todos sus estadísticos hasta los de orden n permanecen invariables ante un desplazamiento del origen de tiempos.

no tener estacionariedad de orden $n \Rightarrow$ no tener estacionariedad de orden $m > n$

orden 1: $f_X(x,t) = f_X(x, t+\varepsilon) \Rightarrow f_X(x,t) = f_X(x)$

No depende del tiempo

orden 2: $f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon)$

un proceso es Estacionario en Sentido Amplio (ESA) ó Débilmente Estacionario si y sólo si:

$$\begin{cases} \text{su media es constante (no depende del tiempo)} \\ \text{su autocorrelación depende solo de } \tau \end{cases}$$

5. Ergodicidad

un proceso es Ergódico cuando cualquier estadístico puede obtenerse a partir de una de sus realizaciones.

un proceso es Ergódico respecto de la media si y solo si $E(X(t)) = \langle X(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt$

un proceso es Ergódico respecto de la correlación si y sólo si $R_X(\tau) = A_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\cdot X(t+\tau)\,dt$

6. Procesos discretos

$X(t) \longrightarrow X(n)$ siendo "n" un múltiplo del periodo que se determine

independientemente de que la v.a. sea continua o discreta, el proceso es discreto!!

$t_1 \to n_1$, $t_2 \to n_2$, $\tau \to m$

7. Densidad Espectral de Potencia

$$S_X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\, e^{-jw\tau}\, d\tau = \mathcal{F}\left[R_X(\tau)\right]$$

$$S_X(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_X(m)\, e^{-j\Omega m} = \mathcal{F}\left[R_X(m)\right]$$

propiedades de la Transformada de Fourier:

$$a\,x(t) + b\,y(t) \longleftrightarrow a\,X(jw) + b\,Y(jw)$$

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow X(jw)\cdot e^{-jwt_0}$$

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-jw)$$

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}\, X\left(\frac{w}{a}\right)$$

$$x(t)\cdot\cos(w_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(w-w_0) + X(w+w_0)\right]$$

$$x(t)\, e^{jwt} \longleftrightarrow X(w-w_0)$$

$$k \longleftrightarrow 2\pi k\, \delta(w)$$

$$k\,\delta(t) \longleftrightarrow k$$

8. Sistemas LTI

$$x(t) \longrightarrow \underset{\text{LTI}}{\boxed{h(t)}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$S_Y(w) = S_X(w)\cdot |H(w)|^2$$

Ej: Sea $X(t)$ un proceso estocástico estacionario 2° orden

Demostrar que:

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \le k \\ 0, & X(t) > k \end{cases}$$ es estacionario en sentido amplio

$$\underbrace{\hspace{5cm}}$$

$E(Y(t))$ no depende de t

$R_Y(t_1, t_2) = R_Y(\tau)$

$$E(Y(t)) = 0 \cdot P(Y(t)=0) + 1 \cdot P(Y(t)=1) = P(Y(t)=1) =$$
$$= P(X(t) \le k) = F_X(k,t)$$

$X(t)$ estacionario 2° orden $\Longrightarrow$ $X(t)$ estacionario 1er orden

$\Rightarrow$ sus estadísticos no dependen de $t \Rightarrow F_X(k,t) = F_X(k)$

$\Rightarrow F_X(k)$ no depende de $t \Rightarrow E(Y(t))$ tampoco

$$R_Y(t_1,t_2) = E(Y(t_1) \cdot Y(t_2)) = 0 \cdot P(Y(t_1) \cdot Y(t_2) = 0) +$$
$$+ 1 \cdot P(Y(t_1) \cdot Y(t_2) = 1) = P(Y(t_1) = 1 \cap Y(t_2) = 1) =$$
$$= P(X(t_1) \le k \cap X(t_2) \le k) = \underbrace{F_X(k, k, t_1, t_2)}_{\text{estadístico de 2° orden de } X(t)}$$

como $X(t)$ estacionario 2° orden $\Longrightarrow$
sus estadísticos de 2° orden solo dependen de τ

$$\left.\begin{array}{l} E(Y(t)) \text{ no depende de } t \\ R_Y(t_1,t_2) = R_Y(\tau) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(t) \text{ es E.S.A.}$$

Ej: Proceso $X(t) = a\cos(wt) + b\,\text{sen}(wt)$

donde a y b son v.a. $N(0,\sigma)$ independ.

se pide:

$f$dp de 1er orden, su media, autocorr. y autocov.

es ESA??

$$E(X(t)) = E(a\cos(wt) + b\,\text{sen}(wt)) = E(a\cos(wt)) +$$
$$+ E(b\,\text{sen}(wt)) = \cos(wt)\cdot E(a) + \text{sen}(wt)\cdot E(b) =$$
$$= \left\} \begin{matrix} a = N(0,\sigma) \\ b = N(0,\sigma) \end{matrix} \right\{ = \cos(wt)\cdot 0 + \text{sen}(wt)\cdot 0 = 0$$

$\mu = 0$

$$Var(X(t)) = Var(a\cos(wt) + b\,\text{sen}(wt)) =$$

$\{$si a y b indep $\Rightarrow f(a)$ y $f(b)$ indep$\{$

$$= Var(a\cos(wt)) + Var(b\,\text{sen}(wt)) =$$
$$= \cos^2(wt)\cdot Var(a) + \text{sen}^2(wt)\,Var(b) = \left\} \begin{matrix} a = N(0,\sigma) \\ b = N(0,\sigma) \end{matrix} \right\{ =$$
$$= \cos^2(wt)\cdot\sigma^2 + \text{sen}^2(wt)\,\sigma^2 = \sigma^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X(t))} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

$$f_X(x,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$R_X(t_1,t_2) = E(X(t_1)\cdot X(t_2)) = E\big(a^2\cos(wt_1)\cos(wt_2) +$$
$$ab\cos(wt_1)\,\text{sen}(wt_2) + ba\,\text{sen}(wt_1)\cos(wt_2) + b^2\,\text{sen}(wt_1)\,\text{sen}(wt_2)\big)$$
$$= E(a^2\cos(wt_1)\cos(wt_2)) + E(ab\cos(wt_1)\,\text{sen}(wt_2)) +$$
$$+ E(ba\,\text{sen}(wt_1)\cos(wt_2)) + E(b^2\,\text{sen}(wt_1)\,\text{sen}(wt_2)) =$$
$$= \cos(wt_1)\cos(wt_2)\,E(a^2) + \cos(wt_1)\,\text{sen}(wt_2)\,\underbrace{\cancel{E(a)}}_{0}\,\underbrace{\cancel{E(b)}}_{0} +$$
$$+ \text{sen}(wt_1)\cos(wt_2)\,\underbrace{\cancel{E(b)}}_{0}\,\underbrace{\cancel{E(a)}}_{0} + \text{sen}(wt_1)\,\text{sen}(wt_2)\,E(b^2) =$$

$= \cos(wt_1)\cos(wt_2)E(a^2) + \text{sen}(wt_1)\,\text{sen}(wt_2)\,E(b^2) =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} V(a) = \sigma^2 = E(a^2) - \underbrace{E^2(a)}_{0} \Rightarrow E(a^2) = \sigma^2 \\ V(b) = \sigma^2 = E(b^2) - \underbrace{E^2(b)}_{0} \Rightarrow E(b^2) = \sigma^2 \end{array} \right\} =$$

$= \sigma^2 \cos(wt_1)\cos(wt_2) + \sigma^2 \text{sen}(wt_1)\,\text{sen}(wt_2) =$

$= \sigma^2 \cos(w(t_1 - t_2)) = \sigma^2 \cos(w\tau) = R_X(t_1, t_2)$

ESA??

$$\left. \begin{array}{l} E(X(t)) = 0 \quad \text{no depende de } t \\ R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau) \end{array} \right\} \text{sí es ESA}$$

$C_X(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) - \underbrace{E(X(t_1))}_{0}\underbrace{E(X(t_2))}_{0} =$

$= R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau) = \sigma^2 \cos(w\tau)$

Ej: Sea el proceso estocástico: $X(t) = A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)$
A y B v.a.s incorreladas: $\mu = 0$, σ^2, diferente distrib.

a) v.a.s $X(0)$ y $X(\pi/4)$?? puede ser $X(t)$ estacionario en sentido estricto??

$X(0) = A \cdot \underbrace{\cos(2\cdot 0)}_{1} + B\,\underbrace{\text{sen}(2\cdot 0)}_{0} = A$

$X(\pi/4) = A\,\underbrace{\cos(2\tfrac{\pi}{4})}_{0} + B\,\underbrace{\text{sen}(2\tfrac{\pi}{4})}_{1} = B$

No es estacionario en sentido estricto porque para $t = 0 \Rightarrow X(0) = A$ y para $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow X(\frac{\pi}{4}) = B$ y A y B tienen diferente distribucicán, los estadísticos de 1er orden dependen de $t \Rightarrow$ No puede ser estacionario en sentido estricto

b) $E(X(t))$??

$$E(X(t)) = E[A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)] =$$

$$= \cos(2t)\cdot E(A) + \text{sen}(2t)\cdot E(B) = \left\{ \begin{matrix} \mu = 0 \\ \text{para } A \text{ y } B \end{matrix} \right\} = 0$$

c) $R_X(t, t+\tau)$??

es $X(t)$ estacionario en sentido amplio??

estacionario en sentido amplio $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E(X(t)) = cte \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau) \end{array} \right.$

$$R_X(t,t+\tau) = E(X(t)\cdot X(t+\tau)) = E\Big[[A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)]\cdot$$

$$[A\cos(2(t+\tau)) + B\,\text{sen}(2(t+\tau))]\Big] = E\Big(A^2\cos(2t)\cos(2t+2\tau) +$$

$$+ AB\cos(2t)\text{sen}(2t+2\tau) + AB\,\text{sen}(2t)\cos(2t+2\tau) +$$

$$+ B^2\text{sen}(2t)\,\text{sen}(2t+2\tau)\Big) = \cos(2t)\cos(2t+2\tau)\cdot E(A^2) +$$

$$+ \cos(2t)\text{sen}(2t+2\tau)\,E(A)\cdot E(B) + \text{sen}(2t)\cos(2t+2\tau)\,E(A)E(B)$$

$$+ \text{sen}(2t)\,\text{sen}(2t+2\tau)\,E(B^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{incorreladas} \Leftrightarrow cov(A,B) = E(A\cdot B) - E(A)E(B) = 0 \Leftrightarrow \\ \qquad\qquad \Leftrightarrow E(A\cdot B) = E(A)\,E(B) \\ \mu = 0 \Leftrightarrow E(A) = 0 \;,\; E(B) = 0 \end{array} \right.$$

$$R_X(t,t+\tau) = \cos(2t)\cos(2t+2\tau)\,E(A^2) + \text{sen}(2t)\,\text{sen}(2t+2\tau)\,E(B^2)$$

$$= \left\{ Var(A) = E(A^2) - E^2(A) \Leftrightarrow E(A^2) = Var(A) + E^2(A) = \sigma^2 \right\} =$$

$$= \cos(2t)\cos(2t+2\tau)\,\sigma^2 + \text{sen}(2t)\,\text{sen}(2t+2\tau)\,\sigma^2 =$$

$$= \left\{ \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta) \right\} =$$

$$= \sigma^2\cos(2t - (2t+2\tau)) = \sigma^2\cos(-2\tau) = \sigma^2\cos(2\tau)$$

como $\left\{ \begin{array}{l} E(X(t)) = 0 = cte \\ R_X(t,t+\tau) = R_X(\tau) \end{array} \right. \Longrightarrow X(t)$ es estacionario en sentido amplio

Ej: proceso aleatorio $X(t) = e^{-\mu t}$, $t>0$, μ = v.a. continua con distribución Uniforme en $(0,2)$

Hallar $E(X(t))$, $R_X(t,t+\tau)$, $Var(X(t))$

Es estacionario en sentido amplio??

$$\mu = U(0,2) \Rightarrow \begin{cases} R_\mu = (0,2) \\ f_\mu(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \mu \in R_\mu \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \end{cases}$$

$$E(X(t)) = E(e^{-\mu t}) = \int_{R_\mu} e^{-\mu t} f_\mu(\mu)\, d\mu = \int_0^2 e^{-\mu t} \frac{1}{2}\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-\mu t}}{-t}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2t}}{-t} - \frac{1}{-t}\right) = \frac{-1}{2t}(e^{-2t}-1) = \frac{1-e^{-2t}}{2t}$$

Como la media depende de $t \Rightarrow X(t)$ no es ESA.

$$R_X(t,t+\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) = E(e^{-\mu t} \cdot e^{-\mu(t+\tau)}) =$$

$$= E(e^{-\mu(2t+\tau)}) = \int_0^2 e^{-\mu(2t+\tau)} f_\mu(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-\mu(2t+\tau)}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^{-\mu(2t+\tau)}}{-(2t+\tau)}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-4t-2\tau}}{-(2t+\tau)} + \frac{1}{2t+\tau}\right) =$$

$$= \frac{1-e^{-4t-2\tau}}{2(2t+\tau)}$$

$$Var(X(t)) = E(X^2(t)) - E^2(X(t)) = E(X^2(t)) - \left(\frac{1-e^{-2t}}{2t}\right)^2$$

$$E(X^2(t)) = E((e^{-\mu t})^2) = \int_0^2 e^{-\mu 2t} \frac{1}{2}\, d\mu = \frac{1}{2} \frac{e^{-\mu 2t}}{-2t}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-4t}}{-2t} - \frac{1}{-2t}\right) = \frac{1-e^{-4t}}{4t}$$

$$Var(X(t)) = \frac{1-e^{-4t}}{4t} - \left(\frac{1-e^{-2t}}{2t}\right)^2 = \frac{t - te^{-4t} - (1-e^{-2t})^2}{4t^2}$$

Ejercicio raro. Nunca lo han preguntado. Pero lo explican!!

Ej: Sea (X, Y, Z) una v.a. que sigue una distribución normal multidimensional con vector de medias $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y matriz de covarianzas $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular la distribución de $(X-Y+3Z,\ 2Y+4,\ Z-3)$

Vector de medias: $\begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \\ E(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} E(X) = 2 \\ E(Y) = 1 \\ E(Z) = 2 \end{array}$

nos dan la v.a. tridimensional, calcularemos las 3 medias:

$$E(X-Y+3Z) = E(X) - E(Y) + 3E(Z) = 2 - 1 + 3\cdot 2 = 7$$
$$E(2Y+4) = 2E(Y) + 4 = 2\cdot 1 + 4 = 6$$
$$E(Z-3) = E(Z) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$X - Y + 3Z = 0 \longrightarrow X - Y + 3Z = 0$$
$$2Y + 4 = 0 \longrightarrow 0X + 2Y + 0Z = -4$$
$$Z - 3 = 0 \longrightarrow 0X + 0Y + Z = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

↑ vector inicial de medias

Matriz de covarianzas:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz coef.} \\ \text{de } (U, V, W)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz cov.} \\ \text{de } (X, Y, Z)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz coef.} \\ \text{de } (U, V, W) \\ \text{traspuesta}}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 4 \\ -4 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} U & V & W \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ V \\ W \end{array} & \begin{pmatrix} Var(U) & Cov(U,V) & Cov(U,W) \\ Cov(V,U) & Var(V) & Cov(V,W) \\ Cov(W,U) & Cov(W,V) & Var(W) \end{pmatrix} \end{array}$$

matriz de covarianzas

$Var(W) = Var(Z-3) = Var(Z) = 1$

$Var(V) = Var(2Y+4) = 2^2 Var(Y) = 4 \cdot 3 = 12$

$Var(U) = Var(X - Y + 3Z) =$ puntos puntos puntos infinito

mil veces mejor mirar la matriz

Ej: X v.a. gaussiana $f_X(x) = k\, e^{-x^2/2}$ $\quad -a \leq x \leq a;\ a>0$

$R_X = [-a, a]$

a) k??

$$\int_{-a}^{a} k\, e^{-x^2/2} dx = 1 \longrightarrow \text{mejor ni la intentamos}$$

para una Gaussiana o Normal: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

en nuestro caso: $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{si fuese de } -\infty \text{ a } +\infty)$$

$$k\sqrt{2\pi}\underbrace{\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} dx}_{P \text{ desde "}-a\text{" hasta "}a\text{"}} = 1 = k\sqrt{2\pi}\,(2G(a)-1)$$

$$\searrow k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(2G(a)-1)} \quad \text{entre } (-a, a)$$

$$F(a) - F(-a) = G(a) - G(-a) = G(a) - (1 - G(a)) =$$
$$= 2G(a) - 1$$

b) $E[|X|] = ??$

$$= \int_{-a}^{a} |x|\, f_X(x)\, dx = \int_{-a}^{a} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(2G(a)-1)}\, e^{-x^2/2}\, dx = \left\{\begin{matrix}\text{por ser}\\ \text{simétrica}\end{matrix}\right\}$$

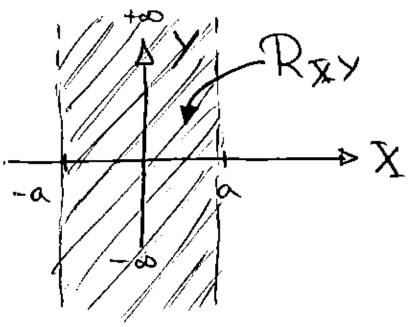
$$= 2\int_{0}^{a} x \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,(2G(a)-1)}\, dx = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}\,(2G(a)-1)}\, e^{-x^2/2}\Big|_{0}^{a} =$$

$$= \frac{-2\left(e^{-a^2/2} - 1\right)}{\sqrt{2\pi}\,(2G(a)-1)} = \frac{2\left(1 - e^{-a^2/2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,(2G(a)-1)} = E[|X|]$$

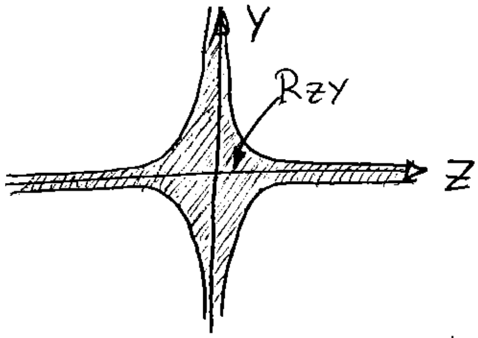
c) Y v.a. $N(0,1)$ independiente de $X \Rightarrow Z = \frac{X}{Y}$

fdp de la v.a. bidimensional (Z, Y)??

$R_X = [-a, a]$, $R_Y = (-\infty, +\infty)$



$$\xrightarrow[Y = Y]{Z = \frac{X}{Y}}$$



$$\left.\begin{array}{c} X = a \\ -\infty < Y < +\infty \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} Z = \frac{a}{Y} \Rightarrow Y = \frac{a}{Z} \Rightarrow \text{hipérbola cuadrantes I, III} \\ -\infty < Y < +\infty \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} X = -a \\ -\infty < Y < +\infty \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} Z = \frac{-a}{Y} \Rightarrow Y = \frac{-a}{Z} \Rightarrow \text{hipérbola cuadrantes II, IV} \\ -\infty < Y < +\infty \end{array}\right.$$

$(a/2, a/2) \longrightarrow (1, a/2) \Rightarrow$ zona interior

$$f_{XY}(x,y) = \{X, Y \text{ indep}\} = f_X(x) f_Y(y) = k e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

$$f_{ZY} = \sum_{\forall (x_i, y_i)} \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{\left\| J\begin{pmatrix} z & y \\ x & y \end{pmatrix} \right\|_{(x_i, y_i)}}$$

$$\left| J\begin{pmatrix} z & y \\ x & y \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y} \xrightarrow{|\cdot|} \frac{1}{|y|}$$

$$z = \frac{x}{y} \to x = y \cdot z \ ; \ y = y \longrightarrow y = y$$

$$f_{ZY}(z,y) = \frac{k e^{-(yz)^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}}{1/|y|} = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} |y| \, e^{-y^2(1+z^2)/2}$$

d) X v.a. gaussiana $f_X(x) = k\, e^{-x^2/2}$

fdp z ??

$$f_z(z) = \int_{R_{y/z}} f_{zy}(z,y)\, dy = \begin{cases} z<0 \Rightarrow \int_{\frac{a}{z}}^{-\frac{a}{z}} \frac{k}{\sqrt{2\pi}} |y|\, e^{-y^2(1+z^2)/2}\, dy \\ z>0 \Rightarrow \int_{-\frac{a}{z}}^{\frac{a}{z}} \frac{k}{\sqrt{2\pi}} |y|\, e^{-y^2(1+z^2)/2}\, dy \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\int_0^{-a/z} \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\, y\, e^{-y^2\left(\frac{1+z^2}{2}\right)} dy = \ldots = \\ 2\int_0^{a/z} \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\, y\, e^{-y^2(1+z^2)/2} dy = \ldots = \frac{2k}{\sqrt{2}\,(1+z^2)}\left(1 - e^{-\frac{a^2}{z^2}\left(\frac{1+z^2}{2}\right)}\right) \end{cases}$$

e) $P(z<1)$ cuando $a \to \infty$ $\quad f_z(z) = \frac{2k}{\sqrt{2\pi}\,(1+z^2)}(1-0)$

$$P(z<1) = \int_{-\infty}^{1} f_z(z)\, dz = \int_{-\infty}^{1} \frac{2k}{\sqrt{2\pi}\,(1+z^2)}\, dz = \frac{2k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+z^2}\, dz =$$

$$= \frac{2k}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{arctg}(z) \Big|_{-\infty}^{1} = \frac{2k}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{2}\right) =$$

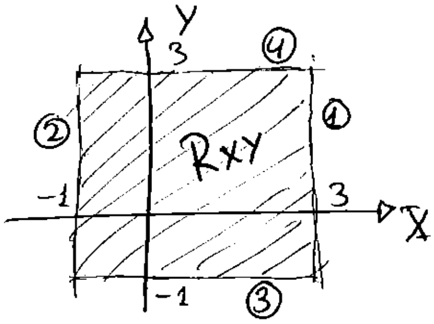
$$= \frac{2k}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{3\pi}{4} = \frac{3k\pi}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{3}{2}\, \frac{1/\sqrt{2\pi}\cdot \pi}{\sqrt{2\pi}} = \frac{3}{4}$$

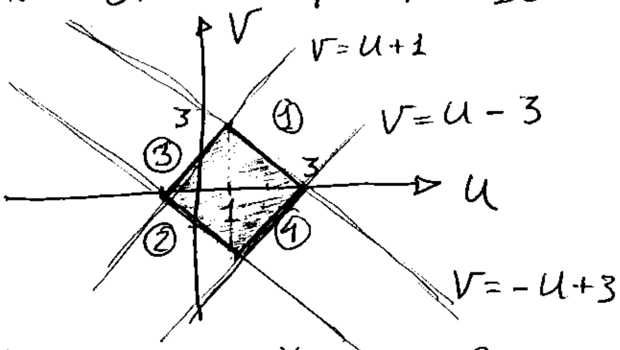
Ej: X e Y $U(-1,3)$ independientes

$$U = \frac{X+Y}{2} \quad ; \quad V = \frac{X-Y}{2}$$

a) $f_{UV}(u,v)$??

$$f_{XY}(x,y) \overset{\text{indep}}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y) \overset{U}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$





① $\begin{cases} X = 3 \\ -1 < Y < 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} U = \dfrac{X+Y}{2} \\ V = \dfrac{X-Y}{2} \\ 1 < U < 3 \end{cases}$ $\Rightarrow U = \dfrac{3+Y}{2} = \dfrac{1}{2}Y + \dfrac{3}{2}$

$Y = 2U - 3$

$V = \dfrac{-1}{2}Y + \dfrac{3}{2}$

$V = -U + 3$

② $\begin{cases} X = -1 \\ -1 < Y < 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} U = \dfrac{Y-1}{2} \Rightarrow Y = 2U + 1 \\ V = \dfrac{-1-Y}{2} = \dfrac{-1-2U-1}{2} = -U - 1 \\ -1 < U < 1 \end{cases}$

③ ... $\longrightarrow$ $V = U + 1$, $-1 < U < 1$

④ ... $\longrightarrow$ $V = U - 3$, $1 < U < 3$

$$f_{UV}(u,v) = \sum \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{\left\| J\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \right\|_{(x_i, y_i)}}$$

$$\left| J\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \xrightarrow{|\cdot|} \frac{1}{2}$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1/16}{1/2} = \frac{1}{8} \; ; \; f_{UV}(u,v) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } (u,v) \in R_{u,v} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

b) $f_U(u)$?? $f_V(v)$??

$$f_U(u) = \int_{R_{V/u}} f_{UV}(u,v)\, dv = \begin{cases} -1 < u < 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{-u-1}^{u+1} \frac{1}{8}\, dv = \frac{1}{4}(u+1) \\ 1 < u < 3 \Rightarrow \displaystyle\int_{u-3}^{-u+3} \frac{1}{8}\, dv = \frac{1}{4}(-u+3) \end{cases}$$

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{4}(u+1), & -1 < u, 1 \\ \frac{1}{4}(-u+3), & 1 < u < 3 \end{cases}$$

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{4}(v+2), & -2 < v < 0 \\ \frac{1}{4}(-v+2), & 0 < v < 2 \end{cases}$$

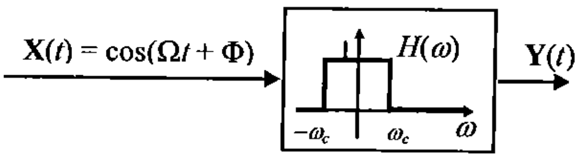
29/1/2010 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

1.- Sean **X** e **Y** dos v.a.'s uniformes en $(-1,3)$ e independientes. A partir de ellas se definen otras dos v.a.'s **U** y **V**, siendo: $\mathbf{U}=(\mathbf{X}+\mathbf{Y})/2$, $\mathbf{V}=(\mathbf{X}-\mathbf{Y})/2$.

a) Determine la fdp conjunta $f_{UV}(u,v)$ (dibuje el rango o recorrido).
b) Determine las fdps marginales $f_U(u)$ y $f_V(v)$.
c) Determine las FDs marginales $F_U(u)$ y $F_V(v)$.
d) ¿Son las v.a.'s **U** y **V** ortogonales? ¿Están incorreladas?
e) Demuestre que $P(\mathbf{U}\,\mathbf{V}<0)=P(|\mathbf{X}|<|\mathbf{Y}|)$ y calcule dicha probabilidad.

(5 puntos)

2.- En el esquema adjunto, $\mathbf{X}(t)=\cos(\Omega t+\Phi)$ representa una señal aleatoria, donde Ω es una v.a. con distribución uniforme en (ω_1,ω_2) (siendo $0<\omega_1<\omega_2$) e independiente de Φ; ésta, a su vez, es una v.a. discreta que puede tomar los valores 0, $\pi/2$, π, y $3\pi/2$ con igual probabilidad . El proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$ pasa por un filtro paso bajo ideal de ancho de banda $\omega_c<\omega_1$, dando como resultado un nuevo proceso $\mathbf{Y}(t)$.



Se pide:

a) La media condicionada $E[\mathbf{X}(t)\mid\Omega=\omega]$.
b) La media del proceso $\mathbf{X}(t)$.
c) La autocorrelación del proceso $\mathbf{X}(t)$ comprobando que es estacionario en sentido amplio
d) La densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{X}(t)$.
e) La autocorrelación del proceso a la salida del filtro $\mathbf{Y}(t)$.

(5 puntos)

X *v.a. uniforme* en (x_1,x_2): $E[X]=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $\quad Var[X]=\dfrac{(x_2-x_1)^2}{12}$

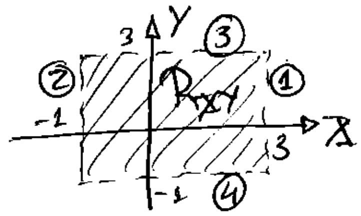
$$x(t)=\frac{\sin(at)}{\pi t}\leftrightarrow X(\omega)=\Im(x(t))=\begin{cases}1 & |\omega|<a\\ 0 & |\omega|\geq a\end{cases}\quad (a>0)\ \Im \textit{ es la transformada de Fourier}$$

Examen:	29/1/10	Publicación de notas:	19/2/10
Revisión:	25/2/10	Publicación resultados revisión:	26/2/10

enero 2010

P1 $X = U(-1,3)$ $\quad u = \frac{X+Y}{2}$

$Y = U(-1,3)$ $\quad v = \frac{X-Y}{2}$

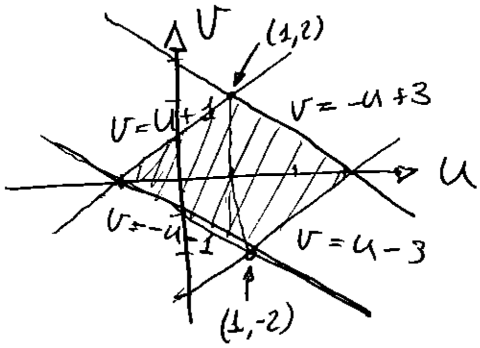


a) $f_{uv}(u,v)$??

$$① \left.\begin{matrix} X=3 \\ -1 \le Y \le 3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} u = \frac{3}{2} + \frac{y}{2} \\ v = \frac{3}{2} - \frac{y}{2} \end{matrix}\right| \; u+v=3 \Rightarrow v = -u+3$$

$$② \left.\begin{matrix} X=-1 \\ -1 \le Y \le 3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} u = \frac{-1}{2} + \frac{y}{2} \\ v = -\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \end{matrix}\right| \; u+v=-1 \Rightarrow v = -u-1$$

③ ④ etc . . .



$$f_{uv}(u,v) = \sum_{\forall (x_i,y_i)} \frac{f_{XY}(x_i,y_i)}{\left| \left| J\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \right| \right|_{(x_i,y_i)}}$$

$$f_{XY}(x,y) \overset{\text{indep}}{=} f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{3-(-1)} \cdot \frac{1}{3-(-1)} = \frac{1}{16} \quad \text{si } (x,y) \in R_{XY}$$

$$\left.\begin{matrix} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \end{matrix}\right| \begin{matrix} x = u+v \;:\; x_1 = u+v \\ y = u-v \;:\; y_1 = u-v \end{matrix} \Bigg\} \; (x_1,y_1) = (u+v, u-v)$$

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{matrix} \right| = \frac{-1}{2} \xrightarrow{|\cdot|} \frac{1}{2}$$

$$f_{uv}(u,v) = \frac{1/16}{1/2} = \frac{1}{8} \quad \text{si } (u,v) \in R_{u,v}, \; 0 \text{ resto}$$

b) $f_U(u)$, $f_V(v)$??

$$f_U(u) = \int_{v=}^{v=} f_{UV}(u,v)\,dv = \begin{cases} \text{si } -1<u<1 , & f_U(u) = \displaystyle\int_{-u-1}^{u+1} \frac{1}{8}\,dv \\ \text{si } 1\le u<3 , & f_U(u) = \displaystyle\int \frac{1}{8}\,dv \end{cases}$$

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{u+1}{4} , & -1<u<1 \\ \dfrac{3-u}{4} , & 1\le u<3 \end{cases}$$

$$f_V(v) = \int_{u=}^{u=} f_{UV}(u,v)\,du = \begin{cases} \displaystyle\int_{u=-v-1}^{u=v+3} \frac{1}{8}\,du = \frac{v+2}{4} & \text{si } -2<v<0 \\ \displaystyle\int_{u=v-1}^{u=-v+3} \frac{1}{8}\,du = \frac{-v+2}{4} & \text{si } 0\le v<2 \end{cases}$$

c) $F_U(u)$, $F_V(v)$??

$$F_U(u) = \begin{cases} 1 , & u\ge 3 \\ \frac{1}{4}\left[-\frac{u^2}{2}+3u-\frac{1}{2}\right], & 1\le u\le 3 \\ \frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2}+u+\frac{1}{2}\right] , & \text{si } -1\le u\le 1 \\ 0 & u\le -1 \end{cases}$$

$$u\in(-1,1) \Rightarrow F_U(u) = P(U\le u) = \int_{-1}^{u} \frac{u+1}{4}\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{2}+u-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)$$

$$u\in(1,3) \Rightarrow F_U(u) = P(U\le u) = \int_{-1}^{1} \frac{u+1}{4}\,du + \int_{1}^{u} \frac{3-u}{4}\,du = \frac{-1}{8}+\frac{3}{4}u-\frac{1}{8}u^2$$

idem: $$F_V(v) = \begin{cases} 1 , & v\ge 2 \\ \frac{1}{8}\left[-v^2+4v+4\right], & 0\le v<2 \\ \frac{1}{8}\left[4+4v+v^2\right], & -2\le v<0 \\ 0 , & v<-2 \end{cases}$$

c) U, V, ortogonales?? incorreladas??

U, V ortogonales $\Leftrightarrow E(U\cdot V) = 0$

U, V incorreladas $\Leftrightarrow Cov(U\cdot V) = 0$

$$E(U\cdot V) = E\left(\frac{X+Y}{2}\cdot\frac{X-Y}{2}\right) = E\left(\frac{1}{4}(X+Y)(X-Y)\right) = \frac{1}{4}E(X^2-Y^2)$$

$$= \frac{1}{4}E(X^2) - \frac{1}{4}E(Y^2)$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{3} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{3} x^2\,\frac{1}{4}\,dx = \frac{7}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \Rightarrow E(X^2) = \frac{(3-(-1))^2}{12} + \left(\frac{-1+3}{2}\right)^2 = \frac{7}{3}$$

$$E(Y^2) = \{\text{idem}\} = \frac{7}{3}$$

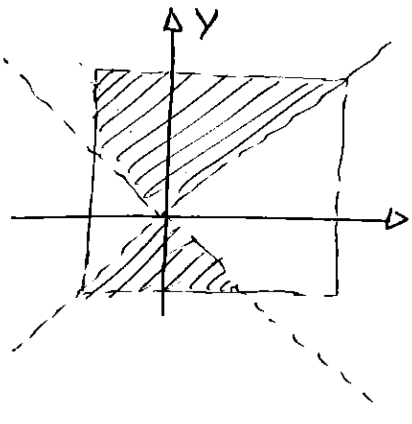
$$E(U\cdot V) = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{3} = 0 \Rightarrow U, V \text{ ortogonales}$$

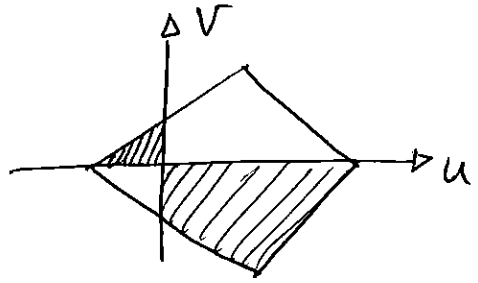
$$Cov(U,V) = E(U\cdot V) - E(U)\cdot E(V) = 0 - E\left(\frac{X+Y}{2}\right)E\left(\frac{X-Y}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}E(X+Y)\cdot\frac{1}{2}E(X-Y) = \frac{-1}{2}\big(E(X)+E(Y)\big)\,\frac{1}{2}\big(E(X)-E(Y)\big)$$

$$= \frac{-1}{4}(1+1)(1-1) = 0 \Rightarrow U, V \text{ incorreladas}$$

e) $P(U\cdot V<0) = P(|X|<|Y|) = ??$





ambas áreas son iguales $\Rightarrow$
las dos probab. son iguales
por ser éstas áreas la mitad del área total

$$P(U\cdot V<0) = P(|X|<|Y|) = \frac{1}{2}$$

P2) $X(t) = \cos(\Omega t + \phi)$

indep. $\begin{cases} \Omega = U(w_1, w_2) \\ \phi = \text{v.a. discreta } R_\phi = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \end{cases}$

a) $E[X(t) \mid \Omega = w]$??

$$E(X(t)/\Omega = w) = E(\cos(\Omega t + \phi)/\Omega = w) = E(\cos(wt + \phi)) =$$

$$= \cos(wt + 0)P(\phi = 0) + \cos(wt + \tfrac{\pi}{2})P(\phi = \tfrac{\pi}{2}) + \cos(wt + \pi)P(\phi = \pi) +$$

$$+ \cos(wt + \tfrac{3\pi}{2})P(\phi = \tfrac{3\pi}{2}) = \frac{1}{4}\left[\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \text{sen}(A)\,\text{sen}(B)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\cos(wt) - \text{sen}(wt) - \cos(wt) + \text{sen}(wt)\right] = \frac{1}{4}(0) = 0$$

b) $E(X(t))$??

$$E(X(t)) = E(\cos(\Omega t + \phi)) = E(\cos(\Omega t)\cos(\phi) - \text{sen}(\Omega t)\,\text{sen}(\phi)) =$$

$$= E(\underbrace{\cos(\Omega t)}_{f(\Omega)}\underbrace{\cos(\phi)}_{f(\phi)}) - E(\underbrace{\text{sen}(\Omega t)}_{f(\Omega)}\underbrace{\text{sen}(\phi)}_{f(\phi)}) =$$

Ω y $\phi \Rightarrow$ indep $\Rightarrow f(\Omega)$ y $f(\phi)$ indep

$$= E(\cos(\Omega t))E(\cos\phi) - E(\text{sen}(\Omega t))E(\text{sen}(\phi))$$

$$E(\cos(\Omega t)) = \int_{w_1}^{w_2} \cos(\Omega t)\, d\Omega = \frac{\text{sen}(w_2 t) - \text{sen}(w_1 t)}{t}$$

$$E(\cos(\phi)) = \cos(0)\cdot\frac{1}{4} + \cos(\tfrac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{4} + \cos(\pi)\frac{1}{4} + \cos(\tfrac{3\pi}{2})\frac{1}{4} = 0$$

$$E(\text{sen}(\phi)) = \text{sen}(0)\frac{1}{4} + \text{sen}(\tfrac{\pi}{2})\frac{1}{4} + \text{sen}(\pi)\frac{1}{4} + \text{sen}(\tfrac{3\pi}{2})\frac{1}{4} = 0$$

$$E(X(t)) = 0$$

c) $R_X(t_1, t_2)$?? comprobar E.S.A.

$\hookrightarrow$ $E(X(t)) = \text{cte}$

$R_X(t_1, t_2) = R_X(t, t+\tau) =$

$= R_X(\tau)$

$$R_X(t+\tau,t) = E\left[X(t+\tau)\,X(t)\right] = E\left[\cos(\Omega(t+\tau)+\phi)\,\cos(\Omega t+\phi)\right]$$

$$= E\left[\cos(\Omega t+\Omega\tau+\phi)\,\cos(\Omega t+\phi)\right] = E\left[\tfrac{1}{2}\cos(2\Omega t+\Omega\tau+2\phi)+\right.$$

$$\left.+\cos(\tau\Omega)\right]\Big] = \frac{1}{2}\left[E\left[\cos(2\Omega t+\Omega\tau+2\phi)\right]+E\left(\cos(\Omega\tau)\right)\right]$$

$$E(\cos(\Omega\tau)) = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos(\Omega\tau)\cdot\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\,d\Omega =$$

$$= \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\Omega\tau)}{\tau}\Bigg|_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{1}{\tau(\omega_2-\omega_1)}\left(\operatorname{sen}(\omega_2\tau)-\operatorname{sen}(\omega_1\tau)\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\omega_2\tau)-\operatorname{sen}(\omega_1\tau)}{\tau(\omega_2-\omega_1)}$$

$$E\left(\cos(2\Omega t+\Omega\tau+2\phi)\right) = E\Big(\underbrace{\cos(2\Omega t+\Omega\tau)}_{f(\Omega)}\underbrace{\cos(2\phi)}_{f(\phi)}+$$

$$-\underbrace{\operatorname{sen}(2\Omega t+\Omega\tau)}_{f(\Omega)}\underbrace{\operatorname{sen}(2\phi)}_{f(\phi)}\Big) = \left\{\Omega,\phi \text{ indep} \Rightarrow f(\Omega), f(\phi) \text{ indep}\right\} =$$

$$= E\left(\cos(2\Omega t+\Omega\tau)\right)E\left(\cos(2\phi)\right) - E\left(\operatorname{sen}(2\Omega t+\Omega\tau)\right)E\left(\operatorname{sen}(\phi)\right)$$

$$E(\cos(2\phi)) = \frac{1}{4}\left[\cos(2\cdot 0)+\cos\left(2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)+\cos(2\cdot\pi)+\cos\left(2\,\tfrac{3\pi}{2}\right)\right] = 0$$

$$E(\operatorname{sen}(2\phi)) = \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen}(2\cdot 0)+\operatorname{sen}\left(2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}(2\cdot\pi)+\operatorname{sen}\left(2\,\tfrac{3\pi}{2}\right)\right] = 0$$

$$E\left(\cos(2\Omega t+\Omega\tau+2\phi)\right) = 0$$

$$R_X(t+\tau t) = E\left(X(t+\tau)\,X(t)\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(\omega_2\tau)-\operatorname{sen}(\omega_1\tau)}{\tau(\omega_2-\omega_1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_X(t+\tau,t) = R_X(\tau) \\ E(X(t)) = \text{cte} \end{array}\right\}\; X(t) \text{ es ESA}$$

d) d.e.p. de $X(t)$??

$$x(t) = \frac{\operatorname{sen}(at)}{\pi t} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(w) = \begin{cases} 1, & |w| < a \\ 0, & |w| \geq a \end{cases}$$

$$S_X(w) = F(R_X(\tau)) = F\left(\frac{1}{2\tau(w_2-w_1)}(\operatorname{sen}(w_2\tau) - \operatorname{sen}(w_1\tau))\right)$$

$$= F\left(\frac{\operatorname{sen}(w_2\tau)}{2\tau(w_2-w_1)}\right) - F\left(\frac{\operatorname{sen}(w_1\tau)}{2\tau(w_2-w_1)}\right) =$$

$$= F\left(\frac{\pi \cdot \operatorname{sen}(w_2\tau)}{2(w_2-w_1)\cdot \pi\tau}\right) - F\left(\frac{\pi \cdot \operatorname{sen}(w_1\tau)}{2(w_2-w_1)\cdot \pi\tau}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2(w_2-w_1)}\left(F\left(\frac{\operatorname{sen}(w_2\tau)}{\pi\tau}\right) - F\left(\frac{\operatorname{sen}(w_1\tau)}{\pi\tau}\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(w_2-w_1)} & \text{si } |w| \in (w_1, w_2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

e) Autocorrelación $Y(t)$??

$$S_Y(w) = S_X(w) \cdot |H(w)|^2$$

$$S_Y(w) = F(R_Y(\tau)) = 0 \Rightarrow \underline{R_Y(\tau) = 0} \quad \forall \tau$$

18 enero 2012 **Señales Aleatorias** Publicación notas: 1/2/2012
Revisión examen: 7/2/2012

Normas de realización del examen

- Cada ejercicio se corresponde con la materia de uno de los exámenes parciales del curso y se califica de 0 a 10 puntos.
- Los alumnos que hayan seguido evaluación continua y obtenido nota mayor o igual que 3,5 en el primer o segundo parcial no precisan entregar los ejercicios correspondientes.
- La calificación del examen final para los alumnos que no hayan seguido evaluación continua es la media de los tres ejercicios, siempre que en todos ellos se obtenga una nota mínima de 3,5 puntos (en caso contrario, se considerará suspendida la convocatoria).
- Cada ejercicio deberá entregarse en hojas separadas.
- La duración del examen es de 3 horas y no se permite el uso de libros ni apuntes.

1.- Sea **X** una v.a. uniforme en (0,1). Se define la v.a. **Y**=g(**X**), siendo:

$$g(x)=\begin{cases} x/a & \text{si } x\le a \\ a/x & \text{si } x>a \end{cases}$$

donde a es una constante que verifica la condición $0<a<1$. Calcule:

a) La fdp de la v.a. **Y**. Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy=1$.

b) $E(\mathbf{Y}^2)$.

Se define ahora la v.a. **Z**=h(**X**), siendo:

$$h(x)=\begin{cases} 1/4 & \text{si } x\le a \\ 3/4 & \text{si } x>a \end{cases}$$

con a la misma constante de los apartados anteriores. Calcule:

c) $E(\mathbf{YZ})$.

d) El valor de la constante a que minimiza $E[(\mathbf{X}-\mathbf{Z})^2]$.

2.- Sea **X** una v.a. de Bernouilli de parámetro p y sean $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$ dos v.a.'s $N(\mu,\sigma)$ y $N(-\mu,\sigma)$, respectivamente. **X**, $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$ son independientes. Se forma la v.a. $\mathbf{Z}=\mathbf{X}\,\mathbf{Y}_1+(1-\mathbf{X})\,\mathbf{Y}_2$. Calcule:

a) La media y varianza de **Z**.

b) La fdp de **Z**.

c) $P(\mathbf{Z}<-\mu)$.

d) La covarianza de **X** y **Z**.

Datos:

X es v.a. $N(\mu,\sigma) \Rightarrow f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, $F_X(x)=\mathrm{G}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $E(\mathbf{X})=\mu$, $\mathrm{var}(\mathbf{X})=\sigma^2$

$$\mathrm{G}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du$$

SIGUE AL DORSO →

3.- Se define el proceso estocástico discreto en el tiempo $\mathbf{X}[n] = \mathbf{A}\cos\Omega_0 n$, siendo Ω_0 una constante distinta de cero y **A** una v.a. discreta con $P(\mathbf{A} = +1) = P(\mathbf{A} = -1) = ½$.

a) Obtenga la función de probabilidad de primer orden, la media y la autocorrelación del proceso $\mathbf{X}[n]$. ¿Es estacionario de primer orden? ¿Es estacionario en sentido amplio? ¿Es un ruido blanco?

A partir del p.e. $\mathbf{X}[n]$ anterior se forma el proceso $\mathbf{Y}_1[n] = \mathbf{X}[n] + \mathbf{B}\,\mathrm{sen}\,\Omega_0 n$, siendo **B** una v.a. de media η_B y varianza σ_B^2.

b) Obtenga la media y autocorrelación del proceso $\mathbf{Y}_1[n]$. ¿Qué condiciones deberían cumplir las v.a.'s **A** y **B** para que fuese estacionario en sentido amplio?

Considere ahora el proceso $\mathbf{Y}_2[n] = \mathbf{A} + \mathbf{W}[n]$, siendo **A** la v.a. del apartado a) y $\mathbf{W}[n]$ un ruido blanco binario con $P\{\mathbf{W}[n] = +1\} = P\{\mathbf{W}[n] = -1\} = ½$ e independiente de **A**.

c) Calcule la densidad espectral de potencia de $\mathbf{Y}_2[n]$ $S_{Y_2}(e^{j\Omega})$.

d) Se hace pasar $\mathbf{Y}_2[n]$ por un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$, obteniéndose como salida un proceso $\mathbf{Z}[n]$. Calcule la densidad espectral de potencia $S_Z(e^{j\Omega})$ de $\mathbf{Z}[n]$.

Datos:

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b$

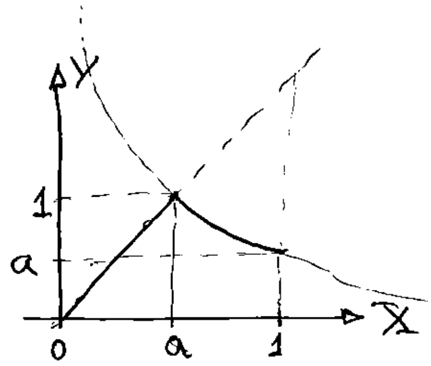
$\mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}\, a \cos b \pm \cos a\, \mathrm{sen}\, b$

$\cos a \cos b = 1/2[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$\mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b = 1/2[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

feb 12

P1) $X = U(0,1) \Rightarrow \begin{cases} R_X = (0,1) \\ f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in R_X \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \end{cases}$



$R_y = (0,1)$

$Y = g(X)$

$$g(x) = \begin{cases} x/a & x \le a \\ a/x & a < x \end{cases} \qquad 0<a<1$$

a) $f_Y(y)$?? $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = 1$

$$f_Y(y) = \sum_{\forall x_i} \frac{f_X(x_i)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_i}}$$

$f_X(x) = 1 \Rightarrow f_X(x_i) = 1$

$y = \frac{x_1}{a}$ si $x_1 \in (0,a) \Rightarrow x_1 = ay$

$y = \frac{a}{x_2}$ si $x_2 \in (a,1) \Rightarrow x_2 = \frac{a}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{a} \xrightarrow{|\cdot|} \frac{1}{a} \xrightarrow{x_1} \frac{1}{a} \\ \frac{-a}{x^2} \xrightarrow{|\cdot|} \frac{a}{x^2} \xrightarrow{x_2} \frac{a}{\left(\frac{a}{y}\right)^2} = \frac{y^2}{a} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{1/a} + \frac{1}{y^2/a} = a + \frac{a}{y^2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} a & 0<y<a \\ a+\frac{a}{y^2} & a<y<1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \int_0^a a\,dy + \int_a^1 a + \frac{a}{y^2}\,dy = a^2 + (a-a) - (a^2-1) =$$

$$= \cancel{a^2} - (a^2-1) = 1$$

b) $E(Y^2) = E(g^2(x))$

función de v.a. continua

$$E(g^2(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) f_X(x)\, dx = \int_0^1 g^2(x)\, dx = \int_0^a \frac{x^2}{a^2} dx + \int_a^1 \frac{a^2}{x^2} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a - \frac{a^2}{x}\Big|_a^1 = \frac{a}{3} - (a^2 - a) = -a^2 + \frac{4a}{3} = E(Y^2)$$

c) $Z = h(X)$

$$h(x) = \begin{cases} 1/4 & x \leq a \\ 3/4 & x > a \end{cases}$$

$E(YZ)$??

$$E(YZ) = E(g(x) \cdot h(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, h(x)\, f_X(x)\, dx =$$

$$= \int_0^a \frac{x}{a} \frac{1}{4}\, 1\, dx + \int_a^1 \frac{a}{x} \frac{3}{4}\, 1\, dx = \frac{1}{4a} \frac{x^2}{2}\Big|_0^a + \frac{3a}{4} \ln(x)\Big|_a^1 =$$

$$= \frac{a}{8} - \frac{3a}{4} \ln(a)$$

d) a ?? $E((X-Z)^2) = \min$

$$E((X-Z)^2) = E(X^2 - 2XZ + Z^2) = E(X^2) - 2E(XZ) + E(Z^2)$$

$$E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \int_0^1 x^2 f_X(x)\, dx = \frac{1}{3}$$

$$E(Z^2) = E(h^2(X)) = \int_0^1 h^2(x) f_X(x)\, dx = \frac{9}{16} - \frac{1}{2}a$$

$$E(XZ) = E(X \cdot h(X)) = \int_0^1 x\, h(x) f_X(x)\, dx = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}a^2$$

$$E((X-Z)^2) = \frac{1}{3} + \frac{9}{16} - \frac{1}{2}a - 2\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}a^2\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,E((X-Z)^2)}{da} &= -\frac{1}{2} + a = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 1/2}} \\ \frac{d^2\,E((X-Z)^2)}{da^2} &= 1 > 0 \Rightarrow \underline{\text{es mínimo}} \end{aligned}\right\} \quad a = 1/2 \text{ minimiza } E((X-Z)^2)$$

feb 12

P2) X v. a. Bernouilli de parámetro p $\Big\}$ independ.
Y_1, Y_2 v.a.s $N(\mu, \sigma)$ y $N(-\mu, \sigma)$

$Z = XY_1 + (1-X)Y_2$

a) media y varianza de Z??

$$E(Z) = E(XY_1 + (1-X)Y_2) = E(XY_1) + E((1-X)Y_2) = \{\text{indep}\} =$$
$$= E(X)E(Y_1) + E(1-X)E(Y_2) = \{E(1-X) = 1 - E(X)\} =$$
$$= E(X)E(Y_1) + E(Y_2) - E(X)E(Y_2)$$

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i\, p(X=x_i) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = 0(1-p) + 1p = p$$

$$E(Y_1) = \mu \quad , \quad E(Y_2) = -\mu$$

$$\underline{E(Z)} = p\cdot\mu - \mu + p\mu = 2p\mu - \mu = \underline{\mu(2p-1)}$$

$$Var(Z) = Var(XY_1 + (1-X)Y_2)$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - E^2(Z)$$

$$E(Z^2) = E(X^2Y_1^2 + (1-X)^2Y_2^2 + 2(XY_1(1-X)Y_2)) =$$
$$= E(X^2Y_1^2) + E((1-X)^2Y_2^2) + 2E(XY_1(1-X)Y_2) =$$
$$= E(X^2)E(Y_1^2) + E((1-X)^2)E(Y_2^2) + 2[E(X(1-X))E(Y_1)E(Y_2)]$$

$$E(X^2) = p \qquad E((1-X)^2) = 1-p \qquad E(X(1-X)) = 0$$
$$E(Y_1^2) = \sigma^2 + \mu^2 \qquad E(Y_2^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E(Z^2) = p(\sigma^2 + \mu^2) + (1-p)(\sigma^2 + \mu^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\underline{Var(Z) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2(2p-1)^2}$$

b) $f_Z(z)$??

$$Z = X Y_1 + (1-X) Y_2$$

$$R_X = \{0, 1\} \quad \begin{array}{l} \text{si } X=0 \Rightarrow Z = Y_2 \equiv N(-\mu, \sigma) \\ \text{si } X=1 \Rightarrow Z = Y_1 \equiv N(\mu, \sigma) \end{array}$$

$$R_Z = (-\infty, +\infty)$$

$$f_Z(z) = f_Z(z / X=0) \cdot \underbrace{P(X=0)}_{(1-p)} + f_Z(z/X=1) \cdot \underbrace{P(X=1)}_{p} =$$

$$= f_{Y_2}(z) \cdot (1-p) + f_{Y_1}(z) \cdot p =$$

$$= (1-p) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-(-\mu))^2}{2\sigma^2}} + p \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

c) $P(Z < -\mu)$??

$$P(Z<-\mu) = P(Z<-\mu / X=0) \cdot P(X=0) + P(Z<-\mu / X=1) \cdot P(X=1) =$$

$$= (1-p) P(Y_2 < -\mu / X=0) + p P(Y_1 < -\mu / X=1) =$$

indep. indep.

$$= (1-p) P(Y_2 < -\mu) + p P(Y_1 < -\mu) =$$

$$= (1-p) P\left(\frac{Y_2 - (-\mu)}{\sigma} < \frac{-\mu - (-\mu)}{\sigma}\right) + p P\left(\frac{Y_1 - \mu}{\sigma} < \frac{-\mu - \mu}{\sigma}\right) =$$

$W = N(0,1)$

$$= (1-p) P(W < 0) + p P\left(W < -\frac{2\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= (1-p) \; G(0) + p \; G\left(\frac{-2\mu}{\sigma}\right)$$

d) $Cov(X, Z)$??

$$Cov(X, Z) = E(XZ) - E(X)E(Z)$$

$$E(XZ) = E(X^2)E(Y_1) + E(X)E(Y_2) - E(X^2)E(Y_2) =$$

$$= p \cdot \mu + p(-\mu) - p(-\mu) = \mu p$$

$$Cov(X, Z) = \mu p - p \cdot \mu(2p-1) = p\mu(1-2p+1) = 2p\mu(1-p)$$

feb 12

P3) $X[n] = A\cos(\Omega_0 n)$

$\Omega_0 = \text{constante} \neq 0$

$A = \text{v.a. discreta}$

$$P(A=1) = P(A=-1) = \frac{1}{2}$$

a) $P[X[n]]$?? $E[X[n]]$?? $R_X[n_1,n_2]$??

estacionario 1^{er} orden?? ESA?? Ruido blanco??

$$\cancel{P(X[n]=A\cos(\Omega_0 n)) = P(X[n]=A\cos(\Omega_0 n)/_{A=-1})\cdot P(A=-1) + P(X[n]=A\cos(\Omega_0 n)/_{A=1})\cdot P(A=1) =}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}P(X[n]=-\cos(\Omega_0 n)/_{A=-1}) + \frac{1}{2}P(X[n]=\cos(\Omega_0 n)) = 1}$$

$R_X[n] = \{-\cos(\Omega_0 n), \cos(\Omega_0 n)\}$ depende de "n" $\Rightarrow$ NO estacionario 1^{er} orden

$$P[X[n]=-\cos(\Omega_0 n)] = P[X[n]=\cos(\Omega_0 n)] = \frac{1}{2}$$

$$E(X[n]) = -\cos(\Omega_0 n)\cdot P[X[n]=-\cos(\Omega_0 n)] + \cos(\Omega_0 n)P(X[n]=\cos(\Omega_0 n))$$

$$= -\cos(\Omega_0 n)\frac{1}{2} + \cos(\Omega_0 n)\frac{1}{2} = 0$$

$$R_X[n_1,n_2] = E[X[n_1]X[n_2]] = E[A\cos(\Omega_0 n_1)A\cos(\Omega_0 n_2)] =$$

$$= \cos(\Omega_0 n_1)\cos(\Omega_0 n_2)\cdot E(A^2) = \left\{ E(A^2) = (-1)^2 P(A=-1) + 1^2 P(A=1) = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 1 \right\}$$

$$= \cos(\Omega_0 n_1)\cos(\Omega_0 n_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(\Omega_0(n_1+n_2)) + \cos(\Omega_0(n_1-n_2))\right]$$

$R_X(n_1,n_2) = R_X(n+m,n) \neq R_X(m) \Rightarrow$ NO ESA.

Ruido Blanco $\Leftrightarrow$ autocovarianza $= 0 \quad \forall n_1 \neq n_2$

$$Cov(X(n_1), X(n_2)) = E(X(n_1)X(n_2)) - \cancel{E(X(n_1))}E(\cancel{X(n_2)}) =$$

$$= E(X_1, X_2) = \begin{cases} \text{si } n_1 = n_2 \Rightarrow Cov(X_1, X_2) = E(X_1^2) \\ \text{si } n_1 \neq n_2 \Rightarrow Cov(X_1, X_2) = R_X(n_1, n_2) \end{cases}$$

$\rightarrow$ como la autocorrelación depende de los valores n_1, n_2 $\Rightarrow Cov(X_1, X_2)$ puede ser $\neq 0$ cuando $n_1 \neq n_2$ $\Rightarrow$ NO es ruido blanco

b) $Y_1[n] = X[n] + B\,sen(\Omega_0 n)$

$$B \text{ es una v.a.} \begin{cases} E(B) = \eta_B \\ Var(B) = \sigma_B^2 \end{cases}$$

$E(Y_1[n])$?? $R_{Y_1}(n_1, n_2)$??

condiciones de las v.a's A y B para que $Y_1[n]$ sea ESA

$$E(Y_1[n] = E[X[n] + B\,sen(\Omega_0 n)] = E[X[n]] + sen(\Omega_0 n)\,E(B) =$$

$$= sen(\Omega_0 n)\,\eta_B$$

$$R_{Y_1}(n+m, n) = E(Y_1[n+m] \cdot Y[n]) = E\Big[[X[n+m] + B\,sen(\Omega_0(n+m))] \cdot$$

$$\cdot [X[n] + B\,sen(\Omega_0 n)]\Big] = E[X[n+m]X[n]] + sen(\Omega_0 n)E[B\,X[n+m]] +$$

$$+ sen(\Omega_0(n+m))\,E(B \cdot X[n]) + sen(\Omega_0(n+m))\,sen(\Omega_0 n)\,E(B^2) =$$

$$= R_X(n+m, n) + sen(\Omega_0 n)\cos(\Omega_0(n+m)) \cdot E(AB) + sen(\Omega_0(n+m)) \cdot$$

$$\cdot \cos(\Omega_0 n) \cdot E(AB) + sen(\Omega_0(n+m))\,sen(\Omega_0 n)\,(\sigma_B^2 + \eta_B^2) =$$

$$= E(A^2)\cos(\Omega_0 n)\cos(\Omega_0(n+m)) + E(AB)\big[sen(\Omega_0 n)\cos(\Omega_0(n+m)) +$$

$$+ \cos(\Omega_0 n)\,sen(\Omega_0(n+m))\big] + (\sigma_B^2 + \eta_B^2)\,sen(\Omega_0 n)\,sen(\Omega_0(n+m))$$

condiciones:

si A y B ortogonales $\Rightarrow E(A \cdot B) = 0$

$E(Y_1[n]) = cte \Leftrightarrow \underline{\eta_B = 0}$

sólo depende m

$\eta_A = \eta_B = 0 \Rightarrow \underline{\sigma_A^2 = \sigma_B^2} \Rightarrow R_{Y_1}(n+m, n) = \sigma_B^2 \cos(\Omega_0 m) \Rightarrow$ ESA

1/9/2010 **Introducción a las Señales Aleatorias** 2 horas (sin libros ni apuntes)

P1. Sea la v.a. **X**, gaussiana truncada con fdp $f_X(x) = ke^{-x^2/2}$; $-a \le x \le a,\ a > 0$. Se pide:

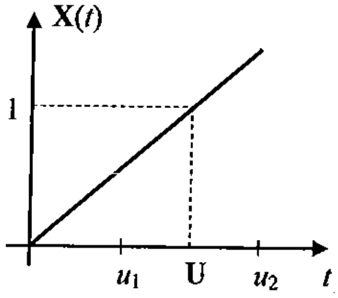
a) Obtener el valor de k.
b) Calcular la media de la v.a. |**X**|.

Se tiene también la v.a. **Y** normal estándar independiente de **X** y se define la v.a. **Z**=**X**/**Y**.

c) Determinar la fdp de la v.a. bidimensional (**Z**,**Y**). No olvide indicar su rango.
d) Determinar la fdp de la v.a. **Z**.
e) Calcular la P(**Z**<1) cuando la constante a tiende a infinito.

(5 puntos)

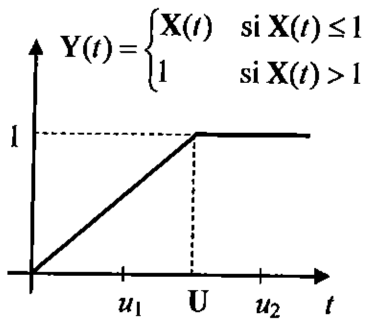
P2. Sea el p.e. **X**(t)=t/**U** ($\forall t>0$) de la figura, donde **U** es una v.a. uniforme en el intervalo (u_1, u_2) (siendo $0<u_1<u_2$).



Calcule:

a) La media y autocorrelación de **X**(t). ¿Es estacionario en sentido amplio?
b) La fdp de primer orden de **X**(t). Compruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x;t)dx = 1$.
c) La probabilidad P[**X**(t)> 1].

Se define el nuevo p.e. de la figura:



Calcule ahora:

d) La FD de primer orden de **Y**(t), para $u_1<t<u_2$.
e) La correlación cruzada $R_{XY}(t_1,t_2)$, para $u_1<t_1<t_2<u_2$.

(5 puntos)

Examen:	1/9/10	Publicación de notas:	22/9/10
Revisión:	28/9/10	Publicación resultados revisión:	29/9/10

$$GAUSSIANA: f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right); \quad E(X) = \mu; \quad Var(X) = \sigma^2$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $G(x)$ para $0 \le x \le 3.89$ en pasos de 0.01

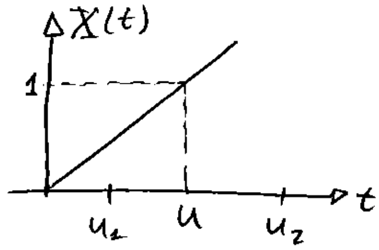
$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

sep 10

P2) $X(t) = t/U \quad \forall t > 0$

$U = U(u_1, u_2) \quad , \; 0 < u_1 < u_2$

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{u_2 - u_1} \, , & u \in (u_1, u_2) \\ 0 \, , & \text{resto} \end{cases}$$



a) $E(X(t)) \, , \; R_X(t_1, t_2)$??

$$E(X(t)) = E\left(\frac{t}{U}\right) = t \cdot E\left(\frac{1}{U}\right) =$$

$$E\left(\frac{1}{U}\right) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u} f_U(u)\,du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u_2 - u_1}\,du = \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{u_2 - u_1} \left(\ln(u_2) - \ln(u_1) \right)$$

$$E(X(t)) = t \cdot \frac{\ln(u_2) - \ln(u_1)}{u_2 - u_1}$$

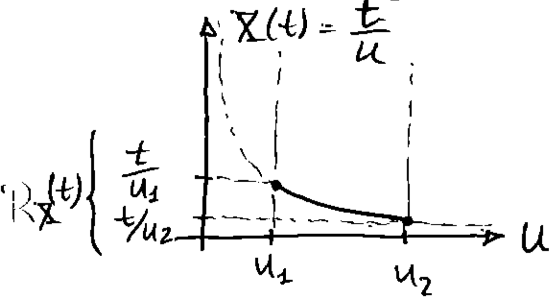
$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X(t_2)) = E\left(\frac{t_1}{U} \cdot \frac{t_2}{U}\right) = t_1 t_2 \, E\left(\frac{1}{U^2}\right) =$$

$$= t_1 t_2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{U^2} f_U(u)\,du = \frac{t_1 t_2}{u_2 - u_1} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) = \frac{t_1 t_2}{u_1 u_2}$$

$X(t)$ no es ESA ya que $E(X(t)) \neq$ cte (depende de t) además, la autocorrelación no es función de la diferencia de tiempos.

b) $f_X(x,t)$?? $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,dx = 1$

para t fijo $\Rightarrow X(t)$ es v.a. función de U



$$f_X(x,t) = \sum_{\forall u_i} \frac{f_U(u_i)}{\left| \frac{dx}{du} \right|_{u_i}}$$

$X(t) = \frac{t}{U} \Rightarrow u = \frac{t}{x} \longrightarrow$ una única raíz

$$\frac{dx}{du} = \frac{-t}{u^2} \xrightarrow{|\cdot|} \frac{t}{u^2} \xrightarrow{u_i} \frac{t}{(t/x)^2} = \frac{x^2}{t}$$

$$f_U(u) = \frac{1}{u_2 - u_1}$$

$$f_X(x,t) = \sum_{\forall u_i} \frac{f_u(u_i)}{\left|\frac{dx}{du}\right|_{u_i}} = \frac{\frac{1}{u_2-u_1}}{x^2/t} = \frac{t}{x^2(u_2-u_1)}$$

$$f_X(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{x^2(u_2-u_1)} & \text{si } x \in \left(\frac{t}{u_2}, \frac{t}{u_1}\right) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x,t)\,dx = \int_{t/u_2}^{t/u_1} \frac{t}{x^2(u_2-u_1)}\,dx = \frac{t}{u_2-u_1}\int_{t/u_2}^{t/u_1} \frac{1}{x^2}\,dx =$$

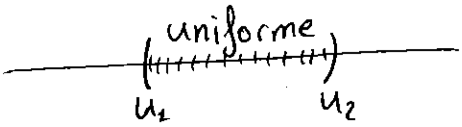
$$= \frac{t}{u_2-u_1}\cdot \frac{-1}{x}\Big|_{t/u_2}^{t/u_1} = \frac{-t}{u_2-u_1}\left(\frac{u_1}{t} - \frac{u_2}{t}\right) = \frac{-(u_1-u_2)}{u_2-u_1} =$$

$$= \frac{u_2-u_1}{u_2-u_1} = 1$$

c) $P(X(t) > 1)$??

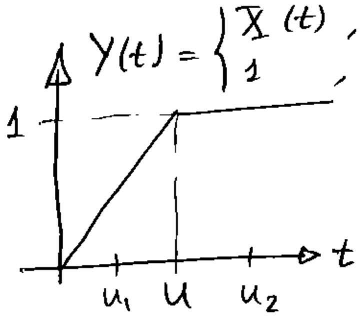
$$P(X(t)>1) = \int_1^{+\infty} f_X(x,t)\,dx =$$

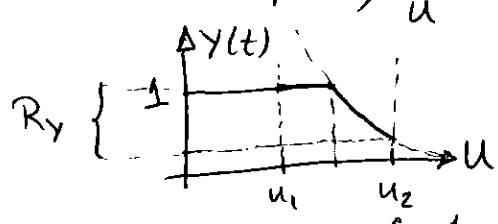
$$P(X(t)>1) = P\left(\frac{t}{u} > 1\right) = P(U < t) = F_u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq u_2 \\ \frac{t-u_1}{u_2-u_1} & u_1 < t < u_2 \\ 0 & t < u_1 \end{cases}$$



d) $Y(t) = \begin{cases} X(t), & X(t) \leq 1 \\ 1, & X(t) > 1 \end{cases}$

$Y(t) = \begin{cases} \frac{t}{u}, & \frac{t}{u} \leq 1 \Rightarrow U \geq t \\ 1, & \frac{t}{u} > 1 \Rightarrow U < t \end{cases}$





$R_{Y(t)} = \left(\frac{t}{u_2}, 1\right)$

$$F_Y(y,t) = \begin{cases} 1, & y \geq 1 \\ \frac{u_2 - t/y}{u_2-u_1}, & \frac{t}{u_2} \leq y < 1 \\ 0, & y < t/u_2 \end{cases}$$

$$y \in \left(\frac{t}{u_2}, 1\right) \Rightarrow F_Y(y,t) = P(Y(t) \leq y) = P\left(\frac{t}{y} \leq U \leq u_2\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{u_2 - t/y}{u_2-u_1} = \\ \int_{t/y}^{u_2} f_u(u)\,du = \end{cases}$$

e) $R_{XY}(t_1,t_2) \quad u_1 < t_1 < t_2 < u_2$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E(X(t_1)Y(t_2))$$

$$X(t_1) = \frac{t_1}{u}$$

$$Y(t_2) = X(t_2) = \frac{t_2}{u} \quad \text{si } X(t_2) \leq 1 \Rightarrow \frac{t_2}{u} \leq 1 \Rightarrow u \geq t_2$$

$$Y(t_2) = 1 \quad \text{si } X(t_2) > 1 \Rightarrow \frac{t_2}{u} > 1 \Rightarrow u < t_2$$

$$X(t_1)\cdot Y(t_2) = \begin{cases} \dfrac{t_1}{u}, & u < t_2 \times u_1 < u < t_2 \\ \dfrac{t_1 t_2}{u^2}, & u \geq t_2 \times t_2 \leq u \leq u_2 \end{cases}$$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{u_1}^{t_2} \frac{t_1}{u} f_u(u)\,du + \int_{t_2}^{u_2} \frac{t_1 t_2}{u^2} f_u(u)\,du$$

$$= \frac{t_1}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{t_2} \frac{1}{u}\,du + \frac{t_1 t_2}{u_2-u_1}\int_{t_2}^{u_2} \frac{1}{u^2}\,du =$$

$$= \frac{t_1}{u_2-u_1}\left(\ln(t_2) - \ln(u_1)\right) - \frac{t_2 t_1}{u_2-u_1}\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{t_2}\right)$$

nov 11

P1) $P(X=x_i, Y=y_j) = k(x_i^2+y_j)$; $x_i = 1,2,3$
$y_j = 1,2$

$R_X = \{1,2,3\}$

$R_Y = \{1,2\}$

a) k??

$$\sum_{\forall x_i}\sum_{\forall y_j} k(x_i^2+y_j) = 1 = k(1^2+1)+k(1^2+2)+k(2^2+1)+$$
$$+k(2^2+2)+K(3^2+1)+k(3^2+2) = 37k \Rightarrow k = \frac{1}{37}$$

b) $P(X=x_i)$??, $P(Y=y_i)$??

$$P(X=1) = \sum_{\forall y_j} P(X=1, Y=y_j) = P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2) = \frac{5}{37}$$

$$P(X=2) = \sum_{\forall y_j} P(X=2, Y=y_j) = P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2) = \frac{11}{37}$$

$P(X=3) =$ idem ——————— $= \frac{21}{37}$

$$P(Y=1) = P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1) = \frac{17}{37}$$

$P(Y=2) =$ ——————— $= \frac{20}{37}$

c) $P(Y/X)$??

$$P(Y=y_j/X=x_i) = \frac{P(Y=y_j \cap X=x_i)}{P(X=x_i)} = \frac{k(x_i^2+y_j)}{k(2x_i^2+3)} = \frac{x_i^2+y_j}{2x_i^2+3}$$

$$P(X=x_i) = \sum_{y_j} k(x_i^2+y_j) = K(2x_i^2+3)$$

d) $$E(Y/X=2) = \sum_{y_j} y_j \cdot P(Y=y_j/X=2) = \sum_{y_j} y_j \frac{2^2+y_j}{2\cdot 2^2+3} = \frac{17}{11}$$